



GESCHICHTE • KULTUREN • MENSCHEN



C.J. Scriba · P. Schreiber

5000 Jahre Geometrie

3. Auflage

 Springer

Vom Zählstein zum Computer

Herausgegeben von

H.-W. Alten · A. Djafari Naini · H. Wesemüller-Kock

Institut für Mathematik und Angewandte Informatik

Zentrum für Fernstudium und Weiterbildung

Universität Hildesheim

In der Reihe „Vom Zählstein zum Computer“
sind bisher erschienen:

4000 Jahre Algebra

Alten, Djafari Naini, Folkerts, Schlosser, Schlote, Wußing

ISBN 978-3-540-43554-9

5000 Jahre Geometrie

Dritte Auflage

Scriba, Schreiber

ISBN 978-3-642-02361-3

6000 Jahre Mathematik

Wußing

ISBN 978-3-642-02363-7

Überblick und Biographien,

Hans Wußing et al. ISBN 978-3-88120-275-6

Vom Zählstein zum Computer – Altertum (Videofilm),

H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald ISBN 978-3-88120-236-7

Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter (Videofilm),

H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald

C.J. Scriba · P. Schreiber

5000 Jahre Geometrie

Geschichte
Kulturen
Menschen

Mit 240 Abbildungen, davon 62 in Farbe

Dritte Auflage



Springer

Professor Dr. Christoph J. Scriba
Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Geschichte der Naturwissenschaften
Mathematik und Technik
Universität Hamburg
Bundesstraße 55
20146 Hamburg
Deutschland
e-mail: scriba@math.uni-hamburg.de

Professor Dr. Peter Schreiber
Institut für Mathematik und Informatik
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
Friedrich-Ludwig-Jahn-Straße 15a
17487 Greifswald
Deutschland
e-mail: schreiber@mail.uni-greifswald.de

ISBN 978-3-642-02361-3 e-ISBN 978-3-642-02362-0
DOI 10.1007/978-3-642-02362-0
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 15-03, 01-99, 01A05

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001, 2005, 2010

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandentwurf: deblik, Berlin
Satz: TEX-Satz durch Thomas Speck und Sylvia Voß

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort des Herausgebers

Geometrie (griechisch für Erdmessung) ist als Beschäftigung mit regelmäßigen Mustern, Figuren und Körpern neben dem Zählen eine der ersten Begegnungen von Menschen mit dem Aufbruch der Wissenschaft Mathematik. Spiralen auf Megalithgräbern, Ritzungen im Fels und Muster auf Tonscherben geben davon Zeugnis.

Wie sich aus diesen Anfängen in grauer Vorzeit im Laufe der Jahrtausende die Geometrie entwickelt hat – als unentbehrliches Hilfsmittel bei Hausbau und Feldmessung, als axiomatisch begründete Wissenschaft von ebenen und räumlichen Figuren bei den Griechen, als Grundlage astronomischer Beobachtungen und Berechnungen und dekorativer Kunst in der islamischen Welt und beim Bau christlicher Kathedralen im Mittelalter über die Entdeckung der Perspektive und ihre Anwendung in der Kunst der Renaissance, die Auseinandersetzungen über das Parallelenpostulat Euklids und die Entdeckung nichteuklidischer Geometrien im 19. Jh. bis hin zur Theorie unendlich-dimensionaler Räume und zur Computergrafik unserer Tage – all dies und viel, viel mehr kann man aus diesem Buch erfahren.

Es ist ein Band der von der Projektgruppe „Geschichte der Mathematik“ der Universität Hildesheim herausgegebenen Reihe „Vom Zählstein zum Computer“. In dieser Reihe sind im Springer Verlag ferner erschienen: „4000 Jahre Algebra“ (Alten et al., 2003, korr. Nachdr. 2005) und „6000 Jahre Mathematik“ (Wußing, 2 Bände 2008/09), im Verlag Franzbecker, Hildesheim, die Videofilme „Altertum“ (1998) und „Mittelalter“ (2004) von H. Wesemüller-Kock und Anne Gottwald. Nach mehreren Nachdrucken und der 2. Auflage 2004 erscheint nun „5000 Jahre Geometrie“ in dritter Auflage, erweitert um neue Forschungsergebnisse über steinzeitliche Kreisgrabenanlagen und die Himmelscheibe von Nebra sowie viele farbige Abbildungen.

In diesem Band wird die Entwicklung der Geometrie in fünf Jahrtausenden als Teil der Kulturgeschichte dargestellt. Den beiden Autoren ist es gelungen, die Entstehung und das Wachsen dieses Teilgebietes der oft als nüchtern und trocken verschrieenen Mathematik in ungemein lebendiger Art zu schildern, die Ursprünge und Anstöße zur Entwicklung geometrischer Begriffe und Methoden aufzudecken, ihre Verquickung mit historischen Ereignissen und persönlichen Schicksalen darzustellen, die Anwendungen geometrischer Kenntnisse und Verfahren in anderen Bereichen und daraus entstandene Wechselwirkungen zu beschreiben und ihre Bedeutung für andere Disziplinen herauszustellen.

Es ist ein besonderes Anliegen dieser Buchreihe, die Geschichte der Mathematik als Teil der Geschichte der Menschheit darzustellen, speziell als wesentlichen Teil ihrer Kulturgeschichte. Die beiden Autoren sind diesem Anliegen in hervorragender Weise gerecht geworden. Sie haben weit über das in mathema-

tikhistorischen Darstellungen übliche Maß hinaus die Genese der Geometrie in ihrer engen Verflechtung mit den kulturellen Entwicklungen in anderen Bereichen – Literatur, Musik, Architektur, Baukunst, Bildende Kunst, Religion – aufgezeigt und auch die Auswirkungen geometrischer Erkenntnisse und Methoden auf diese Bereiche beschrieben. Aus diesem Grunde ist auch die Entwicklung der Geometrie in anderen Kulturen – vornehmlich in den orientalischen Kulturen der Antike, in den islamischen Ländern sowie in Indien, China, Japan und den altamerikanischen Kulturen ausführlicher als üblich behandelt worden. Tabellen am Anfang der Kapitel geben Einblick in wichtige politische und kulturelle Ereignisse der behandelten Kulturkreise bzw. Epochen, in Tabellen am Ende sind jeweils die wesentlichen Inhalte der darin entwickelten Geometrie stichwortartig zusammengefaßt.

Darüber hinaus werden Sichtweisen von Mathematikern des Altertums oder des Mittelalters mit mathematischen Erkenntnissen der Neuzeit verglichen und Bezüge zur zeitgenössischen Mathematik und verwandten Wissenschaften hergestellt, z.B. Bezüge zur Informatik in der Beschreibung der „algorithmischen Leistung“ Euklids. Zum anderen werden die Spezifika geometrischer Betrachtung in verschiedenen Epochen und Kulturkreisen herausgestellt und der Wandel von Inhalten, Methoden und Betrachtungsweisen der Geometrie im Laufe der Jahrhunderte anschaulich beschrieben, etwa der Wandel der Geometrie als Protophysik im dreidimensionalen Raum zur Theorie n -dimensionaler oder gar unendlich-dimensionaler Räume. Die Zusammenhänge der Geometrie mit anderen Teilgebieten der Mathematik – z.B. mit Algebra, Analysis und Stochastik – werden erörtert. Erfrischende Einschübe mit biographischen Schlaglichtern und Hinweisen auf unerwartete Zusammenhänge sowie die Textauszüge im Anhang beleben die Lektüre dieses Buches.

Die Kapitel 1 bis 4 mit Ausnahme des Teilkapitels 2.3 (Euklid) stammen aus der Feder des Mathematikhistorikers Dr. Christoph J. Scriba, Professor em. für Geschichte der Naturwissenschaften im Schwerpunkt Geschichte der Naturwissenschaften, Mathematik und Technik des Fachbereichs Mathematik der Universität Hamburg. Die Leistungen Euklids und die Entwicklung der Geometrie in der Neuzeit in den Kapiteln 5 - 8 hat Dr. Peter Schreiber, Professor für Geometrie und Grundlagen der Mathematik an der Universität Greifswald, dargestellt.

Den Autoren sind auch Vorschläge für zahlreiche Abbildungen und die im Anhang wiedergegebenen Texte zu verdanken. Die ohne Quellenangabe eingefügten Figuren zu geometrischen Sätzen sind Eigenzeichnungen der Autoren. Von ihnen stammen auch die am Ende jedes Kapitels zusammengefaßten Aufgaben zu den einzelnen Teilkapiteln (vgl. Einleitung). Sie unterscheiden sich in Art und Umfang oft von herkömmlichen Aufgaben und sind auch von sehr

unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad. Ihre Bearbeitung erfordert deshalb auch sehr unterschiedliche Vorkenntnisse, oft auch den Rückgriff auf andere Literatur. So reichen für die Bearbeitung der Aufgaben zu den Kapiteln 1 bis 4 oft die in der Mittelstufe der Gymnasien vermittelten Kenntnisse, für andere ist der Stoff der Oberstufe (Sek. II) erforderlich, während für manche Aufgaben der Kapitel 5 - 8 Begriffe und Methoden vonnöten sind, die erst während eines Studiums behandelt werden. Dies liegt in der Natur der Sache, da Mathematik im Laufe der Jahrhunderte immer komplexer und komplizierter geworden ist und das Verständnis moderner Mathematik meist die Kenntnis der Mathematik vorangegangener Epochen voraussetzt.

Deshalb finden sich gelegentlich im Text Lösungshinweise, oft auch Hinweise auf Lösungen in der Literatur. Die Lösungen sind jedoch nicht im Anhang aufgeführt, einerseits, um voreiliges Nachschlagen zu vermeiden, zum anderen, weil es sich meist nicht um Ergebnisse von Rechnungen, sondern um die Beschreibung von Lösungswegen oder den Nachvollzug mehr oder weniger ausführlich dargestellter Überlegungen handelt.

All dies ist bewußt geschehen, um einen möglichst großen Kreis von Leserinnen und Lesern anzusprechen. Auch eilige oder flüchtige Leser sollten die Aufgabenteile nicht einfach überschlagen, denn in ihnen finden sich viele interessante historische Bemerkungen und Ergänzungen zum Text, so daß schon das intensive Lesen des Aufgabentextes einen Gewinn darstellt.

Das von den Autoren erstellte umfangreiche Literaturverzeichnis und das Personenregister laden zu weitergehenden Studien ein.

Den beiden Autoren danke ich sehr herzlich für ihren vielfältigen und intensiven Einsatz, insbesondere für ihr Engagement, in diesem Buch durch Einbettung der Geometrie in die Kulturgeschichte und viele interessante Aufgaben Akzente zu setzen.

Für die Mitwirkung durch wissenschaftliche Begleitung und kritische Durchsicht der Texte danke ich den Kollegen Dauben, Flachsmeyer, Folkerts, Grattan-Guinness, Kahle, Lüneburg, Nádeník und Wußing, für die Beratung bei geschichtlichen Details dem Akad. Oberrat H. Mainzer und für die Umsetzung der Manuskripte, Abbildungen und Figuren zu druckfertigen Vorlagen auf dem Computer Lars-Detlef Hedde (U Greifswald), Thomas Speck und Sylvia Voß (U Hildesheim).

Der Medienpädagogin Anne Gottwald gilt mein Dank für ihren Einsatz bei der Klärung der Lizenzen für den Abdruck der Abbildungen, den jeweiligen Verlagen für die Gewährung der Rechte zum Abdruck.

Für die Unterstützung des Projekts danke ich dem Leiter des Zentrums für Fernstudium und Weiterbildung (ZFW), Prof. Dr. Erwin Wagner, den jeweiligen Leitern des Instituts für Mathematik und Angewandte Informatik, Prof.

Dr. Förster und Prof. Dr. Kreutzkamp, den Dekanen, Prof. Dr. Schwarzer und Prof. Dr. Ambrosi und der Leitung der Universität Hildesheim. Der Kreissparkasse Hildesheim und der Universitätsgesellschaft der Universität Hildesheim danke ich für ihre finanzielle Unterstützung zur Herausgabe der farbigen Abbildungen.

Nicht zuletzt gilt mein Dank den Mitgliedern der Projektgruppe „Geschichte der Mathematik“ vom ZFW: dem Mathematikhistoriker Dr. Alireza Djafari Naini und dem Medienexperten Dipl.-Soziologe Heiko Wesemüller-Kock für die gute und intensive Zusammenarbeit bei der Planung und Erstellung dieses Werkes. Dem Springer-Verlag Heidelberg danke ich für das Eingehen auf meine Wünsche und die hervorragende Ausstattung dieses Buches.

Möge auch dieser Band möglichst viele anregen, sich intensiver mit der Geschichte der Mathematik zu befassen, die Hintergründe für die Entstehung und die ungeheuer spannende Entwicklung geometrischer Begriffe und Methoden kennen zu lernen und dazu führen, Geometrie nicht nur als eine mathematische Disziplin oder als unentbehrliches Hilfsmittel für Architekten, Roboterkonstrukteure und Wissenschaftler anzusehen, sondern auch als wertvollen Teil unserer Kultur, der uns überall begegnet und die Welt, in der wir leben, ungemein reicher macht.

Im Namen der Projektgruppe
Heinz-Wilhelm Alten

Hildesheim, im August 2009

Hinweise für den Leser

Runde Klammern (...) enthalten ergänzende Einschübe oder Hinweise auf Abbildungen oder Aufgaben.

Eckige Klammern [...] enthalten im laufenden Text Hinweise auf Literatur bzw. unter Abbildungen Quellenangaben.

Abbildungen sind nach Teilkapiteln numeriert, z.B. bedeutet Abbildung 7.4.3 die dritte Abbildung in Teil 4 von Kapitel 7.

Aufgaben sind am Ende jedes Kapitels zusammengefaßt und nach Teilkapiteln numeriert, damit die zugehörigen Texte besser zu finden sind, z.B. bedeutet Aufgabe 7.3.6 die sechste Aufgabe zu Teil 3 von Kapitel 7.

Die Aufgaben sind von sehr unterschiedlichem Umfang und Schwierigkeitsgrad. Aufgaben bzw. Aufgabenteile, die dem Herausgeber besonders schwierig erschienen, sind mit einem * versehen. Doch sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß jede solche Einschätzung selbstverständlich subjektiv und vom individuellen Stand der Kenntnisse und Fertigkeiten abhängig ist.

Hinweise im Text auf Bd. 1 beziehen sich auf „6000 Jahre Mathematik“, Bd. 1 „Von den Anfängen bis Leibniz und Newton“, von Hans Wußing, 2008.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Die Anfänge geometrischer Darstellungen und Berechnungen	5
1.1 Die Urgesellschaft	6
1.2 Alte Stromtalkulturen	11
1.2.1 Die Induskultur	12
1.2.2 Die ägyptische Mathematik	12
1.2.3 Die babylonische Mathematik	16
1.3 Aufgaben zu 1	23
2 Geometrie in griechisch-hellenistischer Zeit und Spätantike	25
2.0 Einführung	27
2.1 Ionische Periode	27
2.1.1 Die frühen Naturphilosophen	27
2.1.2 Thales	31
2.1.3 Pythagoras und die Pythagoreer	35
2.2 Athenische Periode	38
2.2.1 Eudoxos	38
2.2.2 Die sogenannten Klassischen Probleme der Mathematik	40
2.3 Euklid	49
2.3.1 Die Elemente	49
2.3.2 Die sonstigen geometrischen Schriften Euklids	61
2.4 Alexandrinische (hellenistische) Periode	65
2.4.1 Aristarch	66
2.4.2 Archimedes	67
2.4.3 Apollonios	70
2.5 Spätantike, Rom und Byzanz	73
2.5.1 Heron	73
2.5.2 Pappos	77
2.5.3 Proklos	77
2.5.4 Sehnengeometrie	78
2.5.5 Ptolemaios	79
2.5.6 Menelaos	81
2.5.7 Sonnenuhr, Analemma	82

2.5.8	Kartographie	83
2.5.9	Agrimensoren	86
2.5.10	Byzanz	92
2.6	Aufgaben zu 2	96
3	Geometrie im Orient und in altamerikanischen Kulturen . .	107
3.0	Einführung	108
3.1	China	109
3.1.0	Historische Einführung	109
3.1.1	Von den Anfängen bis zur Teilung Chinas in drei Reiche zwischen 220 und 280	111
3.1.2	Von der Teilung bis zum Beginn der Sung Dynastie (960)	119
3.1.3	Die Dynastien Sung (960–1278), Yuan (Mongolenherr- schaft, 1278–1368) und Ming (bis 1644)	120
3.2	Japan	129
3.2.0	Historische Einführung	130
3.2.1	Frühzeit und Mittelalter	131
3.2.2	Die Renaissance der japanischen Mathematik	131
3.3	Indien	142
3.3.0	Historische Einführung	143
3.3.1	Das Altertum	144
3.3.2	Das Mittelalter	150
3.4	Islamische Länder	159
3.4.0	Historische Einführung	160
3.4.1	Die Übersetzungstätigkeit	161
3.4.2	Theoretische Geometrie	162
3.4.3	Praktische Geometrie	174
3.4.4	Trigonometrie	175
3.5	Altamerikanische Kulturen	181
3.5.0	Historische Einführung	182
3.5.1	Die Jägervölker Inuit (Eskimo) und Ojibwa	184
3.5.2	Die Hochkulturen der Azteken, Maya und Inka	187
3.6	Aufgaben zu 3	205

4	Geometrie im europäischen Mittelalter	211
4.0	Einführung	213
4.1	Geometrie im frühen Mittelalter	213
4.1.1	Die Sieben Freien Künste	213
4.1.2	Beda Venerabilis und Alcuin	216
4.1.3	Gerbert von Aurillac	218
4.1.4	Boethius und Pseudo-Boethius	218
4.1.5	Die Scholastik	219
4.1.6	Übersetzungen aus dem Arabischen	219
4.2	Praktische Geometrie	223
4.2.1	Hugo von St. Victor	223
4.2.2	Leonardo von Pisa	224
4.2.3	Trigonometrie	225
4.3	Der wissenschaftliche Aufbruch	228
4.3.1	Übersetzungen aus dem Griechischen	228
4.3.2	Archimedes im Mittelalter	228
4.3.3	Das 14. Jahrhundert	231
4.4	Angewandte Geometrie im Hoch- und Spät-Mittelalter	232
4.4.1	Villard d'Honnecourt	232
4.4.2	Die Bauhüttenbücher	233
4.4.3	Visualisierung	239
4.5	Aufgaben zu 4	240
5	Neue Impulse der Geometrie in der Renaissance	243
5.0	Vorbemerkungen	244
5.1	Geometrie an Schulen und Universitäten, Euklid in der Renaissance	247
5.2	Geometrie in Astronomie, Geodäsie und Kartographie	253
5.3	Geometrie in der Kunst der Renaissance	273
5.3.1	Perspektive	275
5.3.2	Konstruktionen	280
5.3.3	Neue Formen	285
5.3.4	Grund-Aufrißverfahren	287
5.3.5	Ornamente und Parkette	291
5.3.6	Polyeder	293

5.3.7	Terminologie	297
5.4	Geometrische Keime der Infinitesimalmathematik	304
5.5	Aufgaben zu 5	310
6	Die Entwicklung der Geometrie im 17. und 18. Jahrhundert	321
6.0	Vorbemerkungen	323
6.1	Die Koordinatenmethode — Geometrie und Algebra	324
6.1.1	Vorgeschichte	325
6.1.2	Die Leistungen von Fermat und Descartes	327
6.1.3	Wirkungsgeschichte	331
6.2	Geometrie und Analysis	338
6.3	Auf dem Wege zur darstellenden und projektiven Geometrie . .	346
6.4	Das Ringen um das Parallelenproblem	363
6.5	Aufgaben zu 6	370
7	Neue Wege der Geometrie im 19. Jahrhundert	379
7.0	Vorbemerkungen	380
7.1	Darstellende und angewandte Geometrie	384
7.2	Projektive und synthetische Geometrie	391
7.3	Theorie der geometrischen Konstruktionen	401
7.4	Differentialgeometrie	408
7.5	Nichteuklidische Geometrie	418
7.6	Vektorbegriff und n -dimensionale Geometrie	430
7.7	Transformationsgruppen	441
7.8	Anfänge der Topologie	449
7.9	Weitere, insbesondere nichtklassische Richtungen	462
7.10	Aufgaben zu 7	474
8	Geometrie im 20. Jahrhundert	487
8.0	Vorbemerkungen	488
8.1	Grundlagen der Geometrie	497
8.2	Totale Abstraktion?	509
8.3	Geometrie und Naturwissenschaften	519
8.4	Geometrie und Technik	530
8.5	Geometrie und Informatik	535
8.6	Geometrie und Kunst	545
8.7	Statt eines Nachwortes: Geometrie und Spiele(n)	560
8.8	Aufgaben zu 8	563

A Anhang: Ausgewählte Originaltexte	569
A.1 Platon: Staat	569
A.2 Archimedes: Einleitung zur Abhandlung über Spiralen	570
A.3 Papst Gregor der Große: Erwähnung der Feldmeßkunst	572
A.4 Das altchinesische Chou Pei Suan Ching	573
A.5 Cassiodor Senator: Institutiones	574
A.6 Vorrede von A. Dürer an W. Pirckheimer	575
A.7 Alfred Meißner (1822 - 1885): Geschichte meines Lebens (1884)	575
A.8 Vorrede von F. Wolff	577
A.9 Hermann v. Helmholtz: Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome	578
A.10 E. A. Abbott: Flatland	579
A.11 Th. Storm: Der Schimmelreiter (1888)	580
A.12 K. Fladt: Euklid (1927)	582
Literatur	583
Abbildungsverzeichnis	605
Personenverzeichnis mit Lebensdaten	612
Sachverzeichnis	625

Einleitung

Es ist sicher nicht leicht, Inhalt und Wesen der Mathematik in Kürze zu definieren. Formale Erklärungen, die heute mittels der Mengenlehre, des allgemeinen Strukturbegriffs und anderer Begriffe aus der Logik möglich sind, lassen sowohl die historische Entwicklung als auch den Instinkt und die Erfahrung des Mathematikers außer acht, der weiß, was „wesentlich“ bzw. „interessant“ ist und was nicht. Viel schwerer ist es aber, innerhalb eines als gegeben angenommenen Mathematikverständnisses zu erklären, was Geometrie ist und was folglich zu ihrer Geschichte gehört. Die jeweils herrschenden Ansichten sowohl über den Gegenstand der Geometrie als auch über ihre Stellung und Bedeutung innerhalb der Mathematik haben sich nicht nur im Lauf der Zeit mehrfach grundsätzlich geändert, sondern mit zunehmender Reife der Mathematik spalteten sich die Mathematiker an diesen Fragen in verschiedene Parteien. Über all dies wird im vorliegenden Buch zu berichten sein.

War Geometrie in den ältesten menschlichen Hochkulturen (Ägypten, Mesopotamien, Indien, China, ...) eines unter anderen Anwendungsgebieten einer vorwiegend rechnerisch ausgerichteten Mathematik, so wurde sie in der griechischen Antike zum Kern und Hauptgebiet der gesamten Mathematik. Hier vollzog sich der in der Geschichte einmalige Wandel von einer auf Rezepten und vagen Begriffen beruhenden Praxis zu einer aus Definitionen, Axiomen und streng logisch bewiesenen Lehrsätzen bestehenden Theorie. Das hiermit begründete Erbe war mehr als 2000 Jahre lang so mächtig, daß der Mathematiker meist als Geometer und die von den Griechen am Beispiel geometrischen Stoffes begründete axiomatisch-deduktive Methode der Erkenntnissicherung als „*mos geometricus*“ bezeichnet wurde. Andere Wissenschaften, darunter auch andere Gebiete der Mathematik, „*more geometrico*“, d.h. nach der Art der Geometrie, aufzubauen, wurde zum (nur selten erfüllten) wissenschaftstheoretischen Programm, an dem sich zum Beispiel Newton im 17. Jh. bei der Neubegründung der Mechanik, Galois zu Beginn des 19. Jhs. bei seiner Kritik am damaligen Zustand der Algebra und noch Hilbert im Jahre 1900 bei seiner Aufforderung orientierte, weitere Gebiete der Physik zu axiomatisieren.

Die europäische Renaissance brachte für die Geometrie vor allem eine außerordentliche Verbreiterung der Praxisbezüge (Astronomie, Geodäsie, Kartographie, Mechanik, Optik, bildende Kunst, ...) und damit eine Fülle neuer und fruchtbarer Probleme. Die Bemühungen um die Lösung dieser neuen Probleme trugen ganz wesentlich zur Entstehung der vier Säulen der modernen Mathematik im 17. Jh. bei: Funktionsbegriff, Koordinatenmethode, Differentialrechnung, Integralrechnung. Geometrie hat diese Gebiete hervorgebracht

und ist dann von ihnen auf eine ganz subtile Weise aus ihrer führenden Position in der Mathematik verdrängt worden. Formeln und Kalkül traten im 18. Jh. zunehmend an die Stelle von Anschauung und logischer Argumentation.

Dennoch brachte das 19. Jh. eine enorme Umfangs- und Bedeutungserweiterung der Geometrie: Projektive und n -dimensionale Geometrie, Vektorrechnung, nichteuklidische Geometrie, innere Differentialgeometrie, Topologie, aber auch viele Keime von sich erst im 20. Jh. voll entfaltenden Gebieten wie geometrische Wahrscheinlichkeits- und Maßtheorie, Graphentheorie, Polyedergeometrie entwickelten sich zunächst ohne erkennbaren Bezug zueinander. Diese „Explosion“ geometrischer Disziplinen, die dem 19. Jh. aus der Sicht der Mathematik die Bezeichnung als geometrisches Jahrhundert eingetragen hat, ging einher mit der Auflösung des bis dahin herrschenden Verständnisses der Geometrie als Wissenschaft vom „wahren physikalischen Raum“. Es wird darüber zu berichten sein, wie die verschiedenen Ansätze, die neue Situation der Geometrie geistig zu bewältigen, das Bild der gesamten Mathematik, wie es im 20. Jh. bis zum Vordringen des Computers herrschte, entscheidend geprägt haben, wie aber auch die Geometrie ihre Vormachtstellung in der ersten Hälfte des 20. Jhs. wieder verlor, eine Entwicklung, die in der Gestaltung des mathematischen Schul- wie Hochschulunterrichts bis heute negativ nachwirkt, obwohl die theoretische Breite und Tiefe ebenso wie die Praxisbedeutung der Geometrie inzwischen ein höheres Niveau als je zuvor erreicht haben.

Geometrie am Anfang des 21. Jahrhunderts — das ist einerseits ein riesiges Paket von Fakten über den „gewöhnlichen zwei- und dreidimensionalen euklidischen Raum“ nebst einem noch größeren Paket von ungelösten Fragen hierüber, andererseits aber ist Geometrie heute eigentlich überhaupt kein Teilgebiet der Mathematik im herkömmlichen Sinne sondern eine Betrachtungsweise, die mit mehr oder weniger Nutzen, mehr oder weniger Notwendigkeit und auch abhängig vom persönlichen Stil des Wissenschaftlers in fast jedem Teilgebiet der Mathematik anzutreffen ist. So gibt es eine geometrische Zahlentheorie, eine geometrische Funktionentheorie, algebraische Geometrie und geometrische Stochastik, es gibt geometrische Methoden in der Variationsrechnung, aber auch diskrete und kombinatorische Geometrie sowie Computergeometrie — letztere nicht zu verwechseln mit computational geometry, was etwa als „Komplexitätstheorie geometrischer Algorithmen“ zu übersetzen ist.

Die hiermit angedeutete Zweiteilung der Geometrie ist inzwischen ziemlich fest etabliert. Der dreidimensionale euklidische Raum ist, obwohl nach den Erkenntnissen der Physik nur eine sehr grobe Annäherung an die Wirklichkeit, nach wie vor das passende mathematische Modell für alle „alltäglichen“ Probleme. In der euklidischen Ebene schaffen wir uns „Bilder“ von allem, was wir

„anschauen“ und verstehen wollen. Ihre Bedeutung hängt mit der Dominanz des Sehens unter den menschlichen Sinnen zusammen. Der n -dimensionale euklidische Raum ist der Ort, in den die Mathematik Funktionen und Relationen und, z.B. mittels Koordinatisierung, auch fast alle anderen Untersuchungsgegenstände einbettet. Darüber hinaus aber herrscht Geometrie auch überall dort, wo eine Menge von eventuell sehr abstrakten Objekten als „Raum“ betrachtet wird, indem aus der geometrischen Anschauung entnommene Begriffe wie Topologie, Metrik, Dimension, Linearität dort neu gedeutet werden — mit der Absicht, Vorstellungsvermögen anzuregen, Analogien zu nutzen. Wie intensiv man dies betreibt, ist — wie schon gesagt — eine Stilfrage, aber es ist eine geistige Technik, ohne die moderne Mathematik in der vorliegenden Form nicht hätte entstehen können.

Wie weit letzteres tatsächlich Geometrie ist, aber auch, in welchem Umfang Anwendungsgebiete der Geometrie noch Mathematik oder schon Technik sind, darüber gibt es sehr unterschiedliche Standpunkte. Wir vertreten im Folgenden auch das Konzept, daß es neben der professionellen, deduktiven Mathematik eine unprofessionelle „unbewußte“ Mathematik gibt, die sich im intuitiven Benutzen von Begriffen, Formen und Verfahren, im Wissen und Können äußert, welches nicht in Worte gekleidet ist, sondern als materielles Produkt von Technik, Handwerk und Kunst existiert. Das vorliegende Buch will so mit einer Darstellung der historischen Entwicklung, die sehr viele, auch unübliche, Aspekte einbezieht, zur Klärung der Stellung und Bedeutung der Geometrie innerhalb der Mathematik beitragen und das Interesse an ihr fördern.

Der kritische Leser, den wir uns wünschen, könnte die Frage stellen, wie sich eine Geschichte der Geometrie in eine Reihe mit dem Obertitel „Vom Zählstein zum Computer“ einfügt. Was der Computer mit Geometrie zu tun hat, wird in 8.5 im Detail untersucht. Was die „Zählsteine“ betrifft, so sei darauf verwiesen, daß erste zahlentheoretische Erkenntnisse bei den Pythagoreern anhand von Mustern aus geometrisch angeordneten Steinen erwachsen. So konnte man zum Beispiel durch geometrische Veranschaulichung erkennen, warum ab stets gleich ba ist oder wieso der Abstand zwischen den zwei Quadratzahlen n^2 und $(n+1)^2$ immer $2n+1$ beträgt.

Die dem Buch kapitelweise beigegebenen Aufgaben sind größtenteils keine historischen Aufgaben im engeren Sinne, sondern Aufgaben, die sich aus der vorliegenden Darstellung der Geschichte ergeben, also z.B. Fragen, die offen blieben, als sie zuerst auftraten, Fragen, die man damals nicht gestellt hat, obwohl es möglich gewesen wäre, alte Aufgaben, die sich mit den heute zur Verfügung stehenden Methoden einfacher lösen lassen, Anregungen, die sich im Anschluß an alte Aufgaben ergeben. Die meisten dieser Aufgaben sind so

formuliert, auf entsprechende Spezialfälle reduziert oder mit Lösungshinweisen versehen, daß man sie mit Abiturwissen oder wenig darüber hinausgehenden Kenntnissen lösen kann. Einige Aufgaben aber sind schwierig und „nach hinten offen“: Der Leser kann dort beliebig weit vordringen und Neues entdecken. Ausgeschriebene Vornamen und Lebensdaten von Personen wurden im Text bis auf wenige begründete Ausnahmen vermieden. Sie können, soweit sie sich ermitteln ließen, aus dem Register am Ende des Buches erfragt werden.

Die den Hauptkapiteln vorangestellten Bilder ausgewählter Personen haben einen sehr unterschiedlichen Charakter. Aus der Antike und dem außereuropäischen Mittelalter sind authentische Porträts nicht zu erwarten. (In den islamischen Ländern wurden schon aus religiösen Gründen Personen nicht dargestellt.) Wir müssen jedoch zur Kenntnis nehmen, daß spätere Epochen das Bedürfnis hatten, sich ein Bild von ihnen wichtig erscheinenden Persönlichkeiten der Vergangenheit zu machen. Dabei kann ein „Bild“ sowohl ein Phantasieporträt als auch eine symbolische graphische Darstellung sein. In diesem Sinne gehören zum Beispiel auch Briefmarken unbedingt zum kulturellen Umfeld der Wissenschaftsgeschichte, Mehrere Bücher sind diesem speziellen Thema schon gewidmet worden [Gjone 1996, Schaaf 1978, Schreiber, P. 1987, Wußing/Remane 1989]. Das hier wiedergegebene Bild des Euklid stammt aus einer in der Herzog-August-Bibliothek in Wolfenbüttel aufbewahrten Handschrift der römischen Feldmesser (Agrimensoren). Bemerkenswert an ihm ist nicht nur die Tatsache, daß diese Agrimensoren in Euklid, dem Meister der logisch-axiomatischen Denkweise, ihren Ahnherren sahen, sondern auch das geradezu orientalistisch anmutende Ambiente des Bildes. Wenn man bedenkt, welches Gemisch von Völkern und Kulturen Alexandria um 300 v. Chr. darstellte, ist es vielleicht realistischer als manches klassizistisch beeinflusste pseudoantike Kunstwerk.

Die bewußt individuellen Personen ähnlich gestaltete Darstellung beginnt im europäischen Mittelalter damit, daß Künstler sich selbst als Modell benutzten. So ist das Porträt des Piero della Francesca nur ein mutmaßliches Selbstporträt. Es stammt aus seinem Fresco „Die Auferstehung Christi“ (um 1465) in seiner Heimatstadt Borgo Sansepolcro.

Das hier gezeigte Bild von René Descartes malte Frans Hals kurz vor der Abreise des Philosophen nach Schweden. Es gehört nicht nur zu den ganz wenigen Fällen, in denen ein wirklich berühmter Maler einen wirklich berühmten Mathematiker porträtierte (ein zweiter Fall ist das von Max Liebermann gemalte Porträt Felix Kleins), sondern es entstanden noch im 17. Jh. mehrere Kopien dieses Bildes mit unterschiedlichem Gesichtsausdruck, die seitdem (zum Teil sogar seitenverkehrt) als Bildnisse von Descartes durch die Lexika und die wissenschaftshistorische Literatur geistern.

Peter Schreiber

1 Die Anfänge geometrischer Darstellungen und Berechnungen

Stadtgott von
Lagasch mit
gefangenen
Feinden im Netz
(Mesopotamien)



Ägyptische Schreiber



1.1 Die Urgesellschaft

Schon lange, bevor die Schrift entwickelt wurde, dürfte der Mensch geometrische Strukturen wahrgenommen und auch systematisch verwendet haben. Die Natur bietet dem Auge vielfältig gekrümmte Linien, doch ein Grashalm oder ein Baumstamm legen den Gedanken der Geraden ebenso nahe wie denjenigen des Kreises (als Querschnitt). Beim Weben und Flechten entstehen einfache zweidimensionale Muster, die dann absichtlich modifiziert, aber auch als Schmuck auf Tongefäßen nachgebildet wurden. Solche in bestimmter Weise geometrisch gestaltete Ornamente sind für die Zeit um 40.000 v. Chr. nachweisbar. Sie können für Kulturgemeinschaften so charakteristisch sein, daß sie es den Prähistorikern erlauben, deren Wanderungen anhand der aufgefundenen Gefäßreste zu rekonstruieren. So finden sich z.B. Faltbandmuster auf jungsteinzeitlichen Tongefäßen oder sechs kongruente Kreise, die um einen zentralen, gleichgroßen herumgelegt sind und diesen wie je zwei benachbarte berühren, in der kretischen Kultur. Das gleichseitige Dreieck, das Quadrat (mit den vor anderen Winkeln ausgezeichneten vier rechtwinkligen Ecken) oder auch das regelmäßige Sechseck müssen früh als Sonderfälle ebener Figuren aufgefallen sein und spielerisches Interesse geweckt, aber auch erste theoretische Überlegungen angeregt haben (vgl. z.B. [Kadeřávek 1992]).

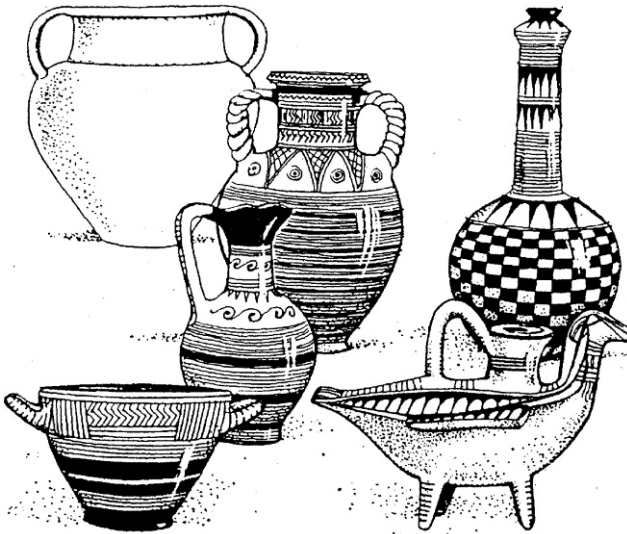


Abb. 1.1.1 Geometrische Ornamente auf vorgeschichtlicher Keramik
[Drawing by Hubert J. Pepper from „Die Welt aus der wir kommen“,
published by Thames and Hudson Ltd, London]

Weitere Anstöße gaben die Bedürfnisse und Tätigkeiten des Alltags: beim Anlegen von Gräben und Dämmen, beim Hausbau, bei der Feldmessung kommen elementare geometrische Beziehungen zur Anwendung — sicher anfangs den Menschen eher unbewußt, bis sich die ersten logischen Überlegungen einzustellen begannen. Ohne dreidimensionale Körper (Quader, Würfel, Pyramide, Säule) war keine Bautätigkeit möglich; die Beobachtung des Laufs der Gestirne legte den Übergang vom ebenen Dreieck zum sphärischen Dreieck nahe. Daß die Diagonale das Quadrat oder das Rechteck, der Durchmesser den Kreis halbiert, schien anschaulich klar zu sein. Alle vorgriechischen Kulturen haben solche unmittelbar einsichtigen Beziehungen gekannt und in der Praxis benutzt. Erst die Griechen begannen nach einer Begründung zu fragen und gelangten so schließlich zu einem axiomatischen Aufbau der geometrischen Theorie, wie sie uns in den „Elementen“ des Euklid überliefert ist.

Wenn nachfolgend auch in erster Linie die ägyptische und babylonische Geometrie skizziert werden sollen, so muß doch betont werden, daß keine Kultur existiert, in der nicht geometrische Elemente in vielfältiger Weise zu Tage treten. Die Gestaltung von Schmuck ist häufig stark von religiösen Vorstellungen bestimmt: den Göttern geweihte Gefäße werden reicher als üblich verziert, die Altäre in besonderer Form ausgestaltet, die Riten (man denke auch an den Tanz) in geometrisch bestimmten Formen vollzogen. Auch das Spiel als Quelle für die Beschäftigung mit geometrischen Eigenschaften sollte nicht übersehen werden. Nicht nur an Brettspiele, denen ja fast immer gewisse symmetrisch angelegte Muster zugrundeliegen, ist zu denken.

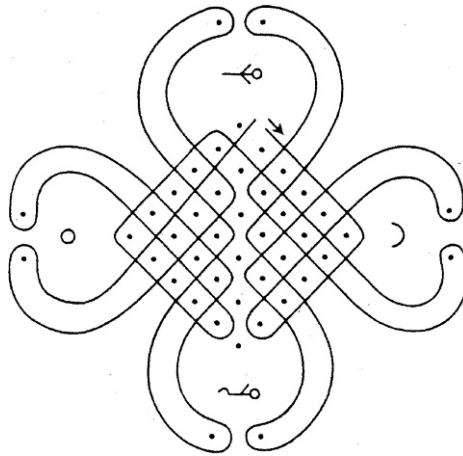


Abb. 1.1.2 Einzige Figur zur Weltentstehungssage der Jokwe in Angola: der Weg von Sonne (links), Mond (rechts) und Mensch (unten) zu Gott (oben) [Zaslavsky 1999]

Die Ethnomathematik, die sich in jüngster Zeit den impliziten mathematischen Vorstellungen bei den Naturvölkern zugewandt hat, lieferte erstaunliche Forschungsergebnisse. Bei einem afrikanischen Volksstamm in Angola findet sich beispielsweise die Sitte, beim Erzählen der Sage von der Weltentstehung freihändig eine Figur aus einem einzigen, sich kunstvoll verschlingenden Kurvenzug zu zeichnen, was sorgfältige geometrische Überlegungen erfordert, soll das gewünschte Resultat mit seinen Symmetrieeigenschaften hervorgebracht werden (Abb. 1.1.2).

Eine weitere Inspiration, elementargeometrische Betrachtungen anzustellen, lieferte der Menschheit seit Anbeginn die Beobachtung der Veränderungen des gestirnten Himmels. Die Wanderung des Schattens eines Baumstumpfes oder aufragenden Steines im Tages- und Jahreslauf bildet die Grundlage für eine einfache Sonnenuhr. Wird die Bahn der Spitze des Schattens systematisch aufgezeichnet, ergeben sich als Projektion des Sonnenlaufes am Himmel Kurven in der Ebene, die Anlaß zum Nachdenken bieten.

In den 90er Jahren des 20. Jhs. wurde in Sachsen Anhalt die Kreisgrabenanlage von Goseck aus der Zeit um 4800 v. Chr. entdeckt, archäologisch untersucht und anschließend rekonstruiert. Es handelt sich um das bisher älteste bekannte Sonnenobservatorium weltweit (Abb. 1.1.3). Kreisgrabenanlagen entstanden in Mitteleuropa in der Nähe von Siedlungen in der Zeit um 4800 bis 4500 v. Chr. Der doppelte Palisadenring der Kreisgrabenanlage von Goseck enthält drei Tore, je eines nach Norden, nach Südosten (Sonnenaufgang 21. Dezember) und nach Südwesten (Sonnenuntergang 21. Dezember). Die Abstände zwischen den Palisaden sind um den 21. Juni herum breiter gesetzt. Bauern aus der Zeit der Bandkeramik konnten so vor fast 7000 Jahren an Hand des Sonnenstandes den Zeitpunkt von Aussaat und Ernte im Jahresverlauf bestimmen. Kreisgrabenanlagen wurden aber auch für kultische Zwecke benutzt, wie Funde nahelegen. Erst etwa 2000 Jahre später entstand mit Stonehenge bei Salisbury in Südengland die bekannteste Anlage von Bauten der steinernen Megalithkultur



Abb. 1.1.3 Kreisgrabenanlage von Goseck (bei Halle), Himmelscheibe von Nebra.
[Foto Wesemüller-Kock]



Abb. 1.1.4 Stonehenge (Südengland): das größte erhaltene Steindenkmal Europas aus dem 3./2. Jahrtausend (äußerer Ringdurchmesser ca. 100 m) [Foto H.-W. Alten]

(3. und 2. Jahrtausend v. Chr.), die als Sonnenobservatorien und Kultstätten der Jungsteinzeit gedeutet werden [Gericke 1984] (Abb. 1.1.4).

Forschungen der letzten Jahrzehnte ergaben, daß sich in ihrer Anlage möglicherweise neben astronomischen Kenntnissen auch solche elementarer geometrischer Beziehungen — z.B. des sog. Satzes von Pythagoras — niedergeschlagen haben. Man kann allerdings nur vermuten, das pythagoreische Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4, 5 (die man z.B. an einem Seil der Länge 12 mit Knoten markieren könnte) sei schon früh zur Erzeugung rechter Winkel herangezogen worden. In der Konstruktion der Holzanlage Woodhenge (um 1800 v. Chr.) glauben Forscher, sogar die Mitverwendung des pythagoreischen Drei-

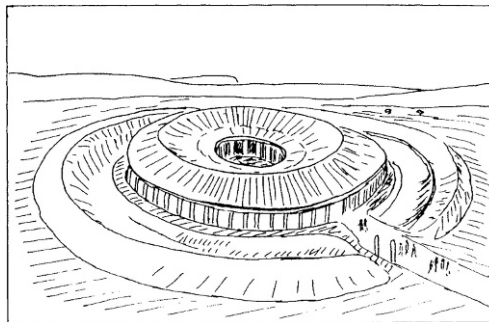


Abb. 1.1.5 Rekonstruktion von Woodhenge
[Ashbee, P.: The Bronze Age Round Barrow in Britain, Phoenix House Ltd, London 1960]

ecks 12, 35, 37 nachweisen zu können (Abbn. 1.1.5, 1.1.6). Zu Stonehenge siehe [North 1996]; eine Kritik der Hypothese vom rechten Winkel findet sich bei [Knorr 1985]. Ungefähr aus der selben Zeit wie Woodhenge stammt die erst in jüngster Zeit nahe Halle gefundene bronzezeitliche Himmelscheibe von Nebra, deren Sternenbild mit den Plejaden als erste Himmelsdarstellung anzusehen ist [Schlosser 2004]. Über die Scheibe hat sich eine rege Diskussion über Auswertung und Deutungstheorien entwickelt, deren endgültige Aussagen in naher Zukunft zu erwarten sind.

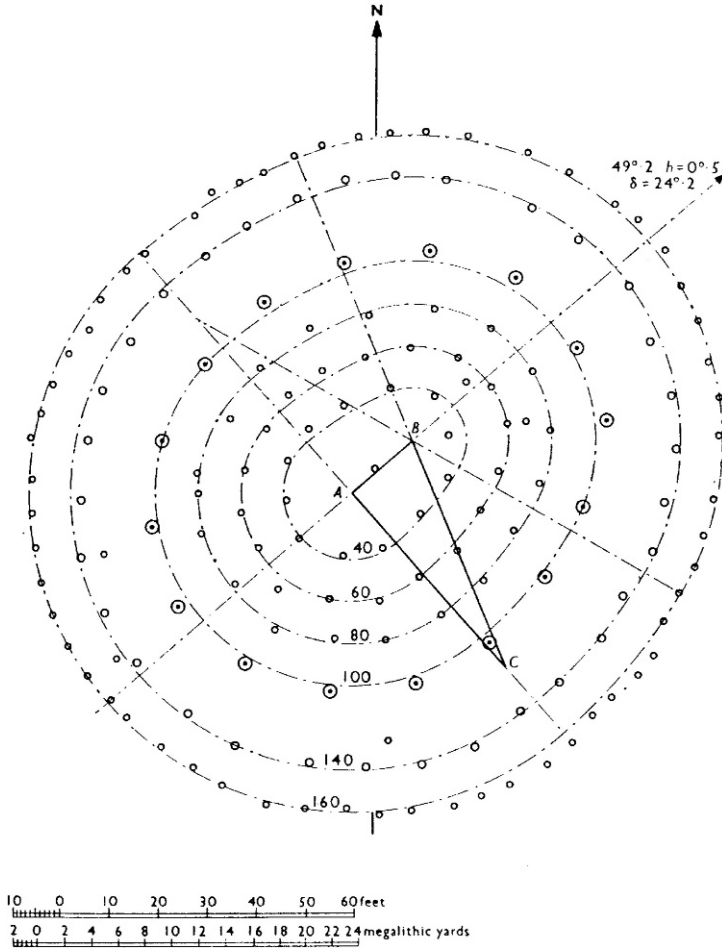


Abb. 1.1.6 Grundriß von Woodhenge

[Thom, A.: *Megalithic Sites in Britain*, Oxford, Clarendon Press 1967, Reprint 1972, by permission of Oxford University Press]

1.2 Alte Stromtalkulturen

3000 – 2000	Stadtkulturen im Indus: Harappa und Mohenjo Daro	Schrift noch nicht entziffert
3000 – 2700	Einigung der Reiche am Nil	Erfindung der Hieroglyphen
3000 – 2700	Sumerische Stadtstaaten	Entstehung der Keilschrift auf Tontafeln
2740 – 2150	Altes Reich in Ägypten	Bau der Pyramiden
2700 – 2000	Einwanderung und Herrschaft der Akkader in Mesopotamien	Rechentafeln
2150 – 2040	Erste Zwischenzeit in Ägypten	
2040 – 1788	Mittleres Reich in Ägypten	Mathematische Papyri
1900 – 1600	Altbabylonisches Reich	
1728 – 1668	König Hammurabi in Babylon	Gesetzestafeln
1780 – 1580	Zweite Zwischenzeit in Ägypten	
1580 – 1090	Neues Reich in Ägypten	Tempel der Hatschepsut
1290 – 1224	Pharao Ramses II.	Amuntempel in Karnak
1285	Schlacht von Kadesch	Gräber im Tal der Könige
1600 – 625	Hethiter, Kassiten, Assyrer herrschen in Mesopotamien	Mathematische Keilschrifttexte
ab 1090	Spätzeit in Ägypten: Libyer, Äthiopier, Assyrer herrschen am Nil	
625 – 539	Neubabylonisches Reich	Blüte von Astrologie und Astronomie
539	Kyros der Große erobert Babylon	
525	Perser erobern Ägypten	
332	Alexander der Große erobert Ägypten	
323 – 30	Ägypten unter der Herrschaft der Ptolemaier	Ägypten Handels- und Kulturzentrum der alten Welt
47 v.Chr.	Brand der Bibliothek von Alexandria	Eratosthenes von Kyrene Direktor der Bibliothek, Euklid u. Apollonios in Alexandria
30 v.Chr.	Ägypten wird römische Provinz	Heron von Alexandria, Pappos und Proklos wirken in Alexandria
391 n.Chr.	Zerstörung der Bibliothek von Alexandria	Mathematikerin Hypatia bei Heidenverfolgungen ermordet
395	Ägypten fällt bei der Teilung des Römischen Reiches an Ostrom (Byzanz)	

1.2.1 Die Induskultur

Als eine der ältesten Hochkulturen der Menschheit gilt die Siedlung Mohenjo-Daro am Indus. Nahezu genauso alt wie das am Nil gelegene ägyptische Reich und das sich zwischen den Stromtälern von Euphrat und Tigris erstreckende Mesopotamien, erlebte die zur Harappa-Kultur gehörende Stadt von rund 40.000 Einwohnern um 2500 v. Chr. ihre Hochblüte. In allen Fundstätten dieser Kultur haben die Ziegelsteine die gleichen Seitenmaße im Verhältnis 1:2:4, die Straßen verlaufen schachbrettartig, und die Gewichte waren genormt. Da Ausgrabungen und Auswertung der Funde von Mohenjo-Daro (im heutigen Pakistan gelegen) noch andauern, läßt sich ein abschließendes Bild der Rolle der Geometrie in diesem Kulturkreis noch nicht gewinnen.

1.2.2 Die ägyptische Mathematik

Genauer sind wir über die geometrischen Kenntnisse im alten Ägypten und Mesopotamien (auch Babylonien genannt) unterrichtet, haben doch beide in der Jungsteinzeit (Neolithikum) entstandene Kulturen schriftliche Quellen hinterlassen, die seit der Mitte des 19. Jahrhunderts eingehend studiert wurden.

Im straff organisierten, zentral verwalteten Ägypten wurde seit etwa 2900 v. Chr. die Hieroglyphenschrift entwickelt. Quellen für unsere Kenntnis der ägyptischen Geometrie sind, neben den imposanten Bauwerken der Pyramiden, vor allem zwei mathematische Papyri aus der Zeit des Mittleren Reiches (11.–13. Dynastie). Ihr Inhalt gibt den Wissensstand um oder bald nach 2000 v. Chr. wieder (vgl. Bd. 1, Abschnitt 3.1). Es handelt sich offensichtlich um Texte — die beiden wichtigsten sind der Papyrus Rhind und der Moskauer Papyrus —, die von Lehrern (Schreibern) in den Beamenschulen als Unterrichtshandbücher verfaßt wurden. Sie sind Aufgabensammlungen mit den zugehörigen Lösungsanweisungen. Der Papyrus Rhind war ursprünglich 5,34 m lang und 33 cm breit, der Moskauer Papyrus hat eine Länge von 5,44 m, ist aber nur 8 cm hoch. Letzterer enthält 25, ersterer 84 nach sachlichen Gesichtspunkten geordnete Aufgaben, denen gelegentlich veranschaulichende Skizzen beigegeben sind. Geometrische Körper werden dabei durch ihren Grund- oder Seitenriß dargestellt, denn perspektivisches Zeichnen kannten die Ägypter nicht. Manchmal werden auch auf demselben Bild das Wichtigste im Grundriß, einzelne Teile im Aufriß wiedergegeben, wie z.B. bei der Darstellung eines rechteckigen Teiches, der am Rand mit Bäumen bestanden ist: diese sind jeweils nach außen umgeklappt (Abb. 1.2.1).

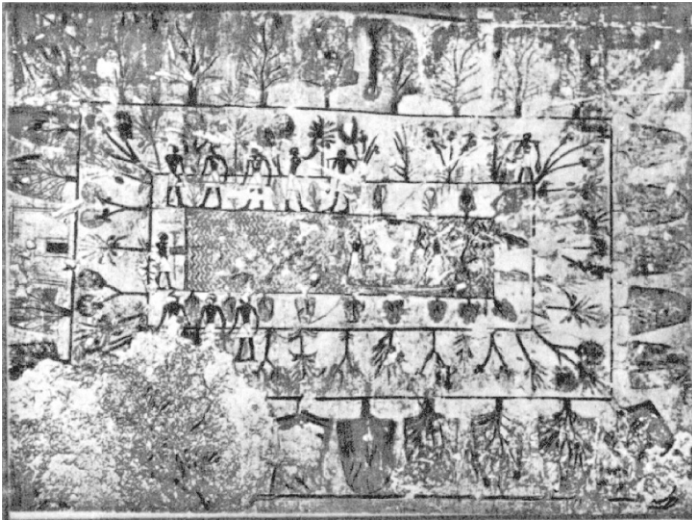


Abb. 1.2.1 Ägyptische Darstellung eines von Bäumen umgebenen Teiches
Wechsel der Perspektive im gleichen Bild. [Kurt Vogel: Vorgriechische Mathematik, Teil I.
Abb. 29, S. 60; aus Wreszinski, Atlas zur altägyptischen Kulturgeschichte 1923]

Zu den einfachsten Aufgaben gehört die Berechnung der Fläche F von Rechtecken, Trapezen und Dreiecken. Für ein beliebiges Viereck mit den Seiten a, b, c, d findet sich die Näherungsformel

$$F = \frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2}, \quad (1.2.1)$$

also eine doppelte Mittelwertbildung aus den gegenüberliegenden Seiten. Interessanterweise wird sie auch einmal auf ein Dreieck angewandt, indem die vierte Seite gleich null gesetzt wird (besser gesagt: als nicht vorhanden weggelassen wird; denn den Begriff der Null kannten die Ägypter nicht).

Eine eigentümliche Vorschrift wird für die Berechnung der Fläche F eines Kreises von gegebenem Durchmesser d verwendet: man ziehe vom Durchmesser $1/9$ seiner Länge ab und multipliziere das Ergebnis mit sich selbst, bilde also

$$F = \left(\frac{8}{9} d \right)^2. \quad (1.2.2)$$

Eine Begründung für dieses erstaunlich genaue Verfahren wird, wie auch sonst, nicht gegeben. Doch ist der Aufgabe 48 im Papyrus Rhind eine Zeichnung beigegeben, die ein Quadrat der Seitenlänge 9 zeigt, aus dem durch Abschneiden

der Ecken ein Achteck erzeugt wird, das als Annäherung an einen Kreis aufgefaßt werden kann. Diese Figur gab Kurt Vogel 1928 die Anregung zu einer Deutung der ägyptischen Vorschrift (siehe Aufgabe 1.2.1).

Neben ebenen Figuren werden in den ägyptischen Texten auch Volumina berechnet, sei es bei bautechnischen Aufgaben oder wenn das Fassungsvermögen von Gefäßen und Speichern ermittelt werden soll. Bemerkenswert ist dabei die Erwähnung eines Schichtmaßes für Rauminhalte — in analoger Weise kommt bei Flächenberechnungen ein Streifenmaß vor. Offensichtlich liegt die Vorstellung näher, den Inhalt etwa eines Ziegelsteins dadurch zu ermitteln, daß man eine seiner Grundfläche entsprechende Schicht, deren Höhe das Einheitsmaß ist, mehrfach (wie bei der Herstellung von Sperrholzplatten) übereinander legt, als der Gedanke, seinen Rauminhalt durch Ausfüllen mit Einheitswürfeln zu berechnen (denn auf letzterem beruht das heute übliche Verfahren, Länge, Breite und Höhe miteinander zu multiplizieren). Übrigens werden alle Aufgaben rezeptartig und immer nur mit konkreten Zahlenwerten berechnet; in dieser frühen Zeit stand weder eine Formelsprache noch die Möglichkeit, Größen abstrakt auszudrücken, zur Verfügung.

Bei Körperberechnungen kommen außer quaderförmigen vorwiegend zylinderförmige Behältnisse vor, wobei die erwähnte Formel für die Kreisfläche eingesetzt wird. Die großartigen Pyramidenbauten legen die Vermutung nahe, im alten Ägypten müsse auch die Inhaltsformel für die Pyramide bekannt gewesen sein. Dafür gibt es aber bisher keinen eindeutigen Beleg. (Wie Max Dehn im Jahr 1900 nachwies, ist eine strenge Herleitung dieser Formel für eine beliebige Pyramide nicht ohne einen Grenzübergang möglich. Für Spezialfälle siehe Aufgabe 1.2.2).

Dagegen enthält der Moskauer Papyrus in Aufgabe 14 die korrekte Anweisung zur Berechnung eines quadratischen Pyramidenstumpfes gemäß der richtigen Formel

$$V = (a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{h}{3}, \quad (1.2.3)$$

(V = Volumen, a = Länge der Grundkante, b = Länge der Oberkante, h = Höhe). Man kann diese Formel gewinnen, falls diejenige für das Pyramidenvolumen bekannt ist (siehe Aufgabe 1.2.3); wie gesagt ist eine Verwendung derselben bisher aber in den spärlich erhaltenen ägyptischen Texten nicht nachgewiesen (vgl. Videofilm „Vom Zählstein zum Computer – Altertum“¹).

¹Vergleichen Sie: Verlag Franzbecker, ISBN 3-88120-236-6



Abb. 1.2.2 Die Pyramide des Cheops in Giza
[Foto H.-W. Alten]



Abb. 1.2.3 Zikkurat von Tschogah Sambil

Der aus Lehmziegeln gebaute Stufenturm hat die typische Form der von Sumerern, Babyloniern, Assyriern und Elamern im mesopotamischen Kulturkreis errichteten Tempel. Die um 1250 v.Chr. erbaute fünfstufige Zikkurat von Tschogah Sambil ist das am besten erhaltene Bauwerk dieser Art. [Foto H.-W. Alten]

Manchmal nähern die Ägypter den quadratischen Pyramidenstumpf auch durch Mittelbildung an: sie behandeln ihn wie einen Quader, dessen Basis B als das arithmetische Mittel von Grundfläche und Deckfläche gewählt wird:

$$B = \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad (1.2.4)$$

woraus

$$V = (a^2 + b^2) \cdot \frac{h}{2} \quad (1.2.5)$$

folgt. Der Mathematikhistoriker Kurt Vogel meinte, vielleicht hätten die Ägypter den Fehler wahrgenommen und deshalb noch ein mittleres Flächenstück $a \cdot b$ eingefügt:

$$B = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \quad (1.2.6)$$

und so aus einer unrichtigen Formel durch unbewiesene Verallgemeinerung die richtige Berechnungsvorschrift gefunden. (Nebenbei bemerkt: Sieht man die Pyramide als einen Pyramidenstumpf mit der Deckfläche $b^2 = 0$ an, so liefert die Formel für den Inhalt des Stumpfes die richtige Formel für das Pyramidenvolumen.)

1.2.3 Die babylonische Mathematik

Viel reichhaltiger als die Quellen zur ägyptischen Mathematik sind diejenigen über die babylonische, da als Schreibmaterial in Mesopotamien Tontafeln verwendet wurden. Sie überstanden die Zeiten wesentlich besser als der leicht vergängliche Papyrus (vgl. Bd. 1, Abschnitt 3.2). Zahlreiche Texte stammen aus der Zeit des altbabylonischen Reiches (ca. 1900 bis ca. 1600 v. Chr.), dem die sumerischen Stadtstaaten (ca. 3000 bis ca. 2700) und die Herrschaft der Akkader (ca. 2700 bis 2000) vorausgegangen waren. Doch lassen Funde aus den folgenden Jahrhunderten, in denen sich im Zweistromland viele politische Umwälzungen ereigneten (Herrschaft der Assyrer, der Hethiter, der Chaldäer), erkennen, daß nach anfänglicher Entwicklung der Mathematik lange Zeit kaum Veränderungen eintraten. Erst in der Seleukidenzeit (den letzten vorchristlichen Jahrhunderten) sind Fortschritte zu verzeichnen — insbesondere in der Astronomie. Denn wie in Ägypten diente die Mathematik in Mesopotamien der Praxis und wurde in diesem Zusammenhang entwickelt: Wirtschaft, Handel, Bauwesen und Himmelsbeobachtung gaben Anlaß zur Beschäftigung mit mathematischen Überlegungen. Diese erreichten in Babylon einen höheren

Entwicklungsstand als in Ägypten. Insbesondere begannen die Forscher aufzuhören, als 1916 in den Texten der pythagoreische Lehrsatz und ein Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln entdeckt wurde.

Felderpläne, Grundrisse von Häusern oder solche von technischen Bauten wie Dämmen und Kanälen sind häufiger den einschlägigen Berechnungsvorschriften beigegeben und lassen auf den ersten Blick die Praxisnähe der Aufgaben erkennen. Teilweise fehlen noch Fachausdrücke; der Alltagssprache entnommene Bezeichnungen wie Mauer, Damm, Graben usw. werden ersatzweise verwendet. Wo freilich nach dem Flächeninhalt regelmässiger Vielecke gefragt und dazu passende geometrische Zeichnungen in die Tafeln eingeritzt wurden, scheint frühes theoretisches, über unmittelbare Alltagsbedürfnisse hinausgehendes Interesse auf, wie es auch in der sog. babylonischen Algebra feststellbar ist (siehe Abb. 1.2.2).

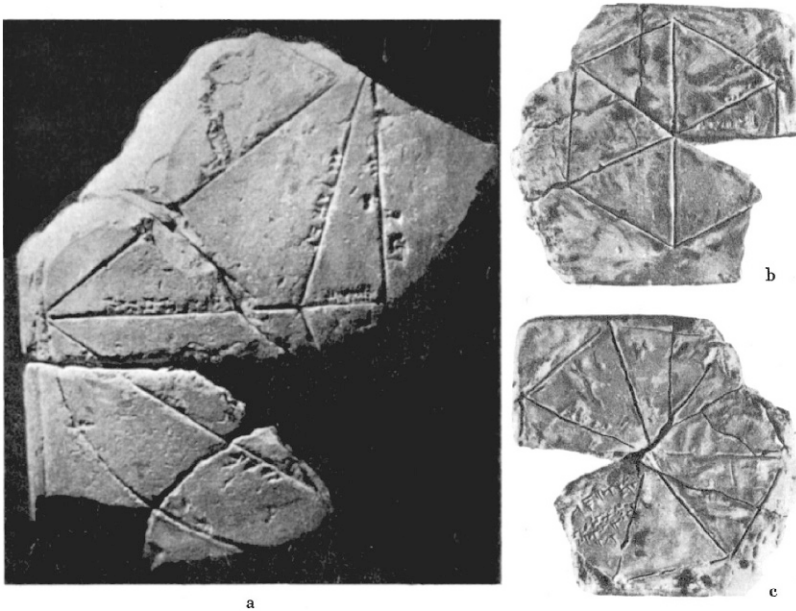


Abb. 1.2.4 Babylonische Polygone

[Kurt Vogel: „Vorgriechische Mathematik“, Teil II. Abb. 22a-c, S. 69, nach E.M. Bruins und M. Rutten: *Mémoires de la Mission Archéologique française en Iran*, Tome XXXIV]

Auffällig ist das häufige Vorkommen der Berechnung der Diagonale von Rechtecken mittels des pythagoreischen Lehrsatzes — viele Jahrhunderte vor Pythagoras! Dabei wählten die babylonischen Mathematiker oft die Zahlenwerte so, daß sich rationale Seiten ergaben, doch konnten sie Quadratwurzeln auch

näherungsweise berechnen. Das kann entweder durch Iteration geschehen sein oder durch Anwendung der sog. heronischen Formel

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 \pm r} \approx a \pm \frac{r}{2a}, \quad (1.2.7)$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ in die nächstliegende Quadratzahl a^2 , vermehrt oder vermindert um den Rest r , zerlegt ist.

Eine Problem der Art, wie es nicht nur vom heutigen Schulunterricht her bekannt ist, sondern wie es auch in der chinesischen und indischen Mathematik und im europäischen Mittelalter vorkommt, ist die in einem Text aus der Seleukidenzeit behandelte Aufgabe einer an eine Wand gelehnte Stange (BM 34568, British Museum London). Zunächst senkrecht an eine Mauer gelehnt, reiche sie bis zu einer unbekannten Höhe. Dann werde der Fuß um neun Ellen von der Mauer entfernt, wobei sich die Spitze um drei Ellen senke. Gefragt wird nach der Länge (x) der Stange. Zu berechnen ist also die Größe x aus der folgenden Gleichung für ein pythagoreisches Dreieck: $x^2 = (x - 3)^2 + 9^2$ (siehe Aufgabe 1.2.4).

Der Geometrie zugehörig sind auch die verbreiteten Teilungsaufgaben. Soll etwa ein beliebiges viereckiges Feld mit den Seiten a, b, c, d durch eine von b nach d verlaufende Transversale x in zwei flächengleiche Teile zerlegt werden, so berechnet man sie nach der Vorschrift

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}. \quad (1.2.8)$$

Man könnte diese Näherung deuten als Bildung eines mittleren Quadrates aus den beiden Quadraten über den Seiten a und c , dessen Seite dann als Größe der Transversale genommen wird. Dabei gehen allerdings, wie man sieht, die Längen der Seiten b und d in die Berechnung nicht ein; die Vorschrift kann also nur für gewisse Feldformen einen annähernd richtigen Wert liefern (siehe Aufgabe 1.2.5).

Für die Kreisberechnung verwendeten die Babylonier ein eigenartiges, von der Vorschrift der Ägypter völlig verschiedenes Verfahren. Die Fläche F des Kreises wurde nämlich auf dem Umweg über seinen Umfang u berechnet: man solle ein Zwölftel des Quadrates des Umfanges nehmen, also

$$F = \frac{u^2}{12}. \quad (1.2.9)$$

Dabei wurde als Kreisumfang nur grob der dreifache Durchmesser d genommen. Setzt man das ein, folgt $F = \frac{9d^2}{12} = 3r^2$.

Es stellt sich die Frage, warum die Kreisfläche in der babylonischen Mathematik auf diesem seltsamen Weg berechnet wurde, wo es doch nahezuliegen scheint, vom Durchmesser oder vom Radius r auszugehen. Dazu muß man sich zunächst klarmachen, daß beim Studium des Kreises eigentlich zwei Proportionalitätsfaktoren auftreten: einerseits besteht ein festes Verhältnis zwischen

den beiden Längen Durchmesser und Umfang, andererseits ein festes Verhältnis zwischen zwei Flächen: Durchmesser- oder Radiusquadrat und Kreisfläche. Erst Archimedes bewies, daß beide Faktoren identisch sind, indem er die Kreisperipherie ausstreckte oder, anders gesagt, indem er die Beziehung

$$F = \frac{1}{2} \cdot u \cdot r \quad (1.2.10)$$

streng bewies (siehe Abschnitt 2.4.2).

Da $u = 3d = 6r$ bedeutet, daß man den Kreisumfang durch die Peripherie des einbeschriebenen Sechsecks annäherte, könnte man daran denken, daß man die Kreisfläche ermittelte, indem man den Kreissektor vom Innenwinkel 60° angenähert als Dreieck der Grundlinie $\frac{u}{6}$ und der Höhe r ansah. Daraus folgt dann $F = 6 \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{u}{6} \cdot r) = 6 \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{u}{6} \cdot \frac{u}{6}) = \frac{u^2}{12}$. (Eine andere Erklärung wäre, daß das arithmetische Mittel zwischen dem umbeschriebenen Quadrat d^2 und dem einbeschriebenen Quadrat $\frac{d^2}{2}$, also $\frac{3d^2}{4} = 3r^2$, gebildet und erst nachträglich vom Radius auf den Umfang zurückgerechnet wurde.)

Auch das von einer Sehne s vom Kreis abgeschnittene Kreissegment wird in altbabylonischen Aufgaben behandelt (vgl. Abb. 1.2.5). Dessen Höhe (die senkrecht auf der Sehnenmitte stehende Strecke zwischen Sehne und Umfang), auch Pfeil p genannt, wurde aus d und s nach der Formel

$$p = \frac{1}{2}(d - \sqrt{d^2 - s^2}) \quad (1.2.11)$$

berechnet, ebenso wie die Sehne oder Segmentbasis s gemäß

$$s = \sqrt{d^2 - (d - 2p)^2} \quad (1.2.12)$$

gefunden werden konnte (siehe Aufgabe 1.2.6).

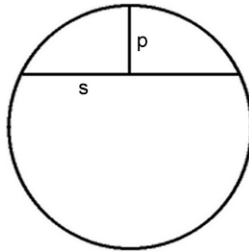


Abb. 1.2.5 Kreissegment mit Sehne und Pfeil

Wir haben es hier mit dem Beginn der Sehnengeometrie zu tun, die später von Hipparch weiterentwickelt wurde. Ptolemaios stellte diese dann an den Anfang

seines großen astronomischen Lehrbuchs (von den Arabern als „Almagest“ betitelt; vgl. Abschnitt 2.5.4). Allerdings ist der allgemeine Winkelbegriff in der babylonischen Mathematik noch nicht ausgebildet, nur der rechte Winkel kommt implizit beim Rechteck und beim pythagoreischen Dreieck vor. Die Neigung schiefer Ebenen, durch die z.B. Dämme begrenzt werden, konnte man durch den sog. Rücksprung messen: man gab an, auf welchen Höhenabschnitt ein Rücksprung um eine Elle eintritt.

Im Bereich der im Alltag auftretenden Aufgaben aus der räumlichen Geometrie boten Quader, senkrechte Prismen und Zylinder der Berechnung keine Probleme (ggfs. wurde die Grundfläche mit Hilfe einer der schon besprochenen Näherungsformeln berechnet, bevor mit der Höhe multipliziert wurde). Wie bei den ägyptischen Quellen ist auch in den Texten aus Mesopotamien die Formel für das Volumen einer Pyramide bisher nicht gefunden worden. Als Näherungsformel für den Pyramidenstumpf wird die uns schon von den Ägyptern bekannte Beziehung (1.2.5) verwendet — sicher eine Bestätigung dafür, daß die Mittelbildung zu den frühesten und verbreitetsten mathematischen Überlegungen gehört. Im Text BM 85194,28 könnte die exakte Formel, wie sie aus griechischen Quellen bekannt ist, enthalten sein:

$$V = \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right] \cdot h = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot h, \quad (1.2.13)$$

falls der Faktor $\frac{a-b}{3}$ weggelassen wurde, der in diesem Fall wegen der speziellen Zahlenwerte von a und b gleich 1 ist.

Auch ein Kegelstumpf wird in einem Fall durch Mittelbildung nach der Formel

$$V = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) \cdot h \quad (1.2.14)$$

berechnet.

Wiederholt war auf die Verwendung des pythagoreischen Lehrsatzes – vielleicht sollte man besser sagen: auf das Auftreten der Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ am rechtwinkligen Dreieck – in der babylonischen Mathematik hingewiesen worden. Als besonders bemerkenswert wurde lange ein von Otto Neugebauer und Abraham Sachs 1945 publizierter altbabylonischer Text angesehen, der sich in der Plimpton-Collection der Columbia University in New York befindet und rasch unter der Kurzbezeichnung „Plimpton 322“ bekannt wurde [Neugebauer/Sachs 1945]. Schien er doch eine Art trigonometrische Tabelle zu enthalten. Es handelt sich dabei um einen der aus Mesopotamien in großer Zahl überlieferten Tabellentexte. Von der Überschrift abgesehen, besteht der

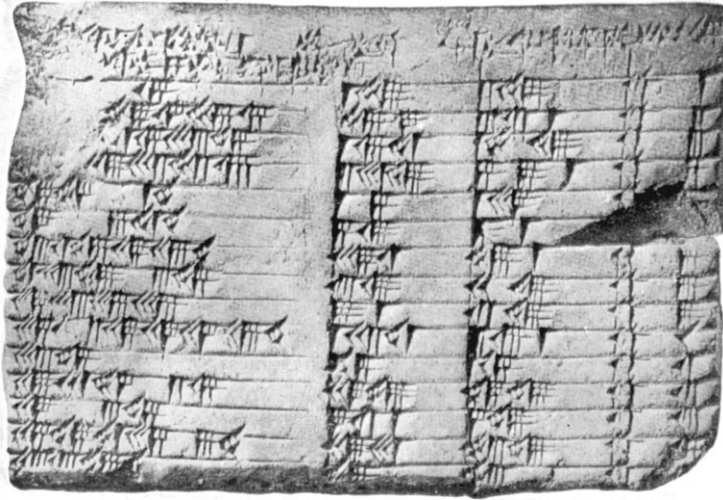


Abb. 1.2.6 Plimpton 322. Altmesopotamischer Keilschrifttext

(Plimpton Library, Columbia University, New York). Der Text enthält eine Liste von rechtwinkligen Dreiecken mit ganzzahligen Seiten h, b und d . Links sind einige Spalten abgebrochen. Die zweite und dritte Spalte enthalten die Breite b und die Diagonale (Hypotenuse) d als ganze Zahlen. Die letzte Spalte gibt die laufende Zeilennummerierung. In den Zeilen 11 und 15 haben die Werte b und d einen gemeinsamen Faktor; in allen anderen Fällen sind sie teilerfremd. [B. L. van der Waerden: *Erwachende Wissenschaft*. Birkhäuser, Basel 1956 und 1966.]

Text der Tafel (von der möglicherweise links ein Stück fehlt) aus fünf Spalten und fünfzehn Zeilen, in denen lediglich Zahlen stehen (siehe Abb. 1.2.6). Die rechte Randspalte gibt eine laufende Zeilennummerierung von 1 (dargestellt durch einen senkrechten Keil) bis 15 an (neben dem Keil für die eins, der bis zu neunmal wiederholt werden kann, tritt ab Zeile 10 der Winkelhaken, das babylonische Symbol für zehn, auf). Die vorhergehende Spalte zeigt immer den gleichen Ausdruck; er verweist auf die folgende Zeilennummerierung. Die Analyse der zumeist mehrstelligen Sexagesimalzahlen in den ersten drei Spalten ergab (die zweite ist überschrieben „die Quadratseite der Breite“ (b), die dritte „die Quadratseite der Diagonale“ (d), daß in der ersten Spalte die Verhältnisse

$$\frac{d^2}{h^2} = \frac{h^2 + b^2}{h^2} = 1 + \frac{b^2}{h^2} \quad (1.2.15)$$

angegeben sind, und zwar geordnet nach abnehmenden Werten. Das veranlaßte Neugebauer und Sachs, die Tabelle als eine systematisch angeordnete Folge von 15 rechtwinkligen Dreiecken zu deuten. Dasjenige in der ersten Zeile wäre nahezu gleichschenkelig, das letzte hätte annähernd die Winkel 30° und 60° .

Diese Interpretation führte zu dem aufsehenerregenden Schluß, mit Plimpton 322 läge aus altbabylonischer Zeit eine trigonometrische Tabelle vor. Andere Forscher versuchten eine zahlentheoretische Deutung, basierend auf reziproken Zahlenpaaren. In beiden Fällen hätte man es mit einem Text auf hoher Abstraktionsstufe zu tun, wie er bis dahin in der mesopotamischen Mathematik nicht nachweisbar war. Auch unser Wissen über die Vorstellung des Winkels in altbabylonischer Zeit widerspricht einer trigonometrischen Lesung.

Nachdem sich in den letzten Jahrzehnten die Ansicht durchgesetzt hat, man dürfe solche Texte nicht isoliert betrachten, sondern müsse das gesamte kulturelle Umfeld berücksichtigen, wurden beide Deutungen insbesondere von Eleanor Robson in Zweifel gezogen [Robson 2001]. Denn die in der Mitte des 18. vorchristlichen Jahrhunderts geschriebene Tafel stammt aus der Stadt Larsa im heutigen Irak und gehört in die Gruppe von Texten, die der Buchführung der Bürokratie zuzurechnen sind. Das ergibt sich aus den Beschriftungen in der Kopfzeile wie aus der gesamten Anordnung der Tabelle. Sie erinnert an andere Tontafeln, auf denen Schreiber Übungsaufgaben oder Beispielsammlungen für den Unterricht zusammenstellten. Dann würde es sich um eine Sammlung von Aufgaben über pythagoreische Zahlentripel handeln, bei der in der 2. Spalte möglichst einfache Zahlenwerte gewählt wurden, deren geometrischer Bezug jedoch unsicher ist. Diese Interpretation beseitigt die Sonderstellung, welche die bisherige Beschreibung der Mathematik Mesopotamiens der Tafel Plimpton 322 zuwies, und verweist die Existenz einer Trigonometrie vor rund 4000 Jahren in das Reich der Fabel. Die Tabelle bleibt allerdings eine bisher einmalige Zusammenstellung von Zahlentripeln, die durch eine quadratische Beziehung miteinander verknüpft sind.



Abb. 1.2.7 Keilschrift mit Mengenangaben, ausgegraben 1902 in Südmesopotamien. Der um 2370 v. Chr. entstandene Text ist eine Aufstellung der Kosten für drei verschiedene Biersorten und ihre Empfänger. [VAT 4874 (=W.Förtsch, /VS/ 14, 48; aus Girsu/Tello im südlichen Irak, ca. 2370 v. Chr.) bpk / Vorderasiatisches Museum, SMB / Gudrun Stenzel]

1.3 Aufgaben zu 1

Aufgabe 1.2.1: Rekonstruktion der ägyptischen Näherungsformel für die Kreisfläche

- a) Man rekonstruiere Kurt Vogels Deutung der ägyptischen Näherungsformel für die Kreisfläche (1.2.2): Einem Kreis mit Durchmesser $d = 9$ werde ein Quadrat umbeschrieben, das in neun Quadrate der Seitenlänge 3 zerlegt sei. Jedem der vier Eckquadrate sei die äußere Hälfte (längs einer Diagonalen) abgeschnitten, so daß ein sich dem Kreis annäherndes Achteck zurückbleibt. Man berechne dessen Fläche und nähere sie dann durch die nächstliegende Quadratzahl an, aus der man die Wurzel ziehe. Diese Wurzel ist demnach die Seitenlänge eines mit dem Kreis vom Durchmesser $d = 9$ nahezu flächengleichen Quadrates. Inwiefern folgt daraus die ägyptische Näherungsformel?
- b) Zur Beurteilung der Güte dieser Näherungsformel berechne man auf zwei Stellen hinter dem Komma den sich daraus ergebenden Wert für π .

Aufgabe 1.2.2: Der Rauminhalt einer Pyramide

Man beweise die Formel für den Rauminhalt V einer Pyramide:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ (G = Grundfläche, h = Höhe) für zwei Spezialfälle:

- a) Zieht man in einem Würfel der Seitenlänge a die vier Raumdiagonalen, so wird er in sechs kongruente senkrechte Pyramiden mit quadratischer Grundfläche zerlegt, deren Spitze im Zentrum des Würfels liegt.
- b) Man überlege sich, daß dieser Würfel auch in drei kongruente schiefe Pyramiden der Höhe a zerlegt werden kann (verwende nur eine Raumdiagonale).
- c) Sind diese beiden Überlegungen auch auf einen Quader mit den Seiten a, b, c verallgemeinerbar?

Aufgabe 1.2.3: Der Rauminhalt des Pyramidenstumpfes

Unter Verwendung der Formel für den Rauminhalt V einer Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ (G = Grundfläche, h = Höhe) leite man die Formel für den Rauminhalt des Pyramidenstumpfes ab, indem man den Stumpf (Grundfläche = a^2 , Deckfläche = b^2 , Höhe = h) in einen Quader, vier seitliche Restprismen und vier Eckpyramiden zerlegt.

Aufgabe 1.2.4: Anwendung der binomischen Formeln

Im gleichen Text aus der Seleukidenzeit (BM 34568), offensichtlich für den Unterricht bestimmt, kommt ein Rechteck mit den Seiten $a = 4, b = 3$ vor, für dessen Diagonalen d die Ausdrücke $d = \frac{a}{2} + b$ und $d = \frac{b}{3} + a$ gegeben werden. Dann sollen aus den Größen $a + d$ und b bzw. $b + d$ und a die drei Stücke a, b und d berechnet werden, außerdem auch aus den Angaben $a + b = 7$ und $F = a \cdot b = 12$, oder auch aus $a - b = 1$ und $F = a \cdot b = 12$.

- a) Man löse diese Aufgaben nach der heutigen Methode.
- b) Man vollziehe die babylonischen Rechenschritte nach, indem man die auf Tontafeln überlieferte Identität $(a + b)^2 - 4F = (a - b)^2$ verwende, um zunächst aus der Summe $a + b$ die Differenz $a - b$ zu ermitteln und danach aus Summe und Differenz die Größen a und b selbst.

Aufgabe 1.2.5: Die Transversalenformel

Man leite die Transversalenformel (1.2.8) $x = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$ unter Verwendung der Flächenformel (1.2.1) für ein beliebiges Viereck (die auch bei den Ägyptern auftritt) ab: $F = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$.

- a) Man fertige dazu eine Skizze an: Im ursprünglichen Feld zerlege die Transversale x die Seiten b und d in b_1 und b_2 bzw. d_1 und d_2 , wobei das neue Feld F_1 von den Strecken b_1, a, d_1, x , das neue Feld F_2 von den Strecken b_2, c, d_2, x eingeschlossen werde. Dann muß für die vierfachen Flächen gelten: $4F_1 = 4F_2$ und $4F_1 + 4F_2 = 4F$, woraus sich die Transversalenformel ableiten läßt.
- b) Man zeige, dass diese Formel nicht nur beim Rechteck exakt ist (falls die Transversale parallel zu a und c gezogen wird), sondern auch beim Trapez, wenn dort x ebenfalls parallel zu a und c gelegt wird.

Aufgabe 1.2.6: Das Kreissegment

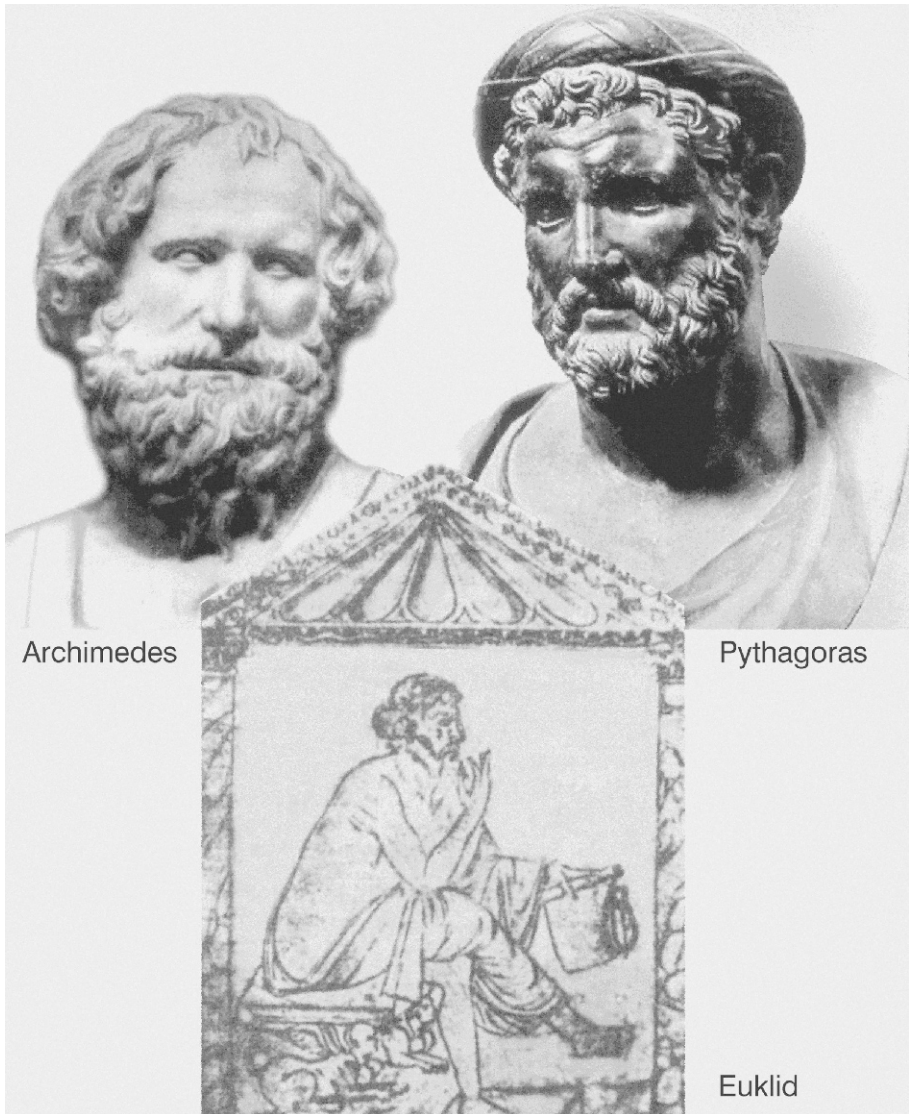
Man zeige, daß sich die beiden Formeln (1.2.11) und (1.2.12) für Pfeil p und Sehne s eines Kreissegments (siehe Abb. 1.2.3) mittels des pythagoreischen Satzes herleiten lassen.

Aufgabe 1.2.7: Ein pythagoreisches Dreieck im Sexagesimalsystem

Man zeige, daß in Zeile 11 der Plimpton-Tafel (der Zeile mit den kleinsten Zahlen in Abb. 1.2.6) das bekannte pythagoreische Dreieck (3, 4, 5), multipliziert mit einem Faktor, dargestellt ist.

Die dort angegebenen Zahlen lauten $\frac{b^2}{hx} = 33,45$, $b = 45$, $d = 1,15$. (Man beachte, daß die babylonische Zahlenschreibweise keinen Dezimalpunkt (besser: Sexagesimalpunkt) kannte, der Wert 1 also auch 60 bedeuten kann.)

2 Geometrie in griechisch-hellenistischer Zeit und Spätantike



3./2. Jtd. um 1000 v. Chr. ~ 900	Herrschaft von Mykene über Peloponnes und Kreta Dorische Wanderung Griechen besiedeln die Inseln der Ägäis und die Westküste Kleinasien	Minoische und mykenische Kultur Geometrische Kunst Griechen übernehmen das phönizische Alphabet
8. – 6. Jh. ca. 600 – ca. 450	Gründung griechischer Kolonien in Sizilien, Unteritalien, Libyen und am Schwarzen Meer Ionische Periode	Archaische Kunst, monumentale Plastik und Architektur, Vasenmalerei, Epen des Homer, Leergedichte des Hesiod Naturphilosophie: Thales, Anaximandros, Hekataios, Anaximenes
490 490 – 448	Schlacht bei Marathon Perserkriege	Pythagoras, Heraklit Parmenides, Empedokles, Anaxagoras
ca. 450 – 300 462 – 429 431 – 404	Athenische Periode Höchste Blüte Athens unter Perikles Peloponnesischer Krieg zwischen Athen und Sparta	Sophisten Sokrates, Platon, Tragödien des Aischylos, Sophokles, Euripides Entstehung der dorischen, phrygischen und lydischen Tonarten in der Musik
387	Gründung der Akademie durch Platon	Bau der Akropolis von Athen, klassische Skulpturen von Polyklet und Phidias
ab 338 335	Griechenland unter makedonischer Herrschaft Gründung des Lyzeums durch Aristoteles	
334 – 323	Kriegszüge Alexanders d. Gr. nach Persien, Ägypten, Indien	Hippokrates von Kos Begründer der wissenschaftlichen Medizin
311	Teilung des Alexander-Reiches	Durch Verschmelzung griechischer und orientalischer Kulturen bildet sich die sog. hellenistische Kultur
ca. 300 – ca. 150	Hellenistische (alexandrinsche) Periode	Philosophie der Stoa, der Epikureer, der Skeptiker: Leergedichte und Epigramme als Formen der Dichtkunst. Barocke Spätzeit griechischer Kunst. Mathematische und naturwissenschaftliche Erkenntnisse von Euklid, Aristarch, Archimedes, Apollonios von Perge.

2.0 Einführung

Die Griechen werden allgemein als die Begründer der Wissenschaft von der Natur, also der rationalen, auf Prinzipien beruhenden und in Systemform vorgebrachten Erklärung der Naturerscheinungen angesehen. Zugleich sind sie diejenigen, die die (teilweise aus den orientalischen Kulturen) überlieferten Regeln und Vorschriften zum Zählen, Messen und Auflösen von Gleichungen mit Hilfe der von ihnen entwickelten Logik systematisierten, begründeten und zu einem Theoriegebäude zusammenfaßten und damit zu den Urhebern der wissenschaftlichen Mathematik wurden.

Ende des 2., Anfang des 1. Jtds. v. Chr. hatte mit der dorischen Wanderung die Besitznahme griechischer Gebiete (insbes. des Peloponnes) durch die Dorer stattgefunden, wohl als Folge des Untergangs der mykenischen, kulturell hoch entwickelten und straff verwalteten Staatenwelt. Von Nordwesten, aus dem albanisch-dalmatinischen Küstengebiet her, wo sie ursprünglich ansässig waren, drangen die Dorer immer weiter vor und kolonisierten das seit einem Jahrtausend von den Achäern besiedelte griechische Mutterland. Die Urbevölkerung wurde überlagert oder zog sich in der sog. ionischen Wanderung auf die Inseln und die kleinasiatische Westküste zurück. So entstand eine Vielfalt von Stämmen und Völkern in einem auch geologisch-geographisch in kleine und kleinste Gebiete gegliederten Raum, die jeweils ihre eigene Entwicklung durchliefen. Politisch wie kulturell wurde die Struktur der Stadtstaaten (Poleis) bestimmend.

Vor allem in den Pflanzstädten des kleinasiatischen Milet an der Südküste des Schwarzen Meeres und im Nildelta, wo zentral organisierte Großreiche lagen, ließen sich die Kolonisten als Bauern und Händler nieder und kamen so geistig wie kulturell unter die verschiedenartigsten orientalischen Einflüsse. Sie lernten Sammlungen von Beobachtungen und Verhaltensregeln kennen, die ihnen dann den Stoff für die allmähliche Ausgestaltung des wissenschaftlichen Denkens boten (vgl. Bd. 1, Abschnitte 4.0–4.3).

2.1 Ionische Periode

2.1.1 Die frühen Naturphilosophen

Als Beginn der „Entdeckung des Geistes“ (Titel eines Buches des klassischen Philologen Bruno Snell [Snell 1946]) wird gewöhnlich die ionische Periode bezeichnet (ca. 600 - ca. 450 v. Chr.), auf die um die Mitte des 5. Jhs. die athenische Periode folgte. In der ionischen Periode wurde die Feudalherrschaft der Aristokratie durch die Polis-(Stadt-)struktur abgelöst. Neben den zentra-

listisch regierten orientalischen Großreichen erblühten die selbständigen ionischen Handelsstädte. Bedingt durch das praktische Denken der Kaufleute und die Kleinräumigkeit der politischen Struktur und Verwaltung, nahmen die Bürger größeren Anteil am öffentlichen Leben. Die Städte entwickelten sich zu Zentren der klassischen griechischen Kultur und Wissenschaft. Auch die Randgebiete des Mittelmeeres und des Schwarzen Meeres wurden infolge der Gründung von Pflanzstädten hellenisiert. Der ionischen Periode gehören vor allem die ersten großen Naturphilosophen an: Thales, Anaximandros und Anaximenes. In dieser Zeit, in der sich das europäische Denken herausbildete, entstand in enger Verbindung mit der Entwicklung der Logik auch das deduktive Vorgehen in der Mathematik.

Das fast völlige Fehlen unmittelbarer Quellen verhindert eine genaue Rekonstruktion dieses einmaligen Vorganges, zumal die uns überlieferten Berichte aus späterer Zeit oft aus einer bestimmten Sicht geschrieben und daher tendenziell gefärbt sind. Proklos (5. Jh. n. Chr.) berichtet in seinem Euklid-Kommentar unter Benutzung historischer Mitteilungen des Aristoteles-Schülers Eudemos (um 320 v. Chr.) an verschiedenen Stellen von Thales von Milet (um 600 v. Chr.). Er sei nicht nur der erste griechische Philosoph, sondern auch der erste Mathematiker gewesen. Er habe die Mathematik von Ägypten nach Griechenland gebracht und selbst viele Entdeckungen gemacht. Laut Herodot, der ihm zeitlich am nächsten stand, war Thales von phönizischer Abstammung — etwa 300 Jahre vor seiner Lebenszeit hatten die Griechen das phönizische Alphabet übernommen. Astronomische Kenntnisse der Babylonier dürften Thales die Vorhersage einer Sonnenfinsternis ermöglicht haben, die dann 585 während der Schlacht zwischen den Lydern und Persern am Halys eintraf und zum Abbruch des Kampfes führte.

Etwas jünger als Thales war der bis zur Mitte des 6. vorchristlichen Jahrhunderts wirkende ionische Naturphilosoph Anaximandros aus Milet. Er soll den Gnomon (ein aus einem senkrechten Stab, der auf einer horizontalen Platte befestigt ist, bestehendes Instrument zur Messung des Sonnenschattens) aus Babylon nach Griechenland gebracht haben. Auch entwickelte Anaximandros ein mathematisch gegliedertes Weltsystem: die Erde, im Zentrum der Welt befindlich, habe die Gestalt einer Säulentrommel, deren Höhe ein Drittel ihres Durchmessers betrage; Fixsternhimmel, Mond und Sonne umkreisen die Erde wie sich drehende Reifen in den Abständen von $1 \cdot 3 \cdot 3$, $2 \cdot 3 \cdot 3$, $3 \cdot 3 \cdot 3$ Erddurchmessern (Mond und Sonne also außerhalb der Fixsternsphäre!). Man erkennt, wie geometrische, durch elementare Zahlenverhältnisse bestimmte Ordnungsvorstellungen dieses frühe Weltbild prägen. Geometrie und Symmetrie dienen der Veranschaulichung der die Natur durchziehenden Gesetzmäßigkeiten.

Hier, am Beginn der griechischen Naturwissenschaft, steht den frühen Denkern noch keine ausgebildete mathematische Theorie zur Verfügung. Dennoch greifen sie quasi auf deren erste Bausteine zurück, wenn sie meinen, anhand einfacher Zahlengesetzmäßigkeiten und elementarer geometrischer Figuren ihre Weltvorstellung verdeutlichen zu können. Fritz Krafft vertritt in seiner lesenswerten Darstellung der antiken Wissenschaft [Kraft 1971, S. 200] die Ansicht, man könne für die Zeit des 6. und frühen 5. Jahrhunderts „die Mathematik noch nicht als Hilfsmittel des Erkennens der Natur und ihrer Formen bezeichnen . . . , weil der Eigenbereich der Mathematik als einer nur im Geiste des Menschen entstandenen und bestehenden Wissenschaft erst . . . seit Mitte des 5. Jahrhunderts erkannt und entdeckt wurde.“ Damit setzt er implizit als „Mathematik“ eine vom menschlichen Geist schon weit ausgebildete Theorie voraus, die sich als „Hilfsmittel“ einsetzen läßt. Die Entstehung dieses „Eigenbereichs der Mathematik“ geschah, wie im Verlauf dieser Geschichte der Geometrie noch mehrfach deutlich werden wird, selbst in enger Beziehung zur äußeren Wirklichkeit: das Modell der Anaximandros erlaubt uns einen Blick in die Frühphase dieser Entwicklung. Die Analyse von in der Natur vorkommenden Strukturen führte dann immer wieder zu Ausbildung neuer mathematischer Theorien, die ihrerseits wieder zur Erklärung oder Veranschaulichung weiterer Natur- (später auch ökonomischer, gesellschaftlicher und anderer) Phänomene herangezogen wurden. Die wechselseitige Verflechtung von empirischer Beobachtung und wissenschaftlicher Theoriebildung ist ein Charakteristikum nicht nur der Naturwissenschaften, sondern auch der geschichtlichen Entwicklung des mathematischen Denkens. Damit soll nicht geleugnet werden, daß es immer wieder Phasen gab, in denen die Anstöße zum Ausbau der mathematischen Theorien aus der Mathematik selbst kamen, innermathematische Impulse also bestimmend waren, während in anderen Fällen externe Anforderungen zu Neuentwicklungen Anlaß gaben.

Doch zurück zu den frühen Naturphilosophen, die oft auch unter dem Namen der Vorsokratiker zusammengefaßt werden. Der Generation nach Anaximandros gehörte Hekataios von Milet an (geboren etwa 560). Eine große Reise führte ihn nach Ägypten, andere in das persische Reich und zum Skythenland an der Nordküste des Schwarzen Meeres. Schriftliche Zeugnisse durch eigene Erfahrungen ergänzend, entwarf Hekataios (im Anschluß an Anaximandros, dem auch das erste Erdbild zugeschrieben wird) eine Karte der damals bekannten Welt (Oikumene). Da Hekataios über viele Gegenden nur sehr vage Informationen besaß, war er gezwungen, eine Schematisierung vorzunehmen. Charakteristisch ist dabei, wie er sich dazu geometrischer Vorstellungen bediente. Die als Kreisscheibe vorgestellte Erde teilte er durch einen Durchmes-

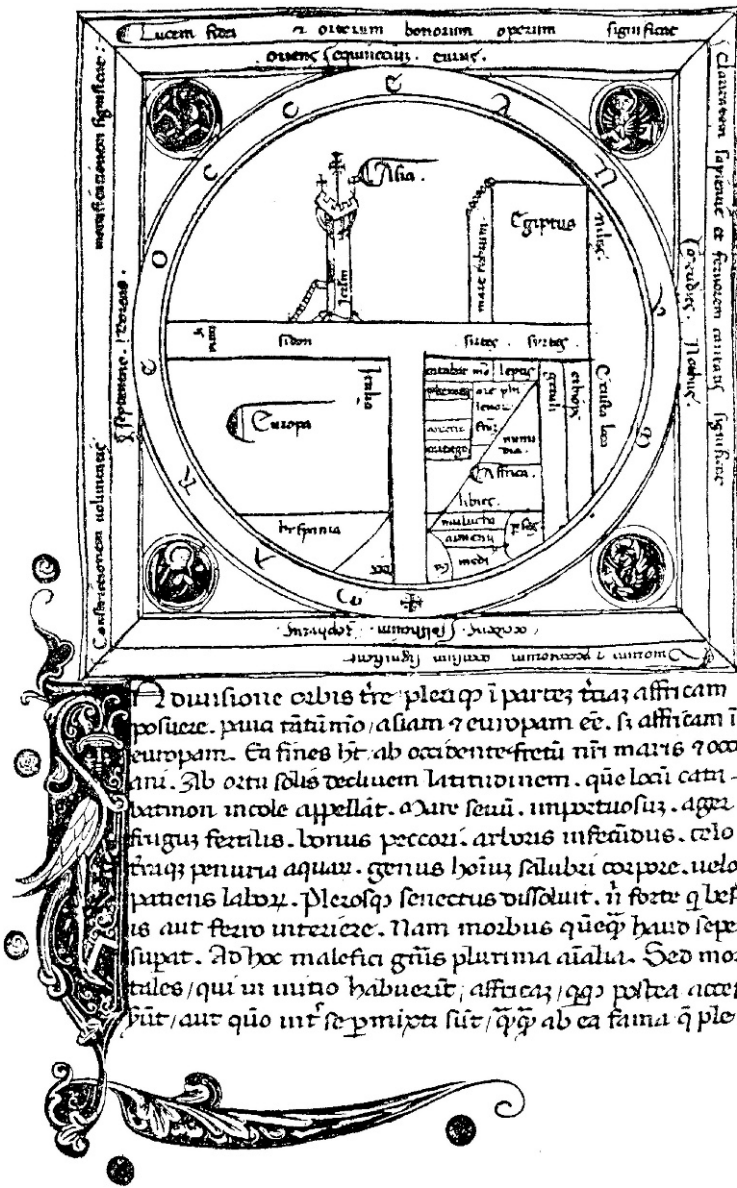


Abb. 2.1.1 Weltkarte mit OT-Darstellung

[Aus einer Sallust-Handschrift des 14. Jhs., wiedergegeben von G. Leidhäuser in *Mappae Mundi*, Safari-Verlag Berlin 1958]

ser in zwei Halbkreise. Der nördliche stellte Europa dar, der südliche wurde durch den vom Mittelmeer bis in den südlichen Okeanos reichenden Nil in zwei gleichgroße Viertel zerlegt: das westliche zeigt Libya (Name für den damals bekannten Teil Afrikas), das östliche Asia. Der Geschichtsschreiber Herodot bemerkte dazu etwa 150 Jahre später:

„Ich muß lachen, wenn ich so manche Leute Erdkarten zeichnen sehe, die doch die Gestalt der Erde gar nicht richtig zu erklären wissen. Sie zeichnen den Okeanos rund um die Erde herum fließend und so regelmäßig wie einen Kreis [Krafft 1971, S. 175].“

Diese OT-Form (worin der umfassende Kreis, das O, den kreisförmig gezeichneten Ozean darstellt, der horizontale Querbalken des T in der Regel rechts den Nil und links den Bosphorus und den Eingang zum Schwarzen Meer, der Stamm des T das Mittelmeer, vgl. Abb. 2.1.1) wurde bis zum ausgehenden Mittelalter bestimmend für die Gestaltung von Erdkarten im europäischen Bereich. (Zur Tradition der Ptolemaios-Karten vgl. Abschnitt 5.2.)

Oberstes Ziel dieser Art von Darstellung ist nicht die Detailtreue, wie wir sie heute von geographischen Karten erwarten, sondern das Bestreben, das Prinzipielle und Allgemeine in einprägsamer Form vor Augen zu führen. In ähnlich geometrisierender Weise beschrieb Hekataios das Skythenland und den Norden Libyens als durch Parallelstreifen unterteilte Rechtecke, in denen die verschiedenen Volksstämme leben.

2.1.2 Thales

Thales wird seit dem 4. Jh. v. Chr. als einer der Sieben Weisen bezeichnet. Von den Aussagen, die ihm als Mathematiker zugesprochen werden, hat die ersten vier der spätantike Neuplatoniker Proklos überliefert, der sich — wie schon gesagt — indirekt auf die nicht erhaltene Mathematikgeschichte des Eudemos von Rhodos stützen konnte. In Kurzform werden diese Sätze oft sinngemäß wie folgt wiedergegeben:

1. Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich (Euklid, Elemente I,5).
2. Die Scheitelwinkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden sind gleich (Euklid I,15).
3. Ein Dreieck ist durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bestimmt, oder anders: Zwei Dreiecke, die in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, stimmen in allen Stücken überein (Euklid I, 26).
4. Der Durchmesser halbiert den Kreis.

Hören wir zum Vergleich, in welcher Form z. B. der erste und dritte Satz bei Proklos formuliert sind:

„Heil dem alten Thales, dem Entdecker vieler anderer und besonders dieses Theorems! Denn man sagt, er habe als erster erkannt und ausgesprochen, daß in jedem gleichschenkeligen Dreieck die Basiswinkel gleich sind, habe aber in altertümlicher Weise für „gleich“ die Bezeichnung „ähnlich“ gebraucht [Proklos 1945, 341-42]“

und

„Eudemos aber führt in seiner „Geschichte der Geometrie“ diesen Lehrsatz auf Thales zurück. Denn bei der Art und Weise, auf die er die Entfernung der Schiffe auf hoher See bestimmt haben soll, erklärt Eudemos die Heranziehung desselben als unerlässlich [Proklos 1945, 409].“

Man bemerkt sofort, daß hier meistens von elementaren Symmetriebeziehungen die Rede ist. Daß Thales diese als erster „gefunden“ oder ausgesprochen haben soll, kann höchstens bedeuten, er sei der erste Grieche gewesen, der diese Aussagen explizit formulierte. Man hat auch daran gedacht, es könne gemeint sein, er habe erste Begründungen für ihre Richtigkeit vorgebracht, also Beweisüberlegungen für diese Sätze angestellt. Auf wie unsicheren Füßen alle solche Vermutungen stehen, zeigt das zweite der beiden Proklos-Zitate. Darin wird Thales die Kenntnis eines Verfahrens zur Bestimmung der Entfernung von Schiffen auf hoher See zugeschrieben (vgl. Aufgabe 2.1.1). Dies muß einen geometrischen Hintergrund gehabt haben, woraus Eudemos folgerte, der dritte Satz sei auf Thales zurückzuführen. Doch das Verfahren könnte dieser aus Ägypten mitgebracht haben.

Dazu kommen zwei weitere, miteinander zusammenhängende Sätze, wovon der zweite heute vor allem mit dem Namen des Thales in Verbindung gebracht wird:

5. Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich und halbieren einander.

6. Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter.

Der letztgenannte Satz, als Satz des Thales bekannt, ist durch die Geschichtsschreiberin Pamphile (1. Jh. n. Chr.) überliefert, wie Diogenes Laertius (3. Jh.) berichtet. Zum Dank für diese grundlegende Einsicht soll Thales den Göttern einen Ochsen geopfert haben!

Wie wir schon aus den Abschnitten über die vorgriechische Mathematik wissen, gehören zu den ältesten Elementen der Geometrie (neben dem Punkt) die

gerade Linie und der Kreis. Dazu kommt der bei Thales erstmals auftretende Begriff des Winkels, entstehend durch den Schnitt zweier Geraden. Sehr früh muß man auch erkannt haben, daß unter allen Winkeln der rechte Winkel ($R = 90^\circ$) eine besondere Stellung einnimmt. Er erscheint immer dann, wenn sich zwei Geraden symmetrisch schneiden. Die zugehörige Konstruktion steht in EUKLIDS *Elementen* I, 9–11. Im Prinzip erhält man sie fast spielerisch, wenn man von einer gegebenen Strecke ausgeht und mit dem Zirkel bei gleicher Öffnung von deren Endpunkten aus zwei Kreise zieht (die Verbindungslinie der beiden Kreisschnittpunkte steht „aus Symmetriegründen“ senkrecht auf der Ausgangsstrecke):

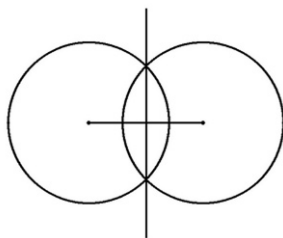


Abb. 2.1.2 Konstruktion eines rechten Winkels

Jetzt folgt leicht die Konstruktion eines Rechtecks mit vier rechten Winkeln und die Einsicht, daß jeweils gegenüberliegende Seiten gleich lang sein müssen. Zeichnet man noch die beiden Diagonalen ein, so sind auch diese gleich lang und halbieren sich gegenseitig. Also wird ein um ihren Schnittpunkt durch eine Ecke des Rechtecks gezogener Kreis auch durch die drei anderen Ecken gehen:

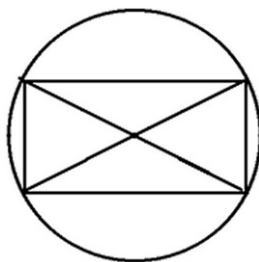


Abb. 2.1.3 Rechteck mit Umkreis

An dieser Figur lassen sich fast alle mit dem Namen von THALES in Verbindung gebrachten Aussagen demonstrieren.

Die Gleichheit der Scheitelwinkel gemäß Aussage 2 wäre auf die Gleichheit der zugehörigen Kreisbögen zurückgeführt, die ihrerseits durch die Gleichheit gegenüberliegender Seiten des Rechtecks bedingt ist und die Gleichheit der Diagonalen (Satz 5) nach sich zieht. Satz 1 über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck wäre wieder als Folge der Symmetrie am Rechteck ablesbar; Aussage 3 ebenso (zumindest für die beiden Spezialfälle des gleichschenkligen und des rechtwinkligen Dreiecks). Aussage 6 würde dadurch untermauert, daß in beiden durch eine Diagonale getrennten Halbkreisen die gleiche Figur liegt, nämlich je eine Hälfte des Rechtecks, wobei ja die Konstruktion mit einem beliebigen Rechteck begonnen wurde und die Sachlage für alle Rechtecke die gleiche ist.

Wir lesen dann auch unmittelbar an der Figur den Satz ab: „Die Winkelsumme im Dreieck ist zwei Rechte“ (zunächst für das rechtwinklige Dreieck, dann aber auch für beliebige Dreiecke, indem wir noch eine Höhe einzeichnen). In der antiken Tradition wird diese Konsequenz jedoch nicht THALES zugesprochen, sondern „den Alten“, d.h. vermutlich erst der auf ihn folgenden Generation. Auch sei der Satz getrennt für das gleichseitige und das gleichschenklige Dreieck bewiesen worden. Für das letztere könnte wieder die Rechteckfigur im Kreis als Beweisgrundlage gedient haben. Für das gleichseitige Dreieck läge es nahe, an das dem Kreis einbeschriebene Sechseck zu denken, das man als eine der geometrischen Urfiguren anzusehen hat:

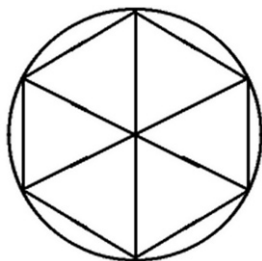


Abb. 2.1.4 Das dem Kreis einbeschriebene regelmäßige Sechseck

Hier ist jeder Zentriwinkel gleich 60° oder gleich einem Sechstel von vier Rechten, und da er jeweils einer Dreiecksseite der Länge r (r = Radius) gegenüberliegt, betragen auch die beiden anderen Winkel je 60° , also $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ = 2R$. Auch in diesem Fall bildet also die Basis des logischen Schlusses wieder eine Symmetriebeziehung: da die drei Seiten gleich lang sind, gibt es keinen Grund für die drei Winkel, nicht ebenfalls gleich groß zu sein. — Solche einfachen Symmetriebeziehungen stehen zweifellos am Anfang jeder geometrischen Theorie.

Schließlich wird in antiken Quellen von Thales noch berichtet, er habe die Höhe großer Gebäude mit Hilfe ihres Schattens bestimmt. Dazu habe er die Tageszeit abgewartet, in der sein eigener Schatten ebenso lang wie er selbst gewesen sei. Das impliziert, daß er mit Ähnlichkeitsbetrachtungen umzugehen wußte (s. Aufgabe 2.1.2).

2.1.3 Pythagoras und die Pythagoreer

Leider gibt es über die frühe Entwicklung der Mathematik bei den Griechen auch für die Folgezeit keine sicheren Mitteilungen, sieht man davon ab, daß in der Chronologie auf Thales Pythagoras von Samos folgt (vgl. Bd. 1, Abschnitt 4.3). Sein großes Wissen soll sich Pythagoras auf weiten Reisen erworben haben, wobei vermutet wird, seine mathematischen Kenntnisse würden vorwiegend aus babylonischen Quellen stammen. Er wanderte bald nach der Mitte des 6. Jhs. nach Kroton in Unteritalien aus, wo er eine religiös-philosophische Lebensgemeinschaft gründete und schon früh zu einer mythischen Figur wurde. Was in der Geometrie von Pythagoras selbst (er starb um 500 v. Chr.), was von seinen Anhängern stammt, läßt sich heute nicht mehr mit Gewißheit entscheiden. Schon Aristoteles nannte sie „die Pythagoreer“; diese Schule erlosch im Laufe des 4. Jhs. (Sie darf nicht verwechselt werden mit den sog. Neupythagoreern, die ab 100 n. Chr. an die alten Lehren anknüpften — zu ihnen zählen u. a. die Mathematiker Porphyrios und Iamblichos.) In dem schon erwähnten, leider nur indirekt überlieferten historischen Bericht des Eudemos steht, Pythagoras habe das Wissen um die Geometrie zu einer „Freien Lehre“ umgebildet. Das soll wohl heißen, zu einer um ihrer selbst willen betriebenen Wissenschaft — im Gegensatz zum Handeln nach vorgegebenen Regeln aus praktischen Lebenserfordernissen oder sakralen Zwecken heraus. Somit stehen wir hier am Beginn der Entwicklung der reinen Mathematik.

Im Kern der religiös-philosophischen Lehre des Pythagoras stand die Zahl. Ausgehend von der Einheit (monas) und den natürlichen Zahlen 2, 3, 4, ..., entwickelten die Pythagoreer die ersten Grundlagen der Zahlentheorie ebenso wie eine auf einfachen Zahlverhältnissen basierende Musiktheorie.

Bei der Beschäftigung mit mathematischen Fragen kam es zu der umstürzenden Erkenntnis der Existenz irrationaler Verhältnisse. Das verursachte nach Ansicht vieler Forscher die erste Grundlagenkrise der Mathematik. Die tragische Entdeckung soll um 450 v. Chr. Hippasos von Metapont gemacht haben; der Legende zufolge wurde er für den Verrat dieses Geheimnisses aus dem pythagoreischen Bund ausgestoßen und kam im Meer um.

Ein möglicher Auslöser könnte das Studium des Verhältnisses von Seite s und Diagonale d eines Quadrates gewesen sein: der pythagoreische Lehrsatz ergibt ja sofort $d^2 = 2 \cdot s^2$, woraus sich unter Verwendung der Eigenschaften „gerade“ und „ungerade“ der natürlichen Zahlen rasch ein Widerspruch zur Annahme, dieses Verhältnis lasse sich in ganzen Zahlen ausdrücken, herleiten läßt. (In den Handschriften der „Elemente“ Euklids findet sich dieser Beweis am Ende des X. Buches; Aristoteles bezog sich in seinen Schriften wiederholt auf diesen Widerspruchsbeweis.)

Auch rein geometrisch kann dieser Widerspruch aufgewiesen werden. Das ist nicht nur beim Quadrat als der einfachsten Figur möglich; es kommt für den ersten Nachweis der Existenz nichtrationaler Verhältnisse vor allem auch das reguläre Fünfeck in Frage. Denn das regelmäßige Pentagramm (der fünfzackige Stern) war das Ordenszeichen der Pythagoreer. Man erhält es, indem man im Fünfeck die fünf Diagonalen einzeichnet (Abb. 2.1.5). Wie beim Quadrat läßt sich die Länge einer Diagonalen nicht rational zur Länge der Seite des Fünfecks in Beziehung setzen. Denn in beiden Fällen führt das aus dem Meßvorgang abgeleitete Verfahren der Wechselwegnahme (s. u.) zu einem nicht-endenden Prozeß, also zu der aufregenden Entdeckung der Existenz irrationaler Verhältnisse. Da man annehmen darf, daß die Pythagoreer die Eigenschaften ihres Bundessymbols intensiv untersuchten, ist die Vermutung nicht ganz abwegig, ihr Glaube, alles lasse sich in ganzen Zahlen ausdrücken, sei zuerst beim Studium des Pentagramms bzw. des Pentagons (Fünfecks) erschüttert worden.

Das Verfahren der Wechselwegnahme (das arithmetisch dem euklidischen Algorithmus entspricht) ist eine Weiterentwicklung des normalen Meßvorganges: man nimmt die kürzere der beiden Strecken so oft wie möglich von der längeren weg. Geht das ohne Rest auf, hat man ein ganzzahliges Verhältnis (ein Vielfaches). Bleibt ein Rest (der dann kleiner als die kürzere Strecke sein muß), nimmt man diesen Rest so oft wie möglich von der kürzeren weg. Geht das, ohne daß ein weiterer Rest übrigbleibt, dann ist dieser Rest ein gemeinsames Maß für beide Strecken, so daß sie in rationalem Verhältnis zueinander stehen. Andernfalls wird das Verfahren (falls notwendig, mehrfach) mit dem neu entstandenen (kleineren) Rest wiederholt. Bleibt irgendwann kein Rest zurück, ist der vorhergehende ein gemeinsames Maß für alle in dieser Prozedur erzeugten Strecken, also auch für die beiden Ausgangsstrecken. Diese heißen daher *kommensurabel*: sie sind mit einem gemeinsamen Maß exakt meßbar, d.h., sie stehen in rationalem Verhältnis zueinander. Bricht die Wechselwegnahme aber nicht ab, sind die Ausgangsstrecken *inkommensurabel* zueinander; sie besitzen kein rationales Verhältnis.

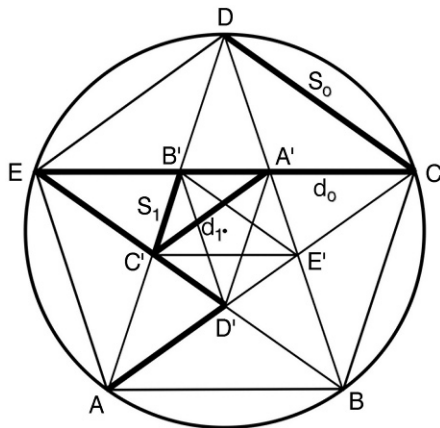


Abb. 2.1.5 Das dem Kreis einbeschriebene regelmäßige Fünfeck

Am regelmäßigen Fünfeck könnte Hippasos die Irrationalität von Diagonale und Seite wie folgt nachgewiesen haben (die Bezeichnungen beziehen sich auf Abb. 2.1.5). Die fünf Diagonalen (der Länge d_0) des Ausgangsfünfecks sind jeweils parallel zu einer Seite (s_0) und bilden im Inneren ein neues regelmäßiges Fünfeck, dessen Diagonalen (der Länge d_1) ebenfalls die gleichen fünf Richtungen einnehmen. Folglich sind $CDED'$ und $AC'A'D'$ zwei (verschieden große) Rauten mit je vier gleichen Seiten. Daher hat der größere Abschnitt einer Diagonalen, z.B. ED' , die Länge einer Seite s_0 des Ausgangsfünfecks, während der kleinere Abschnitt längengleich mit einer Diagonalen d_1 des inneren Fünfecks ist. Da außerdem das Mittelstück von d_0 identisch ist mit der Seite s_1 des inneren Fünfecks, verläuft die Wechselwegnahme wie folgt:

$$d_0 - s_0 = d_1 < s_0, \quad s_0 - d_1 = s_1 < d_1,$$

$$d_1 - s_1 = d_2 < s_1, \quad s_1 - d_2 = s_2 < d_2,$$

$$d_2 - s_2 = d_3 < s_2, \quad \dots$$

Sie bricht also nicht ab und liefert demzufolge kein gemeinsames Maß für Seite und Diagonale (s. Aufgabe 2.1.3).

Da alle wesentlichen Entdeckungen und Theorien der Pythagoreer auf dem Gebiet der Geometrie in die Elemente Euklids eingegangen sind, worüber in Abschnitt 2.3 ausführlich berichtet wird, wenden wir uns jetzt dem sog. „Goldenen Zeitalter“ der griechischen Naturwissenschaft und Mathematik zu.

2.2 Athenische Periode

Wie der Name sagt, lag das Zentrum der mathematischen Forschung in dieser rund 150 Jahre andauernden Periode (ca. 450 bis ca. 300) in Athen. In der Philosophenschule Platons (429–348), der Akademie, wurde das Idealbild der Mathematik als einer rein deduktiv herleitbaren Wissenschaft ausgebildet, das die Entwicklung dieser Wissenschaft bis heute so außerordentlich stark prägte. Für Platon nahm die Mathematik eine Zwischenstellung zwischen dem Reich der reinen Ideen und der Welt der sinnlich erfahrbaren Dinge ein. Im Umkreis der Akademie entstanden viele der Theorien, die uns durch die Elemente des Euklid in systematisierter Form überliefert wurden — frei von jedem Anwendungsbezug.

2.2.1 Eudoxos

Genialster Mathematiker unter Platons Zeitgenossen ist Eudoxos von Knidos (408? – 355?). Er entwickelte seine Theorie des Irrationalen aus dem Bestreben heraus, den Verhältnissbegriff auch auf irrationale Verhältnisse auszudehnen. Seine zweite großartige Leistung war die Entwicklung der Exhaustionsmethode (Euklid, Elemente XII), der Basis für die Inhaltsbestimmung gekrümmter Flächen und Volumina, die ein Jh. später von Archimedes so meisterhaft angewandt wurde.

Die Grundannahme der Pythagoreer, alle Zahlen seien aus einer Einheit zusammengesetzt, die Einheit selbst aber sei unteilbar, hatte ihnen den Aufbau einer elementaren Proportionenlehre ermöglicht. Das Verhältnis von zwei gegebenen Zahlen a, b war demnach ein rationales, wenn ein gemeinsames Maß k existiert, von dem beide ein ganzzahliges Vielfaches sind: $a = n \cdot k$, $b = m \cdot k$; $n, m \in \mathbb{N}$. Ergibt sich, daß in entsprechender Weise für ein Zahlenpaar c, d gilt: $c = n \cdot k'$, $d = m \cdot k'$, so ist $a : b = c : d$. In diesem Fall ist $ma = nb$ und $mc = nd$. Ist aber für irgend zwei ganze Zahlen m', n' $m'a < n'b$, dann ist auch $m'c < n'd$, und entsprechend für die Relation $>$. Dies wird in den „Elementen“ Euklids in Definition 20 des 7. Buches folgendermaßen formuliert:

Zahlen **stehen in Proportion**, wenn die erste von der zweiten Gleichvielfaches oder derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen ist wie die dritte von der vierten.

Im Gegensatz zu den aus Einheiten gebildeten (natürlichen) Zahlen sind Strecken unendlich oft teilbar; daher kann nicht unbedingt ein gemeinsames Maß vorausgesetzt werden, so daß diese elementare Proportionenlehre versagt. Eudoxos löste dieses Dilemma durch die Konstruktion einer sowohl auf rationale

wie irrationale Größen anwendbaren Proportionenlehre. Die eben skizzierten Überlegungen mögen ihm dabei den Weg gewiesen haben. Denn er machte diese Relationen zur Grundlage der Definition von Verhältnisgleichheit von zwei Paaren von Größen auch in jenen Fällen, in denen nicht gesichert ist, ob ein rationales Verhältnis vorliegt. Das ist am Beginn des 5. Buches der „Elemente“ Euklids als Definition 5 und 6 in folgenden Worten zum Ausdruck gebracht:

Man sagt, daß Größen **in demselben Verhältnis stehen**, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind;
Und die dasselbe Verhältnis habenden Größen sollen **in Proportion stehend** heißen.

Auf diese Weise befreite Eudoxos die Geometrie von den pythagoreischen Fesseln, der Beschränkung auf rationale Größen. Im 5. Buch der „Elemente“ wird dann die so begründete Verhältnislehre systematisch aufgebaut.

Vielleicht ist dem Leser aufgefallen, daß die simple Definition (für Proportionen, die aus natürlichen Zahlen gebildet sind) im 7. Buch, die wesentlich raffiniertere Definition aber schon im 5. Buch der „Elemente“ gebracht wird. Dies ist eines der Beispiele, das dem Historiker die Vorgehensweise Euklids offenbart: er vereinigte Vorlagen unterschiedlicher Art in seinem Werk und benutzte offenbar im 7. Buch eine ältere Definition, die durch die im 5. Buch vorgestellte, auf Eudoxos zurückgehende Definition eigentlich schon überholt war. Eine andere, sich in solchen Fällen anbietende Erklärung liegt in der Annahme, im langen Prozeß der Überlieferung seien Teile durcheinander geraten. Solche Fragen stellen sich nicht nur bei Euklid: die überlieferten Texte sind Abschriften von Abschriften oder von Bearbeitungen oder von Übersetzungen bzw. von allem zusammen, nie die eigenhändigen Niederschriften der Verfasser selbst. Nur durch sorgfältiges Vergleichen und kritisches Abwägen der Herausgeber, die die jeweils aktuellen Forschungsergebnisse berücksichtigen müssen, entstehen jene Textausgaben, die dann allzu leicht als ‘definitive Ausgaben’ angesehen werden.

Neben Eudoxos ist vor allem der ebenfalls hoch begabte Theaitetos (415? – 369?) zu erwähnen, dem Platon einen eigenen Dialog widmete. Zu seinen Schöpfungen gehört eine systematische Konstruktion der quadratischen Irrationalitäten (Elemente X) und, darauf gestützt, der Existenzbeweis der fünf regelmäßigen (oder platonischen) Körper (Elemente XIII, wo auch nachgewiesen wird, daß es nicht mehr als fünf dieser Körper geben kann).

Auch Aristoteles (384-322) wies der Mathematik eine zentrale Rolle unter den Wissenschaften zu, wenngleich sich seine Auffassung vom Wesen der Mathematik sehr von der platonischen unterschied. Denn er vertrat die Ansicht, die mathematischen Objekte seien durch Abstraktion aus der Anschauung gewonnen. Vor allem interessierte ihn das Mathematische in Verbindung mit der Ausarbeitung seiner Syllogistik. In seine „Physik“ nahm er Untersuchungen auf über das Unendliche (das nach ihm nur potentiell, aber nicht aktuell existieren kann) und das Kontinuum (wie Raum und Zeit), das seiner Ansicht nach nicht aus Punkten zusammengesetzt sein kann.

Zeitlich endet die Athenische Periode etwa mit dem großen mathematischen Systematiker Euklid, wenngleich dessen Wirkstätte das Museion in Alexandria war. Seine Bedeutung für die Geometrie rechtfertigt, ihm einen eigenen Abschnitt (2.3) zuzuweisen.

Da Euklid in seinen Elementen jedoch nur mit Zirkel und Lineal ausführbare Konstruktionen behandelt, muß hier noch auf die Entdeckung der Kegelschnitte und die Entwicklung ihrer Theorie eingegangen werden. Heute, wo man Kurven in der Regel durch ihre (algebraischen oder transzendenten) Gleichungen beschreibt (wie es Descartes im 17. Jh. lehrte; vgl. Kap. 6), würde man den Kreis unter die Kegelschnitte einordnen. Für die Griechen waren dagegen bei der ersten Systematisierung der Geometrie die Konstruktionsmittel ausschlaggebend — daher bestimmen die mit Lineal und Zirkel konstruierbaren Figuren den Bereich der (Elementar-)geometrie bis auf den heutigen Tag.

2.2.2 Die sogenannten Klassischen Probleme der Mathematik

Naturgemäß mußten die griechischen Mathematiker gelegentlich auf Probleme stoßen, die sich einer exakten Lösung mittels dieser beiden (theoretisch gedachten) Instrumente trotz allen Bemühens entzogen. Drei davon haben in der Geschichte der Geometrie eine besondere Bedeutung erlangt; sie werden oft unter dem Namen der „drei klassischen Probleme der Geometrie“ zusammengefaßt. Es sind das delische Problem oder die Würfelverdoppelung, die Winkeldreiteilung und die Kreisquadratur. Da jedoch die Entscheidung über die wahre „Natur“ dieser Probleme (sie konnte erst im 19. Jh. gefällt werden) mit algebraischen Hilfsmitteln erzielt wurde, ist es heute üblich, alle drei in der Algebra zu behandeln. Das Resultat der Untersuchung wird den Lesern bekannt sein: Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung führen auf kubische Gleichungen, das Problem der Kreisquadratur dagegen ist transzendent, kann also durch keine algebraische Gleichung (noch so hohen Grades) erfaßt werden.

Aus heutiger Sicht betrachtet, bedeutet das, daß die Griechen zur Lösung dieser Aufgaben entweder weitere Kurven (über Gerade und Kreis hinaus) einführen mußten (teilweise durch den Entwurf komplizierterer Zeicheninstrumente bestimmt), oder das Lineal in einer in der Geometrie sonst nicht erlaubten Weise einzusetzen sich genötigt sahen. Einen Überblick über ihre vielfältigen Anstrengungen bietet die folgende Tabelle. Einige Beispiele für die verschiedenen Möglichkeiten seien hier vorgestellt — teilweise im Vorgriff auf die zeitlich späteren Abschnitte, um den Zusammenhang zu wahren. Eine eingehende Darstellung findet man z.B. in [Heath 1921, Bd. 1, Kap. VII].

Die Würfelverdoppelung

Das Problem der Würfelverdoppelung hat einen legendären, in voneinander abweichenden Versionen überlieferten Ursprung. Laut Theon von Smyrna forderte der Gott durch einen Orakelspruch von den von der Pest geplagten Deliern, sie sollten einen Altar von der doppelten Größe des bestehenden errichten (vgl. hierzu auch Abschnitt 3.3.1). Das habe die Architekten in große Verlegenheit versetzt, da sie nicht wußten, wie man einen Körper verdoppele. Nach anderer Überlieferung versuchte man der Aufforderung, das würfelförmige Grabmal des Glaukos zu verdoppeln, dadurch zu folgen, daß man die Länge der Seiten verdoppelte, dabei den Irrtum bemerkte und nach der richtigen Lösung zu forschen begann (vgl. die Wiedergabe der Texte in [Waerden 1956, 262–266]). Rein geometrisch betrachtet, ergibt sich die Fragestellung leicht als Verallgemeinerung des Problems der Quadratverdoppelung (vgl. hierzu auch Abschnitt 3.3.1); algebraisch betrachtet, ist es die Ausdehnung des Quadratwurzelnziehens auf das Kubikwurzelnziehen, womit sich schon die Babylonier beschäftigt hatten.

In Griechenland führte um die Mitte des 5. Jhs. vor Chr. Hippokrates von Chios das Problem auf die Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen x, y zwischen der Würfelseite a und ihrem Doppelten zurück:

$$a : x = x : y = y : 2a. \quad (2.2.1)$$

Diese Bildung zweier geometrischer Mittel x, y zwischen zwei gegebenen Größen (hier: $a, 2a$) entspricht einer reinen kubischen Gleichung, wie man sich leicht überlegt. Es war diese Fassung der Problemstellung, von der praktisch alle späteren Versuche einer Lösung ihren Ausgang nahmen.

Die für die Würfelverdoppelung von Hippokrates gefundene Beziehung (2.2.1) inspirierte um 350 v. Chr. den Eudoxos-Schüler Menaichmos dazu, diese beiden Proportionalen mit Hilfe einer Parabel und einer gleichseitigen Hyperbel zu bestimmen und auf diese Weise das delische Problem konstruktiv zu lösen (s. Aufgabe 2.2.1).

Nicht gesichert ist, ob Menaichmos Parabel und Hyperbel bereits als Schnitte eines senkrechten Kreiskegels erkannt hat oder ob er lediglich (modern formuliert) untersuchte, wie aus der Funktionsbeziehung $y^2 = 2ax$ die Verwandlung aller Rechtecke, deren eine Seite die Länge $2a$ hat, in flächengleiche Quadrate der Seitenlänge y folgt, bzw. aus $xy = 2a^2$ die Umwandlung eines Rechtecks $2a \cdot a$ in alle möglichen anderen, die flächengleich dazu sind. Dazu konnte er sich des von Euklid im 2. Buch der Elemente beschriebenen Verfahrens der Flächenanlegung bedienen.

Der Zusammenhang dieser Kurven mit dem Kreiskegel war jedenfalls (um 330) Aristaios bekannt. Er erzeugte die Hyperbel (genau gesagt: einen Ast derselben), die Parabel und auch die Ellipse als Schnitte senkrecht zu einer Erzeugenden des stumpfen, des rechten bzw. des spitzen (senkrechten) Kreiskegels. Er behandelte diese Kurven in einer (verlorenen) Abhandlung über solche „körperliche“ Örter — so genannt, weil sie vom Körper des Kegels abgeleitet wurden. Alle übrigen Kurven höherer Ordnung (einschließlich der transzendenten) wurden als „lineare Örter“ bezeichnet (nicht zu verwechseln mit dem heute üblichen Begriff „linear“).

Auch eine von Euklid verfaßte Abhandlung über Kegelschnitte ist nicht überliefert. Der Grund für den Verlust dürfte bei beiden Werken der gleiche sein: sie wurden übertroffen durch die in acht Bücher gegliederte Kegelschnittlehre des Apollonios von Perga. Dieser gehört allerdings, ebenso wie der ihn an Bedeutung noch überragende Archimedes, schon der alexandrinischen Epoche an.

Ein anderes, auf der Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen aufbauendes Lösungsverfahren ist die Kissoïde des Diokles, etwa um 180 v. Chr. gefunden, wovon Proklos in seinem mehr als 500 Jahre später verfaßten Euklid-Kommentar berichtet. In einen Kreis seien der senkrechte Durchmesser AB und der waagrechte Durchmesser CD eingezeichnet. Auf den Bögen $\widehat{BD}$ bzw. $\widehat{BC}$ seien die Punkte E bzw. F markiert, wobei die Bögen $\widehat{BE}$ und $\widehat{BF}$ gleich lang seien. Es seien EG und FH senkrecht auf DC gezeichnet. Die Verbindungsgerade EC schneide FH in P , einem Punkt der Kissoïde. Die weiteren Punkte erhält man, indem man die Lage von E und F variiert (Abb. 2.2.1).

Es gilt nun nachzuweisen, daß der Punkt P auf der so konstruierten Kissoïde mit den Strecken FH und HC zwei mittlere Proportionalen zwischen DH und HP liefert, daß also gilt:

$$DH : HF = HF : HC = HC : HP. \quad (2.2.2)$$

Will man die zu den beiden gegebenen Strecken a, b gehörenden mittleren Proportionalen bekommen, hat man demnach noch eine ähnliche Vergrößerung (bzw. Verkleinerung) der Strecken DM, LM, MC und MQ im Maßstab $DM : a$ vorzunehmen.

Die Winkeldreiteilung

Das klassische Problem der Teilung eines **beliebigen** Winkels in drei gleiche Teile hat viele griechische Mathematiker beschäftigt. Da sie das Problem mit Zirkel und Lineal allein nicht zu lösen vermochten, ersannen sie raffinierte Methoden mit anderen Hilfsmitteln.

Daß die Drittelung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal allein nicht zu lösen ist, wurde erst mit den Methoden der modernen Algebra bewiesen. Das Problem führt auf die gemischte kubische Gleichung:

$$x^3 - 3r^2x - r^2a = 0 \quad (2.2.4)$$

(oder eine dazu äquivalente Form). Trigonometrisch gedeutet lautet sie

$$4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha - \cos(3\alpha) = 0. \quad (2.2.5)$$

Das ist die aus der Trigonometrie bekannte Formel zur Berechnung des $\cos \alpha$, wenn $\cos(3\alpha)$ bekannt ist (vgl. dazu Aufgabe 2.2.5).

Vermutlich trat dieses Problem in den Gesichtskreis der Mathematiker, als sie versuchten, für astronomische Zwecke eine Sehnentafel aufzustellen. Wie unten im Abschnitt 2.5.5 über die Sehnentafel des Ptolemaios genauer erläutert wird, stößt man dabei auf die elementargeometrisch nicht mehr zu bewältigende Aufgabe, aus der Sehne für 3° die Sehne für 1° zu gewinnen. Auch die systematische Konstruktion regelmäßiger Vielecke über das Fünfeck und Sechseck hinaus verlangt die Vornahme von nichttrivialen Winkelteilungen: $360^\circ : 7$ beim Siebeneck, $120^\circ : 3$ bzw. $60^\circ : 3$ beim Neuneck.

Für die Teilung eines Winkels in n gleiche Teile erdachte sich Hippias von Elis eine Kurve, die später den Namen ‘Quadratrix’ erhielt, weil sie auch das Problem der Kreisquadratur beantwortet. Damit ist schon angedeutet, daß es sich um eine transzendente Kurve handeln muß! Dennoch ist sie leicht beschreibbar, da sie durch zwei einfache Bewegungen erzeugt wird. Man denke sich ein Quadrat, dessen obere Seite sich parallel zur Ausgangslage mit konstanter Geschwindigkeit zur unteren hinbewegt. In der gleichen Zeit drehe sich die linke Quadratseite um den unteren linken Eckpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit im Uhrzeigersinn derart, daß die beiden Bewegungen

zugleich beginnen und zugleich enden. Das obere Ende der sich drehenden Strecke beschreibt dann einen Viertelkreis innerhalb des Quadrates. In der Endlage fallen demnach die beiden sich bewegenden Seiten mit der unteren Quadratseite zusammen.

Es empfiehlt sich für uns, ein rechtwinkliges Koordinatensystem einzuführen, dessen x -Achse die untere Seite, dessen y -Achse die linke Seite des Quadrates ist (die Seitenlänge sei a). Der Schnittpunkt $P(x, y) = P(\rho, \phi)$ der beiden bewegten Strecken beschreibt die Quadratrix (ρ = Abstand vom Ursprung, ϕ = Winkel zwischen x -Achse und rotierender Seite, abnehmend von $\pi/2$ bis 0°). P wandert also von der oberen linken Ecke nach rechts und unten. Die Bewegungsvorschrift hat zur Folge, daß z.B. nach einem Drittel der Zeit die von oben herabkommende Seite ein Drittel ihres Weges (parallel zu sich selbst) zurückgelegt hat, gleichzeitig auch die linke Seite eine Drehung um ein Drittel von 90° , also um 30° vollzogen hat. Denkt man sich jetzt die Quadratrix gegeben, teilt die linke Quadratseite in n gleiche Teile und zieht durch den obersten Teilpunkt eine Parallele zur oberen Seite, so erhält man auf der Kurve einen Schnittpunkt. Dessen Verbindung mit dem Ursprung liefert also einen Strahl der Länge ρ , der vom Winkel $\pi/2$ den Bruchteil $\frac{1}{n}$ abgeschnitten hat. Aus der Proportionalität der Bewegungen folgt die Gleichung

$$y : a = \phi : \frac{\pi}{2} = \rho \cdot \sin \phi : a. \quad (2.2.6)$$

Die daraus unmittelbar abzuleitende Polargleichung ist transzendent — soweit die Quellen verraten, ist diese älteste transzendente Kurve früher entdeckt worden als die Kegelschnitte! Etwa zwei Generationen nach ihrem Erfinder Hippias erkannte Deinostratos die Möglichkeit, die Quadratrix auch als Hilfsmittel bei der Kreisquadratur einzusetzen (vgl. Aufgabe 2.2.2).

Ein von den Griechen häufiger verwendetes Verfahren sind sogenannte Einschiebungskonstruktionen (griechisch ‘Neusis’-Konstruktionen). Das Grundprinzip dabei ist es, eine gegebene Strecke in bestimmter Weise zwischen gegebene Kurven einzupassen. Dazu kann man die Endpunkte dieser Strecke auf einem Lineal markieren und letzteres solange verschieben, bis die beiden Punkte die gewünschte Lage einnehmen. Da in der Elementargeometrie dieses Markieren auf einem Lineal nicht erlaubt ist, spricht man auch oft von einer ‘Papierstreifenkonstruktion’.

Pappos beschrieb eine derartige Konstruktion aus klassischer Zeit für die Winkelteilung. Man bette den zu drittelnden Winkel $\alpha = \angle AOB < \pi/2$ so in ein Rechteck ein, daß der Scheitel O in der linken unteren Ecke zu liegen kommt, der eine Schenkel mit der unteren Seite zusammenfällt und der andere die Diagonale OB des Rechtecks bildet (solche Rechtecke lassen sich immer

finden). Die Eckpunkte des gewählten seien, im Gegenuhrzeigersinn bezeichnet, O, A, B, C .) Auf einem Papierstreifen markiere man die beiden Strecken $DF = FE = OB$, plaziere E so auf der über B hinaus verlängerten Geraden CB , daß D auf der Seite AB zu liegen kommt und zugleich der Papierstreifen durch O geht. Wenn diese Position experimentell gefunden ist, teilt die neue Hilfslinie $ODFE$ den gegebenen Winkel im Verhältnis $2 : 1$, d.h. er wird durch sie gedrittelt (vgl. Aufgabe 2.2.3).

Archimedes gab eine ähnliche ‘Neusis’ (Papierstreifenkonstruktion) zur Winkeldreiteilung an — durch einen Vergleich der beiden tritt das Prinzip klar hervor, das sich auf die Fünftelung, Siebtelung, ... eines gegebenen Winkels ausdehnen läßt. In einen Kreis mit Zentrum O und Radius r sei der zu dritteln-de Winkel α mit Scheitel in O eingebettet — sagen wir so, daß der zugehörige Bogen AE in die linke Hälfte zu liegen kommt und E sein unterer, A sein oberer Endpunkt sei. Dann werde der Kreisdurchmesser EOD eingezeichnet und nach rechts über D hinaus verlängert. Auf dem Papierstreifen wird die Strecke $BC = r$ markiert und dann der Streifen so an die beschriebene Figur angelegt, daß C auf dem verlängerten Durchmesser liegt, B auf dem Kreisumfang und die Verlängerung (nach links) durch A geht. Nachdem diese Position des Streifens gefunden ist (was wiederum nur experimentell zu machen ist), werden noch die beiden Radien OB und OA eingetragen. Ähnlich wie in der von Pappos beschriebenen Konstruktion entsteht dadurch ein Streckenzug aus drei gleichlangen Strecken (hier: $CB = BO = OA = r$; im vorhergehenden Fall $EF = FB = BO$), der zwischen zwei Schenkeln eines Winkels hin- und herpendelt. Er bildet mit diesen zwei gleichschenklige Dreiecke, wobei nach dem Satz vom Außenwinkel eine Winkelverdoppelung auftritt (s. Aufgabe 2.2.4).

Der eben erwähnte Streckenzug bietet eine einfache (und verallgemeinerungsfähige) Möglichkeit, die Dreiteilungsgleichung (2.2.5) (bzw. die n -Teilungsgleichung) für einen gegebenen Winkel abzuleiten. Hinweise dazu werden in Aufgabe 2.2.5 gegeben.

In der Neusis-Konstruktion, die durch Pappos überliefert ist, ging es darum, eine gegebene Strecke (oben als DE bezeichnet) an die Strecke AC seitlich so anzusetzen, daß ihre Verlängerung durch B ging (wodurch dann die Lage von C bestimmt ist). Im 2. Jh. v. Chr. ersann Nikomedes ein Instrument, das diese Forderung mechanisch zu erfüllen gestattet (vgl. [Scriba 1992]). Die damit konstruierbaren Kurven erhielten wegen ihrer Gestalt den Namen Konchoïde oder Kochloïde, auf deutsch ‘Muschelkurven’. Das Instrument besteht aus zwei T -förmig fest miteinander verbundenen Linealen, auf denen sich ein drittes in bestimmter Weise bewegen kann (Abb. 2.2.2).

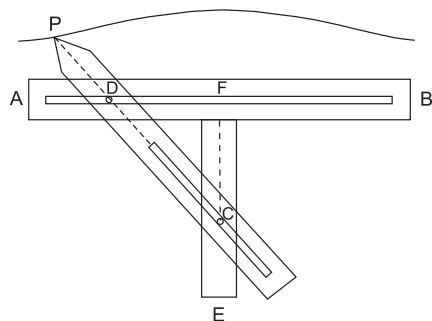


Abb. 2.2.2 Die Konchoïde des Nikomedes
und das zu ihrer mechanischen Konstruktion dienende Instrument

Das erste Lineal AFB sei in Längsrichtung mit einem Schlitz versehen. An seiner Mitte F sei senkrecht dazu das zweite Lineal FE angebracht, in das in der Entfernung b von F ein fester Stift C eingesetzt sei. Das dritte Lineal ende in einer Spitze P und trage im festen Abstand a von P einen Stift D (also $PD = a$), der sich im Schlitz des ersten Lineals bewegen kann. Jenseits von D beginnt auch auf diesem Lineal ein Schlitz in Längsrichtung, in den der Stift C eingreift. Beim Verschieben dieses dritten Lineals beschreibt der Endpunkt P die Muschellinie. Offensichtlich ist für sie der Querbalken des T-förmigen Gerätes (genauer: die durch A, F und B laufende Gerade) eine Asymptote (Abb. 2.2.2).

Zum Vergleich dieses Instruments des Nikomedes mit der von Pappos beschriebenen Einschiebung muß man den Stift C identifizieren mit der Ecke O und den Schlitz AFB des ersten Lineals mit der Rechteckseite BA , auf der die feste Strecke $a = DE$ beginnen soll. Zeichnet man jetzt mit diesem Gerät die Konchoïde, so wird sie die verlängerte obere Rechteckseite CB in dem gesuchten Punkt schneiden und damit die Lösung liefern (vgl. Aufgabe 2.2.6).

Die Kreisquadratur

Die Aufgabe, zu einem gegebenen Kreis ein exakt flächengleiches Quadrat zu konstruieren, ist nach heutigem Verständnis ein Integrationsproblem, sie wird daher in der mathematischen Analysis behandelt. Die Griechen sahen es in erster Linie als ein geometrisches Konstruktionsproblem. Dafür seien einige Beispiele angeführt.

Schon die noch ins 5. vorchr. Jh. fallenden Versuche des Hippokrates, Kreismonde zu quadrieren, sind vielleicht von der Aufgabe angeregt worden, die Fläche eines Kreises in ein Quadrat zu verwandeln. Das gelang ihm in drei Fällen, wovon der einfachste derjenige ist, bei der der Mond von einem Halbkreis und einem Viertelkreis begrenzt wird (siehe Abb. 2.2.3).

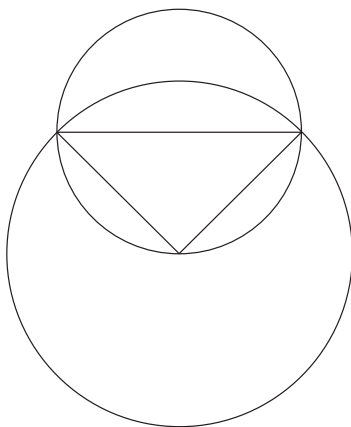


Abb. 2.2.3 Mönchenquadratur des Hippokrates

Zur Quadratur des Vollkreises trug dieses Ergebnis allerdings nichts bei. Die dadurch indirekt aufgeworfene Frage, ob es über die von Hippokrates quadrierten Kreismonde hinaus weitere gibt, die sich elementargeometrisch quadrieren lassen, konnte erst 1947 (mit Methoden der Algebra) endgültig beantwortet werden: es existieren genau fünf solcher Kreismonde [Scriba 1988].

Um 430 v. Chr. versuchte Antiphon, die Kreisfläche durch einbeschriebene regelmäßige $3 \cdot 2^n$ -Ecke oder $4 \cdot 2^n$ -Ecke auszuschöpfen. Wenig später zog Bryson gleichzeitig ein- und umbeschriebene regelmäßige Polygone heran, scheint aber einen einfachen Zwischenwertsatz (Mittelbildung) verwendet zu haben, um dessentwillen sein Verfahren kritisiert wurde. Um die Mitte des 4. Jhs. erkannten die Brüder Deinostratos und Menaichmos, wie sich die Kurve des Hippias zur Kreisquadratur heranziehen läßt (vgl. Aufgabe 2.2.2). Den entscheidenden Nachweis, daß die Kreiszahl π sowohl für das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser wie für das Verhältnis von Kreisfläche zum Quadrat des Durchmessers bestimmend ist, lieferte Archimedes, dem wir auch die beiden oft als Näherungswerte verwendeten Schranken

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

verdanken.

2.3 Euklid

2.3.1 Die Elemente

An der Grenze zwischen der athenischen und der hellenistischen Periode der griechischen Mathematik steht — zeitlich wie inhaltlich — Euklid. Über ihn selbst ist fast nichts bekannt, aber sein Werk war so folgenreich für die gesamte Mathematik und insbesondere für die Geometrie, daß der Name Euklid häufig als Synonym für Mathematik bzw. für Geometrie benutzt wurde, und er ist nach wie vor in solchen Zusammenhängen wie euklidischer Raum, euklidische Geometrie, euklidische Metrik, euklidischer Ring in ständigem Gebrauch.

Euklids Hauptwerk, die „Elemente“, ist der älteste größere mathematische Text, der aus der griechischen Antike überliefert wurde. Unser bescheidenes Wissen über die den „Elementen“ vorangegangene Entwicklung beruht zum Teil auf den fragmentarischen, unzuverlässigen und subjektiv gefärbten Berichten von Gelehrten der Spätantike und des islamischen Mittelalters, zum Teil auf dem, was man mittels inhaltlicher und sprachkritischer Analysen aus dem Text der „Elemente“ über seine Vorgeschichte erschließen kann bzw. zu können glaubt und nur zum geringsten Teil auf voreuklidischen Textfragmenten. Wo wie im Fall der Frühgeschichte der abendländischen Mathematik eine dürftige Quellenlage mit einer gewissen weltanschaulich-philosophischen Relevanz zusammentrifft, ist ein weites Feld von Spekulationen, Hypothesen und Streitfragen zu erwarten. So ist die Sekundärliteratur über Euklid und die „Elemente“ mittlerweile fast unübersehbar und wächst noch ständig. All dies auch nur in Kürze zu referieren, würde allein ein Buch füllen. ([Schreiber 1987], [Schönbeck 2003], siehe auch den Euklid-Artikel in [Wußing/Arnold 1989].) Wir müssen uns in diesem Kapitel auf einen summarischen Überblick über den Inhalt und einen — freilich subjektiv ausgewählten — Aspekt sowie einige Angaben zur Überlieferungsgeschichte beschränken. Weitere inhaltliche und tradierungsgeschichtliche Ausführungen werden in den folgenden Kapiteln zwangsläufig zur Sprache kommen (vgl. auch Bd.1, Abschnitt 4.5).

Die „Elemente“ sind in 13, üblicherweise mit römischen Zahlen numerierte „Bücher“ gegliedert, wobei ein „Buch“ einer Papyrusrolle, also einem Kapitel eines modernen Buches entspricht. Die folgende Liste gibt einen ersten Überblick über den Inhalt und seine vermutliche Herkunft:

- I Anfang eines axiomatischen Aufbaus der ebenen Geometrie bis zur Satzgruppe des Pythagoras, weitgehend Wissen der ionischen Periode, insbesondere der Pythagoreer.
- II Grundlagen des algebraischen Operierens mit geometrischen Größen (Strecken, Flächen, Volumina), ebenfalls pythagoreisches Gedanken-
gut, üblicherweise als Reaktion auf die Entdeckung inkommensurabler

Streckenpaare gedeutet. Die Konsequenz war die Hinwendung zu einem geometrischen Größenbegriff. Der am Ende des 19. Jhs. von dem dänischen Mathematikhistoriker H. G. Zeuthen hierfür vorgeschlagene Terminus „geometrische Algebra“ hat sich weitgehend durchgesetzt.

III Kreislehre, vermutlich pythagoreisch.

IV Konstruktion ein- und umbeschriebener regelmäßiger Vielecke.

V Die Proportionentheorie des Eudoxos in ihrer allgemeinen, d.h. nicht auf geometrische Größen beschränkten Form.

VI Anwendung der Proportionentheorie auf ebene Geometrie.

VII – IX Sätze über natürliche Zahlen, hier im folgenden nicht weiter berücksichtigt.

X Eine sehr anspruchsvolle algebraische Theorie der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Größen, insbesondere Klassifikation nach der Zahl der (modern formuliert) ineinandergeschachtelten Quadratwurzeln, die zu ihrer Erzeugung notwendig sind. Vermutlich auf Theaitetos zurückgehend.

XI Elementares zur räumlichen Geometrie.

XII Sätze über Volumina, zum Teil von Eudoxos (vgl. Aufg. 2.3.1).

XIII Konstruktion der fünf regulären Polyeder aus dem Radius der Umkugel (nach Theaitetos), wobei die Ergebnisse von Buch X zur Charakterisierung der jeweiligen Kantenlängen herangezogen werden. Buch XIII schließt mit dem (relativ trivialen) Nachweis, daß es außer den behandelten fünf keine weiteren regulären Polyeder gibt (vgl. Aufg. 2.3.2).

Abgesehen von den Vorarbeiten der genannten Quellen (ionische Mathematiker wie Thales, Oinopides, Hippokrates, Leon, Pythagoreer, Eudoxos, Theaitetos) wären Euklids „Elemente“ in der vorliegenden Form kaum vorstellbar ohne die Philosophie des Platon und ohne die Methodologie des Aristoteles. Erstere zeigt sich in der Art der Darstellung, die weder auf die materielle Welt noch auf irgendwelche Anwendungen explizit Bezug nimmt, möglicherweise auch in der Beschränkung der benutzten Konstruktionsmittel auf Zirkel und Lineal. (Von den Instrumenten selbst ist freilich nirgends die Rede, nur von den mit ihnen erzeugbaren Objekten Strecke und Kreis.) Letztere betrifft

sowohl den deduktiven Aufbau als Ganzes als auch die Teilung der Voraussetzungen in Axiome (das sind Grundsätze allgemeiner Art, deren Wahrheit unbestreitbar ist) und Postulate (das sind theoriespezifische Grundsätze, über deren Zulassung man verschiedener Meinung sein kann. Bei Euklid betreffen sie im wesentlichen die angenommene Ausführbarkeit gewisser konstruktiver Grundoperationen, aus denen alle Lösungen von Konstruktionsaufgaben kombiniert werden). Die meisten Bücher beginnen mit Definitionen, insbesondere Buch I. Einige dieser Definitionen reduzieren abgeleitete Begriffe in solcher Weise auf Grundbegriffe, wie es auch in der modernen Logik üblich ist, z. B. Def. I,17: Ein Durchmesser des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzte Strecke; Def. I,23: Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner [Seite] einander treffen. Andere versuchen einen Grundbegriff zu beschreiben, z.B. Def. I,1: Ein Punkt ist, was keine Teile hat. Def. I,2: Eine Linie [ist eine] breitenlose Länge. Es ist klar, daß man mit „Definitionen“ dieser zweiten Art keinen mathematischen Satz über die definierten Begriffe beweisen kann. Sie sind also vom modernen Standpunkt unnötig und werden auch von Euklid selbst im weiteren nirgends benutzt. Diese Kritik setzt jedoch voraus, daß Euklid tatsächlich so etwas wie einen formal-axiomatischen Aufbau der Geometrie (etwa im Sinne von Hilberts berühmtem Buch „Grundlagen der Geometrie“ 1899) beabsichtigte, was keineswegs sicher ist. Andererseits haben Mathematiker, Philosophen und Übersetzer jahrhundertlang um diese Definitionen gestritten und sie zu verbessern versucht, wobei der Unterschied zwischen Definitionen der Art I,23 und solchen der Art I,1 meist unbeachtet blieb.

Angesichts so vieler Wurzeln und Quellen der „Elemente“ ist Euklid vielfach eigene wissenschaftliche Leistung abgesprochen, er als bloßer, wenn auch sehr erfolgreicher und geschickter „Lehrbuchschreiber“ und „Didaktiker“ dargestellt worden. Beides muß in Frage gestellt werden: Es gibt begründete Zweifel, ob Euklid den überlieferten Text selbst niedergeschrieben hat, ob sein Unterricht nicht, den Gebräuchen der Zeit entsprechend, ein mündlich-diskursiver war und der Text sich aus den Aufzeichnungen seiner Schüler entwickelt hat. In diesem Fall könnte Euklid ein guter Didaktiker gewesen sein, von dessen Unterricht aber nur die spröden Fakten aufgeschrieben wurden (wie es Studenten auch heute noch oft halten), und auch seine umstrittenen Definitionen wären eventuell nur die mißlungene stichpunktartige Niederschrift einer umfangreichen propädeutischen Erläuterung. Hat er die „Elemente“ jedoch selbst geschrieben, so ist natürlich die absolute Trockenheit des Stiles, die sture Aufeinanderfolge von Definition, Satz und Beweis, das Fehlen von Motivationen

und Beispielen zu bemängeln. Nicht wenige Didaktiker der Neuzeit, aber auch Schriftsteller unterschiedlichster Epochen, sahen in der Herrschaft Euklids im mathematischen Schulunterricht früherer Zeiten den Hauptgrund für die permanente Unbeliebtheit des Faches Mathematik. (Siehe z.B. [Fladt 1927], Auszug im Anhang, oder den polemischen Buchtitel „Los von Euklid“ [Kusserow 1928]).

Was die eigene wissenschaftliche Leistung Euklids betrifft, so muß man einerseits seine heute kaum noch bekannten sogenannten kleinen Schriften mit zu Rate ziehen, andererseits zeigt sich, daß der im folgenden näher erläuterte konstruktive Aspekt der „Elemente“ sich als roter Faden durch das sonst stofflich so heterogene Werk zieht. Man kann diesen Aspekt schwerlich den so unterschiedlichen Quellen zuschreiben. Hier ist ein origineller wissenschaftlicher Stil unverkennbar. Gerade aus der Sicht des ausgehenden 20. Jahrhunderts kann man in Euklid einen hervorragenden Pionier einer algorithmischen Kultur in der Mathematik sehen, die während langer Perioden verschüttet war und daher auch in Euklids Werk nicht gesucht, folglich nicht gesehen wurde².

Die Bausteine der Elemente, Propositionen genannt, gliedern sich in Lehrsätze mit folgendem Beweis und Aufgaben mit anschließender Lösung. Eine Aufgabe handelt stets von gegebenen Objekten (Punkte, Strecken, Kreise), über die gewisse Voraussetzungen gemacht werden, und gesuchten Objekten, die in bestimmten Beziehungen zu den gegebenen Objekten stehen sollen, z.B. Buch I, Prop. 2 (Übersetzung hier und im folgenden nach Thaer):

An einem gegebenen Punkte eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke hinzulegen, d.h. zu gegebenen Punkten A, B, C (B ungleich C) einen Punkt D konstruieren, so daß AD kongruent BC .

Die Lösung einer solchen Aufgabe besteht immer aus der Beschreibung eines Verfahrens (Algorithmus), dessen Eingabe die gegebenen Objekte und dessen

²Zum Beweis, daß diese Sicht auf Euklid heute von namhaften Mathematikern geteilt wird, zitieren wir aus dem Vorwort des Buches [Shamos/Preparata 1985] (deutsche Übersetzung PS): „Die übliche Meinung ist, daß Euklids Hauptbeitrag zur Geometrie die Darstellung der axiomatischen Beweismethode war. Darüber wollen wir hier nicht streiten. Relevanter für unser Thema ist die Erfindung der euklidischen Konstruktion, ein Schema, bestehend aus einem Algorithmus und seiner Rechtfertigung, miteinander auf hohem Niveau verbunden. Die euklidische Konstruktion erfüllt alle Bedingungen eines Algorithmus: Sie ist unzweideutig, korrekt und führt immer zum Ergebnis. Nach Euklid setzte sich die Blüte der Geometrie fort, während die Analysis von Algorithmen für die Dauer von 2000 Jahren verfiel. Dies kann besonders durch den Fortschritt der indirekten Beweistechnik illustriert werden, einer Technik, die den Existenzbeweis vereinfacht, aber die Angabe von Algorithmen umgeht.“

Ausgabe die gesuchten Objekte sind, und aus dem Beweis, daß dieser Algorithmus unter den über die gegebenen Objekte gemachten Voraussetzungen Objekte mit den gesuchten Eigenschaften liefert. Dieses Vorgehen ist nicht nur insgesamt paradigmatisch für alle Gebiete der Mathematik aller folgenden Zeiten, sondern es weist auch im Detail viele bemerkenswerte, in die Zukunft weisende Züge auf, von denen hier nur wenige diskutiert werden können.

Die zur Formulierung von Konstruktionsalgorithmen erlaubten Schritte werden in den (auf Definitionen und Axiome folgenden) Postulaten am Beginn von Buch I fixiert:

Gefordert soll sein

- 1) Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
 - 2) Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
 - 3) daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann [Thaer]
- ...

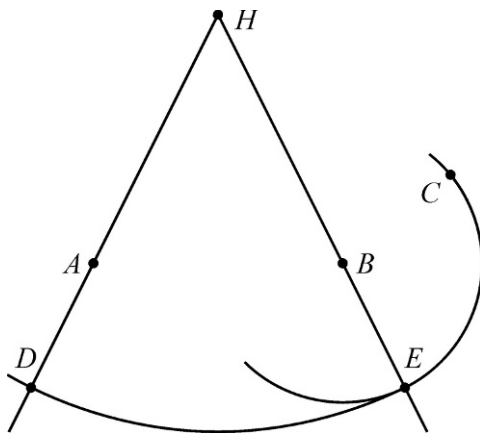


Abb. 2.3.1 Zu Proposition I.2 der „Elemente“ Euklids

In den ersten beiden Aufgaben wird dann gezeigt (ohne daß dies jedoch so erklärt wird), daß man die Operation, bei gegebenen Punkten A, B, C (B ungleich C) den Kreis vom Radius BC um A zu konstruieren, durch ein (modern gesprochen) „Unterprogramm“ auf die speziellere Operation reduzieren kann,

den Kreis um A durch B zu konstruieren, womit die sonst mehrdeutige Formulierung des 3. Postulates nachträglich geklärt ist. Dazu wird zunächst mittels der in I.1. gelösten Hilfsaufgabe (Unterprogramm!) ein Punkt H so konstruiert, daß A, B und H ein gleichseitiges Dreieck bilden. Man verlängere HA und HB über A bzw. B hinaus soweit, bis die folgenden Schnittpunkte gefunden werden: Derjenige Schnittpunkt E von HB mit dem Kreis um B vom Radius BC , der auf der H abgewandten Seite von B liegt, derjenige Schnittpunkt D von HA mit dem Kreis um H vom Radius HE , der auf der H abgewandten Seite von A liegt (Abb. 2.3.1). Man versteht nun die oben zitierte Proposition I.2: Da AD kongruent zu BC ist, entspricht der Kreis um A durch D dem Kreis um A mit dem Radius BC .

Algorithmen wurden auch in der altägyptischen und der altmesopotamischen Mathematik gelehrt, jedoch nur mittels Serien von numerischen Beispielen. Bei Euklid werden erstmals Algorithmen allgemein formuliert. Dazu benötigt man (modern gesprochen) Adressen für die Eingabeobjekte, Zwischenresultate, Ausgabeobjekte. Euklid benutzt große (griechische) Buchstaben für Punkte, adressiert Geraden mittels zweier auf ihnen angenommener Punkte und Kreise mittels dreier auf ihnen angenommener Punkte. Dies ist eine Pioniertat ohnegleichen, aber ein sachlicher Umstand trägt dazu bei: Geometrische Objekte sind — im Gegensatz zu Zahlen — an einen bestimmten Ort gebunden. Gibt man einem konkreten geometrischen Objekt einen Namen, so bezeichnet dieser Name allein das Objekt ohne ein zugehöriges Bild nicht — im Gegensatz zu den Zahlbezeichnungssystemen. Daher nehmen die Namen geometrischer Objekte, die in der Beschreibung eines Algorithmus unvermeidbar sind, sozusagen automatisch den Charakter von Variablen an. Es sei jedoch am Rande bemerkt, daß Euklid die von ihm für geometrische Algorithmen so erfolgreich entwickelte „Programmiertechnik“ auch in den zahlentheoretischen Büchern der „Elemente“ nutzt, um — auch hier erstmals unter Verwendung von Variablen — Algorithmen zur Lösung zahlentheoretischer Aufgaben wie z. B. den berühmten euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zu formulieren.

Der Begriff der unendlich ausgedehnten Geraden ist Euklid fremd. Es gibt nur gerade Strecken, die laut Postulat 1 als Verbindung ihrer Endpunkte konstruiert werden können und deren sukzessive Verlängerung durch das zweite Postulat als zulässige Elementaroperation deklariert wird. Während die Bestimmung der Schnittpunkte von Kreisen überall dort, wo ihre Existenz anschaulich evident ist, ohne theoretische (axiomatische) Rechtfertigung durchgeführt wird, ist die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden unter diesen Umständen eine echte Aufgabe, da ja von den Geraden nur Teilstrecken

schon konstruiert vorliegen, die man je nach gegenseitiger Lage unvorhersehbar oft verlängern muß, um schließlich zum Schnittpunkt zu gelangen. Es ist nur konsequent, wenn Euklid — in Analogie zu den anderen Grundoperationen — eine Voraussetzung formuliert, unter der diese Prozedur als ausführbar angenommen wird:

5. Postulat: Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind. (Abb. 2.3.2)

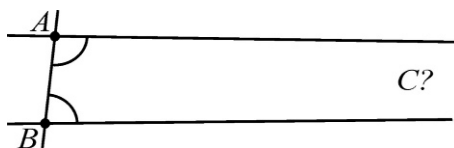


Abb. 2.3.2 Zum 5. Postulat der „Elemente“ Euklids

Proposition I.17 besagt, daß in jedem existierenden Dreieck die Summe zweier beliebiger Winkel stets kleiner als zwei Rechte ist, demnach die im 5. Postulat genannte Bedingung für die Existenz eines Schnittpunktes (der dann dritter Eckpunkt eines Dreiecks ABC ist) notwendig ist. Das 5. Postulat bereinigt also die sich hier möglicherweise auftuende Schwierigkeit mit der Festsetzung, daß diese notwendige Bedingung auch hinreichend sein soll. Leider wird sich nie feststellen lassen, ob Euklid und eventuell sogar schon seine Vorläufer hier wirklich ein Problem erkannt und tief darüber nachgedacht hatten, oder ob das 5. Postulat sozusagen als Improvisation in die Welt kam. Jedenfalls führte seine gegenüber den anderen Postulaten auffallend kompliziertere Formulierung dazu, daß man schon in der Antike daran Kritik übte und versuchte, es als Satz zu beweisen. Über viele Zwischenstufen hat sich hieraus im 19. Jahrhundert schließlich die nichteuklidische Geometrie entwickelt, deren in den siebziger Jahren des 19. Jhs. bewiesene Widerspruchsfreiheit klarlegt, daß das 5. Postulat weder denknotwendig noch gar aus den übrigen Axiomen und Postulaten der euklidischen Geometrie beweisbar ist. Es muß auch noch bemerkt werden, daß sich — mit zunehmender Distanz zur Methodologie des Aristoteles — der Unterschied zwischen Axiomen und Postulaten zu verwischen begann. Postulate sind ja ausdrücklich diskutierbare, nicht denknotwendige Grundsätze,

die man akzeptieren oder verwerfen kann. Erst vor dem Hintergrund der Verdrängung des Unterschieds zwischen Axiomen und Postulaten (deren äußerer Ausdruck vom europäischen Mittelalter an die gelegentliche Umnummerierung des 5. Postulats als 11. Axiom war) ist die Äquivalenz des Postulats zu der heute üblichen (schon von Ptolemaios stammenden, aber vor allem durch John Playfair 1796 popularisierten) Formulierung der Eindeutigkeit der Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt akzeptabel. Als Axiome sind beide Aussagen in der Tat gleichwertig, d.h. jede mit Hilfe der anderen und der übrigen Axiome beweisbar. Als Postulat sagt Euklids Fünftes aber mehr aus, nämlich daß die Ausführbarkeit der betreffenden Operation angenommen wird, d.h. daß der zyklische Prozeß der wiederholten Verlängerung der beiden Strecken unter der angegebenen Voraussetzung stets einen Schnittpunkt liefert (Zur Verdeutlichung: Man könnte mit guten Gründen auch die Ausführbarkeit der Linealoperation, Postulat 1, unter der dort angegebenen schwachen Voraussetzung ablehnen, z.B. weil die Punkte zu dicht beieinander oder zu weit voneinander entfernt sind, ohne daß die Gültigkeit des Satzes über die eindeutige Existenz der Verbindungsgeraden dadurch angetastet werden muß.)

Was den weiteren geometrischen Inhalt der Elemente betrifft, so wird vieles genauso und genau in derselben Reihenfolge bewiesen, wie es auch heute noch üblich ist. Die bei Euklid verbleibenden Beweislücken beziehen sich fast immer auf Anordnungsfragen und lassen sich meist leicht schließen. Seine Beweisideen sind durchgängig brauchbar, oft trickreich, woraus man auf eine lange Reifung des Stoffes schließen könnte. Elementarstoff, den man gefühlsmäßig in den „Elementen“ vermutet (z.B. der vierte Kongruenzsatz oder die Konstruktion der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise) findet sich dort häufig nicht, ist Zutat späterer Generationen. Lehrsätze erweisen sich bei genauer Betrachtung, auch der Stelle, an der sie erscheinen, oft als Sätze über Konstruktionsaufgaben, indem sie z.B. Voraussetzungen als notwendig oder Lösungen als eindeutig bestimmt nachweisen. Nach intensivem Studium kann man zu der Meinung gelangen (aber dies ist subjektiv), daß hier keineswegs eine „Enzyklopädie“ alles bis dahin Bekannten beabsichtigt war, vielmehr ein — reichlich konstruktivistisches — wissenschaftliches Programm exemplarisch demonstriert werden sollte, bei dem insbesondere im Bereich der Geometrie die Leistungsfähigkeit des „Programmpakets“ Zirkel und Lineal ausgeschöpft wurde. Der überwältigende Einfluß, den Euklids „Elemente“ auf spätere Zeiten ausgeübt haben, hat das Bild der antiken Geometrie insgesamt ein wenig deformiert. Zirkel und Lineal haben dort nicht die dominierende Rolle gespielt, die die „Elemente“ suggerieren. Von Kegelschnitten, anderen speziellen Kurven verschiedenster Art,

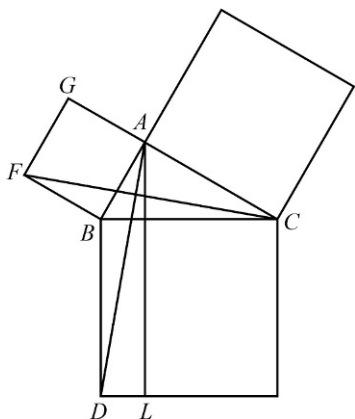
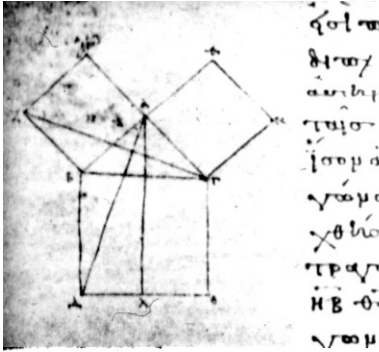


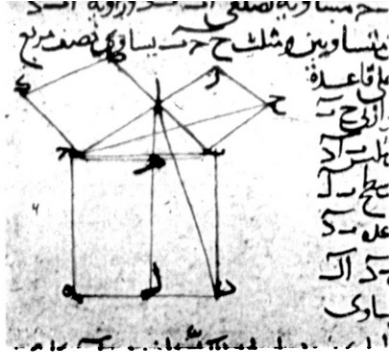
Abb. 2.3.3 Figur zum euklidischen Beweis des Kathetensatzes; Tafel mit Figur zum Beweis des Satzes von Pythagoras vor dem Zeughaus in Berlin [Foto Hollewood Media]

approximativen Methoden der Inhaltsbestimmung und anderen wesentlichen Inhalten der antiken Geometrie erfährt man in den „Elementen“ nichts.

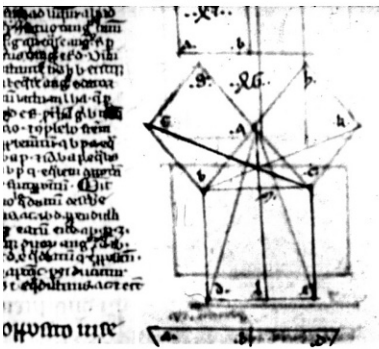
Zu den vielbewunderten didaktischen Kunstgriffen Euklids zählt sein Beweis des Kathetensatzes für rechtwinklige Dreiecke, aus dem sich dann leicht der Satz des Pythagoras ergibt. Die Schwierigkeit bestand darin, daß der übliche und wahrscheinlich schon den Pythagoreern bekannte Beweis über die Ähnlichkeit der Teildreiecke zum Gesamtdreieck Sätze über Ähnlichkeit von Dreiecken und damit Proportionenlehre erfordert. Die eudoxische Proportionenlehre zählt aber zu den anspruchsvollsten Teilen der „Elemente“ und wird erst in Buch V behandelt. Der Satz des Pythagoras sollte dagegen möglichst früh zur Verfügung stehen. Zu Euklids proportionsfreiem Beweis gehört Abb. 2.3.3 (siehe auch 2.3.4). Die Dreiecke ADB und FCB sind nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, also flächengleich. Da, wie zuvor bewiesen, jedes Dreieck auch jedem Rechteck aus einer Dreiecksseite und der halben zugehörigen Höhe flächengleich ist, ist Dreieck ADB flächengleich dem halben Rechteck aus Grundseite DB und Höhe DL, Dreieck FCB flächengleich dem halben Rechteck aus Grundseite FB und Höhe FG. (Schülern fällt es erfahrungsgemäß schwer, Dreieck FCB aus dieser ungewöhnlichen Perspektive zu betrachten, d.h. die zur Basis FB gehörige Höhe zu finden!) Insgesamt ergibt sich mit den üblichen Bezeichnungen $b = AB$, $c = BC$, $p = DL$: $b^2 = pc$. Der Leser sei aufgefordert, diesen schönen Beweisgedanken an den jeweils passenden Stellen abzurunden mit dem Verweis auf das jeweils benutzte der Axiome.



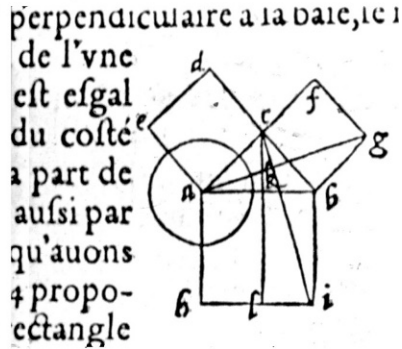
a) Griechisch, ca. 800



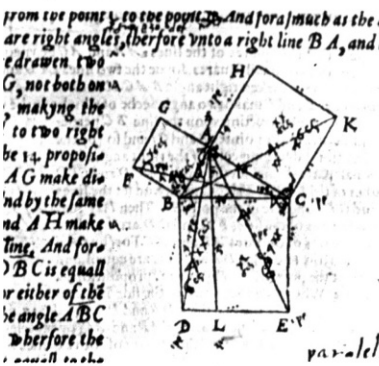
d) Arabisch, ca. 1250



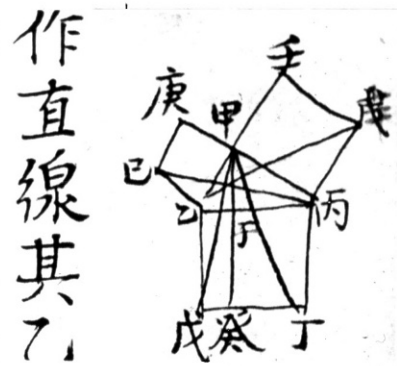
b) Lateinisch, 1120



e) Französisch, 1564



c) Englisch, 1570



f) Chinesisch, 1607

Abb. 2.3.4 Die gleiche Figur in verschiedenen Ausgaben der „Elemente“

[a) Ms. Vat. grec. 204; b) Adelard von Bath; c) Billingsley, London 1570;

d) sog. Pseudo-Tusi; e) Forcadet, Paris 1564; f) Ricci]

- 1) Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
- 5) Die Doppelten von demselben sind einander gleich.
- 7) Was einander deckt, ist einander gleich.

Auf diesem Wege erhält man tatsächlich einen proportionsfreien Beweis für den Satz des Pythagoras. Allerdings muß man scharf hinsehen, was man tatsächlich bewiesen hat:

Das Quadrat über der Hypotenuse ist zerlegungsleich der Vereinigung aus den beiden Quadraten über den Katheten.

Vom Flächen*inhalt* darf nicht die Rede sein, sonst kommen die Proportionen hintenherum wieder herein. Um diesen nämlich zu definieren, muß man beweisen, daß das Produkt aus Grundseite und Höhe eines Dreiecks eine von der Auswahl der Grundseite unabhängige Größe ist, d.h. (Abb. 2.3.5) $a \cdot h_a = b \cdot h_b$ bzw. $a : h_b = b : h_a$, was nur aus der Ähnlichkeit der beteiligten Dreiecke folgt.

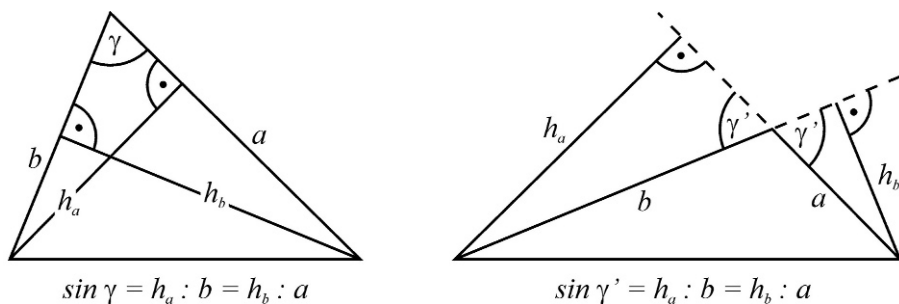


Abb. 2.3.5 Zur Unabhängigkeit des Produkts Seite mal Höhe im Dreieck

Das älteste bekannte Pergamentmanuskript der „Elemente“ (D’Orville 301 nach einem früheren Besitzer genannt und heute in der Bodleian Library in Oxford aufbewahrt) wurde in Byzanz geschrieben und zwar im Jahre 888, also rund 1200 Jahre nach der vermutlichen Entstehungszeit der „Elemente“. Es repräsentiert, wie man heute weiß, eine Textfassung, die von dem alexandrinischen Mathematiker Theon um 370 verfaßt wurde. Erst 1808 wurde in der Bibliothek des Vatikans eine zwar jüngere Handschrift (aus dem 10. Jh.) gefunden, die aber einen älteren Textzustand wiedergibt und den modernen Ausgaben der „Elemente“ stets zugrundeliegt (Abb. 2.3.6). Auch dieser Text ist jedoch wahrscheinlich nicht der „ursprüngliche“ (falls es einen solchen

je gegeben hat). Insgesamt hat man bisher rund 120 Zeilen Text auf Scherben und Papyrusfragmenten gefunden, die wesentlich älter als die genannten Manuskripte sind, dem Inhalt nach zu den „Elementen“ gehören, jedoch im Wortlaut stets vom heute als „kanonisch“ geltenden Text abweichen.



Abb. 2.3.6 Eine Seite aus Manuskript P der Vaticana [Codex Vat. Grec. 190]

Die „Elemente“ stellen ein Kulturgut ersten Ranges dar, dem zu allen Zeiten gebührende Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Der Umgang mit ihm war jedoch stets zweigeteilt: Die einen (es wäre zu einfach zu sagen: die Mathematiker) setzten sich ohne übergroßen Respekt vor dem Wortlaut mit dem Inhalt auseinander, ließen sich davon anregen, entwickelten ihn weiter. Jede Zeit fand neue interessante Seiten der „Elemente“, eine sehr moderne Sicht wurde oben dargelegt. Die anderen behandelten die „Elemente“ als Bildungsgut, als Material für Sprachstudien, als Lesetext, als historisches Dokument, jagten dem Phantom des authentischen Wortlauts nach. Eine Schwierigkeit besteht in der ausgeprägten Vieldeutigkeit der altgriechischen Sprache. Wer sich nicht in den Sinn des Gemeinten versetzen kann (und wer könnte beweisen, daß ihm das gelungen ist!) hat wenig Chancen, eine gelungene Übersetzung oder gar Deutung zustande zu bringen. Aber um es ganz deutlich zu sagen: Beide Formen der Beschäftigung mit den „Elementen“ sind legitim, beiden hat die Mathematik wie auch ihre Historiographie viel zu verdanken.

2.3.2 Die sonstigen geometrischen Schriften Euklids

Außer den „Elementen“ werden dem Euklid einige kleinere Werke zugeschrieben, die zum Teil in griechisch oder arabisch erhalten blieben, zum Teil verloren sind, zum Teil von der modernen Forschung als „unecht“, d.h. nicht von Euklid stammend, bezeichnet werden. Einige dieser Schriften wurden jahrhundertlang zusammen mit den „Elementen“ studiert, übersetzt, gedruckt und gehörten genauso zum allgemeinen mathematischen Bildungsgut wie die „Elemente“ selbst. Heute ist sogar ihre Existenz meist nur Spezialisten bekannt, und sie sind zum Teil schwer zugänglich, da sie zwar in der griech.-lat. Standardausgabe der Werke Euklids von Heiberg/Menge enthalten sind, aber kaum in moderne Sprachen übersetzt oder neu gedruckt wurden. Ihre Kenntnis ist aber für ein abgerundetes Bild der Persönlichkeit und Leistung Euklids wesentlich, und genau wie die „Elemente“ bergen auch sie manchen für die moderne Mathematik anregenden Gedanken. Eine vollständige Übersicht findet man in [Schreiber 1987] und dem Euklid-Artikel in [Wußing/Arnold 1989]. Hier werden nur diejenigen Schriften kurz vorgestellt, die im weiteren Sinn zur Geometrie gehören. Das sind

- eine verlorene Kegelschnittslehre, deren Inhalt vermutlich ungefähr den ersten 4 Büchern der hier später zu besprechenden Kegelschnittslehre des Apollonios von Perge entsprach, (Wahrscheinlich hat letztere, weitergehende, die „Konika“ des Euklid in ähnlicher Weise verdrängt wie die „Elemente“ einige Werke gleichen Titels von früheren Verfassern verdrängt haben.)

- eine verlorene Schrift über geometrische Örter im Raum, (Dabei könnte es sich um Flächen wie Ebene, Kugel und Rotationsellipsoid im Raum oder auch um Örter, d.h. Kurven, auf solchen Flächen handeln.)
- eine Katoptrik, d.h. Lehre von Spiegeln und Spiegelbildern, von der heute klar ist, daß der erhaltene Text nicht von Euklid stammt, obwohl Euklid nach dem Zeugnis spätantiker Berichterstatter eine „Katoptrik“ verfaßt haben soll,
- eine Schrift „Phainomena“ über die Anfänge einer auf die Bedürfnisse der Astronomie zugeschnittenen sphärischen Geometrie,
- eine Schrift „Data“, eine „Optika“, eine Schrift „Über Teilungen von Figuren“ und eine verlorene Schrift „Porismen“.

Über die vier letztgenannten soll etwas ausführlicher berichtet werden. Aber schon die Titelübersicht zeigt, daß Euklid nicht der war, als der er in der neueren mathematikhistorischen Literatur gern dargestellt wird. Seine Schriften überdecken bis auf Bauwesen und Geographie praktisch alle Gebiete damaliger angewandter Mathematik.

Die „Data“ (griech. Dedomena, d.h. Gegebenes) stehen in engstem Zusammenhang mit den „Elementen“ und wurden bis zum Beginn der Neuzeit sehr oft mit diesen zusammen gedruckt. Von ihnen gibt es eine moderne deutsche Übersetzung [Thaer 1962]. Auf den ersten Blick bieten sie gegenüber den „Elementen“ wenig Neues, scheinen eine Art Kompendium zu sein und wurden auch meist so gedeutet. Es scheint jedoch, als habe Euklid hier versucht, Konstruktionsaufgaben zu behandeln, deren gegebene Objekte nicht wie in den „Elementen“ Punkte, Strecken und Kreise, also nach griechischer Auffassung sinnlich wahrnehmbare Dinge, sondern Äquivalenzklassen solcher Dinge bezüglich verschiedener Äquivalenzrelationen sind. Er beginnt nämlich damit zu definieren, wann ein geometrisches Objekt der Größe nach, der Gestalt nach, der Lage nach gegeben ist. Die Propositionen sind dann von folgender Art, z.B. Prop. 39:

Sind alle Seiten eines Dreiecks der Größe nach gegeben, so ist das Dreieck der Gestalt nach gegeben.

Das kann man so interpretieren:

Es seien drei „Längen“ gegeben, jede natürlich durch eine konkrete Strecke, d.h. einen Repräsentanten der betreffenden Äquivalenzklasse von gleichlangen Strecken. Das zu konstruierende Objekt ist seinerseits eine Äquivalenzklasse, nämlich von kongruenten

Dreiecken. Aus den konkreten Repräsentanten konstruiere man wie in den „Elementen“ ein konkretes Dreieck als Repräsentant der gesuchten Klasse. Diese Aufgabe und ihre Lösung sind, wie man in der modernen Mathematik sagt, repräsentantenunabhängig, d.h. Änderung der Repräsentanten der gegebenen Klassen beeinflusst zwar das konkret erhaltene Ergebnis, aber nicht die Äquivalenzklasse, in der es liegt.

In analoger Weise werden in den Data u.a. Aufgaben über Verhältnisse behandelt, die ja auch — modern gesprochen — Äquivalenzklassen von Brüchen sind, so daß z.B. das Ergebnis der Aufgabe, zu Größen a, b, c (etwa Strecken oder Flächen) ein d mit $a : b = c : d$ zu finden, nicht von dem konkreten Repräsentanten (a, b) sondern nur von der Klasse aller zu (a, b) äquivalenten Paare (a', b') , eben dem Verhältnis, abhängt. Den Höhepunkt der theoretisch sehr anspruchsvollen, wenn auch in der praktischen Durchführung meist fast trivialen Schrift bildet die Auffassung des Begriffes der Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises als eines Abstraktums, das zwar durch das Produkt der Sehnenabschnitte einer beliebigen durch den Punkt gelegten Kreissehne gegeben ist, aber von der willkürlichen Wahl dieser Sehne nicht abhängt.

Die „Optik“ Euklids ist die älteste erhaltene Schrift zu diesem Thema. Damals war Optik etwa die „Geometrie des Sehens“. Sie beruhte auf der Erfahrung der geradlinigen Ausbreitung von „Sehstrahlen“ durch die Luft zwischen Objekt und Auge, und obwohl es schon zwei entgegengesetzte Theorien über die Richtung dieser Sehstrahlen gab (bei Euklid wird die Richtung vom Auge zum Gegenstand angenommen), spielte dies für die bearbeiteten geometrischen Fragen natürlich keine Rolle. In einem vielhundertjährigen Prozeß wandelte sich der Begriffsinhalt der Optik allmählich: Während „Dioptrik“ noch im 1. Jh. nach Chr. lediglich die Lehre vom Peilen mittels „Dioptr“ ist, wird daraus schließlich die Lehre vom Durchgang der Sehstrahlen durch die Grenzschichten zwischen unterschiedlichen Medien. Im islamischen und europäischen Mittelalter treten Fragen der Anatomie und Physiologie des Auges hinzu, auch psychologische Fragen des Sehens wie z.B. eine ausgedehnte Klassifikation optischer Täuschungen. Erst sehr spät, etwa seit Kepler, wird Optik zu einem Teilgebiet der Physik und insbesondere zur Lehre von der Natur des Lichtes und seiner Ausbreitung.

Ist Euklids „Optik“ aus der Sicht heutiger Optik einerseits ungeheuer primitiv, so enthält sie andererseits einen großartigen wissenschaftlichen Gedanken, der wieder — wie fast immer bei Euklid — nur exemplarisch demonstriert und offensichtlich von denen, die er nicht mehr persönlich in seine Gedankenwelt einführen konnte, nicht verstanden wurde. Euklid zeigt an vielen, geometrisch

meist sehr elementaren Beispielen, was man aus dem unmittelbar Beobachtbaren (das sind hier die Sehwinkel) mit mathematischen Mitteln über das Beobachtete erschließen, aber auch was man nicht erschließen kann (Aufgabe 2.3.5). Dabei läßt er keinen Zweifel, daß er dies zunächst als eine geometrische Hilfswissenschaft für die Astronomie konzipiert. Die scharfsinnigen Schlüsse des Aristarch von Samos (vgl. 2.4.1) sind ganz in diesem Sinne, und die Lebensdaten und -umstände beider schließen nicht aus, daß Aristarch noch ein direkter Schüler von Euklid gewesen sein könnte. (Mehr Details zu Euklids „Optik“ in [Schreiber 1995].)

Die Schrift „Über Teilungen“ ist nur in einer arabischen Fassung überliefert, in der alle 36 Aufgaben, aber nur von den vier wohl interessantesten auch die Lösungen enthalten sind (siehe hier Aufgabe 2.3.3). Es geht darum, gewisse elementargeometrische Figuren durch gerade Schnitte, die gewissen Nebenbedingungen genügen (z.B. durch einen gegebenen Punkt gehen) in gegebenen Verhältnissen des Flächeninhalts zu „zerschneiden“. Einige der Aufgaben sind hervorragend dazu geeignet, zu verstehen, in welcher Weise die in Buch II der „Elemente“ systematisch gelehrt geometrische Algebra dazu dienen kann, in einer zur späteren kartesischen Koordinatenmethode analogen Art über Analyse und Synthese die Lösung einer Aufgabe mit Zirkel und Lineal zu finden. Andere erfordern einen scharfsinnigen Trick, sind zum Teil nur dazu gestellt, diesen Trick zu präsentieren (Aufgabe 2.3.4). Alle miteinander haben eigentlich keine echte praktische Bedeutung. Umso erstaunlicher ist es, daß sie über Jahrhunderte zum Standardinhalt von Schriften über praktische Geometrie (Feldmeßkunst u.ä.) zählten. (Mehr Details in [Schreiber 1987, 1994].)

Die Schrift „Porismen“ zählt zu den verlorenen. Wir wissen von ihrer Existenz und einiges über ihren Inhalt aus den Berichten von Pappos und Proklos, aber sowohl ihr eigentlicher Sinn als auch die Bedeutung des Ausdrucks „Porisma“ sind weitgehend ungeklärt, trotz vieler Versuche namhafter Mathematiker (u.a. Fermat und Chasles), dies zu rekonstruieren. Aus der Beschreibung, die Pappos im VII. Buch seiner „Synagoge“ (lat. Collectio) gibt, geht zumindest hervor, daß u.a. im wesentlichen der Satz von Desargues enthalten war, jedoch in einer eigentümlichen dynamischen Formulierung:

Hält man von 6 Punkten A, B, C, P, Q, R , von denen P, Q, R ; A, B, P sowie B, C, Q und A, C, R je auf einer gemeinsamen Geraden liegen, P, Q, R fest und bewegt A und B längs zweier Geraden, so bewegt sich auch C auf einer Geraden (Abb. 2.3.7).

Man könnte daraus schließen, daß Euklid in den „Porismen“ mittels geometrischer Figuren so etwas wie funktionale Zusammenhänge erfassen wollte, indem er einige Teile der Figur (wir würden sagen: Parameter) festhält, einige (wir würden sagen: die unabhängigen Veränderlichen) einer willkürlichen

Veränderung unterwirft und die Art, wie die restlichen Teile der Figur (die abhängigen Veränderlichen) sich daraufhin verhalten, als eine Art Lehrsatz ausspricht. Aber um diese Hypothese ernsthaft aufzustellen, wissen wir leider viel zu wenig über den ursprünglichen Inhalt. Schon Pappos fügt nämlich verschiedene Sätze Euklids zu einem zusammen und verallgemeinert ihn dann auch noch, so daß sich seine eigene Zutat kaum von Euklids Absicht trennen läßt.

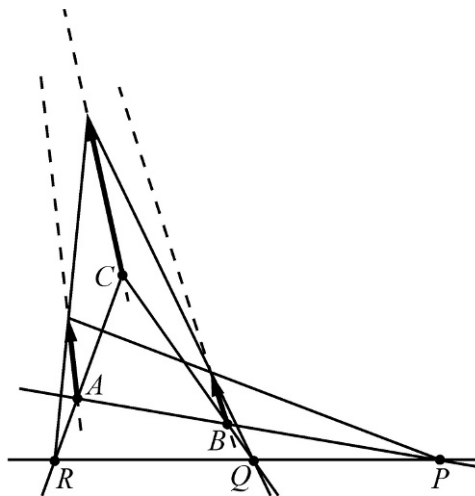


Abb. 2.3.7 Satz von Desargues in der Fassung von Euklid/Pappos

2.4 Alexandrinische (hellenistische) Periode

Unter dem von Aristoteles erzogenen Alexander dem Großen (356–323), der als Feldherr des korinthischen Bundes den Kampf gegen die Perser aufnahm, Kleinasien besetzte, Syrien, Ägypten und Palästina unterwarf, Babylon und Persien eroberte und bis nach Indien vorstieß, erfolgten zahlreiche Städtegründungen. Von ausschlaggebender Bedeutung für die Entwicklung der Wissenschaft und Mathematik wurde die 332/331 vorgenommene Gründung der Stadt Alexandria am Westrand des Nildeltas. Von 304 bis 30 v. Chr. hatte die makedonische Dynastie der Ptolemäer in dieser Stadt ihren Regierungssitz. Dem dortigen Museion, in dem Künstler und Gelehrte gemeinsam lebten und arbeiteten, war die berühmte Bibliothek von Alexandria angegliedert, die bedeutendste der ganzen Antike. In mehreren hunderttausend Buchrollen stand den Wissenschaftlern fast die gesamte bis in ihre Zeit verfaßte Litera-

tur als Arbeitsgrundlage zur Verfügung. So ist es nicht verwunderlich, daß in der Wissenschaftsgeschichte, neben der Bezeichnung „hellenistische Periode“ (abgeleitet vom Prozeß der Hellenisierung, dem Entstehen einer einheitlichen Kultur mit Griechisch als Weltsprache), auch von der alexandrinischen Periode gesprochen wird. Ihre Blütezeit reichte bis etwa zur Mitte des 2. Jhs. v. Chr.; der nachfolgende Niedergang der Wissenschaften am Ausgang der Antike wurde nur gelegentlich noch von bemerkenswerten Einzelleistungen aufgehehlt. Doch behielt Alexandria noch lange Zeit seine Attraktivität als Studienort.

Schon Euklid hat wahrscheinlich in der Bibliothek in Alexandria gearbeitet. Zu deren Direktoren gehörte auch Eratosthenes von Kyrene (276?–194?) — ihm gelang, basierend auf einer Gradmessung zwischen Alexandria und Syene (Assuan), eine erstaunlich genaue Bestimmung des Erdumfanges. Er war ein Zeitgenosse des Archimedes und etwa eine Generation älter als Apollonios. Euklid, Archimedes und Apollonios bilden das herausragende Dreigestirn des goldenen Zeitalters der griechischen Mathematik. Zeitlich zwischen Euklid und Archimedes fällt die Wirksamkeit von Aristarch, bekannt als der erste Astronom, der das heliozentrische Weltsystem formulierte — im 16. Jh. berief sich Copernicus auf diesen antiken Vorläufer, der auch eine Erwähnung in der Geschichte der Geometrie verdient.

2.4.1 Aristarch

In seiner Abhandlung „Über die Größen und Entfernungen von Sonne und Mond“ ging Aristarch von der Annahme aus, Sonne und Mond würden, vom Zentrum der Erde aus gesehen, unter dem gleichen Winkel erscheinen. Dann betrachtete er die Situation des Halbmondes, wenn genau 50 % der der Erde zugewandten Mondoberfläche von der Sonne beleuchtet sind: hier bilden die drei Himmelskörper ein Dreieck mit einem rechten Winkel im Mondzentrum. Den spitzen Winkel bei der Erde nahm er zu 87° an (in Wahrheit $89^\circ 50'$) und die Breite des Erdschattens da, wo ihn der Mond durchquert, zu zwei Mondbreiten. Die weiteren Überlegungen Aristarchs folgen in Aufbau und Strenge dem Vorbild Euklids, sind darüberhinaus aber auch deshalb von Interesse, weil sie im Grunde mit trigonometrischen Verhältnissen arbeiten. Diese Verhältnisse schätzte er in systematischer Weise ab, wie es nach ihm in ähnlicher Weise auch Archimedes in seiner Kreismessung tat. Aristarch verwendete zwei Sätze: 1) Ist α das Bogenmaß eines Winkels mit $\alpha < \pi/2$, dann nimmt das Verhältnis $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ ab und das Verhältnis $\frac{\tan \alpha}{\alpha}$ zu, während α von 0 bis $\pi/2$ anwächst.

2) Ist β das Bogenmaß eines zweiten Winkels mit $\beta < \pi/2$ und $\alpha > \beta$, dann gilt

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \quad (2.4.1)$$

Hierauf aufbauend, bewies er:

1. Die Entfernung Erde-Sonne ist größer als das 18fache, aber kleiner als das 20fache der Entfernung Erde-Mond.
2. In gleicher Weise verhält sich der Sonnendurchmesser zum Monddurchmesser.
3. Das Verhältnis des Sonnendurchmessers zum Erddurchmesser ist größer als $19 : 3$, aber kleiner als $43 : 6$.

Gaben auch die konkret ermittelten Werte, wie wir heute wissen, die wirklichen Verhältnisse nicht richtig wieder, so ist doch die Genialität bewundernswert, mit der Aristarch seine Methode entwickelte und durchführte (s. Aufgabe 2.4.1).

2.4.2 Archimedes

Archimedes (287?–212; vgl. Bd. 1, Abschn. 4.5), von vornehmer Abstammung, wuchs in der um 733 v. Chr. von den Korinthern am Ostufer Siziliens gegründeten Hafenstadt Syrakus auf, die sich immer wieder der Angriffe der Karthager erwehren mußte. Er war der Sohn eines Astronomen und hat vermutlich in Alexandria studiert, bevor er wieder in seine Heimatstadt zurückkehrte. Seine Arbeitsgebiete umfassen neben der Mathematik die Mechanik, die Optik, die Hydrostatik und die Technik — im 2. Punischen Krieg soll er durch die Konstruktion besonders wirksamer Waffen wesentlich zur zwei Jahre andauernden Verteidigung der Stadt gegen die Belagerung durch die Römer beigetragen haben. Entgegen dem Befehl des Heerführers Marcellus wurde der greise Archimedes bei der Einnahme von Syrakus im Jahre 212 v. Chr. von einem römischen Soldaten erschlagen — der legendären Überlieferung nach, als er mit dem Zeichnen einer geometrischen Figur beschäftigt war und dem herantretenden Römer zugerufen haben soll: „Störe meine Kreise nicht!“

Archimedes' wohl genialste Leistungen gehören der Vorgeschichte der Infinitesimalrechnung an. In einer Eratosthenes gewidmeten Schrift über die Methode, die erst 1906 in einer im 10. Jh. angefertigten Abschrift wiederentdeckt wurde, erläuterte er seine auf mechanischen Überlegungen basierenden heuristischen Methoden zur Flächen- und Voluminabestimmung. (Die Abschrift ist ein sog. Palimpsest, eine Pergamenthandschrift, deren Text im 13. Jh. abgewaschen und neu überschrieben wurde. Glücklicherweise ließ sich der Archimedes-Text dennoch entziffern. Diese einmalige Handschrift wechselte am 29. Okt. 1998 in

einer spektakulären Auktion ihren Besitzer zum stolzen Preis von zwei Millionen Dollar! [Archimedes h])

Geometrie als solche bildete keinen Schwerpunkt im Schaffen des Archimedes, hatte freilich bei der Untersuchung infinitesimaler Probleme (wie z.B. der Parabelquadratur) eine unentbehrliche Hilfsfunktion zu übernehmen. Ganz dem Bereich der Geometrie kann man nur die leider verlorene Untersuchung über halbgelmäßige Polyeder zurechnen. Als Beispiel, wie Archimedes geometrische Überlegungen in seinen Untersuchungen einsetzte, sei die Abhandlung über die Spiralen erwähnt [Archimedes g]. Archimedes widmete diese Untersuchung dem Mathematiker Dositheos, wobei er in einer als Brief an diesen formulierten Einleitung zunächst auf andere Arbeiten und früher übersandte Beweise einging (man vgl. den Auszug im Anhang A.2 [Archimedes g, S.7]). Dann fuhr er fort:

„Nächst dem handelt es sich um folgende Probleme über die Spirale... , für welche ich dir in diesem Buche die Beweise aufgeschrieben habe. Es sind aber diese: Wenn ein Halbstrahl sich innerhalb einer Ebene um seinen Endpunkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit dreht, bis er wieder in seine Ausgangsstellung zurückkehrt, gleichzeitig sich aber ein Punkt auf diesem Halbstrahl mit gleichförmiger Geschwindigkeit vom Endpunkt des Halbstrahls aus bewegt, so wird der Punkt eine Spirale beschreiben. Ich behaupte nun, daß das Flächenstück, das von der Spirale und der Anfangslage des Halbstrahls begrenzt wird, der dritte Teil ist des Inhaltes des Kreises, dessen Mittelpunkt der feste Endpunkt des Halbstrahls ist, und dessen Radius die Entfernung des beweglichen Punktes nach vollendeter Drehung von diesem Punkte ist...“

Als erste Beobachtung ist festzuhalten, daß Archimedes die (heute nach ihm benannte) Spirale bewegungsgeometrisch definiert als Kombination einer Rotations- mit einer linearen Bewegung — mit Zirkel und Lineal läßt sich diese „mechanisch“ erzeugbare Kurve nicht konstruieren. Sodann bemerkt man, daß bereits der erste von ihm zitierte Satz eigentlich der Integralrechnung zuzurechnen ist. Denn übersetzt man die Definition in die Gleichung

$$r = a\phi, \quad (2.4.2)$$

so behauptet er ja (da ein infinitesimales Flächenstück in Polarkoordinaten als Dreieck die Größe $\frac{1}{2}r \cdot r d\phi$ hat):

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a^2\phi^2 d\phi = \frac{4}{3}\pi^3 a^2. \quad (2.4.3)$$

Der feste Endpunkt des Halbstrahls nach einer Umdrehung hat den Abstand $2a\pi$ vom Zentrum, der genannte Kreis also die Fläche $4\pi^3 a^2$, womit diese Behauptung des Archimedes bestätigt ist.

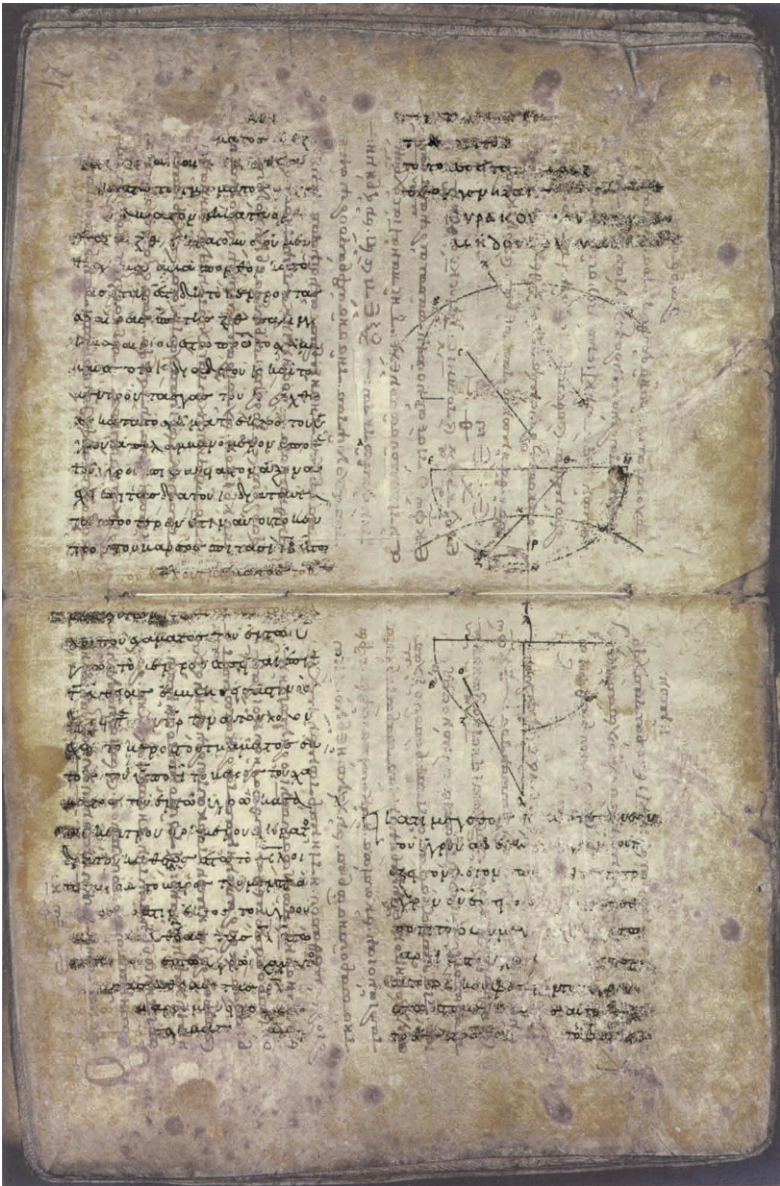


Abb. 2.4.1 Manuskriptseite aus dem Archimedes-Palimpsest
[Auktionskatalog der Fa. Christies, New York 1998]

Auch die Tangente an die Spirale wurde von Archimedes studiert (vgl. Aufgabe 2.4.2). Zeichnet man senkrecht zu einem Radiusvektor $r = OP$ durch das Zentrum O eine Gerade und denkt sich im Kurvenpunkt P die Tangente $t = PT$ gezeichnet, wobei T ihr Schnittpunkt mit dieser Geraden sei, so wird die Strecke PT als polare Subtangente s_t bezeichnet. Archimedes wies nach, daß $s_t = \frac{r^2}{a}$ gilt.

Obgleich die Zuweisung an Archimedes nicht gesichert ist, sei hier noch auf die nur arabisch überlieferte Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks hingewiesen. Das regelmäßige Dreieck, Viereck (= Quadrat), Fünfeck und Sechseck lassen sich bekanntlich mit Zirkel und Lineal in einen gegebenen Kreis einbeschreiben. Das geht beim Siebeneck nicht mehr — algebraisch führt die Teilung des Kreises in sieben gleiche Teile auf eine kubische Gleichung und gehört daher der gleichen Problemklasse an wie die Würfelverdoppelung und die Winkeldreiteilung. Die angeblich von Archimedes gefundene Konstruktion arbeitet zwar auch nur mit diesen beiden Geräten, verwendet das Lineal allerdings in einer in der euklidischen Geometrie nicht erlaubten Weise: es wird solange um einen festen Punkt gedreht, bis zwei Dreiecke, von denen eines bei der Drehung anwächst, während das andere abnimmt, flächengleich sind [Scriba 1992]. Es ist dies ein besonderer Typus einer Einschiebungskonstruktion oder sog. Neusis. Das angewandte Verfahren ist verblüffend und theoretisch reizvoll, aber nicht praktisch anwendbar.

2.4.3 Apollonios

Fast eine Generation jünger ist Apollonios von Perge (260? – 190?; vgl. Bd. 1, Abschnitt 4.5). Auch er studierte in Alexandria bei den Nachfolgern des Euklid und arbeitete dort lange Zeit. Wie schon erwähnt, verdrängte seine Kegelschnittlehre die älteren Darstellungen. Nur die ersten vier Bücher (= Kapitel) sind griechisch überliefert, drei weitere in arabischer Übersetzung; das letzte Buch ist nicht erhalten. Im Gegensatz zu Euklid erläuterte Apollonios in Vorworten zu den einzelnen Büchern seine Absichten, darin dem Vorgehen von Archimedes folgend. Das Werk beginnt in Form eines an Eudemos gerichteten Briefes:

„Apollonios grüßt Eudemos.

Falls du bei guter Gesundheit bist und auch sonst sich die Umstände so verhalten, wie du es dir wünschst, ist es gut. Auch ich kann im allgemeinen nicht klagen. In der Zeit, die wir gemeinsam in Pergamon verbrachten, bemerkte ich dein großes Interesse, mit meinen Untersuchungen über die Kegelschnitte bekannt zu werden. Daher schicke ich dir das erste Buch, das ich inzwischen

überarbeitet habe; die weiteren werden folgen, wenn ich sie zu meiner Zufriedenheit beendet habe. Wie du dich erinnern wirst, berichtete ich dir damals, daß ich diese Untersuchungen seinerzeit auf Bitten des Geometers Naukrates aufnahm, als er mit mir in Alexandria zusammen war. Nachdem ich sie in acht Büchern niedergelegt hatte, gab ich sie ihm — sehr übereilt, da er im Begriff war, abzusegeln. Ich konnte sie daher nicht mehr sorgfältig überarbeiten, ja, ich hatte alles einfach so niedergeschrieben, wie es mir gerade in den Sinn kam, und die Revision zurückgestellt. Daher werde ich jetzt, wie es die Gelegenheit erlaubt, korrigierte Fassungen herausgeben. . .

Die ersten vier der acht Bücher enthalten eine elementare Einführung . . .

[Es folgt eine Inhaltsangabe dieser Bücher.]

Die restlichen Bücher enthalten Ergänzungen . . .

Wenn sie alle herausgegeben sind, steht es allen frei, sie zu lesen und sich ihr eigenes Urteil darüber zu bilden, je nach ihrem eigenen Geschmack.

Lebe wohl.“

In den Begleitbriefen zu späteren Büchern geht Apollonius teilweise ausführlicher auf die Vorgeschichte der behandelten Themen ein und hält fest, welche Teile Ergebnisse seiner eigenen Forschungen wiedergeben. Ein wichtiger Unterschied gegenüber den Vorgängern liegt in der Allgemeinheit, mit der Apollonios in den „Conica“ seine Sätze formuliert und beweist. Bewußt knüpft er an Euklid an, wenn er in den ersten vier Büchern die Elemente, also die Grundlagen der gesamten Kegelschnittlehre, systematisch errichtet, bevor er sich im zweiten Teil spezielleren Problemen zuwendet.

Apollonios erzeugt die verschiedenen Kegelschnitte alle an einem einzigen schiefen Kreiskegel (im Fall der Hyperbel über die Spitze hinaus zu einem Doppelkegel verlängert), indem er die ebenen Schnitte unter verschiedenen Winkeln vornimmt — wie wir sahen, hatte Aristaos die Kurven mittels senkrechter, an drei verschiedenen Kreiskegeln angebrachter Schnitte gewonnen. Dabei diskutierte Apollonios die geometrischen Beziehungen, die wir heute aus der Scheitelgleichung

$$y^2 = rx(1 \pm \frac{x}{t}) \quad (2.4.4)$$

der Kegelschnitte entnehmen würden (mit den Konstanten r = latus rectum, t = latus transversum). Daraus leiten sich auch die noch heute üblichen Namen ab: fehlt das zweite Glied auf der rechten Seite, hat man es mit einer reinen Flächenanlegung (griechisch: parabole) zu tun; fällt dieses Glied positiv aus, liegt eine Anlegung mit Überschuß (hyperbole) vor; ist es negativ, eine solche mit Mangel oder Defekt (elleipsis).

In dieser Form zum Ausdruck gebracht, lassen sich die drei Beziehungen nachträglich als die Koordinaten der drei (nicht-entarteten) Kegelschnitte in einem

schiefwinkligen Koordinatensystem interpretieren, wie es im 17. Jh. von Descartes eingeführt wurde. Dessen Achsen werden von einem der Durchmesser und der Tangente im Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt gebildet. Hatte Archimedes die Kegelschnittgleichungen als Verhältnisgleichungen definiert, so bediente sich also Apollonios — wie schon Menaichmos — der Tradition der Flächenanlegung aus dem 2. Buch Euklids. Nachdem er für jede der Kegelschnittkurven eine charakteristische Beziehung (symptoma) gewonnen hatte, brauchte Apollonios nicht mehr auf den stereometrischen Ursprung zurückzugreifen. Tangenten- und Asymptoteneigenschaften, die harmonischen Eigenschaften von Pol und Polare und Brennpunktbeziehungen der Kegelschnitte bilden den Inhalt der weiteren Untersuchungen. Da Apollonios zwischen der aus einem Ast bestehenden Hyperbel und ‘zwei zugehörigen Hyperbeln’ unterscheidet und den Kreis nichts als spezielle Ellipse unter diese subsumiert, formuliert er beispielsweise den Satz, der demjenigen über Pol und Polare nahe kommt, folgendermaßen:

Zieht man durch den Schnittpunkt zweier Tangenten eines Kegelschnitts, eines Kreises oder zweier zugehöriger Hyperbeln eine Gerade, die die Kurve in zwei Punkten schneidet, so wird diejenige Strecke auf ihr, die zwischen diesen Punkten liegt, durch die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Tangenten und den Tangentenschnittpunkt im gleichen Verhältnis geteilt³.

Im Gegensatz zu Euklids Elementen, die auch im Mittelalter und bis weit in die Neuzeit hinein (freilich oft nur auszugsweise) Grundlage des Geometrieunterrichtes bildeten, wurden die Conica des Apollonios zunächst nur im islamischen Bereich rezipiert. In Westeuropa erlangten sie erst wieder größere Bedeutung, nachdem im 17. Jh. Kepler die Ellipse als die wahre Bahn eines Planeten um die Sonne erkannt und Newton diese Bahnform aus dem allgemeinen Gravitationsgesetz abgeleitet hatte.

Apollonios ist Autor einer Reihe weiterer Schriften, wovon aber nur die Verhältnisschnitte (in arabischer Übersetzung) erhalten sind. Verschiedene Abhandlungen über Schnitte handelten von Eigenschaften projektiver Punktreihen, eine andere von Einschiebungen. Auch untersuchte er das nach ihm

³Modern gesprochen bedeutet das: Bezeichnen P und Q die Berührungspunkte zweier Tangenten an einen Kegelschnitt, T ihren Schnittpunkt, R' den T nächstgelegenen, R den anderen Schnittpunkt einer Geraden durch T , welche den Kegelschnitt zweimal schneidet und ist S der Schnittpunkt der Geraden durch T mit der Geraden PQ , so wird die Strecke $R'R$ durch S und T innen und außen im gleichen Verhältnis, also harmonisch geteilt, d. h. es ist $RS : SR' = RT : TR'$.

benannte Problem, zu drei gegebenen Kreisen in der Ebene (oder ihren Ausartungen zu Punkten bzw. Geraden) mit Zirkel und Lineal diejenigen Kreise zu konstruieren, die die gegebenen berühren (vgl. Aufgabe 2.4.3).

In manchen seiner Beiträge knüpfte Apollonios an die Arbeiten von Archimedes an, so bei Untersuchungen über Brennspiegel (geometrische Optik) und bei solchen über die regelmäßigen Körper (wie wir sahen, hatte sich Archimedes mit den halbberegelten beschäftigt). Hier konnte er den Nachweis liefern, daß sich die Oberflächen des regelmäßigen Dodekaeders und Ikosaeders, die der gleichen Kugel einbeschrieben sind, wie ihre Volumina verhalten. In Form einer Bearbeitung des Hypsikles von Alexandria (um 180 v. Chr.) wurde diese Studie des Apollonios den Elementen Euklids als 14. Buch angehängt.

2.5 Spätantike, Rom und Byzanz

Nach den drei großen Theoretikern Euklid, Archimedes und Apollonios hat die hellenistische Welt keine Mathematiker mehr von wirklich vergleichbarem Rang hervorgebracht. Auch in den beiden diese ablösenden Kulturen, in Rom im Westen und in Byzanz im Osten, lassen sich gleich bedeutsame Namen nicht angeben. Daher erscheint es berechtigt, die Zeit ab der Mitte des 2. vorchristlichen Jahrhunderts bis zum Zerfall des römischen Reiches während der Völkerwanderung (3. bis 6. Jh. n. Chr.) zusammenzufassen. Schließlich soll auch die Spätblüte der Mathematik in Byzanz, die etwa vom 10. bis 14. Jh. anzusetzen ist, hier noch betrachtet werden, da sie sich — u. a. auch aus sprachlichen Gründen — in enger inhaltlicher Verbindung zur griechischen Mathematik entwickelte.

2.5.1 Heron

In Heron von Alexandria haben wir einen Mathematiker und Techniker vor uns, über dessen Biographie so wenig bekannt ist, daß man ihn irgendwo zwischen 150 v. Chr. und 200 n. Chr. (oder gar noch etwas später) datiert hat — heute nimmt man an, er habe gegen Ende des 1. Jhs. n. Chr. in Alexandria gewirkt. Ähnlich wie Archimedes hat er sich sowohl auf mechanisch-technischem wie auf mathematischem Gebiet betätigt, auf letzterem freilich bevorzugt unter praktischen Aspekten, so daß ein Vergleich mit dem genialen Theoretiker Archimedes ganz unangemessen wäre. Vielmehr war sein Schaffen enzyklopädisch angelegt und entsprach damit einer Tendenz der Zeit: dem Bestreben, das klassische Erbe zu sammeln und zu bewahren. Viele seiner Schriften und Vorlesungen fanden, oft stark überarbeitet, weite Verbreitung. Das lag nicht zuletzt an ihrem auf Anwendungen ausgerichteten Charakter,

146 v. Chr.	Römer zerstören Karthago und unterwerfen Griechenland	
47 v. Chr.		Brand der Bibliothek in Alexandria. Alexandria bleibt weiterhin Mittelpunkt griechisch-hellenistischer Kultur
44 v. Chr.	Ermordung Caesars	
27 v. – 14 n. Chr.	Oktavian als Augustus erster römischer Kaiser	Römisches Recht und römische Kultur bestimmen das Leben der Völker des Imperium Romanum
27 v. – 395 n. Chr.	Römisches Kaiserreich	
~ 7 v. – 30 n. Chr.	Jesus von Nazareth	Entwicklung der Feldmeßkunst und Kartographie
66 – 70 n. Chr.	Jüdischer Krieg, Zerstörung von Jerusalem unter Titus	Monumentale Baukunst (Kolosseum, Pantheon, Engelsburg, Palatin, Kaiserforen)
176 n. Chr.	Verbot der christlichen Religion im Römischen Reich	Wandmalereien, Mosaikkunst (Herkulaneum, Pompeji), Klassische Dichtung (Horaz, Vergil, Ovid), Geschichtsschreibung (Livius, Tacitus, Plinius d.Ä.)
290	Höhepunkt der Christenverfolgungen	
391	Christentum wird Staatsreligion im Römischen Reich	Erneuter Brand der Bibliothek in Alexandria
395	Teilung in weströmisches und oströmisches Reich	
476	Untergang des weströmischen Reiches	
529	Akademie in Athen durch Justinian geschlossen	Mathematiker sammeln und kommentieren frühere Ergebnisse in Konstantinopel (Byzanz)
1453	Eroberung Konstantinopels durch die Türken, Ende des oströmischen Reiches	

der dieser Epoche entgegenkam. So knüpfte Heron nicht nur an die klassische Tradition an (z.B. an die Elemente Euklids und an mehrere Schriften des Archimedes), sondern griff daneben auch auf die babylonisch-ägyptische Tradition zurück, wobei er manche nur näherungsweise gültige Verfahren übernahm bzw. weiterentwickelte. In einem (teilweise aus arabischen Erwähnungen bekannten) Euklid-Kommentar ersetzte Heron viele indirekte Beweise Euklids durch direkte.

Sein Werk „Metrika“ (der griechische Text wurde erst Ende des 19. Jhs. wieder aufgefunden) richtete sich vorwiegend an Praktiker. Darin werden, neben vielen Konstruktions- und Vermessungsvorschriften ebener und räumlicher Gebilde, z.B. zur Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln auch Näherungsrezepte angegeben, die den algorithmischen Aspekt hervorheben. Das 3. Buch (= Kapitel) behandelt die Teilung von Flächen und Körpern nach vorgeschriebenen Verhältnissen, darunter auch die Archimedische Kugelteilung.

Mit Herons Namen noch heute verbunden ist die heronische Dreiecksformel. Sind die drei Seiten a, b, c eines beliebigen Dreiecks gegeben, ermöglicht sie, unter Verwendung der Hilfsgröße $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ den Flächeninhalt Φ des Dreiecks ohne den Umweg über die Berechnung einer seiner Höhen zu ermitteln:

$$\Phi = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (2.5.1)$$

Obgleich heute nach Heron benannt, kannte schon Archimedes diese Formel. Zu dem von Heron gegebenen Beweis vgl. Aufg. 2.5.1. Wie Abb. 2.5.1 zeigt, bedient sich Heron des Inkreises des Dreiecks (Radius r); die drei von den Ecken aus zu dessen Mittelpunkt gezogenen Strecken zerlegen das Dreieck in drei Teildreiecke der Höhe r . Das Einfügen von zwei rechtwinkligen Dreiecken ermöglicht dann die Berechnung von r . Auf der abgebildeten Seite gehört, abgesehen von den beiden Figuren, nur der über diesen befindliche Schriftblock zum Heronschen Text; alles weitere sind Randglossen eines ebenfalls griechisch schreibenden Lesers; sie deuten an, welche Schwierigkeiten dieser hatte, als er sich bemühte, den Beweis zu verstehen. Ungewöhnlich für die damalige Zeit ist u.a., daß Heron im Beweisgang mit dem Produkt von vier Längen arbeitet (genauer gesagt: dem Produkt von zwei Flächen). Das erlaubt ihm, ohne Behinderung durch Quadratwurzeln zunächst das Quadrat der gesuchten Dreiecksfläche auszurechnen. Heron versäumt es, in diesem Fall alle erforderlichen Hilfssätze der Elemente Euklids zu zitieren; so erkannte z.B. der Scholiast nicht sofort, daß die Verbindungslinien der Eckpunkte mit dem Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises zugleich die Winkelhalbierenden sind! Auch führte ihn in die Irre, daß die beiden Figuren einen Spezialfall anzudeuten scheinen: ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck anstelle des allgemeinen Falles.

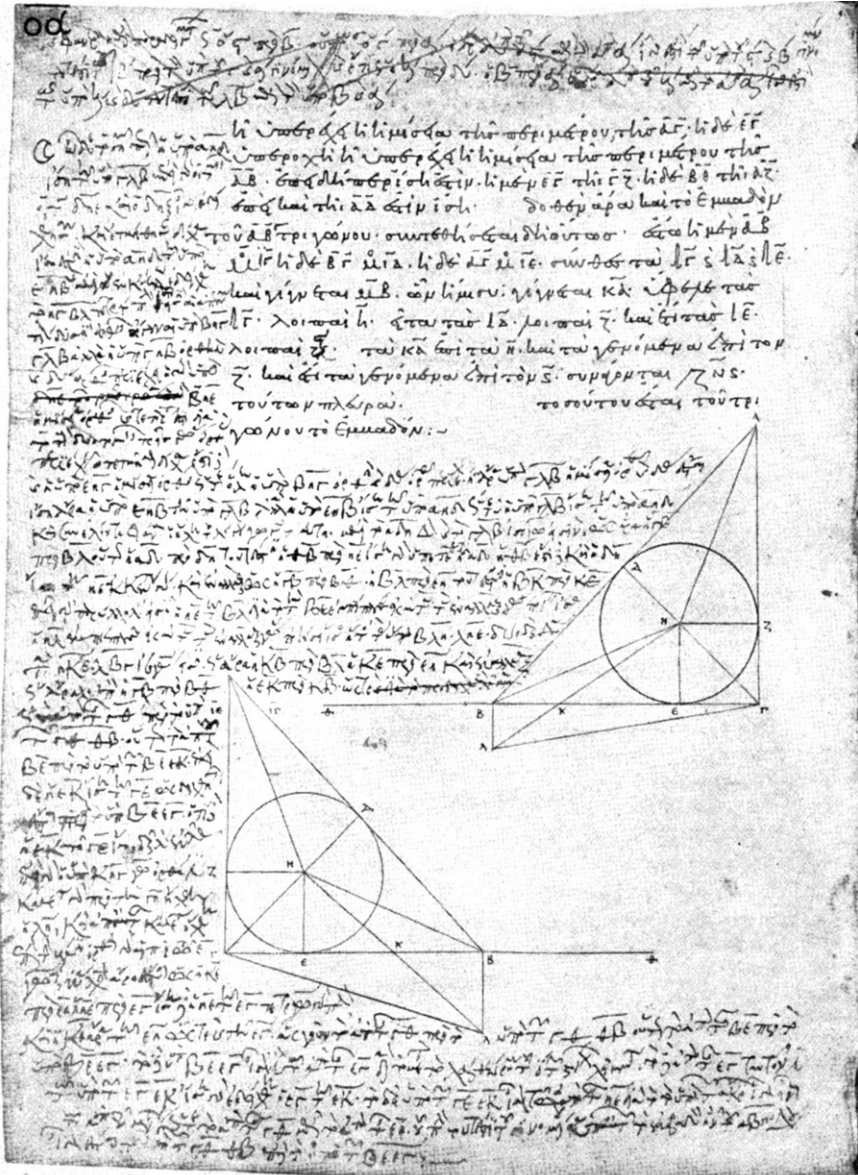


Abb. 2.5.1 Manuskriptseite aus Herons „Metrika“ mit dem Beweis der Dreiecksformel: Codex Constantinopolitanus Palatii Veteris No. 1 (11./12. Jh.), fol. 71v. [Codex Constantinopolitanus Palatii Veteris No. 1, ed. by E. M. Bruins. Part One: Reproduction of the Manuscript, S. 138. Leiden: E. J. Brill 1964.]

2.5.2 Pappos

Neben weiteren Mathematikern, die weniger auf geometrischem als auf anderen Gebieten tätig waren (wie z.B. der Zahlentheoretiker Diophantos, der vermutlich um 250 in Alexandria wirkte; vgl. Bd. 1, Abschnitt 4.5), und neben den Begründern der Trigonometrie, auf die weiter unten eingegangen wird, wirkte um 320, also in der Spätzeit, in Alexandria der für die Überlieferungsgeschichte bedeutsame Pappos. Er gehörte dem Kreis der alexandrinischen Neuplatoniker an. Seine „Collectiones“ sind ein Sammelwerk in acht Büchern; bis auf das erste und den Anfang des zweiten sind sie sämtlich erhalten. In der frühen Neuzeit entnahmen die europäischen Mathematiker den „Collectiones“ viele Anregungen, enthalten sie doch wichtige Auszüge aus (teils erhaltenen, teils verlorenen) Schriften von Euklid, Apollonios, Archimedes und anderen Mathematikern. Pappos erweiterte diese Auszüge um kritische Kommentare und bemerkenswerte eigene Zutaten.

Zu diesen gehören Sätze über projektive Gebilde, Bemerkungen zu Extremwertaufgaben und der sog. Guldinsche Schwerpunktsatz an Rotationskörpern (von Paul Guldin 1641 publiziert!). Pappos formulierte letzteren in einer für die Antike ganz ungewöhnlichen Allgemeinheit und bemerkte selbst dazu: „Diese Sätze, die in Wirklichkeit einer sind, umfassen eine beliebige Anzahl von Theoremen aller Art über Kurven, Oberflächen und Körper, welche alle auf einmal durch einen einzigen Beweis bewiesen werden.“ Hatte Apollonios den geometrischen Ort zu drei und vier Geraden diskutiert, so dehnte Pappos die Untersuchung auf n beliebige Geraden aus — eine Fragestellung, die im 17. Jh. mehrere Mathematiker zum Studium herausforderte.

2.5.3 Proklos

Aus der in der Spätzeit vermehrt entstehenden Sammel- und Kommentarliteratur sei noch der ausführliche Kommentar des Proklos Diadochos (410-485) zum ersten Buch der euklidischen Elemente erwähnt. Proklos, nach Studien in Alexandria Haupt der Akademie in Athen, verfaßte auch Kommentare zu einer Reihe von Dialogen des Plato. Seinen Euklid-Kommentar eröffnete er mit einer Darlegung der neuplatonischen Philosophie der Mathematik; wichtig für die Nachwelt wurden vor allen Dingen die vielen wertvollen historischen Bemerkungen, die Proklos darin überlieferte (meist gehen sie auf die verlorenen Werke des Eudemos und Geminos zurück). Proklos setzt sich ausführlich mit den Prinzipien der Geometrie auseinander, diskutiert das Verhältnis von Postulaten, Axiomen und Hypothesen zueinander, erläutert den Unterschied zwischen Lehrsätzen und Problemen, bespricht Beweisstrukturen und Fach-

ausdrücke. Die einzige Stelle, an der er über Euklid hinauszugehen versucht, ist, als er sich bemüht, das Parallelenpostulat zu beweisen, nachdem er einen Beweisversuch des Ptolemaios zurückgewiesen hat. Ob Proklos auch Kommentare zu weiteren Büchern der Elemente verfaßte, wie er beabsichtigte, ist ungewiß.

Drei Themen sind in diesem Abschnitt noch zu besprechen: die Entstehung der Trigonometrie, die Schriften der römischen Feldmesser und die Leistungen der Byzantiner nach der Jahrtausendwende.

2.5.4 Sehnengeometrie

Die Trigonometrie wurde bis hin zu Copernicus (1473–1543) als Bestandteil der Astronomie aufgefaßt und dementsprechend in astronomischen Werken behandelt — das erste selbständige Lehrbuch der Trigonometrie verfaßte Regiomontanus um 1464, doch erschien es erst posthum fast 70 Jahre später (1533). Erste Elemente hatten wir in der vorgriechischen Mathematik kennengelernt. Die Angabe des Rücksprungs zur Kennzeichnung der Neigung einer Fläche (etwa einer Pyramide) enthält ja den Kern einer Tangensfunktion. Dabei ist freilich zu bedenken, daß die Babylonier die beiden erforderlichen Maßangaben (Größe des Rücksprungs bei gegebener Höhendifferenz) in unterschiedlichen Maßeinheiten ausdrückten und sie nicht zu einem gemeinsamen Oberbegriff, wie ihn die Tangensfunktion darstellt, zusammenfaßten. Auch ihr Bemühen, ein Kreissegment durch Sehne und Pfeil zu erfassen, kann man einer frühen Vorstufe der Trigonometrie zurechnen, basierte doch die ebene Trigonometrie vor der Einführung der Sinus- und Tangensfunktion auf dem Kreis und dem Studium der Beziehungen zwischen Kreissehnen. (Aus diesem Grunde ist es auch besser, von Sehnengeometrie zu sprechen und den Begriff ‘Trigonometrie’ zu reservieren für jenen Zweig der Geometrie, in dem rechtwinklige Dreiecke samt ihren Seitenverhältnissen, also die trigonometrischen Funktionen, zur Anwendung kommen).

Bequemer als das Rechnen mit Sehnen ist dasjenige mit Halbsehnen, worauf die uns geläufigen Winkelfunktionen beruhen. Auf diese kommen wir in Abschnitt 3.4.4 bei der Behandlung der indischen Geometrie zurück; denn in Indien wurden sie zuerst eingeführt. In der überlieferten griechischen Literatur kommen sie nicht vor. Mit der Verbreitung der sin-Funktion über Indien hinaus verschwand die etwas umständlichere Sehnenrechnung aus der Mathematik.

Zum besseren Verständnis der Sehnengeometrie ist es jedoch dienlich, sich vorab den Zusammenhang zwischen der Sehne und dem Sinus klarzumachen (Abb. 2.5.2). Zeichnet man im Kreis vom Radius r zum Zentriwinkel α die

Sehne s , so ist die halbe Sehne $\frac{s}{2}$, geteilt durch r , der Sinus von $\frac{\alpha}{2}$. Verwendet man, wie üblich, für die Sehne (lateinisch: chorda, corda) die Abkürzung ‘crd.’, so gilt also: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2} : r = \frac{s}{2r}$. Daraus folgt:

$$s = \text{crd.}\alpha = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2.5.2)$$

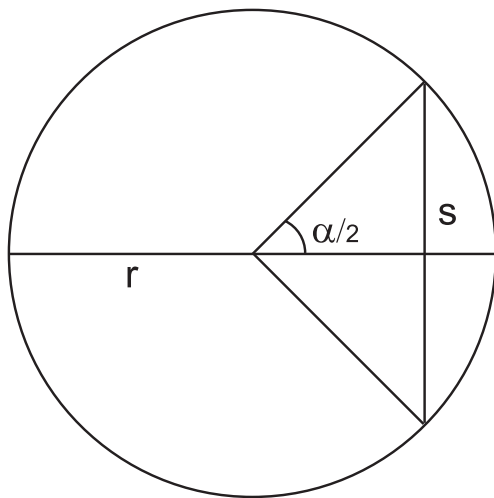


Abb. 2.5.2 Der Zusammenhang zwischen Sehnen- und Sinusgeometrie

2.5.5 Ptolemaios

Man weiß, daß der Astronom Hipparch im 2. vorchr. Jahrhundert eine Sehnentafel berechnete. Überliefert ist die Sehnentafel des Ptolemaios. Sie ist enthalten in seinem astronomischen Hauptwerk „*Matematikē syntaxis*“, in späterer Zeit auch „*Megalē syntaxis*“ genannt (die mathematische bzw. große Sammlung), dem bis zu Copernicus maßgeblichen astronomischen Lehrbuch. Bekannt ist es unter dem arabischen Titel „*Almagest*.“

Klaudios Ptolemaios (ca. 100 – ca. 160), ebenfalls in Alexandria wirkend, schickte dieser Tafel und ihrer Berechnung die Bemerkung voraus, er werde nur die kleinstmögliche Zahl von Lehrsätzen bringen, die dazu erforderlich sei — alles Dinge, die schon vor ihm bekannt waren. Er ging von der Berechnung der Seitenlängen der ersten regulären Polygone im Kreis aus und setzte sich das Ziel, die Sehnenwerte im Abstand von jeweils einem halben Grad anzugeben. Die Länge des Durchmessers setzte er dabei zur Vermeidung von zu

kleinen Sexagesimalbrüchen zu 120 Teilen (*partes* = *p*) an, denn — wie in der Astronomie seit den Babyloniern üblich — rechnete auch Ptolemaios im Sexagesimalsystem. Dieses Vorgehen lieferte ihm mittels elementargeometrischer Überlegungen die Sehnen zu folgenden regelmäßigen *n*-Ecken:

n	3	4	5	6	8	10	12
ϕ	120°	90°	72°	60°	45°	36°	30°

Mit Hilfe seines Sehnensatzes (einem Äquivalent für die Subtraktionsformel der Sinusfunktion; vgl. Aufgabe 2.5.2) konnte er daraus die Sehne von 12° berechnen, woraus er durch wiederholte Halbierung die Sehne von $1\frac{1}{2}^\circ$ gewann. Zum weiteren Vorgehen bemerkte er [Ptolemaios, 32 - 33]:

„Nun kann freilich, wenn z.B. die Sehne zu dem Bogen von $1\frac{1}{2}^\circ$ gegeben ist, die das Drittel desselben Bogens unterspannende Sehne durch geometrische Konstruktion auf keinerlei Weise gefunden werden. Wäre das möglich, dann hätten wir ja ohne weiteres auch die Sehne zum Bogen von $\frac{1}{2}^\circ$ zur Verfügung. Deshalb werden wir zuerst die Sehne zum Bogen von 1° aus den Sehnen zu den Bögen von $1\frac{1}{2}^\circ$ und $\frac{3}{4}^\circ$ auf methodischem Weg ableiten unter Zugrundelegung eines Satzes, der zwar mit absoluter Genauigkeit die Größenbeträge nicht festzustellen vermag, aber bei so minimalen Größen doch wenigstens einen Wert liefern kann, der sich für die sinnliche Wahrnehmung von dem absolut genauen nur ganz unwesentlich unterscheidet.“

Danach zitiert Ptolemaios den besagten Satz wie folgt:

Wenn in einem Kreis zwei ungleiche Sehnen gezogen werden, so ist das Verhältnis der größeren Sehne zur kleineren Sehne kleiner als das Verhältnis des Bogens auf der größeren Sehne zum Bogen auf der kleineren Sehne.

Das bedeutet: weil die Winkeldreiteilung nicht elementar konstruierbar ist, bediente sich Ptolemaios an dieser Stelle der linearen Interpolation, um schließlich die Sehne von 1° zu bekommen. Er fand: *crd.* $1^\circ = 1^p 2' 12''$. In seiner Tafel gab er dann die Längen der Sehnen für Winkel zwischen $\frac{1}{2}^\circ$ und 180° in Schritten von jeweils einem halben Grad an, was einer Sinustafel mit der Winkeldifferenz von $15'$ entspricht (s. Aufgabe 2.5.2).

Ptolemaios hatte, wie der Leser bemerkt haben wird, die Sehne von 12° aus den Sehnen von 72° und 60° gewonnen, also aus den Seiten des regelmäßigen Fünfecks und Sechsecks. Von Interesse ist in diesem Zusammenhang seine Konstruktion der Seite des regelmäßigen Fünfecks (s. Aufg. 2.5.3); denn sie wich von der von Euklid beschriebenen ab.

Um 370 verfaßte Theon von Alexandria einen Kommentar zu den beiden ersten Büchern des Almagest. Dabei wurde er — wie er selbst erwähnt — von seiner gelehrten Tochter Hypatia unterstützt. Auch soll Hypatia einen Kommentar zu den Kegelschnitten des Apollonios (wie auch zur Arithmetica des Diophantos) verfaßt haben; leider sind diese Werke der wegen ihrer Bildung und Eloquenz berühmten Wissenschaftlerin, die am Museion in Alexandria Vorlesungen hielt, nicht überliefert. Als Anhängerin des Neuplatonismus wurde sie 415 vom christlichen Pöbel ermordet.

2.5.6 Menelaos

Neben der ebenen Trigonometrie benötigt der Astronom aber auch die sphärische, stellt sich doch der gestirnte Himmel dem Beobachter in Gestalt einer Kugel dar, so daß die einfachste geometrische Figur das aus Großkreisbögen gebildete sphärische Dreieck ist. Eine erste Sammlung von Lehrsätzen aus diesem Bereich hatte um 100 v. Chr. Theodosios von Pitane angelegt. Die Grundlagen dafür hatte um 100 n. Chr. der in Alexandria wirkende Astronom Menelaos in seiner „Sphärik“ niedergelegt. Dort findet sich erstmals der Begriff und eine Definition des sphärischen Dreiecks. Lehrsätze darüber bringt Menelaos in Analogie zu denjenigen, die Euklid über ebene Dreiecke formuliert hatte. Zentral war dabei seine Regel der sechs Stücke. Sie tritt allerdings bei Menelaos wie auch bei Ptolemaios, der sie ebenfalls beweist, nicht in der Form einer Aussage zum sphärischen Dreieck auf, das von einer Transversalen geschnitten wird, sondern wird bezogen auf zwei Großkreisbögen ADB und AEC (beide kleiner als ein Halbkreis), die von zwei anderen Großkreisbögen DFC und BFE (ebenfalls kleiner als ein Halbkreis) in D, B bzw. C, E geschnitten werden. Das Ergebnis wird in einer dem Ausdruck

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CF}{\sin FD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA} \quad (2.5.3)$$

gleichwertigen Form angegeben. Heute würden wir das eher auf ein sphärisches Dreieck ADC (mit einer verlängerten Seite ADB) beziehen, das von dem Großkreis BEF in B, E, F geschnitten wird, und die Behauptung in der Form ausdrücken, daß das Produkt der drei Sinus gleich dem Produkt der drei anderen Sinus ist (abgesehen vom Vorzeichen):

$$\sin AE \cdot \sin CF \cdot \sin DB = \sin EC \cdot \sin FD \cdot \sin BA. \quad (2.5.4)$$

Ähnlich wie beim Sehnensatz des Ptolemaios folgen aus der Regel der sechs Stücke (deren Anwendung ja die Kenntnis von fünf Größen voraussetzt, will

man die sechste berechnen) einfachere Regeln, falls einer oder gar mehrere der Großkreisbögen sich über 90° erstrecken. Doch sei es dem Leser überlassen, derartige Spezialfälle zu betrachten.

2.5.7 Sonnenuhr, Analemma

Die Anregung zur Verknüpfung von Bewegungen auf sphärischen Bahnen und ebenen Kurven muß sich in der Astronomie schon früh ergeben haben — sobald man nämlich die einfachste Art der Sonnenuhr, den Gnomon, genauer zu beobachten begann. Die Ägypter verwendeten ihn in Form des Obelisken. Wie schon erwähnt, soll Anaximandros dieses Instrument, das er angeblich in Babylon kennengelernt hatte, in der ersten Hälfte des 6. Jhs. v. Chr. in Griechenland eingeführt haben. Markiert man die Tageswanderung des Schattens der Spitze des senkrechten Stabes auf der (ebenen) Grundfläche, so erhält man ja das Bild des Tageskreisbogens des Sonnenlaufs; macht man das in regelmäßigen wöchentlichen oder monatlichen Abständen, spiegeln diese Linien auch die Veränderungen im Jahreslauf. So kann man mit diesem Schattenzeiger auch den Zeitpunkt der Sonnenwenden, die Schiefe der Ekliptik und die geographische Breite des Beobachtungsortes bestimmen. Daher wurde der Gnomon zu einem für Astronomen wie Geographen unentbehrlichen Instrument, und die Beschäftigung mit seiner Theorie (d.h. mit Anfängen der Theorie geometrischer Abbildungen) war unabdingbar.

Plinius beschreibt in seiner *Naturalis Historia* (36, 72 f.) ausführlich die größte antike Anlage, das Solarium des Augustus auf dem Marsfeld in Rom mit seinem 30 m hohen Obelisken. Das Analemma, das ebene Zifferblatt, erstreckte sich über ein Feld von etwa 65 m mal 175 m. Wie Ausgrabungen von Teilen desselben vor einigen Jahren ergaben, enthielt es Stundenlinien, Meridian (Mittagslinie mit Tagesmarken) und Monatslinien sowie eingemeißelte Tierkreisnamen und Angaben zur Jahreszeit ([Buchner 1982]; vgl. Abb. 2.5.3).

Das geometrisch-mechanische Verfahren der Erzeugung des Liniennetzes auf verschieden geneigten Auffangflächen von Sonnenuhren unter Berücksichtigung der geographischen Breite wurde wahrscheinlich von Eudoxos von Knidos entwickelt. Ptolemaios widmete dem Problem eine eigene (nur in lateinischer Übersetzung erhaltene) Schrift „Analemma“. Lediglich arabisch überliefert ist seine Abhandlung „Planisphaerium“. Sie wurde nach Revision durch al-Majriti 1143 von Hermann von Kärnten ins Lateinische übertragen und beschreibt die Abbildung von Himmelskreisen auf eine Ebene. Ptolemaios wählte als Projektionszentrum den Südpol der Himmelskugel und legte die Ebene durch den Äquator. Diese Abbildung, die stereographische Projektion, liegt dem beliebtesten astronomischen Instrument des Mittelalters, dem (ebenen) Astrolabium

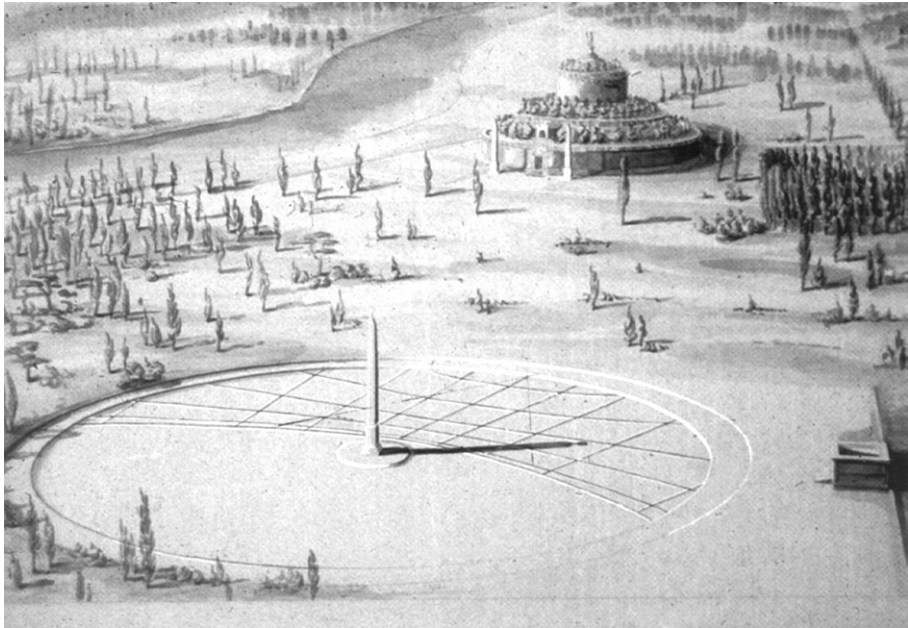


Abb. 2.5.3 Solarium und Mausoleum des Augustus auf dem Marsfeld in Rom (Rekonstruktion) [E. Buchner, in: Archäologische Entdeckungen. Die Forschungen des Deutschen Archäologischen Instituts im 20. Jh., Bd.II S. 180 Abb. 202 Mainz: Philipp von Zabern 1999]

zugrunde. Da sie Kreise in Kreise (bzw. die Meridiane in Geraden) abbildet, ist sie für astronomische Zwecke besonders geeignet.

2.5.8 Kartographie

Auf Abbildungsprobleme stießen auch die Geographen, sobald sie versuchten, größere Bezirke oder gar die ganze Oikumene — den ihnen bekannten Ausschnitt der bewohnten Erde — darzustellen. Dem schon genannten Eratosthenes verdankt man die Einführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, gebildet aus Parallelkreisen und Meridianen, die durch feste Punkte (Städte, deren Koordinaten man bestimmt hatte) hindurchgehen. Als Mittelparallele wählte er einen durch die Säulen des Herakles (Gibraltar) gehenden Breitenkreis. Wurden auch manche Details dieses Entwurfs vom Astronomen Hipparch kritisiert (der für die schwierige Längenbestimmung die Beobachtung von Mondfinsternissen vorschlug), so ist doch das von Eratosthenes angewandte Verfahren der Zuordnung von Punkten auf der Kugel zu ihren Bildpunkten in der Kartenebene geometrisch klar bestimmt. Der Geograph Strabon (64/63

v. Chr. – 20 n. Chr.) verwendete es in seiner, überwiegend länderkundlich-historisch orientierten *Geographia* als Grundlage eines Entwurfs einer Weltkarte im rechtwinkligen Koordinatensystem.

Ausführlich setzte sich Klaudios Ptolemaios, dessen „*Geographike hyphegesis*“ für die geographische Wissenschaft eine ähnlich bedeutsame Rolle spielte wie sein „*Almagest*“ für die Astronomie — nämlich die Zusammenfassung und Übermittlung des geographischen Wissens zu seiner Zeit —, mit der Theorie der Projektion auseinander. Er kritisierte die Verwendung der Zylinderprojektion, wie sie sein Vorgänger Marinus von Tyros (Anfang 2. Jh. n. Chr.) im Anschluß an Eratosthenes benutzt hatte, wegen der starken Verzerrungen zu den Polen hin, und propagierte stattdessen zwei Varianten der in dieser Hinsicht wesentlich günstigeren Kegelprojektion. Sein großer Katalog enthält, geordnet nach Erdteilen und Ländern, für 8.100 Orte die Längen- und Breitenkoordinaten und bietet somit die Möglichkeit, die entsprechenden Stellen in einem beliebig konstruierten Koordinatensystem zu markieren. Ob er selbst eine Karte nach diesen Angaben konstruierte, ist unbekannt.

Marinus hatte die Oikumene auf eine ebene Karte abzubilden versucht, indem er die Erdoberfläche auf einen die Erdkugel am Äquator berührenden Zylinder projizierte, wodurch er ein rechtwinkliges Koordinatensystem erzeugte. Die Idee des Ptolemaios war, der Erde sozusagen eine Kegelhaube aufzusetzen, die den Globus in einem Breitenkreis berührt, der etwa in der Mitte der damals bekannten bewohnten Zone liegt (Ptolemaios wählte den durch Rhodos verlaufenden Kreis von 54°). Denn dann wird der diesen Kreis enthaltende Streifen der Erdoberfläche bei der Abbildung kaum verzerrt. Die Meridiane bleiben auch bei dieser Projektion Geraden, die Breitenkreise werden in Kreisbögen abgebildet. Nur die nördlichen und südlichen Randgebiete werden merklich in Nord-Südrichtung gestreckt (Abb. 2.5.4). Um auch diesen Mangel auszugleichen, fügte Ptolemaios dem auf die Nordhalbkugel aufgesetzten Kegel von Süden her einen Gegenkegel an; das führt im Kartenbild zu einer Abknickung am Äquator (vgl. Abb. 5.2.2).

Damit noch nicht zufrieden, entwickelte Ptolemaios eine modifizierte, mathematisch anspruchsvollere Kegelprojektion. Wiederum werden dabei die Breitenkreise als Kreisbögen dargestellt. Diesmal sollen die beiden Breitenkreise durch Thule (27°) und Syene ($66^\circ 17'$) sowie ein dritter, der durch einen Ort geht, der in gleicher Entfernung wie Meroë spiegelbildlich südlich des Äquators mit $106^\circ 42'$ Polabstand gelegen ist, streckengetreu abgebildet werden. Damit sind für jeden Längengrad drei Punkte vorgegeben; diese werden durch den so bestimmten Kreisbogen miteinander verbunden. — Wollte man nicht nur drei, sondern alle Breitenkreise längentreu abbilden, würden die Längengrade

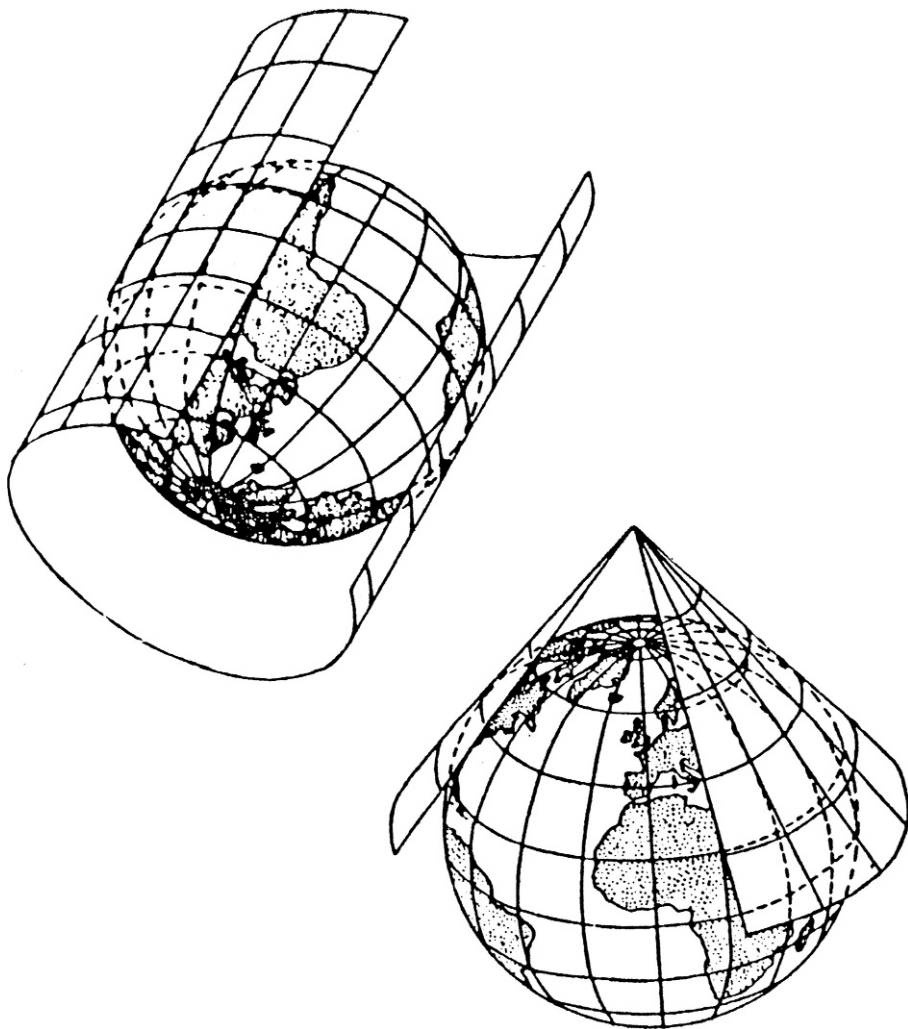


Abb. 2.5.4 Prinzip der Zylinderprojektion des Marinus
und Kegelprojektion des Ptolemaios

in transzendente Kurven überführt. Ptolemaios wählte also eine Annäherung, die sich mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt (vgl. Abb. 5.2.4; die stereographische Projektion wurde von Ptolemaios zur Herstellung von Erdkarten nicht in Betracht gezogen.)

Historische Karten aus der Zeit der Renaissance, bei der die Kegelprojektionen des Ptolemaios verwendet wurden, sind in Abschnitt 5.2 abgebildet. (Die Entwicklung der Kartographie seit der Renaissance ist in geometrischer Hinsicht dadurch bestimmt, daß der Kartograph drei Forderungen zu erfüllen bestrebt ist: Längentreue, Winkeltreue und Flächentreue. Deren Unvereinbarkeit läßt sich mathematisch mit Hilfe der im 18. Jh. entwickelten Differentialgeometrie aufzeigen. Die Fülle der inzwischen bei der Kartenherstellung verwendeten Projektionen ist daher u.a. eine Folge der Entscheidung, auf welche dieser Eigenschaften am ehesten zugunsten anderer verzichtet werden kann. Vgl. auch Abschnitt 5.2.)

2.5.9 Agrimensoren

Es ist wohl eine allgemein verbreitete Ansicht, daß sich die mathematische Theorie aus der Praxis heraus entwickelte — auch in der bisherigen Darstellung wurde wiederholt darauf hingewiesen, die Griechen hätten in vielem aus den vorgriechischen Kulturen Erkenntnisse und praktische Regeln übernommen und diese dann systematisiert, begründet und zu einem Theoriegebäude verknüpft. Dabei wird aber oft übersehen, daß es nicht nur den Weg von der Praxis zur Theorie, von den Rezepten und Regeln zum wissenschaftlichen Lehrbuch gibt. Auch in umgekehrter Richtung wirkt die Beeinflussung; das hat die mathematikhistorische Forschung nicht immer ausreichend wahrgenommen. Bruchstücke aus mathematischen Theorien können den Weg zurück in die Praxis finden. Je nachdem, in wessen Hände sie dabei gelangen, ist sich der Anwender des inneren Zusammenhanges und des Gültigkeitsbereichs einer Aussage bewußt, oder die Kenntnis der Struktur und des logischen Aufbaus, die die Theorie auszeichneten, geht wieder verloren. Dann kann es vorkommen, daß die übernommenen Elemente nur halb verstanden und in einer Weise eingesetzt werden, die den Bedürfnissen der Praxis nicht unbedingt in optimaler Weise gerecht wird.

Ein Beispiel für einen solchen Transfer liefern die römischen Feldmesser oder Agrimensoren. (Ein anderes kann man in den mittelalterlichen Bauhütten und ihrer noch bis zu Albrecht Dürer nachwirkenden Tradition sehen; vgl. Kap. 4). Wenn Cicero (in „De Divinatione“ I, 17) berichtet, Romulus habe Rom nach den Regeln der Feldmeßkunst gegründet (was bekanntlich im Jahr 753 v. Chr. geschehen sein soll), so belegt diese Feststellung wohl eher die hohe

Wertschätzung dieses Berufs zur Zeit Ciceros (106–43), als daß sie eine historische Tatsache beschreibt. Denn im römischen Reich wurden Vermessungsaufgaben wohl ursprünglich von verschiedenen „Berufen“ ausgeführt: für die Festlegung von Tempelbezirken waren Priester zuständig, für die Vorbereitung von Truppenlagern das Militär, für den Bau von Wasserleitungen Architekten. Für die erste, von Caesar angeordnete Reichsvermessung (durchgeführt 37–20 v. Chr.) zog man offenbar noch griechische Fachleute hinzu. Die Landverteilung nach Eroberungen machte in Rom, das sich, wie bekannt, um den Ausbau des Rechtssystems große Verdienste erwarb, eine Agrargesetzgebung notwendig, als deren Folge „Rechtspfleger“ benötigt wurden, denen die Übertragung in die Wirklichkeit oblag. Auch bei der Neugründung von Städten in den Kolonien waren solche Fachleute erforderlich.

Bis gegen Ende des 1. Jhs. n. Chr. hatte sich dann der Stand der Agrimensoren herausgebildet. Er entwickelte um diese Zeit auch seine eigene Literatur, die gromaticischen Schriften (benannt nach einem einfachen Meßgerät, der Groma oder Stella, das von Heron zu einem Präzisionsinstrument, der Dioptra, weiterentwickelt wurde; s. Abb. 2.5.5). Die Fachliteratur der Feldmesser wurde im 3. Jh. zum sog. „Corpus gromaticorum“ zusammengefaßt.

Wie die Agrimensoren ihrem Beruf nachgingen, schilderte anschaulich Cassiodorus (480?–575?), nachdem er bemerkt hatte, andere Wissenschaften seien so theoretisch, daß die Professoren nur eine Handvoll von Studenten haben:

„Aber der Feldmesser ist mit der Beilegung einer Grenzstreitigkeit betraut, die entstanden ist, damit mutwilliger Streitsucht ein Ende gesetzt werde. Er ist ein Richter eigener Art; sein Gerichtshof sind die verlassenen Felder; man könnte ihn für verrückt halten, sieht man ihn gewundene Pfade entlanglaufen. Wenn er nach Beweismaterial sucht im wilden Gehölz oder im Dickicht, läuft er nicht wie du und ich, er sucht sich seinen eigenen Weg. er erklärt seine Feststellungen, er wendet seine Kenntnisse an, er entscheidet Streitigkeiten durch seine Fußstapfen, und wie ein gigantischer Strom nimmt er dem einen Stücke des Landes weg und gibt sie dem anderen.“ [Dilke 1971, S. 45/46 (engl.)]

Unser heutiges Wissen über die geometrischen Kenntnisse der römischen Feldmesser stammt vor allem aus Sammelhandschriften, die sich jetzt im Besitz der Herzog August Bibliothek in Wolfenbüttel befinden. Es handelt sich um die beiden Codices Arcerianus A und B (benannt nach Johannes Arcerius, dem sie von 1566 bis 1604 gehörten) und um den Codex Gudianus (nach dem Handschriftensammler Marquard Gude, 1635–1689). Der Arcerianus wurde im 5.-6. Jh. geschrieben und ist damit die älteste (vollständig erhaltene) antike mathematische Handschrift. Der Gudianus stammt aus dem 9. Jh. In beiden Fällen haben wir es also mit Abschriften von Texten zu tun, die die Tätigkeit

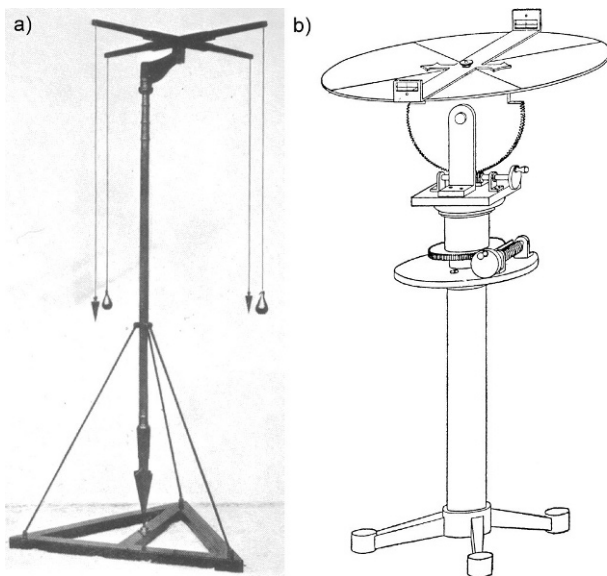


Abb. 2.5.5 Rekonstruktion a) der Groma zur Festlegung rechter Winkel
und b) der Dioptra des Heron

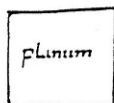
[O.A.W. Dilke: *The Roman Land Surveyors*. Newton Abbot, David & Charles 1971; S. 50, 75]

der Feldmesser oder Agrimensoren betreffen. Zu den Autoren, durch welche Einzelheiten aus dem Vermessungswesen der Römer bekannt sind, gehören Vitruvius (um Chr. Geburt), der ehemalige Offizier Columella, der um 65 n. Chr. zwölf Bücher über das Landleben verfaßte, der Architekt und Aufseher des Wasserwesens in Rom, Frontinus († um 100 n. Chr.) und die Feldmesser Hyginus und Balbus.

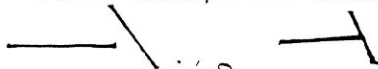
Zu den Aufgaben der Agrimensoren gehörte neben der Landvermessung auch die Rechtsprechung, soweit sie Grundstücksstreitigkeiten betraf. (Ein Beispiel findet sich im Anhang A.3). Demzufolge sind die Feldmesserschriften auch nicht einfach Handbücher der praktischen Geometrie, sondern zugleich juristische Leitfäden. So enthalten sie u.a. eine ausdifferenzierte Fachterminologie zur Bezeichnung der verschiedenen Feldertypen und ihrer Begrenzungen, die weit über die sonst in der Geometrie üblichen Ausdrücke für ebene Figuren hinausgeht. Während z.B. Euklid definiert: „Eine Grenze ist das, worin etwas endet,“ schreibt der Vermessungsbeamte Balbus: „Grenze ist das, bis wohin das Eigentumsrecht reicht.“

Die Grundelemente der Geometrie wurden aber oft in Anlehnung an die von Euklid gegebenen oder auch bei Heron zu findenden Definitionen eingeführt.

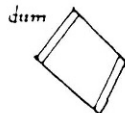
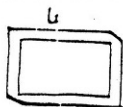
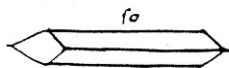
mille pedes $\bar{N}$ fadios $\bar{N}$ mensurancuntur generibus tribus
 longitudinem et latitudinem et crassitudinem hoc est rectū planū solidū



Rectum est cuius longitudinem sine latitudine metimur. ut lineas
 positae fadiis miliaria fluminum latitudines et his similia.



Planum est quod greci ^{epipedon} appellant. nos constiterat pedes in quo
 longitudinem et latitudinem habemus sicut etiam agros aedifi-
 ciorum solae quibus alacudo aut crassitudo non ponitur. ut opera
 rectoria in iumentis cubilis et his similia.



Solidum est quod greci ^{stereon} appellant. nos quidem totos pedes appella-
 mus cuius longitudinem et latitudinem et crassitudinem metimur.
 ut parietum structuras pilarum pyramidum aut lapidum maceriarum
 et his similia.

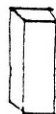


Abb. 2.5.6 Agrimensoren-Handschrift
 [Cod. Guelf. 105 Gud. Lat. 2°, fol. 77: geometrische Definitionen,
 Herzog August Bibliothek Wolfenbüttel]

Einige Beispiele aus der Wolfenbütteler Handschrift Cod. Guelf. 105 Gud. Lat., (vgl. Abb. 2.5.6):

Rectum est cuius longitudinem sine latitudine metimur.

(Eine Gerade ist, was wir als Länge ohne Breite messen.)

EUKLID hatte nach der bekannten ersten Definition

Punctum est, cuius pars nulla est

(Ein Punkt ist, was keinen Teil hat.)

als zweite angegeben:

Linea autem sine latitudine longitudo.

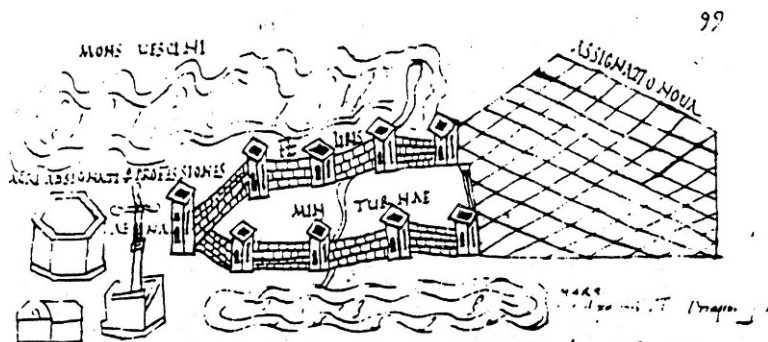
(Eine Linie aber [ist] eine Länge ohne Breite.)

Der Feldmesser nimmt also ausdrücklich die praktische Tätigkeit des Messens mit in die Definition auf, die für den Theoretiker Euklid nur störend wäre. Analog wird bei der Definition der Fläche (*planum*) und des Körpers (*solidum*) — man beachte die Zeichnung — vorgegangen. Auf der folgenden Seite werden dann drei Arten von Linien eingeführt: die gerade, die kreisförmige und die „flexuose“, also die beliebig gebogene. Mit deren Hilfe können die verschiedenartigsten Figuren benannt und später berechnet werden.

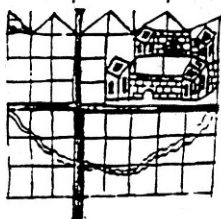
Die von den Agrimensoren verwendeten Näherungsformeln lassen sich teilweise bis in die vorgriechischen Kulturen zurückverfolgen. Das gilt sowohl für Meß- wie für Rechenverfahren. Gelegentlich sind auch Verbesserungen zu beobachten, so, wenn die Fläche eines Kreissegmentes mit der Sehne s und dem Pfeil p (vgl. Formel 1.2.11) nach der Vorschrift

$$F = \frac{s+p}{2} \cdot p + \left(\frac{s}{2}\right)^2 / 14 \quad (2.5.5)$$

berechnet wird. Der erste Teil, der die Ersetzung des Segments durch ein Trapez erkennen läßt, findet sich auch in einem ägyptischen Papyrus (3. Jh. v. Chr. oder früher); das Korrekturglied steht in einem umfangreichen Werk von Columella über die Landwirtschaft (64 n. Chr.), das dem Landwirt auch Grundkenntnisse im Vermessungswesen vermitteln will. Heron diskutiert die Korrektur ausdrücklich. Der Nenner 14 läßt die Verwendung des archimedischen Wertes $\frac{22}{7}$ für π erkennen und zeigt damit, wie ein durch theoretische Überlegungen gewonnener Wert in die Praxis eindringt, ohne daß in der Regel der Praktiker die Begründung der Vorschrift einzusehen vermag (vgl. Aufgabe 2.5.4).



(N) ulas ergo generibus limitum confutationes inchoate sunt; quibusdam coloniis: h. d. n. et d. n. non longe a civitate oritur. Nam et in proximo esse debet, immo si fieri potest ex ipsa colonia inchoari sed quia utique municipia in insulas transferuntur, sanctis iuribus et ceteris modis limites primos nisi a foris accipere non possunt.



(N) ut agri facilitatem secuta, et ubi plurimum erant assignaturi, ibi d. n. et d. n. confutuerunt. Antiqui enim propter subita bellorum pericula non soluerant contenta urbes muniungere, verum etiam loca aspera et excelsa diligebant, ubi illis amplissimum propugnaculum esset ipsa locantur. Haec vicina urbibus rupium multitudo limites accipere propter loci difficultatem non potuit. Sed relicta

Abb. 2.5.7 Agrimensoren-Handschrift
[Cod. Guelf. 105 Gud. Lat. 2°, fol. 99: Anlage rechteckiger Felder,
Herzog August Bibliothek Wolfenbüttel]

Zum Abschluß der Behandlung der Agrimensoren sei zur Veranschaulichung noch eine weitere Seite aus dem Gudianus abgebildet (Abb. 2.5.7). Sie illustriert, wie vor den Mauern einer Stadt in der zwischen Meer und Gebirge liegenden Ebene rechteckige Felder angelegt werden sollen.

Aus dem Bereich der römischen Kultur sind noch einige Gelehrte aus dem 5./6. Jh. zu besprechen (Martianus Capella, Boethius und Cassiodor). Die mathematischen Teile ihrer Schriften bildeten, neben elementaren Teilen von Euklids Elementen, eine wesentliche Grundlage für die im Mittelalter erfolgte Vermittlung geometrischer Kenntnisse im Rahmen des Quadriviums (der vier mathematischen Wissenschaften Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Harmonik oder Musik). Sie werden daher in Kap. 4 vorgestellt.

2.5.10 Byzanz

Die Mathematikerschule in Alexandria fiel schließlich der Heidenverfolgung zum Opfer, bei der — wie erwähnt — 415 Hypatia ihr Leben verlor, die Akademie in Athen wurde 529 durch den Kaiser Justinian I. (er regierte von 527 bis 565) geschlossen. In Konstantinopel (seit dem Tod des Kaisers Theodosius 395 unabhängig von Rom) war es den Gelehrten noch etwas länger möglich, zu arbeiten und ihre sammelnde und kommentierende Tätigkeit fortzusetzen. Hier wirkten die Erbauer der Hagia Sophia, Anthemios von Tralles († 534) und Isidor von Milet, der nach Anthemios' Tod die Bauleitung übernahm. Ersterer schrieb eine Abhandlung über Brennspiegel. Darin bewies er, daß parallel einfallende Strahlen von einem parabolischen Spiegel im Brennpunkt gesammelt werden. Auch suchte er darin nach einer Anordnung, die einen von der Sonne ausgehenden Lichtstrahl, der durch ein kleines Loch in einen abgedunkelten Raum eintritt, so reflektiert, daß er unabhängig von der Tages- oder Jahreszeit durch einen bestimmten Punkt geht. Es gelang Anthemios, eine punktweise Konstruktion für die Gestalt der Spiegelfläche — ein Ellipsoid — anzugeben. Aus deren Eigenschaften bezüglich einer festen Ebene (konstante Abstandssumme von zwei festen Punkten) folgte er die Möglichkeit der Fadenkonstruktion der Ellipse (s. Aufg. 2.5.5).

Dem mit Anthemios befreundeten Eutokios aus Askalon (* um 480) verdankt man eine Anzahl wertvoller Kommentare zu Schriften des Archimedes und Apollonios, worin er u.a. über Lösungen des Problems der Würfelverdoppelung berichtet, die anders nicht überliefert sind. Die ersten vier Bücher der Kegelschnitte des Apollonios sind nur deshalb in der Originalsprache erhalten, weil Eutokios dazu einen Kommentar verfaßte. Doch in der Zeit der Bilderstürme (726–843) erlebte auch dieses letzte Zentrum, das die griechische Mathematik zu bewahren versucht hatte, einen deutlichen Niedergang.

Rektor der 863 durch Bardas neubegründeten Universität in Konstantinopel wurde der Philosoph Leon von Byzanz, nachdem er ein Angebot, an den Kalifenhof in Bagdad zu kommen, ausgeschlagen hatte. Er hielt seine Schüler zum Abschreiben klassischer philosophischer wie mathematischer Schriften an. Eine damals entstandene Euklid-Handschrift wird heute in Oxford aufbewahrt, eine Archimedes-Abschrift gelangte später über den Hof der unteritalienischen Normannen in den Besitz der Päpste und wurde im 16. Jh. intensiv studiert, bevor sie verloren ging. Auch die schönste der erhaltenen Ptolemaios-Handschriften wurde damals in Byzanz kopiert.

Im 10. bis 14. Jh. bildete sich allmählich in Konstantinopel wieder eine dünne Oberschicht heraus, die an philosophischen und mathematischen Studien interessiert war und sich bewußt der griechischen Sprache bediente. Erneut waren in dieser Phase der byzantinischen Mathematik die Wissenschaftler bestrebt, das griechische Erbe sammelnd zu bewahren und weiterzuführen. Es machen sich in diesem Zeitraum allerdings auch neue Einflüsse bemerkbar: solche des lateinischen Mittelalters, solche aus dem Bereich der arabischen Kultur und Wissenschaft und die Berührung mit dem indischen Ziffernrechnen und anderen indischen Methoden.

Um 1050 wird Michael Psellos Leiter der erneuerten Universität, an der man sich mit der Philosophie und Wissenschaft von Platon und Aristoteles — nicht zuletzt mit dessen logischen Schriften — kritisch kommentierend auseinandersetzt. Psellos schloß sich Platon und Proklos in der Auffassung an, die Mathematik sei das Bindeglied zwischen der Welt der Ideen und den körperlichen Dingen und zugleich ein Mittel, die Schüler zum abstrakten Denken zu erziehen. In seine Lebenszeit fiel die endgültige Spaltung (1054) der Kirche in die west- und die oströmische. Anderthalb Jahrhunderte später, während des 4. Kreuzzuges (1202–1204), kam dann Byzanz unter weströmische Herrschaft und wurde bis 1261 vom lateinischen Kaisertum regiert.

Im 12. Jh. machten die Byzantiner die erste Bekanntschaft mit den indischen Zahlen, wie Randnoten in einer Euklid-Handschrift belegen. Erstmals wird das indische Rechnen in einer anonymen Schrift von 1252 erläutert; eine spätere Darstellung verfaßte Maximos Planudes (1255?–1310). Er lebte bereits unter der 1261 beginnenden, rund 200 Jahre dauernden Herrschaft der Dynastie der Paläologen, unter der die eigentliche humanistische Blütezeit der byzantinischen Mathematik zu verzeichnen ist. Nikolaos Rhabdas († 1350) gab im Jahr 1340 diese Abhandlung heraus, zugleich verfaßte er eine Schilderung des Fingerrechnens.

Auf geometrischem Gebiet arbeitete Theodoros Metochites (1260?–1332) u.a. über die Elemente des Euklid, über Apollonios und Ptolemaios. Zur gleichen



Abb. 2.5.8 Mausoleum der Galla Placidia in Ravenna. Byzantinische Mosaiken mit Sternen und geometrischen Ornamenten schmückten die Gewölbe des Grabmals, erbaut im 5. Jh. für die Tochter von Theodosius I., dem Großen, der als letzter Alleinherrscher das römische Weltreich regierte. [Foto Alten]

Zeit schrieb Johannes Pediasimos eine praktische Geometrie im Stil Herons von Alexandria. Der zweisprachige Basilianermönch Bernhard Barlaam (1290?–1348?) aus Kalabrien, der 1339 als byzantinischer Gesandter mit Papst Benedikt XII. über eine Wiedervereinigung der ost- mit der weströmischen Kirche verhandelte, interpretierte das 2. Buch der Elemente Euklids arithmetisch-algebraisch. Isaak Argyros (1310?–1371) schrieb Scholien zum 1. bis 6. Buch der Elemente. Den Niedergang vor Augen, nachdem sich die Unionsverhandlungen mit den Päpsten zerschlagen hatten und die Türkengefahr wuchs, emigrierten viele Gelehrte nach Italien und gaben dort ihr Wissen an die aufblühende Wissenschaft der Renaissance weiter (vgl. Kap. 5).

Zum Abschluß muß betont werden, daß die Erforschung der byzantinischen Mathematik keineswegs abgeschlossen ist, da viele Handschriften bisher nicht ediert und ausgewertet wurden. Die Zusammenarbeit von Mathematikhistorikern und Byzantinisten, wie sie zum Beispiel Kurt Vogel und Herbert Hunger um 1960 vorbildlich verwirklichten, ist dabei unumgänglich. Eine Intensivierung dieser Erforschung wäre aufgrund der Stellung der byzantinischen Mathematik im Schnittpunkt der gegenseitigen Beeinflussung von Ost und West dringend zu wünschen.

Die klassischen Probleme in der griechischen Mathematik

≈ 585	Thales	Durchmesser halbiert Kreis; rechtwinkliges Dreieck in Halbkreis
≈ 550	Pythagoras ?, Pythagoreer	regelmäßiges Fünfeck im Kreis
≈ 450	Hippasos	Zwölfflächner (Dodekaeder); Entdeckung des Irrationalen
≈ 440	Hippokrates	Quadratur der Kreismöndchen; Einschiebung von zwei mittleren Proportionalen x, y ($\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ zur Lösung des delischen Problems
≈ 434	Anaxagoras	Kreisquadratur versucht (wie?)
≈ 430	Antiphon	Kreisquadratur mittels einbeschriebener $3 \cdot 2^n$ -Ecke oder $4 \cdot 2^n$ -Ecke
≈ 420	Hippias	Winkelteilung mittels $\frac{y}{a} = \frac{\phi}{\pi/2}$
≈ 410	Bryson	Kreisquadratur mittels ein- und umbeschriebener Vielecke; Zwischenwertsatz
≈ 390	Archytas	Einschiebung zweier geometrischer Mittel, stereometrisch gelöst
≈ 380	Theaitetos	Fünf platonische Körper mit umbeschriebenen Kugeln
≈ 370	Eudoxos	Irrationalitätentheorie; 'platonische' bewegungsgeometrische Einschiebung von zwei geometrischen Mitteln ?
≈ 350	Brüder Deinostros u. Menachmos	Kreisquadratur mittels der Kurve von Hippias ('Quadratrix'); Parabel und Hyperbel für zwei geometrische Mittel
≈ 330	Euklid	„Elemente“: mit Zirkel und Lineal ausführbare Konstruktionen
287–212	Archimedes	Kreisquadratur, Kugelvolumen; Siebeneckkonstruktion (nur arabisch erhalten); Winkeldreiteilung (Papierstreifenkonstruktion)
≈ 240	Eratosthenes	Mechanische Lösung für das Einschieben von zwei mittleren Proportionalen
≈ 210	Apollonios	Kegelschnitttheorie; zwei geometrische Mittel; platonische Körper
≈ 180	Diokles	Kissoide
≈ 180	Nikomedes	Konchoide (Muschellinie)
≈ 75	Heron	Neusiskonstruktion für zwei geometrische Mittel
85?–165?	Ptolemaios	Sehnentafel (Winkeldreiteilung)
≈ 320	Pappos	Sammelwerk „Collectiones“ mit historischen Berichten
≈ 370	Theon	Euklid-Bearbeitung
≈ 460	Proklos	Kommentar zum 1. Buch der Elemente Euklids
≈ 520	Simplikios	Auszüge aus Eudemos (um 320 v. Chr.): Bericht über Möndchenquadratur des Hippokrates
≈ 520	Eutokios	Kommentar zu Archimedes' „Über Kugel und Zylinder“: Bericht über die Geschichte des delischen Problems

2.6 Aufgaben zu 2

Aufgabe 2.1.1: Entfernungsmessung nach Thales

Da die Entfernung des Schiffes auf See nicht direkt meßbar ist, soll Thales es einmal von der Spitze eines Turmes und einmal vom Fuß des Turmes aus angepeilt haben. Der Turm stellt eine Seite eines Dreiecks dar, die beiden Sichtlinien bilden die beiden anderen Seiten.

- a) Inwiefern ist zur Begründung dieses Verfahrens der zitierte geometrische Satz erforderlich?
- b) Welche Formel folgt daraus für die Berechnung der Entfernung des Schiffes?

Aufgabe 2.1.2: Varianten der Entfernungsmessung nach Thales

Wie könnte Thales die Entfernung eines Schiffes auf See bestimmt haben, wenn kein genügend hoher Turm am Ufer zur Verfügung stand? (Unter der Voraussetzung, daß er die ihm zugewiesenen Sätze alle kannte, sind zwei verschiedene Verfahren möglich.)

Aufgabe 2.1.3: Der Goldene Schnitt am Pentagon

Bekanntlich stehen beim regelmäßigen Fünfeck Diagonale und Seite im Verhältnis des Goldenen Schnittes zueinander (vgl. Abb. 2.1.5). Man leite die zwischen d_0 und s_0 bestehende quadratische Gleichung her und als deren Lösung dieses Verhältnis. Wodurch kommt seine Irrationalität zum Ausdruck?

Aufgabe 2.2.1: Die Lösung des delischen Problems mittels Kegelschnitten

- a) Man zeige, wieso der Ansatz von Hippokrates auf die Lösung der Würfelverdoppelung führt.
- b) Man skizziere die drei darin enthaltenen Kegelschnitte in einem (x, y) -Koordinatensystem und bestimme die Größen x und y .

Aufgabe 2.2.2: Die Quadratrix des Hippias

- a) Man zeichne die Quadratrix durch Konstruktion einiger Punkte gemäß der bewegungsgeometrischen Vorschrift (z.B. unter Heranziehung eines Winkelmessers oder durch fortgesetzte Halbierung der Strecken und Winkel).
- b) Man schreibe ihre Polargleichung in der Form $\rho = f(\phi)$.
- c) Der Endpunkt der Quadratrix im ersten Quadranten ist unbestimmt, da in dieser Lage die sich abwärts bewegende und die sich drehende Seite zusammenfallen. Man bestimme durch Grenzübergang den Abstand ρ vom Ursprung, d.h. die x -Koordinate dieses Punktes (die y -Koordinate ist dann gleich 0).
- d) Inwiefern ist durch seine Position eine Möglichkeit gegeben, die Kreisquadratur zu bewältigen?
- e) An welchen Stellen werden die Beschränkungen elementargeometrischer Konstruktionen überschritten?

Aufgabe 2.2.3: Papierstreifenkonstruktion zur Winkeldreiteilung nach Pappos

- a) Man zeichne die der Papierstreifenkonstruktion zugrundeliegende Figur, wie im Text beschrieben.
- b) Zum Beweis der Richtigkeit trage man noch die Hilfslinie FB ein und fälle das Lot von F auf BE , dessen Fußpunkt G genannt sei.
Warum ist jetzt BF ebenfalls gleich $OB = DF = FE$? Bezeichnet man den kleineren der beiden abgeteilten Winkel $\angle AOD$ mit β , so gilt $\angle OFB = 2\beta$ (warum?). Aber auch $\angle BOE = 2\beta$ (warum?). Folglich ist $\alpha = 3\beta$, wie zu beweisen war.

Aufgabe 2.2.4: Winkeldreiteilung durch Neusis nach Archimedes

- a) Man zeichne die im Text beschriebene Figur.
- b) Man weise nach: $\angle OBA = \angle OAB = 2 \cdot \angle BOC = \angle BCO$. Dann betrachte man den Außenwinkel bei O des Dreiecks ABO (verlängere BO über O hinaus) und überzeuge sich, daß $\angle BOD = 3 \cdot \angle AOE$.

Aufgabe 2.2.5: Herleitung der trigonometrischen Winkeldreiteilungsgleichung

- a) Man zeichne erneut die der archimedischen Neusis in Aufg. 2.2.4 zugrundeliegende Figur ohne den Kreis, der Übersichtlichkeit wegen mit neuen Bezeichnungen wie folgt: Vom Scheitel A des Winkels α aus werde auf dem oberen Schenkel die Strecke $r = AB$ abgetragen, dann von B aus die nächste Strecke r zum Punkt C auf dem unteren Schenkel, dann zwei weitere Strecken der Länge r nach oben zu D und wieder nach unten zu E . (Der Ausgangswinkel α darf nicht zu groß gewählt werden.) Jetzt fälle man von den drei Punkten B, C, D die Lote auf den jeweils gegenüberliegenden Schenkel, die in F, G, H auftreffen mögen (man zeichne diese Senkrechten gestrichelt ein). Dadurch sind drei zueinander ähnliche rechtwinklige Dreiecke entstanden: $\triangle AFB \sim \triangle AGC \sim \triangle AHD$. Außerdem seien die Basen der drei entstandenen gleichschenkligen Dreiecke als $AC = x, BD = y, CE = z$ bezeichnet; die Basiswinkel sind $\alpha, 2\alpha$ und 3α (warum?). Damit sind auf dem unteren Schenkel die Teilstrecken wie folgt festgelegt: $AF = FC = \frac{x}{2}, CH = HE = \frac{z}{2}$, auf dem oberen $AB = r, BG = GD = \frac{y}{2}$.
- b) Man überzeuge sich, daß nun gilt:

$$\frac{AF}{AB} = \frac{x/2}{r} = \frac{r + y/2}{x} = \frac{x + z/2}{r + y}$$

oder

$$\frac{x}{r} = \frac{2r + y}{x} = \frac{2x + z}{r + y} = \frac{x + z}{y}.$$

Durch Elimination von y ergibt sich daraus die Gleichung (2.2.4):

$$x^3 - 3r^2x - r^2z = 0,$$

wo z gegeben, x gesucht ist.

- c) Man drücke x durch $\cos \alpha$, z durch $\cos 3\alpha$ aus und gewinne so die Winkel-dreiteilungsgleichung in ihrer trigonometrischen Form: Gleichung (2.2.5).

Aufgabe 2.2.6: Die Konchoïde des Nikomedes

- a) Man überzeuge sich, daß die Polargleichung $\rho = f(\phi)$ der Konchoïde die Form

$$\rho = a + \frac{b}{\cos \phi} = a + b \cdot \sec \phi. \quad (2.6.1)$$

hat ($\phi = \angle DCF$).

- b) Wie groß ist der Abstand eines beliebigen Punktes P der Konchoïde von der Geraden AFB ?
- c) Man beweise, daß diese Gerade eine Asymptote ist.

Aufgabe 2.3.1: Pyramidenvolumen nach Euklid

- a) In den „Elementen“, XII,3 wird eine beliebige dreiseitige Pyramide $ABCD$ mit der Grundfläche $\mathcal{G}$ und der Höhe h durch Schnitte durch die Mittelpunkte E, F, G, H, L, K der Kanten in der in Abb. 2.6.1a) gezeigten Weise in zwei zur Ausgangspyramide ähnliche Pyramiden $P_1 = HKLD$, $P_2 = GFCL$ und zwei dreikantige Prismen $Pr_1 = AEGHKL$ und $Pr_2 = EBGKFL$ zerlegt, von denen an dieser Stelle schon bekannt ist, daß ihr Volumen das Produkt von Grundfläche und Höhe ist, so daß sie zusammen das Volumen $\frac{1}{4}\mathcal{G}h$ haben. (Bei Pr_1 ist die Grundfläche $\frac{1}{4}\mathcal{G}$ und die Höhe $\frac{1}{2}h$, Pr_2 denke man sich zunächst durch ein verkehrt herum aufgesetztes kongruentes Exemplar zu einem affin verzerrten Quader mit der Grundfläche $\frac{1}{2}\mathcal{G}$ und der Höhe $\frac{1}{2}h$ ergänzt und nehme dann die Hälfte dieses Produkts!) Da man mit der Vereinigung der beiden Restpyramiden P_1, P_2 analog verfahren kann, wobei aber jetzt der Faktor $\frac{1}{4}$ (als Produkt aus der 2, der Viertelung der Grundfläche und der Halbierung der Höhe) davorzusetzen ist, würde der heutige Mathematiker ohne weiteres schließen, daß das Pyramidenvolumen durch die unendliche Reihe

$$V = \mathcal{G} \cdot h \cdot \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4} \right)^n + \dots \right), \quad (2.6.2)$$

das Volumen demnach durch deren Summe $\frac{1}{3}\mathcal{G} \cdot h$ gegeben wird. Man begründe die Formel (2.6.2) und den Wert der Reihe.

- b) Euklids Weg zu dieser Volumenformel ist viel umständlicher. Indem er benutzt, daß die aus der Pyramide abgespaltenen prismatischen Teile mehr als die Hälfte des Pyramidenvolumens betragen (Woraus folgt das?), zeigt er zunächst in XII,4-5 durch indirekten Beweis (ähnlich, wie dies später Archimedes bei seinen Herleitungen von Volumenformeln tun wird), daß die Volumina dreiseitiger Pyramiden mit gleichen Höhen sich verhalten wie ihre Grundflächen. Schließlich wird in XII,7 gezeigt, daß man jede dreiseitige Pyramide $ABCD$ durch zwei andere dreiseitige Pyramiden $DEFC$ und $ACED$, so daß je zwei von ihnen

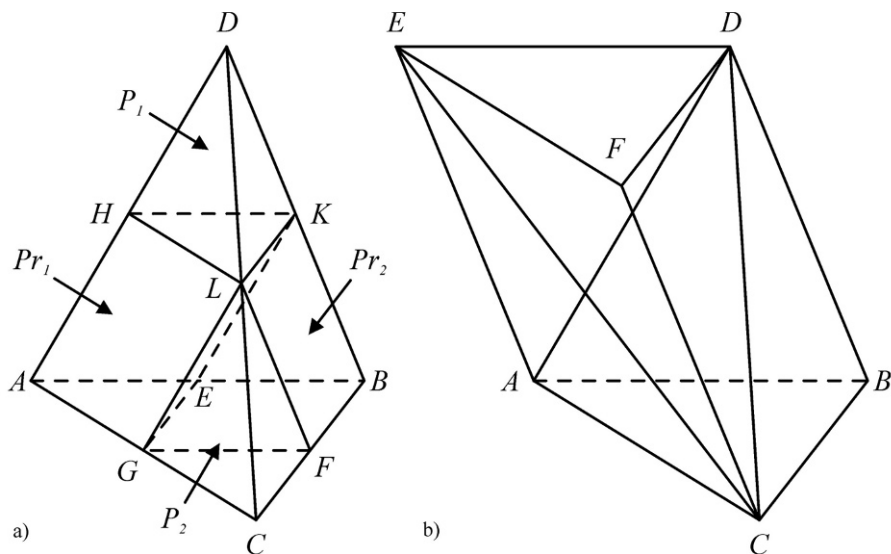


Abb. 2.6.1 Figur zu Aufg. 2.3.1

jeweils eine Grundfläche und die zugehörige Höhe gemeinsam haben, zu einem schiefen dreikantigen Prisma ergänzen kann (Abb. 2.6.1b), woraus sich die Volumenformel ergibt. Die Textstelle der „Elemente“, in der diese Folgerung explizit formuliert wird, ist allerdings möglicherweise ein späterer Zusatz. Im Verhältnis zur gar nicht offensichtlichen Grundidee von XII,7 ist sie in der Tat fast zu trivial, um noch ausgesprochen zu werden.

- c) Es gibt aber noch eine merkwürdige Methode, von der Pyramidenzerlegung in XII,3 direkt zur Volumenformel zu gelangen. Setzt man nämlich voraus, daß das Pyramidenvolumen sowohl zur Grundfläche als auch zur Höhe proportional ist, so ist in der Formel $V = cgh$ nur noch die Konstante c zu bestimmen. Aus der in XII,3 angegebenen Zerlegung ergibt sich dann eine lineare Gleichung für die Konstante c mit der Lösung $c = \frac{1}{3}$ [Schreiber 1994]. Stellen Sie die Gleichung auf.

Aufgabe 2.3.2: Konstruktion des regulären Dodekaeders aus dem Würfel

- a) In Buch XIII der „Elemente“ wird gezeigt, daß man ein reguläres Dodekaeder aus einem Würfel erhalten kann, indem man in der in Abb. 2.6.2 gezeigten Weise „Walmdächer“ auf die Würfelseiten aufsetzt. (Dies ist bis heute die eleganteste Methode, die Existenz des regulären Dodekaeders nachzuweisen.) Überlegen Sie, daß dieser Nachweis notwendig bzw. die Existenz des regulären Dodekaeders nicht selbstverständlich ist.

b) Nimmt man die Kantenlänge des gegebenen Würfels als Einheit, so ist ein beliebiges Walmdach durch die beiden Parameter x ($0 < x < 1/2$) und h (> 0) bestimmt. Diese beiden Parameter müssen jedoch vier Bedingungen erfüllen

- 1) Das Trapez eines Daches muß mit dem anschließenden Dreieck des anschließenden Daches in einer Ebene liegen. (Man verwandle dies in eine Gleichung für x und h !)
- 2) Die entstehenden Fünfecke müssen lauter gleichlange Kanten haben, d.h. der First AB eines Daches muß genauso lang sein wie die Kante AE vom First zur Würfecke. (Man verwandle auch dies in eine Gleichung für x und h !)
- 3) Die Winkel der Fünfecke müssen gleich sein. (Wenn 1) und 2) schon erfüllt sind, genügt dafür, daß jede Diagonale der Art BD und jede Diagonale der Art AC gleich der Diagonale CE , also gleich 1, ist.)

Man prüfe nach, daß (wunderbarerweise!) die durch die Bedingungen 1) und 2) schon eindeutig bestimmte Lösung x, h auch die beiden Bedingungen 3) erfüllt.

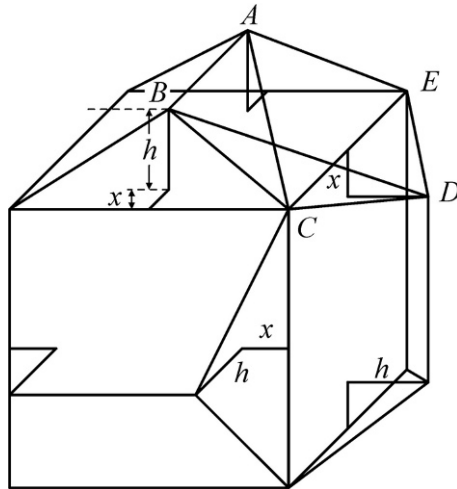


Abb. 2.6.2 Figur zu Aufg. 2.3.2

c) Aus der beschriebenen Konstruktion des regulären Dodekaeders ergibt sich, daß umgekehrt jedem Dodekaeder fünf Würfel eingeschrieben sind. Betrachten wir das reguläre Fünfeck $ABCDE$ aus Abb. 2.6.2 als Seitenfläche eines regulären Dodekaeders, so könnte jede der fünf Diagonalen die Rolle der Würfelkante CE übernehmen. Eine Kongruenzabbildung des regulären Dodekaeders auf sich wird gegeben, indem man i) für eine willkürlich ausgewählte Ecke A die Bildecke $f(A)$ festlegt, ii) für eine der drei von A ausgehenden Kanten k eine der drei von $f(A)$ ausgehenden Kanten als Bildkante und iii) für eine der an die gewählte Kante k grenzenden Flächen eine der beiden in Frage kommenden Bildflächen

auswählt. Demnach gibt es 20 (Eckenzahl des Dodekaeders) mal 3 mal 2 gleich 120 Deckabbildungen des regulären Dodekaeders auf sich. Es zeigt sich, daß die Gruppe dieser 60 orientierungserhaltenden Abbildungen des regulären Dodekaeders auf sich (das sind Drehungen um seinen Mittelpunkt) isomorph zur Gruppe A_5 der geraden Permutationen der fünf einbeschriebenen Würfel ist. Man gebe eine umkehrbar eindeutige Abbildung von der Menge der Drehungen des Dodekaeders auf diese Menge von Permutationen der Würfel an und beweise die Isomorphie beider Gruppen. Dieser Zusammenhang erwies sich als von großer Bedeutung für die Nichtauflösbarkeit der Gruppe S_5 und folglich für den Satz von Ruffini und Abel über die Unlösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades in Radikalen. Dies zeigt ein weiteres Mal, wie eng Theorien und Sätze der neuzeitlichen Mathematik oft mit bis auf Euklid zurückgehenden Wurzeln verbunden sind.

Aufgabe 2.3.3: Teilung von Dreiecken in gegebenem Flächenverhältnis

Aufgabe 19 der Schrift Euklids über die Teilung von Figuren verlangt, ein gegebenes Dreieck ABC mittels einer durch einen gegebenen Punkt D gehenden Geraden in zwei flächengleiche Teilstücke zu zerlegen.

- a) Man reduziere diese Aufgabe darauf, aus den Seiten a, b, c des gegebenen Dreiecks und zwei die Lage von D bezüglich des Dreiecks charakterisierenden weiteren Strecken d, e eine Strecke zu bestimmen, deren Kenntnis die Konstruktion der gesuchten Geraden ermöglicht.
- b) Man löse das reduzierte Problem auf algebraische Weise und folgere daraus die Lösbarkeit der Aufgabe mit Zirkel und Lineal.
- c) Man überlege sich, wie die in b) gefundene Lösung auf der Basis von Buch II der „Elemente“ mit Zirkel und Lineal bewerkstelligt werden könnte.
- d) Man untersuche (über Euklid hinausgehend), wie die Lösbarkeit und die Anzahl der Lösungen von der Lage des Punktes D bezüglich des Dreiecks abhängen. (Ist z.B. D der Schwerpunkt des Dreiecks, so gibt es ja drei Geraden der gesuchten Art.)
- e) Wie ändert sich alles, wenn statt Halbierung des Flächeninhalts die Teilung in einem anderen gegebenen Verhältnis gefordert wird? (Euklid behandelt am Beispiel 1:3 die Teilung in beliebigem rationalem Verhältnis.) Muß dieses Verhältnis, etwa durch eine willkürlich geteilte Strecke gegeben, irgendwelchen Bedingungen genügen, damit die Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar bleibt? Hinweis: Die historische Lösung der Aufgaben a), b) kann man in [Schreiber 1987] finden, eine Lösung von d) in [Schreiber 1994].

Aufgabe 2.3.4: Halbierung eines Dreiecks mit aufgesetztem Kreisabschnitt

Eine weitere Aufgabe (Nr. 28) aus der „Teilung von Figuren“ verlangt, eine Figur, die aus einem Dreieck und einem auf eine der Dreieckseiten nach außen aufgesetzten Kreisabschnitt besteht, durch eine Gerade in zwei flächengleiche Hälften zu teilen, die durch den Mittelpunkt des Kreisbogens geht. In Abb. 2.6.3 ist die historische Lösung dieser Aufgabe ohne Begründung eingezeichnet. Wer die Konstruktionsvorschrift bzw. ihre Rechtfertigung daraus nicht rekonstruieren kann, sei auf [Schreiber 1987] verwiesen.

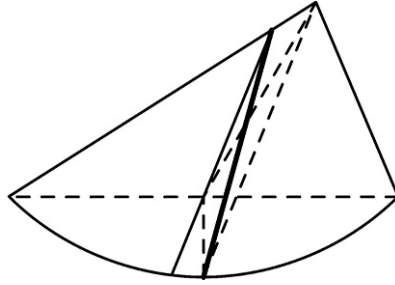


Abb. 2.6.3 Figur zu Aufg. 2.3.4

Aufgabe 2.3.5: Scheinbarer Mittelpunkt einer Strecke in Abhängigkeit vom Betrachterstandpunkt

In seiner „Optik“ wirft Euklid die Frage auf, von welchen Punkten aus man eine durch den Punkt B ungleich geteilte Strecke AC so sehen kann, daß sie halbiert wirkt. Daß es unendlich viele solche Punkte gibt, folgt sofort aus dem Peripheriewinkelsatz: Man kann den gemeinsamen Sehwinkel α , unter dem die Teilstrecken erscheinen sollen, sogar vorgeben (Abb. 2.6.4). Möglicherweise entstand aus diesem Problem der Satz des Apollonios, der Kreise als geometrischen Ort derartiger Punkte in einer Ebene charakterisiert [Schreiber 1994]: Sind A, B, C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden gegeben, so konstruiere man mit einem beliebigen Sehwinkel α den zugehörigen Augpunkt P als Schnitt der beiden Faßkreise k_1, k_2 . Bezeichnet M das Homothetiezentrum dieser beiden Kreise, so ist $MA : MB = MB : MC$, also $MB^2 = MA \cdot MC$. Daher ist M allein durch A, B, C bestimmt und von α bzw. P unabhängig. Da P auch durch Spiegelung von B an der Geraden g durch die Mittelpunkte der beiden Kreise entsteht, ist $PM = BM$, d.h. der variable Punkt P liegt stets auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius MB (Abb. 2.6.5). Um zu derjenigen Charakterisierung dieses Kreises mittels A, B, C zu gelangen, die der Satz des Apollonios aussagt, bezeichnen wir AB mit a, BC mit b, PA mit c, PC mit e (Abb. 2.6.5) Da nach dem Sinussatz

$$\begin{aligned} \text{in Dreieck } ABP \quad a : c &= \sin \sphericalangle APB : \sin \sphericalangle ABP, \\ \text{in Dreieck } BCP \quad b : e &= \sin \sphericalangle BPC : \sin \sphericalangle CBP \end{aligned}$$

und letzterer gleich dem Sinus seines Nebenwinkels $\sphericalangle ABP$ ist, ist $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC$ (gleichbedeutend mit $\sin \sphericalangle APB = \sin \sphericalangle BPC$) genau dann, wenn $PA : PC = c : e = a : b$. Daher kann der als Ort aller Punkte P mit $\sphericalangle APB = \sphericalangle CBP$ charakterisierte Kreis auch als Menge aller Punkte P mit $PA : PC = a : b$ charakterisiert werden (Apollonios). Man vollziehe diese Überlegungen nach.

Zwei weitere modern aufbereitete Aufgaben im Anschluß an Euklids „Optik“ findet man in [Schreiber 1995].

Aufgabe 2.4.1: Aristarch von Samos (um 310 – um 230 v. Chr.) hat ein Stück des von Euklid in seiner „Optik“ skizzierten Programms verwirklicht, durch geometrische

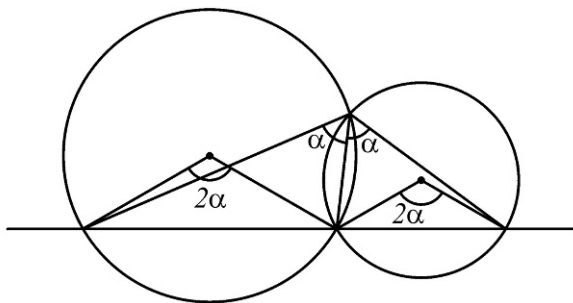


Abb. 2.6.4 Figur zu Aufg. 2.3.5

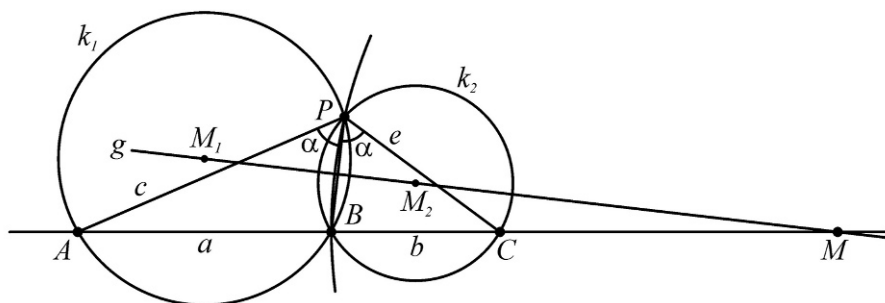


Abb. 2.6.5 Figur zu Aufg. 2.3.5

Überlegungen aus beobachtbaren Fakten auf die wirklichen Größen und Entfernungen weit entfernter Objekte zu schließen. Der Leser fertige zu den folgenden Gedanken selbst Prinzipzeichnungen an und vollziehe daran die Schlüsse Aristarchs nach.

- a) Wenn von der Erde aus genau die Hälfte des Mondes beleuchtet erscheint („Halbmond“), bilden Mond, Sonne und Erde (genauer: der Standpunkt des Beobachters auf der Erde) ein beim Mond rechtwinkliges Dreieck, dessen Form bzw. Seitenverhältnisse durch den zu messenden Sehwinkel zwischen Mond und Sonne völlig bestimmt sind. (Die praktischen Schwierigkeiten bestehen darin, daß
 - 1) der genaue Zeitpunkt des Halbmondes nicht leicht zu bestimmen ist,
 - 2) der Mond schlecht zu erkennen ist, wenn gleichzeitig die Sonne am Himmel steht,
 - 3) der Sehwinkel sehr nahe bei 90 Grad liegt und folglich geringe Meßfehler bereits sehr große Auswirkungen auf die Seitenverhältnisse haben.)

Aristarch fand für das Abstandsverhältnis Erde-Sonne: Erde-Mond die untere Schranke $18 : 1$ und die obere Schranke $20 : 1$, folglich einen viel zu kleinen Relativwert für den Sonnenabstand, obwohl er durch einen mathematischen Trick aus Euklids „Optik“ die Abschätzung zu verbessern suchte.

- b) Unter der zu beobachtenden Annahme, daß bei einer totalen Sonnenfinsternis der Mond die Sonne ziemlich genau bedeckt, ergibt sich für das Verhältnis der Durchmesser beider Himmelskörper ebenfalls ein Wert von ungefähr $19 : 1$.
- c) Man beobachtet, daß bei einer Mondfinsternis der Mond etwa die gleiche Zeit benötigt, um vollständig in den Kernschatten der Erde einzutauchen, wie um unmittelbar anschließend daran auf der anderen Seite des Schattens wieder hervorzukommen. Demnach ist der Kernschatten der Erde an der Stelle, an der der Mond ihn durchquert, etwa doppelt so breit wie der Monddurchmesser. (Man begründe dies und vergleiche es mit dem Phänomen eines Zuges, der genau so lange braucht, vollständig in einem Tunnel zu verschwinden, wie um an der anderen Seite wieder zu erscheinen!) Was kann man daraus unter Benutzung der Ergebnisse von a) und b) über die Durchmesser von Erde und Mond erschließen?
- d) Da der gemeinsame Wert des Schwinkels, unter dem Sonne bzw. Mond erscheinen, je etwa $0,5$ Grad beträgt (Aristarch hatte einen größeren Näherungswert), entspricht der Umfang beider Kreisbahnen je etwa 720 Durchmessern der betreffenden Himmelskörper. Kennt man (laut Eratosthenes) einen ungefähren Wert für den Erddurchmesser, so hat man nun auch absolute Näherungswerte für die Durchmesser und die Entfernungen von Sonne und Mond. Obwohl Aristarch auf Grund des laut a) gemessenen Winkels einen viel zu kleinen Wert für den Durchmesser und die Entfernung der Sonne erhielt, ergab sich das qualitativ richtige Resultat, daß die Sonne beträchtlich größer als die Erde ist. Aristarch zog daraus die Konsequenz, es sei sehr unglaubhaft, daß die riesige Sonne sich um die kleine Erde dreht. Das Gegenteil sei anzunehmen. In der Antike konnte sich diese Ansicht nicht gegen die übermächtige Physik des Aristoteles durchsetzen. Copernicus jedoch wußte von seinem Vorgänger und erwähnte ihn ausdrücklich.

Aufgabe 2.4.2: Die Spirale des Archimedes

- a) Man gebe die Untermenge derjenigen Punkte auf der archimedischen Spirale an, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind.
- b) Inwiefern kann die Archimedische Spirale als Hilfsmittel zur Rektifikation (Ausstreckung) des Kreisumfangs verwendet werden und damit indirekt zur Konstruktion von π ?
- c) Auch die Dreiteilung eines beliebigen Winkels kann geleistet werden, wenn eine Archimedische Spirale als gegeben angenommen wird. Wie hat man vorzugehen?
- d) Man bestätige mit Hilfe der Differentialrechnung das Ergebnis von Archimedes für die Subtangente. Wie kann man daraus eine Konstruktionsvorschrift für die Tangente an die archimedische Spirale gewinnen?
- e) Zeichnet man in einem Kurvenpunkt P die Normale n und bringt sie mit der über O hinaus verlängerten Subtangente zum Schnitt (der Schnittpunkt sei N), so ist die Strecke $ON = s_n$ die polare Subnormale. Man weise nach, daß gilt: $s_n = a$. (Diese Beziehung wird von Archimedes nicht angegeben!) Welche Tangentenkonstruktion ergibt sich hieraus?

Aufgabe 2.4.3: Das Problem des Apollonios

- a) Im Sonderfall, bei dem die drei gegebenen Kreise im Problem des Apollonios zu Punkten entartet sind, fallen alle berührenden Kreise zu einem zusammen. Wie findet man dessen Zentrum?
- b) Man bestimme für den Spezialfall, bei dem zwei Punkte und ein Kreis gegeben sind, dessen Mittelpunkt den gleichen Abstand von den gegebenen Punkten hat, die berührenden Kreise.
- c) Wie ist zu verfahren, wenn drei kongruente, sich nicht schneidende Kreise gegeben sind, deren Zentren die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden? Wie viele berührende Kreise gibt es in diesem Fall?
- d) Wie hat man im ausgearteten Fall, daß drei Geraden vorgegeben sind, zu verfahren?

Eine vollständige elementare Lösung für alle Fälle findet man in dem Artikel von H. Begander: Das Apollonische Berührungsproblem. Mathematische Schülerzeitschrift „alpha“ 1980, Heft 5, Verlag Volk und Wissen.

Aufgabe 2.5.1: Die heronische Formel

Man beweise die heronische Formel für die Fläche Φ eines beliebigen Dreiecks $\Phi = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ nach dem Vorbild von Heron (vgl. Abb. 2.5.1).

Man zeichne den Inkreis des Dreiecks ABC (um Übereinstimmung mit den Figuren im Manuskript zu erhalten, bezeichne man die Eckpunkte mit A, B, C , von oben im Gegenuhreigersinn beginnend). Dann verbinde man dessen Mittelpunkt O mit den drei Ecken A, B, C und falle von O aus die Lote auf die drei Seiten a, b, c , deren Fußpunkte D, E, F seien. — Dadurch wird der Umfang des Dreiecks $2s = a + b + c$ in 6 paarweise gleiche Stücke geteilt, deren Länge die Strecken $s - a$, $s - b$, $s - c$ sind, also diejenigen Größen, die neben s in der zu beweisenden Formel vorkommen. Der folgende Beweisgang ist dadurch bestimmt, daß diese vier Größen geometrisch dargestellt und passend ausgedrückt werden.

Man verlängere die Dreiecksseite CDB über B hinaus um die Strecke AF bis H . Weshalb gilt jetzt: $CH \cdot OD = \Phi$ und damit $\Phi^2 = CH^2 \cdot OD^2$? Sodann errichte man die Senkrechte OL auf OC (die BC in K schneide) und die Senkrechte BL auf BC und verbinde noch C mit L . Weshalb liegen jetzt die Punkte C, O, B, L auf einem Kreis, so daß gilt $\sphericalangle COB + \sphericalangle CLB = 2R$? Da auch $\sphericalangle COB + \sphericalangle AOF = 2R$ (warum?), folgt: $\sphericalangle AOF = \sphericalangle CLB$. Daher gilt $\triangle AOF \sim \triangle CLB$. Dies führt auf $CH : HB = BD : DK$. Jetzt betrachte man $CH^2 : (CH \cdot HB) = (BD \cdot DC) : OD^2$ (warum gilt das?) und setze ein in die oben hergeleitete Beziehung $\Phi^2 = CH^2 \cdot OD^2$:

$$\implies CH^2 \cdot OD^2 = CH \cdot HB \cdot BD \cdot DC = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Aufgabe 2.5.2: Der Sehnensatz des Ptolemaios

- a) Man beweise den Sehnensatz des Ptolemaios: In einem geschlossenen, einem Kreis einbeschriebenen Sehnenviereck mit den Seiten a, b, c, d und den Diagonalen e und f gilt: $ef = ac + bd$. (Man zeichne dazu das Viereck $ABCD$ mit den

Diagonalen $e = AC$ und $f = BD$. Weshalb sind dann die Winkel $\sphericalangle BDC$ und $\sphericalangle BAC$ einander gleich? Man verbinde B mit einem auf AC gelegenen Punkt E , der so gewählt ist, daß $\triangle ABE \sim \triangle DBC$. Es ist aber auch $\triangle ABD \sim \triangle ECB$. Man bestätige, daß somit gilt: $AB \cdot CD = AE \cdot BD$ bzw. $AD \cdot BC = CE \cdot BD$, woraus durch Addition der Sehnensatz folgt.)

- b) Man betrachte den Sonderfall, daß beide Diagonalen zugleich (verschiedene) Durchmesser des Kreises sind. Welcher Lehrsatz ergibt sich?
- c) Es sei die Seite d ein Kreisdurchmesser. Der Bogen über f werde mit ϕ , derjenige über a mit ψ bezeichnet. Führt man der Kürze halber für die Sehne die Abkürzung s ein, so daß die zugehörigen Sehnen $s(\phi)$ bzw. $s(\psi)$ werden, und setzt mit Ptolemaios den Durchmesser zu 120^p an, ergibt sich $s(180^\circ - \psi) \cdot s(\phi) = s(\psi) \cdot s(180^\circ - \phi) + s(\phi - \psi) \cdot 120^p$. Worin unterscheidet sich, nach Einführung der weiteren Abkürzung $s(180^\circ - \phi) = c(\phi)$, das Resultat von der Differenzformel der Sinusfunktion?

Aufgabe 2.5.3: Die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks nach Ptolemaios

Man führe die Konstruktion der Seite eines regulären Pentagons nach Ptolemaios am Einheitskreis durch und bestätige algebraisch, daß sich als Länge die Größe $s_5 = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ ergibt.

Man zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt O und (horizontalem) Durchmesser AOB , errichte in O die Senkrechte nach oben, die den Kreis in C schneide. Dann halbiere man den Radius OB in D . Mit einem in D eingesetzten Zirkel übertrage man die Strecke DC in die Strecke DE auf dem Durchmesser AB , so daß E zwischen A und O zu liegen kommt. Damit ist EB durch O im Verhältnis der stetigen Teilung geteilt (Nachweis?). Behauptet wird: $s_5 = CE$. Man hat folglich diese Strecke nur noch mit einem in C angesetzten Zirkel auf den Kreis zu übertragen, um die erste Fünfeckseite in der gewünschten Position zu erhalten.

Aufgabe 2.5.4: Herons Formel für das Kreissegment

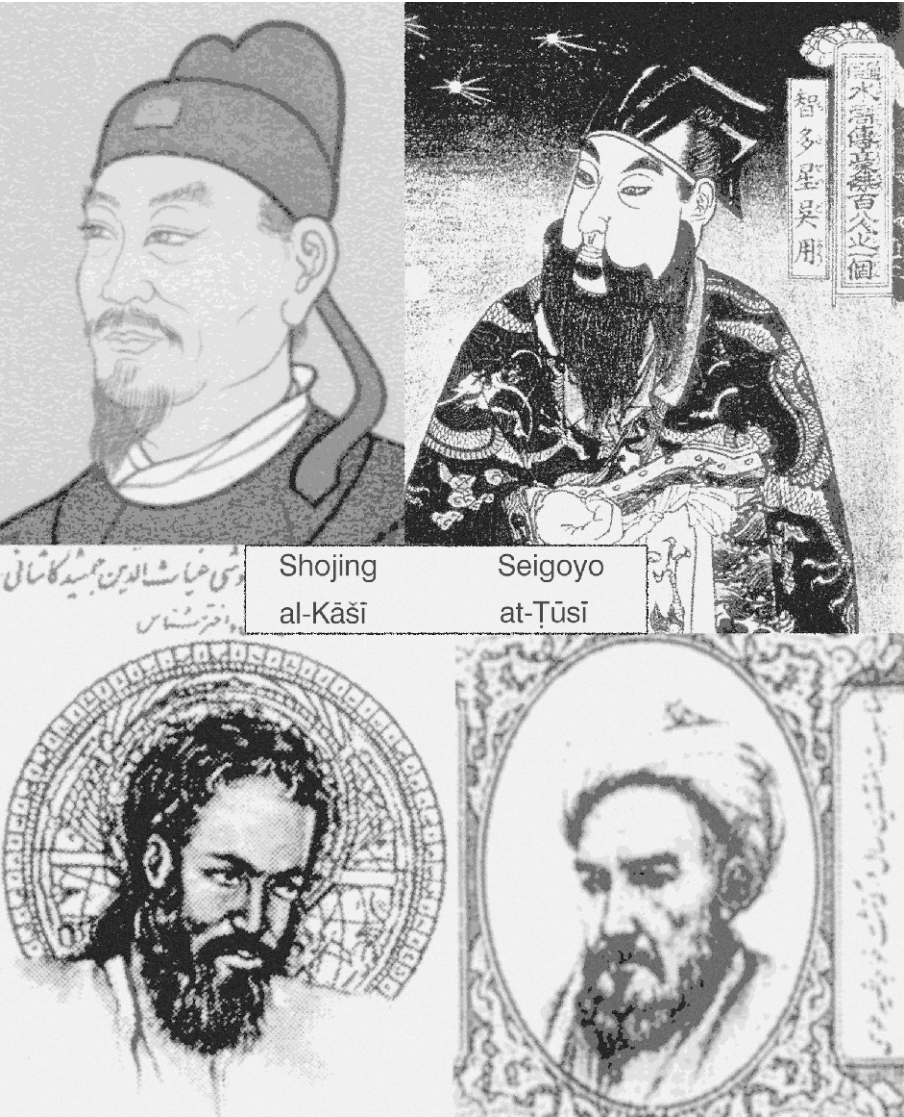
Man überlege sich, wie Heron (oder wer immer der Erfinder war) zu der Formel (2.5.5) für die Fläche des Kreissegments gekommen sein könnte.

Aufgabe 2.5.5: Herleitung der Ellipsengleichung aus der Gärtnerkonstruktion

Man leite aus der sog. Gärtnerkonstruktion der Ellipse zugrundeliegenden Beziehung, daß die Summe der Verbindungsstrecken eines Kurvenpunktes zu zwei festen Punkten (den Brennpunkten) konstant ist, die Mittelpunktsleichung der Ellipse her.

Man wähle dazu die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 auf der x -Achse mit den Koordinaten $-e, +e$ und bezeichne die konstante Summe der Abstände des Kurvenpunktes $P = (x, y)$ von ihnen mit $2a$. Ferner beachte man, daß für die Ellipse die Beziehung $e^2 + b^2 = a^2$ gilt, wobei a die große, b die kleine Halbachse und e die lineare Exzentrizität sind.

3 Geometrie im Orient und in altamerikanischen Kulturen



3.0 Einführung

Bevor im folgenden Kapitel das europäische Mittelalter behandelt wird, soll in diesem Kapitel ein Überblick über die Entwicklung der Geometrie in den orientalischen Ländern bis zum 15. Jh., in Japan bis zu seiner Öffnung im Jahr 1868 und in den altamerikanischen Kulturen gegeben werden. Es zeigt sich, daß es trotz vieler noch offener Forschungsprobleme möglich ist, für die Mathematik in China, Japan, Indien und den islamischen Ländern bestimmte jeweils charakteristische Züge anzugeben. Allerdings erlaubt die durch das Thema dieses Bandes, Geometrie, vorgegebene Einschränkung nur, allgemeine Aussagen eher zu skizzieren, als sie durch umfassende Beispiele aus allen Teilgebieten der mathematischen Wissenschaften dokumentarisch zu belegen. Während sich die chinesische und die indische Mathematik in einem lange andauernden einheimischen Reifeprozess entwickelten und die japanische Wasan-Mathematik fast wie unter einer Glasglocke eine kurze artifizielle Blüte erlebte, konnte die Mathematik in den islamischen Ländern nicht auf eine einheitliche, eigenständige Entwicklung vom Altertum her aufbauen. Vom 8. Jh. an, als sie sich auszubilden begann, war sie auf die Übernahme und Weiterbildung von Rechen- und Meßverfahren benachbarter Kulturen angewiesen. Das mag sie besonders aufgeschlossen für das Studium der theoretischen Mathematik der Griechen gemacht haben. Jedenfalls kam es infolge der vielseitigen Einflüsse zur Ausbildung einer ‘arabischen Mathematik’. Einer ihrer charakteristischen Züge ist die Übernahme des deduktiv vorgehenden beweisenden Verfahrens, worin sie sich von den übrigen mathematischen Kulturen im Orient unterscheidet.

Die Bezeichnung ‘Arabische Mathematik’ ist ebenso wie die auch gebräuchliche ‘muslimische Mathematik’ nicht ganz zutreffend: weder waren alle unter arabischer Herrschaft tätigen Mathematiker Araber noch waren sie alle Moslems. Selbst wenn man das Adjektiv ‘arabisch’ auf die Sprache bezieht, darf man nicht vergessen, daß vom 10. Jh. an wissenschaftliche Schriften auch in persischer Sprache verfaßt wurden.

Die Namen und Buchtitel orientalischer Gelehrter und ihrer Werke werden in der Literatur sehr unterschiedlich wiedergegeben. Darum finden sich in diesem Kapitel gelegentlich voneinander abweichende Schreibungen bzw. Angaben von Varianten.

Wegen der nur spärlich erhaltenen schriftlichen Dokumente aus den altamerikanischen Kulturen wird die Entwicklung geometrischer Elemente und Konstruktionen im präkolumbischen Amerika anhand bemerkenswerter Beispiele aus der Kultur der Jägervölker Inuit und Ojibwa in Nordamerika und aus den Hochkulturen der Azteken und Maya in Mittelamerika sowie der Inka in Südamerika dargestellt und illustriert.

3.1 China

3000 – 1500		Frühe Stromtalkulturen am Huang-Ho und Jangtsekiang
um 2000 – 1500	Legendäre Hsia-Dynastie, begründet vom mythischen Kaiser Yü	Bronzeinschriften in vorklassischer Sprache
1500 – 1030	Shang-Dynastie	Erste Lieder, Sakralbronzen
1030 – 481	Chou-Dynastie	Konfuzius (551 – 479) verkündet seine Sittenlehre
		Laotse (um 300) begründet die Lehre vom Taoismus
221 – 207	Shi-Huang-ti einigt die Reiche und wird erster Kaiser	Bau der chinesischen Mauer (2450 km)
206 v. Chr. – 220 n. Chr.	Han-Dynastien	Blüte von Mathematik, Astronomie, Philosophie und gereimter Prosa
221 – 280	Zeit der drei Reiche	Mathematische Inselfammlung
260 – 618	Weiterer Zerfall, verschiedene Dynastien	Vordringen des Buddhismus, Tempel, Klöster mit Buddhafiguren entstehen
618 – 906	Tang-Dynastie Höhepunkt chinesischer Macht	Blüte von Wirtschaft und Kultur (Malerei, Lyrik von Li-Tai-po, Tu-fu und Po-Kü-i)
907 – 960	Periode der 5 Dynastien	
960 – 1278	Sung-Dynastien	Tuschmalereien von Tieren und Pflanzen
1278 – 1368	Yuan-Dynastie (Mongolenherrschaft)	zweite Blüte der Mathematik; Blau-Weiß-Porzellane, Lackarbeiten, Malerei; Reise Marco Polos (1271 – 1291)
1368 – 1644	Ming-Dynastie	Monumentale Bauten, Ming-Gräber
1644 – 1911	Chhing-Dynastie	Französischer und britischer Einfluß und Konflikte
1911	Ausrufung der Republik	
1949	Ausrufung der Volksrepublik durch Mao Tse-tung	

3.1.0 Historische Einführung

Im Rahmen einer knappen Darstellung des Beitrags der chinesischen Mathematiker zur Entwicklung der Geometrie ist es nicht möglich — und auch nicht sehr sinnvoll —, näher auf die (nach chinesischer Tradition viertausendjährige) Geschichte des riesigen Gebietes China einzugehen. Es ist üblich, sie nach Dynastien zu gliedern (vgl. die Tabelle). Die Frühzeit (ab ca. 2000 vor unserer Zeitrechnung) ist weitgehend legendär. Um -600 bis -300 sollen frühe, nicht

überlieferte mathematisch-astronomische Schriften in China verfaßt worden sein. Die noch bekannten sog. altchinesischen Texte sind in einem Zeitraum von rund 500 Jahren niedergeschrieben worden, in dessen Mitte ziemlich genau der Beginn der christlichen Zeitrechnung in Europa fällt; ihr Alter entspricht demnach etwa dem der alexandrinisch-hellenistischen Texte aus dem europäischen Kulturraum. Eine zweite Blütezeit erlebte die Mathematik in China im 13. Jh., Spätwerke entstanden noch im 16. Jh. Mit der Ankunft des jesuitischen Astronomen und Mathematikers Matteo Ricci in Peking im Jahr 1601 findet die europäische Wissenschaft langsam Eingang in China; die von außen unbeeinflusste Entwicklung endet damit. Allerdings gab es im 17. Jh. noch viele Vorbehalte. Erst als in der 2. Hälfte des 19. Jhs. die chinesischen Gelehrten erneut mit der westlichen Wissenschaft intensiv in Berührung kamen, zeigten sie sich dem für sie oft fremdartigen Denken aufgeschlossen (vgl. Bd.1, Abschnitt 2.1).

Kennzeichnend für beide Epochen der Mathematik in China, die antike und die mittelalterliche (um noch einmal zum Vergleich eine für Europa geltende Periodisierung anzuwenden), ist eine Besonderheit: eine gewisse Anzahl von mathematischen Werken wurde zum Kanon erhoben, woran sich spätere Mathematiker zu halten hatten. Das war möglich, weil Mathematik vor allem im Rahmen der Beamtenausbildung gelehrt wurde — China besaß ein straff organisiertes Beamtenwesen. Neben den üblichen Verwaltungstätigkeiten der Beamten, an die wir wohl zuerst denken und die elementare Rechenfertigkeiten verlangten, waren mathematisch anspruchsvollere Aufgaben von dafür ausgebildeten Spezialisten zu bewältigen: Himmelsbeobachtungen und Kalenderberechnungen von den Astronomen, Landvermessung von den Geodäten. So konnte schließlich 656 unter dem Titel „Die zehn mathematischen Klassiker“ (oder Handbücher, *Suanjing shi shu*) von Beamten eine Sammlung von Werken verschiedenen Schwierigkeitsgrades zusammengestellt werden, die von da an die Ausbildung — und damit auch das mathematische Schaffen — in China bestimmte. „Die zehn mathematischen Klassiker“ (oder Teile daraus) wurden wieder und wieder kommentiert und dabei ergänzt und erweitert; gleichzeitig scheute man sich, mit völlig neu konzipierten Büchern die Tradition zu verlassen. Dennoch war die alte chinesische mathematische Literatur sehr reichhaltig. Ein 1936 erstellter Katalog solcher Werke in Peking Bibliotheken verzeichnete mehr als tausend Titel. Von vielen weiteren Werken, die vor dem 13. Jh. entstanden, kennt man nur noch die Titel. Im 15. Jh. wurden die zehn Klassiker in eine Enzyklopädie aufgenommen, danach aber wurde es immer schwieriger, an einen vollständigen Text zu gelangen. Ein Neudruck (der erste bekannte war 1084 ausgegeben worden!) erfolgte gegen Ende des 18. Jhs.,

nachdem es gelungen war, den ursprünglichen Text der zehn Bücher wieder aufzufinden.

Die Entwicklung der chinesischen Geometrie im Rahmen ihres mathematischen wie kulturellen Umfeldes soll hier in chronologischer Abfolge beschrieben werden:

- a) Von den Anfängen bis zur San Guo-Periode (San Kuo; der Teilung Chinas in drei Reiche zwischen 220 und 280);
- b) Von der Teilung bis zum Beginn der Sung-Dynastie (960);
- c) Unter den Dynastien Sung (960–1279), Yuan (Mongolenherrschaft, 1271–1368) und Ming (1368–1644).

3.1.1 Von den Anfängen bis zur Teilung Chinas in drei Reiche zwischen 220 und 280

Bei archäologischen Ausgrabungen fand man auf Alltagsgegenständen aus dem 13. und 12. Jh. v. Chr. Ornamente, die mit Fünf-, Sieben-, Acht- und Neunecken verziert sind. Im Gegensatz zu den griechischen und arabischen Mathematikern scheinen aber die chinesischen deren Regelmäßigkeit nicht zum Anlaß besonderer Forschungen genommen zu haben. Anders war es mit den Beziehungen zwischen den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, die offenbar nur wenige Jahrhunderte später die Aufmerksamkeit chinesischer Mathematiker weckten. Doch weiß man über diese frühe Zeit fast nichts; denn die Überlieferung der althinesischen Wissenschaft wurde durch den Erlaß des despotischen ‘Gelben Kaisers’ Shi Huang Di (Shi Huangdi, Shih Hoang-ti) aus dem Jahr 213 v. Chr. grausam unterbrochen: er ordnete die Verbrennung aller Bücher an und ließ viele Gelehrte umbringen. Nachfolgende Generationen konnten sich nur unter Mühen einige der alten Schriften wieder beschaffen.

Zhoubi suanjing (Chou Pei Suan Ching)

Drei besonders wichtige Werke dieser Periode seien hier vorgestellt. Das älteste ist das „Zhoubi suanjing“ (Klassische Arithmetik des Chou Gnomon — Needham [Needham 1959] übersetzt „Klassische Arithmetik des Gnomon und die Kreisbahnen des Himmels“). Hat man es früher bis auf die Zeit um -1100 zurückdatiert, so nimmt man heute an, es stamme frühestens aus dem späten 4. vorchristl. Jh., enthalte aber vermutlich ältere Teile aus dem späten 6. und dem 5. Jh. v. Chr. [Needham 1959, 19, 210, 257], [Martzloff 1997, 124]. Im wesentlichen ein Buch über Astronomie und Kalenderrechnung, wird die darin

enthaltene Mathematik nur als Hilfsmittel gelehrt. Behandelt werden in Dialogform Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks, der Satz des Pythagoras, Quadrat und Kreis, das Messen von Höhen und Entfernungen und die Anwendung des Gnomons. An Rechenfertigkeiten (deren Erlernen der Beschäftigung mit der Geometrie vorausgehen soll) werden Bruchrechnung und Quadratwurzeln vorausgesetzt. (Ursprünglich machten die Chinesen beim Zählen und Rechnen von Rechenstäbchen Gebrauch, die je nach Lage die Einer, Zehner, Hunderter im Dezimalsystem darstellten. Um die Mitte des 14. Jhs. tauchte der Abakus — die Kugelrechenmaschine, chinesisch *suan pan* — auf und verbreitete sich rasch im ganzen Land sowie darüber hinaus in Japan und Korea. Aufgrund seiner Ähnlichkeit mit dem römischen Abakus gibt es Spekulationen, der *suan pan* könne auf bisher ungeklärte Weise von Europa nach China gelangt sein.)

Deduktive Beweise im euklidischen Sinn fehlen in der „Klassischen Arithmetik des Chou Gnomon“. Der Satz des Pythagoras wird z.B. mit einem Verfahren, das als ‘Zusammenlegen von Rechtecken’ bezeichnet wird, an einem konkreten Beispiel anschaulich verdeutlicht; das ist jedoch als allgemeingültig gedacht. Kurz gefaßt, besagt die Beschreibung: Man zeichne das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5, über seiner Hypotenuse das Quadrat und ergänze über dessen drei Seiten kongruente Dreiecke (3, 4, 5), so daß das Hypotenusenquadrat über Eck in ein Quadrat der Seitenlänge 7 eingepaßt ist. In der beigegebenen Figur (Abb. 3.1.1) sind beide Quadrate durch zwei sich überkreuzende Netze in 5×5 bzw. 7×7 Einheitsquadrate zerlegt. Das innere Quadrat ist 25 Einheitsquadrate groß, das äußere zerfällt in vier Rechtecke der Größe 3×4 und das zentrale Einheitsquadrat.

Drückt man das allgemein aus, so entspricht dem die Formel

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a - b)^2 = a^2 + b^2. \quad (3.1.1)$$

Dieser älteste chinesische „Beweis“ verbindet also eine anschauliche Konstruktion mit Überlegungen, die implizit algebraische Umformungen vornehmen. Damit ist auch die Richtung angedeutet, in der sich die Geometrie in China entwickelte: orientiert an der Praxis, wurde sie unter algebraischem Blickwinkel fortgebildet; man versuchte, die geometrischen Fragestellungen auf Gleichungen zu reduzieren, um die Probleme mit Methoden der Gleichungslehre beantworten zu können ([Needham 1959, 22-23], [Libbrecht 1973, 96ff.]).

Die astronomischen Teile, die natürlich wesentlicher Bestandteil des Werkes waren und für eine Gesamtbeurteilung unentbehrlich sind, sollen hier nicht besprochen werden. Daraus darf man allerdings keineswegs folgern, für die

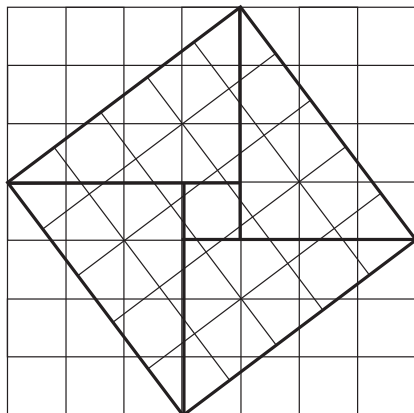


Abb. 3.1.1 Chinesische Figur zum Satz des Pythagoras

antiken Autoren habe bereits eine derartige Trennung der beiden Disziplinen Geometrie und Astronomie bestanden. Andererseits ist auffällig, daß von Astrologie und Weissagung, die damals in China in hoher Blüte standen, im „Zhoubi suanjing“ nichts zu finden ist. Die himmlischen und irdischen Erscheinungen werden ohne jeden Anflug von Aberglauben ganz sachlich abgehandelt (vgl. das Zitat im Anhang A.4, S. 573).

Jiuzhang suanshu (Chiu Chang Suan Shu)

Das zweitälteste Werk, das hier zu behandeln ist, gehört zu den bekanntesten chinesischen mathematischen Büchern überhaupt: das „Jiuzhang suanshu“ (Chiu Chang Suan Shu, Neun Bücher arithmetischer Technik) [Vogel K. 1968]. Die frühe Han-Zeit (-202 bis +9) gilt heute als gesicherte Entstehungszeit; ältere Vorlagen wurden bei seiner Abfassung mitverwendet. Anders als das zuvor genannte Werk ist es ein rein mathematischer Text: eine Sammlung von 240 Aufgaben, versehen mit Lösungsanweisungen. Da es 656 zum offiziellen Lehrbuch erklärt wurde, das alle staatlichen Beamten und Ingenieure studieren mußten, wurde es zum einflußreichsten aller chinesischen mathematischen Werke. Unter den „Zehn Klassikern der Mathematik“, in die es zum gleichen Zeitpunkt aufgenommen wurde, gehörte es bereits zu den fortgeschrittenen Werken, weil es wegen seiner lakonischen Kürze als schwierig galt. Auch gingen Teile weit über die Bedürfnisse der niederen Beamten und Kaufleute hinaus. Neuere Untersuchungen konnten den Nachweis babylonischen Einflusses auf die „Neun Bücher [oder eigentlich besser: Kapitel] arithmetischer Technik“ er-

bringen — insofern nicht verwunderlich, als die Chinesen bereits um -200 eine Gesandtschaft in Babylon unterhielten.

Das erste, vierte, fünfte und neunte Kapitel sind es vor allem, die mit geometrischen Fragestellungen zu tun haben. Die anderen enthalten Aufgaben aus dem Bereich des praktischen Rechnens und diverser für den Beamten wichtiger Anwendungen (Getreidemischungen, Verteilungsaufgaben, Steuern und Abgaben, aber auch Bruch- und Wurzelrechnung, Bewegungsaufgaben, euklidischer Algorithmus, lineare Gleichungssysteme und unbestimmte Gleichungen). Wie nicht anders zu erwarten, bringt das erste Kapitel Berechnungen einfacher ebener Figuren: Rechteck, Dreieck, Trapez, auch Kreis und Kreissegment. Die Kreisfläche wird nach der babylonischen Vorschrift (vgl. S. 18 (1.2.9)) oder als $\frac{3d^2}{4}$ berechnet. Für das Kreissegment findet sich eine auch von Heron diskutierte, aber von ihm als zu ungenau zurückgewiesene Formel (F = Fläche, s = Sehne, p = Pfeil; vgl. Abb. 1.2.5):

$$F = \frac{(s + p) \cdot p}{2}. \quad (3.1.2)$$

Im 4. Kap., überschrieben ‘kleine Breite’, werden Flächenverwandlungen berechnet, wobei die Breite einer gegebenen Fläche verkleinert, die Länge so vergrößert werden soll, daß der Inhalt erhalten bleibt. Das ‘Taxierung der Arbeit’ genannte 5. Kap. enthält Aufgaben über die Volumenberechnung von Mauern, Dämmen, Kanälen usw., also stereometrische Probleme in eingekleideter Form. Als Körper kommen Prisma, Pyramide, Tetraeder, Keil, Zylinder, Kreiskegel und Kegelstumpf vor. Wenn dann im 9. Kap. Aufgaben über rechtwinklige Dreiecke zusammengestellt sind, deutet diese späte Einordnung schon auf die verschiedene Herkunft der einzelnen Teile des Werkes hin. Für diesen Abschnitt läßt sich eine enge Verwandtschaft zum zuvor beschriebenen Buch „Zhoubi suanjing“ nachweisen. Manche der Aufgaben, wie z.B. die des geknickten Bambusstabes, gelangten später — möglicherweise übermittelt durch buddhistische Mönche — nach Indien und schließlich nach Westeuropa. Betrachten wir einige Beispiele aus diesem letzten Buch [Vogel K. 1968, 90ff.]. Aufgabe 4 fordert, aus einem kreisrunden Baumstamm einen rechteckigen Balken gegebener Stärke auszusägen. Bei der Lösung wird implizit vorausgesetzt, daß der Umfangswinkel über dem Durchmesser ein rechter ist. Die folgende Aufgabe verlangt die Berechnung der Gesamtlänge einer Schraubenlinie, vorgestellt als eine sich um einen Baum windende Schlingpflanze. Die Lösungsregel beruht auf der Abwicklung in eine Ebene. Die Aufgabe vom schräg an eine Wand gelehnten Stab, dessen Fuß um eine bestimmte Strecke wegbewegt wird, wobei die Spitze um eine gegebene Größe absinkt, findet sich auch in anderen Kulturen, ebenso die Aufgabe vom geknickten Bambusstab.

In Aufgabe 20 wird eine Stadt mit quadratischem Grundriß vorgestellt, die auf jeder Seite in der Mitte der Mauer ein Tor habe (vgl. Abb. 3.1.2). In einer Entfernung von 20 *bu* (chinesisches Längenmaß) nach Norden vom nördlichen Tor steht ein Baum. Geht man vom südlichen Tor um 14 *bu* nach Süden und dann um 1775 *bu* nach Westen, so wird der Baum gerade hinter der nordwestlichen Ecke der Stadtmauer sichtbar. Gefragt wird nach der Länge einer Seite der Stadtmauer (d.h. nach der Quadratseite). Man erhält eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + px = q$, $p, q > 0$. Herleitung und Lösungsweg werden nicht angegeben, sondern lediglich eine Regel, die den Algorithmus zum Ausziehen einer Quadratwurzel auf diesen Fall überträgt (vgl. Aufg. 3.1.1).

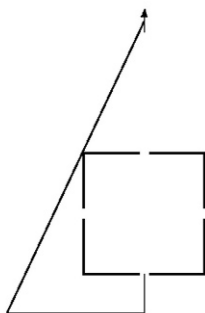


Abb. 3.1.2 Quadratische Stadt in den „Neun Büchern arithmetischer Technik“

Das Kapitel enthält mehrere Varianten dieser Stadtaufgabe, die auch von späteren Autoren (so z.B. von Qin Jiushao im 13. Jh.) wieder aufgegriffen wurde [Juschkeiwitsch 1964, 50].

Haidao suanjing (Hai Tao Suan Ching)

An dieses letzte Kapitel knüpfte ein kleines, aber wichtiges Buch „Haidao suanjing“ von Liu Hui an [Swets 1992]. Es erschien im Jahr 263; sein Titel bedeutet: „Mathematische Inselsammlung“. Ergänzend zu seinem Kommentar zu den „Neun Büchern“ beschrieb Liu Hui darin das Messen von Höhen und Entfernungen. Er verwendete dabei eine Meßlatte, an der, falls erforderlich, am oberen Ende ein senkrechter Querstab angebracht ist. Die Verfahren basieren meist auf der Betrachtung von ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken. (Daher ist es nicht berechtigt, von praktischer Trigonometrie zu sprechen, wie das Mikami 1913 in seiner Darstellung der Mathematik in China und Japan tat [Mikami 1913]; denn weder Winkeleigenschaften noch Winkelfunktionen treten

dabei auf. Auch finden sich darin keine algebraischen Verallgemeinerungen, sondern lediglich konkret vorgegebene Aufgaben.)

Das letzte Buch der „Jiuzhang suanshu“ (Neun Bücher) schloß nach den zitierten Stadtaufgaben mit einigen Vermessungsaufgaben. Liu Hui hielt die dort beschriebenen Verfahren im Fall von unzugänglichen Objekten für nicht ausreichend und erläuterte daher noch das ‘chong cha-Verfahren’, die zu seiner Zeit schon verbreitete Methode der doppelten Messungen (Abb. 3.1.3).

Der Holzschnitt illustriert deutlich die Situation der Insel, die seinem Werk den Namen gab, wie die behandelte Problematik: die auf einer Insel aufragende, unzugängliche Bergspitze wird von zwei Beobachtungspunkten aus über das Ende einer Stange hinweg angepeilt. Gefragt wird nach der Höhe des Berges und nach seiner Entfernung von der vorderen Stange. Der Abstand der Meßlatten voneinander ist bekannt. Also läuft das Verfahren darauf hinaus, aus einer Strecke und den beiden anliegenden Winkeln ein Dreieck zu konstruieren und dann dessen Höhe zu berechnen. Wie Liu Hui vorgeht, erläutert Aufgabe 3.1.2.

Da sich die chinesischen Astronomen schon früh für den Abstand der Sonne von der Erde interessierten, könnte das Verfahren unter diesem Aspekt entwickelt und dann auf irdische Verhältnisse übertragen worden sein. Liu Hui nahm in sein Werk neun Aufgaben dieser Art auf. Die Methode markiert den Höhepunkt der frühen chinesischen Vermessungstheorie; sie wurde in vielen späteren Werken erläutert und oft mit den von Liu Hui formulierten Aufgaben illustriert (vgl. [Swets 1992]).

Volumenberechnungen

Aus seinem Kommentar zu den „Neun Büchern“ verdient Liu Huis Berechnung der Kreiszahl π besondere Erwähnung (s. Bd. 1, Abschnitt 2.1.2). Rund 150 Jahre vor ihm hatte der Astronom und Philosoph Zhang Heng behauptet, daß sich das Quadrat des Kreisumfangs [also $(2\pi r)^2$] zum Umfangsquadrat des dem Kreis umbeschriebenen Quadrats [also $(8r)^2$] wie 5 : 8 verhält, woraus folgt: $\pi \approx \sqrt{10} = 3,162\dots$ (Diesen Näherungswert kannten im 7. Jh. auch Brahmagupta und im 9. Jh. al-Chorezmi.)

Liu Hui ging zur Umfangsberechnung vom einbeschriebenen regelmäßigen Sechseck f_6 aus, dessen Seitenzahl er durch wiederholte Verdoppelung auf 192 erhöhte, woraus er den Näherungswert $\pi \approx \frac{157}{50}$ bestimmte. Bessere Näherungswerte leitete er durch Exhaustion der Kreisfläche her (vgl. Abb. 3.1.4), indem er ihre Größe durch

$$f_{n+1} < f < f_n + 2 \cdot (f_{n+1} - f_n) \quad (3.1.3)$$

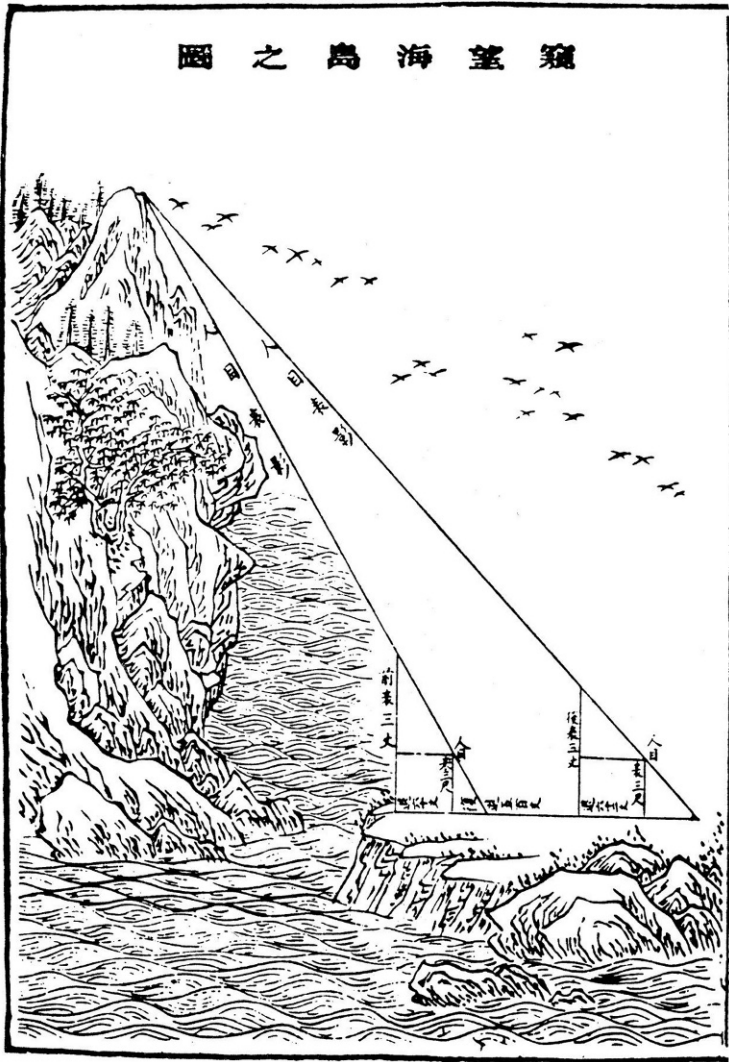


Abb. 3.1.3 Illustration der Methode der doppelten Messungen
Blockdruck aus der Enzyklopädie Tu Shu Ji Chen (1726)

[Frank G. Swets: The Sea Island Mathematical Manual: Surveying and Mathematics in Ancient China, page 10, Fig 3, 1992, University Park, PA: The Pennsylvania State University Press]

approximierte. Aus dem $6 \cdot 2^9$ -Eck gewann er einen Bruch, der $\pi \approx 3,14159$ entspricht und damit die Genauigkeit des von Ptolemaios um 150 n. Chr. verwendeten von 3,14166 übertrifft (s. Aufg. 3.1.3). Zwei Jahrhunderte später gewann Zu Chongzhi (Tsu Ch'ung-Chi) sogar den Näherungsbruch $\frac{355}{113}$ und die Schranken $3,1415926 < \pi < 3,1415927$.



Abb. 3.1.4 Erläuterung des Exhaustionsverfahrens von Liu Hui
in einem Text von Dai Zhen (Tsai Chen)
[Joseph Needham, Science and Civilization in China, vol. 3, Cambridge University Press 1959]

In den „Neun Büchern“ werden im 5. Buch neben dem Quader und geraden Prismen auch verschiedene kompliziertere, aber durch ebene Flächen begrenzte Körper berechnet, z.B. ansteigende Dämme mit abgeschrägten Seiten und pyramidenstumpffartige Gebilde. Man zerlegte solche Körper in Teilkörper und verwendete erforderlichenfalls auch Mittelbildungen. Im schwierigen, nicht elementar zu behandelnden Fall der Pyramide kam Liu Hui nicht allein mit Zerlegungen aus: er mußte Restpyramiden erneut zerlegen und das Verfahren wiederholt anwenden, im Grunde also einen Grenzübergang vollziehen (vgl. hierzu [Wagner 1979]).

Am interessantesten sind die Körper mit gekrümmten Oberflächen: Zylinder, Kegel und Kegelsumpf. Während wir das Zylindervolumen als Grundfläche mal Höhe zu berechnen gewohnt sind, verlangt die chinesische Regel, den Umfang des Grundkreises zu quadrieren, davon ein Zwölftel zu nehmen und das Ergebnis mit der Höhe zu multiplizieren. Das entspricht ganz dem babylonischen Verfahren der Berechnung der Kreisfläche (unter Verwendung des Wertes 3 für π : $F = \frac{u^2}{12}$; vgl. S. 18 (1.2.9)). Entsprechend wird der Kegelinhalt bestimmt (Multiplikation mit $\frac{h}{3}$) und das Kegelsumpfvolumen als

$$V = \frac{U_1 U_2 + U_1^2 + U_2^2}{12} \cdot \frac{h}{3}. \quad (3.1.4)$$

Für das Kugelvolumen ist keine Regel formuliert (weshalb nicht, wird diskutiert in [Fu 1991]). Allerdings wird im Buch über das Wurzelziehen der Kugeldurchmesser d aus dem Kugelvolumen V mittels der Vorschrift $d = \sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$ ermittelt, was äquivalent zu $V = \frac{9}{16}d^3$ ist. So ergibt sich an dieser Stelle $\pi \approx \frac{27}{8}$. Wie immer wird keine Begründung gegeben, doch kann man sich vorstellen, man habe das Kugelvolumen zu drei Vierteln des Volumens des umbeschriebenen Zylinders geschätzt. In Liu Huis Kommentar wird in diesem Zusammenhang die Abschätzung $\frac{8}{16}d^3 < \pi < \frac{9}{16}d^3$ angegeben. Dem entspricht $3 < \pi < 3\frac{1}{8}$. — Offen bleibt natürlich, ob es damals schon einen Mathematiker gab, der den Zusammenhang zwischen der Kreiszahl π und der in diese Kugelberechnung eingehenden Konstanten gesehen hat.

3.1.2 Von der Teilung bis zum Beginn der Sung Dynastie (960)

In den folgenden Jahrhunderten verlief die Entwicklung relativ langsam. Vermutlich im 4. oder 5. Jh. entstand „Sunzi suanjing“ (Sun Tzu Suan Ching: des Meisters Sun arithmetisches Handbuch). Bedeutsam ist es wegen seiner Beschreibung des Rechnens mit Bambusziffern; neben der Erläuterung des

Rechnens (einschließlich einer Darlegung des Ausziehens von Kubikwurzeln) enthält es auch eine Zusammenstellung der gebräuchlichen Maße und Gewichte. (Eine englische Übersetzung ist enthalten in [Lam/Ang 1992, 149–182]).

Als wichtigstes, aber leider verlorengegangenes Buch dieser Epoche wird das „Zhui shu“ (Chui Shu, Das Zusammenbinden) des Zu Chongzhi (Tsu Ch'ung-Chi oder Tsu Chhung-Chih) aus dem 5. Jh. angesehen. Es galt als eines der schwierigsten Bücher — wahrscheinlich, weil darin π auf sieben Dezimalstellen genau berechnet und für astronomische Berechnungen die Differenzenmethode (Interpolation) beschrieben wurde.

Berührungen mit Indien

Vom Ende des 5. Jhs. an kam es auch zu ersten Kontakten mit indischen Gelehrten. Darauf weist eine Reihe von Titeln verlorener Werke hin, die den Zusatz 'Brahmin' enthielten. Auch haben indische Buddhisten das chinesische Denken beeinflusst — in der Mathematik z.B. hinsichtlich der Wiedergabe sehr großer Zahlen. Im 7. und 8. Jh. waren indische Gelehrte im astronomischen Büro der chinesischen Hauptstadt tätig und arbeiteten bei der Verbesserung des Kalenders mit; einer von ihnen, bekannt durch ein bedeutsames astronomisches Werk, wurde sogar zum Leiter berufen. Wahrscheinlich brachten diese Inder aus ihrer Heimat auch eine Frühform der Trigonometrie mit nach China. Es wäre allerdings verfehlt, daraus zu schließen, es habe eine beständige intensive wissenschaftliche Kommunikation zwischen beiden Ländern gegeben. Vielmehr blieben neue Entwicklungen oft auf den Entdecker und seinen Schülerkreis beschränkt. Ein Bericht aus dem Jahr 855 schildert die Mühen weiter Reisen, die begabte junge Männer unternehmen mußten, wollten sie sich bei einem der seltenen großen Meister weiterbilden [Needham 1959, S. 202 - 206]. Dies, ebenso wie innere Unruhen im 7. und 8. Jh., die schließlich zur Teilung des riesigen Reiches in fünf Dynastien führten, mögen die Stagnation der Folgezeit mitbedingt haben, war doch der Hof nicht nur ein politisches, sondern auch ein kulturelles und wissenschaftliches Zentrum höchsten Ranges gewesen.

3.1.3 Die Dynastien Sung (960–1278), Yuan (Mongolenherrschaft, 1278–1368) und Ming (bis 1644)

Erst im 13. und 14. Jh. erlebte die Mathematik in China wieder einen starken Aufschwung. Insbesondere gilt die zweite Hälfte des 13. Jhs., als mehrere hervorragende Mathematiker wichtige Werke verfaßten, als die eigentliche Blütezeit der chinesischen Mathematik.

Qin Jiushao (Ch'in Chiu-shao)

Von den wenigen, auf die wir uns hier beschränken müssen, sei zunächst Qin Jiushao genannt. Er vollendete sein Werk „Shushu jiuzhang“ (Shu-shu chiu-chang, Mathematische Abhandlung in neun Büchern) im Jahr 1247, zehn Jahre, nachdem die Mongolen in seine Heimat eingefallen waren und die Unruhen ihn lange von der Beschäftigung mit mathematischen Problemen abgehalten hatten [Libbrecht 1973]. Die Hauptquelle waren die oben besprochenen „Neun Bücher, Jiuzhang suanshu“. Auch Qin Jiushao wählte eine Gliederung in neun Bücher, ordnete den Stoff aber anders an und brachte oft schwierigere Aufgaben als sein Vorbild — neun in jedem Buch (= Kapitel), also insgesamt 81. Auf die meist praktisch ausgerichtete Fragestellung folgt die Antwort, dann die Erläuterung in allgemeiner Form, schließlich die numerische Lösung.

Unter den Vorschriften zur Berechnung der elementaren ebenen Figuren ragt diejenige heraus, die der Heronschen Formel zur Flächenberechnung eines Dreiecks aus den drei Seiten entspricht (s. Aufgabe 3.1.4). Sie tritt auch bei Brahmagupta (um 625) und bei al-Karagi (um 1015) auf. Bei Qin Jiushao erscheint sie in der Form

$$F = \sqrt{\frac{1}{4} \left[c^2 a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]}. \quad (3.1.5)$$

Auch in anderen Fällen sind die angegebenen Lösungswege nicht immer die einfachsten. Es ist nicht auszuschließen, daß bei der Überlieferung an einigen Stellen Mißverständnisse auftraten, oder aber, daß ein Autor auch einmal eine Aufgabe aus einer Quelle übernahm, die er selbst nicht ganz richtig interpretierte. Hier ein Beispiel für eine ‘praktische’ Aufgabe [Libbrecht 1973, 107]:

„Man bestimme die Seite eines quadratischen Feldlagers, in dem 99 Kompanien untergebracht werden sollen. Jeder Kompanie wird ein quadratisches Feld von 90 Fuß Länge zugewiesen; zwischen je zwei Kompaniefeldern muß ebenfalls ein Abstand von 90 Fuß bestehen. Wir nehmen die Fläche für jede Kompanie als das Vierfache der von ihr belegten Fläche. Wir legen das Rechteck $BGFE$ unter das Rechteck $DHJI$. Die Breite des Rechtecks $ABKE'$ ist x und die Länge $x+2$, was die Fläche $x(x+2)$ ergibt. Also ist die Fläche gleich $4 \cdot 99 + 3$. Dies ergibt die Gleichung $x(x+2) = 4 \cdot 99 + 3$ oder $x^2 + 2x - 399 = 0$ mit der positiven Lösung $x = 19$.“

Siehe hierzu Aufg. 3.1.5!

Unter den Volumenberechnungen befinden sich Pyramiden- und Kegelstumpf: hier findet man wieder die schon aus dem Moskauer Papyrus bekannte (richtige) Regel

$$V = (a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{h}{3}, \quad (3.1.6)$$

(V = Volumen, a = Länge der Grundkante, b = Länge der Oberkante, h = Höhe) sowie Betrachtungen über zusammengesetzte Figuren.

Die Höhenmessung eines entfernten Berges wird vorgenommen, indem von zwei Stellen in der Ebene aus die Spitze angepeilt wird. In die Berechnung gehen dann der Abstand der beiden Beobachtungspunkte und die Steigung der beiden Sehstrahlen sowie Sätze über ähnliche Dreiecke ein. Dieses bekannte Verfahren ist in China erstmals im Jahr 263 belegt (s. Abb. 3.1.3); seine Anwendung wird von Qin Jiushao bei anderen praktischen Aufgaben variiert. Noch ein letztes Textbeispiel für eine solche ‘praktische Aufgabe’: Die zahlenmäßige Stärke des Feindes in der Ferne zu ermitteln [Libbrecht 1973, 147–149]:

„Der Feind legt ein kreisförmiges Lager auf einer sandigen Ebene nördlich eines Flusses an. Wir kennen die Zahl der Soldaten nicht. Spione berichten, daß der Platz, den jeder Soldat im Lager einnimmt, ein Quadrat der Seitenlänge von 8 Fuß sei. Unsere Armee hält sich südlich des Flusses am Fuß eines Berges auf. Am Fuß des Berges errichten wir einen Gnomon (eine senkrechte Stange) von 80 Fuß Höhe, sodaß sich die Spitze in Höhe einer Einbuchtung (eines Absatzes) am Bergrand befindet. Von der Spitze des Gnomons spannen wir eine Schnur zum Bergrand. Diese horizontale Schnur zum Standpunkt des Beobachters habe die Länge von 30 Schritt. Der Beobachter an diesem Punkt sieht die nördliche Lagergrenze in einer Linie mit der Gnomonspitze. Danach visiert er die südliche Lagergrenze an in einer Sichtlinie, die die Stange acht Fuß unterhalb der Spitze streift. Das Auge des Beobachters befindet sich 4,8 Fuß über dem Boden. Wir benutzen den exakten Wert von π ($= \frac{22}{7}$) und verwenden die ch’ung-ch’a-Methode [Methode der doppelten Messung]. Man finde die zahlenmäßige Stärke des Feindes.“

U. Libbrecht, der den Text 1973 analysierte, bemerkte zum Lösungsrezept lakonisch: „This is entirely incorrect“ [Libbrecht 1973, 147–149]. Vielleicht hätten die Spione doch besser die Soldaten zählen sollen, anstatt den von ihnen eingenommenen Platz auszumessen!

Li Ye (Li Zhi)

Im Jahr 1248 legte Li Ye (Li Yeh, ursprünglich Li Zhi), der zeitweise hohe Verwaltungsämter innehatte, sein Buch „Ceyuan haijing“ (Tshê Yuan Hai Ching, Der Seespiegel der Kreismessung) vor. Es hat nichts mit der Berechnung von π zu tun, sondern handelt zum Teil von Eigenschaften eines Kreises, der in

ein Dreieck einbeschrieben ist. Vor allem aber beschäftigte sich der Verfasser mit der Lösung von Gleichungen auf algebraischem Weg, wobei er negative Koeffizienten durch einen darübergelegten Querstrich kennzeichnet (vgl. Bd.1, Abschnitt 2.1.2). Li Ye kannte offensichtlich Qin Jiushaos ein Jahr zuvor fertiggestelltes, aber erst viel später gedrucktes Werk nicht; lebte doch Li Ye im Norden, Qin Jiushao im Süden des riesigen Landes.

Yang Hui

Dreizehn Jahre später erschien der Kommentar Yang Huis zu den „Neun Büchern arithmetischer Technik (Kunst)“. Yang Hui vermied bewußt gewöhnliche Brüche, indem er sie durch Dezimalbrüche ausdrückte — auf diese Weise konnte er sie auf dem Rechenbrett in Analogie zu den ganzen Zahlen darstellen und genauso mit ihnen rechnen. (In Europa wurde das Rechnen mit Dezimalbrüchen erst gegen Ende des 16. Jhs. durch Stevin bekanntgemacht.) Bei Yang Hui findet sich auch ein Ansatz in Richtung auf eine theoretische, beweisende Geometrie: An der der Aufgabe 3.1.1 zugrundeliegenden Figur (es handelt sich um die in Euklids Elementen I, 43 und II, Def. 2 behandelte Gnomonfigur) wies er die Flächengleichheit der beiden durch die Diagonale bestimmten, in einem Parallelogramm gelegenen Teilparallelogramme nach.

Als wandernder Gelehrter verdiente sich Zhu Shijie (Chu Shih-Chieh) seinen Lebensunterhalt. Er gab 1299 eine Einführung in die mathematischen Studien heraus, dem er vier Jahre später das berühmt gewordene Werk „Siyuan yujian“ (Ssu Yuan Yü Chien, Kostbarer Spiegel der vier Elemente) folgen ließ.

Guo Shojing (Kuo Shou-Shing)

Unter der Yuan-Dynastie, der Mongolenherrschaft, tat sich als Mathematiker, Astronom und Ingenieur auch Guo Shojing (Kuo Shou-Shing) hervor. Er entwickelte die Sphärik, die Lehre von sphärischen Dreiecken, doch ist nicht gesichert, ob er sich dabei schon der Winkelfunktionen bediente. Da alle seine Schriften verloren gingen, weiß man nur indirekt etwas über ihren Inhalt. Von ‘Trigonometrie’ bei ihm zu sprechen, mag daher nicht gerechtfertigt sein. Offenbar waren es Probleme der Bewegung der Himmelskörper, die er vor allem studierte. Zur Bestimmung der Länge eines Kreisbogens gab er ein Verfahren an, das auf eine komplizierte quadratische Gleichung zwischen Durchmesser d , Pfeil p und Bogen b hinausläuft:

$$d^2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 - d^3 \cdot p - (d^2 - bd) \cdot p^2 + p^4 = 0. \quad (3.1.7)$$

Seine (verlorene) Methode wurde bezeichnet als ‘das Studium von rechtwinkligen Dreiecken, Sehnen und Pfeilen, Quadraten und Rechtecken, die alle, geneigt oder senkrecht, in Kreisen enthalten sind’. Zur genauen Beschreibung der veränderlichen Winkelgeschwindigkeit der Sonne wandte er Differenzen zweiter Ordnung an.

Da Guo am Hof des Mongolenherrschers Kublai Khan tätig war, in dessen Dienst auch muslimische Spezialisten standen, liegt die Vermutung nahe, er könne mit von diesen mitgebrachten mathematischen Kenntnissen in Berührung gekommen sein. Auch Perser, Syrer und Gelehrte aus anderen Ländern wirkten damals am Mongolenhof, der somit viele Gelegenheiten zum Austausch wissenschaftlicher Kenntnisse bot. Im Jahr 1368, beim Übergang von der Yuan- zur Ming-Dynastie, wurde sogar neben der bestehenden einheimischen Sternwarte ein eigenes muslimisches astronomisches Büro eingerichtet. Als Ende des 16. Jhs. die Jesuiten nach Peking kamen, arbeiteten dort noch immer Nachkommen dieser ‘arabischen’ Astronomen im ihrem Observatorium. Einflüsse der berühmten Sternwarten in Samarkand und Maragha auf die chinesische Astronomie und Mathematik können also nicht ausgeschlossen werden. Es gibt sogar Vermutungen, schon zu einem früheren Zeitpunkt seien arabische Übersetzungen der „Elemente“ Euklids und des „Almagest“ von Ptolemaios nach China gelangt, doch fehlen der historischen Forschung bisher eindeutige Belege dafür.

Zwischen 1400 und 1500 verlor die chinesische Mathematik ihre zuvor erreichte Kraft, erholte sich aber im 16. Jh. wieder. So gab z.B. 1552 Gu Yingxian (Ku Ying-Hsiang), Gouverneur von Yünnan, ein Buch heraus, worin er die bis dahin gefundenen Vorschriften für die Berechnung von Kreisbögen und Kreissegmenten systematisch zusammenstellte ([Needham 1959, 51]). Dort findet man z.B. die den folgenden Formeln entsprechenden Anweisungen (d = Durchmesser, s = Sehne, p = Pfeil, b = Bogen, F = Fläche eines Kreissegmentes):

$$p = \frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}, \quad b = \frac{2p^2}{d} + s, \quad (3.1.8)$$

$$d = p + \frac{(s/2)^2}{p}, \quad F = \frac{1}{2}(p + s)p. \quad (3.1.9)$$

Auf dem von den Chinesen besonders gepflegten Gebiet der Auflösung von Gleichungen und Gleichungssystemen (unter Einsatz des Pascalschen Dreiecks und eines dem Horner Schema nahestehenden Verfahrens) gerieten sogar einmal erworbene Kenntnisse wieder in Vergessenheit. Erst lange, nachdem die Jesuiten die europäische Algebra eingeführt hatten, besann man sich wieder

auf die mittelalterliche chinesische Algebra und machte sich im 18. Jh. erneut die ehemals gebräuchlichen einheimischen Verfahren zu eigen.

Kreis- und Kugelpackungen

Anders als die griechischen haben sich die chinesischen Mathematiker nicht weiter für die Kegelschnitte interessiert. Hingegen verfolgten sie eine in Europa kaum untersuchte Problemstellung: das Einpassen von sich berührenden Kreisen in vorgegebene Figuren wie Halbkreise, Ellipsen und andere Formen, sogenannte Kreispackungen (Abb. 3.1.5). (Diese Fragestellung wurde von japanischen Mathematikern aufgenommen; sie wird im Abschnitt über die japanische Mathematik erörtert.) Auch das griechische Interesse an den regulären und halbbregulären Körpern und an den sog. klassischen Problemen hat kein Pendant in der chinesischen Mathematik — mit Ausnahme der Kreisquadratur.

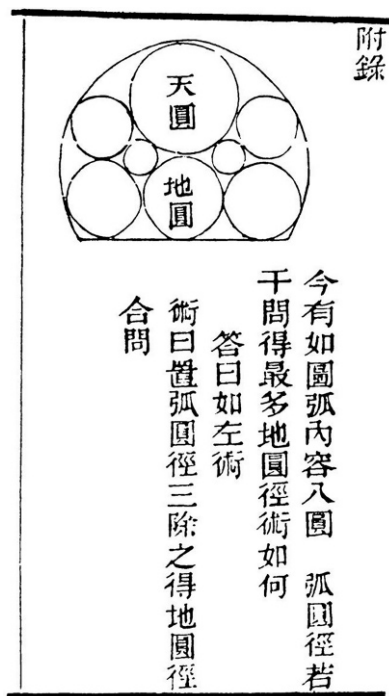


Abb. 3.1.5 Kreispackung in einem Kreissegment

[Joseph Needham, Science and Civilization in China, vol. 3, Cambridge University Press 1959]

Zur Abrundung des Bildes der chinesischen Mathematik bleibt festzuhalten, daß ein wichtiges Kennzeichen die Bevorzugung von Rechenalgorithmen war, deren einzelne Schritte mit Bambusstäbchen auf dem Rechenbrett ausgeführt wurden. Die dabei eingesetzten Algorithmen waren hoch entwickelt, legten auch früh die Verwendung negativer Zahlen nahe, wurden jedoch (in den Texten) nicht durch theoretische Überlegungen begründet, sondern anhand von Beispielen vorgeführt.

Gleiches gilt für die zumeist auf Anwendungen ausgerichteten geometrischen Sätze. Mittels konkreter Beispiele wurden heuristische Verfahren eingeübt, deren induktive Verwendung lieferte den chinesischen Mathematikern eine Fülle weiterer Ergebnisse. Die griechische Denkweise dagegen, Geometrie als deduktives System zu verstehen und entsprechend aufzubauen, fand erst mit dem Eintreffen der Jesuiten Eingang in China. Zwar hatte die erste, von Matteo Ricci veranlaßte und in Zusammenarbeit mit Xu Guangqi (Hsü Kuang-Chhi) 1607 vollendete Übersetzung der ersten sechs Bücher der „Elemente“ Euklids (aufgrund der lateinischen Euklid-Ausgabe (1574 u.ö.) des Jesuiten Christoph Clavius [Knobloch 1990a]) infolge ihres religiösen Einschlags einen stark missionarischen Charakter und stieß daher auf Vorbehalte. (Erst 1857 lagen alle Bücher der Elemente in chinesischer Übersetzung vor!) Doch dann setzte sich die deduktive Betrachtungsweise durch. Die Chinesen gaben die Prüfungen der angehenden Beamten in der traditionellen Mathematik zugunsten von Examina in europäischen Verfahren auf [Martzloff 1997, 273ff.], [Li/Dù 1987, 190ff.] Auch die Trigonometrie brachten die Jesuiten mit. In Zusammenarbeit mit Xu Guangqi veröffentlichte Matteo Ricci 1607 das erste moderne Trigonometriebuch in chinesischer Sprache. Benötigte man die Geometrie vor allem für astronomische und Kalenderberechnungen, so die Trigonometrie für die Praxis der Landvermessung. Die 15 in diesem Buch behandelten Vermessungsprobleme beschränkten sich auf relativ einfache Aufgaben und konnten sich an Scharfsinn nicht mit der oben besprochenen „Mathematischen Inselsammlung“ des Liu Hui messen. — Ergänzend zu solchen Feststellungen über den Umfang mathematischer Kenntnisse oder den geometrischen Inhalt einzelner Bücher muß nochmals betont werden, daß Geometrie wie Arithmetik damals nicht als autonome Disziplinen verstanden, sondern als integrale Bestandteile einer umfassenderen Wissenschaft angesehen wurden, wie es im Zitat A.4 anklingt.

Spiele

Zum Abschluß dieses Abschnittes noch eine Bemerkung zu mathematischen Spielen, die als ‘chinesisch’ bezeichnet werden. Das bekannteste unter ihnen ist wohl das in Europa unter dem Namen ‘Tangram’ verbreitete: eine quadrati-

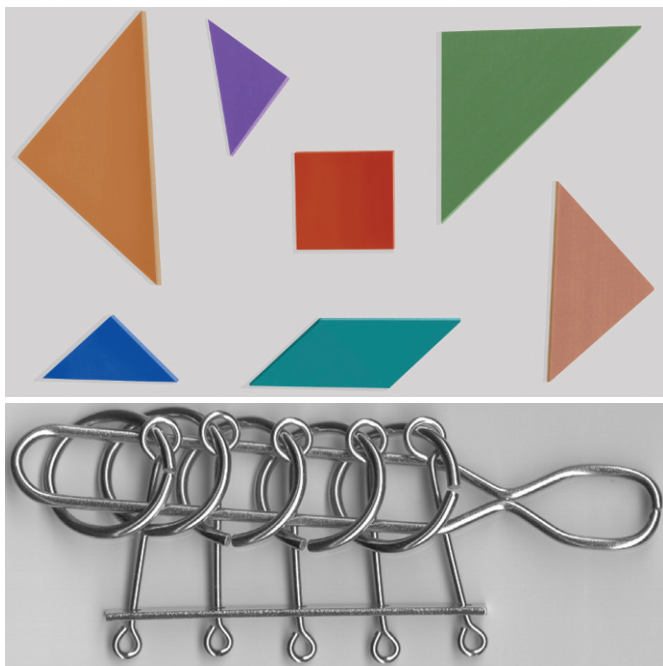


Abb. 3.1.6 Tangram und chinesische Ringe

sche Holzplatte ist in ein (kleineres) Quadrat, ein schiefwinkliges Viereck und fünf Dreiecke verschiedener Größe zerlegt. Aus diesen Teilen soll eine Vielzahl von Figuren zusammengesetzt werden. Über seine Herkunft weiß man nichts Sicheres. Der älteste bisher bekannte gedruckte Hinweis stammt aus dem Anfang des 19. Jhs. Doch 1989/90 fanden zwei chinesische Mathematikhistoriker, Liu Dun und Guo Zhengyi, in einer chinesischen Quelle aus dem Jahr 1617 eine kurze Beschreibung eines ähnlichen Zerlegungsspieles. Eine Variante, Yizhitu (die Formen wachsender Weisheit) genannt, besteht aus einem in 15 Teilstücke zerlegten Quadrat, worunter sich auch zwei Halbkreise befinden [Martzloff 1997, 367–369].

Die Kunst des Papierfaltens (die es u.a. auch erlaubt, den Satz des Pythagoras zu veranschaulichen), wird in einem bekannten Gedicht von Du Fu (Tu Fu) erwähnt [Needham 1959, 112]. Die Herkunft der ‘Chinesischen Ringe’ ist bis heute ungeklärt. In Europa erwähnte G. Cardano 1550 dieses auf topologischen Verkettungen beruhende Geduldspiel in seinem Werk „De subtilitate libri XXI“, und 1693 veröffentlichte J. Wallis in seinen „Opera“ (Bd. 2, S. 472)

eine mathematische Analyse. In dem in China verbreiteten Roman „Hongloumeng“ (Der Traum vom roten Zimmer), der 1791 in 120 Kapiteln veröffentlicht wurde, wird das Spiel im 7. Kapitel streifend erwähnt — das schließt freilich einen möglichen europäischen Ursprung nicht aus [Martzloff 1997, 366–370]. Die Bezeichnung ‘chinesisch’ sagt nichts über die Herkunft aus, war es doch in Europa nicht unüblich, durch eine exotisch klingende Angabe das Interesse an solchen Puzzles zu erhöhen.

Wesentliche Inhalte der chinesischen Geometrie

6. – 4. Jh.	<i>Chou Pei Suan Chin</i> (Klass. Arithmetik des Gnomon und der Kreisbahnen): Dreiecks- und Kreislehre, Satz des Pythagoras, Höhen- und Entfernungsmessungen, einfache astronomische Anwendungen; keine Beweise
Frühe Han-Zeit	<i>Chiu Chang Suan Shu</i>
202 v. Chr.	(Neun Bücher arithmetischer Technik):
– 9 n. Chr.	240 Aufgaben; Berechnung einfacher ebener Figuren, Näherungen für Kreisfläche und -segment, Inhaltsberechnungen einschließlich Pyramide, Kreiskegel und Kegelstumpf (ohne Beweise). Angewandte Aufgaben (u.a. Anwendung des Satzes von Pythagoras)
263	LIU HUI: <i>Hai Tao Suan Ching</i> (Mathematische Inselsammlung): Höhepunkt der frühen chinesischen Vermessungslehre; Berechnung des Kreisumfangs aus dem regelmäßigen 92-Eck
Ende 5. Jh.	Erste Kontakte mit indischen Gelehrten: Frühform der Trigonometrie, Kalenderberechnungen
656	<i>Suan Chung Shih Shu</i> (Zehn mathematische Klassiker): Standardisierung der mathematischen Probleme
1261	YANG HUI Kommentar zu den <i>Neun Büchern</i> ; Ansätze zu beweisender Mathematik
13. Jh.	Neue Blüte der chinesischen Mathematik: Weiterentwicklung der Probleme aus den <i>Neun Büchern</i> : Heronsche Formel zur Flächenberechnung eines Dreiecks, Lehre von den sphärischen Dreiecken; Interesse an Kreispackungen
1601	Der Jesuit MATTEO RICCI bringt westliche Astronomie und Mathematik nach China

3.2 Japan

- | | |
|------------------|---|
| 11.2.660 v. Chr. | Der Mikado (Kaiser) Jimmu Tenno gründet das Reich |
| 400 n. Chr. | Japan übernimmt die chinesische Schrift |
| ab 7. Jh. | Aufstieg des Hofadels, absoluter Beamtenstaat |
| ab 13. Jh. | Aufstieg der Schogun (Reichsfeldherren) zu den eigentlichen Machthabern, Militäradel, Lehnslleute (Samurai) |
| 1637 | Abschließung von der Außenwelt, Blüte von Kunst und Wissenschaft, Wasan-Mathematik |
| 1867 | Ablösung der Schogun-Herrschaft durch absolute Monarchie |
| 1868 | Öffnung Japans für Handel mit anderen Staaten |
| 1894 | Chinesisch-Japanischer Krieg |
| 1904 | Russisch-Japanischer Krieg |
| 1910 | Korea von Japan einverleibt |
| 27.9.1940 | Beitritt zum Dreimächtepakt |
| 7.12.1941 | Angriff auf die USA in Pearl Harbour |
| 1945 | Atombomben auf Hiroshima und Nagasaki |
| ab 1950 | Aufstieg zur größten Wirtschaftsmacht Asiens |
- *Japanische Kunst und Kultur:* Geprägt durch Buddhismus und chinesische Einflüsse, Tempelanlagen nach chin. Vorbild, Malerei auf Seide, Pinselzeichnungen, Kalligraphie; Buddha- und Götterplastiken nach chin. Vorbildern; Lackkunst, Töpferei (Teegeräte), Porzellan
 - *Literatur:* 750 – 800 Zehntausend-Blätter-Sammlung von 4500 Gedichten
 - um 1010 Monogatari (Sagen, Märchen, Geschichte), Nikki (Tagebuch)
 - um 1000 Zuihitsu (Essay), No (klass. Drama mit Musik und Tanz), Kabuki (Volks-theater und Puppenspiel)
 - seit 1868 Einflüsse europäischer Literatur
 - *Philosophie:* Konfuzianische Ethik in 3 Wellen als Grundlage des Feudalismus; buddhistische Philosophie von der oberen Priesterschaft gepflegt (Zen-Sekte); abendl. Philosophie zuerst von Niederländern vermittelt

3.2.0 Historische Einführung

Da eine ausführlichere Geschichte der japanischen Mathematik in einer westlichen Sprache aus neuerer Zeit nicht existiert, muß man sich weithin noch an der 1913 erschienenen Darstellung von Mikami und an derjenigen von Smith und Mikami aus dem folgenden Jahr orientieren. In letzterer wird die Entwicklung chronologisch in 14 Kapiteln beschrieben, wobei die Autoren gleich zu Beginn eine Einteilung in sechs Epochen vornehmen:

Bis 552	Die nur wenig und indirekt durch die chinesische Mathematik beeinflusste Zeit
552 bis 1603	Das Eindringen der chinesischen Wissenschaft, zuerst über Korea, dann direkt: das japanische Mittelalter
1603 bis 1675	die Renaissance der japanischen Mathematik: erneutes Einströmen chinesischer Wissenschaft, erste Begegnung mit europäischer Wissenschaft
1675 bis 1775	die Lehrtätigkeit Seki Kowas und seines Schülers Takebe bereiteten den Boden für die einheimische Wasan-Mathematik vor
1775 bis 1868	Höhepunkt der eigenständigen japanischen Mathematik, die in geringem Maß schon durch die europäische beeinflusst wird
Seit 1868	Öffnung Japans, Anschluß an die westliche Mathematik

Im breiter angelegten Buch von M. Sugimoto und D. L. Swain, „Science and Culture in Traditional Japan“ (1978), das auch eine aufschlußreiche Beschreibung des kulturellen und sozialen Hintergrundes der japanischen Wasan-Mathematik enthält, charakterisieren die Verfasser die historische Entwicklung ab 552 durch die Beschreibung kulturell-wissenschaftlicher ‘Wellen’. Sie betten diese ein in Zeiten der Isolation des Landes bzw. solche der (relativen) Aufgeschlossenheit. Das ergibt etwa folgendes Bild:

Ca. 600 bis 894	1. chinesische Welle,
894 bis 1401	halb-abgeschlossene Periode.
1401 bis 1854	2. chinesische Welle; diese wird überdeckt
von 1639 bis 1854	durch eine Zeit der Isolation und überlagert
von 1543 bis 1639	von einer ersten westlichen Welle und
von 1720 bis 1854	von einer zweiten westlichen Welle.

3.2.1 Frühzeit und Mittelalter

Über die älteste Zeit der mathematischen Entwicklung in Japan ist nichts mit Sicherheit überliefert. Gewiß ist lediglich, daß wie in China so auch in Japan das Dezimalsystem bekannt war. Deshalb kommen wir gleich zum ‘japanischen Mittelalter’. Es begann mit der Einführung des Buddhismus, der von China und Korea her nach Japan gelangte und über den chinesische Rechenbücher, der chinesische Kalender und das chinesische Maßsystem in Japan heimisch wurden. Mindestens seit 600 ist das Rechnen mit Bambusstäbchen belegt, vielleicht schon vom 7. Jh. an auch das Rechnen mit beweglichen Kugeln auf dem Abakus (japanisch: Soroban).

Das schon im frühen Mittelalter in Japan äußerst reiche, vielfältige und verfeinerte Kulturleben umfaßte Malerei, Literatur, Musik, Architektur und Gartenbaukunst, vernachlässigte jedoch Medizin, Naturwissenschaften und Mathematik. Ende des 7. Jhs. wurde in Kyoto eine Universität gegründet, ein Institut für Weissagung und ein medizinisches Institut. Die Universität diente der Ausbildung von Staatsdienern, anfangs wurden nur konfuzianische Philosophie und Mathematik im Umfang der für die Verwaltung erforderlichen Kenntnisse gelehrt. Zu den Kompetenzen des Wahrsagungsinstituts gehörten Astronomie, Astrologie und das Kalenderwesen. Erst aus dem 12. und 13. Jh. sind einige Namen japanischer Mathematiker bekannt, doch sind ihre Schriften nicht erhalten.

3.2.2 Die Renaissance der japanischen Mathematik

Daher kann man Genaueres erst über die Zeit seit dem 17. Jh. berichten. Im Jahre 1603 wurde die feudale Periode abgelöst durch den zentral verwalteten Staat unter Tokugawa. Bereits ab 1543 bestanden Handelsbeziehungen zu den Portugiesen, ab 1609 kamen Handelsbeziehungen zu den Niederländern hinzu. Die Missionierung durch die Jesuiten hatte 1549 eingesetzt. Dies macht deutlich, daß das oben ‘Renaissance der japanischen Mathematik’ genannte Phänomen sich ereignete, als es engere Kontakte zu den Europäern gab. Die in dieser Zeit betriebenen oder entwickelten Wissenschaften waren folglich nicht völlig frei von europäischem Einfluß.

Doch bald setzte eine Gegenbewegung ein: schon 1587 wurden die Jesuiten des Landes verwiesen, und im ersten Drittel des 17. Jhs. begann eine massive Unterdrückung des Christentums. Das Land schloß sich nach außen völlig ab (erst 1868 öffnete sich Japan wieder!). Diese, durch die Insellage begünstigte Isolation Japans hatte eine einmalige Entwicklung auch der Mathematik zur Folge: es bildete sich eine eigene Mathematikkultur, Wasan genannt, her-

aus. Der Name bedeutet ‘Japanische Mathematik’. Betrieben wurde sie von den intellektuellen Samurais aus Zeitvertreib; ihr Praxisbezug war gering. Sie ging nicht im Sinne der griechischen Mathematik axiomatisch-deduktiv vor und sie war nicht, wie die europäische Mathematik seit dem 17. Jh., mit einer naturwissenschaftlichen Begriffsbildung oder mit philosophischen Reflexionen verbunden. Andererseits entwickelte sie sich aufgrund der früheren Begegnung mit dem Westen auch nicht gänzlich unbeeinflusst von europäischen Erkenntnissen (bis hin zu solchen aus der frühen Neuzeit). Für die chinesische Mathematik, ihre ursprüngliche Quelle, zeigte sie bald nur noch vereinzelt Interesse. So nahm sie, fast völlig abgeschlossen wie in einem Treibhaus, einen eigenen Charakter an. Dieser Epoche soll unsere besondere Aufmerksamkeit gelten.

Die Renaissance der Mathematik in Japan im 17. Jh. begann unter chinesischem Einfluß. Im Zentrum der Publikationen, deren Anzahl merklich zunahm und die nun auch im Druck erschienen (freilich oft in geringer Zahl), stand das elementare Rechnen auf dem Rechenbrett. Doch auch schwierigere Operationen wie das Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln mit Hilfe der Rechenstäbchen wurden gelehrt. Das Interesse am Vermessungswesen wuchs, womit Berechnungen von Flächen- und Rauminhalten einhergingen, wie sie bereits im Abschnitt über die Geometrie bei den Chinesen erörtert wurden. So finden sich auch hier für π die Werte 3,16 oder $\sqrt{10}$. Diese praktische Rechenkunst umfaßte, was Handwerker, Baumeister, Kaufleute und Verwaltungsbeamte an Kenntnissen benötigten.

Die Geometrie in der Wasan-Mathematik

Im Gegensatz zu diesen Praktikern entstammte Yoshida Shichibei Kōyū, auch Mitsuyoshi genannt, einer angesehenen und sehr wohlhabenden Familie. Er reiste eigens nach China und erlernte gründlich die chinesische Sprache, um die dortigen anspruchsvolleren mathematischen Schriften studieren zu können, bevor er seine eigenen Werke schrieb. Das erste verfaßte er 1627 unter dem Titel ‘Jinko-ki’. Es gilt als das bedeutendste Lehrbuch aus der Zeit der Ming-Dynastie. Den Titel übernahmen nach Yoshidas Tod auch andere Autoren (sinngemäß bedeutet er: Abhandlung über Zahlen von der größten bis zur kleinsten). In die Erstauflage hatte Yoshido noch viele angewandte Aufgaben aufgenommen, in der zweiten, fünfbändigen, reich illustrierten behandelte er auch viele Probleme aus dem Bereich der Unterhaltungsmathematik. Spätere Autoren nahmen sich Yoshidas Aufgabensammlung gern zum Vorbild, so daß sie als Grundlage für die entstehende Wasan-Mathematik große Bedeutung erlangte. Dabei bildete sich die Sitte heraus, ungelöste Aufgaben als Herausforderung in die eigenen Werke aufzunehmen. Die Nachfolger lösten sie nach

Möglichkeit und legten ihren Kollegen gleichzeitig neue bzw. abgewandelte Probleme von größerem Schwierigkeitsgrad vor.

Ein 1639 publiziertes Werk von Imamura Chishō machte den Verfasser unter seinen Nachfolgern bekannt, weil es sich systematisch mit der Berechnung der regelmäßigen Vielecke (vom Dreieck bis zum Zehneck) beschäftigte — ein Thema, das recht beliebt wurde. Wie raffiniert es aufgezogen werden konnte, zeigt eine Aufgabe aus einer Sammlung des Isomura Kittoku, die 1660 in fünf Büchern erschien; sie lehnte sich an die Sammlung des Yoshida an und wurde vom Verfasser 1684 erneut, um Anmerkungen ergänzt, publiziert. In dieser Aufgabe wird gefordert, in einen Kreis vom Durchmesser 3 Fuß neun andere Kreise so zu plazieren, daß jeder von dem in das Zentrum gesetzten Kreis, von seinen beiden Nachbarn und vom vorgegebenen äußeren Kreis 0,2 Fuß entfernt ist. Gefragt wird nach dem Durchmesser des ins Innere gesetzten zentralen Kreises und dem Durchmesser der übrigen acht ringförmig angeordneten Kreise. (Deren Zentren bilden dann ein regelmäßiges Achteck; vgl. Abb. 3.2.1.)



Abb. 3.2.1 Eine Variante der neun 'schwebenden Kreise' bei Seki: die ringförmig angeordneten Kreise berühren einander, aber weder den inneren noch den äußeren Kreis. [Takakazu Seki: Collected Works. Edited with Explanations. Osaka Kyoiku Tosho 1974]

Verwandt ist die Aufgabe, in einen gegebenen Kreis 19 kleinere ringförmig so einzupassen, daß diese je ihre beiden Nachbarn und den gegebenen Kreis berühren, und unter gleichen Bedingungen 19 Kreise außen tangential als Ring anzulegen. Gefragt wird nach den Radien der beiden Kreissorten. (Jetzt geht es also implizit um ein regelmäßiges Neunzehneck.) — Im Unterschied dazu begnügten sich andere Mathematiker damit, die Seitenlängen einer großen Zahl regelmäßiger Vielecke, die einem gegebenen Kreis einbeschrieben sind, möglichst genau zu berechnen [Smith/Mikami 1914, 77/78].

Verbreitet war das Stellen von Aufgaben in eingekleideter Form, die sich den Anschein gaben, Relevanz für die Praxis zu haben. Bei Yoshidas Nachfolgern finden sich z.B. die beiden folgenden Aufgaben [Smith/Mikami 1914, 66/67]:

- a) Ein Erdhaufen hat die Form eines kreisförmigen Kegelstumpfes. Der Umfang oben hat die Länge 40, derjenige unten die Länge 120, die Höhe beträgt 6. Wie hoch ist der Haufen, wenn 1200 Maß Erde gleichmäßig von oben abgetragen werden?
- b) Ein kreisförmiges Stück Land vom Durchmesser 100 soll durch zwei parallele Sehnen unter drei Personen so aufgeteilt werden, daß sie 2900, 2500 und (nochmals) 2500 Maß erhalten. Gesucht werden die Länge der Sehnen und die Höhen der Segmente (s. Aufgabe 3.2.1).

Einer der berühmtesten japanischen Mathematiker ist der wahrscheinlich im gleichen Jahr wie Newton geborene Seki Kōwa. Er antizipierte in gewisser Weise die Entwicklung einer Determinantenrechnung (nahezu gleichzeitig mit den Ansätzen von Leibniz) und verbesserte die Behandlung algebraischer Gleichungen und Gleichungssysteme. Letztere leitete er u.a. aus ähnlichen geometrischen Aufgaben ab wie die erwähnten Kreisanlagerungen, deren Bedingungen er Schritt für Schritt analysierte. Sein bedeutender Schüler Takebe Hikojiro Kenkō hob in einer Beschreibung seines Lehrers vor allem dieses systematische, mit einer speziellen Notation verbundene Vorgehen hervor.

Das Kreisprinzip

Eine besondere Erwähnung verdient das Yenri- (auch Enri-) oder Kreisprinzip der japanischen Mathematik. Es handelt sich um ein eigenartiges Verfahren zur Bestimmung der Länge eines Kreisbogens bzw. des Umfanges eines Kreises und damit um eine Möglichkeit, die Kreiszahl π mit hoher Genauigkeit zu berechnen. Historisch umstritten ist die Urhebererschaft des Verfahrens: ältere Zuweisungen an Seki Kōwa lassen sich nicht belegen. Wahrscheinlich geht zumindest die Ausarbeitung der Methode auf seinen Schüler Takebe zurück, der sich mit fanatischer Beharrlichkeit dem Problem der Kreisquadratur widmete. Spätere japanische Mathematiker priesen Takebe in den höchsten Tönen; er sei der eine Mensch in tausend Jahren, das Licht des Landes der aufgehenden Sonne. Eine Ausnahme scheint er auch darin gewesen zu sein, daß er sich philosophische Gedanken über die mathematischen Objekte machte. Des weiteren unterschied er zwischen dem Typus des analytischen Mathematikers (dem er sich selbst zurechnete) und jenem des intuitiven und vertrat die Ansicht, manche Probleme könnten eher vom ersten, andere eher vom zweiten Typus bewältigt werden.

Nach heutiger Einteilung kommt das Yenri-Prinzip der Infinitesimalrechnung nahe, doch der interessante geometrische Ansatzpunkt rechtfertigt es, hier auf diese eigenartige, von Takebe um 1720 herum entwickelte Methode einzugehen. Ziel des Verfahrens ist die genaue Berechnung der Länge eines Bogens b eines Kreises mit gegebenem Durchmesser d . Die zugehörige Sehne sei s , der Pfeil (Abstand zwischen Bogenmitte und Sehnenmitte) p . Takebe wählte $d = 10$, $p = 0,000001$, so daß er den winzigen Bogen als geradlinig annehmen durfte; dann berechnete er dessen Quadrat mittels des Satzes von Pythagoras auf 53 Dezimalstellen genau zu $0,00000\,00000\,33333\,35111\,11225\,\dots$. Berechnet man in gleicher Weise das Quadrat der halben Bögen zu den Pfeilen $p = 1$, $p = 0,1$ und $p = 0,00001$, so findet man 10 , 1 und $0,0001$ oder, anders ausgedrückt, das Produkt des Durchmessers mit dem jeweiligen Pfeil: $d \cdot p$. Daher wählte Takebe $d \cdot p = 0,00001$ als erste Näherung für das Quadrat des sehr genau berechneten Bogens und als erste Differenz $d_1 = \frac{1}{3}p^2$. Wiederholung des Verfahrens führt auf die zweite Differenz $d_2 = \frac{8}{15}d_1$. Weiterführung und Einsetzen der jeweils vorausgehenden Differenz in die folgende lieferte ihm schließlich die unendliche Reihe

$$\frac{1}{4} \cdot b^2 = d \cdot p \left[1 + \sum_1^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} \cdot \left(\frac{p}{d}\right)^n \right]. \quad (3.2.1)$$

Da der Pfeil p nichts anderes ist als der Sinusversus ($= 1 - \cos$), wird hier das Quadrat des Arcussinus durch den Sinusversus ausgedrückt. Takebe leitete eine Anzahl weiterer Reihen durch ähnliche, dem Einzelfall angepaßte Überlegungen her. Daher handelt es sich beim Yenri- oder Kreisprinzip nicht um ein generelles Verfahren, wie es etwa die Taylorreihe der Infinitesimalrechnung darstellt, sondern um auf den Kreis angewandte, spezielle Schlußketten, deren Resultat mit unendlichen Reihen übereinstimmt, die in Europa im ausgehenden 17. Jh. bekannt waren.

Daran schließt sich ein historiographisch interessantes Problem an. Der Jesuit Pierre Jartoux kam im Jahr 1700 nach Peking und lebte dort bis zu seinem Tod im Jahr 1720. Auch als Astronom tätig, korrespondierte er mit Leibniz und war mit der von diesem entwickelten Differentialrechnung vertraut. Er soll einige Reihenentwicklungen hergeleitet haben, wovon drei damals nach Japan gelangten. Da die von Takebe überlieferten Erläuterungen nicht völlig verständlich sind, halten es Smith und Mikami (1914) für nicht ausgeschlossen, daß er eine oder mehrere der aus dem Westen importierten Reihen zu sehen bekam und sich dann bemühte, sie so gut wie möglich zu erklären. Jedenfalls regte er andere japanische Mathematiker an, in dieser Richtung zu forschen; sie leiteten mit scharfsinnigen Überlegungen im 18. Jh. noch eine ganze Anzahl weiterer Reihenentwicklungen ab.

Ebenfalls auf einer Idee beruhend, die der Infinitesimalmathematik nahekommt, ist ein von Isomura Kittoku und Takebe angewandtes Verfahren der Bestimmung der Kugeloberfläche. Traditionellerweise wurde in Japan für ihre Größe ein Viertel des Quadrats des Umfangs verwendet: $O = \frac{1}{4}(2\pi r)^2 = (\pi r)^2$. Isomura erkannte die Unzulänglichkeit der Regel und faßte den Gedanken, die Oberfläche aus der Differenz der Volumina zweier konzentrischer, nur leicht verschiedener Kugeln zu ermitteln. Er nahm eine Kugel vom Durchmesser 10 und eine zweite vom Durchmesser 10,0002, berechnete den Inhalt der durch beide begrenzten Kugelschale zu 0,03141 66283 241188 und dividierte durch ihre Dicke 0,0001. Dann wiederholte er die Rechnung für zwei Kugeln mit den Durchmessern 10 und 9,9998 und bildete aus beiden Endergebnissen den Mittelwert 314,16000 00418 88. (Wegen $r = 5$ ist dies aufgrund der den Japanern damals noch nicht bekannten Oberflächenformel $O = 4\pi r^2$ das Hundertfache von π !) Takebe verfeinerte das Verfahren 1722, erkannte dabei, daß er das Hundertfache von π erhalten hatte, und schloß aus dieser Zahlenrelation, die Beziehung zwischen d und O müsse $O = d^2\pi$ lauten (s. Aufgabe 3.2.2).

Was bei Isomura und Takebe aber noch auf einen konkreten numerischen Fall beschränkt war, wurde bald am Beispiel der Oberfläche eines Ellipsoids in allgemeiner Form ausgeführt.

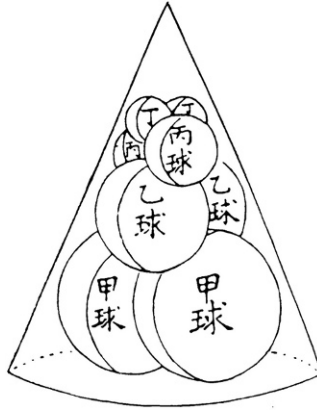


Abb. 3.2.2 Kugelpackung in einem Kegel aus Fujita Sadasuke: Seijō Sampō (1779)
[Smith/Mikami: A History of Japanese Mathematics. Chicago: Open Court Publ. Co. 1914, S.184]

Dem 18. Jh. gehört auch die Verallgemeinerung der Probleme über Kreispackungen in der Ebene auf Kugeln an, die (unter gewissen Nebenbedingungen) so in eine gegebene Kugel (oder einen Kegel) gepackt werden sollen, daß sie sowohl den einhüllenden Körper wie ihre Nachbarn berühren (Abb. 3.2.2).

Schon im letzten Drittel des 17. Jh. war die dann über zwei Jahrhunderte bestehende Sitte aufgekommen, mathematische Probleme mit ihrer Lösung, aber ohne jede Andeutung des Lösungswegs, auf Votivtafeln vor Tempeln auszuhängen (s. Abb. 3.2.3). Ursprünglich als Dank für eine Shinto-Gottheit oder für Buddha gedacht, stellten die Tafeln zugleich Herausforderungen der Kollegen dar — die Sitte erinnert an die Gewohnheit mancher europäischer Mathematiker jener Zeit, sich durch auf Flugblättern verbreitete Probleme mit anderen Mathematikern zu messen.

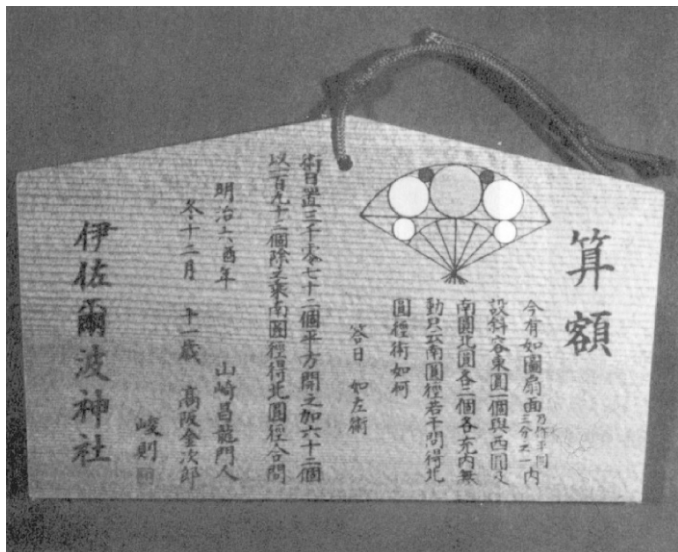


Abb. 3.2.3 Beispiel eines Tempelproblems,
zusammen mit seiner Behandlung in der Zeitschrift „SUT Bulletin“ 1987, Nr. 5.
[Science University of Tokyo, SUT Bulletin 1987, Nr. 5, S. 11]

Beispiele solcher Aufgaben mit geometrischem Hintergrund sind etwa:

- a) Man hat zwei Kreise, den umschriebenen und den eingeschriebenen eines Vierecks. Bekannt sind der Durchmesser des umschriebenen Kreises und das Produkt der Diagonalen des Vierecks, gesucht wird der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises. (Im Jahr 1795 gab ein Mathematiker die zur Lösung führende Beziehung $i\sqrt{u+e} = e$ an, in der e das Diagonalenprodukt, u und i die beiden Kreisdurchmesser sind.)

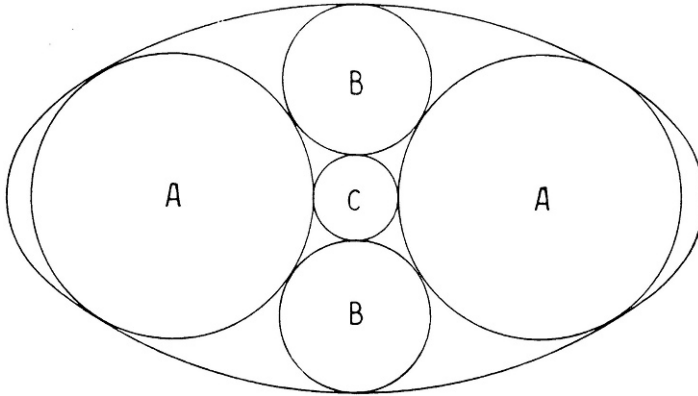


Abb. 3.2.4 Ein japanisches Tempel-Problem (um 1800):
Fünf in eine Ellipse eingeschriebene Kreise
[Smith/Mikami, a.a.O. S. 186]

- b) In eine Ellipse mit der großen Achse a und der kleinen Achse b sind fünf Kreise in symmetrischer Anordnung eingeschrieben (vgl. Abb. 3.2.4). Man berechne den Durchmesser des Kreises A .
- c) In eine Kugel sind zwei Kugeln der Größe A , zwei der Größe B und zwei der Größe C so eingepaßt, daß sie sich gegenseitig berühren. Gegeben sind die Durchmesser von A und C , gesucht wird derjenige von B .
- d) Ein Kreissegment wird durch den Pfeil halbiert. In die linke Hälfte ist das größtmögliche Quadrat eingeschrieben (eine Seite liegt auf der Sehne, die anschließende auf dem Pfeil), in die rechte Hälfte der größtmögliche Kreis. Gegeben ist die Summe von Sehne, Pfeil, Durchmesser des Kreises und Seite des Quadrats sowie die Summe der drei Quotienten Pfeil zu Sehne, Kreisdurchmesser zu Pfeil und Quadratseite zu Kreisdurchmesser. Gesucht werden die einzelnen Größen. (Ausgehängt am Gion Tempel in Kyōto, wurde es wegen seiner Schwierigkeit als das Gion-Tempel-Problem bekannt, führt es doch auf eine Gleichung für die Sehne vom Grad 1024. Vereinfachungen ergaben dann eine Gleichung vom Grad 46 und schließlich eine vom Grad 10.)

Zu Beginn des 19. Jhs. widmete Aida Ammei der Ellipse und mit ihr verbundenen Problemen ein umfangreiches Werk. Dadurch wurden andere Mathematiker angeregt, sich ebenfalls mit ihr zu befassen, und Ellipsenstudien im weiteren Sinn (vgl. auch die oben erwähnten Aufgaben) wurden zu einem beliebten Thema. Aida beschrieb die Gärtnerkonstruktion sowie ein Instrument

mit veränderbarem Abstand der Brennpunkte zum Zeichnen aller möglichen Ellipsen. Da um diese Zeit ein Instrument zum Zeichnen von Ellipsen aus dem Ausland nach Japan gekommen sein soll, ist nicht auszuschließen, daß Aida davon Kenntnis erhalten oder es gar gesehen hatte. Er leitete die Ellipsengleichung als affines Bild des Kreises ab, berechnete die Fläche eines Ellipsensegmentes und auch die Länge des Ellipsenbogens.

Zur Bestimmung des letzteren schlug er einen ungewöhnlichen Weg vor. Möglicherweise inspiriert durch die oben beschriebene Methode der Berechnung des Kreisumfanges, begann er, in die Viertelellipse eine Folge von Sehnen zu ziehen, die sich dieser immer mehr anschmiegen. Die erste war die Verbindung zwischen den Endpunkten (also den beiden Punkten, in denen die große und die kleine Halbachse den Ellipsenbogen treffen). Dann errichtete er im Mittelpunkt der großen Halbachse die Ordinate und zog von deren Schnittpunkt mit dem Ellipsenbogen die beiden Sehnen zu den Endpunkten, danach viertelte er die große Halbachse und erhielt in gleicher Weise vier Sehnen, die sich dem Bogen stärker anschmiegen, usw. (Dieses Vorgehen entspricht ganz demjenigen des Archimedes bei seiner geometrischen Quadratur der Parabel.) Zwischen den Sehnen der n -ten Wiederholung und dem Ellipsenbogen liegen dann n schmale Ellipsensegmente. Treibt man diese Konstruktion weit genug, verschwindet praktisch die Fläche der Segmente, und ihre Summe strebt gegen die Länge des Viertelbogens der Ellipse. Bei der Berechnung der Ellipsensegmente ersetzte Aida die kleinen Ellipsenbögen durch geschickt gewählte Kreisbögen; dennoch ergaben sich Ausdrücke, die so kompliziert waren, daß er die Summation seinen Nachfolgern überlassen mußte.

Andere japanische Mathematiker versuchten sich an der Berechnung der Oberfläche eines Ellipsoids. Sie zerlegten diese entweder durch Parallelschnitte in Ringe, die sie als Kegelstumpf behandelten, oder durch zentrale, eine gemeinsame Achse enthaltende ebene Schnitte, die gegeneinander um kleine Winkel gedreht sind, in (apfelsinenschalenförmige) Sektoren, die ebenfalls in geeigneter Weise approximiert werden mußten. Das führte zu langen und komplizierten Reihenentwicklungen, bei deren Behandlung sie — auch unter Verwendung von Tabellen zur Koeffizientendarstellung — großes Geschick zeigten. Im Druck soll das Ergebnis erstmals 1844 veröffentlicht worden sein.

Die Verliebtheit der Autoren in eine mathematische Artistik, die losgelöst von praktischen Anwendungen, aber auch unberührt vom Streben nach dem Erarbeiten vereinheitlichender Theorien sich selbst genügt, ist nicht zu verkennen. Die lange Isolation des Landes trug offensichtlich wesentlich dazu bei, daß Mathematik wie ein Glasperlenspiel betrieben wurde: alle Aufmerksamkeit war fokussiert auf wenige Typen von Problemen, die man zu höchster Perfektion

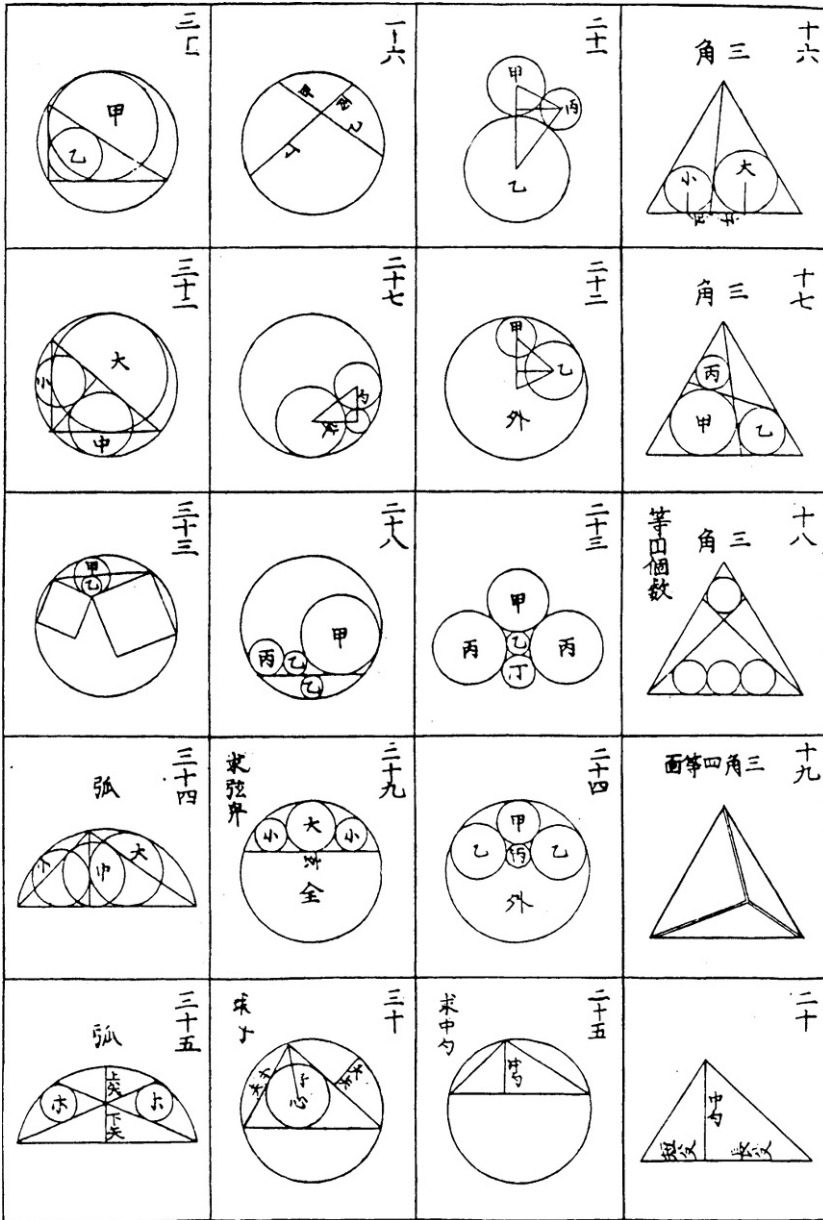


Abb. 3.2.5 Figuren zu 20 Aufgaben aus Yamamoto Kazen: Sampo Yoyutsu (1841)
[Smith / Mikami a.a.O. S. 246, Fig. 57]

zu entwickeln suchte. Es wäre verfehlt, hier unseren Wissenschaftsbegriff anzuwenden — Wasan war ein Zeitvertreib, eine Kunst, vergleichbar der Teezeremonie oder der Blumenbindekunst. Impulse, andersartige, von außen herangebrachte Fragestellungen wahrzunehmen und zu untersuchen, fehlten den überwiegend der Oberschicht entstammenden Anhängern der Wasan-Mathematik. Auch in den beiden ersten Dritteln des 19. Jhs., als durch importierte Bücher langsam wieder westliches Wissen einsickerte, verließen sie nicht die eingeschlagenen Bahnen, sondern verfeinerten weiterhin ihr traditionell entwickeltes Instrumentarium (s. Abb. 3.2.5).

Eine Änderung trat erst ein, nachdem sich Japan ab 1868 ganz aus der Isolation befreite. Eine neue Generation von Mathematikern gewann Anschluß an die internationale Mathematik, während die Vertreter der traditionellen Methoden sich meist vom Glauben an die Überlegenheit der einheimischen Verfahren nicht abbringen lassen wollten. Mit ihrem Aussterben geriet dann die landeseigene Tradition in Vergessenheit. Seit einigen Jahrzehnten sind es die Mathematikhistoriker, die sich verstärkt für diese eigenartige Entwicklung interessieren.

Wesentliche Inhalte der japanischen Geometrie

Frühzeit und Mittelalter 17. Jh.	Einfluß von China (u.a. Dezimalsystem), reiches Kulturleben, aber geringes Interesse an Naturwissenschaften und Mathematik Nach Berührung mit Portugiesen und Niederländern 1603 Ablösung der feudalen Periode durch zentral verwalteten Staat; Beginn der Isolierung, Entstehung einer eigenen Mathematik-kultur „Wasan“ unter den Samurai: geringer Praxisbezug, intel- lektueller Zeitvertreib.
1627	YOSHIDA SHICHIBEI KÖYŪ, auch MITSUYOSHI genannt: <i>Jinko-ki</i> : Aufgabensammlung, neben angewandten Aufgaben solche aus der Unterhaltungsmathematik; Vorbild für viele Werke gleichen Titels
1639	IMAMURA CHISHŌ studiert regelmäßige Vielecke (Dreieck bis Zehneck); Studium von Kreispackungen
1640/2 – 1708 1664 – 1739	SEKI KOWA und sein Schüler TAKEBE HIKOJIRŌ KENKŌ: Yenri-Prinzip für die Berechnung eines Kreisbogens: Reihenent- wicklung; Berechnung der Kugeloberfläche aus Volumendifferen- zen zweier konzentrischer Kugeln
ab ca. 1660 18. Jh.	Tempelprobleme Verallgemeinerung der Kreispackungen auf Kugelpackungen; mathematische Artistik, kein Streben nach vereinheitlichenden Theorien, Fehlen von Anstößen von außen

3.3 Indien

3. Jt. v. Chr.	Stadtkulturen im Indus: Mohenjo-Daro, Harappa	rechtwinklig angelegte Straßen mit Kanalisation
seit 2000 v. Chr.	Eindringen der Indoarier	Sprache Sanskrit
1500 – 200	Vedische Periode	Indoarisch-Brahmanische Kultur und Religion, Rigveden, Heldenepos Mahabharata, Kharostische Schrift und Zahlzeichen
ca. 560 – 480	Buddha stiftet neue Religion	Buddhismus in Nordostindien
ca. 545 – 470	Mahāvīra stiftet neue Religion	Jainismus breitet sich in Nordwestindien aus
327 – 325	Alexander d. Gr. in Indien	Hellenistischer Einfluss
322 – 184	Reich der Maurya-Dynastie	Tempel und Steinplastik (Große Stupa von Sanchi)
271 – 231	Kaiser Ashoka: größte Ausdehnung des Maurya-Reiches	Buddhismus wird Staatsreligion
184 – 320 n. Chr.	Verschiedene Herrscherhäuser regieren Kleinstaaten	Hellenistisch geprägte Gandhara-Kultur
320 – 480	Reich der Gupta-Dynastie	„Goldenes Zeitalter“ von Wissenschaft und Kunst
480 – 1525	Viele Dynastien in indischen Teilstaaten	Aufleben und Erstarken des brahmanischen Hinduismus, Tempel mit Skulpturen und geometrischem Schmuck, Hochblüte der indischen Mathematik
ca. 505 – 587	Varāhamihira	Astronomische Beobachtungen und Berechnungen
712	Beginn der allmählichen Eroberung des Subkontinents durch den Islam	Eindringen arabischer und persischer Kulturelemente
1498	Vasco da Gama landet in Calicut	Begegnung mit christlicher Religion und abendländischer Kultur
1525 – 1754	Reich der Großmoguln	Blütezeit der sog. Mogul-Architektur und -Malerei mit geometrischer Ornamentik
1600	Gründung der ostindischen Kompagnie	Verstärkter Einfluss westeuropäischer Kultur
ab 1757	England bricht die Herrschaft der Hindufürsten	
1877	Queen Victoria wird Kaiserin von Indien	
1920	Gandhi ruft zum gewaltlosen Widerstand auf	
1947	Unabhängigkeit und Teilung in Indien und Pakistan	
2. Hälfte 20. Jh.	Aufstieg zur Atommacht	Entwicklung zum Industriestaat

3.3.0 Historische Einführung

Wie in China und Japan, so liegen auch in Indien die Anfänge der Mathematik fast vollständig im Dunklen. Immerhin besteht die Möglichkeit, daß die Ausgrabungen in Mohenjo-Daro und Harappa im Indusdal, wo Überreste einer bis etwa 3000 v. Chr. zurückreichenden Stadtkultur geborgen werden, noch nähere Aufschlüsse bringen, da die dort gefundene vorindische Schrift noch nicht entziffert wurde. Um -2000 begannen indogermanische Stämme, deren Sprache das Sanskrit war, einzudringen. Die um -1500 beginnende vedische Periode (polytheistische Verehrung von Naturgottheiten, aufgezeichnet in den Veden) ist mathematisch gekennzeichnet durch die sog. Śulbasūtras (Schnurregeln). Verfaßt etwa ab -800, doch nur in sehr späten kommentierten Ausgaben (um 300 n. Chr.) überliefert, enthalten sie Anweisungen zur Konstruktion von Opferaltären; diese sind hier als erste geometrische Objekte zu behandeln (vgl. Bd. 1, Abschnitte 2.3.1 u. 2.3.2).

Buddhismus und Jainismus breiten sich um -500 aus. Beide wandten sich mehrere Jahrhunderte lang gegen die vedischen Opferriten, so daß die Schnurregeln allmählich außer Gebrauch kamen. Seit etwa -400 sind Karoṣṭī-Schrift und -Ziffern nachweisbar.

Einige wenige Texte sind aus der um ca. 400 n. Chr. endenden nachvedischen Periode erhalten. Seit rund 700 verdrängte der Hinduismus den Buddhismus. Mit dem Einfall der Araber im Jahr 712 begann die Islamisierung Indiens, ohne daß es dem Islam gelungen wäre, den Hinduismus zu verdrängen.

Im indischen Frühmittelalter, der Zeit zwischen 400 und 1200, verselbständigte sich die Mathematik in Indien. Noch aus dem 5. nachchr. Jh. stammen wohl die ersten sog. Siddhantās, astronomisch-mathematische Hindu-Texte; das 6. bis 12. Jh. ist die Blütezeit, in der viele indische Mathematiker schöpferisch tätig waren. Die folgenden 400 Jahre, die man auch als das Spätmittelalter der indischen Mathematik bezeichnet hat, sind vor allem durch Kommentatoren der vorausgegangenen Mathematiker bestimmt.

Insgesamt wird, dem Thema des Bandes entsprechend, vor allem die geometrische Seite der mathematischen Entwicklung in Indien behandelt werden. Weitergehende Bemerkungen müssen auf ein Mindestmaß beschränkt bleiben. Obgleich die Geometrie im Vergleich zu den Leistungen der Inder auf den Gebieten der Algebra und Zahlentheorie nur eine untergeordnete Rolle spielte, bietet sie doch genügend Stoff, der einer Betrachtung wert ist. Zwar haben auch die Inder keine theoretische Geometrie im Sinne der euklidischen zu entwickeln begonnen, doch ihre anschaulich-intuitive Behandlung (an die sich meist konkrete numerische Berechnungen anschlossen) ist nicht ohne Reiz und schlug manchenorts ungewöhnliche Wege ein, die ihr einen besonderen Charakter verleihen.

3.3.1 Das Altertum

Śulbasūtras

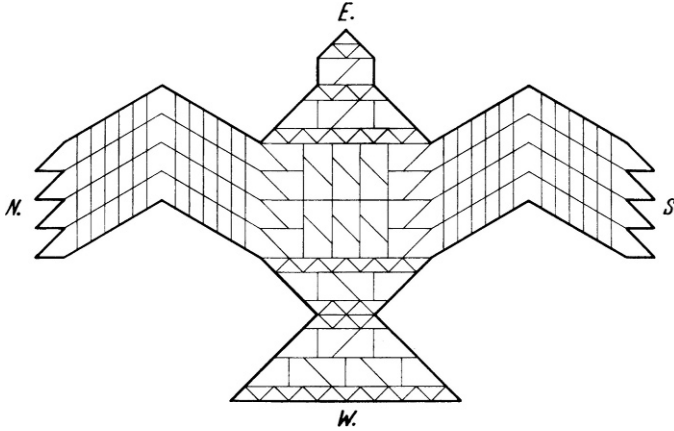


Abb. 3.3.1 Ein Altar in Gestalt eines Falken.
Eingezeichnet sind die Formen der zu verwendenden Ziegelsteine.

Die aus dem Altertum stammenden Regeln der Schnüre oder Śulbasūtras (Schnureregeln) gehören der Sakralgeometrie an. Es handelt sich um (in mehreren Fassungen überlieferte) Anweisungen für die vedischen Priester, wie Opferaltäre in Ost-West-Richtung auszulegen und aus besonders geformten Ziegelsteinen zu konstruieren sind. Es gab, je nach dem Ritual, das vollzogen werden sollte, quadratische, rechteckige, trapez-, kreis- oder halbkreisförmige Altäre, aber für besondere Zwecke auch solche in Gestalt eines Falken, der aus diesen Elementen zusammengesetzt wurde (s. Abb. 3.3.1), und radförmige. In jedem Haushalt sollten drei einfache Feueraltäre stehen (quadratisch, kreisförmig oder halbkreisförmig), gemauert aus Ziegelsteinen vorgegebener Formen; auch die Anzahl der Schichten der Ziegel [Srinivasiengar 1988, 6] hatte ihre mythische Bedeutung. In einer der verschiedenen Fassungen der Śulbasūtras heißt es ausdrücklich: „Wir wollen die Regeln für die Absteckung des Bodens für die Altäre beschreiben.“ Mathematische Unterrichtung ist also nicht das eigentliche Ziel, sondern nur ein Nebenzweck. Beschrieben wird, was zur Erfüllung der religiösen Vorschriften an geometrischem Wissen erforderlich ist: Flächenverwandlungen, Ähnlichkeitsbeziehungen, der Satz vom Ergänzungsparallelogramm, der pythagoreische Lehrsatz. In der Problemstellung gibt es gewisse Analogien zu babylonischen Aufgaben, die Ausführungen

allerdings unterscheiden sich. Anklänge an die chinesische Mathematik sind insofern spürbar, als Inder wie Chinesen eine Vorliebe für rechnerische Algorithmen erkennen lassen. In diesen Texten werden jedoch die Verfahren normalerweise nicht abgeleitet, sondern lediglich Regeln gegeben, wie vorzugehen ist. Auf diesen in den frühen indischen Texten besonders deutlich aufscheinenden mythisch-religiösen Hintergrund gründet sich die These, die Geometrie habe sich weniger aus praktischen Bedürfnissen heraus entwickelt als aus rituellen Erfordernissen [Seidenberg 1962].

Nur zum Teil lassen sich die Methoden aus den angegebenen Resultaten rekonstruieren. Wenn, um ein numerisches Beispiel dafür zu geben, der Wert für $\sqrt{2}$ nach der Vorschrift $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$ berechnet werden soll, so kann man das durch wiederholte Anwendung des babylonischen Verfahrens (Gleichung (1.2.7) $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$) gewinnen (siehe Aufg. 3.3.1).

Eine Gruppe von Sätzen behandelt die Vergrößerung einer quadratischen Altarfläche: sie soll verdoppelt, verdreifacht, ..., versechsfacht werden. Eine dafür grundlegende geometrische Feststellung in den Schnurregeln ist der Satz: „Die quer über das Quadrat gelegte Schnur bringt die doppelt so große (Boden)fläche hervor“. Das entspricht inhaltlich dem Satz des Pythagoras für das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck. Der Vergleich des gegebenen Quadrats a^2 mit dem neuen x^2 führt auf die Gnomonfigur. Setzt man für die Differenz von Diagonale und Seite die Größe $y = x - a$, so hat man die beiden Rechtecke der Größe $a \cdot y$ und das kleine Eckquadrat y^2 anzulegen. Das formulieren die Schnurregeln so (vgl. Abb. 3.3.2):

Nunmehr die allgemeine Anweisung: Das (Rechteck), welches man mit der Verlängerung (einer Quadratseite und ihr selbst) zweimal zeichnet, fügt man an zwei Seiten (des Quadrats) hinzu und das Quadrat, welches durch sie (d.h. die Verlängerung) hergestellt wird, an einer Ecke.

Damit ist also geometrisch die Formel konstruiert

$$a^2 + (2ay + y^2) = (a + y)^2, \quad (3.3.1)$$

d.h., der Gnomon wird dargestellt durch die Fläche $2ay + y^2$. Mit Hilfe dieser Gnomon-Figur kann dann auch das Verfahren zur oben angegebenen Bestimmung von $\sqrt{2}$ erklärt werden. (Es gibt aber keinerlei Hinweis, daß die Inder in diesem Zusammenhang die Irrationalität von $\sqrt{2}$ entdeckt hätten.)

Die Verdoppelung der quadratischen Altarfläche erinnert nicht nur an das klassische griechische Problem der Würfelverdoppelung, sie könnte auch den

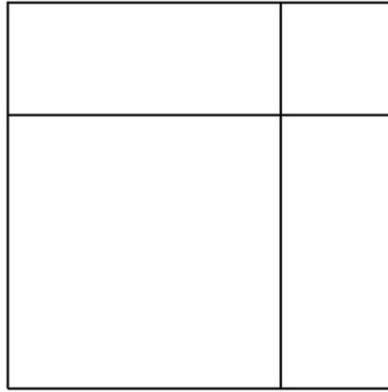


Abb. 3.3.2 Gnomonfigur bei Quadratverdoppelung

Anstoß zur Entdeckung des pythagoreischen Lehrsatzes am gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck gegeben haben. Man muß ja nur zwei Exemplare des Ausgangsquadrates zu einem Rechteck nebeneinanderlegen, sie durch zwei Diagonalen mit gemeinsamem Endpunkt halbieren und die beiden äußeren Dreiecke so umlegen, daß ein neues Quadrat entsteht (s. Abb. 3.3.3):

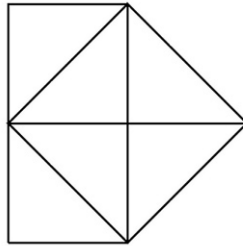


Abb. 3.3.3 Pythagoreischer Lehrsatz am gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck

In den Schnurregeln sind insgesamt sechs konkrete pythagoreische Dreiecke enthalten, nämlich diejenigen mit den Seiten $(3, 4, 5)$, $(12, 5, 13)$, $(15, 8, 17)$, $(7, 24, 25)$, $(12, 35, 37)$ und $(15, 36, 39)$, doch allgemein wird der Satz über die Kathetenquadratsumme nicht ausgesprochen. An mindestens einer Stelle werden die konkreten Dreiecke aber als Beweis für die Richtigkeit des für die Diagonale des Rechtecks formulierten Satzes herangezogen. Die Gewohnheit der indischen Mathematiker, ihren Konstruktionen von Anfang an konkrete Maße zugrunde zu legen, mag sie eher veranlaßt haben, die numeri-

schen Beziehungen zu studieren, als über allgemeine geometrische Relationen nachzusinnen.

Die Verallgemeinerung vom Quadrat auf ein beliebiges Rechteck wird in den Regeln so ausgesprochen: „Die quer über das Rechteck (gelegte) Schnur bringt beides (d.h. beide Flächen zusammen) hervor, was die Längsseite und die Breitseite jede für sich hervorbringen.“

Ist die Verdreifachung der quadratischen Altarfläche gefordert, kann man das einfache und das verdoppelte Quadrat addieren, was nach folgender Vorschrift geschieht:

Wünscht man zwei verschieden große Quadrate zu vereinigen, so reiße man mit der Seite des kleineren auf dem größeren einen (Parallel)streifen auf. Die quer über diesen Streifen (gelegte) Schnur ist die Seite der beiden vereinigten Quadrate.

Diese Figur zeigt, was gemeint ist, die folgende das vervollständigte neue Quadrat:

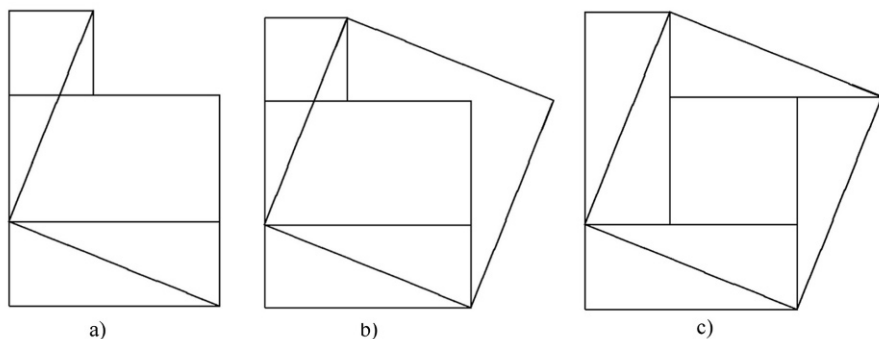


Abb. 3.3.4 Addition zweier ungleicher Quadrate zu einem dritten Quadrat

Durch Veränderungen der Hilfslinien ergibt das die bekannte Figur, die den Lehrsatz des Pythagoras in der Form $c^2 = 2ab + (b - a)^2 [= a^2 + b^2]$ illustriert. Die religiösen Vorschriften verlangten auch, bei besonderen Anlässen Altäre zu errichten, die bei Flächengleichheit eine andere Form hatten. Daraus ergab sich das Problem der Zirkulatur des Quadrates, d.h. die Ermittlung des Halbmessers eines zu einem gegebenen Quadrat flächengleichen Kreises:

Wünscht man aus einem Quadrat einen Kreis zu machen, so lege man von der Mitte des Quadrats aus nach einer Ecke (eine Schnur)

und führe sie in die Richtung einer Seite (des Quadrats) herum. Zusammen mit einem Drittel, was bei ihr übrig bleibt (was außerhalb des Quadrates liegt), beschreibe man den Kreis.

In einer anderen Fassung wird noch ergänzend bemerkt: „Wieviel fortgenommen wird, soviel soll hinzukommen.“ (Vgl. Aufg. 3.3.2, [Jaggi 1986, 182])

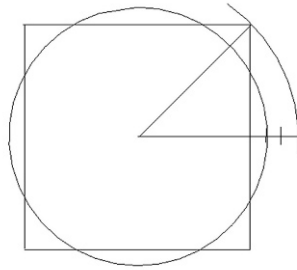


Abb. 3.3.5 Zirkulatur des Quadrats nach den Schnurregeln

Für die umgekehrte, viel bekanntere Aufgabe der Kreiquadratur gibt es in den Regeln zwei Vorschriften:

- 1) Wünscht man aus einem Kreis ein Quadrat zu machen, so mache man aus dem Durchmesser 8 Teile, teile *einen* solchen Teil in 29 Teile, nehme 28 Teile (von diesen 29 Teilen) fort und weiter von dem (verbleibendem *einem*) Teil noch den um seinen 8. Teil verminderten 6. Teil.
- 2) Oder auch man mache (aus dem Durchmesser) 15 Teile und nehme 2 (Teile) fort. Die letztere (Schnur) ist die gewöhnlich als Seite des Quadrats benutzte [Müller 1930, 179–190].
(Vgl. Aufg. 3.3.3)

Natürlich stellt sich die Frage, wie die Verfasser der Schnurregeln auf die angegebenen Bruchteile gekommen sind. Den zweiten Wert $\frac{13}{15}$ konnte Conrad Müller unter der Annahme herleiten, man habe den Viertelkreisbogen gedrittelt und durch die beiden Teilpunkte eine vertikale bzw. eine horizontale Linie gezogen. Diese Linien bilden, zusammen mit den begrenzenden Radien des Viertelkreises, ein Quadrat, dessen Fläche dem Viertelkreis etwa zu entsprechen scheint (Abb. 3.3.6).

Die Quadratseite kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras zu $s = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot d$ (d = Durchmesser des Kreises) berechnet werden. Nun wird zwar, im Gegensatz zu $\sqrt{2}$, für $\sqrt{3}$ in den erhaltenen Śūtrās kein Bruchwert angegeben, doch

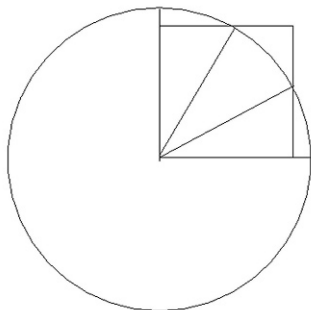


Abb. 3.3.6 Quadratur des Kreises nach den Schnurregeln

[Rekonstruktion von C.Müller in „Die Mathematik der Śulbasūtra“. Abhandlungen aus dem Math. Sem. der U. Hamburg 7]

läßt sich mit den indischen Verfahren leicht in zwei Schritten die Näherung $\sqrt{3} = \frac{5}{3} + \frac{1}{15} = \frac{26}{15}$ gewinnen, womit die Frage beantwortet ist. Auch für die kompliziertere erste Vorschrift ist eine Rekonstruktion möglich, wenn man die oben zitierte Bruchdarstellung für $\sqrt{2}$ heranzieht. Müller betont dabei, die für uns naheliegende Frage nach der Genauigkeit bzw. danach, welches der beiden Verfahren dem exakten Wert am nächsten komme, habe sich damals nicht gestellt. Weder besaßen die Inder eine exakte Konstruktion, mit der sie hätten vergleichen können, noch war ihnen zu jener Zeit die Beziehung zwischen Umfang und Inhalt des Kreises bekannt. (Der Kreisumfang wird in den Śūtrās an einer Stelle als $3d$ angegeben!)

Jaina-Geometrie

Seit rund 400 vor Christus entwickelte sich auch eine sog. Jaina-Geometrie. Offenbar war sie vor allem am Trapez als Bild des Universums und der Kontinente wie am Kreis als Bildnis der Erde und als Bahn der Himmelskörper interessiert. In den sog. Gaṇita-Texten werden die Erde und die Himmelsbahnen beschrieben. Dabei wird als Verhältnis des Umfanges eines Kreises zu seinem Durchmesser neben $\pi = 3$ die Größe $\sqrt{10}$ (ohne Begründung) angegeben, die sich später auch bei Brahmagupta findet. Daneben ist die Rede vom Kreissegment. Es hat sich jedoch nicht eine einzige mathematische oder geometrische Jaina-Schrift erhalten. Darin sollen auch Aufgaben aus der Alltagspraxis enthalten gewesen sein.

3.3.2 Das Mittelalter

Die Wiederbelebung mathematischer Studien in Indien im Mittelalter, etwa zwischen 400 und 1200, fällt zusammen mit der sog. klassischen indischen Epoche oder Renaissance des Brahmanismus, in der Literatur und Philosophie eine Blüte erlebten. Das Einstürmen astronomischer Kenntnisse von Alexandria her könnte das Erwachen des Interesses an mathematischen Problemen mitveranlaßt haben. Auffällig ist dabei, daß die Mathematiker dieser Zeit nicht auf die alten Schnurregeln zurückgriffen — anders als in China, wo, wie wir sahen, die überlieferten Werke hoch geschätzt und immer wieder neu kommentiert wurden. Am folgenreichsten für die globale Entwicklung der Mathematik war zweifellos die Entstehung des dezimalen Positionssystems, das seit dem 7. Jh. belegt ist. Sicher hat dabei das Rechenbrett Pate gestanden, das überall im Orient verwendet wurde, nimmt doch seine Einteilung in Spalten die Bedeutung des Stellenwertes in der Zahlenschreibweise vorweg. Über ein astronomisches Werk der Inder wurde dann das Ziffernsystem den Arabern bekannt und breitete sich über diese schließlich in der ganzen Welt aus.

Das Bakhshālī-Manuskript

Zu den ältesten erhaltenen Aufgabensammlungen und Wirtschaftstexten mit Rechnungen gehört das vielleicht aus dem 6. Jh. stammende Bakhshālī-Manuskript. Es ist auf Birkenrinde geschrieben und wurde erst 1881 in Nordwestindien ausgegraben. Es umfaßt rund 70 Seiten und ist offenbar ein Kommentar zu einem älteren, verlorenen Werk. Den Hauptteil nimmt die Erläuterung der elementaren Rechenoperation ein, einschließlich der Bruchrechnung und des Quadratwurzelziehens. Dazu kommen die Behandlung von Reihen, die Gewinn- und Verlustrechnung, die Zinsrechnung und der Dreisatz. Die numerischen Beispiele und ihre Lösungen werden im Dezimalsystem ausgeführt. Wie auch in allen späteren mathematischen Texten Indiens überwiegt im Bakhshālī-Manuskript das Interesse an algebraischen Themen: lineare Gleichungen und Gleichungssysteme, quadratische Gleichungen (auch negative Zahlen sind dabei zugelassen) und der falsche Ansatz werden betrachtet. Dagegen fehlt ein sonst immer wieder auftretendes Thema: die für die Astronomie und Zeitmessung wichtige Behandlung des Schattens am Gnomon. Einige Autoren sehen darin einen Beweis für die frühe Entstehungszeit dieses Textes [Jaggi 1986, 130–131].

Die Sūrya Siddhāntas

Aus mindestens ebenso früher Zeit stammen astronomische Texte, die sog. Sūrya Siddhāntas. In den älteren wird noch mit der Sehnengeometrie gear-

beitet, die auf Hipparch und Ptolemaios zurückgeht und den Indern aus alexandrinischen Quellen bekannt geworden war. Ihnen blieb es vorbehalten, die Unbequemlichkeiten der Sehnennrechnung zu überwinden — kein hellenistischer Astronom hatte versucht, dieses Werkzeug grundsätzlich zu verbessern. Erstmals taucht der Sinus, die für die moderne Trigonometrie grundlegende Funktion, in einem indischen astronomischen Handbuch aus dem 4. oder 5. Jh. auf [Berggren 1986, 132]. Die indischen Gelehrten entwickelten den Bau von Observatorien zu einer hohen Kunst. Um Winkel und Schattenlängen möglichst genau ablesen zu können, errichteten sie riesige ‘Instrumente’. Einige wurden restauriert bzw. rekonstruiert; Abb. 3.3.8 zeigt die Anlage, Abb. 3.3.9 die Darstellung eines Instruments des Observatoriums von Jaipur.

In Sanskrit-Versen sind in diesem *Sūrya Siddhānta* die Werte der Sinus-Funktion im Abstand von $3\frac{3}{4}^\circ (= 60^\circ : 2^4)$ bis zu 90° angegeben. Zu Beginn des 6. Jhs. verwendete Varāhamihira trigonometrische Formeln in seinem astronomischen Werk „*Pancha Siddhāntika*“; darin gab er eine kommentierte Übersicht über sämtliche fünf *Siddhāntas*. Eine der einfacheren Anweisungen darin, diejenige zur Bestimmung der geographischen Breite, sei hier wiedergegeben (Abb. 3.3.7):

Sei s die Länge des Schattens, $g = 12$ die Höhe des Gnomons und l die Entfernung der Gnomonspitze von ihrem Bildpunkt (dem Schattenende), so ist also zuerst mittels des Satzes von Pythagoras die Strecke l errechnet. Dann soll $120s$ durch l dividiert werden. (Der Faktor 120 ergibt sich aus der Annahme, daß das rechtwinklige Dreieck als einem Kreis vom Durchmesser 120 einbeschrieben gedacht wird.) Daher ist der zu bildende Quotient der Sinus des Winkels an der Gnomonspitze. Zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche, wenn die Sonne genau über dem Äquator steht, gleicht er (bzw. der zugehörige Bogen) der geographischen Breite. — Der zweite Teil der Anweisung bezieht sich auf den Fall einer Beobachtung an einem anderen Datum als der Tag- und Nachtgleiche.

Die Inder ersetzten nicht allein die Sehne durch den Sinus, sie führten auch den Kosinus und den Sinusversus ($\sin \text{vers } \alpha = 1 - \cos \alpha$) ein (letzterer tritt z.B. in Formeln der Art

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (3.3.2)$$

auf). Um 930 studierte Manjula die Funktionen Sinus, Cosinus und Sinusversus in allen vier Quadranten. In der sphärischen Trigonometrie findet man sogar frühe Andeutungen des Sinus- und Cosinussatzes.

विषुवद्दिनसममध्यच्छायावर्गात् स'वेदकृतरूपात्' ।
 मूलेन शतं विंशं विषुवच्छायाहतं छिन्द्यात् ॥ २० ॥
 लब्धं विषुवज्जीवा चापमतोऽक्षोऽथवैवमिष्टदिने ।
 मेषाद्यपक्रमयुतस्तुलादिषु विवर्जितः स्वाक्षः ॥ २१ ॥

Measure the midday shadow on the day when the Sun is at the equinoxes (the equinoctial shadow). Square it, add 144, and find the square root. By this divide the product of the shadow multiplied by 120. The result is the sine of the latitude of the place, called *viṣuvajjyā*.

Abb. 3.3.7 Varāhamihiras Anweisung zur Bestimmung der geographischen Breite aus der Mittagshöhe der Sonne

[Subbarayappa/Sarma: Indian Astronomy, S. 184, Nr. 15.5.2]



Abb. 3.3.8 Das rekonstruierte Observatorium in Jaipur [Foto H.-W. Alten]



Abb. 3.3.9 Abbildung eines Instruments aus dem Observatorium in Jaipur
[Foto H.-W. Alten]

Āryabhaṭa I

Die bei den Indern häufige Verbindung von Astronomie und Mathematik findet sich schon 499 in dem in sehr komprimierten Versen abgefaßten Werk Āryabhaṭīya des Āryabhaṭa I, das der aus dem äußersten Süden Indiens stammende Verfasser im Alter von 23 Jahren schrieb (s. Bd. 1, Abschnitte 2.3.3 u. 2.3.4). Oft sind diese Merkverse nur verständlich, wenn man mit dem Gegenstand (astronomischen oder mathematischen Sätzen) schon vertraut ist; sie waren als Erinnerungstützen in Verbindung mit mündlichem Unterricht gedacht. Ähnlich wie bei den Śulbasūtras sind daher bei Übersetzungen Ergänzungen erforderlich, die gewöhnlich in Klammern gesetzt werden. In vier Teilen behandelte Āryabhaṭa I

- 1) eine ihm eigene alphabetische Darstellung der Zahlen (sie hat nichts mit dem Positionssystem zu tun) und neben astronomischen Angaben die Sinusfunktion samt einer Sinustabelle von 24 Werten (d.h. im Abstand von $3\frac{3}{4}^\circ$, in Form der ersten Differenzen),
- 2) die Rechenkunst (einschließlich etwas Geometrie) in 33 Versen,
- 3) die Zeitrechnung und
- 4) die Sphärik.

Neben alten indischen Einflüssen ist insbesondere im astronomischen Teil auch griechische Beeinflussung nachweisbar (Epizykeltheorie). Seinerseits wurde das Āryabhaṭīya schon um 800 n. Chr. ins Arabische übersetzt.

Die geometrischen Aufgaben enthalten Formeln für die Fläche des Dreiecks, das Volumen der Pyramide, die Fläche des Kreises ($F = r \cdot U/2$) und die Oberfläche der Kugel. Nach bisheriger Auffassung hatte Āryabhaṭa Pyramiden- und Kugelvolumen falsch angegeben. In seiner deutschen Übersetzung konnte K. Elfering 1975 eine Interpretation vorlegen, die die Richtigkeit der Regel für das Pyramidenvolumen nachweist und den von der Kugel handelnden Vers als auf die Oberfläche bezogen erkannte [Elfering 1975]. Er wäre danach zu übersetzen als

Die Hälfte des Umfangs mit dem halben Durchmesser multipliziert, ist der Flächeninhalt des Kreises. Dieser (d.h. der Kreisumfang) mit seiner bestimmenden Basis (r) multipliziert, ist die Oberfläche der Halbkugel, und zwar genau.

Diese Deutung wird auch durch einen späteren indischen Kommentar gestützt. Leider enthalten die knappen Merkverse keinerlei Hinweis darauf, wie Āryabhaṭa I (oder seine Quelle) zu dieser Erkenntnis gelangt ist.

In einem anderen Vers gibt Āryabhaṭa einen Wert für π an:

Einhundertvier mal acht, dazu zweiundsechzigtausend, ist näherungsweise der Kreisumfang für den Durchmesser eines Zehntausenderpaares.

Das bedeutet: $\pi \approx \frac{62832}{20000}$. Diesen Wert kann man rekonstruieren, indem man, vom regelmäßigen Sechseck ausgehend, durch wiederholte Halbierung der Sehnen bis zum 384-Eck fortschreitet [Gericke 1984, 185], [Elfering 1975, 87].

Aufschlußreich für das gedankliche Umfeld, in dem mathematische Einsichten von den Indern gewonnen und ursprünglich auch formuliert wurden, ist der Vers über den Lehrsatz des Pythagoras:

Nachdem man das Quadrat des Maßes eines Gnomons mit dem Quadrat seines Schattens addiert hat, ist die Quadratwurzel davon der Radius des „Himmelskreises“.

Zwei weitere Verse fassen elementare Ähnlichkeitsbeziehungen und den Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck zusammen, ein anderer handelt von der gemeinsamen Sehne zweier sich schneidender Kreise. — Was danach folgt, betrifft die Summation von Reihen, das Auflösen von bestimmten und unbestimmten Gleichungen und andere Themen aus dem Bereich der Algebra und Zahlentheorie.

Brahmagupta

Neben den üblichen Vorschriften zur Berechnung geradlinig begrenzter ebener Flächen und elementarer Körper, die hier zu wiederholen überflüssig ist, finden sich in den indischen Texten auch einige bemerkenswerte Besonderheiten. So gibt Brahmagupta (598 – nach 665) eine Formel (Vorschrift) zum Berechnen des Inhaltes eines allgemeinen Vierecks mit den Seiten a, b, c, d und dem halben Umfang p an, die an die Heronsche (besser: archimedische) Formel (2.5.1) von S. 75 für die Dreiecksfläche erinnert:

$$F = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \quad (3.3.3)$$

Er sagt aber nicht, daß es sich hierbei um eine Näherungsformel handelt, die nur im Spezialfall eines Sehnenvierecks im Kreis exakt gültig ist. (Die richtige Formel wäre

$$F = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cdot \cos^2 \alpha}, \quad (3.3.4)$$

wobei α die halbe Summe zweier gegenüberliegender Winkel ist.) Spätere Mathematiker übernahmen die Formel, ebenso wie den Spezialfall für $d = 0$, den Brahmagupta angeführt hatte. Erst Āryabhaṭa II wies dann um 950 darauf hin, die Formel (3.3.3) gebe nicht den richtigen Wert für jedes Viereck an.

Ebenfalls bei Brahmagupta findet man den Sehnensatz des Ptolemaios für das Sehnenviereck a, b, c, d mit den beiden Diagonalen e, f im Kreis:

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d; \quad (3.3.5)$$

erstmal bei ihm tritt zusätzlich die Proportion

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd} \quad (3.3.6)$$

auf. Man vergleiche das mit den Bemühungen Regiomontans im 15. Jh. um eine Formel für den Flächeninhalt des Sehnenvierecks oder damit, daß in Europa erst im Jahr 1615 W. Snellius auf diese Formel Brahmaguptas stieß, für die schließlich 1727(!) Phillip Naudé der Jüngere einen ersten Beweis geben konnte.

Die in altchinesischen Texten angegebene Formel (3.1.2) für die Fläche eines Kreissegmentes gibt auch der indische Jaina-Gelehrte Mahāvīra um 850 wieder an: $F = \frac{(s+p) \cdot p}{2}$ (F = Fläche, s = Sehne, p = Pfeil). In seinem Werk griff er fast alle Probleme wieder auf, mit denen sich seine Vorgänger beschäftigt hatten. Doch wie bei den meisten Mathematikern, die Indien hervorgebracht hat, steht auch bei ihm die Beschäftigung mit numerischen Fragen, Gleichungslösungen und unendlichen Reihen im Vordergrund [Juschewitsch 1964, 86].

Dreidimensionale Koordinatengeometrie

Im 9. Jh. finden sich bei Vācaspati Ansätze zu einer dreidimensionalen Koordinatengeometrie. Er entwickelte die Idee in einem philosophischen Kommentar bei der Betrachtung der Lage eines Atoms im Raum. Dazu dachte er sich drei Achsen, eine in Ost-West-Richtung zwischen Aufgangs- und Untergangspunkt der Sonne am Horizont, eine nordsüdliche senkrecht dazu und eine dritte, die vom Kreuzungspunkt der beiden zur jeweiligen Mittagsposition der Sonne führt (sie steht also in der Regel nicht senkrecht auf der Grundebene!). Den Abstand zweier Atome gab er dann für die drei Richtungen an [Bag 1979, 169–170].

Der Einfluß Euklids

Ein schwieriges historisches Problem ist der Nachweis des Einflusses der Elemente Euklids auf die indische Mathematik. Einzelne Definitionen oder Sätze scheinen vom 6. Jh. an bekannt geworden zu sein; mit Sicherheit waren die Elemente vom 14. Jh. an in Indien zugänglich. Wie schon erwähnt, hat die Begegnung mit Euklid (in arabischer oder persischer Übersetzung) aber die indischen Mathematiker nicht zur Übernahme des deduktiven Beweisens veranlaßt.

Bhāskara II

Im 12. Jh. lebte Bhāskara II, dem man mehrere geniale Beiträge zur Mathematik verdankt (s. Bd.1, Abschnitt 2.3.6). Vor allem bekannt ist er als Erfinder der zyklischen Methode für die Lösung unbestimmter quadratischer Gleichungen in zwei Unbekannten, die von Hermann Hankel als das Feinste bezeichnet wurde, was in der Zahlentheorie vor Lagrange erreicht wurde. Hier sei seine Berechnung der Kugeloberfläche skizziert, die uns wieder mit einem neuen Verfahren bekanntmacht und zeigt, auf wie vielfältige Weise das gleiche Problem im Lauf der Geschichte angegangen wurde. Bhāskara II stellte sich den Äquator einer Kugel vom Umfang 96 in 96 gleiche Teile unterteilt vor. Durch die Teilpunkte zog er 48 Meridiane, von denen jeder ebenfalls in 96 gleiche Bögen unterteilt wurde. Durch die Teilpunkte gleicher Höhe legte er die Breitenkreise. So entstehen kleine Felder (sphärische Trapeze bzw., an den Polen, sphärische Dreiecke), die er als eben ansah. Ihre Größe nimmt vom Äquator nach den Polen hin ab, sie erweist sich als proportional zum Sinus des Winkelabstandes vom Pol, wenn man die Felder innerhalb eines (apfelsinenschalenförmigen) Streifens vom Pol zum Äquator betrachtet. So konnte Bhāskara einen guten Näherungswert für die Kugeloberfläche erhalten ([Bag 1979, 296]. (Die gewählte Schrittgröße bedingt, daß er die Sinuswerte im Abstand von $\alpha = \frac{2\pi}{96} = 3\frac{3}{4}^\circ$ benötigt. — Vgl. Aufg. 3.3.4)

Zum Abschluß sei noch eine andere interessante Variante der Bestimmung der Kugeloberfläche, die man früher irrtümlicherweise Āryabhaṭa I zuschrieb, vorgestellt. Sie beruht auf der folgenden, vielleicht seiner Schule entspringenden Überlegung. (Überliefert ist sie in dem Werk Yuktibhāṣā eines unbekannten Verfassers aus dem 16. Jh.) Man denke sich die Oberfläche der Kugel durch Parallel- (Breiten-)kreise in Ringe zerlegt. Dann nähere man die Fläche eines solchen Ringes durch die Oberfläche desjenigen Kegelstumpfes an, der durch den unteren und oberen Parallelkreis bestimmt ist; schließlich summiere man alle diese Streifen, indem man sich die Kegelstümpfe in die Ebene abgewickelt

denke und ihre Oberfläche als Trapeze betrachte. Auch diese Überlegung führt, wenn man nach heutiger Auffassung zur Grenze übergeht, auf die exakte Formel $O = 4\pi r^2$ [Bag 1979, 296] [Sarasvati Amma 1979, 213–215]; (vgl. Aufg. 3.3.5).

Auf die Bevorzugung der Behandlung auch geometrischer Probleme mittels algebraischer Methoden durch die indischen Mathematiker ist schon mehrfach hingewiesen worden. Ihre größten Leistungen liegen nicht in der Geometrie, sondern in der Algebra, der Zahlentheorie (Teilerproblem, Kettenbruchmethode, Behandlung diophantischer Gleichungen) sowie in der Entwicklung zahlreicher unendlicher Reihen und in Überlegungen, die in die Richtung infinitesimaler Methoden weisen. Nichtsdestoweniger haben sie, wie die Beispiele zeigen, sowohl im Altertum wie im Mittelalter auch auf geometrischem Gebiet bemerkenswerten Ideenreichtum bewiesen.

Wesentliche Elemente der indischen Geometrie

700 – 500 v. Chr. (Vedische Periode)	<i>Śulba-Sūtras (Schnurregeln)</i> Altarkonstruktionen mittels Dreiecken und Rechtecken; Satz des Pythagoras; Addition von Quadraten; Verwandlung von Quadrat in Kreis und Kreis in Quadrat
ca. 5. Jh.	<i>Siddhāntas (astronomisch-mathematische Texte)</i> Einführung der trigonometrischen Funktionen: zunächst Sinus und Cosinus (Beziehung zum Gnomon); um 930 in allen vier Quadranten
400 – 1200 (Hindu-Mittelalter)	ĀRYABHATṬA I (* 476): <i>Āryabhaṭṭīya (Math. Merkverse)</i> Elementargeometrie, sphärische Geometrie, Epizykeltheorie (griechisch beeinflusst) BRAHMAGUPTA (* 598): Verallgemeinerung der Heronschen Dreiecksformel auf das Sehnenviereck; Satz des Ptolemaios für das Sehnenviereck BHASKARĀ II (1114 – 1185?) <i>Siddhānta-śīromaṇi (Kranz der Wissenschaften)</i> : Höhepunkt der indischen Mathematik (zyklische Methode in der Zahlentheorie); Berechnung der Kugeloberfläche durch Zerlegung
1200 – 1600 (Spätmittelalter)	zahlreiche Kommentatoren der Werke BHASKARĀS II; allgemeines Kennzeichen: rechnende Geometrie. — Berührung mit islamischer Mathematik

3.4 Islamische Länder

622 Flucht (Hedschra) Mohammeds von Mekka nach Medina (Beginn des arabischen Kalenders)	
632 Mohammed †	
635 Eroberung von Damaskus, von Mesopotamien	
642 Eroberung von Ägypten (Alexandria!)	
635/51 Sassanidenreich (Persien, seit 226) zerschlagen	
711 Übergang bei Gibraltar, Westgotenreich in Spanien zerschlagen	
712 Eroberung von Choresmien (zwischen Kaspischem Meer und Aralsee), Vorstoß bis zum Indus	
732 Karl Martell besiegt die Araber bei Tours u. Poitiers	
9. Jh. Araber auf Kreta, Sizilien	
West	Ost
	634–644 Kalif Umar (Bücherverbrennung)
	661–750 Umajjaden, Sitz Damaskus
	717–720 Kalif Umar II: 718 Umsiedlung der Gelehrten vom Museion in Alexandria nach Antiochia
756–1031 Umajjaden, Sitz Córdoba, seit 929 Kalifat	750–1517 Abbasiden, Sitz 763–1258 Bagdad, nach Mongoleneinfall 1261–1517 Kairo
	754–775 Kalif al-Manşūr, Gründer Bagdads (763)
8.–10. Jh.: Übersetzungen ins Arabische	768–809 Kalif Hārūn ar-Rashīd (1001 Nacht)
11.–13. Jh.: Übersetzungen ins Lateinische	813–833 Kalif al-Ma'mūn
	833–843 Kalif al-Mu'tazīm
	847–861 Kalif al-Mutawakkil
	892–903 Kalif al-Mu'tadīd
912–961 Emir, ab 929 Kalif 'Abd ar-Raḥmān	
961–976 Kalif al-Ḥakam II, Bibliothek in Cordóba	
	969–1171 Fatimiden in Ägypten, Hauptstadt Kairo (gegr. 969)
1031 Zerfall des Kalifats in Fürstentümer	1206–1227 Dschingis-Khan, Einbruch der Mongolen
	1258 Hülāgū-Khan erobert Bagdad, erhält Titel Ilkhān
	1409–1449 Ulug Beg in Samarkand (Usbekistan)
1492 Untergang Granadas, des letzten maurischen Königreiches	1517 Kairo von den Türken erobert

3.4.0 Historische Einführung

Die Mathematik in den islamischen Ländern, hinfort meist als arabische Mathematik bezeichnet, fußt auf drei Säulen: der Mathematik des alten Zweistromlandes, der zeitgenössischen indischen Mathematik und insbesondere der griechischen Mathematik (vgl. Bd.1, Abschnitt 5.0).

Wenn immer wieder betont wird, die arabische Mathematik habe vor allem das dezimale Positionssystem und die (beweisend vorgehende) griechische Mathematik dem Abendland — und damit der gesamten heutigen Zivilisation — vermittelt, so ist das zwar richtig, verengt aber den Blickpunkt in unzulässiger Weise. Wird doch dabei eine Bewertung vorgenommen, die den gegenwärtigen historischen Entwicklungszustand zum Maßstab des Urteilenden macht. Das sollte aber nicht Richtschnur einer historischen Darstellung sein. Deren Aufgabe ist es in erster Linie, ein möglichst objektiv gezeichnetes Bild der Entwicklung (in unserem Fall: der Mathematik bzw. der Geometrie) zu vermitteln und dabei zu versuchen, die wechselseitigen Einflüsse herauszuarbeiten sowie die Rolle zu charakterisieren, die diese Tätigkeiten in der zeitgenössischen Zivilisation und Kultur einnahmen. Dabei spielten, insgesamt gesehen, die Beziehungen zur Religion nur eine relativ untergeordnete Rolle. Die Mehrzahl der Untersuchungen ist der sog. reinen Mathematik zuzuordnen.

Der Prophet Mohammed aus Mekka hatte um 610 die ersten Visionen; die ihm zuteil gewordenen Offenbarungen sind im Koran niedergelegt. Mit seinen Anhängern siedelte er im Jahr 622 nach Medina über. Mehr und mehr Beduinestämme schlossen sich ihm an; bald hatte die von ihm gepredigte Religion auf der gesamten arabischen Halbinsel Eingang gefunden. Drei Jahre nach dem Tod Mohammeds eroberten die Araber Damaskus und machten es zum Sitz der Kalifen. Zwei Jahre später unterwarfen sie Persien, erreichten 664 Kabul und 674 Buchara und Samarkand. Im Jahr 762/63 (also 140 Jahre nach der Flucht Mohammeds von Mekka nach Medina, dem Beginn der islamischen Zeitrechnung — der „Hedschra“ — und dem Eintritt der arabischen Volksstämme in die Geschichte) wurde Bagdad als Sitz des Kalifats der Abbasiden neu gegründet (vgl. Band 1, Abschn. 3.6). Es entwickelte sich rasch zu einem einflußreichen Kulturzentrum. Besonders verdient um die Wissenschaft machten sich in Bagdad die Kalifen al-Manşūr (er regierte von 754 bis 775), Hārūn-ar-Rashīd (786–809) und al-Ma'mūn (813–833). Der Letztgenannte gründete in Bagdad das Haus der Weisheit, das mit einer reichhaltigen Bibliothek und einem Observatorium ausgestattet war.

Im Zug der Ausdehnung nach Westen hatten die arabischen Heere schon vor der Neugründung Bagdads auch den größten Teil der iberischen Halbinsel erobert — im Jahre 711 hatte der Befehlshaber Tarik nach der Unterwerfung

Nordafrikas erstmals bei Gibraltar (= Dschebel-al-Tarik, der Berg des Tarik) europäischen Boden betreten. Hier wurde 756 das Emirat von Córdoba gegründet. Dort erblühte die islamische Kultur vor allem im 10. Jh., als die Stadt zur zweitgrößten Europas (nach Byzanz) angewachsen war, deren gepflasterte Straßen abends beleuchtet wurden.

Doch das Kulturgefälle zwischen dem östlichen Teil und dem Westen war erheblich. In Bagdad kreuzten sich die Einflüsse der drei genannten Kulturkreise, ja man konnte dort teilweise anknüpfen an die einheimische syrische und persische Gelehrsamkeit. In die westarabischen Provinzen in Nordafrika und Spanien dagegen drangen Kultur, Kunst und Wissenschaft erst allmählich aus den östlichen Landesteilen vor. Einigendes Band war, neben der Religion, die arabische Sprache. In ihr allein durfte der Koran gelesen und rezitiert werden, sie wurde zugleich Kanzleisprache der Verwaltung und Sprache der Wissenschaft.

Die wichtigsten Quellen unserer Kenntnis sind arabische Texte, die zwischen dem 10. und 19. Jh. abgeschrieben wurden — häufig von der Mathematik unkundigen Schreibern. Auch in nichtmathematischen Texten (Astronomie, Optik, Jura, Linguistik u.a.m) können Ausführungen enthalten sein, die wir heute der Mathematik zurechnen. Obgleich die Erforschung der arabischen Mathematik mit dem Beginn des 19. Jhs. einsetzte, sind bisher bei weitem nicht alle Manuskripte auf ihre Bedeutung hin durchgesehen und erforscht worden. Die bedeutendsten Handschriftensammlungen befinden sich in Bibliotheken im Nahen Osten, in Europa, in Indien und Nordafrika [Berggren 1986], [Rashed 1996].

3.4.1 Die Übersetzungstätigkeit

Zunächst begann im Osten eine eifrige Übersetzungstätigkeit in die arabische Sprache. Etwa seit 900 waren dort, neben einigen indischen Werken, sämtliche griechische Klassiker in guten arabischen Fassungen zugänglich. Es konnte nicht ausbleiben, daß sich die islamischen Mathematiker in zahlreichen Kommentaren mit diesem Erbe auseinandersetzten. In einer zweiten, die erste Übersetzungsperiode überlagernden Phase gaben kritische Punkte und offen gebliebene Fragen Anlaß zu weiterführenden eigenen Untersuchungen.

Dann aber wurde, vom 11. Jh. an, vor allem Spanien (neben Sizilien), zum Ort der Begegnung einer kleinen westeuropäischen Gelehrtenschar mit der islamischen Kultur und Wissenschaft und damit zu dem wichtigen Brückenkopf, über den die Vermittlung griechischen und orientalischen Wissens an Westeuropa stattfand. In Toledo, in geringerem Maß auch in anderen Städten

der iberischen Halbinsel, entwickelten sich bedeutende Übersetzungsschulen. Die in arabischer Sprache vorliegenden wissenschaftlichen Werke wurden hier größtenteils ins Lateinische, die Gelehrtensprache des Mittelalters, übertragen und dann in Abschriften in Europa verbreitet. (Dabei darf jedoch das kulturelle Gefälle zwischen dem Osten und dem Westen nicht übersehen werden: viele bedeutende Werke der in Persien, Ägypten und anderen Ländern des Vorderen Orients tätigen Mathematiker waren damals im Westen nicht bekannt geworden und konnten folglich hier keine Wirkung ausüben. Ihre Kenntnis verdanken wir erst der modernen historischen Forschung.)

Dieser Entwicklung ist der zweite Strang der Vermittlung, der von Byzanz über Italien lief, zur Seite zu stellen; davon wird im folgenden Kapitel über das Mittelalter noch zu sprechen sein.

Geordnet nach den Teilgebieten theoretische Geometrie, praktische Geometrie und Trigonometrie sollen in den folgenden Abschnitten Schwerpunkte und Beispiele der selbständigen Untersuchungen islamischer Mathematiker vorgestellt werden. Grenzüberschreitungen lassen sich dabei nicht immer vermeiden.

3.4.2 Theoretische Geometrie

Im Bereich der theoretischen Geometrie setzte die intensive Beschäftigung mit den Elementen des Euklid bereits um 820 ein. Das Werk wurde mehrfach ins Arabische übersetzt, wiederholt kommentiert und stellte die maßgebliche Grundlage für weitere Forschungen der islamischen Mathematiker dar. Offensichtlich begannen diese sehr früh, sich für mathematische Fragen um ihrer selbst willen zu interessieren; denn insgesamt gesehen spielen Anwendungen eher eine untergeordnete Rolle. Als Schwerpunkte dieses Abschnitts, der in mancherlei Richtung erweitert werden könnte, sollen beispielhaft die Konstruktion regelmäßiger Vielecke und die Kreisberechnung (als Themen im Bereich der sog. drei klassischen Probleme, wobei auch die Kegelschnitte hineinspielen) sowie die Parallelentheorie vorgestellt werden.

Zwar nicht in einem selbständigen Werk, doch in einem Abschnitt seiner bahnbrechenden Algebra, behandelte am Beginn der arabischen Mathematik al-Chorezmi (Hwārizmī) (vgl. Bd. 1, Abschnitt 5.2), der in Bagdad am Hof des Kalifen al-Ma'mūn arbeitete, auch geometrische Probleme. Teilweise schloß er sich dabei an Heron an (einschließlich der in einigen Aufgaben vorkommenden Zahlenwerte). Seine Stoffauswahl entspricht insgesamt dem Inhalt der beiden ersten Bücher der „Elemente“ Euklids. Erwähnenswert ist ein (vielleicht durch eine indische Quelle inspirierter) anschaulicher Beweis (s. Abb. 3.4.1 und Aufgabe 3.4.1) des pythagoreischen Lehrsatzes für den Fall eines gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks:

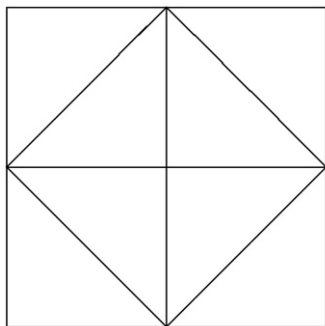


Abb. 3.4.1 al-Chorezmis anschaulicher Beweis des Lehrsatzes von Pythagoras für das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck.

In der 2. Hälfte des 9. Jhs. schrieben die Banū Mūsā ein eigenes Werk über Geometrie. Diese drei Brüder entwickelten damals in Bagdad eine rege wissenschaftliche Tätigkeit in Mechanik, Astronomie, Mathematik wie auch im Musikinstrumentenbau. Das in lateinischer Übersetzung von Gerhard von Cremona erhaltene Werk ist als „Liber trium fratrum de geometria“ bekannt; kennzeichnender hatten es die Autoren „Das Buch von der Berechnung ebener und sphärischer Figuren“ genannt. (In Form einer Bearbeitung durch at-Tusi ist der Inhalt auch auf arabisch überliefert.) Die drei Brüder versahen sämtliche Sätze mit Beweisen. Kreis, Kugel und Kegel bildeten die wichtigsten Objekte ihrer Untersuchungen. Sie unterwarfen sich also nicht den durch Euklids „Elemente“ markierten Beschränkungen. Erstmals beschrieben sie in der arabischen Literatur das antike griechische Exhaustionsverfahren; ihr Werk wurde jahrhundertlang im Orient studiert und hat in der lateinischen Fassung auch auf die europäischen Mathematiker eingewirkt.

Konstruktion regelmäßiger Vielecke

Eine bei den Geometern beliebte Aufgabengruppe war die Frage nach Konstruktionen regelmäßiger Vielecke über die bekannten elementar konstruierbaren (Dreieck, Quadrat, Fünfeck, Fünfeck und die daraus durch Seitenverdoppelung ableitbaren regelmäßigen Polygone) hinaus. Das reguläre Siebeneck und das reguläre Neuneck mußten als erste das Interesse wecken; die Konstruktion des letzteren ist eng mit dem Problem der Winkeldreiteilung verbunden, diejenige des ersteren führt auf eine kubische Gleichung. Damit sind beide, algebraisch gesehen, von gleichem Schwierigkeitsgrad, und es lag nahe, den auch schon von griechischen Mathematikern eingeschlagenen Weg zu beschrei-

ten, nämlich Lösungen mit Hilfe von Kegelschnitten zu suchen. Doch auch geistvolle Einschiebungskonstruktionen wurden von islamischen Mathematikern ersonnen [Hogendijk 1984], [Scriba 1985a].

Einer der Gelehrten, dem die regelmäßigen Vielecke offenbar besonderen Spaß machten, war Abu'l-Wafā. Der im 10. Jh. in Bagdad wirkende vielseitige Mathematiker ist Autor einer Abhandlung „Über jene Teile der Geometrie, die die Handwerker benötigen“. Darin beschrieb er viele schöne Konstruktionen von regulären Polygonen bis hin zum Zehneck. Darunter befanden sich (mit Ausnahme von 7- und 9-Eck) solche, die sich mit dem Lineal und einer festen Zirkelöffnung durchführen lassen. Wie er das für das Quadrat vorschlug, zeigt Aufgabe 3.4.2.

Für das Siebeneck gab er eine sehr einfache Näherungskonstruktion: man nehme als Seite die Hälfte einer Seite des dem Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks (s. Aufgabe 3.4.3). So hatte es schon Heron gelehrt, während die von Abu l-Wafā angegebene Einschiebungskonstruktion (eine exakte, aber nicht elementargeometrische Konstruktion!) für das reguläre Siebeneck von Archimedes stammt [Berggren 1986], [Gericke 1984], [Juschkevitsch 1964].

Eine andere, auf der Konstruktion von zwei Kegelschnittkurven beruhende Siebeneckskonstruktion entwickelte al-Kūhī gegen Ende des 10. Jhs. Man denke sich das Siebeneck in einen Kreis eingezeichnet, benenne eine Ecke A , die übernächste B und die folgende C , so daß das Dreieck ABC aus einer kurzen Sehne (AB), einer Seite (BC) und einer langen Sehne (CA) des Siebenecks gebildet wird. Jetzt denke man sich die Dreiecks-(= Siebenecks-)seite BC nach links um die kurze Diagonale AB und nach rechts um die lange Diagonale CA verlängert und die so festgelegten Endpunkte E (links) und D (rechts) mit A verbunden. Dann läßt sich zeigen, daß für die Strecke $EBCD$ gilt:

$$EB^2 = BC \cdot BD \quad \text{und} \quad CD^2 = EB \cdot EC. \quad (3.4.1)$$

Also steht man vor der Aufgabe, eine gegebene Strecke ED so durch zwei Punkte B und C zu teilen, daß diese beiden (auch Archimedes schon bekannten) Gleichungen erfüllt sind. Indem al-Kūhī sie auf die Konstruktion einer Parabel und einer Hyperbel zurückführte und deren Schnittpunkte bestimmte, konnte er aus der verlangten Streckenteilung das Dreieck ABC aufbauen, darum einen Kreis schlagen und in diesen die weiteren Siebenecksseiten eintragen (s. Aufgabe 3.3.4).

Wohl bekannt sind die besonders reichhaltigen arabischen Ornamente. Während manche als Ganzes ein hohes Maß an Symmetrie zeigen, sind in anderen oft regelmäßige Polygone verschiedener Art kunstvoll miteinander verknüpft. Die darüber überlieferten Diskussionen von Rechtsgelehrten wurden bisher noch

nicht eingehend untersucht. Außer Abu'l-Wafās oben beschriebener Schrift ist aus der Feder von Mathematikern lediglich eine um 1415 herum entstandene Studie al-Kaschis (al-Kāšī) bekannt, worin er ein dreidimensionales, bienenwabenartiges Muster, muqarna genannt, behandelte.

Da es sonst keine Zeugnisse über die bewußte Anwendung geometrischer Kenntnisse auf die Architektur oder die Konstruktion von Mosaiken gibt (obgleich sich heute nachweisen läßt, daß in letzteren die Vielfalt der im 19. Jh. entdeckten ebenen Symmetriegruppen ihren praktischen Niederschlag fand), wird die Vermutung begründet sein, es handele sich um empirisch gewonnene Einsichten, die im Rahmen der handwerklichen Tradition von Generation zu Generation weitergeben und verfeinert wurde (vgl. Abb. 3.4.2 – 3.4.6).

Kreisberechnung

Wie in allen bisher behandelten Kulturen konnte die Beschäftigung mit der Figur des Kreises auch in der islamischen nicht ausbleiben. Man studierte die in den „Elementen“ Euklids zu findenden, mit dem Kreis zusammenhängenden Konstruktionen und versuchte, sie weiterzuentwickeln oder auf zusätzliche Fragen anzuwenden. Daneben versuchten die islamischen Mathematiker, die Kreiszahl π genauer zu bestimmen. Dabei zeigt sich sehr deutlich, wie sie sowohl an die griechische wie die indische Mathematik anknüpften. Denn schon al-Chorezmi gab für die Kreisberechnung an: $U = d \cdot (3 + \frac{1}{7})$ und $U = d \cdot \sqrt{10}$ oder $U = d \cdot \frac{62832}{20000}$. Der erste Wert ist der archimedische, vom dritten sagte er, er werde von den Astronomen verwendet. Er könnte ihn, wie auch den zweiten, indischen Schriften entnommen haben [Gericke 1984], [Juschkevitsch 1964].

Für die Ermittlung des Flächeninhaltes F eines Kreises vom Durchmesser d gab er folgende Vorschrift an:

$$F = d^2 - \frac{1}{7}d^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}d^2. \quad (3.4.2)$$

Sie kommt einer von Heron angegebenen Regel sehr nahe (vgl. Aufgabe 3.4.5.).

Eigenartig ist auch al-Chorezmis Regel für die Berechnung des Flächeninhaltes S eines Kreissegments aus dem Bogen b , der Sehne s und der Segmenthöhe (dem Pfeil) p . Zunächst wird der Durchmesser d als $d = \frac{s^2}{4p} + p$ bestimmt, dann eine doppelte Regel angewendet:

für ein Segment, das kleiner als ein Halbkreis ist, rechne man nach der Formel

$$S = \frac{d}{2} \cdot \frac{b}{2} - (\frac{d}{2} - p) \frac{s}{2}. \quad (3.4.3)$$



Abb. 3.4.2 Ziegelornamente am Iwan der Freitagsmoschee von Nain, Iran
 Ein Iwan (auch Eiwan oder Liwan) ist die überwölbte Vorhalle eines mit der
 Schmalseite zu einem Hof geöffneten Gebetsraumes. [Foto H.-W. Alten]



Abb. 3.4.3 Medrese (Theologische Lehranstalt) Tilla-kari am Registan
in Samarkand, Usbekistan [Foto H.-W. Alten]



Abb. 3.4.4 Medrese Schir-Dar am Registan in Samarkand, Usbekistan
[Foto H.-W. Alten]

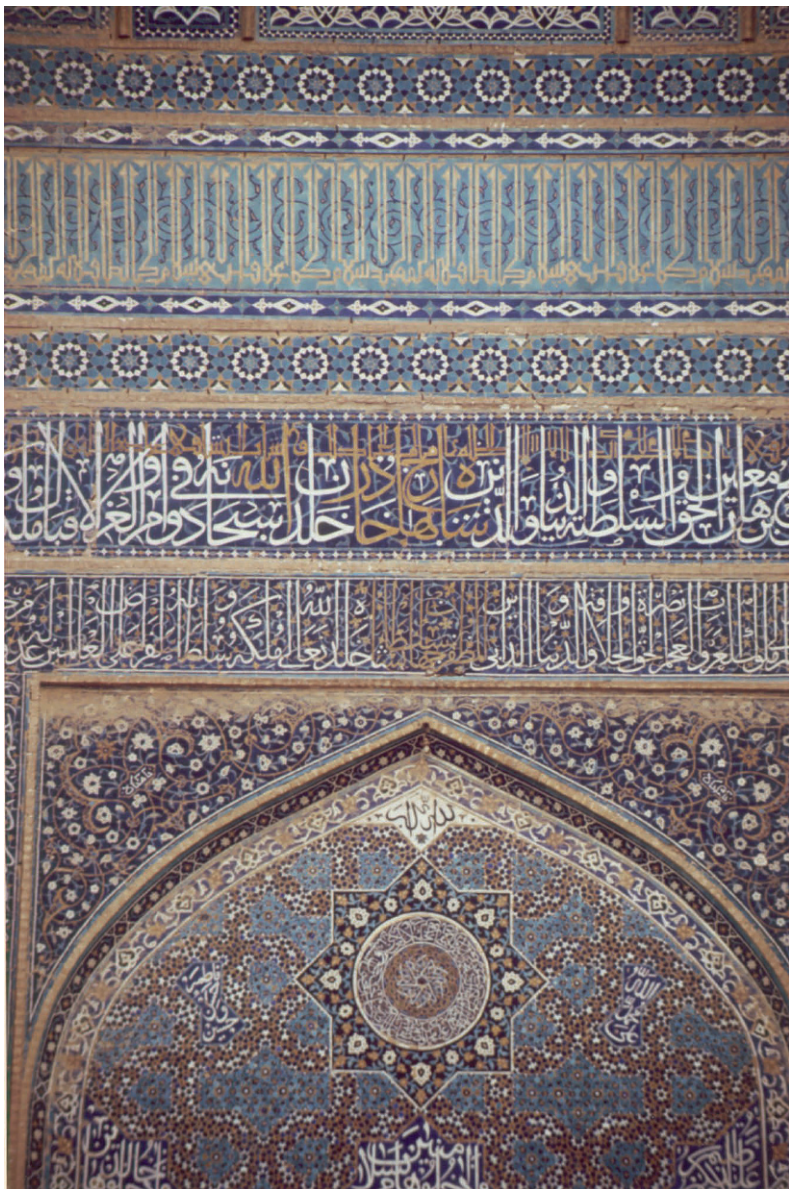


Abb. 3.4.5 Geometrische Ornamente und Frieze in kufischer Schrift
am Iwan der Freitagsmoschee in Yazd, Iran [Foto H.-W. Alten]



Abb. 3.4.6 Kuppeldekoration eines Mausoleums in Schah-i Sinda, Usbekistan
[Foto H.-W. Alten]



Abb. 3.4.7 Sextant im Mauerquadranten vom Observatorium des Uluġ Beg, Samarkand, Usbekistan [Foto H.-W. Alten]



Abb. 3.4.8 Observatorium des Ulugh Beg, Samarkand, Usbekistan
[Foto H.-W. Alten]

Für ein Segment, das größer als ein Halbkreis ist, rechne man nach der Formel

$$S = \frac{d}{2} \cdot \frac{b}{2} + \left(p - \frac{d}{2}\right) \frac{s}{2}. \quad (3.4.4)$$

Da die von ihm verwendeten Termini indischer Herkunft sind, hat al-Chorezmi vermutlich auch diese Vorschriften in einer indischen Schrift kennengelernt [Juschkewitsch 1964] (s. Aufgabe 3.4.6).

Eine besondere Leistung arabischer Mathematik ist die Berechnung der Kreiszahl π in al-Kaschis „Abhandlung über den Kreis“, die er 1424 abschloß. Al-Kaschi hatte sich das ehrgeizige Ziel gesetzt, π so genau zu berechnen, daß der Fehler beim Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser 600 000 Erddurchmesser beträgt, eine Haaresbreite nicht übersteigt. Er überlegte sich, daß dazu für einen Kreis vom Radius 60 ein regelmäßiges Vieleck heranzuziehen sei, dessen Seite die Ungleichung $a < \frac{8}{60^4}$ erfüllt. Er folgerte, es sei ein Vieleck von $3 \cdot 2^{28} = 805\,306\,368$ Seiten zu betrachten, bzw., ausgedrückt im Sexagesimalsystem, ein 1,2,8,16,12,48-Eck. Al-Kaschi führte seine Rechnungen so geschickt durch, daß das Ergebnis auf zehn Sexagesimalstellen bzw. 17 Dezimalstellen genau ist. Nicht nur gab er es in beiden Systemen an, es war auch

das erste Mal, daß in der islamischen Mathematik Dezimalbrüche verwendet wurden. In dezimaler Form geschrieben, fand er $2\pi = 6,283\,185\,307\,179\,586\,5$. Erst um 1600 reproduzierte Adriaan van Roomen diese Berechnung mittels des 2^{30} -Ecks. Wenig später übertraf ihn Ludolph van Ceulen, der unter Verwendung des $60 \cdot 2^{29}$ -Ecks zuerst 20 und dann 32 Dezimalen berechnete, weshalb π manchmal auch als die Ludolphsche Zahl bezeichnet wird.

Das Parallelenpostulat

Ein Thema, dessen sich die Muslime besonders intensiv annahmen, war das Parallelenpostulat Euklids, das ja schon in der Antike Anlaß zu Diskussionen gegeben hatte. (In seinem heute verlorenen, damals noch vorhandenen Euklid-Kommentar hatte Simplicios um 520 über einen angeblichen Beweis eines gewissen Aganiz (Geminos ?) geschrieben. Grundlage soll die Definition „Parallele Geraden sind solche festen Abstandes“ gewesen sein.) — Die Forschungen zum Parallelenproblem sind vielleicht das am meisten in die Zukunft weisende Beispiel rein geometrischer Studien in der islamischen Mathematik. Um 830 knüpfte al-Dschauhari (al-Ġauharī) an die genannte Definition an, eine Generation später lehnte sich Tābit ibn Qurra daran an, bevor er in einer zweiten Untersuchung den von Euklid vermiedenen Bewegungsbegriff heranzog. Um 900 verbreitete sich an-Nairizī in einem ausführlichen Kommentar zu den ersten zehn Büchern der Elemente Euklids auch über das Parallelenpostulat. Ausgehend von der Definition paralleler Geraden als solcher, die bei beliebiger Verlängerung äquidistant bleiben, bewies er das Parallelenaxiom. Der vielseitige arabische Mathematiker, Astronom, Physiker und Arzt ibn al-Haitām, vertraut mit den Arbeiten seiner Vorgänger, arbeitete gleichfalls mit Bewegungen, verwendete ein Viereck mit drei rechten Winkeln (ein Lambert-sches Viereck; vgl. Abb. 6.4.2) und wies nach, daß der vierte Winkel weder spitz noch stumpf sein könne. (Stillschweigend verwendete er dabei das Archimedische Axiom wie auch das Axiom von Pasch.) Rund hundert Jahre später arbeitete der Mathematiker und Dichter Umar Chayyam (ʿUmar Ḥayyām) mit dem Saccheri-Viereck, das zwei rechte und zwei gleiche Winkel besitzt (vgl. Abb. 6.4.1), kritisierte aber die Einführung von Bewegungen in geometrische Beweise. Im 13. Jh. bezog Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī in zwei von ihm veranstalteten Euklid-Ausgaben zum Parallelenproblem Stellung. Überdies nahm er in eine selbstständige Schrift zu diesem Thema große Auszüge aus den Arbeiten seiner Vorgänger auf.

Gemeinsam war allen diesen zwischen dem 9. und dem 15. Jh. angestellten Untersuchungen der islamischen Mathematiker, daß sie die nichteuklidischen Möglichkeiten durch Zirkelschlüsse und Scheinbeweise ausschlossen. So kamen

sie alle zu dem Ergebnis, das Parallelenpostulat sei beweisbar. Wie erwähnt, fanden dabei (teilweise implizit, ohne daß sich die Forscher dessen bewußt wurden) so wichtige Axiome wie das von Archimedes/Eudoxos und das von Pasch Anwendung [Gericke 1984, 204–214].

Nicht alle arabischen Texte wurden später rechtzeitig den europäischen Mathematikern bekannt. Es steht jedoch fest, daß die Ausführungen von an-Nairīzī zum Parallelenproblem um 1600 von dem einflußreichen jesuitischen Mathematiker Christoph Clavius, diejenigen von Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī um 1650 von John Wallis studiert und weitergebildet wurden. —

In Verbindung mit Grundlagenfragen wurde die Geometrie im arabischen Bereich auch zur Begründung algebraischer Operationen herangezogen. So gab etwa Ṭabīṭ ibn Qurra, gestützt auf Buch 2 der „Elemente“ Euklids, geometrische Beweise für die Regeln al-Chorezmī zur Auflösung quadratischer Gleichungen. Auch die im 10. Jh. beginnenden Anstrengungen, kubische Gleichungen mittels Kegelschnitten zu lösen, gehören in diesen Zusammenhang. Berühmt wurde eine Untersuchung al-Chayyams, in der allerdings die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz von Lösungen noch unvollständig behandelt wurden. Das gelang, wie die mathematikhistorische Forschung erst vor einem Vierteljahrhundert zeigte, zuerst im 12. Jh. Šaraf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (nicht zu verwechseln mit Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī) [Hogendijk 1989]. Andere Mathematiker bemühten sich um eine geometrische Begründung der von Euklid im 5. Buch dargelegten Verhältnislehre.

3.4.3 Praktische Geometrie

Neben den Untersuchungen auf dem Gebiet der theoretischen Geometrie behandelten die islamischen Mathematiker auch vielfach Fragen aus dem Bereich der praktischen Geometrie. Wie nicht anders möglich, bildete die Geometrie weiterhin die Grundlage des Vermessungswesens. Die schon erwähnte Algebra des al-Chorezmī weist in ihrem geometrischen Kapitel Ähnlichkeit mit der alt-hebräischen Abhandlung „Mishnat ha-Middot“ (der Lehre vom Messen) auf. Entstanden ist diese zwischen der Mitte des 2. Jhs. und dem 9. Jh. Der unbekannte Verfasser hatte sich auf Heron gestützt und war vielleicht auch mit Euklids „Elementen“ vertraut. Möglicherweise hat al-Chorezmī seine Aufgaben diesem hebräischen Werk entnommen. Vielleicht aber standen beiden Autoren auch nur die gleichen, heute nicht mehr bekannten Quellen zur Verfügung.

In dem bereits erwähnten Werk des Abū'l-Wafā aus dem 10. Jh. mit dem Titel „Buch über das, was ein Handwerker von den geometrischen Konstruktionen benötigt“ werden systematisch Konstruktionen mit fester Zirkelöffnung

beschrieben. Sie waren demnach schon im arabischen Handwerk beliebt — in den europäischen Bauhütten des Mittelalters sind sie ebenfalls zu finden. Ihr praktischer Vorteil liegt in der Vermeidung von Fehlern, die beim wiederholten Verstellen der Zirkelöffnung unvermeidlich sind. (Das mag seit der Renaissance auch ein Motiv für Geometer wie Leonardo da Vinci, Tartaglia, Cardano und später für Mascheroni und Steiner gewesen sein, sich mit solchen Konstruktionen theoretisch zu beschäftigen.) Nachdem er im zweiten und dritten Kapitel die elementargeometrisch konstruierbaren regelmäßigen Vielecke behandelt hatte, wandte sich Abū'l-Wafā im letzten Kapitel seines Buches der Aufgabe zu, die Kugeloberfläche in regelmäßige sphärische Vielecke zu zerlegen. Das ist gleichbedeutend mit der Konstruktion regelmäßiger Polyeder, was der Verfasser aber nicht erwähnt. Er bestimmte darin nicht nur die fünf platonischen, sondern auch zwei der 13 von Archimedes gefundenen halbberegelmäßigen Körper. Bei der Vorliebe der Araber für geometrische Ornamente (bedingt durch das religiöse Verbot bildlicher Darstellungen in den Moscheen) könnte man vermuten, er habe den Handwerkern damit Anleitungen zur Ausgestaltung gekrümmter Oberflächen geben wollen. Jedenfalls hat am Anfang des 15. Jhs. al-Kaschi in sein Buch „Schlüssel der Arithmetik“ im Kapitel über Messungen auch komplizierte Berechnungen und Konstruktionen für Spitzbögen, Gewölbe, Kuppeln und die für die arabische Architektur charakteristischen sog. Stalaktiten aufgenommen.

Kennzeichnend für die praktische Geometrie der islamischen Mathematik ist nicht nur die erfolgreiche Weiterführung der von den Griechen und — in geringerem Maß — von den Indern übernommenen Verfahren. Sie zeichnet sich auch dadurch aus, daß sie die Ansätze des Archimedes beim Studium gekrümmter Flächen und Körper systematisch erweitert, die auf infinitesimale Betrachtungen hinführen, daß sie geometrische Überlegungen in die Sprache der Algebra übersetzt und daß sie mit wohlüberlegten Methoden Berechnungen (auch von irrationalen Größen) mit hoher Genauigkeit vorzunehmen vermag. Dabei traten allerdings die im Altertum (wie auch im europäischen Mittelalter) verbreiteten Verfahren, die auf Ähnlichkeitsbetrachtungen von Dreiecken beruhten, stärker zugunsten trigonometrischer Methoden zurück.

3.4.4 Trigonometrie

Im Islam hatten Astronomie, aber auch Geographie bzw. Geodäsie bekanntlich wichtige religiöse Aufgaben zu erfüllen: der vom Mondlauf abhängige Kalender mußte von den Sternkundigen jeweils im Voraus berechnet werden, wofür man das Datum der ersten Sichtbarkeit der Mondsichel nach Neumond kennen mußte. Die Zeiten der fünf täglichen Gebete richteten sich nach dem Sonnenstand

und sind folglich auch abhängig von den jeweiligen geographischen Koordinaten. Auch war es erforderlich, für jeden bewohnten Ort die Kibla (qibla), die nach Mekka orientierte Gebetsrichtung, genau zu bestimmen. Sie wurde zusätzlich auf den Sonnenuhren sowie in jeder Moschee angezeigt.

Bereits um 800 waren in Bagdad alexandrinische wie indische Werke zur Astronomie bekannt, in denen trigonometrische Verfahren behandelt wurden [Sesiano 1993]. So bot sich Gelegenheit, die einschlägigen Arbeiten von Hipparch, Ptolemaios und Menelaos mit der [seit dem 6. Jh. (?)] in Indien entwickelten Halbsehnentrigonometrie, zu vergleichen. Am Beginn der arabischen Trigonometrie steht wieder al-Chorezmi, der eine Sinustafel samt Erläuterungen dazu abfaßte. Zunehmend wurde dann die Sehnentrigonometrie der Griechen durch die Sinustrigonometrie verdrängt. Die Muslime erweiterten die beiden trigonometrischen Grundfunktionen der Inder, Sinus und Cosinus, auf sechs. Tangens und Cotangens wurden zunächst beim Studium des Schattenwurfs von Sonnenuhren entwickelt: der Tangens als Bezeichnung der Schattenlänge eines horizontal an einer Wand angebrachten Stabes genormter Länge, der Cotangens als der Schatten des Gnomons (einer vertikalen Stange auf horizontalem Untergrund). Seit dem späten 10. Jh. kannte man die Möglichkeit, den Kreisradius als Einheitslänge anzusetzen, so daß alle Funktionen als Streckenverhältnisse angesehen werden konnten. Sie wurden dann bald auch bei anderen Aufgaben eingesetzt. Dazu traten Secans und Cosecans (die Verhältnisse von Hypotenuse zur anliegenden bzw. gegenüberliegenden Seite im rechtwinkligen Dreieck). Für alle diese Funktionen waren Tabellen zu berechnen und die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen zu untersuchen. So soll z.B. im 9. Jh. al-Habasch (al-Ḥabaš) Tafeln für einige der neuen Grundfunktionen aufgestellt haben. Fast alle Astronomen im islamischen Bereich verfaßten astronomisch-trigonometrische Handbücher (sog. *zīġes*). Mehrere Jahrhunderte lang brachten Mathematiker und Astronomen viel Zeit für solche Berechnungen einschließlich der Verbesserung der dazu erforderlichen Methoden auf (neben Interpolationen erster Ordnung finden sich auch Beispiele für solche zweiter Ordnung). Dabei behielten sie — wie es schon Ptolemaios getan hatte — das auf die Babylonier zurückgehende Sexagesimalsystem und die Teilung des Kreises in 360° bei. In Abū l-Wafās Werk „*zīġ Almaġistī*“ aus dem 10. Jh. findet sich z.B. folgende Formulierung für das Additions- und Subtraktionstheorem der Sinusfunktion [Berggren 1986, 136]:

„Berechnung des Sinus der Summe zweier Bögen und des Sinus ihrer Differenz, wenn jeder von beiden gegeben ist. Multipliziere den Sinus eines jeden mit dem Cosinus des anderen (ausgedrückt im Sexagesimalsystem). Wir addieren die beiden Produkte, wenn wir den Sinus der Summe der beiden Bögen suchen, aber wir nehmen die Differenz, wenn wir den Sinus ihrer Differenz suchen.“



Abb. 3.4.9 Armillar-Sphäre, dargestellt in der ersten gedruckten Ausgabe von Hajji Kalifahs *Jihan Numa* (Spiegel der Welt) [ARAMCO World, Vol. 43, No. 3]



Abb. 3.4.10 Moslemische Astronomen mit Instrumenten, 16. Jh.
[ARAMCO World, Vol. 43, No. 3]

Beim Beweis dieses Satzes stützt sich Abū l-Wafā auf einen Satz aus dem 3. Buch der Elemente Euklids.

Auch in die Sphärik führten die islamischen Mathematiker die trigonometrischen Funktionen ein. So war im 10. Jh. der Sinussatz für sphärische Dreiecke bekannt: in einem Kugeldreieck verhalten sich die Sinus zweier Seiten wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, den A. P. Juschkewitsch [Juschkewitsch 1964, 304] als den bedeutendsten orientalischen Gelehrten auf dem Gebiet der Trigonometrie bezeichnete und für den der Mongolenfürst Hūlāgū Khān im 13. Jh. eine Sternwarte in Marāgha in Persien errichten ließ, untersuchte systematisch die Anwendung des Sinussatzes

$$c : \sin \gamma = b : \sin \beta = a : \sin \alpha \quad (3.4.5)$$

für alle möglichen Fälle ebener Dreiecke.

Er verfaßte die erste selbständige Abhandlung zur Trigonometrie: die „Abhandlung über das vollständige Vierseit“. Den auf diese Figur bezogenen Satz des Menelaos hatten die islamischen Astronomen schon früh bei Dreiecksberechnungen herangezogen; aṭ-Ṭūsī behandelte die spärlichen Dreiecke mit und ohne ihn, während der Sinussatz schon seinen Vorgängern bekannt war. Ihren Höhepunkt erreichten die muslimische Astronomie und Trigonometrie im 15. Jh. an der berühmten, hervorragend ausgestatteten Sternwarte des Ulug Beg in Samarkand (s. Abb. 3.4.7, 3.4.8). Dort war der geniale al-Kaschi tätig, der sich eines geschickten Iterationsverfahrens bediente, um mit großer Genauigkeit aus der Winkeldreiteilungsgleichung den Sinus von 1° zu berechnen. Im Prinzip ging er folgendermaßen vor. Da sich $\sin 3^\circ$ beliebig exakt bestimmen läßt (man kann ihn z.B. aus der Differenz von 36° am Fünfeck und 30° am Sechseck mit Zirkel und Lineal konstruieren), verwendete er die Winkeldreiteilungsgleichung

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (3.4.6)$$

(in dieser trigonometrischen Schreibweise findet sie sich erstmalig am Ende des 16. Jhs. bei Vieta). Sie ist vom Typus $x^3 + q = px$ (in der damaligen Klassifikation wurden die Koeffizienten — hier $p = \frac{3}{4}, q = \frac{1}{4} \sin 3^\circ$ — als positiv vorausgesetzt). Al-Kaschi berechnete die erste Näherung aus $x = \frac{q+x^3}{p} \approx \frac{q}{p}$ zu $x_1 = \frac{q}{p}$. Die zweite Näherung folgt dann aus $x_2 = \frac{q+x_1^3}{p}$ usw., wobei sich als Besonderheit ergibt, daß sich mit jedem Schritt eine weitere Sexagesimalstelle exakt ermitteln läßt (vgl. Aufgabe 3.4.7). Das Ergebnis al-Kaschis, in Dezimalschreibweise umgerechnet, liefert 18 Stellen:

$$\sin 1^\circ = 0,017\,452\,406\,437\,283\,571. \quad (3.4.7)$$

Diese Auswahl aus der Geometrie der islamischen Mathematiker ist nicht nur aus Platzgründen selektiv. Eine große Anzahl arabischer Handschriften ruht noch ungesichtet in orientalischen Bibliotheken, so daß die Forschung bisher kein einigermaßen vollständiges Bild der Entwicklung und des erreichten Wissens erarbeiten konnte. Überraschungen auf diesem Gebiet sind nicht ausgeschlossen.

Wesentliche Inhalte der islamischen Geometrie

8. – 10. Jh.	Übersetzungen griechischer, persischer und indischer Werke (insbes. in Bagdad) — zuvor keine eigenständige mathematische Kultur
Mitte des 9. –	Selbstständige Weiterentwicklung der Mathematik im Anschluß
Mitte des 11. Jh. ab 9. Jh.	an EUKLID und HERON Geometrische Lösungen kubischer Gleichungen (u.a. mittels Kegelschnitten)
2. Hälfte 9. Jh.	BANŪ MŪSĀ (drei Brüder): Buch über Geometrie: Kreisberechnung, Oberflächen und Inhalte von Körpern, Winkel-dreiteilung mit Einschiebung; Fadenkonstruktion der Ellipse. Buch über Kegelschnitte
2. Hälfte 9. Jh.	ABŪ-L-WAFĀ: Geometrische Konstruktionen für Handwerker (u.a. mit fester Zirkelöffnung); regelmäßige und zwei halbregeelmäßige Körper
1. Hälfte 11. Jh. ab 9. Jh.	IBN AL-HAITHAM (ALHAZEN): geometrische Optik; Glanzpunktproblem (Gleichung 4. Grades) Intensive theoretische Beschäftigung vieler Mathematiker mit dem Parallelenproblem: Ausschluß der nicht-euklidischen Möglichkeiten durch Scheinbeweise oder Zirkelschlüsse
ab 9. Jh.	Stärker praktisch ausgerichtete Weiterbildung der Trigonometrie im Anschluß an Inder und Griechen
vor 983 13. Jh.	AL-KŪHĪ: Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks AṬ-ṬŪSĪ: erstes selbstständiges Werk über ebene und sphärische Trigonometrie
1424	AL-KĀŠĪ: Berechnung von π auf 10 Sexagesimal- und 17 Dezimalstellen mit Hilfe eine regelmäßigen Vielecks von $3 \cdot 2^{28} = 805\,306\,368$ Seiten

3.5 Altamerikanische Kulturen

ab	Amerika	
40000	Besiedlung aus Asien über die Beringstraße in mehreren Schüben	
ab	Nordamerika	Bereich
9000	Feldbeuter und Kleintierjäger	„Great Basin“
8000	Großwildjäger	Osten und Ebenen
	Sammler von Wildfrüchten und -pflanzen	Westküste
5000	Siedlungsbeginn	Osten und Ebenen
3000	Beginn des Pflanzenbaus	Südwesten
2500	Anfänge von Keramik und Ackerbau	Osten und Ebenen
1500	Dauersiedlungen	Osten
600	Grabhügel	Osten
100	Erste Dörfer, Keramik	Pueblogebiet des südwestlichen Nordamerika (Mogollonkultur)
0	Korbmacher	Südwesten
500	Städte im Pueblogebiet	Südwesten
1000	Tempel- und Hügelstädte	Mittel-Mississippi und Südosten
ab	Mittelamerika	Bereich
9000	Mammut-Jäger	Zentral-Mexiko
3000	Anfänge des Pflanzertums	Nordost-Mexiko
2500	Pflanzer mit Siedlungen, Keramik	Zentral-Mexiko (Tehuacánserie)
1500	Erste Tempelhügel, Olmeken	Zentral-Mexiko
		(La Venta-Kultur, 500–100)
200	Städtebildung	Teotihuacán, Monte Albán
0	Teotihuacán-Tolteken; „Klassische Zeit“	
0	„Klassische“ Maya	Guatemala, Südost-Mexiko
1000	Azteken und andere	Zentral-Mexiko
1200	Toltekische Maya	Yucatán
1525	Ende des Aztekenreiches	Zentral-Mexiko
1546	Ende des Maya-Reiches	Yucatán
ab	Südamerika	Bereich
7000	Jäger	Patagonien
4000	Jäger	Peru, Venezuela, Argentinien
3500	Beginn des Pflanzenbaus	zentrale Anden
3200	Älteste Keramikfunde	Ecuador, Kolumbien
2500	Dörfliche Siedlungen	zentrale Anden (Chillónserie)
2000	Frühe Fischer-Pflanzer	
1000	Beginn der Keramik; Chavin-Kultur	Nordküste und Südküste
0	„Klassische Zeit“:	
200	Erste Städte	südliches Hochland
300	Mochica	Nordküste
400	Nazca	Südküste
450	Tiahuanaco	Süd-Anden
1000	Tiahuanaco-Ausbreitung	südliches Hochland
1200	Inkareich	Anden (Kolumbien bis Chile)
1500	Chimú	Küstenstaaten
1532	Ende des Inkareiches	Anden

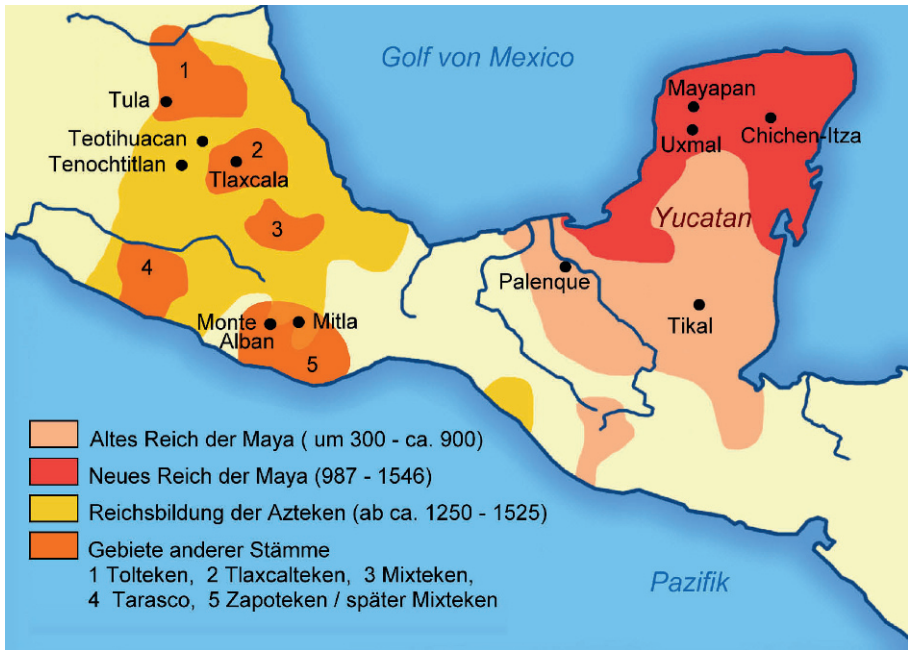


Abb. 3.5.1 Indianische Hochkulturen in Mittelamerika

3.5.0 Historische Einführung

Im Gegensatz zu den bisherigen Abschnitten dieses Kapitels haben wir es bei den altamerikanischen (indianischen) Kulturen mit einer großen Zahl unterschiedlicher Entwicklungen zu tun. Am bekanntesten sind die straff organisierten mesoamerikanischen Kulturen der Nahua- und Mayavölker. Die Azteken und Maya lebten im zentralen und südlichen Mexiko und den benachbarten Teilen von Guatemala, Belize, El Salvador und Honduras. Das Inkareich erstreckte sich zur Zeit seiner größten Ausdehnung (um 1500) von der Nordgrenze von Ecuador bis zum Rio Maule in Mittelchile. Die Ruinenstädte und sonstigen Überreste dieser durch intensive Bautätigkeit ausgezeichneten großräumigen Kulturen stellen der archäologischen Forschung seit langem reiche Quellen zur Verfügung. Mit diesen altamerikanischen Hochkulturen kamen die Spanier in Berührung, als sie im 16. Jahrhundert die „Neue Welt“ entdeckten. — Viel lückenhafter ist unsere Kenntnis der weniger seßhaften Indianervölker und Eskimo (Inuit) auf dem nordamerikanischen Kontinent und der Bewohner des tropischen Tieflandes in Südamerika. Während die Frage nach mathematischen Ideen und Vorstellungen der frühen Bewohner Amerikas für die ethnologische

Forschung nur eine unter vielen war, hat die erst in den letzten Jahrzehnten erstarkte sog. ethnomathematische Forschung weitreichendere Ergebnisse geliefert, die zwar noch sehr lückenhaft sind, aber doch andeutungsweise eine Beschreibung ermöglichen. Diese können hier nur an einigen Beispielen, die sich der Geometrie zuordnen lassen, illustriert werden.

Die Ethnomathematik widmet sich der Untersuchung von Auffassungen und Konzepten in den Kulturen der eingeborenen (indigenen) Völker, die mit Zahl, Logik und räumlichen Vorstellungen verbunden sind, sowie der Organisation derselben in Systeme oder Strukturen. Dabei geht es keineswegs nur um explizit als mathematisch erkennbare Begriffe, sondern auch um die sich nur implizit offenbarenden, mit mathematischen Sachverhalten verknüpften kulturellen Ausdrucksformen. Auch können diese in einem Kontext auftreten, der von dem traditionellen, westlich bestimmten Verständnis durchaus verschieden ist. Besonderheiten der Sprache sind ebenso Quellen für die ethnomathematische Forschung wie Artefakte oder Handlungsweisen (z.B. in Spiel, Tanz und religiösen Ritualen, aber auch bei handwerklichen Tätigkeiten). Letztlich destillieren wir mit den Augen des Europäers aus diesen Kulturen, was wir als mathematisch — oder im Kontext dieses Buches als geometrisch — ansehen. Die ethnomathematische Betrachtungsweise lehrt uns, Mathematik als ein Abstraktionsgebilde zu erkennen, dessen kultureller Mutterboden ungeheuer vielfältig gestaltet sein kann.

Der in diesem Abschnitt zu betrachtende kulturelle Entwicklungsstand der altamerikanischen Einwohner variiert sehr. Erschwerend kommt hinzu, daß frühe Eroberer, Händler und Missionare zwar oft Aufzeichnungen über die Zahlssysteme machten, auf die sie bei den Eingeborenen trafen (auch, weil sie diese im täglichen Umgang benötigten), aber wenig über geometrisch interessante Einzelheiten berichteten. Kennzeichnend dafür ist z.B. der Sammelband [Closs 1986]: von 13 Beiträgen über „Native American Mathematics“ handeln zehn mehr oder minder ausschließlich nur von Zahlwörtern und Zahlzeichen, ihrem Aufbau und ihren Anwendungen. Ein anderer Beitrag weist schon durch seinen Titel „In Search of Mesoamerican Geometry“ auf die bestehende Problematik hin.

Noch ein weiterer Unterschied ist zu beachten: Seßhafte Völkerschaften sind prinzipiell in der Lage, große Bauten zu errichten und Haushalts- und Kultgegenstände mit geometrischen Mustern zu verzieren. Umherstreifende Jäger- und Sammlerpopulationen besitzen lediglich eine nicht sehr umfangreiche Habe, die naturgemäß nur selten dauerhafte Spuren hinterläßt. Und was wissen wir heute von geometrisch inspirierten Spielen oder Tänzen oder anderen flüchtigen kulturellen Ausdrucksformen der frühen Einwohner des amerikani-

schen Doppelkontinents? So kann hier nur eine kleine Sammlung von Beispielen aus frühen amerikanischen Kulturen vorgestellt werden, die im weitesten Sinn geometrisch orientiertes Denken und Handeln erkennen lassen.

3.5.1 Die Jägervölker Inuit (Eskimo) und Ojibwa

Die Ojibwa gehören zu den Einwanderern aus Asien vor etwa 40 000 Jahren. Sie sind mit vielen anderen Algonquin-Stämmen verwandt. Ihr Jagdgebiet waren die Wälder Nordontarios um den Huronsee und Oberen See. Die Inuit dagegen wanderten erst vor etwa 6000 Jahren aus Asien ein. Sie jagten in der offenen Tundra und den Eisgebieten der Arktis und den anliegenden Inseln. Trotz dieser Unterschiede sind ihre mathematischen Vorstellungen einander sehr ähnlich und werden daher als repräsentativ für Jäger- und Sammlergesellschaften angesehen, deren Mitglieder umherstreifen und sich von wildwachsenden Pflanzen und wilden Tieren ernähren.

Im Gegensatz dazu verändern die sesshaften, Ackerbau treibenden Volksstämme ihre Umwelt, züchten neue Pflanzensorten und domestizieren Tiere, die nicht nur der Nahrungsversorgung dienen, sondern auch die menschliche Arbeitskraft ergänzen. Damit geht eine zunehmende Spezialisierung einher, wie sie Jägervölker nicht benötigen. Verbunden damit wächst der Bedarf an „Mathematik“ im weitesten Sinne. Dies gilt etwa für die Ausbildung von Zahlssystemen. Ethnologen haben aber auch nachgewiesen, daß Jäger für ihren Lebensunterhalt viel weniger Zeit benötigen als Ackerbauern. Als Folge davon bleibt ihnen mehr Muße für rekreative Beschäftigungen wie z.B. die Schöpfung eines ausgedehnten Corpus von Mythen.

Die Betrachtung der Ojibwa und Inuit wird sich exemplarisch auf Beispiele ihrer Sprache konzentrieren, läßt sich doch die Existenz von Konzepten, die wir als geometrie-artige ansehen, daran ablesen. Offenbar gibt es bei den Ojibwa Kategorien, die durch prototypische Elemente fixiert sind, wobei die Grenzen zwischen zwei Kategorien fließend bleiben. So ist z.B. der Kreis ein zentrales oder prototypisches Element einer Kategorie, in die verschiedene Objekte fallen, die mehr oder minder rund in zwei oder drei Dimensionen sind, vom Querschnitt eines Baumes über ein Ei bis zu einer Kartoffel beispielsweise (Abb. 3.5.2). „Länglich“ bildet eine andere Kategorie. Doch können Gegenstände auch zugleich zwei Kategorien angehören, wie etwa eine längliche Kartoffel, die ebenfalls als rund angesehen wird. Entsprechend fließend, im Vergleich zu rein geometrischen Konzepten, sind die Dimensionsvorstellungen. Ein Stock, eine Tierhaut, ein Apfel repräsentieren als Formen Objekte, die sich in eine, zwei bzw. drei Dimensionen erstrecken. Dagegen sind sie nach unseren geometrischen Begriffen allesamt dreidimensionale Gegenstände. Der Stock wiederum,

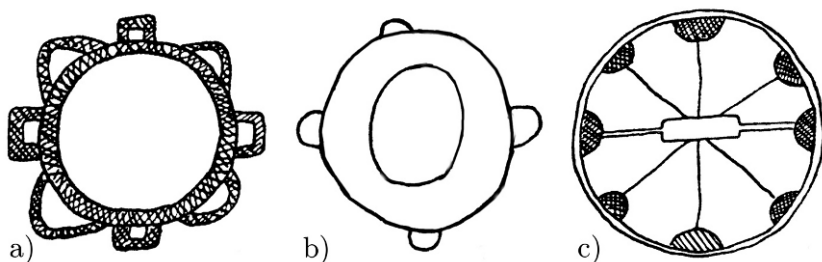


Abb. 3.5.2 Darstellung des Erdkreises bei den Ojibwa

Bilder der „vierzipfligen“ Erde finden sich bei vielen Indianerstämmen Nordamerikas und erreichten bei den Ojibwa des Oberen Sees ihre höchste Blüte. Sie wurden auf die Innenhaut von Birkenrinde geritzt, auf Schiefer und Holz gekratzt oder auf Lederrollen gemalt. Die Bilder sollten mündliche Überlieferungen fixieren und stellen auch Symbole des „Großen Geistes“ dar. Der Erdkreis auf Miderollen der Ojibwa: a) Red Lake, b) White Earth (Minnesota) [Nach Hoffmann: *The Midewin*, Taf. III A und IV.] c) Midezeichnung mit dem Weltkreis aki der Ojibwa [Nach W. Jones: *Ojibwa Texts II*, S. 322 Taf. V]

der einen runden oder rund-länglichen Querschnitt haben kann, hat zusätzlich eine Gestalt in der Längsrichtung: er kann gerade oder gebogen sein. Für all diese Besonderheiten hat die Sprache der Ojibwa eigene Ausdrücke.

Erwähnenswert ist eine Beobachtung sprachlicher Erweiterung, die man bei den Ojibwa machte, als sie mit von den Europäern eingeführten Gegenständen bekannt wurden. Sie, die nur die Rundform des Wigwams kannten, sahen jetzt die rechtwinklig errichteten Blockhütten; zudem wurden die Holzstämmen vor dem Zusammensetzen der Wände von den Siedlern quadratisch behauen. Um diese ungewohnten Figuren konzeptionell zu erfassen, entwickelten die Ojibwa zwei neue Kategorien für Winkel, und zwar für solche, die sich wiederholend immer wieder auftraten. Die eine umfaßte sich wiederholende rechte Winkel (damit beschrieben sie auch ein Quadrat oder Rechteck, weil sie vier rechte Winkel enthalten), die andere steht für repetierende spitze oder stumpfe Winkel (zwischen denen also merkwürdigerweise nicht unterschieden wird!). Mittels der letztgenannten Kategorie kann z.B. das Dreieck beschrieben werden, das vom stumpfen Winkel am Dachfirst und den beiden spitzen Winkeln an der Basis der beiden Dachseiten gebildet wird.

Ähnliche Eigenschaften wie die der Gestaltkategorien der Ojibwa haben jene der Inuit (Abb. 3.5.3). Die Kategorie „rund“ kann durch Anhängen eines Suffixes mehr oder minder stark modifiziert werden: „angmaluqtuq“ bedeutet rund im allgemeinen, „angmalu-riq-tuq“ vollkommen rund, „angmalur-lak-tuq“

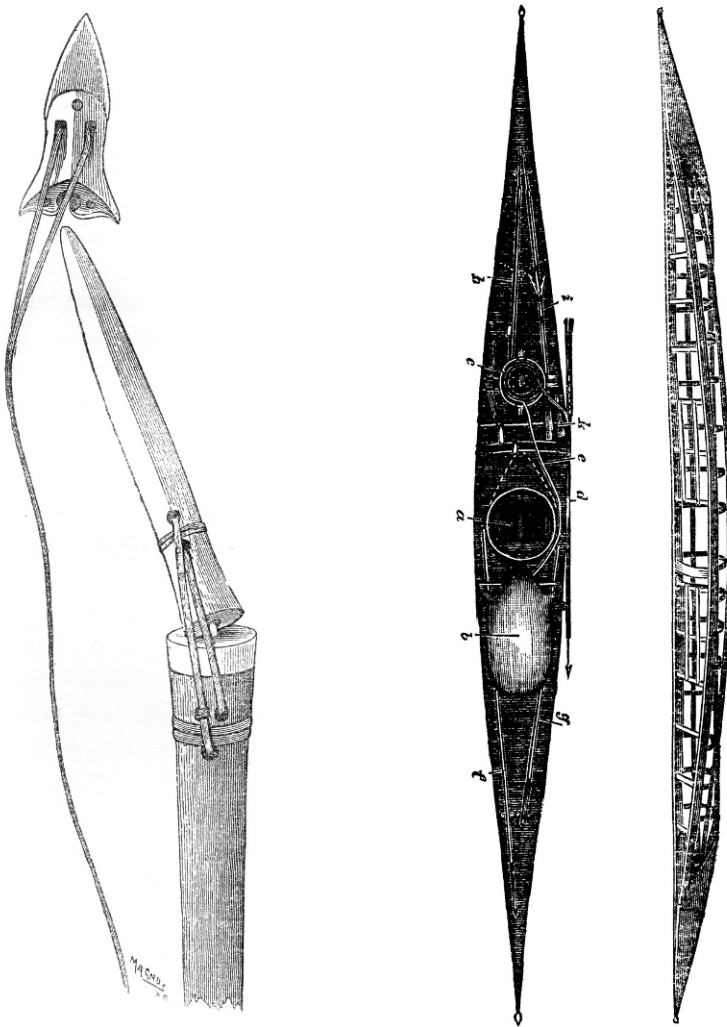


Abb. 3.5.3 Harpune und Kajak der Inuit

Die Harpune der Inuit besteht aus dem Schaft, dem damit durch ein Riemengelenk verbundenen Knochenzapfen aus Walroßzahn und der Harpunenspitze aus Walroß- oder Narwalzahn mit der Fangleine aus Haut von Walroß oder Seehund. Das Holzgerippe des Kajaks wurde früher aus leichtem Treibholz gefertigt und außen mit Leder aus dem Fell von Seehunden oder Klappmützen überzogen. Die Schrägen an Bug und Heck bilden mit dem Boden des Kajaks einen stumpfen Winkel von rund 140° . [aus Fridtjof Nansen:

Eskimoleben. Leipzig und Berlin 1903]

einigermaßen rund. Sehr reich sind auch die Ausdrucksmöglichkeiten zum Beschreiben der Lage von Gegenständen in der Umgebung des Sprechenden, wofür wir im Deutschen im wesentlichen die Ausdrücke „hier“ und „dort“ verwenden. Doch sind diese Kategorien und ihre Anwendung bei den Inuit bisher noch wenig erforscht.

In beiden Sprachen entspricht die beträchtliche Variationsbreite der Kategorien den typischen, in der Natur auftretenden Formen. Sie ist aber auch geeignet zur Beschreibung der menschlichen Produkte jener Gesellschaften, wie Bögen, Messer, Schlitten oder Mokkasins. Diese Sprachprägungen lehren uns, daß die Erforschung früher geometrischer Begriffsbildung sich nicht allein auf visuelle Objekte konzentrieren darf (J. P. Denny in Kap. 6 „Cultural Ecology of Mathematics“ von [Closs 1986]).

Unmittelbarer ist ein Zusammenhang mit geometrischen Fähigkeiten, der Reisenden auffiel, die die Arktis am Ende des 19. Jahrhunderts bereisten. Das war die Fähigkeit der Inuit, sehr detaillierte Karten auch großer Gebiete von einigen hundert Kilometern Ausdehnung zu zeichnen – in den Schnee, oder mit dem Bleistift auf Papier. Die relative Lage der einzelnen Objekte und Richtungen war erstaunlich genau wiedergegeben. Was nicht stimmte, waren die absoluten Entfernungen. (Ergänzend fügten die Inuit detaillierte Beschreibungen markanter Stellen hinzu, die für die Orientierung auf ihren Wanderungen unentbehrlich waren.) Ihre geometrische Vorstellungskraft befähigte sie offenbar eher topologisch als metrisch zu denken. Es bliebe zu erforschen, ob nicht die Entfernungen zwischen eingetragenen Lokalitäten mehr durch die Zeit bestimmt waren, die sie zum Durchqueren des Weges benötigten, als durch die Länge der Wegstrecke selbst [Ascher 1991].

3.5.2 Die Hochkulturen der Azteken, Maya und Inka

Als Gemeinsamkeit dieser Kulturen tritt der Aufbau der Gesellschaften in Klassen hervor: Eine große Zahl von Landarbeitern wird beherrscht von einer kleinen Zahl von Aristokraten und Priestern. Daneben gab es Soldaten, die aus herausgehobenen Familien kamen, und eine kleine Mittelklasse von Handwerkern und Kaufleuten. Diese Sozialstruktur spiegelte sich vor allem in der Anlage der Städte und der Gestaltung von repräsentativen Monumentalbauten.

Azteken

Die Azteken bildeten den größten Stamm der Nahuatl-Sprachgruppe in Mexiko. Nach mehrjähriger Wanderung hatten sie 1325 (so geben ihre eigenen Quellen an) ihre Hauptstadt Tenochtitlán gegründet. Sie lag auf einer Insel

im Gebiet der heutigen Stadt Mexiko City und war im 15. Jahrhundert zum Zentrum der aztekischen Expansion geworden. Als Cortés 1519 dort ankam, beherrschte Tenochtitlán alle übrigen Städte. Die Macht teilten sich der König als Kriegsanführer und der Oberpriester, ein naher Verwandter, als eine Art Friedensfürst. Die Hauptwirtschaftsform war der Maisanbau, weshalb zu jedem Gehöft eine große Maisscheuer gehörte.

Die Azteken besaßen eine rebusartige Schrift, womit auch historische Ereignisse und Tributlisten festgehalten wurden. In der Kunst übernahmen sie vieles von vorausgegangenen Kulturen: Pyramiden- und Tempelarchitektur, Ballspielplatzanlagen, Steinschneidekunst und Goldverarbeitung. Als besondere aztekische Leistung gilt der zwischen 1476 und 1520 aus dem gewachsenen Felsen herausgehauene Tempel von Malinalco im Hochland von Mexiko. Der als Drachengestaltete Eingang führt in das kreisrunde Innere (Durchmesser 5,20 m), wo sich an der umlaufenden Bank und dem Tempelboden Tierabbildungen finden, die auf die aztekischen Kriegerorden hinweisen. Reste der alten Aztekenkultur haben sich in abgelegenen Tälern bis heute erhalten. Artefakte lassen erkennen, daß vor der Ausführung von Malereien und Skulpturen die Objekte von talentierten Aztekenkünstlern in ihrem räumlichen Zusammenhang geplant und skizziert wurden, bevor sie — vermutlich von weniger begabten Handwerkern — umgesetzt wurden. Dabei bedienten sie sich simpler geometrischer Hilfsmittel. Spuren des Gebrauchs einfacher Zirkel konnten an Objekten nachgewiesen werden. Eine überlieferte Liste von Handwerkszeug aztekischer Baumeister nennt neben dem Zirkel auch das Quadrat (einen rechten Winkel?), das Senkblei, ein Richtscheit, die Maurerkelle und den Keil. Lange bevor sich die Azteken in Mexiko niederließen, stand in der Nachbarschaft eine der bedeutendsten Ruinenstädte Mesoamerikas in Blüte: Teotihuacán, 40 km nördlich von Mexiko-City gelegen. Sie war ehemals Hauptstadt eines großen Reiches, das um 600 seinen Höhepunkt erlebte; zwischen 650 und 750 wurde die schachbrettartig angelegte Stadt aufgegeben. Einige typische Charakteristika seien kurz skizziert, bevor die Aztekenhauptstadt Tenochtitlán vorgestellt wird. Der im Zentrum von Teotihuacán angelegte zeremonielle Bereich wird beherrscht von den Pyramiden der Sonne und des Mondes und ist um eine zentrale, von der Pyramide des Mondes ausgehende Prozessionsstraße, die etwa 44 m breite und 5 km lange Straße der Toten, herum angeordnet. Die über 22 Quadratkilometer ausgedehnte Stadt, die schon in den letzten vorchristlichen Jahrhunderten stark anwuchs, erlebte ihre Blütezeit vom ersten bis zur Mitte des siebten Jahrhunderts. Sie beeinflusste auch andere in der frühklassischen Periode (ca. 300–550) errichtete Tempelanlagen in Mesoamerika. Der Name Teotihuacán bedeutet „Ort der Götter“. Die Sonnenpyramide ist ca. 61 m hoch, hat eine basale Seitenlänge von 213 m und einen Rauminhalt



Abb. 3.5.4 Sonnenpyramide in Teotihuacán (Mexiko)

Die Stufenpyramide mit dem monumentalen Aufgang stammt aus der klassischen Periode der Teotihuacán-Kultur (100–600 n. Chr.) vor der Herrschaft der Azteken. [Foto H.-W. Alten]

von rund einer Million Kubikmeter (Abb. 3.5.4). Sie ist über einer durch einen langen Tunnel zugänglichen Basalthöhle errichtet, die als Eingang zur Unterwelt angesehen wurde. Mit ihr verknüpft sind Mythen über die Entstehung von Sonne und Mond und die Zyklen der Zeit; auch sollen dort die Wasser- und Regengeister hausen.

Über die Motivation für die Planung und Ausführung dieser gewaltigen städtebaulichen Struktur sind verschiedene Vermutungen angestellt worden. Es handle sich nicht um eine „rationale“ Stadtplanung, vermuten die einen, sondern um das nachträgliche Bemühen, die wichtigsten zeremoniellen Gebäude sinnvoll miteinander zu verbinden, wobei astronomisch bedeutsame Ereignisse die Grundrichtungen vorgaben. Andere sehen in der Anlage die Spiegelung der zentralisierten, hierarchisch aufgebauten Herrschaft, die mehr als 100 000 Einwohner verschiedener sozialer Schichten integrativ zusammenhalten mußte. Diesem Ziel habe die Verbindung von religiösen und zivilen Gebäuden in einer einheitlich konzipierten Anlage in erster Linie gedient. Sicher haben Kunst und Architektur Teotihuacáns, in Verbindung mit den dort ausgeübten kulturellen Riten, das Bewußtsein der Zusammengehörigkeit bei der Bevölkerung geschärft.

Auffällig ist das auch bei anderen Anlagen zu findende, geometrisch angelegte „Talud-Tablero“-Profil in der Architektur der Wände der Gebäude: der Wechsel von geneigten Flächen und vertikalen Paneelen. Es ist schon in vorchristlicher Zeit nachweisbar und wiederholt sich, sich nach oben verjüngend, in den Pyramidenbauten. Die Paneele boten Raum für reichhaltige Ausgestaltung durch (teils stark hervorspringende) Skulpturen. (J. K. Kowalski in Kap. 4 „Natural Order, Social Order, Political Legitimacy, and the Sacred City“ in [Kowalski 1999])

Nun zur Hauptstadt Tenochtitlán des Aztekenreiches. Der große Tempelbezirk darin bildete ein Rechteck von 350 x 300 m. Darauf standen neben dem Haupttempel (Templo Mayor, Pyramide der Sonne) mehrere kleinere Tempel und weitere sakrale Anlagen. Man hat den großen pyramidenförmigen Tempel von Tenochtitlán als das kosmische Zentrum des aztekischen Universums bezeichnet (E. M. Moctezuma in Kap. 9 „The Templo Mayor of Tenochtitlan“ in [Kowalski 1999]), weil seine Bestandteile (z.B. die Opferstätten) mit den mythischen Gottheiten der Azteken in Verbindung gebracht werden können. Der obere, heilige Bereich fußte auf einer ausgedehnten Plattform, die den irdischen Bereich symbolisierte. Unter der Pyramide, die mehrfach erweitert wurde, entdeckte man eine unterirdische Quelle. Der dort befindliche Teil des riesigen Bauwerks war der Unterwelt, dem Reich der Toten, zugewiesen, so daß die drei von den Göttern geschaffenen Welten, die himmlische, die irdische und die Unterwelt sich symbolisch im stufenförmigen Aufbau der Sonnenpyramide wiederfanden. Der eigentliche Tempelbezirk war durch eine „Schlangenmauer“ – eine große, aus mächtigen behauenen Quadern mit plastisch herausgehaue- nen Schlangenköpfen bestehende Mauer – vom profanen Bereich getrennt. Reste solcher Mauern fanden sich auch an anderen Orten. Schon der Vergleich dieser beiden großen Tempelanlagen verdeutlicht die Gemeinsamkeiten, die man auch in anderen heiligen Stätten der Azteken und der ihnen vorangegangenen oder parallel entwickelten Kulturen wiederfindet.

So stammt der den Chichimeken zugeschriebene Kern der Pyramide von Tena- yuca (Abb. 3.5.5) vor den Toren von Mexiko-City schon aus dem 13.Jh. Dem Brauch altmexikanischer Völker entsprechend wurde sie im Abstand von je- weils 52 Jahren – einem „mexikanischen Jahrhundert“ – viermal ummantelt, zuletzt unter der Herrschaft der Azteken im Jahre 1507. Wie die Maya rech- neten die Azteken im Vigesimalssystem (Basis 20) und teilten demzufolge in ihrer für Aussaat und Ernte so wichtigen Kalenderrechnung das Sonnenjahr in 18 Monate à 20 Tage und 5 „leere“ Tage. Die Tage eines Monats erhielten Namen, deren 20 Glyphen auf dem berühmten Kalenderstein (Abb. 3.5.6) in



Abb. 3.5.5 Tempelpyramide von Tenayuca
[Foto H.-W. Alten]



Abb. 3.5.6 Kalenderstein der Azteken
(Museo Nacional de Antropología, Mexiko-City) [Foto H.-W. Alten]



Abb. 3.5.7 Schlangenfries am Coatepantli in Tollán (Tula, Mexiko)

[Foto H.-W. Alten]

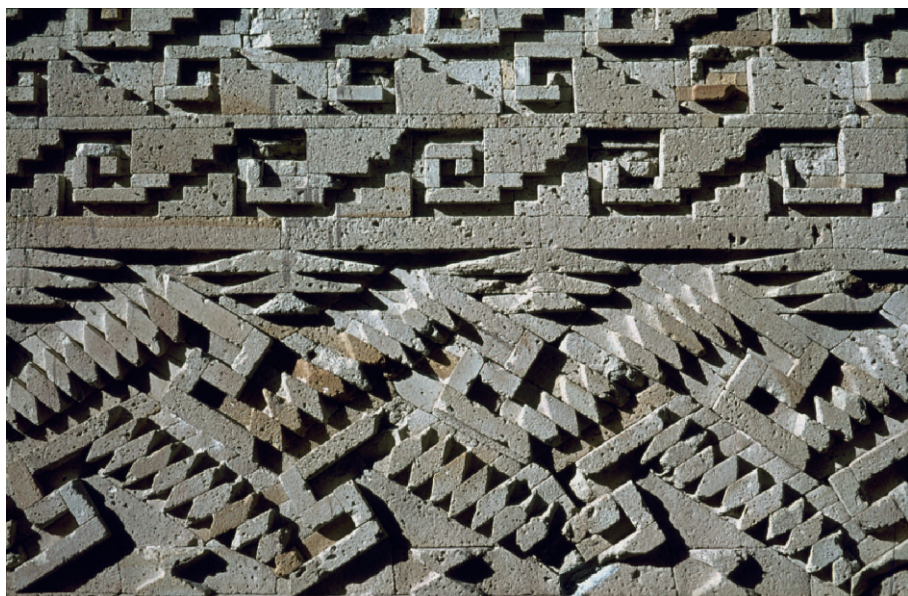


Abb. 3.5.8 „Steinmosaik“ im Palast des Großen Sehers in Mitla (Mexiko)

[Foto H.-W. Alten]

einem Kreisband um die von den Symbolen der vier vorangegangenen Weltzeitalter eingeschlossenen Sonne dargestellt sind. Die Tage eines Sonnenjahres wurden durch ihre Namen und die Nummer des Monats (bzw. einem Symbol für die 5 leeren Tage) gekennzeichnet. Daneben rechnete man im „rituellen“ Jahr von 260 Tagen, eingeteilt in 13 Perioden à 20 Tage, ebenfalls bezeichnet durch Tagesnamen und Nummer der Periode. Wegen $kgV(260, 365) = 18980 = 52 \times 365$ wiederholte sich die gleiche Konstellation beider Kennzeichnungen eines Tages erst nach 52 Sonnenjahren – eine Erklärung für das „mexikanische“ Jahrhundert und die Ummantelung von Pyramiden. Auch die gefiederte Schlange als Symbol des Gottes Quetzalcoatl findet sich in vielen Kulturen Mesoamerikas. Mythen berichten vom Großen König Quetzalcoatl, der den Tolteken im 10. Jh. die Kultur brachte. Ihre Tempelstadt Tollán (heute Tula) umschließt eine Mauer, deren mittlerer Ornamentfries den Zug von Schlangen mit Totenschädeln im weit geöffneten Rachen zeigt (Abb. 3.5.7). Solche „Schlangenmauern“ schmücken auch das toltekische Teotihuacán, den Tempel der gefiederten Schlange in Xochicalco sowie den Tempel auf der Pyramide des Kukulcan und den Tempel der Krieger im von Tolteken und Maya geprägten Chichén Itzá auf Yucatán.

Rein geometrische Ornamente überziehen die Mauern im Palast des Großen Sehers in der Tempelstadt Mitla (Abb. 3.5.8). Die mosaikartigen Bänder mit Stufenmäandern bestehen nicht aus Mosaiksteinchen, sondern wurden aus den sorgfältig aneinander gefügten Steinplatten herausgemeißelt. Ihre Muster zeigen deutliche Verwandtschaft mit der Textilweberei. Sie stammen von den Mixteken, welche die Zapoteken zwischen 1000 und 1400 im Hochtal von Oaxaca verdrängten und deren seit dem 5. Jh. v. Chr. entwickelte Hochkultur auf dem Monte Albán ablöste.

Maya

Die voreuropäische Kultur der Maya entwickelte sich ab 1000 v. Chr. in den Tiefländern von Nord-Guatemala und der Halbinsel Yucatán und in angrenzenden Gebieten. Sie gilt als künstlerischer und wissenschaftlicher Höhepunkt der indianischen Kultur. Mittelpunkt der weitläufig angelegten Städte bildeten die steinernen Tempel und Paläste, oft auf hohen künstlichen Stufenpyramiden errichtet. Inwieweit deren Anlage nach astronomischen Gesichtspunkten erfolgte, ist noch nicht gesichert. Jedenfalls lagen astronomische Beobachtungen dem Kalender der Maya zugrunde: ein Sonnenjahr zu 18 Monaten von je 20 Tagen und fünf Schalttagen. Ihre Schrift, eine Mischung aus Silben-, Wort- und Bilderschrift, ist in vielen Glyphen der klassischen Zeit (300–950) in Steinreliefs erhalten. Aus nachklassischer Zeit (1000–1500) sind drei Codi-

ces (Handschriften) überliefert, die auch Zahlen und kalendarische Angaben enthalten. Der Höhepunkt der Mayakultur war jedoch schon überschritten, als die Spanier mit ihr in Berührung kamen.

Auffällig ist die Bevorzugung der Symmetrie in Skulpturen wie Bauwerken der Maya, oft um eine zentrale Achse herum angelegt. Es wird vermutet, daß bei der Komposition von Stelen in Tikal mit der Überlagerung von gleichschenkligen und pythagoreischen Dreiecken gearbeitet wurde, doch gibt es dafür bisher keine stichhaltigen Beweise. Da die Monumente durch die Witterung häufig stark gelitten haben, ist z.B. der Nachweis des Auftretens exakter Winkel (wie sie bei durch kleine Zahlen bestimmten pythagoreischen Zahlen vorkommen müßten) in vielen Fällen nicht mehr möglich. Methodisch stellt sich ohnehin die Frage, ob eine erkennbare geometrische Struktur den Artefakten vom heutigen Forscher nicht nur auferlegt, sondern vom Hersteller schon bewußt eingeplant wurde.

Das gilt auch für die Planung von Monumentalbauten wie Tempeln und Verwaltungsgebäuden und deren relative Positionierung zueinander. Man hat das für die Anlagen von Tikal (Abb. 3.5.9, 3.5.10) und Copán untersucht. So konnte z.B. für Tikal eine exakte Ost-West-Linie vom Torweg des Tempels I (erbaut um 700) zum Torwegs des Tempels III (erbaut um 810) nachgewiesen werden. Sie müßte mittels astronomischer Beobachtungen vor der Errichtung des Tempels III festgelegt worden sein. Die Orientierung der Fassaden dieser Tempel selbst weicht jedoch um 9° bzw. 18° ab. Hierfür müßte eine andere (z.B. astronomische) Erklärung gefunden werden. Rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke sowie parallele Linien lassen sich ebenfalls im Plan von Tikal nachweisen. Bei der Anlage von Copán könnten markante Punkte wie Altäre, Stelen, Plattformen (z.B. Ballplätze) oder Felsenreliefs als Orientierungspunkte gedient haben.

Für astronomisch bestimmte Ausrichtungen öffentlicher Gebäude und Anlagen gibt es starke Indizien. Dabei war offenbar nicht nur der Sonnenlauf maßgebend, sondern auch die Grenzlage des Aufgangspunktes der Venus; dieser sonnennahe Planet nahm in der Kosmologie der Maya einen besonderen Platz ein. Solche astronomischen Gesichtspunkte könnten erklären, weshalb rein rechtwinklige Anlagen, wie sie uns im Zentrum von Teotihuacán begegneten, bei den Maya eher selten sind und oft durch scheinbar irreguläre Plazierungen unterbrochen werden.

Imposante Beispiele der Baukunst der Maya finden sich auch in der Ruinenstätte Uxmal. Sie liegt auf der Halbinsel Yucatán in Mexiko, war zwischen dem 7. und 11. Jahrhundert besiedelt und wird als eines der wichtigsten Maya-Zentren angesehen. Das sog. Haus der Nonnen wurde um einen großen, nahezu



Abb. 3.5.9 Die nördliche Akropolis von Tikal (Guatemala)
[Foto H.-W. Alten]



Abb. 3.5.10 Pyramide II von Tikal (Guatemala)
[Foto H.-W. Alten]



Abb. 3.5.11 Haus der Nonnen in Uxmal (Yucatán, Mexiko)

[Foto H.-W. Alten]



Abb. 3.5.12 Pyramide des Magiers in Uxmal (Yucatán, Mexiko)

[Foto H.-W. Alten]

quadratischen Platz herum angelegt und scheint kosmologische Vorstellungen zu versinnbildlichen (Abb. 3.5.11). Die in mehreren Bauabschnitten errichtete, gestufte Pyramide des Magiers besitzt einen nahezu elliptischen Grundriß und trägt mehrere Tempel (Abb. 3.5.12).

Als Meisterstück der Mayaarchitektur aber gilt der (teilweise rekonstruierte) Gouverneurspalast. Er wurde im späten 9. und frühen 10. Jahrhundert während einer wirtschaftlichen Blütezeit errichtet. Er diente zugleich als Residenz der Elite wie als Zentrum der Verwaltung und ist das herausragende unter den vielen eindrucksvollen Gebäuden in diesem weitläufigen Bezirk (Abb. 3.5.13). Der Palast selbst steht auf einer Stufung von vier Plattformen, so daß er weithin sichtbar war und eine Höhe erhielt, die vergleichbar ist mit der einiger Pyramidentempel auf dem Gelände. Am fast 100 Meter langen, rechtwinkligen Bau (teilweise rekonstruiert) fällt zuerst die gewaltige Masse von großen, sauber behauenen Steinblöcken in der einheitlichen Gliederung der ausgedehnten Längsfront auf. Sie ist durch zwei hohe, in spitzen Dreiecken endende Eingänge dreigeteilt. Jeder Teil besitzt kleinere, rechteckige Zugänge, wodurch die gesamte Längsfront symmetrisch gegliedert ist; die Proportionsfolge 2-7-2 springt unmittelbar ins Auge. Aufgesetzt auf die glatte Quaderwand ist eine weitere, höhere Fassadenwand, die durch wundervolle Beispiele der Skulpturkunst der Maya verziert ist. Die Gestaltung weist strenge Symmetrien auf. Sie enthält Quadrate, große und kleine, gegeneinander versetzte Rechtecke mit Betonung der Diagonalen, unterstreicht aber dennoch durch klare, netzartige Gliederung die Monumentalität der Gesamtansicht. Eigenartig sind die in Rechtecke oder Quadrate eingesetzten, plastisch hervortretenden Spiralen, die aus horizontalen und vertikalen Teilstücken zusammengesetzt sind, also keine Krümmungen aufweisen. An der benachbarten Pyramide des Magiers fällt der Blick auf ein aus diagonal verlaufenden Rauten gebildetes Gitterwerk, das — wie die Spiralen — zwischen die charakteristischen Skulpturen der Maya eingepaßt ist. Auch an anderen Gebäuden finden sich ähnliche netzwerkartige Strukturen und der Wechsel zwischen Feldern, die geometrische Muster enthalten, und solchen, die mit Skulpturen ausgefüllt sind (Abb. 3.5.14).

Besonders eindrucksvolle Zeugen der Maya-Kultur finden sich in Chichén Itzá im Norden der Halbinsel Yucatán. Sie entstanden, als das schon 432 v.Chr. gegründete Chichén im 10.Jh.n.Chr. vom Mayastamm der Itzá gemeinsam mit den aus Tollán vertrieben Tolteken neu gegründet wurde. Die große Tempelpyramide des Kukulcan (Abb. 3.5.15; kuk = Quetzal, ul = Feder, an = Schlange) und der Tempel der Krieger bestätigen durch ihre geometrische Gestalt und das von Schlangenköpfen beherrschte Dekor die Verwandtschaft mit



Abb. 3.5.13 Palast des Gouverneurs in Uxmal(Yucatán, Mexiko)
[Foto H.-W. Alten]



Abb. 3.5.14 Ornamente und Rundplastik am Haus der Nonnen in Uxmal
[Foto H.-W. Alten]



Abb. 3.5.15 Pyramide des Kukulcan in Chichén Itzá(Yucatán, Mexiko)
[Foto H.-W. Alten]

der toltekischen Kultur im Hochland, während ein als Observatorium genutzter Rundbau – wegen der Wendeltreppe im Innern von den Spaniern Caracol (Schnecke) genannt – steinerner Zeuge für die hoch entwickelten astronomischen Beobachtungen und Berechnungen der Maya ist.

Die Architekten dieser großartigen Bauwerke müssen ein ausgeprägtes Gefühl für geometrische Formen, die Wirkung von Symmetrien als Elemente der Gestaltung von Bauwerken und ihrer dekorativen Verzierung sowie ein besondere Gabe für eindrucksvolle architektonische Kompositionen besessen haben [Kowalski 1987].

Inka

Das Inkareich, ein indianischer Staat im westlichen Südamerika, existierte etwa von 1200 bis 1532, dem Jahr, in dem der Inka Atahualpa von Francisco Pizarro in Cajamarca gefangen genommen wurde. Dann begann mit der Eroberung durch die Spanier die Zerstörung der Inkakultur. Das Gebiet reichte von der Pazifikküste bis in die Gebirgsgegenden der Anden und in Nord-Süd-Richtung von Ecuador bis Mittelchile. Es war ursprünglich von sehr unterschiedlichen Volksgruppen bewohnt. Seit etwa 1400 setzten sich die Inka durch und errichteten einen straff organisierten Staat. Die Hauptstadt war Cuzco, am Ostrand der Anden unweit vom Äquator gelegen (heute: Peru). Unter dem an der Spitze stehenden Inka verwalteten vier Vizekönige die vier Reichsviertel. Zwar gab es eine gemeinsame Sprache, doch im Gegensatz zu den Maya besaßen die Inka keine Schrift. Artefakte bilden daher die einzige originale Quelle für das Studium ihrer Kultur; hinzu treten die Berichte der spanischen Eroberer. Bemerkenswert ist die Entwicklung eines einmaligen, höchst komplexen Systems von farbigen Knotenschnüren (Quipus) zum Aufzeichnen von statistischen Angaben. Die mathematischen Elemente dieses symbolischen Systems bilden Zahlen, räumliche Konfiguration und Logik.

Cuzco wurde im 15. Jahrhundert neu strukturiert, wobei der ideale Plan räumlicher Beziehungen den natürlichen Gegebenheiten angepaßt werden mußte. Die Stadt war in vier Teile gegliedert. In jedem von ihnen lebten drei Großfamilien, die einen gemeinsamen Vorfahren (einen früheren Regenten) hatten. Jedes der Viertel war verantwortlich für in der Umgegend liegende Siedlungen weiterer Großfamilien; dabei trennten ideale, radial von der Hauptstadt ausgehende Linien die Zuständigkeitsbereiche voneinander. Hier, wie auch andernorts, symbolisierte die geometrische Struktur die Herrschaftsverhältnisse. An den großen Verbindungsstraßen legten die Inka Vorratslager an, Gruppen von Getreidespeichern, jeweils ergänzt durch Verwaltungs- und Arbeitsgebäude.



Abb. 3.5.16 Zyklopische Mauer in Cuzco (Perú)

Wahre Wunderwerke an Präzision haben die Baumeister der Inka mit den Mauern aus gigantischen, polygonalen Steinblöcken in der Hauptstadt des Inkareiches geschaffen.[Foto H.-W. Alten]

Auch dies geschah ganz methodisch durch massenweise Wiederholung desselben Grundmusters. In gleicher Weise wurde das Schema für Wohnhäuser, die etwa um eine Platz herum errichtet wurden, unverändert von Einheit zu Einheit repetiert. Auch die Erweiterung von Städten geschah nach diesem Muster: ein neu angelegter Bezirk war praktisch eine Kopie schon vorhandener.

Die öffentlichen Bauten und Tempel wurden aus großen, exakt behauenen polygonalen Blöcken ohne Mörtel errichtet (Abb. 3.5.16). Obgleich das Grundmuster das Quadrat oder Rechteck war, variierten die Blöcke in Größe und Gestalt und gaben dadurch den Mauern zusätzliche Festigkeit. Für einfache Gebäude verwendete man an der Sonne getrocknete Lehmziegel.

Die Tendenz, vorhandene Muster so oft wie erforderlich zu wiederholen, zeigt sich auch in der Keramik der Inka. Denn die Dekorationen der Tongefäße wiederholen die meist aus kleinformatigen geometrischen Mustern bestehenden Elemente, bis ein Streifen oder eine Fläche vollkommen damit angefüllt ist. Diese Elemente können Quadrate, Dreiecke, Rechtecke, Trapeze, parallele oder diagonal verlaufende Linien oder Kreise sein, auch ineinander verschach-

telt. Spiegelungen, Doppelspiegelungen in vertikaler wie horizontaler Richtung und Rotationssymmetrien treten hier ebenso auf wie bei der Gestaltung von Bauwerken.

So ist die Trapezform des Tores zum Tempel in Machu Picchu (Abb. 3.5.17, re) ein Kennzeichen der Inka-Architektur und findet sich in verschiedenen Größen in Türen, Fenstern und Nischen. Die Inka-Festung Machu Picchu (Abb. 3.5.17, li) ist die wohl spektakulärste Anlage der Baumeister des Inkareiches. Sie wurde erst 1911 von Hiram Bingham zwischen den steilen Felswänden des Urubambatales entdeckt, diente dem Schutz der Hauptstadt Cuzco und wird überragt vom schroffen Felskegel des Huayna Picchu, auf dessen Gipfel Gebäude letzte Zuflucht boten und Terrassen den Anbau von Gemüse zur Verpflegung der Flüchtlinge ermöglichten. Die auf geometrischen Überlegungen beruhenden und mit gewaltigem Aufwand hoch entwickelter Technik gebauten Terrassen ziehen sich auch an den steilsten Hängen in der wilden Bergwelt zu schwindelnder Höhe hinauf (Abb. 3.5.18). Mit ihrer Hilfe konnte die Versorgung der wachsenden Bevölkerung sichergestellt werden.

Die aus Wolle oder Baumwolle gefertigte Kleidung spielte eine wichtige Rolle in der Kultur der Inka, ihr Wechsel markierte wichtige Abschnitte eines Menschenlebens und war mit zeremoniellen Handlungen verbunden. Hauptmuster der Ponchos waren kleine Rechtecke mit geometrisierenden Mustern [Ascher 1981].

Ein interessantes Beispiel geometrischer Dekoration liefern die Streifenornamente auf aus Grabfunden stammenden Tongefäßen der Inka. Die Muster, zumeist aus einfachen, geradlinig begrenzten Elementen bestehend, wiederholen sich in den Streifen und können in einer oder zwei variablen Farben eingefärbt sein. Meistens sind diese Farben fest mit dem Grundmuster verbunden, weshalb die Einfärbungen nicht auf neue Symmetriegruppen führen. Sowohl Translations- wie Rotationssymmetrie finden sich häufig, horizontale oder Gleitspiegelungen sind selten. Neben einfachen Streifen kommen auch Doppelstreifenmuster vor, z.B. gebildet aus trapezförmigen Grundelementen, die gespiegelt oder durch Farbumkehrung abgesetzt sind.

Trotz dieser Vielfalt weisen die Streifenmuster, die bisher untersucht wurden, aber nicht alle dabei möglichen Symmetriegruppen auf. Die sieben Grundsymmetriegruppen führen bei Verwendung von zwei Farben auf 17 weitere; diese sind jedoch nur teilweise in den Streifenornamenten der Inka realisiert worden. Bedeutsamer freilich als diese mathematische Unvollkommenheit ist das Interesse der Künstler und Handwerker der Inkakultur an solchen Dekorationen, die ja nicht einer praktischen Notwendigkeit entspringen, sondern von spielerischer Freude der Schöpfer zeugen [Ascher 1991].



Abb. 3.5.17 Inka-Festung und Tempeltor von Machu Picchu (Perú)
[Foto H.-W. Alten]



Abb. 3.5.18 Terrassen bei Pisac (Perú)
[Foto H.-W. Alten]

Insgesamt rechtfertigen die bisherigen Forschungsergebnisse die Annahme, Geometrie sei als integrativer Bestandteil des Konglomerats von Religion, Technik und Wissenschaft in den zentralamerikanischen Kulturen zu betrachten (F. Vignette in Kap. 13 „In Search of Mesoamerican Geometry“ von [Closs 1986]).



Abb. 3.5.19 Tonvase der Naszca-Kultur mit Ornamentbändern,
aus: [Auktionskatalog Richter & Kafitz, 2006, Nr. ET 041]

3.6 Aufgaben zu 3

Aufgabe 3.1.1: Länge einer chinesischen Stadtmauer

Wörtlich lautet die Aufgabe 20 des 9. Kapitels der „Neun Bücher“ [Vogel K. 1968, 99–100] (vgl. Abb. 3.1.3):

„Jetzt hat man eine Stadt mit quadratischem Grundriß. Man weiß nicht, ob die Quadratseite groß oder klein ist. In der Mitte jeder Seite ist ein offenes Tor. Geht man aus dem Nordtor 20 Schritte heraus, dann hat man einen Baum. Geht man aus dem Südtor 14 Schritte heraus, biegt ab und geht nach Westen 1775 Schritte, dann erblickt man den Baum. Frage: Wie groß ist die Quadratseite der Stadt? Die Antwort sagt: 250 Schritte.“

- Man skizziere die Situation der quadratischen Stadt mit dem Baum und dem Weg des Beobachters, wobei man für den Weg nach Norden die Größe a , für den Weg nach Süden b und für den Weg nach Westen c setze.
- Wie gewinnt man am besten die im Text angegebene Gleichung, in der x die Länge (in Schritten) einer Seite der Stadtmauer bezeichnet?
- Wie hängen p, q von a, b, c ab?
- Läßt sich die quadratische Gleichung auch als Beziehung zwischen Flächen interpretieren?
- Man löse die quadratische Gleichung und versuche dann, die im Text gegebene Regel zu verstehen (die chinesischen Mathematiker stellten die Koeffizienten der Gleichung durch Rechenstäbchen dar und vollzogen mit ihnen die erforderlichen Operationen): „Die Regel lautet: Mit der Zahl der Schritt, die man aus dem Nordtor herausgegangen ist, multipliziere die Zahl der Schritt, die man nach Westen gegangen ist; verdoppele es, dann ist es der Dividend. Addiere die Schrittbeträge, um die man aus dem Südtor und dem Nordtor herausgegangen ist, es ist der ergänzte Divisor. Ziehe daraus die Quadratwurzel; dann gibt es die Quadratseite der Stadt.“
- Es ist offenkundig, daß es hier nicht um ein der Praxis entnommenes Problem handelt. Vielmehr ist ein geometrischer Lehrsatz (der sich auch bei Euklid findet) in interessanter Weise ‘eingekleidet’ worden. Welche Bestandteile mußte der Autor der Flächenbeziehung hinzufügen?

Aufgabe 3.1.2: Die Methode der doppelten Messung nach der „Mathematischen Inselfsammlung“

Das im Holzschnitt der Abb. 3.1.3 dargestellte Verfahren wird in der ersten Aufgabe der Mathematischen Inselfsammlung folgendermaßen beschrieben ([Li/Dù 1987, 76–78], [Swets 1992, 19–20, 42–43]):

Beobachte eine Insel, deren Höhe und Entfernung unbekannt ist. Errichte zwei Meßlaten der Höhe $h = 3 \text{ zhang}$; die Entfernung zwischen beiden ist $d = 1000 \text{ bu}$. Die beiden Stangen und die (Spitze der) Insel sollen in einer Linie (vertikalen Ebene) liegen. Gehe $a_1 = 123 \text{ bu}$ von der ersten Stange zurück und beobachte die Spitze dieser Stange und die Bergspitze in einer Linie vom Boden aus; man sieht, daß die beiden zusammenfallen. Dann gehe $a_2 = 127 \text{ bu}$ von der zweiten Meßlatte aus zurück und beobachte die Bergspitze vom Boden aus: das Ende der zweiten Latte und die Bergspitze fallen zusammen. Man bestimme die Höhe der Insel und ihre Entfernung

von der ersten Stange. (Dem Leser wird aufgefallen sein, daß der Holzschnitt nicht genau die Beschreibung der Mathematischen Inselsammlung wiedergibt, sondern eine verbesserte Version: das Auge des Beobachters befindet sich nicht mehr am Erdboden, sondern an der rechten oberen Ecke der zusätzlich eingezeichneten Rechtecke. Er muß also jetzt beim Beobachten nicht mehr am Boden liegen, sondern kann in stehender Haltung beobachten. Dann geht natürlich seine Augenhöhe in die Rechnung mit ein. — Die weitere Beschreibung im Aufgabentext bezieht sich auf den primitiveren Fall.)

(Antwort:) Die Höhe der Insel ist $4\ li\ 55\ bu$, ihre Entfernung beträgt $102\ li\ 150\ bu$.

(Methode:) Multipliziere den Abstand d mit der Höhe h der Stangen, das ergibt den Zähler. Nimm die Differenz der Abstände der Beobachtungspunkte $a_2 - a_1$ als Nenner, durch den der Zähler zu dividieren ist. Zum Ergebnis addiere die Höhe der Stange; das Ergebnis ist die Höhe der Insel. — Um die Entfernung der Insel von der vorderen Stange zu finden, multipliziere man die Strecke a_1 , um die man von der ersten Stange zurückgegangen ist, mit dem Abstand d der beiden Stangen voneinander; das ergibt den Zähler. Nimm die Differenz der Abstände der Beobachtungspunkte $a_2 - a_1$ als Nenner, durch den der Zähler zu dividieren ist. Das Ergebnis ist die Entfernung der Insel von der vorderen Stange y .

(Die Buchstabenbezeichnungen fehlen natürlich in der Beschreibung). In Formeln ausgedrückt ergeben die Anweisungen:

$$x = \frac{d \cdot h}{a_2 - a_1} + h, \quad y = \frac{d \cdot a_1}{a_2 - a_1}.$$

- a) Man leite diese beiden Formeln ab.
- b) Man verallgemeinere sie auf den in der Abbildung gezeigten Fall, der die Augenhöhe des Beobachters berücksichtigt.

Aufgabe 3.1.3: Abschätzung des Kreisinhaltes nach Liu Hui

- a) Man mache sich anhand einer Skizze klar, was geometrisch die obere Schranke in Liu Huis doppelter Abschätzung bedeutet.
- b) Welche Grenzen für π ergeben sich, wenn man für f_{n+1} das Zwölfeck, für f_n das Sechseck einsetzt?
- c) Welcher der dabei nötigen Rechenschritte kann nicht exakt ausgeführt werden, erfordert also ein Abrundung? Muß diese Rundung nach oben oder unten vorgenommen werden, will man sicher gehen, daß man im Fall eines Polygons mit hoher Seitenzahl nicht mit der unteren Schranke über F hinaus kommt bzw. mit der oberen diesen Wert unterschreitet?

Aufgabe 3.1.4: Berechnung einer Dreiecksfläche nach Ch'in Chiu-shao

- a) Verifiziere, daß die Formel (3.1.5) der nach Heron benannten entspricht.
- b) Man versuche, eine geometrische Deutung dieser Formeln zu geben.

Aufgabe 3.1.5: Bestimmung eines quadratischen Feldlagers

- a) Man entwerfe eine Skizze des auf S. 121 beschriebenen Lagers.
- b) $BGFE$ sei die letzte rechte Spalte, die aus freigelassenen Quadraten besteht und die unter die letzte untere Zeile $DHIJ$ (die ebenfalls aus freigelassenen Quadraten gebildet wird) umgelegt wird. Das so aus dem Quadrat erzeugte Rechteck ist $ABKE'$.
- c) Wie ist die Verteilung der belegten Felder, wenn man davon ausgeht, daß die obere linke Ecke der Lagers von einer Kompanie eingenommen wird?

Aufgabe 3.2.1: Aufteilung eines kreisförmigen Landstückes

Man betrachte die Aufgabe b) von S. 134 [Smith/Mikami 1914, 66]:

- a) Welcher Wert für π wurde hier implizit verwendet?
- b) Welche Segmentaufteilung empfiehlt sich in diesem Fall?
- c) Läßt sich die Aufgabe mit Hilfe einer der von Heron diskutierten Formeln für die Fläche eines Kreissegments lösen (vgl. (2.5.5) und (3.1.2))?
- d) Was ergibt sich bei Anwendung der Integralrechnung?

Aufgabe 3.2.2: Bestimmung der Kugeloberfläche nach Kittoku und Takebe

Man führe die japanische Bestimmung der Kugeloberfläche aus der Differenz der Volumina zweier Kugeln modern als Grenzübergang durch. [Mikami 206/207]

Aufgabe 3.3.1: Indische Bruchdarstellung für $\sqrt{2}$

- a) Man leite die angegebene indische Bruchdarstellung für $\sqrt{2}$ mit Hilfe des babylonischen Verfahrens her.
- b) Auf wieviele Dezimalstellen ist der angegebene Wert genau?

Aufgabe 3.3.2: Verwandlung eines Quadrats in einen flächengleichen Kreis

Man führe die Konstruktion nach der in den Śulbasūtras (Schnurregeln) gegebenen Vorschrift aus.

- a) Gemeint ist, man solle $1/3$ der Differenz aus der Hälfte der Diagonalen d und der Hälfte der Seite s zur halben Seite addieren und damit einen Kreis um den Mittelpunkt des Quadrates zeichnen.
- b) Man berechne die Fläche des so konstruierten Kreises und überprüfe, um wieviel sie von der gegebenen Quadratfläche abweicht.

Aufgabe 3.3.3: Kreisquadratur nach den Schnurregeln

Die erste Regel macht deutlich, wie schwierig es oft ist, die sehr komprimierte Ausdruckweise der Verse zu verstehen. Gemeint ist in diesem Fall, die Quadratseite a ergebe sich aus dem Kreisdurchmesser d gemäß folgender Berechnung: $a =$

$$\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 8} \right) \right) \cdot d.$$

Man berechne die sich aus den beiden Vorschriften auf S. 148 ergebenden Näherungswerte von π .

Aufgabe 3.3.4: Berechnung der Kugeloberfläche nach Bhāskara II

Man betrachte den Ansatz von Bhāskara II allgemein:

- Man unterteile den Kreisumfang $2\pi r$ in n Teile ($\alpha = \frac{2\pi}{n}$), verwende für die Fläche eines der kleinen Trapeze die Bogenlänge längs des Meridians als Höhe und den Mittelwert der Bögen des oberen und unteren Breitenkreises als Breite. Dann summiere man die Dreiecksflächen am Pol und die Trapezflächen innerhalb eines halben Streifens vom Pol bis zum Äquator. Dieser Ausdruck ist zu verdoppeln und dann mit n zu multiplizieren.
- Schließlich wäre, modern betrachtet, der Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$, d.h. für $\alpha \rightarrow 0$ zu vollziehen. Man bestätige, daß sich so ergibt:

$$O = 4\pi r^2 \left(\int_0^{\pi/2} \sin \alpha \cdot d\alpha - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{2} \right) = 4\pi r^2.$$

Aufgabe 3.3.5: Kugeloberfläche nach dem Yuktibhāṣā-Text

Man berechne die Kugeloberfläche nach der Yuktibhāṣā-Beschreibung:

- Es seien r der Kugelradius, $r_1 < r_2 < r$ die Radien der beiden Parallelkreise der Länge $U_1 = 2\pi r_1$ bzw. $U_2 = 2\pi r_2$, die den Streifen begrenzen. Man stelle sich den Streifen als die Außenfläche einer aus der Kugel herausgeschnittenen Scheibe vor; sie wird als Kegelstumpf angenähert. Dessen Höhe sei h , der längs eines Längenskreises gemessene Abstand zwischen den beiden begrenzenden Kreisen sei s ($> h$).
- Man überlege sich, daß der abgewinkelte Streifen als Trapez der Höhe s und der gemittelten Länge $\frac{U_1+U_2}{2}$ betrachtet werden kann, und berechne dessen Flächeninhalt in Abhängigkeit von r und h . (Beachte zwei ähnliche Dreiecke, wenn vom Zentrum ein Radius r zu einem Punkt der Streifenmitte gezogen wird.)
- Man addiere die Außenflächen aller dieser Scheiben (Kegelstümpfe).

Aufgabe 3.4.1: Der Satz des Pythagoras bei al-Chorezmi

Man überlege sich, daß die Figur von al-Chorezmi für den Beweis des Satzes von Pythagoras in zweifacher Weise gedeutet werden kann (Abb. 3.4.1).

Aufgabe 3.4.2: Abū l-Wafāṣ Quadratkonstruktion mit fester Zirkelöffnung

Man führe Abū l-Wafāṣ Konstruktion eines in einen Kreis eingeschriebenen Quadrats durch (auch als „Konstruktion mit rostigem Zirkel“ bezeichnet).

- Gegeben ist ein (mit dem rostigen Zirkel gezeichneter) Kreis mit seinem Mittelpunkt S ; zeichne einen Durchmesser ASG ein. Markiere mit dem Zirkel die Bögen $\widehat{AZ}$, $\widehat{AE}$, $\widehat{GT}$, $\widehat{GH}$ und ziehe die Linien ZE und TH , die den Durchmesser ASG in I und K schneiden. Verbinde Z mit K und T mit I ; der Schnittpunkt dieser Verbindungslinien sei M . Nun zeichne den durch M und S gehenden Durchmesser ein, der den Kreis in D und B schneide. Dann ist $ADGB$ ein Quadrat.

- b) Man überlege sich, daß für den gleichen Kreis dieselbe Konstruktion auch mit einer anderen festen Zirkelöffnung durchgeführt werden kann.

Aufgabe 3.4.3: Siebeneckskonstruktion nach Abū l-Wafā

- a) Man konstruiere ein regelmäßiges Siebeneck nach der Vorschrift von Abu l-Wafā. Ist die Abweichung mit bloßem Auge zu erkennen?
- b) Um wieviel Prozent weicht die so gewonnene Seitenlänge des Siebenecks von der wahren ab?

Aufgabe 3.4.4: Siebeneckskonstruktion nach al-Kūhī

Man führe al-Kūhī's Siebeneckskonstruktion vollständig durch.

- a) Warum enthält das im Text beschriebene Dreieck ABC die Winkel α , 4α und 2α ?
- b) Wie groß sind die Winkel in den drei Teildreiecken des erweiterten Dreiecks AED ?
- c) Man leite die beiden für die Konstruktion zentralen Beziehungen $EB^2 = BC \cdot BD$ und $CD^2 = EB \cdot EC$ her.
- d) Zur Konstruktion der Parabel und Hyperbel gehe man der Einfachheit halber von der bereits nach Vorschrift durch B und C geteilten Strecke ED aus (zeichne sie horizontal etwa in der Mitte einer DIN-A4-Seite). In B errichte man eine Senkrechte nach oben: $BZ = CD$, und eine nach unten: $BF = BC$. Ergänze das Rechteck $EBZT$. Jetzt gilt:

$$FZ \cdot BC = (BC + ET) \cdot BC = TZ^2,$$

$$EC \cdot EB = (EB + BC) \cdot EB = (TZ + BC) \cdot TZ = ET^2.$$

- e) Gibt man $BC = m$ als feste Strecke vor und setzt $TZ = y$, $ET = x$, so stellt die erste Gleichung eine Parabel, die zweite eine Hyperbel dar. Bringe beide auf Normalform und zeichne sie in die Figur ein — von der Hyperbel wird nur der linke Ast benötigt. Dann folgen $EB = TZ = y_1$ und $CD = ET = x_1$ als Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Kurven. Also wurden zu einer gegebenen Strecke m die Längen der beiden anderen Strecken konstruiert, die zusammen ein zu Dreieck BCA ähnliches bilden. Folglich muß man, wie al-Kūhī bemerkt, zum Einbeschreiben eines regelmäßigen Siebenecks in einen gegebenen Kreis noch eine ähnliche Vergrößerung vornehmen.

Aufgabe 3.4.5: Berechnung der Kreisfläche nach Heron und al-Chorezmi

Heron hatte für die Berechnung der Kreisfläche aus dem Durchmesser die Vorschrift $F = d^2 - \frac{1}{7}d^2 - \frac{1}{14}d^2$ angegeben.

- a) Wie hängt sie mit dem Wert des Archimedes für π zusammen?
- b) Was steckt gedanklich hinter der Vorschrift al-Chorezmi's? Bedeutet sie eine „Verbesserung“ gegenüber der von Heron angegebenen Regel?

Aufgabe 3.4.6: Formeln von al-Chorezmi für das Kreissegment

- Handelt es sich bei der Berechnung des Kreisdurchmessers um eine Näherungsformel?
- Man versuche, für den ersten Fall (Segment kleiner als ein Halbkreis) eine heuristische Begründung der Formel zu geben.
- Was liefert die Formel in den beiden Extremfällen, in denen $p = 0$ bzw. $p = r$ ist?

Aufgabe 3.4.7: Das Iterationsverfahren al-Kaschis zur Berechnung $\sin 1^\circ$

Man verfolge den Anfang von al-Kaschis Berechnungsverfahren zur Bestimmung von $\sin 1^\circ$ im Sexagesimalsystem. Dabei ist zu beachten, daß er bei der Definition seiner Sinusfunktion einen Kreisradius 60 zugrundelegt und den Sinus als Strecke (die Halbsehne) versteht. Daher ist ein Wert nahe bei 1 zu erwarten (der zugehörige Kreisumfang ist $2\pi \cdot 60 \approx 360$). Ferner nimmt die Dreiteilungsgleichung, wenn man diese Sinusdefinition benutzt und sie durch $\text{Sin}\alpha$ von der üblichen unterscheidet, die Gestalt $\text{Sin}3\alpha = 3 \cdot \text{Sin}\alpha - 0;0,4 \cdot \text{Sin}^3\alpha$ an ($0;0,4 = \frac{0}{60} + \frac{4}{3600}$). Setzt man jetzt $x = \text{Sin}\alpha$ und mit al-Kaschi $\text{Sin}3^\circ = 3;8,24,33,59,34,28,15$, ergibt sich $3x = 3;8,24,33,59,34,28,15 + 0;0,4x^3$.

- Man überzeuge sich (unter Beschränkung auf die ersten Stellen), daß diese Gleichung umgeschrieben werden kann als

$$x = \frac{47,6;8,29,53,37,3,45 + x^3}{45,0}.$$

- Da ein Wert nahe bei 1 zu erwarten ist, setzt al-Kaschi $x = 1; a, b, c, \dots$ in die Gleichung ein, wo $a, b, c, \dots$ die folgenden Sexagesimalstellen darstellen, und zieht 1 davon ab: $0; a, b, c, \dots = \frac{47,6;8,29,53,37,3,45 + (1;a,b,c,\dots)^3}{45,0} - 1 = \frac{2,6;8,29,53,37,3,45 + (1;a,b,c,\dots)^3}{45,0}$. Die erste Sexagesimalstelle auf der linken Seite, a , muß der ersten Sexagesimalstelle rechts gleich sein. Wegen des großen Nenners hängt letztere nicht von a ab; es genügt zu berechnen $\frac{2,6;8,29,\dots+1^3}{45,0} = 0;2, [49 \text{ oder } 50]$, also $a = 2$.
- Im zweiten Schritt wird ganz entsprechend die Stelle b aus dem Ansatz $1;2, b, c, \dots = \dots$ berechnet. Man bestätige das Ergebnis $b = 49$. Al-Kaschi wiederholte dieses raffinierte Iterationsverfahren bis zur 9. Sexagesimalstelle!
- Setzt man $f(x) = \frac{47,6;8,29,53,37,3,45+x^3}{45,0}$, so erkennt man den hinter dem Verfahren stehenden Gedanken: die Funktion $f(x)$ wächst in der Nähe von 1 so langsam, daß die n -te Stelle von $f(x)$ nicht von der n -ten Stelle von x abhängt, sondern nur von den ersten $n - 1$ Stellen. Die Frage, ob dies generell gerechtfertigt ist, wird jedoch von al-Kaschi nicht angesprochen.

4 Geometrie im europäischen Mittelalter



375 – 568	Germanische Völkerwanderung
466	Zusammenbruch der römischen Herrschaft in Gallien
486 – 751	Fränkisches Reich der Merowinger
um 500	Angeln, Sachsen und Juten wandern in England ein
711	Araber überqueren die Meerenge von Gibraltar, erobern die iberische Halbinsel bis auf Asturien
718 – 1492	Reconquista (Rückeroberung) der iberischen Halbinsel
732	Sieg Karl Martells über die Araber bei Tours und Poitiers
756	Omajjaden gründen Reich (seit 929 Kalifat) von Córdoba
756	Konstitutierung des Kirchenstaates
800	Karl der Große wird in Rom zum Kaiser gekrönt
843	Vertrag von Verdun: Karolingerreich wird in drei Teile geteilt
870	Vertrag von Meersen: Lothars (mittleres) Reich wird aufgeteilt
ab 862	In Nowgorod herrschen Normannen (Waräger)
911	An der Seinemündung entsteht das Herzogtum Normandie
955	Schlacht auf dem Lechfeld (Ungarn zurückgeschlagen)
962	Otto I (d. Gr.) wird vom Papst zum Kaiser des Heiligen Römischen Reiches gekrönt
10. Jh.	Frühe romanische (ottonische) Baukunst
987 – 1328	Kapetinger regieren Frankreich
um 1000	Leif Eriksson entdeckt Nordamerika (Vinland)
1024 – 1137	Fränkisch-Salische Kaiser
1066	Schlacht bei Hastings, Normannen erobern England
1077	Gang Heinrichs IV. nach Canossa
1096 – 1270	Kreuzzüge
11./12. Jh.	Romanische Dome, Klöster und Skulpturen in Westeuropa
1130 – 1260	Normannisch-Staufische Herrschaft in Sizilien und Unteritalien
~ 1150 – 1535	Ausbreitung und Herrschaft der Hanse über die Ostsee
12./13. Jh.	Aufblühen oberitalienischer Städte (Pisa, Venedig, Genua, Mailand), Frühe Gotik in der Île de France
1138 – 1250	Herrschaft der Staufer in Deutschland
13./14. Jh.	Hochgotische Kathedralen in Westeuropa
1337 – 1453	Hundertjähriger Krieg zwischen England und Frankreich
1453	Untergang des oströmischen Reiches
15. Jh.	Spätgotik in Deutschland, England und Frankreich
1469	Vereinigung von Kastilien und Aragon durch Heirat der „Katholischen Könige“ Isabella und Ferdinand
1470	Moskau wird „Drittes Rom“
1480	Großfürst Iwan III. gründet das Zarentum in Moskau
1492	Eroberung Granadas, Ende der Reconquista, (Wieder-)Entdeckung Amerikas durch Kolumbus
Wissenschaft und Kunst im Mittelalter	karolingische Buchmalereien, Evangeliare und Wandmalereien in ottonischer, Glasmalereien in salischer, Fresken in staufischer Zeit, Blüte der Glasmalerei in der Gotik; Scholastische Philosophie (Albertus Magnus), Pflege von Kunst und Wissenschaft in Klöstern und Domschulen (Septem artes liberales), Gründung von Universitäten

4.0 Einführung

Als Epoche des europäischen Mittelalters soll hier die Zeit nach dem Zusammenbruch des Römischen Reiches unter den Stürmen der Völkerwanderung bis zur Renaissance zusammengefaßt werden. Unter dem Aspekt der Entwicklung auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiet bietet es sich an, mit dem Beginn des 15. Jhs. zu enden und nicht etwa erst mit seinem Ende, der Entdeckung Amerikas. Auf diese Weise können die beiden Neuerer in der Mathematik des 15. Jhs., Nikolaus von Kues und Regiomontanus, die folgende Periode eröffnen.

Schwieriger ist es, eine präzise Abgrenzung des Beginns des Mittelalters in der Entwicklung der Mathematik vorzunehmen. Abschnitt 3.8 des ersten Bandes, der auch eine Übersicht zur Entwicklung im europäischen Mittelalter enthält, zeigt schematisch die Hauptströme der Tradierung mathematischen Wissens (siehe dort Abb. 3.1): die griechisch-hellenistische Welt wirkte stark auf die islamischen Länder (die auch indisches Wissen weitergaben); deren Einfluß auf Europa im Mittelalter (vorwiegend über Sizilien und Spanien wirksam) wurde ergänzt durch über Ostrom (Byzanz) vermitteltes mathematisches Wissen der Antike. Doch auch das untergehende Weströmische Reich gab Reste der antiken Bildung und Wissenschaft direkt an das Mittelalter weiter. Dadurch ist es schwierig, ein eindeutiges Datum des Beginns für diese „mittlere“ Epoche festzulegen. In Hinblick auf die Geschichte der Mathematik mag es sinnvoll sein, dieses Kapitel mit dem 5. Jh. beginnen zu lassen.

4.1 Geometrie im frühen Mittelalter

4.1.1 Die Sieben Freien Künste

Fundamental für die nur langsam sich wieder verbreitende Lehre auf mathematischem Gebiet wurden einige spätrömische Werke, in welchen Einführungen in die sog. „*Artes liberales*“ oder „Sieben Freien Künste“ (oder wenigstens Teile davon) niedergelegt waren. Diese sieben Wissenschaften bestanden aus zwei Teilen: dem „*Trivium*“, gebildet aus Grammatik, Rhetorik und Dialektik (auch Logik genannt), und dem *Quadrivium* von Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik. Im Unterricht in den kirchlichen Schulen und an den Universitäten (seit dem 12. Jh.; vgl. Bd. 1, Abschnitt 6.3) bildete das *Trivium* (der dreifache Weg der sprachlich orientierten Fächer), das die erforderlichen Lateinkenntnisse vermittelte, die Basis aller Lehre. Das daran anschließende *Quadrivium* hatte die Aufgabe, in die Vierfalt mathematischer Wissenschaften einzuführen, die schon Platon im Anschluß an die pythagoreische Wissenschaftslehre als Bildungsgrundlage angesehen hatte.

Rückgriff auf Platon

Im „Staat“, gestaltet als ein Dialog zwischen Sokrates, Glaukon und anderen Gesprächspartnern, hatte Platon die hohen Anforderungen beschrieben, die an einen weisen Staatsmann zu stellen seien. Ganz oben steht die Philosophie, die wahre Wissenschaft, die zur reinen Erkenntnis (nicht zuletzt des Guten und Schönen) führt. Aber natürlich muß für Platon der Staatsmann auch die Kriegskunst beherrschen: „Unser Staatshüter ist nun ja doch Kriegsmann sowohl wie Freund der wahren Wissenschaft“. Sokrates fragt nach denjenigen Lehrgegenständen, die zur Vernunftkenntnis führen und damit den Weg zum Reich des wesenhaften Seins öffnen. Als erstes wird die Zähl- und Rechenkunst genannt — die Begründung sei hier übergangen. Dann einigt man sich auf die Geometrie als die zweite Wissenschaft. Wieder wird zunächst der Nutzen für den Heerführer angeführt: „um nämlich Lager abzustecken, feste Plätze einzunehmen, ein Heer zusammenzuziehen oder auszudehnen, sowie in betreff aller sonstigen Wendungen, die Heere nicht nur im Gefechte selbst, sondern auch auf ihren Märschen machen, wird es bei einem einen großen Unterschied machen, ob er Geometrie versteht oder nicht.“ Doch dafür würde „ein klein wenig Geometrie hinreichend sein.“ Zu prüfen ist daher, ob ihr umfassenderes und tieferes Studium „zur Werkstellung der leichteren begrifflichen Anschauung der Idee des Guten“ dienlich ist, betont Sokrates. Dies wird bejaht, da sie Erkenntnis des immer unveränderlichen *Seins* ist. Daher dürfen die Bürger, folglich erst recht die Lenker des idealen Staates, „in keiner Weise der Geometrie abhold“ sein. Hinzu kommen die Nebengewinne der Geometriekenntnis: erstens der praktische Gewinn für den Krieg, zweitens „wird außerdem bekanntlich in bezug auf jedes andere Lernen, um besser aufzufassen, ein himmelhoher Unterschied sein zwischen einem, der sich mit Geometrie befaßt hat, und dem, der es nicht getan hat“. Als dritte unentbehrliche Wissenschaft führt Platon/Sokrates dann die Sternkunde, als vierte die Lehre von den Harmonien ein; denn erstere öffnet die Augen für die Gesetzmäßigkeiten der Bewegungen am Himmel, letztere die Ohren für die sich in harmonischen Tönen offenbarenden Bewegungen. Daher sind „diese Wissenschaften mit einander verschwistert, wie die Pythagoreer behaupten“. (Ein Auszug findet sich im Anhang A.1, S. 569)

Martianus Capella

Der älteste erhaltene Abriß der durch Platons Darlegungen im Staat so hoch bewerteten und zugleich als Familie miteinander verknüpften Freien Künste stammt aus der Feder von Martianus Capella, nach 450 geschrieben: Über die

Hochzeit von Merkur und Philologie. In dieser, aus neun Büchern bestehenden neuplatonisch-philosophischen Allegorie beschrieb der Verfasser teils in Prosa, teils in Versen die Hochzeit des Gottes der Kaufleute und Handwerker mit der Philologie, d.h. mit der personifizierten Wissenschaft (mit Ausnahme der Philosophie). Als Gäste sind neben Göttern auch allegorische Figuren geladen wie die vier seit Platon vereinten Kardinaltugenden Prudentia (Weisheit), Temperantia (Mäßigung), Fortitudo (Tapferkeit) und Justitia (Gerechtigkeit). In den Büchern 3 bis 9 erscheinen der Reihe nach die sieben Artes als Brautjungfern, als Geschenke ihre Gelehrsamkeit darbietend. Das gab Martianus Gelegenheit, nüchtern im Handbuchstil den Lehrstoff dieser sieben Disziplinen vorzubringen. Da vollständig überliefert, wurde dieses Werk zu einer der wichtigsten Quellen für den mittelalterlichen Schulunterricht. Freilich ist, was als „De geometria“ überschrieben ist, weitgehend der Mitteilung geographischer Kenntnisse vorbehalten. Erst nach einer Ermahnung durch die Götter wird noch eine ganz knappe Beschreibung der Geometrie nach Euklid angehängt. Im Gegensatz dazu gilt das Buch über die Astronomie als die beste in lateinischer Sprache verfaßte Abhandlung des frühen Mittelalters.

Qualitativ überlegen sind die — nur unvollständig erhaltenen — Darstellungen der mathematischen Disziplinen durch Boethius, den Kanzler des Ostgotenkönigs Theoderich. Er prägte den Ausdruck Quadrivium für die vier mathematischen Wissenschaften (Näheres zur Geometrie des Boethius siehe unten). Auch verdankt man ihm lateinische Übersetzungen einiger aristotelischer Schriften, worin sich Beispiele und Vergleiche mathematischer Natur befanden.

Eine ganz knappe, jahrhundertlang mit Vorliebe benutzte Darstellung der Artes liberales verfaßte Cassiodor; er schrieb sein Werk um die Mitte des 6. Jhs., nachdem er sich 537 — nach der Rückeroberung Italiens durch Justinian — aus der Politik in das von ihm gestiftete Kloster Vivarium zurückgezogen hatte. Dort sollten sich die Mönche dem Studium der heiligen Schriften und der Pflege der Wissenschaften widmen. In einem Lehrbuch für die Ordensmitglieder, betitelt „Institutiones divinarum et humanarum litterarum“, faßte er auch die Gegenstände der Artes zusammen, wobei er freilich die Geometrie auf nur rund zwei (!) Seiten beschreibt. (Seine Begründung für das Studium auch der weltlichen Wissenschaften findet sich im Textbeispiel im Anhang: A.5, S. 574).

Cassiodor erklärt den Namen Geometrie als „terrae dimensio“, Erdausdehnung oder -messung. Er erwähnt die Geschichte ihres Ursprungs in Ägypten, die Einteilung des Jahres in Monate, die Bestimmung des Abstandes der Erde von Mond und Sonne sowie der Größe der Erde. Die eigentliche Geometrie sei

die Wissenschaft von der unbewegten Größe (im Gegensatz zur Astronomie, die es mit Bewegungen zu tun hat). Sie habe es zu tun mit Größen in der Ebene (abzählbaren, rationalen und irrationalen) und körperlichen Figuren. Die ebenen Figuren besitzen Länge und Breite, die körperlichen darüber hinaus noch Höhe. Die Vielfalt dieser Figuren untersucht die Geometrie auf der Erde wie am Himmel. Dies taten bei den Griechen Euklid, Apollonios, Archimedes und andere Autoren; bei den Römern gab Boethius Euklid in lateinischer Sprache heraus. Mit einem Hinweis darauf, daß die Beschäftigung mit der Astronomie die Seele zum Himmel lenke, damit auch zur Gestalt der Kugel und der Kreisform, enden diese kurzen vier Abschnitte, in denen nicht eine einzige Figur konkret betrachtet, nicht ein einziges Axiom noch ein einziger Satz aus den Elementen Euklids zitiert oder gar eine Figur gezeichnet wird. In etwa 20 Handschriften sind noch ein paar kurze geometrische Zusätze enthalten, die vermutlich aus Boethius entnommen wurden.

4.1.2 Beda Venerabilis und Alcuin

Die ersten Stätten, in denen man sich der Wissenschaft langsam wieder annahm, waren die Klöster. Irland war schon im 5. Jh. mit dem Christentum bekannt geworden. Um 700 finden sich bei dem irischen Mönch Beda Venerabilis im Kloster Jarrow bei Newcastle erste eigenständige Erkenntnisse. Ihm verdankt man nicht nur die älteste erhaltene Darstellung des Fingerrechnens, er beschäftigte sich auch mit astronomischen Problemen wie den Mondphasen und beschrieb den Zusammenhang zwischen diesen und den Gezeiten des Meeres.

Bedeutsam für die weitere Verbreitung von Bildung und Wissenschaft wurde, daß der Frankenkönig Karl der Große im Jahr 781 den gelehrten Mönch Alcuin aus York kommen ließ, damit er an seinem Hof die Palastschule übernehme und den Ausbau des Schulwesens im Frankenreich überwache. Unter den Texten, die ihm zugeschrieben werden, haben die „*Propositiones ad acuendos iuvenes*“, 56 Aufgaben zur Verstandesschärfung der Heranwachsenden, eine gewisse Bekanntheit erlangt. Die 13 erhaltenen Handschriften wurden zwischen dem Ende des 9. Jhs. und dem 15. Jh. geschrieben. Die Autorschaft Alcuins ist nicht absolut gesichert, denn es wird kein Verfasser angegeben. Doch es gibt gute Indizien, die dafür sprechen. M. Folkerts, der die Handschriften untersuchte und zusammen mit H. Gericke eine deutsche Übersetzung der Aufgaben publizierte [Folkerts/Gericke 1993], unterschied (neben einigen nicht leicht einzuordnenden Aufgaben wie der bekannten von einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf, die über einen Fluß transportiert werden sollen) zwischen drei arithmetisch-algebraischen Gruppen (Gleichungen und Reihen), Anord-

nungsproblemen und Aufgaben der rechnenden Geometrie. Während man die Mehrzahl der Probleme der Unterhaltungsmathematik zurechnen kann, stehen die geometrischen Aufgaben in der Tradition der römischen Feldmesser und finden sich in gleicher oder ähnlicher Form auch in der sog. „*Geometria incerti auctoris*“. Wieder begegnet man dem uralten Rezept zur Berechnung einer Vierecksfläche, die Mittelwerte der Gegenseiten miteinander zu multiplizieren. Als Beispiel sei hier Aufgabe 25 über ein rundes Feld mit den beiden angegebenen Lösungen zitiert [Folkerts/Gericke 1993, S. 325/26]:

„Von einem runden Feld.

Ein rundes Feld hat einen Umfang von 400 Ruten. Sage, wieviel *Aripenni* es umfassen muß. [1 *Aripennus* = 12 Ruten mal 12 Ruten]

Lösung 1:

Der vierte Teil dieses Feldes, das von 100 Ruten umschlossen wird, ist 100. Wenn du diese mit sich multiplizierst, d.h. sie 100mal nimmst, werden es 10 000. Diese mußt du durch 12 teilen. Der zwölfte Teil von 10 000 ist 833 $\langle$ genau $833\frac{1}{3}\rangle$, und wenn du dies wieder durch 12 teilst, findest du 69. Soviel *Aripenni* enthält das Feld.

Lösung 2:

Nimm den vierten Teil von 400, es sind 100. Nimm ferner den dritten Teil von 400, es sind 133. Nimm die Hälfte von 100, es sind 50. Nimm die Hälfte von 133, es sind 66. Multipliziere 50 mal 66, es sind 3151 $\langle$ wohl ein Schreibfehler? Richtig wäre 3300; offenbar wird mit diesem Wert weitergerechnet $\rangle$. Teile dies in den 12. Teil, es ist 280 $\langle 3300 : 12 = 275 \rangle$. Teile wieder 280 in den 12. Teil, es ist 24. Nimm viermal 24, es ist 96. Es sind im Ganzen 96 *Aripenni*.“

Hierzu siehe Aufgabe 4.1.1.

Auf Aufgabe 25 aufbauend, enthält Aufgabe 29 eine Weiterführung, die wohl eher den Scherzaufgaben als der praktischen Geometrie zuzuweisen ist [Folkerts/Gericke 1993, S. 330/332]:

„Von einer runden Stadt.

Eine runde Stadt hat einen Umfang von 8000 Fuß. Sage, wer es kann, wieviel Häuser sie umfaßt, wenn jedes Haus 30 Fuß lang und 20 Fuß breit ist.

Lösung 1:

Im Umfang dieser Stadt werden 8000 Fuß gezählt, sie werden im Verhältnis 3 : 2 geteilt in 4800 und 3200. In jenen steckt die Länge, in diesen die Breite der Häuser. Ziehe von jedem Posten die Hälfte ab, es bleiben von dem größeren Posten 2400, von dem kleineren 1600. Diese 1600 dividiere durch 20, und du findest 80mal 20. Ferner ergibt der größere Posten 2400, durch 30 geteilt, 80mal 30. Nimm 80mal 80, es sind 6400. Soviel Häuser können in dieser Stadt so, wie oben angegeben, gebaut werden.

Lösung 2:

Der Umfang dieser Stadt ist 8000 Fuß. Nimm den vierten Teil von 8000, es sind 2000. Nimm ferner den dritten Teil von 8000, es sind 2666. Nimm die Hälfte von 2000, es sind 1000, und die Hälfte von 2666, es sind 1333. Nimm den 30. Teil von 1333, (es sind 44, ferner den 20. Teil von 1000, es sind 50. Multipliziere 50 mit 44) es sind 2200. Dann nimm 2200 viermal, es sind 8800. Das ist die Anzahl der Häuser.“

Hierzu siehe Aufgabe 4.1.2.

Es ist wohl deutlich geworden, daß es sich hier eher um Aufgaben zur Verstandesschärfung als für den direkten Gebrauch in der Praxis handelt. Dennoch machen die Rechenrezepte deutlich, auf welchem Niveau sich die praktische Geometrie zur Zeit der Karolinger befand.

4.1.3 Gerbert von Aurillac

Was sich bis zum Ende des 1. Jtts. an Kenntnissen der wissenschaftlichen Mathematik der klassischen Antike erhalten hat, waren kümmerliche Bruchteile, hauptsächlich weitergegeben durch gelehrte Mönche in den Klöstern. Die erste folgenreiche Begegnung mit der islamischen Wissenschaft fand kurz vor der Jahrtausendwende statt, als 967 bis 970 der französische Mönch Gerbert nach Katalonien kam. Da er 999 zum Papst gewählt wurde (als Sylvester II. regierte er bis 1003), fanden seine mathematischen Werke starke Beachtung. Dazu gehört die erste bekannte Beschreibung des Rechnens auf dem Rechenbrett (Abakus) im Abendland. Als Neuerung führte er bezifferte Rechensteine, *calculi*, ein, verwendete aber nicht die gebräuchlichen römischen Ziffern, sondern die westarabischen oder Gobarziffern. Anfänglich in der Geometrie kaum bewandert, fand er als Abt von Bobbio in der Klosterbibliothek Teile der Euklid-Übersetzung des Boethius und verfaßte selbst ein — allerdings in der Urfassung verlorenes — Buch über Geometrie. Bearbeitungen aus dem 12. Jh. machen den geringen Kenntnisstand der damaligen Zeit deutlich: nur die einfachsten Sätze über Geometrie und Feldmessung sind darin enthalten. Die Parallelenlehre Euklids wird nicht erwähnt, die Winkelsumme im Dreieck experimentell ermittelt.

4.1.4 Boethius und Pseudo-Boethius

In der ersten Hälfte des 11. Jhs. wurde eine Kompilation, die man Boethius zuzuschreiben pflegte, aus zwei oder drei Quellen angefertigt. Sie wird heute — weil man den Verfasser nicht kennt — als die „Geometrie II“ des „Boethius“ bezeichnet. Demgegenüber enthält die „Geometrie I“ nicht nur Euklidexzerpte,

sondern auch umfangreiche Teile von Boethius' Arithmetik, von Agrimenso-rentexten und andere Auszüge. Sie entstand vermutlich im 8. Jh. in Corbie.

Die Zweite Geometrie besteht aus zwei Büchern, deren erstes sich teilweise mit den Euklid-Auszügen der Geometrie I deckt, erweitert um eine Reihe von Beweisen und einen Abschnitt über das Abakus-Rechnen. Das zweite Buch besteht hauptsächlich aus Texten der Feldmesser-Literatur, wie oben beschrieben, ergänzt durch einen Abschnitt über Brüche. Zeigt diese Geometrie einerseits, auf welchem Tiefstand das geometrische Wissen — wie die Kenntnis der Mathematik im allgemeinen — im 11. Jh. in Europa angelangt war, so hat sie doch Teile jener Euklid-Übersetzung aus dem Griechischen ins Lateinische bewahrt, die wahrscheinlich auf Boethius zurückgeht. Darüber hinaus gehört sie zu den frühesten Werken, in denen eine Abakus-Tafel und die arabischen Ziffern abgebildet wurden. Eine Auswahl der Zeichnungen (die den aus Agrimenso-ren-Texten entnommenen vorausgehen) verdeutlicht, welche geometrischen Probleme der anonyme Autor in seinem Werk behandelte (Abb. 4.1.1).

4.1.5 Die Scholastik

Bevor in größerem Maßstab das Abendland durch die Übersetzungen aus dem Arabischen mit den klassischen Texten der Antike bekannt wurde, bildete sich in Philosophie und Theologie unter dem Einfluß des Anselm von Canterbury und des Pierre Abaelard um 1100 die sog. scholastische Methode heraus. Ausgehend von den Ansichten der Kirchenväter und anderer Autoritäten werden in Diskussionen die gegensätzlichen Standpunkte geklärt und Entscheidungen durch Vernunftschlüsse getroffen. Ab etwa 1175 verknüpft man dieses Verfahren mit der aristotelischen Logik und bildet damit ein geistiges Training aus, das als Vorbereitung dem mathematischen Denken entgegenkommt. Im 13. Jh. erlangte diese scholastische Geisteshaltung unter Thomas von Aquin mit der erfolgreichen Verschmelzung von christlicher Lehre und aristotelischer Philosophie ihren Höhepunkt.

Klöster und später die großen Kirchen hatten zur Heranbildung des theologischen Nachwuchses eigene Schulen eingerichtet. Daraus gingen ab 1200 die europäischen Universitäten als Zentren des Studiums und der Bildung und als Träger scholastischen Denkens hervor.

4.1.6 Übersetzungen aus dem Arabischen

In Spanien begann, bald nachdem im Zuge der Reconquista 1075 Toledo den Mauren entrissen worden war, eine eifrige Übersetzertätigkeit. Auch in



Abb. 4.1.1 Rom und der heilige Petrus
 aus: Lambert von Saint-Omer, Liber floridus
 [Herzog August Bibliothek Wolfenbüttel, Cod. Guelf. 1 Gud. lat.]

Südfrankreich und in Sizilien, das nach zweihundertjähriger arabischer Herrschaft 1091 von den Normannen erobert wurde, fertigte man Übersetzungen arabischer wissenschaftlicher und mathematischer Texte an und begann, sich kompilierend und kommentierend mit ihnen auseinanderzusetzen. Der gebildete Adelard von Bath, der die arabische wie die griechische Sprache beherrschte, übersetzte unter anderem die Elemente Euklids aus dem Arabischen ins Lateinische. Diese vermutlich um 1120 entstandene Euklid-Übersetzung (gewöhnlich als Adelard I bezeichnet), war sehr wahrscheinlich die erste, die alle 15 Bücher (einschließlich der beiden unechten XIV und XV) in lateinischer Sprache zugänglich machte. Zuvor kannte das Mittelalter die Elemente lediglich durch Exzerpte aus der um 500 angefertigten Euklid-Übersetzung des Boethius, während die Araber sich seit dem 8. Jh. mit dem vollständigen Werk auseinandersetzten. Offenbar unabhängig von Adelard übersetzten ebenfalls noch im 12. Jh. auch Hermann von Kärnten und Gerhard von Cremona die Elemente; letzterer übertrug auch den wertvollen Euklid-Kommentar des an-Nairizi (Anaritius), die Geometrie der Banū Mūsā und andere mathematische und astronomische Werke.

Bis 1500 waren es jedoch noch nicht die reinen Euklid-Übersetzungen, sondern Bearbeitungen, die am stärksten wirkten. Eine davon wird gewöhnlich Adelard II genannt, weil sie sich auf Adelard I stützte, doch weist sie auch bemerkenswerte Bezüge zur Boethius-Tradition auf. Als Verfasser wird heute Robert von Chester (wie der Name andeutet, ebenfalls ein aus England stammender Gelehrter) angesehen. Schon gegen Ende des 12. Jhs. bemühte man sich um eine Verschmelzung dieser Kompilation des Robert mit der Boethius-Überlieferung. Ein Beispiel dafür ist der nur in einer einzigen Handschrift erhaltene, lediglich fünf Blätter umfassende Text, der — um 1200 in Norddeutschland geschrieben — mindestens seit dem Ende des 18. Jhs. im Besitz der Lüneburger Ratsbibliothek ist (s. Abb. 4.1.2). Ursprünglich von einem sonst nicht bekannten Magister Helmoldus dem Michaelis-Kloster in Hildesheim übereignet, enthält die Handschrift die meisten der Definitionen, Postulate, Axiome und Lehrsätze der ersten vier Bücher der Elemente (ohne Beweise). Definitionen und Postulate ähneln im allgemeinen der sog. Geometria II des „Boethius“, Axiome und Propositionen folgen meistens Adelard II.

Eine andere Euklid-Bearbeitung nahm Campanus kurz vor 1260 vor. Daß von ihr noch rund 130 Handschriften erhalten sind (gegenüber 23 der Geometrie II des „Boethius“), bezeugt, wie einflußreich sie gewesen ist. Die Beweise hat Campanus i. a. sehr stark erweitert und z. T. (unter Benutzung von Bemerkungen oder ganzen Sätzen von Jordanus) im Bemühen um eine didaktisch angelegte Darstellung zu Kommentaren umgebaut.

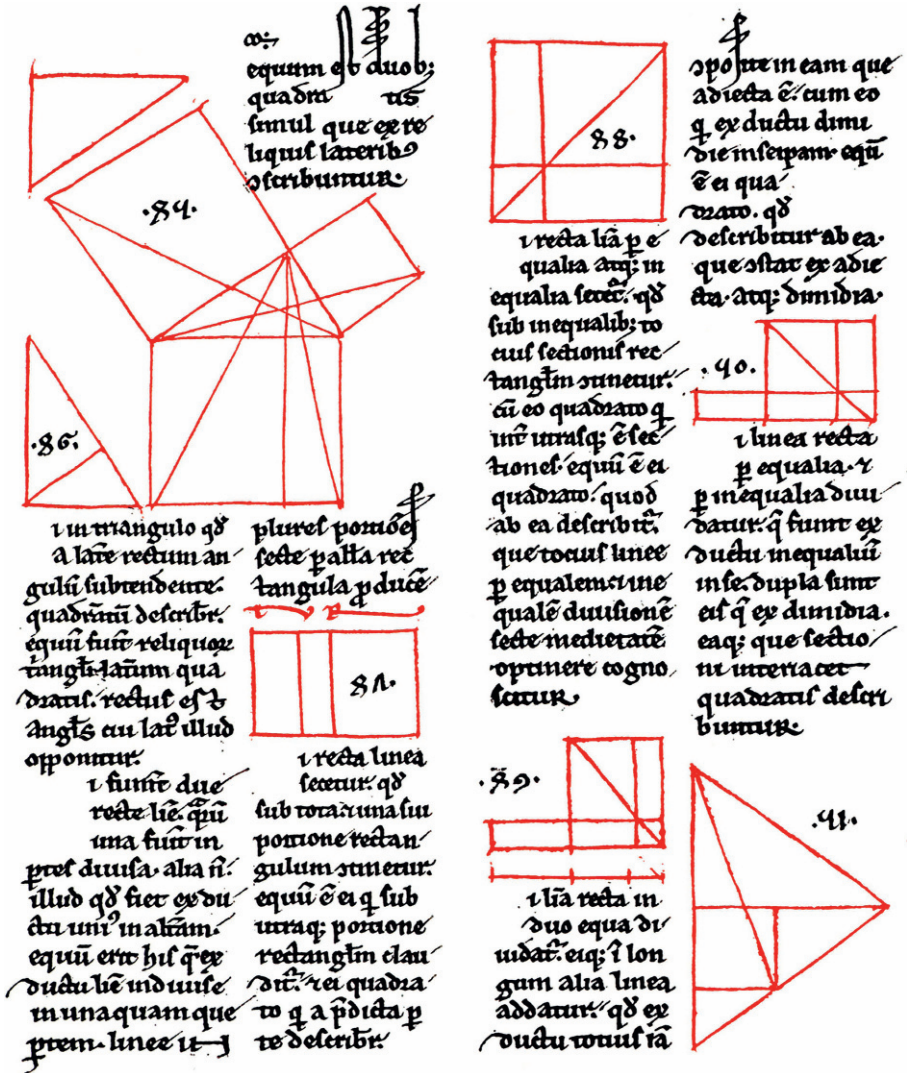


Abb. 4.1.2 Euklid-Handschrift aus Lüneburg.

[M. Folkerts: Ein neuer Text des Euklides Latinus. Faksimiledruck der Handschrift Lüneburg D4° 48, f. 3^r – 17^v. Gerstenberg, Hildesheim 1970]

4.2 Praktische Geometrie

4.2.1 Hugo von St. Victor

Neben dem wissenschaftlich ausgerichteten Strang der Euklid-Überlieferung entstanden im Mittelalter auch eine Reihe von Schriften zur praktischen Geometrie. Während der erstere in den Universitätsunterricht mündete, schlossen letztere an die Agrimensoren-Tradition an. Vorbild für die Folgezeit wurde die in der ersten Hälfte des 12. Jhs. von Hugo von St. Victor verfaßte „*Practica geometriae*“. Hugo gliederte sein Werk in drei Abschnitte: Höhenmessung (*altimetria*), Flächenberechnung (*planimetria*) und „*Cosmimetria*“ (Berechnungen des Erdumfangs, der geographischen Breite, der Größe von Sonnendurchmesser und Sonnenbahn und einige optische Probleme wie die Bestimmung des Horizontes). Dabei nannte er, der ja ein Gelehrter und nicht ein Handwerker war, auch antike Vorläufer. Schon der Prolog zeigt, wie sehr sich Hugos Stil von den nüchternen Texten Euklids und seiner Kommentatoren unterscheidet: „Mein Ziel ist es, unsere Studenten in der praktischen Geometrie zu unterrichten, nicht als etwas Neues, sondern vielmehr als eine Sammlung alten, verstreuten Materials. Du magst sagen, was du willst, ich meine, unsere Vorgänger bewirkten Wunder. Sie entwickelten ungeheure Energie und versuchten, die Wahrheit zu ergründen. Harte Arbeit konnte ihren Eifer nicht bremsen, noch konnten Hindernisse sie von ihrem Bestreben abhalten. Sie hatten tiefe Einsicht in wunderbare und fast unglaubliche Dinge, und selbst in geringeren bewiesen sie viele Beispiele ihres Scharfsinns. Es mag nicht möglich sein, ihnen gleichzukommen, aber es wäre eine Schande, es nicht zu versuchen. Doch genug der Ermahnung; wir wollen uns unserer Aufgabe zuwenden.“

[Übersetzt nach der engl. Ausgabe von F. A. Homann]

Über die Linie wird gesagt, sie sei eine Ausdehnung von einem Punkt zu einem anderen in irgendeiner Richtung, vorwärts, rückwärts, nach rechts oder links, oben oder unten; solange Ausdehnung vorhanden sei, werde nichts weiter benötigt, um Natur und Definition der Linie zu genügen. Der Punkt habe das Vermögen, von sich eine Linie in jeder beliebigen Richtung ausgehen zu lassen oder in sich aufzunehmen.

Noch nicht in den Quellen, die Hugo heranzog, zu finden ist die Beschreibung des Astrolabs (eines von den Arabern übernommenen Instruments) für Winkel- und Höhenmessungen. An einer senkrecht zu haltenden Platte, auf die die in Abb. 4.2.1.a) gezeigten Linien und Teilstriche eingeritzt sind, ist im Zentrum ein drehbarer Stab, die Alhidade (Sichtlinie) angebracht; er reicht auf beiden Seiten bis zum kreisförmigen Rand der Platte und ist mit einer Visiereinrichtung versehen. Die Abb. 4.2.1.b) zeigt die praktische Anwendung:

Der Geometer (oder Astronom) hält das Astrolab so vor das Auge, daß er längs der in passende Stellung gebrachten Alhidade sein Ziel, z.B. eine Turmspitze, anvisiert. Wie erkenntlich, muß dabei die Augenhöhe berücksichtigt werden. Hugo erwähnt, die Vermesser trügen darum oft einen Stock dieser Länge mit sich (s. Aufgabe 4.2.1 und vergleiche mit Aufg. 3.1.2 und Abb. 3.1.3).

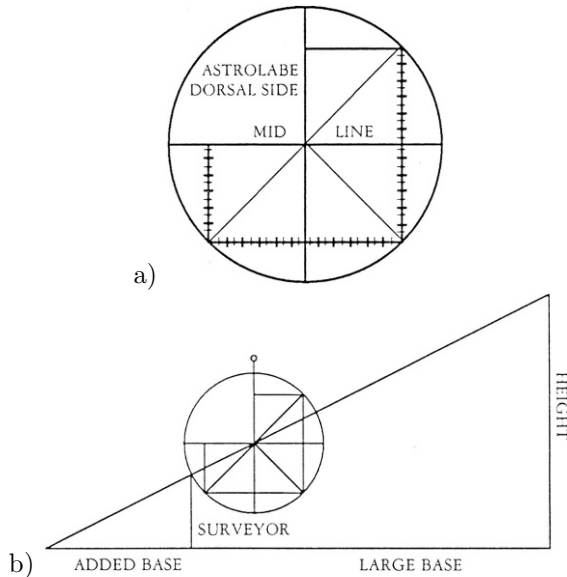


Abb. 4.2.1 Astrolab nach Hugo von St. Victor

a) Konstruktion, b) Schema der Anwendung.

[Practical Geometry, transl. by F. A. Homann, Marquette University Press, Milwaukee, Wisconsin 1991. a) Fig. 11, b) Fig. 14]

Auch ein hebräisch geschriebenes Buch über praktische Geometrie des jüdischen Mathematikers Abraham bar Hiyya (Savasorda), das Buch der Messungen, wurde 1145 von Plato von Tivoli unter dem Titel „Liber embadorum“ ins Lateinische übersetzt. — Im letzten Viertel des 13. Jhs. beschrieb Johannes oder Robertus Anglicus aus Montpellier die Anwendung eines anderen aus dem arabischen Bereich kommenden Meßinstruments, des Quadranten (Viertelkreis) für Winkelmessungen.

4.2.2 Leonardo von Pisa

Ebenfalls im 13. Jh., doch bereits am Anfang desselben, griff Leonardo von Pisa, in erster Linie bekannt durch sein umfangreiches arithmetisch-algebraisches Buch „Liber abbaci“, bei der Abfassung seiner *Practica geometriae* auf den Li-

ber embadorum des Abraham bar Chijja zurück. Allerdings ist diese *Practica geometriae*, im Gegensatz zu ihrem Titel, kein spezielles Werk über angewandte geodätische Geometrie, sondern sie enthält (anders als etwa Hugo von St. Victors Werk) verschiedene Lehrsätze mit Beweisen, die sich auf das Messen, die Planimetrie und Stereometrie beziehen. Auch Aufgaben über die Zerlegung von Figuren sind darin enthalten. Leonardo verarbeitete sowohl einschlägige griechische wie arabische Literatur, fügte aber auch eigene Lehrsätze oder Beweise hinzu (s. auch Bd. 1, Abschnitt 7.3).

Johannes von Sacrobosco (John of Holywood)

Weder in der Mathematik noch in der Astronomie war man in der Zeit der Scholastik schon in der Lage, die diffizileren Argumentationen in den klassischen Werken der griechischen Gelehrten zu verfolgen oder gar weiterzuentwickeln. Das elementare Niveau auch des Universitätsunterrichtes in der Astronomie dokumentiert anschaulich das beliebte und später oft gedruckte kleine Buch des Johannes von Sacrobosco. Während aber Leonardo von Pisa durch orientalische Quellen mitbeeinflusst war, steht Sacrobosco (ursprünglich John of Holywood) in der angelsächsischen Tradition. Drei Abbildungen mögen einen Einblick in die Qualität dieser elementaren Einführung in die Astronomie vermitteln. In Abb. 4.2.2a wird die Einteilung der Welt vorgestellt: Innerhalb des Fixsternhimmels liegen die Sphären der fünf Planeten und diejenigen von Sonne und Mond konzentrisch um die Erde herum, außen (als Doppelring, geschmückt mit den Tierkreiszeichen dargestellt) umgibt die neunte Sphäre, das *Primum mobile*, alle übrigen und teilt seine Bewegung allen anderen Sphären mit. Abb. 4.2.2b erläutert eine Mondfinsternis und Abb. 4.2.2c illustriert die Entstehung einer Sonnenfinsternis: die Erde befindet sich im Zentrum; der Mond, von der strahlenden Sonne beleuchtet, wird in zehn verschiedenen Phasen auf einer exzentrischen Bahn gezeigt.

4.2.3 Trigonometrie

Eine vertiefte Beschäftigung mit der Astronomie, wie sie gegen Ende des Mittelalters zunahm, erforderte ausreichende Vertrautheit mit der ebenen und sphärischen Trigonometrie. (Da der Sehnenrechnung der Griechen die Idee, rechtwinklige Dreiecke zu verwenden, noch fehlt, sollte man eigentlich besser von Dreieckslehre anstatt von Trigonometrie sprechen.) Die einschlägigen Lehrsätze lernte das Abendland aus griechischen wie aus arabischen Quellen kennen, wobei letztere auch in Indien entwickelte Verfahren übernommen und fortgebildet hatten (vgl. Kap. 3). Als wichtigen Bestandteil enthielten die

meisten trigonometrischen Werke Tafeln, seien es Sehnentafeln im Anschluß an Ptolemaios, seien es später Sinustafeln oder Tafeln anderer Winkelfunktionen. Es würde zu weit führen, diese alle im einzelnen zu nennen und die Fortschritte (vor allem der Genauigkeit, aber auch der Berechnungsmethoden) zu beschreiben; ein grober Überblick muß hier genügen.

Sehr verbreitet waren, nachdem sie von Gerhard von Cremona und anderen Übersetzern ins Lateinische übertragen worden waren, die Sphärik des Theodosius von Bithynien und diejenige des Menelaos, die ja den fundamentalen Transversalensatz für die Ebene wie für die Kugel enthielt (vgl. Abschn. 2.5.6). Auch der Almagest wurde im 12. Jh. zweimal ins Lateinische übersetzt. Dadurch lernten die Astronomen die Sehnentrigonometrie des Ptolemaios kennen. Die von den Indern eingeführten Funktionen Sinus, Kosinus und Sinus versus finden sich in einem Werk des al-Chorezmi, das im 10. Jh. von al-Mağrītī überarbeitet worden war und im 12. Jh. von Adelard von Bath übersetzt wurde, der allerdings im Gegensatz zu Robert von Chester das lateinische Wort Sinus noch nicht kannte. Die Vervollkommnung des Almagest des Albategnius (al-Battani), der systematisch die trigonometrischen Linien anstelle der Sehnen verwendete, übersetzte — ebenfalls im 12. Jh. — Plato von Tivoli. Sowohl Richard von Wallingford im 14. wie Regiomontanus im 15. Jh. waren mit diesem Werk vertraut. Selbstverständlich verfehlten auch die verschiedenen aus dem Arabischen übersetzten Tafeln ihre Wirkung nicht, so z.B. auf Johannes de Lineriis im 14. und auf Johannes von Gmunden im 15. Jh. Im Jahre 1534 druckte Peter Apian das von Gerhard von Cremona übersetzte Werk „Verbesserung“ des Almagest von Ġabir ibn Aflāḥ (Geber), das zuvor beispielsweise schon von Richard von Wallingford benutzt worden war.

Mit der Reform der Astronomie durch die Wiener Schule im 15. Jh. (Johannes von Gmunden, Georg Peurbach, Johannes Regiomontanus) ging auch eine Erneuerung und Verfeinerung der Trigonometrie und Tafelberechnung einher. Johannes von Gmunden beschrieb 1437 im „Tractatus de sinibus, chordis et arcibus“ (Abhandlung über Sinus, Sehnen und Bögen) die Berechnungsmethoden des Ptolemaios wie des az-Zarqālī, Georg von Peurbach setzte diese Arbeit fort. Dessen Schüler Regiomontanus berechnete sogar drei Sinustafeln mit sich steigender Genauigkeit. Diese erzielte er, indem er, der Sitte der Zeit entsprechend, den Kreisradius zunehmend vergrößerte (um Dezimal- oder Sexagesimalbrüche zu vermeiden): 60.000 beim ersten, 6.000.000 beim zweiten und 10^7 beim dritten Mal. Vor allem aber verfaßte Regiomontanus das erste selbstständige Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie in Westeuropa mit dem Titel „De triangulis omnimodis libri quinque“ (Fünf Bücher über Dreiecke aller Arten, gedruckt zu Nürnberg 1533). Darin wird z.B. der

Sinussatz für Dreiecke ausdrücklich formuliert (s. Abb. 4.2.3 und Abschnitt 5.2).

LIBER SECVNDVS TRIANGVLORVM.

I.
**In omni triangulo rectilineo proportio lateris ad latus est, tanq̃ si-
nus recti anguli alterum eorum respicientis, ad sinum rectum anguli
reliquum latus respicientis.**

Abb. 4.2.3 Johannes Regiomontanus: Formulierung des Sinus-Satzes
[Joh. Regiomontanus: De triangulis omnimodis. Nürnberg 1533, p. 46]

4.3 Der wissenschaftliche Aufbruch

4.3.1 Übersetzungen aus dem Griechischen

Erst nachdem viele Werke aus dem Arabischen übersetzt worden waren, begann man in größerem Maß, Texte auch unmittelbar aus dem Griechischen ins Lateinische zu übersetzen, soweit dafür Handschriften greifbar waren. Hatte man bis vor kurzem noch geglaubt, die von Zamberti am Ende des 15. Jhs. durchgeführte Euklid-Übersetzung sei die erste, die direkt aus dem Griechischen vorgenommen wurde, so weiß man inzwischen, daß die Elemente (in der Redaktion von Theon) schon im 12. Jh. in Sizilien direkt aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt wurden.

Der wichtigste Übersetzer, der viele griechische Werke ins Lateinische übertrug, war Wilhelm von Moerbeke; er wirkte im 13. Jh. Er arbeitete für seinen Freund, den einflußreichen Theologen und vielseitigen Gelehrten Thomas von Aquin. Zweimal reiste Wilhelm selbst nach Griechenland, um nach griechischen Handschriften zu suchen. Am päpstlichen Hof von Viterbo übersetzte er zahlreiche Werke, darunter auf mathematischem Gebiet solche von Archimedes, Heron, Proklos und Ptolemaios.

4.3.2 Archimedes im Mittelalter

Der große Einfluß, den Archimedes auf die Entwicklung der Mathematik in der frühen Neuzeit ausübte, ist lange bekannt. Allein Galilei erwähnte ihn in seinen Werken mehr als hundert Mal und pries ihn in den höchsten Tönen. Weniger

deutlich war bis zum Beginn des Erscheinens des monumentalen Sammelwerkes „Archimedes in the Middle Ages“ von Marshall Clagett ([Clagett 1964], seit 1964), welche Rolle seine Werke im Mittelalter spielten. Denn im Gegensatz zu Euklid ist die Zahl der erhaltenen Handschriften, worin sich Werke von Archimedes befinden, klein. Erst im 12. Jh. werden lateinische Übersetzungen angefertigt, so z.B. vor 1187 eine Übertragung der „Kreismessung“ durch Gerhard von Cremona. Die maßgebliche, die Mehrzahl der archimedischen Werke umfassende Übertragung stammt von Wilhelm von Moerbeke (1269). Ihm stand, neben einem anderen Manuskript, eine heute verlorene Handschrift aus Byzanz zur Verfügung, die die meisten der Werke des Archimedes in griechischer Sprache enthielt. (Da es in Byzanz nur wenige Archimedes-Handschriften gab, hatten auch die Araber Schwierigkeiten, sich mit dem gesamten mathematischen Schaffen des Archimedes vertraut zu machen. Doch bemächtigten sie sich der entscheidenden Methoden und verstanden es — viel besser als das europäische Mittelalter —, sie weiterzuentwickeln.)

In der „Kreismessung“ hatte Archimedes gleich in Satz 1 bewiesen, daß die Fläche F eines Kreises gleich ist der Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen den rechten Winkel einschließende Seiten die Länge des Kreismessradius r bzw. diejenige des Kreisumfangs u haben. Eine Anzahl mittelalterlicher Kommentatoren hielt es für erforderlich, von Archimedes stillschweigend gemachte Annahmen durch Rückgriff auf Lehrsätze des Euklid sorgfältig zu beweisen. Darunter fiel etwa der Nachweis, daß durch Verdoppelung der Seitenzahl eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks mehr als die Hälfte der noch nicht ausgeschöpften Fläche erfaßt wird — modern gesprochen, daß das Exhaustionsverfahren auch wirklich konvergiert.

Ein anderer Kommentator erkannte die Schwierigkeit, die in der Annahme liegt, im erwähnten Dreieck lasse sich die Länge der einen Seite gleich der Länge des Kreisumfangs machen. Er zog daher die archimedische Abhandlung über die Spirale mit heran, in der die ersten 18 Sätze diesem Problem gewidmet sind, und stellte so eine Hybridfassung aus den beiden Schriften zusammen. Mehrere Manuskripte dieser Art aus dem 13. und 14. Jh. machen deutlich, wie sich in jener Zeit Gelehrte darum bemühten, Werke des Archimedes zu verstehen und da, wo sie es für erforderlich hielten, auch zu verbessern. Das beweist, daß es auch schon vor der Renaissance (als dann auch der griechische Text der Werke zugänglich wurde) beachtenswerte Versuche gab, sich mit den Studien des Archimedes auseinanderzusetzen. Als charakteristisches Beispiel sei hier zitiert, wie Johannes de Muris (1. Hälfte des 14. Jhs.) in seiner Abhandlung „De arte mensurandi“ (Über die Kunst des Messens) im 6. Kapitel das Problem der Kreismessung vorstellt ([Clagett 1964, Bd. 3, 31–32]; dt. Übersetzung vom Autor):

„Die Fläche eines Kreises zu messen, nachdem zuvor eine Abschätzung des Verhältnisses zwischen Durchmesser und Umfang des Kreises gegeben wurde. Dieses Verhältnis hat bisher wohl niemand auf eine Zahl zurückgeführt, obgleich Archimedes, der eifrigste Forscher unter den Geometern, der Meinung war, er habe das Verhältnis der geraden Linie zur Kurve mit Hilfe von Spiralen bewiesen. Ich habe vor, seine diesbezügliche Absicht und das, was die Kreisquadratur angeht, im 8. Buch darzulegen. Für den Augenblick gebe man sich zufrieden mit der angenäherten Übereinstimmung, nämlich, daß der dreifache Durchmesser, vermehrt um ein Siebtel davon, dem Kreisumfang gleicht [also $\pi = 3\frac{1}{7}$], und daß, wenn vom Umfang $\frac{1}{22}$ weggenommen wird, ein Drittel des Restes dem Durchmesser gleicht [d.h. $(u - \frac{u}{22}) : 3 = d$]. Ich werde über die Herleitung dieser Übereinstimmung weiter unten, am Anfang des 8. Kapitels, sprechen. Dabei wird angenommen, daß man sich damit zufrieden gebe, daß, wenn ein Kreis gleichmäßig auf einer Ebene abrollt, bis er eine vollständige Drehung hinter sich gebracht hat, die in der Ebene beschriebene Linie, wenn es denn eine solche gibt, gleich dem Kreisumfang ist. Denn wenn man dies annimmt (bis wir ausführlicher die Gleichheit einer Kurve mit einer geraden Linie beweisen werden), ist es leicht, die Kreisfläche zu messen.

Das allgemeine Verfahren ist dieses: Multipliziere (1) den Radius mit dem halben Umfang, oder (2) den Durchmesser mit dem halben Umfang, und nimm vom Produkt die Hälfte, oder (3) entweder den Durchmesser mit dem halben Umfang oder den Umfang mit dem Radius, wobei das halbe Produkt genommen wird, oder (4) den ganzen Durchmesser mit dem ganzen Umfang, wobei ein Viertel des Produktes genommen wird, oder (5) bilde 11 Mal das Quadrat des Durchmessers und nimm dann $\frac{1}{14}$ des Produktes, oder (6) subtrahiere ein Siebtel des Quadrats des Durchmessers vom Quadrat des Durchmessers und subtrahiere dann die Hälfte eines Siebtels [d.h. $d^2 - \frac{d^2}{7} - \frac{d^2}{14} = F$]. Das durch all diese Verfahren erzielte Ergebnis liefert die Kreisfläche. Diese Methoden, mit denen unsere Vorfahren bisher zufrieden waren, unterscheiden sich nur in den Zahlen [der Zwischenrechnungen]. Und diese Herleitungen gehen von der Annahme aus, daß aus dem Produkt eines Radius und eines halben Umfangs ein Rechteck gebildet wird, das dem Kreis [d.h. der Kreisfläche] gleich ist. Dies wird evident in dem, was folgt.“

Johannes de Muris hatte also Skrupel, den krummlinigen Kreisumfang mit einer geraden Strecke zu vergleichen. Sicher wirkte hier noch das aristotelische Diktum nach, Krummes und Gerades sei nicht miteinander vergleichbar. So half sich Johannes zunächst, indem er den Kreis als auf einer Ebene abrollend beschreibt und dessen während einer Umdrehung erzeugte geradlinige Spur als Länge nimmt. Der Hinweis auf die Spirale des Archimedes, definiert als $r = a\phi$,

bezieht sich auf deren Eigenschaft, nach einem Umlauf des Winkels gerade einen Radiusvektor der Länge $r = 2a\pi$ zu besitzen; ihr erster Schnittpunkt mit der positiven x -Achse hat daher den gleichen Abstand vom Ursprung, den ein Kreis vom Radius a als Umfangslänge besitzt.

Ausführungen wie diese bezeugen das Bemühen mathematisch interessierter Gelehrter des Mittelalters, über Euklid hinaus auch weitere antike Autoren zu verstehen und die darin aufgeworfenen Fragestellungen selbständig zu durchdenken. Wenn dabei manches auch unbeholfen erscheint oder, wie hier, triviale Alternativen der Berechnung aufgelistet werden, so sollte man andererseits das Streben nach gedanklicher Klärung in einer Zeit, die fälschlich oft als das dunkle Mittelalter bezeichnet wurde, nicht übersehen.

4.3.3 Das 14. Jahrhundert

Im 14. Jh. werden die Universitäten in Paris und Oxford zu Zentren der mathematisch-physikalischen Aktivität. Robert Grosseteste, der erste Kanzler der Universität Oxford, und sein Schüler Roger Bacon entwarfen, unter Berufung auf die naturwissenschaftlichen Schriften des Aristoteles und islamischer Autoren, ein neues Wissenschaftsideal: das eigene, auf Beobachtung und Erfahrung beruhende, erforderlichenfalls durch Experimente bestätigte Urteil soll über die Gültigkeit von Vorstellungen über die Natur entscheiden und nicht allein die Autorität von anerkannten Autoren. Es entstand eine am Studium der Gesetzmäßigkeiten von Veränderungen interessierte Schule, benannt nach dem Merton College der Universität Oxford. Fortschrittlich darin, daß sie versuchte, physikalische mit mathematischen Überlegungen zu verbinden, blieb ihre Mathematik — ebenso wie die der Pariser Schule — noch eingebettet in die allgemeinen philosophisch-theologischen Vorstellungen der Spätscholastik.

Bradwardine

Wichtigster Vertreter war Thomas Bradwardine, der später zum Erzbischof von Canterbury aufstieg. Während seiner Lehrtätigkeit am Merton-College verfaßte er mehrere mathematische Schriften, die teilweise weit über England hinaus intensiv studiert wurden. Der Kinematik ist ein Traktat über die Geschwindigkeit bei Bewegungen gewidmet. Die „Geometria speculativa“ (theoretische Geometrie) lehnt sich an die Campanus-Bearbeitung der Elemente Euklids an, verweist häufig auf Boethius, enthält aber auch eigene Beiträge des Verfassers. Dazu gehört die Konstruktion sternförmiger Vielecke durch Verlängerung der Seiten regelmäßiger n -Ecke ($n \geq 5$) und eine Diskussion

des Kontingenzwinkels, also des Winkels zwischen Kreis und Tangente. Bradwardine, wie vor ihm Campanus, kamen zu dem Ergebnis, daß solche Winkel zu den geradlinig begrenzten in einem gewissen irrationalen Verhältnis stehen, das aber verschieden sei von der Irrationalität, die zwischen Seite und Diagonale eines Quadrates bestehe. Auch die Frage der lückenlosen Ausfüllung des Raumes durch die regelmäßigen Körper studierte Bradwardine. Seine Geometrie wurde gegen 1500 gedruckt, erlebte mehrere Auflagen und wurde von den nachfolgenden Mathematiker-Generationen sehr geschätzt. Daß er auch ein eigenes, zur Lehre des Aristoteles in Widerspruch stehendes Gesetz für die Geschwindigkeit einer Bewegung in Abhängigkeit von Kraft und Widerstand formulierte, sei hier nur nebenbei erwähnt.

In einer Abhandlung „De continuo“, die sowohl philosophische wie physikalische und mathematische Fragen berührte, begründete er seine Auffassung, das Kontinuum könne nicht aus unteilbaren Atomen bestehen. Sei eine Strecke nur aus endlich vielen, nicht weiter teilbaren Punkten zusammengesetzt, so führte er z.B. aus, könne man über ihr als Durchmesser $d = 2r$ einen Halbkreis ziehen und in jedem dieser Punkte eine Senkrechte errichten. Dann werde der Halbkreisbogen in ebenso vielen Punkten geschnitten, wie der Durchmesser Punkte hat, der Vollkreisbogen U also in doppelt so vielen. Also müsse man schließen: $U = 2r$, was jeder Erfahrung widerspreche.

In Paris griff wenig später Nicole Oresme die in Oxford angestellten Untersuchungen auf und führte sie weiter, wobei er sich auch geometrischer Interpretationen verschiedener Bewegungsarten bzw. Qualitätsänderungen bediente. Man spricht daher auch von der Lehre der Formlatituden: die Breitenänderung einer Form veranschaulicht die Zu- bzw. Abnahme einer Qualität, z.B. einer Geschwindigkeit. Diese Untersuchungen der Mathematiker des 14. Jhs. wurden oft durch die Beschäftigung mit Euklid angeregt. Sie gehören zu den Höhepunkten mathematischen Schaffens im europäischen Mittelalter. Zu Beginn des 17. Jhs. stießen diese vorwiegend in Oxford und Paris angestellten Überlegungen auf neues Interesse: in ihren Denkansätzen weisen sowohl Galileis Bewegungslehre wie die Indivisibilienmethode Cavalieris nicht zufällig Gemeinsamkeiten mit den Forschungen der spätscholastischen Gelehrtenschulen auf.

4.4 Angewandte Geometrie im Hoch- und Spät-Mittelalter

4.4.1 Villard d'Honnecourt

Zum Abschluß dieses Kapitels wenden wir uns nochmals der angewandten Geometrie zu, und zwar jener Seite, die zum „Handwerkszeug“ in den Bauhütten des Mittelalters gehörte. Allerdings wurden die Fachkenntnisse der Baumei-

ster gemäß den Vorschriften der Zünfte mündlich weitergegeben, so daß es mit einer Ausnahme für das frühe und hohe Mittelalter keine nennenswerten Quellen gibt, die über die Art der geometrischen Regeln Auskunft geben würden. Als frühestes Zeugnis dieser Art von Literatur ist das einzigartige Skizzenbuch des Villard d'Honnecourt überliefert. Dieser aus der Picardie (in der Nähe von Cambrai) stammende Baumeister hat bei zahlreichen Reisen durch Frankreich, die Schweiz und Ungarn im 13. Jh. Details bedeutender Kathedralen auf ursprünglich 63 Pergamentblättern festgehalten. Sein Skizzenbuch besteht daher aus Bauzeichnungen, Steinmetzkunst, Plastik- und Maschinendarstellungen, aber auch figürliche (menschliche und tierische) Kompositionen sind eingestreut. Leider enthält das Skizzenbuch neben den 325 erhaltenen Federzeichnungen (auf 33 Blättern) fast keinen erläuternden Text. Die Abb. 4.4.1 und 4.4.2 vermitteln einen Eindruck von der Qualität der Zeichnungen. Auf der ersten ist ein Rosettenfenster der Kathedrale in Lausanne dargestellt (die obere französische Inschrift lautet: „C'est une reonde veriere de leglize de Lozane“, die untere lateinische: „Ista est fenestra in Losana ecclesia“ (auf deutsch: dies ist ein [rundes Glas-]Fenster der Kathedrale in Lausanne).

Das zweite abgebildete Blatt (Abb. 4.4.2) zeigt Risse für das Chorgewölbe von zwei Kathedralen. Die Inschrift in der oberen Zeichnung lautet: „Istud bresbiterium invenerunt Ulardus de Hunecort et Petrus de Corbeia, inter se disputando“ (Dieses Presbyterium entwarfen Villard d'Honnecourt und Petrus von Corbie, als sie miteinander disputierten).

4.4.2 Die Bauhüttenbücher

Andersartig sind vier sog. Bauhüttenbücher angelegt, die rund 250 Jahre später in Süddeutschland in deutscher Sprache verfaßt wurden — aus der Zwischenzeit sind vergleichbare Texte nicht erhalten, vielleicht auch nicht geschrieben worden, da das Fachwissen der Baumeister, Steinmetzen und Zimmerleute in mündlicher Unterweisung von Generation zu Generation weitergegeben wurde. Es handelt sich bei diesen vier frühen Druckwerken um drei kleine Schriftchen von Matthäus Roriczer: das „Büchlein von der fialen Gerechtigkeit“, das „Wimpergbüchlein“ und die „Geometria deutsch“, sowie um das „Fialenbüchlein“ von Hanns Schmuttermayer.

Fialen (auch Violen genannt) sind die kleinen Ziertürmchen zur Bekrönung von Strebepfeilern und Flankierung von Wimpergen, den gotischen Ziergiebeln (Wimperg, ursprünglich wintperge = vor dem Wind bergend: Schutzgiebel). Die Fiale besteht aus einem Schaft oder Leib und einem Helm oder Risen (auch Riesen), wobei der Schaft auch als Tabernakel — einem Hohlraum zur Aufnahme von Figuren — ausgebildet sein kann. Gerechtigkeit meint in diesem



Abb. 4.4.1 Aus dem Skizzenbuch des Villard d'Honnecourt (1230–35):
Kirchenfenster der frühgotischen Kathedrale (geweiht 1275) von Lausanne
[Album des Villard de Honnecourt. Paris o.J.]

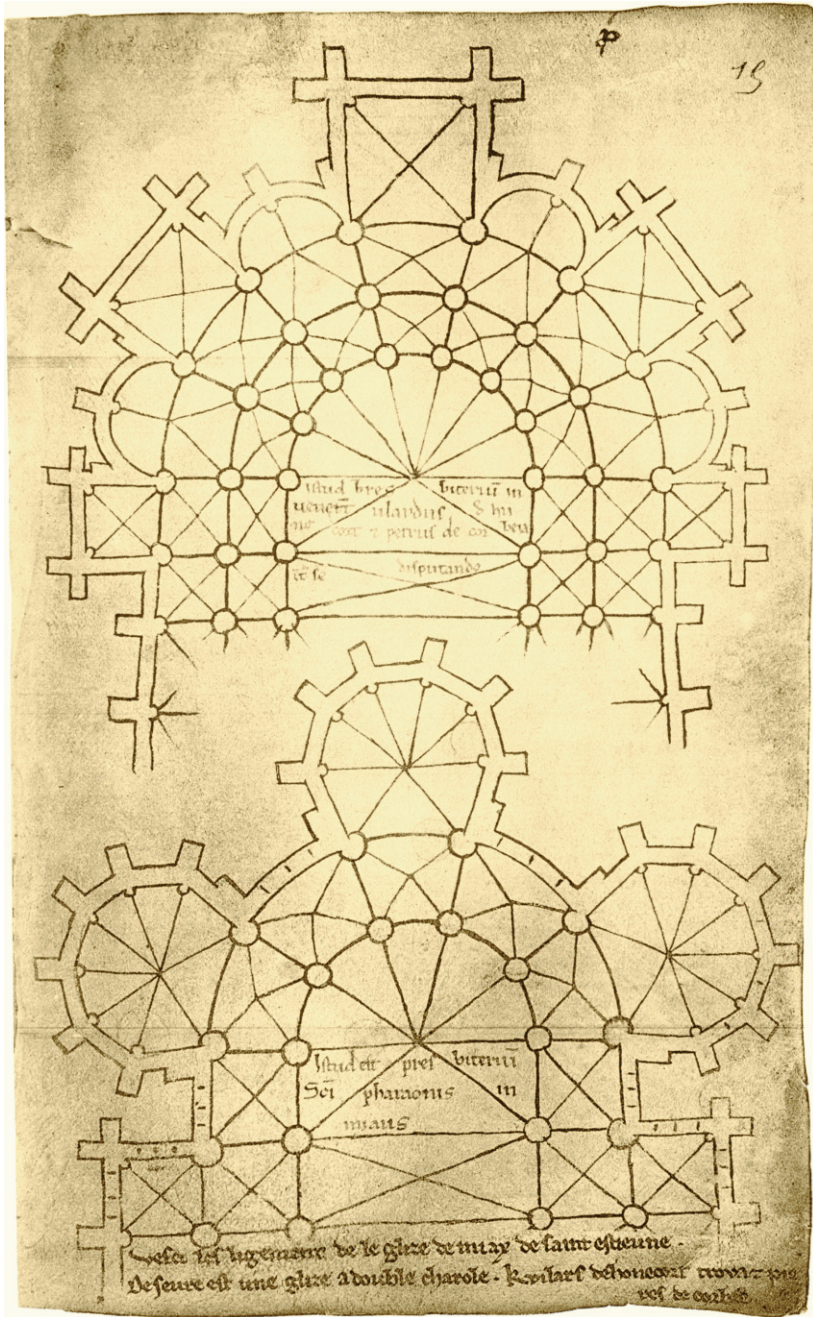


Abb. 4.4.2 Aus dem Skizzenbuch des Villard d'Honnecourt (1230–35):
 Risse für zwei Chorräume von Kirchen: Darstellung der Gewölberippen.
 [Album des Villard de Honnecourt. Paris o.J.]

Zusammenhang den sachgerechten Entwurf der Zeichnungen oder Risse, nach denen die Steinmetzen zu arbeiten haben. — Diese ersten Lehrschriften für die Gestaltung von Verzierungen an gotischen Domen sind auch druckgeschichtlich von hoher Bedeutung; sie sind seltene Inkunabeln (Wiegendrucke) aus den ersten Jahrzehnten des Buchdrucks. Es handelt sich um kleine Schriften: 16 Blätter umfaßt das Büchlein von der fialen Gerechtigkeit (nur vier Exemplare sind, teilweise unvollständig, erhalten), 6 Blätter die *Geometria* deutsch, wobei die letzten drei Seiten die Anweisungen zur Konstruktion von Wimpergen enthalten.

Die Familie Roriczer stellte in drei Generationen vier Dombaumeister in Regensburg. Der erste, Wenzel, stammte wahrscheinlich aus Böhmen, erfuhr seine Ausbildung bei der berühmten Baumeisterdynastie der Parler in Prag und ist seit 1411 bis zu seinem Tode 1419 als Baumeister am Regensburger Dom nachweisbar. Sein Sohn Lorenz hatte in Eichstätt und am Chorbau von St. Lorenz in Nürnberg gearbeitet, bevor ihm 1456 die Verantwortung für den Weiterbau des Regensburger Doms übertragen wurde. Während seiner 20jährigen Tätigkeit vollendete er das Hauptportal, schuf einen prunkvollen eintürmigen Entwurf (nicht ausgeführt) und wurde als Gutachter sowohl beim Bau des Wiener Stephansdoms wie der Münchener Frauenkirche hinzugezogen. Sein älterer Sohn ist Mathes (Matthäus) Roriczer, der Verfasser der drei genannten Schriften. In einer eigenen Druckerwerkstatt — der ersten einheimischen in Regensburg — gab er sie 1486/88 heraus. Inzwischen war er Nachfolger seines Vaters als Dombaumeister in Regensburg geworden.

Kurz nach Roriczers „Fialenbüchlein“ erschien in Nürnberg Hans Schmuttermayers „Fialenbüchlein“, worin auch die Konstruktion der Wimperge behandelt wird. Der Verfasser war Goldschmied in Nürnberg. Bei Schreinen und Monstranzen hatte er ähnliche Motive wie die Steinmetze an den Domen anzubringen; vielleicht rührte daher sein Interesse an diesen geometrischen Konstruktionen. Wie Roriczer berief sich auch Schmuttermayer auf die Baumeisterfamilie der Parler; beide stehen also in der gleichen Tradition gotischer Baukunst. Von Schmuttermayers Schrift ist nur ein einziges Exemplar erhalten.

Mathes Roriczer begann sein Fialenbuch mit einer Widmungsrede an den Bischof von Eichstätt, der ihn zu dieser Veröffentlichung ermuntert hatte, worin er seine Absicht in altertümlichem Deutsch darlegte (die Schreibweise wurde hier nach dem Nachdruck von F. Geldner, München 1965, modernisiert):

„...so doch eine jede Kunst Materien, Form und Maß ist, habe ich mit der Hilfe Gottes etwas berührter Kunst der Geometrie zu erläutern und zunächst diesmal den Anfang des ausgezogenen Steinwerks, wie und welcher Maßen das

aus dem Grunde der Geometrie mit Austeilung des Zirkels hervorkommen und in die rechten Maße gebracht werden soll, zu erklären vorgenommen und in diesen hernachberührten Formen mit einer kleinen Auslegung gezogen ... dieses mein Vorhaben ... allein gemeinem Nutzen zugute vorgenommen habe.“

Ausgangspunkt der Fialenkonstruktion ist bei beiden Autoren die sogenannte Vierung über Ort. In ein als Grundriß dienendes Quadrat wird durch Verbinden der Seitenmitten ein zweites gesetzt, wonach dieser Prozeß mehrmals wiederholt wird. Durch Drehung jedes zweiten Quadrats um das Zentrum um 45° entsteht eine Folge ineinandergeschachtelter Quadrate mit parallelen Seiten (Schmuttermayer bildet in seinem Fialenbüchlein acht ab). Zwei aufeinanderfolgende Quadrate haben das Seitenverhältnis von $1 : \sqrt{2}/2$; sie bilden die höhergelegenen Querschnitte der spitz zulaufenden Fialentürmchen, die in genau festgelegten Abständen vom Fuß aus der Reihe nach zu übertragen sind. Nachdem so der Leib der Fiale entworfen wurde, beschreibt Roriczer die Konstruktion des Risen (Helm, Spitzdach) und anschließend den Entwurf der Verzierungen (Blumen und Laubwerk) (vgl. Abb. 4.4.3). Rezepturartig wird der Steinmetz angewiesen, mit dem Zirkel bestimmte Strecken abzugreifen und auf das Werkstück zu übertragen.

Neben der Vierung über Ort, einem schon bei Platon, Vitruv und Villard zu findenden Konstruktionsprinzip, und der Halbierung von Strecken kommt bei Roriczer gelegentlich auch die Drittelung vor. Zunächst bezeichnet er alle markierten Punkte mit Buchstaben; erst am Ende werden diese und die überflüssigen Hilfslinien wieder beseitigt. Roriczer schließt (die Schreibweise ist wieder nach dem Nachdruck von F. Geldner, München 1965, modernisiert):

„Danach setze den Riesen der Fiale auf den Leib der Fiale und beseitige alle Teilstriche [Hilfslinien], so bleiben nur die rechten Linien, die für die Fiale notwendig sind. Danach heißt die Figur eine rechte [d.h. eine richtig, gerecht konstruierte] Fiale, ausgezogen aus dem Grund[riß]. Ein Beispiel dafür neben der Schrift, und zwar der Grund- und der Aufriß. Also hat ein Ende das Büchlein der Fialen Gerechtigkeit. Anno Domini M.CCCC.LXXXVJ Jar. Am Abbend Petrj Und Paulj.“

Neben der systematischen Verwendung von Buchstaben zur Bezeichnung von Punkten, aber gelegentlich auch von Zeichnungen ist bemerkenswert, daß die gesamten Konstruktionen ohne Berechnungen durchführbar sind, sowie, daß alle weiteren Maße aus dem Ausgangsquadrat konstruktiv abgeleitet werden. Bedenkt man die lange Bauzeit der Dome und Kathedralen, so wird der Vorteil eines solchen Verfahrens offensichtlich: auch spätere Generationen von Steinmetzen konnten mit seiner Hilfe leicht die Absichten ihrer Vorgänger ausführen und begonnene Bauteile fertigstellen.

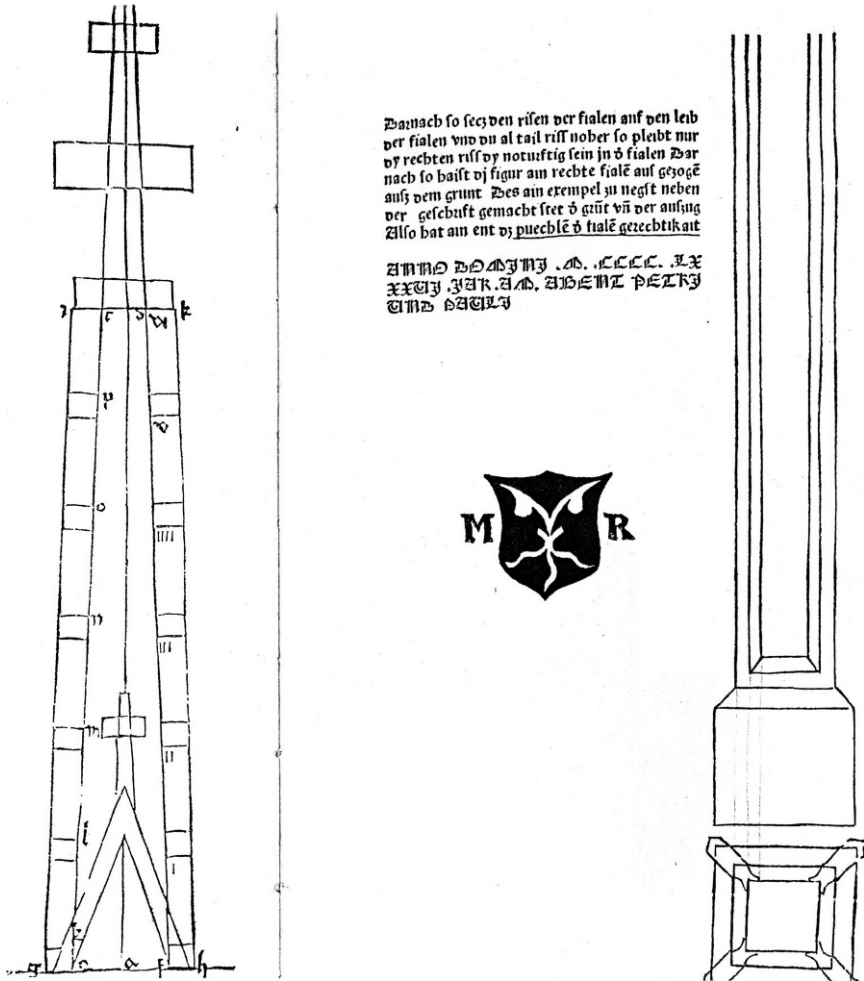


Abb. 4.4.3 Schluß des Büchleins von der Fialen Gerechtigkeit des Matthäus Roriczer:
 Zwei Aufrisse, Grundriß, Textende und Druckermarke (in Rot).
 [Matthäus Roriczer: Büchlein von der Fialen Gerechtigkeit, Regensburg 1486]

Leichte Abwandlungen des Fialenschmucks stellten kein Problem dar, weil dabei lediglich die Maßverhältnisse etwas abzuändern waren, der imposante Gesamteindruck des „gotischen Stils“ aber erhalten blieb.

Roriczers „Geometria Deutsch“, das erste gedruckte Geometriebuch in deutscher Sprache, enthält „etliche nützliche Kapitel [gemeint sind einzelne Konstruktionen] aus der Geometrie“, wie die Konstruktion eines rechten Winkels,

eines regelmäßigen Fünf-, Sieben- und Achtecks oder das Auffinden des „verlorenen“ Mittelpunktes eines Kreises (insgesamt sieben Konstruktionen). Das Besondere an der Fünfeckkonstruktion ist, daß sie mit fester Zirkelöffnung vorgenommen wird (s. Aufg. 5.3.2). Auch Albrecht Dürer beschrieb diese für den Praktiker nützliche Konstruktion.

Sehr einfach ist die Siebeneckskonstruktion: In einen Kreis vom Radius r wird eine Sehne gleicher Länge gelegt (also die Seite eines regelmäßigen Sechsecks, sodann ein Radius gezeichnet, der diese Sehne in der Mitte trifft. Das Stück zwischen Kreiszentrum und Sehnenmitte soll dann siebenmal am Kreisumfang abgetragen werden, also die Seite des regelmäßigen Siebenecks darstellen (s. Aufgabe 4.4.1). Zu bedenken ist, daß es im Gegensatz zum Fünfeck keine mit Zirkel und Lineal exakt ausführbare Siebeneckskonstruktion gibt (vgl. Abschnitte 2.4.2 und 3.4.2). Einige dieser Konstruktionen haben eine lange Geschichte: diejenige des rechten Winkels geht auf Proklos zurück, diejenige des Achtecks gab Heron an. Dennoch steht dieses kleine Geometriebüchlein, ebenso wie die Fialenbücher, in starkem Gegensatz zur antiken, beweisenden Geometrie. Darin liegt ein bedeutsamer Unterschied gegenüber den der Renaissance zuzurechnenden Werken, wie z.B. Dürers „Unterweisung der Meßkunst“. Diese enthalten nicht nur rezeptartige Vorschriften, sondern sind bemüht, auch die mathematische Begründung dazu wenigstens ansatzweise zu vermitteln. Anders gesagt: die führenden Köpfe sind bestrebt, Wissenschaft und Praxis miteinander zu verbinden und damit der Praxis (wie auch der Kunst — man denke an Leonardo da Vinci) ein wissenschaftliches Fundament zu geben.

4.4.3 Visualisierung

Die spekulativ-philosophische Denkhaltung des Mittelalters begünstigte die frühe Entfaltung der graphischen Darstellung abstrakter, nicht selbst sichtbarer Dinge und ihrer gegenseitigen Beziehungen, eine Richtung angewandter Geometrie, die durch die Hinwendung der Renaissance zum Diesseitigen und sinnlich Wahrnehmbaren jäh abbrach und wesentlich erst im 19. Jahrhundert wieder aufgenommen wurde, heute aber in allen Zweigen von Wissenschaft und Technik unverzichtbar ist. Besonders findet man in der mittelalterlichen Literatur Kreisdiagramme sowie gerichtete und ungerichtete Graphen mit Knoten- und Kantenbeschriftungen, zum Beispiel den Baum der Wissenschaften, den Baum der Tugenden und den der Laster (s. Abb. 4.5.1), [Schreiber 2003]. Verwiesen sei auch auf die Erfindung der europäischen Notenschrift als Vorläufer des ebenen Koordinatenprinzips (vgl. die Bemerkung S. 326).

Wesentliche Inhalte der Geometrie im europäischen Mittelalter

spättrömisch (6. Jh.)	BOETHIUS, CASSIODOR: etwas Elementargeometrie nach EUKLID
11. Jh.	„Boethius“ Geometrie II: ein mathematisches Kompendium mit elementaren, auf BOETHIUS fußenden Euklid-Exzerpten und Auszügen aus Agrimensorenhandschriften
um 1120	ADELARD VON BATH: Euklid-Übersetzung aus dem Arabischen ins Lateinische
12./13. Jh	HUGO VON ST. VICTOR, LEONARDO VON PISA: praktische Geometrie, Verwendung einfacher Instrumente (Elementargeometrie beeinflusst von Agrimensorenpraxis)
13. Jh.	JOHANNES DE SACROBOSCO: sehr elementare sphärische Geometrie als Grundlage der Erklärung der Himmelsbewegungen
um 1235	VILLARD D'HONNECOURT: Architekturskizzenbuch
14. Jh.	THOMAS BRADWARDINE: „spekulative“ (= theoretische) Geometrie
14. Jh.	NICOLE ORESME: Theorie der Formlatituden (Gestalt veränderlicher Qualitäten)
15. Jh.	JOHANNES VON GMUNDEN: Abhandlung über die Sinusfunktion, Sehne und Bogen
um 1500	MATTHÄUS RORICZER, HANS SCHMUTTERMAYER: Bauhüttenbücher

4.5 Aufgaben zu 4

Aufgabe 4.1.1: Kreisfläche aus Kreisumfang

Man überlege sich, daß in der ersten Lösung der Kreisumfang zu einem Quadrat ausgespannt wird, während hinter der zweiten Lösung die babylonische Formel (1.2.9) $F = u^2/12$ steht.

Aufgabe 4.1.2: Alcuin: Rechteckige Häuser in kreisförmiger Stadt

- Welche geometrische Vorstellung steht hinter der ersten Lösung? Inwiefern wird die Hausform in den Lösungsgang eingebaut?
- Worin liegt die Verbindung der zweiten Lösung mit der zweiten Lösung der vorigen Aufgabe?
- Die entsprechende Aufgabe in der „Geometria incerti auctoris“ verlangt, daß man vom Umfang den 22. Teil abziehe, den Rest durch 3 teile; dies sei der Durchmesser. Dessen Hälfte werde mit dem halben Kreisumfang multipliziert, das Ergebnis durch 600 dividiert. Welche Überlegungen stehen hinter dieser Vorschrift? [Folkerts/Gericke 1993, S. 332]

- d) Wie würde man heute die Aufgabe lösen? Welches der drei Verfahren kommt der wahren Lösung am nächsten?

Aufgabe 4.2.1: Anwendung des Astrolabs nach Hugo von St. Victor

Hugo erläutert, daß in Abb. 4.2.1.b) vier kongruente Dreiecke auftreten. Auf der Skala kann das Verhältnis der beiden Katheten (wir würden sagen: der Tangens) abgelesen werden.

- a) Welche Messungen und welche Rechenschritte sind zur Bestimmung der Höhe des anvisierten Objekts erforderlich?
- b) Falls die direkte Messung der Entfernung zwischen dem Feldmesser und dem Objekt nicht möglich ist, empfiehlt Hugo, von zwei verschiedenen Standpunkten aus das Ziel anzuvisieren (auch dieses Verfahren war den Agrimensoren bekannt). Man verfolge seine Anweisungen [Übersetzt aus dem englischen Text in [Homann 1991, 46–47] :

„Verwende das Astrolab da, wo du bist. Richte die Alhidade auf die Spitze des Objekts, bis du sie durch beide Öffnungen sehen kannst. Notiere, um wie viele Striche das Ende der Alhidade gegenüber der Horizontalen abgesenkt ist und vergleiche das mit den zwölf Strichen der ganzen Seite. Gemäß der Regel ist das das Verhältnis der Höhe zum Abstand vom Objekt, vermehrt um die Größe des Beobachters. [Zuvor hatte Hugo erklärt, daß „vermehrt um die Größe des Beobachters“ nur bei einer Messung in Diagonalenrichtung wörtlich zu verstehen ist und andernfalls diese Größe proportional umzurechnen ist. Würde die Sonne angepeilt, handelte es sich also um den Schatten des Beobachters auf dem Boden.]

Dann gehe um eine bestimmte Distanz zurück an einen anderen Punkt. Nimm das Astrolab und visiere die Spitze an. Notiere die Anzahl der Striche auf der Quadratseite und vergleiche sie mit der Gesamtlänge. Das Verhältnis ist nun das zwischen Höhe und der Distanz [zum Objekt], vermehrt um die Größe des Beobachters [im oben erläuterten Sinn]. Dann vergleiche die erste und zweite Basis, um zu bestimmen, um wieviel die zweite die erste übertrifft. Nun berechne die Länge der ersten mittels der Differenz zwischen erster und zweiter, d.h. finde die Distanz zwischen der ersten und der zweiten Position.

Nimm beispielsweise an, die erste Ablesung sei vier. Weil zwölf das Dreifache von vier ist, wird der Abstand vom Objekt, vermehrt um die Größe des Beobachters, das Dreifache der Höhe sein. Nimm an, die zweite Ablesung sei drei. Weil zwölf das Vierfache von drei ist, wird der Abstand plus die Größe des Beobachters das Vierfache der Objekthöhe sein. Die Annahme ist also, der erste Abstand plus die Größe des Beobachters (die erste Basis) ist das Dreifache der Objekthöhe (der Senkrechten), und der zweite Abstand plus die Größe des Beobachters (die zweite Basis) ist das Vierfache der Objekthöhe. Offensichtlich ist die zweite Basis ein und ein Drittel mal so groß wie die erste. Ein Drittel der ersten Basis wird also der Überschuß der zweiten über die erste betragen. Berechne diesen Abstand und nimm ihn als genau ein Drittel der ersten Basis.

5 Neue Impulse der Geometrie in der Renaissance



14. Jh.	Der Maler Giotto di Bondone (1266 – 1337) und die Dichter Petrarca (1304 – 1374) und Boccaccio (1313 – 1375) leiten die Renaissance ein
1370	Hanse erreicht Vorherrschaft zunächst im Ostseeraum
1397 – 1523	Kalmarer Union der skandinavischen Länder unter dänischer Führung
1409	In Rostock wird die erste nordeuropäische Universität gegründet
1434 – 1498	Florenz unter der Herrschaft der Medici
1436	Erste Abhandlung über Perspektive (Piero della Francesca)
um 1445	Erfindung des Buchdrucks mit beweglichen Lettern (Gutenberg)
1452 – 1519	Leonardo da Vinci
1453	Türken erobern Konstantinopel, Ende des byzantinischen Reiches
1453	Ende des hundertjährigen Krieges zwischen Frankreich und England
1471 – 1528	Albrecht Dürer
1475 – 1520	Michelangelo
1492	Erster Erdglobus in Europa (Martin Behaim, Nürnberg)
1492	Wiederentdeckung Amerikas durch Kolumbus
1494	Spanien und Portugal teilen sich die Neue Welt (Vertrag von Tordesillas)
um 1510	Peter Henlein fertigt in Nürnberg erste Taschenuhren
1517	Luthers Thesenanschlag, Beginn der Reformation in Deutschland
1518 – 1550	Rechenbücher von Adam Ries
1519 – 1522	Erste Weltumsegelung
1543	„De revolutionibus orbium coelestium“ von Copernicus wird gedruckt
1543	Paracelsus begründet die moderne Medizin
1547	Iwan IV. (der Schreckliche) nimmt den Titel „Zar“ an
1548 – 1603	Elisabeth I. regiert England
1560	In Neapel wird die erste europäische Akademie gegründet
1564 – 1616	William Shakespeare
1569	Mercators winkeltreue Erdkarte
1582	Gregorianischer Kalender löst den Julianischen (zunächst in katholischen Ländern) ab
1587	Erster Versuch einer britischen Koloniebildung in Amerika (Virginia)
1588	Untergang der spanischen Armada
1609	Kepler veröffentlicht die beiden ersten Gesetze der Planetenbewegung
1610	Galilei veröffentlicht sensationelle astronomische Entdeckungen mit dem Fernrohr
1614	Erste Logarithmentafel (Lord Merchiston Neper)
1618	Ausbruch des Dreißigjährigen Krieges

5.0 Vorbemerkungen

Der hier zu betrachtende Zeitabschnitt der rund 230 Jahre zwischen etwa 1400 und etwa 1630 wird in der Wissenschaftsgeschichte üblicherweise, wenn auch nicht ganz korrekt und nicht in Übereinstimmung mit der Periodisierung etwa der Kunstgeschichte, als Renaissance (d.h. Wiedergeburt, nämlich der Antike) bezeichnet. Er unterscheidet sich von allen anderen Perioden der Mathematikgeschichte durch die Kombination zweier Merkmale:

- gegenüber der vorausgehenden Zeit deutliche Hinwendung zur Praxis und Erschließung zahlreicher neuer Anwendungsgebiete und Anwendungen (Dies hat aber die „Renaissance“ mit der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts gemeinsam.);
- die wesentlichen Fortschritte kommen oft nicht von den studierten Gelehrten, sondern teils von Praktikern aller Art: Rechenmeister (Adam Ries), Ingenieure (Simon Stevin), Künstler (P. della Francesca, Dürer), Handwerker (Bürgi), Nautiker, Kaufleute (Thomas Gresham),..., teils aber auch von mathematikbegeisterten gebildeten Amateuren⁴: Ärzte (Gemma Frisius, Robert Recorde, Cardano), Juristen (Vieta), adlige Gutsbesitzer (John Neper), Höflinge (G. B. Benedetti), ..., und das ist in dieser Häufung einzigartig in der Geschichte der Mathematik.

Es waren hauptsächlich die letztgenannten Praktiker und an der praktischen Seite der Wissenschaften interessierten Amateure, die seit der Mitte des 16. Jhs. begannen, Akademien als Form des wissenschaftlichen Gedankenaustausches zu organisieren, bevor diese anfangs rein privaten Akademien seit der Mitte des 17. Jhs. in landesherrliche Institutionen umgewandelt oder nach dem Vorbild der bereits bestehenden von den Fürsten neu gegründet wurden. Natürlich gab es in dieser Periode parallel zur oben skizzierten Hinwendung zur Praxis eine stetige quantitative und qualitative Ausdehnung des Schul- und Hochschulwesens weit über den Standard des Mittelalters hinaus, und auch „professionelle“ Mathematiker, d.h. die Mathematiklehrenden der Schulen und Hochschulen, schrieben gar nicht so selten über praktische Probleme der Geometrie. Die Renaissance förderte aber bei den Gelehrten vor allem das Interesse an der fast vergessenen altgriechischen Sprache und die damit verbundenen Bemühungen, Texte antiker Autoren, die bis dahin meist nur durch Rückübersetzung aus dem Arabischen bekannt waren oder von deren einstiger Existenz man aus verschiedenen Quellen wußte, im griechischen Original zu beschaffen bzw. wiederherzustellen. Dies wurde begünstigt, als nach dem endgültigen Untergang des byzantinischen Reiches (1453 Eroberung Konstantinopels durch die Türken) griechische Gelehrte in Italien Zuflucht suchten und außer der Kenntnis des Griechischen auch eine Reihe von im übrigen Europa bis dahin unerreichbaren Manuskripten mitbrachten. Andererseits ermöglichte die Erfindung des Buchdrucks um 1445 erstmals die Verbreitung wissenschaftlicher Texte in größerem Umfang. In der Tat gehören die „Elemente“ zu den

⁴Das Wort Amateur hat heute einen etwas negativen Beiklang. Ursprünglich ist es aber von *amare* (latein. lieben) abgeleitet und bedeutet eine Person, die eine Sache nicht als Beruf, sondern – modern gesprochen – als hobby betreibt, wobei materielle Interessen höchstens eine Nebenrolle spielen.

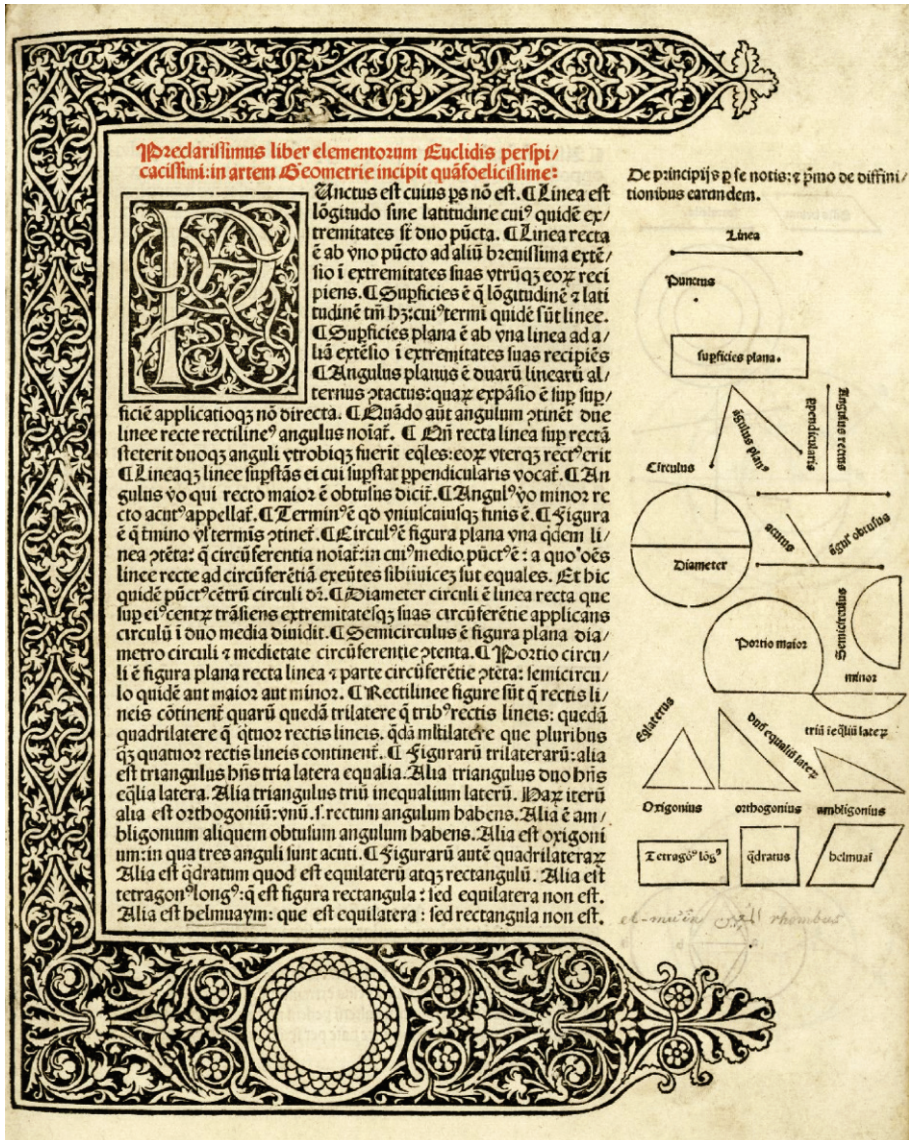


Abb. 5.0.1 Titelblatt der ersten Druckausgabe der „Elemente“, Venedig 1482.

Sie unterscheidet sich von allen späteren Ausgaben dadurch, daß sie ohne Nennung von Herausgeber, Übersetzer oder Drucker nach nur einem Einleitungssatz sofort mit dem eigentlichen Text, d.h. mit den Definitionen von Buch I, beginnt.

ersten gedruckten Büchern (1482 in Venedig durch den aus Augsburg stammenden Drucker Erhard Ratdolt, Abb. 5.0.1) und werden sofort zu einem „Bestseller“, der im Laufe der nächsten 500 Jahre zahllose Übersetzungen, Bearbeitungen und Editionen erlebt, von denen noch zu berichten sein wird.

Bedenkt man, daß antike Mathematik im wesentlichen Geometrie war, so war es in der Renaissance natürlich viel leichter, Fortschritte in der Arithmetik, Algebra und numerischen Mathematik über das Niveau der Antike hinaus zu erzielen als in der Geometrie. Mißt man als Fortschritt nur die Zahl und Schwierigkeit neuer geometrischer Lehrsätze und Lösungen konstruktiver Aufgaben, so wird man feststellen, daß die Mathematiker der Renaissance mit viel Mühe versuchten, sich das Wissen und das Niveau der Antike wieder anzueignen. Betrachtet man aber die Vielfalt neuer Praxisanforderungen an die Geometrie, die Fülle der zur Lösung solcher Aufgaben ersonnenen Mittel und den Beitrag, den die Geometrie zur gesellschaftlichen Wirksamkeit und Anerkennung der Mathematik leistete, so erscheint die Renaissance als eine der fruchtbarsten Perioden in der historischen Entwicklung der Geometrie.

5.1 Geometrie an Schulen und Universitäten, Euklid in der Renaissance

Nach den ersten, oft nicht genau datierbaren Universitätsgründungen begann um 1360 eine Ära der Regularität: Landesherren (regierende Bischöfe eingeschlossen) wünschten eine Landesuniversität, reiche Handelsstädte ebenso, eine päpstliche Bulle genehmigte bzw. bestätigte eine solche Gründung. So entstehen u.a. die Universitäten von Krakow (1364), Wien (1365), Heidelberg (1386), Köln (1388), Erfurt (1392), Leipzig (1409), Rostock (1419), Löwen (1422), Greifswald (1456), Ingolstadt (1459), Uppsala und Tübingen (1477), Kopenhagen (1479). Der aufkommende Protestantismus (1517 Thesenanschlag Luthers) spaltet auch das europäische Bildungswesen tief und nachhaltig. Als Reaktion auf die meist aus Kloster- oder Domschulen hervorgegangenen katholischen höheren Schulen entstehen die protestantisch und humanistisch geprägten ersten Gymnasien. Zur Strategie der 1534 mit dem Ziel der Rekatolisierung gegründeten Gesellschaft Jesu gehört der Aufbau eines eigenen Bildungssystems von hohem Niveau: Je nach örtlicher Situation innerhalb der bestehenden Schulen und Universitäten oder auch als Konkurrenz dazu werden Jesuitenkollegs geschaffen. Insbesondere dort spielt Euklid eine hervorragende Rolle: Eine Reihe der wichtigsten gedruckten Euklid Ausgaben dieser Zeit werden von Jesuiten für den Gebrauch an den jesuitischen Bildungseinrichtungen bearbeitet und herausgegeben, darunter die umfangreiche des Christoph Clavius, die seit ihrem ersten Erscheinen (Rom 1574) bis 1738 über 20 Auflagen hat.

Clavius fügte dem eigentlichen Text Euklids außer den spätantiken Büchern XIV und XV ein sechzehntes Buch und weitere umfangreiche Ergänzungen hinzu, in denen sowohl historisch als auch inhaltlich-mathematisch fast alles enthalten war, was sich seit fast 1900 Jahren rund um diesen Text ergeben hatte. Vieles, was man in den „Elementen“ vermutet, aber vergeblich sucht, wie z.B. der vierte Kongruenzsatz für Dreiecke oder die Konstruktion der gemeinsamen Tangenten zweier Kreise, findet sich bei Clavius. Weitere jesuitische Renaissanceausgaben Euklids stammen u.a. von St. Gracilis (1557), J. Lanz (1617) und C. Malapertius (1620). Matteo Ricci, ein Schüler von Clavius, der zu den ersten jesuitischen Missionaren in China gehörte, übersetzte in den Jahren 1603-07 mit Hilfe einheimischer Literaten Teile des Werkes von Clavius ins Chinesische und konnte dadurch die Position der Jesuiten am chinesischen Kaiserhof entscheidend stärken. 1594 ließen die Jesuiten in Rom sogar eine arabische Euklidausgabe (nach dem sogenannten Pseudo-Tusi) drucken, die als Übungstext für die in den islamischen Bereich zu entsendenden Jesuiten dienen sollte.

Während der bereits in 5.0 erwähnten ersten Druckausgabe der „Elemente“ der lateinische Text von Giovanni Campano (um 1260) zugrunde gelegen hatte, erschien 1505 eine auf einem griechischen Manuskript beruhende neue lateinische Übersetzung der „Elemente“ sowie der „Data“, „Optik“, „Katoptrik“ und „Phänomena“ von Bartholomeo Zamberti. Hiermit begann ein Streit um die Art und den Sinn der Beschäftigung mit Euklid, der sich in unterschiedlichem Gewand durch die Jahrhunderte lebendig erhalten sollte: Campano hatte sich, wie auch schon seine arabischen Quellen, um einen mathematisch möglichst sinnvollen Text bemüht. Zamberti, mehr Philologe als Mathematiker und im Bewußtsein seiner originaleren Quelle, beschimpfte Campano als „barbarischsten aller Übersetzer“, scheiterte jedoch selbst nur allzu oft am inhaltlichen Verständnis. Das Altgriechische ist eine extrem vieldeutige Sprache, und bis heute ist es sehr schwierig geblieben, den Sinn antiker mathematischer Texte lediglich vom philologischen Standpunkt erschließen zu wollen. Jedoch begann eigentlich mit Zamberti, der erstmals einen „originalen“ griechischen Text Euklids im Druck allgemein zugänglich gemacht hatte, eine Richtung der Auseinandersetzung mit dem Erbe Euklids, die dieses mehr als Kulturerbe und altsprachlichen Übungs- und Lesetext denn als mathematischen Lehrtext verstand. Dies hat den Umgang mit der euklidischen Geometrie für viele Generationen von Gymnasiasten und Studenten geprägt, leider oft zum Nachteil ihres Interesses und Verständnisses für Mathematik.

Die Wiederbelebung des Altgriechischen als Wissenschaftssprache gehörte wie bereits bemerkt zum Programm der Humanisten und wurde besonders an den

meist protestantischen Gymnasien gepflegt. 1533 erschien in Basel die erste griechische Druckausgabe der „Elemente“ zusammen mit dem Kommentar des Proklos. Sie war von dem Gräzisten Simon Grynaeus herausgegeben, der zum Kreis um Erasmus von Rotterdam gehörte, und findet sich, ebenso wie die ältesten lateinischen Druckausgaben, noch heute in Bibliotheken einiger ganz alter Universitäten oder Gymnasien. Noch 1773 vertrat der Hallenser Mathematikprofessor J. A. Segner im Geleitwort zu einer neuen lateinischen Schulausgabe der „Elemente“ die Ansicht, daß der Rückzug von griechischen auf lateinische Schulausgaben, erzwungen durch zunehmend unzureichende Kenntnis des Altgriechischen, einen beklagenswerten Verlust der mündlichen und schriftlichen Ausdrucksfähigkeit der Schüler sowie ihres logischen Denkvermögens zur Folge haben müsse (Zitat in [Schreiber, P. 1987a, 124]).

Zur Skizze der äußeren Umstände der Euklidpflege in der Renaissance gehört unbedingt, daß die „Elemente“ bzw. Teile davon seit der Mitte des 16. Jhs. in zahlreichen volkstümlichen Druckausgaben in den lebenden Sprachen erschienen: 1543 italienisch, 1551 und 1570 englisch, 1555 und 1562 deutsch, 1564 und 1616 französisch, 1576 spanisch, 1606 niederländisch. Dies setzt sich bis ins 18. Jh. fort und ist wohl zu unterscheiden von den neuzeitlichen Editionen Euklids in lebenden Sprachen, die meist strengen historischen und philologischen Ansprüchen genügen und sich an einen völlig anderen Leserkreis wenden. Die volkstümliche Euklidliteratur des 16. bis 18. Jhs., verfaßt von Rechenmeistern und gelehrten Amateuren, aber auch von Universitätsprofessoren, ließ die Beweise oft zugunsten ausführlicher Beispiele und Anwendungen weg, reduzierte auch die rein theoretische Proportionenlehre Euklids auf Zahlenrechnungen und bot in Anhängen und Ergänzungen die eigenen wissenschaftlichen Spezialitäten der jeweiligen Bearbeiter von der Feldmeßkunst über die Handhabung des Proportionalzirkels bis zu den Unterhaltungsaufgaben. Der vom Kauf dieser Bücher zu erwartende praktische Nutzen und die leichte Verständlichkeit wurden auf den Titelblättern in Wort und Bild reißerisch angepriesen (Abb. 5.1.1).

Geometrie gehört in der Renaissance nach wie vor zu den sieben freien Künsten und daher zum Lehrkanon an den „Artisten“fakultäten, den Keimen der späteren philosophischen Fakultäten. Ihre erfolgreiche Absolvierung ist Voraussetzung für das Studium der Theologie, Medizin oder Rechtswissenschaft. Die Studenten sind nach heutigem Maßstab meist noch sehr jung, wenn sie dieses studium generale durchlaufen. Einen allgemeinen deutlichen Niveauunterschied zwischen der Mathematik an den Universitäten und der an den sonstigen Bildungsanstalten (Gymnasien, Kollegien, Pagenschulen, Ritterakademien,...) hat es nicht gegeben, jedoch gab es einige Universitäten, an denen die

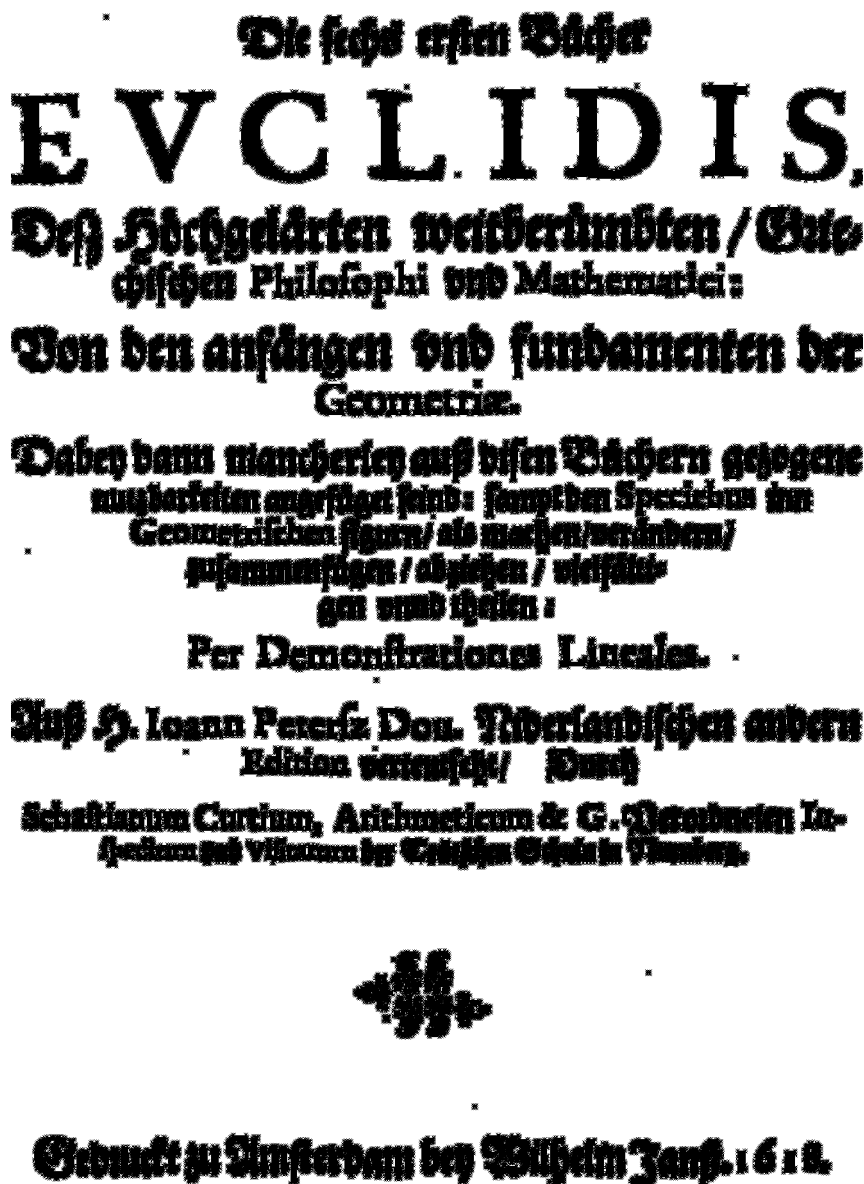


Abb. 5.1.1 Titelblatt einer deutschen Ausgabe der Bücher I-VI der „Elemente“
 [Menso Folkerts (Hrsg.): Bibliographia Euclideana, Gerstenberg-Verlag Hildesheim 1981]

mathematischen Wissenschaften besonders gepflegt wurden, z.B. Wien oder Krakow. Die Geometrie ist eingeteilt in *geometria speculativa* (d.h. theoretisch orientiert) und *geometria practica*.

Der theoretisch orientierte Teil der Renaissancegeometrie gruppiert sich um einige bevorzugte Themen wie z.B. die Kreisquadratur oder das Problem der „hornförmigen“ Winkel: Ausgangspunkt ist ein Zusatz unklarer Herkunft zu Proposition III.16 der „Elemente“, worin behauptet wird, der (sogenannte Kontingenz-)Winkel zwischen einem Kreis und seinen Tangenten sei kleiner als jeder spitze Winkel mit geraden Schenkeln. Für Clavius und andere war diese Textstelle Anlaß genug, seitenlang über derartige „unendlich kleine, aber dennoch von Null verschiedene“ Größen zu spekulieren, und es ist nicht auszuschließen, daß diese noch im 17. Jh. jedem Mathematiker geläufigen Texte anregend auf die Entstehung der Infinitesimalmathematik gewirkt haben. Andere Renaissancemathematiker wie etwa der Franzose J. Peletier wiesen die Vorstellung, der Kontingenzwinkel sei eine unendlich kleine positive Größe, entschieden zurück. Im Werk des vorwiegend philosophisch orientierten Pariser Gelehrten P. de la Ramée finden sich, eingebettet in heute schwer nachvollziehbare Spekulationen, erste Ansätze eines Nachdenkens über den strukturellen Charakter einer axiomatisch aufgebauten Geometrie: Es sei nicht ihre Aufgabe, das (physikalische) Wesen von Objekten wie Punkt und Gerade zu klären. Axiome seien nicht denknotwendig, ihre Annahme sollte aber philosophisch bzw. didaktisch motiviert sein. Henry Savile, Professor an der Universität Oxford, der selbst Vorlesungen über die „Elemente“ hielt, stiftete einen Lehrstuhl für Geometrie mit der Bedingung, der jeweilige Inhaber müsse sich mit den „naevi“ (Geburtsmakeln) der „Elemente“, nämlich dem Parallelenproblem und dem ohne ausreichende axiomatische Grundlage benutzten Verhältnisbegriff der Proportionentheorie beschäftigen. Auch die von der Scholastik hervorgebrachte Leidenschaft für das Systematisieren und Klassifizieren schlägt auf die Geometrie durch. So stößt Clavius beim Auflisten aller Möglichkeiten, wie ein Dreieck aus gegebenen Seiten und Winkeln zu konstruieren sei, auf den bei Euklid nicht erwähnten vierten Kongruenzsatz. Andere Autoren untersuchen, wieviele verschiedene Arten von Vier-, Fünf-, Sechs-...ecken es geben kann. Während an einigen Universitäten besondere Lehrstühle für Mathematik eingerichtet werden, auf denen mancher Mathematiker wirkt, der bis heute nicht vergessen ist, ist es durchaus üblich, die Mathematik von Professoren anderer Spezialisierung nebenbei lehren zu lassen. Keplers akademischer Lehrer in Tübingen, M. Maestlin, ist auch Professor für Hebräisch. In Leiden wirkt mit J. J. Scaliger am Ende des 16 Jhs. ein Mann auf einem mathematischen Lehrstuhl, der zwar hochverdient um den als Chronologie bezeichneten Teil der

historischen Wissenschaften ist, jedoch eine von ihm selbst für exakt gehaltene Lösung des Problems der Kreisquadratur publiziert, die ob ihrer groben Fehler von Vieta, Snellius, Ludolph van Ceulen und anderen Zeitgenossen scharf angegriffen wurde. Diese Kritik wies Scaliger mit der Begründung zurück, daß man wohl von einem renommierten Gelehrten wie ihm nicht verlangen könne, Mathematik nach der Art eines Fechtmeisters (wie van Ceulen) oder Feldmessers zu treiben (vgl. den Beitrag von Vermij in [Hantsche 1996]).

Häufig verfaßten aber auch Universitätsprofessoren Schriften über praktische Aspekte der Geometrie wie Geodäsie, Kartographie, Optik und Perspektive, Astronomie und Astrologie, Ballistik, Architektur und Festungsbau, wobei auch Fragen mit nur scheinbarem Praxisbezug wie die „Teilung von Figuren“ nach Euklid behandelt wurden. Zum Teil dienten derartige Arbeiten schlicht der Aufbesserung der meist mageren Bezahlung eines Universitätsprofessors. Als Beispiele nennen wir die später zu besprechenden Beiträge von W. Snellius in Leiden und P. Apian in Ingolstadt zur Geodäsie, Kartographie und Navigation sowie die vielen praktischen Arbeiten von W. Schickard in Tübingen [Hantsche 1996]. Aber auch von Clavius gibt es eine „Geometria practica“ in 8 Büchern (1604). Darin wird u.a. erstmals der Nonius als Hilfsmittel zur Steigerung der Ablesegenauigkeit für lineare Messungen beschrieben. (P. Nunez, lat. Nonius, nach dem das Gerät benannt ist, hatte 1542 eine ähnliche Vorrichtung nur für Winkelmessungen vorgeschlagen.) Clavius transformiert die Grundaufgaben der sphärischen Geometrie mittels der stereographischen Projektion in Aufgaben der ebenen Geometrie und löst sie dort. Für die aus der Bauhüttenpraxis stammende näherungsweise Konstruktion des regulären Fünfecks mit fester Zirkelöffnung, wie sie in der „Geometria deutsch“ des M. Roriczer und auch von Dürer 1525 gelehrt wurde (vgl. Aufgabe 5.3.2) rechnet Clavius den Fehler nach. Dies ist u.a. deshalb interessant, weil es belegt, daß auch Gelehrte wie Clavius die von Künstlern und Handwerkern verfaßte Literatur zumindest partiell zur Kenntnis genommen haben.

Einen eigenen Weg beschritt Joachim Jungius mit seiner „Geometria empirica“ von 1627 [Jungius 1627], einem mehrfach aufgelegten Lehrbuch für das akademische Gymnasium. Darin versuchte er, bei der Einführung in die Geometrie die empirischen Erfahrungen der Schüler einzubeziehen, indem er auch das Experimentieren mit den geometrischen Hilfsmitteln wie Zirkel und Lineal erlaubte. So wollte er bei den Schülern durch die Anschauung Einsichten in geometrische Beziehungen wecken. Die leider nur unvollständig bekannte, von Jungius vorgenommene deutsche Übersetzung unterstrich mit ihrem Titel „Reiß-Kunst oder Erfahrungsmessiger Figuhrkündigung“ dieses Bestreben.

5.2 Geometrie in Astronomie, Geodäsie und Kartographie

Das Interesse an der Astronomie war seit den ältesten Kulturen bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts eine der stärksten Triebfedern für die Beschäftigung mit Mathematik. War es anfangs neben kultisch religiösen Motiven und den Bedürfnissen der Kalenderrechnung ein reines „Wissenwollen“ gewesen, so hatte seit der Spätantike zunehmend die Astrologie das Hauptmotiv für die Entwicklung der Astronomie gebildet. Auch viele bedeutende Mäzene der astronomieorientierten Mathematik in Mittelalter und Renaissance, von Alfons X. von Kastilien und Friedrich II. von Hohenstaufen bis zu den deutschen Kaisern des ausgehenden 16. Jhs., wurden vor allem durch ihre Astrologiegläubigkeit dazu motiviert, Mathematiker und später auch den Druck mathematischer Werke zu fördern. Seit dem 15. Jahrhundert kommt aber die Rolle der Astronomie als Hilfswissenschaft für die sich entwickelnde Nautik und Geodäsie hinzu, die im Laufe von etwa 300 Jahren die Astrologie als „Motor“ der Astronomie fast völlig ablösen werden.

Astronomie ist aus mathematischer Sicht zunächst einmal die Geometrie der auf eine gedachte Kugel projizierten Bewegungsabläufe am Himmel. Daher ist es nicht verwunderlich, daß die sphärische Trigonometrie sich lange Zeit gleichrangig neben der ebenen Trigonometrie entwickelte (während sie doch kein Bestandteil heutiger mathematischer Schul- und Allgemeinbildung mehr ist). Trigonometrie war noch bis ins 15. Jh. kein selbständiger Zweig der Mathematik, sondern unlösbar mit ihrer Hauptanwendung in der Astronomie verbunden, aber Astronomie ihrerseits als Bestandteil des Quadriviums galt natürlich als eine mathematische Wissenschaft. Dies hat nicht nur die Terminologie erheblich beeinflußt, z.B. *umbra recta* = Schatten des senkrechten Gnomons auf waagerechter Ebene für $\cos$, *umbra versa* = Schatten des waagerechten Stabes auf senkrechter Ebene für $\sin$ (Abb. 5.2.1), Bezeichnungen wie Azimut und Rektaszension für spezielle Winkel, sondern führte auch über lange Zeit zu einer Beschränkung der betrachteten Begriffe und Aufgaben auf solche, die in der Astronomie tatsächlich vorkommen. Daß z.B. der Winkelsinussatz erst 1593 von Vieta und in deutlicherer Form 1600 von Bartholomäus Pitiscus formuliert und bewiesen wurde, ist keineswegs der relativen Schwierigkeit zuzuschreiben, die zugehörigen Polarprinzipien aufzufinden, sondern vielmehr der Tatsache, daß die Bestimmung eines sphärischen Dreiecks aus seinen drei Winkeln in der Positionsastronomie nirgends vorkommt. Ähnliches trifft auf die späte Einführung der Tangensfunktion zu.

Dem Kenner moderner Trigonometrie stellen sich neben den bereits erwähnten Schwierigkeiten (mangelnde Systematik, heute unübliche Terminologie und schwerfällige, kaum formalisierte Schreibweisen) beim Versuch, Trigonometrie der Renaissance zu verstehen, weitere Hindernisse in den Weg, z.B. beziehen sich die Werte der zahlreichen damals berechneten Tafeln (je eine Streckenlänge in Abhängigkeit von einem in Grad, Minute und Sekunde ge-

messenen Winkel) nicht auf den Einheitskreis, sondern auf einen von Fall zu Fall unterschiedlich angenommenen Radius (der dann, da als Sinuswert von 90 Grad auftretend, *sinus totus* genannt wird). Um Brüche möglichst zu vermeiden, wurde diesem *sinus totus* eine sehr große Maßzahl zugewiesen, z.B. 60 000 (Regiomontanus), 100 000 (Regiomontanus, Rhaeticus, Maurolyco), 600 000 (Joh. von Gmunden, Georg von Peurbach), 6 000 000 (Regiomontanus), 10^7 (Neper), 10^{15} (Rhaeticus).

Diesen allgemeinen Bemerkungen lassen wir eine kurze chronologische Übersicht folgen. Eine sehr faktenreiche, wenn auch in vielen Details korrektur- bzw. ergänzungsbedürftige Darstellung ist [Braunmühl 1900]. Einen Zugang zur umfangreichen neueren Literatur bieten [Hamann 1980] und die aktualisierte englische Übersetzung [Zinner 1990] des Klassikers von 1938 über Regiomontanus.

Bald nach 1400 etablierte sich an der Wiener Universität eine von Johannes von Gmunden begründete astronomisch-trigonometrische Schule. Sein Schüler und Amtsnachfolger Georg von Peurbach ist vor allem als derjenige von Bedeutung, der der alten ptolemäischen Astronomie ihre letzte Ausprägung vor ihrer Ablösung durch das copernicanisch-keplersche Weltsystem gab. Seine durch frühen Tod unvollendeten Arbeiten setzte sein Schüler und Freund Regiomontanus (eigentlich Johannes Müller) fort. Regiomontanus, der sich nach einer längeren Italienreise und vorübergehender Tätigkeit für den ungarischen König Matthias Corvinus in Nürnberg niederließ, entfaltete dort eine dreifache Tätigkeit: Er betrieb eine Werkstatt zur Anfertigung von (teils von ihm selbst erfundenen oder verbesserten) Instrumenten, befaßte sich mit der Übersetzung und dem Druck klassischer mathematischer und astronomischer Schriften und schrieb neben anderen eigenen Werken seine „Fünf Bücher über beliebige Dreiecke“, mit denen er in Europa die Trigonometrie als systematische und von der Astronomie gelöste Disziplin begründete (s. Abb. 4.2.3). Regiomontanus ist vielfach als der bedeutendste deutsche Mathematiker des 15. Jahrhunderts gefeiert worden. Dementsprechend umfangreich ist die Literatur über ihn. Es ist jedoch klar, daß er bei allem eigenen Verdienst sehr viel seiner umfangreichen Kenntnis antiker, islamischer und auch mittelalterlicher europäischer Literatur (hier besonders Levi ben Gerson) verdankte.

Während die ersten vier Bücher (d.h. Kapitel) seines folgenreichen Werkes ganz auf dem Sinussatz der ebenen bzw. dem der sphärischen Trigonometrie beruhen und alle Dreiecksaufgaben dort im wesentlichen durch Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke gelöst werden, ist im 5. Buch erstmals der Cosinussatz

der sphärischen Geometrie als ein Satz über beliebige sphärische Dreiecke formuliert und bewiesen, freilich in einer für uns schwer lesbaren Form, nämlich:

$$\sinvers A : (\sinvers a - \sinvers (b - c)) = \text{sintotus}^2 : \sin b \cdot \sin c. \quad (5.2.1)$$

Dabei ist A der heute als α bezeichnete Winkel und $\sinvers = \text{sinus versus} = \text{sinus totus} - \text{cosinus}$ eine geometrisch durchaus sinnvolle Größe, nämlich die „Pfeilhöhe“ des zum doppelten Winkel gehörigen Bogens (Abb. 5.2.1). Gleichung 5.2.1 läßt sich durch eine einfache Rechnung in die heute übliche Form

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \quad (5.2.2)$$

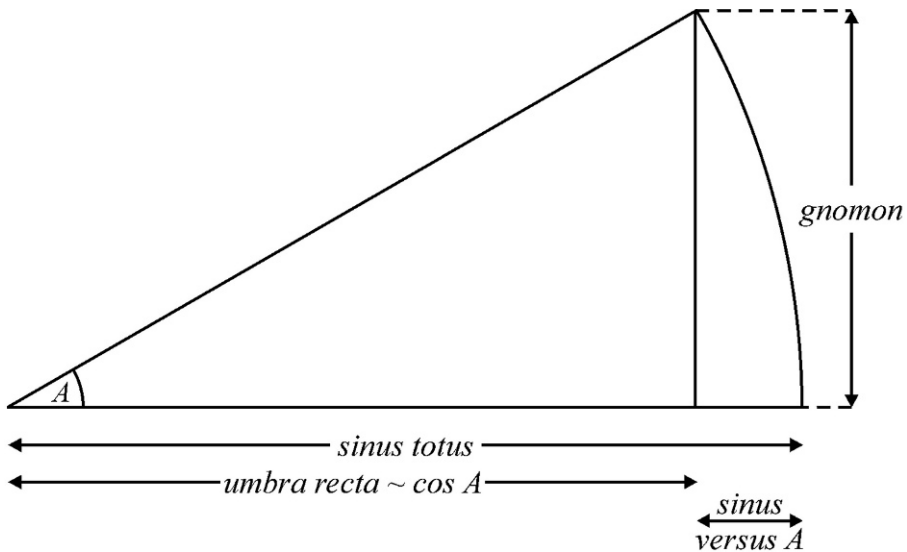


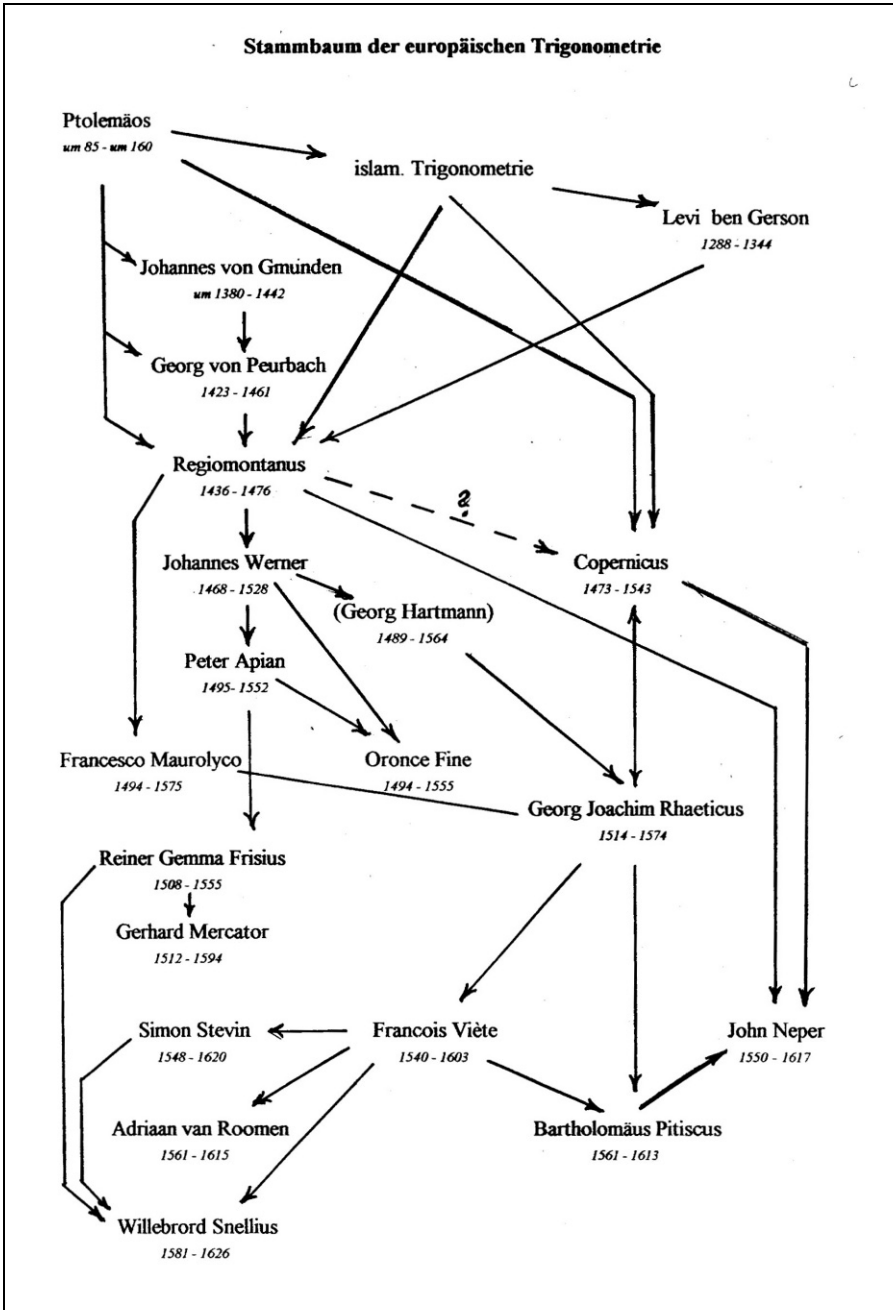
Abb. 5.2.1 Geometrische Bedeutung von umbra recta, sinus totus und sinus versus

überführen. Man beachte jedoch, daß in einer noch von der griechischen Tradition geprägten Mathematik Gleichung 5.2.2 ganz sinnlos gewesen wäre, da sie gegen das Homogenitätsprinzip verstößt, wenn man die beteiligten Größen jeweils als Strecken auffaßt, während 5.2.1 die zulässige Form einer Proportion hat: Strecke: Strecke = Fläche: Fläche. Mit dieser Überlegung wird auch die Rolle des *sinus totus* klarer. Übrigens stellt 5.2.1 genau wie 5.2.2 eine Beziehung zwischen den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks und einem beliebigen seiner Winkel her. Jedoch war auch Regiomontanus noch so sehr im Banne der Astronomie, daß er den Satz nur zur Berechnung der dritten Seite bei zwei

gegebenen Seiten und einem gegebenen Winkel nutzte, aber nicht, um sich bei drei gegebenen Seiten die Winkel zu verschaffen.

Während das erst 1533 (d.h. 57 Jahre nach seinem Tode) gedruckte Hauptwerk des Regiomontanus einen bedeutenden Einfluß auf Johannes Werner, Georg Joachim Rhaeticus, Peter Apian, Francesco Maurolyco und andere Spezialisten der Trigonometrie ausübte, scheint Copernicus relativ unabhängig von direkten Vorgängern zu seiner Trigonometrie gekommen zu sein, die sich daher auch durch einige Besonderheiten wie z.B. die Einführung der secans-Funktion (als Kehrwert des Cosinus) oder den Gebrauch der Tangens-Funktion auszeichnet. Große Verdienste um die systematische und didaktisch geschickte Aufbereitung des angesammelten Wissens erwarben sich vor allem Rhaeticus und Bartholomäus Pitiscus. Rhaeticus definiert als erster alle sechs trigonometrischen Funktionen $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$, $\sec$, cosec als Seitenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck und tabelliert sie so, daß die Winkel jeweils nur zwischen 0 und 45 Grad variieren und je eine Tabelle für das Ablesen eines Paares $\sin$ - $\cos$, $\tan$ - $\cot$, $\sec$ - cosec eingerichtet ist. Pitiscus führte mit dem Titel „Trigonometriae sive dimensionae...“ seines 1595 erschienenen Buches das Wort Trigonometrie ein.

Die zunächst in Deutschland erreichten Fortschritte der Trigonometrie verbreiteten sich bald nach Italien (Maurolyco), Frankreich (Fine, Vieta), Großbritannien (Neper) und den Niederlanden (Gemma Frisius, Stevin, Snellius). Vieta gelingt als erstem die Ableitung des Winkelsinussatzes, wobei er freilich statt des heute dafür üblichen Polardreiecks (das Snellius einführt, s. Aufg. 5.2.1) nur eine Ecke des Dreiecks durch die zugehörige Polarecke ersetzt. Allmählich dringen auch geodätische und andere technische Anwendungen der Trigonometrie in die Lehrbücher ein: In einer venezianischen Handschrift aus der Mitte des 15. Jhs. wird die kürzeste Entfernung zwischen Start und Ziel einer Reise aus den geradlinigen Teilstücken der Route und den Richtungsänderungen in den Knickpunkten bestimmt. In einer 1514 von Johannes Werner herausgegebenen Schrift taucht, anscheinend erstmals in Europa, die aus der islamischen Trigonometrie wohlbekannte Aufgabe auf, aus den geographischen Koordinaten zweier Punkte der Erdoberfläche ihre kürzeste Entfernung zu bestimmen. Ähnliche Aufgaben hatte auch schon Regiomontanus. Pitiscus hat in der dritten Auflage (1612) seines Trigonometriebuches erstmals einen Anhang über Anwendungen im Bauwesen. Diese Auflage wird 1614 ins Englische übersetzt. Die „Chorographie“ von Rhaeticus hätte einen bedeutenden Beitrag zur Entwicklung der Geodäsie leisten können, blieb aber ungedruckt. So kam der größte Schub in Richtung Geodäsie von den Niederländern.



Reiner Gemma (eigtl. van Steen) Frisius, ein Arzt aus dem friesischen Norden der Niederlande, beschrieb 1533 als erster die Methode der Triangulation zur rein terrestrischen Entfernungsmessung, d.h. ausgehend von einer sehr genau vermessenen Basisstrecke werden nur noch Winkel gemessen und daraus die Seiten anschließender Dreiecke sukzessive trigonometrisch berechnet. 1547 schlug er, wiederum als erster, vor, die geographische Länge mittels mitgeführter genau gehender Uhren zu messen. Das einfache Prinzip besteht darin, daß die Längendifferenz zweier Orte proportional zur Differenz ihrer Ortszeiten ist, so daß man nur die astronomisch bestimmte Ortszeit am jeweiligen Standort mit der mitgeführten Ortszeit des „Eichortes“ zu vergleichen braucht. Die technische Realisierung setzt freilich Uhren voraus, die nicht nur über längere Zeiträume sehr genau gehen, sondern auch unempfindlich gegen die Erschütterungen einer längeren Land- bzw. Seereise sind. Das konnte erst um 1736 durch den Briten John Harrison verwirklicht werden [Howse 1980, Sobel 1995].

Snellius, Sohn und Amtsnachfolger eines Leidener Mathematikprofessors, führte zwischen 1615 und 1617 die erste Gradmessung durch Triangulation aus⁵. Dabei bestimmte er die rund 130 km betragende Entfernung zwischen den Orten Alkmaar und Bergen op Zoom, die ungefähr auf dem gleichen Meridian liegen, mit bemerkenswerter Genauigkeit. In seinem Hauptwerk „Eratosthenes Batavus“ (svw. der niederländische Eratosthenes) 1617 wird außer dieser Vermessung auch erstmals das Verfahren des sogenannten Rückwärts-einschneidens⁶ beschrieben, das später nach dem im 18. Jh. als Professor in Paris tätigen Laurent Pothenot benannt wurde. Dabei werden von einem Standort S aus, den es zu ermitteln gilt, die Winkel zwischen je zweien von drei Punkten A, B, C mit bekannter Lage gemessen. Die Kreise durch S, A, B und S, B, C ergeben sich aus den Peripheriewinkeln und der Standort S als der von B verschiedene Schnittpunkt dieser Kreise. Daraus folgt auch, daß das Verfahren versagt, wenn S auf dem Kreis durch A, B, C liegt, und daß es beliebig ungenau wird, wenn S diesem „gefährlichen Kreis“ nahekommt. Gerade derartige Überlegungen kündigen, bei aller theoretischen Trivialität des Sachverhalts, eine neue Art von geometrischem Denken an.

⁵Die erste europäische Gradmessung war schon 1525 durch Jean Fernel, Leibarzt des französischen Königs Heinrich II., zwischen Paris und Amiens durchgeführt worden, indem die Strecke mit einer Kutsche durchfahren wurde, deren Radumdrehungen gezählt wurden. Da er trotz dieser fehlerträchtigen Methode einen relativ genauen Wert bekanntgab, ist Fernel später (u.a. von Snellius) Manipulation des Ergebnisses vorgeworfen worden [Bialas 1982].

⁶Beim Vorwärtseinschneiden bestimmt man durch Anpeilen eines „Neupunktes“ von zwei bekannten Standorten die Lage dieses neuen Punktes. Solches Vorgehen wird schon dem Thales zugeschrieben.

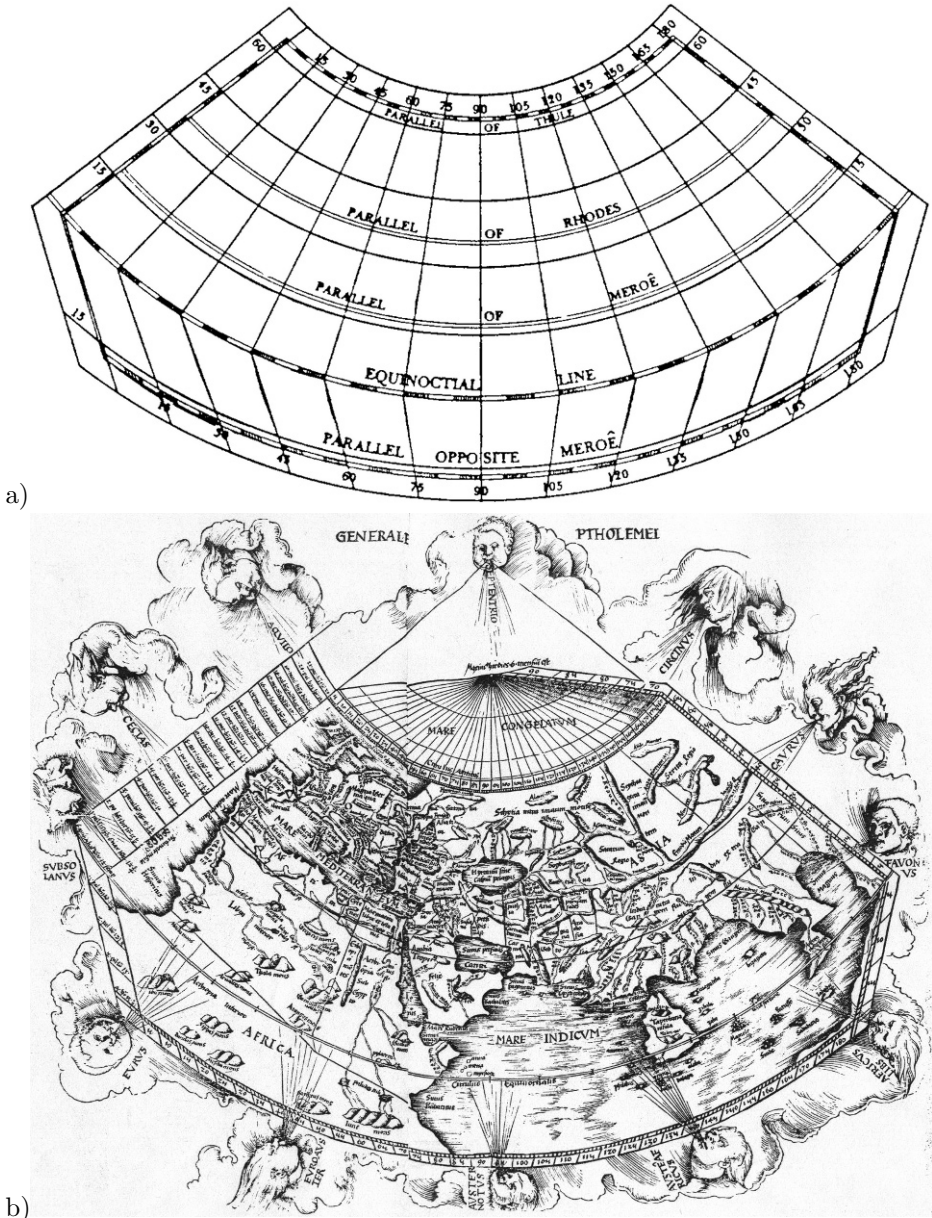
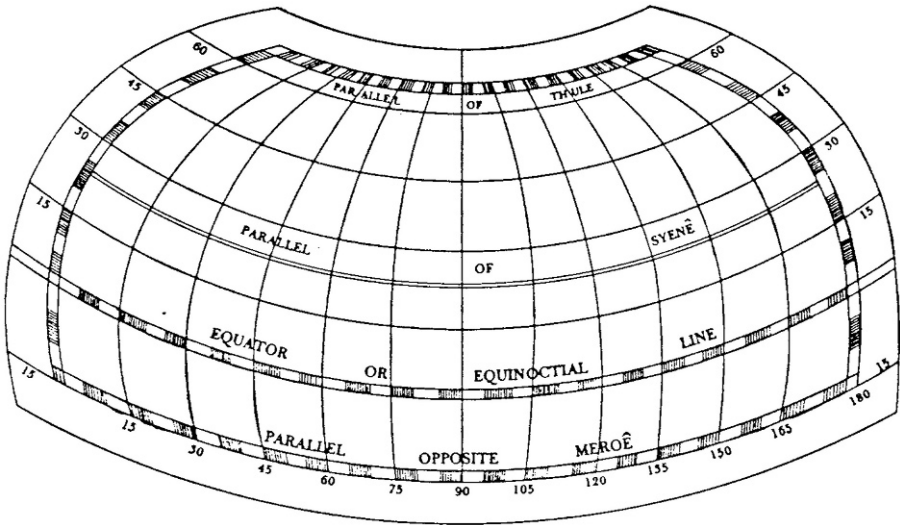


Abb. 5.2.2 Weltkarte des Ptolemaios

a) Rekonstruktion der Kegelprojektion des Ptolemaios, b) Karte der bewohnten Welt in Kegelprojektion (Straßburg 1513), rekonstruiert aus den Längen- und Breitenangaben im Handbuch der Geographie des Ptolemaios

[a] aus Lloyd A. Brown: The Story of Maps, Bonanza Books, New York 1949, neue Ed. Dover Publ. Inc., Mineola 1990; b) Herzog-August-Bibliothek, Wolfenbüttel 1.2. 4.1 Geogr. 2°]



a)



b)

Abb. 5.2.3 Modifizierte sphärische Projektion des Ptolemaios

a) Rekonstruktion der modifizierten sphärischen Projektion des Ptolemaios, b)

Weltkarte von Nicolaus Germanus aus der ersten in Deutschland gedruckten

Ptolemaios-Ausgabe (Ulm 1482)

[a] aus Lloyd A. Brown: The Story of Maps, Bonanza Books, New York 1949, neue Ed. Dover Publ. Inc., Mineola 1990; b) Herzog-August-Bibliothek, Wolfenbüttel 2.2 Geogr. 2°]

Das 17. Jh. wird dann das Jahrhundert der ersten großangelegten Landesvermessungen, an denen Mathematiker wie J. Kepler, W. Schickard, G. D. Cassini und M. Ricci beteiligt sind. Der Tübinger Mathematikprofessor W. Schickard hat dabei anscheinend unabhängig von Snellius und zur gleichen Zeit wie dieser die Triangulation und das Rückwärtseinschneiden praktisch betrieben. Es ist hier nicht der Ort, ausführlich darzulegen, in welchem Maße die (Wieder)Entdeckung Amerikas und die anderen großen Entdeckungsreisen des 15. und 16. Jahrhunderts das mittelalterliche Weltbild revolutionierten, wie das neue Bild von der Erde auch die Frage nach der Stellung der Erde im Kosmos und nach dessen Struktur intensivierte. In engem Zusammenhang mit dem Aufschwung von Astronomie, Geographie und Geodäsie entwickelte sich jedoch ein weiteres neues Anwendungsgebiet der Geometrie, seiner Natur nach am engsten mit „eigentlicher Geometrie“ verbunden: die Kartographie. Die Antike hatte im wesentlichen nur eine mathematisch interessante und exakt definierte Abbildung der Kugeloberfläche in die Ebene entwickelt, nämlich die stereographische Projektion, deren Kreistreue ja dem Funktionieren der Astrolabien bzw. später der mechanisch angetriebenen Zifferblätter astronomischer Uhren zugrundeliegt. Auf die Idee, diese Abbildung auch für geographische Karten zu nutzen, scheint vor Johannes Werner niemand gekommen zu sein. Es handelte sich ja selbst in der Geographie des Ptolemaios nur um die Abbildung des bekannten Teiles der Welt, und dafür entwickelte Ptolemaios die wesentlich schlichteren aber auch anschaulicheren Kartenbilder, die wir heute als Teile von Kegelprojektionen identifizieren (Abb. 2.5.4 und 5.2.2, 5.2.3).

Während des europäischen Mittelalters hatten die Weltkarten — wie auch die meisten anderen bildlichen Darstellungen — einen überwiegend symbolischen Anspruch zu erfüllen. Es gab die sogenannten Radkarten mit Jerusalem als Mittelpunkt der kreisförmigen Weltscheibe und mitunter exakter Viertelung durch Gewässer wie das Mittelmeer und das Rote Meer, wobei ein Viertel Europa, ein zweites Viertel Afrika und die restlichen beiden Viertel Asien darstellten. Spätere Karten waren mit vielen, meist phantastischen Details ausgestattet oder, sofern es sich um Seekarten handelte, waren es symbolisierte Darstellungen der jeweils zur Erreichung eines bestimmten Zieles zu nutzenden Kompaßkurse bzw. Windrichtungen [Köberer 1982]. Eine geometrisch fundierte Kartographie setzt erst um 1500 ein, wobei aber selbst elementare Grundbegriffe wie Flächen- oder Winkeltreue noch lange nicht explizit werden. Bezeichnungen wie orthographische und stereographische Projektion werden erst um 1600 in der einflußreichen „Optik“ des belgischen Jesuiten François d’Aguilon eingeführt. Der kaiserliche Hofastronom Johann Stöberer (lat. Stabius) entwickelte in Wien das später wegen seiner aparten herzförmigen Ge-



Abb. 5.2.4 Herzförmige Weltkarte nach dem Prinzip von Stab(ius) und Joh. Werner
[herausgegeben von Peter Apian: Tabula orbis cogniti universalior, Ingolstadt, 1530]

stalt vielfach reproduzierte flächentreue Bild der Kugeloberfläche (Abb. 5.2.4): Ausgehend von einem längentreuen geraden Bild NS eines „Nullmeridians“ werden die Breitenkreise nach beiden Seiten längentreu auf konzentrischen Kreisbögen um das Bild N des Nordpols abgetragen, so daß sich die markante Herzform als Ort der Endpunkte dieser Kreisbögen und zugleich als Doppelbild des 180-Grad-Meridians ergibt. Ob Stabius selbst die heuristische Überlegung angestellt hat, daß man auf diese Weise, durch Längentreue am Nullmeridian und auf den von dort abgetragenen Breitenkreisen, ein flächentreues Bild der Kugeloberfläche erhalten könnte, läßt sich nicht mehr feststellen. Die Mittel, eine solche Hypothese wie Flächentreue oder Winkeltreue exakt zu bestätigen, werden ohnehin erst im 19. Jh. bereitgestellt. Ausgeführt wurde Stöberers Idee 1514 in Nürnberg durch den bereits erwähnten J. Werner, veröffentlicht erst 1530 durch Peter Apian. Stöberer entwarf aber auch eine Karte der halben Erdkugel durch senkrechte Parallelprojektion auf eine Tangentialebene, und an der Ausgestaltung dieser 1515 gedruckten Karte wirkte im Auftrag Kaiser Maximilians sogar Albrecht Dürer mit (Abb. 5.2.5). Weitere in dieser Zeit erstmals vorgeschlagene bzw. benutzte kartographische Abbildungen sind u.a.

- der mittelabstandstreue Azimutalentwurf (Cusanus, Snellius), bei dem die Meridiane in von N ausgehende Strahlen und die Breitenkreise in konzentrische Kreise der Karte so abgebildet werden, daß ihr Radius gleich der im Bogenmaß gemessenen Poldistanz ist. (Der Name des Verfahrens bedeutet also, daß alle Punkte in ihrer wahren Entfernung vom Nordpol=Kartenmittelpunkt abgebildet werden.)
- der zuerst von Gerhard Mercator benutzte, später nach Sanson und Flamsteed benannte Entwurf, bei dem die Breitenkreise in abstandstreue parallele Strecken und die Meridiane so abgebildet werden, daß sich Flächentreue ergibt.

Den Höhepunkt der Renaissancekartographie stellt ohne Zweifel das Schaffen des flämischen, später in Duisburg wirkenden Kartographen Gerhard Kremer (Mercator) dar. Der in Portugal lehrende hervorragende Mathematiker Pedro Nunez (Nonius) hatte sich 1537 erstmals mit den für die Seefahrt so wichtigen Kurven konstanten Kurses (später Loxodromen genannt) auf der Erdkugel beschäftigt, d.h. Kurven, die dadurch definiert sind, daß sie alle Meridiane unter einem konstanten Winkel schneiden. (1624 führte Snellius in seiner Navigationstheorie „Tiphys Batavus“ für diese Kurven die bis heute gebräuchliche Bezeichnung Loxodrome und gleichzeitig für Großkreisbögen, d.h. kürzeste Kurven auf der Kugel, den Namen Orthodrome ein.) Nunez zeigte durch näherungsweise Konstruktion (Benutzung von nur acht Meridianen



Abb. 5.2.5 Stab(ius)-Dürer-Karte 1514

und Approximation durch Kreisbögen jeweils bis zum nächsten Meridian, Abb. 5.2.6), daß diese von ihm „curvas dos rombos“ (rhombische Kurven) genannten Loxodromen sich spiralförmig beiden Polen nähern, ohne sie jemals erreichen zu können. Auf einem 1541 von Mercator angefertigten Globus sind einige dieser Kurven eingezeichnet. 1568 stellte er die erste Weltkarte fertig, auf der diese Kurven sich als Geraden abbilden — die Mercatorprojektion war geboren. Verbreitet wurde sie allerdings erst durch den nach seinem Tode 1595 gedruckten großen Weltatlas. Seitdem ist in der Literatur viel darüber gerätselt worden, wie er diese Karte zustandegebracht hat [Köberer 1982]. Das Problem besteht darin, daß einerseits das exakte Gesetz, nach dem die Abstände der Breitenkreisbilder vom Äquatorbild mit wachsender Breite ins Unendliche wachsen müssen, erst durch Lösen einer Infinitesimalgleichung gefunden werden kann, daß andererseits die Mercatorprojektion, bei der die Kugeloberfläche (außer den beiden Polen) auf einen tangential an den Äquator gelegten und anschließend abgewickelten Zylinder unendlicher Höhe abgebildet wird, sich auf keine Weise elementargeometrisch als „Projektion“ erklären läßt. (Insofern ist auch

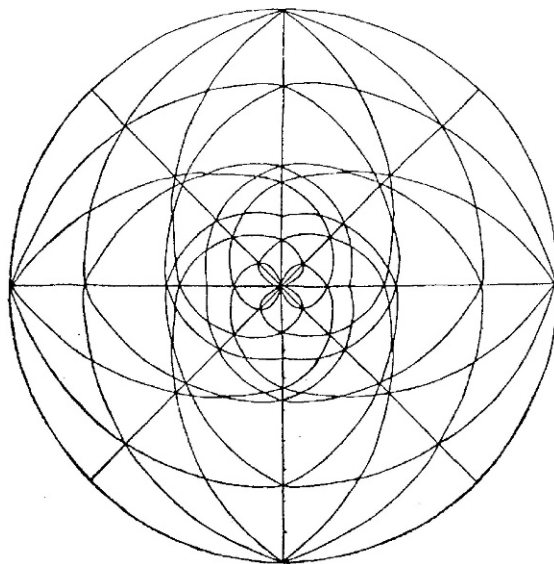


Abb. 5.2.6 Loxodromen-Diagramm von P. Nunez 1537
 [Nunez: *Tratado em defensam da carta marear*. Lissabon 1537]

das Bild auf S. 84 in [Mainzer 1980] irreführend.) Da die Loxodromen zuerst — punktweise konstruiert — auf Mercators Globus erschienen, ist jedoch am wahrscheinlichsten, daß er sie von dort auf die approximativ konstruierte Karte übertragen hat. Auf jeden Fall hatte die Wichtigkeit der neuen Erfindung für die Hochseeschifffahrt zur Folge, daß sich viele Mathematiker mit dem Problem der exakten Definition und Berechnung der Mercatorkarte beschäftigt haben und sie so einen kleinen Baustein zur Entwicklung der Infinitesimalmathematik beitrug. (Zur Bezeichnungsverwirrung trägt bei, daß einer dieser Mathematiker, Nikolaus Kauffmann, sich ebenfalls Mercator nannte.) Ein lange fast vergessener englischer Mathematiker, Thomas Harriot, dessen vielseitige bemerkenswerte Arbeiten zu Lebzeiten unveröffentlicht blieben, bewies um 1600 wohl als erster die Winkeltreue der stereographischen Projektion und leitete daraus ab, daß die Loxodromen bei stereographischer Projektion auf die Äquatorebene die Bilder aller Breitenkreise unter konstantem Winkel schneiden, folglich als logarithmische Spiralen um den Pol abgebildet werden. Er erkannte übrigens auch, daß der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks dem sphärischen Exzess, d.h. dem Überschuß der Winkelsumme über 180 Grad, proportional ist. Im Vorgriff erwähnen wir hier noch, daß es für eine möglichst günstige Route zwischen zwei weit voneinander entfernten Orten

der Erde natürlich wünschenswert ist, global näherungsweise orthodrom, lokal aber loxodrom zu navigieren. Dies führt auf das sehr schwierige, erst Ende des 19. Jh. gelöste Problem, in einer Mercatorkarte das Bild des Großkreisbogens zwischen zwei gegebenen Punkten zu bestimmen, das dann durch einen Polygonzug approximiert werden kann, der lokalen loxodromen Wegstücken entspricht [Schreiber, O. 1908].

Die Trigonometrie hat uns von der Astronomie zur Geodäsie und Kartographie geführt. Nun müssen wir aber noch einmal zur Astronomie zurückkehren: Am Ende des hier zu betrachtenden Zeitabschnitts steht ein Geistesriese, mit einem Bein noch in der Renaissance, aber mit dem anderen schon in der folgenden, durch die Erfindung der Koordinatenmethode und der Infinitesimalmathematik geprägten Periode: Johannes Kepler. Hier geht es zunächst um seine astronomisch motivierten Beiträge zur Geometrie. Mit seinem Erstlingswerk „Mysterium cosmographicum“ (Das Weltgeheimnis, 1596) empfahl er sich dem bedeutendsten Astronomen der vorhergehenden Generation, Tycho de Brahe, als der gesuchte Kopf, der Beobachtungsdaten in Übereinstimmung mit einer kühnen Theorie bringen kann. Kepler hatte versucht, die Abstände der damals bekannten Planeten von der Sonne durch die Ineinanderschachtelung der fünf regulären Körper so zu erklären, daß die Umkugel eines Körpers eine Planetenbahn bestimmt und gleichzeitig die Inkugel des folgenden Körpers ist (Abb. 5.2.7). Damit wäre erstmals nach Platons Atomtheorie und in großer gedanklicher Nähe zu ihr dem Ensemble aller fünf platonischen Körper eine naturwissenschaftliche Bedeutung zugewiesen worden. Über die Unsinnigkeit dieser Spekulation aus heutiger Sicht braucht kein Wort gesagt zu werden. Wenig bekannt und darum hier ausdrücklich erwähnt sei aber, daß Kepler an der Grundidee lebenslang festhielt. Nachdem er selbst das copernicanische Modell der kreisförmigen Bahnen um die Sonne mit seinen drei Gesetzen entscheidend verbessert hatte, gab er 1621 eine zweite Fassung des „Mysterium cosmographicum“ heraus, in der die konzentrischen Kugeln in solcher Weise durch Kugelschalen endlicher Dicke zwischen je zwei aufeinanderfolgenden platonischen Körpern ersetzt waren, daß der Zwischenraum zwischen der Umkugel des inneren und der Inkugel des äußeren Körpers gerade genug Platz für die elliptische Bahn des jeweiligen Planeten ließ (siehe Aufgabe 5.2.5).

Zu erwähnen ist hier weiterhin der Schub, den die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung (1. und 2. Gesetz 1609 in „Astronomia nova“, 3. Gesetz 1619 in „Harmonice mundi“) der rein geometrischen Theorie der Kegelschnitte gegeben haben. Aus der Fülle der Fragen greifen wir das folgende, aus dem 2. Gesetz entstehende nach Kepler benannte Problem heraus: Planet P bewege sich auf einer Ellipsenbahn um die in einem Brennpunkt S stehende

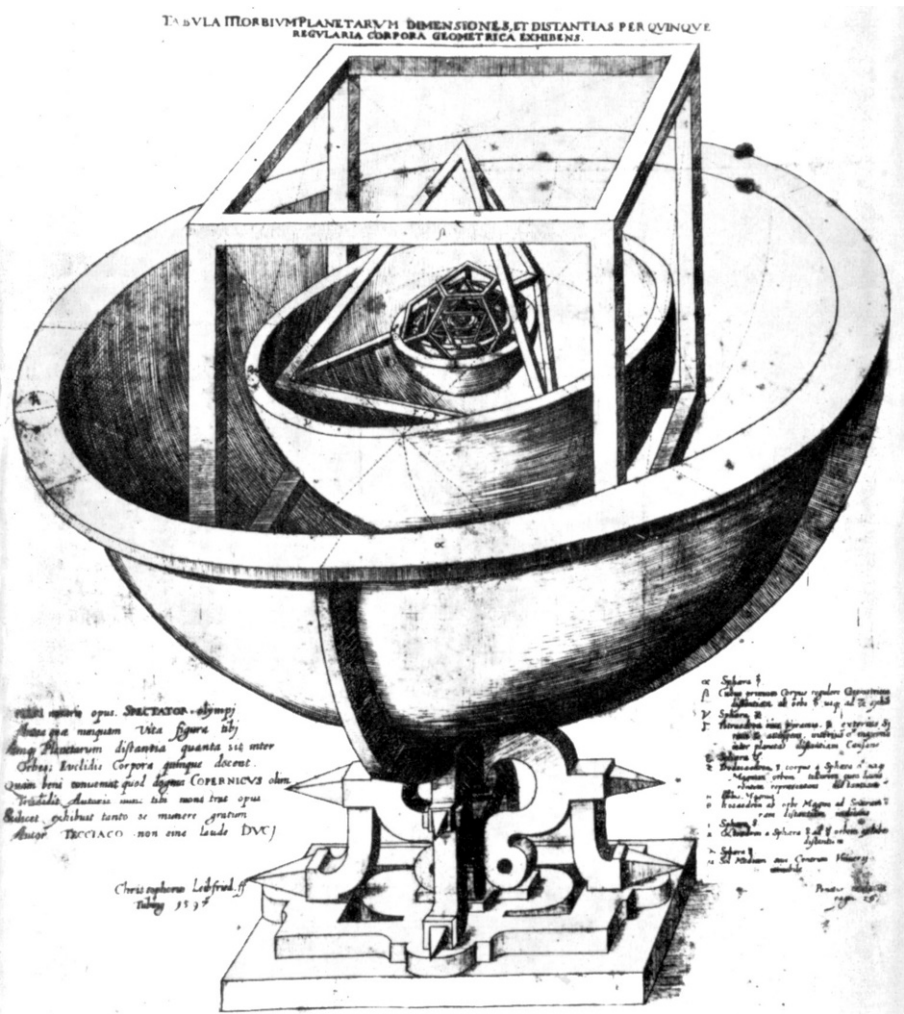


Abb. 5.2.7 Keplers Weltmodell aus dem „Mysterium Cosmographicum“
[aus M. Caspar (Übers. und Hrsg.): Das Weltgeheimnis, Augsburg 1923]

Sonne. Da der Fahrstrahl PS in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht, ist zur Bestimmung des Ortes von P zu einem bestimmten Zeitpunkt t die Halbellipse A (Aphel = sonnenfernster Punkt) PP_h (Perihel = sonnennächster Punkt) in zwei in einem durch das Zeitverhältnis gegebenen Verhältnis stehende Teilflächen ASP und SP_hP zu zerlegen (Abb. 5.2.8), so daß also z.B. ein Vierteljahr nach dem Aphel die beiden Flächen gleich sind, einen Tag nach dem Aphel ASP etwa $1/183$ von SP_hP beträgt. Zur weiteren Behandlung siehe Aufgabe 5.2.6.

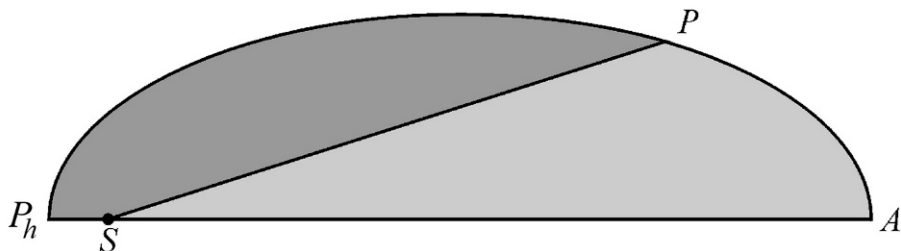


Abb. 5.2.8 Das Keplersche Problem:

Ausgehend vom 2. Keplerschen Gesetz ist für ein gegebenes Verhältnis der beiden schraffierten Flächen die Lage des Planeten P zu bestimmen.

Newtons Gravitationstheorie wird den physikalischen Grund der Kegelschnittbahnen und damit das Phänomen parabel- und hyperbelförmiger Bahnen von Himmelskörpern klären. Merkwürdigerweise ist es aber Kepler, der in einem ganz anderen Zusammenhang, nämlich in seiner ersten Schrift zur Optik (*Ad Vitellionem paralipomena quibus astronomiae pars optica*, 1604), zum ersten Mal die Idee formuliert, daß die drei naiv verschiedenen Formen nichtausgearteter Kegelschnitte stetig ineinander übergehen, indem bei einem festgehaltenen Brennpunkt der zweite ins Unendliche abwandert und von der anderen Seite wieder herankommt. Keplers Motiv zu dieser Betrachtung ist die Definition eines Brennsiegels als eines solchen, bei dem die von einem Punkt ausgehenden Strahlen in einem zweiten Punkt wieder zusammenlaufen. Wie der Titel der genannten Schrift ausweist, betrachtet Kepler die Optik vor allem als eine Hilfswissenschaft der Astronomie (wie es schon Euklid gesehen hatte!), und der Anlaß dieser ersten optischen Schrift Keplers war die von Tycho Brahe hinterlassene Frage, wieso bei der Beobachtung einer Sonnenfinsternis mittels camera obscura der Sonnendurchmesser auf dem Bildschirm zu groß, der Monddurchmesser aber zu klein erscheint. Kepler klärte allgemein, daß bei endlich ausgedehnter Lichtquelle und endlich ausgedehnter Lochblende das leuchtende Bild einerseits die Vereinigung aller Bilder der Lichtquelle bei variierendem Blendenpunkt, andererseits die Vereinigung aller

Bilder der Lochblende bei variierendem Leuchtpunkt ist (Abb. 5.2.9, vgl. auch [Schreiber, P. 1997]). Mittels der Kenntnis des Blendendurchmessers und des Abstandes des Bildschirms von der Blende kann man daher den Einfluß des endlichen Blendendurchmessers eliminieren. Vom Standpunkt reiner Elementargeometrie ist dies trivial und weit unter dem Niveau antiker Geometrie. Neu ist die unbefangene Anwendung bekannter Geometrie auf vielfältige praktische Probleme.

In einer weiteren Schrift (Dioptrice, 1611) hat Kepler die Optik durch Behandlung des Strahlenganges im menschlichen Auge und in verschiedenen, ganz systematisch untersuchten Linsensystemen erheblich an den modernen Begriffsinhalt von Optik herangerückt, aber die Formulierung des exakten Brechungsgesetzes trotz intensiver Bemühungen knapp verfehlt. Seine für nicht zu große Öffnungswinkel gefundene Näherung, die im Grunde auf einer Näherung der Sinusfunktion beruhte, war freilich für die damaligen praktischen Bedürfnisse ausreichend. In welchem Maße Kepler auch jenseits seiner astronomisch motivierten Arbeiten ein kreativer Geometer war, zeigen seine noch zu besprechende Faßrechnung, aber auch seine Studien über Parkettierungen und Polyeder, enthalten in der „Harmonice mundi“ und in der kleinen, sozusagen populärwissenschaftlichen Schrift „Vom sechseckigen Schnee“ (1611). Keplers Motiv war die feste Überzeugung, daß die gleiche geometrische Harmonie die Welt im Großen wie im Kleinen regiert. Er versucht also, der spekulativen Kosmologie seines „Mysterium“ einen dazu passenden „Mikrokosmos“ gegenüberzustellen. Dabei führt ihn sein systematisches Vorgehen dazu, auch Parkette mit sternförmigen Bausteinen und Monstern, (Abb. 5.2.10), Sternpolyeder (Abb. 5.2.11), von denen oft (irrtümlich) gesagt wird, er habe sie als erster gekannt (vgl. Kap. 5.3) und die ersten dualarchimedischen Polyeder aufzufinden (siehe dazu Aufgabe 5.2.4) und auch die unendlichen Scharen der Prismen und Antiprismen in die Diskussion der archimedischen halbregulären Polyeder einzubeziehen, die er freilich wieder verwirft, weil sie nach seiner Meinung bei genügend großer Eckenzahl nicht mehr „kugelförmig“ sondern „scheibenförmig“ sind (Weltharmonik deutsch, S. 66). Im „Sechseckigen Schnee“ wird u.a. die Frage diskutiert, wieweit die in der Natur realisierten hochsymmetrischen Formen durch Naturgesetz und/oder maximale Zweckmäßigkeit bestimmt sind.

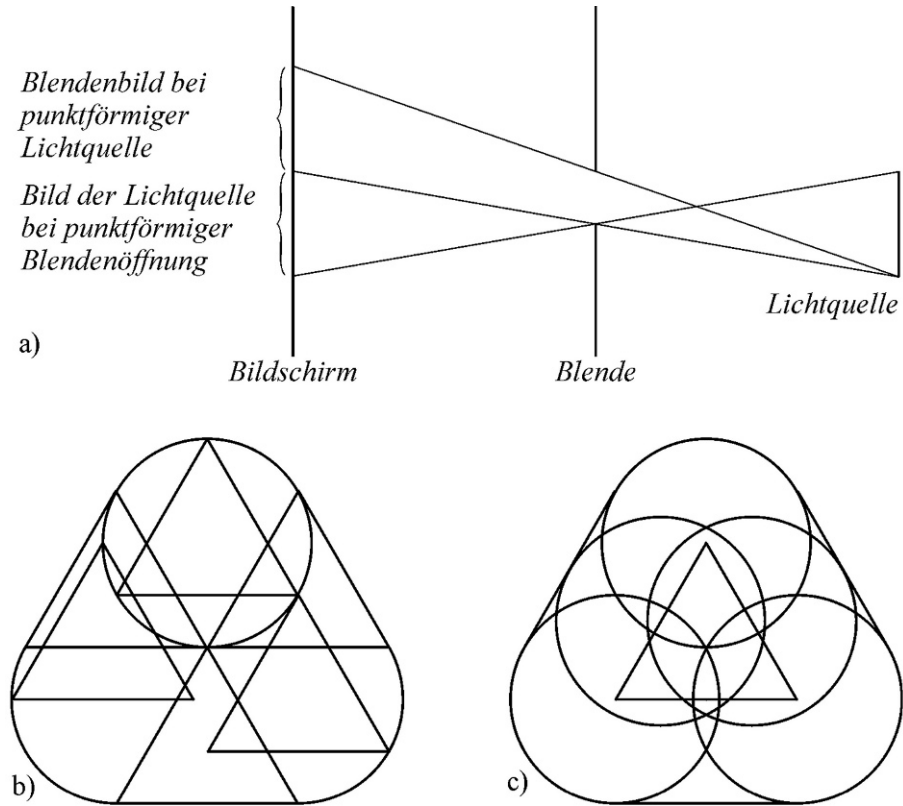


Abb. 5.2.9 Das Brahe-Problem:

a) Komposition des Lichtflecks auf der Mattscheibe aus der Form der Lichtquelle und der Form der Lochblende. b) Ist die Lichtquelle ein gleichseitiges Dreieck und die Blende ein Kreis, so ergibt sich das Bild als Vereinigung aller dreieckigen Bilder, wenn ein fester Punkt (etwa die obere Spitze des Dreiecks) alle Punkte der kreisförmigen Blende durchläuft bzw. c) als Vereinigung aller kreisförmigen Blendenbilder, wenn der leuchtende Punkt die dreieckige Lichtquelle durchläuft. Hier sieht man, daß eine dreieckige Blende zusammen mit einer kreisförmigen Lichtquelle das gleiche Bild erzeugen würde.

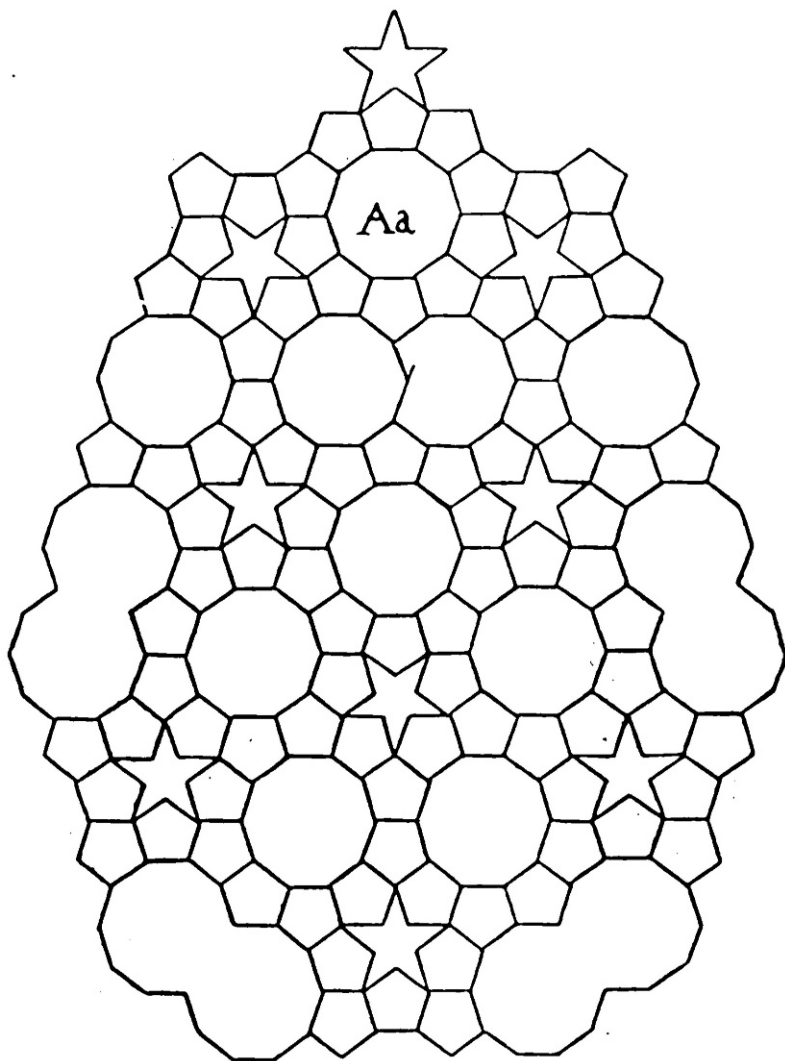


Abb. 5.2.10 Kepler-Parkett aus „Harmonice mundi“

Der Versuch, mit regulären Fünfecken zu pflastern, führt zu einem Parkett, das außerdem reguläre Zehnecke, Sternfünfecke und die von Kepler selbst als „Monster“ bezeichneten nichtkonvexen Sechzehnecke enthält.

[aus M. Caspar (Übers. und Hrsg.): Weltharmonik. München – Wien 1939]

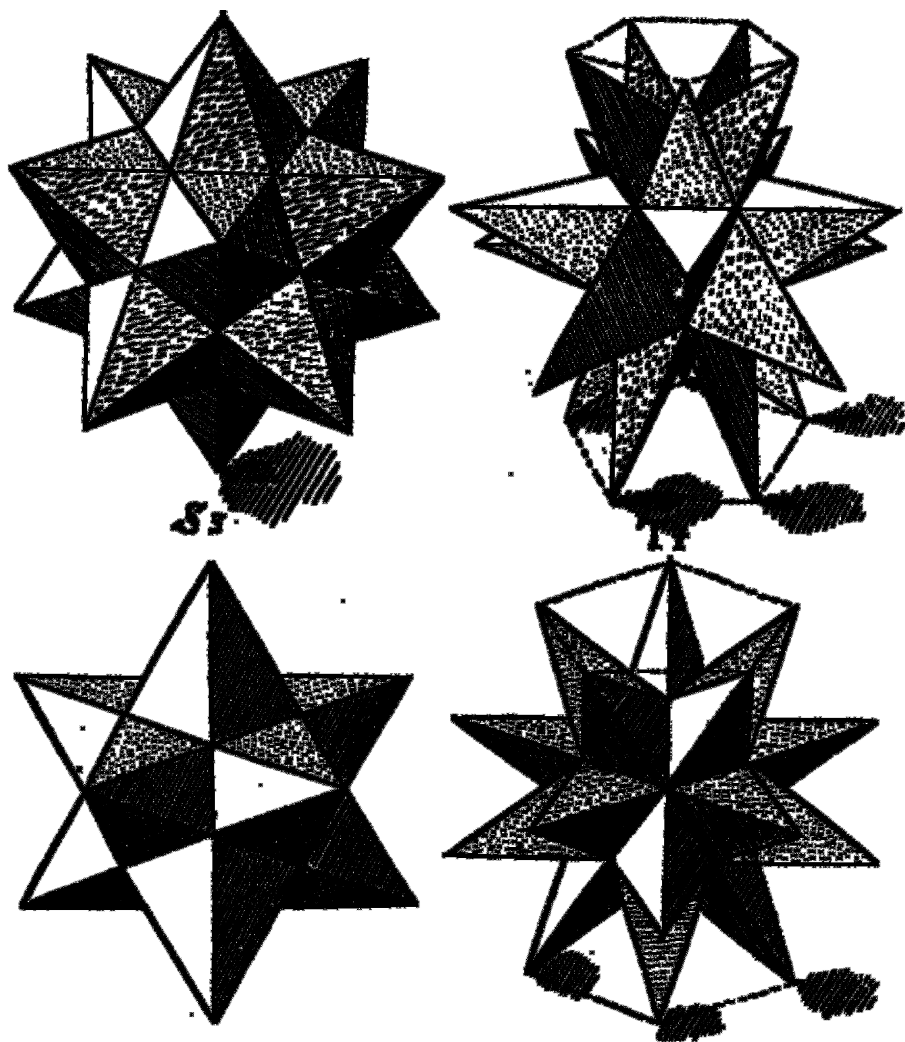


Abb. 5.2.11 Die beiden von Kepler in „*Harmonice mundi*“ angegebenen regulären Sternpolyeder. Das kleine Sterndodekaeder *Ss* tritt schon um 1425 bei P. Uccello auf (Abb. 5.3.19). *Tt* wird heute als großes Sterndodekaeder bezeichnet.

[aus M. Caspar (Übers. und Hrsg.): *Weltharmonik*. München – Wien 1939]

5.3 Geometrie in der Kunst der Renaissance

Über dieses Kapitel an der Grenze zwischen Wissenschafts-, Kultur- und Kunstgeschichte gibt es eine äußerst umfangreiche, oft reich und attraktiv illustrierte und weit in das 19. Jh. zurückreichende Spezialliteratur, von der hier nur ein grober Eindruck vermittelt werden kann. (Als neueste umfangreiche Darstellungen seien [Kemp 1990] und [Field 1997] empfohlen, zur mathematischen Perspektive siehe auch die im Literaturverzeichnis genannten Arbeiten von K. Andersen und dort zitierte weitere Literatur.) Dennoch ist manches Folgende bisher nirgends formuliert worden: Den Kunsthistorikern fehlt oft Kenntnis und Interesse für das, was heute mathematisch relevant ist. Die Mathematikhistoriker früherer Generationen haben als echte Kinder ihrer Zeit alles gering geschätzt, was nicht ins Bild einer auf den Beweis von Sätzen oder die explizite Formulierung von Algorithmen gerichteten Mathematik paßte. Dem modernen, von Informatik geprägten Mathematiker wiederum fehlen Zeit und Möglichkeit für ausgedehnte historische Studien in diesem Bereich. Die hier zu besprechende Mathematik ist jedoch in besonderem Maße „unbewußte Mathematik“ (zum Begriff vgl. Einleitung), d.h., man soll bei der Beurteilung des geometrischen Wissens und Könnens der Renaissancekünstler aus heutiger Sicht neben dem, was sie eventuell geschrieben haben, mindestens gleichrangig ihre künstlerischen Werke zu Rate ziehen. (Dies trifft in besonderem Maße z.B. bei Paolo Uccello, Leonardo da Vinci und Wenzel Jamnitzer zu). Nirgendwo äußert sich so deutlich wie in der Kunst das in materiellen Objekten ausgedrückte intuitive, nicht in Worte gefaßte Wissen um Formen, Sachverhalte und Algorithmen. Schließlich muß voraus bemerkt werden, daß die häufige Erwähnung von Albrecht Dürer im Folgenden objektiv begründet ist. Er ist mit Abstand der „mathematischste Kopf“ unter den Künstlern seiner Zeit [Dürer c].

Mit Beginn der Renaissance wandten sich die Künstler von der symbolträchtigen Darstellungsweise des Mittelalters ab und begannen, sich um Realismus zu bemühen. So kam es zwangsläufig zur Wiedererweckung⁷ und Entwicklung der Zentralperspektive. Es wäre aber ganz falsch, die Beziehungen zwischen Geometrie und Kunst in dieser Zeit hierauf zu beschränken. Künstler fühlten sich damals nicht nur im besten Sinne des Wortes als Handwerker, d.h. sie stellten praktisches Können über programmatische Ansprüche, sondern sie waren auch ungeheuer vielseitig: Ingenieure, Architekten, Mechaniker, Naturforscher. Auch sie waren im Rahmen ihrer jeweiligen Möglichkeiten daran interessiert,

⁷Die Pioniere der Perspektive in der Renaissance wußten nichts über die sehr bescheidenen Vorleistungen der Antike hierzu. Selbst Vitruvs „De architectura“, worin auch nur wenig darüber steht, erscheint in Italien erstmals 1521 im Druck und in Deutsch erst 1548.

sich antikes Wissen wieder anzueignen, aber noch mehr als bei den Universitätsgelehrten stand dabei die Hoffnung auf praktischen Nutzen, der Wille zur Anwendung und der dazu oft erforderlichen Umgestaltung und Weiterentwicklung im Vordergrund. Neben der Perspektive spielen eine wesentliche Rolle

- vereinzelte weitere Beispiele der Anwendung des erst viel später allgemein gefaßten Grund-Aufriß-Verfahrens zur Lösung räumlich-konstruktiver Aufgaben,
- die geometrischen Konstruktionen, wobei oft praktikable Näherungsverfahren an die Stelle exakter Lösungen treten, auch in solchen Fällen, in denen eine exakte Lösung mit Zirkel und Lineal möglich ist, Erfindung von Mechanismen zur Lösung von geometrischen Aufgaben,
- Entdeckung neuer geometrischer Formen (Kurven, Flächen, Körper),
- Ansätze zum Studium ebener Parkette und Ornamente,
- die von den regulären und halbrekulären Polyedern ausgehende ästhetische Faszination,
- der Versuch, Harmonie und Schönheit in Zahlenverhältnissen oder anderen mathematisch ausdrückbaren Gesetzen zu erfassen
- und last not least die ersten Anfänge einer nichtlateinischen geometrischen Fachterminologie, da die Künstler, sofern sie an Berufsgenossen gerichtete Schriften verfaßten, sich meist der jeweiligen Landessprache bedienten.

All dies vereint findet sich vorzugsweise bei Albrecht Dürer und auch bei Leonardo da Vinci. Dennoch gibt es große Unterschiede: Dürer vollendet drei theoretische Schriften, die — bis heute mehrfach aufgelegt und gedruckt — leicht zugänglich sind. Leonardo bringt nichts zu Ende. Seine schriftliche Hinterlassenschaft wird nach seinem Tode in alle Winde zerstreut und erst in unserem Jahrhundert allmählich wieder zusammengefügt, wobei neben überraschenden Neuentdeckungen von Blättern Leonardos auch Fälschungen und Irrtümer ans Licht kommen. ([Marinoni 1987] gibt nicht nur eine gute Geschichte dieser Manuskripte, sondern auch eine sehr schöne Einführung in deren Charakter.) Dürer neigt zu theoretischem, deduktivem, systematischem Vorgehen. Leonardo ist sprunghaft, trennt selten Mathematik von Natur, Deduktion von Induktion, irrt sich häufig. Seine Stärken liegen viel mehr in der Vorwegnahme technischer Prinzipien und Erfindungen und in der subtilen Beobachtung der Natur.

die Konstruktion perspektivisch korrekter Bilder erleichtern. Diese Linie gipfelte in der Lösung der Fragen, welche Parameter eines Bildes man unter welchen Bedingungen frei wählen kann und wie aus einem korrekten Bild der Betrachterstandpunkt rekonstruierbar ist. Letzteres wurde ansatzweise zuerst von Simon Stevin 1605 in seinem Perspektivlehrbuch „Van de deursichtighe“ diskutiert und im 18. Jh. von J. H. Lambert zur Vollendung gebracht. Während aber der Gelehrsamkeit zugeneigte italienische Künstler wie Leone Battista Alberti („Della pittura libri tre“ 1436), Antonio Averlino Filarete („Trattato della architectura“ um 1460) und Piero della Francesca („De prospectiva pingendi“ um 1475) die ersten Schriften über Perspektive verfaßten, wurden die Tricks unter den Malern zunächst als Berufsgeheimnis behandelt. Nicht wenige deutsche und niederländische Künstler reisten im 15. u. 16. Jh. hauptsächlich deshalb nach Italien, um an Ort und Stelle, in den Malwerkstätten der italienischen Meister, etwas mehr über die „neue perspektivische Kunst“ zu lernen.

Das simpelste, von jedermann leicht zu begreifende Hilfsmittel wurde zunächst der pavimento, d.h. der schachbrettartig gemusterte Fußboden mit einer Kante parallel zum vorderen unteren Bildrand, mittels dessen korrekter Konstruktion man die Verkleinerung gegen den Bildhintergrund für das gesamte Bild approximativ richtig gestalten konnte (Abb. 5.3.4). Allmählich lernte man auch die Konstruktion eines zur Bildfront nicht parallelen pavimento und schließlich die projektive Skalierung beliebig geneigter Geraden (Abb. 5.3.5). In diesem Zusammenhang bildeten sich Begriffe wie Horizont, Fluchtpunkt, Hauptpunkt usw., jedoch behaftet mit vielen, heute schwer nachvollziehbaren Unklarheiten. Z.B. identifizierte man den Augpunkt (gleich Ort des Betrachterauges) mit dem Hauptpunkt (gleich Lotfußpunkt vom Augpunkt auf die Bildebene). Es ist charakteristisch, daß Leonardo, indem er eben nicht als Mathematiker sondern als Naturbeobachter denkt, drei Arten von Perspektive gleichrangig nebeneinanderstellt: die maßstäbliche Verkleinerung der entfernteren Objekte, die zunehmende Unschärfe der Umrisse und die zunehmende Trübung der Farben [Leonardo 1952, p.767].

Während in Italien Guidobaldo del Monte, ein Schüler Commandinos, um 1600 das erste begrifflich einigermaßen klare (aber sehr umständliche und weit-schweifige) Lehrbuch der Perspektive mit strengen Beweisen schreibt, breitet sich die Lehre der Perspektive nach Frankreich (Jean Pélerin genannt Viator 1505, Jean Cousin 1560, Jacques Perret 1601), Deutschland (Dürer 1525, 1538, Hieronymus Rodler 1531 u.a.), den Niederlanden (Simon Stevin 1605) und schließlich auch nach England (1710 eine Übersetzung aus dem Französischen, dann Brook Taylor 1715) aus. Vor allem geriet sie gegen Ende des 16. Jhs. in die Hände der Jesuiten, die sie zur Perfektion entwickelten, für die sie



Abb. 5.3.2 Vorschläge Dürers zur mechanischen Erleichterung der Erzeugung perspektivischer Bilder: a) Das wesentliche Element ist hier der verstellbare Stab zur Fixierung des Augpunktes [Underweysung, 1525]. b) Indem der Zeichenstift mit einem in die rückwärtige Wand geschlagenen Nagel durch einen straffen Faden verbunden wird, kann der Augpunkt in eine Entfernung von der Bildebene gelegt werden, die größer als die Reichweite des Zeichners ist [2. Auflage der Underweysung 1538].

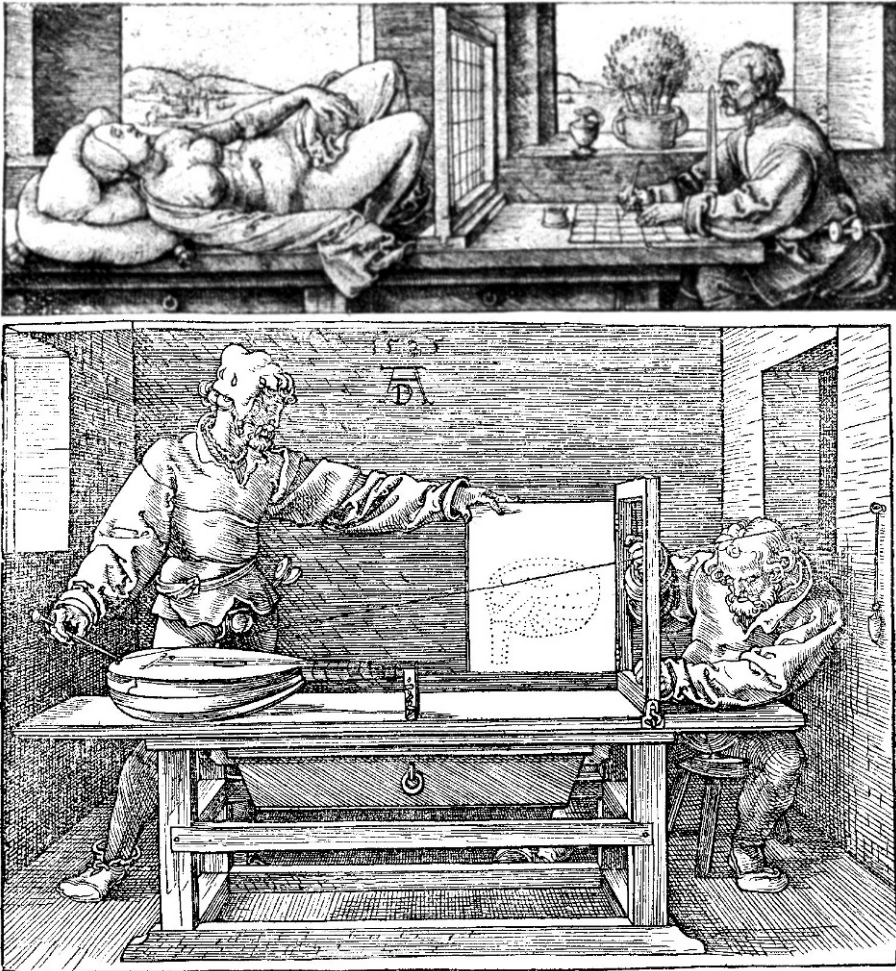


Abb. 5.3.3 Weitere Vorschläge zur Erzeugung perspektivischer Bilder:

- a) Indem die Mattscheibe durch ein quadratisches Raster ersetzt wird, das auf die Zeichenfläche übertragen wird, kann man das unbequeme Zeichnen auf der senkrechten Bildebene durch die Arbeit auf dem Zeichentisch ersetzen [Underweysung 1538].
- b) Demgegenüber zeigt die Auflage von 1525 eine noch sehr umständliche Methode, Bildpunkte mit Hilfe ihrer „Koordinaten“ zu bestimmen, d.h. mittels zweier verschiebbarer zueinander senkrechter Fäden im Bildrahmen. Freilich hat dieses Bild für den Anfänger in Perspektive den didaktischen Vorteil, den Sehstrahl zwischen Objekt und Bild durch materielle Realisierung anschaulich zu machen. [Underweysung 1525].

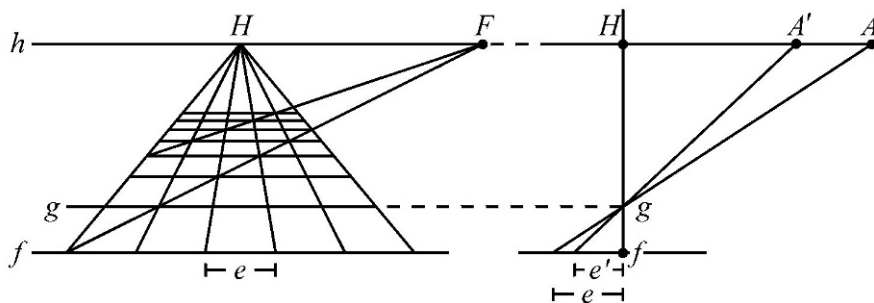


Abb. 5.3.4 Pavimento-Methode

Wahl des Horizontes h parallel zur unteren Bildkante f und des Hauptpunktes H auf h fixiert das Lot, auf dem das Auge A liegen muß. Wahl des Abstandes zwischen f und der ersten Fugenreihe g verfügt, wie die Seitenansicht zeigt, über die Augdistanz $d = HA$. Gleichzeitig legt sie den Fluchtpunkt F der Diagonalrichtung fest und gestattet damit die Konstruktion aller weiteren Fugenreihen.

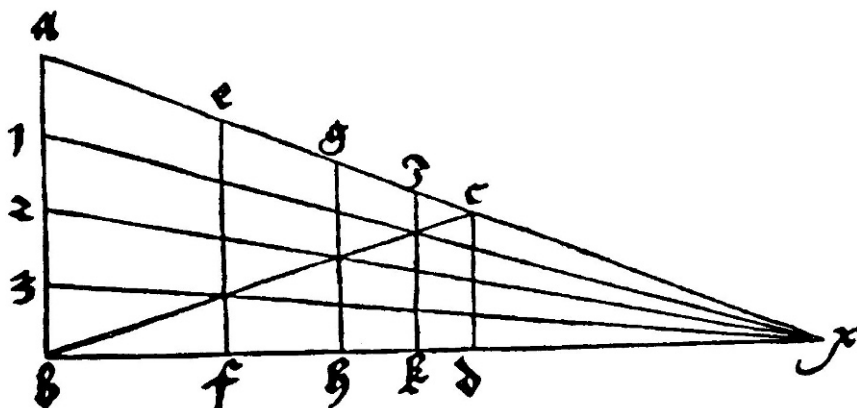


Abb. 5.3.5 Konstruktion einer projektiven Skala nach Dürer
[2. Auflage der Underweysung 1538]

aber ein Instrument ihrer Strategie war, die Menschen durch überwältigende Sinneseindrücke für den Katholizismus zurückzugewinnen. Als Nebenlinien entwickelten sich die Reliefperspektive und die anamorphoretische oder „curiose“ Perspektive. Bei der ersteren wird der Halbraum hinter einer „Frontebene“ umkehrbar eindeutig auf die Schicht zwischen dieser Ebene und einer dazu parallelen Fluchtebene abgebildet (Abb. 5.3.6). Sie soll zuerst um 1420 von Lorenzo Ghiberti bei der plastischen Gestaltung der Tür des Baptisteriums am Florentiner Dom verwendet worden sein (Abb. 5.3.8), was aber angesichts des frühen Datums kaum glaubhaft ist. Später wurde sie hauptsächlich in der Theaterperspektive oder für den sogenannten *coro finito* (fingierten Chor) verwendet, d.h. wenn das Baugelände einer Kirche nicht groß genug für eine weit ausgedehnte Apsis war, wurde diese durch ein Relief vorgetäuscht (vgl. auch Abb. 6.3.6). Bei der anamorphoretischen Perspektive handelt es sich um ein gewöhnliches perspektivisch korrektes Bild, das aber für einen extremen Betrachterstandpunkt konstruiert wird. Nur wenn man diesen findet, erschließt sich der Inhalt, sonst wirkt das Bild chaotisch, bestenfalls wie marmoriert. Ein besonderes Lehrbuch dieser curiosen Perspektive von dem französischen Franziskaner J. F. Nicéron erschien 1638.

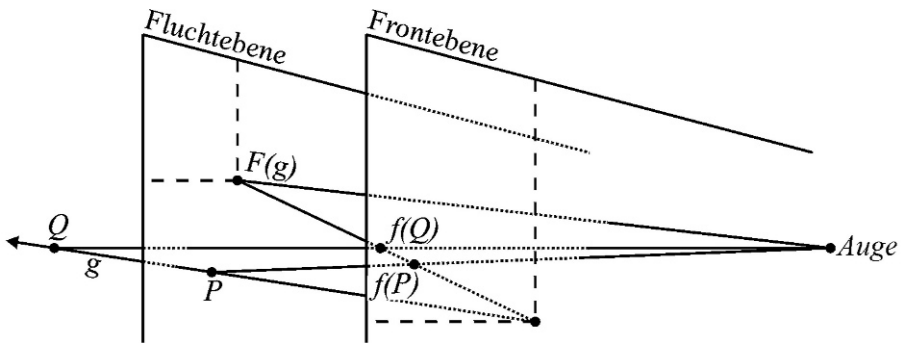


Abb. 5.3.6 Prinzip der Reliefperspektive

5.3.2 Konstruktionen

Die ältesten deutschen Lehrtexte zur konstruktiven Geometrie stehen noch in der Tradition der Bauhütten. Es sind „Das Büchlein von der Fialen Gerechtigkeit“ (1486, Reprints 1923, 1965) und die (lange Zeit als anonym geltende, siehe [Steck 1948]) „Geometria deutsch“ (1487, Reprint 1965) von Matthäus Roriczer, das „Fialenbüchlein“ (um 1490, Reprint 1881) von Hans Schmuttermayer, „Underweisungen und lehrungen sein handwerck desto bass und künst-



Abb. 5.3.7 Porträt des Luca Pacioli mit seinem Schüler Guidobaldo (Herzog von Urbino) von Jacopo de' Barbari (eigentl. Jacob Welch) 1495.
[Museo Nazionale di Capodimonte, Neapel]

lich zu volpringen“ von Lorenz Lacher (oder Lechler, 1516). Auf dieser Tradition fußt das geometrische Hauptwerk Dürers „Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebenen unnd gantzen corporen...“ (im folgenden kurz „Underweysung“, 1525, eine zweite, vor allem um Ausführungen zur Perspektive erweiterte Ausgabe posthum 1538. Sehr wichtig ist dafür das sogenannte Dresdner Skizzenbuch von Dürer). Von den genannten Vorgängern unterscheidet sich Dürer jedoch durch die zumindest teilweise direkte Kenntnis antiker Quellen und ein insgesamt unvergleichlich höheres mathematisches Niveau. Ein Exemplar der lateinischen Druckausgabe der „Elemente“ von Zamberti (1505), das Dürer nach eigenhändiger Eintragung 1507 in Venedig für einen Dukaten kaufte, befindet sich jetzt in der Herzog-August-Bibliothek in Wolfenbüttel. 1523 erwarb er aus dem Nachlaß Regiomontans einen zweiten Text der „Elemente“. In – wie uns scheint – übergroßer Bescheidenheit beginnt

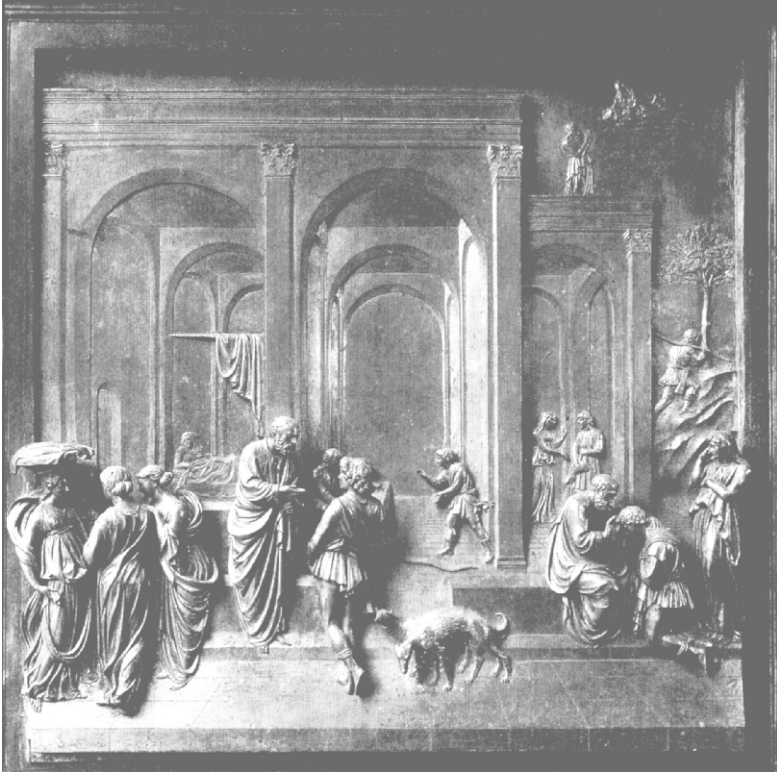


Abb. 5.3.8 Eines der zehn Felder der Paradiespforte von Lorenzo Ghiberti am Baptisterium des Florentiner Domes. Angesichts ihrer frühen Entstehung (um 1420) ist eine korrekte reliefperspektivische Konstruktion sehr unwahrscheinlich. Das Werk dokumentiert jedoch ein frühes Interesse an naturalistischen bzw. illusionistischen Reliefs und damit das Motiv, das Problem mathematisch zu durchdringen. [Foto A. Schreiber]

Dürer seine „Underweysung“ mit den Worten: „Der aller scharff sinnigst Euclides / hat den grundt der Geometria zusammengesetzt(.) Wer den selben woll versteht / der darff diser hernach geschriebenen ding gar nit/...“ In Wahrheit bringt Dürer aber nicht nur viele Einzelheiten, die man bei Euklid vergeblich suchen würde (darunter antikes Material aus verschiedenen Quellen ebenso wie eigene Beiträge), sondern er weist der Geometrie neue Problemfelder und Richtungen.

Zum Titel der „Underweysung“ ist noch zu bemerken, daß seit Beginn einer deutschsprachigen geometrischen Literatur in allzu wörtlicher Übersetzung des Wortes *Geometrie* Euklid ständig mit „Meßkunst“ in Verbindung gebracht

Underweysung - Inhaltsübersicht

1. Buch Definitionen von Grundbegriffen, spezielle Kurven, besonders verschiedene Spiralen und (räumliche) Schrauben, Dürers „Muschellinie“ und verwandte Kurven, Epizykloide, Ellipse als affine Transformation des Kreises, Ellipse Parabel und Hyperbel als Kegelschnitte (unter Verwendung von Grund Aufriß-Verfahren), am Beispiel des Kreises Ansatz zur funktionalen Denkweise (Rekonstruktion von Ordinate aus gegebener Abszisse und umgekehrt), proportionale Streckenteilung, Rekonstruktion des Mittelpunktes eines gegebenen Kreises und andere Grundkonstruktionen.
2. Buch Klassifikation von Kurven, Winkeln und Flächen, dabei besonders verschiedene Formen von Kreisbogendreiecken und -vierecken, exakte (soweit möglich) und näherungsweise Konstruktion von regulären n -Ecken für (in dieser Reihenfolge!) $n = 6, 3, 7, 14, 4, 8, 16, 5, 10$, nochmals 7 , näherungsw. $5, 15, 9, 11$ und 13 . Sehr genaue näherungsweise Kreisbogen- (bzw. Winkel-) Dreiteilung, ebene Muster aus Kreisen, Parkettierungen mit gleichseitigen Dreiecken, Quadraten, Rhomben und regulären Fünfecken, regulären Sechs- und Siebenecken, Quadraten und Achtecken, ... flächengleiche Verwandlungen, insbes. näherungsweise Kreisquadratur, Satz des Pythagoras.
3. Buch Säulen und Pyramiden, graphische Darstellung der „tangens-Funktion“ (Wie ist Schrifthöhe in Abhängigkeit von der Höhe ihrer Anbringung zu staffeln, damit alle Zeilen gleich hoch erscheinen?) Konstruktion von Sonnenuhren, Konstruktion verschiedener Alphabete nach einheitlichen geometrischen Regeln.
4. Buch Die fünf regulären Polyeder in Grund- und Aufsicht und Netzaufwicklung, polyedrische Kugel (mit „Meridianen“ und „Breitenkreisen“), Netzaufwicklungen von 7 archimedischen Polyedern sowie zwei weiteren, im modernen Sinne nicht halbrekulären Polyedern, Problem der Würfelver- n -fachung nebst dem antiken Gerät zur Konstruktion der zwei mittleren Proportionalen zu zwei gegebenen Strecken, kurze Ausführungen zur Zentralperspektive, insbesondere Konstruktion einer Würfelansicht mit Schatten bei gegebenem Einfall des Lichtes, Vorschläge für mechanische Hilfsmittel.

5.3.3 Neue Formen

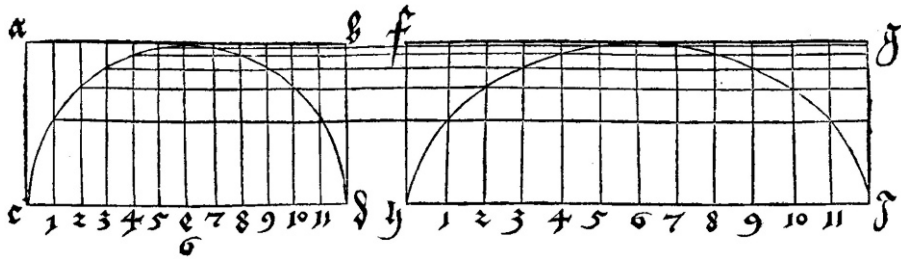


Abb. 5.3.10 Dürers Konstruktion der Ellipse aus dem Kreis
[Underweysung 1525]

Im 1. Buch der „Underweysung“ breitet Dürer eine große Vielfalt von teils bekannten, teils aber neuen Konstruktionsprinzipien für ebene und räumliche Kurven aus. Neben verschiedenen Spiralen und Schraubenlinien gibt es auch ganz neue wie seine „Muschellinie“ (Aufgabe 6.1.1) oder die von ihm als Spinnenlinie bezeichnete Epizykloide. Dabei wird die Beziehung zwischen punktwiser Konstruktion einer Kurve und mechanischer Erzeugung mittels Mechanismen exemplarisch demonstriert. In diesem Teil befindet sich auch der vieldiskutierte „intelligente Irrtum“ Dürers, der zwar Ellipsen als affine Streckung oder Stauchung von Kreisen kennt und zu konstruieren weiß (Abb. 5.3.10), andererseits mit ganz regulärem Zweitafelverfahren punktwise den ebenen Schnitt eines geraden Kreiskegels als „Eilinie“ konstruiert, aber von der ja gar nicht so selbstverständlichen Identität dieser beiden Kurvenarten nichts weiß. (Sie kommen ja in den „Elementen“ nicht vor⁸.) Und bei der punktwisen Konstruktion der „Eilinie“ unterläuft ihm der Denkfehler: Da der Kegel oben einen kleineren Durchmesser als unten hat, kann die Eilinie nur *eine* Symmetrieachse haben und muß wirklich wie ein Ei aussehen (Abb. 5.3.11). Hier könnte man sagen: Dürer ist hinter der Antike zurück. Aber er ist ihr voraus, denn die Art, wie er zu seiner Eilinie kommt, ist verallgemeinerungsfähig. In gleicher Weise konstruiert er auch Parabel und Hyperbel. Er demonstriert, sozusagen zufällig am Kegel, eine prinzipielle Methode, sich Kurven als ebene Schnitte von Körpern konstruktiv zu verschaffen, und wird damit zum bemerkenswerten Vorläufer von Monge. Er konstruiert auch, neben der archimedischen Spirale, eine „ionische Schnecke“ durch knickfreies Zusammensetzen von immer größeren Kreisbögen und analog eine wirklich eiförmige

⁸J. Werner, der in dieser Zeit in enger Verbindung mit Dürer stand und dem Dürer sicher viel mathematisches Wissen verdankt, hatte eine Schrift über Kegelschnitte verfaßt, in der aber merkwürdigerweise auch nur Parabeln und Hyperbeln behandelt wurden.

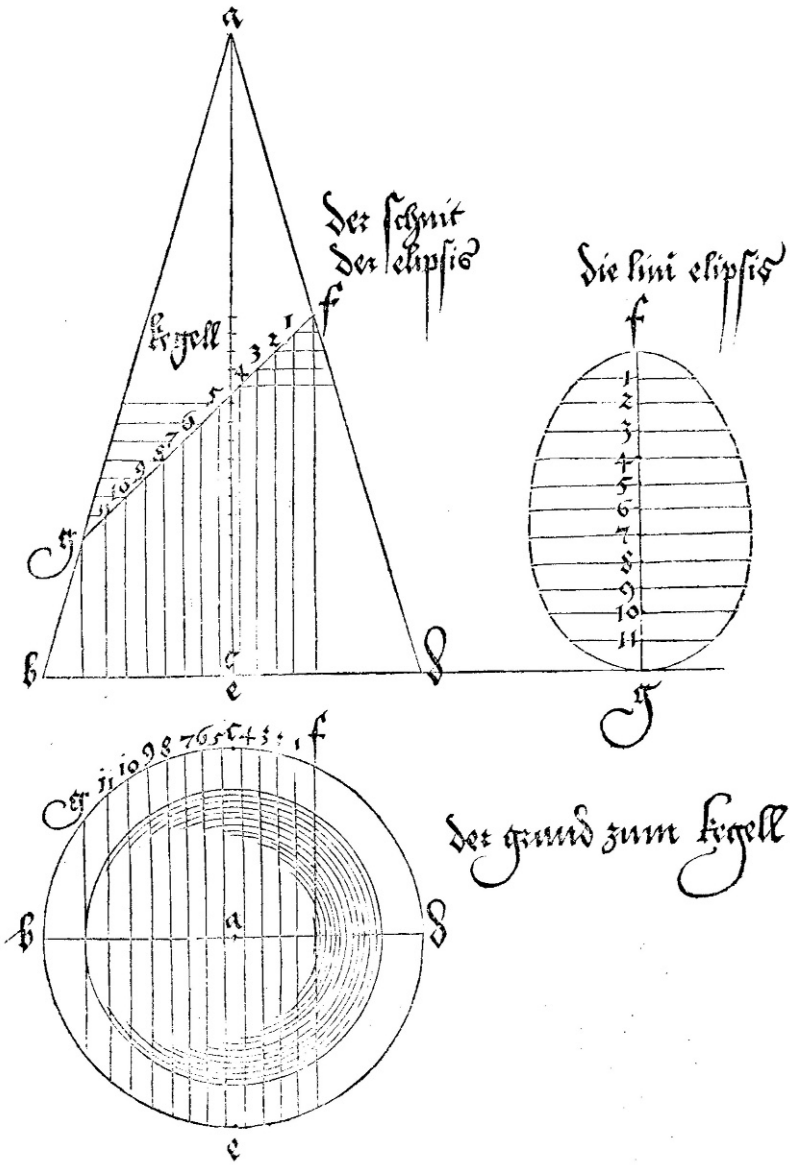


Abb. 5.3.11 Dürers Ellipsenkonstruktion aus dem Kegel
[Unterweysung 1525, S.34]

geschlossene Kurve aus sechs Kreisbögen, die „fast“ ohne Knick⁹ aneinanderschließen (Aufgabe 5.3.7). Nach der Begründung der Koordinatenmethode wurden derartige stückweise zusammengesetzte Kurven für lange Zeit aus der Mathematik verbannt. Heute würde man dazu neigen, in Dürer den Vater des „splining“ zu sehen.

5.3.4 Grund-Aufrißverfahren

Piero della Francesca handhabt es in seiner damals unpubliziert gebliebenen „Prospettiva pingendi“ (um 1475) mit erstaunlicher Virtuosität. (Einige Proben findet man in [Field 1997].) Während Dürer zur Zentralperspektive 1525 nur „technische Vorschläge“ macht (siehe Abb. 5.3.2 u. 5.3.3), die übrigens wegen ihrer häufigen Reproduktion in neueren Büchern nicht wenig dazu beigetragen haben, die landläufigen Vorstellungen von Dürers Mathematik und dem Inhalt seiner „Underweysung“ zu prägen, war er selbst sich dieses Defizits bewußt, und die posthume Ausgabe von 1538 weist hauptsächlich in dieser Hinsicht Ergänzungen auf, aber nichts wesentlich Eigenes. Hingegen erweist Dürer sich schon 1525 in einer Weise als Meister des Zweitafelverfahrens, die ihn in beachtliche, bisher wenig gewürdigte, geistige Nähe von Monge rückt. Besonders deutlich wird dies an der einfachen Aufgabe, bei in Grund- und Aufriß gegebenem Würfel nebst punktförmiger Lichtquelle den Schatten des Würfels zu konstruieren (Abb. 5.3.12). In seinen „Vier Büchern von menschlicher Proportion“ 1528 wendet er das Zwei- und Dreitafelverfahren vielseitig an, um z. B. aus der Front eines Kopfes und dem gedrehten Grund- oder Seitenriß das geneigte Gesicht zu konstruieren (Abb. 5.3.13). Überraschenderweise findet man das später zum Standard gewordene Verfahren, einen Körper zunächst in einer sehr einfachen Lage im Grund- und Aufriß darzustellen und dann schrittweise in immer allgemeinere Lagen zu drehen, hier auch für den Würfel und einige andere einfache Polyeder demonstriert (Abb. 5.3.14): Dürer will die proportionierte Darstellung des menschlichen Körpers in den verschiedensten Stellungen lehren und approximiert ihn zu diesem Zweck polyedrisch, was anscheinend stilistisch nicht ohne Auswirkungen auf die folgende Künstlergeneration gewesen ist.

⁹Dieser kleine Knick enthüllt uns das aus der Antike überkommene Defizit der Renaissancemathematiker hinsichtlich eines allgemeinen Tangentenbegriffes, verursacht hauptsächlich wohl dadurch, daß sich für die in der Antike dominierenden Kegelschnitte, aber nur für diese, der Begriff der Tangente durch die Existenz genau eines gemeinsamen Punktes mit der Kurve ohne Grenzprozeß erfassen läßt.

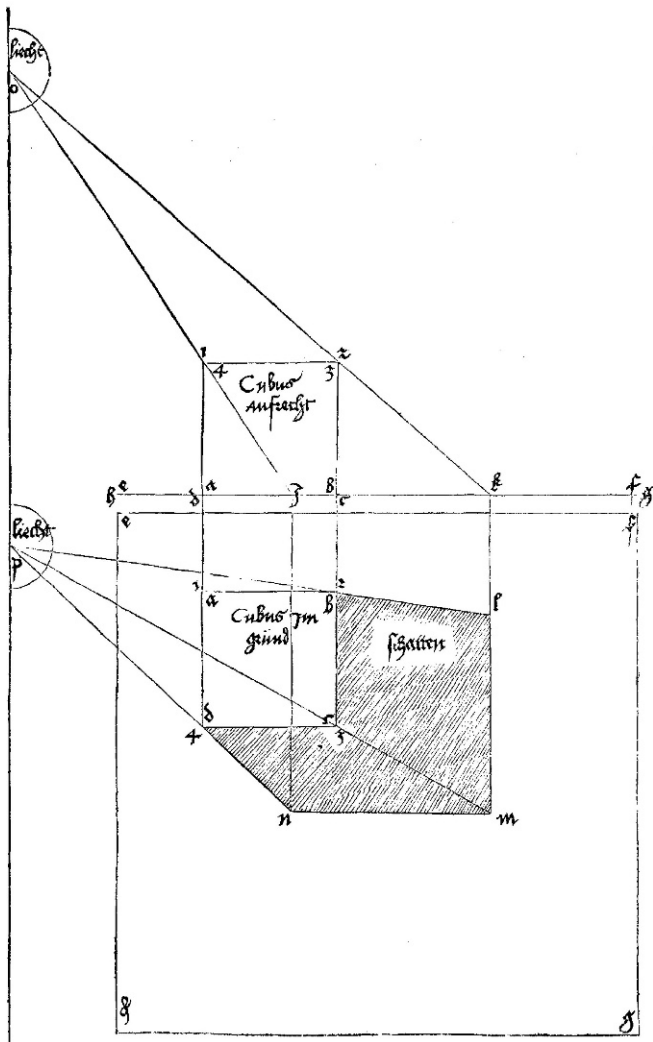


Abb. 5.3.12 Schatten des Würfels nach Dürer
[Underweysung 1525]

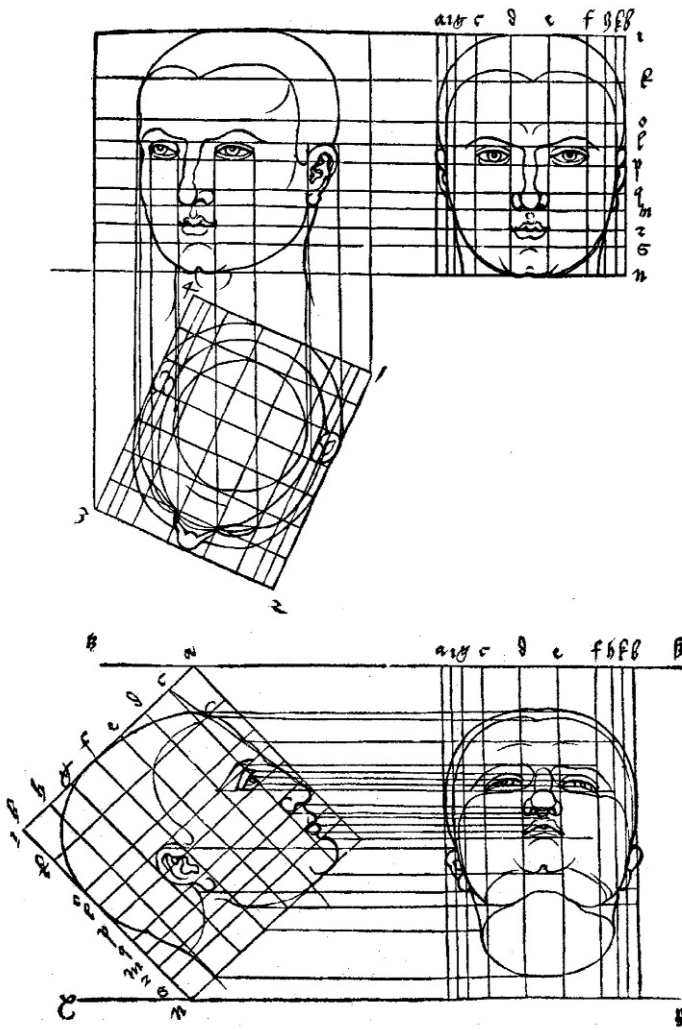


Abb. 5.3.13 Anwendung zugeordneter Normalrisse zur Konstruktion
verschiedener Ansichten desselben menschlichen Kopfes
[Dürer 1528: Vier Bücher von menschlicher Proportion]

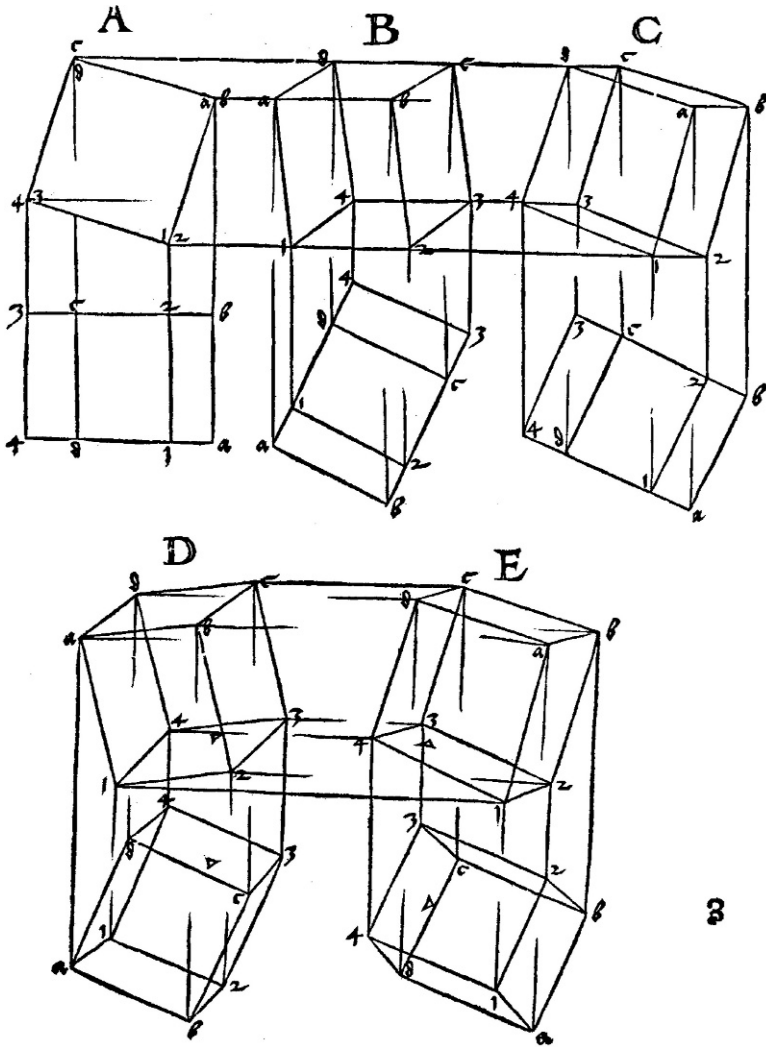


Abb. 5.3.14 Schrittweise Konstruktion von Grund- und Aufriß eines Würfels
in allgemeiner Lage [Dürer 1528]

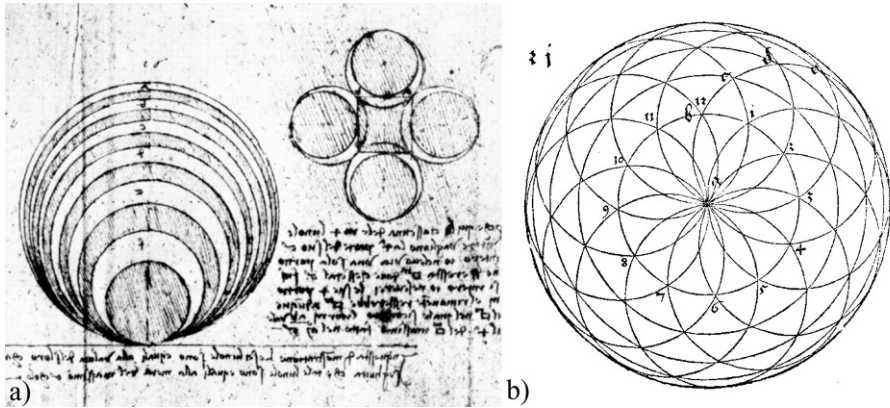


Abb. 5.3.15 Kreisornamente a) Leonardo da Vinci b) Dürer

5.3.5 Ornamente und Parkette

Kann die Renaissance den überwältigenden gotischen Maßwerken noch etwas dekorativ Regelmäßiges hinzufügen? Leonardo, Dürer und andere entdecken ganz ungotische Kreisbogenmuster (Abb. 5.3.15) und die vielfach verschlungenen Knoten, die offenbar aus der islamischen Kunst übernommen werden (Abb. 5.3.16). Beide experimentieren mit den Möglichkeiten, aus wenigen Sorten von paarweise kongruenten „tiles“¹⁰ (im weiteren Sinne) regelmäßige Parkette zusammenzufügen. Dürer gibt etliche weder vor noch nach ihm wieder behandelte Möglichkeiten an¹¹. Diese Art Geometrie wird später Kepler auf ein Niveau bringen, an das erst das ausgehende 20. Jh. wieder anknüpfen will [Grünbaum/Shephard 1987]. Dies ist ein Gebiet, in dem viele Ideen gesammelt werden mußten, ehe man an das Systematisieren und die Theoriebildung gehen konnte. Mittelalter und Renaissance lieben aber schon die teils nur gemalte, teils aber in Bauwerken realisierte „Fußbodengeometrie“ (Abb. 5.3.17, Aufgabe 5.3.8).

¹⁰Interessant ist, daß die heutigen englischen Fachausdrücke „tile, tiling“ bei Dürer in genau diesem Zusammenhang anklingen: „Man mag auch auf einem Plano manicherley figuren zusammensetzen / als Dryangel / quadrat / 5.6.7. oder achteck /daraus man vill wunderlichs dings mag machen von tillen (!) und estrichen /...“

¹¹Dürer bemerkt nicht, daß zwei der von ihm gefundenen Parkette aus Quadraten und Achtecken durch Drehung um 45 Grad ineinander übergehen.

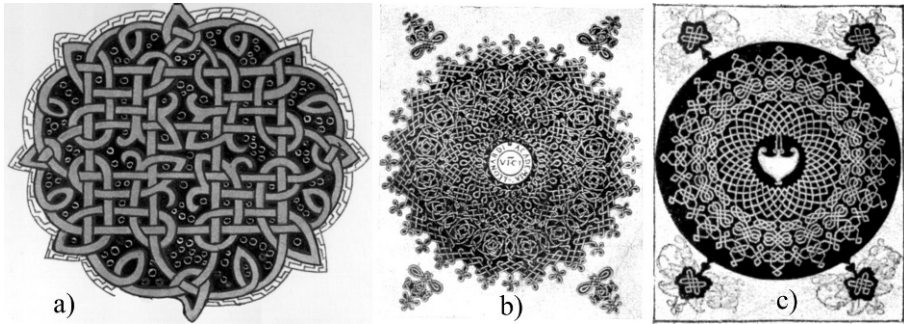


Abb. 5.3.16 Knoten: a) in der islamischen Kunst, b) Leonardo da Vinci c) Dürer
[a) aus A. Speltz: Das farbige Ornament aller historischen Stile. Leipzig: A. Schumanns Verlag 1915; b) und c) aus Steck 1948]



Abb. 5.3.17 Fußboden im Baptisterium der Kathedrale von Pisa, 12. Jh.
[A. Speltz 1915 a.a.O.]

5.3.6 Polyeder

Die regulären und halbrekulären Polyeder werden außer durch die verbreitete Kenntnis der „Elemente“ vor allem durch Pacioli's „Divina proportione“ (1509) ins allgemeine Bewußtsein gerückt¹². Leonardo illustriert dieses Buch in einer Weise, die zeigt, daß er viel mehr über mathematische Perspektive wußte, als aus seinen verstreuten schriftlichen Äußerungen zu entnehmen ist (Abb. 5.3.18). Zugleich zeigt dieses Buch, daß der Begriff der Halbregularität noch nicht in der heutigen Bedeutung verfestigt war. Vielmehr scheint die Existenz einer Umkugel und die gute Annäherung an diese Kugel ein wesentliches Kriterium für die Akzeptanz gewesen zu sein. So behandelt auch Dürer außer den 5 regulären nur 7 der archimedischen Körper, aber im gleichen Zusammenhang auch einige im modernen Sinne nicht halbrekuläre Körper mit Umkugel¹³ (Aufgaben 5.3.10-12). Eine eindrucksvolle Menge intuitiv regelmäßiger Körper zeigt das wohl als Musterkatalog gedachte Werk „Perspectiva corporum regularium“ (1568) des Goldschmieds Wenzel Jamnitzer (Abb. 5.3.20). Die sich an die Renaissance anschließende Stilperiode des Manierismus neigt dazu, komplizierte geometrische Formen um ihrer selbst willen als Sujet zu wählen [Eimer 1956]. Es entstehen regelrechte geometrische Stilleben (Abb. 5.3.21). Ein überraschender früher Vorläufer dieses Stils war Paolo Uccello (um 1397 - 1475), der laut Vasari von seinen Malerkollegen deshalb scharf kritisiert wurde. Und zu den großen wissenschaftshistorischen Wundern gehört, daß Uccello schon 1426 in dem in Marmor eingelegten Fußboden von San Marco in Venedig den heute als „großes Ikosaeder“ bezeichneten regulären Sternkörper abbildet (Abb. 5.3.19). In Pacioli's „Divina proportione“ und ausführlicher in Dürer's „Underweysung“ werden erstmals auch Netzaufwicklungen von Polyedern gezeigt. Eine bemerkenswerte Behandlung der archimedischen Polyeder vom mathematischen Standpunkt befindet sich dann in Stevin's Schrift „Problemata geometrica“ (1583).

Die kunsthistorische Literatur des 19. und 20. Jhs. ist voll von Versuchen, mathematische Gestaltungsprinzipien aus den Kunstwerken der Renaissance zu rekonstruieren (siehe z.B. [Dehio 1895], [Fichtner 1984]), oft wohl auch, sie willkürlich hineinzulesen (Abb. 5.3.22). Da werden Bilder und architektonische Risse nachträglich mit komplizierten Konstruktionen überzogen, aber nur sel-

¹²Dabei knüpfte Pacioli an eine Schrift über reguläre Polyeder von Piero della Francesca an, dessen Schüler er anscheinend zeitweilig gewesen ist.

¹³Noch Kepler schreibt 1619 in seiner „Weltharmonik“, als er alle Möglichkeiten für archimedische Polyeder systematisch aufzählt und dabei (wohl erstmals) auch auf die halbrekulären Prismen und Antiprismen stößt, daß diese zu verwerfen seien, weil sie scheibenförmig sind und mehr einer ebenen Figur als einer Kugel gleichen (Buch II, Def. XIII).

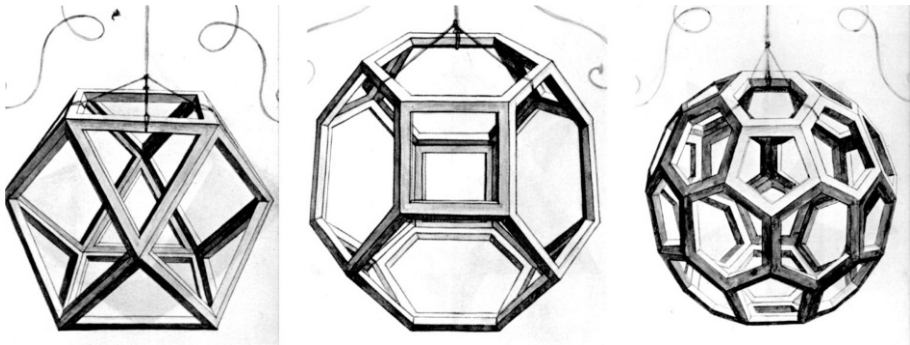


Abb. 5.3.18 Illustrationen Leonardos zur „Divina Proportione“ von L. Pacioli
[Pacioli: De Divina Proportione. Deutsch von C. Winterberg. Wien 1889]



Abb. 5.3.19 Fußbodenmosaik im Eingangsbereich von San Marco, Venedig, nach einer Vorlage von P. Uccello um 1425. Es zeigt offensichtlich den heute als großes Ikosaeder bezeichneten Sternkörper. [Foto A. Schreiber]

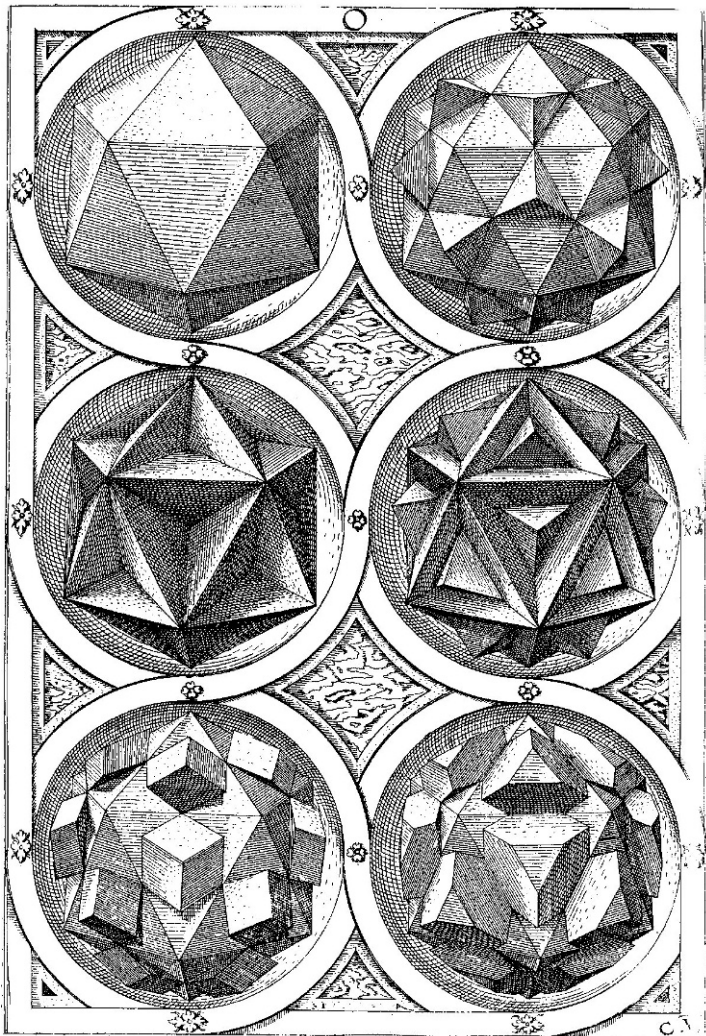


Abb. 5.3.20 Wenzel Jamnitzer: „Perspectiva corporum regularium“

[Nürnberg 1568, Tafel 23] Nach gezeichneten Vorlagen des Verfassers wurden die Bildtafeln von Jost Ammann in Holz geschnitten. Links in der mittleren Reihe erkennt man das große Dodekaeder. Demnach war noch ein weiterer Sternpolyeder schon vor Kepler bekannt.

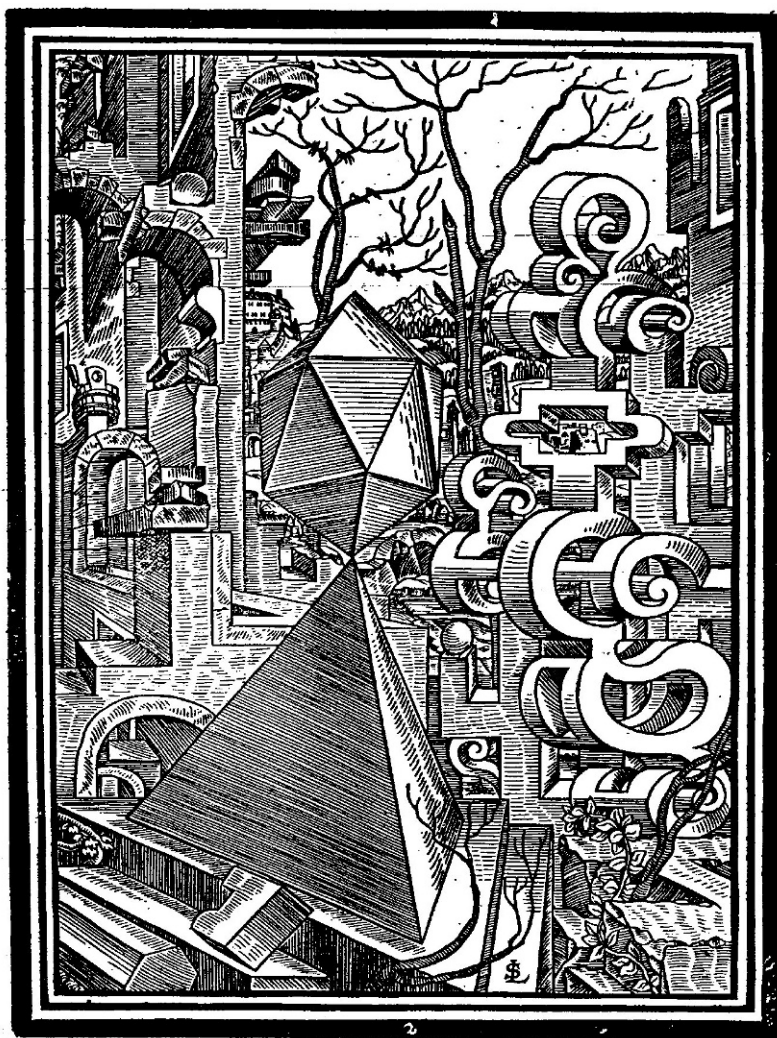


Abb. 5.3.21 Ein manieristisches geometrisches Stilleben
[Lorenz Stoer 1567]

ten sind die Beweise, daß die Künstler wirklich so geplant haben, schlüssig bzw. haben die Künstler selbst uns solche Schlüssel in die Hand gegeben (Zu einer sachkundigen Kritik des „Triangulatur- und Quadraturwahns“ in der architekturhistorischen Literatur siehe auch [Conrad 1990, S. 82f]). Von Dürer gibt es allerdings eine ganze Reihe geometrisch konstruierter Bildentwürfe (Abb. 5.3.23). Nachweisbar ist in der Literatur das Ringen um mathematisch erfaßbare Proportionen des menschlichen Körpers. Es geht bis auf Vitruv zurück. Daran knüpfen u.a. Giotto, Leonardo da Vinci, Piero della Francesca und Alberti an. Letzterer gibt an, seine Zahlenverhältnisse durch vielfache Messungen an verschiedenen Menschen gewonnen zu haben. Dürers „Vier Bücher von menschlicher Proportion“ (1528) gehen wiederum über das traditionelle Anliegen hinaus. Erstmals werden hier geometrische Transformationen benutzt; Dürer entwickelt aus einem Normalgesicht durch lineare oder auch nichtlineare Netzverzerrung verschiedene andere Köpfe (Abb. 5.3.25). Implizit zeigt er, wie viele verschiedene Gesichter man aus wenigen Grundelementen bzw. durch Variation eines Details erzeugen kann. Ist er am Ende auch der Vater des Phantombildverfahrens? Erwähnt muß noch werden, daß auch die Konstruktion ästhetisch schöner und stilistisch einheitlicher Alphabete (also modern gesprochen Typographie) in der Renaissance einsetzt und sich durchaus in gedanklicher Nähe zum Proportionenkanon des menschlichen Körpers befindet. Daß Dürer in seiner „Underweysung“ verschiedene Alphabete mit Zirkel und Lineal konstruiert (Abb. 5.3.24), ist relativ bekannt, weil vielfach reproduziert. Aber auch in diesem Fall hatte er Vorläufer, u.a. Pacioli und Leonardo. Die graphische Gestalt von Buchstaben und Ziffern hat bis heute nichts von ihrer Faszination für Künstler verloren.

5.3.7 Terminologie

Wir beschränken uns hier auf die Entstehung einer deutschen Fachsprache und kommen damit wieder zu Dürers „Underweysung“. Es beginnt schon im Titel mit dem „richtscheyt“, wofür sich letztlich wieder das latinisierende Lineal durchgesetzt hat. Auch Dürers „brenlini“ für Parabel und „gabellini“ für Hyperbel haben sich nicht eingebürgert. (Es waren wirklich terminologische Vorschläge für des Lateins und Griechischen unkundige Leser, denn Dürer gibt auch die aus dem Griechischen entlehnten Bezeichnungen an.) Ein Kreis ist eine „zirckel lini“, eine Kreisfläche ist eine „runde ebene“, ein Quadrat eine „gefierte ebene“ oder „fierung“, eine Diagonale ein „ortstrich“, eine waagerechte Strecke eine „zwerchlini“, eine Parallele eine „barlini“, ... Wesentlicher als diese ungelenkten Einzelwörter scheint, daß man Dürers Text und besonders seine Konstruktionsbeschreibungen auch heute noch gut verstehen kann.

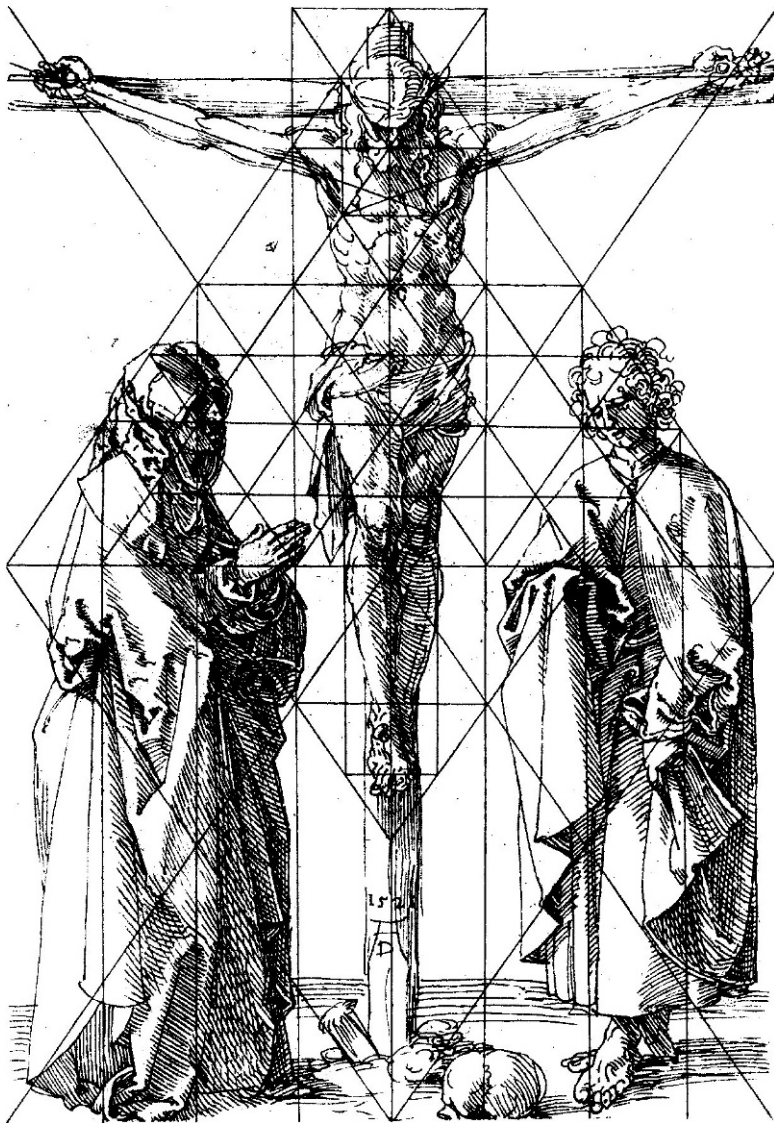


Abb. 5.3.22 Eine „Analyse“ von Max Steck (Dürer, Christi Kreuzigung, 1521)
 Hier ist der Bezug des darübergelegten Gitters zum Bild nicht überzeugend
 [Steck 1948, Tafel XXXV].

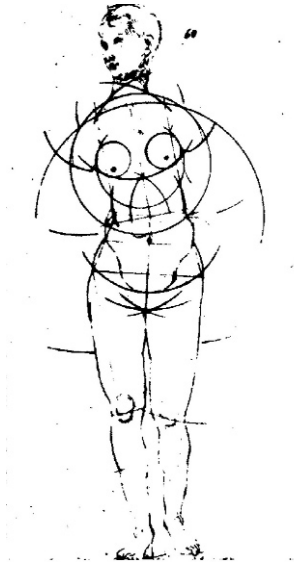


Abb. 5.3.23 Eine geometrische Hilfskonstruktion

Auf dieser Studie hat Dürer selbst seine geometrische Hilfskonstruktion stehen gelassen [Steck 1948, Tafel X].

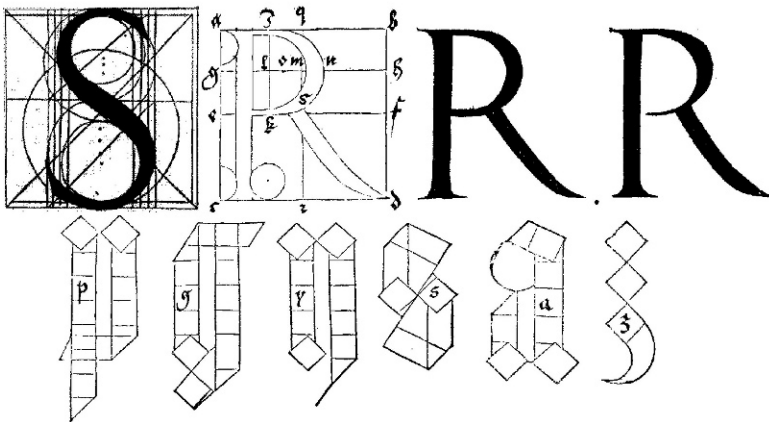
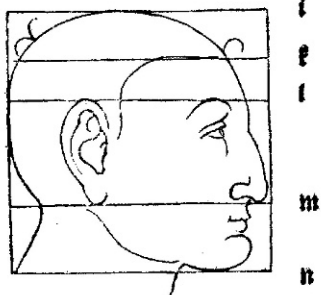
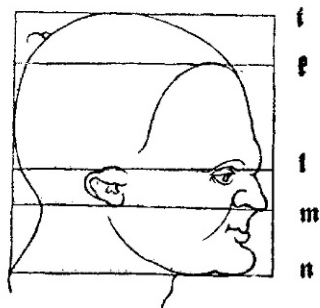


Abb. 5.3.24 Beispiele der Konstruktion von Buchstaben bei Pacioli und Dürer
Der erste Buchstabe links oben (S) ist von Pacioli, die anderen sind von Dürer.

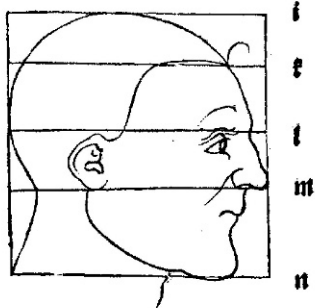
In difem angeſichte iſt allein
die lini.l.oberſich geruckt.



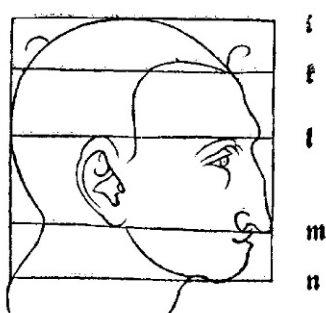
In difem angeſichte iſt allein
die lini.l.vnderſich geruckt.



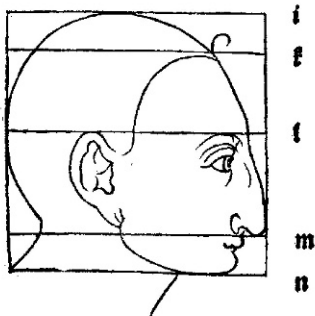
In difem angeſichte iſt allein
die lini.m.oberſich geruckte



In difem angeſichte iſt allein
die lini.m.vnderſich geruckte



In difem angeſichte iſt die lini.f.ober
ſich/vñ die lini.m.vnderſich geruckte.



In difem angeſichte iſt die lini.f.vnder
ſich/vñ die lini.m.oberſich geruckte

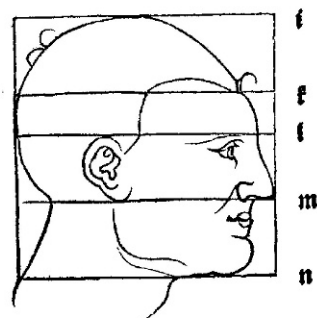


Abb. 5.3.25 Dürer 1528: Verschiedene Methoden der nichtlinearen, aber mathematisch beschreibbaren Verzerrung menschlicher Köpfe [Dürer 1528]

Als Beispiel sei seine Beschreibung zitiert, wie man zu einem gegebenen Kreis exakt die Kante des einbeschriebenen Fünf- und Zehneckes und zugleich näherungsweise die des Siebeneckes findet (Abb. 5.3.26):

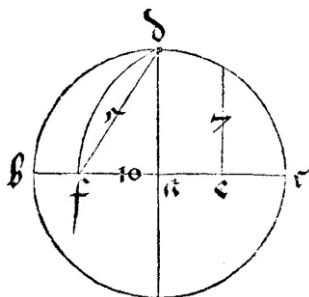


Abb. 5.3.26 Dürers Originalzeichnung zur Konstruktion des 5-, 10- u. 7-Ecks
[Underweysung 1525]

„Nun ist von nöthen ein fünfeck zumachen / in ein zirckelryß / dem thue also
 sur / Reiß auß einem Centrum .a. ein zirckelryß / und zeuch ein zwerchlini
 durch das Centrum .a. und da sie zu beden seyten die zirckellini durchschneidet
 / da setz .b.c. Darnach zeuch durch das Centrum .a. ein aufrechte lini zu
 gleychen wincklen (d.h. sie bildet mit der schon gezogenen Waagerechten gleiche
 Nebenwinkel, ist also senkrecht auf ihr) / und wo sy eben die zirckellini
 durchschneydet / do setz ein .d. (Jetzt fehlt die Anweisung, zunächst e als
 Mittelpunkt der Strecke ac zu konstruieren, was sich aber aus der beigegeführten
 Zeichnung ergibt.) Darnach reiß ein gerade lini e.d. und nym ein zirckel / setz
 in mit dem ein fuß in den punct .e. den andern in das .d. und reiß von .d.
 herab auf die zwerchlini .b.c. wo sie die durchschneidet da setz ein .f. und reiß
 .f.d. gerad zusammen / dise lenge .f.d. ist ein seiten eins fünfteyls (d.h. die Kante
 des einbeschriebenen Fünfecks) / das ecket im zirckel herum dryt / so ist .f.a.
 ein seyten eins zehenecks / (Bis hier ist die Konstruktion exakt und stammt
 aus dem Almagest des Ptolemaios). Darnach teyl .a.c. mit einem puncten .e.
 in zwey gleiche teyl (Offenbar ist hier die Reihenfolge des Textes verdorben
 worden, das kann aber am Setzer liegen.) /so du dann auß dem puncten .e.
 mit einer aufrechten lini ueber sich ferst / bis an die zirckellini / so hast du
 ein sibenteil des zirckels Mechanice / (d.h. diese Strecke ist nur näherungs-
 weise die Kante des Siebenecks) / wie ich das unden hab aufgerysen.“ (Die
 Strecken sind in der zugehörigen Zeichnung mit 5 bzw. 10 bzw. 7 beschriftet,
 womit Mißverständnissen weiter vorgebeugt wird.)

Man entnimmt der Leseprobe, daß die Rechtschreibung auch geläufiger Wörter ganz und gar nicht feststand, daß im allg. nur Wörter wie Centrum und Mechanice, die als Fremdwörter empfunden wurden, groß geschrieben wurden.

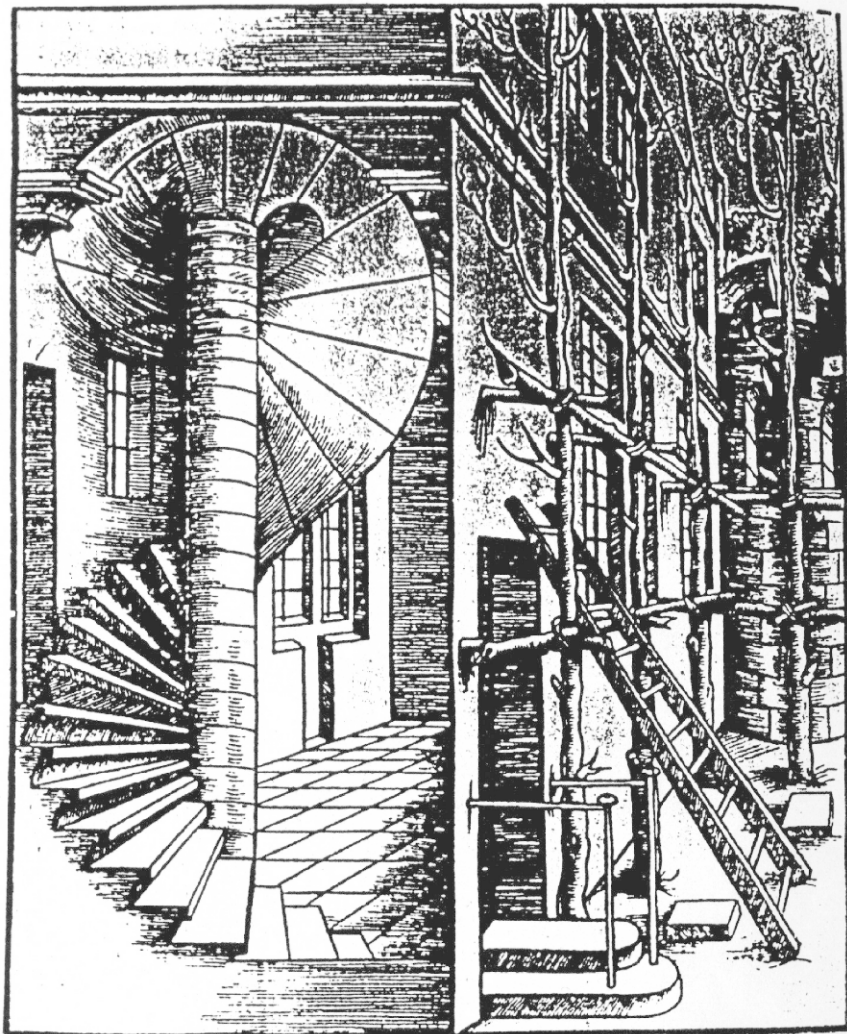


Abb. 5.3.27 Wendeltreppe von H. Rodler (1531):
 Was ist an dieser Wendeltreppe falsch? [H. Rodler: Eyn schön nützlich büchlin und
 underweysung der kunst des messens mit dem Zirckel/Richtscheyt oder Linial. Simmern 1531]



Abb. 5.3.28 A. Dürer: Melencolia I, Kupferstich (1514).

daß der „slash“ / das bevorzugte Universalsatzzeichen war. Im Original sind zusätzlich noch die „n“ am Wortende durch Überstreichen des vorletzten Buchstaben ersetzt. Entscheidend ist aber, daß das Wesen der von Euklid entwickelten Adressierungstechnik gut bewahrt worden ist.

Dürers Werk wurde schon 1532 ins Lateinische übersetzt und so in mehreren Auflagen in Paris gedruckt. In Deutschland fand es bald Nachahmer, die jedoch nicht annähernd das Niveau Dürers erreichten, u.a. Hieronymus Rodler („Eyn schön nütlich buchlin underweisung“, Simmern 1531, sehr fehlerhaft, siehe Abb. 5.3.27), Heinrich Lautensack („Des Circkels unnd Richtscheydts... underweisung“, Frankfurt a. M. 1564), Hans Lencker („Perspectiva literaria“, Nürnberg 1567, 1571) und Paul Pfinzing („Ein schöner kurtzer Extract der Geometriae unnd Perspectivae“, Nürnberg 1599, 1616).

Wir beschließen dieses Kapitel mit einem Blick auf Dürers vieldiskutierten Kupferstich „MELENCOLIA I“ aus dem Jahre 1514. (Abb. 5.3.28). Nach allgemeiner Auffassung stellt der in tiefes Sinnen verfallene Engel ein symbolisches Selbstporträt Dürers dar: Melancholie — ausgelöst durch langes und zum Teil vergebliches Grübeln über schwierigen mathematischen Problemen. (Zu ausführlichen Besprechungen und Deutungen siehe u.a. [Panofsky/Saxl 1923], [Steck 1948, S. 141], [Schröder 1980, S. 64ff]. Das abgebildete Polyeder wird in den Aufgaben 5.3.10 und 5.3.11 näher untersucht.)

5.4 Geometrische Keime der Infinitesimalmathematik

Die im 17. Jh. entstehende „moderne“ Mathematik ruht auf vier Säulen: Funktionsbegriff, Koordinatenmethode, Differential- und Integralrechnung, von denen mindestens die drei letztgenannten ursprünglich der Geometrie angehören. Die historischen Wurzeln dieser vier Kernbereiche reichen unterschiedlich weit in die Vergangenheit zurück. Es ist klar, daß die Bestimmung von Maßzahlen (Längen, Flächeninhalte, Rauminhalte) für geometrische Objekte zu den ältesten Praxisaufgaben der Mathematik gehört. Elementargeometrisch lösbar sind diese aber nur für die „linearen Objekte“: Streckenzüge, geradlinig begrenzte ebene Flächen, Polyeder. Die ersten eigentlich mathematischen Versuche, diese Grenze zu überschreiten, gehen, wie wir gesehen haben, auf Demokrit (nicht schriftlich überliefert), auf Buch XII der „Elemente“ und auf Archimedes zurück. In der auf alles Praktische orientierten Renaissance wurden diese Teile antiker Mathematik mit besonderem Interesse rezipiert und bald weiterentwickelt. Einen wesentlichen Schlüssel dafür bildete die Edition der Schriften des Archimedes über Spiralen, über die Kreismessung, über

die Quadratur der Parabel, über Konoide und Sphäroide und über schwimmende Körper (ein erster latein. Druck Basel 1544, sehr wirkungsreich, dann die griechisch-lateinischen Ausgaben von Commandino 1558, 1566). Charakteristisch für die Renaissance sind die Versuche, die strengen aber mühsamen Beweismethoden eines Archimedes für Flächeninhalts- und Volumenformeln durch heuristische und verallgemeinerungsfähige Überlegungen zu ersetzen. Ein typisches Beispiel ist der Beginn von Keplers Schrift „Neue Stereometrie der Fässer“ (1615, im folgenden kurz „Neue Faßrechnung“), worin Kepler zunächst aus der Antike bekannte Resultate zusammenstellt, dafür aber neue Begründungen gibt: „Der Umfang eines Kreises hat so viele Teile als Punkte, nämlich unendlich viele; jedes Teilchen kann angesehen werden als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Spitze im Mittelpunkt des Kreises liegt.“ Daraus wird nun gefolgert, daß der Flächeninhalt des Kreises sich aus dem Inhalt unendlich vieler Dreiecke zusammensetzt, deren gemeinsame Höhe der Radius ist, während sich die Basen zum Kreisumfang addieren, der Inhalt also gleich dem halben Produkt aus Umfang und Radius ist. Analog erhält Kepler aus der Volumenformel der Pyramiden, daß das Volumen einer Kugel gleich einem Drittel des Produkts von Radius und Oberfläche ist, indem er sich eine Kugel in unendlich viele Pyramiden zerlegt denkt, deren Grundflächen die Oberfläche bilden und deren gemeinsame Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist.

Während alles bisher Gesagte aus der historischen Situation heraus ohne weiteres verständlich ist, gibt es für das aufstrebende Interesse an Problemen der Schwerpunktsbestimmung neben den Bedürfnissen des Schiffbaues, durch die z.B. Stevin zu seinen Untersuchungen motiviert wurde, merkwürdigerweise einen theologischen Grund: Der mittelalterliche Theologe und Logiker Johannes Buridanus hatte argumentiert, daß jeder geologische Prozeß (und sogar die massenhafte Entlaubung der Bäume im Herbst) den Schwerpunkt der Erde verlagert und dieser dann immer wieder danach trachten muß, in den Mittelpunkt des Universums zu gelangen, wodurch eine ständige torkelnde Bewegung der Erde um diesen angenommenen Mittelpunkt entstehen muß. Da andererseits das Dogma von der Unbeweglichkeit der Erde galt, löste dies natürlich einen theologischen Streit aus, an dem u.a. der für die Mathematikgeschichte wichtige Bischof Nicole Oresme beteiligt war und auf den sich noch im 17. Jh. z.B. der jesuitische Mathematiker Paul Guldin bei seiner Beschäftigung mit Schwerpunktsproblemen bezog. Für die nach ihm benannten Guldinschen Regeln, die in seinem vierbändigen Hauptwerk „Centrobaryca“ (Wien 1635-41) enthalten sind, hat er selbst mehr metaphysische als mathematische Argumen-

te angeführt. Einen auf Infinitesimalmethoden (nämlich Zerlegung in „Indivisiblen“) gegründeten Beweis der Regeln versucht erst Bonaventura Cavalieri 1635. Als wesentlicher Vorläufer kann auch hier Kepler betrachtet werden, der im ersten Teil seiner „Neuen Faßrechnung“ aus dem Kreis und anderen Kegelschnitten durch bloße Verlagerung der Rotationsachse weg von den Symmetrieachsen eine große Vielfalt von Rotationskörpern erzeugt. Es folgen dann Sätze wie z.B. „Lehrsatz XVIII. Jeder Ring mit kreis- oder ellipsenförmigem Querschnitt ist gleich einem Zylinder, dessen Höhe gleich dem vom Mittelpunkt der Figur bei der Rotation beschriebenen Kreisumfang und dessen Grundfläche der Querschnitt ist.“ Zur Begründung sagt er: „Wenn man nämlich den Ring durch Schnitte aus dem Zentrum in unendlich viele und sehr dünne Scheiben zerschneidet, so wird eine Stelle der Scheibe gegen den Mittelpunkt A des Ringes hin um so viel schmäler sein als diese Stelle dem Mittelpunkt näher liegt... und umsoviel breiter in einem weiter außen gelegenen Punkt. Danach wird die Dicke an diesen beiden Stellen zusammen doppelt so groß sein wie in der Mitte der Scheiben. Diese Überlegung würde nicht gelten, wenn die Scheiben mit ihren Teilen diesseits und jenseits des Mittelpunktes [des rotierenden Profils] nicht symmetrisch zueinander wären.“

Koordinatenmethoden sind indirekt in der Antike überall dort in Gebrauch, wo Kurven durch ihre Symptome beschrieben werden. Expliziter äußert sich die Koordinatenmethode in der Astronomie und in der Geographie. Einen wesentlichen Beitrag darüber hinaus leistet die Renaissance nicht. Jedoch kann G.B. Benedetti als ein (bisher wenig gewürdigter) Vorläufer von Descartes gelten, da er in seinem „Speculationum“ 1585 erstmals systematisch die Realisierung aller vier species und des Wurzelziehens durch geometrische Konstruktion zusammenstellt und auf dieser Grundlage, noch ohne sich vom antiken Homogenitätsprinzip zu lösen, die Lösung beliebiger Konstruktionsaufgaben auf die algebraische Analyse der gesuchten Stücke und deren sozusagen algorithmische Konstruktion aus den gegebenen Größen zurückführt.

Die Frühentwicklung der Differentialrechnung war zunächst dadurch stark gehemmt, daß für die Kegelschnitte, auf die sich Sätze über Tangenten seit der Antike weitgehend konzentrierten, ausnahmsweise eine elementare Definition möglich ist, weil sie diejenigen Geraden sind, die genau einen Punkt mit dem Kegelschnitt gemeinsam haben. Für die Bedürfnisse der geometrischen Optik, in der spiegelnde oder brechende Flächen (die in den praktisch wichtigen Fällen durch Rotation von Kegelschnitten entstehen) lokal durch ihre Tangentialebenen zu ersetzen sind, war dies ausreichend. Der wesentliche Anstoß, sich allgemeiner mit dem Tangentenproblem zu beschäftigen, wird durch Fragen

nach lokalen Extremwerten von Funktionen gegeben, die bis in die Renaissance kaum und höchstens in sehr versteckter Weise gestellt wurden¹⁴. Aber der entscheidende Denkanstoß hierzu, an den Fermat anknüpfen wird, kommt aus der Renaissance und von Kepler:

In seiner schon mehrfach erwähnten „Neuen Faßrechnung“, die eigentlich Problemen der Volumenbestimmung von Rotationskörpern gewidmet ist und schon im Titel ausdrücklich auf Archimedes Bezug nimmt, bricht funktionale Denkweise und das Suchen nach Maxima spontan durch (Alle Zitate nach der deutschen Übersetzung der „Neuen Stereometrie der Fässer“ in Ostwalds Klassikern): Erster Teil, Lehrsatz XXIX. „Wenn die Zitrone, die Pflaumen, die parabolische Spindel und der Doppelkegel (von Kepler für seine Rotationskörper eingeführte phantasievolle, aber exakt definierte Begriffe), die sämtlich abgestumpft sind, sowohl dieselben Schnittkreise wie auch denselben Kreis um die Mitte des Körpers haben, so ist die Zitrone *der größte Körper*...“ (Hervorhebungen hier und im folg.: Schreiber) Zweiter Teil, Lehrsatz IV. „Unter allen Parallelepipeden oder Säulen, die einer und derselben Kugel einbeschrieben sind und auf zwei quadratischen, einander entgegengesetzten Grundflächen stehen, ist der Würfel *am größten*.“ Folgesatz 2 zum Lehrsatz V. „Daraus geht hervor, daß ein gewisser praktischer geometrischer Sinn in der Regel liegt, nach der die österreichischen Böttcher die Fässer bauen... daß er nämlich mit der Regel des Lehrsatzes V übereinstimmt und den möglichst größten Inhalt besitzt, obgleich er von der vollständigen Erfüllung der Regel etwas abweicht. Andere Gestaltungen, welche bis zu den Punkten sehr nahe bei G sich diesseits und jenseits erstrecken, ändern nur wenig an dem Rauminhalt, weil dieser für AGC der größtmögliche ist: *das einem größten Wert auf beiden Seiten benachbarte zeigt nämlich am Anfang nur unmerkliche Abnahme*.“ Hier ist nicht nur funktionales Denken am Werk, sondern zum ersten Mal, zwar ohne jeglichen Beweis, aber ausgehend von geometrischer Intuition formuliert, was später in der Differentialrechnung als Satz von Fermat bezeichnet werden wird, daß nämlich unter gewissen heute wohldefinierten Voraussetzungen ein Extremalwert höchstens dort eintreten kann, wo die von beliebig kleinen Änderungen des Arguments verursachten Änderungen des Funktionswertes minimal werden. Im Lehrsatz XXVII wird dieser neue Gedanke nochmals bekräftigt:

¹⁴In der Literatur findet sich gelegentlich der Hinweis auf isoperimetrische Betrachtungen der antiken Geometer und dabei besonders auf eine Textstelle im Euklidkommentar des Proklos. An der angegebenen Stelle bei Proklos [Proklos/Steck 1945, S. 443] steht sehr schlecht formuliert: „...Daher erweist sich das Quadrat als größer denn alle Figuren von gleichem Umfang.“ Nur aus dem Zusammenhang kann man hier entnehmen, daß als konkurrierende Figuren wohl nur Vierecke zugelassen sind. Andernfalls wäre die Behauptung natürlich falsch.

„Wenn die beiden Hälften eines österreichischen Fasses nicht vollständig ähnlich sind, sondern der eine Faßboden um wenig kleiner und enger ist als der andere, so ist, sofern nur die Visierlänge die nämliche ist, die Differenz der Inhalte beider Hälften unmerklich. ... In jenen Punkten, in denen nach einem gewissen Kreisgesetz eine Änderung vom Kleineren zum Größeren und hier auch wieder zum Kleineren eintritt, ist aber jene Differenz immer unmerklich.“

Wesentliche weitere Wurzeln des beginnenden funktionalen Denkens, die ebenfalls der Renaissance angehören, betreffen die mathematische Formulierung von Bewegungsgesetzen (Galilei, Kepler). Insofern dort stets die Zeit als unabhängige Variable auftritt, sind sie aber ihrer Natur nach nicht eigentlich geometrisch.

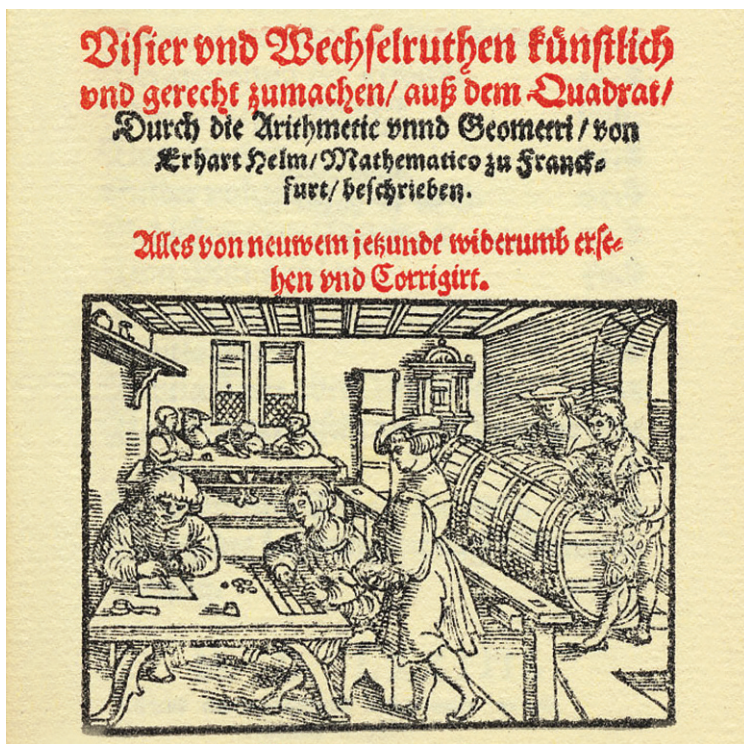


Abb. 5.4.1 Ausschnitt aus dem Titelblatt des Buches: Adam Risen, Rechenbuch auff Linien und Ziphren in allerley Handthierung, Geschäften und Kauffmanschafft, 1574

Wesentliche Inhalte der Geometrie in der Renaissance

1377 – 1446	FILIPPO BRUNELLESCHI: Erfinder der „Durschnittsmethode“ für perspektivische Darstellungen (nach Vasari)
1404 – 1472	LEONE BATTISTA ALBERTI: Bücher über die Baukunst und Malerei (mit Perspektive)
um 1420 – 1492	PIERO DELLA FRANCESCA: „De prospectiva pingendi“ (Perspektive in der Malerei)
1436 – 1476	REGIOMONTANUS: Begründung der Trigonometrie in Europa als systematische Theorie, Übersetzung klassischer mathematischer und astronomischer Werke
um 1445 – 1517	LUCA PACIOLI: „Divina proportione“ (Goldener Schnitt; reguläre u. halbguläre Polyeder)
ca. 1450 – ca. 1500	MATTHÄUS RORICZER: „Das Büchlein von der Fialen Gerechtigkeit“ (1486), „Geometria Deutsch“ (1487), Beschreibung von Verzierungen in gotischer Baukunst
1471 – 1528	ALBRECHT DÜRER: „Underweysung“ (1525, 1538) und „Proportionenlehre“ (1528) behandeln umfassend praktische Geometrie, insbesondere Perspektive, Mehrtafelverfahren, Kurven, Parkettierung, regelmäßige Polyeder
1473 – 1543	NICOLAUS COPERNICUS: „De revolutionibus orbium coelestium libri VI“ (1543), heliozentrisches Weltsystem
1502 – 1578	PEDRO NUNEZ: Kurven konstanten Kurses (Loxodromen) in der Seefahrt
1508 – 1555	GEMMA FRISIUS: Methode der Triangulation (Zerlegung in Dreiecke bei Vermessungen)
1508 – 1585	WENZEL JAMNITZER: „perspectiva corporum regularium“ (1568)
1512 – 1594	GERHARD MERCATOR: Erste Weltkarte in „Mercator-Projection“
1514 – 1576	GEORG RHAETICUS: Definitionen der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck
1546 – 1601	TYCHO BRAHE: Astronomische Messungen (Grundlagen von Arbeiten Keplers)
1561 – 1613	BARTHOLOMÄUS PITISCUS: „Trigonometriae sive dimensionae ...“ (1595), 10 Bücher zur Trigonometrie
1564 – 1642	GALILEO GALILEI: Begründung der modernen Kinematik
1571 – 1630	JOHANNES KEPLER: „Neue Stereometrie der Fässer“ (1615) (Keim der Infinitesimalrechnung), „Vom sechseckigen Schnee“ (1611) und „Harmonice Mundi“ (1619) enthalten zahlreiche Ansätze zur diskreten und kombinatorischen Geometrie, Gesetze der Planetenbewegung

5.5 Aufgaben zu 5

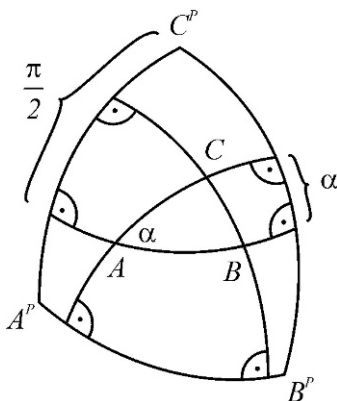


Abb. 5.5.1 Figur zu Aufg. 5.2.1

Aufgabe 5.2.1: Polardreiecke auf der Kugel

A, B, C seien die Eckpunkte eines Dreiecks auf der Kugel­fläche. C^P bezeichne denjenigen Pol zum Großkreis durch A, B , der auf der selben Halbkugel bezüglich dieses Großkreises liegt wie C . Analog seien die Punkte A^P und B^P definiert. $A^P B^P C^P$ ist das Polardreieck zu ABC (Abb. 5.5.1). Man überlege sich

- daß das Polardreieck des Polardreiecks von ABC wieder ABC ist,
- wie die im Bogenmaß gemessenen Seiten des Polardreiecks von den Winkeln des Urdreiecks und die Winkel des Polardreiecks von den Seiten des Urdreiecks abhängen,
- wie man daraufhin aus drei gegebenen Winkeln eines sphärischen Dreiecks die Seiten des Polardreiecks und aus dessen Winkeln die Seiten des Urdreiecks bestimmen kann. (Dies entspricht einer Herleitung des Winkelkosinussatzes der sphärischen Trigonometrie aus dem Seitenkosinussatz.)

Aufgabe 5.2.2: Vietas Konstruktion des Sehnenvierecks

Im Anhang von Vietas „Mesolabum“ 1596 findet sich die folgende reizvolle Konstruktionsaufgabe: Damit ein konvexes Viereck mit den Seiten a, b, c, d existieren kann, ist offenbar notwendig und anschaulich auch hinreichend, daß jede dieser Seiten kürzer als die Summe der drei übrigen ist. Vieta zeigte, daß man unter dieser schwachen Voraussetzung dem Viereck immer eine solche Form geben kann, daß es einen Umkreis besitzt, also ein Sehnenviereck ist, und daß der zur Konstruktion dieser Gestalt aus gegebenen a, b, c, d erforderliche Winkel α , etwa bei der Ecke C , aus den gegebenen Seiten mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Ein trivialer Spezialfall liegt vor, wenn zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind. (Dann ist die gesuchte Figur ein symmetrisches Trapez.) Einen Hinweis zur Lösung des allgemeinen Falles gibt die von Vieta benutzte Figur (Abb. 5.5.2), wobei D' und A' so bestimmt sind, daß $SD' = SD$ und

- a) Man beweise, daß jedes archimedische Polyeder eine Umkugel hat, d.h. einen Mittelpunkt, von dem alle Ecken gleich weit entfernt sind.
- b) Das zu einem archimedischen Polyeder P reziproke dualarchimedische (oder Catalansche) Polyeder D^P hat die Umkugel von P als Inkugel. Seine Flächen sind in den Ecken von P tangential an diese Kugel. Daher hat es seine Ecken genau auf den Strahlen vom Mittelpunkt der Kugel durch die Mittelpunkte der Flächen von P , und die Kanten beider Polyeder sind einander umkehrbar eindeutig zugeordnet. Aus der Gleichheit aller Ecken des archimedischen P ergibt sich die Gleichheit aller Flächen von D^P und aus der möglichen Verschiedenheit der Flächen von P die mögliche Verschiedenheit der Ecken von D^P .
Man beweise, daß ein Polyeder genau dann regulär ist, wenn es archimedisch und dualarchimedisch ist, also sowohl eine Um- als auch eine Inkugel hat.
- c) Kepler hat in seiner „Harmonice mundi“ ein zweidimensionales Analogon des Begriffs archimedisches Polyeder andiskutiert. Das ist also ein konvexes Vieleck, dessen aus je einer Ecke und den beiden anliegenden (möglicherweise verschiedenen langen) Kanten bestehende „Eckenfiguren“ paarweise kongruent sind. Man führe dies weiter aus: Zu jeder der unendlich vielen möglichen Eckenfiguren gibt es ein archimedisches Vieleck, und dieses hat immer einen Umkreis, ist also ein Sehnenvieleck. Dieser Umkreis ist der Inkreis des zugehörigen reziproken dualarchimedischen Vielecks. Wodurch sind die letzteren charakterisiert?

Aufgabe 5.2.5: Keplers „Mystericum cosmographicum“

Man rechne Keplers Planetenmodell nach, d.h. welche Radien haben die ineinandergeschachtelten In- bzw. Umkugeln, wenn man den Bahnradius der Erde gleich 1 setzt? Man vergleiche die erhaltenen Werte mit dem Verhältnis der mittleren Bahnradien, das moderne astronomische Nachschlagewerke angeben. Könnte man die seither neu entdeckten Planeten Uranus, Pluto und Neptun in das Keplersche Modell einbeziehen, indem man passende archimedische und dualarchimedische Polyeder zuläßt? (Archimedische Polyeder haben nur eine Umkugel, aber keine Inkugel, bei den dualarchimedischen ist es umgekehrt.)

Aufgabe 5.2.6: Keplers Problem

Z bezeichne den Mittelpunkt des Kreises k mit dem Durchmesser $2a = APh$ (A = Aphel = sonnenfernster Punkt, Ph = Perihel = sonnennächster Punkt) der Bahn des Planeten P (Abb. 5.5.3 vgl. auch Abb. 5.2.8). In einem Brennpunkt S der Ellipse steht die Sonne. Dann entsteht die Bahnellipse von P durch affine Stauchung aus diesem Kreis k . Dabei ist der Planetenort P das Bild eines „Pseudoplaneten“ Q , der sich auf dem Kreis k so bewegt, daß PQ stets senkrecht auf der großen Achse APh der Bahnellipse ist.

- a) Man begründe, warum das zu bestimmende Verhältnis der Fläche ASP zur Gesamtfläche der Halbellipse gleich dem Verhältnis der Fläche ASQ zur Fläche des Halbkreises ist, Dadurch wird das ursprüngliche Keplersche Problem auf das elementarere Problem reduziert, den Standort des zu P gehörigen Pseudoplaneten Q in Abhängigkeit von der Zeit mittels des 2. Keplerschen Gesetzes zu bestimmen.

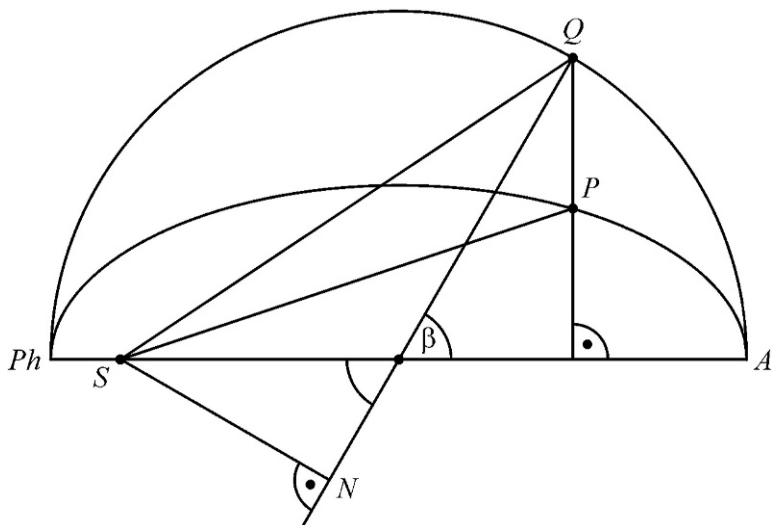


Abb. 5.5.3 Figur zu Aufg. 5.2.6

- b) Wenn man die Lage von Q (und damit auch von P) durch den als exzentrische Anomalie bezeichneten Winkel $\beta = AZQ$ bestimmt, wird das Flächensegment ASQ als Vereinigung aus dem Sektor AZQ und dem Dreieck SZQ als $\frac{1}{2}(\beta a^2 + ae \sin \beta)$ berechnet. (Die zur Basis $ZQ = a$ des Dreiecks SZQ gehörige Höhe SN kann durch β und die Exzentrizität $e = SZ$ der Bahnellipse ausgedrückt werden.) Man begründe dies.
- c) Indem man e durch die numerische Exzentrizität $\epsilon = e/a$ der Ellipse ausdrückt, erhält man schließlich bei gegebenem Verhältnis c der Fläche ASP zur Halbelipse die Keplersche Gleichung

$$\beta + \epsilon \cdot \sin \beta = c \cdot \pi$$

zur Bestimmung von β . Man rechne dies nach und überlege noch, daß dies für sehr kleine Exzentrizitäten, also annähernd kreisförmige Bahnen um die Sonne, in nullter Näherung wieder eine gleichförmige Bewegung ergibt.

Aufgabe 5.3.1: Dürers Konstruktion des regulären 5-, 7- und 10-Ecks

Man rechne zu der im Text angegebenen Dürerschen Konstruktion der Fünf-, Zehn- und Sieben-Eckskante zu gegebenem Kreis (Abb. 5.3.25) nach, daß die Fünf- und die Zehneckskante exakte Lösungen sind. (Sowohl aus der angegebenen Konstruktion als auch aus der beigegebenen Figur ergeben sich bei Radius 1 des umschriebenen Kreises für die Fünfeckskante $\sqrt{\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})}$, für die Zehneckskante $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.) Für die Siebeneckskante, für die die Höhe des aus der Seite des regulären Sechsecks gebildeten gleichseitigen Dreiecks genommen wird, bestimme man den dabei gemachten Fehler.

Aufgabe 5.3.2: Näherungskonstruktion des regulären Fünfecks mit fester Zirkelweite

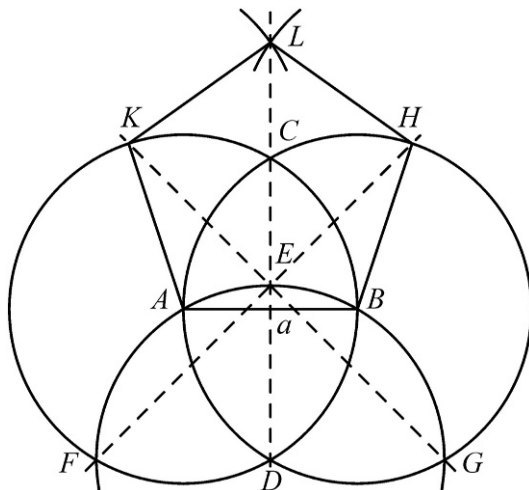


Abb. 5.5.4 Figur zu Aufg. 5.3.2

Die schon in Roriczers „Geometria Deutsch“ beschriebene Konstruktion verläuft wie folgt: AB sei die gegebene Kante a . Die Kreise (alle vom Radius a) um A und B schneiden sich in C und D . Der Kreis um D schneide die Gerade CD in E , den Kreis um A in F und den Kreis um B in G . Dann trifft die Gerade EF den Kreis um B in der C -Halbebene bezüglich AB in H und, symmetrisch dazu, die Gerade durch EG den Kreis um A in K . H und K sind nach A, B zwei weitere Eckpunkte des gesuchten Fünfecks. Demnach ist klar, daß der letzte Eckpunkt L auf der Geraden DE und den Kreisen um H bzw. K liegt. Nach Konstruktion haben alle fünf Seiten die Länge a des benutzten Zirkelradius.

Man berechne die Größe der Winkel bei A, K und L (Aus Symmetriegründen ist der bei B gleich dem bei A und der bei H gleich dem bei K .) und verifiziere, daß die Winkel bei A, B etwa 108,37 Grad und die bei H, K etwa 107,04 Grad betragen, demnach der Winkel bei L etwa 109,18 Grad ist.

Aufgabe 5.3.3: Dürers Neuneckskonstruktion

Dürers eigentümliche approximative Konstruktion eines regulären Neunecks (nach [Steck 1948, S. 49] aus der Handwerkerpraxis stammend) ist von ihm wie folgt beschrieben (vgl. Abb. 5.5.5):

Reiß auß einem Centrum .a. eine grosse zirkellini /darein reiß mit un-
verrücktem zirkel / drey fischblasen / der obern ende an der zirkellini
sey .b. der andern end auf den seyten sey .c.d. Darnach reiß in der obern
fischblasen / ein aufrecht gerade lini .b.a. diese lini teil mit zweyen punct-
ten .1.2. in drey gleiche felt / also das 2. der negst punctt beym .a. sey /

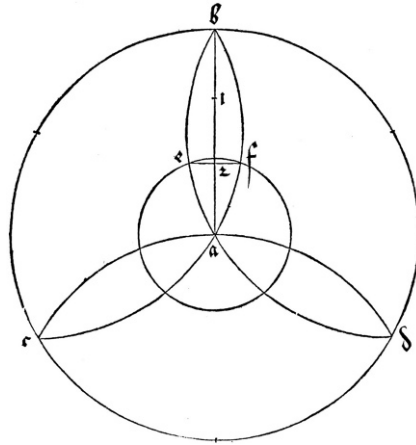


Abb. 5.5.5 Figur zu Aufg. 5.3.3

unnd far durch den puncten .2. mit einer geraden zwerchlini zu gleichen wincklen .b.a. und wo sie die blasenlini zu beden seytten durchschneidet / da setz .e.f. Darnach nym ein zirckel / setz in mit dem eyn fuß / in das Centrum .a. und den andern in den puncten .e. und reiß durch das .f. zu ring herumb / ein zirckellini - So geet die leng .e.f. zu neun mal in disem zirckelriß herumb.

Man übersetze diese Konstruktionsvorschrift in moderne Sprache. Die Behauptung ist dann, daß der Winkel eaf näherungsweise 40 Grad beträgt. Man ermittle seinen genauen Wert und beurteile die Genauigkeit.

Aufgabe 5.3.4: Dürers approximative Winkeldreiteilung

Die Konstruktion (die eigentlich eine Dreiteilung eines zugehörigen Kreisbogens ist

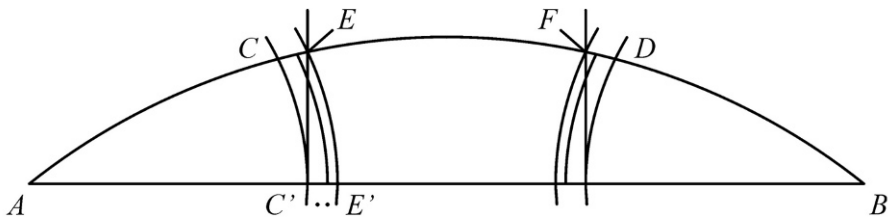


Abb. 5.5.6 Figur zu Aufg. 5.3.4

und daher in der zeichnerischen Genauigkeit durch Wahl eines möglichst großen Radius r verbessert werden kann) verläuft für einen (o.B.d.A. spitzen) Winkel wie folgt: Man teile die Verbindungsstrecke der Endpunkte A, B des zu teilenden Kreisbogens in drei gleiche Teile und übertrage die beiden äußeren Strecken durch Zirkelschläge wie in Abb. 5.5.6, die mittlere aber durch senkrechtes Hochziehen auf den Kreisbogen. Nun sind die Sehnen AC, EF und BD (und folglich auch ihre Bögen) gleich, und es

bleiben die Reste CE und FD zu teilen. Man könnte hierauf die gleiche Konstruktion anwenden und dies beliebig oft iterieren. Dürer begnügt sich damit, diese Restbögen durch Zirkelschläge um A bzw. B auf die Grundsehne AB zurückzuholen, dort linear zu dritteln und die jeweiligen Anteile von zwei Dritteln den äußeren Teilbögen, die beiden mittleren Drittel aber dem mittleren Bogen durch abermalige Zirkelschläge um A bzw. B zuzuschlagen. Man beachte aber: Da E nicht auf der geraden Verlängerung von AC liegt, ist $C'E'$ etwas kürzer als CE und analog auf der anderen Seite! Wie F. Vogel 1931 berechnete, hat die damit erreichte theoretische Genauigkeit einen Fehler von weniger als 20 Bogensekunden, was bereits unterhalb jeder praktisch erreichbaren Zeichengenauigkeit liegt. Man versuche, diese Fehlerrechnung nachzuvollziehen.

Aufgabe 5.3.5: Dürers Winkeldreiteilung nach Vahlen

In [Vahlen 1911], wo die Dürersche Näherung S. 290 ebenfalls behandelt wird, ist die Konstruktion etwas abweichend beschrieben, nämlich: Man drittelle die Sehne AB in C', D' und konstruiere E, F wie oben. Als Sehne des Drittelbogens nehme man dann das arithmetische Mittel aus den drei Sehnen AE, EF, FB . Man überlege sich, daß diese Beschreibung dasselbe Resultat liefert wie die Dürersche!

Aufgabe 5.3.6: Dürers näherungsweise Kreisquadratur

Sie beruht darauf, $5/2$ des Kreisradius als Diagonale des annähernd flächengleichen Quadrats zu nehmen. Auf welchen Näherungswert für π führt das?

Aufgabe 5.3.7: Dürers Eilinie

„Nun will ich leren machen ein lini / die einem wolgestalten ey gleich werdt.“ Dürers „gesplinte“ Eilinie (Abb. 5.5.7) ist zusammengesetzt aus den Kreisbögen $k(1)$ von Punkt 3 bis Punkt 7 um Punkt 5, $k(2)$ von Punkt 7 bis Punkt d um Punkt a (und symmetrisch dazu $k(3)$), $k(4)$ von d bis m um f (und symmetrisch dazu $k(5)$) und $k(6)$ zwischen m und n um den Mittelpunkt i der Strecke zwischen 10 und h : „Setz den zirckel mit dem ein fuß in den punctken i und dem andern in die zirckellini .ch. auff das kürtzezt so du sie erreychen magst.“

- Man begründe, warum die Kurve in den Punkten 3, 7, m und n glatt ist, aber in c und d einen Knick hat (den man mit bloßem Auge nicht sieht).
- Man berechne den Winkel zwischen den einseitigen Tangenten in c !
- Wie müßte man die Konstruktion der Kreismittelpunkte f bzw. g abändern, damit keine Knicke entstehen?

Aufgabe 5.3.8: Symmetrieabbildungen eines Fußbodenmusters

- Welche Symmetrieabbildungen gestattet das in Abb. 5.3.17 gezeigte Fußbodenmuster (Pisa, Ende 12. Jh.)?
- Welche zusätzlichen Abbildungen werden möglich, wenn man die Unterkreuzung der Bänder ignoriert und diese nur als Linienmuster auffaßt?
- Man versuche das Muster über den gezeigten Ausschnitt hinaus fortzusetzen.

Aufgabe 5.3.9: Sternpolyeder

- Wodurch unterscheiden sich die meisten von Jamnitzer gezeichneten „regelmäßigen“ aber nicht konvexen Polyeder (vgl. Abb. 5.3.20) von seinem großen Dodekaeder (Mitte links) und den Polyedern von Uccello (Abb. 5.3.19) und Poinsoit (Abb. 7.9.2), die heute als echte Sternpolyeder gelten?

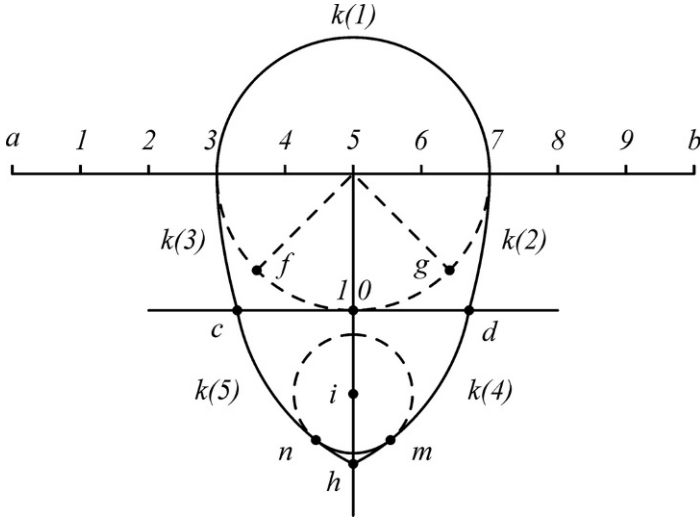


Abb. 5.5.7 Figur zu Aufg. 5.3.7

- b) Warum gilt Keplers Oktaederstern (Abb. 5.5.8) im modernen Sinne nicht als Sternpolyeder bzw. wie müßte man die Definition des Begriffs Sternpolyeder abändern, damit Keplers Oktaederstern darunter fällt?
- c) Welche weiteren Sternpolyeder würde es in diesem Sinne geben? (Zur letzten Frage vergleiche man Aufg. 2.3.2)

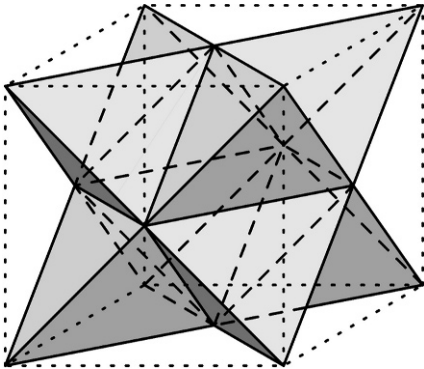


Abb. 5.5.8 Figur zu Aufg. 5.3.9

Aufgabe 5.3.10: Dürers gestutzter Rhomboeder

Der polyedrische Körper in Dürers „Melencolia I“ (Abb. 5.3.28) entsteht, indem man einen Würfel in Richtung zweier diametral gegenüberliegender Ecken zu einem von Rhomben begrenzten Parallelepiped (Rhomboeder) streckt und dann die beiden Spitzen senkrecht zu dieser Achse abschneidet. Durch das Verzerren verlor der Würfel

seine Eigenschaft, eine Umkugel zu besitzen. Geeignetes Abschneiden der Spitzen stellt diese Eigenschaft wieder her (warum ist das möglich?), und wahrscheinlich liegt diese Idee Dürers vieldiskutiertem Körper zugrunde [Schreiber, P. 1999].

- a) Man überlege, wie diese Konstruktion (d.h. das Abschneiden der Spitzen des Rhomboeders, so daß der gestutzte Körper wieder eine Umkugel hat) mittels Zweitafelverfahren, also mit einem Hilfsmittel, das Dürer sehr gut beherrschte, realisiert werden kann.
- b) Übrigens deuten die Kugel im Vordergrund des Bildes und die dabei liegenden Werkzeuge darauf hin, daß der Engel gerade darüber nachdenkt, wie man umgekehrt bei gegebener Kugel den entsprechenden Körper herauszuschneiden kann. Man versuche auch diese Aufgabe zu lösen.

Aufgabe 5.3.11: Nochmals Dürers gestutztes Rhomboeder

Aus der Durchschnittmethode ergibt sich, wie man aus einem perspektivisch korrekten Bild den Betrachterstandpunkt, d.h. Hauptpunkt und Augdistanz, rekonstruieren kann, wenn das Bild dafür hinreichende Informationen enthält, also z.B. im Fall von Dürers „Melencolia I“ der Horizont und die Bilder von im Original rechtwinkligen Objekten gegeben sind. Aus diesem Betrachterstandpunkt lassen sich dann auch Grund- und Aufriß des abgebildeten Polyeders rekonstruieren. Nähere Anleitung und auch das Ergebnis kann man z.B. aus [Schröder 1980] entnehmen.

Der Leser sei aber aufgefordert, dies soweit wie möglich selbständig durchzuführen und am erhaltenen Grund-Aufriß des Polyeders die in Aufgabe 5.3.10 aufgestellte Hypothese zu prüfen, d.h. hat Dürers Körper wirklich eine Umkugel? Außerdem kann man aus dem Grund-Aufriß die wahre Gestalt der Seitenflächen entnehmen, den Körper basteln und feststellen, daß der kleinere Winkel der Rhomben, der ja an sich für die oben beschriebene Konstruktion willkürlich wählbar ist, bei Dürer 72 Grad beträgt, womit ein deutlicher Bezug zum regulären Fünfeck (und wenn man will, zum goldenen Schnitt) hergestellt ist.

Aufgabe 5.3.12: Eine falsche Netzaufwicklung

In der „Underweysung“ stellt Dürer außer den fünf regulären und sieben der archimedischen Polyeder auch zwei im modernen Sinne nicht archimedische Körper durch ihre Netzaufwicklungen dar, die aber beide ebenfalls Umkugeln besitzen. Bei einem dieser Körper, der durch Abstumpfen der Würfelflächen zu Zwölfecken entsteht, wobei in jeder Ecke drei gleichschenklige und ein gleichseitiges Dreieck entstehen, ist ihm ein Fehler unterlaufen, den man durch bloßes Betrachten von Dürers Netzaufzeichnung (Abb. 5.5.9) finden kann.

Was ist sicher falsch? Man konstruiere den Körper im Schrägriß oder Zweitafelverfahren und berechne dann das korrekte Verhältnis der beiden vorkommenden Kantenlängen!

Aufgabe 5.4.1: Guldins Regeln

Man beweise elementargeometrisch Guldins Regeln

- a) Das Volumen eines Rotationskörpers ist das Produkt aus rotierender Fläche und Weg ihres Schwerpunktes.

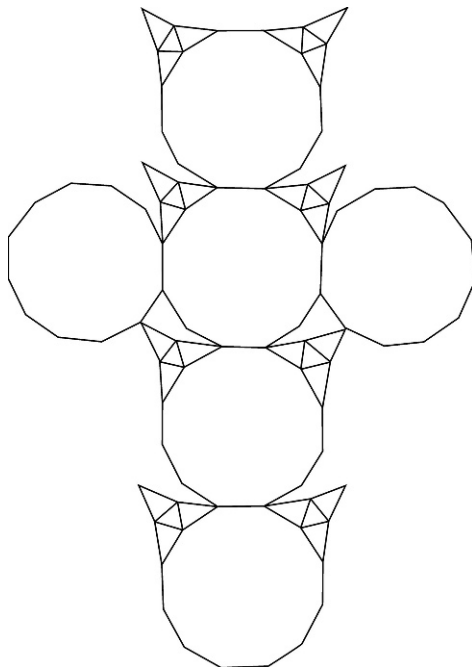


Abb. 5.5.9 Figur zu Aufg. 5.3.12

- b) Der Inhalt einer Rotationsfläche ist das Produkt aus der Länge der rotierenden Profilkurve und dem Weg ihres Schwerpunktes.

im Fall a) für das Volumen von Ringen mit dreieckigem oder rechteckigem Profil, im Fall b) für die Mantelfläche eines Kegelstumpfes. (Der allgemeine Fall ergibt sich hieraus nach dem Verständnis des 17. Jhs. für beide Regeln durch Zerlegung der rotierenden Fläche bzw. Kurve in beliebig kleine Teile.)

Aufgabe 5.4.2: Keplers Regeln für den Zusammenhang zwischen Oberfläche und Volumen

Die von Kepler heuristisch erklärten Beziehungen zwischen Fläche und Umfang des Kreises bzw. zwischen Volumen und Oberfläche der Kugel kann man auch auf einem anderen heuristischen Weg erhalten: Man denke sich den Kreis aus konzentrischen Kreisringen endlicher Dicke d zusammengesetzt. Bei kleinem d ist ihr Inhalt näherungsweise das Produkt aus d und dem Umfang des Kreises mit dem zugehörigen mittleren Radius. Aus der Summation dieser Teilflächen wird für gegen Null strebendes d das Integral.

Man führe die analoge Betrachtung für Kugeloberfläche und Kugelvolumen durch.



Abb. 5.5.10 Pierre de Fermat.

Die Marmorskulptur auf hohem Sockel vor dem Dach der großen offenen Markthalle auf dem Marktplatz von Beaumont-de-Lomagne wurde vom Steinmetz Valette aus

Toulouse geschaffen. Als Vorbild diente ein im Hôtel d' Assézat in Toulouse aufbewahrtes verkleinertes Modell der 1943 von der deutschen Besatzungsmacht eingeschmolzenen Bronzeplastik des Bildhauers Jean Alexandre Joseph Falguière (1831–1900). Das von dem in Beaumont geborenen Mathematiker, Physiker und Astronomen Theodore Despeyroux gestiftete bronzene Original war am 20. August 1882 feierlich enthüllt worden. Seit 1955 steht die Skulptur aus Marmor am ursprünglichen Platz [Foto Martin Barner]

6 Die Entwicklung der Geometrie im 17. und 18. Jahrhundert



Die bekannte Welt wird durch zahlreiche geodätisch-geographische Expeditionen ebenso wie durch die Erfindung und Verbesserung von Fernrohren und Mikroskopen in vielen Richtungen erweitert. Die Baukunst des Barock ($\sim 1600 - 1730$), des Rokoko ($\sim 1720 - 1780$) und des Klassizismus ($\sim 1750 - 1830$) wird durch neue Formen, Ornamente und Figuren bzw. Rückbesinnung auf klassische antike Architektur geprägt. An all dem hat die Geometrie einen wesentlichen Anteil.

1633	Galilei muß vor der Inquisition sein Bekenntnis zum copernicanischen Weltsystem widerrufen
1643 – 1715	Regierung Ludwig XIV. („Sonnenkönig“) in Frankreich
1644	B. Pascal baut die erste erhalten gebliebene mechanische Rechenmaschine (und erhält 1649 ein königliches Privileg für die Herstellung)
1646	A. Kircher beschreibt die „Laterna Magica“ als erster (Keim zur späteren Filmproduktion)
1648	Der Westfälische Frieden beendet den Dreißigjährigen Krieg
1662	(offizielle) Gründung der Royal Society in London
1666	Gründung der Pariser Akademie
1666	Nach einer Pestepidemie und dem folgenden Großbrand von London Beginn des Wiederaufbaus unter Leitung von Christopher Wren
1666 – 84	Bau des Canal du Midi in Frankreich (Verbindung Atlantik - Mittelmeer)
1672	Leibniz erfindet die Staffelwalze als Element mechanischer Rechengeräte
1687	Newtons „Philosophiae naturalis principia mathematica“
1709	E.W.v. Tschirnhaus und J.F. Böttger erfinden in Sachsen das europäische weiße Hartporzellan
1725	Eröffnung der Petersburger Akademie
1729 – 96	Regierung Katharina II. in Rußland
1733 – 43	Große russische Nordexpedition unter Vitus Bering
1735 – 37	Gradmessungsexpeditionen der Pariser Akademie nach Südamerika und Lappland beweisen Abplattung der Erde
1740 – 86	Regierung Friedrich II. (der „Große“) in Preußen
1741	Neugründung der Berliner Akademie, Berufung Eulers nach Berlin
1756 – 1763	Siebenjähriger Krieg
1768 – 79	Entdeckungsreisen von James Cook
1769	James Watt erhält Patent auf seine Dampfmaschine
1775	Goethe kommt nach Weimar
1783	England erkennt Unabhängigkeit der USA an
1784	Mechanischer Webstuhl von E. Cartwright
1787	Uraufführung der Oper „Don Giovanni“ von Mozart in Prag
1789	Beginn der bürgerlichen Revolution in Paris
1794	Gründung der École Polytechnique in Paris
1798	Casanova stirbt auf Schloß Dux in Böhmen
1799	Napoleon I. Konsul von Frankreich, de facto Alleinherrscher

6.0 Vorbemerkungen

In der Zeit zwischen etwa 1630 und etwa 1800 (als aus noch zu diskutierenden Gründen eine abermalige tiefgreifende Wende in der Mathematik eintrat) war die Gruppe derjenigen Gelehrten, die sich auf eine aus heutiger Sicht für die historische Entwicklung wesentliche Weise mit Mathematik beschäftigten, zahlenmäßig klein und leicht zu überblicken. Sie standen im allgemeinen in Kontakt miteinander, wenn auch auf andere Weise als später, nämlich nicht durch Kongresse oder Fachzeitschriften, sondern durch die Verbreitung ihrer Bücher und gedruckten Einzelschriften, durch wissenschaftliche Gesprächszirkel an verschiedenen zentralen Orten, die übrigens teilweise die Keimzellen der späteren Akademien gebildet haben, die gedruckten Arbeits- bzw. Sitzungsberichte dieser Akademien (die praktisch die ersten wissenschaftlichen Zeitschriften waren) sowie durch Briefwechsel und persönliche Besuche. Eine besondere Rolle hat der in Paris lebende Minoritenpater Marin Mersenne gespielt, der ab etwa 1623 bis zu seinem Tode 1648 fast alle wichtigen Gelehrten Europas durch Briefwechsel und bei sich organisierte persönliche Zusammenkünfte in Kontakt miteinander brachte. Bis auf ganz wenige Ausnahmen fühlten sich alle diese Männer als Naturphilosophen, d.h. sie betrieben Mathematik in engster Verbindung mit Philosophie, Astronomie, Geodäsie und Kartographie, Mechanik, Optik, Akustik und anderen Keimen einer allmählich wachsenden Physik und Technik. Mathematik war in dieser Zeit noch ebenso in diese damals aktuellen Anwendungsgebiete eingebettet wie bis zur Renaissance die Trigonometrie in die Astronomie. Eine Spezialisierung innerhalb der Mathematik gab es nicht, und abgesehen davon, daß einige Gelehrte wie Newton, Hobbes oder Huygens die Bezeichnung Geometrie für den Rahmen der antiken Geometrie reserviert wissen wollten und einige andere wie Descartes und Huygens die neuen infinitesimalen Methoden mit großem Mißtrauen betrachteten, hätte kaum ein Mathematiker dieser Zeit unseren Versuch verstanden, die neue koordinatenorientierte Geometrie von der sich damals stürmisch entwickelnden Infinitesimalmathematik zu trennen. In der Tat sind, wie schon bemerkt, die Grundaufgaben der Analysis fast ausnahmslos von geometrischer Art: Es geht um die Definition der Begriffe Kurve, Fläche, Körper, Tangente, Tangentialebene, Evolute und Evolvente, um die Berechnung von Krümmung, Bogenlängen, Flächen- und Rauminhalten. Es geht darum, die Form gewisser durch geometrische oder physikalische Forderungen bestimmter Kurven, Flächen oder Körper zu bestimmen wie z.B. beim Problem der Loxodromen, der Kettenlinie oder der Brachystochronen (Kurven, auf denen sich ein Massenpunkt unter dem Einfluß der Schwerkraft in kürzester Zeit vom Punkt A zum tiefer gelegenen Punkt B bewegt), um Gleichgewichtsfiguren rotierender

Massen usw. Auch die ersten Fragen nach dem Maximum oder Minimum von Funktionen waren, wie wir bei Kepler gesehen haben, von geometrischer Art.

6.1 Die Koordinatenmethode — Geometrie und Algebra

Ein Koordinatensystem (im allgemeinsten Sinn) leistet stets zweierlei: Einerseits ermöglicht es die algebraische Behandlung geometrischer Probleme, d.h. es gestattet die Übersetzung von Sätzen und Aufgaben über geometrische Objekte in äquivalente Sätze bzw. Aufgaben über deren Koordinatengebilde und die sozusagen rechnerische Simulation geometrischer Prozesse. (Dazu tritt seit Beginn der mathematischen Grundlagenforschung die Möglichkeit, auf algebraisch-arithmetischer Basis zweifelsfreie Modelle für axiomatisch charakterisierte geometrische Strukturen aufzuweisen.) Andererseits ermöglicht es die Veranschaulichung, die optische Präsentation algebraischer Sachverhalte und unterstützt damit nicht nur wesentlich die Intuition, sondern liefert in bestimmten Entwicklungsstadien der Mathematik Einsichten in sonst noch unerreichbare algebraische Zusammenhänge. Man mache sich insbesondere klar, daß die heute für uns selbstverständliche Verbindung zwischen einer unter Umständen sehr abstrakten funktionalen Beziehung (z.B. zwischen ökonomischen, naturwissenschaftlichen oder technischen Größen) und dem (zwei- oder auch dreidimensionalen) graphischen Bild der betreffenden Funktion eine Frucht dieser „inversen Anwendung“ der Koordinatenmethode ist. Aus heutiger Sicht ist diese Verzahnung von geometrischen und algebraischen Methoden Voraussetzung und Kern einer leistungsfähigen Mathematik. Daher ist die Beschreibung der historischen Entwicklung, die zu dieser Verzahnung führte, ein zentrales Kapitel der Geschichte der Geometrie.

Die einfachste und kürzeste Antwort auf die Frage nach dem Ursprung der Koordinatenmethode lautet bekanntlich, daß sie von René Descartes und Pierre de Fermat nahezu gleichzeitig und im wesentlichen unabhängig voneinander um 1637 (das Jahr des Erscheinens von Descartes' „La Géométrie“) begründet wurde, daß folglich das Jahr 1637 eine natürliche zeitliche Grenze zwischen der langen Vorgeschichte der modernen Mathematik und deren eigentlichem Beginn markiert. Wir werden in diesem Kapitel drei Probleme zu behandeln haben:

1. eine kurze Zusammenfassung der Vorgeschichte, d.h. des Ausgangsniveaus, auf das die Leistungen von Descartes und Fermat sich gründeten
2. eine möglichst sorgfältige — und wie sich zeigt — schwierige Analyse des jeweiligen Beitrages beider aus der oben skizzierten heutigen Perspektive

3. eine (aus Umfangsgründen relativ summarische) Übersicht über die wesentlichen weiteren Schritte und Beiträge zur vollen Ausbildung der Koordinatenmethode bis zum Ende des 18. Jhs.

Zusätzlich ist zu bemerken, daß die Koordinatenmethode natürlich auch notwendige Voraussetzung für die Entwicklung der Infinitesimalmathematik war und beides während des 17. und 18. Jahrhunderts in engster Wechselwirkung, meist von denselben Personen, vorangetrieben wurde. Trotzdem soll hier versucht werden, die Entwicklung der Analysis, soweit sie in der Geschichte der Geometrie berührt werden muß, im nächsten Kapitel gesondert zu behandeln.

6.1.1 Vorgeschichte

Die relativ wenigen speziellen Kurven, die in der antiken Mathematik betrachtet wurden, waren entweder (wie die Kegelschnitte) als ebene Schnitte einer einfachen räumlichen Figur oder durch eine punktweise Konstruktion (wie die Quadratrix) oder durch eine gedachte mechanische Erzeugung (wie die Konchoïden) definiert. Im Prinzip wäre auf dieser Basis jeweils eine ebensolche rein axiomatisch-synthetische Behandlung dieser Kurven möglich, wie Euklid sie für die Geometrie der Geraden und Kreise geliefert hat. Es war jedoch schon bei den Griechen üblich, die jeweilige ursprüngliche Kurvendefinition alsbald in eine äquivalente Bedingung zu transformieren, die die Zugehörigkeit eines Punktes P zu einer solchen Kurve durch eine „algebraische“ Beziehung zwischen gewissen variablen (vom Punkt P abhängigen) und gewissen festen (von den Bestimmungsstücken der Kurve abhängigen) Größen (meist Strecken, aber manchmal auch Flächen, Winkel, ...) ausdrückt, das „Symptom“ der betreffenden Kurve. Es ist deutlich, daß die sogenannte geometrische Algebra der Griechen vor allem dazu diente, mit derartigen Symptomen zu arbeiten und auf dieser Basis Aufgaben zu lösen bzw. Sätze zu beweisen. Außerdem konnte man schon aus dem dürftigen Beispielmateriale der Antike als Erfahrungstatsache entnehmen, daß eine Kurve in der Ebene in der Regel durch ein Symptom mit genau zwei Variablen beschrieben wird, während ein Symptom einer Fläche im Raum drei Variablen erfordert. Die antike geometrische Algebra war aber dadurch beschränkt, daß Multiplikation von Größen — modern gesprochen — als geometrisch realisiertes kartesisches Produkt aufgefaßt wurde, wodurch

- a) Gleichungen mit der Homogenitätsforderung belastet waren: Alle Summanden müssen von gleicher Dimension sein. (Sind also a, b, c, x Strecken, so ist $ax^2 + bx + c = 0$ sinnlos, weil ax^2 ein Volumen, bx eine Fläche und c eine Strecke ist.)

- b) die Dimension höchstens räumlich sein konnte, also $ax^2y = bxy^2$ sinnlos, obwohl der Homogenitätsforderung genügend. (Bedingung b) war lediglich durch die Möglichkeit etwas gemildert, algebraische Bedingungen in Form von Proportionen zu formulieren. Man konnte also mit maximal räumlichen Größen a, b, c, d (wobei a, d von gleicher Dimension, b, c von gleicher Dimension sind) die eventuell aus Dimensionsgründen unsinnige Gleichung $ab = cd$ durch die sinnvolle Proportion $a : d = c : b$ ausdrücken.) Zusätzliche Behinderungen ergaben sich dadurch, daß
- c) Größen grundsätzlich positiv waren
- d) es keine algebraische Symbolik gab, vielmehr jede algebraische Identität und jede algebraische Umformung durch schwerfällige geometrische Betrachtungen gerechtfertigt werden mußte

Dies alles vorausgesetzt, muß man betonen, daß der Satz des Pythagoras, auch durch seine Platzierung in den „Elementen“ am Schluß von Buch I, sozusagen als Einstimmung in die folgende geometrische Algebra von Buch II, ein Tor aufstößt: Er drückt zum ersten Mal eine rein geometrische Beziehung zwischen drei Punkten, nämlich einen rechten Winkel aufzuspannen, durch eine rein algebraische Beziehung zwischen beteiligten Größen, nämlich den paarweisen Abständen der Punkte, aus.

Zum status quo am Vorabend der „Erfindung der analytischen Geometrie“ muß noch ergänzt werden, daß die funktionale Denkweise in der Geometrie möglicherweise bereits in Euklids „Porismen“ angedacht, aber nicht verstanden, im 13. Jh. durch die Theorie der Formlatituden (Richard Swineshead, Nicole Oresme und andere) angedacht wurde, aber rein theoretisch und nur qualitativ, wogegen die aufkommende abendländische Naturwissenschaft und Technik reichlich Anregung und Beispiele für funktionale Zusammenhänge boten. Hier haben besonders Kepler, Galilei und dessen Schüler und Anhänger Torricelli, Cavalieri, Viviani eine hervorragende Rolle gespielt. Die Messung von geometrischen Größen durch Zahlen ist natürlich älter als die griechische Geometrie und wird in der mittelalterlichen islamischen Geometrie wieder aufgenommen, hat aber anscheinend auf die Entstehung der abendländischen Koordinatengeometrie keinen nennenswerten Einfluß gehabt. Das kartesische Prinzip zu graphischen Darstellung funktionaler Zusammenhänge, insbesondere über einer Zeitachse, lag implizit allerdings auch schon der um 1000 entstandenen europäischen Notenschrift zugrunde, und der Vergleich mit außer-europäischen oder zeitgenössischen Musiknotationen zeigt, daß diese Darstellungsform durchaus nicht zwingend ist [Schreiber 2003]. Von großem Einfluß

sind aber die Fortschritte der Algebra in der europäischen Renaissance gewesen. Fermat's Abhandlung zur Koordinatenmethode „Ad locos planos et solidos isagoge“ (geschrieben vor 1636 und ab 1636 in Abschriften zirkulierend, aber erst 1679 posthum gedruckt) weist schon durch das griechische Wort „isagoge“ (Einführung) im sonst lateinischen Text auf seine Abhängigkeit von Vieta's „In artem analyticem isagoge“ (Einführung in die analytische Kunst, d.h. in die „Buchstabenalgebra“) hin. Descartes hat nach 1637 wiederholt betont, vor der Niederschrift seiner „Géométrie“ von Vieta nichts gelesen zu haben. In der Tat geht die von ihm eingeführte Notation eigene Wege. Bei ihm sind aber Einflüsse durch seinen ersten mathematischen Mentor Isaac Beeckman, durch den deutschen Cossisten Johannes Faulhaber und durch das Studium der Werke von Clavius nachweisbar. Schließlich muß betont werden, daß Fermat und Descartes wie alle Mathematiker dieser Zeit völlig vertraut mit der griechischen Art waren, Geometrie unter Zuhilfenahme von Algebra zu behandeln. Zu Beginn des 17. Jhs. war die Zeit reif, dies unter Benutzung der mittlerweile in der Algebra erzielten Fortschritte grundlegend neu zu gestalten. So findet man Teile der heute Fermat und Descartes zugeschriebenen Gedanken schon etwas früher bei G. B. Benedetti (in „Diversarum speculationum“ 1585) und M. Ghetaldi (in „De resolutione et de compositione mathematica“ 1630).

6.1.2 Die Leistungen von Fermat und Descartes

Wenden wir uns zunächst Fermat zu. Sein Beitrag ist bescheidener, wenngleich von fundamentaler Bedeutung, und leichter benennbar. Seine erste Neuerung besteht darin, daß bei ihm die beiden variablen Größen (modern x, y) immer die Koordinaten des variablen Punktes bezüglich eines meist sogar rechtwinkligen, zumindest aber affinen Achsensystems bezeichnen. Im oben bereits zitierten Titel seiner kleinen Schrift bedeuten „loci plani“ ebene Örter, d.h. Symptome oder Gleichungen, in denen nur flächenhafte Größen einander gleichgesetzt werden. Das sind also Geradengleichungen $ax + by = cd$ oder spezielle Kegelschnittgleichungen wie z.B. $x^2 + y^2 = r^2, ay = x^2$. „Loci solidi“ sind körperliche Örter, also nicht etwa räumliche Punktmengen, sondern solche ebenen Kurven, in deren Symptom nur Volumina gleichgesetzt werden, wie z.B. $ax^2 + by^2 = cde$. In Fermat's Klassifikation gibt es außerdem lineare Örter (alle anderen Kurven), mit denen er sich aber nicht weiter beschäftigt. Er benutzt die Vieta'sche algebraische Notation mit großen Vokalen für Variablen und großen Konsonanten für feste Größen (Parameter) und untersucht systematisch alle sich dann ergebenden algebraischen Möglichkeiten. Er bleibt also den antiken Beschränkungen a) (Homogenität) und b) (algebraische Di-

mension höchstens 3) verpflichtet. Das Wesentliche seiner Leistung besteht darin, daß er von den Gleichungen ausgeht. Damit macht er klar:

1. Jede sinnvolle algebraische Gleichung zwischen x und y beschreibt (bezüglich „kartesischer“ oder auch anderer Koordinaten) eine Punktmenge in der Ebene, die man — ausgehend von dieser Gleichung — auf ihre geometrischen Eigenschaften untersuchen kann, unabhängig von einer eventuellen mechanischen oder punktwisen Erzeugung. Der Bereich der zu betrachtenden Kurven ist dadurch mit einem Schlag gegenüber der Antike ungeheuer erweitert, und an die Stelle von Einzeluntersuchungen können allgemeine Untersuchungen über ganze, algebraisch beschriebene Klassen von Kurven treten.
2. Man kann die Kurven auf algebraischer Basis klassifizieren, und das erste Ergebnis (auf das Fermat sehr stolz ist, während man das zu 1. Gesagte zwischen den Zeilen lesen muß) lautet: Die Klasse der geometrisch als Kegelschnitte definierten Kurven ist identisch mit der algebraisch definierten Klasse der Kurven von höchstens zweitem Grad. Durch die Möglichkeit, die Kegelschnitte als Bilder eines Kreises bei Zentralprojektion zu erhalten, liegt nun (bei Fermat freilich unausgesprochen) zugleich die Idee in der Luft, die unendliche Fülle der algebraischen Kurven eines bestimmten Grades durch geometrische Transformation auf eine oder endlich viele „Normalformen“ zu reduzieren.

Beide oben dargelegten Erkenntnisse Fermats sind aus dem Gesamtwerk von Descartes so nicht herauszulesen. Seine Beiträge sind überhaupt viel diffuser, schwer zu analysieren, trotzdem historisch wirkungsreicher gewesen. Seine Hauptleistung besteht wahrscheinlich darin, daß er die Beziehungen zwischen Algebra und Geometrie durch einen einzigen, ebenso einfachen wie genialen Gedanken von den antiken Beschränkungen a) und b) befreit hat. Indem man eine feste Strecke e als Einheit wählt, kann man jedes Rechteck ab flächengleich in ein Rechteck ce verwandeln und die Strecke c als Repräsentanten der Größe ab benutzen. Da dieser Kunstgriff sich beliebig wiederholen läßt, kann man das Produkt von beliebig vielen Streckengrößen auf eine Strecke heruntertransformieren. Alle Gleichungen werden im Prinzip homogene Gleichungen zwischen Strecken. Eine andere, schwächere Interpretation besteht darin, eine zunächst inhomogene Gleichung zwischen Streckengrößen, etwa $ax^2 + bx + c = d$, durch gedachtes Auffüllen mit entsprechenden Anzahlen von Faktoren e als homogene Gleichung $ax^2 + bex + ce^2 = de^2$ zu interpretieren. (Man vergleiche dies mit der Rolle des sinus totus in der Trigonometrie der Renaissance!) Es ist

jedoch nicht rekonstruierbar, ob bzw. bis zu welchem Grade sich Descartes bewußt war, daß die Auszeichnung einer Einheitsstrecke gleichzeitig einen Isomorphismus zwischen Strecken und ihren Maßzahlen herstellt, was dem heutigen Zugang zur Koordinatenmethode zumindest im Standardfall zugrunde liegt. Der Dualismus zwischen „benennbaren“, also höchstens rationalen oder durch Wurzelausdrücke oder andere Konstruktionsvorschriften beschreibbaren Größen einerseits und stetig veränderlichen als Streckenlängen vorzustellenden und folglich von geometrischer Intuition abhängigen Größen andererseits zieht sich noch bis zur mengentheoretisch-arithmetischen Präzisierung des Begriffs der reellen Zahl (Dedekind und Cantor 1872, Bachmann 1892, Hilbert 1900) durch die europäische Mathematik, und im Grunde ist er durch die konstruktivistische, von der theoretischen Informatik nicht hervorgerufene aber begünstigte Strömung der Mathematik wieder aufgelebt. Descartes bleibt allem Anschein nach der antiken Vorstellung verhaftet, daß die Algebra es mit geometrisch (bei ihm aber grundsätzlich als Streckenlängen) repräsentierten Größen zu tun hat, die nur „ausnahmsweise“ zahlenmäßig beschreibbar sind.

Der bis hier beschriebene Hauptbeitrag von Descartes findet sich schon 1628 in seinen erst posthum gedruckten „Regulae ad directionem ingenii“ (Regeln zur Leitung des Verstandes), dort vielleicht sogar klarer als in der „Géométrie“, wo der Grundgedanke durch eine Fülle anderer, meist nur skizzierter oder an Beispielen demonstrierter Anliegen überdeckt wird. („Géométrie“ und „Regulae“ sind in deutscher Übersetzung gut zugänglich.) Die Abhandlung „La Géométrie“ ist bekanntlich einer von drei als ausführliche Anwendung gedachten Anhängen seines philosophischen Hauptwerkes „Discours de la méthode“, von dem hier nur gesagt werden soll, daß die in ihm dargelegten Prinzipien, die die Philosophie des Rationalismus begründeten und einen so großen Einfluß auf die allgemeine Geistesgeschichte ausgeübt haben, leider von geringem Einfluß auf die Klarheit und Systematik der „Géométrie“ gewesen sind. (Dies hat aber Descartes mit anderen bedeutenden Mathematiker-Philosophen wie Leibniz oder Lambert gemeinsam.) Von den (erstmal durch Leibniz so bezeichneten) kartesischen Koordinaten findet sich bei Descartes eher noch weniger als bei Fermat. Er bleibt hier auf dem antiken Stand, jeweils problemabhängig die Lage des Kurvenpunktes durch zwei geeignet gewählte Strecken zu beschreiben. Er geht jedoch 1637 dazu über, gegebene Größen mit $a, b, c, d, \dots$ und variable Größen mit den letzten Buchstaben des Alphabets, vorzugsweise x, y, z , zu bezeichnen, nachdem er zuvor die Parameter mit Groß- und die Variablen mit Kleinbuchstaben benannt hatte. Auch er deutet eine Klassifikation der Kurven an, jedoch nach einem anderen Prinzip: Die einfachsten Kurven sind für ihn diejenigen, die wie Gerade oder Kreis durch eine einzige Bewegung erzeugt

werden können. Schon 1619 spricht er in einem Brief an Beeckman von „verallgemeinerten Zirkeln“, mit denen man andere derartige Kurven produzieren kann. Kurven der „Klasse $n + 1$ “ entstehen, indem man bereits gezeichnete Kurven der „Klasse n “ als Konstruktionsmittel zuläßt. (Hier deutet sich eine Idee an, die 1832 von Jakob Steiner in seiner „Systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander“ wieder aufgenommen wird.) So will er Kurven der zweiten Klasse als Orte von Schnittpunkten von Geraden erzeugen, die sich jeweils gleichförmig auf Kurven der ersten Klasse bewegen. Modellvorstellung war dabei für ihn wohl die Erzeugung der schon in der Antike bekannten Quadratrix, wobei eine Gerade sich gleichförmig parallel zu einer x-Achse in Richtung der dazu senkrechten y-Achse bewegt, die andere sich gleichförmig um den Koordinatenursprung dreht, d.h. längs eines Kreises bewegt. (Ein anderes gutes, aber Descartes vermutlich unbekanntes Beispiel wäre Dürers Erzeugung der Muschellinie.) Die Problematik eines solchen Klassifikationsversuchs ist darin begründet, daß man durch geeignete Kopplungsmechanismen mehrere solche aufeinander abgestimmte Bewegungen durch eine einzige Bewegung erzeugen kann. Descartes unterscheidet die algebraischen Gleichungen, die auf die angegebene Weise geometrisch gelöst werden können, von denen, die sich einer solchen „rationalen“ Behandlung entziehen. Irrtümlich glaubt er aber (und unterschätzt überhaupt bei weitem die Schwierigkeiten der algebraischen Auflösung von Gleichungen), daß jede Polynomgleichung mit seinen Methoden lösbar sei. Seine Vorgehensweise demonstriert er u.a. an der graphischen Auflösung der Gleichung $x^3 + ax = b$ im Fall $a, b > 0$. In diesem Fall kann man positive p, q so finden, daß $a = p^2, b = p^2q$. Die Lösungen von $x^3 + p^2x - p^2q = 0$ sind aber die von 0 verschiedenen Lösungen der Gleichung $x^4 + p^2x^2 = p^2qx$, die sich ergibt, wenn man die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen

$$(x - q/2)^2 + y^2 = (q/2)^2 \quad (6.1.1)$$

$$x^2 = py \quad (6.1.2)$$

sucht. Die graphische Darstellung der Situation im ersten Quadranten eines x-y-Achsensystems zeigt, daß der Kreis (6.1.1) und die Parabel (6.1.2) im Bereich positiver x-Werte stets genau einen Schnittpunkt haben, womit ein rein algebraischer Satz durch geometrische Deutung „bewiesen“ ist.

Unter den vielen Anregungen, die Descartes in seiner „Géométrie“ ausstreut, findet sich auch der Begriff der cartesischen Ovale. Das sind in Verallgemeinerung der Ellipsen Kurven, die durch n „Brennpunkte“ $P_1, \dots, P_n$ und die Bedingung definiert sind, daß P der Kurve genau dann angehört, wenn die

Summe der Entfernungen PP_i gleich einer gegebenen Konstanten ist. Diese Kurven sollten wenig später bei dem von Fermat gestellten Problem, denjenigen Punkt P einer Ebene zu finden, für den die Summe der Abstände PP_i minimal wird, eine wichtige Rolle spielen.

Einen für heutigen Geschmack vielleicht unangemessen breiten Raum nimmt in der „Géométrie“ ein Problem ein, dessen Spezialfälle auf Pappos zurückgehen: Gegeben seien n Geraden in der Ebene und zu jeder dieser Geraden g ein fester Winkel $\alpha(g)$. Man bestimme den Ort derjenigen Punkte P , so daß für die Strecken $a(g)$, die für jede dieser Geraden g von P so nach g gezogen werden, daß sie dort unter dem Winkel $\alpha(g)$ auftreten, das Produkt von einigen von ihnen in einem gegebenen Verhältnis zum Produkt der restlichen steht. Descartes konnte mit seiner Methode zeigen, daß die gesuchten Punkte eine Kurve n -ten Grades bilden, wenn das Produkt von n Abständen gleich dem Produkt von $m \leq n$ Abständen sein soll, also insbesondere für $n = m = 2$ einen Kegelschnitt. Hieraus schloß er irrtümlich auf unbegrenzte Leistungsfähigkeit seiner Methoden. Während Descartes im Fall der allgemeinen kubischen Gleichung ein algebraisches Problem geometrisch gelöst hatte, wird hier das geometrische Problem des Pappos algebraisch gelöst. Dieser prinzipielle Unterschied wird aber von Descartes trotz seines hohen methodologischen Anspruchs nirgends auch nur andeutungsweise formuliert.

6.1.3 Wirkungsgeschichte

Der „Discours“ war 1637 zunächst anonym in den Niederlanden, wo Descartes sich meist aufhielt, erschienen. Mit ihm in Kontakt stehende Mathematiker erkannten sehr schnell die zukunftsweisende Bedeutung des Anhanges über die Geometrie. Frans van Schooten gab 1649 eine lateinische Übersetzung dieses Anhanges heraus und machte ihn damit erst den italienischen, englischen, niederländischen und deutschen Gelehrten allgemein zugänglich. Eine von ihm und einigen seiner Schüler (besonders Johan de Witt und Jan Hudde) durch viele Ergänzungen auf zwei Bände erweiterte zweite Ausgabe erschien zuerst 1659/61, dann wieder 1683 und 1695. Hierin findet man auch schon die Ausdehnung der Koordinatenmethode auf den dreidimensionalen Fall. Inzwischen hatten sich fast alle bedeutenden Mathematiker der Zeit diesem Thema zugewandt: Leibniz benutzte als erster die Worte Abszisse und Ordinate (in einem Brief vom 27.8.1676 an Oldenburg), Koordinaten (1692 in den „Acta eruditorum“). Die Brüder Jacob (I) und Johann (I) Bernoulli sprachen zuerst von „cartesischen Koordinaten“, John Wallis behandelte 1655 die Kegelschnitte rein analytisch als algebraische Kurven in der Ebene und benutzte dabei erstmals auch negative Koordinaten. Vor allem ist aber Newton hervorzuhe-

ben, der sich um 1665 mit der Koordinatengeometrie zu beschäftigen begann. Seine Bedeutung für die Entwicklung der Koordinatenmethode wird heute oft unterschätzt bzw. durch seine Verdienste um die Analysis und die Physik überdeckt. Wir wollen versuchen, seine Beiträge ohne Rücksicht auf die zeitliche Reihenfolge (die ohnehin problematisch ist, weil vieles erst lange nach seiner Entstehung publiziert wurde) zu systematisieren:

1. Newton benutzt ebene und räumliche kartesische Koordinaten genau in der heute üblichen Weise, erkennt also negative Koordinaten als völlig gleichberechtigt an.
2. Newton benutzt auch Polarkoordinaten und lehrt die gegenseitige Umrechnung, womit der Koordinatenbegriff einen ersten Anstoß in Richtung der heute selbstverständlichen allgemeinen Bedeutung erhält.
3. Da Newton immer als Physiker denkt, gibt es für ihn eigentlich nur eine wirklich unabhängige Variable, nämlich die Zeit t . Eine Kurve ist für ihn die Bahn eines in der Zeit bewegten Punktes, wird also primär durch die Funktionen

$$x = x(t), y = y(t) \quad (6.1.3)$$

und, sofern räumlich, $z = z(t)$ beschrieben. Die Gleichung einer ebenen Kurve entsteht, indem man entweder t als proportional zu x annimmt oder — allgemeiner — den Parameter t aus den beiden Gleichungen (6.1.3) eliminiert.

Abgesehen davon, daß die Beschreibung einer Kurve durch eine Parameterdarstellung allgemeiner als die durch *eine* Gleichung, insbesondere auch im drei- und höherdimensionalen Fall anwendbar ist, wollen wir hier ein für alle mal die grundsätzliche Bemerkung einflechten, daß die durch Fermat und Descartes ausgelöste Orientierung der Koordinatengeometrie auf (modern gesagt) algebraische Mannigfaltigkeiten neben vielem Positivem und Fruchtbarem natürlich auch eine gewisse Entfremdung der Geometrie von der Realität gebracht hat. Die in der Wirklichkeit vorkommenden Kurven, Flächen, ... genügen nun einmal im allgemeinen höchstens stückweise und näherungsweise einer algebraischen Beziehung zwischen den Koordinaten. Außerdem gehen schon beim Übergang von einer Parameterdarstellung (mit der man eine ursprünglich mechanische Erzeugung einer Kurve sehr gut beschreiben und auch durch Beschränkung des Parameterintervalls der Realität Rechnung tragen kann) zur Gleichung der Kurve alle Ordnungsbeziehungen verloren, so daß eine algebraische Gleichung meist eine bezüglich des ursprünglichen Problems

viel zu große Punktmenge beschreibt und gegenüber der ursprünglichen Vorstellung überraschende zusätzliche Teile aufweisen kann. (Siehe hierzu die Diskussion von Dürers Muschellinie in Aufgabe 6.1.1.)

4. Newton greift 1667 das Klassifikationsprogramm von Fermat auf und zählt 72 Typen von Kurven dritten Grades in der Ebene auf. (Weitere sechs Fälle wurden, obwohl Newton bekannt, dabei übergangen und erst im 18. Jh. wiederentdeckt.) Diese Klassifikation wurde erst 1704 als Anhang zu Newtons „Opticks“ publiziert und war zu diesem Zeitpunkt überhaupt seine erste Publikation über ein rein mathematisches Thema. Allerdings wurde sie schon 1710 im zweiten Band des von John Harris herausgegebenen „Lexicon Technicum“ erneut abgedruckt.
5. Newton legt im Gegensatz zu Descartes und Fermat Wert auf die graphische Darstellung der Sachverhalte. Seine Klassifikation der Kurven dritter Ordnung ist ein regelrechter Bilder-Atlas der möglichen Formen. Wir wollen sie etwas näher betrachten.

Newton geht von der allgemeinsten Form des Polynoms dritten Grades in x und y aus und zeigt zunächst, daß man durch geeignete Transformation des Koordinatensystems (!) auf eine der vier Formen

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d, \\
 \text{II.} & xy = ax^3 + bx^2 + cx + d, \\
 \text{III.} & y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d, \\
 \text{IV.} & y = ax^3 + bx^2 + cx + d
 \end{array}$$

kommen kann, die durch weitere Koordinatentransformationen auf die 72 aufgelisteten Typen führen. Im Fall III. bekommt er je nachdem, ob die rechte Seite drei verschiedene reelle Nullstellen, eine doppelte und eine einfache, eine dreifache oder nur eine reelle Nullstelle hat, die fünf in Abb. 6.1.1 gezeigten Formen, weil im Fall der doppelten Nullstelle a_1 und einfachen Nullstelle a_2 noch zu unterscheiden ist, ob $a_1 < a_2$ oder $a_2 < a_1$ ist.

Seltsamerweise wollte Newton alle diese Dinge nicht als Geometrie anerkennen. Es war wohl seine konservative Erziehung und Bildung, die ihn davor zurückschrecken ließ, unter dem Terminus Geometrie anderes und mehr zu verstehen, als die Griechen betrieben hatten. Die von ihm gegebenen Impulse lösten jedoch weitere stürmische Entwicklungen aus. In Schottland begann sich unter den Händen von James Stirling und Colin MacLaurin, beide engagierte Anhänger Newtons, die algebraische Geometrie zu entfalten. Stirling

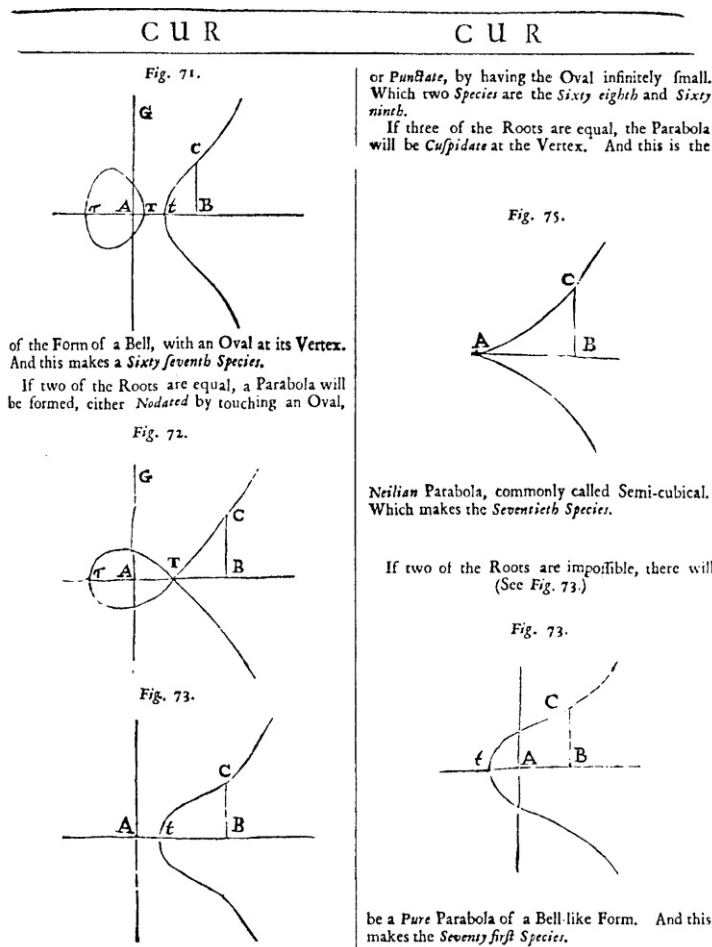


Abb. 6.1.1 Die fünf Formen von kubischen Kurven des Typs III

[Newton: The Math. Works, Vol. II, S. 158]

links oben: Drei verschiedene reelle Nullstellen. links Mitte: Die beiden größeren Nullstellen sind zu einer (in der Figur: T) verschmolzen. links unten: Die beiden kleineren Nullstellen sind zu einem Punkt (im Bild nicht gezeigt) zusammengezogen. rechts oben: Der Fall der dreifachen reellen Nullstelle. Die Gleichung III. wird zu $y^2 = a(x - A)^3$ und die Kurve zur sogenannten Neilschen halbkubischen Parabel mit dem Scheitel in A . rechts unten: Es gibt nur eine reelle Nullstelle (t). Man beachte, daß die Numerierung der historischen „Fig.“ offensichtlich durcheinander geraten ist.

publiziert 1717 das erste Buch über ebene algebraische Kurven. Darin stellt er u.a. durch Abzählung der Koeffizienten der entsprechenden Gleichung fest, daß eine Kurve n -ten Grades im allgemeinen durch $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte gegeben wird. MacLaurins Buch folgt 1720. Darin bemerkt er z.B., daß eine Kurve n -ter und eine Kurve m -ter Ordnung im allgemeinen $m \cdot n$ gemeinsame Punkte haben, und wundert sich dann, daß diese Regel für zwei verschiedene Kurven dritter Ordnung 9 Schnittpunkte liefert, während andererseits Stirlings Regel besagt, daß eine Kurve dritter Ordnung durch 9 Punkte eindeutig bestimmt ist. Mit diesem später als Cramersches Paradoxon bezeichneten scheinbaren Widerspruch beschäftigten sich u.a. Euler („Introductio“ 1748, s.u.) und Gabriel Cramer („Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques“ 1750). Erst J. Plücker konnte das Problem der „unabhängigen Punktsysteme“ endgültig lösen. MacLaurin stellt auch als erster einen Zusammenhang zwischen der Transformierbarkeit zweier Kurven ineinander und der Anzahl ihrer Singularitäten her.

Einen weiteren wichtigen Markstein bildete der 1748 erschienene zweite Band von Eulers „Introductio in analysin infinitorum“. Während die Entwicklung auch der analytischen Geometrie bis dahin durch nationalistisch motivierte einseitige Betonung entweder der Descartesschen oder der Newtonschen Positionen belastet war, gelingt Euler hier die Synthese alles Fruchtbaren aus beiden Schulen. Nachdem er im ersten Band der „Introductio“ die arithmetischen und algebraischen Hilfsmittel der Analysis zusammengestellt hat, teilt er im zweiten Band „alles Wissenswerte aus der Geometrie“ mit, „da man die Analysis des Uendlichen gewöhnlich so vorträgt, dass man zugleich die Anwendung derselben auf die Geometrie zeigt.“ [Euler a, S. V] Sein Stoff ist wie folgt gegliedert:

- Theorie der krummen Linien überhaupt,
- Gleichung einer Kurve,
- Untersuchung und Klassifikation der Kegelschnitte aus ihren Gleichungen (ohne Verwendung der Differentialrechnung),
- Klassifikation der Kurven dritter Ordnung in 16 Arten und Herstellung der Beziehung zu Newtons Klassifikation,
- Klassifikation der Kurven vierter Ordnung nach gleichem Muster (Euler zählt 146 Arten auf),
- rein algebraische Behandlung von Tangenten, Normalen, Krümmung, Wendepunkten, Spitzen, mehrfachen Punkten usw. („obgleich dies heut-

zutage fast ausschliesslich mittelst Differentialrechnung geschieht“ [a.a.O. S. IX] - Hier deutet sich ein Stil an, den Lagrange bis zum Extrem treiben wird.),

- Bestimmung von Kurven mit gegebenen Eigenschaften

und im Anhang (Dies zeigt die noch dominierende Rolle der ebenen Geometrie im Bewußtsein des 18. Jhs.):

- Allgemeine Theorie der Körper und ihrer Oberfläche (natürlich beschränkt auf algebraisch Beschreibbares),
- Beschreibung „einer jeden“ (!) Fläche durch eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen,
- Klassifikation der Flächen nach dem Grad ihrer Ordnung und Aufzählung der sechs Arten von Flächen zweiter Ordnung (Hierin führt Euler die heute noch gebräuchlichen Bezeichnungen wie Quadrik, ein- und zweischaliges Hyperboloid, parabolisches Hyperboloid usw. ein.),
- Beschreibung einer Raumkurve als Durchschnitt zweier Flächen und deren Darstellung durch eine Gleichung (Eulers Vorstellungen lassen sich geringfügig vereinfacht etwa so beschreiben: Die Flächen seien durch die Gleichungen $F(x, y, z) = 0$ und $G(x, y, z) = 0$ gegeben. Man löse beide etwa nach z auf: $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$. Die Gleichung $f(x, y) = g(x, y)$ ergibt alle Punkte der x - y -Ebene, zu denen ein gemeinsamer z -Wert beider Flächen existiert. Nun parametrisiere man diese Kurve in der x - y -Ebene und stelle z als Funktion des Parameters t dar. Auch hier wie in vielen anderen Fällen erweist sich wieder, daß Euler im allgemeinen etwa so denkt und rechnet, wie noch heute ein intelligenter älterer Schüler es ohne Kenntnis moderner Mathematik tun würde.),
- Normalen und Tangentialebenen der Flächen zweiter Ordnung (wiederum rein algebraisch, ohne Differentialrechnung).

Ergänzt man, daß Euler an anderer Stelle (in der Mechanik) die „Eulerschen Winkel“ zur Beschreibung eines Raumpunktes einführt, also im wesentlichen räumliche Polarkoordinaten, so kann man den Stand der Koordinatenmethode um die Mitte des 18. Jhs. wie folgt charakterisieren:

1. Der Ort der Handlung ist der zwei- oder dreidimensionale euklidische Raum. Dieser wird als physikalischer Raum und nicht wie später mehr

und mehr üblich als Raum R^n der n -tupel reeller Zahlen aufgefaßt. (Es wird also noch nicht bewußt wahrgenommen, daß Beziehungen zwischen mehr als drei physikalischen Größen in einem zum klassischen euklidischen Fall analogen höherdimensionalen Raum gedeutet werden können.)

2. Koordinaten sind kartesisch (im heutigen Sinne), in besonderen Fällen auch schiefwinklig-affin oder ausnahmsweise ebene oder räumliche Polarkoordinaten. Es wird noch nicht bewußt wahrgenommen, daß z.B. die Kugeloberfläche eine alternative geometrische Struktur ist und daß dort z.B. die geographischen Koordinaten eine zu den ebenen Polarkoordinaten analoge Funktion haben.)
3. Die Newtonsche Ansicht, daß Geometrie bei den Kegelschnitten endet, lebt fort in der Reservierung des Terminus „analytische Geometrie“, aus dessen Bedeutungsumfang zunehmend ausgeschlossen wird, was nun algebraische Geometrie heißt. („*Geometria analytica*“ tritt erstmals als Titel eines 1779 posthum publizierten Newtonschen Manuskriptes auf. Verfestigt wird die Bezeichnung vor allem durch die weit verbreiteten Lehrbücher von S. F. Lacroix.)
4. Newtons Entdeckung, daß die für die damalige Naturwissenschaft interessanten Funktionen sich als Potenzreihen definieren lassen und daß die Analysis sich für Polynome endlichen oder unendlichen Grades bei Verzicht auf exakte logische Fundierung weitgehend auf algebraisches Handeln reduzieren läßt, bewirkt im Verein mit der von Descartes propagierten Allianz zwischen Algebra und Geometrie die fast vollständige Einengung der Geometrie auf Gegenstände, die sich in diesem Rahmen behandeln lassen. Eine klare Abgrenzung zwischen solchen Aufgaben, die sich wirklich algebraisch behandeln lassen, und solchen, die der Analysis bedürfen, gibt es zu dieser Zeit nicht. Beides ist unter dem Begriff „analytisch“ zusammengefaßt.
5. Die vielen noch offenen Fragen der „Elementargeometrie“ werden an den Rand gedrängt, und die analytische Methode wird nicht auf die Elementargeometrie angewendet, insbesondere nicht auf lineare Probleme, wie sie heute am Anfang jeder Einführung in die analytische Geometrie stehen (und häufig dann auch schon deren Ende bilden).

Die Überwindung der unter 5. genannten Einschränkung verdient besonderes historisches Interesse. Sie beginnt gegen Ende des 18. Jhs. aus zwei unterschiedlichen Motiven heraus in zwei zueinander komplementären Richtungen:

Lagranges analytische Mechanik (1788) bereitet den Boden für den Übergang zum n -dimensionalen euklidischen Raum, der hier (noch unbewußt) als Zustands- oder Phasenraum mechanischer Systeme die Bühne betritt. In ihm sind natürlich sofort auch die linearen Aufgaben nichttrivial und nicht mehr durch „synthetisches“ Vorgehen zu behandeln. Monges Anliegen ist die Ausbildung von Ingenieuren. Für ihn ist immer der dreidimensionale „wahre physikalische Raum“ Ort der Handlung. Darstellende Geometrie und Koordinatengeometrie betrachtet er als zwei gleichberechtigte und in gewisser Weise sogar gleichartige Werkzeuge, die Aufgaben des dreidimensionalen Raumes in eine leichter zu handhabende Struktur zu übertragen, im einen Fall in die Zeichenebene, im anderen Fall in die Rechnung. In seinen ab 1801 immer weiter ausgedehnten Lehrbüchern zur Anwendung der Algebra und Analysis auf die Geometrie werden alle Standardaufgaben der linearen Geometrie der Ebene und des Raumes, Koordinatentransformation, Transformation durch reziproke Radien, Orientierungsfragen, Berechnung von Längen, Flächen- und Rauminhalten im wesentlichen in der heute üblichen Weise behandelt. In gewissem Maße ist sogar die Idee des Vektors und die Idee, die Geraden statt der Punkte als Grundelemente des Raumes zu betrachten, vorweggenommen.

6.2 Geometrie und Analysis

Wir knüpfen hier an Kapitel 5.4 an und betonen, daß die folgende sehr straffe Darstellung in der weitgehenden Überlappung des Stoffes mit dem in dieser Buchreihe vorgesehenen Band zur Analysis begründet ist. Eine in sich geschlossene Darstellung der Geschichte der Geometrie erfordert es jedoch, die anfangs sehr engen Beziehungen zwischen Geometrie und Analysis nicht ganz zu übergehen.

Einen Markstein in der Bestimmung von Inhalten bildet die „Geometria indivisibilis“ (1635) von Bonaventura Cavalieri. Indivisiblen sind „unendlich dünne“ parallele Schichten, in die man eine Fläche oder einen Körper zerlegt denken kann. Ergibt sich nun durch den Vergleich zweier auf die gleiche Basis gestellter Flächen bzw. Körper, daß ihre Parallelschnitte zur Basis in jeder Höhe über der Basis den gleichen Inhalt haben, so schließt Cavalieri daraus, daß ihre Inhalte insgesamt gleich sind (Aufg. 6.2.1). Dieses in vielen Einzelfällen recht fruchtbare Prinzip ist nach Cavalieri benannt worden und spielt bekanntlich bis heute eine wichtige Rolle als heuristische Regel in der Didaktik. Außerdem liegt es natürlich im Grunde jeglicher Reduktion eines höherdimensionalen Integrals auf ein in der Dimension um eins reduziertes Integral zugrunde. Die moderne Mathematik unterscheidet sich in dieser Sache von Cavalieri eigentlich nur durch die Kenntnis von „mathematischen Monstern“ und die dadurch

motivierte Sorgfalt in der Präzisierung des Gültigkeitsbereichs. Das Prinzip geht Bemerkungen u.a. von Archimedes zufolge sehr wahrscheinlich schon auf Demokrit zurück und steht dann sicher im Zusammenhang mit dessen Vorstellungen vom atomaren Aufbau der Materie. Demokrits Prinzip, wenn es ein solches gab, handelte also von materiellen Körpern und deren Zerlegung in Schichten von Atomdicke. Cavalieri verzichtete auf eine solche Deutung. Für ihn und seine Anhänger (es gab auch Gegner wie z.B. Guldin und Huygens), war es reine Heuristik, die sich durch die erhaltenen Ergebnisse rechtfertigte, ein für die gesamte Periode charakteristischer Standpunkt. Außerdem waren sie überzeugt, daß die antiken Mathematiker ihre Sätze mit ebensolchen heuristischen Prinzipien gefunden hatten, bevor sie die Beweise in eine unanfechtbare, aber schwer lesbare und noch schwerer auf neue Probleme übertragbare Form brachten. Torricelli schreibt geradezu: „Ich würde nicht wagen zu behaupten, daß die Geometrie der Indivisiblen wirklich eine neue Entdeckung ist. Ich würde eher glauben, daß die antiken Geometer sie benutzten, um die schwierigeren Theoreme zu entdecken, obwohl sie in ihren Beweisen offenbar einen anderen Weg bevorzugten.“ Für Anwendungsbeispiele verweisen wir auf die im Aufgabenteil behandelte Standardaufgabe der Bestimmung des Halbkugelvolumens nach Cavalieri und auf den dort ebenfalls vorgestellten Gebrauch, den Roberval um 1636 von der Methode machte, um den Flächeninhalt unter einem Zykloidenbogen zu bestimmen (Aufgabe 6.2.2). Dabei hat aber Roberval, der aus einer einfachen Bauernfamilie stammte und sich seine Bildung weitgehend autodidaktisch angeeignet hatte, diese Methode ganz unabhängig von Cavalieri gefunden und auch mit einer etwas anderen Rechtfertigung versehen. Seine „Scheibchen“ sind von endlicher aber beliebig klein wählbarer Dicke, und seine Argumente sind denen der modernen Integralrechnung viel näher als die Cavalieris.

Geometrische Wurzeln der Differentialrechnung

Im Gegensatz zur Inhaltsbestimmung konnte die Differentialrechnung kaum an Vorleistungen aus der Antike anknüpfen. Daß die Frage nach der Tangentenrichtung überhaupt allgemeiner als nur für Kegelschnitte gestellt wurde, ist der Fülle neu eingeführter bzw. entdeckter Kurven zu danken. Wir sind heute so auf den Leibniz'schen Zugang mittels des „charakteristischen Dreiecks“ aus dx , dy und Sekante und den anschließenden Grenzübergang fixiert, durch den die Sekante zur Tangente wird, daß die Bekannntschaft mit einem ganz anderen Weg Erstaunen auslösen muß. Die u.a. von Roberval kultivierte Vorstellung, daß die Kurve als Bahn eines bewegten Punktes entsteht und die momentane Geschwindigkeit sich als Resultierende aus einer Geschwindigkeit

in x -Richtung und einer Geschwindigkeit in y -Richtung ergibt, läuft in der Durchführung auf das charakteristische Dreieck hinaus. Aber Descartes hatte eine völlig andere, freilich rechnerisch viel schwerfälligere Idee, in der wieder geometrische Überlegungen sehr eng mit rein algebraischen verbunden sind und die deshalb unser Interesse verdient: Ihm ging es um die Bestimmung der Subnormalen $d(x_0)$ (d.h. der Projektion der Normalen zum Kurvenpunkt $(x_0, f(x_0))$ auf die x -Achse. Ist $d(x_0)$ bekannt, so bekommt man daraus elementargeometrisch den Anstieg der Normalen und damit auch den Anstieg der Tangente. Wir beschreiben das Verfahren von Descartes (in der deutschen Übersetzung seiner *Géométrie* S. 43) in heutiger Sprache. Da Descartes zu den erklärten Gegnern der Indivisiblen und ähnlicher Methoden auf der Basis „unendlich kleiner Größen“ gehörte, sei bemerkt, daß sein Verfahren scheinbar keinen Gebrauch von derartigen Überlegungen macht. In Wahrheit steckt aber auch hier ein Grenzprozeß, nämlich in der Annahme, daß die im allgemeinen zwei Schnittpunkte des Kreises mit der Kurve zu einem Berührungspunkt zusammenrutschen, wenn d sich dem gesuchten Wert nähert.

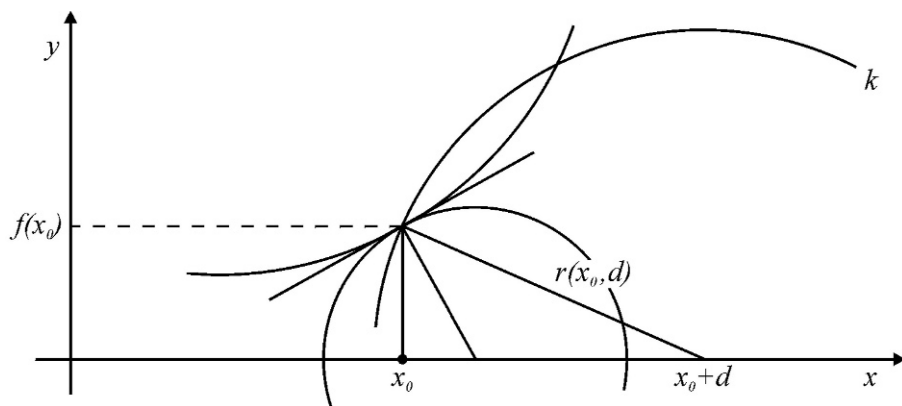


Abb. 6.2.1 Zur Normalenbestimmung nach Descartes

Wir fixieren einen Wert x_0 der unabhängigen Veränderlichen und einen Zuwachs d (Abb. 6.2.1) und schlagen den Kreis k um den Punkt $x_0 + d$ der x -Achse durch den Kurvenpunkt $(x_0, f(x_0))$. Bei beliebigem d wird dieser Kreis die Kurve zweimal schneiden, und die x -Koordinaten dieser beiden Schnittpunkte erhält man als Lösungen des Gleichungssystems

$$(x - (x_0 + d))^2 + y^2 = r(x_0, d)^2 \quad (\text{Gleichung des Kreises } k) \quad (6.2.1)$$

$$y = f(x) \quad (\text{Gleichung der Kurve}) \quad (6.2.2)$$

d.h. nach Elimination von y , Einsetzen von $f(x_0)^2 + d^2$ für r^2 und Streichen von d^2 auf beiden Seiten

$$x^2 - 2x(x_0 + d) + x_0^2 + 2dx_0 + f(x)^2 - f(x_0)^2 = 0. \quad (6.2.3)$$

Die gesuchte Subnormale d_0 ist unter allen d -Werten dadurch charakterisiert, daß die bei beliebigem d im allgemeinen zwei x -Lösungen von Gleichung (6.2.3) zu einer Doppellösung x_0 zusammenfallen. Man mache daher den Ansatz

$$x^2 - 2x(x_0 + d) + (x_0)^2 + 2dx_0 + f(x)^2 - f(x_0)^2 = (x - x_0)^2 \cdot R(x) \quad (6.2.4)$$

mit einem Restfaktor $R(x)$, dessen Grad von der als Polynom angenommenen Funktion f abhängt. (Also z.B. für ein Polynom f dritten Grades steht links ein Polynom 6. Grades, daher muß R vom 4. Grade sein.) Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten von R und im Verlauf von dessen Lösung schließlich auch d . Der Leser sei aufgefordert, dies für den Fall $f(x) = x^3$ durchzuführen, danach den Anstieg der Normalen (in Abhängigkeit von x_0) und schließlich den der Tangente zu bestimmen. Danach wird er ein völlig neues Gefühl der Dankbarkeit für den Leibniz'schen Differentialkalkül verspüren. Wir halten aber fest: Der Begriff der Tangente kann auch auf eine völlig andere als die uns vertraute Art erklärt werden, nicht als Grenzlage von Sekanten, sondern als Senkrechte zur Normalen, die ihrerseits mittels Berührung eines Kreises ohne Benutzung von Grenzprozessen definiert wird.

Das Konzept der eine beliebige Kurve berührenden Kreise erwies sich als Schlüssel zum weiteren Ausbau der Kurvengeometrie. Man wird sich nach dem bisher Gesagten vorstellen können, daß die Definition des Krümmungskreises in einem Kurvenpunkt, wobei der reziproke Wert seines Radius das Maß der lokalen Krümmung ergibt, von den Anhängern bzw. Gegnern infinitesimaler Methoden ebenfalls auf verschiedene Weise bewerkstelligt wurde. Die „Infinitesimalen“ (als erste Newton und Jacob I Bernoulli, der die bekannte Formel für die Krümmung als Funktion der ersten und zweiten Ableitung der Funktion als „*theorema aureum*“ — goldenes Theorem bezeichnete), bestimmten den Schnittpunkt zweier benachbarter Kurvennormalen und ließen dann die eine gegen die andere konvergieren, wobei der Schnittpunkt gegen den Mittelpunkt des Krümmungskreises strebt. Den Cartesianern war dies natürlich ein Greuel. Sie definierten den Krümmungskreis als denjenigen, der sich der Kurve unter allen Kreisen, die die Kurve im betreffenden Punkt berühren, am besten anschmiegt, so daß also in den „Kontingenzwinkel“ zwischen Kurve

und Krümmungskreis (vgl. 5.1) kein sich besser anschmiegender Kreis hineinpaßt. Wieder erwies sich aber, daß diese von Grenzprozessen freie Variante die tatsächliche Berechnung außerordentlich erschwert.

Zur Geschichte der Kurvengeometrie gehört auch die Herausarbeitung des Begriffs der Torsion von Raumkurven als Maß für die „lokale Nichtebenheit“ und des Begriffs der „Geodätischen“ als kürzeste Verbindung ihrer Punkte auf einer gekrümmten Fläche im Raum. Nach Vorarbeiten von Jacob I und Johann I Bernoulli um 1700 sowie Henri Pitot 1724 kam das erste zusammenfassende Werk über räumliche Kurven 1729 aus der Feder des erst 17-jährigen Alexis Claude Clairaut, der später auch als praktischer Geodät unter anderem durch seine Teilnahme an der lappländischen Gradmessungs-Expedition der französischen Akademie (1736/37) hervortrat.

Das Grundproblem der Tangentenrichtung war nicht von Anbeginn so eng mit der Bestimmung von extremalen Funktionswerten verbunden, wie es insbesondere die heutige „Schulanalysis“ suggeriert. Es spielte in vielen naturwissenschaftlich-technischen Fragen des 17. und 18. Jahrhunderts auch ganz andere Rollen, z.B. in der Ballistik, in der geometrischen Optik, bei der zweckmäßigen Form von Schiffsrümpfen, Wind- und Wasserrädern, bei der Konstruktion der Pendeluhr. Christiaan Huygens wurde 1659 auf den allgemeinen Begriff der Evolute bzw. Evolvente einer ebenen Kurve durch die Frage geführt, wie man ein Uhrpendel so steuern kann, daß es sich nicht auf einem Kreisbogen sondern auf einem Zykloidenbogen bewegt (um auch bei endlicher Auslenkung exakte Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Schwingungsweite zu sichern). Für die tatsächliche technische Entwicklung der Uhren hat seine Entdeckung letzten Endes keine Rolle gespielt, eine umso größere aber für die mathematische Kurventheorie. Daß aus der Frage nach der Tangente in vielen Fällen eine Frage nach dem Ort waagerechter Tangenten wurde, ist vor allem Pierre de Fermat zu danken. Seine „Abhandlungen über Maxima und Minima“ wurden etwa zwischen 1638 und 1646 in Etappen niedergeschrieben und (u.a. durch Mersenne) in Umlauf gebracht, aber erst nach Fermats Tod gedruckt. Man erkennt dies daran, daß er in späteren Teilen immer wieder auf Einwände gegen das früher Geschriebene eingeht und sie zu entkräften versucht. Fermat löst in zahlreichen Beispielen geometrische Extremwertaufgaben durch Bestimmung derjenigen Werte der Veränderlichen, für die die Tangente der betreffenden Funktion parallel zur x -Achse bzw. die lokale Änderungsgeschwindigkeit des Funktionswertes zu Null wird. Seine Methode zur Bestimmung dieser Stellen läuft rechnerisch auf die Berechnung des Differentialquotienten dieser Funktionen hinaus, wie wir an seinem ersten, noch sehr einfachen Beispiel demonstrieren wollen. (Das hier erhaltene Resultat war schon in der Antike bekannt und läßt sich ganz leicht elementar erhalten, aber gerade diese Nachprüfbarkeit dient Fermat zur Rechtfertigung seiner Methode.)

Eine gegebene Strecke der Länge a soll so in zwei Teile x und $a - x$ zerlegt werden, daß das Rechteck aus diesen Strecken, d.h. das Produkt $x(a - x)$ möglichst groß wird. Ist $x + e$ ein dem angenommenen Optimalwert benachbarter Wert, so liefert er ein Rechteck der Größe $(x + e)(a - x - e)$. Die Differenz beider Funktionswerte ist $e(a - 2x) - e^2$, also bei sehr kleinem e fast $e(a - 2x)$. (Das uns naheliegende Argument der verschiedenen Größenordnungen von e und e^2 benutzt Fermat noch nicht.) Diese Differenz wird offenbar nirgends kleiner als für $x = a/2$, das bedeutet: Unter allen Rechtecken gegebenen Umfangs hat das Quadrat die größte Fläche. Schon nach diesem ersten Beispiel ruft Fermat aus: „Eine allgemeinere Methode kann man wohl nicht angeben.“

Es ist verständlich, daß man angesichts dieser von Fermat durch viele weitere Beispiele verfestigten Methode seit altersher in Frankreich den Prioritätsstreit zwischen den Anhängern von Leibniz und denen von Newton für gegenstandslos erklärte. Indem Fermat von Krümmung nur qualitativ als konvex oder konkav spricht (ohne diese Begriffe zu definieren), erkennt er auch schon, daß die Wendepunkte einer Kurve als solche Stellen interpretiert und berechnet werden können, in denen der Winkel zwischen der Tangente und einer festen Richtung, etwa der y -Achse, einen Extremwert annimmt (Abb. 6.2.2): Vergleicht man die Tangente im Wendepunkt P_0 , in dem die Kurve vom konkaven zum konvexen Verhalten wechselt, mit den Tangenten in den rechts und links davon liegenden Punkten P_1 und P_2 , so stellt man fest, daß der mit der senkrechten Geraden gebildete Winkel α_{min} der zu P_0 gehörigen Tangente kleiner ist als die Winkel α_1 bzw. α_2 . Man beachte, daß dies eine an die anschaulich geometrische Vorstellung von konvex und konkav anknüpfende, völlig kalkülfreie Betrachtung ist.

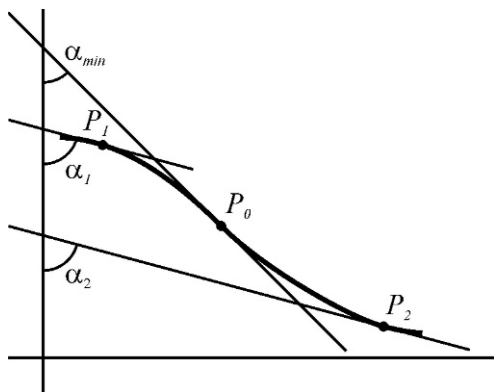


Abb. 6.2.2 Wendepunkt als Ort extremalen Tangentenanstieges nach Fermat

Den Schluß von Fermats „Abhandlungen“ bildet die Herleitung des „Fermatschen Prinzips“, d.h. der Beweis, daß das Brechungsgesetz aus einem Extremalprinzip folgt, nämlich den *zeitlich* kürzesten (bzw. manchmal längsten) Lichtweg ergibt, wenn das Licht in jedem durchlässigen Medium eine für dieses Medium charakteristische konstante Geschwindigkeit und zwar im dichteren Medium die geringere hat. Begleitet wird dies von einer harten Kritik an Descartes, der versucht hatte, das Brechungsgesetz aus der physikalisch falschen entgegengesetzten Annahme über die Geschwindigkeiten abzuleiten. Dies ist neben den beiderseitigen Bemühungen um die Koordinatenmethode eines von vielen weiteren Anzeichen für das insgesamt recht gespannte Konkurrenzverhältnis zwischen Fermat und Descartes. Fast könnte man sagen, daß Frankreich als Äquivalent für den bedauerlich nationalistisch gefärbten Streit zwischen Leibnizianern und Newtonianern den Streit zwischen Descartes und Fermat hatte.

Bedeutsam für die Geschichte der Geometrie ist, daß die ersten erfolgreich gelösten Extremalprobleme meistens von geometrischer Art waren. Einige von ihnen gehören bis heute zum eisernen Bestand der Analysisübungen in Schule und Grundstudium. Zu ergänzen ist aber noch, daß Fermat im Hochgefühl seiner erfolgreichen Methode eine Extremalaufgabe stellte, von der sich später herausstellte, daß die Differentialrechnung selbst in ihrer voll entwickelten Form zur Lösung wenig beitragen kann, nämlich die bereits erwähnte Aufgabe, zu n gegebenen Punkten den Punkt mit minimaler Abstandssumme zu bestimmen, eine Aufgabe, mit der sich sowohl wegen ihrer theoretischen Schwierigkeit (im allgemeinen Fall) als auch wegen ihrer Praxisbedeutung bis in die Gegenwart immer wieder Mathematiker auseinandersetzen (siehe Aufg. 6.2.3, 7.3.6, Abschnitt 7.9 und Aufg. 7.9.1 u. 7.9.2).

Die genauere Betrachtung der Geschichte zeigt, daß die Differential- und auch die Integralrechnung sich in einem harten Wettbewerb gegen philosophisch begründete Einwände und dadurch motivierte alternative rein geometrische oder geometrisch-algebraische Methoden durchsetzen mußten. Zugleich muß man aber feststellen, daß die durch Leibniz, Newton, die Bernoullis und Wallis auf verschiedenen Wegen erfolgte Kalkülisierung der infinitesimalen Methoden die Trennung von Geometrie und Analysis einleitete. Indem man dazu überging, statt mit geometrischen Figuren und geometrischen Argumenten mit Formeln zu arbeiten, steigerte man die Leistungsfähigkeit ungeheuer, entfremdete sich aber gleichzeitig mehr und mehr von den hinter den Formeln stehenden Sachverhalten. Zwar ist das Endergebnis einer solchen Rechnung wieder geometrisch deutbar, aber meist nicht mehr jeder einzelne Zwischenschritt.

Kartographie

Es soll hier nicht die Rede von der relativ bald erfolgten Ausdehnung der Analysis auf Funktionen mehrerer Veränderlicher sein, und über die Entwicklung der eigentlichen Differentialgeometrie soll in 7.4 im Zusammenhang berichtet werden, aber eine spezielle geometrische Anwendung soll das Kapitel beschließen. Während in der Renaissance nur einige spezielle kartographische Abbildungen eingeführt und im Rahmen der damaligen Möglichkeiten elementargeometrisch untersucht worden waren, stellte Johann Heinrich Lambert in seinen 1772 erschienenen „Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelskarten“ [bei ihm: ...charten] erstmals allgemein die Frage nach dem Begriff der kartographischen Abbildung der Kugeloberfläche oder größerer Teile von ihr in eine Ebene, ihrer mathematischen Beschreibung und der Charakterisierung solcher Eigenschaften wie Flächen- oder Winkeltreue durch partielle Differentialgleichungen. In dieser Arbeit führte er zugleich eine Anzahl von neuen Netzentwürfen ein, die zum großen Teil bis heute, meist unter Namen wie Lamberts flächen- bzw. winkeltreue (...-) Projektion, in Gebrauch sind. Lambert, der seine Bildung völlig autodidaktisch erworben hatte, unterscheidet sich von den anderen bedeutenden Mathematikern des 18. Jhs. dadurch, daß er die *Kalküle* der Analysis nicht so virtuos beherrschte. (Er kompensierte dies durch unkonventionelles Herangehen an Probleme und die Begründung einer Anzahl von fruchtbaren neuen Teildisziplinen und Problemfeldern für die Mathematik.) So blieb es auch Euler 1777 und Lagrange 1779 vorbehalten, die allgemeinen Lösungen der von Lambert gestellten kartographischen Fragen anzugeben (wobei Lagrange übrigens schon ohne weitere Erörterung komplexe Zahlen benutzte), während Gauß erst ab 1816 die Begriffe Winkeltreue und Flächentreue auf die Abbildung zweier beliebiger Flächen aufeinander übertrug [Gauß' Werke, Bd. 8, S.370ff, Bd. 4, 189-216]. Später bewies er exakt, was intuitiv schon lange klar war, daß Flächentreue und Winkeltreue bei einer Abbildung der Kugeloberfläche in die Ebene (und allgemeiner bei einer nicht isometrischen Abbildung) nicht gleichzeitig bestehen können. Lagranges Arbeit über kartographische Abbildungen ist, ähnlich wie die von Lambert und Euler in breitem, nahezu populärwissenschaftlichem Stil geschrieben, mit ausführlichen verbalen Einleitungen in die Problematik und sehr konkreten Anwendungsbeispielen, ein Stil, der im 19. Jh. rapide verloren ging. Die mathematische Sprache ist noch die der als „unendlich kleine Zuwächse“ aufgefaßten „Differentialen“. Gauß schreibt anfangs auch so, geht aber schon um 1816 zur uns geläufigen Schreibweise für (partielle) Ableitungen über.

6.3 Auf dem Wege zur darstellenden und projektiven Geometrie

Ein rückblickendes Fazit auf die Renaissance zeigt nochmals, daß sich in dieser Zeit eine Art von Arbeitsteilung herausgebildet hatte: Sofern die „gelehrten“ Mathematiker nicht mit der Wiedererschließung antiken Wissens beschäftigt waren, galten die von ihnen erzielten Fortschritte vorzugsweise den mit der Astronomie zusammenhängenden Fragen (einschließlich Trigonometrie und Optik), während aus der Schicht der Künstler, Handwerker und Ingenieure vor allem mächtige Impulse zur Entwicklung einer praktischen „Alltagsgeometrie“ kamen. Es wäre falsch, dies einfach als eine Teilung in „reine“ und „angewandte“ Mathematik zu interpretieren. Auch die Astronomie hatte ja große praktische Bedeutung, für die Kalenderrechnung, Seefahrt, Geodäsie und Kartographie. Im Laufe des 17. und 18. Jhs. mündeten die Impulse zur Entwicklung von Perspektive und Mehrtafelverfahren in eine Verwissenschaftlichung. Dies geschah vor allem in Frankreich, wo unter der bis 1789 ununterbrochenen absolutistischen Regierung ein militärisch und wirtschaftlich starker Nationalstaat entstanden war, der u.a. durch die Gründung von Akademien und Hochschulen verschiedener Art in Paris günstige Bedingungen für die Begegnung zwischen Theoretikern und Praktikern schuf. Auch der Zirkel Mersennes und sein geistiges Klima begünstigten den Kontakt zwischen reinen Wissenschaftlern wie Descartes, Pascal und Roberval einerseits, Architekten, Festungsbaumeistern und Militäringenieuren wie Girard Desargues und Alain Mallet, handwerklich arbeitenden Zeichnern und Graveuren wie Abraham Bosse und der Geometrie zugewandten Künstlern wie Laurent de La Hire andererseits. Der Sohn des letzteren, Philippe de La Hire, dessen Name heute höchstens noch mit der von ihm propagierten sogenannten Zweikreismethode zur punktwisen Konstruktion von Ellipsen (Abb. 6.3.1) in Zusammenhang gebracht wird, hat eine bisher wenig gewürdigte Rolle als Verbindungsglied zwischen Theoretikern und Praktikern der neuen Geometrie gespielt. 1682 wurde er Nachfolger von Roberval am Collège Royale in Paris, 1687 außerdem Professor an der Académie Royale d'Architecture. Seine Lehrtätigkeit und seine zahlreichen Publikationen umspannten außer der eigentlichen Mathematik alle damaligen Gebiete der Physik und Technik, zum Teil sogar weitere Naturwissenschaften. Sein Freundeskreis umfaßte Männer wie Roberval und Bosse. Vergleichbare Bedingungen werden sich in anderen europäischen Zentren wie Berlin, London oder Petersburg erst Jahrzehnte später entwickeln, aber niemals diese Qualität erreichen.

Beginnen wir mit dem Architekten und Ingenieur Desargues. Seine erste Publikation 1636 betrifft die Zentralperspektive. Zu den beruflichen Aufgaben des Architekten gehört aber auch die Konstruktion von Sonnenuhren, und wenn

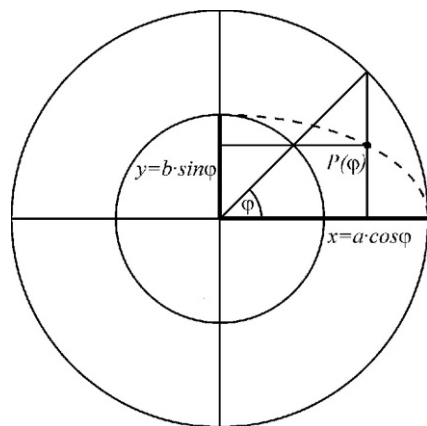


Abb. 6.3.1 Zweikreiskonstruktion der Ellipse nach de La Hire

die Sonne sich auf einer Kreisbahn bewegt, beschreibt der Schatten der Spitze des Gnomons auf der Ebene der Sonnenuhr einen Kegelschnitt. So begegnen sich die von der Antike her motivierten Studien von Männern wie Fermat oder Descartes mit den praktischen Bedürfnissen. 1639 publiziert Desargues sein „Brouillon project...“ (Deutsch etwa: Erster Entwurf der Beschreibung der Ereignisse beim Zusammentreffen eines Kegels mit einer Ebene, moderne englische Übersetzung in [Field/Gray 1987]). Diese in nur 50 Exemplaren gedruckte Schrift, die lange vergessen und verschollen war und erst 1845 von M. Chasles wieder entdeckt wurde¹⁵, gilt heute als die eigentliche Geburtsurkunde der projektiven Geometrie. Desargues beginnt mit der Feststellung, daß bei ihm alle Geraden und Ebenen in jeder Richtung unendlich ausgedehnt sind (im Gegensatz zu der bis dahin noch dominanten Darstellung Euklids, die auf Strecken und deren potentieller Verlängerung beruht). Er erkennt die Analogie zwischen dem Büschel aller Geraden durch einen Punkt und einer Schar aller untereinander parallelen Geraden (bei Desargues heißen beide Arten von Büscheln gemeinsam „ordonnance“, svw. Regel), ordnet solchen Scharen folgerichtig einen „unendlich fernen“ Schnittpunkt zu (Sein gemeinsamer Name für unendlich ferne und endliche Punkte als Zentren von Geradenbüscheln ist „butte“, svw. Ziel.) und schließt später daraus u.a., daß ein Kreiszylinder der Spezialfall eines Kreiskegels mit unendlich ferner Spitze ist. Bei ihm voll-

¹⁵Das von Chasles aufgefundene Exemplar war eine 1679 von Philippe de La Hire angefertigte Abschrift. Die Mühe des Abschreibens deutet auf die Wertschätzung, aber auch darauf hin, daß schon La Hire kein gedrucktes Exemplar der so seltenen Schrift mehr erhalten konnte. Erst 1950 tauchte ein Originalexemplar auf, das [Field/Gray 87] zugrunde liegt.

zieht sich der für die moderne Geometrie der Kegelschnitte so wichtige Übergang vom einfachen Kegel zum Doppelkegel, und er konzentriert sich darauf, möglichst viele allen Kegelschnitten gemeinsame Eigenschaften aus ihrer Erzeugung als zentralperspektives Bild eines Kreises abzuleiten. Aber zunächst führt er in Analogie zu den eigentlichen und uneigentlichen Geradenbüscheln eigentliche und uneigentliche Ebenenbüschel ein, studiert die Zwischen- und die Trennungsrelation für drei bzw. vier kollineare Punkte und stellt fest, daß die letztere bei Zentralprojektionen erhalten bleibt. Er untersucht dann den Spezialfall der sich harmonisch trennenden Punktepaare, findet den Begriff des vollständigen Vierseits, konstruiert den vierten harmonischen Punkt zu drei gegebenen und dringt bis zur Theorie der Polarität von Punkt und Gerade am Kegelschnitt vor.

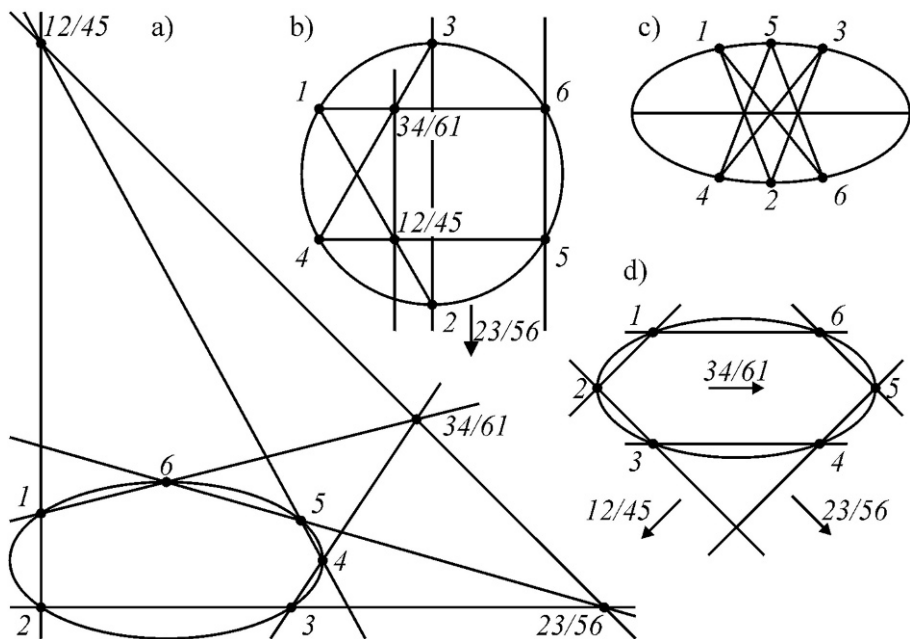


Abb. 6.3.2 Satz von Pascal, a) allgemeiner Fall, b-d) verschiedene Spezialfälle

Desargues' Gedanken wurden von Fermat und Descartes geschätzt und übten einen starken Einfluß auf den damals erst sechzehnjährigen Pascal aus. Sie inspirierten ihn zu seiner ersten Abhandlung über Kegelschnitte, die bereits ohne Beweis den Satz von Pascal enthält. Dieser, 1640 ebenfalls nur in wenigen Exemplaren verbreitete kurze „Essay pour les coniques“ (in englischer

Übersetzung in [Field/Gray 87]) rundet das moderne Verständnis des Kegelschnittes auch dadurch ab, daß ein Paar sich kreuzender (eventuell im Unendlichen, dann also paralleler) Geraden als Kegelschnitt betrachtet wird, womit zugleich der schon in der Antike bekannte Satz des Pappos als Spezialfall des Satzes von Pascal erkennbar wird. Pascals Originalfigur diente der Illustration mehrerer Behauptungen und war daher mit vielen unnötigen Punkten und Geraden überladen (Abb. 6.3.3). Abb. 6.3.2 zeigt (mit anderen, heute üblichen Bezeichnungen) das Wesentliche. Sein Satz lautet in moderner Sprechweise: Sind $1, \dots, 6$ beliebige Punkte eines Kegelschnittes und bezeichnet $12, 23$ usw. die entsprechende Verbindungsgerade, $12/45$ usw. den entsprechenden (eventuell uneigentlichen) Schnittpunkt dieser Geraden, so liegen $12/45, 23/56$ und $34/61$ auf einer (eventuell uneigentlichen) Geraden (d.h. im letztgenannten Fall sind die drei Geradenpaare paarweise parallel wie z.B. in Abb. 6.3.2d). Abb. 6.3.2b-d zeigen einige der vielen elementar begründbaren Spezialfälle und illustrieren zugleich, daß die Reihenfolge der Punkte auf dem Kegelschnitt keine Rolle spielt. Da die Kollinearitäten bei Zentralprojektion erhalten bleiben, kann man vermuten, daß Pascal seinen Satz durch systematische Transformation eines elementaren Anfangsfallles am Kreis mittels Zentralprojektion in andere Konfigurationen gefunden hat. Sein „Essay“, der ausdrücklich auf Desargues Bezug nimmt und dessen Begriffe verwendet, hat mehr den Charakter einer Ankündigung, deutet aber schon an, daß viele Aufgaben über Kegelschnitte wie z.B. punktweise Konstruktion bei fünf gegebenen Punkten oder Konstruktion der Tangente in einem gegebenen Punkt mittels des gefundenen Satzes durch lineare Konstruktion (d.h. durch Schneiden, Verbinden und Parallelen) lösbar werden. Eine ausführliche Abhandlung hierüber, an der Pascal anschließend viele Jahre arbeitete, wurde leider nie publiziert und muß als verloren gelten. Mersenne bezeugt, daß Pascal über 400 Folgerungen aus seinem Satz gezogen hatte. Leibniz hat das Manuskript auch gesehen und einiges über den Inhalt berichtet.

Während also Desargues über Pascal außerordentlich fruchtbar auf die „Wissenschaft Geometrie“ wirkt, erfahren seine Schriften (außer den genannten noch 1640 über Schattenkonstruktionen, über den Steinschnitt und über die Konstruktion von Sonnenuhren) heftige Ablehnung durch seine Berufskollegen. Die gänzlich ungewohnte Denkweise und eine Fülle von ihm neu eingeführter Begriffe und Namen dafür mögen dazu beigetragen haben, entscheidend war aber wohl der Widerstand eines etablierten Berufsstandes gegen unbequeme Änderungen und Neuerungen. So findet Desargues, selbst Praktiker, unter allen Praktikern nur einen einzigen, allerdings sehr treuen und sehr rührenden Anhänger: den bereits erwähnten Illustrator Abraham Bosse, der 1643

allgemeinverständlich gehaltene Darlegungen der Schriften von Desargues über Sonnenuhren und Steinschnitt und 1648 eine erweiterte Auflage der „Perspektive“ veranlaßt, in deren Anhang er erstmals den Satz von Desargues über die Äquivalenz von Zentralperspektivität und Achsenperspektivität veröffentlicht (Abb. 6.3.4). Desargues selbst hatte, verbittert durch die Reaktionen seiner Fachgenossen, nach 1640 nichts mehr publiziert.

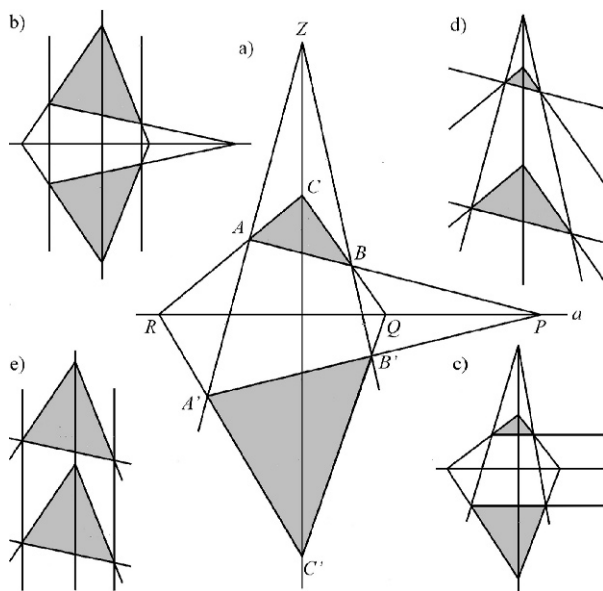


Abb. 6.3.4 Satz von Desargues

a) allgemeiner Fall: Dreiecke ABC und $A'B'C'$ haben ein Perspektivitätszentrum genau dann, wenn die Schnitte P, Q, R der jeweils zugeordneten Seiten auf einer gemeinsamen Geraden, der Perspektivitätsachse a , liegen. Dabei kann b) das Zentrum Z auch unendlich fern sein, c) einer der Schnittpunkte auf der Achse ins Unendliche abwandern, d.h. die betreffenden Dreiecksseiten werden zur Achse und damit auch untereinander parallel. d) Wird noch ein zweites Paar von Dreiecksseiten bei zentralperspektiver Lage parallel, so enthält die Achse a zwei unendlich ferne Punkte, daher muß auch der dritte Schnittpunkt unendlich fern sein. e) zeigt, daß zugleich auch das Zentrum unendlich fern werden kann. Die „Desarguessche Figur“ oder „Konfiguration“ a) kann auf mehrere Weisen gedeutet werden. Z.B. ist P Perspektivitätszentrum der Dreiecke $AA'R$ und $BB'Q$. Die Gerade ZCC' übernimmt dann die Funktion der Perspektivitätsachse. Man sieht nun, daß b) und c) den gleichen Spezialfall darstellen. Man denke sich eine der Figuren um 90 Grad gedreht.

Von der Perspektive zu den Mehrtafelverfahren

Auch in anderen Ländern wurden im 18. Jh. Fortschritte in der Mathematisierung der Perspektive erzielt, wobei es oft keine scharfe Abgrenzung zwischen der eigentlichen Zentralperspektive, ihrem Grenzfall Parallelprojektion und den Ansätzen zu den Mehrtafelverfahren gab. Illusionistische Malerei erfreute sich im Barockzeitalter großen Ansehens (Abb. 6.3.5), auch die Reliefperspektive wurde häufig genutzt, um räumliche Tiefe vorzutäuschen (Abb. 6.3.6, Aufgabe 6.3.2). 1715 erscheint in London eine Abhandlung zur Perspektive von Brook Taylor (in der Analysis bekannt durch die Taylorreihenentwicklung von Funktionen), die mehrfach aufgelegt und auch ins Französische übersetzt wurde. Eine volkstümliche Bearbeitung durch Joshua Kirby (London 1754) ist vor allem durch das von dem berühmten zeitgenössischen Graphiker William Hogarth entworfene Titelblatt unsterblich geworden (Abb. 6.3.7), worin zahlreiche Fehler eingearbeitet sind, die man begehen kann, wenn man dieses vorzügliche Buch nicht vor dem eigenen Zeichnen studiert. Wahrlich ein frühes Stück Schockwerbung, wie sie heute wieder modern ist, und obendrein ein hochgeschätztes Exemplar der jetzt so beliebten „perspektivisch widerspruchsvollen“ Kunstwerke! Mathematisch bot Taylor vor allem, als erster, wie es scheint, die Repräsentation von Geraden und Ebenen durch ihre Spuren, d.h. ihre Schnitte mit den Projektionsebenen. Außerdem studiert er schon die Rekonstruktion des Betrachterstandpunktes aus dem korrekt konstruierten Bild.

In Deutschland beschäftigt sich Lambert³ [Lambert/Steck 1943] mehrfach mit der Perspektive. Nach einer frühen und 1752 erstmals gedruckten kleinen Schrift (1752), worin aber schon der von Lambert erfundene Perspektograph beschrieben wird, mit dem man einen Grundriß mechanisch in seine zentralperspektive Ansicht verwandeln kann (Aufgabe 6.3.1), erscheint 1759 seine „Freye Perspective“. Der Titel zeigt an, daß es hier darum geht, ein zentralperspektives Bild ohne Benutzung von Grund- und/oder Aufriß direkt zu zeichnen. Bei Lambert wird der Gedanke deutlich, die Zeichenebene als ein — freilich im Fall der Zentralperspektive dem Raum nicht umkehrbar eindeutig entsprechendes — Modell des Raumes aufzufassen, indem man sich das Bild eines räumlich kartesischen Dreibeins vorgibt. Danach transformiert sich jede Konstruktion, die man in Gedanken im Raum ausführt, in eine zugeordnete Konstruktion in der Bildebene. Wie wir sehen werden, wird genau dieser Gedanke von Monge zur Vollendung gebracht, indem er ihn mit dem Mehrtafelverfahren kombiniert. Da in Lamberts Auffassung z.B. die Operation des Ziehens einer Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt sich in der Bildebene als Verbindung des Bildpunktes des gegebenen Punktes mit dem



Abb. 6.3.5 „Scheinkuppel“ der Kirche di Badia in Arezzo, auf eine flache Decke gemalt von Andrea Pozzo (1642 - 1700), einem Meister der illusionistischen Perspektivmalerei. Pozzo hat mehrfach ähnliche Decken gemalt und auch ein Buch über Perspektive verfaßt. [Foto A. Schreiber]



Abb. 6.3.6 Wandbild (1767) in der barocken Kirche Saint-Roch in Paris
Die Umrahmung in Reliefperspektive täuscht große Tiefe vor. In Wahrheit ist die Nische kaum 25 cm tief. [Foto P. Schreiber]



Abb. 6.3.7 Titelblatt von William Hogarth zu J. Kirbys „Dr. Brook Taylor’s Perspective Made Easy“ (1754). Wer Zeichnungen ohne Kenntnis der Perspektive macht, wird für solche Absurditäten verantwortlich sein, wie sie in diesem Frontispiz gezeigt werden. (Übersetzung der Bildunterschrift)

Fluchtpunkt der gegebenen Geraden realisiert, öffnet seine Schrift einen weiteren Zugang zur projektiven Geometrie: Bei zentralperspektiver Abbildung bekommen eben auch parallele Geraden einen Schnittpunkt bzw. der eigentlich nur gedachte unendlich ferne Punkt transformiert sich in einen im Endlichen gelegenen Punkt, und das Parallelenziehen erscheint als natürlicher Grenzfall des Verbindens.

Lamberts Schrift ist zumindest teilweise seinem Aufenthalt in Frankreich 1758 zu verdanken und erschien im gleichen Jahr in Deutsch und Französisch, eine zweite deutsche Auflage in wesentlich erweiterter Form 1774. Am Rande sei bemerkt, daß Lambert außer seiner Akademiemitgliedschaft in Berlin seit 1770 das Amt des preußischen Oberbaurates innehatte, das nach ihm von so berühmten Architekten wie David Gilly und Karl Friedrich Schinkel verwaltet wurde. Eine derartige Nebentätigkeit von Mathematikern, auch als Bausachverständige und praktische Architekten, ist für das 18. Jh. charakteristisch, und noch bis in die dreißiger Jahre des 19. Jhs. wird Zivil- und Festungsbaukunst zu den regulären Lehrfächern der Mathematikprofessoren an den Universitäten gehören und einen breiten Raum in den mehrbändigen Lehrwerken der Mathematik einnehmen, wie sie z.B. von Christian Wolff, Abraham Gotthelf Kästner und Wenceslaus Karsten geschrieben wurden.

Im Festungsbauwesen hatte sich seit etwa 1600 die sogenannte Kavalierperspektive als hauptsächliche Darstellungsweise durchgesetzt. Während dabei in der heutigen darstellenden Geometrie von der Vorstellung eines senkrechten und folglich maßtreuen Aufrisses ausgegangen wird, an den sich die meist um 45 Grad geneigten und verkürzten Bilder der Tiefenlinien anschließen, ging man damals vom maßtreuen Grundriß aus, über dem sich die Bilder der senkrechten Linien erhoben (daher auch die französische Bezeichnung „*élévations géométrales*“ für diese Art der Darstellung, Abb. 6.3.8). Die Bezeichnung „Kavalier...“ hat nichts mit der landläufigen Bedeutung des Wortes Kavalier zu tun. Kavaliers sind im damaligen Sprachgebrauch die vorspringenden Teile (Bastionen) einer Festung. Die Entwicklung der Artillerie hatte zu einer Revolution im Festungsbau geführt. Die Planung von Festungsanlagen so, daß das gesamte umgebende Gelände eingesehen werden konnte und durch Geschütze erreichbar war, andererseits von keinem Punkt in die Festung hineingesehen werden konnte, hatte sich in den Augen der Fürsten und Feldherren zu einer der wichtigsten Aufgaben der angewandten Geometrie entwickelt. Entsprechend großes Ansehen genossen die führenden Spezialisten des Festungsbauwesens wie der französische Admiral Vauban. Er konnte sich unter dem allmächtigen und unfehlbaren Sonnenkönig Ludwig XIV. eine Denkschrift über die Mißstände in Frankreich erlauben, die ihm zwar die Ungnade seines Königs

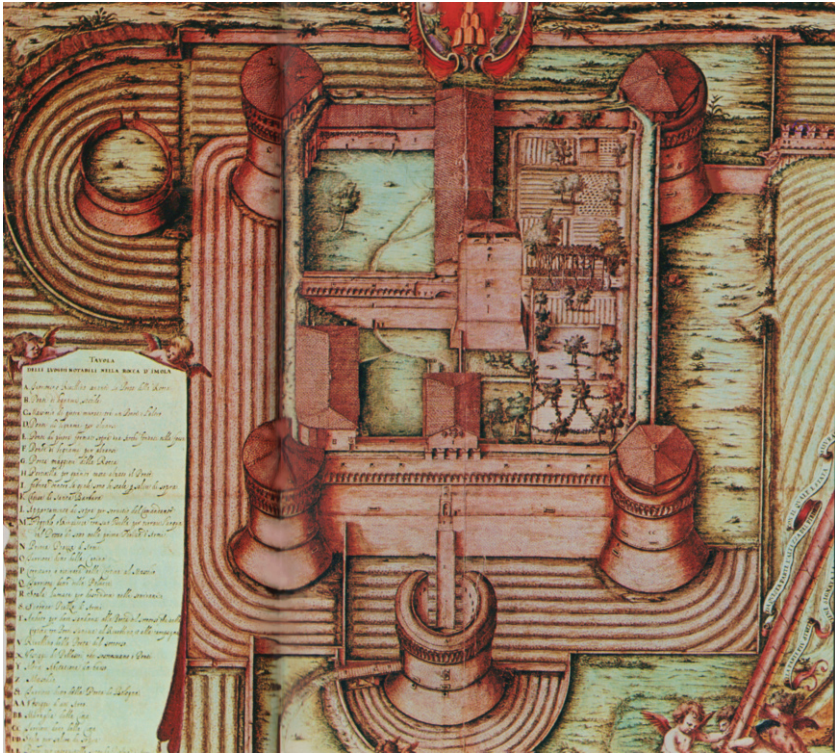


Abb. 6.3.8 Festung Rocca (Italien) in Kavalierperspektive (17. Jh.)
 [Ludwig H. Heydenreich, Leonardo the Inventor, S.50 McGraw Hill, Maidenhead UK 1980,
 ©EMB-Service, Luzern]

eintrug, aber bis heute als ein wichtiges Ereignis in der Geschichte Frankreichs gilt. Unter seiner Leitung entfaltete sich eine straff organisierte Ausbildung von Militäringenieuren, die noch gegen Ende des 18. Jhs. Männer wie Lazare Carnot und Gaspard Monge hervorbringen sollte. Christian Willenberg, der 1717 die heutige Technische Universität in Prag gründete, hatte in Frankreich eine solche Ausbildung genossen und brachte die typisch französische Kultur der Militäringenieur-Ausbildung in die Länder der Habsburger Monarchie, wo die darstellende Geometrie noch heute eine ungleich größere Rolle an den Hochschulen spielt als in anderen Ländern.

Die Autoritäten des Festungsbauwesens waren Gegner der sich ausbreitenden Zentralperspektive, da man aus perspektivischen Bildern nicht so einfach die wahren Maße und Entfernungen entnehmen kann wie etwa aus der Kavalierperspektive (heute verallgemeinert als axonometrische Eintafelprojektion).

Dieses Argument wird mit dem aufkommenden Maschinenbau immer größere Bedeutung gewinnen und die Zentralperspektive zuerst an den Rand der darstellenden Geometrie und dann in die Kunstakademien verbannen, wo sie aber auch nicht mehr sehr geschätzt und gepflegt wurde, als die Künstler sich gegen Ende des 19. Jhs. vom Paradigma der möglichst naturalistischen Abbildung abwandten. Im Schatten der Kriegsbaukunst entwickelten sich aber auch andere Ansätze einer konstruktiven Geometrie wie z.B. das Konstruieren im von Hindernissen durchsetzten Gelände, das rein lineare Konstruieren (durch Peilungen, da ein großräumiges Arbeiten mit dem Zirkel natürlich nicht möglich ist) und erste Ansätze zur Abschätzung und Minimierung der beim praktischen Arbeiten im Gelände unvermeidlichen Fehler. Eine Fundgrube derartiger praktischer Geometrie ist ein Buch des bereits erwähnten A. Mallet aus dem Jahre 1672 mit dem Titel „Les travaux de Mars“ (Die Arbeiten des Mars, Abb. 6.3.9). Frankreich und zum Teil die Bedürfnisse des Krieges sind auch der Ausgangspunkt einer neuen Richtung der Kartographie: Die Beschreibung des Geländes mittels Höhen- und Tiefenlinien, die später als kotierte Eintafelprojektion bezeichnet wird und auch als Hilfsmittel der reinen Mathematik zur graphischen Darstellung von Funktionen eines komplexen Arguments bzw. zweier Variablen herangezogen wird. Da die Lotung von Gewässertiefen bedeutend einfacher realisierbar ist als die Bestimmung von Höhen im Gelände bezüglich einer festgesetzten Nullebene (etwa Meeresspiegel), ist es nicht verwunderlich, daß Karten mit Tiefenlinien (Isobathen) früher auftreten als solche mit Höhenlinien (Isohypsen), und die erste der letztgenannten Art (1771 von Du Carla) war die Karte einer „imaginären Insel“ — es ging also zunächst ums Prinzip. 1791 legte Jean Louis Dupain-Triel der Pariser Akademie die erste Karte Frankreichs mit Höhenlinien vor. Isobathenkarten gibt es schon 1697 von der Maasmündung (Pierre Ancelin), 1733 von der Merwede (Samuel Cruquius), 1737 vom Ärmelkanal (Philippe Buache) [Wiener 1884, I, S. 25, Kupčik 1980, S. 212f].

Dürers bemerkenswerte Beiträge zu den Mehrtafelverfahren (zugeordneten Normalrissen) sind in Frankreich nicht unbekannt geblieben. Seine „Underweysung“ war schon 1532 in lateinischer Übersetzung in Paris erschienen und danach noch mehrmals nachgedruckt worden. Eine andere wesentliche Quelle bildet der sogenannte Steinschnitt. Wenn man Gewölbe, Fensterlaibungen, Wendeltreppen oder ähnliches aus Naturstein baut, dessen Gewinnung und Bearbeitung teuer und mühsam ist, muß die Form jedes einzelnen Steines vorher genau bestimmt werden. Die dazu erforderlichen geometrischen Kenntnisse sind in den Bauhütten jahrhundertlang hauptsächlich mündlich überliefert worden. Als schriftliche Darstellungen zu erscheinen begannen, in Frankreich

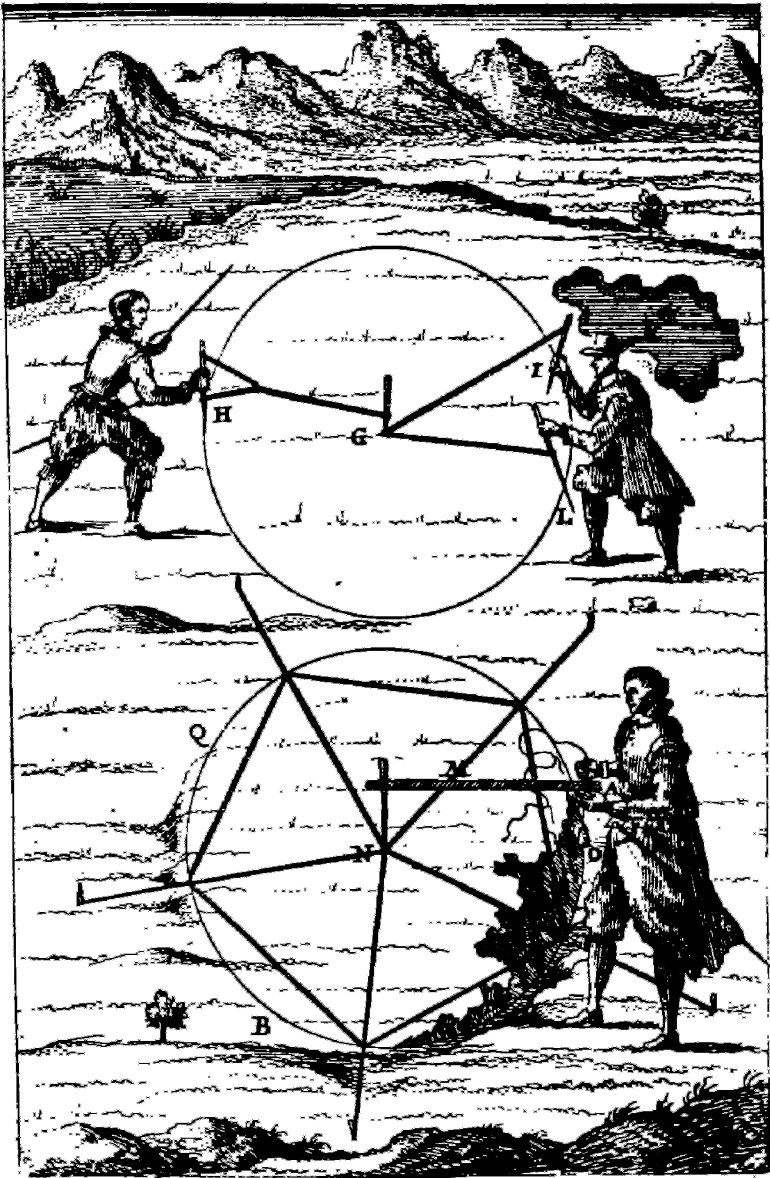


Abb. 6.3.9 Geometrische Konstruktionen im Gelände
[aus A. Mallet: Les travaux de Mars (1672)]

z.B. 1576 von Philibert de l'Orme oder 1643 von Derand, beschränkten sie sich meist auf die Konstruktionszeichnungen samt Hilfslinien, mit dem Hinweis, daß jeder Kundige daraus den Hergang entnehmen könne und weitläufige schriftliche Erklärungen die Sache nur verwirren würden [Wiener 1884] (Man vergleiche dies mit den heutigen Anleitungen zur Selbstmontage neuer Möbel!). Bemerkenswerte Fortschritte brachte das 1737/39 erschienene dreibändige Werk des Militäringenieurs Amédée François Frézier, das den Steinschnitt noch im Titel erwähnt. Der erste Band ist nur der Theorie gewidmet, die beiden folgenden den Anwendungen. Frézier geht von klaren und eindeutigen Definitionen aus, formuliert allgemeine Regeln und beweist alle seine Behauptungen. Er behandelt in großem Umfang gekrümmte Flächen des Raumes und dabei, den Bedürfnissen des Steinschnittes entsprechend, vorzugsweise solche, die durch mechanische Schleifvorgänge erzeugt werden können, also — modern gesprochen — Regelflächen: Eine Gerade wird so bewegt, daß sie dabei mit eventuell unterschiedlicher Geschwindigkeit längs zweier Kurven geführt wird. Sehr allgemein löst er auch die Aufgaben, die Schnittkurve zweier Flächen zu konstruieren, eine abwickelbare Fläche in die Ebene auszubreiten oder den Schnittwinkel zweier Flächen zu bestimmen.

Auf dieser Vorgeschichte baut die historische Leistung von Gaspard Monge auf. Aus einfachsten Verhältnissen stammend, wurde seine Begabung durch glückliche Umstände frühzeitig entdeckt, und er kam 1764 an die Militäringenieurschule von Mézières, wo jedoch zu dieser Zeit eine Offiziersausbildung nur Adligen möglich war. Begabte niederer Herkunft konnten in die sogenannte Gipsklasse eintreten, die zu einer Tätigkeit als Aufseher im Festungsbau oder Technischer Zeichner bzw. Hersteller von Modellen führte. Da Monge wiederum durch die originelle und überlegene Lösung geometrisch-technischer Aufgaben auffiel, wurde er sehr bald aus dem Unterricht herausgenommen und seinerseits zum Lehrer seiner adligen Mitschüler befördert, ohne daß diese ihm jedoch den geringsten Respekt schuldeten. Diese Erfahrungen haben ihn zum glühenden Anhänger der französischen Revolution werden lassen. Er gehörte zu den Initiatoren der 1794 in Paris gegründeten Polytechnischen Schule und war zeitweise ihr Direktor. Nüchtern betrachtet, liegt sein Hauptverdienst um die darstellende bzw. konstruktive Geometrie wahrscheinlich darin, daß er ihr den führenden Platz in der Ausbildung der wie Kadetten gehaltenen Zöglinge der Polytechnischen Schule sicherte, daß er hervorragende Lehrprogramme für diesen Unterricht konzipierte, danach selbst hervorragende Vorlesungen hielt, ein zugehöriges Lehrbuch schrieb und durch seine persönliche Ausstrahlung eine ganze Generation französischer Geometer prägte. Dies fällt zur Hauptsache ins 19. Jh. und wird darum später im einzelnen behandelt.

Die rein wissenschaftliche Bedeutung Monges für die darstellende Geometrie besteht vor allem darin, daß er als erster so deutlich, wie es zu seiner Zeit möglich war, ausgesprochen hat, daß die Aufgabe der darstellenden Geometrie eine doppelte ist:

„Erstens soll sie die Methoden liefern, um auf einem Zeichenblatte, welches also nur zwei Dimensionen, Länge und Breite hat, alle Raumgebilde, welche deren drei, nämlich Länge, Breite und Höhe haben, *abzubilden*, vorausgesetzt, dass diese Gebilde streng definiert werden können.

Zweitens soll sie das Verfahren lehren, um aus einer genauen Zeichnung die Gestalt der Raumgebilde *erkennen* und alle Sätze, welche aus der Gestalt und der gegenseitigen Lage der Raumgebilde folgen, ableiten zu können.“ [Monge 1900, zitiert nach den ersten Sätzen der deutschen Übersetzung seines Lehrbuchs, Hervorhebungen zusätzlich]

Heute könnten wir die hier ausgedrückte Meinung noch präziser formulieren: Es geht nicht nur um die ebene Abbildung räumlicher Objekte sondern darum, ein zweidimensionales *Modell* des dreidimensionalen Raumes zu schaffen, in dem Aufgaben, die sich eigentlich auf den Raum beziehen, ersatzweise an den ebenen Repräsentanten gelöst werden, wobei es sich bei den Aufgaben sowohl um Konstruktionen im engeren Sinne als auch um Entscheidungsprozeduren oder um den Beweis von Sätzen handeln kann. Dieser Gedanke rückt die darstellende Geometrie methodologisch in die Nähe dessen, was man heute als Kodierung und zwar Kodierung zum Zwecke der Handhabbarmachung von Objekten für Algorithmen bezeichnen würde, also in eine Analogie zum Zahlenrechnen mittels Zahlbezeichnungssystemen, zum Manipulieren von Funktionen (wie Nullstellenberechnung, Differenzieren, Integrieren,...) mittels Formeln, die diese Funktionen vertreten, zum Bearbeiten geometrischer Fragen mittels der Koordinaten der betrachteten Objekte. Gerade die letztgenannte Analogie, also die große methodologische Nähe zwischen der Koordinatenmethode und den Methoden der darstellenden Geometrie muß Monge bewußt gewesen sein, denn er entwickelte auch die Koordinatenmethode zum Handwerkszeug für die konstruktiven Aufgaben des dreidimensionalen Raumes und lehrte den Ingenieur, beide Methoden parallel zu benutzen wie die „linke und die rechte Hand“.

Daß wir Monge mit dieser Deutung seiner ersten Sätze nichts unterschieben, was er nicht gemeint hat, sollen einige weitere Zitate aus seiner „Géométrie descriptive“ belegen:

„Erste Aufgabe. Es sind ein Punkt P durch seine beiden Projectionen P' , P'' und eine Gerade g durch ihre beiden Projectionen g' , g'' gegeben. Man soll die Projectionen der Geraden h construieren, welche durch den Punkt P hin-

durch geht und der Geraden g parallel ist.“ [a.a.O., S. 23] In die Sprache des ausgehenden 20. Jhs. übersetzt heißt das: Wir haben im Raum die Operation, die je einem Punkt P und einer Geraden g die Parallele durch P zu g zuordnet. Nun ist im ebenen (Zweitafel-)Modell des Raumes der Punkt P durch seine Kodierung P', P'' und die Gerade durch ihre Kodierung g', g'' gegeben. Man beschreibe einen Algorithmus, der daraus den Kode h', h'' des Resultates erzeugt.

„Vergleich der darstellenden Geometrie mit der Algebra . . . Es verhält sich die darstellende Geometrie in diesem Punkte genau so wie die Algebra, in welcher es auch kein allgemeines Verfahren gibt, um eine in Worten gegebene Aufgabe in Gleichungen umzusetzen.

. . . und man kann die Anfänger nur durch verschiedenartige Beispiele daran gewöhnen, diese Beziehungen richtig zu erfassen und in Form von Gleichungen zu schreiben. Aber gerade wie es in der Analysis, nachdem eine Aufgabe in Gleichungen umgesetzt ist, Methoden giebt, um diese Gleichungen weiter zu behandeln und aus ihnen die Werthe der Unbekannten abzuleiten, so besitzt auch die darstellende Geometrie allgemeine Methoden, um, wenn die Projectionen von Körpern ausgeführt worden sind (d.h. die Kodierung durchgeführt ist), aus ihnen alles zu construiren, was aus der Gestalt und der Lage der letzteren folgt.

Wir vergleichen hier nicht ohne Absicht die darstellende Geometrie mit der Algebra; diese beiden Zweige der Mathematik haben die engsten Beziehungen zu einander. Es giebt keine Construction in der darstellenden Geometrie, welche sich nicht in die Analysis übertragen lässt; und umgekehrt kann bei Aufgaben, welche nicht mehr als drei Unbekannte enthalten, jede analytische Operation als Beschreibung einer geometrischen Operation aufgefasst werden. Es wäre zu wünschen, dass diese beiden Zweige der Mathematik zusammen gepflegt würden....“ [a.a.O. S. 17f]

Monge ist sich bewußt, daß die „leere“ Ebene durch die Auszeichnung einer festen Geraden, der „Achse“, zum Modell des gesamten Raumes wird, indem man sie als Schnittgerade zweier zueinander senkrechter Ebenen deutet, die danach aufeinander in die Zeichenebene geklappt werden. Er unterscheidet sich also von allen seinen Vorgängern dadurch, daß sich nicht der Grundriß auf einer und der Aufriß auf der anderen Halbebene bezüglich einer Grundlinie befindet, sondern jeder Punkt der Zeichenebene eine Doppelfunktion als Grundrißbild eines Punktes und zugleich als Aufrißbild eines im allgemeinen anderen Punktes hat. Freilich zeigt sich schon bald, daß das schöne Programm auf praktische Schwierigkeiten stößt. Schon eine Gerade ist durch das Paar aus Grund- und Aufrißbild nicht mehr immer eindeutig bestimmt, und Mon-

ge greift zu zusätzlichen Projektionsebenen und zu den sogenannten Spuren (Schnittgebilde mit den Projektionsebenen), um einen größeren Bereich von Raumobjekten eindeutig in der Ebene kodieren zu können, wobei er vieles benutzt, was seine Vorgänger schon am konkreten Fall entwickelt hatten. Nur ist bei Monge alles auf möglichste Allgemeinheit gerichtet.

Als Monge's „Leçons de géométrie descriptive“ 1795 erstmals nach seinen Vorlesungen in schriftlicher Form verbreitet wurden (1798 erste öffentliche Auflage), waren sie schon sehr ausgereift, da Monge viele Jahre lang seine Methoden in der Ausbildung erprobt hatte. Publizieren durfte er vor 1789 nichts davon, da seine Methoden als militärisch wichtig und dementsprechend geheim galten. (Die Geheimhaltung richtete sich bemerkenswerterweise nicht nur gegen das Ausland sondern auch gegen die Konkurrenz anderer französischer Militäringenieurschulen wie die von Metz und Besançon!) Dennoch scheinen Aufzeichnungen seiner Vorlesungen an die Konkurrenz gelangt zu sein. Einer von Monges ersten Schülern in Paris, S. F. Lacroix, in anderem Zusammenhang wegen seiner einflußreichen Lehrbücher der Koordinatengeometrie erwähnt, der aber von 1788 bis 1793 in Besançon unterrichtet hatte, danach an Pariser Hochschulen tätig und mit Monge befreundet, publizierte schon 1795 ein eigenes Lehrbuch der darstellenden Geometrie, das sich nur wenig von Monges Buch unterscheidet. Im Vorwort erklärte Lacroix, daß er bereits vor Jahren in Besançon durch ehemalige Schüler von Monge in den Besitz von Zeichnungen und Mitschriften gekommen sei und diese selbständig zu einem Lehrgebäude geordnet habe, bevor Monges Vorlesungen im Druck erschienen. Andere Berichte (z.B. Dupins Monge-Biographie 1819) bestätigen im wesentlichen diese Darstellung.

6.4 Das Ringen um das Parallelenproblem

Die Frage nach der Beweisbarkeit des 5. euklidischen Postulats bzw. seiner Ersetzbarkeit durch eine „evidentere“ Annahme, die schon in der Antike von mehreren Autoren diskutiert worden war, wird in Europa im wesentlichen durch die Euklid-Edition 1574 von Christoph Clavius wieder bekannt (vgl. Kap. 5.1). Clavius referiert nicht nur über die diesbezüglichen Bemühungen antiker Mathematiker sondern beschäftigt sich auch selbst mit dem Problem und beweist das 5. Postulat unter der Annahme, daß eine Linie, die zu einer Geraden konstanten Abstand hat, wieder eine Gerade ist.¹⁶

¹⁶Ein Blick auf die Kugeloberfläche hätte ihn belehren können, wie wenig denknötwendig dies ist: Die Kurven, die dort konstanten Abstand zu den geodätischen Großkreisen haben, sind Kreise aber keine Großkreise. Leider sind die weitgehenden Analogien zwischen der ebenen und der sphärischen Geometrie selten bewußt wahrgenommen worden.

Die gleiche Voraussetzung wie Clavius benutzt auch Guldin 1641 für seinen Beweisversuch. Nicht zufällig sind es häufig Jesuiten, die sich dieser Frage widmen. Spielt doch Euklid in ihrem Bildungssystem eine hervorragende Rolle als hohe Schule des scharfsinnigen Argumentierens. Danach beschäftigen sich bis zum Ende des 18. Jhs. viele Denker mit dem Problem, aber nur selten die führenden Mathematiker (Elementargeometrie war ja, wie erwähnt, bei ihnen aus der Mode gekommen), und wenn es doch geschah, blieben sie mit ihren „Beiträgen“ weit unter ihrem sonstigen Niveau, so z.B. Euler [Belyi 1968] oder Wallis. Bei letzterem gab es einen gewissen äußeren Zwang. Er hatte den von Sir Henry Savile, einem Amtsvorgänger in Oxford, gestifteten Lehrstuhl inne, und jener Savile hatte die Stiftung mit der Bedingung verknüpft, daß jeder Inhaber des Lehrstuhls sich mit den beiden zuerst von Savile als „naevi“, d.h. Makel, bezeichneten „schwachen Stellen“ der „Elemente“ zu beschäftigen habe. (Das ist außer dem Parallelenproblem der nach damaliger Ansicht unklare Begriff des Verhältnisses bei Euklid, lokalisiert besonders an der 6. Definition von Buch V und der 5. von Buch VI.) So hielt also auch Wallis öffentliche Vorlesungen über diese beiden Themen (im 2. Band seiner Mathematischen Werke gedruckt). Die Quintessenz seines Beweisversuchs von 1663 besteht darin, das 5. Postulat durch die Forderung zu ersetzen, daß es zu jedem Dreieck ähnliche (hier im Sinne von: in allen Winkeln übereinstimmende) Dreiecke von beliebiger Größe gibt (Deutsche Übersetzung in [Engel/Stäckel]). Immerhin klingt bei Wallis eine kritische Distanz zu der damals noch allgemeinen Auffassung an, die Axiome seien ausgezeichnet als keines Beweises fähige und auch keines Beweises bedürftige Sätze. Er schreibt: „Jedoch tadle ich ganz und gar nicht, daß Euklid keinen Beweis gegeben hat, vielmehr würde ich sogar nichts dagegen haben, wenn er noch mehr unbewiesene Forderungen aufgestellt hätte, z.B. wenn er (wie Archimedes) gefordert hätte, daß die gerade Linie unter allen Linien zwischen denselben Endpunkten die kürzeste sei. Dann hätte er nicht neunzehn Sätze vorauszuschicken gebraucht, ehe er bewies, daß zwei Dreiecksseiten zusammengenommen größer sind als die dritte und anderes, was an und für sich einleuchtend ist.“ (a.a.O. S. 29)

Girolamo Saccheri, auch ein Jesuit und Mathematikprofessor in Pavia, publizierte 1733 eine umfangreiche und relativ niveauvolle Schrift, die in ihrem Titel „Euclides ab omnino naevo vindicatus“ (Der von jedem Makel befreite Euklid) auf die Herausforderung Saviles Bezug nimmt. Hierin führte er die heute als Saccherisches Viereck (Abb. 6.4.1) bezeichnete Figur ein, worin $AB = CD$ und die Winkel bei B und C rechte sind, und knüpfte an sie drei mögliche Hypothesen, daß nämlich der in der Figur mit α bezeichnete Winkel spitz, stumpf oder ein rechter sein könne. Der letzte Fall ist zum Parallelenpostulat

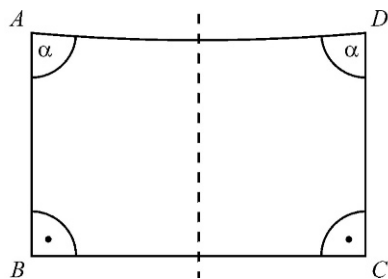


Abb. 6.4.1 Saccherisches Viereck

äquivalent (man erkennt den Zusammenhang zur Forderung, daß die Kurven konstanten Abstandes von einer Geraden selbst Geraden sein sollen), der zweite gilt auf der Kugeloberfläche, aber nachweislich in der Ebene nicht. Saccheri machte zwei mißglückte Versuche, die Hypothese des spitzen Winkels ebenfalls zum Widerspruch zu führen, entdeckte dabei aber bereits eine Reihe von Sätzen der späteren sogenannten absoluten Geometrie (d.h. derjenigen Sätze, die in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie gleichermaßen gelten, also unabhängig von der Verwendung oder Verwerfung des Parallelenpostulates sind).

Friedrich Engel und Paul Stäckel gebührt das große Verdienst, die am Ende des 19. Jhs. weitgehend in Vergessenheit geratene umfangreiche Vorgeschichte der dann endgültig anerkannten nichteuklidischen Geometrie wieder ins allgemeine Bewußtsein gerückt und die wichtigsten frühen Schriften, außer von Wallis vor allem von Saccheri und Lambert, wieder bekannt und in deutscher Übersetzung zugänglich gemacht zu haben. Ihre Bibliographie der Schriften zum Parallelenproblem umfaßt für den Zeitraum zwischen 1557 und 1800 über 100 Einträge (die aber sehr ungleichmäßig über den Zeitraum verteilt sind und sich gegen das Ende der genannten Zeit häufen), darunter die oben erwähnten, aber z.B. nicht die damals noch unbekannte von Euler. Eine wichtige Vorarbeit dazu war die von A. G. Kästner angeregte Dissertation von Georg Simon Klügel 1763 zur Geschichte des Parallelenproblems. Zu diesem Zeitpunkt war die wichtigste Arbeit, nämlich die von Lambert 1766 (posthum 1786 publiziert) noch gar nicht geschrieben, während Lambert die Dissertation von Klügel nicht nur gekannt hat, sondern wahrscheinlich gerade durch sie zu seiner eigenen Beschäftigung mit dem Problem angeregt worden ist.

Lambert führt eine ähnliche aber leichter zu handhabende Figur in die Betrachtung ein wie Saccheri, nämlich die in Abb. 6.4.2 gezeigte. Auch hier zeigt sich, daß die Annahme, α sei stumpf, mit den übrigen Axiomen der euklidischen Geometrie unverträglich, hingegen auf der Kugel erfüllt ist und daß

die Annahme, α sei ein rechter Winkel, zum Parallelenpostulat äquivalent ist. Auch Lambert versucht auf verschiedene Weise, seine „Hypothese des spitzen Winkels“ zum Widerspruch zu führen, ist aber im Unterschied zu allen seinen Vorgängern mit den Ergebnissen stets unzufrieden. Er treibt die Folgerungen aus der Hypothese des spitzen Winkels bis zu der Erkenntnis, daß der Flächeninhalt eines Dreiecks dann proportional zur Differenz zwischen der Winkelsumme und 180 Grad sein müßte, und vergleicht dies mit der Tatsache, daß auf der Kugel der Flächeninhalt eines Dreiecks gleich dem mit dem Radiusquadrat multiplizierten Überschuß der Winkelsumme gegen 180 Grad ist. Dann schreibt er: „Ich sollte daraus fast den Schluß machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor. [d.h. wenn man den Radius r der Kugel als rein imaginär annimmt, so daß r^2 negativ und aus dem Überschuß der Winkelsumme ein Defekt wird]. Wenigstens muß immer Etwas seyn, warum sie [die Hypothese des spitzen Winkels] sich bey ebenen Flächen lange nicht so leicht umstoßen läßt, als es sich bei der zwoten [Hypothese des stumpfen Winkels] thun ließ.“ [Engel/Stäckel, S. 203]

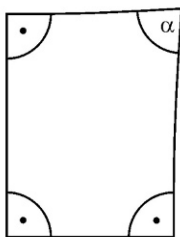


Abb. 6.4.2 Lambertsches Viereck

Mit der Bemerkung über die Gültigkeit der Hypothese des spitzen Winkels auf der Oberfläche einer Kugel von imaginärem Radius war Lambert in der Tat der nichteuklidischen Geometrie näher gekommen als Bolyai und Lobatschewski, die heute als die Begründer der nichteuklidischen Geometrie gelten, aber im Gegensatz zu Lambert nichts anderes zu bieten hatten als mehr oder weniger weit ausgearbeitete Folgerungen aus der Negation des Parallelenpostulats und ihre innere Überzeugung, daß diese Theorie keine logischen Widersprüche aufweist sondern lediglich mit der alltäglichen Erfahrung oder eher mit den anerzogenen Vorurteilen kollidiert. Lambert hätte dagegen ein *Modell* für diese Theorie gehabt, wenn er nur seiner Sache sicher gewesen wäre. Offenbar war er das nicht, denn er beschloß seine Bemühungen um einen Widerspruch an der zitierten Stelle keineswegs und ließ das Ganze bei Lebzeiten unveröffentlicht. Johann III Bernoulli publizierte das Manuskript 1786 als erstes einer Reihe

von Stücken aus dem Nachlaß Lamberts in dem nur kurzzeitig existierenden „Magazin für reine und angewandte Mathematik“, wo es offenbar keine Aufmerksamkeit erregte und in der folgenden Entwicklung der Dinge vollständig vergessen wurde. Der Herausgeber des „Magazins“, C. F. Hindenburg, gab seinerseits einen Kommentar: „Was behauptet wird, der Beweis von Euklid’s Grundsätze lasse sich leicht soweit treiben, daß das, was daran noch etwa zurück bleibt, nicht nur augenscheinlich richtig ist, sondern auch allen Anschein hat, daß es nachgeholt, und der Beweis dadurch ergänzt werden könne; habe ich, aus vielfältiger Erfahrung, etwas anders befunden, nemlich: Das, was etwa noch zu erweisen übrig ist, scheint anfangs eine *Kleinigkeit* zu seyn; aber diese anscheinende Kleinigkeit, soll sie nach aller Strenge berichtigt werden, ist, wenn man genauer nachsieht, immer die *Hauptsache* selbst; gewöhnlich setzt sie den Satz, oder einen ihm gleichgültigen [d.h. logisch äquivalenten] voraus...“ [Engel/Stäckel, S. 143]

Hindenburgs Sätze lassen etwas von den psychischen Qualen ahnen, die für die Beteiligten mit dem Ringen um dieses Problem verbunden waren und für die es in der Mathematik vor 1800 nichts Vergleichbares gibt. In späteren Zeiten treten solche Situationen immer öfter auf, man denke etwa an Cantors vergebliches Ringen um das Kontinuumproblem, an den langen Kampf um das Vierfarbenproblem (siehe Kap. 7.8) oder an die immer noch unbezwungene PNP-Problematik der Komplexitätstheorie.¹⁷ Um diesen Eindruck noch zu befestigen, sei schon hier eine Stelle aus einem Brief zitiert, den Wolfgang [ungar.: Farkas] v. Bolyai 1820 an seinen Sohn Johann schrieb, nachdem er erfahren hatte, daß auch dieser wie sein Vater sich mit dem Parallelenproblem beschäftigte. „Du darfst die Parallelen auf jenem Wege nicht versuchen; ich kenne diesen Weg bis an sein Ende — auch ich habe diese bodenlose Nacht durchmessen, jedes Licht, jede Freude meines Lebens sind in ihr ausgelöscht worden — ich beschwöre Dich bei Gott! laß die Lehre von den Parallelen in Frieden — Du sollst davor denselben Abscheu haben, wie vor einem liederlichen Umgang, sie kann Dich um all’ Deine Muße, um die Gesundheit, um Deine Ruhe und um Dein ganzes Lebensglück bringen.—...“ [Bolyai/Stäckel 1913, S. 76] (Dieses Schicksal wartete tatsächlich auf Johann v. Bolyai, im übrigen halte man dem etwas überschwänglichen Stil zugute, daß Vater Bolyai, eigentlich Mathematiklehrer, auch ein in seiner Heimat geschätzter Literat gewesen ist.)

¹⁷Dabei geht es um die Frage, ob eine algorithmisch lösbare Aufgabe, die von einem nichtdeterministisch arbeitenden System, welches also viele sich immer weiter verzweigende Möglichkeiten zeitlich parallel verfolgen kann, innerhalb einer polynomialen Zeitschranke (in Abhängigkeit vom Format der Eingabe) gelöst werden kann, auch von einem streng sequentiell arbeitenden System in polynomialer Zeit lösbar ist.

Zum Kapitel des vergeblichen Ringens um das Parallelenproblem gehört noch, daß Adrien-Marie Legendre in seinem 1794 erstmals erschienenen Lehrbuch „*Eléments de géométrie*“ einen Beweisversuch für das 5. Postulat unternahm, dessen Fehler er selbst kurz nach dem Erscheinen bemerkte, einen neuen Beweis für die nächste Auflage bastelte und dies sich bis zur 12. Auflage 1823 mehrmals wiederholte. Dabei fand Legendre verschiedene noch heute wichtige Zusammenhänge wie z.B. die beiden nach ihm benannten Sätze: 1. Unter Voraussetzung der vom 5. Postulat verschiedenen Axiome Euklids ist die Winkelsumme eines beliebigen Dreiecks stets kleiner oder gleich 180 Grad. (Heute weiß man, daß dazu auch das archimedische Axiom benötigt wird.) 2. Ist die Winkelsumme in irgendeinem Dreieck 180 Grad, so in jedem Dreieck. Außerdem konnte er z.B. ohne Parallelenpostulat beweisen, daß man zu jedem Dreieck und jeder beliebig kleinen positiven Fehlerschranke ϵ Dreiecke mit gleicher Winkelsumme konstruieren kann, bei denen die Summe der beiden Basiswinkel kleiner als ϵ ist. Diese Dreiecke werden also anscheinend beliebig flach, und es ist in der Tat sehr schwer vorstellbar, daß der dritte Winkel dann nicht gegen 180 Grad konvergieren muß, wie Legendre zu zeigen geglaubt hatte. ([Legendre 1844, S. 16], siehe Aufgabe 6.4.2.) Dies geschah in einem Milieu, in dem die führenden französischen Mathematiker den Standpunkt eingenommen hatten, daß man sich nicht mehr mit dem Beweis von Sätzen aufhalten solle, die jedermann ohne weiteres akzeptiere und deren Wahrheit durch Erfahrung gesichert sei. Clairaut schreibt 1741 in seinen „*Eléments de Géométrie*“: „Weitläufige Auseinandersetzungen über Dinge, bei denen von vornherein der gesunde Menschenverstand entscheidet, sind durchaus überflüssig und dienen nur dazu, die Wahrheit zu verdunkeln und die Leser abzuschrecken.“ (Deutsche Übersetzung nach [Engel/Stäckel, S. 153]) Also eine französische Anti-Euklid-Bewegung, die bis zu Dieudonné und den übrigen Bourbakisten, also bis in unsere Zeit, reicht!

Scheint demnach aus der Sicht vieler der produktivsten und im Geist ihrer Zeit arbeitenden Mathematiker des 17. und 18. Jhs. das Parallelenproblem entweder ganz bedeutungslos oder als ein Tummelfeld für Außenseiter, Laien und Spinner, so zeigt tieferes Eindringen in das schmerzhaft Ringen der Beteiligten, daß hier etwas grundsätzlich Neues ans Licht will, nämlich eine tiefere Einsicht in das Wesen des mathematischen Beweises, die erst gegen Ende des 19. Jhs. in die (selbst dann noch unvollständige und von nicht vielen Mathematikern voll verstandene) Erkenntnis des formalen Charakters der Mathematik, die Klärung der Begriffe Axiomensystem, Theorie, Struktur, Modell, Folgern, Unabhängigkeit usw. führte. Wir zitieren nochmals Lambert, der als Logiker und Methodologe hier weiter sah als seine Zeitgenossen. Hätten sie ihn nur

gelesen und verstanden! „Und da Euklid's Postulate und übrigen Grundsätze einmal mit Worten ausgedrückt sind, so kann und soll gefordert werden, daß man sich in dem Beweise nirgends auf die Sache selbst berufe, sondern den Beweis durchaus symbolisch vortrage — wenn er möglich ist. In dieser Absicht sind Euklid's Postulata gleichsam wie eben so viele algebraische Gleichungen, die man bereits vor sich hat, und aus welchen x, y, z & c herausgebracht werden soll, ohne daß man auf die Sache selbst zurück sehe.“ [Engel/Stäckel, S.162]

Die endgültige Lösung des Parallelenproblems im 19. Jh. war (trotz einiger Versuche von Lobatschewski) für die Anwendungen der Mathematik völlig bedeutungslos. Aber sie hatte den größten Anteil an der Erkenntnis des wahren Wesens der Mathematik — und dies bedeutete zugleich das Ende der Vorstellung, daß Mathematik eine Naturwissenschaft und insbesondere Geometrie die Lehre vom wahren und einzig möglichen physikalischen Raum sei. Wir kehren nochmals zur Analogie zum schmerzhaften Ringen um Kontinuumsproblem, Vierfarbenproblem und PNP-Problem zurück: Warum war das erstgenannte schmerzhaft? Weil die Mathematiker sich in der Folge von der lieb gewordenen Vorstellung verabschieden mußten, daß man die reellen Zahlen, die scheinbar so vertraute Urmaterie der klassischen Mathematik, jemals mit formalen Mitteln völlig eindeutig beschreiben könnte. Warum war das zweite schmerzhaft? Weil die Mathematiker einsehen mußten, daß es Probleme gibt, die grundsätzlich nicht auf eine „elegante“, d.h. von menschlichem Verstand überschaubare und in menschlicher Zeit ausführbare Weise gelöst werden können, obgleich sie lösbar sind, also ein Abschied von der lange gehegten Vorstellung, daß Wahrheiten letzten Endes immer einfach und schön sind, wenn man den richtigen Zugang zu ihnen gefunden hat. Warum ist das PNP-Problem schmerzhaft? Wir wissen es noch nicht, aber eines Tages wird es das Tor zu einer grundsätzlich neuen Erkenntnis öffnen, und dann werden wir es wissen.

Wesentliche Inhalte der Geometrie im 17. und 18. Jahrhundert

1591 – 1661	GIRARD DESARGUES: Begründung der projektiven Geometrie
1598 – 1647	BONAVENTURA CAVALIERI: „Geometria indivisib. . . “ (1635), Prinzip zur Flächen- bzw. Körperberechnung durch Zerlegung in „unendlich dünne“ Parallelschnitte
1596 – 1650	RENÉ DESCARTES: „La Géométrie“ (1637), Begründung der Koordinatengeometrie: Klassifikation von Kurven nach ihrer Erzeugung durch Bewegung
1602 – 1675	GILLES PERSONNE ROBERVAL: Methode beliebig kleiner Scheibchen zur Flächen- bzw. Volumenberechnung
1601 – 1665	PIERRE DE FERMAT: „Ad locos planos et solidos isagoge“ (1636), Einführung der Koordinatenmethode: Beschreibung ebener Punktmen-gen (Kurven) durch algebraische Gleichungen (in zwei Variablen), alge-braische Klassifizierung der Kegelschnitte, Fermatsches Prinzip
1613 – 1672	JAN DE WITT: Ausdehnung der Koordinatenmethode auf den drei-dimensionalen Fall
1623 – 1662	BLAISE PASCAL: „Essay pour les coniques“ (1640) Fortführung der pro-jektiven Geometrie, Satz von Pascal
1643 – 1727	ISAAC NEWTON: Parameterdarstellung und Klassifizierung von Kurven
1646 – 1716	GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ: Kurvengeometrie und Flächenberechnung mit infinitesimalen Methoden
1667 – 1733	GIRALOMO SACCHERI: „Euclides ab ommnio naevo vindicatus“ (1733): erste Ansätze zur nichteuklidischen Geometrie
1707 – 1783	LEONHARD EULER: „Introductio ad analysin infinitorum“ Bd. II (1748) (Anwendungen der Analysis auf die Geometrie), Abhandlungen über sphärische Trigonometrie und Kartenprojektionen
1713 – 1765	ALEXIS CLAUDE CLAIRAUT: Untersuchungen von Raumkurven, Mond- und Planetenbahnen
1718 – 1777	JOHANN HEINRICH LAMBERT: Annäherung an nichteuklidische Geome-trie, Schriften zur Perspektive, Zugang zur projektiven Geometrie
1746 – 1818	GASPARD MONGE: Entwicklung und Förderung der darstellenden und konstruktiven Geometrie

6.5 Aufgaben zu 6

Aufgabe 6.1.1: Dürers Muschellinie

- a) Man beschreibe Dürers Muschellinie durch eine Parameterdarstellung. Als Parameter bietet sich der von Dürer selbst gewählte (von ihm freilich, weil er die Kurve punktweise konstruiert, nur für äquidistante diskrete Werte), den wir mit t bezeichnen. Außerdem sei a der positive Abstand des Nullpunktes von t auf der x -Achse, b die Länge des die Kurve „erzeugenden Stabes“ (Abb. 6.5.1). Als Hilfsparameter (der nachträglich durch t ausgedrückt wird) empfiehlt sich der Winkel α zwischen Stab und x -Achse.

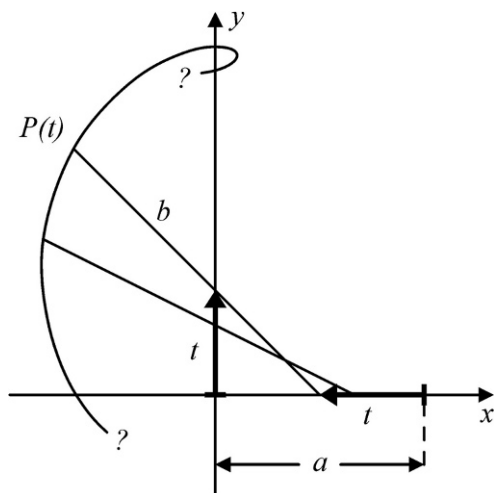


Abb. 6.5.1 Figur zu Aufg. 6.1.1

- b) Man zeige ohne Rechnung bzw. durch elementare Überlegungen, daß
- 1) das Maximum der y -Werte der Kurve b ist und genau für $t = a$ angenommen wird,
 - 2) die Kurve sich für $t \rightarrow \infty$ (gleichbedeutend mit $x \rightarrow -\infty$) asymptotisch der Geraden $y = b/2 \cdot \sqrt{2}$ und für $t \rightarrow -\infty$ (gleichbedeutend mit $x \rightarrow \infty$) der Geraden $y = -b/2 \cdot \sqrt{2}$ nähert, wobei sie in beiden Fällen darüber bleibt.
 - 3) Man bestimme in Abhängigkeit von a, b mittels der Ableitungen $x'(t)$ und $y'(t)$ diejenigen Kurvenpunkte, in denen die Muschellinie Tangenten hat, die zu einer der Achsen parallel sind.

Hinweis: In [Brieskorn / Knörrer 1981] wird Dürers Muschellinie auf S. 58 ebenfalls behandelt. Dort findet man auch Antwort auf die weitergehende Frage, wie sich die Kurve in Abhängigkeit vom variablen Verhältnis der Strecken a und b ändert. Dieses Verhältnis als zweite unabhängige Variable v ergibt eine „Muschelfläche“ über der xv -Ebene, aus der für jedes konstante v eine andere „Muschelkurve“ ausgeschnitten wird.

Aufgabe 6.2.1: Kugelvolumen nach Demokrit/Cavalieri

Man denke sich eine Halbkugel mit der Kreisfläche nach unten in einen Kreiszylinder mit gleicher Grundfläche eingebettet, dessen Höhe gleich dem Radius R ist (Abb. 6.5.2) Ein in beliebiger Höhe h ($0 < h < R$) geführter Schnitt durch den Differenzkörper Zylinder - Halbkugel, parallel zur Grundfläche, ergibt einen Kreisring mit dem äußeren Radius R und dem inneren Radius r . Man rechne nach, daß sein Flächeninhalt gleich dem Inhalt des Schnittkreises ist, den ein mit der Spitze nach unten in den Zylinder gesteckter Kreiskegel in dieser Höhe hat. Aus dem Prinzip von Cavalieri folgt daher, daß dieser Kegel und der Differenzkörper volumengleich sind.

Ist mithin das Volumen des Kegels ($1/3$ Grundfläche $\cdot$ Höhe) bekannt, so ergibt sich für die Halbkugel das Volumen $2/3$ Grundfläche $\cdot$ Höhe, d.h. $\frac{2}{3}\pi r^3$.

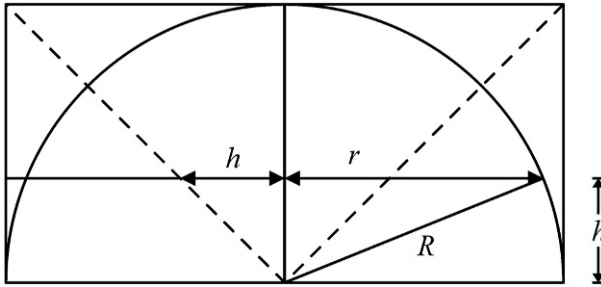


Abb. 6.5.2 Figur zu Aufg. 6.2.1

Aufgabe 6.2.2: Flächeninhalt unter einem Zykloidenbogen

Abb. 6.5.3 zeigt die Entstehung der gemeinen Zykloide durch Abrollen eines Kreises auf einer Geraden.

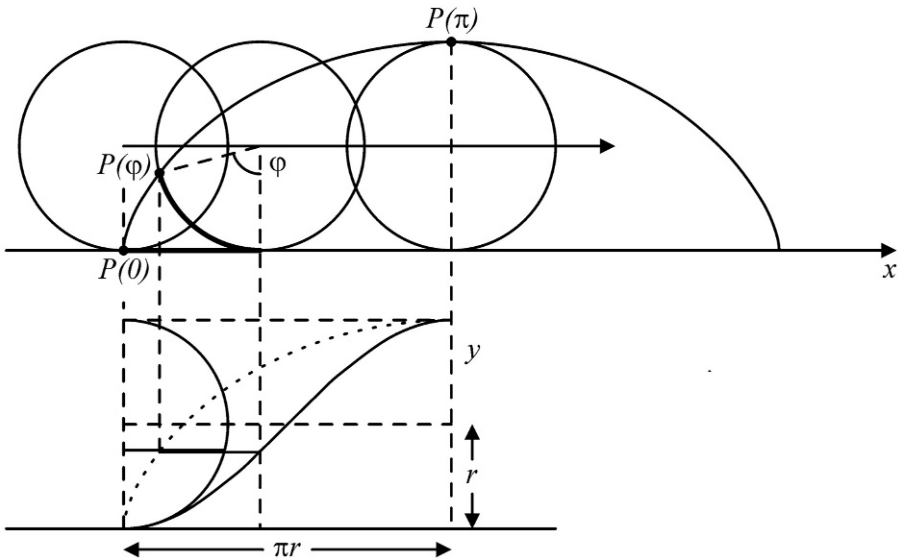


Abb. 6.5.3 Figur zu Aufg. 6.2.2

- Man beschreibe die Kurve durch eine Parameterdarstellung, wobei als Parameter der eingezeichnete Rollwinkel φ dienen soll.
- Roberval dachte sich die Bewegung, wie im unteren Teil des Bildes angedeutet, aus einer reinen Sinusschwingung um die waagerechte Bahn des Mittelpunktes und einer Auslenkung des Bahnpunktes nach hinten bzw. nach Überschreiten

des höchsten Punktes nach vorn zusammengesetzt. (Diese Methode, Bahnkurven durch Überlagerung verschiedener Bewegungen zu erklären, ist charakteristisch für Roberval.) Da die Auslenkung in Richtung der Grundgeraden für jeden Parameterwert $r \sin \varphi$ beträgt, ist nach dem Prinzip von Cavalieri (bzw. Roberval) die keulenförmige Korrektur, die man an der Fläche unter der Sinuskurve anbringen muß, gleich der Fläche des Halbkreises. Die Fläche unter der Sinuskurve beträgt aber aus Symmetriegründen (das unter der Geraden $y = r$ links fehlende Stück ist kongruent dem rechts überstehenden Stück) $\pi \cdot r^2$, folglich die Fläche unter dem Zyklidenbogen zwischen Anfang und Scheitel $\frac{3}{2}\pi r^2$ und die Fläche unter dem gesamten Bogen ($0 < \varphi < 2\pi$) wieder aus Symmetriegründen das Doppelte davon.

- c) Man löse die gleiche Aufgabe kalkülmäßig durch Integralrechnung und vergleiche das Ergebnis. Robervals Weg ist „heuristisch“, aber er enthüllt den Grund für das überraschend glatte Ergebnis.

Aufgabe 6.2.3: Fermats Aufgabe, Torricelli-Punkt

Wir studieren Fermats Aufgabe, zu n gegebenen Punkten $P_i (i = 1, \dots, n)$ den Punkt P_0 zu bestimmen, für den die Summe f der Abstände P_0P_i minimal wird, zunächst für beliebiges n und im k -dimensionalen euklidischen Raum.

- a) Man stelle die zu minimierende Abstandssumme f als Funktion der k Koordinaten $x_1, \dots, x_k$ eines variablen Punktes P dar und bilde die k partiellen Ableitungen. Aus der notwendigen Bedingung für einen Extremwert ergibt sich, daß der gesuchte Punkt P_0 höchstens dort liegen kann, wo entweder alle diese Ableitungen verschwinden oder wenigstens eine der Ableitungen nicht existiert. Letzteres tritt ein, wenn P gleich einem der Punkte P_i ist. Die erstere Bedingung führt darauf, daß die Vektorsumme der von P nach den Punkten P_i gerichteten Einheitsvektoren Null sein muß.
- b) Die Existenz des gesuchten Minimalpunktes ergibt sich daraus, daß die $(k-1)$ -dimensionalen Teilmengen derjenigen Punkte P , für die die Abstandssumme einen konstanten Wert s hat, mit wachsendem s gegen eine $(k-1)$ -dimensionale Sphäre streben, deren Mittelpunkt inmitten der gegebenen endlichen Punktmenge liegt. Man mache sich dies für den Fall $k = 2$ anschaulich klar. (Die Kurven konstanter Abstandssumme s nähern sich in diesem Fall für großes s immer mehr der Kreisform.) Da die k -dimensionale „Fast-Kugel“ aller P mit der Abstandssumme $\leq s$ abgeschlossen und beschränkt ist, muß die stetige Funktion f dort ein absolutes Maximum haben (das überall auf dem Rand angenommen wird) und daher im Innern ein absolutes Minimum.
- c) Die in a) ermittelte notwendige Bedingung besagt in der Ebene ($k = 2$) für $n = 2$, daß der gesuchte Punkt nur auf der Strecke P_1P_2 liegen kann (Natürlich erfüllt jeder Punkt der Strecke die Bedingung.); für $n = 4$, daß der gesuchte Punkt nur auf dem Schnittpunkt der Diagonalen liegen kann, falls es einen solchen gibt, d.h. falls die vier gegebenen Punkte ein konvexes Viereck aufspannen bzw. daß es derjenige der vier gegebenen Punkte sein muß, der im Innern des von den drei anderen aufgespannten Dreiecks liegt. Für den Fall $n = 3$, den Fermat

zunächst nur im Auge hatte, besagt die in a) gefundene Bedingung, daß die drei Einheitsvektoren ein gleichseitiges Dreieck aufspannen müssen, d.h.

- (*) die vom gesuchten Punkt zu den Ecken des Dreiecks $P_1P_2P_3$ gezogenen Strecken müssen paarweise den gleichen Winkel von 120 Grad einschließen.

Für $n > 4$ bzw. im Fall $k > 2$ schon für $n > 3$ hat das geschlossene Polygon aus n Einheitsvektoren noch zu viele „Freiheitsgrade“, als daß die von der Differentialrechnung gelieferte notwendige Bedingung irgendwelchen nützlichen Aufschluß über die Lage des gesuchten Punktes geben könnte. (Man findet ihn jedoch für praktische Zwecke approximativ sehr gut, indem man von einem geschätzten Startpunkt schrittweise in Richtung des größten Gefälles der Abstandssumme voranschreitet.)

- d) Im Fall der Ebene nicht so trivial wie $n = 2, 4$, aber elementar lösbar, ist der Fall $n = 3$. Für diese ursprüngliche Aufgabe Fermats fanden Cavalieri und Torricelli schon kurz nach ihrem Bekanntwerden (durch Mersenne) unabhängig voneinander schöne Lösungen. Dazu gehört auch die Aufklärung, daß der seitdem so genannte „Torricelli-Punkt“ des Dreiecks $P_1P_2P_3$ nur dann in dessen Innerem liegt, wenn alle Winkel des Dreiecks kleiner als 120 Grad sind. Andernfalls, insbesondere im Fall der Kollinearität, ist derjenige der drei Punkte, in dem das eventuell sogar ausgeartete Dreieck zu flach ist, selbst der Torricelli-Punkt. Man beweise dies. Abb. 6.5.4 zeigt diejenige Lösung der Fermatschen Aufgabe, die am leichtesten zu begründen und konstruktiv am leichtesten zu realisieren ist. Man finde die entsprechende Konstruktion und Rechtfertigung.
- e) Hier ein Hinweis, wie man die notwendige Bedingung (*) aus c) ohne Differentialrechnung finden kann: Wenn eine Ellipse mit den Brennpunkten P_1, P_2 einen Kreis um P_3 schneidet, kann keiner der Schnittpunkte der Minimalpunkt sein, weil man längs der Ellipse in den Kreis hineingelangt und dabei den Abstand zu P_3 verkleinert, während die Abstandssumme nach P_1 und P_2 konstant bleibt. Also kann der Minimalpunkt nur dort liegen, wo eine solche Ellipse und ein solcher Kreis sich berühren. Da diese Überlegung auch für jede andere Teilung der drei Punkte in einen Kreismittelpunkt und zwei Ellipsenbrennpunkte gilt, folgt die Gleichheit der drei Winkel. Zur weiteren, bis heute spannenden und aktuellen Geschichte des von Fermat in Gang gesetzten Problems und der umfangreichen Literatur dazu siehe [Schreiber 1986]. Erst 1988 wurde bewiesen, daß der Torricelli-Punkt zu mehr als vier Punkten in der Ebene aus diesen im allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist [Baja] 1988]. Ein sehr viel einfacherer Beweis dafür und für die analoge Aussage im Fall $k = 3, n = 4$ wurde kürzlich von S. Mehlhos (Jena) gefunden. Siehe dazu Aufgabe 7.3.6.
- f) Eine leichte Modifikation der oben skizzierten Idee ergibt, daß der Torricelli-Punkt von vier Punkten des Raumes, die ein nicht zu flaches Tetraeder aufspannen, nur dort liegen kann, wo sich ein Rotationsellipsoid um zwei der Punkte (als Brennpunkte der rotierenden Ellipse) und ein Rotationsellipsoid um die beiden anderen Punkte berühren. Wie Mehlhos zeigte, lassen sich die Koordinaten dieses Punktes allerdings im allgemeinen schon nicht mehr durch quadratische

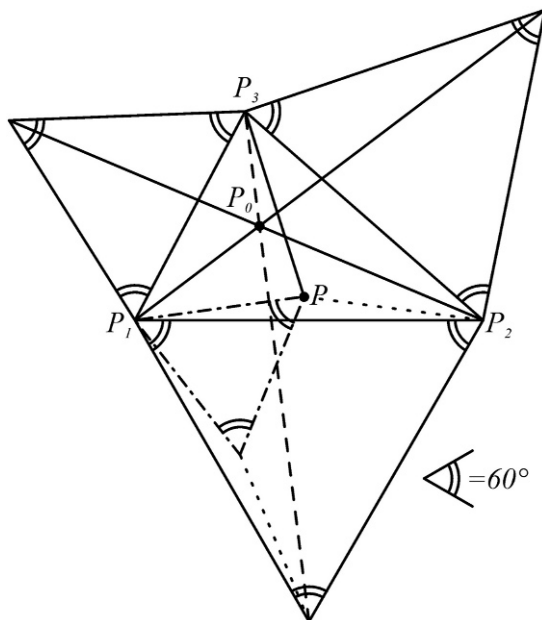


Abb. 6.5.4 Figur zu Aufg. 6.2.3

Radikale darstellen, d.h. die Koordinaten des Punktes sind aus den gegebenen Punkten nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

- g) Man beweise, daß der Torricelli-Punkt von n Punkten, die eine (Spiegel- oder Zentral-)Symmetrie besitzen, auf der Symmetrieachse bzw. im Raum auf der Symmetrieebene, bzw. auf dem Zentrum der Symmetrieabbildung liegen muß.

Aufgabe 6.2.4: Konstruktion der Hauptkrümmungskreise einer Ellipse

- a) Aus der allgemeinen Formel für die Krümmungsradien einer ebenen, durch eine Parameterdarstellung gegebenen Kurve leite man die Krümmungsradien einer Ellipse in den Scheitelpunkten ab.

- * b) Man überlege sich, wie man diese Krümmungskreise bei gegebener Lage der Scheitelpunkte zweckmäßig mit Zirkel und Lineal konstruieren kann. (Für Ellipsen mit nicht zu großer Exzentrizität genügt in der Regel ein geringer Ausgleich nach Augenmaß zwischen diesen Kreisbögen, um sie für die meisten Zwecke, etwa in der darstellenden Geometrie, hinreichend exakt zu zeichnen.)

* **Aufgabe 6.2.5:** Abplattung der Erde

Die beiden laut 6.2.4 erhaltenen Gleichungen für die Hauptkrümmungsradien einer Ellipse in Abhängigkeit von den Halbachsen a, b lassen sich leicht nach a und b auflösen. Hierauf beruhte die durch die Gradmessungsexpeditionen der Pariser Akademie 1735/37 nach Südamerika (Lacondamine, Bouguer) und Lappland (Maupertuis,

Celsius) bestimmte Abplattung des Erdellipsoids. Indem man den zu einer Breiten-
differenz von z. B. einem Grad auf einem Meridian gehörigen Bogen einerseits am
Äquator und andererseits am Nordpol geodätisch mißt, erhält man (in Abwandlung
des Verfahrens von Eratosthenes) die Radien der Hauptkrümmungskreise. Da die
Abplattung nicht sehr stark ist und sich die Krümmung in der Nähe der Scheitel
nur langsam ändert, kann man die in größtmöglicher Nähe des Nordpols bzw. des
Äquators gemessenen Werte als gute Näherung für die genauen Hauptkrümmungen
nehmen. Man unterwerfe die durchgeführten Rechnungen auch einer Fehleranalyse,
wie es seinerzeit schon Celsius getan hat, um unberechtigten Vorwürfen der Car-
tesianer entgegenzutreten, die zugunsten der cartesischen Theorie vom verlängerten
Rotationsellipsoid die Ergebnisse der Expeditionen anzweifeln.

* **Aufgabe 6.3.1:** Lamberts Perspektograph

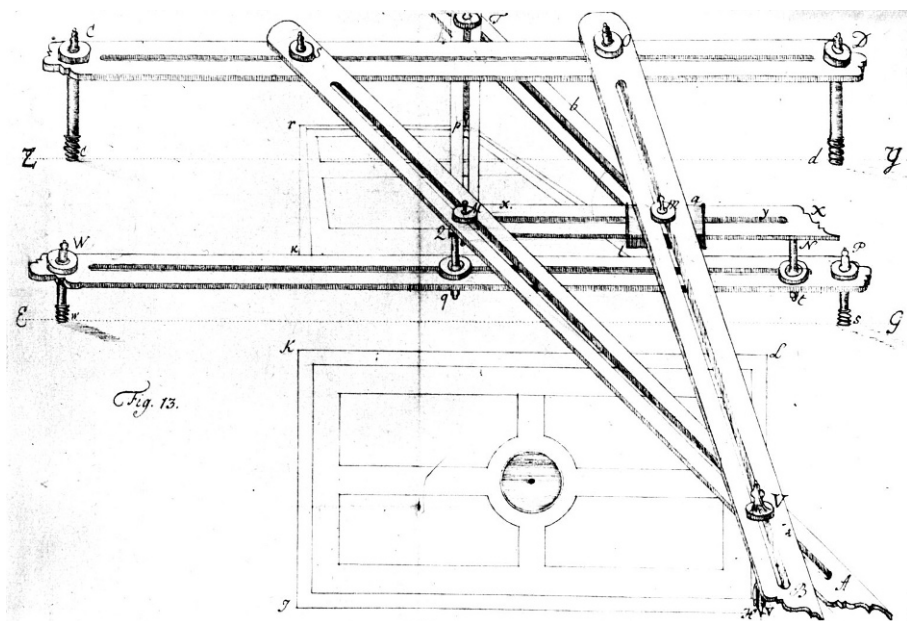


Abb. 6.5.5 Figur zu Aufg. 6.3.1: Lamberts Zeichnung des Perspektographen [Lambert/Steck, Tafel IX nach S. 176.]

- Abb 6.5.5 zeigt Lamberts Zeichnung des von ihm erfundenen Perspektographen aus dem Jahre 1752. Man verwandle diese „technische Zeichnung“ in eine Darstellung des geometrischen Prinzips und erkläre daran die Wirkungsweise.
- Wie könnte man ein in Lamberts Zeichnung enthaltenes Detail, das die Gleichheit zweier variabler, aber stets zueinander senkrechter Strecken sichert, zur Komplettierung von Dürers Apparat für die Zeichnung der Muschellinie nutzen?

* **Aufgabe 6.3.2:** Reliefperspektive und der Satz von Desargues

Abb. 5.3.6 zeigt das Prinzip der Reliefperspektive. Nach Wahl einer Frontebene und einer dazu parallelen Fluchtebene sowie eines Augpunktes A in dem der Fluchtebene abgewandten Halbraum bezüglich der Frontebene wird der Halbraum hinter der Frontebene umkehrbar eindeutig auf die Schicht zwischen Front- und Fluchtebene abgebildet, so daß der Bildpunkt $f(P)$ jedes Punktes P des Urbildhalbraumes auf dem Sehstrahl von A nach P liegt und daher im Auge den gleichen Eindruck hervorruft wie P . Dabei hat jede Schar von parallelen Geraden g einen gemeinsamen Fluchtpunkt F_g in der Fluchtebene, in dem die Bilder der parallelen Geraden zusammenlaufen. Will man bei gegebenem Punkt P den Bildpunkt $f(P)$ zwischen Front- und Fluchtebene oder bei gegebenem Bildpunkt Q den Urbildpunkt P mit $f(P) = Q$ konstruieren, so geschieht dies durch willkürliche Wahl eines Fluchtpunktes F_g auf der Fluchtebene bzw. äquivalent durch willkürliche Wahl eines Punktes P_0 auf der Frontebene. Man überlege sich, wie der Nachweis, daß der jeweils konstruierte Punkt unabhängig von dieser Auswahl ist, zwangsläufig auf den (im allgemeinen räumlichen Fall gültigen) Satz von Desargues führt, wobei die uneigentliche Schnittgerade von Front- und Fluchtebene als Perspektivitätsachse und der Bildpunkt $Q = f(P)$ als Perspektivitätszentrum auftreten. Vom Standpunkt der projektiven Geometrie würde sich nichts ändern, wenn man eine im Endlichen gelegene Gerade als Perspektivitätsachse wählt, d.h. man könnte den Halbraum hinter der Frontebene auch auf ein keilförmiges Relief zwischen Front- und Fluchtebene abbilden.

Da die praktische Anwendung der Reliefperspektive zur Zeit von Desargues in Blüte stand, ist es nicht ausgeschlossen (aber leider auch nicht nachweisbar), daß Desargues gerade durch die oben skizzierte Überlegung zu seinem Satz geführt wurde.

Aufgabe 6.4.1: Defekt von Dreiecken als Inhaltsmaß

Unter der Annahme, daß die Winkelsumme von Dreiecken kleiner oder höchstens gleich 180 Grad ist, sei der Defekt eines Dreiecks die Differenz 180 Grad - Winkelsumme des Dreiecks. Kongruente Dreiecke haben dieser Definition zufolge natürlich den gleichen Defekt. Man beweise, daß dann gilt:

- a) Ist das Dreieck D durch eine Transversale (von einem Eckpunkt zu einem Punkt der gegenüberliegenden Seite) in zwei Teildreiecke D_1, D_2 zerlegt, so ist $\text{Defekt}(D) = \text{Defekt}(D_1) + \text{Defekt}(D_2)$.
- b) Gibt es also überhaupt Dreiecke mit positivem Defekt, so gibt es beliebig große Dreiecke und beliebig kleine Dreiecke mit positivem Defekt.
- c) Da folglich jedes Dreieck ein Teildreieck mit positivem Defekt enthält, hat nach a) jedes Dreieck einen positiven Defekt. Wegen der Invarianz des Defektes bei Bewegungen und der Additivität (a) kann der Defekt als Maß des Flächeninhalts dienen. Dazu hat man lediglich eine Eichung auszuführen, d.h. für ein beliebig zu wählendes Dreieck den Inhalt 1 festzusetzen.

* **Aufgabe 6.4.2:** Legendres Pseudobeweis für die Winkelsummen von 180° (Nach Legendre 1823)

Sei ABC ein beliebiges Dreieck und dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

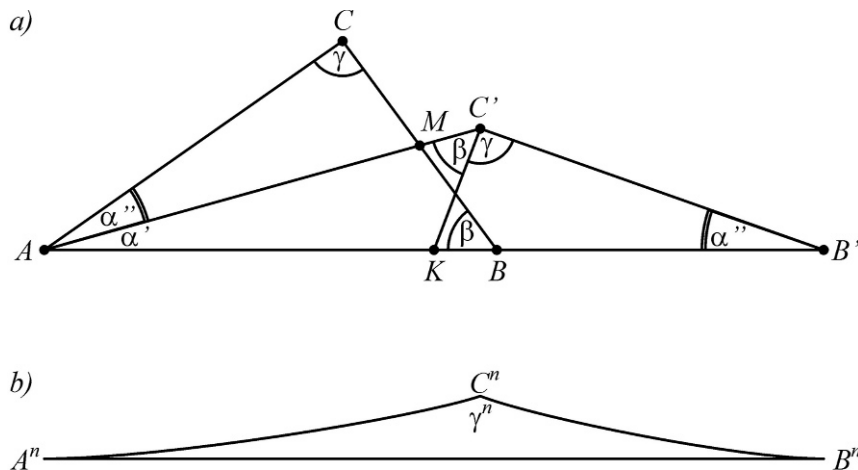


Abb. 6.5.6 Figur zu Aufg. 6.4.2

$BC \leq AC \leq AB$. Nach Euklids Elementen, I.18, kann man hieraus ohne Benutzung des 5. Postulats schließen $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Man konstruiere M als Mittelpunkt von BC, C' auf dem Strahl AM so, daß $AC' = AB, K$ so auf AB , daß $AK = AM$, und B' als Verdopplung von AK über K hinaus (Abb. 6.5.6a). Der Leser beweise nun unter alleiniger Verwendung von Dreieckskongruenzsätzen (die vom Parallelenspostulat unabhängig sind), daß die in der Abbildung eingezeichneten, jeweils gleich bezeichneten Winkel wirklich gleich sind. Daraus ergibt sich, daß die Winkelsumme von Dreieck $AB'C'$ gleich der Winkelsumme von Dreieck ABC ist. Da ferner $B'C' = AC \leq AB = AC'$, folgt wieder aus I.18, angewendet auf Dreieck $AB'C'$, daß $\alpha' \leq \alpha''$ und folglich $\alpha' \leq \frac{1}{2}\alpha$ ist. Indem man also diese Konstruktion hinreichend oft wiederholt, bekommt man Dreiecke $A^n B^n C^n$, so daß für die zugehörigen Winkel gilt

$$\alpha^n + \beta^n = \alpha^{n-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \alpha.$$

Legendre glaubte hieraus schließen zu können, daß der Punkt C^n gegen die Gerade AB konvergieren muß, wenn die Summe der beiden Basiswinkel gegen Null konvergiert, und daher der Winkel γ^n dann gegen 180 Grad konvergieren müsse. Da die Winkelsumme bei der gesamten Prozedur konstant bleibt, müsse also schon im Anfangsdreieck die Winkelsumme 180 Grad sein. In Wahrheit nehmen jedoch in der nichteuklidischen Geometrie die Dreiecke $A^n B^n C^n$ die in Abb. 6.5.6b gezeigte Form an, wobei ihr Anfangsdefekt erhalten bleibt, d.h. wenn die Summe der beiden Basiswinkel hinreichend klein wird, strebt der Winkel γ gegen die Differenz von 180 Grad und dem Defekt des Anfangsdreiecks.

7 Neue Wege der Geometrie im 19. Jahrhundert



Das 19. Jahrhundert ist ein großes Jahrhundert der Geometrie, der Entdeckungen und Erfindungen in Naturwissenschaften und Technik, aber auch des Kolonialismus und sozialer Spannungen

1810	Gergonne's Annales de mathématiques: erste moderne math. Fachzeitschrift
1813	Völkerschlacht bei Leipzig beendet Napoleons Vorherrschaft in Europa
1815	Wiener Kongreß
1822	Ch. Babbage stellt die erste programmgesteuerte Rechenmaschine zur Tabellierung von Polynomen dritten Grades fertig
1822	J.N. Niepce erfindet die Photographie
1825	Gründung des Polytechnikums Karlsruhe
1825	Erste Eisenbahn in England (Stephenson)
1826	Erster Mehrfarbdruck (A. Senefelder)
1833	Elektromagnetischer Telegraf von Gauß und Weber
1838	F.W. Bessel, F.G.W. Struve und T. Henderson messen fast gleichzeitig die ersten Fixsternparallaxen
1851	Erste Weltausstellung in London
1854	Elektrische Glühbirne (H. Goebel)
1862	Gesellschaft der tschechischen Mathematiker und Physiker: erste nationale Vereinigung von Mathematikern
1863	Londoner Untergrundbahn
1869	Eröffnung des Suezkanals
1871	Erster Band vom „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ erscheint
1874	Cantors erste Veröffentlichung zur Mengenlehre
1875	Internationale Meterkonvention
1880	Beginn elektrischer Beleuchtung
1884	Internationale Vereinbarung des Nullmeridians von Greenwich
1895	Röntgen entdeckt die X-Strahlen
1896	Becquerel entdeckt die Radioaktivität
1897	Erster internationaler Mathematikerkongreß (Zürich)

7.0 Vorbemerkungen

Mit der Wende vom 18. zum 19. Jahrhundert änderten sich sowohl der Charakter der Mathematik als auch ihre äußeren Bedingungen grundlegend. Allgemeiner Hintergrund ist die um 1770 beginnende Industrialisierung. Aber auch die politischen Erschütterungen Europas durch die Französische Revolution und die nachfolgenden Napoleonischen Kriege, die bürgerliches Gedankengut in fast jeden Winkel Europas trugen, spielten dabei eine große Rolle. Neben die lokalen und nationalen Akademien traten die in vielen Ländern entstehenden höheren technischen Bildungsanstalten als Orte, an denen forschend und lehrend Mathematik getrieben wurde. Die philosophischen Fakultäten der klassischen Universitäten, die jahrhundertlang nur als Vorstudienanstalten für das Studium der Theologie, Medizin oder Rechtswissenschaft gedient hatten, erhielten eine neue Funktion als Bildungsstätten für Lehrer der höheren allge-

meinbildenden Schulen, was insbesondere in der Mathematik zur Aufstockung der Professorenstellen und im Laufe des 19. Jhs. zur Herausbildung des Status des Privatdozenten sowie zur Gründung von Instituten und Seminaren führte. In Preußen wurde 1866 eine Prüfungsordnung für Lehramtskandidaten erlassen, die ausdrücklich forderte, daß der angehende Mathematiklehrer in die Lage versetzt werden müsse, selbst wissenschaftlich in den Hauptgebieten Geometrie, Analysis und Mechanik zu arbeiten. Es wurden viele Zeitschriften gegründet, oft im Zusammenhang mit lokalen und gegen Ende des Jhs. auch schon nationalen Verbänden und Gesellschaften von Mathematikern. Latein als internationale Wissenschaftssprache wurde sehr schnell durch das Publizieren in der jeweiligen Landessprache abgelöst. Da dies aber, abgesehen von einer verbreiteten Kenntnis des Französischen, nicht von einem allgemeinen Aufschwung des Fremdsprachenunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen begleitet war und wegen des in dieser Zeit stark ausgeprägten Nationalismus eine (mehr oder weniger stillschweigende) Einigung auf eine überall gängige moderne Fremdsprache (wie sie für uns wieder ganz selbstverständlich ist) zu dieser Zeit außerhalb jeder politischen Möglichkeit lag, wirkte die rapide Zunahme der Zahl produktiver Mathematiker mit den sich plötzlich auftürmenden Sprachbarrieren derart zusammen, daß sich im 19. Jh. wie in keiner anderen Periode davor oder danach Mehrfachentdeckungen, kaum überschaubare Parallelentwicklungen und daraus resultierende Prioritätsstreitigkeiten häuften. Eine internationale Verständigung über den Fortschritt der Wissenschaft wurde bis etwa 1870 allein durch viele, oft schon kurz nach dem Erscheinen des Originals herausgegebene Übersetzungen von Büchern und durch einige wenige sprachbegabte und -interessierte Mathematiker in Gang gehalten. Z.B. las der Ire Hamilton mühelos Englisch, Französisch, Deutsch und mehrere orientalische Sprachen. Gauß lernte noch im Alter Russisch. Ab 1871 erschien das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ (erstes Berichtsjahr 1868) als erstes mathematisches Referateorgan. Eine Untersuchung über die internationale Wirksamkeit dieser rein deutschen Publikation scheint es noch nicht zu geben.

Während die Mathematiker noch bis gegen Ende des 18. Jhs. meist außer der gesamten (und ohne besondere Reflektion darüber als Einheit empfundenen) Mathematik auch deren wichtigste Anwendungsgebiete überblickten und bearbeiteten, entwickelte sich im 19. Jh. sehr schnell ein Spezialistentum innerhalb der Mathematik, das nur noch von wenigen hervorragenden Wissenschaftlern wie Gauß, Cauchy, Jacobi, Jordan oder Poincaré durchbrochen wurde. Geometrie ist während des gesamten 19. Jhs. nach allgemeiner Einschätzung neben Analysis das Hauptgebiet der Mathematik und seinerseits sehr stark ver-

zweigt. Einige ihrer Teildisziplinen sind stark vernetzt mit anderen Zweigen der Mathematik oder auch mit außermathematischen Anwendungsbereichen, Differentialgeometrie zum Beispiel mit Analysis, Geodäsie, Physik, dem allgemeinen (letztlich sogar philosophischen) Raumproblem, aber nach wie vor auch mit darstellender Geometrie und deren Anwendungen in Bauwesen und Maschinenbau.

Bis ins 19. Jh. bestand mathematischer Elementarunterricht aus Rechnen und, je nach Land und Schulart, mehr oder weniger weit getriebenem Studium der „Elemente“ Euklids. Noch 1773 betonte der nicht unbedeutende Hallenser Mathematikprofessor J. A. Segner in seinem Vorwort zu einer lateinischen Schulausgabe der „Elemente“ die Rolle der Geometrie nach Euklid für die Schulung des logischen Denkens und der mündlichen und schriftlichen Ausdrucksfähigkeit in den klassischen Sprachen (siehe [Schreiber 1987, S. 124]), und an der Universität Edinburgh wurden in Unkenntnis der Arbeiten von Bolyai und Lobatschewski zur nichteuklidischen Geometrie noch um die Mitte des 19. Jhs. weitreichende Schlüsse aus der Negation des Parallelenpostulats als bloße Studentenübung im streng logischen Schließen veranstaltet [Kelland 1843, 1864]. Auch B. Bolzano beginnt seine „Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie“ (Prag 1804) mit den Sätzen: „Es ist nicht unbekannt, daß die Mathematik nebst dem ausgebreiteten Nutzen, den ihre Anwendung auf das praktische Leben gewährt, auch noch einen zweyten kaum geringern, obgleich nicht so in die Sinne fallenden Nutzen durch Übung und Schärfung des Verstandes, durch eine wohlthätige Beförderung einer gründlichen Denkart liefern könne; einen Nutzen, welchen der Staat vornehmlich beabsichtigt, wenn er das Studium dieser Wissenschaft von jedem Akademiker verlangt.“ Das in der Tat an den Universitäten der Habsburger Monarchie noch um 1840 für alle Studienanfänger obligatorische mathematische studium generale bereitete der Mehrheit der so beglückten Studenten große Qualen. Man lese dazu den im Anhang abgedruckten Abschnitt aus den Memoiren des deutsch-böhmischen Schriftstellers Alfred Meißner.

Inzwischen hatte die aufstrebende Reformpädagogik geometrische Anschauung als wichtiges Bildungsinstrument entdeckt. Ohne daß hier auf Einzelheiten eingegangen werden kann, sei auf die Schriften von J. H. Pestalozzi, J. F. Herbart, F. Fröbel und A. Diesterweg verwiesen. Während aber Fröbel das Betrachten und in die Hand Nehmen einfacher geometrischer Körper forderte, ließ Diesterweg die Unterrichtsräume sogar verdunkeln, um die Vorstellungskraft zu steigern. Derartige pädagogische Meinungsverschiedenheiten strahlten auch auf die forschenden Geometer aus, z.B. über Jakob Steiner, der als Schüler und Anhänger Pestalozzis ein besonders streitbarer Vertreter der nun

im Gegensatz zur „analytischen“ als „synthetisch“ bezeichneten Stilrichtung innerhalb der Geometrie war, oder über H. G. Graßmann und B. Riemann, die stark von Herbart beeinflusst waren. Während die „Analytiker“ die Allgemeinheit der durch den algebraischen und den differentiellen Kalkül erzielten Ergebnisse und die Eleganz der Herleitung hervorhoben, kritisierten die „Synthetiker“ die damit einhergehende Vernachlässigung des konkreten Falles und der geometrischen Anschauung. Gauß, der im ganzen eher zu den Analytikern gezählt werden muß, schrieb 1813 in einer Besprechung der dritten französischen Auflage von Monges „Géométrie descriptive“:

„In der Tat hat man vorzüglich die Untersuchungen ...[über räumliche Geometrie] in neuern Zeiten lieber mit Hülfe der Analysis behandelt, und sie so gleichsam der Geometrie entzogen, welche sich nur der unmittelbaren Anschauung bedient. Es ist auch nicht zu läugnen, dass die Vorzüge der analytischen Behandlung vor der geometrischen, ihre Kürze, Einfachheit, ihr gleichförmiger Gang, und besonders ihre Allgemeinheit, sich gewöhnlich um so entschiedener zeigen, je schwieriger und verwickelter die Untersuchungen sind. Inzwischen ist es doch immer von hoher Wichtigkeit, dass auch die geometrische Methode fortwährend cultiviert werde. ... Aus diesen Gründen sieht man mit Vergnügen, dass einige Französische Geometer in den letzten Jahrzehnten angefangen haben, den Theil der Geometrie, welcher sich mit den Verhältnissen von Punkten und Linien, die nicht in einer Ebene liegen, von verschiedenen Ebenen gegen einander,... als eine besondere Disciplin unter dem Namen der *Géométrie descriptive* zu cultivieren. Dem vorliegenden Werke über diese Wissenschaft müssen wir insbesondere das Lob einer grossen Klarheit und Concision im Vortrage, eines wohlgeordneten Überganges vom Leichtern zum Schwerern und der Reichhaltigkeit an neuen Ansichten und gelungenen Ausführungen beilegen, und daher das Studium desselben als eine kräftige Geistesnahrung empfehlen, wodurch unstreitig zur Belebung und Erhaltung des echten, in der Mathematik der Neuern sonst manchmal vermissten, geometrischen Geistes viel mit beigetragen werden kann.“ [Gauß' Werke, Bd. IV, S. 359f]

Zu erwähnen ist die unübersehbare Zahl von Geometrie-Lehrbüchern für Handwerker und Techniker der verschiedensten Richtungen (siehe dazu im Anhang den Text von F. Wolff), aber auch die Entstehung der großen Modellsammlungen an verschiedenen Hochschulen, die, nachdem sie in den mittleren Jahrzehnten des 20. Jhs. für lange Zeit verachtet und verstaubt waren, sich heute wieder zunehmender Wertschätzung erfreuen [Fischer 1986, Böhm/Quaisser 1991]. Ihre Anfänge liegen in Frankreich, wo die seit Monges Zeiten geschaffenen geometrischen Anschauungsmaterialien, soweit sie dem Zahn der Zeit

standgehalten haben, heute zu den in Pariser Museen gehüteten nationalen Reliquien gehören. So bietet die Geometrie des 19. Jhs., von weitem betrachtet, ein gespaltenes Bild zwischen immer schwerer lesbaren, abbildungslosen, und sich weit von jeder Anschauung entfernenden Druckseiten voller Formeln einerseits und einer immer ausgefeilteren Kultur des Darstellens und Modellierens andererseits.

Während die mathematischen Inhalte bis zum Ende des 18. Jhs. „allgemeinverständlich“ sind, birgt jeder Versuch, die Geschichte der Mathematik oder eines ihrer Zweige über diesen Punkt hinaus zu führen, die Gefahr, entweder zu viel Sachwissen beim Leser vorauszusetzen oder in die Darstellung der sich entwickelnden mathematischen Inhalte derart abzugleiten, daß die historische Sicht dabei verlorenggeht. Hinzu kommt, daß einige Entwicklungen, die aus der damaligen Perspektive Randerscheinungen waren, im 20. Jh. zu wichtigen neuen Theorien und Anwendungen geführt haben, während vieles, was im 19. Jh. im Zentrum des Interesses stand, inzwischen aus der Mode gekommen, als technisches Spezialwissen aus der Mathematik ausgegliedert oder durch innermathematische oder technische Fortschritte bedeutungslos geworden ist.

7.1 Darstellende und angewandte Geometrie

Einer der wenigen Orte, wo wenigstens anfangs und unter dem überwältigenden Einfluß von Monge analytische und synthetische Geometrie friedlich miteinander kooperierten, scheint das Paris des beginnenden 19. Jhs. zu sein. Dabei ist zu bedenken, daß Monge selbst auf Grund seiner vielen Ämter und häufiger langer Abwesenheit (u.a. 1796/97 in Italien, 1798/99 in Ägypten) seine Lehrtätigkeit nach 1789 nur sporadisch ausgeübt hat und sich außerdem neben der Mathematik intensiv mit Chemie beschäftigte. Seine trotzdem reichen Beiträge sowohl zur analytischen als auch zur synthetischen Richtung der Geometrie flossen meist bald in seine ständig verbesserten und neu aufgelegten Lehrbücher ein, wobei auch hier vieles von seinen Schülern ausgearbeitet und hinzugefügt wurde. Monges Lebenswerk birgt viele Perlen, die heute zur „geometrischen Folklore“ gehören (d.h. niemand erinnert sich mehr, woher sie kommen), so z.B. den Begriff des Leitkreises eines Kegelschnittes, der es gestattet, alle Kegelschnitte unter einem ganz anderen als dem algebraischen oder projektiven Standpunkt als verwandt anzusehen (Aufg. 7.1.1). Nach 1805 ließ seine mathematische Produktivität rasch nach. M. Chasles, selbst Absolvent der École Polytechnique, schreibt 1837: „Es pflanzt sich noch die Erzählung in der polytechnischen Schule fort, dass Monge in unerhörtem Grade verstanden habe, die zusammengesetztesten Formen der Ausdehnung im Raum deutlich zu machen und ihre allgemeinen Relationen und ihre verstecktesten Eigen-

schaften zu versinnlichen, ohne eine andere Hülfe als die seiner Hände, deren Bewegungen wunderbar seinem Willen folgten und immer begleitet waren von einer wahrhaften Beredsamkeit des Sprechers, von Präcision, von Reichthum und Tiefe der Ideen.“ [Chasles 1837, deutsch 1839, S. 205].

Zur von Monge begründeten Schule zählt eine lange Reihe bekannter Namen: Meusnier, Hachette und L. Carnot (die ältesten Schüler, noch aus der Zeit in Mézières), E. Bobilier, Ch. Brianchon, B. Brisson, Ch. Dupin, S. F. Lacroix, G. Lamé, Th. Olivier, L. Poincot, J. V. Poncelet, um nur die wichtigsten und ausgesprochenen Geometer dieser auch sonst an glanzvollen Namen reichen Zeit zu nennen. Auch J. Gergonne, der 1810 die nach dem Journal der École Polytechnique erste öffentliche mathematische Zeitschrift Frankreichs, „Annales des mathématiques pures et appliquées“, gründete, bezeichnete sich selbst als Schüler von Monge, obwohl er nicht in Paris studiert hatte. Seine Zeitschrift wurde schnell zum Hauptorgan des von Monge begründeten Stils, der analytische Methoden nicht verschmähte, jedoch das Schwergewicht auf Anschaulichkeit und außerdem auf Praktikabilität legte. In Paris spielten neben der schon mehrfach erwähnten, 1794 gegründeten École Polytechnique und der Universität die École Normale supérieure (spezialisiert auf Lehrerbildung), die École des Ponts et Chaussées (Brücken und Straßen), die École des Arts et Métiers (etwa den deutschen höheren Gewerbeschulen entsprechend) und die École des Mines (svw. Bergakademie) eine Rolle als Pflegestätten der Geometrie. Die meisten bedeutenden französischen Mathematikprofessoren unterrichteten nach 1789 gleichzeitig an mehreren dieser Anstalten, wobei sie zum Teil durch „Adjunkten“ (Hilfsprofessoren) und Assistenten unterstützt und vertreten wurden. Vor allem Monge, Carnot und Poncelet konnten sich infolge ihrer militärischen bzw. Staatsämter nur zeitweilig der Mathematik widmen.

Brisson und Hachette gaben ab 1811 mehrere überarbeitete und erweiterte Auflagen der hauptsächlichen Lehrbücher von Monge (außer der „Darstellenden Geometrie“ die unter verschiedenen Titeln erschienene „Anwendung der Analysis auf die Geometrie“) heraus. Brisson erweiterte die „Géométrie descriptive“ um Anhänge über Zentralperspektive und Schattenkonstruktion. Letztere diente damals nicht vorrangig künstlerischen Zwecken (obwohl schon Monge an passenden Stellen seiner Vorlesungen immer auch auf den Nutzen der darstellenden Geometrie für die Künstler hinweist), sondern sollte vor allem die Verständlichkeit bzw. Suggestivität technischer Zeichnungen verbessern (Abb. 7.1.1). Olivier begründete den Bau geometrischer Modelle. Hachette machte sich besonders verdient um die Anwendung der darstellenden Geometrie im technischen Zeichnen des Maschinenbaus. Alternativen zu dem von Monge bevorzugten Verfahren zugeordneter Normalrisse enthält vor allem

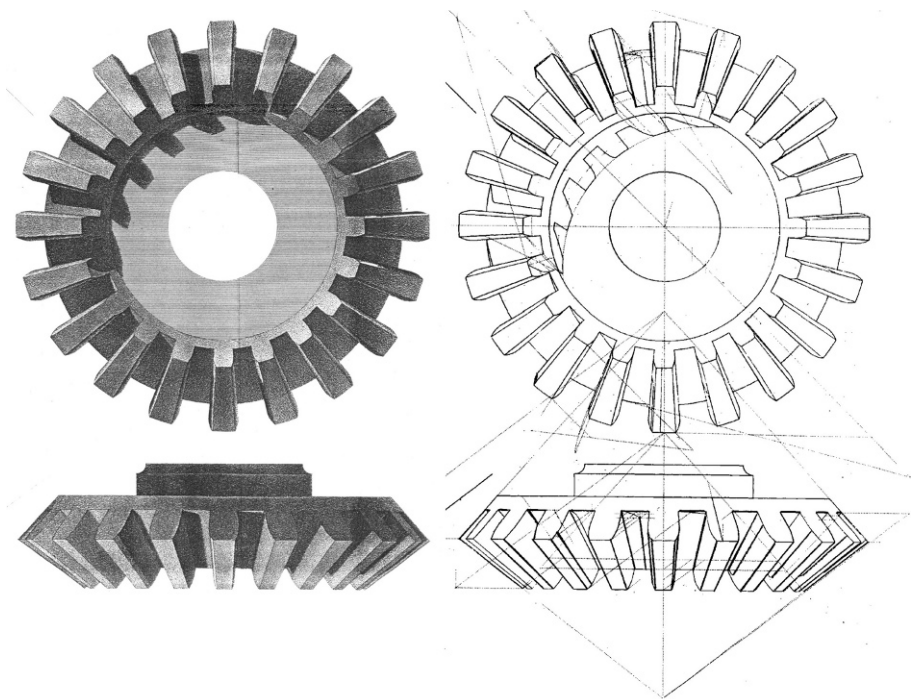


Abb. 7.1.1 Kegelzahnrad in Grund- und Aufriss mit exakt konstruierten Schatten
 [Wolff 1840: Die beschreibende Geometrie und ihre Anwendungen. Leitfaden für den Unterricht am Kgl. Gewerbe-Institut Berlin]

die „Géométrie perspective“ (1828) des Ingenieurs B. E. Cousinery, der sich einerseits enger an die Zentralperspektive anlehnt, andererseits die Grundgebilde des Raumes mehr symbolisch repräsentiert, einen Punkt P z.B. durch einen orientierten Kreis in der Bildebene, dessen Mittelpunkt der Lotfußpunkt von P ist, dessen Radius den Abstand von P zur Bildebene und dessen Umlaufssinn die Halbebene (bzw. das Vorzeichen) dieses Abstandes „kodiert“. (Diesen Ansatz entwickelte W. Fiedler in Deutschland 1882 zur „Zyklographie“.) Als Spezialfall tritt bei Cousinery in diesem Zusammenhang erstmals der Distanzkreis in der Zentralperspektive auf, bei dem die Lage des Augpunktes zur Bildebene durch einen Kreis dargestellt wird, dessen Mittelpunkt der Hauptpunkt und dessen Radius die Augdistanz ist. Bei einer anderen, von der Zentralperspektive abgeleiteten Darstellung repräsentiert Cousinery Ebenen durch ihre Schnittgerade mit der Bildebene und ihren „Horizont“ bezüglich eines außerhalb der Bildebene fixierten Augpunktes A (d.h. die Schnittgerade der durch A gelegten Parallelebene mit der Bildebene) und verfährt analog mit

den Geraden des Raumes. Derartige Ideen haben, obwohl sie zeitweise in den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie, z.B. von Müller-Kruppa und Kramers, breiten Raum einnahmen, keine dauerhafte Rolle in den Anwendungen erlangt, jedoch die Idee des später sogenannten „Übertragungsprinzips“ vorbereitet, dessen Wesen darin besteht, geometrische Sätze durch Uminterpretation der beteiligten Objekte zu beweisen. (Man betrachte z.B. Aufgabe 7.1.3 unter diesem Gesichtspunkt!).

Ausbreitung der darstellenden Geometrie

Daß der mächtige Strom der Geometrie in Frankreich um die Mitte des 19. Jhs. zu versiegen begann, daß die Mehrzahl der bedeutenden französischen Mathematiker sich dann anderen Gebieten der Mathematik zugewandt hatte, ist wohl hauptsächlich darin begründet, daß die große Vielzahl von Einzelergebnissen und von Anwendungen dort nicht mehr durch ordnende neue Theorien gebändigt werden konnte und daß anderserseits die starke Mongesche Tradition die Hinwendung zu den Fragen der nichteuklidischen Geometrie oder der inneren Differentialgeometrie behinderte. M. Chasles, der selbst wichtige Beiträge vor allem zur projektiven Geometrie geleistet hat, schrieb 1837 am Ende seines berühmten, schon 1839 als „Geschichte der Geometrie“ ins Deutsche übersetzten „Aperçu historique...“: „In der alten Geometrie standen die Wahrheiten isoliert, neue waren schwierig zu erdenken oder zu erschaffen, und nicht jeder Geometer, der es wollte, konnte Erfinder werden. Gegenwärtig kann jeder irgendeine Wahrheit aufnehmen ... und sie den verschiedenen allgemeinen Principien unterwerfen,... so daß man die Zahl der neuen Wahrheiten beinahe bis ins Unendliche vervielfältigen kann.“ (a.a.O., S. 267)

Die Lehre der darstellenden Geometrie breitete sich rasch in Europa aus. In St. Petersburg z.B. wurde 1809 die erste russische technische Hochschule als Institut der Ingenieure für Verkehrswege (Straßen-, Brückenbau usw.) gegründet und der Unterricht in darstellender Geometrie durch Faber und Potier, zwei aus Paris importierte Schüler von Monge, aufgenommen. Faber schrieb 1816 in Französisch das erste für Rußland bestimmte Lehrbuch darüber, das noch im gleichen Jahr von Sewastjanow ins Russische übersetzt wurde. (Sewastjanow schrieb später selbst Lehrbücher und gilt heute in Rußland als eine Art „russischer Monge“.) Das erste deutsche Lehrbuch der darstellenden Geometrie stammt von dem Karlsruher Oberbaudirektor F. Weinbrenner (1810). 1828 folgte das viel gehaltvollere Buch von Guido Schreiber in enger Anlehnung an Monge. Weitere umfangreiche Lehrbücher stammen u.a. von Ludwig Burmester (auch über Beleuchtungsgeometrie und Kinematik), Karl Wilhelm Pohlke und Christian Wiener (1884). Letzteres enthält eine detailreiche Darstellung

der historischen Entwicklung. Weitere Zentren der darstellenden und angewandten Geometrie bildeten sich in den Ländern Österreich-Ungarns (Wien, Graz, Prag, Brünn u.a.) und in Italien. Monges Hoffnung und Wunsch, die darstellende Geometrie möge nicht nur ein wesentliches Hilfs- und Verständigungsmittel der Technik sondern auch auf Dauer ein fruchtbares Gebiet der Mathematik werden, erfüllte sich jedoch nicht. Sie geriet sehr schnell in die Hände von Spezialisten, die kaum noch Kontakt zu anderen Zweigen der Mathematik und daher weder die Chance noch die Fähigkeit hatten, noch offene Probleme unter neuen und allgemeinen Gesichtspunkten zu behandeln. Äußerlich zeigt sich diese — aus heutiger Sicht allzu frühe — Ausgliederung der darstellenden Geometrie aus der Mathematik darin, daß sie häufig neben der Mathematik als eigenständiges Lehr- oder Prüfungsfach geführt wird, aber auch in vielen eigentümlichen Begriffen und Fachausdrücken, die schlecht mit denen der übrigen Mathematik harmonieren.

Darstellende Geometrie im 19. Jh. umfaßte außer den Mehrtafel-Verfahren und der Zentralperspektive die verschiedenen Formen der Parallelprojektion (auch Axonometrie genannt), die Rekonstruktion des räumlichen Urbilds aus zwei Zentralprojektionen (später als Photogrammetrie bezeichnet), die Reliefperspektive und die Beleuchtungsgeometrie. Die Anfänge der Photogrammetrie finden sich schon bei Lambert, Monge behandelt sie in seinen Vorlesungen bereits im Hinblick auf die praktische Anwendung bei Geländeaufnahmen aus der Luft. (Man erinnere sich, daß ab 1783 in und bei Paris die ersten bemannten Ballonaufstiege stattfanden.) Die Anfänge der Beleuchtungsgeometrie gehen bis in die erste Hälfte des 18. Jhs. zurück (P. Bouguer, Lambert, dann Monge). Ihre zentralen Begriffe sind der der Isophote (Kurve gleicher Beleuchtungsstärke auf einer krummen Fläche bei gegebener Zentral- oder Parallelbeleuchtung) und der der Isophenge (Kurve gleicher scheinbarer Helligkeit, zusätzlich abhängig von einem angenommenen Betrachterstandpunkt). Während die Beleuchtungsgeometrie zunächst dazu dienen sollte, Bilder noch realistischer zu gestalten, fand sie später auch verschiedene Anwendungen in Physik und Technik, z.B. bei der optimalen Ausleuchtung von Räumen oder der gleichmäßigen Trocknung von lackierten Oberflächen. Für eine detailliertere Geschichte dieses Zweiges verweisen wir auf [Bohne/Möller 1989].

Interessante Ansätze einer Denkweise, die sich dann hauptsächlich in ganz anderen Gebieten der Mathematik (als Fehlerrechnung, Intervallmathematik, Stabilität) entfaltet hat, findet man bei der Anwendung der Perspektive in der Malerei und Theaterdekoration, zuerst in einem Lehrbuch von De la Gournerie (1859). Hier wird z. B. untersucht, in welchem Bereich das Betrachterauge variiert werden kann, ohne daß die Verzerrungen beim Betrachten einer Perspekti-

ve ein gegebenes Maß überschreiten. De la Gournerie hat anscheinend auch als erster darauf aufmerksam gemacht, daß die richtige Deutung eines zentralperspektiven Bildes von Zusatzinformationen über die abgebildeten Gegenstände abhängt (man also z.B. schon weiß, daß gewisse Strecken gleich lang, gewisse Winkel 90 Grad, gewisse Flächen waage- oder senkrecht, gewisse Objekte zusammenhängend sind). Derartige Spuren, von der klassischen Geschichtsschreibung der Mathematik meist als unwesentlich übergangen, gewinnen aus der Sicht moderner wissenschaftlicher Fragen (Bildauswertung, künstliche Intelligenz) neues Gewicht und Interesse.

Ein Glanzpunkt aus mathematischer Sicht ist der Satz von Pohlke oder „Fundamentalsatz der Axonometrie“. Er wurde 1853 von Karl Wilhelm Pohlke gefunden, der damals Privatdozent für darstellende Geometrie bzw. Perspektive an der Bauakademie und der Kunstakademie in Berlin war (ab 1860 Professor), aber erst 1860 von ihm publiziert. Dieser Satz hat seitdem immer wieder die Aufmerksamkeit von Mathematikern (darunter so prominente wie H. A. Schwarz 1864) auf sich gezogen, teils wegen seiner theoretischen und praktischen Bedeutung, teils wegen der Schwierigkeit, ihn relativ elementar zu beweisen.¹⁸ Die tiefe Kluft zwischen Mathematik und darstellender Geometrie zeigt sich auch darin, daß dieser vom theoretischen Standpunkt hochinteressante und eigentlich unverzichtbare Satz in den meisten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie nicht einmal erwähnt, geschweige denn bewiesen wird. Er besagt, daß man zu jedem echt zweidimensionalen Dreiein $OE_1E_2E_3$ (d.h. die Vektoren OE_i spannen die Bildebene auf) ein räumliches kartesisches Dreiein und eine Projektionsrichtung angeben kann, so daß das gegebene ebene Dreiein die Parallelprojektion des räumlichen ist. Dieser Satz liefert somit die Rechtfertigung für das bei axonometrischen Handskizzen übliche Vorgehen, die Bilder von drei zueinander paarweise senkrechten Würfelkanten willkürlich bzw. nach „Gefühl“ zu wählen. Egal, wie man dies tut, der Satz von Pohlke sagt, daß es immer eine Blickrichtung gibt, aus der der Würfel genau so aussieht.

Weitere Zweige der angewandten Geometrie

Zu den ausgesprochen angewandten Richtungen der Geometrie, deren Entwicklung charakteristisch für das 19. Jh. ist, zählen außer der darstellenden Geometrie im oben beschriebenen Umfang die Kartographie und Geodäsie sowie Teile der Optik und Mechanik. Die Optik entfernte sich durch ihre physikalische Weiterentwicklung weit von ihren klassischen Beziehungen zur

¹⁸Einen sehr anschaulichen neueren Beweis gab [Salenius 1978] (siehe Aufgabe 7.1.2).

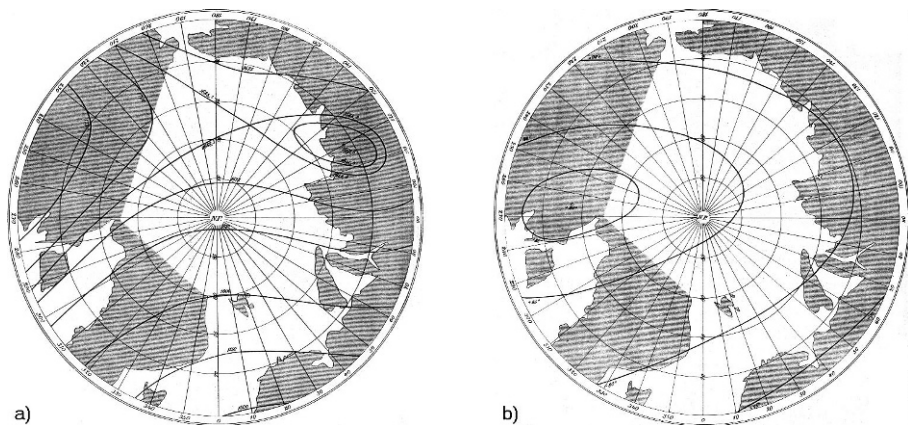


Abb. 7.1.2 Karten für die berechneten Werte der Inclination

[Atlas des Erdmagnetismus, hrsg. von C. F. Gauß und W. Weber, Leipzig-London-Paris-Stockholm-Mailand-St. Petersburg 1840 (= Gauß Werke, Bd. XII)]

Geometrie und nutzte nun vorrangig Analysis als mathematisches Hilfsmittel. Die Entdeckung und technische Ausnutzung von Doppelbrechung, Polarisaton und Beugung belebte dafür außerordentlich das Interesse an Kristallographie und verwandten Fragen der regelmäßigen räumlichen Anordnung (mehr darüber in 7.9.). Geodäsie und Kartographie verloren ihren elementargeometrischen Charakter und kamen in immer engere Beziehung zur Differentialgeometrie. (Einiges davon wird in 7.4 zur Sprache kommen.) Die Theorie der winkeltreuen (seit Gauß als „konform“ bezeichneten) und flächentreuen Abbildungen wurde im wesentlichen in die heute übliche Form gebracht. Außer weiteren Netzentwürfen (u.a. von Mollweide, Gauß-Krüger, Tissot und Hammer) wurden auch neue Themen für die Kartographie erschlossen. Besonders beeindruckend aus geometrischer Sicht ist vielleicht der von Gauß und Weber 1840 herausgegebene Atlas des Magnetfeldes der Erde, weil hier erstmals die Komponenten eines komplizierten räumlichen Vektorfeldes graphisch dargestellt wurden (Abb. 7.1.2). Die enge Bindung der detaillierten geodätischen und kartographischen Erschließung der Erde an astronomische und mathematische Hilfsmittel führte dazu, daß die ersten Lehrstühle für Geodäsie und sogar zum Teil für Geographie, die Ende des Jhs. an deutschen Hochschulen eingerichtet wurden, zunächst mit Mathematikern besetzt wurden (z.B. Hermann Wagner 1880 für Geographie Göttingen, Ernst Hammer 1884 für Geodäsie TH Stuttgart, Siegmund Günther 1886 für Geographie TH München).

Im Schoße der Mechanik entwickelte sich der Vektorbegriff (darüber in 7.6), die Lehre von der Hintereinanderausführung von Bewegungen, (darüber in

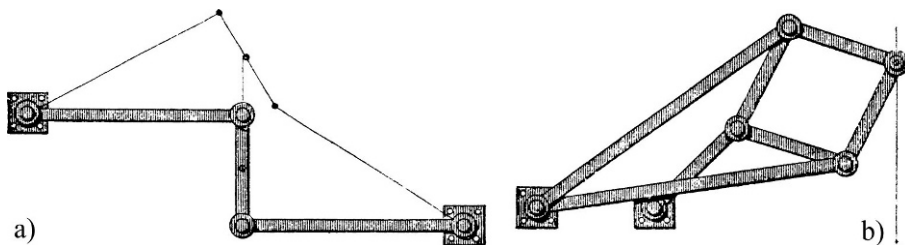


Abb. 7.1.3 Geradföhrungen von a) Watt (1784), b) Peaucellier (1864).

Watts Mechanismus liefert nur eine innerhalb gewisser Grenzen annähernd gerade Bewegung, Peaucelliers Mechanismus stellt die historisch erste exakte Lösung des Problems dar (Aufgabe 7.1.4). Später wurde gezeigt, daß es auch exakte Lösungen aus fünf (statt wie bei Peaucellier sieben) Teilen gibt und daß eine exakte Lösung mit weniger als fünf beweglichen Teilen unmöglich ist [Kempe 1877, S. 9, 12].

7.7), die graphische Statik (vor allem L. Cremona in Italien) und die Theorie der Mechanismen. Letztere begann mit Einzelfragen und ihrer Lösung wie z.B. dem von James Watt in Zusammenhang mit der Dampfmaschine 1784 erfundenen Geradföhrungs- Mechanismus (Abb. 7.1.3 und Aufgabe 7.1.4). Was schon seit der Renaissance zum Zwecke des Zeichnens spezieller Kurven mittels Mechanismen erfunden worden war, floß nun mit den neuen Bedürfnissen des Maschinenbaues, Bauteile längs vorgeschriebener Bahnen zu bewegen, zu Theorieansätzen zusammen, die u.a. von Poncelet in Frankreich, von Tschebyschew in Rußland und J. J. Sylvester in Großbritannien entwickelt wurden. Eine schöne populärwissenschaftliche Einführung in diese Art „Kinematik“, die viel vom Zeitgeist widerspiegelt, ist [Kempe 1877]. Einige Ingenieurwissenschaftler gerieten wegen ihrer Versuche, die Maschinenlehre weitgehend zu mathematisieren, in heftige Kritik ihrer Fachgenossen. Hier sei stellvertretend Franz Reuleaux genannt, der auch in der reinen Geometrie durch seine Entdeckung bekannt wurde, daß es außer dem Kreis zahlreiche weitere ebene Figuren von konstanter Breite gibt, besonders einfach das „Reuleaux-Dreieck“ (Abb. 7.1.4), das allerdings Euler schon 1778 in den Acta der Petersburger Akademie veröffentlicht hatte, räumliche Analoga zeigt z.B. [Fischer 1986]).

7.2 Projektive und synthetische Geometrie

Carnots erstes Buch „De la corrélation des figures de géométrie“ erschien 1801. Eine erweiterte Fassung von 1803 unter dem Titel „Géométrie de position“ gilt als sein geometrisches Hauptwerk. Da man den Titel als „Geometrie der Lage“ übersetzen kann, was dem später zu besprechenden Titel von Christian v. Staudts Begründung der projektiven Geometrie entspricht, ist sein Beitrag häufig in einen so eng sachlich nicht gerechtfertigten Bezug zur Entstehung der

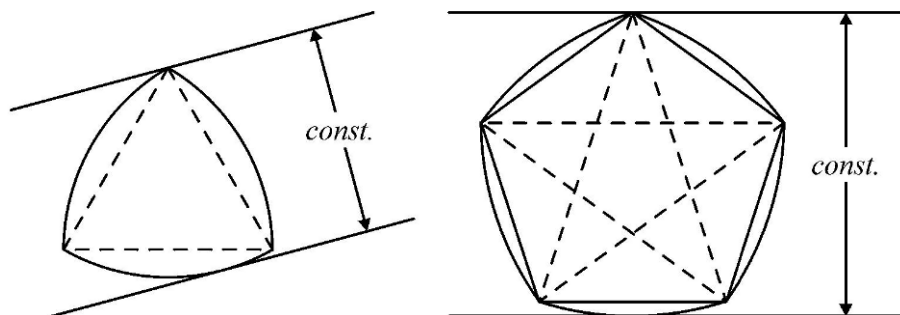


Abb. 7.1.4 Reuleaux-Dreieck und eine weitere Orbiform (Figur konstanter Breite)

projektiven Geometrie gerückt worden. Carnots Anliegen war jedoch ein anderes, das man grob umschreiben könnte als Versuch einer Verschmelzung oder Versöhnung der anschaulich geometrischen Denkweise mit dem algebraischen Kalkül der Koordinatenmethode. Vor allem versuchte er, die bei der analytischen Behandlung geometrischer Sachverhalte auftretenden negativen oder sogar komplexen Größen geometrisch zu interpretieren und stellte sich zu diesem Zweck Figuren in Bewegung gesetzt und stetig ineinander überführt vor. (Die gedankliche Nähe zu Euklids Porismen hob er selbst hervor.) Zwei Figuren stehen in einer Korrelation, wenn die eine durch eine stetige Veränderung (was von Carnot natürlich nicht exakt definiert wird) in die andere überführt werden kann. Bewegt man z.B. eine Gerade, die einen Kreis schneidet, aus dem Kreis fort, so verschmelzen die beiden Schnittpunkte zunächst zu einem Punkt, was sich algebraisch in der Doppellösung der Gleichung für die Schnittpunkte widerspiegelt, und anschließend werden die beiden Lösungen dieser Gleichung komplex. Carnot versucht nun, die Nullstellen auch in diesem Fall als „Kodierung“ der gegenseitigen Lage von Kreis und Gerade zueinander zu deuten. So kommt er Schritt für Schritt zur geometrischen Deutung von negativen und manchmal auch schon komplexen Zahlen. Angeregt waren derartige Fragestellungen möglicherweise durch die Art, wie Monge nach dem Zeugnis seiner Schüler schon sehr früh in seinen Vorlesungen immer wieder den Begriff der Potenzgeraden zweier Kreise als Beispiel für ein Phänomen herausgestellt hatte, das seine ursprüngliche anschauliche Bedeutung als Gerade durch die beiden Schnittpunkte zweier Kreise zunächst verliert, wenn diese Kreise sich nicht mehr schneiden, das aber durch richtige Deutung der Gleichung der Potenzgeraden auch für diesen Fall eine rein geometrische Deutung bekommen kann (Aufgabe 7.2.1). Carnot polemisierte gegen negative Größen und wollte sie durch ein algebraisches (wir würden heute vielleicht eher sagen: aussagenlogisches) Operieren mit Begriffen wie Durchlaufungssinn, Umlaufssinn, Orien-

tierung, innen - außen usw. ersetzen, was sich aber in der Durchführung sehr schwerfällig gestaltete und letzten Endes keine historische Wirkung gezeigt hat. Zusammenfassend kann man sagen, daß Carnots Gedanken nur sehr indirekt (in Gestalt seiner kollinearen Korrelationen und der zu ihrer Bestimmung benutzten Koordinaten) die Entstehung der projektiven Geometrie beeinflusst, dafür aber die allgemeine Idee der geometrischen Abbildung, der Invarianten bei einer Abbildung und der gruppentheoretischen Struktur von Abbildungsfamilien vorbereitet haben.

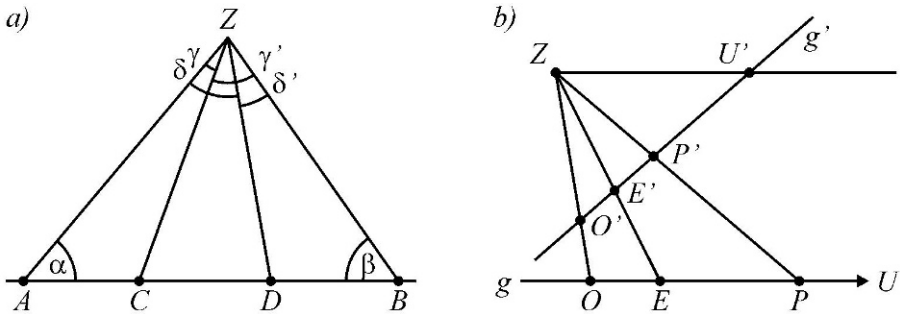


Abb. 7.2.1 Invarianz des Doppelverhältnisses

a) Nach dem Sinussatz der ebenen Trigonometrie ist $CA : CZ = \sin \gamma : \sin \alpha$, $CZ : CB = \sin \beta : \sin \gamma'$, also $(1) CA : CB = \sin \gamma \cdot \sin \beta : \sin \alpha \cdot \sin \gamma'$, analog $(2) DA : DB = \sin \delta \cdot \sin \beta : \sin \alpha \cdot \sin \delta'$. Dabei hat man sich die Strecken CA, CB, DA, DB und folglich die entsprechenden Sinuswerte in der Weise als gerichtet bzw. vorzeichenbehaftet vorzustellen, daß CA, CB gleiches Vorzeichen haben, wenn sie gleichgerichtet sind, also C außerhalb der Strecke AB liegt. Daher ist das Teilverhältnis $(A, B; C) = CA : CB$ positiv, wenn C außerhalb, aber negativ, wenn C innerhalb AB liegt. Für $C = A$ ist es Null, für $C = B$ nicht definiert. Das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)$ der vier (auf einer gemeinsamen Geraden liegenden) Punkte A, B, C, D ist definiert als $(A, B; C) : (A, B; D) = CA \cdot DB : CB \cdot DA$, wegen (1) und (2) folglich gleich $(3) \sin \gamma \cdot \sin \delta' : \sin \gamma' \cdot \sin \delta$. Formel (3) bedeutet, daß dieses Doppelverhältnis eigentlich eine Eigenschaft der gegenseitigen Lage der vier durch Z gehenden Geraden zueinander, also von der Geraden durch A, B, C, D unabhängig ist. Projiziert man daher von einem Zentrum Z aus zwei Geraden aufeinander, so bleibt das Doppelverhältnis von je vier Bildpunkten dasselbe wie das ihrer Urbildpunkte.

b) Die Gerade g ist vom Zentrum Z so auf g' abgebildet, daß der unendlich ferne Punkt U von g dabei in den im Endlichen gelegenen Punkt U' übergeht. Bezüglich der Punkte O (als Koordinatenursprung) und E hat der Punkt P auf g eine Koordinate, die man als Teilverhältnis $(P, E; O)$ schreiben kann. Da $(P, E; U)$, wenn überhaupt definiert, nur den Wert 1 haben kann (Für Q gegen U strebt $(P, E; Q)$ offenbar gegen 1 und zwar unabhängig davon, in welche Richtung Q läuft), kann man die Koordinate von P bezüglich O, E (und U) auch als Doppelverhältnis $(P, E; O, U)$ schreiben. Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses hat daher P' auf g' bezüglich der drei Grundpunkte O', E', U' dieselbe Koordinate wie P bezüglich O, E, U . Der zu Abb. 7.2.1 gegebene Beweis der Invarianz des Doppelverhältnisses ist der projektiven Geo-

metrie fremd, da er von den Begriffen Streckenlänge, Teilverhältnis und Sinus eines Winkels Gebrauch macht, die in der projektiven Geometrie keinen Sinn haben, da sie bei projektiven Abbildungen nicht invariant (bzw. in modernerer Auffassung: da sie durch die Begriffe Punkt, Gerade, Inzidenz nicht definierbar) sind. Die Auffassung v. Staudts unterscheidet sich von der seiner Vorgänger darin, daß er den oben beschriebenen Sachverhalt sozusagen umkehrt, indem er die Koordinaten der Punkte von g bezüglich der fixierten Punkte O, E, U durch fortlaufende Verdopplung und Halbierung (im projektiven Sinn) bereits aus OE erhaltener Strecken schrittweise konstruktiv gewinnt und auf diese Weise den Begriff des Doppelverhältnisses von vier Punkten umgekehrt und „metrikfrei“ durch die so eingeführten Koordinaten (die er aber nicht als solche bezeichnet) erhält.

Die eigentlichen Väter der projektiven Geometrie (abgesehen von Desargues, dessen beachtliche Vorleistungen zuerst von Poncelet selbst wieder bewußt gemacht worden sind) waren Poncelet und Gergonne. Poncelets Gedanken waren im wesentlichen während seiner zweijährigen Kriegsgefangenschaft in Rußland (1812-14) gereift und sind in ihrer ursprünglichen Form von ihm unter dem Titel „Cahiers de Saratov“ erst 1862 in den „Gesammelten Werken“ publiziert worden, wohl vor allem, um nochmals seine Prioritätsansprüche gegenüber Gergonne und Plücker zu begründen. In der Tat haben alle drei unabhängig voneinander in fast gleicher Weise die wesentlichen Begriffe der projektiven Geometrie entwickelt: die Einführung unendlich ferner Punkte, Geraden und Ebenen, die dann erst uneingeschränkt ausführbare Zentralprojektion (einschließlich ihres Spezialfalles, wenn das Zentrum unendlich fern ist) und deren Hintereinanderausführung als universelle Methode, Figuren unter Erhaltung der Kollinearität ineinander zu transformieren (Bei ihnen tritt also die projektive Abbildung an die Stelle der von Carnot suggerierten stetigen Veränderung!), das Doppelverhältnis von vier Punkten als die wesentliche Invariante projektiver Abbildungen (Abb. 7.2.1), die Dualitätsprinzipien für die Ebene und den Raum, die Theorie von Pol und Polare an Kurven und Flächen zweiten Grades, wobei zum ersten Mal der Kegelschnitt explizit auch als Menge seiner Tangenten aufgefaßt wird. Poncelet war vor allem von den Arbeiten seines Kameraden Charles Brianchon beeinflusst, der 1806 den nach ihm benannten zum Satz von Pascal dualen Satz publiziert hatte (Abb. 7.2.2), 1816 die Methode vorstellte, Sätze der ebenen Geometrie durch Zentralprojektion räumlicher Sachverhalte zu gewinnen, und 1818 in seinem Hauptwerk „Application de la théorie des transversales“ als erster systematisch die nur auf den Begriffen Punkt, Gerade und Inzidenz beruhenden Teile der ebenen Geometrie unter Betonung der praktischen Bedeutung der rein linearen Konstruktionen zusammenstellte. Nachdem Poncelets Hauptwerk „Traité des propriétés projectives des figures“ 1822 erschienen war, das die Ergebnisse Brianchons in einen größeren Zusammenhang stellte (in einer auf zwei Bände erweiterten Fassung

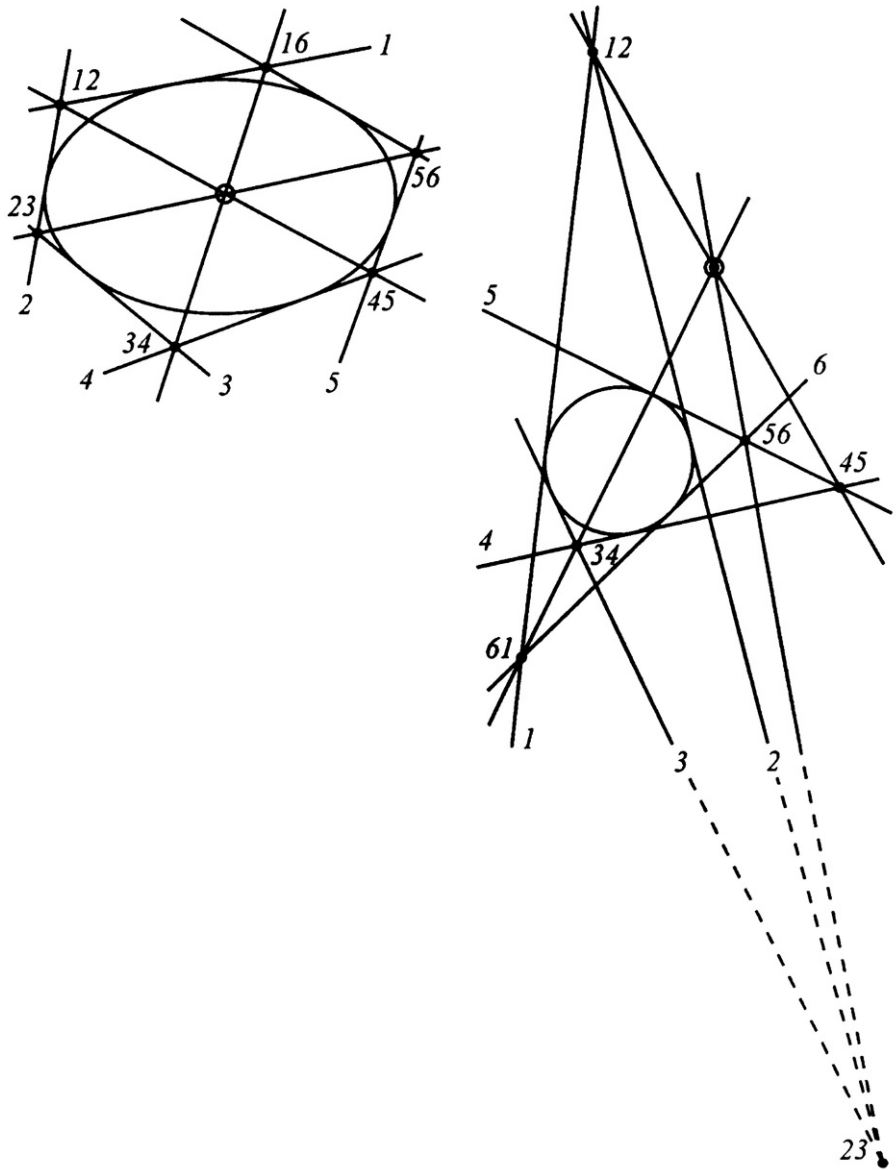


Abb. 7.2.2 Satz von Brianchon

Sind $1, \dots, 6$ Tangenten eines Kegelschnittes, ij der Schnittpunkt von i und j und ij/kl die Verbindungsgerade von ij und kl , so gehen $12/45, 23/56, 34/61$ durch einen Punkt.

nochmals 1864/65), wandte Brianchon sein Interesse (wie vor ihm schon sein Lehrer Monge) der Chemie zu. Poncelet hat sich, wie schon erwähnt, auch für die Entwicklung einer möglichst analysisfreien, anschaulich-geometrischen Mechanik engagiert. (Zum Begriff und seiner Geschichte siehe vor allem [Ziegler 1985].) Sein sehr intuitiver, an die Anschauung appellierender Stil bewirkte, daß schon zu seinen Lebzeiten viele seiner Leistungen nur als Vorläufer betrachtet und späteren Autoren zugeordnet wurden (so auch z.B. der in 7.3 zu besprechende Satz von Poncelet-Steiner). Kritik an seiner naiven Benutzung des unendlich Fernen ebenso wie an der unendlich kleinen Veränderung einer Figur kam vor allem von Cauchy, der ein erklärter Gegner des Unendlichen in der Mathematik war, aber als Akademiemitglied und einflußreicher Gutachter das Erscheinen von Poncelets Arbeiten erheblich verzögern konnte.

Die führende Rolle Frankreichs in der Mathematik und speziell in der Geometrie in den ersten Jahrzehnten des 19. Jhs. war in den meisten europäischen Ländern wohl bewußt, und die meisten französischen „Klassiker“, so z.B. Monge, Carnot, Poncelet, Chasles, aber auch Lacroix, Legendre, Cauchy wurden, oft schon kurz nach ihrem Erscheinen, in andere Sprachen übersetzt. Der umgekehrte Fall ist nicht bekannt, und Chasles beklagt 1837 an mehreren Stellen, daß er einschlägige neue Arbeiten von deutschen Mathematikern nicht lesen kann. Ihre endgültige Gestalt erhielt die projektive Geometrie in Deutschland und zwar durch A. F. Möbius, J. Steiner, J. Plücker und Ch. v. Staudt. Möbius führte 1827 in seinem „barycentrischen Calcul“ die homogenen Koordinaten ein. Sein Ausgangspunkt waren dabei Fragen der Mechanik (zu Details verweisen wir wieder auf [Ziegler 1985]): Werden 3 nicht kollineare Punkte der Ebene bzw. 4 Punkte des Raumes in allgemeiner Lage mit Massen belegt, so nimmt der Schwerpunkt dieses Systems eine von dieser Belegung abhängige Lage ein. Indem Möbius auch negative Belegungen zuläßt, erreicht er, daß man jeden Punkt der Ebene bzw. des Raumes auf diese Weise als Schwerpunkt erhalten kann. Die Massenbelegungen dienen dann als Koordinaten des jeweiligen Schwerpunktes. Da dieser sich bei proportionaler Änderung aller Belegungen nicht ändert, sind die Koordinaten homogen, d.h. für beliebiges $\lambda > 0$ beschreibt $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \dots$ den selben Punkt wie $a, b, c, \dots$ ($a, b, c, \dots$ reelle Massenbelegungen). Es zeigt sich nun, daß Geraden der Ebene bzw. Ebenen des Raumes durch homogene lineare Gleichungen beschrieben werden und daß man die allgemeinsten die Kollinearität erhaltenden Abbildungen erhält, indem man die Grundpunkte eines Koordinatensystems Grundpunkten eines anderen Koordinatensystems zuordnet und diese Zuordnung koordinatenweise fortsetzt (s. Aufg. 7.2.3). Die Arbeit von Möbius fand in Deutschland viel Anerkennung, u.a. durch Gauß, Jacobi und Dirichlet. Eine Rezension durch keinen Geringeren als Cauchy gab es sogar in Frankreich.

Schon ein Jahr nach dem „barycentrischen Calcul“ begannen die „Analytisch-geometrischen Entwicklungen“ von Julius Plücker zu erscheinen, die in den Grundgedanken recht ähnlich sind aber, obwohl Plücker in Paris studiert hatte, den algebraisch-analytischen Standpunkt der projektiven Geometrie viel stärker als Möbius betonen. Auch Plücker führte auf einem etwas anderen Weg homogene Koordinaten ein und kam durch die dann mögliche Vertauschung der Rolle von Punktkoordinaten und Koeffizienten der Geraden- bzw. Ebenengleichung zum ebenen bzw. räumlichen Dualitätsprinzip und zur Einführung der unendlich fernen Elemente. Plücker konnte auf seinem Weg recht elegant auch Geraden im Raum durch homogene Koordinaten erfassen: Nach Fixierung zweier Ebenen und je eines projektiven Koordinatensystems in jeder kann man jede Gerade des Raumes durch ihre Schnittpunkte mit diesen beiden Ebenen und jeden von diesen wieder durch seine drei Koordinaten in der betreffenden Ebene erfassen. Dazu dual kann man zwei Punkte des Raumes fixieren und das von jedem dieser Punkte getragene Ebenenbündel mittels je dreier Koordinaten koordinatisieren. Jede Raumgerade ist nun beschrieben als Schnitt einer Ebene des einen und einer Ebene des anderen Bündels. In den sechziger Jahren knüpfte Plücker hier an und arbeitete die „Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der Geraden als Raumelement“ (1868) aus, die durch seinen Tod unvollendet blieb, aber ein Beispiel eines „Raumes“ liefert, der vierdimensional ist, obwohl er aus ganz anschaulichen und elementaren Objekten besteht (s. Aufg. 7.2.4). Bei Plücker, der sich immer stärker der algebraischen Geometrie zuwandte, findet man zuerst ganz klar den Gedanken, auch für algebraische Gebilde höherer Art die Koeffizienten einer beschreibenden Gleichung als Koordinaten des betreffenden Objekts aufzufassen, so daß die Gleichung einer Kurve, Fläche, ... den Charakter bekommt, die Inzidenz zwischen Punkt und Gebilde in eine Beziehung zwischen den Koordinaten dieser beiden Objekte zu übersetzen. Der naheliegende Schritt, Flächen in der Ebene bzw. Körper im Raum mittels Ungleichungen in den jeweiligen Koordinaten auszudrücken, wurde anscheinend zuerst von Cauchy (1847) gegangen (dazu in 7.6). Sowohl Möbius als auch Plücker haben sich der projektiven Geometrie nur zeitweise gewidmet. Möbius hatte einen Lehrstuhl für Astronomie in Leipzig inne und beschäftigte sich mit physikalischen Problemen, auch Plücker widmete sich zeitweise hauptsächlich der Experimentalphysik.

Der Beitrag v. Staudts

Bis hier sind alle Beiträge zur projektiven Geometrie sozusagen stilistisch unrein. Die Länge einer Strecke wird stets als gegeben vorausgesetzt, unbefangen wird auch von Winkelgrößen Gebrauch gemacht (siehe den klassischen Be-

weis der Invarianz des Doppelverhältnisses bei Zentralprojektion, Abb. 7.2.1). Den größten Schritt in die Richtung einer axiomatischen und metrikfreien Auffassung der projektiven Geometrie ging Ch. v. Staudt mit seiner „Geometrie der Lage“ (1847). Freilich beginnt dieses fundamentale Buch, das sich im Vorwort als Anregung für einen anders als üblich gestalteten gymnasialen Geometrieunterricht präsentiert, mit einer Reihe von Vorbetrachtungen über Strahlen, Winkel, Flächen, Körper usw., die kaum ahnen lassen, daß alsbald die erste konsequente, auf wenigen Grundsätzen nach Euklids Vorbild aufgebaute projektive Geometrie folgen wird. Das Buch ist ungeachtet seines pädagogischen Anliegens völlig frei von Abbildungen und Beispielen oder Anwendungen und enthält eine Fülle neuer Fachausdrücke. Einige davon wie „Büschel“ für einfach unendliche Scharen (z.B. aller Geraden einer Ebene durch einen festen Punkt oder aller Ebenen des Raumes durch eine feste Gerade) bzw. „Bündel“ für zweifach unendliche Scharen (z.B. die aller Geraden des Raumes durch einen festen Punkt oder aller Ebenen des Raumes durch einen festen Punkt) haben sich dauerhaft eingebürgert. Andere wie z.B. „einförmiges Gebilde“ für die Menge aller Punkte einer Geraden oder für ein Geradenbüschel machen die Lektüre für den heutigen Leser mühsam.

Staudt begründet die Einführung unendlich ferner Elemente damit, daß Punkt und „Richtung“ für die Bestimmung einer Geraden dasselbe leisten wie zwei verschiedene Punkte und analog Punkt und „Stellung“ (was soviel wie die Richtung einer Ebene im Raum bedeutet) dasselbe leisten wie ein Punkt und eine nicht durch ihn gehende Gerade. Dann begründet er die Dualitätsprinzipien (bei ihm „Reciprocität“) für die Ebene bzw. den Raum (hierin deutlich sowohl von Poncelet, als auch von Möbius und Plücker abweichend) mit der Dualität der Grundsätze, die von ihm in der um unendlich ferne Elemente erweiterten Struktur festgestellt worden sind (implizit sind das die Axiome der projektiven Geometrie) und formuliert fortan zweiseitig jeden Sachverhalt parallel in den beiden zueinander dualen Varianten. Dies alles scheint er mit seinen Schülern ausprobiert zu haben, denn er spricht im Vorwort ausdrücklich davon, „dass aber das Gesetz der Reciprocität jeden für die Geometrie empfänglichen Schüler mehr anrege, als irgend ein einzelner Satz“. Staudt führt nun harmonische Punktpaare ein, was nichts anderes ist als die durch Zentralprojektion verzerrte Beziehung zwischen den vier Punkten A , B , Mittelpunkt M von AB , unendlich ferner Punkt U der Geraden AB (Abb. 7.2.3), zeigt die Invarianz dieser Beziehung bei Zentralprojektion und kommt im weiteren durch fortgesetzte projektive Halbierung und Verdopplung einer Einheit OE bezüglich eines unendlich fernen Punktes U zunächst zur projektiven Koordinate auf einer Geraden und dann zum projektiven Netz in der Ebene

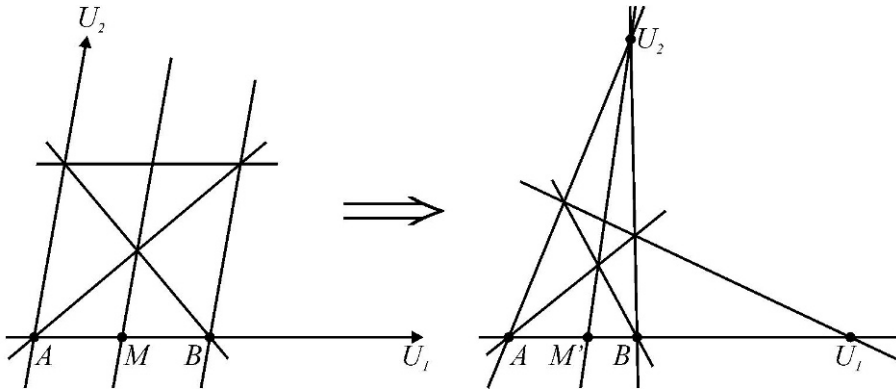


Abb. 7.2.3 Harmonisches Punktequadrupel A, B, M, U
in affiner und projektiver Sicht.

M ist, obwohl inzidenzgeometrisch definierbar, auch im metrischen Sinn Mittelpunkt der Strecke AB . Indem man den unendlich fernen Punkt U_1 durch einen beliebigen Punkt der Geraden AB (und zugleich den speziellen Hilfspunkt U_2 durch einen beliebigen) ersetzt, erhält man den auf U_1 bezogenen projektiven Mittelpunkt M' der Strecke AB .

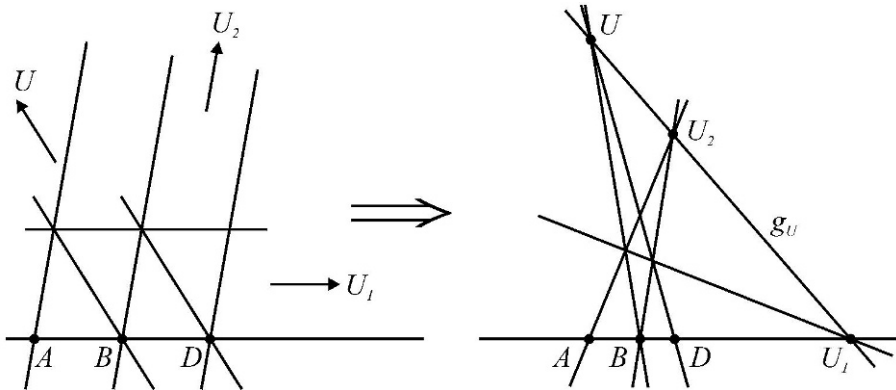


Abb. 7.2.4 Projektive Koordinaten auf der Geraden

Zur Festlegung des Zahlenwertes der Koordinaten auf einer mit O, E und U versehenen Achse nach Art v. Staudts wird die Einheitsstrecke OE bezüglich des gewählten U -Punktes im projektiven Sinne durch wiederholte Dopplung in beiden Richtungen immer wieder angetragen und dieses ganzzahlige Punktnetz anschließend durch fortlaufende Halbierung der Teilstrecken beliebig verfeinert. Abb. 7.2.4 zeigt, wie die Konstruktion der Verdopplung D von AB über B hinaus mittels einer beliebig durch U gelegten uneigentlichen Hilfsgeraden vom affinen auf den projektiven Fall übertragen wird. Abb. 7.2.3 zeigte in gleicher Weise eine der möglichen rein linearen Konstruktionen des Mittelpunktes M einer beliebigen Strecke AB , zunächst affin und dann zum projektiven Fall verallgemeinert. Die Koordinatendefinition für einen beliebigen Punkt der Achse OEU müßte nun durch eine Grenzbetrachtung erfolgen. Dies setzt aber, analog wie im affinen Fall, Schlüsse über die Anordnung voraus und befindet sich bei v. Staudt noch auf der Stufe der anschaulichen Evidenz.

bzw. im Raum (Abb. 7.2.4), all dies, ohne explizit von Koordinaten zu sprechen. Eine projektive Abbildung ist bei v. Staudt eine solche, die harmonische Punktpaare in ebensolche überführt. Zentralprojektionen sind solche Abbildungen und jede projektive Abbildung läßt sich als Hintereinanderausführung von Zentralprojektionen darstellen. Dies wird in rein synthetischem und koordinatenfreiem Stil fortgesetzt bis zur Aufklärung der „Freiheitsgrade“ einer projektiven Abbildung und zur projektiven Behandlung der Kegelschnitte. Das Buch fand den Beifall der Kollegen und begründete seinen Ruhm.

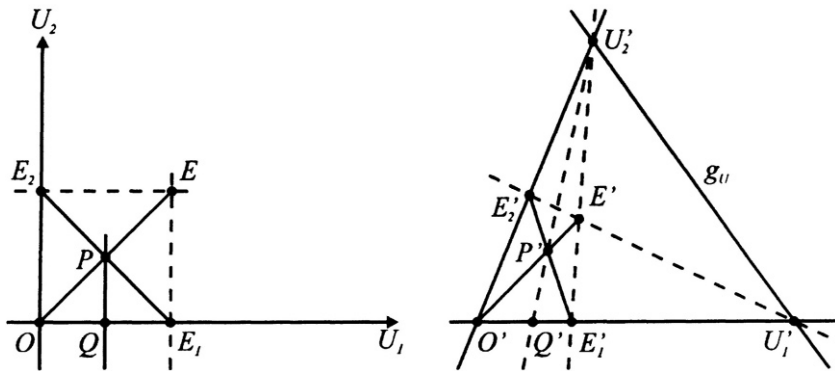


Abb. 7.2.5 Projektive Koordinaten in der Ebene

Aus der Sicht der ebenen projektiven Geometrie (im Raum ist es analog) wird ein Koordinatensystem durch vier Punkte O, U_1, U_2, E gegeben. O ist der Ursprung, U_1 der „uneigentliche“ Punkt der x -Achse, so daß also O und U_1 zusammen die x -Achse bestimmen, analog bestimmen O und U_2 die y -Achse. Indem man noch den Punkt E als denjenigen fixiert, der die Koordinaten $(1, 1)$ bekommen soll, hat man zugleich den 1-Punkt auf der x -Achse und den 1-Punkt auf der y -Achse festgelegt. Ein affines Parallelkoordinatensystem ist ein solcher Spezialfall, in dem U_1 und U_2 „wirklich“ unendlich fern sind. Umgekehrt entsteht ein projektives Koordinatensystem aus einem sogar kartesischen, indem man die unendlich ferne Gerade ins Endliche heranholt.

In drei „Beiträgen zur Geometrie der Lage“, die zwischen 1856 und 1860 erschienen, behandelte v. Staudt dann hauptsächlich die Frage, wie man „imaginäre Elemente“ vom rein synthetischen Standpunkt gewinnen kann. Er geht davon aus, daß auf einer durch den unendlich fernen Punkt zu einer geschlossenen Kurve vervollständigten projektiven Geraden eine Richtung erst durch drei in Reihenfolge gegebene Punkte O, E, U gegeben wird. Ein vierter Punkt X dieser Geraden ist in unserem Sinne positiv, wenn man zu ihm kommen kann, indem man sich von O über E nach U bewegt. Er ist negativ, wenn man ihn bekommen kann, indem man sich von O in der zu E entgegengesetzten Richtung nach U bewegt. Ist nun aber die Gerade von vornherein mit

einem anderen Durchlaufungs„Sinn“ (das ist der von v. Staudt in diesem Zusammenhang benutzte Fachbegriff) versehen, so kann der Punkt X , obwohl er auf der Geraden liegt, weder durch Bewegung im positiven noch im negativen Sinn erreicht werden, weil man durch Bewegung im positiven Sinne nie bis E kommen kann, folglich erst recht nicht darüber hinaus. Diese Vorstellung ist allerdings bei v. Staudt und auch bei den meisten späteren Autoren versteckt im Begriff der Involution¹⁹, wobei den komplexen Elementen elliptische Involutionen entsprechen. Bemerkenswert bleibt die erstmalige Behandlung (vgl. S. 348) der zyklischen Anordnung auf der durch den unendlich fernen Punkt geschlossenen projektiven Geraden. Die geistige Nähe zu den Bestrebungen Carnots wird bei v. Staudt ebenso deutlich wie der eigenständige Neuaufbau von bereits vorliegenden Inhalten. Was den heutigen Leser befremdet, ist das völlige Fehlen von Hinweisen auf andere Literatur und andere Autoren.

Die projektive Geometrie, die ab etwa 1820 rund hundert Jahre ein blühendes Gebiet war, hat sich nach den genannten Beiträgen in zwei Richtungen entwickelt. Einerseits bildete sie in Verallgemeinerung dessen, was sie seit Beginn ihrer Existenz für das Verständnis und die konstruktive Beherrschung der Kegelschnitte geleistet hat, den zweckmäßigen Rahmen für die „algebraische Geometrie“ (die in diesem Buch nicht weiter verfolgt wird, weil sie nach unserem Verständnis mehr Algebra als Geometrie ist), u.a. deshalb, weil Polynome mit beliebig vielen Variablen durch den Übergang zu homogenen Koordinaten stets homogen und damit der linearen Algebra besser zugänglich werden. Andererseits spielte sie mehrere wichtige Rollen in den um 1870 einsetzenden Untersuchungen über die logischen und methodologischen Grundlagen der Geometrie. Darüber wird in 7.7 und 8.1 weiter berichtet.

7.3 Theorie der geometrischen Konstruktionen

Geometrische Konstruktionsaufgaben und ihre Lösung bilden, wie wir gesehen haben, den Ursprung und Kern der Geometrie. Eine Theorie, die den Begriff der Aufgabe, ihrer Lösung und der Methoden zur Lösung bzw. zum Nachweis der Unlösbarkeit zum Gegenstand hat, eventuell auch die Komplexität von

¹⁹Als Involution bezeichnet man in der projektiven Geometrie jede nichtidentische projektive Abbildung f , die mit ihrer Umkehrabbildung übereinstimmt, also Punkte, die keine Fixpunkte sind, paarweise miteinander vertauscht. Ist $f_{A,B}$ für zwei verschiedene Punkte A, B einer Geraden g diejenige Abbildung von g auf sich, die jedem Punkt P den vierten harmonischen Punkt zu A, B, P zuordnet, so ist $f_{A,B}$ eine Involution, die genau die Punkte A, B als Fixpunkte hat. Wie die analytische Rechnung mit homogenen Koordinaten zeigt, gibt es auch Involutionen ohne Fixpunkte bzw. die beiden Lösungen der Fixpunktgleichung können konjugiert komplex werden. Dies war der Weg zur geometrischen Erklärung von „Punkten mit komplexen Koordinaten“. Siehe Aufgabe 7.2.5.

Lösungen oder die Genauigkeit von Näherungen allgemein und theoretisch untersucht, kann sich in zwei Richtungen entwickeln, einerseits im Rahmen der mathematischen Logik und Grundlagenforschung. Dies konnte natürlich nicht vor dem Ende des 19. Jhs. geschehen. Andererseits durch Übersetzung der geometrischen Fragen in die Sprache der Algebra. Bescheidene Ansätze hierzu finden sich schon in der Antike. Zum Beispiel könnte man den Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$, wie er schon bei Aristoteles und dann wieder in den „Elementen“ (X,115) steht, so interpretieren, daß die Diagonale eines gegebenen Quadrates durch rein lineare Operationen nicht in die Richtung einer Seite übertragen werden kann. Auch andere Sätze aus Euklids Buch X sagen in algebraischer Einkleidung manches über die Unmöglichkeit geometrischer Konstruktionen aus. Fruchtbar konnte eine solche algebraisierte Theorie der geometrischen Konstruktionen jedoch erst nach der Konstituierung der Koordinatenmethode und nach Bereitstellung algebraischer Hilfsmittel werden, die ihrerseits den Nachweis der Unlösbarkeit gewisser algebraischer Aufgaben mit gegebenen algebraischen Mitteln gestatten. Dies leistete im wesentlichen Gauß, und mit ihm beginnt die eigentliche Theorie der geometrischen Konstruktionen. Trotzdem wollen wir zunächst in Kürze einige vorangehende Schritte referieren. Wenn wir im folgenden von Theorie sprechen, meinen wir immer, daß es nicht um Einzelfälle sondern um eine ganze Klasse von Aufgaben oder um den Begriff der Aufgabe und ihrer Lösung als solche geht.

Vieta krönte sein „Supplementum geometriae“ 1593 mit dem Beweis, daß alle Aufgaben, die auf Gleichungen dritten oder vierten Grades führen, lösbar werden, wenn man außer Zirkel und Lineal Instrumente zuläßt, mit denen die dritte Wurzel aus gegebenen Größen gezogen und jeder Winkel gedrittelt werden kann. Dieses Resultat ist eigentlich erst aus der Sicht der komplexen Zahlenebene verständlich, da laut Ferrari eine Gleichung vierten Grades auf eine Gleichung dritten Grades reduzierbar und eine Gleichung dritten Grades laut Cardano mittels rationaler Operationen sowie zweiter und dritter Wurzeln lösbar ist. Da man dabei jedoch auch bei reellen gegebenen Größen und reellen Nullstellen im allgemeinen den Weg über komplexe Zwischenresultate nehmen muß, müßte die Zeichenebene zeitweilig als komplexe Ebene genutzt werden, wobei die Konstruktion von Quadratwurzeln durch die Wurzel aus der Radiuskoordinate der betreffenden Zahl und durch das Halbieren ihrer Winkelkoordinate, folglich mit Zirkel und Lineal ausführbar ist, während man für die dritten Wurzeln das Ziehen der dritten Wurzel aus dem Radius und die Dreiteilung der Winkelkoordinate benötigt. Hatte Vieta eine Ahnung von der geometrischen Deutung der komplexen Algebra in der „Gaußschen Zahlenebene“ (Abb. 7.3.1)? Fast könnte man es aus seinen Rechnungen herauslesen.

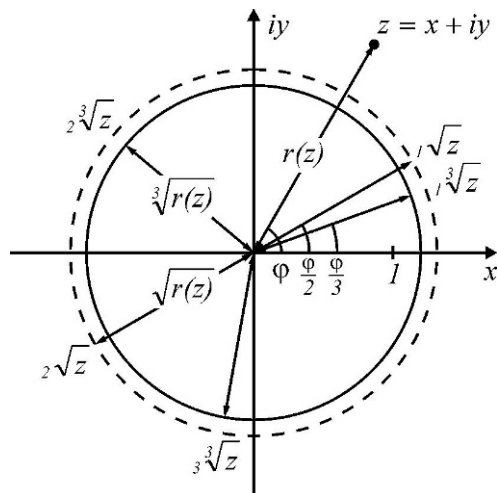


Abb. 7.3.1 Wurzelziehen in der Gaußschen Zahlenebene

Eine andere Richtung der theoretischen Beschäftigung mit Konstruktionen widmet sich der Untersuchung, wie sich die Änderung (besonders die Einschränkung) der zulässigen Instrumente bzw. Konstruktionsschritte oder der zur Verfügung stehenden Zeichenfläche auf die Lösbarkeit von Aufgaben auswirkt. Schon Pappos (siehe G. Toomer, *Math. Intelligencer* 1984, No. 2), später Abū l-Wāfā und andere mittelalterliche islamische Geometer, Renaissancekünstler wie z.B. Leonardo da Vinci, schließlich Cardano und Tartaglia hatten sich damit beschäftigt, Konstruktionsaufgaben mit dem Lineal und einem Zirkel fester Öffnung (der also durch eine Kreisschablone ersetzt werden kann, was jeder Zeichner zu würdigen weiß, dem schon einmal ein Kreis durch einen zu lockeren Zirkel oder ein ausgebuttertes Loch im Zeichenpapier zur Spirale geraten ist) zu lösen. 1653 mündete dies in eine Schrift von G. B. Benedetti, in der alle Aufgaben aus den Büchern I – IV und VI von Euklids „Elementen“ mit Lineal und Zirkel fester Öffnung gelöst wurden. 1673 erschien in Amsterdam in niederländischer Sprache ein Büchlein mit dem seltsamen Titel „Compendium Euclidis Curiosum“, worin der anonyme Verfasser (der Däne Georg Mohr, wie man heute weiß) das gleiche Ergebnis vorlegte. In der Einleitung schrieb er, daß er von der diesbezüglichen Schrift des „Joan Baptista“ (gemeint ist offenbar Giovanni Battista Benedetti) gehört, sie sich jedoch nicht habe verschaffen können und darauf das Ergebnis nach anfänglichem Unglauben selbst auch erhalten habe. 1677 kam sogar eine englische Übersetzung dieses „curiosen Euclid“ zustande (Kostproben in Aufg. 7.3.2). Beide Texte waren lange verschollen und sind erst 1982 wieder allgemein zugänglich geworden [Mohr

1673]. Schon 1927 hatte jedoch der dänische Geometer Johannes Hjelmslev die ebenfalls vergessene Abhandlung „Euclides Danicus“ (der „dänische Euklid“) des gleichen Autors aus dem Jahre 1672 wiederentdeckt und publiziert [Mohr 1928], worin Mohr plausibel machte, daß alle aus gegebenen Stücken mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte mit dem Zirkel allein konstruierbar sind.

In verzeihlicher Unkenntnis dieses Vorgängers widmete Lorenzo Mascheroni dem gleichen Thema sein 1797 gedrucktes Buch „La geometria del compasso“ (Geometrie des Zirkels). Interessanterweise motivierte er sein Anliegen damit, daß Konstruktionen mit dem Zirkel in der praktischen Durchführung genauer seien als solche mit dem Lineal, während doch Lambert, Brianchon, Poncelet und andere das rein lineare Konstruieren oder zumindest die möglichste Einschränkung des Zirkelgebrauchs favorisierten, da nur lineare Konstruktionen über größere Entfernungen im Gelände (durch Peilen und Fluchten) realisierbar sind. 1833 schloß Jacob Steiner diesen Problemkreis mit seinem Satz ab, daß ein einziger gezeichnet vorliegender Kreis oder auch schon ein Stück davon samt (unverzichtbarem) Mittelpunkt genügt, um alle mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen auf rein lineare zu reduzieren (was im wesentlichen schon Poncelet 1822 gezeigt hatte). Der Ausbau der Grundlagen der Mathematik hat alle diese Sätze unter verschiedenen Gesichtspunkten in neues Licht gerückt. Wir wollen aber noch das Kuriosum berichten, daß der bekanntlich mathematisch interessierte Napoleon Bonaparte während seines Italienfeldzuges die persönliche Bekanntschaft Mascheronis machte, als dessen Buch gerade vollendet, aber noch nicht im Druck erschienen war. Voller Stolz über den dadurch gewonnenen Vorsprung legte er nach seiner Rückkehr nach Paris den berühmten französischen Mathematikern ein „ganz einfaches“ Konstruktionsproblem vor und freute sich, daß diese es natürlich nicht aus dem Stand lösen konnten. (Siehe Aufg. 7.3.1.)

Algebraisierung der Theorie der geometrischen Konstruktionen

Soweit die Vorgeschichte. Der Entschluß des damals 18-jährigen Gauß, sein Leben der Mathematik und nicht wie erwogen den alten Sprachen zu widmen, beruht bekanntlich auf seiner Entdeckung, daß das reguläre 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Mit dieser Eintragung vom 30.3.1796 beginnt auch sein Tagebuch, und die weiteren Eintragungen belegen, daß er bis 1808 immer wieder auf die Fragen der Kreisteilung zurückgekommen ist, die sich unter Benutzung der komplexen Zahlenebene auf die rein algebraische Frage reduzieren, für welche natürlichen Zahlen n die Gleichung $x^n = 1$ (bzw. nach Abspaltung des trivialen Faktors $x - 1$ von $x^n - 1$, für welche n die Gleichung

$1+x+\dots+x^{n-1}=0$) durch quadratische Radikale lösbar ist. Gauß' endgültige Antwort lautet: Dies ist genau dann der Fall, wenn n die Form

$$2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k \quad (7.3.1)$$

hat, wobei $m \geq 0, k \geq 0$ und $p_1, \dots, p_k$ paarweise verschiedene Primzahlen der Form $2^i + 1$ (also z.B. 3, 5, 17) sind. Ein beträchtlicher Teil seines 1801 erschienenen Jugendwerkes „Disquisitiones arithmeticae“ ist der Frage gewidmet, welche Bedingungen eine Polynomgleichung erfüllen muß, um durch quadratische Radikale lösbar zu sein. Dort findet man auch die nach Gauß benannten wesentlichen Sätze, mit deren Hilfe für die meisten klassischen Aufgaben die Unlösbarkeit mit Zirkel und Lineal nachgewiesen werden kann: Ein irreduzibles Polynom mit ganzen Koeffizienten ist höchstens dann durch quadratische Radikale lösbar, wenn sein Grad eine Zweierpotenz ist. Die Frage nach der Reduzibilität eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten über dem Bereich der rationalen Zahlen kann auf die Frage nach der Reduzibilität eines ganzzahligen Polynoms gleichen Grades im ganzzahligen Koeffizientenbereich reduziert werden (und letzteres ist durch eine endliche Fallunterscheidung entscheidbar). Mit diesen algebraischen Hilfsmitteln sind zwei der klassischen Konstruktionsprobleme (vgl. Abschnitt 2.2.2), nämlich das der Würfelverdopplung und das der Winkeldreiteilung, sofort als unlösbar nachweisbar. Die Würfelverdopplung führt auf die Gleichung $x^3 - 2 = 0$ für die gesuchte Kante x . Das Polynom ist irreduzibel und sein Grad keine Zweierpotenz (Aufg. 7.3.3). Wäre die Winkeldreiteilung allgemein mit Zirkel und Lineal lösbar, so auch für den Fall, daß der gegebene Winkel 60 Grad beträgt und somit selbst konstruierbar ist, d.h. ein Winkel von 20 Grad und daher ein reguläres 18-Eck wäre konstruierbar. 18 hat jedoch nicht die in (7.3.1) angegebene Form. Angesichts dieser Folgerungen aus dem Werk von Gauß ist es offenbar den eingangs erwähnten Kommunikationsschwierigkeiten des 19. Jhs. geschuldet, wenn der jung verstorbene französische Mathematiker Pierre Wantzel zwischen 1837 und 1845 diese Resultate erneut bewies und in verschiedenen Büchern als Urheber der Sätze bezeichnet wird. Das dritte berühmte Problem aus der Antike, die Quadratur des Kreises, läuft unter den neuen Aspekten auf die Untersuchung hinaus, ob die Zahl π Wurzel einer durch quadratische Radikale lösbaren Polynomgleichung ist. Lambert zeigte 1767 die Irrationalität von π . Seine an ein breiteres Publikum gerichtete Schrift „Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rektifikation des Cirkuls suchen“, worin er die vielen Amateure, die sich mit ganz unzureichenden Voraussetzungen um die Lösung dieser Aufgabe bemühten (Solche gab es auch im 20. Jh. immer noch!) auffordert, doch lieber etwas für sie Erreichbares und Nützliches wie z.B. die Berechnung von

Primzahltabellen zu unternehmen, ist noch heute köstlich zu lesen. Immerhin konnte Charles Hermite an Lamberts Vorleistungen anknüpfen, als er 1873 die Transzendenz von e bewies. Eine Verallgemeinerung des Beweisgedankens gestattete schließlich Ferdinand Lindemann 1882 den Beweis der Transzendenz von π , was bedeutet, daß π überhaupt nicht Lösung irgendeiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein kann. Die Quadratur und die damit eng zusammenhängende Rektifikation des Kreises sind also nicht nur mit Zirkel und Lineal unlösbar, sondern unlösbar mit beliebigen Instrumenten bzw. Hilfsmitteln (wie z.B. Einschiebung oder Schnitt mit gegebenen Kegelschnitten), deren algebraische Analyse ergibt, daß mit ihrer Hilfe nur Punkte konstruierbar sind, deren Koordinaten algebraisch von den Koordinaten der gegebenen Punkte abhängen. (Zu mathematischen Einzelheiten und einem gut aufbereiteten Transzendenzbeweis ist immer noch [Vahlen 1911] zu empfehlen.)

Die Untersuchungen von Gauß hatten die Behandlung der geometrischen Konstruktionsaufgaben auf eine qualitativ höhere Stufe gehoben, sie aber zugleich in gewisser Weise zu einem Teilgebiet der Algebra werden lassen, als das sie tatsächlich seither von vielen Autoren aufgefaßt wurden, mit der negativen Nebenwirkung einer gewissen „Entgeometrisierung“. Über die Korrektur dieser Entwicklung im 20. Jh. wird noch zu berichten sein. Trotzdem weist auch das 19. Jh. gewisse Ansätze zu einer anderen Sicht auf die geometrischen Konstruktionen auf. Zum Beispiel ist Carnots in 7.2 besprochene „Géométrie de position“ in starkem Maße als Versuch einer Theorie der geometrischen Konstruktionen in einem gänzlich anderen Sinne aufzufassen, und Gergonnes „Annales“ sind eine Fundgrube von Einzelbeiträgen zu einer zum Teil völlig algebrafreien Behandlung spezieller Konstruktionsprobleme. August Adler, ein Schulmann aus den damals österreichischen Ländern, gab 1890 einen neuen durchsichtigen und allgemeinen Beweis für den Satz von Mohr/Mascheroni, indem er die Transformation durch reziproke Radien benutzte, um die Gesamtfigur aus gegebenen und gesuchten Stücken sowie Hilfslinien in eine Figur zu transformieren, in der keine Geraden mehr vorkommen. 1902 zeigte er, daß sowohl ein in bestimmter Weise zu benutzendes Lineal mit zwei parallelen Kanten als auch ein Zeichendreieck, dessen Kanten sich in beliebigem festem Winkel treffen, die gleiche Leistungsfähigkeit besitzen wie Zirkel und Lineal. 1906 erschien aus seiner Feder ein zusammenfassendes Buch über geometrische Konstruktionen, das nicht (wie z.B. [Petersen 1879]) eine bloße Sammlung von Lösungen und Lösungsrezepten war. Paul Zühlke schrieb um die gleiche Zeit zusammenfassende Darstellungen über das Konstruieren mit Hindernissen (be-

schränkte Instrumente, beschränkte Zeichenfläche). Wir erwähnen dies schon hier, weil es seinem Geiste nach noch dem 19. Jh. angehört.

Geometrographie

Ins 20. Jh.weisend, obgleich im 19. Jh. entstanden, ist indessen eine eigentümliche Theorie, die 1888 unter der Bezeichnung Geometrographie von dem durch wissenschaftsorganisatorische Aktivität sehr einflußreichen Franzosen Emile Lemoine begründet wurde. Hier wurde am Beispiel geometrischer Konstruktionsalgorithmen erstmals eine Komplexitätstheorie versucht, nachdem Steiner am Schluß seiner oben erwähnten Schrift von 1833 das später oft zitierte Wort von einem „Lösen bloß mit der Zunge“ geprägt hatte, womit er meinte, daß durch die in Mode gekommene Reduktion neuer Aufgaben auf bereits gelöste bzw. das bloße Skizzieren einer Lösungsidee das Gefühl für den tatsächlichen Aufwand bei der Ausführung oder überhaupt für die praktische Durchführbarkeit ganz außer acht gelassen werde. Lemoine zählte nun nach einer von ihm vorgeschlagenen Wertung die Schritte einer Konstruktion (und getrennt diejenigen Schritte, die nach seiner Ansicht die praktische Genauigkeit beeinflussen) und bezeichnete diejenige Lösung einer Aufgabe als geometrographisch, die die geringste Schrittzahl aufwies. Die Geometrographie fand für kurze Zeit eine beträchtliche Zahl von Interessenten und Mitstreitern, insbesondere im Kreis der Lehrer, die sich von der Betonung einer „sportlichen Note“ eine Belebung des erstarrten Geometrie-Unterrichts versprachen, und es wurden für eine Reihe von klassischen Aufgaben erstaunliche Vereinfachungen erzielt, z.B. die Zahl der Schritte einer Lösung des Apollonischen Berührungsproblems von rund 500 (bei Vieta und noch bei Gergonne) auf etwa 150 heruntergedrückt, vor allem durch trickreiche Mehrfachverwendung von Hilfslinien. Die Geometrographie sank nach kurzer Blüte ab 1906 schnell in Vergessenheit. Sie litt an drei Mängeln, die äußerst lehrreich für die moderne Komplexitätstheorie sind:

- 1) Das jahrhundertealte Defizit der klassischen Mathematik hinsichtlich eines Nachdenkens über den Begriff des Algorithmus bewirkte, daß Lemoine und alle seine Mitstreiter nur in der Kategorie einer festen Schrittfolge ohne Verzweigungen oder Zyklen dachten und folglich das Komplexitätsmaß in einer bloßen Zählung eventuell gewichteter Schritte sahen.
- 2) Lemoine und seine Anhänger konnten sich niemals auf eine gemeinsame Wertung der Schritte einigen. Vielmehr ist ein beträchtlicher Teil der entstandenen Literatur polemischen Auseinandersetzungen gewidmet, worin z.B. mit der Stoppuhr bewiesen werden sollte, um wieviel schneller dieser Schritt als jener ausführbar ist.

- 3) Es gab keinerlei Methode zum Beweis der Optimalität oder auch nur der approximativen Optimalität einer Lösung. Vielmehr war der Name „geometrographisch“ eine Art Wanderpokal, der am nächsten Tag der um zwei Schritte besseren Lösung zuerkannt werden konnte. (Man denke an den heutigen Gebrauch des Wortes „effizient“!)

Aber auch abgesehen von diesen drei Punkten enthält die Literatur zur Geometrographie viele bemerkenswerte Gedanken, die man heute, wie überhaupt die geometrischen Konstruktionen, zu einer erstaunlichen Vorgeschichte der Informatik in der klassischen Mathematik zählen muß.

7.4 Differentialgeometrie

Das 17. und 18. Jh. hatte viele Vorarbeiten für die Behandlung „krummer Objekte“ mittels infinitesimaler Methoden geleistet, die zunächst kurz referiert werden sollen. Während Clairauts schon erwähntes Buch über Raumkurven (1731) sich auf diejenigen Begriffe und Eigenschaften beschränkt hatte, die mittels der ersten Ableitungen der Koordinaten nach dem Kurvenparameter behandelt werden können, ging Monge ab 1771 einen mehr geometrischen Weg zum Begriff der Krümmung räumlicher Kurven: In jedem Kurvenpunkt bestimmt die Tangente eine zu ihr senkrechte Normalebene. Zwei „infinitesimal benachbarte“ Normalebenen schneiden sich im allgemeinen in einer Geraden, die ihrerseits als Normalebene die Schmiegebene der Kurve im gegebenen Punkt hat. Die Änderung der Neigung dieser Schmiegebene ist die Torsion. (Der Name Torsion wurde aber erst im 19. Jh. benutzt.) Die drei Einheitsvektoren in Richtung der Kurventangente, in Richtung der Kurvennormale und in Richtung der Normale der Schmiegebene (als Binormale bezeichnet) bilden das „begleitende Dreibein“ der Kurve. Um 1850 vollendeten J. F. Frenet, J. A. Serret, P.-O. Bonnet und J. Bertrand die Theorie der Raumkurven, indem sie u.a. bewiesen, daß eine solche Kurve bis auf ihre Lage bezüglich des Koordinatensystems bzw. bis auf Bewegungen durch die Krümmung $k(s)$ und die Torsion $w(s)$ als Funktionen der Bogenlänge s bestimmt ist. Dieses Ergebnis wird Vorbild für die koordinateninvariante Charakterisierung höherer gekrümmter Mannigfaltigkeiten.

Die systematische differentialgeometrische Betrachtung gekrümmter Flächen im Raum beginnt im wesentlichen mit Eulers zweibändigem Lehrbuch der Differentialrechnung (1755) und setzt sich in Einzeluntersuchungen vor allem der Jahre 1760-67 fort. Euler betrachtet die Schnittkurven aller in einem gegebenen Flächenpunkt P durch die Flächennormale gehenden Ebenen mit der Fläche, die also als ebene Kurven eine Krümmung im Sinne ebener Kur-

ven haben, und ordnet in P jeder Richtung φ in der Tangentialebene den Krümmungsradius $R(\varphi)$ zu, der obendrein vorzeichenbehaftet ist je nachdem, auf welcher Seite der Fläche der Krümmungsmittelpunkt liegt. Er stellt fest, daß diese Funktion, in der Tangentialebene radial aufgetragen, in zwei zueinander senkrechten Richtungen, den sogenannten Hauptkrümmungsrichtungen, das Maximum R_1 und das Minimum R_2 annimmt und daß der Krümmungsradius $R(\varphi)$ in Richtung φ der Gleichung

$$1/R(\varphi) = \cos^2\varphi/R_1 + \sin^2\varphi/R_2 \quad (7.4.1)$$

genügt. Hieran knüpften Meusnier 1776 und Monge 1784 an, und Dupin führte 1813 die nach ihm benannte Indikatrix ein. Monge studierte diejenigen Kurven in der Fläche, die in jedem Punkt in Richtung der größeren bzw. kleineren Hauptkrümmung verlaufen und sich folglich überall senkrecht durchschneiden, nachdem schon Euler im Gedankenaustausch mit Johann Bernoulli den Begriff der geodätischen Kurve als einer solchen entwickelt hatte, die lokal die kürzeste Verbindung der auf ihr liegenden Punkte innerhalb der Fläche ist. (Die Bezeichnung Geodätische wurde allerdings erst sehr viel später, nämlich 1844 durch Liouville, eingebürgert.) Diese Geodätischen entstehen somit als Lösung eines Variationsproblems, und das analoge Problem, in eine gegebene Randkurve eine Fläche kleinsten Inhalts einzuspannen (später als Plateausches Problem bezeichnet), wurde erstmals 1760 von Lagrange studiert. Er fand für den Fall, daß die Fläche in der Form $z = f(x, y)$ dargestellt werden kann, für die Minimalität die notwendige Bedingung

$$(1 + f_y^2)f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0. \quad (7.4.2)$$

Meusnier zeigte 1776 (1785 publiziert), daß diese Bedingung zur Bedingung $R_1 = -R_2$ in jedem Punkt der Minimalfläche äquivalent ist, woraus sich u.a. ergibt, daß eine Fläche, die in einem Punkt (und wegen Stetigkeit in dessen Umgebung) eine positive „Gaußsche“ Krümmung $R_1 \cdot R_2$ hat, nicht minimal sein kann. Außerdem fand er die beiden ersten Arten nichttrivialer Minimalflächen, nämlich die durch Rotation einer Kettenlinie entstehenden Katenoide und die Wendelflächen. Erst viel später wurde klar, daß die durch die Lagrangesche bzw. Meusniersche Bedingung charakterisierten Flächen nur „lokale Minima“ in der Menge aller in einen gegebenen Rand eingespannten Flächen darstellen, was ihrer physikalischen Erzeugung mittels Seifenlauge (Plateau um 1850!) entspricht.

Beginn der inneren Differentialgeometrie

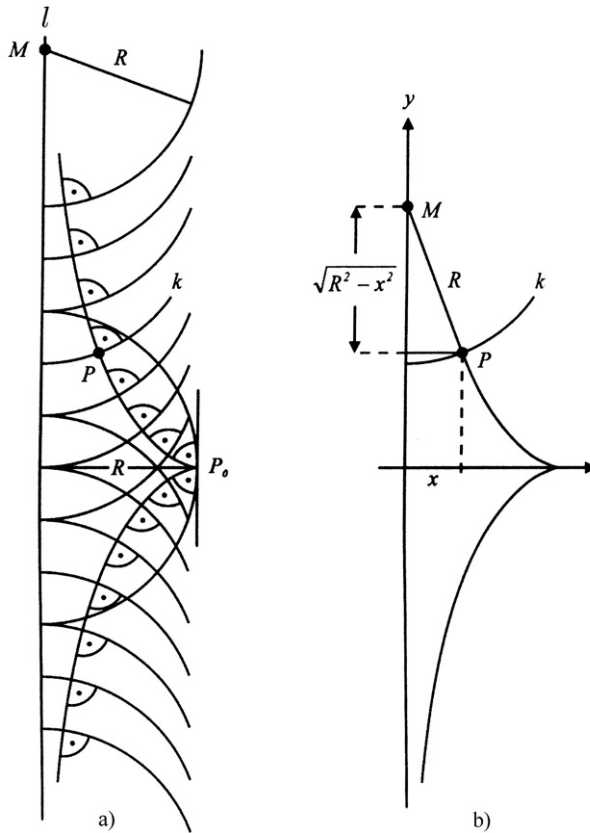
Bis hier wurden die krummen Flächen stets als Objekte im dreidimensionalen Raum betrachtet. Ihre Rolle in der Geodäsie mußte jedoch früher oder später die Frage nach solchen Begriffen und Eigenschaften aufwerfen, die durch Messung und Experiment innerhalb der Fläche, ohne Bezug auf ihre Einbettung in den Raum, bestimmt werden können. Es ist eines der größten Verdienste von C. F. Gauß, daß er diese für die moderne Physik grundlegende „innere Geometrie“, die für gekrümmte Räume einer höheren Dimension als 2 im physikalischen Sinn die einzig mögliche ist (weil ein umgebender Raum für uns dann nicht mehr existiert oder uns jedenfalls nicht zugänglich ist), begründet und ihren Unterschied zur bis dahin üblichen Betrachtungsweise deutlich gemacht hat.²⁰

1818 erhielt Gauß den Auftrag, die durch den mit ihm befreundeten Astronomen H. C. Schumacher in Dänemark durchgeführte Gradmessung mit dem Ziel der genauen Messung des Breitenunterschiedes zwischen Altona und Göttingen fortzusetzen. An diese Arbeit, die er zwischen 1818 und 1827 unter großen Strapazen selbst im Gelände ausführte, schloß sich die Vermessung des gesamten Königreichs Hannover zwischen 1828 und 1844 an, bei der Gauß noch die Auswertung der Meßergebnisse übernahm [z.B. Biermann 1990, S.19ff]. Analoge Vorhaben waren um diese Zeit in anderen europäischen Ländern teils vorangegangen, teils in Arbeit. Diese Aufträge bewirkten eine intensivere Hinwendung zur Differentialgeometrie gekrümmter Flächen. Wie Briefstellen belegen, plante Gauß spätestens seit 1822 ein umfangreiches Werk über Höhere Geodäsie, von dem aber erst 1844-47 zwei Teilabhandlungen veröffentlicht wurden. (Reprint in Ostwalds Klassikern). Ein im Nachlaß gefundenes unvollendetes Manuskript von 1825 [Gauß' Werke Bd.8, 408-442] ging dem voran. Hatte er 1825 noch mit der Darstellung der Flächen in der Form $F(x, y, z) = 0$ oder sogar $z = f(x, y)$ gearbeitet, so geht er nun konsequent zur bis dahin nur gelegentlich benutzten Darstellung mittels zweier Parameter über.

Im Laufe dieser Arbeiten muß ihm die Bedeutung der inneren Geometrie in solchem Maße bewußt geworden sein, daß seine erste Veröffentlichung „Allgemeine Untersuchungen über gekrümmte Flächen“ (1827 fertiggestellt und in den Göttingischen gelehrten Anzeigen im Überblick referiert, 1828 latein.

²⁰ An dieser Stelle sei auf ein merkwürdiges elementargeometrisches Analogon hingewiesen: Die sphärische Geometrie wurde seit der Antike immer auf der Grundlage der Existenz der Kugeloberfläche im dreidimensionalen Raum sozusagen als ein praktisch wichtiger Teil räumlicher Geometrie behandelt. Bis in unsere Zeit ist es anscheinend niemand eingefallen, die sphärische Geometrie analog zur ebenen Geometrie rein axiomatisch als innere Geometrie ohne Bezug auf den umgebenden Raum aufzubauen. [Schreiber 1984, Kap. 2.3]

publiziert, deutsche Übersetzung in Ostwalds Klassikern, Wiederabdruck in Teubner-Archiv Bd. 1) ganz bewußt alles ausläßt, was sich diesem Standpunkt nicht unterordnet. Durch die Vielzahl der Quellen läßt sich hier die Entwicklung der Ideen sehr gut verfolgen. Gauß überträgt 1825 die aus der Monge-Schule kommende Definition der Totalkrümmung („Amplitude“) eines Kurvenstückes auf Flächenstücke: Man trage in jedem Punkt die Normale der Länge Eins an, übertrage ihren Endpunkt durch Parallelverschiebung auf eine feste Einheitskugel und nehme den Inhalt der so erzeugten Teilfläche der Kugel als Maß der Totalkrümmung des Flächenstückes. Ist die Fläche z.B. abwickelbar, so ist die zugeordnete Teilmenge auf der Einheitskugel nur eindimensional, die Totalkrümmung also Null. Indem man die Totalkrümmung eines kleinen Flächenstückes um einen Flächenpunkt P durch den Inhalt dieses Flächenstückes dividiert und einen Grenzprozeß durchführt, erhält man ein numerisches Maß für die lokale Krümmung im Punkt P (heute als Gaußsche Krümmung bezeichnet). Seine Abhandlung von 1828 ist ganz der Frage gewidmet, wie man den Begriff der totalen (und damit natürlich auch der lokalen) Krümmung durch innerhalb der Fläche ausführbare Messungen bestimmen könne. Dies geht, wie Gauß zeigt, über Triangulation und die dabei festgestellte Differenz zwischen der Winkelsumme in den geodätischen Dreiecken und 180 Grad. Das von ihm selbst als „*theorema egregium*“ (svw. außerordentlicher Satz) bezeichnete weitere Resultat besagt, daß dieser Krümmungsbegriff, da er durch Messung in der Fläche definierbar ist, nicht nur bei Verlagerung der Fläche im Raum sondern auch bei beliebigen Verbiegungen (nicht Verzerrungen) der Fläche invariant ist und daß er durch Formeln berechenbar ist, in die nur die (heute als erste Fundamentalgrößen g_{ij} bezeichneten) Koeffizienten E, F, G des differentiellen Bogenelements $\sqrt{Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2}$ als Funktionen der Flächenparameter p, q eingehen. Gauß zeigt dann weiter, daß seine lokale Krümmung identisch mit dem seit Euler betrachteten vorzeichenbehafteten Produkt der beiden Hauptkrümmungen ist. Er verallgemeinert den Begriff der Abwickelbarkeit, der bis dahin nur für auf eine Ebene isometrisch abbildbare Flächen gebraucht worden war, zur Abwickelbarkeit einer Fläche auf eine andere (was gleichbedeutend mit der Existenz einer bezüglich der inneren Geometrien beider Flächen isometrischen Abbildung aufeinander ist) und zeigt, daß in diesem Sinne aufeinander abwickelbare Flächenstücke in den jeweils zugeordneten Punkten die gleiche Gaußsche Krümmung haben. (Die Umkehrung, daß bei einer derartigen Abbildung, die die Gaußsche Krümmung punktweise invariant läßt, zumindest lokale Abwickelbarkeit der Flächen aufeinander vorliegt, gelang 1839 Ferdinand Minding.)

Abb. 7.4.1 Eine Traktrix mit der Leitgeraden l

- a) Eine Traktrix mit der Leitgeraden l ist dadurch definiert, daß für jeden Kurvenpunkt P der Abschnitt der Tangente der Traktrix im Punkt P zwischen P und ihrem Schnitt mit l den konstanten Wert R hat. Gemäß dieser Definition ist sie — im Unterschied zu vielen anderen „dynamisch“ definierten Kurven — nicht exakt punktweise konstruierbar. Da sie jedoch alle Kreise k vom Radius R mit Mittelpunkt M auf l senkrecht schneidet, kann man sie recht gut näherungsweise als orthogonale Trajektorie dieser Kreisschar zeichnen, indem man von ihrem Rückkehrpunkt P_0 startet, der irgendwo im Abstand R von der Leitgeraden vorzugeben ist.
- b) Wählt man l als y -Achse und die dazu Senkrechte durch P_0 als x -Achse eines Koordinatensystems, so erhält man für den Anstieg der Tangente im Kurvenpunkt $P(x, y)$ $y' = \pm \sqrt{R^2 - x^2}/x$, wobei das $+$ für den unteren und das $-$ für den oberen Ast der zur x -Achse symmetrischen Kurve gilt. Daraus ergibt sich für den oberen Ast die Kurvengleichung $y = R \ln(R + \sqrt{R^2 - x^2}/x) - \sqrt{R^2 - x^2}$ ($0 < x \leq R$).

Weitere Resultate in Gauß' „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ von 1828 (so der Originaltitel) betreffen Analogien zwischen der ebenen Geometrie und der inneren Geometrie krummer Flächen: Ein Kreis im Sinne der inneren Geometrie entsteht, indem man in jeder Richtung Geodätische gleicher Länge abträgt. Er schneidet dann alle diese seine „Radien“ unter rechtem Winkel. Eine Abstandslinie entsteht, indem man auf einer Geodätischen in jedem Punkt nach einer bestimmten Seite eine „geodätische Senkrechte“ von konstanter Länge abträgt. Die so entstehende Abstandskurve durchschneidet wiederum alle ihre Lote senkrecht. All dies dient der Verallgemeinerung des geographischen Gradnetzes zu geodätischen Gradnetzen auf beliebigen Flächen. Weiter dehnt Gauß einen für die höhere Geodäsie wichtigen Satz von Legendre über sphärische Dreiecke auf geodätische Dreiecke beliebiger krummer Flächen aus: Vergleicht man ein ebenes und ein geodätisches Dreieck mit denselben Seitenlängen, so unterscheiden sich die Winkel beider Dreiecke bis auf Größen vierter Ordnung um Beträge, deren Summe die Abweichung der Winkelsumme des geodätischen Dreiecks von 180 Grad ist und deren Aufteilung von den lokalen Krümmungen in den Ecken des geodätischen Dreiecks abhängt. Im Fall konstanter positiver (das war Legendre's Satz) oder negativer Krümmung sind die Winkel des sphärischen oder pseudosphärischen Dreiecks um je ein Drittel des Exzesses bzw. Defektes des Dreiecks größer bzw. kleiner als die Winkel des ebenen Dreiecks mit gleichen Seiten. Hier berühren sich Gauß' Überlegungen nicht nur mit der praktischen Geodäsie sondern auch mit seinem Interesse für die heute als hyperbolisch oder Lobatschewskisch bezeichnete nichteuklidische Geometrie. Daß sie lokal mit der inneren Geometrie einer Pseudosphäre, d.h. einer Fläche konstanter negativer Krümmung, übereinstimmt und folglich kein Hirngespinnst ist, muß Gauß spätestens 1827 gewußt haben, und daß es derartige Flächen gibt, daß z.B. durch Rotation der zuerst von Newton eingeführten Traktrix (Abb. 7.4.1) eine solche Fläche (Abb. 7.4.2) entsteht, war auch schon am Ende des 18. Jhs. bekannt (Aufg. 7.4.1).

Übergang zur n -dimensionalen Differentialgeometrie

Es muß Gauß bewußt gewesen sein, daß seine innere Geometrie nur einer geeigneten Verallgemeinerung des Begriffes der „mehrfach ausgedehnten Größe“ zu höheren Dimensionen bedarf, um zu einer völlig neuen Raumauffassung zu führen. Daher setzte er durch, daß B. Riemann anläßlich seiner Habilitation in Göttingen im Jahre 1854 statt wie üblich über das erste der von ihm eingereichten Themen über das dritte sprechen mußte: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ [Gesammelte Math. Werke 1876, Reprint in Teubner-Archiv Bd. 1]. In diesem ihm aufgenötigten Vortrag

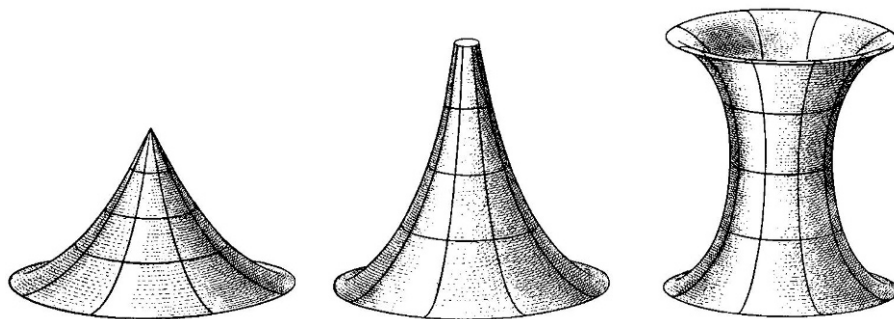


Abb. 7.4.2 Flächen konstanter negativer Krümmung

In der Mitte die durch Rotation der Traktrix erzeugte „Pseudosphäre“
 [Felix Klein „Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie“, Springer, Berlin 1928]

erfüllte Riemann voll die von Gauß gehegten Erwartungen, wenngleich, dem Charakter eines solchen, im wesentlichen vor Nichtmathematikern zu haltenden Vortrages entsprechend, auf eine sehr informale Weise, fast ohne Formeln. Als Beispiele für stetig veränderliche, mehrfach ausgedehnte Größen, nannte er außer den „Orten der Sinnengegenstände“ (das ist also der „physikalische Raum“) die Farben (hieran haben später Helmholtz und Ostwald angeknüpft), jedoch nicht die Zustände mechanischer Systeme, was nahegelegen hätte. Seine verbale Beschreibung, wie man aus einem n -fach ausgedehnten System durch Veränderung eines Parameters ein $(n+1)$ -fach ausgedehntes erhält (also z.B. aus einer Strecke ein Parallelogramm und aus einem Rechteck einen Quader) erinnert sehr an Graßmanns bereits 1844 publizierte „Ausdehnungslehre“, es ist jedoch unklar, ob Riemann dieses damals kaum verbreitete Werk kannte. Nach der Ausdehnung der von Gauß eingeführten metrischen Fundamentalgrößen auf diesen allgemeinen Fall geht er auf die Räume konstanter Krümmung und dabei auf den Sonderfall der Krümmung Null ein und macht klar — ohne diese Termini zu benutzen —, daß konstante Krümmung die notwendige Bedingung für Homogenität und Isotropie eines Raumes, also für Gleichartigkeit aller Punkte und aller Richtungen, und für die freie Beweglichkeit von „Körpern“ ist. Dann diskutiert er den Unterschied zwischen Unendlichkeit und Unbegrenztheit eines Raumes und bemerkt, daß bei konstanter positiver Krümmung der Raum notwendig endlich sein muß. Von prophetischem Scharfblick zeugt der letzte Abschnitt:

„Nun scheinen aber die empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Massbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichtstrahls, im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit zu verlieren; es ist also sehr wohl denkbar, daß die Massverhältnisse des Raumes im Unendlichkleinen den Vor-

aussetzungen der Geometrie nicht gemäss sind, und dies würde man in der That annehmen müssen, sobald sich dadurch die Erscheinungen auf einfachere Weise erklären liessen. Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem innern Grunde der Massverhältnisse des Raumes. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raume gerechnet werden darf ... Es muß also das dem Raume zugrundeliegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden.“

Ist Riemann mit Recht als geistiger Vater einer Richtung gewürdigt worden, die letzten Endes zur allgemeinen Relativitätstheorie führte, so weisen ihn diese letzten Sätze als Vordenker jener noch moderneren Wendung der Physik aus, die alle von den Paradigmen der klassischen Analysis geprägten physikalischen Vorstellungen wieder in Frage stellt.

Gauß' Abhandlung über die innere Geometrie wurde schon im 19. Jh. mehrfach nachgedruckt und auch ins Französische übersetzt und führte letztlich dazu, daß Differentialgeometrie und besonders ihr innerer Standpunkt zu einem zentralen Gebiet der Geometrie des 19. Jhs. avancierten. Die Gaußsche Definition der Hauptbegriffe setzte sich durch, obwohl noch gelegentlich andere Krümmungsmaße vorgeschlagen wurden (so schon 1831 von der mit Gauß in Briefkontakt stehenden französischen Mathematikerin Sophie Germain und 1889 von F. Casorati). Riemanns Habilitationsvortrag wurde erst 1868 nach seinem Tode durch R. Dedekind aus dem Nachlaß veröffentlicht. Am weiteren, vor allem kalkülmäßigen Ausbau der von Gauß und Riemann initiierten Richtung der Geometrie waren außer deutschen (Minding, Enneper, Lipschitz, Christoffel, Weingarten) und französischen (Dupin, Bonnet, Bertrand, Liouville, Bour, Darboux) auch italienische Mathematiker (Brioschi, Betti, Dini, Bianchi, Codazzi, Mainardi, Beltrami, Casorati) stark beteiligt. Christoffel begründete allgemein die sogenannte absolute, d.h. von Koordinaten des umgebenden Raumes freie innere Differentialgeometrie und schuf in diesem Zusammenhang die Elemente des späteren Tensorkalküls. Aber auch die klassischen und näher mit der Geodäsie verwandten Problemfelder wurden weiter gepflegt. Z.B. bestimmte C. G. J. Jacobi 1844 explizit die Gleichungen der Geodätischen auf dem dreiachsigen Ellipsoid.

Teils durch den von Riemann hergestellten Zusammenhang zwischen konstanter Krümmung und freier Beweglichkeit, teils durch das nach dem Tode von Gauß erstarkende Interesse an der nichteuklidischen Geometrie, galten viele Untersuchungen in der zweiten Hälfte des 19. Jhs. den Flächen konstanter negativer Krümmung. 1839 studierte Minding systematisch die Rotationsflächen



Abb. 7.4.3 Kuensch'sche Fläche

[Gerd Fischer: Mathematische Modelle, Vieweg Verlag, Braunschweig / Wiesbaden 1986]

mit konstanter negativer Krümmung und klassifizierte ihr lokales Verhalten als elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch (Abb. 7.4.2), wobei als Profil des parabolischen Falls nur die Traktrix in Frage kommt. 1865 erkannte Dini jedoch, daß die Flächen mit den von Minding gefundenen Profilen keine Rotationsflächen sein müssen, sondern daß Flächen mit konstanter negativer Krümmung auch bei Schraubung dieser Profile mit beliebig wählbarer Ganghöhe um die jeweilige Achse entstehen. Bour hatte schon 1857 bewiesen, daß jede Schraubenfläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist. Die Arbeiten von Ferdinand Joachimsthal (1846), Alfred Enneper (1868) und dessen Schülern sowie die von Theodor Kuen 1884 entdeckte außergewöhnlich geformte Fläche (Abb. 7.4.3) brachten eine vorher ungeahnte Vielfalt an möglichen Flächenformen für den Fall konstanter negativer Krümmung zutage. In dem Bestreben, eine Übersicht darüber und Gewißheit über die Vollständigkeit der Aufzählung zu erhalten, kam es zu Entwicklungen, die später ihre Hauptwirkung außerhalb der Differentialgeometrie entfalten sollten: 1860 hatte die Pariser Akademie die Preisaufgabe gestellt, Methoden zu finden, mit denen man aus einer gegebenen Fläche weitere darauf abwickelbare Flächen erzeugen kann. Den ersten Preis erhielt 1862 der bald darauf im Alter von 33 Jahren gestorbene Edmond Bour. Die von Bour, Ribaucour, Bäcklund und anderen gefundenen Methoden, aus einer Fläche durch geometrische Transformation andere Flächen mit gleichen Krümmungseigenschaften zu erzeugen (Man beachte den ideengeschichtlichen Zusammenhang mit den von Newton angewendeten Methoden zur Aufzählung aller Kurven dritten Grades und die daran anschließende

Entwicklung!), führten über Arbeiten von Albert Bäcklund, Luigi Bianchi, Sophus Lie und anderen letztlich zum Begriff der Berührungstransformation und deren Anwendung auf die Lösungstheorie von Differentialgleichungen. Hierin steckten auch Keime der Gruppentheorie. Z.B. fand Lie 1883, daß Bianchis Transformationen bezüglich Lies Transformationen gerade die (modern gesprochen) Konjugierten der Bäcklundtransformationen sind. Den zweiten Preis der Pariser Akademie für die 1860 gestellte Aufgabe erhielt Delfino Codazzi für die Formulierung der Bedingungen, die zwei vorgegebene quadratische Formen erfüllen müssen, um erste und zweite Fundamentalform einer Fläche zu sein. Danach wies G. Mainardi darauf hin, daß er diese Gleichungen bereits 1857 in einer italienischen Zeitschrift veröffentlicht hatte. Später wurde bekannt, daß die Gleichungen von Mainardi-Codazzi bereits 1825 in dem oben erwähnten, aus dem Nachlaß publizierten Manuskript von Gauß enthalten waren und daß sie K. Peterson schon 1853 in Dorpat in seiner Dissertation hatte.

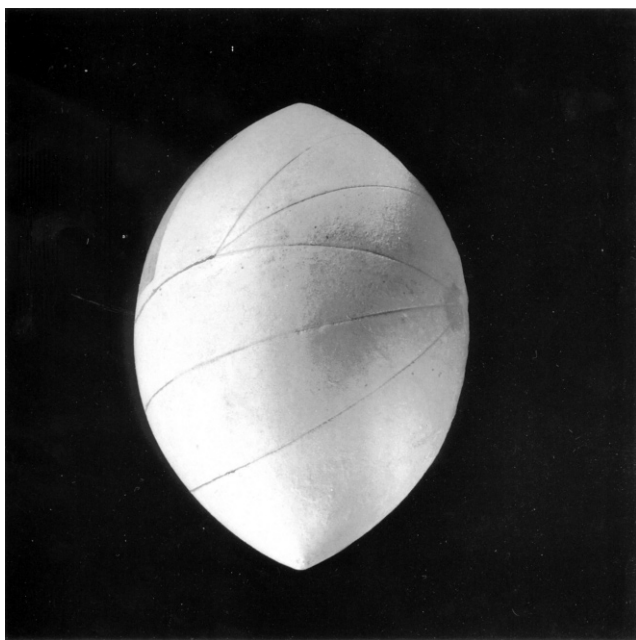


Abb. 7.4.4 Fläche konstanter positiver Krümmung

Sie entsteht, indem man eine Kugeloberfläche längs eines Meridians aufschneidet und die Schnittkanten ineinander schiebt. Dadurch entstehen aber an den Polen Spitzen, d.h. Punkte ohne Tangentialebene. [Gerd Fischer: Mathematische Modelle, Vieweg-Verlag, Braunschweig / Wiesbaden 1986]

Die ausgiebige Verwendung der Differentialrechnung begünstigt „lokales Denken“ in der Geometrie, und manche nicht ganz exakte Behauptung des 18. und

frühen 19. Jhs. ist auf den Irrtum zurückzuführen, daß alles, was lokal möglich ist, sich auch problemlos „fortsetzen“ läßt. Z. B. glaubte Meusnier 1776 beweisen zu können, daß Kugeloberflächen und deren Teile die einzigen Flächen konstanter positiver Krümmung sind. Erst gegen Ende des 19. Jh. wurden andere Flächen konstanter positiver Krümmung gefunden, die allerdings Singularitäten aufweisen (Abb. 7.4.4). Felix Klein formulierte 1890 die später als Clifford-Kleinsches Raumproblem auf beliebige Dimensionen verallgemeinerte Frage nach denjenigen zwei- bzw. dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung, in denen für eine gewisse positive Zahl r von jedem Punkt in jeder Richtung eine Geodätische der Länge r abgetragen werden kann. In derartigen Räumen gilt also lokal die euklidische oder Lobatschewskische oder sphärische Geometrie. Für den Fall der Krümmung 0 und Dimension 2 kommt z.B. außer der Ebene auch jeder Zylindermantel unendlicher Länge in Frage. Erst Heinrich Liebmann bewies um 1900, daß vollständige Sphären die einzigen unbegrenzten und singularitätenfreien Flächen konstanter positiver Krümmung sind, und David Hilbert konnte 1901 zeigen, daß eine Fläche konstanter negativer Krümmung im dreidimensionalen Raum ohne Begrenzung oder Singularitäten nicht existieren kann, daß also der Schönheitsfehler der von Beltrami verwendeten „Pseudosphäre“, nur ein lokales Modell der nicht-euklidischen Geometrie zu sein, unvermeidlich ist, wenn man sie als innere Geometrie einer Fläche im R^3 realisieren will.

Für moderne, mehr in technische Details gehende Darstellungen sei auf [Reich 1973], [Scholz 1980], [Fischer 1986, Kommentarband, Kap. 3] und den Artikel Differentialgeometrie in [Dieudonné 1985] sowie auf den Kommentar von Böhm und Reichardt im Teubner-Archiv, Bd. 1 (Gauß, Riemann, Minkowski) verwiesen. Er macht jedoch die umfangreichen historischen und bibliographischen Angaben in den Anmerkungen von Wangerin zur ersten Auflage von Gauß' Flächentheorie in deutscher Übersetzung in Ostwalds Klassikern nicht überflüssig.

7.5 Nichteuklidische Geometrie

Wir knüpfen unmittelbar an 6.4 an und bemerken zu Beginn, daß es über dieses wichtige Kapitel der Geschichte der Geometrie soviel gut zugängliche und ins Detail gehende Literatur gibt (u.a. [Engel-Stäckel 1895], [Sommerville 1911], [Bolyai-Stäckel 1913], [Bonola-Liebmann 1919, 1921], [Sjöstedt 1968], [Reichardt 1985], [Trudeau 1987]), daß wir uns hier auf eine relativ straffe Schilderung des zeitlichen und inhaltlichen Ablaufs beschränken, dafür einige bisher wenig beachtete Gesichtspunkte diskutieren und die „Breitenwirkung“ der Ereignisse verfolgen wollen.

Mehrfache briefliche Äußerungen von Gauß belegen, daß er sich bereits 1792 mit dem Parallelenproblem zu beschäftigen begann und daß das Interesse des gleichzeitig mit Gauß in Göttingen studierenden jungen Ungarn Wolfgang v. Bolyai an dieser Frage eine wesentliche Quelle für deren Freundschaft war, die sich in einem langjährigen unregelmäßigen Briefwechsel fortsetzte. Ein eigener Beitrag von W. v. Bolyai bestand darin, daß er die Eindeutigkeit der Parallelen aus der Voraussetzung deduzieren konnte, daß durch je drei nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegende Punkte ein Kreis geht. 1832 erschien in Ungarn sein in lateinischer Sprache verfaßtes Lehrbuch „Tentamen“ für den gymnasialen Mathematikunterricht. In dieser Zeit war es — zum Teil als Folge der weit verbreiteten Geometriebücher von Legendre — nicht unüblich, in derartigen Lehrbüchern wenigstens in pädagogisch wohlabgewogenen Randbemerkungen oder Fußnoten auf das Parallelenproblem einzugehen. Zum Beispiel schreibt J. A. Grunert, damals noch Gymnasialprofessor in Brandenburg, 1834 in seinem „Lehrbuch der ebenen Geometrie für die mittlern Classen höherer Lehranstalten“:

„Die Mathematiker haben bekanntlich seit den Zeiten des Euklides bei der Theorie der Parallelen Schwierigkeiten gefunden, und es kann hier nicht unsere Absicht seyn, in nähere Erörterungen über diesen Gegenstand einzugehen, viel weniger diese Schwierigkeiten selbst zu heben versuchen, weil dazu eine eigne ausführliche Abhandlung erforderlich seyn würde, die durchaus nicht in ein Elementarbuch, wie das vorliegende, gehört.“

Er kann es aber dann doch nicht lassen, seine eigene „Ansicht über diesen Gegenstand mit wenigen Worten“ darzulegen (a.a.O. S. 51). Diese läuft, kurz gesagt, darauf hinaus, daß die sonstigen Axiome und Postulate Euklids sozusagen lokal sind und u.a. etwas über die Bedingungen für die Kongruenz von Dreiecken aussagen, daß jedoch die Aussage des 5. Postulats eine „globale“ Eigenschaft der Ebene zum Ausdruck bringt und es daher nicht zu erwarten sei, daß man sie entbehren (d.h. aus den übrigen Axiomen beweisen) könne.

Dem „Tentamen“ war nun als „Appendix“ (Anhang, ebenfalls lat.) die Schrift von Johann v. Bolyai, dem Sohn Wolfgangs, beigelegt. Johann war wie schon einige vor ihm durch seine Versuche, aus der Verneinung des Parallelenpostulats einen Widerspruch abzuleiten, auf Zusammenhänge gestoßen, die zwar im Widerspruch zur naiven Anschauung standen, ihm jedoch in sich immer sinnvoller erschienen, je weiter er sie verfolgte. Vor allem stellte er fest, daß die so entstehende Alternative zur euklidischen Geometrie derart von einer Konstanten abhängt, daß die Verhältnisse bei hinreichender Kleinheit dieser Konstanten den euklidischen Verhältnissen beliebig nahe kommen. Die Grundtendenz seines „Appendix“ besteht daher darin, die Geometrie zunächst so weit wie

möglich ohne Benutzung des Parallelenpostulats oder seiner Verneinung zu entwickeln (Seiner Wortprägung folgend, hat man diesen Teil später als absolute Geometrie bezeichnet.) und dann die Folgen aus der Verneinung des Parallelenpostulats in Abhängigkeit von dieser Konstanten so zu entwickeln, daß man den euklidischen Fall darin als Grenzfall einer unendlichen Schar von Möglichkeiten findet. Er betont mehrfach, daß von der Seite der Mathematik mehr nicht erwartet werden könne und die Feststellung der Konstanten physikalischer Messung überlassen werden müsse, wobei der Fall der Euklidizität prinzipiell nicht verifizierbar ist, weil ja die Abweichung so gering sein kann, daß sie sich im Rahmen der möglichen Messgenauigkeit nicht feststellen läßt. Neben vielen anderen Einzelergebnissen zeigte er, daß im Fall der Nichteuklidizität die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal möglich ist. Nach dieser Kurzbeschreibung des Inhalts des „Appendix“ wird der vollständige Titel seiner Schrift verständlich sein: „Raumlehre, unabhängig von der (a priori nie entschieden werdenden) Wahr- oder Falschheit des berichtigten XI. Euklidischen Axioms²¹: für den Fall einer Falschheit desselben geometrische Quadratur des Kreises.“ (Eine von ihm selbst schon 1832 angefertigte deutsche Fassung der gesamten Schrift ist u.a. in [Bolyai-Stäckel] und [Reichardt 1985] abgedruckt.)

Von den vorausgegangenen eindringlichen Warnungen des Vaters an seinen Sohn, sich nicht in dieses Problem zu verbeißen, ist schon berichtet worden. (Weitere derartige Briefstellen findet man u.a. in [Bolyai-Stäckel] und [Reichardt 1985, S. 56ff]. Dort ist auch im einzelnen belegt, daß die Veröffentlichung des „Appendix“ in der vorliegenden Form erst nach längerem Hin und Her zwischen Vater und Sohn zustandekam. Vater Bolyai schickte nun allerdings das Werk seines Sohnes an seinen Jugendfreund Gauß, und es ist völlig klar, daß die beiden Bolyai nicht nur fest mit Zustimmung und Anerkennung rechneten, sondern auch und vor allem mit einem öffentlichen Eintreten des schon sehr berühmten Mannes für die neue Theorie. Lob und Anerkennung kamen, allerdings in einer Form, die den ohnehin psychisch sehr labilen J. v. Bolyai tief kränken und enttäuschen mußte:

„Jetzt einiges über die Arbeit Deines Sohnes. Wenn ich damit anfangе, „dass ich solche nicht loben darf“: so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hiesse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen zum Theile schon seit 30-35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf das Äusserste überrascht. Mein Vorsatz war, von meiner

²¹5. Postulat

eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt . . . Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung [alles selbst schriftlich auszuarbeiten] mir nun erspart werden kann und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist . . . “ (Zitiert nach [Reichardt 1985], S. 59f. Es folgen einige Seiten inhaltlicher Verbesserungsvorschläge.)

In der Tat hat sich Gauß zwar in Briefen an vertraute Freunde gelegentlich über das Parallelenproblem geäußert, dort auch die Arbeit Johann v. Bolyais gelobt, jedoch jegliche öffentliche Äußerung darüber unterlassen und sich auch eine Bezugnahme auf seine brieflichen Äußerungen in geradezu brüskem Ton verboten. So schrieb er, nachdem er die Untersuchungen des Juristen F. K. Schweikart und dessen Neffen F. A. Taurinus (zum Teil abgedruckt in [Engel-Stäckel 1895]) zur Kenntnis genommen hatte, 1824 an den Letztgenannten: „Von einem Manne, der sich mir als einen denkenden mathematischen Kopf gezeigt hat, fürchte ich nicht, dass er das Vorstehende [eine Kurzdarstellung von Gauß’ Ergebnissen und Ansichten] missverstehen werde: auf jeden Fall aber haben Sie es nur als eine Privat-Mitteilung anzusehen, von der auf keine Weise ein öffentlicher oder zur Öffentlichkeit führen könnender Gebrauch zu machen ist.“ (Zitiert nach [Reichardt 1985, S. 39])

Ganz unabhängig von Lambert, Gauß, Bolyai, Schweikart und Taurinus hatte im fernen Kasan schon 1826 N. I. Lobatschewski einen ersten öffentlichen Vortrag über die nichteuklidische Geometrie gehalten. In den Jahren 1829-40 folgten mehrere Veröffentlichungen dazu, 1840 schließlich sogar in deutscher Übersetzung „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“. Lobatschewski besaß als langjähriger verdienstvoller Rektor der Kasaner Universität eine ganz andere gesellschaftliche Stellung als der frühpensionierte skandalumwitterte Offizier J. v. Bolyai und vor allem eine andere psychische Konstitution. Er ließ sich durch Mißerfolg und Nichtanerkennung nicht davon abbringen, lebenslang für die von ihm als wahr erkannte Parallelentheorie einzutreten, die sich von Bolyais Theorie hauptsächlich dadurch unterscheidet, daß bei ihm der Gedanke der (modern gesprochen Krümmungs-)konstanten und der bei gering gekrümmtem Raum experimentell nicht wahrnehmbaren Abweichung von der Euklidizität nicht eine so dominierende Rolle spielt. Natürlich verfolgte Gauß auch diese Arbeiten mit höchstem Interesse und bewirkte, daß Lobatschewski zum Korrespondierenden Mitglied der Göttinger Gelehrten Gesellschaft ernannt wurde. Es trifft auch zu, daß er im Alter noch begann, Russisch zu lernen, aber es ist eine Legende, daß er dies tat, um die russisch geschriebenen Arbeiten Lobatschewskis lesen zu können.

Obgleich, wie bemerkt, das Parallelenproblem um diese Zeit auf unterschiedlichem Niveau von vielerlei Leuten, sogar in Schulbüchern, diskutiert wurde, blieben die Veröffentlichungen von Bolyai, Lobatschewski und Schweikart ohne Wirkung. Dies änderte sich erst, als nach dem Tode von Gauß, zuerst 1856 durch eine Bemerkung seines ersten Biographen, Sartorius von Waltershausen, massiv dann durch die Veröffentlichung des Briefwechsels Gauß-Schumacher (6 Bände 1860-65) Gauß' Meinung zu dieser Frage allgemein bekannt wurde. Eine Folge war, daß Lobatschewskis „Pangeometrie“ 1856 in Frankreich und 1867 in Italien und sein Hauptwerk (1840) 1866 in französischer Übersetzung erschien (mit einem ausführlichen Kommentar des Übersetzers J. Hoüel [z.B. in Sjöstedt 1968], der infolgedessen als der Pionier der nichteuklidischen Geometrie in Frankreich gelten muß). Auch Bolyais „Appendix“ wurde 1868 ins Italienische übersetzt. Ein gutes Zeitbild vermittelt der 1867 im „Archiv der Mathematik und Physik“ erschienene Artikel „Ueber den neuesten Stand der Frage von der Theorie der Parallelen“ des oben erwähnten Grunert, inzwischen Mathematikprofessor an der Universität Greifswald, Gründer und Herausgeber des „Archivs“, einer vor allem für Lehrer bestimmten, europaweit verbreiteten Zeitschrift. Er schreibt dort u.a.:

„...da scheinen sich nun, um hierüber [nämlich über die Winkelsumme im Dreieck] zur Entscheidung zu kommen, die Ansichten der neueren Geometer, und zwar zum Theil sehr gewichtiger Stimmen [!], darin zu vereinigen, dass die apriorische theoretische Betrachtung mit dem Obigen [den in 6.4 genannten Sätzen von Legendre] ihre Endschaft erreicht habe, und nichts Anderes übrig bleibe, als die Erfahrung zu befragen. Also die Geometrie doch wenigstens in *einem* Punkte eine Erfahrungswissenschaft!!“ (a.a.O. S.319)

Damit kommen wir zur entscheidenden Frage der philosophischen Deutung aller bisher erwähnten (und weiterer hier nicht erwähnter) Bemühungen. Der hochangesehene Königsberger Philosoph Immanuel Kant hatte mehrfach, vor allem aber in seiner „Kritik der reinen Vernunft“ (1781) dekretiert, die euklidische Geometrie sei ebenso denknotwendig wie der Begriff der natürlichen Zahl, a priori, vor aller Erfahrung gegeben, sozusagen das leere Regal, in das die Erfahrungen dann eingeräumt werden können. Welche Rolle damals eine derartige autoritär vorgetragene Meinung spielte, kann man vielleicht besser verstehen, wenn man sich in Erinnerung ruft, daß Mathematik ein Studienfach im Rahmen der philosophischen Fakultäten war und daß selbstverständlich alle zukünftigen Mathematiklehrer an den höheren allgemeinbildenden Schulen (woraus sich die Professorenschaft der Universitäten und Höheren Technischen Bildungsanstalten rekrutierte) in ihrem Studium eine gehörige Portion Philosophie zu absolvieren hatten, häufig aus Neigung der Philosophie lebenslang verbunden blieben.

Bei allen bisher behandelten Autoren der nichteuklidischen Geometrie (mit Ausnahme von Lambert!) ist deutlich, daß sie die Frage nur unter dem Gesichtspunkt eines möglichen Zweifels an der Euklidizität des physikalischen Raumes sehen konnten. Mathematik war Naturwissenschaft, Geometrie zumal war sozusagen Protophysik, die Lehre vom leeren aber wirklich existierenden Raum. Schweikart nennt seine Geometrie „Astralgeometrie“, weil er der Meinung ist, daß ihre eventuelle Gültigkeit sich erst in kosmischen Maßstäben herausstellen würde. Die gleiche Ansicht vertritt J. v. Bolyai. Lobatschewski spricht von „imaginärer Geometrie“, weil sie nur „vorgestellt“ ist, solange ihre „Wahrheit“ nicht erwiesen ist. Gauß schreibt im oben zitierten Brief an Taurinus: „Alle meine Bemühungen, einen Widerspruch, eine Inconsequenz in dieser Nicht-Euklidischen Geometrie zu finden, sind fruchtlos gewesen, und das Einzige, was unserem Verstande darin widersteht, ist, dass es, wäre sie wahr [!], im Raum eine an sich bestimmte (obwohl uns unbekannte) Lineargröße geben müsste“ (a.a.O. S. 38). Sehr bemerkenswert ist auch eine Passage in einem Brief von Gauß an seinen Freund Schumacher vom 28.11.1846: „Es [d.h. die deutsche Ausgabe von Lobatschewskis Theorie der Parallellinien] enthält die Grundzüge derjenigen Geometrie, die statt finden müsste [!] und strenge consequent statt finden könnte, wenn die Euklidische nicht die wahre ist . . . Sie wissen, dass ich schon seit 54 Jahren dieselbe Überzeugung habe (mit einer gewissen späteren Erweiterung, deren ich hier nicht erwähnen will); . . .“ (zitiert nach [Reichardt 1985], S. 77). Abgesehen von der erneuten Bekräftigung der nichteuklidischen Geometrie nur als mögliche Alternative für die Struktur des physikalischen Raumes, scheint es sehr plausibel (und dies im Gegensatz zu Reichardts an die zitierte Stelle angeschlossener Vermutung), daß Gauß mit seiner in Klammern beigefügten Bemerkung auf seine wohl um 1827 gewonnene Einsicht anspielte, daß die ebene nichteuklidische Geometrie die innere Geometrie der Flächen von konstanter negativer Krümmung ist. Neben der immer wieder geäußerten und sicher zutreffenden Ansicht, die meisten Mathematiker würden ihn nicht verstehen, und es würden ihm nur unnötig die „Wespen um die Ohren fliegen“, wie er sich einmal ausdrückte, sowie Gauß’ bekannter Abneigung gegen alle Turbulenzen des äußeren Lebens ist ein Grund für seine lebenslange vorsichtige Zurückhaltung eventuell gewesen, daß ihm das räumliche Analogon zu den gekrümmten Flächen fehlte. Dies würde die ungewöhnliche Erregung erklären, mit der Gauß 1854 nach dem Bericht von Zeugen auf den Habilitationsvortrag von Riemann reagierte: Riemann hatte ja mit einem Schlag zwei offene Fragen beantwortet, mit denen Gauß womöglich lange selbst gerungen hatte: Wie könnte ein Raum von höherer Dimension als drei beschaffen sein, in dem man sich einen negativ gekrümmten dreidimensionalen

Raum eingebettet vorstellen könnte? Wie kann man die innere Geometrie der Flächen zu einer inneren Geometrie von Räumen höherer Dimension verallgemeinern? Sich einen gekrümmten Raum ohne einen höherdimensionalen Raum vorzustellen, in dem er sich krümmen kann, lag wohl damals ebenso jenseits aller psychologischen Möglichkeiten wie die Erkenntnis, daß der physikalische Raum im Großen durchaus inhomogen sein kann oder sogar sein muß. Gauß spricht ja im Zitat von einem „entweder“ (euklidisch) „oder“ (nichteuklidisch im klassischen Lobatschewski-Bolyaischen Sinne). Die heutige umfassende Bedeutung des Wortes Raum und des Beiwortes nichteuklidisch ist das Resultat viel späterer Entwicklungen.

Die ersten Modelle nichteuklidischer Geometrie

1868 publizierte der damals 33-jährige E. Beltrami in italienischer Sprache unter ausdrücklichem Bezug auf Gauß und Lobatschewski (jedoch ohne Bolyai zu erwähnen, vgl. das oben angegebene Jahr der Publikation des „Appendix“ in Italien) seinen berühmten und vielzitierten Artikel „Saggio . . .“ (deutsch: Versuch einer Interpretation der nichteuklidischen Geometrie), dessen wesentlicher Inhalt der Nachweis ist, daß die nichteuklidische Geometrie die innere Geometrie der durch Rotation der Traktrix entstehenden (also einer sehr speziellen) Fläche konstanter negativer Gaußscher Krümmung ist. Beltrami war wohl der erste, der in diesem Zusammenhang den Ausdruck „Pseudosphäre“ gebrauchte. Beltramis Artikel machte die nichteuklidische Geometrie in den Augen der mathematischen Öffentlichkeit endgültig seriös. Es war ja nun eine Deutung in der realen Welt erfolgt. 1868 äußert Beltrami noch Zweifel, ob etwas Analoges auch für die räumliche nichteuklidische Geometrie möglich sei. Nachdem er Riemanns 1868 gedruckten Habilitationsvortrag zur Kenntnis genommen hatte, dehnte er seine Untersuchung auf den räumlichen Fall aus. Inzwischen hatte Felix Klein 1871 ein allgemeineres Modell der nichteuklidischen Geometrie in der euklidischen gefunden, das in völlig analoger Weise für den ebenen wie für den räumlichen Fall funktioniert. Ausgehend von der Weise, wie A. Cayley 1859 die Längen- und Winkelmessung im projektiven Raum mittels einer imaginären Fläche zweiter Ordnung erklärt hatte (vgl. 7.7), zeigte Klein nun, daß man auf analoge Weise Modelle für den nichteuklidischen Raum im Innern einer nichtausgearteten Fläche zweiter Ordnung erhält, wobei der Schnitt mit einer beliebigen Ebene ein von einem Kegelschnitt nach außen begrenztes Modell der nichteuklidischen Ebene liefert. In diesem Artikel führte Klein übrigens auch die seither eingebürgerten Bezeichnungen hyperbolisch (für nichteuklidisch im Lobatschewski-Bolyaischen Sinne, elliptisch für die lokal auf der Kugel geltende Geometrie mit Winkelsumme > 180 Grad und

parabolisch für den euklidischen Fall) ein. Damit waren Bedenken bezüglich der Möglichkeit einer dreidimensionalen hyperbolischen Geometrie, wie sie u.a. Bolyai und Beltrami explizit geäußert, Gauß und andere vermutlich gehabt hatten, endgültig aus der Welt geschafft, außerdem der Schönheitsfehler der Pseudosphäre, wegen der im dreidimensionalen Raum unvermeidlichen Singularitäten kein globales Modell zu liefern, bereinigt. Einflußreiche Lehrbücher, u.a. von J. Frischauf (1876) und W. Killing (1885), der von R. Lipschitz erbrachte Nachweis, daß die Gesetze der Mechanik bei Zugrundelegung eines hyperbolischen Raumes erhalten bleiben sowie der mehrfache Einsatz von H. v. Helmholtz für die nichteuklidische Geometrie, zum Teil mittels geschickter populärwissenschaftlicher Vorträge (siehe z.B. den immer noch genußreich zu lesenden Vortrag [Helmholtz 1870], befestigten deren Stellung.

Nun sind einige geschichtskritische Bemerkungen angebracht.

- 1) Sowohl das (ebene) Modell von Klein als auch das noch zu besprechende von Poincaré sind in ihren Grundzügen elementar verständlich. Vergleicht man damit die ursprünglichen Darlegungen von Beltrami, Klein, Poincaré und anderen aus dem 19. Jh., so ist man verwirrt von der Fülle komplizierter Formeln und Betrachtungen, die aus heutiger Sicht eher nebensächlich erscheinen. Abgesehen von der bereits erwähnten differentialgeometrischen Modeströmung des 19. Jhs. (Moden und Autoritäten spielen — leider — auch heute noch eine große Rolle für die mehr oder weniger große Aufmerksamkeit, die eine mathematische Leistung erregt!) ist eine wesentliche Ursache darin zu sehen, daß vor der erstmals 1899 durch D. Hilbert erfolgten modernen axiomatischen Grundlegung der euklidischen Geometrie überhaupt nicht klar war, welche Sätze in einem „Modell“ (Diesen Begriff gab es auch noch nicht!) als gültig nachgewiesen werden müssen. Die Axiome und Postulate Euklids bilden ja für eine Axiomatik im modernen Sinn eine sehr unvollständige Basis. Daher konzentrierten sich alle Bemühungen darauf, in den nichteuklidischen Geometrien (hier die sphärische eingeschlossen) die Analoga der Formeln der euklidischen Trigonometrie sowie der Maßbestimmungen (Längen, Winkel, Flächeninhalte, Volumen) aufzufinden und diese dann in den aufgefundenen „Versinnlichungen“ (Ausdruck von Klein!) als gültig nachzuweisen. Gegenüber der Prüfung eines als vollständig nachgewiesenen Axiomensystems ist das ein „offenes“ und ziemlich umständliches Programm.
- 2) Wie mehrfach betont, konnte die nichteuklidische Geometrie vor dem Aufkommen der mathematischen Logik mit ihren klaren Begriffen von

formaler Sprache (oder wenigstens scharf begrenztem Begriffssystem), Axiomensystem, Interpretation, Modell, ... kurz gesagt, vor der Transformation der Mathematik aus einer Natur- in eine Strukturwissenschaft, nur unter dem Aspekt ihrer möglichen Gültigkeit im physikalischen Sinne betrachtet werden. Auch die von Beltrami und Klein gefundenen Modelle wurden von den Autoren selbst nicht als Modelle im heutigen Sinn und nur sehr vage als Beweis der logischen Widerspruchsfreiheit aufgefaßt. Vielmehr diente die Veranschaulichung oder Versinnlichung der Kräftigung der Überzeugung, daß eine solche, der bisherigen Anschauung widersprechende Geometrie im physikalischen Sinne möglich ist.

- 3) Die historische Bedeutung von Beltramis Publikation im Jahre 1868 soll nicht bestritten werden. Dennoch hätte man sein Ergebnis schon wesentlich früher mühelos aus den Arbeiten von Gauß und anderen zur inneren Geometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung herauslesen können. Andererseits findet sich die Grundidee des Modells von Klein implizit bei Beltrami. Beltrami verfolgte allgemein (auch in anderen Publikationen) das Ziel, krumme Flächen so in die Ebene abzubilden, daß die Geodätischen dabei in Geraden übergehen. Dies machte er auch mit der Pseudosphäre. Sieht man sich seine Abbildung an, so hat man eigentlich das ebene Modell von Klein (Abb. 7.5.1). Nachdem Beltrami von Riemanns Habilitationsvortrag Kenntnis hatte, erweiterte er noch im gleichen Jahr (1868, publiziert 1869) sein Modell zu einem räumlichen im Innern einer Kugel. Kleins Verdienst bleibt es, dieses Modell mit der Cayleyschen Maßbestimmung in Verbindung gebracht und so in einen allgemeineren Zusammenhang eingeordnet zu haben. Demgegenüber ist die Ersetzung des Kreisinneren durch das Innere eines beliebigen nichtausgearteten Kegelschnittes unter didaktischen Gesichtspunkten eher störend, wenn man nur auf den möglichst elementaren Nachweis der Widerspruchsfreiheit hinaus will. Übrigens bezog sich Klein 1871 auf die Arbeit Beltramis von 1868, kannte aber die nachfolgende von 1869 anscheinend noch nicht, denn er schrieb dort noch etwas mißverständlich: „Beltrami, dem man die betreffende Versinnlichung der hyperbolischen Geometrie verdankt, hat nachgewiesen, dass etwas Analoges für den Raum nicht möglich ist.“ [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen 1871, S. 626]

Kaum ein anderer innermathematischer Fortschritt hat jemals soviel öffentliche Aufmerksamkeit erregt wie die nichteuklidische Geometrie. Das Lager der Mathematiker blieb auch nach den Veröffentlichungen von Beltrami und

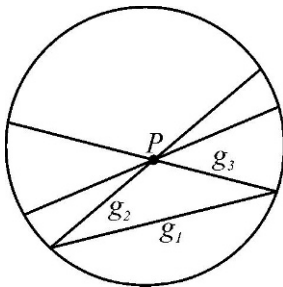


Abb. 7.5.1 Modell von Beltrami-Klein für den ebenen Fall

Die „Welt“ besteht nur aus den Punkten im Innern des Kreises. Zwischen den Grenzparallelen g_2, g_3 zu g_1 gibt es unendlich viele weitere Geraden durch P , die g_1 nicht treffen. Das Innere einer Kugel liefert ein analoges Modell der räumlichen hyperbolischen Geometrie.

Klein gespalten. Neben streitbaren Propagandisten (darunter z.B. der radikal-liberale Brite W. K. Clifford und der auch als Schriftsteller bekannte Gothaer Mathematikprofessor Kurd Laßwitz) gab es ebenso militante Gegner, z.B. J. Bertrand in Frankreich und I. C. V. Hoffmann (Gründer der Zeitschrift für den math. u. naturwiss. Unterricht) in Deutschland, häufig aus einer konservativen Grundhaltung heraus (G. Frege, C. L. Dodgson alias Lewis Carroll). Auch Philosophen fühlten sich betroffen und in ihrem ureigensten Feld bedroht, u.a. R. H. Lotze, und E. Dühring. Der um die Astrophysik außerordentlich verdiente Leipziger Professor F. K. Zöllner schloß aus der nunmehr möglichen Krümmung des dreidimensionalen Raumes auf einen umgebenden vierdimensionalen Raum, in dem folglich vierdimensionale intelligente Wesen leben könnten. Seine spiritistischen Versuche, mit diesen in Kontakt zu treten, erregten um 1880 ungeheures Aufsehen [Wirtz 1887]. Schließlich regte Helmholtz' ansprechendes Gedankenexperiment, sich in auf einer krummen Fläche lebende zweidimensionale Wesen zu versetzen [Helmholtz 1870, 1968] (siehe Anhang), eine ganze Literaturgattung an, wovon „Flatland“ (1884) des britischen Schulmannes E. A. Abbott (kein Mathematiker sondern Theologe und Shakespeare-Forscher, siehe A.10) und „Bolland“ (1957) des Niederländers D. Burger in mehrere Sprachen übersetzt wurden und einen bis heute andauernden Erfolg erzielten.

1881 fand Henri Poincaré im Zusammenhang mit Untersuchungen über die Anwendung konformer Abbildungen der komplexen Zahlenebene zur Lösung gewisser Differentialgleichungen ein neues Modell der ebenen nichteuklidischen Geometrie, ohne sich dieser geometrischen Deutung zunächst bewußt zu sein. Durch Vermittlung von Felix Klein schrieb er 1882 einen zusammenfassenden Bericht darüber für die in Deutschland erscheinenden Mathematischen Anna-

len. Erst der Gedankenaustausch mit Klein brachte den Modellcharakter der Poincaréschen Konstruktion allmählich zum Bewußtsein, und nach einer 1887 erschienenen Arbeit „*Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie*“ hat Poincaré dann in seinem 1902 erstmals erschienenen und noch im gleichen Jahr (von F. Lindemann und dessen Frau) ins Deutsche übersetzten wissenschaftsphilosophischen Buch „*La science et l’hypothèse*“ das von ihm gefundene Modell mit einer bis dahin nirgends erreichten begrifflichen Klarheit dargestellt: a sei eine beliebige Gerade der euklidischen Ebene, H eine der beiden von ihr begrenzten offenen Halbebenen. Punkte im nichteuklidischen Sinn sind alle Punkte von H, Geraden im nichteuklidischen Sinn alle Halbkreise in H, deren Mittelpunkte auf a liegen, sowie alle senkrecht auf a stehenden Halbgeraden in a (die man als Ausartungsfälle der zuvor genannten Halbkreise für den Fall eines gegen unendlich gehenden Radius auffassen kann.) Da jede nichteuklidische Kongruenzabbildung durch Hintereinanderausführung von (höchstens 3) Geradenspiegelungen erzeugt werden kann, genügt es zu sagen, was Spiegelungen im hyperbolischen Sinne sind, nämlich Inversionen an den betreffenden Halbkreisen bzw. Halbgeraden, folglich konforme (winkeltreue) Abbildungen. Alles läßt sich analog für den dreidimensionalen Fall durchführen, wobei eine Ebene an die Stelle von a, ein Halbraum an die Stelle von H tritt und die nichteuklidischen Ebenen durch Halbkugeln bzw. -ebenen dargestellt werden. Poincaré spricht nun bei der Darstellung dieses Modells erstmals von „einer Art Wörterbuch“, mit dessen Hilfe jede Aussage der ebenen Geometrie (egal ob sie in der euklidischen oder in der nichteuklidischen Geometrie oder in keiner von beiden gilt) in die entsprechende Aussage des Modells „übersetzt“ werden kann, und anschließend wird auf diesem Wege die Gültigkeit der Grundaussagen der hyperbolischen Geometrie geprüft. Abgesehen davon, daß dieser Publikation natürlich Hilberts „Grundlagen“ vorangegangen waren, bricht sich hier zum ersten Mal deutlich der formale (das Wort scheint einen negativen Beigeschmack zu haben) oder besser syntaktische Standpunkt Bahn: Man hat ein System von Begriffen und eine Interpretation dieser Begriffe. Ist nun eine beliebige Interpretation der Begriffe gegeben, so kann man prüfen, ob dabei gewisse Sätze wahr werden, d.h. ob sie ein Modell für diese Sätze darstellt.

Poincaré und viele nach ihm sind fasziniert von der Eigenschaft seines Modells, daß jeder hyperbolische Winkel durch einen euklidischen Winkel gleicher Größe repräsentiert wird (was bei den Modellen von Beltrami und Klein nicht zutrifft). Außerdem sieht er die Möglichkeit, die hyperbolische Geometrie nun unabhängig von der Frage ihrer Gültigkeit im physikalischen Raum anzuwenden, indem man umgekehrt ihre Sätze als Sätze über konforme Abbildungen

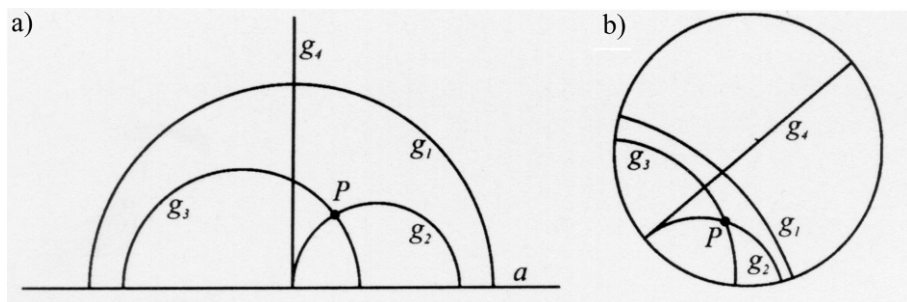


Abb. 7.5.2 Modell von Poincaré

a) in einer euklidischen Halbebene, b) im Inneren eines Kreises
 Modell b) entsteht durch konforme Abbildung aus a). Es unterscheidet sich dann aber trotzdem grundsätzlich vom Modell von Beltrami-Klein, weil die Geraden in ihm nicht durch Sehnen sondern durch auf dem Randkreis senkrechte Kreisbögen dargestellt werden. Auch zum Modell von Poincaré gibt es natürlich räumliche Analoga in einem von einer Ebene begrenzten Halbraum bzw. im Innern einer Kugel.

interpretiert. Natürlich kann man das ganze Modell durch konforme Abbildung auf das Innere einer Kreisscheibe abbilden, aber dann ist es immer noch vom Beltrami-Klein-Modell verschieden, denn dort bilden sich alle Geraden in geradlinige Sehnen ab (Abb. 7.5.2). Erst viel später wurde eine andere Eigenschaft von Poincarés Modell bewußt, die es ebenfalls gegenüber dem Modell von Klein auszeichnet: In ihm lassen sich Konstruktionen der hyperbolischen Geometrie, die dort mit Zirkel und Lineal auszuführen sind, durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal im euklidischen Sinne simulieren [Schreiber 1984, 1996a], (Aufgabe 7.5.1).

Das letzte erwähnenswerte Ergebnis des 19. Jhs. zur hyperbolischen Geometrie erschien allerdings auch erst 1901 im Druck. Analog zur sphärischen Geometrie ist auch in der hyperbolischen Geometrie ein Dreieck durch seine drei Winkel eindeutig bestimmt. Die zugehörige Konstruktionsaufgabe hatte bekanntlich schon für die sphärische Geometrie auf ihre Lösung warten lassen, bis Vieta und Snellius die Polarprinzipien fanden, die diese Aufgabe auf die Aufgabe reduzieren, ein Dreieck aus seinen drei Seiten zu konstruieren. An der analogen Aufgabe für die hyperbolische Geometrie waren Lobatschewski und Bolyai gescheitert. Nun fand H. Liebmann auch für die hyperbolische Geometrie eine Art Polar- oder Dualitätsprinzip, mit dessen Hilfe man eine Konstruktion aus drei Winkeln auf die Konstruktion eines „polaren“ Dreiecks aus seinen drei Seiten reduzieren kann. Allerdings funktioniert es direkt nur für rechtwinklige Dreiecke, und das macht die Durchführung im allgemeinen Fall zwar möglich, aber sehr kompliziert. (Welch ein Glück, daß man es vermutlich nie ausführen muß! Siehe [Liebmann 1901], [Schreiber 1984].)

Wir haben bisher den Begriff der nichteuklidischen Geometrie auf die Bolyai-Lobatschewskische hyperbolische Geometrie eingeschränkt. Mit deren zunehmender Etablierung und parallel zur Entwicklung der inneren Differentialgeometrie wuchs aber auch das Bewußtsein, daß die hyperbolische nur eine von unendlich vielen möglichen nichteuklidischen Raumformen ist. Natürlich trat nun auch die sphärische Geometrie in gewisser Weise in ihr uraltes Recht einer sinnvollen Alternative ein. Interessanter erschien den Geometern des ausgehenden 19. Jhs. aber diejenige, seitdem als elliptisch bezeichnete Variante, die sich daraus ergibt, wenn man nur eine Halbkugelfläche betrachtet und jeweils ein Paar diametral gegenüberliegender Randpunkte identifiziert. Zum einen erhält man so eine Geometrie, die lokal der sphärischen entspricht, mit einer zum Flächeninhalt proportionalen Differenz zwischen Winkelsumme und 180 Grad, jedoch haben je zwei den Geraden entsprechende Geodätische dann immer nur einen Schnittpunkt. Zum anderen ist diese Geometrie isomorph zur Geometrie des vom Mittelpunkt der Kugel getragenen Geradenbündels.

In deutlicher Anlehnung an den Titel von Riemanns Habilitationsvortrag nach dessen Erstveröffentlichung 1866 hatte H. Helmholtz in zwei publizierten Vorträgen „Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie“ (1866) und „Über die Tatsachen die der Geometrie zum Grunde liegen“ (1868) vom Standpunkt des Physikers die Riemannschen Raumformen der Zusatzforderung der freien Beweglichkeit starrer Körper unterworfen und daraus deduziert, daß dann nur Räume konstanter Krümmung in Frage kommen. Schon einfache Beispiele wie ein unendlich langer Zylindermantel, der ja die konstante Gaußsche Krümmung Null hat, zeigen, daß diese Helmholtzsche Bedingung für jeden der drei Fälle Krümmung größer, kleiner oder gleich Null global verschiedene Strukturen ermöglichen kann. Diese Untersuchungen bekamen besonderen Auftrieb, als Clifford 1873 eine endliche Fläche der konstanten Krümmung Null entdeckte, deren globale topologische Struktur ringartig ist (siehe z.B. [Klein 1928], Kap. VIII u. IX). Seit 1890 sprach man vom Clifford-Kleinschen Raumproblem, womit die Aufzählung aller derartigen Möglichkeiten und der Nachweis ihrer Vollständigkeit gemeint ist. (Gelegentlich werden dazu auch noch die Namen von Riemann, Helmholtz und Lie genannt.) In der Tat schien diese Frage vor dem Aufkommen der Relativitätstheorie beträchtliche kosmologische Relevanz zu haben.

7.6 Vektorbegriff und n -dimensionale Geometrie

Aus heutiger Sicht ist jedes mathematische Problem, an dem n Variablen beteiligt sind, in einem n -dimensionalen Raum angesiedelt. Daß Algebra häufig, mehr oder weniger bewußt, Vorstellungen von Analogien zwischen dem Fall

$n \leq 3$ und dem höher„dimensionalen“ Fall begünstigt, sieht man z.B. an den von Diophant eingeführten und bis zur Begründung der modernen Algebra durch Vieta lebendig gebliebenen Bezeichnungen für die höheren Potenzen der Unbekannten: δ (dynamis) für x^2 , κ (kubos) für x^3 , $\delta\delta$ für x^4 , $\delta\kappa$ für x^5 , $\kappa\kappa$ für x^6 , ... Besonders die Analogie zwischen der Erzeugung einer Strecke durch geradlinige Bewegung eines Punktes, der Erzeugung eines Rechtecks durch geradlinige Bewegung einer Strecke senkrecht zu ihr und der Erzeugung eines Quaders durch geradlinige Bewegung eines Rechtecks senkrecht zu ihm scheint frühzeitig die Phantasie der Mathematiker angeregt zu haben. Spuren eines Spekulierens hierüber finden sich sowohl in der mittelalterlichen islamischen Mathematik als auch in Europa. Abū l-Wāfā möchte sich um 970 so etwas wie ein n -dimensionales Analogon zum Satz des Pythagoras vorstellen, um damit die Summe von mehr als drei Quadraten durch geometrische Konstruktion in ein Quadrat zu verwandeln. Michael Stifel drückt 1552 in seiner Bearbeitung der „Coß“ von Christoph Rudolff sein Bedauern aus, daß es in der Geometrie nicht „erlaubt“ ist, Dinge zu betrachten, die keine „Gestalt“ haben wie z.B. die Bewegung eines Punktes senkrecht zu allen drei Kanten eines Würfels. Solange Geometrie als Protophysik, als Lehre vom wahren physikalischen Raum, also als „Naturwissenschaft“ galt, konnte eine grundsätzliche Wendung in dieser Sache kaum erwartet werden. Das bis dahin höchstmögliche, nämlich die Deutung der Zeit als eine wahrhafte vierte Dimension, findet sich explizit erst im Artikel „Dimension“ von d'Alembert in der französischen Encyclopédie (1764).

Wir erinnern an Plückers vierdimensionalen Raum aller Geraden des R^3 (1846) und seine Ansätze, algebraische (oder geometrische?) Objekte, zu deren Charakterisierung noch mehr Koeffizienten erforderlich sind, als Elemente eines höherdimensionalen Raumes aufzufassen (1868). In ähnliche Richtung zielen die etwa zur gleichen Zeit reifenden Ideen Cauchys. In einer Akademienote über „Analytische Örter“ (1847) schreibt er sinngemäß: Wenn eine Funktion von zwei oder drei Variablen abhängt, kann man bezüglich kartesischer Koordinaten ihren Definitionsbereich als eine Menge von Punkten in der Ebene bzw. im Raum betrachten. Man nehme nun an, daß die Anzahl der Variablen größer als drei ist. Dann wird jedes Wertsystem für diese Variablen bestimmen, was wir einen „analytischen Punkt“ nennen wollen und wovon diese Werte die Koordinaten sind. Unterliegen diese Wertsysteme gewissen durch Ungleichungen ausgedrückten Bedingungen, so formen diejenigen analytischen Punkte, deren Koordinaten diesen Bedingungen genügen, einen „analytischen Ort“. Dieser Ort wird begrenzt von „analytischen Einhüllenden“, die durch Gleichungen beschrieben werden, welche entstehen, wenn man in den Ungleichungen, die den Ort beschreiben, die Zeichen „<“ bzw. „>“ durch „=“ ersetzt.

Als „analytische Gerade“ wollen wir ein System von analytischen Punkten bezeichnen, deren sämtliche Koordinaten lineare Funktionen von einer von ihnen sind. Schließlich wird der „Abstand zweier analytischer Punkte“ die Wurzel aus der Summe der Quadrate der Koordinatendifferenzen dieser Punkte sein. Die Betrachtung von analytischen Punkten und Örtern bereichert die Mittel zur Lösung von vielen schwierigen Fragen, speziell solcher, die sich auf die Theorie der Polynome beziehen. (Frei übersetzt nach [Cauchy, Werke, 1. ser., vol. X, S. 292])

Am klarsten treten die Analogien zwischen dem anschaulich Vorstellbaren und dem Höherdimensionalen bei linearen Begriffen und Aufgaben zutage. Daher ist der tatsächliche Übergang zur n -dimensionalen Geometrie aufs engste mit der Entwicklung der linearen Algebra und der Entstehung des Vektorbegriffs verbunden. Das Wort Vektor tritt in der Mathematik nicht vor der Mitte des 19. Jhs. auf, vielleicht zuerst bei W. R. Hamilton. Die Vektoren selbst erscheinen zuerst in der Mechanik als Geschwindigkeiten und Kräfte, wobei sowohl die Bezeichnungsweisen als auch die mit dem Kraftbegriff verbundene physikalische Interpretation jahrhundertlang verworren bleiben. Die Addition von Kräften nach der Parallelogramm-Regel kommt für spezielle Fälle um 1600 bei Stevin und Snell vor, die von Geschwindigkeiten ab 1635 bei Roberval. Eine in mathematik- wie physikhistorischen Gesamtdarstellungen des 20. Jhs. kaum noch erwähnte (wenn auch von Bossut, Lagrange und anderen früher vielleicht übertriebene) Rolle bei der Lehre von der Komposition von Kräften hat Pierre Varignon gespielt. Er verwendete das Kräfteparallelogramm in voller Allgemeinheit und die völlige gegenseitige Kompensation von n Kräften, deren Vektorsumme den Nullvektor ergibt. Mit dem von ihm erfundenen Gerät, für n Kräfte experimentell den Punkt zu bestimmen, an dem sie sich im Gleichgewicht befinden, kann man auch den Fermatschen Punkt zu n Punkten bestimmen. Eine relativ abgeschlossene Form erreichte die Statik bei Monge („*Traité élémentaire de statique*“ 1788) und vor allem bei seinem Schüler L. Poinot („*Éléments de statique*“ 1803, viele überarbeitete Auflagen und Übersetzungen). Daß auch Translationen sich hinsichtlich Hintereinanderausführung wie Vektoren verhalten, kommt zuerst 1832 bei dem italienischen Mathematiker G. Bellavitis zum Ausdruck. (Diese erstaunlich späte Erkenntnis hängt sicher mit der überhaupt schweren Geburt des Abbildungsbegriffs in der Geometrie zusammen. Wir kommen in 7.7 darauf zurück.)

Zu Beginn des 19. Jhs. erhielt der physikalische Vektorbegriff einen weiteren großen Schub durch die Untersuchung elektrischer und magnetischer Felder (u.a. Entdeckung des Elektromagnetismus durch Hans Christian Oersted 1820). Nun wurde auch der Erdmagnetismus als ein räumliches Vektorfeld be-

griffen, dessen Zustand an jedem Ort nicht allein durch die Richtung in der Tangentialebene der Erde (Deklination), sondern zusätzlich durch die Inklination (Neigung gegen diese Ebene) und Intensität zu charakterisieren ist. Um die weltweite Erforschung und Auswertung des Erdmagnetismus haben sich vor allem Gauß, sein Göttinger Kollege, der Physiker Wilhelm Weber, und der Norweger Ch. Hansteen (ein Schüler Oersteds) verdient gemacht, und es entstanden in diesem Zusammenhang Begriffe wie Rotation und Divergenz. Das führte jedoch dazu, daß sich die Vektoranalysis auf der Grundlage von koordinatenweiser Rechnung weit entwickelte, bevor es eine begrifflich klare Vektoralgebra gab.

Vektorrechnung, komplexe Zahlen und Quaternionen

Eine seltsame Rolle bei der Entstehung der Vektorrechnung hat die geometrische Interpretation der komplexen Zahlen gespielt. Als ihr erster (historisch wirkungsloser) Begründer gilt heute der nowegische Geodät Caspar Wessel (1797, publiziert 1799 in Dänisch). Er hatte nichts anderes im Sinn als einen algebraischen Kalkül für das Verknüpfen von Translationen und Drehungen, ersteres ausgedrückt durch die koordinatenweise Addition (also der zweidimensionale Spezialfall der Vektoraddition), letzteres durch die Verknüpfung der Richtungs cosinus, die vermöge der Additionstheoreme von Sinus und Cosinus eben gerade der multiplikativen Verknüpfung von Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl entspricht. Auch Wessel hatte schon einen ihm unbekannten Vorläufer, den Danziger Lehrer Heinrich Kuehn, der in den Sitzungsberichten der Petersburger Akademie 1751/52 eine lateinische Arbeit über die geometrische Veranschaulichung der imaginären Größen veröffentlichte. Ein Amateurmathematiker, J. R. Argand, brachte 1806 in Paris im Selbstverlag anonym eine weitere Arbeit zu diesem Gegenstand heraus, die zunächst kaum bekannt wurde. Sein Anliegen war ausdrücklich, eine geometrische Interpretation des bis dahin obskuren Rechnens mit komplexen Zahlen zu geben, und seine Ergebnisse schlossen u.a. die Moivreschen Formeln und Betrachtungen zum Fundamentalsatz der Algebra ein. Diese Arbeit wurde nach 1813 durch Artikel in Gergonnes „Annales“ und die darauf folgende Rezeption durch Cauchy und andere bedeutende französische Mathematiker so bekannt, daß sie einen bedeutenden Einfluß erlangt hat. W. R. Hamilton hatte sie jedenfalls studiert und ließ sich bei der Erfindung der Quaternionen (1843) davon leiten, einen zu den komplexen Zahlen analogen algebraischen Kalkül für die Transformation räumlicher Vektoren zu konstruieren. Eine solche Transformation besteht aus einer skalaren Streckung bzw. Stauchung (von Hamilton als „Tensor“ bezeichnet) um einen Faktor a , die sich bei Hintereinanderausführung multiplikativ

verhält, und der Drehung um den Koordinatenursprung in die neue Richtung, die von drei Parametern abhängt und sich bei Hintereinanderausführung wie das äußere Produkt verhält. Die Quaternionen bilden demnach (modern formuliert) einen vierdimensionalen Vektorraum, dessen Elemente aus einem eindimensionalen „skalaren Anteil“ $a \cdot e$ und einem dreidimensionalen „vektoriellen Anteil“ $b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$ mit den Einheiten e, i, j, k bestehen. Dabei erfolgt die Addition komponentenweise und die Multiplikation nach den Regeln

$$\begin{aligned} ee = e, ei = ie = i, ej = je = j, ek = ke = k, ii = jj = kk = -e, \\ jk = -kj = i, ki = -ik = j, ij = -ji = k. \end{aligned}$$

Multipliziert man die Vektorteile zweier Quaternionen nach diesen Regeln, so erhält man eine Quaternion, deren Skalarteil bis auf das Vorzeichen dem inneren Produkt dieser Vektoren und deren Vektorteil ihrem Vektorprodukt entspricht. Eine ausführliche Darstellung von Hamiltons eigenen Überlegungen findet man z. B. in [Coolidge 1940, 257ff]. Daß er damit den ersten und zugleich abschließenden Erweiterungskörper der komplexen Zahlen um den Preis nicht mehr kommutativer Multiplikation gefunden hatte, wurde erst viel später klar. Während die Quaternionen aus heutiger Sicht eine begrenzte Bedeutung für die Algebra behalten haben, haben sie sich als ein ausgesprochener Umweg zur eigentlichen Vektorrechnung erwiesen, zumal sie sich nicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern lassen. Hamilton war jedoch um 1850 bereits ein sehr berühmter und einflußreicher Mathematiker, so daß sich eine starke Anhängerschaft auch für seinen Quaternionenkalkül bildete.

Graßmanns Ausdehnungslehre

Inzwischen hatte der Gymnasialprofessor H. G. Graßmann in Stettin (heute Szczecin in Polen) 1844 seine „Lineale Ausdehnungslehre“ veröffentlicht, die damals zunächst fast völlig unbeachtet blieb, da sie einerseits in einem für die Zeitgenossen ungewohnten, recht „philosophischen“, formelfreien Stil geschrieben war, andererseits der Vorstellungswelt der Mathematiker dieser Zeit wohl allzuweit vauseilte. Heute wird Graßmann weltweit als einer der bedeutendsten Mathematiker des 19. Jhs. angesehen, der nicht nur der wirkliche Begründer der Geometrie des n -dimensionalen Raumes ist, sondern in diesem Zusammenhang auch der Algebra Impulse gegeben hat, die erst im 20. Jh. ihre volle Kraft entfalten konnten (und der außerdem auch auf verschiedenen Gebieten der Physik, der Sprachwissenschaft und der Volkskunde Bleiben des geleistet hat, wofür er während seines Lebens viel mehr Anerkennung erhielt als für sein mathematisches Werk, vgl. [Graßmann Werke], [Crowe 1967],

[Zaddach 1994], [Schubring 1996]). Der Versuch zu erklären, wie Graßmann anscheinend ohne Vorgänger oder Vorgeschichte zu seiner „Ausdehnungslehre“ kam, führt nur zurück bis zu seiner Prüfungsarbeit von 1839 über die „Theorie der Ebbe und Flut“, in der er reichlich Gebrauch vom zeitgenössischen Stand der physikalischen Vektoranalysis machte, und zu seinem Vater Justus G., ebenfalls Mathematiklehrer in Stettin, der eine Rolle in der Entwicklung der Kristallographie gespielt hat. Graßmann d. Ä. hatte schon 1824 in einem Lehrbuch geäußert, man solle Parallelogramme bzw. Parallelepipede in einem spezifischen Sinn als geometrische Produktbildungen auffassen. Als er sich, beeinflusst von der damals in Deutschland herrschenden dynamistischen Naturphilosophie, der Kristallographie zuwandte, ging er von der Hypothese formender Kräfte aus und beschrieb daher Richtung und Inhalt der begrenzenden Flächen durch Länge und Richtung ihrer (modern gesprochen) Normalenvektoren. (Zu Details siehe [Scholz 1989, 48ff.].)

Graßmann d. J. geht 1844 sogleich vom Begriff der extensiven Größe beliebiger (endlicher) Stufe aus, was im einstufigen Fall einem Vektor im n -dimensionalen Raum (bei Graßmann: Gebiet n -ter Stufe) entspricht. Wir verwenden im folgenden der Verständlichkeit und Kürze halber den Ausdruck Vektor für Graßmanns „extensive Größe“. Graßmann selbst hat jedoch das Wort Vektor nie benutzt, und das Motiv seiner Ablehnung mag gewesen sein, daß Vektoren von der Physik her als Objekte im Raum beschrieben waren, die durch Richtung und Länge gekennzeichnet sind, während Graßmann von Anfang an den beliebigdimensionalen Fall, vor allem aber eine ausgesprochen affine Auffassung im Auge hatte, bei der die Begriffe Länge und Richtung zunächst gar keinen Sinn haben. n -Dimensionalität des Raumes wird durch die Existenz einer Basis (bei Graßmann: „System von Einheiten“) aus n Vektoren angezeigt, die also einerseits linear unabhängig sind, andererseits durch Linearkombination jeden Vektor erzeugen. Der zentrale Grundgedanke besteht nun darin, durch eine „äußere“ Produktbildung aus Vektoren sukzessive höherdimensionale extensive Größen zu bilden (im einfachsten Fall das von zwei Vektoren aufgespannte Parallelogramm („Bivektor“) bzw. das von drei Vektoren aufgespannte Parallelepiped), die obendrein vorzeichenbehaftet sind, so daß sein äußeres Produkt nicht nur linear sondern auch alternierend ist. Im Gegensatz zu Hamiltons von den Physikern gern übernommenem Vektor- oder Kreuzprodukt, bei dem die Lage einer Fläche durch die Richtung eines dazu senkrechten Vektors und ihre Größe durch die Länge dieses Vektors repräsentiert wird, bleibt Graßmanns „Bivektor“ ein zweidimensionales Gebilde und ist obendrein Element eines anderen, neuen Vektorraumes der Dimension $\binom{n}{2}$.

Nach 1870, als sich auch eine Partei von „Graßmannianern“ gebildet hatte, wurden die Hamiltonianer zeitweise als „Monovektorianer“, die Graßmannianer als „Bivektorianer“ bezeichnet. Dieser Streit spielte sich aber hauptsächlich unter den Physikern ab, die die Vektoranalysis lange vor der Algebra in Gebrauch genommen hatten. Die Aneignung der Ideen von Hamilton, Cayley und Graßmann in der Physik erfolgte hauptsächlich durch J. W. Gibbs in den USA (1881) und O. Heaviside in England. Das erste derartige Lehrbuch in Deutschland war die „Einführung in die Maxwellsche Theorie“ von A. Föppl 1894. Das wird hier nicht weiter verfolgt. (Siehe den Beitrag von K. Reich in [Schubring 1996].)

Graßmanns „Ausdehnungslehre“ von 1844 enthält in einer freilich damals sehr schwer lesbaren Sprache fast alle grundlegenden Begriffe und Sätze der *affinen* Vektorrechnung wie lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Austauschatz, Invarianz der Dimension, die Dimensionsformel für den von zwei Unterräumen gemeinsam erzeugten Unterraum usw. Die Reaktion hierauf war für ihn enttäuschend: sie blieb aus. Möbius, der noch am ehesten in der Lage gewesen wäre, sich in Graßmanns Gedankenwelt hinein zu versetzen, lehnte eine Rezension der „Ausdehnungslehre“ ab. Auf Anraten von Freunden publizierte Graßmann 1862 eine völlig umgearbeitete, viel mathematischere Version seiner Theorie. Erst nachdem diese langsam Fuß gefaßt hatte, erschien 1877 eine Neuauflage der Fassung von 1844, von der der größte Teil 1864 wegen Nichtabsetzbarkeit makuliert worden war.

Während Graßmann 1844 nur in der Einleitung flüchtig erwähnt, daß er neben dem äußeren auch ein anderes Produkt mit interessanten algebraischen Eigenschaften entdeckt habe (das wir heute als „inneres“ oder „Skalarprodukt“ bezeichnen), wendet er diesem in einer 1847 veröffentlichten Preisschrift mit dem Titel „Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene Charakteristik“ mehr Aufmerksamkeit zu. Diese bei der Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig eingereichte Schrift wurde vom Leipziger Professor Möbius begutachtet [Möbius Werke, Bd. I, 615-33], der nun schrieb: „Das Studium der voranstehenden Abhandlung des Herrn Graßmann und besonders des letzteren Theils derselben dürfte, ungeachtet des nicht zu verkennenden Strebens ihres Verfassers nach Klarheit, dennoch mit einigen Schwierigkeiten verknüpft sein, welche daraus hervorgehen, dass der Verfasser seine neue geometrische Analysis auf eine Weise zu begründen sucht, welche dem bisher bei mathematischen Betrachtungen gewohnten Gange ziemlich fern liegt. . . Da gleichwohl diese neue Analysis wegen der Einfachheit, mit welcher sich geometrische Untersuchungen durch sie führen lassen, alle Aufmerksamkeit zu verdienen scheint, so habe ich es im Folgenden versucht, sie auf eine dem

Geiste der Geometrie entsprechendere und damit, wie ich hoffe, leichter fassliche Weise zu begründen und zu zeigen, wie jene Scheingrößen als abgekürzte Ausdrücke wirklicher Größen angesehen werden können.“

Die „Ausdehnungslehre“ von 1862 unterscheidet sich von der von 1844 markant u.a. durch die Einbeziehung metrischer Begriffe. Dort erscheint das innere Produkt von Vektoren als Spezialfall eines viel allgemeineren, nämlich auf extensive Größen beliebiger Stufe (Multivektoren) anwendbaren Produktes, welches dadurch eingeführt wird, daß eine (modern gesprochen) orthonormierte Basis des Gesamtraumes vorausgesetzt wird. Sind A, B solche Multivektoren, so definiert Grassmann z.B. ihr Senkrechtstehen aufeinander durch Verschwinden dieses Produktes $[A/B]$ trotz $A \neq 0, B \neq 0$, den numerischen Wert eines Multivektors A durch $\sqrt{[A/A]^2}$ und den Cosinus des Winkels zwischen A und B , indem er ihr Produkt $[A/B]$ durch das Produkt ihrer numerischen Werte dividiert. Daß Letzteres einen Sinn ergibt — damit eine Zahl ein Cosinuswert sein kann, darf ihr Betrag nicht größer als Eins sein — ist der Ungleichung von Cauchy-Bunjakowski-Schwarz zu verdanken. Die Geschichte dieser Ungleichung wollen wir jetzt skizzieren, weil sie exemplarisch zeigt, in welcher Weise sich fundamentale Begriffe und Denkweisen der modernen Mathematik oft aus konkreten, aber zufälligen Anlässen und über viele Umwege ergeben, aber auch, wie sich an bestimmten Punkten der Entwicklung Geometrie in Algebra oder Analysis und umgekehrt verwandelt und daß heute derartige Zuordnungen oft sinnlos geworden sind.

Lagrange, bei dem überhaupt viel implizite n -dimensionale Geometrie in algebraischer Einkleidung zu finden ist, schreibt 1773 die (durch vollständige Induktion leicht zu beweisende) Identität (von uns modern notiert)

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 + \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \quad (7.6.1)$$

[Oeuvres, tome 3, 662f].

Cauchy fügt seiner „Analyse algébrique“ 1821 einen Anhang (Note II) bei, in dem er wohl erstmals systematisch und ohne Bezug auf bestimmte Anwendungen den Umgang mit Ungleichungen behandelt. (Wir erwähnten schon, daß er später Ungleichungen u.a. nutzt, um die heute als semialgebraisch bezeichneten n -dimensionalen Teilmengen des n -dimensionalen euklidischen Raumes, also Flächen im R^2 , Körper im R^3 , ..., zu beschreiben.) Dort findet sich als Theorem XVI die „Cauchy’sche Ungleichung“ in der Form

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i < \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad (7.6.2)$$

mit dem Zusatz: falls die Verhältnisse a_i/b_i nicht alle gleich sind (andernfalls tritt wegen (7.6.1) die Gleichheit ein) als Folgerung aus (7.6.1). (Lagrange wird aber keineswegs als Quelle von (7.6.1) zitiert.) Cauchys Ungleichung tritt also, kurios genug, ohne jeden Bezug zur Geometrie und lediglich durch Unterdrückung der in (7.6.1) noch enthaltenen Information über die Differenz zwischen beiden Seiten von (7.6.2) ins Leben. 1829 kam Cauchy nochmals auf einen Spezialfall dieser Ungleichung zurück, und diesmal roch es ein wenig nach Geometrie, weil er sie für den Fall $n = 2$ auf die komplexe Zahlenebene anwendete, um zu zeigen, daß dort die Dreiecksungleichung gilt [Cauchy, Oeuvres, ser. II, tome IV, 573-609]. 1859 wendete der Petersburger Mathematikprofessor V. J. Bunjakowski, der in Paris ein Schüler von Cauchy gewesen war, die Ungleichung (7.6.2) auf äquidistante Funktionswerte an, um auf eine noch sehr intuitive Weise die analoge Ungleichung für den Fall zu begründen, daß (modern gesprochen) die Vektoren reelle Funktionen f, g sind und das innere Produkt als Integral von fg gebildet wird. Die entsprechende analytische Ungleichung formulierte H. A. Schwarz 1875 für einen von ihm benötigten Spezialfall in seiner berühmten Arbeit über Minimalflächen, wahrscheinlich ohne von Bunjakowski zu wissen. Als F. Engel 1894/96 die beiden „Ausdehnungslehren“ in den von ihm herausgegebenen Werken Graßmanns kommentierte, bemerkte er in einer Fußnote zu der oben erwähnten Graßmannschen Definition des Winkels zwischen zwei Multivektoren: „Es ist leicht zu zeigen, daß der Werth des Ausdrucks für $\cos \angle AB$ zwischen den Gränzen -1 und +1 liegt ...“ Sein folgender Beweis beruht auf der Einführung einer Vektorbasis und der Anwendung von Cauchys Ungleichung (7.6.2) auf die Koordinatenvektoren. Wieviel eleganter man die Ungleichung koordinatenfrei für beliebige (auch unendlichdimensionale) Vektorräume aus der axiomatischen Charakterisierung des inneren Produktes (als bilinear, symmetrisch und positiv definit) bekommen kann, um sie dann umgekehrt auf den Fall anzuwenden, daß der Vektorraum ein Raum von reellen n -tupeln ist, das findet man erstmals 1918 in dem Buch „Raum, Zeit, Materie“ von Hermann Weyl.

Kehren wir zurück zu Graßmann. Seine bahnbrechenden Ideen wurden wie gesagt äußerst langsam zur Kenntnis genommen. Hamilton selbst gehört zu den ersten, die sich überhaupt dazu äußern. 1853 schreibt er: „It is proper to state here that a species of non-commutative multiplication for inclined lines occurs in a very original and remarkable work by Prof. H. Grassmann which I did not meet with till after years had elapsed from the invention and communication of the quaternions ... Notwithstanding these and perhaps some other coincidences of view, Prof. Grassmann's system and mine appear to be perfectly distinct and independent of each other, in their conceptions, methods,

and results ...“ (zitiert nach [Zaddach 1994, S. 15]. Der interessierte Leser findet dort viel mehr Details über Graßmann, Hamilton und die Geschichte ihrer Entdeckungen.) In Deutschland war es zuerst Hermann Hankel, der sich für Graßmanns Arbeiten interessierte und sie bekannter machte. Die größte Wirkung aber erzielte vermutlich Giuseppe Peano mit seinem 1888 erschienenen Buch „Calcolo geometrico secondo (d.h. hier folgend, nach dem Vorbild) l’Ausdehnungslehre di H. Grassmann“. Über Peanos wichtige Rolle bei der grundlegenden Modernisierung des Verständnisses von Mathematik wird noch zu sprechen sein. Hier sei nur gesagt, daß Peanos Version im Prinzip von dem axiomatisch gefaßten Begriff des Vektorraumes ausgeht, wie wir ihn heute kennen.

Weitere Quellen n -dimensionaler Geometrie

Wir sind in einen Bereich gelangt, in dem es immer schwerer wird, Geometrie von Algebra und speziell von linearer Algebra zu trennen. Da sind zum Beispiel die Determinanten. Sie kommen implizit zuerst bei Leibniz (1693) vor, dann bei G. Cramer (1750), aber zunächst nur als Formelausdrücke in der Lösung von linearen Gleichungssystemen. Die Bezeichnung Determinante führt Gauß in den „Disquisitiones arithmeticae“ (1801) ein. Daß daraus auch ein Stückchen Geometrie wird, ist wohl Cauchy zu danken, der sich seit 1815 mit den Determinanten beschäftigte (wobei er die folgenreiche Schreibweise als quadratisches Schema einführte) und den Charakter der Determinanten als multilineare und alternierende Funktionen ihrer Zeilen bzw. Spalten erkannte. Damit stand das algebraische Werkzeug schon bereit, die Bedeutung der Determinante als orientiertes Volumen des von n Vektoren aufgespannten n -dimensionalen Parallelkörpers zu erkennen, sobald nur dieser Körper selbst als Begriff existierte, oder auch den Zusammenhang zwischen der Determinante und dem Spatprodukt von Vektoren im Fall $n=3$ zu sehen. Die weitere Ausgestaltung der linearen Algebra erfolgte vor allem durch die beiden eng zusammenwirkenden britischen Mathematiker A. Cayley und J. J. Sylvester. Wie schwer es damals den Beteiligten fiel, Algebra von Geometrie zu unterscheiden (Das trifft noch immer auf viele Mathematiker zu!) sieht man z.B. daran, daß eine Arbeit Cayleys aus dem Jahre 1843 mit dem vielversprechenden Titel „Analytic Geometry in n Dimensions“ eigentlich nichts anderes enthält als eine freilich für damalige Verhältnisse sensationell moderne Auflösungstheorie der linearen Gleichungssysteme für den allgemeinen Fall (in dem nicht notwendig Rang gleich Anzahl der Variablen gleich Anzahl der Gleichungen ist). Wäre es nicht so, so müßte man Cayley statt Graßmann als den Vater der n -dimensionalen Geometrie bezeichnen.

Im Zusammenhang mit der Lösung eines Problems der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmte W. K. Clifford 1866 durch vollständige Induktion über die Dimension das Volumen eines n -dimensionalen Simplex und einer n -dimensionalen Kugel. Nachdem er einleitend den zwei- und dreidimensionalen Fall seiner Aufgabe erledigt hat, schreibt er ohne weitere Vorrede: „Betrachte nun den analogen Fall in der n -dimensionalen Geometrie. An Stelle der umschlossenen Fläche bzw. dem Raumteil haben wir dort etwas, was ich *confine* [das Eingeschlossene] nennen werde. Einem Dreieck bzw. Tetraeder entspricht dabei ein *confine* mit $n + 1$ Ecken, das ich *prime confine* nennen werde, weil es das einfachste seiner Art ist.“ Ein weiteres Stück wirkliche Geometrie des $\mathbb{R}^n$ (das sich auf keine Weise als lineare Algebra deuten läßt), hat der Schweizer Ludwig Schläfli vollbracht. Sein Werk, das angeblich wegen des großen Umfanges (vermutlich aber, weil die zuständigen Herausgeber mit dem Inhalt nichts anfangen konnten) zu seinen Lebzeiten nur in Auszügen veröffentlicht werden konnte und erst 1901, 6 Jahre nach seinem Tode, vollständig publiziert wurde, trägt wie so viele fundamentale Leistungen des 19. Jhs. einen Titel, der dem heutigen Leser, wahrscheinlich auch dem damaligen, nichts über den Inhalt sagt: „Theorie der vielfachen Kontinuität“. Was Schläfli dort bietet, ist u.a. die Ausdehnung der Begriffe Polyeder, Ecke, Kante, Seitenfläche, ..., Konvexität, Regularität usw. auf den n -dimensionalen Fall. Er führt dort die bis heute zur Kennzeichnung von regulären Polytopen verwendeten Schläfli-Symbole ein, und seine Untersuchung gipfelt in dem Nachweis, daß es im $\mathbb{R}^4$ genau sechs reguläre Polytope gibt (Abb. 7.6.1), daß aber in allen höheren Dimensionen nur noch jeweils drei solche Polytope existieren, nämlich das selbstduale n -dimensionale Simplex (in Verallgemeinerung des Tetraeders), der n -dimensionale Kubus und der dazu duale Körper. Die analoge Untersuchung führte er für reguläre Zerlegungen der Oberfläche der n -dimensionalen Sphäre durch, ferner gab er Inhaltsformeln für solche Gebilde und die Klassifikation der Bewegungen im $\mathbb{R}^n$ an. In diesem Zusammenhang muß auch Victor Schlegel, Professor an der Höheren Maschinenbauschule in Hagen, genannt werden, der seit 1883 in Vorträgen und Publikationen die höherdimensionalen, insbesondere regelmäßigen, Polytope und die Möglichkeiten der Pflasterung des $\mathbb{R}^n$ mit ihnen behandelte. Sein Name ist heute selbst in der Spezialliteratur über Polyeder fast vergessen. Nur die „Schlegeldiagramme“, spezielle Projektionen von Polytopen auf die euklidische Ebene, erinnern noch an ihn.

Ein anderer Pionier wahrhafter n -dimensionaler Geometrie war E. Betti in Italien, der — mit Riemann freundschaftlich verbunden und von dessen Arbeiten angeregt — 1871 den durch Riemanns frühen Tod unvollendeten Versuch fortsetzte, die (modern formuliert) topologische Äquivalenz von k -dimensionalen

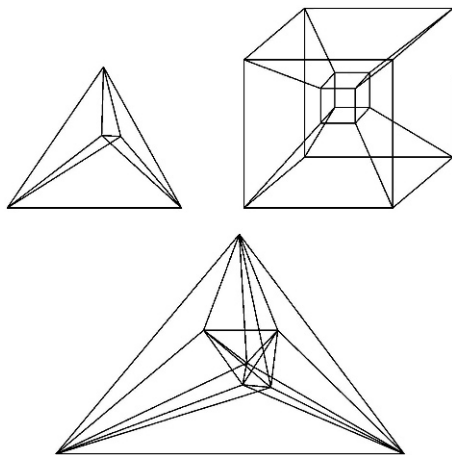


Abb. 7.6.1 4-dim. reguläres Simplex, 4-dim. Würfel und der dazu duale, von 16 Tetraedern begrenzte 4-dim. Körper

Mannigfaltigkeiten im n -dimensionalen Raum zu untersuchen. Die Folgen für die sich entwickelnde Topologie werden wir in 7.8 sehen.

7.7 Transformationsgruppen

Geometrische Abbildungen wurden lange Zeit nur implizit und in Anwendungsdisziplinen wie Optik, Perspektive, Kartographie oder Mechanik betrachtet. Dabei bieten die drei erstgenannten Bereiche relativ wenig Anlaß, über die Hintereinanderausführung oder die Umkehrung von Abbildungen nachzudenken. Außerdem ist der Bildbereich dort fast immer vom Urbildbereich verschieden. Anders der Begriff der Bewegung oder starren Abbildung in der Mechanik. Dort wiederum spielten aber die Spiegelungen keine Rolle, weil sie im Raum nicht an materiellen Körpern realisierbar sind. So ist verständlich, daß die ersten implizit gruppentheoretischen Überlegungen den Bereich der heute als eigentlich (d.h. orientierungserhaltend) bezeichneten Bewegungen (oder Kongruenzabbildungen) des euklidischen Raumes auf sich betrafen, und die erste erwähnenswerte Erkenntnis war vielleicht, daß eine solche Abbildung immer eine Schraubung, d.h. als Hintereinanderausführung einer Drehung um eine Gerade und einer Translation in Richtung dieser Geraden darstellbar ist, wobei einer dieser Anteile entfallen kann, so daß Translationen und Drehungen als Spezialfälle enthalten sind. (Aber natürlich war es noch weit bis zur Anerkennung der identischen Abbildung als Abbildung!) Explizit steht auch dies erst 1830 in einer Abhandlung von Chasles über die Bewegung

starrer Körper, weiter ausgearbeitet wurde die Klassifikation und Hintereinanderausführung räumlicher Bewegungen von O. Rodrigues 1840 und L. Poinso 1851. Ein Versuch, die Verkettung von Bewegungen spiegelungsfrei synthetisch zu begründen, stammt von Möbius 1838 und war auch von ihm als Beitrag zur Mechanik gemeint. Zugleich muß man feststellen, daß die zu dieser Zeit dominierende analytische Behandlung derartiger Fragen mit traditionellen Koordinatensystemen im Vergleich mit anderen Kalkülen, besonders aber der heute üblichen Darstellung von Bewegungen als Produkt von Spiegelungen, die einfachen geometrischen Sachverhalte damals als ziemlich kompliziert erscheinen ließ. Eine alternative analytische Behandlung knüpfte an Hamiltons Quaternionen an: Clifford beschrieb 1873 die allgemeinste räumliche Bewegung eines starren Körpers mittels der von ihm zu diesem Zweck erfundenen Biquaternionen, ähnlich verfuhr E. Study 1903 in seiner „Geometrie der Dynamen“. Immerhin war der Begriff der starren Abbildung samt den zugehörigen implizit gruppentheoretischen Betrachtungen 1866 so weit verfestigt, daß H. v. Helmholtz ihn benutzen konnte, um die (aus damaliger Sicht) als physikalisch mögliche Raumformen in Frage kommenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten der Zusatzforderung der freien Beweglichkeit starrer Körper zu unterwerfen (vgl. den Schluß von 7.5).

Eine ganz andere Quelle für den späteren Triumph des Begriffs der Transformationsgruppe in der gesamten Geometrie ist Carnots unscharfer Begriff der (stetigen) Deformation einer Figur in eine „verwandte“, der von Poncelet mittels Hintereinanderausführung von Zentralprojektionen zum Begriff der projektiven Abbildung präzisiert wurde (vgl. 7.2). Der eigentliche Vater des abbildungs- und gruppentheoretischen Denkens in der Geometrie ist aber Möbius. Schon sein „barycentrischer Calcul“ 1827 ist vom Gedanken der geometrischen Verwandtschaft in seiner allgemeinen Form geprägt. Der zweite Teil dieses Buches trägt den Titel „Von den Verwandtschaften der Figuren und den daraus entspringenden Classen geometrischer Aufgaben“. Auf 150 Druckseiten werden die projektiven Abbildungen, die daraus durch Fixierung einer uneigentlichen Geraden entstehenden Affinitäten, die äquiformen Transformationen, die Ähnlichkeiten als Spezialfälle von affinen Abbildungen und die „Gleichheit“ als Spezialfall der Ähnlichkeit dargestellt. Für jede dieser Abbildungsarten wird der Grad der Freiheit ermittelt, den man bei der Bestimmung einer solchen Abbildung hat, und Begriffe werden danach klassifiziert, bei welchen der genannten Abbildungsarten sie ihren Sinn behalten. (Ein Anhang zu [v.Staudt 1847] enthält ähnliche, aber viel kürzer gefaßte Überlegungen, ohne jeglichen Verweis auf Möbius oder andere Vorläufer.) In späteren Arbeiten kam Möbius immer wieder auf dieses Prinzip zurück, so

1834 beim Studium von nicht notwendig linearen, aber Flächeninhaltsverhältnisse bewahrenden Abbildungen, 1846 bei der Behandlung der Bewegungen der Kugelfläche in sich und 1852 bei deren stereographischer Abbildung auf die Ebene, wo die ihnen entsprechenden kreisverwandten Abbildungen durch Hintereinanderausführung von Spiegelungen am Kreis erzeugt werden (1853, 1855) — deshalb hat man die Geometrie der zugehörigen Abbildungsgruppe später als Möbiussche bezeichnet —, vor allem aber 1863 in seiner „Theorie der elementaren Verwandtschaft“, in der er diejenigen Abbildungen zu beschreiben versuchte, die man heute topologisch nennt (siehe hierzu 7.8).

A. Cayley begründete im Gedankenaustausch mit J. J. Sylvester ab 1845 den Matrizenkalkül, der es bekanntlich gestattet, im Rahmen der Linearität alle Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Abbildungsarten, ihre gruppentheoretischen Eigenschaften und ihre Invarianten rein algebraisch zu behandeln und dies obendrein problemlos auf n -dimensionale Räume zu verallgemeinern. Der folgende methodologische Grundgedanke spielt freilich dabei noch keine Rolle: Auch geometrische Abbildungen sind Objekte der Geometrie. Eine Matrix ist das Koordinatengebilde eines solchen Objektes bezüglich eines zumindest projektiven Koordinatensystems. Der Vorteil homogener oder inhomogener, jedenfalls aber linearer Koordinatensysteme (gegenüber z.B. Polarkoordinaten) besteht u.a. darin, daß Hintereinanderausführung und Umkehrung von linearen Abbildungen sowie die Bestimmung spezieller Eigenschaften und Invarianten sich hierbei in algebraisch gut handhabbare Prozeduren transformieren. Zugleich bewirkte der hierin begründete Siegeszug der linearen Algebra und der mit ihr eng verbundenen algebraischen Invariantentheorie, daß bestimmte Teile der Geometrie, insbesondere die in 7.8 und 7.9 zu besprechenden, an den Rand des Geschehens gedrängt wurden.

Einer der folgenreichsten Erfolge des Cayley-Sylvesterschen Beitrages zur Koordinatenmethode war 1859 Cayleys Entdeckung, daß eine euklidische Metrik in einem projektiven Raum erhalten werden kann, indem man die Invarianz eines ausgezeichneten imaginären Gebildes zweiten Grades (also in der Ebene: eines Kegelschnittes) verlangt. Dieses in Cayleys „Sixth Memoir upon Quantics“ enthaltene Resultat hatte jedoch eine Vorgeschichte: Ausgehend von einer Idee von Poncelet hatte E. Laguerre 1853 gezeigt, daß das Senkrechtstehen zweier Geraden aufeinander dadurch erklärt werden kann, daß diese ein ausgezeichnetes Paar von Geraden desselben Büschels harmonisch trennen. Dabei ist dieses andere, für jedes Büschel feste Paar dadurch bestimmt, daß seine beiden Geraden durch die beiden besonderen imaginären Punkte der unendlich fernen Geraden gehen, die im Komplexen jeder Kreis mit dieser Geraden gemeinsam hat. Es ist kein Wunder, daß derartige Entdeckungen die Neigung gefördert

haben, der analytischen, weitgehend algebraisierten Geometrie komplexe statt reelle Koordinatenwerte zugrunde zu legen.

Indem er das komplexe durch ein reelles Gebilde zweiten Grades ersetzte, gewann F. Klein 1871 in Analogie zu Cayleys Vorgehen die Metrik der hyperbolischen Geometrie im Innern dieses Gebildes. Damit hatte er einerseits das schon von Beltrami gefundene ebene Modell auf eine neue und in jeder Dimension brauchbare Weise begründet, andererseits gezeigt, daß euklidische und nichteuklidische Geometrie zwei engstens verwandte Theorien sind, die sich aus der Sicht der allgemeinen Cayley-Sylvesterschen Invariantentheorie beide ergeben, indem man die projektiven Abbildungen einer gewissen einfachen Invarianzforderung unterwirft.

Das Erlanger Programm

Von hier ist es nur noch ein kleiner Schritt zum berühmten „Erlanger Programm“, das Klein 1872 bei seiner Berufung nach Erlangen vorlegte. Aber auch dies hat eine Vorgeschichte: Klein war 1870 im Alter von 21 Jahren anläßlich einer Studienreise nach Paris gemeinsam mit seinem Freund S. Lie in Berührung mit der dort kurz zuvor von C. Jordan publizierten neuen Gruppentheorie gekommen. Jordan hatte erstmals die aus der Algebra kommende Theorie der endlichen Permutationsgruppen mit der Theorie der geometrischen Transformationen unter ein gemeinsames Dach gebracht, wobei noch kein abstrakter Gruppenbegriff im heutigen Sinn entstand, jedoch die von Jordan ebenfalls studierten diskreten Untergruppen der euklidischen Bewegungen, die ihren Ursprung in der Kristallographie haben, eine Brückenfunktion zwischen endlichen Gruppen und den kontinuierlichen Abbildungsgruppen der klassischen Geometrie haben. Merkwürdigerweise hat Klein selbst später zwar den Einfluß von Jordans „*Traité des substitutions*“ (1870), nicht jedoch den des vorausgegangenen, für das „Erlanger Programm“ viel relevanteren „*Mémoire sur les groupes de mouvements*“ (1869) bekannt: „Einen großen Eindruck machte mir Camille Jordan, dessen *traité des substitutions et des équations algébriques* eben erschienen war und uns ein Buch mit sieben Siegeln erschien.“ [Klein, *Ges. math. Abhandl.* Bd. 1, S. 51] Auch den Terminus Gruppe verwendete Klein in der ursprünglichen Fassung des „Erlanger Programms“ noch nicht, sondern erst in späteren Überarbeitungen. Jordan hatte in der genannten Arbeit von 1869 den Begriff der Gruppe von Bewegungen erstmals explizit geprägt (wobei aber auch er die Existenz der Inversen nur stillschweigend voraussetzte) und 174 Arten von Untergruppen klassifiziert, die sowohl kontinuierliche als auch diskrete umfaßten, jedoch noch in verschiedener Hinsicht unvollständig waren. Eine ganz wesentliche Anregungsfunktion für Jordan kommt der zu

dieser Zeit schon weit gediehenen theoretischen Kristallographie, insbesondere den Arbeiten von A. Bravais (um 1850) zu. Für die sehr komplizierte Geschichte der Kristallographie müssen wir jedoch auf [Scholz 1989] verweisen, ferner zur Entstehung der Gruppentheorie auf [Wußing 1969], zur Biographie Kleins auf [Tobies 1981], zur Entstehungs- und Wirkungsgeschichte des Erlanger Programms auf dessen kommentierte Neuausgabe [Ostwalds Klassiker Bd. 253].

Das „Erlanger Programm“ wurde vermutlich nicht zuletzt deshalb so populär, weil es dem um 1870 herangereiften Problem zu Leibe rückte, Ordnung in die Vielfalt geometrischer Strömungen und Auffassungen jener Zeit zu bringen. Nach Klein wird *eine* Geometrie (d.h. eigentlich: eine geometrische Theorie) dadurch gegeben, daß in einer beliebigen Grundmenge M (Klein dachte aber dabei ursprünglich nur an n -dimensionale Mannigfaltigkeiten im Riemannschen Sinne) eine Gruppe G von eindeutigen Abbildungen von M auf sich fixiert ist. Die Theorie (M, G) hat die Invarianten $I(G)$ dieser Gruppe zum Gegenstand. Was Klein sich dabei unter Invarianten vorstellte, war natürlich stark vom zeitgenössischen Stand der algebraischen Invariantentheorie geprägt. Ist G_1 bei festem „Raum“ M eine Untergruppe von G_2 , so sind alle Invarianten von G_2 erst recht Invarianten von G_1 , also je kleiner die Gruppe, desto reicher die Theorie. Es ist klar, wie zwanglos die von Möbius und anderen Vorläufern angedachte Klassifikation hiermit präzisiert ist. Es ist auch offensichtlich, daß Kleins Entdeckung von 1871 betreffs Definierbarkeit der euklidischen Metrik in der projektiven Geometrie eine gewisse Krönung seines Programms darstellt und die projektive Geometrie als Mutterdisziplin aller klassischen Geometrien (Topologie also ausgenommen) legitimiert, daß aber auch die Elementarverwandtschaften von Möbius dort hineinpassen. Die hiermit vollzogene offizielle Ehe zwischen Geometrie und Gruppentheorie hatte neben vielen anderen (nicht zuletzt didaktischen) Konsequenzen die Folge, daß nun endlich allmählich auch die Umkehrabbildungen der geometrischen Transformationen explizit wurden. Bis dahin hatten alle genannten Autoren zwar stillschweigend die Eineindeutigkeit der von ihnen studierten Abbildungen vorausgesetzt bzw. benutzt, rasoniert wurde aber nur über die Abgeschlossenheit von Abbildungsarten bezüglich Hintereinanderausführung. Erst die Einbeziehung der inversen Abbildungen erzwang auch die Anerkennung der identischen Abbildung als logische Folge aus den beiden anderen Abgeschlossenheitsforderungen an eine Gruppe.

Es mag manchen traditionsbewußten Geometer auch heute noch schockieren, wenn wir nun feststellen, daß das Erlanger Programm aus der Sicht der mathematischen Logik ein zeitbedingter Schuß dicht am Tor vorbei ist. Aus heutiger

Sicht wird eine Theorie durch ein Begriffssystem (also, wenn man es ganz exakt macht, durch eine passend gewählte formalisierte Sprache) und ein mittels dieser Begriffe (bzw. in dieser Sprache) formuliertes Axiomensystem definiert. Zu jedem solchen Begriffssystem und jeder seiner Interpretationen (die eventuell ein Modell für die in diesem Begriffssystem formulierten Axiome ist) gehört die Gruppe aller Automorphismen dieser Interpretation. Wie man mit den Methoden der Logik leicht zeigen kann, läßt jeder solche Automorphismus außer den Begriffen desjenigen Systems, durch das er definiert wird, auch alle Begriffe invariant, die mittels dieser Grundbegriffe definierbar sind. Gegenstand einer im gewählten Begriffssystem gegebenen Theorie sind eigentlich alle durch dieses System von Grundbegriffen (in einem syntaktisch präzisierbaren Sinn) *definierbaren* Begriffe. Diese sind nach Obigem Invarianten der zugehörigen Automorphismengruppe. Jedoch läßt die Automorphismengruppe in vielen Fällen außerdem Begriffe invariant, die nicht definierbar und folglich in Wahrheit nicht Gegenstand der Theorie sind, weil man über sie in der gewählten Sprache nicht sprechen kann. Der von Klein als Gegenstand einer Theorie charakterisierte Bereich von Objekten kann also zu groß sein.²² Zu einer Zeit, als Begriffe wie der der formalisierten Sprache noch gar nicht und solche wie Axiomensystem, Beweisbarkeit, Definierbarkeit nur in einem vagen intuitiven Sinn zur Verfügung standen, bedeutete Kleins Programm, die noch nicht faßbare Definierbarkeit aus den Grundbegriffen durch die häufig umfassendere Eigenschaft der Invarianz bezüglich der Automorphismengruppe zu ersetzen. Auch die Tatsache, daß die von Klein als gegeben vorausgesetzten Gruppen in Wahrheit immer als Automorphismengruppen eines Begriffssystems gegeben sind, mußte damals noch außer Betracht bleiben.

Während Kleins Arbeiten den geometrischen Transformationsgruppen im engeren Sinne galten, entwickelte S. Lie, der ja zusammen mit Klein in Paris zur Gruppentheorie gefunden hatte, die ganz eigene Theorie der Berührungstransformationen, bei denen die transformierten Elemente Paare aus einem Punkt des betrachteten Raumes und einer mit diesem Punkt inzidierenden Hyperebene (d.h. Gerade im zweidimensionalen, Ebene im dreidimensionalen Fall usw.) sind, die als Tangentialmannigfaltigkeit einer gekrümmten Mannigfaltigkeit M gedeutet wird. Lie schuf eines der wichtigsten Werkzeuge der heutigen Ana-

²²Das vielleicht einfachste, wenngleich nicht sehr geometrische Beispiel ist die Theorie der reellen Zahlen. Hier ist die identische Abbildung der einzige Automorphismus, der demnach jede einzelne reelle Zahl invariant läßt. Aber schon aus Mächtigkeitsgründen kann nicht jede einzelne reelle Zahl ein möglicher Gegenstand der Theorie der reellen Zahlen sein. Insbesondere enthält diejenige Sprache, mittels der die Theorie und ihr Axiomensystem formuliert sind, im allgemeinen ursprünglich nur die Individuennamen 0 und 1, woraus sich freilich abzählbar viele weitere Individuennamen durch Definition ableiten lassen.

lysis, indem er den Prozeß umkehrte, aus der analytischen Beschreibung von M die Differentialgleichung der Schar der Tangentialmannigfaltigkeiten und die Gruppe derjenigen Transformationen zu gewinnen, die diese invariant lassen, statt dessen also ausgehend von einer Differentialgleichung die Gruppe der Transformationen bestimmte, die diese invariant lassen, um daraus mit geometrischen Vorstellungen über eine zugehörige Mannigfaltigkeit M Übersicht über die Lösungen der Gleichung zu gewinnen. Damit begründete er eine neue Rolle der Geometrie als Denkstil in anderen Bereichen der Mathematik. Ähnlich wie bei Riemann waren seine Einsichten zunächst mehr intuitiv und für seine an das Rechnen mit Koordinaten gewöhnten Zeitgenossen schwer nachvollziehbar. Es ist hauptsächlich dem selbstlosen Einsatz von F. Engel zu verdanken, daß sie schließlich allgemein anerkannt und angewendet worden sind.

Gruppen und Symmetriebegriff

Der Begriff der Transformationsgruppe steht in engem Zusammenhang zum heute nicht nur in der Mathematik so wichtigen Symmetriebegriff. Symmetrie war von der Antike bis ins 18. Jh. nur mittelbar ein mathematischer Begriff und hatte keineswegs die heutige Bedeutung. Vielmehr bedeutete Symmetrie, z.B. an einem Gebäude oder Kunstwerk, die Wiederholung bestimmter Proportionen in vielen oder allen Teilen. Die sich im 19. von Empirie weg entwickelnde Kristallographie hat auch daran einen beträchtlichen Anteil, daß das Wort Symmetrie schließlich die heutige Bedeutung angenommen hat. Zugleich war Kristallsymmetrie neben Optik (und entgegen den Bedürfnissen der damaligen Mechanik) ein Anlaß, aus physikalischer Sicht über Spiegelungen nachzudenken. R. J. Haüy, einer der ersten Pioniere der Kristallographie in Frankreich, sprach schon 1815 in diesem Zusammenhang von Symmetrie. J. F. Hessel, Prof. der Mineralogie, Technologie und Naturgeschichte in Marburg, der Haüys Arbeit 1819 ins Deutsche übersetzt hatte, stellte seiner eigenen, zuerst 1830 in Gehlers „Physikalischem Wörterbuch“ erschienenen „Krystallonometrie“ eine rein geometrische Einführung in die möglichen Formen räumlicher Symmetrie voran sowie eine hierauf gegründete Klassifikation der Polyeder und der möglichen Raumfüllungen mit ihnen, wobei er aus Gründen der Systematik, im Rahmen damaliger Kenntnisse als erster auch alles berücksichtigte, was mathematisch möglich, aber in der Natur nicht realisiert ist. „... mit Zugrundelegung neuer allgemeiner Lehren der reinen Gestaltenkunde ...“ heißt es im vollständigen Titel seines umfangreichen, 1831 auch separat gedruckten Artikels (Reprint in Ostwalds Klassikern, Bd. 88/89, 1879). Hier wurde zwischen gleichsinniger Kongruenz (bei Hessel „ebenbildliche Gleichheit“) und un-

gleichsinniger Kongruenz (bei Hessel „gegenbildliche Gleichheit“) unterschieden, Drehachsen von Polyedern wurden nach der Zähligkeit der Drehungen klassifiziert, und anschließend wurde, implizit gruppentheoretisch, die Hintereinanderausführung von Drehungen um verschiedene Achsen untersucht. Hessels Untersuchungen, die in der Aufzählung von 32 Kristallklassen gipfelten, blieben seinerzeit wenig beachtet. So konnte 1849 A. Bravais, zu dieser Zeit Physikprofessor an der École Polytechnique, von neuem der Kristallographie eine rein geometrische Untersuchung der möglichen Symmetrien von Polyedern vorausschicken. Er unterschied dabei im Raum Punktspiegelungen (Zentralsymmetrien), Achsen- oder Rotationssymmetrien und Ebenenspiegelungen, erkannte jedoch nicht die Existenz von Drehsiegelungen. Er nennt dann ein Polyeder symmetrisch, wenn es wenigstens eine der drei genannten Arten von Symmetrien besitzt.

Während also die ersten Studien über Symmetrie im heutigen Sinn im Kontext der Kristallographie entstanden und von nicht eigentlichen Mathematikern stammten, fand dieser Begriff ab der Mitte des 19. Jhs. auch das Interesse von Mathematikern. Möbius beginnt 1849 mit einer Arbeit „Ueber das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und die Anwendung dieses Gesetzes auf die Einteilung der Krystalle in Systeme“. Dort heißt es: „Eine Figur soll symmetrisch (in weiterem Sinne) heißen, wenn sie einer ihr gleichen und ähnlichen Figur auf mehr als eine Art gleich und ähnlich gesetzt werden kann.“ Das ist eine zwar richtige, aber für uns doch etwas verblüffende Definition. 1851 folgt eine weitere Arbeit von Möbius „Ueber symmetrische Figuren“, worin er zunächst seine Kenntnis der oben genannten Arbeit von Bravais mitteilt und dann die neue Definition aufstellt: „§1. Sowie jede Größe sich selbst gleich ist, so ist auch jede Figur sich selbst gleich und ähnlich. Es gibt aber Figuren, welche sich selbst auf mehr als eine Art gleich und ähnlich sind, und solche Figuren sollen symmetrisch genannt werden.“ Nachdem er u.a. dazu übergegangen ist, Symmetrien durch Wertetabellen der entsprechenden Zuordnungen zu beschreiben, bemerkt er in einer Fußnote: „Am sichersten dürfte der Grad der Symmetrie einer Figur durch die Zahl bestimmt werden, welche angibt, auf wie viel verschiedene Arten die Figur sich gleich und ähnlich ist.“ In einer kurzen Note aus dem Jahre 1855 schließlich kam Möbius zu der Erkenntnis, daß sich der Begriff der Symmetrie so, wie er ihn nun gefaßt hatte, auf (modern gesprochen) allgemeinere als die isometrischen Abbildungen ausdehnen läßt: „Dieser erweiterte Begriff besteht aber darin, dass eine Figur zu sich selbst auf mehr als eine Art in der nämlichen Verwandtschaft steht.“ Das so allgemein gefaßte Konzept der Symmetrie beherrschte in zunehmendem Maße das

Denken von Möbius, ohne daß es zu seinen Lebzeiten noch zur Publikation der geplanten großen Arbeit kam. Sie ist erst anläßlich der Herausgabe seiner Gesammelten Werke 1886 aus seinem Nachlaß rekonstruiert worden, und Klein als Herausgeber dieser Gesammelten Werke hat bekannt, erst bei dieser Gelegenheit das Lebenswerk von Möbius gründlich kennengelernt zu haben. In einer Note zur letzten Fassung seines „Erlanger Programms“ 1921 schreibt er: „Im übrigen verweise ich gern noch . . . auf die Arbeiten von Möbius (die ich selbst erst nach ihrem innern Zusammenhang erfaßte, nachdem ich bei der von der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in den Jahren 1885–1887 veranstalteten Gesamtausgabe seiner Werke mitwirken durfte.) Möbius hat den allgemeinen Gruppenbegriff und auch viele der geometrischen Transformationen, die zu seiner Illustration im Erlanger Programm herangezogen werden, noch nicht gekannt, aber er hat, von einem sicheren Gefühl geleitet, seine aufeinanderfolgenden geometrischen Arbeiten genau so eingerichtet, wie es dem Grundgedanken des Programms entspricht.“ [Ostwalds Klassiker 253, S. 84].

7.8 Anfänge der Topologie

Obwohl seit dem Ende des 17. Jhs. Leibnizens Vision einer „Analysis situs“ (d.h. Analysis der „Lage“) durch die mathematische Literatur geisterte und sich immer mal wieder jemand auf diesen Ausdruck ohne Inhalt bezog, „haben wir nach anderthalb hundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts“ schrieb Gauß 1833 [Gauß’ Werke Bd. V, S. 605]. Als Topologie sich kurz danach tatsächlich zu entwickeln begann, tat sie dies sogleich in zwei Richtungen, deren gegenseitige Beziehungen bis heute etwas verwirrend sind, obwohl wir inzwischen längst Namen dafür haben: allgemeine oder mengentheoretische Topologie und kombinatorische (bald umbenannt in algebraische) Topologie. Am leichtesten, wenn auch nicht ganz exakt, läßt sich dieses Verhältnis vielleicht so charakterisieren, daß die allgemeine Topologie es mit der Stetigkeit und dabei oft mit dem „Lokalen“, dem Mikrokosmos, die algebraische Topologie es aber mit diskretisierten Objekten und dabei meist mit den „globalen“ Eigenschaften zu tun hat. In den Anwendungen wirkt beides zusammen, in den Methoden aber sind beide Richtungen grundverschieden.

Mengentheoretische Topologie kann eigentlich, wie schon der Name sagt, ohne Mengenlehre nicht existieren, also nicht vor Cantors und Dedekinds grundlegender Theorie und folglich nicht vor 1872. Umgekehrt trat die Mengenlehre als ein Ansatz zur mengentheoretischen Topologie in die Welt und hatte es

zunächst mit Begriffen wie innerer, äußerer, Begrenzungspunkt²³ einer Menge (im R^n), offene und abgeschlossene Menge, Zusammenhang, (metrische) Vollständigkeit, stetige Abbildung zu tun, bevor sie sich, fast gegen Cantors anfängliche Intention, der Hierarchie der unendlichen Mächtigkeiten, der Wohlordnung, dem Kontinuumproblem und Ähnlichem zuwandte. 1878 entdeckte Cantor, daß sich eine Strecke stetig auf eine Dreiecksfläche abbilden läßt. Daraufhin begannen Jordan, Peano und andere um einen tragfähigen Kurvenbegriff zu kämpfen, ohne dessen peinlich exakte Definition und Untersuchung, wie sich bald zeigte, selbst anschaulich so einleuchtende Aussagen wie die Eigenschaft einer Kurve, bei topologischen (d.h. eindeutigen und in beiden Richtungen stetigen) Abbildungen in eine Kurve überzugehen, oder der Jordansche Kurvensatz nicht bewiesen werden können. Letzterer besagt, daß eine einfach geschlossene Kurve in der euklidischen Ebene diese in ein Innen- und ein Außengebiet zerlegt. Ein erster, wie sich später zeigte, trotz bekannter Beweisakribie Jordans noch lückenhafter Beweisversuch ist in Jordans „Cours d'Analyse“ um 1880 enthalten.

Ansätze in Richtung einer mengentheoretischen Topologie findet man schon 1863 in der „Theorie der elementaren Verwandtschaft“ von Möbius. Unter elementarer Verwandtschaft verstand Möbius hier offenbar das, was wir heute topologische Abbildung nennen, ohne es jedoch zu diesem Zeitpunkt exakt definieren zu können. Die Arbeit ist voll von grundlegenden Aussagen über topologische Äquivalenz von ein-, zwei- und dreidimensionalen Mengen im euklidischen Raum, die mit aus späterer Sicht größtenteils nicht stichhaltigen Begründungen versehen werden, teils aber auch falsch oder zumindest unvorsichtig formuliert sind. Zum Beispiel hat Möbius eine im wesentlichen zutreffende intuitive Vorstellung von den Begriffen innerer Punkt und Begrenzungspunkt und macht plausibel, daß diese Begriffe bei elementaren Verwandtschaften invariant bleiben, schließt aber dann sofort weiter, daß „von zwei elementar verwandten ebenen Flächen die eine von derselben Anzahl geschlossener Linien, wie die andere, begrenzt sein muss“ und weiter „Diese Bedingung ist aber zur elementaren Verwandtschaft zweier ebenen Flächen nicht bloss notwendig, sondern auch hinreichend.“ In einem undatierten Fragment „Allgemeine Sätze über Räume“ aus dem Nachlaß von Dedekind [Dedekind Werke, Bd. 2, 353-355] wird nach der korrekten metrischen Definition der Begriffe innerer, äußerer und Begrenzungspunkt mittels Umgebungen und eines „Körpers“ als (modern formuliert) abgeschlossener Hülle einer nichtleeren offenen Teilmen-

²³Hier und im Folgenden ist ein Begrenzungspunkt (auch kurz Grenzpunkt) P einer Menge M ein solcher Punkt, daß jede Umgebung von P sowohl Punkte von M als auch Punkte enthält, die nicht zu M gehören. Ein Randpunkt von M ist ein Grenzpunkt von M , der selbst zu M gehört. Leider ist die deutsche Terminologie in dieser Frage nicht ganz einheitlich.

ge des R^3 unter anderem „bewiesen“, daß die Begrenzung eines Körpers kein Körper sein kann.

Kombinatorische Topologie hat es zunächst mit den (in ganzen Zahlen ausdrückbaren) Beziehungen zwischen den Anzahlen von Ecken, Flächen, Kanten, Überkreuzungen, Löchern usw. von ein-, zwei- oder dreidimensionalen geometrischen Gebilden und den sich daraus ergebenden Möglichkeiten und Unmöglichkeiten zu tun. Demgemäß beginnt sie eigentlich im verachteten Buch XV der „Elemente“ mit den dort dargelegten Beziehungen zwischen regulären Polyedern und ihren Ecken, Kanten usw. Eine nächste Station ist das berühmte „Königsberger Brückenproblem“, das Euler 1735 durch den Danziger Bürgermeister Ehler vorgelegt wurde und dessen Lösung Euler 1736 publizierte. Es gibt wohl kaum einen besseren Beleg für die grundsätzliche Wendung der Einstellung der Mathematiker zu derartigen Fragen zwischen der Mitte des 18. Jhs. und der heutigen Zeit als jenen Brief, den Euler 1736 über das Brückenproblem an Ehler schrieb:

„Du siehst also, Hochedler Herr, daß diese Lösung ihrem Charakter gemäß kaum Beziehungen zur Mathematik hat [!!], und ich verstehe nicht, warum sie vom Mathematiker eher erwartet werden solle als von irgend einem anderen Menschen, denn diese Lösung stützt sich allein auf die Vernunft, und es ist nicht nötig, zu ihrer Auffindung irgendwelche der Mathematik eigenen Prinzipien heranzuziehen. Und so weiß ich nicht, wie es sich ergibt, daß sogar Fragen, die ganz geringe Beziehungen zur Mathematik haben, von Mathematikern schneller gelöst werden als von anderen. Indessen gestehst Du, Hochedler Herr, dieser Frage einen Platz in der Geometrie der Lage zu; was aber diese neue Disziplin betrifft, so bekenne ich, daß ich nicht weiß, welcher Art Probleme Leibniz und Wolff hierauf bezogen sehen wollen.“ (Zitiert nach [König 1986, S.312]. Dort sind auch die deutsche Übersetzung von Eulers Abhandlung über das Problem und weitere hierauf bezügliche Angaben zu finden.)

Ein weiterer, ebenso berühmter Beitrag Eulers zur sogenannten „Analysis situs“ betrifft den nach ihm benannten Polyedersatz (1750): Bezeichnet e die Anzahl der Ecken, k die der Kanten und f die der Flächen eines Polyeders (der noch zu präzisierenden Bedingungen genügt), so gilt $e - k + f = 2$. Erst 1860 wurde durch eine von Leibniz angefertigte Abschrift eines verlorenen Manuskriptes von Descartes bekannt, daß dieser die Formel bereits gekannt hatte. Die Veröffentlichung der Formel durch Euler regte mehrere Mathematiker an, sich weiter damit zu beschäftigen. Es wurde langsam klar, daß sie, obwohl ursprünglich, wie der Name sagt, eigentlich für Polyeder nach Art der (halb)regulären und somit für gerade Kanten und ebene Begrenzungsflächen gedacht, in Wahrheit eine Aussage über die Zerlegung der Kugeloberfläche

oder einer zu ihr topologisch äquivalenten Fläche (also insbesondere der durch einen unendlich fernen Punkt abgeschlossenen euklidischen Ebene) durch beliebige Kurven in Gebiete ist, wobei ihre Gültigkeit nicht von der Konvexität der Flächen oder der Form der Kurven sondern vielmehr von der „topologischen“ Beschaffenheit der Fläche und ihrer Teilstücke abhängt. Nachdem schon Legendre 1794 das Versagen der Formel in gewissen Fällen festgestellt hatte, korrigierte der Schweizer Mathematiker l'Huillier die Formel 1812 zu $e - k + f = 2(1 + h - p) + c$, wobei h die Zahl der abgeschlossenen Hohlräume des Körpers, p die Zahl der Durchbohrungen des Körpers und c die Zahl der ringförmigen Begrenzungsflächen bezeichnet. (Letzteres sei an den Beispielen von Abb. 7.8.1 illustriert.) Cauchy erweiterte die Formel 1813 in anderer Richtung, indem er innere Trennwände zuließ, die den Körper zellgewebsartig unterteilen, und folgerichtig den von Euler zunächst behandelten Fall als einen solchen betrachtete, in dem der gesamte Raum durch eine geschlossene, ihrerseits unterteilte Fläche in einen Innen- und einen Außenkörper zerlegt wird. An alle diese Bemühungen wird J. B. Listing, der wahre Vater der kombinatorischen Topologie, 1862 anknüpfen.

Anfänge der Graphentheorie

Zunächst wollen wir aber festhalten, daß sich aus der späteren Topologie sehr frühzeitig der später als Graphentheorie bezeichnete Zweig verselbständigt, der es nur mit den eindimensionalen Gebilden, bestehend aus Knoten (oder Ecken) und Kanten (im gerichteten Fall „Bögen“) zu tun hat, und den wir wegen seines Umfangs und seiner Eigenständigkeit gegenüber der Geometrie und Topologie nur in seinen ersten, noch eng mit der Topologie verbundenen Anfängen verfolgen wollen. Nach dem Königsberger Brückenproblem tritt hierzu 1858 das von W. R. Hamilton erfundene Knobelspiel, zunächst auf dem Ecken-Kanten-Gerüst eines Dodekaeders einen sogenannten Hamiltonkreis zu finden, d.h. einen geschlossenen Kantenzug, der jeden Knoten genau einmal besucht. Während diese Frage auf den ersten Blick dem Königsberger Brückenproblem sehr verwandt erscheint, konnte erst mit dem Begriffsapparat der um 1956 entstandenen Komplexitätstheorie die Erfahrung präzisiert werden, daß die Entscheidung über die Existenz eines Hamiltonkreises eines gegebenen Graphen einen grundsätzlich höheren Schwierigkeitsgrad hat als die auf Grund der Eulerschen Überlegung fast triviale Entscheidung über die Existenz eines Eulerschen (offenen oder geschlossenen) Weges. Welche Schwierigkeiten selbst bedeutenden Mathematikern der Umgang mit kombinatorisch-geometrischen Betrachtungen anfangs bereitete, werden wir noch mehrfach sehen. Euler widmete 1736 der Frage, wie man in einem Graphen, der die notwendigen Be-

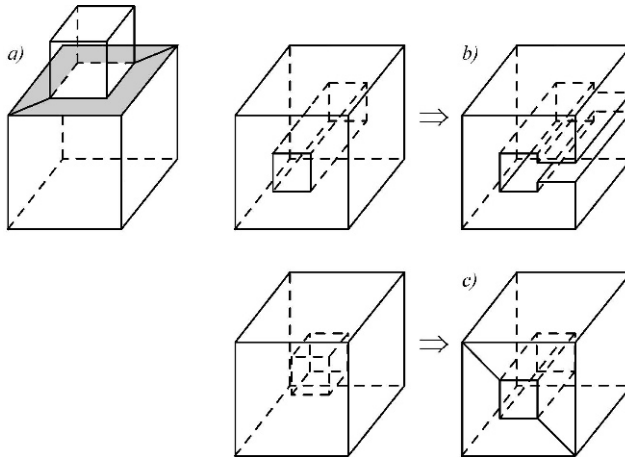


Abb. 7.8.1 Körper mit Hohlräumen, Durchbohrungen
oder ringförmigen Begrenzungsflächen

a) Der aus zwei aufeinander stehenden Würfeln bestehende Körper hat zunächst unter seinen Begrenzungen die schraffierte ringförmige. Man zähle nach, daß für ihn dann nicht Eulers Formel, aber die von l'Huilier gilt. Der Übergang zwischen beiden Formeln geschieht, indem man den Ring durch zwei weitere Kanten so in zwei Teilflächen zerschneidet, daß nun alle Begrenzungsflächen einfach zusammenhängend sind und keine Fläche mit sich selbst eine Kante gemeinsam hat. b) Analog erhält man die für einen Körper mit einer Durchbohrung gültige Variante der Formel, indem man den Körper längs einer Fläche zwischen der äußeren Begrenzung und der Begrenzung der Durchbohrung aufschneidet. c) Analog bewältigt man auch das Auftreten eines inneren Hohlraumes. Listing kritisierte jedoch, daß l'Huillier's Methoden versagen, wenn die Durchbohrungen hinreichend kompliziert verzweigt und miteinander verflochten sind, vgl. Abb. 7.8.4 und 5.

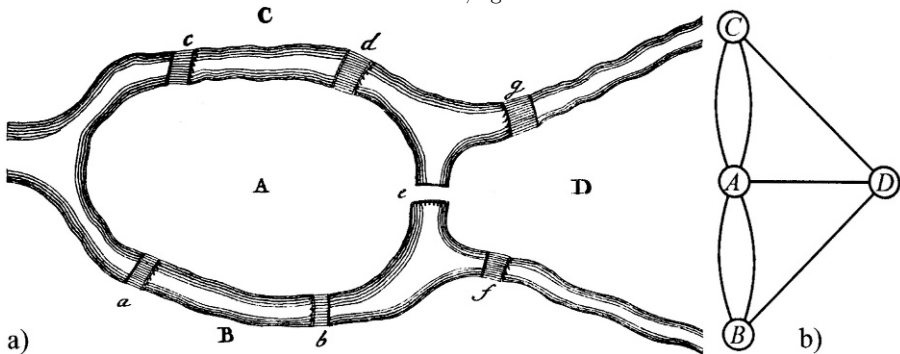


Abb. 7.8.2 Königsberger Brückenproblem

a) Zeichnung der tatsächlichen Situation in Eulers Arbeit 1736,

b) Übergang zum Graphen, der das Wesentliche dieser Situation wiedergibt.

[a] aus König, Dénes: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Teubner Archiv zur Mathematik, Bd. 6 ©1986 BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig]

dingungen erfüllt, einen Eulerschen Weg finden kann, einige kurze und völlig unzutreffende Bemerkungen, die nur zeigen, daß ihn diese Frage nicht besonders interessiert hat. Einen Algorithmus zum Finden eines Eulerschen Weges gab 1871 der junge (kurz darauf verstorbene) Karlsruher Mathematiker Carl Hierholzer an, anscheinend, ohne Eulers Arbeit überhaupt zu kennen²⁴. Zu den Anfängen der Graphentheorie zählen auch die ersten Versuche von Mathematikern, Algorithmen zur Durchsuchung von Labyrinthen zu begründen (Ch. Wiener 1873, G. Tarry 1895). Am folgenreichsten für die Graphentheorie sollte jedoch ein Problem werden, das sich erst nach einer gewissen Transformation als graphentheoretisch erweist:

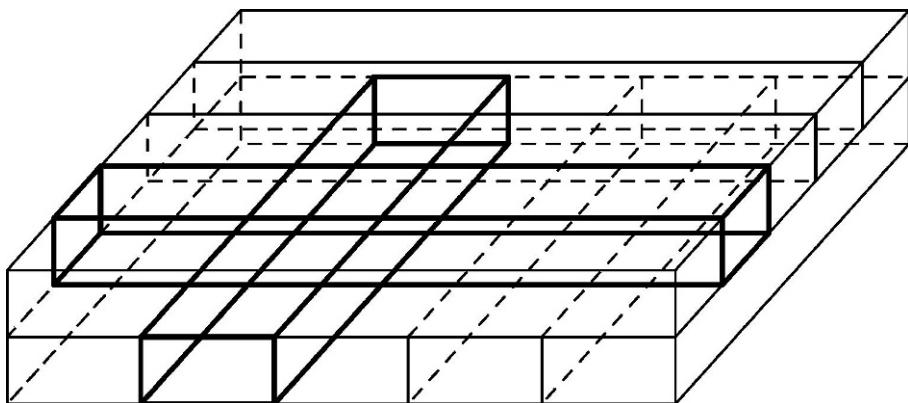


Abb. 7.8.3 Zur Trivialität des Vierfarbenproblems im $\mathbb{R}^3$

Wenn jeder der n untenliegenden „Riegel“ mit je genau einem der n quer darüber liegenden Riegel zu einem Körper verbunden ist, grenzt jeder dieser n Körper längs einer Fläche an jeden anderen, so daß man für eine zulässige Färbung dieser Körper n Farben braucht. Dabei ist n beliebig.

1852 übermittelt Frederick Guthrie seinem Mathematikprofessor A. de Morgan in London die von seinem Bruder Francis Guthrie gestellte Frage, ob man jede Landkarte so mit nur vier Farben färben kann, daß je zwei längs einer Kante aneinander grenzende Länder verschiedene Farben erhalten. Durch de Morgan wurde das Problem unter den Mathematikern bekannt. Gelöst wurde es nach vielen vergeblichen Versuchen, Irrtümern und auf eine obendrein umstrittene

²⁴Der von Hierholzer hierüber gehaltene Vortrag wurde nach seinem Tod von Ch. Wiener und J. Lüroth rekonstruiert und publiziert [Math. Annalen Bd. 6, 30-32]. Wiener verwies dort in einer Fußnote darauf, daß schon Listing 1847 in den „Vorstudien zur Topologie“ dies dargelegt habe. Nachprüfung der entsprechenden Textstelle zeigt allerdings, daß auch Listing dort nicht die Auffindung von Eulerschen Wegen sondern eher für beliebige Graphen die Zahl der zur ihrer Durchlaufung mindestens notwendigen Eulerschen Wege diskutiert hatte.

Weise (mit Computerhilfe) erst 1976. Graphentheoretisch ist in der Tat nur die ursprüngliche Frage, da man im Falle einer ebenen Landkarte zum „dualen“ Graphen übergehen kann, dessen Knoten den Ländern entsprechen und die miteinander durch eine Kante verbunden sind, wenn die entsprechenden Länder aneinander grenzen. Dann wird das Problem zu einer Frage nach der Möglichkeit bestimmter Knotenfärbungen von ungerichteten Graphen. (Die ausführliche Geschichte des Vierfarbenproblems findet man in [Bigalke 1988] und [Fritsch 1994].) Topologisch bleibt die Frage aber, sobald man sie allgemeiner stellt, nämlich entweder für Landkarten auf einer anderen Fläche als der Ebene oder für die analoge Färbung von drei- oder höherdimensionalen Gebieten. Der letztgenannte Fall wurde von Frederick Guthrie selbst als trivial erkannt. Er zeigte um 1880, daß man für jede Zahl n im R^3 n Polyeder finden kann, die paarweise längs gewisser Flächen aneinanderstoßen (Abb. 7.8.3), so daß also für eine zulässige Färbung n Farben benötigt werden. Die erstgenannte Verallgemeinerung (auf Karten auf geschlossenen Flächen höheren Geschlechts) wurde nach Vorarbeiten von P. J. Heawood und Teilresultaten für spezielle Flächen in den sechziger Jahren unseres Jhs. endgültig beantwortet.

Die schwere Geburt der kombinatorischen Topologie

Kehren wir zur allgemeinen Entwicklung der kombinatorischen Topologie zurück. Zunächst ist es vor allem Gauß, der immer wieder auf diese Lücke in der zeitgenössischen Geometrie hinweist, sich auch selbst gelegentlich mit einschlägigen Fragen beschäftigt. Z.B. befinden sich in seinem Nachlaß mehrere Studien über den Zusammenhang zwischen der Totalamplitude (sww. Summe aller Richtungsänderungen) einer geschlossenen Kurve und der Zahl der Überkreuzungen [Gauß' Werke Bd. VIII, 271-286] sowie eine Integralformel, die die Anzahl der „Umschlingungen“ zweier miteinander verflochtener räumlicher Kurven in Abhängigkeit von den Parameterdarstellungen dieser beiden Kurven liefert [Gauß' Werke Bd.V, S. 605]. Vor allem aber scheint er einen seiner Schüler, Johann Benedict Listing, der nach verschiedenen Zwischenstationen ab 1839 als Physikprofessor in Göttingen wirkte, in dieser Richtung beeinflußt zu haben. Listing ist, abgesehen von einer großen Vielseitigkeit seiner sonstigen Leistungen und Interessen, in mehrfacher Hinsicht neben Möbius der wahre Vater der Topologie, und es ist umso unverständlicher, daß er bisher in der wissenschaftshistorischen Literatur kaum behandelt worden ist.

Listing hat schon 1836 in einem Brief erstmals das Wort Topologie geprägt. In seinen „Vorstudien zur Topologie“ (1847) gibt er als Motiv für die neue Bezeichnung an, daß die „geometria situs“ durch Carnots „Géométrie de position“ eine andere Bedeutung als die von Leibniz intendierte erhalten habe. Dort schreibt er auch:

„Bei öftern Gelegenheiten durch den größten Geometer der Gegenwart auf die Wichtigkeit des Gegenstandes aufmerksam geworden, habe ich mich seit längerer Zeit verschiedentlich in der Analyse einzelner hierher gehöriger Fälle versucht, zu denen die Naturwissenschaften und ihre Anwendungen vielfache Veranlassung darbieten, und indem ich es wage, schon jetzt, noch bevor diese Betrachtungen Anspruch auf streng wissenschaftliche Form und Methode machen können, Einiges davon als Vorstudien zu der neuen Wissenschaft mitzutheilen, kann meine Absicht nur darauf gerichtet sein, in propädeutischen Rudimenten, Beispielen und Materialien auf die Möglichkeit und die Bedeutung dieser Wissenschaft aufmerksam zu machen.“

Der Hauptinhalt der „Vorstudien“ hat dann allerdings mit Topologie im heutigen Sinne zum großen Teil gar nichts, zu einem kleineren Teil nur sehr indirekt zu tun. Es geht hier z.B., modern ausgedrückt, um die gruppentheoretische Untersuchung der Spiegelungen an drei paarweise aufeinander senkrechten Ebenen, womit Listing die gegenseitige Lage von zwei Körpern im Raum beschreiben will, aber auch (im Einklang mit seinen physikalischen Interessen) die möglichen gegenseitigen Lagen von Urbild und Bild, die durch optische Geräte vom Spiegel bis zu den verschiedenen Fernrohr-Typen erzeugt werden. Weiterhin beschäftigt er sich mit der (nach seiner Meinung) allgemeinsten Form von spiralförmigen Kurven und deren möglicher gegenseitiger Lage zueinander, diskutiert ausführlich die Begriffe Rechts- und Linksgewinde und deren Vorkommen und Bedeutung in Natur und Technik und dringt endlich zu Überlegungen vor, die man heute als Ansätze zur Knoten- und Zopftheorie bewerten könnte. Auch hier folgen sofort wieder Versuche naturwissenschaftlicher Anwendung, in diesem Falle auf die wirkliche und scheinbare gegenseitige Verschlingung der Bahnen von Planetoiden. Obgleich immer noch lesenswert, zeigt das Ganze eigentlich nur die damalige Schwierigkeit, topologische von nichttopologischen Begriffen und Sachverhalten zu trennen.

Was dann Listing in Bezug auf die Topologie über alle seine Zeitgenossen erhebt, ist sein „Census räumlicher Complexe“, 1862 in den Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen publiziert. Der „Census“ ist also ähnlich wie die „Vorstudien“ in einem lokalen Göttinger Periodikum in einer Masse von Abhandlungen über medizinische, naturwissenschaftliche, philologische und historische Themen versteckt. Man kann nur darüber spekulieren, inwieweit dies einer stärkeren Rezeption durch die internationale Gemeinschaft der Mathematiker im Wege gestanden hat. Listing knüpft hier an den oben dargestellten Problemkreis im Anschluß an Eulers Polyedersatz an. Dabei läßt er alle von seinen Vorgängern noch mehr oder weniger explizit benutzten Einschränkungen fallen, insbesondere aber die der Polyedergeometrie eigene

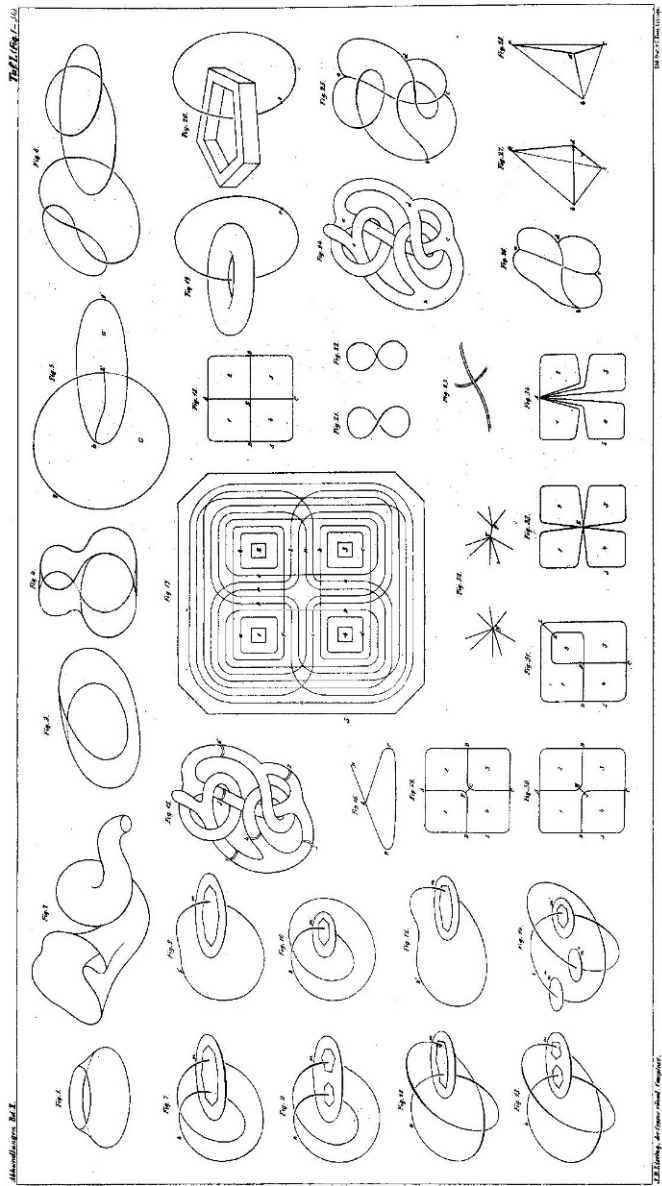


Abb. 7.8.4 Illustrationstafel von Listing

[Listing 1862: Der Census räumlicher Complexe. Abhandlungen der Kgl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, X. Band, Tafel I]

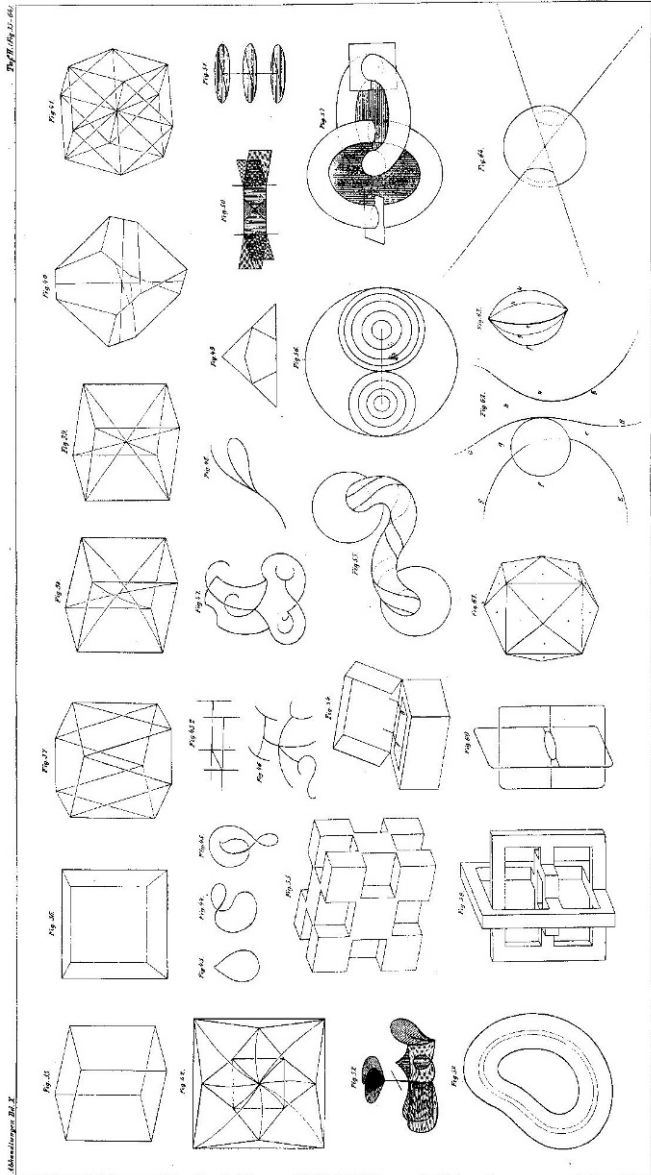


Abb. 7.8.5 Illustrationstafel von Listing
[Listing 1862 a.a.O., Tafel II]

Geradheit aller Kanten und Flächen, und schon ein Blick auf die zugehörigen Bildtafeln (Abb. 7.8.4,5) zeigt, in welchem Maße Listings „topologische Phantasie“ 1862 entwickelt war, nachdem er sich ja seit seinen Göttinger Studententagen mit derartigen Fragen beschäftigt hatte. Hier sehen wir als Fig. 3 auf Tafel I das sogenannte Möbiusband und gleich daneben ein zweites Beispiel einer Fläche, wie sie zuvor noch von keinem Pionier der Topologie in Betracht gezogen worden war. Die (für uns eher irreführende) Bezeichnung „Census“ (also „Bestandsaufnahme“, „Bilanz“, insbesondere „Volkszählung“) im Titel bezieht sich darauf, daß Listing für die Anzahlen der jeweiligen Punkte, Linien, Flächen (die jetzt nicht mehr notwendig irgendetwas begrenzen und auch nicht notwendig beschränkt sein müssen) und Körper der jeweiligen „Constituenden“ eines „Complexes“ eine zur Euler-l’Huillierschen analoge, aber viel allgemeinere Bilanz aufstellt, bei der jetzt als Gesamtsumme immer Null herauskommt. Der 86 Seiten langen, sehr gehaltvollen Arbeit ist ein Verzeichnis neu eingeführter Begriffe beigelegt, in dem man Wörter findet wie Amplexum = der umgebende, ins Unbegrenzte ausgedehnte Raum, Diakrise = eine von der Beschaffenheit des Complexes abhängige constante Zahl, periphraktisch = allseitig geschlossen, Diatrese = Aufhebung oder Annullierung der Periphraxis usw. Unter vielen bemerkenswerten Einfällen findet sich im „Census“ erstmals für den räumlichen Fall, was später Alexandroff-Kompaktifizierung heißen wird, also (im Gegensatz zu der in jener Zeit übermächtigen Vorstellung der projektiven Abschließung) die Abschließung des Raumes durch einen einzigen unendlich fernen Punkt. (Das Analoge für die Ebene hatte ja durch die stereographische Projektion der Ebene auf die Kugeloberfläche eine alte Tradition.) Es findet sich auch die Abbildung eines räumlichen Complexes auf ein ebenes „Diagramm“, es finden sich erste Ansätze zur Unterscheidung zwischen Homöomorphie und Homotopie. (Zwei Objekte heißen homöomorph, wenn sie topologisch aufeinander abgebildet werden können. Zwei in einen umgebenden Raum eingebettete Objekte heißen homotop, wenn es eine topologische Abbildung des umgebenden Raumes auf sich gibt, die das eine Objekt in das andere überführt. Bezüglich des R^3 sind also die beiden geschlossenen Kurven der Figur I,6 von Listing homöomorph, aber nicht homotop.). Ich möchte die These aufstellen, daß allein die Betrachtung von Listings Bildtafeln, wären sie nur allgemeiner zugänglich gewesen, manche kombinatorische oder topologische Entdeckung vorverlegt hätte. Zum Beispiel ist es von Tafel II, Fig. 53, nur ein kleiner Schritt bis zur Entdeckung von unendlich ausgedehnten, metrisch regulären polyedrischen Flächen (J. F. Petrie und H. S. M. Coxeter 1926, siehe [Cromwell 1997, S. 79f]), deren Existenz wohl den meisten Mathematikern bis heute nicht bewußt ist.

Einseitige Flächen

Wenige Jahre später, 1867, erschien noch eine für die Topologie relevante Arbeit von Möbius. Angeregt durch eine Arbeit von 1769/70 über den Inhalt sich selbst überschneidender ebener Polygone und wohl auch durch die erneute Untersuchung der Sternpolyeder in Frankreich (siehe 7.9) beschäftigte er sich nun mit der analogen Frage im Raum und kam über einen Begriff, den man später als simplizialen Komplex bezeichnen wird, zu (offenen und geschlossenen) einseitigen Flächen, deren Wesen er an dem später nach ihm benannten Band veranschaulichte. Hier sei bemerkt, daß v. Staudt 1847 am Anfang seiner „Geometrie der Lage“ behauptet hatte: „Jede Fläche hat zwei Seiten.“ Möbius hatte sich mit den beiden genannten Arbeiten über elementare Verwandtschaft und den Inhalt von Polyedern erfolglos um den 1862 von der Pariser Akademie ausgeschriebenen Preis für substantielle Verbesserungen der Polyedertheorie beworben. Aus seinem Nachlaß wurden weitere Entwürfe zu diesem Problemkreis rekonstruiert [Möbius' Werke, Bd. II, 513-60], die Möbius insgesamt einen gleichrangigen Platz neben Listing sichern.

In der weiteren Entwicklung kreuzen und beeinflussen sich mehrere Strömungen. Die Darstellung algebraischer Flächen im R^3 bietet viele Anregungen. Klein arbeitet 1876 den Unterschied zwischen Einseitigkeit einer Fläche (abhängig vom umgebenden Raum) und Nichtorientierbarkeit als innerer, vom umgebenden Raum unabhängiger Eigenschaft heraus. Man beachte die Analogie zu äußerer und innerer Differentialgeometrie und die sich bildende Ideenbrücke zum Unterschied zwischen Homologie und Homotopie! 1882 entdeckt er als naheliegendes Analogon des Möbiusbandes die nach ihm benannte „Flasche“ (auch als „Schlauch“ bezeichnet, Abb. 7.8.6). Auch die Erkennung der topologischen Struktur der projektiven Ebene als einer nicht orientierbaren Fläche um 1874 im Gedankenaustausch zwischen Schläfli und Klein gehört in diesen Zusammenhang. Andererseits nimmt Betti 1871 die durch den frühen Tod Riemanns nicht mehr zur Ausführung gekommenen Pläne Riemanns auf, den Begriff der Riemannschen Fläche, wie er zunächst für die Bedürfnisse der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen geschaffen worden war, auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern. (Im Nachlaß Riemanns befindet sich ein diesbezügliches Fragment, das 1876 von H. Weber und R. Dedekind in Riemanns Gesammelten Werken publiziert wurde.) Einen wichtigen Beitrag zur Herausbildung des Homotopiebegriffs leisteten auch die Untersuchungen von C. Jordan 1866 über die Einbettung räumlicher Kurven in gekrümmte Flächen.

Zu einer gewissen Vollendung kommt das, was Listing für Komplexe der Dimension ≤ 3 angefangen, Riemann und Betti für den höherdimensionalen Fall

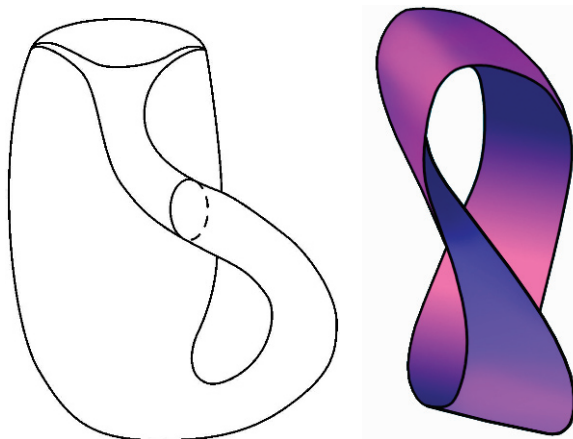


Abb. 7.8.6 Kleinsche Flasche, auch als Kleinscher Schlauch bezeichnet; Möbiusband

weiterverfolgt hatten, 1895 durch H. Poincaré. Von diesem Zeitpunkt an spricht man verbindlich von kombinatorischer Topologie. Während die topologische Äquivalenz zweier scheinbar verschiedener Mannigfaltigkeiten stets durch die mehr oder weniger anschauliche Beschreibung einer eindeutigen und stetigen Deformation der einen in die andere dargelegt werden kann, besteht das eigentliche Problem der Topologie im Nachweis der Unmöglichkeit einer solchen Transformation, also der topologischen Verschiedenheit zweier gegebener Mannigfaltigkeiten. Poincaré führt den Begriff des n -dimensionalen topologischen Komplexes ein, bei dem die vorkommenden „Constituenden“ (in der Sprache Listings) nur n -dimensionale Polytope und deren k -dimensionale Randpolyeder (für alle $k \leq n$) sind, und beruft sich darauf, daß man jede n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit beliebiger Genauigkeit durch solche Komplexe approximieren könne, was freilich von der Topologie des 20. Jhs. als zu speziell erkannt wurde. Brouwer wird übrigens Poincaré's Theorie 1912 weiter vereinfachen, indem er nur noch „simpliciale“ Komplexe betrachtet, deren Bestandteile „Simplexe“, d.h. die k -dimensionalen Analoga von Strecke, Dreieck, Tetraeder sind. Poincaré versteht die Menge der k -dimensionalen Ketten (etwa „Wege“) in einem Komplex mit einer Gruppenstruktur, definiert die Homologiegruppen als Faktorgruppen dieser Gruppen und gewinnt so die Begriffe Bettische Gruppe, Bettische Zahl und Torsionszahl. Diese Zahlen lassen sich für Komplexe berechnen und sind Invarianten bei topologischen Abbildungen. Daher kann man durch die Nichtübereinstimmung einer derartigen Zahl die topologische Verschiedenheit zweier Mannigfaltigkeiten beweisen. (Dem mit kombinatorischer Topologie gänzlich unvertrauten Leser sei als sehr anschau-

liche und fast voraussetzungslose Einführung immer noch [Seifert/Threlfall 1934] und der Artikel in Bd. V der Enzyklopädie der Elementarmathematik, als modernere Lektüre [Fomenko 1994] empfohlen.)

Anfänge der Knotentheorie

Es ist nun noch von einem jener seltsamen Umwege zu berichten, die die Wissenschaftsgeschichte sich gelegentlich leistet: Der berühmte Physiker W. Thomson (Lord Kelvin) hatte um 1865 die Hypothese verbreitet, die Atome habe man sich möglicherweise als eine Art von Wirbeln im „Äther“ vorzustellen und die Molekülbindung als eine topologisch unlösbare Verschlingung mehrerer solcher Wirbel ineinander, eine Theorie, die zeitweise sogar die Zustimmung von J. C. Maxwell fand. Sie lieferte das Motiv für einige namhafte Mathematiker ((besonders P. Tait und T. P. Kirkman), sich einer kombinatorisch-topologischen Klassifikation und Aufzählung der Verschlingungen mehrerer Kurven miteinander zuzuwenden, für die ja schon Gauß und Listing Interesse gezeigt hatten und über die es sogar eine Note aus dem Jahre 1771 von A. T. Vandermonde gibt, die wohl allein wegen dieses frühen Datums (und weil auch Gauß sie kannte und sich darauf bezog) mehrfach zitiert wurde²⁵. Dabei stellte sich heraus, daß die Zahl der Möglichkeiten in Abhängigkeit von der Zahl der zulässigen Überkreuzungen zu rapide wächst, um eine Aufzählung über die bescheidensten Anfänge hinauszuführen. Es wurden jedoch Begriffe und Techniken zur Reduktion entwickelt, die in der erst im 20. Jh. zu selbständigen Theorien avancierten Knoten- und Zopftheorie (M. Dehn, J. Alexander, K. Reidemeister, E. Artin u.a.) aufgegangen sind. Zu weiteren Einzelheiten siehe [Turner/van de Griend], besonders part IV und [Epple 1999]. Die Laune der Geschichte will es nun, daß Thomsons Idee in modifizierter Form neuerdings in der Stringtheorie wieder das Interesse der Physiker findet.

7.9 Weitere, insbesondere nichtklassische Richtungen

Selbst eine so feine Gliederung der Geometrie des 19. Jhs. wie die vorstehende konnte nur ein ganz unzureichendes und unvollständiges Bild des tatsächlichen Geschehens vermitteln. Wir runden sie im folgenden durch einige Details ab,

²⁵Der betreffende Text bei Vandermonde beginnt (in freier Übersetzung aus dem Französisch.): Wie kompliziert auch immer ein System von Fäden im Raum verschlungen sein mag, man kann es natürlich im Prinzip analytisch beschreiben. Wer jedoch mit Flechtbändern, Netzen oder sonstigen Verknotungen praktisch zu tun hat, interessiert sich nicht für die metrischen sondern für die Lageverhältnisse. [Mem. Acad. Paris 1771, 566-574]

die zum Teil weit ins 20. Jh. reichende Wirkungen hatten, zum Teil weiteres Licht auf die Beziehungen zwischen Forschung und Anwendungen werfen, zum Teil auch die in den Vorbemerkungen behauptete Fülle von Parallel-Entwicklungen illustrieren. Die Situation, daß wir für die Rekonstruktion der Mathematik des 19. Jhs. weitgehend auf Zufallsfunde angewiesen sind, hält bis heute an, da das erste Referateorgan erst mit dem Jahre 1868 einsetzt und auch dann bei weitem nicht alles erfaßt, was uns heute interessant erscheint, ganz davon abgesehen, daß dort die Literatur unter den Gesichtspunkten der damaligen Zeit klassifiziert wird. Einen eher besseren Zugang zur Literatur geben die Artikel der „Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften“ (ab 1913 erschienen).

Schon im ersten Jahrgang 1810 der „Annales“ von Gergonne wurde eine aus praktischen Gründen überaus naheliegende Variante des Fermatschen Problems der minimalen Abstandssumme vorgestellt: „Zu n Punkten der Ebene finde man ein verbindendes System von Strecken mit minimaler Gesamtlänge.“ [a.a.O. tome 1, S. 292]. S. 381ff. desselben Jahrganges gab einige Teilaussagen zur Lösung, insbesondere die fundamentale, daß die eventuell hinzuzufügenen zusätzlichen Knotenpunkte (heute „Steinerpunkte“) modern gesprochen die Valenz drei haben müssen und daß die von ihnen ausgehenden Kanten paarweise den Winkel 120 Grad bilden müssen. Dies folgt aus der Lösung des Fermat-Problems für drei Punkte und bringt zugleich den engen Zusammenhang zwischen beiden Problemen zum Ausdruck (siehe Aufg. 7.9.1). Frage und Teilantwort erschienen hier anonym, möglicherweise vom Herausgeber Gergonne selbst verfaßt. Wir haben dieses Beispiel gewählt, weil die Literatur über das heute im allgemeinen, wenn auch sehr unbegründet, als „Steiner-“ oder „Steiner-Weber-“Problem bezeichnete Problem in den vergangenen Jahrzehnten auf Tausende angewachsen ist, worunter sich auch schon historische Aufsätze und historische Bemerkungen in reinen Fachartikeln befinden, deren jeder aber nur Teile der wahren Geschichte enthält [Schreiber 1986, Wesolowsky 1993], und weil diese Geschichte beispielhaft das Literaturdilemma der referatlosen Zeit vor 1868 zeigt. G. Lamé und B.-P.-E. Clapeyron, die zu den Anfang des 19. Jhs. zeitweise in St. Petersburg tätigen französischen Leih-Wissenschaftlern gehörten, schrieben über dasselbe Problem 1827 einen Artikel im Journal des früher erwähnten Petersburger Instituts der Verkehrs-Ingenieure, in dem sie zu den gleichen Resultaten (und aus guten Gründen nicht weiter) kamen. Sicher hat Gauß von beiden Artikeln nichts gewußt, als er 1836 darüber einen Briefwechsel mit seinem Freund, dem Astronomen Schumacher, führte. Schumacher hatte um Aufklärung eines scheinbaren Paradoxons beim gewöhnlichen Fermat-Problem für vier Punkte gebeten (Aufg. 7.9.1), was

übrigens zeigt, wie weit schon damals das Interesse an dieser Frage verbreitet war. Im Anschluß an die Lösung dieser Frage schrieb Gauß an Schumacher: „Ist bei einem 4Eck nicht von der stricten mathematischen Aufgabe, wie sie oben ausgesprochen ist, sondern von dem kürzesten Verbindungssystem die Rede, so werden mehrere einzelne Fälle voneinander unterschieden werden müssen, und es bildet sich so eine recht interessante mathematische Aufgabe, die mir nicht fremd ist, vielmehr habe ich bei Gelegenheit einer Eisenbahnverbindung zwischen Harburg, Bremen, Hannover, Braunschweig sie in Erwägung genommen und bin selbst auf den Gedanken gekommen, daß sie eine ganz schickliche Preisfrage für unsre Studenten bei Gelegenheit abgeben könnte.“ [Gauß Werke X,1; 459-468]. Sehr wahrscheinlich als Folge der Publikation dieses Briefwechsels ist dann 1879 in Göttingen eine Dissertation von Karl Bopp verteidigt worden, in der die Aufgabe für vier Punkte erschöpfend behandelt wurde. Die Beziehung Steiners zu diesem Problemkreis beschränkt sich auf einen 1837 in der Berliner Akademie gehaltenen Vortrag über das Fermat-Problem für n Punkte. Inzwischen hatte E. Fasbender 1846 gezeigt, daß die Fermatsche Aufgabe für das Dreieck auch als Maximumaufgabe aufgefaßt werden kann. Die Verwirrung um Namen, Herkunft und Geschichte des Problemkreises wurde dadurch komplettiert, daß die Fragestellungen gegen Ende des 19. Jhs. weitgehend unabhängig von der Mathematik von Ökonomen und ökonomischen Geographen aufgegriffen wurden (u.a. A. Foeppel in Schweizerische Bauzeitung 1884, A. Weber 1909).

Ein geometrisches Ausgleichsproblem

Ein anderes geometrisches Extremalproblem mit seltsamer Geschichte taucht, soweit bekannt, erstmals 1803 in einem der für das damalige Großbritannien charakteristischen mathematischen Journale auf, die sich vorwiegend an gebildete und interessierte Amateure wendeten. Hier geht es darum, zu drei (oder mehr) Geraden $a, b, c, \dots$ denjenigen Punkt P zu bestimmen, für den die Summe der Quadrate der Abstände zu $a, b, c, \dots$ minimal wird. Das Problem kam ursprünglich aus der Nautik und Geodäsie: Drei astronomische Ortsbestimmungen liefern drei lokal näherungsweise geradlinige „Orte“, die nur im Idealfall durch den richtigen gemeinsamen Punkt gehen. Man hat also die wahrscheinlichste Lage des Beobachtungsortes nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen. Unabhängig voneinander kamen l’Huillier (1809), Steiner (1828), E. W. Grebe (1847, nach dem der betreffende Punkt zeitweise benannt wurde), E. Catalan (1852) und mindestens 8 weitere Autoren auf dieses Problem und seine Lösung, bevor 1873 und 1885 E. Lemoine auf den jährlich stattfindenden Tagungen der Französischen Vereinigung zur Förderung

der Wissenschaften lange Listen von interessanten Eigenschaften des Grebeschen Punktes bekanntgab. Seit dieser Zeit bis heute firmierte der Punkt unter der Fülle der „besonderen Punkte und Linien des Dreiecks“ als „Lemoinescher Punkt“, und wenn man heute unter diesem Namen nachschlägt, findet man vielerlei Information, aber meistens nicht mehr die Minimumeigenschaft des Punktes [Weiße/Schreiber 1989] (s. Aufg. 7.9.3).

Zerlegungsgleichheit

Wir erinnern uns, daß Euklids Beweis für den Satz des Pythagoras eigentlich ein Beweis für die endliche Zerlegungsgleichheit von Hypotenusenquadrat und den beiden Kathetenquadraten ist, wenn auch die tatsächliche Herstellung der zugehörigen Zerschneidung des Hypotenusenquadrates und anschließende Zusammenfügung zu den Kathetenquadraten aus einer Reihe von vorangehenden Sätzen erst herauspräpariert werden muß. Spätere Beweise dieses Satzes machten viel unmittelbarer und anschaulicher von der als selbstverständlich angesehenen Tatsache Gebrauch, daß aus der Zerlegungsgleichheit von (ebenen oder räumlichen) Figuren deren Inhaltsgleichheit folgt. Insbesondere gibt es für den Satz des Pythagoras eine erstaunlich lange und umfangreiche Tradition derartiger Zerlegungs- oder auch damit eng zusammenhängender Ergänzungsbeweise²⁶. C. Cramer sammelte in einem 1837 erschienenen Buch 93 solche Beweise, J. Wipper 1880 gibt 46 teilweise andere Beweise. (Die genauen Angaben hierzu sowie eine Reihe weiterer Schriften aus dem 19. und dem Beginn des 20. Jhs. über den Satz des Pythagoras enthält noch die 4. Auflage von [Lietzmann 1911], die 1930 erschien, spätere Auflagen nicht mehr, da man wohl zu recht davon ausging, daß diese Schriften für die meisten Leser unerreichbar geworden waren.) Das „Tentamen“ (1832) W. v. Bolyais, von dem Gauß lobend hervorhob, daß überall das Bestreben des Autors nach Gründlichkeit und Vollständigkeit sowie die Herausarbeitung grundsätzlicher Probleme zu erkennen sei, präsentierte nun erstmals den Beweis, daß je zwei inhaltsgleiche geradlinig begrenzte Figuren der Ebene zerlegungsgleich sind, daß man also Inhaltsgleichheit, wenn sie besteht, immer mit der traditionellen, vor allem im islamischen Mittelalter zu hoher Blüte gediehenen Methode nachweisen kann

²⁶Zwei geradlinig (bzw. -flächig) begrenzte ebene (oder räumliche) Figuren heißen ergänzungsgleich, wenn man sie durch Hinzufügung von je gleichvielen Figuren, von denen je eine der ersten hinzugefügte kongruent zu einer zugeordneten der zweiten hinzugefügten ist, zu kongruenten Figuren ergänzen kann. Das klassische Beispiel liefert der „chinesische“ Beweis des pythagoreischen Satzes (vgl. Kap. 3). Es ist leicht zu zeigen: Sind in einem Raum inhaltsgleiche Figuren stets zerlegungsgleich, so sind sie auch ergänzungsgleich. Die Umkehrung gilt schon im $\mathbb{R}^3$ nicht.

(siehe Aufgabe 7.9.4). Nur ein Jahr später veröffentlichte ein deutscher Amateur, der preußische Leutnant P. Gerwien, natürlich in Unkenntnis des Buches von Bolyai (das ja ein lateinisch geschriebenes Schulbuch für den gymnasialen Unterricht in Ungarn war) zwei Artikel, in denen er den gleichen Sachverhalt nicht nur für die euklidische Ebene sondern mit analogen Methoden auch für die Kugeloberfläche bewies. Auch dieser Fragenkreis, obwohl scheinbar singular und nicht zu den großen Theorien des 19. Jhs. passend, zeigt wieder mehreres:

- 1) Diese großen Theorien erschöpfen keineswegs das wesentliche geometrische Geschehen des 19. Jhs.
- 2) Auch Personen mit heute kaum bekannten Namen, darunter immer noch typische Amateure, haben bedeutende Beiträge geleistet.
- 3) Manches, was aus damaliger Sicht als Randerscheinung galt, ist zur Wurzel wesentlicher mathematischer Leistungen des 20. Jhs. geworden.

Das Resultat von Bolyai und Gerwien warf natürlich sofort die Frage auf, ob im Raum ein analoger Satz gilt. Ch. L. Gerling, einer der vielen Briefpartner von Gauß, teilte diesem 1844 seinen Beweis dafür mit, daß je zwei zueinander spiegelbildliche Polyeder zerlegungsgleich sind [Gauß Werke, VIII, 240-246]. 1896 fand der Brite M. J. M. Hill drei spezielle Arten von Tetraedern, die einem Quader zerlegungsgleich sind [Proc. London Math. Soc. 27, 39-53]. Die offenbar gewordene Schwierigkeit, das Problem allgemein zu lösen, führte dazu, daß D. Hilbert es 1900 in seinem berühmten Vortrag auf dem zweiten Internationalen Mathematikerkongreß an die dritte Stelle seiner Liste von 23 wichtigen ungelösten Probleme setzte, mit dem Erfolg, daß M. Dehn 1901 in seiner Habilitationsschrift bewies: Würfel und inhaltsgleiches Tetraeder sind nicht endlich zerlegungsgleich. Die dabei angewendete, später vielfach verbesserte und verfeinerte Methode ist den von Listing im „Census“ eingeführten und von Poincaré zum Werkzeug der kombinatorischen Topologie ausgestalteten Methoden so ähnlich, daß man einen ideengeschichtlichen Zusammenhang vermuten kann. Hier soll nur noch erwähnt werden, daß H. Brandes 1908 in seiner (unter dem indirekten Einfluß von Hilbert) geschriebenen Dissertation zeigte: Ein Zerlegungsbeweis für den Satz des Pythagoras im allgemeinen Fall mit weniger als 7 Dreiecken ist unmöglich. Damit war eine neue Forschungsrichtung eröffnet und gleichzeitig eine erste Brücke zwischen Polyedergeometrie und den oben an Beispielen dargestellten geometrischen Extremalfragen geschlagen.

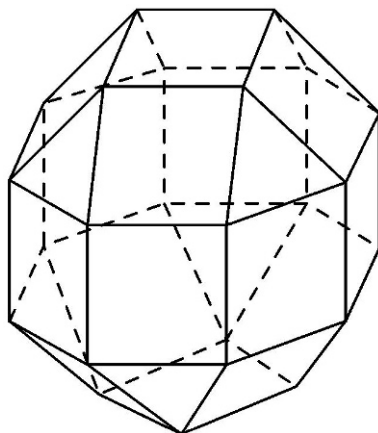


Abb. 7.9.1 Das 1930 von Miller und 1957 unabhängig von Aschkinuse entdeckte archimedische Polyeder

Es genügt der klassischen Definition, daß es von regulären Vielecken begrenzt wird und die in einer beliebigen Ecke zusammentreffenden Flächen paarweise kongruente Eckenfiguren bilden. Die Gruppe seiner Isometrien ist jedoch nicht transitiv, d.h. es gibt nicht zu je zweien seiner Ecken eine Isometrie, die die eine auf die andere und dabei das ganze Polyeder auf sich abbildet. Dieses Miller-Aschkinuse-Polyeder ist das einzige seiner Art und zeigt sehr instruktiv einen Mangel der klassischen Definition der archimedischen Halbregularität. Intuitiv meint man nämlich die paarweise Äquivalenz aller Ecken. Dafür genügt es jedoch nicht, deren „nächste Umgebungen“ zu betrachten.

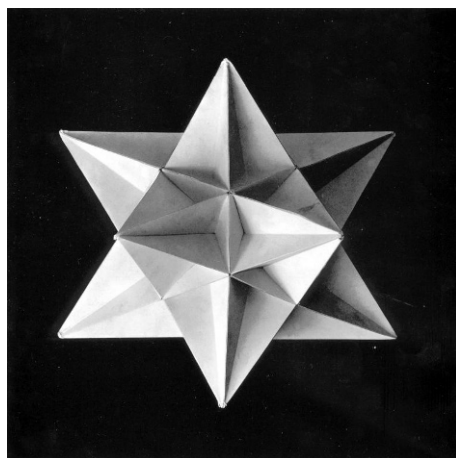


Abb. 7.9.2 Das von Poinset gefundene vierte Sternpolyeder, als großes Ikosaeder oder sterneckiges Zwanzigfläch bezeichnet [Gerd Fischer: Mathematische Modelle, Vieweg-Verlag, Braunschweig / Wiesbaden 1986]

Der Aufschwung der Polyedergeometrie im 19. Jh. ist bereits in zwei Zusammenhängen zur Sprache gekommen: In der Topologie und Graphentheorie und in der Kristallographie bzw. ihrer Rolle bei der Herausbildung des geometrischen Gruppen- und Symmetriebegriffs. Dies sind jedoch nur zwei Facetten der während des gesamten 19. Jhs. überreich sprießenden Literatur über Polyeder, und in kaum einem anderen Bereich der Mathematik läßt sich das Phänomen der gegenseitigen Nichtkenntnisnahme und Mehrfachentdeckung besser beobachten. Selbst eine so alte Theorie wie die der halbbregulären Polyeder bedurfte der Wiedererweckung und Ergänzung. Der Reigen beginnt 1807 mit Meyer Hirsch, gefolgt von Lidonne 1808, l'Huilier 1812, Gergonne 1818 und vielen weiteren bis zu Badoureau 1878. Dabei geht es immer um den Nachweis der Vollständigkeit der Aufzählung der regulären und der archimedischen Polyeder, wobei nun erstmals auch die von Kepler noch verworfenen Prismen und Antiprismen mit regulärer Grundfläche einbezogen wurden. Aber trotz so vieler „Köche“ ist erst 1930 ein bis dahin unbekanntes archimedisches Polyeder entdeckt worden und auch dies dann wieder mehrmals (Abb. 7.9.1). L' Huillier spricht erstmals die drei regulären Parkettierungen der Ebene als Grenzfälle von platonischen Körpern an, Gergonne betrachtet auch die archimedisches halbbregulären ebenen Parkette, übersieht aber einige Fälle. Eine vollständige Aufzählung liefert erst Badoureau. Die zu den archimedischen reziproken halbbregulären Körper werden 1865 von E. Catalan behandelt und seitdem meist nach ihm benannt. Während kombinatorische Dualität von Parketten und Polyedern schon länger bekannt war, stellt Catalan klar, daß Dualität im metrischen Sinn durch eine Kugel vermittelt wird, die gleichzeitig Umkugel eines und Inkugel des dazu reziproken (er sagt: konjugierten) Polyeders ist. Insbesondere ist die Umkugel eines archimedischen Polyeders die Inkugel des dazu dualen „Catalanschen“ Polyeders. Eine andere substantielle Entdeckung im Bereich der regelmäßigen Körper stammt von L. Poincaré, der 1809, offenbar ohne Kenntnis der Priorität von Uccello bzw. Kepler bezüglich zweier dieser Körper, die heute als solche anerkannten vier regulären Sternpolyeder entdeckt (Abb. 7.9.2). Sternpolygone und Sternpolyeder und vor allem deren sachgemäße Inhaltsbestimmung waren eine der Triebkräfte der sich entwickelnden Topologie, über die Phänomene nachzudenken, unter welchen Umständen eine Kurve die Fläche, in der sie liegt, in zwei Teile zerlegt, daß eine Fläche im Raum einseitig sein kann usw. [Günther 1876].

Während sich alles bis hier Gesagte auf die in irgend einem Sinne regelmäßigen Polyeder bezieht, beweist Cauchy 1813 in seiner ersten Arbeit, daß ein System von Ecken, Kanten und Flächen, das überhaupt einer Realisierung als Polyeder im Raum fähig ist, unter der zusätzlichen Forderung der Konve-

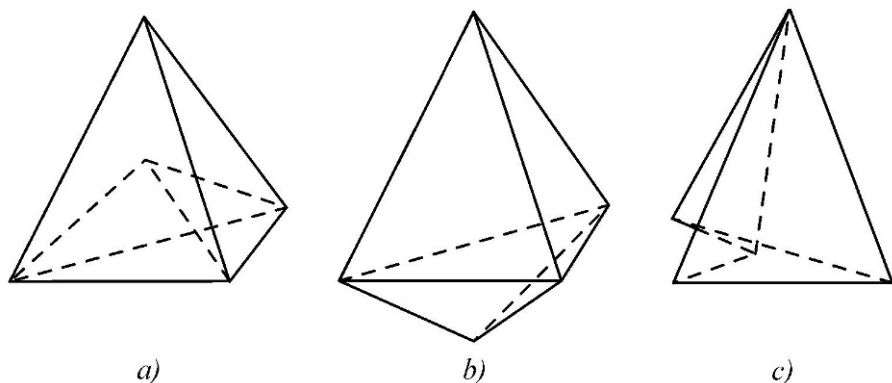


Abb. 7.9.3 Nichtkonvexe Polyeder

Der in (a) gezeigte nicht konvexe Polyeder hat das gleiche Netz wie der in (b) gezeigte. Dieses Beispiel (mit minimaler Flächenzahl) zeigt die Notwendigkeit der Voraussetzung Konvexität im Satz von Cauchy über die Bestimmtheit eines konvexen Polyeders durch sein Netz. Müssen alle Begrenzungsflächen eines Polyeders selbst konvex sein, so ist (a) ein nichtkonvexer Polyeder mit minimaler Flächenzahl. Dürfen auch nichtkonvexe Flächen vorkommen, so zeigt (c) die Möglichkeit eines nichtkonvexen Polyeders mit nur fünf Flächen.

xiät nur auf eine Weise so realisiert werden kann (Einfache Gegenbeispiele für verschiedene Realisierung bei zugelassener Nichtkonvexität zeigt Abb. 7.9.3) Hieran wird E. Steinitz anknüpfen, wenn er zeigt, daß jedes „abstrakte“, d.h. als Inzidenzvorschrift für eine gewisse endliche Menge von Ecken, Kanten und Flächen gegebene Polyeder, das gewissen notwendigen Bedingungen genügt, eine konvexe Realisierung besitzt ([Steinitz 1930] posthum publiziert). Aber schon 1832 hatte J. Steiner [Steiner Ges. Werke I, S. 154] die viel weiter gehende Frage gestellt, ob ein solches Polyeder dann nicht vielleicht sogar immer eine Realisierung mit Umkugel besitzt. Diese Frage konnte erst 1928 durch ein Gegenbeispiel (ebenfalls von Steinitz) verneint werden. Das große Interesse, das Polyedergeometrie während des 19. Jhs. fand, kommt auch darin zum Ausdruck, daß die Pariser Akademie 1862 die Preisaufgabe stellte, „in irgendeinem wesentlichen Punkt die geometrische Theorie der Polyeder zu vervollkommen“. Der Preis wurde nicht vergeben, obwohl zu den eingereichten Arbeiten die von Catalan und auch die früher erwähnte von Möbius gehörten.

[Brückner 1900, 1906] enthält eine erdrückende Fülle von Ergebnissen der Theorie der allgemeinen und speziellen, also z.B. halbrekulären oder Stern-Polyeder, [Brückner 1900] darüber hinaus sehr detailreiche historische und bibliographische Angaben. [Cromwell 1997] ist natürlich unvergleichlich aktueller und auch historisch aufschlußreich, unterdrückt aber bereits wieder viele sachliche und historische Details.

Geometrische Wahrscheinlichkeit

Als eigenartige und heute höchst wichtige Kombination von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie begann sich nach einem berühmten Vorläufer aus dem 18. Jh. im 19. Jh. die Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten zu entwickeln, die auch ganz ohne stochastischen Hintergrund einfach als eine Ausdehnung der Inhaltsmessung von Punktmengen auf Mengen von anderen geometrischen Objekten gedeutet werden kann. Der erwähnte erste Anstoß wurde durch das Nadelproblem von G. L. L. Buffon gegeben, einem der für das 18. Jh. noch fast typischen Universalgelehrten, der sich u.a. mit Geologie und Mineralogie, Kosmologie, Botanik und innerhalb der Mathematik vor allem mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihren statistischen Anwendungen beschäftigte. Die historische Bedeutung des Nadelproblems (siehe Aufgabe 7.9.5) besteht darin, daß erstmals eine Frage nach der Wahrscheinlichkeit in einem Bereich von sogar überabzählbar vielen möglichen Ereignissen gestellt wurde, womit an die Stelle der klassischen kombinatorischen Abzählung aller möglichen und aller günstigen Fälle die zwangsläufig geometrische Frage nach Maßzahlen für die betreffenden Ereignismengen trat. Beim Nadelproblem soll die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden, daß eine Nadel gegebener Länge l beim zufälligen Wurf auf eine mit äquidistanten parallelen Linien (Abstand $d > l$) versehene waagerechte Ebene eine dieser Linien schneidet. Buffon trug es schon 1733 in der Pariser Akademie vor und publizierte es 1777 im Rahmen seiner 36-bändigen allgemeinen Naturgeschichte (Eine deutsche Übersetzung des Originaltextes in [Schneider 1989]). Angeregt war es wahrscheinlich durch ein altes französisches Glücksspiel, bei dem es darum geht, eine Münze oder einen anderen flachen Gegenstand so auf einen Dielenfußboden zu werfen, daß eine Dielenritze getroffen wird. P. S. Laplace machte 1812 darauf aufmerksam, daß man, da in Buffons Ergebnis die Zahl π eingeht, π auf diesem Wege näherungsweise experimentell bestimmen kann, indem man die Wahrscheinlichkeit durch die relative Häufigkeit ersetzt, die sich bei einer hinreichend großen Zahl von Nadelwürfen einstellt. Dies sollte sich im Laufe des 19. Jhs. noch als bedeutungsvoll erweisen, weil sich zeigte, daß Maße im Raum aller Geraden oder Strecken anscheinend auf verschiedene Weise definiert werden können. Die gute Übereinstimmung Buffonscher Experimente mit den auf anderem Wege ermittelten Näherungswerten für π liefert also vor allem ein Argument für die Vernünftigkeit des in diesem Fall gewählten Maßes.

1841 löste Cauchy das Problem für den beim genannten Spiel vorkommenden allgemeineren Fall, daß statt der in einer Richtung unendlich dünnen Nadel eine konvexe Scheibe beliebiger gegebener Form geworfen wird. Dabei entdeckte er als erster, daß das Maß der Menge aller Geraden m , die eine ebene konve-

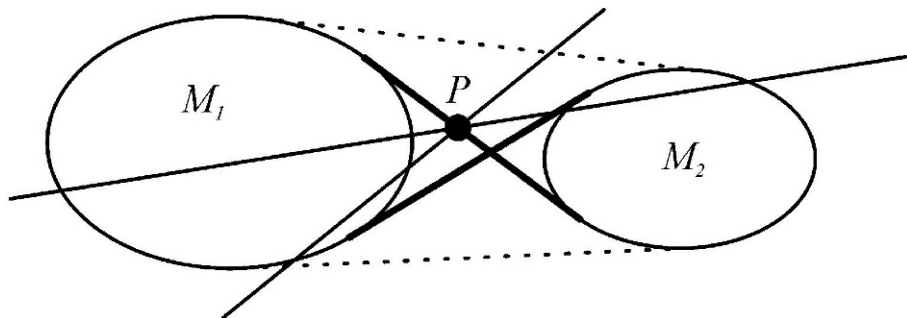


Abb. 7.9.4 Croftons Seilliniensatz

Genau die Geraden durch einen Punkt P des dick ausgezeichneten Seilstückes um M_1, M_2 , die nicht durch eines der punktierten Seilstücke laufen, schneiden M_1 und M_2 . Ist also die Länge einer Kurve das Maß für die Menge der sie schneidenden Geraden, so folgt Croftons Satz.

xe Menge schneiden, durch den Umfang dieser Menge gegeben wird. Auch J. Steiner und mehrere britische Mathematiker beschäftigten sich seit der Mitte des 19. Jhs. mit Verallgemeinerungen solcher geometrischer Inhaltsmessung. Der Brite M. W. Crofton folgte aus Cauchys Resultat 1867 seinen „Seilliniensatz“, wonach das Maß der Menge aller Geraden, die zwei getrennt liegende konvexe ebene Figuren M_1, M_2 treffen, gleich der Differenz zwischen der Länge der überkreuzten, beide Figuren umspannenden Kurve und dem Umfang der gemeinsamen konvexen Hülle ist (Abb. 7.9.4), und J. J. Sylvester verallgemeinerte diesen Satz 1890 auf mehr als zwei konvexe Figuren. Inzwischen waren auch im deutschsprachigen Raum erste Arbeiten und 1884 ein Buch von E. Czuber über die „geometrischen Wahrscheinlichkeiten“ erschienen, aber W. Blaschke wird 1935 für dieses neue und zunehmend wichtige Gebiet, zu dem er selbst zahlreiche Beiträge leistet, den Namen Integralgeometrie prägen [Blaschke 1936/37].

1888 schockierte J. Bertrand die mit derartigen Fragen beschäftigten Mathematiker durch ein „Paradoxon“ [deutsche Übersetzung des Originaltextes in [Schneider 1989]): Berechnet werden soll die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zufällige Sehne eines Kreises länger ist als die Seite des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks. (Man kann auch nach dem Maß der Menge dieser Sehnen bzw. der durch ihre Verlängerung entstehenden Geraden im Verhältnis zum Maß aller Geraden, die den Kreis schneiden, fragen.) Maßbestimmungen für geometrische Objekte beruhen immer darauf, daß man diese Objekte durch eine angemessene Anzahl k von unabhängigen Parametern beschreibt und den Inhalt derjenigen Mengen im R^k mißt, die dabei den ursprünglichen Objektmengen entsprechen. Bertrand griff aus der Vielzahl der Möglichkei-

ten, die Geraden der Ebene durch zwei reelle Parameter zu bestimmen, drei heraus und zeigte, daß man dann zu drei verschiedenen Antworten auf die gestellte Frage kommt (siehe Aufgabe 7.9.6). In diesem Lichte liefert also der Vorschlag von Laplace eine Möglichkeit, das im Fall der Buffonschen Aufgabe gewählte Maß zu rechtfertigen. Eine allgemeine theoretische Begründung für die Wahl der jeweils angemessenen Parametrisierung der Objekte gaben 1896 unabhängig voneinander E. Cartan und H. Poincaré: Das gewählte Maß muß invariant gegenüber Verlagerungen der betreffenden Menge, d.h. bei Koordinatentransformationen sein, die Bewegungen des Grundraumes entsprechen.

Wesentliche Inhalte der Geometrie im 19. Jahrhundert

Weiterentwicklung der darstellenden Geometrie: Mehrtafelverfahren, Zentralperspektive, Axonometrie, Photogrammetrie, Reliefperspektive, Beleuchtungsgeometrie (G. Monge und seine Schüler)

Projektive Geometrie: Invarianz des Doppelverhältnisses (M. Chasles), unendlich ferne Punkte, Geraden, Ebenen (J.V. Poncelet, J. Gergonne), Dualitätsprinzip (J. Plücker), homogene Koordinaten und baryzentrischer Kalkül (A.F. Möbius), „Geometrie der Lage“, Bündel, Büschel, projektive Koordinaten (v. Staudt)

Theorie der geometrischen Konstruktionen: „Disquisitiones arithmeticae“ (C.F. Gauß 1801): allg. Kreisteilungslehre, algebraische Methoden zum Beweis der Unmöglichkeit der Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal

Differentialgeometrie: Krümmung und Torsion von Raumkurven (G. Monge), Theorie der Raumkurven (Frenet, Serret, Bonnet, Bertrand), Theorie gekrümmter Flächen im Raum (Anfänge bei Euler; Meusnier, Monge, Lagrange; Indikatrix von Dupin), Begründung der „inneren Geometrie“ (C.F. Gauß), Räume konstanter Krümmung sind homogen und isotrop (Riemann), Ausbau des Kalküls (Lipschitz, Christoffel, Weingarten, Betti, Dini, Bianchi, Codazzi, Mainardi, Beltrami, Casorati)

Nichteuklidische Geometrie: Nachweis der Existenz „nichteuclidischer“ Geometrien bei Verneinung des euklidischen Parallelpostulats — Ende eines Jahrtausende alten Streites (W.v. Bolyai, N.J. Lobatschewski, B. Riemann), Modelle nichteuclidischer (hyperbolischer) Geometrie (F. Klein, H. Poincaré, E. Beltrami)

Vektorbegriff und n -dimensionale Geometrie: Magnetische und elektrische „Vektorfelder“, Rotation und Divergenz (Oersted, Gauß, Weber), Rechnen mit komplexen Zahlen als Vektoren (Weber, Argand), Quaternionen (Hamilton), „Ausdehnungslehre“ (H.G. Graßmann: n -Tupel von Zahlen als Koordinaten eines Punktes, Einheiten, Basis, äußeres Produkt, lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren, Invarianz der Dimension, Multivektoren), Determinanten als multilineare und alternierende Funktionen von Zeilen- bzw. Spaltenvektoren, später als orientiertes Volumen des n -dimensionalen Parallelkörpers (Cauchy), Ungleichung von Cauchy / Schwarz / Bunjakowski, „Analytic Geometrie in n Dimensions“ (A. Cayley 1843), n -dimensionaler Simplex (Clifford), Polyeder, Konvexität, Regularität in n -dimensionalen Räumen, reguläre Polytope (L. Schläfli)

Transformationsgruppen: Gruppen von Bewegungen (Kongruenzabbildungen), projektive Abbildungen, Möbiustransformationen u.a. (Chasles, Poincaré, Carnot, Möbius), Matrizenkalkül (A. Cayley, J.J. Sylvester), Erlanger Programm (F. Klein), Symmetriegruppen und Kristallographie (Haüy, Hessel)

Anfänge der Topologie: Mengentheoretische Topologie, topologische Abbildungen, Jordanscher Kurvensatz (Cantor, Dedekind, Jordan), Kombinatorische Topologie, Graphentheorie, Polyeder, Vierfarbenproblem, einseitige Flächen, Homologiebegriff (Gauß, Listing, Möbius, Jordan, Riemann, Poincaré)

Varia: Fermatsches Problem für n Punkte, Grebe-Lemoinescher Punkt, Zerlegungsgleichheit, Sternpolyeder, geometrische Wahrscheinlichkeit

Grundlagen und Aufbau der Geometrie: Aufbruch zu neuen Sichtweisen (M. Pasch, G. Peano, H. Wiener, F. Klein), „Grundlagen der Geometrie“ (D. Hilbert 1899)

7.10 Aufgaben zu 7

Aufgabe 7.1.1: Leitkreis von Kegelschnitten nach Monge

*

Man beweise: Gleitet der Scheitel eines rechten Winkels längs eines Kreises k und sein einer Schenkel dabei ständig durch einen festen Punkt F , so durchläuft der andere Schenkel alle Tangenten eines gewissen Kegelschnittes K . Dabei ist K eine Ellipse, falls F innerhalb k liegt, bzw. eine Hyperbel, falls F außerhalb k liegt. Entartet der Kreis k zu einer Geraden g , so ist der erzeugte Kegelschnitt eine Parabel. (Letzteres war schon J. H. Lambert bekannt.) k heißt Leitkreis des erzeugten Kegelschnittes (Diese Bezeichnung wird jedoch gelegentlich auch für andere mit dem Kegelschnitt verbundene Kreise benutzt) bzw. Leitgerade. F ist immer einer seiner Brennpunkte.

Aufgabe 7.1.2: Beweis des Satzes von Pohlke nach [Salenius 1978]

*

Wir brauchen einen Hilfssatz, der auch von selbständigem Interesse ist und am besten rechnerisch bewiesen wird: Jedes Dreieck läßt sich durch senkrechte Parallelprojektion auf ein einem gegebenen Dreieck ähnliches Dreieck abbilden. (Äquivalente Formulierung: Durch ebene Schnitte eines gegebenen dreikantigen Prismas kann man jede beliebige Dreiecksform erzeugen.) Zum Beweis lege man das Dreieck $OA'B'$, auf welches senkrecht projiziert werden soll, wie in Fig. 7.10.1 a) gezeigt in die x - y -Ebene. Es ist dann völlig durch b' und die Koordinaten x, y von B beschrieben, wobei $a'^2 = x^2 + y^2$ gilt. Die gegebene Dreiecksform, die hierauf projiziert werden soll, sei durch den Winkel γ und das Verhältnis $a : b$ der anliegenden Seiten gegeben. Damit ein Dreieck OAB dieser Form wie in der Abbildung gezeigt in das Prisma über $OA'B'$ hineinpaßt, muß man die Parameter $k > 0$, s (z -Koordinate von A) und t (z -Koordinate von B) so bestimmen, daß gilt: (1) $k^2 a^2 = t^2 + a'^2$, (2) $k^2 b^2 = b'^2 + s^2$, (3) das innere Produkt der Vektoren OA, OB muß einerseits $k^2 ab \cos \gamma$ sein, ergibt andererseits mittels der Koordinaten dieser Vektoren $xb + st$, d.h. $xb + st = k^2 ab \cos \gamma$. Man zeige, daß dieses Gleichungssystem unter den gegebenen Voraussetzungen über b', a, b, γ, x, y immer lösbar ist.

Nun seien O, A, B, C nicht kollineare Punkte einer Ebene (Fig. b). Die Beweisskizze für den Pohlkeschen Satz geben wir nur für den allgemeinen Fall, daß die Geraden OA und BC sich in einem Punkt D schneiden. Die somit verbleibenden Ausnahmefälle sind sämtlich trivial und seien dem Leser überlassen. Ferner sei O', E_1, E_2, E_3 ein kartesisches Dreibein (Fig. c). Wir bestimmen den Punkt D' auf der Geraden $O'E_1$ so, daß das Teilverhältnis der Punkte O', E_1, D' dasselbe ist wie das der Punkte O, A, D . Dann bestimmen wir den Punkt C' auf der Geraden $D'E_2$ so, daß das Teilverhältnis der Punkte D', E_2, C' dasselbe ist wie das der Punkte D, B, C . Die Projektionsrichtung $C'E_3$ bestimmt zusammen mit der Grundfläche $O'D'C'$ ein (im allgemeinen schiefes) dreikantiges Prisma, in das sich nach dem Hilfssatz ein zu ODC ähnliches Dreieck $O^*D^*C^*$ einpassen läßt. Bei dieser Ähnlichkeit entsprechen sich A und A^* , B und B^* . Bei der genannten Projektionsrichtung wird nun O' auf O^* , D' auf D^* und E_3 auf C^* abgebildet. Da dabei Teilverhältnisse invariant bleiben, geht auch E_1 in A^* und E_2 in B^* über.

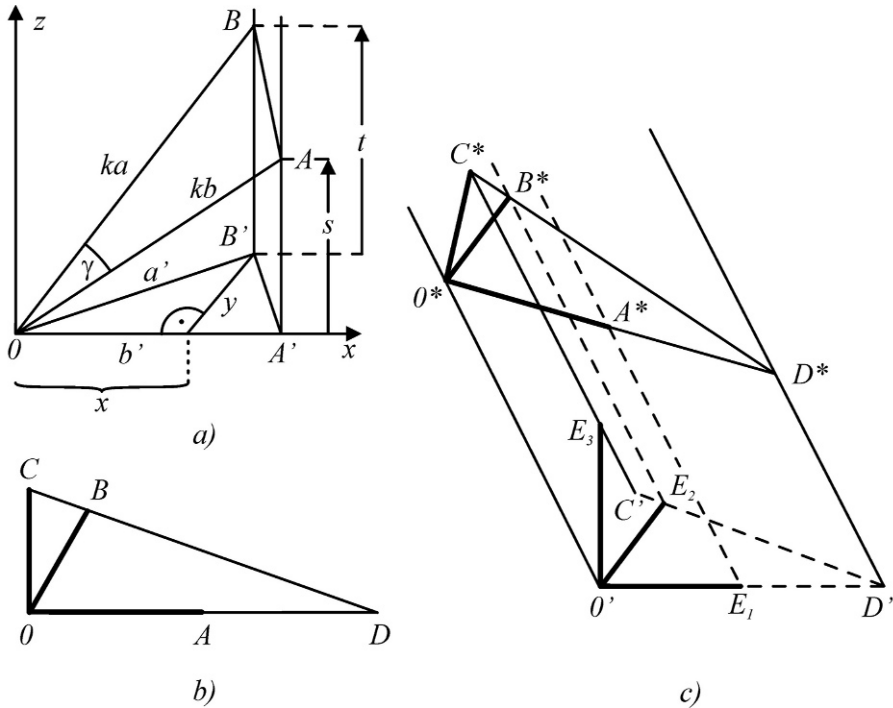


Abb. 7.10.1 Figuren zu Aufg. 7.1.2

Aufgabe 7.1.3: Analogon des Satzes von Pohlke für Zentralperspektive

Sind in einer Bildebene drei nicht kollineare Punkte F_1, F_2, F_3 als Fluchtpunkte dreier paarweise zueinander senkrechter Richtungen vorgegeben, so ist für je zwei dieser Punkte ein geometrischer Ort für die Lage des zugehörigen Augpunktes A durch die „Thaleshalbkugel“ über der Strecke zwischen diesen beiden Punkten gegeben. Falls es einen Punkt A gibt, der diese drei Bedingungen erfüllt, liegt er also im Schnitt dieser drei Halbkugeln. Da bei senkrechter Projektion auf die Bildebene der Schnitt von je zweien dieser Halbkugeln sich als gerade Verbindung der Schnittpunkte der Basiskreise dieser beiden Halbkugeln projiziert, gehen diese drei Strecken durch den Hauptpunkt als Projektion des Augpunktes. Man überlege in diesem Zusammenhang:

- Was sind diese drei Strecken in bezug auf das Dreieck der drei Fluchtpunkte?
- Welcher Satz der ebenen Dreiecksgeometrie wird daher aus der Projektion des räumlichen Sachverhalts gewonnen? (Übertragungs-Prinzip)
- Welche Bedingung muß das Dreieck der drei Fluchtpunkte folglich erfüllen, damit es zu ihnen wirklich einen Augpunkt gibt, von dem sie als Fluchtpunkte dreier paarweise senkrechter Richtungen erscheinen?

Aufgabe 7.1.4: Geradföhrungen von Watt und Peaucellier

*

- a) Man analysiere, welche Kurve von den Fahrstiften der in Abb. 7.1.3 abgebildeten Mechanismen von Watt bzw. Peaucellier erzeugt wird und beweise dabei, daß Peaucelliens Mechanismus das Problem exakt löst.
- b) Wie muß man die Teile von Watts Mechanismus bemessen, damit ein möglichst langes annähernd geradliniges Kurvenstück erzeugt wird?

Aufgabe 7.2.1: Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises (Monge, Carnot)

Die Potenz $\text{Pot}(p, k)$ eines Punktes P bezüglich eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ist definiert als $PM^2 - r^2$, folglich größer, gleich oder kleiner Null je nachdem, ob P außerhalb, auf dem Kreis oder innerhalb desselben liegt. Für zwei nicht konzentrische Kreise k_1, k_2 ist die Menge $\text{Pot}(k_1, k_2)$ aller Punkte P , die bezüglich beider Kreise die gleiche Potenz haben, eine auf der Verbindung der Mittelpunkte beider Kreise senkrechte Gerade. Das kann man elementar wie folgt einsehen: Zunächst gibt es offenbar genau einen Punkt P_0 auf der Strecke s zwischen den beiden Mittelpunkten, der zu $\text{Pot}(k_1, k_2)$ gehört, da die Potenz bezüglich beider Kreise jeweils monoton und stetig mit dem Abstand vom Mittelpunkt wächst. Jeder Punkt auf der in P_0 auf s errichteten Senkrechten gehört auch zu $\text{Pot}(k_1, k_2)$. Gehört umgekehrt P zu $\text{Pot}(k_1, k_2)$, so auch jeder Punkt des von P auf s gefällten Lotes.

Schneiden sich k_1 und k_2 , so ist die Verbindung der Schnittpunkte die Potenzgerade beider Kreise, da beide Schnittpunkte bezüglich beider Kreise die Potenz Null haben. Schneiden sie sich nicht, so lege man einen Hilfskreis k_0 , der beide schneidet, bestimme $\text{Pot}(k_0, k_1)$ und $\text{Pot}(k_0, k_2)$ und deren Schnittpunkt — er ist der Potenzpunkt der drei Kreise, hat bezüglich aller drei die gleiche Potenz — und fälle von ihm das Lot auf die Verbindung s .

- a) Man beweise, daß für jede Gerade durch P , die k schneidet oder berührt, $\text{Pot}(P, k)$ gleich dem Produkt der gerichteten (d.h. vorzeichenbehafteten) Entfernungen von P zu den beiden Schnittpunkten mit k (bzw. gleich dem Quadrat des Abstandes zum Tangentenberührungspunkt), dieses demnach von der Wahl der Sehne unabhängig ist (Euklid, Data).
- b) Subtrahiert man die normierten Gleichungen zweier nicht konzentrischer Kreise, so erhält man eine Geradengleichung. Man zeige, daß diese immer die Gleichung der Potenzgeraden beider Kreise ist, und leite alle oben beschriebenen Eigenschaften dieser Geraden aus deren Gleichung ab.
- c) Der Begriff der Potenz ermöglicht elegante Lösungen vieler Konstruktionsaufgaben. Z.B. verlangt einer der zehn Fälle des Apollonischen Berührungsproblems, zu zwei Geraden und einem auf beiden nicht liegenden Punkt P alle Kreise durch P zu konstruieren, die beide Geraden berühren. Man löse diese Konstruktionsaufgabe mit Hilfe der Potenz.

Aufgabe 7.2.2: Rein lineare projektive Konstruktionen

- a) Eine zu der in Abb. 7.10.1c gezeigten alternative Methode, Strecken bezüglich eines gegebenen unendlich fernen Punktes im projektiven Sinne zu halbieren, ergibt sich daraus, daß sich die Diagonalen eines Parallelogramms gegenseitig halbieren. Man gestalte dies zu einer Lösung aus.
- b) Allgemein läßt sich jede Konstruktion, die in der euklidischen Ebene allein durch lineares Verbinden, Schneiden und Ziehen von Parallelen ausführbar ist, in eine allein durch Schneiden und Verbinden ausführbare Konstruktion „übersetzen“, indem man die unendlich ferne Gerade durch eine im Endlichen gelegene Gerade ersetzt. Das kann man auch so interpretieren, daß man ersatzweise in einem zentralperspektiven Bild der Konstruktionsebene arbeitet. (In diesem Sinne sind die rein linearen Konstruktionen schon im letzten Kapitel von Lamberts „Freyer Perspektive“ behandelt.) Man mache sich die obigen Aussagen anhand konkreter Beispiele klar. *

Aufgabe 7.2.3: Homogene Koordinaten *

Ein sehr anschaulicher Zugang zu den ebenen homogenen Koordinaten ergibt sich, wenn man zunächst die eindeutige Abbildung zwischen einer projektiv abgeschlossenen (d.h. um unendlich ferne Punkte und eine unendlich ferne Gerade erweiterten) Ebene e des euklidischen Raumes und dem Bündel aller Geraden durch den nicht auf e liegenden Koordinatenursprung O eines kartesischen (oder allgemeiner affinen) Koordinatensystems im Raum betrachtet. Jedem $P \in e$ entspricht die Gerade OP , jeder Geraden g durch O ihr Schnittpunkt P mit e . Die zu e parallelen Geraden durch O entsprechen den unendlich fernen Punkten von e . (In gewisser Weise ist dieses Geradenbündel ein „besseres“ Modell der projektiven Ebene, weil hier von vornherein die unendlich fernen Objekte nicht besonders ausgezeichnet sind. Erst durch die Wahl der Ebene e werden die zu e parallelen Objekte als uneigentlich ausgesondert.) Punkte von e sind nun kollinear, wenn die ihnen entsprechenden Geraden des Bündels in einer Ebene liegen, d.h. den Geraden der projektiven Ebene e entsprechen die Ebenen durch O . Bezüglich des gewählten räumlichen Koordinatensystems entsprechen diese Ebenen umkehrbar eindeutig den Gleichungen der Form $ax + by + cz = 0$, wobei a, b, c nicht alle gleichzeitig 0 und nur bis auf einen gemeinsamen von Null verschiedenen Faktor bestimmt sind. Andererseits bestimmt jeder von O verschiedene Punkt, dessen Koordinaten x, y, z also nicht alle gleichzeitig 0 sind, eine Gerade des Bündels und damit auch einen Punkt von e . Ein Punkt mit den Koordinaten ka, kb, kc bestimmt jedoch die gleiche Gerade und den gleichen Punkt auf e . Wir wollen nun a, b, c als (bis auf einen Faktor bestimmte) Koordinaten der Schnittgeraden g in e und x, y, z als (bis auf einen Faktor bestimmte) Koordinaten des betreffenden Punktes P in e auffassen. $P \in e$ ist genau dann erfüllt, wenn $ax + by + cz = 0$. (Hier sieht man das Dualitätsprinzip in der von Plücker begründeten Form: Der Gleichung ist nicht anzusehen, ob a, b, c die Geraden- und x, y, z die Punktkoordinaten sein sollen oder umgekehrt.)

Man mache sich klar, wie die Wahl von drei nicht kollinearen Punkten in e gleichbedeutend damit ist, im umgebenden Raum drei von O ausgehende Achsenrichtungen

eines Koordinatensystems zu fixieren, und wie der vierte Punkt in allgemeiner Lage in e dazu dient, im Raum einen Punkt mit den Koordinaten 1,1,1 zu fixieren, wodurch (wie?) auf den drei Achsen die jeweilige Einheit festgelegt wird.

Wenn wir in e die Gerade mit der Gleichung $cz = 0$ als uneigentlich auszeichnen bzw. unser räumliches Koordinatensystem so angelegt haben, daß gerade diese Gerade „wirklich“ die uneigentliche Gerade von e ist, so sind die auf ihr liegenden uneigentlichen Punkte durch $z = 0$ charakterisiert, die eigentlichen folglich durch $z \neq 0$. Für diese eigentlichen Punkte kann man zu neuen, „inhomogenen“ x', y' durch $x' = x : z, y' = y : z$ übergehen. Aus den homogenen Geradengleichungen $ax + by + cz = 0$ werden dann die bekannten Gleichungen mit zwei Variablen und Absolutglied.

Aufgabe 7.2.4: Koordinatisierung der Geraden im Raum

*

Eine Koordinatisierung des Raumes aller Geraden des R^3 auf elementare (nichtprojektive) Weise erhält man auch, indem man nach Einführung eines kartesischen Koordinatensystems zunächst jeder Geraden g den Fußpunkt $F(g)$ des vom Koordinatenursprung O auf g gefällten Lotes zuordnet. Hält man umgekehrt einen beliebigen Punkt P (der durch drei Koordinaten beschrieben wird) fest, so können diejenigen Geraden g durch P , für die $P = F(g)$ ist, nur noch in der zu der Geraden OP senkrechten Ebene durch P variieren und sind folglich durch einen weiteren Parameter beschreibbar. So erhält man auf einem ganz anderen Wege die Vierdimensionalität dieser Mannigfaltigkeit. Man überlege nun, ob und gegebenenfalls wie man durch Homogenisierung der hierbei benutzten Koordinaten die Geraden der projektiven Abschließung des Raumes mit einbeziehen kann. Man vergleiche diesen Weg mit dem von Plücker eingeschlagenen.

Aufgabe 7.2.5: Involutionen einer projektiven Geraden und Punkte mit komplexen Koordinaten

Eine projektive Abbildung einer Geraden auf sich wird bezüglich der gewöhnlichen (inhomogenen) Koordinate x durch eine gebrochen lineare Transformation

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (a, c \text{ nicht gleichzeitig } 0)$$

beschrieben, die beim Übergang zu homogenen Koordinaten x_0, x_1 in das lineare Gleichungssystem

$$y_0 = cx_1 + dx_0, \quad y_1 = ax_1 + bx_0$$

für die Koordinaten y_0, y_1 des Bildpunktes übergeht. Man stelle fest, wie sich die charakterisierende Eigenschaft $f(f(P)) = P$ einer Involution in den Koeffizienten a, b, c, d ausdrückt, und zeige dann, daß die Bedingung $f(P) = P$ unter dieser Einschränkung immer auf eine quadratische Gleichung führt, wobei im Falle reeller Koeffizienten a, b, c, d die beiden Fixpunkte entweder reell sind und die Involution dann als eindimensionale Transformation mittels reziproker Radien aufgefaßt werden kann oder die beiden Fixpunkte zueinander konjugiert komplexe Koordinaten haben. Folgerung: Punkte mit komplexen Koordinaten sind die „idealen“ Fixpunkte von Involutionen ohne reelle Fixpunkte.

Aufgabe 7.3.1: „Napoleons Problem“ (nach Mascheroni) *

Eine der ersten Aufgaben aus Mascheroni's „Geometria del compasso“ verlangt, mit dem Zirkel allein eine Kreisperipherie in vier gleiche Teile (bzw. gleichwertig: die Ecken eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks) zu konstruieren. (Lösungshinweis: Bei gegebenem Radius r ist auf dem Umkreis eine Strecke der Länge $r\sqrt{2}$ abzutragen, die man nach Pythagoras findet, wenn man zuvor eine Strecke der Länge $r\sqrt{3}$ konstruiert hat.) Man gestalte dies zu einer möglichst „geometrographischen“ Lösung.

Aufgabe 7.3.2: Konstruktionen à la Georg Mohr mit Lineal und Zirkel fester Spannweite (Kreisschablone)

Wie findet man mit den gegebenen Hilfsmitteln (Lösungshinweise in Klammern):

- a) den Mittelpunkt einer Strecke (ist gleichzeitig der Mittelpunkt jeder dazu konzentrischen kürzeren Strecke),
- b) ein gleichseitiges Dreieck auf gegebener Basis. (Offenbar braucht man nur Winkel von 60 Grad an den Endpunkten.),
- c) das Lot von gegebenem Punkt auf gegebene Gerade g . (Ist gleichzeitig das Lot auf alle zu g parallelen Geraden.),
- d) die Parallele durch gegebenen Punkt zu gegebener Gerade,
- e) das Abtragen einer beliebigen Strecke auf einem beliebigen Strahl? *

Zu e) wäre schon ein bißchen Theorie hilfreich. Die gibt nicht Mohr, aber z.B. Jacob Steiner 1833: Antragen einer Strecke kann zusammengesetzt werden aus Parallelverschiebung und Drehen in die gewünschte Richtung. Ersteres ist eine rein lineare Konstruktion. Man braucht also den Zirkel höchstens zum Konstruieren von Parallelen (siehe d). Letzteres kann durch Homothetie (die auch rein linear ist) auf das Drehen einer Strecke zurückgeführt werden, deren Länge dem zur Verfügung stehenden Kreis bzw. Zirkel entspricht. Da dieser Drehprozeß wegen der Ausführbarkeit von Parallelverschiebungen an einem beliebigen Ort durchgeführt werden kann, braucht man gar nicht unbedingt eine Kreisschablone (obwohl sie das Verfahren oft abkürzt). Im Prinzip reicht *ein einziger* bereits gezeichneter Kreis mit Mittelpunkt — für die vorliegende, und wie Steiner zeigte, auch für jede andere mit Zirkel und Lineal lösbare Aufgabe. Wer nun hinreichend neugierig geworden ist, sei auf [Steiner 1833] oder, falls das nicht erreichbar, auf [Schreiber 1975] verwiesen.

Aufgabe 7.3.3: Unmöglichkeit der Würfelverdoppelung mit Zirkel und Lineal

Man zeige durch Fallunterscheidung, daß $x^3 - 2$ nicht als $(ax^2 + b)(cx + d)$ mit ganzen Zahlen a, b, c, d geschrieben werden kann. Nach den allgemeinen Sätzen von Gauß folgt hieraus, daß die Würfelverdopplung mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist.

- * **Aufgabe 7.3.4:** Nichtkonstruierbarkeit des Sehnenviersecks aus seinen Seiten
- Ergänzend zur Konstruktion des Sehnenvierecks aus seinen vier Seiten nach Vieta zeige man, daß ein Sehnenvierseck im allgemeinen nicht aus seinen Seiten mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Wie immer in solchen Fällen (vgl. die Ausführungen zur Winkeldreiteilung) genügt ein Gegenbeispiel. Dafür empfiehlt sich der Fall $a_1 = a_3 = 3$ (Längeneinheiten), $a_2 = a_4 = 4$, $a_5 = 5$ und die Benutzung des Satzes von

Ptolemaios, wonach im Sehnenviereck das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der Gegenseiten ist. Wer mit diesen Hinweisen nicht die Lösung findet, sei auf [Schreiber 1993] verwiesen, wo auch die Existenz des gesuchten Sehnenfünfecks bewiesen wird.

Aufgabe 7.3.5: Äquivalenz von Konstruktionsaufgaben im Raum *

Man zeige, daß folgende drei Charakterisierungen der im Raum lösbaren Konstruktionsaufgaben äquivalent sind:

- a) Ein Punkt ist aus gegebenen Punkten konstruierbar genau dann, wenn in einer Hilfsebene bezüglich eines gegebenen räumlich-kartesischen Koordinatensystems seine drei Koordinaten mit Zirkel und Lineal aus den Koordinaten der gegebenen Punkte konstruierbar sind.
- b) Er ist aus den gegebenen Punkten konstruierbar genau dann, wenn bezüglich einer gegebenen Lage der Projektionsebenen sein Grund-Aufriß-Paar aus den Grund-Aufriß-Paaren der gegebenen Punkte konstruierbar, d.h. wenn die ebene Bildaufgabe lösbar ist, die sich aus der räumlichen Aufgabe durch das Mongesche Zweitafelverfahren ergibt.
- c) Er ist genau dann konstruierbar, wenn man ihn aus den gegebenen Punkten durch Verwendung eines Planeals und eines Kugelzirkels (zusätzlich zu Lineal und Zirkel) erhalten kann. (Das Planeal konstruiert zu je drei nicht kollinearen Punkten die Verbindungsebene, der Kugelzirkel konstruiert die Kugeloberfläche zu gegebenem Mittelpunkt und Radius. Dazu gehören natürlich wieder die Operationen, die die entsprechenden Schnittgebilde im Raum liefern.)

Aufgabe 7.3.6: Torricelli-Punkt von 5 Punkten der Ebene bzw. 4 Punkten im Raum *

Die Frage, ob der Torricelli-Punkt von mehr als 4 Punkten der Ebene bzw. mehr als 3 Punkten im Raum mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, war bis vor kurzem offen, obwohl schon Gauß 1836 in einem Brief an seinen Freund Schumacher die Hypothese geäußert hatte, daß dies wohl auf „höhere Gleichungen“ führen werde [Gauß' Werke. Bd. X,1, S. 465]. Soweit bekannt, ist dies erstmals in [Baja] 1988 bestätigt worden, wenn auch auf eine sehr umständliche Weise. Kürzlich wurden von S. Mehlhos leicht nachzurechnende Gegenbeispiele für die Ebene und den Raum gefunden:

- a) Bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems nehme man die fünf Punkte mit den Koordinaten $(0, \pm 1)$, $(0, \pm \sqrt{2})$, $(2, 0)$. Laut Aufgabe 6.2.3 muß der Torricelli-Punkt P_0 aus Symmetriegründen auf der x -Achse liegen. Es genügt also, seine x -Koordinate x_0 oder den Winkel β (Abb. 7.10.2) bzw. $y = \cos \beta$ zu finden bzw. nachzuweisen, daß eine dieser Größen nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Definiert man den Hilfswinkel α wie in der Abb. und benutzt, daß aus der notwendigen Bedingung (Vektorsumme der von P_0 nach $P_1, \dots, P_5$ gezogenen Einheitsvektoren ist der Nullvektor) folgt: $2 \cos \alpha + 2 \cos \beta = -1$, so erhält man für die gesuchte Größe y die Gleichung

$$4y^4 + 4y^3 - 3y^2 + 4y + 1 = 0,$$

deren Irreduzibilität sich entweder direkt oder durch Betrachtung der zugehörigen kubischen Resolvente nachweisen läßt.

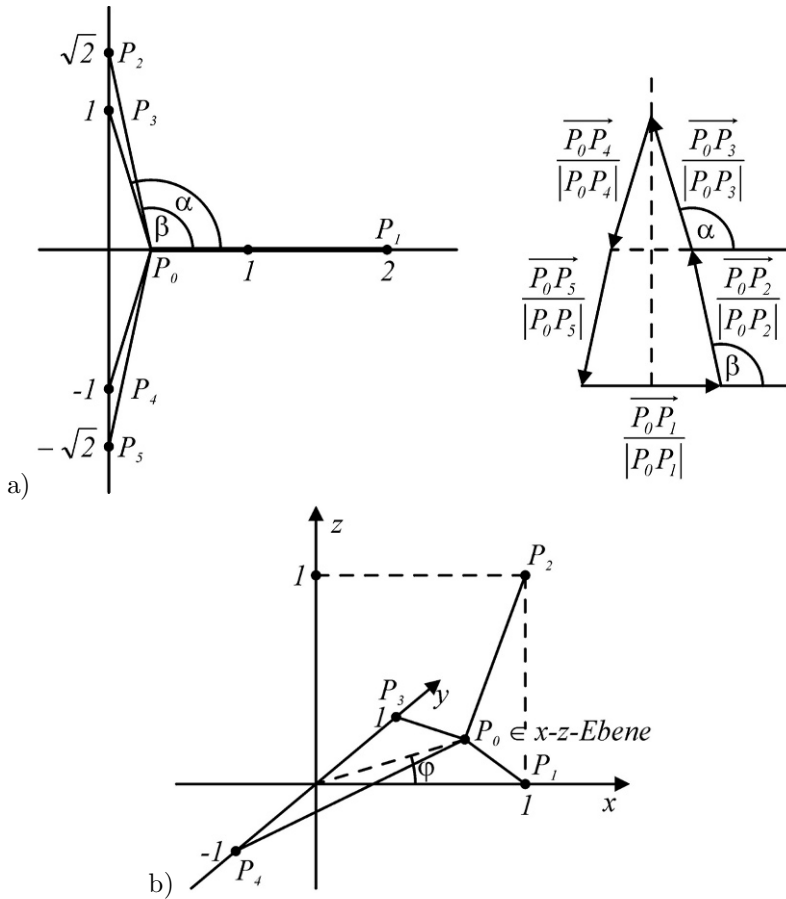


Abb. 7.10.2 Figur zu Aufg. 7.3.6

- b) Bezüglich eines räumlich kartesischen Koordinatensystems wählen wir die vier Punkte $(0, -1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ und $(1, 0, 1)$. Dann liegt der Torricelli-Punkt P_0 aus Symmetriegründen in der x - z -Ebene. Bezeichnet x den Cosinus des Winkels zwischen x -Achse und dem Strahl vom Koordinatenursprung nach P_0 , so bekommt man für x die Gleichung

$$(*) \quad 8x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = (x - 1)(8x^3 + 4x^2 - 3x - 1) = 0,$$

wobei $x = 1$ keine Lösung der Aufgabe liefert und das kubische Restpolynom wieder als irreduzibel nachgewiesen werden kann. Man führe dies durch und

überlege, wieso diese Aufgabe genau dann mit Zirkel und Lineal lösbar wäre, wenn man x mit diesen Instrumenten konstruieren könnte. (Um die Details dieser schönen Lösung zu würdigen, überlege sich der Leser z.B.: Setzt man $x = \sin \varphi$, so ändern sich zwar in der linken Seite der Gleichung nur einige Vorzeichen (welche ?), aber mit der Wirkung, daß sich dann von dem Polynom nicht mehr ein so einfacher Faktor abspalten läßt.)

Aufgabe 7.4.1: Traktrix und Gaußsche Krümmung der Pseudosphäre

Aus der in Abb. 7.4.1 dargestellten Erzeugung der Traktrix entnehme man Parameterdarstellungen für die Kurve und für die aus ihr durch Rotation um die Asymptote entstehende Fläche und verifiziere, daß die Gaußsche Krümmung negativ und konstant ist.

Aufgabe 7.5.1: Konstruktionen im Poincaré-Modell der ebenen hyperbolischen Geometrie

Man löse im Poincaré-Modell folgende Konstruktionsaufgaben mit (euklidischem) Zirkel und Lineal:

- a) geradlinige Verbindung zweier Punkte P_1, P_2 . (Dabei ist der Fall, daß die euklidische Verbindungsgerade auf a senkrecht steht, trivial.)
- b) Antragen einer Strecke an einen Punkt. (Man benutze, daß Spiegelungen im allgemeinen durch Transformation mittels reziproker Radien am betreffenden Kreis realisiert werden.)
- c) Konstruktion eines Kreises mit gegebenem Mittelpunkt und Radius (Man benutze die Lösung von b) als „Unterprogramm“!) *
- d) Man beweise unter Benutzung der Winkeltreue des Poincaré-Modells, daß die Dreiteilung eines beliebigen Winkels auch in der hyperbolischen Geometrie im allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar ist. *

(Lösungen in [Schreiber 1984], Kap. 2.6)

Aufgabe 7.9.1: Auflösung des Paradoxons von Schumacher

Der Astronom H. C. Schumacher schreibt 1836 an den befreundeten Gauß: „Mir ist neulich ein Paradox vorgekommen, das ich so frei bin Ihnen vorzulegen. Ich kann es noch nicht genügend erklären. Bekanntlich ist, wenn man bei einem Vierecke $ABCD$ einen Punkt sucht, von dem die Summe der an die Winkelpunkte (d.h. A, B, C, D) gezogenen Linien ein Minimum sey, der gesuchte Punkt der Durchschnittspunkt der Diagonalen E . Lässt man nun die Punkte A, B in den Linien DA, CB immer mehr hinaufsrücken, bis sie am Ende in F zusammenfallen (Abb. 7.10.3), so fällt auch E zugleich in F , das Viereck verwandelt sich in das Dreieck DFC , und man hätte den Punkt F als denjenigen, von dem die Summe der an die Winkelpunkte F, C, D des Dreiecks gezogenen Linien ein Minimum sey. Das ist aber bekanntlich [!] nur wahr, wenn der Winkel [bei] $F \geq 120$.“ Wie ist dieses „Paradoxon“ zu lösen? Wer es nicht herausfindet, lese die Antwort von Gauß in seinen Gesammelten Werken, Bd. X,1, S. 459f oder in [Schreiber 1986].

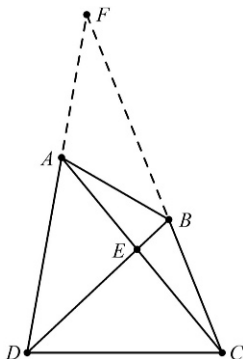


Abb. 7.10.3 Figur zu Aufg. 7.9.1

Aufgabe 7.9.2: Valenz von Steinerpunkten

- Man beweise, daß ein „Steinerpunkt“ S im euklidischen Fall (in der Ebene oder im Raum beliebiger höherer Dimension) stets die Valenz drei haben muß und daß die Strecken von S nach den drei mit ihm verbundenen Punkten paarweise den Winkel von 120° einschließen müssen.
- Wie kann man infolgedessen Steinerbäume zu vier Punkten konstruieren, die ein konvexes Viereck in der Ebene aufspannen?
- Man mache sich das Problem im Raum mittels Grund-Aufriß-Verfahren klar (vgl. Aufgabe 7.3.6b). Mit Zirkel und Lineal ist es dort, wie kürzlich von Mehlhos bewiesen wurde, im allgemeinen nicht lösbar. *

Aufgabe 7.9.3: Zum Grebe-Lemoineschen Punkt

Ist P ein beliebiger Punkt im Innern des Dreiecks ABC und sind d_a, d_b, d_c seine Abstände von a bzw. b bzw. c , so liefert die Zerlegung dieses Dreiecks in die Teildreiecke ABP, BCP, CAP für den Gesamtflächeninhalt F von ABC :

$$F = \frac{1}{2}(a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c).$$

Die Aufgabe, P so zu bestimmen, daß $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2$ unter dieser Nebenbedingung ein Minimum führt, liefert mittels Differentialrechnung die notwendige Bedingung

$$a : d_a = b : d_b = c : d_c. \quad (*)$$

- Man überprüfe dies und überlege sich, daß $(*)$ auch hinreichend ist, weil es einerseits im Dreieck ABC einen Punkt P geben muß, wo das Minimum der Funktion angenommen wird (warum?), und daß ein Punkt andererseits durch $(*)$ eindeutig bestimmt ist.
- Die Konstruktion des gesuchten Punktes K nach Grebe (1847) auf Grund von $(*)$ verläuft wie folgt: Man vergrößere das gegebene Dreieck ABC zu $A'B'C'$, indem man außerhalb des Dreiecks im Abstand c zur Seite c die Parallele $A'B'$,

im Abstand a zu a die Parallele $B'C'$ usw. zieht. Daß die Geraden AA' , BB' , CC' sich dann in einem Punkt K schneiden, folgt schon aus dem Satz von Desargues. Man beweise, daß K der gesuchte Minimalpunkt ist.

- c) Ein Symmedian eines Dreiecks entsteht, indem man eine Seitenhalbierende an der entsprechenden Winkelhalbierenden spiegelt. Man beweise zunächst, daß auch die drei Symmediane durch einen gemeinsamen Punkt gehen und dann, daß dieser Punkt die Bedingung (*) erfüllt. *

Aufgabe 7.9.4: Zerlegungsgleichheit inhaltsgleicher Rechtecke

Man zeige, daß je zwei inhaltsgleiche Rechtecke zerlegungsgleich sind. (Einen Beweis findet man z.B. in der Enzyklopädie der Elementarmath., Bd. V, S. 150.) Wieso macht dieser Beweis Gebrauch vom archimedischen Axiom?

Aufgabe 7.9.5: Buffons Nadelproblem

Der Abstand der parallelen Geraden sei d , die Länge der geworfenen Nadel $l < d$. Man charakterisiert ihre Lage durch den Abstand x ihres rechten Endpunktes von der links nächstgelegenen Geraden des gegebenen Linienrasters und durch den Winkel α ($-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$), den sie mit dem Lot auf diese Gerade bildet. Dann ist der Menge aller möglichen Lagen der Nadel in der x - α -Ebene ein Rechteck mit den Seiten d und π zugeordnet. Man bestimme die Teilmenge, die den „günstigen“ Lagen der Nadel entspricht, und verifiziere, daß das Verhältnis der beiden Inhalte $2l : d\pi$ ist.

Aufgabe 7.9.6: Bertrands Paradoxon

- a) Bei Variante 1 wird die Lage einer beliebigen Geraden g durch ihren Abstand r vom Mittelpunkt O des Kreises und durch den Winkel α zwischen dem von O auf g gefällten Lot und einer willkürlich ausgezeichneten Anfangsrichtung charakterisiert. Bei Variante 2 wird sie durch die Winkel α, β zwischen dieser Anfangsrichtung und den Verbindungen von O zu den Schnittpunkten von g mit dem Kreis beschrieben. Bei Variante 3 wird sie durch die kartesischen Koordinaten x, y des Fußpunktes des von O auf g gefällten Lotes beschrieben. Man prüfe nach, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Kreis aus der Geraden eine Sehne ausschneidet, die länger als die Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist, bei der ersten Variante $1/2$, bei der zweiten $1/3$ und bei der dritten $1/4$ betragen würde. Auch in diesem Fall kann man natürlich durch ein statistisches Experiment herausfinden, welcher der drei theoretischen Ansätze der richtige ist. (Dabei darf man natürlich nur diejenigen Würfe der Geraden auf den Kreis bzw. des Kreises auf die Gerade werten, bei denen überhaupt ein Schneiden stattfindet.) Man kann aber auch mit Hilfe des Cartan-Poincaréschen Kriteriums die richtige Variante begründen:

- * b) Bei Variante 1 wird die Menge aller Geraden der Ebene umkehrbar eindeutig auf die Menge aller Paare (r, α) mit $r \geq 0$ und $0 \leq \alpha < 2\pi$ abgebildet, die man sich zweckmäßig auf einem Zylindermantel vom Umfang 2π angeordnet denkt, der sich vom Boden $r = 0$ bis in unendliche Höhe erstreckt. Da das Maß einer Menge von Geraden nicht von ihrer Lage in der Ebene abhängen soll, ist nun

zu zeigen, daß allen²⁷ Kongruenzabbildungen der ursprünglichen Ebene (in der die betrachteten Geraden liegen) flächentreue Abbildungen des Zylindermantels auf sich entsprechen. Diese können jedoch nicht sämtlich Kongruenzabbildungen des Zylindermantels auf sich sein, da wegen seiner einseitigen Begrenztheit auf ihm keine Verschiebungen in Richtung der Mantellinien (α konstant) möglich sind, während Translationen in der ursprünglichen Ebene zwar r im allgemeinen ändern, aber die α -Koordinate von Geraden entweder fest lassen oder um 180 Grad ändern. Mittels des Cavalierischen Prinzips läßt sich aber leicht einsehen, daß die zu den Translationen gehörigen Abbildungen des Zylindermantels auf sich trotzdem flächentreu sind.

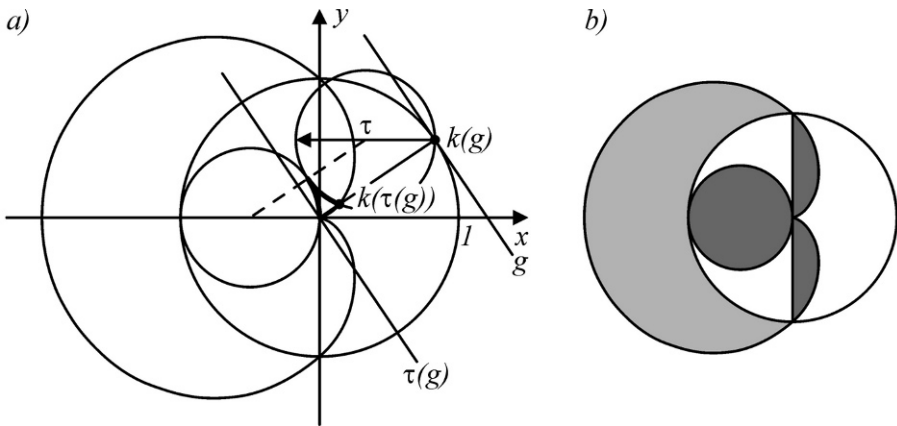


Abb. 7.10.4 Figuren zu Aufg. 7.9.6

- c) Um zu zeigen, daß die anderen von Bertrand vorgeschlagenen Varianten der Inhaltsmessung für Geradenmengen nicht bewegungsinvariant sind, genügt jeweils ein einziges Gegenbeispiel, d.h. eine Kongruenzabbildung und eine Menge M von Geraden, deren Koordinatenbild $K(M)$ bei dieser Abbildung in eine zu $K(M)$ nicht flächengleiche Menge übergeht. Im Fall von Variante 3 wird z.B. die Einheitskreisscheibe durch die Translation $\tau = (-1, 0)$ in die in der Abb. gezeigte Menge überführt und dabei ihre rechte Hälfte deutlich verkleinert, die linke dagegen vergrößert. Der durch $x = 0$ beschriebene senkrechte Durchmesser bleibt dabei punktweise fest. Man finde zunächst durch punktweise Konstruktion eine Hypothese über das Bild der linken und der rechten Hälfte des Einheitskreises.

- * d) Man zeige (möglichst durch elementargeometrische Betrachtungen, es geht auch

²⁷Um die Aufgabe zu erleichtern, benutze man, daß eine beliebige Kongruenzabbildung einer Ebene aus Translationen, aus Drehungen um den Koordinatenursprung und durch Spiegelung an einer einzigen beliebig wählbaren Geraden erzeugt werden kann. Man braucht also nur für diese speziellen Abbildungen nachzuweisen, daß ihnen auf dem Zylindermantel flächentreue Abbildungen entsprechen.

analytisch, wird aber viel komplizierter), daß die entstandene herzförmige Kurve die von der Einheitsstrecke und dem eingezeichneten Kreis

$$(x + 1/2)^2 + y^2 = 1/4 \quad (*)$$

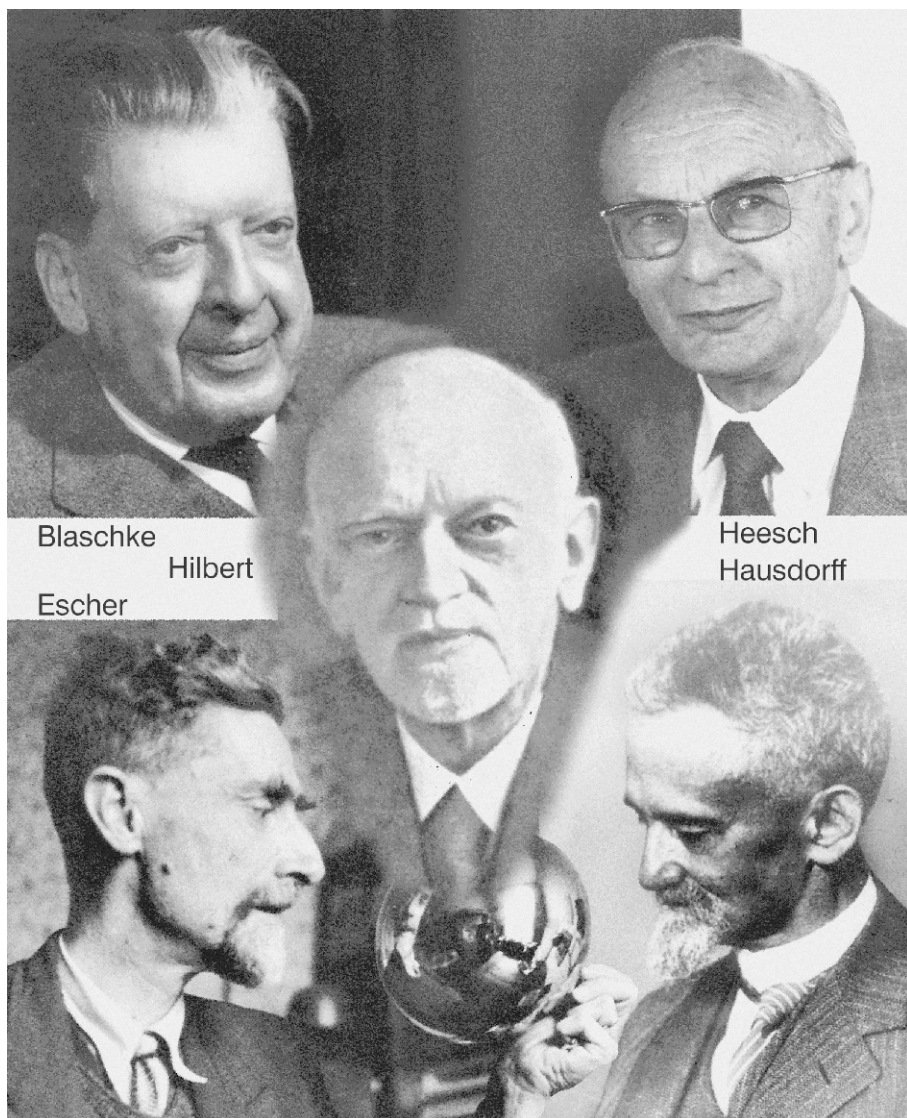
erzeugte Kreiskonchoïde und identisch mit derjenigen Kardioïde ist, die durch Abrollen des eingezeichneten variablen Kreises auf dem festen Kreis (*) erzeugt wird (vgl. Abb. 7.10.4).

Aufgabe 7.9.7: Messung von Geradenmengen durch Bogenlängen

Wie erstmals Cauchy 1841 zeigte, ist das Maß der Menge aller Geraden, die eine beschränkte ebene konvexe Menge M schneiden, gleich der Länge der Randkurve dieser Menge.

- a) Der Leser verifiziere dies für die beiden Spezialfälle, daß die Menge M ein Kreis *
oder ein achsenparalleles Quadrat ist.
- b) Warum ist der Satz für nicht konvexe Mengen sicher nicht richtig?

8 Geometrie im 20. Jahrhundert



1895 – 1910	Jugendstil mit neuer Ornamentik
1900	Max Planck begründet die Quantentheorie
1905	Einstein veröffentlicht seine spezielle Relativitätstheorie
1905/07	Bürgerliche Revolution in Rußland
ab 1908	Kubismus in der Malerei (Picasso), abstrakte Kunst (Kandinsky u.a.)
1914 – 1918	Erster Weltkrieg
1916	A. Einstein: Allgemeine Relativitätstheorie
1918	Ende des Deutschen Kaiserreichs und der Habsburger Monarchie
ab 1919	Bauhaus in Weimar gegründet, moderne Architektur, Konstruktivismus in der Architektur
1920	Öffentlicher Rundfunk in den USA
1933	Hitler Reichskanzler in Deutschland
1936	Öffentliches Fernsehen überträgt Olympiade in Berlin
1938	Spaltung des Urankerns (Hahn, Straßmann)
1939 – 1945	Zweiter Weltkrieg
1941	Erster programmgesteuerter elektromagnetischer Rechner (K. Zuse)
1945	Einsatz von Atombomben gegen Japan (Hiroshima, Nagasaki)
1947	Indien und Pakistan werden selbstständig, Beginn der Entkolonialisierung
1949	Proklamation der Bundesrepublik Deutschland und der Deutschen Demokratischen Republik
1949	Mao Tse-tung ruft die Volksrepublik China aus
1957	Erster künstlicher Satellit (Sputnik)
1961	Erster bemannter Raumflug
ab 1965	Computer mit integrierten Schaltkreisen
1969	Erste Landung von Menschen auf dem Mond
ab 1975	Computer mit Mikroprozessoren
1989/90	Zusammenbruch der kommunistischen Systeme Osteuropas, Wiedervereinigung Deutschlands, Zerfall der Sowjetunion
ab 1991	Boom im Internet nach Einführung des World Wide Web (WWW)

8.0 Vorbemerkungen

Wenn es für das 19. Jh. problematisch war, die Fülle geometrischer Strömungen in einer begrenzten Zahl von Kapiteln zu ordnen, so ist dies für das 20. Jh. in analoger Weise kaum noch möglich und wäre auch dem Anliegen dieses Buches nicht dienlich. Die zur Zeit (seit 1991) gültige Klassifikation mathematischer Disziplinen (MSC = Math. Subject Classification) in den mathematischen Referatezeitschriften „Mathematical Reviews“ und „Zentralblatt für Mathematik“ weist unter der Hauptgruppe (H) 51 (Geometry) 14 Teilgebiete, unter H 52 (Convex and Discrete Geometry) 3 weitere Teilgebiete, unter H 53 (Differential Geometry) 3 Teilgebiete aus, außerdem aber H 14 (Algebraic Geometry) mit 15 Teilgebieten, H 54 (General Topology) und H 55 (Algebraic Topology) mit je 8 Teilgebieten, unter der Hauptgruppe 68 (Computer Sciences) unter anderem die drei Teilgebiete Computer Graphics / Computa-

tional Geometry (was wenig miteinander gemeinsam hat), Computer Aided Design und Image Processing. Nimmt man dann noch zur Kenntnis, daß die analytische (nun wieder) zusammen mit der darstellenden Geometrie *eine* Untergruppe bildet, daß manche geometrische Arbeiten unter Didaktik, Physik, Logik und Grundlagen, Modelltheorie oder Unterhaltungsmathematik referiert werden und daß einige der so fürsorglich angelegten Fächer nahezu leer sind, während andere überquellen, so zeugt das Ganze von der Kompliziertheit der Mathematik in unserer Zeit und von einer gewissen Hilflosigkeit der Urheber dieser Klassifikation gegenüber dem Strom geometrischer Forschung und Aktivität. Wir wollen demgegenüber versuchen, das Bild der Geometrie in unserem Jahrhundert vor allem dadurch zu zeichnen, daß einige der wichtigsten außer-mathematischen Anwendungs- und zugleich Anregungsfelder der Geometrie in ihrem Verhältnis zu dieser betrachtet werden. Ausnahmen sind die Kapitel 8.1. und 8.2. In ihnen werden noch innermathematische Entwicklungen dargestellt, die schon gegen Ende des 19. Jhs. begannen, sich aber erst im 20. Jh. voll entfalteten.

Einer Geschichte der Geometrie im 20. Jh. sollte man vorausschicken, daß durch die gegen Ende des 19. Jh. allmählich vollzogene Emanzipation vom dreidimensionalen und euklidischen Fall Geometrie von nun an zweierlei sehr Verschiedenes ist. Zum einen (und so wird das Wort Geometrie heute von Mathematikern häufig verstanden, wenn es nicht ausdrücklich anders erklärt wird) bedeutet Geometrie nun die Wissenschaft von den „Räumen“ als Ganzes, ihren verschiedenen Formen und Beschreibungsmöglichkeiten und deren gegenseitigen Beziehungen. Zum anderen bedeutet aber Geometrie nach wie vor und in zunehmendem Maße wieder die Untersuchung des einzelnen geometrischen Objektes bzw. einer Klasse verwandter Objekte in einem Raum, der nun freilich nicht immer der klassische $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ sein muß.

Nach der stürmischen und stark verzweigten Entwicklung des 19. Jhs., die noch bis etwa 1920 nachwirkte, hatte der eine Teil der Geometrie sich in so abstrakte Richtungen entwickelt, daß über seine Zugehörigkeit zur Geometrie längst kein Konsens mehr besteht. Ein anderer, anschaulicherer Teil hatte sich weitgehend in verschiedene Ingenieurwissenschaften zurückgezogen. Auch in der mathematischen Schulbildung vieler Länder hat Geometrie in den mittleren Jahrzehnten unseres Jahrhunderts eine sehr geringe Rolle gespielt. Erst seit etwa 10 bis 20 Jahren kehrt sich dieser Trend wieder deutlich um. Die starken Bedürfnisse der Informatik und anderer Anwendungsbereiche haben sicher großen Einfluß auf diese erneute Hinwendung zur Geometrie im anschaulichen Sinn. Aber auch unabhängig davon hat sich bei den Mathematikern wieder die Erkenntnis verbreitet, daß geometrische Probleme, die im zwei- oder drei-

dimensionalen euklidischen Raum angesiedelt sind, sehr schwierig sein können und eines zeitgenössischen Mathematikers keineswegs unwürdig sind. Anders gesagt, ein Mathematiker muß sich heute nicht mehr schämen, wie es zeitweilig schien, wenn er sich mit Dingen beschäftigt, die auch der Nichtfachmann als Geometrie erkennen kann.

Das Auf und Ab der Entwicklung wird vielleicht verständlicher, wenn man es vor dem Hintergrund sieht, daß die Mathematik insgesamt in den vergangenen rund 120 Jahren eine ähnlich turbulente Geschichte durchlaufen hat: Mit der Entstehung von Mengenlehre und Logik um die siebziger Jahre des 19. Jh. und ausgelöst nicht zuletzt durch die nichteuklidische und die n -dimensionale Geometrie, wandelte sich die Mathematik rapide von einer Quasi-Naturwissenschaft zu ihrer heutigen strukturtheoretischen Daseinsweise. Es begann eine Phase der Selbstbespiegelung, der Tieferlegung der philosophischen, methodologischen und logischen Grundlagen, aber auch der Auslotung der neuen Möglichkeiten, die sich daraus ergaben, daß die Gegenstände plötzlich nicht mehr oder zumindest nicht sofort eine Entsprechung in der materiellen Welt haben mußten. Diese in gewissem Maße zumindest scheinbar von der Realität abgehobene Entwicklung findet ihren extremen Ausdruck in dem einem der prominentesten Mathematiker unserer Zeit zugeschriebenen Ausspruch: „Mathematik ist nichts anderes als ein Luxus, den sich die moderne Zivilisation leistet“. Die großen politischen und wirtschaftlichen Umwälzungen der jüngsten Vergangenheit (an denen wiederum die Informatik auf verschiedenste Weise beteiligt ist) haben aber bewirkt, daß die „Zivilisation“ viel weniger als vor etlichen Jahrzehnten bereit ist zu finanzieren, was nicht gewinnträchtig ist. Zugleich ist der Beruf des Mathematikers in einem früher nie erahnbaren Maße ein Massenberuf mit fließenden Grenzen zur Computerbranche, zur Betriebswirtschaft und anderen Massenberufen geworden, was sich in Inhalten und Ausrichtungen des Studiums niederschlägt. Die Mathematiker sind daher einem äußeren Druck ausgesetzt, sich, statistisch gesehen, weit mehr als zu Beginn des Jhs. mit anwendungsorientierten Fragen zu beschäftigen, und die Ergebnisse der reinen Forschung spiegeln in geringerem Maße als früher die tatsächliche Rolle der Geometrie in der Mathematik und in der Welt wider.

Dies vorausgeschickt, wird der Leser keine falschen Schlüsse aus den folgenden statistischen Angaben ziehen. Als das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ 1871 den Bericht über das Jahr 1868 gab, war es in 12 Kapitel gegliedert, von denen zwei der Geometrie galten: analytische bzw. synthetische Geometrie. Die Differentialgeometrie steckte teils in der analytischen Geometrie, teils in den Kapiteln Differential- und Integralrechnung, mathematische Physik, Geodäsie. Die beiden geometrischen

Hauptkapitel nahmen in den Referaten 153 von 396 Seiten, also etwa 39% ein²⁸. Das sagt natürlich weder etwas über den Umfang der referierten Arbeiten noch über ihr inhaltliches Gewicht aus. 1884 betrug bei noch gleicher Kapitelgliederung der Anteil der Geometrie 283 von 1097 Seiten, also etwa 26%. Nach einer Aktualisierung der Gliederung gab es 1900 zum Thema „Reine, elementare und synthetische Geometrie“ 87 und zum Thema „Analytische Geometrie“ (eingeschlossen weite Teile der Differentialgeometrie) 109 von 909 Seiten, also zusammen etwa 21%, und 1910 unter der gleichen Gliederung 99 bzw. 115 von insgesamt 1054 Seiten, also zusammen etwa 20%. Der letzte erschienene Halb-Band des „Jahrbuchs“ für 1942 widmete der Geometrie 190 von 657 Seiten, also etwa 28%. Die Geometrie war nun aber gegliedert in

- Grundlagen, nichteuklidische Geometrie,
- Elementargeometrie,
- Analytische und projektive Geometrie
- Algebraische Geometrie,
- Vektor- und Tensorrechnung,
- Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen,
- Riemannsche Mannigfaltigkeiten, Übertragungen,
- Topologische Differentialgeometrie, konvexe Gebilde, Integralgeometrie,
- Kinematik,
- Angewandte Geometrie.

Topologie war nun ein eigenes Hauptkapitel, in dem aber noch die Graphentheorie als Teilgebiet enthalten war. Angewandte Geometrie gliederte sich weiter in

- Darstellende Geometrie,
- Photogrammetrie,
- Geodätische Vermessung,
- Ortsbestimmung, Kartographie, Nautik,
- Geometrische Optik.

Das „Jahrbuch“ hielt mit seinem Konzept, den Ertrag eines Jahres sachlich geordnet zu präsentieren, der Entwicklung nicht mehr stand. Inzwischen gab es seit 1931 das „Zentralblatt“. In ihm war die Geometrie anfangs gegliedert in

²⁸Hier und im Folgenden ist nicht die Anzahl der Referate und damit der Arbeiten sondern die Seitenzahl im Referateorgan gezählt worden, weil wir annehmen, daß die Länge der jeweiligen Referate als grobes Maß für den Umfang und die inhaltliche Bedeutung des Besprochenen genommen werden kann.

- Allgemeines,
- Elementargeometrie,
- Darstellende Geometrie,
- Analytische, projektive u. nichteuklidische Geometrie,
- Algebraische Kurven und Flächen (Hier ist also schon der Versuch, den „geometrischen Teil“ der algebraischen Geometrie von der mehr algebraischen Richtung zu trennen.),
- Differentialgeometrie, Riemannsche Geometrie, Tensoren,
- Topologie (siehe auch Mengenlehre). Man sieht den Versuch, die Topologie in einen mehr mengentheoretischen und einen mehr geometrischen, also vorwiegend kombinatorisch-algebraischen Teil zu spalten.

Die so aufgefaßte Geometrie nahm 59 von 432 Seiten, also nur rund 14% ein. Der größeren Modernität fielen aber schon, wie erst recht in den heutigen Klassifikationen, alle im „Jahrbuch“ 1942 unter „angewandt“ zusammengefaßten Gebiete außer der darstellenden Geometrie zum Opfer. 1942 entfielen im „Zentralblatt“ auf Geometrie 26% (womit die oben angegebenen 28% für das „Jahrbuch“ in dieser Zeit an Aussagekraft gewinnen). Nach dem Zweiten Weltkrieg ging der formale Anteil der Geometrie drastisch zurück: Zentralblatt Bd. 30 (1949) 18%, Bd. 45 (1955) 17%, Bd. 60 (1957) 15%. Für die weitere Entwicklung ziehen wir Stichproben aus den 1940 gegründeten „Mathematical Reviews“ heran: 1960 12%, 1980 und 1990 je etwa 6%, ab 1991 langsam wieder steigend. Beschränkt man jedoch die „Statistik“ auf Geometrie im engeren Sinne, also auf die Hauptgruppen 51 und 52 (siehe oben), so sieht sie noch düsterer aus: 1960 etwa 1,5%, 1970 bis 1990 im Durchschnitt weniger als 1%, 1996 1,4%. Dies alles wird aber relativiert durch die seit Jahren anschwellende Flut von Literatur über „Computer-relevante“ Geometrie, um mit einem neutralen Namen alles hierher Gehörige zusammenzufassen, Literatur, die zum großen Teil in den mathematischen Referateorganen entweder gar nicht oder aber an anderer Stelle erfaßt wird.

Kehren wir zur Jahrhundertwende zurück. Als Hilbert im Jahre 1900 auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongreß seine berühmten 23 Probleme vorstellte, befand er sich gerade im Zustand eigener intensiver Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie. Daher kann es nicht verwundern, daß etwa 7 von diesen 23 Problemen der Geometrie angehörten. Es sind

3. die Frage, ob ein zum Satz von Bolyai und Gerwien analoger Satz auch im Raum gilt;

4. die Frage nach geometrischen Theorien, die der euklidischen Geometrie ähnlich benachbart sind wie die Lobatschewskische oder die sphärische, sich also nur in wenigen Grundsätzen unterscheiden, insbesondere die Frage nach allgemeineren Geometrien, in denen noch die Dreiecksungleichung gilt;
5. die Frage nach der Entbehrlichkeit von Differenzierbarkeits-Voraussetzungen für kontinuierliche Transformationsgruppen;
15. die Aufgabe einer strengen Begründung des Schubertschen Abzählungskalküls (der algebraischen Geometrie angehörig);
16. die vollständige Aufklärung der topologischen Natur der algebraischen Kurven und Flächen;
18. die Frage, ob es Polyeder gibt, mit denen man den Raum lückenlos ausfüllen kann, aber nur so, daß diese Polyeder dabei nicht zum Fundamentalbereich einer diskreten Bewegungsgruppe werden, ferner ob auch im n -dimensionalen Raum jeweils nur endlich viele Arten von diskreten Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich existieren.

In Beziehung zur Geometrie steht auch das 6. Problem, welches den axiomatischen Aufbau von Teilgebieten der Physik nach dem kurz zuvor von Hilbert vollzogenen formalaxiomatischen Aufbau der euklidischen Geometrie forderte. Detaillierte Beschreibungen des Lösungsstandes dieser Probleme aus der Sicht des Jahres 1969 findet man in [Alexandrov 1971]. Die Lösung des 3. Problems 1901 durch M. Dehn wurde schon in 7.9 erwähnt. K. Reinhardt gab 1928 den ersten räumlichen Pflasterstein an, mit dessen Hilfe Hilberts 18. Frage verneint werden kann. Die Idee war dabei, einen geeigneten Fundamentalbereich F einer diskreten Gruppe so in zwei (oder mehr) zueinander kongruente Teile $T_1, T_2, \dots$ zu zerlegen, daß keine Bewegung, die T_1 in T_2 überführt, dabei das F -Pflaster invariant läßt (Abb. 8.0.1). Ein analoges Resultat erhielt H. Heesch 1932 für die Ebene (Abb. 8.0.3). Während jedoch Dehns Resultat zum dritten Problem, abgesehen von späteren Vereinfachungen bzw. Vertiefungen des Beweises, im wesentlichen abschließend ist, hat der Problemkreis der im weitesten Sinne des Wortes unregelmäßigen Parkettierungen bzw. Pflasterungen mittels endlich vieler Bausteintypen in den vergangenen Jahrzehnten ein umfangreiches neues geometrisches Forschungsgebiet begründet, das außer seinem rein mathematischen und ästhetischen Reiz (siehe dazu Abb. 8.0.2) auch wichtige naturwissenschaftlich-technische Anwendungen hat (mehr darüber in 8.3, 8.4 und 8.5).

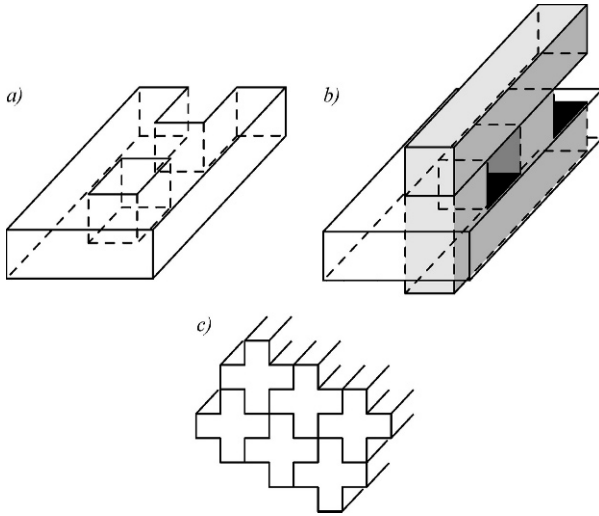


Abb. 8.0.1 Räumlicher Pflasterbaustein von Reinhardt

Beim Baustein (a) von Reinhardt kann das Loch nur geschlossen werden, indem man ein zweites Exemplar, um 90 Grad gedreht und um ein Viertel der Länge in Längsrichtung verschoben, mit ihm zu einem Körper (b) vereinigt, der dann offensichtlich ein Fundamentaltbereich ist. (Man stecke ihn zu unendlich langen Strängen von kreuzförmigem Querschnitt zusammen und pflastere in der dazu querliegenden Ebene wie in (c) angedeutet.)

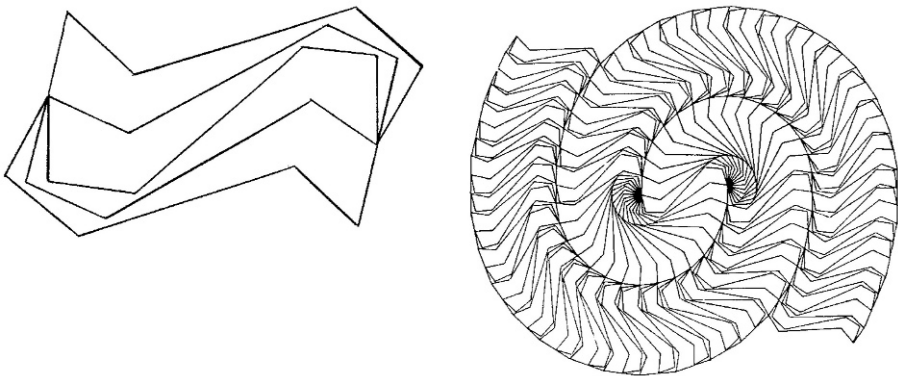


Abb. 8.0.2 Polygonaler Pflasterstein von Voderberg

Heinz Voderberg, ein Student Reinhardts, fand 1936 als Lösung der Frage, ob zwei kongruente polygonale Pflastersteine ein oder zwei andere des gleichen Typs völlig umschließen können, diese Form, aus der man auch eine attraktive Doppelspirale legen kann.

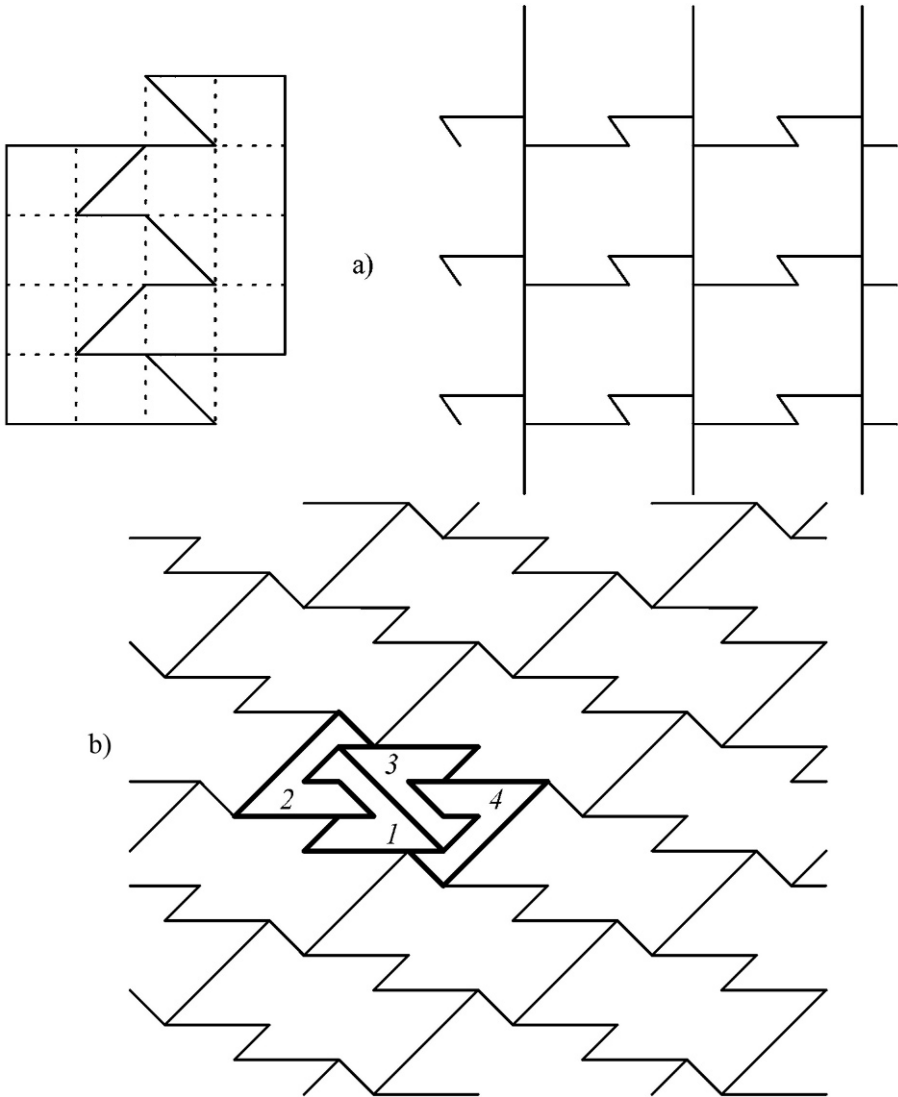


Abb. 8.0.3 Pflasterbausteine für die Ebene

Der ursprüngliche Baustein (a) von Heesch (1933) und ein einfacheres Beispiel (b) mit nur 7 statt 10 Ecken. In beiden Fällen ist angedeutet, daß zwei bzw. vier zusammengefügte Exemplare jeweils einen Fundamentalbereich ergeben. Dabei lassen sich aber die beiden „Hexenprofile“ (a) nur durch eine Gleitspiegelung verzahnen, und diese läßt niemals das ganze Pflaster invariant. In (b) gehen die Teile 2 bzw. 3 durch Gleitspiegelung bzw. Drehung aus dem Teil 1 hervor und lassen sich nur auf diese Weise lückenlos verzahnen. Diese Abbildungen bringen aber das jeweils andere Teil nicht mit einem Stein des gesamten Pflasters zur Deckung.

Die zuletzt besprochenen Fragenkomplexe signalisieren einen grundlegenden Wechsel gegenüber dem 19. Jh. sowohl hinsichtlich der innermathematischen „Mode“ als auch hinsichtlich der Praxisanforderungen an die Mathematik. Probleme, die man heute gern als „diskret“ bezeichnet und die im 19. Jh. zwar nicht unbeachtet waren, aber doch außerhalb der Hauptrichtungen der Geometrie lagen, sind heute nicht nur gleichgewichtig sondern geradezu ins Zentrum des Interesses gerückt. Auch was das Auge des durchschnittlichen Mathematikers erfreut, ist heute etwas anderes als vor 100 Jahren. Waren es damals die Modelle von analytischen Funktionen (die berühmten „Gipslandschaften“), von algebraischen Flächen oder von Flächen konstanter Krümmung, auch schon von halbbregulären oder Sternpolyedern, so sind es heute fraktale Gebilde wie die Mandelbrotmenge, raffinierte aperiodische Parkette oder Graphen mit besonderen Eigenschaften.

Es ist kühn und vermessen, aber auch reizvoll, nach dem Vorbild Hilberts einige nicht oder nicht befriedigend gelöste Probleme und Schwerpunkte zukünftiger geometrischer Forschung zu benennen. Wir wollen es versuchen:

1. Die Geometrie der diskretisierten, in Pixel zerlegten Ebene verlangt nach einer formal-axiomatischen Begründung, die nicht trivial, sondern hilfreich für die Lösung von Aufgaben der Computergeometrie ist.
2. Das Zusammenspiel der optischen Information eines zweidimensionalen Bildes von einer räumlichen Szene mit dem nichtoptischen Zusatz- bzw. Vorauswissen über diese Szene verlangt nach theoretischer Durchdringung.
3. Die algorithmische Beschreibung von Konstruktionsprozessen im dreidimensionalen Raum kann in anspruchsvolleren Fällen noch immer nicht mit der Klarheit geometrischer Konstruktionsalgorithmen in der Ebene konkurrieren.
4. Das PNP-Problem der Komplexitätstheorie scheint eines der schwersten ungelösten mathematischen Probleme der Gegenwart zu sein. Dabei geht es um die Frage, ob jeder Algorithmus, der bei verteilter bzw. nichtdeterministischer Arbeit eine Eingabe der Größe n in „polynomialer Zeit“, d.h. in einer Anzahl von Schritten bearbeitet, die polynomial von n abhängt, durch einen ebenfalls in polynomialer Zeit, jedoch streng sequentiell arbeitenden Algorithmus ersetzt werden kann. Die bisher unbewiesene Vermutung lautet, daß dies im allgemeinen nicht gilt. Es gibt schon zahlreiche Techniken, die verschiedenen möglichen Grade der Kompliziertheit von Algorithmen durch geometrische Algorithmen zu repräsentie-

ren. Kann man also das PNP-Problem vielleicht durch das Einbringen geometrischer Überlegungen lösen, d.h. ein Beispiel einer geometrischen Aufgabe finden, die nichtdeterministisch in polynomialer Zeit gelöst werden kann, von der man aber mit spezifisch geometrischen Methoden beweisen kann, daß sie deterministisch (sequentiell) nicht in polynomialer Zeit lösbar ist?

Eine gute aktuelle Einführung in neuere Probleme und Resultate einiger Teilgebiete der Geometrie ist der Übersichtsband [Giering/ Hoschek 1994].

8.1 Grundlagen der Geometrie

Der um 1870 einsetzende Wandel der Mathematik von einer Quasi-Naturwissenschaft zur Strukturwissenschaft löste eine Flut von Literatur über logisch-methodologische bzw. philosophische Fragen der Mathematik aus, die nie zuvor mit solcher Intensität diskutiert worden waren. Die Geometrie hat keinen geringen Anteil an den Ursachen dieser Entwicklung: Die im 19. Jh. erstmals geglückten Nachweise der prinzipiellen Unlösbarkeit gewisser Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal²⁹ sowie der Nichtbeweisbarkeit des Parallelenaxioms waren mathematische Resultate einer gänzlich neuen Art. Sie regten die Mathematiker an, über die Mathematik als Ganzes, über das Wesen des Beweisens, über die Existenzweise mathematischer Objekte, über die Wahrheit mathematischer Aussagen nachzudenken, dies alles selbst zum Gegenstand mathematischer Untersuchungen zu machen. Die Arbeiten über n -dimensionale und nichteuklidische Geometrie (letztere jetzt in einem weiten Sinne verstanden) ermöglichten nicht nur den Zweifel an der Euklidizität des physikalischen Raums, sondern sie lösten den mathematischen Raumbegriff allmählich vom physikalischen Raumbegriff. In ähnlicher Weise löste die schrittweise logische Grundlegung der verschiedenen Zahlbereiche, die mit der Bekanntschaft mit alternativen Zahlbereichen wie endlichen, nichtarchimedisch geordneten oder nicht stetigen Größenbereichen verbunden war, den Zahl- bzw. Größenbegriff vom physikalisch geprägten Maß- und Zahlbegriff.

Ein vereinfachtes Geschichtsbild (das für manche Zwecke durchaus angemessen sein kann) verknüpft den Beginn der geometrischen Grundlagenforschung mit Hilbert und seinen „Grundlagen der Geometrie“, die in schmalem Umfang zuerst 1899 als Festschrift anlässlich der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmal in Göttingen erschienen. Durch [Toepell 1986] ist erstmals die Vorgeschichte

²⁹Dazu gehören insbesondere die klassischen Probleme der Würfelverdopplung, Winkel-dreiteilung und Kreisquadratur

dieses Buches allgemein zugänglich geworden, soweit sie Hilbert selbst betrifft. Wir wissen jetzt, daß den „Grundlagen“ einige Vorlesungen Hilberts sowie ein Fortbildungs-Sommerkurs für Lehrer über diesen Gegenstand vorangegangen waren. Hilberts Aufzeichnungen zu diesen Veranstaltungen sind in [Toepell 1986] auszugsweise veröffentlicht, so daß man sich ein umfassendes Bild vom allmählichen Reifen von Hilberts Gedanken machen kann. Er hatte sich ja vor 1899 im wesentlichen mit ganz anderen Gebieten der Mathematik beschäftigt und außer einem 1895 in den Math. Annalen publizierten Brief über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte (der 1903 der 2. Auflage der „Grundlagen“ als Anhang I beigelegt wurde) nichts über Geometrie oder gar deren logische Grundlagen veröffentlicht. Vor einer ausführlicheren Besprechung des Inhalts und der historischen Bedeutung von Hilberts Buch soll man jedoch zur Kenntnis nehmen, daß zu dieser Zeit eine breite und teilweise heftig geführte Diskussion über die Grundlagen der Geometrie bereits im Gange war. Diese Diskussion erstreckte sich u.a. auf folgende Probleme: — Wie ist der wahre physikalische Raum beschaffen und in welcher Beziehung steht die geometrische Theorie zu ihm? — Wodurch ist die Auswahl und Annahme geometrischer Axiome gerechtfertigt bzw. nach welchen Kriterien hat sie zu erfolgen? — Welche Rolle spielen dabei bestimmte Axiome, insbesondere diejenigen, die die Struktur des Größenbereichs festlegen, mit dem Entfernungen gemessen werden, also vor allem archimedisches Axiom und Stetigkeit bzw. Lückenlosigkeit (Vollständigkeit)? — Welche bis dahin unreflektierten Annahmen liegen den Meßprozessen im physikalischen Raum zugrunde? — Wie lückenlos muß ein Beweis sein, welches sind seine kleinsten Schritte, wie weit „hinunter“ muß man beim Definieren von Grundbegriffen bzw. beim Formulieren von Axiomen gehen? Prominente Teilnehmer an diesen Diskussionen waren neben H. v. Helmholtz und F. Klein u.a. H. Hankel, O. Stolz, F. Lindemann, W. Killing, G. Frege, die Italiener G. Peano, A. Padoa, M. Pieri und G. Veronese, daneben aber viele heute Unbekannte, deren Äußerungen vergessen sind. Sogar ein ausgesprochener Analytiker wie K. Weierstraß konnte sich diesem Zeitgeist nicht entziehen und hielt Vorlesungen über „die Prinzipien der Geometrie“. Einen Zugang zu dem aus heutiger Sicht oft unsinnigen, aber historisch hochinteressanten Meinungsstreit findet man in den Kapiteln „Geschichte und Philosophie“ im „Jahrbuch über die Fortschritte“, einen guten Überblick auch in Kleins Bericht [Math. Ann. Bd. 50 (1898), 583–600] anlässlich der ersten Verleihung des Lobatschewski-Preises, den die Universität Kasan für Arbeiten zu den Grundlagen der Geometrie gestiftet hatte, aus moderner Sicht in [Dieudonné 1985, Kap. 13].

Es sind vor allem drei Männer, die in der engeren Vorgeschichte von Hilberts „Grundlagen“ nicht unerwähnt bleiben dürfen: Moritz Pasch, Giuseppe Peano und Hermann Wiener. Pasch publizierte 1882 sein Buch „Vorlesungen über neuere Geometrie“. Das Hauptziel dieses Buches war die Durchführung eines Programms, das Klein seit 1871 mehrfach angeregt hatte: Die Begründung der projektiven Geometrie (anders gesagt: Die konstruktive Einführung der projektiven Ebene bzw. des projektiven Raumes) unabhängig vom Parallelenaxiom. Man soll die projektive Abschließung durch Adjunktion uneigentlicher Punkte auf der Grundlage einer „lokalen absoluten Geometrie“ durchführen, bei der die Eindeutigkeit der Parallelen zunächst offen bleibt. Man muß also mittels lokaler Sätze (wozu Pasch die Kongruenz benötigt und sich selbst ärgert, daß er es nicht besser kann) ausdrücken, wann Strecken zu einem gemeinsamen Büschel gehören, auch wenn ihre Verlängerungen sich im zugänglichen Teil der Ebene nicht schneiden, und dann die so definierten Büschel als uneigentliche Objekte zum zugänglichen Teil der Ebene adjungieren. Die gewöhnliche projektive Abschließung ist darin als derjenige Spezialfall enthalten, der sich ergibt, wenn das verfügbare Raumgebiet von vornherein der gesamte euklidische Raum ist. Ist das zur Verfügung stehende Raumgebiet dagegen hyperbolisch, so liefert die Adjunktion, wie das Kleinsche Modell zeigt, eine viel größere Menge von idealen Punkten, die zusammen mit den eigentlichen Punkten einen projektiven Raum bilden. Die zugehörigen geometrischen Sachverhalte hatten natürlich schon längst eine praktische Rolle beim Konstruieren in beschränkten Teilen der Ebene gespielt, wo man unzugängliche Hilfspunkte durch zugängliche Ersatzobjekte repräsentiert. Aber in Kleins Programm [Math. Ann. Bd. 4 (1871), S. 624, Bd. 6 (1873), S. 131] bekommen diese Techniken eine neue Rolle als logische Absicherung der projektiven Geometrie, die ja dann gemäß dem Erlanger Programm ihrerseits Modelle sowohl für die euklidische als auch für die nichteuklidische Geometrie liefert.

Dieses Anliegen traf sich nun mit der für damalige Verhältnisse stark ausgeprägten Fähigkeit Paschs zur logischen Durchdringung der Probleme (die sich auch in seinem Buch über die Grundlagen der Analysis und seinem von den Zeitgenossen gerühmten Geschick zur Formulierung von „Satzungen“ aller Art äußerte) und seinem betont empiristischen Standpunkt. Er verwirft also den Begriff der unendlich ausgedehnten Geraden und kehrt wieder zu Euklids Strecken als Grundbegriff zurück, mit denen man zwei Punkte eindeutig verbinden und die man sukzessive verlängern kann. Die Inzidenz zwischen Punkten und Strecken ist demnach der entscheidende Grundbegriff der rein linearen Geometrie, und so kam Pasch zur dreistelligen Zwischenrelation als Ausdruck dafür, daß der Punkt C auf der Strecke mit den Endpunkten

A und B liegt. Dies wird Hilbert aufgreifen, aber die Zwischenrelation statt der Punkt-Strecken-Inzidenz als Grundbegriff und einige der von Pasch aufgestellten „Grundsätze“ darüber (die bei Pasch im Unterschied zu Hilbert immer finit erfahrbare Sätze über völlig zugängliche Objekte sein müssen) als Axiome wählen, darunter den von ihm als „Axiom von Pasch“ bezeichneten. Bei Pasch lautet er: „Sind in einer ebenen Fläche drei Punkte A, B, C durch die geraden Strecken AB, AC, BC paarweise verbunden, und ist in derselben ebenen Fläche die gerade Strecke DE durch einen innerhalb der Strecke AB gelegenen Punkt gezogen, so geht die Strecke DE oder eine Verlängerung derselben entweder durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC .“ (a.a.O. S. 21)

Man beachte, Pasch spricht nicht von einer Ebene sondern von einer ebenen (als begrenzt zu denkenden, aber erweiterungsfähigen) Fläche und davon, daß die Strecke DE oder eine Verlängerung von ihr die bekannte Bedingung erfüllt. Er ist konsequenter Empirist (wie auch Helmholtz und, bis zu einem gewissen Grade, Klein), und daher handelt seine Geometrie bei aller (relativen) logischen Strenge vom „Anschauungs-“ oder „Erfahrungs-“raum. Das unterscheidet ihn grundsätzlich von Hilbert, der seine „Grundlagen“ 1899 mit den vielzitierten Zeilen beginnt: „Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: Die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit $A, B, C, \dots$; die Dinge des zweiten Systems nennen wir Gerade und bezeichnen sie mit $a, b, c, \dots$; die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; ... Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen“, „zwischen“, „parallel“, „congruent“, „stetig“; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie ...“ Was Hilbert mit dieser Formulierung meinte, nämlich die völlige Lösung des formalen Systems Geometrie von einer festen und womöglich anschaulichen oder physikalischen Deutung der vorkommenden Begriffe und Sätze, wird noch deutlicher durch den ebenfalls vielzitierten Bericht O. Blumenthals, wonach Hilbert äußerte „Man muß jederzeit an Stelle von 'Punkte, Geraden, Ebenen' 'Tische, Stühle, Bierseidel' sagen können.“ (vgl. [Blumenthal 1922], S. 68 oder [Toepell 1986], S. 42)) oder den bei Toepell a.a.O. zitierten Brief Hilberts an Frege.

Der Urheber dieser Sicht auf die axiomatische Behandlung der Geometrie war Hermann Wiener (der Sohn des darstellenden Geometers Ch. Wiener). Dieser hatte auf der Jahresversammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte 1891 in Halle einen Vortrag „Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie“ gehalten, von dem leider nur eine kurze Zusammenfassung veröffentlicht

wurde [Jahresbericht DMV 1, 45-48], der aber Hilbert stark in der angegebenen Richtung beeinflusst hat. Auf der Heimfahrt von eben dieser Tagung und die Eindrücke des Wienerischen Vortrages reflektierend, soll er den bekannten Ausspruch über Tische, Stühle und Bierseidel getan haben. Wieners Sprechweise in diesem Vortrag war in der Tat neu, um nicht zu sagen revolutionär: „Es seien Elemente von zweierlei Art vorausgesetzt und zweierlei Operationen, indem man annimmt, daß die Verknüpfung je zweier dieser Elemente derselben Art ein Element der anderen Art ergebe.“ (Gemeint sind die projektive ebene Inzidenzstruktur aus Punkten und Geraden mit den Operationen des Schneidens und Verbindens.) Was Hilbert nun unternahm, war die Synthese dieser neuen, abstrakt strukturtheoretischen Auffassung, wie sie bis dahin nur in der hauptsächlich in England entwickelten symbolischen Algebra und Logik artikuliert worden war, mit den dieser Auffassung fremden, ihr geradezu feindlichen Vorleistungen von Pasch. 1893 schrieb er in einem Brief an Klein: „Mein 3tes Colleg über Nichteuklidische Geometrie habe ich garnicht zustande gebracht [wegen Hörermangels], doch arbeite ich dasselbe für mich aus und finde, dass man am besten aus dem scharfsinnigen Buche von Pasch Verständnis für den Streit der Geometer um die Axiome gewinnt. Auch hat doch Pasch das Verdienst, die Notwendigkeit der Axiome über den Begriff „zwischen“ erkannt zu haben ... Die Frage nach dem kleinsten System von Forderungen (Axiomen), die ich an ein System von Einheiten stellen muß, damit dasselbe dazu dienen kann, die geometrischen (d.h. auf die äussere Gestalt der Dinge bezüglichen) Erscheinungen der Aussenwelt zu beschreiben, scheint bis heute noch nicht vollständig erledigt.“ (Zitiert nach [Toepell, S. 44f]) Damit ist der Einfluß von Pasch auf Hilbert belegt, zugleich auch klar, daß Hilbert auf dem Gebiet der Grundlagen der Geometrie, mit dem er sich ja erst seit kurzem und sozusagen nur nebenbei beschäftigte, keine umfassende Literaturkenntnis hatte. Sonst hätte er gewußt, daß sich bei Desargues und v. Staudt bereits Auseinandersetzungen mit dem Zwischenbegriff und sogar mit seinen Beziehungen zu der für die geschlossene projektive Gerade an dessen Stelle tretenden vierstelligen Trennungsrelation finden. Erwähnt werden muß auch Peanos axiomatische Grundlegung der euklidischen Geometrie schon 1894, mit der er allerdings, da sie in italienisch und in der für ihn charakteristischen stark formalisierten Weise publiziert wurde, nur bei seinen Schülern und Anhängern einen Einfluß ausüben konnte.

Zusammenfassend möchten wir sagen, daß Hilberts „Grundlagen“ keineswegs am Anfang einer neuen Entwicklung standen, sondern einen gewissen Höhepunkt markierten. Ihre im Vergleich zu allen Vorgängern viel größere Ausstrahlung und Wirkung beruhte sicher zu einem gewissen Teil auf dem Ruhm,

den Hilbert sich auf anderen mathematischen Gebieten bereits erworben hatte, andererseits aber darauf, daß er weit mehr als alle seine Vorgänger ein breites Spektrum von interessanten und fruchtbaren Fragen rund um die axiomatische Grundlegung der Elementargeometrie ausbreitete. Demgegenüber fällt wenig ins Gewicht, daß viele dieser Fragen von anderen, insbesondere von seinen eigenen Schülern, gelöst wurden bzw. seine eigenen Lösungsangebote nicht immer die besten und seine Einsicht in die Probleme manchmal beschränkt waren. Dies soll an einigen Beispielen demonstriert werden.

Die Formulierung mancher Axiome ist bei Hilbert noch mangelhaft. Zum Beispiel schreibt er 1899 als Axiom II.1.: „Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A .“ Ab der 7. Auflage (1930, inzwischen hatte Hilbert sich gründlich mit der formalen Logik beschäftigt und gemeinsam mit seinem Schüler W. Ackermann das Buch „Grundzüge der theoretischen Logik“ veröffentlicht) lautet II.1 wie folgt: „Wenn ein Punkt B zwischen einem Punkt A und einem Punkt C liegt, so sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, und B liegt dann auch zwischen C und A .“ Dies war von Anfang an gemeint, hätte sich aber aus den ursprünglichen Formulierungen nicht streng deduzieren lassen.

Unter der Überschrift „Axiomgruppe V: Axiom der Stetigkeit“ wird 1899 nur das Archimedische Axiom formuliert. In der zweiten Auflage 1903 erscheint unter der Axiomgruppe V außer dem Archimedischen Axiom (nun V1) ein Axiom V2 „der Vollständigkeit“: „Die Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) der Geometrie bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher genannter Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist ...“ Dies ist natürlich eine Aussage *über* ein Axiomensystem, gehört also einer völlig anderen Sprachebene an als alle anderen Axiome. Das Axiom V2 wurde auch bis zur letzten von Hilbert noch besorgten Auflage 1930 nicht mehr geändert. Dabei hatte Hilbert die mit V2 ausgedrückte Absicht schon 1895 in dem erwähnten Brief an Klein (später Anhang I) viel besser, nämlich mittels des geometrisch formulierten Axioms von der Existenz der oberen bzw. unteren Grenze beschränkter monotoner Folgen, ausgedrückt: „Wenn $A_1, A_2, A_3, \dots$ eine unendliche Reihe von Punkten einer Geraden a sind und B ein weiterer Punkt auf a ist, von der Art, daß allgemein A_i zwischen A_h und B liegt, sobald der Index h kleiner als i ist, so gibt es einen Punkt C , welcher folgende Eigenschaft besitzt: sämtliche Punkte der unendlichen Reihe $A_2, A_3, A_4, \dots$ liegen zwischen A_1 und C und jeder andere Punkt C' , für welchen dies ebenfalls zutrifft, liegt zwischen C und B .“ (2. Aufl. der „Grundlagen“, S. 84). Was Hilbert ebenfalls nicht berücksichtigt hatte, obwohl es von der Theorie der reellen Zahlen schon bekannt war [O. Stolz, Math. Annalen Bd. 31 (1888), 608], ist die

Folgerbarkeit des Archimedischen aus dem etwa nach Dedekind formulierten Stetigkeitsaxiom. Der Begriff der Kategorizität eines Axiomensystems (d.h. bis auf Isomorphie gibt es nur ein einziges Modell dieses Axiomensystems) der gerade für Theorien nach Art der euklidischen Geometrie eine wichtige Rolle spielt und den Hilbert sicher mit seinem mißglückten Axiom V2 bezweckte, tritt bei ihm selbst überhaupt nicht auf. Er wurde 1903 von dem Amerikaner O. Veblen geprägt, der auch andere bedeutende Beiträge zu den Grundlagen der Geometrie geleistet hat.

Das Archimedische Axiom ist eine der vielen Stellen, wo (bis heute) das Streben nach möglichst unabhängigen Axiomensystemen nicht gut mit dem Streben nach möglichst tiefer Einsicht in die Rolle einzelner Aussagen verträglich ist. Veronese (1891 in seinen „Grundzügen der Geometrie“), O. Stolz 1894 und andere hatten die Aufmerksamkeit auf die merkwürdige Rolle des Archimedischen Axioms bei verschiedenen geometrischen Beweisen (z.B. Legendresche Sätze über die Winkelsumme, Äquivalenz von Zerlegungsgleichheit, Ergänzungsgleichheit und Inhaltsgleichheit) gelenkt. Da das Archimedische Axiom auf rein arithmetische Weise die Kommutativität der Multiplikation erzwingt und letztere, wie Hilbert zeigte, zum Satz von Pappos³⁰ gleichwertig ist, konnte er mittels eines nichtarchimedisch geordneten Koordinatenbereichs ein Modell einer nichtarchimedischen Geometrie und mittels eines nichtkommutativen Koordinaten-„Schief“körpers ein Modell angeben, in dem der Satz von Pappos falsch wird. Das alles sind Früchte der völlig neuen Beziehungen zwischen axiomatisch-synthetischer und analytischer Geometrie, die Hilbert in seinen „Grundlagen“ einführte. Während bis dahin die geometrische Intuition der Strecke und des Meßprozesses meist dazu dienen mußte, den noch unpräzisen Begriff der reellen Zahl zu rechtfertigen, gründet Hilbert die Widerspruchsfreiheit geometrischer Axiomensysteme auf aus Paaren bzw. Tripeln geeigneter Zahlen gebildete Modelle und präpariert dabei fast automatisch heraus, welche Eigenschaften des Koordinatenbereichs für die Gültigkeit welcher geometrischen Axiome verantwortlich sind. Er geht aber mit der sogenannten Streckenrechnung auch den umgekehrten Weg, indem er auf der geometrischen Geraden durch geometrische Konstruktionen eine algebraische Struktur (Addition, Multiplikation, Anordnung) definiert (So war schon Descartes vorgegangen!) und deren strukturelle Eigenschaften auf geometrische Sätze gründet. Dabei scheute er sich als erster nicht, Sätze wie die von Desargues und Pappos, die in diesem Zusammenhang wesentliche Rollen spielen, unge-

³⁰Hilbert und alle seine Zeitgenossen sprechen in diesem Zusammenhang immer vom Satz von Pascal. Gebraucht wird aber bei allen grundlagentheoretischen Untersuchungen nur der von Pappos herrührende Spezialfall, wo der Kegelschnitt zu einer Doppelgeraden entartet.

achtet ihrer komplizierten Struktur als mögliche Axiome ins Auge zu fassen, und enthüllte ihre zentrale Stellung im Gefüge der geometrischen Sachverhalte. Axiome sind nun nicht mehr durch ihre „Einfachheit“ oder „unmittelbare Evidenz“ bzw. als „Erfahrungstatsachen“ ausgezeichnet, sondern frei wählbar, sollten aber durch ihre Stellung im logischen Gefüge ausgezeichnet sein. Hilbert ist es zu danken, daß in der Folge die ganze Fülle der wunderbaren gegenseitigen Entsprechungen zwischen bestimmten geometrischen Sätzen und bestimmten algebraischen Eigenschaften des zugehörigen Koordinatenbereichs enthüllt wurde. Eine lange in diesem Bereich noch bestehende Lücke ist 1970 geschlossen worden, als L. W. Szczerba und W. Szmielew die Äquivalenz des Axioms von Pasch zur Monotonie der Multiplikation im Koordinatenbereich zeigten und mittels eines geeignet konstruierten „pathologischen“ Koordinatenbereichs die Unabhängigkeit des Axioms von Pasch bewiesen (Lit. siehe [Schwabhäuser/Szmielew/Tarski]).

Hilberts Modell einer nichtdesarguesschen Ebene (d.h. einer Ebene, in der die üblichen Inzidenzaxiome gelten, der Satz von Desargues jedoch nicht) war ziemlich kompliziert. Der Amerikaner Moulton fand schon 1902 ein anderes Modell, das so einfach ist, daß man es ohne weiteres Schülern erklären kann (Abb. 8.1.1, Aufgabe 8.1.1). Hilbert übernahm es erst in der 7. Auflage 1930 und bezeichnete es in einer Fußnote als „etwas einfacher“. G. Hessenberg bewies 1905, daß der Satz von Desargues aus dem Satz von Pappos folgt. Auch dies wurde erst 1930 eingearbeitet. Es war inzwischen klar, daß auch jeder endliche Körper (oder sonstige endliche algebraische Bereich mit entsprechenden Eigenschaften) Anlaß zu dann endlichen Modellen geometrischer Axiomensysteme gibt, womit eine weitere neue Forschungsrichtung eröffnet war. (Siehe dazu z.B. [Kartesz 1976]. Als ein Vorläufer ist hier die schon 1892 von G. Fano publizierte minimale projektive Ebene mit 7 Punkten und 7 Geraden zu nennen.) Meisterhafte Darstellungen der geometrischen Axiomatik lieferten in den USA O. Veblen und seine Schüler und Mitarbeiter (u.a. gemeinsam mit J. W. Young eine zweibändige „Projective Geometry“ 1910/18). J. Hjelmslev begann 1907 einen axiomatischen Aufbau auf der Grundlage von Spiegelungen (eine in gewissem Sinne abschließende Monographie dazu von Fr. Bachmann 1959). Dabei werden die Punkte P eines Raumes durch Punktspiegelungen vertreten (d.h. jedem Punkt Q entspricht derjenige Punkt R , für den P Mittelpunkt der Strecke QR ist), den Geraden, Ebenen usw. entsprechen die Spiegelungen an ihnen, und die gesamte Axiomatik bezieht sich auf Aussagen über die Hintereinanderausführung solcher Spiegelungen. Einer der Vorteile, die sich dadurch ergeben, ist ein natürlicher Zugang zur absoluten Geometrie, d.h. denjenigen Sachverhalten, die die euklidische mit der Lobatschewskischen Geometrie

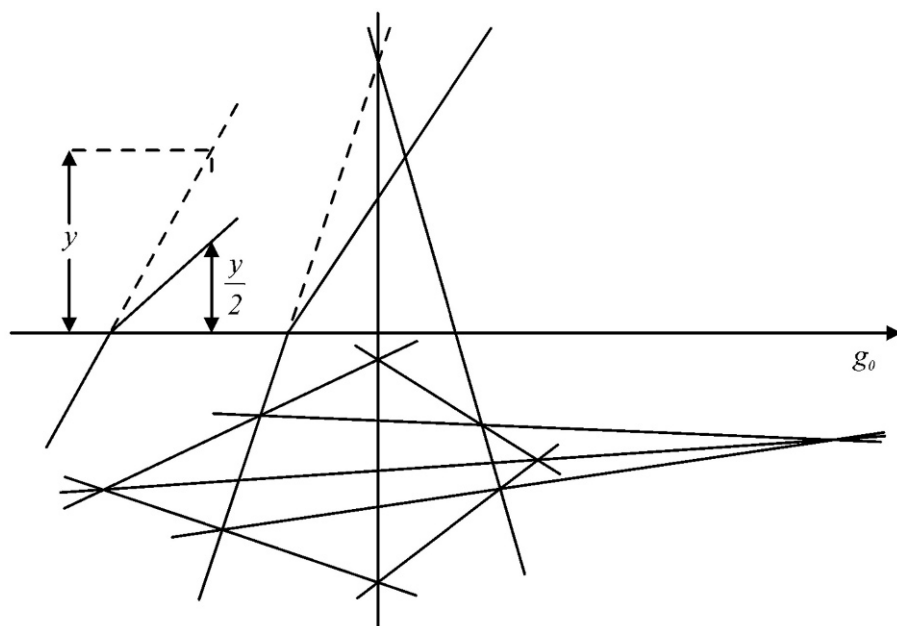


Abb. 8.1.1 Die nichtdesarguessche Ebene von Moulton

Sie besteht aus allen Punkten einer euklidischen Ebene, in der eine beliebige Gerade g_0 und ein Durchlaufungssinn dieser Geraden (daher auch eine „untere“, nämlich die bezüglich des Durchlaufungssinnes rechts liegende, und eine „obere“ Halbebene) ausgezeichnet ist. Als Geraden des Modells dienen alle zu g_0 parallelen Geraden und alle, die g_0 „von links oben nach rechts unten“ oder senkrecht durchschneiden. Die „von links unten nach rechts oben“ laufenden Geraden werden beim Durchgang durch g_0 in einem festen Brechungsverhältnis (im Bild 2 : 1) in der Weise gebrochen, wie man es aus der Optik für den Durchgang durch die Trennschicht zwischen zwei optischen Medien kennt. Der Leser überlege sich zunächst, daß alle Grundaxiome der ebenen euklidischen Geometrie (Existenz nichtkollinearier Punkte, eindeutige Verbindbarkeit von Punkten, Existenz und Eindeutigkeit der Parallelen) in diesem Modell gelten und wie die entsprechenden Operationen konstruktiv ausgeführt werden können. Plaziert man nun eine Desarguessche Figur z.B. in der gezeigten Weise (natürlich gibt es dafür auch andere Möglichkeiten), so daß alle wesentlichen Punkte außer dem Perspektivitätszentrum etwa in der unteren Halbebene liegen, und genau einer der drei Projektionsstrahlen zu brechen ist, so behalten die Dreiecke ihre Perspektivitätsachse, haben aber kein Perspektivitätszentrum mehr. Dieses Beispiel hat über seinen konkreten Zweck hinaus eine gute Anregungsfunktion für die Konstruktion von Nichtstandard-Modellen zum Zwecke der Aufklärung logischer Unabhängigkeiten im Bereich geometrischer Sätze.

gemeinsam hat. Daß z.B. die Hintereinanderausführung zweier Drehungen in der Ebene stets wieder eine Drehung (aber um ein eventuell uneigentliches Zentrum) ist, gilt in der absoluten Geometrie. Erst durch Hinzunahme des Parallelenaxioms ergibt sich, daß Drehungen um uneigentliche Zentren Translationen sind, die sich in diesem Zusammenhang auf sehr natürliche Weise als Ausartungsfälle von Drehungen ergeben. Ein anderer Gewinn besteht darin, daß man die „metrischen“ Spiegelungen zu Schrägspiegelungen verallgemeinern und damit einen Zugang zur affinen Geometrie gewinnen kann, der sich in der sogenannten affinen Differentialgeometrie auszahlt.

In Kapitel IV von Hilberts „Grundlagen“ wurde auch erstmals der Begriff des Flächeninhalts von polygonalen Flächen *definiert* und dabei die (psychologische) Klippe bewältigt, daß man dafür die Unabhängigkeit des Produktes von Grundseite und Höhe eines Dreiecks von der Grundseite beweisen muß und dazu die Proportionen benötigt. Ferner mußte der mathematisch schwierigere Beweis geführt werden, daß der Inhalt einer polygonalen Figur, definiert als Summe der Inhalte (also halben Produkte von Grundseiten und Höhen) aller Teildreiecke, von der gewählten Zerschneidung in Dreiecke unabhängig ist. Auch hier erwähnte Hilbert die Vorleistungen von Bolyai und Gerwien und anderen nicht. Es ist wie gesagt sehr wahrscheinlich, daß Hilberts Literaturkenntnis auf dem Gebiet der Geometrie beschränkt war. Er bewirkte aber über seine Schüler und die Schüler seiner Schüler die Schließung fast aller verbliebenen Lücken in dem von ihm so genial skizzierten Gedankengebäude. Wir verweisen nochmals auf Dehns Lösung des 3. Problems und auf die Dissertation, in der H. Brandes, ein Schüler des Hilbert-Schülers F. Bernstein, 1908 bewies, daß die Zerlegungsgleichheit von Hypotenusenquadrat und Kathetenquadraten im allgemeinen nicht mit weniger als 7 Teildreiecken realisiert werden kann.

Nun muß von einem Mathematiker gesprochen werden, der zu Unrecht im Schatten von Hilbert gestanden hat. Friedrich Schur hatte sich auch schon seit 1891 mit mehreren Arbeiten in die Diskussion über die Grundlagen der Geometrie eingeschaltet. Seine Bedeutung auch für Hilbert ist äußerlich schon daran zu erkennen, daß er in Toepells Buch über die Entstehung der „Grundlagen“ zu den meistzitierten Autoren gehört. Seine Sicht auf die Dinge erschien in Buchform zusammengefaßt allerdings erst 1909. Dort gibt es wichtige Unterschiede zu Hilbert: Schur benutzt wie vor ihm schon Killing, Peano und Pieri den Begriff der Bewegung statt des Kongruenzbegriffs als Grundbegriff. Vom rein logischen Standpunkt sind beide Wege gleichberechtigt, da man jeden dieser Begriffe durch den anderen definieren und dann alle Axiome und Sätze über den einen Begriff in gleichbedeutende Sätze über den anderen übersetzen kann. Schurs Weg hat jedoch drei Vorteile: Einerseits paßt die axiomatische

Charakterisierung der Bewegungen als eine Untergruppe der affinen Abbildungen mit spezifischen eingeschränkten Freiheitsgraden besser in die gruppentheoretische Klassifikation der Geometrien nach Klein. Andererseits läßt sich Kongruenz von Strecken und allgemeiner von beliebigen Mengen oder Figuren in der physischen Realität natürlich nur verifizieren, indem man diese versuchsweise zur Deckung bringt (das Abmessen einer Strecke mit einem skalierten Lineal oder Meßband ist ein solches Experiment), also Bewegungen ausführt, während umgekehrt der Versuch, eine Abbildung als Bewegung, also als starr, nachzuweisen, darauf hinausläuft, für ein gewisses System von Streckenpaaren die Kongruenz nachzuweisen, was wieder nur mit Hilfe von Bewegungen möglich ist. Drittens schließlich läßt die Art, wie Kongruenz mittels Bewegung definiert wird, sich auf beliebige andere Abbildungsgruppen verallgemeinern und befördert fruchtbares Analogiedenken. Zu einer konsequenten Axiomatisierung im Schurschen Sinne gehört allerdings, die Bewegungen als eine neue Sorte von Grunddingen aufzufassen und ihre Beschaffenheit als eindeutige Abbildungen der Punktmenge auf sich sowie die Operation der „Anwendung“ einer Bewegung auf einen Punkt ebenfalls durch Axiome zu charakterisieren. Davon war Schur natürlich weit entfernt.

Hilbert hatte das geometrische Instrument des Streckenabtragers eingeführt, mit dem sich aus vier axiomatisch als existent vorausgesetzten, nicht komplanaren Punkten gerade ein minimales Modell der Axiome (ausgenommen Vollständigkeit) von Hilbert konstruieren läßt und das gleichwertig zur Abgeschlossenheit des Koordinatenkörpers bezüglich derjenigen Operation ist, die aus Strecken a, b die Strecke $\sqrt{a^2 + b^2}$ bildet. Hingegen führte Schur ein elementares Axiom ein, welches stärker als der Streckenabtrager die Abgeschlossenheit des Koordinatenbereichs bezüglich der Operation $\sqrt{a}$ für $a > 0$ besagt und gleichzeitig sichert, daß die notwendige Bedingung für das Schneiden zweier Kreise — die beiden Radien und der Abstand der Mittelpunkte müssen den drei Dreiecksungleichungen genügen — auch hinreichend sind. Dieses Schursche Axiom bildet demnach zusammen mit den anderen elementaren Axiomen den passenden Rahmen für eine wirkliche Elementargeometrie des Konstruierens mit Zirkel und Lineal, während das Stetigkeitsaxiom zwar die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ als einziges Modell hat, aber für elementargeometrische Zwecke zu viel fordert und die Geometrie mit allen Problemen der reellen Zahlen (wie Überabzählbarkeit) belastet. Schur bezieht sich übrigens auf das Buch von Veronese, der sich in der Tat schon 1891 ausführlich mit den Abgeschlossenheitsfragen der Koordinatenbereiche bezüglich der verschiedensten Operationen beschäftigt und in diesem Zusammenhang auch die Frage der Existenz der Schnittpunkte von Kreisen diskutiert hatte [Veronese deutsch 1894, Buch

II, 1. Kap. 16]. Dieses sehr umfangreiche Buch ist jedoch fast ungenießbar. Klein schrieb in dem oben erwähnten Bericht „Ich finde es äusserst schwer, dem Gedankengange des Verfassers auch nur ein Stück weit zu folgen“ [a.a.O. S. 596]. Auch Hilbert, Killing, Peano und noch Jahrzehnte später Freudenthal äußerten sich negativ darüber [Toepell S. 56].

Zu den historischen Kuriositäten zählt, daß der Logiker G. Frege heftige, aber aus heutiger Sicht an den wesentlichen Mängeln völlig vorbeigehende Kritik an der formalen Seite von Hilberts „Grundlagen“ übte [Jahresber. DMV 12 (1903), 319-324 u. 368-375] und daß Th. Vahlen (der Verfasser des in 7.3 zitierten Buches über geometrische Konstruktionen) 1905 eine „Abstrakte Geometrie“ veröffentlichte, die sich ohne wesentlich neuen Inhalt in formalen Spitzfindigkeiten erging und viele Fehler enthielt. Die vernichtende Kritik durch M. Dehn [Jahresber. DMV 14 (1905), 535-537, Erwiderung Vahlens 591-595], die Vahlen sich damit einhandelte, ließ ihn für immer zum Feind jeglicher strukturbetonter mathematischer Arbeit, zum angewandten Mathematiker in einem damals schon veralteten Sinn und schließlich zu einem der wenigen prominenten Nazis (Dehn war Jude) und Exponenten der „anschaulichen deutschen Mathematik“ unter den deutschen Mathematikprofessoren werden.

Viele mehr oder weniger direkt an Hilberts „Grundlagen“ anschließende Forschungen über Varianten des axiomatischen Aufbaues mittels anderer Begriffe oder anderer Axiomensysteme und die sich dann durch entsprechende Abänderungen jeweils ergebenden „benachbarten“ Theorien (siehe z.B. [Bernays 1959]) brachten neues geometrisches Wissen und auch eine Klarheit über die gegenseitigen Beziehungen von Begriffen und Sätzen, wie sie Hilbert selbst zeit seines Lebens nicht erreichen konnte. A. Padoa, ein Schüler Peanos, hatte 1900 eine Methode bekannt gemacht, mit der man die Nichtdefinierbarkeit eines Begriffes b durch ein gegebenes Begriffssystem B nachweisen kann: Da alle durch B definierbaren Begriffe bei jedem zu B gehörigen Automorphismus invariant bleiben, genügt es, in einem Modell einen B -Automorphismus anzugeben, der b nicht invariant läßt. Damit ließ sich nun u.a. beweisen, daß die Kongruenz nicht durch die Zwischenrelation und die Zwischenrelation nicht durch die Inzidenzrelationen definierbar ist (während Definitionen in umgekehrter Richtung möglich sind), so daß unter den Hilbertschen Grundbegriffen eine echte Hierarchie besteht. In diesem Zusammenhang wurde auch klar, daß das noch von Hilbert aus traditionellen Gründen weit hinten plazierte Parallelenaxiom in die affine Inzidenzgeometrie, also an den Anfang des heute üblichen hierarchischen Aufbaus Inzidenz-, Anordnungs-, Bewegungsgeometrie gehört. Die in den dreißiger Jahren gereifte mathematische Logik machte den grundsätzlichen Unterschied zwischen elementarer Theorie (also auch dem

Begriff Elementargeometrie, der bis dahin reichlich intuitiv benutzt worden war) und den nichtelementaren Axiomen wie dem Archimedischen oder dem Stetigkeitsaxiom deutlich.

Dennoch ist den meisten Geometern dieser Forschungsrichtung nicht bewußt geworden, daß ihre Arbeit sich im Grunde nur auf der Ebene der Manipulation mit formalisierten Sprachen bewegt. Sobald Begriffssysteme als gegenseitig definierbar nachgewiesen sind, ist die gegenseitige Übersetzung von Axiomen und Sätzen Routine. Änderungen gänzlich anderer Art am axiomatischen System gehen wiederum auf J. Hjelmslev zurück. Seine „Geometrie der Wirklichkeit“ (1916) und „Natürliche Geometrie“ (1928) übte Kritik an der traditionellen Idealisierung, daß z.B. auch beliebig dicht beieinander gelegene Punkte eindeutig verbindbar sein sollen. Dies ist seit den siebziger Jahren in der sich dann entfaltenden Intervallmathematik aufgegangen (siehe z.B. [Schreiber 1984]).

Das Ergebnis von A. Tarski 1940, daß eine geeignet definierte elementare Teiltheorie der vollen euklidischen Geometrie entscheidbar ist, läutete eine neue Qualität in den Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen (und auch der hyperbolischen und anderer „klassischer“ geometrischer) Theorien ein. Nun wurden diese Theorien wahrhaft nur noch als Mengen von Zeichenreihen aufgefaßt, die es nach den Kriterien von Aufzählbarkeit, finiter Axiomatisierbarkeit, Entscheidbarkeit, Definierbarkeit, oder Komplexität zu untersuchen gilt. Einen guten Überblick hierüber gibt [Schwabhäuser/Szmielew/Tarski]. In eine etwas andere Richtung gehen die Beiträge von Engeler, Schreiber, Seeland u.a. seit 1967, die die geometrischen Konstruktionen als Modellfall von Algorithmen in beliebigen axiomatisch charakterisierten Strukturen behandeln. [Schreiber 1984] bezieht dabei auch nichteuklidische Geometrien, intervallmathematische und andere Gesichtspunkte der praktischen Geometrie ein.

8.2 Totale Abstraktion?

Wie wir nun sehen werden, hat das 19. Jh. fast alle wesentlichen Begriffe und Fragestellungen hervorgebracht, auf deren Basis sich die Mathematik im 20. Jh. rasant in abstrakte Höhen aufschwingen sollte, die von niemand mehr ohne gründliches Studium verstanden werden können. (Verstehen bezieht sich dabei nicht nur auf die technischen Details, sondern auch auf Inhalt und Zielstellungen.) Im Rahmen dieser Entwicklung löste sich insbesondere derjenige Teil der Mathematik, der noch im 19. Jh. zumindest insofern als Geometrie erkennbar war, als er Begriffe und Sachverhalte des gewöhnlichen euklidischen Raumes in naheliegender Weise verallgemeinerte oder unter neuen Gesichtspunkten betrachtete, in einen mathematischen Stil auf, der ursprünglich-geometrische Begriffe auf völlig ungeometrische Objekte und Problemsituationen überträgt.

Der Begriff des Vektorraumes ist, auch nach der ersten axiomatischen Darstellung durch Peano, am Ende des 19. Jhs. immer noch mit dem R^n oder dem K^n (wobei K ein anderer Koordinatenkörper, insbesondere der der komplexen Zahlen ist), also mit der Existenz einer endlichen Basis, verknüpft. Den aus heutiger Sicht so naheliegenden Schritt, diese letztere Einschränkung fallenzulassen und mindestens Koordinatenvektoren unendlicher Länge, also abzählbare Zahlenfolgen, (a_i) der gliedweisen Addition und Skalarmultiplikation zu unterwerfen, wobei dann, wenn man ein inneres Produkt, also Längen- und Winkelmessung haben will, der Bereich der Folgen (a_i) auf solche mit konvergenter Quadratsumme beschränkt werden muß, konnte aus den Bedürfnissen der Geometrie oder der reinen linearen Algebra heraus offenbar nicht gegangen werden. Andererseits waren die Mathematiker ja schon seit Bunjakowski und Schwarz darauf aufmerksam geworden, daß für Funktionen f, g mit dafür hinreichenden Voraussetzungen sich das bestimmte Integral von fg wie ein inneres Produkt verhält. Das schließt ein, daß auf einer Menge von Funktionen mit einheitlichem Definitionsbereich eine lineare Struktur durch die Operationen $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(cf)(x) = cf(x)$ vorliegt, die den gleichen Gesetzen wie die gewöhnliche Vektoraddition und Skalarmultiplikation genügt. Allgemein gesagt, gibt es im Laufe des 19. Jhs. eine Vielzahl von Bestrebungen, algebraisches Operieren formal auf Probleme der Analysis zu übertragen, bis hin zu solchen, damals auf ziemlich schwankender Grundlage stehenden Rezepten, einen Differential- oder Integral„Operator“ (diesen Begriff gab es natürlich noch nicht) in der Form $E - A$ (mit identischer Operation E) zu schreiben und dann den inversen Operator $(E - A)^{-1}$ in die unendliche Reihe $E + A + A^2 + \dots$ aufzulösen. Eine zentrale Rolle spielten derartige Techniken ab etwa 1895 in den Arbeiten von V. Volterra, I. Fredholm und Hilbert über lineare Integralgleichungen. Hilberts Schüler E. Schmidt hat dann in seiner Dissertation 1907 und daran anschließenden Arbeiten den „geometrischen Kern“ dieser Techniken klar herausgearbeitet, den heute als Hilbertraum bezeichneten Begriff eines nicht mehr notwendig endlich-dimensionalen Vektorraumes mit abzählbarer Basis und positiv definitem innerem Produkt geschaffen und gezeigt, wie man in einem solchen Raum immer eine orthonormale Basis und mit ihrer Hilfe einen Isomorphismus zum Standardraum der oben bereits erwähnten quadratisch summierbaren Folgen herstellen kann. Ein Kapitel seiner Arbeit von 1908 trägt direkt den Titel „Geometrie in einem Funktionenraum“. Der Raum der auf einem gegebenen Definitionsbereich integrierbaren Funktionen war jedoch zunächst nicht vollständig im Sinne der Konvergenz beliebiger Cauchyfolgen. F. Riesz und E. Fischer hatten aber etwa zur gleichen Zeit (1907) gezeigt, wie man ihn unter Benutzung des Lebesgueschen Integralbegriffs metrisch

vervollständigen kann. Auch dies ist letzten Endes eine Frucht der neuen Art geometrischen Denkens in der Analysis, womit gemeint ist, daß man als „Punkte eines Raumes“ zunehmend Funktionen, Operatoren, Mengen, ... ansah. Die heute übliche Art der Definition und axiomatischen Behandlung der Hilberträume und deren Verallgemeinerung zu den Hermiteschen Räumen (im Falle eines komplexwertigen Skalarprodukts) findet man übrigens erst 1929 bei J. v. Neumann.

Wenden wir uns einer anderen Quelle dieses neuen geometrischen Denkens in der Analysis zu. Seit dem Beginn systematischer Fehlerbetrachtungen konkurrieren dort eine „pessimistische“ Variante, die die maximal mögliche Abweichung zwischen exaktem Objekt und Näherungsobjekt bestimmen will, und eine „realistische“ Variante, die so etwas wie den statistischen Mittelwert der Abweichung betrachtet. Sind die Objekte Funktionen (das können z.B. auch Folgen von Meßwerten sein, da ja eine Folge nichts anderes ist als eine auf der Menge der natürlichen Zahlen definierte Funktion), so führt die realistische Variante auf einen Wert, der sich durch geeignetes Integrieren oder Aufsummieren der Differenzen zwischen exakten und angenäherten Werten ergibt. Gauß hat viel Mühe darauf verwendet, immer neue Begründungen dafür zu geben, daß man die Summe der Quadrate der Differenzen bzw. im Fall stetiger Funktionen das Integral des Quadrats der Differenz als Maß der Abweichung nehmen soll. Erst rund 100 Jahre später wurde klar, daß dies genau auf die Metrik der Hilberträume führt. Die pessimistische Variante, die ihren Anfang in der Theorie der Mechanismen von Tschebyschew nimmt, betrachtet im Falle von Funktionen das Maximum des Betrages der Differenz als Maß der Abweichung. Im Laufe des 19. Jhs. wurde Schritt für Schritt klar: Eine sachgemäße Voraussetzung für die Existenz dieses Maximums ist, daß der gemeinsame Definitionsbereich beschränkt und abgeschlossen (oder etwas Äquivalentes) ist und die Funktionen dort stetig sind. Dann hat man aber wieder als Grundmenge einen Vektorraum von Funktionen, sehr ähnlich dem des Hilbertraumes, aber mit einer ganz anderen Metrik, die sich diesmal nicht auf ein inneres Produkt gründen läßt (und folglich auch kein Winkelmaß liefert) sondern lediglich jedem Vektor x eine Norm oder Länge $|x|$ mit gewissen Grundeigenschaften³¹ zuweist, so daß der Abstand zweier Vektoren x, y durch $|x - y|$ gemessen werden kann.

Die axiomatische Verallgemeinerung dieser speziellen Norm zum Begriff des (eventuell zusätzlich metrisch vollständigen) normierten Vektorraumes geschah nach verschiedenen vorhergehenden Ansätzen (u.a. H. Lebesgue 1910 und

³¹Die eine Norm charakterisierenden Axiome sind

(1) $|x| \geq 0$, (2) $|x| = 0$ genau dann wenn $x = 0$, (3) $|\lambda x| = |\lambda||x|$, (4) $|x + y| \leq |x| + |y|$

1913) 1922 in der Dissertation von St. Banach, nach dem vollständige normierte Räume heute benannt werden. Es ist aber sehr merkwürdig, daß H. Minkowski bei der Verfolgung zahlentheoretischer Probleme schon ab 1896 für den endlichdimensionalen Fall auf den Begriff des normierten Vektorraumes kam. Er stellte fest, daß es zur Festlegung eines mit der Vektorstruktur verträglichen Abstandes im $\mathbb{R}^n$ nur nötig ist, die Menge derjenigen Vektoren (heute: Eichkörper) anzugeben, deren Norm 1 beträgt, und daß dies eine beliebige konvexe und bezüglich des Koordinatenursprunges zentralsymmetrische Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ sein kann. (Konvexität bedeutet dabei Gültigkeit der Dreiecksungleichung, Zentralsymmetrie bedeutet: $|x| = |-x|$.) Ist der Eichkörper der Einheitskreis bzw. seine höherdimensionale Verallgemeinerung, so bekommt man die Metrik des euklidischen bzw. Hilbertraumes. Ist er von zu den Koordinatenachsen parallelen Hyperebenen begrenzt (also im zweidimensionalen Fall ein achsenparalleles Quadrat der Seitenlänge 2), so bekommt man die (Tschebyschewsche) Maximumnorm, ist er ein Quadrat, dessen Ecken die vier Punkte mit den Koordinaten 1, -1 auf den Achsen sind, oder die entsprechende n -dimensionale Verallgemeinerung, so bekommt man als Norm die Summe der Beträge der Koordinaten. Damals hat wohl niemand daran gedacht, daß die letztgenannte Metrik zugrundeliegt, wenn man, wie in einer Großstadt mit rechtwinklig kreuzenden Straßen, nur Wege zurücklegen kann, die sich aus zu den Achsen parallelen Strecken zusammensetzen — daher wird diese Metrik heute gern als Manhattan-Metrik bezeichnet — und daß derartige Metriken sogar im „trivialen“ zweidimensionalen Fall einmal eine praktische Rolle beim Entwurf elektronischer Schaltungen spielen würden. 1935 zeigten J. v. Neumann und P. Jordan, daß die sogenannte Parallelogrammregel

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2),$$

(geometrisch: die Summe der Quadrate der Diagonalen eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten), deren Gültigkeit für eine mittels innerem Produkt definierte Norm leicht nachgerechnet werden kann, auch hinreichend dafür ist, daß eine gegebene Norm aus einem inneren Produkt abgeleitet werden kann (Aufgabe 8.2.1).

Wir haben zuletzt ständig von „Metriken“ gesprochen und dabei stillschweigend vorausgesetzt, daß der Leser diesen Begriff kennt oder wenigstens eine zutreffende intuitive Vorstellung davon hat. Allgemein ist ein metrischer Raum ein Paar aus einer Menge M und einer in M definierten Abstandsfunktion d , so daß für beliebige $x, y, z \in M$ gilt

1. $d(x, y)$ reell und nichtnegativ.
2. $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.

3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Dieser Begriff ist zugleich sehr anschaulich und sehr abstrakt. Er wurde in seiner eben definierten allgemeinen Gestalt, ebenfalls aus funktionalanalytischen Beweggründen, 1906 von M. Fréchet eingeführt, der Name „metrischer Raum“ wurde jedoch anscheinend erst 1914 von F. Hausdorff geprägt. Mit dem Begriff des metrischen Raumes ist die naheliegende Erkenntnis verbunden, daß in ein und derselben Grundmenge verschiedene Metriken möglich sind. Auch dazu brauchte die Geometrie offenbar die Hilfe der Analysis, obwohl man schon viel früher der Situation begegnet war, daß es z.B. auf krummen Flächen und insbesondere auf der Kugeloberfläche immer eine innere Metrik (kürzeste Verbindung innerhalb der Fläche) und eine Metrik in bezug auf den umgebenden Raum (chordaler Abstand) gibt. Natürlich haben Gauß und alle ihm folgenden Differentialgeometer das gewußt, aber es schien sich nicht zu lohnen, darauf hinzuweisen oder darüber besonders nachzudenken.

Am Begriff der Metrik hängen alle grundlegenden Begriffe der Analysis: die „ ϵ – Umgebung“ und damit die Begriffe innerer, äußerer, Begrenzungspunkt, Konvergenz, Stetigkeit, offene und abgeschlossene Menge, Kompaktheit, Zusammenhang usw., aber auch der Begriff der Cauchyfolge und der metrischen Vollständigkeit. Aus dieser Perspektive bekommen viele zum Teil alte Sätze der Analysis einen neuen Sinn. Z.B. hatte Ch. Gudermann schon 1838 den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen, der dann erst gegen Ende des 19. Jhs. von seinem bedeutendsten Schüler K. Weierstraß allgemein bekannt gemacht wurde. Der klassische Satz, daß eine auf einem kompakten Definitionsbereich M gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen gegen eine stetige Grenzfunktion konvergiert, bedeutet nun nichts anderes als die metrische Vollständigkeit des „Raumes der auf M stetigen Funktionen“ bezüglich der Maximumnorm dieses Vektorraumes. So bildet der Begriff der Metrik den wichtigsten Schlüssel zur Übertragung von geometrischen Konzepten in andere Gebiete der Mathematik, und wenn es heute darum geht, Begriffe wie Näherungslösung oder Maß einer Abweichung in Bereiche zu tragen, in denen die Mathematik erst Fuß fassen soll, so ist die entscheidende Frage meist wieder die nach geeigneten Metriken in dem jeweiligen Bereich. Dabei kann die innermathematische Erkenntnis, daß es in irgendeiner Grundmenge niemals von Natur aus nur eine ganz bestimmte Metrik gibt, vor Irrtümern und falschen Ansätzen schützen. Für die eigentliche Geometrie bedeutete aber die explizite Prägung des Begriffes Metrik das Entstehen einer neuen und sehr fruchtbaren Teildisziplin „allgemeine metrische Geometrie“ (häufig etwas mißverständlich

mit der Konvexgeometrie gleichgesetzt). Eine zusammenfassende Darstellung „Die innere Geometrie der metrischen Räume“ von W. Rinow erschien 1961.

Auf der Grundlage des Begriffes metrischer Raum ist es möglich, aus ursprünglich gegebenen Metriken in gewissen Räumen $R_1, R_2, \dots$ Metriken in daraus abgeleiteten, dann meist abstrakteren Räumen zu gewinnen. Z.B. kann man die Art und Weise, wie aus dem natürlichen Abstand zweier reeller Zahlen die „pythagoreische“ Metrik des Hilbertraumes oder auch die Metriken der Banach-Minkowski-Räume gewonnen werden, sofort zu Techniken verallgemeinern, Metriken mit verschiedenen Eigenschaften in kartesischen Produkten von Mengen aus Metriken in den einzelnen Faktormengen zu definieren. Hausdorff führte 1914 eine Methode ein, den Abstand zweier kompakter Teilmengen eines metrischen Raumes zu definieren. So wird die Menge aller kompakten Teilmengen des gegebenen Raumes bei Hausdorff ihrerseits zu einem metrischen „Hyperraum“. Zugleich zeigte er dabei, wie man aus einem zunächst unsymmetrischen Abstandsbegriff (wie er z.B. auch im Gelände vorkommt, wo der Rückweg bergab viel „kürzer“ sein kann als der Hinweg bergauf) einen symmetrischen gewinnen kann. (Für Details und elementare Anwendung in der Fehlertheorie geometrischer Operationen siehe Aufgabe 8.2.2).

Wenn wir oben schrieben, daß die grundlegenden Begriffe der Analysis auf dem Begriff der Metrik beruhen, so war dies bewußt nur eine Halbwahrheit. Zwar ist die jeweilige Metrik für das Messen und Rechnen, also auch für den gesamten numerischen Teil der Analysis unverzichtbar, aber die meisten grundlegenden Sätze kann man auch aus noch abstrakteren Voraussetzungen bekommen, sofern sie nämlich ihrer Natur nach topologisch sind. Wir erinnern uns, daß die ersten Begriffe und Sätze der allgemeinen Topologie wie innerer bzw. Begrenzungspunkt auf einer metrischen Grundlage standen. Beschränktheit und Abgeschlossenheit eines Definitionsbereichs sind wichtig für die Gültigkeit etlicher solcher Sätze. Stetigkeit von Funktionen beruht auf dem Begriff der Epsilonumgebung. Es brauchte viele kleine Schritte, allmählich diejenigen Begriffe und Sätze, für die Metrik wirklich gebraucht wird, von denjenigen zu trennen, bei denen die Metrik nur dazu dient, topologische Begriffe zu definieren. Zum Beispiel zeigte E. Heine 1872, daß der oben zitierte Satz über die Stetigkeit der Grenzfunktion bei gleichmäßiger Konvergenz der Funktionenfolge auf dem heute als Heine-Borelscher Überdeckungssatz bezeichneten Sachverhalt beruht, daß man aus jeder Überdeckung des Definitionsbereichs M mit Epsilonumgebungen eine endliche Teilmenge auswählen kann, die M auch schon überdeckt. Damit ist, wie man später erkannt hat, die anscheinend metrische notwendige Eigenschaft von M , beschränkt und abgeschlossen zu sein, auf die äquivalente topologische Eigenschaft der Kompaktheit reduziert,

in der die Metrik nur noch indirekt zur Definition des Umgebungsbegriffs herangezogen ist.

Als Quintessenz aus einer Reihe derartiger Einsichten führten F. Riesz (1908), auf anderen Begriffen aufbauend H. Lebesgue und L. E. J. Brouwer und schließlich 1914 F. Hausdorff in seinem epochalen Buch „Grundzüge der Mengenlehre“ den abstrakten Begriff des topologischen Raumes ein. Bei Hausdorff ist das eine Grundmenge, in der als einzige geometrische Struktur nur noch ein System von Teilmengen als „offen“ ausgezeichnet ist, welches einigen einfachen Axiomen genügen muß, z.B. daß der Durchschnitt von zwei bzw. die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen wieder offen ist. Es stellte sich heraus, daß man (zum Teil nach gewisser Verschärfung der Axiome) die gesamte allgemeine oder mengentheoretische Topologie und damit auch weite Teile der Analysis auf einer so abstrakten Begriffsbasis aufbauen kann. Es wurde erkannt, daß in einer festen Grundmenge viele verschiedene Metriken zur gleichen topologischen Struktur dieses „Raumes“ führen können, aber natürlich auch verschiedene Topologien dort möglich sind (Aufg. 8.2.3). Die allgemeine mengentheoretische Topologie entwickelte sich auf dieser Grundlage schnell zu einem blühenden und eigenständigen Forschungsgebiet, welches sich in gewisser Weise aus der Geometrie ausgegliedert hat bzw. der Analysis näher steht als der eigentlichen Geometrie. Dies fand seinen äußeren Ausdruck u.a. darin, daß eine der ersten mathematischen Zeitschriften, die nicht mehr der gesamten Mathematik, sondern einigen speziellen Gebieten gewidmet war, die 1920 in Polen gegründete „Fundamenta Mathematicae“, sich genau den Gebieten Mengenlehre, Topologie und (höhere) Analysis zuwandte, und daß einer der ersten internationalen Kongresse (1935), die nur einem Teilgebiet der Mathematik gewidmet waren, ebenfalls der Topologie galt.

Aus der Fülle der neu entstandenen Fragen seien nur zwei herausgegriffen: Wie kann man die Dimension eines solchen abstrakten topologischen Raumes definieren und zwar natürlich so, daß sie einerseits bei topologischen Abbildungen³² auf einen anderen Raum invariant bleibt, andererseits in solchen Räumen, in denen auf Grund von gegebenen Koordinatisierungen schon eine „natürliche Dimension“ durch die Anzahl der nötigen Koordinaten existiert, mit dieser natürlichen Dimension übereinstimmt? Dieses Problem wurde nach Vorarbeiten von E. Brouwer und anderen endgültig 1922 durch K. Menger und P. Urysohn gelöst. Wann und wie kann man in einem topologischen Raum eine Metrik einführen, die die gegebene Topologie erzeugt? Diese Frage wur-

³²Eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen heißt topologisch, wenn sie eindeutig ist und in beiden Richtungen offene Mengen in offene überführt (gleichbedeutend: f und f^{-1} sind stetig).

de 1924/25 ebenfalls von Urysohn beantwortet mit weiteren Beiträgen u.a. 1950/51 von J. Nagata und J. M. Smirnov. Urysohn präparierte die (erstaunlich schwachen) Bedingungen heraus, unter denen ein topologischer Raum sogar homöomorph zu einer Teilmenge des Standard-Hilbertraumes ist. Gegenwärtig ist auch die praktische Bedeutung dieser Frage klar: In einem neuen Gegenstandsbereich (Man denke z.B. an Ökonomie oder Psychologie!) ist es leichter, intuitiv zu sagen, was benachbart ist und was nicht, als ein konkretes Maß der Distanz anzugeben. Man hat also häufig zuerst eine Topologie und sucht im nachhinein eine dazu passende Distanzmessung. Aus dem Geist der damaligen Zeit heraus kann man aber mit hoher Wahrscheinlichkeit annehmen, daß die genannten Autoren von einem rein theoretischen Interesse zu ihren Untersuchungen motiviert wurden³³.

Zu den grundsätzlichen Erträgen des allgemeinen „Raumbegriffs“ gehört eine Anzahl von sogenannten Fixpunktsätzen, die man alle so interpretieren kann, daß die Konvergenz bestimmter approximativer Verfahren der Analysis bzw. numerischen Mathematik im Grunde darauf beruht, die Objekte, auf die diese Verfahren angewendet werden, als Punkte eines geeigneten Raumes und die Verfahren als geeignete geometrische Abbildungen dieses Raumes in sich zu deuten und dann von topologischen Eigenschaften dieses Raumes wie metrische Vollständigkeit oder Kompaktheit Gebrauch zu machen. Die ersten und berühmtesten dieser Sätze waren der von Brouwer (1912): Jede stetige Abbildung einer zur n -dimensionalen Vollkugel homöomorphen Menge in sich hat wenigstens einen Fixpunkt, und der von Banach (1922): Jede kontrahierende Abbildung f eines vollständigen metrischen Raumes in sich hat genau einen Fixpunkt. Dabei heißt f kontrahierend, wenn es eine Konstante $c < 1$ gibt, so daß für den Abstand zweier beliebiger Punkte x, y und ihrer Bildpunkte gilt: $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$. Der Brouwersche Fixpunktsatz wurde 1930 von J. P. Schauder auf konvexe und kompakte Teilmengen beliebiger Banachräume verallgemeinert (Aufg. 8.2.4). Darin ist der Brouwersche Fixpunktsatz als echter Spezialfall enthalten, aber gerade ihn benötigt man zum Beweis des Schauderschen Satzes. (Beide Beweise z.B. in [Naas/Tutschke 1986].) Eine bedeutende Verallgemeinerung klassischer geometrischer Prozeduren stellte auch die Stone-Čech-Kompaktifizierung (1937) dar: In dem allgemeinen Problemkreis, geometrische Räume durch Hinzunahme idealer (unendlich ferner) Elemente „abzuschließen“, spielt die Abschließung durch einen einzigen unendlich fernen Punkt, wie sie in der Möbius-Geometrie vorgenommen wird,

³³Der Verfasser dieser Zeilen glaubt sich umsomehr zu dieser Einschätzung berechtigt, als er Anfang der sechziger Jahre Assistent in einem Institut war, das man damals als eine Hochburg der mengentheoretischen Topologie bezeichnen konnte.

eine Minimum-Rolle. Die Erweiterung eines hyperbolischen Raumes durch all die vielen idealen Punkte, wie sie durch die Kleinsche Einbettung des hyperbolischen in den projektiven Raum nahegelegt wird, aber auch die projektive Abschließung einer affinen Ebene, sind sozusagen „mittlere Fälle“, immer mit dem Ergebnis, daß — vom topologischen Standpunkt — eine nicht kompakte Menge in eine kompakte eingebettet wird. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung liefert nun das maximale Resultat eines solchen Einbettungsprozesses, bei welchem „möglichst viele“ Punkte adjungiert werden.

Es ist heute weitgehend vergessen bzw. verdrängt, daß die Frage nach Maßzahlen (Länge, Fläche, Volumen, . . .) jahrtausendlang eine geometrische (und eine der wichtigsten geometrischen) war. Maßtheorie ist heute ein eigenständiges mathematisches Gebiet und steht infolge der wesentlichsten Anwendungen der Stochastik womöglich näher als der Geometrie, aber der Weg zur modernen Maßtheorie gehört noch der Geometrie an. Cauchy hatte 1821 in seinem „Cours d' Analyse“ als Grenzwert von Ober- und Untersummen denjenigen Begriff definiert, den man heute als bestimmtes Integral bezeichnet, und damit die bislang nur intuitive Beziehung zwischen Stammfunktion und Flächeninhalt auf eine klare Grundlage gestellt. 1823 bewies er die Existenz für stetige Funktionen. Riemann hat dies 1854 in seiner Habilitationsschrift in einem kurzen Abschnitt mit der Überschrift „Über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit“ ganz beiläufig zum Begriff der Riemannintegrierbarkeit verallgemeinert. Den zugehörigen Inhaltsbegriff für beliebige Mengen (die also nicht die Gestalt $\{(x, y)/x \in Def_f \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$ einer „Ordnatenmenge“ bezüglich einer geeigneten Funktion f haben müssen) schufen 1887 etwa gleichzeitig Peano und Jordan und machten zugleich klar, daß für eine beliebige beschränkte Menge der „äußere Inhalt“ echt größer als der „innere“ sein kann, beide wohl auch in dem Bewußtsein, daß die Bedürfnisse der Analysis zu dieser Zeit bereits einen über den Riemann-Jordan-Peano-Inhalt hinausgehenden, nämlich total-(d.h. abzählbar)additiven Maßbegriff erforderten. Erste Versuche, totaladditive Maße zu definieren, bei denen also insbesondere jede abzählbare Menge automatisch das Maß Null bekommt) gehen auf A. Harnack (1881), O. Stolz (1884), G. Cantor (1884) und E. Borel (1894) zurück. (Einzelheiten siehe [Dieudonné 1985], Kap. 6.3 und 6.9.) 1902 fanden diese Bestrebungen einen vorläufigen Abschluß mit der Schaffung des Maß- und Integralbegriffs von H. Lebesgue. Lebesgue stellte auch 1905 die Frage, ob der Bereich derjenigen Mengen, denen ein totaladditives Maß zugeordnet werden kann, noch weiter ausdehnbar ist. Im gleichen Jahr konstruierte G. Vitali unter Benutzung des Auswahlaxioms ein Gegenbeispiel einer beschränkten Menge V , von der abzählbar viele kongruente und paarweise disjunkte

Exemplare in einem gewissen beschränkten Intervall enthalten sind (weshalb das Maß von V , wenn es definierbar wäre, Null sein müßte), und ein kleineres Intervall lückenlos überdecken (weshalb das Maß von V nicht Null sein kann). Nachdem das Problem einer für alle beschränkten Mengen definierten totaladditiven Maßfunktion damit negativ beantwortet war, zeigte Hausdorff 1914 in einem Nachtrag zu seinen „Grundzügen“, daß im drei- und folglich erst recht im höherdimensionalen Fall nicht einmal ein endlich-additiver Inhalt für beliebige beschränkte Mengen definierbar ist. Er zerlegte, wieder mit Hilfe des Auswahlaxioms, die Kugeloberfläche und damit auch die Vollkugel in drei kongruente und paarweise disjunkte Mengen A, B, C und einen Rest mit notwendig verschwindendem Inhalt, so daß auch A kongruent zur Vereinigung von B und C ist. Aus diesem Paradoxon kann man zwei mögliche Folgerungen ziehen: Entweder ist es ein weiteres Argument (neben vielen anderen), das Auswahlaxiom zu verwerfen (Es ist aber bis heute nicht sicher, ob man ein vergleichbares Paradoxon nicht auch ohne Auswahlaxiom erhalten kann), oder die klassische, auf die reellen Zahlen gegründete Geometrie ist aus noch ganz anderen als nur den noch zu diskutierenden „globalen“ Gründen ein sehr schlechtes Modell für physikalische Realität. Übrigens hat Banach 1923, ebenfalls mittels Auswahlaxiom, gezeigt, daß im ein- und zweidimensionalen Fall zwar universell definierte endlich additive Inhaltsfunktionen existieren, aber überabzählbar viele gleichwertige, von denen keine konstruktiv ausgezeichnet werden kann. (Für mehr Details der Geschichte der Maßprobleme siehe [Schreiber 1996b].)

Der Maßtheorie im weitesten Sinne zugehörig ist schließlich noch eine Leistung Hausdorffs: 1919 führte er ein „äußeres Maß“ für beliebige Mengen ein, mittels dessen man ihnen eine im allgemeinen nicht mehr ganzzahlige Dimension zuordnen kann. Diese Hausdorff-Dimension hat im Zeitalter des intensiven Studiums „fraktaler Mengen“ große Bedeutung gewonnen, da sie den Zustand solcher Mengen wie etwa der v. Kochschen Kurve (siehe z.B. [Mangoldt-Knopp, Bd. 2, Nr. 145]) zwischen Ein- und Zweidimensionalität recht gut widerspiegelt.

Im allgemeinen stellen die hier ansatzweise vorgestellten, aus ursprünglich geometrischen Begriffen und Problemen entwickelten, für die Mathematik des 20. Jhs. charakteristischen Theorien neben ihrer innermathematischen und rein erkenntnistheoretischen Bedeutung ein großes Reservoir von Begriffen und Methoden für die verschiedensten neueren Anwendungen dar, aus dem sich sowohl die anwendungsorientierten Bereiche der Mathematik als auch Technik, Natur- und Geisteswissenschaften in häufig unvorhersehbarer Weise bedienen. Es ist jedoch unübersehbar, daß diejenigen Richtungen, die relativ arm an

Algorithmen sind, vielmehr die Feststellung von oft tiefliegenden Sachverhalten zum Gegenstand hatten, heute ihre Hochkonjunktur hinter sich haben.

8.3 Geometrie und Naturwissenschaften

An erster Stelle steht hier die Physik. Es ist allgemein bekannt, welche Rolle die Geometrie und insbesondere deren im 19. Jh. erbrachter Vorlauf für die Ausgestaltung der speziellen und dann der allgemeinen Relativitätstheorie sowie für anschließende kosmologische Hypothesen gespielt hat. Eine Hauptaufgabe des vorliegenden Kapitels wird es sein, den Blick auch auf ganz andere Anwendungen der Geometrie in der Physik, aber auch in Chemie, Biologie und Geowissenschaften zu lenken. Dennoch zunächst zu dem, was jedermann hier erwartet.

Die Ergebnisse des ausgehenden 19. Jhs. zur hyperbolischen, Riemannschen und mehrdimensionalen Geometrie hatten in den mathematisch-naturwissenschaftlich oder auch philosophisch interessierten Kreisen ein geistiges Klima erzeugt, in dem fast jegliche Aussage der Physik über Nichteuklidizität oder Nicht-Dreidimensionalität des physikalischen Raumes von einer Mehrheit ohne großen Widerstand akzeptiert worden wäre. Was aber die experimentell gesicherte Invarianz der Lichtgeschwindigkeit gegenüber gegeneinander bewegten Bezugssystemen (Michelson 1881, verbessert zusammen mit Morley 1887) erzwang, war eine in gewisser Weise trotzdem unvorbereitete Änderung der traditionellen Vorstellungen, indem nicht nur die Zeit in bisher unvorstellbarer Weise in die Geometrie einbezogen sondern auch der so entstehende vierdimensionale Raum mit einer Art von Geometrie versehen werden mußte, an die vorher niemand gedacht hatte. Einstein ist (auch nach eigener Aussage) zumindest am Beginn seiner Karriere ein schwacher Mathematiker gewesen. Als er 1905 unter dem Titel „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ die bald als spezielle Relativitätstheorie bekannte Arbeit veröffentlichte, war sie weniger geometrisch durchsichtig als vielmehr philosophisch kühn, weil hier etwas, was formelmäßig durch H. A. Lorentz schon seit 1895 bekannt und von Poincaré 1905 mathematisch als Gruppe der Lorentz-Transformationen ausgearbeitet worden war, als physikalische Realität bezeichnet wurde. Einstein schrieb: „Beispiele ähnlicher Art sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium“ zu konstatieren, führen zu einer Vermutung, daß dem Begriff der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen . . . Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden Prinzip der Relativität genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche Voraussetzung einführen, daß

sich das Licht im leeren Raum stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustand des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit V fortpflanze ...“ (a.a.O. S. 891).

Daß Einsteins Theorie trotz der fehlenden mathematischen Vorbereitung sehr schnell eine klare geometrische Grundlage erhielt, ist das Verdienst des leider kurz darauf jung verstorbenen Mathematikers H. Minkowski. Er legte 1908 dar, daß man, um ein der Einsteinschen Raumzeit entsprechendes mathematisches Modell zu erhalten, an der bereits ausgearbeiteten Theorie der endlich-dimensionalen euklidischen (oder Hilbert-)Räume lediglich die Voraussetzung streichen muß, daß das die Metrik definierende innere Produkt positiv definit ist. Dann kann die Norm eines Vektors auch rein imaginär oder Null sein, ohne daß er selbst der Nullvektor ist. Im Fall der vierdimensionalen Raumzeit bilden diese letzteren Vektoren, wenn man sie an einem beliebigen Ereignis (Punkt der Raumzeit) anträgt, den „Lichtkegel“, der die von diesem Ereignis erreichbaren Ereignisse von den nicht erreichbaren und rückwärts diejenigen, die einen Einfluß gehabt haben können, von denen trennt, die unabhängig sind. An die Stelle der Kugeln als Orte konstanter Entfernung von einem festen Punkt treten in dieser Geometrie Hyperboloide, und überhaupt stellte sich heraus, daß viele Elemente der projektiven wie der hyperbolischen Geometrie eine Rolle spielen, obwohl der Raum selbst und auch seine niedrigerdimensionalen Schnitte weder projektiv noch hyperbolisch sind. Aus anschaulich didaktischen Gründen betrachtet man häufig nur den von der Zeitachse und ein oder zwei Raumkoordinaten aufgespannten Unterraum, (Abb. 8.3.1).

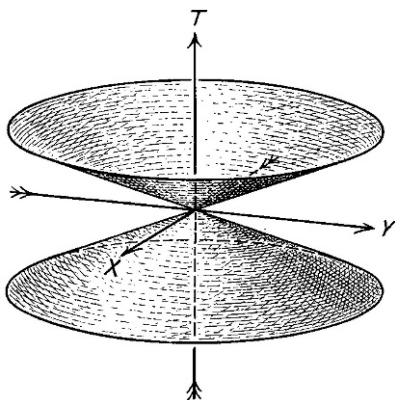


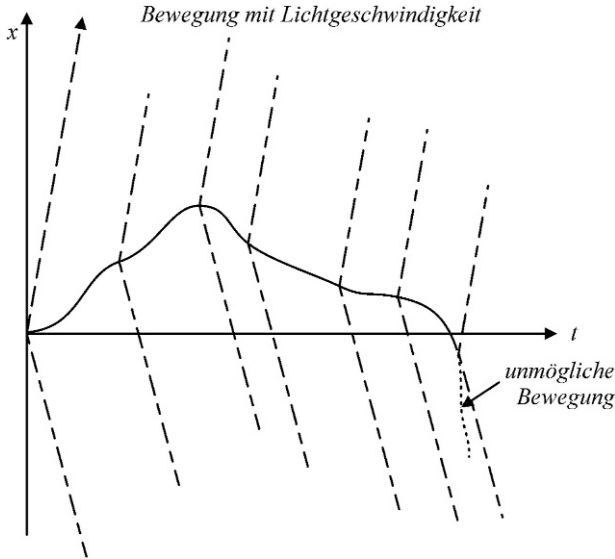
Abb. 8.3.1 Dreidimensionale Raumzeit mit Lichtkegel.

Hier kann man sich sehr gut vorstellen, wie die immer flacher werdenden Kegelmäntel zu einer Doppelebene $T = \text{const.}$ zusammenfallen.

[F. Klein: Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, Springer. Berlin 1928, S.30]

Heute ist diese pseudoeuklidische oder Minkowski-Geometrie (nicht zu verwechseln mit der der Banach-Minkowski-Räume) soweit durchdacht und aufbereitet, daß man sie ohne weiteres mit älteren Schülern behandeln kann [Liebscher 1991]. So wurde aus der großen Erschütterung eine kleine, zumal natürlich die Verhältnisse im Bereich nicht zu großer Geschwindigkeiten mit beliebiger Näherung klassisch bleiben. Am Rande sei hier bemerkt, daß erst die pseudoeuklidische Minkowski-Geometrie den Anstoß gegeben hat, auch die geometrischen Verhältnisse in der nichtrelativistischen Raumzeit, die ja keineswegs euklidisch im Sinne des $\mathbb{R}^4$ sind, analog zu durchdenken. So entsteht als Grenzfall unendlich groß angenommener Lichtgeschwindigkeit aus der pseudoeuklidischen Geometrie die Galilei-Newton-Geometrie, anscheinend zuerst von Klein in seinen Vorlesungen zur nichteuklidischen Geometrie so bezeichnet und dargestellt ([Klein 1928], I. M. Jaglom 1966, siehe auch [EdEM Bd.V].). Der Lichtkegel entartet in diesem Fall zu einer Doppel-Hyperebene (d.h. im oben skizzierten „didaktischen“ Fall einer bzw. zweier Raumachsen zu einer Geraden bzw. Ebene $t_0 = \text{const.}$), welche die in der Zukunft ($t > t_0$) liegenden Ereignisse nachhaltig von denen der Vergangenheit ($t < t_0$) trennt. Die Geschichte eines Materieteilchens, welches im Laufe der Zeit seinen Ort ändert, entspricht (sowohl in der Einstein-Minkowskischen als auch in der Galilei-Newtonschen Raumzeit einer Kurve, welche zu jedem Zeitpunkt aus dem Vergangenheitskegel kommt und in den Zukunftskegel hineingeht, folglich aus rein geometrischen Gründen schlicht über der t-Achse liegt (Abb. 8.3.2). Jedoch ist im Galilei-Fall die Richtung der Zeitachse im Raum ausgezeichnet. Koordinatentransformationen müssen sie auf sich abbilden, können sie also nur translativ in sich verschieben (was dem Übergang zu einem anderen 0-Zeitpunkt entspricht) und den Raum darum orthogonal auf sich abbilden. In der Minkowski-Welt dagegen muß nur der Lichtkegel auf einen mit gleichen Asymptoten abgebildet werden (d.h. sein Schnitt mit dem unendlich Fernen muß invariant bleiben), was genügend Raum für Transformationen läßt, die eine Zeitachse auf eine andere abbilden: Zeit verliert ihren absoluten Charakter.

Der speziellen folgte die allgemeine Relativitätstheorie (erste Mitteilung durch Einstein 1915, vollständige Publikation 1916, eine breiteren Kreisen verständliche Darstellung durch Einstein selbst 1917), 1918 dann das grundlegende Buch aus mathematischer Sicht „Raum, Zeit, Materie“ von H. Weyl, in dem auch das gesamte mathematische Grundwissen auf neue und moderne Art aufbereitet, z.B. erstmals die Cauchy-Bunjakowski-Schwarz-Ungleichung auf die heute übliche Weise hergeleitet wurde (vgl. 7.6). Dieses Buch hatte schon in den ersten fünf Jahren bis 1923 fünf Auflagen. Der Inhalt der allgemeinen Relati-

Abb. 8.3.2 Weltlinie im x - t -Koordinatensystem

vitätstheorie besteht darin, daß die vierdimensionale Raumzeit eine von Ort zu Ort variable, durch die Verteilung der Massen bestimmte Krümmung derart hat, daß die Bahnen bewegter Teilchen unter dem Einfluß der Gravitation in diesem Raum zu Geodätischen werden. Die ersten experimentellen Bestätigungen dieser Theorie bestanden im Nachweis der (sehr langfristigen) Periheldrehung der Merkurbahn und der (sehr geringen) Ablenkung der Lichtstrahlen im Schwerfeld der Sonne, die man nur während einer Sonnenfinsternis beobachten kann. Das mathematische Modell ist nun also die allgemeine Riemannsche Geometrie der vierdimensionalen Raumzeit, also ist auch die Geometrie des Raumes zu jedem festen Zeitpunkt Riemannsch. (Zur Veranschaulichung denke man daran, daß der Schnitt einer gekrümmten Fläche mit einer Ebene im allgemeinen eine gekrümmte Kurve ergibt.) Die Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie verhält sich zu der allgemeinen wie die lineare Tangentialmannigfaltigkeit einer gekrümmten Mannigfaltigkeit zu dieser gekrümmten. Sie gibt also bei nicht zu großer Krümmung (d.h. physikalisch: hinreichend weit von großen Massen entfernt) die Verhältnisse lokal mit hinreichender Näherung wieder. Vom rein geometrischen Standpunkt könnte die Krümmung der Raumzeit nun ermöglichen, daß der gekrümmte Zukunftskegel eines Ereignisses sich mit dem Vergangenheitskegel dieses selben Ereignisses überschneidet und folglich geschlossene Weltlinien möglich sind, also doch „Reisen in die Vergangenheit“. Weitergehende physikalische Überlegungen sprechen allerdings

sehr dagegen, und außerdem könnten höchstens Elementarteilchen eine solche Reise überstehen. Es sei auf die allgemeinverständliche und sehr geometrisch illustrierte Darstellung [Hawking 1997] des aktuellen Standes verwiesen.

Nebenbei ergibt sich aber, daß die ausgedehnten Untersuchungen des späten 19. Jhs. über Raumformen konstanter Krümmung und deren Zusammenhang mit freier Beweglichkeit einiges von ihrer physikalischen Relevanz verlieren. Der wahre Raum kann keine konstante Krümmung haben, weil die Materie in ihm nicht homogen verteilt ist. Nimmt man andererseits eine solche Verteilung als erste Näherung an, so beschreiben die Raumformen konstanter Krümmung ungefähr, was im Großen möglich ist. Aus physikalischen Gründen scheint heute eine statistisch homogene Massenverteilung in einem unendlich ausgedehnten Raum unvorstellbar, weil sie eine unendlich große Gesamtmasse und folglich ein unendlich großes Gravitationspotential ergeben würde. Daher favorisieren fast alle gegenwärtigen kosmologischen Hypothesen unbegrenzte aber zu jedem Zeitpunkt räumlich endliche (und neuerdings auch zeitlich endliche) Modelle. — Ohne in eine eigentlich physikalische Diskussion oder in rechnerische Details einzutreten, haben wir gesehen, in wie mannigfacher Weise die rein geometrischen Theorien des 19. Jhs. den Boden für die relativistische Physik und Kosmologie des 20. Jhs. vorbereitet haben.

Die wahre Revolution in der Physik wurde also nicht von der Relativitätstheorie ausgelöst sondern von der sich ab 1905 entwickelnden Quantenphysik, die den Physikern anfangs gegen ihr Gefühl durch experimentelle Ergebnisse aufge nötigt wurde. Im Gegensatz zu allem oben Skizzierten ist sie selbst in ihren Grundannahmen total unanschaulich, d.h. nicht durch didaktisch aufbereitete geometrische Modelle erklärbar. Umso merkwürdiger ist es, daß die Geometrie (oder Analysis?), freilich in einer ihrer abstraktesten Formen, auch dafür schon eines der benötigten mathematischen Hilfsmittel in Gestalt des Begriffes des (unendlichdimensionalen) Hilbertraumes bereitgestellt hatte. Es sind aber nicht die Elemente dieses Hilbertraumes, die etwas anschaulich Vorstellbares bedeuten. Den „observablen Größen“ der klassischen Physik entsprechen vielmehr lineare Operatoren mit bestimmten Eigenschaften in diesem Raum, und die physikalischen Gesetze werden durch Beziehungen zwischen diesen Operatoren ausgedrückt. Der Begriff der Symmetrie, der ja auch aus der Geometrie kommt, spielt in dieser Physik eine dominierende Rolle. Da dies ein Buch zur Historie ist, dürfen wir erwähnen, daß auch sehr kluge und auf anderen Gebieten erfolgreiche Wissenschaftler große Schwierigkeiten hatten, eine Physik zu akzeptieren, die die klassische Logik und die Prinzipien der Determiniertheit und Kausalität aufgibt und deren mathematisches Rüstzeug nicht mehr klassische Analysis, Vektorrechnung und Differentialgeometrie sind. Auch Einstein

war nicht glücklich über diese Entwicklung und suchte bis zuletzt nach einer Alternative. Von den vielen seltsamen Versuchen, Alternativen zu etablieren, nennen wir den „Rechnenden Raum“ (1969) des Computerpioniers K. Zuse. J. v. Neumann hatte bei seinem Tod 1957 das Konzept des Zellularfeldes hinterlassen: Eine unendlich ausgedehnte zwei- bzw. dreidimensionale Schar von regelmäßig zueinander angeordneten untereinander gleichen Elementarautomaten, die jeweils mit ihren Nachbarn taktweise Signale austauschen und dabei ihre Zustände nach einer einheitlichen Vorschrift im Rahmen einer endlichen Menge von möglichen Zuständen ändern. Zuse schlug vor, den physikalischen Raum als einen solchen, aus nicht weiter zerlegbaren Zellen aufgebauten Raum zu denken, in dem Materie sich nur dadurch bewegt, daß sich Konglomerate von Zuständen benachbarter Zellen taktweise gemeinsam von Zelle zu Zelle fortpflanzen (ähnlich wie im Computerspiel Life). Im Mikrokosmos sind dann Raum und Zeit diskret, und die dem System eigene Ausbreitungsgeschwindigkeit der Signale ist die höchsterreichbare Geschwindigkeit. Sendet insbesondere ein sich bewegendes Objekt O mit Höchstgeschwindigkeit nach allen Seiten Lichtteilchen aus, so ist deren makroskopisch beobachtete Geschwindigkeit in Richtung der Bewegung von O genau so groß wie in der dazu entgegengesetzten Richtung. Trotzdem läßt Zuses Hypothese sich leicht widerlegen (Aufgabe 8.3.1).

Zuses kurioser Vorschlag liefert uns eine Brücke zu einem ganz anderen Zweig moderner Physik: Festkörperphysik. Nach [Schreier 1988] ist sie „seit den vierziger Jahren unseres Jhs. eine etablierte Teildisziplin der Physik“ und „gilt heute als das Hauptarbeitsgebiet der Physiker, das zugleich am engsten mit praktischen Anwendungen verknüpft ist. Je nachdem, wie weit das Gebiet ... gefaßt wird, liegt ... der Anteil der Arbeiten ... an der Gesamtzahl physikalischer Veröffentlichungen in den letzten 30 bis 40 Jahren zwischen 25 und 30 Prozent (a.a.O. S. 363). Da der Untersuchungsgegenstand der Festkörperphysik sich zum größten Teil in einer Größenordnung abspielt, in der die Materie bereits als diskret vorauszusetzen ist, jedoch die inneratomare (nach heutigem Erkenntnisstand total unanschauliche) Struktur noch keine wesentliche Rolle spielt, ist sie ein ebenso ideales Anwendungsfeld für die diskrete Geometrie geworden, wie es die klassische Geometrie für die klassische Physik war. Vorgänge an Grenzschichten zwischen zwei verschiedenen oder verschieden orientierten regelmäßigen Punktanordnungen, das Schließen von beobachtbaren Beugungsbildern auf die erzeugende Kristallstruktur und neuerdings die Theorie der Quasikristalle, die eng mit nichtperiodischen Parkettierungen verbunden ist, sind heute typische Berührungsfelder zwischen Physik und Geometrie.

Auch hier hat der rein geometrische Spieltrieb wieder in bemerkenswerter Weise einen Vorlauf für eine unvorhergesehene naturwissenschaftliche Entwicklung geschaffen. R. M. Robinson (1971) und R. Penrose (1973) fanden die ersten Systeme von ebenen Parkettsteinen („Prototiles“), mit denen man die Ebene nur aperiodisch pflastern kann (Abb. 8.3.3). Waren es anfangs 4 Prototiles, so konnten Penrose und Ammann schon 1974 Systeme von nur zwei Prototiles angeben. Sie beruhen im Grunde auf den schon von Dürer und Kepler studierten Möglichkeiten. Zur Terminologie: nicht periodisch zu sein, ist eine Eigenschaft eines bestimmten Parketts. Sie bedeutet, daß es nicht in zwei (bzw. im Raum in drei) linear unabhängigen Richtungen kürzeste Translationen gibt, die das Parkett auf sich abbilden. Es gibt natürlich viele Systeme von Parkettsteinen, mit denen man sowohl periodische als auch nichtperiodische Parkette legen kann. Das geht schon unter bloßer Benutzung paarweise kongruenter Quadrate bzw. Würfel. Ein System von Prototiles heißt aperiodisch, wenn man die Ebene bzw. den Raum mit ihnen zwar pflastern kann, jedoch *nur* auf nichtperiodische Weise.

Jedes aperiodische Parkettsystem wirft die Frage nach einem Beweis dafür auf, daß man das Pflastern wirklich nach allen Richtungen beliebig fortsetzen kann. Die wichtigste bisher benutzte Methode beruht darauf, daß man aus den gegebenen tiles ein System von zu den ursprünglichen tiles ähnlichen, aber in bestimmtem Maßstab vergrößerten supertiles zusammensetzen kann, was dann beliebig wiederholbar ist (sogenannte Inflation). Simuliert man jedoch, wie es Berger 1966 tat, die Arbeit einer Turingmaschine durch zeilenweises Pflastern, so genügt es zu beweisen, daß das betreffende Maschinenprogramm bei Anwendung auf die Anfangszeile niemals halten wird. So hat sich eine kaum vorhersehbare interessante Verbindung zwischen diskreter Geometrie einerseits und Algorithmen- und Komplexitätstheorie andererseits herausgebildet. Solche nichtperiodischen Parkette können, wie Abb. 8.3.4c zeigt, im Großen Scheinsymmetrien wie z.B. die Wiederkehr von lokalen Fünf- oder Zehneckformen zeigen, die im Sinne der klassischen Kristallographie aus rein geometrischen Gründen unmöglich sind. 1984 wurde bekannt, daß eine gewisse Aluminium-Mangan-Legierung unter speziellen physikalischen Bedingungen makroskopisch ein Beugungsbild mit Ikosaeder-Symmetrie zeigt [Senechal 1995, 1.1]. Seitdem sind so zahlreiche weitere derartige Phänomene entdeckt worden, daß man die merkwürdige Tatsache, daß dies nicht schon viel früher entdeckt wurde, zumindest teilweise mit den etablierten Dogmen der klassischen Kristallographie und dem bekannten Spruch „daß nicht sein kann, was nicht sein darf“ zu erklären versucht. Jedenfalls haben die materialwissenschaftliche Forschung und auch schon deren technische Anwendungen seitdem

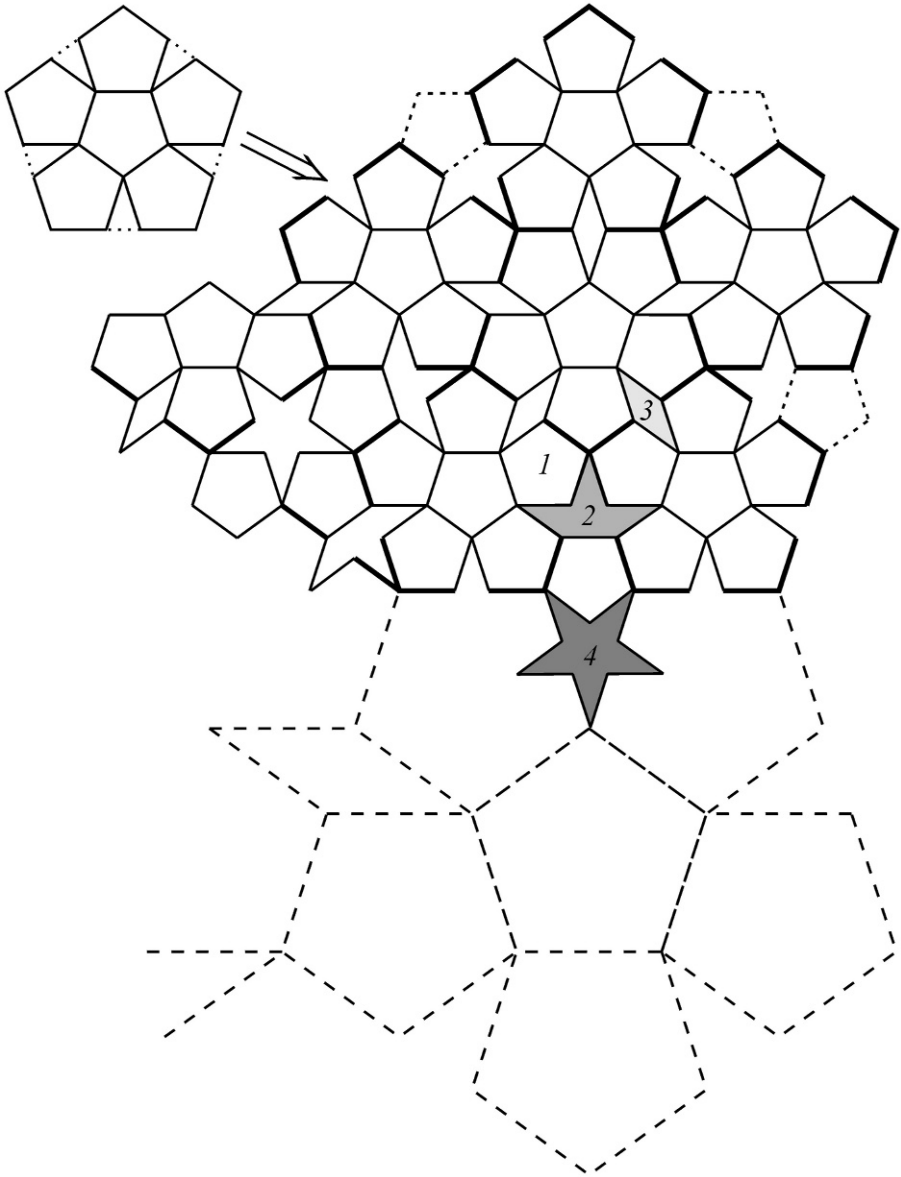


Abb. 8.3.3 Das erste aperiodische Parkett von Penrose

einen ebenso großen Aufschwung genommen wie die hierdurch beflügelten rein geometrischen Untersuchungen. 1985/86 fanden Danzer, Schmitt, Levine und Steinhardt auch echt-dreidimensional aperiodische Parkette. Die inzwischen schon fast klassischen Penrose-Parkette gestatten eigentlich auch periodische Parkettierung, und man muß dies verhindern, indem man die Kanten entweder so abändert, daß bestimmte Anlegungen von der Form her unmöglich werden (das bedeutet aber eine Behinderung des Inflationsprinzips), oder aber Anlegeregeln benutzt, wie sie vom Dominospiel allgemein bekannt sind und wonach nur gleich markierte bzw. -gefärbte Kanten sich berühren dürfen. Neueste physikalische Erkenntnisse deuten darauf, daß derartige Anlegevorschriften („matching rules“) den physikalischen Bedingungen für die Bildung von Quasikristallen gut entsprechen. Außerdem hat man aber neuerdings auch fraktale Prototiles in Betracht gezogen, da sich Selbstähnlichkeit als natürliche Konsequenz aus der Kombination von Formanpassung (statt Regel) und Inflationsprinzip ergibt.

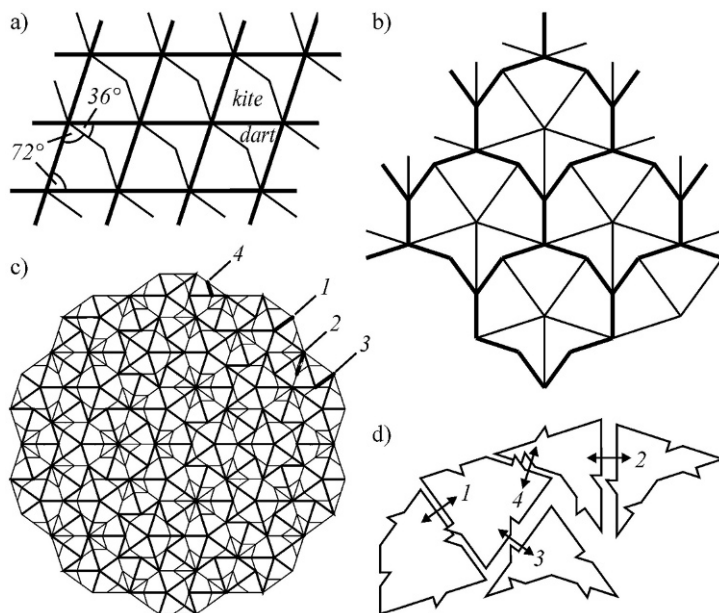


Abb. 8.3.4 Das Parkettsystem „kites und darts“ von Penrose

Mit ihm kann man sowohl periodisch (a,b) als auch nichtperiodisch (c) parkettieren. Durch Abänderung der Kanten in der in (d) angedeuteten Weise (oder äquivalent: das „Verbot“ bestimmter Berührungen) kann man erreichen, daß die periodischen Varianten ausgeschlossen werden.

Erste Überlegungen über den Zusammenhang zwischen geometrischen Formen, deren Entstehung, Funktion und Zweckmäßigkeit in der belebten Natur findet

man bei Leonardo da Vinci und J. Kepler. Um die Mitte des 19. Jhs. setzte sich der Tübinger Physiologe Karl Vierordt für die umfassende Anwendung mathematischer Konzepte in Medizin und Biologie ein. Systematisch und umfassend wurden die geometrischen Aspekte der Biologie zu Beginn dieses Jahrhunderts untersucht und dargestellt [Cook 1914], [d'Arcy Thompson 1917]. Vor allem das zuletzt genannte Buch eines schottischen Zoologen hat mit zunehmendem Interesse an der Anwendung mathematischer Methoden in der Biologie seit etwa 1950 eine Renaissance erlebt, die sich in Neuauflagen und Übersetzungen widerspiegelt. Während ursprünglich vor allem klassische mathematische Mittel zur Beschreibung eingesetzt wurden, z.B. Differentialgleichungen, die dann etwa das Zustandekommen bestimmter Spiralförmigkeiten erklären oder die Art, wie sich biologische Versorgungsstränge verzweigen, spielt im 20. Jh. die diskrete Geometrie eine ständig zunehmende Rolle. Als neuestes in diese Richtung zielendes Buch sei [Meinhardt 1995] genannt: Algorithmisch beschreibbare Wachstumsprozesse führen oft zu näherungsweise fraktalen Gebilden und damit zu einem besseren Verständnis der Formenmannigfaltigkeit in Tier- und Pflanzenwelt. Zum Beispiel wird der Formalismus der Zellularfelder verwendet, um die Ausbreitung und gegenseitige Beeinflussung von Populationen zu simulieren.

Eine ganz andere Anwendung von Geometrie in der Biologie beruht auf der 1930 von dem Biologen Tammes entdeckten Tatsache, daß Pollen an ihrer Oberfläche eine bestimmte Anzahl von Kontaktmembranen in regelmäßiger, jedoch von Art zu Art verschiedener Anordnung aufweisen. Daher führt die Polyedertheorie zu einer Klassifikation der Pollen und zu neuen Einsichten in deren Funktionsweise sowie der Verwandtschaft zwischen verschiedenen Gattungen [Fejes Tóth 1965, 214ff]. Neuerdings hat das Studium der Viren ähnliche Zusammenhänge zur Geometrie regelmäßiger Polyeder ergeben. Theoretischen Vorlauf schuf die Geometrie in diesem und in verwandten Anwendungsbereichen seit den dreißiger Jahren mit der Untersuchung von (dichtesten) Packungen bzw. Lagerungen und (dünnsten) Überdeckungen und verwandten Extremalfragen „in der Ebene, auf der Kugel und im Raum“ (so der Untertitel des bekannten einschlägigen Buches [Fejes Tóth 1953]). Derartige Fragen sind für das Verständnis physikalischer, chemischer und mikrobiologischer Phänomene wichtig geworden, wobei man z.B. Kugeln von endlich vielen verschiedenen Durchmessern betrachtet, die in vorgegebenen Nachbarschaftsbeziehungen stehen müssen. Fragt man etwa nach der kleinsten konvexen Menge, die n kongruente Kugeln umschließen kann, so findet man für kleine Zahlen n schlauchförmige Anordnungen, die bei einem bestimmten n plötzlich zu einer kompakteren optimalen Anordnung umkippen. Die analoge Frage für höhere

Dimensionen führt zu einer für jede Dimension d charakteristischen Grenzzahl $n(d)$ (Aufgabe 8.3.2).

Auch wenn einige klassisch geschulte Geometer derartige Untersuchungen zunächst mit Mißtrauen oder gar Spott betrachteten, hat sich gezeigt, daß sich im Gebiet der diskreten Geometrie nicht nur eine hervorragende Harmonie zwischen interessanten und schweren mathematischen Problemen einerseits und vielseitigen Anwendungen andererseits herausgebildet hat, sondern daß ein ungeahnt breites Spektrum von Methoden und Resultaten aus weit entfernten Zweigen der Mathematik benötigt wird, um scheinbar einfache Fragen zu beantworten. Als Beispiel nennen wir die Frage nach derjenigen Verteilung von n Punkten auf einer Kugeloberfläche, bei der der Mindestabstand zweier Punkte möglichst groß wird. Für einige Werte von n (4, 6, 12) ist die Frage durch die Existenz regulärer Polyeder mit Dreiecksflächen und der entsprechenden Eckenzahl leicht zu beantworten, aber schon für $n = 8$ ist keineswegs die den Würfecken entsprechende Anordnung optimal. Wie der Leser leicht nachrechnet, ergeben zumindest die Ecken des Antiprismas mit quadratischer Grundfläche schon eine bessere Lösung auf seiner Umkugel, und es bleibt der schwere Nachweis, daß diese Lösung nicht weiter verbessert werden kann [Fejes Toth 1953, S. 162ff]. Es ist bemerkenswert und symptomatisch für die Attraktivität des Themenkreises, daß diese und die analoge Frage für einige weitere n 1931 von zwei Mathematikern ganz anderer Spezialisierung gelöst wurde: van der Waerden, einem der berühmtesten Algebraiker des 20. Jhs., und K. Schütte, einem bekannten Logiker.

Entsteht durch Quanten- und Festkörperphysik sowie die neueren Entwicklungen von Chemie, Biologie und Biochemie der Eindruck, daß diskrete Geometrie (und überhaupt diskrete Mathematik) die klassische Geometrie des Stetigen und Glatten in der heutigen Naturwissenschaft von ihrem führenden Platz verdrängt hat, so zeigt die Einbeziehung anderer Bereiche ein ausgewogeneres Gesamtbild. Z. B. hat die Geodäsie nach der schon zu Gauß' Zeiten begonnenen Vermessung und Überwachung des Magnetfeldes der Erde in unserer Zeit die Vermessung und Überwachung des Gravitationsfeldes der Erde in ihren Gegenstand integriert, wobei klassische geometrische Methoden angewendet werden. In der Solitonentheorie³⁴ können bestimmte diskrete Probleme der Festkörperphysik mit dem gleichen Typ von Differentialgleichungen wie die (als Phänomen schon seit 1834 bekannten) solitären Wasserwellen beschrieben werden. In dieser Theorie mit stark wachsender Bedeutung beginnt sich

³⁴ Eine Solitonengleichung beschreibt die Fortpflanzung einer bestimmten Art von „stehenden Wellen“, die sich u.a. bei gegenseitiger Begegnung wie „Teilchen“ verhalten (zur weiteren Information z.B. [Meinel/Neugebauer/Steudel]).

eine Brücke zwischen stetigen und diskreten Phänomenen abzuzeichnen, die auch zur Erklärung des Dualismus Welle-Korpuskel beiträgt. Allgemein gesagt, wird man bei diskreten Phänomenen, bei denen die Zahl der beteiligten Objekte eine bestimmte Größe überschreitet, immer wieder wie in der Statistik zur praktischen Beherrschung nur kommen, indem man (umgekehrt wie in der numerischen Analysis) das Diskrete durch das Stetige approximiert.

Schließlich sei darauf hingewiesen, daß sogar in der Geographie, einem Gebiet, das mit einem Bein in den Natur- und dem anderen in den Wirtschaftswissenschaften steht, und in dem es besondere (teils objektiv, teils aber auch subjektiv begründete) Widerstände gegen die Mathematisierung gibt, die Zahl neuer Probleme und Anregungen geometrischer Art nicht versiegt: Waren es vor langer Zeit geodätische und kartographische Fragen, die von der Geographie in die Mathematik getragen wurden, kamen dann die mathematischen Hilfsmittel der geophysikalischen Probleme (Geotektonik, Magnetismus, Klima und Wetter, ...) und noch später die statistischen dazu, so hat man es heute auch mit der Optimierung von Standorten und Verkehrsnetzen, der Definition von adäquaten Maßen für den Zerklüftungsgrad oder die Wegsamkeit eines Gebietes, dessen Durchlässigkeit für Schadstoffe oder biologische Populationen, der exakten Bestimmung von Einzugsgebieten, der Informationsdichte von Karten und der graphischen Darstellung komplizierter Beziehungen zu tun (Überblick und Literatur in [Schreiber 1989]).

8.4 Geometrie und Technik

In der Einleitung zu einer Vorlesung „Anwendung der Differential- und Integralrechnung“, die 1902 und nochmals 1907 publiziert wurde, sagte F. Klein: „Durch die neuzeitliche mathematische Litteratur geht ein tiefgreifender Zwiespalt, der Ihnen allen entgegengetreten sein muß: die Interessen und Gedankengänge der Theoretiker sind von denjenigen Methoden, deren man sich bei der Anwendung tatsächlich bedient, ausserordentlich verschieden. Hierunter leidet nicht nur die wissenschaftliche Ausbildung des Einzelnen, sondern die Geltung der Wissenschaft selbst“ (a.a.O. S.1). Er spricht in diesem Buch durchgehend von „Präzisions-“ und „Approximations“mathematik, und sein damals für einen Geometer ziemlich revolutionärer Standpunkt zum Verhältnis dieser beiden Seiten der Mathematik sei für den Fall der Geometrie an folgendem einfachen Beispiel erläutert: Die Sätze der euklidischen Geometrie sind logische Folgerungen aus den Axiomen, die ihrerseits Idealisierungen von praktischen Verhältnissen sind. Zum Beispiel ist das Axiom „Durch je zwei Punkte gibt es genau eine Gerade“ eine „Kurzfassung“ des empirischen Sachverhalts „Wenn die Durchmesser zweier ebener Bereiche a, b hinreichend klein

werden, strebt die Menge der möglichen geradlinigen Verbindungen zwischen einem Punkt $A \in a$ und einem Punkt $B \in b$ gegen eine eindeutig bestimmte Grenzlage.“ Die Aufgabe der Präzisionsmathematik besteht darin, aus den Kurzfassungen logische Folgerungen abzuleiten. Die Aufgabe der Approximationsmathematik besteht darin, diese Folgerungen wieder als Aussagen über die Realität zu interpretieren und mit Fehlerabschätzungen zu unterlegen (was meist der Hilfe der Analysis bedarf). Der Satz „Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt“ bedeutet also z.B. in Wirklichkeit: „Wenn ABC ein Dreieck ist und die an A, B, C hinreichend dicht vorbei gehenden Geraden hinreichend genau senkrecht auf den jeweils gegenüberliegenden Seiten stehen, dann rutschen ihre paarweisen Schnittpunkte beliebig dicht zusammen“. Dieser (wie analog jeder andere) Satz der theoretischen Mathematik enthält die Aufforderung, die Aufgabe zu lösen, wie der Durchmesser des Bereichs, in dem die Schnittpunkte der Höhen liegen können, von der vorausgesetzten Maximalabweichung der Punkte A, B, C , und der Abweichung der Höhen von der senkrechten Lage abhängt.

Man betrachte diese Position Kleins vor dem historischen Hintergrund, daß er als einer der ersten sich massiv für die Wiederannäherung von reiner und angewandter Mathematik einsetzte, daß er 1904 in Göttingen die Einrichtung des ersten Lehrstuhls Deutschlands für angewandte Mathematik durchsetzte und daß diese angewandte Mathematik, die sich eigentlich erst im 20. Jh. als eigenständiges Gebiet etablierte, noch bis in die vierziger Jahre in weitem Umfang graphische Verfahren auch zur Lösung numerischer Aufgaben einschloß. Parallel hierzu entwickelte sich ebenfalls erst seit dem Ende des 19. Jhs. die Feinmeß- und Präzisionstechnik, die heute einen für Laien kaum noch vorstellbaren Stand erreicht hat. Der weltweit erste derartige Lehrstuhl an einer Technischen Hochschule wurde 1929 in Dresden eingerichtet und mit G. Berndt, einem Pionier dieses Gebietes, besetzt. Die Getriebetechnik (Zahnräder, Schneckenräder, Wälzlager, Zwangsläufe usw.) bedient sich heute einer ausgefeilten Kombination differentialgeometrischer und numerischer Methoden, um diese gestiegenen Ansprüche zu erfüllen [Giering/Hoschek 1994].

Unsere alltägliche Umwelt besteht zu einem großen Teil aus von Menschen geschaffenen Objekten, und in all diesen steckt in vielfältigster Weise Geometrie. Es kann folglich hier nur darum gehen, einige Entwicklungstendenzen aufzuzeigen, die das 20. Jh. in dieser Hinsicht vom auch schon industriell dominierten 19. Jh. unterscheiden, und an einigen Beispielen zu zeigen, wie Ergebnisse der „reinen“ Geometrie in manchmal überraschender Weise praxiswirksam werden und wie die Geometrie sich Anwendungsbereiche erschließt, an die man in diesem Zusammenhang selten denkt.

Ein sowohl der klassischen Geometrie (wo seine Anfänge bis in die Renaissance zurückreichen) als auch der Mechanik sehr nahestehendes und nach wie vor reich blühendes Gebiet ist die geometrische Kinematik. W. Blaschke, einer der vielseitigsten Geometer unseres Jhs., bezeichnete sie in [Blaschke/Müller 1956] als „Paradies der Geometer“. Die Kernfragen sind: Welche Bahnen beschreiben bestimmte Punkte einer Strecke, einer Fläche, eines Körpers, wenn andere Punkte dieses Objekts sich längs vorgegebener Bahnen bzw. auf vorgeschriebenen Flächen bewegen, wie kann man umgekehrt bestimmte Bewegungen erzwingen, welchen Raum benötigen bestimmte Bewegungen, wie kann man ihn optimieren? Man denke etwa an die geometrischen Fragen im Zusammenhang mit den sogenannten Kreiskolbenmotoren. Sätze vom Holditch-Typ sagen etwas darüber aus, daß bei bestimmten Bewegungen einer Strecke (Fläche) ein von der speziellen Form der Bewegung unabhängiges Volumen (Fläche) überstrichen wird. Die Bennung bezieht sich auf den ersten derartigen, 1858 von H. Holditch gefundenen Satz: Eine Sehne passender Länge bewege sich im Innern einer konvexen Kurve so, daß jeder ihrer beiden Endpunkte diese Randkurve genau einmal durchläuft. Dann beschreibt ein fixierter Punkt dieser Sehne, dessen Abstände von den beiden Endpunkten x, y betragen, eine Kurve im Innern der gegebenen Randkurve, so daß das Ringgebiet zwischen beiden Kurven den Inhalt πxy hat. (Aufgabe 8.4.1).

Zu den ungewöhnlichsten Anwendungen der Kinematik zählt die Medizintechnik, wo es u.a. darum geht, die Formen und Bewegungen des menschlichen Körpers genau zu beschreiben, um dann Prothesen zu konstruieren, die diese Beweglichkeit möglichst vollkommen reproduzieren. Über „physiologische Mechanik“ schrieb 1904 O. Fischer umfangreiche Berichte in den Mitteilungen der DMV und in Band IV der Enzyklopädie der mathemat. Wissenschaften, die schon damals auf einer erstaunlich reichen Literatur beruhten. Ein kleines Buch hierüber erschien auch in tschechischer Sprache 1952, angeregt vermutlich dadurch, daß F. Kadeřávek, einer der beiden Verfasser, Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule Prag, der Sohn eines in der Prager chirurgischen Universitätsklinik mit dem Prothesenbau beschäftigten Handwerkers war. Einen Zugang zum aktuellen Stand bietet [Giering/Hoschek 1994, S. 191-194].

Ein großer Anwendungsbereich der Differentialgeometrie betrifft die Flächenkrümmung: Die gegeneinander bewegten Flächen von Getriebeteilen sollen möglichst genau aufeinander abwickelbar sein. Für die Herstellung von Schiffs- und Flugzeugrümpfen sowie Fahrzeugkarosserien werden optimale Zerlegungen der Gesamtfläche in Teile gesucht, die eine möglichst geringe Totalkrümmung haben und folglich mit nur geringen Deformationen aus ebenem Material

herstellbar sind. Eine verwandte Frage betrifft die Umwicklung von gekrümmten Rohrleitungen u.ä. mit ebenen Bändern, so daß diese nicht verrutschen können. Ein weiteres Anwendungsfeld der Differentialgeometrie ist die Optik. Dabei geht es z.B. um die Berechnung von Panorama- und „Froschaugen“-Objektiven, die nichtlinear verzerrte Panoramabilder mit bestimmten Eigenschaften liefern, und um die Entzerrung dieser Bilder [Drs/Všetečka 1981]. Derartige Optiken werden z.B. in der medizinischen Endoskopie, aber auch für die innere Kontrolle technischer Systeme (Kessel, Rohrleitungen usw.) eingesetzt.

Anknüpfend an Cauchys Satz (1813, vgl. 7.9), daß ein Polyeder unter der freilich notwendigen Zusatzbedingung der Konvexität durch seine Seitenflächen und die Vorschrift ihrer Verknüpfung bis auf die Lage im Raum eindeutig bestimmt ist, begann sich schon im Laufe des 19. Jhs. ein Problem schüchtern zu entwickeln, das die mögliche Verschiedenheit räumlicher Lagerungen einer gegebenen Polyederfläche oder auch ihres Kantengerüsts zum Gegenstand wählte. Was den letzteren Fall betrifft, so ist zumindest die Anwendbarkeit in der Statik von Fachwerken offensichtlich. Umso merkwürdiger mutet es uns heute an, daß die Motive ursprünglich eher theoretisch waren: Euklids Axiom, daß gleich ist, was sich zur Deckung bringen läßt, in Kombination mit dem von ihm nicht definierten Begriff des sich Deckens, veranlaßte A. Schopenhauer 1844, sich darüber zu wundern, daß die Mathematiker dies kritiklos hinnahmen, sich aber über das viel klarere Parallelenaxiom so viele Gedanken machten [Cromwell 1997, S.221]. Heute nennt man eine Polyederfläche wacklig oder infinitesimal beweglich, wenn sie zwei benachbarte Realisierungen besitzt, so daß man die eine durch eine geringe Deformation in die andere überführen kann. (Bei reinen Stabwerken dürfen nur die Kanten sich bei dieser Überführung nicht kreuzen, bei wackligen Polyedern dürfen sich die Flächen zwischenzeitlich nicht durchschneiden). Daß Stabwerke bzw. Polyeder mit hinreichend vielen Kanten bzw. Flächen im allgemeinen nicht sehr stabil sind, ist eine alltägliche Erfahrung. Es ging also fast von vornherein darum, Gegenbeispiele mit einer möglichst geringen Zahl von Flächen bzw. Kanten zu finden und die Deformationen, die zur Überführung der einen Lage in die andere nötig sind, nachzurechnen. Einige einfache wacklige Stabwerke wurden 1897 von dem französischen Ingenieur R. Bricard angegeben. Daß geschlossene Ketten von mindestens sechs (nicht notwendig regulären) Tetraedern, bei denen je zwei Gegenkanten als verbindende „Scharniere“ dienen, in sich drehbar sind, wurde anscheinend zuerst in [Brückner 1900] erwähnt (vgl. hierzu auch 8.6 und die dort zu Kaleidozyklen angegebene Literatur). Einfache wacklige Polyeder wurden schon 1912 von G. T. Bennett, ferner u.a. 1965 von W.

Wunderlich (Aufgabe 8.4.2) und 1978 von M. Goldberg angegeben. Es wurde jedoch bis vor kurzem bezweifelt, daß es einfach zusammenhängende und überall echt dreidimensionale Polyeder gibt, die *stetig* beweglich sind, d.h. die ohne Deformation und zwischenzeitliche Selbstüberschneidung von Flächen eine unendliche Schar von Lagen durchlaufen können. Das erste überraschende Gegenbeispiel fand 1977 R. Conelly, damals noch Student. Seine Idee bestand darin, an geeigneten infinitesimal beweglichen Polyedern an denjenigen Stellen, an denen die geringe Selbstüberschneidung stattfindet, kleine Kerben anzubringen, um einen ungehinderten Durchgang zu ermöglichen. Inzwischen war jedoch schon bekannt, daß im Sinne eines geeigneten Maßes im „Raum der Polyeder“ „fast alle“ einfach zusammenhängenden Polyeder stabil sind (Gluck 1975). Zu weiteren Einzelheiten und Literatur siehe [Cromwell 1997].

Was bis hier einen zwar reizvollen, aber eher spielerischen Eindruck macht, hat eine überraschende praktische Konsequenz. Seit der Erfindung des Radars (technische Anwendung im militärischen Bereich etwa ab 1935, zivil erst nach 1945) und besonders seit dem Einsatz von Lasern (etwa ab 1970) ist es möglich geworden, Entfernungen um ein Vielfaches genauer zu messen als Winkel. Z.B. läßt sich die Entfernung Erde-Mond heute bis auf einen Fehler von etwa 10 cm bestimmen. Daher ist in der Geodäsie die klassische Triangulation rapide von der Trilateration abgelöst worden. (Jeder Leser kann sich denken, was dieser Bezeichnungswechsel bedeutet.) Die wackligen bzw. stetig deformierbaren Polyeder zeigen nun, daß es in Analogie zu den „gefährlichen Kreisen“ der Triangulation (vgl. 5.2) bei der Trilateration Konstellationen gibt, in denen entweder aus den bloßen paarweisen Entfernungen der Punkte deren gegenseitige Lage überhaupt nicht eindeutig bestimmbar ist oder sehr kleine Fehler in der Längenmessung große Fehler in der Lokalisation bewirken können. B. Wegner zeigte 1984 die Invarianz der Wackligkeitseigenschaften bei projektiven Abbildungen. (Zu Einzelheiten und weiterer Literatur siehe [Giering/Hoschek 1994, 177-183])

Die Definition und Untersuchung sinnvoller Maßbegriffe für Mengen von geometrischen Objekten, worauf dann Wahrscheinlichkeits- bzw. statistische Aussagen wie die oben über die Starrheit von Polyedern gegründet werden können, ist Gegenstand der schon in 7.9 erwähnten Integralgeometrie oder geometrischen Maßtheorie. Während diese Theorie sich aber in ihrer klassischen Periode (seit etwa 1930 u.a. Bieberbach, Santaló, Maak) mit zufälligen gegenseitigen Lagen wohldefinierter geometrischer Objekte und mit Aussagen der Form „Fast alle bzw. fast keine Objekte einer bestimmten Art haben eine bestimmte Eigenschaft“ beschäftigte, ist aus ihr unter dem Druck praktischer Bedürfnisse seit etwa 1965 die stochastische Geometrie hervorgegangen. Diese

Bezeichnung tauchte anscheinend erstmals im Titel des 1974 erschienenen Sammelbandes [Harding/Kendall] auf. Hier geht es um statistische Aussagen über unregelmäßige Anordnungen einer im allg. großen Zahl von Objekten. Ein Spezialgebiet der stochastischen Geometrie, ebenfalls seit Mitte der sechziger Jahre, ist die Stereologie, die aus zufälligen ebenen Schnitten statistische Schlüsse über räumliche Verteilungen zieht. Die stochastische Geometrie findet umfangreiche Anwendungen in der Biologie, Medizin, Mineralogie und Werkstoffprüfung, wo aus zufälligen Proben oder Gewebeschnitten Aussagen über die globale Verteilung bestimmter Merkmale und Formen abgeleitet werden müssen. Als Einführung sei [Stoyan/Mecke 1983] empfohlen.

Geometrische Fragen ganz anderer Art entstehen bei der optimalen Ausnutzung von Gewebe- (oder Metall-)bahnen für den Zuschnitt von Textilien oder Karosserieteilen, bei der günstigsten Verpackung von nicht quaderförmigen Objekten in quaderförmige Kisten, bei der optimalen Wahl von Standorten für Meß- oder Sendestationen mit gegebener Reichweite, die zusammen ein bestimmtes Territorium versorgen, deren Reichweiten sich aber möglichst wenig überlappen und das gegebene Gesamtgebiet möglichst wenig oder gar nicht überschreiten sollen, bei der optimalen Wahl von Standorten und der Gestaltung von Verkehrs- oder Leitungsnetzen. Allein um das in 7.9 eingeführte sogenannte Steiner-Weber-Problem und seine Verallgemeinerungen rankt sich inzwischen eine nach Tausenden zählende Literatur [Cieslik 1998].

Während alle bisher genannten Anwendungsgebiete im Detail nur den jeweiligen Spezialisten zugänglich sind, bietet auch die alltägliche Umwelt immer wieder Anlaß, über Geometrie und ihre Wirkungen nachzudenken: Daß sich rechteckige Pflaster- bzw. Gehwegsteine relativ leicht aus ihrem Verband lösen lassen oder bei nachsackendem Untergrund abkippen, liegt daran, daß es für sie eine Drehachse gibt, zu der zwei Seitenflächen orthogonal sind, die dazu senkrecht stehen sich aber bei der entsprechenden Drehung nur wenig neigen müssen. Demgegenüber lassen sich die neuerdings überall gesichteten zickzackförmigen Steine nur völlig senkrecht zur Trittpläche aus ihrem Verband lösen.

8.5 Geometrie und Informatik

Praktische Geometrie ohne Computer ist schon heute kaum noch denkbar, und sogar die bildenden Künstler haben längst (seit etwa 1963) den Computer als mögliches Werkzeug entdeckt. Umso erstaunlicher ist es, daß offenbar keiner der ursprünglichen Computerpioniere diese Entwicklung vorausgesehen hat. Da das gesamte Gebiet der Computergeometrie trotz (oder vielleicht wegen) einer ständig wachsenden Flut von Literatur sich durch mangelhafte Abgren-

zung und Gliederung auszeichnet, sollen hier einige Begriffsklärungen an den Anfang gestellt werden.

Computergeometrie ist, obwohl sie natürlich in sich mehr theoretisch und mehr praktisch orientierte Richtungen vereinigt, in ihrer Beziehung zur Geometrie eine Anwendungsdisziplin. Daher steht in ihrem Mittelpunkt das Lösen von Aufgaben durch algorithmische Prozesse. Eine erste grobe Klassifikation ergibt sich daher, indem man diese Aufgaben gliedert in

- A. solche, bei denen aus einer geometrischen Eingabe eine nichtgeometrische Ausgabe erzeugt werden soll, also z.B. die Bestimmung von Maßzahlen geometrischer Objekte, Extraktion von Merkmalen, Sortierung von Objekten nach bestimmten Kriterien (u.a. Erkennung von Handschriften),
...
- B. solche, bei denen aus einer nichtgeometrischen Eingabe eine geometrische Ausgabe erzeugt werden soll, also z.B. Zeichnen eines Funktionsgraphen anhand einer Wertetabelle oder einer formelmäßigen Beschreibung der Funktion, darin eingeschlossen Zeigen des Objektes in seiner durch Tabelle oder Formel gegebenen zeitlichen Veränderung, Herstellung eines Objekts auf Grund einer verbalen bzw. formalen Beschreibung (das schließt alle interaktiven CAD-Systeme ein),... Als Hilfsmittel dienen weite Teile klassischer darstellender und Koordinatengeometrie, u.a. die zu neuen Ehren gekommene Beleuchtungsgeometrie, die Computerbildern zu eindrucksvollem Realismus verhilft. Stark entwickelt hat sich durch die Bedürfnisse des CAD das „Splining“, d.h. das Zusammensetzen von Kurven und Flächen aus Teilstücken, die an den Anschlußstellen gemeinsame Tangenten bzw. Tangentialebenen haben. Die zugrundeliegende Mathematik ist so klassisch, daß man die Entstehung des Gebietes in das 18. Jh. datieren könnte.
- C. solche, bei denen aus einer geometrischen Eingabe eine geometrische Ausgabe erzeugt werden soll, also z.B. Verwandeln eines durch zugeordnete Risse gegebenen Objekts in eine perspektivische Ansicht, Drehen eines Objekts in eine andere Position bezüglich des Betrachters, Ausführen bestimmter Prozeduren zur Erleichterung des Erkennens bzw. Klassifizierens des ursprünglichen Objekts („digitale Bildverbesserung“),... Die Grundoperationen der digitalen Bildverbesserung gehen oft auf theoretische Konzepte aus der Zeit um 1900 zurück (Minkowski, Voronoi, Thue,...). Z.B. geht man von einer beliebigen ebenen Punktmenge A zur Vereinigung aller Kreise mit festem Radius r um irgendeinen Punkt von

A über, wodurch die Menge „aufgeblasen“ wird und vereinzelte Punkte überhaupt erst sichtbar werden. Oder man reduziert die Menge auf ihren „wesentlichen Teil“, indem man nur diejenigen Punkte behält, die eine ganze Umgebung von passend gewähltem Radius in der ursprünglichen Menge besitzen. Die Kombination und mehrfache Wiederholung derartiger Prozeduren liefert erstaunliche Resultate.

Die in der Computergeometrie erzeugten bzw. bearbeiteten Objekte sind grundsätzlich materiell repräsentiert (was die bildliche Darstellung als Hauptfall enthält), daher euklidisch und zwei- oder dreidimensional. Letzteres bezieht sich aber nicht auf die sogenannte „dreidimensionale“ Computergraphik, die doch nur zweidimensionale Bilder liefert, sondern darauf, daß die programmgesteuert arbeitende Maschine nicht ein Computer im engeren Sinne sein muß, der mittels Scanner, Plotter, Drucker oder Bildschirm mit seiner Umwelt kommuniziert, sondern daß z.B. auch programmgesteuerte Werkzeugmaschinen und Industrieroboter einbezogen sein sollen.

Drei weitere Klassifikationen, die der obigen überlagert sind, betreffen die Fragen, ob die beteiligten Objekte (ein- bzw. ausgabeseitig)

- I. zwei- oder dreidimensional,
- II. „schwarz-weiß“ oder mehrfarbig bzw. aus mehreren Materialien/Texturen zusammengesetzt,
- III. scharf definiert oder diffus, fuzzy, ... sind. Dies ergibt insgesamt 80 verschiedene Prozeßarten, und es gehört schon heute wenig Phantasie und Sachkenntnis dazu, sich für jede davon wenigstens ein sinnvolles, schon existierendes oder aber wünschenswertes Beispiel zu überlegen.

Zum Instrumentarium angewandter Computergeometrie gehören klassische Disziplinen wie darstellende, analytische, algebraische und Differentialgeometrie (siehe z. B. [Faux/Pratt 1979], [Boehm/Prautzsch 1994]). Daß sie aber nicht einfach die Fortsetzung klassischer angewandter Geometrie mit einem neuen, sehr viel leistungsfähigeren Instrument ist, liegt daran, daß dieses neue Instrument einerseits Anwendungen möglich macht, an die vor 50 Jahren niemand zu denken wagte, zweitens dabei Objekte einbezieht (wie z.B. Röntgenaufnahmen oder Satellitenfotos), die sich in den Begriffssystemen der klassischen Geometrie nicht beschreiben lassen, drittens alten Fragen rund um die geometrischen Aufgaben eine neue Qualität verleiht:

- die andersartige Beschaffenheit der Objekte vieler Aufgaben verlangt nach der Entwicklung dazu passender Begriffssysteme, problemorientierter Programmiersprachen sowie nach neuen geometrischen Theorien wie z. B. verschiedenste Hüllenbildungen, Integralgeometrie, stochastische Geometrie, Zusammenwirken von optischer und nichtoptischer Information zur richtigen Deutung eines Bildes.
- Die klassische Koordinatengeometrie wird ein kleiner Spezialfall der Frage, wie man geometrische Objekte durch endliche Datenstrukturen beschreiben kann und dies obendrein so, daß diese „Kodierungen“ die beabsichtigten Algorithmen „unterstützen“.
- Die klassische Theorie der Unlösbarkeitsbeweise für gewisse Aufgaben (etwa mit Zirkel und Lineal) und die bescheidenen Ansätze der Geometrographie zum Vergleich des Aufwands verschiedener Lösungen der gleichen Aufgabe (vgl. 7.3) haben sich zur Komplexitätstheorie für geometrische Algorithmen weiterentwickelt. Die heute international übliche Bezeichnung Computational Geometry für das Studium der Komplexität geometrischer Algorithmen wurde 1975 von M. I. Shamos eingeführt. Gute Einführungen sind [Preparata/ Shamos 1985], [Edelsbrunner 1987] und [de Berg u.a. 1997]. Das erstgenannte dieser Bücher zeichnet sich durch eine für moderne mathematische Literatur nicht selbstverständliche historische Sicht auf die Vorgeschichte aus, die von Euklid über Mohr und Gauß bis Lemoine vieles Wesentliche einbezieht, was in den früheren Kapiteln unseres Buches zu den geometrischen Konstruktionen geschrieben wurde. Das Interesse der Computational Geometry konzentriert sich auf Aufgabenklassen, die in der klassischen konstruktiven Geometrie kaum eine Rolle gespielt haben, aber nun interessant werden durch die Kombination von (manchmal auch fragwürdiger) praktischer Wichtigkeit und hoher Komplexität. Dazu gehören u.a.
- die Bestimmung der konvexen Hülle endlich vieler gegebener Punkte,
- die Bestimmung des Durchschnitts mehrerer Polyeder,
- die Bestimmung der Sichtbarkeit von Strecken und Flächen bei gegebenem Betrachterstandpunkt,
- die Bestimmung des nächsten Nachbarn, der zwei am dichtesten benachbarten bzw. der zwei am weitesten entfernten Punkte in einer endlichen Menge, allgemein das sogenannte Voronoi-Diagramm einer endlichen Punktmenge M , welches die Ebene in Voronoi-(oder Dirichlet-)Zellen

einteilt, die jedem Punkt der endlichen Menge die Menge derjenigen Punkte zuweist, die von ihm eine geringere Entfernung als von allen anderen Punkten aus M haben (Abb. 8.5.1).

- die Gruppe der Guardian- oder Wächterprobleme, bei denen Zahl und Standort einer minimalen Menge von Punkten gesucht wird, von denen jeder Teil einer gegebenen Menge gesehen werden kann (gleichbedeutend: von denen die gesamte Menge beleuchtet werden kann).
- die Bestimmung kürzester Verbindungssysteme (Steiner-Weber- Problem, vgl. 7.9).

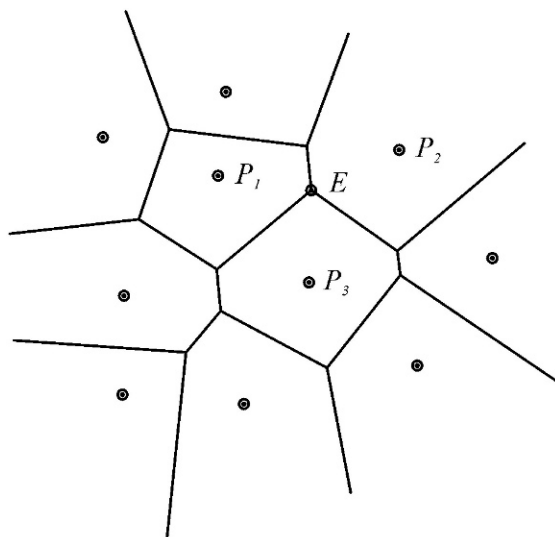


Abb. 8.5.1 Voronoi-Diagramm für zehn zufällig gewählte Punkte

Während der Computer einerseits eine massive Hinwendung zur Geometrie der Anschauungsebene und des gewöhnlichen euklidischen Raumes bewirkt hat, bringt er andererseits neue, andersartige Komplikationen als die in 8.2 besprochenen in die Frage der Abgrenzung zwischen Geometrie und Nichtgeometrie. Zum Beispiel hängen die Probleme der Bildinterpretation sehr eng mit Informationstheorie und künstlicher Intelligenz zusammen, und viele Fragen der Gestaltung von Programmiersprachen und effizienten Algorithmen, die in der Computergeometrie eine zentrale Rolle spielen, sind in Wahrheit Fragen, die weit über die geometrische Anwendung hinausgehen. Die geometrischen Konstruktionsalgorithmen als lehrreicher Modellfall von Algorithmen

in beliebigen, nicht notwendig diskreten Strukturen wurden seit 1967 von E. Engeler, unter Einbeziehung weiterer Aspekte auch von [Schreiber 1975, 1984] (Literatur siehe dort) behandelt. Typische Problemfelder sind u.a.

- die Mehrsortigkeit geometrischer Strukturen (Beziehungen zur „algebraischen Spezifikation“ in beliebigen Programmiersprachen)
- die Mehrdeutigkeit typischer geometrischer Operationen sowie die Notwendigkeit der Benutzung willkürlicher „Hilfspunkte“, die auf natürliche Weise zu Fragen des Nichtdeterminismus führt,
- die Fragen der gegenseitigen Simulierbarkeit verschiedener Operationssysteme,
- Unlösbarkeits- bzw. Komplexitätsaussagen auf der Basis geometrischer Verhältnisse und Übertragungsprinzipien. Als Beispiele für letzteres führen wir zwei Sätze an. Zwar ist jede mit Zirkel und Lineal lösbare Aufgabe im früher beschriebenen Sinn nach dem Satz von Mohr-Mascheroni mit dem Zirkel allein lösbar, jedoch gehen dabei notwendig Lösungen mit konstant beschränkter Schrittzahl im allgemeinen in Lösungen mit zyklischen Unterprogrammen über: [Schreiber 1975], Verallgemeinerung [Schreiber 1984]. Die Dreiteilung eines beliebigen Winkels ist auch in der hyperbolischen Geometrie nicht mit Zirkel und Lineal lösbar (Benutzung des Poincaré-Modells) [Schreiber 1984].

Nach diesen Vorbemerkungen sei eine Skizze der historischen Entwicklung versucht. Computergeometrie ist natürlich nur mit entsprechender Peripherie möglich. Die ersten Eingabegeräte wurden ab 1960 in den USA zur automatischen Auswertung von Satellitenfotos eingesetzt. Diese „Grauwertabtaster“ der Firma IBM verwandelten also Fotos, auf denen das Auge kaum etwas erkennen konnte, in Bitfolgen, die dann numerisch weiterverarbeitet wurden. Wenig später kamen die ersten computergesteuerten Zeichentische (Plotter) auf den Markt, z.B. 1964 in Deutschland durch die Firma Zuse. In den USA ging schon 1963 ein speziell für graphische Datenverarbeitung ausgerüsteter Großrechner ILIAC in Betrieb, und im gleichen Jahr wurde mit SCETCH-PAD das erste dialogorientierte graphische Programmsystem entwickelt. In den USA gab es aber auch schon in den sechziger Jahren erste Bestrebungen, grafikorientierte Programmsysteme für didaktische Zwecke zu entwickeln. So entstand am MIT (Massachusetts Institute of Technology) LOGO als Dialekt der Sprache LISP, und die programmgesteuerte zeichnende Schildkröte kam auf die Welt.

1967 wurde in der US-amerikanischen ACM (Association for Computing Machinery) eine SIG (Special Interest Group) für Computer Graphics und die erste Spezialzeitschrift „Computer Graphics“ gegründet. Als bald bildete sich der Begriff CAD (Computer Aided Design), dem unter diesem Namen schon 1969 eine erste internationale Spezialtagung (Southampton, GB) gewidmet wurde, begleitet von der Gründung einer Zeitschrift gleichen Namens. Seit etwa 1969/70 gibt es auch die Bezeichnungen Picture Processing bzw. Image Processing.

Auch die ersten Experimente zur künstlerischen Nutzung begannen Mitte der sechziger Jahre (z.B. G. Nees in Stuttgart, F. Nake in Karlsruhe, Abb. 8.5.2). 1969 wurde in London die Computer Art Society gegründet, und 1970 erschienen in den Niederlanden bereits fünf Briefmarken, die als Motive Computergrafiken zeigten (nach Vorlagen von der Technischen Hochschule Eindhoven, Abb. 8.5.5). In vielen Fällen wird der Computer nur als „fleißiger Zeichner“ benutzt, um komplizierte mathematisch definierte Muster zu generieren (Abb. 8.5.3). 1967 wurde erstmals die „Mandelbrotmenge“ sichtbar gemacht. Auch einfachere fraktale Gebilde lassen sich heute leicht produzieren, was zu vielfältigen Anwendungen führt [Herfort/Klotz 1997]. Im Bereich des künstlerischen Designs wird häufig entweder ein kombinatorisches System von Möglichkeiten durchgespielt und entsprechend angeordnet (Abb. 8.5.4) oder eine statistische Verteilungsfunktion vorgegeben und unter Einbeziehung eines Zufallsgenerators ein global gesetzmäßiges, aber im Detail zufälliges Muster erzeugt. Eine ausführliche sachliche und historische Behandlung des Themas Computerkunst gibt [Steller 1992].

Eine grundlegende, die gesamte Informatik betreffende Wende trat ein, als in den sechziger Jahren die Ehe zwischen Computer und Bildschirm geschlossen wurde und rund 10 Jahre später der Personalcomputer auf den Markt kam (1979 Apple, 1982 IBM-PC). Seitdem ist Computergeometrie zur Massenerscheinung geworden, wobei sich, rein quantitativ gesehen, die überwältigende Mehrheit aller graphischen Computeranwendungen auf dem Unterhaltungsektor abspielt. Unter der Masse derartiger Produkte gibt es einige, die in der Lage sind, geometrische Interessen zu wecken. Dazu gehört das mittlerweile klassische „Life“, das 1970 von dem Mathematiker J. H. Conway erfunden wurde und nichts anderes ist als eine Variante der von J. v. Neumann hinterlassenen Idee des Zellular-Automaten, sich aber durch eine geniale Kombination von Einfachheit und Variantenreichtum auszeichnet. Dazu gehören auch die vielen Varianten von Blockout. Computergeometrie im engeren Sinne ist für jedermann mit den integrierten mathematischen Programmpaketen wie MAPLE (1980) und MATHEMATICA (1988) möglich geworden. Einfache

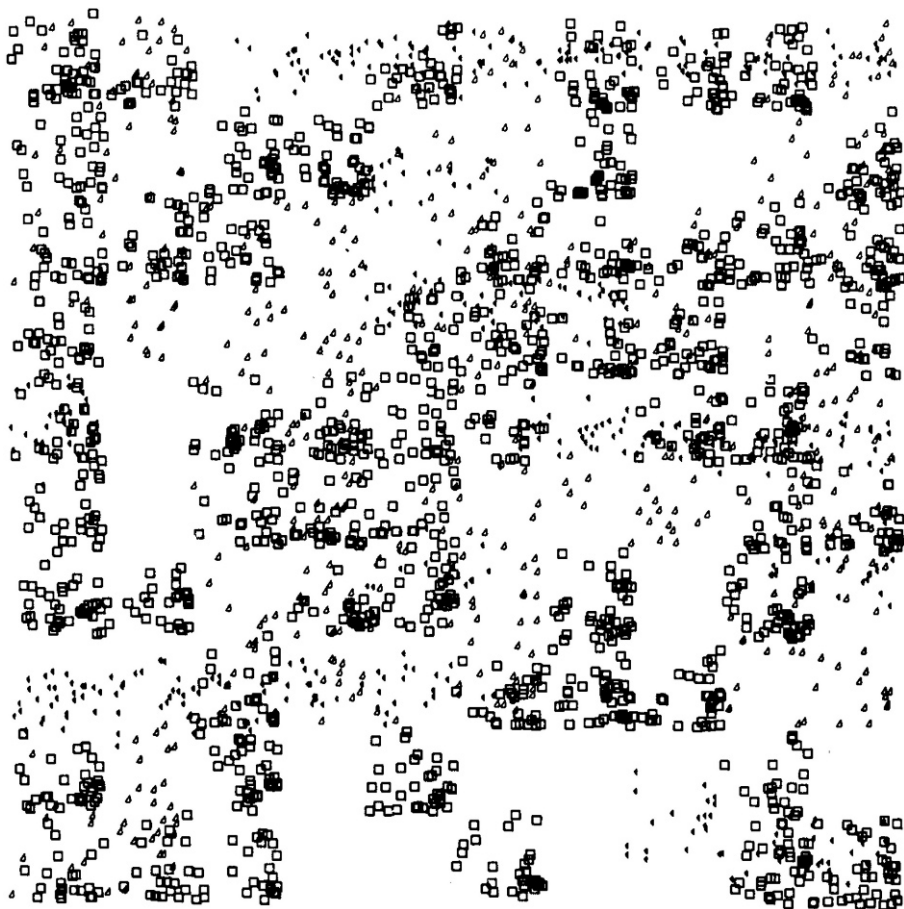


Abb. 8.5.2 Felder mit Zeichenverteilungen zweimal überlagert
[Computergrafik von Frieder Nake Nr. 5, 13.09.1965]

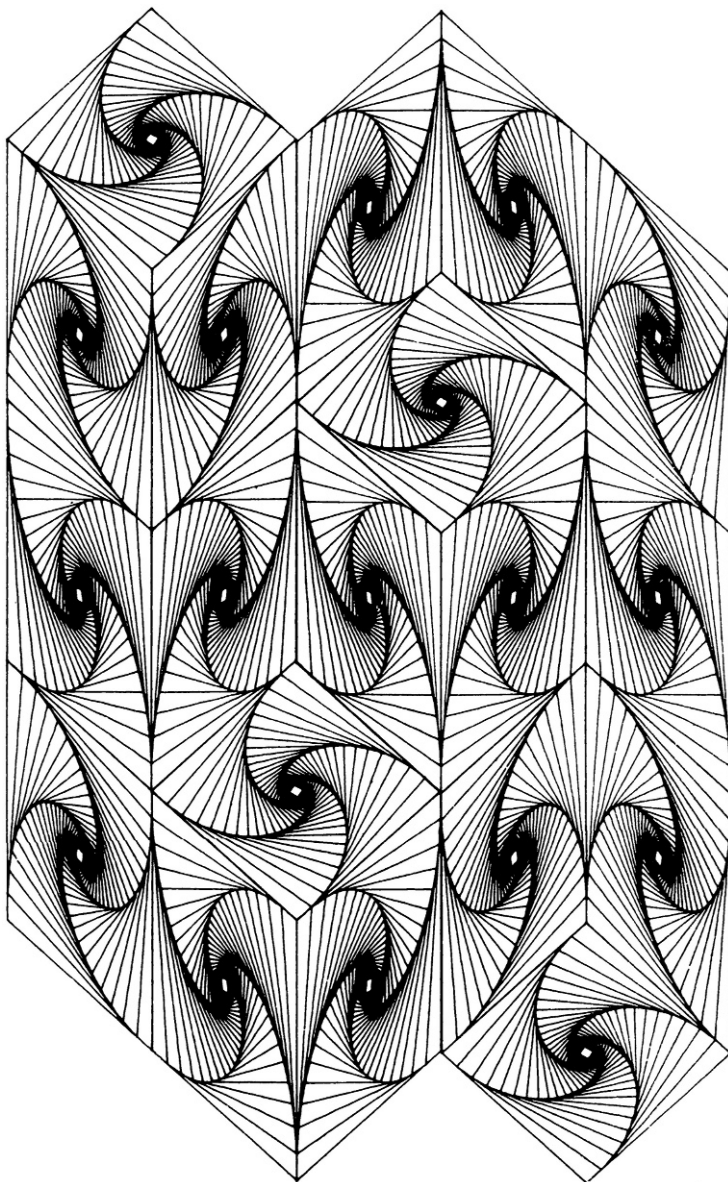


Abb. 8.5.3 Der Computer als fleißiger Zeichner
[Computergrafik von Helmut Schwigon aus Gert Prokop, Das todsichere Ding,
Verlag Das Neue Berlin 1986]

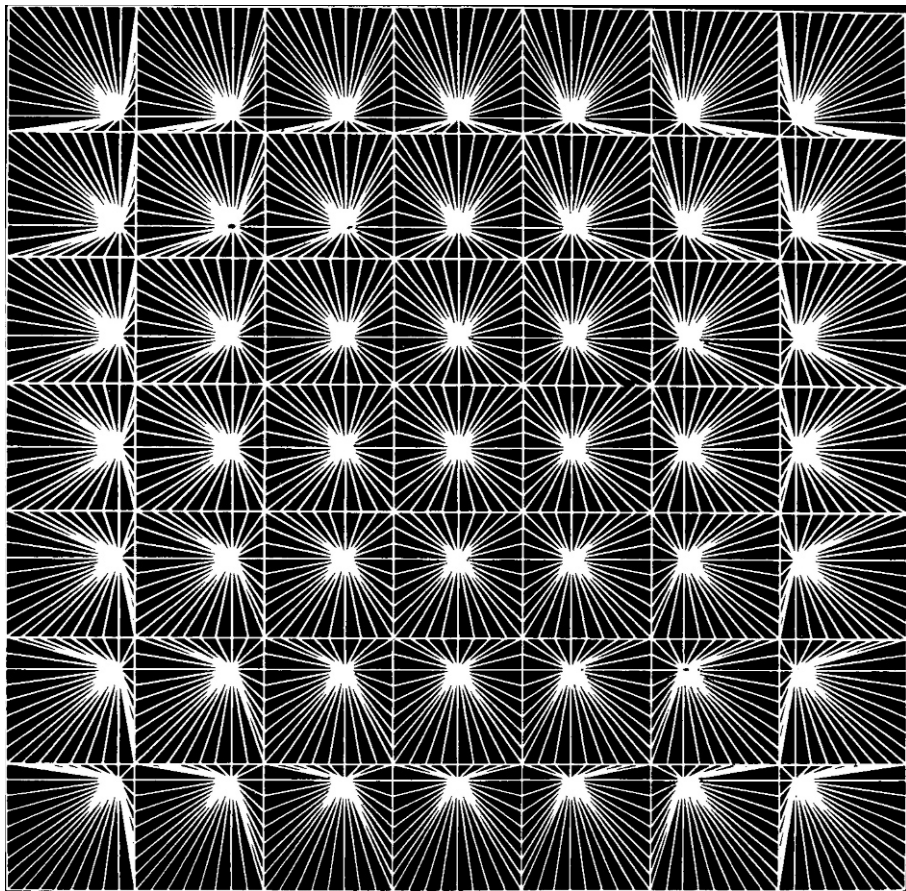


Abb. 8.5.4 Computergrafik nach dem kombinatorischen Prinzip:

Systematisches Durchspielen und Anordnen von Fällen

[Horst Bartnig: Computergrafik 2, Weiß auf schwarzem Grund, 1979/1980, Siebdruck, 35×35 , spectrum Heft 9, Akademie-Verlag, 1981]

Zeichen- und Malprogramme gehören heute zur Software-Grundausstattung jedes Heimcomputers. Seit den neunziger Jahren gibt es auch schon Taschenrechner mit Display, auf dem man sich einfache Grafiken anzeigen lassen kann.



Abb. 8.5.5 Computergrafiken von der Technischen Hochschule Eindhoven
[Briefmarken der Niederlande 1970]

8.6 Geometrie und Kunst

Wir haben gesehen, daß Bedürfnisse und Anregungen von Architektur, Design und bildender Kunst in lange vergangenen Zeiten eine wichtige Rolle in der Entwicklung der Geometrie gespielt haben. Später wurde beiläufig erwähnt, daß noch in den ersten Jahrzehnten des 19. Jhs. das Bauwesen zu den Lehrgebieten von Mathematikprofessoren und die praktische Tätigkeit als Architekt oder Bau-Sachverständiger zu ihren typischen Nebeneinnahmen gehörte. Ergänzt sei hierzu, daß Lehrveranstaltungen über darstellende und Elementargeometrie zur gleichen Zeit manchmal von den „akademischen Zeichenlehrern“ durchgeführt wurden, die es zumindest an deutschen Universitäten neben den Tanz- und Fechtlehrern typischerweise gab. Auf den ersten Blick scheint es, als seien diese engen Beziehungen mit der Ausgliederung der darstellenden Geometrie aus der „eigentlichen Mathematik“ und dem Abflauen des Interesses der Künstler an der Perspektive dauerhaft unterbrochen. Es hat jedoch auch im 20. Jh. eine große Zahl mathematikinteressierter Künstler gegeben, darunter einige zumindest im Kreis der Mathematiker sehr bekannte, aber auch viele weniger bekannte. Einige von ihnen haben mathematische Formen und Begriffe nur rezipiert bzw. benutzt, einige haben aber durch ihr Schaffen in solchem Maße fruchtbare Anregungen für die Geometrie gegeben, daß man sie mit gleichem Recht wie etwa Dürer zu den Mathematikern zählen sollte. Hier soll zunächst das Werk einiger Künstler näher betrachtet werden. Abschließend werden einige tiefliegende Analogien zwischen Mathematik und bildender Kunst diskutiert. Computerkunst wurde schon in 8.5 besprochen. Außer Betracht bleiben hier auch Kunstwerke, deren Beziehung zur Mathematik nicht primär geometrischer Art ist (z.B. Darstellungen von Zahlen, Formeln

und Gesetzen) sowie der Bereich der Ikonographie (d.h. Porträts, Büsten und Denkmale von Mathematikern). Für einen Gesamtüberblick mit ausführlicher Literatur siehe [Schreiber 1998], für umfassendes Beispielmateriale [Guderian 1990] und [Maur 1997].

Wer das Stichwort „Geometrie und Kunst im 20. Jh.“ hört, denkt wahrscheinlich zuerst an M. C. Escher. In der Tat war dieser niederländische Graphiker eine allenfalls mit Dürer vergleichbare Ausnahmeerscheinung, wie sie anscheinend nur in großen zeitlichen Abständen der Welt beschert wird. Escher war sowohl hinsichtlich der objektiven Tatsachen als auch nach seiner eigenen Einschätzung ein höchst mittelmäßiger Schüler, sogar auch in Mathematik. Dies zeigt nur, daß üblicher Mathematikunterricht wenig geeignet ist, Ausnahmebegabungen zu entdecken und zu fördern, und daß die landläufige Vorstellung sogar vieler Mathematiker von dem, was Mathematik ist, dringend einer Korrektur hinsichtlich dessen bedarf, was schon in der Einleitung dieses Buches als „unbewußte Mathematik“ angesprochen wurde. Escher zeichnet sich gegenüber den nicht wenigen anderen Künstlern, die sich im 20. Jh. geometrischen Themen zugewandt haben, sowohl durch die große Vielfalt der von ihm erfaßten Themen und Aspekte als auch durch die starke Anregung aus, die von seinen Werken für eigentlich mathematische Fragen ausgeht. Seine Themen lassen sich grob wie folgt klassifizieren:

- Ornamentik, Parkettierungen, Flächenfüllungen (angeregt durch mehrfachen Besuch der Alhambra und historisch am Beginn seiner Hinwendung zu geometrischen Themen, etwa ab 1936), nach Bekanntschaft mit dem Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene gestaltete Escher mehrfach auch hyperbolisch reguläre Pflasterungen im Poincaré-Modell im Innern einer Kreisscheibe (Abb. 8.6.1). Das ist vom mathematischen Standpunkt ausführlich analysiert in [Herfort/Klotz 1997], siehe auch [Henderson 1983];
- Probleme der zweidimensionalen Abbildung des Dreidimensionalen;
- darüber hinausgehend weitere Fragen im Zusammenhang mit der Deutung von Abbildungen;
- Topologie, Polyeder, einseitige Flächen,...;
- Anamorphosen (speziell solche, bei denen das Objekt durch gekrümmte Spiegel verzerrt wird).

Die sachliche Diskussion all dieser Themen wird im Zusammenhang nach der Vorstellung weiterer relevanter Künstler erfolgen. Hier soll nur ergänzt werden,

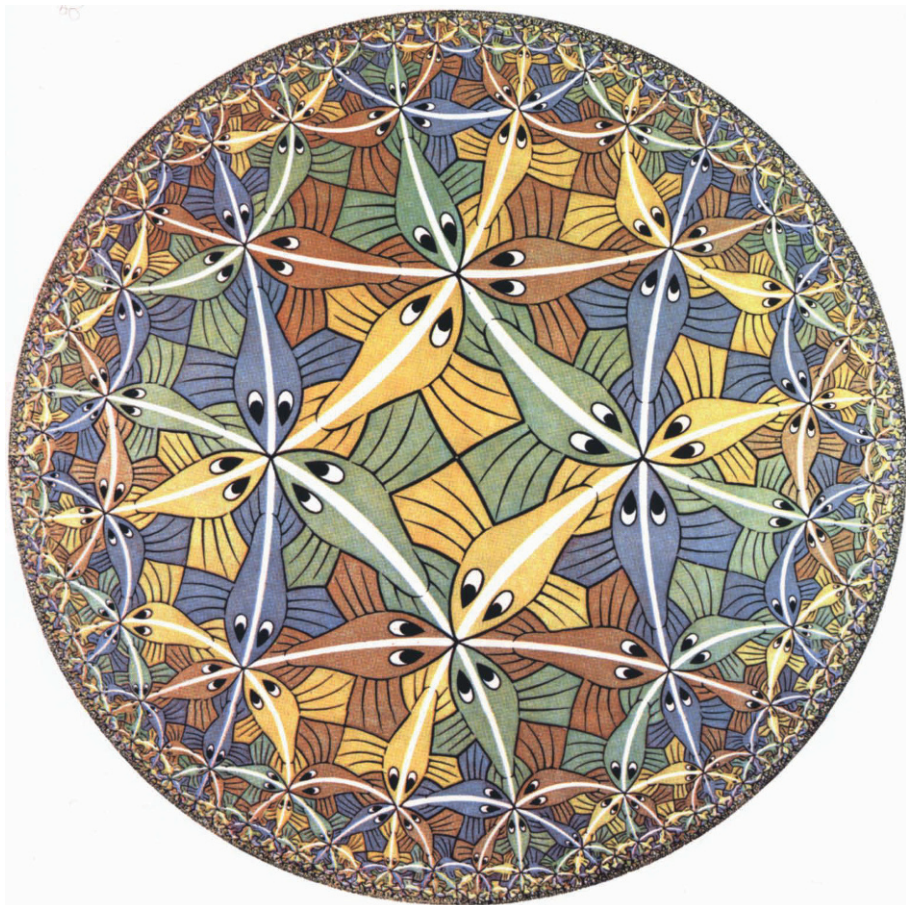


Abb. 8.6.1 M.C. Eschers „Kreislimit III“
[©1999 Cordon Art B.V-Baarn-Holland. All rights reserved]

daß Escher lange Zeit von der offiziellen Kunstszene nicht zur Kenntnis genommen, dann heftig kritisiert wurde. (Man beachte hier die Analogie zu der Ablehnung, die schon Paolo Uccello durch seine Künstlerkollegen wegen seines zu geometrischen Stiles erfahren hat!) Mathematiker und Physiker waren die ersten, die sich von Eschers Werken begeistert und beeindruckt zeigten. Einige, besonders H. S. M. Coxeter, traten in enge persönliche Beziehungen zu ihm, der niederländische Mathematiker B. Ernst (Pseudonym für J. A. F. Rijk) schrieb ein erfolgreiches Buch über ihn [Ernst 1978], schließlich mußte auch die Kunstkritik akzeptieren, daß in der Öffentlichkeit größeres Interesse und größere Begeisterung für Eschers Kunst um sich griff, als die Kunstexperten je vermutet hätten. Einige seiner Werke sind heute so verbreitet und folglich so bekannt, daß man sie in dieser Hinsicht mit der „Mona Lisa“ oder der „Sixtinischen Madonna“ vergleichen kann. Zu Eschers Gesamtwerk siehe auch [Locher 1984] und [Coxeter u.a. 1987].

Eine ganze der Geometrie zugewandte Kunstrichtung entstand um 1955 unter der Bezeichnung Op Art (Abkürzung für Optic Art). Hier wird systematisch mit optischen Täuschungen, großflächigen Mustern, beweglichen Objekten und Effekten, die durch unterschiedliche Materialien, unterschiedliche Beleuchtung und unterschiedliche Betrachterstandpunkte entstehen, experimentiert. Als Begründer gilt der Ungar V. Vasarély, der in Paris arbeitete (Abb. 8.6.3). Weitere Hauptvertreter der Op Art waren u. a. W. Leblanc, B. Riley, F. Morellet, S. Le Witt, und J. R. Soto. Um die Erfindung „unmöglicher Objekte“ hat sich neben Escher der schwedische Graphiker Oscar Reutersvärd verdient gemacht. Nachdem schon eine österreichische Briefmarke 1981 den „Escher-Würfel“ gezeigt hatte, dienten einige der von Reutersvärd erfundenen unmöglichen Figuren 1982 in Schweden sogar als Motive für Dauerbriefmarken (Abb. 8.6.2). Man achte dies nicht gering: Durch derartige Aktionen werden breite Kreise mit einer Art von Geometrie bekannt, die sie in der Schule leider nicht erlebt haben. Die amerikanische Mathematikerin D. Schattschneider hat in Zusammenarbeit mit dem Designer W. Walker halbrekuläre Poyeder und bewegliche Polyederzyklen (sogenannte Kaleidozyklen) mit Eschers Flächenfüllungen kombiniert [Schattschneider/Walker 1992]. Einzelne bemerkenswerte Beiträge einer der Geometrie zugewandten Kunst stammen auch von S. Dali und M. Bill. Letzterer schuf z.B. eine 5 m hohe Plastik in Form eines vielfach gefalteten Möbiusschen Bandes (seit 1986 vor der Deutschen Bank in Frankfurt a. Main, Abb. 8.6.4), verschiedene Teilungen von Kugeln in zwei zueinander kongruente Hälften (seit 1966 beim Mathematischen Institut der Universität Karlsruhe) und 1973 für Jerusalem eine Serie von Plastiken, in denen verschiedene ebene Schnitte eines Würfels thematisiert werden. Schließlich haben zahllose Künstler sich durch die bloße Existenz von topologischen

oder kinematischen Schauobjekten und später durch die fraktalen Mengen zu mehr oder weniger abstrakten ähnlichen Schöpfungen (denen aber oft keine mathematisch faßbaren Gesetze zugrunde liegen) inspirieren lassen.

Die Architektur hat sich nach einer Periode der Einfallslosigkeit nach 1950 wieder verstärkt interessanten geometrischen Formen zugewandt. Neben auffallenden Dachformen, bei deren Gestaltung neben ästhetischen auch technische Gesichtspunkte eine große Rolle spielen, und interessanten Oberflächengestaltungen gibt es auch vereinzelte bemerkenswerte Experimente der Raumaufteilung auf der Grundlage nicht rechtwinkliger Polyeder. Als Beispiele nennen wir die Synagoge der israelischen Offiziersschule, die 1968/70 von A. und N. Neumann und Z. Hecker nach dem Prinzip der regelmäßigen Raumfüllung mit Tetraedern und Oktaedern errichtet wurde, wobei aber die Ecken jeweils abgestumpft sind, so daß insgesamt als Teilkörper abgestumpfte Tetraeder, abgestumpfte Oktaeder und Kubooktaeder auftreten (Abb. 8.6.5), sowie die Wohnsiedlung Ramot in Jerusalem, nach Plänen von Z. Hecker zwischen 1972 und 1985 aus Dodekaedern erbaut. Gezeichnet hat übrigens auch Escher eine Architektur auf der Basis der Tetraeder-Oktaeder-Raumfüllung („Plattwürmer“ 1959). Es ist aber eines seiner künstlerisch schwächsten Werke. Auffallende und innovative Gestaltung von Produkten und der Werbung dafür spielt unter den heutigen Bedingungen weltweiter Konkurrenz auf allen Gebieten eine so wichtige und ständig zunehmende Rolle, daß sich den Anwendungen der Geometrie hier ein sowohl wissenschaftlich als auch wirtschaftlich durchaus ernstzunehmendes Anwendungsfeld eröffnet hat.

Nun aber zu einer ordnenden Betrachtung des Ertrages an Anregungen, die sich aus der Kunst (im oben umrissenen Sinn) des 20. Jhs. für die Wissenschaft Geometrie ergeben.



Abb. 8.6.2 Escher-Würfel und widerspruchsvolle Figuren von Reutersvård als Briefmarkenmotive

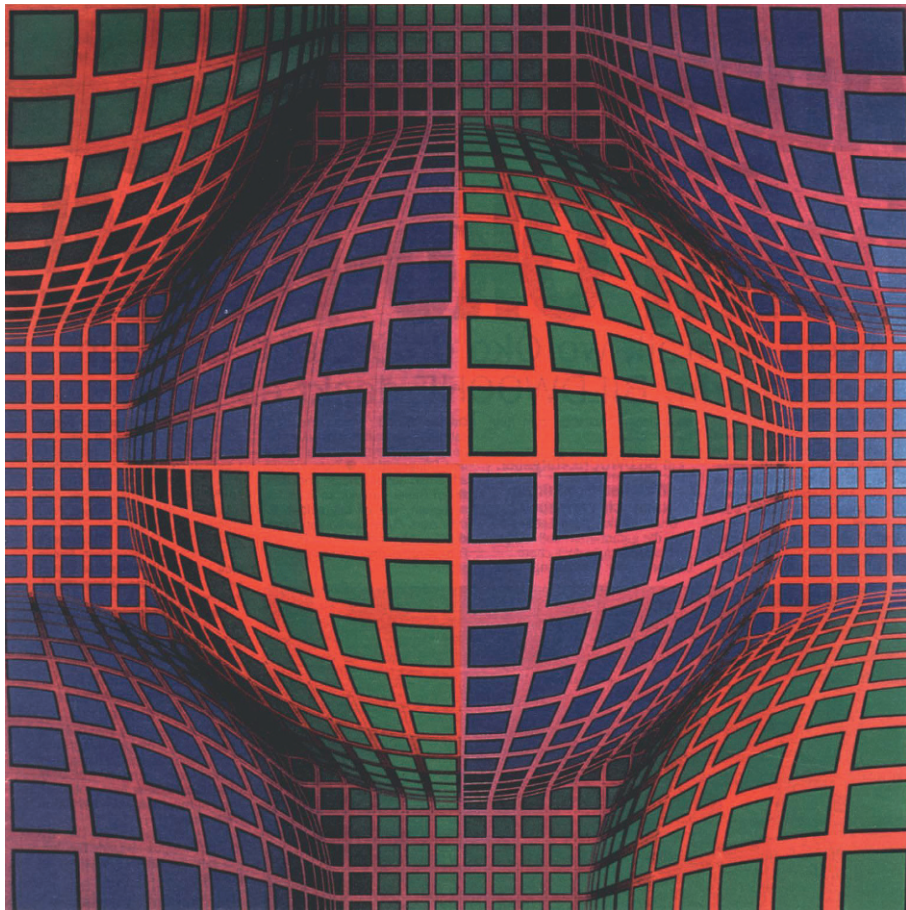


Abb. 8.6.3 Motiv der Op Art

Die Erzeugung des lebhaften Eindrucks von Plastizität durch spezielle Musterungen gehört zu den Grundthemen der Op Art

[Tiré de Vasarely no 3, publié par les Editions du Griffon, Neuchâtel (Suisse) 1984]

1. Welch großen Aufschwung der Komplex der Ornamente und Pflasterungen in unserem Jh. genommen hat, davon legt der inzwischen schon zum Klassiker gewordene Band [Grünbaum/Shepard 1987] ein deutliches Zeugnis ab. Einige Zitate aus dem Vorwort:



Abb. 8.6.4 Max Bill: Kontinuität (1986)

Die etwa 5 m hohe Monumentalplastik vor dem Gebäude der Deutschen Bank in Frankfurt a.M. zeigt ein vielfach gefaltetes Möbiussches Band. Siehe dazu den Artikel von G. Fischer in DMV-Mitteilungen 4-1999, S. 24f. [Foto P. Schreiber]

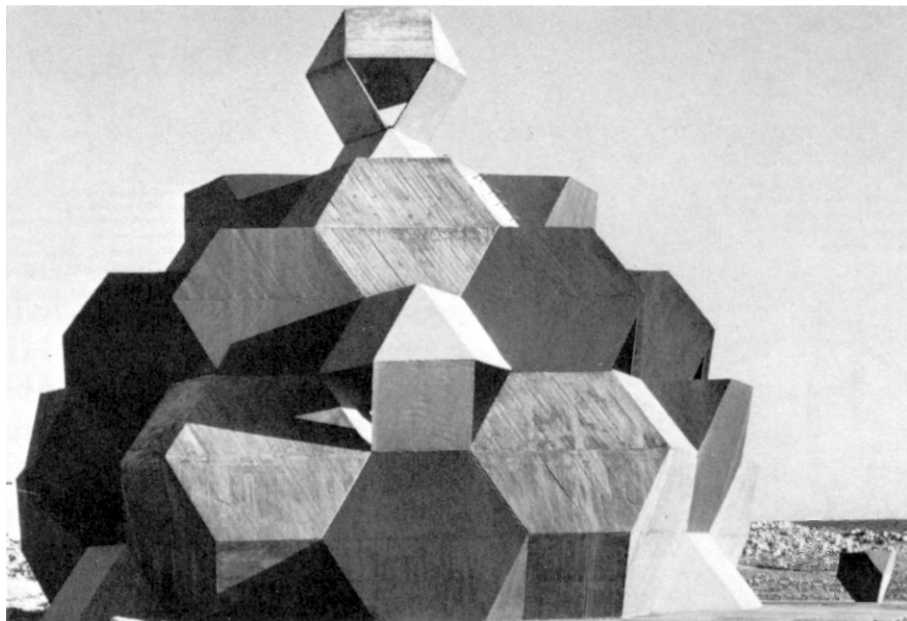


Abb. 8.6.5 Synagoge der israelischen Offiziershochschule [Foto P. Schreiber]

„Perhaps our biggest surprise when we started collecting material for the present work was that so little about tilings and patterns is known. We thought, naively as it turned out, that the two millenia of development of plane geometry would leave little room for new ideas. Not only were we unable to find anywhere a meaningful definition of a pattern, but we also discovered that some of the most exciting developments in this area (such as the phenomenon of aperiodicity for tilings) are not more than twenty years old ... we are rejecting the current fashion that geometry must be abstract if it is to be regarded as advanced mathematics, and that dispensed entirely with diagrams. To consider geometry without drawings as a worthy goal ... seems to us as silly as to extol the virtues of soundless music (suggesting, of course, that the sign of true musical maturity is to appreciate it by merely looking at the printed score!)

While assembling the material we realized that the field abounds with challenging but tractable problems, and that many previous publications contain serious errors.“

Die physikalisch-technische Bedeutung aperiodischer Pflaster im Zusammenhang mit Quasikristallen wurde in 8.3 behandelt. Hier sei ergänzend

betont, daß sich seit den ersten Resultaten über die Simulierbarkeit von Turingmaschinen und ähnlichen Modellen rekursiver Berechnung mittels Pflasterungen (R. Berger 1966) nach den kombinatorisch harten graphentheoretischen Aufgaben eine zweite äußerst interessante und erfolgversprechende Verbindung zwischen Problemen der Algorithmen- und Komplexitätstheorie einerseits und deren geometrischer Umdeutung andererseits ergeben hat.

2. Darstellende Geometrie. Sie findet im weiteren Sinn überall dort statt, wo ein zwei- oder dreidimensionales euklidisches Modell einer anderen (mathematisch) definierten Struktur etabliert wird, zunächst um Anschauung zu fördern, dann aber, um Algorithmen durch die materielle Repräsentation ihrer Arbeitsgegenstände zu realisieren [Schreiber 2002]. Es sei nachdrücklich betont, daß man Operationen (bzw. Tests) nur *ausführen* kann, wenn die Objekte bzw. ihre sie repräsentierenden Codeobjekte physisch vorhanden sind. Bei der physischen Repräsentation ist im wesentlichen zwischen zwei Arten zu unterscheiden:

- (a) die geometrische Form spielt keine Rolle, das sind also z.B. als Folgen physikalischer Zustände realisierte Zeichenreihen, auch Folgen von Schriftzeichen, soweit man davon absehen kann, daß bei ihrer Identifikation ihre Form auch schon wieder eine Rolle spielt;
- (b) die geometrische Form trägt die wesentliche Information, dann muß sie zwei- oder dreidimensional und (näherungsweise) euklidisch sein.

Darstellende Geometrie in einem Monge noch sehr nahestehenden Sinn haben wir z. B. bei der Darstellung vierdimensionaler regulärer Polyeder durch ihre dreidimensionalen Projektionen oder Abwicklungen (siehe dazu Abb. 7.6.1 und 8.6.6) und bei der Modellierung der ebenen hyperbolischen oder der sphärischen Geometrie in der Ebene. (Letzteres ist der Gegenstand der klassischen Kartographie.) Ein wenig überschritten wird dieser Rahmen schon, wenn die Kartographie dazu übergeht, meteorologische, politische, ökonomische, ökologische oder Verkehrsverhältnisse graphisch darzustellen. Darstellende Geometrie liegt eigentlich auch vor, wenn ein abstraktes Beziehungsgeflecht (z. B. die alte Aufgabe von Wolf, Ziege und Kohlkopf) durch einen gezeichneten Graphen erfaßt wird. Eine tiefliegende Analogie zwischen darstellender Geometrie im mathematischen Sinn und bildender Kunst besteht nun aber darin, daß auch die bildende Kunst fast immer (sofern sie nicht sogenannte konkrete Kunst ist, also den Gegenstand um seiner selbst willen hervorbringt) ein zwei- oder dreidimensionales Bild von etwas herstellt, was seiner Natur nach

entweder abstrakt ist oder nicht die gleiche Dimension hat oder räumlich oder zeitlich zu weit entfernt oder zu groß oder zu klein ist, um unseren Sinnen unmittelbar zugänglich zu sein. Sowohl was die möglichen Themen als auch was die Techniken des Darstellens betrifft, können Kunst und Mathematik viel voneinander lernen.

3. Bildinterpretation, Spezialfall Perspektive (Ausführlich dazu [Ernst 1986])
Seit den diesbezüglichen Erfindungen von Escher, R. Penrose und dem schwedischen Graphiker O. Reutersvärd sind die sogenannten perspektivisch widerspruchsvollen Bilder oder unmöglichen Figuren groß in Mode gekommen, und man hat nachträglich gefunden, daß ihre Tradition weit in die Vergangenheit zurückreicht, wobei bei den älteren Bildern zu unterscheiden ist,
 - (a) ob sie durch schlichtes Unvermögen der Künstler, die Gesetze der Perspektive zu meistern, zustandegekommen sind oder
 - (b) ob den Schöpfern der Bilder andere Gesichtspunkte wichtiger waren, z.B. wichtige Details deutlich sichtbar zu machen (häufig bei altägyptischen Bildern oder mittelalterlichen „technischen Zeichnungen“) oder die Größe der Personen nach ihrer Bedeutung zu richten (sakrale Bilder) oder
 - (c) ob schon in früherer Zeit bewußt und oft in humorvoller Absicht mit der Perspektive gespielt bzw. experimentiert wurde.

Die eingefahrene Terminologie ist sehr schlecht. Es gibt keine perspektivisch widerspruchsvollen Bilder: Jedes Bild hat unendlich viele Urbilder im Raum, da man jeden Punkt des Bildes auf seinem Sehstrahl beliebig verschieben kann, ohne daß sich am Bild etwas ändert. (Filmtricks lebten davon, so lange sie noch nicht per Computer realisiert wurden.) Die neue Welle der „perspektivisch widerspruchsvollen“ Kunstprodukte hat uns nachdrücklich daran erinnert, daß man aus einem zweidimensionalen perspektivischen Bild ohne zusätzliche Informationen überhaupt nichts über das dreidimensionale Urbild erschließen kann. Vielmehr haben verschiedene Künstler und Mathematiker sich damit vergnügt, die Objekte bzw. Szenen bekannter Bilder so zu bauen, daß sie von einem bestimmten Betrachterstandpunkt das vorgebene Bild zeigen. Das Zusammenspiel zwischen gesehenem Bild und zusätzlicher Information über das Gesehene (ohne das der Mensch sich in seiner Umwelt nicht orientieren könnte) ist im Zeitalter der Robotik ein zentraler Forschungsgegenstand der künstlichen Intelligenz geworden, der aber immer noch in den Kinderschuhen steckt, zumindest was die theoretische Durchdringung der

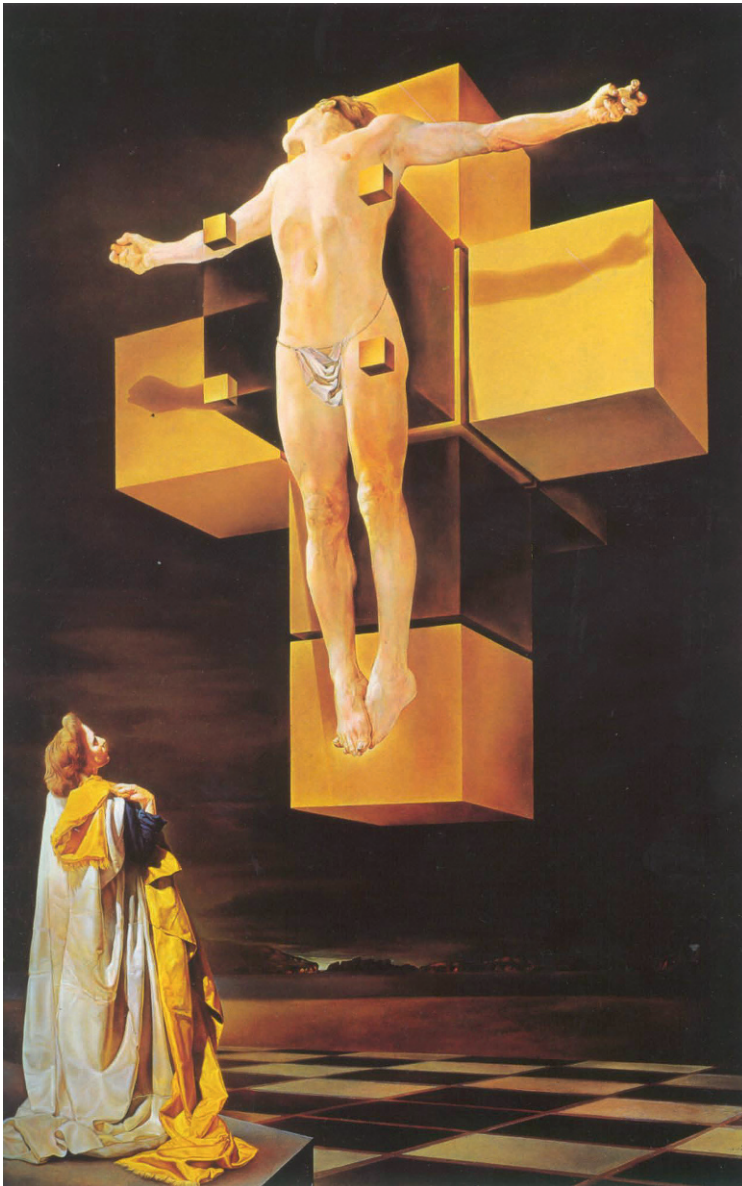


Abb. 8.6.6 Salvador Dalí: Corpus hypercubicus (1954)

Das Kruzifix ist hier durch die zweidimensionale Abbildung der dreidimensionalen Abwicklung des vierdimensionalen Hyperwürfels ersetzt. Als Schlüssel zum Verständnis findet man auf dem Fußboden die Abwicklung des dreidimensionalen Würfels
[Gilles Néret: Salvador Dalí. Benedict Taschen Verlag, Köln 1995]

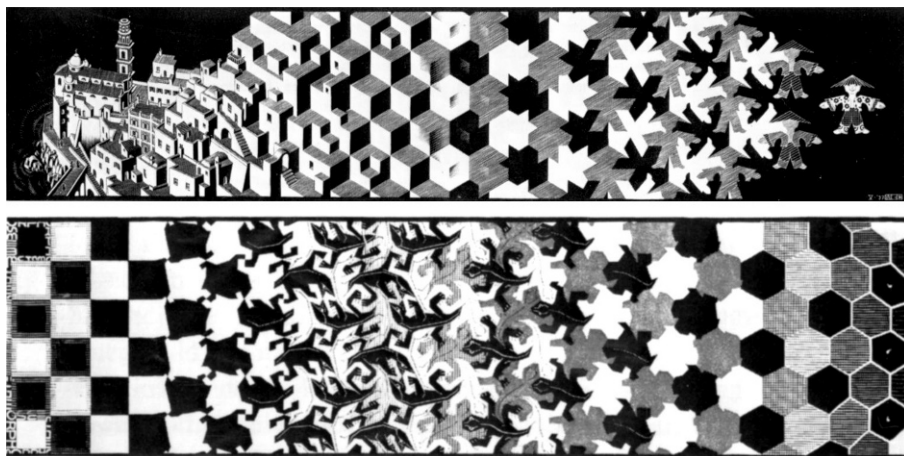


Abb. 8.6.7 M.C. Eschers „Metamorphosen I und II“
 [©Cordon Art B.V.-Baarn-Holland. All rights reserved]

Probleme betrifft. Und wieder gibt es eine tiefliegende Analogie zwischen dem eigentlich geometrischen Problem und der Rezeption von Kunstwerken. Auch die Botschaft, die ein Kunstwerk trägt, erschließt sich im allgemeinen nur durch die Kombination des Sichtbaren mit dem, was man über den Künstler, seine Zeit, seine An- und Absichten und gegebenenfalls über das Abgebildete weiß.

4. Bildinterpretation im weiteren Sinn. Wie kommt es, daß wir das Bild eines bekannten Objektes auch dann noch richtig interpretieren, wenn es stark gestört, verfremdet, grob gerastert oder auf andere Weise vereinfacht ist? Hängt es womöglich mit der in 8.2 diskutierten Hausdorff-Metrik zusammen? Escher machte uns nachdenklich durch seine Bilder, in denen eine Form stufenweise allmählich in eine andere übergeht. Bei der „Metamorphose I“ (1937, Abb. 8.6.7) ist noch eindeutig bestimmbar, wo die Würfel aufhören, Würfel zu sein. Aber wie steht es mit „Luft und Wasser I“ (1938, Abb. 8.6.8)? Von welcher Schicht an können wir die Fische als Fische bzw. die Vögel als Vögel bestimmen? Und könnten wir es auch ohne die jeweilige Nachbarschaft?

Eine ganz andere Frage stellt Dali mit dem Bild „Gala betrachtet das Mittelmeer, das sich in einer Entfernung von zwanzig Metern in das Bild Abraham Lincolns verwandelt“ (1976, Abb. 8.6.9). Es handelt sich hier wie bei anderen ähnlichen Werken um eine neue Art von Anamorphose, bei denen hinter der vordergründigen Information, die das Bild trägt, eine zweite verborgen ist, die

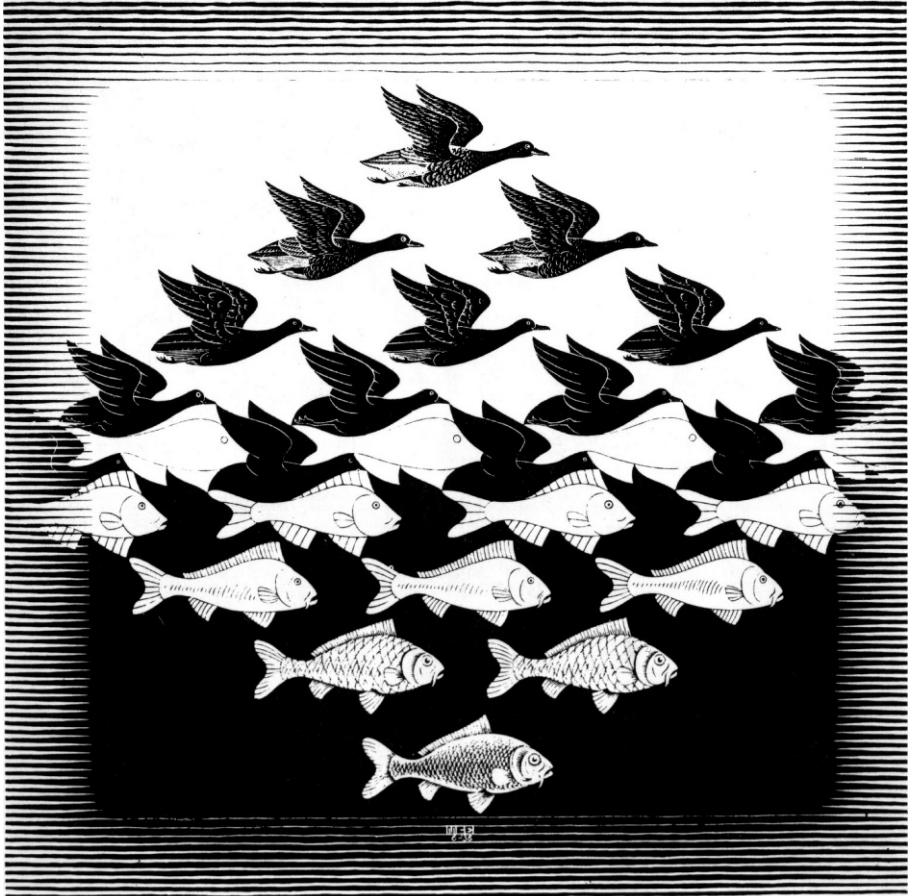


Abb. 8.6.8 M.C. Eschers „Luft und Wasser I“
[©Cordon Art B.V.-Baarn-Holland. All rights reserved]

sich nur erschließt, wenn man den richtigen Betrachterstandpunkt (im wörtlichen oder im übertragenen Sinn) findet. So regt dieses Bild dazu an, über den Zusammenhang zwischen den Begriffen Vexierbild und Anamorphose einerseits und dem Begriff des (Geheim)Codes andererseits nachzudenken.



Abb. 8.6.9 Salvador Dalí: Gala betrachtet das Mittelmeer ... (1976)
Dali malte dieses Bild in Anlehnung an die Digitalisierung von Lincolns Porträt
durch den amerikanischen Kybernetiker Leon D. Harmon.
[Gilles Néret: Salvador Dalí. Verlag Benedikt Taschen, Köln 1995]



Abb. 8.6.10 Ein Bild von Jana (11 Jahre)
Immer wieder entdecken Kinder ganz spontan den ästhetischen Reiz gesetzmäßiger
geometrischer Objekte.

8.7 Statt eines Nachwortes: Geometrie und Spiele(n)

Wir kehren nochmals zu unserer eingangs formulierten und mehrfach bekräftigten These von der Existenz einer „unbewußten“ Mathematik zurück. Neben, vielleicht sogar vor den materiellen und kultischen Beweggründen, sich mit Mathematik und hier besonders mit Geometrie zu beschäftigen, steht der dem Menschen angeborene Spieltrieb. Auch heute kann man immer wieder die Erfahrung machen, daß Menschen, denen der Schulunterricht einen Widerwillen gegen Mathematik oder zumindest den Eindruck eingeprägt hat, sie seien dafür total unbegabt, zu erstaunlichen Denkleistungen fähig sind, sobald ihr Interesse geweckt und ihr Spieltrieb angesprochen wird. Erinnern wir uns an die erstaunlich frühe „Erfindung“ von regulären Sternpolyedern durch Uccello (um 1425) und Jamnitzer (1568), daran, daß Miller 1930 das bis dahin unbekannte archimedische Polyeder beim Basteln eines Rhombokuboktaeders (abgestumpften Würfels) entdeckte, daß Reutersvärd den perspektivisch widerspruchsvollen „Tribar“ 1934 in einer Schulstunde erfand, als er aus Langeweile allerlei Zeichnungen in sein Heft kritzelte. Der Däne Piet Hein erfand in vielleicht ähnlicher Stimmung den Soma-Würfel während einer Vorlesung von W. Heisenberg über Quantentheorie. In enger Beziehung dazu stehen Packaufgaben, die sowohl praktische als auch spielerische Seiten aufweisen. Das Rösselsprungproblem, das Acht-Damen-Problem und viele weitere Aufgaben ursprünglich geometrischer Art sind aus Brettspielen hervorgegangen. Spiele, die darin bestehen, ineinander verflochtene Ringe und Ösen voneinander zu lösen oder mit Schnüren scheinbar gefesselte Gegenstände mittels topologischer Tricks zu befreien, kommen schon 1550 bei Cardano vor. Sie wurden zu einem Grundbestandteil von Knobelbüchern und der sogenannten Tischmagie. Hiermit verwandt sind auch die zahlreichen Arten von „Hexenknoten“ aus Holzteilen, die ihren Ursprung möglicherweise in uralten skandinavischen und slawischen Techniken des Holzbaues ohne verbindende Metallteile haben. Man weiß nicht, wie alt das aus China stammende Legespiel Tangram ist (vgl. Abb. 3.1.6). In Europa tauchte es zu Beginn des 19. Jhs. auf und hat seitdem eine umfangreiche Literatur und viele interessante mathematische Fragen in seinem Umfeld hervorgebracht (z.B. nach der Zahl der verschiedenen konvexen Figuren, die man mit den 7 Teilen legen kann). Der ungarische Architekt Ernő Rubik wurde mit seinem Würfel (1977) und einer Reihe von nachfolgenden geometrischen Spielgeräten nicht nur berühmt sondern auch reich. Berühmt wurden auch verschiedene andere Erfinder von Spielen und Knobeleien wie z.B. Sam Loyd sowie einige Mathematiker, die sich nahezu hauptamtlich dem Sammeln, Bearbeiten und Publizieren von Unterhaltungsmathematik verschrieben haben. Die Bücher darüber sind nicht zu zählen,

ältere sind zum Teil gesuchte Raritäten. Als Einstieg empfehlen wir [Thiele 1984, 1988], die vielfach aufgelegten Klassiker [Ball 1892], [Ahrens 1910ff], die Bücher und Artikel von M. Gardner und den Tagungsbericht [Guy/Woodrow 1994].

Was wir hiermit zum Ausdruck bringen wollen ist dies: Niemand lasse sich einreden, daß Geometrie langweilig ist oder daß er dafür unbegabt sei. Nirgendwo als in der — sozusagen experimentellen — Geometrie, ob mit oder ohne Computer, ist die Chance größer, auch heute noch ohne umfangreiche Kenntnisse der „höheren“ Mathematik etwas Neues zu entdecken, was vielleicht sogar nützlich, vor allem aber interessant ist.

Wesentliche Inhalte der Geometrie im 20. Jahrhundert

Grundlagen der Geometrie: Wandel von einer Quasi-Naturwissenschaft zur Strukturwissenschaft, Lösung vom physikalischen Raumbegriff, axiomatische Begründung der Geometrie (D. Hilbert); methodologische und logische Betrachtungen (Schwabhäuser, Tarski u.a.)

Abstraktion: Übergang zu unendlich-dimensionalen „Räumen“, Übertragung geometrischer Begriffe auf andere Objekte z.B. Metrik, inneres Produkt, Norm, orthogonale Basis; Hilberträume, normierte Vektorräume, metrische Räume, topologische Räume, Filtertheorie, Fixpunktsätze (D. Hilbert, E. Schmidt, E. Fischer, F. Riesz, S. Banach, M. Frechet, F. Hausdorff, H. Lebesgue, L. Brouwer, P.S. Alexandrow, P. Urysohn), Einführung verschiedener Inhalts- und Maßbegriffe (Peano, Jordan, Borel, Lebesgue, Hausdorff)

Anwendungen in den Naturwissenschaften: spezielle und allgemeine Relativitätstheorie (A. Einstein), drei- bzw. vierdimensionale Räume als Raumzeit-Modelle, Minkowski-Geometrie (H. Minkowski, H. Weyl), Bezüge zur Quantenphysik, Festkörperphysik, aperiodische Parkettierungen (Robinson, Penrose)

Anwendungen in der Technik: Geometrische Kinematik, Roboterkonstruktionen, (Prothesenherstellung), Differentialgeometrie bei gekrümmten Flächenteilen zur Montage von Autos, Flugzeugen u.ä.; stochastische Geometrie in Biologie, Medizin, Werkstoffprüfung; dichte bzw. optimale Packungen für Gütertransport, kombinatorische Topologie für Standortwahl, Verkehrsnetze und Fahrpläne

Anwendungen in der Informatik: Computergeometrie zur graphischen Darstellung zwei- bzw. drei-dimensionaler Objekte (CAD, 3D-Progr.), zur Mustererkennung, für mathematische Programmpakete und Computerspiele

Geometrie in der Kunst: Irreale Darstellungen (Escher, Reutersvärd), Op-Art (Vasarely), Plastiken (M. Bill), Anamorphismen (S. Dali), Parkettierungen und Ornamente (M.C. Escher)

Lösung eines alten Problems: Beweis des Vierfarbensatzes auf Grundlage der Überlegungen von H. Heesch mit Hilfe von Computern (K. Appel, W. Haken)

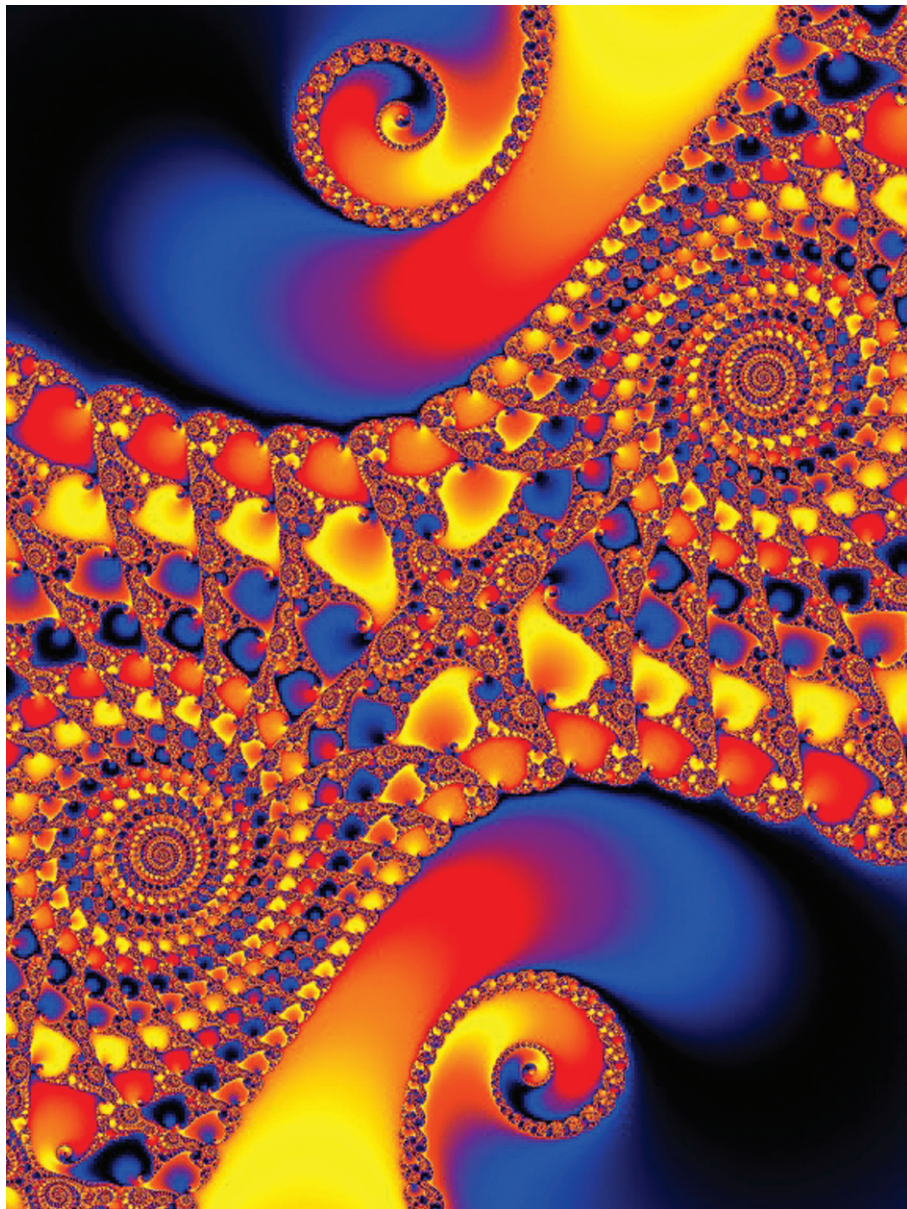


Abb. 8.7.1 Fraktal – ein Beispiel der Computergeometrie [erstellt mit „fractalizer“ von Wesemüller-Kock] Aus dem Apfelmännchen der Mandelbrotmenge wurde durch vielfache ähnliche Kopien ein großer Formenreichtum entwickelt. Ein neuer Zweig abstrakter Kunst entstand. Auch in der Natur sind Fraktale anzutreffen, z. B. in der Blumenkohlzucht Romanesco.

8.8 Aufgaben zu 8

Aufgabe 8.1.1: Moultons Ebene (siehe Abb. 8.1.1)

- a) Man suche in diesem Modell verschiedene Lagen der Desarguesschen Figur, so daß der Satz jeweils nicht erfüllt ist.
- b) Man verfolge, an welchen Stellen man in Schwierigkeiten gerät, wenn man in diesem Modell Translationen definieren, ausführen bzw. beweisen will, daß die Translationen eine kommutative Gruppe bilden.
- c) Die projektive Abschließung der Moultonebene ist natürlich möglich, weil sie nur auf den auch hier gültigen Inzidenzaxiomen beruht. Was passiert mit den unendlich fernen Punkten beim Übergang von der euklidischen Standardebene zur Moultonebene? Man versuche nun, eine nichtdesarguessche Ebene mit nur endlich vielen Punkten zu konstruieren. *

Aufgabe 8.2.1: Norm und inneres Produkt *

Wie kann man in einem euklidischen Vektorraum das innere Produkt aus der Norm definieren? Man versuche, für das so definierte innere Produkt seine Grundeigenschaften (Bilinearität, Symmetrie und positive Definitheit) aus Voraussetzungen über die Norm zu beweisen. Wozu braucht man dabei die Voraussetzung der Parallelogrammregel?

Aufgabe 8.2.2: Hausdorff-Metrik

Seien $A, B, C, \dots$ beschränkte und abgeschlossene Teilmengen eines metrischen Raumes. (Der Anschaulichkeit halber denke man etwa an Mengen in der euklidischen Ebene.) Für einen beliebigen Punkt p sei $gd(p, A)$ das Minimum aller Abstände $d(p, a)$ ($a \in A$). Aus welcher Voraussetzung folgt seine Existenz? Ferner sei $gd(B, A)$ das Maximum aller $gd(b, A)$ ($b \in B$). Aus welcher Voraussetzung folgt seine Existenz?

- a) Man zeige, daß für diesen gerichteten (unsymmetrischen) Abstand der Mengen gilt:
 - (1) $gd(B, A) \geq 0$, $gd(B, A) = 0$ genau dann, wenn $B \subseteq A$.
 - (2) $gd(A, C) \leq gd(B, A) + gd(B, C)$.
 - (3) Ist f eine Bewegung (d.h. eine abstandserhaltende Abbildung) des Raumes auf sich, so ist $gd(B, A) = gd(f(B), f(A))$.

Zur anschaulichen Verinnerlichung des Begriffes überlege man sich: Ist b ein punktförmiger Hase, der sich auf der Menge B frei bewegen kann, und a ein punktförmiger Hund, der sich auf A frei bewegen kann, so wird $gd(B, A)$ als Abstand zweier Punkte b_0, a_0 realisiert, die Hund und Hase einnehmen, wenn der Hase auf alle Fälle möglichst weit vom Hund entfernt sein möchte und der Hund sich danach dem Hasen so weit wie möglich nähert. Anhand dieser Vorstellung ermittle man für einfache ebene Mengen gd . Wann ist a_0 , wann ist b_0 eindeutig bestimmt?

- b) Man überlege sich zunächst an einem Gegenbeispiel, daß im allgemeinen $gd(A, B) \neq gd(B, A)$ ist. Hausdorffs Symmetrisierung besteht darin, von gd

zu $d(A, B) = \max\{gd(A, B), gd(B, A)\}$ überzugehen. Man zeige, daß dies eine Metrik wird, die obendrein im Sinne von (3) bewegungsvariant ist, d.h. der Abstand zweier Mengen hängt nur von ihrer relativen Lage zueinander ab.

- c) Man zeige nun, daß der Hausdorff-Abstand zweier Kreise der euklidischen Ebene mit den Radien r_1, r_2 und dem Mittelpunktsabstand r_0 gleich $r_0 + \|r_1 - r_2\|$ ist. (Das Analoge trifft in jedem $\mathbb{R}^n$ für die Vollkugeln der Dimension n zu, da der Abstand zwischen Hase und Hund in allen Dimensionen auf der Verbindungsgeraden der Kugelmittelpunkte angenommen wird.)
- d) Koordinatisiert man nun die Menge aller Kreise durch jeweils die Koordinaten ihres Mittelpunktes und ihren Radius, so erweist sich der Hausdorff-Abstand in diesem Fall als die Produktmetrik, die man im kartesischen Produkt aus der Ebene (als Ort aller Mittelpunkte) und $\mathbb{R}^+$ als Ort aller möglichen Radien erhält, wenn man im ersten und zweiten Faktor jeweils den euklidischen Abstand wählt.
- e) Man überlege sich, wie bei der oben beschriebenen Metrik in der Menge aller Kreise der Ebene für ein gegebenes ε die ε -Umgebung eines festen Kreises aussieht. Dies ist im Sinne der Intervallmathematik die Menge aller Kreise, für welche die Summe der Abweichungen des Mittelpunktes und des Radius von denen des Kreises k_0 kleiner als das gegebene ε ist. [Schreiber 1984, S. 215ff].

Aufgabe 8.2.3: Äquivalenz aller Normen im $\mathbb{R}^n$

Warum erzeugen alle Banach-Minkowski-Normen in einem $\mathbb{R}^n$ die gleiche Topologie?

Aufgabe 8.2.4: Konvexität und Schauderscher Fixpunktsatz

Man zeige an einem einfachen ebenen Gegenbeispiel, daß die Voraussetzung der Konvexität für den Schauderschen Fixpunktsatz notwendig ist.

Aufgabe 8.3.1: Widerlegung des „rechnenden Raumes“ von Zuse

Für Leser, die das Spiel Life oder überhaupt den Begriff des Zellularfeldes kennen: Man nehme an, Einzelsignale, die sich von Zelle zu Zelle geradlinig fortpflanzen, entsprechen Photonen und diese Ausbreitungsgeschwindigkeit sei die Lichtgeschwindigkeit, die von keinem Konglomerat von Signalen übertroffen werden kann. Warum ist dieser Vorschlag von Zuse nicht mit der physikalischen Realität vereinbar?

Aufgabe 8.3.2: Kugelpackungen

Man denke sich sechs kongruente Kugeln einmal in gerader Reihe aneinandergelegt, einmal in zwei Reihen zu je drei Kugeln und einmal in oktaedrischer Anordnung, so daß jede von ihnen vier andere berührt.

- a) Man bestimme in den drei Fällen das Volumen der konvexen Hülle und verifiziere damit, daß die oktaedrische Anordnung überraschenderweise nicht die dichteste ist.
- b) Man untersuche auch, wie sich die Oberflächen der konvexen Hüllen zueinander verhalten. Letzteres erklärt, warum eine geringe Zahl von annähernd kugelförmigen Objekten meist in linearer oder ebener Anordnung verpackt wird.

Aufgabe 8.4.1: Satz von Holditch

Man verifiziere den in 8.4 genannten Satz von Holditch für folgende elementare Spezialfälle:

- Die Sehne der Länge $a + b$ gleite im Innern des Kreises k vom Durchmesser $d > a + b$ einmal herum. Dann beschreibt der Punkt P der Sehne, der sie in den Abschnitt a und den Abschnitt b teilt, offenbar einen zu k konzentrischen Kreis. Man vergleiche den Inhalt des von beiden Kreisen begrenzten Ringes mit der Aussage des Satzes von Holditch.
- Die äußere Randkurve sei nun ein Rechteck mit den Seiten $x, y > a + b$. Was für eine Kurve beschreibt nun der Punkt P , wenn die Sehne einmal um den Rand bewegt wird? Offenbar stimmt sie dann stückweise mit den Kanten des Rechtecks überein, aber was passiert in den Ecken? Wenn man die dort entstehenden Kurvenbögen schon kennt, bekommt man als Spezialfall des Satzes von Holditch die Formel für den Flächeninhalt von ...?
- Was ändert sich gegenüber b), wenn man statt des Rechtecks ein beliebiges (hinreichend großes) konvexes Vieleck als äußerere Begrenzungskurve nimmt? Nun braucht der Leser nur noch die ganz beliebige (hinreichend große) konvexe Berandung durch ein Vieleck zu approximieren, um den Satz von Holditch zu erhalten.

Aufgabe 8.4.2: Wunderlichs Wackeloktaeder

*

Wir gehen von einem geraden Prisma aus, dessen Deckfläche ABC ein gleichseitiges Dreieck mit den gegenüberliegenden Punkten DEF der Grundfläche bildet. Die Höhe sei h und der Radius des Umkreises von Grund- und Deckfläche r . (Zum Zweck der folgenden Rechnung kann man $r = 1$ setzen.) Wenn man die Grundfläche gegenüber der Deckfläche um einen Winkel $\alpha < 60^\circ$ verdreht, so bleiben die vier Eckpunkte einer Seitenfläche (z.B. $ABED$) nicht komplanar, aber durch Einfügen der Diagonalen AE erhält man zwei Dreiecke. Analog füge man die Diagonalen BF und CD ein (Abb. 8.8.1; jeder Raumpunkt X wird im Zweitafelverfahren durch seinen Grundriß X' und seinen Aufriß X'' repräsentiert). Es entsteht ein nicht konvexer Körper, der von 8 Dreiecken begrenzt ist, die kombinatorisch analog zum regulären Oktaeder verbunden sind. Übrigens ist leicht zu sehen, daß für $\alpha = 60^\circ$ die drei zusätzlich eingefügten Diagonalen sich im Mittelpunkt des Körpers (d.h. in der Höhe $h/2$ über dem Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises) schneiden, und daß für $\alpha > 60^\circ$ die Dreiecke sich gegenseitig durchdringen würden. Denkt man sich die Drehung um die Mittelachse bei konstantem h ausgeführt, so ändern sich die Länge d der Diagonalen und die Seitenkante $s = AD (= BE = CF)$ stetig. Wir wollen aber s festhalten, wodurch der Körper mit zunehmendem α immer flacher wird. Die Aufgabe besteht darin, bei gegebenem r und s und variablem α , wodurch außer h auch die Länge d der drei Diagonalen eine Funktion von α wird, $d(\alpha)$ explizit aufzustellen. Man entnimmt der Formel, daß $d(60^\circ - \alpha) = d(\alpha)$ und d zwischen 0° und 30° monoton wächst. Daher werden die d -Werte zwischen $d(0^\circ)$ und $d_{max} = d(30^\circ)$ an genau zwei Stellen $30^\circ \pm \varepsilon$ angenommen. Bestimmt man obendrein d so, daß die zugehörigen Winkelwerte hinreichend dicht rechts und links von der Maximalstelle liegen, so bedeutet dies, daß

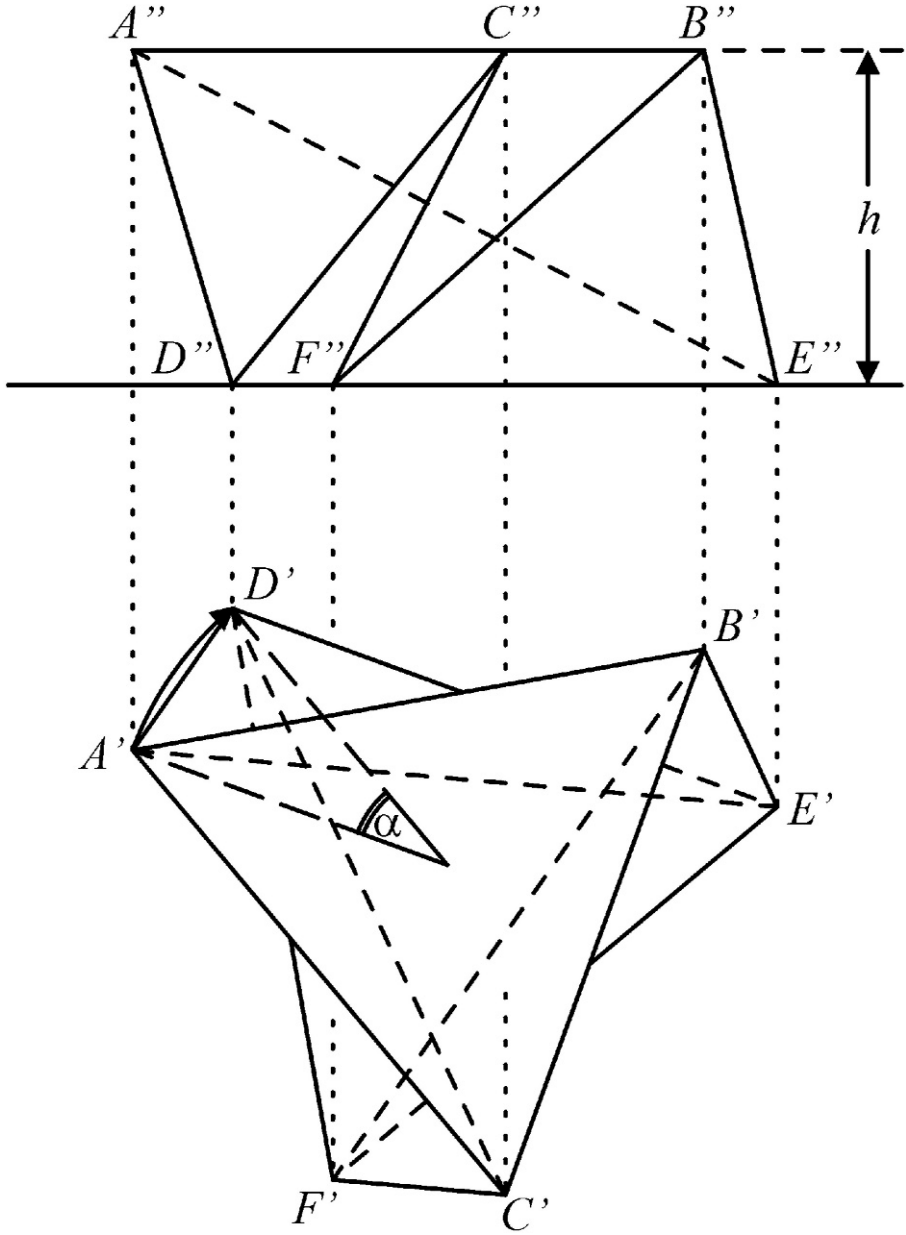


Abb. 8.8.1 Wunderlichs Wackeloktaeder

d sich in dem dazwischen liegenden Intervall nur wenig ändert, man den Körper also mit einer nur leichten Deformation aus der einen Lage in die andere drücken kann. Das Beispiel illustriert so recht gut, was unter „Wackeln“ bzw. „infinitesimaler Beweglichkeit“ zu verstehen ist. Der Leser sei aufgefordert, den Körper mit geeigneten selbstberechneten Werten von r , s und d zu basteln und die zugehörigen Werte von α experimentell zu bestätigen.

Aufgabe 8.7.1: Hexenknoten

*

Abb. 8.8.2a zeigt einen „handelsüblichen“ Hexenknoten und seine Einzelteile. Sie sind in der Reihenfolge der Zusammensetzung numeriert. Dies ist jedoch nur eine von unübersehbar vielen Möglichkeiten, die 6 Vierkanthölzer im Kreuzungsbereich (Abb. 8.8.2b) so zu gestalten, daß

- a) der Knoten nicht von allein auseinanderfällt,
- b) im Innern keine Lücke bleibt,
- c) er zusammengesetzt und wieder demontiert werden kann, wobei genau eines der Hölzer, der „Schlüssel“ Nr. 6, ungekerbt bleibt, damit er herausgezogen werden kann und dadurch die anderen Hölzer beweglich werden.

C. A. Cross und W. H. Cutler haben 1977-79 mit Computerhilfe ermittelt, daß es 113 577 derartige Möglichkeiten gibt [Thiele 1988, S. 54 und 198]. Unsere Aufgabe ist bescheidener: Man finde wenigstens eine Variante, die von der abgebildeten in dem strengen Sinne verschieden ist, daß sie auch nicht durch Drehungen und/oder Spiegelungen daraus hervorgeht. Die Teile einzeln, so wie in Abb. 8.8.2a), zu zeichnen, ist übrigens eine gute Übung in darstellender Geometrie. Bezeichnet $2a$ die Seitenlänge des quadratischen Querschnittes der Hölzer und denkt man sich den Kern (Abb. 8.8.2b) des Knotens in Würfel der Kantenlänge a zerlegt, so bilden sie die Ecken eines im Raum sehr regelmäßigen Graphen. Unsere Aufgabe kann auch so formuliert werden: Man ordne den Ecken dieses Graphen (d.h. den a -Würfeln) die Zahlen $1, \dots, 6$ so zu, daß dabei die den obigen Bedingungen a)-c) entsprechenden Bedingungen erfüllt werden.

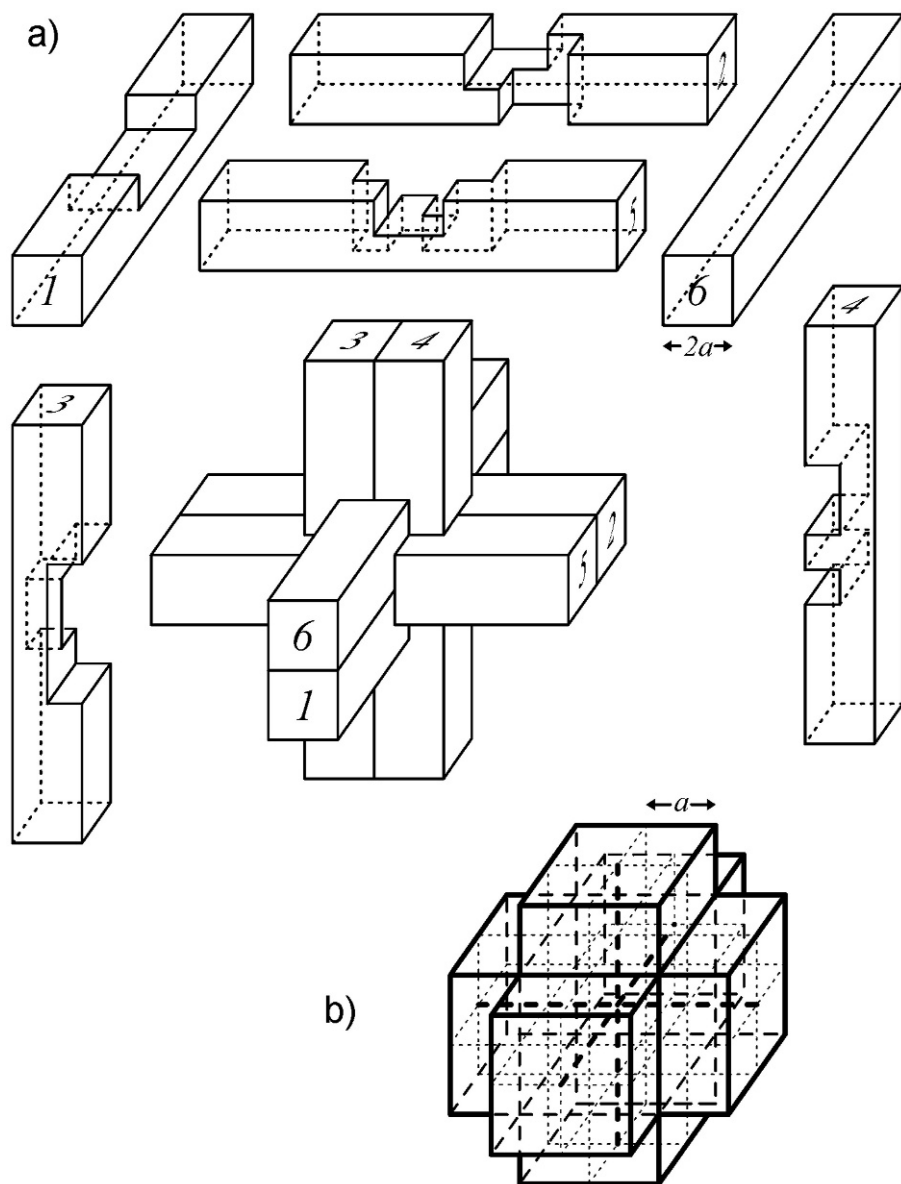


Abb. 8.8.2 Figur zu Aufg. 8.7.1

A Anhang: Ausgewählte Originaltexte

A.1 Platon: Staat

Nach dem bekannten Höhlengleichnis entwickelt Platon im „Staat“ — indem er Sokrates im Gespräch mit einigen Partnern seine Ideen vortragen läßt — im 7. Buch das Erziehungsprogramm für die zukünftigen Lenker des Staatswesens. Es soll sie befähigen, hinter den vergänglichen Erscheinungen des Werdens und Vergehens das unveränderliche Sein und die darauf gründende Wahrheit zu erkennen. Als unumgänglich dafür wird das Studium der vier mathematischen Wissenschaften angesehen. Aus den von Sokrates angeführten Begründungen hier einige Auszüge.

„Unser Staatshüter ist nun ja doch Kriegsmann sowohl wie Freund der wahren Wissenschaft?

Jawohl.

Es kommt uns also zu, lieber Glaukon, diesen Lerngegenstand gesetzlich einzuführen und die, die dereinst in dem Staate an den erhabensten Würden teilnehmen wollen, anzuhalten, an die Rechenkunst zu gehen und sie nicht bloß für den gemeinen Hausgebrauch zu betreiben, sondern bis sie mittels des reinen Denkvermögens zu einer begrifflichen Anschauung vom Wesen der Zahlen gelangen, nicht Kaufs und Verkaufs halber, wie Kaufleute und Krämer sie betreiben, sondern einmal des praktischen Nutzens wegen für den Krieg und dann vorzüglich zur leichteren Umlenkung der Seele vom Werden zu Wahrheit und Sein.

Ja, sagte er, trefflich bemerkt!

...

Dieser erste vorüberende Lehrgegenstand, fuhr ich fort, sei also abgemacht. Wir wollen jetzt zweitens den damit verwandten näher betrachten, ob er etwas zu unserem Zwecke beiträgt.

Was für einen? Vielleicht Geometrie meinst du? fragte er.

Ja, eben diese, war meine Antwort.

Was nun hier fürs erste, sagte er, ihre Beziehung auf das Kriegswesen betrifft, so versteht sich von selbst, daß sie dafür einen praktischen Nutzen hat: um nämlich Lager abzustecken, feste Plätze einzunehmen, ein Heer zusammenzuziehen oder auszudehnen, sowie in betreff aller sonstigen Wendungen, die Heere nicht nur im Gefechte selbst, sondern auch auf ihren Märschen machen, wird es bei einem einen großen Unterschied machen, ob er Geometrie versteht oder nicht.

Ja, gut, sprach ich, aber zu dergleichen würde offenbar ein klein wenig Geometrie hinreichend sein; darum müssen wir nun zweitens ihr umfassenderes und tieferes Studium in Erwägung ziehen und nachsehen, ob es etwas zu jenem Zwecke beiträgt, nämlich zur leichteren begrifflichen Anschauung der Idee des Guten. Es trägt aber nach unserer Erklärung alles dazu bei, was die Seele nötigt, sich nach jener Region hinzuwenden, wo das Himmlischste des Seins sich befindet, was sie auf alle Weise sehen muß.

Ja, richtig bemerkt, sagte er.

Nicht wahr, wenn Geometrie auf wesenhaftes *Sein* zu schauen nötigt, so ist sie förderlich dazu, wenn aber auf die sichtbare Welt des vergänglichen *Werdens*, so ist sie es nicht.

...

Wie nun weiter? Sollen wir als die dritte die Sternkunde aufstellen? Oder meinst du nicht?

Ja, ich denke, erwiderte er; denn die Zeitenwechsel im Monat und Jahr etwas prophetisch vorauszubemerken, ist nicht nur ein Erfordernis für Ackerbau und Schifffahrt, sondern auch in eben dem Grade für die Kriegskunst.

Du bist naiv, sprach ich. Du scheinst Furcht vor dem großen Publikum zu haben, es möchte scheinen, du wolltest unpraktische Lehrgegenstände einführen. Der Hauptnutzen aber, freilich schwer zu glauben, liegt darin, daß einem jeden ein gewisses Organ der Seele gereinigt und angefeuert wird, das unter den übrigen Lebensbeschäftigungen abstirbt und erblindet, obgleich an dessen Erhaltung mehr gelegen ist als an tausend Augen; denn durch jenes Organ allein wird die Wahrheit geschaut.

...

Also um Übungen des denkenden Verstandes, sagte ich, an ihnen zu haben, lassen wir Astronomie wie Geometrie uns angelegen sein.

...

Wie es mir scheint, so antwortete ich, so sind die Ohren ebenso für die in harmonischen Tönen sich offenbarende Bewegung bestimmt [Begründung für die Einführung der Harmonielehre!] wie die Augen für die Astronomie, und diese Wissenschaften sind mit einander verschwistert, wie die Pythagoreer behaupten, mit welcher Behauptung auch wir, mein Glaukon, einverstanden sind, oder wie wollen wir es machen?

Ebenso, gab er zur Antwort.

...

Wenn, fuhr ich fort, das Studium aller dieser von uns dargestellten vorbereitenden Lehrgegenstände zur Einsicht ihrer wechselseitigen Gemeinschaft und Verwandtschaft gelangt, und wenn man dabei die allgemeine Einsicht und Übersicht gewinnt, daß sie miteinander nur eine Familie ausmachen, so glaube ich, daß die Beschäftigung mit ihnen nicht wenig zu dem von uns beabsichtigen Ziele beiträgt, und daß die darauf verwandte Mühe nicht verloren ist. Wenn aber diese Methode nicht eingehalten wird, so ist alle Mühe verloren.“

[Platon: Sämtliche Werke, 2. Band. Köln und Olten: Jakob Hegner 5. Aufl. 1967, S. 265–275.]

A.2 Archimedes: Einleitung zur Abhandlung über Spiralen

Anders als die Gelehrten, die im Museion in Alexandria wirkten und sich dort mit ihren Kollegen über ihre Forschungen unterhalten konnten, arbeitete Archimedes in seiner Heimatstadt Syrakus auf der Insel Sizilien sehr isoliert. Im Gegensatz z. B. zu

Euklid, der seinen „Elementen“ keinerlei erklärende Einleitung vorausschickte, gab Archimedes daher in Begleitschreiben zu einigen seiner Schriften, die er den Mathematikern in Alexandria zusandte, Auskunft über die Beweggründe, die ihn zu seinen Untersuchungen veranlaßten. Nachdem sein Freund Konon gestorben war, richtete er mehrere Schriften an Dositheos. Denn er hatte gehört, auch dieser sei ein Freund Konons gewesen und sei überdies ebenfalls ein erfahrener Mathematiker.

„Archimedes grüßt den Dositheos.

Für die Lehrsätze, die ich an Konon geschickt hatte, und deren Beweise du mich immer bittest, aufzuschreiben, findest du die meisten Beweise in denjenigen Büchern aufgeschrieben, die Heraklides dir zustellte, einige aber, die in diesem Buch aufgezeichnet sind, sende ich dir hiermit. Wundere dich nicht, wenn ich erst nach längerem Zögern die Beweise dieser Lehrsätze herausgebe. Es ist dies deshalb geschehen, weil ich sie zuerst den Beflissenen der Mathematik und denen, die selbst lieber darüber nachdenken wollten, überlassen wollte. Denn wieviele Probleme der Geometrie, die zuerst der Behandlung unzugänglich waren, sind schließlich doch gelöst worden! Konon starb, bevor er genügend Zeit gefunden hatte, über die Lösung der Probleme nachzudenken; sonst hätte er, indem er dies alles gefunden und noch vieles andere entdeckt hätte, die Geometrie noch mehr gefördert; wir wissen nämlich, daß er eine ungewöhnliche Kenntnis der Mathematik und einen überragenden Schaffensdrang besaß. Wir wußten jedoch nicht, daß, obwohl Konons Tod viele Jahre zurückliegt, auch nur irgend eines dieser Probleme in Angriff genommen worden wäre. Ich will aber jedes von ihnen einzeln vorbringen; es trifft sich auch, daß zwei Lehrsätze, die falsch sind, am Schluß beigefügt sind, damit die, die immer behaupten, sie fänden alle Lösungen, aber keinen Beweis zu Ende führen, des Geständnisses überführt werden, daß sie Unmögliches gefunden haben. Welches aber unter den Problemen diese sind, und von welchen du die Beweise vollendet in Händen hast, und für welche wir die Beweise in diesem Buch bringen, schien mir gut, mit dir zu vereinbaren.

Das erste der Probleme war: Eine ebene Fläche zu finden, deren Inhalt der Oberfläche einer gegebenen Kugel gleich ist. Die Lösung dieses Problems wurde bekannt gegeben durch Herausgabe des Buches 'Über die Kugel'; denn, indem bewiesen wurde, daß die Oberfläche jeder Kugel viermal so groß ist wie die Fläche ihres größten Kreises, wird ersichtlich, daß es möglich ist, eine ebene Fläche zu finden, die der Oberfläche der Kugel gleich ist. [Es folgen sechs weitere, die Kugel betreffende Probleme.]

Von allen diesen Problemen hat Heraklides die Lösungen geliefert. Aber der darauf folgende Lehrsatz war falsch. Er lautet: Wenn eine Kugel durch eine Ebene in ungleiche Teile zerschnitten wird, so hat das größere Segment zum kleineren ein Verhältnis, das gleich dem Quadrat des Verhältnisses ist, das die Kalotte des größeren Segments zur Kalotte des kleineren Segmentes hat...

Nächst dem handelt es sich um folgende Probleme über die Spirale (es ist aber dies gewissermaßen eine andere Art von Problemen, die nichts mit den vorbenannten gemeinsam haben), für welche ich dir in diesem Buch die Beweise aufgeschrieben habe. Es

sind aber diese: Wenn ein Halbstrahl sich innerhalb einer Ebene um seinen Endpunkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit dreht, bis er wieder in seine Ausgangsstellung zurückkehrt, gleichzeitig aber sich ein Punkt auf diesem Halbstrahl mit gleichförmiger Geschwindigkeit vom Endpunkt des Halbstrahls aus bewegt, so wird der Punkt eine Spirale beschreiben. Ich behaupte nun, daß das Flächenstück, das von der Spirale und der Anfangslage des Halbstrahls begrenzt wird, der dritte Teil ist des Inhalts des Kreises, dessen Mittelpunkt der feste Endpunkt des Halbstrahls ist, und dessen Radius die Entfernung des beweglichen Punktes nach vollendeter Drehung von diesem Punkte ist.“

[Archimedes: Werke. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Arthur Czwalina. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1963, S. 5–7. (Nachdruck von „Ostwald’s Klassikern“ Nr. 201, Leipzig 1922)]

A.3 Papst Gregor der Große: Erwähnung der Feldmeßkunst

Eine der letzten Erwähnungen der römischen Feldmeßkunst findet sich in einem Brief des Papstes Gregor des Großen vom Juli 597:

Gregor an Johannes, den Bischof von Syrakus:

„Damit nicht Dispute über weltliche Gegenstände die Herzen der Gläubigen ablenken, muß man besondere Sorge dafür tragen, daß ein Disput so rasch wie möglich entschieden wird. Wir haben von Caesarius, dem Abt des Klosters des Heiligen Petrus in Baiiae [am Golf von Neapel], erfahren, daß ein ernsthafter Streit zwischen ihm und Johannes, dem Abt des Klosters von der Heiligen Lucia in Syrakus, um gewisse Ländereien entstanden ist. Damit sich diese Auseinandersetzung nicht länger hinzieht, haben wir beschlossen, sie durch die Entscheidung eines Landvermessers [„agrimensor“] aus der Welt zu räumen. Wir haben daher dem Rechtsanwalt Fantinus geschrieben, er solle den Landvermesser Johannes, der sich auf der Reise von Rom nach Palermo befindet, zu Eurer Bruderschaft senden. Wir bitten Euch deshalb eindringlich, mit ihm zu den umstrittenen Feldern zu gehen und im Beisein beider Parteien dem Disput an Ort und Stelle ein Ende zu setzen, der nun gesetzeswidrig schon über 40 Jahre anhält. Was auch immer von diesem entschieden wird — Euer Orden soll sich hinfort auf das Genaueste daran halten, so daß uns in Zukunft nichts mehr von diesem Streit zu Ohren kommt.“

[O. A. W. Dilke: The Roman Land Surveyors. Newton Abbot 1971, S. 46 (engl.), dt. Übersetzung: CJS]

A.4 Das altchinesische Chou Pei Suan Ching: Mathematik und Kosmos

Das älteste überlieferte chinesische mathematisch-astronomische Werk, offensichtlich aus verschiedenen Vorlagen zusammengestellt, beginnt mit einem Dialog zwischen Chou Kung (dem Herzog von Chou) und seinem gelehrten Gesprächspartner Shang Kao. Ihre Unterhaltung dreht sich um die Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks, um den Gnomon, den Kreis und das Quadrat sowie das Messen von Höhen und Entfernungen. Aufschlußreich ist die Feststellung in Satz (3), die Geometrie habe ihren Ursprung im Messen. Needham sieht darin einen Hinweis darauf, daß das arithmetisch-algebraisch bestimmte Denken der Chinesen hier schon in der frühesten Zeit seinen Ausdruck findet [Needham 1959, 23–24]; man beachte auch die Betonung der algebraischen Seite im Beweis des Satzes von Pythagoras. Bemerkenswert ist auch die Zuordnung der geometrischen Figuren zum Kosmos. (Die Numerierung der Absätze wurde von späteren Herausgebern eingeführt).

„(1) Einstmals wandte sich Chou Kung an Shang Kao und sagte: ‘Ich habe gehört, der große Präfekt (Shang Kao) sei in der Kunst des Zählens und Messens wohlbewandert. Darf ich danach fragen, wie Fu-Hsi (ein mythischer Herrscher) die Gradeinteilung der Himmelssphäre vornahm? Es gibt keine Leiter, mit der man zum Himmel aufsteigen könnte, und die Erde kann man nicht mit einem Maßstab vermessen. Daher möchte ich dich fragen, was der Ursprung dieser Zahlen ist?’

(2) Shang Kao antwortete: ‘Die Kunst des Zählens geht vom Kreis und vom Quadrat aus. Der Kreis ist vom Quadrat abgeleitet und das Quadrat vom Rechteck [gemeint ist wahrscheinlich das ‘Zimmermannsquadrat’ oder Winkeleisen, d.h. ein aus zwei eisernen Schenkeln gebildeter rechter Winkel].

(3) Das Rechteck entsteht daraus, daß $9 \times 9 = 81$ (die Multiplikationstafel).

(4) Laß uns also ein Rechteck längs der Diagonalen zerteilen und mache die Breite 3 und die Länge 4 (Einheiten) lang. Die Diagonale zwischen den beiden Ecken wird dann die Länge 5 haben. Nun zeichne ein Quadrat über dieser Diagonale, lege halbe Rechtecke an wie dasjenige, das außerhalb des Quadrates ist, so daß eine quadratische Platte entsteht. Nun bilden die vier außen gelegenen Halb-Rechtecke mit den Seiten 3, 4 und 5 zusammen zwei Rechtecke (der Fläche 24). Wenn dann dies von der quadratischen Platte (mit der Fläche 49) abgezogen wird, hat der Rest die Fläche 25. Dieser Prozeß wird ‘das Zusammenfassen der Rechtecke’ genannt.

(5) Die Verfahren, mit denen Yü der Große (ein halblegendärer Herrscher und großer Ingenieur) die Welt regierte, sind von diesen Zahlen abgeleitet.’

(6) Chou Kung rief aus: ‘Groß ist in der Tat die Kunst des Zählens! Ich möchte mehr wissen über das ‘Tao’ [die Ursache im Sinn des Taoismus, der von Laotse begründeten chinesischen Philosophie] des Gebrauchs des rechtwinkligen Dreiecks.’

(7) Shang Kao antwortete: ‘Das ebene rechtwinklige Dreiecke (auf den Bogen gelegt) dient dazu, geradlinige und quadratische (Bauarbeiten) mit der Hilfe von Seilen vorzubereiten. Das senkrecht aufgestellte rechtwinklige Dreieck dient zur Höhenmessung. Das nach unten gerichtete rechtwinklige Dreieck dient zur Messung von Tiefen. Das flachliegende rechtwinklige Dreieck wird bei der Entfernungsmessung verwendet.

(8) Durch die Drehung eines rechtwinkligen Dreiecks wird ein Kreis geformt. Durch das Aneinanderlegen rechtwinkliger Dreiecke werden Quadrate und Rechtecke gebildet.

(9) Das Quadrat ist mit der Erde verbunden, der Kreis gehört zum Himmel, denn der Himmel ist rund und die Erde ein Quadrat. Die Zahlen des Quadrats bilden das Maß, die Dimension des Kreises ist vom Quadrat abgeleitet.

(10) Der Himmel ist geformt wie ein kegelförmiger Sonnenhut. Die Farben des Himmels sind blau und schwarz, diejenigen der Erde gelb und rot. Eine kreisförmige Platte wird zur Darstellung des Himmels verwendet, gebildet gemäß den himmlischen Zahlen. Oben, wie ein Oberkleid, ist sie blau und schwarz, darunter, wie ein Untergewand, ist sie rot und gelb. So ist die Figur des Himmels und der Erde gestaltet.

(11) Derjenige, der die Erde versteht, ist ein kluger Mann, und derjenige, der den Himmel versteht, ist ein Weiser. Das Wissen ist von der geraden Linie abgeleitet. Die gerade Linie kommt vom rechten Winkel. Und die Verbindung des rechten Winkels mit Zahlen ist es, was die zehntausend Dinge leitet und beherrscht.'

(12) Chou Kung rief aus: 'In der Tat: ausgezeichnet'."

[J. Needham: *Science and Civilisation in China*, vol. 3: *Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*. Cambridge 1959, S. 22–23 (engl.), dt. Übersetzung: CJS]

A.5 Cassiodor Senator: *Institutiones*

Cassiodor schrieb seine „*Institutiones*“ in dem von ihm gegründeten Kloster Vivarium wohl zwischen 531 und 562. Sie richteten sich an die Mönche im Kloster, die in die geistliche Wissenschaft und auch die unentbehrlichen Grundlagen der weltlichen Wissenschaften eingeführt werden sollen. Als Begründung für das Studium der letzteren gab er an:

„Im zweiten Buch wird jedoch kurz von den freien Künsten und Wissenschaften zu reden sein. Auf diesem Gebiet ist ein Irrtum von geringerer Gefahr, wenn bei festbleibendem Glauben gefehlt wird. Was jedoch in der Hl. Schrift über solche Dinge gefunden wird, wird auf Grund der vorausliegenden Erkenntnis besser verstanden werden. Es steht ja nun einmal fest, daß die Grundlagen der weltlichen Wissenschaften wie Samenkörner im Anfang der geistlichen Weisheit liegen: Später haben die Lehrer der weltlichen Wissenschaften sie ganz klug auf ihre eigenen Grundsätze übertragen. An geeigneter Stelle, bei der Auslegung des Psalters, haben wir das vielleicht beweisen können.“

[K. S. Frank: *Frühes Mönchtum im Abendland*. Bd. 1: *Lebensformen*. Zürich und München 1975, S. 206–207.]

A.6 Vorrede von A. Dürer an W. Pirckheimer

Auszüge aus der Vorrede von A. Dürer an W. Pirckheimer zu: Vier Bücher von menschlicher Proportion (1528, Ausdruck und Rechtschreibung leicht modernisiert): „Doch ist niemand gezwungen, dieser meiner Lehr, als sei die ganz vollkommen, nachzugehen; denn die menschliche Natur hat noch nit so abgenommen, daß ein anderer nit auch etwas Besseres erfinden möge... denn es müßt gar ein spröder Verstand sein, der sich nicht traut, auch etwas weiteres zu erfinden, sondern liegt allwegen auf der alten Bahn, folgt allein andern nach und untersteht sich nicht, weiter nachzudenken... Offenbar ist, daß die deutschen Maler mit der Hand und Gebrauch der Farben nit wenig geschickt sind, wiewohl sie bisher an der Kunst der Messung, auch Perspectiva und anderem dergleichen Mangel gehabt haben... Aber ohne rechte Proportion kann kein Bild vollkommen sein... Damit auch diese meine Unterrichtung besser verstanden mög werden, hab ich hiervor ein Buch der Messung, als nämlich Linien, Ebenen, Corporen etc. betreffend, herausgegeben, ohne das diese meine Lehr nit gründlich verstanden werden mag... Soll sich auch niemand abweisen lassen, weil er nicht alsbald alle diese Dinge versteht, denn was ganz leicht ist, kann nicht sehr künstlich sein. Was aber künstlich ist, das will Fleiß, Mühe und Arbeit haben.“

A.7 Alfred Meißner (1822 - 1885): Geschichte meines Lebens (1884)

Alfred Meißner (1822 - 1885): Geschichte meines Lebens (1884). Reprint unter dem Titel „Ich traf auch Heine in Paris“: Buchverlag Der Morgen, Berlin 1973.

[Vom Studium an der Prager Universität 1837]

„Im sogenannten „ersten philosophischen Jahrgang“ drehte sich alles um den Professor der Mathematik, Ladislaus Jandera. Niemand konnte im voraus wissen, ob er diesem furchtbaren Eiferer genügen werde, und genügte man ihm nicht, so war man verloren; denn mit einer schlechten Zensur aus der Mathematik konnte man nicht aufsteigen. Uns beiden - Hartmann³⁵ und mir - hatte, scheint es, die Natur alle Anlagen auf diesem Gebiete versagt. Wir fühlten, daß wir zurückblieben; aber statt auf diesem Felde unsere Anstrengungen zu verdoppeln, ließen wir nach und waren voll böser Ahnungen betreffs des schließlichen Ergebnisses.

Der furchtbare Ladislaus Jandera war ein ganz kleines altes Männchen, eine Gestalt wie einem Märchen von E. T. A. Hoffmann entnommen. Er war Prämonstratenser³⁶, trug jedoch kein Mönchskleid, sondern bei hohen Kanonentiefeln einen bürgerlichen Rock, und zwar, weil er so viel mit Kreide hantierte, einen blau-weißen Rock wie

³⁵Moritz Hartmann (1821 - 1872), deutsch-böhmischer Dichter, Schriftsteller, liberaler Journalist und Politiker, u.a. Gedichtband „Kelch und Schwert“ (1845), histor. Roman „Der Krieg um den Wald“ (1850).

³⁶Prämonstratenser: kathol. Klerikerorden, gegr. 1120. Die Erteilung des universitären Mathematikunterrichts durch Geistliche hatte eine bis ins Mittelalter zurückgehende Tradition und hat sich in einigen Ländern (bes. England und Österreich-Ungarn) bis weit ins 19. Jh. erhalten.

ein Müller. Auf seinem Gesichte, dem harten, eckigen Gesichte eines Gnomen, war ein furchtbarer Eifer für die heilige Wissenschaft gleichsam erstarrt. Wenn er das Katheder erklettert hatte, was meist unter einem Sturm des Auditoriums geschah, hatte er die Gewohnheit, die Arme à la Napoleon über die Brust zu kreuzen und die Zuhörerschaft mit wilden Blicken zu beherrschen, bis alles still wurde. Vor sich auf dem Tische das sogenannte „Me-mo-ria-le“, in der Hand die Kreide, unter dem Arme einen kurzen weißen Stock, mit dem er zu demonstrieren und oft wie besessen auf die Tafel loszuhämmern pflegte, begann er mit einer gellenden, durch jeden Sturm gehenden Stimme, jedes Wort in seine einzelnen Silben zerlegend, seinen Vortrag. „Klar-heit!“ war seine Losung, und „Das muß jetzt je-de Kö-chin be-grei-fen!“ sein letztes Wort nach jeder längeren Auseinandersetzung, womit er sich selbst das seiner Meinung nach größte Lob zollte. Leider muß ich gestehen, daß ich sehr oft das, was jede Köchin begreifen sollte, nicht begriff.

Als uns einmal eine Sammlung alter Kupferstiche aus der Zeit der französischen Revolution in die Hände fiel, machten wir beide gleichzeitig die Entdeckung, daß Professor Ladislaus Jandera die größte Ähnlichkeit mit Robespierre hatte. Es war ganz derselbe Kopf, nur weit älter, dieselbe Stirne, derselbe Mund. Ich kann aber auch den Mann mit keinem Geringeren vergleichen als mit dem tugendhaften Abgeordneten von Arras. Auch Jandera war die personifizierte Tugend, die Gerechtigkeit und Unbestechlichkeit selbst, aber furchtbar, weil er nichts als sein Prinzip gelten ließ und die Individuen vor seinen Augen nichts waren. Wer vor ihm und seinem Memoriale nicht bestand, der hatte eben „sei-ne Un-brauch-bar-keit für den wissen-schaft-li-chen Be-ru-f dar-ge-tan.“ Tausende von jungen Leuten hatten schon ihre Laufbahn ändern müssen, weil sie seinen Anforderungen nicht genügten. Ihm störte das nicht den Schlaf. Auch die persönliche Verwendung aller übrigen Professoren hätte ihn von einem ausgesprochenen „Nein“ nimmermehr abgebracht. Eines schönen sonnigen Vormittags stand Professor Ladislaus Jandera vor seiner Tafel und erklärte uns den Satz aus der Lehre von der Ellipse, daß, wenn man durch die Achse KC eines Kegels eine Ebene KLM senkrecht gegen die Ebene RS lege, die Ebene der Kurve AQMQ senkrecht auf dem Dreieck KLM stehen und jeder beliebige Schnitt, der parallel mit der Grundfläche LBMD gelegt würde, unbedingt seinen Mittelpunkt in der Achse KC haben müsse.

Indes saß Hartmann still beglückt in seiner Bank und las ein Buch, das ich mir gestern verschafft und ihm heute zugesteckt hatte, Grabbes „Faust und Don Juan“. Grabbe zählte zu unseren Lieblingsdichtern. Ein wie ein Hahnenruf in die Luft geschmettertes „Quod erat demonstrandum!“ weckte den Leser aus seinen Träumen. Das furchtbare Nußknackergesicht da oben war mit seiner Beweisführung fertig geworden. „Und jetzt“, fuhr der Schreckliche in scheinbar mildem Tone fort - sein scharfes Auge mochte schon die längste Zeit den Unachtsamen verfolgt haben - „und nun (langsam in seinem Kataloge blättern, bis er ihn gefunden), mein lieber Moritz Hartmann, kommen Sie zu mir herauf und zeigen Sie es ihren Kollegen, daß Sie mich kapiert haben. Hartmann, Moritz, herauf!“

War das ein Schrecken, bei dem auch mir, dem Freunde, Sehen und Hören verging! Dem Aufrufe mußte unbedingt Folge geleistet werden. In der gewaltigen Schülerzahl regte sich schon der Sturm der Erwartung. Es gab indes nur einen ganz kurzen Auf-

tritt. Hartmann war hinaufgestiegen, hatte einige Linien auf der Tafel gezogen und einige Worte gemurmelt. Dann hatte er die Flucht ergriffen und war mit einem feuerroten Gesichte in das Meer von Köpfen wieder untergetaucht, während auf der Höhe der bössartige Kobold, jammernd über so viel Unwissenheit, die Hände zusammenschlug.“

A.8 Vorrede von F. Wolff

Auszüge aus der Vorrede von F. Wolff: Die beschreibende Geometrie und ihre Anwendungen. Leitfaden für den Unterricht am Königl. Gewerbe-Institut, Zweiter Theil, Berlin 1840:

„Der Herr Wirkliche Geheime Ober-Regierungs-Rath *Beuth* hat mich zuerst auf die beschreibende Geometrie und deren Wichtigkeit aufmerksam gemacht, und später Namens eines Hohen Ministeriums der Finanzen freigebig die Mittel bewilligt, welche die Herstellung des Werkes in Anspruch nahm: ich bin also in doppelter Hinsicht zu Dank verpflichtet. Auch gegen den Herrn Ober-Landes-Bau-Director *Schinkel* habe ich Dank auszusprechen für die große Gewogenheit, bei mehreren der zu dieser Abtheilung gehörenden Blätter Rath zu ertheilen... Seit die Industrie sich vom Hergebrachten entschiedener losgemacht und, auf Wissenschaft gestützt, einen geistigeren und kühneren Aufschwung genommen, ist man bedacht gewesen, ihren Jüngern eine wissenschaftliche Bildung zu gewähren, und besonders hat die preußische Regierung die großartigsten Mittel aufgewendet, und in dem Gewerbe-Institut eine Anstalt ins Leben gerufen, die in Bezug auf äußere Ausstattung und den gesunden Gedanken, der ihr ursprünglich zu Grunde liegt, sich den hervorragendsten Erscheinungen zugesellt... Wegen der Anwendung allein unternimmt der Techniker wissenschaftliche Studien, doch nur die Anwendung hat Bedeutung, welche er selbstständig übt. Die selbstständige Anwendung erfordert zweierlei, materielles Wissen und Bildung des Geistes. Zunächst ist aus den Wissenschaften das für den Augenblick Nutzbarste zu geben, aber auch das weniger Hervortretende ist zu berühren, so weit die Zeit reicht; was heut unscheinbare Kleinigkeit ist, kann morgen große Wichtigkeit haben... Der Techniker darf nicht wähen, es sei abgethan mit dem, was er in Vorlesungen hören, in Büchern lesen kann, oder mit den Anwendungen, die man gemacht hat; er soll das alles aufnehmen, dann aber unbefangen und selbstständig weiter streben... Er lasse sich nicht bethören durch das Geschwätz über Theorie und Praxis; im Munde Vieler ist dies nichts weiter, als ein bequemes Mittel, zu verdächtigen, was ihnen unbequem, und zu beschönigen, was ihnen genehm ist... Ich habe das geometrische Zeichnen als Zeichnen rein geometrischer Projectionen festgestellt, denen man Beleuchtung und Schatten hinzufügt, um eine mehr bildliche Darstellung zu erzielen, die das Verständniß erleichtert, aber nicht den Zweck der Täuschung hat, wie die Perspective... Zum geometrischen Zeichnen gehört zweierlei: die Kunstfertigkeit im Strichemachen, Verwaschen u. dgl. und die Wissenschaft der Construction... Die noch fehlenden Abtheilungen dieses Bandes sollten die Perspektive mit Rücksicht auf die Lehren der neueren Geometrie, den Steinschnitt und andere technische Anwendungen behandeln, endlich das Austragen, d.h. die Methoden, gezeichnete Gegenstände in der Wirklichkeit herzustellen. In meinem Verhältniß als Privatlehrer kann aber der Umstand, daß ich an dem Gewerbe-Institut jährlich auch während einiger Wochen

in der beschreibenden Geometrie Stunden zu geben habe, nicht Veranlassung werden, die, nach näherem Überschlage, bedeutende Zeit und Mühe daran zu wenden, welche die Ausführung jenes Planes, trotz mancher Vorarbeiten erheischt; und wenn eine langjährige Wirksamkeit nur in eine Lage geführt hat, die nicht einmal gestattet, den Aufwand an Büchern zu bestreiten, viel weniger, sich sonst zu bewegen, wie es wohl nöthig wäre, und dem Privatlehrer nichts in Aussicht steht, als in drückenden Verhältnissen zu leben, so lange er rüstig, und ein Bettler zu sein, wenn er alt ist, so ist er wohl ernst genug gemahnt, seinen Nebenbeschäftigungen eine Richtung zu geben, die für ihn ersprießlicher werde.“

A.9 Hermann v. Helmholtz: Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome

Hermann v. Helmholtz: Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Vortrag, gehalten im Docentenverein zu Heidelberg im Jahre 1870. Auszüge: „Die Thatsache, dass eine Wissenschaft von der Art bestehen und in der Weise aufgebaut werden kann, wie es bei der Geometrie der Fall ist, hat von jeher die Aufmerksamkeit aller derer, welche für die principiellen Fragen der Erkenntnistheorie Interesse fühlten, im höchsten Grade in Anspruch nehmen müssen. Unter allen Zweigen menschlicher Wissenschaft giebt es keine zweite, die gleich ihr fertig, wie eine erzgerüstete Minerva aus dem Haupte des Zeus, hervorgesprungen erscheint... Dabei fällt ihr in keiner Weise die mühsame und langwierige Aufgabe zu, Erfahrungsthat-sachen sammeln zu müssen, wie es die Naturwissenschaften im engeren Sinne zu thun haben, sondern die ausschließliche Form ihres wissenschaftlichen Verfahrens ist die Deduction. Schluss wird aus Schluss entwickelt, und doch zweifelt schliesslich Niemand von gesunden Sinnen daran, dass diese geometrischen Sätze ihre sehr praktische Anwendung auf die uns umgebende Wirklichkeit finden müssen. Die Feldmesskunst wie die Architektur, die Maschinenbaukunst wie die mathematische Physik, sie berechnen fortdauernd Raumverhältnisse der verschiedensten Art nach geometrischen Sätzen, sie erwarten, dass der Erfolg ihrer Constructionen und Versuche sich diesen Rechnungen füge, und noch ist kein Fall bekannt geworden, wo sie sich in dieser Erwartung getäuscht hätten, vorausgesetzt, dass sie richtig und mit ausreichenden Daten gerechnet hatten.... Eben dieses erkenntnistheoretische Interesse an der Geometrie ist es nun, welches mir den Muth giebt in einer Versammlung, deren Mitglieder nur zum kleinsten Theile tiefer, als es der Schulunterricht mit sich brachte, in mathematische Studien eingedrungen sind, von geometrischen Dingen zu reden... Die grösste Schwierigkeit in diesen Untersuchungen bestand und besteht immer darin, dass sich mit den logischen Begriffsentwicklungen gar zu leicht Ergebnisse der alltäglichen Erfahrung als scheinbare Denknöthwendigkeiten vermischten, so lange die einzige Methode der Geometrie die von *Euklides* gelehrt Methode der Anschauung war... Denken wir uns — darin liegt keine logische Unmöglichkeit — verstandbegabte Wesen von nur zwei Dimensionen, die an der Oberfläche irgend eines unserer festen Körper leben und sich bewegen. Wir nehmen an, dass sie nicht die Fähigkeit haben, irgend etwas ausserhalb dieser Oberfläche wahrzunehmen, wohl aber Wahrnehmungen, ähnlich den

unsrigen, innerhalb der Ausdehnung der Fläche, in der sie sich bewegen, zu machen... Anschauungen, die man hat, sich wegdenken ist leicht; aber Anschauungen, für die man nie ein Analogon gehabt hat, sich sinnlich vorstellen, ist sehr schwer. Wenn wir deshalb zum Raume von drei Dimensionen übergehen, so sind wir in unserem Vorstellungsvermögen gehemmt durch den Bau unserer Organe und die damit gewonnenen Erfahrungen, welche nur zu dem Raume passen, in dem wir leben... Diese letzteren Verhältnisse hat Herr *Beltrami* dadurch der Anschauung zugänglich gemacht, dass er zeigte, wie man die Punkte, Linien und Flächen eines pseudosphärischen Raumes von drei Dimensionen im Innern einer Kugel des *Euklides'schen* Raumes so abbilden kann, dass jede geradeste Linie des pseudosphärischen Raumes in der Kugel durch eine gerade Linie vertreten wird, jede ebenste Fläche des ersteren durch eine Ebene in der letzteren. Die Kugeloberfläche selbst entspricht dabei den unendlich entfernten Punkten des pseudosphärischen Raumes... Während *Riemann* von den allgemeinsten Grundfragen der analytischen Geometrie her dieses neue Gebiet betrat, war ich selbst theils durch Untersuchungen über die räumliche Darstellung des Systems der Farben, also durch Vergleichung einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit mit einer anderen, theils durch Untersuchungen über den Ursprung unseres Augenmasses für Abmessungen des Gesichtsfeldes, zu ähnlichen Betrachtungen, wie *Riemann*, gekommen. Während dieser von dem oben erwähnten algebraischen Ausdrücke, welcher die Entfernung zweier einander unendlich naher Punkte in allgemeinsten Form darstellt, als seiner Grundannahme ausgeht, bin ich andererseits von der Thatsache der Beobachtung ausgegangen, dass in unserem Raume die Bewegung fester Raumgebilde mit demjenigen Grade von Freiheit möglich ist, den wir kennen, und habe aus dieser Thatsache die Nothwendigkeit jenes algebraischen Ausdrucks hergeleitet, den *Riemann* als Axiom hinstellt... Es musste vielmehr eine Reihe alltäglicher Erfahrungen, namentlich die Anschauung von der geometrischen Ähnlichkeit grosser und kleiner Körper, welche nur im ebenen Raume möglich ist, darauf führen jede geometrische Anschauung, die dieser Thatsache widersprach, als unmöglich zu verwerfen... aber es ist dies eine empirische durch Häufung und Verstärkung gleichartig wiederkehrender Eindrücke in unserem Gedächtnis gewonnene Kenntniss, keine transcendente und vor aller Erfahrung gegebene Anschauungsform. Dass dergleichen empirisch erlangte und noch nicht zur Klarheit des bestimmt ausgesprochenen Begriffs durchgearbeitete Anschauungen eines typischen gesetzlichen Verhaltens häufig genug den Metaphysikern als a priori gegebene Sätze imponirt haben, brauche ich hier nicht weiter zu erörtern ...“

A.10 E. A. Abbott: Flatland

E. A. Abbott: Flatland. A Romance of many dimensions. 1884. Auszüge (Die etwas eigenwillige Schreibweise entspricht dem Original):

„To the Inhabitants of Space in General And H. C. in Particular. This Work is Dedicated By a Humble Native of Flatland In the Hope that Even as he was Initiated into the Mysteries Of Three Dimensions Having been previously conversant With Only Two So the Citizens of that Celestial Region May aspire yet higher and higher To the Secrets of Four Five or even Six Dimensions Thereby contributing To the Enlargement

of the Imagination And the possible Development Of the most rare and excellent Gift of Modesty Among the Superior Races of Solid Humanity.

Imagine a vast sheet of paper on which straight Lines, Triangles, Squares, Pentagons, Hexagons, and other figures, instead of remaining fixed in their places, move freely about, on or in the surface, but without the power of rising above or sinking below it... Our Women are Straight Lines. Our Soldiers and Lowest Classes of Workmen are Triangles with two equal sides, each about eleven inches long, and a base or third side so short (often not exceeding half an inch) that they form at their vertices a very sharp and formidable angle. Indeed when their bases are of the most degraded type, (not more than the eighth part of an inch in size), they can hardly be distinguished from Straight Lines or Women; so extremely pointed are their vertices... Our Middle Class consists of Equilateral or Equal-sided Triangles. Our Professional Men and Gentlemen are Squares (to which class I myself belong) and Five- Sided Figures or Pentagons. Next above these come the Nobility, of whom there are several degrees, beginning at Six-Sided Figures or Hexagons, and from thence rising in the number of their sides till they receive the honourable title of Polygonal, or many-sided. Finally when the number of the sides becomes so numerous, and the sides themselves so small, that the figure cannot be distinguished from a circle, he is included in the Circular or Priestley order, and this is the highest class of all. It is a law of Nature with us that a male child shall have one more side than his father, so that each generation shall rise (as a rule) one step in the scale of development and nobility. But this rule applies not always to the Tradesmen, and still less often of the Soldiers, and to the Workmen; who indeed can hardly be said to deserve the name of human Figures, since they have not all their sides equal... Chapter 13: How I had a Vision of Lineland: ...I saw before me a vast multitude of small Straight Lines (which I naturally assumed to be women) interspersed with other Beings still smaller and of the nature of lustrous points — all moving to and fro in one and the same Straight Line, and, as nearly I could judge, with the same velocity... Approaching one of the largest of what I thought to be Woman, I accosted her, but received no answer. A second and a third appeal on my part were equally ineffectual. Losing patience, I brought my mouth into a position full in front of her mouth so as to intercept her motion, and loudly repeated my question 'Woman, what signifies this concourse, and this strange and confoused chirping, and this monotonous motion to and fro in one and the same Straight Line?' 'I am no Woman,' replaid the small Line, 'I am the Monarch of the world ...' "

Die Auszüge illustrieren wohl hinreichend, in welch genialer Weise hier zugleich mit den damals aktuellsten Erkenntnissen der Geometrie gesellschaftliche Verhältnisse satirisch aufgespießt wurden. Der Bezug zu der von Helmholtz mehrfach benutzten Methode der Veranschaulichung ist unverkennbar.

A.11 Th. Storm: Der Schimmelreiter (1888)

„In der Mitte des vorigen Jahrhunderts oder vielmehr, um genauer zu bestimmen, vor und nach derselben, gab es hier einen Deichgrafen, der von Deich- und Sielsachen mehr verstand, als Bauern und Hofbesitzer sonst zu verstehen pflegen; aber es reichte

doch wohl kaum, denn was die studierten Fachleute darüber niedergeschrieben, davon hatte er wenig gelesen; sein Wissen hatte er sich, wenn auch von Kindesbeinen an, nur selber ausgesonnen. Ihr hörtet wohl schon, Herr, die Friesen rechnen gut, und habet wohl auch schon über unseren Hans Mommsen von Fahretoft reden hören, der ein Bauer war und doch Bussolen und Seeuhren, Teleskopen und Orgeln machen konnte. Nun, ein Stück von solch einem Manne war auch der Vater des nachherigen Deichgrafen gewesen; freilich wohl nur ein kleines. Er hatte ein paar Fennen, wo er Raps und Bohnen baute, auch eine Kuh graste, ging unterweilen im Herbst und Frühjahr auch aufs Landmessen und saß im Winter, wenn der Nordwest von draußen kam und an seinen Läden rüttelte, zu ritzen und zu prickeln, in seiner Stube. Der Junge saß meist dabei und sah über seine Fibel oder Bibel weg dem Vater zu, wie er maß und berechnete, und grub sich mit der Hand in seinen blonden Haaren. Und eines Abends frug er den Alten, warum denn das, was er eben hingeschrieben hatte, gerade so sein müsse und nicht anders sein könne, und stellte dann seine eigene Meinung darüber auf. Aber der Vater, der darauf nicht zu antworten wußte, schüttelte den Kopf und sprach: „Das kann ich dir nicht sagen; genug, es ist so, und du selbst irrst dich. Willst du mehr wissen, so suche morgen aus der Kiste, die auf unserem Boden steht, ein Buch; einer der Euklid hieß, hats geschrieben; das wird's dir sagen!“ — Der Junge war tags darauf zu Boden gelaufen und hatte auch bald das Buch gefunden; denn viele Bücher gab es überhaupt nicht in dem Hause, aber der Vater lachte, als er es vor ihm auf den Tisch legte. Es war ein holländischer Euklid, und Holländisch, wengleich es doch halb Deutsch war, verstanden alle beide nicht. „Ja, ja“ sagte er, „das Buch ist noch von meinem Vater, der verstand es; ist denn kein deutscher da?“ Der Junge, der von wenig Worten war, sah den Vater ruhig an und sagte nur: „Darf ich's behalten? Ein deutscher ist nicht da.“ Und als der Alte nickte, wies er noch ein zweites, halbzerrissenes Büchlein vor. „Auch das?“ frug er wieder. „Nimm sie alle beide!“ sagte Tede Haien. „Sie werden dir nicht viel nützen.“ Aber das zweite Buch war eine kleine holländische Grammatik, und da der Winter noch lange nicht vorüber war, so hatte es, als endlich die Stachelbeeren in ihrem Garten wieder blühten, dem Jungen schon so weit geholfen, daß er den Euklid, welcher damals stark im Schwange war, fast überall verstand.... Als der Alte sah, daß der Junge weder für Kühe noch Schafe Sinn hatte und kaum gewahrte, wenn die Bohnen blühten, was doch die Freude von jedem Marschmann ist, und weiterhin bedachte, daß die kleine Stelle wohl mit einem Bauern und einem Jungen, aber nicht mit einem Halbgelehrten und einem Knecht bestehen könne, ingeleichen, daß er auch selber nicht auf einen grünen Zweig gekommen sei, so schickte er seinen großen Jungen an den Deich, wo er mit anderen Arbeitern von Ostern bis Martini Erde karren mußte. „Das wird ihn bald vom Euklid kurieren“, sprach er bei sich selber. Und der Junge karrete; aber den Euklid hatte er allzeit in der Tasche, und wenn die Arbeiter ihr Frühstück oder Vesper aßen, saß er auf einem umgestürzten Schubkarren mit dem Buche in der Hand.“

A.12 K. Fladt: Euklid (1927)

„Es hat darum nicht an Versuchen gefehlt, die Geometrie genetisch darzustellen. Aber die euklidische Art der Darstellung erfreute sich durch die Jahrhunderte eines solchen Ansehens, daß sie geradezu für die Sache selbst genommen wurde, daß man glaubte, der Sinn der Mathematik erschöpfe sich in ihrer logischen Folgerichtigkeit, die Mathematik sei darum lediglich ein formales, d.h. zur Bildung des Verstandes dienendes Unterrichtsfach. Die weitere Folge dieses Irrtums war, daß man aus den Elementen, dem Lehrbuch der Studenten Alexandrias, ein Schulbuch für Tertianer machte. Und da es nicht jeden Schülers Sache war, die Form vom Kern zu unterscheiden, galt die Mathematik für schwer, und man glaubte, für sie eine besondere Begabung haben zu müssen. All das Ansehen, das weite Kreise unserer Gebildeten dem eingeweihten Jünger mathematischen Geheimwissens zollten und heute noch zollen, aber auch das geheime Grauen, das sie vor der Mathematik empfinden, geht letzten Endes auf diese Wirkung der euklidischen Elemente zurück.“

Literatur

- [Abbott 1884] Abbott, E. A. 1884: Flatland. London Seeley. Reprints u.a. Penguin Books 1952, 1987. Eine deutsche Teilübersetzung 1929 bei Teubner.
- [Ahrens 1918] Ahrens, W. 1910/18: Mathematische Unterhaltungen und Spiele. 2 Bde. Leipzig-Berlin: Teubner. (Auch: Math. Spiele 1911).
- [Alexandrov 1971] Alexandrov, P. S. (Hrsg.) 1971: Die Hilbertschen Probleme. Reprint des Hilbertschen Vortrages von 1900 mit ausführlichen Kommentaren zu jedem Problem. Ostwalds Klassiker Bd. 252.
- [Andersen 1984] Andersen, K. 1984: Some Observations Concerning Mathematician's Treatment of Perspective Constructions in the 17th and 18th Centuries. In Mathemata. Festschrift für H. Gericke. Stuttgart: Franz-Steiner-Verlag.
- [Andersen 1992a] Andersen, K. 1992: The History of Linear Perspective from 1435 to the End of the 18th Century. Transact. of the XVth Congress of the Internat. Assoc. of Bibliophiles. Copenhagen.
- [Andersen 1992b] Andersen, K. 1992: Perspective and the Plan and Elevation Technique, in particular in the Work by Piero della Francesca. In Amphora. Festschrift für H. Wussing. Basel-Boston: Birkhäuser.
- [Archimedes a] Archimedes: Eine Neue Schrift des Archimedes. Von J. L. Heiberg und H. G. Zeuthen. Bibliotheca Mathematica (3) 7 (1906/07), 321-363.
- [Archimedes b] Archimedes: Über Spiralen. Deutsch v. A. Czwalina. Ostwalds Klassiker Bd. 201, 1922 f.
- [Archimedes c] Archimedes: Kugel und Zylinder. Deutsch v. A. Czwalina. Ostwalds Klassiker Bd. 202, 1922 f.
- [Archimedes d] Archimedes: Die Quadratur der Parabel und Über das Gleichgewicht ebener Flächen oder über den Schwerpunkt ebener Flächen. Deutsch v. A. Czwalina. Ostwalds Klassiker Bd. 203, 1923 f.
- [Archimedes e] Archimedes: Über Paraboloiden, Hyperboloiden und Ellipsoide. Deutsch v. A. Czwalina. Ostwalds Klassiker Bd. 210, 1923 f.
- [Archimedes f] Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre, . . . : hrsg. von F. Rudio. Leipzig: Teubner 1925.
- [Archimedes g] Archimedes: Werke, übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Arthur Czwalina. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1963 (Nachdruck von „Ostwald's Klassikern“ in 1 Band, Leipzig 1922)
- [Archimedes h] Archimedes-Auktion 1998: The Archimedes Palimpsest. Auction Thursday 29 October 1998 (Auktionskatalog). New York: Christie's.
- [Artmann 1999] Artmann, B. 1999: Euclid. The Creation of Mathematics. Berlin, New York usw.: Springer ²2002

- [Ascher 1991] Ascher, M. 1991: *Ethnomathematics. A Multicultural View of Mathematical Ideas*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Company
- [Bag 1979] Bag, A. K. 1979: *Mathematics in Ancient and Medieval India*. Varanasi-Delhi: Chaukhamba Orientalia.
- [Bajaj 1988] Bajaj, Ch. 1988: The Algebraic Degree of Geometric Optimization Problems. *Discrete & Computational Geometry* (Springer) 3, 177-191.
- [Ball 1892] Ball, W., Rouse, W. 1892: *Mathematical Recreations & Essays*. Seit der 11. Aufl. 1938 hrsg. von H. S. M. Coxeter. University of Toronto.
- [Bandyopadhyay 96] Bandyopadhyay, P. 1996: *Geometry, Topology and Quantization*. Dordrecht-Boston-London: Kluwer.
- [Behrends/Capogrossi-Colognese 1992] Behrends, O.; Capogrossi-Colognese, L. 1992 Die römische Feldmeßkunst. Interdisziplinäre Beiträge zu ihrer Bedeutung für die Zivilisationsgeschichte Roms (= Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Philolog.-histor. Klasse, 3. Folge Nr. 193). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- [Belyi 1968] Belyi, J. A. 1968: Euler und die Theorie der Parallelen. *NTM Schriftenreihe* 5, 116-124.
- [Benz 1990] Benz, W. 1990: Grundlagen der Geometrie (1890 - 1990) In: G. Fischer u.a. (Hrsg.) 1990, siehe dort
- [de Berg 1997] de Berg, van Kreveld, Overmars, Schwarzkopf 1997: *Computational Geometry*. Berlin-New York usw.: Springer.
- [Berggren 1986] Berggren, J. L. 1986 *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. New York, Berlin u.a.: Springer.
- [Bernays 1959] Bernays, P. 1959: Die Mannigfaltigkeit der Direktiven für die Gestaltung geometrischer Axiomensysteme. Siehe Henkin u.a.
- [Bialas 1982] Bialas, V. 1982: *Erdgestalt, Kosmologie und Weltanschauung*. Stuttgart: Verlag Konrad Wittwer.
- [Bieberbach 1952] Bieberbach, L. 1952: *Theorie der geometrischen Konstruktionen*. Basel: Birkhäuser.
- [Biermann 1990] Biermann, K.-R. 1990: *Carl Friedrich Gauß in Briefen und Gesprächen*. München: C. H. Beck und Leipzig: Urania.
- [Bigalke 1994] Bigalke, H.-G., Wippermann, H. 1994: *Reguläre Parkettierungen*. Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich: BI-Wissenschaftsverlag.
- [Blaschke 1937] Blaschke, W. 1936/37: *Vorlesungen über Integralgeometrie*, 1. u. 2. Heft. Leipzig-Berlin: Teubner. Überarbeitete Neuausgabe in 1 Band: Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1955.
- [Blumenthal 1922] Blumenthal O. 1922: David Hilbert. *Die Naturwissenschaften* 10, 67 – 72

- [Boehm 1994] Boehm, W., Prautzsch, H. 1994: Geometric Concepts for Geometric Design. Wellesley, Massachusetts: A. K. Peters.
- [Böhm 1991] Böhm, J. u. E. Quaisser 1991: Schönheit und Harmonie geometrischer Formen. Berlin: Akademie-Verlag.
- [Boetius] Boetius, A. M. T. S. (auch Boethius): Anitii Manilii Torquati Severini Boetii De Institutione Arithmetica Libri Duo, De Institutione Musica Libri Quinque. Ed. G. Friedlein, 1867. Leipzig: Teubner. Nachdruck Frankfurt a.M. 1966.
- [Bohne 1989] Bohne, E., Möller, R. 1989: Zur Entwicklung der Beleuchtungsgeometrie. Beiträge zur Algebra und Geometrie 29, 7-20.
- [Bolyai/Stäckel 1913] Bolyai/Stäckel 1913: Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen, hrsg. v. Paul Stäckel in zwei Teilen. Leipzig-Berlin: Teubner.
- [Bolzano 1804] Bolzano, B. 1804: Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie. Prag. Reprint in: Oeuvres de B. Bolzano, Tome 5, Prag 1948.
- [Bonola 1919] Bonola, R. 1919: Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Deutsche Bearbeitung von H. Liebmann. Ab 3. Aufl. 1921 mit wesentlichen Ergänzungen von Liebmann (Häufig als Bonola-Liebmann zitiert). Leipzig-Berlin: Teubner.
- [Bos 1981] Bos, H. J. M. 1981: On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie. Archive for History of Exact Sciences 24, 295-338.
- [Boyer 1956] Boyer, Ch. B. 1956: History of Analytic Geometry. New York.
- [Braunmühl 1900] Braunmühl, A. v. 1900: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, 2 Bde. (2. Bd. 1903) Leipzig: Teubner. Reprint Vaduz: Saendig-Reprint-Verlag 1980ff.
- [Bravais 1890] Bravais, A.: Abhandlungen über symmetrische Polyeder. Deutsch v. C. u. E. Blasius. Ostwalds Klassiker Bd. 17, 1890.
- [Bravais 1897] Bravais, A.: Abhandlung über die Systeme von regelmäßig auf einer Ebene oder im Raum verteilten Punkten. Deutsch v. C. u. E. Blasius. Ostwalds Klassiker Bd. 90, 1897.
- [Brieskorn 1981] Brieskorn, E., und H. Knörrer 1981: Ebene algebraische Kurven. Basel-Boston-Stuttgart: Birkhäuser.
- [Bruck 1905] Bruck, R. 1905: Der Dresdener Dürer-Kodex. Stuttgart. Derselbe: Das Skizzenbuch von Albrecht Dürer in der Kgl. öffentl. Bibliothek zu Dresden. Straßburg.
- [Bruins 1964] Bruins, E. M. (Ed.) 1964: Codex Constantinopolitanus Palatii Veteris No. 1. 3 Parts (= Janus, Supplements, Vol. II in 3 Parts). Leiden: E. J. Brill.
- [Brückner 1900] Brückner, M. 1900: Vielecke und Vielfache. Theorie und Geschichte. Leipzig: Teubner.
- [Brückner 1906] Brückner, M. 1906: Über die gleicheckig-gleichflächigen, diskontinuierlichen und nichtkonvexen Polyeder. Nova Acta Leopoldina Bd. LXXXVI, Halle/S.

- [Buchner 1982] Buchner, E. 1982 Die Sonnenuhr des Augustus. Mainz: Philipp von Zabern.
- [Burger 1957] Burger, D. 1957: Bolland. Deutsche Übersetzung unter dem Titel „Silvester-gespräche eines Sechsecks“. Köln: Deubner 1967.
- [Busard 1996] Busard, H. L. L. 1996: A Thirteenth-Century Adaption of Robert of Chester's Version of Euclid's *Elements*. 2 vols. (= Algorismus Heft 17). 2 vols. München: Institut für Geschichte der Naturwissenschaften. (Insbes.: Ch. 1: Introduction).
- [Busard 1997] Busard, H. L. L. 1997: „Über die Entwicklung der Mathematik in Westeuropa zwischen 1100 und 1500“. NTM, N.S.5, 211-235.
- [Butzer/Lohrmann 1993] Butzer, P. L.; Lohrmann, D. 1993: Science in Western and Eastern Civilization in Carolingian Times. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser.
- [Cantor 1880] Cantor, M. 1880: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 4 Bde, versch. Aufl. 1880ff, Leipzig: Teubner, Reprint: Johnson Reprint Corporation, New York 1965.
- [Carnot 1803] Carnot, L. N. M. 1803: Geometrie der Stellung. Deutsch u. mit Anmerkungen von H. C. Schumacher. Altona: Hammerich 1808, 1810.
- [Cassiodor] Cassiodori Senatoris Institutiones. Ed. by R. A. B. Mynors. Oxford: Clarendon Press 1961.
- [Chasles 1837] Chasles, M. 1837: Geschichte der Geometrie. Deutsch v. L. A. Sohnke. Halle 1839. Reprint: Wiesbaden 1968.
- [Cieslik 1998] Cieslik, D. 1998: Steiner Minimal Trees. Dordrecht/Boston/London: Kluwer.
- [Clagett 1964] Clagett, M.: Archimedes in the Middle Ages. 5 Bde. in 10 Teilen. Madison: University of Wisconsin Press 1964–1984.
- [Closs 1986] Closs, M. P. (Ed.) 1986: Native American Mathematics. Austin: University of Texas Press.
- [Conrad 1990] Conrad, D. 1990: Kirchenbau im Mittelalter. Bauplanung und Bauausführung. Edition Leipzig.
- [Cook 1914] Cook, T. A. 1914: Curves of Life. London: Constable & Co. Reprint Dover Publ., New York 1979.
- [Coolidge 1940] Coolidge, J. L. 1940: A History of Geometrical Methods. Oxford: Clarendon Press.
- [Coolidge 1945] Coolidge, J. L. 1945: A History of Conic Sections and Quadric Surfaces. Oxford: Clarendon Press. Reprint New York 1968.
- [Cousinery 1828] Cousinery, B. E. 1828: Géométrie perspective. Paris.
- [Coxeter, Emmer, Penrose, Teuber 1987] Coxeter u.a. 1987: M.C. Escher: Art and Science. Amsterdam; North-Holland Publ. Comp.
- [Cromwell 1997] Cromwell, P. R. 1997: Polyhedra. Cambridge University Press.

- [Crowe 1967] Crowe, M. J. 1967: A History of Vector Analysis. University of Notre Dame Press.
- [Datta/Singh 1935/38] Datta, B.; Singh, A. N. 1935/38: History of Hindu Mathematics. A Source Book. 2 Bde. Reprint: Bombay/Calcutta u.a.: Asia Publishing House 1962 in einem Bd.
- [Dauben 1985] Dauben, J. W. 1985 The History of Mathematics from Antiquity to the Present. A Selective Bibliography. New York & London: Garland Publishing Inc.
- [Dehio 1894] Dehio, G. 1894: Untersuchungen über das gleichseitige Dreieck als Norm gotischer Bauproportionen. Stuttgart.
- [Dehio 1895] Dehio, G. 1895: Ein Proportionsgesetz der antiken Baukunst und sein Nachleben in Mittelalter und Renaissance. Straßburg.
- [Dehn 1934] Dehn, M. u. Engel, F. 1934: Moritz Pasch. Jahresber. DMV 44, 120-141.
- [Desargues] Desargues, G.: Erster Entwurf eines Versuchs über die Ergebnisse des Zusammentreffens eines Kegels mit einer Ebene. Deutsch v. M. Zacharias. Ostwalds Klassiker Bd. 197, 1922. Engl. Übersetz. in Field/Gray 1987.
- [Descartes a] Descartes, R.: Die Geometrie. Deutsch v. L. Schlesinger. Berlin: Mayer & Müller 1894. Reprint: Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt 1969.
- [Descartes b] Descartes, R.: Philosophische Werke. Übersetzt u. herausgeg. v. A. Buchenau. Leipzig: Felix Meiner 1904-1911. Abhandlung über die Methode und Regeln zur Leitung des Geistes auch in:
- [Descartes c] Descartes, R.: Ausgewählte Schriften. Reclams Universalbibliothek, Leipzig 1980.
- [Dieudonné 1985] Dieudonné, J. (Hrsg.) 1985: Geschichte der Mathematik 1700-1900. Übersetz. aus dem Franz. Braunschweig: Vieweg und Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. Zur Geschichte der Geometrie hierin allerdings nur Kap. 2, 9 und 10.
- [Dilke 1971] Dilke, O. A. W. 1971: The Roman Land Surveyors. Newton Abbot: David & Charles.
- [Drs 1981] Drs, L., Všetečka, J. 1981: Objektívem počítače. (Geometrie spezieller fotografischer Techniken. Tschechisch). Prag: Nakladatelství technické literatury.
- [Dürer 1525] Dürer, A. 1525: Underweysung der Messung ... Reprints u.a. Unterschneidheim 1972 und Nördlingen 1983: Verlag A. Uhl.
- [Dürer 1527] Dürer, A. 1527: Etliche Unterricht ... (Befestigungslehre). Reprint Nördlingen 1980: Verlag A. Uhl.
- [Dürer 1528] Dürer, A. 1528: Vier Bücher von menschlicher Proportion. Reprint Nördlingen 1996: Verlag A. Uhl.
- [Dürer a] Dürer, A. (Hrsg. R. Bruck): Das Skizzenbuch von Albrecht Dürer in der königlichen öffentlichen Bibliothek zu Dresden. (Faksimile) Straßburg: J. H. E. Heitz 1905.

- [Dürer b] Dürer, A.: Schriften und Briefe. Hrsg. E. Ullmann. Reclams Universalbibliothek, Leipzig 1973 ff.
- [Dürer c] Dürer, A.: Underweysung, Faksmile-Reprint mit detailliertem Kommentar von P. Schreiber, in: Dürer, Das Druckgraphische Werk, Band 3 (2004), München – London – New York: Prestel
- [Edelsbrunner 1987] Edelsbrunner, H. 1987: Algorithms in Computational Geometry. Springer (EATCS Monographs on Theoretical Comp. Sciences 10).
- [EdEM] EdEM: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. IV u. V (Übersetzung aus dem Russischen). Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1969 bzw. 1971.
- [Eimer 1956] Eimer, G. 1956: Abstrakte Figuren in der Kunst der abendländischen Renaissance. Kunsthistorisk Tidskrift 25, Heft 3-4, 113-145.
- [Elfering 1975] Elfering, K. 1975: Die Mathematik des Āryabhaṭa I. München: Wilhelm Fink Verlag.
- [Encyklopädie] Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Dritter Band in drei Teilen: Geometrie, redigiert von W. Fr. Meyer u. H. Mohrmann. Leipzig: Teubner 1914-1931.
- [Engel/Stäckel] Engel, F. u. Stäckel, P. 1895: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Leipzig: Teubner 1895.
- [Engeler 1967] Engeler, E. 1967: Algorithmic Properties of Structures. Math. Systems Theory 1, 183-195.
- [Engeler 1968] Engeler, E. 1968: Remarks on the Theory of Geometrical Constructions. Lecture Notes in Mathematics Vol. 72, 64-76.
- [Epple 1999] Epple, M. 1999: Die Entstehung der Knotentheorie. Wiesbaden: Vieweg.
- [Ernst 1978] Ernst, B. 1978: Der Zauberspiegel des M. C. Escher. Köln: Benedict Taschen.
- [Ernst 1986] Ernst, B. 1986: Das verzauberte Auge. Berlin: Taco.
- [Euklid a] Euklid: Euclidis opera omnia, griech.-lat. ed. J.L. Heiberg und H. Menge Leipzig: Teubner. Vol. I (1883) - VIII (1916).
- [Euklid b] Euklid: Die Elemente, nach Heibergs Text aus dem Griech. übersetzt u. herausgeg. von Cl. Thaer. Ostwalds Klassiker, Bd. 235 (1933), 236, 240-43 (1937). Reprints Leipzig 1984. 8. Auflage in 1 Bd. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft 1991, Frankfurt a. M.: Harri Deutsch, 4. Aufl. 2003 mit Einleitung von P. Schreiber
- [Euklid c] Euklid: Die Data, nach Menges Text aus dem Griech. von Cl. Thaer. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1962.
- [Euler a] Euler, L.: Introduction to Analysis of the Infinite, Book II. Springer New York 1990.

- [Euler b] Euler, L.: Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Deutsch v. E. Hammer. Ostwalds Klassiker Bd. 73, 1896.
- [Euler c] Euler, L.: Drei Abhandlungen über Kartenprojektionen. Hrsg. A. Wangerin. Ostwalds Klassiker Bd. 93, 1898.
- [Feigl 1928] Feigl, G. 1928: Geschichtliche Entwicklung der Topologie. Jahresbericht DMV 37, 1. Abt., 273-286.
- [Fejes Tóth 1953] Fejes Tóth, L. 1953: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer.
- [Fejes Tóth 1965] Fejes Tóth, L. 1965: Reguläre Figuren. Leipzig: Teubner.
- [Fermat a] Fermat, P. de: Einführung in die ebenen und körperlichen Örter. Deutsch v. H. Wieleitner. Ostwalds Klassiker Bd. 208, 1923.
- [Fermat b] Fermat, P. de: Abhandlungen über Maxima und Minima. Deutsch v. M. Miller. Ostwalds Klassiker Bd. 238, 1934.
- [Fichtner 1984] Fichtner, R. 1984: Die verborgene Geometrie in Raffaels „Schule von Athen“. München: Oldenbourg-Verlag u. Deutsches Museum.
- [Fiedler 1882] Fiedler, W. 1882: Zyklographie. Leipzig.
- [Field/Gray 87] Field, J. V., Gray, J. J. 1987: The Geometrical Work of Girard Desargues. New York usw.: Springer.
- [Field 1997] Field, J. V. 1997: The Invention of Infinity. Mathematics and Art in the Renaissance. Oxford University Press.
- [Fink 1894] Fink, K. 1894: L.-N.-M. Carnot. Sein Leben und seine Werke. Tübingen: Verlag der Laupp'schen Buchhandlung.
- [Fischer 1986] Fischer, G. (Hrsg.) 1986: Mathematische Modelle, 2 Bde. Berlin: Akademie-Verlag und Braunschweig: Vieweg.
- [Fischer 1990] Fischer, G. u.a. (Hrsg.) 1990: Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
- [Fladt 1927] Fladt, K. 1927: Euklid. Verlag Otto Salle (o.O.)
- [Folkerts 1970a] Folkerts, M. 1970: „Boethius“ Geometrie II. Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters (= Boethius, Band 9). Wiesbaden: F. Steiner.
- [Folkerts 1970b] Folkerts, M. 1970: Ein neuer Text des Euclides Latinus. Facsimiledruck der Handschrift Lüneburg D4^o 48, f. 13^r – 17^v. Hildesheim: Gerstenberg.
- [Folkerts 1989] Folkerts, M. 1989: Euclid in Medieval Europe (= Quaestio 11 de rerum natura). Winnipeg: The Benjamin Catalogue for History of Science.
- [Folkerts 1992] Folkerts, M. 1992: „Mathematische Probleme im Corpus agrimensorum“. In: [Behrends/Capogrossi-Colognese 1992, 311–336].

- [Folkerts 1993] Folkerts, M. 1993: „Die Alkuin zugeschriebenen ‚Propositiones ad acuendos iuvenes‘“. In: [Butzer/Lohrmann 1993, 273-281].
- [Folkerts/Gericke 1993] Folkerts, M.; Gericke, H. 1993 „Die Alkuin zugeschriebenen ‚Propositiones ad acuendos iuvenes‘ (Aufgaben zur Schärfung des Geistes der Jugend)“. In: [Butzer/Lohrmann 1993, 283-362].
- [Fomenko 1994] Fomenko, A. 1994: Visual Geometry and Topology. Berlin usw.: Springer.
- [Foux/Pratt 1979] Foux I. D., Pratt, M. J. 1979: Computational Geometry for Design and Manufacture. New York-Chichester usw.: John Wiley u. Ellis Horwood.
- [Fritsch 1994] Fritsch, R. und G. 1994: Der Vierfarbensatz. Geschichte, topologische Grundlagen und Beweisidee. Mannheim-Leipzig usw.: BI Wissenschaftsverlag.
- [Fu 1991] Fu Daiwie 1991 „Why did Liu Hui fail to derive the volume of a sphere?“ Historia Mathematica 18, 212–238.
- [Gardner 1983] Gardner, M. 1983: Wheels, Life and other Mathematical Amusements. New York: Freeman.
- [Gauß a] Gauß, C. F.: Werke in 12 Bänden. Hrsg. von d. Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Leipzig-Berlin: Teubner 1863-1933.
- [Gauß b] Gauß, C. F.: Allgemeine Flächentheorie. Deutsch v. A. Wangerin. Ostwalds Klassiker Bd. 5, 1889ff. Auch in Teubner-Archiv zur Mathematik, Bd. 1, 1984.
- [Gauß c] Gauß, C. F.: Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Hrsg. J. Frischauf. Ostwalds Klassiker Bd. 177, 1910.
- [Gauß/Riemann/Minkowski] Gauß, Riemann, Minkowski 1984: Gaußsche Flächentheorie, Riemannsche Räume und Minkowski-Welt. Hrsg. von H. Reichardt u. J. Böhm. Teubner-Archiv, Bd. 1.
- [Geldner 1965] Geldner, F. 1965 Matthäus Roriczer: Das Büchlein von der Fialen Gerechtigkeit und Die Geometria Deutsch. Faksimile der Originalausgaben Regensburg 1486 bzw. Regensburg um 1487/88, mit Nachwort und Textübertragung. Wiesbaden: Guido Pressler.
- [Gerdes 2003] Gerdes, P. 2003: Awakening of Geometrical Thought in Early Culture. University of Minnesota
- [Gericke 1984] Gericke, H. 1984: Mathematik in Antike und Orient. Berlin-Heidelberg-New York u.a.: Springer-Verlag.
- [Gericke 1990] Gericke, H. 1990: Mathematik im Abendland. Von den römischen Feldmessern bis zu Descartes. Berlin-Heidelberg-New York u.a.: Springer-Verlag. (Nachdruck beider Bände in einem Band: 1992. Wiesbaden: Fourier-Verlag.)
- [Gerwien 1833] Gerwien, P. 1833: Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen gradlinigen Figuren in dieselben Stücke; Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugelfläche in dieselben Stücke. Journal für die reine und angewandte Mathematik 10, 228-234 und 235-240.

- [Giering/Hoschek] Giering, O., Hoschek, J. (Hrsg.) 1994: Geometrie und ihre Anwendungen. München-Wien: Carl Hanser.
- [Gjone 1996] Gjone, G.: Matematikhistorie i miniatyr. Landås: Caspar Forlag 1996.
- [Grassmann 1911] Grassmann, H.: Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke, hrsg. v. F. Engel in 3 Bd., Leipzig: Teubner 1894-1911. Reprints Chelsea Publ. Comp. (Bd. 1,1) 1969, Johnson Reprint Corporation (Bd. 1,2) 1972.
- [Grattan-Guinness 1994] Grattan-Guinness, I. (Ed.) 1994: Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, vol. 1. Part 1: Ancient and non-Western Traditions. London and New York: Routledge.
- [Grattan-Guinness 1997] Grattan-Guinness, I. 1997: The Fontana History of the Mathematical Sciences. The Rainbow of Mathematics. London: Fontana Press.
- [Gruber 1990] Gruber, P. M. 1990: Zur Geschichte der Konvexgeometrie und der Geometrie der Zahlen. In: G. Fischer u.a. (Hrsg.) 1990, siehe dort
- [Gruber 1993] Gruber, P. M. 1993: History of Convexity. In: P. M. Gruber, J. M. Wills (Eds.): Handbook of Convex Geometry. Elsevier (North Holland), Amsterdam usw.
- [Grünbaum/Shephard 1987] Grünbaum, B., Shephard, G. C. 1987: Tilings and Patterns. New York: Freeman.
- [Guderian 1990] Guderian, D. 1990: Mathematik in der Kunst der letzten dreißig Jahre. Paris: Edition Galerie Lahumiére und Bannstein, Ebringen.
- [Günther 1876] Günther, S. 1876: Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von den Sternpolygonen und Sternpolyedern in der Neuzeit. In Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig: Teubner.
- [Guy/Woodrow] Guy, R. K., Woodrow, R. E. (Eds.) 1994: The lighter Side of Mathematics. Proceedings. The Math. Association of America.
- [Hamann 1980] Hamann, G. (Hrsg.) 1980: Regiomontanus-Studien. Wien.
- [Hantsche 1996] Hantsche, I. (Hrsg.) 1996: Der „mathematicus“. Zur Entwicklung und Bedeutung einer neuen Berufsgruppe in der Zeit Gerhard Mercators. Duisburger Mercator-Studien, Bd. 4.
- [Hausdorff 1914] Hausdorff, F. 1914: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit & Comp.
- [Hausdorff 1919] Hausdorff, F. 1919: Dimension und äußeres Maß. Math. Ann. 79, 157-179.
- [Hawking 1997] Hawking, S. 1997: Die illustrierte kurze Geschichte der Zeit. Reinbek: Rowohlt. (Engl. Original New York 1996).
- [Heath 1887] Heath, Th. L. 1887: The Works of Archimedes. Cambridge: University Press. Reprint: New York: Dover Publ. Inc. 1953.
- [Heath 1921] Heath, Th. L. 1921: A History of Greek Mathematics. 2 vols. Oxford: Clarendon Press. Reprint New York: Dover Publ. Inc. 1981.

- [Heilbronn 1998] Heilbronn, J. L. 1998: *Geometry Civilized. History, Culture and Technique*. New York etc.: Oxford University Press.
- [Helmholtz 1870] Helmholtz, H. v. 1870: Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Vortrag im Dozentenverein zu Heidelberg. Wieder abgedruckt u.a. in [Sjöstedt 1968] und in [Helmholtz 1968].
- [Helmholtz 1968] Helmholtz, H. v. 1968: *Über Geometrie*. (Reprints) Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft.
- [Henderson 1983] Henderson, L. D. 1983: *The Fourth Dimension and Non Euclidean Geometry*. Princeton University Press.
- [Henkin/Suppes/Tarski] Henkin, L., P. Suppes, A. Tarski (Eds.) 1959: *The Axiomatic Method*. Proceedings. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp.
- [Herfort/Klotz] Herfort, P., Klotz, A. 1997: *Ornamente und Fraktale*. Braunschweig- Wiesbaden: Vieweg.
- [Hilbert 1899] Hilbert, D. 1899: *Grundlagen der Geometrie*. Ursprünglich als Festschrift anlässlich der Einweihung des Gauß-Weber-Denkmal in Göttingen. Folgende Auflagen bis 7.(1930) bei Teubner jeweils mit wesentlichen Änderungen und Ergänzungen durch Hilbert selbst. Ab 8. (1956) Stuttgart, 14. Aufl. mit allen Anhängen und vielen Zusätzen hrsg. von M. Toepell 1999.
- [Hjelmslev 1916] Hjelmslev, J. 1916: *Die Geometrie der Wirklichkeit*. *Acta Mathematica* 40, 35-66.
- [Hjelmslev 1928] Hjelmslev, J. 1928: *Die natürliche Geometrie*. *Hamburger math. Einzelschriften*, Heft 1.
- [Hofmann 1963] Hofmann, J. E. 1963: *Geschichte der Mathematik I. Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes* (= Sammlung Götschen, Bd. 226/226a). 2. Aufl. Berlin: W. De Gruyter.
- [Hogendijk 1984] Hogendijk, J. P. 1984: Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon. *Archive for History of Exact Sciences* 30, 197-330.
- [Hogendijk 1989] Hogendijk, J. P. 1989: Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī on the Number of Positive Roots of Cubic Equations. *Historia Mathematica* 16, 69-85.
- [Homann 1991] Homann, F. A. 1991: *Practical Geometry [Practica Geometriae]* Attributed to Hugh of St. Victor. Translated from the Latin (= *Medieval Philosophical Texts in Translation*, No. 29). Milwaukee, WI: Marquette University Press.
- [Howse 1980] Howse, D. 1980: *Greenwich Time and the Discovery of the Longitude*. Oxford University Press.
- [Hughes 1967] Hughes, B. 1967: Regiomontanus on Triangles. *De triangulis omnimodis* by Johann Müller, otherwise known as Regiomontanus, translated by Barnabas Hughes, O.F.M. Madison-Milwaukee-London: University of Wisconsin Press.

- [Jaggi 1986] Jaggi, O. P. 1986: Indian Astronomy and Mathematics. Delhi/Lucknow: Atma Ram & Sons
- [Jamnitzer 1568] Jamnitzer, W. 1568: *Perspectiva corporum regularium*. (Holzschnitte nach den Vorlagen des Autors von Jost Amman) Verwiesen sei auf zwei moderne Ausgaben: Akademische Verlagsanstalt, Graz 1973 und (hrsg. u. französ. kommentiert von A. Flocon) Verlag Alain Brieux, Paris 1964.
- [Jungius 1627] Jungius, J. 1627: *Geometria Empirica* (Rostock 1627), neu herausgegeben von von B. Elsner, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 2004 (Veröff. der Jungius Gesellschaft Hamburg, Nr. 96)
- [Juschekewitsch 1964] Juschekewitsch, A. P. 1964: *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*. Leipzig: Teubner.
- [Kadeřávek 1992] Kadeřávek, F. 1992: *Geometrie und Kunst in früherer Zeit*. Stuttgart, Leipzig: Teubner, und Zürich: Verlag der Fachvereine Zürich (ursprünglich tschechisch, Prag 1935).
- [Kant] Kant, I.: *Gesammelte Schriften*, hrsg. von d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wissensch., Berlin 1902 ff, Reprint 1968.
- [Karteszi 1976] Karteszi, F. 1976: *Introduction to Finite Geometries*. Budapest: Akademie-Verlag.
- [Karzel/Kroll] Karzel, H. Kroll, H.-J. 1988: *Geschichte der Geometrie seit Hilbert*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- [Kelland 1843] Kelland, Ph. 1843: *Lectures on the Principles of Demonstrative Mathematics*. Edinburgh.
- [Kelland 1864] Kelland, Ph. 1864: On the Limits of our Knowledge respecting the Theory of Parallels. *Transactions Royal Soc. Edinburgh* 23, 433-450.
- [Kemp 1990] Kemp, M. 1990: *The Science of Art*. New Haven - London: Yale University Press.
- [Kempe 1877] Kempe, A. B. 1877: *How to draw a straight Line; a Lecture on Linkages*. London: Macmillan.
- [Kepler] Kepler, J.: *Gesammelte Werke*, hrsg. von W. von Dyck, F. Hammer, M. Caspar, M. List u. V. Bialas, 20 Bände, 1937-88. Deutsche Übersetzungen: *Das Weltgeheimnis* (Ü. u. Hrsg. M. Caspar), Augsburg 1923. *Weltharmonik* (Ü. u. Hrsg. M. Caspar), München-Wien 1939. In *Ostwalds Klassikern* Bd. 144: *Dioptrik* (1904), Bd. 165: *Neue Stereometrie der Fässer* (1908, 1987), Bd. 198: *Grundlagen der geometrischen Optik* (1922), Bd. 273: *Vom sechseckigen Schnee* (1987).
- [Klein 1872] Klein, F. 1872: *Das Erlanger Programm*. Hrsg. H. Wußing. *Ostwalds Klassiker* Bd. 253, 1974. (Auch in *Math. Annalen* 43, 1893)
- [Klein 1902] Klein, F. 1902: *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Eine Revision der Prinzipien*. Teubner: Leipzig 1902, 2. Aufl. 1907.

- [Klein 1909 – 16] Klein, F. (Hrsg.): Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. 5 Bde. in 9 Teilbänden. Leipzig: Teubner.
- [Klein 1921] Klein, F. 1921-23: Gesammelte mathematische Abhandlungen in 3 Bd. Berlin: Springer.
- [Klein 1926] Klein, F. 1926: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, 2 Bde, Berlin: Springer. Reprint in 1 Bd. Springer 1979.
- [Klein 1928] Klein, F. 1928: Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie. Berlin: Springer.
- [Knobloch 1990a] Knobloch, E. 1990: „Christoph Clavius. Ein Namen- und Schriftenverzeichnis zu seinen *Opera mathematica*.“ *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* 10, 135–190.
- [Knobloch 1990b] Knobloch, E. 1990: „Christoph Clavius — Ein Astronom zwischen Antike und Copernicus“. In: K. Döring und G. Wöhrle (Hrsg.): Vorträge des ersten Symposiums des Bamberger Arbeitskreises „Antike Naturwissenschaft und ihre Rezeption (AKAN)“, S. 113–140. Wiesbaden: Otto Harrassowitz.
- [Knorr 1985] Knorr, W. R. 1985: „The geometer and the archaeoastronomers: on the prehistoric origins of mathematics.“ *British Journal for the History of Science* 18, 187-212.
- [Knorr 1986] Knorr, W. R. 1986: *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Basel: Birkhäuser. Reprint: New York: Dover Publications 1993.
- [Köberer 1982] Köberer, W. (Hrsg.) 1982: *Das rechte Fundament der Seefahrt*. Deutsche Beiträge zur Geschichte der Navigation. (Eine Sammlung von Reprints von Arbeiten u.a. von Hermann Wagner, Siegmund Günther u. Arthur Breusing) Berlin: Verlag Transpress.
- [König 1986] König, D. 1986: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Reprint der Originalausgabe von 1936 mit historisch wertvollen Ergänzungen und Aktualisierungen in Teubner-Archiv Bd. 6.
- [Kowalski 1987] Kowalski, J. K. 1987: *The House of the Governor. A Maya Palace at Uxmal, Yucatan, Mexico*. Norman and London: University of Oklahoma Press.
- [Kowalski 1999] Kowalski, J. K. (Ed.) 1999: *Mesoamerican Architecture as a Cultural Symbol*. New York, Oxford: Oxford University Press.
- [Krafft 1971] Krafft, F. 1971 *Geschichte der Naturwissenschaft I: Die Begründung einer Wissenschaft von der Natur durch die Griechen*. Freiburg: Rombach.
- [Kupčik 1980] Kupčik, I. 1980: *Alte Landkarten*. Prag: Artia.
- [Lagrange 1823/24] Lagrange, J.-L.: *Mathematische Werke in drei Bänden*, deutsch herausgeg. v. A. L. Crelle. Berlin: G. Reimer 1823/24.
- [Lagrange/Gauß] Lagrange, J.-L. u. Gauß, C. F.: *Über Kartenprojektion*. Hrsg. A. Wangerin. Ostwalds Klassiker Bd. 55, 1894.

- [Lam/Ang 1992] Lam Lay Yong; Ang Tian Se 1992: *Fleeting Footsteps. Tracing the Conception of Arithmetic and Algebra in Ancient China*. Singapore, New Jersey, London, HongKong: World Scientific Publ. Co.
- [Lambert 1894] Lambert, J. H.: *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten*. Hrsg. A. Wangerin. Ostwalds Klassiker Bd. 54, 1894. Engl. Übersetz. Michigan Geographical Publications No. 8, University of Michigan 1972.
- [Lambert/Steck 1943] Lambert, J. H. 1943: *Schriften zur Perspektive*, hrsg. v. Max Steck. Berlin: Lüttke-Verlag (Enthält u.a. Bibliographie der Schriften Lamberts.)
- [Legendre 1844] Legendre, A.-M. 1844: *Die Elemente der Geometrie*. Deutsch nach der 12. Auflage des französ. Originals von A. L. Crelle. Berlin: Rücker & Püchler, 4. Aufl. 1844.
- [Lemoine 1902] Lemoine, E. 1902: *La géométrie ou art des constructions géométriques*. Paris.
- [Leonardo 1952] Leonardo da Vinci: *Tagebücher und Aufzeichnungen*. Übersetzt u. herausgeg. von Theodor Lücke. 1940, 2. Aufl. 1952. Leipzig: Paul-List-Verlag.
- [Libbrecht 1973] Libbrecht, U. 1973: *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century. The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao*. Cambridge, Mass. and London: MIT Press.
- [Liebmann 1901] Liebmann, H. 1901: *Die Konstruktion des geradlinigen Dreiecks der nicht-euklidischen Geometrie aus den drei Winkeln*. Leipziger Berichte 53, 477-491.
- [Liebscher 1991] Liebscher, D.-E. 1991: *Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal*. (Bearbeitung der Erstauflage von 1977). Berlin: Akademie-Verlag.
- [Lietzmann 1911] Lietzmann, W. 1911: *Der pythagoreische Lehrsatz*. (ursprüngl. Barmen, weitere, z.T. veränderte Auflagen 1917, 1930,...,(9.) 1968,...
- [Listing 1847] Listing, J. B. 1847: *Vorstudien zur Topologie*. Göttinger Studien, erste Abt., 811-875.
- [Listing 1862] Listing, J. B. 1862: *Der Census räumlicher Complexe*. Abhandlungen der Kgl. Gesellsch. d. Wissenschaften zu Göttingen, X. Band, 97-182.
- [Li/Dù 1987] Lǐ Yǎn; Dù Shír'an 1987: *Chinese Mathematics. A concise history*. Oxford: Clarendon Press.
- [Lobatschewski 1902] Lobatschewski, N. I.: *Pangeometrie*. Deutsch v. H. Liebmann. Ostwalds Klassiker Bd. 130, 1902f.
- [Locher 1994] Locher, J. L. (u.a.) 1994: *Leben und Werk M. C. Escher*. Remseck bei Stuttgart: RVG Interbook.
- [Loeffel 1987] Loeffel, H. 1987: *Blaise Pascal*. Basel-Boston: Birkhäuser.
- [Mainzer 1980] Mainzer, K. 1980: *Geschichte der Geometrie*. Mannheim-Wien-Zürich: BI Wissenschaftsverlag.

- [Mangoldt/Knopp] Mangoldt, H. v. und Knopp, K. (1932 ff.): Einführung in die höhere Mathematik, seit der 6. Aufl. hrsg. u. erweitert von K. Knopp, Bd. 1-3, Leipzig: Hirzel-Verlag.
- [Marinoni 1987] Marinoni, A. 1987: Leonardos Schriften. In Leonardo der Forscher. Stuttgart-Zürich: Belser (Engl. Original: McGraw-Hill 1980).
- [Martzloff 1997] Martzloff, J.-C. 1997: A History of Chinese Mathematics. New York, Berlin u.a.: Springer.
- [Maur 1997] Maur, Karin v. (Hrsg.) 1997: Magie der Zahl. Katalog. Staatsgalerie Stuttgart.
- [Mehlhos 2000] Mehlhos, S. 2000: Simple Counterexamples for the Unsolvability of the Fermat- and the Steiner-Weber-Problem. Erscheint in: Contributions to Algebra and Geometry (Berlin: Heldermann).
- [Meinel/Neugebauer/Steudel 1991] Meinel, R., G. Neugebauer, H. Steudel 1991: Solitonen. Berlin: Akademie-Verlag.
- [Meinhardt 1998] Meinhardt, Hans 1998: The Algorithmic Beauty of Sea Shells. Berlin, New York usw.: Springer.
- [Mikami 1913] Mikami, Y. 1913: The Development of Mathematics in China and Japan. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften, 30. Heft. Leipzig: Teubner. Nachdruck New York: Chelsea Publ. Co. 1961.
- [Möbius] Möbius, A. F.: Gesammelte Werke in 4 Bänden, hrsg. von R. Baltzer, F. Klein u.a. Leipzig: Hirzel-Verlag 1885-1887.
- [Mohr 1672] Mohr, G. 1672: Euclides Danicus. Amsterdam. Faksimile-Reprint hrsg. v. J. Hjelmslev u. mit deutscher Übersetzung, Kopenhagen 1928.
- [Mohr 1673] Mohr, G. 1673: Compendium Euclidis Curiosi. Amsterdam. Faksimile- Reprints der holländ. u. engl. Ausgabe, Kopenhagen 1982.
- [Monge 1900] Monge, G. 1900: Darstellende Geometrie. Deutsch v. R. Haußner. Ostwalds Klassiker Bd. 117, 1900.
- [Müller 1930] Müller, C. 1930: „Die Mathematik der Śulvasūtra“. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 7, 173–204.
- [Naas/Tutschke 1986] Naas, J., Tutschke, W. 1986: Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik. Berlin: Akademie-Verlag.
- [Needham 1959] Needham, J. 1959: Science and Civilisation in China, vol. 3: Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth. Cambridge: Cambridge University Press.
- [Neugebauer/Sachs 1945] Neugebauer, O. u. Sachs, A. 1945: Mathematical Cuneiform Texts. New Haven, Conn.: American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research.

- [Neugebauer 1951] Neugebauer, O. 1951: The exact Sciences in Antiquity. Copenhagen: E. Munksgaard und Princeton: Princeton University Press. 2. Aufl: Providence, R.I. 1957, Nachdruck Newe York: Harper 1962.
- [Newton] Newton, I.: The Mathematical Works (Ed. D. T. Whiteside). New York - London: Johnson Reprint Corporation 1964-67.
- [North 1996] North, J. 1996: Stonehenge: Neolithic man and the cosmos. London: Harper-Collins.
- [Obenrauch 1897] Obenrauch, F. J. 1897: Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie. Brünn.
- [Pacioli] Pacioli, L.: De Divina Proportione. Deutsch von C. Winterberg. Wien 1889.
- [Panofsky/Saxl 1923] Panofsky, E., Saxl, F. 1923: Dürers „Melencolia I“. Berlin: Studien der Bibliothek Warburg, Bd. 2.
- [Peiffer 1996] Peiffer, J. 1996: La style mathématique de Dürer et sa conception de la géométrie. In: History of Mathematics. States of the Art. (Ed. Dauben, Folkerts, Knobloch, Wussing). Academic Press, 49 – 61.
- [Peiffer/Dahan-Dalmedico 1994] Peiffer, Jeanne; Dahan-Dalmedico, Amy 1994: Wege und Irrwege — Eine Geschichte der Mathematik. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.
- [Petersen 1879] Petersen, J. 1879: Methoden und Theorien zur Lösung geometrischer Constructionsaufgaben. Kopenhagen.
- [Piggott 1961] Piggott, St. (Hg.) 1961: Die Welt aus der wir kommen. Die Vorgeschichte der Menschheit. München, Zürich: Droemer Knauer.
- [Platon] Platon: Sämtliche Werke: Zweiter Band. Köln und Olten: Jakob Hegner 1967.
- [Poncelet 1822] Poncelet, J. V. 1822: Traité des propriétés projectives des figures. Paris: Bachelier.
- [Poincaré 1902] Poincaré, H. 1902: La science et l'hypothèse. Deutsch: Wissenschaft und Hypothese. Leipzig: Teubner (2. deutsche Aufl. 1906).
- [Poinsoet/Cauchy/Bertrand/Cayley] Poinsoet, Cauchy, Bertrand, Cayley: Abhandlungen über regelmäßige Sternkörper. Deutsch v. R. Haußner. Ostwalds Klassiker Bd. 151, 1906.
- [Preparata/Shamos] Preparata, F. P., Shamos, M. I. 1985: Computational Geometry. New York - Berlin usw.: Springer.
- [Proklos] Proklus Diadochus (410-485): Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen“. Aus dem Griechischen übertragen vom P. Leander Schönberger, O.S.B. Eingeleitet und ... besorgt von Max Steck. Halle (Saale): Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina 1945.
- [Ptolemaios] Ptolemäus: Handbuch der Astronomie, Bd.1, deutsche Übers. von K. Manitius, B.G. Teubner Verlagsges., Leipzig 1963

- [Rashed 1996] Rashed, Roshdi (Editor) 1996: *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, vol. 2. London, New York: Routledge.
- [Regiomontanus] Regiomontanus: *On Triangles*, transl. by Barnabas Hughes. Madison-Milwaukee-London: University of Wisconsin Press 1967.
- [Reich 1973] Reich, K. 1973: *Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauß bis Riemann*. *Archive for History of Exact Sciences* 11, 273-382.
- [Reich 1989] Reich, K. 1989: *Das Eindringen des Vektorkalküls in die Differentialgeometrie*. *Archive for History of Exact Sciences* 40, 275-303.
- [Reichardt 1957] Reichardt, H. (Hrsg.) 1957: *Gedenkband anlässlich des 100. Todestages von C. F. Gauß*. Leipzig: Teubner.
- [Reichardt 1985] Reichardt, H. 1985: *Gauß und die Anfänge der nichteuklidischen Geometrie*. Leipzig: Teubner (Teubner Archiv, Band 4).
- [Reuleaux] Reuleaux, F.: *Theoretische Kinematik*. Braunschweig: Vieweg. Bd. 1: 1875, Bd. 2: 1900.
- [Reutersvärd 1984] Reutersvärd, O. 1984: *Unmögliche Figuren*. München: Moos-Verlag.
- [Ricken 1977] Ricken, H. 1977: *Der Architekt. Geschichte eines Berufs*. Berlin: Henschelverlag
- [Robson 2001] Robson, E. 2001: „Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322“. *Historia Mathematica* 28, 167-206.
- [Roriczer 1486] Roriczer, M. 1486: *Das Büchlein von der Fialen Gerechtigkeit*. Regensburg. Faksimile-Reprint zusammen mit [Roriczer 1487], hrsg. v. F. Geldner, Wiesbaden: Guido Pressler 1965. Neues Reprint Hürtgenwald 1999.
- [Roriczer 1487] Roriczer, M. 1487: *Die Geometria Deutsch*. Regensburg. Reprint siehe [Roriczer 1486].
- [Salenius 1978] Salenius, T. 1978: *Elementärt Bevis för Pohlkes Sats*. *Nordisk Matematisk Tidskrift* 25/26, Heft 3-4, 150-152.
- [Sakarovitch 1996] Sakarovitch, J. 1996: *Épures d'architecture. De la coupe des pierres à la géométrie descriptive XVIe-XIXe siècles*. Basel-Boston: Birkhäuser.
- [Sarasvati Amma 1979] Sarasvati Amma, T. A. 1979 *Geometry in Ancient and Medieval India*. Delhi/Varanasi/Patna: Motilal Banarsidass.
- [Schaaf 1978] Schaaf, W.L.: *Mathematics and Science. An Adventure in Postage Stamps*. National Council of Teachers in Mathematics 1978
- [Schattschneider/Walker] Schattschneider, D., Walker, W. 1992: *M. C. Escher - Kaleidozyklen* (Amer. Original 1977). Köln: Benedikt Taschen.
- [Schlosser 2004] Schlosser, W. in: Meller, H. 2004: *Der geschmiedete Himmel*, S. 44 ff., Stuttgart: Konrad Theis Verlag

- [Schneider 1989] Schneider, I. 1989: Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933. Berlin: Akademie-Verlag.
- [Schönbeck 2003] Schönbeck, J. 2003: Euklid (Reihe Vita Mathematica, Bd. 12). Basel - Boston - Berlin 2003.
- [Scholz 1980] Scholz, E. 1980: Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré. Stuttgart: Birkhäuser.
- [Scholz 1989] Scholz, E. 1989: Symmetrie, Gruppe, Dualität. (Science Networks Bd. 1). Birkhäuser und Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- [Schreiber, O. 1908] Schreiber, O. 1908: Die Gleichung und der Lauf der Bildkurve eines Grösstenkreisbogens in Mercators Projektion. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1908, Heft 1.
- [Schreiber, P. 1975] Schreiber, P. 1975: Theorie der geometrischen Konstruktionen. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- [Schreiber, P. 1984] Schreiber, P. 1984: Grundlagen der konstruktiven Geometrie. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- [Schreiber, P. 1986] Schreiber, P. 1986: Zur Geschichte des sogenannten Steiner-Weber-Problems. Wiss. Zeitschr. der Ernst-Moritz-Arndt-Universität, Math.-Nat. Reihe, Bd. 35, Heft 3, 53-58.
- [Schreiber, P. 1987a] Schreiber, Peter, 1987: Euklid. (Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Bd. 87). Leipzig, Teubner.
- [Schreiber, P. 1987b] Schreiber, Peter, 1987: Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie. Leipzig, Teubner.
- [Schreiber, P. 1989] Schreiber, P. 1989: Zur historischen Entwicklung des Verhältnisses zwischen Mathematik und Geographie. Wiss. Zeitschrift der Univ. Greifswald, Math.-Nat. Reihe XXXVIII, No. 4, 48-53.
- [Schreiber, P. 1993] Schreiber, P. 1993: On the existence and constructibility of inscribed polygons. Beiträge zur Algebra und Geometrie 34, No. 2, 195-199.
- [Schreiber, P. 1994] Schreiber, P. 1994: Anregung durch Euklid. Didaktik der Mathematik (München: Bayer. Schulbuchverlag), H.1, 57-64.
- [Schreiber, P. 1995] Schreiber, P. 1995: Didaktische Bemerkungen zu Euklids „Optik“. Didaktik der Mathematik (Köln: Aulis-Verlag), H.3, 220-227.
- [Schreiber, P. 1996a] Schreiber, P. 1996: On a Constructive Property of Poincaré's Model of the Hyperbolic Plane. In: Henri Poincaré (Congrès International, Nancy 1994) Ed. Greffe, Heinzmann, Lorenz. Paris: Blanchard und Berlin: Akademie-Verlag.
- [Schreiber, P. 1996b] Schreiber, P. 1996: Felix Hausdorffs paradoxe Kugelzerlegung im Kontext der Entwicklung von Mengenlehre, Maßtheorie und Grundlagen der Mathematik. In: Felix Hausdorff zum Gedächtnis, Bd. I (Hrsg. E. Brieskorn), Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

- [Schreiber, P. 1997] Schreiber, Peter 1997: Johannes Kepler mal ganz anders. *Mathematik in der Schule* Jg. 35, Heft 10, 555-560.
- [Schreiber, P. 1998] Schreiber, P. 1998: *Mathematik und Kunst*. In *Überblicke Mathematik 1998* (Hrsg. A. Beutelspacher u.a.). Braunschweig-Wiesbaden: Vieweg.
- [Schreiber, P. 1999] Schreiber, P. 1999: A new hypothesis on Dürer's enigmatic polyhedron in his copper engraving „MELENCOLIA I“. *Historia Mathematica*, Bd 26, 369 – 377
- [Schreiber 2002] Schreiber, P. 2002: Generalized Descriptive Geometry, *Journal for Geometry and Graphics* 6, No 1, 37-59
- [Schreiber 2003] Schreiber, P. 2003: *The Beginning of Visualizing the Invisible*. *Prague Studies in the History of Science and Technology*, new series, vol. 7, 157-168.
- [Schreier 1988] Schreier, W. (Hrsg.) 1988: *Geschichte der Physik*. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- [Schröder 1980] Schröder, E. 1980: *Dürer - Kunst und Geometrie*. Berlin: Akademie-Verlag und Basel-Boston: Birkhäuser.
- [Schröder 1988] Schröder, E. 1988: *Kartenentwürfe der Erde*. Leipzig: Teubner.
- [Schubring 1996] Schubring, G. (Ed.) 1996: Hermann Günther Grassmann (1809-1877) *Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar*. Dordrecht-Boston-London: Kluwer.
- [Schur 1909] Schur, F. 1909: *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig-Berlin: Teubner.
- [Schwabhäuser/Szmielew/Tarski] Schwabhäuser, W., W. Szmielew, A. Tarski 1983: *Metamathematische Methoden in der Geometrie*. Berlin usw.: Springer.
- [Scriba 1984] Scriba, C. J. 1984: Abriß der Geschichte der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. In: K. Endl: *Analytische Geometrie und Lineare Algebra*, Kap. 12, S. 206–217, 219. Gießen: Würfel-Verlag.
- [Scriba 1985a] Scriba, C. J. 1985: Zur Konstruktion des regelmäßigen Neunecks in der islamischen Welt. In: M. Folkerts und U. Lindgren (Hrsg.): *Mathemata*. Festschrift für Helmuth Gericke (= Boethius, Bd. 12), 87–94. Stuttgart: Steiner Verlag.
- [Scriba 1985b] Scriba, C. J. 1985: Die mathematischen Wissenschaften im mittelalterlichen Bildungskanon der Sieben Freien Künste. *Acta historica Leopoldina* 16, 25–54
- [Scriba 1988] Scriba, C. J. 1988: Welche Kreismonde sind elementar quadrierbar? Die 2400jährige Geschichte eines Problems bis zur endgültigen Lösung in den Jahren 1933/47. *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg* 11, 517–539.
- [Scriba 1992] Scriba, C. J. 1992: Einige Bemerkungen zu antiken Konstruktionen. In: S. S. Demidov, M. Folkerts, D. E. Rowe, C. J. Scriba (Hrsg.): *Amphora*. Festschrift für Hans Wussing, S. 677–692. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag.
- [Seidenberg 1962] Seidenberg, A. 1962: The Ritual Origin of Geometry. *Archive for History of Exact Sciences* 1 (1960/62), 488–527.

- [Seifert 1934] Seifert, H, Threlfall, W. 1934: Lehrbuch der Topologie. Leipzig- Berlin: Teubner.
- [Sellenriek 1987] Sellenriek, J. 1987: Zirkel und Lineal. Kulturgeschichte des konstruktiven Zeichnens. München: Callwey.
- [Senechal/Fleck] Senechal, M., Fleck G. (Eds.) 1988: Shaping Space. A Polyhedral Approach. Boston-Basel: Birkhäuser.
- [Senechal 1995] Senechal, M. 1995: Quasicrystals and Geometry. Cambridge University Press.
- [Sesiano 1993] Sesiano, J. 1993: Arabische Mathematik im 8. - 10. Jahrhundert. In: [Butzer/Lohrmann 1993, 399-442].
- [Shamos/Preparata] Shamos, I.M., Preparata, F. 1985: Computational Geometry. New York usw.: Springer.
- [Shelby 1972] Shelby, L. R. 1972 Gothic Design Techniques. The Fifteenth-Century Design Booklets of Mathes Roriczer and Hanns Schmuttermayer. Edited, Translated and Introduced by L. R. Shelby. Carbondale and Edwardsville: Southern Illinois University Press; London and Amsterdam: Feffer & Simons.
- [Sjöstedt 1968] Sjöstedt, C. E. 1968: Le Axiome de Paralleles. (Eine kommentierte Anthologie von Texten zum Parallelenproblem in der jeweiligen Originalsprache mit Übersetzung in Interlingua) Stockholm: Verlag Natur och Kultur.
- [Snell 1946] Snell, B. 1946 und viele Auflagen: Die Entdeckung des Geistes. Hamburg: Claassen & Goverts.
- [Smith/Mikami 1914] Smith, D. E.; Mikami, Y. 1914: A History of Japanese Mathematics. Chicago: Open Court Publ. Co.
- [Sobel 1995] Sobel, D. 1995: Longitude. Deutsch: Längengrad (Eine Biographie des Landmessers und Uhrmachers Harrison) Berlin Verlag 1996.
- [Sommerville 1911] Sommerville, D. M. Y. 1911: Bibliography of Non-Euclidean Geometry. Reprint: New York 1970.
- [Speltz 1915] Speltz, A. 1915: Das farbige Ornament aller historischen Stile. Leipzig: Schumann's Verlag. Engl. Übersetzg. The History of Ornament. New York: Portland House 1988.
- [Srinvasiengar 1988] Srinvasiengar 1988: The History of Ancient Indian Mathematics. Calcutta: The World Press Private Ltd.
- [Stäckel/Engel 1895] Stäckel, P, Engel, F. 1895: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß. Leipzig: Teubner.
- [Stäckel/Engel 1913] Stäckel, P., Engel, F. (Hrsg.) 1913: Urkunden zur Geschichte der nicht-euklidischen Geometrie, 2 Teile. Leipzig-Berlin: Teubner.

- [Staudt 1847] Staudt, Ch. v. 1847: Geometrie der Lage. Nürnberg: Bauer und Raspe.
- [Staudt 1860] Staudt, Ch. v. 1856-60: Beiträge zur Geometrie der Lage. 3 Hefte. Nürnberg: Bauer und Raspe.
- [Steck 1948] Steck, M. 1948: Dürers Gestaltlehre der Mathematik und der bildenden Künste. Halle: Max-Niemeyer-Verlag.
- [Steck/Folkerts] Steck, M., Folkerts M. 1981: Bibliographia Euclideana. Hildesheim: Gerstenberg. (Beschreibt 7 Handschriften u. 313 Druckausgaben, enthält rund 230 Abbildungen von historischen Manuskripten u. Titelblättern.)
- [Steiner 1833] Steiner, J. 1833: Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. Hrsg. A. v. Oettingen. Ostwalds Klassiker Bd. 60, 1895ff.
- [Steiner 1882] Steiner, J.: Gesammelte Werke, 2 Bde, hrsg. K. Weierstraß. Berlin 1881/82.
- [Steiner 1896] Steiner, J.: Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander. Hrsg. A. v. Oettingen. Ostwalds Klassiker Bd. 82 u. 83, 1896f.
- [Steiner 1901] Steiner, J.: Einige geometrische Betrachtungen, Hrsg. R. Sturm. Ostwalds Klassiker Bd. 123, 1901f.
- [Steinitz 1930] Steinitz, E. 1930: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder (posthum, 2. erweit. Ausgabe 1934 von H. Rademacher). Berlin: Springer.
- [Stoyan/Mecke] Stoyan, D., Mecke, J. 1983: Stochastische Geometrie. Eine Einführung. Berlin: Akademie-Verlag.
- [Stückelberger 1988] Stückelberger, A. 1988: Einführung in die antiken Naturwissenschaften. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- [Subbarayappa/Sarma 1985] Subbarayappa, B. V.; Sarma, K. V. 1985: Indian Astronomy. A Source Book (Based primarily on Sanskrit Texts). Bombay: Nehru Center.
- [Sugimoto/Swain 1978] Sugimoto, M.; Swain, D. L. 1978: Science and Culture in Traditional Japan A.D. 600–1854. Cambridge, Mass. and London: MIT Press.
- [Swets 1992] Swets, F. J. 1992: The Sea Island Mathematical Manual: Surveying and Mathematics in Ancient China. University Park, PA: The Pennsylvania State University Press.
- [Szabó 1994] Szabó, Á. 1994: Die Entfaltung der Griechischen Mathematik. Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich: BI Wissenschaftsverlag.
- [Taton 1951] Taton, R. 1951: L'oeuvre scientifique de Gaspard Monge. Paris.
- [Thaer] Thaer, Cl. siehe Euklid
- [Thiele 1984] Thiele, R. 1984: Die gefesselte Zeit (5. Aufl. 1988). Leipzig-Jena-Berlin: Urania-Verlag.

- [Thiele 1988] Thiele, R., Haase, K. 1988: Teufelsspiele. Leipzig-Jena-Berlin: Urania-Verlag.
- [Thompson 1917] Thompson, d' Arcy W. 1917: On Growth and Form. Cambridge Univ. Press. Erweit. Aufl. in zwei Bänden 1959, 1961, 1968. Deutsch: „Über Wachstum und Form“, Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1952, 1973.
- [Tobies 1981] Tobies, R. 1981: Felix Klein. Leipzig: Teubner-Biographien Bd. 50.
- [Toepell 1986] Toepell, M.-M. 1986: Über die Entstehung von David Hilberts „Grundlagen der Geometrie“. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- [Tropfke 1940] Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik, Bd. 4: Geometrie. 3. Aufl. Berlin: W. de Gruyter 1940.
- [Trudeau 1987] Trudeau, R. J. 1987: The Non-Euclidean Revolution. Boston-Basel- Stuttgart: Birkhäuser.
- [Turner/Griend] Turner, J. C., P. van de Griend (Eds.) 1995: History and Science of Knots. Singapore etc.: World Scientific.
- [Vahlen 1911] Vahlen, Th. 1911: Konstruktionen und Approximationen. Leipzig-Berlin: Teubner.
- [Vasarely 1979] Vasarely, V. 1965-79: Das Gesamtwerk, 4 Bde, verschiedene Ausgaben mit französ., englischem bzw. deutschem Kommentar. Neuchâtel: Éditions du Griffon.
- [Veronese] Veronese, G.: Grundzüge der Geometrie (Nach dem italien. Original 1891). Leipzig: Teubner 1894.
- [Viète] Viète, F.: Opera mathematica (1646 Ed. F. van Schooten). Reprint: New York - Hildesheim 1970.
- [Honnecourt] Villard de Honnecourt: Album de ... (Reproduction des 66 pages et dessins du manuscrit Français 19093 de la Bibliothèque Nationale) Paris: Imprim. Berthaud Frères.
- [Vogel F. 1931] Vogel, F. 1931: Über die Näherungskonstruktionen für die Dreiteilung eines Winkels. Zeitschr. f. Math. u. Naturwiss. Unterricht 62. Jhg., 145-155.
- [Vogel K. 1958] Vogel, K. 1958: Vorgriechische Mathematik, Teil I: Vorgeschichte und Ägypten (= Mathemat. Studienhefte, Heft 1). Hannover: H. Schroedel Verlag; Paderborn: Verlag F. Schöningh.
- [Vogel K. 1959] Vogel, K. 1959: Vorgriechische Mathematik, Teil II: Die Mathematik der Babylonier (= Mathemat. Studienhefte, Heft 2). Hannover: H. Schroedel Verlag; Paderborn: Verlag F. Schöningh.
- [Vogel K. 1968] Vogel, K. 1968: Chiu Chang Suan Shu. Neun Bücher Arithmetischer Technik. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, N.F. 4) Braunschweig: F. Vieweg & Sohn.
- [Waerden 1956] Waerden, B. L. van der 1956: Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik. Basel-Stuttgart; Birkhäuser Verlag.

- [Wagner 1979] Wagner, D. B. 1979: „An early derivation of the volume of a pyramid: Liu Hui, Third Century A.D.“ *Historia Mathematica* 6 (1979), 164–188.
- [Weiße/Schreiber] Weiße, K., Schreiber, P. 1989: Zur Geschichte des Lemoineschen Punktes. *Wiss. Zeitschrift Univ. Greifswald, Math.-Nat. Reihe*, XXXVIII, Heft 4.
- [Wesolowsky 1993] Wesolowsky, G. O. 1993: The Weber Problem: History and Perspectives. *Location Science* 1, No. 1, 5–23.
- [Wiener 1884] Wiener, Ch. 1884: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 2 Bde. Leipzig: Teubner.
- [Wirtz 1887] Wirtz, M. 1887: Herrn Professor Zöllners Experimente mit dem amerikanischen Medium Herrn Slade und seine Hypothese intelligenter vierdimensionaler Wesen. Leipzig.
- [Wolff 1840] Wolff, F. 1840: *Die beschreibende Geometrie und ihre Anwendungen. Leitfaden für den Unterricht am Kgl. Gewerbe-Institut Berlin*.
- [Wußing 1969] Wußing, H. 1969: *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs*. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften (1984 Engl.)
- [Wußing 1979] Wußing, H., u.a. 1979: *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- [Wußing 1997] Wußing, H., u.a. 1997: *Vom Zählstein zum Computer. Mathematik in der Geschichte*. Bd. 1: Überblick und Biographien. Alten, Djafari Naini, Wesemüller-Kock (Hrsg.), Hildesheim: Verlag Franzbecker.
- [Wußing/Arnold] Wußing, H. u. Arnold, W. (Hrsg.) 1975: *Biographien bedeutender Mathematiker*. Folg. Auflagen bis 1989 auch für Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt und Aulis-Verlag Köln.
- [Wußing/Remane] Wußing, H. u. Remane, H. 1989: *Wissenschaftsgeschichte en miniature*. Berlin; Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- [Zaddach 1994] Zaddach, A. 1994: *Grassmanns Algebra in der Geometrie*. Mannheim- Wien- Zürich: BI-Wissenschaftsverlag.
- [Ziegler 1985] Ziegler, R. 1985: *Die Geschichte der geometrischen Mechanik im 19. Jahrhundert*. Stuttgart: Franz Steiner.
- [Zinner 1990] Zinner, E. 1990: *Regiomontanus - His Life and Work (Mit Ergänzungen von M. Folkerts, W. Kaunzner u.a.)* Amsterdam-New York et al.: Elsevier.
- [Zuse 1969] Zuse, K. 1969: *Rechnender Raum. Schriften zur Datenverarbeitung Band 1*. Braunschweig: Vieweg.

Abbildungsverzeichnis

1.1.1	Geometrische Ornamente auf vorgeschichtlicher Keramik . . .	6
1.1.2	Figur zur Weltentstehungssage der Jokwe [Africa Counts: Number and Patterns in African Culture, 3rd edition © 1973, 1999 by Claudia Zaslavsky, Published by Laurence Hill Books, an Imprint of Chicago Review Press, Inc. 814 N. Franklin Street, Chicago, IL 60610, USA]	7
1.1.3	Kreisgrabenanlage von Goseck, Himmelscheibe von Nebra . .	8
1.1.4	Stonehenge (Südengland)	9
1.1.5	Rekonstruktion von Woodhenge	9
1.1.6	Grundriß von Woodhenge	10
1.2.1	Darstellung eines von Bäumen umgebenen Teiches	13
1.2.2	Die Pyramide des Cheops in Giza	15
1.2.3	Zikkurat von Tschogah Sambil	15
1.2.4	Babylonische Polygone	17
1.2.5	Kreissegment mit Sehne und Pfeil	19
1.2.6	„Plimpton 322“	21
1.2.7	Keilschrift mit Mengenangaben, ausgegraben 1902 in Südme- sopotamien	22
2.1.1	Weltkarte mit OT-Darstellung	30
2.1.2	Konstruktion eines rechten Winkels	33
2.1.3	Rechteck mit Umkreis	33
2.1.4	Das dem Kreis einbeschriebene regelmäßige Sechseck	34
2.1.5	Das dem Kreis einbeschriebene regelmäßige Fünfeck	37
2.2.1	Die Kissoïde des Diokles	43
2.2.2	Die Konchoïde des Nikomedes	47
2.2.3	Möndchenquadratur des Hippokrates	48
2.3.1	Zu Proposition I.2 der „Elemente“ Euklids	53
2.3.2	Zum 5. Postulat der „Elemente“ Euklids	55
2.3.3	Figur zum euklidischen Beweis des Kathetensatzes; Tafel mit Figur zum Beweis des Satzes von Pythagoras vor dem Zeug- haus in Berlin	57
2.3.4	Die gleiche Figur in verschiedenen Ausgaben der „Elemente“ .	58
2.3.5	Zur Unabhängigkeit des Produkts Seite mal Höhe im Dreieck	59
2.3.6	Eine Seite aus Manuskript P der „Elemente“ Euklids	60
2.3.7	Satz von Desargues in der Fassung von Euklid/Pappos	65

2.4.1	Manuskriptseite aus dem Archimedes-Palimpsest	69
2.5.1	Manuskriptseite aus Herons „Metrika“	76
2.5.2	Der Zusammenhang zwischen Sehnen- und Sinusgeometrie . .	79
2.5.3	Solarium und Mausoleum des Augustus	83
2.5.4	Zylinder- und Kegelprojektionen von Marinos u. Ptolemaios .	85
2.5.5	Rekonstruktion der Groma und der Dioptra des Heron	88
2.5.6	Agrimensoren-Handschrift: geometrische Definitionen	89
2.5.7	Agrimensoren-Handschrift: Anlage rechteckiger Felder	91
2.5.8	Mausoleum der Galla Placidia in Ravenna	94
2.6.1	Figur zu Aufg. 2.3.1	99
2.6.2	Figur zu Aufg. 2.3.2	100
2.6.3	Figur zu Aufg. 2.3.4	102
2.6.4	Figur zu Aufg. 2.3.5	103
2.6.5	Figur zu Aufg. 2.3.5	103
3.1.1	Chinesische Figur zum Satz des Pythagoras	113
3.1.2	Quadratische Stadt in den „Neun Büchern arithmetischer Technik“	115
3.1.3	Illustration der Methode der doppelten Messungen	117
3.1.4	Erläuterung des Exhaustionsverfahrens von Liu Hui	118
3.1.5	Kreispackung in einem Kreissegment	125
3.1.6	Tangram und chinesische Ringe	127
3.2.1	Eine Variante der neun ‘schwebenden Kreise’	133
3.2.2	Kugelpackung in einem Kegel aus Fujita Sadasuke	136
3.2.3	Beispiel eines Tempelproblems	137
3.2.4	Ein japanisches Tempel-Problem	138
3.2.5	Figuren zu 20 Aufgaben aus Yamamoto Kazen	140
3.3.1	Ein Altar in Gestalt eines Falken.	144
3.3.2	Gnomonfigur bei Quadratverdoppelung	146
3.3.3	Pythagoreischer Lehrsatz am gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreieck	146
3.3.4	Addition zweier ungleicher Quadrate	147
3.3.5	Zirkulatur des Quadrats nach den Schnurregeln	148
3.3.6	Quadratur des Kreises nach den Schnurregeln	149
3.3.7	Varāhamihiras Anweisung zur Bestimmung der geographischen Breite	152

3.3.8	Das rekonstruierte Observatorium in Jaipur	152
3.3.9	Abbildung eines Instruments aus dem Observatorium in Jaipur	153
3.4.1	al-Chorezmis anschaulicher Beweis des Lehrsatzes von Pythagoras	163
3.4.2	Iwan der Freitagsmoschee von Nain	166
3.4.3	Medrese Tillja-kari	167
3.4.4	Medrese Schir-Dar	168
3.4.5	Ornamente an der Freitagsmoschee in Yazd	169
3.4.6	Kuppeldekoration eines Mausoleums	170
3.4.7	Sextant im Mauerquadranten vom Observatorium des Ulug Beg	171
3.4.8	Observatorium des Ulug Beg	172
3.4.9	Armilar-Sphäre	177
3.4.10	Moslemische Astronomen mit Instrumenten	178
3.5.1	Indianische Hochkulturen in Mittelamerika	182
3.5.2	Darstellung des Erdkreises bei den Ojibwa	185
3.5.3	Harpune und Kajak der Inuit	186
3.5.4	Sonnenpyramide in Teotihuacán (Mexiko)	189
3.5.5	Tempelpyramide von Tenayuca	191
3.5.6	Kalenderstein der Azteken	191
3.5.7	Schlangenfries am Coatepantli in Tollán (Tula, Mexiko) . . .	192
3.5.8	„Steinmosaik“ im Palast des Großen Sehers in Mitla (Mexiko)	192
3.5.9	Die nördliche Akropolis von Tikal (Guatemala)	195
3.5.10	Pyramide II von Tikal (Guatemala)	195
3.5.11	Haus der Nonnen in Uxmal (Yucatán, Mexiko)	196
3.5.12	Pyramide des Magiers in Uxmal (Yucatán, Mexiko)	196
3.5.13	Palast des Gouverneurs in Uxmal(Yucatán, Mexiko)	198
3.5.14	Ornamente und Rundplastik am Haus der Nonnen in Uxmal .	198
3.5.15	Pyramide des Kukulcan in Chichén Itzá(Yucatán, Mexiko) . .	199
3.5.16	Zyklopische Mauer in Cuzco (Perú)	201
3.5.17	Inka-Festung und Tempeltor von Machu Picchu (Perú)	203
3.5.18	Terrassen bei Pisac (Perú)	203
3.5.19	Tonvase der Naszca-Kultur mit Ornamentbändern	204
4.1.1	Rom und der heilige Petrus	220
4.1.2	Euklid-Handschrift aus Lüneburg.	222
4.2.1	Astrolab nach Hugo von St. Victor	224

4.2.2	Astronomische Schemata von Johannes de Sacrobosco	226
4.2.3	Formulierung des Sinus-Satzes	228
4.4.1	Kirchenfenster der Kathedrale von Lausanne	234
4.4.2	Risse für zwei Chorräume von Kirchen	235
4.4.3	Schluß des Büchleins über die Fialenkonstruktion	238
4.5.1	Baum der Laster	242
5.0.1	Titelblatt der ersten Druckausgabe der „Elemente“, 1482 . . .	246
5.1.1	Deutsches Titelblatt der „Elemente“, 1618	250
5.2.1	Geom. Bedeutung von umbra recta, sinus totus, sinus versus .	255
5.2.2	Weltkarte des Ptolemaios	259
5.2.3	Modifizierte sphärische Projektion des Ptolemaios	260
5.2.4	Herzförmige Weltkarte von 1530	262
5.2.5	Stab(ius)-Dürer-Karte 1514	264
5.2.6	Loxodromen-Diagramm von P. Nunez 1537	265
5.2.7	Keplers Weltmodell aus dem „Mysterium Cosmographicum“ .	267
5.2.8	Das Keplersche Problem	268
5.2.9	Das Brahe-Problem	270
5.2.10	Kepler-Parkett aus „Harmonice mundi“	271
5.2.11	Zwei Sternpolyeder aus „Harmonice mundi“	272
5.3.1	Schematische Darstellung der Durchschnittsmethode	275
5.3.2	Dürers Vorschläge zur mech. Erzeugung persp. Bilder	277
5.3.3	Weitere Vorschläge zur Erzeugung perspektivischer Bilder . .	278
5.3.4	Pavimento-Methode	279
5.3.5	Konstruktion einer projektiven Skala nach Dürer	279
5.3.6	Prinzip der Reliefperspektive	280
5.3.7	Porträt des Luca Pacioli	281
5.3.8	Ein Feld der Paradiespforte von Lorenzo Ghiberti	282
5.3.9	Albrecht Dürer, Selbstbildnis aus dem Jahre 1500	283
5.3.10	Dürers Konstruktion der Ellipse aus dem Kreis	285
5.3.11	Dürers Ellipsenkonstruktion aus dem Kegel	286
5.3.12	Schatten des Würfels nach Dürer	288
5.3.13	Normalrisse zur Konstruktion eines Kopfes	289
5.3.14	Konstruktion eines Würfels	290
5.3.15	Kreisornamente	291
5.3.16	Knoten: a) islamische Kunst, b) Leonardo da Vinci c) Dürer .	292

5.3.17 Fußboden im Baptisterium der Kathedrale von Pisa, 12. Jh. .	292
5.3.18 Illustrationen Leonardos zur „Divina Proportione“ von L. Pacioli	294
5.3.19 Fußbodenmosaik im Eingangsbereich von San Marco, Venedig	294
5.3.20 Wenzel Jamnitzer: „Perspectiva corporum regularium“	295
5.3.21 Ein manieristisches geometrisches Stilleben	296
5.3.22 Eine „Analyse“ von Max Steck	298
5.3.23 Eine geometrische Hilfskonstruktion	299
5.3.24 Beispiele der Konstruktion von Buchstaben bei Pacioli und Dürer	299
5.3.25 Verzerrung menschlicher Köpfe.	300
5.3.26 Dürers Originalzeichnung zur Konstruktion des 5-, 10- und 7-Ecks	301
5.3.27 Wendeltreppe von H. Rodler (1531):	302
5.3.28 A. Dürer: Melencolia I, Kupferstich (1514).	303
5.4.1 Ausschnitt aus dem Titelblatt des Buches: Adam Risen, Re- chenbuch auff Linien und Ziphren in allerley Handthierung, Geschäftten und Kauffmanschafft, 1574	308
5.5.1 Figur zu Aufg. 5.2.1	310
5.5.2 Figur zu Aufg. 5.2.2	311
5.5.3 Figur zu Aufg. 5.2.6	313
5.5.4 Figur zu Aufg. 5.3.2	314
5.5.5 Figur zu Aufg. 5.3.3	315
5.5.6 Figur zu Aufg. 5.3.4	315
5.5.7 Figur zu Aufg. 5.3.7	317
5.5.8 Figur zu Aufg. 5.3.9	317
5.5.9 Figur zu Aufg. 5.3.12	319
5.5.10 Pierre de Fermat	320
6.1.1 Newtons 5 Formen kubischer Kurven vom Typ III	334
6.2.1 Zur Normalenbestimmung nach Descartes	340
6.2.2 Wendepunkt als Ort extremalen Tangentenanstieges nach Fermat	343
6.3.1 Zweikreiskonstruktion der Ellipse nach de La Hire	347
6.3.2 Satz von Pascal	348
6.3.3 Erste Textseite aus Pascals „Essay pour les coniques“ (1640) .	350
6.3.4 Satz von Desargues	351

6.3.5	„Scheinkuppel“ der Kirche di Badia in Arezzo	353
6.3.6	Wandbild (1767) in der barocken Kirche Saint-Roch in Paris .	354
6.3.7	Titelblatt zu „Dr. Brook Taylor’s Perspective Made Easy“ . .	355
6.3.8	Festung Rocca (Italien) in Kavalierperspektive (17. Jh.) . . .	357
6.3.9	Geometrische Konstruktionen im Gelände	359
6.4.1	Saccherisches Viereck	365
6.4.2	Lambertsches Viereck	366
6.5.1	Figur zu Aufg. 6.1.1	371
6.5.2	Figur zu Aufg. 6.2.1	372
6.5.3	Figur zu Aufg. 6.2.2	372
6.5.4	Figur zu Aufg. 6.2.3	375
6.5.5	Lamberts Zeichnung des Perspektographen	376
6.5.6	Figur zu Aufg. 6.4.2	378
7.1.1	Kegelzahnrad in Grund- und Aufriß	386
7.1.2	Karten für die berechneten Werte der Inclination	390
7.1.3	Geradfürungen von a) Watt (1784), b) Peaucellier (1864). .	391
7.1.4	Reuleaux-Dreieck und eine weitere Orbiform	392
7.2.1	Invarianz des Doppelverhältnisses	393
7.2.2	Satz von Brianchon	395
7.2.3	Harmonisches Punktequadrupel	399
7.2.4	Projektive Koordinaten auf der Geraden	399
7.2.5	Projektive Koordinaten in der Ebene	400
7.3.1	Wurzelziehen in der Gaußschen Zahlenebene	403
7.4.1	Eine Traktrix mit der Leitgeraden l	412
7.4.2	Flächen konstanter negativer Krümmung	414
7.4.3	Kuensche Fläche	416
7.4.4	Fläche konstanter positiver Krümmung	417
7.5.1	Modell von Beltrami-Klein	427
7.5.2	Modell von Poincaré	429
7.6.1	4-dimensionales reguläres Polyeder	441
7.8.1	Körper mit Hohlräumen,	453
7.8.2	Königsberger Brückenproblem	453
7.8.3	Zur Trivialität des Vierfarbenproblems im $\mathbb{R}^3$	454
7.8.4	Illustrationstafel von Listing, Tafel I	457
7.8.5	Illustrationstafel von Listing, Tafel II	458

7.8.6	Kleinsche Flasche; Möbiusband	461
7.9.1	Miller-Aschkinuse-Polyeder	467
7.9.2	Das vierte Sternpolyeder	467
7.9.3	Nichtkonvexe Polyeder	469
7.9.4	Croftons Seilliniensatz	471
7.10.1	Figuren zu Aufg. 7.1.2	475
7.10.2	Figur zu Aufg. 7.3.6	481
7.10.3	Figur zu Aufg. 7.9.1	483
7.10.4	Figuren zu Aufg. 7.9.6	485
8.0.1	Räumlicher Pflasterbaustein von Reinhardt	494
8.0.2	Polygonaler Pflasterstein von Voderberg	494
8.0.3	Pflasterbausteine für die Ebene	495
8.1.1	Die nichtdesarguessche Ebene von Moulton	505
8.3.1	Dreidimensionale Raumzeit mit Lichtkegel	520
8.3.2	Weltlinie im x - t -Koordinatensystem	522
8.3.3	Das erste aperiodische Parkett von Penrose	526
8.3.4	Das Parkettsystem „kites und darts“ von Penrose	527
8.5.1	Voronoi-Diagramm für zehn zufällig gewählte Punkte	539
8.5.2	Felder mit Zeichenverteilungen zweimal überlagert	542
8.5.3	Der Computer als fleißiger Zeichner	543
8.5.4	Computergrafik nach dem kombinatorischen Prinzip	544
8.5.5	Computergrafiken von der Technischen Hochschule Eindhoven	545
8.6.1	M.C. Eschers „Kreislimit III“	547
8.6.2	Escher-Würfel und andere Figuren auf Briefmarken	549
8.6.3	Motiv der Op Art	550
8.6.4	Max Bill: Kontinuität (1986)	551
8.6.5	Synagoge der israelischen Offiziershochschule	552
8.6.6	Salvador Dali: Corpus hypercubicus (1954)	555
8.6.7	M.C. Eschers „Metamorphosen I und II“	556
8.6.8	M.C. Eschers „Luft und Wasser I“	557
8.6.9	Salvador Dali: Gala betrachtet das Mittelmeer ... (1976)	558
8.6.10	Ein Bild von Jana (11 Jahre)	559
8.7.1	Fraktal – ein Beispiel der Computergeometrie	562
8.8.1	Wunderlichs Wackeloktaeder	566
8.8.2	Figur zu Aufg. 8.7.1	568

Personenverzeichnis mit Lebensdaten

Bei den Lebensdaten bedeutet „ca.“ grob geschätzt, „um 370“ +(-) kleine Fehler, „370?“ wahrscheinlich 370, aber es ist nicht ganz sicher.

- Abaelard, Pierre (Petrus Abaelardus, 1079–1142) 219
 Abbott, Edwin A. (1838–1926) 427, 579
 Abraham bar Hiyya (ben Chijja) *siehe* Hiyya
 Abū l-Wafā *siehe* Wafā
 Ackermann, Wilhelm (1896–1962) 502
 Adelard von Bath (1080–1160) 221, 227
 Adler, August (1863–1923) 406
 Aguilon (Aquillon, Aiquillon), François d' (1566–1617) 261
 al-Battānī *siehe* Battānī
 al-Chayyam *siehe* Chayyam
 al-Chorezmi *siehe* Chorezmi
 al-Dschauhari *siehe* Dschauhari
 al-Habasch *siehe* Habasch
 al-Kūhī *siehe* Kūhī
 al-Karadschi *siehe* Karadschi
 al-Kaschi *siehe* Kaschi
 al-Mağrītī *siehe* Mağrītī
 Albategnius *siehe* Battānī
 Alberti, Leone Batista (1404–1472) 276, 297
 Alcuin von York (735–804) 216, 240
 Alexander der Große (356–323 v. Chr.) 65
 Alfons X. von Kastilien (1221–1284) 253
 Ammann, Robert (1946–1994) 525
 Ammei, Aida (1747–1817) 138, 139
 an-Nairīzī *siehe* Nairīzī
 Anaximandros von Milet (um 611–546 v. Chr.) 28, 29, 82
 Anaximenes (um 585–um 525 v. Chr.) 28
 Ancelin, Pierre (1653–1720) 358
 Anselm von Canterbury (1033–1109) 219
 Anthemios von Tralleis (gest. 534) 92
 Apian (eigtl. Bennewitz oder Bienewitz), Peter (1495–1552) 227, 252, 256, 263
 Apollonios von Perge (ca. 260–ca. 190 v. Chr.) 42, 61, 66, 70–73, 77, 81, 92, 93, 102, 105, 216
 Arcerius, Johannes (um 1600–1664) 87
 Archimedes von Syracus (287?–212 v. Chr.) 19, 38, 42, 46, 48, 66–68, 70, 72, 73, 75, 77, 92, 93, 97, 98, 104, 139, 164, 174, 175, 209, 216, 228–230, 304, 305, 307, 570–572
 Argand, Jean Robert (1768–1822) 433, 473
 Aristaios (ca. 350–330 v. Chr.) 42, 71
 Aristarch von Samos (ca. 310–ca. 230 v. Chr.) 64, 66, 67, 102–104
 Aristoteles (384–322 v. Chr.) 28, 35, 36, 40, 50, 55, 65, 93, 104, 231, 232, 402
 Āryabhaṭa I (geb. 476) 154, 155, 157, 588
 Āryabhaṭa II (um 950) 156
 aṭ-Ṭūsī *siehe* Ṭūsī
 az-Zarqālī *siehe* Zarqālī
 Bachmann, Friedrich (1909–1982) 504
 Bachmann, Paul (1837–1920) 329
 Bacon, Roger (1214–1294) 231
 Badoureau, Albert (1853–1923) 468
 Bäcklund, Albert Victor (1845–1922) 416, 417
 Balbus (um 100 n. Chr.) 88
 Banū (=Brüder) Mūsā, (Muhammad gest. 872, Ahmad, Hassan) 163, 221
 Banach, Stefan (1892–1945) 516, 518, 561
 Bardas (9. Jh.) 93
 Barlaam, Bernard (1290–1348?) 94

- Battānī, al- (Albategnius, 850?–929) 227
- Beda Venerabilis (672/73–735) 216
- Beeckman, Isaac (1588–1637) 327, 330
- Bellavitis, Giusto (1803–1880) 432
- Beltrami, Eugenio (1835–1900) 415, 418, 424–426, 428, 444, 473, 579
- Benedetti, Giovanni Battista (1530–1590) 245, 306, 327, 403
- Bennett, G. T. (19.–20. Jh.) 533
- Berger, R. (20. Jh.) 525, 553
- Berndt, Georg (1880–1972) 531
- Bernoulli, Jacob (I) (1654–1705) 331, 341, 342
- Bernoulli, Johann (I) 1667–1748) 331, 342, 409
- Bernoulli, Johann (III) (1744–1807) 366
- Bernstein, Felix (1878–1956) 506
- Bertrand, Joseph (1822–1900) 408, 415, 427, 471, 473, 484, 485
- Betti, Enrico (1823–1892) 415, 440, 460, 473
- Bhāskara II (1114–1185?) 157, 208
- Bianchi, Luigi (1856–1928) 415, 417, 473
- Bill, Max (1908–1994) 548, 561
- Blaschke, Wilhelm (1885–1962) 471, 532
- Blumenthal, Otto (1876–1944) 500
- Bobillier, Etienne (1798–1840) 385
- Boethius, Anitius Manilius Torquatus Severinus (480?–524) 92, 215, 216, 218, 219, 221, 231
- Bolyai, Farkas (Wolfgang) v. (1775–1856) 367, 419, 420, 465, 466, 473, 492, 506
- Bolyai, Janos (Johann) v. (1802–1860) 366, 367, 382, 419–425, 429, 466, 506
- Bolzano, Bernard (1781–1848) 382
- Bonnet, Pierre Ossian (1819–1892) 408, 415, 473
- Bopp, Karl (1877–1934) 464
- Borel, Emile (1871–1956) 517
- Bosse, Abraham (1602–1676) 346, 349
- Bossut, Charles (1730–1814) 432
- Bouguer, Pierre (1698–1758) 375, 388
- Bour, Jacques Edmond Emile (1832–1866) 415, 416
- Bradwardine, Thomas (1290?–1349) 231, 232
- Brahe, Tycho (1546–1601) 266, 268
- Brahmagupta (geb. 598) 116, 121, 149, 155, 156
- Brandes, Hans (1883–?) 466, 506
- Bravais, Auguste (1811–1863) 445, 448
- Brianchon, Charles-Julien (1783–1864) 385, 394, 396, 404
- Bricard, Raoul (1870–?) 533
- Brioschi, Francesco (1824–1897) 415
- Brisson, Barnabè (1777–1828) 385
- Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (1881–1966) 461, 515, 516
- Brunelleschi, Filippo (1377–1446) 275
- Buache, Philippe (1700–1773) 358
- Bürgi, Jost (1552–1632) 245
- Buffon, Georges-Louis Leclerc, Comte de (1707–1788) 470, 484
- Bunjakowski, Viktor Jakowlewitsch (1804–1889) 438, 473, 510
- Burger, Dionys (20. Jh.) 427
- Buridanus, Johannes (um 1300–1358?) 305
- Burmester, Ludwig (1840–1927) 387
- Caesar, Julius (100–44 v. Chr.) 87
- Campano di Novara, Giovanni (Johannes Campanus) (um 1260) 221, 232, 248
- Cantor, Georg (1845–1918) 329, 367, 449, 450, 473, 517
- Cardano, Girolamo (1501–1576) 127, 175, 245, 402, 403, 560
- Carnot, Lazare Nicolas Marguerite (1753–1823) 357, 385, 391–394, 396, 401, 406, 442, 455, 473, 476
- Cartan, Élie Joseph (1869–1951) 472
- Casorati, Felice (1835–1890) 415, 473
- Cassini, Giovanni Domenico (franz. Jean Dominique) (1625–1712) 261
- Cassiodor(us) (um 480–um 575) 87, 92, 215, 574

- Catalan, Eugène Charles (1814–1894) 464, 468, 469
- Cauchy, Augustin-Louis (1789–1857) 381, 396, 397, 431–433, 437–439, 452, 468, 470, 471, 473, 486, 517, 533
- Cavalieri, Bonaventura (1598?–1647) 232, 306, 326, 338, 339, 371, 373, 374
- Cayley, Arthur (1821–1895) 424, 436, 439, 443, 444, 473
- Celsius, Anders (1701–1744) 376
- Ceulen, Ludolph van (1540–1610) 173, 252
- Ch'in Chiu-Shao *siehe* Qin Jiushao
- Charles, Michel (1793–1880) 64, 347, 384, 385, 387, 396, 441, 473
- Chayyam, al- (al-Hayyām, 'Umar ibn Ibrāhīm, 1048?–1131?) 173, 174
- Chorezmi, al- (al-Hwārizmī, Muḥammad ibn Mūsā, ca. 780–850) 116, 162, 165, 172, 174, 176, 208–210, 227
- Christoffel, Elwin Bruno (1829–1900) 415, 473
- Cicero, Marcus Tullius (106–43 v. Chr.) 86, 87
- Clairaut, Alexis-Claude (1713–1765) 342, 368, 408
- Clapeyron, Benoit-Pierre-Émile (1799–1864) 463
- Clavius, Christoph (ursprüngl. Name Schlüssel nicht sicher) (1537–1612) 126, 174, 247, 248, 251, 252, 327, 363, 364
- Clifford, William Kingdon (1845–1879) 427, 430, 440, 442, 473
- Codazzi, Delfino (1824–1873) 415, 417, 473
- Columella (1. Jh. n. Chr.) 88, 90
- Commandino, Federigo (1509–1575) 276, 305
- Connelly, R. (20. Jh.) 534
- Conway, John Horton (20. Jh.) 541
- Copernicus (Kopernigk), Nicolaus (1473–1543) 66, 78, 79, 104, 256
- Cousin, Jean (um 1500–1589) 276
- Cousinery, Barthélemy-Édouard (1790–1851) 386
- Coxeter, Harold Scott Macdonald (geb. 1907) 459, 548
- Cramer, C. (19. Jh.) 465
- Cramer, Gabriel (1704–1752) 335, 439
- Cremona, Luigi (1830–1903) 391
- Crofton, Morgan William (1826–1915) 471
- Cruquius, Samuel (1678–1754) 358
- Cusanus, Nicolaus (N. von Kues, eigtl. N. Chrypffs) (1401–1464) 263
- Czuber, Emanuel (1851–1925) 471
- D'Alembert, Jean-Baptist le Rond (1717–1783) 431
- Dali, Salvador (1904–1989) 548, 556, 561
- Danzer, Ludwig (geb. 1927) 527
- Darboux, Jean Gaston (1842–1917) 415
- Dedekind, Richard (1831–1916) 329, 415, 449, 450, 460, 473, 503
- Dehn, Max (1878–1952) 14, 462, 466, 493, 506, 508
- Demokrit von Abdera (460–371 v. Chr.) 304, 339, 371
- Derand, Francois (1588–1644) 360
- Desargues, Girard (1591–1661) 64, 346–349, 351, 377, 394, 484, 501, 503, 504
- Descartes, René (1596–1650) 4, 40, 72, 306, 323, 324, 327–333, 337, 340, 344, 346–348, 451, 503
- Diesterweg, Friedrich Adolf Wilhelm (1790–1866) 382
- Dieudonné, Jean (1906–1992) 368, 418, 498, 517
- Dini, Ulisse (1845–1918) 415, 416, 473
- Diogenes Laertius (um 275) 32
- Diophant(os) (vermutlich um 250) 77, 81, 431
- Dirichlet, Peter Gustav Lejeune (1805–1859) 396, 538
- Dodgson, Charles Lutwidge (bekannt als Lewis Carroll) (1832–1898) 427

- Dositheos (um 250 v. Chr.) 68, 571
 Dschauhari, al- (al-Ġauhari, um 830) 173
 Du Carla (18. Jh.) 358
 Dühning, Karl Eugen (1833–1921) 427
 Dürer, Albrecht (1471–1528) 86, 239, 245, 252, 263, 273, 274, 276, 281, 283–285, 287, 291, 293, 297, 304, 313–318, 330, 333, 358, 370, 371, 376, 525, 545, 546, 575
 Dupain-Triel, Jean Louis (1722–1805) 358
 Dupin, Pierre-Charles-François (1784–1873) 363, 385, 409, 415, 473

 Ehler, Carl Leonhard Gottlieb (18. Jh.) 451
 Einstein, Albert (1879–1955) 519–521, 523, 561
 Engel, Friedrich (1861–1941) 365, 418, 421, 438, 447
 Engeler, Erwin (20. Jh.) 509, 540
 Enneper, Alfred (1830–1885) 415, 416
 Erasmus von Rotterdam (1466–1536) 249
 Eratosthenes von Kyrene (276?–194? v. Chr.) 66, 67, 83, 84, 104, 376
 Ernst, Bruno (eigtl. J. A. F. Rijk) (20. Jh.) 548
 Escher, Maurits Cornelis (1898–1972) 546, 548, 549, 554, 556, 561
 Eudemos von Rhodos (ca. 320 v. Chr.) 28, 31, 32, 35, 70, 77
 Eudoxos von Knidos (um 408–um 347 v. Chr.) 38, 39, 50, 82, 174
 Euklid (ca. 360–ca. 290 v. Chr.) 4, 7, 31, 33, 36–40, 42, 49–52, 54–57, 61–66, 70–73, 75, 77, 78, 80, 81, 88, 90, 92–94, 98, 101–103, 123, 124, 126, 157, 162, 163, 165, 173, 174, 179, 205, 215, 216, 218, 221, 223, 229, 231, 232, 247–249, 251, 252, 268, 282, 304, 325, 326, 347, 364, 367–369, 378, 382, 392, 398, 402, 403, 419, 425, 465, 476, 499, 533, 538, 571, 578, 581, 582
 Euler, Leonhard (1707–1783) 335, 336, 345, 364, 365, 391, 408, 409, 411, 451–454, 456, 473
 Eutokios von Askalon (geb. ca. 480) 92

 Faber Stapulensis (eigtl. Jacques Lefèvre d’Etaples) (um 1455–1537) 387
 Fano, Gino (1871–1952) 504
 Fasbender, Eduard (1816–1892) 464
 Faulhaber, Johannes (1580–1635) 327
 Fermat, Pierre de (1607 oder 1608–1665) 64, 307, 324, 327–329, 331–333, 342–344, 347, 348, 373, 374
 Fernel, Jean (1497–1558) 258
 Fibonacci *siehe* Leonardo von Pisa
 Fiedler, Wilhelm (1832–1912) 386
 Filarete, Antonio di Pietro Averlino (um 1400–1469) 276
 Fine, Oronce (Orontius Fineaus) (1494–1555) 256
 Fischer, Ernst (1875–1954) 510, 561
 Fischer, Otto (1861–1916) 532
 Flamsteed, John (1646–1719) 263
 Föppl, August (1854–1924) 436
 Folkerts, Menso (geb. 1943) 216
 Francesca, Piero della (um 1420–1492) 4, 245, 276, 287, 293, 297
 Fréchet, Maurice (1878–1973) 513
 Fredholm, Ivar (1866–1927) 510
 Frege, Gottlob (1848–1925) 427, 498, 500, 508
 Frenet, Jean Frédéric (1816–1900) 408, 473
 Freudenthal, Hans (1905–1990) 508
 Frézier, Amédée (1682–1773) 360
 Friedrich II. von Hohenstaufen (1194–1250) 253
 Frischauf, Johannes (1837–1924) 425
 Frisius (d. h. der Friesen) *siehe* Gemma Frisius
 Fröbel, Friedrich (1782–1852) 382
 Frontinus (1. Jh. n. Chr.) 88

- Gabir ben Aflah (Geber) (1. Hälfte 12. Jh.) 227
- Galilei, Galileo (1564–1642) 228, 232, 308, 326, 521
- Gauß, Carl Friedrich (1777–1855) 345, 381, 383, 390, 396, 402, 404–406, 410, 411, 413–415, 417–426, 433, 439, 449, 455, 462–466, 473, 479, 480, 482, 511, 513, 529, 538
- Geminus (um 70 v. Chr.) 77
- Gemma Frisius, eigtl. Reiner Steen (1508–1555) 245, 256, 258
- Gerbert von Aurillac (Papst Sylvester II.) 218
- Gergonne, Joseph (1771–1859) 385, 394, 406, 407, 433, 463, 468, 473
- Gerhard von Cremona (1114?–1187) 163, 221, 227, 229
- Gericke, Helmuth (geb. 1909) 216
- Gerling, Christian Ludwig (1788–1864) 466
- Germain, Sophie (1776–1831) 415
- Gerwien, Paul (19. Jh.) 466, 492, 506
- Ghetaldi, Marino (1556–1626) 327
- Ghiberti, Lorenzo (1381–1455) 280, 282
- Gibbs, Josiah Willard (1839–1903) 436
- Gilly, David (1748–1808) 356
- Giotto di Bondone (um 1266–1337) 297
- Goldberg, M. (20. Jh.) 534
- Gournerie, Jules René Maillard de la (1814–1883) 388, 389
- Gracilis, Stephan (16. Jh.) 248
- Graßmann, Hermann Günther (1809–1877) 383, 414, 434–439, 473
- Grebe, Ernst Wilhelm (1804–1874) 464, 483
- Gresham, Thomas (1519–1579) 245
- Grosseteste, Robert (1168?–1253) 231
- Grunert, Johann August (1797–1872) 419, 422
- Grynaeus, Simon (1493–1541) 249
- Gu Yingxian (Ku Ying-Hsiang) (16. Jh.) 124
- Gude, Marquard (1635–1689) 87
- Gudermann, Christoph (1798–1852) 513
- Günther, Siegmund (1848–1923) 390
- Guidobaldo del Monte (1545–1607) 276
- Guidobaldo, Herzog von Urbino (um 1470–1508) 281
- Guldin, Paul Habakuk (1577–1643) 77, 305, 318, 339, 364
- Guo Shojing (Kuo Shou-Shing) (1231–1316) 123
- Guthrie, Francis (1831–1899) 454
- Guthrie, Frederick (1833–1886) 454, 455
- Habasch, al- (al-Ḥabaš, 770?–870?) 176
- Hachette, Jean Nicolas Pierre (1769–1834) 385
- Haitam, Ibn al- (965–ca. 1040) 173
- Hals, Frans (1580?–1666) 4
- Hamilton, William Rowan (1805–1865) 381, 432–436, 438, 439, 442, 452, 473
- Hammer, Ernst Hermann Heinrich (1858–1925) 390
- Hankel, Hermann (1839–1873) 157, 439, 498
- Hansteen, Christopher (1784–1873) 433
- Harmon, Leon D. (20. Jh.) 558
- Harnack, Carl Gustav Axel (1851–1888) 517
- Harriot, Thomas (um 1560–1621) 265
- Harris, John (um 1667–1719) 333
- Harrison, John (1693–1776) 258, 601
- Haüy, René-Just (1743–1822) 447, 473
- Hausdorff, Felix (1868–1942) 513–515, 518, 556, 561, 563
- Heaviside, Oliver (1850–1925) 436
- Heawood, Percy John (1861–1955) 455
- Hecker, Zwi (20. Jh.) 549
- Heesch, Heinrich (1906–1995) 493, 561
- Hein, Piet (20. Jh.) 560
- Heine, Eduard (1821–1881) 514
- Heisenberg, Werner (1901–1976) 560
- Hekataios von Milet (550?–485?) 29, 31

- Helmholtz, Hermann v. (1821–1894) 414, 425, 427, 430, 442, 498, 500, 578, 580
- Helmoldus (13. Jh.) 221
- Herbart, Johann Friedrich (1776–1841) 382, 383
- Hermann von Kärnten (12. Jh.) 221
- Hermite, Charles (1822–1901) 406, 511
- Herodot von Halikarnassos (ca. 500–424 v. Chr.) 28, 31
- Heron von Alexandria (zwischen 1. Jh. v. Chr. und 250, wahrsch. um 100 n. Chr.) 73, 75, 87, 88, 90, 94, 105, 106, 114, 162, 164, 165, 174, 206, 207, 209, 228, 239, 242
- Hessel, Johann Friedrich (1796–1872) 447, 448, 473
- Hessenberg, Gerhard (1874–1925) 504
- Hierholzer, Carl (1840–1871) 454
- Hilbert, David (1862–1943) 1, 51, 329, 418, 425, 428, 466, 473, 492, 493, 496–504, 506–508, 510, 561
- Hill, M. J. M (1856–1929) 466
- Hindenburg, Karl Friedrich (1741–1808) 367
- Hipparch (um 180–127 v. Chr.) 19, 79, 83, 151, 176
- Hippasos von Metapont (um 450 v. Chr.) 35, 37
- Hippokrates von Chios (um 450–um 400 v. Chr.) 41, 47, 48, 50, 96
- Hirsch *siehe* Meyer Hirsch
- Hiyya, Abraham bar (1070–1136) 224
- Hjeltslev, Johannes (1873–1950) 404, 504, 509
- Hobbes, Thomas (1588–1679) 323
- Hoffmann, Immanuel Carl Volkmar (1825–1905) 427
- Hogarth, William (1696–1764) 352
- Holditch, Hamnet (1800–1867) 532, 565
- Honnecourt, Villard (de oder d') (13. Jh.) 232, 233, 237
- Hoüel, Guillaume-Jules (1823–1886) 422
- Hudde, Jan (1628–1704) 331
- Hugo von St. Victor (1096–1141) 223, 225, 241
- Hülāgū Khān (1217?–1265) 179
- Hunger, Herbert (20. Jh.) 94
- Huygens, Christiaan (1629–1695) 323, 339, 342
- Hwārizmī *siehe* Chorezmi
- Hyginus (um 100 n. Chr.) 88
- Hypatia von Alexandria (um 370–415) 81, 92
- Hypsikles (2. Jh. v. Chr.) 73
- Iamblichos von Chalkis (um 285–um 330) 35
- Imamura Chishō (Imamura Tomoaki, um 1639) 133
- Isaac Argyros (1310?–1371) 94
- Isidoros von Milet (6. Jh.) 92
- Isomura Kittoku (Isomura Yoshinori, um 1600 bis nach 1684) 133, 136
- Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804–1851) 381, 396, 415
- Jaglom, Isaak Moisejewitsch (geb. 1921) 521
- Jamnitzer, Wenzel (1508–1585) 293, 316, 560
- Jartoux, Pierre (1670–1720) 135
- Joachimsthal, Ferdinand (1818–1861) 416
- Johannes (oder Robertus) Anglicus (um 1280) 224
- Johannes de Lineriis (de Lignères) (1. Hälfte 14. Jh.) 227
- Johannes de Muris (1. Hälfte 14. Jh.) 229, 230
- Johannes de Sacrobosco (John of Hollywood, 1200?–1256?) 225
- Johannes Pediasimos (13. Jh.) 94
- Johannes von Gmunden (um 1380–1442) 227, 254
- Jordan, Camille (1838–1922) 381, 444, 450, 460, 473
- Jordan, Ernst Pasqual Wilhelm (1902–1980) 512

- Justinian, Kaiser von Byzanz (482–565) 92, 215
- Kadeřávek, František (1885–1961) 532
- Kästner, Abraham Gotthelf (1719–1800) 356, 365
- Kant, Immanuel (1724–1804) 422
- Karadschi, al- (al-Karaġī, gest. um 1029?) 121
- Karl der Große (742–814) 216
- Karsten, Wenceslaus Johann Gustav (1732–1787) 356
- Kaschi, al- (al-Kāšī, Ġiyat addīn Ġamšīd, gest. 1429) 165, 172, 175, 179, 210
- Kempe, Alfred Bray (1849–1922) 391
- Kepler, Johannes (1571–1630) 63, 72, 251, 261, 266, 268, 269, 271, 272, 291, 305–308, 312, 317, 319, 324, 326, 468, 525, 528
- Killing, Wilhelm (1847–1923) 425, 498, 506, 508
- Kirby, Joshua (18. Jh.) 352
- Kirkman, Thomas Penington (1806–1895) 462
- Klein, Felix (1849–1925) 4, 418, 424–429, 444–446, 449, 460, 473, 498–502, 507, 508, 521, 530, 531
- Klügel, Georg Simon (1739–1812) 365
- Krafft, Fritz (geb. 1935) 29
- Krames, Josef Leopold (1897–1986) 387
- Krüger, Johannes Heinrich Louis (1857–1923) 390
- Kruppa, Erwin Wilhelm (1885–1967) 387
- Kublai Khan (1215–1294) 124
- Kuen, Theodor (2. Hälfte 19. Jh.) 416
- Kühī, al- (um 975) 164, 209
- Kuo Shou-Shing *siehe* Guo Shojing
- La Hire, Laurent de (1606–1656) 346
- La Hire, Philippe de (1640–1718) 346, 347
- Lacher (oder Lechler) Lorenz (16. Jh.) 281
- Lacondamine (auch La Condamine), Charles Marie de (1701–1774) 375
- Lacroix, Sylvestre François (1765–1843) 337, 363, 385, 396
- Laertius *siehe* Diogenes
- Lagrange, Joseph Louis (1736–1813) 157, 336, 338, 345, 409, 432, 437, 438, 473
- Laguerre, Edmond Nicolas (1834–1886) 443
- Lambert, Johann Heinrich (1728–1777) 276, 329, 345, 352, 356, 365–368, 376, 388, 404–406, 421, 423, 474, 477
- Lamé, Gabriel (1795–1870) 385, 463
- Lanz, Johannes (1564–1638) 248
- Laplace, Pierre Simon (1749–1827) 470, 472
- Laßwitz, Kurd (1848–1910) 427
- Lautensack, Heinrich (16. Jh.) 304
- Le Witt, Sol (geb. 1929) 548
- Lebesgue, Henri (1875–1941) 511, 515, 517, 561
- Leblanc, Walter (1932–1986) 548
- Legendre, Adrien-Marie (1752–1833) 368, 377, 378, 396, 413, 419, 452
- Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716) 134, 135, 329, 331, 343, 344, 349, 436, 439, 449, 451, 455
- Lemoine, Emile (1840–1912) 407, 464, 538
- Lencker, Hans (um 1530–1585) 304
- Leon (ca. 400–ca. 350 v. Chr.) 50
- Leon von Byzanz (9. Jh.) 93
- Leonardo da Vinci (1452–1519) 175, 239, 273, 274, 297, 403, 528
- Leonardo von Pisa (Fibonacci) (um 1170–nach 1240) 224, 225
- Levi ben Gerson (1288–1344) 254
- Levine, D. (20. Jh.) 527
- l’Huillier (auch l’Huillier), Simon Antoine Jean (1750–1840) 452, 453, 464, 468
- Li Yeh, ursprünglich Li Zhi (1192–1279) 122, 123
- Lidonne (Anf. 19. Jh.) 468

- Lie, Sophus (1842–1899) 417, 430, 444, 446
- Liebermann, Max (1847–1935) 4
- Liebmann, Heinrich (1874–1939) 418, 429, 585
- Lindemann, Ferdinand v. (1852–1939) 406, 428, 498
- Liouville, Joseph (1809–1882) 409, 415
- Lipschitz, Rudolf (1832–1903) 415, 425, 473
- Listing, Johann Benedict (1808–1882) 452–456, 459–462, 466, 473
- Liu Hui (3. Jh. n. Chr.) 115, 116, 119, 126, 206
- Lobatschewski, Nikolai Iwanowitsch (1793–1856) 366, 369, 382, 413, 421–424, 429, 473
- Lorentz, Hendrik Antoon (1853–1928) 519
- Lotze, Hermann (1817–1881) 427
- Loyd, Sam (1841–1911) 560
- Lüroth, Jakob (1844–1910) 454
- Mağrītī, al- (10. Jh.) 82, 227
- MacLaurin, Colin (1698–1746) 333, 335
- Maestlin, Michael (1550–1631) 251
- Mahāvira (um 850) 156
- Mainardi, Gaspare (1800–1879) 415, 417, 473
- Malapertius (eigtl. Maupertuis) Charles (1581–1630) 248
- Mallet, Alain Manneson (um 1730–1806) 346, 358
- Manjula (um 930) 151
- Marcellus Claudius (gest. 207 v. Chr.) 67
- Marinos von Tyros (um 120 n. Chr.) 84
- Martianus Capella (um 450) 92, 214, 215
- Mascheroni, Lorenzo (1750–1800) 175, 404, 406, 479, 540
- Matthias Corvinus, König von Ungarn (gest. 1490) 254
- Maupertuis, Pierre Louis Moreau de (1698–1759) 375
- Maurolyco, Francesco (1494–1575) 254, 256
- Maxwell, James Clerk (1831–1879) 462
- Meißner, Alfred (1822–1885) 382, 575
- Menaichmos (um 350 v. Chr.) 41, 42, 48, 72
- Menelaos von Alexandria (um 100 n. Chr.) 81, 176, 179, 227
- Menger, Karl (1902–1985) 515
- Mercator (Kremer), Gerhard (1512–1594) 263
- Mercator, (Kauffmann), Nicolaus (1619?–1687) 265
- Mersenne, Marin (1588–1648) 323, 342, 346, 349, 374
- Metochites, Theodoros (1260?–1332) 93
- Meusnier de la Place, Jean-Baptiste (1754–1793) 385, 409, 418, 473
- Meyer Hirsch (1765–1851) 468
- Michelson, Albert Abraham (1852–1931) 519
- Miller, J. C. P. (20. Jh.) 467, 560
- Minding, Ernst Ferdinand (1806–1885) 411, 415, 416
- Minkowski, Hermann (1864–1909) 418, 512, 520, 521, 536, 561
- Möbius, August Ferdinand (1790–1868) 396–398, 436, 442, 445, 448–450, 455, 460, 469, 473
- Moerbeke, Wilhelm von (1215?–1286) 228
- Mohr, Georg (1640–1697) 403, 406, 479, 538, 540
- Mollweide, Karl Brandan (1774–1825) 390
- Monge, Gaspard (1746–1818) 285, 287, 338, 352, 357, 360–363, 383–385, 387, 388, 392, 396, 408, 409, 432, 473, 474, 476, 553
- Morellet, Francois (geb. 1926) 548
- Morgan, Augustus de (1806–1871) 454
- Morley, Edward Williams (1838–1923) 519

- Moulton, Forest Ray (1872–1952) 504, 563
- Müller, Conrad Heinrich (1878–1953) 148, 149
- Nagata, J. (20. Jh.) 516
- Nairizi, Abu'l-Abbas an- (Anaritius, um 900) 173, 174, 221
- Nake, Frieder (geb. 1938) 541
- Napoleon Bonaparte (1769–1821) 404, 479, 576
- Naudé, Phillip, der Jüngere (1684–1747) 156
- Nees, Georg (geb. 1926) 541
- Neper (Napier), John (1550–1617) 245, 254, 256
- Neugebauer, Otto (1899–1990) 20, 21
- Neumann, A. und N. (20. Jh.) 549
- Neumann, John (Johan, Janos) von Margitta (1903–1957) 511, 512, 524, 541
- Newton, Isaac (1643–1727) 1, 72, 134, 268, 323, 331–333, 335, 337, 341, 343, 344, 413, 416
- Niceron, Jean François (1613–1646) 280
- Nunez, Pedro (Petrus Nonius) (1492–1578) 252, 263
- Oersted, Hans Christian (1777–1851) 432, 473
- Oinopides von Chios (um 450–um 400 v. Chr.) 50
- Olivier, Théodore (1793–1853) 385
- Oresme, Nicole (um 1323–1382) 232, 305, 326
- Orme, Philibert de l' (auch Delorme, 16. Jh.) 360
- Pacioli, Luca (um 1445–1517) 293, 297
- Padoa, Alessandro (1868–1937) 498, 508
- Pamphile (1. Jh. n. Chr.) 32
- Pappos von Alexandria (um 320) 45–47, 64, 65, 77, 97, 331, 349, 403, 503, 504
- Pascal, Blaise (1623–1662) 346, 348, 349, 394, 503
- Pasch, Moritz (1843–1930) 173, 174, 473, 499–501, 504
- Peano, Giuseppe (1858–1939) 439, 450, 473, 498, 499, 501, 506, 508, 510, 517, 561
- Peaucellier, Ch. N. (1832–1913) 476
- Pélerin (genannt Viator), Jean (1445?–1522?) 276
- Peletier (Peletarius), Jacques (1517–1582) 251
- Penrose, Roger (geb. 1931) 525, 554, 561
- Perret de Chambéry, Jacques (16.–17. Jh.) 276
- Pestalozzi, Johann Heinrich (1746–1827) 382
- Peterson, Karl Michailowitsch (1828–1887) 417
- Petrie, John Flinders (1907–1972) 459
- Petrus von Corbie (13. Jh.) 233
- Peurbach, Georg von (1423–1461) 227, 254
- Pfinzing, Paul (ca. 1600) 304
- Pieri, Mario (1860–1913) 498, 506
- Pitiscus, Bartholomäus (1561–1613) 253, 256
- Pitot, Henri (1695–1771) 342
- Plateau, Joseph Antoine Ferdinand (1801–1883) 409
- Plato von Tivoli (um 1150) 224, 227
- Platon (427–347 v. Chr.) 38, 39, 50, 93, 213–215, 237, 266, 569
- Playfair, John (1748?–1819) 56
- Plinius der Ältere (23?–79 n. Chr.) 82
- Plücker, Julius (1801–1868) 335, 394, 396–398, 431, 477, 478
- Pohlke, Karl Wilhelm (1810–1876) 387, 389, 474, 475
- Poincaré, Henri (1854–1912) 381, 425, 427–429, 461, 466, 472, 473, 519, 599
- Poinsot, Louis (1777–1859) 316, 385, 432, 442, 468, 473

- Poncelet, Jean Victor (1788–1867) 385,
391, 394, 396, 398, 404, 442, 443
Porphyrrios (234–um 302) 35
Pothénat, Laurent (gest. 1732) 258
Potier, Joseph Hubert (1803–?) 387
Pozzo, Andrea (1642–1700) 353
Preparata, Franco P. (20. Jh.) 52, 538
Proklos Diadochos (410–485) 28, 31, 32,
42, 64, 77, 78, 93, 228, 239, 249, 307
Psellos, Michael (1018–1080?) 93
Ptolemaios, Klaudios (um 85–um 160
n. Chr.) 19, 44, 56, 78–82, 84, 86,
93, 105, 106, 118, 124, 151, 156, 176,
227, 261, 301, 480
Pythagoras (ca. 580–ca. 500 v. Chr.) 9,
17, 35, 49, 57, 59, 112, 127, 135, 145,
147, 148, 151, 155, 158, 208, 284,
326, 431, 465, 466, 479, 573

Qin Jiushao (Ch'in Chiu-Shao, 1202–
1261) 115, 121–123, 206
Qurra, Tābit ibn (826–901) 173, 174

Ramée, Pierre de la (Petrus Ramus,
1515–1572) 251
Ratdolt, Erhard (1447–1528) 247
Recorde, Robert (1510?–1558) 245
Regiomontanus (eigtl. Johannes Müller)
(1436–1476) 78, 213, 227, 254–256
Reinhardt, Karl (1895–1941) 493, 494
Reuleaux, Franz (1829–1905) 391
Reutersvärd, Oscar (geb. 1915) 548,
554, 560, 561
Rhabdas, Nikolaus (*gest.* 1350) 93
Rhaeticus, Georg Joachim (1514–1576)
254, 256
Ricci, Matteo (1552–1610) 110, 126,
248, 261
Riemann, Bernhard (1826–1866) 383,
413–415, 418, 423, 424, 426, 430,
440, 447, 460, 473, 517, 579
Ries, Adam (1492–1559) 245
Riesz, Friedrich (1880–1956) 510, 515,
561
Riley, Bridget (geb. 1931) 548

Rinow, Willi (1907–1979) 514
Robert von Chester (um 1150) 221, 227
Roberval, Gilles Personne (1602–1675)
339, 346, 372, 373, 432
Robinson, R. M. (20. Jh.) 525, 561
Rodler, Hieronymus (16. Jh.) 276, 304
Rodrigues, Olinde (1794–1851) 442
Roriczer, Matthäus (Mathias, Mathes;
Sohn von Lorenz, ca. 1450–ca.
1500) 233, 236–238, 242, 252, 280,
314, 590
Roriczer, Wenzel (gest. 1419) 236
Rubik, Ernő (geb. 1944) 560
Rudolff, Christoph (1500?–1549?) 431

Saccheri, Girolamo (1667–1733) 364,
365
Sachs, Abraham (1914–1983) 20, 21
Sanson d' Abbéville, Nicolas (1600–1667)
263
Sartorius von Waltershausen, Wolfgang
Freiherr v. (1809–1876) 422
Savasorda *siehe* Hiyya, Abraham bar
Savile, Henri (1549–1622) 251, 364
Scaliger, Joseph Justus (1540–1609)
251, 252
Schattschneider, Doris (20. Jh.) 548
Schauder, Juliusz Pawel (1899–1943)
516
Schickard(t), Wilhelm (1592–1635)
252, 261
Schinkel, Karl Friedrich (1781–1841)
356, 577
Schläfli, Ludwig (1814–1895) 440, 460,
473
Schlegel, Victor (1843–1905) 440
Schmidt, Erhard (1876–1959) 510, 561
Schmitt, Peter (geb. 1947) 527
Schmuttermayer, Hans (um 1450–nach
1517) 233, 236, 237, 280
Schooten, Frans van (um 1615–1660)
331
Schopenhauer, Arthur (1788–1860) 533
Schreiber, Guido (1799–1871) 387
Schreiber, Otto (2. Hälfte 19. Jh.) 266

- Schreiber, Peter (geb. 1938) 509
 Schütte, Kurt Wilhelm (geb. 1909) 529
 Schumacher, Heinrich Christian (1780–1850) 410, 422, 423, 463, 464, 480, 482
 Schur, Friedrich (1856–1923) 506, 507
 Schwarz, Hermann Amandus (1843–1921) 389, 438, 473, 510
 Schweikart, Ferdinand Karl (1780–1857) 421–423
 Seeland, Horst (geb. 1943) 509
 Segner, Johann Andreas (1704–1777) 249, 382
 Seki Kōwa (Seki Takakazu, 1640/42–1708) 134
 Serret, Joseph Alfred (1819–1885) 408, 473
 Sewastjanow, Jakow Alexandrowitsch (1796–1849) 387
 Shamos, Michael Ian (20. Jh.) 538
 Shi Huang Di (Shih Hoang-ti), der ‘Gelbe Kaiser’ (um 200 v. Chr.) 111
 Simplikios (um 520 n. Chr.) 173
 Smirnow, Jurij M. (20. Jh.) 516
 Snell, Bruno (1896–1986) 27
 Snell(ius), Willebrord van Royen (1580–1626) 156, 252, 256, 258, 261, 263, 429, 432
 Soto, Jesus Rafael (geb. 1923) 548
 Stab(ius) *siehe* Stöberer
 Stäckel, Paul (1862–1919) 365
 Staudt, Christian v. (1798–1867) 391, 394, 396–401, 460, 501
 Steiner, Jakob (1796–1863) 175, 330, 382, 396, 404, 407, 464, 469, 471, 479
 Steinhardt, P. J. (20. Jh.) 527
 Steinitz, Ernst (1871–1928) 469
 Stevin, Simon (1548–1620) 123, 245, 256, 276, 293, 305, 432
 Stifel, Michael (1487?–1567) 431
 Stirling, James (1692–1770) 333, 335
 Stöberer (Stabius), Johann (um 1450–1522) 261, 263
 Stoer, Lorenz (ca. 1540–ca. 1620) 296
 Stolz, Otto (1842–1905) 404, 498, 503, 517
 Strabon (um 64 v. Chr.–20 n. Chr.) 83
 Study, Eduard (1862–1930) 442
 Swineshead, Richard (14. Jh.) 326
 Sylvester, James Joseph (1814–1897) 391, 439, 443, 471, 473
 Szczerba, L. W. (20. Jh.) 504
 Szmielew, Wanda (1918–1976) 504
 Tābit ibn Qurra *siehe* Qurra
 Tait, Peter Guthrie (1831–1901) 462
 Takebe Hikojiro Kenkō (Takebe Katakahiro, 1664–1739) 134–136, 207
 Tammes, P. M. L. (20. Jh.) 528
 Tarry, Gaston (gest. 1913) 454
 Tarski (eigtl. Teitelbaum), Alfred (1901–1983) 509
 Tartaglia (eigtl. Fontana), Nicolo (1499?–1557) 175, 403
 Taurinus, Franz Adolph (1794–1874) 421, 423
 Taylor, Brook (1685–1731) 276, 352
 Thaer, Clemens (1883–1974) 52
 Thales von Milet (um 625–547 v. Chr.) 28, 31–35, 50, 258
 Theaitetos (um 414–369? v. Chr.) 39, 50
 Theodosius von Pitane (Bithynien, um 100 v. Chr.) 227
 Theodosius, römischer Kaiser (347–395) 92
 Theon von Alexandria (ca. 330–ca. 400) 59, 81, 228
 Thomas von Aquin (1225/26–1274) 219, 228
 Thompson, d’Arcy Wentworth (1860–1948) 528
 Thomson, William (Lord Kelvin) (1824–1907) 462
 Thue, Axel (1863–1922) 536
 Tissot, Nicolas Auguste (1824–1904) 390

- Torricelli, Evangelista (1608–1647) 326, 339, 374
- Tschebyschew, Pafnuti Lwowitsch (1821–1894) 391, 511
- Ṭūsī, Naṣīr ad-Dīn aṭ- (gest. 1274) 179
- Ṭūsī, Šaraf ad-Dīn aṭ- (12. Jh.) 174
- Uccello, Paolo (1397–1475) 272, 273, 293, 316, 468, 548, 560
- Uluğ Beg (1394–1449) 171, 179
- Urysohn, Pawel Samuilowitsch (1898–1924) 515, 516, 561
- Vācaspati (9. Jh.) 156
- Vahlen, Theodor (1869–1945) 316, 508
- Van der Waerden, Bartel Leendert (1903–1996) 529
- Vandermonde, Alexandre Théophile (1735–1796) 462
- Varāhamihira (um 500 n. Chr.) 151
- Varignon, Pierre (1654–1722) 432
- Vasarely, Victor (de) (1908–1997) 561
- Vasari, Giorgio (1511–1574) 275, 293
- Vauban, Sébastien (1633–1707) 356
- Veblen, Oswald (1880–1960) 503, 504
- Veronese, Giuseppe (1854–1917) 498, 503, 507
- Vieta (Viète), François (1540–1603) 179, 245, 252, 253, 256, 310, 327, 402, 407, 429, 431, 479
- Vitali, Giuseppe (1875–1932) 517
- Vitruv(ius), Marcus Pollio (um 90–um 10 v. Chr.) 88, 237, 273, 297
- Viviani, Vincenzo (1622–1703) 326
- Voderberg, Heinz (1911–ca. 1942) 494
- Vogel, Kurt (1888–1985) 14, 16, 23, 94, 316
- Volterra, Vito (1860–1940) 510
- Voronoi, Georgij Feodosjewitsch (1868–1908) 536, 538
- Wafā, Abū l- (940–998) 164, 165, 174–176, 179, 208, 209, 242, 403, 431
- Wagner, Hermann (1840–1929) 390
- Walker, Wallace (20. Jh.) 548
- Wallingford, Richard von (1292?–1336) 227
- Wallis, John (1616–1703) 127, 174, 331, 344, 364, 365
- Wangerin, Albert (1844–1933) 418
- Wantzel, Pierre Laurent (1814–1848?) 405
- Watt, James (1736–1819) 391, 476
- Weber, Alfred (1868–1958) 464
- Weber, Heinrich (1842–1913) 460
- Weber, Wilhelm (1804–1891) 390, 433, 473
- Wegner, Bernd (geb. 1942) 534
- Weierstraß, Karl Theodor Wilhelm (1815–1897) 498, 513
- Weinbrenner, Johann Jacob Friedrich (1766–1826) 387
- Werner, Johannes (1468–1528) 256, 261, 263, 285
- Wessel, Caspar (1745–1818) 433
- Weyl, Hermann (1885–1955) 438, 521, 561
- Wiener, Christian (1826–1896) 387, 454, 500
- Wiener, Hermann (1857–1939) 473, 499, 500
- Willenberg, Christian (1655–1731) 357
- Wipper, J. (19. Jh.) 465
- Witt, Johan de (1625–1672) 331
- Wolff, Christian (1679–1754) 356, 451
- Wunderlich, Walter (geb. 1910) 534, 565
- Xu Guangqi (Hsü Kuang-Chhi) (1562–1633) 126
- Yang Hui (13. Jh.) 123
- Yoshida Shichibei Kōyū (Yoshida Mitsuyoshi) (1598–1672) 132–134
- Yoshinori Isomura *siehe* Isomura Kittoku
- Young, John Wesley (1879–1932) 504
- Zamberti, Bartolomeo (geb. um 1473) 228, 248, 281

-
- | | | | |
|---|-----|---|---------------|
| Zarqali (Azarchel), Abu Ishaq az- (ca. 1030–1100) | 227 | Zöllner, Friedrich (1834–1882) | 427 |
| Zeuthen, Hieronymus Georg (1839–1920) | 50 | Zu Chongzhi (Tsu Ch'ung-Chi oder Tsu Chhung-Chih) (429–500) | 118, 120 |
| Zhāng Héng (78–139) | 116 | Zühlke, Paul (1877–1957) | 406 |
| Zhu Shijie <i>siehe</i> Chu Shih-Chieh | | Zuse, Konrad (1910–1995) | 524, 540, 564 |
| Zhu Shijie (Chu Shih-Chieh) (Ende des 13. Jhs.) | 123 | | |

Sachverzeichnis

Die folgenden Seitenzahlen beziehen sich auf Textstellen, an denen die genannten Begriffe dem Sinn nach besprochen werden, auch wenn sie dort in anderen Formen bzw. Formulierungen stehen wie z.B. Zirkel fester Öffnung statt fester Spannweite.

- Abbildungen, geometrische 82, 441, 443, 516
- Abplattung der Erde 375
- absolute Geometrie 365, 420, 499, 504, 506
- Abstand 514, 516
- Abszisse 284, 331
- abwickelbare Flächen 360, 416
- Abwickelbarkeit 411
- Ähnlichkeit 35, 442
- äquiforme Transformationen 442
- Affinitäten 442
- Akademien 245
- Alexandroff-Kompaktifizierung 459
- algebraische Geometrie 2, 333, 337, 397, 401, 492, 493
- Algorithmen- und Komplexitätstheorie 525, 553
- Algorithmus 52–54, 539
- allgemeine Relativitätstheorie 415, 519, 521, 522
- Analysis situs 449, 451
- anamorphoretische Perspektive 280
- Anamorphose 546, 556, 557
- angewandte Mathematik 531
- Anstieg der Tangente nach Descartes 340
- Antiprismen 269, 293, 468
- aperiodisch 496, 525–527, 552, 561
- apollonisches Berührungsproblem 105, 407
- Approximationsmathematik 531
- archimedische Polyeder 68, 175, 293, 311, 312, 318, 467, 468, 560
- archimedische Spirale 68, 104, 230, 285, 304, 570
- archimedisches Axiom 368, 484, 498
- Astrolab 82, 223, 224, 241, 261
- Astrologie 113, 131, 252, 253
- Augpunkt 102, 275, 276, 377, 386, 475
- Axiom von Pasch 174, 500, 504
- Axiome 51, 504, 507–509
- Axiomensystem 368, 425, 426, 446, 502–504, 508
- Axonometrie 388, 389, 473
- Bäcklundtransformationen 417
- barycentrischer Calcul 396, 397, 442
- Bauhütten 86, 175, 232, 280, 358
- Beleuchtungsgeometrie 387, 388, 536
- Bertrands Paradoxon 484
- Berührungstransformation 417, 446
- Bettische Gruppe 461
- Bettische Zahl 461
- Bewegung 173, 232, 506
- Bewegung eines starren Körpers 442
- Beweisbarkeit 363, 446
- Bildinterpretation 539, 554, 556
- Binormale 408
- Biquaternionen 442
- CAD-Systeme 536
- cartesische Koordinaten 331
- cartesische Ovale 330
- Catalanscher Polyeder 312, 468
- chinesische Ringe 127
- Computational Geometry 538
- Computergeometrie 2, 496, 535–537, 539–541, 561, 562
- coro finto 280
- Cramersches Paradoxon 335
- Croftons Seilliniensatz 471
- Darstellende Geometrie 338, 388, 491, 492, 553

- Defekt von Dreiecken 377
 Definierbarkeit 509
 Definitionen 51
 Determinanten 439
 Differentialgeometrie 532
 Differentialrechnung 306
 digitale Bildverbesserung 536
 Dimension 515
 Distanzkreis 386
 Divergenz 433
 Dodekaeder 73, 99–101, 295, 316, 452, 549
 Doppelverhältnis 394
 Drehspiegelungen 448
 Drehung 433, 506
 dualarchimedische Polyeder 269, 311, 312
 Dualitätsprinzip 394, 397, 398, 429, 477

 ebene Örter 327
 Ebenenbüschel 348
 Eilinie 285, 316
 einschaliges Hyperboloid 336
 Einschiebung *siehe* Neusis
 einseitige Fläche 473, 546
 elementare Theorie 508
 elementare Verwandtschaft 450, 460
 Elementargeometrie 45, 269, 337, 364, 382, 491, 492, 502, 507, 509, 545
 Elemente Euklids 7, 37, 49–64, 71–73, 75, 94, 157, 162, 173, 179, 231
 Ellipse 42, 72, 92, 106, 125, 138, 139, 284, 285, 312, 313, 330, 346, 374, 375, 474, 576
 Ellipsoid 92, 136, 139, 415
 elliptisch 424
 Epizykloide 285
 Erdmagnetismus 432, 433
 Erlanger Programm 444, 445, 449, 499
 Ethnomathematik 8, 183
 Eulerscher Winkel 336
 Evolute 323, 342
 Evolvente 323, 342
 extensive Größe 435, 437

 Fachterminologie 88, 274
 Feldmessung V, 7, 86, 218
 Fermatscher Punkt 432
 Fermatsches Prinzip 344
 Festungsbauwesen 356, 357
 Fixpunktsätze 516
 Flächenfüllungen 546, 548
 Flächeninhalt 506
 Flächentreue 86, 263, 345
 flächentreue Abbildungen 390, 485
 Fluchtpunkt 276, 356, 377, 475
 Fundamentalsatz der Algebra 433

 Gärtnerkonstruktion der Ellipse 106, 138
 Galilei-Newton-Geometrie 521
 Gaußsche Krümmung 409, 411, 424, 430, 482
 Gaußsche Zahlenebene 402
 Geodäsie 1, 175, 252, 253, 256, 261, 266, 323, 346, 382, 389, 390, 410, 413, 415, 464, 490, 529, 534
 geodätische Kurve 409
 Geographie 62, 175, 261, 306, 390, 530
 geometria practica 251
 geometria speculativa 251
 Geometrie des Zirkels 404
 geometrische
 Extremwertaufgaben 342
 Konstruktion 80, 306, 406, 431, 503, 508
 Wahrscheinlichkeit 2, 470, 471
 Geometrographie 407, 408, 538
 Geradenbüschel 347, 348, 398
 Geradföhrungen 476
 gleichsinnige Kongruenz 447
 Gnomon 28, 82, 111, 112, 122, 145, 150, 151, 155, 158, 176, 253, 347, 573
 Goldener Schnitt 96
 Gradmessung 66, 258, 410
 Graphentheorie 2, 452, 454, 468, 473, 491
 graphische Statik 391
 graphisches Programmsystem 540
 Gravitationsfeld 529

- Gravitationstheorie 268
Grebe-Lemoinescher Punkt 473
großes Ikosaeder 293
Grund-Aufriß-Verfahren 274, 483
Grundlagen
 geometrischer Theorien 509
Gruppe 444, 449
Guldinsche Regeln 77, 305, 318

Hamiltonkreis 452
Harmonice mundi 266, 269, 312
harmonische Punktepaare 398, 400
Hauptkrümmungskreise einer Ellipse 375
Hauptkrümmungsrichtungen 409
Hauptpunkt 276
Hausdorff-Dimension 518
Hausdorff-Metrik 556, 563
Heine-Borelscher Überdeckungssatz 514
heronische Dreiecksformel 75, 105, 121, 158
heronische Formel 18, 105, 121, 155
Hexenknoten 560, 567
Hilbertraum 511, 512, 514, 516, 523
Höhenlinien (Isohypsens) 358
Homöomorphie 459
homogene Koordinaten 396, 397, 401, 477, 478
Homotopie 459, 460
Horizont 276
hyperbolisch 413
hyperbolische Geometrie 428–430, 444

illusionistische Malerei 352
Indivisible 232, 306, 338–340
infinitesimal beweglich 533
inneres Produkt 510, 511, 561, 563
Integralgeometrie 471, 491, 534, 538
Involution 401, 478
Inzidenz 394, 397, 499
irrational 35, 36, 38
Isophenge 388
Isophote 388

Kaleidozyklen 533, 548

Kartographie 1, 83, 86, 252, 253, 261, 266, 323, 345, 346, 358, 389, 390, 441, 491, 553
Kategorizität 503
Katenoide 409
Kathetensatz 57
Katoptrik 62, 248
Kavalierperspektive 356, 357
Kegelschnitte 40, 42, 45, 56, 70–72, 81, 92, 96, 125, 162, 164, 174, 266, 268, 284, 285, 287, 306, 325, 328, 331, 335, 337, 339, 348, 349, 384, 395, 400, 401, 406, 426, 443, 474
Kettenlinie 323, 409
Kinematik 231, 387, 391, 491, 532, 561
Kissoide 42, 43
klassische Probleme 40, 95, 125, 162, 497
Kleinsche Fläche 461
Kochlöide 46
körperliche Örter 42, 327
kombinatorische Topologie 451, 473, 561
kompakte Teilmengen 516
komplexe Zahlen 345, 433
Komplexitätsaussagen 540
Konchoide 46, 47, 98, 325, 486
konforme Abbildungen 390, 427–429
Kongruenz 419, 448, 499, 506–508
konstante Krümmung 523
konstante negative Krümmung 413–416, 418, 423
konstante positive Krümmung 413, 418
Konstruktionsbeschreibung 297
Kontingenzwinkel 232, 251, 341
Kontinuum 40, 232
Kontinuumproblem 367, 369, 450
Koordinaten 71, 83, 106, 176, 209, 256, 278, 311, 327–329, 331, 332, 337, 361, 373–375, 393, 394, 396, 397, 400, 406, 408, 415, 431, 432, 447, 474, 477, 478, 480, 484, 512, 515, 564
Koordinatengeometrie 156, 326, 332, 338, 363, 536, 538

- Koordinatenmethode 1, 64, 266, 287, 304, 306, 324, 325, 327, 329, 331, 332, 336, 344, 361, 392, 402, 443
- Koordinatensystem 43, 45, 72, 83, 84, 324, 333, 396, 397, 408, 412, 442, 443, 477, 478, 480
- notierte Eintafelprojektion 358
- Kräfteparallelogramm 432
- Kreis- und Kugelpackungen 125, 136
- Kreisbogen 84, 101, 123, 134, 315, 342
- Kreisfläche 14, 18, 19, 23, 48, 114, 116, 119, 209, 230, 240, 297, 371
- Kreisquadratur 40, 44, 45, 47, 48, 96, 125, 134, 207, 230, 251, 252, 284, 316, 497
- Kreissegment 19, 24, 78, 90, 106, 114, 124, 138, 149, 156, 165, 207, 210
- Kreisumfang 18, 19, 46, 51, 104, 116, 139, 149, 154, 155, 208, 210, 229, 230, 239, 240, 305, 306
- Kristallklassen 448
- Kristallographie 390, 435, 444, 445, 447, 448, 468, 473, 525
- Krümmung 408, 409
- Kugeloberfläche 136, 157, 175, 207, 208, 261, 263, 264, 319, 337, 345, 363, 365, 410, 418, 451, 459, 466, 480, 513, 518, 529, 579
- Kugelpackungen 125, 136, 564
- Kugelvolumen 119, 154, 319, 371
- Kurven dritten Grades 333, 416
- Kurven dritter Ordnung 333, 335
- Kurven vierter Ordnung 335
- Lagerungen 528, 533
- Lambertsches Viereck 173, 366
- Leitkreis von Kegelschnitten 474
- lineare Algebra 440
- lineare Örter 42, 327
- Loxodrome 263–265, 323
- Magnetfeld 390, 529
- Manhattan-Metrik 512
- MAPLE 541
- Maßtheorie 2, 517, 518, 534, 599
- MATHEMATICA 541
- mathematische Methoden in der Biologie 528
- Matrizenkalkül 443
- Mechanik 389
- Mechanismen 391
- Medizintechnik 532
- mehrdimensionale Geometrie 519
- Melancholie 304
- Mercatorprojektion 264
- Metrik 49, 443–445, 511–515, 520, 564
- metrische Vollständigkeit 513, 516
- minimale Abstandssumme 344, 463
- Minkowski-Geometrie 521, 561
- Modelle 360, 385, 426
- Möbiusband 459–461, 548, 551
- Möndchenquadratur 48
- Moirvesche Formeln 433
- Moultons Ebene 505, 563
- Muschellinie 47, 285, 330, 333, 370, 371, 376
- n -dimensionale Kugel 440
- n -dimensionaler Raum 430, 434, 435, 437, 441, 443, 473
- n -dimensionaler Simplex 440, 473
- Nadelproblem 470, 484
- Napoleons Problem 479
- negative Koordinaten 332
- negative Krümmung 413, 415, 416, 418, 423
- Netzawicklung 293, 318
- Neusis 45, 46, 70, 97
- nicht periodisch 525
- Nichtdefinierbarkeit 508
- nichtdesarguessche Ebene 504, 505, 563
- Nichtdeterminismus 540
- nichteuklidische Geometrie 55, 173, 413, 424, 425, 444, 491, 492, 497, 499, 509
- Nichtkonstruierbarkeit 479
- Nichtorientierbarkeit 460
- Norm 563
- normierter Vektorraum 511

- Oktaederstern 317
 Op Art 548
 Optik 1, 63, 64, 67, 73, 102, 103, 161, 248, 252, 261, 268, 269, 306, 323, 342, 346, 389, 441, 447, 491, 505, 533
 Ordinate 43, 139, 284, 331
 Ornamente 6, 111, 164, 175, 193, 274, 291, 322, 550
 Ornamentik 546
 Orthodrome 263

 Papierstreifenkonstruktion *siehe* Neusis
 Parabelquadratur 68
 parabolisch 425
 parabolisches Hyperboloid 336
 Paradoxon von Schumacher 482
 Parallelenaxiom 173, 497, 499, 506, 508, 533
 Parallelenpostulat Euklids V, 55, 78, 173
 Parallelenproblem 173, 174, 251, 363–365, 367–369, 419, 421, 422
 Parameterdarstellung 332, 370, 372, 375, 455, 482
 Parkett 269, 274, 291, 468, 496, 525, 527
 Parkettierungen 269, 284, 468, 493, 524, 546, 561
 Pavimento 279
 Perspektive 13, 276
 Perspektograph 352, 376
 Photogrammetrie 388, 473, 491
 Plateausches Problem 409
 platonische Körper 39, 266, 468
 „Plimpton 322“ 20, 22
 PNP-Problem 367, 369, 496, 497
 Poincaré-Modell 482, 540, 546
 Polardreieck 256, 310
 Polarkoordinaten 68, 332, 336, 337, 443
 Polyeder 50, 68, 269, 284, 287, 293, 304, 311, 312, 316, 440, 447, 451, 455, 468, 469, 493, 528, 529, 533, 534, 553
 Polyederfläche 533
 Polyedergeometrie 2, 456, 466, 468, 469
 Polyedersatz 451, 456
 Porismen 62, 64, 326, 392

 Postulate 51, 53–56, 77, 221, 369, 419, 425
 Potenz eines Punktes 63, 476
 Potenzgerade 392, 476
 Präzisionsmathematik 531
 Prinzip nach Cavalieri 338
 Prismen 20, 98, 119, 269, 293, 468
 Projektion 8, 84, 86, 264, 340, 345, 440, 475, 553
 projektive
 Abbildung 400, 473, 478
 Abschließung 499, 517, 563
 Ebene 460, 504
 Geometrie 77, 396, 398, 401, 445, 491
 Konstruktionen 477
 Skala 279
 Proportion 39, 326, 575
 Proportionenlehre 38, 39, 57, 249
 Proportionentheorie 50, 251
 pseudoeuklidische Geometrie 521
 Pseudosphäre 413, 424–426, 482
 Pyramide 7, 12, 14, 16, 20, 23, 78, 98, 114, 119, 121, 128, 154, 188, 190, 193, 197, 305
 Pyramidenstumpf 14, 16, 20, 23

 Quadratrix 44, 45, 96, 325, 330
 Quadrik 336
 Quadrivium 92, 213, 215, 253
 Quasikristalle 524, 527, 552
 Quaternionen 433, 434, 442, 473

 Raumzeit 520–522
 rechnender Raum 564
 Regel der sechs Stücke 81
 reguläre(s)
 Fünfeck 36, 100, 252, 283, 284, 314, 318
 Neuneck 163, 314
 Neunzehneck 133
 Polytope 440, 473
 Sechseck 313
 Siebeneck 163, 164, 284
 Siebzehneck 404
 Sternkörper 293

- Sternpolyeder 468, 496, 560
 Relativitätstheorie 519
 Reliefperspektive 280, 352, 377, 388
 reziproke Radien 338, 341, 406, 478, 482
 Riemannsche Fläche 460
 Riemannsche Geometrie 492, 519
 Robotik 554
 Rotation 433
 Rückwärtseinschneiden 261, 311

 Saccherisches Viereck 173, 364, 365
 Satz des Apollonios 102
 Satz des Menelaos 179
 Satz des Ptolemaios 80, 81, 105, 106, 156, 158
 Satz des Pythagoras 9, 57, 59, 112, 145, 158, 208, 431, 465, 466
 Satz des Thales 32
 Satz von Brianchon 395
 Satz von Desargues 64, 351, 377, 484, 504
 Satz von Holditch 565
 Satz von Pappos 503
 Satz von Pohlke 389
 Satzgruppe des Pythagoras 49
 Schattenkonstruktion 349, 385
 Schauderscher Fixpunktsatz 564
 Schnurregeln 143–146, 148, 150, 207
 Schraubenlinie 114, 285
 Schraubung 416, 441
 Secans-Funktion 176, 256
 Sehnengeometrie 19, 78, 150
 Sehnenviereck 105, 155, 156, 310, 311, 479, 480
 simplizialer Komplex 460, 461
 Sinus-Funktion 78, 151
 SolitONENTheorie 529
 Soma-Würfel 560
 Sphärik 81, 123, 154, 179, 227
 sphärische Trigonometrie 81, 151, 227, 253, 254, 310
 sphärischer Exzess 265
 Spuren 363
 starre Abbildung 441, 442
 Steiner-Weber-Problem 535

 Steinerpunkte 463, 483
 stereographische Abbildung 443
 stereographische Projektion 82, 86, 252, 261, 265, 459
 Sternpolyeder 269, 316, 317, 460, 468, 473
 Stetigkeitsaxiom 503, 507, 509
 stochastische Geometrie 534, 535, 538, 561
 Stone-Čech-Kompaktifizierung 516, 517
 Streckenabtrager 507
 Stringtheorie 462
 Strukturwissenschaft 426, 497
 Symmetrie 8, 28, 34, 164, 194, 375, 447, 448, 523
 Symmetriegruppen 165, 202, 473

 Tangens-Funktion 78, 176, 253, 256, 284
 Tangram 126, 560
 technisches Zeichnen 385
 Tempelproblem 137
 Tetraeder-Oktaeder-Raumfüllung 549
 Tiefenlinien (Isobathen) 358
 Topologie 2, 3, 441, 445, 449, 450, 452, 454–456, 459–461, 466, 468, 491, 492, 514–516, 546, 564
 topologisch 187, 443, 452, 455, 459, 462, 514
 topologische Abbildung 450, 459
 topologischer Raum 516
 Torricelli-Punkt 373–375, 480, 481
 Torsion 342, 408, 473
 Torsionszahl 461
 Traktrix 412, 413, 416, 424, 482
 Transformation 297
 Transformationsgruppe 441, 442, 446, 447, 473, 493
 Translationen 432, 433, 441, 485, 506, 525, 563
 Transzendenz von π 406
 Trapez 13, 24, 90, 100, 114, 149, 157, 158, 201, 202, 208, 310
 Trennungsrelation 348, 501
 Triangulation 258, 261, 411, 534

- Trigonometrie 22, 44, 77, 78, 81, 115,
120, 123, 126, 151, 162, 175, 176,
179, 225, 227, 253, 254, 256, 266,
323, 328, 346, 393, 425
Trilateration 534
Turingmaschine 525, 553
Typographie 297

Überdeckungen 528
Underweysung 281–283, 285, 287, 293,
297, 318, 358
unendlich 38
unendlich fern 394
Unlösbarkeitsaussagen 540
Unlösbarkeitsbeweise 538
unmögliche Figuren 548, 554

v. Kochsche Kurve 518
Vektor 432, 435
Vektorraum 434, 435, 438, 439, 510–
513, 563
Vermessungsaufgaben 87, 116, 122, 174
Vierfarbenproblem 367, 369, 454, 455,
473
vollständiges Vierseit 179, 348

wacklig 533
Wächterprobleme 539
Wasan-Mathematik 108, 130, 132, 141

Wendelfläche 409
Widerspruchsfreiheit 55, 426, 503
Winkel 33, 34
Winkelcosinussatz 253, 256
Winkeldreiteilung 40, 44–46, 70, 80, 97,
163, 283, 315, 316, 405, 479
Winkeltreue 86, 261, 263, 265, 345, 482
Würfelverdoppelung 40, 41, 70, 92, 145,
473, 479
Wunderlichs Wackeloktaeder 565

Zellular-Automaten 541
Zellularfelder 528
Zentralperspektive 287
Zentralprojektion 328, 348, 349, 388,
394, 398, 400, 442
Zerlegungsgleichheit 465, 484, 503, 506
Zikkurat 15
Zirkel fester Spannweite 164, 174, 180,
208, 209, 239, 252, 283, 403, 479
Zirkel und Lineal 40, 56
zugeordnete Normalrisse 289, 358, 385
zweischaliges Hyperboloid 336
Zweitafelverfahren 285, 287, 318, 480,
565
Zwischenbegriff 501
Zwischenrelation 499, 500, 508
Zyklographie 386
Zykloide 372