H.-W. Alten · A. Djafari Naini
M. Folkerts · H. Schlosser
K.-H. Schlote · H. Wußing



4000 Jahre Algebra

Geschichte
Kulturen
Menschen

Springer

Vom Zählstein zum Computer

Herausgegeben von
H.-W. Alten · A. Djafari Naini · H. Wesemüller-Kock
Institut für Mathematik und Angewandte Informatik
Zentrum für Fernstudium und Weiterbildung
Universität Hildesheim

In der Reihe „Vom Zählstein zum Computer"
sind außerdem erschienen:

6000 Jahre Mathematik
Wußing
Band 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton
ISBN 978-3-540-77189-0
Band 2. Von Euler bis zur Gegenwart
ISBN 978-3-540-77313-9

5000 Jahre Geometrie
Scriba, Schreiber
ISBN 978-3-540-22471-6

Überblick und Biographien,
Hans Wußing et al. ISBN 978-3-88120-275-6
Vom Zählstein zum Computer – Altertum (Videofilm),
H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald ISBN 978-3-88120-236-7
Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter (Videofilm),
H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald

H.-W. Alten · A. Djafari Naini · M. Folkerts
H. Schlosser · K.-H. Schlote · H. Wußing

4000 Jahre Algebra

Geschichte
Kulturen
Menschen

Mit 230 Abbildungen, davon 44 in Farbe

Springer

Professor Dr. Heinz-Wilhelm Alten
Institut für Mathematik und
Angewandte Informatik
Universität Hildesheim
Marienburger Platz 22
31141 Hildesheim

Dr. Alireza Djafari Naini
Zentrum für Fernstudium
und Weiterbildung (ZFW)
Universität Hildesheim
Marienburger Platz 22
31141 Hildesheim

Professor Dr. Menso Folkerts
Institut für Geschichte
der Naturwissenschaften
Universität München
Museumsinsel 1
80538 München

Professor Dr. Hartmut Schlosser
Institut für Mathematik
und Informatik
Universität Greifswald
Friedrich-Ludwig-Jahn-Str. 15a
17487 Greifswald

Professor Dr. Karl-Heinz Schlote
Sächsische Akademie
der Wissenschaften zu Leipzig
Karl-Tauchnitz-Str. 1
04107 Leipzig

Professor Dr. Hans Wußing
Sächsische Akademie
der Wissenschaften zu Leipzig
Karl-Tauchnitz-Str. 1
04107 Leipzig

2. korrigierter Nachdruck 2008

ISBN 978-3-540-43554-9 e-ISBN 978-3-540-85551-4

DOI 10.1007/978-3-540-85551-4

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 08-03, 01-99, 01A05

© 2003 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandgestaltung: deblik, Berlin
Herstellung: le-tex publishing services oHG, Leipzig
Satz: TeX-Satz durch Sylvia Voß und Thomas Speck

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.de

Vorwort des Herausgebers

Algebra und Arithmetik sind nächst der Geometrie diejenigen Teilgebiete der Mathematik, mit denen Menschen sich schon in grauer Vorzeit beschäftigt haben. Die Entwicklung der Zahlvorstellung und der Zahlzeichen läßt sich bis in die Altsteinzeit vor 20 000 bis 30 000 Jahren zurück verfolgen. In dieser Periode entwickelten sich bereits erste Formen elementaren Rechnens, also jenes Gebietes, das schon in den frühen Hochkulturen der Menschheit – in Ägypten und Mesopotamien seit etwa 3000 v. Chr. – zu erstaunlicher Blüte geführt, später von den Griechen als Arithmetik bezeichnet wurde und noch heute als Lehre der vier Grundrechenarten die ersten Jahre des Mathematikunterrichts beherrscht.

Mit Algebra haben sich Menschen indes erst seit etwa 4000 Jahren beschäftigt, als Handel, Feldvermessung und andere geometrische Probleme im Vorderen Orient auf lineare und quadratische Gleichungen führten. Deshalb haben wir diesem vornehmlich der Algebra gewidmeten Nachfolger des im Jahre 2000 erschienenen Buches „5000 Jahre Geometrie“ den Titel „4000 Jahre Algebra“ gegeben. Der Name *Algebra* entstammt jedoch erst einer wesentlich späteren Epoche, nämlich dem Werk „al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala“ des aus Choresmien stammenden persischen Gelehrten al-Ḫwārizmī, in Europa meist als Mohammed ben Musa bekannt und zitiert. Das in diesem Buchtitel enthaltene „al-ğabr“ bedeutet wörtlich das „Ausüben von Zwang“, in der Gleichungslehre jedoch das „Ergänzen“ einer Gleichung durch Addition gleicher Terme auf beiden Seiten zur Elimination subtraktiver Glieder.

Was es nun mit dieser Algebra auf sich hat, was aus den ersten Bemühungen der Ägypter und Babylonier um das Auflösen von Gleichungen im Laufe der Jahrtausende geworden ist, wie griechische Mathematiker algebraischen Gleichungen mit geometrischen Methoden zu Leibe rückten, wie chinesische und indische Gelehrte Verfahren zur Berechnung der Wurzeln solcher Gleichungen ersannen, wie islamische Wissenschaftler die geometrische Algebra der Griechen durch Übersetzung bewahrten und weiter entwickelten, wie Algebra erst wieder im hohen Mittelalter in Europa betrieben wurde und Rechenmeister der frühen Neuzeit kaufmännisches Rechnen lehrten, wie sich Cardano und Tartaglia im 15. Jahrhundert um die Priorität für die Auflösungsformeln für kubische Gleichungen gestritten haben, wie der nur 27 Jahre alt gewordene Norweger Niels Henrik Abel nach zunächst vergeblichen Versuchen bewies, daß es allgemeine Lösungsformeln für Gleichungen höheren als vierten Grades nicht gibt, wie der im Alter von 20 Jahren im Duell gefallene Franzose Evariste Galois die Grundlagen für die nach ihm benannte Theorie schuf, wie Carl Friedrich Gauß den Fundamentalsatz der Algebra bewies und wie sich – beginnend im 19. Jahrhundert – die Algebra von der Lehre der Gleichungen zur Theorie algebraischer Strukturen im 20. Jahrhundert wandelte und als Computeralgebra in den letzten Jahrzehnten neue Triumphe feierte – all dies und vieles mehr können Sie in diesem Buch erfahren.

Mit diesem Buch legt die Projektgruppe Geschichte der Mathematik der Universität Hildesheim den dritten Band ihrer Reihe „Vom Zählstein zum Computer“ vor. Zur Einführung erschien 1997 der erste Band mit dem Titel „Überblick und Biographien“ im Franzbecker-Verlag Hildesheim. Ihm folgte 1998 ein Begleitfilm zur Geschichte der Mathematik im Altertum; ein entsprechender Film zum Mittelalter wird demnächst erscheinen. Der im Jahr 2000 beim Springer-Verlag herausgebrachte Band „5000 Jahre Geometrie“ trägt – wie der neue Band „4000 Jahre Algebra“– den Untertitel „Geschichte, Kulturen, Menschen“. Damit will die Projektgruppe ihr besonderes Anliegen ausdrücken, die Geschichte der Mathematik als einen wesentlichen Teil der Kulturgeschichte der Menschheit darzustellen. Die Autoren sind diesem Anliegen auch im vorliegenden Bande vorzüglich gerecht geworden. Wenngleich die Algebra gegenüber der Geometrie weit weniger anschaulich ist, mit ihrem Formalismus manchen zunächst abschrecken mag und sich im letzten Jahrhundert zu höchster Abstraktion entwickelt hat, ist es den Autoren gelungen, die Genese der algebraischen Begriffe und Methoden als kulturgeschichtliches Phänomen zu beschreiben, ihre Entstehung und Ausprägung einzubetten in die politische und wirtschaftliche Situation und die Besonderheiten der Kultur der jeweiligen Periode. Dies erschöpft sich nicht in den jedem Kapitel vorangestellten Tabellen, die einen Überblick über die wichtigsten politischen und kulturellen Ereignisse der jeweiligen Kultur bzw. Epochen vermitteln, sondern wird im ersten Abschnitt jedes Kapitels ausführlicher dargestellt und findet sich in enger Verflechtung im laufenden Text bei der Beschreibung der Verhältnisse und Lebensumstände der schöpferischen Menschen, denen wir die Entwicklung der Algebra verdanken.

Die Kapitel 1 bis 3 stammen im wesentlichen aus der Feder des Mathematikhistorikers und Mitherausgebers Dr. Alireza Djafari Naini, mitgestaltet und ergänzt durch Beiträge des Verfassers dieses Vorworts. Die Kapitel 4 und 5 sind zum großen Teil das Werk von Prof. Dr. Hans Wußing, langjähriger Leiter des Karl-Sudhoff-Institutes der Universität Leipzig, erweitert und ergänzt durch detailreiche Beiträge von Prof. Dr. Menso Folkerts, Leiter des Instituts für Geschichte der Naturwissenschaften der Ludwig-Maximilians-Universität München.

Die sorgfältige Aufarbeitung und ausführliche Darstellung der Entwicklung der Algebra in der Neuzeit in den Kapiteln 6 – 10 verdanken wir Herrn Dr. Karl-Heinz Schlote, Mathematikhistoriker an der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Den Abschnitt 10.4 über Computeralgebra verfaßte Herr Professor Dr. Hartmut Schlosser, Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald.

Auch die Vorschläge für die zahlreichen Abbildungen stammen von den Autoren, ebenso die Vorlagen für die ohne Quellenangabe eingefügten Figuren und Tabellen, die Vorschläge für Aufgaben und die Auflistung der wesentlichen Inhalte und Ergebnisse der Algebra in der jeweiligen Epoche am Ende eines jeden Kapitels.

Die Aufgaben sind von sehr unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad und verlangen auch sehr unterschiedliche Vorkenntnisse. Für die Bewältigung der Aufgaben in den Kapiteln 1–5 dürften im allgemeinen die auf der Mittelstufe der Gymnasien erworbenen Kenntnisse ausreichen, während für die Aufgaben zu den Kapiteln 6–10 Begriffe und Methoden vonnöten sind, die erst in der Oberstufe der Gymnasien oder im Grundstudium der Mathematik behandelt werden. Dies liegt in der Natur der Sache, weil gerade die Algebra im Laufe der Jahrhunderte zu einem derart komplexen Gebäude mit höchster Abstraktion gewachsen ist, daß es wohl kaum noch Fachleute gibt, die das riesige Gebiet vollständig beherrschen.

Umso mehr danke ich den Autoren, die es verstanden haben, diese so komplizierte Materie – von Außenstehenden oft als trocken empfunden und hinsichtlich moderner Abstraktionen als intellektuelle Spielerei mit Begriffen bezeichnet – in lebendiger und verständlicher Weise darzustellen.

Die den Kapiteln vorangestellten Bildseiten mit den Porträts herausragender Algebraiker der jeweiligen Periode und die Karten entwarf und gestaltete der Medienwissenschaftler und Mitherausgeber Heiko Wesemüller-Kock. Ihm danke ich für seine tatkräftige Unterstützung bei der Entwicklung und Gestaltung dieses Bandes, dem Historiker Hubert Mainzer für seine Vorschläge zu den Karten und zur Geschichte des alten China.

Für einige Abbildungen in diesem Buch ist es uns nicht gelungen, die Rechtsinhaber zu ermitteln bzw. unsere Anfragen blieben unbeantwortet. Betroffene und Personen, die zur Klärung in einzelnen Fällen beitragen können, werden gebeten, sich beim Verlag zu melden.

Für die kritische Durchsicht von Texten danke ich den Kollegen Folkerts, Kahle, Purkert, Scriba und Sesiano, für die Umsetzung der Manuskripte, Abbildungen, Tabellen und Figuren zu druckfertigen Vorlagen auf dem Computer Wolfram Schobert und dem Dipl.-Informatiker Thomas Speck sowie vielen nicht namentlich erwähnten Helfern, ganz besonders aber Kathrin Vornkahl und Sylvia Voß, die den größten Teil dieser komplizierten Arbeit ausführten.

Für die Überprüfung meiner Übersetzung der Textpassagen von Cardano, Tartaglia und Bombelli aus dem Lateinischen bzw. Italienischen danke ich Herrn Dr. Johannes Köhler vom Institut für Philosophie der Universität Hildesheim, für die Unterstützung des Projekts der Leitung der Universität Hildesheim, sowie dem Dekan Prof. Dr. Klaus-Jürgen Förster und dem Leiter des Zentrums für Fernstudium und Weiterbildung, Dr. Erwin Wagner.

Herzlichen Dank sage ich Frau Möller-Meyer und der Universitätsgesellschaft Hildesheim für ihre finanzielle Unterstützung zur Herausgabe farbiger Abbildungen. Nicht zuletzt gilt mein Dank dem Springer-Verlag für das Eingehen auf unsere Wünsche und die hervorragende Ausstattung dieses Buches.

Möge auch dieser Band viele anregen, sich intensiver mit der Geschichte der Mathematik und der in 4000 Jahren entwickelten Algebra zu beschäftigen und dazu führen, daß dieses zu enormer Größe und Bedeutung gewachsene Gebiet nicht nur als Stolperstein in der Schule angesehen, sondern als wichtiger Be-

standteil unserer Kultur und Zivilisation gewürdigt und als unentbehrliche Grundlage für die Lösung der Probleme in unserer von moderner Technik geprägten Welt begriffen und gefördert wird.

Im Namen der Herausgeber
Hildesheim, im Jaunar 2003 Heinz-Wilhelm Alten

Hinweise für den Leser

In den Kapiteln 1 – 5 sind die Lebensdaten der Gelehrten auch im laufenden Text enthalten, in den Kapiteln 6 – 10 wegen der großen Anzahl nur vereinzelt. Im Personenregister sind alle Lebensdaten (soweit bekannt) aufgeführt.

Runde Klammern (. . .) enthalten ergänzende Einschübe oder Hinweise auf Abbildungen oder Aufgaben.
Eckige Klammern [. . .] enthalten

– im laufenden Text Hinweise auf Literatur
– unter Abbildungen Quellenangaben.

Abbildungen sind nach Teilkapiteln nummeriert, z. B. bedeutet Abb. 7.4.1 die erste Abbildung in Teil 4 von Kapitel 7.
Aufgaben sind am Ende jedes Kapitels zusammengefaßt, aber wie die Abbildungen nach Kapiteln nummeriert, z. B. bedeutet Aufgabe 7.4.2 die zweite Aufgabe zu Teil 4 von Kapitel 7.
Die Transskriptionen chinesischer bzw. indischer Namen und Begriffe erfolgten entsprechend [Martzloff 1997] bzw. [Tropfke 1980]. Die Schreibweise von Namen und Werken islamischer Gelehrter entspricht der wissenschaftlichen Transskription aus dem Arabischen.

Inhaltsverzeichnis

1 Anfänge von Arithmetik und Algebra 1
1.1 Zählen, Zahlen und Rechnen am Beginn 2
1.2 Arithmetik und Algebra im alten Ägypten 6
1.2.0 Abriß der kulturgeschichtlichen Entwicklung im Niltal ... 8
1.2.1 Altägyptische Zahlzeichen 12
1.2.2 Arithmetik im alten Ägypten 13
1.2.3 Primitive Algebra 15
1.3 Mesopotamische (Babylonische) Algebra 20
1.3.0 Entwicklung früher Hochkulturen in Mesopotamien 21
1.3.1 Zahlzeichen in Keilschrift 27
1.3.2 Die Methode des einfachen falschen Ansatzes 29
1.3.3 Lineare Gleichungssysteme 30
1.3.4 Nichtlineare Systeme und quadratische Gleichungen 34
1.3.5 Kubische Gleichungen: Der Beginn eines 3500 Jahre alten Problems 38
1.3.6 Näherungswerte von $\sqrt{2}$ 39
1.4 Aufgaben zu Kapitel 1 43

2 Die geometrische Algebra der Griechen 45
2.0 Einführung 48
2.1 Beginn des abstrakten Denkens 49
2.1.1 Ionische Periode (ca. 600 – 450 v. Chr.) 50
2.1.2 Athenische Periode (450 – 300 v. Chr.) 52
2.1.3 Hellenistische Periode (ca. 300 v. Chr. – ca. 150 n. Chr.) .. 56
2.1.4 Spätantike (ca. 300 – ca. 500 n. Chr.) 57
2.2 Das besondere Merkmal der griechischen Algebra 59
2.3 Lineare und quadratische Gleichungen 62
2.3.1 Die „Elemente“ des Euklid 62
2.3.2 Die Methode der Flächenanlegung 66
2.3.3 Lineare Gleichungen 67
2.3.4 Rein quadratische Gleichungen 69
2.3.5 Ein Diorismos 69
2.3.6 Lösung quadratischer Gleichungen nach Euklid 72
2.4 Kubische und biquadratische Gleichungen 74
2.4.1 Kubische Gleichungen in „Kugel und Zylinder“ von Archimedes 75

2.4.2 Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks durch „Einschiebung“ von Archimedes 80
2.4.3 Dreiteilung des Winkels nach Archimedes 83
2.4.4 Archimedes und die biquadratischen Gleichungen 84
2.4.5 Das Delische Problem – die Würfelverdopplung 86
2.5 Die Quadratur des Kreises mittels der Quadratrix 90
2.6 „Formale Algebra“ 94
2.6.1 Formale Algebra vor Diophant 94
2.6.2 Synkopierte Algebra 95
2.6.3 „Arithmetika“ von Diophant 97
2.7 Aufgaben zu Kapitel 2 103

3 Algebra im Orient 105
3.1 Algebra in China 106
3.1.0 Geschichtlicher Abriß 107
3.1.1 Zahlzeichen 116
3.1.2 Quadrat- und Kubikwurzeln 118
3.1.3 Der doppelte falsche Ansatz (Überschuß und Fehlbetrag) . 120
3.1.4 Lineare Gleichungssysteme 122
3.1.5 Algebra im 13. Jahrhundert 124
3.2 Algebra in Indien 128
3.2.0 Geschichtlicher Abriß 130
3.2.1 Zahlzeichen und das dezimale Stellenwertsystem 134
3.2.2 Algebraische Ausdrucksweise 137
3.2.3 Näherungsverfahren für Wurzeln 138
3.2.4 Lineare Gleichungen 139
3.2.5 Quadratische Gleichungen 141
3.3 Algebra in den Ländern des Islam 146
3.3.0 Geschichtlicher Abriß 148
3.3.1 Die Verbreitung der indischen Ziffern in den islamischen Ländern 161
3.3.2 Algebraische Ausdrucksweise 162
3.3.3 Lineare und unbestimmte Gleichungen 165
3.3.4 Quadratische Gleichungen 166
3.3.5 Arithmetisierung der Algebra 173
3.3.6 Die (geometrische) Theorie von ᶜUmar Ḫ̆ayyām für die Gleichungen dritten Grades 175
3.3.7 Eine Abhandlung von Ḫ̆ayyām über Algebra 180
3.3.8 Gleichungen vierten Grades 183
3.3.9 Numerische Auflösung algebraischer Gleichungen 185
3.4 Aufgaben zu Kapitel 3 193

4 Algebra im Europa des Mittelalters und der Renaissance .. 197
4.0 Einführung ... 199
4.1 Übersetzungen aus dem Arabischen ... 204
4.2 Leonardo von Pisa ... 206
4.3 Jordanus Nemorarius und Johannes de Muris ... 210
4.4 Die Entwicklung in Italien ... 214
4.4.1 Luca Pacioli ... 218
4.5 Entwicklungen in Westeuropa ... 220
4.5.1 Nicolas Chuquet ... 220
4.5.2 Robert Recorde ... 221
4.5.3 Simon Stevin ... 223
4.5.4 Pedro Nunes ... 224
4.6 Frühe Algebra im deutschsprachigen Raum – die Deutsche Coß . 227
4.6.1 Die sog. Deutsche Coß ... 229
4.6.2 Adam Ries, Abraham Ries u. Jacob Ries als Cossisten 233
4.6.3 Chistoph Rudolff und Michael Stifel ... 239
4.7 Zur Entwicklung des Zahlbegriffes ... 242
4.8 Aufgaben ... 246

5 Algebra wird zur selbständigen Disziplin (16./17. Jh.) 249
5.0 Vorbemerkungen ... 251
5.1 Gleichungen dritten und vierten Grades ... 253
5.1.1 Lösungen für Gleichungen dritten Grades ... 253
5.1.2 Niccolò Tartaglia ... 255
5.1.3 Girolamo Cardano ... 257
5.1.4 Auflösung von Gleichungen vierten Grades ... 261
5.1.5 Rafael Bombelli ... 263
5.2 Viète und Descartes ... 266
5.2.1 François Viète (Franciscus Vieta) ... 266
5.2.2 René Descartes (Cartesius) ... 274
5.2.3 Die algebraischen Methoden von Descartes ... 276
5.3 Newton und Euler ... 281
5.3.1 Isaac Newton ... 281
5.3.2 Zur Vorgeschichte des Fundamentalsatzes der Algebra ... 283
5.3.3 Leonhard Euler und der Fundamentalsatz der Algebra 286
5.3.4 Euler und sein Algebralehrbuch ... 289
5.4 Aufgaben ... 294

6 Algebra in der 2. Hälfte des 18. und am Beginn des 19. Jahrhunderts 297
6.0 Historische Einführung 299
6.1 Die Begründung des Rechnens in den gewöhnlichen Zahlbereichen 302
6.2 Die Begründung der komplexen Zahlen 306
6.3 Algebra als Methode 311
6.4 Lösbarkeit der allgemeinen Gleichung n-ten Grades in Radikalen 317
6.4.1 Die Ergebnisse von Lagrange 318
6.4.2 Die Lösungsansätze von Vandermonde und Waring 321
6.4.3 Ruffini und erste Ergebnisse über Permutationsgruppen . . 323
6.4.4 Gauß und die Auflösung der Kreisteilungsgleichung 325
6.4.5 Abels Beweis für die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung 5. Grades 328
6.5 Zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra durch Gauß . . . 331
6.6 Die Herausforderung der Algebra durch neue Objektbereiche . . 335
6.6.1 Determinanten 335
6.6.2 Einfluß der „Disquisitiones arithmeticae“ von Gauß 340
6.7 Aufgaben zu Kapitel 6 345

7 Die Herausbildung erster Strukturbegriffe 347
7.0 Vorbemerkungen 349
7.1 Die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen – Galois-Theorie . . 350
7.1.1 Der Beitrag von Niels Henrik Abel 350
7.1.2 Die Lösung des Problems durch Evariste Galois 354
7.2 Von Permutationen zu Permutationsgruppen 362
7.3 Auf dem Weg zur abstrakten Algebra 366
7.3.1 George Peacock 369
7.3.2 Augustus de Morgan 371
7.3.3 Duncan Farquharson Gregory 374
7.3.4 George Boole und die Algebra der Logik 375
7.4 Erste Definitionen abstrakter algebraischer Systeme 378
7.4.1 William Rowan Hamilton und die Quaternionen 378
7.4.2 Arthur Cayley – Oktonionen und die erste Definition des abstrakten Gruppenbegriffs 387
7.5 Zahlentheoretische Einflüsse auf die Entwicklung der Algebra . . . 391
7.5.1 Gaußsche ganze Zahlen und Reziprozitätsgesetze 391
7.5.2 Kummers Schöpfung der idealen Zahlen 397
7.6 Die Fortschritte in der linearen Algebra 400
7.6.1 Die Entwicklung des Matrizenkalküls 404

7.6.2 Die Entwicklung der Theorie der Vektorräume 410
7.6.3 Die Arbeiten von Hermann Günther Graßmann 414
7.7 Aufgaben zu Kapitel 7 424

8 Die Entwicklungen der Algebra von 1850 bis 1880 429
8.0 Vorbemerkungen 431
8.1 Weitere Fortschritte im Verständnis der Galois-Theorie 434
8.1.1 Die Rezeption der Galois-Theorie in Deutschland 435
8.1.2 Die Darstellung der Galois-Theorie durch Joseph Alfred Serret und Camille Jordan 438
8.2 Die große Zeit der Invariantentheorie 447
8.2.1 Die britische Schule der Invariantentheorie 447
8.2.2 Die Weiterentwicklung und die Formulierung des Grundproblems der Invariantentheorie 451
8.3 Die Theorie der Transformationsgruppen 454
8.3.1 Kleins Erlanger Programm und die Theorie der endlichen Transformationsgruppen 454
8.3.2 Die Liesche Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen 460
8.4 Die ersten Strukturuntersuchungen bei hyperkomplexen Systemen 465
8.4.1 Hankels „Theorie der complexen Zahlensysteme“ 466
8.4.2 Die Klassifikation der Algebren bei Benjamin Peirce 467
8.5 Aufgaben zu Kapitel 8 474

9 Algebra an der Wende zum 20. Jahrhundert 475
9.0 Vorbemerkungen 477
9.1 Mengenlehre und Algebra der Logik 478
9.1.1 Schröders Algebra der Logik und Freges Logizismus 480
9.1.2 Die axiomatische Methode 485
9.2 Die Herausbildung des abstrakten Gruppenbegriffs 489
9.3 Dedekind und Kronecker: Algebraische Zahlen, Divisoren, Körper 504
9.4 Die axiomatische Fixierung des Körperbegriffs 515
9.5 Die Profilierung weiterer Teilgebiete der Algebra 527
9.5.1 Hyperkomplexe Systeme (Algebren) 527
9.5.2 Darstellungen von Gruppen und Algebren 537
9.5.3 Die algebraische Geometrie 541
9.6 Aufgaben zu Kapitel 9 547

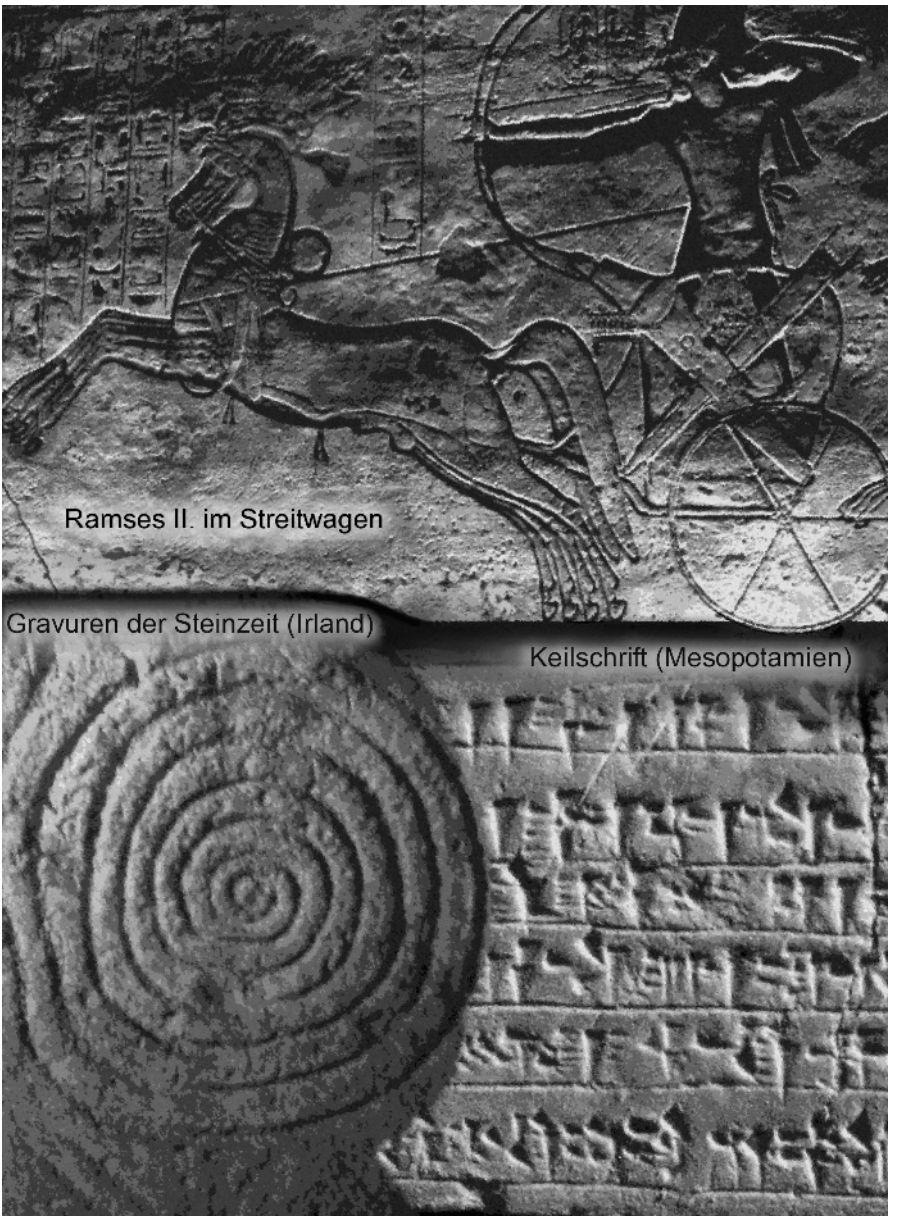
10 Die Algebra im 20. Jahrhundert ... 551
10.0 Vorbemerkungen ... 553
10.1 Die Etablierung der modernen abstrakten Algebra ... 557
10.1.1 Aufbau einer allgemeinen Ring- und Idealtheorie ... 558
10.1.2 „Moderne Algebra“ ... 563
10.2 Von der Algebra zur Mathematik der Strukturen ... 569
10.2.1 Die Entstehung der Verbandstheorie ... 572
10.2.2 Bourbaki und Strukturkonzepte ... 577
10.3 Die Wechselwirkung der abstrakten Algebra ... 582
10.3.1 Die algebraische Geometrie ... 583
10.3.2 Anwendungen der Algebra in der Physik ... 586
10.3.3 Die algebraische Durchdringung der Topologie ... 588
10.3.4 Algebraische Methoden in anderen Bereichen ... 590
10.4 Computeralgebra ... 593
10.4.1 Vorbemerkungen ... 593
10.4.2 Charakterisierung der Computeralgebra ... 595
10.4.3 Die Entwicklung von Algorithmen ... 599
10.4.4 Die Entwicklung von Computeralgebrasystemen ... 606
10.4.5 Anwendungen der Computeralgebra, mathematische Bildung, Präsentation in der Gesellschaft ... 608
10.5 Aufgaben zu Kapitel 10 ... 612

Literaturverzeichnis ... 613

Personenregister mit Lebensdaten ... 635

Index ... 645

1 Anfänge von Arithmetik und Algebra



1.1 Zählen, Zahlen und Rechnen am Beginn

Schon in prähistorischer Zeit entwickelten Menschen erste Vorstellungen von Zahl und Form, begannen mit dem Zählen und unterschieden dabei nur ein, zwei und viele Dinge. Noch Anfang des 20. Jhs. stießen Ethnographen auf diese Zählweise bei Expeditionen zu Stämmen, die noch auf der Kulturstufe der Steinzeit lebten. Auch in der Sprache spiegelt sich genau dieses Phänomen wider: Neben den uns vertrauten Begriffen Einzahl und Mehrzahl (Singular und Plural) findet sich im Ur-indogermanischen, in semitischen Sprachen und auch im Griechischen die „Zweizahl“ (Dual) und im Deutschen das Paar.

Die ersten bekannten Zeugnisse von Zählen und Zahlen sind 20 000 bis 30 000 Jahre alt, stammen also aus der älteren Steinzeit. Besonderes Aufsehen erregten die Funde von Ishango (Kongo 1950) und Vestonice (Mähren 1937). Letzterer ist der sieben Zoll lange Knochen eines Wolfes mit 55 Einkerbungen, die in fünf Gruppen zu je 5 kurzen und sechs Gruppen mit je 5 langen Kerben angeordnet sind, also deutlich auf eine Fünferbündelung hinweisen und eine markante Erweiterung des Zahlbegriffs dokumentieren.

Zu dieser Zeit lebten die Menschen noch in Höhlen und unter Bedingungen, die sich von denen der Tiere nur wenig unterschieden. Sie gingen in den Wäldern auf Nahrungssuche, sammelten Wurzeln und Früchte und jagten Tiere mit einfachen Waffen, z. B. mit dem Wurfspeer und der Keule. In der späteren Steinzeit entstanden Malereien, Figuren und geometrische Ornamente. Eindrucksvolle Zeugen jener künstlerischer Tätigkeiten sind die etwa vor 15 000 Jahren entstandenen Höhlenmalereien in Frankreich und Spanien. In der mittleren Steinzeit vor ungefähr 10 000 Jahren begann die Periode der Seßhaftigkeit, möglich geworden durch das Schmelzen der Eisdecke über Europa und Asien. Bauern begannen mit der Errichtung kleiner Dörfer und produzierten einen großen Teil ihrer Nahrung selbst, indem sie Äcker mit Dämmen und Gräben anlegten und dazu einfache Werkzeuge und primitive geometrische Kenntnisse entwickelten. Die Bedürfnisse und Tätigkeiten des Alltags führten so zu größerem Gebrauch und Verständnis von Zahl und Form.

In der Jungsteinzeit – geprägt durch die Domestizierung von Schaf, Ziege, Schwein, Rind und Pferd und den Ackerbau mit vom Rind gezogenen Pflug – werden geometrische Elemente in künstlerisch verfeinerter Form zur Herstellung keramischer Gefäße und ihres Schmuckes mit dekorativen Ornamenten verwendet, vgl. [Scriba/Schreiber 2000]. Von genauen astronomischen Beobachtungen, geometrischen Kenntnissen und erstaunlichen technischen Fähigkeiten zeugen die Bauten der Megalithkulturen jener Epoche im Westen und Süden Europas: Der berühmte Steinkreis von Stonehenge, der weniger bekannte Ring of Brogar (Abb. 1.1.1) und die Steinzeitsiedlung Skara Brae auf den Orkney-Inseln, die Kuppel- und Ganggräber mit Spiralmotiven in Irland und Frankreich, die Steinsetzungen in der Bretagne, die Taulas und Talayots auf Menorca (Abb. 1.1.2) und die Steinzeittempel auf Malta.



Abb. 1.1.1. Ring of Brogar, Steinsetzung auf den Orkney-Inseln, um 3500 v. Chr.
[Foto Alten]



Abb. 1.1.2. Tisch (Taula) von Trepucó, eingeschlossen von einem Steinkreis mit Menhiren, bei Mahon (Menorca) um 1000 v. Chr.
[Foto Alten]

Parallel dazu vollzogen sich die weitere Entwicklung des Zahlbegriffes und die Einführung von Zahlzeichen und primitiven Rechnungen. Die Bildung größerer Zahlen durch Addition läßt sich am Beispiel der von den australischen Kamilaroi benutzten Methode nachvollziehen:

1 heißt mal

2 heißt bulan, 4 heißt bulan-bulan

3 heißt guliba, 5 heißt bulan-guliba, 6 heißt guliba-guliba.

Zum Zählen brauchte man zunächst Zahlwörter. Dabei traten in den einzelnen Kulturkreisen große Unterschiede auf, die sich z.T. noch in den lebenden Sprachen wiederfinden. In der Frühzeit wurden die ersten Zahlwörter noch als Adjektive dekliniert, z. B. die Wörter für 1, 2, 3 und 4 im Indogermanischen. Das hat sich im Griechischen bis 4 (téttares, téttara) erhalten, während es im Lateinischen bei 3 (tres, tria) abbricht. Die Zwei hat immer eine besondere Rolle gespielt, sie tritt oft in mehreren Formen auf: z. B. gr. dýo und ampho, lat. duo und ambo, entsprechend noch englisch two und both, deutsch zwei und beide; ebenso als Ordnungszahl lat. secundus (der zweite, der folgende) und alter (der andere), was sich im Deutschen noch heute in „anderthalb“ (lat. sesqui-alter) und in der Algebra im Begriff „sesquilineare Form“ wiederfindet!

Die Entwicklung in Handwerk und Handel, aber auch von Streit um Eigentum an Vieh und Krieg (Zahl der Krieger, Waffen und Gefangenen) erforderte die Verwendung immer größerer Zahlen. Das führte zu immer neuen Zahlwörtern, zu deren schriftlicher Fixierung durch Zahlzeichen und Zahlschriften und zur Entwicklung von Zahlsystemen. Das Zählen mit den Fingern einer Hand oder beider Hände bescherte die Schwellen 5 und 10 und die Bündelung gereihter, einfacher Zeichen (Striche oder Kerben) wie 𓏺, 𓏺𓏺, 𓏺𓏺𓏺, 𓏺𓏺𓏺𓏺, 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 für 1, 2, 3, 4, 5 zu Zeichen wie ⋂ für 10 in Ägypten und zu den römischen Zahlzeichen V und X, wobei die obere Hälfte des X – das v anstelle des u verwendet – die oft gehörte Wendung „Ein X für ein U vormachen“ erklärt, während die uralte Bündelung 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 noch heute beim Notieren von Abstimmungen und anderen Vorgängen verwendet wird.

Interessant ist in diesem Zusammenhang die Bildung der über die Schwellen hinausführenden Zahlwörter für 11, 12, ..., 19 durch Addition: un-decem, undici, on-ze für 11, duo-decim, do-dici, dou-ze für 12, ... in den romanischen (und den slawischen) Sprachen, während es in den germanischen Sprachen besondere Wörter für elf und zwölf gibt, womit wohl auch die noch heute gebräuchliche Rechnung in Dutzend und Groß ($144 = 12^2$) und der Handel „en gros“ zusammenhängen. Bemerkenswert ist auch die subtraktive Zählweise undeviginti = eins von zwanzig (19) im Lateinischen, die sich in der Zahlschrift als XIX, aber auch schon bei IV = 5 - 1 = 4 und bei IX = $10 - 1 = 9$ findet. Die Fortsetzung dieser Bündelung führt auf das Dezimalsystem und drückt sich sprachlich wie schriftlich in neuen Wörtern und Zeichen wie C = 100 (Centum) und M = 1000 (Mille) aus.

Abweichend hiervon benutzten keltische Stämme – später auch die Mayas und die Azteken – die auf der Zählung von Fingern und Zehen eines Menschen beruhende Grundzahl 20 für das von ihnen entwickelte Zahlsystem, das heute noch in soixante-dix (60 + 10 für 70) und quatre-vingt (4 mal 20 für 80) im Französischen zutage tritt und sich im Namen „Hôpital des Quinze-Vingts“ eines alten Pariser Pflegehauses für dreihundert blinde Kriegsveteranen findet.

Hingegen stammt das in Abschnitt 1.3 beschriebene Sexagesimalsystem aus Mesopotamien und hat sich bis heute in unserer Zeitrechnung und Winkelmessung (60 Minuten à 60 Sekunden) erhalten.

Mit Hilfe dieser auf Bündelung und Reihung basierenden Zahlsysteme konnten immer größere Zahlen gebildet und eine zunächst noch primitive Arithmetik entwickelt werden. Daraus entstand allmählich die elementare Arithmetik, das Rechnen in den vier Grundrechenarten, auf deren Basis sich frühe Formen der Algebra bildeten.

So findet die Addition bereits ihren sichtbaren Ausdruck in der additiven Darstellung der natürlichen Zahlen, sei es bei der Reihung und Bündelung von Strichen und Kerben in steinzeitlichen Kulturen oder in den Schreibweisen der Zahlen im alten Orient. Auch die als schwieriger geltende Subtraktion – verkappt als durch Probieren gefundene Ergänzungen – findet sich schon in früher Zeit, später in römischen Zahlzeichen und Zahlwörtern. Peinlich werden jedoch lange Zeit Subtraktionen vermieden, die aus dem Bereich der natürlichen Zahlen heraus führen. Während negative Zahlen in China schon in der frühen Han-Zeit (um 100 v. Chr.) bei der Lösung von Systemen linearer Gleichungen vorkommen, erlangen diese Zahlen in Europa erst im hohen Mittelalter bei Leonardo von Pisa zur Bezeichnung von Schulden „Bürgerrecht“. Und selbst im 18. Jh. versuchte noch Fahrenheit bei der Einführung der nach ihm benannten Temperaturskala die Verwendung negativer Zahlen zu vermeiden, indem er den Gefrierpunkt des Wassers bei $+32°F$ festlegte! Hingegen sind die Multiplikation und das Rechnen mit Brüchen schon in den altorientalischen Kulturen gängige Operationen, zumeist begonnen als Verdopplung und Halbieren, wie dies auch heute noch bei uns im Schulunterricht vielfach üblich ist, wo auch – der historischen Entwicklung entsprechend – die Bruchrechnung meistens vor dem Rechnen mit negativen Zahlen behandelt wird.

Für weitere Einzelheiten zur Entstehung von Zahlwörtern, Zahlschriften und Zahlsystemen sei auf [Menninger 1958] und [Ifrah 1987] verwiesen. Von den im Niltal und in Mesopotamien entwickelten Zahlschriften, Zahlsystemen und Anfängen der Algebra wird in den folgenden Abschnitten berichtet.

1.2 Arithmetik und Algebra im alten Ägypten

Allgemeine Geschichte	Hauptstadt, Kulturgeschichte	Geschichte der Wissenschaft
Frühzeit ca. 3300–2740	*This* , Mastabas (rechteckiger flachgedeckter Hochbau aus Ziegeln)	Zahlzeichen bis 1 000 000, Hieroglyphen
König Menes um 2850 v. Chr.	*Memphis*, Mastabas, Stufenpyramide des Djoser, Hieroglyphen	
Altes Reich ca. 2740–2150	Pyramiden von Giseh und anderen Orten	Scheffelmaß, Gewichte
Erste Zwischenzeit ca. 2150–2040		
Mittleres Reich ca. 2040–1788	*Theben*, Malerei, Plastik, Literatur	Ältestes astronomisches Instrument, Holztafeln, Papyrus Moskau, Papyrus Rhind, Papyrus Kahun, Papyrus Theben
Zweite Zwischenzeit ca. 1788–1580 (Hyksoszeit)		Londoner Lederrolle
Neues Reich ca. 1580–1090	*Theben,* Tempel und Königsgräber, *El Amarna* Sonnenkult (Echnaton)	primitive Astronomie, Papyrus Rollin, Papyrus Harris
Dritte Zwischenzeit 1090–670		
Spätzeit 670–332	Assyrische Eroberung, saitisches Reich, Perserherrschaft	Demotische Papyri
332 v. Chr. bis 395 n. Chr. Hellenismus, Herrschaft der Ptolemäer und Römer	*Alexandria*, Mittelpunkt griechisch-hellenistischer Wissenschaft und Kultur	Euklid , Eratosthenes, Archimedes, Apollonius, Ptolemaios, Heron, Diophant

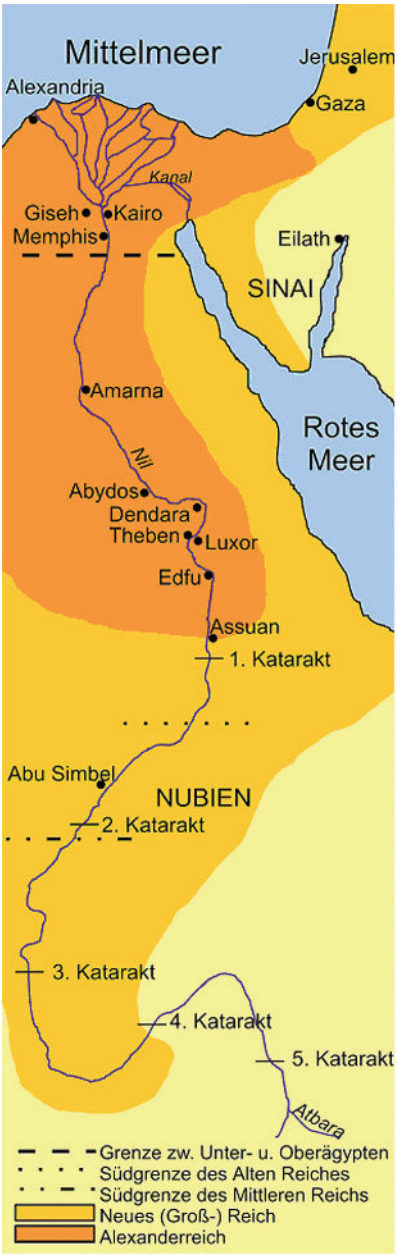




Abb. 1.2.1. Ägypten im Altertum (links); Obelisk im Amun-Tempel von Karnak (rechts). Nur wenige Obelisken stehen noch in Ägypten. Andere wurden verschenkt oder einfach abtransportiert: nach Paris, Rom, Istanbul, ...
[Foto Alten]

1.2.0 Abriß der kulturgeschichtlichen Entwicklung im Niltal

Mit der Vereinigung der Königreiche Unterägypten und Oberägypten durch König Menes beginnt die „eigentliche“ Geschichte Ägyptens und damit die der 30 ägyptischen Dynastien. Residenzstadt war zu dieser Zeit Memphis. Zu eben dieser Zeit entstand die erste Schrift der Ägypter, die Bilderschrift der sog. Hieroglyphen (gr. hieros = heilig, glyphe = Skulptur). Die aus Jahrtausenden hinterlassenen Baudenkmäler, Kunstwerke und die großartigen Pyramiden der Pharaonen zeugen von der enormen kulturellen Entwicklung im Nilgebiet. Die Monumente lassen Rückschlüsse auf die technischen und organisatorischen Fähigkeiten ihrer Erbauer zu. Herodot (484–425) berichtet, daß hunderttausend Menschen am Bau der Cheopspyramide zusammengearbeitet haben, um dieses gewaltige Bauwerk in der kurzen Zeit von zwei Jahren zu errichten. Archäologen schätzen heutzutage, daß etwa 10 000 bis 25 000 Menschen insbesondere während der Überschwemmungszeiten etwa 30 Jahre lang daran gearbeitet haben. Schriftdokumente aus der damaligen Zeit und Kultur sind neben Lederrollen vor allem die Papyri, die aus dem Mark der Papyrusstaude gewonnen wurden. Mittels eines gespaltenen Rohres wurden Texte und Berechnungen von einem „Schreiber“, der zu den Staatsbeamten gehörte und des Rechnens kundig sein mußte, mit gefärbter Tusche aufgeschrieben. Bedingt durch das trockene Klima Ägyptens sind Papyri vielfach erhalten geblieben, und deshalb verfügen wir über zahlreiche Urkunden. Diese historischen Dokumente sind in hieratischer Schrift (gr. hieratikos = priesterlich) verfaßt, einer Vereinfachung der Bilderschrift der Hieroglyphen, die meist von rechts nach links geschrieben wurde. Jedes Zeichen bedeutet einen oder mehrere aufeinanderfolgende Konsonanten (konsonantische Schrift), wobei die dazwischenliegenden Vokale zu erraten bzw. aus dem Kontext zu erschließen sind. Für die geschichtliche Hinterfragung der Mathematik sind drei der erhaltenen Dokumente wichtig:

1) Der Papyrus Rhind,

2) der Papyrus Moskau,

3) die Londoner Lederrolle.

Die beiden Papyri entstanden gegen Ende des Mittleren Reiches, wurden aber in der uns überlieferten Fassung erst in der Hyksoszeit niedergeschrieben bzw. kopiert. Aus dieser Zeit stammt auch die in London verwahrte Lederrolle. Die in diesen Dokumenten enthaltenen mathematischen Kenntnisse wurden zum Teil vermutlich schon wesentlich früher gewonnen, waren doch bereits zum Bau der großen Pyramiden umfangreiche Kenntnisse erforderlich. Leider sind jedoch aus der Zeit des Alten Reiches keine mathematischen Texte überliefert.

Die Mathematik der Ägypter entstand aus praktischen Bedürfnissen. Es wurden die verschiedensten Probleme aus dem Alltagsleben behandelt, mit denen die Bauern, Landvermesser, Architekten und Beamten zu tun hatten. Dazu gehörten z. B. die Berechnung von Flächen und Rauminhalten, etwa das Fassungsvermögen eines Speichers und die Berechnung des Getreides für eine

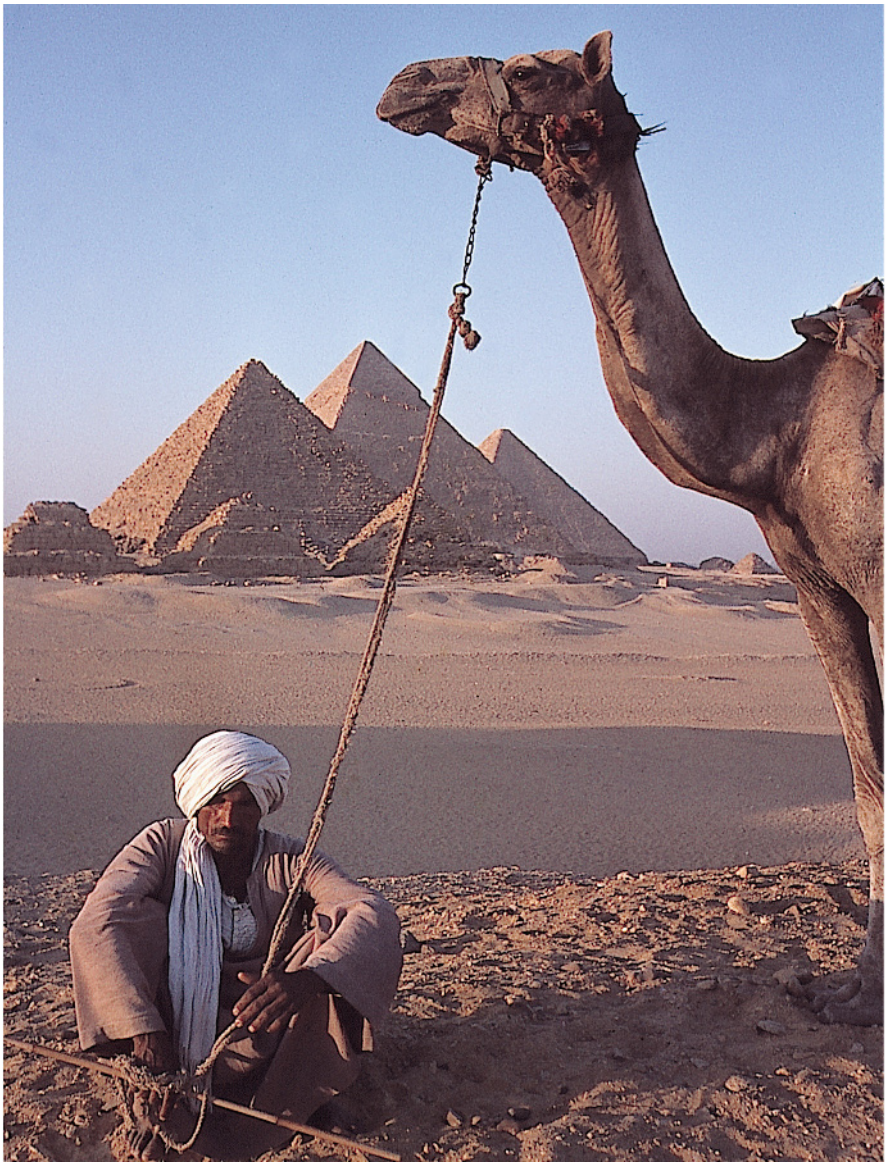


Abb. 1.2.2. Pyramiden von Gizeh, Ägypten
[Foto Alten]

bestimmte Menge Brot. Außerdem finden sich auch rein theoretische Aufgaben zur Einübung der schwierigen Technik der Bruchrechnung (Papyrus Rhind), deren Anwendung in vielfältigen Aufgaben erforderlich ist. Über die Erfindung der Geometrie durch die Ägypter berichtet Herodot, daß sie durch



Abb. 1.2.3. Ägyptischer Schreiber
(Ägyptisches Museum Kairo)[Foto Alten]

die ständigen Überflutungen des Nils gezwungen waren, ihre Felder immer wieder neu zu vermessen.

Wenngleich manche Ägyptologen diese Darstellung Herodots als Legende ansehen, dürfte die Entstehung der ägyptischen Geometrie auch durch dieses immer wiederkehrende Naturereignis veranlaßt worden sein.

Die entscheidende Epoche der „Mathematik in Ägypten“ lag im „Mittleren Reich“, zeitlich einzuordnen zwischen 2040–1788 v. Chr. (s. Zeittafel). Zwei Papyri, die als Lehrbücher der Mathematik galten, enthalten den größten Teil der uns bekannten Mathematik der Ägypter dieser Zeit:

1. Der Papyrus Rhind, überwiegend im Britischen Museum in London aufbewahrt. Teilstücke befinden sich in New York. Er wurde von dem schottischen Ägyptologen A. Henry Rhind im Jahre 1858 in Luxor erworben, der ihn dann

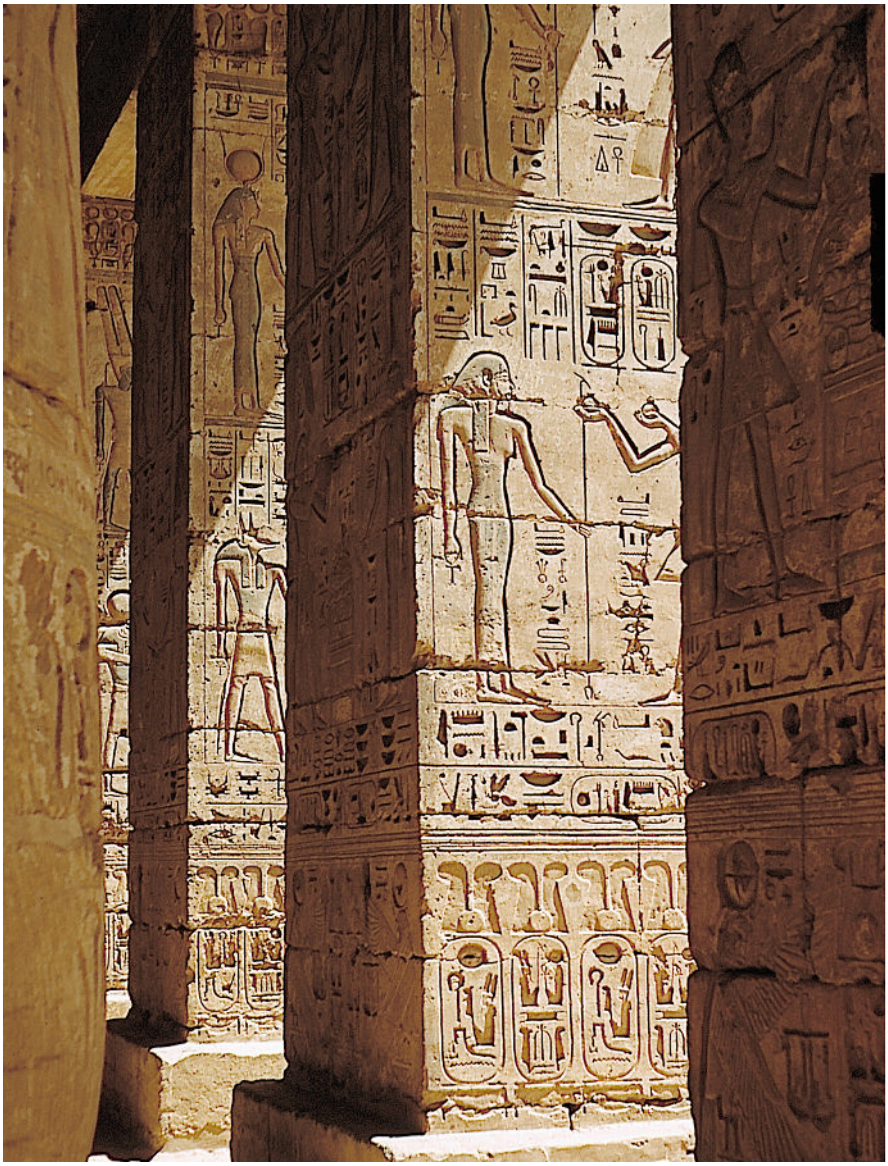


Abb. 1.2.4. Hieroglyphen in der Pfeilerhalle des Tempels in Medinet Habu (Theben, Oberägypten)
[Foto Alten]

dem Britischen Museum vermachte. Der vermutlich vom Schreiber Ahmes angefertigte Papyrus ist 5,34 m lang und 33 cm hoch. Er enthält eine Sammlung von 85 Aufgaben, die in Kapitel gegliedert sind, jedoch keine Überschriften

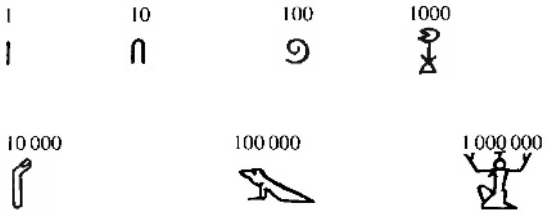
tragen. Um den Text analysieren zu können, muß man jede Aufgabe für sich behandeln, denn sie sind sehr unterschiedlich.

2. Der Moskauer Papyrus, der im „Museum der schönen Künste“ in Moskau aufbewahrt wird. Er stammt aus der Totenstadt Drah Abu'l Negga bei Theben (s. Landkarte) und wurde 1893 in Ägypten gekauft. Dieser Papyrus ist 5,44 m lang, 8 cm hoch und enthält eine Sammlung von 25 Aufgaben.

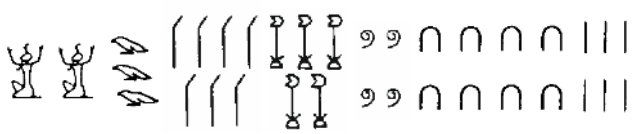
Neben den beiden erwähnten Quellen gibt es noch einige weniger umfangreiche mit spezieller Problematik wie z. B. zwei Holztafeln aus Achmim (jetzt in Kairo), die Umrechnungen für Getreide (in „Hekat“) und verschiedene arithmetische und geometrische Aufgaben enthalten. Eine Lederrolle (in London) ist mit einer Reihe von Stammbruchzerlegungen beschriftet. In Bedeutung und Umfang sind diese Quellen jedoch den genannten Papyri nicht gleichzusetzen.

1.2.1 Altägyptische Zahlzeichen

Die Zahlen werden im alten Ägypten additiv in einem Zahlsystem dargestellt, das auf der Basis 10 beruht – vermutlich, weil dies den 10 Fingern der Menschen entspricht. Für jede Zehnerpotenz bis 10^6 gibt es ein eigenes Zeichen in Gestalt einer Hieroglyphe:



So ist z. B.

$2375486 =$  ,

d. h. jedes Zeichen wird so oft gesetzt, wie die betreffende Zehnerpotenz in der Zahl vorkommt. Dabei ist es prinzipiell gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Zeichen angeordnet werden, aber die Ägypter verwendeten stets eine übersichtliche und ästhetisch ansprechende Anordnung.

Da die alten Ägypter Bruchrechnung (bis auf wenige Ausnahmen) nur mit Stammbrüchen betrieben, brauchten sie zur Kennzeichnung solcher Brüche ein besonderes Zeichen: sie setzten das Symbol  über den Nenner, also  für $\frac{1}{n}$. Für $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ verwendeten sie auch die Zeichen  bzw.  , für $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ die besonderen Symbole  bzw.  . In Anlehnung an die ägyptische Darstellung schreiben wir $\overline{n}$ für $\frac{1}{n}$ und $\overline{\overline{3}}$ für $\frac{2}{3}$.

1.2.2 Arithmetik im alten Ägypten

Zerlegung in Stammbrüche

Zum Verständnis der altägyptischen Methoden zur Lösung linearer und rein quadratischer Gleichungen ist die Kenntnis der von den Ägyptern benutzten Darstellung gewöhnlicher Brüche als Summe von Stammbrüchen und der von ihnen verwendeten Multiplikations- und Divisionsverfahren erforderlich. Diese werden deshalb hier kurz vorgestellt.

Der ägyptische Rechner stellte jeden Bruch $\frac{m}{n}(m, n \in \mathbb{N}, m, n > 1)$ mit Ausnahme von $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ als eine endliche Summe von Stammbrüchen dar, also von Brüchen der Form $\frac{1}{k}, k > 1$. Der Kürze halber nennen wir eine solche Summe eine Standardform. Der Ägypter benutzte die Summe anstelle des Bruches selbst. Um Standardformen für $\frac{m}{n}$ anzugeben, genügte es, Standardformen von Brüchen der Form $\frac{2}{n}$ zu kennen, weil jeder Zähler $m \in \mathbb{N}$ in der Form $m = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i$ (mit $a_i = 0$ oder 1 für $i = 0, \ldots, k$ und $k \in \mathbb{N}_0$) darstellbar ist. Im Papyrus Rhind gibt es eine Tabelle mit Standardformen für Brüche der Form $\frac{2}{n}$ mit ungeradem Nenner $n, 5 \leq n \leq 101$.

Die Tabelle gibt z. B. an: $\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$.

Es ist klar, daß diese Darstellung nicht eindeutig ist. Beispielsweise gilt die Gleichung

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt $\frac{2}{97} = \frac{2}{98} + \frac{2}{97 \cdot 98} = \frac{1}{49} + \frac{1}{97 \cdot 49} = \frac{1}{49} + \frac{1}{4753}$.

Das Problem der Zerlegung von Brüchen in Standardform umfaßt ungefähr ein Viertel des Textes im Papyrus Rhind. Die Zerlegungen lassen sich nicht durch ein einheitliches Prinzip erklären; offensichtlich wurden bei der Auswahl verschiedene Gesichtspunkte berücksichtigt.

Die betrachteten Zerlegungen sind Darstellungen durch endlich viele Stammbrüche. Zerlegungen in unendlich viele Stammbrüche haben die Ägypter nicht betrachtet, da sie außerhalb ihrer Vorstellungen und Möglichkeiten lagen.

Multiplikationsverfahren

Die Multiplikationsverfahren waren bei den Ägyptern im Grunde nichts anderes als die sukzessive Verdoppelung und lassen sich wie folgt in moderner Schreibweise darstellen: Um $a \cdot b$ zu finden, wobei $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Q}^+$, wird zunächst a in Dualdarstellung ausgedrückt, also

$$a = \sum_{i=0}^{n} a_i 2^i, \ a_i = 0 \text{ oder } 1, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

dann gilt

$$a \cdot b = a_0 b + a_1 2b + \ldots + a_n 2^n b.$$

Beispiel 1.2.1: Wie die Ägypter die Multiplikation $13 \cdot 11$ ausgeführt haben:

Text		Erläuterung des Verfahrens
/1	11	Zuerst wurde 11 mit 1, dann mit 2,
2	22	mit 4, schließlich mit 8 multipliziert,
		(denn 8 ist die größte Zweierpotenz, die
		kleiner als (a =13) ist.
/4	44	dann werden die mit / bezeichneten Ergebnisse
/8	88	(1, 4, 8) addiert: $(1 + 2^2 + 2^3)11 = 143$.

Divisionsverfahren

Die ägyptischen Rechner dachten auch in ihren Divisionsverfahren meistens im Dualsystem [Eves 1976, S. 40, 48]. Wenn der zu berechnende Bruch eine endliche Darstellung im Dualsystem besaß, hatten sie keine Schwierigkeiten, diese Darstellung zu bestimmen.

Beispiel 1.2.2: Papyrus Rhind Aufgabe 70 [Vogel 1958, S. 44].
Für die Berechnung von $100 : 7\,\bar{2}\bar{4}\bar{8}$ sei $d = 7\ \bar{2}\bar{4}\bar{8} = 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Text		Erläuterung des Verfahrens
1	$7\ \bar{2}\ \bar{4}\ \bar{8}$	$1 \cdot d$
2	$15\ \bar{2}\ \bar{4}$	$2 \cdot d$
/4	$31\ \bar{2}$	$4 \cdot d$
/8	63	$8 \cdot d$
/ $\bar{\bar{3}}$	$5\ \bar{4}$	$\frac{2}{3} \cdot d$
		Die Summe der letzten drei Zeilen ergibt:
		$\frac{2}{3}d + 8d + 4d = 99\frac{3}{4}$
		Es fehlt noch $\frac{1}{4}$ (von 100).
$\overline{63}$	$\bar{8}$	Im vorletzten Produkt ist $8d = 63$, also $\frac{1}{63}d = \frac{1}{8}$.
/ $\overline{42}\ \overline{126}$	$\bar{4}$	$\frac{2}{63}d = \frac{1}{4}$, $\frac{2}{63}$ läßt sich nach der Tabelle im Papyrus
		Rhind zerlegen gemäß $\frac{2}{63} = \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$.

Die Summe der mit / markierten Zahlen liefert das Ergebnis:

$$100 : 7\ \bar{2}\ \bar{4}\ \bar{8} = 4 + 8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{126} = 12\ \bar{\bar{3}}\ \overline{42}\ \overline{126}.$$

Dieses Beispiel zeigt, wie die Ägypter die Stammbruchtabelle für ihre Berechnungen benutzten.

In dem obigen Beispiel sagt der Schreiber „*verdoppele den Betrag, um* $\frac{1}{4}$ *zu erhalten*“. Das zeigt, daß sie sich den Bruch $\frac{m}{n}$ einerseits als $m \cdot \frac{1}{n}$ und andererseits als $m : n$ vorstellten. Das bedeutet, daß sich die Ägypter einen Bruch als Vielfaches eines Stammbruches, aber auch als Verhältnis zweier natürlicher Zahlen (z. B. $2 \cdot \frac{1}{63} = \frac{2}{63}$) vorstellen konnten, und dann, wenn nötig, $\frac{2}{n}$ durch eine Standardform ersetzten (wie im obigen Beispiel $\frac{2}{63} = \overline{42}\ \overline{126}$).

Mit dem Verdoppeln und Halbieren einer Zahl begann die Menschheit sehr früh. Auch heutzutage beginnen die Kinder in der Schule beim Einstieg in die

Bruchrechnung meist mit Halbierung. So ist zu erklären, daß die alten Ägypter versuchten, echte Brüche als Summe von Brüchen der Gestalt $\frac{1}{2^k}$ $(k \in \mathbb{N})$ darzustellen.

Wenn der Bruch keine endliche Darstellung im Dualsystem besaß, suchten die Ägypter Lösungen ad hoc, da sie den Begriff der unendlichen Reihe nicht kannten.

Beispiel 1.2.3: Aufgabe 36 aus Papyrus Rhind [Vogel 1958, S. 36].
Bestimmung einer Standardform des Quotienten $\frac{30}{106}$:

1	106
$\bar{2}$	53
/ $\bar{4}$	26 $\bar{2}$
/ 106	1
/ $\bar{53}$	2
/ 212	$\bar{2}$

Also ist $\frac{30}{106} = \frac{1}{4} + \frac{1}{53} + \frac{1}{106} + \frac{1}{212}$.

Fortgesetzte Halbierung würde auf einen unendlichen Dualbruch führen:

$$\frac{30}{106} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^{10}} + \cdots$$

1.2.3 Primitive Algebra

Die Ägypter konnten lineare Gleichungen mit einer Unbekannten und rein quadratische Gleichungen durch die sogenannte „Hau-Rechnung“ lösen. (Das ägyptische Wort „aha“ bedeutet Quantität, Haufen, Menge. Dieses Wort wurde früher falsch als „Hau“ ausgesprochen, daher die Bezeichnung „Hau-Rechnung“).

Solche Gleichungen traten schon sehr früh bei der Lösung praktischer Probleme auf. Sollte etwa ein Stück Land der Größe c derart auf zwei Erben aufgeteilt werden, daß der eine viermal so viel erhielt wie der andere, so war die lineare Gleichung $x + \frac{x}{4} = c$ zu lösen (vgl. Beispiel 1.2.4). Entsprechend führte die Bestimmung von Länge und Breite einer rechteckigen Ackerfläche der Größe c, deren Breite $\frac{3}{4}$ der Länge beträgt, auf die quadratische Gleichung $\frac{3}{4}x^2 = c$ (vgl. Beispiel 1.2.6).

Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen wurden meistens mit der Methode des einfachen falschen Ansatzes gelöst, die auch bei den Babyloniern verwendet wurde und in Abschnitt 1.3.2 erläutert wird.

Diese Methode wurde in Ägypten zur Lösung von Gleichungen der Gestalt

$$ax = c \ (a \in \mathbb{Q}^+, c \in \mathbb{N})$$

verwendet. Man wähle eine „geeignete“ Zahl x_1, setze diese für x in die Gleichung ein und erhält $ax_1 = c_1$.

Im Falle $c \neq c_1$ ist x_1 keine Lösung. Man hat also einen „falschen Ansatz“ gemacht. Dennoch hilft diese Methode weiter. Um die richtige Lösung zu finden, muß

$$\frac{x}{x_1} = \frac{c}{c_1}$$

sein, also

$$x = x_1 \cdot \frac{c}{c_1}.$$

„Geeignet“ ist eine Zahl x_1, die auf eine natürliche Zahl c_1 führt.

Beispiel 1.2.4: Papyrus Rhind, Aufgabe 26

„*Eine Größe und ihr Viertel ergeben zusammen 15. Was ist die Größe*?“

(In der heute üblichen Schreibweise: $x + \frac{x}{4} = 15$.)

Lösung: „*Rechne mit 4*“, gewählt wird also $x_1 = 4$ (diese Zahl ist geeignet, da ihr Viertel ganzzahlig ist). Es ist

$$x_1 + \frac{x_1}{4} = 5, \text{ d. h. } c_1 = 5.$$

Dann wird der Quotient $\frac{c}{c_1}$ gebildet und das Ergebnis mit der „falschen Lösung“ x_1 multipliziert und man erhält $x = 4 \cdot 3 = 12$. Im Text wird sogar noch die Probe durchgeführt:

$$12 + \frac{1}{4} \cdot 12 = 15.$$

Diese Methode wurde noch Anfang des 20. Jhs. in Schulen gelehrt.

Beispiel 1.2.5: In Papyrus Rhind, Aufgabe 24 wird die Gleichung $x + \frac{x}{7} = 19$ wie folgt gelöst: Gewählt wird $x_1 = 7$, dann erhält man $x_1 + \frac{x_1}{7} = 8$. Nach der Formel der Methode des falschen Ansatzes ist $x = 7 \cdot \frac{19}{8} = 16\ \bar{2}\ \bar{8}$ die Antwort. Im Papyrus Rhind wurde die Lösung ausführlich in drei Schritten geschrieben:

	Text		Erklärung des Verfahrens
1.	/1	7	Man teilt den Haufen (x) in 7 Teilhaufen ($\frac{x}{7}$)
	/$\bar{7}$	1	$\frac{x}{7}$ ist ein Teilhaufen
2.	/1	8	Der zweite Schritt ist
	/2	16	die Berechnung von $\frac{19}{8}$
	$\bar{2}$	4	$\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
	/$\bar{4}$	2	wie in Beispiel 1.2.1
	/$\bar{8}$	1	bereits gelöst.
3.	/$\bar{1}$	2 $\bar{4}$ $\bar{8}$	Der dritte Schritt ist die Berechnung von
	/2	4 $\bar{2}$ $\bar{4}$	$7 \cdot \frac{19}{8} = 16\,\bar{2}\,\bar{8}$, wie das Beispiel
	/4	9 $\bar{2}$	im Multiplikationsverfahren zeigt.

Am Ende kommt die Probe, wobei der erste Schritt benutzt wird:

$$\begin{array}{rcl} & 1 \quad 16\ \bar{2}\ \bar{8} & \\ \text{Probe:} & \bar{7} \quad 2\ \bar{4}\ \bar{8} \ \ldots\ldots & \begin{pmatrix} & 7\cdot\frac{19}{8} \\ + & \frac{19}{8} \\ = & 19 \end{pmatrix} \\ & 19 & \end{array}$$

Man vermutet, daß die Ägypter diese Aufgabe durch die Methode des einfachen falschen Ansatzes gelöst haben. Den ersten Schritt (erste Zeile) kann man so interpretieren: Ein Haufen ist sieben, also ist (zweite Zeile) ein siebtel Haufen eins. Zusammen haben wir acht Haufen ($x_1 + \frac{x_1}{7} = 8$).

Im zweiten Schritt berechneten sie $\frac{19}{8}$ mit der Methode des einfachen falschen Ansatzes. Schließlich berechneten sie gemäß dieser Methode $7\cdot\frac{19}{8}$ (3. Schritt).

Das letzte Beispiel zeigt anschaulich den Zusammenhang von arithmetischen Operationen und der Algebra bei den Ägyptern, denn ihre Algebra baute darauf auf.

Aus Papyrus Rhind ist uns eine allgemein beschreibende Formel für folgende Aufgabe überliefert worden. Sie lautet:

$\frac{2}{3}$ *zu machen von einem Stammbruch.*

(Gemeint ist, wie man $\frac{2}{3}$ eines Stammbruches finden kann.) Die Lösung wird so beschrieben: *Wenn dir gesagt ist, was ist* $\frac{2}{3}$ *von* $\frac{1}{5}$ *, so mache es zweimal und sechsmal. Dies ist sein* $\frac{2}{3}$. („sein $\frac{2}{3}$“ bedeutet $\frac{2}{3}$ des Stammbruches.) *So muß jeder Stammbruch, der vorkommen mag, behandelt werden* [Vogel 1958, S. 43]. In moderner Schreibweise: Ist x der Stammbruch, so ist $\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x$. In der im Papyrus Rhind angegebenen Tabelle für $\frac{2}{n}$ sind alle durch drei teilbaren Nenner nach obigem Muster zerlegt worden.

Rein quadratische Gleichungen

Beispiel 1.2.6: Papyrus Moskau, Aufgabe 6

Gegeben sei ein Rechteck mit Länge x und Breite y, $y = \frac{3}{4}x$, Inhalt 12.

Gesucht sind x und y. Man erhält $12 = \frac{3}{4}x^2$, also $x = 4$.

Beispiel 1.2.7: Ein Problem aus dem Papyrus Theben aus der Zeit von 1995–1788 v. Chr. (Berliner Papyrus 6619) [Waerden 1966 b, S. 46]:

Gegeben seien zwei Quadrate mit den Seiten x und y, wobei $y = \frac{3}{4}x$ (im Text steht $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ anstatt $\frac{3}{4}$), $x^2 + y^2 = 100$. Im Text werden x und y durch die Methode des einfachen falschen Ansatzes wie folgt berechnet:

„Nimm ein Quadrat mit Seite 1 und nimm $\frac{3}{4}$ *von 1, das ist* $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ *als Seite der anderen Fläche. Multipliziere* $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ *mit sich selbst, das ergibt* $\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$ *. Wenn also die Seite der einen Fläche als 1, die der anderen als* $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ *angenommen ist, addiere man die beiden Flächen: Ergebnis* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$. *Ziehe daraus die Wurzel* [1]*, das ist* $1 + \frac{1}{4}$ *. Ziehe die Wurzel*

[1] Offenbar kannten die Ägypter im Mittleren Reich bereits den Begriff „Wurzel“, allerdings nur für Zahlen, deren Quadrat als Quadrat einer rationalen Zahl gegeben ist.



Abb. 1.2.5. Mengenangaben im Wandrelief des Grabes eines Königssohnes im Tal der Königinnen in Theben
[Foto Alten]

aus der gegebenen Zahl 100, das ist 10. Wie oft geht $1+\frac{1}{4}$ *in 10 auf ? Es geht 8 mal.“*

In heutiger Schreibweise: $100 = x^2+y^2 = \frac{25}{16}x^2$. Sei $x = 1$, dann ist $\frac{25}{16}x^2 = \frac{25}{16}$, aber $\frac{25}{16}x^2 = 100$; deshalb $\frac{5}{4}x = 10$, also $x = 8,\ y = 6$.

Dieses Beispiel zeigt, daß sich das Divisionsverfahren bei den Ägyptern nicht nur auf Stammbruchzerlegung, sondern auch auf die Lösung einer Gleichung bezieht.

In diesem Papyrus kommt das Fachwort „Größe“ für Unbekannte vor, indem zwei Unbekannte als „die erste Größe“ und „die zweite Größe“ bezeichnet werden.

Diese Bezeichnung wurde rund 2000 Jahre später von Diophant als „erste Zahl“ und „zweite Zahl“ für zwei Unbekannte benutzt.

Aus der Spätzeit stammen die Aufgaben Nr. 34 und 35 im Papyrus Kairo, J.E. 89137 und 89140 (ca. 3. Jh. v. Chr.). Beide sind spezielle Formen der folgenden Aufgabe:

In einem Rechteck sind die Fläche und die Länge der Diagonalen gegeben, also $xy = \alpha, x^2 + y^2 = \beta^2$, wobei α und β bekannte positive Zahlen, x und y die Länge bzw. die Breite des Rechtecks sind. Um x und y zu ermitteln, werden im Text zunächst (wie bei den Babyloniern) $x+y$ und $x-y$ berechnet.

Wesentliche Merkmale der Algebra in Ägypten

Die Ägypter wußten, wie man einen Bruch in eine „Standardform“ zerlegen kann und höchstwahrscheinlich, daß eine solche Zerlegung nicht eindeutig ist. Die Stammbrüche bildeten die Bausteine ihrer Rechenoperationen.

Der Begriff „Beweis“ war ihnen fremd, sie gaben Handlungsanweisungen zur Berechnung anhand konkreter Beispiele, ohne jedoch die zugrunde liegende Methode zu begründen. Ihre Rechtfertigung bestand lediglich in der Probe zur Bestätigung der konkret durchgeführten Rechnung.

Wahrscheinlich waren sie in der Lage, ein allgemeines Verfahren anhand von speziellen Beispielen zu entwickeln. Dies ist bemerkenswert, denn es kann als erster Schritt zur Abstraktion betrachtet werden.

Die Ägypter konnten lineare Gleichungen lösen, rein quadratische Gleichungen nur dann, wenn dazu die Wurzel aus dem Quadrat einer rationalen Zahl gezogen werden mußte.

Das algebraische Denken als eine Abstraktion der normalen Rechenoperationen gab es bei den Ägyptern nur im Fall der „Hau-Rechnung“ (vgl. Algebra in China). Ansonsten dachten sie völlig konkret und arbeiteten mit Zahlenbeispielen.

Die Art der Multiplikation und die Stammbruchrechnung der Ägypter wurde von den Griechen übernommen.

Die Methode des einfachen falschen Ansatzes wurde bereits von den Babyloniern verwendet, später benutzten sie die Chinesen, Inder und Moslems und im Mittelalter die Europäer.

1.3 Mesopotamische (Babylonische) Algebra

	Allgemeine Geschichte	Kulturgeschichte & Geschichte der Wissenschaft
Um 3200 v. Chr.	Einwanderung der Sumerer	Bilderschrift, Keilschrift, Tempelbau, Kanäle
3000–2700 v. Chr.	Sumerische Stadtstaaten	Keramik, farbige Mosaike, Stelen, Weihetafeln, Schrifttafeln mit Zahlen, Sexagesimalsystem,
ca. 2700–1900	Einwanderung und Herrschaft der Akkader und anderer semitischer Völker	metrologische Tabellen, Rechentafeln
ca. 2350–2300	Sargon I	
ca. 2150–2050	Herrschaft der Gutäer	
2050–1958	Neusumerisches Reich	Sexagesimales Positionssystem
1900–1600	Altbabylonisches Reich	Erste bekannte Aufgabentexte (Tell Harmal)
1728–1686	König Hammurapi	Bauten, Neuordnung der Gesetze, Hochblüte der Algebra und Geometrie, Texte aus Susa
1600–1250	Hethiter und Kassiten in Mesopotamien	Astronomische Berechnungen und Beobachtungen
1375–1047	Mittelassyrisches Reich	Zikkurate, königliche Residenz Assur, Reliefdarstellungen
883–612	Neuassyrisches Reich	Residenzen Nimrud, Ninive
625–539	Neubabylonisches Reich	Blüte von Astrologie und Astronomie
539	Kyros II (der Große) erobert Babylon, persische Herrschaft	Ein inneres Lücken-Zeichen für Null, Höhepunkt der Astronomie
330	Alexander der Große erobert Babylon	Hellenismus, Übernahme des Sexagesimalsystems
323	Tod Alexanders in Babylon, danach regieren Seleukiden in Mesopotamien	

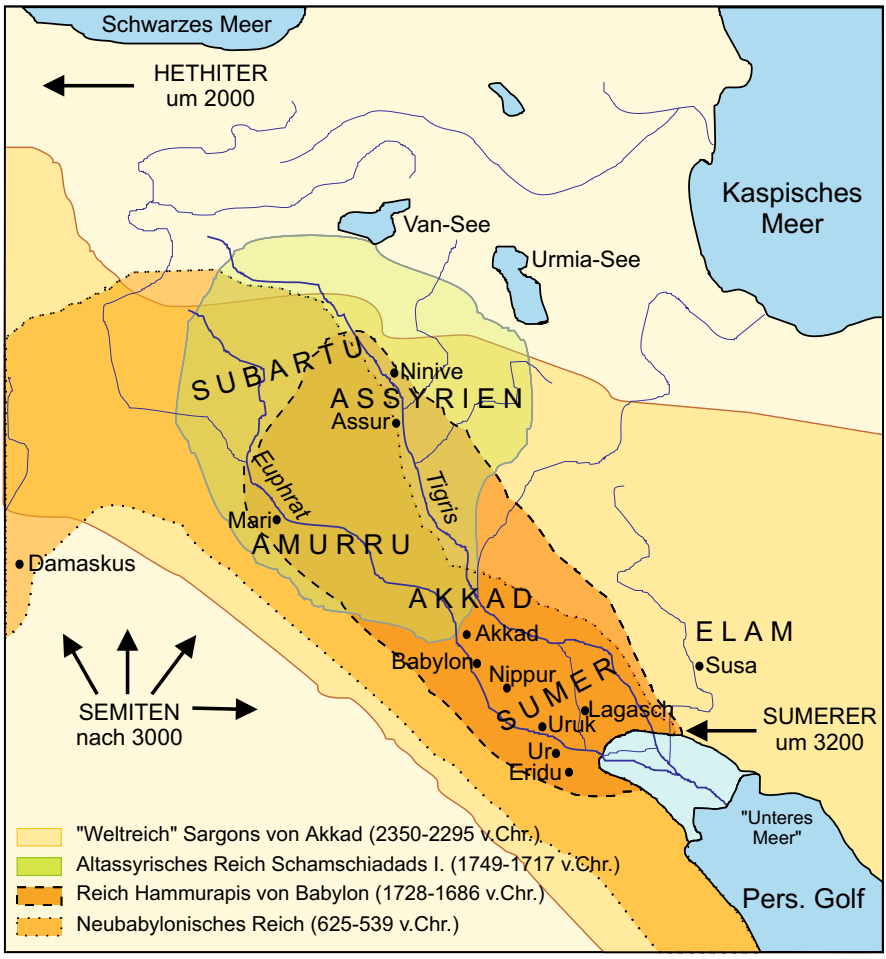


Abb. 1.3.1. Mesopotamien

1.3.0 Entwicklung früher Hochkulturen in Mesopotamien

Die ersten Hochkulturen der Menschheit entstanden dort, wo Fruchtbarkeit, Klima, Ackerbau und Viehzucht eine seßhafte Lebensweise ermöglichten: in den Oasen längs der großen Flüsse in der heißen Zone beidseits des nördlichen Wendekreises, also im Niltal, im Tal des Indus und im Land zwischen den beiden Strömen Euphrat und Tigris, in Mesopotamien.

Die älteste bekannte Hochkultur entstand im dritten Jahrtausend im Mündungsgebiet des Euphrat. Sie wurde von den dort seßhaft gewordenen Sumerern entwickelt. Sie gründeten Stadtstaaten und errichteten den von ihnen verehrten Gottheiten auf hohen Terrassen monumentale Tempel aus Ziegeln.

In ihnen residierte der Lugal, der Stadtfürst, zugleich oberster Priester und weltlicher Herrscher. Ihm unterstand die Verwaltung des Tempels und der Stadt. Vorräte wurden angelegt, in Tonkrügen aufbewahrt, amtlich gekennzeichnet durch Stempelsiegel, die in den weichen Ton gedrückt worden waren. Auf Tontafeln wurden die Bestände durch keilförmige Zeichen registriert.

Die Keilschrift war geboren und mit ihr die Zeichen für Zahlen zur Angabe von Vorräten an Getreide, Öl und Wein, zur Beschreibung von Beständen an Eseln, Schafen und Ziegen, an Waffen und Baumaterial.

Die ältesten überlieferten Tafeln mit Zahlzeichen in sumerischer Keilschrift entstanden um 2900 v. Chr. in Uruk: erste Dokumente der in der Folgezeit zu erstaunlicher Blüte entwickelten Mathematik in Mesopotamien. Hier wurde zum ersten Mal in der Geschichte der Menschheit ein Positionssystem (Stellenwertsystem) zur Darstellung natürlicher und gebrochener Zahlen entwickelt, das auf der Basis 60 beruhende Sexagesimalsystem. Im Zusammenhang damit entstand die noch heute übliche Einteilung der 24 Stunden eines Tages in jeweils 60 Minuten und die Aufteilung jeder Minute in 60 Sekunden sowie die Einteilung des Kreises in 360 Grad.

Den sumerischen Stadtstaaten und Dynastien folgten das Mesopotamien, Teile Syriens und Kleinasiens sowie Elam umfassende Weltreich Sargons I. von Akkad (2350–2300) und seiner Erben, die Fremdherrschaft der Gutäer aus



Abb. 1.3.2. Schriftdenkmal des Königs Kilamuwa in nordsemitisch/altphönikischer Schrift (9. Jh. v. Chr., Nordsyrien, Pergamon-Museum Berlin)
[Foto Alten]



Abb. 1.3.3. Ausschnitt mit Keilschrift aus einem Relief im Palast von Nimrud: König Assurnasirpal II. bei kultischer Handlung (9. Jh. v. Chr., Mesopotamien, Pergamon-Museum Berlin)
[Foto Alten]

dem Iran (2150–2050) und die Wiederherstellung des akkadisch-sumerischen Reiches unter der dritten Dynastie von Ur (2050–1950).
Die seit 2000 aus Kanaan eingewanderten Semiten gründeten im mittleren Verlauf von Euphrat und Tigris die Stadt Babylon (von Babili = Gottespforte), Zentrum des zur beherrschenden Macht in Mesopotamien aufgestiegenen Altbabylonischen Reiches, das unter dem durch seine Gesetzgebung berühmt gewordenen König Hammurapi (1728–1686) sogar das am oberen Tigris entstandene Altassyrische Reich zum Vasallenstaat unterwarf, aber um 1530 durch Einfälle der Hethiter aus Kleinasien und der Kassiten aus dem Iran und schließlich durch die Herrschaft der Elamiter sein Ende fand. Kultur- und Verwaltungssprache war in dieser Zeit das in akkadischer Keilschrift geschriebene Akkadische – glanzvoller Beleg ist das im Palast von Mari gefundene Archiv der 20 000 Tontafeln aus der Zeit des Hammurapi.

Im „Goldenen Zeitalter“ der elamitischen Herschaft um 1250 entstand die neue Stadt Dar-Untasch mit der gewaltigen Zikkurat von Tschogha Sambil. Diese Stufenpyramide – bei Susa (Shush) in der Provinz Khuzistan des Iran gelegen – wurde erst 1934 durch Luftaufnahmen entdeckt (vgl. Abb. 1.3.4). Sie ist weniger zerstört und großartiger als alle anderen Zikkurats des Zweistromlandes. An vielen Ziegeln der Mauern haben die Texte in Keilschrift die Zeiten überdauert (vgl. Abb. 1.3.5).

Der fast 800 Jahre währenden Vorherrschaft der Assyrer in Mesopotamien (Mittelassyrisches Reich (1375–1047) und Neuassyrisches Reich (883–612)) und den brutalen Kriegs- und Vernichtungszügen der grausamen Herrscher von Assur und Ninive - Salmanassar I., Tiglatpileser I., Assurnasirpal II., Sargon II., Sanherib und Asarhaddon, um nur einige Namen zu nennen – wurde erst durch die Zerstörung Assurs (614) und Ninives (612) ein Ende gesetzt. König Nabopolassar führte das sog. Neubabylonische Reich (625–539) zu höchster Blüte. Mesopotamien, Elam, Syrien und Palästina gehörten zu diesem Reich, die gefangenen Juden weinten an den Wassern von Babylon. Die Astronomie der Chaldäer und die zur Beschreibung der Himmelsbeobachtung unerläßliche Mathematik erfuhren eine ungeahnte Blüte: Systeme linearer Gleichungen, gewisse quadratische und kubische Gleichungen wurden gelöst, erstaunliche Näherungswerte für $\sqrt{2}$ gefunden und vieles andere mehr.

Die Eroberung Mesopotamiens durch die Perser (539) unter Kyros II. brachte das Ende selbständiger Reiche in Mesopotamien: Babylonien wurde persische Provinz und im Jahre 331 Teil des Weltreiches Alexanders des Großen.

Weil die in Mesopotamien gefundenen Dokumente mathematischen Inhalts zumeist aus dem Altbabylonischen oder dem Neubabylonischen Reich stammen, ist für die im Laufe von 1500 Jahren entwickelte mesopotamische Mathematik die Bezeichnung „Babylonische Mathematik“ weitgehend üblich geworden.

Als Quelle der mesopotamischen Mathematik sind Tontafeln erhalten, in welche Bildzeichen mit Griffeln eingeritzt wurden. Später drückte man keilförmi-



Abb. 1.3.4. Zikkurat (Stufenturm) von Tschogha Sambil, religiöses Zentrum der Elamiter um 1250 v. Chr.
[Foto Pakzad]

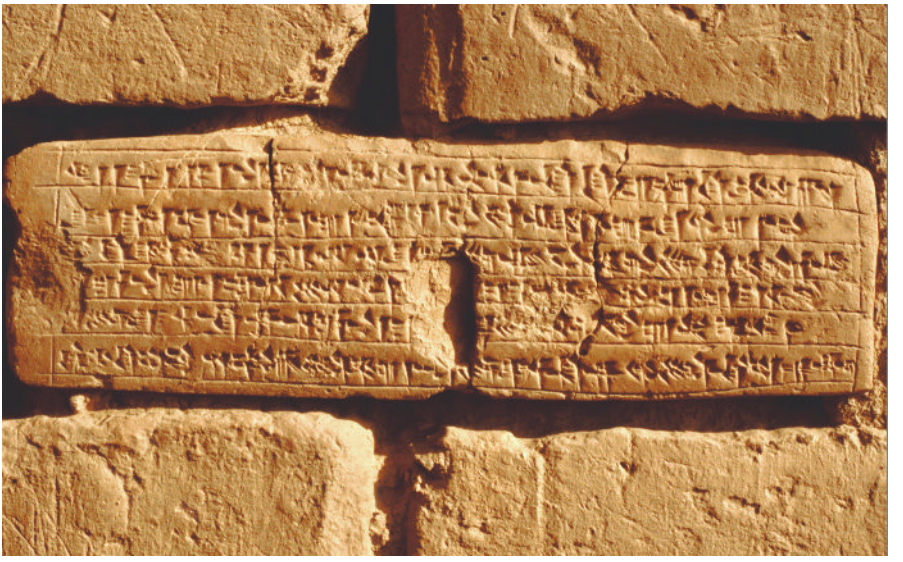


Abb. 1.3.5. Elamitische Keilschrift an der Zikkurat von Tschogha Sambil (um 1250 v. Chr.)
[Foto Alten]



Abb. 1.3.6. Unsterbliche Wache am Palast des Darius in Susa (Pergamon-Museum Berlin)
[Foto Alten]

ge Griffel in den noch weichen Ton, daher der Name „Keilschrift“. Die Texte unterscheiden sich in Tabellen und Aufgabensammlungen. Aufzufinden sind diese wichtigen Dokumente an folgenden Stellen:

British Museum, London (BM),
Antiquités Orientales, Louvre, Paris (AO),
Vorderasiatische Abteilung der Staatlichen Museen, Berlin (VAT),
Yale Babylonien Collection der Yale Universität, New Haven (YBC),
Bibliothéque Nationale et Universitaire, Straßburg (SKT).

Sie sind dort mit der Abkürzung der Sammlung versehen, in welcher sie aufzufinden sind, ebenfalls mit den Inventarnummern. Insbesondere hat Otto Neugebauer seit 1935 die mathematischen Texte übersetzt und veröffentlicht.

Wir besitzen viele Zeugnisse der mesopotamischen und einige der ägyptischen Mathematik, wir kennen auch ziemlich genau die Entwicklung der alten Kulturen, jedoch kennen wir die Schöpfer der mathematischen Erkenntnisse nicht. Erst bei den Griechen können wir beginnen, die mathematischen Errungenschaften einer bestimmten Person oder Schule zuzuordnen.

Die babylonischen Keilschrifttexte mathematischen Inhalts haben die Form einer Vorschrift oder eines Rezeptes. In den Aufgaben wird mit konkreten Zahlen gerechnet. Die Texte sind jedoch so formuliert, daß an ihrer Stelle auch andere Zahlen oder gar Variablen (Platzhalter) eingesetzt werden können, für welche die Babylonier aber keine Zeichen hatten. Einige Aufgaben bzw. Probleme lassen Rückschlüsse auf theoretisches Denken zu, z. B. die Betrachtung von Gleichungen vierten oder höheren Grades.

1.3.1 Zahlzeichen in Keilschrift

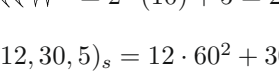
Die in Mesopotamien gebräuchliche Keilschrift wurde auch zur Darstellung von Zahlen benutzt. Das von den Sumerern schon verwendete Zahlsystem ist – grob gesprochen – das Sexagesimalsystem (Basis 60), in Wirklichkeit aber ein gemischtes Dezimal- und Sexagesimalsystem, denn sie verwendeten das durch senkrechten Druck eines runden Griffels in Ton entstehende Zeichen  für 10, das durch schräg gehaltenen Griffel geprägte Zeichen  für 60 (in kleinerer Form auch für 1) und setzten bis zu 5 mal nebeneinander (also für 10, 20, ..., 50) und bis zu 9 mal (für 60, 120, ..., 540). Für 600 benutzten sie dann den Abdruck eines größeren Griffels.

Diese altsumerischen Zahlzeichen wurden später durch die mit einem angeschärften Griffel entstehenden Zeichen ersetzt:

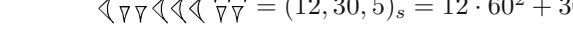
Keil für $1, 60, 60^2, \ldots$, aber auch für $\frac{1}{60}, \frac{1}{3600}, \ldots$;

Winkelhaken für $10, 10 \cdot 60 = 600, 10 \cdot 60^2 = 36000, \ldots$

In den Keilschrifttexten in der Zeit 2000–200 v. Chr. wurden die ganzen Zahlen von 1 bis 59 nach der „Gruppierungsmethode“ im sexagesimalen Positionssystem geschrieben, indem der Winkelhaken für 10 so oft gesetzt wurde, wie Zehner in der Zahl auftraten, der Keil für 1 so oft, wie Einer auftraten. Die anderen ganzen Zahlen und Brüche wurden sexagesimal geschrieben, z. B.



$$= 2 \cdot (10) + 5 = 25$$



$$= (12, 30, 5)_s = 12 \cdot 60^2 + 30 \cdot 60 + 5 = 45\,005$$

Die Darstellung einer Zahl a im Sexagesimalsystem bezeichnen wir mit a_s. Zahlen ohne untere Indizes stehen im Dezimalsystem. Es ist klar, daß wir für die Zahlen $1, \ldots, 59$ keine Indizes zu schreiben brauchen, weil diese Zahlen in beiden Systemen dieselbe Darstellung haben.

In einem Positionssystem (Stellenwertsystem) wird der Wert eines Zahlzeichens (einer Ziffer) eindeutig durch seine Stellung in der Zahl festgelegt, also ist ein solches System ohne eine Ziffer für Fehl- oder Leerstellen (d. h. ohne Null) unmöglich. Weil die Babylonier kein Zeichen für die Leerstelle hatten, haben die Schreiber manchmal versucht, eine fehlende Stelle durch Auseinanderrücken der Zahlen deutlich zu machen. Andernfalls mußte man anhand des Zusammenhangs oder aus eingefügten Erklärungen den genauen Wert feststellen. Z. B. kann die Zahl  als $(1, 0, 4)_s = 60^2 + 0 \cdot 60 + 4 = 3604$ oder $(1, 4)_s = 1 \cdot 60 + 4 = 64$ oder $(1, 0, 0, 4)_s = 1 \cdot 60^3 + 0 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 4 = 216\,004$ gelesen werden.

Erst in den Susa-Texten aus der Perserzeit finden sich gelegentlich zwei kleine, schräg gestellte Winkelhaken  als Lückenzeichen im Innern von Zahldarstellungen [Gericke 1984, S. 13]. Zahlen im Sexagesimalsystem werden in diesem Text wie folgt geschrieben:

Wir trennen die Potenzen von 60 durch Kommata, z. B. ist $5, 6, 10$ im Sexagesimalsystem gleich $5 \times 60^2 + 6 \times 60 + 10$ im Dezimalsystem. Entsprechend ist $(5, 6, 10, 0)_s = 5 \times 60^3 + 6 \times 60^2 + 10 \times 60 + 0$. Das Semikolon hat die Rolle des modernen Dezimalkommas, z. B. ist $(5, 6; 1)_s = 5 \times 60 + 6 + \frac{1}{60}$ und $(5; 6, 1)_s = 5 + \frac{6}{60} + \frac{1}{3600}$.

Das Zeichen für die Subtraktion war

 z. B. $38 = 4 \cdot (10) - 2 =$  .

Die ersten Texte über Multiplikation und Reziprokentafeln stammen aus der Zeit um 2000 v. Chr. Die Reziprokentafeln $\frac{1}{a}$ benutzten die Babylonier als Hilfsmittel für die Division, indem sie die Zahl $b : a$ als $b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$ berechneten. Später haben sie Tafeln für Quadrate, Quadratwurzeln, Kubikwurzeln und Potenzen sowie eine Tafel für $n^2 + n^3$ erstellt.

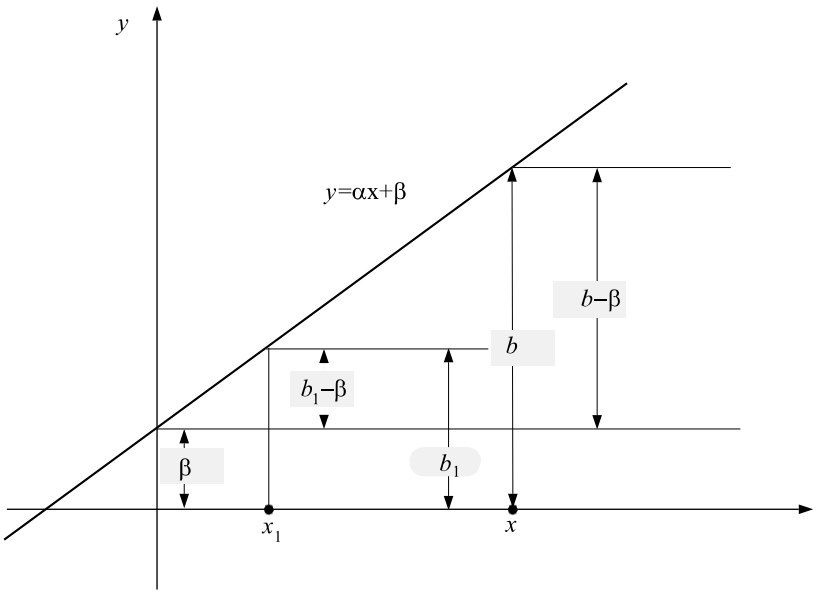


Abb. 1.3.7. Figur zum einfachen falschen Ansatz

1.3.2 Die Methode des einfachen falschen Ansatzes

Die kulturelle Entwicklung im Zweistromland führte zwangsläufig auch zur Entstehung einer „Rechenkultur“ und zur Entwicklung mathematischer Methoden, die sich nicht nur in der Darstellung von Zahlen zur Addition und Subtraktion erschöpfte. Vielmehr führten der Bau von Tempeln und Palästen, die Anlage von Straßen, die Aufteilung von Feldern und astronomische Beobachtungen zur Betrachtung geometrischer Figuren und zur Berechnung von Diagonalen, Umfängen, Flächeninhalten oder Volumina und damit zur Umwandlung von Problemen der Geometrie in Aufgaben der Algebra. Aber auch die Entwicklung in Handel und Verkehr erforderte die Bereitstellung mathematischer Methoden zur Lösung der auftretenden Probleme. Insbesondere stieß man sehr bald auf praktische Probleme, welche – modern gesprochen – die Lösung linearer oder quadratischer Gleichungen oder von Systemen solcher Gleichungen erforderte, später auch auf Gleichungen dritten und vierten Grades. Allerdings waren die Rechner der Antike weit davon entfernt, einen wirksamen Symbolismus zur allgemeinen Behandlung solcher Gleichungen und Systeme zu benutzen, wie er uns heute zur Verfügung steht und erst in der Neuzeit entwickelt wurde. Die Babylonier (wie auch die Ägypter) formulierten vielmehr konkrete Beispiele und deren Lösung in Texten und versuchten, die Lösung experimentell zu ermitteln, z. B. mit der Methode des einfachen falschen Ansatzes.

Zur Lösung der Gleichung $\alpha x + \beta = b$ wählte man eine beliebige Zahl x_1 und berechnete $\alpha x_1 + \beta = b_1$. Dann ist $\frac{x}{x_1} = \frac{b-\beta}{b_1-\beta}$ (vgl. Abb. 1.3.7).

Die Babylonier (auch die Ägypter) wendeten die Methode jedoch nur auf Gleichungen der Gestalt $ax = b$ an. Hier ein Beispiel aus dem Text *Susa* C altbabylonischer Zeit [Tropfke 1980, S. 368]:

In einem Rechteck ist die Diagonale gleich 40, die Breite (y) gleich $\frac{3}{4}$ der Länge (x). Wie groß sind die Länge und die Breite?

Die Lösung entspricht (in heutiger Symbolik) dem Gleichungssystem

$y = \frac{3}{4}x$, $\sqrt{y^2 + x^2} = 40$. Die Verwendung von $\sqrt{y^2 + x^2}$ läßt darauf schließen, daß die Babylonier offenbar den Lehrsatz des Pythagoras kannten. Im Text wird der vorläufige Wert $x_1 = 60$ für x eingesetzt. Man erhält $y_1 = \frac{3}{4}60 = 45$ und für die Diagonale $\sqrt{y_1^2 + x_1^2} = \sqrt{45^2 + 60^2} = 75 = (1, 15)_s$. Die Lösung ergibt sich dann (nach dem Strahlensatz) aus $\frac{x}{60} = \frac{40}{75}$ zu $x = 32$, $y = 24$.

Dieselbe Aufgabe hätte man auch ohne die Methode des falschen Ansatzes lösen können:

$d = \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2} = \frac{5}{4}x = 40.$

Durch solche Aufgaben, die aus einfachen Flächenberechnungen entstanden sind, konnte theoretisches Interesse unterstützt werden.

Sie wurden von den Lehrern für ihre Schüler umgestellt, indem sie zunächst die Flächen berechneten und daraus Übungsaufgaben wie oben kombinierten, deren Lösungen zudem keine „krummen Zahlen“ enthielten.

Die Anwendung des einfachen falschen Ansatzes ist eine algebraische Lösungsform, die bis ins 17. Jahrhundert in mathematischen Büchern zu finden war. Der Grund für die Entstehung einer solchen Methode war die Nicht-Existenz eines wirksamen Symbolismus in der Algebra. Für heutige Schüler und Studenten ist die Lösung einer linearen Gleichung $\alpha x + \beta = b$ kein Problem.

Auch bei den Ägyptern im Papyrus Rhind und später in Griechenland bei Diophant (ca. 250 – ca. 330), in Indien bei Bhaskara II (1114–1185?) und im Bakhshālī-Manuskript (wahrscheinlich im 6. Jh. geschrieben) begegnen wir dieser Methode.

Später wurde diese Regel im Abendland bekannt, wo sie z. B. im Liber abbaci von Leonardo von Pisa (1170–1240) erscheint.

1.3.3 Lineare Gleichungssysteme

Viele praktische Probleme führten die Babylonier auf die Betrachtung von Systemen linearer Gleichungen.

Beispiel 1.3.1: Dem altbabylonischen Text VAT 8389 [Waerden 1966 b, S. 106] entnehmen wir folgendes Beispiel:

„Von 1 bùr habe ich 4 gur Getreide geerntet. Von einem zweiten bùr habe ich 3 gur Getreide geerntet. Das Getreide übertrifft das Getreide um $(8, 20)_s$. *Meine Felder addiert sind* $(30, 0)_s$. *Wie groß sind meine Felder?“*

Darin bedeuten $(8,20)_s$, bzw. $(30,0)_s$ Angaben in sila bzw. in SAR, und die hier und in anderen Aufgaben verwendeten babylonischen Maße sind:

1 Finger	$\approx$	1,7 cm	(Längenmaß)
1 sila	$= 6^3$	Kubikfinger	(Raummaß)
1 gur	$=$	$(5,0)_s$ sila	(Raummaß)
1 Elle	$\approx$	50 cm	(Längenmaß)
1 GAR	$=$	12 Ellen	(Längenmaß)
1 SAR	$=$	$(1\text{GAR})^{\,2}$	(Flächenmaß)
1 bùr	$=$	$(30,0)_s$ SAR	(Flächenmaß)

Der Finger, die Elle und das GAR waren Grundlängenmaße; die Flächeneinheit SAR wurde auf GAR aufgebaut. (GAR bedeutet die Grenze und SAR bedeutet das Beet.) Ein Sila war ein Holzgefäß, das die für ein Brot notwendige Getreidemenge faßte. Dieses war wahrscheinlich dem täglichen Nahrungsbedarf eines damaligen Sklaven gleichwertig [Tropfke 1980, S. 70ff.].

Seien α bzw. β der Flächeninhalt des ersten bzw. des zweiten Feldes (in SAR): in dem ersten Feld wurden (pro bùr $= (30,0)_s$ SAR) 4 gur $= (20,0)_s$ sila Getreide geerntet, insgesamt wurden also vom ersten Feld $\frac{\alpha}{(30,0)_s}(20,0)_s$ sila Getreide geerntet; vom zweiten Feld wurden (pro bùr) 3 gur$= (15,0)_s$ sila Getreide geerntet, insgesamt also $\frac{\beta}{(30,0)_s}(15,0)_s$ sila Getreide. Folglich erhalten wir:

$$\begin{cases} \frac{(20,0)_s}{(30,0)_s}\alpha - \frac{(15,0)_s}{(30,0)_s}\beta = (8,20)_s \\ \alpha + \beta = (30,0)_s \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Wird hingegen der Text „Das Getreide übertrifft das Getreide um $(8,20)_s$“ gedeutet als „der Unterschied der geernteten Getreidemengen beträgt $(8,20)_s$“, so sind zwei Fälle zu betrachten:

$$\text{(Fall 1)}\ \frac{(20,0)_s}{(30,0)_s}\alpha - \frac{(15,0)_s}{(30,0)_s}\beta > 0$$

$$\text{(Fall 2)}\ \frac{(20,0)_s}{(30,0)_s}\alpha - \frac{(15,0)_s}{(30,0)_s}\beta < 0$$

Im Text wird nur der Fall 1 betrachtet, obwohl in beiden Fällen positive rationale Lösungen auftreten; wir wollen später (s. C weiter unten) erklären, warum das so ist. Also wird im Text im wesentlichen das lineare Gleichungssystem (1.3.1) in zwei Unbekannten α und β betrachtet.

Im Text wird zunächst $\alpha = \beta$ angenommen, also $\alpha = \beta = (15.0)_s$ und damit die linke Seite der ersten Gleichung berechnet:

$$\mu = \frac{(20,0)_s}{(30,0)_s}(15,0)_s - \frac{(15,0)_s}{(30,0)_s}(15,0)_s.$$

Die Berechnung im Text kann folgendermaßen dargestellt werden (um $\frac{p}{q}$ zu finden, wird im Text zunächst $\frac{1}{q}$ berechnet, dann wird $\frac{1}{q}$ multipliziert mit p):

$$\begin{gathered}\frac{1}{(30,0)_s} = (0;0,2)_s \\ \frac{(20,0)_s}{(30,0)_s} = (20,0)_s \cdot (0;0,2)_s = (0;40)_s \\ \frac{(20,0)_s}{(30,0)_s}(15,0)_s = (0;40)_s \cdot (15,0)_s = (10,0)_s \\ \frac{(15,0)_s}{(30,0)_s} = (0;0,2)_s \cdot (15,0)_s = (0;30)_s \\ \frac{(15,0)_s}{(30,0)_s}(15,0)_s = (0;30)_s \cdot (15,0)_s = (7,30)_s\end{gathered}$$

$$(10,0)_s - (7,30)_s = (2,30)_s \tag{1.3.2}$$

Wenn also $\alpha = \beta$ wäre, dann wäre die Differenz der Erträge $(2,30)_s$ sila, aber die Differenz ist in der Tat $(8,20)_s$ sila. Nun heißt es im Text:

$$(8,20)_s - (2,30)_s = (5,50)_s \tag{1.3.3}$$

$$(0;40)_s + (0;30)_s = (1;10)_s \tag{1.3.4}$$

$$(5,0)_s \cdot (1;10)_s = (5,50)_s{}^2 \tag{1.3.5}$$

Im Text wird die Zahl $(5,0)_s$ einmal zu $(15,0)_s$ addiert (d. h. zur Hälfte des gesamten Flächeninhalts) und einmal davon subtrahiert und man erhält:

$$\begin{gathered}\alpha = (15,0)_s + (5,0)_s = (20,0)_s \\ \beta = (15,0)_s - (5,0)_s = (10,0)_s\end{gathered} \tag{1.3.6}$$

Einige Bemerkungen zu Beispiel 1.3.1:

A: Obwohl die Werte von α und β in (1.3.6) das Gleichungssystem (1.3.1) erfüllen, geht aus dem Text keine Begründung für die zur Lösung verwendete Methode hervor. (Die Babylonier kannten das Einsetzungs- oder Substitutionsverfahren für die Lösung des Systems (1.3.1), d. h. sie konnten z. B. $\alpha = (30,0)_s - \beta$ aus der zweiten Gleichung finden und in die erste Gleichung einsetzen, daraus β und schließlich α berechnen.)

Eine „babylonische“ Begründung für die Methode des Textes könnte wie folgt sein: Sei $\frac{(20,0)_s}{(30,0)_s} = \alpha_0$, $\frac{(15,0)_s}{(30,0)_s} = \beta_0$, $(30,0)_s = 2\lambda_0$; dann haben wir nach (1.3.2) in dem Text:

$$\alpha_0\lambda_0 - \beta_0\lambda_0 = (2,30)_s \tag{1.3.7}$$

und nach (1.3.3)

[2] Für diesen Schritt sagt der Text: Das Reziproke von $(1;10)_s$ kenne ich nicht. Was muß ich mit $(1;10)_s$ multiplizieren, um $(5,50)_s$ zu erhalten? Nimm $(5,0)_s$, denn $(5,0)_s \cdot (1;10)_s = (5,50)_s$.

$$(\alpha_0\alpha - \beta_0\beta) - (\alpha_0\lambda_0 - \beta_0\lambda_0) = (5,50)_s \tag{1.3.8}$$

oder äquivalent dazu:

$$\alpha_0(\alpha - \lambda_0) + \beta_0(\lambda_0 - \beta) = (5,50)_s\,. \tag{1.3.9}$$

Aber nach (1.3.4) haben wir $\alpha_0 + \beta_0 = (1;10)_s$ und nach (1.3.5) $\frac{(5,50)_s}{\alpha_0+\beta_0} = (5,0)_s$; also erhält man nach (1.3.9):

$$\frac{\alpha_0(\alpha - \lambda_0) + \beta_0(\lambda_0 - \beta)}{\alpha_0 + \beta_0} = (5,0)_s\,. \tag{1.3.10}$$

Erste Rechtfertigung von (1.3.6):
Wir haben $\alpha+\beta = 2\lambda_0$, also $\alpha - \lambda_0 = \lambda_0 - \beta$; nach (1.3.10) erhält man dann

$$\frac{\alpha_0(\alpha - \lambda_0) + \beta_0(\alpha - \lambda_0)}{\alpha_0 + \beta_0} = (5,0)_s\,.$$

Daraus folgt $\alpha - \lambda_0 = (5,0)_s$ oder äquivalent $\alpha = (5,0)_s + \lambda_0$; also gilt $\alpha = (5,0)_s+(15,0)_s$; daraus folgt $\beta = 2\lambda_0-\alpha = \lambda_0-(5,0)_s = (15,0)_s-(5,0)_s$.

Zweite Rechtfertigung von (1.3.6):

Nach (1.3.10) liegt $(5,0)_s$ zwischen $\alpha - \lambda_0$ und $\lambda_0 - \beta$, aber $\alpha - \lambda_0 = \lambda_0 - \beta$, deshalb erhält man $\alpha - \lambda_0 = \lambda_0 - \beta = (5,0)_s$, also ist $\alpha = (5,0)_s + (15,0)_s = (20,0)_s$; $\beta = (15,0)_s - (5,0)_s = (10,0_s)$.

B: Der Text des Beispiels sagt „Das Reziproke von $(1;10)_s$ kenne ich nicht“. Das liegt daran, daß $\frac{1}{(1;10)_s} = \frac{6}{7}$ nicht als endlicher Sexagesimalbruch dargestellt werden kann, weil, ggT(6,7) =1 und kein Primfaktor von 7 in der Menge der Primfaktoren von 60 enthalten ist.

C: Der Text des Beispiels 1.3.1 betrachtet nur Fall 1; also nicht das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{(15,0)_s}{(30,0)_s}\beta - \frac{(20,0)_s}{(30,0)_s}\alpha = (8,20)_s \\ \beta + \alpha = (30,0)_s \end{cases}.$$

Dessen Lösung ist $\alpha = \frac{2400}{7}$, $\beta = \frac{10200}{7}$ (im Dezimalsystem). Nun ist ggT(2400,7) = ggT(10200,7) = 1 und 7 kein Primfaktor von 60.

Also gibt es in diesem Fall keine Darstellungen von α und β als endliche Sexagesimalbrüche. Das ist vielleicht der Grund, warum der Text im Beispiel 1.3.1 den Fall 2 nicht behandelt.

1.3.4 Nichtlineare Systeme und quadratische Gleichungen

Im Zusammenhang mit Flächenberechnungen stießen die Babylonier auf quadratische Gleichungen. Um einen Eindruck von den Methoden zu gewinnen, mit denen man in Mesopotamien schon vor Jahrtausenden solche Aufgaben beschrieb und behandelte, studiert man am besten Originaltexte aus jener Zeit.

Im folgenden diskutieren wir einen altbabylonischen Text aus der Zeit der Hammurapi -Dynastie (1700 v. Chr.). Er wird in AO 8862 (Paris, Louvre, Antiquités Orientales) aufbewahrt.

Beispiel 1.3.2: Übersetzung eines Keilschrifttextes [Waerden 1966 b, S. 102]:

Länge und Breite habe ich multipliziert und so die Fläche gemacht, wiederum, was die Länge über die Breite hinausgeht, zur Fläche habe ich addiert und (es gibt) 3,3. Wiederum Länge und Breite addiert (gibt) 27. Länge, Breite und Fläche (ist) was?

In moderner Form würde das Problem wie folgt formuliert:

$$\begin{cases} xy + x - y = (3,3)_s \\ x + y = 27 \end{cases}, \tag{1.3.11}$$

wobei x die Länge und y die Breite bezeichnet. Zur Lösung dieser Aufgabe heißt es weiter im Text:

Du bei Deinem Verfahren: 27, die Summe von Länge und Breite,
zu $(3,3)_s$ *addiere; (es gibt)* $(3,30)_s$ *. 2 zu 27 addiere; (es gibt 29).*

In heutiger Darstellung heißt dies

$$\begin{cases} x(y+2) = (3,30)_s \\ x + (y+2) = 29 \end{cases}.$$

Nun erhält man (mit $y' = y + 2$)

$$\begin{cases} xy' = (3,30)_s \\ x + y' = 29 \end{cases}. \tag{1.3.12}$$

Der Algorithmus, den der Autor für die Lösung von (1.3.12) angibt, entspricht dem folgenden Satz von Viète über Summe und Produkt der Wurzeln einer quadratischen Gleichung:

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} xy' = \alpha \\ x + y' = \beta \end{cases}$$

sind

$$\begin{cases} x = \frac{\beta}{2} + \sqrt{(\frac{\beta}{2})^2 - \alpha} \\ y' = \frac{\beta}{2} - \sqrt{(\frac{\beta}{2})^2 - \alpha} \end{cases} \text{ und } \begin{cases} x = \frac{\beta}{2} - \sqrt{(\frac{\beta}{2})^2 - \alpha} \\ y' = \frac{\beta}{2} + \sqrt{(\frac{\beta}{2})^2 - \alpha} \end{cases} \tag{1.3.13}$$

Im Text wird dieses Verfahren so beschrieben:

Seine Hälfte von 29, brichst Du ab; $(14;30)_s$ *mal* $(14;30)_s$ *(ist)* $(3,30;15)_s$; *(d. h.* $(\frac{\beta}{2})^2 = (14;30)_s^2 = (14 + \frac{30}{60}) \times (14 + \frac{30}{60}) = 210\frac{1}{4} = 3 \times 60 + 30 + \frac{15}{60} = (3,30;15)_s$*). Von* $(3,30;15)_s, (3,30)_s$ *subtrahierst Du;* $(0;15)_s$ *(ist) der Unterschied (im Dezimalsystem* $\frac{1}{4}$*).* $(0;15)_s$ *hat* $(0;30)_s$ *(als) Quadratwurzel (d. h.* $\frac{15}{60} = \frac{30}{60} \times \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$*).*$(0;30)_s$ *zur ersten* $(14;30)_s$ *addiere; (es gibt)* 15 *(als) Länge [d. h.* $\frac{30}{60} + 14 + \frac{30}{60} = 15$*].* $(0;30)_s$ *von der zweiten* $(14;30)_s$ *subtrahierst Du; (es gibt) 14 (als) Breite: 2, das Du zu 27 addiert hast, von 14, der Breite, subtrahierst Du; (es gibt) 12 (als) endgültige Breite. 15 Länge, 12 Breite habe ich multipliziert. 15 mal 12 (gibt)* $(3,0)_s$ *(als) Fläche. 15 Länge über 12 Breite, was ragt es hinaus? (Um) 3 geht es darüber hinaus. 3 zu* $(3,0)_s$*, der Fläche, addiere.* $(3,3)_s$ *(ist das Resultat).*

Dieser Text beschreibt also den Algorithmus, mit dem die Lösung gemäß der (uns geläufigen) Formel berechnet wird, erläutert auch noch die Rechenprobe, läßt aber nicht erkennen, wie man diese Formel gefunden hat.

Da die Babylonier bereits die binomische Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ kannten, ist zu vermuten, daß sie ähnlich vorgegangen sind wie später Diophant: Macht man für das System $xy' = \alpha$, $x + y' = \beta$ den Ansatz $x = \frac{\beta}{2} + \mu$, $y' = \frac{\beta}{2} - \mu$ so folgt wegen $xy' = (\frac{\beta}{2})^2 - \mu^2 = \alpha$, daß $\mu = \sqrt{(\frac{\beta}{2})^2 - \alpha}$ ist und damit (1.3.13).

Die Rolle der Hilfsvariablen y' ist in diesem Beispiel merkwürdig. Der Text gibt nur die Länge $x = 15$ und $y' = 14$ für das System (1.3.12) an. Also ist die Lösung des Systems (1.3.11) nach dem Text $x = 15$, $y = 12$. Aber auch $x = 14$ und $y' = 15$ ist Lösung des Systems (1.3.12), daraus folgt $x = 14$ und $y = 13$, die andere Lösung des Systems (1.3.11).

Um die Einführung von y' in Beispiel 1.3.2 zu rechtfertigen, kann man wie folgt argumentieren:

Sei $y' = y + d$, dann ist (1.3.11) gleichwertig dem System

$$\begin{cases} xy' = (3,3)_s + xd - x + y' - d \\ y' = 27 + d - x \end{cases} .$$

y' von der zweiten Gleichung wird in der rechten Seite der ersten Gleichung eingesetzt:

$$xy' = (3,3)_s + x(d-2) + 27.$$

Um x auf der rechten Seite der letzten Gleichung zu beseitigen, muß $d = 2$ gesetzt werden. Dann erhalten wir (1.3.12) (siehe auch Aufgabe 1.3.1).

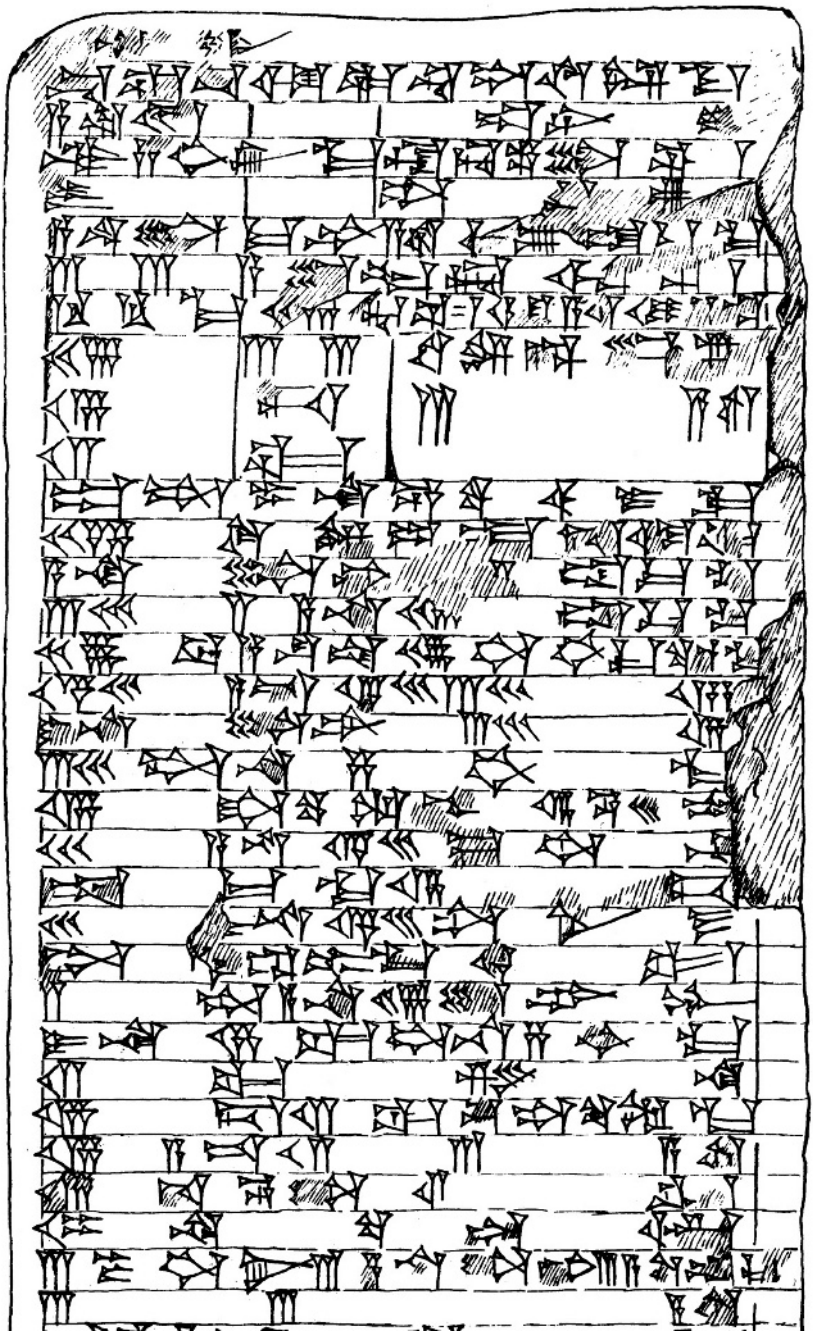


Abb. 1.3.8. Autographie AO 8862 [Neugebauer 1935, Tafel 35] Ab der 6. Zeile kann man alle Zahlen des Beispiels 1.3.2 wiederfinden

Das Beispiel zeigt, daß die Babylonier ein Gleichungssystem der Gestalt (1.3.12) lösen konnten. Ob sie sich mit einer Lösung begnügten, weil x und y' in den Gleichungen vertauscht werden können, sei dahingestellt.

Die Babylonier haben also gewisse nichtlineare Gleichungssysteme betrachtet und zwar solche, die schließlich auf das Lösen einer quadratischen Gleichung hinauslaufen, wie das folgende Gleichungssystem zeigt.

Beispiel 1.3.3: Eine Aufgabe der Susa-Texte IX [Gericke 1984, S. 26] in moderner Schreibweise lautet:

Seien x und y die Länge bzw. die Breite eines Rechtecks und die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{cases} xy + x + y = 1 & (i) \\ \frac{1}{17}(3x + 4y) + y = (0;30)_s & (ii) \end{cases} .$$

Um x und y zu ermitteln, wird im Text (ii) mit 17 multipliziert:

$$3x + 21y = 17 \cdot (0;30)_s = (8;30)_s \quad (ii)' \quad .$$

Nun werden im Text Hilfsunbekannte eingeführt:

$$x' = 3(x+1),\ y' = 21(y+1).$$

Damit ergibt sich

$x' + y' = 3x + 21y + 24 = (8;30)_s + 24 = (32;30)_s$ (nach $(ii)'$)

$x' \cdot y' = (1,3)_s(xy + x + y + 1) = (1,3)_s.2 = (2,6)_s$ (nach (i))

also das System

$$\begin{cases} x' + y' = (32;30)_s \\ x'y' = (2,6)_s \end{cases} \quad (iii) \quad .$$

Nun wird die den Babyloniern bekannte Identität

$$(\frac{x' + y'}{2})^2 - (\frac{x' - y'}{2})^2 = x'y'$$

benutzt (es ist nicht bekannt, wie die Babylonier diese Identität rechtfertigten). Damit erhält man aus (iii)

$$\sqrt{(16;15)_s^2 - (2,6)_s} = \frac{x' - y'}{2} = \quad (11;45)_s$$

und schließlich

$$y' = (16;15)_s + (11;45)_s = 28, \quad y + 1 = (\frac{28}{21})_s = (1;20)_s$$

$$x' = (16;15)_s - (11;45)_s = (4;30)_s, \quad x+1 = \frac{(4;30)_s}{3} = (1;30)_s$$

$$y = (0;20)_s, \quad x = (0;30)_s.$$

Also ist eine Lösung $(x,y) = ((0;30)_s, (0;20)_s) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. Es ist zu bemerken, daß im Text der negative Wurzelwert, also der folgende Fall nicht betrachtet wird:
$\sqrt{(16;15)_s^2 - (2,6)_s} = \frac{x'-y'}{2}$ In diesem Falle, ergibt sich:

$$\frac{x'+y'}{2} = (16;15)_s, \quad \frac{y'-x'}{2} = (11;45)_s \quad .$$

Daraus folgt

$$x' = (16;15)_s + (11;45)_s = 28 \quad , \quad x+1 = (\frac{28}{3})_s = 9 + \frac{20}{60} = (9;20)_s$$

$$y' = (16;15)_s - (11;45)_s = (4;30)_s, \quad y+1 = \frac{(4;30)_s}{21}$$

$$x = (8;20)_s, \quad y = -\frac{11}{14} = -(0;47,\overline{8,34,17})_s.$$

Also ist die Lösung in diesem Fall

$$(x,y) = ((8;20)_s - (0;47,\overline{8,34,17})_s) = (\frac{25}{3}, -\frac{11}{14}).$$

Diese Lösung war für die Babylonier nicht akzeptabel, denn y (d. h. die Breite) ist negativ; $\frac{11}{14}$ hat auch keine endliche Darstellung im Sexagesimalsystem.

1.3.5 Kubische Gleichungen: Der Beginn eines 3500 Jahre alten Problems

In einem altbabylonischen Keilschrifttext – die zerbrochene Tafel wird zum Teil im Britischen Museum in London (BM 85 200), zum Teil in Berlin (VAT 6599) aufbewahrt – ist von einer quaderförmigen Ausschachtung die Rede. Im Zusammenhang damit werden mehrere Aufgaben betrachtet, bei denen die Summe „Querschnitt plus Volumen“ eine Rolle spielt, also in moderner Bezeichnung $xy + xyz$, wenn x, y, z Länge, Breite und Tiefe des Quaders bezeichnen. Die Vorgabe dieser Summe und verschiedene Nebenbedingungen führen auf Gleichungssysteme, die durch Transformation auf eine Gleichung

ersten, zweiten oder dritten Grades zurückgeführt werden oder durch Kunstgriffe gelöst werden. Insbesondere konnten spezielle Gleichungen durch die Verwendung von Tabellen für die Multiplikation, für $\frac{1}{n}$, n^2, $\sqrt{n}$, n^3 und $n^2 + n^3$ gelöst werden; z. B. steht eine Tabelle für $n^2 + n^3$ auf einer spätbabylonischen Keilschrifttafel zur Verfügung (VAT 8492).

Beispiel 1.3.4:

Querschnitt und Volumen sollst Du addieren: es ist $(1; 10)_s$, d. h.

$$xy + xyz = (1; 10)_s = 1\frac{1}{6} \quad .$$

Außerdem gibt der Text die Nebenbedingungen $y = \frac{2}{3}x$ und $z = 12x$.
Daraus folgt

$$(12x)^3 + (12x)^2 = (12x)^2(12x + 1) = (4, 12)_s = 252 \quad .$$

Nach der Tabelle für n^2+n^3 erhält der Rechner $12x = 6$. Der Aufgabensteller hat die Nebenbedingungen und die Zahlenwerte offenbar so gewählt, daß die Tafel für n^2+n^3 benutzt werden kann. Man erkennt hier (wie auch an früheren Beispielen), daß die konkreten Aufgaben der Babylonier nicht unmittelbar aus praktischen Problemen stammten, sondern für Lehrzwecke so konstruiert wurden, daß sie mit den verfügbaren Hilfsmitteln lösbar waren – so wie auch heute noch für Schüler und Studenten Klausuraufgaben meist so konstruiert werden, daß sie mit „glatten Zahlen“ lösbar sind; vgl. [Høyrup 2002].

Auch die Gleichung $x^3 = a$ lösten die Babylonier mit Hilfe einer Tabelle der Kubikzahlen, wenn $a = n^3$, also eine Kubikzahl war.

So beginnt ein Jahrtausende fortwährender Versuch der Lösung von kubischen Gleichungen. Die Lösungsmethode mit Hilfe angefertigter Tabellen kann nicht als eine algebraische Methode betrachtet werden. Es war nur eine rechnerische Methode, um ein maßgeschneidertes Problem zu lösen. Lösungsformeln für allgemeine Gleichungen dritten Grades wurden erst im 16. Jh. in Italien gefunden(vgl. Abschnitt 5.1).

1.3.6 Näherungswerte von $\sqrt{2}$

Die Babylonier konnten aus Tabellen Quadrate und ihre Quadratwurzeln ablesen, soweit es sich um sogenannte „vollständige“, d. h. um reine Quadratzahlen, handelte.

Ansonsten haben sie nach einem Näherungswert gesucht. So berechneten sie die Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 und lösten dabei die Gleichung $x^2 = 2$ näherungsweise. Schon um 1675 v. Chr. fanden sie einen erstaunlich guten Näherungswert, nämlich

$$\sqrt{2} \approx (1; 24, 51, 10)_s \approx 1,414213 \quad .$$

Es ist aber nicht genau bekannt, wie sie zu der obigen Näherung gekommen sind.

Die Zahlen 1,24,51,10 erscheinen in dieser Reihenfolge in der sexagesimalen Entwicklung der $\sqrt{2}$, und wegen $0 < \sqrt{2} - (1;24,51,10)_s < \frac{1}{60^3}$ liefern sie einen guten Näherungswert. Diese Abschätzung ist im Dezimalsystem mindestens auf fünf Dezimalen genau. Wir stellen hier zwei Möglichkeiten vor, wie die Babylonier diesen Näherungswert für $\sqrt{2}$ ermittelt haben könnten.

I. Wahrscheinlich haben sie im wesentlichen die Zahlen 1,24,51,10 mit Hilfe einer Sexagesimalschachtelung gefunden, indem sie (modern gesprochen) die Äquivalenz $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ für $a > 0$ benutzten und durch wiederholte Versuche das größte k bestimmten, für das $(1 + \frac{k}{60})^2 < 2$ ist:

$$\begin{gathered} 1 < \sqrt{2} < 1 + 1 \\ 1 + \tfrac{24}{60} < \sqrt{2} < 1 + \tfrac{24+1}{60} \\ 1 + \tfrac{24}{60} + \tfrac{51}{60^2} < \sqrt{2} < 1 + \tfrac{24}{60} + \tfrac{51+1}{60^2} \\ 1 + \tfrac{24}{60} + \tfrac{51}{60^2} + \tfrac{10}{60^3} < \sqrt{2} < 1 + \tfrac{24}{60} + \tfrac{51}{60^2} + \tfrac{10+1}{60^3} \end{gathered}$$

Dieses Verfahren entspricht der noch heute verwendeten Methode der Intervallschachtelung mit Dezimalbrüchen, die im n-ten Schritt den exakten Wert der n-ten Stelle ausgibt.

Vermutlich haben die Babylonier auch durch einfache Rechnungen mit suksessiven arithmetischen Mitteln $\sqrt{2}$ wie folgt angenähert.

II. Der Anfangswert – ein grober Näherungswert für $\sqrt{2}$ – ist $x_1 = 1$. Da 1 zu klein und 2 zu groß ist, ist das arithmetische Mittel, d. h. $\frac{3}{2} = (1;30)_s = x_2$ ein besserer Näherungswert. x_2 ist immer noch zu groß. Daraus folgt, daß $\frac{2}{x_2}$ zu klein ist. Das arithmetische Mittel dieser zwei Abschätzungen

$$\frac{1}{2}(x_2 + \frac{2}{x_2}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12} = 1 + \frac{25}{60} = (1;25)_s := x_3$$

ist größer als $\sqrt{2}$ und eine bessere obere Schranke als x_2.

Im nächsten Schritt erhält man

$x_4 = \frac{1}{2}(x_3 + \frac{2}{x_3}) = \frac{577}{408} = 1 + \frac{169}{408} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} + \frac{240}{60^3 \cdot 408} \approx 1,414216$.

Der von den Babyloniern benutzte Näherungswert

$$(1;24,51,10)_s = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1,414213$$

ist besser als $x_4 = 1,414216$, während $x_5 = 1,414213562$ bereits in 9 Dezimalen mit $\sqrt{2}$ übereinstimmt (vgl. auch Abschnitt 3.2.3).

Abbildung 1.3.9 b) zeigt die Abbildung einer Keilschrift in der „Yale Babylonian Collection“.

In stilisierter Darstellung und mit den in arabischen Ziffern geschriebenen Zahlen erhält man daraus Abbildung 1.3.9 a), ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{1}{2} = (0;30)_s$. Die Zahl $(0;42,25,35)_s$ ist eine Abschätzung für

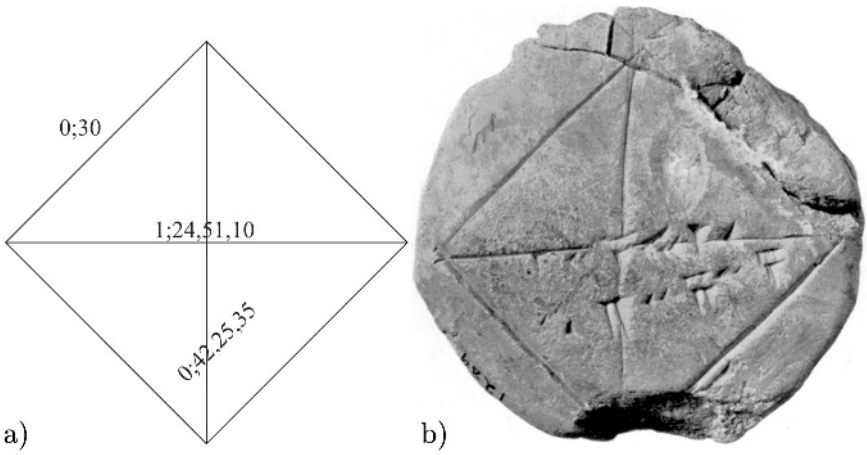


Abb. 1.3.9. Zur Berechnung von $\sqrt{2}$
[Keilschrifttext aus der Yale Babylonian Collection, YBC7289]

die Länge der Diagonale ($= \frac{\sqrt{2}}{2}$), und $(1;24,51,10)_s$ ist der oben diskutierte erstaunlich gute Näherungswert für $\sqrt{2}$. Die wiederholte Bildung des arithmetischen Mittels liefert schon nach wenigen Schritten erstaunlich gute Näherungswerte („quadratische Konvergenz“) und wurde vor der Einführung des Taschenrechners im Schulunterricht als „babylonisches Wurzelziehen“ gelehrt. Sie entspricht der Berechnung der Glieder der quadratisch konvergenten Folge

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}). \tag{1.3.14}$$

mit geeignet gewähltem Anfangswert x_1.
Dieses Verfahren wurde später von Heron von Alexandria in seiner „Vermessungslehre“ beschrieben und wird deshalb auch „Heronisches Wurzelziehen“ genannt. Es entspricht der von den Griechen benutzten Näherungsformel

$$\sqrt{a^2 \pm r} \approx a \pm \frac{r}{2a}. \tag{1.3.15}$$

Wegen $2 = (\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$ erhält man nach (1.3.15) mit $a = \frac{3}{2}, r = \frac{1}{4}$

$$\sqrt{2} = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} \approx \frac{3}{2} - \frac{1}{4 \cdot 3} = \quad \frac{17}{12} = 1 + \frac{25}{60} = (1;25)_s = x_3.$$

Erneute Anwendung der „Heronischen Formel“ (1.3.15) auf $\sqrt{2} = \sqrt{(\frac{17}{12})^2 - \frac{1}{144}}$ liefert den besseren Näherungswert $\frac{17}{12} - \frac{1}{144} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{17} = \frac{577}{408} = 1 + \frac{169}{408}$, also denselben Wert wie x_4 nach der „babylonischen Formel“ (1.3.14) mit $x_1 = 1$.

Wesentliche Inhalte der Algebra in Mesopotamien

$\approx$ 3000 v. Chr.	Sexagesimales Zahlensystem
$\approx$ 2400 v. Chr.	Rechentechnik: Multiplikationstafeln, Reziprokentafeln, Sexagesimales Positionssystem
$\approx$ 1900–1600 (Altbabylonisches Reich) (Hammurapi 1728–1686)	Wichtige mathematische Texte Lineare Gleichungen ($ax = b$), Methode des einfachen falschen Ansatzes, Quadratische Gleichungen der Gestalt $x^2 + ax = b$, $x^2 - ax = b$, Näherungswerte von $\sqrt{2}$, Kubische Gleichungen der Form $x^3 = a$, $x^3 + x^2 = a$, Lineare und spezielle nichtlineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten, Berechnung pythagoreischer Zahlentripel (x, y, z) mit $x^2 + y^2 = z^2$, die binomischen Formeln $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
539–330 persische Herrschaft	Ein inneres Lückenzeichen für Null, einige mathematische Texte

Auswirkungen

Die Mesopotamische Mathematik übte Einflüsse auf die griechische Mathematik aus, möglicherweise schon auf Thales und die Pythagoreer, ebenso in hellenistischer Zeit auf Heron, Ptolemaios und insbesondere auf Diophant. Auch al-Ḫwārizmī profitierte von der Ausstrahlung der Mesopotamischen Algebra, die durch ihn eine Weiterentwicklung erfuhr. Die nachhaltigste Auswirkung der Mesopotamischen Mathematik ist die noch heute in der Winkel- und Zeiteinteilung lebendige Verwendung des Sexagesimalsystems.

1.4 Aufgaben zu Kapitel 1

Aufgabe 1.2.1: Verteilung von Broten (aus Papyrus Rhind)
Verteile 100 Brote auf 5 Männer, so daß ihre Anteile eine arithmetische Folge bilden, außerdem soll $\frac{1}{7}$ der Summe der drei größten Teile gleich der Summe der zwei kleinsten Teile sein.

Aufgabe 1.2.2: Einfacher falscher Ansatz (aus Papyrus Rhind).
$\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{7}$ eines Wertes ist insgesamt 33. Was ist dieser Wert?

Aufgabe 1.3.1:Zinseszinsrechnung
In einer babylonischen Tafel aus dem 17. Jh. v. Chr. im Louvre (Antiquités Orientales 6770,3) steht das folgende Problem:
Mit Zinseszinsrechnung von 20% pro Jahr: Wie lange dauert die Verdoppelung eines Betrages?
Man löse das obige Problem wie folgt:
a) Mit moderner Methode
b) Berechne $(1,2)^3$ und $(1,2)^4$, dann α durch eine lineare Interpolation, so daß $(1,2)^\alpha = 2$. Zeige, daß die Antwort mit der babylonischen Lösung $(3;47,13,20)_s$ dieses Problems übereinstimmt.

Aufgabe 1.3.2: Lineare Gleichungen
Auf einer ebenfalls im Louvre aufbewahrten Tafel findet sich das folgende Problem:
Es gibt einen Stein, von dem zuerst $\frac{x}{7} + (0;25)_s$ gin weggenommen wurden, dann wieder $\frac{1}{11}(\frac{x}{7} + (0;25)_s) + (0;50)_s$ gin zugelegt wurden, so daß das alte Gewicht wieder hergestellt war. Finde x.

Aufgabe 1.3.3: Nichtlineares System
Gegeben sei das System

$$\begin{cases} x \cdot y + x - y = a \\ x + y = b \end{cases}.$$

Man löse dieses System mit der babylonischen Methode des Beispiels 1.3.2.
Hinweis: Setze

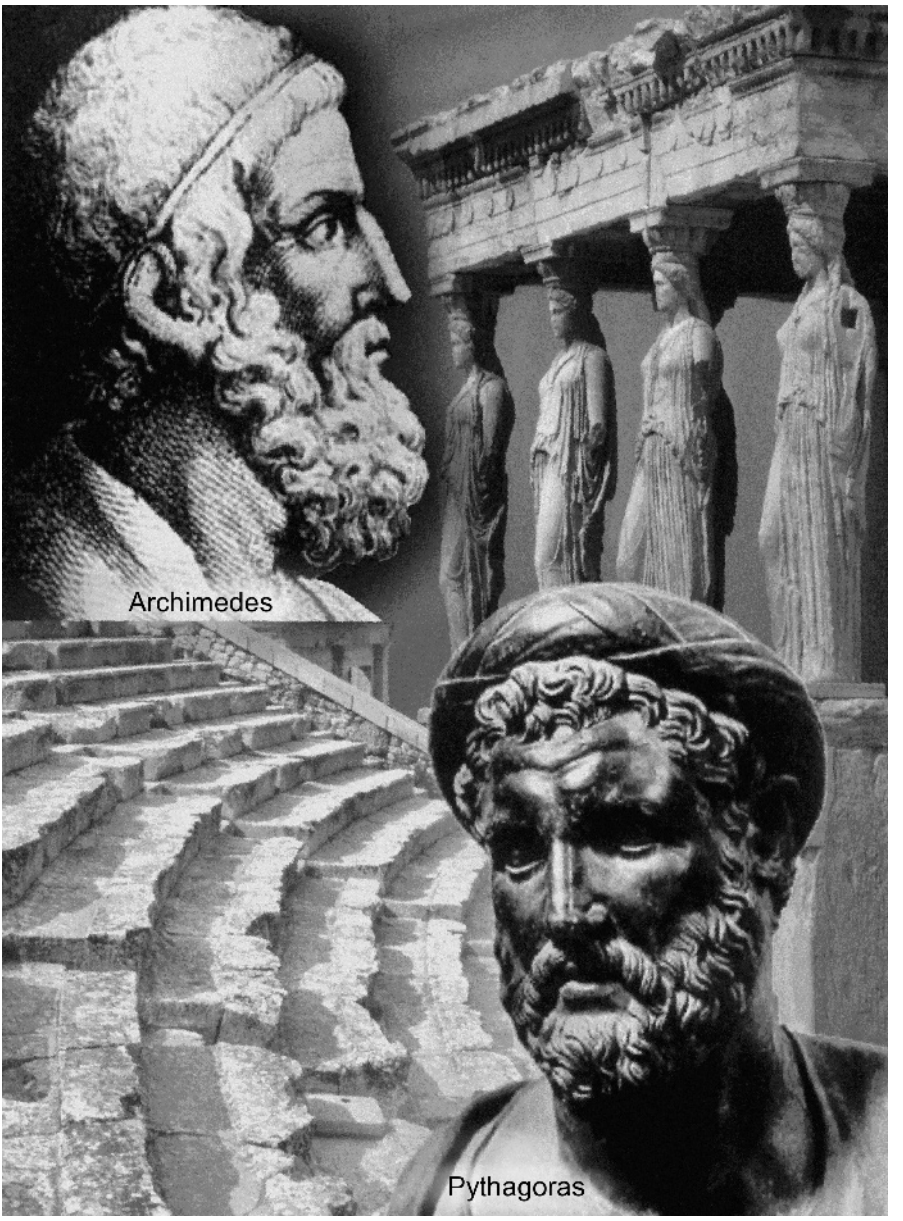
$$\begin{aligned} x' &= x + m \\ y' &= y + n \end{aligned}.$$

Aufgabe 1.3.4: Quadratische Gleichung
Sei $f(x) = \alpha x^2 + \beta$, $x \in A (A \subseteq \mathbb{R})$, seien α, β zwei reelle Konstanten und $x_1 \in A$, $f(x_1) = b_1$, $b_1 \neq \beta$, $b \in f(A)$.
Man zeige, daß $x = \pm x_1 \sqrt{\frac{b-\beta}{b_1-\beta}}$ die Lösungen der Gleichung $\alpha x^2 + \beta = b$ sind.

Aufgabe 1.3.5: Babylonisches Wurzelziehen und Heronische Formel

Zeigen Sie: Die dem „babylonischen Wurzelziehen“ entsprechende Rekursionsformel $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{b}{x_n})$ mit dem Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^+$ liefert dieselbe Folge (x_n) von Näherungswerten für $\sqrt{b}$ wie die wiederholte Anwendung der „Heronischen Formel“ $\sqrt{a^2 \pm r} \approx a \pm \frac{r}{2a}$, wenn man mit $a = x_0$ beginnt.

2 Die geometrische Algebra der Griechen



	Allgemeine Geschichte	Kulturgeschichte
3./2. Jtd.	Herrschaft von Mykene über Peloponnes und Kreta	Minoische und mykenische Kultur
um 1000 v. Chr.	Dorische Wanderung	Geometrische Kunst
∼900	Griechen besiedeln die Inseln der Ägäis und die Westküste Kleinasiens	Griechen übernehmen das phönizische Alphabet
8.–6. Jh.	Gründung griechischer Kolonien in Sizilien, Unteritalien, Libyen und am Schwarzen Meer	Archaische Kunst, monumentale Plastik und Architektur, Vasenmalerei, Epen des Homer, Lehrgedichte des Hesiod
ca. 600–ca. 450	Ionische Periode	Naturphilosophie: Thales, Anaximandros, Hekataios, Anaximenes
490	Schlacht bei Marathon	Pythagoras, Heraklit
490–448	Perserkriege	Parmenides, Empedokles, Anaxagoras
ca. 450–ca. 300	Athenische Periode	Sophisten
462–429	Höchste Blüte Athens unter Perikles	Sokrates, Platon, Tragödien des Aischylos, Sophokles, Euripides
431–404	Peloponnesischer Krieg zwischen Athen und Sparta	Entstehung der dorischen, phrygischen und lydischen Tonarten in der Musik
387	Gründung der Akademie durch Platon	Bau der Akropolis von Athen, klassische Skulpturen von Polyklet und Phidias
ab 338	Griechenland unter makedonischer Herrschaft	335 Gründung des Lyzeums durch Aristoteles
334–323	Kriegszüge Alexanders d. Gr. nach Persien, Ägypten, Indien	Hippokrates von Kos Begründer der wissenschaftlichen Medizin
311	Teilung des Alexander-Reiches	Durch Verschmelzung griechischer und orientalischer Kulturen bildet sich die sog. hellenistische Kultur
ca. 300 v. Chr.	Hellenistische	Philosophie der Stoa, der
– ca. 150 n. Chr.	(alexandrinische) Periode	Epikureer, der Skeptiker: Lehrgedichte und Epigramme als Formen der Dichtkunst. Barocke Spätzeit griechischer Kunst. Mathematische und naturwissenschaftliche Erkenntnisse von Euklid, Aristarch, Archimedes, Apollonios von Perge.
ca. 150 n. Chr.	Spätantike	Ptolemaios, Diophant,
– ca. 500		Proklos.



Abb. 2.0.1. Geburtsorte und Wirkungsstätten ausgewählter Mathematiker im antiken Griechenland (rot)

2.0 Einführung

Schon im dritten Jahrtausend v. Chr. hatten die Bewohner Kretas die nach dem sagenhaften König Minos benannte minoische Kultur entwickelt und ihren Einfluß über die ägäische Inselwelt durch Handelsbeziehungen auch nach Ägypten ausgedehnt, während auf dem Festland des heutigen Griechenland die sog. helladische Kultur bestand.

Um die Wende vom dritten zum zweiten Jahrtausend stießen aus den Weiten des Nordens indogermanische Stämme, die Achaier, in den Süden des Balkans und nach Griechenland vor. In mehreren Wellen wanderten Ionier und Aioler ein, unterwarfen die dort ansässige Urbevölkerung und vermischten sich mit ihr. Während die Ionier vornehmlich Attika, Euböa und benachbarte Inseln besiedelten, drangen die Achäer und Aioler in den Peloponnes vor und entwickelten dort die mykenische Kultur, die ihren Höhepunkt vom 16. – 14. Jh. erreichte und mit dem Vordringen der Achäer nach Kreta zur kretisch-mykenischen Kultur verschmolz.

Diese von Homer als Heldenzeitalter besungene Epoche fand mit Besitznahme des Peloponnes im Zuge der dorischen Wanderung in den letzten Jahrhunderten des zweiten Jahrtausends ihr Ende. Das mykenische Reich zerbrach. Auch das in der frühen Eisenzeit zu großer Macht aufgestiegene Reich der Hethiter in Kleinasien zerfiel um 1200 v. Chr. – Anlaß und Möglichkeit für griechische Stämme, sich in der ägäischen Inselwelt und an den Küsten Kleinasiens auszubreiten.

Im 13. Jh. v. Chr. hatte die Eisenzeit die Bronzezeit abgelöst und umfassende Veränderungen im Kriegswesen gebracht. Die Waffen und andere Produktionsmittel konnten wesentlich verbessert werden, ebenso Werkzeuge, von denen z. B. die gängigsten wie Hammer, Säge und Zange bereits in der heute noch üblichen Standardform geschaffen wurden.

Von der Metallverarbeitung profitierten Schiffbau, Bergbau, Töpferei und Weberei. Der neue Rohstoff, die damit entwickelte Technik und die Beschäftigung von Sklaven versetzten die Menschen in die Lage, über den Eigenbedarf hinaus zu produzieren und förderten den Handel. Das führte nicht zuletzt zu gesellschaftlichem Reichtum und zu stärkerer Beteiligung breiter Schichten an den Angelegenheiten wirtschaftlicher oder öffentlicher Interessen.

Die Einwanderungszeit der Dorer fand um die Jahrtausendwende ihren Abschluß. Neue Völker, insbesondere Hebräer, Assyrer und Phönizier traten im Vorderen Orient in den Vordergrund. Um 900 v. Chr. beginnt die Entwicklung einer gemeinsamen eigenständigen Kultur der griechischen Stämme, die sich seit dem 8. Jh. Hellenen und ihr Land Hellas nennen. Sichtbares Zeichen dieser Gemeinsamkeit sind die 776 v. Chr. in Olympia erstmals ausgetragenen Wettkämpfe der Hellenen.

Im 8.–6. Jh. v. Chr. setzte sich die Bevölkerung in den Handelsstädten aus freien Bürgern mit Bürgerrechten sowie aus Fremden und Sklaven (ohne

Stimmrecht) zusammen. Ausbeutung der untersten Gesellschaftsschicht bestimmte den Tagesablauf (antike Sklavereigesellschaft), Händler und Kaufleute erlebten Hochkonjunkturen der damaligen Zeit.

Die Freien konnten, da sie sich nicht an der Produktion zu beteiligen brauchten, ihre Zeit für die Weiterentwicklung von Wissenschaften und Kunst einsetzen, wodurch die Kultur einen erheblichen Aufschwung erfuhr und die Entstehung der Philosophie und Mathematik begünstigt wurde. Die Anstrengungen in der Politik führten zur Entstehung der Stadtstaaten, der *Poleis*, deren Struktur sich erheblich von den früheren zentralistischen Regierungsformen unterschied.

Nach 800 v. Chr. begann eine neue Ausbreitung der hellenischen Zivilisation und Kultur. Zahlreiche Siedlungen (Kolonien) entstanden in Unteritalien, auf Sizilien, an den Küsten des Hellesponts, des Bosporus und des Schwarzen Meeres. Die ionischen Städte an den Küsten Kleinasiens erlebten einen ungeheuren Aufschwung und eine Hochblüte der Kultur.

Vom 7. Jh. v. Chr. an haben die Ionier die kulturelle und wirtschaftliche Führung übernommen. Durch den lebhaften Warenhandel und die erweiterten Möglichkeiten in der Seefahrt knüpften sie Verbindungen zu den Küsten des gesamten Mittelmeerraumes und nach Mesopotamien, Skythien und zu noch weiter entfernten Ländern. Bis zum 6. Jh. v. Chr. blieb Milet in Ionien die wichtigste griechische Stadt.

2.1 Beginn des abstrakten Denkens

Mit dieser Entwicklung war die Zeit für theoretische Fragen reif, um den Ursprung und das Wesen der Dinge zu erfahren: man konnte philosophieren. In dieser Zeit entstand auch die Mathematik als wissenschaftliche Disziplin. Zuvor standen ihre Anwendbarkeit und die Nutzbarkeit im Vordergrund. Es waren überwiegend praktische Probleme, sowohl in technischen als auch in Verwaltungsfragen, die zu lösen waren. Man fragte z. B.: „*Wie* baue ich eine Pyramide?“ „*Wie* beschaffe ich mir die Steuern?“ In der nachfolgenden Zeit stellten vor allem die Philosophen und Mathematiker (oft in einer Person) die Frage nach dem *Warum*, d. h. sie wollten nicht nur wissen, wie etwas abläuft, sondern auch warum. Damit rückte die Suche nach den Ursachen einer Erscheinung in den Mittelpunkt. Sie suchten nach Erklärungen für die Entstehung des Universums, nach Deutungen und Lösungen von physikalischen und mathematischen Problemen, z. B. fragte Thales (624–548 v. Chr.): „Warum halbiert der Durchmesser die Kreisfläche?“ Die Philosophen und Mathematiker halfen, eine überschaubare Ordnung in diese neue Denkweise zu bringen und logische Schlußfolgerungen zu ermöglichen.

Die griechische Mathematik wird in vier Perioden eingeteil: die ionische, die athenische und die hellenistische Periode sowie die Spätantike.

2.1.1 Ionische Periode (ca. 600 – 450 v. Chr.)

Der erste ionische Naturphilosoph, Mathematiker und Astronom ist Thales von Milet. Er lebte in dieser lebendigen Handelsstadt an der kleinasiatischen Küste, die seinerzeit als das größte ionische Kulturzentrum galt. Thales gehörte zu den auserwählten Staatsmännern, Gesetzgebern und Moralisten, die als die „Sieben Weisen“ bezeichnet wurden. Er verstand die Welt als durch die Natur gegeben, schrieb die Ereignisse derselben aber nicht mehr der Willkür der griechischen Götter zu. Vielmehr suchte er nach einer Erklärung für den Anfang und hielt das Wasser für den Urstoff, den Grund alles Seienden. Zu den mathematischen Leistungen des Thales berichtet Hieronymos, daß dieser die Pyramidenhöhe mit Hilfe ihres Schattens berechnete. Dazu nahm er genau zu dem Zeitpunkt Maß, in dem der menschliche Körper und sein Schatten die gleiche Länge hatten. Wichtige Sätze über die Winkel ebener Figuren werden ihm zugeschrieben. So lernt jeder Schüler noch heute den „Satz des Thales“:

Der einem Halbkreis einbeschriebene Winkel ist ein rechter Winkel.

Zum Dank für diese Erkenntnis soll Thales den Göttern einen Ochsen geopfert haben. Jedoch existieren keine schriftlichen Dokumente des Thales.



Abb. 2.1.2. Ausschnitt aus dem Stadttor von Milet (Pergamon-Museum Berlin) [Foto Alten]

Neben die naturphilosophische Denkweise trat in der folgenden Periode die religiös-philosophisch ausgerichtete Gedankenwelt der Pythagoreer. Der Gründer der nach ihm benannten Lehre ist Pythagoras (ca. 580 – ca. 500 v. Chr.). Er wuchs in Samos auf, einer Insel im Meer vor Milet. Er könnte bei Thales und dessen Schüler Anaximander gelernt haben. Aus der Literatur ist bekannt, daß Pythagoras zahlreiche Reisen in fast alle Länder des Ostens unternommen hat, so auch nach Ägypten, wo er von dem persischen Eroberer Kambyses gefangen genommen und nach Babylon gebracht worden sein soll. Dort – so ist zu lesen – verbrachte er sieben Jahre, in denen er von den Priestern in die Mystik und von den Magiern in die Zahlenlehre, Musik und andere Wissenschaften eingeweiht wurde. Der Neuplatoniker Iamblichos (ca. 250 – ca. 330 n. Chr.) berichtet, daß er dort auch die „Goldene Proportion“ gelernt habe, die besagt:

$$m : h = a : n,$$

wobei h und a das harmonische und das arithmetische Mittel zwischen m und n sind, d. h.:

$$h = \frac{2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}},\ a = \frac{m+n}{2}.$$

Vermutlich kam Pythagoras auch mit Zarathustra (Gründer der altiranischen Religion „Parsismus“) und seiner Lehre in Berührung, die von einem Dualismus zwischen dem bösen Geist Ahriman und dem guten Gott Ahura Masda ausgeht und die Menschen zu ethischen Entscheidungen herausfordert.

Später gründete Pythagoras in Italien eine religiös-philosophisch und politisch ausgerichtete Sekte, die nach ihrem Gründer benannt wurde. Sie wandte sich gegen die Auflockerung der Sitten in großen Teilen des Adels und praktizierte selbst ein strenges Leben voll Selbstbeherrschung und kollektiver Disziplin. Ihre Mitglieder widmeten sich dem Studium der Wissenschaften und der Philosophie. Die Antwort auf die Frage nach der Erhebung der Seele und der Vereinigung mit Gott fanden sie in der Mathematik, die zu einem Teil ihrer Religion wurde. Für die Pythagoreer lag das Wesen der Welt, im Gegensatz zu früheren Auffassungen von Wasser oder Luft als Urstoff, in der göttlichen Harmonie der Zahlen. Deren Verinnerlichung machte sie, ihrem Glauben folgend, unsterblich. Musik, Harmonie und Zahlen gehörten ihrer Lehre untrennbar an. Diese Auffassung findet sich noch im europäischen Mittelalter, wo Harmonielehre (Musik) mit Geometrie, Arithmetik und Astronomie die vier nichttrivialen Wissenschaften des Quadriviums bilden.

Aus dem Interesse an den Eigenschaften von Zahlen, auch auf dem Hintergrund althergebrachter Zahlenmystik, entwickelte sich die Mathematik der Pythagoreer als exakte Wissenschaft, in der mathematische Sätze auf der Grundlage von Postulaten bewiesen sowie Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten von Zahlen abstrakt formuliert wurden. Bei ihrem Zahlenstudium stießen die Pythagoreer aber an ihre Grenzen, vermutlich als Hippasos (ca. 450 v. Chr.) die inkommensurablen Strecken entdeckte. Das sind Strecken, deren Längenverhältnis nicht durch das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen

(also durch einen Bruch) angebbar ist, z. B. $\sqrt{2}$. Da durch diese Entdeckung irrationaler Größen ihre auf natürlichen Zahlen basierende Theorie ins Wanken geriet, sollen die Pythagoreer Hippasos aus ihrem Bund ausgeschlossen haben.

2.1.2 Athenische Periode (450 – 300 v. Chr.)

Nach den erfolgreichen Perserkriegen im 5. Jh., während derer der attische Seebund zum Kampf gegen die Perser gegründet wurde, war Athen zur bedeutendsten Seemacht geworden. In dieser Zeit erfolgte auch die politische Einigung und Festigung der Griechen.

So brach unter der Herrschaft von Perikles das „Goldene Zeitalter“ der Kunst und Wissenschaft an. Athen wurde zum Zentrum der mathematischen Aktivitäten und galt als politisch und kulturell führender Stadtstaat. Zenon von Elea (um 490–430 v. Chr.) erörterte logische Probleme, die zum einen die Teilbarkeit und Nichtteilbarkeit der Dinge enthalten, zum anderen den Begriff der Bewegung thematisieren (Paradoxie des Achilles und der Schildkröte). Als Philosophen traten im Athen des 5. Jhs. v. Chr. vor allem die Sophisten (Weisheitslehrer) auf. Sie diskutierten auch die sogenannten klassischen Probleme der Mathematik: die Verdopplung des Würfels, die Dreiteilung des Winkels und die Quadratur des Kreises. Dabei wollten sie sich nicht, wie vor ihnen die Ägypter und Babylonier, mit Näherungslösungen zufrieden geben, sondern verlangten nach einer genauen Lösung. Die Versuche, dies mit Zirkel und Lineal als alleinigen Hilfsmitteln zu leisten, schlugen fehl. Das führte dazu, neue Methoden zur Lösung solcher Problem zu suchen, vgl. [Scriba/Schreiber, S. 40ff.]. So fand Hippias von Elis um 420 v. Chr. zur Dreiteilung des Winkels die später Quadratrix genannte Kurve (vgl. 2.2.5). Die Sophisten widmeten sich jedoch in erster Linie der Redekunst, der Rhetorik. Mit ihrem gesamten Wissensschatz gingen sie unter das Volk, auf die Marktplätze und in die Häuser der Reichen und verkauften dort ihre Kenntnisse wie eine Ware. Dadurch wuchs die Bedeutung der Sophisten unter der Bevölkerung, wurde sie doch durch deren Unterweisungen in die Lage versetzt, beispielsweise in Volksversammlungen logisch zu argumentieren oder allgemein Streitgespräche führen zu können.

Bei den Philosophen Platon und Aristoteles stieß diese Art der Wissensvermittlung jedoch auf herbe Kritik. Sie widersetzten sich dem aufklärerischen Geist, von dem die städtische Bevölkerung profitierte. Für die Herausbildung der logischen Wissenschaften jedoch haben die Sophisten und Sokrates (469–399 v. Chr.) große Vorarbeit geleistet. Ihre Verdienste liegen in der Vermittlung der Kunst, logisch zu diskutieren, sowie in ersten Ansätzen über die Lehre vom Begriff, von der Definition und der Induktion.

Zur Zeit Platons (427–347 v. Chr.), eines Schülers von Sokrates, war die kulturelle Blüte Athens bereits im Niedergang begriffen. Der Peloponnesische Krieg und zahlreiche weitere Kriege hatten die Demokratie in eine Krise



Abb. 2.1.3. Berühmte Zeugen klassisch-griechischer Architektur auf der Akropolis von Athen: die Propyläen (437–432 v. Chr.)
[Foto Alten]



Abb. 2.1.4. Der aus pentelischem Marmor geschaffene Parthenon (447–438 v. Chr.) gilt als vollendetes Meisterwerk griechischer Architektur
[Foto Alten]

versetzt, die Platon durch seine Lehren über Philosophie und Tugend zu meistern versuchte. Um 377 v. Chr. gründete er seine Akademie, die bis 529 Bestand hatte und dann von Kaiser Justinian geschlossen wurde. Sie diente der Lehre und der philosophischen und wissenschaftlichen Forschung.

Für Platons Weltverständnis ist das Wesen des Seienden entscheidend. Die wirkliche Welt besteht für ihn aus Ideen, die vernünftig und wirklich sind. Als höchste Idee bezeichnet er die des Guten und Schönen. Die mit den Sinnen wahrnehmbaren Dinge bezeichnet er als unvollständige Abbilder der Ideen. Die Mathematik dient Platon als Mittel zur Erkenntnis der idealen Welt. So ist für ihn eine gezeichnete Gerade nur ein Zerrbild der idealen Geraden; durch ihre Betrachtung jedoch kann die Erinnerung an das Idealbild geschaffen werden. Wie sehr Platon sich zur Mathematik hingezogen fühlte, verrät der ihm zugeschriebene Ausspruch: „Kein der Mathematik Unkundiger trete unter mein Dach“. Zwar hinterließ er selbst keine eigenen mathematischen Werke, jedoch bemühten sich die „Akademiker“ darum, die Lehre der Elemente zu einem wohlgeordneten System der Geometrie zu entwickeln und übten nicht zuletzt dadurch nachhaltigen Einfluß auf das mathematische Geschehen aus. In der Platonischen Schule haben große Mathematiker gewirkt: Archytas von Tarent (428? – 365?), Theaetet (gest. 369) – ihm wird die Theorie der Irrationalen zugeschrieben (im 10. Buch der Elemente Euklids) – und Eudoxos (ca. 408 – 355), der die Theorie der Proportionen (fünftes Buch der Elemente) und die der fünf regulären Körper, der Platonischen Körper, aufgestellt hat.

Der griechische Philosoph und Gelehrte Aristoteles (384 v. Chr. – 322 v. Chr.) gilt als bedeutendster Denker der Antike. Er war ein Schüler Platons und in der Zeit von 367 – 347 v. Chr. an dessen Akademie tätig, dann Lehrer des jungen Alexander, der als „der Große“ in die Geschichte einging. 335 v. Chr. gründete er in Athen die Philosophenschule „Lykeion“. Für mathematische Grundfragen interessierte sich Aristoteles deshalb, weil er durch sie Zugang zu allgemeinen Gesichtspunkten (logische Schriften) und kennzeichnende Illustrationsbeispiele (philosophische Schriften) hatte. Er gilt als Schöpfer der Wissenschaft der Logik, auf die sich mathematische Schlüsse stützen und die insbesondere die schon von den Eleaten benutzte Anwendung indirekter Beweise ermöglicht. Sie ist uns aus seinem Werk „Organon“ bekannt und war bis in das 19. Jh. die wesentliche Grundlage der Mathematik. Hierin liegen die Wurzeln zum logischen Formalismus und die Einführung des noch heute üblichen Aussagekalküls. Er besagt u. a. daß jeder Aussage und jeder zulässigen Verknüpfung solcher Aussagen genau einer von zwei Wahrheitswerten zugeordnet wird: falsch oder wahr, es gibt keine dritte Möglichkeit (tertium non datur). Aristoteles wird der Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{2}$ aufgrund des Widerspruchs von gerade und ungerade zugeschrieben.

Als letzter Repräsentant dieser Periode lebte Euklid (360? – 290? v. Chr.) Über sein Leben sind kaum gesicherte Daten übermittelt. Er soll jedoch jünger gewesen sein als Eudoxos und älter als Archimedes. Um 300 v. Chr.



Abb. 2.1.5. Skulptur aus dem Gymnasium der Giganten in Athen (links); Statue des Aristoteles in Stageira/Griechenland (rechts)
[links: Foto Alten, rechts: Foto Joh. Mars]

soll er in Alexandria gelebt und Geometrie gelehrt haben. Euklid gilt als der Begründer der dortigen mathematischen Schule. Das einflußreichste Mathematikbuch aller Zeiten, das die Kriterien der griechischen Mathematik dieser Epoche widerspiegelt, sind die „Elemente“ des Euklid. Das Werk ist der älteste größere mathematische Text, der aus der griechischen Antike überliefert wurde. Es zeichnet sich besonders durch das deduktive Vorgehen und die Beweise aus, die auf Definitionen, Axiomen und Postulaten beruhen und mit der Methodologie des Aristoteles geführt werden. Die Bausteine der in 13 Bücher gegliederten „Elemente“ sind die „Propositionen“, bestehend aus Lehrsätzen mit Beweis und Aufgaben mit anschließender Lösung, vgl. [Scriba/Schreiber 2000, S. 49ff.].

2.1.3 Hellenistische Periode (ca. 300 v. Chr. – ca. 150 n. Chr.)

In der zweiten Hälfte des 4. Jhs. v. Chr. wurde Makedonien unter König Philipp II. zum mächtigsten Staat in Griechenland. Die griechischen Städte verloren ihre Selbständigkeit und mußten sich wieder einem König unterordnen. Mit der Absicherung von Philipps Macht beginnt das Zeitalter des Hellenismus, das aufgrund der Ausbreitung griechischer Lebensweisen und Kultur nach Osten eine Verschmelzung von abend- und morgenländischer Kultur hervorbringt.

Nach der Ermordung Philipps übernahm Alexander III. – den die Geschichte den Großen nennt – die Macht und sicherte sie dadurch ab, daß er mögliche Konkurrenten beseitigen ließ. Unter seiner Herrschaft entstand ein gewaltiges Reich. Die von ihm gegründete Stadt Alexandria in Ägypten entwickelte sich zum kulturellen Mittelpunkt der antiken Welt. Als neu entstandene Stadt ohne Traditionen war sie offen für neue Einflüsse. Griechische, ägyptische und jüdische Bevölkerungsschichten tolerierten einander. Der Handel erfuhr einen neuen Aufschwung, Entdeckungsreisen schufen Verbindungen zu entferntesten Kulturen.

Das Museion, das über eine reichhaltige Bibliothek von ca. 700 000 Schriftrollen verfügte, unterhielt eine Gemeinschaft von Gelehrten, die vom König ein Gehalt erhielten und sich ganz ihren Studien hätten widmen können. Trotzdem gingen viele einem Beruf nach, z. B. als Architekt, Arzt oder Feldmesser.

Dieser Studienort, das Museion, wurde zum Anziehungspunkt für Gelehrte aus der damals bekannten Welt. Dort wurden die Disziplinen Literatur, Mathematik, Astronomie und Medizin als Wissenschaft per se studiert, wobei die Mathematik einen besonderen Stellenwert einnahm. Sie entwickelte sich unabhängig von Philosophie und Religion.

Ermöglicht durch die neu geschaffenen Verbindungen zu anderen Kulturen erhielt die angewandte Mathematik durch die von den Alexandrinern als Wissenschaften akzeptierten Gebiete wie Optik, Mechanik, Landvermessung, Astronomie und Logistik neue Impulse. In dieser aufgeschlossenen Atmosphäre konnten sich über den langen Zeitraum von 600 Jahren hinweg Mathematiker in verschiedenen Disziplinen entfalten. Einige der bedeutendsten werden hier kurz vorgestellt (vgl. [Wußing 1997, S. 71, 73, 74] und [Scriba/Schreiber 2000, S. 67–73]).

Archimedes von Syrakus (ca. 287–212 v. Chr.) wurde in Syrakus geboren und war wahrscheinlich der Sohn des Astronomen Phidias. In Alexandria lernte er bei den Nachfolgern Euklids das mathematische und physikalische Wissen und hatte erheblichen Einfluß auf die Mathematik seiner Zeit. Er galt als großer Mathematiker und Physiker, auch als Erfinder. So konstruierte er verschiedene Maschinen, z. B. Wasserpumpen und Kriegsmaschinen. Dem König Hieron II. und dessen Nachfolgern diente er mit seinen Kenntnissen als technischer Berater.

Von Archimedes ist eine nette Anekdote bekannt, die besagt, wie er zur Entdeckung des Auftriebsgesetzes kam. Demnach sollte er für besagten König Hieron feststellen, ob eine gefertigte Krone aus reinem Gold, wie gewünscht, bestand. Es sollten keine anderen Metalle beigemischt sein. Durch Zufall entdeckte Archimedes die Lösung dieses Problems, als er in der Badewanne lag. So bemerkte er, daß jeder Körper im Wasser um so viel leichter wird, wie das Gewicht der verdrängten Wassermenge beträgt. Demnach muß die Gewichtsabnahme der Krone im Wasser der eines gleich schweren Goldklumpens entsprechen. Nur dann ist beider Rauminhalt gleich und die Krone demnach aus reinem Gold. Über diese Erkenntnis war Archimedes derartig erfreut, daß er aus der Wanne sprang und, ohne sich anzukleiden, durch die Straßen lief. Dabei rief er begeistert: „Heureka!“ (Ich habe es gefunden!).
Die Parabelquadratur (Berechnung des Flächeninhalts eines Parabelsegments) führte er mechanisch und geometrisch durch, vgl. den Videofilm „Vom Zählstein zum Computer – Altertum“ [Wesemüller-Kock/Gottwald 1998]. Einige weitere Werke von Archimedes werden später vorgestellt.

Eratosthenes von Kyrene (ca. 276–194 v. Chr.), ein Zeitgenosse des Archimedes , galt als Universalgelehrter und arbeitete in Alexandria auf den Gebieten der Philologie, Grammatik, Mathematik, Literatur, Astronomie und Geometrie. Seit 235 v. Chr. war er der Vorsteher des dortigen Museions. Von Eratosthenes kennen wir u. a. das „Sieb des Eratosthenes“, ein Verfahren zur Aussonderung von Primzahlen, und eine Methode zur Bestimmung des Erdumfanges.

Apollonios von Perge (ca. 260–190 v. Chr.), ein jüngerer Zeitgenosse von Archimedes, wurde in dem Städtchen Perge im Süden Kleinasiens geboren und stand ebenfalls mit dem Museion und Alexandria in Verbindung. Als sein Hauptwerk ist die neuartige, systematische Darlegung der Kegelschnitte, die Conica, bekannt, seit deren Bekanntwerden der Gebrauch der Begriffe „Ellipse, Parabel, Hyperbel“ üblich geworden ist. Deren Entstehung erklärt er als erster ganz klar dadurch, daß man einen Kegel mit einer Ebene schneidet.

2.1.4 Spätantike (ca. 300 – ca. 500 n. Chr.)

Diophant (ca. 250 n. Chr.) löste durch sein erstes Werk, die „Arithmetika“, die Arithmetik und die Algebra vollständig von der Geometrie ab. Die Lebensdaten des Diophant sind nicht genau festzulegen. Anhand der Widmung seiner Arithmetika an den „sehr verehrten Dionysios“, vermutlich den von 247 – 264 wirkenden alexandrinischen Bischof Dionysios den Großen, ist anzunehmen, daß er um 250 n. Chr. gelebt hat. Aufgrund dieser Verbindung könnte er Christ gewesen sein und in Alexandria gelebt haben. Er kannte die babylonische Mathematik und benutzte diese Kenntnis beim Aufbau seiner „Arithmetika“. Sie besteht aus 13 Büchern, von denen zehn erhalten geblieben sind. Die Arithmetika gilt als Hauptwerk der Antike zur Algebra.



Abb. 2.1.6. Ptolemaios bei der Beobachtung der Gestirne nach der Abbildung von Gregor Reisch in der Margarita Philosophica 1503 (verwendete Ausgabe: Straßburg 1504)

Über das Privatleben Diophants erfährt man etwas aus seiner Grabinschrift, die als algebraisches Rätselgedicht geschrieben wurde. Demnach war er verheiratet und hatte einen Sohn. Die Inschrift lautet [Cantor 1880, S. 465]:

Hier dies Grabmal deckt Diophant. Schauet das Wunder!
Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;
Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart;
Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe,
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.
Wehe das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.
Darauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer
Von sich scheuchend, auch er kam an das irdische Ziel.

Diophant war der letzte große griechische Mathematiker der Antike. Pappos von Alexandria (um 300 n. Chr.) stellte die Werke der klassischen Autoren zusammen, um sie möglichst vollständig gegen das aufstrebende Christentum zu verteidigen. Die antike Kultur sollte erhalten bleiben. Vom Leiter der Akademie in Alexandria, Proklos Diadochos (410–485), stammt ein umfangreicher Kommentar zu Euklids Elementen. Die Akademie in Athen wurde als eine der letzten mathematischen Schulen auf Befehl des christlichen Kaisers Justinian 529 n. Chr. geschlossen. Er wollte die „heidnischen und verderblichen Lehren" nicht weiter dulden.

Der im 2. Jh. in Alexandria tätige Gelehrte Klaudios Ptolemaios faßte im „Almagest" die Erkenntnisse seiner Vorgänger bei astronomischen Beobachtungen und die Berechnungen mit Hilfe der Sehnentrigonometrie zusammen vgl. [Scriba/Schreiber, S. 78ff.]. Dieses Werk und sein astrologischer „Tetrabiblos" fanden großes Interesse bei indischen und arabischen Übersetzern und wirkten auch bei den Gelehrten im mittelalterlichen Europa stark nach. Mit seiner Kegelprojektion leistete Ptolemaios einen frühen Beitrag zur Kartographie.

Für die geographische Ortsbestimmung wurden in der Spätantike bereits ausgeklügelte Instrumente entwickelt. Ein interessantes Beispiel ist die zwischen 250 und 350 n. Chr. entstandene Sonnenuhr von Philippi (vgl. Abb. 2.1.7), mit ähnlichen Merkmalen wie das von Hipparch vorgeschlagene Astrolabium. Sie diente der Bestimmung des Azimuts und der Höhe von Sternen. Insbesondere konnte man mit ihr die geographische Breite des Standortes bestimmen, indem die Höhe der Sonne während ihrer Kulmination zur Tag- und Nachtgleiche gemessen wurde.

2.2 Das besondere Merkmal der griechischen Algebra

Die Leitlinie für die Geschichte der Algebra in Griechenland von Pythagoras (ca. 560 – 480 v. Chr.) bis Diophant (ca. 250 – ca. 330 n. Chr.) ist die Gleichungstheorie: Lineare Gleichungen und quadratische Gleichungen (Abschnitt 3.4), sodann kubische Gleichungen und biquadratische Gleichungen (Abschnitt 3.5), deren lösung durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal allein nicht gelang. Die drei berühmten klassischen Probleme dieser Art,



Abb. 2.1.7. Sonnenuhr von Philippi (aus der Zeit zwischen 250 und 350 n. Chr.). [Zeichnung nach Vorlage in „Antike griechische Technologie“, Thessaloniki 2000]

nämlich die Winkeldreiteilung, die Würfelverdopplung und die Quadratur des Kreises wurden zwar erst im 19. Jh. mit den modernen Methoden der Algebra und Analysis gelöst, indem nachgewiesen wurde, daß ihre Lösung äquivalent zur Lösung kubischer bzw. transzendenter Gleichungen ist, deren Lösung nicht als Strecken mit Zirkel und Lineal allein (in endlich vielen Schritten!) konstruiert werden können. Jedoch ersannen bereits die Griechen geometrische Verfahren unter Verwendung anderer Hilfsmittel, welche den Nachweis der Existenz der Lösungen brachten bzw. die Lösungen oder Näherungswerte dafür in Gestalt von Strecken lieferten. Die Griechen erdachten somit implizit im Altertum geometrische Verfahren zur Behandlung gewisser kubischer (auch biquadratischer) Gleichungen, deren zahlen- bzw. formelmäßige Auflösung erst in der Renaissance gelang (vgl. Kap. 4: Tartaglia, Cardano, Ferrari). Deshalb werden die sog. klassischen Probleme wie auch die Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks des Archimedes hier ausführlicher behandelt (vgl. dazu auch Abschnitt 2.2.2 in [Scriba/Schreiber 2000, S. 40–48]).

Die altgriechische Algebra wurde also durch Geometrie begründet, deshalb spricht man von „geometrischer Algebra“. In jüngere Zeit ist diese Interpretation stark umstritten, vgl. dazu [Knorr 1975], [Szabo 1969]. Das Buch II

der „Elemente“ Euklids enthält eine Reihe von algebraischen Aussagen, ausgedrückt in geometrischer Einkleidung. In geometrischen Formulierungen ist auch die Lehre von den regulären Polygonen und Polyedern und die Lehre von den Kegelschnitten beschrieben, wie sie sich bei den großen Gelehrten der damaligen Zeit, Theaetet (gest. 369 v. Chr.), Archimedes und Apollonios findet. Die Terminologie in der geometrischen Algebra der Griechen ist teilweise eine Fortsetzung der Formulierungen der mesopotamischen Algebra. Die Mesopotamier nannten das Produkt xy „Rechteck“, x^2 „Viereck“. Die Griechen nannten a^2 „das Quadrat über a“ und ab „das von a und b aufgespannte Rechteck“. Ausdrücke wie Multiplizieren und Wurzelziehen verwendeten die Griechen im Gegensatz zu den Mesopotamiern nur für ganze Zahlen und Brüche. Warum haben die Griechen geometrische (d. h. anschauliche) Beziehungen bevorzugt? Zum einen gab es „ästhetische“ Gründe, weil nach ihrer Philosophie Formen (und deshalb Geometrie) eine wichtige Rolle spielten, wie z. B. beim Tempelbau, zum anderen auf Grund praktischer Probleme, wie bei Navigationsberechnungen.

Es sind aber wichtigere Gründe, die die Griechen veranlaßten, algebraische Probleme mit geometrischen Methoden zu behandeln. nämlich die Entdeckung der irrationalen Zahlen durch die Pythagoreer (nach Pappos). Seit dem 5. Jh. v. Chr. war bekannt, daß es Streckenverhältnisse wie das der Diagonale eines Quadrates zu dessen Seite gibt, die sich nicht durch das Verhältnis $p : q$ natürlicher Zahlen p und q ausdrücken lassen. Solche Strecken nannte man inkommensurabel, d. h. nicht mit dem gleichen Maß meßbar. Theaetet und insbesondere Eudoxos gelang es, einen Kalkül mit Größen-Verhältnissen zu entwickeln, der unserem Rechnen mit reellen Zahlen gleichwertig ist, obwohl diese Größen-Verhältnisse nicht als Zahlen betrachtet wurden. Das Verhältnis zweier inkommensurabler Strecken kann nicht durch (natürliche) Zahlen dargestellt werden. Mangels eines noch nicht genügend weit entwickelten Zahlbegriffs und einer uns heute geläufigen Formelsprache konnten die Griechen der klassischen Zeit algebraische Probleme nur in der Sprache der von ihnen weit entwickelten Geometrie formulieren und lösen. Der Nachteil dieser „geometrischen Algebra“ ist die Beschreibung der Gleichungen (vor allem größer als 3. Grades) und der zu ihrer Lösung gefundenen Verfahren mittels der umständlichen Proportionenlehre.

Erst gegen Ende der hellenistischen Periode finden sich erste Ansätze einer algebraischen Symbolik in Diophant‘s „Arithmetik“, vermutlich fußend auf den lange zuvor in Mesopotamien entwickelten Elementen formalen algebraischen Denkens.

Im Gegensatz zur vorgriechischen Mathematik werden die Zahlzeichen der Griechen erst am Ende des Kapitels gebracht, da die Mathematiker bis zum Ende der Zeit des Euklid im wesentlichen keine Zahlzeichen in den formalen mathematischen Texten gebrauchten.

2.3 Lineare und quadratische Gleichungen

Die Altpythagoreer hatten die Methode der Flächenanlegung in der Geometrie entdeckt, und Euklid hat diese Methode in den Elementen (hauptsächlich im Buch VI) systematisch diskutiert. Mit dieser Methode kann man (algebraisch gesehen) gewisse lineare und quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten (geometrisch) lösen. Sie wird daher im Abschnitt 2.3.2 allgemein beschrieben, bevor in den Abschnitten 2.3.3 und 2.3.4 die linearen bzw. die rein quadratischen Gleichungen der Form $ax = c$ und $x^2 = b$ nach der Lösungsmethode Euklids behandelt werden.

Die quadratischen Gleichungen der Gestalt $ax^2 + c = bx$; $(a, b, c > 0,$ $b^2 - 4ac \geq 0)$ und $ax^2 = bx + c$ $(a, b, c > 0)$ sollen anschließend ebenfalls nach der Methode Euklids mit Hilfe der Flächenanlegung gelöst werden.

2.3.1 Die „Elemente“ des Euklid

In den „Elementen“ faßte Euklid das mathematische Wissen seiner Zeit zusammen. Wesentliche Teile dieses Werkes werden auch heute noch in unseren Schulen gelehrt. Es besteht aus 13 Büchern, in denen Definitionen, Axiome (das sind nach Euklid die Behauptungen, die jeder Vernünftige ohne Beweis akzeptiert) und Postulate (geometrische Behauptungen ohne Beweis) als Grundlagen seiner Propositionen – das sind Lehrsätze mit Beweisen oder Aufgaben mit Lösungen – formuliert sind. Heute verwenden wir Axiome und Postulate als synonyme Begriffe (d. h. Behauptungen, die wir als Grundlage einer mathematischen Disziplin ohne Beweis akzeptieren, die natürlich unbedingt widerspruchsfrei und möglichst auch unabhängig sein müssen). Damit baut Euklid das eigentliche Lehrgebäude auf, wie es uns in abgewandelter, moderner Form auch heute noch als Kern einer deduktiv ausgerichteten mathematischen Theorie dient.

Die Bücher beinhalten folgende Themen:

I	Grundlagen (axiomatischer Aufbau)
II	Geometrische Algebra
III	Kreislehre
IV	Reguläre Polygone
V	Proportionenlehre des Eudoxos
VI	Anwendung der Proportionenlehre auf ebene Geometrie
VII - IX	Arithmetik
X	Irrationalitäten (Theorie der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Größen)
XI – XIII	Stereometrie



Abb. 2.3.1. Euklid in der rechten Archivolte des Königsportals der Kathedrale von Chartres (Frankreich). Neben Euklid sind auch Archimedes und andere griechische Gelehrte an dieser ab 1260 entstandenen frühgotischen Kathedrale dargestellt.
[Szene aus dem Videofilm „Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter“, Wesemüller-Kock 2003]

Eine detaillierte Beschreibung des allgemeinen Inhalts der „Elemente“ ist in dem Werk „5000 Jahre Geometrie“ [Scriba/Schreiber 2000, S. 49–61] zu finden.

Die Beiträge der „Elemente“ zur Algebra sind geometrische Lösungen der linearen Gleichungen und einiger Gattungen der quadratischen Gleichungen, die im wesentlichen aus den Büchern I, II, IV, V und VI stammen.

Das Merkmal der klassischen griechischen Mathematik (450–300 v. Chr.), jede algebraische Aussage geometrisch zu behandeln, findet sich bereits in der Formulierung des Distributivgesetzes $(a + b)a = ab + a^2$ und dessen Beweis nach Euklid in Buch II, Prop. 3[1]:

> „Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke und einem der Abschnitte dem Rechteck aus den Abschnitten und dem Quadrat über vorgenanntem Abschnitt zusammen gleich.

[1] In diesem Kapitel benutzen wir die deutsche Übersetzung und Kommentierung der „Elemente“ aus dem Griechischen von Thaer [Euklid]

Man teile die Strecke AB beliebig, in C. Ich behaupte, daß $AB \cdot BC = AC \cdot CB + BC^2$.[2]

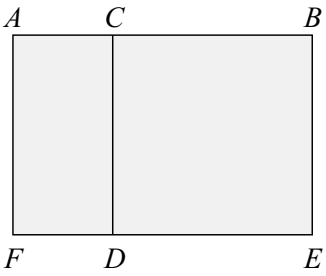


Abb. 2.3.2. Figur zum Distributivgesetz

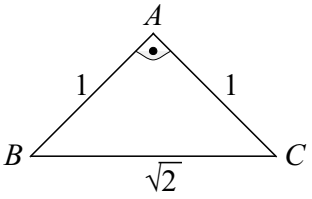
Man zeichne nämlich über CB das Quadrat CDEB, verlängere ED nach F und ziehe durch A $AF||CD$ *oder BE. Hier ist Pgm.*[3] $AE = AD + CE$. *AE ist nun* $AB \cdot BC$; *denn es wird von* AB, BE *umfaßt, und* $BE = BC$. *Und AD ist* $AC \cdot CB$; *denn* $DC = CB$. *Und DB ist* CB^2. *Also ist* $AB \cdot BC = AC \cdot CB + BC^2$.“

Wie man aus dem Satz und dem Beweis sieht, unterschied man nicht wie heute zwischen einer Strecke und ihrer Länge (ausgedrückt durch Maßzahl und Einheit), zwischen einer Fläche und ihrem Inhalt, zwischen einem Körper und seinem Volumen. Vielmehr wurden Strecken mit ihrer Länge, Flächenstücke mit ihrem Inhalt, Körper mit ihrem Volumen identifiziert bzw. Zahlen durch Streckenlängen, Flächeninhalte oder Volumina dargestellt und deshalb nur positive Zahlen verwendet – ein Grund dafür, daß auch die Gleichung $ax = c$ und nicht $ax + c = 0$ bzw. Gleichungen der Gestalt $ax^2 + c = bx$ aber nicht $ax^2 + bx + c = 0$ behandelt wurden. Die geometrische Algebra ist auch der Grund für die bis in die Neuzeit erhobene Forderung der „Homogenität“ bzw. „Dimensionstreue“ algebraischer Gleichungen, so daß also z. B. in $ax^2 + c = bx$ folgendes gelten muß: repräsentiert x eine Länge, ebenso b, so müssen x^2 und c Flächeninhalte darstellen, jedoch muss a dimensionslos sein, etwa das Verhältnis zweier Längen bedeuten. Die Griechen konnten auch irrationale Zahlen repräsentieren, z. B. $\sqrt{2}$ als Länge der Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge 1, aber der Begriff der allgemeinen Quadratwurzel stand ihnen nicht zur Verfügung, da ihnen der Limesbegriff fehlte. Mangels geeigneter Präzisierung des Irrationalen nannten sie Strecken wie Seiten und

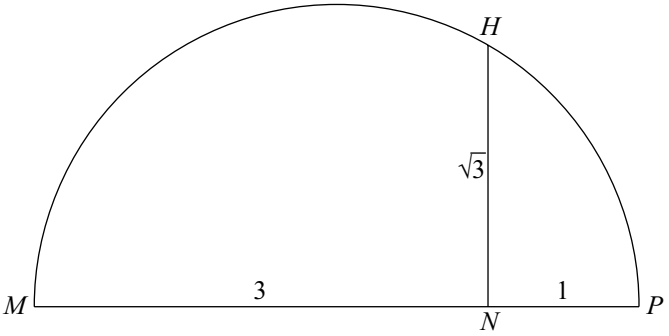
[2] BC^2 ist das Quadrat über BC.

[3] Pgm. AE ist das Parallelogramm mit den Eckpunkten $AFEB$. Der Name Parallelogramm, wörtlich parallelliniges Flächenstück, wird bei Euklid ohne Definition benutzt. Auch AD und CE sind Parallelogramme (im Satz und in der Figur Rechtecke).

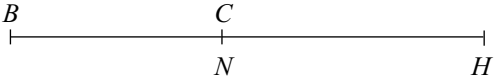
Diagonale eines Quadrates inkommensurabel, d. h. nicht mit dem gleichen Maß meßbar. Dennoch hätte Euklid beispielsweise $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ mit Hilfe von Strecken „berechnen“, d. h. wie in Abbildung 2.3.3 darstellen können.



1. $AB^2 + AC^2 = BC^2$



2. $MN \cdot NP = NH^2$



3. $BH = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Abb. 2.3.3. Darstellung von $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ und $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ als Strecken

In den „Elementen“ des Euklid begegnet man zum ersten Mal strengen Beweisen und Formulierungen auf der Basis von Definitionen und Axiomen.

Hier liegt einer der entscheidenden Unterschiede zwischen der klassischen griechischen Mathematik und ihren Vorgängern: die Strenge der Beweise.

In der vorgriechischen Mathematik stand die Anwendbarkeit und die Nützlichkeit der Mathematik im Vordergrund, in der klassischen griechischen Mathematik und Philosophie die Suche nach dem Verständnis der Wahrheit durch strenge Beweise.

2.3.2 Die Methode der Flächenanlegung

Die von den Pythagoreern entwickelte Methode der Flächenanlegung dient insbesondere der Verwandlung eines Polygons in ein flächengleiches Parallelogramm bzw. Rechteck, indem man das Polygon in Dreiecke zerlegt, jedes in ein flächengleiches Parallelogramm verwandelt und diese zusammenfaßt.

Die drei Fälle der einfachen, der elliptischen und der hyperbolischen Flächenanlegung werden am Beispiel der Anlegung eines Parallelogramms an die Strecke AB beschrieben.

Sei AB eine gegebene Strecke, G eine gegebene geradlinig begrenzte Figur mit dem Flächeninhalt σ.

(I) Im Fall von Abb. 2.3.4 sagt man: Wir haben das Parallelogramm $ABCD$ mit Flächeninhalt σ an die Strecke AB angelegt[4].

(II) Im Fall von Abb. 2.3.5 sagt man: Wir haben das Parallelogramm AB_1C_1D mit Flächeninhalt σ an die Strecke AB (defizient = elliptisch[5]) so angelegt, daß das Parallelogramm B_1BCC_1 fehlt. Ist μ der Flächeninhalt des Parallelogramms BB_1C_1C, so sagt man entsprechend, daß wir das Parallelogramm BB_1C_1C mit Flächeninhalt μ an die Strecke AB (defizient) so angelegt haben, daß das Parallelogramm B_1ADC_1 fehlt.

(III) Im Fall von Abb. 2.3.6 sagt man: Wir haben das Parallelogramm AB_1C_1D mit Flächeninhalt σ an die Strecke AB (hyperbolisch[6]= überschießend) so angelegt, daß das Parallelogramm BB_1C_1C überschießt.

[4] Das griechische Wort für anlegen ist $\pi\alpha\rho\alpha\beta\grave{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$ (paraballein); daher stammt das Wort Parabel.

[5] elliptisch: $\acute{\epsilon}\lambda\lambda\epsilon\grave{\iota}\pi\epsilon\iota\nu$ (elleipein), d. h. fehlen.

[6] hyperbolisch: $\grave{\upsilon}\pi\epsilon\rho\beta\grave{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$ (hyperballein), d. h. überschießen.

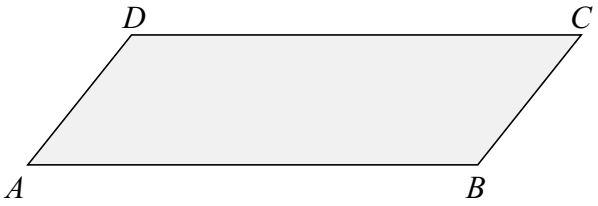


Abb. 2.3.4. Einfache Flächenanlegung

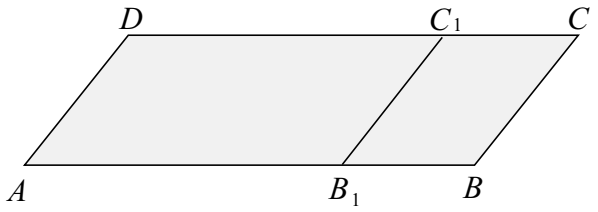


Abb. 2.3.5. Elliptische Flächenanlegung

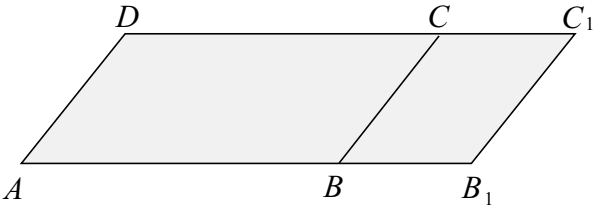


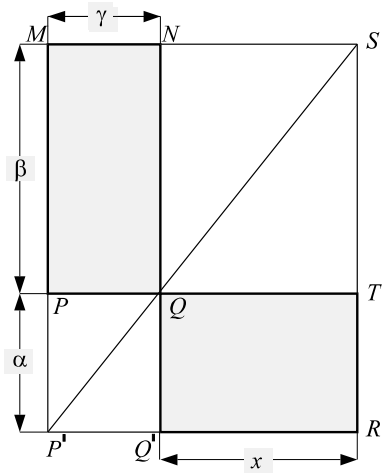
Abb. 2.3.6. Hyperbolische Flächenanlegung

2.3.3 Lineare Gleichungen

Zur Lösung der Gleichung $ax = b$ nach der geometrischen Methode Euklids muß man die Symbole a, x und b zunächst geometrisch interpretieren. Deutet man a und x als Streckenlängen, so muß b wegen der Homogenität (Dimensionstreue) einen Flächeninhalt darstellen, etwa den eines Rechtecks mit den Seitenlängen β und γ. Man betrachtet daher $\alpha x = \beta\gamma$ anstelle von $ax = b$. Geometrisch lautet dann die Aufgabe:
„Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen β und γ. Konstruiere ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite die Länge α hat“.

Das gelingt mit Hilfe der Konstruktion von Prop. 44 aus Buch I der Elemente, die in deutscher Übersetzung lautet:

„An eine gegebene Strecke ein einem gegebenen Parallelogramm gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel anzulegen.“

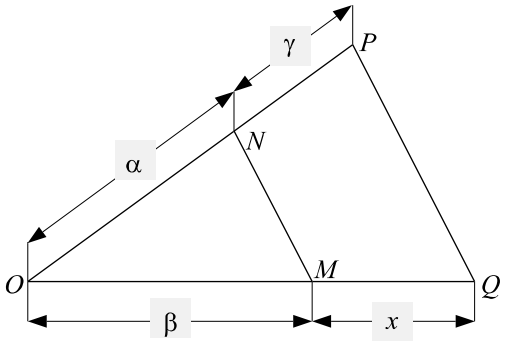


$$\beta \cdot \gamma = x \cdot \alpha$$

Abb. 2.3.7. Lösung von $\alpha x = \beta\gamma$ mit Ergänzungsparallelogrammen

In Buch VI, Prop. 12, gibt es eine andere geometrische Methode für die Lösung der Gleichung $\alpha x = \beta\gamma$:
Hier konstruiert Euklid die Strecke x mit Hilfe ähnlicher Dreiecke bzw. nach dem Strahlensatz als „vierte Proportionale“ so, daß gilt:

$$\alpha : \gamma = \beta : x$$

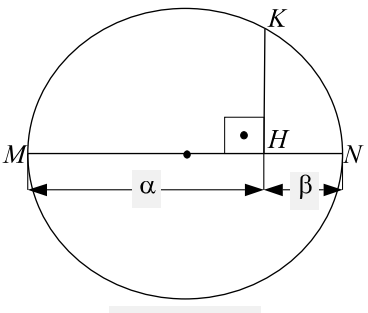


Die Gerade durch MN ist parallel zur Geraden durch PQ.

Abb. 2.3.8. Lösung der Gleichung $\alpha x = \beta\gamma$ mit dem Strahlensatz

2.3.4 Rein quadratische Gleichungen

In Buch VI, Prop. 13 formuliert Euklid die Aufgabe *„Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu finden.“*, d. h. für zwei Strecken α und β muß x so konstruiert werden, daß $\alpha : x = x : \beta$ gilt (x heißt dann die „mittlere Proportionale“ zu α und β). Die Griechen verwendeten keine Bruchschreibweise, sondern nur Proportionen. Euklid konstruiert x (löst also die Gleichung $x^2 = \alpha\beta$) mit Hilfe des Höhensatzes (s. Abb. 2.3.9): α und β werden als Abschnitte der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks der Höhe KH gewählt; also gilt $\alpha\beta = KH^2$ deshalb $x = KH$.



Kreis mit Radius $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und Durchmesser MN

Abb. 2.3.9. Lösung der Gleichung $x^2 = \alpha\beta$ mit dem Höhensatz

Eine andere geometrische Lösungsmethode der rein quadratischen Gleichung $x^2 = \alpha\beta$ liefert Prop. 14 aus Buch VI: „In gleichen winkelgleichen Parallelogrammen sind die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional. Und winkelgleiche Parallelogramme, in denen die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional sind, sind gleich“. Man konstruiert also ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $\alpha\beta$, dessen Seite das gesuchte x ist.

2.3.5 Ein Diorismos

Schon in 2.3.1 wurde begründet, weshalb in der geometrischen Algebra der Griechen die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ nicht behandelt wurde: Die einzelnen Terme waren ihrer geometrischen Interpretation entsprechend positiv. Man mußte daher die Typen (1) $ax^2 + bx = c$, (2) $ax^2 = bx + c$ und (3) $ax^2 + c = bx$ unterscheiden, wie dies auch der persische Gelehrte al-Ḫwarizmī (al-Chorezmi) noch 1000 Jahre später getan hat. Auch kannten die Griechen nicht den Begriff der Null.

Bei den Typen (1) und (2) gibt es stets eine positive reelle Lösung (und eine damals nicht bekannte negative Lösung). Bei Typ (3) kann es jedoch mehrere Fälle geben: zwei verschiedene positive Lösungen, genau eine positive Lösung

oder gar keine reellen (sondern zwei konjugiert komplexe) Lösungen. Der letztgenannte Fall war aus damaliger Sicht unmöglich, und man war daher bestrebt, ihn von vornherein auszuschließen, indem man Bedingungen für die Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer Lösung suchte, einen sog. Diorismos.

Einen solchen Diorismos für die Möglichkeit einer Lösung der Gleichung $ax^2 + c = bx$ liefert Euklid in Buch VI, Prop. 28, nämlich die Bedingung (modern formuliert) $b^2 - 4ac \geq 0$. Der Beweis fußt auf Prop. 27 aus Buch VI:

„Von allen Parallelogrammen, die man an eine feste Strecke so anlegen kann, daß ein Parallelogramm fehlt, welches einem über ihrer Hälfte gezeichneten ähnlich ist und ähnlich liegt, ist das über der Hälfte angelegte, das selbst dem fehlenden ähnlich ist, das größte."

Zum Verständnis dieses Satzes muß man sich zunächst verdeutlichen, was mit „Anlegung eines Flächenstückes an eine feste Strecke" und den dabei auftretenden Fällen gemeint ist (s. Abschnitt 2.3.2).

Der Satz lautet in moderner Formulierung:
Sei $ABNM$ (Abb. 2.3.10 und 2.3.11) ein Parallelogramm; C bzw. D Mittelpunkt der Strecke AB bzw. MN; D_0 der Schnittpunkt der Geraden durch B und D und der Geraden durch A und M; D' ein beliebiger Punkt der Strecke D_0B [7]. Dann gilt:

Der Flächeninhalt des Parallelogramms $AC'D'M'$ ist höchstens gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms $ACDM$.

Bezeichnen wir den Flächeninhalt des Parallelogramms $UVV'U'$ durch $\mu\,(UVV'U')$, so erhält die letzte Aussage die Gestalt

$$\mu\,(AC'D'M') \leq \mu\,(ACDM)\,. \tag{2.3.1}$$

Algebraische Interpretation von Buch VI, Prop. 27

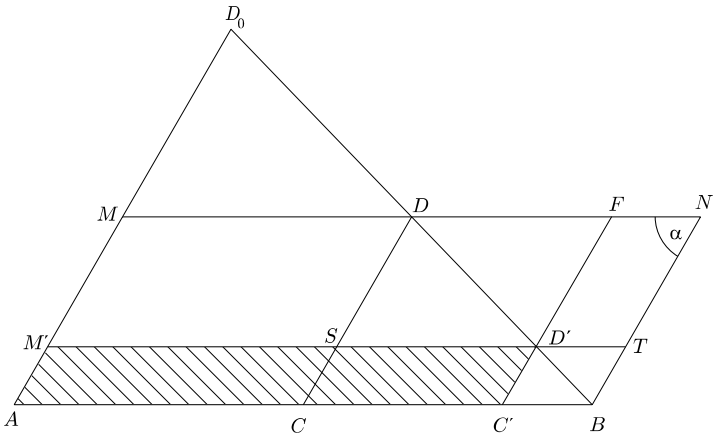
Mit Hilfe der Abb. 2.3.10 und 2.3.11 läßt sich der geometrische Sachverhalt der Proposition wie folgt algebraisch in heutiger Schreibweise interpretieren (umstritten ist jedoch, ob dies schon die Griechen algebraisch interpretierten):

$$\mu\,(AC'D'M') = AC' \cdot C'D' \sin\alpha \tag{2.3.2}$$

$$\mu\,(ACDM) = \frac{1}{2} AB \cdot CD \sin\alpha \tag{2.3.3}$$

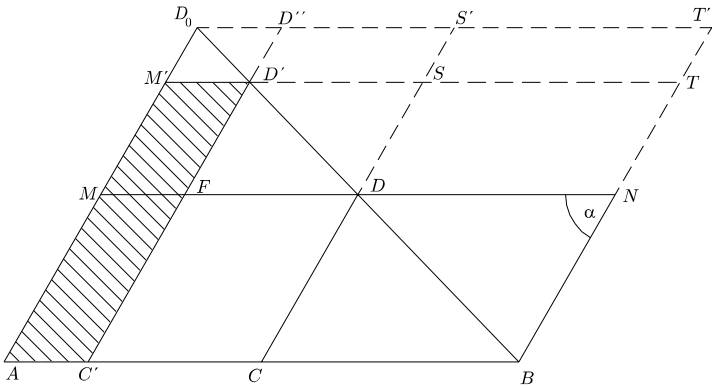
$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{BC'}{BC} = \frac{AB - AC'}{\frac{AB}{2}} = 2 - 2\frac{AC'}{AB} \quad . \tag{2.3.4}$$

[7] Abb. 2.3.10 zeigt den Fall, in dem D' auf der Strecke DB liegt; Abb. 2.3.11 zeigt den Fall, in dem D' auf der Strecke DD_0 liegt. „Der Punkt X liegt auf der Strecke UV", bedeutet, daß X zwischen U und V liegt, oder U oder V ist.



$AC = CB,\ MD = DN,\ 0 < \alpha < \pi$

Abb. 2.3.10. Figur 1 zu Prop. 27 aus Buch VI



$AC = CB,\ MD = DN, 0 < \alpha < \pi$

Abb. 2.3.11. Figur 2 zu Prop. 27 aus Buch VI

Deshalb folgt (aus (2.3.2) und (2.3.4)) :

$$\begin{aligned}\mu\ (AC'D'M') &= AC' \cdot CD\ \left\{2 - 2\tfrac{AC'}{AB}\right\}\ \sin\alpha \\ &= 2CD \cdot AC' \sin\alpha - 2\tfrac{CD}{AB}\ (AC')^{\,2} \sin\alpha \quad .\end{aligned}$$

Mit $\sigma = \mu\ (AC'D'M')$ und $AC' = x$ erhält man daraus die quadratische Gleichung

$$x^2 \frac{2CD}{AB} \sin\alpha - x \cdot 2CD \sin\alpha + \sigma = 0. \tag{2.3.5}$$

Die Wurzeln der Gleichung (2.3.5) sind $\frac{AB}{2CD\sin\alpha}\left\{CD\sin\alpha \pm \sqrt{\Delta}\right\}$, wobei $\Delta = CD^2\sin^2\alpha - 2\frac{CD}{AB}\sigma\sin\alpha$ und + im Fall der Abb. 2.3.10, − im Fall der Abb. 2.3.11 gilt.
Wegen (2.3.1) und (2.3.3) gilt nun

$$\sigma = \mu(AC'D'M') \leq \mu(ACDM) = \frac{1}{2}AB \cdot CD\sin\alpha$$

und deshalb auch

$$\sigma \cdot 2\frac{CD}{AB}\sin\alpha \leq CD^2\sin^2\alpha \Leftrightarrow \Delta \geq 0,$$

d. h. die Aussage (2.3.1) ist äquivalent zur Aussage

„Die quadratische Gleichung (2.3.5) hat reelle Wurzeln“. (2.3.6)

Durch diese Äquivalenz der geometrischen Aussage (2.3.1) und der algebraischen Aussage (2.3.6) wird der Zusammenhang zwischen Geometrie und Algebra für den Fall quadratischer Gleichungen der Gestalt $ax^2 + c = bx$ mit $a, b, c > 0$ hergestellt und es wird klar, weshalb anstelle dieser Gleichung zur geometrischen Lösung in 2.3.6 die Gestalt (2.3.5) verwendet wird.
Es ist klar, daß gilt:
(Q) „Mit den Bezeichnungen aus Abb. 2.3.10 sei $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}AB \cdot CD\sin\alpha$. Dann ist die Bestimmung aller Wurzeln der Gleichung (2.3.5) äquivalent zur Bestimmung aller Parallelogramme $AC'D'M'$ mit $\mu(AC'D'M') = \sigma$.“

2.3.6 Lösung quadratischer Gleichungen nach Euklid

Aufgrund der Interpretation von Buch VI, Prop. 27 in 2.3.5 betrachten wir an Stelle der Gleichung $ax^2 + c = bx$ die Gleichung

$$x^2 \cdot \frac{2CD}{AB}\sin\alpha - x \cdot 2CD\sin\alpha + \sigma = 0 \tag{2.3.7}$$

mit der Bedingung

$$0 < \sigma \leq \frac{1}{2}AB \cdot CD \cdot \sin\alpha \quad . \tag{2.3.8}$$

Unter dieser Bedingung läßt sich Gleichung (2.3.7) im wesentlichen geometrisch lösen. In der folgenden Prop. 28 des gleichen Buches gibt Euklid die konkrete geometrische Lösung der Gleichung:

„An eine gegebene Strecke ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm so anzulegen, daß ein einem gegebenen ähnliches Parallelogramm fehlt; hierbei darf die gegebene geradlinige Figur nicht größer sein als das dem fehlenden ähnliche über der Hälfte der Strecke zu zeichnende Parallelogramm.“

Seien AB und CD beliebig gegebene Strecken und σ der Flächeninhalt einer gegebenen „geradlinigen Figur“ (d. h. eines Polygons). Mit den Strecken AB, CD und einem Winkel der Größe α konstruieren wir die Parallelogramme $ABNM$ wie in den Abbildungen 2.3.10 und 2.3.11 und betrachten die Punkte C, D, D_0 wie in den erwähnten Abbildungen; nun konstruieren wir den Punkt D' auf der Strecke BD bzw. DD_0 und damit die Parallelogramme $SD'FD$ und $AC'D'M'$, so daß gilt:

$$\mu(SD'FD) = \frac{1}{2}AB \cdot CD \sin\alpha - \sigma. \tag{2.3.9}$$

Dann gilt:

(E1) Die Lösungen der Gleichung (2.3.7) mit der Bedingung (2.3.8) sind die zwei Strecken:

$$\underset{\text{(Abb.2.3.10)}}{AC + CC'}, \quad \underset{\text{(Abb. 2.3.11)}}{AC - CC'}$$

(E2) $\mu(AC'D'M') = \sigma$.

Die Lösungen aus (E1) sind die beiden Strecken AC' aus Abb. 2.3.10 und 2.3.11. Euklid betrachtet als Lösung der Aufgabe aus Prop. 28, Buch VI nur die Strecke $AC' = AC + CC'$ aus Abb. 2.3.10. Wie später gezeigt wird, haben die Strecken CC' in Abb. 2.3.10 und Abb. 2.3.11 gleiche Länge.

Anzumerken bleibt, daß der Fall $D = D'$ auftreten kann. In diesem Fall ist $C = C', F = D$, $\mu(SD'FD) = 0$ und $\sigma = \frac{1}{2}AB \cdot CD \sin\alpha$, d. h. die beiden Lösungen aus (E1) fallen zusammen.

Damit ist gezeigt, daß mit den Methoden der Elemente jede quadratische Gleichung der Form $ax^2 + c = bx \quad \left(a, b, c > 0, b^2 - 4ac \geq 0\right)$ geometrisch zu lösen ist.

(E1) und (E2) sind in den Aufgaben 2.3.3 und 2.3.4 zu beweisen.

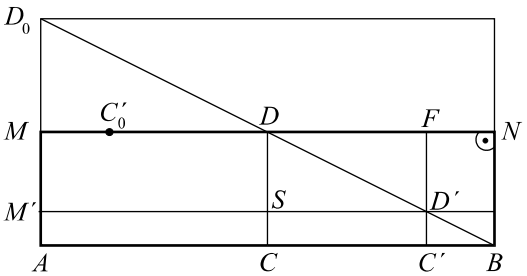
Ähnlich wie hier wird mit Hilfe von Buch VI, Prop. 29 die Gleichung $ax^2 = bx + c$ für $a, b, c > 0$ geometrisch gelöst.

Ein Beispiel

Benutzen Sie die geometrische Methode aus 2.3.5 und finden Sie die Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \quad . \tag{2.3.10}$$

Mit $CD = \frac{1}{2}, \alpha = 90°, AB = 2, \sigma = \frac{1}{4}$ erhalten wir diese Gleichung.



$ABNM$ ist ein Rechteck,
$AC = CB = MD = DN = 1$,
$AM = CD = \frac{1}{2}$

Abb. 2.3.12. Konstruktion zur Lösung von $ax^2 + c = bx$

Die Bedingung $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}AB \cdot CD \sin\alpha$ ist auch erfüllt. Jetzt konstruieren wir das Rechteck $ABNM$ wie in Abb. 2.3.12. Nun bestimmen wir den Punkt D' auf der Strecke BD, so daß gilt:

$$s = \mu(SD'FD) = \tfrac{1}{2}AB \cdot CD \cdot \sin\alpha - \sigma = \tfrac{1}{4}.$$

Dafür genügt es, DF und damit F auf der Strecke DN zu bestimmen. Nun gilt $DF : DS = CB : CD$ und $s = DF \cdot DS$. Daher gilt $DF^2 = \frac{CB}{CD} \cdot s = \frac{1}{2}$, und $DF = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ läßt sich dann geometrisch nach dem Höhensatz (als Höhe des rechtwinkligen Dreiecks mit den Hypotenusenabschnitten 1 und $\frac{1}{2}$) konstruieren. Die durch F gehende Parallele zur Geraden durch B und N schneidet die Diagonale BD_0 in D' und die Strecke AB in C'.
$AC' = AC + CC' = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist eine Wurzel der Gleichung (2.3.10). Sei C_0' auf der Strecke DM mit $DC_0' = CC'$, dann ist die andere Wurzel der Gleichung (2.3.10) nach 2.3.6 gleich MC_0', also $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Bemerkung: Bei der Lösung der Gleichung $ax^2 + c = bx$ handelte es sich um eine defiziente (elliptische) Flächenanlegung (in Abb. 2.3.10 und 2.3.11 haben wir an die Strecke AB das Parallelogramm $AC'D'M'$ mit dem Flächeninhalt σ so angelegt, daß das Parallelogramm $C'BTD'$ fehlt).

2.4 Kubische und biquadratische Gleichungen

Wir machen jetzt einen Sprung von der griechischen Mathematik des vierten Jhs. v. Chr. zu der des dritten Jhs. v. Chr. und ihrem hervorragenden Vertreter Archimedes. Der um 287 v. Chr. geborene Archimedes wurde gleichermaßen als Mathematiker und Physiker und durch seine technischen Konstruktionen als Ingenieur berühmt. Bei der Eroberung von Syrakus durch die

Römer im Jahre 212 v. Chr. wurde er von den Soldaten erschlagen, während er geometrische Figuren im Sand zeichnete – so die Legende. Er beschäftigte sich insbesondere auch mit der Berechnung der Rauminhalte und Oberflächen von Körpern und stieß dabei auf kubische und biquadratische Gleichungen.
Wie Euklid besaß auch Archimedes nicht die analytische Technik für die praktische Berechnung, aber auch er konnte durch die Identifizierung der Zahlen mit Strecken in einer erstaunlichen Weise Sätze beweisen, die bereits den Kern der Infinitesimalrechnung enthalten.

2.4.1 Kubische Gleichungen in „Kugel und Zylinder“ von Archimedes

Archimedes hat in seiner Schrift „Kugel und Zylinder“ [Archimedes a, II, 4] die Lösung des folgenden Problems P auf die Lösung einer kubischen Gleichung der Form $x^2\ (\alpha - x)\ = \beta$ mit $\alpha, \beta > 0$ reduziert.
Für die Lösung der Gleichung gibt Archimedes die Anzahl der Wurzeln der Gleichung im Intervall $[0, \alpha]$ durch die Benutzung von Kegelschnitten an und bestimmt diese Wurzeln mittels der Schnittpunkte einer Hyperbel mit einer Parabel.

Problem P: Eine gegebene Vollkugel ist durch eine Ebene so zu schneiden, daß die Volumina $V_1, V_2 (V_1 > V_2)$ der zwei Kugelsegmente ein gegebenes Verhältnis zueinander haben.

Sei $\frac{V_1}{V_2} = \frac{k}{l}$ mit $k > l > 0$, dann haben wir $\frac{V_1}{V_1+V_2} = \frac{k}{k+l}$, aber $V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$, wobei r der Radius der Kugel ist. Deshalb erhält man:

$$\frac{V_1}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{k}{k+l}.$$

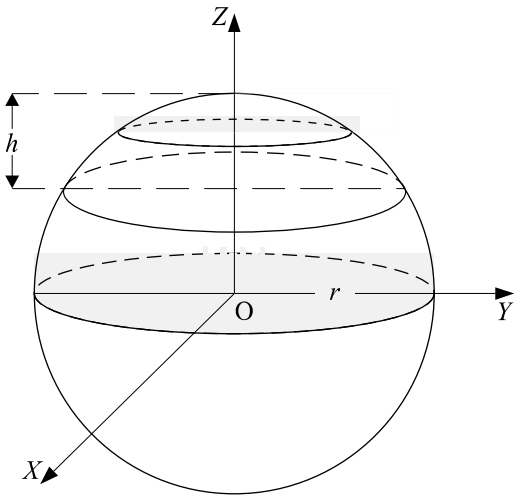
Archimedes hat in seinem o.g. Werk „Kugel und Zylinder, II“, in Satz 2 im wesentlichen die folgende Aussage bewiesen:

P_0 : Das Volumen eines Kugelsegmentes der Höhe h mit dem Kugelradius r ist gleich $\frac{\pi h^2}{3}\ (3r - h)$, (s. Abb. 2.4.1).

Heute leiten wir diese Formel schnell durch Integralrechnung her.
Archimedes hat angekündigt, die Lösung des Problems P anzugeben, also Aussagen über die Lösungen der Gleichung

$$x^2 \cdot\ (\alpha - x)\ = \beta \tag{2.4.1}$$

zu machen. Der geometrischen Interpretation der Griechen und der damit verbundenen Forderung der Homogenität (Dimensionstreue) von Gleichungen entsprechend muß bei Deutung von x als Strecke $0 < x < \alpha$ gelten und β die Gestalt $b^2 c$ mit $b, c > 0$ haben.



O: Mittelpunkt der Kugel, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ Gleichung der Kugeloberfläche im kartesischen Koordinatensystem x, y, z.

Abb. 2.4.1. Figur zu Problem P

Archimedes hat zwar angekündigt, die Lösung des Problems P am Schluß seiner Schriften zu geben, aber die versprochene Lösung fehlt. Eutokios (geb. ca. 480 n. Chr.) hat später eine Schrift, höchstwahrscheinlich die von Archimedes selbst, gefunden, die die versprochene Lösung im Spezialfall enthält. Die Aussagen in dieser Schrift lassen sich mit moderner Kurvendiskussion leicht gewinnen.

Sei $y = f(x) = x^2\,(\alpha - x)$, dann ist $f'(x) = 2x\alpha - 3x^2 = 0 \iff \left(x = 0 \vee x = \frac{2\alpha}{3}\right)$. Da $f'(x)$ zwischen 0 und $\frac{2\alpha}{3}$ positiv, zwischen $\frac{2\alpha}{3}$ und α negativ ist, hat die Kurve im Intervall $[0, \alpha]$ den in Abb. 2.4.2 skizzierten Verlauf.

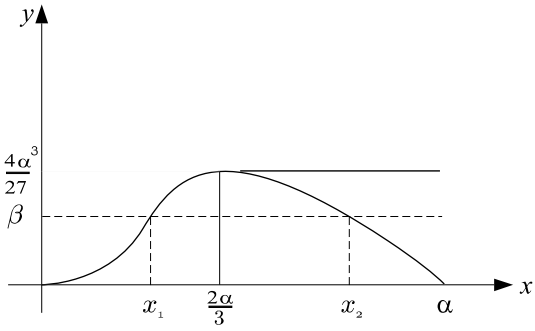


Abb. 2.4.2. Graph von $y = x^2(\alpha - x)$

Daraus ist ersichtlich:

1. $\beta = \frac{4\alpha^3}{27} \Rightarrow$ die Gleichung (2.4.1) hat nur eine Doppel-Wurzel im Intervall $(0, \alpha)$ und diese ist $\frac{2\alpha}{3}$.
2. $\beta > \frac{4\alpha^3}{27} \Rightarrow$ die Gleichung (2.4.1) hat keine Wurzel im Intervall $(0, \alpha)$.
3. $0 < \beta < \frac{4\alpha^3}{27} \Rightarrow$ die Gleichung (2.4.1) hat genau zwei verschiedene Wurzeln x_1, x_2 im Intervall $(0, \alpha)$ mit $0 < x_1 < \frac{2\alpha}{3} < x_2 < \alpha$.

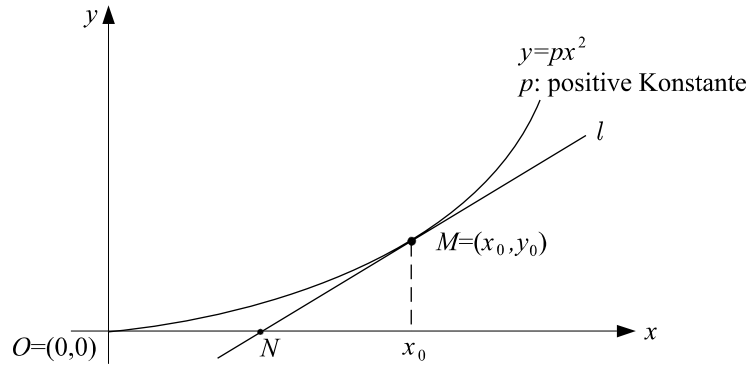
Archimedes hingegen löst das Problem geometrisch durch die Bestimmung der Schnittpunkte bzw. des Berührungspunktes einer Hyperbel und einer Parabel wie folgt (modern formuliert):

Wir betrachten das Hyperbelstück $C_1 : y = \frac{\beta}{\alpha - x}, 0 < x < \alpha$ und das Parabelstück $C_2 : y = x^2, 0 < x < \alpha$ (im kartesischen Koordinatensystem x, y). Es ist klar, daß x_0 genau dann die x-Koordinate eines Schnitt- oder Berührungspunktes von C_1 und C_2 ist, wenn x_0 eine Wurzel der Gleichung (2.4.1) zwischen 0 und α ist.

Für einen Schnittpunkt (x_0, y_0) der beiden Kurven C_1 und C_2 gilt $\frac{\beta}{\alpha - x_0} = x_0^2$ und daraus folgt (2.4.1) für $x = x_0$.

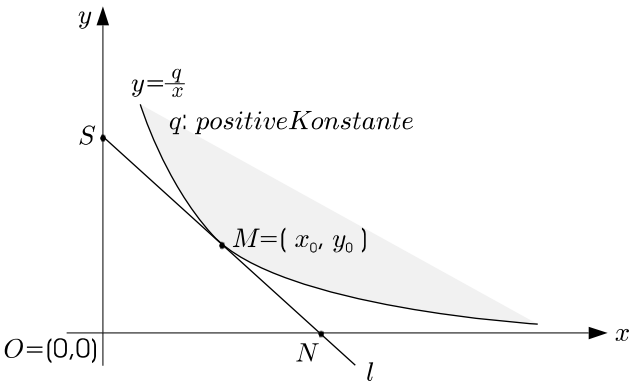
Nach Eutokios fand Archimedes den Wert von β, so daß C_1 und C_2 einander berühren. Dafür benutzte er die folgenden zwei Sätze:

Satz 2.4.1 *Gegeben sind die Parabel $y = px^2$ und der Punkt $M = (x_0, y_0)$, $x_0 > 0$ auf der Parabel, dann gilt (s. Abb. 2.4.3):*
Der Schnittpunkt N der Tangente an die Parabel in M mit der x-Achse halbiert das Intervall $[0, x_0]$. Umgekehrt ist die Gerade l durch $(\frac{x_0}{2}, 0)$ und (x_0, y_0) die Tangente an die Parabel im Punkt (x_0, y_0).



Sei M der Berührungspunkt der Geraden l und der Parabel; dann ist $2px_0\ (x - x_0)\ = y - px_0^2$ die Gleichung von l; für $y = 0$ folgt $x = \frac{x_0}{2}$, also $N = \left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$.

Abb. 2.4.3. Figur zu Satz 2.4.1



Sei M der Berührungspunkt der Geraden l und der Hyperbel, dann ist $-\frac{p}{\frac{q}{x_0^2}}\,(x - x_0) = y - y_0$ die Gleichung von l; sei $y = 0$, bzw. $x = 0$ in dieser Gleichung, dann erhält man $x = 2x_0$, bzw. $y = 2y_0$, also ist M der Mittelpunkt der Strecke NS.

Abb. 2.4.4. Figur zu Satz 2.4.2

Satz 2.4.2 *Gegeben sind die Hyperbel $y = \frac{q}{x}$, der Punkt $M = (x_0, y_0), x_0 > 0$ auf der Hyperbel und eine Gerade l, die durch M verläuft und die x- und die y-Achse schneidet, dann gilt (s. Abb. 2.4.4):*
M ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen den beiden Schnittpunkten (mit den Achsen) genau dann, wenn die Gerade die Tangente an die Hyperbel im Punkt M ist.

Hinweise zum Beweis der Sätze sind unter den beiden Abbildungen gegeben. Der Beweis der Umkehrung beider Sätze sei als Aufgabe dem Leser überlassen.

Sei nun $M = (x_0, y_0)$ ein Berührungspunkt der Kurven $y = \frac{\beta}{\alpha - x}$ und $y = x^2$. Nach den Sätzen 2.4.1 und 2.4.2 gilt dann (vgl Abb. 2.4.5) $OQ = QM' = \frac{x_0}{2}$ und $QM = MR$. Deshalb sind die Dreiecke QMM' und QRU ähnlich, und es ist $QM' = M'U$ also wegen $OQ = QM'$ dann $OM' = 2\frac{\alpha}{3}$.

Also muß β die folgende Bedingung erfüllen:

$$\frac{\beta}{\alpha - 2\frac{\alpha}{3}} = (2\frac{\alpha}{3})^2, \text{ d. h. } \beta = \frac{4\alpha^3}{27}.$$

Dann berühren sich die Kurven C_1 mit $\beta = \frac{4\alpha^3}{27}$ und C_2 im Punkt $M = \left(2\frac{\alpha}{3}, 4\frac{\alpha^2}{9}\right)$.

Nun folgert Archimedes richtig, daß die Gleichung (2.4.1) genau dann mindestens eine Lösung $0 < x_0 < \alpha$ besitzt, wenn $\beta \leq \frac{4\alpha^3}{27}$ (β ist immer positiv). Wenn $\beta < \frac{4\alpha^3}{27}$, dann hat die Gleichung (2.4.1) genau zwei verschiedene Lösungen $x_1 < x_2$ im Intervall $(0, \alpha)$, und es gilt $0 < x_1 < 2\frac{\alpha}{3}$ und

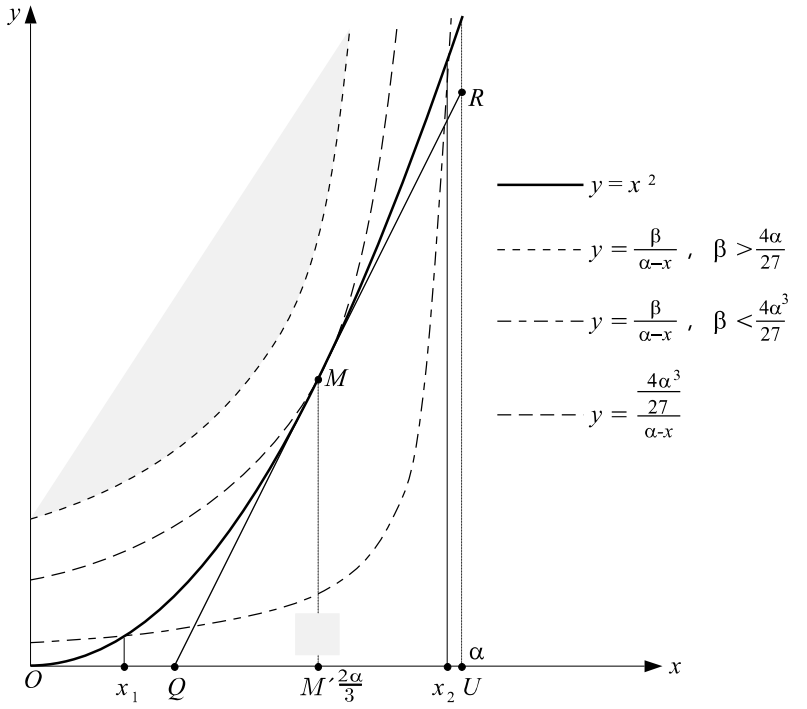


Abb. 2.4.5. Figur zu den Lösungen der Gleichung (2.4.1)

$2\frac{\alpha}{3} < x_2 < \alpha$. Wenn $\beta > \frac{4\alpha^3}{27}$ $(C_1 \cap C_2 = \emptyset)$, dann besitzt die Gleichung keine Lösung in $(0, \alpha)$. Wenn $\beta = \frac{4\alpha^3}{27}$ ist, gibt es in $(0, \alpha)$ nur die Lösung $x = 2\frac{\alpha}{3}$. Zur Lösung des Problems P ist (2.4.1) mit $\alpha = 3r, \beta = 4r^3\frac{k}{k+l}$ zu lösen, um die Höhe $h = x$ des Kugelsegmentes V_1 zu bestimmen. Wegen

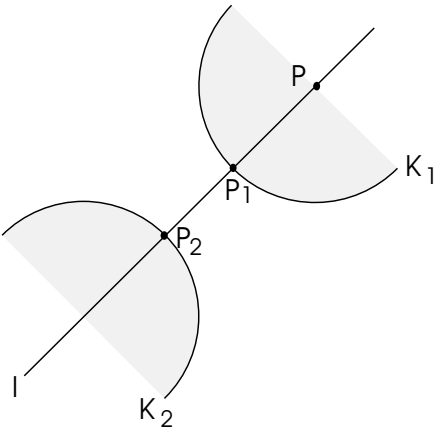
$$\beta = 4r^3\frac{k}{k+l} < 4r^3 = \frac{4\alpha^3}{27}$$

hat diese Gleichung genau eine Wurzel x_0 im Intervall $(0, 2r)$.
Archimedes hat den Berührungspunkt der Hyperbel $y = \frac{\beta}{\alpha - x}$ und der Parabel $y = x^2$ in Abhängigkeit von β betrachtet. Er hat Bedingungen gefunden, unter denen die Gleichung (2.4.1) d. h. $x^3 + \beta = \alpha x^2$ genau zwei verschiedene positive Wurzeln, keine positive Wurzel oder nur eine positive Wurzel besitzt. In den islamischen Ländern hat sich al-Ḫayyām mit Gleichungen dritten Grades beschäftigt. Er hat sich ebenfalls mit der obigen Gleichung befaßt, aber er hat dazu den Schnittpunkt der Parabel $y^2 = \sqrt[3]{\beta}(\alpha - x)$ und der Hyperbel $xy = \sqrt[3]{\beta^2}$ betrachtet und gezeigt, daß die Gleichung (2.4.1) für $\beta \leq \frac{\alpha^3}{8}$ entweder zwei Wurzeln oder eine oder gar keine (positive) Wurzel hat und für $\beta \geq \alpha^3$ gar keine (positive) Wurzel besitzt. Beide Unterscheidungen sind richtig, aber das Ergebnis von Archimedes ist befriedigender, weil seine Bedingungen sich gegenseitig ausschließende Fälle kennzeichnen.

2.4.2 Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks durch „Einschiebung“ von Archimedes

Archimedes hat sich auch schon mit der Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks befaßt. Seine auf „Einschiebung“ (gr. $\nu\epsilon\tilde{\upsilon}\sigma\iota\varsigma$ = neusis) beruhende geometrische Konstruktion entspricht in der Algebra der Lösung einer kubischen Gleichung und wird hier nach der vom Gelehrten Ṯābit ibn Qurra überlieferten Beschreibung (in moderner Sprache) dargestellt, vgl. auch [Scriba/Schreiber 2000, S. 70]. Ṯābit ibn Qurra stammte aus Harran (in der heutigen Türkei), wurde 836 geboren und starb 901. Er wirkte am Hofe des Kalifen in Bagdad als Mathematiker und Astronom und übersetzte alte Schriften aus dem Griechischen und Syrischen ins Arabische.

Die Methode der Einschiebung kann nach dem Mathematiker und Astronomen Pappos von Alexandria (um 300 n. Chr.) wie folgt beschrieben werden:



$K_1 \cap l = \{P_1\}$, $K_2 \cap l = \{P_2\}$, $P_1P_2 = \alpha$

Abb. 2.4.6. Zur Einschiebung nach Pappos

Seien K_1 und K_2 zwei Kurven, P ein Punkt, $\alpha > 0$. Eine Gerade l durch P ist so zu bestimmen, daß l die Kurven K_1 und K_2 schneidet und der Abstand der Schnittpunkte gleich α ist (siehe Abb. 2.4.6).

Archimedes hat für die Teilung einer Strecke eine andere Methode der Einschiebung als Pappos benutzt.

Er betrachtet das Quadrat $ACRW$ wie in Abb. 2.4.7 und legt durch W eine Gerade WM, so daß:

$$(\text{Flächeninhalt von } \triangle\, WUR) = (\text{Flächeninhalt von } \triangle\, CTM) \qquad (2.4.2)$$

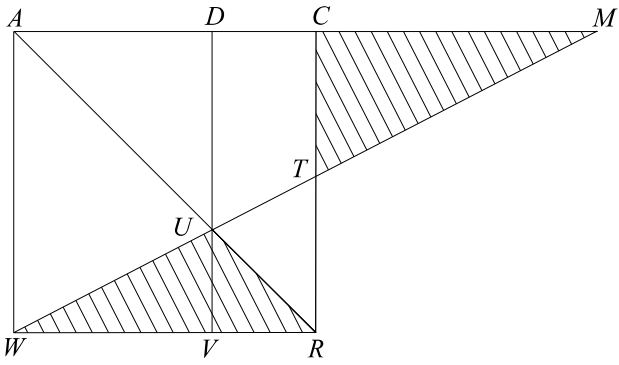


Abb. 2.4.7. Zur Einschiebung nach Archimedes

Die von Archimedes ersonnene Konstruktion erfolgt nach Ṯābit ibn Qurra im wesentlichen in zwei Schritten [Tropfke 1940, S. 429]:

Schritt I: Sei AC eine Strecke. Wir bestimmen zwei Punkte D und M (D innerhalb und M außerhalb der Strecke, $D \neq A, C$; $M \neq A, C$ wie in Abb. 2.4.8), so daß zugleich gilt (s. Aufgabe 2.3.7):

$$CM^2 = AC \cdot AD \text{ und } AD^2 = CD \cdot DM \quad . \tag{2.4.3}$$

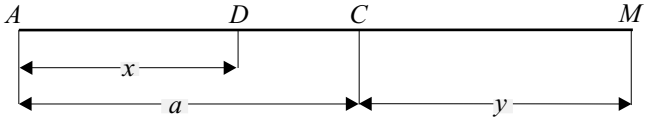


Abb. 2.4.8. Figur zu Schritt I

Schritt II: Seien A, D, C, M wie in Schritt I; es gibt B außerhalb der Geraden durch A und C, so daß $AB = BC = MC$. Es folgt, daß $\sphericalangle\, BMC = \mu = \frac{\pi}{7}$ (der Beweis sei dem Leser überlassen) und $\sphericalangle\, BAD = 2\mu = \frac{2\pi}{7}$ (siehe Abb. 2.4.9). Also ist es klar, daß AB eine Seite eines regelmäßigen Siebeneckes ist, das dem Kreis durch M, B, A einbeschrieben ist (siehe Abb. 2.4.10).

Erläuterungen: Algebraisch kann man die Bestimmung der Punkte D und M in Schritt I auf die Lösung einer kubischen Gleichung reduzieren:
Sei $AC = a$, $AD = x$, $CM = y$, dann sind die Gleichungen (2.4.3) den Gleichungen (2.4.4) äquivalent (siehe Abbildung 2.4.8):

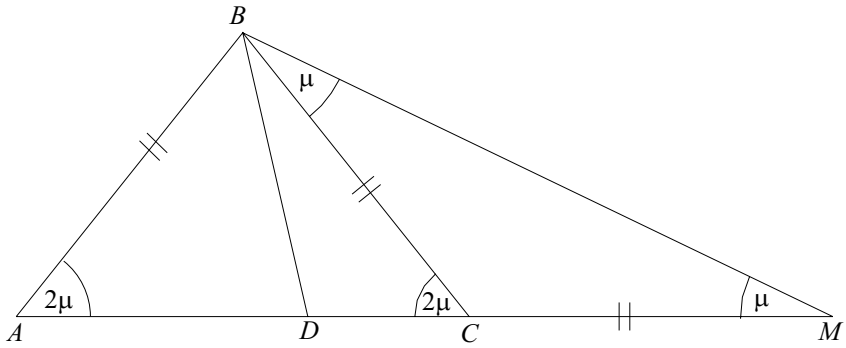


Abb. 2.4.9. Figur zu Schritt II

$$y^2 = ax \text{ und } x^2 = (a-x)(y+a-x) \quad . \tag{2.4.4}$$

Die zweite Gleichung ist wegen $0 < x < a$ äquivalent zu $y = a\frac{2x-a}{a-x}$. Also ist die Existenz zweier Punkte D und M wie in Schritt I für $0 < x < a$ der Existenz einer Wurzel x der Gleichung $ax = a^2 \left(\frac{2x-a}{a-x}\right)^2$ gleichwertig.

Für $x \neq a$ ist diese der Gleichung $x\ (a-x)^{\ 2} = a\ (2x-a)^{\ 2}$ äquivalent, d. h. der kubischen Gleichung

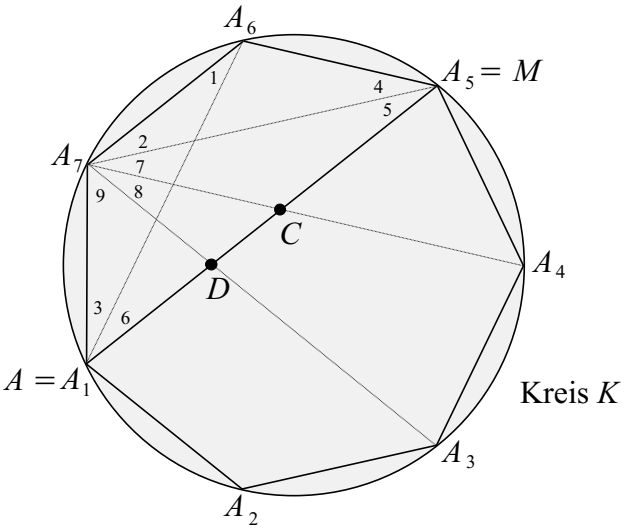
$$x^3 - 6ax^2 + 5a^2x - a^3 = 0. \tag{2.4.5}$$

Die Funktion $f(x) = x^3 - 6ax^2 + 5a^2x - a^3$ hat wegen $f(0) = f(a) = -a^3$ und $f(\frac{a}{2}) = \frac{a^3}{8}$ die beiden Nullstellen $x_1 \in (0, \frac{a}{2})$ und $x_2 \in (\frac{a}{2}, a)$ (Zwischenwertsatz für stetige Funktionen). Da $f(a) = -a^3 < 0$ und $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ muß die dritte Nullstelle von f rechts von a liegen.

Bemerkung: Das regelmäßige Siebeneck ist nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wie Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) später bewies. Er hat allgemein den folgenden Satz bewiesen:

Satz 2.4.3 *Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, V_n ein regelmäßiges n–Eck. Dann sind die Aussagen K_1 und K_2 zueinander äquivalent:*
(K_1) V_n ist konstruierbar mit Zirkel und Lineal.
(K_2) Es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2^k$ oder es gibt $k \in \mathbb{N}_0$ und l paarweise verschiedene Fermatsche Primzahlen $p_1, \ldots, p_l$, mit $n = 2^k p_1 \ldots p_l$.

Dabei heißt eine Primzahl p eine *Fermatsche Primzahl*, wenn sie die Gestalt $p = 2^{2^n} + 1$ hat. Für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ erhalten wir der Reihe nach die Werte $3, 5, 17, 257, 65537$, und alle sind Primzahlen, aber $2^{2^5} + 1$ ist keine Primzahl, weil sie durch 641 teilbar ist, wie Leonhard Euler (1707 – 1783) bewies. Es ist nicht bekannt, ob es unendlich viele Fermatsche Primzahlen gibt.



Die Punkte D und M auf der Geraden durch A und C werden durch Einschiebung gemäß Abb. 2.4.7 konstruiert (Schritt I), sodann die Punkte A_7 und A_6 wie in Abb. 2.4.9 (Schritt II) usw.. Dann sind $A_1, \ldots, A_7$ die Ecken eines regelmäßigen Siebeneckes. Es ist klar, daß die Winkel $\hat{1}, \ldots, \hat{8}$ einander kongruent sind und sie die gemeinsame Größe $\mu = \frac{\pi}{7}$ besitzen. Es ist auch klar, daß der Winkel $\hat{9} = 2\mu$ ist.

Abb. 2.4.10. Zur Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks durch Einschiebung

Wir wollen hier nicht den Begriff der Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal streng definieren, dieser Begriff sollte anschaulich klar sein. Als Beispiel folgt aus diesem Satz, daß die regelmäßigen n–Ecke mit $n = 3, 5, 17$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, die regelmäßigen n–Ecke mit $n = 7, 9$ hingegen nicht. Der Beweis von $(K_1) \Rightarrow (K_2)$ wurde im Jahre 1837 von P. L. Wantzel vollendet.

2.4.3 Dreiteilung des Winkels nach Archimedes

Eines der sog. klassischen Probleme der Mathematik ist die von vielen griechischen Mathematikern behandelte Teilung eines beliebigen Winkels in drei gleiche Teile (vgl. [Scriba/Schreiber 2000, S. 44ff.]). Mit Zirkel und Lineal allein läßt sich auch dieses Problem nicht lösen, wie man allerdings erst durch seine algebraische Betrachtung in der Neuzeit bewies: Es führt auf die Lösung einer i.a. irreduziblen kubischen Gleichung. Die Griechen suchten indes nach geometrischen Lösungen. Auch hier war Archimedes erfolgreich: Mit der oben beschriebenen Methode der „Einschiebung“ löste er die Aufgabe der Winkeldreiteilung, blieb allerdings den Beweis für seine Behauptung schuldig (vgl. Liber assumptorum, Satz VIII [Archimedes b], [Heath 1887]).

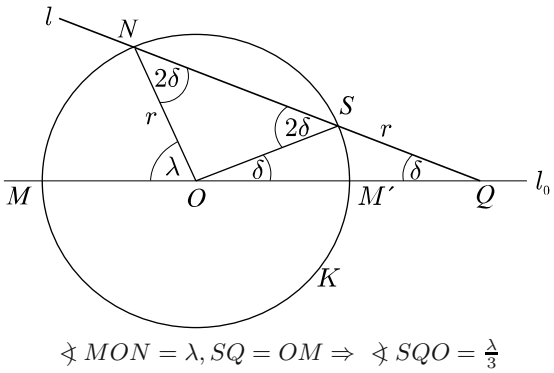


Abb. 2.4.11. Figur zur Dreiteilung des Winkels

Sei $\sphericalangle MON$ ein Winkel der Größe λ, $0° < \lambda < 90°$, K der Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r, MM' ein Durchmesser des Kreises.

Archimedes behauptet, daß ein Punkt S auf K (wie in Abbildung 2.4.11) existiert, so daß die Gerade durch NS die Gerade durch MM' in einem Punkt Q mit der Eigenschaft $QS = r$ schneidet. Er gibt keinen Beweis für diese Behauptung.

Auch hier wird das Problem durch „neusis“ (Einschiebung) gelöst. Gegeben sind der Kreis K und die Gerade l_o durch M, M', und wir müssen eine Gerade l durch N so bestimmen, daß l die Kurven K und l_o schneidet und der Abstand der Schnittpunkte S und Q gleich r ist. Angenommen, daß l existiert und $QS = r$, dann folgt, daß $\sphericalangle SQO = \frac{\lambda}{3}$. Begründung: In Abb. 2.4.11 sieht man aufgrund des Außenwinkelsatzes sofort, daß $\sphericalangle NSO = 2 \cdot \sphericalangle SOM' = 2 \cdot \sphericalangle SQM$ und $\sphericalangle MON = 3 \cdot \sphericalangle SQO$.

Also hat Archimedes die Dreiteilung eines beliebigen Winkels auf die obige Einschiebung reduziert. Es kann gezeigt werden, daß die Lösung dieses Einschiebungsproblems aus der Lösung der kubischen Gleichung $x^3 - 3r^2x - 2r^3 \cos\lambda = 0$ folgt, bzw. aus der Berechnung von $\cos\delta$ aus der trigonometrischen Formel $4\cos^3\delta - 3\cos\delta = \cos 3\delta$ für $3\delta = \lambda$.

2.4.4 Archimedes und die biquadratischen Gleichungen

Archimedes hat in seinem Buch „Über Spiralen“ [Heath 1887, S. c, ci und 156–159] in den Sätzen 5, 6 und 7 die folgende Aussage (E_0) zu einem speziellen Einschiebungsproblem ohne Beweis benutzt.

(E_0): Sei K ein Kreis mit dem Mittelpunkt O; der Punkt $N \in K$ und die Strecke der Länge $\alpha > 0$ seien vorgegeben; MM' sei ein Durchmesser von K; $N \neq M, M'$; l_0 die Gerade, die MM' enthält. Dann existiert eine Gerade l durch N, welche den Kreis in einem Punkte S und die Gerade l_0

außerhalb des Kreises in einem Punkte Q derart schneidet, daß die beiden Schnittpunkte den Abstand α haben (Abb. 2.4.12).

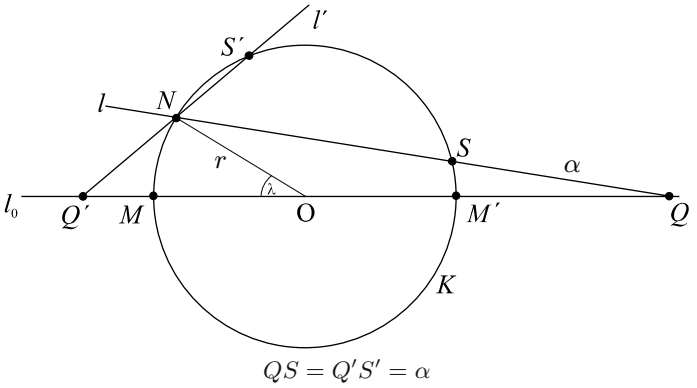


Abb. 2.4.12. Figur zu (E_0) und (E_1)

Wie Abb. 2.4.12 zeigt, gilt sogar die Verschärfung von (E_0):

(E_1): Seien K, O, N, α, MM' und l_0 vorgegeben wie in (E_0), dann existieren genau zwei verschiedene Geraden l, l' durch N, sodaß l den Kreis in S und die Gerade l_0 außerhalb des Kreises in Q und l' den Kreis in S' und l_0 außerhalb des Kreises in Q' derart schneiden, daß $SQ = S'Q' = \alpha$ ist und O zwischen Q und Q' liegt. Dabei kann S oder S' mit N zusammenfallen, also l oder l' Tangente an K in N sein.

Die Behandlung dieses Einschiebungsproblems mit den Mitteln der modernen Algebra führt auf eine biquadratische Gleichung und auf den zu (E_1) äquivalenten Satz der Algebra

Satz 2.4.4 *Die biquadratische Gleichung*

$$x^4 - (2r^2 + \alpha^2)x^2 - (2\alpha^2 r \cos\lambda)x + r^4 - \alpha^2 r^2 = 0$$

besitzt für $\alpha < 0$ *genau eine Wurzel in* $(-\infty, -r)$ *und genau eine Wurzel in* $(r, +\infty)$.

Die Herleitung dieser Gleichung erfordert geschicktes Rechnen und sei ebenso wie der Beweis des Satzes dem Leser als Aufgabe überlassen. Dieses Einschiebungsproblem und seine Lösung zeigen, daß bereits Archimedes prinzipiell in der Lage war, Wurzeln gewisser Gleichungen vierten Grades geometrisch zu bestimmen.

2.4.5 Das Delische Problem – die Würfelverdopplung

Das klassische Problem der Würfelverdoppelung hat nach Eutokios folgenden Ursprung: Wegen der Überwindung einer herrschenden Pest wandten sich die Delier (Einwohner der Insel Delos) an das Orakel von Delphi. Sie erhielten von ihm den Auftrag, einen der würfelförmigen Altäre im Tempel des Apollon zu verdoppeln, also einen gleichförmigen Altar mit doppeltem Rauminhalt zu errichten, vgl. [Scriba/Schreiber 2000, S. 41ff.].



Abb. 2.4.13. Antikes Theater in Delphi
[Foto Alten]

Geometrisch gesehen ist dieses Problem die Übertragung des nach Pythagoras zu lösenden Problems der Quadratverdopplung auf den dreidimensionalen Fall, algebraisch bedeutet es den Übergang vom Ziehen einer Quadratwurzel auf die Berechnung einer Kubikwurzel.

Reduzierung des Problems auf die Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen nach Hippokrates

Für die Griechen war dieses Problem wie folgt zu lösen:

Gegeben sei eine Strecke der Länge a. Zu konstruieren ist eine Strecke der Länge y, so daß $y^3 = 2a^3$, also $y = \sqrt[3]{2}a$.

Hippokrates von Chios, ein von ca. 450–430 v. Chr. in Athen wirkender Mathematiker und Astronom, führte die Lösung des Problems zurück auf die

Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen zwischen a und $2a$, d. h. auf die Bestimmung zweier Strecken x und y, so daß

$$a : y = y : x = x : 2a. \tag{2.4.6}$$

Für die griechischen Mathematiker nach Hippokrates bedeutete die Verdopplung des Kubus die Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei vorgegebenen Strecken.

Die Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen nach Menaichmos (durch Anwendung der Kegelschnitte)

Um 360 v. Chr. konstruierte der griechische Mathematiker und Astronom Menaichmos, ein Schüler des Eudoxos von Knidos, die mittleren Proportionalen x und y durch die Bestimmung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte.

Aus (2.4.6) folgt, daß $ax = y^2, 2a^2 = xy$, deshalb ist $2a^2 = \frac{y^2}{a} \cdot y$, und daraus folgt $y^3 = 2a^3$. Es ist klar, daß die Gleichungen (2.4.6) jedem Paar der folgenden Gleichungen gleichwertig sind:

$$\underset{(\pi_1)}{y^2 = ax},\ \underset{(\eta)}{xy = 2a^2},\ \underset{(\pi_2)}{x^2 = 2ay} \quad . \tag{2.4.7}$$

Demgemäß konnte Menaichmos die kubische Gleichung $y^3 = 2a^3$ geometrisch lösen, indem er die Schnittpunkte der beiden Parabeln π_1 und π_2 oder die Schnittpunkte der Hyperbel η mit einer der beiden Parabeln bestimmte (siehe Abb. 2.4.14 und Abschnitt 3.3.6).

Die Bestimmung von zwei mittleren Proportionalen nach Archytas (durch Bestimmung des Schnittpunktes dreier Flächen)

Eine interessante Konstruktion von zwei mittleren Proportionalen zwischen zwei vorgegebenen Strecken der Längen l und d (mit $l < d$) stammt von Archytas von Tarent, einem pythagoreischen Mathematiker und Philosophen, der etwa von 400 bis 360 v. Chr. wirkte und auch als Feldherr und Staatsmann in Erscheinung trat.

In diesem Zusammenhang sollen zwei weitere Mathematiker genannt werden:

1. Eudemos von Rhodos: lebte in der zweiten Hälfte des vierten Jahrhunderts v. Chr., Schüler von Aristoteles, schrieb eine Geschichte der Geometrie.
2. Eutokios von Askalon: geboren ca. 480 v. Chr. in Palästina, griechischer Mathematiker.

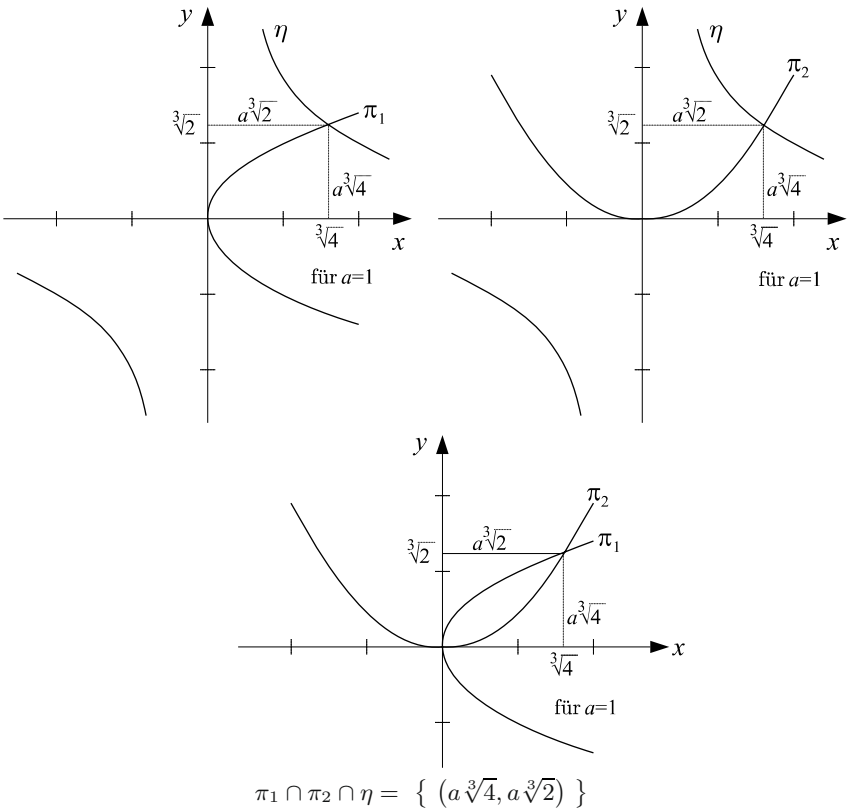


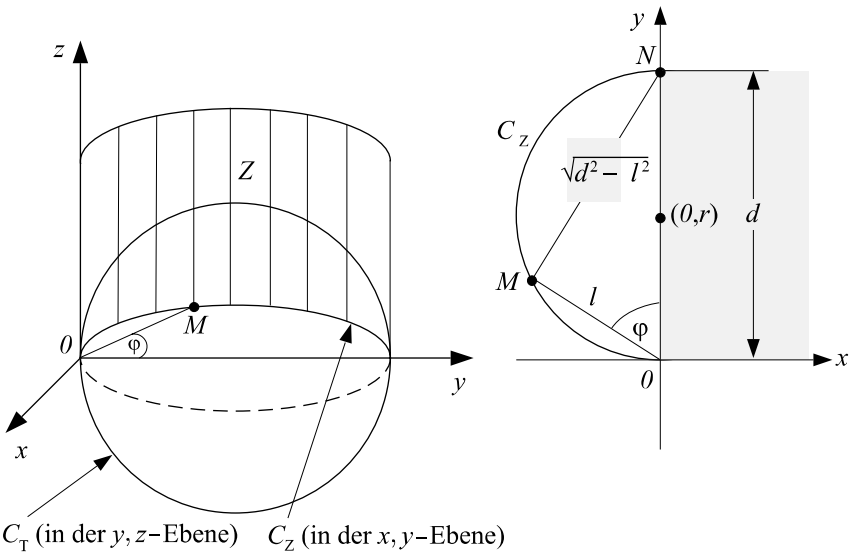
Abb. 2.4.14. Zur Bestimmung von mittleren Proportionalen

Eutokios sagt, daß Eudemos in seiner Geschichte der Geometrie diese Konstruktion Archytas zugeschrieben hat. Es ist nebenbei interessant zu bemerken, daß Proklos Diadochos (geb. 411 oder 410, gest. 485; aus Konstantinopel, neuplatonischer Philosoph, Mathematiker und Astronom) sagt, daß Eudemos in seiner Geschichte der Geometrie die Methode der Flächenanlegung den Pythagoreern zuschreibt. Proklos' Kommentar zu Buch I der Elemente Euklids ist eine wichtige Quelle für die Geschichte der Mathematik.

Die Konstruktion des Archytas kann modern durch analytische Geometrie folgendermaßen beschrieben werden [Heath 1921, Bd. I, S. 247]:

Seien $l < d$ zwei vorgegebene Strecken. Archytas betrachtet den Zylinder Z, den Torus T und den Kegel K, wie folgt durch Gleichungen in einem kartesischen x, y, z -System beschrieben:

$$\begin{cases} (y-r)^2 + x^2 = r^2 & (x \le 0, z \ge 0) \quad Z \\ \left(\sqrt{x^2+y^2} - r\right)^2 + z^2 = r^2 & T \\ \mu y = \sqrt{x^2+z^2} & K \end{cases} \tag{2.4.8}$$



Rotation des Strahles OM um die y-Achse erzeugt den Kegel K,
Rotation des Kreises C_T um die z-Achse erzeugt den Torus T.

Abb. 2.4.15. Figur zur Konstruktion des Archytas

wobei $r = \frac{d}{2}, \mu = \frac{\sqrt{d^2-l^2}}{l}$ (siehe Erläuterung unten). Dann bestimmt er die gemeinsamen Punkte von Z, T und K, also $Z \cap T \cap K$.
Sei $S \in Z \cap T \cap K, S = (x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$, $S_0 = (x_0, y_0, 0)$, $O = (0,0,0)$.
Archytas gibt die Beziehung zwischen den beiden Strecken OS und OS_0 wie folgt an, wobei OS der Abstand zwischen dem Koordinatenursprung und dem Schnittpunkt S der drei Flächen ist und OS_0 die Projektion von OS auf die x, y-Ebene:

$$d : OS = OS : OS_0 = OS_0 : l \quad . \tag{2.4.9}$$

Wie man leicht nachrechnet, werden diese Gleichungen durch $OS = l^{\frac{1}{3}} d^{\frac{2}{3}}$, $OS_0 = l^{\frac{2}{3}} d^{\frac{1}{3}}$ erfüllt.
Archytas hat also zwei mittlere Proportionalen zwischen l und d konstruiert und damit die Würfelverdoppelung geleistet.
Erläuterung: Z ist eine Halb-Zylinderfläche mit dem Halbkreis

$$C_Z : \ (y-r)^{\,2} + x^2 = r^2, \ z = 0, \ x \leq 0$$

als Leitkurve; jede Erzeugende von Z ist parallel zur z-Achse. T ist ein Torus mit dem Innenradius 0; T entsteht durch Rotation des Kreises
$C_T : \ (y-r)^{\,2} + z^2 = r^2, \ x = 0$ um die z-Achse.

Sei M ein Punkt von C_Z mit der Eigenschaft $OM = l$. Dann ist $\tan\varphi = \frac{\sqrt{d^2-l^2}}{l}$ mit φ wie in Abb. 2.4.15. Deshalb ist $y = -\frac{l}{\sqrt{d^2-l^2}}x$ die Gleichung der Geraden g durch O und M. Die Fläche des Kegels, der durch die Rotation der Geraden l um die y-Achse (mit $y \geq 0$) entsteht, hat die Gleichung $y = \frac{l}{\sqrt{d^2-l^2}}\sqrt{x^2+z^2}$.

S_0 ist der Fußpunkt des Lotes von S auf die xy-Ebene, also $S_0 \in C_Z$.

2.5 Die Quadratur des Kreises mittels der Quadratrix

Die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal ist ein von den Griechen aufgeworfenes Problem, mit dessen Lösung sich Mathematiker vieler Generationen über 2000 Jahre beschäftigt haben, bis es im Jahre 1882 von dem deutschen Mathematiker Carl L. F. von Lindemann (1852–1939) endgültig gelöst wurde, indem er nachwies, daß eine Lösung dieses Problems mit Zirkel und Lineal allein nicht möglich ist. Dennoch versuchen sich auch heute noch Laien an diesem Problem, weil sie den Beweis von Lindemann nicht akzeptieren (bzw. nicht verstehen) oder — in den meisten Fällen — die Aufgabenstellung gar nicht richtig verstanden haben. Sie beschäftigen mit teils erstaunlichen Näherungslösungen sogar Gerichte und Politiker bis hin zum Bundespräsidenten. So ist denn „Quadratur des Kreises“ zu einem geflügelten Wort für ein besonders schwieriges bzw. unlösbares Problem geworden.

Es handelt sich dabei genauer gesagt um folgendes Problem:

Gegeben sei ein Kreis mir Radius r. Gesucht ist ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt. Dieses Quadrat soll mit alleiniger Hilfe von Zirkel und Lineal in *endlich vielen* Schritten konstruiert werden. Dabei darf der Zirkel nur zum Schlagen eines Kreises um einen gegebenen Mittelpunkt (also nicht als Stechzirkel), das Lineal nur zum Zeichnen einer Geraden durch zwei gegebene Punkte benutzt werden.

Die Griechen hatten sehr bald erkannt, daß der Flächeninhalt proportional zu r^2, also $F = cr^2$ ist, aber c keine rationale Zahl ist. Erst Lindemann zeigte 1882, daß c auch keine algebraische Irrationalzahl ist, also keiner algebraischen Gleichung genügt, d. h. es gibt keine Gleichung der Gestalt

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_k $(k = 0, \ldots, n; n \in \mathbb{N})$ mit c als Lösung. Die „Kreiszahl“ π liegt also außerhalb der Menge der algebraischen Zahlen, „überschreitet“ in diesem Sinn die Grenzen der Algebra und wird deshalb eine transzendente Zahl genannt.

Schon um 430 v. Chr. hatte Antiphon versucht, die Kreisfläche durch regelmäßige $3 \cdot 2^n$-Ecke oder $4 \cdot 2^n$-Ecke auszuschöpfen, die man mit bekannten Methoden in flächengleiche Quadrate verwandeln konnte. Andere Mathematiker suchten dem Problem mit speziellen Kurven zu Leibe zu

rücken – so wie später die Winkeldreiteilung mit der Kissoïde des Diokles und die Würfelverdopplung mit der Konchoïde des Nikomedes gelang, vgl. [Scriba/Schreiber 2000, S. 42ff.]. Hippias von Elis hatte um 420 v. Chr. eine Kurve zur Dreiteilung des Winkels gefunden. Deinostratos und sein Bruder Menaichmos benutzten diese Kurve um 350 v. Chr. zur Quadratur des Kreises und nannten sie deshalb Quadratrix. Die Kenntnis dieser Kurve verdanken wir ihrer Beschreibung durch Pappos.

Wir beschreiben diese Kurve in moderner Form (vgl. Abb. 2.5.1).

Die Strecke $P(0)Q(0)$ der Länge a werde mit konstanter Geschwindigkeit $\upsilon > 0$ parallel zur x–Achse nach unten verschoben und erreiche zur Zeit t_0 die Endlage $P(t_0)Q(t_0)$. Gleichzeitig werde die Strecke $OP(0) = P(t_0)P(0)$ mit derselben Länge a um den Punkt O mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ im Uhrzeigersinn gedreht und erreiche zur Zeit t_0 die Endlage $P(t_0)Q(t_0)$. Der Schnittpunkt beider Strecken beschreibt dabei die Quadratrix. Zur Zeit t, $0 < t < t_0$, ist die Lage der Strecken $P(t)Q(t)$ bzw. $OR(t)$. Der Winkel $\sphericalangle P(t)OR(t)$ hängt von der Zeit t ab und hat die Größe $\varphi(t) = \omega t$. Es ist klar, daß $|P(0)P(t)| = \upsilon t$. Sei $S(t) = (x(t), y(t))$ der Schnittpunkt der beiden Strecken zur Zeit t.

Weil sich die beiden Strecken mit konstanter Geschwindigkeit υ bzw. konstanter Winkelgeschwindigkeit ω bewegen, ist $y(t)$ proportional zu $\theta(t)$, also $y(t) = c\,\theta(t)$. Aus $y(0) = a$ und $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ folgt $y(t) = \frac{2a}{\pi}\theta(t)$. Wegen $\theta(t) = \arctan\frac{y(t)}{x(t)}$, also $y = \frac{2a}{\pi}\arctan\frac{y}{x}$ für $0 < x \le a$ oder $x = y\cot\frac{\pi}{2a}y$ für $o < y \le a$ und $\lim\limits_{y\to 0+} y\cot\frac{\pi}{2a}y = \frac{2a}{\pi}$ erhält man

$$\begin{cases} x = y\cot\frac{\pi}{2a}y & 0 < y \le a \\ x = \frac{2a}{\pi} & y = 0 \end{cases} \tag{2.5.1}$$

als Beschreibung des geometrischen Ortes von $S(t)$.

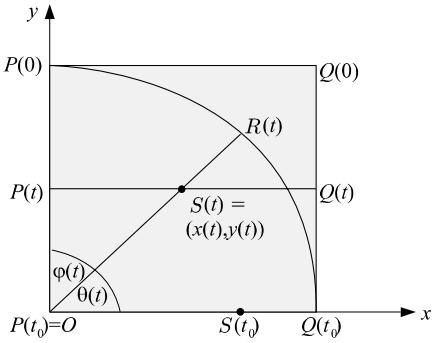


Abb. 2.5.1. Kinematische Erzeugung der Quadratrix

$P(0)Q(0) = P(0)P(t_0) = a, \quad P(0)P(t) = \upsilon t$

$r(\theta) = |OS|$ (d. h. $r(\theta(t)) = |OS(t)|$); die Funktion $r : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine echt monoton wachsende Funktion im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Diese Kurve nannte Deinostratos Quadratrix. Im Polarkoordinatensystem kann die Quadratrix wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{cases} r\ (\theta) & = \frac{2a}{\pi}\frac{\theta}{\sin\theta} & 0 < \theta \le \frac{\pi}{2} \\ r\ (0) & = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{2a}{\pi}\frac{\theta}{\sin\theta} = \frac{2a}{\pi} & \end{cases} . \tag{2.5.2}$$

Wir können viele Punkte der Quadratrix mit Zirkel und Lineal allein finden, z. B. ist für $n \in \mathbb{N}$ der Winkel $\theta = \frac{\pi}{2^n}$ allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar (weil das Halbieren eines Winkels immer mit Zirkel und Lineal allein möglich ist). Ebenso ist die Strecke $y = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2^n}\frac{a}{2^{n-1}}$ mit Zirkel und Lineal allein konstruierbar (die Strecke a ist vorgegeben). In (2.5.1) wird $a = 4$ gesetzt und wir erhalten:

$$\begin{cases} x = y\cot\frac{\pi}{8}y & 0 < y \le 4 \\ x = \frac{8}{\pi} & y = 0 \end{cases} .$$

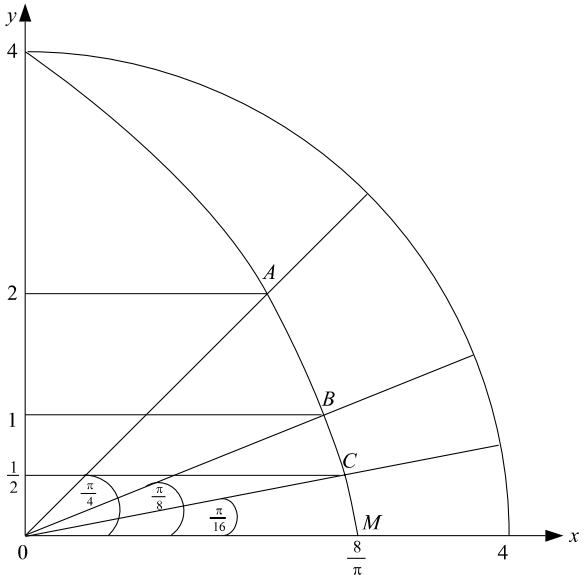


Abb. 2.5.2. Konstruktion der Quadratrix mit $a = 4$

Die Strecke OM in Abb. 2.5.2 hat die Länge $\frac{8}{\pi}$. Wenn wir mehr Punkte als A, B, C auf der Quadratrix konstruieren, dann erhalten wir bessere Näherungen für $\frac{8}{\pi}$ und deshalb für π.

Sei ein Winkel $\sphericalangle MOZ$ der Größe θ rad wie in Abb. 2.5.3 gegeben, sei Q der Schnittpunkt des Strahls OZ mit der Quadratrix, dann ist nach (2.5.2) $ON = \frac{2\alpha}{\pi}\theta$ die y-Koordinate des Punktes Q.

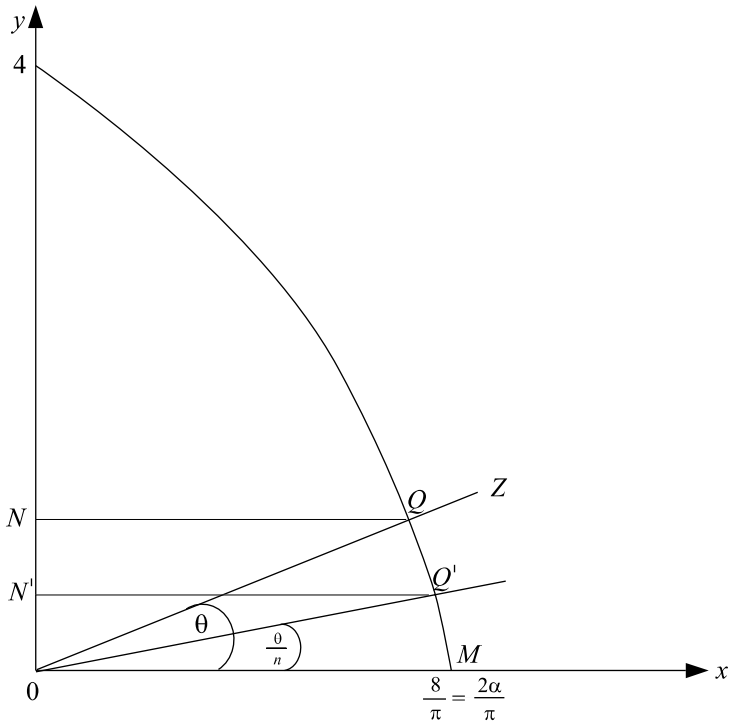


Abb. 2.5.3. Verwendung der Quadratrix zur Winkelteilung

Mittels des Strahlensatzes läßt sich (mit Zirkel und Lineal allein) für jede natürliche Zahl ein Punkt N' auf der Strecke ON so konstruieren, daß

$$ON' = \frac{1}{n} ON,$$

wobei N der Schnittpunkt der zur x-Achse parallelen Geraden durch Q ist. Sei Q' der Schnittpunkt der parallelen Geraden durch N' zur x-Achse mit der Quadratrix. Dann ist $ON' = \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{\theta}{n}$ die y-Koordinate des Punktes Q', also $\frac{\theta}{n} rad$ die Größe des Winkels $\sphericalangle MOQ'$. Das bedeutet, daß wir einen beliebigen Winkel mit Hilfe der Quadratrix in n gleiche Teile teilen können; insbesondere kann man einen beliebigen Winkel mit Hilfe dieser Kurve dreiteilen.

Mit endlich vielen Schritten können mit Zirkel und Lineal nur endlich viele Punkte der Quadratrix konstruiert werden, nicht ihr gesamter Verlauf. Deshalb erlaubt diese Methode durch Konstruktion hinreichend vieler Punkte zwar die Angabe von π oder die Winkelteilung mit beliebiger Genauigkeit (mit beliebig kleinem Fehler), aber nicht die exakte Lösung des Problems.

2.6 „Formale Algebra“

Unter „formaler Algebra“ soll hier diejenige Art von Algebra verstanden werden, die – wie zuvor in Mesopotamien – zur Behandlung der im Alltag anfallenden Probleme auch in Griechenland lange Zeit neben der wissenschaftlich begründeten „geometrischen Algebra“ betrieben wurde.

2.6.1 Formale Algebra vor Diophant

Mangels hinreichender Quellen können wir heute den Einfluß der babylonischen Algebra auf die Entwicklung der formalen Mathematik in Griechenland nicht lückenlos verfolgen, aber sie existierte parallel zur geometrischen Algebra. Die formale Algebra war jedoch für praktische Probleme notwendig, z. B. bei der Landvermessung und mancherlei technischen Problemen.

Nach Iamblichos von Chalkis (geb. ca. 250 n. Chr. in Chalkis, Syrien; gest. ca. 330; Neuplatoniker, Philosoph und Wundertäter) hat bereits Thymaridas von Paros (Mathematiker in der ersten Hälfte des 4. Jahrhunderts v. Chr.) das folgende lineare Gleichungssystem, genannt „Blume von Thymaridas“, gelöst, vgl. [Cantor 1880, Bd. 1, S. 158]:

„Wenn gegebene und unbekannte Größen sich in eine gegebene teilen und eine von ihnen mit jeder anderen zu einer Summe verbunden wird, so wird die Summe aller dieser Paare nach Subtraktion der ursprünglichen Summe bei drei Zahlen der zu den übrigen addierten ganz zuerkannt, bei vier deren Hälfte, bei fünf deren Drittel, bei sechs deren Viertel und so fort.“

In heutiger Schreibweise sieht das verbal formulierte Gleichungssystem wie folgt aus:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= s \\ x_1 + x_2 &= a_1 \\ x_1 + x_3 &= a_2 \\ \vdots \quad &\vdots \\ x_1 + x_n &= a_{n-1}, \end{aligned}$$

wobei $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ Unbekannte und $s, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ bekannt sind.
Die Lösung wird für $n = 3, 4, 5, 6$ angegeben und ist $x_1 = \frac{a_1+\ldots+a_{n-1}-s}{n-2}$, $x_2 = a_1 - x_1, \ldots, x_n = a_{n-1} - x_1$. Dieses Beispiel zeigt, daß sich die griechischen Mathematiker bereits vor Diophant mit linearen Gleichungssystemen beschäftigten.

Auf dem Gebiet der unbestimmten Gleichungen — das sind Gleichungssysteme, bei denen mehr Unbekannte als Gleichungen auftreten — ist das sog.

„Rinderproblem“ des Archimedes sehr bekannt. Es sollen die Anzahlen weißer, schwarzer, brauner und bunter Kühe und Stiere in der Rinderherde des Sonnengottes Helios bestimmt werden, die auf der Insel Trinakria (Sizilien) weiden. Dabei müssen neun Bedingungen erfüllt sein. Auf dem Weg zur Lösung stößt man schließlich auf die „Pellsche“ Gleichung:

$$t^2 - 4729494u^2 = 1$$

mit der Nebenbedingung, daß u ein Vielfaches von 9304 sein soll. Dieses Problem ist praktisch unlösbar, da die kleinste mögliche Lösung für u eine Zahl größer als $10^{200\,000}$ ist. Es wurde von Archimedes möglicherweise angegeben, um zu zeigen, daß es unvorstellbar große Zahlen gibt.

Auch von Heron von Alexandria (Mitte des 2. Jhs. n. Chr.) sind unbestimmte Gleichungen überliefert. Sein Werk „Metrika“ enthält neben der Vermessungslehre, der Berechnung von Flächen und Volumina auch die Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln. Er wandte sich von der geometrischen Denkweise ab, indem er Zahlen nicht mehr als Strecken betrachtete, sondern mit den Zahlen selbst abstrakt rechnete.

Die Geodäsie, die Heron mit Hilfe babylonischer Rechentechniken und ägyptischer Näherungsverfahren ergänzte, wurde an Feldmesser und Handwerker weitergegeben.

2.6.2 Synkopierte Algebra

Die in der Spätzeit von Diophant in Alexandria entwickelte Algebra nennt man auch „synkopierte Algebra“, weil sie weder symbolisch wie die heutige Algebra, noch eine „rhetorische Algebra“ ist, bei welcher jede algebraische Formel durch Worte dargestellt wird.

Diophant war wahrscheinlich der erste Mathematiker, der Symbole für die Unbekannte und ihre Potenzen, für Gleichheit, Subtrahieren usw. systematisch verwendete. Er verwendete das von den Griechen schon seit ungefähr 450 vor Chr. für Zahlen benutzte griechische Alphabet, also für das praktische Rechnen nur wenig geeignete Zahlbuchstaben wie folgt:

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	ϑ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	ς
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	$\sampi$
100	200	300	400	500	600	700	800	900
$,\alpha$	$,\beta$	$,\gamma$	$,\delta$	$,\varepsilon$	$,\varsigma$	$,\zeta$	$,\eta$	$,\vartheta$
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

In dieser Tabelle sind ς (vau), ς (koppa), $\sampi$ (sampi) Zeichen aus einem semitischen Alphabet.

Diese Zahlbuchstaben wurden (um sie nicht mit Wortbuchstaben zu verwechseln) manchmal überstrichen oder mit einem Strich versehen ($\overline{\alpha}$ oder α' statt des Zahlbuchstabens α), z. B. $184 = \overline{\rho\pi\delta} = \rho\pi\delta'$; $580 = \overline{\varphi\pi} = \varphi\pi'$.

M ist die Abkürzung für $\mu\upsilon\rho\iota\acute{\alpha}\varsigma(10\,000)$ und $n \cdot 10\,000$ $(n \in \mathbb{N})$ wurde in der Form $\overset{n}{M}, M_n$ oder nM geschrieben, z. B. $85\,6980 = 85M + 6\,980 = \overset{\pi\varepsilon}{M},\varsigma\not\lambda\pi$; dagegen würde Diophant diese Zahl so $\overline{\pi\varepsilon} \cdot \overline{,\varsigma\not\lambda\pi}$ schreiben.

Für unbekannte Potenzen usw. benutzte Diophant folgende Bezeichnungen:

$\overset{0}{M}$	: Einheiten	$\mu o\nu\alpha\delta\varepsilon\varsigma$
ς	: Unbekannte (x)	$\acute{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu\acute{o}\varsigma$ arithmos d. h. Zahl
Δ^{Υ}	: Quadrat (x^2)	$\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$, also in Antiqua $\Delta YNAMI\Sigma$, daraus Δ^{Υ}.
K^{Υ}	: Kubus (x^3)	$\kappa\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$, also in Antiqua $KYBO\Sigma$, daraus K^{Υ}.
$\Delta^{\Upsilon}\Delta$	: Quadratoquadrat (x^4)	$\delta\upsilon\nu\alpha\mu o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$
ΔK^{Υ}	: Quadratokubus (x^5)	$\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$
$K^{\Upsilon}K$	: Kubokubus (x^6)	$\kappa\upsilon\beta\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$
$=$	: gleich	$'\acute{\iota}\sigma o\varsigma$
$\not\lambda$	: minus	$\lambda\varepsilon\acute{\iota}\pi\varepsilon\iota\nu$; nach Heath ist $\not\lambda$ eine Kombination der griechischen Buchstaben Λ und I, die die Anfangsbuchstaben des Stammes „ $\lambda\iota\pi$“ sind. Das Verb $\lambda\bar{\varepsilon}\iota\pi\omega$ bedeutet fehlen, mangeln.

Diophant benutzte das Symbol $\not\lambda$ als Minus- bzw. als Trennungszeichen und setzte alle negativen Terme hinter die positiven Terme. Beispielsweise würde Diophant $x^4 - 3x + 10x^2 - 7$ so schreiben:

$$\Delta^{\Upsilon}\Delta\overline{\alpha}\Delta^{\Upsilon}\bar{\iota}\not\lambda\varsigma\overline{\gamma}\overset{0}{M}\overline{\zeta}.$$

Diophant hatte auch Bezeichnungen für negative Potenzen von x (z. B. $\frac{1}{x}$ bzw. $\frac{1}{x^2}$ bezeichnet er mit ς^{χ} bzw. $\Delta^{\Upsilon\chi}$) und nannte sie $\acute{\alpha}\rho\iota\vartheta o\sigma\tau\acute{o}\nu$ bzw. $\delta\upsilon\nu\alpha\mu o\sigma\tau\acute{o}\nu$. Ähnlich verhält es sich bei $\frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, \frac{1}{x^5}, \frac{1}{x^6}$. Diophant beschreibt Multiplikation und Division verbal.

Für die Lösung des Problems

„Ein Kubus soll um 2 größer werden als ein Quadrat“

betrachtet Diophant die kubische Gleichung (in heutiger Schreibweise)

$$(x-1)^{\,3} = (x+1)^{\,2} + 2$$

oder äquivalent

$$x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0,$$

für deren Lösung er ohne Rechnung $x = 4$ angibt [Tropfke 1940, S. 426]. Es ist das erste Mal, daß eine kubische Gleichung in einer rein algebraischen Form behandelt wird. Diese kubische Gleichung ist die einzige überlieferte Gleichung dritten Grades mit einer Unbekannten in der griechischen „Arithmetik“.



Abb. 2.6.1. Pompejus-Säule in Alexandria
[Foto Alten]

2.6.3 „Arithmetika“ von Diophant

Diophant, der sein Werk als systematisches Lehrbuch über Algebra betrachtete, widmete seine „Arithmetika“ dem „sehr verehrten Dionysios“. Wahrscheinlich handelte es sich bei ihm um den heiligen Dionysios, der 247 n. Chr. Bischof von Alexandria wurde. Das Werk besteht aus 13 Büchern, von denen nur zehn Bücher mit insgesamt 290 Aufgaben rein arithmetischen Inhalts sind. Die Bücher I, II, III, XI, XII, XIII sind auf griechisch (in der deutschen Übersetzung von Arthur Czwalina) und die Bücher IV, V, VI, VII, die erst in den siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts aufgefunden wurden, auf arabisch übermittelt [Diophant b]. Sie erhalten bestimmte Gleichungen in Buch I und Gleichungen bzw. Gleichungssysteme in den übrigen Büchern. Die Aufgaben von Buch I sind überwiegend Gleichungen (Systeme) mit nur einer positiven Lösung. Am Anfang schrieb Diophant [Diophant a], [Czwalina 1952, S. 7]:

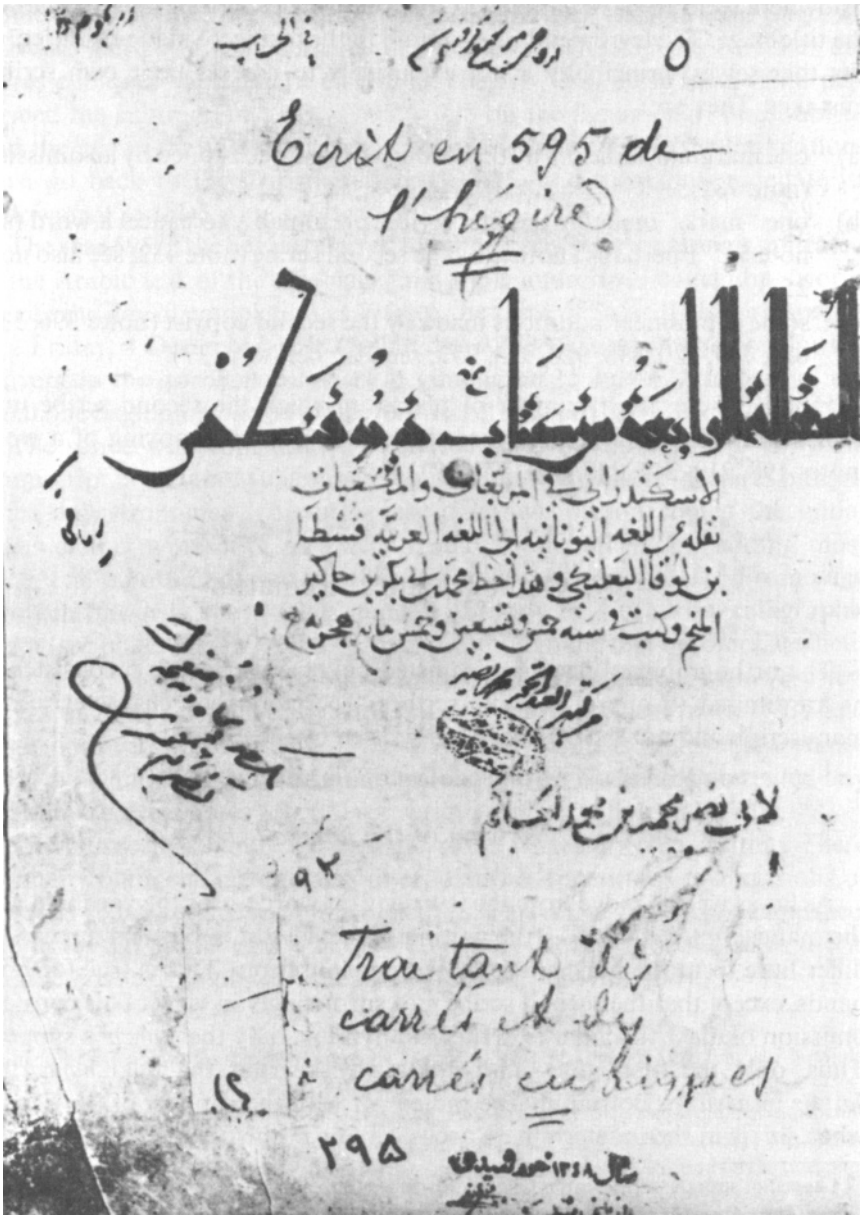


Abb. 2.6.2. Das erste Blatt der vier Bücher des Diophant, die in der Bibliothek Āstān-i Quds-i Riḍawī in Maschad (Iran) in Arabisch gefunden (wiederentdeckt) wurden

„Nun wollen wir aber den Weg zu den Problemen, deren wir eine große Fülle haben, beschreiten. Da es sich um viele und umfangreiche Probleme handelt, und da es deswegen lange dauert, bis sie von denjenigen, die sie studieren, im Gedächtnis behalten und beherrscht werden, so habe ich mich entschlossen, so weit wie möglich eine Teilung der Probleme vorzunehmen, mit den elementaren Problemen anzufangen und allmählich zu den schwierigeren vorzuschreiten. So nämlich wird der Weg für den Anfänger leichter sein, und so wird der Stoff auch leichter im Gedächtnis bleiben.“

In der „Arithmetika“ bedeutet „Zahl“ eine „rationale Zahl“. Diophant sucht nur positive rationale Lösungen, obwohl er in seinen Zwischenrechnungen auch „abzuziehende Größen“ benutzt.

Im folgenden sollen drei (in moderner Form dargestellte) Beispiele Einblick in dieses Werk geben. Das erste Beispiel behandelt ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten und drei Gleichungen (Aufgabe 18, Buch I)[8].

Beispiel 2.6.1: Das System

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + 20 \\ x_1 + x_3 = x_2 + 40 \\ x_2 + x_3 = x_1 + 30 \end{cases}$$

ist gegeben. Diophant löst das Problem durch zwei Methoden:

1. Sei $x_1 + x_2 + x_3 = 2x$. Dann ist

$$\begin{aligned} 2x &= 2x_3 + 20 \Rightarrow x_3 = x - 10 \\ 2x &= 2x_1 + 30 \Rightarrow x_1 = x - 15 \\ 2x &= 2x_2 + 40 \Rightarrow x_2 = x - 20 \end{aligned}$$

   Daraus folgt (durch Addition der drei Gleichungen) $3x = 2x + 45$, also $x = 45$, $x_1 = 30$, $x_2 = 25$, $x_3 = 35$.

2. Sei $x_3 = x$. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x + 20 \\ x_2 + x &= x_1 + 30 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 + 2x_2 + x = x + x_1 + 50 \Rightarrow x_2 = 25$$

[8] In den Aufgaben 27, 28, 29, 30 im ersten Buch benutzt Diophant die babylonische Methode zur Lösung der quadratischen Gleichungen, wie in der Geschichte der Algebra in Babylonien erwähnt. In den genannten vier Aufgaben sind zwei Zahlen x, y gesucht, für die (Aufgabe 27) $x+y$ und $x \cdot y$, (Aufgabe 28) $x+y$ und x^2+y^2, (Aufgabe 29) $x+y$ und x^2-y^2 und letztlich (Aufgabe 30) $x-y$ und $x \cdot y$ gegeben sind.

Sodann gilt

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = x + 20 \\ x_1 + x = x_2 + 40 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + 5 = x \\ x_1 + x = 65 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 30, x = 35 \quad .$$

Im nächsten Beispiel wird eine unbestimmte Gleichung aus Buch II, Aufgabe 9 mit Lösung zitiert.

Beispiel 2.6.2: Eine gegebene Zahl, die die Summe zweier Quadrate ist, ist in zwei andere Quadrate zu zerlegen.

Die Zahl 13, die die Summe von 9 und 4 ist, ist in die Summe zweier anderer Quadrate zu zerlegen. Es werden die Wurzeln aus den gegebenen Summanden genommen, also 2 und 3. Die Wurzel des einen gesuchten Summanden setzen wir in der Form $x+2$ an, die des anderen in der Form $ax-3$, wobei a beliebig ist, also zum Beispiel $2x - 3$.

Dann werden die Quadrate $x^2 + 4x + 4$ und $4x^2 - 12x + 9$ sein. Die Summe ist dann $5x^2 - 8x + 13$. Sie soll aber 13 sein. Also ist $x = \frac{8}{5}$. Die Wurzel des einen gesuchten Summanden ist also $x + 2 = \frac{18}{5}$, die des anderen $2x - 3 = \frac{1}{5}$. Die Quadrate aber sind $\frac{324}{25}$ und $\frac{1}{25}$. Die Summe der beiden Quadrate ist $\frac{325}{25} = 13$, also gleich der gegebenen Zahl.

Das dritte Beispiel ist Aufgabe 24 aus Buch VIII „Arithmetik“. Zunächst zitieren wir die Aufgabe und ihre Lösung. Wir wollen diese Aufgabe mit Hilfe moderner, analytischer Methoden diskutieren.

Beispiel 2.6.3: Eine gegebene Zahl ist als Summe zweier Summanden darzustellen, und es soll das Produkt der Summanden gleich sein einem um seine Wurzel verminderten Kubus.

Es sei die Zahl 6 gegeben. Es werde $x_1 = x$ gesetzt, also $x_2 = 6 - x$, aber $x_1 x_2 = 6x - x^2$. Dieser Ausdruck soll gleich $y^3 - y$ sein. Ich bilde also $y = ax - 1$, wo a beliebig ist, z. B. $a = 2$. Ich bilde nun also $(2x - 1)^3 - (2x - 1) = 8x^3 - 12x^2 + 4x$. Dieser Ausdruck soll $6x - x^2$ sein. Wenn die Koeffizienten von x in beiden Ausdrücken gleich wären, würde sich x als rational ergeben. Die 4 ist entstanden aus $3 \cdot 2 - 2$, die 6 aber ergibt sich aus der Gleichheit. Ich muß also a so bestimmen, daß $3a - a$ gleich 6 wird. Ich muß also $y = 3x - 1$ setzen und erhalte $y^3 - y = 27x^3 - 27x^2 + 6x$. Dieser Ausdruck muß gleich $6x - x^2$ sein. Es ergibt sich also $x = \frac{26}{27}$. Es ist also $x_1 = \frac{26}{27}$, $x_2 = \frac{136}{27}$.

In der heutigen Schreibweise lautet die Aufgabe: Bestimme $x_1, x_2, y \in \mathbb{Q}^+$, sodaß

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = y^3 - y \end{cases}$$

Mit $x_1 = x, x_2 = 6 - x$ wird daraus die Aufgabe:
Bestimme $x, y \in \mathbb{Q}^+$, sodaß $y^3 - y = 6x - x^2$.

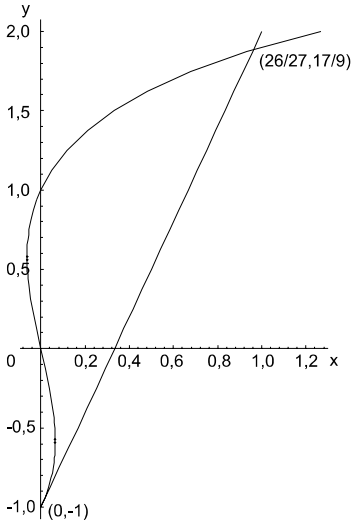


Abb. 2.6.3. Figur zu Beispiel 3

Wie Diophant zu der oben (in moderner Formelsprache) beschriebenen Lösung gekommen ist, wird aus dieser Beschreibung nicht ohne weiteres klar. Insbesondere stellt sich die Frage nach einer Begründung für den Ansatz $y = ax - 1$. Die geometrische Betrachtungsweise der Griechen legt folgende Interpretation (in moderner Terminologie) nahe. Die Gleichung $f(x, y) := y^3 - y + x^2 - 6x = 0$ beschreibt eine algebraische Kurve dritter Ordnung in der x, y-Ebene. Die von Diophant gesuchte positive rationale Lösung (x_1, y_1) entspricht einem Punkt der Kurve mit positiven rationalen Koordinaten x_1, y_1. Kennt man nun bereits einen Punkt (x_0, y_0) der Kurve mit rationalen Koordinaten, so schneidet die Tangente $y - y_0 = a(x - x_0)$ mit $a = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(x_0,y_0)}{\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{f}(x_0,y_0)}$ in diesem Punkt die Kurve in einem weiteren Punkt mit rationalen Koordinaten, wenn die Koeffizienten des Polynoms f rational sind. Im konkreten Fall von Aufgabe 3 ist $\mathrm{f}(0,-1) = 0$, also $(0,-1)$ ein Kurvenpunkt, daher $y = ax - 1$ eine Gerade durch diesen Punkt, welcher bei passender Wahl von a Tangente ist. Das ist für $a = 3$ (wegen $\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(0,-1) = -6$, $\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{f}(0,-1) = 2$) der Fall (vgl. Abb. 2.6.3). Für $a = 2$ erhält man eine Sekante, also keine Lösung des Problems. Entwickelt man f an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,-1)$ nach Taylor (indem man $y = (y+1) - 1$ setzt), so sieht man aus $(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 3(y+1) - (y+1) - 6x + x^2 = 0$, daß sich bei Elimination von y durch den Ansatz $y + 1 = ax$ die linearen Glieder für $a = 3$ aufheben, dann $x_0 = 0$ eine Doppelwurzel der kubischen Gleichung und die dritte Wurzel $x_1 = \frac{26}{27}$ wegen der rationalen Koeffizienten zwangsläufig rational ist. Dann sind auch $y_1 = \frac{17}{9}$ und $x_2 = \frac{136}{27}$ rational.

Seit ihrer Übersetzung ins Arabische (10. Jh.) beeinflußte die „Arithmetika“ von Diophant die Weiterentwicklung der Arithmetik, Algebra und Zahlentheorie in den islamischen Ländern. Sie nahm ihren Einzug auch in die Mathematik in Mittel- und Westeuropa zur Zeit der Renaissance und später, was besonders in den Werken von Pierre Fermat erkennbar ist.

Als weitere Schrift Diophants ist noch ein Fragment über Polygonalzahlen erhalten, in dem er auf die elementare Zahlentheorie der Pythagoreer zurückgreift.

Wesentliche Inhalte der Algebra in Griechenland

$\approx$ 585 v. Chr.	Thales	Durchmesser halbiert den Kreis; einbeschriebener Winkel im Halbkreis ist ein rechter; Berechnung der Höhe einer Pyramide mittels ihres Schattens
		Geometrische Algebra
$\approx$ 440	Hippokrates	Würfelverdopplung (delisches Problem) durch die Bestimmung von zwei mittleren Proportionalen
$\approx$ 420	Hippias	Dreiteilung des Winkels (und Teilung eines Winkels in n gleiche Teile) mit Hilfe der Kurve Quadratrix
$\approx$ 390	Archytas	Lösung des delischen Problems durch die Bestimmung eines Schnittpunktes dreier Flächen
$\approx$ 350	Brüder Deinostratos u. Menaichmos	Lösung des delischen Problems durch die Bestimmung von zwei mittleren Proportionalen mit Hilfe zweier Kegelschnitte, Kreisquadratur mittels der Quadratrix von Hippias
$\approx$ 330	Euklid	Geometrische Lösung linearer und rein quadratischer Gleichungen sowie der quadratischen Gleichungen $ax^2 + b = cx$, $ax^2 = bx + c$, $ax^2 + bx = c(a, b, c > 0)$ mittels Flächenanlegung und formalen geometrischen Beweisen.
287–212	Archimedes	Probleme, die auf Gleichungen dritten oder vierten Grades führen (Kugelteilung, Dreiteilung des Winkels, Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks, Würfelverdopplung)
		Synkopierte Algebra
$\approx$ 250 n. Chr.	Diophant	Bestimmte und unbestimmte Gleichungen (diophantische Gleichungen) ersten und höheren Grades und Systeme solcher Gleichungen
$\approx$ 520	Eutokios	Kommentar zu Archimedes „Über Kugel und Zylinder“, Bericht über die Geschichte des delischen Problems

2.7 Aufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 2.3.1: Flächenanlegung
Zeige: Für die Abbildungen 2.3.10 und 2.3.11 gilt die Gleichung

$$\mu(CC'D'S) = \mu(D'TNF) \quad .$$

Aufgabe 2.3.2: Ein Maximumproblem
Benutze Aufgabe 2.3.1 und zeige, daß gilt:

> Unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang $4a$ hat das Quadrat (der Seite a) den größten Flächeninhalt.

Das bedeutet, daß die Lösung des Maximumproblems ein Ergebnis von Buch VI, Prop. 27 der „Elemente“ ist.

Aufgaben zum Diorismus

Aufgabe 2.3.3: Beweise die Aussage (E1) in 2.3.6 mit „modernen Mitteln“.

Aufgabe 2.3.4: Beweise die Aussage (E2) in 2.3.6 mit „modernen Mitteln“.

Aufgabe 2.3.5: Sei $s > 0$ und $ABCD$ ein Parallelogramm. Finde einen Punkt D' auf der Geraden durch B und D (s. Abb. 2.7.1), sodaß das Parallelogramm $A'D'C'D$ den Flächeninhalt s besitzt und zeige $s < \mu(ABCD) \Leftrightarrow DC' < DC$.

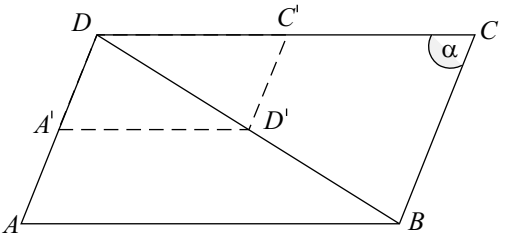


Abb. 2.7.1. Figur zur Aufgabe 2.3.5

Aufgabe 2.3.6: Mit den Bezeichnungen der Abbildungen 2.3.10 und 2.3.11 zeige man:
Sei $0 < \sigma \leq \mu\ (ACDM)$. Dann gilt in beiden Fällen

$$\mu\ (AC'D'M')\ = \sigma \iff \mu\ (SD'FD)\ = \mu\ (ACDM)\ - \sigma \quad .$$

Aufgabe 2.3.7: Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks
Man zeige:

a) Es gibt eine Gerade WM wie in Abb. 2.4.7, so daß Gleichung (2.4.2) gilt.

b) Sei $\mu = \frac{\pi}{7}$, dann gilt:

$$8\cos^4\mu + 4\cos^3\mu - 8\cos^2\mu - 3\cos\mu + 1 = 0.$$

Daraus folgt:

$$8\cos^3\mu - 4\cos^2\mu - 4\cos\mu + 1 = 0 \quad .$$

c) Seien $A_1 = A, A_2, \ldots, A_7$ die Ecken eines regelmäßigen Siebeneckes, einbeschrieben im Kreis K und A, D, C, M wie in Abbildung 2.4.10. Dann gelten die Beziehungen (2.4.3) aus 2.4.2.

d) Die Zahlen $\cos q\pi$ und $\sin q\pi$ sind für jedes $q \in \mathbb{Q}$ algebraisch[9]. Die Zahlen $\sec q\pi$ und $\tan q\pi$ sind algebraisch (falls $\cos q\pi \neq 0$). Die Zahlen $\operatorname{cosec} q\pi, \cot q\pi$ sind algebraisch (falls $\sin q\pi \neq 0$). Beispielsweise ist die Zahl $\cos\frac{\pi}{7} + \tan\frac{\pi}{13}$ algebraisch.

Hinweis zu d): Verwende die Moivreschen Formeln.

Aufgabe 2.3.8: Dreiteilung des Winkels
Zeige, daß ein Winkel von 60° allein mit Zirkel und Lineal nicht dreigeteilt werden kann.

Hinweis: Benutze die Identität $\cos 3v = 4\cos^3 v - 3\cos v$ und den Satz: Sei f ein irreduzibles Polynom über $\mathbb{Q}$ vom Grad

$$n \neq 2^k$$

und $f(\alpha) = 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Dann ist α allein mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar.

Aufgabe 2.3.9: Dreiteilung eines rechten Winkels
Zeige, daß ein Winkel von 90° allein mit Zirkel und Lineal dreigeteilt werden kann.

Aufgabe 2.3.10: Zur Bestimmung von zwei mittleren Proportionalen
Zeige die Richtigkeit der Gleichungen (2.4.9).

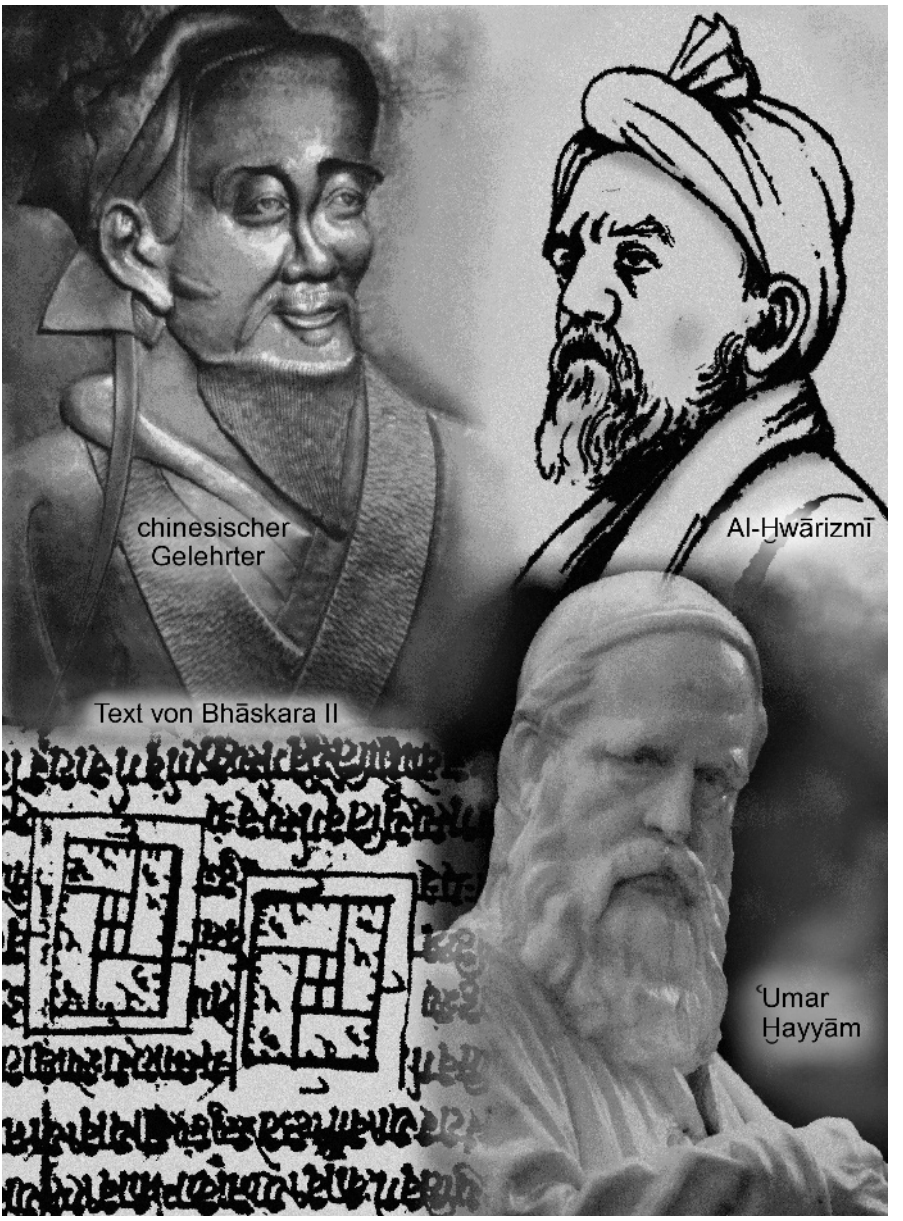
---

[9] Eine komplexe Zahl heißt algebraisch, wenn sie einer Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit rationalen Koeffizienten $a_k (k = 0, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}_0)$ genügt. Die Menge $\mathcal{A}$ aller algebraische Zahlen bildet einen algebraisch abgeschlossenen Körper, d. h. für $b_k \in \mathcal{A} (k = 0, \ldots, n; \quad n \in \mathbb{N}_0)$ sind auch alle Wurzeln der Gleichung $b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 = 0$ algebraisch.

3 Algebra im Orient



3.1 Algebra in China

	Allgemeine Geschichte	Kulturgeschichte
3000–1500		Frühe Stromtalkulturen am Huang-Ho und Jangtsekiang
um 2000–1500	Legendäre Hsia-Dynastie, Begründet vom mythischen Kaiser Yü	Bronzeinschriften in vorklassischer Sprache
1500–1030	Shang-Dynastie	Erste Lieder, Entwicklung der Schrift
1030–481	Chou-Dynastie	Konfuzius (551–479) verkündet seine Sittenlehre, Laotse (um 300) begründet die Lehre vom Taoismus
221–207	Shi-Huang-ti einigt die Reiche und wird erster Kaiser	Erster Bau der chinesischen Mauer (2450 km)
206 v. Chr. –220 n. Chr.	Han-Dynastien	Blüte von Mathematik, Astronomie, Philosophie und gereimter Prosa, Zahlzeichen
221–280	Zeit der drei Reiche	Mathematische Inselsammlung
260–618	Weiterer Zerfall, Verschiedene Dynastien	Vordringen des Buddhismus, Tempel, Klöster mit Buddhafiguren entstehen
618–906	Tang-Dynastie Höhepunkt chinesischer Macht	Blüte von Wirtschaft und Kultur (Malerei, Lyrik von Li-Tai-po, Tu-fu und Po-Kü-i)
907–960	Periode der 5 Dynastien	
960–1278	Sung-Dynastien	Tuschmalereien von Tieren und Pflanzen
1278–1368	Yuan-Dynastie (Mongolenherrschaft)	Zweite Blüte der Mathematik; Blau-Weiß-Porzellane, Lackarbeiten, Malerei; Reise Marco Polos (1271–1291)
1368–1644	Ming-Dynastie	Monumentale Bauten, Erneuerung der chin. Mauer Ming-Gräber
1644–1911	Chhing-Dynastie	Französischer und britischer Einfluß und Konflikte
1911	Ausrufung der Republik	
1949	Ausrufung der Volksrepublik unter Mao Tse-tung	Große Proletarische Kulturrevolution (1965–69)

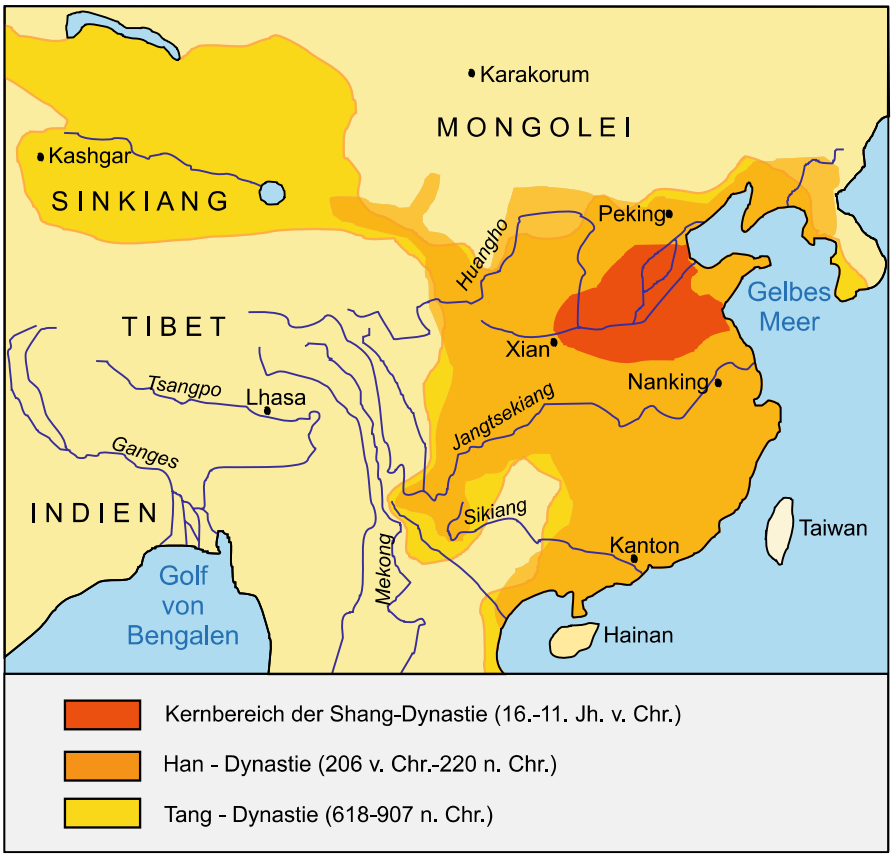


Abb. 3.1.1. China im Altertum und im Mittelalter

3.1.0 Geschichtlicher Abriß

Die Entstehung der Kultur und das allmähliche Werden des Staates China ist (größtenteils) durch Erzählungen und Legenden bekannt, die etwa im 6. Jh. v. Chr. aus der Erinnerung oder Überlieferung aufgeschrieben wurden. 500 Jahre später folgten rekonstruktive Aufzeichnungen zur Geschichte der Kaiser und zur Institution des Reiches durch das Werk Shiji von Sima Qian (145–73 v. Chr.), dem Vater der chinesischen Geschichtsschreibung. Wie archäologische Funde zeigen (s. u.), könnte er auf wenige erhaltene beschriftete Holz- oder Bambustäfelchen zurückgegriffen haben, deren Vorhandensein zumindest für den Zeitraum von 770–221 v. Chr. belegt wird. Die meisten früheren schriftlichen Zeugnisse waren der wenig dauerhaften Qualität des Schriftmaterials wie z. B. Bambus oder Holz und nicht zuletzt der Bücherverbrennung durch den Gewaltherrscher König Shi Huang-ti im Jahre 213 v. Chr. zum Opfer gefallen.



Abb. 3.1.2. Bücherverbrennung im Jahre 213 v. Chr.

Vor der ersten historisch nachweisbaren Dynastie der Shang- Könige gab es im Bereich des Huangho-Beckens eine hoch entwickelte Bauernkultur mit Ackerbau, Tierhaltung, der Herstellung von Keramik und der Technik des Spinnens. Nach und nach wurde auch der Süden unterhalb des Jangtseflusses besiedelt.

Mit der Shang-Herrschaft (1650–1027 v. Chr.) begann eine Folge von Dynastien, begleitet von zahlreichen Auseinandersetzungen, bis die letzte, die Ming-Dynastie, im Jahre 1644 n. Chr. unter die Fremdherrschaft der Qing geriet. Damit zerfiel das Kaiserreich.

Aus der Shang-Zeit jedoch liegen erste Zeugnisse der chinesischen Schrift vor. Sie wurden auf Tierknochen und Bauchpanzerplatten von Schildkröten eingeritzt und von den Priestern zur Orakelbestimmung verwendet. Die Fragen an das Orakel bezogen sich u. a. auf kriegerische Auseinandersetzungen (die Shang waren Heerkönige) oder man wollte wissen, ob ein bestimmter Mensch schuldig oder unschuldig war. Ein erhaltener Orakelknochen enthält die Anfrage, ob drei Schafe und zwei Rinder oder drei Schafe und fünf Rinder durch Ertränken oder Verbrennen vom Shang-König aus Dankbarkeit für eine gute Ernte bestimmten Göttern des Pantheons geopfert werden sollen.

Die Knochen wurden ins Feuer geworfen, und anhand der entstandenen Risse konnte die Antwort gedeutet werden. Äußerst wichtig für die Landwirtschaft war das Wissen um den richtigen Zeitpunkt für Aussaat und Ernte. Auch dieses Problem wurde dem Orakel als Frage vorgelegt.



Abb. 3.1.3. Orakelknochen (14. – 12. Jh. v. Chr.)

Ebenfalls aus der Shang-Zeit ist ein dezimales Zahlensystem, aber kein Positionssystem, mit zehn Individualzeichen übermittelt, die den heutigen Zahlzeichen ähnlich sind. Auf Zauberwürfeln, Gegenständen aus Bronze und Ton, auf Orakelknochen sowie auf Bronzemünzen konnte man den Zahlzeichen begegnen.

Schon während dieser Epoche bestanden also sowohl ein Schrift- als auch ein Zahlensystem, was für die Organisation eines derart mächtigen Staates unabdingbar war. Damit hatten die Herrscher ein Instrument der Macht in der Hand, mit dem sie jederzeit Vorgänge und Bestände überprüfen konnten.

Schrift und Zahl bildeten aber auch einen engen Zusammenhang zum Erstellen eines Kalenders, der dringend für die Bestellung der Felder erforderlich war. So entstand der erste Kalender, der zugleich ein Sonnen- und Mondkalender war. Die Jahreslänge wurde durch die Sonne, die des Monats vom Mond bestimmt.

Zum Ausgleich der unterschiedlichen Umlaufzeiten des Mondes um die Erde und der Erde um die Sonne wurden länger und kürzer dauernde Monate festgelegt. Dieser Kalender aber war ungenau und nicht zuletzt für die Landwirtschaft ungünstig. So blieb es über viele Dynastien hinweg eine Aufgabe der Könige bzw. ihrer Hofastronomen, den Kalender zu vervollkommnen.

Chou-Dynastie (1130 – 481 v. Chr.)

Ausgang des 11. Jh. v. Chr. wurden die Shang von der damals mächtigsten Adelsfamilie, der Chou, abgelöst. Unter ihrer feudalistischen Herrschaft erhielt die zivilisatorische Entwicklung dennoch großen Aufschwung, was sich in allen Lebensbereichen widerspiegelte. Handwerk, Handel und Verwaltung wurden ausgebaut, und die Erkenntnisse der Astronomie erweiterten sich durch zahlreiche Beobachtungen und Aufzeichnungen. Interessant ist ein Bericht aus dem Jahre 687 v. Chr. von einem Meteoritenschwarm, der wie ein Regenschauer am Himmel vorüberzog.

Zur Zeit des Konfuzius (551–479 v. Chr.), des großen Philosophen und politischen Denkers, befanden sich die großen Fürsten der Chou bereits in kriegerischen Auseinandersetzungen um die Vorherrschaft, die schließlich um 481 v. Chr. zu sieben verfeindeten Staaten führten.

Kämpfende Reiche (481 – 221 v. Chr.)

Es gab keine einheitliche Herrschaft mehr im Reich. Während dieser Zeit vollzog sich unter starkem Einfluß der Philosophie ein Umbruch im gesellschaftlichen und geistigen Bereich. Konfuzius lehrte, sich auf die alten Werte wie Güte und gegenseitigen Respekt zu besinnen, sowohl im privaten Bereich als auch in der Beziehung zwischen Herrscher und Untertanen. Die Sittenlehre des Konfuzius beeinflußte über Jahrtausende hinweg die chinesische Staatsphilosophie und das chinesische Denken.

Gegen Ende des 4. Jhs., Anfang des 3. Jhs. v. Chr. wirkte der als Wahrheitslehrer bezeichnete chinesische Philosoph Laotse, der als Begründer des Taoismus (Tao, d. h. der Weg, Urgrund) gilt. Nach seiner Anschauung stellte das *Tao* die magische Kraft dar, aus der alles entspringt und von der die Welt in immer wechselnden Kombinationen des Gegensatzes von Yin und Yang zusammengehalten wird. Als ursprüngliche Repräsentanten des dualistischen Prinzips der Schöpfung von Yin und Yang gelten Fu Xi, (als Erfinder der Rechenkunst mit dem Winkelmaß dargestellt) und die Göttin Nü Gua (mit dem Attribut des Zirkels für das Gleichgewicht zuständig). Ihre umschlungenen, schlangenförmigen Körper symbolisieren die Einheit der Schöpfung (Abb. 3.1.4).

Die Einstellung der Taoisten war kein Weg aus der Ausweglosigkeit der Kämpfenden Reiche, bereitete aber im 1. Jh. n. Chr. den Weg vor für den aus Indien kommenden Buddhismus. Dies zeugt von kulturellen Beziehungen zwi-

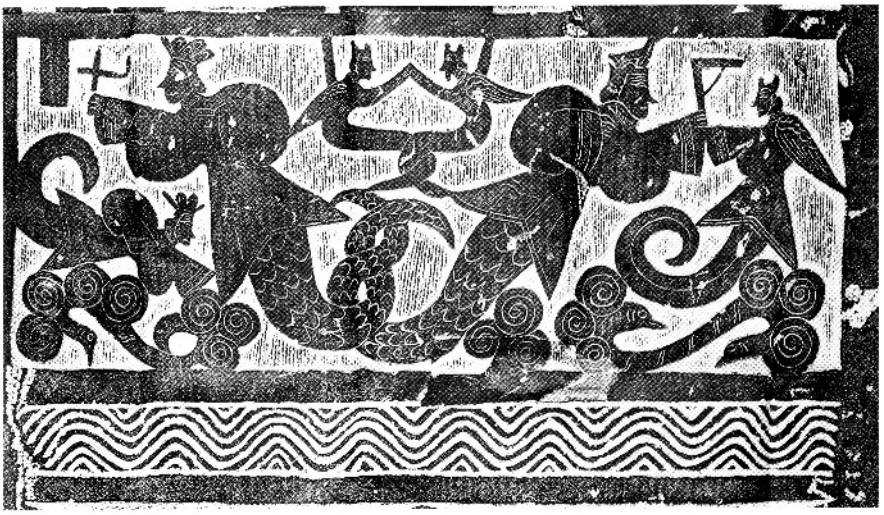


Abb. 3.1.4. Die zwei mythischen Schöpfer Fu Xi (rechts mit Winkelmaß) und Nü Gua (links mit Zirkel); in der Bildmitte zwei Geistwesen mit Flügeln (Steinabreibung, Ausschnitt; Jiaxiang, Provinz Shandong; Östliche Han-Dynastie, um 150 n. Chr.)

schen China und Indien in jener Zeit. Als eines der frühen überlieferten Zeugnisse der chinesischen Astronomie, frühestens aus dem 4. Jh. v. Chr., gilt das Zhoubi suanjing (Chou Pei Suan Ching, Klassische Arithmetik des Gnomon und die Kreisbahnen des Himmels), in dem die Mathematik als Instrument für geometrische Berechnungen dient. Interessant daran ist eine Auseinandersetzung in Dialogform über den Satz des Pythagoras sowie über Bruchrechnung und das Ziehen von Quadratwurzeln als vorausgesetzte Rechenfertigkeiten für geometrische Messungen und Berechnungen [Scriba/Schreiber 2000, S. 111ff.].

Chin-Dynastie (221 – 206 v. Chr.)

Unter dem ersten Kaiser Cheng, der den Titel Shi-Huang-Ti, d. h. „Des Anfangs erhabener Kaiser der Chin-Dynastie“ trug, kam es zu einer Vereinigung der kämpfenden Reiche, deren Name China sich von dieser Dynastie ableitet. Zum Schutz dieses gewaltigen Staates gegen die Hunnen zwang der Kaiser seine Untertanen zum Bau der chinesischen Mauer mit einer Länge von 2450 km. Spätere Erweiterungen führten zu einer Gesammtlänge von über 6000 km. Unter Kaiser Chengs Regentschaft wurden zahlreiche Änderungen durchgeführt: Die Lehnsdomänen wurden aufgehoben, und aus dem Lehnssystem wurde ein Verwaltungssystem. Sprache, Gesetze, Maße, Gewichte und Schrift (Fragmente echten Papiers von 49 v. Chr. wurden 1957 in der Nähe von Xiàn gefunden), wurden vereinheitlicht. Chinesische Seiden und Brokate gelangten mit Karawanen durch die mittelasiatischen Länder über die Seidenstraße bis nach Europa. Rom war ein dankbarer Abnehmer dieser kostbaren Waren.

Cheng war ein unerbittlicher Herrscher, der jeden Widerspruch ahndete. Sogar die Schriften von Gelehrten, die mit seiner Politik nicht übereinstimmten, ließ er im Jahre 213 v. Chr. verbrennen. Verschont blieben, mit wenigen Ausnahmen nur Bücher über Medizin, Landwirtschaft und Orakel.

Im Jahre 207 v. Chr. wurde die Chin-Dynastie von einer Bauernarmee unter Gaozu besiegt und fand damit ihr Ende.

Han-Dynastie (206 v. Chr. – 220 n. Chr.)

Der Armeeführer Gaozu wurde zum ersten Kaiser dieser Dynastie. Unter ihm kam das Beamtentum zur Hochblüte, und das chinesische Reich wurde seitdem über 2000 Jahre von kaiserlichen Beamten verwaltet. Zur Ausbildung der höheren chinesischen Beamten wurde eine Akademie errichtet, deren Absolventen einen umfangreichen Lehrplan zu bewältigen hatten. Die Staats- und Gesellschaftsphilosophie des Konfuzius mußte beherrscht werden, Mathematik und Astronomie waren vorgeschriebene Pflichtfächer. Nach einem strengen Auswahlverfahren und bestandener Prüfung genossen die Beamten höchstes Ansehen und konnten weitere hohe Ämter übernehmen. Künste und Wissenschaften wie Philosophie, Astronomie und Mathematik entwickelten sich in hohem Maße weiter. So ordnet man z. B. die Grundformen der chinesischen Zahlzeichen dem Beginn der Han-Dynastie zu, und seit dem 2. Jh.



Abb. 3.1.5. Wie ein Lindwurm zieht sich die Chinesische Mauer über die Gebirgskämme. Nahezu 2000 Jahre haben Menschen an ihr gebaut, zum Schutz vor den Steppenvölkern im Norden.
[Foto Alten]

v. Chr. ist die frühe Form des Abakus, eines Rechenbrettes bekannt, auf dem die Zahlen von 1 bis 9 mit Stäbchen aus Holz oder Bambus ausgelegt sind.

Das Rechenbuch *Jiuzhang suanshu* (Chiu Chang Suan Shu, Neun Bücher arithmetischer Technik) in der von Liu Hui 263 n. Chr. kommentierten Form, deren einzelne Stücke wahrscheinlich erheblich älteren Ursprungs sind und deren Verfasser uns namentlich nicht bekannt sind, ist eine Zusammenfassung der mathematischen Leistungen über mehrere Jahrhunderte hinweg. Es ist ein rein mathematisches Werk und entspricht inhaltlich den praktischen Bedürfnissen seiner Zeit im Wirtschafts- und Verwaltungsbereich sowie dem Ingenieurwesen. Feldmessung und Tauschregeln von Früchten, proportionale Verteilung, Beurteilung der Arbeitsleistung und Steuerfragen werden hier behandelt. Die verschiedenen Problemgruppen sind in Aufgaben formuliert und mit Lösungsanweisungen versehen, von denen einige im weiteren Text erläutert werden. Zur Bewältigung der Aufgaben waren teilweise hohe mathematische Kenntnisse erforderlich, über die ein Praktiker nicht unbedingt verfügte.

Die „Neun Bücher“ wurden nach Liu Hui noch mehrfach kommentiert, u. a. von Sunzi (3. oder 4. Jh.), von Zu Chongzhi (5. Jh.), von Liu Zhou (6. Jh.) und im 7. Jh. von Li Chunfeng. 1084 erschien dieses Werk erstmals in gedruckter Form.

Im Jahre 263 n. Chr. schrieb Liu Hui sein kleines Buch *Haidao suanjing* (Hai Tao Suan Ching, Mathematische Inselsammlung) als eine Ergänzung seiner Kommentare in „Neun Büchern“ über praktische Geometrie.

Diese beiden Werke von Liu Hui wurden 656 zum offiziellen Lehrbuch zum Studium für Beamte und Ingenieure erklärt und galten ab 702 für diese auch in Japan als Pflichtlektüre.

Zur Zeit der späten Han-Dynastie wirkte der Astronom, Mathematiker, Geograph und Instrumentenbauer Chang Heng (78–139 n. Chr.), der als einer der bedeutendsten Universalgelehrten seines Landes gilt. Er baute den ersten bekannten Seismographen der Welt und lehrte die Kugelgestalt der Erde sowie die Unendlichkeit des Weltalls.

Das Reich der Han zerfiel durch innenpolitische Machtkämpfe und wurde schließlich von den Heerführern aufgeteilt. Aus den Auseinandersetzungen gingen die „Drei Reiche“ hervor.

Zeit der Teilungen (221 – 618)

Diese Zeit war geprägt durch ständige kriegerische Auseinandersetzungen um die Vorherrschaft zunächst der drei Reiche, später folgten weitere Spaltungen. Von 518–618 herrschte die Sui-Dynastie, und während dieses kurzen Zeitraumes gelang es ihr, eine politische Einigung herbeizuführen. Der Taoismus wurde vom Buddhismus verdrängt, der dann zur Staatsreligion erhoben wurde.



Abb. 3.1.6. Eines der ersten seismographischen Geräte. Die Richtung zum Epizentrum eines Erdbebens soll bei der Erschütterung des Gerätes durch ein herabfallendes Teil angezeigt werden (Museum einer Mittelpunktschule in Wuxi/China) [Foto Alten]

Tang-Dynastie (618 – 906)

Unter den Tang wurde China zu einer Weltmacht und seine Bevölkerung kam zu Wohlstand. Handel, Handwerk, Kunst und Wissenschaften erfuhren einen gewaltigen Aufschwung, für den die Entwicklung der Buchdruck-Kunst von großer Bedeutung war.

Die kaiserliche Akademie erstellte einen Lehrplan mit sechs vorgegebenen Disziplinen, u. a. auch mit Mathematik, für dessen Bewältigung sieben Jahre vorgegeben wurden. Auf die besondere Stellung der Mathematik jener Zeit weist eindeutig die übermittelte Zahl von 3260 geprüften Gelehrten dieses Faches innerhalb von ca. 22 Jahren hin, und als Beweis für die Fortschritte auf mathematisch-astronomischem Gebiet sei die Gradmessung genannt. Zwar äußerte bereits der Astronom und Mathematiker Liu Zhuo (544–610) die Idee, die Messung eines Meridiangrades mit Hilfe einer Schnur durchzuführen, verwirklicht wurde sie aber erst 725 durch den Astronomen Nan Gong-yue. Jener Liu Zhuo hat an der Entwicklung eines Interpolationsverfahrens gearbeitet, um es bei astronomischen Berechnungen anzuwenden.

Das große Reich zerfiel 907 und wurde bis 960 von fünf Dynastien regiert. Für die Weiterentwicklung der Kultur und Wissenschaft ist die anschließende Periode wichtig.

Sung-Dynastie (960 – 1278)

Diese Epoche stellt einen weiteren Höhepunkt der chinesischen Wissenschaft und Technik dar. Es gab zahlreiche Erfindungen und Erkenntnisse, die die Bewältigung des Alltags erleichterten. So lieferte der Mathematiker und Ingenieur Shen Gua eine Beschreibung zum Gebrauch des Kompasses, der durch die Ausweitung des Seehandels notwendig wurde, geographische Kartenwerke wurden erstellt. Eine Verbesserung des Kalenders enthielt genauere Angaben zu den klimatischen Besonderheiten des Jahreszeitenwechsels, wichtig für die Landwirtschaft und die Seefahrt.

Das 13. Jh. bedeutete für die chinesische Algebra einen nochmaligen Höhepunkt. Insbesondere traten die höheren Beamten Qin Jiushao (Ch'in Chiu-Shao, ca. 1200–ca. 1261) und Li Ye (ursprünglich Li Zhi, 1178–1265) hervor sowie der Wanderlehrer Zhu Shijie (Chu Shih-Chieh, Ende des 13. Jhs.). Einige ihrer Leistungen werden hier im Abschnitt 3.1.5 vorgestellt.

Diese entscheidende Zeit der kulturellen Entwicklung wurde unterbrochen durch den Einfall der Mongolen in Nordchina im Jahre 1211. Wenige Jahre danach gelang es Dschingis-Khan (1155–1227) ein riesiges Reich zu schaffen, das sich fast über die ganze Mitte des asiatisch-europäischen Kontinents ausdehnte. Für den schrecklichen Feldherrn bedeutete das Massakrieren seiner Feinde und das Schänden ihrer Frauen die größte Freude. Er entriß ihnen ihre Pferde und Viehherden, und diese „Geißel der Menschheit“ bekam Eurasien vom Amur bis zur Oder zu spüren. Die Handelswege waren zu dieser Zeit wegen strenger Bewachung ohne Angst vor Überfällen zu passieren.

Yuan-Dynastie (1278 – 1368)

Kublai Khan, der Begründer der Yuan-Dynastie in China, war ein Enkel des Dschingis-Khan. Im Jahre 1280 ließ er sich zum Kaiser ausrufen und vergrößerte sein Reich durch die Eroberung von Korea und Tibet. Durch die Erweiterung des Reiches und die Möglichkeit, die Handelswege ungehindert passieren zu können, kam es zu einer Wechselbeziehung zwischen chinesischen Gelehrten und denen der islamischen Länder. Im chinesischen Observatorium arbeiteten Gelehrte des Iran und aus Mittelasien, ebenso waren chinesische Astronomen in der Sternwarte des Nasīr ad-Dīn aṭ-Tūsī (1201–1274) in Maraga tätig. Infolgedessen erfolgte der Kenntnisaustausch auch auf dem Gebiet der Mathematik. Die zweite Hälfte des 13. Jhs. gilt als Blütezeit der chinesischen Mathematik: Mehrere hervorragende Mathematiker schrieben wichtige Werke. Die großen Leistungen der chinesischen Algebra fanden ihren Weg in den Westen.

Trotz der ihnen aufgezwungenen Fremdherrschaft versuchte die chinesische Bevölkerung, ihre Kultur aufrecht zu erhalten, was sich aber als recht schwierig herausstellte. Die Gefahr der kulturellen Vernichtung wurde erst durch die Vertreibung des letzten Yuan-Kaisers zurück in die Mongolei gebannt.

China nach 1368

Aus der Zeit der durch ihre Architektur und Kunst bekannten Ming-Dynastie (1368–1644) sind keine bedeutenden mathematischen Beiträge überliefert. Wegen der Abschottung Chinas während der Regierungszeit der Mandschu-Kaiser (1644–1912), die erst unter dem Druck Englands, Frankreichs und Japans ihr Reich ab 1842 fremden Einflüssen öffneten, wurden den chinesischen Wissenschaftlern die neuen Entdeckungen und Entwicklungen europäischer Mathematiker erst allmählich bekannt.

Nach den Wirren in den Jahrzehnten seit Ausrufung der Republik (Bürgerkriege, Krieg mit Japan, sowjetische Besetzung der Mandschurei, Ausrufung der Volksrepublik durch Mao Tse-tung, Kulturrevolution) hat sich auch das wissenschaftliche Leben in China wieder normalisiert. Dabei hat auch die moderne Mathematik ihren Einzug in China gehalten und raschen Aufschwung erfahren.

Hervorzuheben sind ihre eigenständigen wissenschaftlichen Leistungen in den letzten Jahrzehnten, wo junge Chinesen bei den Olympiaden der mathematischen Disziplinen unter den Besten waren und chinesische Mathematiker wertvolle Beiträge zur Entwicklung der Mathematik geleistet haben.

3.1.1 Zahlzeichen

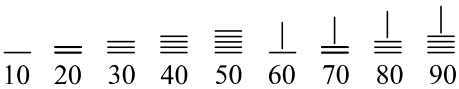
Aus der Han-Zeit sind uns chinesische Zahlzeichen als Hieroglyphenziffern bekannt. Es sind Individualzeichen für 1–9, mit denen die Zahlen nach einem multiplikativen Prinzip dargestellt werden, z. B. 20 als $2 \cdot 10$, 30 als $3 \cdot 10$ usw. bis 90, ebenso für die Zahlen 200 als $2 \cdot 100$, 2000 als $2 \cdot 1000$, usw. Das altchinesische Zahlensystem ist ein Dezimalsystem, aber kein vollständiges Positionssystem. Bei der Anwendung dieses Systems konnten die Chinesen ohne ein Zeichen für die Null auskommen. Dieses Prinzip ist schon bei den Zahlen auf Orakelknochen aus der Shang-Zeit erkennbar.

Rechenbrett mit Stäbchen

Seit dem 2. Jh. v. Chr. wurde in China das Rechenbrett eingesetzt, auf dem das Positionssystem angewendet wurde. Die Zahlen wurden durch Stäbchen aus Holz, später aus Gußeisen und für die Reichen aus Elfenbein, ausgelegt, wobei deren Richtung und Position ihren Wert bestimmten. Für die Einer stand ein senkrechter Stab, der auch für Hunderter und Zehntausender und allgemein für die Potenzen 10^{2n} (n = 1,2,3,...) galt:



Zehner wurden als waagerechte Stäbe dargestellt:



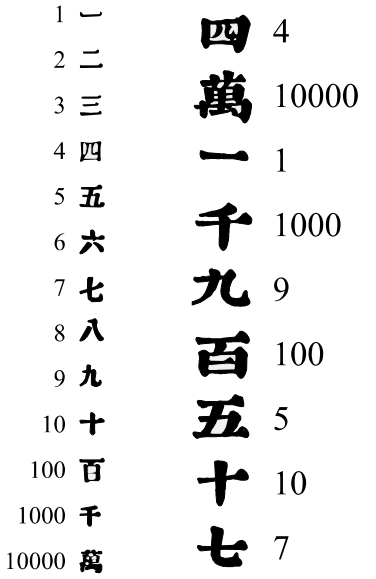


Abb. 3.1.7. Chinesische Zahlzeichen (links) und Darstellung der Zahl 41 957 (rechts)
[Menninger 1958, Bd. II, S. 270 und 274]

ebenso wie Tausender, Hunderttausender und allgemein die Potenzen 10^{2n+1}, z. B.:

$$7928 = (7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8) = \text{𝍠𝍡𝍢𝍡}.$$

Anstelle der noch unbekannten Null haben die Chinesen zumindest bis ins 8. Jh., ebenso wie die Babylonier vor ihnen, eine Lücke gelassen, z. B. bei

$$70\,316 = \text{𝍡}\quad\text{𝍡}\quad\text{𝍡}.$$

Der größten Zahl 1 644 866 437 500 begegnet man in dem Werk „Neun Bücher Arithmetischer Technik“, Buch IV. Ein eigenes Zeichen für Null, der Punkt, erscheint in China erstmals in einer astronomischen Schrift aus dem Jahr 718. Im 13. Jh. wird die Null als Kreis dargestellt.

Die chinesische Darstellung der Zahlen setzte sich auch in Japan und Korea durch [Menninger II, S. 266]. Sie wurde dort erst in jüngster Zeit durch die indische Zahlenschreibweise ersetzt, jedoch überwiegend im wissenschaftlichen und geschäftlichen Bereich.

Der Suanpan, der chinesische Abakus, besteht aus einem Rahmen mit senkrecht parallel zueinander stehenden Stangen oder Drähten, auf denen jeweils fünf bewegliche Kugelscheiben aufgezogen sind. Über einer Unterteilung befinden sich jeweils zwei weitere Scheiben.

Dieses Rechenbrett, mit dem die vier Grundrechenarten durchgeführt werden können, ist seit 1436 nachweisbar, vermutlich aber schon vor dieser Zeit

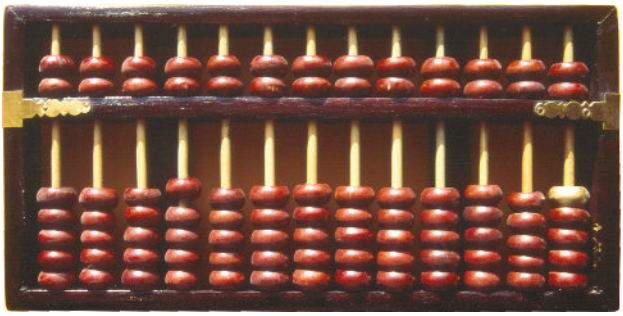


Abb. 3.1.8. Suanpan (chinesisches Rechenbrett mit runden Holzscheiben) [Foto Alten]

entwickelt worden. In Japan taucht im nächsten Jahrhundert die japanische Variante, der Soroban, auf.

Ob der Gebrauch von Rechenbrettern in anderen Ländern wie z. B. in Rußland oder im Nahen Osten auf einer Übernahme oder auf jeweils eigener Entwicklung beruht, ist eine bislang nicht entschiedene Frage.

Neun Bücher arithmetischer Technik

Das Rechenbuch *Jiuzhang suanshu* (Chiu Chang Suan Shu, „Neun Bücher arithmetischer Technik")[Vogel 1968] besteht aus 246 beschreibenden Aufgaben ohne einleitende Texte, aber mit Lösungshinweisen. Oftmals ist es schwer, den Text zu verstehen. Es bedurfte damals der Kenntnis der vier Grundrechenarten, des Umganges mit dem Abakus und vielfach der Unterstützung eines Lehrers, um die Aufgaben erfolgreich lösen zu können. Folgende Bereiche gehören zur Algebra und werden hier ausführlicher erläutert.

3.1.2 Quadrat- und Kubikwurzeln

Das Buch IV der „Neun Bücher" enthält 24 Aufgaben, von denen sich die letzten 12 Aufgaben mit der Bestimmung der Seite einer gegebenen quadratischen Fläche, der Seite eines Würfels bei gegebenem Volumen und dem Durchmesser einer Kugel von gegebenem Volumen befassen.

Am Ende des Buches werden die Methoden *kai fang* und *kai li fang* zum Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln beschrieben. Diese numerischen Methoden wurden dezimal durchgeführt und konnten auf dem Rechenbrett vollzogen werden. Sie beruhten auf der zweiten und dritten Potenz eines Binoms, d. h. die Chinesen kannten die binomischen Formeln, ohne sie in diesem Zusammenhang zu erwähnen. Diese kompakten Methoden, deren vollständige Rekonstruktion erst Mitte des vorigen Jahrhunderts gelang, werden seit der Han-Zeit angewendet und zeugen vom Stand der chinesischen Mathematik in jener Zeit.

Der Ausgangspunkt bei der Anwendung der Methode *kai fang* ist folgender: Zu bestimmen ist die positive Wurzel $x = \sqrt{p}$ der reinquadratischen Gleichung $x^2 = p$.

Sei p eine natürliche Zahl mit 5 oder 6 Ziffern, also x dreiziffrig. Dann setzt man

$$p = (100x_1 + 10x_2 + x_3)^2$$
$$= 10^4x_1^2 + \left[2 \cdot 10^2x_1 + 10x_2\right] 10x_2 + \left[2\left(10^2x_1 + 10x_2\right) + x_3\right] x_3.$$

Zunächst wird x_1 als die größte Zahl bestimmt, für die $10^4x_1^2 < p$ ist. Dann wird der Rest $p - 10^4x_1^2$ gebildet und x_2 als größte Zahl bestimmt, für die $10x_2 < \frac{p-10^4x_1^2}{2\cdot 10^2x_1}$ ist. Dann wird $[\ 2 \cdot 10^2x_1 + 10x_2\ ]\ 10x_2$ vom ersten Rest subtrahiert und entsprechend für die Bestimmung von x_3 verfahren.

Anhand der Aufgabe 12 aus Buch IV wird die chinesische Methode erläutert. Die Aufgabe lautet: Jetzt hat man eine quadratische Fläche von 55 225 Pu. Die Frage ist: Wie groß ist die Quadratseite? Die Antwort sagt: 235 Schritt.

Die Methode der Chinesen ähnelt dem um 1819 bekannt gewordenen und noch heute angewandten Schema von Horner und Ruffini, mit dem man den Wert eines Polynoms höheren Grades bestimmt.

Sei also $x = \sqrt{55\,225}$ oder $x^2 = 55\,225 = (100x_1 + 10x_2 + x_3)$.

Die o. g. drei Schritte werden nach dem Horner-Schema ausgeführt:

I. Berechnung des Restes

$$r_1 = p - 10^4x_1^2$$

$x_1 = 2$:

10000	0	55225
	+20000	-40000
	+20000	15225
10000	40000	

II. Berechnung des Restes

$$r_2 = r_1 - [2 \cdot 10^2x_1 + 10x_2] \cdot 10x_2 = 15225 - 100x_2^2 - 4000x_2$$

$x_2 = 3$:

100	4000	15225
	+300	-12900
	+300	2325
100	4600	

III. Berechnung des Restes

$$r_3 = r_2 - \quad [2(10^2x_1 + 10x_2) + x_3].x_3 = 2325 - x_3^2 - 460x_3$$

$x_3 = 5$:

1	460	2325
	+5	-2325
	+5	0
1	470	

Daraus folgt $x = 235$.

Wenn man das Horner-Schema um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn dreht, erkennt man seine Verwandtschaft mit dem chinesischen Verfahren.

$x_1 = 2$ (I)

5525	−40000	15225	
0	+2000	+20000	40000
10000			10000

$x_2 = 3$ (II)

15225	−12900	2325	
4000	+300	+300	4600
100			100

$x_3 = 5$ (III)

2325	−2325	0	
460	+5	+5	470
1			1

Die Chinesen vollzogen ihr Lösungsrezept in vier Zeilen auf dem Rechenbrett. Ihre Regel dazu ist in den „Neun Büchern“ angegeben. Ausführliche Beschreibungen findet man z. B. in [Juschkewitsch 1964, S. 41ff.] und [Vogel 1968, S. 40, 113ff.].

Ähnlich gingen die Chinesen beim Ziehen der Kubikwurzel vor. Im 13. Jh. waren sie in der Lage, auch höhere Wurzeln zu ziehen.

Methoden zum Ziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln wurden nachweisbar erstmals in China angewendet. Später traten Regeln zur Bestimmung von Quadrat- und Kubikwurzeln zunächst bei Āryabhaṭa I in Indien auf, danach bei den Gelehrten in den islamischen Ländern. Etwa seit der Mitte des 12. Jhs. kannte man in Europa eine Regel zum Ziehen von Quadratwurzeln. Die Regel für Kubikwurzeln trat erstmals bei Leonardo von Pisa auf und fand noch im 19. Jahrhundert Anwendung in unseren Schulen.

3.1.3 Der doppelte falsche Ansatz (Überschuß und Fehlbetrag)

Die Methode des einfachen falschen Ansatzes wurde bereits im Teil Babylonische Algebra erörtert. Die des doppelten falschen Ansatzes, aus der arabischen Mathematikterminologie als Regel al-Ḫaṭa'ayn (al-Chatayn), d. h. als Regel zweier Fehler überliefert, kommt schon früher bei den Chinesen in Buch VII der „Neun Bücher“ vor und wird auch als Methode „Überschuß und Fehlbetrag“ bezeichnet.

Die Chinesen gehen von der linearen Gleichung der Form $ax = b$ mit $a \neq 0$ aus (ähnlich auch für $ax+b = d$), und setzen beim doppelten falschen Ansatz für x zwei willkürlich gewählte Versuchszahlen x_1 und x_2 $(x_1 > x_2)$ ein:

$$ax_1 = b + d_1, \quad ax_2 = b - d_2 \quad .$$

Dabei kann der Wert für ax entweder größer, kleiner oder auch gleich b ausfallen. Hier soll folgender Fall beschrieben werden:

d_1 ist der Überschuß und d_2 der Fehlbetrag. Aus den obigen drei Gleichungen ergibt sich:

$$b\,(x_1 - x_2) = d_1 x_2 + d_2 x_1, \quad a\,(x_1 - x_2) = d_1 + d_2$$

und

$$x = \frac{x_1 d_2 + x_2 d_1}{d_1 + d_2} \quad .$$

Die Autoren des Werkes „Neun Bücher“ operieren nur mit positiven Zahlen. Die Rechenmethode wird in 4 Schritten vorgegeben, die auf dem Rechenbrett vollzogen werden.

Schritt 1: Auf das Rechenbrett wird gelegt

$$\begin{matrix} x_1 x_2 \\ d_1 d_2 \end{matrix}$$

Schritt 2: Die Diagonalelemente werden multipliziert und die Summe shih (Dividend) $x_1 d_2 + x_2 d_1$ wird gebildet.

Schritt 3: Es wird die Summe fa (Divisor) gebildet: $d_1 + d_2$

Schritt 4: Shih durch fa geteilt.

Als Beispiel diene Aufgabe 10 aus Buch VII:

„Jetzt hat man eine Wand, 9 Fuß hoch. Eine Melone wächst an dieser nach oben kriechend und wird dabei täglich 7 Zoll länger (1 Fuß = 10 Zoll). Ein Kürbis wächst an ihr nach unten kriechend und wird dabei täglich 1 Fuß länger.

Frage: „In wieviel Tagen treffen sie zusammen und wie lang ist dann jedes, die Melone und der Kürbis?“

Die Lösung lautet in heutiger Schreibweise:

Sei $7x$ die Länge der Melonenpflanze (in Zoll) nach x Tagen, $10x$ die Länge der Kürbispflanze (in Zoll) nach x Tagen.

Wir müssen x so bestimmen, so daß $90 - 10x = 7x$, also $17x = 90$. Mit den Versuchszahlen $x_1 = 6$; $x_2 = 5$ erhält man $17x_1 = 102 = 90 + 12 = 90 + d_1$, $d_1 = 12$; $17x_2 = 85 = 90 - 5 = 90 - d_2$, $d_2 = 5$. Dann ist entsprechend der Regel des doppelten falschen Ansatzes $x = \frac{x_1 d_2 + x_2 d_1}{d_2 + d_1} = \frac{90}{17} = 5\frac{5}{17}$ (Tage), die Länge der Melonenpflanze $7x = \frac{7 \times 90}{17} = 37\frac{1}{17}$ (Zoll) $= 3$ (Fuß) $7\frac{1}{17}$ (Zoll), die Länge der Kürbispflanze $10x = \frac{10 \times 90}{17} = 52\frac{16}{17}$ (Zoll) $= 5$ (Fuß) $2\frac{16}{17}$ (Zoll).

Diese Lösungsmethode für lineare Gleichungen erscheint zum ersten Mal bei den chinesischen Gelehrten. Die indischen Mathematiker kannten nur den einfachen falschen Ansatz. Später erschien der doppelte falsche Ansatz bei den islamischen Mathematikern wie al-Ḫwārizmī, Qusṭā ibn Lūqā und al-Qalaṣādī und dann im Abendland bei Leonardo von Pisa. Viele Jahrhunderte lang wurden Aufgaben in dieser Weise gelöst. Sogar noch im Jahre 1884 wurde diese Methode an den Gymnasien Österreichs gelehrt.

3.1.4 Lineare Gleichungssysteme

In Buch VIII der „Neun Bücher“ wird die chinesische Lösung linearer Gleichungssysteme dargestellt. Es enthält 18 Aufgaben dieser Art mit bis zu fünf Unbekannten. Sie werden dort nach der Fangcheng (rechteckige Tabelle) – Methode gelöst. Diese Methode ist allgemein anwendbar zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit beliebig vielen Unbekannten. Sie tritt erstmalig bei den Chinesen auf und entspricht unserem Gaußschen Algorithmus.
Die erste Aufgabe enthält drei Unbekannte, in moderner Schreibweise:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \quad . \end{aligned}$$

Bei der Regel zur Lösung dieser Aufgabe wird von der rechteckigen Tabelle in folgender Anordnung der Zahlenwerte ausgegangen:

$$\begin{array}{ccc} a_{31} & a_{21} & a_{11} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ b_3 & b_2 & b_1 \end{array} \quad .$$

Zuerst wird die zweite Spalte mit a_{11} multipliziert. Danach werden die Zahlen der rechten Spalte so oft (also a_{21} mal) von denen der mittleren Spalte subtrahiert, daß in der zweiten Spalte oben nichts mehr steht.

$$\begin{array}{ccc} a_{31} & & a_{11} \\ a_{32} & a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12} & a_{12} \\ a_{33} & a_{11}\cdot a_{23} - a_{21}\cdot a_{13} & a_{13} \\ b_3 & a_{11}\cdot b_2 - a_{21}\cdot b_1 & b_1 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} a_{31} & & a_{11} \\ a_{32} & a'_{22} & a_{12} \\ a_{33} & a'_{23} & a_{13} \\ b_3 & b'_2 & b_1 \end{array}$$

Entsprechend wird mit der linken Spalte verfahren, damit an der Stelle a_{31} nichts mehr (bzw. 0) steht:

$$\begin{array}{ccc} & & a_{11} \\ a'_{32} & a'_{22} & a_{12} \\ a'_{33} & a'_{23} & a_{13} \\ b'_3 & b'_2 & b_1 \end{array} \quad .$$

Durch die Anwendung des obigen Verfahrens auf diese Tabelle erhält man eine Tabelle, in deren oberem linken Dreieck keine Zahl mehr steht:

$$\begin{array}{ccc} & & a_{11} \\ & a'_{22} & a_{12} \\ a''_{33} & a'_{23} & a_{13} \\ b''_3 & b'_2 & b_1 \end{array} \quad .$$

Drehen wir diese Matrix (nach chinesischer Schreibweise) um 90 ° , so erhalten wir die dem Gaußschen Algorithmus entsprechende Anordnung.

Jetzt betrachten wir das System

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 \\ a''_{33}x_3 &= b''_3 \end{aligned}$$

und erhalten sukzessiv die Werte der Unbekannten x_3, x_2, x_1.

Die erste Aufgabe des Buches ist folgende:

„Aus 3 Garben einer guten Ernte, 2 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 39 Tou. Aus 2 Garben einer guten Ernte, 3 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man 34 Tou. Aus 1 Garbe guter Ernte, 2 Garben mittelmäßiger Ernte und 3 Garben schlechter Ernte erhält man 26 Tou. Wie viel ist der Ertrag je 1 Garbe der guten, der mittelmäßigen und der schlechten Ernte?

Die Regel lautet: Lege auf der rechten Seite hin 3 Garben der guten Ernte, 2 Garben der mittelmäßigen Ernte, 1 Garbe der schlechten Ernte sowie den Ertrag, die 39 Tou. Die Reihen der mittleren und geringen Ernte lege hin wie auf der rechten Seite.“

Das folgende Gleichungssystem ist zu lösen:

$$\begin{aligned} 3G + 2M + S &= 39 \\ 2G + 3M + S &= 34 \\ G + 2M + 3S &= 26 \quad , \end{aligned}$$

wobei G, M, S der Reihe nach den Ertrag einer Garbe der guten, mittelmäßigen und schlechten Ernte bezeichnen. Nach der Fangcheng-Methode transformieren wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

und erhalten das zum Ausgangssystem äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3G + 2M + S &= 39 \\ 5M + S &= 24 \\ 36S &= 99 \end{aligned}$$

mit der Lösung $S = \frac{11}{4}$; $M = \frac{17}{4}$; $G = \frac{37}{4}$.

In weiteren Aufgaben erscheinen bei den Umformungen der rechteckigen Tabelle auch negative Zahlen, ebenso bei Multiplikationen und Divisionen. Um

solche Operationen mit negativen Zahlen zu erklären, gibt der Autor die geläufigen Plus-Minus-Regeln, *zheng fu* (Chêng fu) an z. B. $\alpha+(-\beta)=\alpha-\beta$.
Um die Fangcheng-Methode zur Auflösung allgemeiner linearer Gleichungssysteme zu erweitern, führten die Chinesen negative Zahlen ein, mit denen sie nach den obigen Regeln formal rechnen konnten. Negative Lösungen von Gleichungen und Gleichungssystemen aber ließen sie bis etwa zum 13. Jahrhundert noch nicht zu. Negative Zahlen fanden im 7. Jh. ihren Einzug in die Werke indischer Mathematiker.
Eine Weiterentwicklung der Theorie der Gleichungssysteme erfolgte erst im Jahre 1683 durch den Japaner Seki Kowa mittels der Determinantenrechnung.

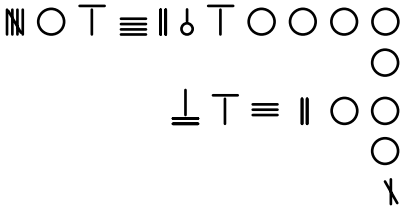
3.1.5 Algebra im 13. Jahrhundert

Das 13. Jh. stellte für die chinesische Algebra einen Höhepunkt dar. Zu dieser Zeit während der Sung-Dynastie (960–1279) wirkte in Südchina Qin Jiushao, ein höherer Beamter. Im Jahr 1247 verfaßte er das Werk „Mathematische Abhandlung in neun Büchern“ (*Shushu jiuzhang*). Es enthält ein spezielles Zeichen für Null, die Behandlung von unbestimmten Gleichungen und vor allem die Erweiterung der numerischen Auflösung entsprechend dem bereits beschriebenen „Horner-Verfahren“ bezogen auf algebraische Gleichungen höheren Grades. In dem früher verfaßten Werk „Neun Bücher Arithmetischer Technik“ wurde das Verfahren zur Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzeln benutzt. Qin Jiushao löste z. B. die Gleichung

$$-x^4 + 763\ 200\ x^2 - 40\ 642\ 560\ 000 = 0$$

nach diesem sukzessiven Approximationsverfahren.
Der nächste große Algebraiker war Li Ye (1178–1265), ebenfalls höherer Beamter. Er lebte in dem von Mongolen besetzten Nordchina und beschäftigte sich in seinem wichtigsten Werk *Ceyuan haijing* (Der Seespiegel der Kreismessung) insbesondere mit der Lösung von Gleichungen. Die Darstellung des o. g. Verfahrens, das er als „Methode des Himmelselementes“, (*tianyuan shu, tianyuan* = Unbekannte, das Himmelselement, shu = Methode) bezeichnete, fehlt in seinem Werk. Deshalb wird vermutet, daß sie in seinem Wirkungsbereich bekannt war. Obwohl die beiden Algebraiker Zeitgenossen waren, scheinen sie sich gegenseitig nicht beeinflußt zu haben.
Auf dem Rechenbrett stellte sich das Verfahren bei Li Ye im 2. Buch so dar, daß die Koeffizienten des Polynoms nach aufsteigenden Potenzen der Unbekannten von oben nach unten, beginnend mit dem freien Glied, in eine Spalte geordnet wurden. Fehlende Potenzen in einer Gleichung erschienen als Kreis, dem Zeichen für Null. Die Kennzeichnung der negativen Zahlen erfolgte durch einen Schrägstrich an der ersten Ziffer. Die Zahlen sind von rechts in Zweiergruppen zu lesen. Dabei ist 𝍠 Symbol für 50. Beispiel:

$$-x^4 + 763\ 200\ x^2 - 40\ 642\ 560\ 000 = 0$$



Die Schreibweise der Koeffizienten unterscheidet sich bei Qin Jiushao von der des Li Ye derart, daß er die negativen in schwarzer und die positiven Koeffizienten in roter Farbe schreibt.

Die Methode *tianyuan* ist eine der größten Leistungen der chinesischen Mathematik, die erst im 15. Jh. von al-Kāšī (gest. ca. 1429) wieder angewendet wurde. In Europa erschien sie im 16. Jh. in einer umständlichen Form bei François Viète in Frankreich, und erst zu Beginn des 19. Jhs. war sie fast gleichzeitig bei Paolo Ruffini (1765–1822) in Italien und bei William G. Horner (1786–1837) in England zu finden.

Die Darstellung der Gleichung in der Form f(x) = 0 ist zum ersten Mal in der chinesischen Mathematik zu finden. Bei den griechischen, islamischen und später bei den europäischen Mathematikern wurden die Glieder von Gleichungen so auf die beiden Seiten verteilt, daß nur positive Koeffizienten auftraten. Erst im 17. Jh. wurde bei René Descartes (1596–1650) und Thomas Harriot (1560–1621) die Darstellung f(x) = 0 eingeführt. Interessant ist, daß Descartes fehlende Potenzen der Gleichung durch Sternchen kennzeichnet, im Gegensatz zum Kreis (Null) bei den Chinesen.

Wenige Jahre nach dem Tod der beiden genannten chinesischen Mathematiker lebte der große Gelehrte Zhu Shijie (um 1300). In seinem Werk *Siyuan yujian* (Kostbarer Spiegel der vier Elemente) leistet er einen großen Beitrag zur Entwicklung der eigenständigen Algebra. Es ist wohl das letzte bedeutende mathematische Buch vor der Ankunft der Jesuiten im 16. Jh.

Im Vorwort dieses Werkes erfahren wir von der 20-jährigen Tätigkeit des Autors als Wanderlehrer, während der er zahlreiche Schüler unterrichtete, für die er 1299 ein Einführungsbuch geschrieben hat.

Nichtlineare Gleichungssysteme

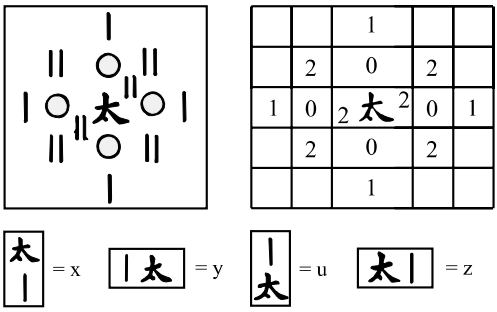
Im „Kostbaren Spiegel der vier Elemente“ entwickelte Zhu Shijie ein Bezeichnungssystem für Gleichungen höheren Grades mit vier Unbekannten und löste Gleichungssysteme, die auf derartige Gleichungen führten. Die Schreibweise der nichtlinearen Gleichungen soll anhand des folgenden Beispiels erörtert werden. Sie stellt die Anordnung der Koeffizienten auf dem Rechenbrett dar.

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + 2xy + 2xz + 2xu + 2yz + 2yu + 2zu$$

Die Elemente sind:

Himmel tian (= x), Erde di (= y), Mensch ren (= z), Ding wu (= u)

Die Koeffizienten der Potenzen von x werden nach unten, die von y nach links, die von z nach rechts und die von u nach oben geschrieben. Die Koeffizienten der Produkte *xy, yu, uz, xz* werden in den Zwischenfeldern notiert, und die Produkte *xu* und *zy* erscheinen im Innenfeld.



Das folgende Gleichungssystem wird von Zhu Shijie in der heutigen Schreibweise wie folgt gelöst:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - x^2 + 4y - xy^2 + 4z + xz = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ 2x + 2y - u = 0 \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $y = \frac{x+z}{2}$, y wird in die zweite Gleichung (der Form $\frac{2x+4y+4z}{x} = x + y^2 - z$, $x \neq 0$) und in die dritte Gleichung eingesetzt:

$$\frac{6z + 4x}{x} = x - z + (\frac{x+z}{2})^2 \tag{3.1.1}$$

bzw.

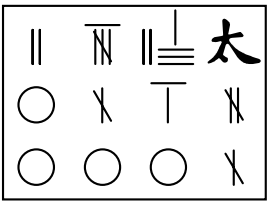
$$x^2 - z^2 + (\frac{x+z}{2})^2 = (x+z)(x - z + \frac{x+z}{4}) = 0 \quad . \tag{3.1.2}$$

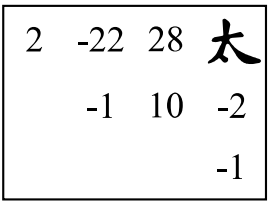
Für $x + z = 0$ erhält man aus (3.1.1) $x = -1$; $z = 1$; sodann $y = 0$; $u = -2$. Um nur positive Lösungen zu erhalten, nimmt man $x + z \neq 0$ an; jetzt folgt $x - z + \frac{x+z}{4} = 0$ aus der Gleichung (3.1.2) d. h. $z = \frac{5}{3}x$, und durch sukzessive Elimination der Unbekannten erhält man die einzige Lösung $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, $u = 14$.

Aus dem Gleichungssystem läßt sich die Gleichung

$$2y^3 - uy^2 - 22y^2 + 10uy + 28y - u^2 - 2u = 0$$

mit zwei Unbekannten u und y ermitteln, die bei Li Ye wie folgt auf dem Rechenbrett dargestellt wird:





Der „Kostbare Spiegel“ von Zhu Shijie erschien im 15. Jh. zusammen mit Arbeiten von Yang Hui als Lehrbuch in Korea, wo es wahrscheinlich 1433 gedruckt wurde. In Japan erschien es als Druck 1658, später wurde es durch Kommentare japanischer Mathematiker ergänzt.

Wesentliche Inhalte der chinesischen Algebra

Ca. 1400 v. Chr.	Orakelknochen mit Zahlzeichen
6.–4. Jh. v. Chr.	*Zhoubi suanjing (Klassische Arithmetik des Gnomon und die Kreisbahnen des Himmels)*: Werk über Astronomie und Kalenderrechnung unter Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes; Verwendung von Quadratwurzeln
2. Jh. v. Chr.	Rechenbrett mit Stäbchen *Jiuzhang suanshu (Neun Bücher arithmetischer Technik)*: Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln (unter Verwendung einer Art Horner- Schema); doppelter falscher Ansatz (Überschuß und Fehlbetrag); lineare Gleichungssysteme mit mehreren Unbekannten, gelöst nach der Fangcheng-Methode (entspricht dem Gaußschen Algorithmus) unter Verwendung auch von negativen Zahlen; quadratische Gleichungen; unbestimmte Gleichungen
3. Jh. n. Chr.	LIU HUI: Kommentierte Ausgabe der „Neun Bücher arithmetischer Technik“
5. Jh.	Chang chui-chin *(Mathematisches Handbuch)* Aufgaben der 100 Vögel
7.–8. Jh.	Indische Gelehrte in chinesischen Ämtern Übernahme der indischen Ziffern
8. Jh.	Japan: Mathematischer Unterricht nach chinesischem Vorbild
13. Jh.	Aufschwung der chinesischen Algebra LI YE und QIN JIUSHAO (*Der Seespiegel der Kreismessung* und *Mathematische Abhandlung in neun Büchern):* Tianyuan-Methode zur numerischen Lösung algebraischer Gleichungen höheren Grades (entspricht der Methode des Horner-Schemas); ZHU SHIJIE (*Kostbarer Spiegel der vier Elemente*): „Methode des Himmelselements“ als Bezeichnungssystem zur Darstellung von nichtlinearen Gleichungen; Lösung von nichtlinearen Gleichungen YANG HUI Angabe des Pascalschen Dreiecks der Binomialkoeffizienten bis $n = 6$
13.–15. Jh	Austausch mathematischer Kenntnisse (z. B. Tianyuan-Methode) durch persische und mittelasiatische Astronomen in China und chinesische Gelehrte an den Observatorien in Maraga (Persien) und Samarkand
16. Jh.	Übermittlung mathematischer und astronomischer Kenntnisse Europas durch Jesuiten in China

3.2 Algebra in Indien

	Allgemeine Geschichte	Kulturgeschichte
3. Jt. v. Chr.	Stadtkulturen im Industal: Mohenjo-Daro, Harappa	Rechtwinklig angelegte Straßen mit Kanalisation
seit 2000 v. Chr.	Eindringen der Indoarier	Sprache Sanskrit
1500–200	Vedische Periode	Indoarisch-Brahmanische Kultur und Religion, Rigveden, Heldenepos Mahabharata, Kharoṣṭhī-Schrift und Zahlzeichen
ca. 560–480	Buddha stiftet neue Religion	Buddhismus in Nordostindien
ca. 545–470	Mahāvīra stiftet neue Religion	Jainismus breitet sich in Nordwestindien aus
327–325	Alexander d. Gr. in Indien	Hellenistischer Einfluß
322–184	Reich der Maurya-Dynastie	Tempel und Steinplastik (Großer Stupa von Sanchi)
271–231	Kaiser Ashoka: größte Ausdehnung des Maurya Reiches	Buddhismus wird Staatsreligion
184–320 n. Chr.	Verschiedene Herrscherhäuser regieren Kleinstaaten	Hellenistisch geprägte Ghandara-Kultur, römische Abgesandte bereisen Indien, der Geograph Ptolemaios beschreibt Indien
320–480	Reich der Gupta-Dynastie	„Goldenes Zeitalter“ von Wissenschaft und Kunst
480–1525	Viele Dynastien in indischen Teilstaaten	Aufleben und Erstarken des brahmanischen Hinduismus, Tempel mit Skulpturen und geometrischem Schmuck, Hochblüte der indischen Mathematik
ca. 505–587	Varāhamihira	Astronomische Beobachtungen und Berechnungen
712	Beginn der allmählichen Eroberung des Subkontinents durch den Islam	Eindringen arabischer und persischer Kulturelemente
1498	Vasco da Gama landet in Calicut	Begegnung mit christlicher Religion und abendländischer Kultur
1525–1754	Reich der Großmoguln	Blütezeit der sog. Mogul-Architektur und -Malerei mit geometrischer Ornamentik
1600	Gründung der britischen ostindischen Kompagnie	Verstärkter Einfluß westeuropäischer Kultur
ab 1757	England bricht die Herrschaft der Hindufürsten	
1877	Victoria wird Kaiserin von Indien	
1920	Gandhi ruft zum gewaltlosen Widerstand auf	
1947	Unabhängigkeit und Teilung in Indien und Pakistan	
2. Hälfte 20. Jh.	Aufstieg zur Atommacht	Entwicklung zum Industriestaat

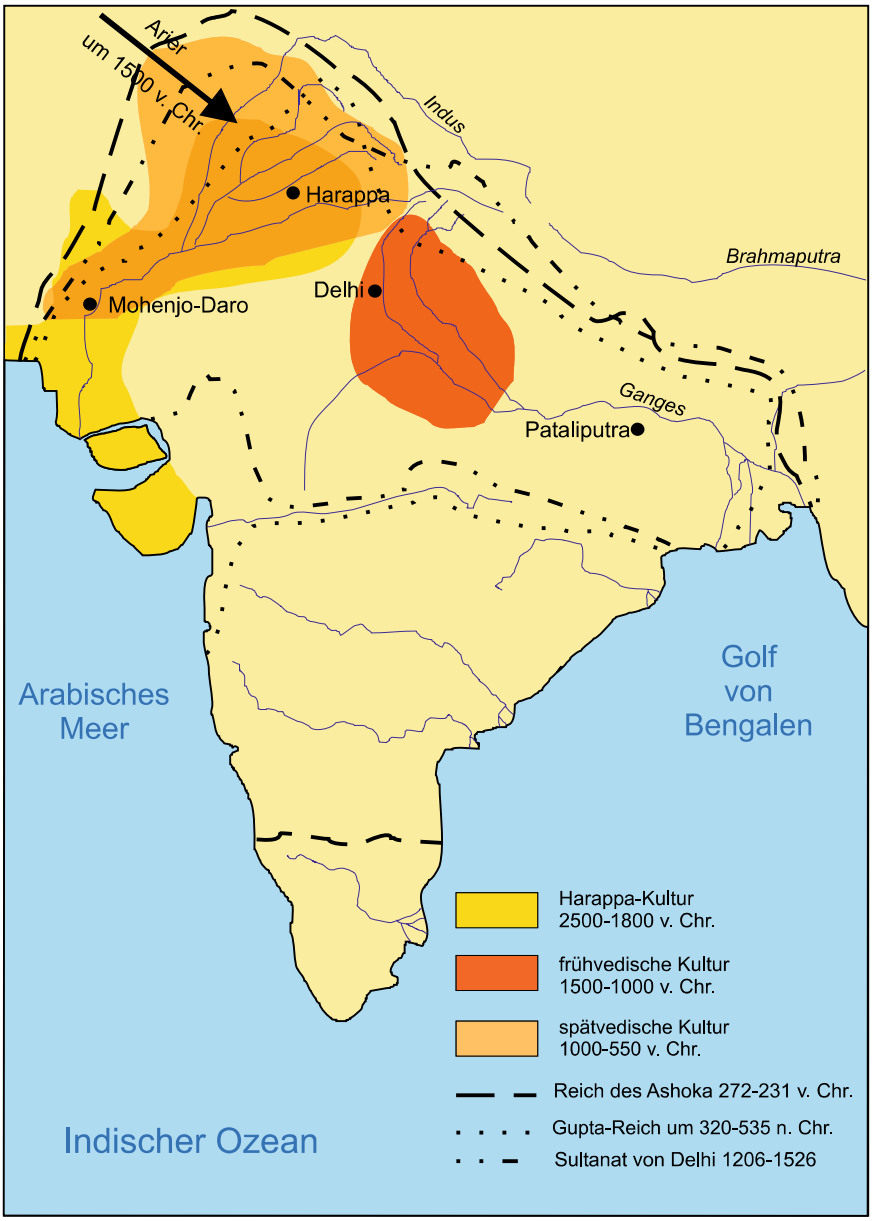


Abb. 3.2.1. Kulturen und Staaten Indiens im Altertum und im Mittelalter

3.2.0 Geschichtlicher Abriß

Um die Mitte des dritten Jahrtausends v. Chr. blühte im Industal eine hochentwickelte Stadtkultur, die Induskultur. Zeugnis davon geben eindrucksvoll die Ruinen der alten Städte Mohenjo-Daro und Harappa: Es gab dort breit angelegte Straßen, Häuser aus gebrannten Ziegeln mit Badezimmern, Abwassersysteme und Zitadellen. Nirgendwo im alten Orient war damals eine so hochentwickelte Zivilisation zu finden wie hier.

Aus dieser Zeit wurde eine noch nicht entzifferte Schrift gefunden, die durch ihre Entschlüsselung weitere Hinweise geben könnte. Mathematische Kenntnisse belegt ein aus einer Muschel angefertigtes Lineal mit Dezimalteilung.

Etwa um 2000 v. Chr. strömten arische Stämme von Nord-West nach Indien ein und unterdrückten die einheimische Bevölkerung. Ihre Sprache, der auch die Bezeichnung Arier entstammt, war Sanskrit. Sie verbreitete sich in Indien und wurde während der folgenden tausend Jahre in Wort und Schrift vervollkommnet. Die vedische Periode begann um 1500 v. Chr. Stufenweise dehnte sich der Einfluß der Eroberer aus, und unter ihrer Herrschaft entstand die Aufteilung der Bevölkerung in unterschiedliche Gesellschaftsschichten, in Kasten. Den höchsten Rang vertraten die neuen Herren: Adlige und Geistliche. Beendet wurde diese von wenig wissenschaftlicher Entwicklung geprägte Zeit mit der Ausbreitung des Buddhismus im 6. Jh. v. Chr.

Armeen des persischen Königs Darius zogen in Indien ein und eroberten einen Teil des Panjab (Fünfstromland). Gleichzeitig entstand in Ostindien das Reich von Magadha, in dem Buddha lebte. Seine Religion breitete sich sehr schnell im Land (und in China sowie in anderen asiatischen Ländern) aus und untergrub die bis dahin geltende religiöse Autorität der Veda.

Etwa zu dieser Zeit entstand das Werk Śulbasūtras (Schnurregeln). Es wurde vermutlich von einem frommen Schreiber mit mathematik-historischem Interesse verfaßt, denn es enthält mathematische Regeln und geometrische Richtlinien zur rituellen Konstruktion von Altären. Bemerkenswert sind die zur Konstruktion verwendeten Meßschnüre, wovon sich auch der Name des Werkes ableiten läßt [Scriba/Schreiber 2000, S. 144ff.].

327 v. Chr. drang Alexander der Große auf seinem Zug gegen die Perser auch in Indien ein. Nach seinem Tod entstanden die Seleukiden-Monarchien, die sich über Syrien, Mesopotamien, Iran und Teile Mittelasiens erstreckten. So entstanden Kontakte mit dem ägyptischen, babylonischen und syrischen Kulturgut.

Fast gleichzeitig entstand im Indusbecken und im Gangestal die neue Maurya-Dynastie, die sich nach und nach über Indien ausbreitete. Ihr bekanntester Herrscher war König Ashoka. Unter ihm erreichte der Buddhismus als Staatsreligion seinen Höhepunkt. Auf diesen König weisen große Steinpfosten mit Inschriften zurück, die in jeder wichtigen Stadt Indiens errichtet waren. Die in ihnen enthaltenen Zeichen für Zahlen gelten als die frühesten erhaltenen Vorstufen unserer heutigen Zahlensymbole.



Abb. 3.2.2. Relief am Osttor des Großen Stupas von Sanchi (Indien, 2. Jh. v. Chr.) [Foto Alten]

Der Maurya-Dynastie folgte nach zahlreichen Invasionen die Gupta-Dynastie (bis 480 n. Chr.). Das Sanskrit erlebte seine Renaissance, und Indien wurde mit seinen „Universitätsgründungen“ zum Zentrum für Wissenschaft, Kunst und Medizin.

Das älteste erhaltene Werk zur Astronomie ist die anonyme Schrift Sūrya-Siddhānṭa (Lehre der Sonne) aus dem 5. Jh. n. Chr., in dem eine in Versen geschriebene Sinustafel vorkommt. Stand die Mathematik bisher im Dienste der Religion, so vollzog sich hier ein Wechsel zur Astronomie.

Zwischen 450 n. Chr. und 1400 wurde Indien wiederum von zahlreichen fremden Invasionen heimgesucht: Zunächst stürmten die Weißen Hunnen das Land, im 8. Jh. die Araber und im 11. Jh. die Perser.

Aus dieser unruhigen Zeit verfügen wir über wichtige Quellen zur Astronomie und Mathematik in Indien sowie über Biographien und Lebenswerke herausragender Gelehrter. So stammt wahrscheinlich aus dem 6. Jh. die anonyme „Bakhshālī-Handschrift“, benannt nach ihrem Fundort, an dem sie 1881 ausgegraben wurde. Sie ist eine der ältesten erhaltenen Aufgabensammlungen der alten indischen Mathematik und wurde auf 70 Streifen Birkenrinde geschrieben. Sie beinhaltet den einfachen falschen Ansatz, lineare Gleichungen und Gleichungssysteme sowie quadratische Gleichungen (auch mit negativen Koeffizienten!). Etwa aus dieser Zeit stammen auch Funde indischer Ziffernschriften.



Abb. 3.2.3. Taj Mahal (Agra, Indien). Das vom Großmogul Shah Jahan zwischen 1630 und 1652 für seine nach der Geburt ihres 14. Kindes verstorbene Lieblingsgattin erbaute Mausoleum wird oft als der „vollkommenste Bau“ der Welt gepriesen. [Foto Alten]



Abb. 3.2.4. Observatorium Jantar Mantar, das erste und größte Observatorium des Jai Singh aus dem 18. Jh. (Jaipur, Indien)
[Foto Alten]

Nun folgen einige Mathematiker, vor allem aber Astronomen, die wesentliche Beiträge zur Algebra geleistet haben. Ihre Schriften waren bevorzugt in Versform geschrieben, was das Auswendiglernen erleichtern sollte.

Der erste, der sich mit algebraischen Problemen beschäftigte, war der Inder Āryabhaṭa I, geb. 476 in Patna. Als junger Mathematiker verfaßte er 499 das Buch Āryabhaṭīya über Mathematik und Astronomie. Dieses Werk ist eine wichtige Quelle der altindischen Mathematik und enthält eine Einleitung sowie zwei astronomische und einen mathematischen Teil. Aus Sicht der Algebra sind seine Regeln zur Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzeln, die Behandlung allgemeiner arithmetischer Reihen sowie die Behandlung von Gleichungssystemen und quadratischen Gleichungen bemerkenswert.

Brahmagupta (geb. 598, gest. nach 665) lebte und arbeitete im astronomischen Zentrum von Ujjain, führte in seinem 21 Kapitel umfassenden Werk Brāhmasphuṭasiddhānṭa (Vervollkommnung der Lehre Brahmas) als erster indischer Mathematiker das Rechnen mit positiven und negativen Zahlen beim Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und beim Quadrieren ein und, ebenfalls als erster, eine allgemeine Form für quadratische Gleichungen, von denen er nur positive Lösungen angab.

Bhāskara II (geb. 1114, gest. 1185?) schrieb um 1150 sein Werk „Siddhānṭa-Siromani“ (Der Kranz der Wissenschaften). Es ist die wichtigste Quelle der indischen Mathematik und besteht aus vier Teilen. Der erste Teil, „Līlāvatī“ (Die Schöne) beinhaltet überwiegend Aufgaben der Geometrie und Arithmetik, der zweite Teil „Bījaganita“ (Die Lehre vom Rechnen mit Hilfe der Elemente) enthält Algebra und Zahlentheorie, der Rest des Werkes befaßt sich mit Problemen aus der Astronomie. Bhāskara II entwickelte die Erkenntnisse seiner Vorgänger Āryabhaṭa, Brahmagupta und anderer fort, indem er für die Lösung quadratischer Gleichungen zwei Wurzeln angab und die Lehre von den Gleichungssystemen weiterentwickelte.

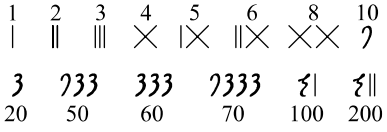
Nach Bhāskara II gab es in der Entwicklung der indischen Mathematik bis ins 19. Jh. keine erwähnenswerte Fortsetzung, obgleich die gigantischen Festungsbauten des Mittelalters und die prachtvollen Paläste und Prunkbauten der Großmoguln umfangreiche statische Berechnungen erforderten, wie z. B. die Residenz von Akbar dem Großen in Fatehpur Sikri, die Mogul-Architektur in Lahore, das Rote Fort in Delhi und das berümte Taj Mahal in Agra (vgl. Abb. 3.2.3).

Auch die Berechnungen zu den intensiven astronomischen Beobachtungen erforderten ein hohes Maß mathematischer Kenntnisse. Den hohen Rang der indischen Astronomie dokumentieren die auf Weisung des Maharadschahs Jai Singh zwischen 1718 und 1734 in ganz Indien erbauten Observatorien, von denen vier erhalten sind, darunter das erste und größte in seiner Residenz Jaipur erbaute Jantar Mantar (vgl. Abb. 3.2.5).

Im Jahre 1887 wurde in Indien ein mathematisches Genie mit Namen Srinivasa Ramanujan geboren, das schon bald Aufmerksamkeit durch Forschungen innerhalb der Zahlentheorie erregte. Nach dem Besuch der Höheren Schule beschäftigte er sich autodidaktisch mit der Mathematik und stand seit 1913 in reger Korrespondenz mit dem englischen Mathematiker G. H. Hardy mit dem er auch einige Jahre in England zusammen arbeitete. Er starb im Alter von 33 Jahren und hinterließ ein in der Fachwelt hochgeschätztes Œuvre.

3.2.1 Zahlzeichen und das dezimale Stellenwertsystem

Die ältesten uns bekannten Zahlzeichen in West-Indien und dem heutigen Afghanistan sind die Kharoṣṭhī-Zahlen, die in der Zeit vom 4. bis zum 3. Jh. v. Chr. verwendet wurden. Die Ziffern dieser Zahlen werden nicht durch Buchstaben sondern durch Zeichen ausgedrückt:



Aus den Individualzeichen für 1 - 4, 10, 20, 100 konnte man alle natürlichen Zahlen bis 100 durch additive Verknüpfung darstellen, ähnlich wie bei der

römischen Zahlenschreibweise. Die Vielfachen von Hundert wurden multiplikativ dargestellt.
Die Zahlen wurden von rechts nach links geschrieben, wie das Beispiel zeigt:

$$274 = \times 𑁓𑁓𑁓𑁔𑁒 = 4 + (10 + 20 + 20 + 20) + (100 \cdot 2)$$

Eine wichtigere Bedeutung hatten über 1000 Jahre hinweg in weiten Teilen Indiens die Brāhmī-Zahlen. Sie sind seit dem 3. Jh. v. Chr. bekannt und in vielen Brāhmī-Inschriften des Königs Ashoka, der zu dieser Zeit lebte, enthalten. Sie finden sich auf Kupferplatten und an Tempel- und Felswänden wieder.

Einer	Ziffern	𑁒 1	𑁓 2	𑁔 3	𑁕 4	𑁖 5	𑁗 6	𑁘 7	𑁙 8	𑁚 9
Zehner	Verzifferung	𑁛 10	𑁜 20	𑁝 30	𑁞 40	𑁟 50	𑁠 60	𑁡 70	𑁢 80	𑁣 90
Hunderter und Tausender	Stellenschrift	𑁤 100	𑁥 200	𑁦 500	𑁧 1000	𑁨 4000		𑁩 70000		

Diese Zahlen sind dem brāhmīschen Alphabet ähnlich; für die Einer, die Zehner und für die Zahlen Hundert und Tausend gibt es besondere Zeichen. Hier werden die Vielfachen von Hundert und auch die von Tausend multiplikativ angegeben und von links nach rechts geschrieben.

Die größte Leistung der indischen Wissenschaft: die Erfindung des dezimalen Positionssystems

Die ursprünglichen Darstellungen von Zahlen in Stellenwertsystemen in Indien sind noch nicht in Ziffern, sondern in Wortzahlen oder Sinnbildern abgefaßt und in Versen gehalten. So wird z. B. für die Zahl 1 der Mond angegeben, weil es ihn nur einmal gibt. Für die Zahl 2 gelten Flügel, Zwillinge oder Augen, weil diese immer als Paar auftreten, für die Fünf stehen die (fünf) Sinne. Diese Wörter treten bei größeren Zahlen dekadisch aneinander.
Man begann mit den Einern und endete mit der höchsten Zehnerpotenz, entgegen der Brāhmī-Schreibweise.

Beispiel 1052:	Flügel	Sinne	Loch	Mond
	2	5	0	1

Āryabhaṭa I bediente sich einer anderen Methode, indem er die Zahlen durch Silben bezeichnete. Sein Schüler Bhāskara I verlieh der silbenhaften Ziffernschreibweise Stellenwertcharakter, der positionell ist und eine Null enthält. Um 500 n. Chr. kannten die Astronomen bereits die Positionsschreibweise. Etwa im 6. Jh. n. Chr. verwendeten die indischen Gelehrten zur Darstellung ihrer Zahlen Brāhmī-Ziffern. Auf einer Gurjara-Inschrift von 595 n. Chr. ist die Jahreszahl Samvat 346 in dieser Weise aufgeführt.

Ohne eine Null kann kein Positionssystem funktionieren. Über ihre Herkunft jedoch sind die Historiker unterschiedlicher Meinung. Vermutlich ergab sich ihre Verbreitung durch babylonische Schriften über Himmelskunde, in denen das babylonische Sexagesimalsystem aufgeführt war; in späterer Zeit auch mit einem Zeichen für eine fehlende Ziffer, also für Null, inmitten einer Zahl, dargestellt durch zwei kleine schräge Keile, nicht aber an deren Ende (vgl. S. 28). Dieses System haben die Griechen insbesondere für astronomische Berechnungen verwendet und vervollständigten es durch ein Zeichen wie 0 für Null.

Die indischen Gelehrten erhielten alle diese Kenntnisse durch die alexandrinischen Feldzüge und ließen sie in ihr astronomisches Werk *Sūrya- Siddhānṭa* einfließen. Ihren Brāhmī-Ziffern 1–9 fügten sie die griechische Null hinzu und übernahmen die griechisch-babylonische Reihenfolge von links nach rechts. Es ergab sich eine Verschmelzung der Erkenntnisse dreier Kulturen, wobei bemerkt werden muß, daß die Inder das dezimale Positionssystem vollständig ausbauten bis zu der heute noch verwendeten Form.

Spätestens seit dem 7. Jh. sind die neun Ziffern und die Null allgemein bekannt gewesen. Ein Null-Zeichen in Kreisform erscheint zuerst im Jahre 870 in der Gwalior-Inschrift [Menninger 1958, Bd. II, S. 214].

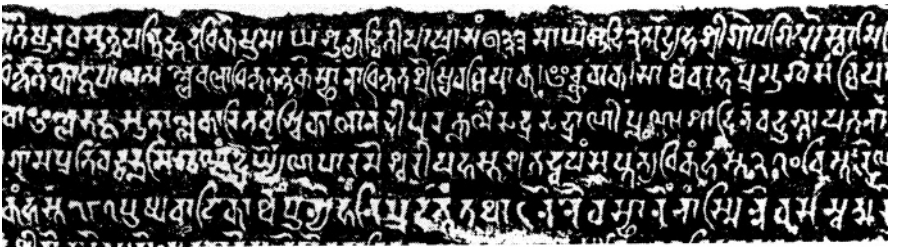


Abb. 3.2.5. Inschrift von Gwalior
Gegen Ende der vierten Zeile steht die Zahl 270 mit ∘ als Nullzeichen

Wahrscheinlich zur Zeit der Sassaniden-Dynastie in Persien (226–641 n. Chr.) drang das dezimale Stellenwertsystem nach und nach in viele Teile des Nahen Ostens vor. Während dieser Periode bestand ein enger Kontakt zwischen Persien, Ägypten und Indien. Spätestens jetzt muß das altbabylonische Sexagesimalsystem zu diesen Kulturen gelangt sein. Die älteste deutliche Bezugnahme auf das indische Stellenwertsystem außerhalb Indiens findet sich 662 in einem Werk des syrischen Bischofs Severus Sebokht.

Über die Wanderung des dezimalen Positionssystems in die islamischen Länder und nach Westeuropa wird in den jeweiligen Kapiteln berichtet.

3.2.2 Algebraische Ausdrucksweise

Von Brahmagupta I kennen wir den ersten Hinweis auf negative Zahlen**.** In seinem Werk Brāhmasphuṭasiddhānṭa gibt er Regeln für die Addition, Subtraktion, Multiplikation und das Quadrieren der positiven und negativen Zahlen korrekt an, die Quadratwurzelziehung jedoch konnte er nicht exakt durchführen. Er sagt (nach unserer heutigen Schreibweise), daß $\sqrt{(|\alpha|)^2} = |\alpha|$, und $\sqrt{(-|\alpha|)^2} = -|\alpha|$ wobei α eine reelle Zahl ist; z. B. haben wir nach seiner Regel $\sqrt{(4)^2} = 4$ und $\sqrt{(-4)^2} = -4$. Später gibt Bhāskara II die korrekte Regel an: „Die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl ist sowohl positiv als auch negativ.“ Mit imaginären Zahlen allerdings hatten die Inder Schwierigkeiten. Mahāvīra sagt: „Es liegt in der Natur der Sache, daß eine negative Größe kein Quadrat ist, also keine Quadratwurzel hat“ – eine korrekte Aussage, wenn, wie damals üblich, unter Größen nur reelle bzw. rational-reelle Zahlen verstanden werden. Erst in der Neuzeit konnten europäische Gelehrte diese Merkwürdigkeit durch Erweiterung zum System der komplexen Zahlen aufklären.

Die beiden indischen Mathematiker Āryabhaṭa II (10. Jh.) und Śrīdhara (9.-10. Jh.) haben die folgenden Eigenschaften der Null in Worten ausgedrückt: $\alpha \pm 0 = \alpha; 0 + \alpha = \alpha; \alpha - \alpha = 0; \alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0; \quad 0 : \alpha = 0$; wobei α eine reelle Zahl ist. Den Fall $0 : 0$ haben die altindischen Mathematiker nicht richtig untersucht, im Gegensatz zu Bhāskara II, der im wesentlichen behauptete, daß $\alpha : 0$ mit $\alpha \neq 0$ unendlich sein muß.

Mindestens seit dem 3. Jh. v. Chr. wurde eine Unbekannte in der altindischen Mathematik *yāvat-tāvat* (soviel – wieviel, eine beliebige Menge) genannt. Wenn mehrere Unbekannte vorkamen, bezeichnete man diese mit verschiedenen Wörtern für Farben; x^0, das absolute Glied, mit *rūpa* (Form), abgekürzt: rū; usw. bis zur 15. Unbekannten.

rūpa	abgekürzt	rū = absolutes Glied
yāvat-tāvat	„	yā = erste Unbekannte
kālaka (schwarz)	„	kā = zweite Unbekannte
nīlaka (blau)	„	nī = dritte Unbekannte
pītaka (gelb)	„	pī = vierte Unbekannte
lohitaka (rot)	„	lo = fünfte Unbekannte
haritaka (grün)	„	ha = sechste Unbekannte

In „Bījaganṭa“ von Bhāskara II finden wir z. B. yā 5 kā 2 nī 8 pī 7 (d. h. $5x + 2y + 8z + 7w$).

Dieses Beispiel zeigt, daß die Summanden bei der Addition nacheinander geschrieben werden. Bei der Subtraktion setzt man einen Punkt oder einen kleinen Kreis über den betreffenden Koeffizienten. Die Koeffizienten werden rechts von den Unbekannten geschrieben. Um die Potenzen zu bezeichnen

benutzte man die Wörter *varga* (Quadrat), *ghana* (Kubus) und *ghāta* (Produkt). Beispiele dafür:

varga	abgekürzt	va	= 2. Potenz
ghana	„	gha	= 3. Potenz
varga-varga	„	va-va	= 4. Potenz
varga-ghana-ghāta	„	va-gha-ghāta	= 5. Potenz
varga-ghana	„	va-gha	= 6. Potenz
varga-varga-ghana-ghāta	„	va-va-gha-ghāta	= 7. Potenz
varga-varga-varga	„	va-va-va	= 8. Potenz
ghana ghana	„	gha-gha	= 9. Potenz

x^4y^2 würde so geschrieben: Yāvava-kāva-bhā wobei bhā die Abkürzung für bhāvita (Produkt) ist.

In dieser Darstellungsform erkennt man die Anfänge einer symbolischen Algebra in der altindischen Mathematik, die von den islamischen Gelehrten jedoch nicht übernommen wurde. Vielmehr verwendeten sie weiterhin Worte für algebraische Ausdrücke, wie ihre europäischen Kollegen im Mittelalter.

3.2.3 Näherungsverfahren für Wurzeln

In den Śulbasūtras (Schnurregeln) wird eine rationale Näherung für die Länge der Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 angegeben:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3\cdot 4} - \tfrac{1}{3\cdot 4\cdot 34}.$$

Algebraisch gesehen gibt dies einen Näherungswert für die positive Wurzel der quadratischen Gleichung $x^2 - 2 = 0$. Woher kommt dieser Näherungswert? Aus dem Text ist nicht zu ersehen, wie man darauf gekommen ist. In der Bakhshālī-Handschrift wird ein Iterationsalgorithmus für eine angenäherte Berechnung der Quadratwurzel einer beliebigen reellen Zahl $A > 0$ gegeben. Der Algorithmus lautet in moderner Schreibweise:

Es wird eine erste Näherung x_1 bestimmt gemäß

$$\sqrt{A} = \quad \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a} \quad = \quad x_1 \quad ,$$

wobei a eine ganze Zahl und a^2 das größte in A enthaltene Quadrat ist.

Es wird eine Folge x_n durch das Anfangsglied x_1 und die Rekursionsformel

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}) \tag{3.2.1}$$

definiert (vgl. S. 40f. und Aufgabe 1.3.5).

Es läßt sich zeigen: je größer n gewählt wird, desto kleiner ist die Differenz $x_n - \sqrt{A}$ für $n \geq 2$.

Für $A = 2$, $x_1 = \frac{3}{2}$ erhält man aus der Gleichung (3.2.1):

$$x_2 = \frac{x_1 + \frac{2}{x_1}}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \quad ,$$

$$x_3 = \frac{x_2 + \frac{2}{x_2}}{2} = \frac{\frac{17}{12} + \frac{24}{17}}{2} = \frac{577}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} = 1 + \frac{169}{408}$$

$$= 1 + \frac{170}{408} - \frac{1}{408} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} \quad .$$

Dieser Näherungswert wurde bereits in den Schnurregeln angegeben.

Seine Genauigkeit ergibt sich gemäß:

$0 < \frac{577}{408} - \sqrt{2} < 1.4142157 - \sqrt{2} < 1.4142157 - 1.4142135 = 0.0000022 < 5 \cdot 10^{-6}$.

Also liefert das Verfahren in zwei Schritten bereits fünf Nachkommastellen genau. Dieses Iterationsverfahren wird in dem Bakhshālī-Text auch für andere Beispiele angewendet. Es ist interessant, diesen Näherungswert von $\sqrt{2}$ mit dem besseren babylonischen Näherungswert $(1; 24, 51, 10)_s$ für $\sqrt{2}$ zu vergleichen, der bereits 1800 Jahre früher errechnet wurde: Die beiden Werte unterscheiden sich erst in der sechsten Dezimale.

Diesen Näherungswertbestimmungen begegnen wir später bei den islamischen Mathematikern und bei Leonardo von Pisa.

Ārayabhaṭa und Brahmagupta geben für Näherungen zur Bestimmung von Kubikwurzeln die Formel $\sqrt[3]{a^3 + r} \approx a + \frac{r}{3a^2}$ an.

3.2.4 Lineare Gleichungen

Die Algebra wurde in Indien sehr hoch eingeschätzt und als die mit Beweisen versehene Lehre vom Rechnen mit unbekannten Größen bezeichnet. Insbesondere war hiermit die Auflösung von Gleichungen ersten und zweiten Grades gemeint.

Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten

Solche Probleme erscheinen bei Āryabhaṭa I, z. B. in dieser Aufgabe:

Zwei Männer haben ein gleiches Vermögen, das aus einer unterschiedlichen Anzahl von Gegenständen (Kühe) und Barsummen (Rupien) besteht, wobei x der Preis des Gegenstandes, a, c die Anzahl der Gegenstände und b, d die Anzahl der Geldstücke sind, also $ax + b = cx + d$.

Die Regel von Āryabhaṭa I lautet (im Original in Versform)

$$x = \frac{d - b}{a - c} \quad .$$

Ähnlichen Aufgaben begegnet man in ausführlicherer Form bei Brahmagupta und bei Bhāskara. Auch bei früheren Gelehrten aus Ägypten und Mesopotamien erscheinen derartige Gleichungen. Sie sind überwiegend aus dem Alltag entstanden, doch Āryabhaṭa I entlehnte seine „Kurieraufgabe“, die später weltweit bekannt wurde, der Astronomie. Sie lautet:

Hier wird der Zeitpunkt des Zusammentreffens von zwei sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit aufeinander zu bewegenden bzw. sich in gleicher Richtung bewegenden Körper berechnet. [Elfering, S. 151]

t sei der Zeitpunkt der Konjunktion, a der Abstand und v_1 bzw. v_2 die Geschwindigkeit der beiden Himmelskörper. Nach Āryabhaṭa I gilt dann $t = \frac{a}{v_1+v_2}$ bei entgegengesetzter und $t = \frac{a}{v_1-v_2}$ $(v_1 > v_2)$ bei gleichgerichteter Bewegung. Solche Kurieraufgaben erscheinen in verschiedenen Formen bereits in den „Schnurregeln“, in der Bakhshālī-Handschrift und bei Śrīdhara, wo sie jeweils auch auf quadratische Gleichungen führen. Die Lösungen der Aufgaben von den zuletzt genannten werden erst später behandelt.

Lineare Gleichungssysteme

Āryabhaṭa I löste das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rl} x_2 & +x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = a_1 \\ x_1 & +x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = a_2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + x_2 & +x_3 + \cdots + x_{n-1} \quad = a_n \end{array}$$

oder

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a_j,\ i \neq j,\ j = 1, 2, ..., n.$$

Seine Lösung (in moderner Schreibweise) mit $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_j &= (x_2 + x_3 + ... + x_n) + (x_1 + x_3 + ... + x_n) + ... + (x_1 + ...x_{n-1}) \\ &= (s - x_1) + (s - x_2) + ... + (s - x_n) = ns - s = (n-1)\,s \quad . \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$s = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{n-1} \tag{3.2.2}$$

$$x_k = s - a_k \quad \textit{für} \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{3.2.3}$$

In der folgenden Aufgabe verwendet Mahāvīra die o.g. Regel:

„*Vier Kaufleute werden, jeder einzeln, vom Zolleinnehmer nach dem Gesamtwert ihrer Waren gefragt. Der erste Kaufmann antwortet, der Wert sei*

22, der zweite sagt, 23, der dritte 24 und der vierte 27. Jeder von ihnen verschweigt (berücksichtigt nicht) den Wert seiner eigenen Ware. – Oh mein Freund, sage mir den Wert deiner Ware, die Du besitzt!“

Nach der Formel (3.2.2) gilt:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{22 + 23 + 24 + 27}{4 - 1} = 32 \quad .$$

Dann folgt aus (3.2.3) $x_1 = 10, x_2 = 9, x_3 = 8, x_4 = 5$.

Mahāvīra untersucht einen allgemeineren Fall des linearen Gleichungssystems der Form:

$$b_i \sum_{i=1}^{n} x_i - c_i x_i = a_i \quad , i = 1, 2, ..., n \quad .$$

Aufgaben dieser Art waren später in der mittelalterlichen islamischen und europäischen Literatur weit verbreitet.

3.2.5 Quadratische Gleichungen

Der indische Mathematiker Āryabhaṭa I verfaßte im Jahre 499 das Buch *Āryabhaṭīya* über Mathematik und Astronomie. Es ist in Versform geschrieben, um das Auswendiglernen zu erleichtern und stellt eine wichtige Quelle der altindischen Mathematik dar. Die behandelten Probleme, die auf vollständige quadratische Gleichungen führen, sind uns von den „Schnurregeln“ bekannt, und die Lösungen solcher Gleichungen sind erstmalig in der Bakhshālī-Handschrift und von Āryabhaṭa I her bekannt. Für die Auffindung der Anzahl der Glieder einer arithmetischen Reihe löste Āryabhaṭa I eine quadratische Gleichung auf. Hier gibt er in Worten das Ergebnis an:

„Die Anzahl der Glieder einer (arithmetischen) Reihe (wird folgendermaßen gebildet): (Die Summe der Reihe) multipliziere man mit der Reihendifferenz und acht; dazu addiere man ein Quadrat, das aus einer Differenz besteht zwischen dem zweifachen Anfangsglied (der Reihe) und der Reihendifferenz; (von dem Ganzen) die Quadratwurzel; (dann) das zweifache Anfangsglied abgezogen, (alles) durch die Reihendifferenz dividiert, (dann) die Eins addiert (und von diesem ganzen Ausdruck) die Hälfte.“ [Elfering, S. 129].

Die arithmetische Reihe lautet:

$$a + (a + d) + ... (a + (n - 1) d) \quad ,$$

wobei a das Anfangsglied, d die Differenz, n die Anzahl der Glieder und S die Summe der Reihe sind.

Āryabhaṭa I behauptet:

$$n = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{8Sd + (2a - d)^2} - 2a}{d} + 1 \right) \quad . \tag{3.2.4}$$

Er erhält durch

$$S = n\left\{a + \frac{n-1}{2}d\right\}$$

die quadratische Gleichung

$$dn^2 + (2a - d)\,n = 2S \quad . \tag{3.2.5}$$

Er gibt an: Die Lösung der Gleichung (3.2.5) ist (3.2.4). (3.2.4) findet man in ähnlicher Form bei Diophant .

Die Nachfolger von Āryabhaṭa I beschäftigten sich mit der Gleichungslehre ausführlicher.

Bereits Brahmagupta löste allgemeine quadratische Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx = c \quad , \quad a > 0 \tag{3.2.6}$$

durch quadratische Ergänzung, indem er die Gleichung (3.2.6) einmal mit $4a$ zum anderen mit a multiplizierte:

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac \quad , \quad a^2x^2 + abx = ac \tag{3.2.7}$$

oder

$$(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac \quad , \quad (ax + \frac{b}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 + ac,$$

indem er die linke Seite der Gleichungen (3.2.7) durch das Quadrat eines Binoms ersten Grades ersetzte und b^2 bzw. $(\frac{b}{2})^2$ rechts addierte. Brahmagupta bezeichnete diesen Vorgang als „Beseitigung des mittleren Gliedes."

Seine Lösungen lauten:

$$x = \frac{\sqrt{b^2 + 4ac} - b}{2a} \quad , \quad x = \frac{\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + ac} - \frac{b}{2}}{a} \quad . \tag{3.2.8}$$

Er gibt nur die positive Wurzel an, ohne die negative zu erwähnen.

Der Fortschritt liegt darin, daß Brahmagupta bei der Behandlung der quadratischen Gleichungen von nur einer Form ausgeht, wobei er b und c als negative Zahlen zuläßt im Gegensatz zu den Babyloniern und Diophant, die drei Formen der quadratischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten

$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 = bx + c, \quad ax^2 + c = bx \tag{3.2.9}$$

mit jeweils unterschiedlichen Lösungen verwenden. Die nachfolgenden Mathematiker der islamischen Länder nahmen die Anwendung negativer Zahlen nicht auf, sondern gingen wieder von den drei Hauptfällen (3.2.9) aus.

Einen weiteren Fortschritt nach Brahmagupta stellt die Berücksichtigung beider Wurzeln der quadratischen Gleichungen dar, die im 9. Jh. durch Pṛthūdakasvāmī und Mahāvīra belegt sind.

Bhāskara II stellt die Bedingung für die Existenz der Wurzeln der quadratischen Gleichung fest. Seine Lösungsmethode gleicht der von Brahmagupta durch quadratische Ergänzung.

Er sagt: Ist b negativ in (3.2.7) und $\left|\frac{b}{2}\right| > \sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ (bzw. $|b| > \sqrt{b^2 + 4ac}$), so erhält man, indem man die Wurzel positiv oder negativ nimmt, einen zweifachen Wert für die Unbekannte. Dies gilt in manchen Fällen.

Zwei Beispiele von Bhāskara II [Tropfke 1980, S. 417]:

„Der 8. Teil einer Herde Affen, quadriert, sprang in einem Wald herum, die 12 übrigen waren auf einem Hügel zu sehen. Wieviel waren es im ganzen?“

Lösung:

$$\frac{x^2}{64} + 12 = x, \quad x^2 - 64x = -768 \quad ,$$

also $x = 32 \pm 16$. Das zweite Beispiel lautet:

„Der 5. Teil einer Affenherde minus drei, quadriert, ging in eine Höhle, nur ein Affe war noch zu sehen. Wie viel Affen waren es?“

Lösung: $(\frac{x}{5} - 3)^2 + 1 = x$, oder $x^2 - 55x = -250$.

Daraus folgt $x = 50$ oder $x = 5$, aber $x = 5$ ist nicht annehmbar sagt Bhāskara II, da $\frac{x}{5} - 3$ negativ ist. Deshalb ist $x = 50$ die Anzahl der Herde der Affen.

Bei einer geometrischen Aufgabe gibt Bhāskara II eine negative Lösung an und folgert, daß es sich um eine entgegengesetzte Richtung handelt.

Folgende Gleichungen höheren Grades erscheinen in dem Werk Bījagaṇita von Bhāskara II. Die erste lautet:

„Was ist die Zahl, o' gelehrter Mann, die multipliziert mit 12 und um den Würfel der Zahl vermehrt, gleich ist, sechsmal das Quadrat der Zahl mit 35 addiert.“ Die Schreibweise in heutiger Form lautet:

$$12x + x^3 = 6x^2 + 35 \quad .$$

Um diese Gleichung zu lösen, subtrahiert er von beiden Seiten der Gleichung $6x^2 + 8$, und es erscheinen auf beiden Seiten Potenzen dritten Grades

$$(x - 2)^3 = 3^3 \quad .$$

Also folgt daraus $x - 2 = 3$, d. h. $x = 5$.

Ähnlich verfährt er mit der zweiten Gleichung

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999 \quad .$$

Er addiert beiderseits $4x^2 + 400x + 1$ und erhält nach der Umformung

$$\left(x^2 + 1\right)^2 = (2x + 100)^2 \quad .$$

Nach Bhāskara II folgt

$$x^2 + 1 = 2x + 100\,.$$

Er gibt nur die Lösung $x = 11$ an, die Wurzel $x = -9$ aber nicht, weil er den Fall $x^2 + 1 = -(2x + 100)$ nicht betrachtet. Mit Gleichungen höheren Grades haben die Inder sich damals nur wenig beschäftigt. Erst die islamischen Gelehrten leisteten einen großen Beitrag zur Lösung kubischer Gleichungen.

Die Inder haben sich besonders durch die Auflösung unbestimmter Gleichungen bzw. Gleichungssysteme (Diophantische Gleichungen) in ganzen Zahlen der Form $ax + by = c\,(a, b, c \in \mathbb{Z})$ hervorgetan. Dazu stammt von Āryabhaṭa I die erste, in Verse geschriebene Regel. Mit Brahmagupta beginnt die Auflösung unbestimmter quadratischer Gleichungen der Form $Nx^2 \pm k = y^2$ in ganzen Zahlen. Bedeutsam ist die allgemeine „zyklische Methode“ nach Bhāskara II.

Solche Gleichungen entstanden aus der astronomischen Kalenderrechnung zu Lagebeziehungen von Himmelskörpern mit unterschiedlichen Umlaufzeiten.

Die Lösungsmethoden für derartige algebraische Gleichungen werden mittels zahlentheoretischer Verfahren durchgeführt, weshalb sie nicht in dieses Buch aufgenommen worden sind.

Wesentliche Merkmale der indischen Algebra

6.–5. Jh. v. Chr.	*Śulbasūtras(Schnurregeln)* Eine Näherung für die Länge der Diagonale des Einheitsquadrates (also für $\sqrt{2}$)
4.–3. Jh.	Kharoṣṭhī- Zahlen
3. Jh.	Brāhmī-Zahlzeichen
5. Jh. n. Chr	ĀRYABHAṬA I *(Āryabhaṭiya)* Buch über Mathematik und Astronomie in Versform Quadratische Gleichungen; arithmetische Reihe; Näherungsverfahren für Quadrat- und Kubikwurzeln
6. Jh.?	*Bakhshālī-Handschrift* Enthält einen Iterationsalgorithmus zur Berechnung der Quadratwurzel
6. Jh.	Einführung eines Zeichens für Null und des (dezimalen) Positionssystems für Zahldarstellungen
6.–7. Jh.	BRAHMAGUPTA (*Brahmasphuṭasiddhānṭa*) Erste Hinweise auf negative Zahlen; Verwendung algebraischer Ausdrucksweise
7.–8. Jh.	Verbreitung der indischen Ziffern in Syrien und in Bagdad
10. Jh.	SRĪDHARA und ĀRYABHAṬA II Eigenschaften der Null in Worten formuliert
12. Jh.	BHĀSKARA II (*Bījaganṇita*) Weitere algebraische Ausdrücke; unbestimmte Gleichungen (Pellsche Gleichungen) und quadratische Gleichungen mit negativen Lösungen

3.3 Algebra in den Ländern des Islam

622	Auswanderung (Hiğra, Hedschra) Muḥammads von Mekka nach Medina (Beginn des arabischen Kalenders)		
632	Muḥammads Tod		
635	Eroberung von Damaskus und Mesopotamien		
642	Eroberung von Ägypten		
635/51	Eroberung von Persien, Ende des Sassanidenreiches		
711	Übergang bei Gibraltar, Westgotenreich in Spanien zerschlagen		
712	Eroberung von Choresmien (zwischen Kaspischem Meer und Aralsee),Vorstoß bis zum Indus		
732	Karl Martell besiegt die Araber bei Tours und Poitiers		
9. Jh.	Araber auf Kreta, Sizilien		
	West		**Ost**
		634–644	Kalif ᶜUmar (Bücherverbrennung)
		661–750	Umayyaden, Sitz Damaskus
		717–720	Kalif ᶜUmar II: 718 Umsiedlung der Gelehrten vom Museion in Alexandria nach Antiochia
756–1031	Umayyaden, Sitz Córdoba, seit 929 Kalifat	750–1517	Abbasiden, Sitz 763–1258 Bagdad, 1261–1517 Kairo
		754–775	Kalif al-Manṣūr, Gründer Bagdads (763)
8.–10. Jh.:	Übersetzungen aus dem Griechischen ins Arabische	768–809	Kalif Hārūn ar-Rašhīd
11.–13. Jh.:	Übersetzungen aus dem Arabischen ins Lateinische	813–833	Kalif al-Maᵓmūn
912–961	Emir, ab 929 Kalif ᶜAbd ar-Raḥmān		
961–976	Kalif al-Ḥakam II, Bibliothek in Córdoba		
969–1171	Fatimiden in Ägypten, Hauptstadt Kairo (gegründet 969)		
1031	Zerfall des Kalifats von Córdoba in Fürstentümer	1206–1227	Dschingis-Khan, Einbruch der Mongolen
		1258	Hūlāgū-Khan erobert Bagdad, Ilkhān-Dynastie
		1409–1449	Ulug Beg in Samarkand (Usbekistan)
1492	Untergang Granadas, des letzten maurischen Königreiches	1504	Babur erobert Kabul und Kandahar (Afghanistan)
		1517	Kairo von den Türken erobert
		1523–1527	Babur erobert Nordindien, wird zum Gründer des Reiches und der Dynastie der Großmoguln

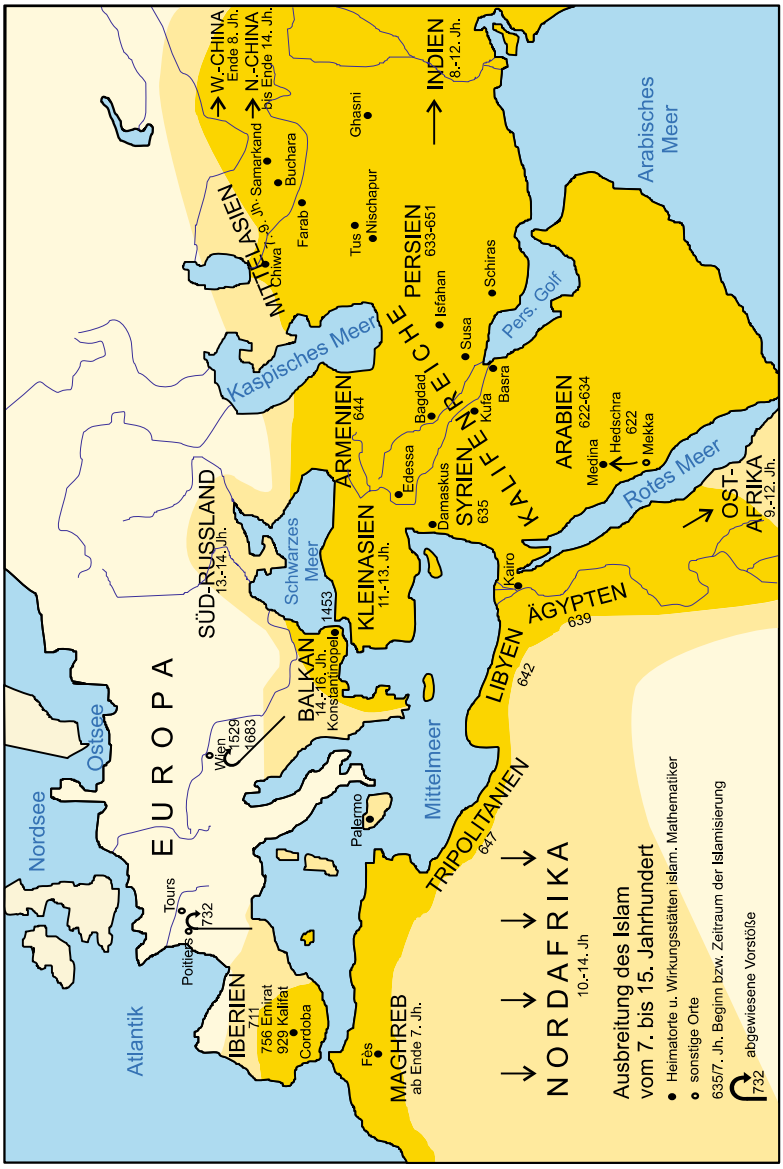


Abb. 3.3.1. Zentren der Mathematik in islamischen Ländern im Mittelalter

3.3.0 Geschichtlicher Abriß

In der Literatur wird der Beginn der „Geschichte in den islamischen Ländern“ meistens mit der Zeit der Konsolidierung der islamischen Herrschaft (7./8. Jh.) festgesetzt.

Durch die Eroberungskriege der Araber (gemeint sind die Stämme, die damals die arabische Halbinsel bewohnten) erfolgten Einflüsse vieler Kulturen, die sich bis ins 15. Jh. fortsetzten. Aus dieser Zeitspanne sind zahlreiche Manuskripte erhalten, die in Arabisch und ab 10. Jh. auch in Persisch geschrieben oder kopiert wurden und uns als *arabische Kenntnisse* überliefert sind. Aus welchen ursprünglichen wissenschaftlichen Quellen die späteren islamischen Gelehrten schöpften, ist oft nicht mehr nachvollziehbar.

Die frühen Wissenschaftler dieser Zeit machten sich die geistigen Auffassungen in dem neuen Weltreich zu eigen und begannen mit dem Aufbau einer neuen Kultur. Wenn also von der Mathematik bzw. den Wissenschaften allgemein in den islamischen Ländern die Rede ist, so sind damit die Errungenschaften gemeint, die sich durch eine fruchtbare Zusammenarbeit der Gelehrten vieler Völker unter Anwendung von Arabisch als offizieller Sprache ergeben haben. Somit kann das 7. Jh. geschichtlich und in bezug auf die Wissenschaften als ein Meilenstein angesehen werden.

Der Begründer der islamischen Religion ist der Prophet Muḥammad ibn ᶜAbdallāh aus Mekka, der von 569–632 n. Chr. lebte, zunächst als Hirt, später als Kaufmann. In seiner Heimat und durch zahlreiche Handelsreisen kam Muḥammad mit vielen Religionsrichtungen in Kontakt und eignete sich Kenntnisse über die jüdische und christliche Religion an. Seit seinem 40. Lebensjahr empfing er Offenbarungen durch den Erzengel Gabriel und verkündete Allah als den *alleinigen* Gott, zu dessen Propheten er sich berufen fühlte. Er betrachtete sich als Erneuerer der Religion Abrahams und als Nachfolger von Moses und Jesus, die im Islam als Propheten verehrt werden. Die Offenbarungen sind als Anweisungen unter dem späteren Kalifen ᶜUṯmān (644–656) in das heilige Buch des Islam, den Koran, aufgenommen worden. Diese Anweisungen enthalten viele praktische Vorschriften für das tägliche Leben und zur Organisation des islamischen Staates.

Wegen seiner religiösen und politischen Ansichten war Muḥammad im Jahre 622 gezwungen, nach Yaṯrib zu emigrieren, dem heutigen Medina. Seine Anhänger folgten ihm und immer mehr Menschen schlossen sich ihnen an. Dieses Jahr der *Hiğra* (Auswanderung) wurde zum Beginn der Zeitrechnung im neuen Kalender der *Muslime,* wie die Anhänger des Islam fortan genannt wurden. In Medina setzte Muḥammad seine Verkündigungen fort und gewann immer mehr Anerkennung. Bereits nach wenigen Jahren hatte sich die neue Religion über die arabische Halbinsel ausgebreitet. Im Jahre 630 kehrte er als anerkannter Prophet zurück nach Mekka. Diese Stadt bildete schon damals einen gesamtarabischen Wallfahrtsort mit dem Zentrum der Kaaba, einem würfelförmigen Bauwerk mit einem eingemauerten schwarzen Meteoriten an

der SO-Ecke. Hier wurde damals zu vielen Göttern bzw. Götzen gebetet. Mekka wurde jetzt zum religiösen Mittelpunkt der islamischen Welt, und die Kaaba zum Heiligtum des Islam. Jeder gläubige Muslim sollte ein Mal in seinem Leben dorthin pilgern. 632 verstarb Muḥammad.

Bereits ein Jahr nach dem Tod des Propheten begann der Siegeszug des Islam unter den Nachfolgern Muḥammads, den Kalifen (Stellvertreter). Der erste Kalif war sein Schwiegervater Abū Bakr (632–634), der die arabischen Stämme einte und aus ihnen ein schlagkräftiges Soldatenheer zusammenstellte. Unter seinen Nachfolgern ʿUmar (634–644) und ʿUṯmān (644–656) wurden Syrien (635–637), das sassanidische Mesopotamien (635), das Persische Reich (635–651) und Ägypten (640–642) erobert. Nach ʿUṯmān übernahm ʿAlī (656–661) als vierter Kalif die Herrschaft. Der größte Gegner ʿAlīs war Muʿāwiya, der umayyadische Statthalter Syriens, der ihm den Kalifentitel streitig machte und diesen nach ʿAlīs Ermordung auch übernahm.

Mit Muʿāwiya begann das Umayyadenkalifat (661–750). Die Umayyaden verlegten die damalige Hauptstadt von Medina (Sitz der ersten drei Kalifen) nach Damaskus. Auf diese Weise kam die Muslim-Kultur in direkten Kontakt mit der spätantiken Kultur der römischen bzw. byzantinischen Provinzen, die erst kurz vorher von den Arabern erobert worden waren.

Durch ihre zahlreichen Eroberungen kamen die Araber mit höher entwickelten Kulturen als ihrer eigenen in Kontakt und begegneten den griechischen, persischen und indischen Wissenschaften. Diese nahmen sie an und entwickelten sie weiter. Allerdings wird von dem schon erwähnten zweiten Kalifen ʿUmar berichtet, daß er viele der im Iran erbeuteten Bücher verbrennen ließ, ähnlich wie dies 213 v. Chr. in China unter Shi-Huang-ti geschah. ʿUmar soll seine Anordnung folgendermaßen begründet haben: „Enthalten diese Bücher etwas, was zur Wahrheit führt, so hat uns Allah das gegeben, was noch besser zu dieser hinführt; sollten sie aber etwas Falsches enthalten, so sind sie überflüssig.“ Die Bücherverbrennung könnte als eine Art Machtdemonstration der ersten Herrscher ausgelegt werden. Später jedoch führte das Zusammentreffen der vielschichtigen Kulturen und somit auch der jeweiligen wissenschaftlichen Erkenntnisse zu einer zumeist fruchtbaren Weiterentwicklung auf dem Gebiet der Naturwissenschaften.

Unter den Umayyaden breitete sich das Reich Ende des 7. Jhs./Anfang des 8. Jhs. nach Nordafrika (706–715), nach Turkestan (711–712) und dem Pandschab aus. Im Jahre 711 setzten die Araber unter dem berberischen Feldherrn Ṭāriq bei dem nach ihm benannten Ǧabal al Ṭāriq (Berg des Tarik, Gibraltar) ihren Fuß zum ersten Mal in Spanien auf europäisches Festland und zogen weiter nach Frankreich. Hier stoppte 732 der merowingische Karl Martell den arabischen Eroberungszug auf den Feldern zwischen Tours und Poitiers.

In der Mitte des 8. Jh. begann mit al-Manṣūr (754–775) die Herrschaft der Abbasiden über das islamische Reich, die (theoretisch) bis in die Mitte des 13. Jhs. dauerte. Bagdad wurde zur neuen Hauptstadt und zum Zentrum einer Förderung der Wissenschaften. Al-Manṣūrs Nachfolger Hārūn ar-Rašīd

(786–809), bekannt aus 1001 Nacht, gründete eine Bibliothek, in der die wissenschaftlichen Quellen und auch ihre Übersetzungen den Interessierten in den Sprachen Sanskrit, Persisch und Griechisch zur Verfügung standen.

Zu Beginn des 9. Jhs. erbaute ar-Rašīds Sohn al-Maʾmūn (813–833) das Haus der Weisheit (Bayt al-Ḥikma), dem eine umfangreiche Bibliothek und ein Observatorium angegliedert waren. In diesem Wissenschaftszentrum bestand die Hauptaufgabe der Gelehrten vieler Völker zunächst darin, Übersetzungen und Abschriften ihrer griechischen, syrischen, indischen und persischen Quellen sowie anderer vorhandener Werke aus den eroberten Gebieten in die arabische Sprache zu übertragen. Auch die Fähigkeiten in Handwerk und Baukunst erweiterten sich stetig, und ein weit verzweigter Handel zeugte von wirtschaftlichem Aufschwung. In der Landwirtschaft führte die künstliche Bewässerung zu reicheren Ernten.

Bedingt durch die Größe des islamischen Reiches war es den Abbasiden nicht möglich, dieses Territorium über den gesamten Zeitraum ihrer Regentschaft unbeschadet zusammen zu halten. Schon früher mußten Teilgebiete an rivalisierende Nebendynastien abgegeben werden. So löste sich Spanien von Bagdad ab und machte sich unter den Umayyaden von Córdoba selbständig. 929 wurde die Rivalität zwischen Córdoba und Bagdad durch die Proklamation des westlichen Kalifats unter ʿAbd ar-Raḥmān III. (912–961) manifestiert.

Auch Ägypten entzog sich unter den Ṭūlūniden (868–904) der Zentralgewalt von Bagdad. Es folgten weitere Lokaldynastien in Ost und West. Zur Zeit der Fatimiden (969–1171), einer Berber-Dynastie, die ihren Herrschaftsbereich um Ägypten erweiterte und ein unabhängiges schiitisches Kalifat entstehen ließ, lag die kulturelle Führung der westlichen Länder des Islam nun in Ägypten. In der Hauptstadt Kairo entstanden ein gut ausgestattetes Observatorium und die Akademie „Dār al-ḥikma“, was so viel heißt wie Wohnsitz der Wissenschaften. Um die Wende vom 10. zum 11. Jh. wirkten dort der Astronom Ibn Yūnus (950–100) sowie der Astronom, Physiker und Mathematiker Ibn al-Hayṭam (etwa 965–1039).

Der im Jahre 980 bei Buchara geborene Ibn Sinā (lat. Avicenna) gilt als Universalgelehrter in der mittelalterlichen Welt des Islam. Er war zugleich Politiker, Dichter, Philosoph, Mathematiker, Astronom und ein führender Vertreter der Medizin. Seine mehr als 270 Werke haben auch im europäischen Mittelalter großen Einfluß ausgeübt, wo er unter dem lateinischen Namen Avicenna größte Verehrung genoß. Er befaßte sich mit dem Bau von musikalischen und astronomischen Instrumenten (vgl. [Djafari Naini 1991], Abb. 3.3.3 und den Videofilm „Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter“) und faßte in seinem „Buch der Genesung“ die Mathematik aus den Elementen des Euklid und dem Almagest des Ptolemaios zusammen.

Im Jahre 1258 endete die Abbasiden-Herrschaft endgültig mit der Ermordung ihres letzten Kalifen durch die Mongolen. In der Zeit vom 9. bis 16. Jh. verlagerten sich die Wissenschaftszentren auf verschiedene Städte wie Ghasni,

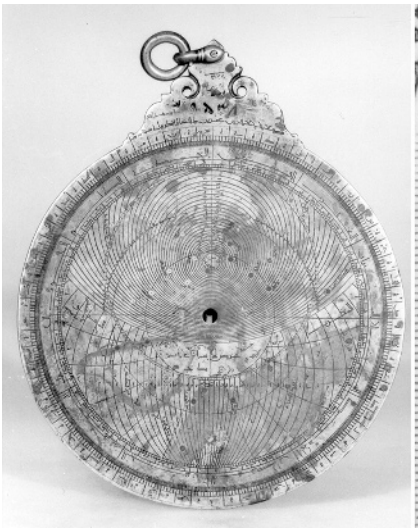




Abb. 3.3.2. Astrolabium, Gerät zur geographischen Ortsbestimmung (links); Ibn Sinā (lat. Avicenna), persischer Universalgelehrter (980–1027; rechts)

Isfahan, Raiy, Maraga, insbesondere auch nach Buchara und Samarkand in Choresmien (heute Usbekistan).

Der Umayyaden-Herrscher ʿAbd ar-Raḥmān I. (756–788) gründete in Spanien ein unabhängiges Königreich mit der Hauptstadt Córdoba als Keimzelle einer drei Jahrhunderte währenden Herrschaft. In dieser Zeit entwickelte sich eine originelle islamische Kunst und Kultur mit maurisch-spanischen Elementen. Wirtschaft und Wissenschaften gediehen und Córdoba wurde zum *Mekka des Westens*. Es wurde neben Bagdad zum bedeutendsten Kulturzentrum der islamischen Welt. 600 Moscheen soll es damals in Córdoba gegeben haben. Von der hervorragenden Baukunst jener Zeit zeugt der Säulenwald der großen Freitagsmoschee, der berühmten Mezquita (siehe Abb. 3.3.5). In der nahe bei Córdoba liegenden Sommerresidenz der Kalifen Medina az-Zahrā' (Stadt der Blumen) befand sich die gewaltige Universitätsbibliothek mit etwa 400 000 Manuskripten, die in 44 Bänden katalogisiert waren. Auch in anderen Orten der vom Islam beherrschten iberischen Halbinsel blühte die Wissenschaft: in der Übersetzerschule von Toledo wurden Werke islamischer Gelehrter ins Lateinische übertragen, Robert von Chester übersetzte um 1145 in Segovia die berühmte algebraische Schrift von al-Ḫwārizmī. Die arabische Poesie, Philosophie, Mathematik, Astronomie, Chemie und Medizin wurden weiterentwickelt, ebenso die Gartenbaukunst mit Anlagen zur Bewässerung.

Córdoba blieb bis zur Reconquista im Jahre 1236 ein Zentrum des Islam und der Wissenschaft, obgleich dort 1031 Emirat und Kalifat erloschen.

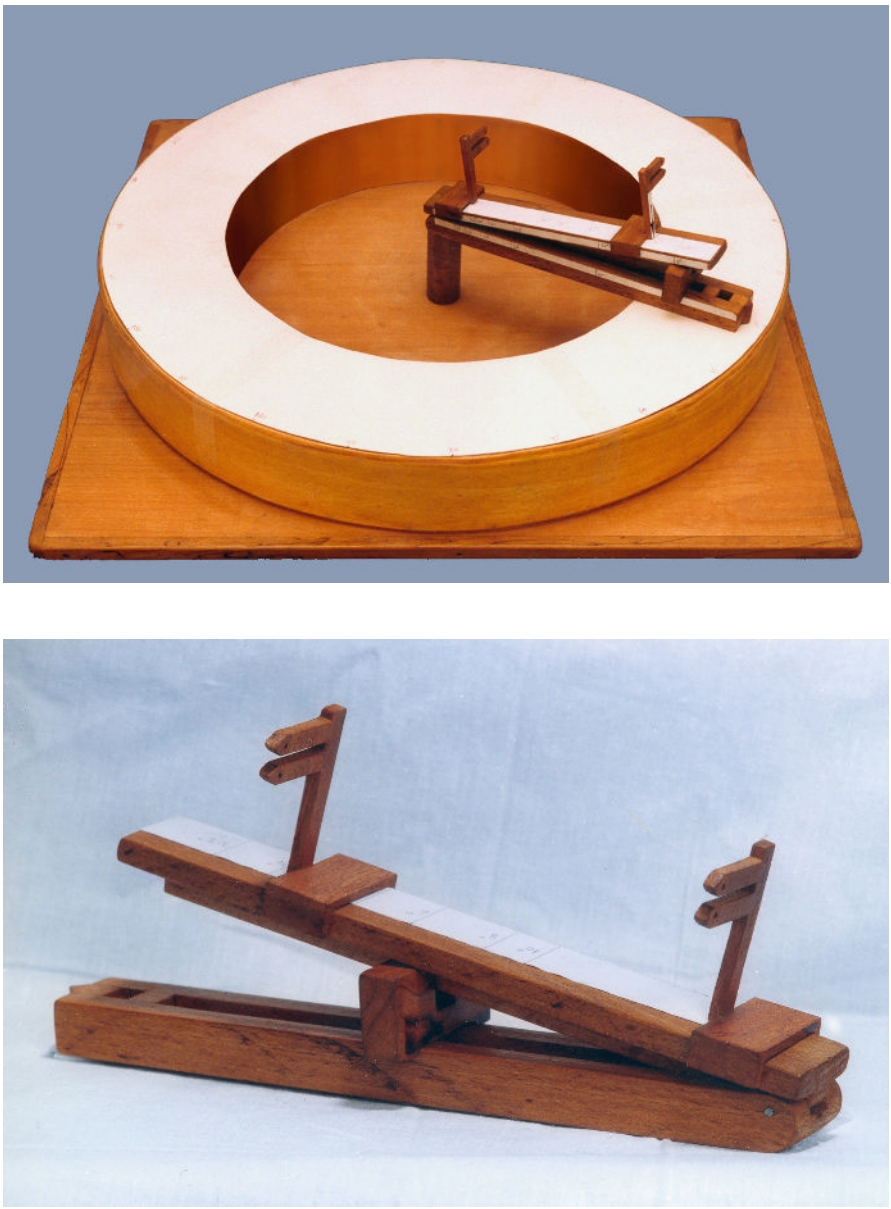


Abb. 3.3.3. Instrument für astronomische Beobachtungen (nach einer Beschreibung von Ibn Sīnā, Modell in Holz angefertigt nach Angaben von A. Djafari Naini)



Abb. 3.3.4. Kuppel der Tillja-Kari Moschee und Medrese in Samarkand (Choresmien, heute Usbekistan)
[Foto Alten]



Abb. 3.3.5. Der Säulenwald der Mezquita in Córdoba, ein Bau des Umayyaden-Emirs ʿAbd ar-Raḥmān 786/87
[Foto Alten]

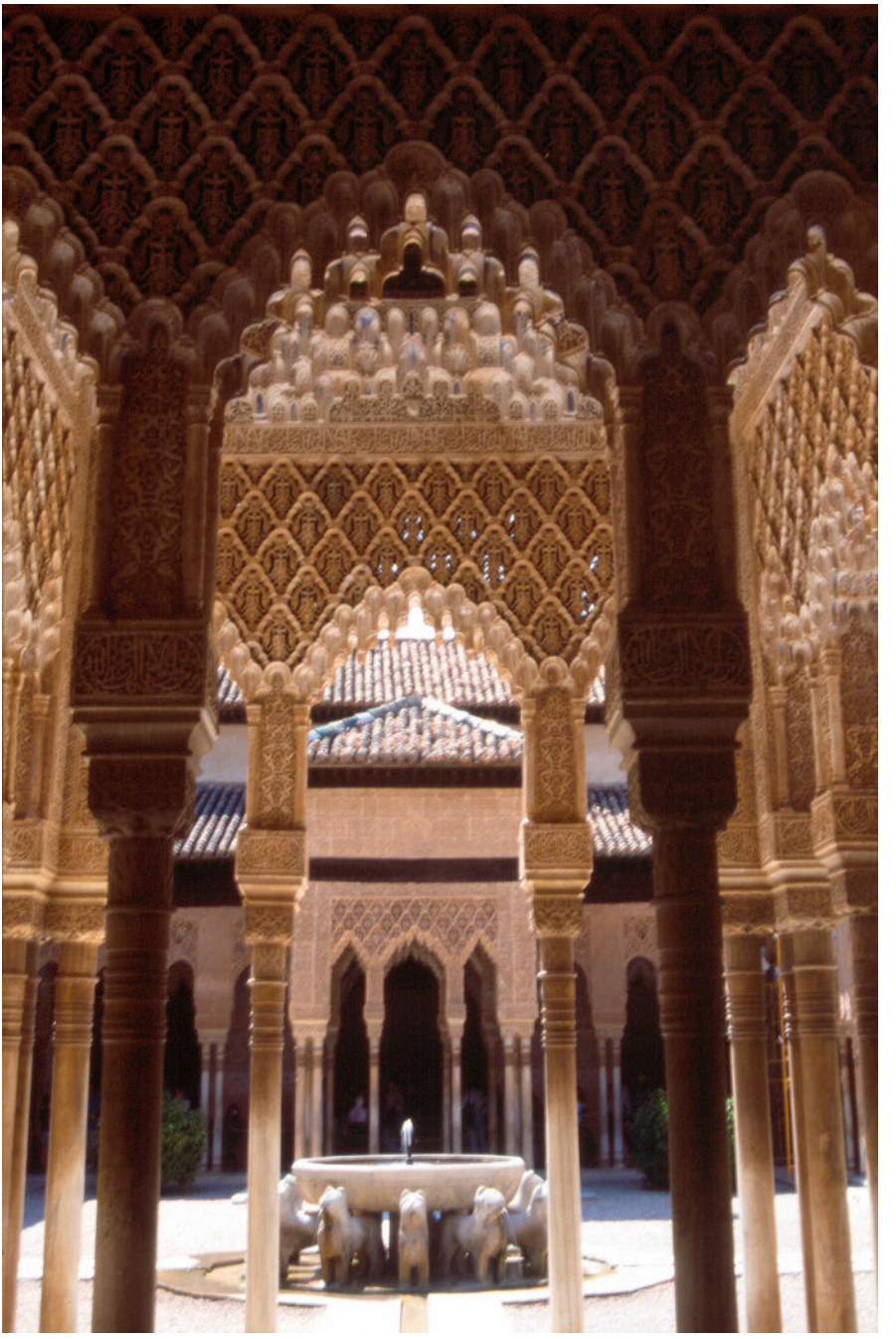


Abb. 3.3.6. Löwenhof der Alhambra in Granada (13. / 14. Jh.) mit Blick auf den Löwenbrunnen, eingefaßt von 124 grazilen Marmorsäulen
[Foto Alten]

Unter diesen günstigen Bedingungen wirkte hier im 12. Jh. der aus dem heutigen Mauretanien stammende Philosoph Ibn Rušd (1126–1198), der unter dem Namen Averroes in Europa bekannt wurde. Er sowie der jüdische Denker Moses ben Maimon (1135–1204 in Kairo), beide aus Córdoba stammend, beschäftigten sich auch mit mathematischen Fragen (Ibn Rušd mit Geometrie, Moses ben Maimon mit Wurzelrechnung, Kreisumfang und Kreisdurchmesser) und mit Problemen der Astronomie.

Trotz der großartigen Entwicklung in Córdoba reichte der Stand der Wissenschaften nicht an die Größe des Ostens heran. Er war jedoch von entscheidender Bedeutung für die Übermittlung des mathematischen Wissens der Griechen und der Gelehrten des islamischen Kulturkreises nach Europa.

Im Jahre 1236 eroberte König Ferdinand III. von Kastilien Córdoba von den Muslimen zurück. Das Zentrum des arabischen Westens war von nun an Granada. Dort entstand im 13. und 14. Jahrhundert der riesige Komplex Qalaᶜat al-ḥambrā (Rote Festung) und Qaṣr al-ḥambrā (Roter Palast), den wir die Alhambra nennen.

Im Löwenhof der Alhambra entfaltete sich maurische Baukunst in der zweiten Hälfte des 14. Jahrhunderts zu höchster Pracht (Abb. 3.3.6). In Granada wirkte der letzte maurische Mathematiker al-Qalaṣādī (gest. 1486), der kurz vor der Rückeroberung von Granada nach Tunis übersiedelte.

Aneignung des Wissens fremder Kulturen

Zwischen dem 8. und 10. Jh. fand in den Wissenschaftszentren eine rege Übersetzungstätigkeit statt.

Bereits zur Umayyadenzeit um 730 wurden astronomische Texte, auf indischen und persischen Quellen beruhend, ins Arabische umgeschrieben. Die Übersetzungsarbeit der wissenschaftlichen Werke beginnt mit al-Fazārīs Übersetzung der Siddhāntas. Wie wichtig für die Herrschenden die Aneignung und Besitznahme der Manuskripte früherer Kulturen war, zeigt das folgende Beispiel: Sie schickten Gesandte in fremde Länder, um nach wissenschaftlichen Quellen zu suchen. Einer dieser Boten war Isḥāq ibn Ḥunayn (830–910), der bekannte Übersetzer der Werke Euklids und Archimedes', der u. a. das medizinische Buch des Galen beschaffen sollte. Dieser Auftrag führte ihn durch das obere Mesopotamien, Syrien, Palästina und Ägypten, bis er schließlich einen Teil dieses Manuskriptes fand.

Im Haus der Weisheit in Bagdad bestand die Hauptaufgabe der Gelehrten vieler Völker zunächst darin, die vorhandenen Werke aus den eroberten Gebieten in die arabische Sprache zu übertragen. Bis zum 10. Jh. wurden griechische Werke von Ptolemaios, Euklid, Hypsikles, Apollonius, Archimedes, Menelaos, Diophant und Heron übersetzt. Hierdurch nahm die griechische Wissenschaft ihren Einfluß auf die Mathematik und Astronomie in den islamischen Ländern. Die Originaltexte der griechischen Gelehrten sind zum Teil verloren gegangen, aber das Abendland konnte durch die arabischen Übersetzungen oder Kommentierungen diese Werke kennen lernen.



Abb. 3.3.7. Arabische Übersetzung der Elemente des Euklid in 15 prachtvoll ausgestatteten Büchern, aus dem 9. Jh. durch Iṣhaq ibn Hunayn-Ṯābit ibn Qurra
[Parlaments-Bibliothek Teheran, Mağlis 200]

Die Aufbewahrung und Vermittlung des Wissens der früheren Kulturen für die Nachwelt ist eine hervorragende Leistung der Gelehrten in den islamischen Ländern. Die Tradierung ihres mathematischen Wissens hat die Entwicklung der europäischen Mathematik nachhaltig beeinflußt.

Beginn der eigenen mathematischen Kultur

Dieser Kulturschritt nahm seinen Anfang mit der Kommentierung der schon erwähnten Übersetzungen. Das soll anhand der Entwicklung der Algebra veranschaulicht werden. Auf diesem mathematischen Gebiet haben sechs Gelehrte die entscheidendsten Leistungen hervorgebracht, von denen die beiden letztgenannten sich mit numerischer Auflösung algebraischer Gleichungen befaßten.

Einer der ersten hervorragenden Mathematiker seiner Zeit war al-Ḫwārizmī (al-Chorezmi, Muḥammad ibn Mūsā, 780?-850?). Als Mathematiker und Astronom wirkte er im *Haus der Weisheit* und schrieb mindestens fünf uns bekannte Werke über Arithmetik, Algebra, Astronomie, Geographie und Kalenderrechnung. Zwei seiner Bücher nahmen großen Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik, nämlich zunächst das der Arithmetik, das in Form einer lateinischen Übersetzung ohne Titel überliefert wurde und dessen Titel vermutlich „Algoritmi de numero Indorum“ ist. Dieses Buch stellt die wichtigste Quelle für das Rechnen mit indischen Ziffern in Europa dar. Eine vollständige lateinische Bearbeitung dieses Werkes wurde vor einigen Jahren in New York in der Bibliothek der Hispanic Society of Amerika entdeckt [Folkerts 1997].

Die Bezeichnung „Algorismus“, sprachgeschichtlich abgeleitet vom Namen al-Ḫwārizmī, entstand für das in seiner Schrift beschriebene Rechnen mit dem dezimalen Stellenwertsystem. Den gleichen Ursprung hat auch der Ausdruck „Algorithmus“.

Das zweite Buch ist „al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala“, d. h. „Ein kurzgefaßtes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen“. Zum ersten Mal in der Geschichte erscheint ein eigenständiges Werk über Algebra und im Titel einer Schrift das Wort Algebra, das aus dem Ausdruck al-ğabr (das Ergänzen) hervorgegangen ist und inzwischen zur Bezeichnung für all das geworden ist, was heute unter Algebra verstanden wird. Nach al-Ḫwārizmī erfuhr die Algebra eine Weiterentwicklung durch den in Ägypten lebenden Abū Kāmil (ca. 850–930) in seinem Lehrbuch „Kitāb al-ğabr wa-l-muqābala“(Buch über Ergänzen und Ausgleichen). Er schrieb auch eine Abhandlung „Kitāb aṭ Ṭarā'if fi l-ḥisāb“ (das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst) über unbestimmte lineare Gleichungen, sog. Vogelaufgaben. Zur Zeit der Buyiden-Dynastie wirkte in Raiy, Isfahan und Bagdad der in Karağ (in der Nähe von Teheran) geborene Gelehrte al-Karağī (gest. zwischen 1019 und 1029), dem ebenfalls fruchtbare Erkenntnisse zur Algebra gelungen sind. Von ihm existieren ein Werk zur Arithmetik und zwei Werke zur Algebra. Um das Jahr 1000 kamen die seldschukischen Türken als neue Herrscher nach Persien, und der Mittelpunkt der wissenschaftlichen Forschungen verlagerte sich jetzt nach Isfahan. Dort wurde 1074 dem Mathematiker,

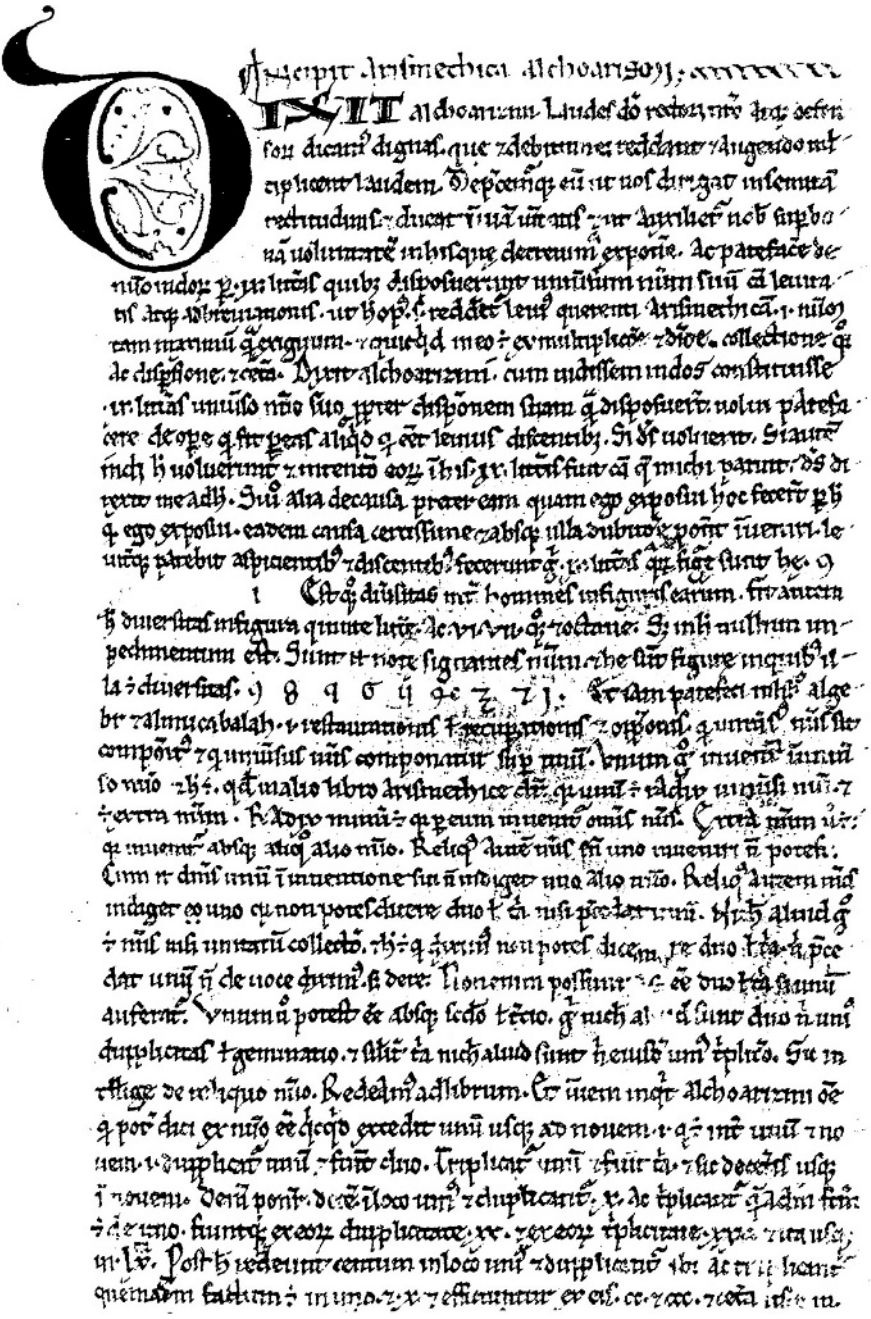


Abb. 3.3.8. Erste Seite der ältesten lateinischen Schrift über das indische Rechnen nach al-Ḫwārizmī (Bearbeitung der Übersetzung des verloren gegangenen arabischen Orginaltextes) [Folkerts 1997, Tafel 1]

Astronomen, Philosophen und Dichter ᶜUmar Ḫ̆ayyām (al-Chayyām, ᶜUmar ibn Ibrāhīm, 1048?-1131?) vom Sultan Malik-Šāh die Leitung einer Astronomengruppe angetragen, die den alten persischen Kalender reformieren sollte. Dieser Kalender soll einen Fehler von nur einem Tag im Verlauf von 5.000 Jahren enthalten haben. Der reformierte Kalender, nach seiner Korrektur von hervorragender Genauigkeit, wurde 1079 gänzlich vollendet und eingeführt, später aber durch den muslimischen Mondkalender ersetzt. ᶜUmar Ḫ̆ayyām war neben seiner wissenschaftlichen Tätigkeit auch einer der größten Dichter Persiens, der in seinen kurzen, sprachlich vollendeten Gedichten seine Einstellung zu allen großen Fragen des Lebens zusammenfaßte. Durch Fitzgerald, der 1859 die englische Übersetzung von ᶜUmar Ḫ̆ayyāms *Rubāᶜīyāt* (Vierzeiler) veröffentlichte, wurde der Perser auch in Europa bekannt. Im nachfolgenden Gedicht (in deutscher Übersetzung) scheint er auf die Kalenderreform anzuspielen, indem er sagt:

Doch meine Rechenkunst, die hat das Jahr
Von Grund vereinfacht, meint ihr – wärs nur wahr!
Hab nur gestrichen vom Kalenderblatt
Den Tag, der noch nicht ist, und den, der war.

Mit ᶜUmar Ḫ̆ayyām (gest. etwa 1131), als dessen bedeutendste mathematische Leistung seine geometrische Theorie der Gleichungen dritten Grades anzusehen ist, begann eine neue Phase der Algebra.

Im 13. Jh. wurde ganze Asien von mongolischen Nomaden überrannt. Nachdem diese seßhaft geworden waren, wurden unter dem Einfluß der einheimischen Kulturen der Perser, Inder und Chinesen neue wissenschaftliche Zentren gegründet, u. a. in Maraga in der Nähe von Täbris. Zu dieser Zeit lebte der in Chorasan geborene Perser Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (1201–1274), ein hervorragender Gelehrter und Politiker, der auf den Gebieten der Philosophie, Mathematik und Astronomie noch heute einen besonderen Ruf genießt. Für ihn ließ Hūlāgū Khān im Jahre 1256 eine große Sternwarte mit umfangreicher Bibliothek und einem Observatorium errichten, dessen Leitung er ihm übertrug. Hier untersuchte aṭ-Ṭūsī systematisch die Anwendung des Sinussatzes für alle möglichen Fälle ebener Dreiecke [Scriba/Schreiber, S. 179]. Seine „Sammlung zur Arithmetik mit Hilfe von Brett und Staub“ enthält u. a. ein allgemeines Verfahren zum Ausziehen von Wurzeln aus ganzen Zahlen. Nachweislich von dieser Zeit an bestanden Wechselbeziehungen zwischen den chinesischen und persischen Astronomen, denn am Observatorium von Maraga waren chinesische Astronomen tätig, und persische Gelehrte übermitttelten ihre astronomischen und mathematischen Kenntnisse und Methoden nach Peking. Nach der Zersplitterung des Mongolenreiches im 14. Jh. eroberte Tīmūr (1336 -1405), ein Enkel Dschingis Khāns, die Länder des Mittleren und Nahen Ostens, und das Zentrum von Politik und Wissenschaften wurde Samarkand (vgl. Abb. 3.3.4). Um 1420 leitete hier einer der letzten großen persischen Gelehrten al-Kāšī (al-Kaschi, Giyāṯ ad-Dīn Ǧamšīd, geb. in Kaschan, gest. etwa 1429 in Samarkand) unter Tīmūrs Enkel Uluġ Beg das dortige Observatori-

um und betrieb während dieser Zeit umfangreiche Studien der Astronomie und Mathematik. Sein Hauptwerk, „Schlüssel zur Arithmetik“ ist eine Zusammenfassung der Leistungen und der Ergebnisse der damaligen Zeit, also ein Standardwerk. Ein weiteres ist die „Abhandlung über die Sehne und den Sinus“. Es enthält ein Iterationsverfahren zur Berechnung von sinus 1°.

3.3.1 Die Verbreitung der indischen Ziffern in den islamischen Ländern

Im Jahre 773 brachte ein Inder das Werk „Siddhānta“, verfaßt wahrscheinlich von Brahmagupta, nach Bagdad an den Hof des Kalifen al-Manṣūr. Dieser ließ es vom Sanskrit ins Arabische übersetzen, und so konnten die islamischen Gelehrten mit den indischen Ziffern bekannt werden. Wie bereits in Abschnitt 3.2.1 erwähnt, wußte jedoch schon der syrische Bischof Severus Sebokht um die Mitte des 7. Jhs. von astronomischen Werken der Inder. Er erlangte Kenntnis der indischen Ziffern und hob hervor, „daß ihre Zahlenschreibweise, die mit Hilfe von neun Zeichen vorgenommen wird, über jedes Lob erhaben sei“ [Sezgin, S. 20, 211]. Es ist nicht auszuschließen, daß bereits auch andere Gelehrte dieser Region zu seiner Zeit Bekanntschaft mit diesen

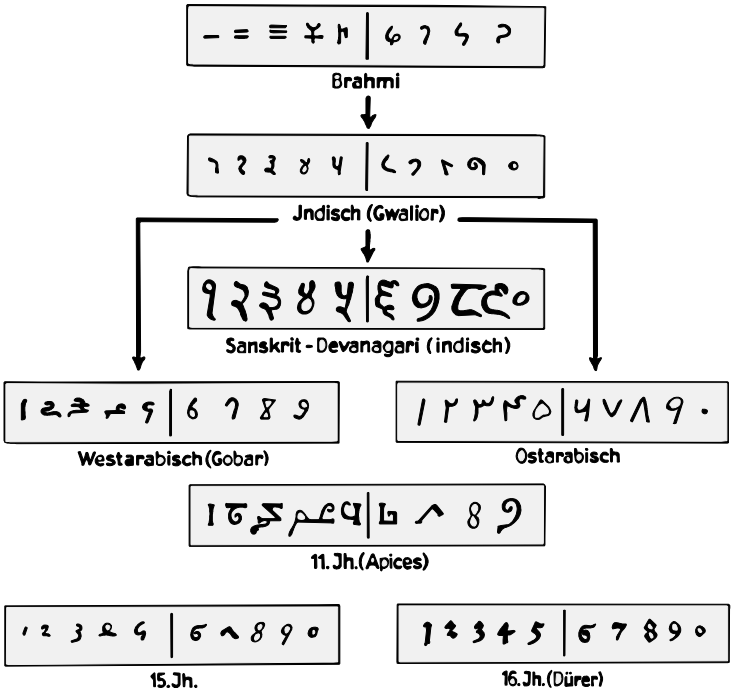


Abb. 3.3.9. Stammtafel unserer Zahlzeichen aus [Menninger 1958]

Ziffern machten [Tropfke 1980, S. 45]. Das Abendland wurde im 12. Jh. durch die Übersetzung des Werkes von al-Ḫwārizmī „Die Rechenkunst der Inder“, das nur in lateinischer Bearbeitung erhalten ist, mit den indischen Ziffern bekannt gemacht.

Mittelalterliche Handschriften weisen nach, daß sich die indischen Ziffern bei den Arabern in die ostarabischen Ziffern und in die westarabischen oder Ġubār-Ziffern entwickelten [Tropfke 1980, S. 51-53].

Die ersteren waren die Zahlzeichen der östlichen, arabisch schreibenden Völker in Ägypten, Persien, Syrien und der Türkei. In diesen Ländern werden sie indische Ziffern genannt. In den westarabischen Ländern wie Marokko werden sie heute auch verwendet, aber arabische Ziffern genannt. Hingegen waren die westarabischen Ziffern die unmittelbaren Vorläufer der abendländischen Zahlenschreibweise (vgl. „Stammtafel unserer Zahlzeichen“, Abb. 3.3.9).

Untrennbar mit diesen Ziffern ist die Null verbunden. Die Inder bezeichnen sie als Šūnya „Leer“. Al-Ḫwārizmī übertrug Šūnya ins Arabische als aṣ-ṣifr „die Leere“. Später wurde durch die Übersetzung seines o.g. Werkes die Null auch im Abendland bekannt. Dort übersetzte man den Namen nun nicht mehr, sondern übernahm um 1200 das arabische Wort als cifra und zephirum (bei Leonardo von Pisa). Im Italienischen wird zephirum zu zefiro oder zefro. Aus zefro wird zevero oder umgangssprachlich zero. Im Französischen wird aus cifra das Wort chiffre gebildet und gleichbedeutend ebenso die italienische Form zero für Null. Bald bezeichnet chiffre jedoch nicht nur die Null, sondern alle 10 Zahlzeichen, wie das aus der gleichen Wurzel entstandene deutsche Wort Ziffer.

3.3.2 Algebraische Ausdrucksweise

Das Werk „al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala“, d. h. „Ein kurzgefaßtes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen“ von al-Ḫwārizmī, welches in Arabisch geschrieben wurde[1], enthält folgende Ausdrücke: al-ğabr (das Ergänzen, die Wiederherstellung, das Einrichten, das Restaurieren, das Ausüben von Zwang) was bedeutet: Addition gleicher Terme zu beiden Seiten einer Gleichung, um subtraktive Glieder zu eliminieren, al-muqâbala (das Ausgleichen, die Gegenüberstellung, das Opponieren) bedeutet: Zusammenfassung jeder Gruppe von Gliedern gleicher Dimension in einer Gleichung zu einem Glied.

[1] Eine arabische Handschrift des Textes, geschrieben im Jahre 1342, ist in der Bodleian Library, Oxford zu finden. Der arabische Text wurde mit englischer Übersetzung herausgegeben von Frederic Rosen (The Algebra of Mohammad ben Musa, London, 1831). Es existieren auch lateinische Übersetzungen dieses Textes, die entweder von dem Engländer Robert von Chester (angefertigt im Jahre 1145 in Segovia) oder von dem Italiener Gerhard von Cremona (1114–1187, geschrieben in Toledo) stammen.

Beispiel:

Die Gleichung	$x^2 - 3x + 12 = 5x + 2$
wird durch al-ğabr zu	$x^2 + 12 = 8x + 2$
und durch al-muqābala zu	$x^2 + 10 = 8x$
umgeformt.	

Nach der Durchführung von „al-ğabr“ und „al-muqābala“ sollen am Ende nur additive und keine subtraktiven Glieder auftreten wie in dem gezeigten Beispiel. Daneben sind noch zwei weitere Operationen wichtig:
al-radd bedeutet Zurückführung, d. h.: Ist der Koeffizient der höchsten Potenz größer als 1, wird die Gleichung durch den Koeffizienten geteilt, al-ikmāl bedeutet Vervollständigung, d. h.: Ist der Koeffizient der höchsten Potenz kleiner als 1, wird die Gleichung mit dem Inversen des Koeffizienten multipliziert.
Unser heutiges Wort „Algebra“ stammt von „al-ğabr“ ab. Interessant ist der Wandel dieses Wortes. So bedeutet „Algebrista“ in Spanien „Knocheneinrenker“, „Chirurg“. In England stand noch im 16. Jh. an den Läden der Barbiere „Algebra and Blood-Letting“, d. h. „Knocheneinrenkung und Aderlaß“, denn die Barbiere waren in jener Zeit eine Art Chiropraktiker. Die Übersetzungen der Begriffe „al-ğabr“ und „al-muqābala“ ins Lateinische heißen „Restauratio et oppositio“ oder „Algebra et almucabala“.
Die islamischen Mathematiker verwendeten in den arabischen Werken über Algebra keine algebraischen Symbole und Zahlzeichen, sondern drückten bis zum Ende des Mittelalters vorwiegend alles mit Worten aus. So wurden Zahlen mit „dirham“ bezeichnet, abgeleitet von der griechischen Münzeinheit „Drachme“, die Wurzel einer Gleichung hieß „ğidr“, ebenfalls die Unbekannte, die außerdem auch „šay'“, das Ding, genannt wurde. Das Quadrat der Unbekannten oder die zweite Potenz hieß „māl“, das Vermögen.
Die dritte Potenz trug die Bezeichnung „ka'b“, der Würfel. Für die Potenzen höherer Ordnung wurde meistens eine Kombination der zweiten und dritten Potenzen genommen.
Zum ersten Mal im 15. Jh. stoßen wir bei den westarabischen Gelehrten wie Ibn Qunfuḏ (1340?–1407) aus Algier und al-Qalaṣādī (geb. 1400? in Spanien, gest. 1486 in Tunesien) auf eine arithmetische und algebraische Symbolik, die eine Erleichterung gegenüber den wörtlichen Bezeichnungen darstellten. Die Symbolik des al-Qalaṣādī, die sich auf einem höheren Stand als die seines Vorgängers befand, ist in seinem Werk „Entschleierung der Wissenschaft der Arithmetik“ zu finden. Aus Abb. 3.3.10 ist zu ersehen, daß al-Qalaṣādī zur Bezeichnung der Quadratwurzel den Anfangsbuchstaben von „ğiḏr“ (Wurzel) über die Zahl setzt. Ebenso diente dieser Buchstabe zur Kennzeichnung der unbekannten Größe des Dreisatzes, wobei die Proportionen durch drei Punkte ∴ voneinander getrennt sind. Bei den quadratischen Gleichungen erscheinen über deren Koeffizienten die Anfangsbuchstaben von „šay“ und „māl“. Al-Qalaṣādī verwendete als Gleichheitszeichen den letzten Buchstaben des Wortes „ʿdl“ (gleich) [Juschkewitsch 1964, S. 269].

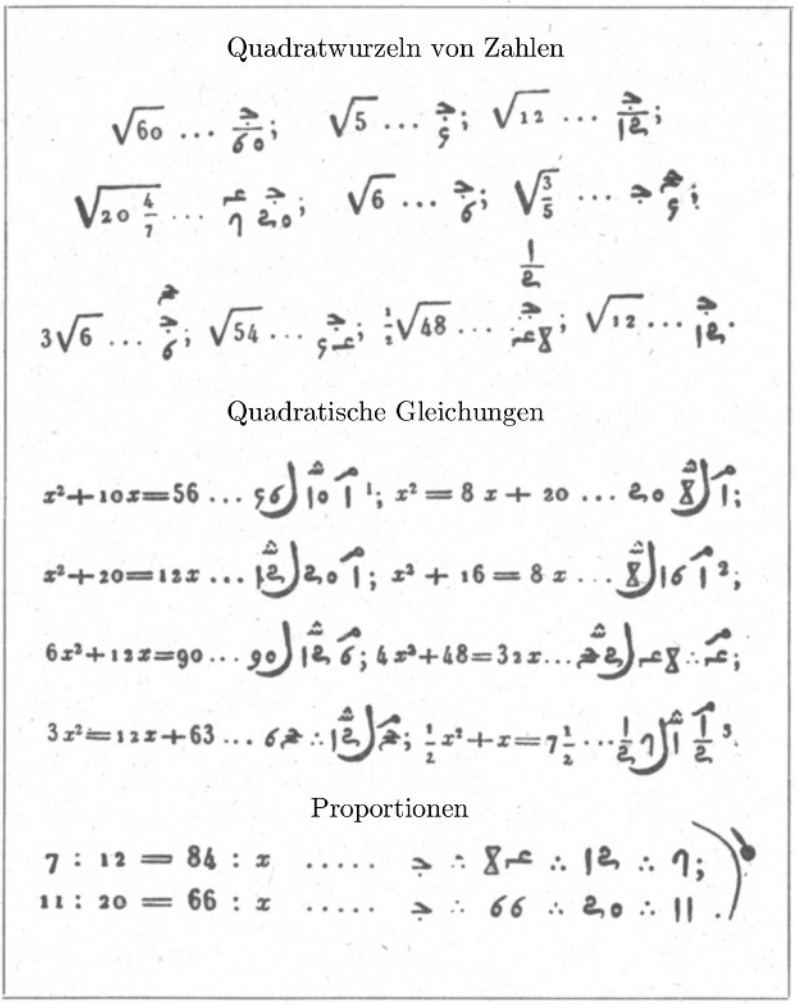


Abb. 3.3.10. Arabische Schreibweise von Wurzeln, quadratischen Gleichungen und Proportionen im 15. Jh. [Juschkewitsch 1964]

Die arabischen Ausdrücke gelangten ab dem 12. Jh. infolge der lateinischen Übersetzungen zahlreicher arabischer Schriften ins Abendland. „Šay'“ wurde mit „res“ übersetzt, „ğidr“ mit „radix“, „māl“ mit „census“ und „ka'b“ mit „cubus“. Die italienische Bezeichnung „cosa“ für „šay' “, in deutsch „Coß“ oder „Dingk“, bildet den Ursprung des Namens „Cossisten“, wie man die Algebraiker des 15. und 16. Jhs. in Deutschland nannte.

3.3.3 Lineare und unbestimmte Gleichungen

Die Algebra der Erbteilung – Lineare Gleichungen

Die zweite Hälfte der Algebra von al-Ḫwārizmī ist Testaments- und Erbteilungsaufgaben gewidmet. Dabei handelt es sich um das moslemische Erbrecht, das strengen und verwickelten Regeln unterworfen ist. Die Aufgaben sind in Gruppen geteilt und schreiten im allgemeinen nach Schwierigkeitsgrad fort. Erst aus deren Lösungen erkennt man die Anwendung des Religionsrechts. Als Beispiel die Aufgabe: Ein Mann stirbt und hinterläßt 2 Söhne. Einem anderen Manne vermacht er $\frac{1}{3}$ seines Besitzes. Er hinterläßt 10 Dirham an Vermögen und eine Schuldforderung von 10 Dirham gegen einen der Söhne. Würde man die Aufgabe nach dem Aufteilungsprinzip lösen, so müßte der eine Sohn zuerst seine Schuld von 10 Dirham bezahlen und dann müßten 20 Dirham aufgeteilt werden, von denen der Fremde $\frac{1}{3}$ und jeder Sohn $\frac{1}{3}$ bekäme. Nach dem Islamischen Erbrecht gilt jedoch folgendes:

1. Der Betrag, um den das ausstehende Darlehen den gesetzlichen Anteil des Sohnes überschreitet, wird wie ein Geschenk für den Sohn behandelt.

2. Das Geschenk geht dem Nachlaß voraus und der Nachlaß geht den gesetzlichen Anteilen voraus.

Al-Ḫwārizmī setzt x für den rechtmäßigen Nachlaß jedes Sohnes. Der mit Schulden belastete Sohn muß nur soviel in die Masse geben, wie sein Anteil bei der Teilung beträgt (also x). Aus der Schuld werden x Dirham zum Vermögen hinzugegeben ($10+x$). Dann erhält der Fremde $\frac{10+x}{3}$. Daher gilt $\frac{10+x}{3}+2x = 10+x$ und es ergibt sich $x = 5$.

Der Sohn-Schuldner muß also zunächst 5 Dirham herausgeben, die er dann wieder erhält. Sein Bruder erhält, wie auch der Fremde, 5 Dirham aus dem Nachlaß.

Vogelaufgaben – Unbestimmte lineare Gleichungen

Eines der bekannten mathematik-historischen Probleme bilden die Vogelaufgaben. Sie führen auf unbestimmte lineare Gleichungen, für die ganzzahlige positive Lösungen gesucht werden.

Abū Kāmil widmete diesen Aufgaben eine kleine gesonderte Abhandlung „Kitâb aṭ Ṭarā'if fi l-ḥisāb“ (Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst) [Suter 1910/1911]. Man hat den Eindruck, der Verfasser habe das Werk nur deshalb geschrieben, um den Nichtmathematikern und Mathematikern seiner Zeit zu zeigen, daß Gleichungen genau eine Lösung, mehrere Lösungen oder auch keine Lösung haben können. Sein Werk besteht aus sechs Aufgaben mit Lösungen, die sich im Schwierigkeitsgrad steigern.

Das Typische bei den Vogelaufgaben, die erstmals in China und danach in Indien auftreten, ist die Gesamtzahl der Vögel und des Geldbetrages von jeweils 100, von denen man ausgeht. Nun möchte man 3, 4 oder 5 Arten Vögel in verschiedener Preislage erwerben.

Die erste Aufgabe von Abū Kāmil lautet:

Für 100 Drachmen sollen 100 Vögel von drei Arten gekauft werden: Enten, Hühner und Sperlinge. Davon kostet eine Ente 5 Drachmen, ein Huhn 1 Drachme und je 20 Sperlinge kosten 1 Drachme. Wie viel Vögel jeder Art sind es?

Die Anzahl der Enten sei x, die der Sperlinge y, also $100-x-y$ die Anzahl der Hühner, die hier mit z bezeichnet wird. Dann lauten die beiden Gleichungen in heutiger Schreibweise:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+\frac{1}{20}y+z=100 \end{cases}.$$

Abū Kāmil eliminiert in den Gleichungen die letzte Unbekannte, hier z. Dann ergibt sich

$$100-x-y=100-5x-\tfrac{1}{20}y.$$

Daraus folgt

$$4x=\tfrac{19}{20}y \text{ oder } y=4x+\tfrac{4}{19}x.$$

Die Aufgabe hat nur eine Lösung: $x=19$, $y=80$, $z=1$.

Die nächsten Aufgaben 2, 3, 4 besitzen 6, 98 und 304 Lösungen, Aufgabe 5 hat keine Lösung und schließlich folgt Aufgabe 6 mit 2676 Lösungen, die den Höhepunkt des Werkes darstellt (vgl. [Djafari Naini 1982] und die Aufgaben 3.3.3 und 3.3.4).

Durch Leonardo von Pisa (um 1170 – nach 1240) finden die Vogelaufgaben über Byzanz ihren Einzug ins Abendland. Er nimmt sie in Kapital 11 seines Werkes „Liber abbaci“ auf, geht jedoch jeweils von der Gesamtzahl 30 aus. Schließlich hat Leonhard Euler (1770) in seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra“ das „Problem der 100 Vögel“ und die ähnlich aufgebauten „Zecheraufgaben“ aufgenommen.

3.3.4 Quadratische Gleichungen

Al-Ḫwārizmī (Al-Chorezmi)

Das schon erwähnte algebraische Werk „al-ğabr wa-l-muqābala“ verfaßte al-Ḫwārizmī (780?-850?) auf Wunsch des Kalifen al-Maʾmūn zu Bagdad. Es sollte zur Lösung von Problemen aus dem täglichen Leben dienen. Außer dem ersten Teil mit den Lösungen quadratischer Gleichungen enthalten die weiteren Abschnitte Hilfen zu Testamenten und Erbschaften, aber auch kaufmännische Berechnungen. Der Name al-Ḫwārizmī ist mit dem Begriff „Algebra“ fest verbunden, schrieb er doch als erster ein eigenständiges Werk über dieses mathematische Teilgebiet, unter dem noch bis in die Mitte des 19. Jh. hinein die „Lehre von den Gleichungen“ verstanden wurde, s. [Djafari Naini 1997].

In seinem Werk gibt es noch keine Zahlzeichen oder Symbole, er erklärt alles in Worten. Eine Formelsprache gab es noch nicht (s. Abschnitt 3.3.2).

Die folgenden Typen von linearen und quadratischen Gleichungen (in moderner Schreibweise) behandelte al-Ḫwārizmī:

1. $ax^2 = bx$;	2. $ax^2 = b$;	3. $ax = b$;
4. $ax^2 = bx$;	5. $ax^2 + c = bx$;	6. $bx + c = ax^2$;

wobei a, b, c gegebene positive Zahlen sind. Die endgültige Zusammenfassung aller Typen in einer Form $ax^2 + bx + c = 0$ wurde später nach der Annahme der Null und der negativen Zahlen in Europa erzielt. Zwar kannte der Inder Brahmagupta (598- nach 665) diese allgemeine Form, die sich aber wahrscheinlich nicht außerhalb Indiens verbreitet hat.

Al-Ḫwārizmī dividierte die Gleichungen durch a, um „Normalformen“ zu erhalten:

I. $x^2 = px$;	II. $x^2 = p$;	III. $x = p$;
IV. $x^2 + px = q$;	V. $x^2 + q = px$;	VI. $px + q = x^2$;

wobei p und q gegebene positive rationale Zahlen sind.

Er betrachtete nur positive Lösungen und bewies geometrisch, daß die Lösungen von IV, V, VI der Reihe nach sind:

$$-\tfrac{p}{2} + \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 + q}; \quad \tfrac{p}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q} \text{ falls } (\tfrac{p}{2})^2 \geq q; \quad \tfrac{p}{2} + \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 + q}\ .$$

Bei der Behandlung des Typus $x^2 = px$ berücksichtigte er die Null nicht als Lösung, eine Auffassung, die bis ins 17. Jh. vertreten wurde.

Bei der Gleichung $x = p$ gab er nicht nur die Lösung, sondern auch das Quadrat (māl) der Unbekannten an, wodurch er die Lösung in seine Systematik der quadratischen Gleichungen einpaßte. Für die anderen Typen gab er die entsprechenden Regeln in Worten wieder und brachte dafür geometrische Beweise. Dabei behandelte al-Ḫwārizmī nur spezielle Zahlenbeispiele, wobei er jedoch darauf hinwies, daß die Beweise und Regeln auch für allgemeine Fälle gelten.

Die Kenntnisse der Lösungsformeln von quadratischen Gleichungen besaß al-Ḫwārizmī wahrscheinlich von den alten Kulturen, die jedoch noch keine Beweise lieferten. Die erforderlichen Grundlagen zur Lösung derartiger Gleichungen, wie eine vernünftige geometrische Definition der positiven reellen Zahlen, die geometrische Existenz der Quadratwurzel, geometrische Definitionen der Operationen, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division kannte bereits Euklid und gab auch geometrische Lösungen an. Lösungen über den Weg des „algebraischen Kalküls“ finden sich in seinen Elementen nicht. Diophant gibt keinen Beweis an, sondern sucht Zuflucht bei seinem unbegründeten (aber sehr fruchtbaren) Kalkül und kommt somit zu einer rechnerischen Lösung.

Al-Ḫwārizmīs Ergebnis basierte also auf einer Kombination der Strenge Euklids mit den rechnerischen Aspekten der Babylonier, des Diophant, des Inders Brahmagupta und seiner zusätzlichen geometrischen Beweise für die Lösungsformeln der quadratischen Gleichungen. Diese Beweise stellen eine Phase des Wandels der Geometrie zur Algebra mit fundierten mathematischen Grundlagen dar. Der Prozeß dauert bis heute an. Dazu das folgende Gedicht [von Anonymous, in American Mathematical Monthly 73], das diese Umwandlung zum Inhalt hat:

„Said a young man named A. Grothendieck[2]:
In Geometry I'm rather weak.
I'm no Altshiller-Court[3];
It's just not my forte,
So I'd best make it more Algébrique."[4]

Als eine Erläuterung der Methode al-Ḫwārizmīs sei sein Beweis für die Gleichung des Typs $x^2 + q = px$ angegeben; $(p, q > 0)$. Er führt den Beweis für das spezielle Beispiel $x^2+21 = 10x$ und erklärt, daß die Lösung nicht möglich ist, wenn $(\frac{p}{2})^2 - q < 0$ gilt. Wenn $(\frac{p}{2})^2 = q$ gilt, dann ist $x = \frac{p}{2}$ die einzige Wurzel der Gleichung; wenn $(\frac{p}{2})^2 - q > 0$ gilt, dann hat die Gleichung zwei (positive) Wurzeln; eine Wurzel ist kleiner als $\frac{p}{2}$, die andere größer als $\frac{p}{2}$. Um die kleinere der beiden Wurzeln zu erhalten, benutzt er die Abb. 3.3.11 Es ist klar, daß für beide Wurzeln $x < p$ gilt, denn $q = x(p - x) > 0$.
Der Kürze halber bezeichnen wir den Flächeninhalt eines Rechtecks mit $\mu(\cdots)$. Der Abbildung 3.3.11 entnimmt man

$\mu(UVWN) = \mu(SWMQ) - [\mu(SVUP) + \mu(PNMQ)] = \mu(SWMQ) - \mu(PDAQ)$
$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - x(p-x)$. Wegen $x(p\text{-}x) = q$ folgt daraus $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, also $x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, d. h. $x < \frac{p}{2}$.

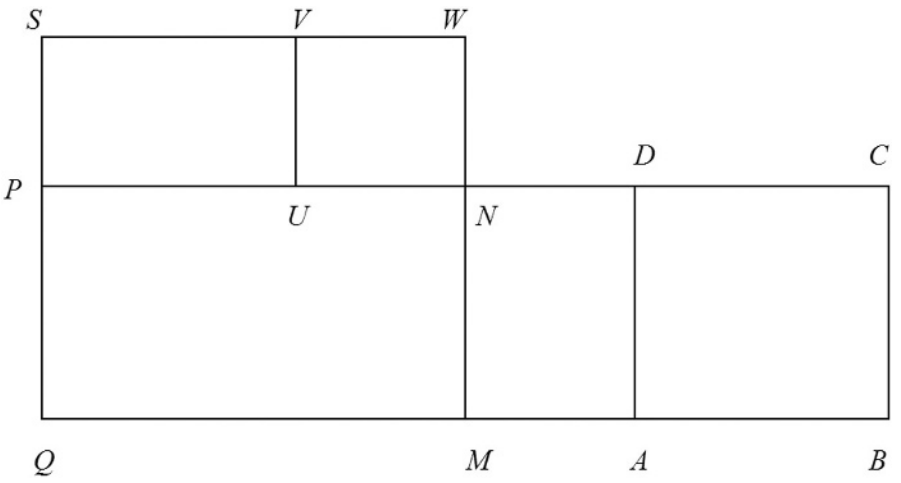
Nun sagt al-Ḫwārizmī, daß die andere Wurzel $\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ ist.

Auf ähnliche Weise löst er die Typen IV und VI. Für jeden Typ gibt er die Lösungsmenge in Worten an und beweist seine Aussagen geometrisch. Al-Ḫwārizmīs Verfahren wurde von allen bis heute bekannten Mathematikern der islamischen Länder wie Abū Kāmil, al-Karaǧī und ʿUmar Ḫayyām bis zu

[2] Alexander Grothendieck, geb. 1928 in Berlin, arbeitete auf dem Gebiet der algebraischen Geometrie und der Funktionalanalysis. Grothendieck erhielt im Jahre 1966 für seine Beiträge zur algebraischen Geometrie auf dem internationalen Mathematikerkongress in Moskau die Fields-Medaille, den „Nobelpreis" für Mathematik.

[3] Nathan Altshiller Court (1881–1968), Geometer

[4] übersetzt: „Es sagte ein junger Mann namens A. Grothendiek: In Geometrie bin ich ziemlich schwach. Ich bin nicht Altshiller Court. Es ist nicht grade meine Stärke, so habe ich mich mehr mit Algebra beschäftigt."



$QBCP$ ist ein Rechteck mit $QB = p$ — $DCBA$ ist ein Quadrat mit $AB = x$

$QM = \frac{p}{2}$; MN steht senkrecht auf QB

$UVWN$ ist ein Quadrat mit $UN = \frac{p}{2} - x$

Abb. 3.3.11. Figur zur Lösung quadratischer Gleichungen nach al-Ḫwārizmī

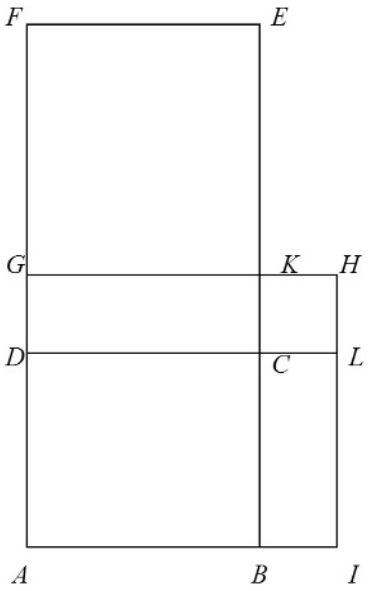
Bahāʾad-Dīn al-ʿĀmilī (1547–1622) exakt oder ähnlich wiederholt. Seine Algebra hatte im Abendland Auswirkungen u. a. auf die Werke von Leonardo Fibonacci (ca. 1170–1240) und Girolamo Cardano (1501–1576), der ihn zu Beginn seiner Algebra würdigt mit den Worten: „Diese Kunst geht zurück auf Muḥammad Ibn Mūsā al-Ḫwārizmī“.

Abū Kāmil

Die Algebra von al-Ḫwārizmī diente dem Mathematiker Abū Kāmil (Suǧā ibn Aslam al-Miṣrī (850–930)) als Vorlage für sein algebraisches Werk „Kitāb al-ǧabr wa-l-muqābala“[Abū Kāmil], in dem er auch für die Beweise seiner Regeln Geometrie verwendete. Dabei stützte er sich ausdrücklich im Gegensatz zu seinem Vorgänger unmittelbar auf die Sätze II 5 und 6 der Elemente von Euklid und gab auch für die Typen IV,V,VI eine Regel für die Berechnung von x^2.

Um dieses Verfahren mit der Methode von al-Ḫwārizmī zu vergleichen, geben wir den Beweis von Abū Kāmil für die Lösungen des Typs $x^2 + q = px$ an.

Sei $(\frac{p}{2})^2 > q$. Auch Abū Kāmil erklärt, wenn $(\frac{p}{2})^2 < q$, dann ist die Lösung der Aufgabe nicht möglich. Im Falle $x^2 < q$ (oder äquivalent: $x < \frac{p}{2}$, weil $x^2 < q \Leftrightarrow 2x^2 < q + x^2 \Leftrightarrow 2x^2 < px \Leftrightarrow x < \frac{p}{2}$ für positive x) betrachtet er die Abbildung 3.3.12.



$ABCD$ ist ein Quadrat mit $AB = x$
$DCEF$ ist ein Rechteck mit Flächeninhalt q
G ist der Mittelpunkt von AF
$AIHG$ ist ein Quadrat.

Abb. 3.3.12. Figur zur Lösung quadratischer Gleichungen nach Abū Kāmil.

In dieser Abbildung haben wir $DA \cdot x = x^2 < q =$DC $\cdot DF = x \cdot DF$, also $DA < DF$; und aus Euklid Elemente II, 5[5], folgt

$$AD \cdot DF + (DG)^2 = (AG)^2 \quad . \tag{3.3.1}$$

Wir haben
$px = x^2 + q = \mu(ABCD) \quad + \mu(DCEF) = \mu(ABEF) = x \cdot AF$, also $AF = p$ und

$$GF = AG = \frac{p}{2} \quad . \tag{3.3.2}$$

Es folgt aus (3.3.1) und (3.3.2): $q + (\frac{p}{2} - x)^2 = (\frac{p}{2})^2$, also $\frac{p}{2} - x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ und $x = \frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$; also ist die Lösungsformel in diesem Fall bewiesen. Ähnlich betrachtet Abū Kāmil den Fall $x > \frac{p}{2}$ und erhält die andere Lösung

[5] „Teilt man eine Strecke sowohl in gleiche als auch in ungleiche Abschnitte, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über der Strecke zwischen den Teilpunkten dem Quadrat über der Hälfte gleich.“ [Euklid , S. 36]

$x = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$. Er erklärt, daß im Falle $(\frac{p}{2})^2 = q$ die einzige Lösung der Aufgabe $x = \frac{p}{2}$ ist. Abū Kāmil sagt weiter, daß die Lösung $x = \frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ bzw. $x = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ durch „Hinzufügung“ bzw. „Verminderung“ erhalten wird, und erklärt seine Regeln am Beispiel $x^2 + 21 = 10x$. Dieses Beispiel ist in einer arabischen Handschrift in Abb. 3.3.13 zu sehen; sie enthält auch die Regel für die Berechnung von x^2.

Durch die Gegenüberstellung der algebraischen Lösung mit dem geometrischen Beweis zeigt Abū Kāmil anschaulich, daß beide Wege zum gleichen Ergebnis führen.

Vergleich von al-Ḫwārizmī und Abū Kāmil

Abū Kāmil kannte die „Algebra“ seines Vorgängers al-Ḫwārizmī und entwickelte die darin niedergeschriebenen Kenntnisse auf einer höheren Ebene weiter, was durch folgende Angaben deutlich wird:

I) Die Koeffizienten oder die Wurzeln von Gleichungen konnten bei Abū Kāmil rational oder irrational sein; Al-Ḫwārizmī wählte die Koeffizienten nie als irrationale Zahlen und benutzte selten irrationale Zahlen als Wurzeln von Gleichungen.

II) Abū Kāmil benutzte in einer eingehenderen Weise als al-Ḫwārizmī rein algebraische Gleichungen für seine Lösung der geometrischen Probleme und entwickelte deshalb den vorher erwähnten Wandel der Geometrie zur Algebra.

Als Beispiel für I und II: *„Wenn dir gesagt wird, in einem gleichseitigen und gleichwinkligen Dreieck, die Summe seines Flächeninhaltes und seiner Höhe ist 10, wieviel ist seine Höhe?“* [Abū Kāmil, S. 147]

In moderner Schreibweise löst er dieses Problem wie folgt: Sei x die Höhe, dann ist der Flächeninhalt gleich $\frac{x^2}{\sqrt{3}}$. Deshalb erhalten wir $\frac{x^2}{\sqrt{3}} + x = 10$, also $x^2 + \sqrt{3}x = \sqrt{300}$. Daraus folgt

$$x = -\sqrt{\tfrac{3}{4}} + \sqrt{\tfrac{3}{4} + \sqrt{300}}.$$

In diesem Beispiel sind die Koeffizienten und die Wurzeln irrational. Es ist auch wichtig zu bemerken, daß Abū Kāmil ohne Betrachtung der Dimensionstreue den Ausdruck $\frac{x^2}{\sqrt{3}} + x$ schreibt, wobei $\frac{x^2}{\sqrt{3}}$ ein Flächeninhalt und x eine Länge ist[6].

Der nachfolgende Algebraiker al-Karaǧī hat die Formeln für die Wurzeln der quadratischen Gleichung in der Normalform durch quadratische Ergänzung, im Gegensatz zu al-Ḫwārizmī, rein rechnerisch hergeleitet.

[6] vgl. die Diskussion am Ende von 2.2, Babylonische Algebra, Quadratische Gleichungen



Abb. 3.3.13. Auszug aus Kitāb al-ǧabr wa-l-muqābala von Abū Kāmil
[Handschrift Kara Mustafa Paša 379]

3.3.5 Arithmetisierung der Algebra

Al-Karaǧī

Der persische Mathematiker al-Karaǧī hat auf der Grundlage der algebraischen Werke von al-Ḫwārizmī und Abū Kāmil und in Anlehnung an die „Arithmetika“ von Diophant die Algebra als eine eigenständige Disziplin entwickelt, indem er sich nach und nach von der geometrischen Beweisführung seiner Vorgänger abwandte und als erster das Ziel der Algebra als die Bestimmung der unbekannten Größen durch die bekannten definierte. Diese Definition blieb bis zum Anfang des 19. Jhs. gültig und wird als die Arithmetisierung der Algebra bezeichnet [Brentjes 1990, S. 240f.].

Von al-Karaǧī existieren drei Werke: ein arithmetisches, „al-Kāfī fi l-ḥisāb“ (Genügendes über das Rechnen), ein praktisches Werk für Staatsbeamte und Kaufleute sowie die beiden algebraischen Werke „al-Badīʿfi l-ḥisāb“ (Wunderbares über die Arithmetik; enthält überwiegend unbestimmte Gleichungen) und sein zweiteiliges Werk „al-Faḫrī fi (ṣināʿat a) l-ǧabr wa-l-muqābala“, das er dem Wesir Faḫr al-Mulk von Bagdad widmete und von dessen Namen sich auch der Titel ableitet. Im ersten Teil hat sich al-Karaǧī mit Theorie und Beispielen befaßt, der zweite Teil besteht zum größten Teil aus unbestimmten Gleichungen, die Diophant und Abū Kāmil entlehnt sind. Von einem der verschollenen Werke dieses Gelehrten, das von As-Samawʾal (s. u.) überliefert worden ist, weiß man, daß in ihm erstmals die Beschreibung eines arithmetischen (Pascalschen) Dreiecks zu finden ist. Al-Karaǧī formulierte das Potenzgesetz (in moderner Schreibweise)

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \text{ (m, n ganze Zahlen)}$$

für die Fälle m und n beide positiv oder beide negativ in Worten.
Die Eigenschaften der Polynome stellte er insbesondere durch die Division der Polynome durch Monome fest, wie z. B. bei

$$\left(10x^2 + 10x^3\right) : 5x = 2x + 2x^2.$$

In „al-Faḫrī“ summiert er mehrere endliche arithmetische Reihen, und außerdem gibt er (in moderner Schreibweise) den interessanten algebraisch-geometrischen Beweis für die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.3.3}$$

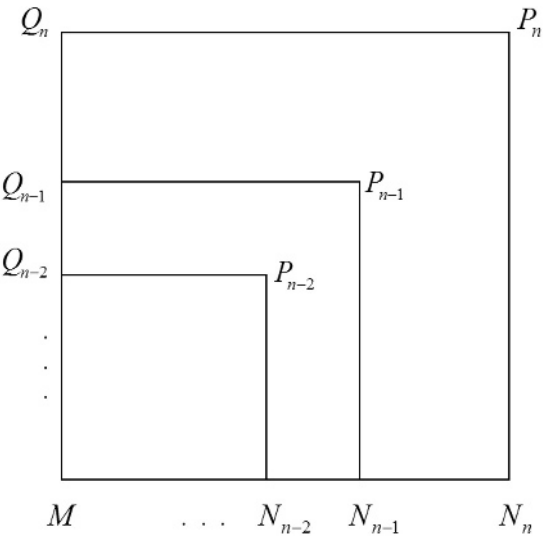


Abb. 3.3.14. Figur zum Beweis der Summenformel (3.3.3)

Al-Karaǧī betrachtet die Quadrate $MN_nP_nQ_n$ $(n \in \mathbb{N})$ mit

$$MN_n = \sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{n(n+1)}{2} \text{ und } \mu(MN_nP_nQ_n) = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$$

und die „Gnomone“ $N_{n-1}N_nP_nQ_nQ_{n-1}P_{n-1} = \Gamma_n$ mit dem Flächeninhalt

$$\mu(\Gamma_n) = 2 \cdot n \cdot \sum_{k=1}^{n} k - n^2 = 2n\tfrac{(n+1)n}{2} - n^2 = n^3.$$

Nun ist die Summe der Flächeninhalte der Gnomone Γ_n gleich dem Flächeninhalt des Quadrates $MN_nP_nQ_n$, also $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$.

As-Samawʾal

Der in Bagdad geborene As-Samawʾal (gest. 1175 in Maraga), Sohn eines marokkanischen Dichters und einer gebildeten Irakerin, wirkte in seiner Geburtsstadt als Mathematiker und Arzt. Er wurde schon in jungen Jahren mit den Rechenweisen der Inder bekannt und schrieb bereits mit 19 Jahren sein wichtigstes mathematisches Werk „al-Bāhir fī al-ǧabr (Leuchtendes über Algebra)“ [Peiffer/Dahan-Dalmedico, S. 87]. Zum Studium von Euklids Elementen war es ihm nicht möglich, einen befähigten Lehrer zu finden; so tief war das mathematische Niveau zu dieser Zeit in Bagdad gesunken. Also war er auf das Selbststudium mathematischer Lektüre angewiesen. Außer mit den schon erwähnten Elementen befaßte er sich mit Werken von Abū Kāmil und von al-Karaǧī. Sein besonderes Interesse widmete er der Algebra und Arithmetik.

As-Samawʾal hat das Potenzgesetz

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

auf ganze Zahlen für m und n ohne die oben genannte Einschränkung erweitert. Er betrachtete auch Ausdrücke wie

$$\sum_{-l \le n \le k} a_n x^n,$$

wobei l und k nicht negative ganze Zahlen sind, und die Division von Polynomen durch Polynome, die nicht notwendig Monome (wie bei al-Karaǧī) sind, z. B. $20x^2 + 30x$ dividiert durch $6x^2 + 12$. Für diesen Quotienten gilt für $|x| > \sqrt{2}$ die Darstellung

$$\begin{aligned}&\tfrac{20x^2+30x}{6x^2+12} = 3\tfrac{1}{3} + 5 \cdot \tfrac{1}{x} - 6\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{x^2} - 10 \cdot \tfrac{1}{x^3} + 13\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{x^4} + 20 \cdot \tfrac{1}{x^5}\\ &-26\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{x^6} - 40 \cdot \tfrac{1}{x^7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n},\end{aligned}$$

mit $a_0 = 3\frac{1}{3}$, $a_1 = 5$ und $a_{n+2} = -2a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. As-Samawʾal gibt an, daß der Quotient $\frac{20x^2+30x}{6x^2+12}$ eine Approximation der Form

$$3\tfrac{1}{3} + 5 \cdot \tfrac{1}{x} - 6\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{x^2} + \cdots - 40 \cdot \tfrac{1}{x^7}$$

besitzt.

As-Samawʾal hat auch Gleichungen der Form $x^n - a = 0$ untersucht und konnte die n-te Wurzel einer positiven rationalen Zahl a im Prinzip mit beliebiger Genauigkeit berechnen.

3.3.6 Die (geometrische) Theorie von ʿUmar Ḫayyām für die Gleichungen dritten Grades

Um 1074 schrieb der persische, in Nischabur geborene Astronom, Philosoph, Dichter und Mathematiker ʿUmar Ḫayyām sein Buch „Risāla fī-l-barāhīn ʿalā masāʾil al-ǧabr wa-l-muqābala“ („Über die Beweise für die Aufgaben der Algebra und al-muqābala“) Er war Leiter des Observatoriums in Isfahan und entwickelte einen sehr präzisen Sonnenkalender.

Bereits 200 Jahre vor ʿUmar Ḫayyām beschäftigten sich die Mathematiker der islamischen Länder mit Gleichungen dritten Grades, indem sie insbesondere die speziellen Probleme der Griechen zu lösen versuchten (s. Abschnitt 2.4.1 und 2.4.2).

Für ʿUmar Ḫayyām ist Algebra die Lehre vom Auflösen der Gleichungen. In seinem Werk – wie bei seinen Vorgängern ohne Formelsprache – klassifizierte er zunächst die Gleichungen dritten Grades, dann konstruierte er geometrisch



Abb. 3.3.15. Grabmal des ᶜUmar Ḫayyām in Nischabur
[Foto: Alten]

die Wurzeln der betrachteten Gleichungen, und zuletzt bestimmte er Bedingungen für die Existenz positiver Lösungen. Er untersuchte Gleichungen bis einschließlich dritten Grades.

Ḫayyāms Behandlung der Gleichungen dritten Grades ist als großer Fortschritt in der Entwicklung der Algebra anzusehen. Gleichungen dritten Grades, deren Wurzeln verschieden von Null sind, teilte er in vierzehn Fälle ein und untersuchte sie ausführlich; dabei betrachtete er nur die positiven Lösungen für $\alpha, \beta, \gamma > 0$:

(A) Eine Form mit zwei Gliedern : $x^3 = \alpha$;

(B) Sechs Formen mit drei Gliedern :

$$(B_1)\quad x^3 + \alpha x = \beta; \qquad (B_2)\quad x^3 + \alpha = \beta x; \qquad (B_3)\quad x^3 = \alpha x + \beta;$$
$$(B_4)\quad x^3 + \alpha x^2 = \beta; \qquad (B_5)\quad x^3 + \alpha = \beta x^2; \qquad (B_6)\quad x^3 = \alpha x^2 + \beta;$$

(C) Sieben Formen mit vier Gliedern:

$$(C_1)\quad x^3 + \alpha x^2 + \beta x = \gamma; \qquad (C_2)\quad x^3 + \beta x + \gamma = \alpha x^2;$$
$$(C_3)\quad x^3 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma; \qquad (C_4)\quad x^3 + \alpha x^2 + \gamma = \beta x;$$
$$(C_5)\quad x^3 + \alpha x^2 = \beta x + \gamma; \qquad (C_6)\quad x^3 + \beta x = \alpha x^2 + \gamma;$$
$$(C_7)\quad x^3 + \gamma = \alpha x^2 + \beta x.$$

Die geometrische Methode zur Bestimmung der Lösung von (A) mit Hilfe zweier Kegelschnitte ist ähnlich der von Menaichmos (s. Abschn. (2.4.5)), wobei Ḫayyām den Schnittpunkt zweier Parabeln benutzt.

Einige der Fälle von (B) und (C) sollen nach Ḫayyāms Vorschrift in heutiger Sprache dargestellt werden.

$(B_1) : x^3 + \alpha x = \beta$

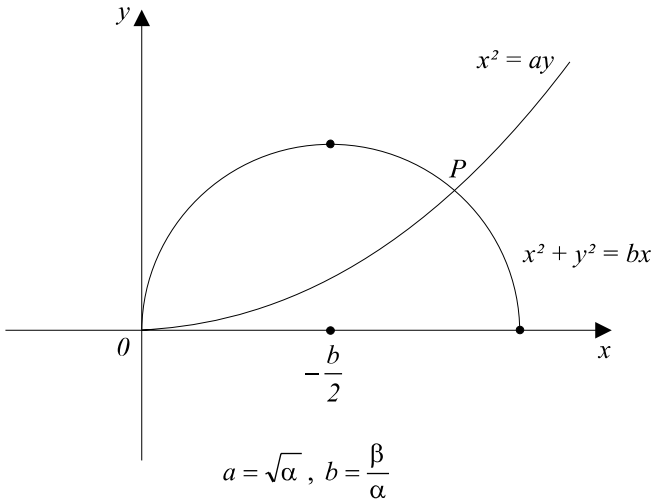
Ḫayyām beschreibt (B_1) in der Form $x^3 + a^2 x = a^2 b$ mit $a > 0, b > 0$ also in „dimensionstreuer“ Form. Um diese Form zu begründen, löst er zuvor folgende Aufgabe:

Gegeben sei ein Quader mit der quadratischen Grundfläche k^2 und der Höhe d. Ebenfalls sei ein anderes Quadrat b^2 gegeben. Konstruiere einen Quader auf dem zweiten Quadrat gleich dem ersten Quader.

Ḫayyām konstruiert geometrisch die Strecke h so, daß $b^2 h = k^2 d$ ist, indem mit Hilfe des Strahlensatzes zunächst eine Strecke s so bestimmt wird, daß $k : b = b : s$ ist und dann h so, daß $k : s = b : d$.

Er schreibt in der Gleichung (B_1) a^2 anstelle von α (wegen des Homogenitätsprinzips), und nach der obigen Vorschrift konstruiert er die Strecke b so, daß $\beta = a^2 b$ ist.

Nun betrachtet er den Kreis $x^2 + y^2 = bx$ und die Parabel $x^2 = ay$.



Die x-Koordinate von P ist die positive Wurzel der Gleichung $x^3 + \alpha x = \beta$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$

Abb. 3.3.16. Lösung einer kubischen Gleichung mit Kegelschnitten

Die Lösung der Gleichung (B_1) ist die x-Koordinate des Schnittpunktes der beiden Kegelschnitte, denn aus $x^2 = ay$ folgt $x^2 + (\frac{x^2}{a})^2 = bx$ und (wegen $x > 0$) $x^3 + a^2x = a^2b$ (Abb. 3.3.16).

Damit ist die Gleichung geometrisch gelöst und ihre positive Lösung als Strecke bestimmt. Diese Gleichung besitzt nach der Cardanischen Formel außer dieser reellen positiven Wurzel auch zwei komplexe Wurzeln, die jedoch von Ḫayyām nicht betrachtet wurden.

$(B_5) : x^3 + \alpha = \beta x^2$

Diese Gleichung wurde bereits in 2.4.1 untersucht und am Ende des Abschnittes erwähnt, wie ᶜUmar Ḫayyām sie behandelte.

In C gibt es 4 Formen mit einem Trinom auf einer Seite und einem Monom auf der anderen Seite und 3 Formen mit Binomen auf beiden Seiten.

Hier soll die Gleichung (C_6) erörtert werden:

$(C_6) : x^3 + \beta x = \alpha x^2 + \gamma$

In diesem Fall bestimmt ᶜUmar Ḫayyām eine Lösung mit Hilfe des Schnittpunktes eines Kreises und einer Hyperbel. Seine Untersuchung ist korrekt, aber er hat nur *eine* positive Wurzel in Betracht gezogen und nicht beachtet, daß zwei weitere positive Lösungen auftreten können. Die beiden Kurven schneiden sich immer in mindestens einem Punkt mit positiver Abszisse, verschieden von $\frac{\gamma}{\beta}$. Ḫayyām unterscheidet drei Fälle:

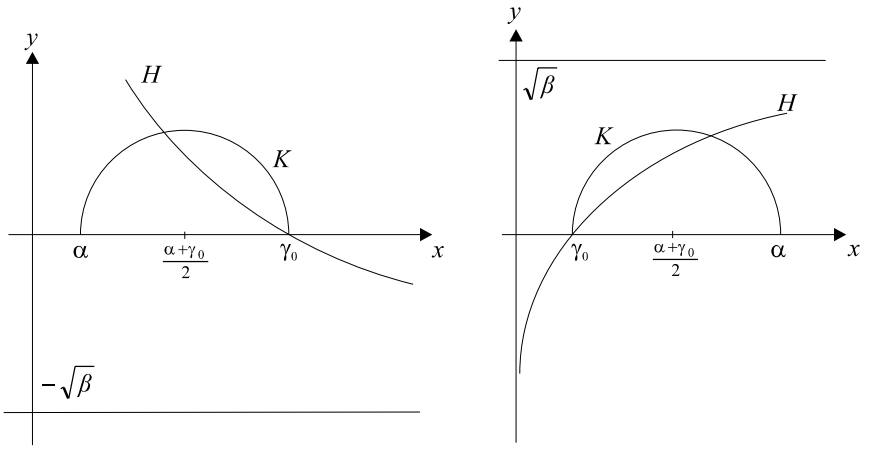


Abb. 3.3.17. Geometrische Lösung kubischer Gleichungen

Fall a) $\alpha < \frac{\gamma}{\beta}$: Der Kreis und die Hyperbel mit den Gleichungen $y^2 = (x-\alpha)(\frac{\gamma}{\beta}-x)$ bzw. $y = \sqrt{\beta}\frac{\frac{\gamma}{\beta}-x}{x}$ werden betrachtet. Im Schnittpunkt haben beide Kurven gleiche Ordinaten. Für deren Quadrate gilt:

$$\beta\frac{(\frac{\gamma}{\beta}-x)^2}{x^2} = (x-\alpha)(\frac{\gamma}{\beta}-x).$$

Für $x \neq \frac{\gamma}{\beta}$ folgt $x^3 + \beta x = \alpha x^2 + \gamma$.

In diesem Fall besitzt die Gleichung genau eine positive Wurzel.

Fall b) $\alpha > \frac{\gamma}{\beta}$: Betrachtet werden die Hyperbel und der Kreis mit den Gleichungen

$$y = \sqrt{\beta}\frac{x-\frac{\gamma}{\beta}}{x} \quad , \quad y^2 = (x-\alpha)(\frac{\gamma}{\beta}-x).$$

Daraus folgt wie im Fall a) die Gleichung (C_6).

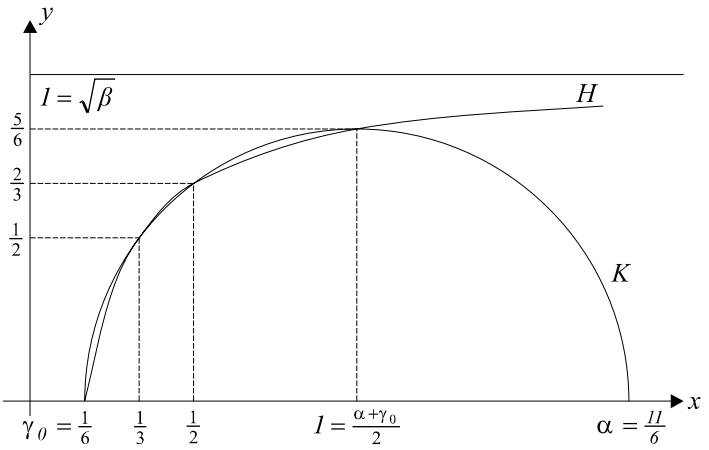
Ebenso wie bei Fall a) schneiden sich die beiden Kegelschnitte in einem Punkt mit positiver Abszisse verschieden von $\frac{\gamma}{\beta}$ **.** Doch können jetzt noch ein oder zwei weitere Schnittpunkte mit positiver Abszisse $x \neq \frac{\gamma}{\beta}$ auftreten, d. h. die Gleichung (C_6) kann jetzt genau eine positive Wurzel und zwei komplexe Wurzeln, drei verschiedene positive Wurzeln oder nur positive Wurzeln mit einer doppelten Wurzel besitzen.

Fall c) ist trivial: Wenn $\alpha = \frac{\gamma}{\beta}$, dann entartet der Kreis $\gamma_0 := \frac{\gamma}{\beta}$ zum Punkt $(x, y) = (\frac{\gamma}{\beta}, 0)$, und durch diesen Punkt geht auch die Hyperbel.

Warum es für Ḥayyām so schwierig war, die möglicherweise drei verschiedenen positiven Wurzeln zeichnerisch zu entdecken, zeigt sein folgendes Beispiel:

Durch Zeichnen von Kreis und Hyperbel für die Gleichung

$$x^3 + x = \tfrac{11}{6}x^2 + \tfrac{1}{6}$$



$S_0 = (\frac{1}{6}, 0)$ liegt zwar auf beiden Kurven, ist aber keine Lösung von C_6.
Die Abzissen der Schnittpunkte $S_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $S_2 = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, $S_3 = (1, \frac{5}{6})$
sind die drei Wurzeln von $x^3 + x = \frac{11}{6}x^2 + \frac{1}{6}$.

Abb. 3.3.18. Lösung einer kubischen Gleichung mit drei positiven Wurzeln

wird gezeigt, daß K und H drei Schnittpunkte mit positiven Abszissen (verschieden von $\frac{1}{6}$) besitzen, nämlich die Abszissen 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.
Es ist $\alpha = \frac{11}{6} > \frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{6}$ (Fall b);
K: $y^2 = (x - \frac{11}{6})(\frac{1}{6} - x) = -(x-1)^2 + \frac{25}{36} \Rightarrow y^2 + (x-1)^2 = \frac{25}{36}$,
H: $y = \sqrt{1}\frac{x-\frac{1}{6}}{x} \Rightarrow y = \frac{6x-1}{6x}$.
Mit Hilfe der Kegelschnitte gelang Ḥayyām eine geometrische Theorie zur Lösung kubischer Gleichungen. Dabei benutzte er bevorzugt den Kreis und gleichseitige Hyperbeln. Die Symmetrieachsen der verwendeten Hyperbeln und deren Asymptoten verlaufen in den hier behandelten Fällen parallel zu den Koordinatenachsen (in unserem Sinn). Ḥayyām gab offen zu, daß er kubische Gleichungen nicht in Radikalen (in unserer Sprechweise) lösen konnte und hoffte, daß seine Nachfolger einmal in der Lage dazu sein würden. Einen ersten Fortschritt brachten die Bemühungen von Šaraf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī. Die Bewältigung dieser Problematik gelang aber erst italienischen Mathematikern, insbesondere Scipione del Ferro, Niccolò Tartaglia, Girolamo Cardano und Rafael Bombelli (vgl. Abschn. 5.1).

3.3.7 Eine Abhandlung von Ḥayyām über Algebra

Eine kleine Handschrift von Ḥayyām, ohne Titel überliefert, wird in der zentralen Bibliothek der Universität von Teheran aufbewahrt (Abb. 3.3.20).
Diese Handschrift, bestehend aus zwei Kapiteln, wurde früher verfaßt als das in 3.3.6 genannte Werk „Über die Beweise für die Aufgaben der Algebra und al-muqābala“. Das erste Kapitel behandelt die Lösung folgenden Problems:

Man soll einen Punkt G auf dem Viertelbogen des Kreises $ABCD$ mit $G \neq A, B$ so konstruieren, daß das Verhältnis $OA : GH = OH : HB$ erfüllt ist, wobei GH senkrecht auf BD ist (Abb. 3.3.19).

Dieses Problem führt Ḫayyām auf die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks OGF zurück, so daß $OG + GH = OF$ ist, wobei F der Schnittpunkt des Durchmessers DB mit der Tangente im Punkt G des Kreises ist. Das letzte Problem führt Ḫayyām auf die folgende kubische Gleichung zurück, wobei $GH = x$ und $OH = \mu$ gesetzt wird.

Dann gilt:

$$\sqrt{x^2 + \mu^2} + x = \mu + \frac{x^2}{\mu} \Rightarrow x^3 + 2\mu^2 x = 2\mu x^2 + 2\mu^3.$$

Ḫayyām wählt den speziellen Wert $\mu = 10$, erhält

$$x^3 + 200x = 20x^2 + 2000 \tag{3.3.4}$$

und macht in der Abhandlung deutlich, daß sein Beweis unabhängig vom Wert 10 ist.

Es gibt genau ein positives x, das dieser Gleichung genügt, und dieses ist die Abszisse des Schnittpunktes P der Hyperbel $y = 10\sqrt{2}\frac{x-10}{x}$ und des Kreises $y^2 = (x - 10)(20 - x)$.

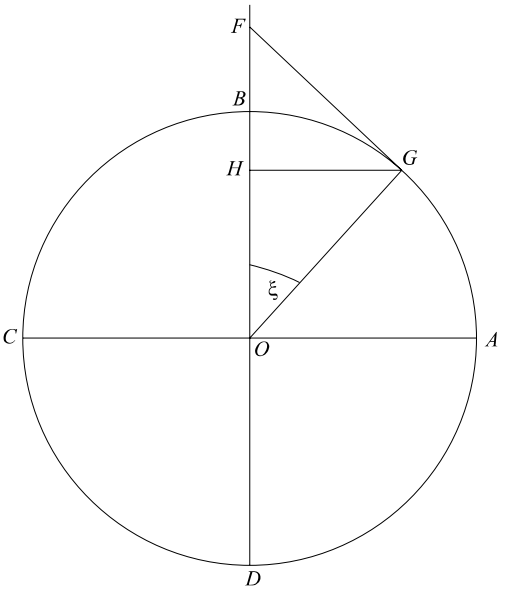


Abb. 3.3.19. Figur zum Problem von ᶜUmar Ḫayyām

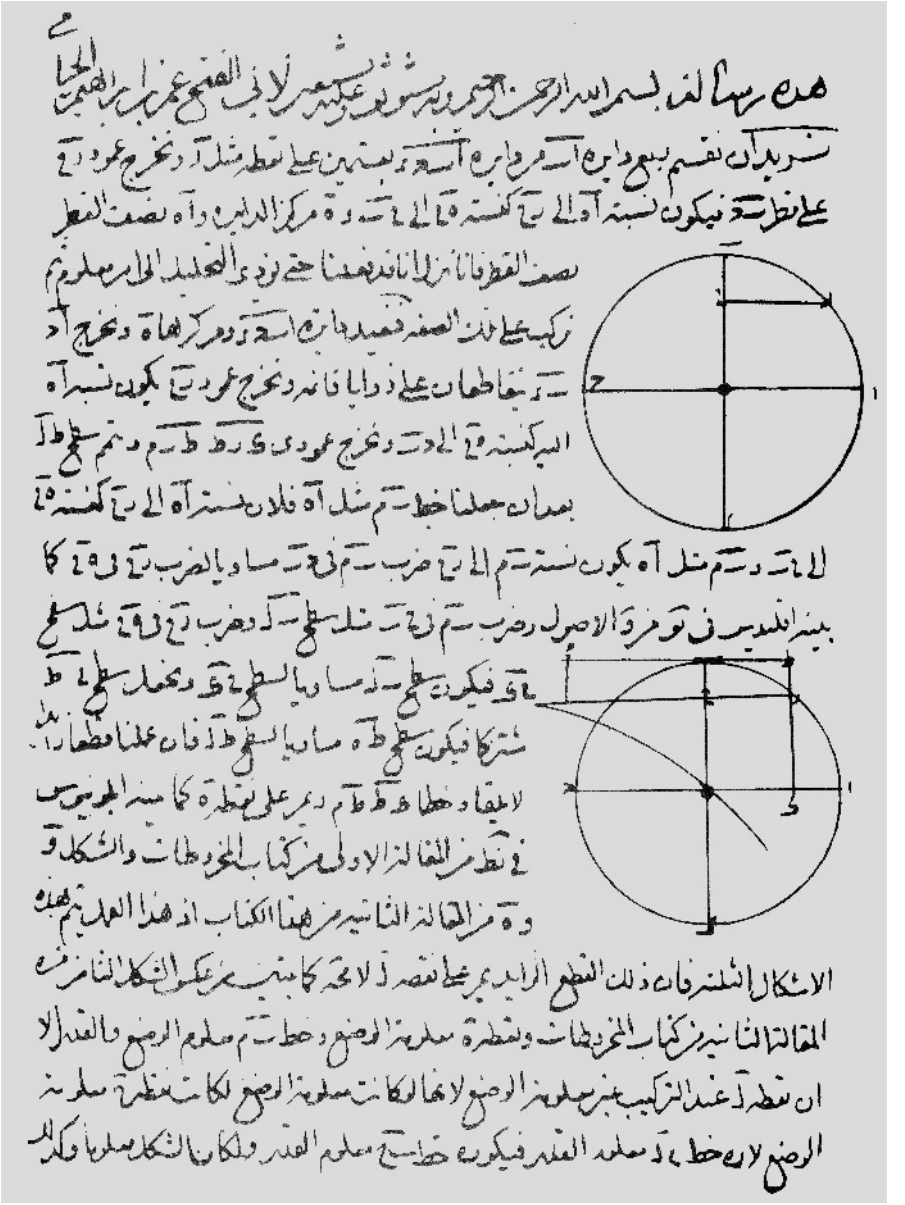
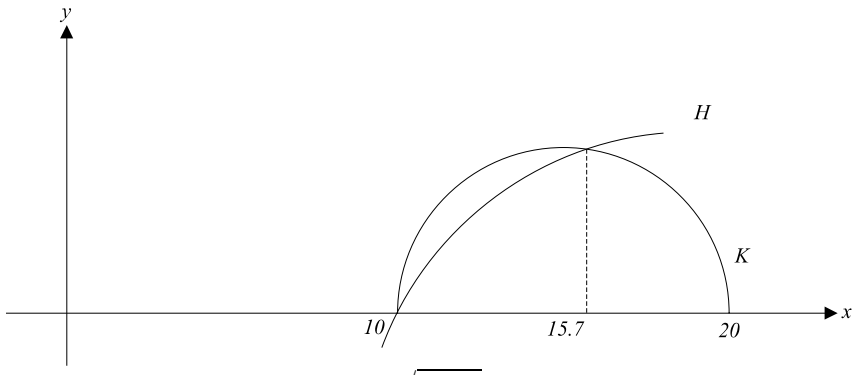


Abb. 3.3.20. Kleine Handschrift von ᶜUmar Ḫayyām
[Zentralbibliothek der Universität Teheran]



$$H : y = 10\sqrt{2\tfrac{x-10}{x}}\ (\mu - 10)$$
$$K : y = \{(x-10)(20-x)\}^{\frac{1}{2}}\ (\mu = 10)$$

Abb. 3.3.21. Lösung einer kubischen Gleichung mit Kegelschnitten

Jetzt geht Ḥayyām auf das erste Problem zurück und will eine Näherungslösung für den Winkel $\xi = \angle GOH$ (Abb. 3.3.19) finden, indem er das Verhältnis $OA : GH = OH : HB$ mit Hilfe trigonometrischer Funktionen in die Form

$$\frac{1}{\sin\xi} = \frac{\cos\xi}{1-\cos\xi} \tag{3.3.5}$$

überführt. Diese Gleichung wird näherungsweise erfüllt durch $\sin\xi \approx \frac{50}{60}$ oder $\xi \approx 57°$.

Ḥayyām bemerkt, daß er diese Nährungswerte durch Probieren und Interpolieren, wie bei der Aufstellung der Sinus-Tabellen, gefunden hat.

Mit dem Wert $x \approx 15.7$ aus Abb. 3.3.21 folgt dann $\tan\xi = \frac{x}{10} \approx \frac{15.7}{10}$, also $\xi \approx 57°30'$.

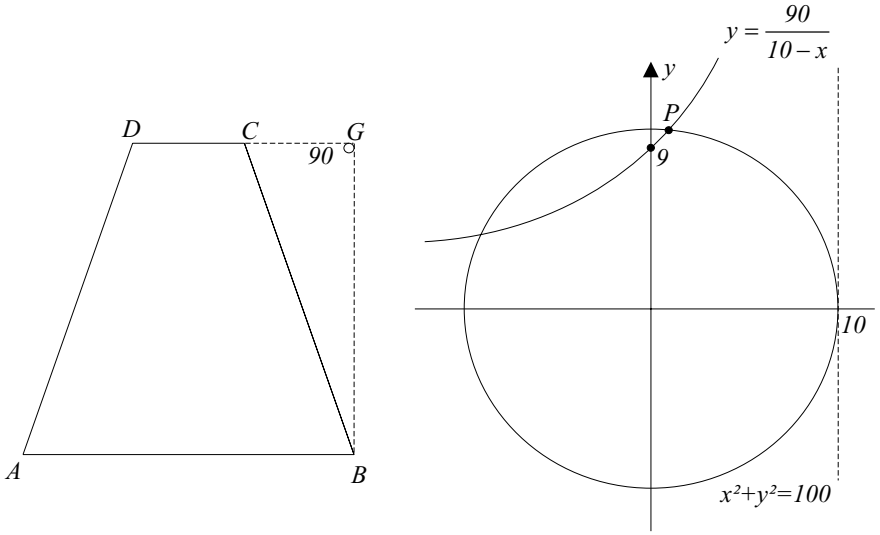
3.3.8 Gleichungen vierten Grades

Die Mathematiker in den islamischen Ländern haben sich in dem betrachteten Zeitraum auch mit der geometrischen Auflösung einiger Gleichungen vierten Grades beschäftigt, auf die sie bei gewissen geometrischen Problemen stießen.

In einer anonymen Handschrift wird eine Aufgabe behandelt, mit der sich die Algebraiker und Geometer dieser Zeit eine Weile beschäftigten, ohne sie lösen zu können [Woepcke 1861]. Sie lautet:

Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit dem Flächeninhalt 90,

$AB = AD = BC = 10$ und $CD < 10$, vgl. Abb. 3.3.22.



$$AB = AD = BC = 10 \; CG = x$$
BG ist ein Lot auf der Verlängerung von DC: $0 < x < 10$
$$BG = \sqrt{100 - x^2}$$

Abb. 3.3.22. Geometrische Lösung einer Gleichung vierten Grades

Wir nehmen an, $ABCD$ sei ein solches Trapez (Abb. 3.3.22). Mit $CG = x$, $0 < x < 10$ erhält man $90 = \sqrt{100 - x^2}\frac{10+(10-2x)}{2}$ und daraus für $x \neq 10$

$$\frac{90}{10 - x} = \sqrt{100 - x^2} \quad . \tag{3.3.6}$$

Also kann x als die positive Abszisse eines Schnittpunktes P des Kreises K: $x^2 + y^2 = 100$ und der Hyperbel H: $y = \frac{90}{10-x}$ bestimmt werden. Die Aufgabe hat deshalb genau eine Lösung (Abb. 3.3.22). Umformung von (3.3.6) führt auf die Gleichung vierten Grades

$$20x^3 + 1900 = x^4 + 2000x.$$

Der Verfasser der anonymen Handschrift konnte diese Gleichung nicht algebraisch lösen. Es ist geometrisch klar, daß sie genau eine Wurzel $0 < x < 10$ besitzt.

Die Westaraber beschäftigten sich nicht mit der geometrischen Theorie der Gleichungen. Im 17. Jh. haben sich die Europäer, u. a. Descartes, eingehend damit auseinandergesetzt.

3.3.9 Numerische Auflösung algebraischer Gleichungen

a) Radizieren mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes und des „Horner-Schemas“

Die Mathematiker der islamischen Länder haben sich sehr intensiv um die numerische Lösung der Gleichung $x^n = \alpha$, also die Berechnung der Wurzel $x = \sqrt[n]{\alpha}$, bemüht.

Das Ausziehen einer Kubikwurzel nach der chinesischen Methode, die der heutigen Horner-Methode ähnelt, behandelt zum ersten Mal an-Nasawī (gest. etwa 1030).

Auch sollen Abū l-Wafā’ (940–997/98), al-Bīrūnī (973 - 1048) und ʿUmar Ḫayyām Werke über das Ausziehen von Wurzeln höherer Exponenten verfaßt haben, die jedoch nicht erhalten geblieben sind [Juschkewitsch S. 242].

In der „Gawāmiʿal-ḥisāb bi-t-taḫt wa-t-turāb“ („Sammlung zur Arithmetik mit Hilfe von Brett und Staub“) von Naṣīr ad- Dīn aṭ-Ṭūsī , geschrieben etwa 1265, ist die erste Erläuterung eines allgemeinen Verfahrens für das Wurzelziehen enthalten. Dieser vielseitig gebildete Gelehrte wurde 1201 in Chorasan geboren und starb 1274 während einer Reise nach Bagdad. In seiner Geburtsstadt erhielt er seine erste Ausbildung durch seinen Vater, einen schiitischen Juristen, und einen Bruder seiner Mutter, u. a. in Logik und Naturphilosophie und studierte außerdem Algebra und Geometrie. Er vervollkommnete seine Ausbildung in Nischabur, einem bedeutenden geistigen und kulturellen Zentrum. Etwa im Alter von 50 Jahren wurde er Hofastrologe unter dem Mongolenfürsten Hūlāgū-Khān, der für ihn in Maraga ein Observatorium errichten ließ und ihm die Leitung desselben übertrug. An dieser bedeutenden mathematisch-astronomischen Schule des islamischen Mittelalters wirkten Gelehrte aus Damaskus, Mossul, Kaswin und sogar chinesische Astronomen. Eines der Arbeitsergebnisse dieses wissenschaftlichen Zentrums waren Tabellen, die dem Khān zu Ehren als „Zīğ- Īlḫānī“ bezeichnet wurden.

Aṭ-Ṭūsī beschreibt im Abschnitt „Über die Bestimmung anderer Basen von Potenzen“ seines o.g. Werkes das Wurzelziehen ausführlich am Beispiel $\sqrt[6]{244\,140\,626}$.

Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī teilt die zu radizierende Zahl, angefangen von den Einern, in Perioden auf. Die Länge jeder Periode ist gleich dem Wurzelexponent bis auf die letzte Periode, deren Länge kleiner oder gleich dem Wurzelexponent ist. Im Beispiel ist der Wurzelexponent gleich 6 und die Länge der letzten Periode gleich 3 (Abb. 3.3.23).

Im Text setzt er fort:

„Wir suchen (mittels Probieren) die größte Zahl, deren entsprechende Potenz man von der letzten Periode (244) subtrahieren kann, also $244 - 2^6 = 180$.“

Mit Hilfe der binomischen Formeln entwickelt Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī

$$(10\alpha + u)^6 - (10\alpha)^6$$

in folgende Form:

$$\binom{6}{1}(10\alpha)^5 u + \binom{6}{2}(10\alpha)^4 u^2 + \binom{6}{3}(10\alpha)^3 u^3 + \binom{6}{4}(10\alpha)^2 u^4 + \binom{6}{5}(10\alpha) u^5 + \binom{6}{6} u^6 \,. \qquad (3.3.7)$$

Für $\alpha = 2$ berechnet er (3.3.7) mittels des Hornerschemas:

	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5
		2	8	24	64	160
	1	4	12	32	80	192
2		2	12	48	160	
	1	6	24	80	240	
2		2	16	80		
	1	8	40	160		
2		2	20			
	1	10	60			
2		2				
		12				
	1					

Jetzt kann der Ausdruck (3.3.7) wie folgt geschrieben werden:

$$\left(u^5 + 120u^4 + 6\,000u^3 + 160\,000u^2 + 2\,400\,000u + 19\,200\,000\right) u \qquad (3.3.8)$$

Aṭ-Ṭūsī berechnet das größte u, so daß der Ausdruck (3.3.8) kleiner oder gleich $244\,140\,626 - 2^6 \cdot 10^6 = 180\,140\,626$ ist.

Durch 6-maliges ($u = 1, 2, ..., 6$) Probieren - jedes Mal mit Hilfe des Hornerschemas – findet er für das größte u den Wert 5. Die fünf Versuche, die er am Ende nicht verwendete, wischte er ab. Deshalb heißt sein Werk *„Brett und Staub“*.

	1	120	6 000	160 000	2 400 000	19 200 000
5		5	625	33 125	965 625	16 828 125
	1	125	6 625	193 125	3 365 625	36 028 125

Also ist für $u = 5$ der Wert von (3.3.8): $5 \times 36\,028\,125$. Daraus folgt $180\,140\,626 - 5 \times 36\,028\,125 = 1$, d. h. $(25)^6 + 1 = 244\,140\,626$.

$\sqrt[6]{244,140626}$ | 25

64 | $(10\times 2+u)^6-(10\times 2)^6 \le 180140626$

180 | $u_{\max}=5$

180140626 | $(10\times 2+5)^6-(10\times 2)^6=\binom{6}{1}(10\times 2)^5 5+\binom{6}{2}(10\times 2)^4 5^2+$

180140625 | $\binom{6}{3}(10\times 2)^3 5^3+\binom{6}{4}(10\times 2)^2 5^4+\binom{6}{5}(10\times 2)\,5^5+5^6=6\times 3200000\times 5$

1 | $+15\times 160000\times 5^2+20\times 8000\times 5^3+15\times 400\times 5^4+6\times 20\times 5^5+5^6=$

$96000000+60000000+20000000+3750000+15625=180140625$

Es gibt zwei Vermutungen für den Ursprung dieser Methode, nämlich zunächst die, daß Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī das Wurzelziehen aus ʿUmar Ḫayyāms verlorengegangenem Werk *Schwierigkeiten der Arithmetik* erfahren hat. Die zweite Vermutung ist, daß er dieses Verfahren in seinem Observatorium in Maraga von den dort tätigen chinesischen Astronomen übernommen hat. Er selbst erhebt keinen Anspruch auf die Entdeckung dieser Methode. Später beschrieb al-Kāšī das gleiche Verfahren ausführlich in seinem Werk *Schlüssel zur Arithmetik* [Luckey 1951].

b) Näherungsverfahren für Wurzeln.

Wurzel der Gleichung $x^n = \alpha$

Wie schon erwähnt, konnten die Babylonier bereits um 1675 v. Chr. einen guten Näherungswert für $\sqrt{2}$ ermitteln, um die Diagonale eines Quadrats zu berechnen. Die Griechen benutzten für eine Quadratwurzel die Näherungsformel

$$\sqrt{a^2+r} \approx a + \frac{r}{2a} \quad .$$

Sie fand auch später in den islamischen Ländern Anwendung. Auch die Formel

$$\sqrt{a^2+r} \approx a + \frac{r}{2a+1}$$

wurde in viele Abhandlungen aufgenommen. Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī arbeitete mit der Näherungsformel



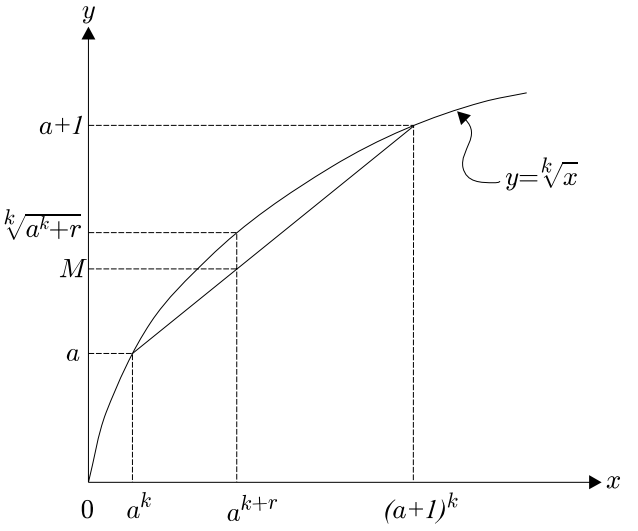
Abb. 3.3.23. Ausziehen der sechsten Wurzel aus der Zahl 244 140 626. Aus *„Brett und Staub“* von Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī
[Teheraner Universitätsbibliothek]

$$\sqrt[k]{a^k + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^k - a^k}$$

für positive $r < (a+1)^k - a^k$, und al-Kāšī verwendete sie zur Ermittlung des Näherungswertes von

$$\sqrt[5]{44\,240\,899\,506\,197} = \sqrt[5]{(536)^5 + 21} \approx 536 + \frac{21}{414\,237\,740\,281}.$$

Aṭ-Ṭūsī gibt nicht an, auf welchem Weg er zur obigen Näherungsformel gelangt ist. Heute würden wir diese Formel durch lineare Interpolation erzielen, wie in Abb. 3.3.24 dargestellt.



OM Näherungswert für $\sqrt[k]{a^k+r}$,
$(OM-a):1=r:[(a+1)^k-a^k] \Rightarrow \sqrt[k]{a^k+r} \approx OM = a + \frac{r}{(a+1)^k-a^k}$

Abb. 3.3.24. Berechnung von Näherungswerten durch Interpolation

Näherungen für Wurzeln von Gleichungen dritten Grades

Eine Weiterentwicklung der Näherungslösung der reinen Gleichung $x^3 = a$ wurde von dem Mathematiker und Astronomen Šaraf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (geb. um 1135 in Tus/Iran, gest. um 1213), der in Damaskus, Aleppo, Mosul, Bagdad und Hamadan als Lehrer gewirkt haben soll, im Fall der allgemeinen Gleichung 3. Grades überliefert.

Von ihm gab es ein bedeutendes Werk „*Über Gleichungen*“, das verloren gegangen ist. Es existiert aber noch ein anonymer verkürzter Text, vgl. [Rashed 1994, Kap. III]. Vor seinem Auffinden kannten wir lediglich von ᶜUmar Ḫ̆ayyām die geometrische Lösung von Gleichungen dritten Grades und die iterative Methode von al-Kāšī. Jetzt wissen wir, daß Šaraf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī Gleichungen dritten Grades im allgemeinen numerisch lösen konnte. Er hat Bedingungen gefunden, unter denen Gleichungen dritten Grades positive Lösungen besitzen. In diesem Zusammenhang erkannte er die Stellung der Diskriminante [Peiffer/Dajan-Dalmedico 1994, S. 94]. So sagte er z. B., die Gleichung $x^3 + \alpha = \beta x$ besitzt dann und nur dann positive Wurzeln, wenn $\frac{\beta^3}{27} - \frac{\alpha^2}{4} \geq 0$ ist, obwohl er keine Lösungsformel entdeckte, in der diese Diskriminante auftritt. Šaraf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī löste u. a. folgende Gleichungen näherungsweise:

$x^3 + 12x^2 + 102x = 34\,345\,395$, $x^3 + 6x^2 + 3\,000\,000x = 996\,694\,407$,
$x^3 - 30x^2 - 600x = 29\,792\,331$.

Seine Methode wird am Beispiel der Gleichung

$$x^3 + 36x = 91\,750\,087 \tag{3.3.9}$$

erläutert. Wir setzen $x = 100a + 10b + c$ in (3.3.9) ein und erhalten

$$10^6 \cdot a^3 + 10^5 \cdot 3a^2b + 10^4 \cdot 3ab^2 + 10^4 \cdot 3a^2c + 10^3 \cdot 6abc + 10^3 \cdot b^3 + 10^2 \cdot 3ac^2 + 10^2 \cdot 3b^2c + 10 \cdot 3bc^2 + c^3 + 10^2 \cdot 36a + 10 \cdot 36b + 36c = 91\,750\,087.$$

Dann bestimmen wir das größte a, sodaß $a^3 < 91$, finden $a = 4$, damit

$$(100a)^3 + 36\,(100a) = 10^6 \cdot 64 + 10^2 \cdot 144 = 64\,014\,400$$

und berechnen $91\,750\,087 - 64\,014\,400 = 27\,735\,687$.

Im zweiten Schritt bestimmen wir das größte b, so daß $3a^2b < 277$, d. h. $b = 5$, und berechnen den Wert

$$27\,735\,687 - 3a^2b \cdot 10^5 - 3ab^2 \cdot 10^4 - b^3 \cdot 10^3 - 36b \cdot 10 \quad = \quad 608\,887 \quad .$$

Im dritten Schritt bestimmen wir das größte c, sodaß $3a^2c < 60$, d. h. $c = 1$. Nun berechnen wir den letzten Rest

$$608\,887 - 3a^2c \cdot 10^4 - 6abc \cdot 10^3 - 3ac^2 \cdot 10^2 - 3b^2c \cdot 10^2 - 3bc^2 \cdot 10 - c^3 - 36c = 0.$$

In diesem Fall ist der Rest gleich Null, also ist 451 eine Wurzel der Gleichung, d. h.

$$451^3 + 36 \cdot 451 = 91\,750\,087.$$

Bei diesem Verfahren ist zu vermuten, daß das absolute Glied der Gleichung (3.3.9) aus vorgegebenem Wurzelwert berechnet wurde.

c) Iterationsmethode von al-Kāšī

Die Berechnung der Näherungswerte für positive Lösungen von Gleichungen hat im östlichen Teil der islamischen Länder eine lange Tradition. Bevor sie die Lösung von Gleichungen dritten Grades durch ᶜUmar Ḫ̆ayyām kannten, haben die Gelehrten bereits solche Gleichungen numerisch näherungsweise gelöst. Den Höhepunkt der numerischen Lösung von Gleichungen dritten Grades erreichte erst im 15. Jh. al-Kāšī.

Solche Gleichungen sind in „Risāla al-Watar wa-l-gīb“ (Abhandlung über die Sehne und den Sinus) aufgenommen, eine Schrift, die zwar verloren ging, aber am Anfang von al-Kāšī Hauptwerk „Schlüssel zur Arithmetik“ erwähnt wird. Kenntnisse über den Inhalt haben wir jedoch aus einer ausführlichen Beschreibung des Mīram Čalabī (gest. 1524), dem Enkel von Qāḍī-zādeh (um 1360– um 1437). Letzterer war nach al-Kāšī Leiter des Observatoriums.

Für die Aufstellung der astronomischen Tabellen mußte al-Kāšī *sin* 1° mit großer Genauigkeit berechnen. Dafür verwendete er die Winkeldreiteilungsgleichung

$$\sin 3\gamma = 3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma \ .$$

Diese Gleichung hat er in die Form $x^3 + \alpha = \beta x$ oder

$$x = \frac{\alpha + x^3}{\beta} \tag{3.3.10}$$

gebracht, wobei er für $\alpha = \frac{1}{4}\sin 3°$ und $\beta = \frac{3}{4}$ einsetzte.

Mit Hilfe dieser Gleichung und seinem originellen Verfahren, das heute als Iterationsverfahren bekannt ist, konnte er *sin* 1° mit beliebiger Genauigkeit wie folgt berechnen:

$$x_0 := \frac{\alpha}{\beta}, x_1 := \frac{\alpha+x_0^3}{\beta}, x_2 := \frac{\alpha+x_1^3}{\beta}, \cdots, x_n := \frac{\alpha+x_{n-1}^3}{\beta}.$$

Für $\sin 1°$ hat al-Kāšī den Näherungswert $0,017452406437283571$ errechnet. Es kann gezeigt werden, daß die Folge $x_0, x_1, x_2, ...$ gegen $\sin 1°$ konvergiert. Diese Konvergenzeigenschaft erwähnt al-Kāšī nicht, aber es ist für ihn anschaulich klar gewesen, daß man für wachsende n bessere Näherungen erhält.

Die Iterationsmethode bedeutet einen Höhepunkt der Leistungen islamischer Mathematiker für die numerische Auflösung algebraischer Gleichungen, die in ihrer Bedeutung bezüglich der Gleichungen dritten Grades nicht geringer ist als die geometrische Theorie des ᶜUmar al-Ḫ̆ayyām. Der Mathematikhistoriker Hermann Hankel (1839–1873) äußerte sich im 19. Jh. über Kāšīs Methode anerkennend, indem er sagte, sie stehe „an Feinheit und Eleganz sämtlichen nach Viète im Occidente entdeckten Approximationsmethoden nicht nach".

Die Werke späterer Mathematiker weisen z. T. einen Stillstand oder sogar einen Rückschritt der mathematischen Leistungen auf wie z. B. das Werk „Essenz der Rechenkunst" des Bahāʾad-Dīn Āmilī, das ca. 100 Jahre nach der Ermordung Uluġ Begs (1449) geschrieben wurde. Die Schule von Samarkand war bereits dem Zerfall zum Opfer gefallen. Zu dieser Zeit regierten in Persien die Safawiden in der neuen, großzügig aufgebauten Hauptstadt Isfahan. Die Herrscher dieser Dynastie interessierten sich mehr für schiitische Theologie und Architektur. Da aber die meisten Gelehrten im Dienste des Staates standen, waren sie somit abhängig von seiner Gunst. Dies war ein wichtiger Aspekt für den Stillstand der mathematischen und astronomischen Forschung jener Zeit.

Wesentliche Inhalte der Algebra in den islamischen Ländern

8. Jh.	Übernahme der indischen Ziffern
8.–10. Jh.	Übersetzungen griechischer, persischer und indischer Werke (insbes. in Bagdad) – zuvor keine eigenständige mathematische Kultur
8.–9. Jh.	AL-ḤWĀRIZMĪ (AL-CHOREZMI) *Algoritmi de numero Indorum* (Rechnen mit indischen Ziffern) Die Europäer wurden später durch die Übersetzung dieses nur in lateinischer Fassung existierenden Werkes mit den indischen Ziffern bekannt gemacht; *al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala (Ein kurzgefaßtes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen):* Lösung der Gleichungen zweiten Grades mit geometrischem Beweis
9.–10. Jh.	ABŪ KĀMIL *Buch über Ergänzen und Ausgleichen*: Erweiterung quadratischer Gleichungen auf rationale oder irrationale Koeffizienten und Lösungen, geometrische Beweise unter Anwendung von Euklids Elementen; *Das Buch der Seltenheit der Rechenkunst:* Vogelaufgaben
10.–11. Jh.	AL-KARAǦĪ *Kāfī fīl-ḥisāb (Genügendes über das Rechnen), al- Fahṛī ... und al-Badīʿ ...* Entwicklung der Algebra als eigenständige Disziplin durch schrittweise Abwendung von der geometrischen Beweisführung. Fortsetzung dieser Entwicklung durch as-Samawʾal.
11. Jh.	ʿUMAR ḪAYYĀM Geometrische Lösungen für alle Typen kubischer Gleichungen mittels Kegelschnitten
12.–13. Jh.	ŠARAF AD-DĪN AṬ-ṬŪSĪ Fortführung der geometrischen Lösung kubischer Gleichungen von ʿUmar Ḫayyām und numerische Lösung allg. kubischer Gleichungen
13. Jh.	NAṢĪR AD-DĪN AṬ-ṬŪSĪ Radizieren mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes und Horner-Schema
15. Jh.	AL-KĀŠĪ Entwicklung eines originellen Iterationsverfahrens

3.4 Aufgaben zu Kapitel 3

Originalaufgaben aus „Neun Bücher Arithmetischer Technik“ (3.1.1 – 3.1.4)

Aufgabe 3.1.1: Berechnung der Quadratwurzel nach der Methode Kai fang (Buch IV, 13)
Man hat eine quadratische Fläche von 25281 Pu. Die Frage ist: Wie groß ist die Quadratseite?

Aufgabe 3.1.2: Berechnung einer Würfelkante nach der Methode Kai li fang (Buch IV, 20)
Man hat den Rauminhalt eines Würfels von $1953\frac{1}{8}$ Kubikfuß. Die Frage ist: Wie groß ist die Würfelseite?

Aufgabe 3.1.3: Zur Methode des doppelten falschen Ansatzes (Buch VII, 11)
Eine Binse wächst am 1.Tag um eine Länge von 3 Fuß; ein Riedgras wächst am 1. Tag um eine Länge von 1 Fuß. Die Binse wächst täglich um die Hälfte ihres Zuwachses vom Tag zuvor, das Riedgras wächst täglich um das Doppelte seines Zuwachses vom Tag zuvor. Frage: In wie viel Tagen sind sie gleich lang und wie groß ist die gleiche Länge?

Aufgabe 3.1.4: Zur Methode Fangcheng (Buch VIII, 8)
Jetzt hat man 2 Rinder und 5 Schafe verkauft und damit 13 Schweine gekauft, wobei ein Rest von 1000 Geldstücken übrig blieb. Man hat 3 Rinder und 3 Schweine verkauft und damit 9 Schafe gekauft; das Geld reichte gerade. Man hat 6 Schafe und 8 Schweine verkauft und damit 5 Rinder gekauft, aber das Geld reichte nicht um 600 Geldstücke. Frage: Wie hoch ist der Preis von jedem, vom Rind, vom Schaf und vom Schwein?

Aufgabe 3.1.5: Schranken für Wurzeln nach der Methode Kai fang
Zeige: $2.236067977 < \sqrt{5} < 2.236067978$

Aufgabe 3.1.6: Zerbrochene Eier [Tropfke 1980, S. 640]
Eine alte Frau verkaufte Eier auf dem Markt, und da kamen zufällig zwei Männer daher und stießen die Frau an und zerbrachen ihre Eier. Sie führte sie vor den Richter, und das Urteil bestimmte, daß sie der Frau ihre Eier ersetzen sollen. Und sie fragten die Alte, wieviel Eier es waren, um sie zu bezahlen, und die Frau sagte: Ich weiß es nicht; ich weiß nur das, daß ich zu zwei und zwei abgezählt habe, und es blieb eines übrig, dann zu drei und drei, und es blieb 1, zu 4 und 4, und es blieb 1, zu 5 und 5, und es blieb 1, zu 6 und 6, und es blieb 1, zu 7 und 7, und es blieb nichts, nicht ein einziges. Und wie viele Eier der alten Frau waren es?

Aufgabe 3.1.7: Aus einem Werk von XU YUE

In einem Werk, das unter dem Namen von Xu Yue (etwa 190) überliefert ist, aber möglicherweise erst um 570 von dem Kommentator Ehn Luan geschrieben wurde, befindet sich folgende Aufgabe:

Ein Hahn kostet 5 (Geld-) Stücke, eine Henne 4 Stücke und vier Küken 1 Stück.

Wieviel Hähne, Hennen und Küken kann man für 100 (Geld-) Stücke kaufen, wenn es insgesamt 100 Vögel sind?

Bemerkung: Aufgaben vom Typ 3.1.6 und 3.1.7 kann man bei den Chinesen bis ins 3. Jahrhundert v. Chr. zurück verfolgen. Gerade an dieser Aufgabenform ist die Entwicklung der unbestimmten Gleichungen in der chronologischen Reihenfolge China, Indien, Islamische Länder und Europa sehr gut zu beobachten.

Aufgabe 3.2.1: Erbteilung (von Bhâskara II)

Das Vermögen zweier Personen ist zu ermitteln, wenn die erste nach Erhalt von 100 von der zweiten Person doppelt so reich würde, während die zweite nach Erhalt von 10 von der ersten ihren Reichtum auf das Sechsfache steigern würde.

Aufgabe 3.2.2: Anzahl einer Herde Pfauen (von Mâhavîra)

Das Quadrat von einem Sechzehntel der Pfauen-Herde saß auf einem Mangobaum, während das Quadrat von einem Neuntel des Restes und vierzehn weitere Pfauen auf einem Tamālabaum saßen. Wie viele Pfauen waren es? (Mit dem Rest sind $\frac{15}{16}$ gemeint.)

Aufgabe 3.2.3: Vergrößerung eines Altars (nach Kātyāyana)

Gegeben ist die Grundfläche eines Altars „in Gestalt eines Falken“ (Abb. 3.4.1), dessen Körper von vier gleichen Quadraten mit der Länge 1, dessen Flügel von zwei Rechtecken mit den Seiten $\overline{EH} = \overline{E'H'} = 1$ und $\overline{EF} = \overline{E'F'} = 1 + \frac{1}{5}$ und dessen Schwanz von einem Rechteck mit den Seiten $\overline{PS} = 1$ und $\overline{PQ} = 1 + \frac{1}{10}$ gebildet wird. Der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt $7\frac{1}{2}$. Es sollen nun alle linearen Abmessungen der Figur außer den konstant bleibenden Längen $\overline{FL} = \overline{F'L'} = \frac{1}{5}$ und $\overline{TQ} = \frac{1}{10}$ im Verhältnis x derart vergrößert werden, daß die Gesamtfläche um m Flächeneinheiten größer wird [Juschkewitsch 1964, S. 99].

Aufgabe 3.2.4: Kauf und Verkauf von Seide (von Mâhavîra)

Man hat 300 Stück chinesischer Seide, 6 Hastas breit und ebenso lang. Berechne, der du die Methode der inversen Proportion kennst, wieviel Stück derselben Seide man bräuchte, wenn diese Stücke 5 auf 3 Hastas messen würden.

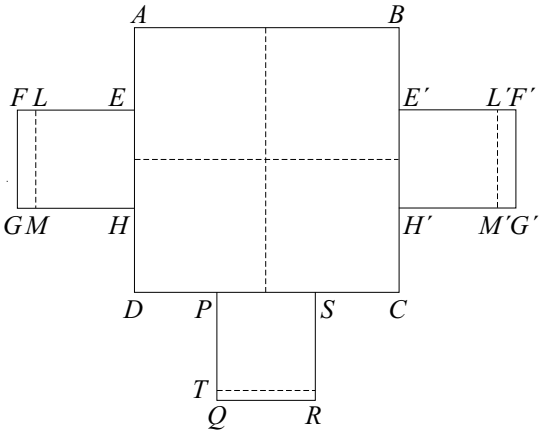


Abb. 3.4.1. Grundfläche eines Altars (zu Aufg. 3.2.3)

Aufgabe 3.2.5: Verkauf einer Frau (von Śrīpati)
Wenn man für eine Frau, die 16 Jahre alt ist, 70 Geldstücke bekommt, was bekommt man für eine andere Frau, die 20 Jahre alt ist und dieselbe Schönheit und Hautfarbe hat?

Aufgabe 3.2.6: Die gefundene Börse (von Mâhavîra)
Drei Kaufleute sahen auf dem Weg eine Geldbörse. Einer von ihnen sagte zu den anderen: „Wenn ich diese Börse behalte, so werde ich zweimal so reich sein wie ihr beide zusammen mit dem Geld, das ihr in der Hand habt!“ Da sagte der zweite von ihnen: „Ich werde dreimal so reich sein!“ Dann sagte der dritte: „Ich werde fünfmal so reich sein.“ Wie viel Geld ist in der Börse und wie viel Geld hatte anfänglich jeder Kaufmann?

Aufgabe 3.2.7: Warentausch (von Mâhavîra)
Für 8 Mâsas (Gewichtseinheit) bekommt man 60 Jackbaum-Früchte; dagegen bekommt man für 10 Mâsas 80 Granatäpfel. Wie viel Granatäpfel bekommt man für 900 Jackbaum-Früchte?

Erbteilungsaufgaben von al-Ḫwārizmī

Aufgabe 3.3.1: Vermächtnis einer Frau
Eine Frau stirbt, hinterläßt den Ehemann, einen Sohn und 3 Töchter und vermacht einem Manne $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{8}$ ihres Kapitals. (Hier ist zu bemerken, daß der Ehemann $\frac{1}{4}$ des Restes, ein Sohn aber doppelt so viel wie eine Tochter erhält).

Aufgabe 3.3.2: Vermächtnis eines Mannes

Ein Mann stirbt und hinterläßt Mutter, Ehefrau, Bruder und zwei Schwestern und einen Fremden, dem er $\frac{1}{9}$ seines Besitz testamentarisch überläßt. (Seine Mutter erbt $\frac{1}{6}$ und seine Frau $\frac{1}{4}$ seines Besitzes, und der Anteil seines Bruders ist doppelt so hoch wie der einer Schwester.) Finden Sie eine fällig werdende Aufteilung des Besitzes.

Unbestimmte Gleichungen bei Vogelaufgaben von Abū Kāmil

Aufgabe 3.3.3: (Aufgabe 2 von Abū Kāmil)

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 100 \end{cases}$$

Aufgabe 3.3.4: (Aufgabe 5 von Abū Kāmil)

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + \frac{1}{20}y + \frac{1}{3}z = 100 \end{cases}$$

Aufgabe 3.3.5: Division von Polynomen

Benutzen Sie die Verfahrensweise der Division von as-Samawʾal, um den Quotienten von $2x^3 - 11x^2 - 13x - 5$ durch $2x - 5$ zu ermitteln.

Aufgabe 3.3.6: Der faule Arbeiter (nach al-Karaǧī)

Ein Tagelöhner erhält 10 Dirham im Monat, wenn er arbeitet. Wenn er aber nicht arbeitet, muß er 6 Dirham pro Monat bezahlen. Es ist ein Monat derart vergangen, daß er keinen Lohn erhält, aber auch nichts bezahlen muß. Wieviel Tage hat er gearbeitet?

Aufgabe 3.3.7: Berechnung einer fünften Wurzel

Berechne die fünfte Wurzel aus der Zahl 44 240 899 506 197 nach der Näherungsmethode von aṭ-Ṭūsī .

4 Algebra im Europa des Mittelalters und der Renaissance



375 – 568	Germanische Völkerwanderung
486–751	Fränkisches Reich der Merowinger
um 500	Angeln, Sachsen und Juten wandern in England ein
711	Araber überqueren die Meerenge von Gibraltar, erobern die iberische Halbinsel bis auf Asturien
718–1492	Reconquista (Rückeroberung) der iberischen Halbinsel
732	Sieg Karl Martells über die Araber bei Tours und Poitiers
756	Umayyaden gründen das Reich (seit 929 Kalifat) von Córdoba
800	Karl der Große wird in Rom zum Kaiser gekrönt
843	Vertrag von Verdun: Karolingerreich wird in drei Teile geteilt
ab 862	In Nowgorod herrschen Normannen (Waräger)
911	An der Seinemündung entsteht das Herzogtum Normandie
955	Schlacht auf dem Lechfeld (Ungarn zurückgeschlagen)
962	Otto I (d. Gr.) wird vom Papst zum Kaiser des Heiligen Römischen Reiches gekrönt
10. Jh.	Frühe romanische (ottonische) Baukunst
987–1328	Kapetinger regieren Frankreich
um 1000	Leif Eriksson entdeckt Nordamerika (Vinland)
1024–1137	Fränkisch-Salische Kaiser
1066	Schlacht bei Hastings, Normannen erobern England
1077	Gang Heinrichs IV. nach Canossa
1096–1270	Kreuzzüge
11./12. Jh.	Romanische Dome, Klöster und Skulpturen in Westeuropa
1130–1260	Normannisch-Staufische Herrschaft in Sizilien und Unteritalien
∼1150–1535	Ausbreitung und Herrschaft der Hanse über die Ostsee
12./13. Jh.	Aufblühen oberitalienischer Städte (Pisa, Venedig, Genua, Mailand), frühe Gotik in der Île de France
1138–1250	Herrschaft der Staufer in Deutschland
13./14. Jh.	Hochgotische Kathedralen in Westeuropa
14. Jh.	Der Maler Giotto di Bondone (1266–1337) und die Dichter Petrarca (1304–1374) und Boccaccio (1313–1375) leiten die Renaissance ein
1337–1453	Hundertjähriger Krieg zwischen England und Frankreich
1397–1523	Kalmarer Union der skandinavischen Länder unter dänischer Führung
1434–1498	Florenz unter der Herrschaft der Medici
um 1445	Erfindung des Buchdrucks mit beweglichen Lettern (Gutenberg)
1453	Untergang des oströmischen Reiches
15. Jh.	Spätgotik in Deutschland, England und Frankreich
1452–1519	Leonardo da Vinci
1469	Vereinigung von Kastilien und Aragon
1470	Moskau wird „Drittes Rom“
1471–1528	Albrecht Dürer
1475–1520	Michelangelo
1492	Erster Erdglobus in Europa (Martin Behaim, Nürnberg)
1492	Eroberung Granadas, Ende der Reconquista, (Wieder-)Entdeckung Amerikas durch Kolumbus

4.0 Einführung

In der Periode des Mittelalters herrschte ein starkes Kulturgefälle von Osten nach Westen. Noch bis weit ins 13. Jahrhundert hinein hat Europa trotz aller kriegerischen Verwicklungen vom hohen Stand von Kultur und Technik in den Ländern des Nahen und Fernen Ostens, insbesondere der Länder des Islam, profitiert. Papierherstellung, Kenntnisse von Heilkräutern, Zierpflanzen und Obstgehölze, Architektur, vermutlich auch die Herstellung von Pulver und der Kompaß waren nach Europa gelangt. Noch heute erregen die aus planmäßigen Züchtungen hervorgegangenen „Araber“ die Bewunderung der Pferdeliebhaber. In der Kunst des Webens von Brokat- und Seidenstoffen sowie in der Metallverarbeitung waren die Muslime den Europäern damals weit überlegen; die Bezeichnungen „Damast“ und „Damaszener“ (Stahlklingen) verweisen auf ein Zentrum handwerklicher Tätigkeit, auf Damaskus im heutigen Syrien.



Abb. 4.0.1. Bögen im Vorraum des Mihrab der Mezquita in Córdoba (10. Jh.)
[Foto Alten]

Durch die Berührung mit den Muslimen waren Teile der hochentwickelten Wissenschaft des Islam, die ihrerseits große Teile der antiken Wissenschaft in sich aufgenommen und weiterentwickelt hatte, nach Europa gelangt. Auf diese Weise waren unter anderem die antiken Philosophen Aristoteles und Platon sowie der antike Astronom Ptolemaios in Europa bekannt geworden. Mitte des 13. Jahrhunderts hatten sich deren Anschauungen unter dem Druck der mittelalterlichen Kirche endgültig mit der christlichen Dogmatik zum System der scholastischen Philosophie verschmolzen.

Seit dem 8./9. Jahrhundert zeigten sich – mit der Herausbildung der Feudalgesellschaft – auch in Europa deutliche Fortschritte in Wissenschaft, Technologie und Kultur. Romanische und gotische Kathedralen spiegeln nicht nur verschiedene Kunststile, sondern auch bedeutende Fortschritte in der Technologie wider. Durch den fränkischen König und Kaiser Karl den Großen wurde der Klerus angewiesen, Bildung zu erwerben und zu vermitteln; das Reich mußte verwaltet werden. Aus einigen Kloster- und Domschulen gingen später Universitäten hervor. Klöster entwickelten sich zu ökonomischen und kulturellen Zentren. Ihnen und den Übersetzerschulen im muslimisch besetzten Teil der Iberischen Halbinsel kommt ein großes Verdienst bei der Pflege und Erschließung überkommener wissenschaftlicher Manuskripte zu.

Die Scholastik hat im Hochmittelalter während des 13./14. Jahrhunderts hervorragende, auch naturwissenschaftlich orientierte Gelehrte hervorgebracht, beispielsweise Roger Bacon, Albertus Magnus, Wilhelm von Ockham und Thomas Bradwardine sowie Nicolaus Oresme, Bischof von Lisieux, einen der bedeutendsten Mathematiker des europäischen Mittelalters. Es gab Brillen, Windmühlen, Uhren; man verfügte über die starken Mineralsäuren. Die Äbtissin Hildegard von Bingen verfaßte schon im 12. Jahrhundert eine Schrift, in der über 1000 Tiere und Pflanzen beschrieben wurden.

Die Renaissance wird in der Geschichtswissenschaft als eine Periode des Überganges vom Mittelalter zur Neuzeit verstanden und in diesem Sinne interpretiert. In der Tat traten – in Politik, Ökonomie, Gesellschaft, Kultur und Wissenschaft – viele neue Züge zutage, die auf eine zukünftige radikale Umwandlung der europäischen Gesellschaft hindeuten.

Schon zu Beginn des 14. Jahrhunderts zeigten sich erste Züge einer heraufziehenden neuen Gesellschaft, besonders in Italien, wo die Traditionen der Antike noch am lebendigsten waren und die Zeugnisse der antiken Architektur allen deutlich vor Augen standen. Während des 14., 15. und 16. Jahrhunderts begannen sich in Süd-, West- und Mitteleuropa und Teilen Osteuropas Elemente des Frühkapitalismus herauszubilden; die Neuorientierung erfaßte alle Lebensbereiche. Der allmähliche Übergang zur frühkapitalistischen Gesellschaft war begleitet von tiefen sozialen Widersprüchen, von Erhebungen der Stadtbewohner und der Bauern gegen die Feudalordnung, von zahlreichen Kriegen und von der Entstehung von Nationen und Nationalstaaten. Das äußere Bild war geprägt von einem bisher nicht gekannten Aufschwung der handwerklichen Produktion, von der zunehmenden Ablösung der Natu-

ralwirtschaft durch die Geldwirtschaft, vom Aufblühen der Städte, aber auch von gärenden geistigen und religiösen Bewegungen, vom Zusammenbruch des mittelalterlichen Weltbildes und nicht zuletzt von einer glanzvollen Entfaltung von Kunst und Wissenschaft.

Das Interesse der Träger der neuen Wissenschaft und Kultur an einer diesseits orientierten und praktischen Zwecken dienenden Wissenschaft richtete sich zunächst auf das Kennenlernen und die Erschließung und Nutzung der aus der Antike überkommenen Wissenschaften. Die Antike erschien in Verklärung als „goldenes Zeitalter“; dies wiederherzustellen, ihm zur Wiedergeburt (renaissance) zu verhelfen, galt als Ziel damaliger geistiger Eliten, im Klerus, im Bürgertum, an den Höfen, an den Universitäten. Die Losung „ad fontes“ (zurück zu den Quellen) rückte die systematische Suche nach antiken Quellen und deren Erschließung durch Textkritik (Befreiung von nachträglichen Streichungen und Einschiebungen) und die schließliche Wiederherstellung der Originaltexte in den Mittelpunkt der Tätigkeit der sich als Humanisten bezeichnenden Gelehrten, Dichter, Publizisten, Philosophen und Sprachgelehrten. Dann, schon auf dem Höhepunkt der Renaissance, lernte man jene Manuskripte kennen, die die vor dem Ansturm der Türken fliehenden byzantinischen Gelehrten nach Italien brachten; 1453 fiel Byzanz (Konstantinopel) in die Hände der Türken. Die antiken Sprachen – griechisch, lateinisch, hebräisch – wurden zum bevorzugten Studiengegenstand.

Am Ende des 15. Jahrhunderts lagen – im Anschluß an die vermittelnde ausgebreitete Übersetzungstätigkeit im islamischen Bereich und während des europäischen Mittelalters – auch wichtige mathematische Schriften der Antike vor und wurden allgemein zugänglich, insbesondere nach der Erfindung des Buchdruckes. Die wichtigsten dieser Schriften sind:

Apollonius von Perge:	*„Konika“,* Buch I-IV, lateinisch 1537
Archimedes:	Gesamtausgabe griechisch 1544, lateinisch 1558 (Auswahl bereits 1270)
Aristoteles:	nach früheren Auswahlen mehrere Gesamtausgaben, z. B. lateinisch 1472, 1495/98, 1533
Diophant von Alexandria:	lateinisch 1575
Euklid:	lateinisch 1505, griechisch 1533
Heron von Alexandria:	Auswahl griechisch-lateinisch 1571, 1589, 1616
Menelaos von Alexandria:	lateinisch 1558
Nikomachos von Gerasa:	griechisch 1538, 1554
Pappos von Alexandria:	lateinisch 1588
Platon:	Gesamtausgabe lateinisch 1483/84, griechisch 1513, 1578
Ptolemaios:	*„Almagest“* griechisch 1538, *„Tetrabiblos“* lateinisch 1484, griechisch 1535



Abb. 4.0.2. Sieg des Ziffernrechnens über das Abakusrechnen. Zeitgenösssische Darstellung von 1504
[aus G. Reisch: Margarita philosophica]

Bald jedoch, schon im ausgehenden 15. Jahrhundert, wuchs die Renaissance über die bloße Aneignung der Antike hinaus. Eine Fülle neuer Einsichten konnte im 16. Jahrhundert erzielt werden, im Bereich der Produktion, bei der geographischen Erschließung der Erde, in Wissenschaft und Kunst. Es wurde offensichtlich, daß die Antike übertroffen werden konnte und übertroffen worden war. Tiere, Pflanzen, Erdteile waren entdeckt worden, von denen

sich bei den Alten nicht einmal eine Andeutung fand. Es gab Räder- und Taschenuhren, Schießpulver, Feuerwaffen, Spinnräder, Papier, Buchdruck; es gab bedeutende Fortschritte im Bauwesen, im Schiffbau, im Bergbau und in der Metallurgie. Diese Entwicklung ging charakteristischerweise nicht zurück auf die lateinisch schreibenden Gelehrten an den unter kirchlicher Oberaufsicht stehenden Universitäten. Es waren vielmehr die unter der Sammelbezeichnung „artefici“ oder „virtuosi“ auftretenden Handwerker, Kaufleute, Rechenmeister, Büchsenmeister, Zeugmeister, Ingenieure, Architekten, bildenden Künstler usw., denen die entscheidenden Anstöße zu verdanken waren und die sich der systematischen Erforschung und Darstellung der Produktion in ihren Nationalsprachen zuzuwenden begannen. Man spricht daher geradezu von der „wissenschaftlich-literarischen Entdeckung der Produktion.“

Die neue Auffassung vom Sinn und Nutzen der Wissenschaft vermochte sich mit dem Erstarken des Frühkapitalismus durchzusetzen und ergriff in zunehmendem Maße auch die Vertreter der Universitätswissenschaft. Der durch die Praktiker erworbene Schatz naturwissenschaftlicher, mathematischer und technischer Kenntnisse wurde von den Vertretern der offiziellen Wissenschaft, die traditionsgemäß auf die Systematisierung des Wissens orientiert waren, theoretisch durchdrungen. Es kam zu einer Art Begegnung von Praxis und Theorie, zu einem stufenweisen Zusammenwachsen mit revolutionären Folgen: Am Beginn des 17. Jahrhunderts wurden bereits die Grundlagen der klassischen Naturwissenschaft bzw. der sog. Wissenschaftlichen Revolution gelegt. Was die Algebra betrifft, so zeigen sich analoge Entwicklungsgänge. Der Fortschritt der Algebra seit dem Hochmittelalter bis zur Renaissance beruht auf zwei historischen Quellen.

Zum einen ist es die Erschließung des wissenschaftlichen Erbes: die sog. geometrische Algebra bei Euklid. Dort wurden geometrische Methoden zur Lösung von Problemen verwendet, die z. B. mit der Lösung quadratischer Gleichungen inhaltsgleich sind (vgl. 2.3). Die Weiterentwicklung der antiken „Gleichungstheorie“ durch Klassifizierung der quadratischen Gleichungen erfolgte insbesondere durch al-Ḫwārizmī in seiner Abhandlung *„al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala“*. In diesen Gedankenkreis gehören auch die geometrischen Lösungsansätze für kubische Gleichungen.

Zum andern ist es der direkte Einfluß des Frühkapitalismus: Verstärkung der Handelstätigkeit und der Übergang zur Geldwirtschaft. So entwickelte sich in den vom Frühkapitalismus erfaßten Ländern ein neuer Berufsstand, der des Rechenmeisters, eines „Meisters des Abbacus.“ Häufig im Auftrage der Stadtverwaltungen führten die Rechenmeister kommunale Rechenarbeiten aus und unterhielten eigene Rechenschulen, in denen gegen Entgelt der Umgang mit Zahlen und ihren Schreibweisen, die Grundrechenarten, Bruchrechnung und Anwendungen auf Probleme des täglichen Lebens bei Kauf, Tausch, Geldgeschäften, Umrechnungen von verschiedenen Währungen und Maßen, Dreisatz, Zins- und Zinseszinsrechung, Kunst der doppelten Buchführung und anderes mehr gelehrt wurden. In manchen Fällen paarte sich das praktische

Rechnen mit dem Interesse an theoretischen Fragen, die wir heute der Algebra zurechnen, insbesondere bei der Behandlung von Aufgaben, die auf Gleichungen führen. Bereits bei Leonardo Fibonacci von Pisa zeigt sich in seinem *„Liber abbaci“* von 1202 die Doppelfunktion von praktischem Rechnen und Behandlung von Gleichungen.

Intereressant ist auch der Umstand, daß nach und nach Abkürzungen in Gebrauch kamen, für Addition und Subtraktion, für die gesuchte Größe, die als „res“ (lateinisch: Sache) oder italienisch als „cosa“ bezeichnet wurde. Auch kamen Bezeichnungen für die Potenzen der gesuchten Größe auf. Al-Ḫwārizmī hatte für die zweite Potenz das Wort für Vermögen benutzt; nun spricht man „census“ bzw. „cens.“ Das Wort „cosa“ für die Unbekannte wurde sozusagen zum Symbol für die Kunst der Bestimmung der Unbekannten, für die Kunst der Auflösung von Gleichungen. So sprach man schließlich von „cossischer Kunst“ oder einfach von „Coß“ und „Cossisten.“ Natürlich war die Grenze zwischen Rechenmeistern und Cossisten fließend. Häufig auch verbanden sich Rechenmeistertätigkeit und cossische Leistung in Personalunion, etwa bei Adam Ries.

Anfangs erfanden die Autoren Abkürzungen nach eigenem Geschmack. Nach und nach aber bürgerten sich verbindlich werdende Bezeichnungen – verbal und bei Symbolen – ein, beginnend mit denen für die ersten Potenzen der Variablen (der Unbekannten, der gesuchten Größe) und für die Operationen der Addition und Subtraktion. Die Coß selbst erlebte eine innere, äußerlich an ihren Symbolen sichtbar werdende Entwicklung, die in die Existenz einer Algebra als einer neuen, selbständigen Disziplin einmünden sollte. Geographisch gesehen vollzog sich diese Entwicklung ausgehend von Italien, wie die Ausprägung des kaufmännischen Rechnens auch, wurde dann hauptsächlich durch deutsche, niederländische, englische und französische Cossisten weitergeführt. Mit Vieta endet diese und beginnt eine neue Periode.

4.1 Übersetzungen aus dem Arabischen

In Westeuropa sind aus der Zeit vor dem 12. Jahrhundert keine algebraischen Schriften bekannt – es sei denn, man rechnet einen isoliert stehenden kleinen Text, der sich mit positiven und negativen Zahlen beschäftigt, zur Algebra. Erst durch die Übersetzungen aus dem Arabischen gelangte algebraisches Wissen auch nach Westeuropa.

Die Schrift von al-Ḫwārizmī zur Algebra wurde im 12. Jahrhundert zweimal ins Lateinische übersetzt: durch Robert von Chester in Segovia (1145; siehe [Hughes 1989]) und etwas später durch Gerhard von Cremona [Hughes 1986]; ferner gibt es eine Bearbeitung, deren Autor umstritten ist (siehe [Kaunzner 1986]). Durch diese Übersetzungen lernte man al-Ḫwārizmīs Verfahren kennen, lineare und quadratische Gleichungen in geometrischer Form zu lösen. Ausgehend von diesen Übersetzungen, wurden seine sechs Klassen von Glei-

chungen, die alle denkbaren Fälle von linearen und quadratischen Gleichungen umfassen, zum Allgemeingut der algebraischen Schriften bis zum 16. Jahrhundert.

Im Jahre 1145 übersetzte Plato von Tivoli den *„Liber embadorum“* (Buch der Messungen) ins Lateinische. Sein Autor war Abraham bar Hiyya, ein jüdischer Gelehrter, der in der 1. Hälfte des 12. Jahrhunderts in Barcelona lebte und in der lateinischen Welt unter dem Namen „Savasorda“ bekannt war. Das „Buch der Messungen“ lehrt nicht nur geometrisches, sondern auch algebraisches Wissen, u. a. die Lösung quadratischer Gleichungen. Savasorda wußte, daß die Gleichung $x^2+b = ax$ zwei verschiedene Lösungen besitzt, und bewies alle Fälle geometrisch mit Hilfe des 2. Buchs von Euklids „Elementen“. Er behandelte Flächen- und Inhaltsbestimmungen ebener und räumlicher Figuren und setzte bei der Lösung geometrischer Probleme geschickt die Algebra ein. Das Buch wurde u. a. von Leonardo von Pisa für seine *„Practica geometriae“* benutzt.

Auch die algebraische Schrift von Abū Kāmil wurde ins Lateinische (und später auch ins Hebräische) übersetzt (siehe [Sesiano 1993]). Dadurch lernte man im Westen nicht nur seine Verfahren kennen, um Gleichungen 1. und 2. Grades geometrisch zu lösen, sondern auch seine Bestimmung der Seiten des regelmäßigen 5-Ecks und 10-Ecks mit Hilfe algebraischer Methoden und seine Behandlung unbestimmter quadratischer Gleichungen. Obwohl nur eine lateinische Handschrift erhalten ist, hat das Werk einen großen Einfluß auf die weitere Entwicklung der Algebra im Westen ausgeübt, insbesondere auf Leonardo von Pisas *„Liber abbaci“* und seine *„Practica geometriae“*, die im wesentlichen dem 2. Teil von Abū Kāmils Schrift entspricht. Zum Übersetzungsprogramm des 12. Jahrhunderts gehörte auch der *„Liber augmenti et diminutionis“* („Buch über Vergrößerung und Verringerung“), der von Abū Kāmil oder von Abraham ibn Ezra (um 1090–1167) stammen könnte. In ihm werden mit Hilfe des doppelten falschen Ansatzes lineare Gleichungen mit einer Unbekannten und lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten gelöst.

Erst in den letzten Jahrzehnten ist ein umfangreiches algebraisches Werk in lateinischer Sprache wieder bekannt geworden: der *„Liber mahameleth“*, den Johannes Hispalensis um 1150 in Spanien unter Einfluß arabischer Quellen zusammenstellte. Der Ausdruck „mu‘āmalāt“ bezeichnet die Anwendung der Arithmetik und der Algebra, insbesondere auf den Handel. Die Schrift enthält eine umfangreiche Aufgabensammlung mit einem einleitenden Abschnitt über die Teile der Mathematik, die man zum Lösen der Aufgaben braucht. Die algebraischen Probleme werden - ähnlich wie bei Abū Kāmil – auch geometrisch gelöst. Durch die Übersetzungen algebraischer Texte aus dem Arabischen wurde der Westen mit der arabischen Art, algebraische Probleme geometrisch zu lösen, vertraut. Noch im 15. Jahrhundert findet man, z. B. bei Johannes Regiomontanus (1436–1476), das Bestreben, algebraische Lösungen durch geometrische zu ersetzen.

4.2 Leonardo von Pisa

Das algebraische Wissen der Araber wirkte im Westen sowohl direkt durch Übersetzungen als auch indirekt durch Schriften europäischer Autoren, die Kenntnisse über die mathematischen Verfahren hatten. Der wichtigste von ihnen war Leonardo von Pisa, auch Leonardo Fibonacci als Sohn des Bonaccio genannt, weil sein Vater den Beinamen Bonaccio (der Gutmütige) trug. Seine Schriften bilden ein Bindeglied zwischen der theoretischen Mathematik, die später an den Universitäten gelehrt wurde, und der anwendungsbezogenen praktischen Mathematik, die sich an die Kaufleute richtete. Leonardos *„Liber abbaci“*, der noch auf Latein geschrieben war, wurde zum Ausgangspunkt zahlreicher nationalsprachiger Arbeiten zur praktischen Mathematik.

Leonardo stammte aus Pisa, das um 1200 Handelsniederlassungen im ganzen Mittelmeergebiet besaß. Durch die Beschäftigung seines Vaters in der pisanischen Handelsniederlassung Bugia in Nordafrika konnte Leonardo auf Handelsreisen in alle Teile des Mittelmeerraums ein Wissen erwerben, das weit über die in Kaufmannskreisen üblichen Kenntnisse hinausging. Die Frucht seiner Studien ist der *„Liber abbaci“* (1202; überarbeitet 1228). Der Name „Abbacus“ hat nichts mit dem antiken oder mittelalterlichen Rechenbrett zu tun, sondern bezeichnet die neue Arithmetik, die Leonardo die „indische“ nennt. Leonardo systematisierte im *„Liber abbaci“* ein umfangreiches Material, das er aus arabischen Werken schöpfte; er benutzte aber auch das antike Erbe und nahm eigene Aufgaben und Methoden hinzu. Schwerpunkte des umfangreichen Werks sind die Arithmetik sowie die Algebra der linearen und quadratischen Gleichungen und der unbestimmten Gleichungen. Leonardo ist der größte Algorithmiker des westlichen Mittelalters. Er informiert ausführlich über die Grundrechenarten, er vervollkommnet die Methode, den Hauptnenner zu finden, gibt die Teilbarkeitsmerkmale bei der Division durch 2, 3, 5 und 9 an und erwähnt die Siebener-, Neuner- und Elferprobe. Großen Umfang nehmen bei ihm die Methoden ein, Aufgaben aus dem kaufmännischen Rechnen zu lösen, die auf der Proportionenlehre beruhen. Er behandelt Aufgaben mit drei, fünf und mehr Größen, die direkt oder umgekehrt proportional sein können. Zur Lösung linearer Gleichungen wendet Leonardo verschiedene Methoden an: den einfachen und doppelten falschen Ansatz sowie eine in Worte gekleidete algebraische Lösung. Viele Aufgaben sind orientalischen oder antiken griechischen Ursprungs, ebenso wie die zugehörigen Lösungsmethoden, die Leonardo allerdings weiterentwickelt hat. Im Zusammenhang mit linearen Gleichungen ließ Leonardo auch Aufgaben mit negativen Lösungen zu, die er als „Schuld“ interpretierte. Bei der numerischen Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzeln ging er von den in den islamischen Ländern bekannten Näherungsverfahren aus und berechnete die Werte durch einen Iterationsalgorithmus. Der *„Liber abbaci“* regte künftige Generationen zu speziellen Schriften zur Arithmetik und Algebra an. Seine Aufgaben und Lösungsmethoden fanden Eingang in italienische, deutsche, französische und englische Bücher; einige begegnen uns noch in Leonhard Eulers *„Algebra“* (1768).

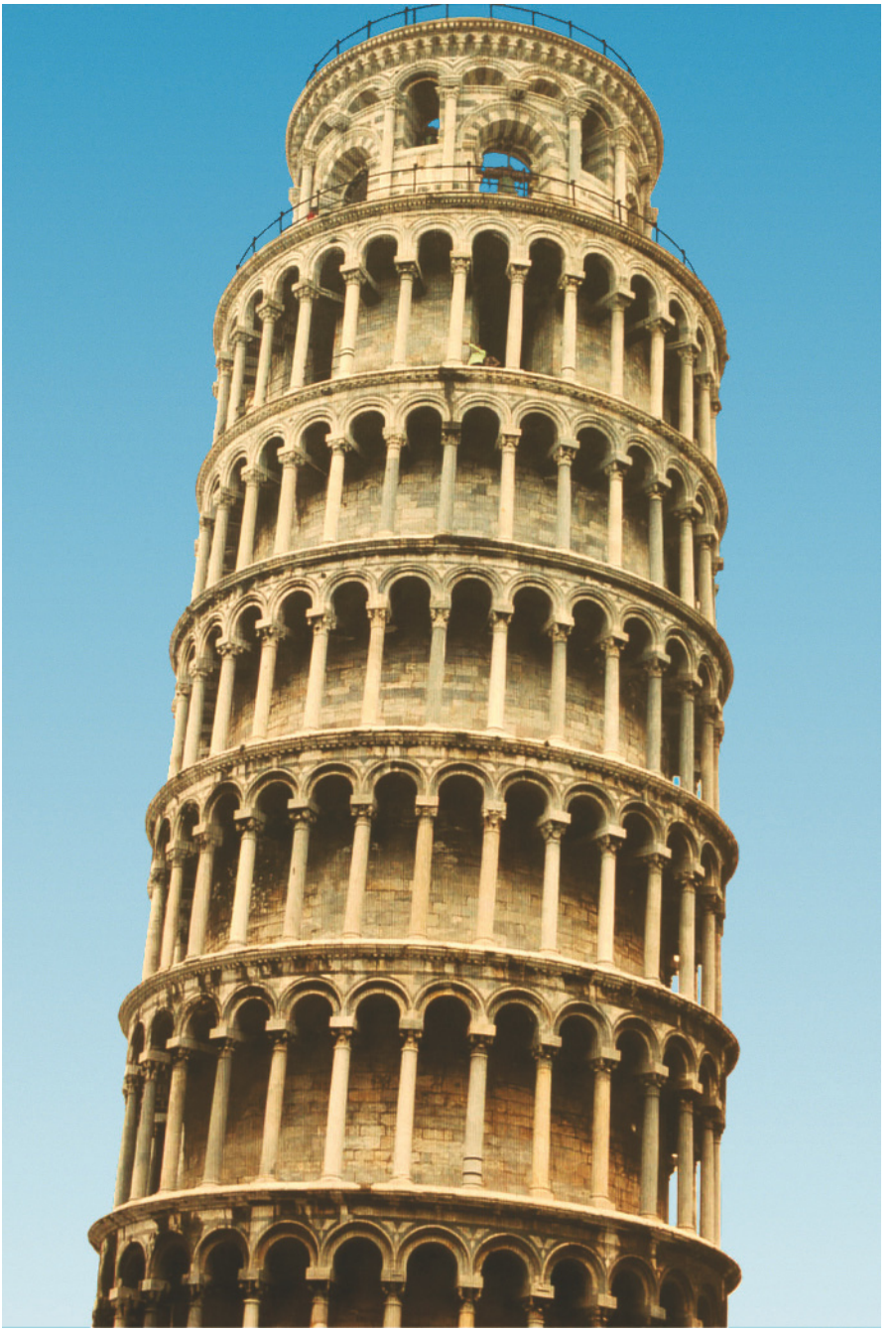


Abb. 4.2.3. Schiefer Turm von Pisa
[Foto Alten]

Leonardo sagt im algebraischen Teil seines *„Liber abbaci“*, daß drei Arten von Größen betrachtet werden: radix bzw. res, quadratus bzw. census, numerus simplex bzw. denarius bzw. dragma. Radix entspricht der gesuchten Größe (Variable), census dem Quadrat und dragma einer Zahl. Leonardo unterscheidet bei den quadratischen Gleichungen (modern ausgedrückt)

$ax^2 = bx$, $ax^2 = b$, $ax = b$, $ax^2 + bx = c$, $ax + c = bx^2$, $ax^2 + c = bx$,

wobei die Koeffizienten positive ganze oder rationale Zahlen sind. Die Lösung wird in Worten beschrieben. Der Beweis wird, bei speziellen numerischen Vorgaben, geometrisch geführt.

Offensichtlich lehnt sich Leonardo an al-Ḫwārizmī an, ist aber, so wird festgestellt, deutlich sorgloser und manchmal auch ziemlich unklar.

Was die Aufgaben betrifft – rund einhundert –, so treten dort auch höhere Potenzen der Variablen auf. Nur eine Aufgabe ist kommerzieller Art (Zinsrechnung). Die anderen – viele von ihnen ebenfalls aus dem arabischen Bereich – sind zum Teil vom Typ: Man soll zwei oder drei Zahlen finden, die Teil einer gegebenen Zahl (meist 10) sind und gewissen Bedingungen genügen. Ein Beispiel:

„Ich teilte 10 *in zwei Teile, und ich dividierte dies durch jenes und jenes durch dies und ich erhielt* $3\frac{1}{3}$“ [Franci/Rigatelli 1985, S. 21].

Sei die eine gesuchte Zahl x, dann ist die andere $10 - x$. Der Text führt auf die Gleichung (in moderner Schreibweise)

$$x : (10 - x) + (10 - x) : x = \frac{10}{3}.$$

Durch Umwandlung erhielt er schließlich die Normalform

$$\frac{160}{3}x = \frac{16}{3}x^2 + 100.$$

Die bei Leonardo auftretende Gleichung höchsten Grades lautet

$$x^8 + 100x^4 = 10000.$$

Er versteht die Gleichung ganz richtig als quadratisch in x^4 und fügt bei der Gleichung $x^4 = x^2 + 1$ hinzu: *„Wenn census census gleich ist census und dragma, so ist dies dasselbe wie census ist gleich res und dragma.“*

Zur Vorgeschichte: Ein spätestens aus dem 9. Jahrhundert stammender Text, von dem modernere Abschriften erhalten sind, gibt Regeln für das Rechnen mit positiven und negativen Zahlen [Folkerts 1972][Tropfke 1981, S. 146].

Die erste Akzeptanz einer negativen Gleichungsform, wenn auch in der vorsichtigen Form von Schulden, dürfte sich zuerst bei Leonardo finden. Im *„Liber abbaci“* beschäftigt er sich ausführlich auch mit Gleichungssystemen, unter anderem auch mit dem berühmten Problem, wo eine gewisse Anzahl von

Personen, die über eine feste, aber unbekannte Geldmenge verfügen, eine Börse mit unbekanntem Inhalt finden. Im Falle von vier Personen mit den Geldmengen x_1, x_2, x_3, x_4 und dem Börseninhalt b laufen die Textvorgaben von Leonardo auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + b &= 2(x_2 + x_3) \\ x_2 + b &= 3(x_3 + x_4) \\ x_3 + b &= 4(x_4 + x_1) \\ x_4 + b &= 5(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

hinaus. Leonardo sagt: *„Ich werde zeigen, daß dieses Problem unlösbar ist, wenn nicht zugelassen wird, daß der erste Partner Schulden hat.“* [Tropfke 1981, S. 146/147]. Als Lösung gibt Leonardo an $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, $x_4 = 4$, $b = 11$. Was die Null betrifft, so befindet sich in einer anonymen Abhandlung aus dem 12. Jahrhundert die Bemerkung: *„Ter nihil nihil est“* (Dreimal Null ist Null). Bei Leonardo wird die Null in die Diskussion über Lösungen einbezogen, z. B. bei der Lösung der Gleichung $x^2 + 4 = 4x$. Er erhält, modern geschrieben, die Lösungen $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4}$ und erläutert:

„Ziehe 4 *von dem Quadrat der halben Anzahl der* x *, das* 4 *ist, ab; es bleibt Null* (*remanet zephyrum*). *Dies zu der halben Anzahl der* x *addiert oder davon subtrahiert, ergibt* 2“ [Tropfke 1980, S. 142].

Auch in zwei kleineren Schriften (*„Flos“* und *„Liber quadratorum“*) hat sich Leonardo mit algebraischen Problemen beschäftigt. Im *„Flos“* („Blume“; wegen der blühenden Art, in der schwierige Aufgaben bewältigt werden, die selbst den Keim zu Neuem in sich tragen) behandelt Leonardo eine Aufgabe, die ihm von Johannes von Palermo vorgelegt wurde, der sich damals am Hofe des Kaisers Friedrich II. aufhielt: die kubische Gleichung $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ zu lösen. Zunächst beweist Leonardo, daß x keine ganze (positive) Zahl sein kann, aber auch kein Bruch oder eine Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl. Dann zeigt Leonardo, daß x nicht von der Form einer der bei Euklid vorkommenden Irrationalitäten sein kann. Schließlich gibt er eine Näherungslösung in sexagesimalen Brüchen an, ohne allerdings das Verfahren zu beschreiben, mit dessen Hilfe er auf diesen Wert gekommen ist. Dieses Ergebnis ist bemerkenswert genau. Diese Aufgabe findet sich mit denselben Zahlenwerten übrigens auch bei ʿUmar Ḫayyām. - In dieser Schrift werden auch einige Probleme der Unterhaltungsmathematik behandelt. Eine Aufgabe, bei der eine bestimmte Geldsumme unter drei Personen verteilt wird, findet sich auch in al-Karaǧīs *„Algebra“*. Leonardo hat die Lösung, die er selbst als „überaus schön“ bezeichnet, im *„Flos“* niedergeschrieben und darüber hinaus noch drei andere Methoden gefunden, die im *„Liber abbaci“* zugänglich sind. Bei zwei Aufgaben, bei denen mehrere Männer ein Pferd kaufen und nach dem Beitrag der einzelnen Personen gefragt wird, ergibt sich für die Unbekannte ein negativer Wert. Ähnlich wie auch im *„Liber abbaci“*, läßt Leonardo diese Lösung zu, wenn man akzeptiert, daß eine Person kein Guthaben, sondern eine Schuld hat.

Der *„Liber quadratorum“* („Buch der Quadrate“, 1225 geschrieben) enthält Aufgaben mit unbestimmten quadratischen Gleichungen. U.a. geht es um die Aufgabe, eine (rationale) Quadratzahl so zu bestimmen, daß sie, um 5 vergrößert oder vermindert, wiederum (rationale) Quadratzahlen liefert. Dasselbe Problem findet man auch bei al-Karaǧī . In der letzten Aufgabe des *„Liber quadratorum“* sollen drei Zahlen x, y und z so bestimmt werden, daß jede der Summen $x+y+z+x^2$, $x+y+z+x^2+y^2$, $x+y+z+x^2+y^2+z^2$ eine Quadratzahl ist.

Leonardo verfaßte auch eine *„Practica geometriae“* (1220 oder 1221). Sie beschäftigt sich mit wissenschaftlichen Fragen (Definition geometrischer Grundbegriffe, Bestimmen der Quadrat- und Kubikwurzel, Heronische Dreiecksformel, Würfelverdopplung, Fünf- und Zehneck, Sehnenrechnung), vor allem aber mit der praktischen Geometrie (Längen-, Flächen- und Körpermaße; Ausmessung beliebiger Felder; Vermessung mit dem Quadranten; Flächen- und Volumenformeln für ebene Figuren und Körper). Die Methoden, die Leonardo gebraucht, knüpfen an Heron und an die römischen Feldmesser (Agrimensoren) an (vgl. [Scriba/Schreiber, S. 86ff.]). Oft löst Leonardo geometrische Aufgaben mit Hilfe der Algebra, indem er sie auf quadratische Gleichungen zurückführt. Manches erinnert an die Schriften von Savasorda und Abū Kāmil. Ähnlich wie der *„Liber abbaci“*, wurde auch die *„Practica geometriae“* Ausgangspunkt für Schriften zur praktischen Mathematik insbesondere im italienischen Raum: es gibt zahlreiche in handschriftlicher Form erhaltene Traktate in italienischer Sprache, und auch Luca Pacioli hat in seiner *„Summa“* (1494) Leonardos *„Practica geometriae“* ausgiebig benutzt.

4.3 Jordanus Nemorarius und Johannes de Muris

Einen originellen Beitrag zur Algebra lieferte Jordanus Nemorarius, einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters, der im 13. Jh. lebte. Er verfaßte u. a. eine Schrift *„De numeris datis“* (*„Über gegebene Zahlen“*; hrsg. von [Hughes 1981]), die nach dem Vorbild von Euklids *„Data“* verfaßt ist. Alle Aufgaben sind von der Form: Wenn gewisse Zahlenausdrücke gegeben sind, so sind auch die darin vorkommenden Zahlen gegeben, d. h., man kann sie aus ihnen berechnen. Anders als in früheren algebraischen Texten, verzichtet Jordanus auf Anwendungen in der Geometrie; seine Probleme stellen abstrakte Zahlenbeispiele dar. Seine Schrift gilt zu Recht als die erste wissenschaftliche Darstellung der Algebra, die seit Diophant in Europa geschrieben wurde. Juschkewitsch [1964, S. 388] nennt das Werk „gleichsam das Hochschullehrbuch der abstrakten Algebra des 13. Jahrhunderts; es ist auf einer methodischen Anordnung der Beispiele aufgebaut, die zunächst in allgemeiner Form gelöst und dann anhand von Zahlenbeispielen erläutert werden.“

Wie alle mittelalterlichen Autoren, die sich mit Algebra beschäftigt haben, leidet auch Jordanus an dem Mangel einer allgemeinen mathematischen Zei-

chensprache. Aber während noch lange nach ihm jede Operation mit allgemeinen Zahlen an Strecken oder Rechtecken ausgeführt wurde, tritt bei ihm das Buchstabensymbol als rein arithmetisches Zeichen für eine beliebige Zahl auf. Allerdings führt er für die Ergebnisse der Zwischenschritte stets weitere neue Buchstabenbezeichnungen ein; dies erschwert dem modernen Leser das Verständnis.

Das Werk besteht aus vier Büchern. Im 1. Buch werden die Aufgaben über Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten zusammenfassend behandelt. Die Grundformen sind die Gleichungssysteme $x+y=a$, $x-y=b$ (I.1); $x+y=a$, $x\cdot y=b$ (I.3) und $x-y=a$, $x\cdot y=b$ (I.5); dabei werden die Lösungsregeln für jedes System rein verbal formuliert. Die letzten beiden Systeme werden nicht auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt, sondern mit Hilfe von Umformungen auf die Form des ersten, linearen Systems gebracht. Immer wieder führt Jordanus spätere Aufgaben auf sie zurück, ja er geht dabei so weit, daß er z. B. $(x+a)x=b$ nicht als einfache quadratische Gleichung auffaßt, sondern mit Hilfe von $(x+a)-x=a$ auf I.5 zurückführt. Die Lösungsmethoden, die Jordanus hier verwendet, findet man in ähnlicher Weise schon bei den Babyloniern.

Die Aufgaben von Buch 2 werden im wesentlichen mit Hilfe von Proportionen ausgedrückt. Die Probleme führen auf lineare Gleichungen, wobei Jordanus mit den einfachsten beginnt und bis zu Gleichungssystemen mit vier Unbekannten fortschreitet. Besonders interessant ist die Aufgabe 27. Sie führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1+\tfrac{1}{2}(x_2+x_3+x_4)&=37\\ x_2+\tfrac{1}{3}(x_3+x_4+x_1)&=37\\ x_3+\tfrac{1}{4}(x_4+x_1+x_2)&=37\\ x_4+\tfrac{1}{5}(x_1+x_2+x_3)&=37. \end{aligned}$$

Dieser Aufgabentyp ist bereits bei al-Karaǧī und bei Leonardo Fibonacci zu finden. Jordanus' Lösungsmethode beruht auf dem einfachen falschen Ansatz. Er akzeptiert nur positive Lösungen und geht der Frage nach, unter welchen Bedingungen positive Lösungen existieren.

Buch 3 handelt ebenfalls von Proportionen und von Aufgaben mit mehreren Unbekannten, die daraus gebildet werden. Es unterscheidet sich von Buch 2 dadurch, daß hier fast überall Quadratwurzeln ausgezogen werden müssen, die in Buch 2 nie vorkommen.

In Buch 4 finden wir u. a. Regeln zur Lösung von drei Typen quadratischer Gleichungen (IV.8-10) in der Form, wie sie von al-Ḫwārizmī, Savasorda und Abu Bakr überliefert werden.

Jordanus' algebraische Schrift wurde stark beachtet. U.a. beabsichtigte Johannes Regiomontanus (1436–1476), das Werk in seiner eigenen Druckerei zu veröffentlichen. In der Handschrift C 80 der Sächsischen Landesbibliothek Dresden, die den Stand der Algebra in Süddeutschland und an der Universität

Leipzig nach 1480 wiedergibt, werden u. a. Sätze aus Jordanus' *„De numeris datis“* zitiert, und auch Adam Ries (1492–1559) hat dieses Werk gekannt und benutzt: in der Handschrift seiner algebraischen Schrift (der *„Coß“*; s. unten) befindet sich eine deutsche Übersetzung von Teilen von Jordanus' Schrift.

Ähnlich einflußreich wie Jordanus' *„De numeris datis“* war eine arithmetisch-algebraische Schrift von Johannes de Muris (Jean de Murs, um 1290/95 - nach 1345). Er erwarb im Jahre 1321 an der Pariser Universität den Titel eines Magisters. Von 1338 bis 1342 war er Schreiber im Dienste des Königs Philippe d'Évreux, und 1344 wurde er vom Papst Clemens VI. nach Avignon gerufen. Um 1323 schrieb Johannes de Muris Kurzfassungen zur Musiktheorie und zur Arithmetik des Boethius (*„Musica speculativa“* bzw. *„Arithmetica speculativa“*), die speziell als Lehrbücher an den Universitäten große Verbreitung erfuhren. Im Jahre 1343 vollendete er sein mathematisches Hauptwerk mit dem Titel *„Quadripartitum numerorum“* (Edition: [L'Huillier 1990]). Es trägt seinen Namen, weil es in vier Bücher eingeteilt ist. Das Werk behandelt Arithmetik und Algebra; dazu kommen in Buch 4 Abschnitte zur Musiktheorie und Mechanik. Die algebraischen Abschnitte befinden sich vor allem in Buch 3 und in einer umfangreichen Ergänzung, die zwischen Buch 3 und 4 eingefügt ist und den Namen *„Semiliber“* (Halbbuch) trägt. Die algebraischen Teile in Johannes de Muris' Schrift beruhen auf Leonardo von Pisas *„Liber abbaci“* und seinem *„Flos“*. Er teilt wie Leonardo die linearen und quadra-

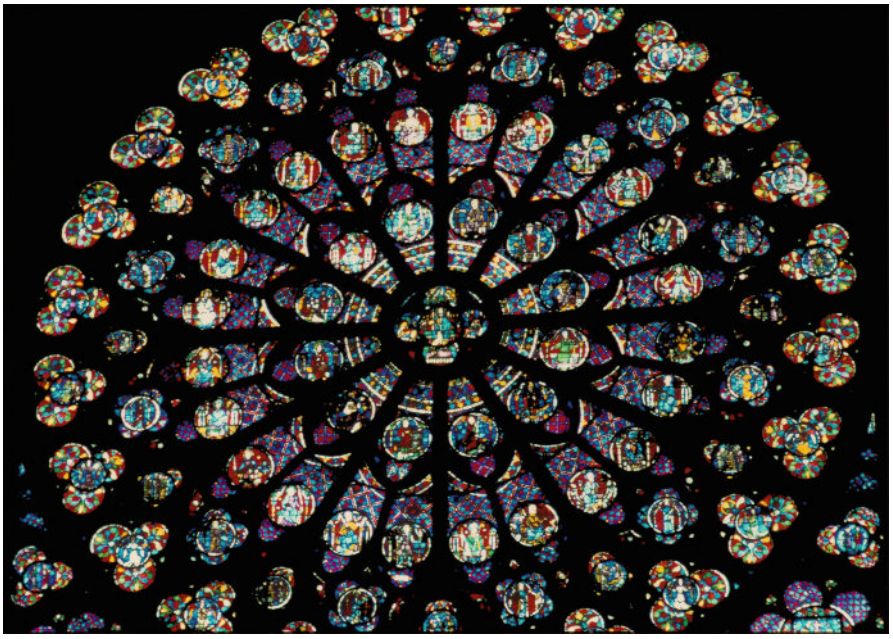


Abb. 4.3.4. Südrose der Kathedrale Notre Dame in Paris
[Foto Alten]

tischen Gleichungen in sechs Klassen ein und lehrt, wie sie aufzulösen sind. Um die Methoden zu erläutern, formuliert er 45 spezielle Aufgaben und lehrt, wie sie gelöst werden müssen. Ein Beispiel (Buch 3, *Questio* 17; [L'Huillier, S. 318]):

(Die Zahl) 10 wird in zwei Teile geteilt, und der Quotient wird zum Divisor hinzugefügt. Es ergibt sich $5\frac{1}{2}$. Was sind die Teile?

Antworte: Der größere Teil sei x, der kleinere $10-x$. Nimm $10-x$ von $5\frac{1}{2}$ weg; es bleibt $1x-4\frac{1}{2}$ übrig, weil 10 um diesen Wert $5\frac{1}{2}$ übertrifft. Das, was nach der Subtraktion übrig bleibt, ist der Quotient. Multipliziere ihn mit $10-x$; es ergibt sich $14\frac{1}{2}x+(-x^2-45)$. Dies ist gleich x. Daher wirst du (nach dem 5. der sechs Fälle) als Teile, die du suchst, 6 und 4 finden.

Zu lösen ist also das Gleichungssystem

$$x+y=10,\ \frac{x}{y}+y=5\frac{1}{2}.$$

Wegen $y=10-x$ folgt aus der zweiten Gleichung:

$$\frac{x}{y}=5\frac{1}{2}-y=x-4\frac{1}{2}.$$

Dann ist

$$x=(x-4\frac{1}{2})\cdot y=(x-4\frac{1}{2})\cdot(10-x)=14\frac{1}{2}x-x^2-45.$$

Dies führt auf die quadratische Gleichung

$$x^2+45=13\frac{1}{2}x.$$

Dies ist eine Gleichung des Typs (5): $x^2+c=bx$, dessen Lösung vorher dargestellt worden war.

[Man beachte, daß bei Johannes de Muris keine Symbole benutzt werden: alles wird verbal ausgedrückt. x heißt bei ihm *res* (Ding) oder *radix* (Wurzel), x^2 *census* (entsprechend dem arabischen Ausdruck für x^2). Für $10-x$ steht 10 *minus re*. Für „addieren", „subtrahieren" und „multiplizieren" werden die lateinischen Ausdrücke *addere*, *auferre*, *ducere in* ... benutzt. Auch die Gleichheit wird durch Verben ausgedrückt: *equari* (gleich sein), *remanere* (sich ergeben), *exire* (herauskommen).]

Ebenso wie bei Jordanus' algebraischer Schrift, beabsichtigte Johannes Regiomontanus auch, das *„Quadripartitum numerorum"* in seiner eigenen Druckerei herauszugeben. Er besaß eine Abschrift des Werks (heute New York, Columbia University, Plimpton 188), die er intensiv studiert hat: Der Codex enthält zahlreiche Randbemerkungen von der Hand des Regiomontanus, in denen dieser öfters algebraische Lösungen des Johannes de Muris durch geometrische ersetzte.

4.4 Die Entwicklung in Italien

Nicht lange nach Leonardos *„Liber abbaci“* entstanden die ersten mathematischen Fachtexte, die nicht mehr in der Gelehrtensprache Latein, sondern in einer Landessprache (Italienisch) geschrieben waren.

Das Aufkommen nationalsprachiger Texte und, damit verbunden, auch das Entstehen spezieller Schulen, in denen in diesen Sprachen unterrichtet wird, steht in Zusammenhang mit der sogenannten „wirtschaftlichen Revolution“ im Hochmittelalter. Sie bescherte den italienischen Handelsstädten einen ungeheuren Reichtum, an dem vor allem die Händler und Bankiers Anteil hatten. Die Kenntnisse in Mathematik und Buchführung, die sie benötigten, konnten sie nicht auf Universitäten erwerben: die dort benutzten Algorismus-Schriften waren auf Latein geschrieben und lehrten Methoden, die für das Rechnen der Praktiker nicht besonders geeignet waren. Tatsächlich hat es zunächst kaum Kontakte zwischen Kaufleuten und Universitätslehrern gegeben. Stattdessen entwickelte man eigene Schulen, an denen die Mathematik nach den Erfordernissen für künftige Kaufleute gelehrt wurde. Eine derartige Schule, an der spezielle Lehrer, die *maestri d'abbaco*, unterrichteten, wird erstmals im Jahre 1284 in den Statuten von Verona erwähnt. Der erste Abbacus-Lehrer, dessen Namen wir kennen, ist ein *maestro Neri*, der 1304 in Florenz wirkte. Schon 1316 schlossen sich die Abbacus-Lehrer in Florenz mit den übrigen Lehrern zu einer Gilde zusammen. 1343 gab es in Florenz sechs Abbacus-Schulen mit 1000 bis 1200 Schülern. Die Schüler waren zumeist etwa 10 bis 12 Jahre alt und Söhne von Kaufleuten und Händlern.

Die an diesen Schulen benutzten Abbacus-Schriften behandelten die mathematischen Methoden und Techniken, die die italienischen Kaufleute benötigten. Die *abbaci* wurden aber nicht nur für die Schüler der Abbacus-Schulen geschrieben, sondern sie sollten wohl auch dazu dienen, mathematische Probleme zu lösen, die in der Praxis auftreten konnten. Von etwa 1290 bis 1500 gibt es mehr als 200 Abbacus- und verwandte Texte in italienischer Sprache. Der älteste Traktat ist der anonyme *„Livero del abbecho“* (um 1290). Die Mehrzahl der Arbeiten stammt aus der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts, aber immerhin 40 wurden im 14. Jahrhundert geschrieben.

Die mit dem Wort *abbacus* bezeichneten Schriften haben nichts mit dem mittelalterlichen Abakus, dem Rechenbrett, zu tun, sondern sie beruhen ausschließlich auf dem indisch-arabischen Zahlensystem. Üblicherweise behandeln sie neben umfangreichen Anweisungen zur Zahlenschreibweise und zu den arithmetischen Operationen, die durch Beispiele aus der kaufmännischen Praxis und aus der Unterhaltungsmathematik erläutert werden, auch Algebra und Geometrie. Sie sind somit Textbücher zur praktischen Mathematik, die auch einige theoretische Teile enthalten.

Es fällt auf, daß in den *libri d'abbaco* auch algebraische Inhalte gelehrt werden, die ein Kaufmann nicht unbedingt wissen mußte. Tatsächlich waren es bis zum 16. Jahrhundert in Westeuropa fast ausschließlich Rechenmeister, die

die Algebra weiterentwickelten. Aus moderner Sicht liegt ihre Bedeutung gerade darin, daß sie eine brauchbare algebraische Symbolik schufen und nach zunächst falschen Versuchen Verfahren zur Lösung der Gleichungen 3. und 4. Grades anboten.

Die frühe Entwicklung der Algebra in Italien ist im 19. und 20. Jahrhundert insbesondere von italienischen Mathematikern und Mathematikhistorikern untersucht worden. Genannt seien aus dem 19. Jahrhundert Pietro Cossali (1768–1815), Guglielmo Libri (1803–1869) und Baldassarre Boncompagni (1821–1894).

Diese Tradition wurde im 20. Jahrhundert fortgesetzt. Eine Überblicksarbeit *„Towards a History of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli“* [Franci/Rigatelli 1985] erschien 1985 und stammt von den Mathematikhistorikerinnen R. Franci und L. Toti Rigatelli. Überdies hatten sie auf einer mathematikhistorischen Tagung am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald) mit Nachdruck und dem Verweis auf zahlreiche Quellen herausgestellt: Der Höhepunkt der frühen italienischen Algebra wurde nicht mit dem Werk von del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli und anderen erreicht. Er fällt vielmehr in die Zeit des 13./14. und des frühen 15. Jahrhunderts. Das Bild ist nur dadurch zugunsten der späteren Periode verzeichnet, weil dort gedruckte Quellen vorliegen, während die früheren Quellen ungedruckt bleiben mußten.

Wir folgen hier weitgehend der Darstellung von [Franci/Rigatelli 1985] sowie einigen einschlägigen Arbeiten von Jens Høyrup.

Das 15. Kapitel über Algebra im *„Liber abbaci“* des Leonardo, das sich, wie gesagt, auf al-Ḫwārizmī bezieht, hat insbesondere in den in hoher Blüte stehenden italienischen Rechenschulen (abbacus-Schulen) des 14. und 15. Jahrhunderts einen bedeutenden Einfluß ausgeübt.

Die Autorinnen [Franci/Rigatelli 1985] berichten über eine Reihe von Manuskripten in italienischer Sprache von al-Ḫwārizmīs algebraischer Abhandlung. Das vermutlich früheste stammt aus dem Jahre 1390, ein anderes ungefähr aus dem Jahre 1400. Noch mehr Manuskripte gehören in das 15. Jahrhundert, von denen das des Meisters Benedetto von Florenz – *„Practicha d'arismetrica“* – eine besonders hohe Bedeutung erlangt hat. In diese Gruppe hat man auch eine *„Ragionamenti d'algebra“* eines gewissen Raffaello Canacci zu rechnen. Ein anonymer Autor schließt sich in einem Manuskript von ca. 1465 eng an al-Ḫwārizmī an.

Die früheste italienische Abhandlung zum Abbacus, die in Teilen auf Algebra eingeht, trägt den Titel *„Libro di Ragioni“*. Es stammt von dem Florentiner Paolo Gerardi und wurde 1328 in Montpellier geschrieben. Der sozusagen algebraische Teil *„Regolle delle cose“* behandelt die 6 Gleichungstypen des *„Liber abbaci“* von Leonardo und weitere 9 Gleichungstypen, in denen dritte Potenzen auftreten. Beispielsweise ist $ax^3 = bx^2 + cx$ reduzierbar auf einen quadratischen Typ. Dagegen sind $ax^3 = bx + c$, $ax^3 = bx^2 + c$, $ax^3 = bx^2 + cx + d$ echt kubische Gleichungen. Freilich sind die angegebenen

Lösungen falsch, haben aber einen großen Einfluß auf die weitere Entwicklung ausgeübt.

Im nächsten Abschnitt gehen die Autorinnen ausführlich auf die *„Practicha d'arismetrica"* (1463) des Benedetto von Florenz ein. Dort erwähnt Benedetto einen gewissen Biagio, der um 1340 gestorben sein soll und in Florenz gewirkt habe. Biagio habe, nach Benedettos Meinung, als erster Algebra auf kommerzielle Probleme angewandt.

Benedetto gibt zwei Probleme wieder, von denen Biagio gesagt habe, sie seien unlösbar mit den Mitteln der Algebra:

(1) *„Suche eine Größe derart, daß durch Multiplikation eines um drei vermehrten Drittels mit dem um vier vermehrten Viertels die gesuchte Größe entsteht."*

Die Aufgabe führt auf eine quadratische Gleichung, die keine reelle Lösung besitzt.

(2) *„Teile 10 in zwei Teile derart, daß ihr Produkt das Vierfache des Quotienten der größeren Zahl durch die kleinere ist."*

Mit $x+y=10$ und $x<y$ hat man $xy=4\cdot\frac{y}{x}$. Daraus folgt $x^2=4$ und $x=2$

Wir können aber erkennen, worin die Schwierigkeit liegt: Wenn er x als größeren Teil setzt, so ist der kleinere $10-x$. Dann ist $x(10-x)=\frac{4x}{10-x}$. Und er erhält $20x^2=96x+x^3$ mit der Lösung 8 und den von ihm nicht akzeptierten Lösungen 12 und 0.

Betrachtet man dagegen x als den kleineren Teil, so entsteht in der Tat ein mit den damaligen Mitteln der Algebra nicht lösbares Problem: Man erhält die echt kubische Gleichung $x^3+40=10x^2+4x$.

Das früheste vollständig auf Algebra orientierte Abbacus-Manuskript trägt den Titel *„Aliabraa-Argibra"* und stammt vom Meister Dardi von Pisa und wurde 1344 verfaßt. Vier Kopien bzw. Übersetzungen haben sich erhalten. Man hat an anderen erhalten gebliebenen Manuskripten nachweisen können, daß *„Aliabraa"* einen großen Einfluß auf andere Abbacus-Schulen ausgeübt hat.

Auch Dardi von Pisa hat sich mit Gleichungen dritten und vierten Grades befaßt. Eine von ihm behandelte Gleichung dritten Grades vom Typ $x^3+ax^2+bx=c$ führt auf eine Lösungsformel, die allerdings nur richtig ist, wenn $a^2=3b$ ist [Scholz 1990, S. 147/148].

Einen längeren Abschnitt widmen die Autorinnen Franci und Rigatelli Meister Antonio de'Mazzinghi, der als der geschickteste Algebraist galt. Leider haben sich nur längere Auszüge aus seinen Schriften erhalten.

Antonio stammt aus Florenz und wurde 1355 geboren. Er erhielt seine Ausbildung bei dem berühmten Abbacisten Paolo dell'Abbaco. Daneben galten seine wissenschaftlichen Interessen der Astrologie/Astronomie, Musik, dem Bauwesen und der Perspektive.

Unter der Bezeichnung *termini d'algebra* führt Antonio die ersten 6 Potenzen der Unbekannten ein: *cosa, censo, cubo, censo di censo, cubo relato oder*



Abb. 4.4.5. Der Dom S. Maria del Fiore zu Florenz – ein Meisterwerk italienischer Renaissance, begonnen 1296 von Arnolfo di Cambio, weitergeführt von Giotto, Talenti und Giovanni di Lapo, vollendet 1436 mit der Kuppel von Brunelleschi.
[Foto Alten]

duplici cubo, cubo di cubo für x^1 bis x^6. Es folgen Regeln für Multiplikation und Division der Potenzen; letzteres führt auf Potenzen der Form $\frac{1}{x}$ bis $\frac{1}{x^6}$, genannt *cosa-esimi* bis *cubo di cubo-esimi.* Dann werden Regeln für Multiplikation und Division von Monomen und Polynomen dargelegt.

Neben 44 theoretischen Aufgaben vom Typ „Teile eine Zahl in zwei (drei, vier oder fünf) Teile, so daß ...“ werden 11 praktische Aufgaben, u. a. Tauschhandel, Geldwechsel und Zinsen, behandelt.

Antonio bietet die Behandlung – in Worten, ohne Symbolik – von komplizierten Problemen, bei denen zwei oder mehr Unbekannte auftreten. Beispielsweise behandelt er die Gleichungssysteme (in moderner Bezeichnung)

$$u + v = 10, \quad \tfrac{uv}{u-v} = \sqrt{11} + \sqrt{12}$$

oder

$$u \cdot v = 6, \quad u^2 + v^2 = 13$$

oder

$$x : y = z : t, \quad x^2 + y^2 = 60, \quad z^2 + t^2 = x \cdot y, \quad z \cdot t = 10.$$

In den folgenden Abschnitten gehen die Autorinnen ausführlich auf die Situation im Florenz des 14. Jahrhunderts ein. Dort gab es zwei Strömungen in der Algebra: eine von Leonardo von Pisa inspirierte und von Biagio und Antonio weitergeführte und eine andere, deren Beginn unklar ist, mit dem herausragenden Gerardi als erstem Exponenten.

Zwei anonyme Manuskripte vom Ende des 14. Jahrhunderts zeigen das Zusammenfließen der Tendenzen. Dort finden sich einige Fortschritte, die in die Zukunft weisen. Durch die Transformation $x = y - \frac{p}{3}$ geht die Gleichung $x^3 + px^2 = q$ über in eine Gleichung $y^3 = p'y + q'$ ohne quadratisches Glied. Und es wird ein Verfahren angegeben, eine kubische Gleichung zu konstruieren, die eine vorgegebene Zahl als Wurzel besitzt [Scholz, S. 148/149] [Franci/Rigatelli, S. 48]. Doch betonen die Autorinnen, daß sich von hier aus keine Verbindung zu den späteren Leistungen von Scipione del Ferro bzw. Girolamo Cardano nachweisen ließ.

Es ist hier unmöglich, die Fülle der Manuskripte, deren Inhalte sowie die Vertreter der Abbacus-Schulen und der Algebra wiederzugeben [Franci/Rigatelli, S. 45-61]. Jene Männer waren u. a. Vertreter der reichen Kaufmannschaft. Giovanni di Bartolo arbeitete mit Filippo Brunelleschi beim Bau der großen Kuppel des Florentiner Domes zusammen. Der Maler Piero della Francesca war zugleich ein bedeutender Algebraiker.

4.4.1 Luca Pacioli

Ein weiteres Kapitel von [Franci/Rigatelli] *„The unmerited fame: Luca Pacioli”* ist Luca Pacioli (ca. 1445–1517) gewidmet. Die Autorinnen stellen zunächst klar, daß Luca Pacioli, obgleich er in seinen Leistungen deutlich hinter früheren ungedruckten Texten zurückblieb, seinen Ruhm vor allem dem Umstand verdankt, daß sein Werk gedruckt wurde: *„Luca Pacioli ...*

surely is the best-known abacist of the 15th century, even if he was not the most skilled. ...his fame is due to the fact that his work, unlike others which we judge to be better, was printed.“ [Franci/Rigatelli, S. 61]

Der Ruhm von Luca Pacioli beruht auf seiner umfangreichen Darstellung *„Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità“* (1494, zweite Edition 1523).

Die *„Summa“* enthält das mathematische Wissen, das an den Abbacus-Schulen gelehrt wurde. Ein Teil davon, die 4., 5. und 6. Abhandlung der 8. *„distinctio“* , sind der Algebra gewidmet, *„that is called by people the rule of the thing or the great art, that is speculative practice, otherwise called Algebra and almuchabala in Arabic languages, after the opinion of some people in our language is the same to say restaurationis and oppositionis. Algebra that is Restauratio, Almuchabala that is oppositio.”* [Franci/Rigatelli, S. 62]

Luca Pacioli führt Bezeichnungen ein: *grandi dei caratteri algebraici* (d. i. Potenzexponenten der algebraischen Charaktere). Er verwendet das Symbol $\bar{R}$ (ein R mit kleinem Querstrich). Dann bedeutet

$\bar{R}$ eine Zahl
$\bar{R}$ 2 cosa, d.i. modern die Unbekannte x
$\bar{R}$ 3 censo, d.i. x^2
$\bar{R}$ 4 cubo, d.i. x^3
$\bar{R}$ 5 censo de censo, d.i. x^4

usw. bis $\bar{R}$ 10, d.i. x^9, censo di primo relato.

Dann folgen die Regeln der Multiplikation der Charaktere.

Die Gleichungen typisiert er folgendermaßen (moderne Bezeichnungen, ohne Koeffizienten):

(1) Censo de censo equale a numero $(x^4 = a)$
(2) Censo de censo equale a cosa $(x^4 = x)$
(3) Censo de censo equale a censo $(x^4 = x^2)$
(4) Censo de censo e censo equale a cosa $(x^4 + x^2 = x)$
(5) Censo de censo e cosa equale a censo $(x^4 + x = x^2)$
(6) Censo de censo e numero equale a censo $(x^4 + a = x^2)$
(7) Censo de censo e censo equale a numero $(x^4 + x^2 = a)$
(8) Censo de censo equale a numero e censo $(x^4 = a + x^2)$

Luca Pacioli bemerkt, daß z. B. aus den Gleichungen (1) und (2) – durch Multiplikation mit Potenzen der Unbekannten – weitere Gleichungen erhalten werden können. Bei Gleichungen der Typen (3), (4), (5), muß durch eine geeignete Potenz dividiert werden. Besondere Aufmerksamkeit verdienen die Gleichungen der Typen

$ax^3 + bx + c = 0, \quad ax^3 + bx^2 + c = 0$ und $ax^4 + bx^3 + c = 0.$

Luca Pacioli behauptet nicht – und das muß beachtet werden – daß diese Gleichungen nicht lösbar seien (Cardano wird später behaupten, daß Pacioli die Unlösbarkeit behauptet habe). Luca Pacioli stellt lediglich fest, daß bisher

noch keine allgemeine Regel gefunden worden sei, nur spezielle Fälle seien durch Probieren gelöst worden. *„But of number, cosa and cubo however they are compound, or of number, censo, censo and cubo, or of number, cubo and censo di censo nobody until now has formed general rules, because they are not proportional among them (...) And therefore, until now, for their equations, one cannot give general rules, exept that, sometimes by trial. (...) in some particular cases, and therefore when in your equations you find terms with different intervals without proportion, you shall say that the art, until now, has not given the solution to this case (...).Even if the case may be possible."* [Franci/Rigatelli, S. 64/65]

Luca Pacioli behandelt theoretische Probleme von dem bekannten Typ: *„Teile eine gegebene Zahl in zwei, drei. Teile, so daß.....“* Daneben werden Probleme des Geschäftslebens behandelt. z. B. Tausch, Geldwechsel, Zinsen, Geschäftsreisen.

Die Autorinnen kommen zu dem Schluß, daß die Algebra von Luca Pacioli inhaltlich keine neuen Elemente gegenüber früheren Abhandlungen hinzufügt. Andererseits ist offensichtlich, daß die späteren Autoren – Scipione del Ferro, Cardano, Tartaglia, Ferrari und andere – nicht nur von der Lektüre der *„Summa“* profitiert haben, sondern auch von jenen zahlreichen Manuskript gebliebenen Abhandlungen früherer Zeit. Das Problem der Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grades jedenfalls war zeitlich vor der *„Summa“* bereits im Bewußtsein der Abbacisten bzw. Algebraiker vorhanden.

4.5 Entwicklungen in Westeuropa

Auch außerhalb Italiens gab es in jener Zeit Algebraiker von Format. Abgesehen von der sogenannten „Deutschen Coß“, auf die gesondert eingegangen werden soll, erwähnen wir hier Chuquet für Frankreich, Recorde für England, Stevin für die Niederlande und Nunes für Portugal.

4.5.1 Nicolas Chuquet

Der vermutlich 1445 in Paris geborene Chuquet studierte wohl in Paris Medizin. Er wirkte in Lyon möglicherweise als Arzt. Er starb um 1488.

Die 1484 niedergeschriebene Abhandlung *„Le triparty en la science des nombres“* blieb zwar damals ungedruckt, hat aber dennoch einen großen Einfluß ausgeübt. Das Manuskript besteht aus drei Hauptteilen – daher *Triparty* – und zwar Rechnen mit rationalen Zahlen, Rechnen mit irrationalen Zahlen und Theorie der Gleichungen.

Die Bezeichnungen für die Potenzen der Variablen erinnern schon an die moderne Auffassung. So steht 12^0 für 12, 12^1 für $12x$, 12^2 für $12x^2$ usw.

Auch treten negative Potenzexponenten auf: $12^{1\tilde{m}}$ ist, wegen $1\tilde{m}$ gleich -1, zu verstehen als 12^{-1}, also gleich $12x^{-1} = \frac{12}{x}$ [Struik, S. 60/61]. Dann folgen

die Regeln für die Multiplikation von Potenzen, in seiner Schreibweise etwa $12^0 \cdot 12^0 = 144^{0+0} = 144^0 = 144$.

Dahinter verbirgt sich der Spezialfall von $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

Bei der Behandlung quadratischer Gleichungen folgt Chuquet den bekannten Regeln, doch werden negative Wurzeln nicht anerkannt. In einigen Aufgaben führt er zur Lösung zwei Unbekannte mit unterschiedlichen Bezeichnungen ein. Übrigens stammen von ihm die Wortbildungen Billion, Trillion, Quadrillion für 10^{12}, 10^{18}, 10^{24}.

4.5.2 Robert Recorde

Auch der englische Arzt und Autor mathematischer Bücher, Robert Recorde (ca. 1512–1558), gehört in die Reihe der Persönlichkeiten, die zur Entwicklung algebraischen Denkens beitrugen. Als Arzt war er bei König Edward VI. und Königin Mary tätig.

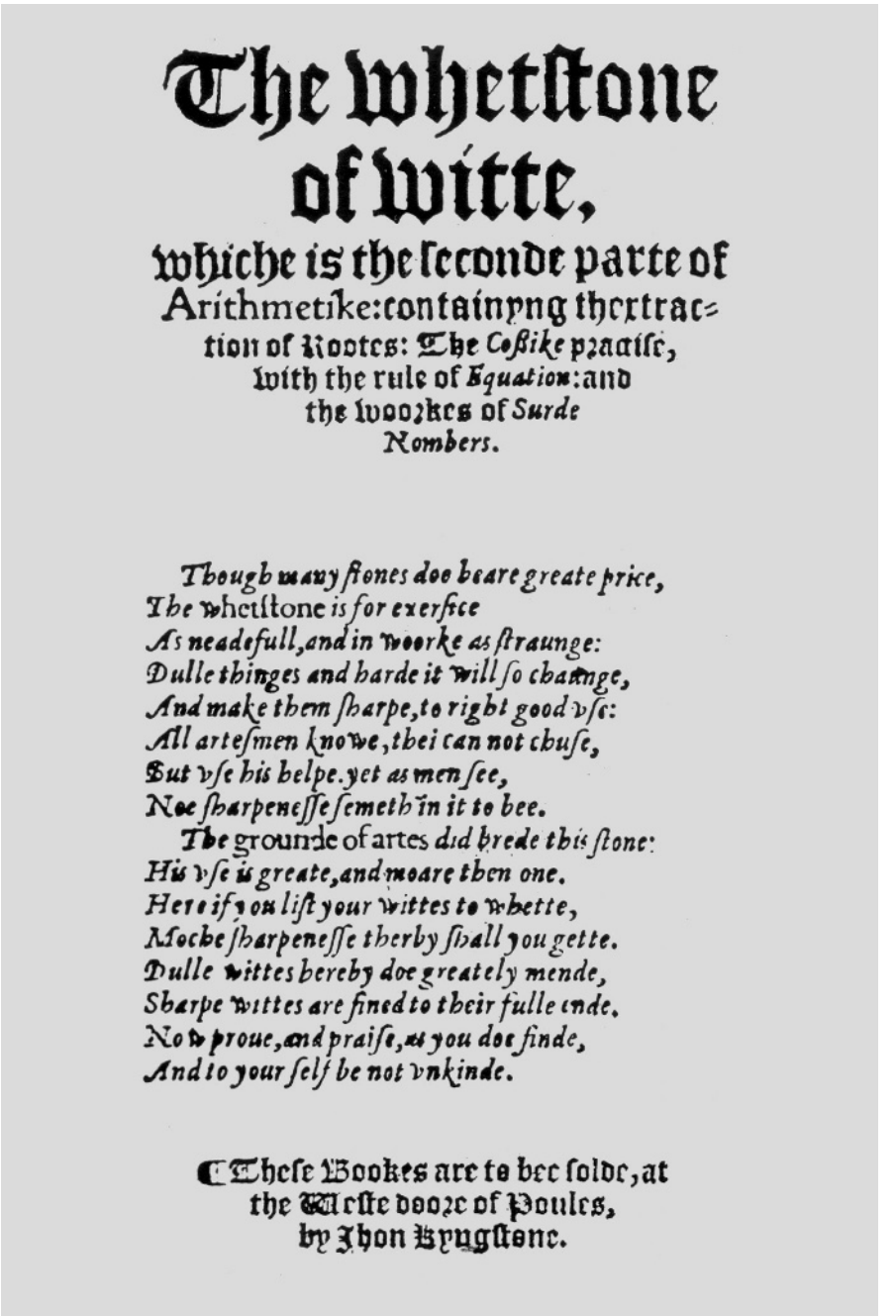
Das Anliegen seiner mathematischen Bücher war wohl mehr pädagogischer Art. Daher sind die Bücher vorwiegend in Form von Dialogen zwischen Lehrer und Schüler geschrieben. Es scheint, daß er sein Leben im Gefängnis beenden mußte, möglicherweise deswegen, weil er in seinen Schriften expressis verbis Vernunft über Autorität stellte. Jedenfalls sind die Gründe seiner Inhaftierung unbekannt.

Sehr erfolgreich war Recordes *„The Ground of Arts“* (1543), das jahrhundertelang nachgedruckt wurde und die Grundelemente der Arithmetik lehrte. Der *„Pathway to Knowledge”* (1551) ist der Geometrie gewidmet, *„The Castle of Knowledge”* (1556) der Astronomie.

Am bedeutendsten im Hinblick auf die Entwicklung der Algebra in England war sein *„Whetstone of Witte“* (1557), zu übersetzen etwa mit „Wetzstein des Verstandes.“ Recorde führte das moderne Gleichheitszeichen = ein, mit der folgenden Begründung: *„To avoid the tedious repetition of these words – is equal to – I will set as I do often in work use, a pair of parallels, or gemov (twin) lines of one length, thus = , because no 2 things can be more equal.”* (modernisierte englische Sprache; zitiert nach [Katz 1993, S. 327])

Bei den von Recorde verwendeten Symbolen für die Potenzen der Unbekannten sieht man deutlich, daß er noch der Periode der Coß angehört; insbesondere der Deutschen Coß. Zum erstenmal in England erschienen die Zeichen + und − im Druck, im Anschluß an M. Stifel. Beispiele entnahm Recorde auch von dem deutschen Cossisten J. Scheubel (oder Scheybl) (1494–1580). Recorde modifizierte und erweiterte die cossischen Symbole für Zensus, Cubus und die aufsteigende Folge der „Sursolide.“ Das sind sehr spezielle Zeichen, die hier nicht wiedergegeben werden können [vgl. Katz, S. 327].

Jedenfalls gehört Recorde zu den Wegbereitern der Mathematik in England; er stand am Beginn einer Reihe englischer Autoren, vgl. dazu [Howson 1982].



The whetſtone of witte,

whiche is the ſeconde parte of Arithmetike: containyng the extraction of Rootes: The Coſſike practiſe, with the rule of Equation: and the woorkes of Surde Nombers.

Though many ſtones doe beare greate price,
The whetſtone is for exerſice
As needefull, and in woorke as ſtraunge:
Dulle thinges and harde it will ſo chaunge,
And make them ſharpe, to right good vſe:
All arteſmen knowe, thei can not chuſe,
But vſe his helpe. yet as men ſee,
Noe ſharpeneſſe ſemeth in it to bee.
The grounde of artes did brede this ſtone:
His vſe is greate, and moare then one.
Here if you liſt your wittes to whette,
Moche ſharpeneſſe therby ſhall you gette.
Dulle wittes hereby doe greately mende,
Sharpe wittes are fined to their fulle ende.
Now proue, and praiſe, as you doe finde,
And to your ſelf be not vnkinde.

These Bookes are to bee ſolde, at the Weſte dooze of Poules, by Thon Kyngſtone.

Abb. 4.5.6. Titelblatt des „Whetstone of Witte“ von Robert Recorde



Abb. 4.5.7. Das 1264 gegründete Merton College ist das älteste der Colleges, aus denen die berühmte Universität Oxford hervorging.
[Foto Gottwald]

4.5.3 Simon Stevin

Simon Stevin (1548–1620), vielseitig als Naturforscher, Zivil- und Militäringenieur tätig und engagiert im Befreiungskampf der Niederlande gegen die Spanier, gehört in die Reihe der Wegbereiter der Algebra als selbständiger Disziplin, unmittelbar in die Zeit vor der Entstehung der Arbeiten von Vieta. Der Bereich seiner Arbeiten umfaßt u. a. Rabatt- und Zinstabellen, Berechnung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke, reguläre und halbreguläre Körper, Astronomie, Geographie, Musiktheorie, Hydraulik, hydrostatisches Paradoxon und Fallversuche.

Als Folge des Vorstoßes der Türken bis nach Wien gelangten einige Andeutungen über die in östlichen Ländern verwendeten Dezimalbrüche, die „türkischen Zahlen“, nach Mitteleuropa, wo sich unabhängig davon ebenfalls ähnliche Grundideen herausgebildet hatten, u. a. in der Wiener astronomischen Schule.

Die endgültige Einführung der Dezimalbrüche in Europa verdankt man Stevin. In seinem 1585 veröffentlichten Büchlein *„De Thiende“*(Das Zehnte) erklärte er:

„Thiende ist eine Art der Rechenkunst, durch welche man alle unter den Menschen als notwendig anfallende Rechnungen mittels ganzer Zahlen ohne Brüche erledigt; sie wird gefunden aus der Zehnerreihe, bestehend in den Ziffern, durch die irgendeine Zahl geschrieben wird.“ [Gericke/Vogel, S. 13].

Stevin führte eine spezielle Symbolik für Dezimalzahlen ein. Beispielsweise schrieb er für den Dezimalbruch $6,3759$

$$6\ ⓪\ 3\ ①\ 7\ ②\ 5\ ③\ 9\ ④$$

Die Bedeutung ist klar: Die eingeringelten Zahlen bedeuten den zehnten, hundertsten ... Teil der ganzen Zahl.

In den weiteren Teilen von *„De Thiende“* werden die Grundrechenarten gelehrt und die Anwendung der Dezimalbruchrechung auf Landmessung, Tuchmessung, Weinmessung und Astronomie; ferner gibt es allgemein gehaltene Anweisungen für Münzmeister und Kaufleute.

Die Schreibweise für Dezimalbrüche bei Stevin hängt eng mit seiner Auffassung von „Gleichung“ zusammen, die sich in einer anderen Schrift, in *„L'Arithmétique“* (1585) findet. Auch und besonders hier zeigt sich Stevin unter dem Eindruck der antiken, nun zugänglich gewordenen Schriften, die neu hinzugekommen waren (Diophant), sowie der Entdeckungen bei der Auflösung höherer, insbesondere kubischer Gleichungen. Man könnte sogar sagen, daß *„L'Arithmétique“* eine Art Überblick über den Stand der Algebra am Ausgang des 16. Jahrhunderts gibt, noch vor Vieta, der wesentliche Beiträge zur Terminologie und Bezeichnung mathematischer Begriffe lieferte (vgl. 5.2.1).

Stevin bezeichnet mit Kreisen sozusagen die Potenzen der gesuchten Größe. So würde 1 ② gleich 2 ① +8 der Gleichung $1x^2 = 2x + 8$ mit der Lösung $x = 4$ entsprechen. Entsprechend schreibt Stevin zur Geschichte der Algebra: Kenntnisse über Einzelheiten fehlen ihm, doch verweist er auf die Antike, auf Luca Pacioli, Cardano, del Ferro, Tartaglia , Fior, Ferrari und Bombelli sowie die *„Ars magna“*, die jüngst in Italien erschienen sei.

Für kubische Gleichungen, *von einigen weiteren unbekannten Autoren* erfunden, schreibt Stevin (natürlich ohne Gleichheitszeichen)

③ gleich ①⓪ (entspricht $x^3 = ax + b$) oder

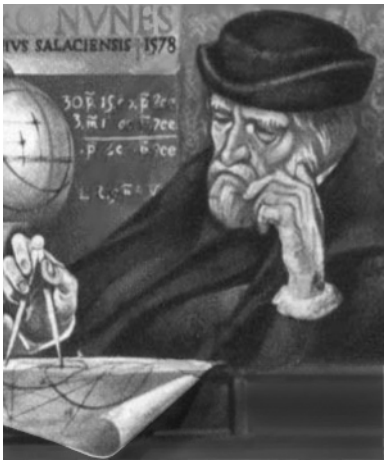
③ gleich ②⓪ (entspricht $x^3 = ax^2 + b$).

Die Gleichung vierten Grades wird mit Ferrari in Verbindung gebracht und erscheint als ④ gleich ③②①⓪.

Bemerkenswert ist auch die Tatsache, daß sich bei Stevin eine Erweiterung des Zahlbegriffes über den der natürlichen Zahl hinaus expressis verbis findet. Im Gegensatz zu fast allen Mathematikern seiner Zeit hielt er Quadratzahlen, Quadratwurzeln, negative und irrationale Zahlen für Zahlen von derselben Natur. Dies folgte einigermaßen zwingend sowohl aus den Tendenzen der Entwicklung der Algebra als auch aus seiner Theorie der Dezimalzahlen.

4.5.4 Pedro Nunes

Der Einfluss von Pacioli ist auch auf der iberischen Halbinsel, im fernen Portugal, nachweisbar, insbesondere bei Nunes (lat. Nonius) (1502–1578). Das zeigt sich u. a. an der Terminologie. Er schreibt in Anlehnung an das Italienische co für cosa (d.i. x), ce für censo (d.i. x^2), cu für cubo (d.i. x^3)



Pedro Nunes



Robert Recorde

und $\bar{p}$ bzw. $\bar{m}$ für plus und minus [Katz, S. 327]. Doch scheint er von der Entwicklung in Deutschland nicht berührt worden zu sein.

Nunes hatte in Salamanca und in Lissabon Medizin studiert. Schließlich wurde er Professor der Mathematik an der Universität Coimbra. Zu seinen Schülern zählt auch der berühmt gewordene Jesuit und Mathematiker Christoph Clavius (1537–1612).

Von Nunes stammen übrigens auch Beiträge zur Navigation. Portugal war im 16. Jahrhundert eine führende Seemacht geworden und im Besitz riesiger Kolonialgebiete. Diese Expansion war im 15. Jahrhundert durch Prinz Heinrich den Seefahrer (1394–1460) an seiner Navigatoren"akademie" in Sagres vorbereitet worden. Nunes nun fand heraus, daß sich die Fahrtkurve kürzester Distanz (Großkreis) von der für die Navigation bequemeren Fahrtkurve der Loxodrome unterscheidet.

Was die Algebra betrifft, so schrieb Nunes 1532 ein *„Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria"*. Dort behandelt er quadratische und spezielle kubische Gleichungen; natürlich kann er deren allgemeine Lösung nicht kennen, da die *„Ars magna"* von Cardano erst 1545 erscheinen wird.

Um ein Beispiel zu nennen [Katz, S. 327/328], so behandelte Nunes ein klassisches Problem: Es sollen zwei Zahlen x und y gefunden werden, wobei deren Produkt und die Summe ihrer Quadrate bekannt sind. Das führt auf eine quadratische Gleichung in x^2. Nunes trifft Fallunterscheidungen bezüglich der Größenverhältnisse der beiden Variablen.

Der Text des *„Libro de Algebra..."*, ursprünglich portugiesisch geschrieben, blieb zunächst ungedruckt. Nunes versprach sich mehr von einer spanischen Version. Er übersetzte den Text, der erst 1567(?) in Antwerpen in den Niederlanden gedruckt wurde. Nunes stellte mit Bedauern fest, daß nun sein Werk durch bessere Bücher überholt sei. Und im übrigen wünsche er sich, mit dem



Abb. 4.5.8. Alte Bibliothek der Universität von Coimbra, die 1290 als erste Univerität Portugals in Lissabon gegründet, aber 1307 nach Coimbra verlegt wurde. [Foto Alten]

Blick auf ältere Autoren, insbesondere die der Antike, daß die Wege, auf denen die Ergebnisse gefunden wurden, nicht verdeckt oder verwischt würden, sondern ebenfalls dargelegt werden sollten.

4.6 Frühe Algebra im deutschsprachigen Raum – die sog. Deutsche Coß

Zeitverzögert gegenüber Italien entwickelte sich auch in den deutschsprachigen Regionen mathematisches, speziell algebraisches Denken, gestützt teilweise auf die wissenschaftliche Tradition der Klöster und Universitäten, teilweise auch inauguriert durch den besonders in Süddeutschland rasch aufblühenden Frühkapitalismus und den sich herausbildenden Berufsstand der Rechenmeister. Dieser spannende Prozeß ist seit dem Ende des 19. Jahrhunderts, vor allem aber nach dem Ende des 2. Weltkrieges gründlich erforscht worden, u. a. durch Arbeiten von H. E. Wappler, B. Berlet, M. Curtze, F. Deubner, K. Vogel, W. Kaunzner, H. Wußing.

Vogel und Kaunzner haben auf die Bedeutung des süddeutschen Raumes als Wiege der seit dem 13. Jahrhundert deutlich zutage tretenden Wiederbelebung der Mathematik verwiesen, auf Wien, die reichen Handelsstädte Augsburg, Nürnberg und Regensburg und deren Umfeld.

Man weiß u. a. von einer schon im 10. Jahrhundert erwähnten Bibliothek in Regensburg und später im Kloster St. Emmeram bei Regensburg, die aber 1250 geplündert worden sein soll. Nach 1347 gab es dort, unter wenigen Büchern, auch mathematische Texte.

Seit dem 14./15. Jahrhundert belebte sich die Entwicklung der Mathematik. Zunächst wurden aus Frankreich, Italien, Spanien und England stammende Texte kopiert, die im Kern auf al-Ḫwārizmī zurückgingen. Auch entstanden einige Anleitungen zum Rechnen mit Brüchen, Potenzen und Wurzeln. Dazu kamen Möglichkeiten, den Unterricht an den Artistenfakultäten der Universitäten in mathematisch/astronomischer Hinsicht anzureichern. Hier wurde die Wiener Universität führend. Johannes von Gmunden (ca. 1380/84 -1442) und Georg Peuerbach (1423–1461) entwickelten die indisch-arabischen Rechentechniken sowie die Astronomie weiter. Die Anziehungskraft der Wiener mathematisch-astronomischen Schule war so stark, daß der junge Johannes Müller (1436–1476) aus Königsberg in Franken mit 14 Jahren nach Wien überwechselte; unter dem latinisierten Namen Regiomontanus ging er in die Geschichte der Wissenschaften ein. Neben seiner herausragenden fünfbändigen Darstellung der ebenen und sphärischen Trigonometrie (*„De triangulis omnimodis“*, 1533 im Druck, postum) beschäftigte sich Regiomontanus auch mit Algebra (hierzu siehe unten).

Aus der Frühgeschichte der Algebra/Mathematik in Deutschland sind weitere Details bekannt. Wir beziehen uns hier auf die Überblicksdarstellung von Wolfgang Kaunzner [Kaunzner 1992].

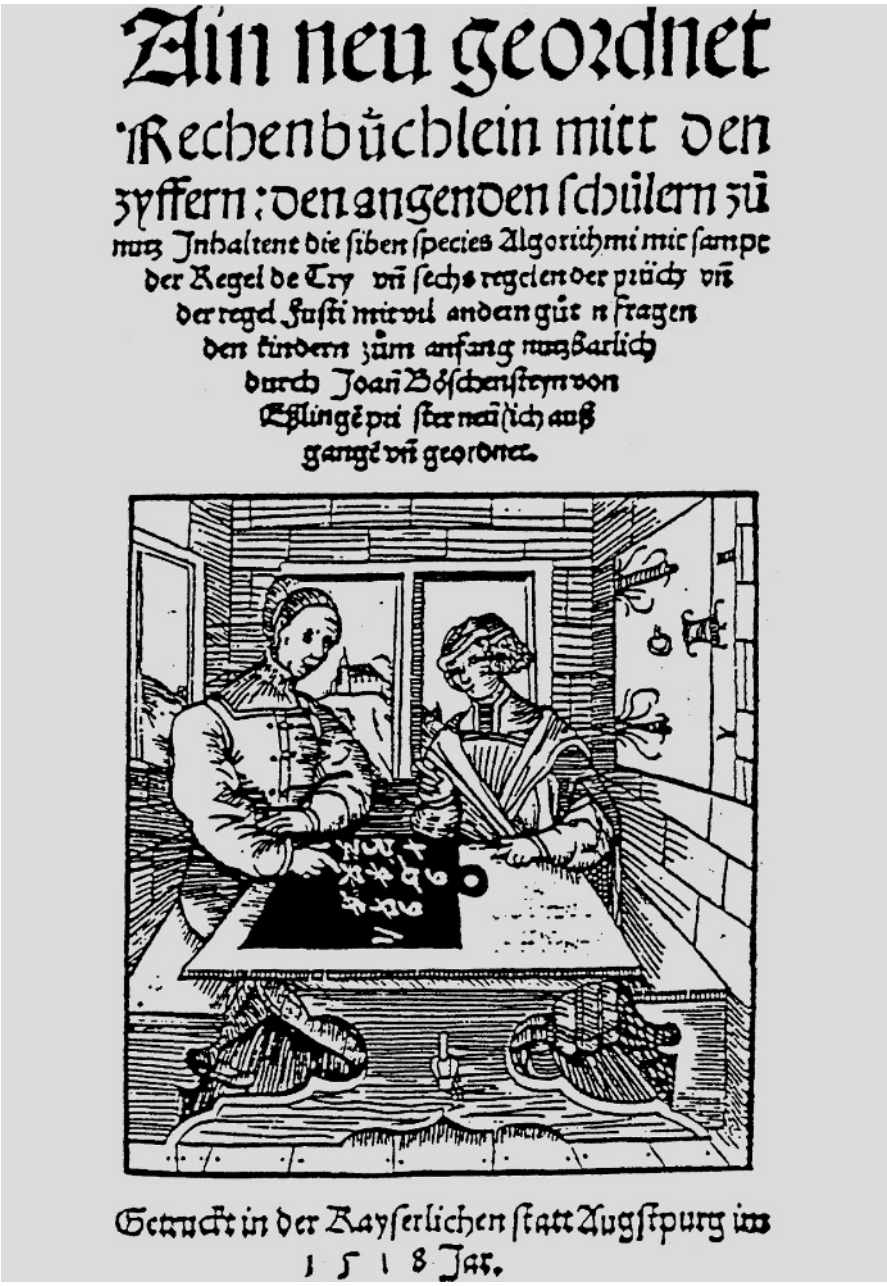


Abb. 4.6.9. Anleitung zum Ziffernrechnen, Titelblatt des Rechenbüchleins von Johann Böschenstein, 3. Aufl. des 1518 in Augsburg erschienenen Buches

In Bamberg *„begann der Druck der ersten deutschen kaufmännischen Rechenbücher“* [Kaunzner, S. 158]. Ein sog. Blockbuch – jede Seite wurde aus je einer Holztafel herausgeschnitten – entstand zwischen 1470 und 1480 [Vogel 1980]. Es folgten 1482 und 1483 zwei weitere Bamberger Rechenbücher, die vermutlich von dem Nürnberger Rechenmeister Ulrich Wagner (gest. 1489/90) stammen. Ihre Inhalte sind kaufmännischer Art, mit Einschluß des Dreisatzes und von Tabellen zu Relationen von Gold- und Silberwährungen.

4.6.1 Die sog. Deutsche Coß

Schon kurz vor dieser Zeit beginnt ein neuer historischer Abschnitt der Algebra-Entwicklung, die sog. Deutsche Coß. *„Den Zeitraum zwischen 1460 und 1550 nennt man in der Geschichte der Mathematik 'deutsche Coß', weil es den damals hier lebenden und wirkenden Fachleuten gelang, den österreichischen, den süd- und mitteldeutschen Sprachraum zum Mittelpunkt einer Entwicklung zu machen, die sich zum Ziel setzte, die mathematische Terminologie vom geschriebenen Wort zu lösen. Diese Vorstellungen konnten in großem Maße verwirklicht werden.“* [Kaunzner 1992, S. 159/160].

Die Cossisten hatten auch Anteil an der Entwicklung einer algebraischen Symbolik. Während in der wissenschaftlichen Mathematik die Namen und Potenzen der Unbekannten, das Verknüpfen und die Gleichheit von Termen stets verbal ausgedrückt wurden (zur Ausnahme Jordanus s. oben), begann man in Italien und in Frankreich seit Ende des 14. Jahrhunderts damit, die Fachausdrücke abzukürzen, zumeist durch die Anfangsbuchstaben der betreffenden Wörter. Solche Abkürzungen wurden manchmal durch besondere Zeichen ersetzt, z. B. bei Chuquet (siehe S. 220). Richtungsweisend war aber eine andere Entwicklung, die von Süddeutschland ausging und an der nicht nur Rechenmeister, sondern auch Wissenschaftler beteiligt waren. Hier ist in erster Linie Johannes Regiomontanus (1436–1476) zu nennen. Er benutzte eine algebraische Symbolik, die vor ihm nicht nachweisbar ist. Wir finden diese Symbolik schon in einer von ihm geschriebenen Handschrift aus dem Jahr 1456, die zahlreiche arithmetische und algebraische Probleme behandelt (jetzt New York, Columbia University, Plimpton 188), dann auch in Briefen aus dem Jahre 1463 und etwa gleichzeitig im Autograph seiner „Dreiecks-lehre.“ Regiomontanus benutzt an allen drei Stellen hochgestellte Zeichen für die Unbekannte x und ihr Quadrat x^2, den langgezogenen Strich für das Gleichheitszeichen, das Zeichen für die Quadratwurzel und die Abkürzung für *minus*. Nach unserem gegenwärtigen Wissen war er der erste, der in der Algebra diejenigen Abkürzungen benutzte, die später als die Symbole der Cossisten große Verbreitung erlangten [Folkerts 1996a].

Einige Probleme, die in Regiomontanus' Handschrift aus dem Jahre 1456 behandelt werden, findet man in ganz ähnlicher Form auch in Texten italienischer Rechenmeister; andere Texte aus der Sammlung haben in den 80er Jahren des 15. Jhs. über Johannes Widmann Eingang in die Algebrastudien an

der Universität Leipzig gefunden. Somit ist die Sammlung des Regiomontanus ein Bindeglied zwischen den italienischen *maestri d'abbaco* und den deutschen Autoren algebraischer Schriften. Bei zwei Aufgaben treten schon im Gleichungsansatz negative Zahlen auf, die als Schulden interpretiert werden. Regiomontanus bemüht sich, bei Aufgaben der unbestimmten Analytik allgemeine Lösungsverfahren zu finden, er kennt die chinesische *ta yen*-Methode zum Lösen des Resteproblems und beschäftigt sich mit dem näherungsweisen Ausziehen der Quadratwurzel. Bei einem Zinseszinsproblem, das auf eine kubische Gleichung führt und das man in ähnlicher Form schon bei den italienischen *maestri d'abbaco* findet, weist Regiomontanus auf den körperlichen Gnomon hin; die beigefügte Figur läßt an die Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung denken, die Scipione del Ferro etwa 50 Jahre später fand (siehe unten). Aus seinem Briefwechsel wissen wir, daß Regiomontanus ahnte, wie man vorgehen müsse, um die allgemeine kubische Gleichung zu lösen, wenn er auch noch nicht dazu in der Lage war. Eine Dreiecksaufgabe in seinem Briefwechsel führt ebenfalls auf eine kubische Gleichung. Regiomontanus erkennt den Zusammenhang mit der Aufgabe, die Sehne zum Bogen 1° zu bestimmen, wenn die Sehne zum Bogen 3° bekannt ist; er wusste also, daß die Winkeldreiteilung mit der Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung zu tun hat.

Neben Regiomontanus beschäftigte sich um die Mitte des 15. Jhs. vor allem Fridericus Amann (in früheren mathematikhistorischen Arbeiten wird er als „Fridericus Gerhart“ bezeichnet) aus dem Benediktinerkloster St. Emmeram bei Regensburg (†1464/65) mit Algebra. Er nutzte den umfangreichen Bestand mathematischer und astronomischer Handschriften in St. Emmeram und kannte indirekt (wohl über das Kloster Reichenbach bei Regensburg) auch die mathematisch-astronomischen Arbeiten an der Wiener Universität. Fridericus verfaßte bzw. kopierte zwischen 1457 und 1463 in Regensburg zahlreiche mathematische, astronomische und geographische Schriften. Eine Sammelhandschrift mit z.T. mathematischen Texten, die Fridericus 1461 schrieb, ist der Codex München, Clm 14908. Er enthält u. a. die erste uns bekannte deutsch geschriebene Algebra, die in Worten die Auflösung der sechs auf al-Ḫwārizmī zurückgehenden Typen linearer und quadratischer Gleichungen beschreibt. Dabei benutzt Fridericus Symbole, um die Potenzen der Veränderlichen zu bezeichnen, die an die Symbolik bei Regiomontanus erinnern. Diese deutsche Algebra beginnt mit den Worten: *„Machmet in dem puech algebra vnd almalcobula hat gespruchet diese wort: Census, radix, numerus.“* Dies bedeutet, daß Fridericus unterstellte, al-Ḫwārizmī habe in seinem Buch diese Worte eingeführt ([Kaunzner, S. 168], zu Fridericus Amann siehe auch [Gerl 1999]).

Einige Zeit spielte Leipzig eine führende Rolle in der Entwicklung der Algebra: Im Jahre 1481 wurde hier die erste zusammenhängende große Algebraschrift verfaßt [Vogel 1981]. 1486 hielt der aus Eger stammende Johannes Widmann (ca. 1460 - nach 1500) in Leipzig die erste Algebravorlesung in

Deutschland. Der Text dieser Vorlesung befindet sich in der bekannten Sammelhandschrift C 80 (heute in der Sächsischen Landesbibliothek Dresden), die mit dem Unterricht an der Universität Leipzig in Beziehung steht. Dort werden auch für die Addition und die Subtraktion die Zeichen + und − benutzt. Widmann war es, der diese Zeichen in seinem in Leipzig gedruckten Rechenbuch aus dem Jahre 1489 (*„Behende vnnd hubsche Rechnūg auff allen kauffmanschafft“*) verwendete; von da aus haben sie sich allgemein durchgesetzt. (Über unser heutiges Wissen zu Widmann informiert [Kaunzner 1996].) Widmann benutzte auch spezielle Symbole für die Potenzen für x^0 bis x^4, hergeleitet aus den Wortbezeichnungen ϕ (gesprochen Dragma oder Numerus), ℘ (Radix), ℨ (Zensus), $\mathcal{C}$ (Kubus), (Census de censu), usw. In dieser Zeit ist auch das Wurzelsymbol entstanden. Diese Symbolik ermöglichte es, algebraische Sachverhalte in abgekürzter Form darzustellen; der mathematische Sachverhalt konnte viel übersichtlicher angegeben werden als in der bisher benutzten verbalen Form. Dies dürfte wesentlich zum Aufschwung der Algebra im 16. und frühen 17. Jahrhundert beigetragen haben.

Die Handschrift C 80, die eine zentrale Stellung für die Algebra in Deutschland in der 2. Hälfte des 15. Jahrhunderts einnimmt, bildet auch eine Verbindung zu dem allseits bekannten Rechenmeister Adam Ries (1492–1559; zu ihm siehe unten). Während seines Aufenthaltes in Erfurt (1517–1522) sah Ries diese Handschrift; wie Widman hat auch Ries Randbemerkungen in sie eingetragen. Viele der Rechenaufgaben hat Ries in seine algebraische Schrift, die *„Coß“*, übernommen.

Mit Leipzig verbunden ist auch eine andere wichtige Person zur Algebra in Deutschland, die um 1500 wirkte: Andreas Alexander, siehe [Folkerts 1996b]. Er war ein Schüler von Aquinas, einem Mönch des Predigerordens, der herumreiste und für Geld Mathematik unterrichtete. Andreas Alexander stammte aus Regensburg, wurde 1485 in Köln immatrikuliert und studierte von 1493 an in Leipzig. Später lehrte er an der dortigen Universität Mathematik; zwischen 1502 und 1504 hielt er Vorlesungen über Mathematik, Perspektive und über die Bücher 1 und 3 von Euklids „Elementen.“ Sein Todesjahr ist unbekannt.

Er schrieb u. a. eine lateinische Algebra, deren deutsche Übersetzung sowie eine Einführung zu Euklid . Diese Texte befinden sich vermutlich in einer Handschrift, die sich heute in der Universitätsbibliothek Leipzig befindet, aber noch nicht systematisch untersucht wurde (Hs. 1696). Andreas Alexanders algebraische Schrift hat ein anderes algebraisches Werk aus dem Anfang des 16. Jahrhunderts beeinflußt, dessen anonymer Autor sich *Initius Algebras* nennt. Eine Handschrift dieses Textes (Dresden, C 349) wurde von Adam Ries selbst geschrieben. Ob Ries möglicherweise an der Entstehung des *Initius Algebras* beteiligt war, ist noch ungeklärt.

Aus dem Anfang des 16. Jahrhunderts stammen zwei Coß-Darstellungen in deutscher Sprache. 1521 erschien in Nürnberg von dem aus Erfurt stammenden Heinrich Schreyber (geb. vor 1496, gest. Winter 1525/26), genannt



Abb. 4.6.10. Titelblatt der 4. Aufl. des zuerst 1489 in Leipzig gedruckten Rechenbuches von Johannes Widmann

Grammateus, das Buch *„Ayn new kunstlich Buech welches gar gewiß und behend lernet nach der gemainen regel Detre, welschen practic, regeln falsi vnd etlichen regeln Cosse mancherlay schöne vnd zuwissen notürffig rechnung auff kauffmanschafft....“*

Vier Jahre später, 1525, wurde in Straßburg eine Darstellung der Coß von Christoff Rudolff (1500?-1545?) gedruckt. *„Behend vnnd Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre, so gemeinicklich die Coss genennet werden (...) Zusammen bracht durch Christoffen Rudolff vom Jauer.“* Rudolff stammt aus Jauer in Schlesien und hat in Wien bei Schreyber studiert.

Das Buch von Rudolff hat einen erheblichen Einfluss auf die weitere Entwicklung ausgeübt, insbesondere, nachdem Michael Stifel (1487?-1567) 1553 eine erweiterte und verbesserte Ausgabe der Rudolffschen Coß herausgebracht hatte. Stifel hatte schon vorher, 1544, ein höchst bedeutsames mathematisches Buch im Druck erscheinen lassen, die *„Arithmetica integra“*, übrigens bei demselben Drucker Petreius (1497?-1550), der im Jahr zuvor, 1543, *„De revolutionibus“* von N. Copernicus (1473–1543) und ein Jahr später, 1545, die *„Ars magna“* von Cardano zum Druck brachte.

Übrigens hat Stifel ein überaus bewegtes Leben geführt. Als protestantischer Pfarrer, der auch an der Seite Luthers als Schöpfer von Kirchenliedern hervortrat, geriet er dennoch wegen einer Weltuntergangsvorhersage in ernsthaften Gegensatz zu ihm. Von den kriegerischen Auseinandersetzungen mehrfach zum Wohnsitzwechsel gezwungen, hielt er im fortgeschrittenen Alter in Jena mathematische Vorlesungen.

4.6.2 Adam Ries, Abraham Ries und Jacob Ries als Cossisten

Auch das Jahr 1524 ist bemerkenswert. Der deutsche Rechenmeister Adam Ries (1492–1559), der als Verfasser dreier, immer wieder aufgelegter Rechenbücher im deutschsprachigen Raum einen geradezu legendären Ruhm erreicht hat, hat sich auch als Cossist betätigt. Diese Leistung, die schon Ende des 19. Jahrhunderts von B. Berlet erkannt worden war, wurde aber erst aus Anlaß des 500. Geburtstages von Ries deutlich und in der Öffentlichkeit bekannt, mit der Druckausgabe seines Manuskriptes zur Coß, deren erster Teil auf das Jahr 1524 datiert ist.

Adam Ries stammt aus Staffelstein in Franken. Über seine Ausbildung ist nichts bekannt, aber er verstand Latein. Ries ließ sich einige Zeit in Erfurt nieder, ging aber 1522/23 in die nach Silberfunden rasch aufblühende Stadt Annaberg im Erzgebirge, arbeitete als „Bergbeamter“ in Vertrauensstellungen des Erzbergbaues und betrieb eine erfolgreiche Rechenschule. Zwei seiner Söhne, Abraham (1533?-1604) und Jacob (?-1604) waren ebenfalls als Cossisten tätig. Abraham war seinem Vater als Leiter der Rechenschule gefolgt und wurde, wie der Vater, Sächsischer „Hofarithmeticus“.

Adam Ries publizierte sein erstes Rechenbuch *„Rechenung auff der linihen...“* schon 1518 in Erfurt. Es lehrte nur das Rechnen auf dem Abakus, auf den



Abb. 4.6.11. Denkmal von Adam Ries in Annaberg-Buchholz
[Foto Alten]

Linien, wie man sagte. Das zweite Rechenbuch, *„Rechenung auff der linihen unnd federn...“* erschien ebenfalls erstmals in Erfurt, 1522. Es lehrte sowohl das Rechnen auf dem Abakus, aber auch das schriftliche Rechnen mit den indisch-arabischen Ziffern. Es war überaus erfolgreich bis weit ins 17. Jahrhundert hinein. Bis heute (2003) sind 120 Auflagen nachgewiesen. Das dritte Rechenbuch, vom Umfang her das umfangreichste, *„Rechenung nach der lenge* (ausführlich, H. Wußing (Wg)) *auff den Linihen und Feder...“*, wurde 1550 in Leipzig gedruckt, erlebte aber wegen der Druckkosten nur eine weitere Auflage, 1611.

Die Rechenbücher sind frei von cossischen Symbolen und algebraischen Denkweisen im engeren Sinne, etwa der Verwendung von Gleichungen. Vielmehr beruht die Lösung der Aufgaben auf der Anwendung der regula falsi. Dennoch ist klar, daß sich Ries als Cossist empfunden hat. Der Verzicht auf die Coß in seinen Lehrbüchern geschah mit Rücksicht auf seine Leser; die Coß galt als zu schwer. Im dritten Rechenbuch schreibt er: *„Will allhie nach einander setzen die exempla / so ich zuvor in meinem Büchlein angezeiget / vnnd die nach notturft* (Bedarf, Wg) *erkleren / hiemit ein jeder die Cos desto leichter begreiffen man / welche ich ob Gott wil / mit der Zeit auch klerlich* (klar geschrieben, Wg) *am tag geben will“* [A. Ries 1611, Blatt 167, Rs].

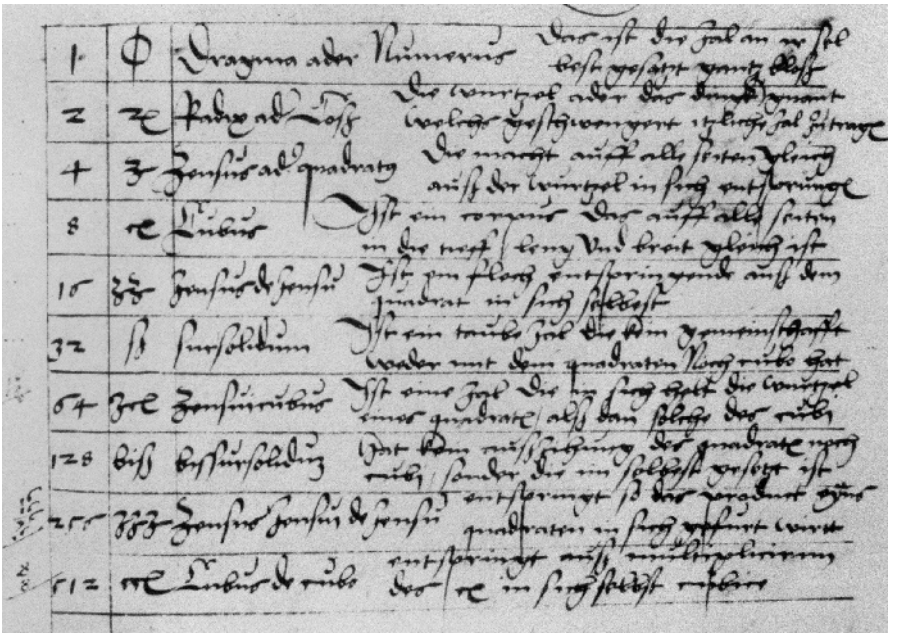


Abb. 4.6.12. Einführung der cossischen Symbole. In der zweiten Zeile wird das Symbol ℘ für die Unbekannte eingegführt: „ ℘ Radix ader Coß. Die Wurtzel oder das Dingk genant welches geschwengert itzliche Zal zu tragen.“ [Ries 1992, S. 109]

Zum Zeitpunkt der Erstauflage, 1550, hatte Ries schon längst Schriftliches zur Coß niedergelegt. Unter dem Titel *„Coß“* sind 1664 von einem Dresdener Rechenmeister 534 Seiten von Adam Ries zur *„Coß“* zusammengebunden und damit vor dem Verlust gerettet worden. Auf historisch verschlungenen Wegen hat sich das kostbare Manuskript erhalten; es befindet sich jetzt in Annaberg-Buchholz, dem hauptsächlichen Wirkungsort von Ries.

Die Analyse der *„Coß“* hat ergeben [Kaunzner/Wußing 1992], daß es sich um zwei cossische Schriften handelt. Die erste ist, wie gesagt, auf das Jahr 1524 datiert; die zweite stammt vom alt gewordenen Ries und ist undatiert, muß aber, da er z. B. Cardano benennt, nach 1544 niedergeschrieben worden sein.

Es sind echte cossische Schriften. Es werden cossische Symbole ϕ, ℘, , $\mathcal{C}$ bis x^5 eingeführt. Besonders hübsch ist die Erläuterung für die Variable: Radix oder Coß, ℘ $\sim x^1$ (siehe 2. Zeile in Abb. 4.6.12).

Im Anschluss an die Traditionslinie des al-Ḫwārizmī behandelt Adam Ries acht Typen von Gleichungen ersten und zweiten Grades.

„Volgenn hernach die Acht equaciones Algebre gezogenn auß seynem ersten buch genant gebra vnd almuchabala In welchen Zwey Zeichenn in den ersten viern einander Vorgleicht werden Vnnd in den andern vieren drey Zeichen...“ [Ries 1992, S. 111].

Mit anderen Worten: In einigen Gleichungen treten nur zwei Symbolzeichen (für Dragma, Radix, Zensus, Kubus) auf. Bei den anderen kommen drei Zeichen vor. Behandelt werden Gleichungen des ersten Grades, reine Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades sowie drei Typen gemischtquadratischer Gleichungen und solche Gleichungen, die sich auf gemischtquadratische Gleichungen zurückführen lassen.

Da Ries, alter Tradition gemäß, nur positive Koeffizienten zuläßt, muß er Fallunterscheidungen treffen. Wie die Analyse der von Ries angegebenen Beispiele zeigt, gelten ihm nur positive Lösungen als Lösungen; komplexwertige Lösungen sind natürlich gänzlich außerhalb seiner Reichweite. (Zwei der von Ries formulierten Aufgaben führen auf negative Lösungen. Er rechnet richtig und macht formal sogar die Probe mit 20-80.)

Ries gibt acht Regeln zur Lösung der acht Gleichungstypen, die wir modern so schreiben würden (alle Koeffizienten a, $b > 0$):

① $ax = b$, ② $ax^2 = b$, ③ $ax^3 = b$, ④ $ax^4 = b$, ⑤ $x^2+ax = b$, ⑥ $x^2-ax = -b$, ⑦ $x^2 - ax = b$, ⑧ $x^{2k} + ax^k = b$ mit $k > 1$ ganz.

Es fehlt der Gleichungstyp $x^2 + ax = -b$. Diese Gleichungen besitzen keine positiven Lösungen, sondern nur negative oder komplexe. Daher muß Ries – wie viele seiner Zeitgenossen auch – auf die Behandlung jenes Gleichungstyps verzichten.

Hier sei der Aufgabentyp (5) in Riesscher Originalsprache zitiert. Es wird auch das Lösungsverfahren angegeben: Er verwendet die quadratische Ergänzung. Der Leser wird den Text nachvollziehen können; es handelt sich um die Lösung der Gleichung $12x + 3x^2 = 135$ mit der Lösung $x = 5$; die andere Lösung $x = -7$ wird verworfen.

„Die funffte eequacio ist So drey Signa ane mittel einander nachvolgen offt berurter proporcionalistischer ordnung / Das erste den letzten Zweyen vorgleicht wirtt / solln die Zwey minsten / Nemlich das erst vnd mittelst / Durchs letzt Vnd meyst geteylt werden / wie kurtzlich bemelt (bemerkt worden, Wg) *ist / Alß dan sol das mittelste Zeichen werden halbirt / vnd den halben teyl sol man in sich quadrate fürenn darnach Zum ersten Zeichen addirn Vnd radix quadrata von solcher heuffelung weniger der halbe teil des mittelsten Zeichenns eroffnet die frag Wie hi* $12\,\mathcal{Q} + 3$ *seint gleich* 135ϕ *teyl* $\phi + \mathcal{Q}$ *in komen* 45 *vom ersten Zeichen vnd* 4 *vom mitteln Medier* 4 *werdenn* 2 *die füre in sich komen* 4 *addir Zw* 45 *seint* 49 *Darvon ist radix quadrata* 7 *Nim hinwegk den halben teyl des mittelsten Zeichens als* 2 *pleibenn* 5 *souil macht* 1 *radix proba sprich* 12 *radices machen* 60 *Vnd* 3 *quadraten von* 5 *dem radix machen* 75 *addir Zusammen komen* 135 *an der Zahl gleich dem ersten zeichen.“* [a.a.O., S. 113].

Auf der so gewonnenen theoretischen Basis wendet sich Ries nun der Behandlung einer Fülle von Aufgaben zu und zwar solcher, die sich auf die erste Regel (lineare Gleichungen) beziehen, viele davon mit praktischem Bezug. Einige davon sind recht kompliziert (natürlich wissen wir nicht, ob weitere Teile der

„Coß“ von Ries verloren gegangen sind, die eventuell auch Aufgaben behandeln, die auf quadratische Gleichungen führen).

Um dem Leser einen Eindruck zu vermitteln, sei hier eine Aufgabe zitiert, die gleichzeitig auch den sozusagen abstrakten und in einer langen Tradition stehenden Charakter der Riesschen Arbeiten belegt (÷bedeutet Subtraktion):

„Item auß 10 *Zwey teyl zu machen / so ich den grossern in dem kleinernn dividir das* 5 *komenn Machs also setz der großer teyl* $1\,\text{℘}$ *so muß nothalben der kleiner sein* 10ϕ *minus* $1\,\text{℘}$ *teyl* $1\,\text{℘}$ *in* $10\phi \div 1\,\text{℘}$ *komenn* $\frac{1\,\text{℘}}{10\phi \div 1\,\text{℘}}$ *gleich dem quocient* 5 *Multiplicir* 5 *denn quocient mit dem nenner alß* $10\phi \div 1\,\text{℘}$ *komenn* $50\phi \div 5\,\text{℘}$ *gleich dem Zeler als* $1\,\text{℘}$ *gib vff peydenn teylen Zw komen einem teyl* 50ϕ *Vnd dem andernn* $6\,\text{℘}$*/teyl* 50 *in* 6 *nach vnderichtung der Regel kommen* $8\frac{1}{3}$ *Der großer teyl souil ist radix werd Den Nim vonn* 10 *pleibt* $1\frac{2}{3}$ *der kleinste teyl Das magstu probirnn also Resoluir beyde Zaln in ire teyl komen* 25 *vnd teyle eyns in anders so komen* 5 *wie obenn gemeltt.“* [a.a.O., S.122]

Der erste Teil der *„Coß“* schließt mit einer Aufgabe über eine durch den Wind umgeknickte Stange. Ihre Gesamtlänge ist gegeben sowie die Entfernung vom Fußpunkt der Stange, in der die umgebrochene Spitze den Boden berührt. Gesucht ist die Höhe der Knickstelle über dem Boden, eine Aufgabe, die die Anwendung des Satzes von Pythagoras und das Ziehen der Quadratwurzel erfordert, also die Anwendung der ersten Regel übersteigt.

Beim zweiten Teil der *„Coß“* – nach 1544 niedergeschrieben – handelt es sich um einen Manuskriptentwurf. Die Schrift ist erheblich größer, weil der alt gewordene Ries sich wohl keine Brille leisten konnte. Ries hat dieses Manuskript seinen Söhnen als eine Art Vermächtnis hinterlassen; auch erwähnt er inzwischen erzielte Fortschritte in der Algebra.

„Meynen lieben Sonen Adam Abraham Jacob Isaac Vnd Paulo die Riesen genannt Zuhanden

Lieben Sohn pißher hab ich euch beschriebn gemeine rechnung auff den Linihen / Fedren auch forteil Vnd behendigkeit Practica genant / neben andern schonen Rechnungen der Muntz Vnd anderen Regelnn Darauß ir gantz clerlich vornomen habt vnd werdett / wie die Jugent in erstem anheben vnderweist sol werden / So ist nun lieben sohn ein andere Rechenung vorhanden welche geschieht durch examinierung der Vnitet Die durch den Hocherfarnen Arithmeticum Algebram eynen Arabischen Philosophenn vor Vil Jarn zu den Zeiten des grosen Allexanders erfunden Vnd ist pißherr Von allen liebhabern gemelter Kunst nichts hohers vnd lieblichers auch behenderß am tag bracht Es haben auch etliche wol von diser Rechnung geschrieben / als Bohetius Campanus / Johannes Muris / vnd Zu vnsern geZeiten der Wolerfarne Mathematicus Magister Andreas Allexander / Christoff Rudloff (!, Wg) / *Michael Stieffel und Jeronimus Cardanus Welcher schreiben dan noch vor augen / Vnd ist derselbigen schreiben / mit genugsamer Vnderricht auch mit sichtiger beweisung sonderlich durch M. Andream Allexandrum vorfürrt ... / Diweil ich dan nun mit alter beladen / euch als meinen lieben sohnen nichts*

besseres geben vnd lassen mag Dan vnderricht gemelter Rechnung durch erforschung der Vnitet [1]*/ ...“* [a.a.O., S. 329/330].

Mit anderen Worten: Adam Ries hat Hervorragendes auch im Felde der Coß geleistet. Nur, leider, sind seine Schriften damals nicht zum Druck gelangt. Im Vergleich der beiden Fassungen der *„Coß“*, der von 1524 und der späteren, zeigt sich die frühe Fassung als eigenständige Leistung. Die spätere, unvollendet gebliebene ist im wesentlichen als Rezeption der inzwischen durch andere Forscher und Cossisten erzielten Ergebnisse einzuordnen und wäre, wenn sie gedruckt worden wäre, sozusagen zu spät gekommen. Sie enthält jedoch einen in pädagogischer Hinsicht interessanten Zugang zum Rechnen mit den cossischen Symbolen.

Vier der fünf Söhne von Adam Ries waren auf mathematischem Gebiet tätig; dabei ragt Abraham besonders hervor. Er übernahm die Rechenschule seines Vaters in Annaberg, wurde wie sein Vater in Dresden „Hofarithmeticus“ und hinterließ zahlreiche mathematische Schriften, darunter eine umfangreiche auf das Jahr 1578 datierte cossische Schrift, den in der Sächsischen Staats- und Landesbibliothek Dresden aufbewahrten Kodex C 411, der 1999 herausgegeben wurde [Wußing 1999]. Wie eine kürzlich angestellte Analyse erwiesen hat, handelt es sich keineswegs, wie man vermuten könnte, um eine Art Kopie der *„Coß“* seines Vaters, sondern vielmehr um eine eigenständige, sogar über die *„Coß“* des Vaters hinausgehende Leistung.

Auch Abraham behandelt – wenn man Reduktionen vornimmt – dieselben Typen quadratischer Gleichungen, faßt aber alle reinen Gleichungen zu einem Typ zusammen, und dehnt die Symbolik der cossischen Zeichen weiter aus. Vor allem aber stellt er, anders als der Vater, eine Fülle von Aufgaben, die wirklich auf quadratische Gleichungen führen; der Vater hatte (jedenfalls, soweit wir aus den erhaltenen Texten wissen) nur lineare Aufgaben behandelt.

Die *„Coß“* von Abraham Ries trägt den Titel:

„Kurtze vnd Grundliche vnder
richtung Subtiler vnd Kunst,
reicher Rechnung In Gemein
Coß genandt. So durch Examinie„
rung monadis[2] *verrichtet wurdt*
Treulich Beschrieben Vnd verferti„
get durch Abraham Riesen
von S. Annabergk Anno 1578.“

Das Manuskript umfaßt 117 Blätter. Als Beispiel soll hier eine Aufgabe wiedergegeben werden, die dem dritten Typ ($ax^2 + bx = c$) angehört.

„Es seindt etliche gesellen, haben 10 *fl* (Gulden, Wg) *in gemein zuuorn, Nuhn legtt ein Jder so uil fl darzu als der gesellen sein theilen als dan den*

[1] „erforschung der Vnitet“ bedeutet: Aufsuchen der einen maßgeblichen Lösung im jeweiligen Beispiel

[2] „Examinierung monadis“ bedeutet dasselbe wie „erforschung der Vnitet“

halben theill wieder Vnder sich be kombtt einer $5\frac{1}{2}$ *fl wieuiel sein der gesellen geweßenn Setz der gesellen sein gewesen* $1\ \text{℣}$ *So hatt nuhn einer gelegett* $1\ \text{℣}$ *fl Derwege haben sie alle zusammen bracht* 1 *, darzu addir die* 10 *fl so in Zuuorn haben, wurdt* $1\quad +10\phi$ *theil in halb wurdt* $\frac{1\quad +10\phi}{2\text{℣}}$ *Dieser halbe theil soll außgetheilett werden in die Zall der gesellen als* $1\ \text{℣}$ *kombbt in quotient* $\frac{1z+10\phi}{2\text{℣}}$ *gleich* $5\frac{1}{2}\phi$. *Multiplicir* $5\frac{1}{2}\phi$ *mit* $2\ \text{℣}$ *kommen* $11\ \text{℣}$ *gleich* $1\quad +10\phi$ *Halbir* 11, *wurdt* $\frac{11}{2}$ *multiplicir in sich quadrate. Kombtt* $\frac{121}{4}$ *Dauon Subtrahir* 10. *Rest* $\frac{81}{4}$ *Hieraus Extrahir Radicem quadratam kombtt* $\frac{9}{2}$. *Addir zum halben theil als* $\frac{11}{2}$ *thutt Summa* 10. *Souiel sein der gesellen geweßen.“* [Codex C 411, fol. 110v]

Weiterhin befindet sich in der Dresdener Landesbibliothek eine kurze, aber kunstvoll auf Pergament geschriebene *„Coß“* aus der Feder von Jacob Ries, Signatur C 496. Man darf unterstellen, daß Jacob durch seinen Bruder Abraham mit der Coß vertraut gemacht worden ist, da die anderen Brüder Adam d. J., Isaac und Paul nicht als Cossisten hervorgetreten sind. Am Beginn des C 496 schrieb Jacob:

„Kurtze erclerung vber Mahomets Coß, welche ehr, Artem Restaurationis und oppositionis Numeri genandt. Durch Jacob Riesen tzusammen getzogen. Anno 1562.“[Ries, Jacob 1562, C 496, 1.2. Vs]

„Wie ich von meinem Bruder bericht entpfangen Als hatt Mahomet in seinen buch, welches ehr Artem Restaurationis et Oppositionis Numeri genendt, Volgende gestalt von der Coß geschrieben“ [Ries, Jacob 1562, C 496, Bl.3, Vs]

Natürlich ist mit „Mahomet“ der muslimische Gelehrte al-Ḫwārizmī gemeint. Die Worte „restauratio“ und „oppositio“ entsprechen den Worten „al-ǧabr“ (Wiederherstellung) bzw. „al-muqābala“ (Gegenüberstellung) im Titel seiner algebraischen Schrift.

4.6.3 Chistoph Rudolff und Michael Stifel

Zu Beginn der zweiten *„Coß“* hatte Adam Ries u. a. auf Rudolff, Stifel und Cardano verwiesen, die neuerdings Beiträge zur Algebra geleistet hätten. 1525 hatte Christoph Rudolff (um 1500 - vor 1543) eine *Coß* unter dem Titel *„Behend unnd Hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeinicklich die Coss genennt werden“* erscheinen lassen. Stifel verfaßte 1553 (1554 erschienen) in Königsberg in Ostpreußen eine Neubearbeitung der *Coß* von Rudolff; betitelt *„Die Coß Christoffs Rudolffs. Die schönen Exempeln der Coß Durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt.“* [Stifel 1553]

Doch war Stifel schon vorher mit mathematischen Schriften hervorgetreten, u. a. mit der *„Arithmetica integra“* (Gesamte Arithmetik) (Nürnberg 1544), der vermutlich besten Zusammenfassung damaliger Arithmetik und Coß bzw. Algebra, vor der *„Ars magna“* von Cardano, die ein Jahr später erschien.

Die *Coß* von Rudolff enthält das Positionssystem, die Rechenregeln für ganze positive Zahlen. Bei der Multiplikation von Potenzen verweist Rudolff darauf, daß dies der Addition der Exponenten entspricht (wenn man moderne

Terminologie verwendet). Es folgen die Einführung spezieller Symbole für die Potenzen der Unbekannten, die der Zeichen + und − (die Grammateus, d. h. Heinrich Schreyber, der Lehrer von Rudolff in Wien, schon 1518 verwendet hatte, die aber bereits von Widmann 1449 gebraucht worden waren) und das Quadratwurzelzeichen $\surd$. Die Gleichheit drückt er häufig mit dem Wort „gleich“ aus, gelegentlich aber auch mit einem Punkt. So entspricht $1\overset{\cdot}{=}2$ der Gleichung $x = 2$.

Der zweite Teil seiner *Coß* beschäftigt sich mit der Auflösung algebraischer Gleichungen. Anders aber als al-Ḫwārizmī unterscheidet Rudolff acht Typen quadratischer Gleichungen; die Lösungswege werden in Worten gegeben. Beispiele erläutern das Verfahren. Auch Gleichungen höheren Grades treten auf, z. B., modern geschrieben, $ax^n + bx^{n-1} = cx^{n-2}$.

Schließlich folgen mehrere hundert Beispiele, die nach den angegebenen Verfahren zu lösen sind. Am Ende des Textes präsentiert Rudolff drei irreduzible kubische Gleichungen. Er gibt zwar die Lösungen an, aber ohne Lösungsmethode. Andere, so meint Rudolff, werden die Kunst finden, wie in solchen Fällen zu verfahren sei [Katz 1993].

Die *„Arithmetica integra“* von Stifel weist bedeutende neue Fortschritte auf [Jentsch 1986]. Stifel rechnet mit negativen Zahlen (obwohl er sie *„numeri absurdi“* nennt), gleichberechtigt zur Arithmetik der positiven Zahlen. Dies setzt ihn in den Stand, die Fallunterschiede bei quadratischen Gleichungen zu vermeiden.

In der überarbeiteten *Coß* von Rudolff drückt sich Stifel voller Stolz so aus: *„Denn wie er (Rudolff) verwirfft die menge der 24 Regeln vnd setzet da für 8 Regel der Coß / Also setze ich fürr die selbige 8 Regeln / eine einzige Regel / mit der ich alles ausricht / das er mit seynen 8 Regeln hat außgericht...“*. [Stifel, 1553, Blatt 147, Vs]. Freilich bleibt er inkonsequent; negative Wurzeln erkennt er nicht als Wurzeln an.

Die Äquivalenz von Potenzen mit Potenzexponenten – auch negative Potenzexponenten werden behandelt – wird ausführlich dargestellt, mit einer starken Annäherung an die Prinzipien logarithmischen Rechnens. Auch die Wortbildung „Exponent“ stammt von Stifel. Es darf als sicher gelten, daß John Neper (1550–1617) und Jobst Bürgi (1552–1632), denen die Aufstellung von ersten Logarithmentafeln (1614 bzw. 1620) zu danken ist, von Stifel beeinflußt worden sind.

Was das Studium der Irrationalitäten betrifft, so findet Jentsch folgende Einschätzung: *„Wohl als erster Mathematiker nach der Antike durchschaut Stifel das schwierige 10. Buch der Elemente des Euklid über die Irrationalitäten wieder vollständig. Durch Herausschälen des arithmetischen Kerns aus der geometrischen Hülle sowie durch Einführung cossischer Symbole, zu denen er selbst wertvolle Beiträge geliefert hat, macht er das Ganze durchsichtiger. Durch die Untersuchung von Beziehungen* $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = u + \sqrt{v}$ *, die auf die Beschäftigung mit der „Kubikcoß“ hinzielen, und allgemeinerer*

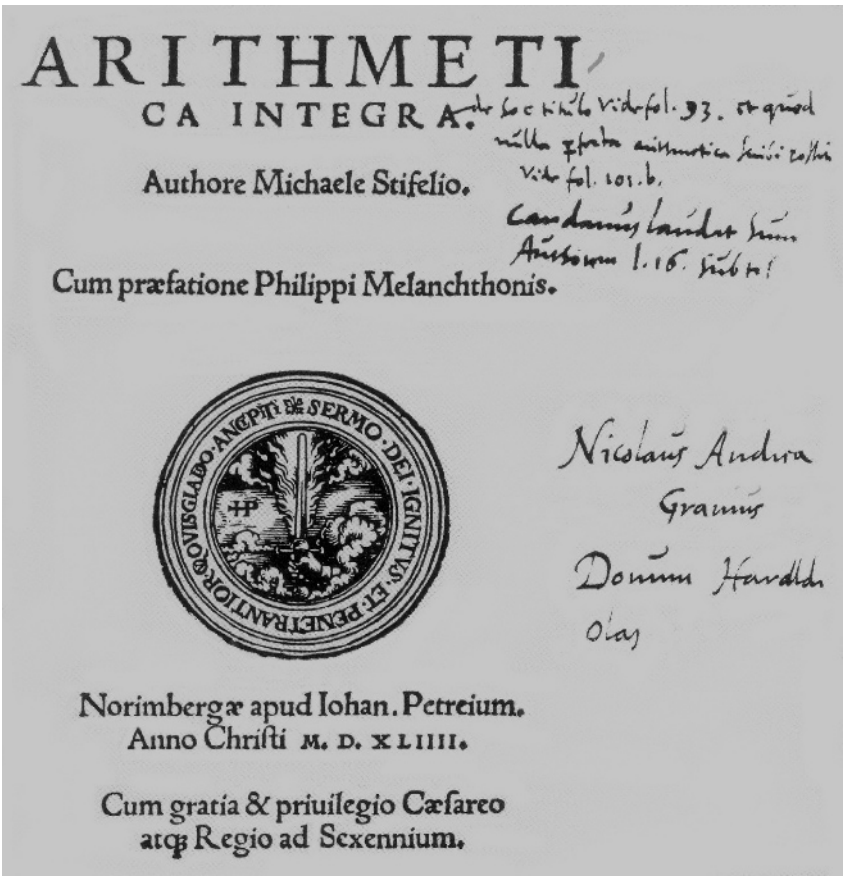


Abb. 4.6.13. Titelblatt der „Arithmetica integra“ von Michael Stifel

Wurzelausdrücke geht er über Euklid und Pacioli hinaus.“ [Jentsch 1986, S. 23]

Es scheint, daß Stifel dem Drängen seiner Freunde gern gefolgt ist, die *„Coß“* von Rudolff neu herauszugeben. Stifel fügte den jeweiligen Kapiteln Ergänzungen an, darunter verdichtete Ausführungen aus der *„Arithmetica integra“* mit zahlreichen Beispielen. Stifel behandelte auch, nach der Publikation der *„Ars magna“*, die Lösungsformel für die kubische Gleichung.

Stifel hat die künftige Entwicklung in erstaunlichem Maße beeinflußt, so bei Simon Stevin, bei Christoph Clavius und damit bei Descartes, der die *„Algebra“* (1609) von Clavius studiert hatte. Sogar der junge Euler hat noch die Neubearbeitung der Rudolffschen *„Coß“* als Lehrbuch benutzt.

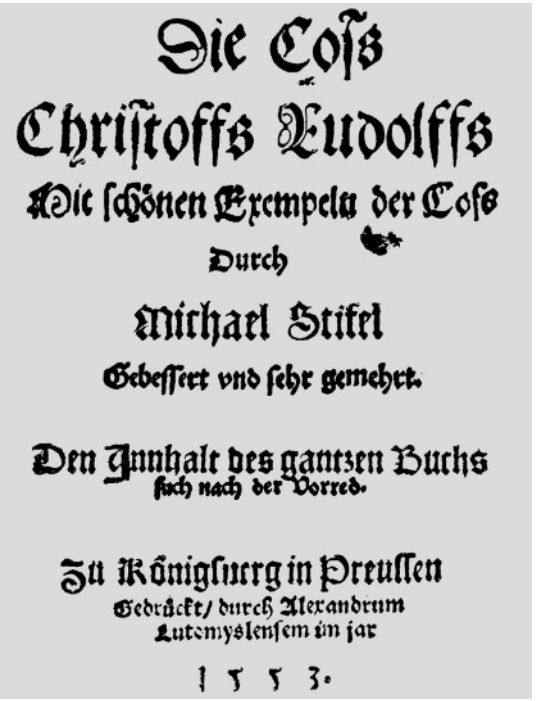
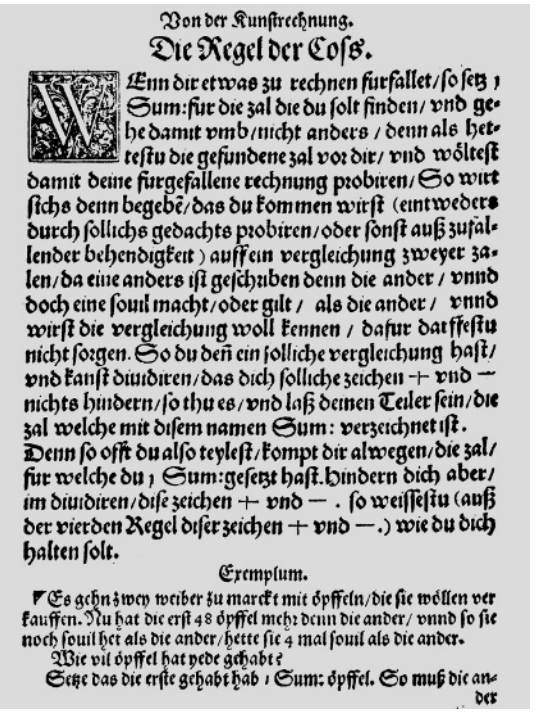

Die Coſs
Chriſtoffs Rudolffs
Mit ſchönen Exempeln der Coſs
Durch
Michael Stifel
Gebeſſert vnd ſehr gemehrt.
Den Innhalt des gantzen Buchs
ſuch nach der Vorred.
Zu Königſperg in Preuſſen
Gedruckt/ durch Alexandrum
Lutomyslenſem im jar
1 5 5 3.

Abb. 4.6.14. Titelblatt der Coß Christoph Rudolffs

4.7 Zur Entwicklung des Zahlbegriffes

Die Verwendung der natürlichen Zahlen und der Brüche geht bis in die Antike zurück. Trotz der Leistung von Eudoxos aber hatte die Antike zwar zum Studium der geometrischen Irrationalitäten, nicht aber zur Anerkennung des Irrationalen als Zahl vorstoßen können. Die bewußte Verwendung negativer Zahlen erfolgte bereits innerhalb der chinesischen, der indischen und gelegentlich in der islamischen Mathematik. In Europa erlangten negative ganze und gebrochene Zahlen erst im Frühkapitalismus unter Kaufleuten und Rechenmeistern volle Anerkennung. Lange dagegen war die Frage umstritten, ob etwa Zahlenwerte, die sich durch Radizieren oder bei geometrischen Konstruktionen als Längen ergeben, wirkliche Zahlen sind. Beispielsweise findet man im Jahre 1544 bei Stifel die scharfsinnige Überlegung:

„Mit Recht wird bei den irrationalen Zahlen darüber disputiert, ob sie wahre Zahlen sind oder nur fingierte.... Denn bei Beweisen an geometrischen Figuren haben die irrationalen Zahlen noch Erfolg, wo uns die rationalen im Stich lassen, und sie beweisen genau das, was die rationalen Zahlen nicht beweisen konnten, jedenfalls mit den Beweismitteln, die sie uns bieten. Wir werden also veranlaßt, ja gezwungen, zuzugeben, daß sie in Wahrheit exi-



Von der Kunſtrechnung.

Die Regel der Coſs.

WEnn dir etwas zu rechnen furfallet/ſo ſetz ein Sum: für die zal die du ſolt finden/ vnd gehe damit vmb/nicht anders / denn als hetteſtu die gefundene zal vor dir/ vnd wölteſt damit deine furgefallene rechnung probiren/ So wirt ſichs denn begebē/das du kommen wirſt (entweders durch ſollichs gedachts probiren/oder ſonſt auß zufallender behendigkeit) auff ein vergleichung zweyer zalen/da eine anders iſt geſchriben denn die ander / vnnd doch eine ſouil macht/oder gilt / als die ander / vnnd wirſt die vergleichung woll kennen / dafur darffeſtu nicht ſorgen. So du deñ ein ſolliche vergleichung haſt/ vnd kanſt diuidiren/das dich ſolliche zeichen + vnd − nichts hindern/ſo thu es/vnd laß deinen Teiler ſein/die zal welche mit diſem namen Sum: verzeichnet iſt. Denn ſo offt du alſo teyleſt/kompt dir alwegen/die zal/ für welche du ein Sum: geſetzt haſt. Hindern dich aber/ im diuidiren/diſe zeichen + vnd − . ſo weiſſeſtu (auß der vierden Regel diſer zeichen + vnd −.) wie du dich halten ſolt.

Exemplum.

Es gehn zwey weiber zu marckt mit öpffeln/die ſie wöllen verkauffen. Nu hat die erſt 48 öpffel mehr denn die ander/ vnnd ſo ſie noch ſouil het als die ander/hette ſie 4 mal ſouil als die ander.

Wie vil öpffel hat yede gehabt?

Setze das die erſte gehabt hab ein Sum: öpffel. So muß die ander

Abb. 4.6.15. Die Regel der Coß
[fol. 28r aus „Von der Kunstrechnung“ von Michael Stifel]

stieren, nämlich auf Grund ihrer Wirkungen, die wir als wirklich, gewiß und feststehend empfinden.

Aber andere Gründe veranlassen uns zu der entgegengesetzten Behauptung, daß wir nämlich bestreiten müssen, daß die irrationalen Zahlen Zahlen sind. Nämlich wenn wir versuchen, sie der Zählung zu unterwerfen und sie mit rationalen Zahlen in ein Verhältnis zu setzen, dann finden wir, daß sie uns fortwährend entweichen, so daß keine von ihnen sich genau erfassen läßt...Es kann aber nicht etwas eine wahre Zahl genannt werden, bei dem es keine Genauigkeit gibt und was zu wahren Zahlen kein bekanntes Verhältnis hat. So wie eine unendliche Zahl keine Zahl ist, so ist eine irrationale Zahl keine wahre Zahl, weil sie sozusagen unter einem Nebel der Unendlichkeit verborgen ist.“ [Deutsch zitiert bei Gericke 1975, S. 68/69]

Gleichzeitig hat Stifel offenbar doch den zahlenartigen Charakter der irrationalen Zahlen akzeptiert, zumindest ein sehr wichtige Eigenschaft der irrationalen Zahlen erfaßt, wenn er feststellt:

„Nun fallen ... unendlich viele gebrochene Zahlen zwischen je zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen und ebenso fallen auch unendlich viele irrationale Zahlen zwischen je zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen.“ [Deutsch zitiert bei Gericke 1975, S. 69]

Eine vollständige Anerkennung der irrationalen Zahlen als Zahlen findet sich in Europa bei Stevin; vom Standpunkt seines dezimalen Positionssystems für alle Zahlen muß dies sogar einigermaßen zwingend erscheinen. Jedoch schuf erst die Herausbildung der Methoden der analytischen Geometrie durch Fermat und Descartes die Voraussetzung zur allgemeinen Anerkennung der irrationalen Zahlen: Jedem Punkt der Zahlengeraden entspricht eine Zahl. Schließlich fixierte Newton, im Anschluß an Barrow, in der *„Arithmetica universalis“* (1673/83, Druck erst 1707) einen allgemeinen Zahlbegriff:

„Unter Zahl verstehen wir nicht sowohl eine Menge von Einheiten, sondern vielmehr das abstrakte Verhältnis irgendeiner Größe zu einer anderen Größe derselben Gattung, die als Einheit angenommen wird. Sie ist von dreifacher Art; ganz, gebrochen und irrational; ganz, wenn die Einheit sie mißt; gebrochen, wenn ein Teil der Einheit, dessen Vielfaches die Einheit ist, sie mißt; irrational, wenn die Einheit mit ihr inkommensurabel ist.“ [Deutsch zitiert bei Gericke 1975, S. 71/72]

Noch mühsamer war der Weg zur Anerkennung der komplexen Zahlen. Die Mathematiker der Renaissance hatten – wie berichtet werden wird – erste, teilweise sogar ziemlich intensive Berührung mit komplexen Zahlen gehabt. Diese fanden im 17. und 18. Jahrhundert weite Verbreitung, ohne daß freilich begriffliche Klarheit über deren Wesen erreicht werden konnte. Beispielsweise war sich Girard dessen bewußt, daß man nur unter Heranziehung der komplexen Zahlen den Fundamentalsatz der Algebra in voller Allgemeinheit aussprechen könne, daß nämlich eine algebraische Gleichung des Grades n auch genau n Wurzeln habe; umgekehrt folge nur aus diesem Umstand eine Art Existenzberechtigung für den Gebrauch der komplexen Zahlen. In demselben Zusammenhang prägte Descartes den Begriff *imaginäre* (eingebildete, vermeintliche) Zahl, wobei er zugesteht, daß man noch keine rechte Vorstellung von solchen „Zahlen“ habe. In der *„Géométrie“* von 1637 heißt es:

„Endlich bemerken wir, daß sowohl die wahren wie die falschen (positiven wie negativen, Wg) *Wurzeln einer Gleichung nicht immer real, sondern manchmal nur imaginär (seulement imaginaires) sind, d. h. man kann sich zwar allemale bei jeder beliebigen Gleichung so viele Wurzeln, wie ich angegeben habe* (nämlich so viele, wie der Grad der Gleichung ist, Wg) *vorstellen, aber manchmal giebt es keine Grössen, die den so vorgestellten entsprechen.“* [Descartes 1894, S. 79]

Leibniz fand u. a. 1675 die Beziehung $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$, die in seltsamer Weise das Komplexe mit dem Reellen verknüpfte und die die Absonderlichkeiten beim Umgang mit den „eingebildeten“ Zahlen betonte. So erklärt sich seine geradezu mystische Einschätzung der imaginären Zahlen als einem *„Wunder der Analysis, dem Monstrum der idealen Welt, einer feinen und wunderbaren Zuflucht des göttlichen Geistes, beinahe einem Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein“* [Tropfke 1980, Band II, S. 109].

Die weitere Entwicklung knüpfte an Euler an; darüber wird weiter unten berichtet werden.

1180?–1250?	Leonardo Fibonacci von Pisa: „Liber abbaci“ (1202, 2. Auflage 1228), „Practica geometriae“(1220), „Liber quadratorum“(1225); Arithmetik, lineare und quadratische Gleichungen, unbestimmte Gleichungen, Nährungswerte für Quadrat- und Kubikwurzeln durch Iteration (basierend auf arabischen Werken)
1. Hälfte 13. Jh.	Jordanus Nemorarius (Jordanus de Nemore): „De numeris datis“(englische Übersetzung, herausgegeben 1981); Proportionen, Systeme linearer Gleichungen, Typen quadratischer Gleichungen
1. Hälfte 14. Jh.	Johannes de Muris: „Quadripartitum numerorum“ (1343; Ed. L'Huilier 1990); Musiktheorie, Mechanik, lineare und quadratische Gleichungen
14./15. Jh.	Maestri D'Abbaco (Abbacus-Lehrer): Lösung praktischer Probleme im indisch-arabischen Zahlensystem
1436–1476	Regiomontanus (Johannes Müller): „Joannis Regiomontani opera collectanea“ (Faksimiledruck 1972); erste algebraische Symbolik
1445–1514	Luca Pacioli: „Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità“(1494): Lehrstoffe der Abbacus-Schulen, Lösung von Gleichungen (bis vierten Gerades) durch Probieren
1445?–1488	Nicolas Chuquet: „Le triparty en la science des nombres“(1484) Rechnen mit rationalen und irrationalen Zahlen, Theorie der Gleichungen
1465–1526	Scipione del Ferro: Lösungsformel für Gleichungen vom Typ $x^3 + bx = c$
2. Hälfte 15. Jh.	Johannes Widmann: „Behennde vnnd hubsche Rechnūg auff allen kauffmanschafften“(1489): Spezielle Symbole für Potenzen, erste Algebravorlesung in Deutschland (Leipzig)
1470/1480	Bamberger Blockbuch
1483	Bamberger Rechenbuch (Autor: Ulrich Wagner?)
∼1470–1525	Gregor Reisch: „Margarita Philosophica“(1503)
1487?–1567	Michael Stifel: „Arithmetica integra“(1539), „Die Coß Christoffs Rudolffs. Die schönen Exempeln der Coß Durch Michael Stifel Gebessert und sehr gemehrt“(1553)
1492–1559	Adam Ries: „Rechenung auff der linihen“(1518), „Rechenung auff der linihen unnd Federn“(1522), „Rechnung nach der lenge auff den Linihen und Feder“(1550): Lehre vom Rechnen auf dem Abbacus und mit den indisch-arabischen Ziffern. „Coß“(1550, hrsg. 1664): Verwendung der cossischen Symbole, Lösung reiner Gleichungen ersten bis vierten Grades und der 3 Typen gemischt-quadratischer Gleichungen
1495–1552	Peter Apian: „Eyn Newe Und wolgegründte underweysung aller Kauffmanns Rechnung“
vor 1496–1525	Heinrich Schreyber(Grammateus): „Behend und khünstlich Rechnung nach der Regel und wellisch practic“(1521)
1500?–1545?	Christoff Rudolff: „Behend und Hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeinicklich die Coss genennt werden“(1525)
1502–1578	Pedro Nunes: „Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria“(1532/1564)
1510?–1558	Robert Recorde: „The Whetstone of Witte“
1533?–1604	Abraham Ries: „Dresdener Kodex C 411“(1578, hrsg. 1999): Weitere cossische Zeichen, Aufgaben zu quadratischen Gleichungen

4.8 Aufgaben

Aufgabe 4.2.1: Originalaufgabe von Recorde (aus dem „Whetstone of Witte“)
„Eine Armee besteht aus Herzögen, Grafen und Soldaten. Jeder Herzog hat unter sich zweimal soviel Grafen, als es Herzöge gibt. Jeder Graf hat unter sich viermal so viel Soldaten, als es Herzöge gibt. Der zweihundertste Teil der Anzahl der Soldaten ist 9 mal so groß als die Zahl der Herzöge. Wieviel Herzöge, Grafen und Soldaten gibt es?“

Aufgabe 4.2.2: Originalaufgabe von Recorde
„Ein Gentleman, der die Schläue eines prahlenden Arithmetikers prüfen will, sagt folgendes: Ich habe in beiden Händen 8 Kronen. Wenn ich die Summe von jeder Hand einzeln für sich zähle und die Quadrate und die Kuben von beiden hinzufüge, werden es 194 Kronen aus machen. Nun sage mir, was ist in jeder Hand?“

Aufgabe 4.2.3: Beispiel von Stevin und Girard [Tropfke, S. 86]
Überprüfen Sie die Richtigkeit folgender Lösungen: Stevin hatte für die Gleichung $x^3 = 6x^2 - 10x + 3$ die Lösung $x_1 = 3$ gefunden. Girard fand die beiden anderen, $x_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$.

Aufgabe 4.2.4: Beispiel von Girard [Tropfke, S. 85]
Girard behandelte u. a. die Gleichung
$x^7 = 4x^6 + 14x^5 - 56x^4 - 49x^3 + 196x^2 + 36x - 144$
und gab alle Lösungen an. Wie lauten sie?

Aufgabe 4.2.5: Originalaufgabe von Nunes
Gesucht sind zwei Zahlen x und y, deren Produkt 10 ist und die Summe ihrer Quadrate 20.

Originalaufgaben von Adam Ries
Aus *„Rechenbuch/ auff der Linien und Ziphren...“* [Ries, Adam 1574]

Aufgabe 4.3.1 (a.a.O., Bl. 58, Vs)
„Item einer spricht / Gott grüß euch Gesellen alle dreissig. Antwort einer / Wann vnser noch so viel vnd halb so viel weren / so weren vnser dreissig. Die frag wie viel jhr gewesen?“ (Versuchen Sie die Lösung mit Hilfe der regula falsi zu finden.)

Aufgabe 4.3.2 (a.a.O., Bl. 60, Vs)

„Item / ein Kauffmann zeucht hinweg mit gelt / gewinnt ein drittheil seines hauptgutes / vnd 4. fl. (Gulden, Wg) mehr / legt an hauptgut vnd gewinn / gewinnt den vierdten theil / bringt zusamen 40. fl. wie viel hat erzum ersten außgeführt?“

Aufgabe 4.3.3 (a.a.O., Bl. 71, Vs)

„Vihekauff. Item / einer 100 fl. dafür will er 100. haupt Vihes kauffen / nemlich / Ochsen / Schwein / Kälber / vnd Geissen / Kost ein Ochs 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb einen halben fl. vnd ein Geiß ein ort ($\frac{1}{4}$ Gulden, Wg) von einem fl. wie viel sol er jeglicher haben für die 100. fl?“ (Achtung: mehrere Lösungen, u. a. 12 Ochsen, 20 Schweine, 20 Kälber, 48 Ziegen)

Aufgabe 4.3.4: Klassische Aufgabe „Schneckengang“ (a.a.O., Bl. 72, Rs)

„Item ein Schneck ist in einem Brunn 32. den tieff / kreucht alle tag herauf 4. eln $\frac{2}{3}$. vnd fellt des nachts zurück 3. eln / und $\frac{3}{4}$ in wie viel tagen kompt sie herauß?“

Originalaufgaben von Adam Ries aus der *„Coß“* [Ries, Adam; *„Coß“*]

Aufgabe 4.3.5 („Coß“, S. 123)

10 in zwei Teile zerlegen, so daß

(a) Quotient 10

(b) zwei um 2 verschiedene Summanden ergeben 10.

Aufgabe 4.3.6 („Coß“, S. 266)

Einer kauft etliche Leder zu Bautzen, 100 für 70 fl, verkauft in Leipzig 1 Zentner um 3 fl, verliert an 100 fl 15 fl. Wie viele Leder gehen auf 1 Zentner?
(Ansatz: x Leder gehen auf 1 Zentner)

Aufgabe 4.3.7 („Coß“, S. 289)

Ein Spieler hat Geld. Verliert 15 fl, gewinnt 37 fl, hat dann 4 fl.
(Achtung: führt auf negative Lösung)

Aufgabe 4.3.8 („Coß“, S. 289)

Sieben Leute kaufen ein Haus um 100 fl. A begehrt von B $\frac{2}{3}$, B von C $\frac{3}{4}$, C von D $\frac{4}{5}$, D von E $\frac{5}{6}$, E von F $\frac{6}{7}$, F von G $\frac{7}{8}$, G von A $\frac{8}{9}$.
(Ansatz: A begehrt x, dann $G = 100 - \frac{8}{9}x$, usw.)

Aufgabe 4.3.9: Originalaufgabe von Abraham Ries [Ries, Abraham; „Coß“, S. 223]

„Es seindt etliche gesellen, haben 10 fl in gemein zuurn. Nuhn legtt ein Ider souiel fl darzu als der gesellen sein theilen als dan den halben theill wieder Vnder sich be kombtt einer $5\frac{1}{2}$ fl wieuiel sein der gesellen geweßenn“ (quadratisches Problem).

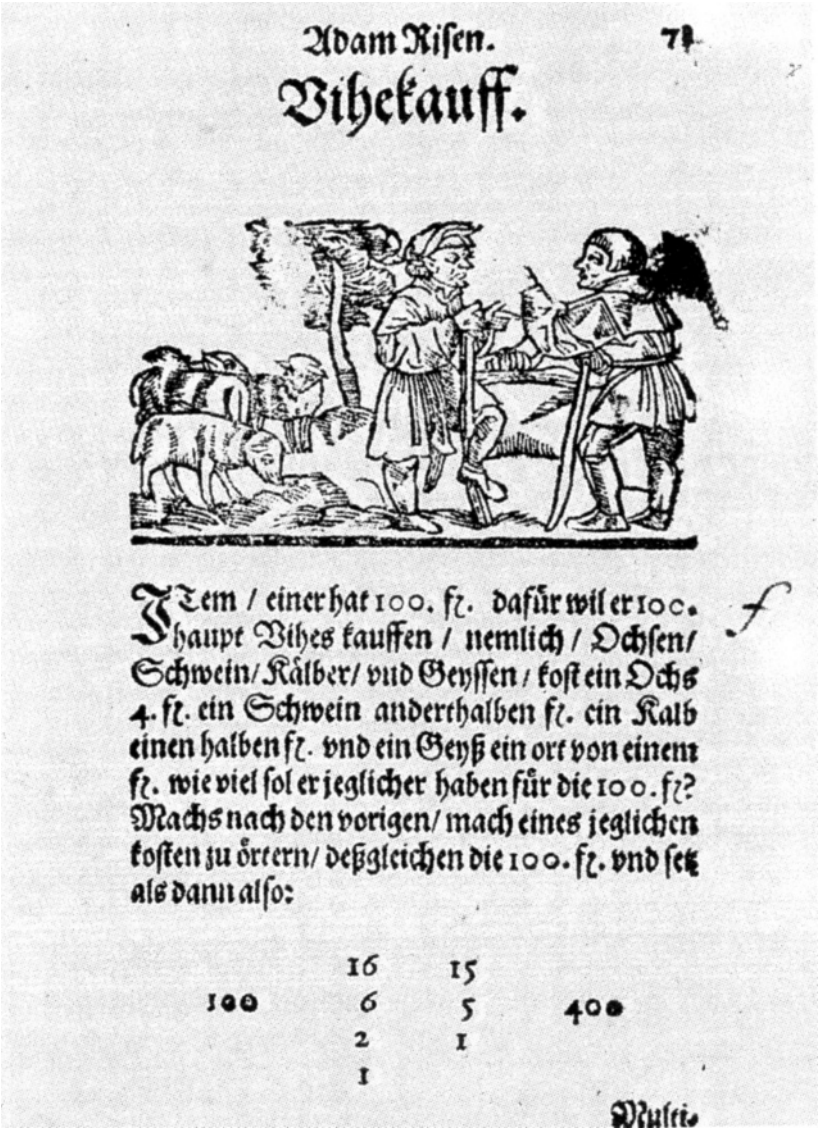


Abb. 4.8.16. Viehkauf-Aufgabe aus der Ziffernrechnung von Adam Ries

5 Algebra wird zur selbständigen Disziplin (16./17. Jh.)



um 1510	Peter Henlein fertigt in Nürnberg erste Taschenuhren
1517	Luthers Thesenanschlag, Beginn der Reformation in Deutschland
1518–1550	Rechenbücher von Adam Ries
1519–1522	Erste Weltumsegelung
1543	„De revolutionibus“ von Copernicus wird gedruckt
1543	Paracelsus begründet die moderne Medizin
1547	Iwan IV. (der Schreckliche) nimmt den Titel „Zar“ an
1548–1603	Elisabeth I. regiert England
1560	In Neapel wird die erste europäische Akademie gegründet
1564–1616	William Shakespeare
1582	Gregorianischer Kalender löst den Julianischen (zunächst in katholischen Ländern) ab
1587	Erster Versuch einer britischen Koloniebildung in Amerika (Virginia)
1588	Untergang der spanischen Armada
1609	Johannes Kepler veröffentlicht die beiden ersten Gesetze der Planetenbewegung
1610	Galileo Galilei veröffentlicht sensationelle astronomische Entdeckungen mit dem Fernrohr
1614	Erste Logarithmentafel (Lord Merchiston Neper)
1618–1648	Dreißigjähriger Krieg
1633	Galilei muß sein Bekenntnis zum copernicanischen Weltsystem widerrufen
1643–1715	Regierung Ludwig XIV. („Sonnenkönig“) in Frankreich
1644	Blaise Pascal baut die erste erhalten gebliebene mechanische Rechenmaschine (und erhält 1649 ein königliches Privileg für die Herstellung)
1646	Athanasius Kircher beschreibt als erster die „Laterna Magica“
1662	(offizielle) Gründung der Royal Society in London
1666	Gründung der Pariser Akademie
1666	Nach einer Pestepidemie und dem folgenden Großbrand von London Beginn des Wiederaufbaus unter Leitung von Christopher Wren
1666–84	Bau des Canal du Midi in Frankreich
1672	Gottfried Wilhelm Leibniz erfindet die Staffelwalze als Element mechanischer Rechengeräte
1687	Newtons „Philosophiae naturalis principia mathematica“
1709	Ehrenfried Walter v. Tschirnhaus und Johann Friedrich Böttger erfinden in Sachsen das europäische weiße Hartporzellan
1725	Eröffnung der Petersburger Akademie
1733–43	Große russische Nordexpedition unter Vitus Bering
1735–37	Gradmessungsexpeditionen der Pariser Akademie nach Südamerika und Lappland beweisen Abplattung der Erde
1740–86	Regierung Friedrich II. (der „Große“) in Preußen
1741	Neugründung der Berliner Akademie, Berufung Leonhard Eulers nach Berlin
1756–1763	Siebenjähriger Krieg
1762–96	Regierung Katharina II. in Rußland
1768–79	Entdeckungsreisen von James Cook

5.0 Vorbemerkungen

Lineare und quadratische Gleichungen waren in der hellenistischen Antike und in der muslimischen Welt sicher beherrscht worden, freilich auf geometrischem Hintergrund. Beispielsweise klassifizierte und behandelte al-Ḫwārizmī sechs Typen von Gleichungen, darunter auch echt quadratische Gleichungen. An Beispielen zwar – etwa der Gleichung $x^2 + 21 = 10x$ –, aber in allgemeiner Sprachführung, wird der rechnerische Lösungsweg angegeben. Der Beweis für das Lösungsverfahren erfolgt geometrisch (s.S. 166–169 und [Juschkewitsch 1964, S. 206f.]). Weitere herausragende Beiträge zur Algebra stammen u. a. von Abū l-Wafā', Abū Kāmil und al-Karaǧī (S. 169–175).

Bei anderen Autoren werden Lösungen von Gleichungen mittels Kegelschnitten gesucht. Ein gewisser Abū l-Ǧūd soll (um 1000) Allgemeines über kubische Gleichungen geschrieben haben [Hofmann 1963, Bd. I, S. 67]. Ein Lösungsverfahren für kubische Gleichungen mittels Kegelschnitten stammt von ᶜUmar al-Ḫayyām (1050–1122), doch hielt er eine rechnerische Auflösung für unmöglich (vgl. S. 175–184).

Der Inhalt von al-Ḫwārizmīs Abhandlung *„al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala“ (Ein kurzgefaßtes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen)* [Juschkewitsch 1964, S. 204] ist in mehreren Versionen im Mittelalter nach Europa tradiert worden. Es handelt sich im Hauptteil – worauf es uns hier ankommt – um eine Art Lehrbuch über das Auflösen von linearen und quadratischen Gleichungen, nicht in allgemeiner Form, sondern mit Zahlkoeffizienten. Durch „al-ǧabr“ (Auffüllen, Ergänzen, lat. restauratio; zur Vermeidung von negativen Termen) und „wa-l-muqābala“ (Gegenüberstellung, Ausgleichen, lat. oppositio) entstehen sechs Gleichungstypen; sie werden – ohne Symbole – verbal formuliert.

Dieses Werk und die Methoden von al-Ḫwārizmī zur Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen haben im europäischen Mittelalter, während der Renaissance und noch weit bis ins 17. Jahrhundert inhaltlich und methodologisch als Vorbild gedient.

Auf einen anderen Zusammenhang zwischen der Auflösung von quadratischen Gleichungen und der Theorie der Irrationalitäten sei wenigstens hingewiesen [Stillwell 1989, S. 59]. Die Wurzeln quadratischer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten sind von der Form $a + \sqrt{b}$, wo a und b rational sind. In Euklid, Buch X, wird in geometrischer Form ausführlich die Theorie der Irrationalitäten vom Typ $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ behandelt, wo a und b rational sind.

Wie es scheint [Stillwell 1989, S. 53], ist bis zur Renaissance kein Fortschritt in der Lehre von den Irrationalitäten erzielt worden, mit Ausnahme einer Bemerkung von Leonardo Fibonacci, wonach die Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ nicht vom Typ der Euklidischen Irrationalitäten sein können (damit ist allerdings noch nicht entschieden, ob diese Gleichungswurzeln nicht doch mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind).



Abb. 5.0.1. In der Bodleian Library der Universität Oxford kann man orientalische und hebräische Manuskripte ab dem 7. Jh. bewundern
[Foto Alten]

Sowohl in der griechisch hellenistischen Antike wie auch im Mittelalter in den Ländern des Islam traten Gleichungen zumeist im Zusammenhang mit geometrischen Problemen auf, und ihre Lösungen wurden in der Regel auch mit geometrischen Methoden gefunden bzw. bewiesen. Daneben wurden die Lehre von den Proportionen und elementare arithmetische Operationen zur Lösung herangezogen. Auch das europäische Mittelalter brachte auf diesem Gebiet keine wesentlichen Fortschritte. So ist es kein Wunder, daß unter den Sieben Freien Künsten des Mittelalters Geometrie und Arithmetik (neben Musik und Astronomie) als mathematische Disziplinen des Quadriviums auftraten, aber die Etablierung der Algebra (und anderer Teilgebiete) als selbständige Disziplinen der Mathematik erst in der Neuzeit erfolgte.

Diese Entwicklung begann in der Spätzeit der Renaissance mit den Untersuchungen und Schriften über die Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grades durch Scipione del Ferro, Niccolò Tartaglia und Girolamo Cardano und wird deshalb hier als eigenes Kapitel behandelt. Sie spiegelt sich auch wieder in den Schriften und Buchtiteln dieser Wissenschaftler. Das im Titel des berühmten Buches von al-Ḫwārizmī enthaltene Wort al-ğabr kennzeichnet fortan als Algebra eine eigenständige mathematische Disziplin: die Theorie der Gleichungen und Gleichungssysteme und ihrer Lösungen.

5.1 Gleichungen dritten und vierten Grades

5.1.1 Lösungen für Gleichungen dritten Grades

Die Entdeckung der Lösungsformeln für die kubischen und die biquadratischen Gleichungen stellt einen der ersten und bedeutendsten Schritte über die Errungenschaften der antiken und muslimischen Mathematik hinaus dar. Zugleich spiegeln sich in der komplizierten Geschichte der handelnden Personen und der Tradierung des Wissens die Wechselbeziehungen zwischen offizieller Universitätswissenschaft und der artefici-Wissenschaft deutlich wieder.

Der Mathematikprofessor Scipione del Ferro (1465?-1525) in Bologna dürfte [Øystein Ore, Stillwell] um 1515 die algebraische Lösung der Gleichung dritten Grades vom Typ $x^3 + ax = b$ gefunden haben. Er gab sie weiter an seinen Schwiegersohn und Nachfolger Annibale della Nave. Del Ferros anderer Schüler Antonio Maria Fiore ging als Lehrer der Mathematik nach Venedig. Um sich bekannt zu machen forderte er 1535 den dort wirkenden Rechenmeister Niccolò Tartaglia (1506?-1559) zu einem öffentlichen Wettbewerb heraus. Der Text, der dreißig Aufgaben enthält, ist bekannt. Am Beginn der Herausforderung heißt es:

„Dies sind die dreißig Probleme, die ich, Antonio Maria Fior, Dir, Meister Niccolò Tartaglia gestellt habe.

1 Finde mir eine Zahl derart, daß, wenn ihr Kubus addiert wird, das Resultat sechs ist, d. h. 6. (Führt auf die Gleichung $x^3 + x = 6$.)



Abb. 5.1.1. Die Bronzepferde auf der Basilika von San Marco in Venedig sind sehr alt. Kaiser Theodosius hatte sie Ende des 4. Jhs. von Chios zum Schmuck des Hippodroms nach Konstantinopel bringen lassen. Bei der Plünderung Konstantinopels durch die Kreuzritter im Jahre 1204 wurden sie von Venezianern geraubt.
[Foto Alten]

2 Finde mir zwei Zahlen in doppelter Proportion derart, wenn das Quadrat der größeren Zahl multipliziert wird mit der kleineren, und wenn dieses Produkt zu den zwei ursprünglichen Zahlen addiert wird, das Ergebnis vierzig sein wird, d. h. 40. (Führt auf die Gleichung $4x^3 + 3x = 40$.)

(...)

15 Ein Mann verkauft einen Saphir für 500 *Dukaten und macht einen Gewinn in der dritten Potenz seines Kapitals. Wie groß ist dieser Profit?* (Führt auf die Gleichung $x^3 + x = 500$.)

(...) " [Fauvel/Gray 1987, S. 254 (englisch), dt. Übersetzung Wg.]

Tartaglia hat uns berichtet, daß er erst in der allerletzten Minute, in der Nacht vom 12. auf den 13. Februar, vor dem Wettbewerb die Lösung fand und so den Wettbewerb gewann.

5.1.2 Niccolò Tartaglia

Einige Worte zu Tartaglia, der eigentlich Fontana geheißen haben dürfte. (Von ihm stammt auch eine Autobiographie: N. Tartaglia: Quesiti et Inventione Diverse. Venedig 1546). Er wurde 1499 oder 1500 in Brescia geboren und stammte aus ärmlichen Verhältnissen. Er starb 1557 in Venedig. Der Name „Tartaglia" bedeutet „Stotterer". Während der Plünderung 1512 von Brescia durch die Franzosen wurde der Junge am Kopf schwer verletzt und behielt die Behinderung des Stotterns. Mit 14 Jahren sollte er bei einem Lehrer mit dem Alphabet bekannt gemacht werden, doch reichte das Schulgeld nur bis zum Buchstaben K. Mit einem gestohlenen Lehrbuch hat er sich dann selbst Lesen und Schreiben beigebracht.

Immer noch mit geringem Einkommen ging er nach Venedig, hielt in einer Kirche öffentliche Vorlesungen zur Mathematik und publizierte wissenschaftliche Werke, u. a. Euklid in italienischer Sprache (1543) und *„Über schwimmende Körper"* von Archimedes (1543). Durch Probeschießen fand Tartaglia, daß bei einem Erhebungswinkel des Geschützrohres von 45 ° das Geschoß am weitesten fliegt.

Die Nachricht vom Erfolg Tartaglias im Wettbewerb mit Fiore sprach sich herum und erreichte auch den berühmten Arzt Professor Girolamo Cardano, der, obwohl seinerseits ein ausgezeichneter Mathematiker, die Auflösung der kubischen Gleichung nicht hatte finden können. Man traf sich nach einigem Hin und Her 1539 in Mailand. Nach dringlichen Bitten erhielt Cardano von Tartaglia Lösungsformeln für spezielle Fälle kubischer Gleichungen, nicht aber den Beweis. Cardano versprach – höchstwahrscheinlich – mit heiligen Eiden, das Verfahren niemals anderen zu überlassen.

Aber Cardano hielt sich nicht an die Absprache und veröffentlichte die Lösungsmethode 1545 in seinem Buch *„Ars magna sive de regulis algebraicis"* (Die große Kunst oder über die Regeln der Algebra), möglicherweise, weil ihm bekannt wurde, daß auch del Ferro die Lösung besessen hatte und Tartaglia als Plagiator empfunden wurde.



Niccolò Tartaglia



Girolamo Cardano

In der *„Ars magna“*, in Kapitel I, äußerst sich Cardano aus seiner Sicht über die Urheberschaft der Lösungsformeln:

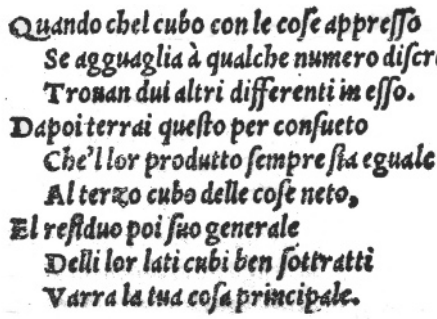
„In unseren Tagen hat Scipione del Ferro aus Bologna den Fall gelöst, daß der Kubus und die erste Potenz (der Unbekannten, A.) gleich einer Konstanten sind – eine sehr elegante und bewundernswerte Leistung.... Um nicht übertroffen zu werden, löste mein Freund Niccolò Tartaglia im Wetteifer mit ihm denselben Fall, als er sich im Wettkampf mit seinem [Scipionis] Schüler Antonio Maria Fior befand, und gab es (die Lösung, A.) mir auf viele Bitten hin. Denn ich war durch die Worte Luca Pacciolis getäuscht worden, der bestritt, daß irgendeine allgemeinere Regel als seine eigene entdeckt werden könne. Ungeachtet der vielen Dinge, die ich schon entdeckt hatte, wie wohl bekannt ist, hatte ich aufgegeben und mich nicht bemüht, noch weiter zu suchen. Dann jedoch, als ich Tartaglias Lösung erhalten hatte und nach ihrem Beweis suchte, erkannte ich, daß es noch sehr viele andere Dinge gab, die man finden könnte. Als ich diesen Gedanken mit wachsender Zuversicht verfolgte, entdeckte ich diese anderen Dinge, zum Teil selbst, zum Teil durch Lodovico Ferrari, meinen früheren Schüler .... Die Beweise, außer den dreien von Mohammed (Ben Musa = Al-Ḫwārizmī, A.) und den beiden von Lodovico, sind alle von mir“ [Cardano, Ars magna, fol. 3, dt. Übers. Alten].

Tartaglia reagierte wütend auf den von Cardano begangenen Vertrauensbruch. Der Streit erfaßte ganz Italien, zumal er auch soziologische Hintergründe besaß – Universitätswissenschaft contra artefici-Wissenschaft.

Tartaglia hat 1539 über sein Treffen mit Cardano berichtet, in Form der Wiedergabe des zwischen ihnen geführten Gespräches. Hier seien wiedergeben jene Passagen, die auf das Versprechen von Cardano anspielen, die Lösung nicht weiterzugeben.

Cardano: „Ich schwöre Euch bei Gottes heiligem Evangelium und als wahrer Ehrenmann, nicht nur Eure Entdeckungen niemals zu veröffentlichen, wenn Ihr sie mir zur Kenntnis gebt, sondern ich verspreche Euch auch und verpfände meinen Glauben als ein echter Christ, sie verschlüsselt zu notieren, so daß niemand nach meinem Tode in der Lage sein wird, sie zu verstehen. Wenn Ihr mir nun glauben wollt, dann glaubt mir, sonst laßt es sein.“

Schließlich übergibt Tartaglia den rechnerischen Weg zur Auflösung der Gleichungstypen $x^3 + ax = b$ bzw. $x^3 = ax + b$, übrigens in Gedichtform (hier nur der erste Teil mit Erläuterungen nach [Gericke 1992, S. 227]; vgl. dazu die Beschreibung von Cardano auf S. 258)



$x^3 + ax = b$

$u - v = b$

$uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$

$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

Der springende Punkt ist der, daß zwei Hilfsgrößen u und v eingeführt werden mit $u - v = b$ und $uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ bzw. $u + v = b$ und $uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$.

Bei der Verabschiedung erinnert Tartaglia Cardano nochmals an dessen Versprechen.

Tartaglia: „Nun, erinnert Euch Exzellenz, und vergeßt nicht Euer glaubwürdiges Versprechen, denn wenn es durch unglücklichen Zufall gebrochen wird, d. h. wenn Ihr diese Lösungen publiziert, sei es in diesem Buch, das Ihr zur Zeit drucken lassen wollt, oder auch wenn Ihr sie in einem anderen, von diesem verschiedenen Buch veröffentlicht, ohne daß Ihr meinen Namen angebt und mich als den wirklichen Entdecker anerkennt, so verspreche ich Euch und schwöre, daß ich unverzüglich ein anderes Buch veröffentlichen werde, das nicht sehr angenehm für Euch sein wird“.

Cardano: „Zweifelt nicht, daß ich mein Versprechen halten werde...“

Tartaglia: „Nun bitte, vergeßt es nicht.“

[Tartaglia, Quesiti et Inventioni Diverse 1546, S. 120-122; dt. Übers. Alten]

5.1.3 Girolamo Cardano

Zunächst ein paar Informationen über Cardano [Stillwell 1989, S. 61/62]. Cardano wurde 1501 in Pavia geboren; er starb 1576 in Rom. Sein Vater war Rechtsanwalt und Arzt. Cardano begann 1520 das Medizinstudium in Pavia und promovierte 1526 in Padua. Nach einigen Anfangsschwierigkeiten

wegen seiner unehelichen Geburt wurde er ein höchst erfolgreicher Arzt in Mailand; sein Ruhm breitete sich über ganz Europa aus. Sein prominentester Patient war der Erzbischof von Schottland, der an Asthma litt. Cardano fand durch Beobachtung heraus, daß die Bettfedern daran Schuld waren; die Ersetzung durch anderes Bettzeug aus Seide und Leinen führte sofort zur Besserung [Katz 1993]. Daneben befaßte er sich erfolgreich mit Mathematik, mit Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit der Dechiffrierung von Geheimtexten. Persönliche Schicksalsschläge trafen Cardano schwer und oft. Ein Onkel wurde vergiftet; Versuche, Cardano und seinen Vater zu vergiften, scheiterten. 1546 starb seine Frau. Sein ältester Sohn wurde enthauptet wegen Giftmordes an seiner Frau. Cardano ging nach Bologna, aber dort wurde 1565 sein Schüler Ferrari von dessen Schwester vergiftet.

Cardano publizierte ein Jahr vor seinem Tode ein Art Autobiographie *„De vita propria Liber“* (Das Buch meines Lebens). Dort geht er aber kaum auf Tartaglia ein, lediglich mit dem Bemerken, er habe *„einige wenige Anregungen von ihm erhalten“*.

Im gewissen Sinne ist Cardano eine schillernde Figur, aber seine *„Ars magna“* war ein schrittmachendes Werk, das Standardwerk der Algebra bis zu den Schriften von Vieta und Descartes. Die erste Auflage erschien 1545 bei Johann Petreius in Nürnberg, übrigens mit einer Widmung von Andreas Osiander, der zwei Jahre zuvor *„De revolutionibus“* von Nicolaus Copernicus (1473–1543) ebenfalls in Nürnberg herausgegeben hatte. Weitere Auflagen der *„Ars magna“* erschienen 1570 und 1663.

Cardano behandelt die Algebra vom Duktus her wie al-Ḫwārizmī: Die Rechenwege werden demonstriert, die Beweise aber werden geometrisch geführt, unter starkem Rückgriff auf die *Elemente* des Euklid . Auf Einzelheiten der von Cardano verwendeten Terminologie [Struik 1969] soll hier nicht eingegangen werden; nur so viel sei festgehalten: Für „Unbekannte“ schreibt er res (lateinisch) bzw. cosa (italienisch). „Cubus“ bedeutet einen festen Körper, aber auch die dritte Potenz. So steht *„Cubus et res aequales numero“* für eine Gleichung vom Typ $ax^3 + bx = c$.

Am Anfang der *„Ars magna“* (Kapitel 11-23) erörtert Cardano allgemeine Fragen: Diskussion über die Anzahl der Wurzeln, ob diese positiv oder negativ sind (er spricht von „wahr“ und „fiktiv“).

Wir wollen aus der *„Ars magna“* zwei Beispiele vorführen.

Fall1: In Kapitel 11 – Tartaglia hatte die Lösung in Gedichtform mitgeteilt – behandelt Cardano die Gleichung vom Typ $x^3 + ax = b$. Er beschreibt den Rechengang mit folgenden Worten: *„Bilde die dritte Potenz von einem Drittel des Koeffizienten der Unbekannten; addiere dazu das Quadrat der Hälfte des konstanten Gliedes der Gleichung; und nimm die Wurzel aus dem Ganzen, d. h. die Quadratwurzel. Bilde sie zweimal. Zur einen addiere die Hälfte der Zahl, die du schon mit sich multipliziert hast; von der anderen subtrahiere dieselbe Hälfte. Du hast dann ein Binom (Summe zweier Ausdrücke, A.) und seine Apotome (deren Differenz, A.). Dann subtrahiere die Kubikwurzel aus*



Abb. 5.1.2. Titelblatt der „Artis magnae, sive de regulis algebraicis“ [Girolamo Cardano , Nürnberg 1545]

der Apotome von der Kubikwurzel aus dem Binom. Der dabei übrig bleibende Rest ist der Wert der Sache (der Unbekannten x, A.)“ [Cardano, fol. 30; dt. Übers. A.].

Gemäß dieser Rechenanweisung baut sich die Lösungsformel schrittweise auf:

$$\left(\tfrac{a}{3}\right)^3,\ \left(\tfrac{a}{3}\right)^3+\left(\tfrac{b}{2}\right)^2,\ \sqrt{\left(\tfrac{a}{3}\right)^3+\left(\tfrac{b}{2}\right)^2}+\tfrac{b}{2},\ \sqrt{\left(\tfrac{a}{3}\right)^3+\left(\tfrac{b}{2}\right)^2}-\tfrac{b}{2},$$

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\tfrac{a}{3}\right)^3+\left(\tfrac{b}{2}\right)^2}+\tfrac{b}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\tfrac{a}{3}\right)^3+\left(\tfrac{b}{2}\right)^2}-\tfrac{b}{2}}.$$

In Tartaglias Gedicht hatte sich der Ansatz $u-v=b$, $u\cdot v=\left(\tfrac{a}{3}\right)^3$ mit zwei neu eingeführten Größen u und v verborgen. Dann entspricht in Cardanos (Euklids) Terminologie $u=\sqrt{\left(\tfrac{a}{3}\right)^3+\left(\tfrac{b}{2}\right)^2}+\tfrac{b}{2}$ dem Binomium, $v=\sqrt{\left(\tfrac{a}{3}\right)^3+\left(\tfrac{b}{2}\right)^2}-\tfrac{b}{2}$ der Apotome.

Wie immer beweist Cardano die Formel geometrisch. In algebraischer Umsetzung läuft der geometrische Beweis in folgender Weise:

$x^3+ax=(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v})^3+a\,(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v})$

$=(\sqrt[3]{u})^3-3\,(\sqrt[3]{u})^2\,\sqrt[3]{v}+3\sqrt[3]{u}\,(\sqrt[3]{v})^2-(\sqrt[3]{v})^3+3\sqrt[3]{uv}\,(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v})$

$=u-v=b.$

Cardano gibt zwei Beispiele an, die Lösungen der Gleichungen $x^3+6x=20$ und $x^3+3x=10$. Im ersten Fall ergibt das Lösungsverfahren $x=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$. Andererseits erkennt man leicht, daß $x=2$ eine Lösung ist. Vermutlich hat dies Cardano gewußt, aber es bleibt unklar, ob er den Wurzelausdruck mit 2 identifiziert hat.

Fall 2: Gleichungen vom Typ $x^3=ax+b$ (Kap. 12). Mit geringfügigen Änderungen – auf der Basis des Ansatzes $u+v=b$ – ergibt sich in diesem Fall die Lösungsformel zu $x=\sqrt[3]{\tfrac{b}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{b}{2}\right)^2-\left(\tfrac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\tfrac{b}{2}-\sqrt{\left(\tfrac{b}{2}\right)^2-\left(\tfrac{a}{3}\right)^3}}$.

Im Anschluß an die Behandlung der Gleichung $x^3=6x+6$ wirft Cardano die weitergehende Frage auf, was eintritt, wenn der Radikand aus der Quadratwurzel negativ ist. Er erkennt die Schwierigkeit, verweist zwar auf Kapitel 25 mit speziellen lösbaren Fällen, kann aber keine allgemeine Lösung des Problems anbieten. (Bombelli erst wußte mit den Quadratwurzeln aus negativen Zahlen umzugehen.)

Schon aus dem Bisherigen sollte klar geworden sein, daß beim historisch echten Cardano nicht von **der** Lösungsformel für kubische Gleichungen gesprochen werden kann. Vielmehr muß er, da nur positive Koeffizienten zugelassen sind, 23 verschiedene Fälle unterscheiden, u. a.

XI: $x^3+ax=b$, XII: $x^3=ax+b$, XIII: $x^3+a=bx$,

XIV: $x^3=ax^2+b$, XV: $x^3+ax^2=b$, ..., XXIII: $x^3+ax^2+b=cx$.

Cardano vermochte es, alle kubischen Gleichungen auf die Typen

(A) $x^3=ax+b$ und (B) $x^3+ax=b$ zu reduzieren. (Im einzelnen vergleiche man [Tropfke, 4. Aufl., S. 450-452]). Der Typ (A) führt zum Ansatz $x=y+z$, der Typ (B) auf $x=y-z$ mit $y=\sqrt[3]{u}$, $z=\sqrt[3]{v}$.

Da wir heute, durch Verzicht auf die Forderung ausschließlich positiver Koeffizienten, auf Cardanos Fallunterscheidung verzichten können, führen wir die Normalform der kubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ mittels der Transformation $x = y - \frac{a}{3}$ auf die reduzierte Form $y^3 + py + q = 0$ zurück und erhalten als einheitliche Cardanische Lösungsformel für die eine Wurzel $y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$. Die Formel liefert eine reelle Lösung und zwei konjugiert komplexe Lösungen, wenn $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$ ist, drei zusammenfallende reelle Lösungen, falls $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ ist. Ist der Radikand der Quadratwurzel kleiner als Null, so besitzt die Gleichung drei reelle Lösungen.

Dieser letztere Fall bietet wegen der auftretenden imaginären Größen besondere Schwierigkeiten; auf algebraischem Wege sind die reellen Lösungen nicht zu finden. Der Fall erhielt daher die Bezeichnung „casus irreducibilis“ (nicht zurückführbarer Fall). Erst Vieta gab um 1600 eine Lösung, und zwar auf trigonometrischem Wege.

5.1.4 Auflösung von Gleichungen vierten Grades

Zur Überraschung der Zeitgenossen gab die *„Ars magna“* auch eine Methode zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades, die von Ludovico Ferrari (1522–1565) herrührt. In Kap. 39 [Cardano 1545, fol. 72ff. ; Cardano 1993 (engl. Übers. Witmer), S. 235] behandelt Cardano zunächst Gleichungen höheren Grades, die sich auf kubische Gleichungen zurückführen lassen, z. B. $x^6 = x^2 + 1$, kubisch in x^2. Dann aber folgt die Regel II.

„Es gibt eine andere Regel, besser als die vorangehende. Es ist die von Lodovico Ferrari, der sie mir auf meine Bitte gab. Durch sie haben wir all die Lösungen für Gleichungen mit der vierten Potenz, dem Quadrat, der ersten Potenz (der Unbekannten, A.) und der Zahl (dem konstanten Glied, A.) oder aus der vierten Potenz, dem Kubus, dem Quadrat und der Zahl, und ich gebe sie hier in einer Reihenfolge an:

1. $x^4 = bx^2 + ax + N$, 2. $x^4 = bx^2 + cx^3 + N$, 3. $x^4 = cx^3 + N$, ... ,

7. $x^4 + cx^3 = N$,..., 20. $x^4 + ax + N = bx^2$.

In all diesen Fällen, welche tatsächlich (nur) die allgemeinsten sind, denn es gibt 67 weitere, ist es ratsam, diejenigen, welche den Kubus enthalten, auf Gleichungen zu reduzieren, in denen stattdessen die Unbekannte x vorkommt, wie die siebte auf die vierte oder die zweite auf die erste“ [Cardano 1545, fol. 73, dt. Übers. Alten].

Zunächst wird, wie bei der kubischen Gleichung auch, durch einfache Variablentransformation, das Glied mit der zweithöchsten Potenz beseitigt. Es erscheint die allgemeine Gleichung vom Typ $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

Der Grundgedanke besteht darin, eine Beziehung zwischen zwei Quadraten herzustellen, zusammen mit einer kubischen Hilfsgleichung in einer neu ein-

geführten Unbestimmten y. Dann besteht die Lösung aus einer Quadratwurzel aus einer Summe von dritten Wurzeln, gemäß der Lösungsformel für kubische Gleichungen.

Durch Addition von $(p+y)^2 + (p+2y)x^2$ und Subtraktion von $qx + r$ auf beiden Seiten entsteht die Gleichung

$$\left(x^2 + p + y\right)^2 = x^2\,(p+2y) - qx + \left(p^2 - r + 2py + y^2\right).$$

Auch die rechte Seite wird zum Quadrat, wenn y der kubischen Gleichung (der sogenannten „kubischen Resolvente“) $4\,(p+2y)\left(p^2 - r + 2py + y^2\right) - q^2 = 0$ genügt.

Als Beispiel behandelt Cardano im Problem V [Cardano 1545, fol. 74] ein von einem anderen Algebraiker übernommenes Problem, das dieser als nicht lösbar bezeichnet hatte. Das Problem lautet: Teile 10 in drei proportionale Teile, so, daß das Produkt des ersten und des zweiten 6 ergibt. Dann hat man die Gleichungen $x + y + z = 10$, $x : y = y : z$, $xy = 6$. Bei Elimination von x und z erhält man eine Gleichung vierten Grades in y, nämlich $y^4 + 6y^2 + 36 = 60y$. Cardano beschreibt den Lösungsweg ausführlich. Verkürzt dargestellt: Durch Einführung einer Hilfsgröße b und Addition von $(2b+6)y^2 + b^2 + 12b$ erhält man $[y^2 + (6+b)]^2 = y^2(2b+6) + 60y + b^2 + 12b$. Die rechte Seite ist dann auch ein Quadrat, wenn $4(2b+6)(b^2+12b) = 60^2$ ist, also b der kubischen Gleichung $b^3 + 15b^2 + 36b = 450$ genügt.

Dies ist die zugehörige kubische Resolvente, auf die Cardano zurückgreifen kann, da er sie schon vorher behandelt hatte.

Bei Cardano ist noch nachzutragen, daß er auch negative Zahlen als Lösungen zuläßt, z.B. für die Gleichung $x^2 = 9$ mit den Wurzeln 3 und -3. [Cardano 1545, fol. 4] Bei der Behandlung einer quadratischen Gleichung stieß Cardano auch auf komplexe Zahlen (wie wir heute sagen würden), und zwar am Beispiel der Gleichung $x^2 + 40 = 10x$. Der Text lautet in moderner Bezeichung und in deutscher Übersetzung:

„Die zweite Art einer negativen Annahme betrifft die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl. Ich will ein Beispiel nennen: Wenn jemand sagte: teile 10 *in zwei Teile, deren Produkt* 30 *oder* 40 *ist, so ist klar, daß dieser Fall unmöglich ist. Desungeachtet wollen wir wie folgt verfahren: Wir teilen* 10 *in zwei gleiche Teile, von denen jeder* 5 *ist. Diese quadrieren wir, das macht* 25. *Wenn du willst, subtrahiere* 40 *von den gerade erhaltenen* 25, *wie ich es dir im Kapitel über Operationen im sechsten Buch gezeigt habe; der damit erhaltene Rest ist* -15, *die Quadratwurzel daraus, addiert zu oder subtrahiert von* 5 *gibt die beiden Teile mit dem Produkt* 40. *Diese sind also* $5 + \sqrt{-15}$ *und* $5 - \sqrt{-15}$.“ [Cardano 1545, fol. 66; dt. Übers. Alten].

Und ein wenig später kommt er zu dem Schluß: *„So schreitet Arithmetik scharfsinnig voran. Das Ende davon ist, wie gesagt, so raffiniert wie es unnütz ist.“* [Cardano 1545, fol. 66].

5.1.5 Rafael Bombelli

Der Ingenieur Rafael Bombelli (1526–1572), geboren in Bologna, gehört ebenfalls der Gruppe der artefici-Mathematiker an. Mit ihm bricht die Folge der großen Renaissance-Algebraiker Italiens ab; das Schwergewicht der Entwicklung verlagerte sich nach Frankreich und den Niederlanden.

Bombelli [DSB 1970, Bd. 2, S. 279-281] verbrachte einen Großteil seines Lebens im Dienste eines römischen Edelmannes. Er erwarb sich großes Ansehen als Ingenieur, insbesondere bei der Entwässerung von Sümpfen.

Bombelli war vertraut mit der Lage in der Algebra, fand aber, daß die meisten Autoren nicht tief genug in die Dinge eingedrungen seien und daß Cardano den Stoff schlecht dargelegt habe. So entschloß er sich seinerseits zur Niederschrift eines Lehrbuches der Algebra; das geschah zwischen 1557 und 1560. Sein Buch *„L'Algebra"* erschien 1572 in Bologna. (Er konnte sein Werk nicht vollenden; die Bücher IV und V kamen erst 1929 aus dem Nachlaß heraus.)

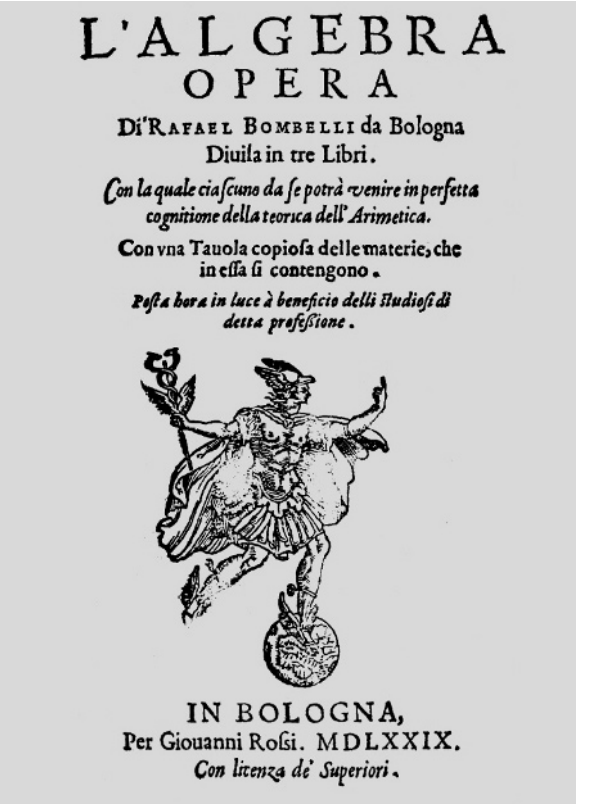

L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell' Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

Abb. 5.1.3. Titelblatt von „L'Algebra"
[Rafael Bombelli, Bologna 2. Aufl. 1579]

Es verdient herausgehoben zu werden, daß Bombelli in Rom Gelegenheit hatte, ein Manuskript von Diophant einzusehen. Man begann diesen Text zu übersetzen, doch blieb die Aufgabe zunächst unvollendet. Bombellis *„L'Algebra"* aber steht deutlich unter dem Einfluß der Denkweise von Diophant.

Im Vorwort von *„L'Algebra"* gibt Bombelli eine Art historischen, höchst lesenswerten Bericht zur Geschichte der Algebra:

„Ich habe mich entschieden, zuerst die meisten der Autoren zu betrachten, die bis jetzt darüber (Algebra, A.) geschrieben haben, so daß ich ausfüllen kann, was sie ausgelassen haben. Es sind sehr viele, und man glaubt, daß unter ihnen Mohammed ibn Musa, ein Araber, sicherlich der erste ist, und es gibt ein kleines Buch von ihm, aber nur von sehr geringem Wert. Ich glaube, daß das Wort „Algebra" von ihm stammt, denn vor einigen Jahren sagte Bruder Luca (Pacioli) vom Borgo San Sepolcro des Minoritenordens, als er es sich selbst zur Aufgabe gemacht hatte über diese Wissenschaft sowohl in Latein wie in Italienisch zu schreiben, daß das Wort „Algebra" arabisch sei und in unserer Sprache „Position" (Lage) bedeute, und daß die(se) Wissenschaft von den Arabern stamme. Viele, die nach ihm geschrieben haben, haben dies geglaubt und Ähnliches gesagt, aber in den letzten Jahren ist eine griechische Arbeit über diese Disziplin in der päpstlichen Bibliothek im Vatikan entdeckt worden, verfaßt von einem gewissen Diophantus von Alexandria, einem griechischen Autor, der zur Zeit des Antoninus Pius lebte. Als sie mir vom Meister Antonio Maria Pazzi aus Reggio, öffentlicher Dozent der Mathematik in Rom, gezeigt worden war und wir einen Autor um sein Urteil befragt hatten, der in Zahlen(theorie) sehr bewandert ist (obgleich er sich nicht mit irrationalen Zahlen befaßte, aber nur bei ihm begegnet man einer perfekten Arbeitsweise), da begannen er und ich sie (die Arbeit, A.) zu übersetzen, um die Welt mit einem solchen vollständigen Werk zu bereichern, und wir haben fünf (von sieben) Büchern übersetzt. Den Rest haben wir wegen der Schwierigkeiten, die jedem von uns begegneten, nicht zu Ende führen können. Wir haben festgestellt, daß er (Diophant, A.) in dieser Arbeit oft die indischen Autoren zitiert, und so ist uns klar geworden, daß es diese Disziplin vor den Arabern bei den Indern gab. Nach ihm (aber es war eine lange Zeit vergangen) schrieb Leonardo von Pisa in Lateinisch, aber nach ihm gab es keinen, der irgend etwas Brauchbares (dazu, A.) sagte, bis der oben erwähnte Bruder Luca (wenn er auch ein nachlässiger Schreiber war und deshalb einige Fehler machte) desungeachtet in der Tat der erste war, der Licht auf diese Wissenschaft warf, wenn es auch einige gibt, die sich selbst in Szene setzen und sich alle Ehre zurechnen, indem sie bösartig die wenigen Fehler des Bruders beklagen und nichts über sein gutes Werk sagen. Danach haben in unseren Zeiten sowohl Barbaren als auch Italiener (darüber, A.) geschrieben, so etwa Oroncio, Scribelio und Boglione, Franzosen; der Deutsche Johann Stifel, und ein gewisser Spanier[1]*, der weitschweifig in seiner eigenen Sprache schrieb. Aber gewiß war*

[1] Gemeint sind die Franzosen Oronce Fine und Jean Bond, die Deutschen Heinrich Schreyber, Michael Stifel und der Portugiese Pedro Nunes (nach E. Knobloch)

es kein anderer als Cardano von Mailand, der in das Geheimnis der Algebra in seiner Ars magna eindrang, wo er sehr viel über diese Wissenschaft sagte, aber in seiner Ausdruckweise dunkel blieb. Er behandelte sie ebenso in gewissen seiner Schriften, die er mit unserem Ludovico Ferrari aus Bologna gegen Nicolo Tartaglia aus Brescia verfaßte. Darin finden sich äußerst schöne und einfallsreiche Aufgaben dieser Wissenschaft, aber mit so wenig Bescheidenheit gegenüber Tartaglia (formuliert, A.) (dem es wie jenem zur Gewohnheit geworden war, Schlechtes zu sagen, und der dann glaubte, er habe sich zu einem ehrenwerten Weisen gemacht, wenn er jemandem Schlechtes nachgesagt hatte), daß er fast all die ehrenwerten Gelehrten beleidigte, die klar erkannt hatten, daß er (Tartaglia, A.) über Cardano und Ferrari Unsinn redete, die doch in unseren Tagen eher göttliche als menschliche Genies sind. Es gibt noch andere, die über diesen Gegenstand geschrieben haben, aber ich hätte genug zu tun, wollte ich sie alle nennen. Weil aber ihre Bücher von geringem Nutzen gewesen sind, will ich über sie hinweg gehen. Ich sage nur, daß auch ich, nachdem ich gesehen hatte, wieviel von diesem Gegenstand von den oben erwähnten Autoren behandelt worden ist, meinerseits die vorliegende Arbeit für das Gemeinwohl zusammengestellt habe, indem ich sie in drei Bücher aufgeteilt habe“ [Bombelli 1572, aus „A gli Lettori“ (Vorwort an die Leser), dt. Übers. Alten].

Auch Cardano war – wie geschildert – auf Quadratwurzeln aus negativen Zahlen gestoßen. Natürlich sah sich auch Bombelli mit diesem Problem konfrontiert. Anders aber als Cardano verstand er diese Ausdrücke als kubische Wurzeln: Gegen Ende des ersten Teils seiner Algebra schrieb er von *„einer anderen Art Kubikwurzel, sehr verschieden von der früheren, die aus dem Kapitel über den Kubus gleich dem Ding und der Zahl (Gleichung vom Typ $x^3 = ax + b$, Wg.) stammt; .... diese Art von Wurzel hat ihre eigenen Algorithmen für verschiedene Operationen und einen neuen Namen“*. [Katz 1993, S. 335; dt. Übers. A.]

Bombelli schlug einen eigenen Namen für diese Wurzeln vor, die weder positiv (piu) noch negativ (meno) sind. Er bezeichnete folgendermaßen: p. di m. (heißt piu di meno, plus von minus), so würde p. di m. 11 bedeuten $+\sqrt{-121}$. Und m.d.m. 11 (meno di meno 11) bedeutet $-\sqrt{-121}$.

An Hand von Beispielen gibt Bombelli – zum erstenmal in der Geschichte der Mathematik – Rechenregeln für imaginäre Größen an. Wir würden für die Multiplikationsregeln schreiben: $(+1)\,(i) = +i$, $(-1)\,(i) = -i$, $(+1)\,(-i) = -i$, $(-1)\,(-i) = +i$, $(+i)\,(+i) = -1$, $(+i)\,(-i) = +1$, $(-i)\,(-i) = -1$.

Es wäre eine lohnende Studie, die Entwicklung der algebraischen Symbolik und Begriffssprache im Detail zu verfolgen. Doch eine systematische Behandlung dieser komplizierten Entwicklung gehört in die Geschichte der Zahlentheorie.

Was die Symbolik betrifft, so ging man, allgemein gesprochen, von verbalen Texten nach und nach zur Verwendung von Symbolen über. Anfangs verwendete jeder Autor individuelle Zeichen; erst im 17. Jahrhundert setzte sich schrittweise eine einheitliche Symbolik durch.

Auch Bombelli stand in dieser Entwicklungslinie; seine Bezeichnungsweisen muten uns schon relativ modern an. Er schrieb R.q. (gemeint ist radix quadratum) für die Quadratwurzel und R.c. für die Kubikwurzel. Auch kennzeichnete er Zusammengehöriges durch eine Art von Klammer: ⌊ ⌋.

Beispielsweise steht R.c. $\lfloor 2p$ R.q. $21\rfloor$ für $\sqrt[3]{2+\sqrt{21}}$; dabei bedeuten p (piu) bzw. m (meno) Abkürzungen für $+$ und $-$. Auch für die Exponenten der Variablen führte Bombelli Bezeichnungen ein; der Potenzexponent wurde durch einen daruntergesetzten Halbkreis verdeutlicht, eine Schreibweise, die sich vorteilhaft von der Coß abhob [Katz 1993, S. 335].

5.2 Viète und Descartes

5.2.1 François Viète (Franciscus Vieta)

Mit dem wissenschaftlichen Werk von Vieta erreichte die Entwicklung der Algebra einen gewissen Grad des Abschlusses. Aufbauend auf Cardano, Stevin, auf die wiederentdeckte Schrift von Diophant, möglicherweise – dies ist umstritten – auch anknüpfend an Bombelli lag sein Hauptverdienst in der konsequenten Verwendung von Symbolen und Bezeichnungen. Damit bereitete Vieta unter anderem auch die Leistung von Descartes vor. Übrigens gehört die Entstehung einer symbolischen Algebra zu den Voraussetzungen für die Herausbildung der modernen Mathematik, einschließlich der Entwicklung der Infinitesimalmathematik.

Bis zu einem gewissen Grade kann man feststellen, daß mit Vieta die Algebra zu einer zweiten selbständigen mathematischen Disziplin geworden ist, neben der Geometrie. Noch bis gegen Ende des 16. Jahrhunderts bestand „Algebra“ in einer Sammlung von Regeln zum Auflösen von Gleichungen. Nun, mit einer ausgebildeten Symbolik, wird algebraisches Denken in Sätzen und mit algebraisch geführten Beweisen zu einem sich nach eigenen Problemstellungen entwickelnden Wissenszweig. Und bei Descartes wird man sehen, daß und wie die Geometrie sozusagen algebraisiert wird.

François Viète (latinisiert Vieta), geboren 1540 in Fontenay-le-Comte als Sohn eines Juristen, studierte seinerseits Jura in Poitiers und betrieb in Fontenay eine erfolgreiche Anwaltspraxis, ehe er sich 1564 in die Dienste von Antoinette und Jean de Partenay begab. Zugleich unterrichtete er die wißbegierige, sich für Astronomie und Mathematik interessierende damals elfjährige Tochter Catherine. Bemerkenswerterweise lenkte ihn das Interesse seiner Schülerin selbst auf die Beschäftigung mit Astronomie und Mathematik.

1566 siedelte Vieta nach La Rochelle über und kam, obwohl selbst Katholik, in Berührung mit kalvinistischen Kreisen, und das in dem vor erbitterten Glaubensauseinandersetzungen stehenden Frankreich. Unter anderem machte Vieta die Bekanntschaft von Heinrich von Navarra, der später, durch Übertritt zum Katholizismus, als Heinrich IV. König von Frankreich wurde. „Paris ist eine Messe wert“ ist sein bekanntester Ausspruch.

1571 ging Vieta als „avocat au Parlement“ nach Paris und kam dort in Kontakt mit einigen Mathematikern, u. a. mit Petrus Ramus(1515–1572). Dort erlebte Vieta 1572 auch die schreckliche sog. Bartholomäusnacht, das Massaker der Katholiken an den Protestanten. Auch Petrus Ramus fiel ihm zum Opfer. Vieta wechselte mehrfach seinen Aufenthaltsort; Intrigen bewirkten sogar, daß ihm von 1584 bis 1589 der Aufenthalt am Hofe in Paris untersagt wurde. Er nutzte die Zeit zu gründlichen wissenschaftlichen Studien.

Als König Heinrich III. seinen Hof nach Tours verlegte, wurde Vieta nach Tours berufen und diente dem König, indem er gegnerische Korrespondenzen entzifferte. Nach der Ermordung von Heinrich III. (1589) trat Vieta, mit juristischen Aufgaben und wiederum mit der Entzifferung feindlicher Nachrichten betraut, in die Dienste von Heinrich IV. und lebte in Paris. Aus gesundheitlichen Gründen gab Vieta seine Verpflichtungen auf und starb 1603 in Paris.

Die algebraischen Schriften von Vieta.

Vieta hat ein umfangreiches mathematisches Opus hinterlassen. Ein Teil davon konnte erst postum zum Druck gelangen oder ist sogar Manuskript geblieben. Auf ihn geht u. a. zurück ein *Canon mathematicus...* (seit 1571) mit Tabellen aller sechs trigonometrischen Funktionen, mit einer Darlegung der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Einzelleistungen umfassen u. a. eine Näherungskonstruktion für das regelmäßige Siebeneck, Studien zu unendlichen geometrischen Reihen, Widerlegungen angeblicher Kreisquadraturen und die geometrische Behandlung des casus irreducibilis. Der später nach de Moivre benannte Satz dürfte Vieta bekannt gewesen sein. Doch war Vieta ein Gegner des Copernicanischen Weltsystems und der Gregorianischen Kalenderreform.

Was die Algebra betrifft, so sind insbesondere folgende Werke hervorzuheben (vgl. dazu die Auflistung bei [Reich/Gericke 1973, S. 12-20]):

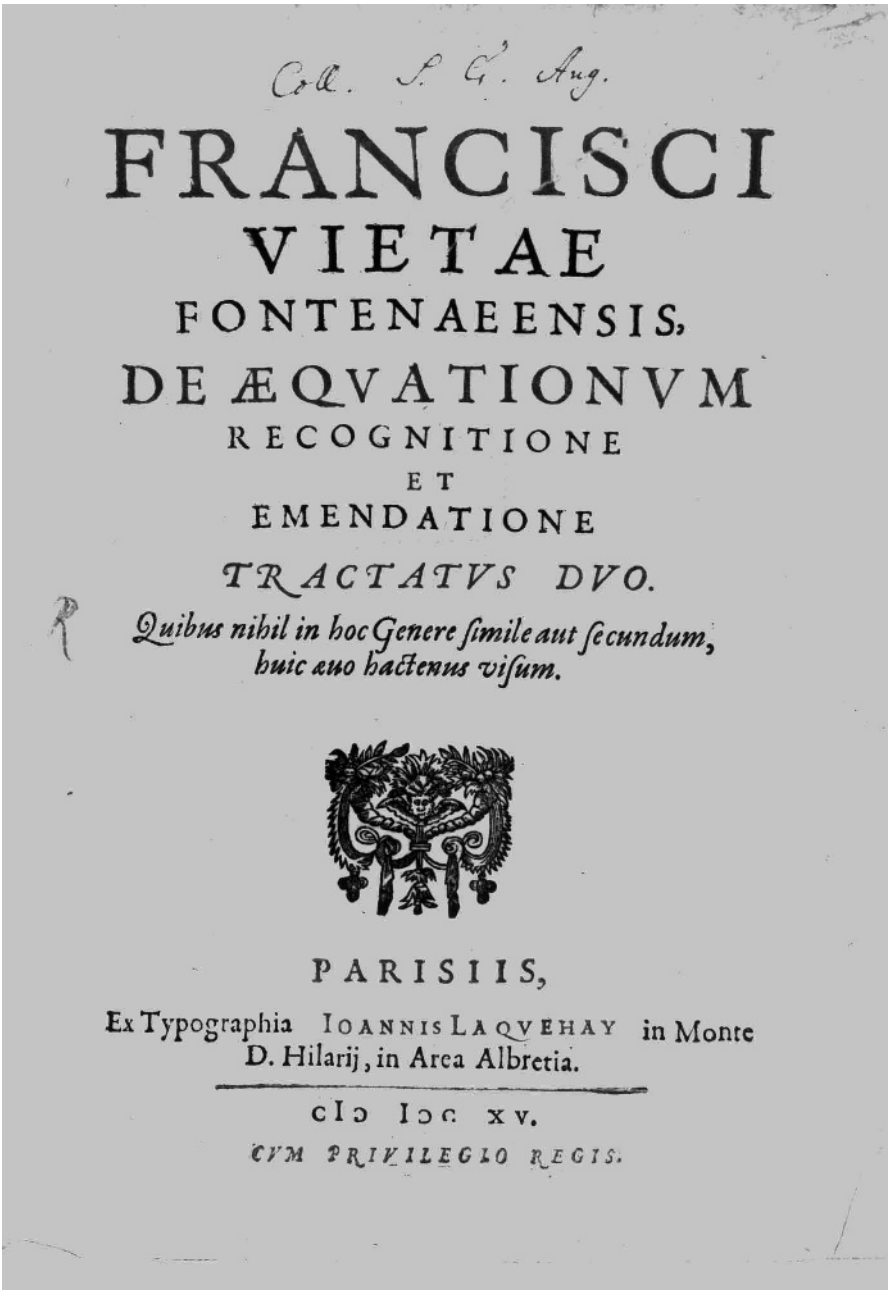
(1) *In artem analyticem Isagoge,* 1591

(2) *Zeteticorum libri quinque*, 1593

(3) *De aequationum recognitione et emendatione Tractatus duo,* postum 1615

(4) *Ad logisticem Speciosam Notae priores*, postum 1631.

Die Titel einiger dieser Arbeiten sind schwer sinngemäß zu übersetzen, da der Sprachgebrauch mancher Worte – z. B. „Analysis“ – beträchtlich vom heutigen abweicht. Wörtlich übersetzt heißt *„In artem analyticem Isagoge“* soviel wie „Einführung in die analytische Kunst“. Inhaltlich handelt sich um Einführung und Begründung des algebraischen Rechnens, der Buchstabenrechnung. Es ist also angemessen, wie es K. Reich und H. Gericke tun, den Titel zu wählen *„Einführung in die Algebra“.* Und aus dem zweiten Titel – „Erste Bemerkungen zu einer prächtigen Rechenkunst“ – wird *„Formeln für das algebraische Rechnen“.* Bei den *Zetetica* – nach dem griechischen zēteō,


Coll. S. C. Aug.

FRANCISCI
VIETAE
FONTENAEENSIS,
DE ÆQVATIONVM
RECOGNITIONE
ET
EMENDATIONE
TRACTATVS DVO.

Quibus nihil in hoc Genere ſimile aut ſecundum, huic ævo hactenus viſum.

PARISIIS,
Ex Typographia IOANNIS LAQVEHAY in Monte D. Hilarij, in Area Albretia.

cIↃ IↃↃ XV.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Abb. 5.2.4. Titelblatt des Buches „De aequationum recognitione et emendatione Tractatus duo“
[Franciscus Vieta, Paris 1615, Bayrische Staatsbibliothek München]

CAPVT XIV.

Collectio quarta.

THEOREMA I.

SI B+D in A—A quad., æquetur B in D: A explicabilis est de qualibet illarum duarum B vel D.

3N—1Q, *æquetur* 2. *fit* 1 N 1, *vel* 2.

THEOREMA II.

Si A cubus —B—D—G in A quad. + B in D + B in G + D in G in A, æquetur B in D in G: A explicabilis est de qualibet illarum trium B, D, vel G.

1C—6Q+11N, *æquatur* 6. *Fit* 1 N 1, 2, *vel* 3.

THEOREMA III.

Si B in D in G + B in D in H + B in G in H + D in G in H in A —B in D —B in G —B in H —D in G —D in H —G in H in A quad. + B + D + G + H in A cubum —A quad.quad., æquetur B in D in G in H: A explicabilis est de qualibet illarum quatuor B, D, G H.

50N—35Q+10C—1Q.Q. *æquatur* 24. *fit* 1N 1, 2, 3, *vel* 4.

THEOREMA IV.

Si A quadrato-cubus —B—D—G—H—K in A quad. quad. + B in D + B in G + B in H + B in K + D in G + D in H + D in K + G in H + G in K + H in K in A cubum —B in D in G —B in D in H —B in D in K — B in G in H —B in G in K —B in H in K —D in G in H —D in G in K — D in H in K — G in H in K in A quad. + B in D in G in H + B in D in G in K + B in D in H in K + B in G in H in K + D in G in H in K in A, æquetur B in D in G in H in K: A explicabilis est de qualibet illarum quinque B, D, G, H, K.

1QC—15QQ+85C—225Q+274N, *æquatur* 120. *Fit* 1 N 1, 2, 3, 4, *vel* 5.

Atque hæc elegans & perpulchræ speculationis sylloge, tractatui alioquin effuso, finem aliquem & Coronida tandem imponito.

FINIS.

Abb. 5.2.5. Der Wurzelsatz von Vieta aus „De aequationum recognitione et emendatione Tractatus duo“
[Franciscus Vieta, Paris 1615]

suchen – handelt es sich um fünf Bücher mit Aufgaben, die mit Hilfe der Buchstabenrechnung gelöst werden.

Die *„Isagoge“* beginnt mit einer großmächtigen Ankündigung dessen, was er leisten will, und das in der Widmung an Catherine de Partenay. Dort heißt es u. a.: *„Unermeßlich sind die Wohltaten, die Ihr mir in Zeiten größten Unglücks erwiesen habt. Überhaupt verdanke ich Euch mein ganzes Leben, ... insbesondere aber verdanke ich Euch ... das Studium der Mathematik, zu dem mich Eure Liebe zu diesem Gegenstand und die großen Kenntnisse, die Ihr in diesem Fach besitzt, angeregt haben, ...*

Verehrungswürdigste Fürstin, was neu ist, pflegt anfangs roh und unförmig vorgelegt zu werden und muß dann in den folgenden Jahrhunderten geglättet und vervollkommnet werden. So ist auch die Kunst, die ich nun vortrage, eine neue oder doch auch wieder eine so alte und von Barbaren verunstaltete, daß ich es für notwendig hielt, alle ihre Scheinbeweise zu beseitigen, damit auch nicht die geringste Unreinheit an ihr zurückbleibe und damit sie nicht nach dem alten Moder rieche, und ihr eine vollkommen neue Form zu geben, sowie auch neue Bezeichnungen zu erfinden und einzuführen. Da man allerdings bisher an diese zu wenig gewöhnt ist, wird es kaum ausbleiben, daß viele schon von vorneherein abgeschreckt werden und Anstoß nehmen. Zwar stimmten alle Mathematiker darin überein, daß in ihrer Algebra oder Almucabala, die sie priesen und eine große Kunst nannten, unvergleichliches Gold verborgen sei, aber gefunden haben sie es nicht. So gelobten sie Hekatomben und rüsteten zu Opfern für Apollo und die Musen für den Fall, daß einer auch nur das eine oder andere der Probleme lösen würde, von deren Art ich zehn oder zwanzig ohne weiteres darlege, da es meine Kunst erlaubt, die Lösungen aller mathematischen Probleme mit größter Sicherheit zu finden.

So sei es mir gestattet, mit wenigen Worten die Waren ... zu empfehlen und meinem Wunsch Ausdruck zu verleihen, daß Eurem fördernden Mitwirken der ihm aus dieser Sache zustehende Ruhm – sofern das Werk wirklich einen solchen verdient – nicht vorenthalten werde.

Denn im Gegensatz zu anderen Disziplinen sind in der Mathematik die Meinung des einzelnen und auch das Urteil nicht frei. Hier wird mit Griffel und Staub gearbeitet, hier nützen keine Überredungskünste von Rhetoren und keine Winkelzüge der Advokaten. Das Metall, das ich hier vorlege, zeigt den Glanz des Goldes, das man solange ersehnt hat. Dieses Gold ist nun entweder Alchemistengold und trügerisch oder aus der Erde gewonnenes, echtes. Wenn es Alchemistengold ist, dann freilich dürfte es sich in Rauch auflösen, etwa bei der Königsprobe. Ist es jedoch echtes Gold, und das ist es in der Tat – denn ich bin ja kein Scharlatan – so will ich doch jene Leute nicht des Betruges zeihen, die keine Mühe scheuten, um es herauszuholen aus vorher nie betretenen Gruben, deren Zugang durch feuerspeiende Drachen und anderes böses und todbringendes Gewürm bewacht und verwehrt war. Ich erwarte und fordere aber mit Recht, daß sie wenigstens ihren Einfluß, den ich für gut halte, geltend machen gegen die Unwissenheit und Schnödigkeit von Leuten, die andere gerne schlecht machen und das Lob anderer schmälern.“ [Reich/Gericke, S. 34/35]

Vieta behielt Recht mit seiner Befürchtung: Die fremdartige, überreichlich mit Kunstworten operierende Terminologie, die zudem noch bekannten Begriffen andere Begriffsinhalte zuordnete, erschwerte die Adaption seines Werkes beträchtlich. Zitieren wir beispielsweise aus dem Kapitel I der *„Isagoge“* (man muß sehr aufmerksam lesen!):

„Über die Definition und Einteilung der Analysis und über die Hilfsmittel der Zetesis.

Es gibt in der Mathematik einen Weg zum Aufsuchen der Wahrheit, den Plato als erster gefunden haben soll und der von Theon Analysis genannt und von ihm definiert worden ist, nämlich die Annahme des Gesuchten als bekannt < und der Weg von dort > durch Folgerungen zu etwas als wahr Bekannten. Die Synthesis dagegen ist die Annahme des Bekannten < und der Weg von dort > durch Folgerungen zur Vollendung und Erfassung des gesuchten. Während aber die Alten nur eine zweifache Analysis behandelt haben, die Zetetike und Poristike, auf die sich die Definition Theons hauptsächlich erstreckt, habe ich noch eine dritte Art eingeführt, welche Rhetike oder Exegetike genannt werde. Es ist bekannt, daß die Zetetike diejenige < Analysis > ist, durch welche die Richtigkeit eines aufgestellten Satzes über eine Gleichung oder Proportion nachgeprüft wird, die Exegetike diejenige, durch welche aus der aufgestellten Gleichung oder Proportion die gesuchte Größe selbst ermittelt wird. Und so mag die ganze analytische Kunst, die sich jene dreifache Aufgabe zuschreibt, definiert werden als die Lehre des geschickten Findens (Doctrina bene inveniendi) in der Mathematik. Die Zetesis kommt zustande durch die Kunst der Logik mittels Syllogismen und Enthymemen (verkürzte Syllogismen), *deren Grundlage die Grundgesetze sind, aus denen die Gleichungen und Proportionen erschlossen werden, und die ihrerseits sowohl aus Axiomen abgeleitet werden, als auch aus Sätzen, die durch die Kraft der Analysis selbst aufzustellen sind. Die Art und Weise, an die Zetesis heranzugehen, ist eine eigene Kunst, die das Rechnen nicht mehr in Zahlen ausübt, was für die alten Analytiker ein Hemmschuh gewesen ist, sondern durch die neu einzuführende Logistica speciosa, welche zum Vergleich von Größen untereinander viel günstiger und wirkungsvoller ist als die Logistica numerosa, wobei zuerst das Gesetz für die homogenen Größen zugrunde gelegt und von da aus festgelegt wird, was zu tun ist beim Gebrauch von Größen, die ihrer Dimension nach (ex genere ad genus) auf- oder absteigen in der Reihenfolge oder Skala, nach der die Grade ihrer Potenzen oder ihre Dimensionen bei Vergleichen bezeichnet und unterschieden werden.“* [Reich/Gericke, S. 37/38]

Bei aller Kompliziertheit tritt der entscheidende Grundgedanke – mit der Unterscheidung zwischen Logistica speciosa und Logistica numerosa – schon zutage. Eine weitere Präzisierung erfolgt zu Beginn von Kapitel IV:

„Über die Vorschriften der Logistica speciosa.

Die Logistica numerosa ist die, die durch Zahlen, die Logistica speciosa die, die durch die species oder formae rerum ausgeführt wird, z. B. mit Hilfe der Elemente des Alphabets.“ [Reich/Gericke, S. 44]

Die echte Neuerung ist angekündigt: die durchgängige Verwendung von Buchstaben. Die Differenzierung zwischen bekannten und gesuchten Größen wird festgelegt.

„Damit die Arbeit (Durchführung der Zetesis, Wg) *durch ein schematisch anzuwendendes Verfahren unterstützt wird, mögen die gegebenen Größen von den gesuchten unbekannten unterschieden werden durch eine feste und immer gleichbleibende und einprägsame Bezeichnungsweise, wie etwa dadurch, daß*

man die gesuchten Größen mit dem Buchstaben A oder einem anderen Vokal E, I, O, U, Y, die gegebenen mit den Buchstaben B, G, D oder anderen Konsonanten bezeichnet.“ [Reich/Gericke, S. 52]

Das ist die entscheidende Stelle. Nun ist es möglich, nicht nur Regeln (z. B. zum Auflösen von Gleichungen) oder Beispiele anzugeben, sondern allgemeine Formeln. Die Symbole können Zahlen bedeuten, aber auch andere Größen, z. B. Strecken oder Winkel. Vieta verwendete durchgängig (wie in Deutschland) die Zeichen + und −, noch nicht aber das von Recorde eingeführte Gleichheitszeichen =. Statt dessen beschrieb er die Gleichheit von Ausdrücken verbal mit den Worten *aequabitur* oder *aequale*. Er gebrauchte den Bruchstrich, verwendete aber, gemäß alter Tradition, das Wörtchen *in* für die Multiplikation. Zusammengehörige Terme schrieb er untereinander und verband sie mittels geschweifter Klammern. Beispielsweise würde Vieta den Ausdruck

$$\frac{BA}{D} + \frac{BA - BH}{F} = B \text{ in der Form } \frac{B \text{ in } A}{D} + \left\{ \begin{array}{c} B \, in \, A \\ \hline -B \, in \, H \\ \hline F \end{array} \right\} \text{ aequale } B$$

geschrieben haben. Auch die algebraische Umformtechnik hat Vieta weit entwickelt: Auflösen, Abspalten von Faktoren, Verwandlung unbestimmter Ausdrücke in vollständige Quadrate, Transformation von Gleichungen durch neu eingeführte Variable, Rationalmachen der Nenner und anderes mehr werden virtuos gehandhabt. Doch sind negative Größen nicht zugelassen.

Aus der Fülle der von Vieta behandelten Beispiele und Methoden sei wenigstens eine Kostprobe angegeben, allerdings in einer der heutigen Schreibweise angepaßten Form; die Vokale bedeuten, wie gesagt, Variable bzw. gesuchte Größen:

$$A^n + A^{n-1}B + A^{n-2}C^2 + ... + AF^{n-1} = G^n \quad .$$

Noch in der *„Isagoge“* behandelt Vieta die Herstellung der Normalform von (algebraischen) Gleichungen. Aus Gründen der Homogenität treten auch die Koeffizienten in Potenzen auf. Um die Normalform herzustellen, kann man drei Verfahren verwenden:

Antithesis (Größen wechseln mit umgekehrtem Vorzeichen die Seiten),

Hypobibasmus (Herabdrücken der Dimension durch Division; z. B. wird aus $A^3 + BA^2 = Z^2A$ der Ausdruck $A^2 + BA = Z^2$ für $A \neq 0$),

Parabolismus (Befreiung vom Koeffizienten des höchsten Gliedes; z. B. $BA^2 + D^2A = Z^3$ geht über in $A^2 + \frac{D^2}{B}A = \frac{Z^3}{B}$ für $B \neq 0$).

Schließlich beweist Vieta, daß – modern gesprochen – diese Umformungen äquivalente Gleichungen liefern.

Nach den theoretischen Überlegungen Vietas in der *„Isagoge“*, die hier nur verkürzt wiedergegeben werden konnten, publizierte er 1593 (zwei Jahre nach

der *„Isagoge“*) die Aufgabensammlung *„Zeteticorum libri quinque“*. Viele der Aufgaben schließen an Diophant an; Vieta kann aber mit seiner Bezeichnungsweise die Überlegenheit demonstrieren. (Vgl. die zusammenfassende Gegenüberstellung der Aufgaben bei Vieta, Diophant und Bombelli [Reich/Gericke, S. 93-96]. Dabei hat sich gezeigt, daß Vieta einen Zugang zu Diophant über Bombelli und einen weiteren Text gehabt haben muß.)

Beispiele:

[Zetetica, Buch I, Aufgabe 1] Gegeben die Differenz zweier Seiten und deren Summe. Gesucht sind die Seiten. Bezeichne B die Differenz, D die Summe und A die kleinere Seite. Dann ist $2A + B = D$. Mittels Antithesis erhält man $2A = D - B$, also ist $A = \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}B$. Für die größere Seite E erhält man $E = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}B$.

Diophant hatte die Aufgabe ebenfalls abstrakt formuliert: Eine gegebene Zahl in zwei Teile zu teilen, deren Differenz gegeben ist. Jedoch rechnete Diophant, wie stets, die Aufgabe nur mit vorgegebenen Zahlen durch; in diesem Falle mit 100 als gegebener Zahl und der Differenz 40.

Im Unterschied zu Diophant formuliert Vieta eine Existenzaussage: *„Wenn also die Differenz zweier Seiten und deren Summe gegeben sind, dann können die Seiten gefunden werden. Denn, die halbe Summe minus der halben Differenz der Seiten ist gleich der kleineren Seite, plus derselben, gleich der größeren Seite. Das ist es, was die Zetesis zeigt.“* [Reich/Gericke s.o., S. 98]

Das zweite Buch der *„Zetetica“* behandelt quadratische, das dritte kubische Probleme.

Buch 2. Aufgabe 13: Wenn die Summe zweier Quadrate und ihre Differenz gegeben ist, die Seiten zu finden.

Buch 3. Aufgabe 5: Wenn die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks und die Differenz der Katheten gegeben ist, die Seiten zu finden.

Buch 3, Aufgabe 19, von Vieta selbst als *bemerkenswert* bezeichnet: Sei die Differerenz der Kuben und das Rechteck (d. h. ihr Produkt)gegeben; gesucht ist die Differenz der Seiten. Die Aufgabe führt auf die kubische Gleichung $x - y^3 + 3xy(x - y) = x^3 - y^3$, die Vieta in Aufgabe 15 schon algebraisch behandelt hatte, nach dem von Tartaglia, Cardano und Scipione del Ferro gewiesenen, aber geometrisch bewiesenem Weg.

„De recognitione...“ (Untersuchung) hatte Vieta nicht mehr vollenden können. Der Text behandelt die Theorie der Gleichungen. Unter anderem geht es um die Zusammenhänge zwischen mittleren Proportionalen und quadratischen Gleichungen, um den Zusammenhang zwischen vier stetigen Proportionalen und kubischen Gleichungen. Es folgen, unter dem Titel *„emendatio“* (Verbesserung), Methoden der Umformung von Gleichungen, unter anderem die Beseitigung des zweithöchsten Gliedes und eine Transformation, um negative Gleichungskoeffizienten in positive zu verwandeln.

Hier findet sich auch der nach Vieta benannte Wurzelsatz, also die Konstruktion von Gleichungen mit Hilfe ihrer Lösungen und zwar für die Grade 2 bis 5. Beispielsweise heißt es für quadratische Gleichungen:

Wenn $(B + D)\,A - A^2 = BD$ (quadratische Gleichung in A), so sind B und D die beiden Lösungen.

Und für kubische Gleichungen heißt es:

Wenn $A^3 - (B + D + G)\,A^2 + (BD + BG + DG)\,A = BDG$, so sind B, D, G Lösungen.

5.2.2 René Descartes (Cartesius)

Durch das Wirken von René Descartes erhielten Algebra und algebraisches Denken eine wiederum signifikant stärkere Stellung in der Mathematik, die weit in die Zukunft wirkte. Descartes brachte Geometrie und Algebra in einen inneren Zusammenhang; bis zu einem gewissen Grade beruht die analytische Geometrie auf einer Verschmelzung beider Disziplinen.

Neben Descartes darf Pierre Fermat als Begründer der analytischen Geometrie gelten. Fermat übernahm die Bezeichnungen von Vieta für bekannte und unbekannte Größen, hat aber kaum im eigentlichen Sinne zur Entwicklung der Algebra beigetragen. Doch konnte er einen exakten Beweis liefern, daß jede Gleichung zweiten Grades in zwei Variablen einen Kegelschnitt darstellt.

Descartes wurde 1596 in La Haye (Touraine) geboren. Er war 32 Jahre jünger als Galilei und 46 bzw. 50 Jahre älter als Newton bzw. Leibniz. Descartes gehört also zu der mittleren Generation zwischen den Initiatoren und den Vollendern der sog. Wissenschaftlichen Revolution [Wußing 2002], in deren Gefolge sich die moderne Naturwissenschaft und die neuzeitliche Mathematik der Variablen herausbildeten. Descartes nahm in diesem Prozeß eine zentrale Stellung ein, als Mathematiker, als Naturforscher mit seinen Beiträgen zu Optik und Mechanik und als Schöpfer eines universellen Weltbildes, das getragen war von einer auf Vernunft gegründeten Philosophie.

Descartes stammt aus einer Amtsadelfamilie; der Vater war Parlamentsrat in Rennes. Der junge Descartes gelangte von 1604 bis 1612 an das Jesuitenkolleg in La Flèche, das eine vorzügliche, umfassende Ausbildung vermittelte, auch in moderner Naturwissenschaft und Mathematik. Trotz eines Studiums der Rechtswissenschaft schlug er eine juristische Laufbahn aus und stand statt dessen – von 1617 bis 1621 – im Militärdienst und nahm als eine Art Beobachter an einigen Feldzügen des Dreißigjährigen Krieges teil. Dabei benutzte er sich bietende Gelegenheiten, um mit bedeutenden Wissenschaftlern in Kontakt zu treten, u. a. mit Stevin und möglicherweise mit dem deutschen Mathematiker Johannes Faulhaber (1580–1635).

Descartes war zeitlebens scheu und zurückhaltend und liebte ein zurückgezogenes Leben. Einer seiner Wahlsprüche lautete: *„Bene vixit, qui bene latuit“* (Gut hat gelebt, wer sich gut verborgen gehalten hat). So nahm Descartes nach einem Aufenthalt in Paris, der ihn in Berührung zu einem sich um Marin Mersenne (1588–1648) formierenden Kreis französischer Naturforscher gebracht hatte, schließlich 1628/29 seinen Aufenthalt in den republikanischen



Abb. 5.2.6. Innenhof des königlichen Schlosses in Stockholm [Foto Alten]

Niederlanden, in der Erwartung, dort größere Gedankenfreiheit zu finden als in dem royalistischen, von Glaubenskämpfen zerissenen Frankreich. Ihm schwebte eine umfassende Beschreibung des Universums unter dem Titel *„Le monde“* (Die Welt) vor, die die Bildung der Himmelskörper und der Erde, die Entstehung des tierischen und menschlichen Körpers und schließlich sogar das Wechselspiel zwischen Körper und Denken erklären sollte.

Anfang der dreißiger Jahre wurde auch in den Niederlanden die Verurteilung (1633) von Galilei bekannt; an der Universität Lüttich wurde die Erörterung der copernicanischen Lehre untersagt. Daraufhin hielt Descartes die Veröffentlichung von *„Le monde“* zurück. Er entschloß sich lediglich zur – anonymen – Publikation eines relativ ungefährlichen Teiles, einer Methodenlehre, unter dem Titel *„Discours de la méthode“* (1637) (Abhandlung von der Methode). Aber selbst der *„Discours“* brachte Descartes in ernsthafte Schwierigkeiten. Ein Professorenkolloquium in Utrecht verwarf 1642 seine Philosophie als im Widerspruch zur offiziellen Theologie stehend. Die Schriften von Descartes wurden 1663 sogar auf den päpstlichen Index der verbotenen Schriften gesetzt.

Schließlich folgte Descartes einer Einladung der schwedischen Königin Christine an den Hof nach Stockholm, um die gebildete Herrscherin in Philosophie zu unterweisen und in Stockholm eine Akademie zu gründen. Im Oktober 1649 traf Descartes in Stockholm ein. Seine Pflichten waren beschwerlich: Um fünf Uhr morgens hatte er sich zum Unterricht bei der Königin einzufinden, und das im strengen skandinavischen Winter. Descartes zog sich eine Lungenentzündung zu und verstarb am 11. Februar 1650.

5.2.3 Die algebraischen Methoden von Descartes

Der *„Discours“* gehört zu den Marksteinen in der Herausbildung der modernen Naturwissenschaft und Mathematik, sowohl im allgemeinen als auch im speziellen. So verdient es hervorgehoben zu werden, daß bei Descartes der Begriff des „Gesetzes“ erstmals klar im Sinne des naturwissenschaftlichen Gesetzes verwendet wird; bisher hatte er sich lediglich auf religiöse oder juristische Zusammenhänge bezogen.

Der *„Discours“* enthält drei Anhänge; gedacht als Probe auf seine philosophische Methode, einen über Meteore und Himmelserscheinungen im allgemeinen, einen über Dioptrik und einen dritten über Geometrie. Der dritte Anhang ist für die Geschichte der Mathematik von außerordentlicher Bedeutung, und zwar für die Entstehung der analytischen Geometrie und die Fortentwicklung der Geometrie. Seine Beiträge zur analytischen Geometrie sollen jedoch hier nicht betrachtet werden, wie überhaupt die Geschichte der analytischen Geometrie hier nicht weiter verfolgt wird (vgl. [Scriba/Schreiber 2000, S. 303ff.]).

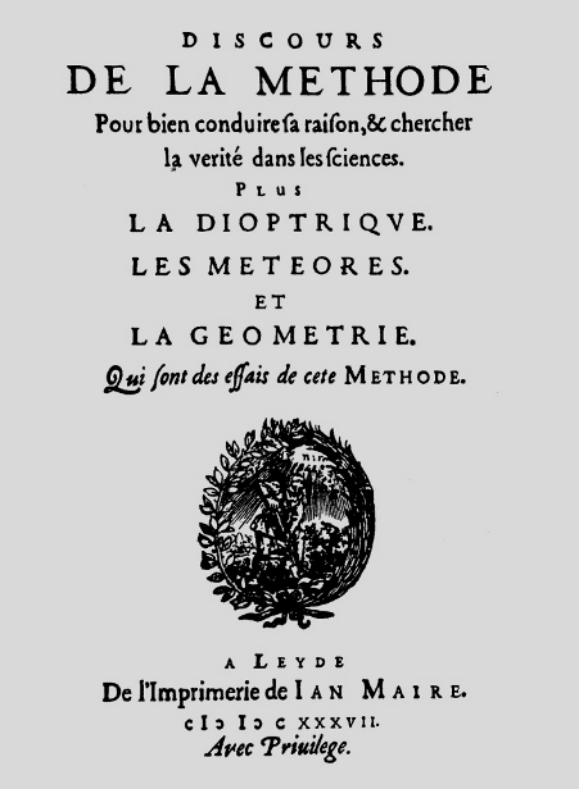

DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon,& chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ C XXXVII.
Avec Priuilege.

Abb. 5.2.7. Titelblatt des „Discours de la méthode“ [René Descartes 1637]

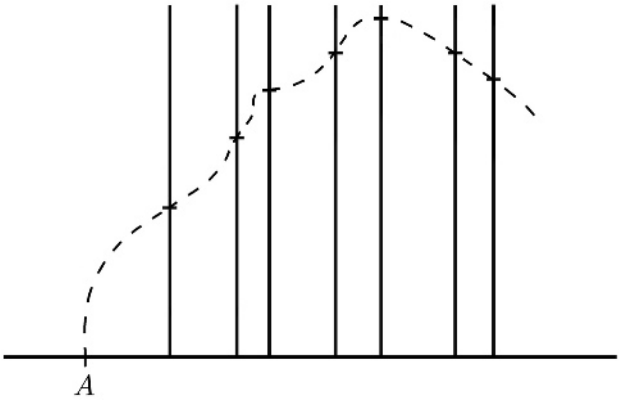


Abb. 5.2.8. Zur Grundvorstellung der analytischen Geometrie von Descartes

Auch die mathematische Leistung von Descartes entsprang seiner rationalistischen Philosophie. Es ging um klare Begriffe, um scharfe Definitionen und um einprägsame Bezeichnungen. So ist es verständlich, daß er sich des neuen Werkzeuges der symbolischen Algebra bediente, das größere Klarheit und mehr Sicherheit beim Gebrauch von Begriffen und bei Rechnungen ermöglichte. Descartes wurde seinerseits Wegbereiter mathematischer Symbolik. Auf ihn geht die Gepflogenheit zurück, die Variablen mit den letzten Buchstaben des Alphabets – x, y, z – zu bezeichnen. Er verwendete durchgehend die Zeichen + und −, die heutige Potenzschreibweise und das Quadratwurzelzeichen, allerdings ohne den Querstrich. Doch fehlt bei ihm noch das heutige, auf Recorde zurückgehende Gleichheitszeichen =. Statt dessen verwendete er ein komplizierteres Symbol für *aequatur*.

Die Grundvorstellung der analytischen Geometrie bei Descartes ist noch relativ einfach. Eine Schar paralleler, nicht notwendig äquidistanter Geraden schneidet auf einer Geraden, die nicht parallel zu denen der Schar liegt, Strecken ab, die von einem Anfangspunkt A an gemessen werden (Abb. 5.2.9). Auf jeder der Parallelen der Schar liegt eine Strecke; ein Endpunkt befindet sich auf der ausgezeichneten Geraden. Wenn nun eine von Scharparalle zu Scharparallele sich nicht ändernde Beziehung zwischen den von A aus gemessenen Strecken und den Strecken auf den Parallelen besteht, dann hat man in dieser Beziehung eine Gleichung einer Kurve. Die Wortverbindung „Gleichung einer Kurve“ tritt bei Descartes allerdings nur einmal auf.

Descartes verfolgte das Ziel, eine geometrische Basis für die Lösung algebraischer Probleme zu errichten. Er schrieb: *„Alle Probleme der Geometrie können leicht auf einen solchen Ausdruck gebracht werden, daß es nachher nur der Kenntnis der Länge gewisser gerader Linien bedarf, um dieselbe zu construiren. Und gleichwie sich die gesammte Arithmetik nur aus vier oder fünf Operationen zusammensetzt, nämlich aus den Operationen der Addition, der Subtraction, der Multiplication, der Division und des Ausziehens von*

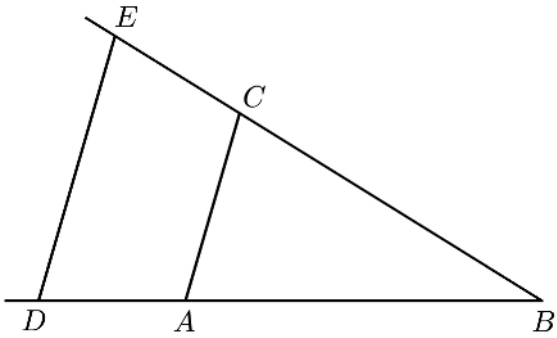


Abb. 5.2.9. Multiplikation von Strecken nach Descartes

Wurzeln, welches ja auch als eine Art von Division angesehen werden kann: so hat man auch in der Geometrie, um die gesuchten Linien so umzuformen, daß sie auf Bekanntes führen, nichts Anderes zu thun, als andere Linien ihnen hinzuzufügen oder von ihnen abzuziehen, oder aber, wenn eine solche gegeben ist, die ich, um sie mit den Zahlen in nähere Beziehung zu bringen, die Einheit nennen werde, und die gewöhnlich ganz nach Belieben genommen werden kann, und man hat noch zwei andere, eine vierte Linie zu finden, welche sich zu einer dieser beiden verhält, wie die andere zur Einheit, was daßelbe ist, wie die Multiplication;... Und ich werde mich nicht scheuen, diese der Arithmetik entnommenen Ausdrücke in die Geometrie einzuführen, um mich dadurch verständlicher zu machen“ [Descartes 1894, Geometrie, S.1]

Nehmen wir das Beispiel der Multiplikation.

„Es sei zum Beispiel AB die Einheit und es wäre BD mit BC zu multipliciren, so habe ich nur die Punkte A und C zu verbinden, dann DE parallel mit CA zu ziehen und BE ist das Product der Multiplication“. [Descartes 1894, Geometrie, S. 2], (Abb. 5.2.10).

Diese Passage klingt harmlos, enthält aber doch einen wesentlichen Fortschritt: Unter den mit Buchstaben bezeichneten Strecken AB, BD, usw. werden nicht nur die geometrischen Strecken, sondern zugleich die den Strecken (unter Zugrundelegung einer Einheit) entsprechenden Zahlenwerte verstanden.

Descartes beschreibt auch, wie man die Quadratwurzel aus einer Strecke ziehen kann.

Gegeben die Strecke GH, gesucht ist $\sqrt{GH}$. Man verlängere HG über G hinaus um die Einheit GF. Dann wird der Kreisbogen über FH mit dem Mittelpunkt K von FH geschlagen. Die Höhe GJ ist dann die gesuchte Wurzel aus GH (Abb. 5.2.11). – Descartes gibt keinen Beweis; er ergibt sich aus dem Höhensatz – Descartes verzichtet an dieser Stelle auf die Behandlung von Kubik- und höheren Wurzeln.

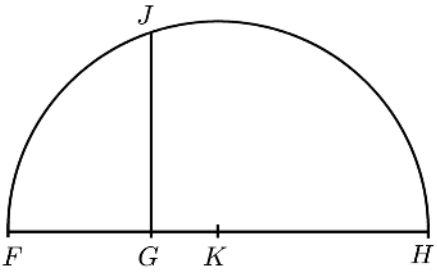


Abb. 5.2.10. Konstruktion der Quadratwurzel nach Descartes

In diesem Sinne ist beispielsweise die geometrische Konstruktion der Multiplikation von Strecken gleichwertig mit dem Produkt zweier Zahlenwerte. Mehr noch: Ausdrücke wie a^2, a^3 usw. stellen eine Zahl dar und bedeuten nicht nur Flächen- bzw. Rauminhalte. Somit befreite sich Descartes – ähnlich wie zuvor Vieta – vom hemmenden Prinzip der Dimensionstreue. Nach klassischer Auffassung wäre etwa der Ausdruck $\sqrt[3]{a - bc^5}$ ganz sinnleer: Dritte Wurzeln kann man nur (als Bestimmung der Kantenlänge eines Würfels) aus Ausdrücken der Dimension 3 ziehen. Jetzt handelt es sich jedoch um das Wurzelziehen aus einer Zahl, die nicht notwendig eine geometrische Bedeutung haben muß.

Auf dieser theoretischen Basis traf Descartes die Unterscheidung zwischen zwei wesentlichen Typen von Aufgaben:

1. *Bestimmte Aufgaben.* In unserer Sprechweise bedeutet das die Auflösung von algebraischen Gleichungen durch geometrische Konstruktion.

2. *Unbestimmte Aufgaben.* Wir würden heute von der Konstruktion geometrischer Örter bzw. von der Gleichung einer Kurve bzw. von der Abhängigkeit von Variablen sprechen.

Der erste Fall tritt ein, wenn man *genau soviel Gleichungen aufstellen* kann wie man *gesuchte Linien* hat; hat man weniger Gleichungen als gesuchte Linien, so handelt es sich um eine unbestimmte Aufgabe.

Beispiel einer bestimmten Aufgabe:

Lösung der Gleichung $z^2 = az + b^2$, $b = \overline{LM} > 0$, $a > 0$.

$\overline{OM}$ ist eine der gesuchten Lösungen, und zwar die positive (Abb. 5.2.12).

Beispiel einer unbestimmten Aufgabe: Das von Pappos in der Antike gestellte, aber seitdem ungelöste Problem „Locus ad quattuor lineas“ (Geometrischer Ort zu vier Linien):

Gegeben seien vier Geraden a, b, c, d. Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P mit folgender Eigenschaft: Von P aus werden nach den vier Geraden und unter vorgegebenen Winkeln α, β, γ, δ Geraden gezogen. Dann soll $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ gelten.

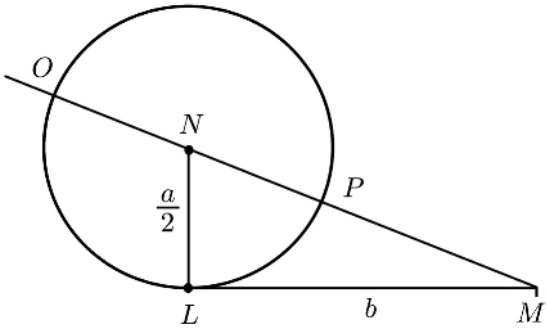


Abb. 5.2.11. Lösung einer quadratischen Gleichung nach Descartes

Der geometrische Ort, und das ist das Ergebnis, ist stets ein Kegelschnitt. Descartes ist stolz, daß er dieses Problem bewältigen konnte. Er wählt eine Gerade, etwa a, als feste Bezugsgerade aus, wählt einen Anfangspunkt O und führt dort eine Einheit ein. $\overline{OA}$ etwa wird als eine Variable behandelt. Die durch A und P gehende Gerade nimmt die Stelle der zweiten Variablen ein.

„La Géométrie“ mündet in einen dritten Teil, in dem Descartes sozusagen die algebraischen Früchte seiner geometrisch-analytischen Untersuchungen erntet. Er unterschied bei Gleichungswurzeln zwischen „wahren“ (d. h. positiven) und „falschen“ (d. h. negativen) Lösungen. Er sprach davon, daß es Gleichungen n-ten Grades mit n Lösungen gibt, aber er bezog keine klare Haltung zu dem 1629 von Girard formulierten, wenn auch nicht bewiesenen Fundamentalsatz der Algebra. *„Wisset also, daß für eine Gleichung so viele verschiedene Wurzeln, d. h. Werte der unbekannten Grösse existiren können als diese unbekannte Grösse Dimensionen hat,...“* . [Descartes 1894, S. 69]

Descartes wußte, daß jede ganzzahlige Lösung einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten das absolute Glied teilt. Ferner formulierte er die folgenden Regeln (eine schwache Form der sog. Cartesischen Zeichenregeln): Die Anzahl der positiven Wurzeln einer algebraischen Gleichung ist höchstens gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten. Die Anzahl der negativen Wurzeln ist höchstens gleich der der Zeichenfolgen der Koeffizienten. *„Ferner läßt sich ... feststellen, wie viele wahre und wie viele falsche Wurzeln eine Gleichung haben kann; es können nämlich so viele wahre Wurzeln vorhanden sein als die Anzahl der Wechsel der Vorzeichen + und − beträgt, und so viele falsche, wie oft zwei Zeichen + oder zwei Zeichen − aufeinander folgen“* [Descartes 1894, S. 70]. Diese Regeln sind richtig; ein Beweis aber stammt erst von C. F. Gauß aus dem Jahre 1826.

An dieser Stelle ist noch eine Bemerkung angebracht: Descartes erwähnt Cardano und *Scipio Ferreus*. Jedoch bleibt – wie u. a. auch D. J. Struik in seiner Anthologie hervorhebt – das Verhältnis zu Vieta unklar. Dies gilt auch für die Beziehung von Descartes zu dem englischen Mathematiker und Astrono-

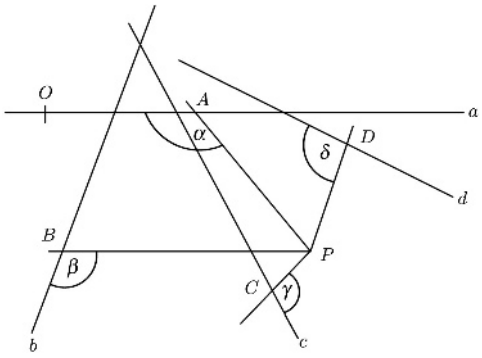


Abb. 5.2.12. Zum Problem „Locus ad quattuor lineas“

men Thomas Harriot (1560–1621). Harriot schrieb, vermutlich um 1610, die einflußreiche *„Artis analyticae praxis“* (Die Praxis der analytischen Kunst; gedruckt London 1631). Sie nimmt in einigen Punkten die Gleichungslehre von Descartes vorweg. Auch verwendete Harriot das Gleichungszeichen = und die Zeichen < und > in unserer heutigen Bedeutung.

5.3 Newton und Euler

5.3.1 Isaac Newton

Auch Isaac Newton (1642–1727), der wohl bedeutendste Naturforscher der Menschheit und herausragender Mathematiker – mit seiner Fluxionsrechnung gehört er zu den Begründern der Infinitesimalmathematik – hat seinen Platz in einer Geschichte der Algebra.

Newton gelangte 1661 zum Studium an das Trinity College von Cambridge und folgte 1669 seinem Lehrer Isaac Barrow auf den Lucasischen Lehrstuhl. 1696 siedelte er nach London über, erwarb sich große Verdienste um die Stabilisierung des britischen Münzwesens und wurde daraufhin geadelt. Von 1703 bis zu seinem Tode wirkte er als Präsident der Royal Society.

Die wissenschaftlich produktivste Periode Newtons fällt in die Jahre 1664 bis 1669; damals hatte er längere Zeit wegen eines Pestzuges Cambridge verlassen und lebte in seiner ländlichen Heimat. Dort faßte er die Grundideen seines Lebenswerkes, die sich teilweise erst später in grundlegenden Publikationen niederschlugen, z. B. in den *„Philosophiae naturalis principia mathematica“* (Mathematische Prinzipien der Naturwissenschaft 1687) mit dem Gesetz der allgemeinen Gravitation.

Newton hat zwischen 1673 und 1683 Vorlesungen zur Algebra gehalten. In Buchform wurden sie 1707 unter dem Titel *„Arithmetica universalis“* herausgegeben. Eine englische Version erschien als *„Universal arithmetick“* 1720.



Isaac Newton



Pierre de Fermat

Die *„Arithmetica“* enthält Methoden zum Lösen von Gleichungen, Untersuchungen über Wurzeln, die Suche nach Teilern von Polynomen und anderes mehr. Die Terminologie ist spezifisch für Newton: Die Wurzeln heißen *affirmative*, wenn sie positiv sind, sonst *negative*. Er gebraucht *dimension* für Grad der Gleichung, *quantity* eines Termes für den Koeffizienten, *rectangle* für das Produkt.

Von besonderem Interesse sind die Aussagen von Newton über die (elementar)symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung, im Anschluß an Vieta, nun aber in voller Allgemeinheit (vgl. die Anthologie in [Struik 1969, S. 94]). Wenn, in moderner Schreibweise, eine Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n = 0$$

gegeben ist, so ist a_1 die negative Summe der Wurzeln, a_2 die Summe aller Produkte von je zwei Wurzeln. Im Originaltext der englischen Version heißt es:

„From the generation of equations it is evident, that the known quantity of the second term of the equation, if its sign be changed, is equal to the aggregate of all the roots under their proper signs; and that of the third term, equal to the aggregate of the rectangles of each of two of the roots; that of the fourth, if its sign be changed, is equal to the aggregate of the contents under each three of the roots, that of the fifth is equal to the aggregate of the contents each four, and so on ad infinitum“. [Struik 1969, S. 94]

Ein weiterer Beitrag Newtons zur Algebra betrifft die Klassifikation der Kurven dritten Grades. Descartes und Fermat hatten Gleichungen und Kurvenbilder in Beziehung gesetzt; von Fermat stammt der Beweis, daß alle quadratischen Gleichungen Kegelschnitte repräsentieren, doch hatte er die Schwierigkeiten beim Studium von Kurven höherer Ordnung bei weitem unterschätzt.

Immerhin hatte Fermat, deutlicher als Descartes, Kurven in zwei Koordinatenachsen eingebettet.

Wie sieht es nun mit Kurven dritter Ordnung aus? Newton studierte Gleichungen, die kubisch in zwei Variablen sind, also Gleichungen der Form $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + ky + l = 0$; a, b, c, $d \neq 0$.

Gesucht sind die entsprechenden Kurven, und das in den vier Koordinaten-Quadranten. Newton hat diese überaus schwierige Frage systematisch in Angriff genommen und – nach eigenen Worten – 72 Typen angegeben. Es gibt darüber hinaus einige nicht von ihm explizit genannte Sonderfälle, deren Zählung jedoch nicht eindeutig ist. Die Publikation erfolgte in einem Anhang zu den *„Opticks“* im Jahre 1704. Für Einzelheiten und die Folgeentwicklung sei u. a. verwiesen auf [Brieskorn 1981, S. 118], [Scriba/Schreiber 2000, S. 308/309], [Scholz 1990, S. 265-274].

Die weit ausgreifenden Untersuchungen über algebraische Kurven, wobei die Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte zweier Kurven zu einem besonders gepflegten Gegenstand wurde, mündete schließlich in die Aussage von Euler:

„Zwei algebraische Kurven, eine von der Ordnung m und die andere von der Ordnung n, können sich in mn Punkten schneiden. Die Wahrheit dieses Satzes wird von den Mathematikern anerkannt, aber man muß zugeben, daß man nirgends einen zureichend exakten Beweis dafür findet“ (L. Euler: Démonstration sur le nombre des points où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper. Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin (4)(1748), 1750, S. 234-248. - Zitiert nach [Scholz 1990, S. 273]).

5.3.2 Zur Vorgeschichte des Fundamentalsatzes der Algebra

Die Aussage, daß jede algebraische Gleichung n-ten Grades im Bereich der komplexen Zahlen stets genau n nicht notwendig voneinander verschiedene Lösungen hat, wird allgemein als Fundamentalsatz der Algebra bezeichnet. Der Sachverhalt kann jedoch auch als Faktorisierungseigenschaft für das entsprechende Polynom formuliert werden und lautet dann: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit reellen Koeffizienten kann in ein Produkt von reellen Faktoren ersten und zweiten Grades zerlegt werden, bzw. äquivalent dazu: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten kann als ein Produkt von n linearen Faktoren mit komplexen Koeffizienten dargestellt werden.

Einen ersten Schritt zur Formulierung dieses Satzes unternahm ein gewisser Peter Roth (gest. 1617), Rechenmeister in Nürnberg, über den relativ wenig bekannt ist [Schneider 1999][Tropfke 1980, Bd. 1, 4. Aufl.]. Er veröffentlichte 1608 ein ausführliches Buch *„Arithmetica Philosophica. Oder schöne neue wolgegründete Überauß Künstliche Rechnung der Coß oder Algebrae“*. Ganz in den Traditionen von Cardano stehend und beeinflußt von Faulhaber behandelte Roth ausführlich Gleichungen und gab, im Unterschied zu Faulhaber,

nicht nur die Lösungen kubischer Gleichungen, sondern auch die Lösungswege an. Roth hatte 13 Typen kubischer Gleichungen unterschieden und war auch auf den casus irreducibilis gestoßen. Im Anschluß an die Aufzählung der Typen machte Roth – worauf es hier ankommt – ohne Beweis eine Bemerkung, wonach eine Gleichung n-ten Grades höchstens n Wurzeln haben könne: *„...seynd in allen nachfolgenden Cossen auffs meinste so vil geltungen radicis zu finden / mit wieviel die höchste Quantitet der fürgegebenen Cossischen aequation / vermög der Cossischen Progression verzeichnet wird. Aber allhie ist solches nicht zu verstehn / daß darumb eine jede Cubiccossische Vergleichung dreyerley Geltungen / ein ZZ.cossische viererley geltungen des radicis leidet / sondern alle die / so am meisten geltungen leiden / die haben ihr so viel / vnd auch gar nicht mehr.“* [Tropfke 1980, S. 489/490]

Roth hat sich mit seiner *„Arithmetica Philosophica“*, die weit über die Bedürfnisse der Rechenschulen hinausging, hohes Ansehen erworben; Descartes hat später auf Roths Schrift zurückgegriffen.

Ivo Schneider hat 1999 in einer Studie die Verdienste von Roth so zusammengefaßt: *„Immerhin hatte Roth mit der im ersten Teil seiner 'Arithmetica philosophica' skizzierten Cardanischen Lösungstheorie und den im zweiten Teil ausführlich dargestellten Lösungswegen für die Probleme des Faulhaberschen 'Lustgartens' den Bereich der kubischen Gleichungen nicht nur für die deutschen Rechenmeister, sondern auch allen interessierten Liebhabern der Mathematik für ein autodidaktisches Studium zugänglich gemacht.“* [Schneider 1999, S. 309]

Ersichtlich ging es noch nicht um einen Beweis für die Existenz von Wurzeln, sondern um die Anzahl der Wurzeln. Trotzdem scheint es angebracht, diese und andere Ergebnisse in die Vorgeschichte des Fundamentalsatzes der Algebra einzuordnen. Hierher gehören z. B. Untersuchungen von Thomas Harriot (1560?–1621) über die Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren; auch näherte er sich der Cartesischen Zeichenregel [Tropfke 1980, S. 490-492].

Das Jahr 1629 brachte einen deutlichen Schritt vorwärts in Richtung auf den Fundamentalsatz der Algebra. In diesem Jahr veröffentlichte der in den Niederlanden tätige Mathematiker Albert Girard (1595–1632) in Amsterdam ein für die Geschichte der Algebra bedeutsames Werk, *„Invention nouvelle en algèbre“*. Dort stellt Girard fest, daß, wenn man die „unmöglichen“ (imaginären bzw. komplexen) Lösungen mitzählt, jede Gleichung n-ten Grades n Wurzeln hat. Genauer: Jede Gleichung der Algebra enthält so viele Lösungen, wie die „denomination“ (Exponent) der höchsten Größe anzeigt. *„Toutes les equations d'algèbre reçoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre...“* [Tropfke 1980, S. 492].

Girard stand deutlich unter dem Einfluß von Simon Stevin, dessen Werke Girard herausgegeben hatte. So übernahm Girard die Bezeichnungen Stevins bei der Potenzschreibweise. Im Unterschied aber zu Stevin erkannte Girard imaginäre/komplexe Zahlen als Lösungen an; beispielsweise hat $x^4 = 4x - 3$



Gottfried Wilhelm Leibniz



Johann I Bernoulli

die Lösungen 1, 1, $-1+\sqrt{-2}$, $-1-\sqrt{-2}$. Er begründet auch, warum er komplexe Zahlen als Lösungen zählt:

„Man könnte nun fragen, wozu diese Lösungen dienen können, die doch unmöglich sind. Ich antworte: Aus drei Gründen: (1) um der Sicherheit der allgemeinen Regel willen, (2) weil man dann weiß, daß es keine anderen Lösungen geben kann, (3) wegen ihrer Nützlichkeit; diese ist leicht einzusehen, denn sie dienen zum Auffinden der Lösungen ähnlicher Gleichungen.“ [Tropfke 1980, S. 492]

Struik [Struik, S. 85] weist darauf hin, daß in der Originalpassage von Girard zum Fundamentalsatz der Algebra eine Einschränkung verborgen sein könnte. Dies hängt mit der von Girard getroffenen Einteilung der Gleichungen in „einfache“, „vollständige“, „unvollständige“ und „gemischte“ Gleichungen zusammen. Doch würde es hier zu weit führen, diesen Dingen im einzelnen nachzugehen.

Einen wesentlichen Impuls erhielt die Beschäftigung mit dem Fundamentalsatz der Algebra ab 1702 durch Arbeiten von Leibniz und Johann I Bernoulli (1667–1748) zur Infinitesimalmathematik. Beide Gelehrte entwickelten darin die Methode der Partialbruchzerlegung zur Integration von gebrochenrationalen Funktionen $F(x) = P(x)/Q(x)$ mit Polynomen P und Q. Das Wesen dieses Verfahrens besteht darin, daß man das im Nenner stehende Polynom $Q(x)$ in Faktoren ersten und zweiten Grades zerlegte und auf dieser Basis eine Zerlegung des Bruches $P(x)/Q(x)$ in einfache Brüche erhielt, die sich integrieren ließen. Die Methode war aber nur dann allgemein gültig, wenn die geforderte Zerlegung des Nennerpolynoms stets möglich war, d. h. wenn der Fundamentalsatz der Algebra galt. Auf Grund eines „Gegenbeispiels“

$$x^4 + a^4 = (xx - aa\sqrt{-1})(xx + aa\sqrt{-1})$$

folgerte Leibniz überraschenderweise, daß die erforderliche Zerlegung nicht immer möglich sei, eine Meinung der sich Joh. I Bernoulli nicht anschloß. In den folgenden Jahren diskutierten verschiedene Mathematiker wiederholt dieses Beispiel und um 1720 erschienen mehrere Arbeiten, die das Beispiel als fehlerhaft nachwiesen und das Integral $\int \frac{dx}{x^4+a^4}$ korrekt berechneten.

5.3.3 Leonhard Euler und der Fundamentalsatz der Algebra

Girard hatte den allgemeinen Fundamentalsatz der Algebra ausgesprochen. Der Satz galt als richtig, aber der Beweis des tiefliegenden Satzes ist schwierig; er gelang schließlich erst Gauß, der vier voneinander unabhängige Beweise lieferte. Der erste stammt aus dem Jahre 1799 und stellt den Gegenstand seiner Dissertation dar.

Ein ernsthafter Beweisansatz stammt von Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783), seit 1759 ständiger Sekretär der französischen Akademie. Dazu sei verwiesen auf seine Abhandlung *„Recherches sur le calcul intégral“*, Histoire de l'Académie Royale, Berlin, 1746 (1748).

Diese Abhandlung ermöglichte entscheidende Fortschritte bei der Integration von gebrochen rationalen Funktionen durch die Methode der Partialbruchzerlegung. Die Aussage von d'Alembert [Struik, S. 99] läuft darauf hinaus, daß jedes Polynom von gerader Ordnung in Faktoren zweiten Grades $\left(x^2 + ax + b\right)(...)$ mit reellen Koeffizienten zerlegt werden kann.

Der Beweis wurde geometrisch geführt. Genau genommen handelte es sich nicht um einen Beweis für die Existenz einer Wurzel, sondern nur für die Form der Wurzeln. Auf Lücken und Schwächen bei d'Alembert hat dann später Gauß hingewiesen.

D'Alembert nahm ohne Beweis an, daß der Betrag des betrachteten Polynoms ein Minimum x_0 hat, und bewies, daß dieses Minimum den Wert Null haben muß. Mit anderen Worten: x_0 ist eine Nullstelle des Polynoms, und von dem Polynom kann der Faktor $(x - x_0)$ abgespalten werden. Durch sukzessive Anwendung der Schlußweise auf das als zweiter Faktor verbleibende Restpolynom erhält man eine vollständige Zerlegung des Polynoms. Am Rande vermerkte d'Alembert noch zwei wichtige Beobachtungen: Wenn die komplexe Zahl $a + b\sqrt{-1}$ Wurzel eines Polynoms P mit reellen Koeffizienten ist, so ist auch $a - b\sqrt{-1}$ Wurzel von P, und P kann in einen quadratischen Faktor der Art $xx + mx + n$ und ein Restpolynom zerlegt werden. Ersetzt man in einem reellen Polynom $P(x)$ die Veränderliche x durch eine komplexe Zahl $z = z_1 + z_2\sqrt{-1}$ (z_1, z_2 reelle Zahlen), dann wird $P(z) = Q_1(z_1, z_2) + Q_2(z_1, z_2)\sqrt{-1}$ mit reellen Polynomen Q_1 und Q_2, und $P(z) = 0$ gilt genau dann, wenn $Q_1 = 0$ und $Q_2 = 0$ sind.

Wenig später, 1749, veröffentlichte Euler einen algebraischen Beweis des Satzes. Leonhard Euler (1707–1783) war der produktivste Mathematiker der Menschheitsgeschichte; die in der Schweiz herausgegebenen Gesammelten Abhandlungen (*„Opera omnia“*) umfassen bisher mehr als 70 Bände. Seine ma-



Abb. 5.3.13. Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg [Foto Alten]

thematischen Studien zeigen Euler als äußerst vielseitigen Gelehrten: Theoretische Mechanik, Differentialrechnung, Integralrechnung, Differentialgleichungen, Variationsrechnung und Algebra wurden von ihm wesentlich bereichert und in hervorragenden Lehrbüchern dargestellt. Bis zu einem gewissen Grade kann man sagen, daß Euler den Typ des modernen Lehrbuchs geschaffen hat. Aus seiner Feder stammt auch eine Fülle von naturwissenschaftlich-technischen Untersuchungen zur Astronomie, Geodäsie, Kartographie, Ballistik, Optik, Navigation, Schiffbau und anderes mehr.

Euler wurde am 15. April 1707 in Basel als Sohn eines Pfarrers geboren. Er studierte bei Johann Bernoulli Mathematik. Dessen Söhne Daniel und Nikolaus wurden an die neugegründete St. Petersburger Akademie berufen; 1727 folgte Euler und entfaltete dort eine weitgefächerte wissenschaftliche Tätigkeit. Als wegen innenpolitischer Wirren in Rußland die Lage an der Akademie unerquicklich geworden war, folgte Euler 1741 einer Einladung des preußischen Königs Friedrich II. an die Berliner Akademie, pflegte aber weiterhin die Beziehungen nach St. Petersburg. Auch in Berlin war Euler äußerst produktiv, doch entstanden Spannungen innerhalb der Akademie und zum König. So kehrte Euler 1766 nach St. Petersburg zurück, hochgeehrt von der Zarin Katherina II. Trotz vollständiger Erblindung setzte er die Publikations- und Forschungstätigkeit fort. Er starb am 18. September 1783 in St. Petersburg.

Hier kann nur auf einige Aspekte von Eulers Beitrag zur Algebra eingegangen werden. Im Zusammenhang mit der Partialbruchzerlegung ging Euler in seiner *„Introductio in Analysin Infinitorum“* (Einführung in die Analysis

des Unendlichen) von 1748 auch auf die Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren ein. Sie wird als gegeben, als selbstverständlich vorausgesetzt. Die Zerlegung besteht aus reellen oder imaginären Linearfaktoren bzw. aus reellen Faktoren zweiten Grades; andere imaginäre Größen als imaginäre Größen der Form $a + b\sqrt{-1}$ könne es nicht geben. *„Wenn eine ganze Funktion von Z* (Euler versteht unter „ganze Funktion“ eine ganzrationale Funktion) *imaginäre Linearfunktionen hat, so ist deren Anzahl gerade und sie lassen sich zu je zweien so zusammenfassen, daß ihr Produkt reell ist....Also kann jede ganze Funktion von Z in reelle Faktoren ersten Grades oder zweiten Grades zerlegt werden. Obwohl das nicht in aller Strenge bewiesen ist, wird doch die Wahrheit dieses Satzes im folgenden immer mehr gestützt werden,....“* [Tropfke 1980, S. 496]

Den Versuch eines Beweises für die mögliche Zerlegung unternahm Euler in seiner Abhandlung *„Recherches sur les racines imaginaires des équations“* [Mém. Acad. Sc. Berlin 5 (1749) 1751]. Auch dieser Beweis war noch unvollkommen.

Immerhin konnte Euler zeigen, daß zu jeder Wurzel der Form $x+y\sqrt{-1}$ auch die konjugiert komplexe Wurzel $x - y\sqrt{-1}$ existiert und damit ein Faktor $x^2 + ax + b$ der algebraischen Gleichung. Ferner bewies er, daß eine algebraische Gleichung ungeraden Grades wenigstens eine reelle Wurzel hat, daß eine Gleichung geraden Grades entweder keine reelle Wurzel oder ein Paar solcher Wurzeln hat und daß eine Gleichung geraden Grades mit negativem Absolutglied wenigstens eine positive und eine negative Wurzel hat. Zum Beweis führte er die Gleichung n-ten Grades sukzessive auf Gleichungen niedrigeren Grades zurück und zog sehr stark die geometrischen Anschauungen heran. So weiß man von einem Polynom $P(x)$ ungeraden Grades $2n + 1$, daß sich der Wert des Polynoms für betragsmäßig große Werte von x so verhält wie sein Summand höchsten Grades. Also gilt:

für $x \to \infty$ folgt $x^{2n+1} \to \infty$ und $P(x) \to \infty$ sowie

für $x \to -\infty$ folgt $x^{2n+1} \to -\infty$ und $P(x) \to -\infty$.

Nach dem Kontinuitätsprinzip schlossen die Mathematiker des 18. Jahrhunderts, daß die durch das Polynom $P(x)$ definierte Kurve, die für große positive x-Werte oberhalb der x-Achse und für große negative x-Werte unterhalb der x-Achse verläuft, notwendigerweise einmal die x-Achse schneiden muß. Ein Beweis dieser scheinbar so naheliegenden Tatsache beruht wesentlich auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen und auf dem Zwischenwertsatz von Bolzano.

Doch enthält die Abhandlung von Euler auch algebraisch geführte Beweise für einschlägige Sätze, z. B.: Jedes Polynom vom vierten Grade kann in zwei reelle Faktoren des Grades zwei zerlegt werden.

Euler war überzeugt, daß er einen korrekten Beweis des allgemeinen, in der Analysis vorausgesetzten Satzes geliefert habe, daß jedes Polynom in reelle Faktoren zerlegt werden kann, entweder des ersten oder des zweiten Gra-

des. Der zweite Teil seiner Abhandlung ist dem Beweis gewidmet, daß alle nichtreellen Wurzeln von der Form $A + B\sqrt{-1}$ sind.

Die Eulersche Beweisskizze versuchten dann 1759 der als Offizier, später als Gouverneur tätige und mit Lagrange befreundete F. D. de Foncenex sowie 1772 Lagrange selbst zu verbessern, doch beschränkten sie sich dabei auf den algebraischen Teil des Beweises, so daß das grundlegende Manko erhalten blieb. Gleiches gilt auch für P. S. Laplace, der 1795 einen neuen algebraischen Beweis formulierte, die Veröffentlichung erfolgte erst 1812.

5.3.4 Euler und sein Algebralehrbuch

Eulers *„Vollständige Anleitung zur Algebra“* von 1770 hat erheblich zur Ausbreitung eines Standards an algebraischen Methoden und Kenntnissen beigetragen. Die *„Algebra“* erschien in St. Petersburg, war in deutscher Sprache verfaßt und wurde vielfach übersetzt und nachgedruckt, insbesondere mit den von Lagrange stammenden Anmerkungen und Zusätzen. Wir zitieren hier im allgemeinen aus der von J. Ph. Grüson 1796 herausgebrachten deutschen Ausgabe.

Im Vorwort erzählt Grüson die bekannte Anekdote, wonach Eulers Bediensteter, ein Schneider, auf Grund der ungewöhnlichen Klarheit des Textes imstande gewesen sei, sich die Algebra vollständig anzueignen.

„Der verewigte Euler wußte überall Gründlichkeit und Deutlichkeit so glücklich zu vereinigen, daß seine Absicht, ein Lehrbuch der Algebra abzufassen, aus welchem jeder Liebhaber der Mathematik ohne Beyhülfe eines Lehrers, die Buchstabenrechenkunst und gemeine Algebra gründlich zu erlernen im Stande wäre, nicht verfehlt werden konnte; auch genoß er das Vergnügen, sich davon durch Erfahrung zu überzeugen. Er war nemlich gerade zu der Zeit, als er die Algebra ausarbeitete, seines Gesichts völlig beraubt, und daher genöthigt, sie seinem Bedienten in die Feder zu dictiren. Dieser junge Mensch, von Profession ein Schneider, war von sehr mittelmäßigen Talenten, und verstand, als Euler sich seiner zu diesem Zwecke bediente, von der Mathematik nichts weiter, als daß er mechanisch fertig rechnen konnte, und doch faßte er nicht nur, ohne weitere Erklärung, alles dasjenige, was ihm dictirt wurde, sondern wurde auch dadurch gar bald in den Stand gesetzt, die in der Folge vorkommenden schweren Buchstabenrechnungen ganz allein auszuführen, und alle ihm vorgelegten algebraischen Aufgaben mit viel Fertigkeit aufzulösen.“ [Euler/Grüson 1796]

Die *„Algebra“* besteht aus zwei Teilen. In Teil I, der arithmetischen Inhaltes ist, werden die *verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Größen,* die *verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen* und *Von den Verhältnissen und Proportionen* gelehrt. Teil II handelt von den *algebraischen Gleichungen und deren Auflösung* und von der *unbestimmten Analytik.*

Einige Punkte seien hervorgehoben. Da ist die relativ altmodische Erklärung der imaginären Zahlen, obgleich doch Euler in seinen Forschungsstudien ima-

ginäre (komplexe) Zahlen sogar als Beweismittel verwendet hatte. In der *„Algebra“* heißt es lediglich: *„§143. Weil nun alle möglichen Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner als* 0 *, oder* 0 *selbst sind; so ist klar, daß die Quadratwurzel von negativen Zahlen nicht einmal unter die möglichen Zahlen gerechnet werden kann. Folglich muß man behaupten, daß sie unmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach unmöglich sind, und gewöhnlich imaginäre oder eingebildete Zahlen genannt werden, weil sie bloß in der Einbildung statt finden.*

(...)

§145. Gleichwohl aber stellen sie sich unserm Verstande dar, und finden in unserer Einbildung statt; daher sie auch bloß eingebildete Zahlen genannt werden. Ungeachtet aber diese Zahlen, als z. B. $\sqrt{-4}$ *, ihrer Natur nach ganz und gar unmöglich sind, so haben wir doch davon einen hinlänglichen Begriff, indem wir wissen, daß dadurch eine solche Zahl angedeutet werde, welche mit sich selbst multiplicirt, zum Product* -4 *hervorbringe; und dieser Begriff ist hinreichend, um diese Zahlen in der Rechnung gehörig zu behandeln.*

§151. Endlich muß noch der Zweifel gehoben werden, daß, da dergleichen Zahlen unmöglich sind, dieselben auch ganz und gar keinen Nutzen zu haben scheinen und diese Lehre als eine bloße Grille angesehen werden könnte. Allein sie ist in der That von der größten Wichtigkeit, indem oft Fragen vorkommen, von welchen man sogleich nicht wissen kann, ob sie möglich sind oder nicht. Wenn nun ihre Auflösung auf solche unmöglichen Zahlen führt, so ist es ein sicheres Zeichen, daß die Frage selbst unmöglich sey. Um dieses mit einem Beispiel zu erläutern, so wollen wir folgende Frage betrachten: man soll die Zahl 12 *in zwey solche Theile zerlegen, deren Product* 40 *ausmache; wenn man nun diese Frage nach den Regeln auflöset, so finde man für die zwey gesuchten Theile* $6+\sqrt{-4}$ *und* $6-\sqrt{-4}$ *, welche folglich unmöglich sind, und hieraus eben erkennt man, daß diese Frage sich durch nichts auflösen läßt. Wollte man aber die Zahl* 12 *in zwey solche Theile zerfällen, deren Product* 35 *wäre, so ist offenbar, daß diese Theile* 7 *und* 5 *seyn würden.“* [Euler/Grüson, Teil I, S. 76].

In Teil II wird einleitend der Zweck der Algebra erklärt:

„Der Zweck der Algebra, so wie aller Theile der Mathematik ist, den Werth unbekannter Größen zu bestimmen, und diese muß durch genaue Erwägung der Bedingungen, die dabey vorgeschrieben sind, und die durch bekannte Größen ausgedrückt werden, geschehen. Daher wird die Algebra auch so beschrieben, daß man darin zeige, wie aus bekannten Größen unbekannte zu finden sind.“ [Euler/Grüson, Teil II, S. 3].

Der erste Abschnitt des zweiten Teiles bietet die Auflösung der algebraischen Gleichungen bis zum Grade vier. Benannt werden die Regeln des Cardano, des Scipio del Ferro und die Regel des Bombelli. (Der Herausgeber macht auf S.136 die Anmerkung, daß die Regel des Bombelli *viel mehr dem Ludewig*

Vollſtändige
Anleitung
zur
Algebra
von
Hrn. Leonhard Euler.

Erſter Theil.
Von den verſchiedenen Rechnungs-Arten,
Verhältnißen und Proportionen.



St. Petersburg.
gedruckt bey der Kayſ. Acad. der Wiſſenſchaften 1770.

Abb. 5.3.14. Titelblatt von „Eulers Algebra“

Ferrari gehört und daß man die Regel des Cardano dann fälschlicherweise ihm, und nicht dem Scipio del Ferro zuschreibt.)

Es wird eine große Anzahl von Aufgaben vorgerechnet. Nehmen wir ein Beispiel [Euler/Grüson 1796, S. 122-124]: Euler behandelt die kubische Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 12 = 0.$$

Mit Hilfe der Transformation $x-2 = y$ erhält man die Gleichung $y^3+y-2 = 0$ mit der Lösung

$$y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}.$$

„Bey Auflösung dieses Beyspiels sind wir auf eine doppelte Irrationalität gerathen; gleichwohl läßt sich daraus nicht schließen, daß die Wurzel irrational sey, indem es sich glücklicher Weise fügen könnte, daß die Binomien $27 \pm 6\sqrt{21}$ *wirkliche Cubi wären. Dies trifft auch hier zu ...“* [Euler/Grüson, S. 123]. Die dritte Potenz von $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ ist $27 + 6\sqrt{21}$; analog für $27 - 6\sqrt{21}$.

Also ist $y = \frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ und damit $x = 3$ eine Lösung. Dividiert man die kubische Gleichung durch $x-3$, so erhält man eine quadratische Gleichung mit den beiden komplexen (Euler sagt *imaginären*) Wurzeln $x = \frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$.

Bezüglich der Möglichkeiten, Gleichungen höheren als vierten Grades aufzulösen, äußert sich Euler in §219: *„So weit ist man bisher in Auflösung der algebraischen Gleichungen gekommen, nemlich bis auf den vierten Grad, und alle Bemühungen, die Gleichungen vom fünften und den höheren Graden auf gleiche Art aufzulösen, oder wenigstens auf die niedrigsten Grade zu bringen, sind fruchtlos gewesen, so daß es nicht möglich ist, allgemeine Regeln zu geben, wodurch die Wurzeln von höheren Gleichungen gefunden werden könnten.*

Alles, was darin geleistet worden, geht nur auf ganz besondere Fälle...“ [Euler/Grüson, S. 446].

Etwas klarer drückte sich der Herausgeber Hofrat Kaußler von Eulers *„Algebra“* aus, und zwar in der Vorrede zum Teil III (1796), der die Zusätze von Lagrange enthält. Dort werden unbestimmte (diophantische) Gleichungen behandelt. Kaußler schrieb: *„Was aber die unbestimmten Gleichungen von höheren Graden, als der zweite, anbetrifft, so hat man nur besondere Methoden für einige einzelne Fälle, und es ist zu vermuthen, daß die allgemeine Auflösung derselben eben so unmöglich ist, als die Auflösung derjenigen bestimmten Gleichungen, die über den vierten Grad steigen.“* [Euler/Ebert/Kaußler 1796, Teil III, Vorrede IX]

Wesentliche Inhalte der Algebra im 16. und 17. Jahrhundert

1465–1526	Scipione del Ferro: Lösungsformel für Gleichungen vom Typ $x^3 + bx = c$
1500?–1557	Niccolò Tartaglia : Lösungsformel für 3 Fälle kubischer Gleichungen
1501–1576	Girolamo Cardano: „Ars magna sive de regulis algebraicis“(1545); Lösungsformeln für alle Gleichungen vierten Grades mit Hilfe kubischer Resolvente
1522–1565	Ludovici Ferrari: Methoden zur Auflösung von Gleichungen vierten Grades
1526–1572	Raffaelo Bombelli: „L'Algebra“(1572); Quadratwurzeln aus negativen Zahlen, Rechenregeln für imaginäre Größen, Kubikwurzeln, Symbole
1540–1603	François Viète: „In artem analyticem isagoge“(1591), „Ad logisticam speciosam notae priores“(postum 1631), „Zeteticorum libri quinque“(1593), Buchstabenrechnung, Normalformen für algebraische Gleichungen, Wurzelsatz
1548–1620	Simon Stevin: „De Thiende“(1585), „Practique d'Arithmétique“ (1585); Dezimalbrüche und deren praktische Anwendung
∼1560–1621	Thomas Harriot: „Artis analyticae praxis“(1631)
1580–1635	Johann Faulhaber: „Arithmetischer cubicossischer Lustgarten“(1604)
1595–1632	Albert Girard: „Invention nouvelle en algèbre“(1629); Formulierung des Fundamentalsatzes der Algebra, spezielle Typen kubischer und biquadratischer Gleichungen
1596–1650	René Descartes: „Discours de la méthode“ (1637); Verschmelzung geometrischer und algebraischer Methoden, analytische Geometrie, Einführung der Symbole für Variablen, Potenzen und Wurzeln, cartesische Zeichenregeln
1642–1727	Isaac Newton: „Arithmetica universalis“(1707), Untersuchungen über Wurzeln von Gleichungen, Teiler von Polynomen, symmetrische Funktionen der Wurzeln, Klassifikation der algebraischen Kurven dritter Ordnung
1646–1716	Gottfried Wilhelm Leibniz: „Mathematische Schriften“(hrsg. 1849–1863, 7 Bände): Partialbruchzerlegung gebrochenrationaler Funktionen
1707–1783	Leonhard Euler: „Vollständige Anleitung zur Algebra“(1770); Epochales Lehrbuch zur Algebra als Wissenschaft, aus bekannten Größen unbekannte zu berechnen

5.4 Aufgaben

Aufgabe 5.1.1: Reduktion kubischer Gleichungen
Reduzieren Sie die Normalform der kubischen Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$ auf die Form $y^3+py+q=0$ mit Hilfe der Transformation $x=y-\frac{a}{3}$. Stellen Sie mit Hilfe des Ansatzes $y=u+v$ die allgemeine Lösungsformel für y auf.

Originalaufgaben aus der *„Ars magna“* von G. Cardano:

Aufgabe 5.1.2: Aus *„Ars magna“*, Kap. XI
Lösen Sie die kubische Gleichung $x^3+3x=10$ mit der Rechenanweisung von Cardano.

Aufgabe 5.1.3: Aus *„Ars magna“*, Kap. XI
Geben Sie alle drei Lösungen der Gleichung $x^3+6x=20$ an.

Aufgabe 5.1.4: Aus *„Ars magna“*, Kap. XII
Lösen Sie die kubische Gleichung $x^3=6x+40$.

Aufgabe 5.1.5: *„Ars magna“*, Kap. XXXIX, Problem VII
Suchen Sie eine Zahl x, die mit ihrem Kubus multipliziert und vermehrt um 6 Kubi gleich 64 ist.

Aufgabe 5.1.6: *„Ars magna“*, Kap. XXXIX, Problem IX
Finde eine Zahl, deren 4. Potenz und ihr Vierfaches, vermehrt um 8, dem 10fachen ihres Quadrates gleich ist.

Aufgabe 5.1.7: *„Ars magna“*, Kap. XXXIX, Problem VI
Lösen Sie die Aufgabe: „Suche eine Zahl, welche gleich ist ihrer Quadratwurzel und zweimal ihrer Kubikwurzel.“ (Führt auf die Gleichung $x^6=x^3+2x^2$)

Aufgabe 5.1.8: Originalaufgabe von Bombelli
Bilden Sie das Quadrat von $\sqrt[3]{2+\sqrt{-3}}$.

Originalaufgaben von Vieta aus „Zeteticorum libri quinque“

Aufgabe 5.2.1: Lineares Problem (Buch I, Aufgabe 2)
Wenn die Differenz zweier Seiten und deren Verhältnis gegeben sind, die Seiten zu finden.

Aufgabe 5.2.2: Quadratisches Problem (Buch II, Aufgabe 18)
Wenn die Summe zweier Seiten und die Summe der Kuben gegeben sind, die Seiten einzeln zu finden.

Aufgabe 5.2.3: Kubisches Problem (Buch III, Aufgabe 6)
Wenn die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks und die Summe der Katheten gegeben sind, die Katheten zu finden.

Aufgabe 5.2.4: Zum Wurzelsatz von Vieta
Versuchen Sie, den Vietaschen Wurzelsatz für eine kubische Gleichung in A in dessen Originalschreibweise zu formulieren.

Aufgabe 5.2.5: Zu den Beispielen von Descartes
Beweisen Sie die Richtigkeit der Aussagen bei den Beispielen von Descartes zu der bestimmten und unbestimmten Aufgabe im Text dieses Buches.

Originalaufgaben von Euler aus [Euler/Grüson 1796]

Aufgabe 5.3.1: (aus Teil II, S. 5)
20 Personen, Männer und Weiber, zehren in einem Wirthshause. Ein Mann verzehrt 8 Groschen, ein Weib aber 7 Groschen, und die ganze Zeche beläuft sich auf 6 Reichstaler. Nun ist die Frage, wie viel Männer und Weiber daselbst gewesen? (6 Reichstaler sind 144 Groschen)

Aufgabe 5.3.2: (aus Teil II, S. 16/17)
Ein Mann hinterläßt 11000 Reichstaler und dazu eine Witwe, zwei Söhne und drei Töchter. Nach seinem Testament soll die Frau zweimal mehr bekommen als ein Sohn und ein Sohn zweimal mehr als eine Tochter. Wie viel bekommt ein jeder?

Aufgabe 5.3.3: (aus Teil II, S. 21)
Suche eine arithmetische Progression, wovon das erste Glied gleich 5, und das letzte gleich 10, die Summe aber gleich 60 ist.

Aufgabe 5.3.4: (aus Teil II, S. 31/32)
Ein Maulesel und ein Esel tragen ein jeder etliche Pud (russisches Gewichtsmaß). Der Esel beschwert sich über seine Last und sagt zum Maulesel, gäbst du mir ein Pud von deiner Last, so hätte ich zweimal so viel als du. Hierauf antwortet der Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich dreimal so viel als du. Wie viel Pud hat nun ein jeder gehabt?

Aufgabe 5.3.5: (aus Teil II, S. 57/58)
Es kauft jemand ein Pferd für einige Reichstaler, verkauft dasselbe wieder für 119 Reichstaler, und gewinnt daran so viel Prozente, als das Pferd gekostet hat. Nun ist die Frage, wie teuer dasselbe eingekauft worden?

Aufgabe 5.3.6: (aus Teil II, S. 77)
Man suche zwei Zahlen, deren Produkt 105 sei, und wenn man ihre Quadrate zusammen addiert, so sei die Summe gleich 274.

Aufgabe 5.3.7: (aus Teil II, S. 94)
Finde alle Zahlen, deren Kubus gleich 8 ist.

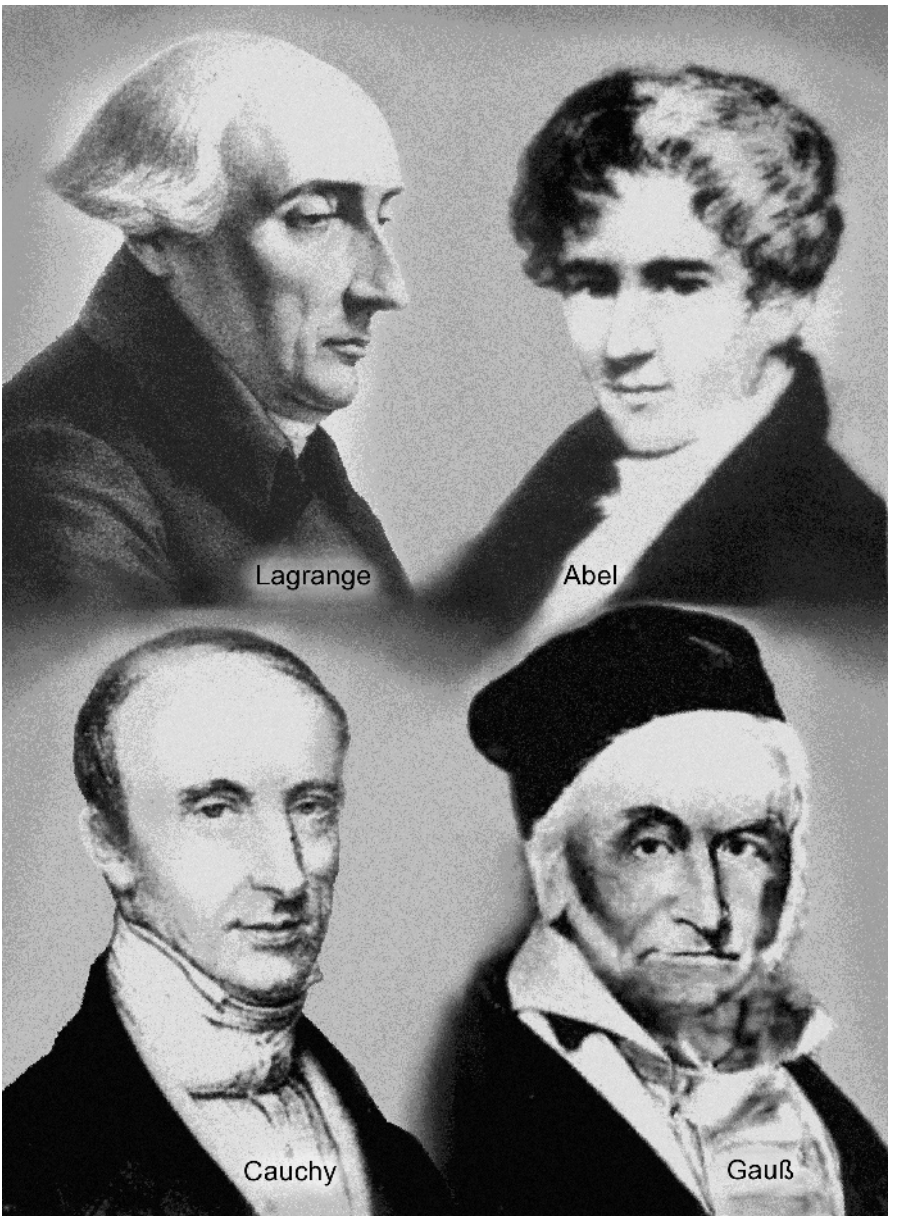
Aufgabe 5.3.8: (aus Teil II, S. 111)
Es sind zwei Zahlen, deren Differenz 12 ist. Wenn man nun diese Differenz mit der Summe ihrer Kuben multipliziert, so kommt 102 144 heraus. Welche Zahlen sind es?

Aufgabe 5.3.9: (aus Teil II, S. 111)
Es verbinden sich einige Personen zu einer Gesellschaft, und jeder legt zehnmal so viel Gulden ein, als der Personen sind, und mit dieser Summe gewinnen sie sechs Prozent mehr, als ihrer sind. Nun findet sichs, daß der Gewinn zusammen 392 Gulden betrage. Wie viel sind der Kaufleute gewesen?

Aufgabe 5.3.10: (aus Teil II, S. 144)
Lösen Sie die biquadratische Gleichung $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$.

Aufgabe 5.3.11: (aus Teil II, S. 147 – 149)
Lösen Sie die Gleichung $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0$.

6 Algebra in der zweiten Hälfte des 18. und am Beginn des 19. Jahrhunderts



1769	James Watt erhält ein Patent auf die wesentlich verbesserte Newcomensche Dampfmaschine
ca. 1770	Beginn der Industriellen Revolution in England
1770	James Cook nimmt im Verlauf seiner Entdeckungsreise (bis 1779) Australien für die britische Krone in Besitz
1775–1783	Amerikanischer Unabhängigkeitskrieg
1776	Unabhängigkeitserklärung der britischen Kolonien in Amerika, Erklärung der Menschenrechte und Zusammenschluß der einzelnen Staaten zu den USA (1777)
1777	Lavoisier leitet mit der Widerlegung der Phlogistontheorie eine neue Entwicklungsetappe der Chemie ein
1778	Carl v. Linné begründet das nach ihm benannte System der Pflanzen
ca. 1780–1830	Zeit der Wiener Klassik in der Musik (Mozart, Beethoven, Haydn)
1781	Immanuel Kant veröffentlicht sein erstes philosophisches Hauptwerk: „Kritik der reinen Vernunft“
ca. 1785	Ende der Periode des Sturm und Drang in der deutschen Literatur
1789–1794	Französische Revolution
1790–1810	Zeit der Weimarer Klassik in der Literatur
1794	Gründung der École Polytechnique in Paris
1796	Johann Gottlieb Fichte präsentiert eine Ausarbeitung seiner Wissenschaftslehre
1797	Friedrich Wilhelm Schelling entwickelt Grundvorstellungen der romantischen Naturphilosophie
ca. 1798–1830	Zeit der Romantik
1798	Beginn der Napoleonischen Eroberungskriege
1801	R. Arkwright wendet erstmals den verbesserten, von ihm 1787 erfundenen mechanischen Webstuhl praktisch an
1801	Erste deutsche Zuckerrübenfabrik nimmt ihren Betrieb auf
1804	Einführung des bürgerlichen Gesetzbuches „Code Napoléon“ im Machtbereich Frankreichs
1806	Napoleon errichtet die Kontinentalsperre gegen England
1808–1811	Friedrich Arnold Brockhaus gibt sein Konversationslexikon heraus
1809	Jean Baptiste de Lamarck veröffentlicht seine Abstammungslehre
ca. 1810	„Maschinenstürmerbewegung“ in England
1812	Einrichtung des humanistischen Gymnasiums als Vorstufe zur Universität in Preußen
1812	Jacob und Wilhelm Grimm veröffentlichen der ersten Band ihrer Kinder- und Hausmärchen
1814	Einsatz einer Lokomotive von G. Stevenson als Grubenbahn
1815	Wiener Kongreß - Neuordnung des europäischen Staatensystems
1815	Gründung des Deutschen Bundes
1819	Karlsbader Beschlüsse - Beschränkung der politischen und geistigen Freiheit in Deutschland
1819	Die „Deutsche Grammatik“ von Jacob Grimm erscheint in der ersten Auflage
1820	Hans Christian Oerstedt entdeckt die Ablenkung einer Magnetnadel durch einen elektrischen Strom
1825	Mit der Errichtung der Republik Bolivien unter S. Bolivar endet das spanische Kolonialreich in Südamerika
1825	Gründung der ersten deutschen technischen Lehranstalt (später Technische Hochschule) in Karlsruhe

6.0 Historische Einführung

Die letzten Jahrzehnte des 18. Jahrhunderts und die ersten des 19. Jahrhunderts standen ganz im Zeichen der beginnenden Industrialisierung, der sog. Industriellen Revolution. Sie begann nach der Jahrhundertmitte in England, setzte sich dann in Frankreich und Westeuropa, sowie in den 30er Jahren des 19. Jahrhunderts in Deutschland und den USA fort und erreichte schließlich Rußland und Japan. Diese Industrialisierung, deren Wesen im Übergang von der handwerklichen Fertigung in Manufakturen zur industriellen Produktion in Fabriken bestand, führte zu einer tiefgreifenden Umgestaltung der Produktion. Daraus ergaben sich nach und nach neue Anforderungen an die Naturwissenschaften und die Mathematik.

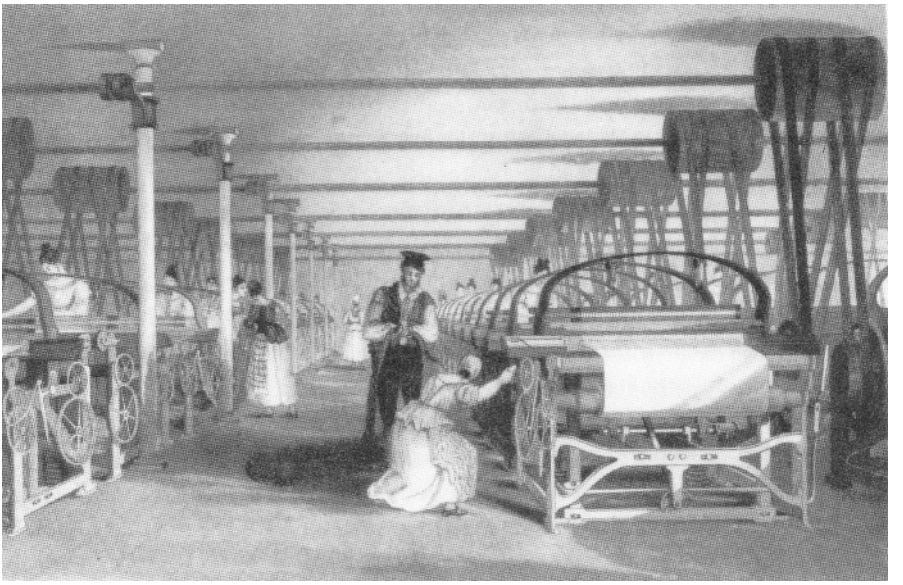


Abb. 6.0.1. Saal mit Maschinenwebstühlen von Roberts
[Bibliothek Technische Universität Berlin]

Zugleich kam es zu einer Umgestaltung der politischen Systeme, die in der Französischen Revolution von 1789 ihren hervorstechendsten Ausdruck fand. Im Gefolge dieser Revolution wurde durch die Französischen Revolutionskriege (1792 – 1802) und die Napoleonischen Kriege fast das gesamte europäische Staatengefüge erschüttert und neu geordnet. Die Kriege förderten aber auch eine rasche Verbreitung der Ideen der Französischen Revolution in weiten Teilen Europas.

Eine der vielen Auswirkungen all dieser Ereignisse betraf wichtige Veränderungen im Bildungssystem einzelner Länder. Mit der École Polytechnique war

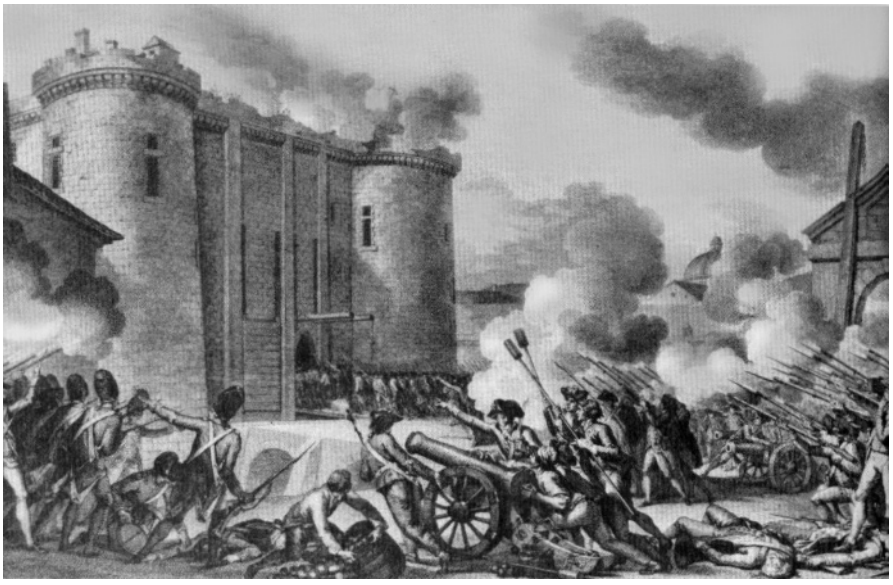


Abb. 6.0.2. Sturm auf die Bastille 1789
[aus Belhoste, Bruno: A.-L. Cauchy. Springer Berlin 1991]

1794 in Paris ein neuer Typ von höherer Bildungseinrichtung geschaffen worden, der die neuen Anforderungen an Wissenschaft und Technik besser umsetzen sollte als es bisher durch die Universitäten und Akademien geschehen war und der gewährleisten sollte, daß der Bedarf an gut ausgebildeten Militär- und Zivilingenieuren gedeckt werden konnte. Sehr bald entstanden in anderen europäischen Staaten ebenfalls polytechnische Schulen, die sich deutlich am Pariser Vorbild orientierten, doch ebenso klar den regionalen Bedürfnissen Rechnung trugen. Derartige Schulen wurden u. a. in Prag, Wien, Karlsruhe, München, Dresden und Zürich gegründet. Die institutionellen Veränderungen bezüglich der Bildungseinrichtungen bestärkten außerdem die schon im Zuge der verschiedenen Strömungen der Aufklärungsphilosophie in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts in Gang gekommene Diskussion um eine Reform des Bildungswesens, die sich nun in den Lehrplänen der École Polytechnique bzw. École Normale niederschlugen. In vielen europäischen Ländern formierten sich pädagogische Reformbewegungen. In Preußen leitete Wilhelm v. Humboldt (1767–1835) mit seinen auf dem klassisch idealistischen Humanismus fußenden Ideen eine umfassende Reform des Bildungswesens ein und realisierte am Beispiel der Berliner Universität ein neues modernes Universitätskonzept, das sehr rasch von anderen Ländern übernommen wurde. Aus all diesen Veränderungen resultierte eine Neubewertung der Naturwissenschaften und Mathematik, die wesentlich die Entwicklung in der nächsten Periode prägte.



Abb. 6.0.3. Hügel von Sainte Genevieve 1840. Vorn die École Polytechnique, in der Mitte das Collège Henri IV, einst die École Centrale du Panthéon, welche der junge Cauchy 1802 besuchte.
[aus Belhoste, Bruno: A.-L. Cauchy. Springer Berlin 1991]

Die Mathematik des 18. Jahrhunderts wurde zweifellos von der Entwicklung der Analysis dominiert. Zu beeindruckend waren die Erfolge, die die Infinitesimalmathematik bei der Behandlung mathematischer und physikalischer Probleme erzielte, und selten war die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Physik intensiver als in diesen Jahrzehnten. Viele neue Resultate in der Analysis wurden in dem Bestreben erzielt, physikalische Fragestellungen zu lösen. Dabei war das Ganze ein innermathematischer Prozeß, denn Gebiete wie Mechanik, Optik, Astronomie, Geodäsie aber auch Architektur und Ballistik zählten im Mathematikverständnis jener Zeit noch zu den mathematischen Wissenschaften.

In den ersten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts begann eine Neuorientierung im mathematischen Denken, die eine Sicherung der Grundlagen mathematischer Betrachtung stärker in den Mittelpunkt rückte. Die großen Erfolge und das rasche Voranschreiten der Analysis basierten allzuoft auf Begriffen und Methoden, deren exakte Fundierung heftig umstritten war. Nicht selten waren die unklare Formulierung von Begriffen oder ihre an der Anschauung orientierte Begründung Ursache von falschen Ergebnissen gewesen. Diese kritische Durcharbeitung der Grundlagen brachte z. B. in der Analysis eine exakte Definition solcher Begriffe wie Grenzwert, Stetigkeit einer Funktion und Konvergenz einer Reihe, warf aber auch das Problem auf, bei den verschiedenen Studien stärker die Frage nach der Existenz der einzelnen ma-

thematischen Objekte zu beachten, d. h. Existenzbeweise zu führen. Zwar stand bei dieser Verschärfung der Grundlagen die Analysis im Mittelpunkt, doch wirkten die allgemeinen Forderungen nach einer sorgfältigen, exakten Definition der Begriffe und Methoden sowie einer Sicherung der Existenz der mathematischen Objekte auch in anderen mathematischen Teildisziplinen, wie Algebra und Arithmetik.

Wenn die Algebra auch nicht im Mittelpunkt des Interesses der Mathematiker des 18. Jahrhunderts stand, so vollzogen sich trotzdem in ihr wesentliche Veränderungen. Die von Vieta, Descartes u. a. eingeleitete Entwicklung erhielt eine weitere Ausprägung. Die vielfältigen Erfolge der Analysis führten insbesondere zu einer Aufwertung der arithmetischen Größen gegenüber den geometrischen. Durch die Arbeiten Descartes' waren zudem enge Beziehungen zwischen beiden Bereichen hergestellt und die große Allgemeinheit der arithmetischen Lösung eines geometrischen Problems verdeutlicht worden. Mit der Einführung der infinitesimalen Größen konnten auch die arithmetischen Größen in gewissem Sinne als stetig betrachtet werden, im Gegensatz zu dem bis dahin vorherrschenden diskreten (unstetigen) Charakter der Zahlen. Ein grundsätzliches Unterscheidungsmerkmal zu den geometrischen Größen fiel damit weg. Die etwa im gleichen Zeitraum erfolgende Anwendung mathematischer Symbole und des Rechnens mit ihnen in Form der Buchstabenrechnung ließen zwei neue Wesenszüge der Algebra deutlich hervortreten. Zum ersten dokumentiert dieses Vorgehen die allgemeine Tendenz zur Symbolisierung und zum kalkülmäßigen Erfassen von Rechnungen. Zum zweiten verkörperte die Algebra in dieser Form die analytische Methode.

6.1 Die Begründung des Rechnens in den gewöhnlichen Zahlbereichen

In der Buchstabenrechnung standen die Buchstaben stellvertretend für nicht näher bestimmte Größen, speziell für arithmetische Größen aus einem gewissen Zahlbereich. Dieser konnte, obwohl die formale Rechnung unverändert blieb, durchaus sehr unterschiedlich sein. Im Verlauf bzw. im Ergebnis dieser formalen Rechnungen konnte man sehr schnell auf Ausdrücke stoßen, die beim Einsetzen konkreter Zahlen aus dem betrachteten Zahlbereich herausführten, etwa zu den negativen bzw. imaginären Zahlen. Um dieses Problem zu beseitigen, war eine exakte Fundierung des Zahlensystems unumgänglich. Durch das Rechnen mit Symbolen erhielt die Buchstabenrechnung den Charakter einer universellen Arithmetik, wie es Newton bereits mit dem Begriff *„universal arithmetick“* zum Ausdruck gebracht hatte. Diese universelle Arithmetik wurde deutlich von der gewöhnlichen Arithmetik unterschieden und zur Algebra gerechnet. Euler sah in seiner *„Anleitung zur Algebra“* den Unterschied der Arithmetik zur Algebra darin, daß die Arithmetik nur gewisse Berechnungsmethoden der Praxis umfaßte, während die Algebra im allgemeinen alle



Wilhelm von Humboldt



Immanuel Kant

Fälle enthielt, die in den Rechnungen mit Zahlen auftreten konnten. [Euler 1796, S. 2] Man sah in der Algebra eine Möglichkeit, das Rechnen mit Zahlen zu begründen. Die Notwendigkeit, die Zahlbereiche und das Rechnen mit den Zahlen neu zu begründen, ergab sich auch aus den allgemeinen Anforderungen an eine exakte Theorie in jener Zeit. Das Ideal war in dieser Hinsicht immer noch die Geometrie in der von Euklid geprägten Form. Von diesem streng deduktiven Aufbau, bei dem die Grundbegriffe in Definitionen und die fundamentalen Voraussetzungen in Axiomen und Postulaten fixiert wurden, waren Arithmetik und Algebra noch weit entfernt.

Schon die Frage, ob die negativen bzw. imaginären Zahlen existierten, ob man sie als mathematische Größen anerkennen kann, war sehr umstritten. Für den bedeutenden Philosophen Immanuel Kant (1724–1804) war z. B. der *„Gedanke, ... als wenn negative Größen weniger als Nichts wären, ... nichtig und ungereimt“.* [Kant, S. 215] Ähnlich ablehnend äußerten sich etwa Lazare Carnot in Frankreich und William Frend (1757–1841) in England. Viele Mathematiker erkannten die Eigenständigkeit der negativen Zahlen an und bemühten sich um deren Begründung. In Deutschland fand vor allem die Interpretation der negativen Zahlen als entgegengesetzte Größe große Verbreitung, wie sie der als Lehrbuchautor sehr erfolgreiche Göttinger Mathematikprofessor Abraham Gotthelf Kästner 1758 in seinem Buch *„Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspektiv“* dargelegt hatte. Eine befriedigende Lösung der auftretenden Schwierigkeiten gelang damit aber nicht.

Ähnlich verhielt es sich mit dem Gebrauch der imaginären Zahlen. Neben der Rolle, die sie bei der Lösung der allgemeinen Gleichung dritten und vierten Grades spielten (vgl. Kap. 5), hatten sie sich dann bei vielen Anwendungen in der Analysis als sehr nützlich erwiesen. In der Begründungsproblematik

bestand der entscheidende Unterschied zu den negativen Zahlen aus heutiger Sicht darin, daß mit den komplexen Zahlen erstmals eine Algebra mit zwei Basiselementen vorlag. Doch dies mußte erst in mühsamer Detailforschung erkannt werden.

Gleichgültig, ob bezüglich der negativen oder der komplexen Zahlen, stets wurden die Mathematiker auf die Frage der Verknüpfung von Größen geführt. Wenn man das Rechnen mit diesen Zahlen auf eine ähnliche methodische Basis wie die Geometrie stellen wollte, mußte man die Eigenschaften herausfinden, die das Rechnen in dem jeweiligen Zahlbereich charakterisierten. Dieser Trend wurde sowohl durch die aufkommende Forderung nach Lehrbarkeit der Mathematik als auch durch die Anwendung der Buchstabenrechnung und das kalkülmäßige Erfassen von Rechenmethoden verstärkt. Bei einer lehrbuchmäßigen, systematischen Darstellung des Rechnens in den einzelnen Zahlbereichen war die Hervorhebung einzelner Rechenregeln gegenüber anderen nahezu unumgänglich, wollte man sich nicht in einer Fülle von Gleichungen und Rechenvorschriften verlieren. Dies galt im verstärkten Maße für die Buchstabenrechnung, da durch den höheren Allgemeinheitsgrad der Drang zur Abstraktion entsprechend größer war.

All diese Bestrebungen kamen zum Ende des 18. Jahrhunderts deutlicher zum Ausdruck und lassen sich etwa mit einem Blick auf die Lehrbuchliteratur jener Zeit belegen. So verzichtete Wenceslaus Johann Karsten in seinem Lehrbuch von 1782 noch weitgehend auf den Gebrauch der Buchstabensymbole, erkannte aber die Subtraktion als die zur Addition entgegengesetzte Operation, ebenso die Division im Bezug zur Multiplikation, und formulierte verbal die Kommutativität der Multiplikation und das Distributivgesetz. Einen weiteren Fortschritt markierten die von Johann Joseph Anton Ide 1803 edierten *„Anfangsgründe der reinen Mathematik“*. Ide begann darin mit einer recht allgemeinen Betrachtung über das Operieren mit Dingen (Objekten), die dann den Charakter von Größen erhielten. Er unternahm auch den deutlichen Versuch, aus der Vielzahl der Relationen, die für die verknüpften Größen galten, einige auszusondern und an die Spitze zu stellen. Alle anderen Beziehungen waren dann aus diesen Relationen ableitbar. Insbesondere wählte er das Kommutativgesetz der Addition und Multiplikation, das Distributivgesetz und das Assoziativgesetz der Multiplikation als solche grundlegende Relationen aus. Ob Ide diese Ideen weiter ausbauen konnte, ist nicht bekannt. Nachdem er zunächst als Privatgelehrter in Göttingen gelebt hatte, wurde er 1803 Mathematikprofessor an der Universität Moskau, wo er bereits drei Jahre später im Alter von 31 Jahren verstarb.

Einen Höhepunkt erreichte diese Entwicklung mit Martin Ohm und seinem mehrbändigen *„Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik“*, dem einzigen umfassenden Versuch einer logisch dargelegten Interpretation des arithmetisch-algebraischen Bereichs [Novy 1973, S. 83]. Ohm war der Bruder des bekannten Physikers Georg Simon Ohm und wirkte ab 1821 an der noch jungen Berliner Universität. Er vereinigte viele der in den



Bernard Bolzano



Martin Ohm

einzelnen Schriften anderer Mathematiker enthaltenen Aspekte. Er rückte die Operationen in den Mittelpunkt der Betrachtungen, nicht die Eigenschaften von Größen waren für ihn entscheidend, sondern die Eigenschaften der Operationen.

„In den verschiedensten Erscheinungen des Kalkuls ... erblickt der Verf. nicht Eigenschaften der Größen, sondern Eigenschaften der Operationen, welche letztere aus der Betrachtung der Zahl mit Nothwendigkeit hervorgehen, und welche Gegensätze und Beziehungen äußern, die in dem ganzen physischen und psychischen Haushalte der Natur allenthalben sich wieder nachweisen lassen.“ [Ohm 1828, S. VII]

Bei den verknüpften Objekten überschritt er jedoch nicht den traditionellen Rahmen, d. h. er hatte stets die Verknüpfung von Größen im Sinn, und orientierte sich deutlich an dem Rechnen mit Zahlen. Die grundlegenden Eigenschaften der Operationen wurden von ihm herausgebildet und als *„Lehrsaetze“* zusammengefaßt. Diese Lehrsätze behandelte er wie Axiome und vermerkte, daß alle weiteren Relationen aus ihnen ableitbar sind (vgl. auch [Novy 1973, S. 83ff.], [Bekemeier 1987], [Schlote 1988, S. 13ff.]). Ja, er argumentierte sogar, daß diese die jeweilige Verknüpfung bestimmenden Lehrsätze beim Übergang zu allgemeineren Größen erhalten bleiben, was sehr an das von George Peacock formulierte Permanenzprinzip erinnert. Die klare Darstellung und die Zusammenfassung der einzelnen Vorstellungen über das Zahlensystem, die Hervorhebung der grundlegenden Verknüpfungsgesetze für die Operationen in dem jeweiligen Zahlbereich und der Umfang des erfaßten Stoffgebietes zeichneten Ohms Werk aus und führten dazu, daß einige Zeitgenossen und nachfolgende Generationen daran anknüpften.

Aus der Vielzahl der Mathematiker, die sich mit dem Aufbau des Zahlensystems beschäftigt haben, sei noch der böhmische Philosoph und Religions-

wissenschaftler Bernard Bolzano erwähnt, da er sich von einem allgemeinen philosophischen Standpunkt des Problems annahm. Er strebte einen einheitlichen Aufbau der Mathematik auf der Basis einer klaren Bestimmung der Begriffe, der logischen Schlußweisen und der Relationen zwischen den Begriffen an. Da die Größenlehre, die er der Zahlenlehre voranstellte, unvollendet geblieben ist, fehlt der für die Algebra interessante Fall der Einführung von zwei Verknüpfungen und der dann geltenden Verknüpfungsregeln. Dies führte Bolzano nur in der Zahlenlehre durch, wobei er zwei Distributivgesetze angab, die Kommutativität der Multiplikation also nicht als selbstverständlich annahm. Interessant ist die Einführung der Addition in den allgemeinen Darlegungen der „Größenlehre“, sie erfolgte mit Hilfe des zuvor definierten Funktionsbegriffs, rückte also ebenfalls die Operation anstelle der verknüpften Größen in den Blickpunkt. Obwohl Bolzano viele Zeitgenossen in der Exaktheit der Darlegungen, etwa zu den Zahlbereichen und den Operationen in ihnen, übertraf, war jedoch die Wirkung seiner Schriften auf den weiteren Fortschritt der Algebra gering. Sein Schaffen belegt aber, aus welch unterschiedlichen Perspektiven Mathematiker diese Problematik in Angriff nahmen. Bolzanos geringer Einfluß war seiner isolierten Stellung und den geringen Publikationsmöglichkeiten geschuldet. Nachdem er 1819 von seiner Theologieprofessur wegen gesellschaftskritischer Äußerungen entbunden worden war, lebte er über 20 Jahre sehr zurückgezogen. Seine nachgelassenen Schriften, insbesondere zur Logik und zur Analysis, weisen ihn als einen bedeutenden Mathematiker der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts aus.

6.2 Die Begründung der komplexen Zahlen

Noch schwieriger gestaltete sich, wie eingangs schon erwähnt, die Anerkennung der imaginären Zahlen. Entsprechend der Vorgehensweise bei den negativen Zahlen sahen viele Mathematiker in der Angabe einer geometrischen Darstellung für diese Zahlen, mit der zugleich auch die Rechenoperationen mit diesen Zahlen ausgeführt werden konnten, ein geeignetes Mittel zur Begründung der imaginären Zahlen. Einen ersten derartigen Ansatz lieferte bereits der als Geistlicher tätige und ab 1649 als Mathematiker aktive Engländer John Wallis für rein imaginäre Größen im Jahre 1685. Er betrachtete die Wurzel aus einer negativen Zahl als mittlere geometrische Proportionale aus einer positiven und einer negativen Zahl. Diese Proportionale wurde senkrecht zur Zahlenachse abgetragen. Wallis sah aber darin keine exakte Begründung der komplexen Zahlen und lehnte ihre Benutzung ab. In diesem Sinne hat die Wallissche Arbeit die Anerkennung der komplexen Zahlen nicht befördert.

Auch wenn in dem folgenden Jahrhundert das Wesen und die Benutzung komplexer Zahlen von mehreren bedeutenden Mathematikern diskutiert wurde – der erste, der einen wichtigen Fortschritt bezüglich der Begründung dieser Zahlen erzielte, war der dänische Mathematiker und Geodät Caspar Wessel.

In einer der Dänischen Akademie der Wissenschaften 1796 vorgelegten Abhandlung stellte er die komplexen Zahlen als gerichtete Strecken in der Ebene dar. Wessel hatte jedoch ein umfassenderes Ziel: er wollte eine geometrische Methode schaffen und griff dabei Leibnizsche Gedanken zur Formulierung eines geometrischen Kalküls wieder auf. Für die Aufstellung dieses geometrischen Kalküls widmete er sich besonders den Regeln, die in dem Kalkül gelten sollten und orientierte sich an den Rechenregeln der Arithmetik. Ohne auf die entsprechenden Begriffe zurückgreifen zu können, formulierte er diese Regeln, etwa das Kommutativ- und das Assoziativgesetz. Er verwendete den Begriff der Einheit, wählte vier Einheiten $(1, \varepsilon, -1, -\varepsilon)$ und gab die Multiplikation dieser Einheiten an, letzteres unter Rückgriff auf die geometrische Darstellung der Einheiten und die Regel, daß der Richtungswinkel des Produktes gleich der Summe der Richtungswinkel der Faktoren ist. Erst dann stellte er fest, daß $\varepsilon = \sqrt{-1}$ ist, die komplexen Zahlen sich seinen Betrachtungen also unterordnete, und daß er das Produkt so bestimmt hatte, daß es keiner der gewöhnlichen Rechenregeln widersprach. Eine beliebige Größe ließ sich stets als (reelle) Linearkombination von zwei Einheiten darstellen und das Produkt derartiger Größen war durch die Multiplikation der Einheiten eindeutig festgelegt, wobei Wessel implizit das Distributivgesetz voraussetzte. Damit enthielten Wessels Untersuchungen viele interessante Ideen im Vorfeld der Herausbildung abstrakter algebraischer Strukturüberlegungen. Auf Grund des Strebens nach einer geometrischen Methode versuchte Wessel dann seine Methode auf dreidimensionale Größen auszudehnen. Er führte eine weitere Einheit ein. Es gelang ihm aber nicht, die Multiplikation für beliebige dreidimensionale Größen zu definieren, sondern nur für spezielle Größen. Diese Verknüpfung – Wessel sprach wohl bewußt nicht von einer Multiplikation – verletzte das Kommutativ-, das Assoziativ- und auch das Distributivgesetz, reichte aber zur Lösung von Wessels praktischen Anwendungsproblemen aus. Die Arbeit wurde erst etwa 100 Jahre nach ihrer Erstveröffentlichung wiederentdeckt und in französischer Übersetzung publiziert. Zum 200. Jahrerstag des Erscheinens der Wesselschen Originalarbeit würdigte die Dänische Akademie die Leistungen Wessels mit einem Symposium und zwei Publikationen, von denen eine die erste Übersetzung von Wessels Arbeit ins Englische enthielt [Branner/Lützen 1999].

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts erschienen mehrere weitere Arbeiten zur Begründung der komplexen Zahlen. Adrien Quentin Buée (1805) interpretierte $\sqrt{-1}$ als Symbol für das Senkrechtstehen und gelangte zu einer entsprechenden geometrischen Darstellung komplexer Zahlen. Ein Jahr später veröffentlichte Jean Robert Argand eine Darstellung „der imaginären Größen durch geometrische Konstruktion“. Er kombinierte die Vorstellungen von Größe und Richtung, wie er sie bei den negativen Zahlen realisiert sah und wollte das System der reellen Zahlen entsprechend erweitern. Den Übergang von einer positiven Zahl a zu $-a$ deutete er als die zweimalige Anwendung einer Operation, die a zunächst in eine nicht näher bestimmte Größe x und die-

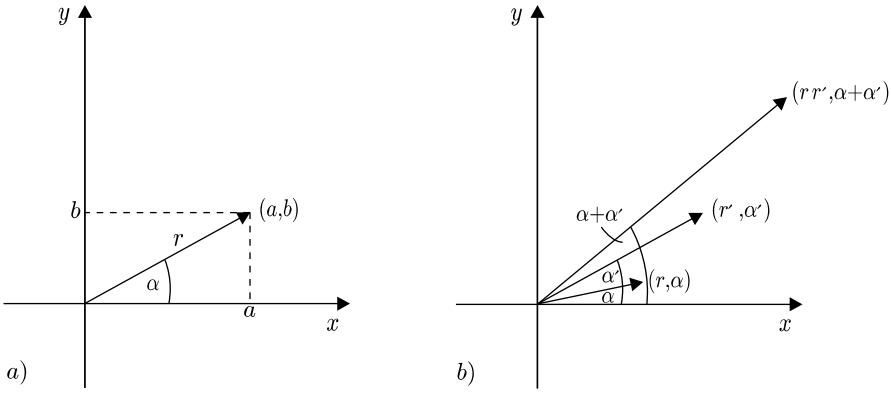


Abb. 6.2.4. a) Geometrische Interpretation komplexer Zahlen, b) Multiplikation komplexer Zahlen in Polarkoordinaten

se in $-a$ transformierte. Gleiches wurde durch die Multiplikation mit $\sqrt{-1}$ bzw. geometrisch anschaulich durch Drehung der Strecke OA (der Länge a) um 90° geleistet. Argand interpretierte folglich $\sqrt{-1}$ als Operation, die eine Drehung der die nachfolgende Zahl repräsentierenden Strecke um 90° (im mathematisch positiven Drehsinn) bewirkte. Mit diesem Konzept konnte er die Rechenoperationen mit komplexen Zahlen geometrisch ausführen und bewies verschiedene Sätze der Geometrie und Trigonometrie. Obwohl Argands Idee sieben Jahre später, 1813, von Jacques Frédéric Français, Joseph-Diaz Gergonne, François-Joseph Servois und Argand selbst in mehreren Artikeln nochmals diskutiert wurde, blieb ihr ein spürbarer Einfluß auf die weitere Entwicklung versagt. Erst 1847 entriß sie Augustin-Louis Cauchy der völligen Vergessenheit. Inzwischen hatten aber zahlreiche Mathematiker, unter ihnen John Warren, George Peacock, Carl Friedrich Gauß und Cauchy, eigene Beiträge zu dieser Frage geleistet. In diesem Rahmen kann lediglich noch auf den Beitrag von Gauß eingegangen werden.

Gauß hatte sich immer wieder seit frühester Jugend mit der Begründung der imaginären Zahlen auseinandergesetzt. Bereits in seiner Dissertation, in der er noch auf eine Anwendung der imaginären Zahlen verzichtete, plädierte er für eine Anerkennung derselben. Die Einführung dieser Größen müsse aber mit großer Sorgfalt erfolgen und man könne nicht a priori annehmen, daß für diese Größen die Rechenregeln wie für die reellen Zahlen gelten. In den *„Disquisitiones arithmeticae“* beklagte er, daß die Theorie der imaginären Größen *„nach unsrer Ansicht bisher von Niemand auf klare Begriffe zurückgeführt worden“* sei [Gauß 1889, S. 63]. 1831, in der Anzeige seiner Arbeit zur Theorie der biquadratischen Reste faßte er seine Ansichten über die imaginären Größen zusammen:

„Der Verf. nennt jede Grösse $a + bi$ *, wo* a *und* b *reelle Grössen bedeuten, und* i *der Kürze wegen anstatt* $\sqrt{-1}$ *geschrieben ist, eine complexe ganze Zahl, wenn zugleich* a *und* b *ganze Zahlen sind. Die complexen Grössen stehen also nicht den reellen entgegen, sondern enthalten diese als einen speciellen Fall, wo* $b = 0$ *, unter sich ...“* [Gauß, Werke, Bd. 2, S. 171]
„Die Versetzung der Lehre von den biquadratischen Resten in das Gebiet der complexen Zahlen könnte vielleicht manchem, der mit der Natur der imaginären Grössen weniger vertraut und in falschen Vorstellungen davon befangen ist, anstössig und unnatürlich scheinen, und die Meinung veranlassen, daß die Untersuchung dadurch gleichsam in die Luft gestellt sei, eine schwankende Haltung bekomme, und sich von der Anschaulichkeit ganz entferne. Nichts würde unbegründeter sein, als eine solche Meinung. Im Gegenteil ist die Arithmetik der complexen Zahlen der anschaulichsten Versinnlichung fähig. ...“ [Gauß, Werke, Bd. 2, S. 174]

Auf wenigen Seiten legte Gauß die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen in aller Klarheit dar. Zugleich hatte er mit den eingangs getroffenen Festlegungen eine Standardbezeichnung für die komplexen Zahlen geschaffen, die sich nach und nach durchsetzte. Zum Schluß vermerkte er zur Rechtfertigung seines Eingehens auf die Theorie der komplexen Zahlen:

„Wir haben geglaubt, den Freunden der Mathematik durch diese kurze Darstellung der Hauptmomente einer neuen Theorie der sogenannten imaginären Grössen einen Dienst zu erweisen. Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichtspunkt betrachtet und eine geheimnisvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dies grossentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1, -1, \sqrt{-1}$ *nicht positive, negative, imaginäre (oder unmögliche) Einheit, sondern etwa directe, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können.“* [Gauß, Werke, Bd. 2, S. 177f.]

Schließlich versprach Gauß für eine spätere Arbeit die Beantwortung der Frage *„warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können.“* [Gauß, Werke, Bd. 2, S. 178]
Obwohl Gauß die Beantwortung dieser Frage schuldig blieb, so wirkte diese Fragestellung noch Jahrzehnte später äußerst anregend für weitere algebraische Untersuchungen. Zugleich hob Gauß mehrmals hervor, daß die geometrische Darstellung nicht zur Rechtfertigung der komplexen Zahlen ausreicht, sondern dies in einer allgemeinen Theorie oder, wie er es 1849 ausdrückte, in einem *„höhern von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstracten Grössenlehre“* [Gauß, Werke, Bd. 3, S. 79] erfolgen müsse. Mit diesem Verweis auf eine allgemeine Theorie rückte Gauß eine abstraktere Herangehensweise stärker ins Blickfeld und lenkte die Aufmerksamkeit auf algebraische, strukturelle Überlegungen. Da die obigen Zitate aus der hier

betrachteten Periode herausfallen, dokumentieren sie zugleich die im nachfolgenden Zeitabschnitt beginnende Zunahme algebraisch struktureller Betrachtungen.

Auch nach den Gaußschen Publikationen dauerte es noch längere Zeit bis die komplexen Zahlen allgemeine Anerkennung fanden. So ist es nicht verwunderlich, daß in den folgenden Jahren weitere Arbeiten zur geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen publiziert wurden, auf die aber hier nicht eingegangen werden kann. Noch 1867 beklagte Hermann Hankel in seinem Buch *„Theorie der complexen Zahlensysteme“*, daß von den meisten Mathematikern die Theorie der komplexen Zahlen nur unzureichend dargeboten werde. Dabei hatte Hankel wohl nicht nur eine bloße Rechtfertigung der komplexen Zahlen etwa durch eine geometrische Darstellung im Blick, sondern eine umfassende Theorie dieser Zahlen, wie er sie dann präsentierte.

Aus der Zeit bis zur Jahrhundertmitte seien noch zwei Arbeiten hervorgehoben, die Begründung der komplexen Zahlen durch William Rowan Hamilton und Augustin-Louis Cauchy. Ausgehend von einer eigenen Interpretation philosophischer Ideen Kants strebte Hamilton einen Aufbau der Algebra als Wissenschaft der reinen Zeit an und fand in diesem Kontext 1833 eine logisch einwandfreie arithmetische Begründung der komplexen Zahlen. Er deutete die komplexe Zahl $a + bi$ als Zahlenpaar (a, b) und definierte die Addition bzw. Multiplikation durch die Gesetze

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2)\\ (a_1, b_1)(a_2, b_2) &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1).\end{aligned}$$

Für die so definierten Operationen wies er die üblichen Rechenregeln nach (vgl. Aufgabe 6.2.1). Modern ausgedrückt könnte man sagen, daß die Menge der Zahlenpaare mit den obigen Operationen einen Körper bilden und die Zahlenpaare zu den von Gauß geometrisch interpretierten Zahlen isomorph sind, also mit den komplexen Zahlen identifiziert werden können. Dabei entwickelte Hamilton weitere interessante algebraische Überlegungen, die ihn schließlich zur Entdeckung der Quaternionen führten (vgl. Kap. 7.4.1).

Die 1847 von Cauchy vorgestellte Begründung der komplexen Zahlen belegte ebenfalls die inzwischen fortgeschrittene Entwicklung der Algebra. Er griff auf die von Gauß begründete Theorie des Rechnens mit Restklassen zurück und definierte die komplexen Zahlen durch algebraische Kongruenzen modulo $x^2 + 1$ (vgl. Aufg. 6.2.2).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß im Bemühen um eine lehrbuchhafte Präsentation des arithmetischen Rechnens und eine Begründung desselben in den verschiedenen Zahlbereichen sowie des Buchstabenrechnens die Aufmerksamkeit der Mathematiker stärker auf abstraktere algebraische Überlegungen gelenkt wurde und u. a. zu einer Hervorhebung der geltenden Rechenregeln führte.

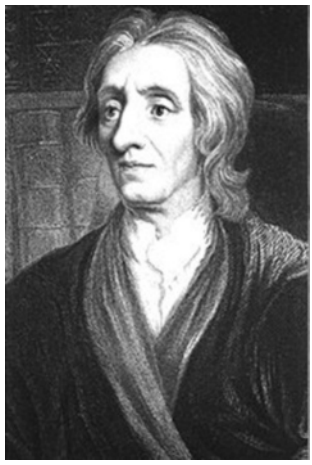
6.3 Algebra als Methode

Es sei noch auf einen zweiten Trend in der Entwicklung der Algebra dieser Zeit verwiesen. Mit dem Aufschwung der Analysis und der deutlichen Hinwendung zu formelmäßigen Ableitungen gelangte die Algebra zugleich in den Status einer Methode, neue Resultate zu gewinnen. Die Algebra galt faktisch als Verkörperung der analytischen Methode. Die Werke von Euler, Clairaut und Lagrange enthielten vielfältige Anwendungen für diese Methode. Diese enge Verknüpfung von Algebra und analytischer Methode führte nahezu direkt zu den Auseinandersetzungen um die richtige Wissenschaftsmethodologie und zu philosophischen Bestrebungen. Die Diskussion um die Wissenschaftsmethodologie galt vor allem der Frage, ob der analytischen oder der synthetischen Methode die Priorität bei der Ableitung und Begründung von Resultaten zukomme. Mit Newton und der Rezeption seines Werkes hatte die Analyse als Wissenschaftsmethode einen starken Impuls erhalten und wurde in Frankreich zur vorherrschenden Methode in den Wissenschaften. Doch während die analytische Methode in den Naturwissenschaften deutlich dominierte, lehnten sie zahlreiche Mathematiker ab und legten ihre Resultate deduktiv im Stile der euklidischen Tradition dar. Die Anhänger der beiden Methoden hoben mehrfach die Vorteile der jeweils von ihnen bevorzugten Methode sowie die Schwächen der anderen hervor und ordneten die einzelnen mathematischen Teilgebiete der Analyse oder der Synthese zu. Prototyp einer synthetisch aufgebauten Disziplin war die Geometrie; aber auch Untersuchungen, die die Beweise der Resultate in geometrischer Sprache präsentierten und nicht auf algebraische Mittel zurückgriffen, zählten zu dieser Kategorie, so etwa Arbeiten zur Fluxionenrechnung von Newton und seinen Anhängern. Zur Analyse wurden all jene Gebiete gerechnet, die mittels algebraischer Überlegungen, insbesondere durch Benutzung von Gleichungen, eine Lösung der behandelten Probleme anstrebten. Ein Beispiel war die Infinitesimalmathematik Leibnizscher Prägung. Die Auseinandersetzung um die Wissenschaftsmethodologie basierte auf dem Faktum, daß die analytische Methode sehr erfolgreich bei der Lösung der verschiedensten Probleme angewandt wurde, die Methode selbst in ihrer begrifflichen Fundierung und dem streng logischen Aufbau aber sehr unsicher war und darin nicht den Normen der Zeit entsprach. Die Synthesis besaß zwar die gewünschte Klarheit sowie mathematische Strenge und konnte auf eine lange erfolgreiche Anwendung in pädagogisch–didaktischer Hinsicht bei der Vermittlung mathematischen Wissens verweisen, aber zahlreiche neuere Probleme der Naturwissenschaften ließen sich nur schwer mit synthetischen Methoden behandeln.

Die Diskussion um die Wissenschaftsmethodologie ist von verschiedenen philosophischen Ansichten beeinflußt worden. Für die Entwicklung der Algebra waren besonders die von Étienne Bonnot de Condillac hervorgebrachten Ideen von Bedeutung. Auf der Basis des Empirismus von John Locke stehend, hatte Condillac 1746 in dem *„Essai sur l'origine des connaissance humaines“* verschiedene Ideen dieser Philosophie weiter ausgebaut und u. a. das



Étienne Bonnot de Condillac



John Locke

Problem des Ursprungs der Sprache genauer studiert, das für Jahrzehnte eine außerordentlich eifrig diskutierte Thematik in der Aufklärungsphilosophie wurde. Die Berliner Akademie der Wissenschaften stellte die Frage nach dem Sprachursprung als Preisaufgabe, nachdem sie fast 20 Jahre in der Akademie erörtert worden war. Der Preis wurde Johann Gottfried Herder 1771 für seine *„Abhandlung über den Ursprung der Sprache“* zuerkannt, der auch mit zahlreichen weiteren theoretischen Arbeiten die europäische Geistesgeschichte spürbar beeinflußte. Condillac versuchte in seinem *„Essai ...“* und nachfolgenden Schriften zu zeigen, wie der Prozeß der Sprachentstehung von den Sinneswahrnehmungen bis zu den Denkoperationen führt. Dabei kam er zu wichtigen Einsichten in die Rolle einer Sprache für das Denken, für die Formulierung der Ergebnisse von Denkoperationen, über die Bedeutung von Zeichen und Zeichensystemen zur Fixierung und Handhabung von Ideen u. a. Sein Ziel war die Schaffung einer universellen Methode zum Aufbau der Wissenschaften sowie eine sensualistische Begründung von Mathematik und Logik. Die universelle Methode, die er durch eine von ihm verbesserte Analyse verkörpert sah, bringt bei Anwendung auf eine Wissenschaft in derselben eine bestimmte Wissenschaftssprache hervor. Die Qualität der Sprache bestimmt nun den Entwicklungsstand der jeweiligen Wissenschaft und das Maß der Vollkommenheit bei der Anwendung der Methode. Eine unvollkommene Sprache bedingt Mängel in der Methode und ist oft Ursache von Irrtümern in der Wissenschaft [Condillac, S. 119–123]. Als Beispiel für seine These verwies Condillac auf die Mathematik und speziell auf die Algebra. Letztere sah er in einer Doppelfunktion, als analytische Methode und als Sprache der Mathematik. Condillac reduzierte damit Fortschritte der Mathematik generell auf formale (sprachliche) Aspekte. Zwar ist diese These in der von Condillac vertretenen Ausschließlichkeit falsch, wirkte in jener Phase jedoch positv

für die Entwicklung der Algebra, da die Betonung der Sprache eine begriffliche Klärung und logische Strukturierung förderte. Condillacs Sprachkonzept wurde von verschiedenen Gelehrten auch in anderen Wissenschaftsdisziplinen erfolgreich umgesetzt, etwa von Antoine Laurent de Lavoisier in der Chemie.

Condillacs Ideen stimulierten in der Mathematik die Tendenz zur Abstraktion und Formalisierung. Sehr klar brachte er die Vorteile einer exakten Symbolik zum Ausdruck:

„Das Rechnen und das Schließen mit algebraischen Zeichen erfordert fast kein Gedächtnis: die Zeichen stehen vor Augen, der Geist führt die Feder, und die Lösung findet sich mechanisch.

Das Gedächtnis wird vor allem beim Schließen und Rechnen mit Wörtern notwendig, und oft reicht es nicht aus.“ [Condillac, S. 242f.]

Weiterhin betonte er, daß sich mit der Lösung eines Problems zugleich die Lösung weiterer ähnlicher Probleme ergibt, hob die Ausnutzung von Analogien bei der Anwendung seiner Methode hervor und lenkte die Aufmerksamkeit auf die Operationen mit Symbolen. Er betrachtete die Operationen als formale Verknüpfungen und löste sie deutlich von den verknüpften Objekten ab. Damit hatte Condillac im philosophischen Kontext wichtige Ideen formuliert, die bei dem Voranschreiten zu abstrakteren Auffassungen in der Mathematik und speziell der Algebra eine zentrale Rolle spielten. Dabei ist auch zu bedenken, daß im 18. Jahrhundert die Verbindung zwischen Mathematik und Philosophie wesentlich enger war als in der Moderne und uns zahlreiche Gelehrte jener Zeit als würdige Vertreter beider Disziplinen entgegentreten. Man denke nur an Leibniz, Euler und d'Alembert. Es handelt sich um ein schönes Beispiel fruchtbarer Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Philosophie. Für eine ausführlichere Darstellung sei auf [Schlote 1988] verwiesen.

Die Vorstellung von der Algebra als Sprache der Mathematik war keine originäre Schöpfung von Condillac. So finden sich Ansätze dazu bereits bei Leibniz und Newton, und Clairaut hatte 1748 in seinen *„Elements d'Algèbre“* die Algebra explizit als Sprache bezeichnet. Condillac hat sich klar in diese Traditionslinie gestellt und ausdrücklich auf Clairaut, Euler und Lagrange in seinen um 1780 verfaßten Werken Bezug genommen. Speziell in Eulers *„Vollständige Anleitung zur Algebra“* sah er eine mustergültige Umsetzung der analytischen Methode in der Mathematik. Viele Mathematiker rezipierten die Condillacschen Gedanken als eine Bestätigung ihres bisherigen Schaffens und griffen entsprechende Anregungen auf. Gelegentliche Übertreibungen wie bei Lagrange, der in seiner *„Functionen-Rechnung“* die *„Differential-Rechnung mit der Algebra, von welcher sie bis jetzt getrennt war“*, vereinigen wollte und die Algebra sogar als die der Differential- und Integralrechnung übergeordnete Disziplin ansah, verdeutlichen, welche Kraft die Tendenz zur Symbolisierung und zum Aufbau von Kalkülen am Ende des 18. Jahrhunderts gewonnen hatte, aber auch wie eng die Beziehungen zwischen Algebra und Analysis (als mathematisches Teilgebiet, nicht als allgemeine Methode!) waren.

Ein sehr eindrucksvolles Beispiel für das enge Wechselspiel der beiden Disziplinen ist die sogenannte Operatorenrechnung,deren Prinzip erstmals von Louis François Jean Arbogast im Jahre 1800 formuliert wurde. Die Operatorenrechnung beruhte wesentlich auf der Ausnutzung von Analogien, wie sie zwischen der Berechnung von $(x+y)^n$ und $d^n(xy)$ bestehen. Die auszuführende Operation wurde durch ein Symbol dargestellt und formal von dem Objekt getrennt, auf das die Operation angewandt werden sollte. Dieses Symbol interpretierte man als eigenständige Größe und führte die üblichen algebraischen Rechnungen aus. Das Verfahren wurde von Mathematikern wie Fourier, Cauchy und Boole recht erfolgreich bei der Lösung von Differentialgleichungen eingesetzt. Ein einfaches Beispiel soll die Vorgehensweise erläutern:

Zu lösen sei die Gleichung

$$y + dy/dx = ax^n,$$

wobei a eine Konstante ist. Die Ableitung d/dx wird jetzt als formale Operation aufgefaßt, mit der die üblichen algebraischen Operationen ausführbar sind. Die Gleichung kann dann in der Form

$$(1 + d/dx)y = ax^n$$

geschrieben werden und als formale Lösung ergibt sich durch Inversenbildung

$$y = (1 + d/dx)^{-1}ax^n.$$

Anstelle der Integrationskonstanten ist hier nun noch ein Term anzufügen, der bei der Anwendung der Operation $(1+d/dx)$ verschwindet, also $(1+d/dx)^{-1}0$. Die vollständige Lösung lautet also

$$y = (1 + d/dx)^{-1}ax^n + (1 + d/dx)^{-1}0.$$

Es gilt nun, die beiden Terme zu bestimmen. Für den zweiten Term erhält man zunächst

$$(1 + d/dx)^{-1}0 = d^{-1}/dx^{-1}(1 + d^{-1}/dx^{-1})^{-1}0 = (1 + d^{-1}/dx^{-1})^{-1}C.$$

Der letzte Schritt ergibt sich durch Ausführung der Operation $d^{-1}/dx^{-1} = \int dx$, C eine beliebige Integrationskonstante. Jetzt wird der Ausdruck $(1 + d^{-1}/dx^{-1})^{-1}$ formal in eine Reihe entwickelt und die Operationen der Reihe werden gliedweise auf die Konstante C angewandt. Dies liefert

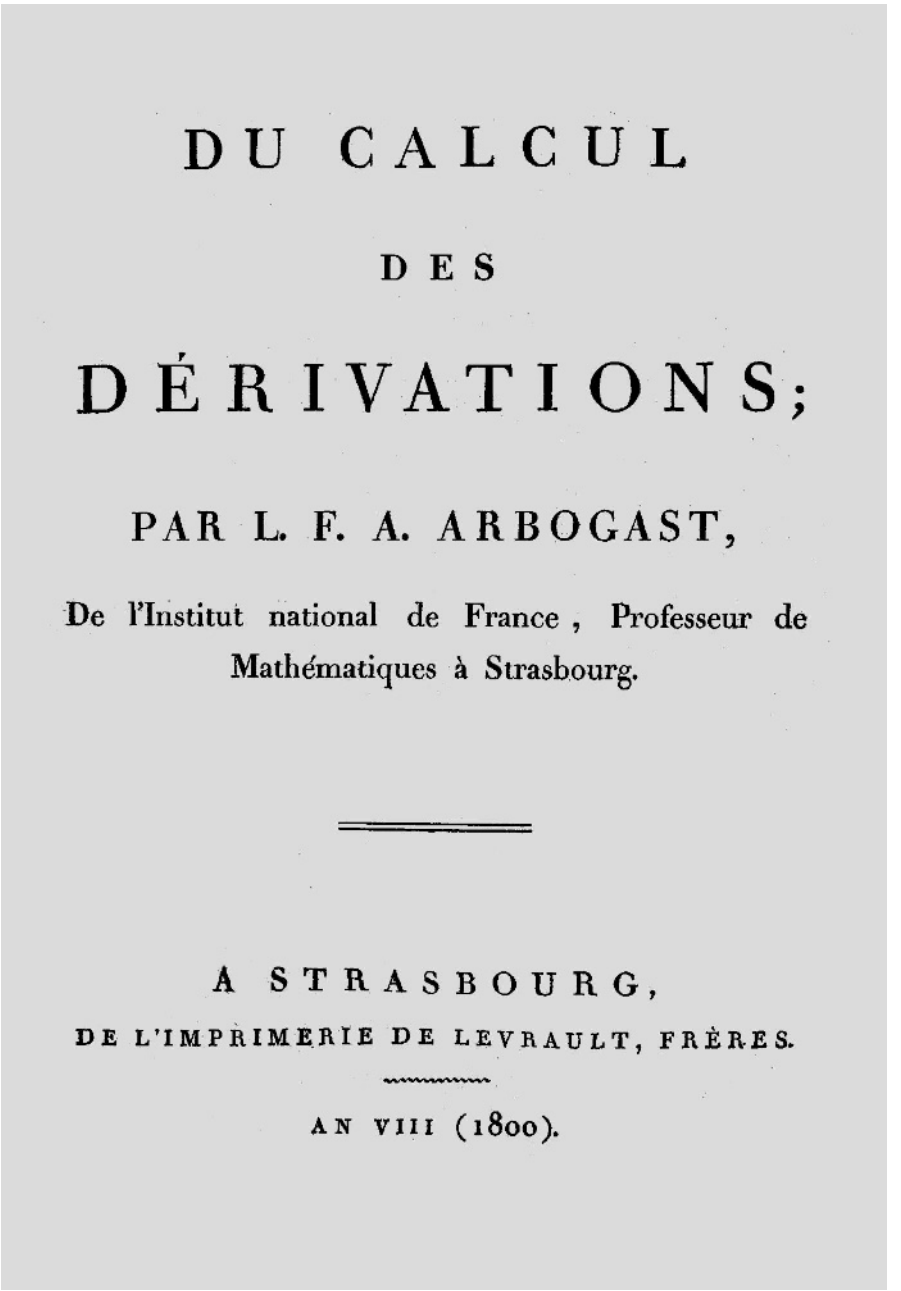
$$\begin{aligned}&(1 + d^{-1}/dx^{-1})^{-1}C = (1 - d^{-1}/dx^{-1} + d^{-2}/dx^{-2} - ...)C\\ &= C(1 - x + x^2/2! - x^3/3! + ...) = Ce^{-x}.\end{aligned}$$

Analog entwickelt man den Ausdruck $(1 + d/dx)^{-1}$ im ersten Term in eine geometrische Reihe und führt die entsprechenden Operationen der Reihenglieder aus:

$$\begin{aligned}&(1 + d/dx)^{-1}ax^n = (1 - d/dx + d^2/dx^2 - ...)ax^n\\ &= a(x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - ...).\end{aligned}$$

Offensichtlich verschwindet ab dem $(n+1)$-ten Glied der Ausdruck in der Klammer, und man erhält als Lösung der obigen Differentialgleichung

$$y = a(x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - ... + (-1)^n n!) + Ce^{-x}.$$



DU CALCUL

DES

DÉRIVATIONS;

PAR L. F. A. ARBOGAST,

De l'Institut national de France, Professeur de Mathématiques à Strasbourg.

A STRASBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE LEVRAULT, FRÈRES.

AN VIII (1800).

Abb. 6.3.5. Titelblatt „Du Calcul des Dérivations“ von L. F. A. Arbogast

Aus algebraischer Sicht dokumentiert die Operatorenrechnung einen wichtigen Abstraktionsschritt, denn mit der durch ein Symbol dargestellten Operation wurde ein Objekt algebraischen Rechnungen unterworfen, das von den bisher behandelten völlig verschieden war. Die verknüpften Objekte erhielten einen neuen Charakter und es war keineswegs klar, ob in dem neuen erweiterten Objektbereich das Rechnen mit Buchstaben genauso ausgeführt werden konnte wie bisher. Wieder standen die Mathematiker vor der Frage, welches die bestimmenden Regeln für die algebraischen Rechnungen sind. Es ist wohl nicht sehr verwunderlich, daß es im Rahmen der Bemühungen um eine Begründung der Operatorenrechnung zu einer begrifflichen Fixierung wichtiger Rechenregeln kam. Natürlich waren diese Regeln schon durch das Rechnen in den verschiedenen Zahlbereichen bekannt, aber sie waren dort stillschweigend benutzt und noch nicht durch Begriffe besonders hervorgehoben worden. Als erstes wurden von F.-J. Servois 1814 die Eigenschaften, distributiv bzw. miteinander kommutativ zu sein, als wichtige Eigenschaften für die Untersuchung von Funktionen angegeben. Die Betonung liegt hier auf der begrifflichen Fixierung. Die Eigenschaften selbst waren bereits vorher von Gauß bzw. Legendre für allgemeinere Objekte nachgewiesen worden, von Gauß in seinen Untersuchungen über die Komposition der Formen (vgl. Abschn. 6.6.2), von Legendre in geometrischen Studien.

Zusammenfassend kann als wichtigstes Fazit der Entwicklung der Algebra am Ende des 18. und zu Beginn des 19. Jahrhunderts die Veränderung des Gegenstandsbereichs der Algebra verbunden mit einem deutlichen Ansatz zu abstrakteren Untersuchungen festgestellt werden. Neben die traditionelle Aufgabe des Lösens von Gleichungen traten Studien, die letztlich auf die Erforschung der Struktur bekannter und neuer Objektbereiche abzielten. Die Objektbereiche, sei es als Zahlbereich, Menge von Funktionen o. ä., lagen jeweils in einer konkreten Realisierung vor, es handelte sich also nicht um abstrakte Strukturuntersuchungen, wie sie dann in der Algebra des 20. Jahrhunderts auftraten.

Eine adäquate Wiedergabe der Algebraentwicklung erfordert natürlich auch eine gebührende Berücksichtigung des traditionellen Forschungsgebietes. Dies umso mehr, als es sich hierbei nicht um eine bloße Fortschreibung alter Methoden handelt. Vielmehr erreichten die Forschungen zur Lösung polynomialer Gleichungen eine neue Qualität, die zu wesentlichen neuen Ergebnissen führten. Auf die Frage nach der Auflösbarkeit der allgemeinen Gleichung n-ten Grades formulierte Paolo Ruffini eine negative Antwort, für deren Richtigkeit er aber noch keinen vollständigen Beweis geben konnte. Der Beweis gelang dann Niels Henrik Abel 1824. Das Fundamentaltheorem der Algebra erhielt von Gauß eine erste exakte Rechtfertigung. Beide Themenkomplexe sollen im folgenden genauer analysiert werden. Grundsätzlich ergaben sich in der Gleichungstheorie zwei Fragen:

- ob auch die Gleichungen höheren als vierten Grades in Radikalen lösbar sind
- wieviele Lösungen eine allgemeine Gleichung n-ten Grades besitzt.

Bei der Beantwortung dieser Fragen kam erschwerend hinzu, daß man über den Charakter der Wurzeln keine klare Aussage getroffen hatte. Neben den als Lösung anerkannten reellen Zahlen konnten komplexe Zahlen auftreten, die nur als scheinbare, imaginäre Wurzeln der Gleichung betrachtet wurden. Außerdem waren aber auch völlig neue Größen als Gleichungslösungen denkbar, wobei man von diesen Größen noch nachweisen mußte, ob sie wie die üblichen reellen Zahlen die Ausführungen der vier arithmetischen Grundoperationen gestatten oder nicht. Erst Gauß hat 1799 diesen Schwachpunkt in den frühen Untersuchungen von Gleichungen klar herausgearbeitet. Im allgemeinen nahm man aber an, daß die Lösungen von Gleichungen reelle oder imaginäre Zahlen sind. Zunächst soll die erste Frage weiter untersucht werden.

6.4 Das Problem der Lösbarkeit der allgemeinen Gleichung n-ten Grades in Radikalen

Seit den großen Erfolgen der Renaissance-Mathematiker bei der Auflösung der Gleichung dritten und vierten Grades (vgl. Kap. 5) hatte man sich vergeblich bemüht, eine Formel für die Lösung der allgemeinen Gleichung fünften und höheren Grades abzuleiten. Die Aufgabe bestand also darin, für die Gleichung

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{6.4.1}$$

eine Lösung x_0 mit $P(x_0) = 0$ in Form einer Summe von gegebenenfalls ineinandergeschachtelten Wurzelausdrücken anzugeben, die nur die Koeffizienten a_i von $P(x)$ enthielten. Einen ersten Versuch, eine derartige Formel zu konstruieren, publizierte Ehrenfried Walter v. Tschirnhaus 1683. Er schlug vor, die Unbekannte x durch eine neue Unbekannte y so zu ersetzen, daß die Gleichung (6.4.1) eine einfachere Gestalt $P_1(y) = 0$ annahm. Durch geschickte Wahl der Substitution wollte er für $P_1(y) = 0$ die Gestalt $y^n - c = 0$ erreichen. Nachdem er das Verfahren erfolgreich auf Gleichungen dritten Grades angewandt hatte, glaubte er, auch die allgemeine Gleichung fünften Grades behandeln zu können. Doch wie Leibniz zeigte, erforderte die Bestimmung der Substitution die Lösung einer Gleichung 24. Grades, für die nicht allgemein nachgewiesen werden kann, daß sie sich als Produkt von Gleichungen höchstens vierten Grades schreiben läßt. Trotz des hartnäckigen Bemühens vieler Mathematiker blieb dann dieser Zustand für fast ein Jahrhundert unverändert, jedoch schufen Euler und Étienne Bézout durch weitere Durchdringung des von Jan Hudde verbesserten Cardanoschen Verfahrens wichtige Voraussetzungen für einen Wandel in der Theorie zur Lösung der Gleichungen.

Die entscheidende Wende vollzog sich im Jahre 1770, als gleich drei Mathematiker unabhängig voneinander neue Einsichten zu diesem Problem erzielten. Es waren dies der Engländer Waring und die Franzosen Vandermonde und Lagrange, letzterer in Berlin wirkend. Formal gingen sie von dem gleichen Ansatzpunkt aus: sie analysierten die Arbeiten ihrer Vorgänger und wollten ermitteln, warum die bekannten Lösungsverfahren für die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades zum Erfolg führten und wo die Schwierigkeiten bei der Übertragung auf Gleichungen höheren Grades lagen.

6.4.1 Die Ergebnisse von Lagrange

Die größten Fortschritte hatte dabei Joseph Louis Lagrange erzielt, der zu diesem Zeitpunkt bereits ein anerkannter Mathematiker war. Er hatte bedeutende astronomische Arbeiten publiziert und Grundlegendes zur Variationsrechnung geleistet. 1766 trat er die Nachfolge von Euler in der Berliner Akademie an. Euler selbst hatte den Kollegen, mit dem er seit über 10 Jahren einen regen Gedankenaustausch pflegte und bei der Lösung mehrerer mathematischer Probleme im fairen Wettsteit stand, bei seiner Rückkehr an die Petersburger Akademie vorgeschlagen. Für 20 Jahre wirkte Lagrange dann in Berlin. Seine Untersuchungen zur Frage der Auflösbarkeit begann er mit der allgemeinen Gleichung dritten Grades. An diesem Beispiel sollen wichtige Punkte seines Vorgehens erläutert werden.

Sei

$$x^3 + px + q = 0 \tag{6.4.2}$$

die schon von Tartaglia bzw. del Ferro betrachtete Gleichung, auf die die allgemeine Gleichung leicht transformiert werden kann. Wie Hudde setzt Lagrange die Lösung x als Summe zweier Unbestimmten an $x = y + u$, verfügt über u durch die Bedingung $u = -p/3y$ und erhält die sog. Resolvente

$$y^6 + qy^3 - p^3/27 = 0.$$

Diese Hilfsgleichung ist die sog. Huddesche Resolvente. Sie hat den Grad 6, doch ist sie auf Grund ihrer Struktur einfacher als die Ausgangsgleichung. Mit der Substitution $z = y^3$ geht die Gleichung in eine quadratische Gleichung über mit den Lösungen

$$z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Daraus ergeben sich dann leicht die Lösungen der Hilfsgleichung als Wurzeln einer reinen Gleichung dritten Grades $y^3 = z_1$ bzw. $y^3 = z_2$ gemäß

$$y_1, ..., y_6 = \omega^k \sqrt[3]{z_j}$$

für $j = 1, 2$; $k = 0, 1, 2$ und ω eine primitive dritte Einheitswurzel, d. h. ω genügt der Gleichung $\omega^3 = 1$ und $\omega \neq 1$. Für die Lösungen der Ausgangsgleichung (6.4.2) errechnet man dann

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_4 = \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2} \\ x_2 &= y_3 + y_5 = \omega^2 \sqrt[3]{z_1} + \omega \sqrt[3]{z_2} \\ x_3 &= y_2 + y_6 = \omega \sqrt[3]{z_1} + \omega^2 \sqrt[3]{z_2}. \end{aligned}$$

Bereits Euler und Bézout bemerkten nun, daß die Wurzeln $y_1, ..., y_6$ der Hilfsgleichung durch die Wurzeln x_1, x_2, x_3 der Ausgangsgleichung ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1/3(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3) \quad & y_2 &= 1/3(x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2) \\ y_3 &= 1/3(x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1) \quad & y_4 &= 1/3(x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2) \\ y_5 &= 1/3(x_2 + \omega x_1 + \omega^2 x_3) \quad & y_6 &= 1/3(x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1). \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt: Die sechs Lösungen y_i der Hilfsgleichungen sind die Werte des Ausdrucks $y = 1/3(X_1 + \omega X_2 + \omega^2 X_3)$, wenn die X_i die Wurzeln der Ausgangsgleichung in jeder möglichen Anordnung durchlaufen. Die Anzahl der möglichen Anordnungen für die Wurzeln x_1, x_2, x_3 der Ausgangsgleichung stimmt also mit dem Grad der Hilfsgleichung übereinein. Die grundlegende Erkenntnis Lagranges aus der Analyse aller bekannten Lösungsverfahren für Gleichungen dritten Grades war die *„äußerst bemerkenswerte“* Eigenschaft des Ausdrucks $(X_1 + \omega X_2 + \omega^2 X_3)^3$, bei allen sechs Vertauschungen der Wurzeln der Ausgangsgleichung nur zwei verschiedene Werte anzunehmen.

Analog analysierte Lagrange die allgemeine Gleichung vierten Grades und fand in der Funktion $y = x_1x_2 + x_3x_4$ die für die Reduktion der Resolvente wichtige Beziehung zwischen den Wurzeln der Ausgangsgleichung. Diese Funktion nimmt bei den 24 Permutationen der vier Wurzeln x_i nur drei verschiedene Werte an. Folglich existiert eine Gleichung dritten Grades, der y genügt, und die Koeffizienten dieser Gleichung sind rationale Funktionen der Koeffizienten der Ausgangsgleichung.

Dieses Ergebnis bestärkte Lagrange in der Einsicht, daß der Schlüssel zur Auflösung der Gleichungen fünften und höheren Grades in dem Auffinden entsprechender Resolventen und deren Eigenschaften liege. Er hielt jedoch nur die Methoden von Tschirnhaus bzw. von Euler und Bézout für erfolgversprechend, da sie die Gleichung niedrigeren Grades nach einem gleichartigen Prinzip behandelten und so die Möglichkeit der Übertragung auf Gleichungen fünften und höheren Grades böten. Trotz komplizierter und ermüdender Rechnungen kam er nicht zum Ziel und zweifelte, ob diese Methoden überhaupt zum Erfolg führen. Er stellte sich deshalb im abschließenden Teil seiner umfangreichen Abhandlung die Aufgabe, ein Verfahren zu finden, daß es a priori erlaubt, den Erfolg dieser Methoden abzuschätzen. Er formulierte seine Überlegungen für die allgemeine Gleichung n-ten Grades und lieferte wichtige Anregungen für die weitere Entwicklung.

Da für Gleichungen n-ten Grades ($n \geq 5$) mit einer n-ten Einheitswurzel $w \neq 1$ die Setzung

$$y = x_1 + \omega x_2 + ... + \omega^{n-1} x_n \quad (*)$$

als einfachste Funktion der Wurzeln u. a. bei Euler und Bézout nicht zum Ziel geführt hatte, betrachtete er jetzt eine beliebige rationale Funktion $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ der Wurzeln x_i $(1 \leq i \leq n)$ als Hilfsfunktion. Diese nimmt für die $n!$ Permutationen der Wurzeln im allgemeinen $n!$ unterschiedliche Werte f_k $(1 \leq k \leq n!)$ an, so daß die entsprechende Gleichung lautet

$$P(y) = (y - f_1)(y - f_2)...(y - f_{n!}).$$

Diese Gleichung wurde später als Lagrangesche Resolvente bezeichnet. (Heute werden oft nur die linearen Setzungen $(*)$ für verschiedene primitive n-te Einheitswurzeln als Lagrangesche Resolventen bezeichnet.) Gemäß seiner These spiegelt sich die Auflösbarkeit der Ausgangsgleichung in einer entsprechenden Gradreduktion der Hilfsgleichung wider. Da dies eintritt, wenn die Funktion f bei den Permutationen der Wurzeln x_i nicht immer verschiedene Werte annimmt, begann Lagrange die Eigenschaften der rationalen Funktionen genauer zu analysieren und klärte zunächst auf, wie gewisse Symmetrien der Funktionen den Grad der Resolvente verringern. Bleibt die Funktion f bei der Permutation von k Variablen $(k < n)$ ungeändert – man sagt auch f ist in k Variablen symmetrisch – so läßt sich der Grad der Lagrangeschen Resolvente auf $n!/k!$ reduzieren. Eine analoge Aussage formulierte Lagrange, falls f in mehreren disjunkten Gruppen von Veränderlichen symmetrisch ist. Die Wertigkeit der Funktion f, d. h. die Anzahl der Werte, die f annehmen kann, ist stets ein Teiler von $n!$.

Für die weitere Untersuchung führte Lagrange dann die *„ähnlichen Funktionen“* ein. Zwei rationale Funktionen f und g heißen ähnlich, wenn f und g bei den gleichen Permutationen invariant bleiben, d. h. bei allen Permutationen der Wurzeln, bei denen sich f nicht verändert, bleibt auch g unverändert und umgekehrt. Als einfachste Beispiele ähnlicher Funktionen nannte er die elementarsymmetrischen Funktionen. Für diese ähnlichen Funktionen leitete er nun die folgenden wichtigen Ergebnisse her: Die Werte ähnlicher Funktionen werden durch Gleichungen desselben Grades bestimmt und dieser Grad ist ein Teiler von $n!$. Sind die Werte $u_1, ..., u_n$ bzw. $t_1, ..., t_n$ zweier ähnlicher Funktionen $u(x_1, ..., x_n)$ und $t(x_1, ..., x_n)$ paarweise verschieden, so lassen sich die Werte u_i rational durch die t_j und die Koeffizienten der Gleichung ausdrücken und umgekehrt. In beiden Fällen sind die Werte ähnlicher Funktionen im Bezug auf die Wurzeln einer vorgegebenen Gleichung n-ten Grades zu verstehen. Damit hatte Lagrange in schwachen, aber wichtigen Ansätzen die Keime für die in der späteren Galois-Theorie enthaltenen strukturellen Einsichten gelegt. Die Ausführungen über die Werte einer rationalen Funktion, bzw. die ähnlichen Funktionen und die rationale Bestimmtheit von deren Werten führen zu den gruppentheoretischen bzw. körpertheoretischen Aspekten dieser Theorie. Auch wenn viele wichtige Aspekte dieser abstrakten Bildun-

gen von Lagrange überhaupt nicht berührt wurden und er den traditionellen begrifflichen Rahmen nicht verließ, so hatte er mit seiner ausführlichen, systematischen Darstellung klar gemacht, daß die bisherigen Methoden nicht zum Ziel führen, und einen neuen Weg aufgezeigt.

Einen weiteren Bestandteil der Lagrangeschen Abhandlung bildete das Studium der Gleichung

$$x^n - 1 = 0. \tag{6.4.3}$$

Die Gleichung hat die triviale Wurzel $x = 1$, die anderen Wurzeln genügen dann der Gleichung

$$x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1 = 0.$$

Unter Hinweis auf Abraham de Moivre vermerkt Lagrange den Zusammenhang dieser Gleichung mit dem Problem, die Kreislinie in n gleiche Teile zu teilen. Sie wird deshalb auch Kreisteilungsgleichung genannt. Er faßt mehrere Eigenschaften der Lösungen der Kreisteilungsgleichung zusammen, die sich bereits in den Arbeiten von Euler befinden. So etwa, daß die Lösungen der Gleichungen als Potenzen einer der Wurzeln, z. B. $\alpha_1 \neq 1$ ausgedrückt werden können, d. h. α_1, α_1^2, ... , α_1^{n-1}, $\alpha_1^n = 1$ sind die Wurzeln der Gleichung, und daß für eine Primzahl n auch jede andere Wurzel, also jede andere Potenz α_1^m von α_1 mit $2 \leq m \leq n$ alle Lösungen der Gleichung liefert. Er studiert dann den Fall, wenn n keine Primzahl ist, weist die Lösbarkeit der Gleichung (6.4.3) für $n = 2^i 3^j 5^k 7^l$ mit natürlichen Zahlen i, j, k, l nach und untersucht die Menge der Wurzeln α^m, α^{2m}, ... , α^{nm}, falls m nicht relativ prim zu n ist. Die Menge $\{\alpha^{im}\}$ enthält dann nicht alle Lösungen der Gleichung (6.4.3). Man wird sich wundern, wieso Lagrange die Struktur der Zahl n so genau angibt, doch für $n = 11$ und alle nachfolgenden Primzahlen mußte er die Lösbarkeit der Gleichung offen lassen.

6.4.2 Die Lösungsansätze von Vandermonde und Waring

Die Lösung des Falles $n = 11$ gelang fast zur gleichen Zeit Alexandre Théophile Vandermonde, dessen Arbeit noch vor und damit unabhängig von der Lagranges entstand. Auch Vandermonde wählte die Arbeiten von Euler und Bézout als Ausgangspunkt und begann seinen 1770 verfaßten Artikel *„Sur la résolution des équations“* mit einer Analyse der Lösungsmethoden für die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades. Er versuchte einen direkten Zugang zu dem Problem und wollte die Auflösung der Gleichung in drei Schritten vollziehen. Zuerst ist eine Funktion der Wurzeln zu finden, die, je nach der Bedeutung, die der Funktion beigelegt wird, jeden Wert der Wurzeln annimmt, d. h. diese Funktion muß n-wertig sein. Für die quadratische Gleichung erfüllt die Funktion $\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2})$ diese Bedingung. Diese Funktion soll dann in eine Form gebracht werden, die sich

bei einer Vertauschung der Wurzeln nicht ändert, dies ist im obigen Beispiel der Fall. Schließlich soll sie als Funktion der elementarsymmetrischen Funktionen dargestellt werden, was im obigen Beispiel mit x_1x_2 und $x_1 + x_2$ als den elementarsymmetrischen Funktionen in zwei Unbestimmten ebenfalls erfüllt ist. Letzteres bedeutet aber nichts anderes, als daß die symmetrischen Funktionen durch die elementarsymmetrischen ausgedrückt werden sollen, also die gesuchte Funktion eine Funktion der Koeffizienten der Ausgangsgleichung wird. Dieses Programm beinhaltete aus heutiger Sicht interessante Ansätze für körpertheoretische Betrachtungen, die sich um den Wurzelkörper (Zerfällungskörper) der Gleichung n-ten Grades gruppieren, d. h. um die Zahlenmenge, in der alle Lösungen der Gleichung enthalten sind. Zugleich läßt es die großen rechnerischen Probleme ahnen, die für eine konkret vorgelegte Gleichung zu bewältigen waren. Man sagt auch, daß Vandermonde im Gegensatz zur algebraischen Vorgehensweise von Lagrange den arithmetischen Aspekt betonte.

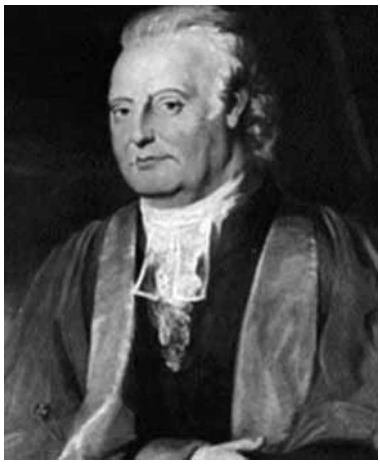
Zur Realisierung des Programms wählte Vandermonde einen Ansatz für die gesuchte n-wertige Funktion, der wesentlich die n-ten Einheitswurzeln benutzte. Aus diesem Grund widmete er der Gleichung $x^n - 1 = 0$ sowie den Relationen zwischen den Einheitswurzeln spezielle Aufmerksamkeit und kam, als ein wichtiges Ergebnis, zur Lösung der Gleichung für $n = 11$.

Einen zweiten wichtigen Punkt bildeten Überlegungen zu symmetrischen und elementarsymmetrischen Funktionen. Im Kontext des Auflösungsproblems war dies eng mit dem Studium von Vertauschungen der Wurzeln verknüpft, die Vandermonde zu ersten, unter einer schwerfälligen Terminologie verborgenen Einsichten über Permutationen führten. In diesen Andeutungen ging er über Lagrange hinaus, obwohl er insgesamt nicht die Klarheit und Ergebnisbreite wie dieser erreichte.

Als dritter Mathematiker publizierte Edward Waring eine bemerkenswerte Arbeit zur Auflösung der Gleichung n-ten Grades. Der vor allem durch das nach ihm benannte Problem bekannte Waring lehrte in Cambridge als Mathematikprofessor und hatte sich schon längere Zeit mit der Lösung von Gleichungen beschäftigt. Er kam aber nicht zu so allgemeinen Aussagen wie Lagrange. Besonders beschäftigte er sich mit Gleichungen vom Typ $x^n - 1 = 0$, die er für kleine Werte von n löste. Zwar bestimmte er wie Vandermonde die Lösungsstruktur, wenn n ein Produkt mehrerer Primzahlen war, doch ließ er den Fall $n = 11$ ungelöst und machte auch keine allgemeine Aussage über die Lösbarkeit der Gleichung für beliebiges n. In diesem Kontext führte er umfangreiche Studien über die symmetrischen Funktionen durch, die für die weiteren Forschungen zur Auflösung der Gleichung n-ten Grades interessant waren. Bereits 1762 hatte er bewiesen, daß jede rationale symmetrische Funktion der Wurzeln einer Gleichung n-ten Grades als rationale Funktion der Gleichungskoeffizienten dargestellt werden könne, 1770 gab er eine weitere Herleitung dieses Satzes, der auch von Vandermonde angegeben wurde. Erwähnenswert ist noch Warings Idee, die Gleichungen zu suchen, für die die Lösungen eine spezielle vorgegebene Struktur haben.



Paolo Ruffini



Edward Waring

Der Vollständigkeit halber sei noch auf eine Arbeit des Italieners Gian Francesco Malfatti aus dem Jahre 1770 hingewiesen, in der dieser im Anschluß an die Eulersche Vorgehensweise die Gleichung dritten Grades löste und dann aber bei der Anwendung seiner Methode auf die allgemeine Gleichung fünften Grades wie seine Vorgänger scheiterte. Methodisch brachte er keine neuen Ideen hervor.

6.4.3 Ruffini und erste Ergebnisse über Permutationsgruppen

Der von Lagrange und Vandermonde geschaffene neue Zugang zur Auflösung der allgemeinen Gleichung n-ten Grades fand nur allmählich Verbreitung unter den Mathematikern. Ein weiterer bedeutender Erkenntnisfortschritt verbindet sich mit Paolo Ruffini. Er war seit 1791 praktischer Arzt und Professor für Mathematik in Modena. Nach der Befreiung von der napoleonischen Fremdherrschaft, während der er als Mitglied der nationalen italienischen Bewegung Lehrverbot hatte, bekleidete er ab 1814 erfolgreich sowohl einen medizinischen, als auch einen mathematischen Lehrstuhl. In seinen Arbeiten, die er ab 1799 veröffentlichte, entwickelte er weitgehend die gruppentheoretische Seite des Auflösungsproblems, sprach als erster die Unmöglichkeit aus, die allgemeine Gleichung fünften und höheren Grades in Radikalen auflösen zu können, und bewies diese Aussage teilweise. Bereits in dem zweibändigen Algebralehrbuch *„Theoria generale delle Equazioni“* benutzte er die Theorie der Permutationen als grundlegendes Beweismittel.

Ruffini ging von Lagranges Einsicht in den Zusammenhang zwischen der Auflösung einer Gleichung und den Permutationen, die rationale Funktionen von n Größen ungeändert lassen bzw. ändern, aus und stellte seinen Studien eine Analyse der Menge der Permutationen voran. Unter einer Permutation

versteht man dabei eine Anordnung, die alle der endlich vielen vorkommenden Elemente (hier die Wurzeln der Gleichung) in irgendeiner Reihenfolge enthält. Stellt man eine eindeutige Beziehung zwischen den vorgegebenen Elementen und natürlichen Zahlen her, so kann die durch die Permutation hervorgerufene Veränderung in der Anordnung der Elemente durch das Übereinanderschreiben der jeweiligen Anordnung der natürlichen Zahlen dargestellt werden, z. B. bedeutet $\binom{123}{132}$, daß die Elemente x_1, x_2, x_3 in der Reihenfolge x_1, x_3, x_2 genommen werden.

Entscheidend für die Fortschritte in der Auflösungstheorie war, daß Ruffini nicht nur die einzelnen Permutationen betrachtete, sondern auch die Menge der Permutationen und deren Eigenschaften studierte. Er zeichnete die Gesamtheit der Permutationen begrifflich aus und schuf damit, wenngleich in anderer Terminologie, den Begriff der Permutationsgruppe. Die wichtigste Eigenschaft dieser Gesamtheiten von Permutationen war deren Abgeschlossenheit bei Hintereinanderausführung von Permutationen aus der jeweiligen Menge, d. h. wendet man erst eine Permutation auf die Elemente der Grundmenge an und auf das Ergebnis eine zweite Permutation, so kann das Ergebnis dieser Hintereinanderausführung der beiden Permutationen durch eine einzige Permutation erhalten werden, die ebenfalls in der Gesamtheit der Permutationen enthalten ist. Der Gruppenbegriff reduzierte sich bei Ruffini darauf, Gesamtheiten von Permutationen, die gegenüber der Verknüpfungsoperation des Hintereinanderausführens abgeschlossen sind, hervorzuheben und mit einem speziellen Begriff zu belegen. Man kann also nur bedingt von einer Definition der Permutationsgruppen sprechen. Das Fehlen der übrigen Gruppeneigenschaften in der Definition war jedoch nicht entscheidend, da diese in dem konkret vorgelegtem Fall automatisch erfüllt waren. Doch Ruffini blieb nicht bei der Auszeichnung der Permutationsgruppen stehen, sondern gab auch eine erste Klassifikation derselben. Er unterschied *„permutazioni semplici“*, d. h. Gesamtheiten, deren Elemente sich alle durch Hintereinanderausführungen aus nur einer Permutation ergeben, – man sagt auch, die Menge wird von der Permutation erzeugt – und *„permutazioni composte“*, d. h. Gesamtheiten, die von mehreren Permutationen erzeugt werden. Die ersteren entsprechen in moderner Terminologie den (endlichen) zyklischen Gruppen. Die zusammengesetzten Gruppen differenzierte Ruffini weiter in drei Arten, die man modern als intransitive, transitiv imprimitive bzw. transitiv primitive Permutationsgruppen bezeichnen würde. Es sei jedoch nochmals betont, daß die von Ruffini gegebenen Begriffsbestimmungen nur in Ansätzen mit den modernen Definitionen vergleichbar sind. Wesentlich war, daß er überhaupt die Notwendigkeit empfand, eine solche Unterscheidung vorzunehmen.

Die Transitivität einer Permutationsgruppe bezeichnet die Eigenschaft, daß ein beliebiges Element der Gruppe durch die Anwendung von Permutationen in alle anderen Elemente überführt werden kann. Eine transitive Permutationsgruppe heißt dann imprimitiv, wenn es mindestens zwei elementfremde Teilmengen gibt, die durch die Permutationen der Gruppe ineinander transformiert werden, sonst primitiv.

Zurück zu Ruffinis Arbeiten. Bereits in seiner ersten Arbeit entwickelte Ruffini die neuen Einsichten in die Struktur der Permutationsgruppen. Insbesondere gab er faktisch eine fast vollständige Analyse der Untergruppen der symmetrischen Gruppe $_5$ an, aus der er die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades folgern konnte. In späteren Arbeiten 1802 und 1803 hat er den Beweis ergänzt und verbessert, letzteres unter Rückgriff auf die von Pietro Abbati im Beweis vorgenommenen Vereinfachungen. 1804 brachte dann Malfatti einige Einwände gegen den Ruffinischen Beweis vor. Diese waren zwar verfehlt, doch Ruffini reagierte mit einer erneuten Darstellung seines Beweises und kam auch danach noch mehrmals auf das Problem der Auflösung von Gleichungen höheren Grades zurück. Insgesamt markierte Ruffini mit seinen Arbeiten eine wichtige Etappe in der Benutzung gruppentheoretischer Methoden bei der Behandlung des Auflösungsproblems und verkörpert damit zugleich den beginnenden Wandel in den mathematischen Anschauungen.

6.4.4 Gauß und die Auflösung der Kreisteilungsgleichung

Von einer ganz anderen Seite näherte sich der junge Gauß dem Auflösungsproblem. Er konzentrierte sich auf die detaillierte Untersuchung der Auflösbarkeit eines speziellen Gleichungstyps, der Kreisteilungsgleichung $x^n - 1 = 0$, und bewies, daß diese Gleichung für alle natürlichen Zahlen n stets auflösbar ist (vgl. Aufg. 6.4.4). Diese Untersuchungen bettete er jedoch in seine umfangreichen zahlentheoretischen Forschungen ein, die er seit seinem Studium 1796 durchführte und die er 1801 in der berühmten, grundlegenden Publikation *„Disquisitiones arithmeticae“* veröffentlichte. Diese Schrift sollte dann einen wichtigen Bestandteil jenes gewaltigen Werkes bilden, das Gauß im Verlaufe seines Lebens errichtete und das die Zeitgenossen sowie die nachfolgenden Generationen nachhaltig beeinflußte und ihn zum bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit machte. Völlig zu Recht wird er als *„princeps mathematicorum“* bezeichnet. Noch heute faszinieren die zahlreichen Einzelergebnisse, doch dies wird übertroffen von der systematischen Behandlung verschiedener Themenkomplexe, mit denen er an wichtigen Beispielen das moderne mathematische Denken vorbereitete. Er strebte konsequent nach verallgemeinerungsfähigen Beweisen und allgemeinen Theorien ohne den Bezug zu konstruktiven algorithmischen Aspekten zu verlieren. Er vollzog seine Abstraktionen nicht der Abstraktion willen, sondern um einen besseren Überblick über die untersuchte Problematik zu erhalten, und dies betraf nicht die Mathematik allein. Gauß gehört zu den großen Ausnahmen, die im Verlaufe ihres Schaffens nie den Blick zu den Nachbargebieten verloren. Er war einerseits im hohen Maße fähig, seine mathematischen Kenntnisse erfolgreich in den Naturwissenschaften anzuwenden, und erschloß sich vor allem in der zweiten Lebenshälfte Gebiete wie die Physik, die Astronomie, die Geodäsie und die Technik und entnahm ihnen Anregungen zu neuen interessanten Forschungen. Da das Gaußsche Lebenswerk, seine Biographie und der zeitgeschichtli-



Der junge Niels Henrik Abel



Der junge Carl Friedrich Gauß

che Hintergrund in diesem Rahmen nicht näher dargelegt werden können, sei stellvertretend aus der umfangreichen Gauß-Literatur auf [Bühler 1987] und [Wußing 1989] verwiesen.

Die Kreisteilungsgleichung behandelte Gauß im Abschnitt 7 der *„Disquisitiones"*. Er wiederholte eine Reihe von Resultaten, die sich schon bei Euler und Lagrange finden. Doch bereits 1796 hatte Gauß ein wichtiges Einzelergebnis erzielt, als er die Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks mit Zirkel und Lineal nachwies. Er lieferte dann auch die allgemeine Lösung des Problems: Ein reguläres n-Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n das Produkt einer Potenz von zwei und endlich vielen Primzahlen der Form $2^{2^\nu}+1$ ist. Der Beweis folgte aus der Theorie der Kreisteilung. Wenn n von der geforderten Struktur ist, erhält man die Lösung der entsprechenden Gleichung durch sukzessive Lösung von quadratischen Gleichungen. Die Lösungen letzterer können aber mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, folglich auch die Lösung der Ausgangsgleichung, die dann die Seite des regelmäßigen n-Ecks ergibt.

Gegenüber Euler und Lagrange zeichnete sich die Gaußsche Darstellung durch eine effektivere Symbolik sowie eine systematischere und umfassende Behandlung der Theorie aus. Dabei bediente sich Gauß, und dies war für die Verbreitung seiner Ideen nicht unerheblich, der damals üblichen Terminologie. Er zeigte zunächst die Irreduzibilität des Polynoms

$$p(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1 \tag{6.4.4}$$

über dem Ring der ganzen Zahlen, d. h. wenn das Polynom in zwei nichttriviale Faktoren zerlegt werden kann, so können die Koeffizienten der Faktorpolynome keine ganzen Zahlen sein. Ohne es besonders hervorzuheben, rückte

Gauß damit die Betrachtung unterschiedlicher Zahlbereiche in den Blickpunkt. Eine Fortsetzung dieses Weges hätte weitere Einsichten in die Erweiterung des Zahlbereichs der Ausgangsgleichung bei der Lösung der Gleichung n-ten Grades, also die Problematik der Körpererweiterung zur Folge gehabt. Er richtete dann seine Aufmerksamkeit auf das Studium der Menge der Wurzeln der Kreisteilungsgleichung und vermerkte, daß diese Menge eine endliche zyklische Gruppe bildet. In dem Beweis bediente er sich bereits einer Argumentationsweise, die als typisch gruppentheoretisch bezeichnet werden kann. Besonders hervorhebenswert sind jedoch die weiteren Aussagen zur Struktur dieser Menge und die Einführung der sogenannten Gaußschen Perioden, da sie ein Studium der Untergruppen beinhalten. Gauß nutzte dazu die in vorangehenden Abschnitten hergeleiteten zahlentheoretischen Resultate. Er wählte ein primitives Element g modulo n, d. h. die Menge der Potenzen von g, $\{1, g, g^2, ..., g^{n-2}\}$, ist der Menge $\{1, 2, ..., n-1\}$ der Restklassen mod n bis auf die Reihenfolge der Elemente gleich. Daher stimmen die primitiven Einheitswurzeln ζ, ζ^2, ..., ζ^{n-1} bis auf die Reihenfolge mit den Wurzeln ζ, ζ^g, ζ^{g^2}, ..., $\zeta^{g^{n-2}}$ überein. Gauß schrieb $[g]$ für r^g, r eine Wurzel von (6.4.4), so daß $[1]$, $[g]$, ..., $\left[g^{n-2}\right]$ die Menge der Einheitswurzeln $\neq 1$ repräsentiert. Der Ersetzung von ζ durch ζ^g entspricht also eine zyklische Vertauschung der Wurzeln. Gleiches gilt für die von Gauß betrachtete Menge $[\lambda]$, $[\lambda g]$, ..., $\left[\lambda g^{n-2}\right]$ mit einer zu n teilerfremden ganzen Zahl λ. Ist nun die natürliche Zahl e ein Teiler von $n-1$, hat man also eine Zerlegung von $n-1$ als Produkt zweier natürlicher Zahlen e und f, dann läßt sich, wie Gauß zeigte, die Menge der Wurzeln der Gleichung (6.4.4) in e Klassen zu f Elementen $[\lambda]$, $[\lambda g^e]$, $\left[\lambda g^{2e}\right]$, ..., $\left[\lambda g^{(f-1)e}\right]$ aufteilen.

Mit $h = g^e$ bildete Gauß nun die Summen $(f, \lambda) = [\lambda] + [\lambda h] + ... + \left[\lambda h^{f-1}\right]$. Diese Summen sind unabhängig von der Wahl von g und werden als Gaußsche Perioden bezeichnet. Aus der Herleitung erkennt man, daß es e verschiedene Perioden mit je f Summanden gibt und in der Summe der e Perioden jede Wurzel der Kreisteilungsgleichung je einmal vorkommt. Für $\lambda = 1$ bildet die Menge der Summanden der Periode $(f, 1)$ wieder eine zyklische Gruppe. Damit enthielt die Bildung der Gaußschen Perioden den gruppentheoretischen Satz, daß für jeden Teiler f der Ordnung einer zyklischen Gruppe eine zyklische Untergruppe der Ordnung f existiert.

Doch Gauß ging noch weiter und bewies, daß zu festem f die Perioden multipliziert werden können und das Produkt eine Linearkombination der Perioden (f, μ) ist. Auf diese Weise definierte Gauß in der Menge der Perioden eine algebraische Struktur, ohne dies explizit hervorzuheben. Die Einsichten in diese Struktur liefern aber die Mittel, um die Auflösbarkeit der Kreisteilungsgleichung als auch die obige Aussage zur Konstruierbarkeit regelmäßiger n-Ecke mit Zirkel und Lineal herzuleiten. Als zentrales Ergebnis seiner Theorie formulierte Gauß den Satz: Wenn $n-1$ ein Produkt von Primzahlen $\alpha\beta\gamma...$ ist, so ist die Kreisteilungsgleichung durch die Lösung von Gleichungen der Grade α, β, γ, ... auflösbar.

Die Gaußschen Ausführungen zur Kreisteilungsgleichung haben Abel und Galois bei der Herausarbeitung der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen nachhaltig beeinflußt. Schon dies belegt die große Bedeutung der Gaußschen Theorie für die weitere Entwicklung der Algebra. An einem konkreten Beispiel war damit gezeigt, daß es spezielle Typen von Gleichungen n-ten Grades gibt, die auflösbar sind, und dies allgemein für alle natürlichen Zahlen n nachgewiesen. Zusammen mit der von Gauß an anderer Stelle geäußerten Überzeugung, daß die allgemeine Gleichung n-ten Grades nicht auflösbar sei, implizierte dies die Suche nach weiteren auflösbaren Gleichungen. Zugleich enthielten die Überlegungen, wenn auch am konkreten Objekt, Vorstufen wichtiger körper- und gruppentheoretischer Begriffe und deuteten die Kraft allgemeiner Begriffsbildungen an. Damit markierte Gauß den Beginn einer neuen Etappe in der Entwicklung der Algebra. Die *„Disquisitiones“* enthielten noch weitere interessante algebraische Aspekte, die im übernächsten Abschnitt behandelt werden.

6.4.5 Abels Beweis für die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung 5. Grades

Die Beantwortung der ursprünglichen Fragestellung nach der Auflösbarkeit von Gleichungen höheren als vierten Grades erfolgte durch den Norweger Niels Henrik Abel (1802–1829) . Dieser hatte sich schon während seiner Schulzeit mit der Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen beschäftigt und dazu die Arbeiten von Lagrange, Gauß und Cauchy studiert. Ruffinis Ergebnisse lernte er dagegen erst später kennen. Abel glaubte zunächst eine Methode für die Auflösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades in Radikalen gefunden zu haben, doch bemerkte er noch rechtzeitig vor der Publikation einen Fehler und begann intensiv nach einem Beweis zu suchen, der die Auflösbarkeit als unmöglich nachwies. Die erste Fassung eines solchen Beweises veröffentlichte er 1824 in Christiana (Oslo), zwei Jahre später erschien dann eine wesentlich überarbeitete Version in Crelles Journal.

Abel ging von der allgemeinen Gleichung 5. Grades

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0$$

aus und nahm diese als algebraisch auflösbar an. Daraus folgerte er sofort, daß man y in der Form

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + ... + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} \tag{6.4.5}$$

schreiben könne, wobei m eine Primzahl ist und R, p, p_1, ... p_{m-1} Funktionen von der gleichen Art wie y sind, die man letztlich auf rationale Funktionen der Größen a, b, c, d, e zurückführen kann [Abel 1881, Vol. 1, S. 28]. In der zweiten Fassung des Beweises gab er für diese Folgerung eine detaillierte

Herleitung dieses Ausdrucks. Dazu definierte er zuerst, was er unter einer algebraischen Funktion (im Sinne von Radikalausdruck) verstand:

„Wenn x', x'', x''' , ... eine endliche Menge beliebiger Grössen sind, so sagt man: v sei eine algebraische Function dieser Grössen, wenn es sich durch x', x'', x''' , etc. vermittelst folgender Operationen ausdrücken läßt. Erstlich durch die Addition, zweitens durch die Multiplikation, sowohl von Grössen, die von x', x'', x''' , ... abhängen, als von Grössen, die nicht davon abhängen; drittens durch die Division; viertens durch Ausziehen von Wurzeln mit Exponenten, die Primzahlen sind.“ [Abel 1826, S. 65]

Entsteht die Funktion nur durch die ersten beiden Operationen, so nannte er die Funktion ganz rational, entsteht sie durch die ersten drei, so rational. Danach leitete er ab, daß die ganzen rationalen Funktionen die Gestalt $\sum_{i_1,\ldots i_k} A_{i_1\ldots i_k} x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}$ haben und die rationalen Funktionen Quotienten derartiger Funktionen sind. Dabei praktizierte Abel wohl erstmals das Prinzip der intensionalen Definition, indem er die ganzrationalen bzw. die rationalen Funktionen durch gewisse Eigenschaften charakterisierte und daraus die obige Gestalt, die sonst zur Definition dieser Funktionen verwendet wurde, folgerte. Bei diesem Vorgehen wies er faktisch die Menge der rationalen Funktionen als Körper nach.

Für die weitere Konstruktion der algebraischen Funktionen bildete Abel dann die sogenannte algebraischen Funktionen erster Ordnung, die die Form $p_1 = f(x', x'', \ldots, \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots)$ hatten, wobei die p', p'', ... rationale Funktionen der x', x'', ... sind und f eine rationale Funktion ihrer Argumente ist. Die algebraischen Funktionen erster Ordnung entstanden also, modern gesprochen, durch Adjunktion der Radikale $\sqrt[n']{p'}$, $\sqrt[n'']{p''}$, ... zum Grundkörper der rationalen Funktionen. Im nächsten Schritt bildete Abel die algebraischen Funktionen zweiter Ordnung, die die Gestalt $p_2 = f(x', x'', ..., \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''}, ..., \sqrt[n']{p_1'}, \sqrt[n'']{p_1''}, ...)$ hatten, wobei f wieder eine rationale Funktion ihrer Argumente ist und die p_1', p_1'', ... algebraische Funktionen erster Ordnung sind, d. h. Abel adjungierte also weitere Radikale zum Körper der rationalen Funktionen. Er setzte diesen Prozeß weiter fort und gelangte schließlich zu den algebraischen Funktionen μ-ter Ordnung. Wurden im letzten Schritt m unabhängige Radikale adjungiert, so bezeichnete er die entsprechende Funktion p als Funktion μ-ter Ordnung und m-ten Grades. Nach dem Beweis, daß die Adjunktion von m Radikalen auch suksessive in Einzelschritten erfolgen kann, formulierte er den Satz, der ihm die eingangs erwähnte Darstellung von y lieferte.

Den Ausdruck für y setzte Abel dann in die Ausgangsgleichung ein und erhielt die Gleichung $q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + \ldots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = 0$. Dabei waren q, q_1, q_2, ... ganze rationale Funktionen von a, b, c, d, e, p, p_1, p_2, ... und R. Der entscheidende Schritt war nun Abels Beweis, daß diese Relation nur gilt, wenn notwendig $q = q_1 = \ldots = q_{m-1} = 0$ ist.

Als Konsequenz ergab sich, daß $z = R^{\frac{1}{m}}$ der reinen Gleichung $z^m - R = 0$ genügte, aber keiner Gleichung $q + q_1 z + ... + q_{m-1} z^{m-1} = 0$ mit rationalen Funktionen in a, b, ... p, p_1, p_2, ... und R als Koeffizienten. Daraus folgerte Abel , daß $R^{\frac{1}{m}}$ in dem abgeleiteten Ausdruck (6.4.5) für y durch $\alpha^i R^{\frac{1}{m}}$ mit $i = 1$, ... $m - 1$ und α eine m-te Einheitswurzel, ersetzt werden kann, und der so gebildete Ausdruck

$$y_i = p + p_1 \alpha^i R^{\frac{1}{m}} + ... + p_{m-1} \alpha^{i(m-1)} R^{\frac{m-1}{m}}$$

ebenfalls der Ausgangsgleichung genügt, also eine Wurzel der Ausgangsgleichung ist. All diese Gleichungen für die y_i faßte er als ein Gleichungssystem mit den Unbekannten p, $p_1 R^{\frac{1}{m}}$, ..., $p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$ auf, eleminierte die Unbekannten und konnte so p, p_1, ..., p_m, R und $R^{\frac{1}{m}}$ als rationale Funktionen der Wurzeln y_i der Ausgangsgleichung nachweisen. Abel vermerkte nun, daß diese Eigenschaft auch für jene Radikale gilt, die in die Bildung von p, p_1, ..., R eingegangen waren, und schloß mit dem zentralen Satz, daß jede irrationale Funktion, die in dem Ausdruck von y (6.4.5) vorkommt, eine rationale Funktion der Wurzeln der vorgelegten Gleichung sei:

„En poursuivant ce raisonnement on conclura que toutes les fonctions irrationelles contenues dans l'expression de y sont des fonctions rationelles des racines de l'équation proposée.“ [Abel 1881, Bd. 1, S. 30f.]

Damit hatte Abel genau jenen Punkt erreicht, den Ruffini als Ausgangspunkt für seinen Beweis gewählt hatte, und konnte unter Rückgriff auf die Resultate von Lagrange und Cauchy den Beweis leicht vollenden. Aus den Cauchyschen Untersuchungen von 1812 über die Anzahl der Werte, die eine Funktion annehmen kann, wenn man die Variablen auf alle möglichen Arten permutiert, folgerte er daß m nur den Wert 2 oder 5 haben kann. Abel betrachtete beide Fälle separat und erhielt jeweils einen Widerspruch, also war die Annahme, daß die allgemeine Gleichung 5. Grades in Radikalen auflösbar ist, falsch.

Mit diesem Beweis hatte Abel ein zentrales Problem der Algebra gelöst. Nachdem die gruppentheoretische Seite des Problems von Ruffini, Cauchy u. a. aufgeklärt worden war und zum Studium der Permutationsgruppen geführt hatte, erhellte Abel nun die körpertheoretischen Aspekte. Doch der Beweis der Unmöglichkeit, die allgemeine Gleichung fünften und höheren Grades in Radikalen aufzulösen, war letztlich nur die Lösung eines Teilaspektes, offen blieb noch die Bestimmung der Gleichungen, für die diese Auflösung doch möglich war.

Die Beantwortung dieser Frage brachte eine weitere Vertiefung der Einsichten in die algebraischen Strukturen mit sich und stand am Beginn einer neuen Etappe der Algebraentwicklung, die den Gegenstand des nächsten Kapitels bildet. Zunächst wenden wir uns noch dem zweiten zentralen algebraischen Problem am Ende des 18. Jahrhunderts zu.

6.5 Zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra durch Carl Friedrich Gauß

Nachdem sich zahlreiche Mathematiker um einen exakten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra bemüht hatten (vgl. Abschn. 5.3.3), reichte Carl Friedrich Gauß im Jahre 1799 einen neuen Beweis des Satzes als Inauguraldissertation ein. Später legte er noch drei weitere, von diesem ersten wesentlich verschiedene Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra vor. Mit der Dissertation wurde Gauß im Sommer 1799 durch Johann Friedrich Pfaff an der Braunschweigischen Landesuniversität in Helmstedt in absentia promoviert, nachdem er zuvor dank der finanziellen Unterstützung des Herzogs von Braunschweig 1792–95 am Collegium Carolinum in Braunschweig und 1795–98 an der Universität in Göttingen studiert hatte. In seiner Arbeit kritisierte Gauß sehr klar als den allen vorangegangenen Arbeiten anhaftenden Mangel, daß die Existenz der Wurzeln polynomialer Gleichungen stets als selbstverständlich angenommen wurde und man nur nachwies, daß sie von der Form $a + b\sqrt{-1}$ sind:

„...; da nun aber durch diesen Beweis selbst unumstösslich dargethan werden soll, daß die Gleichung $X = 0$ wirklich Wurzeln habe, so scheint es nicht erlaubt, die Existenz derselben vorauszusetzen. Ohne Zweifel werden diejenigen, welche das Trügerische der Schlussweise noch nicht durchschaut haben, die Antwort geben: hier solle nicht bewiesen werden, daß der Gleichung $X = 0$ genügt werden könne, ..., sondern nur, daß ihr durch Werthe von x, die in der Form $a + b\sqrt{-1}$ auftreten, genügt werden könne; jenes werde als Grundsatz vorausgesetzt. Da man sich aber ausser reellen und imaginären Grössen $a + b\sqrt{-1}$ keine anderen Grössen-Formen vorstellen kann, so ist es nicht ganz klar, worin sich das, was bewiesen werden soll, von dem unterscheidet, was als Grundsatz angenommen wird; ja sogar, wenn es möglich, noch andere Grössen-Formen auszudenken, etwa die Formen $F, F', F'', ...$ so dürfte doch nicht ohne Beweis zugestanden, daß jener Gleichung entweder durch einen reellen Werth von x genügt werden könne, oder durch einen von der Form $a + b\sqrt{-1}$, oder von der Form F, oder F' usw.“ [Gauß 1890, S. 16f.]

Seinen eigenen Beweis begann Gauß mit der Untersuchung zweier Hilfsgleichungen in den Unbestimmten r und ϕ, die dem Real- bzw. Imaginärteil der vorgelegten Ausgangsgleichung n-ten Grades entsprechen, wenn man $x = r(cos\phi + isin\phi)$ setzt. Ohne auf die Ersetzung Bezug zu nehmen, konnte Gauß für solche Werte von r und ϕ, für die die beiden Hilfsgleichungen erfüllt sind, die Teilbarkeit der Ausgangsgleichung durch einen quadratischen oder einen linearen Faktor nachweisen. Um die Existenz derartiger Werte von r und ϕ zu sichern, für die beide Hilfsgleichungen „verschwinden“, interpretierte Gauß diese Gleichungen als Gleichungen von zwei algebraischen Kurven T und U in Polarkoordinaten. Seine Idee war es nun, einen Schnittpunkt dieser Kurven nachzuweisen. Dann hätte das Ausgangspolynom einen linea-

ren oder quadratischen Faktor und durch sukzessive Wiederholung erhielte er eine vollständige Faktorisierung des Polynoms. Gauß studierte dazu die Schnittpunkte der beiden Kurven mit einem Kreis mit Radius R. Er bewies das Lemma, daß für hinreichend großen Radius R der Kreis mit der Kurve $T = 0$ $2m$ Schnittpunkte und mit der Kurve $U = 0$ ebenfalls $2m$ Schnittpunkte hat. Außerdem wechseln die Schnittpunkte miteinander ab, d. h. auf der Kreislinie liegt zwischen zwei Schnittpunkten der Kurve $U = 0$ ein Schnittpunkt der Kurve $T = 0$ und zwischen zwei Schnittpunkten der Kurve $T = 0$ ein Schnittpunkt der Kurve $U = 0$. Mit Verweis auf die höhere Geometrie und die Sätze über die Schnittpunktanzahl algebraischer Kurven folgerte er, daß die Kurven $U = 0$ und $T = 0$ den Kreis auch in nicht mehr als $2m$ Punkten schneiden könne. Er bezog sich dann auf die aus der höheren Geometrie bekannte Tatsache, *„daß jede algebraische Curve (oder jeder einzelne Theil einer algebraischen Curve, wenn dieselbe zufällig aus mehreren zusammengesetzt ist) entweder in sich zurückläuft, oder nach beiden Seiten ins Unendliche ausläuft, und daß also, wenn ein Zweig einer algebraischen Curve in einen begrenzten Raum eintritt, er nothwendig aus demselben wieder heraustreten muss.“* [Gauß 1890, S. 33] Daraus folgerte er die Existenz eines Schnittpunktes beider Kurven, indem er die gegenteilige Annahme zum Widerspruch führte. Somit ist die Ausgangsgleichung durch einen linearen bzw. einen quadratischen Faktor teilbar.

Ende 1815 gab Gauß einen zweiten algebraischen Beweis des Fundamentalsatzes. In diesem Beweis folgte er im wesentlichen dem zuvor von Euler, Lagrange und Laplace beschrittenen Weg. Er begann mit Untersuchungen der symmetrischen Funktionen. Zunächst bildete er aus n beliebigen unabhängigen Größen $a_i\,(i = 1, 2, \ldots, m)$ die elementarsymmetrischen Funktionen σ_i und zeigte, daß es zu einer beliebigen ganzrationalen, symmetrischen Funktionen f der a_i genau eine ganzrationale Funkton von m Unbestimmten gibt, die in f übergeht, wenn man für die Unbestimmten die elementarsymmetrischen Funktionen einsetzt. Mit anderen Worten, Gauß lieferte einen erneuten Beweis des Hauptsatzes der symmetrischen Funktionen. Als Folge ergab sich die algebraische Unabhängigkeit der elementarsymmetrischen Funktionen σ_i und der Fakt, daß eine algebraische Relation $\Phi(\sigma_1, ..., \sigma_m) = 0$ zwischen den $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m$ notwendigerweise eine Identität ist. Man kann also an die Stelle der σ_i auch die Koeffizienten a_1, ..., a_m einer algebraischen Gleichung m-ten Grades setzen, für die ebenfalls die Relation $\Phi = 0$ gilt. Dies war ein neuer Aspekt, den Gauß hier einführte. Die für ein in Faktoren zerlegbares Polynom abgeleitete Relation galt demnach für alle Polynome. Dieses Vorgehen wird gelegentlich als Gaußsches Prinzip oder als Prinzip der Fortsetzung von Identitäten bezeichnet.

Danach führte Gauß die Diskriminante für ein Polynom $f(x)$ ein und leitete einige wichtige Eigenschaften ab: Die Diskriminante des Polynoms f verschwindet genau dann, wenn $f(x)$ und $f'(x)$ einen gemeinsamen Faktor haben. Im folgenden setzte er voraus, daß das Fundamentaltheorem für alle Po-

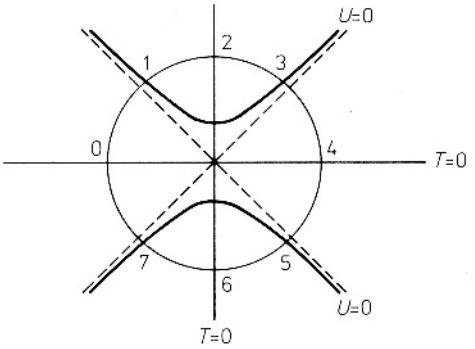


Abb. 6.5.6. Skizze zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra von C. F. Gauß für das Beispiel $x^2 + 1 = 0$

lynome vom Grad $2^{n-1}r$ mit ungeradem r erfüllt sei und bewies die Aussage für ein Polynom vom Grade $m = 2^n r_1$, r_1 ebenfalls ungerade. Dazu betrachtete er eine Hilfsfunktion $\phi(u, x)$, die ein Produkt von Linearfaktoren vom Typ $\alpha+\beta u+\gamma x$ mit den Unbekannten u und x sei. Ist w eine weitere Unbestimmte und setzt man $\phi\left(u + w\frac{d\phi(u,x)}{dx}, x - w\frac{d\phi(u,x)}{du}\right) = \Omega$, so konnte Gauß $\phi(u, x)$ als einen Teiler dieses Ausdrucks nachweisen. Diesen Satz wandte er nun auf die spezielle Hilfsfunktion $f(u, x) = \prod_{1\le i<j\le m}^{m} (u - (a_i + a_j)x + a_i a_j)$ mit den m beliebigen Größen a_i $(1 \le i \le m)$ an, die den Grad $\frac{1}{2}m(m-1) = 2^{n-1}r_2$, r_2 ungerade, hat. Diese Funktion ist in den a_i symmetrisch, so daß $f(u, x)$ als ganze Funktion von u, x und den elementarsymmetrischen Funktionen σ_1, ..., σ_m der a_i dargestellt werden kann, und das eingangs genannte Prinzip anwendbar ist. Unter Rückgriff auf die bereitgestellten Lemmata konstruierte Gauß eine Wurzel für diese Hilfsgleichung und leitete daraus eine Wurzel für die Ausgangsgleichung ab. Diese aufwendige Beweisführung war notwendig, da Gauß offenbar nicht mit dem Begriff des Zerfällungskörpers bzw. einer zu dieser Begriffsbildung äquivalenten Eigenschaft arbeiten wollte. (Man vergleiche dazu auch die Argumentation von Barthel Leendert van der Waerden [van der Waerden 1985, S. 98].) Unter Verweis auf die bekannte Tatsache, daß eine Gleichung ungeraden Grades stets eine reelle Lösung hat, vollendete Gauß den Beweis, da die von ihm angegebene Konstruktion der Hilfsfunktion nach endlich vielen Schritten auf ein Polynom ungeraden Grades führen muß.

Auch in diesem Beweis hob Gauß den zu seinen Vorgängern veränderten Standpunkt klar hervor. Unter Hinweis auf die ausführliche Kritik in der Arbeit von 1799 schrieb er:

„Diese Annahme (der Zerlegbarkeit einer Funktion in Linearfaktoren, K.-H. S.) *selbst ist aber, wenigstens an diesem Orte, an welchem es sich um den allgemeinen Beweis dieser Zerlegbarkeit handelt, nichts als eine Petitio prin-*

cipii. Und gleichwohl haben sich vor durchaus ähnlichen Schlüssen nicht Alle gehütet, welche analytische Beweise unseres Haupt-Theorems versucht haben. Der Ursprung solchen augenfälligen Irrthums kann man schon im Titel dieser Untersuchungen selbst erkennen, da Alle nur die Form der Gleichungswurzeln untersucht haben, während die unbesonnen vorausgesetzte Existenz derselben hätte bewiesen werden müssen.“ [Gauß 1890, S. 44]

Trotz der unbestreitbaren Fortschritte, die mit den Gaußschen Beweisen erreicht wurden, mußte auch Gauß auf Elemente der Anschauung, insbesondere auf die Stetigkeit der reellen Zahlen zurückgreifen und konnte damit einen prinzipiellen Schwachpunkt der vorangegangenen Beweise nicht umgehen.

Der dritte Gaußsche Beweis, auf den er kurz nach seinem zweiten *„durch fortgesetztes Nachdenken über denselben Gegenstand“* geführt wurde, war nach Gaußens Ansicht wesentlich einfacher. Er bildete zunächst wieder die Polynome T und U in den Veränderlichen r und ϕ wie im ersten Beweis des Fundamentalsatzes, diesmal jedoch mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Zum Nachweis der Existenz eines Punktes P, in dem beide Polynome verschwinden, berechnete er das Doppelintegral über einen Quotientenausdruck, der t, u sowie deren erste und zweite Ableitungen enthielt. Unter der Annahme, daß ein solcher Punkt P nicht existiere, konnte Gauß die Integrationsreihenfolge bei der Berechnung des Doppelintegrals vertauschen, was aber zu zwei verschiedenen Werten für das Integral, also zu einem Widerspruch führte. Wie Gauß zu dem benutzten Quotientenausdruck gekommen ist, blieb bisher unklar, man vergleiche aber die Vermutung von van der Waerden [van der Waerden 1985, S. 101f.].

Zu seinem Goldenen Doktorjubiläum 1849 stellte Gauß schließlich noch einen vierten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra auf, wobei er direkt an seine Dissertation anknüpfte. Die wesentliche Veränderung bestand in der Benutzung der komplexen Zahlen, da dieser Begriff nach Gauß inzwischen *„jedermann geläufig“* sei. Damit schloß sich auch in dem Gaußschen Werke der Kreis in der Behandlung des Fundamentalsatzes der Algebra. Nach der Publikation der Dissertation galt das Fundamentaltheorem entsprechend den Exaktheitsvorstellungen jener Zeit als vollständig bewiesen.

Die Bedeutung des Fundamentalsatzes der Algebra besteht nicht nur in dem Beweis des Theorems selbst, sondern in den methodischen Anregungen, die davon ausgingen. So versuchten immer wieder Mathematiker den Satz unter verschiedenen Aspekten zu beweisen, etwa besonders elegant, einfach oder unter Rückgriff auf möglichst wenige nicht algebraische Argumentationen. Leopold Kronecker hat den zweiten, algebraischen Beweis von Gauß mehrfach analysiert. Dabei verknüpfte er diese Überlegungen mit dem von ihm auf Systeme von Moduln erweiterten Gaußschen Kongruenzbegriff und kam so zu einer Verallgemeinerung der Fragestellung. In seiner *„allgemeinen Arithmetik“* (1887) löste er das Problem, ein Primmodulsystem zu bestimmen, für das eine gegebene ganze Funktion einer Variablen, also ein gegebenes Polynom P, als ein Produkt von Linearfaktoren dargestellt werden kann, und gab in die-

sem Kontext die Konstruktion des Zerfällungskörpers an. Kronecker hat den von den Koeffizienten des Polynoms P erzeugten Quotientenkörper so durch Hinzunahme neuer Größen erweitert, daß das Polynom in dem erweiterten Körper in Linearfaktoren zerfällt.

6.6 Die Herausforderung der Algebra durch neue Objektbereiche

Neben den traditionellen Forschungen zur Gleichungstheorie und den Bemühungen um eine Begründung des Rechnens in den verschiedenen Zahlbereichen gab es in der Mitte des 18. und zu Beginn des 19 Jahrhunderts einige weitere Themen, die für die Entwicklung der Algebra von Bedeutung waren.

6.6.1 Determinanten

Die Begriffe Determinante und Matrix hängen historisch sehr eng zusammen und scheinen in unserem heutigen Verständnis untrennbar verbunden. Der Matrixbegriff ist jedoch erst rund 170 Jahre nach den ersten Überlegungen zu Determinanten geprägt worden. Die Einführung der Determinanten erfolgte beim Studium linearer Gleichungssysteme um 1680 unabhängig voneinander durch Gottfried Wilhelm Leibniz und den Japaner Takakazu Seki. Leibniz betrachtete ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten, für dessen Notation er seine Indexschreibweise benutzte. Bei der Elimination der Unbekannten erhielt er eine Determinante, deren Verschwinden die Bedingung für die Lösbarkeit des Systems lieferte. Seki versuchte die Lösung von Gleichungssystemen durch die Einführung von Determinanten in einer schematischen Lösungsformel anzugeben. Für die Berechnung der Determinante im Falle von drei Unbekannten formulierte er eine Vorschrift, die der Sarrusschen Regel entspricht. Unter Rückgriff auf die Resultate chinesischer Mathematiker schuf Seki auch Methoden zur numerischen Lösung von algebraischen Gleichungen, die insbesondere zu dem nach William George Horner benannten Schema führen. Seki, dessen Leistungen vor allem durch seine Schüler überliefert wurden, gilt als der bedeutendste japanische Mathematiker vor dem Kontakt Japans mit den Erkenntnissen europäischer Mathematiker und Naturforscher.

Im 18. Jahrhundert wurden die Determinanten ein fester Bestandteil der Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme und zur Formulierung von Lösungsbedingungen simultaner algebraischer Gleichungen. Speziell durch die Arbeiten der Mathematiker in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts reiften sie zu einem wichtigen Hilfsmittel bei der Behandlung von Problemen der algebraischen Geometrie und Zahlentheorie.

Im Rahmen seiner Studien zur Anzahl der möglichen Schnittpunkte zweier algebraischer Kurven und der Anzahl der Punkte, durch die eine algebraische



August Leopold Crelle



Gabriel Cramer

Kurve eindeutig bestimmt ist, berechnete Gabriel Cramer die Koeffizienten der Gleichung $A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0$ eines allgemeinen Kegelschnitts, der durch fünf vorgegebene Punkte verläuft, und stellte dabei die heute nach ihm benannte Regel auf. Für Gleichungssysteme mit bis zu vier Unbekannten trat diese Regel, wenn auch mit ungünstiger Bezeichnungsweise, bereits in Maclaurins Abhandlung zur Algebra auf, die dieser um 1730 verfaßte, die aber erst posthum 1748 erschien. Neben der besseren Notation hat wohl auch Euler, indem er in seinem Algebrabuch die Regel mit Cramers Namen verknüpfte, dazu beigetragen, daß man heute von der Cramerschen Regel spricht. Cramer hatte Euler 1727 kennengelernt, als er auf einer seiner Studienreisen für etwa fünf Monate zu den Studenten von Johann I Bernoulli gehörte. Bézout hat dann 1764 die Berechnungsvorschrift für Determinanten systematisch behandelt und nachgewiesen, daß für lineare (homogene) Gleichungssysteme aus dem Verschwinden der Determinante die Existenz einer von Null verschiedenen Lösung folgt. In dem von 1764–69 erschienenen sechsbändigen *„Cours de mathématique“* leitete er ein Kriterium dafür her, daß zwei vorgegebene Polynome eine gemeinsame Nullstelle haben. Sein Verfahren beinhaltete die Bildung der Resultante, einer speziellen Determinante aus den Koeffizienten der beiden Polynome. Auch bei Bézout standen die Arbeiten zur Eliminationstheorie in engem Zusammenhang mit der Bestimmung der Schnittpunkte zweier algebraischer Kurven und ordnen sich damit zugleich in die Frühgeschichte der algebraischen Geometrie ein, auf die später noch näher eingegangen werden wird. Hervorzuheben ist dabei der nach Bézout benannte Satz, der einen Zusammenhang zwischen dem Grad und der Schnittvielfachheit von Kurven herstellt und später in der algebraischen Geometrie eine abstrakte Formulierung erhielt. Es sei noch vermerkt, daß Bézouts *„Cours ...“* eine sehr große Verbreitung erfuhr und

in der englischen Übersetzung ein Standardlehrbuch an den amerikanischen Hochschulen im 19. Jahrhunderts war. Das Werk wurde zwar teilweise wegen der mangelnden Strenge in den Darlegungen kritisiert, doch war es Bézout gelungen, seine Erfahrungen als Lehrer im Unterricht von mathematisch nicht vorgebildeten Schülern (künftigen Schiffsoffizieren) nutzbringend in der Darstellung zu verwerten. In seinen Forschungen, für die ihm der Lehrberuf wenig Zeit ließ, konzentrierte sich Bézout auf die Lösung von algebraischen Gleichungen. 1779 faßte er dann seine Ergebnisse in der *„Théorie des équations algébriques“* zusammen.

Wie Bézout haben sich auch mehrere andere bekannte Mathematiker, u. a. Euler, Lagrange und Laplace, vor allem der Berechnung von Determinanten gewidmet. Einen wichtigen Fortschritt in der Theorie erzielte Vandermonde in einer 1771 vollendeten und 1776 erschienenen Arbeit zur Eliminationstheorie. Im Bestreben, eine allgemeine Lösungsformel für ein Gleichungssystem von n Gleichungen aufzustellen, formulierte er eine Reihe von grundlegenden Theoremen über Determinanten und gilt deshalb als ein Begründer der Determinantentheorie. Zu diesen Resultaten gehörten die Aussagen, daß eine gerade Anzahl von Transpositionen der Spalten oder Zeilen (d. h. der Vertauschung zweier benachbarter Spalten oder Zeilen) das Vorzeichen der Determinante nicht ändert, eine ungerade Anzahl es aber ändert, daß die Determinante ihren Wert nicht ändert, wenn Zeilen und Spalten miteinander vertauscht werden (d. h. wenn man zur transponierten Koeffizientenmatrix übergeht).

Eine neue wichtige Anwendung der Determinanten eröffnete Gauß in den *„Disquisitiones arithmeticae“*, als er sie zur Charakterisierung der Substitutionen binärer und ternärer quadratischer Formen einsetzte. Gauß verwendete dabei eine abkürzende Schreibweise, die die Koeffizienten der Form bzw. der Substitutionsgleichungen in einer bestimmten Anordnung verzeichnete und auf der Tatsache basierte, daß die Form bzw. die Substitutionsgleichungen durch die Koeffizienten eindeutig bestimmt sind. So schrieb er die ternäre quadratische Form $f = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$ kurz als $\begin{pmatrix} aa'a'' \\ bb'b'' \end{pmatrix}$ und die Substitution

$$\begin{array}{l} x = \alpha y + \beta y' + \gamma y'' \\ x' = \alpha' y + \beta' y' + \gamma' y'' \\ x'' = \alpha'' y + \beta'' y' + \gamma'' y'' \end{array} \quad \text{als } (S) = \begin{array}{l} \alpha,\ \beta,\ \gamma \\ \alpha',\ \beta',\ \gamma' \\ \alpha'',\ \beta'',\ \gamma'' \end{array}$$

Diese schematische Anordnung der Koeffizienten entsprach ganz dem späteren Matrixbegriff, wurde aber von Gauß nicht mit einem speziellen Terminus bezeichnet, also nicht als eigenständiges mathematisches Objekt hervorgehoben. Diesen Schritt hielt Gauß anscheinend für überflüssig. Für seine Untersuchung der ternären Formen mußte er auch die Hintereinanderausführung von zwei Substitutionen betrachten und wies nach, daß das Ergebnis dieses Prozesses auch durch eine einzige Substitution erreicht werden kann. Wenn also die Form f durch die Substitution (S) in die Form f' und f' durch die

Substitution (S') in die Form f'' übergeht, so gibt es eine Substitution (T) durch die f in f'' transformiert wird. Ohne weiteren Kommentar gab Gauß die Substitution (T) an, die sich eindeutig aus (S) und (S') berechnen ließ.

Ist (S) wie oben angegeben und (S') von der Form $\begin{matrix}\delta & \varepsilon & \varsigma\\ \delta' & \varepsilon' & \varsigma'\\ \delta'' & \varepsilon'' & \varsigma''\end{matrix}$, so errechnete Gauß die Substitution (T) für die Hintereinanderausführung zu

$$\begin{matrix}\alpha\delta+\beta\delta'+\gamma\delta'' & \alpha\varepsilon+\beta\varepsilon'+\gamma\varepsilon'' & \alpha\varsigma+\beta\varsigma'+\gamma\varsigma''\\ \alpha'\delta+\beta'\delta'+\gamma'\delta'' & \alpha'\varepsilon+\beta'\varepsilon'+\gamma'\varepsilon'' & \alpha'\varsigma+\beta'\varsigma'+\gamma'\varsigma''\\ \alpha''\delta+\beta''\delta'+\gamma''\delta'' & \alpha''\varepsilon+\beta''\varepsilon'+\gamma''\varepsilon'' & \alpha''\varsigma+\beta''\varsigma'+\gamma''\varsigma''\end{matrix}.$$

Dies ist genau das Produkt der Koeffizientenmatrizen der beiden Substitutionen. Da Gauß sogar davon sprach, daß die von ihm definierte Äquivalenz zwischen ternären quadratischen Formen erhalten bleibt (s. u.), hat die Determinante dieser Produktmatrix den Wert ± 1, wenn die Determinanten beider Substitutionen (S) und (S') diesen Wert hatten.

Somit hatte Gauß faktisch als Nebenprodukt seiner zahlentheoretischen Studien die Matrizenmultiplikation definiert und ein Beispiel für die Berechnung der Determinante eines Matrizenproduktes gegeben. Dies wurde einer der Ausgangspunkte für den grundlegenden Beitrag, den Augustin-Louis Cauchy 1812 zur Determinantentheorie lieferte. Cauchy knüpfte sowohl an die in den *„Disquisitiones“* enthaltenen Vorstellungen an, als auch an Ideen von Vandermonde, der in seiner Abhandlung darauf hingewiesen hatte, zur Berechnung von Determinanten Elemente der Permutationstheorie zu verwenden.

In der Arbeit von 1812, die auch Cauchys erste Arbeit zur Permutationstheorie war, definierte dieser die Derterminante als eine spezielle multilineare alternierende Funktion von n^2 Variablen, d. h. als eine Funktion, die bei der Permutation der Variablen nur zwei alternierende Werte k und $-k$ annimmt. Er betrachtete das Produkt

$a_1a_2a_3...a_n(a_2-a_1)(a_3-a_1)...(a_n-a_1)(a_3-a_2)...(a_n-a_2)...(a_n-a_{n-1})$,

das er mit $S(\pm a_1a_2^2a_3^3...a_n^n)$ abkürzte, schrieb dann die Potenzen der a_i als zweiten Index, z. B. $a_{r,s}$ statt a_r^s und fuhr fort:

„on obtiendra pour resultat une nouvelle fonction symmetrique alternée, qui, ..., sera représentée par $S(\pm a_1,{}_1a_2,{}_2a_3,{}_3...a_{n,n})$ *, le signe* S *etant relatif aux premier indices de chaque lettre. Telle est la forme la plus générale du fonctions que je désignerai dans la suite sous le nom de déterminants.“* [Cauchy 1882, 2. Serie, Bd.1, S 114]

Dies entspricht der üblichen Berechnungsvorschrift für den Wert einer Determinante $\sum_\sigma(\pm 1)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}...a_{\sigma(n)n}$, wobei σ alle Permutationen der Zahlenfolge $1, 2, ...n$ durchläuft und das Vorzeichen $+$ für gerade Permutationen und $-$ für ungerade Permutationen dieser Zahlen zu wählen ist. Nachdem er die Determinante $S(\pm a_1,{}_1a_2,{}_2a_3,{}_3...a_{n,n})$ für $n=2$ und $n=3$ berechnet

hatte, gab Cauchy auch die heute übliche Anordnung der Elemente der Determinante in einem quadratischen Schema unter Benutzung doppelter Indizes an:

„En général, le déterminant du $n^{\text{iéme}}$ *ordre ou* $S(\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}...a_{n,n})$ *renferma un nombre égal à* n^2 *de quantités différentes qui seront respectivement*

$$\begin{cases} a_{1,1},\ a_{1,2},\ a_{1,3},\ \ldots\ a_{1,n}, \\ a_{2,1},\ a_{2,2},\ a_{2,3},\ \ldots\ a_{2,n}, \\ a_{3,1},\ a_{3,2},\ a_{3,3},\ \ldots\ a_{3,n}, \\ \ldots,\quad \ldots,\quad \ldots,\quad \ldots\quad \ldots, \\ a_{n,1},\ a_{n,2},\ a_{n,3},\ \ldots\ a_{n,n}, \end{cases} \text{.“}$$

[Cauchy 1882, 2. Ser., Bd.1, S. 114f.] Auf dieser Basis konnte er die Theorie der Determinanten in eine strenge deduktive Form bringen und verständlich entwickeln. So führte er u. a die konjugierten Elemente ein, unterschied klar zwischen den einzelnen Elementen der Determinante bzw. zwischen den Unterdeterminanten verschiedener Ordnung, formulierte und bewies zahlreiche Sätze, wie die Formel für das Produkt zweier Determinanten. Auch die Terminologie wurde wesentlich von Cauchy geprägt, insbesondere wurde durch ihn der Begriff der Determinante klar fixiert, nachdem zuvor verschiedene andere Bezeichnungen noch üblich waren bzw. mit Determinante auch andere mathematische Objekte bezeichnet wurden. Viele Historiker sehen deshalb in Cauchy den formalen Begründer der Determinantentheorie.

Die Bedeutung dieser zu Beginn des 19. Jahrhunderts vollzogenen Ausformung der Determinantentheorie für die Algebra bestand weniger in den Verbesserungen bei der Lösung linearer Gleichungssysteme, sondern vor allem darin, daß mit den Determinanten ein neues mathematisches Objekt ausgezeichnet wurde, das zwar wieder eine Zahl repräsentierte, aber in bestimmter Weise von n^2 anderen Zahlen abhing. Die Multiplikation zweier Determinanten war nicht nur die Multiplikation zweier Zahlen, sondern es war die Verknüpfung zweier neuer Objekte, nämlich der quadratischen Schemata, die die Determinanten repräsentierten. Auch wenn die Berechnungen völlig in den bekannten Zahlbereichen durchgeführt werden konnten, so wurden doch zwei neue Objekte verknüpft und sie ergaben wieder ein derartiges Objekt, ein quadratisches Schema, dem man nach der festgelegten Vorschrift einen Wert zuweisen konnte und der genau das Produkt der Werte der beiden verknüpften Schemata war. Die Determinanten konnten also nicht einfach in einen der Zahlbereiche integriert werden, sie erforderten einen eigenen Status. Die Verknüpfungsregeln entsprachen zwar den vom Rechnen mit Zahlen bekannten Gesetzen, aber sie mußten für die neuen Objekte erneut verifiziert werden.

Während die Determinantentheorie zu Beginn des 19. Jahrhunderts einen deutlichen Aufschwung erlebte und Determinanten vielfältig angewendet wurden, fanden die Matrizen, die hinsichtlich der Verknüpfungsregeln einige interessante Abweichungen offenbart hätten, in diesem Zeitraum kaum Aufmerksamkeit unter den Mathematikern.

6.6.2 Der Einfluß der „Disquisitiones arithmeticae“ von Gauß

Bereits mehrfach ist auf Gauß' großes zahlentheoretisches Werk *„Disquisitiones arithmeticae“* Bezug genommen worden. Einige weitere, für die Algebraentwicklung wichtige Aspekte sollen jetzt etwas genauer erläutert werden. Mit diesem Buch eröffnete der 20jährige Gauß eine neue Ära der Zahlentheorie und markierte den Beginn der modernen Entwicklungsphase dieses mathematischen Teilgebiets. Er systematisierte die vorhandenen Theorien und Methoden, erweiterte sie und standardisierte die Terminologie. Die Abhandlung erschien 1801.

An die Spitze seines Werkes stellte Gauß den Begriff der Kongruenz und die Theorie der Kongruenzen. *„Wenn die Zahl a in der Differenz der Zahlen b, c aufgeht, so werden b und c nach a congruent, im andern Falle incongruent genannt.“* [Gauß 1889, S. 1] Dabei heißt a der Modul. Als Zeichen der Kongruenz führte Gauß das Symbol $\equiv$ ein und schrieb die Definition kurz als $b \equiv c \pmod{a}$.

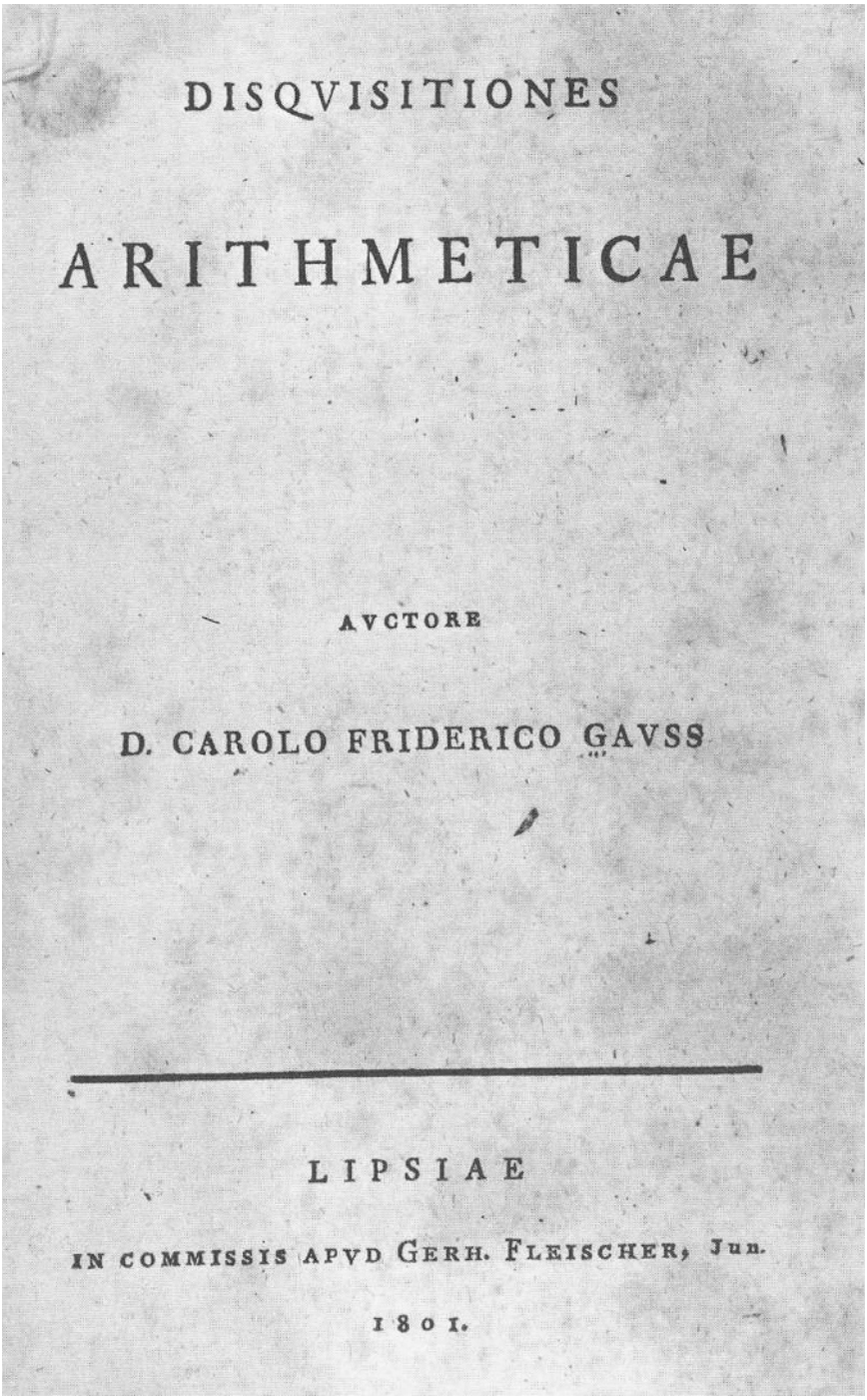
Der Begriff der Kongruenz trat schon früher bei Euler, Lagrange und Legendre auf, aber erst Gauß benutzte ihn systematisch und gab der Theorie eine elegante Form. Er wies die Kongruenz, modern ausgedrückt, als Äquivalenzrelation nach, zeigte, wie man mit Kongruenzen rechnen kann und definierte den Begriff auch für Polynome. Durch die Anwendung seiner Resultate auf Potenzen bzw. speziell auf Quadrate leitete er u. a. den kleinen Fermatschen Satz ($a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, wenn a eine nicht durch die Primzahl p teilbare Zahl ist.) und das quadratische Reziprozitätsgesetz ab. Auch die Bestimmung der n-ten Einheitswurzeln behandelte er in diesem Rahmen.

Gauß war sich völlig bewußt, daß es zu einem festen Modul m unendlich viele Zahlen gab, die den gleichen Rest a bei der Division durch m haben, nämlich alle Zahlen $a+km$, k eine beliebige ganze Zahl, und hatte mit der Einführung der kleinsten Reste faktisch ein Repräsentantensystem für diese Zahlenmengen (Restklassen) gefunden. Es erscheint dann nur als ein kleiner Schritt, um das Rechnen mit den Kongruenzen als ein Rechnen mit den Restklassen zu interpretieren und den strukturellen Gesichtspunkten stärkeres Gewicht zu verleihen. Gauß hat jedoch darauf nicht explizit hingewiesen.

Im 5. Abschnitt seiner Arbeit wandte sich Gauß der Theorie der Formen zu, um eine allgemeine Methode zur Bestimmung aller Lösungen einer unbestimmten Gleichung zweiten Grades in zwei Unbestimmten zu finden. Eine binäre quadratische Form nahm er in der Gestalt

$$ax^2 + 2bxy + cy^2;\ a,\ b,\ c \text{ ganze Zahlen, abgekürzt als } (a,\ b,\ c),$$

an und ordnete ihr die Diskriminante, von Gauß als Determinante (!) bezeichnet, $D = b^2 - ac$ zu. Von dieser Diskriminante hängen, wie Gauß vermerkt, die Eigenschaften der Form hauptsächlich ab. [Gauß 1889, S. 112] Wieder konnte er seine Studien auf zahlreiche Ergebnisse von Euler, Lagrange und Legendre aufbauen, die er auch ausdrücklich erwähnt, insbesondere Lagranges *„Recherches d'Arithmétique“*, ein wichtiges Werk aus der Frühgeschichte der Formen.


DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, Jun.

1801.

Abb. 6.6.7. Titelblatt der „Disquisitiones arithmeticae“ von C. F. Gauß

Darin hatte Lagrange, im Bestreben, alle ganzen Zahlen zu ermitteln, die in der Form $Bt^2 + Ctu + Hu^2$ mit ganzen Zahlen B, C, H darstellbar sind, eine eingehende Untersuchung von binären quadratischen Formen und deren Verhalten bei linearen Variablentransformationen durchgeführt. Die Zahl A heißt durch die obige Form dargestellt, wenn es ganzzahlige Werte T, U der Unbestimmten t bzw. u gibt, so daß $A = BT^2 + CTU + HU^2$ gilt. In moderner Terminologie ausgedrückt, konnte er nachweisen, daß bei vorgegebener fester Diskriminante D nur endlich viele Klassen nichtäquivalenter Formen auftreten und die Diskriminante eine Invariante bei den linearen Variablentransformationen ist.

Aus den Arbeiten seiner Vorgänger gewann Gauß offenbar die Überzeugung, daß die Eigenschaften der binären quadratischen Formen, deren Klassifikation und die Beziehungen zwischen den einzelnen Klassen ein grundlegendes Mittel zur Lösung des vorgelegten Problems über unbestimmte Gleichungen sind. Er begann seine Untersuchungen mit der Analyse des Transformationsverhaltens der Form bei Variablensubstitution und der Einführung eines Äquivalenzbegriffs. Die Form $F = ax^2 + 2bxy + cy^2$ und die Form $F' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$ heißen äquivalent, wenn F durch eine lineare Substitution $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$ mit $(\alpha\beta - \gamma\delta) = \pm 1$ in F' und F' durch eine analoge Substitution $x' = \delta x - \beta y$, $y' = -\gamma x + \alpha y$ in F transformiert werden können. Die Koeffizienten der Substitutionen müssen dabei ganze Zahlen sein. Ist $(\alpha\beta - \gamma\delta) = +1$, so heißen die Formen eigentlich, für $(\alpha\beta - \gamma\delta) = -1$ uneigentlich äquivalent. Als notwendige Bedingung für die Äquivalenz der Formen erhält man die Gleichheit der Diskriminanten, doch dies ist nicht hinreichend, und es ergibt sich die Frage, wie viele Klassen nichtäquivalenter Formen zu einer beliebig, aber fest vorgegebenen Diskriminante existieren. Gauß wies die Endlichkeit dieser Klassenanzahl nach, und was er beim Rechnen mit Kongruenzen wohl noch als selbstverständlich übergangen hatte, brachte er jetzt klar zum Ausdruck:

„Schon oben (Artikel 175, 195, 211) haben wir gezeigt, dass, wenn irgend eine ganze (sei es positive, sei es negative) Zahl D gegeben ist, eine endliche Anzahl von Formen $F, F', F'', \ldots$ mit der Determinante D von der Beschaffenheit angegeben werden kann, daß jede beliebige Form mit der Determinante D irgend einer von jenen und nur einer einzigen eigentlich äquivalent ist. Somit können sämtliche Formen mit der Determinante D (deren Anzahl unendlich gross ist) nach jenen Formen in Klassen geteilt werden, indem man nämlich aus der Gesamtheit aller Formen, welche der Form F eigentlich äquivalent sind, die erste Klasse, aus den Formen, welche der Form F' eigentlich äquivalent sind, die zweite Klasse, usw. bildet.

Aus den einzelnen Klassen der Formen mit der gegebenen Determinante D kann irgend eine Form ausgewählt und gleichsam als ***repräsentierende*** *Form (Repräsentant) der ganzen Klasse betrachtet werden.“* [Gauß 1889, S. 212f.]

Nach der Einteilung der Formenklassen in Ordnungen, die hier nicht von Interesse ist, ging Gauß *„zu einem andern sehr wichtigen, bisher noch von Niemand berührten Gegenstande, nämlich der Composition der Formen, über“.* [Gauß 1889, S. 229] Diese Komposition der Formen definierte er wie folgt:
„Wenn die Form

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = F$$

übergeht in das Product zweier Formen:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = f, \quad a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 = f'$$

durch eine Substitution von der Form

$$X = pxx' + p'xy' + p''yx' + p'''yy'$$

$$Y = qxx' + q'xy' + q''yx' + q'''yy',$$

..., so werden wir einfach sagen, die Form F sei ***transformierbar*** *in* ff'*; ist diese Transformation überdies so beschaffen, daß die sechs Zahlen*

$$pq'-qp', \quad pq''-qp'', \quad pq'''-qp''', \quad p'q''-q'p'', \quad p'q'''-q'p''', \quad p''q'''-q''p'''$$

keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, so werden wir die F o r m F *a u s d e n F o r m e n* f, f' ***zusammengesetzt (componiert)*** *nennen.“* [Gauß 1889, S. 231f., Hervorhebungen im Original]
In einer Fußnote merkte Gauß die Kommutativität dieser Zusammensetzung an. Es handelt sich bei der Komposition der Formen um eine ternäre Relation, die in einem offensichtlichen Sinne kommutativ und assoziativ ist. Nachdem er dann im Artikel 236 die direkte Herangehensweise, die Komposition der Form F aus zwei gegebenen Formen f und f' erläutert hatte, wies er für beide Betrachtungsweisen (d. h. F wird in die Zusammensetzung ff' transformiert bzw. F wird aus den Formen f und f' komponiert) die Unabhängigkeit dieser Bildungen von der Wahl der Repräsentanten einer Formenklasse nach. Für den zweiten Fall lautet dies bei Gauß:

„Wenn die Form G *aus den Formen* g, g' *in derselben Weise zusammengesetzt ist, wie* F *aus* f, f' *respective, und die Formen* g, g' *den Formen* f, f' *eigentlich äquivalent sind, so werden auch die Formen* F, G*, eigentlich äquivalent sein.“* [Gauß 1889, S. 243]

Damit konnte Gauß seine Komposition der Formen heranziehen, um eine Zusammensetzung der Formenklassen zu definieren. Diese Verknüpfung führte nicht aus der Menge der Formenklassen heraus und ist eine Verknüpfung im heutigen Sinne mit eindeutigem Ergebnis. Sie war sowohl kommutativ als

auch assoziativ. Auf ersteres hatte Gauß in der erwähnten Fußnote hingewiesen, die Assoziativität bildete die Aussage des Artikels 240. Somit bildete die endliche Menge der Formenklassen mit dieser Zusammensetzung als Verknüpfung eine endliche abelsche Gruppe, und auch Gauß hatte diese Verknüpfung im Blick. Nach der Komposition der Ordnungen und Geschlechter behandelte er kurz die Komposition der Formenklassen und stellte u. a. fest, daß man die Verknüpfung der Formenklassen als Addition schreiben kann, daß modern formuliert, die Gleichung $a + x = b$ stets eindeutig lösbar ist und die Rolle des Einselements durch die sog. „Hauptklasse“, d. i. die Klasse aller zur „Hauptform“ $x^2 - Dy^2$ äquivalenten Formen, ausgeübt wird.

Mit den Formen und den Formenklassen hatte Gauß völlig neue Objekte verknüpft, die sich nicht mit den bisher bekannten Methoden behandeln ließen. Zugleich enthüllte er die Struktur der Mengen dieser Objekte so weit, daß strukturelle Übereinstimmungen mit den Zahlbereichen deutlich wurden, wie Gauß mit der Übernahme der Symbolik wohl andeuten wollte.

Wesentliche Inhalte der Algebra 1770–1825

1769	Leonhard Euler publiziert seine „Vollständige Anleitung zur Algebra“
1770	Joseph Louis Lagrange: Grundlegende Analyse der Verfahren zur Auflösung algebraischer Gleichungen bis vierten Grades, erste Einsichten zu Permutationsgruppen
1771	Alexandre Théophile Vandermonde: Erste Einsichten über Permutationsgruppen, Auflösbarkeit der Kreisteilungsgleichung $x^n - 1 = 0$ für $n \leq 11$
1771	Alexandre Théophile Vandermonde: Zusammenfassende Darstellung der Determinantentheorie, ein zweiter Teil erscheint 1776
1775	Joseph Louis Lagrange: Grundlegende Einsichten zur Darstellung einer Zahl durch eine binäre quadratische Form
1780	Étienne Bonnot de Condillac analysiert in „La Logique“ die Rolle einer exakten Wissenschaftssprache
1796	Carl Friedrich Gauss findet den ersten Beweis für die Auflösbarkeit der Gleichung $x^{17} - 1 = 0$ in Radikalen und die Konstruierbarkeit des regulären 17-Ecks mit Zirkel und Lineal
1796	Carl Friedrich Hindenburg veröffentlicht eine Zusammenfassung seiner kombinatorischen Methoden und Resultate
1797	Caspar Wessel publiziert eine geometrische Darstellung der komplexen Zahlen
1799	Carl Friedrich Gauss: Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra

1799	Paolo Ruffini gibt einen sehr lückenhaften Beweis, daß für $n > 4$ die allgemeine Gleichung n-ten Grades nicht in Radikalen auflösbar ist und führt Untersuchungen zu Permutationsgruppen durch
1801	Carl Friedrich Gauss veröffentlicht die „Disquisitiones arithmeticae“, ein grundlegendes zahlentheoretisches Werk mit wesentlichen algebraischen Elementen
1806	Jean Robert Argand publiziert eine geometrische Darstellung der komplexen Zahlen
1810–1831	Joseph-Diaz Gergonne gibt die erste mathematische Fachzeitschrift „Annales de mathématiques“ heraus
1814	François-Joseph Servois führt die Begriffe kommutativ und distributiv im Rahmen der Operatorenrechnung ein
1815	Augustin-Louis Cauchy: Erste systematische Darstellung zur Theorie der Permutationen sowie der Determinanten
1816	Charles Babbage entwickelt in einem unveröffentlichten Manuskript Vorstellungen zur Begründung der Mathematik, u. a. eine Version des Permanenzprinzips.
1819	Carl Friedrich Gauss betrachtet dreidimensionale Größen mit nichtkommutativer Multiplikation, publiziert aber nicht dazu
1822	Martin Ohm gibt sein neunbändiges Werk „Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik“ heraus
1824	Niels Henrik Abel beweist, daß die allgemeine Gleichung fünften Grades nicht in Radikalen auflösbar ist, dehnt 1826 den Beweis auf Gleichungen höheren als vierten Grades aus

6.7 Aufgaben zu Kapitel 6

Aufgabe 6.5.1: Zum Fundamentalsatz der Algebra
Man beweise folgende Teilaussage des Fundamentalsatzes der Algebra: Die Gleichung n-ten Grades $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ mit reellen Zahlen $a_i\,(1 \leq i \leq n)$ und einer natürlichen Zahl n hat nicht mehr als n paarweise verschiedene Lösungen. Man zeige zunächst die Aussage: Wenn die obige Gleichung eine Nullstelle $x = a$ besitzt, dann ist das Polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ durch $x - a$ teilbar [Cofman, Bd. 2, S. 23].

Aufgabe 6.4.4: Kreisteilungsgleichung
Man löse die Kreisteilungsgleichung $x^n - 1 = 0$ für $n = 5$ und $n = 6$.
Hinweis für $n = 5$: Man benutze die Zerlegung
$x^5 - 1 = (x-1)x^2\left\{(x + x^{-1})^2 + (x + x^{-1}) - 1\right\}$ [Cofman, Bd. 2, S. 25, 196].

Aufgabe 6.2.1: Komplexe Zahlen nach W. R. Hamilton
Bei seiner arithmetischen Begründung der komplexen Zahlen definierte W. R. Hamilton diese Zahlen als die Menge aller Zahlenpaare $z := (x, y)$ mit x, y reelle Zahlen. Die Gleichheit zweier Zahlenpaare definierte er durch: $(x, y) = (x', y')$ genau dann, wenn $x = x'$ und $y = y'$. Die arithmetischen Operationen Addition und Multiplikation erklärte er durch: $(x, y)+(x', y') := (x+x', y+y')$ $(x, y)\times(x', y') := (xx' - yy', xy' + x'y)$. Man beweise, daß mit diesen Operationen die Menge der Zahlenpaare einen Körper bildet. Ist dieser Körper kommutativ?

Aufgabe 6.4.1: Permutationen als Produkt von Transpositionen
Unter den Permutationen von n Elementen spielen die Permutationen, bei denen nur zwei Elemente vertauscht werden, d. h. die zweigliedrigen Zyklen, eine ausgezeichnete Rolle. Sie werden auch Transpositionen genannt. Man zeige, daß jede Permutation entweder selbst eine Transposition ist oder als Produkt von Transpositionen geschrieben werden kann. [Perron, Bd. 2, S. 102]

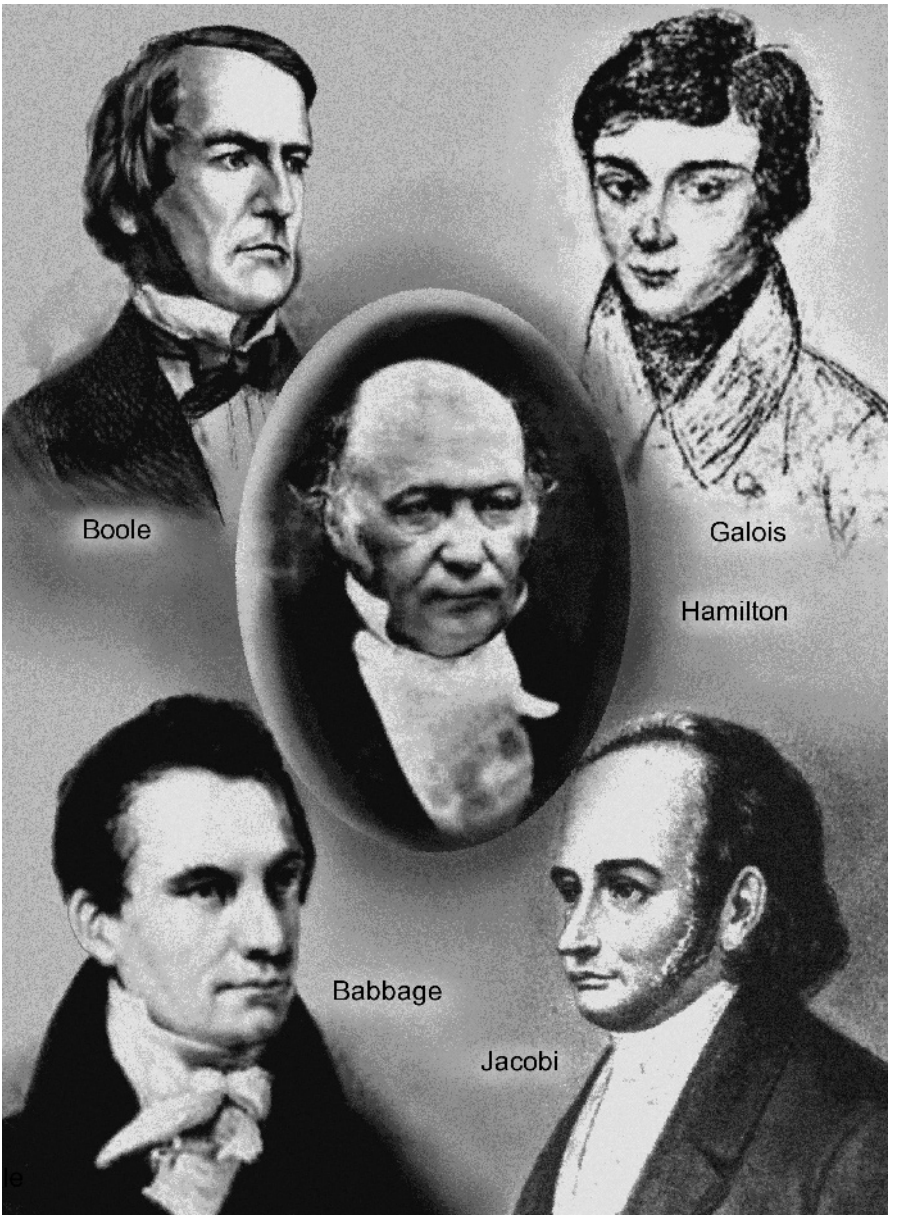
Aufgabe 6.4.2: Gruppe der Permutationen
Sei M eine endliche Menge. Man beweise, daß die Menge der Permutationen von M bezüglich der Hintereinanderausführung der Permutationen eine Gruppe bildet.

Aufgabe 6.4.3: Untergruppen von $_3$
Man bestimme die Untergruppen der Permutationsgruppe $_3$. Hinweise: Man benutze die Zyklendarstellung der Permutationen.

Aufgabe 6.4.5: Permutation eines Polynoms von n Veränderlichen
Zu den Grundaufgaben der Galois-Theorie gehört es, das Verhalten von Funktionen der Wurzeln bei der Permutation der Wurzeln zu untersuchen. Man zeige, daß die folgende Grundvoraussetzung erfüllt ist: Die Permutationen, die ein Polynom von n unabhängigen Veränderlichen ungeändert lassen, bilden eine Gruppe. [Perron, Bd. 2, S. 113]
Erläuterung: Sei $f(x_1, \ldots, x_n)$ ein Polynom der n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$; π eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$. Dann bleibt f ungeändert bei der Permutation π, wenn $f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ ist.

Aufgabe 6.2.2: Charakterisierung komplexen Zahlen nach A.-L. Cauchy
Man bestätige die von A.-L. Cauchy gegebene Charakterisierung der komplexen Zahlen durch Restklassenbildung im Polynomring $R[x]$ über den reellen Zahlen modulo dem Polynom $x^2 + 1$.

7 Die Herausbildung erster Strukturbegriffe in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts



1826–1850: Eine Zeit großer Fortschritte in der Mathematik, wichtiger naturwissenschaftlicher Entdeckungen und technischer Erfindungen, bedeutender Werke des Klassizismus in der Architektur, der Romantik in Literatur, Malerei und Musik, aber auch kolonialer Expansion und politisch-sozialer Unruhen.

1826	N. I. Lobatschewski stellt in Kasan eine nichteuklidische Geometrie vor.
1827	G. S. Ohm findet das nach ihm benannte Gesetz für elektrische Ströme.
1828	F. Wöhler gelingt die erste Synthese eines organischen Stoffes (Harnstoff) aus anorganischen Bestandteilen.
1829	Griechenland erringt die Unabhängigkeit von der Türkei.
1830	Revolutionäre Erhebungen in mehreren europäischen Ländern.
1831	M. Faraday entdeckt die elektromagnetische Induktion.
1832	F. A. Diesterweg fördert, in Berlin wirkend, das Volksschulwesen
1832	J. Bolyai publiziert seine unabhängig von Gauß und Lobatschewski gefundene nichteuklidische Geometrie.
1832	Erster elektromagnetischer Telegraph von C. F. Gauß und W. Weber in Göttingen
1833	Gründung des Deutschen Zollvereins durch Preußen
1835	Wiederkehr des Halleyschen Kometen bestätigt die zuvor ausgeführten Berechnungen
1837	Beginn der Regierungszeit von Königin Victoria von England
1837	König Ernst August von Hannover entläßt die „Göttinger Sieben“ wegen ihres Protestes gegen die Aufhebung des Staatsgrundgesetzes.
1837	A. Lortzing setzt mit „Zar und Zimmermann“ die Tradition der deutschen romantischen Oper fort.
1838	Großbritannien beginnt den Opiumkrieg gegen China zur Sicherung der Handelsinteressen, endet 1842 mit der Öffnung der chinesischen Häfen und der Abtretung Hongkongs an England.
1839	Erste deutsche Fernstrecke der Eisenbahn von Leipzig nach Dresden eröffnet
1840	J. v. Liebig begründet die Agrikulturchemie.
1842	A. Comte vollendet sein sechsbändiges Werk zur Begründung des Positivismus.
1842	J. R. Mayer formuliert den Energieerhaltungssatz, der unabhängig von J. P. Joule und H. v. Helmholtz (1848) begründet wird.
1843	Der erste Ozeandampfer mit Schiffsschrauben wird gebaut.
1844	Weberaufstände in Schlesien
1845–1848	Hungersnot in Irland verursacht Massenauswanderung.
1846	Krieg zwischen Mexiko und den USA
1847	Einführung des 10-Stunden-Tags in England
1847	Goldfunde in Kalifornien, Beginn des „Goldrauschs“
1848	K. Marx und F. Engels veröffentlichen das „Kommunistische Manifest“.
1848/49	Revolutionäre Erhebungen in mehreren europäischen Ländern
1848	Deutsche Nationalversammlung arbeitet eine Verfassung aus.
1848	In Frankreich wird die Einrichtung öffentlicher Bibliotheken beschlossen.
1850	Einrichtung von Volksbüchereien in England und Deutschland
1850	R. Wagner vollendet die Oper „Lohengrin“.

7.0 Vorbemerkungen

Die Jahrzehnte nach dem Ende der Napoleonischen Kriege und die Neuordnung Europas durch die Siegermächte waren gekennzeichnet durch die Dominanz der Restaurationsbestrebungen unter den politisch Mächtigen und dem unaufhaltsamen Voranschreiten der Entwicklung zur Industriegesellschaft im ökonomischen Bereich. In der deutschen Geschichte wird diese Zeit bis zu den revolutionären Erhebungen 1848 als Vormärz bezeichnet. Die Industrielle Revolution erfaßte weitere europäische Staaten, insbesondere Deutschland. In der Philosophie treten die Einzelwissenschaften nach dem Zusammenbruch des deutschen Idealismus als umfassendes geschlossenes philosophisches System in Konkurrenz zur Philosophie und artikulieren einen eigenen, methodisch abgesicherten Erkenntnisanspruch. In diesem Spannungsverhältnis bildet sich dann der in Gestalt der Soziologie zunächst als Einzelwissenschaft auftretende Positivismus als neue Philosophie heraus, die dann bis zum Ende des Jahrhunderts einen starken Einfluß ausüben wird.

In Anlehnung an die in Frankreich entwickelten neuen Ideen und Formen im Bildungswesen und zunehmend im Bestreben, den neuen aus den ökonomischen Veränderungen entstehenden Anforderungen Rechnung zu tragen, kam es in den einzelnen Ländern zu verschiedenen Ansätzen zur Reform des jeweiligen Bildungswesens. Mit diesen Umgestaltungen begann der Wandel des Wissenschaftsbetriebs zu jenen festen Organisationsformen mit Instituten, Laboratorien, Bibliotheken usw., in der uns die Einzelwissenschaften arbeitsteilig klar getrennt am Ende des Jahrhunderts gegenübertreten. Es war zugleich der Weg vom Amateur-Forscher, in dem Sinne, daß die mathematische oder naturwissenschaftliche Forschung nicht zur Sicherung des Lebensunterhalts ausreichte, zum staatlich besoldeten, systematisch forschenden Universitätsprofessor.

So wie der Prozeß der Industrialisierung sich über ein Jahrhundert erstreckte und in seinem Verlauf durch große nationale Unterschiede gekennzeichnet war, zeigte auch die Mathematikentwicklung und insbesondere die Umgestaltung der Algebra ein sehr facettenreiches Bild. Analysis und Geometrie waren die dominierenden Gebiete. Aber auch zahlentheoretische Untersuchungen fanden immer wieder das Interesse der Mathematiker und traten, wie im folgenden gezeigt wird, in eine enge Wechselbeziehung zur Algebra, eine Beziehung, die sich für beide Gebiete als sehr fruchtbar erwies. Um die Kontinuität, aber auch die verschiedenen Nuancen dieses Prozesses in der Algebra zu erfassen, wird zunächst auf wichtige Fortschritte in der Behandlung einiger zentraler algebraischer Fragestellungen eingegangen, die vor allem im dritten und vierten Jahrzehnt des 19. Jahrhunderts hervorgebracht wurden und die den Anschluß an das zu Beginn des Jahrhunderts erreichte Niveau herstellten.



Abb. 7.0.1. Fassade der Humboldt-Universität in Berlin
[Foto Alten]

7.1 Die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen – Galois-Theorie

7.1.1 Der Beitrag von Niels Henrik Abel

Nach dem Unmöglichkeitsbeweis für die Auflösbarkeit der allgemeinen algebraischen Gleichung höheren als vierten Grades setzte Abel seine Untersuchung des Auflösbarkeitsproblems fort. Eine zusätzliche Anregung erhielt er durch seine Studien über elliptische Funktionen, in denen er mit der genialen Idee, statt der elliptischen Integrale deren Umkehrfunktion zu betrachten, ein neues Forschungsgebiet eröffnet hatte. Ausgehend von der kanonischen Form der elliptischen Integrale führte Abel die Funktionen $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$ und $F(\alpha)$ ein, die im wesentlichen den von Carl Gustav Jacob Jacobi unabhängig von Abel definierten, heute gebräuchlichen, elliptischen Funktionen $sn(\alpha)$, $cn(\alpha)$ und $dn(\alpha)$ entsprechen. Ein wichtiges Problem stellte nun die komplexe Multiplikation bzw. Division der elliptischen Funktionen dar, d. h. das Verfahren, $\varphi(n\alpha)$ bzw. $\varphi\left(\frac{1}{n}\alpha\right)$ rational durch $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$ und $F(\alpha)$ auszudrücken. Die methodische Anregung dazu lieferten ihm vor allem die Gaußsche Theorie der Kreisteilung und für die Problemstellung die Resultate von Giulio Carlo Fagnano und anderer Mathematiker über die einfache Teilung bzw. Vervielfältigung des Lemniskatenbogens. Die Länge des Lemniskatenbogens wird

durch ein elliptisches Integral beschrieben und Gauß hatte in seiner Kreisteilungstheorie insbesondere angemerkt, daß sie sich auch auf die Teilung der Lemniskate und anderer transzendenter Kurven anwenden lasse [Gauß 1889, S. 397]. Am Beispiel der Kreisteilungsgleichung hatte Gauß wichtige Einsichten in die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen erzielt (vgl. Abschn. 6.4.4). Abel war mit diesen Resultaten bestens vertraut und wurde von ihnen sehr inspiriert. So fanden bei Abel die Studien über elliptische Funktionen eine enge Verknüpfung mit der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen und führten auf beiden Gebieten zu interessanten Ergebnissen, von denen hier nur die algebraisch relevanten berücksichtigt werden können.

Verbunden mit diesen Forschungen war eine schrittweise Präzisierung der Begriffe *„algebraisch auflösbar“*, *„irreduzibel“* und *„rational ausdrückbar“*. Eine erste wichtige Verschärfung des Begriffs *„algebraisch auflösbar“* nahm Abel in der 1827 erschienenen Arbeit über elliptische Funktionen vor, indem er ihn vom Grundkörper der betrachteten Gleichung abhängig machte. Abel vermerkte, daß die Funktionen $\varphi\left(\frac{1}{n}\alpha\right)$, $f\left(\frac{1}{n}\alpha\right)$ und $F\left(\frac{1}{n}\alpha\right)$ durch die Funktionen $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$ und $F(\alpha)$ ausgedrückt werden können und diese Formel bezüglich α keine anderen Irrationalitäten enthält als Wurzeln. Dies gibt nach Abel eine Klasse sehr allgemeiner Gleichungen, die algebraisch auflösbar sind. Er fuhr dann fort:

„Il est à remarquer, que les expressions des racines contiennent des quantités constantes qui, en général, ne sont pas exprimables par des quantités algébriques.“ [Abel 1827, S. 103]

D. h. die Gleichungen sind über den rationalen Zahlen im allgemeinen nicht auflösbar, wohl aber über einem erweiterten Grundkörper.

Im Jahre 1829 hat Abel weitere wichtige Resultate zur Auflösbarkeit von Gleichungen publiziert. Als Ziel nannte er die Verallgemeinerung der Gaußschen Methode zur Behandlung der Kreisteilungsgleichung. Er nahm dazu an, zwei beliebige Wurzeln der vorgelegten Gleichung seien so miteinander verknüpft, daß man die eine durch die andere rational ausdrücken kann [Abel 1829, S. 131]. In den ersten Abschnitten der Arbeit betrachtete er, dabei klar dem Gaußschen Vorgehen folgend, die Auflösbarkeit einer irreduziblen Gleichung, leitete die Einteilung der Gleichungswurzeln in mehrere Gruppen ab, wobei sich die Wurzeln einer Gruppe rational durch eine von ihnen ausdrücken lassen, und bewies die Auflösbarkeit der erhaltenen zyklischen Gleichungen. Bei all dem machte er die Abhängigkeit der Begriffe wie irreduzibel und auflösbar von dem gewählten Grundkörper deutlich. Im vierten Paragraphen widmete er sich dann den Gleichungen, die nach Kronecker heute als Abelsche Gleichungen bezeichnet werden. Abel setzte jetzt voraus, daß alle Wurzeln der untersuchten Gleichung rational durch eine von ihnen ausgedrückt werden können. Ist x eine solche Wurzel, so schrieb er die übrigen Wurzeln der Gleichung als θx, $\theta_1 x$... mit rationalen Funktionen θ, θ_1... (Abel ließ generell bei der Funktionsschreibweise die Klammern um das Argument weg, also θx statt $\theta(x)$.) Der Hauptsatz der Abhandlung besagte nun, wenn zusätzlich zu der

obigen Darstellung der Wurzeln für zwei beliebige der Funktionen θ – etwa θ_i und θ_k – gilt $\theta_i\theta_k x = \theta_k\theta_i x$, dann ist die Gleichung algebraisch auflösbar. Ist weiterhin der Grad n der vorgelegten irreduziblen Gleichung ein Produkt von verschiedenen Primzahlpotenzen, $n = p_1^{n_1}...p_r^{n_r}$, so kann die Auflösung dieser Gleichung auf die Auflösung von Hilfsgleichungen niedrigeren Grades zurückgeführt werden, genauer auf die Auflösung von n_1 Gleichungen vom Grad p_1, n_2 Gleichungen vom Grad p_2 usw. Wieder erwähnte Abel Gauß und bemerkte, daß zwischen den Wurzeln der Kreisteilungsgleichung ein derartiger rationaler Zusammenhang bestehe. Den Beweis gründete Abel auf das Studium der Permutationen, die man erhält, wenn man in der Darstellung aller Wurzeln der Gleichung als rationale Funktionen einer von ihnen, etwa von x_1, diese durch eine andere Wurzel x_i ersetzt, also von $\theta_1 x_1$, $\theta_2 x_1$, ..., $\theta_n x_1$, zu $\theta_1 x_i$, $\theta_2 x_i$, ... $\theta_n x_i$ übergeht. Die $\theta_k x_i$ ($k = 1, 2, ..., n$) ergeben, wenn auch in anderer Reihenfolge, wieder alle Wurzeln der Gleichung. Wenn, modern formuliert, die so erhaltene Permutationsgruppe kommutativ ist, kann die vorgegebene Gleichung, wie im obigen Satz behauptet, auf die Auflösung von Gleichungen niedrigeren Grades zurückgeführt werden, und jede dieser Gleichungen ist auflösbar.

Bereits 1828, vermutlich vor dem Abfassen der obigen Abhandlung, hatte Abel begonnen, seine Untersuchungen über die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen zusammenfassend darzustellen. Diese Arbeit blieb durch den frühen Tod Abels unvollendet und wurde erst 1839 aus seinem Nachlaß publiziert. Neben einer guten Skizze der historischen Entwicklung benannte Abel klar die grundlegenden Probleme der Theorie:

„On sait que toute expression algébrique peut satisfaire à une équation d'un degré plus ou moins élevé, selon la nature particulière de cette expression. Il y a de cette manière un infinité d'équations particulières qui sont résolubles algébriquement. De là dérivent naturellement les deux problèmes suivants, dont la solution complète comprend toute la théorie de la résolution algébrique des équations, savoir:

1. Trouver toutes les équations d'un degré déterminé quelconque qui soient résolubles algébriquement.

2. Juger si une équation donnée est résoluble algébriquement, ou non.“ [Abel 1881, Bd. 2, S. 218f.]

Eine zweite Version für die Einleitung zu diesem Artikel enthielt eine weitere Präzisierung der Begriffe *„Radikal(ausdruck)“*, *„irreduzibel“* und *„auflösbar“*, die Abel klar in Abhängigkeit von einem vorgegebenen Grundkörper $P(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots)$ definierte. Dabei konnten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ unbestimmte oder bestimmte (algebraische) Größen sein. Als Radikalausdruck der vorgegebenen Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ bezeichnete er jede Größe, die aus jenen durch die Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und des Ausziehens von Wurzeln mit Primzahlexponenten gebildet werden kann [Abel 1881, Bd. 2, S. 330f.].

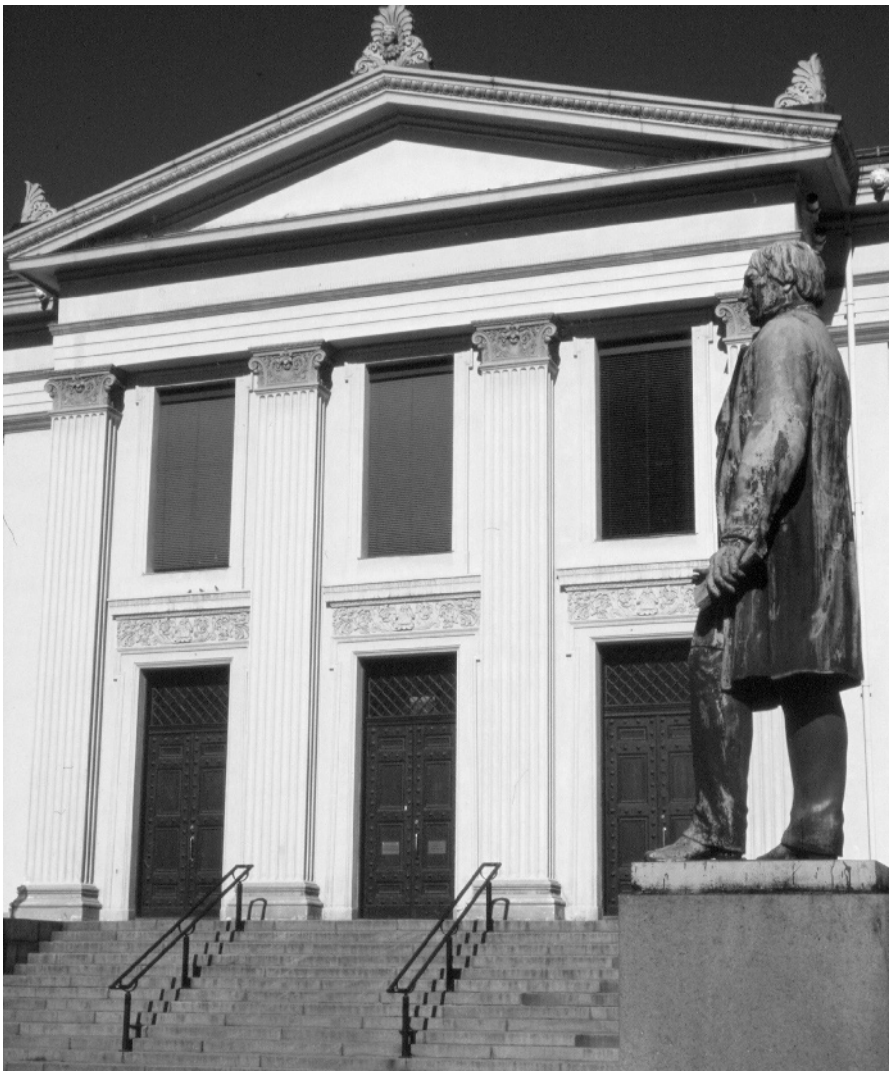


Abb. 7.1.2. Portal der Universität in Christiania (Oslo). Hier erhielt N. H. Abel 1820 eine Freistelle und veröffentlichte 1824 seinen Unmöglichkeitsbeweis
[Foto Alten]

Abel hatte somit die verschiedenen Aspekte der Auflösung algebraischer Gleichungen deutlich umrissen und wichtige körpertheoretische Überlegungen zur Bewältigung der Problematik bereitgestellt. Zu den historischen Besonderheiten in der Geschichte der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen gehört die Tatsache, daß die Hauptakteure in dieser Theorie ihre wichtigen Ergebnisse bereits in jungen Jahren am Beginn ihrer mathematischen Karriere

erzielten. Doch während Gauß dann ein umfangreiches Lebenswerk aufbauen konnte, war dies Abel und Galois nicht vergönnt. Abel wurde 1802 als zweites von sieben Kindern eines Pfarrers in Südnorwegen geboren und wuchs in einer schwierigen Zeit in bescheidenen materiellen Verhältnissen auf, die sich durch den Tod des Vaters 1820 noch verschlechterten. Durch die Unterstützung seines Lehrers Bernt Holmboe, der Abels mathematisches Talent entdeckt und gefördert sowie einige Professoren der Universität von Christiania (Oslo) darauf aufmerksam gemacht hatte, erhielt Abel im gleichen Jahr, 1820, eine Freistelle an der Universität. Auf mathematischem Gebiet blieb er aber im wesentlichen Autodidakt, da an der damals jungen Universität noch keine mathematischen Vorlesungen gehalten wurden. Nach ersten eigenen Arbeiten sollte ein Reisestipendium Abel die Möglichkeit geben, seine Kenntnisse in Deutschland und Frankreich zu ergänzen und einen Kontakt zu bedeutenden Mathematikern des Kontinents herzustellen. Während er in Berlin in dem Bauingenieur und Wissenschaftsorganisator August Leopold Crelle sehr rasch einen Freund und Förderer fand, stand sein Frankreichaufenthalt 1826 unter einem ungünstigen Stern. So blieb eine große, der Pariser Akademie vorgelegte Arbeit, die u. a. eine weitgehende Verallgemeinerung des Additionstheorems für elliptische Integrale, sog. Abelsches Theorem, enthielt, unbeachtet und wurde nicht, wie erhofft, der Ausgangspunkt für einen Gedankenaustausch mit den führenden französischen Mathematikern. Ende 1826 reiste Abel über Berlin nach Christiania zurück, wo er, da sich der Aufbau einer mathematischen Ausbildung an der Universität nicht wie geplant entwickelte, sehr bald in große finanzielle Schwierigkeiten geriet. Während sich Crelle in Berlin um eine gesicherte Stellung für Abel bemühte, erkrankte dieser an Tuberkulose und verstarb 26jährig noch bevor ihn die Nachricht von Crelles erfolgreichem Wirken erreichte. Eine detaillierte Schilderung des Lebens von Abel und seines Werkes findet man in [Stubhaug 2000].

7.1.2 Die Lösung des Problems durch Evariste Galois

Während Abel sich noch darum bemühte, das erste von ihm genannte Problem zu lösen und alle auflösbaren algebraischen Gleichungen zu einem beliebigen aber fest vorgegebenen Grad zu bestimmen, begann der 15-jährige Evariste Galois die Werke von Legendre, Lagrange, Gauß, Cauchy u. a. zu studieren. Nur wenige Jahre später, 1829/31, sollte Galois das Auflösungsproblem lösen und zu einem ersten Abschluß bringen. Das tragische Schicksal dieses jungen Franzosen, dessen Leben nach weniger als 21 Jahren in einem Duell ein Ende nahm, noch bevor die Geisteswelt jener Zeit bereit war, seine neuen Ideen anzuerkennen, ist mehrfach literarisch verarbeitet worden. Selten waren revolutionäre mathematische Ideen so eng mit leidenschaftlichen politischen Aktivitäten verbunden wie bei Galois. Ungestüm und mit jugendlicher Unerfahrenheit und Selbstüberschätzung rebellierte er gegen das Alte, in der Mathematik, im Bildungssystem und im politischen Leben. Die

Lehrbücher seiner Zeit kritisierte er, da sie die grundlegenden Ideen in einem Wust von Sätzen und hinter einer die Schwierigkeiten verschleiernden Rhetorik versteckten, ebenso die meisten Gelehrten der Akademie, die hochmütig und nur an der Mehrung ihres Ruhms sowie an einträglichen Posten interessiert seien, aber nicht am Fortschritt der Wissenschaft. Er war ein begeisterter Anhänger der Revolution von 1830 und der Republikaner, zweimal wurde er aus politischen Gründen verhaftet. Für eine ausführliche Beschreibung seines Lebensweges sei auf [Rigatelli 1996] verwiesen.

Seit Galois aber mit 15 Jahren sein Interesse an der Mathematik entdeckt hatte, war die Mathematik sein Lebensinhalt. Die Forschungen über mathematische Sachverhalte verbanden sich bei Galois mit Gedanken über das Wesen der Mathematik und deren Methode. Er vollzog dabei eine entscheidende methodologische Neuorientierung, die direkt zum strukturellen Denken führte. Die kalkülmäßige Behandlung mathematischer Fragen habe einen Stand erreicht, schrieb Galois, auf dem sie den Fortschritt hemmt, die langen Rechnungen verschleiern nur die grundlegenden mathematischen Sachverhalte. Auch eine Vereinfachung der intellektuellen Einsicht, indem man eine Eleganz der Kalküle zu erreichen versucht, kann nur im beschränkten Rahmen Verbesserungen bringen. Die Aufgabe der zukünftigen Mathematiker sah Galois in der Zusammenfassung der Operationen und deren Klassifikation nach ihren Schwierigkeiten und nicht nach ihrer Form. Die umfangreichen, bis ins Detail ausgearbeiteten Kalküle werden sich dann als Spezialfälle unterordnen, die kalkülmäßige Behandlung von Problemen lehnte er also nicht grundsätzlich ab [Galois 1908, S. 25ff.]. Obwohl verschiedene Passagen der Manuskripte Galois' Einsicht verdeutlichten, daß seine neue Herangehensweise an mathematische Fragestellungen für die Zeitgenossen schwer verständlich war, hat er, die Tatsachen völlig ignorierend, bewußt versucht, sich außerhalb jeder mathematischen Tradition zu stellen, und damit das Verständnis seiner Ideen weiter erschwert. Aus heutiger Sicht ist klar, daß er sehr wohl in der Tradition von Lagrange, Cauchy, Gauß und Abel stand, was auch aus den Arbeiten und Manuskripten deutlich wird. Er übernahm von ihnen nicht nur die Problemstellungen der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen, sondern auch die Mittel zu deren Lösung. Nicht die Vertiefung der Einsichten in die gruppen- bzw. körpertheoretische Struktur der Aufgabenstellung ist sein großes Verdienst, sondern die Wechselbeziehungen zwischen den körpertheoretischen und den gruppentheoretischen Aspekten als Schlüssel für die erfolgreiche Behandlung der Theorie erkannt und diese Strukturbeziehungen herausgearbeitet zu haben.

Es gehört zu den tragischen Besonderheiten im Leben Galois', daß er nur wenige seiner Resultate publizieren konnte. Als 18-jähriger sandte Galois zwei kleinere Arbeiten zur Auflösung algebraischer Gleichungen an die Pariser Akademie, die von Cauchy in den Sitzungen von 25. Mai und vom 1. Juni 1829 vorgelegt wurden, dann aber verloren gingen. Eine weitere, für Galois' Stil ausführliche Abhandlung wurde 1831 von Siméon Denis Poisson

als unverständlich abgelehnt. So waren zunächst neben zwei kleinen, jeweils zweiseitigen Noten zur Auflösungstheorie bzw. zur numerischen Lösung von Gleichungen nur die Arbeit *„Sur la théorie des nombres“* und der *„Lettre à Auguste Chevalier“* allgemein zugänglich. Erst 1846 erschienen dann auf Drängen der Freunde und des Bruders von Evariste Galois die von Joseph Liouville herausgegebenen Schriften von Galois. Den Brief an Auguste Chevalier hatte Galois in der Nacht vor dem tödlichen Duell verfaßt. Er war Galois' mathematisches Testament, in dem er die wichtigsten Ergebnisse seiner Forschungen nochmals benannte, neben der Auflösungstheorie auch die Klassifikation der Abelschen Integrale. Mit dem Brief übergab Galois seinem Freund noch einige weitere Manuskripte und Notizen.

Die oben erwähnte, scheinbar zur Zahlentheorie gehörige Arbeit war, wie Galois in einer Fußnote feststellte, wichtiger Bestandteil seiner Forschungen zur Theorie der Permutationen und zu algebraischen Gleichungen. In ihr legte er die ersten Grundlagen der Theorie endlicher kommutativer Körper, diese Körper wurden später nach ihm *Galois-Felder* genannt. Den Ausgangspunkt seiner Forschungen bildete die Gaußsche Theorie der Kongruenzen modulo einer Primzahl p. Gauß hatte bereits nachgewiesen, daß die Restklassen modulo p addiert und multipliziert werden können und sich bezüglich dieser Verknüpfungen genauso verhielten wie die rationalen Zahlen, also einen Körper bildeten, ohne jedoch den Körperbegriff zu benutzen. Er hatte dann auch höhere Kongruenzen, etwa $x^2 \equiv a \pmod p$, betrachtet, aber stets rationale Lösungen gesucht. Galois betrachtete nun die Kongruenz $F(x) \equiv 0 \pmod p$ mit einem modulo p irreduziblen Polynom $F(x)$, d. h. die Koeffizienten sind Elemente aus dem Restklassenkörper modulo p und es gibt keine Polynome ϕ, ψ und χ, so daß $\phi(x) \cdot \psi(x) = F(x) + p\chi(x)$ gilt. Aus der Irreduzibilität folgte, daß die Kongruenz keine Wurzel niedrigeren Grades als ν besitzt, wobei ν der Grad von $F(x)$ ist. In Analogie zur imaginären Einheit bei den komplexen Zahlen interpretierte Galois die Wurzeln der Kongruenz als neue imaginäre Größen. War i eine der Wurzeln, so bildete er die Ausdrücke

$$a + a_1 i + a_2 i^2 + ... + a_{\nu-1} i^{\nu-1} \text{ (A)},$$

wobei die Koeffizienten a bzw. a_k ganze Zahlen modulo p waren. Jeder Koeffizient kann also nur p verschiedene Werte annehmen und man erhält insgesamt p^ν Elemente. Die Ausdrücke (A) können addiert, subtrahiert, multipliziert sowie dividiert werden und erfüllen die üblichen Rechenregeln, sie bilden folglich einen Körper, ein sog. *Galois-Feld*. Galois hatte damit, modern formuliert, bewiesen, daß die Anzahl der Elemente in einem Galois-Feld der Charakteristik p stets eine Potenz von p ist. Er unterzog die Ausdrücke (A) einer eingehenden Analyse und konnte die Struktur der Lösungen der Kongruenz $F(x) \equiv 0 \pmod p$ völlig aufdecken. Dabei bediente er sich u. a. der schon von Euler und Gauß angewandten Verfahrensweise. Er betrachtete die Menge der $p^\nu - 1$ Ausdrücke (A), in denen nicht alle Koeffizienten a, a_1, a_2, ... $a_{\nu-1}$ gleich Null waren, wählte ein Element α der Form (A) aus und

bestimmte die von diesem Element erzeugte Gruppe (d. h. alle voneinander verschiedenen Potenzen von α), die eine Untergruppe U der multiplikativen Gruppe des Galois-Feldes ist. Es sei n die kleinste Potenz, für die $\alpha^n = 1$ gilt. Falls die Menge der Potenzen von α nicht alle Ausdrücke der Form (A) enthält, wenn also noch ein weiteres von Null verschiedenes Element β des Galois-Feldes existiert, das nicht zu der Untergruppe U gehört, so bildete Galois die Nebenklasse βU zu dieser Untergruppe usw. Die Gesamtheit der Nebenklassen und die Untergruppe enthalten schließlich alle von Null verschiedenen Elemente des Galois-Feldes. Die Untergruppe hat nach Konstruktion die Ordnung n und diese ist, wie Galois vermerkte, ein Teiler von $p^\nu - 1$, der Ordnung der multiplikativen Gruppe des Galois-Feldes. Daraus folgerte er, daß $\alpha^{p^\nu - 1} = 1$ ist und, unter Berufung auf den wie in der Zahlentheorie zu führenden Beweis, daß eine primitive Wurzel existiert, die er wieder mit α bezeichnete, und für die $n = p^\nu - 1$ gilt. Damit ist jedes Element des Galois-Feldes eine Nullstelle des Polynoms $x^{p^\nu} - x$ und jedes irreduzible Polynom F vom Grade ν muß ein Teiler dieses Polynoms modulo p sein. Als Umkehrung dieses *„bemerkenswerten Resultats“* verwies Galois auf den schon von Abel bewiesenen Satz, daß zu einer vorgegebenen algebraischen Gleichung stets eine rationale Funktion θ aller ihrer Wurzeln derart gefunden werden kann, daß jede der Wurzeln rational durch θ ausgedrückt werden kann.

Am Rande sei hier kurz eingefügt, daß die Theorie der Galois-Felder der Ordnung p^ν mit einer Primzahl p heute eine wichtige Anwendung in der Kodierungstheorie gefunden hat. Wenn bei der Nachrichtenübermittlung in den Kanälen jeweils p^ν verschiedene Signale übertragen werden, so liefert die Theorie eine Anordnung der Signale, die eine klare Trennung der einzelnen Gruppen ermöglicht. Mit anderen Worten, die Übertragung der Signale erfolgt so, daß keine Verwechslung der kodierten Buchstaben erfolgen kann. Dagegen ist für Kanäle, in denen n verschiedene Signale übertragen werden können, wobei n nicht die Form p^ν hat, die klare Unterscheidung der Signale schwierig.

Nach der Angabe eines Beispiels wandte sich Galois im letzten Teil dieses Artikels der Auflösung von primitiven algebraischen Gleichungen zu und versuchte die für Kongruenzen erzielten Einsichten zu nutzen. Er ging von einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ vom Grad p^ν mit den Wurzeln x_k aus. Der Index k kann p^ν verschiedene Werte annehmen und genügt der Kongruenz $k^{p^\nu} \equiv k \ (mod\, p)$. Ist V eine rationale Funktion dieser Wurzeln, so transformierte Galois diese Funktion, indem er die Wurzel mit dem Index k durch jene mit dem Index $(ak + b)^{p^r}$ ersetzte, wobei die Konstanten folgende Bedingungen erfüllten: $a^{p^\nu - 1} \equiv 1$, $b^{p^\nu - 1} \equiv b \ (mod\, p)$, r ganzzahlig; ansonsten beliebig wählbar waren. Da es $p^\nu(p^\nu - 1)\nu$ Möglichkeiten gibt, eine solche Vertauschung der Wurzeln in der Funktion V vorzunehmen, wird V im allgemeinen ebenso viele verschiedene Formen annehmen. Wenn jedoch jede rationale Funktion der Wurzeln durch diese Permutationen der Wurzeln ungeändert bleibt, so wird nach Galois' Meinung jeder mit der Gleichungs-

theorie Vertraute ohne Mühe erkennen, daß die Gleichung durch Radikale lösbar ist. Ebenso ohne Beweis konstatierte er, wenn eine primitive Gleichung nicht dieser Bedingung genügt, so kann sie sicher nicht durch Radikale gelöst werden, wobei er die Grade 9 und 25 als Ausnahmen angab.

In einer anschließenden Bemerkung ließ Galois erkennen, daß er den für die Galois-Theorie grundlegenden Zusammenhang zwischen der Theorie der Permutationen und der Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen klar erfaßt hatte. Der zu untersuchenden Gleichung war eine Gruppe zuzuordnen und aus der Struktur dieser Gruppe konnte die Auflösbarkeit in Radikalen abgelesen werden. Während bisher das Wort *„Gruppe“* bei Galois, wie auch vorher schon bei Abel , in der umgangssprachlichen Bedeutung eines Zusammenfassens von zusammengehörigen Dingen benutzt wurde, bezeichnete er diesmal eine Menge von Objekten als Gruppe, für die dies auch im mathematischen Sinne gerechtfertigt war. Damit hatte Galois im Juni 1830 wichtige Einsichten in die Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen erzielt, die umfassende Theorie zeichnete sich in ersten Konturen ab.

Innerhalb weniger Monate hat Galois trotz widriger Lebensumstände die Frage der Auflösbarkeit in Radikalen weiter aufgeklärt und in dem auf den 16. Januar 1831 datierten Manuskript *„Mémoire sur la condition de résolubilité des équations par radicaux“* die Resultate systematisch dargestellt. Es war jenes Manuskript, das auf Grund des Urteils von Poisson von der Pariser Akademie nicht gedruckt wurde. Galois beschränkte seine Darlegung auf die Behandlung algebraischer Gleichungen vom Primzahlgrad und wies nur kurz darauf hin, daß die Theorie noch weitere Anwendungen habe, u. a. bei den Modulargleichungen in der Theorie der elliptischen Funktionen. Er begann dann mit der Formulierung einiger Definitionen und wichtiger Lemmata. So bezeichnete er eine Gleichung als reduzibel, wenn sie einen rationalen Teiler hat. Rational bedeutete dabei, daß sich alle Koeffizienten dieser Funktion als rationale Funktionen der als gegeben betrachteten Koeffizienten der Ausgangsgleichung ausdrücken lassen und schloß die Möglichkeit ein, daß bestimmte Größen als bekannt angesehen werden und zur Menge der gegebenen Größen hinzugefügt werden. Galois sprach von Adjungierten der Gleichung bzw. vom Adjungieren von Größen zur Gleichung und betonte, daß die Adjunktion von Größen, also die Erweiterung des Grundkörpers, die Eigenschaften einer Gleichung beeinflußt.

„Cela posé, nous appellerons rationnelle toute quantité qui s'exprimera en fonction rationnelle des coefficients de l'équation et d'un certain nombre de quantités adjointes à l'équation et convenues arbitrairement.“ [Galois 1989, S. 418]

Außerdem definierte er, in Analogie zu Cauchy, aber abweichend vom heutigen Sprachgebrauch, eine Permutation als Bezeichnung für die Anordnung bestimmter Objekte, hier die Wurzeln einer Gleichung, und eine Substitution als Übergang von einer Permutation zu einer anderen. Für die notwendigen permutationstheoretischen Untersuchungen erklärte er noch, sobald es sich

um die Einteilung der Substitutionen in Gruppen handele, wird zunächst angenommen, daß alle Substitutionen aus ein und derselben Permutation (Anordnung) hervorgegangen sind. Da es bei diesen Untersuchungen jedoch keine Rolle spielt, welches die ursprüngliche Anordnung war, kann die Ausgangspermutation beliebig gewählt werden. In einer solchen Gruppe ist stets mit den Substitutionen S und T auch die Substitution ST enthalten. Damit hatte Galois klar verdeutlicht, wichtig war die Struktur der Gruppen, auf die deren Bildungsweise keinen Einfluß hatte. Mit der multiplikativen Abgeschlossenheit, d. h. die Multiplikation zweier Gruppenelemente ergibt wieder ein Element der Gruppe, hatte er zugleich eine zentrale Eigenschaft der Gruppen hervorgehoben. Auffallend ist dabei der uneinheitliche Gebrauch des Wortes Gruppe, einmal bezeichnete es nur eine Zusammenfassung von Objekten, im zweiten Fall handelte es sich um Gruppen im mathematischen Sinne.

In vier nachfolgenden Hilfssätzen sicherte Galois u. a. die Existenz einer Funktion V von n Veränderlichen, die beim Einsetzen jeder der $n!$ Anordnungen der n Wurzeln einer gegebenen Gleichung jeweils verschiedene Werte annimmt, wobei die Gleichung keine mehrfachen Wurzeln haben soll (Lemma 2), zum anderen die Tatsache, daß sich jede der Wurzeln als rationale Funktion der Funktion V ausdrücken läßt (Lemma 3), d. h. es existiert ein primitives Element. In der Beweisskizze konstruierte Galois eine ganzrationale Funktion, der V genügte, und betrachtete dann den irreduziblen Faktor dieser Funktion, der V als Wurzel hat. Sind V', V''... die anderen Wurzeln dieses Faktors und ist $a = f(V)$ eine Wurzel der Ausgangsgleichung, so besagte das Lemma 4, daß auch $b = f(V')$ eine Wurzel der Ausgangsgleichung sei.

Auf dieser Grundlage formulierte Galois nun die zentralen Sätze seiner Theorie. Im Theorem 1 bewies er die Existenz der einer gegebenen Gleichung zugeordneten Gruppe, der sog. *Galoisschen Gruppe*, sowie deren Eigenschaft, daß jede Funktion der Wurzeln genau dann rational bekannt ist, wenn sie bei der Anwendung der Substitutionen dieser Gruppe unverändert bleibt, also für jede Anordnung der Wurzeln den gleichen Wert hat (vgl. Aufg. 6.4.5). Rational bekannt nannte Galois dabei eine Funktion, wenn deren Werte sich als rationale Funktionen der Koeffizienten der Ausgangsgleichung und der adjungierten Größen ausdrücken ließen. Sowohl in der Formulierung des Satzes als auch im Beweis sprach Galois zunächst von der Gruppe der Permutationen (Anordnungen) und ging dann zur Gruppe der Substitutionen über. In einer Anmerkung betonte er, eine frühere Aussage wiederholend, daß es jedoch nur auf die Gruppe der Substitutionen ankommt. In den beiden folgenden Theoremen klärte er dann auf, wie sich die Gruppe ändert, wenn man eine bzw. alle Wurzeln einer Hilfsgleichung zur Ausgangsgleichung adjungiert, wenn man also den Koeffizientenkörper erweitert. Die hier dokumentierte Einsicht in die Auflösungstheorie hatte Galois in den folgenden Monaten weiter vertieft und in prägnanter Form in seinem Brief an Chevalier zum Ausdruck gebracht. Unter Bezugnahme auf seine frühere Veröffentlichung verwies er in

dem Brief auf den großen Unterschied, der zwischen der Adjunktion einer und aller Wurzeln einer Hilfsgleichung bestehe.

„Dans les deux cas, le groupe de l'équation se partage par l'adjonction en groupes tel, que l'on passe de l'un à l'autre par la même substitution; mais le condition que ces groupes aient les mêmes substitutions n'a lieu certainement que le second cas. Cela s'appelle la décomposition propre.“ [Galois 1989, S. 408]

Erklärend fügte Galois hinzu, wenn die Gruppe G die Gruppe H enthält, so kann G in *„Gruppen“* zerlegt werden, die man durch Anwendung ein und derselben Substitution auf alle Permutationen (Anordnungen) von H erhält,

$$G = H + HS + HS' + \ldots.$$

Außerdem kann man G derart in *„Gruppen“* mit den gleichen Substitutionen zerlegen, daß gilt

$$G = H + TH + T'H + \ldots.$$

Die beiden Zerlegungen fallen gewöhnlich nicht zusammen, wenn dies doch der Fall ist, so nannte Galois die Zerlegung eigentlich. Modern ausgedrückt, beschreibt Galois hier die Zerlegung der Gruppe G in Rechts- bzw. Linksnebenklassen bezüglich einer Untergruppe H, und die Gleichheit der Zerlegungen charakterisiert die Normalteilereigenschaft von H. Für das Verständnis dieses Abschnittes ist es noch wichtig, zu beachten, daß Galois wieder von den Gruppen der Permutationen (Anordnungen) ausging und er auch die Nebenklassen als Gruppen bezeichnete, das Wort Gruppe also auch noch im umgangssprachlichen Sinne verwendete.

Als nächstes wandte sich Galois dem Problem zu, ein Kriterium für die Auflösbarkeit einer Gleichung in einfachen Radikalen anzugeben. Er skizzierte eine kurze, aber weitreichende Antwort, die seine Einsicht in die wesentliche Rolle der *„eigentlichen Zerlegungen“* dokumentierte. Um eine Gleichung aufzulösen, muß man die Gruppe der Gleichung sukzessiv verkleinern bis man die triviale, aus einer Permutation (Anordnung) bestehende Gruppe erhält. Die Verkleinerung der Gruppe konnte gemäß der dargelegten Theorie nur durch die Adjunktion von Wurzeln einer Hilfsgleichung geschehen. Wegen der Auflösbarkeit der Gleichung muss es eine Zahl p geben, für die eine *„eigentliche Zerlegung“* der Gruppe nach einer Untergruppe H mit p *„Teilgruppen“* existierte, d. h. H ein Normalteiler mit Index p ist. Die Untergruppe H bildete dann die kleinere Gruppe. Von all den Zahlen p wählt Galois die kleinste. Als Anwendung analysierte er in der Arbeit die Auflösung irreduzibler Gleichungen vom Primzahlgrad p und leitete folgende Kriterien ab: Eine derartige Gleichung ist genau dann in Radikalen auflösbar, wenn jede Funktion der Wurzeln, die sich bei der Ersetzung von x_k durch x_{ak+b} (a, b ganze Zahlen mod p, $a \neq 0$) nicht ändert, rational bekannt ist, bzw. wenn sich alle Wurzeln

als rationale Funktionen von zwei von ihnen darstellen lassen. In dem Brief an Chevalier skizzierte Galois dann die Anwendung der Theorie auf sog. primitive Gleichungen und auf Modulargleichungen elliptischer Funktionen. Für eine ausführlichere Darstellung seiner Ideen verblieb ihm keine Zeit.

In seinem kurzen mathematischen Schaffen gab Galois der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen eine neue Gestalt. Er erkannte die zentrale Rolle der Normalteilereigenschaft gewisser Untergruppen für die Entscheidung der Auflösbarkeit in Radikalen und arbeitete unter Präzisierung weiterer Strukturbegriffe die Grundzüge der nach ihm benannten Theorie heraus. Wohl von sicherer Intuition geleitet, entdeckte er Zusammenhänge, ohne sie in exakt definierten Begriffen erfassen und entsprechend beweisen zu können. Auf diesem noch unsicheren Pfad war er der Entwicklung weit vorausgeeilt und es verwundert kaum, daß die Bedeutung der Galoisschen Resultate erst viel später erkannt wurde. Dazu bedurfte es nicht nur des Schließens von Lücken in verschiedenen Beweisen und der Absicherung der Galoisschen Entwicklungen, sondern vor allem der Analyse und präzisen Ausformung seines methodischen Vorgehens. Beides war aber untrennbar mit neuartigen, auf Strukturbetrachtungen zielenden Untersuchungen verbunden. In diesem Sinne steht Galois' Theorie für einen grundlegenden Wandel in der algebraischen Forschung: die klassische Theorie der algebraischen Gleichungen wird abgelöst durch das Studium von Gruppen und Körpern, also von algebraischen Strukturen. So ist es wohl nicht zufällig, daß die schrittweise Einsicht in die Bedeutung der Galoisschen Arbeiten eng mit weiteren Fortschritten in der Gruppen- bzw. Körpertheorie verbunden war. In der Folgezeit lieferte die Anwendung der Galois-Theorie den Mathematikern dann eine Antwort auf verschiedene interessante Probleme. Dies betraf etwa die Beantwortung der seit dem Altertum betrachteten Frage, welche geometrischen Größen in der reellen Ebene man mit Zirkel und Lineal aus endlich vielen Grundgrößen konstruieren kann. Dazu gehörten auch die negative Entscheidung zu den klassischen Problemen des Altertums und eine Übersicht darüber, wann ein reguläres n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Zunächst stießen jedoch Galois' Arbeiten auf Unverständnis und hatten keinen spürbaren Einfluß auf die Entwicklung der Algebra. Auch die Publikation des Briefes an Chevalier und der darin enthaltene Aufruf, Gauß und Jacobi mögen ihr Urteil über die Bedeutung der dargelegten Resultate abgeben, bewirkten keine Reaktion. Mit seiner kurzen, in dem Brief sogar extrem verkürzten Darstellungsweise und der konsequenten Vermeidung von Anknüpfungspunkten an die bereits vorliegenden Resultate machte es Galois dem Leser auch nicht leicht, einen Zugang zu seiner Ideenwelt zu finden. Es dauerte bis 1843, ehe Liouville nach Erhalt des Galoisschen Nachlasses und der Lektüre einiger Arbeiten vor der Pariser Akademie auf die interessanten Resultate zur Gleichungstheorie aufmerksam machte und eine Publikation ankündigte. Diese erfolgte dann 1846, und er machte der mathematischen Fachwelt neben den bereits veröffentlichten Arbeiten auch die beiden bisher

unpublizierten *„Mémoires“* zur Gleichungstheorie aus dem Nachlaß zugänglich. Durch die Ankündigung, weitere Manuskripte aus dem Nachlaß Galois' publizieren sowie einen ausführlichen Kommentar der Arbeiten verfassen zu wollen, hat Liouville die rasche Hinwendung zum Studium der Galoisschen Schriften nochmals verzögert. Er sicherte sich dadurch ein gewisses Vorrecht auf die Bearbeitung der Schriften, hat aber diese Absicht nie realisiert. Er hat aber mehrere Seminare zum Studium der Galoisschen Arbeiten durchgeführt, wodurch er mehrere Mathematiker zur Beschäftigung mit den algebraischen Problemen anregte, und auch an dem Manuskript des angekündigten Kommentars gearbeitet. Man vergleiche dazu auch die Ausführungen in [Lützen 1990].
Doch bevor diese Entwicklung weiter verfolgt werden kann, ist es notwendig, einen Blick auf die übrigen Resultate zu werfen, die in der Algebra bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts erzielt wurden.

7.2 Von Permutationen zu Permutationsgruppen

In den vorangegangenen Abschnitten war bereits wiederholt auf die wichtige Rolle hingewiesen worden, die Permutationen und die Struktur der Permutationsgruppen in der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen spielten. Deshalb soll im folgenden die Geschichte der Permutationsgruppen kurz betrachtet werden. Diese Entwicklung verlief keineswegs geradlinig. Lange Zeit nahmen die Permutationen eine untergeordnete Rolle ein und traten nur gelegentlich als Hilfsmittel bei anderen mathematischen Betrachtungen auf, ohne daß sie dabei begrifflich fixiert bzw. als eigenständiges mathematisches Untersuchungsobjekt hervorgehoben wurden. Wie noch näher zu zeigen sein wird, schuf Cauchy dann in einer 1815 publizierten Arbeit große Teile des begrifflichen Rahmens und verlieh der Theorie der Permutationen den Charakter eines eigenständigen Gebietes, ohne daß dabei die enge Verknüpfung mit der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen besonders hervorgehoben wurde. Da die Arbeiten Galois' zunächst nicht rezipiert wurden, entwickelte sich die Theorie der Permutationen bis zur Jahrhundertmitte separat, ohne wesentliche Impulse von der Gleichungstheorie zu erhalten.
Dabei hatten die Arbeiten zur Auflösungstheorie von Lagrange, Vandermonde und Ruffini wesentlich dazu beigetragen, die Permutationen stärker in das Blickfeld der Mathematiker zu rücken. Zuvor waren Permutationen lediglich bei kombinatorischen Überlegungen aufgetreten, die man zur Untersuchung verschiedener Problemstellungen heranzog, etwa in der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder bei der Berechnung spezieller Ausdrücke wie Potenzen von Binomen bzw. Polynomen. Noch in dem 1803 bis 1808 erschienenen *„Mathematischen Wörterbuch“* von Georg Simon Klügel waren Permutationen nicht als eigenständiger Begriff in Form eines Stichwortes enthalten und wurden nur im Rahmen der Kombinatorik und in einigen anderen Artikeln behandelt bzw. erwähnt. Nový hob hervor, daß sich die Permutationen völlig von



Joseph Liouville



Augustin-Louis Cauchy

den üblichen Zahlbereichen unterschieden, z. B. gibt es stets nur endlich viele Permutationen von einer vorgegebenen Anzahl von Elementen. Sie stellten in diesem Sinne völlig andere algebraische Objekte dar, für die eine sinnvolle Verknüpfung erklärt war, und hätten so abstraktere algebraische Überlegungen stimulieren können. Doch scheinen gerade diese Unterschiede das Herstellen von Analogien zwischen beiden Bereichen erschwert zu haben [Novy 1973, S. 154f.].

Den grundlegenden Wandel erzielte Cauchy, als er im Anschluß an Ruffini analysierte, wieviele Werte rationale Funktionen bei der Permutation ihrer Variablenwerte annehmen können. Dabei strebte er unter dieser Zielstellung bereits einen systematischen Aufbau der Theorie an. Zu diesem Zeitpunkt stand Cauchy noch am Anfang seiner wechselvollen, aber außerordentlich erfolgreichen Karriere als Mathematiker. Nachdem er bis 1813 als Ingenieur in Nordfrankreich tätig war, eröffnete erst der Sturz Napoleons dem kaisertreuen und konservativen Cauchy die Möglichkeit zu Lehrpositionen an den bedeutenden Pariser Hochschulen und zur Mitgliedschaft in der Pariser Akademie. Er wurde einer der bedeutendsten und produktivsten Mathematiker des 19. Jahrhunderts und hat wesentlich die neuen Entwicklungstendenzen der Mathematik mitgeprägt, speziell der Analysis und der mathematischen Physik gab er ein neues Gesicht. Für eine ausführliche Beschreibung der Biographie Cauchys und eine Würdigung seiner Leistungen sei auf [Belhoste 1991] verwiesen.

In der erwähnten Arbeit bezeichnete Cauchy, abweichend vom heutigen Sprachgebrauch, die Anordnung von n Größen als Permutation, und den Übergang von einer Anordnung zu einer anderen nannte er *„Substitution“*. Als er sich 1844 dann erneut mit der Permutationstheorie beschäftigte, änderte er die Terminologie und sprach von *„Arrangement“* als Anordnung von n

Größen und von *„Permutation“* bzw. *„Substitution“*, um den Übergang von einem *„Arrangement“* zum anderen zu bezeichnen. Gleichzeitig definierte er 1815 die heute übliche Permutationsschreibweise, bei der die Anordnung der n Größen vor und nach Ausführung der Substitution in Klammern gesetzt übereinander geschrieben wird. 1846 kehrte er diese Schreibweise dann um, d. h. die Ausgangsanordnung stand unten. Auch kürzte er bereits 1815 eine Permutation durch einen Buchstaben ab, damit gleichsam deren Akzeptanz als eigenständiges Objekt unterstreichend, und führte die Hintereinanderausführung von Permutationen – als Produkt bezeichnet – und die Potenzschreibweise ein. Auch die Bezeichnung identische und zyklische Permutation traten 1815 auf, die Zyklendarstellung, die Bezeichnung inverse Permutation, das Symbol 1 für die identische Permutation u. a. erst 1846. Damit hatte Cauchy bereits 1815 wichtige Teile der Terminologie entwickelt, die nicht zuletzt wegen der exponierten Stellung und des Ansehens Cauchys unter den Mathematikern zum Standard wurden. Cauchy bewies dann eine Reihe von Sätzen, die inhaltlich schon bei Ruffini zu finden waren. Mit dem Satz, daß die Anzahl der verschiedenen Werte einer nichtsymmetrischen Funktion von n Größen bei der Anwendung aller möglichen Permutationen, d. h. der vollen symmetrischen Gruppe, nur kleiner als die größte in n enthaltene Primzahl werden kann, wenn ihr Wert zwei ist, vertiefte er die entsprechende Aussage von Ruffini beträchtlich, und erweiterte die Aufgabenstellung, die er in der 1812 verfaßten, aber erst 1815 erschienen Arbeit *„Sur les fonctions que ne peuvent obtenir que deux valeurs égales...“* formuliert hatte.

1845 begann Cauchy sich erneut mit Permutationen zu beschäftigen und integrierte eine zusammenfassende Übersicht über die Permutationentheorie in den dritten Band seiner ab 1844 in Lieferungen publizierten *„Exercises d'analyse et de physique mathématique“*. Der Teil über Permutationen ist in den Lieferungen 29–32 enthalten, die im Herbst 1845 bzw. Frühjahr 1846 erschienen [Neumann 1989]. Nach der Einführung der oben erwähnten Begriffe, einschließlich der Ordnung einer Permutation und der Zyklendarstellung, bewies er einige Sätze über die Ordnung einer aus verschiedenen Zyklen zusammengesetzten Permutation und definierte die zueinander ähnlichen Permutationen als Permutationen, die die gleiche Zyklendarstellung haben, d. h. die gleiche Anzahl von Zyklen mit gleicher Ordnung der entsprechenden Zyklen. Es gelang ihm dann, die zu einer gegebenen Permutation P ähnlichen Permutationen eindeutig als Produkt aus drei Faktoren zu charakterisieren, dessen äußere Faktoren zueinander inverse Permutationen sind und dessen mittlerer Faktor die Permutation P ist: Alle Produkte dieser Art erzeugen eine zu P ähnliche Permutation und jede zu P ähnliche Permutation läßt sich so darstellen. Nachfolgend behandelte er die Aufgaben, zu einer gegebenen Permutation P alle ähnlichen Permutationen bzw. zu zwei gegebenen ähnlichen Permutationen P und Q jene Permutation R konkret zu bestimmen, die gemäß der obigen Darstellung P in Q transformiert, also $RPR^{-1} = Q$. Die Bildung des aus einer vorgegebenen Menge von Permutationen durch beliebig häufige multiplikative Verknüpfung erzeugten

„Systems konjugierter Substitutionen“ leitete faktisch die Untersuchung der Permutationsgruppen ein:

„Etant données une ou plusieurs substitutions qui renferment les n lettres $x, y, z, \ldots$, ou du moins plusieurs d'entre elles, je nommerai substitutions dérivées toutes celles que l'on pourra déduire des substitutions données, multipliées une ou plusieurs fois les unes par les autres, ou par elles-mêmes, dans un ordre quelconque; et les substitutions données, jointes aux substitutions dérivées, formeront ce que j'appellerai un système de substitutions conjuguées. L'ordre de ce système sera le nombre total des substitutions qu'il présente, y compris la substitution qui offre deux termes égaux et se réduit à l'unité.“ [Cauchy 1844, S. 183]

Für die Ordnung eines solchen Systems konjugierter Substitutionen leitete er dann ab, daß sie stets die Zahl $n!$ aller aus n Buchstaben bildbaren Anordnungen teilt, d. h. die Ordnung einer Permutationsgruppe ist ein Teiler der Ordnung der entsprechenden vollen symmetrischen Gruppe. Als Folgerung leitete Cauchy ab, daß die Ordnung jedes Elementes die Ordnung des Systems konjugierter Substitutionen teilt, und: Wenn ein solches System von mehreren Substitutionen P, Q, R ... erzeugt wird, P, Q, R ... paarweise miteinander vertauschbar sind und die Gleichung $P^h Q^k R^l \ldots = 1$ nur für $P^h = 1$, $Q^k = 1$, $R^l \ldots = 1$ erfüllt ist, so ist die Ordnung des Systems das Produkt der Ordnung der Erzeugenden.

Die Eigenschaft der Vertauschbarkeit war Gegenstand weiterer Untersuchungen Cauchys und mündete in den Begriff der *„vertauschbaren Gruppen“* ein: Zwei Systeme konjugierter Substitutionen heißen miteinander vertauschbar (*„permutables entre eux“*) wenn die Faktoren in jedem Produkt von je einem Element aus den beiden Systemen vertauschbar sind. In den Erläuterungen zu dieser Definition diskutierte Cauchy auch den Fall, wenn die Vertauschbarkeit zwischen den Elementen der beiden Systeme nicht erfüllt ist, sondern nur die Relation $PQ = Q'P'$ gilt, mit P, P' aus dem ersten System konjugierter Substitutionen und Q, Q' aus dem zweiten. Er hob hervor, daß dann zwar die Elemente der beiden Systeme nicht untereinander vertauschbar waren, wohl aber die Systeme als Ganzes. Er betrachtete die Systeme (Gruppen) also als eigenständige Objekte, die er wieder verknüpfte. Er kam aber nicht zur Definition der Normalteilereigenschaft. Dies scheint für ihn nicht von Interesse gewesen zu sein. Erwähnt sei noch, daß Cauchy in mehreren Beweisen die Gruppe in Form einer Tabelle angab, die aber nur bedingt mit der späteren Gruppentafel Cayleys verglichen werden kann. Im Einzelfall trat dabei auch die Zerlegung einer Gruppe in Nebenklassen bezüglich einer Untergruppe auf, jedoch ohne daß Cauchy darauf besonders hinwies.

In weiteren Abschnitten des Kapitels behandelte Cauchy spezielle Permutationen. Die Theorie basiert wesentlich auf dem Rechnen mit Restklassen nach einem beliebigen Modul und verwendete Ideen wie sie in den Untersuchungen über n-te Einheitswurzeln auftraten. Die Darlegungen können insgesamt als eine Vorstufe der später von Serret und entwickelten Darstellungstheorie von Substitutionen angesehen werden.

Nach dieser zusammenfassenden Darstellung der Permutationstheorie griff Cauchy in den folgenden beiden Jahren in mehreren kleineren Arbeiten einzelne Themen nochmals auf, ohne inhaltlich neue Gesichtspunkte aufzuzeigen. Auch in diesen Abhandlungen stellte er keinen engeren Bezug zur Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen her. Die Art der Behandlungsweise ließ erkennen, daß Cauchy die Problemstellung als eigenständig ansah und sie in dieser Form für ihn von Interesse war. Er verleugnete nicht, daß er die ersten Anregungen durch Arbeiten zur Gleichungstheorie erhielt, aber er löste die Untersuchungen davon ab. So fragte er nicht, wieviel Werte eine Funktion bei der Permutation der Wurzeln annehmen kann, sondern analysierte diese Frage allgemein für Funktionen von n Buchstaben, wenn dieselben permutiert werden. Die gruppentheoretischen Aspekte seiner Ergebnisse würdigte er ebenfalls kaum und hatte sie in ihrer Tragweite wohl nicht erkannt. Trotzdem hatten Cauchys Publikationen einen beträchtlichen Einfluß. Mehrere Mathematiker knüpften an seine Ergebnisse an. Nach der Veröffentlichung von Galois' Schriften wurde allmählich die Verbindung der Theorie der Permutationsgruppen zur Auflösungstheorie neu geknüpft und entfaltete auf dem jetzt erreichten höheren Niveau eine sehr stimulierende Wirkung. In diesem Kontext wie auch bei einer eigenständigen Betrachung der Permutationsgruppen fanden dann gruppentheoretische Aspekte eine verstärkte Berücksichtigung.

7.3 Auf dem Weg zur abstrakten Algebra – die englische algebraische Schule

Die bisher dargestellte Entwicklung der Algebra war vor allem von Mathematikern des europäischen Kontinents getragen worden. Die Mathematik auf den britischen Inseln hatte in diesen Jahrzehnten einen Sonderweg beschritten. Die daraus erwachsenden Probleme und die Anstrengungen zu deren Bewältigung bildeten einen Ausgangspunkt für einen wichtigen Schritt zu einer abstrakteren Auffassung von Algebra, die englische Mathematiker in den 30er Jahren des 19. Jahrhunderts entwickelten.

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts hatte England eine ökonomische Spitzenstellung inne. Doch einer fortgeschrittenen Wirtschaft stand ein mangelhaftes Bildungswesen gegenüber. Keine der im Gefolge der Französischen Revolution im Bildungswesen hervorgebrachten Neuerungen wurde in England übernommen. Der Bedarf an ausgebildeten Fachkräften zusammen mit dem Streben Einzelner nach wissenschaftlicher und technischer Bildung sowie der Einfluß der schottischen Aufklärung führten zu einer Reihe von individuellen Initiativen zur Förderung der Bildung, wie neue Privatschulen und wissenschaftliche Vereinigungen. In dieser einzigartigen Weise vollzog sich, teilweise in enger Verbindung mit der Produktion, der allmähliche Aufschwung der Naturwissenschaften in England. Speziell in der Mathematik und Physik war der

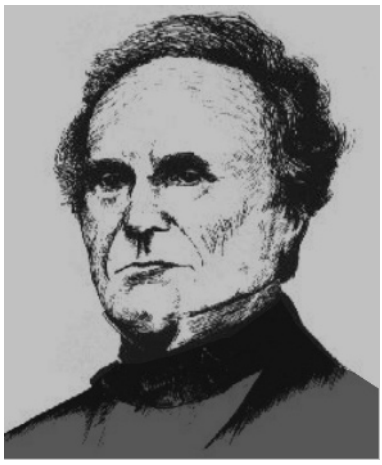
Rückstand zum europäischen Spitzenniveau zu Beginn des 19. Jahrhunderts weiter drastisch gewachsen. In einem übertriebenen Nationalstolz hatte man die Mathematik nur in der von Newton bevorzugten Richtung und Methode betrieben und andere Neuerungen, wie den Calculus, die Differential– und Integralrechnung Leibnizscher Prägung, ignoriert. In den Jahrzehnten um die Jahrhundertwende bemühten sich nun mehrere Gelehrte darum, diese Situation abzuändern. Sie versuchten, sowohl die Ursachen für die Rückständigkeit der englischen Mathematik aufzudecken, als auch Verbesserungsmöglichkeiten anzugeben. Bei den Ursachen nannten sie insbesondere gesellschaftliche Faktoren, etwa die fehlende institutionelle Unterstützung und die schlechten Publikationsmöglichkeiten, und schlugen eine an der französischen Mathematik orientierte Modernisierung vor.

In welchem Umfang sich die einzelnen auch für die Übernahme der modernen Mathematik entschieden, stets stellten sie sich in den Gegensatz zur herrschenden Lehrmeinung. Diese Auseinandersetzung ließ die bestehenden Probleme noch klarer hervortreten, erklärt aber auch manche schwankende Haltung. Ein wichtiger Aspekt in den Modernisierungsbemühungen war die Verbesserung des Universitätsstudiums. Dies war jedoch kein spezifisch britisches Anliegen, sondern muß im Kontext einer allgemeinen europäischen Reformbewegung gesehen werden, die im Bildungswesen mehrerer Länder des Kontinents am Anfang des 19. Jahrhunderts stattfand.

Einer der ersten, der die Analysis kontinentaler Prägung übernahm und propagierte, war der junge Robert Woodhouse. Er hatte 1790–94 am Caius College in Cambridge studiert und vier Jahre später dort den Titel eines Master of Arts erworben. Bis zu seinem Tod 1827 gehörte er dann dem Lehrkörper der Universität Cambridge an, ab 1820 als Professor. Woodhouse trat insbesondere als Kritiker und Reformator des mathematischen Lehrbetriebes in England hervor. Sein Interesse galt vorrangig methodologischen und philosophischen Fragen der Mathematik, wie der theoretischen Begründung des Calculus, der Rolle von synthetischer (geometrischer) und analytischer Methode oder der Schaffung einer geeigneten Terminologie. Er pries nicht nur die moderne Analysis, sondern zugleich die analytische Methode, wandte sich aber gegen einseitige Übertreibungen und betonte die Notwendigkeit einer exakten logischen Fundierung, die er sowohl für den Calculus, als auch für die Newtonsche Fluxionenrechnung anstrebte. Dies war auch das Ziel seines Buches *„The Principles of Analytical Calculation“*. Erreichen wollte Woodhouse dieses Ziel durch eine geeignet gewählte Symbolik und ein auf gewissen Prinzipien und formalen Analogien basierendes Operieren mit diesen Symbolen. Daraus sollte sich eine Art Sprache ergeben, mit der unter Einbeziehung und Beachtung logischer Grundsätze wahre Aussagen abgeleitet werden konnten. Die Theorie der Grenzwerte als auch die Lagrangesche Methodik sah er als ungeeignet für die angestrebte Begründung an. Da Woodhouse zumindest einige der Condillacschen Schriften kannte – 1800 rezensierte er *„La langue des calculs“* –, kann man mit hoher Wahrscheinlichkeit annehmen, daß er



William Herschel



Carles Babbage

an Condillacs Ideen anknüpfte und daraus vermutlich unter Einbeziehung von Gedanken der schottischen Aufklärung seine eigene Methode entwickelte. In den *„Principles“* hat Woodhouse dann seine allgemeinen Ansichten auf die Infinitesimalmathematik angewandt. In den folgenden Jahren verfaßte er mehrere Bücher zur Verbreitung des Calculus. Am wirkungsvollsten wird sein Lehrbuch zur Trigonometrie von 1809 angesehen. Jedoch scheint der Widerstand gegen die neuen Ideen so stark gewesen zu sein, daß Woodhouse sie nicht in den Cambridger Lehrbetrieb einführte.

Doch das Wirken von Woodhouse war nicht erfolglos. Mehrere seiner Studenten griffen diese Ideen auf und einige von ihnen gehörten 1812 zu den Gründungsmitgliedern der *„Analytical Society“*, die sich die Förderung und Verbreitung der Analysis kontinentaler Prägung als Ziel setzte. (Einige Historiker datieren die Gründung der Gesellschaft auf 1811.) Als einen ersten notwendigen Schritt betrachteten sie dabei die Schaffung eines entsprechenden Lehrbuches und Charles Babbage, William Herschel und George Peacock übersetzten Lacroix' *„Traité elémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral“*. Die Übersetzung erschien 1816. Mit der Übersetzung war zugleich eine Diskussion um die Begründung der Infinitesimalrechnung verbunden, doch ist die Dokumentenlage dazu recht spärlich. Letztlich entschied man, der algebraisch geprägten Lagrangeschen Methode des Reihenansatzes den Vorzug zu geben. Vor allem Babbage und auch Herschel scheinen dabei eine formale Herangehensweise, eine geeignete Symbolik und die Schaffung eines formalen (abstrakten) Kalküls unter Ausnutzung von Analogien betont zu haben und standen sowohl in der von Locke und de Condillac ausgehenden philosophischen Traditionslinie als auch in dem von der Operatorenrechnung geschaffenen Ideenfeld. Während von Herschel kaum allgemeine Reflexionen zu diesem Thema bekannt sind, hat sich Babbage intensiv damit auseinander-

gesetzt und etwa seit 1816 an seinen *„Essays on the Philosophy of Analysis“* gearbeitet. Er sah die Begründung in einer formalen, von den vorhandenen Gebieten der Mathematik losgelösten Theorie, die auf dem Prinzip der Identität basiere und die etwa durch die Anwendung auf Zahlen die Aussagen der Analysis liefere [Knobloch 1981], [Fisch 1999]. Seine Überlegungen gingen jedoch über die Fundierung der Infinitesimalrechnung hinaus, er wollte mit der neuen Theorie eine sichere Basis für alle Zweige der Mathematik legen. In den unveröffentlichten Manuskripten zur *„Philosophy of analysis“* findet man dann bereits jene Ideen, die gewöhnlich mit dem Namen Peacock verbunden sind:

Das Wesen der Algebra besteht im Manipulieren mit Symbolen in einer von jeder speziellen Interpretation unabhängigen Weise und dieses Operieren erfolgt nach ganz formalen Regeln.

Jede Form (im Sinne von Relation bzw. Gleichung) mit allgemeinen Symbolen aber spezifischen Werten, die einer anderen Form algebraisch äquivalent ist, bleibt jener Form algebraisch äquivalent, wenn die Symbole allgemein in Form und Wert sind.

Dieses Permanenzprinzip, von Babbage wohl im Sinne einer Abstraktion gesehen, findet sich in Ansätzen schon in den Condillacschen Überlegungen zum Analogiebegriff. Babbage betonte weiterhin den abstrakten Charakter der Algebra und deren Eigenständigkeit, sie kann also nicht als universelle Arithmetik angesehen werden.

Diese neuen Vorstellungen, die beträchtlich über die Einführung des modernen Calculus und der damit verbundenen Methodik hinausgingen, stießen auf großen Widerstand, und speziell im Lehrbetrieb scheiterte manche Initiative zur Einführung der neuen Ideen. Die *„Analytical Society“* war nicht lange wirksam, ihre formelle Auflösung wird z. T. bereits auf Ende 1813 datiert, obwohl die Aktivitäten einzelner Mitglieder bis zum Ende des Jahrzehnts reichten. Doch Anfang der 20er Jahre wandten sich mit Babbage und Herschel dann auch zwei der aktivsten Streiter für eine Refom der englischen Mathematik verstärkt anderen Themen zu, Herschel vor allem der Astronomie, Babbage der Konstruktion von Rechenmaschinen.

7.3.1 George Peacock

Es blieb Peacock vorbehalten, die algebraischen Aspekte klar aus den Problemstellungen herauszulösen, die sich im Rahmen der Reformbemühungen und der damit verbundenen Bemühungen zur Fundierung der neuen Methoden ergeben hatten. Er wurde damit zum Begründer der englischen algebraischen Schule. Nach seinem Studium an der Universität Cambridge war er dort ab 1815 in verschiedenen Lehrpositionen tätig. Aber erst 1837 erlangte er eine Professur und übernahm dann zwei Jahre später ein kirchliches Amt.

Peacocks Vorstellungen sind vor allem durch sein 1830 publiziertes Lehrbuch *„A Treatise on Algebra“* [Peacock 1830] und den 1833 vorgetragenen Bericht

über die Fortschritte in der Analysis [Peacock 1834] überliefert. In dem Lehrbuch definierte er faktisch eine neue mathematische Disziplin, die symbolische Algebra, als

„the science which treats of the combinations of arbitrary signs and symbols by means of defined through arbitrary laws.“ [Peacock 1830, S. 71]

In dieser Form repräsentierte die symbolische Algebra eine völlig abstrakte Auffassung von Algebra, für die mit Blick auf die Euklidische Geometrie ein axiomatischer Aufbau anzustreben war. Die Symbole (Buchstaben) waren abstrakte Größen, die zunächst keine Realisierung als Zahlen, geometrische Objekte oder ähnliches hatten und nur den geforderten Verknüpfungsregeln genügen mußten. Damit hatte Peacock die algebraischen Verknüpfungen in den Mittelpunkt algebraischer Untersuchungen gerückt und auch diese Operationen konnten zunächst beliebig festgelegt werden. In dieser abstrakten Form scheint die symbolische Algebra der Babbageschen Idee einer allgemeinen, formalen Wissenschaft als Basis der Mathematik sehr nahe zu stehen. Doch die Propagierung einer derartigen Algebra war nicht unproblematisch. Peacock mußte sichern, daß man mit der symbolischen Algebra wahre Aussagen erhalten konnte und es sich nicht, wie von seinen Widersachern behauptet, um ein sinnloses Hantieren mit bedeutungslosen Zeichen handelte. Er versuchte, diese Schwierigkeiten zu beheben, indem er noch eine arithmetische Algebra einführte. Die arithmetische Algebra war einerseits noch eng mit dem Rechnen mit Zahlen verknüpft und diente andererseits der symbolischen Algebra als anregende Wissenschaft. Der Bruch mit den Auffassungen des 18. Jahrhunderts, wie er sich in der symbolischen Algebra manifestierte, wurde dadurch stark relativiert. Die arithmetische Algebra entsprach im wesentlichen der Buchstabenrechnung, wenn man also die arithmetischen Rechnungen mit Buchstaben statt mit Zahlen ausführte. Damit blieben jedoch auch die prinzipiellen Schwierigkeiten bei der Erweiterung der Zahlbereiche bestehen.

Die Richtigkeit seiner Überlegungen konnte Peacock am einfachsten durch die Angabe eines Modells demonstrieren und er griff auf das zurück, was ihm wohl am naheliegendsten und sichersten erschien, die Arithmetik. Die Beziehung zwischen der arithmetischen und der symbolischen Algebra stellte er dann durch das sogenannte Prinzip der Permanenz äquivalenter Formen her. Obwohl er mit diesem Prinzip die Übertragung von Eigenschaften äquivalenter Formen, von Verknüpfungsregeln in beide Richtungen erklärte, nutzte er es nur, um aus Beziehungen im Bereich der arithmetischen Algebra auf entsprechende Relationen in der symbolischen Algebra zu schließen. Durch diese einseitige Anwendung des Permanenzprinzips und die Wahl der Arithmetik als anregende Wissenschaft schränkte Peacock die Kraft seiner Ideen zur symbolischen Algebra wesentlich ein. Die zunächst von ihm proklamierte Freiheit des Mathematikers bei der Wahl der Verknüpfungsregeln für die abstrakten Symbole hätte auch Systeme zugelassen, bei denen Kommutativ-, Assoziativ- oder Distributivgesetz verletzt waren. Dieser Weg wurde damit



Augustus de Morgan



George Peacock

versperrt und solche Systeme lagen wohl außerhalb von Peacocks Intentionen. Ihm ging es nicht um die Schaffung abstrakter Systeme von Symbolen, sondern um eine Fundierung und Vereinheitlichung bereits vorliegender mathematischer Kenntnisse, speziell des Rechnens in den einzelnen Zahlbereichen. In der 1842/45 erschienenen zweiten Auflage des Buches nahm Peacock stärker auf eine geometrische Interpretation der Symbole und Verknüpfungsregeln Bezug und schuf so einige Elemente der Vektorrechnung. Um Peacocks Leistungen gerecht zu beurteilen, muß man auch dessen feste Einbindung in den Lehrbetrieb der Universität Cambridge und die Stellung der Mathematik im Lehrsystem beachten. Die Mathematik sollte zum Auffinden von Wahrheiten in der Natur befähigen, eine symbolische Algebra, die nur als Spiel mit bedeutungslosen Zeichen angesehen werden konnte und keine Interpretation in der Realität besaß, wäre dazu nicht geeignet gewesen.

7.3.2 Augustus de Morgan

Durch seine Lehrtätigkeit fand Peacock mit Augustus de Morgan, Duncan Gregory u. a. einige Schüler, die seine Ideen aufgriffen und weiterentwickelten. Der in Indien geborene De Morgan lehrte nach seinem Studium ab 1828 als Professor an der neugegrüdeten Universität London und trat besonders mit neuen Ideen zur Logik hervor. Er stand mit mehreren bekannten Persönlichkeiten seiner Zeit im Gedankenaustausch und war sowohl mit den verschiedenen Ansichten zu mathematischen Fragestellungen als auch philosophischen Überlegungen vertraut. Wichtigster Impuls für die Beschäftigung mit algebraischen Problemen war das Bestreben, die vorhandenen Unzulänglichkeiten in der Mathematik zu beseitigen und der umgestalteten Mathematik einen

festen Platz im System der Universitätsausbildung zu sichern. So verwundert es nicht, daß de Morgans erste umfassendere Äußerung zur Algebra in einem breiteren pädagogischen Rahmen geschah und mit allgemeinen Überlegungen zum Aufbau einer Wissenschaft einherging. Er betonte die große Bedeutung, die die Prozesse des logischen Schließens und des Interpretierens der abgeleiteten Resultate haben, trennte aber zugleich beide klar von einander. Die deduktiv abgeleiteten Ergebnisse können keine größere Sicherheit aufweisen als die Ausgangssätze, und dies habe nichts mit der Korrektheit des mathematischen Schließens zu tun. Die Mathematik könne ihre Funktion im Bildungssystem auch dann erfüllen, wenn aus hypothetischen Voraussetzungen exakte Folgerungen gezogen würden, doch seien letztere genauso ungewiß wie die Prämissen. Er definierte die Algebra nun

„as a system of investigation, without any rules except those under which we may please to lay ourselves for the sake of attaining any desirable object. The hypotheses, the meaning of the symbols, however laid down, are in our own power: subject only to the great rule of all search after truth, that nothing is to be asserted as a conclusion, more than is actually contained in the premises.“ [De Morgan, 1835, S. 99]

Zwar akzeptierte de Morgan die Arithmetik als anregende Wissenschaft und das Prinzip der Permanenz äquivalenter Formen als mögliche Hilfen bei der Erkenntnisgewinnung, aber er sprach ihnen keine allgemeine Gültigkeit zu. Damit hob er die von Peacock vorgenommenen Einschränkungen bei der Wahl der Verknüpfungsregeln auf und lenkte zugleich die Aufmerksamkeit auf den strukturellen Gesichtspunkt. In seinen Arbeiten zur Begründung der Algebra wich er bewußt von den Peacockschen Bezeichnungen ab, die er als ungeeignet ansah, und unterschied zwischen technischer und logischer Algebra. Die erstere umfaßte den algorithmischen Aspekt, also das Rechnen mit den abstrakten Symbolen entsprechend den gewählten Regeln. Die letztere definierte er als

„the science which investigates the method of giving meaning to the primary symbols, and of interpreting subsequent symbolic results“ [De Morgan 1841, 173]

und rückte die Frage nach der Interpretation der Symbole in den Mittelpunkt der Betrachtungen. Wie Peacock wies er der Interpretationsproblematik eine große Bedeutung zu und stellte sie in seinen weiteren Forschungen über das Studium der Verknüpfungsgesetze. Die in der technischen Algebra abgeleiteten Resultate waren nur dann sinnvoll, wenn den Symbolen eine konkrete Bedeutung zugewiesen werden konnte. Diese Ausrichtung der Forschungsakzente auf die logische Algebra trug auch der kritischen bis ablehnenden Haltung gegenüber der symbolischen Algebra Rechnung, die von William Rowan Hamilton, William Whewell und anderen eingenommen wurde. Zugleich reflektierte diese Akzentuierung den erreichten Entwicklungsstand.

Nachdem man die Gleichheit der Verknüpfungsregeln als wichtige Gemeinsamkeit bei verschiedenen mathematischen Problemstellungen erkannt hatte, erste Schritte bei der Ausbildung eines allgemeinen Kalküls gegangen war und nicht zuletzt mit Blick auf das Buchstabenrechnen eine gewisse Vertrautheit mit diesen Rechnungen erreicht hatte, verblieb die Frage der Interpretation als wichtigste Aufgabe. Die in der symbolischen oder technischen Algebra praktizierte Vorgehensweise war nur dann gerechtfertigt, wenn man das Ergebnis der formalen Rechnungen mit den Symbolen wieder entsprechend dem Ausgangssachverhalt interpretieren konnte und dieses Ergebnis als wahr, als richtig anzusehen war. Diese stets vorhandene Forderung, die eigene Vorgehensweise zu legitimieren, war ein wichtiger Grund dafür, warum die Vertreter der englischen algebraischen Schule nicht bis zur Untersuchung der durch die Verknüpfungsgesetze definierten algebraischen Strukturen vordrangen.

De Morgan folgte diesen Intentionen und ordnete die technische Algebra der logischen unter. Strukturelle Betrachtungen äußerten sich oft in dem Verweis auf ein Modell der Arithmetik. Ein solches Modell bildeten die komplexen Zahlen, die in de Morgans vierteiliger Artikelserie zur Begründung der Algebra einen breiten Raum einnahmen. So gab er im zweiten Teil im Bestreben die Regeln für das Operieren mit den Zahlen von der Bedeutung der Symbole zu separieren, acht Regeln an, die implizit auch jene enthalten, die die komplexen Zahlen als Körper definieren. Im viertenTeil versuchte er dann, zu einer vorgegebenen Struktur eine Realisierung in der Arithmetik zu finden.

Angeregt durch Hamiltons Darstellung der komplexen Zahlen als Zahlenpaare und die Entdeckung der Quaternionen (vgl. Abschn. 7.4.1) betrachtete de Morgan ein Größensystem, das aus drei Einheiten gebildet wurde, eine sog. *triple algebra*, wobei in diesem System die üblichen Gesetze der Arithmetik gelten sollten. Er wollte folglich eine dreidimensionale kommutative Divisionsalgebra konstruieren. Obwohl dieser Versuch erfolglos blieb – eine solche Algebra existiert nicht – entwickelte er wichtige Ideen auf dem Weg zur Definition einer abstrakten n-dimensionalen Algebra. Er vermerkte u. a., daß mit der Festlegung des Produktes mehrerer Einheiten auch das ganze System bestimmt sei.

Etwa zur gleichen Zeit und unabhängig voneinander wurden diese Ideen auch von Herman Günther Graßmann und Hamilton hervorgebracht und weiter ausgebaut. Hervorhebenswert ist de Morgans prinzipielles Vorgehen: er wählte ein System von abstrakten Größen, unterwarf es bestimmten Verknüpfungsregeln und suchte nach Realisierungen des so definierten Objektes. Mit der Forderung, daß zu dem System der Symbole und den vorausgesetzten Verknüpfungsregeln keine neuen hinzukommen dürfen, außer solchen, die sich durch Kombination der Ausgangsgrößen bzw. -regeln ergeben, lieferte er einen ersten Ansatz, um die Abgeschlossenheit gegenüber den Verknüpfungsrelationen zu sichern. Schließlich sei noch erwähnt, daß in der de Morganschen Betrachtungsweise auch die komplexen Zahlen als eine von zwei Einheiten erzeugte Algebra über den reellen Zahlen erscheinen.

7.3.3 Duncan Farquharson Gregory

Duncan Farquharson Gregory gehörte einer schottischen Gelehrtenfamilie mit großer Tradition an, deren berühmtester Vertreter wohl der durch seine bedeutsamen Beiträge zur Infinitesimalrechnung bekannte James Gregory war ein Ururgroßvater von Duncan. Gregory genoß eine gute wissenschaftliche Ausbildung, studierte in Edinburgh, Genf und Cambridge, wo er ab 1837 lehrte. Bereits 1844 verstarb er im Alter von 30 Jahren, noch ehe seine Kariere richtig begonnen hatte.

Die Suche nach einer Begründung der Operatorenrechnung bildete für ihn den Ausgangspunkt für algebraische Überlegungen. In diesem Rahmen erkannte er die Bedeutung der Verknüpfungsregeln und fand wichtige Anregungen in Peacocks symbolischer Algebra. 1840 definierte er die symbolische Algebra als

„the science which treats of the combination of operations defined not by their nature, that is by what they are or what they do, but by the laws of combination to which they are subject.“ [Gregory 1840, S. 208]

und bezeichnete die Trennung des Operationssymbols von dem der quantitativen Größen als zentrale Idee seines Vorgehens. Gregory war einerseits um eine klare Behandlung der symbolischen Algebra als eigenständiges Gebiet, andererseits um eine Fundierung der Operatorenrechnung bemüht. Standen bei Peacock die Arithmetik und damit Zahlen als Interpretation der Symbole im Hintergrund, so waren es bei Gregory Operatoren, wenn gleich der Operatorbegriff noch nicht exakt bestimmt war. Gregory sprach meist von Operationen, Funktionen usw. und betonte mehrfach den Unterschied zu Peacock. Faktisch lotete er den Anwendungsbereich weiter aus und kam zu wichtigen strukturellen Einsichten. Gregory faßte die Operationen in verschiedenen Klassen zusammen. Wenn die in diesen Klassen definierten Verknüpfungen – er sprach von Kombinationen – den gleichen Gesetzen genügten, so gelten in den Klassen auch die gleichen abgeleiteten Theoreme, mit anderen Worten sie haben die gleiche algebraische Struktur. Diese Vorstellungen werden später im Isomorphie- und Homomorphiebegriff eine exakte Ausformung erfahren. Das Wesen des Übergangs von der arithmetischen zur symbolischen Algebra, wie auch die Begründung der Operatorenrechnung sah er nicht im Aufdecken von Analogien, sondern in der Annahme einer Klasse unbekannter (abstrakter) Operationen, die den gleichen Verknüpfungsgesetzen genügten, so daß die gleiche Struktur vorlag. Die von Gregory angegebenen Beispiele offenbaren dann die Grenzen seines Standpunktes. Durch die bestehenden Unklarheiten, was er unter einem Symbol verstehen wollte, und durch die Unterscheidung von Symbol und Operation wurde die Behandlung der Verknüpfungsregeln unnötig verwirrt. Die Verknüpfungsregeln formulierte er nur für Operationen. Daß im Bereich der Objekte, auf die die Operationen angewendet werden, die gleichen Gesetze gelten können, erwähnt er nicht, selbst wenn er dies in den Rechnungen benutzt. Die Darlegungen waren noch deut-

lich von dem Ausgangsproblem, der Begründung der Operatorenrechnung, geprägt, die in den allgemeinen Überlegungen enthaltene Möglichkeit zu abstrakten strukturellen Betrachtungen wurde nicht ausgeschöpft.

Ebenso wie bei Gregory waren die Beiträge von Robert Murphy deutlich von der Operatorenrechnung geprägt, jedoch spielten für ihn algebraische Aspekte kaum eine Rolle. Trotzdem sind zwei Fakten hervorhebenswert. Zum einen sind dies Murphys Studien zu Verknüpfungen, die man heute zur Theorie der linearen Operatoren rechnen würde. Darin leitete er bis auf die Assoziativität alle Eigenschaften ab, um die Menge der linearen Operatoren als Algebra nachzuweisen. Zum anderen, und dies ist aus algebraischer Sicht noch wichtiger, wies er auf die Existenz von Operationen hin, die nicht miteinander vertauschbar sind. Damit war 1837 in Verbindung mit dem Versuch die Separation der Symbole, also letztlich die Operatorenrechnung, auf Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten auszudehnen, ein nichttriviales Beispiel für das Auftreten nichtkommutativer Verknüpfungen aufgefunden, und dieses Beispiel ließ sich nicht als Spiel mit bedeutungslosen Symbolen abtun. Sieben Jahre später hob George Boole diesen Aspekt bei der Beschäftigung mit dem gleichen Problem klar hervor.

7.3.4 George Boole und die Algebra der Logik

George Boole leistete mit seinen Schriften einen wesentlichen Beitrag zur Verbreitung der Ideen der englischen algebraischen Schule, obwohl keine seiner Arbeiten der Algebra gewidmet war. Er hatte sich große Teile seiner mathematischen Bildung autodidaktisch angeeignet und gründete nach kurzer Lehrtätigkeit in seiner Geburtsstadt Lincoln eine eigene Schule. Seine Forschungen begann er mit Fragen zur Operatorenrechnung. Dabei verfügte er über sehr breit gefächerte Kenntnisse, die klassische Arbeiten von Lagrange, Cauchy, Laplace, Euler und Servois ebenso umfaßten wie Resultate von Gregory und de Morgan und bis zu philosophischen Ausführungen des Schotten William Hamilton und John Stuart Mill reichten. Bereits als 18jähriger soll Boole 1833 den für sein weiteres Schaffen entscheidenden Einfall gehabt haben, logische Beziehungen in algebraischer Form symbolisch auszudrücken. Bis zur Realisierung dieser Idee sollten noch 14 Jahre vergehen. (Für eine detaillierte Analyse und Einordnung der Booleschen Arbeiten vom Standpunkt der Logikgeschichte vergleiche man die Ausführungen von Peckhaus [Peckhaus 1997, Kap. 5.1.]).

Doch es ging Boole nicht nur um das formelmäßige Erfassen logischer Relationen, sein Ziel war die Schaffung eines universellen Symbolkalküls, mit dessen Verknüpfungsregeln die Gesetze des menschlichen Denkens erfaßt werden sollten. Die Operationen des menschlichen Geistes beim Fällen von Urteilen wurden von ihm analysiert, die grundlegenden Regeln herausgearbeitet und mit Symbolen formuliert. Entscheidender Bestandteil dieses Prozesses war ein Auswahlprozeß zum Zwecke der Klassenbildung, in dem Boole davon ausging,

daß der Mensch fähig ist, aus einer beliebigen Zusammenfassung von Objekten diejenigen auszusondern, die zu einer gegebenen Klasse gehören, und sie klar von den anderen zu unterscheiden. Die Operationen des menschlichen Geistes erfaßte er dann mittels der Klassen als Verknüpfungen derselben, stellte sie in Formeln dar und konstatierte auf dieser Basis die Analogie zu den Betrachtungen der symbolischen Algebra. Neben den aus der Arithmetik vertrauten Verknüpfungsregeln, unter denen jedoch stets das Assoziativgesetz fehlte, fand er mit der von ihm als Indexgesetz bezeichneten Relation $x^2 = x$ bzw. $x^n = x$ ein völlig abweichendes Gesetz und stellte fest, daß das von ihm abgeleitete System nur dann in der Arithmetik realisiert werden könne, wenn alle Symbole nur die Werte Null und Eins annehmen können. Ginge man so vor, so stimmte die Algebra der Logik strukturell völlig mit diesem speziellen arithmetischen System überein:

„Let us conceive, then, of an Algebra in which the symbols $x, y, z, \&c$ *. admit indifferently of the values* 0 *and* 1 *, and of these values alone. The laws, the axioms, and the processes, of such an Algebra will be identical in their whole extent with the laws, the axioms, and the processes of an Algebra of logic. Difference of interpretation will alone divide them.“* [Boole 1854, S. 37f.]

Es handelte sich für Boole also nicht um eine Anwendung eines Systems der symbolischen Algebra auf die Logik, sondern um eine eigenständige Begründung der letzteren und die Herausarbeitung von deren algebraischer Struktur. In der sich bei Gregory anbahnenden Ablösung der im Kalkül der symbolischen Algebra durchgeführten Rechnungen von einer quantitativen Interpretation vollzog Boole einen weiteren wichtigen Schritt und dehnte die Anwendbarkeit auf nichtquantitative Bereiche aus. Im damaligen Mathematikverständnis kann man sogar von einer Ausdehnung auf nichtmathematische Bereiche sprechen, und Boole war sich dieser Tatsache voll bewußt. Er stellte fest, daß seine symbolische Logik nicht unter den geltenden Mathematikbegriff subsumiert werden könne und rechnete die von ihm erkannten Gesetze zu einer allgemeinen Mathematik, die der eigentlichen Mathematik vorgelagert sei. Mit Blick auf die von Boole zum großen Teil selbst angegebene Traditionslinie kann man in dessen allgemeinem Kalkül den Versuch sehen, eine universelle Wissenschaftssprache im Sinne von Condillac und Marquis de Condorcet zu entwickeln.

Für Boole hatte der strukturelle Gesichtspunkt Priorität gegenüber der Interpretationsproblematik. Die Gesetze für die Operationen des menschlichen Geistes, d. h. die Verknüpfungsregeln, waren für ihn das Entscheidende. Eine Änderung dieser Gesetze, auch wenn sie als trivial erscheint, hätte in der Anwendung eine völlig andere Wissenschaft zur Folge und dies gelte analog für die symbolische Algebra [Boole 1847, S. 3, 6]. Zugleich deutete sich die Erkenntnis an, daß die weitere Entwicklung wesentlich durch die Aufdeckung der strukturellen Gemeinsamkeiten zwischen einzelnen Gebieten gefördert wird. Die Ermittlung der Verknüpfungsgesetze muß für jedes Gebiet, jede Problemstellung unabhängig erfolgen. Erst anhand der erkannten Gesetze kann dann

durch Vergleich die Übereinstimmung mit den Regeln anderer Gebiete, etwa der Algebra, festgestellt und die Übertragbarkeit des gesamten Kalküls konstatiert werden. Der Symbolik wies Boole dabei eine große Bedeutung zu, da sie eine vereinheitlichende, vereinfachende und anregende Wirkung habe und auf der innigen Verflechtung der Sprache mit dem Denken basiere. Doch die Symbole bleiben „nur“ Hilfsmittel, die das Ableiten eines gewissen Formalismus begünstigen. Die Gesetze des Denkens hängen nicht von speziellen Interpretationen ab, und nicht jeder Zwischenschritt bei Rechnungen in dem symbolischen Kalkül muß interpretierbar sein. Es genügt, wenn das Endergebnis eindeutig und widerspruchsfrei interpretiert werden kann.

Mit der Publikation der Arbeit *„An Investigation of the Laws of Thought, ...“* erreichten die Booleschen Forschungen 1854 einen gewissen Abschluß. Sie lieferten ihm eine sichere Basis für weitere mathematische bzw. logische Untersuchungen und harmonierten auch mit den philosophischen Auffassungen seiner Zeit. Hatte er anfangs noch ganz dem Gregoryschen Standpunkt folgend die Operationen im Stile der Operatorenforschung behandelt, traten in den in *„An Investigation ...“* abgeleiteten Verknüpfungsregeln stets nur Objekte aus der gleichen Objektmenge auf, ohne daß Boole die veränderte Sichtweise besonders erwähnte. Auf die zu diesem Zeitpunkt erzielten Fortschritte in der Algebra ging er nicht ein, und es bleibt offen, ob er sie für seine Betrachtungen für relevant hielt. So ignorierte er etwa die in den Studien von de Morgan und Hamilton aufgetretene, höchst sonderbare Tatsache, daß das Produkt zweier von Null verschiedener Elemente Null sein konnte, d. h. modern formuliert das Vorhandensein von Nullteilern. Dabei findet sich auch in Booles Arbeit implizit ein entsprechendes Beispiel für Nullteiler, dies wurde von ihm jedoch nicht weiter diskutiert.

Die Bedeutung des Booleschen Schaffens liegt zum einen in der Schaffung einer Algebra der Logik und den damit verbundenen Impulsen für weitere logische Untersuchungen, zum anderen in der Tatsache, daß er bei der Herausarbeitung dieser Algebra der Logik den Ideen zur Erfassung abstrakter Zusammenhänge in Symbolen und Kalkülen eine allgemeine breite Basis gab, ebenso den Ideen zur Interpretation der Symbole und der in den Kalkülen abgeleiteten Ergebnisse. Nach der Mitte des Jahrhunderts wurde das Studium formaler Systeme von nicht näher bestimmten abstrakten Symbolen nicht mit der gleichen Intensität fortgesetzt, so daß man Boole oft als letzten Vertreter der englischen algebraischen Schule bezeichnet. Auf dem erreichten Abstraktionsniveau bedurfte es erst einer Verbreiterung der inhaltlichen Basis, ehe man zu weiteren Verallgemeinerungen übergehen konnte. Dazu kamen noch einige für England spezifische Faktoren, die eine größere Verbreitung der Ideen der Schule um Peacock hemmten. Es bleibt das Verdienst der englischen algebraischen Schule, mit ihren Ansätzen zu einer abstrakten Auffassung von Algebra und zur axiomatischen Definition algebraischer Strukturen erste einfache Einsichten in diesem Prozeß erzielt und wichtige Anregungen für die weitere Entwicklung geliefert zu haben. Bei der Einschätzung der Wirksam-

keit dieser Schule muß die in den vorangegangenen Darlegungen aufgezeigte, seit dem Beginn des Jahrhunderts bestehende Kontinuität der Entwicklung beachtet werden. Zentrum der Aktivitäten war Cambridge, doch durch die vielfältigen Beziehungen der Träger dieser Bewegung fanden die Ideen eine größere Verbreitung, so daß einige Historiker diesbezüglich von einem Cambridger Netzwerk sprechen.

7.4 Erste Definitionen abstrakter algebraischer Systeme

7.4.1 William Rowan Hamilton und die Quaternionen

Parallel zu den Bemühungen innerhalb der englischen algebraischen Schule um die Herausarbeitung einer abstrakten Auffassung von Algebra als Grundlage für die Rechnungen in der Analysis und der Arithmetik entwickelte der Ire William Rowan Hamilton eine eigenständige Begründung der Mathematik. Er fußte in seinen Arbeiten wesentlich auf philosophischen Vorstellungen, die er aus der romantischen Naturphilosophie Coleridges und den Werken Kants gewonnen hatte. Von Sammuel Taylor Coleridge übernahm er den Begriff der auf gewisse (Ur)Intuitionen gegründeten Wissenschaft, der bei ihm zur reinen Wissenschaft wurde. Während er für die Geometrie die Intuition des Raumes akzeptierte, fand er in der *„reinen Zeit“* die Urintuition für einen exakten Aufbau der Algebra als Wissenschaft.

Die Arbeiten Coleridges und vor allem die Bekanntschaft mit den Werken von Immanuel Kant (1724–1804) bestärkten Hamilton in der Ausarbeitung seiner Ideen. Wie bei verschiedenen anderen mathematischen Fragen, bei denen es weniger um Berechnungen und die Anwendung spezifischer Kalküle, sondern mehr um gewisse Grundansichten zur Behandlung der jeweiligen Probleme ging, wie etwa bei der Raumauffassung in der Geometrie, erwies sich die Kantsche Philosophie als sehr einflußreich. Im Falle Hamiltons ist dieser Einfluß durchweg als positiv und stimulierend anzusehen.

Als Grundbegriffe seiner Theorie definierte Hamilton die genau voneinander zu unterscheidenden Zeitmomente als Objekte des Denkens und den Zeitschritt als Differenz zweier Zeitmomente. Mit Hilfe einer Folge von Zeitschritten konstruierte er dann die Zahlen und wies für die einzelnen Zahlbereiche die üblichen Relationen (Gleichheit, Größer bzw. Kleiner als) und die Verknüpfungsregeln nach. Für die Konstruktion der reellen Zahlen mußte er noch die Intuition der stetigen Progression der Zeit heranziehen, um die rellen Zahlen als Kontinuum nachzuweisen. Bei der Zusammenstellung der Eigenschaften der einzelnen Zahlbereiche hob er für die rationalen bzw. die reellen Zahlen im wesentlichen all jene hervor, die diese beiden Bereiche als Körper charakterisieren. Mit dem Begriff des Körpers wird dabei ein abstraktes algebraisches Objekt bezeichnet, das eine endliche oder unendliche Menge von Elementen umfaßt, für die zwei Verknüpfungen definiert sind. Diese

Verknüpfungen sind innerhalb der Menge uneingeschränkt ausführbar – die Verknüpfung zweier Elemente ergibt also stets wieder ein Element der Menge – und genügen gewissen zusätzlichen Bedingungen. Hamilton bemerkte dann, daß man problemlos zur Betrachtung von zwei Zeitmomenten übergehen kann, und wiederholte nun die durchgeführte Konstruktion. Über Paare von Zeitschritten kam er zu Zahlenpaaren, übertrug die von den reellen Zahlen bekannten Operationen und verifizierte die entsprechenden Verknüpfungsregeln.

Für die Multiplikation wurden jedoch zusätzliche Überlegungen notwendig: Zwar hatte Hamilton die erste Komponente des Zahlenpaares mit den reellen Zahlen identifiziert, eine nach der vorgenommenen Konstruktion naheliegende Setzung, doch für die Multiplikation blieb die Frage offen, wie zwei Paare der Art $(0, a)$ zu verknüpfen sind. Bei diesen Untersuchungen führte er vermutlich zum ersten Mal die sog. Multiplikationskonstanten ein und schrieb:

$$(0, a_2)(0, b_2) = (\gamma_1 a_2 b_2, \gamma_2 a_2 b_2).$$

Die Konstanten γ_1, γ_2 können beliebig angenommen werden, aber, so Hamilton, es gibt Gründe, sie in der Form $\gamma_1 = -1$, $\gamma_2 = 0$ zu wählen. Dies bildete die Basis für die im vorigen Kapitel erwähnte arithmetische Begründung der komplexen Zahlen. Später berichtete Hamilton, daß er auch andere Setzungen für die Konstanten untersucht hatte.

Von besonderer Bedeutung an der Hamiltonschen Argumentationsweise war die Tatsache, daß sie sich einfach verallgemeinern ließ, und Hamilton setzte auch 1834/35 seine Forschungen mit Studien über sog. *„Triplets“* bzw. später über *„Sets“* fort. Erstere entsprachen Zahlen mit drei Komponenten, also Zahlen, die man als Zahlentripel (a_1, a_2, a_3) darstellte, letztere n-Tupeln von Zahlen. Für diese Objekte, für die es in der Arithmetik kein Pendant gab, versuchte er die Verknüpfungen so zu definieren, daß sie gewisse Verknüpfungsregeln erfüllten. Dabei war Hamilton zunächst entsprechend seiner Konstruktion keinerlei Beschränkungen unterworfen. Weder eine *„anregende Wissenschaft“* noch das Permanenzprinzip mußten berücksichtigt werden. Was bei Peacock noch als Möglichkeit im Hintergrund blieb, wurde hier als reales Problem formuliert: Zu einem System nicht näher bestimmter Objekte wurden die Verknüpfungsregeln vorgegeben und es war zu entscheiden, ob Verknüpfungen der Objekte existierten, die diese Regeln erfüllten. Anders ausgedrückt: für ein abstraktes System wurde die algebraische Struktur definiert und die Aufgabe war das Studium dieser Struktur, wobei zuerst die Widerspruchsfreiheit der Definition zu beweisen war, was durch die Angabe eines Beispiels für diese Struktur geschehen konnte.

Hamiltons Forschungen waren jedoch keineswegs eine direkte Fortsetzung der Ideen der englischen algebraischen Schule. Er hat im Gegenteil lange Zeit in der Grundposition die symbolische Algebra abgelehnt und betont, daß seine Sichtweise eine völlig andere sei. Sein im gewissen Sinne konstruktiver Aufbau konnte nicht als Spiel mit bedeutungslosen Zeichen abgewertet werden.

Über die Realisierung als Zeitschritte hatten die Grundelemente seiner Algebra stets eine konkrete Gestalt, wiesen aber nicht die Allgemeinheit auf wie bei den Vertretern der englischen algebraischen Schule. Doch war Hamiltons Ansatz allgemein genug, um verschiedene Anregungen zu integrieren, und führte in der speziellen historischen Situation zu einem bedeutenden wie überraschenden Ergebnis: der Entdeckung der Quaternionen. Bereits in den 30er Jahren zeigte Hamilton eine aufgeschlossenere Haltung gegenüber den Vorstellungen der englischen algebraischen Schule und griff einige Ideen auf. Später, nach der Entdeckung der Quaternionen, hat er den Einfluß dieser Tradition klar anerkannt.

Es darf jedoch nicht verkannt werden, daß ein wesentlicher Impuls für die Ausdehnung der Forschungen auf Triplets geometrischer Natur war. Aus den Schriften Warrens lernte Hamilton die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen kennen. Die dadurch hergestellte Äquivalenz zwischen den Punkten der Ebene und den komplexen Zahlen wollte er nun auf den Raum und höhere oder *„hyperkomplexe“* Zahlen übertragen. Mit den Triplets und ihrer geometrischen Darstellung hoffte er ein neues Mittel zur Beschreibung der realen dreidimensionalen Welt gefunden zu haben, von der er speziell auch neue wirkungsvolle Möglichkeiten erwarten durfte, um physikalische Vorgänge zu erfassen und mathematisch beschreiben zu können. Hier vereinten sich naturwissenschaftliche und philosophische Überlegungen und bildeten einen wichtigen Antrieb für Hamiltons Forschungen. Wie hoch Hamilton die geometrischen Aspekte schätzte, belegt die zentrale Rolle, die er der sog. Normgleichung zuwies. Die Normgleichung: *Norm des Produktes = Produkt der Normen* brachte den geometrischen Sachverhalt zum Ausdruck, daß die Länge der Linie, die das Produkt zweier komplexer Zahlen darstellt, gleich dem Produkt der Längen der beiden Ausgangslinien war, welche die beiden Faktoren repräsentierten. Für zwei komplexe Zahlen $a_1 + a_2 i$ und $b_1 + b_2 i$ hatte sie die Form

$$(a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_2 b_1 + b_2 a_1)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Die Normgleichung gehörte zu jenen Verknüpfungsregeln, die Hamilton als wichtig für eine Bestimmung eines algebraischen Systems einschätzte. Mehrfach verwarf er die von ihm gewählte Multiplikation von Triplets, weil im jeweiligen Fall die Normgleichung nicht erfüllt war. Für die Rechnungen mit Triplets benutzte Hamilton die Darstellung als Linearkombination der Basiseinheiten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$, die im folgenden abweichend von der originalen Bezeichnungsweise als 1, i und j geschrieben werden, so daß ein Triplet die Form $x = a_1 1 + a_2 i + a_3 j$ hat.

Das entscheidende Problem war die Festlegung der Multiplikation zweier Triplets. Analog zum Vorgehen bei den komplexen Zahlen sollte das Produkt von zwei Einheiten wieder eine Linearkombination der Basiseinheiten sein. Formal algebraisch sicherte Hamilton damit, daß die Multiplikation nicht aus der Menge der Triplets herausführte, das Produkt also wieder ein Triplet

war. Zugleich entsprach dies den geometrischen Intentionen, denn die Triplets konnten nur dann eine sinnvolle Darstellung von gerichteten Strecken im Raum sein, wenn ihr Produkt wieder ein Objekt im Raum ergab. Er erhielt also

$$(a_1 1 + a_2 i + a_3 j)(b_1 1 + b_2 i + b_3 j) =$$
$$a_1 b_1 1 + a_2 b_1 i \cdot 1 + a_3 b_1 j \cdot 1 + a_1 b_2 1 \cdot i + a_2 b_2 i \cdot i + a_3 b_2 j \cdot i + a_1 b_3 1 \cdot j + a_2 b_3 i \cdot j + a_3 b_3 j \cdot j.$$

Für jedes Produkt von zwei Einheiten mußten nun eine Summe der Form $\gamma_{lm,1} 1 + \gamma_{lm,2} i + \gamma_{lm,3} j \quad (l, m = 1, 2, 3)$ gesetzt und die Multiplikationskonstanten $\gamma_{lm,n}$ bestimmt werden. Während es naheliegend war, die Einheit 1 als Identität wirken zu lassen, also $1 \cdot i = i$ usw., und $i^2 = j^2 = -1$ zu setzen, blieb die Bestimmung für die Produkte $i \cdot j$ und $j \cdot i$ völlig offen. Hamilton hat verschiedene Setzungen vorgenommen, z. B. $i \cdot j = j \cdot i$, $i \cdot j = -1$ bzw. $i \cdot j = 0$. All diese Annahmen führten nicht zum Ziel, da mindestens eine der von ihm vorausgesetzten Verknüpfungsregeln nicht erfüllt war.

Die Rechnungen zeigten deutliche Einflüsse von Ideen der Operatorenrechnung. Auch die Resultate de Morgans hatte Hamilton seit dem Beginn der 40er Jahre verarbeitet. Weiterhin erwähnte er Arbeiten Cauchys und dessen formale Auffassung einer Gleichung von imaginären Zahlen als symbolischen Ausdruck für zwei Gleichungen zwischen reellen Größen. De Morgan hatte diese Idee in der Gleichheitsdefinition für hyperkomplexe Zahlen in drei und mehr Einheiten verwendet, eine Definition, die Hamilton neue Ansatzpunkte in seinen Studien lieferte. Schließlich könnten auch die Bekanntschaft mit Gotthold Eisenstein im Sommer 1843, der Gedankenaustausch mit John Graves oder die Auseinandersetzung mit einer Arbeit Ohms die erneute intensive Hinwendung zum Studium der Triplets ausgelöst haben. Diesmal hatte Hamilton Erfolg. Wie er selbst berichtete, kam ihm auf dem Weg zu einer Sitzung der Royal Irish Academy am 16. Oktober 1843 der entscheidende Einfall, $i \cdot j$ als neue Einheit k einzuführen und $ij = -ji$ zu setzen, d. h. auf das Kommutativgesetz zu verzichten. Die für die Multiplikation wichtigen Relationen faßte er in den Gleichungen

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

zusammen. Eine Quaternion schrieb er in der Form $q = a \cdot 1 + bi + cj + dk$. Über 20 Jahre später schilderte Hamilton seinem Sohn das Ereignis wie folgt:

„But on the 16 th day of the same month – which happened to be a Monday, and a Council day of the Royal Irish Academy – I was walking in to attend and preside, and your mother was walking with me, along the Royal Canal, ...; and although she talked with me now and then, yet an under-current of thought was going on in my mind, which gave at last a result, whereof it is not too much to say that I felt at once the importance. An electric circuit seemed to close; and a spark flashed forth, the herald (as I foresaw, immediately) of many long years to come of definitely directed thought and work, by myself if

spared, and at all events on the part of others, if I should even be allowed to live long enough distinctly to communicate the discovery. Nor could I resist the impulse – unphilosophical as it may have been – to cut with a knife on a stone of Brougham Bridge, as we passed it, the fundamental formula with the symbols i, j, k *; namely*

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

which contain the Solution of the Problem, but of course, as an inscription, has long since mouldered away.“ [Graves 1882, Vol. 2, S. 434f.]

Hamilton hatte damit ein neues System vierdimensionaler Größen entdeckt, die Quaternionen. Jahrelang hatte er um eine Bestimmung der Multiplikation für Triplets gerungen und dabei immer wieder an der Normgleichung festgehalten. Angesichts des geometrischen Hintergrunds war ihm diese Gleichung wichtiger als die Kommutativität der Multiplikation. Wie schon bei den Forschungen von de Morgan über dreidimensionale Größen vermerkt wurde, existiert kein algebraisches System in drei Einheiten, das alle Voraussetzungen, speziell die durch die Normgleichung bedingte Nullteilerfreiheit, erfüllt. Die Bedeutung der Hamiltonschen Entdeckung besteht zum einem darin, erkannt zu haben, daß das Problem mit vierdimensionalen Größen gelöst werden kann und diesen Schritt auch vollzogen zu haben, sowie zum anderen mit den Quaternionen erstmals ein geschlossenes System hyperkomplexer Größen geschaffen zu haben, in dem das Kommutativgesetz nicht gültig war. Damit brach er mit einer über Jahrhunderte festverwurzelten Meinung der Mathematiker. Die Kommutativität der Multiplikation aufzugeben, war ein völlig neuer Gedanke, und dies wird oft als revolutionärer Schritt in der Geschichte der Algebra bezeichnet. Doch nichtkommutative Verknüpfungen waren bereits früher von anderen Mathematikern studiert worden, es sei an Boole erinnert, und auch Eisenstein könnte Hamilton darüber in Verbindung mit seinen Studien über Formen dritten Grades und die Hintereinanderausführung von (Matrizen-) Substitutionen berichtet haben. Der entscheidende Unterschied war die Entdeckung der Quaternionen als geschlossenes System nichtkommutativer Größen und die Ähnlichkeit dieser Größen mit Zahlen. Mit den Quaternionen erhielten die abstrakten Auffassungen der englischen algebraischen Schule eine erste konkrete Realisierung. Dabei hatte Hamilton nicht einen bekannten Zahlbereich untersucht und die Eigenschaften der Quaternionen aus einer Fülle von Relationen extrahiert, sondern er hatte mit den Verknüpfungsregeln implizit die Struktur des neuen Größensystems vorgegeben und dann nach möglichen Realisierungen gesucht. Wichtige Orientierungen lieferte ihm, wie seinen Vorgängern und Zeitgenossen, die Arithmetik. Die zu den Quaternionen führenden Forschungen verdeutlichen, wie er Kommutativ- und Distributivgesetz sowie die Normgleichung und Assoziativität als wichtige Verknüpfungsregeln erkannte, wobei er erstmals den Begriff assoziativ zur Kennzeichnung der entsprechenden Eigenschaft verwendete. Ergänzend sei darauf hingewiesen, daß sich De Morgan in seinen Studien zu hyperkomplexen Zahlen stärker an die *„gewöhnlichen symbolischen Regeln“* gebunden

LECTURES

ON

QUATERNIONS:

CONTAINING A SYSTEMATIC STATEMENT

OF

A New Mathematical Method;

OF WHICH THE PRINCIPLES WERE COMMUNICATED IN 1843 TO

THE ROYAL IRISH ACADEMY;

AND WHICH HAS SINCE FORMED THE SUBJECT OF SUCCESSIVE COURSES OF LECTURES, DELIVERED IN 1848 AND SUBSEQUENT YEARS,

IN

THE HALLS OF TRINITY COLLEGE, DUBLIN:

WITH NUMEROUS ILLUSTRATIVE DIAGRAMS, AND WITH SOME GEOMETRICAL AND PHYSICAL APPLICATIONS.

BY

SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL.D., M.R.I.A.,

FELLOW OF THE AMERICAN SOCIETY OF ARTS AND SCIENCES;
OF THE SOCIETY OF ARTS FOR SCOTLAND; OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON; AND OF THE ROYAL NORTHERN SOCIETY OF ANTIQUARIES AT COPENHAGEN;
CORRESPONDING MEMBER OF THE INSTITUTE OF FRANCE; HONORARY OR CORRESPONDING MEMBER OF THE IMPERIAL OR ROYAL ACADEMIES OF ST. PETERSBURGH, BERLIN, AND TURIN;
OF THE ROYAL SOCIETIES OF EDINBURGH AND DUBLIN; OF THE CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY;
THE NEW YORK HISTORICAL SOCIETY; THE SOCIETY OF NATURAL SCIENCES AT LAUSANNE; AND OF OTHER SCIENTIFIC SOCIETIES IN BRITISH AND FOREIGN COUNTRIES;
ANDREWS' PROFESSOR OF ASTRONOMY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN;
AND ROYAL ASTRONOMER OF IRELAND.



DUBLIN:
HODGES AND SMITH, GRAFTON-STREET,
BOOKSELLERS TO THE UNIVERSITY.
LONDON: WHITTAKER & CO., AVE-MARIA LANE.
CAMBRIDGE: MACMILLAN & CO.
1853.

Abb. 7.4.1. Titelblatt „Lectures on Quaternions“ von W. R. Hamilton 1853

fühlte und nur eine Änderung der Normdefinition in Erwägung zog, der Assoziativität aber eine geringere Bedeutung zuwies. Dies unterstreicht nochmals, wie neuartig das Hamiltonsche Vorgehen war. Es ist historisch interessant, daß die zentralen Aussagen, die Hamilton beim Studium der Triplets jahrelang beschäftigten, in zahlentheoretischen Arbeiten bereits formuliert waren. So bewies A.-M. Legendre in der *„Théorie des nombres“* 1830 mit einem Gegenbeispiel, daß die Identität $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (u^2 + v^2 + w^2)$ mit u, v, w Bilinearformen in a, b, c, x, y und z nicht allgemein gilt, also die Normgleichung für Triplets nicht allgemein erfüllt ist. Die entsprechende Normgleichung für die Quaternionen findet sich bereits 1748 als Relation für die Summe von vier Quadraten in einem Brief von Euler an Goldbach. Schließlich fand man im Nachlaß von Gauß ein auf das Jahr 1819 datiertes Manuskript über *„Mutationen des Raumes“*, das u. a. die Multiplikationsregeln für die Quaternionen – Gauß betrachtete sog. Scalen – enthielt.

Neben den Quaternionen ist Hamilton noch für mehrere weitere Entdeckungen bekannt. Dabei war der als Sohn eines Anwalts in Dublin geborene Hamilton als Kind vor allem durch seine ungewöhnliche Sprachbegabung aufgefallen. Als Fünfjähriger beherrschte er neben Englich und Französisch bereits ausgezeichnet Latein, Griechisch und Hebräisch. Erst ab 1820, also als 15-jähriger, beschäftigte er sich intensiver mit Astronomie und wenig später mit Mathematik. Noch als Schüler begann er Mitte der 20er Jahre mit Untersuchungen zur geometrischen Optik und legte 1824 eine erste Arbeit der Irischen Akademie vor. Teilweise in Unkenntnis der Arbeiten seiner Vorgänger und Zeitgenossen leitete er einige Resultate her und entdeckte eine *„bemerkenswerte Analogie“* zwischen der geometrischen Optik und dem Variationsprinzip der kleinsten Wirkung. Auf dieser Basis gab er dann eine Begründung der geometrischen Optik mit der von ihm entwickelten Methode der charakteristischen Funktion und formulierte grundlegende Einsichten in der Theorie der Abbildungsfehler. Spektakulär war 1832 die theoretische Voraussage der konischen Refraktion der optisch zweiachsigen Kristalle durch Hamilton und der experimentelle Nachweis dieser Erscheinung durch Humphrey Lloyd zwei Monate später. Bereits 1827 war Hamilton, ohne sein Studium in seiner Geburtsstadt Dublin abgeschlossen zu haben, zum Royal Astronomer am Dunsick Observatorium und Professor der Astronomie am Trinity College Dublin berufen worden. Die Stellung am Observatorium gab ihm die Möglichkeit, sich seinen mathematischen und literarischen Interessen zu widmen, als praktischer Astronom trat er jedoch nicht in Erscheinung. Eine sehr detailreiche Beschreibung der Persönlichkeit Hamiltons und seiner wissenschaftlichen Leistung hat Hankins gegeben [Hankins 1980]. Mitte der 30er Jahre wandte Hamilton dann seine Methode der charakteristischen Funktion in der Mechanik an und kam zur Beschreibung eines Systems von Massepunkten durch die später nach ihm benannte Funktion und die Differentialgleichungen. Die Hamiltonsche Methode war sehr elegant, konnte in der praktischen Anwendbarkeit aber nicht mit dem von Lagrange geschaffenen Formalismus konkurrieren. Im 20. Jahrhundert kam sie zu neuen Ehren, da



Abb. 7.4.2. Trinity College in Dublin/Irland
[Foto Alten]

sie die Brücke zwischen klassischer Mechanik und Quantenmechanik schlug: Ersetzt man die Größen der Mechanik durch entsprechende Operatoren der Quantenmechanik, so erhält man die Bewegungsgesetze der Quantenmechanik. Von all den Entdeckungen haben jedoch die Quaternionen Hamiltons weitere Forschungen am stärksten beeinflußt.

Trotz einer anfänglichen Reserviertheit und Kritik gegenüber der Nichtkommutativität wurden die Quaternionen relativ rasch anerkannt. Hamilton widmete sich einerseits dem intensiven Studium der neuen Größen und versuchte andererseits seine Konstruktion auf weitere höhere komplexe Zahlen, sog. n-sets, auszudehnen. Letzteres stellte erste Überlegungen zu n-dimensionalen Systemen hyperkomplexer Zahlen dar. Aus den Verknüpfungsregeln leitete Hamilton die Bedingungsgleichungen für die Multiplikationskonstanten ab, brach aber die Untersuchungen nach der Angabe der sich aus der Assoziativität ergebenden n^4 Bestimmungsgleichungen mit dem Hinweis auf die Schwierigkeiten bei der Lösung dieser Gleichungen ab. Die Untersuchung der Quaternionen sollte aber fortan Hamiltons Hauptbeschäftigung werden. Er hat sich sehr um die Anwendung der Quaternionen bemüht. In den ersten vier Jahren nach der Entdeckung der neuen Größen publizierte er über 20 Arbeiten, in denen er mit Hilfe der Quaternionen Probleme der Mechanik, Astronomie und Geometrie löste. Weitere Anwendungen sah er in der Elektrizitätslehre, der Wärmelehre und der sphärischen Trigonometrie. In den fol-

genden Jahren haben Hamilton und die Anhänger der Quaternionentheorie die ursprüngliche, auch philosophisch motivierte Zielstellung, eine Methode zur Beschreibung der realen dreidimensionalen Welt zu schaffen, verabsolutiert. Mit dem Versuch, die Quaternionentheorie als universell einsetzbare mathematische Methode zu etablieren, stießen sie jedoch zunehmend auf Kritik und versperrten sich den Zugang zu aktuellen Forschungen.

Dabei hatte Hamilton selbst mit der Einführung des Vektorbegriffs das Tor zu neuen Entwicklungen aufgestoßen. 1846 publizierte er seine Deutung einer Quaternion als eine aus einem reellen Teil (Skalar) und einem Vektor zusammengesetzte Größe in der Form $q = w+xi+yj+zk = Sq+Vq$ mit $Sq = w$ als Skalar und $Vq = xi + yj + zk$ als Vektor. Der Vektorteil repräsentierte eine Richtung im Raum und Hamilton versuchte, diese Deutung für seine Ziele zu nutzen, sowie eine geometrische Interpretation für eine vollständige Quaternion herzuleiten. In diesem Kontext schuf er erste wichtige Beiträge zur Vektorrechnung und Vektoranalysis, ohne jedoch die Bedeutung dieser Entwicklung zu erkennen. So traten u. a. Produktbildungen auf, die dem Skalar- bzw. dem Vektorprodukt äquivalent waren, und auch die als Nabla-Operator bekannte Bildung wurde eingeführt. 1885 hat dann Cayley eine Interpretation der Quaternionenmultiplikation als Rotation (Drehstreckung) im Raum angegeben. Neben den geometrischen Interpretationen hat die intensive Ausarbeitung der Quaternionentheorie die Anerkennung der neuen Größen sehr unterstützt. 1853 veröffentlichte Hamilton seine 1848 gehaltenen Vorlesungen unter dem Titel *„Lectures on Quaternions“*, eine mehr als 800 Seiten umfassende ausführliche Darstellung der Theorie. Nach einer *„metaphysischen“* Begründung seines Konzeptes der Algebra sowie der Konstruktion der Quaternionen innerhalb desselben führte er eine umfassende neue Terminologie ein, beschrieb genau die Rechenoperationen mit Quaternionen und behandelte zahlreiche Anwendungen. Trotz des Umfanges war das Buch keineswegs leicht verständlich und forderte vom Leser ein beträchtliches Maß an Ausdauer und Enthusiasmus. Im Artikel 669 des Buches demonstrierte Hamilton nochmals die Möglichkeiten seines Konzepts und definierte die Biquaternionen in der Form $q = q_1 + iq_2$, mit reellen Quaternionen q_1, q_2 und der imaginären Einheit i. Die Biquaternionen entsprachen also Quaternionen, in denen statt der reellen Zahlen komplexe Zahlen als Koeffizienten gewählt wurden. Die Biquaternionen stellten ein weiteres neues Größensystem dar, doch hat Hamilton die Eigenschaften dieser Zahlen nicht weiter verfolgt. Bei der Definition der algebraischen Operationen bemerkte er nämlich, daß das Produkt zweier Biquaternionen verschwinden konnte, obwohl beide Faktoren von Null verschieden waren, d. h. er war auf die Existenz von Nullteilern gestoßen. Dieser Fakt stellte einen zu großen Makel dar, als daß Hamilton die weitere Analyse dieses System für sinnvoll erachtete. Er prägte jedoch noch für derartige Biquaternionen den Begriff *„nullifier“* und faßte sie in der *„nullific class“* zusammen. Der Abbruch der Untersuchungen verdeutlicht zugleich, wie eng auch bei Hamilton noch die Bindungen an die Arithmetik und die dort üblichen Verknüpfungsregeln waren.

7.4.2 Arthur Cayley – Oktonionen und die erste Definition des abstrakten Gruppenbegriffs

Der mit den Quaternionen eröffnete Weg wurde konsequent beschritten und sehr rasch trugen die neuen Ideen erste Früchte. Im Dezember 1843, nur wenige Wochen nach der Entdeckung der Quaternionen teilte John Graves, mit dem Hamilton intensiv über die Probleme bei der Untersuchung der Triplets korrespondiert hatte, die Entdeckung eines neuen Größensystems mit acht Basiseinheiten mit. Er bezeichnete die Basiseinheiten mit 1, i, j, k, l, m, n, o und nannte die daraus gebildeten Größen Oktaven. Die Multiplikation der Oktaven definierte er durch folgende Gleichungen für die Basiselemente:

$$i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = m^2 = n^2 = o^2 = -1,$$
$$ijk = -1,\ m = il = -li,\ n = jl = -lj,\ o = kl = -lk.$$

Das System der Oktaven war distributiv und erfüllte auch die Normgleichung, doch die Multiplikation war weder kommutativ noch assoziativ. Die Algebra der Oktaven wich also noch stärker von den in der Arithmetik üblichen Verknüpfungsregeln ab als die Quaternionen. Hamilton versäumte es jedoch, die Entdeckung seines Briefpartners in der Irischen Akademie der Wissenschaften bekannt zu machen. So konnte Arthur Cayley, angeregt durch Hamiltons Quaternionen, die Oktaven 1845 wiederentdecken und unter der Bezeichnung Oktonionen publizieren. Obwohl Hamilton die Priorität von Graves klarstellte, wurden diese hyperkomplexen Größen als Oktonionen oder Cayley-Zahlen bekannt. Cayley hat in seinen Schriften zugleich das grundlegend Neue in der Definition der Quaternionen und Oktonionen klar hervorgehoben.

„Hence in the octuple system in question neither the commutative nor distributive law holdes, which is a still wider departure from the laws of ordinary algebra than that which is presented by Sir W. Hamilton's quaternions." [Cayley 1889, Vol. 1, S. 301] (*„Distributive law"* ist offenbar ein Schreibfehler Cayleys, er hatte zuvor die Oktonionen als nicht assoziativ nachgewiesen.)

Mit Cayley betritt hier ein Mann die Bühne der Algebra, der in den folgenden Jahrzehnten wiederholt mit wichtigen Ideen zu ganz unterschiedlichen algebraischen Fragestellungen in Erscheinung treten sollte. Cayley hatte als Sohn eines Kaufmanns seine frühe Kindheit in St. Petersburg verbracht und nach dem Schulbesuch in London ab 1840 an der Universität Cambridge studiert. Bereits 1842 schloß er dank seiner außergewöhnlichen mathematischen Begabung das Studium ab und erhielt eine Lehrerstelle am Trinity College der Universität Cambridge. Gerade 21jährig, sollte er damit der jüngste Absolvent sein, der während des gesamten 19. Jahrhunderts an der Universität eine Lehrerstelle erhielt. Da sich ihm jedoch in den nächsten Jahren keine Aufstiegschance bot, absolvierte er 1845–49 ein Jurastudium und arbeitete dann 14 Jahre am Gericht. Während dieser Zeit war Cayley weiterhin mathematisch sehr aktiv, publizierte nahezu 300 Arbeiten und lernte mit dem ebenfalls am Gericht tätigen James Joseph Sylvester einen Mathematiker kennen, der in der gleichen Lage war wie er selbst. Zwischen beiden Gelehrten entwickelte sich ein enger persönlicher Kontakt und eine fruchtbare wissenschaftliche

Zusammenarbeit. 1863 erhielt Cayley dann die neu geschaffene Professur für reine Mathematik in Cambridge. Neben den algebraischen Überlegungen bildeten Untersuchungen zur Geometrie einen Schwerpunkt der Cayleyschen Interessen. Durch die Verbindung dieser beiden Forschungsgebiete wurde er zu einem bedeutenden Vertreter der algebraischen Geometrie, in der mehrere Begriffe mit seinem Namen verknüpft sind. Neben den Untersuchungen zu Kurven und Flächen mit dem Cayleyschen Schnittpunktsatz und der Behandlung von Singularitäten seien hier nur seine Idee einer n-dimensionalen Geometrie und die nach ihm benannte projektive Maßbestimmung genannt. Letztere erlaubte eine Einordnung der metrischen Geometrie in die projektive. Weitere wichtige Arbeiten Cayleys waren der Analysis, insbesondere elliptischen Funktionen und Differentialgleichungen, der Mechanik und der Astronomie gewidmet. Doch zurück zu den Oktonionen.

Ausgehend von den Oktonionen suchte Cayley dann nach weiteren Verallgemeinerungen und knüpfte Verbindungen zu anderen Gebieten der Mathematik. So hob er hervor, daß die Oktonionen die Normgleichung erfüllen, und verknüpfte dies mit dem zahlentheoretischen Problem festzustellen, für welche natürliche Zahlen n eine Identität der Form

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) = (z_1^2 + z_2^2 + ... + z_n^2)$$

besteht, wobei x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n reelle Zahlen und die z_1, ..., z_n lineare Funktionen der x_i und y_i sind. Die Oktonionen verdeutlichten auch die einschränkende Wirkung der Normgleichung, wollte man diese Verknüpfungsregel aufrecht erhalten, mußten andere wichtige Eigenschaften, hier die Assoziativität, aufgegeben werden. Die Frage nach den möglichen Algebren, die die Normgleichung erfüllen, eröffnete eine neue Forschungsrichtung für das Studium hyperkomplexer Systeme, sie mündete später in die Theorie der Kompositionsalgebren ein. Sowohl Graves als auch Cayley haben sich mit dieser Frage beschäftigt. Graves versuchte eine Algebra mit 16 Einheiten zu konstruieren, die der Normgleichung genügen sollte, und Cayley suchte ein Zahlensystem, das die obige Relation für 2^n Quadrate erfüllte. Beide blieben erfolglos. Sie mußten es sein, denn wie Adolf Hurwitz 1898 bewies, existiert die obige Relation für die Quadrate nur für $n = 1, 2, 4$ und 8. Cayley formulierte in seinen diesbezüglichen Forschungen 1852 zwei Bedingungen, die für das Erfülltsein der Relation hinreichend sind. Später, 1881, ermittelte er alle Oktonionensysteme, die die Normgleichung erfüllen. An Cayleys Studien knüpfte dann wieder Thomas Kirkman an und zeigte, daß für 15 imaginäre Einheiten nicht beide von Cayley aufgestellten Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden können. Außerdem stellte er mit den Pluquaternionen ein weiteres nicht assoziatives hyperkomplexes System auf, das jedoch nichts grundsätzlich Neues bot.

Cayley hat mit seinen Studien jedoch nicht nur die Theorie der hyperkomplexen Systeme vorangebracht, sondern auch andere Bereiche der Algebra sehr bereichert. Er übertrug als erster die Ideen der englischen algebraischen Schule auf Systeme mit nur einer Verknüpfung. Dies brachte zwar hinsichtlich



Abb. 7.4.3. King's College in Cambridge
[Foto Alten]

der Abstraktionen keine neuen Akzente, aber er stellte erstmals die Beziehung zu anderen algebraischen Forschungen her und lotete die allgemeinen Vorstellungen dahingehend weiter aus, indem er deren Anwendbarkeit auf Systeme mit einer Verknüpfung verdeutlichte. Die Bekanntschaft mit den Ideen der englischen algebraischen Schule erfolgte vorrangig durch Cayleys enge Kontakte zu Boole. Nachdem Cayley Cauchys Theorie der Permutationsgruppen studiert hatte, entwickelte er 1854 in der Arbeit *„On the Theory of Groups, as Depending on the Symbolic Equation* $\theta^n = 1$“ eine abstrakte Auffassung des Gruppenbegriffs, wobei er sich direkt auf Galois und die Gleichungstheorie bezog. Er hatte erkannt, daß der Gruppenbegriff, der bisher nur als Permutationsgruppe vorlag, entsprechend der abstrakten Vorstellungen verallgemeinert werden kann. Ganz im Sinne der Operatorenrechnung und der Umsetzung dieser Vorstellungen bei Gregory und dem jungen Boole betrachtete Cayley eine Menge von Operationen auf einem nicht näher bestimmten Größensystem, wobei er als konkretes Beispiel auf die Theorie der Permutationen verwies. Für diese Operationen definierte er die Gleichheit, die Summe und Differenz zweier Operationen sowie die zusammengesetzte Operation, d. h. die Hintereinanderausführung, und wies für diese Verknüpfungen die üblichen Regeln nach. Für die zusammengesetzte Operation, d. h. die Multiplikation, stellte er die Abhängigkeit von der Reihenfolge der Operationen, also die Nichtkommutativität, fest und zeigte die Assoziativität. Außerdem erklärte er die Operation 1 als Identität, während er für Gleichungen der Art $\theta \pm \Phi = 0$ keine besondere Erläuterung als nötig erachtete. Nach diesen allgemeinen einführenden Überlegungen über die Verknüpfung abstrakter Symbole ging Cayley zur Definition der Gruppe über:

„A set of symbols $1, \alpha, \beta, \ldots$ *all of them different, and such that the product of any two of them (no matter in what order), or the product of any one of them into itself, belongs to the set, is said to be a group. It follows that if the entire group is multiplied by any one of the symbols, either as further or nearer factor, the effect is simply to reproduce the group, or what is the same thing, that if the symbols of the group are multiplied together so as to form a table, thus:*

Nearer factors \ *Further factors*	1	α	β	...
1	1	α	β	...
α	α	α^2	$\beta\alpha$	
β	β	$\alpha\beta$	β^2	
	...			

that as well each line as each column of the square will contain all the symbols $1, \alpha, \beta, \ldots$ *. It also follows that the product of any number of the symbols, with or without repetitions, and in any order whatever, is a symbol of the group.“* [Cayley 1889, Vol. 2, S. 124] (*„Further“* bzw. *„nearer factor“* bezeichnet die Multiplikation von links bzw. von rechts.)

Die nachfolgende Diskussion von Spezialfällen der symbolischen Gleichung $\theta^n = 1$ belegte, daß Cayley die Gruppeneigenschaft als gemeinsames strukturelles Element in sehr verschiedenen Bildungen und Kalkülen erkannt hatte. Für $n = 4$ leitete er zwei unterschiedliche Typen von Gruppen ab und nannte für die von der Gruppe der vierten Einheitswurzeln abweichende Struktur Beispiele aus der Theorie der elliptischen Funktionen, der Theorie der quadratischen Formen und der Matrizenrechnung. Für $n = 6$ bildete die Permutationsgruppe für drei Elemente ein Beispiel für einen Typ der erhaltenen Gruppenstruktur. Schließlich hob er hervor, daß auch Systeme von hyperkomplexen Zahlen wie die Quaternionen hinsichtlich der Multiplikation die Gruppendefinition erfüllen.

Trotz der verschiedenen Beispiele war Cayleys Definition des abstrakten Gruppenbegriffs historisch verfrüht. Es fehlte sowohl die Anerkennung für derartige formale Untersuchungen, als auch das nötige konkrete Material in den einzelnen Teilgebieten der Mathematik, das durch seine Reichhaltigkeit einen solchen Abstraktionsschritt nahegelegt hätte. Die Gruppenstruktur wurde zu diesem Zeitpunkt nur als Permutationsgruppe analysiert, so daß keine Notwendigkeit zu einer allgemeineren vereinheitlichenden Fassung des Begriffs vorlag. Der Cayleysche Gruppenbegriff hatte deshalb zunächst keinen Einfluß auf die weitere Entwicklung der Algebra. Umso fruchtbarer war dann das erneute Aufgreifen dieser Problematik durch Cayley am Ende der 70er Jahre, als sich die Bedeutung des Gruppenbegriffs in mehreren Gebieten der Mathematik deutlich abzeichnete.

7.5 Zahlentheoretische Einflüsse auf die Entwicklung der Algebra

Schon mehrfach ist die anregende Wirkung der Zahlentheorie in den vorangegangenen Kapiteln hervorgetreten und deutlich geworden, daß wichtige Fortschritte in der Algebra in dem Bemühen um die Lösung zahlentheoretischer Probleme entstanden. Man denke nur an die Lösung Diophantischer Gleichungen, die Darstellung von Zahlen durch Formen oder die Teilbarkeitslehre. Im folgenden sollen weitere interessante Beispiele des Einflusses der Zahlentheorie auf die Entwicklung der Algebra vorgestellt werden.

7.5.1 Gaußsche ganze Zahlen und Reziprozitätsgesetze

Im vorigen Kapitel haben wir u. a. die reiche algebraische Gedankenwelt der Gaußschen *„Disquisitiones arithmeticae“* kennengelernt. Ein Thema war dabei die Teilbarkeitslehre bis hin zum quadratischen Reziprozitätsgesetz. Bereits in den frühen Arbeiten befand sich eine Reihe von Ideen, deren weiterer Ausbau zur Theorie der algebraischen Zahlen geführt hätte. Gauß hat dies in der für ihn typischen Art weiter verfolgt, ohne es publik zu machen.

Erst als er seine Studien zur Verallgemeinerung der Teilbarkeit auf höhere Kongruenzen publizierte, eröffnete er zugleich den Zugang zur algebraischen Zahlentheorie und zu den ganzen algebraischen Zahlen. Hatte früher die Kongruenz $x^2 \equiv q \pmod{p}$ im Mittelpunkt des Interesses gestanden, so waren es jetzt die Relationen $x^4 \equiv q \pmod{p}$ und $x^3 \equiv q \pmod{p}$, wobei p eine ungerade Primzahl und q eine zu p teilerfremde Zahl ist. Für beide Kongruenzen suchte Gauß nach Regeln, die dem quadratischen Reziprozitätsgesetz analog waren und war in beiden Fällen erfolgreich. Das kubische Reziprozitätsgesetz fand man jedoch erst in seinem Nachlaß. Zum biquadratischen Reziprozitätsgesetz veröffentlichte er 1828 und 1832 zwei umfassende Studien. Die Basis bildeten die Untersuchungen zum quadratischen Reziprozitätsgesetz, und bei der Ankündigung eines weiteren Beweises für dieses Theorem gab er 1817 einen der seltenen Einblicke in den schwierigen Schaffensprozeß:

„Seit dem Jahre 1805 hatte er (der Verfasser) nemlich angefangen, sich mit den Theorien der cubischen und biquadratischen Reste zu beschäftigen, welche noch weit reichhaltiger und interessanter sind, als die Theorie der quadratischen Reste. Es zeigten sich bei jenen Untersuchungen dieselben Erscheinungen wie bei der letztern, nur gleichsam mit vergrössertem Massstabe. Durch Induction, ..., fanden sich sogleich eine Anzahl höchst einfacher Theoreme, die jene Theorien ganz erschöpften, mit den für die quadratischen Reste geltenden Lehrsätzen eine überraschende Aehnlichkeit haben, und namentlich auch zu dem Fundamentaltheorem das Gegenstück darbieten. Allein die Schwierigkeiten, für jene Lehrsätze ganz befriedigende Beweise zu finden, zeigten sich hier noch viel grösser, und erst nach vielen, eine ziemliche Reihe von Jahren hindurch fortgesetzten Versuchen ist es dem Verfasser endlich gelungen, sein Ziel zu erreichen. Die grosse Analogie der Lehrsätze selbst, bei den quadratischen und bei den höhern Resten, liess vermuthen, daß es auch analoge Beweise für jene und diese geben müsse; allein die zuerst für die quadratischen Reste gefundenen Beweisarten vertrugen gar keine Anwendung auf die höheren Reste, und gerade dieser Umstand war der Beweggrund, für jene immer noch andere neue Beweise aufzusuchen.“ [Gauß 1870, Bd. 2, S. 161]

Gauß bemerkte an anderer Stelle, daß für die allgemeine Theorie eine Erweiterung des Feldes der höheren Arithmetik nötig sei. Er begann diese Erweiterung mit der Betrachtung der sog. ganzen Gaußschen Zahlen $a + bi$; a, b bezeichnen ganze Zahlen, i die imaginäre Einheit, d. h. eine Wurzel der Gleichung $x^2+1 = 0$. Für diese Zahlen definierte er die Addition, Subtraktion und Multiplikation, zeigte, daß diese Operationen nicht aus dem Bereich dieser Zahlen herausführten und baute eine zur gewöhnlichen Arithmetik analoge Theorie auf. Er bestimmte die vier Einheiten für den neuen Zahlbereich, wobei eine Einheit eine Zahl z des Zahlbereiches ist, für die eine Zahl z' in dem Bereich existiert mit $zz' = 1$, d. h. für die es ein Inverses in dem Bereich gibt. Für Zahlen, die sich nur um Einheiten als Faktor unterschieden, führte er den Begriff der assoziierten Zahlen ein und ordnete jeder Zahl $z = a+bi$ eine Norm

$N(z) = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ zu. Die Norm erfüllte die Normgleichung, d. h. $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$. Die Einheiten waren dann genau die Zahlen mit der Norm 1. Schließlich nannte Gauß eine Zahl zusammengesetzt, wenn sie als Produkt von zwei nicht trivialen (d. h. von den Einheiten verschiedenen) Faktoren ausgedrückt werden konnte.

Der entgegengesetzte Fall charakterisierte genau die Primzahlen. Die Frage war nun, ob man mit den Primzahlen in dem neuen Bereich die gleichen Eigenschaften verbinden konnte, wie in der Arithmetik der ganzrationalen Zahlen, ob insbesondere der zentrale Satz von der eindeutigen Primzahlzerlegung weiterhin gültig war. Es zeigte sich sehr schnell, daß eine Reihe von Primzahlen jetzt zerlegbar waren, etwa $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$, während andere, etwa 3, die Primzahleigenschaft behielten. Gauß charakterisierte dann alle Primzahlen im Bereich der ganzen komplexen Zahlen und bewies, daß auch für diese Zahlen der Satz von der eindeutigen Zerlegung in Primzahlen gilt. Nach der schon früher erwähnten geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen als Punkte in der Ebene (vgl. Abschn. 6.2), der arithmetischen Operationen mit ihnen und der ganzen komplexen Zahlen als Gitterpunkte entwickelte Gauß die zu den gewöhnlichen ganzen Zahlen analoge Arithmetik weiter. Mit diesem Vorgehen verdeutlichte er, daß diese neuen Zahlen tatsächlich als Objekte der Arithmetik angesehen werden können, d. h. sich wie *„gewöhnliche“* ganze Zahlen verhalten, und sich auf diesem Wege neue Resultate in der Arithmetik der ganzen Zahlen erzielen lassen.

Am Ende der Darlegungen zur Theorie der ganzen komplexen Zahlen formulierte Gauß das biquadratische Reziprozitätsgesetz. Den angekündigten dritten Teil der Abhandlung mit dem Beweis dieses Satzes hat er nie fertiggestellt. In seinem Nachlaß fand sich lediglich eine Beweisskizze dazu. Gauß hatte sich in der Arbeit zu den biquadratischen Resten auch zu anderen Reziprozitätsgesetzen geäußert. Er vermerkte, daß für das kubische Reziprozitätsgesetz ganze Zahlen der Form $a + b\rho$ (mit a, b ganze Zahlen und ρ eine nichttriviale dritte Einheitswurzel) zu analysieren sind, und in ähnlicher Weise Reste höherer Ordnung mit Hilfe anderer imaginärer Größen studiert werden können. Dies gehört, wie er mehrfach bei verschiedenen Gelegenheiten betonte, zu den schwierigsten Gegenständen der höheren Arithmetik. Es liegt nahe, in dieser höheren Arithmetik eine Theorie der algebraischen Zahlen zu sehen, doch Gauß hat keine konkreten Hinweise gegeben, wie weit seine Überlegungen für eine solche allgemeine Theorie gediehen waren. Die von ihm vorgenommenen Untersuchungen blieben stets an konkreten Beispielen orientiert. Er lotete diese Fälle mit der ihm eigenen Gründlichkeit sehr genau aus und wies auch auf mögliche Verallgemeinerungen hin. Diese Abstraktionen vorzunehmen und weiterzuverfolgen, dürfte ihm jedoch angesichts der großen Probleme bei der Bewältigung der Beweise für das kubische bzw. biquadratische Reziprozitätsgesetz als äußerst problematisch erschienen sein.

Die Wirkung der Gaußschen Arbeiten war beträchtlich. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet und Carl Gustav Jacob Jacobi waren bereits von der Ankündigung des ersten Teils der Gaußschen Arbeit förmlich fasziniert und begannen die Gaußschen Ideen aufzugreifen und fortzusetzen. Für Dirichlet fiel dies fast zusammen mit dem Beginn seiner erfolgreichen Tätigkeit an der Berliner Universität im Jahre 1829. Zuvor hatte sich der in Düren bei Aachen geborene Sohn eines Postkommissars von 1822–26 bei den bedeutenden französischen Mathematikern in Paris ausgezeichnete mathematische Kenntnisse angeeignet. In seinen Forschungen und Vorlesungen setzte er die Ideen von Gauß fort und erschloß seinen Zeitgenossen zugleich die Ergebnisse der französischen Mathematik, speziell zur Analysis und mathematischen Physik, wobei er zu deren Fortentwicklung wesentlich beitrug.

Mit der Aufnahme von Problemen der aktuellen Forschung in die Vorlesungen gehörte Dirichlet zu jenen Gelehrten, die eine neue Etappe in der mathematischen Lehre in Deutschland einleiteten. Man vergleiche die Würdigung von Dirichlets Schaffen einschließlich seiner Vorlesungstätigkeit durch Minkowski [Minkowski 1911, Bd. 2, S. 447-461]. Die Zahlentheorie war stets eines der bevorzugten Arbeitsgebiete von Dirichlet.

Im September 1832 stellte er erste Ergebnisse seiner Forschungen vor. Auch er nannte als Ziel seiner Arbeit den Nachweis eines Reziprozitätsgesetzes. Zunächst hob er das Aufdecken der Analogie zwischen der Arithmetik der ganzen Zahlen und der der ganzen komplexen Zahlen als das zentrale Ergebnis der Gaußschen Arbeiten hervor und führte analoge Studien durch. Dabei schlug er in einer Fußnote eine weitere Verallgemeinerung der Gaußschen Ideen vor:

„On peut, au lieu des expressions de la form $t + u\sqrt{-1}$ *, considérer celles de la forme plus générale* $t + u\sqrt{a}$ *, a étant sans diviseur carré.“* [Dirichlet 1832, S. 379]

Diese Zahlen lassen sich vom gleichen Standpunkt analysieren wie die ganzen komplexen Zahlen und man darf Resultate erwarten, die den für die ganzen komplexen Zahlen abgeleiteten Sätzen analog sind. Doch Dirichlet hat diese Verallgemeinerung nicht weiter verfolgt, so daß es unklar blieb, ob er hiermit wirklich ausdrücken wollte, daß die Arithmetik der ganzen Zahlen in allen quadratischen Zahlkörpern ähnlich zu der der ganzen komplexen Zahlen sei, und damit weitgehend mit der Arithmetik der gewöhnlichen ganzen Zahlen übereinstimmte. In dieser wie in späteren Arbeiten beschränkte er sich auf die ganzen komplexen Zahlen und bemühte sich um eine umfassende Übertragung der arithmetischen Resultate. So bewies er als Hauptergebnis dieser Arbeit das quadratische Reziprozitätsgesetz für die ganzen komplexen Zahlen sowie später die Existenz von unendlich vielen komplexen Primzahlen in einer arithmetischen Folge $\{an + b\}$ mit teilerfremden komplexen Zahlen a und b, formulierte den Euklidischen Algorithmus und leitete unter Anwendung des-

selben einige Teilbarkeitsaussagen ab, die dann gestatteten, die Eindeutigkeit der Zerlegung einer ganzen komplexen Zahl in Primfaktoren nachzuweisen.

Dirichlet hat mit diesen und weiteren Arbeiten, in denen er systematisch auf Methoden der Analysis zurückgriff, der Entwicklung der Zahlentheorie wichtige Impulse verliehen, bezüglich der Algebra hat er die vorhandenen Ideen weiter vertieft. Zwar traten gelegentlich Größen auf, die er im Sinne des obigen Zitats als allgemeine algebraische Zahl hätte betrachten können, doch hob er sie in keiner Weise hervor. Vor diesem Hintergrund kann man zwar in der 1846 publizierten Arbeit *„Zur Theorie der complexen Einheiten“* eine *„Inangriffnahme der Theorie der höheren algebraischen Zahlen“* und eine erstmalige Ausdehnung der *„Betrachtungen über die quadratischen Irrationalitäten und die Kreisteilungszahlen“* hinaus sehen, wie Felix Klein es tat [Klein 1926, Bd. 1, S. 97], aber man darf dann den Begriffen nicht jene abstrakte allgemeine Bedeutung zuweisen, die sie durch Richard Dedekind erhielten. Dirichlet ging in dieser Arbeit von einer irreduziblen Gleichung $F(\omega) = \omega^n + p_1\omega^{n-1} + ... + p_n = 0$ mit ganzen Zahlen p_i aus. Mit den Wurzeln α, β, ..., ρ dieser Gleichung bildete er Ausdrücke der Form $\phi(\alpha) = t + u\alpha + ... + z\alpha^{n-1}$, $\phi(\beta) = t + u\beta + ... + z\beta^{n-1}$, ... mit n unbestimmten ganzen Zahlen t, u, ... z und fragte dann nach den Systemen, für die $\phi(\alpha)\phi(\beta)...\phi(\rho) = 1$ gilt, d. h. er wollte in dem durch die Gleichung $F(\omega) = 0$ definierten Körper die Einheiten bestimmen. Die Wurzeln β, ..., ρ bzw. die Größen $\phi(\beta)$, ..., $\phi(\rho)$ werden als die Konjugierten von α bzw. $\phi(\alpha)$ bezeichnet, so daß das Produkt $\phi(\alpha)\phi(\beta)...\phi(\rho)$ die Norm von $\phi(\alpha)$ darstellt. Als Ergebnis formulierte er den sog. Dirichletschen Einheitensatz, mit dem er die Anzahl der sog. Grundeinheiten bestimmte und die Struktur der Einheitengruppe vollständig beschrieb.

In der Zwischenzeit hatten Jacobi und ab 1843 Eisenstein weitere wichtige Resultate in Verbindung mit Studien zum kubischen Reziprozitätsgesetz erzielt. Jacobi hatte schon 1827 dieses Reziprozitätsgesetz im Bezug auf zwei ganzrationale Primzahlen angegeben, und in seiner Vorlesung zur Zahlentheorie von 1836/37 bewies er ausgehend von der Theorie der Kreisteilungsgleichung das kubische und das biquadratische Reziprozitätsgesetz – die Vorlesungen wurden jedoch nicht veröffentlicht. Der erste publizierte Beweis des kubischen Reziprozitätsgesetzes stammte von Eisenstein aus dem Jahre 1844. Jacobi wie auch Eisenstein studierten dazu die komplexen Zahlen der Gestalt $a + b\rho$ bzw. $a + b\rho^2$ mit einer (primitiven) dritten Einheitswurzel ρ und konnten den mehrfach von Gauß und Dirichlet geäußerten Hinweis auf die Analogie zwischen der Arithmetik dieser Zahlen und der Arithmetik der ganzrationalen Zahlen vollauf bestätigen.

Übrigens betrachtete Eisenstein das Studium derartiger ganzer komplexer Zahlen in seiner Publikation bereits als Allgemeingut der Mathematiker, denn obwohl die Theorie der Zahlen $a + b\rho$ (ρ primitive dritte Einheitswurzel) noch nirgends systematisch dargestellt worden war, setzte er die *„Elementarsätze der Theorie“* als bekannt voraus. Sowohl Eisenstein als auch Jacobi

wiesen auch auf den Zusammenhang mit der Teilungs- bzw. Multiplikationstheorie elliptischer Funktionen hin. Jacobi vertrat sogar die Meinung, daß Gauß durch die Studien zur Multiplikation elliptischer Funktionen zum biquadratischen Reziprozitätsgesetz gekommen sei und man auf diese Weise verschiedene Gattungen der komplexen Zahlen erhalte.

Dies verdeutlicht den engen Zusammenhang zwischen den für Nichtmathematiker getrennt erscheinenden Teilgebieten der Mathematik, und die Komplexität wurde von den führenden Mathematikern in ihrem Schaffen auch reflektiert und genau analysiert. Jacobi war dabei wohl einer der besten Kenner beider Theorien. Die Theorie der elliptischen Funktionen hatte er ab dem Ende der 20er Jahre gemeinsam mit Abel in einem legendären Wettstreit geschaffen, der nur durch den frühen Tod des Norwegers abrupt beendet wurde. Ähnlich wie Dirichlet hat auch Jacobi wesentlich an der Umgestaltung des Lehrbetriebs in Deutschland mitgewirkt. Nach philologischen und philosophischen Studien an der Berliner Universität bei gleichzeitiger autodidaktischer Aneignung mathematischer Kenntnisse lehrte er ab 1826 an der Universität Königsberg. Dort gründete er 1834 zusammen mit dem Mathematiker und Physiker Franz Ernst Neumann sowie seinem Schüler Ludwig Adolph Sohncke ein mathematisch-physikalisches Seminar, das beispielgebend für ganz Deutschland wurde. 1844 ließ sich Jacobi aus gesundheitlichen Gründen nach Berlin versetzen, wo er bis zu seinem Tod 1851 ohne feste Anstellung an der Universität als Akademiemitglied wirkte.

In der Person Eisensteins, Jacobis Mitstreiter und Widerpart beim Beweis des kubischen Reziprozitätsgesetzes und beim Studium elliptischer Funktionen, ergaben sich viele Parallelen zum Schicksal Abels. Auch Eisenstein wuchs in bescheidenen finanziellen Verhältnissen auf. Er zeigte schon frühzeitig mathematische Interessen und fand als Gymnasiast in dem Meteorologen Heinrich Wilhelm Dove und dem Mathematiker Karl Schellbach zwei Lehrer, die sein Talent erkannten und förderten. In dieser Zeit hörte er außerdem Vorlesungen an der Berliner Universität, u. a. bei Dirichlet, und studierte die Werke von Euler, Lagrange und vor allem Gauß. Bereits während seines ersten Semesters an der Universität Berlin reichte Eisenstein der dortigen Akademie eine Arbeit über binäre kubische Formen ein, was fortan die Unterstützung durch August Leopold Crelle und Alexander v. Humboldt zur Folge hatte. Durch verschiedene Zuwendungen hat Humboldt immer wieder die finanzielle Not Eisensteins gemildert und eine Fortsetzung der Studien ermöglicht. Nach der Veröffentlichung von 25 Arbeiten in Crelles Journal erhielt Eisenstein 1845 die Promotion ehrenhalber und habilitierte sich 1847 in Berlin. Wie auch im Falle Jacobis bedurfte es größter Anstrengungen von A. v. Humboldt, um Eisenstein nach den revolutionären Ereignissen 1848/49 vor größeren, vor allem finanziellen Repressalien zu schützen. Eisenstein war, soweit es seine schwache Gesundheit zuließ, unermüdlich mathematisch aktiv und starb 1852 im Alter von 29 Jahren.

7.5.2 Kummers Schöpfung der idealen Zahlen

Nach der erfolgreichen Beschäftigung mit dem kubischen und dem biquadratischen Reziprozitätsgesetz wandten sich Jacobi und Eisenstein einigen höheren Kongruenzen zu und untersuchten die Körper der 5., 8. und 12. Einheitswurzeln. Doch waren die diesbezüglichen Ergebnisse weit weniger vollständig. Eine Arbeit Jacobis zu diesem Themenkreis, in der er die Zerlegung der Primzahlen p des Typs $p = \lambda m + 1$ in Primfaktoren im Ring der λ-ten Einheitswurzel für $\lambda = 5, 8$ und 12 nachwies, regte jedoch Ernst Eduard Kummer zu Studien auf diesem Gebiet an und wurde so der Ausgangspunkt für wichtige neue Ideen. Kummer gehörte mit Leopold Kronecker und Karl Weierstraß zu jenem Dreigestirn bedeutender Mathematiker, die das Werk von Jacobi und Dirichlet fortsetzten und Berlin zu einem führenden Zentrum der sog. reinen Mathematik machten. Altersmäßig der älteren Generation zuzurechnen, kam Kummer erst 1855 als Nachfolger Dirichlets nach Berlin, wo er bis zur Emeritierung 1883 lehrte. Zuvor hatte der in Sorau (Zary) geborene Sohn eines Arztes ab 1828 in Halle zunächst Theologie und Philosophie, dann aber Mathematik studiert und nach der Promotion 1831 in seiner Geburtsstadt sowie ab 1832 in Liegnitz (Legnica) als Gymnasiallehrer gearbeitet. Zu seinen Schülern gehörten u. a. Kronecker und Ferdinand Joachimsthal, die er beide für die Mathematik begeistern konnte. In dieser Zeit forschte Kummer vor allem zur Funktionentheorie und trat mit Jacobi und Dirichlet in wissenschaftlichen Gedankenaustausch. Den beiden letzteren gelang es 1842 mit maßgeblicher Unterstützung durch A. v. Humboldt, für Kummer durch eine Berufung als Mathematikprofessor an die Universität Breslau neue Perspektiven zu eröffnen. In Breslau blieb Kummer bis 1855. Dort entstanden seine bedeutenden algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten, und dort setzte er auch 1845 trotz beträchtlicher Widerstände die von Jacobi und A. v. Humboldt angeregte Promotion ehrenhalber von Eisenstein durch. An der Berliner Universität, wo er sich in der Forschung stärker geometrischen Themen zuwandte, hatte er großen Anteil an der Gründung des Mathematischen Seminars, das 1861 die Arbeit aufnahm. Von seinen Schülern und Doktoranden wurden mehrere später bedeutende Mathematiker. In der Akademie und an der Universität begleitete Kummer mehrfach wichtige leitende Funktionen. Wenn auch die Schwerpunkte seiner Forschungen wechselten, so bildeten die Arbeiten von Gauß und Dirichlet meist den Ausgangspunkt seiner Überlegungen.

1844 glaubte Kummer zunächst, die von Jacobi angegebene Zerlegung für beliebige Kreisteilungsringe bewiesen zu haben, also den Satz: Für eine ungerade Primzahl λ zerfällt im Ring der λ-ten Einheitswurzeln $Z[\zeta_\lambda]$ jede Primzahl der Form $p = \lambda m + 1$ in $\lambda - 1$ Faktoren. Der Ring $Z[\zeta_\lambda]$ besteht dabei aus allen Polynomen in ζ_λ mit ganzzahligen Koeffizienten, die in der üblichen Weise addiert und multipliziert werden, ζ_λ ist eine primitive λ-te Einheitswurzel. Vermutlich entdeckte Jacobi als erster einen Fehler in der von Kummer zur Publikation eingereichten Arbeit. Dieser zog dar-

aufhin den Artikel zurück und konnte noch im gleichen Jahr auf der Basis seiner umfangreichen Rechnungen zu den höheren Reziprozitätsgesetzen und den Kreisteilungskörpern erste Beispiele von mehrdeutigen Primelementzerlegungen im Ring der 23-sten Einheitswurzeln angeben. Da die Rechnungen in diesem Fall recht umständlich sind, soll das Wesentliche der Kummerschen Ideen an einem einfacheren Beispiel erläutert werden.

Im Ring $Z\left[\sqrt{-5}\right]$, also in der Menge der Zahlen $a + b\sqrt{-5}$ mit ganzen Zahlen a und b, betrachtet man die Zahl 21. Für diese erhält man die beiden Zerlegungen

$$21 = 3 \cdot 7 = (4 + \sqrt{-5})(4 - \sqrt{-5}). \qquad (*)$$

Jedem Element $z = a + b\sqrt{-5}$ des Ringes kann eine Norm $N(z) = (a + b\sqrt{-5})(a - b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$ zugeordnet werden, und es gilt $N(zz') = N(z)N(z')$. Mit Hilfe dieser Eigenschaft zeigt man nun, daß die Faktoren der beiden Zerlegungen sich nicht weiter zerlegen lassen. Wäre beispielsweise 3 zusammengesetzt, also $3 = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})$, so müßte für die Normen gelten $9 = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$. Da aber die Zahl 3 nicht in der Form $a^2 + 5b^2$ darstellbar ist, erhält man aus dieser Gleichung nur die trivialen Zerlegungen $3 = 1 \cdot 3 = (-1) \cdot (-3) = 3 \cdot 1 = (-3) \cdot (-1)$. Die Gleichung $(*)$ liefert folglich im Ring $Z\left[\sqrt{-5}\right]$ zwei grundsätzlich verschiedene Zerlegungen der Zahl 21 in Faktoren, die selbst nicht weiter zerlegbar sind. Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, wie sie für die ganzen Gaußschen und einige andere Mengen komplexer Zahlen nachgewiesen worden war, konnte also nicht beliebig übertragen werden. Die oft zitierte Analogie zu den ganzrationalen Zahlen war nicht so umfassend wie viele Mathematiker zunächst geglaubt hatten. Das Kummersche Beispiel demonstrierte sehr klar, daß die im Bereich der ganzen Zahlen äquivalenten Aussagen:

- „Eine Primzahl kann nicht als Produkt von zwei, von der Einheit verschiedenen Faktoren geschrieben werden."
- „Wenn ein Produkt durch eine Primzahl teilbar ist, so ist mindestens einer der Faktoren durch diese Primzahl teilbar."

in den Zahlenringen $Z[\zeta]$ zwei verschiedene, nicht äquivalente Eigenschaften beschreiben können. Mit anderen Worten: die irreduziblen Elemente mußten nicht notwendigerweise Primelemente sein. Kummer hat sich nun intensiv mit der Frage beschäftigt, ob und wie man diese Schwierigkeiten beheben und auch für diese Zahlkörper eine entsprechende Arithmetik aufbauen kann. Er fand die Lösung in der Einführung der sog. *"idealen Zahlen"*, über die er seinem Schüler Kronecker erstmals im Oktober 1845 berichtete. Bei der Einführung der *„idealen Zahlen"* ließ sich Kummer von der Vorstellung leiten, daß die in den mehrdeutigen Zerlegungen auftretenden Faktoren tatsächlich keine Primelemente sind, sondern aus besagten *„idealen Primfaktoren"* zusammengesetzt sind. Die Bestimmung der *„idealen Zahlen"* ist recht aufwendig und die von Kummer entwickelten Methoden waren stets von lokaler Art, d. h. sie gestatteten es, für jede gegebene Zahl einzeln die Zusammensetzung aus *„idealen Zahlen"* zu ermitteln, aber nicht für alle gan-



Ernst Eduard Kummer



Karl Weierstraß

zen Zahlen des Körpers zusammen. Ein Vorteil bei diesen Studien war, daß Kummer von einem Körper der λ-ten Einheitswurzeln (λ eine ungerade Primzahl) ausging und er dadurch umfassend auf die Gaußsche Kreisteilungstheorie zurückgreifen konnte. Auch später hat er sich auf Kreisteilungskörper beschränkt. Die Basis für die Berechnung der *„idealen Zahlen“* bildete dann eine Zuordnung, die er zwischen der Zerlegung des Kreisteilungspolynoms $\Phi(x) = x^{\lambda-1} + x^{\lambda-2} + ... + 1$ in irreduzible Faktoren $\bmod p$ und der Zerlegung der Zahl p in ideale Primfaktoren im Ring $Z[\zeta_\lambda]$ herstellen konnte. Einfach gestaltete sich der Fall $p = m\lambda + 1$, für den Kummer ein Zerfallen des Kreisteilungspolynoms in Linearfaktoren $\bmod p$ nachwies.

Kummer publizierte die Theorie der *„idealen Zahlen“* 1847 in Crelles Journal in zwei Arbeiten [Kummer 1847a, 1847b]. Zu diesem Zeitpunkt war die Theorie der algebraischen Zahlen durch ein weiteres Ereignis stärker in das Blickfeld der Mathematiker gerückt worden. Am 1. März 1847 trug Gabriel Lamé vor der Pariser Akademie der Wissenschaften seine Abhandlung über den Beweis des großen Fermatschen Satzes vor. In der Diskussion vermutete Liouville einen Fehler in dem Beweis. Er hatte sich ebenfalls mit der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ beschäftigt und den Beweis der eindeutigen Zerlegbarkeit der ganzen Zahlen in Primelemente als notwendigen Schritt erkannt, um über die Lösbarkeit der Gleichung entscheiden zu können. Diese Zerlegbarkeit hatte Lamé aber nicht bewiesen. Da Lamé seinen *„Beweis“* bereits publiziert hatte, löste Liouville mit seiner berechtigten Kritik eine intensive Beschäftigung mit den algebraischen Zahlen aus. Noch im gleichen Jahr zeigte Cauchy, daß der Euklidische Algorithmus nicht allgemein für die algebraischen Zahlen galt. Er stellte damit einen Fehler von Pierre Wantzel richtig, der am Ende einer Arbeit zum Euklidischen Algorithmus im Ring der dritten Einheitswurzeln noch 1847 behauptet hatte, daß die Überlegungen auf beliebige

Ringe von Einheitswurzeln übertragbar seien. Cauchys Ergebnis entsprach im Prinzip jener Einsicht, die Kummer drei Jahre zuvor mit dem Beispiel der Mehrdeutigkeit der Primelementzerlegung im Ring der 23sten Einheitswurzeln erreicht hatte. Auch Kummer befaßte sich in diesem Jahr 1847 mit dem großen Fermatschen Satz und konnte ihn unter Anwendung seiner Theorie der *„idealen Zahlen“* innerhalb kurzer Zeit für eine ganze Klasse von ungeraden Primzahlen beweisen.

In den folgenden Jahren hat Kummer seine Theorie weiter ausgebaut und schloß unter anderem 1857 eine Lücke, die Dedekind, Cauchy und Liouville im Jahr zuvor entdeckt hatten. Es sollte aber noch über ein Jahrzehnt dauern, ehe die Theorie eine grundlegende Verallgemeinerung erfuhr und ihre abschließende Form erhielt.

7.6 Die Fortschritte in der linearen Algebra

Elemente der linearen Algebra lassen sich bis in die Anfänge der Mathematik zurück verfolgen. Man denke nur an die verschiedenen Verfahren zur Behandlung linearer Probleme in der mesopotamischen bzw. griechischen Mathematik, insbesondere an die Lösung einfacher linearer Gleichungssysteme, z. B. das Verfahren des Thymaridas von Paros, oder an die von chinesischen Mathematikern hervorgebrachte Fang-cheng-Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit den zu Matrizen ähnlichen Bildungen (s. 3.1.4), die tiefe Einsichten in die Struktur linearer Systeme offenbart. Doch bei all diesen Errungenschaften handelte es sich stets um die Entwicklung und Verbesserungen von einzelnen Methoden und Verfahren zur Lösung linearer Probleme, in keiner Phase der Entwicklung wurde das Bestreben spürbar, daraus eine umfassendere allgemeine Theorie zu formen. Auch die Einführung und weitere Ausformung einer geeigneten algebraischen Symbolik, wie sie vor allem von Vieta und Descartes vorangebracht wurde, änderte daran zunächst wenig.

Ein erster spürbarer Impuls entstand um die Mitte des 18. Jahrhunderts, als durch verschiedene geometrische Fragen lineare Gleichungssysteme stärker ins Blickfeld der Mathematiker rückten und zu weiteren Lösungsverfahren und neuen Elementen führten, wie etwa die Cramersche Regel bzw. Determinanten (vgl. Abschn. 6.6.1). Beim Lösen der linearen Gleichungssysteme stieß man auch auf jene Effekte, deren genaue Erfassung für den Aufbau einer Lösungstheorie große Bedeutung erlangen sollte. Bereits Euler hatte 1750 darauf hingewiesen, daß bei n Gleichungen mit n Unbekannten keine der Gleichungen aus den anderen hervorgehen dürfe, da sonst nicht alle Unbekannten eindeutig bestimmt werden könnten. Dies war eine der Wurzeln für die Begriffe der linearen Unabhängigkeit und des Ranges einer Matrix. Weitere Impulse lieferte der Gebrauch linearer Substitutionen bei geometrischen und zahlentheoretischen Fragen (vgl. Abschn. 7.5.1). So führte die Zurückführung symmetrischer Bilinearformen auf gewisse Normalformen über die Diagonalisierung der zugehörigen Matrix zur

Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren. Während Euler, der 1748 erstmals die Frage nach der Transformation einer ternären quadratischen Form $Q(x, y, z) = ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2$ auf die Normalform $Q'(x', y', z') = a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2$ als allgemeines Problem behandelte, bei der Berechnung der zugehörigen orthogonalen Transformation noch keinerlei Beziehungen zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren herstellte, ließ Lagrange, als er 40 Jahre später das gleiche Problem in seiner *„Méchanique analytique“* darlegte, diesen Aspekt in der Anlage seiner Rechnung deutlich werden, ohne ihn jedoch begrifflich hervorzuheben. Der Übergang von Q zu Q' wird als Hauptachsentransformation bezeichnet, da bei einer geometrischen Interpretation die Hauptachsen der geometrischen Figur $Q'(x', y', z') = k$, die bei der Transformation aus dem geometrischen Gebilde $Q(x, y, z) = k$ hervorgeht, genau den Koordinatenachsen x', y' und z' des neuen Koordinatensystems entsprechen. $Q(x, y, z) = k$ ist das zur Form Q gehörige geometrische Gebilde bezüglich der Ausgangskoordinaten x, y, z. Diese Äquivalenz zwischen der Transformation der Form und der des geometrischen Gebildes, d. h. des Koordinatensystems, tritt jedoch nur bei quadratischen Formen auf, im allgemeinen unterscheiden sich die Transformationsgleichungen.

Während Lagranges Vorgänger und Zeitgenossen das Problem lösten, indem sie die Koordinatentransformation in einem Gleichungssystem erfaßten und die Unbekannten unter Rückgriff auf trigonometrische Formeln bestimmten, eröffnete Lagrange eine völlig neue Sichtweise und verdeutlichte, daß es auf die Bestimmung einer geeigneten Transformation ankam, deren Koeffizienten die als Orthogonalitätsrelationen bekannten Beziehungen erfüllten. Diesbezüglich zeigte er dann, modern formuliert: Ist A die durch die Koeffizienten der quadratischen Form festgelegte Matrix, so sind durch die Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenvektoren die Koeffizienten jener gesuchten orthogonalen Transformation bestimmt, die die quadratische Form auf Hauptachsenform überführt. Die Eigenwerte treten als Koeffizienten in der transformierten Form auf. Lagranges Betrachtungen beschränkten sich zwar auf den dreidimensionalen Fall, aber wie die Problemstellung konnte auch der Beweis relativ leicht auf n Variable ausgedehnt werden. Rein formal galt dies auch für Eulers Beweis für die Existenz einer geeigneten Hauptachsentransformation. Dieser Schritt wurde dann 1829 von Cauchy vollzogen, der zugleich die Verbindung mit einem anderen wichtigen Problemkreis herstellte.

Zeitlich parallel, aber völlig unabhängig von den obigen Untersuchungen trat die Bestimmung von Eigenwerten bei der Lösung linearer Differentialgleichungssysteme auf. Diese meist aus physikalischen Überlegungen hervorgehenden Gleichungen ließen sich zunächst ohne größere Schwierigkeiten lösen. Durch den physikalischen Hintergrund, insbesondere etwa durch die Frage nach der Stabilität der Planetenbewegung im Sonnensystem, wurde klar, wie bedeutsam es war, daß die Eigenwerte des entsprechenden Koeffizientensystems reell sind. So lieferte das 1778 von Lagrange aufgestellte Differential-

gleichungssystem für die langfristigen, auch säkular genannten Änderungen der Exzentrizitäten der Planetenbahnen nur dann eine stabile Bewegung innerhalb des Planetensystems, d. h. eine Änderung der Exzentrizitäten nur innerhalb gewisser Schranken, wenn die Eigenwerte des Systems reell waren. Die Koeffizientensysteme der Gleichungen waren so umfangreich bzw. umfaßten auch Buchstaben statt konkreter Zahlenwerte, daß mit den bisherigen Methoden die Eigenwerte nicht als reell nachgewiesen werden konnten und man in einige physikalische und aus heutiger Sicht fragwürdige mathematische Argumente Zuflucht nahm. Schwierigkeiten bereitete speziell das Auftreten mehrfacher Nullstellen in der zu lösenden Polynomgleichung. 1789 gelang dann Laplace der gesuchte Nachweis für die Stabilität und damit ein für die theoretische Astronomie wie für die allgemeine Geisteshaltung jener Zeit bedeutsames Resultat. Obwohl Laplaces Beweis keineswegs fehlerfrei war, trat bei ihm erstmals die grundlegende Einsicht hervor, daß das Reell-Sein der Eigenwerte mit der Symmetrie der Koeffizienten des betrachteten Systems zusammenhing. Jahrzehnte später wurde dieser Zusammenhang von Cauchy neu entdeckt und hervorgehoben.

Angeregt durch seine Lehrtätigkeit an der École Polytechnique beschäftigte sich Cauchy mit der allgemeinen Fläche zweiter Ordnung und erkannte 1829, daß er durch Anwendung seiner Determinantentheorie Lagranges Theorem über die Hauptachsentransformation verallgemeinern konnte. Als wichtigstes Resultat bewies er dabei, daß die Eigenwerte einer symmetrischen $(n \times n)$-Matrix, Cauchy sprach von symmetrischem System, reell sind. Im gleichen Jahr stellte Jacques Charles François Sturm auch die Beziehung zu den Studien über die Säkulargleichung her, ein Fakt, auf den Cauchy nur hinwies und auf den er wohl von Sturm aufmerksam gemacht worden war. Damit war 1829 der gemeinsame algebraische Inhalt der Hauptachsentransformation quadratischer Formen und der Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen erkannt und außerdem mit der Anwendung der Determinanten ein neues Verfahren zum Studium dieser Probleme aufgezeigt worden. Übrigens stellte Cauchys Arbeit, da sie ja die Transformation von Flächen behandelte, zugleich eine der ersten Arbeiten zur n-dimensionalen Geometrie dar.

Es sei am Rande vermerkt, daß die in Umsetzung der Ideen von Descartes und Fermat entwickelte Beschreibung und Untersuchung geometrischer Objekte mit algebraischen Mitteln ein wichtiger Ausgangspunkt für die n-dimensionale Geometrie wurde. Bei der rein algebraischen Betrachtung von Formen, Gleichungen oder Determinanten gab es keinen Grund, sich auf die Fälle $n \leq 3$ zu beschränken, die angewandten algebraischen Operationen waren auch für größere n erklärt. Es lag also nahe, in den Fällen, in denen die algebraische Situation völlig analog zum Fall $n = 3$ oder $n = 2$ war, die geometrische Interpretation für diese größeren n zu übernehmen und damit die geometrischen Begriffe auf die höheren Dimensionen zu übertragen. So verfuhr Cayley 1843, als er feststellte, daß die unter Verwendung von Determinanten gegebene Beschreibung von Geraden oder Ebenen mittels homogener

Koordinaten, d. h. $\begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0$ bzw. $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0$, entsprechend für

$(n-1)$-dimensionale Objekte im n-dimensionalen Raum gilt. Es darf aber nicht verkannt werden, daß diesem formalen Übergang zum n-dimensionalen Raum mit der vorherrschenden Überzeugung von der Dreidimensionalität unseres Anschauungsraumes ein massiver Widerstand entgegenwirkte. Für eine detaillierte Darstellung der Herausbildung der n-dimensionalen Geometrie sei auf [Scriba/Schreiber 2000, Kap. 7.6] verwiesen.

Die oben erwähnten Arbeiten zur Transformation von Formen, zu deren Eigenwerten etc. hatten jedoch alle einen wesentlichen Makel: die abgeleiteten Sätze galten nur im allgemeinen, d. h. es gab eine Reihe von Einzelfällen, in denen der angegebene Beweis nicht mehr anwendbar bzw. falsch war. Entsprechend der vorherrschenden Auffassung von mathematischer Strenge sah man diese Einzelfälle als unwesentliche Ausnahmen an, die die Aussage des Satzes nicht beeinträchtigten, und war meist überzeugt, daß sich die Beweise durch einige zusätzliche Betrachtungen auf diese Sonderfälle ausdehnen ließen. Es war dann vor allem Karl Weierstraß, der nach seiner Berufung nach Berlin (1856) deutlich machte, daß gerade diese Sonderfälle umfangreiche mathematische Untersuchungen erforderten und nicht selten der Forschung neue Impulse verliehen. Seine Arbeiten und Vorlesungen wurden sehr bald der Ausgangspunkt für eine neue, auf eine exakte Begründung der einzelnen mathematischen Theorien gerichtete Herangehensweise in der Mathematik. Mit dieser kritischen Grundhaltung unterzog er, angeregt von dem Berliner Mathematiker Carl Wilhelm Borchardt, u. a. die oben angeführten Arbeiten von Lagrange und Laplace zu den säkularen Störungen sowie von Cauchy über die Transformation quadratischer Formen einer genauen Analyse, in die er auch Abhandlungen von Jacobi, Dirichlet und Borchardt einbezog, die versucht hatten, den genannten Theoremen eine exaktere Darstellung zu geben. Im Ergebnis dieser Forschungen entwickelte Weierstraß die Theorie der Elementarteiler und schuf damit die Basis für eine allgemeine Klassifikation der Matrizen.

Doch auch Weierstraß sprach nicht von Matrizen, sondern stellte seine Theorie für Bilinearformen auf. Die wichtigsten Resultate publizierte er 1868, obwohl er die wesentlichen Einsichten bereits 1858 im Anschluß an seine erste Arbeit zu dieser Problematik erzielt haben dürfte. Die Grundzüge seiner Theorie sind folgende: Seien $s\Phi + \Psi$ eine Familie von Bilinearformen, s eine komplexe Zahl und Ψ eine definite Form. Es bezeichne $D_0(s)$ die Determinante von $s\Phi + \Psi$, $D_1(s)$ den größten gemeinsamen Teiler der Minoren (Unterdeterminanten) ersten Grades von $D_0(s)$, allgemein $D_j(s)$ den größten gemeinsamen Teiler der Minoren j-ten Grades von $D_0(s)$. Dann teilt $D_j(s)$ das Polynom $D_{j-1}(s)$, und bildet man die Quotienten $E_j(s) = D_{j-1}(s)/D_j(s)$, so ist $E_j(s)$ ein Teiler von $E_{j-1}(s)$. Die $E_j(s)$ werden allgemein als Elementar-

teiler von $D_0(s)$ bezeichnet, gelegentlich werden jedoch auch die Faktoren $e_{jk} = (s - s_k)^{m_{jk}}$ der Polynome E_j als Elementarteiler gewählt, wobei s_k eine der l verschiedenen Wurzeln von $D(s)$ bezeichnet. Zwei Scharen von nichtsingulären Bilinearformen $s\Phi + \Psi$ und $s\Phi' + \Psi'$ sind nach Weierstraß genau dann äquivalent, d. h. sie lassen sich durch nichtsinguläre lineare Transformationen der Variablen x und y ineinander überführen, wenn sie die gleichen Elementarteiler haben. Nichtsingulär bedeutet dabei, daß die dem jeweiligen Koeffizientensystem entsprechende Determinante von Null verschieden ist. Als Folgerung ließ sich für das Koeffizientenschema einer Bilinearform, also für eine Matrix, eine Normalform ableiten, die im wesentlichen der sog. Jordanschen Normalform entsprach – auf letztere wird noch zurückzukommen sein. Es sei noch angemerkt, daß in den 50ern und Anfang der 60er Jahre die im engen brieflichen Kontakt stehenden Cayley und Sylvester sowie Henry John Stephen Smith mehrere Arbeiten publizierten, die teilweise ohne vollständigen Beweis einzelne wesentliche Bestandteile der Elementarteilertheorie und des Rechnens mit Matrizen sowie Anwendungen in der Geometrie enthielten. Insbesondere hatte Smith bei der Suche nach ganzzahligen Lösungen für ein System von Kongruenzen mit ganzzahligen Koeffizienten ein Ergebnis abgeleitet, das für den betrachteten Fall die Weierstraßschen Elementarteiler angab.

7.6.1 Die Entwicklung des Matrizenkalküls

Zunächst soll jedoch die Entstehung des Matrixbegriffs und der formal algebraischen Rechenoperationen mit Matrizen skizziert werden. Auch hierbei zeigt es sich, daß Matrizen unter sehr verschiedenen Gesichtspunkten verwendet wurden, was lange Zeit zu Parallelentwicklungen führte. Zentraler Ausgangspunkt waren auch hier die Untersuchungen zu den Eigenschaften von Formen. Gauß hatte bereits 1801 eine abkürzende Bezeichnungsweise für Formen eingeführt und bei der Komposition der Formen auch die Verknüpfung dieser Koeffizientenschemata angegeben (vgl. Abschn. 6.6.2). Ebenso betrachtete Cauchy in seinen Arbeiten zur Determinantentheorie ein zu einer Matrix äquivalentes Schema, konzentrierte sich aber auf die Determinanten. Während Cauchy noch zwischen dem *„symmetrischen System“* und der zugehörigen Determinante unterschied, wurde in den folgenden Jahren häufig der Begriff der Determinante nicht klar von dem der Matrix bzw. einem dazu gleichwertigen Begriff getrennt. Wichtige Impulse ergaben sich dann aus den weiteren Studien über Formen, deren Klassifikation und deren Transformation bei Variablensubstitutionen. So entwickelte Eisenstein 1844 als junger Student im Bemühen, die Gaußsche Theorie auf quadratische Formen in drei Unbestimmten auszudehnen, auch die Gaußsche Symbolik weiter, bezeichnete das Koeffizientenschema für eine Substitution der Variablen mit einem Buchstaben sowie die Hintereinanderausführung zweier Substitutionen durch das Produkt der Buchstaben und wies auf *„einen Algorithmus*



Charles Hermite



Gotthold Eisenstein

der Rechnung mit linearen Systemen“ hin, dabei die Nichtkommutativität der Multiplikation betonend. Es dominierte jedoch noch der Aspekt, durch eine geeignete Symbolik die Darstellung übersichtlicher zu machen. Wichtig für die spätere Rezeption der Ideen erwies sich, daß Eisenstein in diesem Zusammenhang eine allgemeine Fragestellung nach der Invarianz gewisser Eigenschaften aufwarf, die das Grundproblem der Invariantentheorie zum Ausdruck brachte. Die Frage war unabhängig von Eisenstein bereits 1841 von George Boole formuliert worden und wurde sehr schnell von vielen Mathematikern aufgegriffen. Die Grundidee war, von einer Menge mathematischer Objekte jene Eigenschaften zu bestimmen, die bei Transformationen erhalten, also invariant, bleiben. Genauer beinhaltete dies für Formen folgendes: Es seien $\{f_i(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ eine Menge von n-ären Formen der Gestalt $\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} a_{i;i_1,i_2,\ldots,i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ mit $1 \leq i \leq k$ und komplexen Koeffizienten $a_{i;i_1,i_2,\ldots,i_n}$ und $\{S\}$ eine Menge linearer Substitutionen der Unbestimmten x_1, x_2, ..., x_n. Gesucht werden alle homogenen Polynome $I(a_i, ...)$ des Koeffizientensystems $a_i, ...$ für die bei Anwendung der Substitutionen S gilt: $I(a'_{i,i_1,i_2,\ldots,i_n}) = (\det S)^g I(a_{i,i_1,i_2,\ldots,i_n})$, g eine ganze Zahl und $a'_i; \ldots$ die Koeffizienten der transformierten Form $f_i{}'(x'_1, \ldots, x'_n) = f_i(S(x_1, \ldots, x_n))$. Die Funktion I heißt die (ganzrationale) Invariante der Formen f_i vom Gewicht g. Bei weiterer Verallgemeinerung dieser Aufgabe kann man dann die Menge der transformierten Objekte, der Transformationen bzw. der Invarianten allgemeiner bestimmen und zum Beispiel rationale, algebraische oder analytische Invarianten der Formen ermitteln.

In einer späteren, posthum 1852 erschienenen Arbeit baute Eisenstein die Ansätze zur Symbolik weiter aus und skizzierte, daß sein „Algorithmus der Rechung mit linearen Systemen“ Addition und Multiplikation umfaßte und

bis auf die Nichtkommutativität eine Analogie zu dem üblichen Rechnen mit Zahlen bestand. Für die linearen Substitutionen, aufgefaßt als eigenständige mathematische Objekte, konnten also Rechenoperationen definiert werden, die bis auf die genannte Ausnahme den Rechenregeln für die arithmetischen Operationen genügten. Implizit hatte Eisenstein damit die Menge der linearen Substitutionen n-ärer Formen als hyperkomplexes System oder Algebra nachgewiesen, ohne jedoch diese Eigenschaft explizit zu formulieren. Die Eisensteinsche Symbolik wurde dann 1854 von Charles Hermite übernommen, der Eisenstein in Berlin kennengelernt und mit ihm im Briefwechsel gestanden hatte. Zu diesem Zeitpunkt war der 32-jährige Hermite bereits mehrere Jahre an der École Polytechnique tätig und hatte mit wichtigen Arbeiten auf sich aufmerksam gemacht. Durch eine außerordentlich umfangreiche Korrespondenz, mehrere Lehrbücher und sein Wirken an der École Polytechnique (ab 1869 als Professor) sowie an der Sorbonne wurde er zu einer zentralen Persönlichkeit in der Mathematik der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts und zum Lehrer mehrerer herausragender französischer Mathematiker. Hermite wandte Eisensteins Symbolik ebenfalls in Arbeiten zur Zahlentheorie und über elliptische Funktionen an, ohne sie zunächst wesentlich auszubauen. Dabei formulierte er u. a. das sog. Cayley-Hermite-Problem, alle Substitutionen der Unbestimmten einer quadratischen Form zu bestimmen, die die Form invariant lassen, wobei die quadratische Form eine von Null verschiedene Determinante haben soll. Unter Bezug auf die oben erwähnten Arbeiten Cauchys zur Transformation quadratischer Formen bemerkte er 1855 für spezielle, von ihm eingeführte Formen, sog. Hermitesche Formen, daß deren Eigenwerte reell sind. Die entsprechenden Hermiteschen Matrizen sind dadurch definiert, daß die Matrix A gleich der Transponierten jener Matrix ist, die entsteht, wenn die Elemente von A durch die konjugiert-komplexen Werte ersetzt werden, d. h. $(a_{ij}) = (\bar{a}_{ji})$. Hermite hatte diese Formen erstmals bei Studien zu Gauß' *„Disquisitiones"* betrachtet und erkannt, daß viele Sätze der Gaußschen Theorie auch für diese Formen gültig bleiben. Übrigens folgerte Alfred Clebsch, der Ende der 50er Jahre bei der Analyse von Fragen der Optik ebenfalls die Realität der Eigenwerte für Hermitesche Matrizen entdeckt hatte, 1863 aus diesem Resultat, daß die von Null verschiedenen Eigenwerte einer reellen schiefsymmetrischen Matrix rein imaginär sind. Schiefsymmetrisch bedeutet dabei, daß für die Matrixelemente die Gleichung $-a_{ij} = a_{ji}$ gilt.

Als sich Cayley mit der Cauchyschen Determinantentheorie vertraut machte und eigene Berechnungen anstellte, leitete er 1846 ein Ergebnis ab, das als Lösung für das von Hermite aufgeworfene Problem für die spezielle Form $f = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$ angesehen werden konnte. 1855 griff er die Frage nach der Invarianz der quadratischen Form wieder auf und hielt es für sehr geeignet, in der Theorie linearer Gleichungen für ein System von Größen, die in einem quadratischen Schema angeordnet sind, den Begriff der Matrix einzuführen. Abweichend von der heutigen Bezeichnungsweise wählte er zur Begrenzung

des Schemas zwei gerade Linien. In dieser Symbolik stellte er auch die zusammengesetzte Matrix, d. h. das Produkt zweier Matrizen, und die inverse Matrix dar. In den folgenden Jahren hat Cayley den formal rechnerischen Aspekt der Matrizentheorie vervollständigt und die Ergebnisse 1858 publiziert [Cayley 1858]. Er bezeichnete jetzt eine Matrix abkürzend mit einem Buchstaben und definierte auch die Matrizenaddition. Die Cayleyschen Vorstellungen zum Matrizenkalkül ordnen sich klar in die von der englischen algebraischen Schule begründete Tradition ein, sowohl hinsichtlich des kalkülmäßigen Erfassens von Operationen als auch bezüglich der Betonung der Verknüpfungsregeln unter Ausnutzung von Analogien und einer induktiven Begründungsweise. In diesem Sinne waren die Ansätze bei Eisenstein und Hermite auch Ausdruck analoger Bestrebungen auf dem europäischen Kontinent.

Cayleys zusammenfassende Bemerkung zum Matrizenkalkül war inhaltlich völlig mit den Eisensteinschen Bemerkungen von 1852 identisch und charakterisierte die Matrizen implizit als nichtkommutatives hyperkomplexes System. Ein interessantes Resultat und zugleich ein Beispiel für die Anwendung des Matrizenkalküls bildete der nach Cayley und Hamilton benannte Satz, daß jede Matrix A ihrer charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$ genügt. Cayley begnügte sich jedoch damit, den Satz für 2×2-Matrizen nachzurechnen, zu versichern, daß er den Beweis für 3×3-Matrizen geführt habe und dieser analog verlaufe, und mit dem Hinweis, auf diese Rechnungen und auf die Ausführung des allgemeinen Beweises zu verzichten. Der im Matrizenkalkül relativ einfache Beweis wurde dann 1878 von Georg Frobenius gegeben.

Cayley eröffnete jedoch noch eine wichtige Perspektive für die weitere Entwicklung. Er ordnete jeder Quaternion eine Matrix zu und zeigte, daß diese Matrizen den gleichen Relationen genügten wie die Quaternionen. Waren die bisherigen Hinweise auf den Zusammenhang zwischen hyperkomplexen Systemen und Matrizen nur allgemeiner Natur gewesen, so wurde hier explizit eine Algebra durch Matrizen dargestellt. Zwar hatte diese Zuordnung bei Cayley nur den Charakter einer Randbemerkung und es blieb offen, ob dieser Zusammenhang allgemein galt, doch sollte diese Vorgehensweise Jahrzehnte später zur Grundlage einer ganzen Forschungsrichtung werden, der Theorie linearer Darstellungen.

Die Cayleyschen Arbeiten zum Matrizenkalkül fanden zunächst kaum Beachtung und wurden erst nach 1880 außerhalb Englands bekannt. Es verwundert daher nicht, daß der Matrizenkalkül in der Zwischenzeit von anderen Mathematikern neu entdeckt wurde. Wieder bildeten Studien über elliptische Funktionen und über Formen den Ausgangspunkt, von dem aus sich Edmond Laguerre 1867 unter Hinweis auf die Arbeiten von Gauß, Eisenstein, Hermite und Sylvester der Matrizenalgebra näherte und ähnlich wie Cayley die Grundzüge des Kalküls entwickelte. In der Publikation erwies sich Laguerre als genauer Kenner der algebraischen Operationen mit Matrizen, er erwähnte u. a. auch das Auftreten von Nullteilern bei der Matrizenmultiplikation und wandte im zweiten Teil der Arbeit den Kalkül dann zur Lösung

des Cayley-Hermite-Problems an. Besonders hervorhebenswert ist seine Feststellung am Ende der Ausführungen zum Matrizenkalkül, in der die Idee der Darstellungstheorie klarer als bei Cayley zum Ausdruck kam:

„Le calcul des Systèmes linéares donne ainsi une interprétation simple et pour ainsi dire arithmétique des imaginaires ordinaires, des quaternions, des clefs algébriques de Cauchy, des imaginaires congruentielles de Galois.“ [Laguerre 1867, S. 230]

Die anschließende Bemerkung enthielt indirekt die Aussage, daß jedes hyperkomplexe System durch ein System von Matrizen darstellbar ist und jede Matrix als hyperkomplexe Größe geschrieben werden kann. Doch Laguerres Ergebnisse wurden ebenfalls kaum zur Kenntnis genommen.

Es blieb Frobenius vorbehalten, ein weiteres Jahrzehnt später 1878 die Rolle des Gesetzgebers für die Matrizentheorie zu übernehmen. Damit fallen die Frobeniusschen Publikationen bereits in die nächste Periode der Algebraentwicklung, doch soll im Interesse eines besseren Überblicks die Geschichte der Matrizentheorie hier in einem Komplex behandelt werden. Als Schüler von Weierstraß und Kronecker war Frobenius sehr gut mit deren strengeren Auffassungen zur exakten Darlegung mathematischer Ergebnisse vertraut, unterzog von diesem Standpunkt aus verschiedene Resultate zur Theorie der Formen einer kritischen Analyse und versuchte, die bestehenden Lücken in den Beweisen zu ergänzen. In Unkenntnis der Arbeiten von Cayley [Cayley 1858] und Laguerre entdeckte er den Matrizenkalkül neu und nutzte ihn, um die Theorie exakt und elegant präsentieren zu können. In diesem Bestreben schuf er eine umfassende Verknüpfung des formal algebraischen Matrizenkalküls mit den zahlreichen Resultaten der von Gauß und Cauchy bis zu Weierstraß und Kronecker reichenden Traditionslinie, insbesondere der Elementarteilertheorie. Er vereinfachte zahlreiche Beweise und ergänzte die Theorie um weitere wertvolle Ergebnisse. Dazu gehören beispielsweise mehrere Aussagen über ähnliche Matrizen, von Frobenius als kongruent bezeichnet, und der von ihm 1879/80 geschaffene arithmetische Zugang zu Weierstraß' Elementarteilertheorie. Viele bereits bekannte Begriffe definierte er in kurzer eleganter Form, neu fügte er den Begriff des Ranges einer Matrix und des Minimalpolynoms hinzu, die bei der Klassifikation der Matrizen und für Strukturuntersuchungen eine wichtige Rolle spielen. Den Rang einer $m \times n$-Matrix definierte er als die größte Zahl r, für die wenigstens eine von Null verschiedene r-reihige Unterdeterminate der Matrix existiert; das Minimalpolynom einer Matrix als das Polynom niedrigsten Grades, dem die Matrix genügt. Frobenius erläuterte die Bildung des Minimalpolynoms aus den Faktoren des charakteristischen Polynoms und behauptete die Eindeutigkeit des ersteren. Bezüglich der Bildung des charakteristischen Polynoms $x^n - c_1 x^{n-1} + ... \pm c_n$ einer Matrix $A = (a_{ij})$ behauptete Henry Taber 1890, daß der Koeffizient c_i die Summe der i-reihigen Hauptunterdeterminanten von A sei, also speziell $c_n = \det A$ und $c_1 =$ Spur von $A = a_{11} + ... + a_{nn}$. Hauptunterdeterminanten

von A sind jene Unterdeterminanten, deren Hauptdiagonalelemente in der Hauptdiagonale von A liegen.

Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß Frobenius bei seiner systematischen Darstellung der Theorie noch auf zahlreiche weitere Ergebnisse zurückgreifen konnte. 1870 hatte Camille Jordan seine aus der Beschäftigung mit der Galoisschen Theorie hervorgegangenen Erkenntnisse in dem Buch *„Traité des substitutions“* zusammengefaßt und dabei u. a. eine kanonische Form für eine lineare homogene Substitution angegeben. Ein Jahr später formulierte er diese Aussage allgemein für Transformationen über den komplexen Zahlen. Angeregt wurde er dazu durch die Frage, wann ein Differentialgleichungssystem $d^nY/dt^n = AY$ in Teilsysteme überführt werden kann, die eine direkte Integration gestatten. Nach der Reduktion auf ein System erster Ordnung stellte Jordan mit Verweis auf sein Verfahren zur Überführung einer Substitution in ihre kanonische Form fest, daß durch eine lineare Transformation der Variablen das Differentialgleichungssystem in mehrere Teilsysteme der Form $\dot{Y} = JY$ übergeht, die direkt integriert werden können. Die Koeffizientenmatrix B des Differentialgleichungssystems erster Ordnung läßt sich also in eine Diagonalgestalt transformieren mit den sog. Jordan-Kästchen als Diagonalelementen, genauer: B nimmt die Gestalt

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{pmatrix} \text{ mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ an,}$$

λ_i sind dabei die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von B. Dies entsprach der von Weierstraß 1868 abgeleiteten Normalform, ohne daß Jordan diese Analogie bemerkte. Wieder war es ein Problem aus der Theorie der Differentialgleichungen im Komplexen, das zur Aufdeckung dieser Beziehungen führte. Meyer Hamburger bemerkte 1873, daß das Jordansche Reduktionsverfahren vorteilhaft in der von Lazarus Fuchs entdeckten Lösungsmethode für Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit variablen Koeffizienten angewandt werden könne. In seinen Ausführungen knüpfte er zwar eine Verbindung zu Weierstraß' Elementarteilertheorie, es blieb aber offen, ob er die Äquivalenz der beiden Normalformen erkannt hatte. Dies wurde dann 1874 von Kronecker geleistet, was wiederum zu einer kurzen Kontroverse mit Jordan führte, in deren Ergebnis die Gleichwertigkeit beider Methoden klar herausgestellt wurde. Diese Entwicklungen waren Frobenius bekannt, als er mit seinen Studien über Bilinearformen begann, und es ist vor diesem Hintergrund nicht verwunderlich, wenn er einleitend in der Abhandlung von 1878 erklärt, *„statt der Transformationen der bilinearen Formen die Zusammensetzung der linearen Substitutionen zu behandeln“*. [Frobenius 1878, S. 2]

Die Theorie der Matrizen hat in den folgenden Jahren eine vielfältige Entwicklung erfahren. Neben den schon aufgezeigten Verbindungen zu verschiedenen Teilgebieten der Mathematik seien noch die Definition transzendenter

Funktionen für Matrizen und der Gebrauch unendlicher Matrizen hervorgehoben. Ersteres geschah 1892 durch William Henry Metzler, letzteres durch George William Hill 1877. Unendliche Matrizen und Determinanten traten implizit bereits bei Jean-Baptiste Joseph de Fourier gelegentlich der Entwicklung einer Funktion in eine Fourier-Reihe auf, doch erst am Ende des 19. Jahrhunderts wurde die Idee in der Theorie zur Lösung von Integralgleichungen umfassend angewandt und bildete einen der Ausgangspunkte für die Schaffung der Funktionalanalysis am Beginn des 20. Jahrhunderts.

Um die Jahrhundertwende erschienen auch die ersten systematischen und umfassenden Bücher zur Matrizentheorie, 1899 von Peter Muth *„Theorie und Anwendung der Elementartheiler“* und 1907 Maxime Bôchers *„Introduction to higher algebra“*, das 1910 ins Deutsche übersetzt wurde. Diese Publikationen machten die Resultate der Matrizentheorie einem breiteren Kreis von Mathematikern und Physikern zugänglich und trugen wesentlich zur Verbreitung und Anwendung dieser Ideen bei.

7.6.2 Die Entwicklung der Theorie der Vektorräume

Die skizzierte Entwicklung der Matrizenrechnung verlief jedoch weitgehend ohne jeden Bezug zu einem Gebiet der Mathematik, mit dem sie heute fest verbunden ist, der Theorie der Vektorräume. Die algebraischen Aspekte bei der Herausbildung dieser Theorie sollen im folgenden betrachtet werden. Für eine ausführliche Analyse der Entwicklung sei auf das Buch von M. J. Crowe [Crowe 1967] verwiesen.

Einzelne Elemente der Vektorrechnung traten schon frühzeitig in Untersuchungen auf, in denen versucht wurde, für physikalische Sachverhalte eine quantitative, mathematische Beschreibung zu geben. Ein wichtiger Aspekt war dabei die Zusammensetzung von Bewegungen oder allgemeiner die Zusammensetzung von Kräften. Überlegungen dazu lassen sich bis in die Antike und das Mittelalter zurückverfolgen. Die Parallelogrammregel zur Addition zweier Kräfte findet man in unterschiedlich klarer Ausprägung im 16. Jahrhundert bei Simon Stevin und Galileo Galilei und am Ende des 17. Jahrhunderts bei Newton und Pierre Varignon. Man kann aber weder von der Formulierung eines Vektorbegriffs sprechen, noch von der Entwicklung eines Kalküls der Vektorrechnung. Einen weiteren wichtigen Impuls gab dann Leibniz, als er seine Unzufriedenheit mit den seit Descartes und Fermat eingeführten analytischen Methoden artikulierte und die Schaffung von *„une autre analyse proprement géometrique linéaire, qui nous exprime directement situm, ...“* [Gerhardt 1899, S. 568f.] forderte. Leibniz hat die Forderung nach einem geometrischen Kalkül mehrfach wiederholt, aber außer dem Hinweis, einige Grundzüge des Kalküls gefunden zu haben, nichts dazu veröffentlicht. Wenn er auch damit keine unmittelbare Wirkung erzielte, so blieb die Leibnizsche Aufgabenstellung lebendig genug, um anregend auf spätere Generationen zu wirken. Beginnend mit Wessels Arbeit zur analytischen Darstellung

einer Richtung, in der er auch eine geometrische Interpretation der komplexen Zahlen gab (vgl. Abschn. 6.2) und damit erstmals die beiden Forschungsmotive – die Suche nach einem geometrischen Kalkül und die Rechtfertigung des Rechnens mit imaginären Größen durch deren geometrische Darstellung – zusammenführte, entstanden am Anfang des 19. Jahrhunderts mehrere Arbeiten, die den Leibnizschen Intentionen verpflichtet waren.

Ein erstes vektorielles System konstruierte August Ferdinand Möbius 1827 mit dem *„Barycentrischen Calcul“*, den er in dem gleichnamigen Buch ausführlich darlegte und bereits im Untertitel als *„neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie“* kennzeichnete [Möbius 1827]. Möbius hatte 1809–1813 an der Leipziger Universität erst Rechtswissenschaften, dann Mathematik studiert. Ein Reisestipendium ermöglichte ihm die Vertiefung seiner Studien bei Gauß in Göttingen, wo er sich 1813/14 zwei Semester der Astronomie widmete, und bei Johann Friedrich Pfaff in Halle, wo er 1814 mathematische Vorlesungen hörte. Nach der Habilitation 1815 in Leipzig begann Möbius mit der Vorlesungstätigkeit und wurde Anfang des Jahres 1816 auf Empfehlung von Gauß zum außerordentlichen Professor der Astronomie und Observator auf der Sternwarte berufen. In seinen Forschungen beschäftigte sich Möbius erfolgreich mit Fragen der angewandten Mathematik, etwa der Optik, der Astronomie, der Mechanik bzw. der Kristallstruktur. Seine Hauptleistungen lagen auf mathematischem Gebiet, wo er besonders durch wichtige Ergebnisse in der Geometrie hervortrat. Jedoch wurde die Bedeutung seiner Überlegungen zur Klassifizierung der geometrischen Verwandtschaften, d. h. zur Charakterisierung verschiedener Geometrien, die er in dem oben erwähnten Buch entwickelte und die er als Grundlage der ganzen Geometrie bezeichnete, zu seinen Lebzeiten nicht erkannt und entsprechend gewürdigt. Mit der Entdeckung des später nach ihm benannten Bandes, dem ersten Beispiel einer einseitigen Fläche, publizierte er 1865 kurz vor seinem Tod ein weiteres wichtiges Resultat.

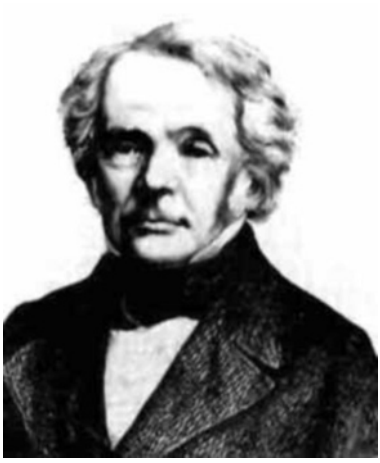
Bei seinen Überlegungen zum baryzentrischen Kalkül, die bis ins Jahr 1818 zurückreichten, ging Möbius vom Begriff des Schwerpunkts aus, der bei vielen physikalischen Aufgaben vorteilhaft verwendet wurde. Der von ihm entwickelte Kalkül basierte auf der Beobachtung, daß der Schwerpunkt eines Massenpunktsystems eindeutig bestimmt ist, und daß man jeden Punkt der Ebene bzw. des Raumes als Schwerpunkt eines solchen Systems erhalten kann, wenn auch negative Werte für die Massen der Punkte zugelassen werden. Für die Punkte A, B, ... mit den Massen α, β, ... ergibt sich der (gewichtete) Schwerpunkt S durch $(\alpha+\beta+...)S = \alpha A + \beta B + ...$ Wählt man nun die Punkte A, B, C in der Ebene bzw. die Punkte A, B, C, D im dreidimensionalen Raum als fest vorgegebene Punkte, so ist ein beliebiger *„Schwerpunkt“* S durch $S = \alpha A + \beta B + \gamma C$ bzw. $S = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ mit $\alpha+\beta+\gamma = 1$ bzw. $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 1$ eindeutig bestimmt und (α, β, γ) bzw. $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sind die baryzentrischen Koordinaten des Punktes. Es ergibt sich dann ein im wesentlichen mit der Vektorrechnung äquivalenter Kalkül. In diesem Rahmen

gab Möbius eine neue Herleitung zahlreicher geometrischer Resultate. Sein baryzentrischer Kalkül wurde von bedeutenden Mathematikern, wie Gauß, Cauchy und Dirichlet als nützliche Methode zur Lösung geometrischer Probleme anerkannt, doch Möbius hat den Ansatz nicht weiter ausgebaut. Die Darlegung seines Kalküls enthielt mit der Einführung gerichteter Strecken ein weiteres Element zur Vektorrechnung. Möbius bezeichnete die Strecke vom Punkt A zum Punkt B mit AB, die Strecke von B nach A mit BA oder $-AB$ und definierte dann die Addition von derartigen kollinearen Strecken. Die späteren Erweiterungen, wie die Definition der Addition von Strecken, die nicht kollinear sind, die er 1843 in dem astronomischen Werk *„Die Elemente der Mechanik des Himmels“* veröffentlichte, waren zwar eigenständige Entdeckungen, doch hatte er zu diesem Zeitpunkt bereits weitere wichtige Anregungen von Giusto Bellavitis und Hermann Günther Graßmann erhalten. So hatte ihm Bellavitis bereits 1835 eine Methode zur Addition derartiger Strecken brieflich mitgeteilt.

Der Italiener Bellavitis war zu diesem Zeitpunkt noch in der Verwaltung seines Geburtsortes Bassano angestellt und hatte sich seine mathematischen Kenntnisse vorwiegend autodidaktisch angeeignet. Erst durch die Publikation mehrerer Arbeiten, u. a. mit der oben erwähnten Methode, eröffnete sich ihm 1845 die Möglichkeit zu einer Professur an der Universität Padua. Bei Bellavitis kamen wie bei Wessel wieder beide Forschungsmotive, die Suche nach einem geometrischen Kalkül und die Rechtfertigung des Rechnens mit imaginären Größen durch deren geometrische Darstellung, zum Tragen. Angeregt durch die Arbeit Buées zur geometrischen Darstellung komplexer Zahlen, stellte er Anfang der 30er Jahre seinen *„Kalkül der Equipollenzen“* als eine Rechnung mit geometrischen Größen auf und publizierte ihn 1832, 1833 und 1835. Die Ergebnisse dieser Rechnung waren völlig mit jenen Aussagen äquivalent, die man durch die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen erhielt. Wie auch mehrere andere Mathematiker war sich Bellavitis dieser Tatsache bewußt, doch betonte er, daß sein Verfahren geometrische Größen zum Gegenstand habe und nicht auf den komplexen Zahlen basiere. Der Versuch, den Kalkül auf den dreidimensionalen Raum auszudehnen, scheiterte wie bei Wessel an der Definition einer Multiplikation für diese Größen.

Schließlich sei noch kurz auf Bernard Bolzano verwiesen, der 1804 in dem Buch *„Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie“* den Versuch unternahm, eine Geometrie von nicht näher bestimmten Objekten zu konstruieren. Die bereits für die Algebra hervorgehobene Tendenz, unbestimmte abstrakte Objekte und die Operationen mit ihnen einer genaueren Analyse zu unterziehen, zeigte sich auch hier. Sie war dann für die Herausbildung der Theorie linearer Räume von Bedeutung.

Völlig unabhängig von all diesen Entwicklungen kam es im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts in der Kristallographie im Bestreben, den regelmäßigen Aufbau der Kristalle zu erklären, zum Studium vektorieller Systeme. Die Vertreter der dynamistischen Schule der Kristallographie wählten dazu im



August Ferdinand Möbius



Hermann Günther Graßmann

Innern der Kristalle wirkende Kräftesysteme, die sich jeweils aus drei Grundkräften zusammensetzten. Die bei den Kristallformen beobachteten Symmetrien sollten sich aus der spezifischen Anordnung der Grundkräfte und der aus ihnen gebildeten Kräftesysteme ergeben. Damit führte die Analyse der Kristallformen nahezu zwangsläufig zum Studium von vollständigen Kräftesystemen, die aus drei Grundkräften rational kombinierbar waren, d. h. zu dreidimensionalen Vektorräumen. Dieser Schritt wurde fast gleichzeitig von dem Gymnasiallehrer Justus Günther Graßmann und dem Professor der Mineralogie, Technologie und Naturgeschichte Johann Friedrich Christian Hessel vollzogen, jedoch ohne die Verwendung der Begriffe Vektor bzw. Vektorraum. Graßmann ging 1829 in seiner *„geometrischen Combinationslehre“* von drei gerichteten Grundstrecken, als Elementarträger bezeichnet, aus und bildete daraus als ganzzahlige Linearkombinationen die zusammengesetzten Träger (Vektoren). Graßmanns Kalkül, der durch eine eigenwillige Terminologie und Symbolik gekennzeichnet war, beinhaltete auch die Untersuchung gewisser Symmetriebeziehungen und implizit das symbolische Erfassen der entsprechenden endlichen orthogonalen Gruppen. In Form der endlichen Punktsymmetriesysteme traten diese Gruppen 1830 bei Hessel ebenfalls implizit auf. Die eingangs skizzierte dynamistische Grundidee, daß die Kristallgestalten gewisse symmetrische Kräftesysteme widerspiegeln, setzte er in eine Auszeichnung einzelner Punktsymmetriesysteme um, die modern formuliert besagte, daß diese Systeme den dreidimensionalen rationalen Vektorraum invariant lassen. Zum Aufbau dieses Raumes definierte er für gerichtete Strecken, von ihm Gerenstrahl genannt, die Addition und die skalare Multiplikation mit rationalen Zahlen und konstruierte den gerengesetzlichen Strahlenverein. Für eine ausführliche Erörterung der beiden Systeme sei auf das Buch von E. Scholz verwiesen. [Scholz 1989, S. 48ff.]. Die Vorstellungen von Graßmann und

Hessel wurden jedoch von den Mathematikern jener Zeit nicht zur Kenntnis genommen und hatten mit einer Ausnahme keinen Einfluß auf die weitere Entwicklung der Vektorrechnung. In den Arbeiten von Graßmanns Sohn Hermann Günther, die sowohl eine Theorie n-dimensionaler Vektorräume, als auch wichtige Ergebnisse über hyperkomplexe Zahlen enthielten, fanden diese Ideen jedoch eine großartige Fortführung.

7.6.3 Die Arbeiten von Hermann Günther Graßmann

Hermann Günther Graßmann studierte in Berlin Philologie, Theologie sowie Philosophie und eignete sich dann autodidaktisch mathematische und physikalische Kenntnisse an. Zwischen 1831 und 1840 legte er die erforderlichen Lehramtsprüfungen für Theologie, Physik sowie Mathematik ab und war Zeit seines Lebens als Lehrer in Stettin tätig. Schon frühzeitig bemühte er sich um eine Umsetzung der Leibnizschen Ideen von einem geometrischen Kalkül, doch zunächst ohne Erfolg. Nachdem er bereits Anfang der 30er Jahre eine Addition für gerichtete Strecken, also die Vektoraddition, definiert hatte, erhielt er neue Anregungen durch die Studien seines Vaters über Produktbildungen in der Geometrie [Graßmann, J. 1824, S. 174]; [Graßmann, J. 1835, S. 10]. Er entwickelte die Ideen seines Vaters weiter, definierte ein Produkt von gerichteten Strecken und verknüpfte es mit der Jahre zuvor untersuchten Addition. Dieser letzte Schritt mag zwar trivial erscheinen, war aber entscheidend. Graßmann war jetzt überzeugt, daß er damit den Schlüssel zu einer neuen wirksamen Methode gefunden hatte. Auch die Tatsache, daß die von ihm eingeführte Multiplikation nichtkommutativ war, hielt ihn nicht davon ab, dieses Produkt weiter zu untersuchen. Durch schulische und andere Pflichten hatte er zunächst nicht die Zeit, um diese Ansätze auszubauen, so daß ihm erst 1839 bei der Vorbereitung auf die Lehramtsprüfung in Mathematik der entscheidende Durchbruch gelang:

„Durch diesen Erfolg nun hielt ich mich zu der Hoffnung berechtigt, in dieser neuen Analyse die einzig naturgemässe Methode gefunden zu haben, nach welcher jede Anwendung der Mathematik auf die Natur fortschreiten müsse, und nach welcher gleichfalls die Geometrie zu behandeln sei, …“ [Graßmann 1894, Bd. 1, 1. Teilband, S. 9].

Graßmann wandte die neue Methode zur Behandlung der Laplaceschen Gezeitenlehre an und erreichte eine Vereinfachung der Darstellung, die er in der Prüfungsarbeit *„Theorie der Ebbe und Flut“* vorlegte. Darin gab er eine erste verkürzte Darlegung der neuen Methode, wobei er sich hinsichtlich der Begründung mehrfach auf die Gesetze der algebraischen Analysis berief:

„Da es aber die Grenzen dieser Arbeit nicht erlauben, die von mir angewandte Methode der geometrischen Analyse in ihren Prinzipien darzulegen, so werde ich die Gesetze derselben, obgleich sie einer ganz unabhängigen Entwickelung fähig sind, aus den verwandten Gesetzen der algebraischen Analyse entlehnen.“ [Graßmann 1894, Bd. 3, 1. Teilband, S. 18]

„Alle Gesetze algebraischer Differenziation und somit auch der Integration gelten auch in der geometrischen Analyse, sofern sie nämlich durch keine anderen Operationen als Addition und Subtraktion gewonnen sind.“ [ebenda, S. 21]

Insgesamt präsentierte er in der geometrischen Analyse einen großen Teil der Vektoranalysis in einer Form, die der modernen Darstellung meist äquivalent ist. Neben der Vektoraddition enthielt sie zwei Arten von Produktbildung (Vektor- und Skalarprodukt), die Differentiation von Vektoren und einige Elemente von Vektorfunktionen, vgl. [Crowe 1967, S 54ff.]; [Scholz 1984]. Die Hinweise auf die algebraische Analysis verdeutlichen zugleich, daß die Bedeutung der Graßmannschen Arbeit nicht nur in der Schaffung eines ersten System der Vektoranalysis lag, sondern auch in der Herausarbeitung algebraischer Aspekte. Dies geschah in mehreren Schritten, beginnend 1844 mit dem ausführlichen Aufbau der Theorie in dem Buch *„Die lineale Ausdehnungslehre“*. Dabei sei die Vielzahl der Einflüsse, die Graßmann in diesem Prozeß verarbeitete, hervorgehoben. Sie reichten von der Philosophie, speziell den Lehren Schleiermachers und Kants, über pädagogische Aufgaben, wie sie sich aus seiner schulischen Tätigkeit ergaben, bis zur Auseinandersetzung mit naturwissenschaftlichen und mathematischen Themen, z. B. den Arbeiten seines Vaters zur Kristallographie bzw. zur Begründung der Elementargeometrie, den Diskussionen um die Interpretation der negativen Zahlen als den positiven entgegengesetzt gerichtete Strecken und der Tendenz zur Formalisierung, die er aus den Werken französischer Mathematiker kennenlernte. Aus all diesen Anregungen gewann Graßmann die Einsicht, daß ein grundlegender Neuaufbau der Mathematik notwendig sei und gab den Auffassungen in Zusammenarbeit mit seinem Bruder Robert eine programmatische Gestalt. Beide stellten sich das Ziel, eine Darstellung der Mathematik auf dieser neuen Basis vorzulegen (vgl. [Lewis 1977], [Schlote 1988, Kap. 1.4.]). Kennzeichnend für die Graßmannschen Vorstellungen war das Streben nach einem konstruktiven, klaren begrifflichen Aufbau der Mathematik unter Berücksichtigung dialektischer Gedanken. Die Begriffe der Form bzw. Denkform und der Verknüpfung als Grundbegriffe für den Neuaufbau wählend, charakterisierte Graßmann die Mathematik als Formenlehre und unterschied bei den Formen jeweils die beiden Gegensätze der stetigen und diskreten bzw. der algebraischen und der kombinatorischen Form. Durch Kombination erhielt er daraus eine Unterteilung der Mathematik in vier Teilgebiete. Eines der Teilgebiete war die Ausdehnungslehre, das der Geometrie entsprechende abstrakte Wissensgebiet. Für Graßmann gehörte die Geometrie, d. h. die Anschauung des Raumes, als eine Art Urintuition zur angewandten Mathematik, eine Auffassung, die in ähnlicher Form auch von vielen seiner Zeitgenossen vertreten wurde. Auf der Basis dieser abstrakten, philosophisch motivierten Herangehensweise schuf Graßmann wichtige Ideen zur Theorie der Vektorräume und zur Algebra. Zugleich wurde es aber dadurch für seine Zeitgenossen nahezu unmöglich, die neuen Vorstellungen in ihrer vollen Tragweite zu erfassen.

Die

lineale Ausdehnungslehre

ein

neuer Zweig der Mathematik

dargestellt

und

durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik,

wie auch

auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert

von

Hermann Grassmann
Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.

Mit 1 Tafel.

Leipzig, 1844.
Verlag von Otto Wigand.

Abb. 7.6.4. Titelblatt von „Die lineale Ausdehnungslehre“ von Hermann Günther Grassmann

Ein zentraler Punkt bei dem Aufbau der Mathematik war für Graßmann die Verknüpfung der Formen. In dem einleitenden Kapitel zur *„Ausdehnungslehre“* untersuchte er deshalb die Eigenschaften von Verknüpfungen, die dann in allen Teilgebieten der Mathematik Anwendung finden sollten. Er kam so zu einer Betonung der Verknüpfungsregeln und zu der Einsicht, daß er von der konkreten Realisierung der Verknüpfung abstrahieren mußte, wenn er die Struktur der Verknüpfung erkennen wollte. In diesem Sinne charakterisierte er die Mathematik auch als die Wissenschaft von der Verknüpfung von Größen. Noch deutlicher und detaillierter ausgeführt kam dieser Standpunkt in dem Buch *„Formenlehre“* zum Ausdruck, das Robert Graßmann in Zusammenarbeit mit seinem Bruder Hermann Günther im Rahmen ihres Programms zur Neubegründung der Mathematik verfaßte [Graßmann 1872]. Nachdem Hermann Günther Graßmann die Ausdehnungslehre als neuen Zweig der Mathematik bestimmt hatte, analysierte er in dem Abschnitt *„Allgemeine Formenlehre“* jene allgemeinen Eigenschaften, die allen Verknüpfungen gemeinsam waren. In diesem Kontext stellte er erste Betrachtungen zur Frage der Abgeschlossenheit einer Menge von Größen gegenüber einer Verknüpfung an, ohne eine vollständige Antwort geben zu können. Für eine Menge von Größen mit einer Verknüpfung formulierte er als Eigenschaften das Assoziativ- und das Kommutativgesetz sowie die Existenz eines inversen und eines neutralen Elementes, ohne jedoch diese Begriffe zu benutzen. Die Verknüpfung bezeichnete er dann als Addition. Lagen zwei Verknüpfungen vor, so sollte die zweite Verknüpfung mit der ersten durch das Distributivgesetz verbunden sein, und nur wenn die erste alle Gesetze der Addition erfüllte, bezeichnete er diese zweite Verknüpfung als Multiplikation. Die Multiplikation konnte also auch nichtkommutativ sein. Graßmann sprach nur von Addition bzw. Multiplikation, wenn diese Verknüpfungen die genannten Eigenschaften erfüllten, wenn die mit ihnen versehene Menge von Größen also eine gewisse Struktur aufwies. Er hat die Mengen mit dieser Struktur aber nie besonders ausgezeichnet, obwohl er alle Eigenschaften formuliert hatte, um diese Menge als kommutative Gruppe, als Vektorraum oder als Ring zu charakterisieren. Dies verdeutlicht die Bedeutung der Graßmannschen Ideen für die Entwicklung der Algebra, aber auch ihre Grenzen. Die Möglichkeit, Mengen von Größen mit ein oder zwei Verknüpfungen als neue mathematische Objekte auszuzeichnen, war für ihn ohne Interesse.

In der *„Ausdehnungslehre“* wandte sich Graßmann dann der Konstruktion der Ausdehnungsgebiete zu. Die Grundlage bildete ein kontinuierlicher Erzeugungsprozeß, durch den sukzessiv die Gebiete verschiedener Stufe gebildet wurden. So entstand ein Gebilde erster Stufe durch die als Grundänderung bezeichnete Bewegung eines nicht näher bestimmten Elementes in eine bestimmte Richtung, die Bewegung eines Gebildes erster Stufe in eine zweite, von der ersten verschiedene Richtung ergab ein Gebilde zweiter Stufe usw. Die verschiedenen Gebilde einer Stufe faßte er dann zu dem entsprechenden Gebiet dieser Stufe zusammen. Da Graßmann die Ausdehnungslehre klar von

der anschaulichen dreidimensionalen Geometrie abgehoben hatte, bestand für ihn keine Veranlassung, den Erzeugungsprozeß mit den Gebieten dritter Stufe abzubrechen, und er konstruierte in analoger Weise ein Gebiet n-ter Stufe. Er nahm dann für ein Gebiet n-ter Stufe verschiedene Grundänderungen an, aus denen durch entsprechende Verknüpfung alle Elemente des Gebietes konstruiert werden konnten. Für die dabei definierten Verknüpfungen wies er nach, daß sie den in der *„Allgemeinen Formenlehre“* formulierten Gesetzen genügten. Da er außerdem noch eine Multiplikation der Elemente mit reellen Zahlen erklärte, erhielt er letztlich in den Gebieten eine lineare Struktur, einen linearen Raum. Auch diese Konstruktion führte er sukzessive durch, beginnend mit einem Gebiet erster Stufe. Die konstruktive Erzeugung der Gebiete n-ter Stufe lieferte Graßmann zugleich die Basis für die Definition des sog. äußeren Produktes zweier Größen, das er als das von den beiden Größen aufgespannte Gebilde erklärte. Für zwei Größen a, b aus Gebieten erster Stufe war dies das von ihnen erzeugte Parallelogramm, das entstand, wenn man die Größe a längs der anderen bewegt, bzw. was äquivalent dazu ist, wenn a in jedem Element (Punkt) von b angetragen wird. Diese Produktbildung stimmte im wesentlichen mit dem geometrischen Produkt überein, das er in der Arbeit über Ebbe und Flut erklärt hatte, doch macht die umständliche Darlegung auch die Probleme deutlich, mit denen Graßmanns abstrakter Aufbau der Theorie verbunden war. Mit der Benennung *„äußeres Produkt“* wollte Graßmann andeuten,

„daß diese Art des Produktes nur, sofern die Faktoren aus einander treten, und das Produkt eine neue Ausdehnung darstellt, einen geltenden Werth hat, hingegen, wenn die Faktoren in einander bleiben, gleich Null gesetzt wird“ [Graßmann 1894, Bd. 1, 1. Teilband, S. 89].

Geht man davon aus, daß in den Ausdehnungsgebieten eine Basis vorliegt, eine Darstellung, die Graßmann erst in der zweiten Auflage der *„Ausdehnungslehre“* wählte, so wird das Produkt durch folgende Gleichungen der Basiselemente e_i $(i = 1, 2, \ldots \quad n)$ bestimmt:

$$e_i e_j = -e_j e_i,\ e_i e_i = e_j e_j = 0,\ e_i(e_j + e_k) = e_i e_j + e_i e_k.$$

Zusammen mit den entsprechenden Gesetzen für die Addition definieren diese Gleichungen natürlich ein hyperkomplexes System. Das Produkt wird meist als (Graßmannsches) äußeres oder alternierendes Produkt bezeichnet und das hyperkomplexe System als Graßmann-Algebra. Graßmann selbst hat diesen Aspekt nicht beachtet und sich in seinem Buch den Anwendungen der Ausdehnungslehre zugewandt. Neben der Geometrie, die er bereits wiederholt zur Veranschaulichung seiner Ideen herangezogen hatte, besprach er Anwendungen auf Physik, Kristallographie und die Lösung linearer Gleichungssysteme. Durch die Übertragung der Resultate auf sog. Elementargrößen erhielt er einen vollständigen Kalkül für das Rechnen mit Punkten und leitete u. a. viele der von Möbius im *„Barycentrischen Calcul“* angegebenen Aussagen ab.

Obwohl Graßmanns Theorie viele neue Ideen enthielt und er mit zahlreichen Beispielen deren Anwendbarkeit nachwies, fand sie kaum Anerkennung. Die Hauptgründe dürften in der sehr abstrakten und schwer verständlichen, mit einer umfangreichen neuen Terminologie verbundenen Darstellung liegen und in der Tatsache, daß es ihm nicht gelang, irgendein wichtiges, vorher ungelöstes Problem mit der neuen Theorie zu lösen. Ende der 50er, Anfang der 60er Jahre entschloß sich Graßmann, nachdem sich einige bedeutende Mathematiker wie Hamilton, Luigi Cremona u. a. sehr anerkennend über sein Werk geäußert hatten und er einige Prioritätsansprüche gegenüber Cauchy und Adhémar Barré de Saint Venant hatte reklamieren müssen, zu einer grundlegenden Neubearbeitung der „Ausdehnungslehre“, die 1862 erschien. In dieser Neuauflage verzichtete er auf jede philosophische Begründung und konzentrierte sich auf eine strenge mathematische Darstellung. Er ging von einem System von Einheiten $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots \quad n)$ als Basis eines Vereins von Größen aus und arbeitete den Begriff der extensiven Größe als formale Linearkombination der Einheiten heraus, $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \sum \alpha_i e_i$. Für diese Größen definierte er dann eine additive Verknüpfung sowie die Multiplikation $\bullet$ mit einer Zahl und charakterisierte beide Operationen im wesentlichen axiomatisch durch Angabe der Verknüpfungsregeln. Durch diese abstrakten Festlegungen erreichte Graßmann einen hohen Allgemeinheitsgrad, z. B. wäre es möglich, statt der reellen Zahlen auch einen abstrakten Koeffizientenbereich zu wählen. Die Gleichungen lauteten:

$$a + b = \sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i e_i = \sum (\alpha_i + \beta_i) e_i \text{ (Addition)}$$
$$\beta \bullet \sum \alpha_i e_i = \sum (\beta \alpha_i) e_i = (\sum \alpha_i e_i) \bullet \beta \text{ (Skalarmultiplikation)}$$
$$a \bullet \beta = \beta \bullet a, \quad (a \bullet \beta) \bullet \gamma = a \bullet (\beta \bullet \gamma)$$
$$(a + b) \bullet \beta = a \bullet \beta + b \bullet \beta, \quad a \bullet (\beta + \gamma) = a \bullet \beta + a \bullet \gamma$$
$$a \bullet 1 = a$$
$$a \bullet \beta = 0 \text{ genau dann, wenn entweder } a = 0 \text{ oder } \beta = 0.$$

Graßmann bewies dann u. a. folgende wichtige Theoreme, die in der modernen Terminologie der Theorie der linearen Vektorräume wiedergegeben werden: Ein linearer n-dimensionaler Raum wird von genau n unabhängigen Elementen erzeugt. Es seien L ein von den Vektoren $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots \quad n)$ erzeugter Vektorraum und $a_1, a_2, \ldots, a_p$ $(p < n)$ ein System linear unabhängiger Vektoren aus L, dann können p Vektoren e_k durch die a_l $(l = 1, 2, \ldots, \quad p)$ ersetzt werden und die restlichen Vektoren e_j erzeugen zusammen mit den a_l den vorgegebenen Vektorraum L (Steinitzscher Austauschsatz). Sind E und F zwei lineare Teilräume eines linearen Raumes, so gilt für die Dimension der Summe $E + F$ der beiden Teilräume die Relation

$$\dim(E + F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F.$$

Die lineare Unabhängigkeit von Elementen (Vektoren) hatte er zuvor durch die äquivalente Eigenschaft erklärt, daß „die Elemente in keiner Zahlbeziehung zueinander stehen“.

Von entscheidender Bedeutung war die Definition einer zweiten Verknüpfung in der Menge der extensiven Größen. Bereits 1855 hatte Graßmann den verschiedenen Arten der Multiplikation eine Studie gewidmet und klar verdeutlicht, auf welch vielfältige Art und Weise die Multiplikation für extensive Größen definiert werden kann. In der Analyse der multiplikativen Verknüpfung erkannte er offenbar einen Schlüssel, um die in der Praxis vorkommenden Systeme extensiver Größen zu klassifizieren. Für die Festlegung der multiplikativen Verknüpfung wählte er wieder einen möglichst allgemeinen Ausgangspunkt und bestimmte das Produkt durch

$$(\sum \alpha_i e_i)(\sum \beta_j e_j) = \sum (\alpha_i \beta_j)\,[e_i * e_j],$$

wobei er kommentarlos das Distributivgesetz voraussetzte, ganz entsprechend seiner früheren Definition einer Multiplikation. Zur weiteren Bestimmung der verschiedenen Produktbildungen führte er dann aus:

„Da das Produkt extensiver Grössen nach der Erklärung wieder entweder eine extensive Grösse oder eine Zahlgröße ist, so muss dasselbe (...) aus einem System von Einheiten numerisch ableitbar sein. Welches dies System von Einheiten sei, und wie aus ihnen die Produkte $[e_r * e_s]$ *, aus denen jenes Produkt zusammengesetzt ist, numerisch abzuleiten seien, darüber sagt die Definition nichts aus. Soll also der Begriff eines besonderen Produktes genau festgestellt werden, so müssen noch über jenes System von Einheiten und über diese Ableitungen die nötigen Bestimmungen getroffen werden.“* [Graßmann 1894, Bd. 1, 2. Teilband, S. 28]

Die nötigen Bestimmungen wurden dann in Form von Bestimmungsgleichungen formuliert. Graßmann ließ also zunächst offen, ob das Produkt zweier Einheiten als neue Einheit zum Ausgangssystem hinzugenommen wird, eine Linearkombination der Ausgangseinheiten bzw. eine Zahl war, oder eine Kombination dieser Möglichkeiten auftrat. Um die für die Wissenschaft nützlichen Produktbildungen zu erhalten, stellte er einige Zusatzbedingungen. Die meisten Bedingungen waren geometrisch motiviert, doch spielten auch mehrere andere Faktoren eine wichtige Rolle, und manches erscheint aus heutiger Sicht unverständlich. So beispielsweise die besonders einschränkende Forderung, daß in den Bestimmungsgleichungen stets nur Produkte mit gleich vielen Faktoren vorkommen sollen, wobei er sich meist auf zwei Faktoren beschränkte. Damit schloß Graßmann wichtige Systeme, wie die Quaternionen, aus den weiteren Betrachtungen aus. Trotzdem erhielt er in dem erwähnten Artikel über die Arten der Multiplikation 16 verschiedene Produkte, unter denen er das algebraische, das kombinatorische oder äußere, das innere und das komplexe Produkt hervorhob. Während das erste der bei Zahlen üblichen Multiplikation entsprach, waren die beiden folgenden für die Ausdehnungslehre von großer Bedeutung und das letzte stellte eine Verallgemeinerung der Multiplikation komplexer Zahlen dar. Berücksichtigt man noch die additive Verknüpfung der extensiven Größen, so hatte Graßmann damit interessante hyperkomplexe Systeme (Algebren) definiert, von denen die durch das äußere

Produkt charakterisierte (Graßmann-) Algebra später besondere Aufmerksamkeit fand. In der *„Ausdehnungslehre“* von 1862 hat sich Graßmann auf eine ausführliche Behandlung des äußeren und des inneren Produktes sowie deren Anwendungen konzentriert.

Rückblickend besticht das Graßmannsche Werk durch eine Fülle neuer, zukunftsweisender Ideen, die Geometrie und Algebra gleichermaßen betreffen. Geometrisch sind die konsequente Orientierung auf n-dimensionale Größen und Gebiete, sowie die Formulierung wichtiger Einsichten in die Theorie der linearen Räume und in die Vektoranalysis hervorzuheben, algebraisch grundlegende Überlegungen zum Aufbau hyperkomplexer Systeme (Algebren), speziell die Bedeutung der Multiplikation für die Klassifikation dieser Systeme sowie die Herausarbeitung der algebraischen Aspekte in der Theorie der linearen Räume und der Vektoranalysis. Doch auch die zweite Auflage der *„Ausdehnungslehre“* und weitere Schriften Graßmanns zu diesem Themenkreis fanden erst mit großer zeitlicher Verzögerung eine entsprechende Würdigung. So bilden die Graßmannschen Erkenntnisse zunächst einen singulären Punkt in der Geschichte der Algebra und haben erst in den letzten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts noch einen Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik ausgeübt.

Am Rande sei noch auf einen sozialen Aspekt hingewiesen: H. G. Graßmann wie auch sein Vater waren zeitlebens im Schuldienst tätig. Viele andere bedeutende deutsche Mathematiker haben damals ihre Kariere ebenfalls im Schuldienst beginnen müssen, da der Berufsstand des Mathematikers sich erst langsam herausbildete. In jenen Jahrzehnten hatten die Lehrer noch die Zeit und den Ehrgeiz, mathematische Forschungen durchzuführen, und das Abfassen der Schulprogramme bot ihnen einen Anreiz zu diesen Studien sowie die Möglichkeit, ihre Ergebnisse zu publizieren. Zugleich waren die Schulprogramme eine Chance, sich für eine Universitätsprofessur zu empfehlen.

Wie bei den hyperkomplexen Systemen wurden die Publikationen Hamiltons über die Quaternionen auch bezüglich der Vektorrechnung maßgebend. Die einzelnen Aspekte sind bereits in dem Abschnitt über Quaternionen erwähnt worden. Hamilton hatte selbst große Anstrengungen unternommen, um die erfolgreiche Anwendung der Quaternionen auf physikalische Probleme nachzuweisen, und fand bei der Umsetzung dieses Programms die Unterstützung mehrerer Mathematiker und Physiker. Hervorzuheben sind dabei der Ausbau der Quaternionentheorie durch Peter Guthrie Tait und der Rückgriff James Clark Maxwells auf die Quaternionen in seiner berühmten Abhandlung zur Elektrodynamik *„A Treatise on Electricity and Magnetism“* (1873), obwohl Maxwell insgesamt den Quaternionen eher ablehnend gegenüberstand. Es war dann Josiah Willard Gibbs, der sich völlig von den Quaternionen löste und eine reine Vektorrechnung aufbaute. Er betrachtete nur noch den Vektoranteil $V = ai + bj + ck$ der Quaternion $Q = q + V$ und sah in den Einheiten i, j, k ein System von Einheitsvektoren mit $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$ und $i \cdot j = j \cdot i = i \cdot k = k \cdot i = j \cdot k = k \cdot j = 0$, wobei die multiplikative Verknüpfung

durch das innere Produkt gegeben wurde. 1881 und 1884 gab er als Privatdruck eine vollständige Ausarbeitung der Theorie unter dem Titel *„Vector Analysis“* heraus. Dabei hob er die Analogie seiner Theorie zur Graßmannschen Ausdehnungslehre hervor und maß dieser Verwandtschaft eine größere Bedeutung zu als der Beziehung zu Hamiltons Quaternionen [Gibbs 1881, S. 17]. Zugleich hat er aber später die Unabhängigkeit seiner Forschungen von den Graßmannschen Schriften betont und eine diesbezügliche Beeinflussung verneint.

Die weitere Entwicklung der Vektorrechnung war wesentlich durch die Konkurrenz verschiedener Systeme, die meist auf die Ideen Hamiltons oder Graßmanns zurückgeführt wurden, gekennzeichnet. Man spricht diesbezüglich auch von den Gruppen der Quaternionisten und den Graßmannianern, wobei es in beiden Gruppierungen zu Übertreibungen und zur unzulässigen Verabsolutierung kam, indem die jeweilige Theorie als einzig richtige Basis für eine Beschreibung der Natur angesehen wurde. Insgesamt erschienen in den beiden Jahrzehnten um die Jahrhundertwende über 1000 Arbeiten zur Vektorrechnung. Besonders einflußreich waren die Darstellungen der Theorie durch Oliver Heaviside im ersten Band der *„Electromagnetic Theory“* (1893) und die in Anlehnung daran entstandene *„Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität“* von August Föppl (1894). Noch 1908 beklagte Franz Jung die in der Vektoranalysis vorherrschende große Uneinigkeit in der Form und fuhr dann fort:

„Es spiegelt sich dies beispielsweise sehr deutlich in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften ab. Fast an jeder Stelle wo hier das Rechnen mit Vektoren Verwendung findet, bekommt man eine andere Bezeichnungsweise zu sehen.“ [Jung 1908, S. 383]

In den Anwendungen, speziell in der Physik, herrschte beim Gebrauch der Vektorrechnung jedoch eine größere Klarheit und Einheitlichkeit vor. Vom mathematischen Standpunkt erscheint die abstrakt axiomatische Herangehensweise aus der Sicht der linearen Räume bzw. der Moduln noch besonders interessant, die dann am Anfang des 20. Jahrhunderts zu einer soliden algebraischen Basis der Theorie und zu ihrer festen Integration in die Algebra führte; dies wird ein Gegenstand des folgenden Kapitels sein.

Wesentliche Inhalte und Ergebnisse in der Algebra von 1826–1850

1827	Niels Henrik Abel präzisiert in einer Arbeit über elliptische Funktionen Begriffe der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen und verdeutlicht die Abhängigkeit der Auflösbarkeit vom Grundkörper.
1827	August Ferdinand Möbius konstruiert ein erstes vektorielles System.
1828	Carl Friedrich Gauss publiziert eine Studie zum biquadratischen Reziprozitätsgesetz, eine zweite folgt 1832. Es ist die erste systematische Darlegung zu algebraischen Zahlen.
1829	Niels Henrik Abel beweist die Auflösbarkeit bestimmter Gleichungstypen, u. a. der nach ihm benannten Gleichungen.
1829	Augustin-Louis Cauchy verallgemeinert die Beweise von Euler und Lagrange zur Hauptachsentransformationen auf n Variable und wendet dabei seine Determinantentheorie an.
1829–31	Evariste Galois entwickelt die Grundzüge der nach ihm benannten Theorie und löst das Auflösungsproblem algebraischer Gleichungen.
1829	Justus Günther Grassmann und ein Jahr später Johann Friedrich Christian Hessel benutzen bei der Analyse von Kristallsystemen implizit dreidimensionale Vektorräume.
1830	Evariste Galois formuliert wichtige Resultate zur Theorie der endlichen Körper.
1830	George Peacock stellt in seinem Algebra-Lehrbuch die Idee einer symbolischen Algebra vor, die die Untersuchung der Verknüpfungsregeln der Symbole besonders betont.
1832	Evariste Galois faßt in einem Brief seine Ergebnisse zur Galois-Theorie zusammen.
1832	Peter Gustav Lejeune Dirichlet regt die Analyse der ganzen komplexen Zahlen an.
Ab 1833	Die von Peacock begründete englische algebraische Schule diskutiert verschiedene allgemeine Vorstellungen vom Wesen der Algebra.
1833	William Rowan Hamilton gibt eine arithmetische Begründung der komplexen Zahlen und eine Begründung der Algebra als Wissenschaft der reinen Zeit.
1839–1844	Augustus de Morgan entwickelt in einer Artikelserie zur Begründung der Algebra erste Vorstellungen von hyperkomplexen Systemen.
1841	George Boole formuliert das Grundproblem der Invariantentheorie, unabhängig wirft Gotthold Eisenstein eine analoge Frage auf.
1843	William Rowan Hamilton entdeckt nach jahrelangen Forschungen die Quaternionen, das erste geschlossene nichtkommutative System hyperkomplexer Zahlen.
1843	John Graves entdeckt die Oktaven, die unabhängig 1845 von Arthur Cayley definiert und als Oktonionen publik gemacht werden.
1844	Hermann Günther Grassmann entwickelt in der „Linealen Ausdehnungslehre“ Grundeinsichten zur Theorie n-dimensionaler Vektorräume und zur Algebrentheorie.
1844	Augustin-Louis Cauchy erweitert seine Resultate zur Permutationentheorie und gibt eine erste zusammenfassende Darstellung.
1844	Gotthold Eisenstein gelingt ein erster Beweis des kubischen Reziprozitätsgesetzes. Er studiert wie auch Carl Gustav Jacob Jacobi die Arithmetik ganzer komplexer Zahlen $a + b\rho$ mit einer (primitiven) dritten Einheitswurzel ρ.
1846	Joseph Liouville publiziert den Nachlaß von Evariste Galois.
1846	Peter Gustav Lejeune Dirichlet beschreibt in dem nach ihm benannten Einheitensatz die Struktur der Einheitengruppe.
1846	William Rowan Hamilton deutet die Quaternionen als eine aus Skalar- und Vektoranteil zusammengesetzte Größe.
1847	Ernst Eduard Kummer veröffentlicht erstmals seine seit 1845 entwickelte Theorie der idealen Zahlen.
1849	Joseph Alfred Serret publiziert sein Lehrbuch „Cours d'Algèbre supérieure“ mit einer ausführlichen Darstellung der Permutationstheorie.

7.7 Aufgaben zu Kapitel 7

Aufgabe 7.1.1: Irreduzibiliät von Polynomen, Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks
Sei $\mathbb{Q}[x]$ die Menge aller Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$. Das Polynom $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$ hat den Grad n, wenn $a_n \neq 0$ ist; es heißt normiert, wenn $a_n = 1$ ist. Ein Polynom $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ heißt irreduzibel über $\mathbb{Q}$, wenn in jeder Zerlegung $g(x) = f_1(x) f_2(x)$ mit $f_1(x)$, $f_2(x) \in \mathbb{Q}[x]$ entweder $f_1(x)$ oder $f_2(x)$ ein Polynom vom Grad 0 (also eine Konstante) ist.
Man zeige:

a) Das Polynom $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$ ist das einzige normierte, über $\mathbb{Q}$ irreduzible Polynom, für welches $f(\cos\frac{\pi}{7}) = 0$ ist.
b) Das regelmäßige Siebeneck ist mit Zirkel und Lineal allein nicht konstruierbar.
Hinweis: Man vergleiche hierzu Abschn. 2.5.3 und benutze den Satz: Sei $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ein über $\mathbb{Q}$ irreduzibles Polynom vom Grad $n \neq 2^k$ ($k \in \mathbb{N}_0$ und $f(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{R}$). Dann ist α mit Zirkel und Lineal allein nicht konstruierbar.

Aufgabe 7.1.2: Zum klassischen Polynom der Winkeldreiteilung

Man zeige: Das Polynom $x^3 - 3x - 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Daraus folgt: Die Dreiteilung eines Winkels ist mit Zirkel und Lineal allein im allgemeinen nicht möglich.
Hinweis: Vgl. hierzu Abschn. 2.4.3 und 2.4.4 und Aufgabe 7.1.1.

Aufgabe 7.1.3: Zum klassischen Problem der Würfelverdopplung
Man zeige: Das Polynom $x^3 - 2$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Daraus folgt: Die Verdopplung eines Würfels ist mit Zirkel und Lineal allein im allgemeinen nicht möglich (vgl. 2.4.5).

Aufgabe 7.1.4: Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks
1796 bewies der erst neunzehnjährige C. F. Gauß die Konstruierbarkeit eines regelmäßigen 17-Ecks mit Zirkel und Lineal. Im folgenden wird die Konstruktionsmethode unter Rückgriff auf die Galois-Theorie erläutert. Man vollziehe diesen Gedankengang nach:
Die Eckpunkte des 17-Ecks werden durch die Lösung $\alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{17} + i\sin\frac{2k\pi}{17}$ (k = 0, 1, 2, ... 16) der Kreisteilungsgleichung $x^p = 1$ für $p = 17$ gegeben. Um die Lösungen dieser Gleichung zu ermitteln, schreibt man sie in der Form $x^{17} - 1 = 0$. Diese Gleichung zerfällt in die Gleichungen $x - 1 = 0$ und

$$(*)\ x^{16} + x^{15} + \ldots + x + 1 = 0.$$

Die Lösungen von $(*)$ sind α_1, α_2, ..., α_{16}. Unter ihnen wählen wir eine primitive Einheitswurzel, etwa α_1, und bezeichnen sie mit ε. Dann werden

alle Lösungen von $(*)$ durch die Potenzen ε^k $(k = 1, \ldots, 16)$ von ε dargestellt. Ebenso kann man die Lösungen von $(*)$ darstellen durch die Potenzen ε^{g^j}, wobei g ein erzeugendes Element der primen Restklassengruppe modulo 17 ist und $j = 0, 1, \ldots, 15$. Wir wählen $g = 3$. Die aufeinander folgenden Potenzen von 3 sind dann modulo 17 kongruent zu
1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6.
Die Potenzen ε^k der primitiven Wurzel ε werden entsprechend geordnet
ε, ε^3, ε^9, ε^{10}, ε^{13}, ε^5, ε^{15}, ε^{11}, ε^{16}, ε^{14}, ε^8, ε^7, ε^4, ε^{12}, ε^2, ε^6.
Da $p - 1 = 16$ die Teiler 1, 2, 4, 8, 16 hat, kann man entsprechend eine 16gliedrige Periode, zwei 8gliedrige Perioden, vier 4gliedrige usw. bilden. Die 16gliedrige Periode wird durch die Summe aller Wurzeln ε^i gegeben, die beiden 8gliedrigen Perioden lauten:
$\eta_1 = \varepsilon + \varepsilon^9 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^8 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2$,
$\eta_2 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{11} + \varepsilon^{14} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^6$.
Man beweise, daß diese beiden Perioden die Relationen
$\eta_1 + \eta_2 = -1$, $\eta_1\eta_2 = -4$ erfüllen.
Folglich sind η_1 und η_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + x - 4 = 0$ und daher mit Zirkel und Lineal konstruierbar.
Nun bildet man die vier 4gliedrigen Perioden
$\varphi_1 = \varepsilon + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^4$,
$\varphi_2 = \varepsilon^9 + \varepsilon^{15} + \varepsilon^8 + \varepsilon^2$,
$\varphi_3 = \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{12}$,
$\varphi_4 = \varepsilon^{10} + \varepsilon^{11} + \varepsilon^7 + \varepsilon^6$.
Man zeige analog zu dem obigen Vorgehen, daß diese Perioden die Relationen $\varphi_1 + \varphi_2 = \eta_1$, $\varphi_1\varphi_2 = -1$, $\varphi_3 + \varphi_4 = \eta_2$, $\varphi_3\varphi_4 = -1$ erfüllen. Folglich sind φ_1 und φ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 - \eta_1 x - 1 = 0$, bzw. φ_3 und φ_4 die der Gleichung $x^2 - \eta_2 x - 1 = 0$. Da η_1 und η_2 nach dem vorangegangenen Schritt mit Zirkel und Lineal konstruierbare Größen sind, lassen sich auch die Perioden φ_i auf diese Weise konstruieren.
Analog verfährt man mit den 2- bzw. eingliedrigen Perioden. Auch hier erhält man wieder quadratische Gleichungen, deren Koeffizienten mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, so daß auch die Wurzeln dieser Gleichungen auf diese Weise konstruiert werden können.
Dabei genügt es, die beiden zweigliedrigen Perioden $\phi_1 = \varepsilon + \varepsilon^{16}$ und $\phi_2 = \varepsilon^{13} + \varepsilon^4$ zu betrachten. Sie genügen den Relationen $\phi_1 + \phi_2 = \varphi_1$ und $\phi_1\phi_2 = \varphi_3$ und sind somit die Lösungen der Gleichung $x^2 - \varphi_1 x + \varphi_3 = 0$. Schließlich folgt aus $\varepsilon + \varepsilon^{16} = \phi_1$ und $\varepsilon\varepsilon^{16} = 1$, daß ε und ε^{16} Lösungen der Gleichungen $x^2 - \phi_1 x + 1 = 0$ sind. Somit kann ε mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.
Ergänzende Bemerkung:
Zur Auflösung der Kreisteilungsgleichung $x^p - 1 = 0$ mit $p - 1 = a_1 a_2 \ldots a_m$ genügt es, nacheinander die folgenden Perioden zu betrachten. Zuerst bildet man die a_1 Perioden

$\eta_i = \varepsilon^{g^{i-1}} + \varepsilon^{g^{i-1+a_1}} + \ldots + \varepsilon^{g^{i-1+p-1+a_1}}$ $(i = 1, 2, ...a_1)$.
Diese Perioden sind die Lösungen einer Resolvente, einer zyklischen Galoisschen Gleichung vom Grade a_1. Adjungiert man die Lösungen, d. h. die Größen η_i zu dem Koeffizientenkörper der Ausgangsgleichung, so wird die zugehörige Permutationsgruppe auf einen Normalteiler N_1 reduziert, der genau aus den Permutationen der Wurzeln besteht, bei denen die Perioden η_i ihren Wert nicht ändern.
Nun werden die a_2 Perioden
$\varphi_i = \varepsilon^{g^{(i-1)a_1}} + \varepsilon^{g^{(i-1)a_1+a_1a_2}} + \ldots + \varepsilon^{g^{(i-1)a_1+p-1+a_1a_2}}$ $(i = 1, 2, \ldots, a_2)$
gebildet. Sie sind wieder die Lösung einer zyklischen Resolvente vom Grade a_2. Durch Adjunktion dieser Lösungen reduziert sich die zugehörige Gruppe auf einen Normalteiler N_2 von N_1, der aus den Permutationen besteht, bei denen die Perioden φ_i ungeändert bleiben. Analog fährt man fort, bis die zugehörige Gruppe auf die Einheitsgruppe reduziert ist. [Perron, Bd. 2], [van der Waerden 1985], [Cofman, Bd. 2, S. 29-32]

Aufgabe 7.2.1: Zyklische Permutationsgruppen
Eine Gruppe G heißt zyklisch, wenn all ihre Elemente als Potenzen eines einzigen Elementes a geschrieben werden können. G wird auch die von a erzeugte zyklische Gruppe genannt. Man bestätige die Aussage: Es gibt zyklische Permutationsgruppen beliebiger Ordnung.

Aufgabe 7.4.1: Reguläre Halbgruppen
In einer Halbgruppe G heißt ein Element a regulär, wenn aus $ax = ay$ mit x, y aus G folgt $x = y$; und wenn aus $va = ua$ mit u, v aus G folgt $u = v$. Ist jedes Element von G regulär, so heißt G eine reguläre Halbgruppe. Man zeige, daß jede endliche, reguläre Halbgruppe eine Gruppe ist. [Lugowski, II, S. 4]

Aufgabe 7.4.2: Kriterium für Untergruppen
Man beweise das übliche Untergruppenkriterium: Eine nichtleere Untermenge U einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn gilt:

- mit je zwei Elementen a, b aus U ist auch das Produkt ab ein Element aus U, und
- zu jedem Element a aus U ist auch das inverse Element a^{-1} in U enthalten.

Für endliche Gruppen G kann die zweite Bedingung entfallen. Weshalb?

Aufgabe 7.5.1: Teilbarkeitskriterien von Pascal
Man beweise das von B. Pascal formulierte Teilbarkeitskriterium: Die natürliche Zahl a ist durch die natürliche Zahl m teilbar, wenn m die Zahl $a_0 + a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_nr_n$ teilt. Dabei sind a_i die einzelnen Ziffern in der Dezimaldarstellung von a, d. h. $a = a_0 + 10a_1 + \ldots + 10^n a_n$ mit $0 \leq a_i \leq 9$

für $i = 0, 1, \ldots, n$ und $a_n \neq 0$, und $r_1, r_2, \ldots r_n$ sind die Reste der Zahlen $10, 10a_1, 10a_2, \ldots, 10a_{n-1}$ bei der Division durch m.[Cofman, Bd. 2, S. 3]

Aufgabe 7.5.2: Teilbarkeitskriterium von Eisenstein-Schönemann und Th. Schönemann
Auf G. Eisenstein geht folgendes Teilbarkeitskriterium zurück: Sei R ein Ring, in dem der Satz von der eindeutigen Primelementzerlegung gilt (sog. ZPE-Ring), und $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom vom Grade n mit Koeffizienten aus R. Wenn es in R ein Primelement p gibt, das a_n nicht teilt, aber alle anderen Koeffizienten von f, und wenn außerdem p^2 nicht das Absolutglied a_0 teilt, dann besitzt $f(x)$ im Polynomring $R[x]$ bis auf konstante Faktoren keinen echten Teiler.

Man beweise diesen Satz.

Hinweis: Man führe einen Widerspruchsbeweis, indem man eine Zerlegung für f annimmt und aus den obigen Teilbarkeitsaussagen einen Widerspruch für die Koeffizienten ableitet.

Aufgabe 7.5.3: Kleiner Satz von Fermat
Man beweise das als kleiner Fermatscher Satz bekannte Resultat: Für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl a ist $a^p - a$ durch p teilbar.

Hinweis: Man unterscheide die Fälle, daß p ein Teiler von a ist bzw. p zu a teilerfremd ist.[Cofman, Bd. 2, S. 2]

Aufgabe 7.5.4: Gemeinsamer Teiler zweier Polynome Bezüglich eines gemeinsamen Teilers zweier Polynome $f(x)$ und $g(x)$ aus $R[x]$ (R ein kommutativer, nullteilerfreier Ring und K der Quotientenkörper von R) beweise man die folgende Aussage:
Sind f und g vom Grad n bzw. m, so haben sie genau dann einen nichtkonstanten gemeinsamen Teiler $t(x)$ aus $K[x]$, wenn es in $K[x]$ zwei Polynome $h(x) \neq 0$ und $k(x) \neq 0$ gibt, die höchstens den Grad $n-1$ bzw. $m-1$ haben und der Gleichung $f(x)k(x) - g(x)h(x) = 0$ genügen.

Hinweis: Man nehme die Polynome in der Form

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$
$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$
$h(x) = c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}$
$k(x) = d_0 x^{m-1} + d_1 x^{m-2} + \ldots + d_{m-1}$

an, setze sie in die angegebene Gleichung ein und leite durch Koeffizientenvergleich ein Gleichungssystem für die unbekannten Größen d_0, ..., d_{m-1}, $-c_0$, ..., $-c_{n-1}$ ab. Die Transponierte der Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystem ist die sog. Resultante oder Sylvestersche Determinante von f und g. Man überlegt sich leicht, daß die Existenz eines gemeinsamen Teilers von f und g mit dem Verschwinden ihrer Resultante gleichwertig ist.

Aufgabe 7.6.1: Eigenschaften von Matrizen

Man zeige:

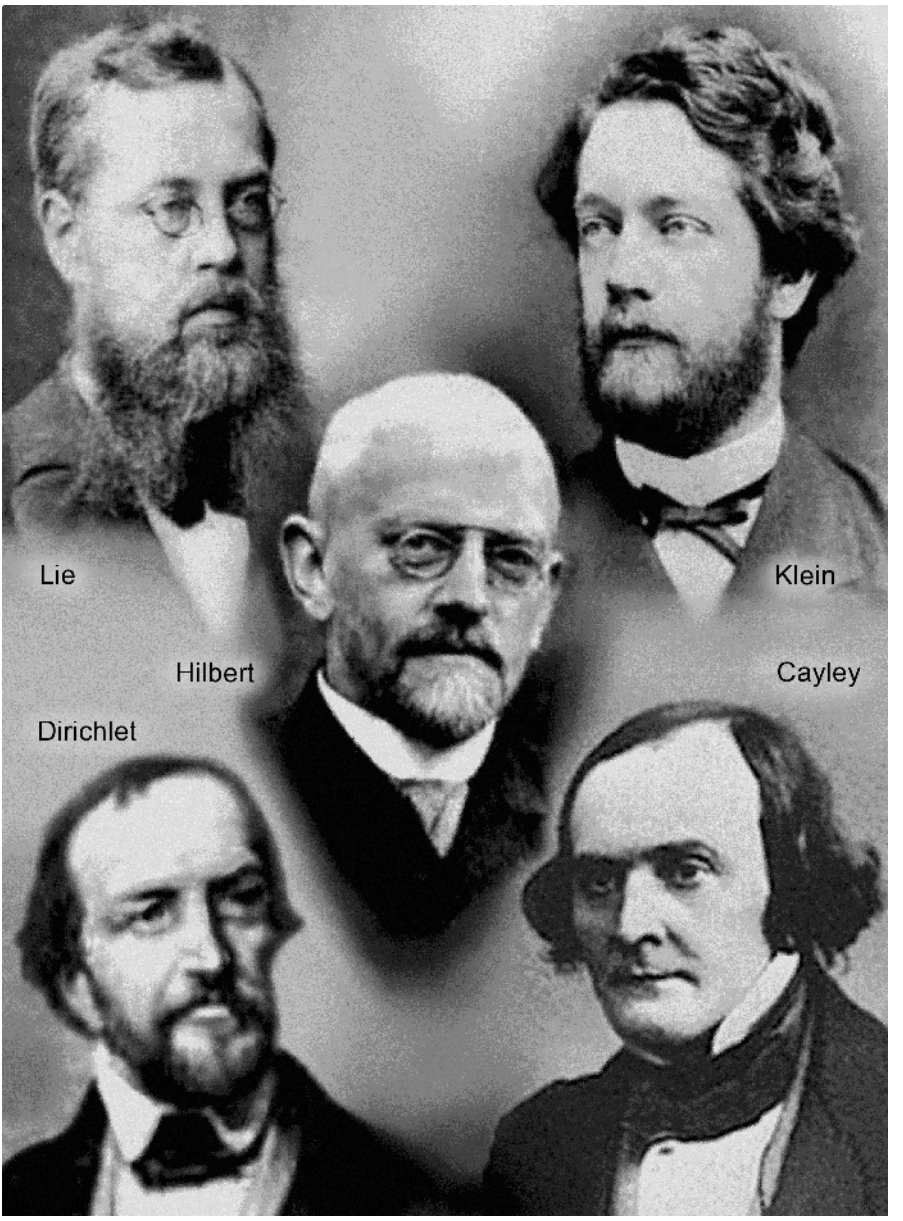
a) Die Diagonalelemente einer schiefsymmetrischen Matrix sind Null.
b) Die von Null verschiedenen Eigenwerte einer reellen, schiefsymmetrischen Matrix sind rein imaginär.
c) Seien A und B reelle Matrizen, A symmetrisch, B schiefsymmetrisch. Dann ist $C = A + iB$ hermitesch und hat reelle Eigenwerte.

Aufgabe 7.6.2: Realität von Eigenwerten
Man beweise den in etwas vereinfachter Form auf Hermite zurückgehenden Satz:
Die Gleichung $|A - \lambda B| = 0$ mit hermiteschen Matrizen A und B hat lauter reelle Wurzeln, wenn B positiv oder negativ definit ist (also die hermitesche Form $\overline{x}' Bx$ für alle komplexen Vektoren x mit $\overline{x}' x > 0$ entweder stets positiv oder stets negativ ist).
Bemerkung: Dieser Satz ist sowohl in der Theorie der Hauptachsentransformation, bei der Untersuchung kleiner Schwingungen als auch beim Studium säkularer Planetenbewegungen von Bedeutung.
Hinweis: Man bemerkt zunächst, daß die Gleichung stets von n-tem Grade ist, da der Koeffizient von λ^n die mit $(-1)^n$ multiplizierte Determinante der Matrix B ist. Wegen der Definitheit von B ist diese Determinante von Null verschieden. [Perron, Algebra II, S. 20]

Aufgabe 7.6.3: Abschätzung der charakteristischen Zahlen
Bei verschiedenen Aufgaben spielt die charakteristische Gleichung einer Matrix eine wichtige Rolle, und häufig ist es vorteilhaft eine Abschätzung der Lösungen, der sog. charakteristischen Wurzeln (oder Zahlen), dieser Gleichung zu haben. Ist $(a_{i,j}) = A$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ eine quadratische Matrix und I die Einheitsmatrix, so bezeichnet man die Beziehung $(A - \lambda I) = 0$ als die charakteristische Gleichung von A. Man zeige:
Für jede charakteristische Wurzel λ der Matrix A gilt $|\lambda| \leq K$, wobei $K = \max\limits_{l \leq i \leq n} \frac{|a_{i1}|p_1 + |a_{i2}|p_1 + \ldots + |a_{in}|p_n}{p_i}$ mit beliebigen positiven Zahlen p_i, $i = 1, \ldots, n$ ist.

Aufgabe 7.6.4: Austauschsatz von Steinitz
Man beweise den Steinitzschen Austauschsatz für Vektorräume: Seien V ein endlicher Vektorraum über dem Körper K mit einer Basis aus n Vektoren und $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ ein System von m linear unabhängigen Elementen (Vektoren) in V. Dann gibt es auch eine Basis von V aus n Vektoren, unter denen v_1, v_2, …, v_m alle vorkommen. Mit anderen Worten: Man kann m Basisvektoren durch die v_i austauschen.

8 Die Entwicklungen der Algebra von 1850 bis 1880



1850	R. Clausius formuliert den 2. Hauptsatz der Thermodynamik.
1851	Erste Weltausstellung in London
1852	Charles Louis Napoléon läßt sich nach einem Staatsstreich (1851) als Napoleon III. zum Kaiser von Frankreich wählen und begründet das zweite Kaiserreich.
1852	Beginn einer verstärkten europäischen Einwanderung in die USA
1852	J. Meyer vollendet sein 52bändiges „Großes Konversations-Lexikon“.
1853–56	Krimkrieg zwischen Rußland und der Türkei, Frankreich und Großbritannien
1853–56	Afrikadurchquerung Livingstones mit Entdeckung der Viktoria-Fälle
1854	Der erste Band von J. und W. Grimms „Deutsches Wörterbuch“ erscheint.
1854	B. Riemann entwickelt in seinem Habilitationsvortrag Grundideen der Theorie (differenzierbarer) Mannigfaltigkeiten
1855	J. C. Maxwell veröffentlicht eine erste Arbeit zur elektromagnetischen Feldtheorie.
1857	Erste Weltwirtschaftskrise
1857	L. Pasteur publiziert erste Arbeiten zur Bakteriologie.
1858	Entdeckung der Kathodenstrahlen durch J. Plücker
1858	Begründung der Zellular-Pathologie durch R. Virchow
1859	Italienischer Befreiungskrieg unter G. Garibaldi
1859	R. Bunsen und G. Kirchhoff schaffen die Grundlagen der Spektralanalyse.
1859	Ch. Darwin veröffentlicht die Grundzüge seiner Evolutionstheorie.
1861–65	Sezessionskrieg in den USA. Sieg der industrialisierten Nordstaaten und Abschaffung der Sklaverei
1864	Preußisch-Österreichischer Krieg gegen Dänemark
1864	Genfer Konvention über die humane Behandlung von Kriegsgefangenen
1865	Gründung der BASF in Ludwigshafen
1865–70	Krieg von Brasilien, Argentinien und Uruguay gegen Paraguay
1865	G. Mendel begründet mit der Publikation grundlegender Resultate die Genetik.
ca. 1865	In der französischen Malerei beginnt die Entwicklung der Stilrichtung des Impressionismus.
1866	Krieg Preußens gegen Österreich und den Deutschen Bund
1867	Goethes Faust I erscheint als erster Band in Reclams Universal-Bibliothek.
1867	K. Marx faßt im ersten Band von „Das Kapital“ wichtige Erkenntnise der politischen Ökonomie zusammen.
1868	E. Haeckel macht den Entwicklungsgedanken mit populärwissenschaftlichen Schriften in der Bevölkerung bekannt.
1869	D. I. Mendelejev und L. Meyer entdecken unabhängig voneinander das Periodensystem der Elemente.
1869	Fertigstellung des Suez-Kanals nach zehnjähriger Bauzeit
1870/71	Deutsch-Französischer Krieg
1871	Wilhelm I. wird deutscher Kaiser.
1871	Ch. Darwin wendet die Evolutionstheorie auf die Abstammung des Menschen an.
1873	Deutschland, Rußland und Österreich verbünden sich im Drei-Kaiser-Bündnis.
1874	Gründung des „Allgemeinen Postvereins“ in Bern
1874	R. Wagner vollendet mit der Oper „Götterdämmerung“ den „Ring des Nibelungen“.
1875	Gründung der Sozialistischen Arbeiterpartei Deutschlands

8.0 Vorbemerkungen

Als am ersten Mai 1851 die erste Weltausstellung im neuerrichteten Kristallpalast im Londoner Hyde Park eröffnet wurde, erhielt alle Welt den neuen Zeitgeist vor Augen geführt. Die Industrielle Revolution hatte zu einer grundlegenden Umgestaltung der Lebensverhältnisse geführt, der Einsatz von Maschinen hatte die menschlichen Möglichkeiten in ungeahnter Weise vervielfältigt. Die 563 Meter lange Ausstellungshalle war eigens für die Weltausstellung aus vorgefertigten, genormten Bauteilen errichtet worden und demonstrierte eindrucksvoll die neuen Möglichkeiten der Architektur. Die vielfältigen Erfolge der Industrie und der Wissenschaften erzeugten unter den Menschen einen nachhaltigen Fortschrittsoptimismus, der zu einem Charakteristikum des ganzen Jahrhunderts wurde. Die Naturwissenschaften und die Mathematik entwickelten sich zum geistigen Träger dieses Optimismus. Mit der sich entwickelnden Industrialisierung im Rahmen der Industriellen Revolution hatte sich in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts ein qualitativ neues Verhältnis zwischen den Naturwissenschaften einschließlich der Mathematik und der materiellen Produktion herausgebildet, das für die Mathematik eine Flut von neuen Anregungen und Anwendungsmöglichkeiten bereit hielt. War diese Beziehung zunächst durch die Anwendung naturwissenschaftlicher und mathematischer Kenntnisse für die Entwicklung der Produktion gekennzeichnet, so erreichte das Wechselverhältnis zur Produktion nach der Jahrhundertmitte eine neue Qualität, indem man zunehmend von einer Verwissenschaftlichung der Produktion sprechen kann. Naturwissenschaftliche Ergebnisse wurden jetzt immer mehr zur Grundlage der Produktion. Die dabei erzielten Erfolge veranlaßten wiederum zahlreiche Unternehmer, verstärkt direkt oder indirekt Mittel für die Förderung der Wissenschaften zur Verfügung zu stellen.

Die Naturwissenschaften und die Mathematik nahmen unter den veränderten Bedingungen eine stürmische Entwicklung und entfalteten zugleich eine innere Dynamik. Die Naturwissenschaften und insbesondere die Mathematik wurden zum Leitbild für die wissenschaftliche Methode, für wissenschaftliches Denken. Bildeten die Naturwissenschaften einerseits verstärkt die Grundlage der industriellen Produktion, so lösten sich andererseits große Teile der einzelnen Disziplinen immer mehr aus der Arbeit an der Schaffung neuer Verfahren zur materiellen Produktion heraus und formierten sich in abstrakten Wissenssystemen. Der große Zuwachs an wissenschaftlichen Resultaten führte zu einem starken Ausbau der vorhandenen und zur Entstehung mehrerer neuer Spezialgebiete in den einzelnen naturwissenschaftlichen Disziplinen und der Mathematik. Untrennbar mit diesem umfassenden Erkenntniszuwachs verbunden war eine beträchtliche Zunahme der personellen Basis: die Zahl der Mathematiker, Chemiker, Physiker etc. vergrößerte sich enorm. Zugleich traten zu den bisher bestehenden Zentren der mathematischen Forschung – Frankreich, England und Deutschland – mit Italien und Rußland neue hinzu.

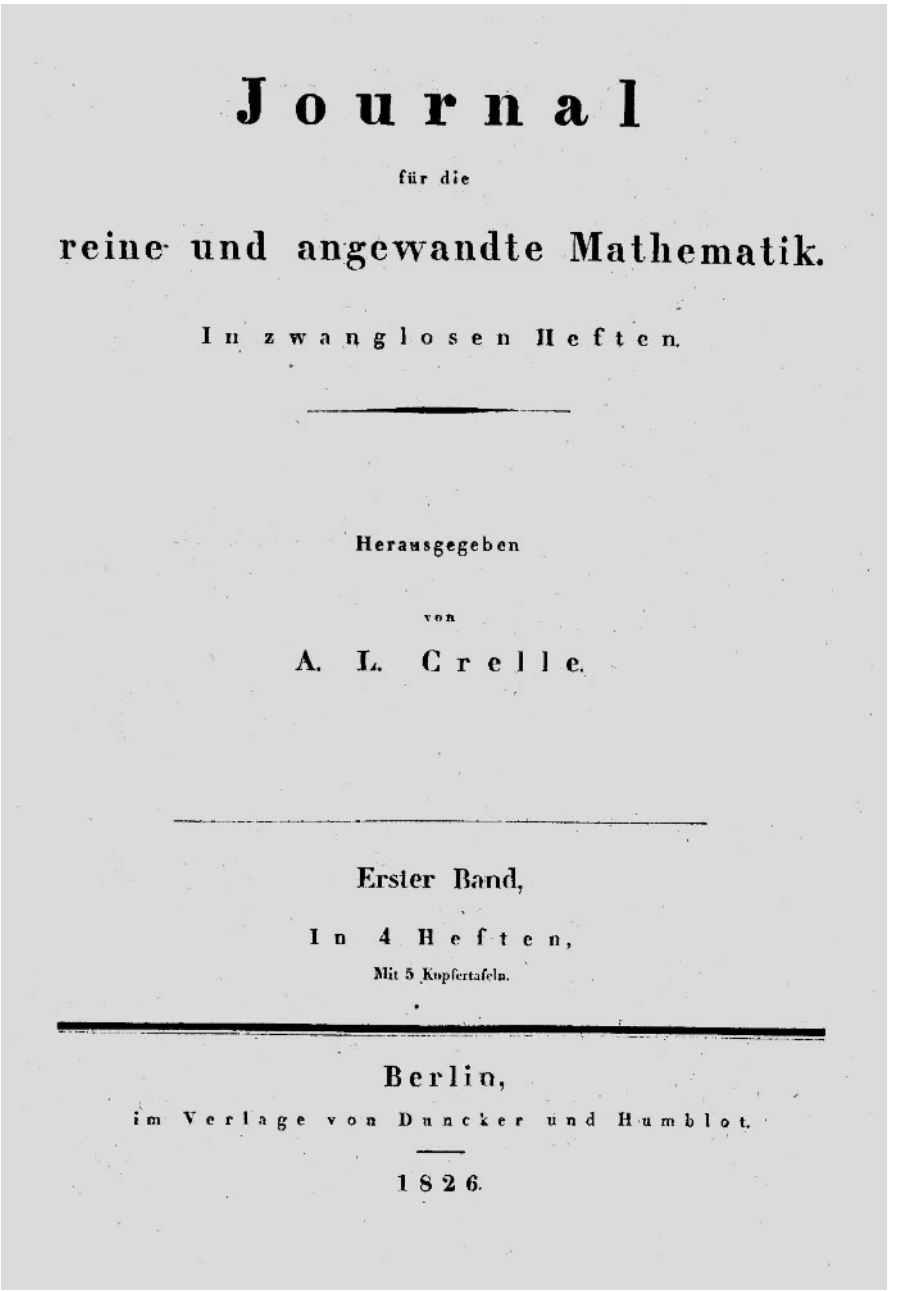
Gestützt wurde dieser Prozeß der Neuformierung der einzelnen naturwissenschaftlichen Disziplinen und der Mathematik durch eine quantitative Zunahme der höheren Bildungseinrichtungen. Es entstanden weitere Universitäten und polytechnische Schulen sowie höhere allgemeinbildende Schulen, aber auch nationale und lokale Akademien, nationale und später sogar internationale Vereinigungen und Gesellschaften, die den Kenntnisaustausch auf verschiedenen Wissensgebieten förderten.

Auf mathematischem Gebiet wurden beispielsweise 1864 bzw. 1865 die Moskauer bzw. die Londoner Mathematische Gesellschaft gegründet, die bald nationalen Charakter annahmen. 1872 formierte sich die Französische Mathematische Gesellschaft, 1891 die Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Sehr rasch wurde dann auch die Notwendigkeit zur Schaffung internationaler Organisationsformen empfunden. Bereits 1897 fand der I. Internationale Mathematikerkongreß in Zürich statt.

Die größere Anzahl an allgemeinbildenden höheren Schulen führte sehr bald zu einem erhöhten Bedarf an Lehrern für Mathematik bzw. naturwissenschaftliche Fächer. Die Aufgabe, diese Lehrer auszubilden, wurde von den Philosophischen Fakultäten der Universitäten übernommen, die sich mit der Wahrnehmung der neuen Funktion endgültig von ihrem Status als Vorbildungsanstalt für das Studium der Theologie, Medizin oder Rechtswissenschaften befreiten und eine größere Eigenständigkeit erreichten. Insbesondere in der Mathematik brachte dieser Prozeß eine deutliche Zunahme in der Anzahl der Professorenstellen und in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts mit der Gründung von Instituten bzw. Seminaren eine starke institutionelle Fundierung mit sich. Beides wirkte sehr stimulierend für die Entwicklung der mathematischen Forschung.

Der Aufschwung der naturwissenschaftlichen und mathematischen Forschung erforderte auch neue Möglichkeiten des Informationsaustausches. Die Spezialisierung zwischen den einzelnen Disziplinen war so weit fortgeschritten und der Wissenszuwachs so groß, daß die Gründung zahlreicher fachspezifischer Zeitschriften möglich und notwendig wurde. In mehreren Fällen übernahmen lokale oder nationale Verbände und Gesellschaften die Herausgeberschaft, doch eine ganze Reihe bedeutender Zeitschriften verdankte ihre Entstehung dem Weitblick und dem Engagement einzelner Verleger.

Während die 1810 von Joseph-Diaz Gergonne edierte Zeitschrift *„Annales des Mathématiques Pures et Appliquées“* als erste, nur der Mathematik gewidmete Zeitschrift nur bis 1831 erschien, hat das 1826 von August Leopold Crelle begründete *„Journal für die reine und angewandte Mathematik“* noch heute Bestand. Der erste Artikel in Crelles Journal, wie die Zeitschrift kurz hieß, war übrigens Abels Beweis für die Unmöglichkeit der Auflösung der allgemeinen Gleichung 5. Grades in Radikalen. Mit Liouvilles *„Journal des Mathématiques Pures et Appliquées“* (1836), Darboux *„Bulletin des Sciences Mathématiques“* (1870), den *„Mathematischen Annalen“* (1868), dem *„American Journal of Mathematics“* (1878) und den *„Acta Matematica“* (1882)



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Erster Band,

In 4 Heften,

Mit 5 Kupfertafeln.

Berlin,

im Verlage von Duncker und Humblot.

1826.

Abb. 8.0.1. Titelblatt des ersten Heftes von „Crelles Journal“ 1826

seien nur einige Zeitschriften genannt, die im Laufe des Jahrhunderts entstanden und sich zu international bedeutenden Publikationsorganen auf dem Gebiet der Mathematik entwickelten.

Schon zu Beginn des Jahrhunderts hatte sich ein Wandel in der Publikationssprache vollzogen. Das Latein als allgemeine Wissenschaftssprache wurde durch die einzelnen Nationalsprachen abgelöst. Dies führte zunächst zu einigen Sprachbarrieren, wenn man von den relativ weitverbreiteten Sprachkenntnissen in Französisch absieht. Das Erlernen der „modernen" Fremdsprachen gehörte lange Zeit nicht zum Ausbildungsbestandteil an allgemeinbildenden Schulen bzw. Hochschulen, blieb also der privaten Initiative überlassen, und zur Herausbildung einer oder einiger bevorzugter Publikationssprachen war es noch ein langer Weg. So erlernte Gauß noch im hohen Alter die russische Sprache, um die Arbeiten Lobatschewskijs zur nichteuklidischen Geometrie studieren zu können. Die Bevorzugung der Nationalsprache bei der Publikation wissenschaftlicher Arbeiten führte u. a. dazu, daß über mehrere Jahrzehnte die einzelnen Resultate teilweise verspätet oder gar nicht im Ausland zur Kenntnis genommen wurden und es wiederholt zu Mehrfachentdeckungen kam.

8.1 Weitere Fortschritte im Verständnis der Galois-Theorie

Um die Mitte des 19. Jahrhunderts zeichnete sich in der algebraischen Forschung eine Reihe neuer Themenfelder ab, deren Bearbeitung bald zu einem grundlegenden Wandel in dieser Disziplin führen sollte. Aber noch befand man sich am Anfang dieser Entwicklung. Die zusammenfassenden Darstellungen und die Lehrbücher der Algebra waren noch ganz in dem seit Jahrzehnten benutzten Stil abgefaßt bzw. waren nur unwesentlich veränderte Neueditionen der um die Jahrhundertwende entstandenen Erstausgaben. Auch das neue 1849 erschienene Lehrbuch *„Cours d'Algèbre supérieure"* von Joseph Alfred Serret, das fast bis zum Ende des Jahrhunderts eine dominierende Stellung einnahm, folgte in der Erstauflage dieser Tradition. Den Inhalt der Algebra definierte er weiterhin als Gleichungstheorie:

„L'Algèbre est, à proprement parler, l'Analyse des équations; les diverses théories partielles qu'elle comprend se rattachent toutes, plus ou moins, à cet objet principal." [Serret 1849, S. 1]

Die folgenden Lektionen verdeutlichen Serrets Bemühen, neuere Ergebnisse zu integrieren und den adäquaten Eindruck vom Stand der aktuellen Forschung zu vermitteln. Er behandelte u. a. Ergebnisse von Gauß, Lagrange, Cauchy und Abel , Galois erwähnte er nur in einer Fußnote bezüglich eines Satzes über die Irreduzibilität einer Gleichung vom Primzahlgrad. Es gelang Serret jedoch noch nicht, dem gesamten Stoff eine neue, der inneren Logik

folgende Systematik zu geben und ihn auf eine entsprechende begriffliche Basis zu stellen. Er blieb in seinen Darlegungen deutlich dem jeweiligen Autor in Inhalt und Terminologie verpflichtet. Doch ein solcher Umschwung konnte von Serret auch objektiv nicht geleistet werden, dazu bedurfte es noch der Aufklärung weiterer struktureller Zusammenhänge, insbesondere des vollen Verständnisses der Galois-Theorie, von dem man zu diesem Zeitpunkt noch weit entfernt war. Die nachfolgenden Auflagen von Serrets Algebrabuch vermitteln einen guten Eindruck von dem wachsenden Verständnis für die Galois-Theorie sowie den strukturellen Einsichten und lassen den beginnenden Wandel deutlich werden. Dazu ist es notwendig, den Faden der von Galois und Abel ausgehenden Entwicklung (vgl. Abschn. 7.1) wieder aufzunehmen und die weitere Rezeption der Galoisschen Arbeiten zu untersuchen.

Die Publikation der Galoisschen Schriften hatte in den europäischen Ländern eine sehr unterschiedliche Wirkung. Die erste Präzisierung der Galois-Theorie mit einer Vervollständigung der Beweise präsentierte der Italiener Enrico Betti ab 1851. Er hatte 1846 sein Studium an der Universität Pisa mit der Promotion abgeschlossen und wirkte nach der aktiven Beteiligung am italienischen Freiheitskampf ab 1849 zunächst als Professor an einem Lyzeum, dann an der Universität Pisa. Dort wurde er zum Mitbegründer der neuen italienischen Mathematikerschule, war aber auch weiter politisch aktiv. Die wohl wichtigsten Arbeiten zur Galois-Theorie [Betti 1852], [Betti 1855] erschienen 1852 und 1855. Dabei markiert Betti den Übergang zu jenen Kommentatoren der Galoisschen Schriften, die nicht nur ein Ausfüllen der Beweislücken im Auge hatten, sondern sich zunehmend der Herausarbeitung des algebraischen Gehalts der Theorie widmeten. Die gruppentheoretischen Hilfsmittel, d. h. die Betrachtungen über Permutationen, die Definition der Permutationsgruppe und deren Eigenschaften, wurden den Darlegungen zur Auflösungstheorie vorangestellt. Mit den Nachweis, daß die von Galois definierte Gleichung der Gruppe tatsächlich eine Permutationsgruppe ist, gelang Betti ein wesentlicher Beitrag zur algebraischen Durchdringung der Theorie.

8.1.1 Die Rezeption der Galois-Theorie in Deutschland

In Deutschland war es der Gymnasiallehrer Theodor Schönemann, der sich auf Veranlassung von Carl Gustav Jacob Jacobi mit den Arbeiten Galois' befaßte und 1853 eine der von Galois gelassenen Lücken in den Beweisen genauer ausführte. Schönemann hatte sich seit Ende der 30er Jahre vor allem mit Funktionenkongruenzen beschäftigt und unabhängig von Gauß und Galois 1846 wichtige Einsichten in die Theorie der Galois-Felder in der Sprache der Kongruenzen publiziert. Bei aller inhaltlichen Verwandtschaft mit den entsprechenden Galoisschen Arbeiten erreichte er nicht dessen Abstraktionsniveau. Auch in der Arbeit über die Wurzeln der Gleichungen hat er den algebraischen Gehalt der Theorie nicht erfaßt, so daß er kaum zu deren besserem Verständnis beitrug. Die neueren Ergebnisse zur Permutationentheorie

ließ er ebenfalls unberücksichtigt. Etwa zum gleichen Zeitpunkt, wahrscheinlich während des Paris-Aufenthalts 1853, hat sich Leopold Kronecker intensiv mit dem Galoisschen Werk bekannt gemacht. Er konzentrierte sich dann auf die Aufklärung der körpertheoretischen Aspekte des Auflösungsproblems. Dies geschah auf der Basis einer genauen Kenntnis der in der Arithmetik ganzer algebraischer Zahlen erzielten Ergebnisse, speziell der Forschungen Kummers und dessen *„idealen Zahlen“* (vgl. Abschn. 7.5.2). Kronecker selbst hatte sich 1845 in seiner Dissertation mit komplexen Einheiten in gewissen Kreisteilungskörpern beschäftigt und war zu Ergebnissen gekommen, die enge Beziehungen zu Kummers Theorie der idealen Zahlen aufwiesen. Außerdem hatte er auch die Arbeiten Abels zur Gleichungstheorie studiert. Bei der Beschäftigung mit dem Auflösungsproblem war er nun bestrebt, die in den arithmetischen Studien gewonnenen Ideen mit den algebraischen Untersuchungen zur Galois-Theorie zu verbinden. Diese Vereinigung der in beiden Gebieten enthaltenen impliziten Vorstellungen zum Körperbegriff ließ Kronecker frühzeitig die zentrale Rolle dieses Begriffs für Algebra und Zahlentheorie erkennen. In der Arbeit *„Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen (I. Abh.)“* würdigte er zunächst die Leistungen von Abel und Galois, doch, so seine Kritik, wurde die Natur der auflösbaren Gleichungen selbst durch die angegebenen Kriterien, vor allem durch das Galoissche, mehr verdeckt als erhellt. Er fuhr fort:

„Und so blieben die auflösbaren Gleichungen selbst bisher in einem gewissen Dunkel, ... welches nur durch Auflösung des Problems, alle auflösbaren Gleichungen zu finden, vollständig aufgeklärt werden konnte. Denn alsdann hat man nicht bloß unendlich viele neue auflösbare Gleichungen, sondern eben alle möglichen gewissermaßen vor Augen und kann an der entwickelten Form ihrer Wurzeln alle ihre Eigenschaften auffinden und erweisen.

Es ist nun aber, wie gesagt, bei obigem Probleme noch erforderlich, den Zusammenhang zwischen dem gesuchten algebraischen Ausdruck und den Coëfficienten der Gleichung zu bestimmen; deshalb ist die Aufgabe vielmehr dahin zu stellen:

Die allgemeinste algebraische Function irgend welcher Größen $A, B, C, ...$ *zu finden, welche einer Gleichung von einem gegebenen Grade genügt, deren Coëfficienten rationale Functionen jener Größen sind.“* [Kronecker 1895, Bd. 4, S. 3-4]

Algebraische Funktion ist hier im Sinne von Radikalausdruck zu verstehen und rationale Funktion ist eine solche mit ganzzahligen oder rationalen Koeffizienten. Kronecker ging also implizit von dem Erweiterungskörper $\mathbb{Q}(A, B, C, ...)$ über den rationalen Zahlen als Koeffizientenkörper der Gleichung aus. Da er keine Aussagen über die Größen A, B, C, ... machte, könnte man diese sowohl als Unbestimmte, als auch als algebraische Irrationalitäten interpretieren, so daß der Erweiterungskörper auch ein Funktionenkörper sein kann. In späteren Arbeiten hat Kronecker diesen Fall explizit in seine Betrachtungen mit eingeschlossen.

Beim Studium der vorgelegten auflösbaren Gleichung vom Primzahlgrad präzisierte Kronecker zunächst die Abelsche Vorgehensweise, indem er etwa beim Begriff der Irreduzibilität und bei der von Abel angegebenen Formel für die Wurzeln der Gleichung klar die rationale Abhängigkeit von dem zugrunde gelegten Koeffizientenkörper angab, und kam dann zu einer genaueren Charakterisierung der Wurzelgrößen sowie zu folgendem Resultat:

„jede auflösbare Gleichung von einem Primzahlgrade ist eine Abelsche, wenn man eine Größe r_1 als bekannt annimmt, welche selbst Wurzel einer Abelschen Gleichung ist; ...“ [Kronecker 1895, Bd. 4, S. 7]

Unter Abelscher Gleichung verstand Kronecker eine Gleichung, für die es eine ganze rationale Funktion $\Theta(x)$ mit rationalen Funktionen der Größen A, B, C, ... als Koeffizienten gab, so daß für die Wurzeln x_i der Gleichung galt: $x_1 = \Theta(x_n)$, und $x_{k+1} = \Theta(x_k)$ für $k = 1, 2, ...n-1$. In moderner Terminologie bedeutet dies, daß jede auflösbare und über $\mathbb{Q}(A, B, C, ...)$ irreduzible Gleichung vom Primzahlgrad nach Adjunktion einer Wurzel einer geeigneten über $\mathbb{Q}(A, B, C, ...)$ zyklischen Gleichung selbst zyklisch wird. Daraus leitete Kronecker dann eine Formel für die Wurzeln der vorgelegten Gleichung ab, welche die Bildung der Wurzeln aus den Ausgangsgrößen angab. Die Arbeit gipfelte in dem Satz, *„daß die Wurzel jeder Abelschen Gleichung mit ganzzahligen Coëfficienten als rationale Function von Wurzeln der Einheit dargestellt werden kann; ...“* [Kronecker 1895, Bd. 4, S. 10], d. h. jeder Körper, der über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abelsch ist, ist ein Teilkörper eines Kreisteilungskörpers. Zusammen mit der Umkehrung, daß jeder Teilkörper eines Kreisteilungskörpers abelsch ist, bildet der Satz eine Vermutung, die Kronecker nach eigener Aussage seit Ende der 40er Jahre beschäftigte und die für die Entwicklung der Theorie algebraischer Zahlen von großer Bedeutung war. Die Aussage wurde erstmals von Heinrich Weber 1886 bewiesen und ist heute als Satz von Kronecker-Weber bekannt.

Nach der besprochenen Arbeit hat Kronecker 1856 eine zweite Abhandlung gleichen Titels publiziert, in der er sich auf reelle Erweiterungskörper des Körpers der rationalen Zahlen konzentrierte. Unter Präzisierung einer Schlußweise von Galois bewies er u. a., daß für eine über einem reellen Erweiterungskörper $\mathbb{Q}(A, B, C, ...)$ auflösbare Gleichung vom Primzahlgrad $\mu \neq 2$ entweder alle Wurzeln reell sind oder nur eine einzige. Zwischen 1854 und 1862 erschienen weitere Arbeiten Kroneckers, die sich mit Kreisteilungsgleichungen bzw. den algebraischen Gleichungen beschäftigten, denen die singulären Moduln bei der komplexen Multiplikation elliptischer Funktionen genügen müssen. Ein Teil der darin enthaltenen Ergebnisse ging ebenfalls auf die Ende der 40er Jahre durchgeführten mathematischen Studien zurück. Die zeitlich parallele Beschäftigung mit den abelschen Gleichungen und der komplexen Multiplikation elliptischer Funktionen veranlaßte Kronecker vermutlich, seine Forschung auf einen imaginär-quadratischen Grundkörper auszudehnen. Er stellte dabei folgende Hypothese auf, für die auch die Aussage über die Beziehungen zwischen abelschen Körpern und Kreisteilungskörpern als An-

regung angesehen werden kann: Ist die Gleichung $f(x) = 0$ in bezug auf den imaginär-quadratischen Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ abelsch, so lassen sich alle Wurzeln der Gleichung als rationale Funktion (in bezug auf K) von $\sqrt{-d}$, gewissen Einheitswurzeln und gewissen singulären Moduln ausdrücken. Diese Vermutung hat Kronecker, als er sie rund 30 Jahre später publizierte, als seinen Jugendtraum bezeichnet, so daß sie als *„Kroneckers Jugendtraum"* bekannt wurde. Sie wurde nach einer Präzisierung 1920 von Teiji Takagi bewiesen.

Diese Forschungen verdeutlichen, wie eng algebraische und zahlentheoretische Aspekte in dieser Phase des Kroneckerschen Schaffens verknüpft waren. Kronecker sah in seinen Ergebnissen zugleich einen Beitrag zur Klassifizierung der Irrationalitäten, dabei hatte er die Abhängigkeit dieser Klassifizierung von der Wahl des Grundkörpers klar erkannt. Im Vergleich zu seinen Vorgängern, Abel und Galois, hob er den Körperbegriff deutlich als zentralen Begriff hervor und wählte ihn als Ausgangspunkt der Untersuchungen. In seinen Arbeiten ging er jedoch zunächst nicht über den Gebrauch des impliziten Körperbegriffs hinaus: die Elemente des Körpers werden konstruktiv bestimmt, aber nicht zu einem neuen Objekt zusammengefaßt. In späteren Veröffentlichungen berichtete er jedoch, daß er in den 60er Jahren eine solche Zusammenfassung der durcheinander rational ausdrückbaren Größen in den Blick genommen hatte und bereits 1865/66 darüber in Vorlesungen vortrug. Diese Weiterentwicklung des Körperbegriffs durch Kronecker wird in einem späteren Abschnitt zu analysieren sein.

8.1.2 Die Darstellung der Galois-Theorie durch Joseph Alfred Serret und Camille Jordan

In Frankreich widmeten sich neben Liouville vor allem Charles Hermite und Joseph Alfred Serret der Fortsetzung von Galois' Ideen. Dabei wurde dieser Prozeß dadurch belastet, daß der Auflösungstheorie die Theorie der Permutationsgruppen in der von Cauchy festgefügten Form relativ eigenständig gegenüberstand. Hermite erkannte 1851 eine von Victor Puiseux betrachtete Menge von Permutationen als Galois-Gruppe einer Gleichung. Puiseux studierte die Entwicklung der durch $f(z, w) = 0$ definierten algebraischen Funktion $w(z)$ und hatte nachgewiesen, daß die Wurzeln w_1, ..., w_n der Gleichung $f(z, w) = 0$ in Potenzreihen von $z - z_0$ entwickelbar waren. Setzte man diese Wurzeln längs eines geschlossenen Weges von z_0 nach z_0 fort, wobei z_0 kein Verzweigungspunkt war und der Weg keine solchen Punkte enthielt, so lieferte die Fortsetzung eine Permutation der Wurzeln w_i. Diese Permutationen bilden eine Gruppe, ohne daß Puiseux den Begriff benutzte, und Hermite stellte 1851 klar heraus, daß bei gewissen Voraussetzungen über den zugrunde gelegten Rationalitätsbereich diese Gruppe genau die Galois-Gruppe der Gleichung $f(z, w) = 0$ ist.

Serret, der seit 1849 als Professor an der École Polytechnique lehrte, hatte 1854 für die zweite Auflage seines Algebralehrbuchs *„Cours d'Algèbre*

supérieure“ ein Kapitel zur Galois-Theorie vorbereitet, stellte es dann doch kurzfristig mit Rücksicht auf Liouville zurück und beschränkte sich darauf, die Leistungen Galois' im Vorwort und in einigen Passagen des Buches zu loben sowie seinen Kommentar mit den Hinweis auf eine mögliche Publikation zu erwähnen. Dieser Kommentar fand dann Aufnahme in die dritte, 1866 erschienene Auflage, die damit die erste lehrbuchmäßige Darstellung der Galois-Theorie enthielt. Die Würdigung von Galois' Leistung, die Serret, ergänzt durch Hinweise auf die neueren Ergebnisse von Hermite, Kronecker, Betti u. a., in die dritte Auflage unverändert übernahm, zielte aber noch ganz auf die Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen. Er zitierte wichtige Einzelresultate, füllte Beweislücken aus oder vereinfachte die Beweise, aber er sah in der Galoisschen Behandlung des Problems keine neue Methode. Die Entdeckung des Gruppenbegriffs und der Normalteilereigenschaft sowie deren prinzipielle Rolle für die Auflösungstheorie und darüber hinaus für die ganze Mathematik wurden nicht gewürdigt. Doch die in der dritten Auflage deutlich werdenden Fortschritte waren trotzdem beachtlich. Die Auflage erschien als zweibändige Ausgabe, was auch die inhaltliche Erweiterung verdeutlicht. Gleichzeitig straffte Serret die Gliederung und gestaltete sie übersichtlicher. Bei der Präsentation des Stoffes kamen sowohl Serrets umfangreiche Lehrerfahrungen als auch seine breit gefächerten mathematischen Interessen zum Tragen. Seit 1861 war er Professor für Himmelsmechanik am Collège de France und ab 1863 hatte er eine Professur für Differential- und Integralrechnung an der Sorbonne inne. Ohne die Wirkung seines Algebralehrbuches zu negieren, muß jedoch vermerkt werden, daß die Hauptleistungen von Serret auf dem Gebiet der Analysis lagen. Er gehörte zu einer Gruppe jüngerer französischer Mathematiker, die sich in den Jahrzehnten um die Jahrhundertmitte sehr um die Entwicklung der Differentialgeometrie verdient machte, untersuchte in diesem Rahmen Geodätische und stellte zusammen mit Jean Frédéric Frenet die Fundamentalformeln in der Theorie der Raumkurven auf.

Doch zurück zu Serrets Algebra-Buch. Die Theorie der Permutationen, die rund ein Drittel des Buches umfaßt, lieferte jetzt die Mittel, um das Auflösungsproblem gruppentheoretisch zu behandeln. Serret übernahm die Cauchysche Definition eines Systems konjugierter Substitutionen mit der multiplikativen Abgeschlossenheit der Menge als einziger charakterisierender Eigenschaft und leitete verschiedene Sätze über diese Systeme, d. h. also Sätze über Permutationsgruppen, für die spätere Anwendung her. Dabei bezeichnete Substitution den Übergang von einer Permutation zur anderen, während Permutation nur die Anordnung (der Grundelemente, z. B. Buchstaben oder Zahlen) erfaßte. Das Hauptproblem der Theorie formulierte er schon ganz gruppentheoretisch:

„Le problème général que l'on a en vue dans la théorie des substitutions peut être énoncé dans les termes suivants: Quels sont les systèmes des substitutions conjuguées que l'on peut former avec n lettres données?“ [Serret 1866, Band 2, S. 256]

Serret mußte jedoch eingestehen, daß dieses für die Algebra so bedeutsame Problem trotz der Bemühungen der Gelehrten bisher noch keine Lösung erfahren habe und er nur wenige allgemeine Sätze präsentieren könne. Es folgten 10 Theoreme über wichtige Eigenschaften der Permutationsgruppen, die sehr klar den Grad der Verselbständigung der permutationstheoretischen Gruppentheorie dokumentieren. Zu den Theoremen gehören z. B. die (in moderner Terminologie formulierten) Aussagen:

- Die $n!$ Permutationen von n Ziffern bilden eine Gruppe, welche die alternierende Gruppe von der Ordnung $n!/2$ enthält.
- Alle mit einer Permutation T von n Ziffern vertauschbaren Permutationen von n Ziffern bilden eine Gruppe.
- Wenn eine Gruppe von Permutationen von n Ziffern neben allen Zyklen dritter Ordnung, die mit $n-1$ der gegebenen Ziffern gebildet werden können, noch andere Permutationen umfaßt, dann enthält sie alle mit n Ziffern bildbaren Zyklen dritter Ordnung.

Serret führte dann die Cauchyschen Entwicklungen mit den Galoisschen zusammen, indem er explizit eine *„groupe de permutation“* mit Hilfe eines Systems konjugierter Substitutionen definierte. Sind 1, S_1, S_2, ..., S_{n-1} die n Substitutionen des Systems, die von k Ziffern gebildet werden, und ist A_0 eine beliebige *„Permutation“*, also Anordnung, dieser k Ziffern, so liefert die Anwendung der n Substitutionen die Permutationen A_0, $S_1A_0 = A_1$, $S_2A_0 = A_2$, ..., $S_{n-1}A_0 = A_{n-1}$. Diese n Permutationen bilden nach Serret eine Permutationsgruppe, und die Substitutionen S_i des obigen Systems nannte er die Substitutionen der Gruppe. An zahlreichen Stellen verwendete er dann diese Begriffe als inhaltlich gleichwertig, doch kam er nicht zu dem naheliegenden Begriff der Substitutionsgruppe. Das logisch korrekte Festhalten an der Unterscheidung zwischen Substitution und Permutation wirkte hier hemmend, um die strukturelle Übereinstimmung auch begrifflich deutlich werden zu lassen. Durch die Verbindung der Galoisschen Überlegungen mit Cauchys Resultaten zur Permutationentheorie kamen auch die bei letzteren vorhandenen Tendenzen zur Verselbständigung dieser Forschungen zum Tragen. Damit markieren Serrets Ausführungen über Permutationsgruppen zugleich den Übergang dieser Forschungen von bloßen Hilfsbetrachtungen zur Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen, zur gruppentheoretischen Behandlung dieses Problems und zur Verselbständigung der Theorie der Permutationsgruppen. In diesem Punkte ging Serret deutlich über Betti hinaus, bei dem die obige Differenzierung zwischen Permutation und Substitution ebenfalls zu registrieren war. Interessant sind dabei die von Serret in seinem Buch eingefügten Betrachtungen *„Sur quelques cas particuliers de la théorie des substitutions“*. Darin verließ er den Bereich der Gleichungstheorie und wandte gruppentheoretisches Denken auf das Studium von Funktionen an, blieb aber begrifflich ganz im Rahmen der Permutationsgruppen. Für die Untersuchungen, die Elemente der Analysis, Zahlentheorie und Permuta-

tionstheorie verknüpften, wählte er die Funktionen $\Theta(z) = \frac{az+b}{a'z+b'}$ mit ganzen Zahlen a, b, a', b' als Ausgangspunkt, wobei alle Zahlen modulo einer ungeraden Primzahl p genommen wurden. Er zeigte, daß es nur endlich viele, genau $(p+1)p(p-1)$, derartige Funktionen gibt, und unterteilte mit Hilfe der Determinante $\Delta = ab' - a'b$ die Menge der Funktionen in zwei Klassen. Die Hintereinanderausführung zweier Funktionen definierte dann eine Multiplikation, und die endliche Menge aller Funktionen $\Theta(z)$ bildet damit, wie Serret bemerkte, eine Gruppe, in dem Sinne, daß die Multiplikation nicht aus der Menge herausführt. Mit Verweis auf die Zusammensetzungsvorschrift der Determinanten stellte er außerdem fest, daß eine der eingeführten Klassen gebrochen linearer Funktionen ebenfalls die Gruppeneigenschaft besaß. In dieser Art trat das von der Permutationentheorie abgelöste gruppentheoretische Denken noch mehrfach in Serrets Ausführungen auf, u. a. wenn er die von einer Funktion $\Theta(z)$ erzeugte zyklische Gruppe studierte. Die Ergebnisse dieses Abschnittes, der übrigens wesentlich auf einer Publikation Serrets aus dem Jahre 1859 beruhte, waren u. a. eine Aufstellung verschiedener Typen gebrochen linearer Funktionen und Aussagen über die Struktur der Permutationsgruppen, wobei er im Anschluß an Hermite mit der Darstellung einer Substitution (als Übergang von einer Permutation zu einer anderen) durch eine zahlentheoretische Funktion arbeitete. Dabei verwandte Serret in einzelnen Passagen den Begriff der Gruppe auch noch im umgangssprachlichen Sinne. Die Verwendung gruppentheoretischer Elemente außerhalb der Theorie der Permutationsgruppen wurde von ihm weder besonders thematisiert noch begrifflich hervorgehoben. All dies charakterisiert das Übergangsstadium, in dem sich die Gruppentheorie zu diesem Zeitpunkt befand.

Die Darlegung der Galoisschen Theorie bildete dann den Abschluß des Buches. Serret folgte dabei eng der Galoisschen Vorgehensweise, vermerkte aber, daß er sich konsequent auf den Standpunkt der Substitutionen gestellt habe. Entsprechend veränderte er die Bezeichnungsweise, so sprach er z. B. von „dem der Gleichung eigenen konjugierten System“ (von Substitutionen) statt von der „Gruppe der Gleichung“, wie Galois es tat. Abgesehen von diesen formalen Änderungen war die Anlehnung an Galois gegen Ende so stark, daß Serret sogar einige Passagen zitierte.

Den Höhepunkt der auf der Basis der Permutationsgruppen vorgenommenen Kommentierung der Galois-Theorie bildeten die Arbeiten von Camille Jordan, die ab 1861 erschienen. Jordan hatte ein Jahr zuvor sein Studium an der École Polytechnique mit der Promotion abgeschlossen und war nun, wie es für viele französische Mathematiker des 19. Jahrhunderts typisch war, als Ingenieur tätig. Diese Beschäftigung ließ ihm reichlich Zeit für mathematische Forschungen. Jordan nutzte sie für bemerkenswerte Beiträge zu fast allen Gebieten der Mathematik seiner Zeit und war einer der bedeutendsten französischen Mathematiker in der Generation zwischen Hermite und Poincaré. Obwohl er mit dem *„Cours d'analyse“* ein einflußreiches, weitverbreitetes Standardlehrbuch schuf, mit den nach ihm benannten Kurvensatz



Enrico Betti

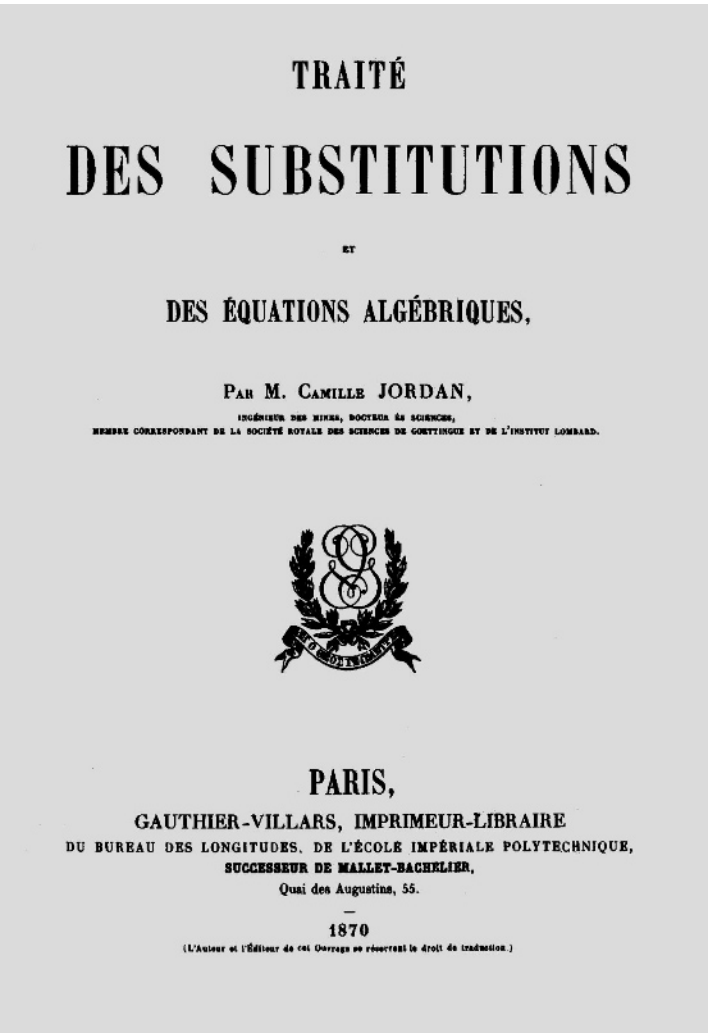


Camille Jordan

und Inhaltsbegriff sowie zahlreichen weiteren wichtigen Resultaten wesentlich zum Fortschritt der Analysis beitrug, wurde er vor allem als Algebraiker gewürdigt. Ab 1873 lehrte er dann bis zu seiner Emeritierung 1912 gleichzeitig an der École Polytechnique und dem Collège de France.

Die ersten Arbeiten zur Galois-Theorie stellten ihn noch in die Reihe jener Kommentatoren, die Beweise zu Teilen der Galoisschen Theorie genau ausführten, damit die einzelnen Aussagen nachprüfbar machten und sie in die zeitgenössische Mathematik einfügten. Erwähnt sei, daß Jordan die Bedeutung der Normalteiler für die Auflösbarkeit der Gleichung in Radikalen klar darlegte. Nachdem er in der Arbeit von 1861 den Zusammenhang zwischen Irreduzibilität der vorgelegten Gleichung und der Transitivität der zugehörigen *„Galois“*-Gruppe neu bewiesen hatte, bemerkte er, daß damit die Klassifikation der auflösbaren Gleichungen eine Bestimmung aller möglichen transitiven Gruppen erfordert und formte in ersten Ansätzen den späteren Begriff der Kompositionsreihe. In den beiden folgenden kurzen Noten (1864/65) stellte Jordan nur die Ergebnisse seiner Forschungen meist ohne Beweis vor. Die Fortschritte betrafen die verbesserte Terminologie, in der er sich jetzt von Cauchy löste und stärker an Hermite orientierte, und die deutlichere gruppentheoretische Ausrichtung der Resultate. Mehrfach betonte er, daß man, um die Eigenschaften von Gleichungen zu untersuchen, die Eigenschaften der zugehörigen Gruppe analysieren muß und führte dies explizit durch.

In einem 1867 publizierten Brief an Liouville formulierte Jordan dann drei Aufgaben, die zur Auflösung von Gleichungen nötig waren und die alle eine gruppentheoretische Ausrichtung hatten. Sie forderten die Bestimmung aller Gruppen, die zu irreduziblen, in Radikalen auflösbaren Gleichungen beliebigen Grades gehören, bzw. die Konstruktion gewisser Untergruppen. Drei Jahre später formulierte er im *„Traité des substitutions ...“* dann ganz grup-



TRAITÉ

DES SUBSTITUTIONS

ET

DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES,

PAR M. CAMILLE JORDAN,

INGÉNIEUR DES MINES, DOCTEUR ÈS SCIENCES,
MEMBRE CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE GOETTINGUE ET DE L'INSTITUT LOMBARD.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1870

(L'Auteur et l'Éditeur de ces Ouvrages se réservent le droit de traduction.)

Abb. 8.1.2. Titelblatt von Jordans Monographie „Traité des substitutions et des équations algébriques“

pentheoretisch: *„Construire explicitement pour chaque degré donné les divers groupes résolubles, transitifs et généraux.“* [Jordan 1870, S. 396f.] Er stellte also die Bestimmung der verschiedenen *„allgemeinen“*, auflösbaren, transitiven Gruppen und gewisser Untergruppen als Aufgabe, wobei das Adjektiv *„allgemein“* bedeutete, daß die Gruppe nicht als Normalteiler in einer Untergruppe der vollen symmetrischen Gruppe auftreten kann. In den entsprechenden Publikationen von 1867 und 1869 prägte Jordan die gruppentheoretischen Züge immer deutlicher aus und ging auch inhaltlich über Galois hinaus. In der No-

te *„Commentaire sur Galois“* von 1869 wurde der Wandel klar sichtbar. Am Beginn standen die gruppentheoretischen Grundlagen, die Jordan für seinen Aufbau der Galois-Theorie benötigte und die er begrifflich fixierte: Substitution, Produkt zweier Substitutionen, Gruppe, transitive Gruppe, einfache und zusammengesetzte Gruppe u. a. Den Gruppenbegriff definierte er nur durch die Abgeschlossenheit der Menge (von Permutationen) gegenüber der Multiplikation und führte anschließend die von den Permutationen a, b, c, ... abgeleitete Gruppe $(a, b, c, ...)$, *„le groupe dérivé“*, ein, die in moderner Terminologie der von a, b, c, ... erzeugten Gruppe entspricht. Untergruppe und Normalteiler bestimmte er, ohne diese Begriffe zu verwenden, durch die Eigenschaften des Enthaltenseins in einer Gruppe bzw. der Vertauschbarkeit der Gruppe mit einer beliebigen Permutation, d. h. die von a, a_1, ... abgeleitete Gruppe $(a, a_1, ...)$ stimmt mit $(b^{-1}ab, b^{-1}a_1b, ...)$ überein. Den gruppentheoretischen Vorbereitungen folgte die Darlegung der Galois-Theorie, wobei er aus Platzgründen einige Beweise wegließ.

Mit dieser Arbeit schloß Jordan faktisch die Herausbildung des permutationstheoretischen Gruppenbegriffs unter den französischen Mathematikern ab. Ausführlich entwickelte er seine Ergebnisse dann in der grundlegenden Monographie *„Traité des substitutions et des équations algébriques“* und dokumentierte darin zugleich die erreichte Verselbständigung dieses Gruppenbegriffs. In dem Buch legte Jordan jedoch nicht nur die Lösung der von Galois aufgeworfenen Fragen zur Auflösung von Gleichungen und einen systematischen Aufbau der Theorie der Permutationsgruppen vor, sondern zugleich eine sorgfältige Durchsicht der gesamten Mathematik nach möglichen Anwendungen der Gruppentheorie in diesem permutationstheoretischen Gewand. Damit trat deutlich Jordans Bestreben hervor, auf der neuen, als tragfähig erkannten begrifflichen Basis eine Synthese verschiedener mathematischer Forschungen vorzunehmen. Dieses Zusammenführen und Neuordnen mathematischer Forschungen mit Hilfe neuer abstrakter Begriffe wurde ein Wesenszug der folgenden Mathematikentwicklung, und Jordan gehörte zu den ersten, die dies konsequent umsetzten. Sein Festhalten am permutationstheoretischen Gruppenbegriff läßt auch die Grenzen seines Werkes erkennen, obwohl er, wie noch gezeigt wird, bereits wichtige Schritte für eine weitere Abstraktion gegangen war.

Im Vorwort zum *„Traité ...“* würdigte Jordan die Leistungen seiner Vorgänger und Zeitgenossen. Nach Lagrange, Abel u. a. erzielte Galois das entscheidende Resultat, daß jeder Gleichung eine Permutationsgruppe zugeordnet werden kann, in deren Struktur sich alle wesentlichen Eigenschaften der Gleichung widerspiegeln. Daran anknüpfend fuhr er fort:

„De ce point de vue élevé, le probème de la résolution par radicaux, qui naguère encore semblait former l'unique objet de la théorie des équations, n'apparaît plus que comme les premier anneau d'une longue chaîne de questions relatives aux transformations des irrationnelles et à leur classification.“ [Jordan 1870, S. VI]

Als jene Fragestellungen, die zum Problem der Auflösbarkeit hinzugekommen waren, nannte Jordan die Teilung und Multiplikation transzendenter Funktionen und Aufgaben aus der analytischen Geometrie. Beide Themen behandelte er im Buch III seiner Monographie ausführlich und verwies bezüglich des ersten auf die Arbeiten von Galois, Hermite, Brioschi und Kronecker, bezüglich des zweiten auf Hesse, Cayley, Clebsch, Kummer u. a. Bei der Betrachtung transzendenter Funktionen knüpfte er an die oben erwähnten Überlegungen von Puiseux und Hermite an, unterschied jedoch zwischen der algebraischen Galoisschen Gruppe der Gleichung $f(z,w)=0$ und deren Monodromiegruppe bezüglich der komplexen Veränderlichen z, die er dann als Normalteiler der ersteren nachwies.

Jordans Grundprinzip bei den geometrischen Anwendungen basierte auf der Vorstellung, die geometrische Aufgabenstellung mit algebraischen Gleichungen zu erfassen und letztere dann mit den ausgearbeiteten Galoisschen Methoden zu behandeln. Auf diese Weise diskutierte er u. a. die Ermittlung der 9 Inflexionspunkte einer ebenen kubischen Kurve, die auf 12 Geraden liegen, die Bestimmung der 16 singulären Punkte der *„Kummerschen Fläche“* bzw. die Bestimmung der 27 Geraden einer Fläche dritten Grades. Jordans Vorgehensweise konnte immer dann zum Erfolg führen, wenn es um die Bestimmung von Punkten, Linien bzw. Flächen ging, und die jeweilige Aufgabenstellung nur endlich viele Lösungen hatte. Die gesuchten Objekte ließen sich durch ein System von Gleichungen beschreiben, aus denen man durch Elimination aller Unbekannten bis auf eine dann eine Gleichung in einer Unbekannten erhielt. Der Grad dieser Gleichung lieferte zugleich die Anzahl der Lösungen, die Lösungen der Gleichung ergaben die gesuchten geometrischen Objekte.

Um seine Vorstellungen effektiv umsetzen zu können, hatte Jordan zuvor im Buch II des *„Traité ...“* die Theorie der Permutationsgruppen entsprechend aufbereitet und beherrschbar gemacht. Er knüpfte an die analytische Darstellung von Permutationen an und führte auf dieser Basis eine detaillierte Untersuchung der linearen Substitutionen durch (in moderner Terminologie: eine Untersuchung der allgemeinen linearen Gruppe aller invertierbaren linearen Transformationen in n Variablen (mod p) und ihrer Untergruppen). In diesem Zusammenhang gab er auch jenes Verfahren an, das, in Matrizenschreibweise umgesetzt, die Reduktion einer Matrix auf die *„Jordansche“* Normalform beinhaltet. Auch den ein Jahr zuvor angegebenen Satz über die Kompositionsreihen einer Gruppe bewies er jetzt vollständig als reine gruppentheoretische Aussage. Unter der Kompositionsreihe einer Gruppe G verstand Jordan eine Folge ineinander enthaltener Untergruppen G_i, die mit der nur aus dem Einselement bestehenden Gruppe $\{e\}$ endet, $G=G_0\supset G_1\supset G_2\supset ...\supset G_n=\{e\}$, und in der jede Gruppe G_i maximaler Normalteiler in der vorhergehenden Gruppe G_{i-1} ist. Der Hauptsatz besagte, daß die *„Kompositionsfaktoren“*, d. h. die Quotienten der Gruppenordnungen zweier aufeinanderfolgender Gruppen, bis auf ihre Reihenfolge durch die Gruppe G eindeutig bestimmt sind. 1889 hat dann Otto Hölder auf ei-

ner abstrakteren begrifflichen Basis die Aussage des Satzes verschärft und die Faktorgruppen G_i/G_{i+1} als bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt nachgewiesen, dabei werden diese Faktorgruppen als Kompositionsfaktoren bezeichnet. Obwohl Jordan im Buch 2 des *„Traité ...“* die wichtigen Vorstellungen zur Isomorphie von (Permutations-)Gruppen entwickelte, stieß er nicht bis zum Begriff der Faktorgruppe vor. Seine Definition des Isomorphismus zweier Gruppen forderte die Existenz einer eindeutigen Zuordnung zwischen den Permutationen der beiden Gruppen, wobei die Gruppenoperation erhalten bleiben sollte, d. h. das Bild des Produktes zweier Elemente ist dem Produkt der Bilder dieser Gruppenelemente gleich; sie entsprach damit einem Homomorphismus nach moderner Terminologie. In Form des *„isomorphisme holoédrique“* betrachtete jedoch Jordan auch die modern als Isomorphismus bezeichnete Abbildung und kam in einer späteren Arbeit von 1875 bis zu einer impliziten Definition der Faktorgruppe.

Im 4. Buch griff Jordan schließlich die gruppentheoretischen Ergebnisse auf und wandte sich der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen zu. Dabei nutzte er die im zweiten Kommentar zur Galois-Theorie gegebene algebraische Charakterisierung der Auflösbarkeit: Eine Gleichung ist genau dann in Radikalen auflösbar, wenn die zugehörige Gruppe eine Kompositionsreihe mit Primzahlpotenzen als Kompositionsfaktoren (nach Jordanscher Sprechweise) hat. Er verifizierte einige notwendige und hinreichende Kriterien für die Auflösbarkeit, z. B.:

„Pour qu'une équation soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que ses facteurs de composition soient tous premiers.“ *„Tout groupe Γ contenu dans un groupe résoluble G est lui-même résoluble.“* [Jordan 1870, S. 387]

Mit Hilfe dieser Kriterien konnte er die Aufgabe auf drei Probleme, die eingangs schon zitierte Ermittlung der auflösbaren transitiven Gruppen und gewisser Untergruppen, reduzieren. Die ausführliche Behandlung dieser Probleme bildet den Abschluß des Buches.

Jordan trug mit seinen Arbeiten zur Galois-Theorie wesentlich zur Anerkennung und Rezeption der Galoisschen Ideen bei und verschaffte ihr den Status einer zentralen algebraischen Theorie. Die Einordnung in ein großes Programm zur Erforschung der endlichen Substitutionsgruppen führte zu einer einseitigen Betonung gruppentheoretischer Aspekte, wobei jedoch Jordan das Abstraktionsniveau der Permutationstheorie nicht überschritt. So kam es, daß das Jordansche Werk innerhalb weniger Jahre im Ansatz faktisch schon wieder überholt war. Der Hauptgrund lag in dem raschen Voranschreiten des Abstraktionsprozesses, der in kurzer Zeit die Formulierung abstrakterer algebraischer Begriffe hervorbrachte und die von Jordan selbst so meisterhaft demonstrierte Systematisierung der Ergebnisse aus verschiedenen Gebieten der Mathematik auf neuer begrifflicher Basis fortsetzte.

8.2 Die große Zeit der Invariantentheorie

Bevor die weitere Entwicklung zur modernen abstrakten Algebra dargestellt werden kann, muß die Aufmerksamkeit auf ein Gebiet gerichtet werden, das um die Mitte des 19. Jahrhunderts sehr rasch zu einem dominierenden Gebiet der algebraischen Forschung aufstieg und mit seiner weitläufigen symbolischen Rechentechnik einen gewissen Gegensatz zu der Herausbildung abstrakter algebraischer Begriffe markiert: die algebraische Invariantentheorie. Es sei jedoch bereits an dieser Stelle angemerkt, daß die Invariantentheorie, wenn auch in stark veränderter Form, später sehr wohl Eingang in die abstrakte Algebra gefunden hat. Die Invariantentheorie wurzelte in Problemstellungen aus drei verschiedenen Gebieten, der Zahlentheorie, der Geometrie und der (linearen) Algebra, oder genauer der Theorie der Formen, dem Studium projektiver Eigenschaften von Kurven und der Determinantentheorie.

8.2.1 Die britische Schule der Invariantentheorie

Obwohl bereits in den Arbeiten von Lagrange und Gauß über Formen erste Ansätze zu invariantentheoretischen Überlegungen zu finden waren, und Gauß 1801 die Diskriminante einer binären quadratischen Form als Invariante erkannte, wird George Boole als Vater der Invariantentheorie angesehen. Er stellte das allgemeine Problem, bei der linearen Transformation der Variablen eines homogenen Polynoms vom Grade n in m Unbekannten die algebraischen Relationen in den Koeffizienten des Polynoms zu bestimmen, die bei der Transformation bis auf die Multiplikation mit einer Potenz der Transformationsdeterminante ungeändert bleiben. Unter Benutzung der Multiindexschreibweise (d. h. beispielsweise $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_m^{\alpha_m}$) bedeutet dies in Formeln ausgedrückt: Seien $P_j(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_\alpha a_{j\alpha} x^\alpha \quad p$ homogene Polynome in den m Unbekannten $x_1, x_2, ... \quad x_m$, $x = Cx'$ eine lineare nicht singuläre Transformation der Unbekannten und $P'_j(x') = P_j(Cx') = \sum_\alpha a'_{j\alpha} x'^\alpha$ die transformierten Polynome. Ein Polynom f in den $a_{j\alpha}$ heißt Invariante der Polynome P_j vom Grade g, wenn gilt $f(a'_{j\alpha}) = (\det C)^g f(a_{j\alpha})$. Hängt f außerdem noch von den Unbekannten ab, spricht man von einer Kovariante. Mit einer Eliminationsmethode bestimmte Boole einige einfache Invarianten und deutete Anwendungen seiner Untersuchungen bei geometrischen Problemen und bei der Lösung von Polynomgleichungen an. Seine Anregungen wurden sehr rasch von Arthur Cayley aufgegriffen, der 1845/46 zwei grundlegende Arbeiten zur Invariantentheorie publizierte, in denen er die Betrachtungen auf Multilinearformen erweiterte und zwei Methoden zur Berechnung von Invarianten vorstellte: die erste verknüpfte die Theorie mit der Lösung von Differentialgleichungen, die zweite mit der Determinantentheorie. Letztere wurde als Hyperdeterminantenmethode bzw. Cayleys Ω-Prozeß bekannt.

Cayley hat diese Methode später jedoch nicht weiterentwickelt, und sah in den Beziehungen zur Theorie der Differentialgleichungen die Grundlagen für die Theorie der Invarianten. In diesem Zusammenhang griff er ausgiebig auf die Methoden der englischen algebraischen Schule und die Verfahren der Operatorenrechnung, insbesondere die Separation der Symbole, zurück. In der Arbeit von 1846 formulierte er auch die Ziele der Invariantentheorie, was sehr inspirierend für die weitere Entwicklung wirkte. Er forderte:

„To find all the derivatives (d. h. Invarianten K.-H. S.) *of any number of functions, which have the property of preserving their form unaltered after any linear transformation of the variables“* sowie *„determining the independent derivatives, and the relations between these and the remaining ones.“* [Cayley 1889, Bd. 1, S. 95]

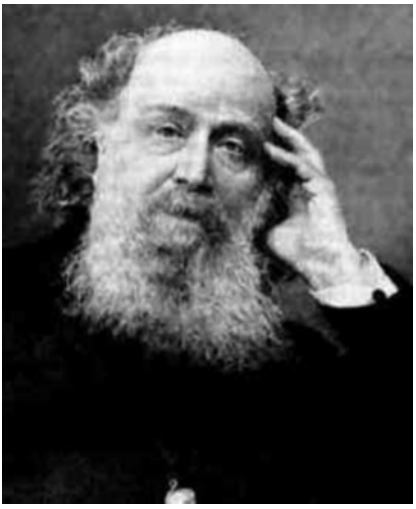
Wichtige Anregungen erhielt Cayley dabei durch den Kontakt mit Boole, der ihm z. B. 1844 in einem Brief ein neues Verfahren zur Berechnung einer neuen Invariante für eine binäre Form vierten Grades mitteilte und vermerkte, daß zwischen dieser und zwei bereits bekannten Invarianten eine polynomiale Relation bestehe. James Joseph Sylvester bezeichnete diese Relationen später als Syzygien (erster Ordnung). Sylvester wandte sich, nachdem er 1846 die Bekanntschaft Cayleys gemacht hatte, ebenfalls intensiv der Invariantentheorie zu und schuf auch eine grundlegende Terminologie für diese Theorie, die sich gegenüber den vorher von Cayley geprägten Begriffen durchsetzte und auch von letzterem übernommen wurde. Sylvester, obwohl sieben Jahre älter als Cayley, bezeichnete diesen später als seinen geistigen Vater, der ihm die Augen für die Geheimnisse der Mathematik öffnete. Wiederholt wiesen beide Gelehrte bei der Publikationen neuer Resultate auf die anregende Wirkung hin, die ihre Gespräche auf die Formung der Ideen hatte. Dabei fanden die Gespräche vor allem in den Pausen während ihrer Arbeit am Gericht statt, wo beide zur Sicherung ihres Lebensunterhalts tätig waren. Während Cayley diesen Weg wegen fehlender Aufstiegschancen gewählt hatte, gab Sylvester 1843 seinen Posten an der Universität von Virginia in Charlottesville nach längeren Streitigkeiten mit seinen Kollegen auf. In England waren Sylvesters akademische Aufstiegschancen wegen seiner jüdischen Abstammung sehr eingeschränkt. Sein aufbrausendes, viele kleine Streitigkeiten herausforderndes Wesen tat ein übriges. Bereits während seiner Schul- und Studienzeit hatte er mehrmals die Ausbildungsstätte gewechselt und mehrere Schikanen erdulden müssen. 1855 gelang es ihm durch die Unterstützung von Freunden, einen Ruf als Mathematikprofessor an die Militärakademie in Woolwich zu erhalten, und er lehrte dort bis 1870. Erst sechs Jahre später fand er eine neue Anstellung als Professor an der neu gegründeten Johns Hopkins Universität in Baltimore, wo er bis zu seinem Wechsel an die Universität Oxford im Dezember 1883 einen großen Anteil am Aufbau der mathematischen Forschung in den USA hatte. Sylvester entfaltete neben seinen Forschungen auch eine rege organisatorische Tätigkeit, was sich u. a. in der Herausgabe bzw. Gründung mathematischer Zeitschriften niederschlug.

Percy Alexander MacMahon, der in England die Nachfolge von Cayley und Sylvester in den invariantentheoretischen Forschungen antrat, beschrieb diese frühe Entwicklungsphase der Theorie mit den Worten, daß die Invariantentheorie der starken Hand Cayleys entsprang und durch die Geistesblitze vermöge Sylvesters Scharfsinn erhellt, zum Kunstwerk wurde [Bell 1967, S. 364]. In den 50er Jahren begründeten Cayley und Sylvester, im regen Gedankenaustausch miteinander stehend, mit ihren Arbeiten die britische Schule der Invariantentheorie, zu der außerdem der Ire George Salmon sowie Edwin Balley Elliott und Herbert Westren Turnbull gehörten. Sylvester publizierte seit Beginn der 50er Jahre zahlreiche Arbeiten, die neben der Terminologie viele neue Resultate, u. a. 1852 die Cayley-Aronholdschen Differentialgleichungen für Invarianten binärer Formen sowie unabhängig von Jacobi das Trägheitsgesetz für quadratische Formen, und eine weitere Systematisierung und Durchbildung der Methoden beinhalteten. Cayley begann 1854 mit einer Folge von zehn schrittmachenden Veröffentlichungen, den *„Memoir(s) on quantics“*, in denen er die Verbindungen der Invariantentheorie zur Geometrie wesentlich vertiefte. Mit *„Quantic“* bezeichnete Cayley eine beliebige Form und mit *„Theory of quantics“* dann die Invariantentheorie. Cayley wählte einen sehr abstrakten Ausgangspunkt, der auch schon in seinen ersten Arbeiten deutlich geworden war. Durch die Auffassung des Raumes als Zahlenmannigfaltigkeit öffnete er den Weg zur n-dimensionalen Geometrie und schuf neue Möglichkeiten zur Anwendung algebraisch-zahlentheoretischer Mittel. Sein Hauptziel war eine Klassifikation der Geometrie, doch wird dies in der Abfolge der einzelnen Arbeiten nur bedingt sichtbar, sondern erst durch den retrospektiven Blick auf das Gesamtwerk. Die Notwendigkeit einer solchen Klassifikation war nach der stürmischen Entwicklung der Geometrie seit Beginn des Jahrhunderts von vielen Mathematikern als dringendes Bedürfnis empfunden worden und hatte zu verschiedenen Ansätzen von Ordnungsprinzipien etwa bei Poncelet, Möbius, Plücker und Steiner geführt (vgl. [Scriba/Schreiber 2000, Kap. 7]).

Cayley hatte sich besonders mit den Arbeiten französischer Mathematiker um Michel Chasles zur projektiven Geometrie beschäftigt und knüpfte dann an die von Julius Plücker stark geförderte analytische Richtung an. Dabei scheint Cayley schon sehr bald nach dem Bekanntwerden mit den Booleschen Ansätzen zur Invariantentheorie die Überzeugung gewonnen zu haben, daß er damit ein Mittel zur Klassifikation der Geometrie zur Verfügung hat. Mit den *„Memoirs on quantics“* sollte dieses Ziel realisiert werden. Hervorzuheben ist vor allem die sechste Arbeit in dieser Folge, in der es Cayley 1859 gelang, die metrische (euklidische) Geometrie in die projektive Geometrie einzubetten. Er entwickelte zunächst einige Elemente der projektiven Geometrie. Der Zusammenhang zur Theorie der Formen ergab sich durch die Verwendung homogener Koordinaten, so daß die Sachverhalte der eindimensionalen Geometrie durch binäre Formen, die der zweidimensionalen Geometrie durch ternäre Formen ausgedrückt werden konnten. Cayley hat sich auf



Paul Gordan



James Joseph Sylvester

die Behandlung dieser beiden Fälle beschränkt, ohne die Allgemeingültigkeit seiner Überlegungen in Frage zu stellen. Aus vorangegangenen Studien wußte er, daß durch das Nullsetzen einer Invariante bzw. Kovariante einer vorgegebenen Form gewisse Relationen zwischen den Punkten des durch die Form definierten Punktsystems festgelegt werden, und er auf diese Weise projektive Grundeigenschaften erfassen konnte. Er kam dann mit abstrakten Betrachtungen zum Abstandsbegriff. Dabei ging er von einer einen Kegelschnitt definierenden quadratischen Form $f(x,x)$ sowie der entsprechenden polaren Form $f(x,y)$ aus und definierte dazu eine kovariante Form F, durch die ein dualer Kegelschnitt festgelegt wurde. Einen Kegelschnitt als feste Bezugsgröße wählend, von Cayley als das Absolute bezeichnet, leitete er dann den Ausdruck $Dist(x,y) = \arccos \frac{f(x,y)}{\sqrt{f(x,x)}\sqrt{f(y,y)}}$ für den Abstand zweier Punkte x, y her. Mit dem analogen Ausdruck für den Abstand zweier Linien wählte er den Winkel zwischen den Linien als Entfernungsmaß. Bei spezieller Wahl des Absoluten reduzierte sich die Abstandsdefinition auf die euklidische Maßbestimmung. Damit hatte Cayley sein Ziel erreicht und konnte feststellen: *„Metrical geometry is thus a part of descriptive geometry, and descriptive geometry is <u>all</u> geometry, and reciprocally.“* [Cayley 1889, Vol. 2, S. 592] (Mit *„descriptive geometry“* bezeichnete Cayley die projektive Geometrie.) Die Tatsache, daß er mit seiner projektiven Maßbestimmung ein Mittel in der Hand hatte, um auch andere Geometrien, speziell die nichteuklidischen, zu erfassen, und damit einen Weg zur Klassifikation der Geometrien aufgedeckt hatte, wurde von Cayley vermutlich nicht erkannt, zumindest führte er diese Möglichkeit nicht weiter aus.

8.2.2 Die Weiterentwicklung und die Formulierung des Grundproblems der Invariantentheorie

Unabhängig von der Entwicklung in Großbritannien war die Entstehung der Invariantentheorie durch die Forschungen von Jacobi, Hesse und Eisenstein angeregt worden, auf deren Arbeiten Cayley mehrfach hinwies. Jacobi hatte in seiner systematischen Ausarbeitung der Determinantentheorie 1841 u. a. festgestellt, daß für ein System von n linearen Formen in n Unbekannten die Determinante der aus den Koeffizienten der Formen gebildeten Matrix eine Invariante bei unimodularen Transformationen der Unbekannten war, und daß die später nach ihm benannte Funktionaldeterminante $\Phi = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ der Form $f = f(x_1, x_2, ...x_n)$ vom Grade k im Nullpunkt genommen eine Invariante der Form f lieferte. Wenig später formte Ludwig Otto Hesse den Determinantenkalkül zu einem wichtigen Mittel beim Studium ebener Kurven, speziell der Bestimmung kritischer Punkte. Für ebene Kurven dritter Ordnung bildete er die nach ihm benannte Hessesche Kovariante H, die der Jacobischen Funktionaldeterminante entsprach, d. h. $H = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, und zeigte, daß die Inflexionspunkte der Kurve f durch das Lösen der Gleichung $H = 0$ ermittelt werden konnten. Die damit von Hesse geknüpfte Beziehung zwischen Geometrie und Invariantentheorie bildete ein wichtiges Motiv für die weitere Beschäftigung mit Invarianten. Im gleichen Jahr, 1844, gab Eisenstein bei der Untersuchung binärer Formen die Invarianten und Kovarianten für binäre Formen dritten bzw. vierten Grades an, die Cayley später als vollständiges System erkannte. Ergänzend sei an dieser Stelle noch Hermite genannt, der, meist von zahlentheoretischen Fragestellungen ausgehend, ab Anfang der 50er Jahre ebenfalls wichtige Resultate erzielte.

In den folgenden Jahrzehnten nahm die Invariantentheorie einen raschen Aufschwung. Zahlreiche Mathematiker widmeten sich der Berechnung spezieller Invarianten. Hervorgehoben sei Francesco Brioschi, der die Theorie in Italien bekannt machte und sie um mehrere interessante Ergebnisse, u. a. über ternäre Formen, bereicherte. Im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts sahen nicht wenige Mathematiker in der Invariantentheorie sogar ein Gebiet, das viele Bereiche der Mathematik wieder zusammengeführt hatte. Sylvester schrieb beispielsweise 1864:

„As all roads are said to lead to Rome, so I find, in my own case at least, that all algebraical inquiries sooner or later end at the Capitol of Modern Algebra over whose shining portal is inscribed, Theory of Invariants.“ [Sylvester 1864, S. 380]

Bereits 1849 erweiterte Siegfried Aronhold die Betrachtungen auf ternäre Formen, wobei er die Fragen deutlich von einer geometrischen Interpretation ablöste. Die Theorie begann also eine gewisse Eigendynamik zu entwickeln. In mehr als einem Jahrzehnt schuf Aronhold dann eine Invariantentheorie der kubischen ternären Formen, entdeckte die entsprechenden Arbeiten der britischen Mathematiker und formte zusammen mit Alfred Clebsch in scharf-

sinniger Verarbeitung der dort vorhandenen Terminologie einen umfassenden speziellen Kalkül, um die Invarianten und Kovarianten allgemeiner Formen zu berechnen und ausdrücken zu können. Diese sog. symbolische Methode bzw. Clebsch-Aronhold-Symbolik legte er 1863 im Detail dar, sie unterschied sich wesentlich von der Vorgehensweise der britischen Mathematiker, die stärker an der konkreten Berechnung der Invarianten und Kovarianten festhielten.
Neben den zahlreichen geometrischen Anwendungen, die zweifellos die rasche Entwicklung der Invariantentheorie stark stimulierten, rückte sehr schnell die von Cayley aufgeworfene und von Sylvester präzisierte Frage nach einem endlichen vollständigen Fundamentalsystem von (unabhängigen) Invarianten und Kovarianten in den Mittelpunkt der Forschungen. Jede Invariante bzw. Kovariante einer Form bzw. eines Formensystems sollte sich aus den Elementen des Fundamentalsystems als ganze rationale Funktion mit Zahlenkoeffizienten darstellen lassen, und die Unabhängigkeit der Elemente besagte, daß das System minimal sein sollte. Es gab also keine Polynomgleichung, die beim Ersetzen der Unbestimmten durch Invarianten des Systems identisch erfüllt wurde, d. h. das Fundamentalsystem sollte asyzygetisch sein, wie Sylvester es nannte. Damit verbunden war das Syzygien-Problem, alle irreduziblen algebraischen Relationen zwischen den Invarianten und Kovarianten eines endlichen Formensystems zu bestimmen. Diese Aufgabe wurde von Cayley und Sylvester in einigen Spezialfällen gelöst. In dem *„Second Memoir on quantics“* gab Cayley einen Algorithmus an, um für eine binäre Form die Anzahl der unabhängigen Kovarianten vorgegebenen Grades und vorgegebener Ordnung in einem Fundamentalsystem zu berechnen, und folgerte in der gleichen Arbeit, daß es für binäre Formen höherer Ordnung im allgemeinen kein solches endliches System gebe. Diese Vermutung wurde dann 1868 von Paul Gordan mit dem Nachweis, daß für eine beliebige binäre Form stets ein endliches vollständiges Fundamentalsystem existiert, eindrucksvoll widerlegt. 1870 dehnte er den Beweis auf endliche Systeme binärer Formen aus. Der Beweis des Satzes, der auch als erstes Fundamentaltheorem der Invariantentheorie bezeichnet wird, war kompliziert und erforderte einen großen Rechenaufwand. Gordan griff dabei auf mehrere Resultate von Clebsch zurück, so daß man gelegentlich auch vom Clebsch-Gordanschen Satz spricht.
Clebsch hatte Gordan 1863 nach Gießen geholt, wo sich letzterer im gleichen Jahr habilitierte. Beide Mathematiker arbeiteten erfolgreich auf dem Gebiet der Abelschen Funktionen zusammen und Clebsch führte Gordan 1868 in die Invariantentheorie ein. Möglicherweise wurde eine intensivere gemeinsame Forschung auf diesem Gebiet durch Clebschs Wechsel an die Universität Göttingen behindert, auf jeden Fall hat Gordan die erhaltenen Anregungen aufgegriffen und sich fortan sehr intensiv dem Studium der Invarianten gewidmet. Er galt bald als der Meister der Invariantentheorie unter den deutschen Mathematikern. In Erlangen, wo Gordan dann von 1875 – 1910 als Professor für Mathematik lehrte, war er auch der Doktorvater von Emmy Noether, die zwei Generationen später eine neue Etappe der Algebraentwicklung prägen sollte.

Ein wichtiges Merkmal von Gordans Existenzbeweis für ein endliches Fundamentalsystem war, daß er konstruktiv geführt wurde, das darin verwendete Verfahren zeigte also, wie man prinzipiell das vollständige Invariantensystem berechnen konnte. Doch letztlich war der Gordansche Satz nur ein kleiner Schritt zur Lösung des Grundproblems der Invariantentheorie, bis zum Beweis eines analogen Satzes für n-äre Formen war der Weg noch weit. Das Resultat ermutigte aber viele Mathematiker zu weiteren Forschungen, und Gordan trug selbst dazu mit der Bestimmung eines vollständigen Systems für spezielle ternäre Formen bei. Mit zunehmender Zahl der Veränderlichen, des Grades der Formen bzw. der Anzahl der Formen wurden die Berechnungen immer aufwendiger und komplizierter. Zwar hatte sich die symbolische Methode als leistungsfähiger erwiesen als das Verfahren der englischen Schule, doch der entscheidende Erfolg blieb ihr versagt. Es muß jedoch angemerkt werden, daß sich die Invariantentheorie nicht in den umfangreichen formalen Rechnungen erschöpfte, sondern die Vorstellungen zur Invarianz viel breiter gefaßt wurden. Die Frage nach der Invarianz von Eigenschaften war natürlich nicht auf Formen beschränkt, sondern konnte bei zahlreichen mathematischen Objekten in vielfältiger Weise als eine sinnvolle Aufgabe formuliert werden. So zählten u. a. die Forschungen zur Äquivalenz von Formen, die zu grundlegenden Aussagen über Matrizen und zur Elementarteilertheorie führten (vgl. Abschn. 7.6), wie auch Überlegungen zu Transformationsgruppen und Differentialinvarianten zur Invariantentheorie. Von diesem allgemeinen Standpunkt sollte sich der Invariantentheorie auf der abstrakteren Basis der modernen Algebra im 20. Jahrhundert eine neue Perspektive eröffnen.

Doch zunächst blieb die Bestimmung eines vollständigen Fundamentalsystems im Mittelpunkt des Interesses. 1888 erstaunte schließlich David Hilbert die mathematische Welt, als er mit einer völlig neuen Methode die Existenz eines endlichen vollständigen Fundamentalsystems für eine beliebige endliche Anzahl von n-ären Formen k-ten Grades nachwies. Der Beweis war ein reiner Existenzbeweis. Hilbert zeigte also „nur“, daß ein solches endliches System existierte, gab aber kein Verfahren an, wie die Invarianten konstruiert werden konnten. Diese Vorgehensweise war so neuartig, daß viele Mathematiker dem Beweis mit Skepsis begegneten. Gordan sprach davon, daß dies keine Mathematik, sondern Theologie sei. Die Meinung änderte sich, als Hilbert 1890/93 in zwei Arbeiten seine Ideen genauer darlegte und 1893 auch einen konstruktiven Beweis publizierte. Die grundlegende Aussage war der sog. Hilbertsche Basissatz:

„Ist irgend eine nicht abbrechende Reihe von Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, ..., x_n$ vorgelegt, etwa $F_1, F_2, F_3, ...$, so gibt es stets eine Zahl m von der Art, daß jede Form jener Reihe sich in die Gestalt $F = A_1F_1 + A_2F_2 + ... + A_mF_m$ bringen lässt, wo $A_1, A_2, ..., A_m$ geeignete Formen der nämlichen n Veränderlichen sind.“ [Hilbert 1890, S. 474]

Mit Hilfe dieses Satzes löste Hilbert zugleich das Problem der Syzygienbildung, indem er zeigte, daß der Prozeß der Syzygienbildung nach endlich vielen

Schritten abbrach und die höheren Syzygien dann verschwinden. Die Arbeit von 1893 enthielt dann neben der Verallgemeinerung einiger Sätze auch den sog. Nullstellen-Satz, der eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie spielte.

Hilbert hatte somit in seinen Arbeiten auf einem abstrakteren Niveau mehrere Anregungen verschiedener algebraischer Richtungen vereinigt und wichtige Impulse für die weitere Entwicklung der abstrakten Algebra und der axiomatischen Methode gegeben. In der Einleitung zu der Arbeit über Invariantensysteme hob er fünf *„elementare Eigenschaften“* eines Invariantensystems hervor, was als ein Versuch zur strukturellen Charakterisierung gewertet werden kann. Die Eigenschaften besagten u. a., daß ein vollständiges Invariantensystem ein algebraisch abgeschlossenes Gebiet von Funktionen war, und daß darin die übliche Faktorisierungseigenschaft, d. h. die Zerlegbarkeit in Primelemente galt. Außerdem warf Hilbert kurz die Frage nach der logischen Unabhängigkeit der fünf Eigenschaften auf, eine Frage, die für die axiomatische Charakterisierung mathematischer Objekte sehr wesentlich ist und deren Klärung ein wichtiger Schritt bei der Herausbildung der axiomatischen Methode war. Damit gehören Hilberts Arbeiten nicht nur zeitlich, sondern auch inhaltlich bereits der nächsten Entwicklungsphase an. Sie wurden an dieser Stelle behandelt, da ihre Entstehung in den Kontext der Invariantentheorie gehört und sie die klassische algebraische Invariantentheorie zu einem Abschluß brachten. Tatsächlich verlor die Invariantentheorie in den 90er Jahren des 19. Jahrhunderts ihre zentrale Stellung in der mathematischen und speziell der algebraischen Forschung. Hilbert selbst erklärte, die Hauptaufgaben dieser Disziplin gelöst zu haben, und wandte sich anderen Fragestellungen zu. Die Invariantentheorie war jedoch keineswegs tot, mehrere Mathematiker widmeten sich in jener Zeit weiterhin der Berechnung von Invarianten, verallgemeinerten bzw. verbesserten die Methoden und behandelten sie weiterhin in ihren Lehrbüchern, aber es dauerte mehrere Jahrzehnte bevor die Invariantentheorie im neuen Gewand bei Fragen der Darstellungstheorie eine Renaissance erlebte.

8.3 Die Theorie der Transformationsgruppen

8.3.1 Kleins Erlanger Programm und die Theorie der endlichen Transformationsgruppen

Bereits im vorangegangenen Abschnitt war im Zusammenhang mit Cayleys projektiver Maßbestimmung das Problem der Klassifikation der Geometrie gestreift worden. Es soll nun die Behandlung dieser Fragestellung betrachtet werden, soweit sie für die Entwicklung der Algebra von Interesse war. Wichtige Fortschritte erzielte dabei Felix Klein im engen Gedankenaustausch mit Sophus Lie und Otto Stolz. Durch seinen Lehrer Alfred Clebsch mit den

invariantentheoretischen Arbeiten Cayleys und Cremonas sowie durch Stolz mit den Ideen der nichteuklidischen Geometrie bekannt gemacht, kam Klein Anfang 1870 auf den Gedanken, daß sich eine Verbindung zwischen der Cayleyschen Maßbestimmung und der nichteuklidischen Geometrie herstellen lassen müsse. In zwei Publikationen zur nichteuklidischen bzw. zur metrischen Geometrie nahm er 1871 eine Klassifikation der Geometrien auf invariantentheoretischer Basis vor, wobei er die Cayleysche Maßbestimmung unter Rückgriff auf das Doppelverhältnis und die Logarithmusfunktion auf den Raum übertrug und so modifizierte, daß auch die nichteuklidischen Geometrien erfaßt wurden [Klein 1871], [Klein, 1872a]. Die Ausformung dieser Vorstellung war durch einen raschen Kenntniszuwachs bei Klein gekennzeichnet. Zum einen lernte er in Paris die Theorie der Permutationsgruppen und Ergebnisse der französischen geometrischen Schule kennen, zum anderen lieferten die Veröffentlichung von Riemanns Habilitationsvortrag und die Reflexionen von Hermann v. Helmholtz über die Grundlagen der Geometrie weitere Anregungen. Bereits im Frühjahr 1871 hatte Klein zusammen mit Lie in einer Arbeit über *„ebene Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen“* [Klein, Lie 1871] die Hinwendung zu gruppentheoretischen Überlegungen deutlich werden lassen. Beide Autoren verwiesen darin nicht nur auf die engen Beziehungen zu den Untersuchungen über Substitutionsgruppen (Permutationsgruppen) von Serret und Jordan, sondern hoben zugleich den *„tiefgreifenden Unterschied“* hervor, daß statt diskret veränderlichen, jetzt kontinuierlich veränderliche Größen auftreten. Ein Jahr später, in der zweiten Arbeit über die nichteuklidische Geometrie [Klein 1872b], bezeichnete Klein dann ein geschlossenes System von Transformationen als Transformationsgruppe und baute die schon früher erwähnte Analogie zum Begriff der Gruppe von Substitutionen aus. Formal definierte Klein die Transformationsgruppen in Anlehnung an Jordan nur durch die Abgeschlossenheit der Menge gegenüber der Gruppenoperation. Zwar setzte er meist explizit voraus, daß zu einer Transformation auch die dazu inverse existiert, doch übersah er den für die weitere Herausbildung des Gruppenbegriffs wichtigen Fakt, daß für unendliche Gruppen die Zugehörigkeit der inversen Transformation zur Gruppe keineswegs selbstverständlich war und zusätzlich gefordert werden mußte. Lie hat dieses Manko sehr bald bemerkt und in seinen Arbeiten korrigiert. In der erwähnten Arbeit entwickelte Klein die Grundgedanken seines Erlanger Programms, das dann aus drucktechnischen Gründen sogar vor dieser Arbeit erschien: *„Die verschiedenen Methoden der Geometrie sind durch eine zugehörige Transformationsgruppe charakterisiert“* [Klein 1872 b, S. 120]. Er hatte erkannt, daß die von ihm angestrebte einheitliche methodische Darstellung der verschiedenen Geometrien durch die Gruppentheorie erreicht werden konnte. Unter einer Geometrie verstand er einen Raum mit einer Gruppe von Transformationen, welche die wesentlichen Eigenschaften der räumlichen Dinge ungeändert ließ, bzw., wenn man von der mathema-

tisch unwesentlichen anschaulichen Vorstellung des Raumes abstrahierte, eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit mit einer Transformationsgruppe. Die einzelnen Geometrien ergaben sich dann als Lösung des folgenden umfassenden Problems:

„Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.“ [Klein 1893, S. 67]

In der sog. Hauptgruppe faßte Klein jene Transformationen zusammen, die die *„geometrischen Eigenschaften räumlicher Gebilde überhaupt ungeändert lassen“*, so daß die Untersuchungsmethode nur in der Betrachtung umfassenderer Gruppen bestehen konnte, bei denen nur ein Teil der geometrischen Eigenschaften erhalten blieb. Dies hat Klein dann für verschiedene Geometrien durchgeführt und baute ausgehend von der projektiven Geometrie eine Hierarchie von Geometrien auf, die euklidische wie nichteuklidische Geometrien als Spezialfälle enthielt. Die affine Gruppe hatte er jedoch, wie er später einschätzte als *„Ergebnis einseitiger Tradition“*, nicht berücksichtigt. Abschließend deutete er die Möglichkeit abstrakterer Untersuchungen in Sinne seines Programms für (n-dimensionale) Mannigfaltigkeiten an.

In den Schlußbemerkungen des Programms verglich Klein den in seiner Schrift erreichten Entwicklungsstand der Geometrie mit dem der Galoisschen Theorie. Indem er dabei die Untersuchung von *„Gruppen von Änderungen“* als Gemeinsamkeit hervorhob und die Auflösungstheorie der Gleichungen bzw. die Behandlung von Mannigfaltigkeiten als Anwendung dieser gruppentheoretischen Ergebnisse sah, billigte er der Gruppentheorie den Charakter einer eigenständigen mathematischen Teildisziplin zu und ließ die Richtung ahnen, in der die weiteren Abstraktionen erfolgen mußten.

Es waren jedoch nicht nur die Publikationen des Erlanger Programms und der zu diesem Themenkreis gehörigen Arbeiten Kleins, die einen wichtigen Fortschritt in der Entwicklung des gruppentheoretischen Denkens in den 70er Jahren des 19. Jahrhunderts hervorbrachten. Im gleichen Maße müssen die bereits in dem Jahrzehnt zuvor verstärkt aufgekommenen bewegungsgeometrischen Vorstellungen und die von Lie aufgestellte Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen genannt werden, die dieser im regen Gedankenaustausch mit Klein und etwa parallel zu dessen Forschungen hervorbrachte. Erstere waren insbesondere ein Ausdruck der neuen Aspekte, die sich in den Wechselbeziehungen zwischen den Naturwissenschaften und der Mathematik im 19. Jahrhundert entwickelten. Speziell die Mathematisierung physikalischer Teilgebiete, wie Optik, Hydrodynamik, Kristallographie, Elektro- und Thermodynamik, machte große Fortschritte. Der Aufschwung der mathematischen Physik führte u. a. dazu, die physikalischen Bewegungen stärker in den Mittelpunkt des Interesses zu rücken. Die Punkte des Raumes sah man als das abstrakte mathematische Bild von Massepunkten an, die den physi-

kalischen Körper beschrieben, und die Koordinatentransformationen als die Veranschaulichung der realen physikalischen Bewegungen. In diesen Kontext gehören auch die Bemühungen zur Aufklärung der Grundlagen der Geometrie, die speziell im Anschluß an den berühmten Habilitationsvortrag von Bernard Riemann von v. Helmholtz unternommen wurden und die eine beachtliche Diskussion unter Mathematikern wie Lie, Klein, Poincaré, Pasch und Hilbert auslösten. Dies bedingte sowohl eine Klärung verschiedener Begriffe und Postulate im Vorfeld der axiomatischen Charakterisierung der Geometrie als auch ein fruchtbares Wechselspiel der Vorstellungen zu einem abstrakteren mathematischen Raumbegriff und dem an den Anwendungen orientierten physikalischen. Entscheidend aus algebraischer Sicht war, daß man bei all diesen Betrachtungen zwangsläufig auf die Zusammensetzung von Bewegungen geführt wurde. Kam in dieser Phase die Erkenntnis hinzu, bei diesen Zusammensetzungen vom konkreten Objekt abstrahieren zu können, so war ein weiterer Weg zum Begriff der Transformationsgruppe frei. Als eine Folge dieser Auffassung bildeten dann die Bewegungen, d. h. die Transformationen, als Gruppenelement den Gegenstand der Untersuchung, was einen qualitativen Unterschied zur einfachen Anwendung gruppentheoretischer Ideen auf geometrische Probleme darstellte.

Diese impliziten gruppentheoretischen Elemente, die im Studium von zusammengesetzten Bewegungen enthalten waren, lassen sich mehrfach im 19. Jahrhundert nachweisen. Hervorgehoben seien die zunächst wenig beachteten und verstandenen Ergebnisse von Olinde Rodrigues, der 1840 die Komposition endlicher Bewegungen als nicht kommutativ erkannte, während infinitesimale Bewegungen miteinander vertauscht werden konnten. Ähnlich unbeachtet blieben lange Zeit die im Rahmen der Kristallographie betriebenen Studien von Bewegungen, doch sollten sie, zumindest die Ergebnisse der französischen Schule, dann den Ausgangspunkt für die erste große Arbeit zur Klassifikation der Transformationsgruppen durch Camille Jordan liefern. 1868 publizierte Jordan in dem *„Mémoire sur les groupes de mouvement“* eine umfassende Analyse der physikalisch möglichen Bewegungen eines starren Körpers im Raum, die auf eine Klassifikation der Bewegungsgruppen hinauslief und deren Ergebnisse er vorab in den Comptes Rendus der Pariser Akademie 1867 anzeigte. Er vermerkte, daß jede dieser Bewegungen eines starren Körpers als eine Schraubenbewegung, Drehung um eine Achse und Translation in Richtung der Achse, dargestellt werden kann, und charakterisierte sein Anliegen dann mit den Worten:

„Le problème qu'il s'agit de résoudre peut donc s'énoncer de l'une ou de l'autre des deux manières suivantes:

1 ° Former tous les groupes possibles de mouvements.

2 ° Former de toutes les manières possibles des systèmes de molécules superposables à eux-mêmes dans divers positions.“ [Jordan 1868/69, S. 168]

Bezüglich der zweiten Formulierung der Aufgabenstellung knüpfte er direkt an die kristallographischen Arbeiten Bravais' an. Die Gruppeneigenschaft definierte er wieder durch die Abgeschlossenheit gegenüber der Verknüpfungsrelation, übernahm also den permutationstheoretischen Gruppenbegriff, ohne darauf explizit hinzuweisen und ohne Andeutung einer notwendig werdenden Präzisierung.

Die weitere Entwicklung war dann vor allem mit Klein und seinen an das Erlanger Programm anschließenden Forschungen verknüpft. Zusammen mit Lie hatte Klein, wie schon dargelegt, allgemeine Untersuchungen über Gruppen geometrischer Bewegungen begonnen und das Erlanger Programm stellte dabei „nur" einen, wenn auch wichtigen Zwischenschritt dar. In den Studien zu der damals mehrfach erörterten Rolle imaginärer Elemente in der Geometrie ging Klein dazu über, die Drehungen der Riemannschen Zahlenkugel gruppentheoretisch zu interpretieren. Damit löste er sich von der bis dahin vorherrschenden Auffassung, mit der Anwendung der permutationstheoretischen Resultate in der Geometrie zwar eine anschauliche Interpretation dieser Ideen zu erhalten, aber kaum zu grundlegend neuen Einsichten zu kommen. Auch Jordan hatte 1870 keine Veranlassung gesehen, in seinem *„Traité ..."* auf seine Klassifikation der Transformationsgruppen hinzuweisen. Erstmals hat Klein den neuen Standpunkt in einer Arbeit von 1875 realisiert und die Deckabbildungen regulärer Polyeder als Gruppenelemente behandelt. Er formulierte als ein Ziel seiner Arbeit, wobei er die gebrochen linearen Transformationen in den Begriff der linearen Transformation mit einschloß:

„Die spezielle Aufgabe, welche ich weiterhin in Angriff nahm, knüpfte an den Umstand an, dass bei gewöhnlicher Maassbestimmung ein lange erledigtes Problem ist: *alle endlichen Gruppen von Bewegungen zu construiren.* Es schien möglich, für allgemeine projektivische Maassbestimmung dasselbe Problem zu lösen und damit also, was für algebraische Untersuchungen von Wichtigkeit sein muss, *alle endlichen Gruppen linearer Transformationen eines komplexen Argumentes $x+iy$ zu gewinnen.* Es hängt diese Bestimmung auf das Genaueste mit der Theorie der regulären Körper zusammen ..." [Klein 1875/76, S. 183f.]

Bei der Lösung dieser Aufgabe ging Klein dann deutlich über Jordan hinaus und kam zu eingehenden Betrachtungen der Erzeugenden der einzelnen Transformationsgruppen und zur Isomorphie von Gruppen. Er lotete die neuen Vorstellungen weiter aus und vollzog, angeregt durch Diskussionen mit Gordan, den entscheidenden Schritt, das Studium der Deckabbildungen auch für die Theorie der Gleichung 5. Grades als Ausgangspunkt zu wählen. Nachdem er auf die früher dargelegte Verbindung zwischen den algebraischen Gleichungen und den regulären Polyedern, speziell die Interpretation der Gleichung 5. Grades am Ikosaeder, verwiesen hatte, stellte er die umgekehrte Aufgabe, *„geradezu die Theorie der Gleichungen fünften Grades aus der Betrachtung des Ikosaeders abzuleiten"* [Klein 1877, S. 503], und fügte

den bereits bekannten Ergebnissen noch neue hinzu. Die vollständige Theorie bildete 1884 den Gegenstand seines Buches *„Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade“*. Sehr klar brachte er einleitend den gruppentheoretischen Charakter der Studien zum Ausdruck:

„Es sind nun aber, . . . , im Folgenden nicht eigentlich die hiermit aufgezählten Figuren selbst, die den Gegenstand unserer Betrachtung ausmachen, vielmehr sind es jene *Drehungen*, oder auch *Spiegelungen*, oder kurz gesagt: *diejenigen elementargeometrischen Operationen*, durch welche die genannten Figuren mit sich selbst zur Deckung kommen. *Die Figuren sind für uns nur das Orientirungsmittel, vermöge dessen wir die Gesammtheit gewisser Drehungen oder sonstiger Umänderungen übersehen . . .*

Indem wir uns jetzt die Aufgabe stellen, die in Rede stehenden Drehungen etc. zu studiren, durch welche die genannten Configurationen in sich übergehen, gebietet sich von vornherein der Anschluss an jene wichtige und umfassende Theorie, welche zumal durch *Galois'* bahnbrechende Arbeiten geschaffen worden ist und die man als *Gruppentheorie* bezeichnet. Ursprünglich aus der Gleichungstheorie erwachsen und dementsprechend auf die *Vertauschungen* irgendwelcher Elemente bezüglich, umfasst diese Theorie, wie man seit lange erkannt hat, überhaupt jede Frage, bei der es sich um eine geschlossene Mannigfaltigkeit irgend welcher *Operationen* handelt. Man sagt von beliebigen Operationen, daß sie eine *Gruppe* bilden, wenn je zwei der Operationen zusammengesetzt immer wieder eine Operation unter den bereits gegebenen erzeugen. In diesem Sinne haben wir sofort den Satz: *Die Drehungen, welche einen regulären Körper mit sich selbst zur Deckung bringen, bilden in ihrer Gesammtheit eine Gruppe.“* [Klein 1884, S. 4f.]

Damit atmete die nachfolgende Darlegung der gruppentheoretischen Grundbegriffe, die Klein aus der Permutationstheorie übertrug, durchaus den Geist einer weiteren Abstraktion, des Voranschreitens zu abstrakten, die Struktur erfassenden Begriffsbildungen. Klein unterstrich dies beispielsweise an der Isomorphie, ein Begriff, der dem modernen Homomorphiebegriff entspricht:

„Die isomorphe Beziehung kann eine wechselseitig eindeutige sein; man spricht dann von holoedrischem Isomorphismus. Es sind in diesem Falle die beiden Gruppen abstract genommen überhaupt identisch, und es ist nur die *Bedeutung* der beiderseitigen Operationen, in denen eine Verschiedenheit liegen kann.“ [Klein, Ikosaeder 1884, S. 8]

Klein analysierte die Deckabbildungen der regulären Polyeder im Detail und hob dabei jeweils die Isomorphie zu den entsprechenden Permutationsgruppen hervor, betonte also die strukturelle Übereinstimmung. Auch die Beziehung zur Theorie der Formen stellte er klar heraus.

Während Klein sich vor allem auf die endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Variablen konzentrierte, versuchte Jordan ab 1878 die endlichen Gruppen linearer Transformationen mit beliebiger endlicher Variablenzahl zu klassifizieren und löste die Aufgabe für niedrige Variablenzahlen (2, 3). Diese umfangreichen Untersuchungen mündeten Ende der 90er Jahre in die Darstellungstheorie von Gruppen durch lineare Substitutionen ein, die von Georg Frobenius, William Burnside (1852–1927) Theodor Molien (1861–1941) und Issai Schur (1875–1941) aufgebaut wurde.
Ein weiteres wichtiges Anwendungsgebiet, in dem Klein die ordnende Kraft der Gruppentheorie demonstrieren konnte, eröffnete sich ihm mit den Untersuchungen zu elliptischen Modulfunktionen, denen er sich Ende der 70er Jahre zuwandte. Insbesondere das Studium jener eindeutigen Funktionen, die bei der Anwendung einer Transformationsgruppe ungeändert blieben und die er ab 1890 als automorphe Funktionen bezeichnete, erregte sein Interesse. Etwa zur gleichen Zeit, aber unabhängig von Klein, kam Henri Poincaré ebenfalls zur Betrachtung analoger Fragestellungen und erzielte wesentliche Resultate. Wichtige Anregungen erhielt er durch Arbeiten von Lazarus Fuchs zur Integration linearer Differentialgleichungen und von Charles Hermite über elliptische Funktionen. Die entscheidende Neuerung bei der Verwendung gruppentheoretischer Überlegungen war, daß bei den Transformationen elliptischer Funktionen auch unendliche Transformationsgruppen auftreten konnten und somit Inhalt und Umfang des Begriffs der Transformationsgruppe erweitert wurde. Diese Erweiterung des Gruppenbegriffs vollzog sich ohne große Schwierigkeiten, so daß die einzelnen Mathematiker es nicht für nötig erachteten, über diesen Schritt zu reflektieren. 1897 publizierten Robert Fricke (1861–1930) und Klein eine systematische Darstellung der Theorie der automorphen Funktionen auf gruppentheoretischer Grundlage; der zweite Band erschien in drei Lieferungen 1901–1912.

8.3.2 Die Liesche Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen

Neben den Forschungen Kleins kam den Arbeiten des Norwegers Sophus Lie über Transformationsgruppen eine große Bedeutung zu. Anknüpfend an die anregende, durch den Ausbruch des Deutsch-Französischen Krieges vorzeitig beendete Zusammenarbeit mit Klein in Paris formte Lie seine eigenen Forschungen aus und kam bereits 1871 zum Begriff der Transformationsgruppe sowie zum Studium der Berührungstransformationen. Dabei verstand er unter einer Berührungstransformation eine räumliche Umformung, bei der Flächen, die sich berühren, in ebensolche übergehen. Jede Berührungstransformation ist durch ein System von Gleichungen, im allgemeinen Differentialgleichungen, bestimmt, woraus sich jene einzigartige Synthese von Geometrie und Theorie der Differentialgleichungen ergab, die das Liesche Schaffen auszeichnete. Seinen Übergang von ursprünglich geometrischen zu gruppentheoretischen Untersuchungen beschrieb Lie rückblickend so:

„Andrerseits entwickelte ich in den Jahren 1870–74 den Begriff der *endlichen continuirlichen Gruppe* und erkannte seine weitreichende Bedeutung für die Geometrie und für die Theorie der Differentialgleichungen. ... So traten für mich die Begriffe *Transformation und Transformationsgruppe* immer mehr in den Vordergrund und ich entwickelte nach und nach eine allgemeine *Transformationstheorie*.“ [Lie 1893, dritter Abschnitt, S. XVI]

Lie und Klein hatten sich 1870 in Berlin kennengelernt, wo sie sich beide zur Vertiefung ihrer mathematischen Kenntnisse aufhielten. Erst zwei Jahre zuvor hatte sich Lie nach der Lektüre von Arbeiten Poncelets und Plückers endgültig für die Mathematik entschieden. Das freundschaftliche Verhältnis zu dem sieben Jahre jüngeren Klein sollte seinen weiteren Lebensweg wesentlich beeinflussen. Beide beschlossen ihre Studien bei den führenden französischen Mathematikern, Jordan und Darboux, in Paris fortzusetzen, wobei sie sich insbesondere für die differentialgeometrischen Forschungen Darboux' interessierten. Obwohl der Aufenthalt durch den Deutsch-Französischen Krieg früher als geplant abrupt beendet wurde, haben beide im persönlichen Kontakt mit Darboux und Jordan wertvolle Anregungen für ihre weiteren Forschungen erhalten. Bei Lie führte dies zur Theorie der Transformationsgruppen, denen er sich dann Zeit seines Lebens widmete, bei Klein schlug sich dies in den im vorangegangenen Abschnitt behandelten Arbeiten zum Erlanger Programm und zur Klassifikation der Transformationsgruppen nieder. Es zeigte sich jedoch recht bald, daß Lie die vollständige Ausarbeitung der Theorie nicht im Alleingang bewältigen würde. Die 1872 für ihn geschaffene Professur an Norwegens einziger Universität in Christiania (Oslo) brachte ihm zwar soziale Sicherheit, wissenschaftlich war es jedoch eine isolierte Stellung. Anregende Diskussionen mit Kollegen und begabten Studenten, wie sie Klein zur gleichen Zeit in München bzw. Leipzig führen konnte, fehlten völlig. Klein, der nach der Habilitation 1871 in Göttingen, in Erlangen 1872–75, München 1875–80 und Leipzig 1880–86 wirkte, erkannte dieses Dilemma und schickte mit der Unterstützung seiner Kollegen während seiner Leipziger Amtszeit den jungen Friedrich Engel 1884 zu Lie nach Norwegen. Engel sollte sich in die Theorie Lies einarbeiten und diesen dann bei den Forschungen zur Seite stehen. Schließlich organisierte Klein bei seinem Wechsel an die Universität Göttingen, daß Lie sein Nachfolger in Leipzig wurde. In Leipzig entfaltete Lie eine umfangreiche Forschungstätigkeit und schuf in Zusammenarbeit mit seinen Schülern bedeutende zusammenfassende Darstellungen zur Theorie der Transformationsgruppen. Seit 1889 wurde seine Arbeit jedoch durch eine schwere Erkrankung überschattet, die langsam, aber stetig voranschritt und zu jener Zeit noch unheilbar war. Lie litt an perniziöser Anämie. 1898 kehrte er nach Christiania zurück, wo er im Jahr darauf verstarb. Für weitere biographische Details sei auf [Fritsche 1999] und [Stubhaug 2002] verwiesen, für eine eingehende Betrachtung der Forschungen von Klein und Lie vom Standpunkt der Aufdeckung und Anwendung von Symmetrievorstellungen auf [Yaglom 1988].

Wesentlich stimuliert durch die von ihm erkannten Anwendungsmöglichkeiten, stellte sich Lie die Klassifikation der Transformationsgruppen als zentrale Aufgabe seiner Forschungen. Mit der 1874 erschienenen Arbeit *„Über Gruppen von Transformationen“* begann er die Folge seiner Publikationen zur Theorie der Transformationsgruppen und gab alle Transformationsgruppen an, die nur von einer Variablen abhängen. Ab 1875 nahm er auch die sog. infinitesimalen Transformationen zum Studium von Transformationsgruppen zu Hilfe. Die Begriffsbildungen und Formulierungen wiesen in diesen frühen Arbeiten Lies noch eine Reihe von Ungenauigkeiten auf. So hatte er eine Transformationsgruppe als eine Schar von Transformationen $f_i(x_1, ...x_n, a_1, ...a_r)$ definiert, bei der die Zusammensetzung von zwei Transformationen der Schar wieder eine Transformation der Schar ergab. Die Parameter der zusammengesetzten Transformation sollten dabei nur von den Parametern der beiden verknüpften Transformationen abhängen. Mit anderen Worten: Sind

$$x_i' = f_i(x_1, ...x_n, a_1, ...a_r) \text{ und } x_i'' = f_i(x_1', ...x_n', b_1, ...b_r)$$

zwei Transformationen der Gruppe, so ergibt deren Hintereinanderausführung eine Transformation der Gruppe in der Form

$$x_i'' = f_i(f_1(x, a), ...f_n(x, a), b_1, ...b_r) = f_i(x_1, ...x_n, c_1, ...c_r),$$

und die c_k hängen allein von den a_j und b_j ab ($i = 1, \ldots, n$; $j, k = 1, \ldots, r$). Über die Eigenschaften der Funktionen f_i machte Lie zunächst keine genaueren Aussagen, in einer Arbeit aus dem Jahre 1880 setzte er dann die f_i als analytische Funktionen voraus, die in jedem Punkt des Definitionsbereichs durch Potenzreihen gegeben waren. Gleichzeitig nahm er für die Transformationsgruppen an, daß mit jeder Transformation auch deren inverse zur Gruppe gehöre, glaubte aber, diese Eigenschaft aus der Gruppeneigenschaft, d. h. der multiplikativen Abgeschlossenheit, ableiten zu können [Lie 1880, S. 445]. Zuvor hatte er bereits 1876 und 1878 für endliche kontinuierliche Transformationsgruppen gezeigt, daß wenigstens eine identische Transformation und zu jeder Transformation mindestens eine inverse auch zur Gruppe gehörten. Die infinitesimalen Transformationen zu einer vorgegebenen Transformation f definierte Lie durch Differentiation von f nach den Parametern a_j, $j = 1, ...r$, und drückte diese als Differentialoperator aus. Die Rechnungen mit den Differentialausdrücken führten ihn dann auf fast natürlichem Wege zur Betrachtung der heute als Kommutator $[A, B]$ bezeichneten Beziehung $AB - BA$, bei vorgegebenen Ausdrücken A und B (statt $[A, B]$ schrieb Lie (A, B)). Weiterhin bestätigte er für die zu einer r-dimensionalen kontinuierlichen Transformationsgruppe gehörigen infinitesimalen Transformationen, daß sie als Linearkombination von r linear unabhängigen infinitesimalen Transformationen darstellbar sind und zu je zwei Transformationen auch deren Kommutator zu dieser Menge gehört, d. h. sind $A_1, ..., A_r$ die linear unabhängigen infinitesimalen Transformationen, so gilt $[A_i, A_j] = \sum c_{ij}^k A_k, (i, j, k = 1, \ldots, r)$. Für die infinitesimalen Transformationen leitete er auch die Jacobische Iden-

tität $[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0$ ab. Umgekehrt bewies Lie, daß für eine Schar von r linear unabhängigen infinitesimalen Transformationen die Abgeschlossenheit gegenüber der Kommutatorbildung hinreichend ist, um aus jeder dieser Transformationen eine eindimensionale Transformationsgruppe zu konstruieren, und daß sich all diese Gruppen zu einer r-dimensionalen Gruppe vereinigen lassen. Ohne die Leistungen Lies zu schmälern, muß jedoch einschränkend bemerkt werden, daß diese und zahlreiche weitere Aussagen nicht in der von ihm gewählten pauschalen Formulierung gelten, sondern nur lokal. Lie erkannte auch, daß die in der obigen Relation auftretenden Größen c_{ij}^k weder von den Variablen x noch von den Parametern a abhingen, also Konstanten waren. Damit erhielt aber die Menge der infinitesimalen Transformationen eine wichtige algebraische Struktur. Mit der Kommutatorbildung als Multiplikation bildete sie ein hyperkomplexes System, eine Algebra, und die Konstanten c_{ij}^k waren genau die Multiplikationskonstanten des Systems, die seit Hamilton in vielen Betrachtungen über hyperkomplexe Systeme verwendet wurden. Damit hingen diese Konstanten nur von der Definition der Gruppenoperation ab und waren nicht an die Realisierung der Gruppe als Transformationsgruppe gebunden. Heute wird ein lineares Größensystem mit einer Produktbildung $[a,b]$, für die $[a,b]=-[b,a]$ und die Jacobische Identität gelten, als Lie-Algebra bezeichnet.

In den weiteren Forschungen präzisierte und vertiefte Lie die Ergebnisse und formulierte dann drei Theoreme, welche die Beziehungen zwischen den kontinuierlichen Transformationsgruppen und den Gruppen infinitesimaler Transformationen aufklärten und die er später auch als Haupttheoreme bezeichnete. Er bewies speziell, wie zu jeder kontinuierlichen Transformationsgruppe eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen erhalten wird und umgekehrt. Damit hatte er die grundlegenden Beziehungen zwischen den r-dimensionalen kontinuierlichen Transformationsgruppen und den infinitesimalen Transformationen oder wie man in moderner Terminologie sagt, zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren erkannt, auch wenn er bei verschiedenen Beweisen nicht darauf hinwies, daß sie nur lokal gültig sind.

Schließlich kam er 1883 zu der grundlegenden Unterscheidung zwischen endlichen und unendlichen kontinuierlichen Gruppen:

„Kontinuierlich heißt eine Gruppe, deren sämtliche Operationen durch unendlichmalige Wiederholung von infinitesimalen Transformationen erzeugt sind; diskontinuierlich heißt dagegen eine Gruppe, deren Operationen sämtlich endlich verschieden sind.“ [Lie 1924, S. 314]

Einige Jahre später faßte Lie dies in folgende Worte: *„Eine Transformationsgruppe heißt continuirlich, wenn es möglich ist, zu jeder der Gruppe angehörigen Transformation gewisse andere Transformationen der Gruppe anzugeben, welche von der betreffenden Transformation nur unendlich wenig verschieden sind, wenn es dagegen nicht möglich ist, den ganzen in der Gruppe enthaltenen Inbegriff von Transformationen in einzelne discrete Schaaren zu zerlegen.“* [Lie 1888, S. 3]



Émile Picard



Friedrich Engel

Entsprechend der Einteilung der diskontinuierlichen Transformationsgruppen in endliche und unendliche, je nachdem die Anzahl ihrer Operationen begrenzt oder unbegrenzt war, differenzierte Lie die kontinuierlichen Gruppen. Für eine endliche kontinuierliche Gruppe hängen die Operationen nur von variablen Parametern ab, für eine unendliche Gruppe von beliebigen Funktionen. Als äquivalente Charakterisierung der endlich bzw. unendlich kontinuierlichen Gruppen wies Lie dann das Auftreten von endlich bzw. unendlich vielen unabhängigen infinitesimalen Transformationen nach. Im Rahmen der Anwendung seiner Ergebnisse auf die Integration von Differentialgleichungen und der Weiterentwicklung der entsprechenden Theorie leitete er diese Einteilung der kontinuierlichen Transformationsgruppen auch mit Hilfe der einer Transformation zugeordneten Differentialgleichung ab. Eine unendliche kontinuierliche Transformationsgruppe charakterisierte er als eine Schar von Transformationen, die durch ein System von Differentialgleichungen definiert ist, so daß mit $x_i' = f_i(x_1, ...x_n)$ und $x_i' = g_i(x_1, ...x_n)$ auch $x_i' = g_i(f_1(x), ...f_n(x))$ Lösung des Systems ist und die allgemeine Lösung von willkürlichen Funktionen abhängt. Da Lie in der erwähnten Arbeit von 1883 auch ausführte, daß es neben den von ihm definierten Typen noch einen dritten Typ von Transformationsgruppen gibt, zu dem z. B. die Bewegungen der Ebene gehörten, kann man mit dem Jahr 1883 die Klassifikation der Transformationsgruppen als prinzipiell vollendet ansehen.

Im gleichen Jahr publizierte der französische Mathematiker Émile Picard eine erste wichtige Arbeit zur Realisierung von Lies großer Idee, eine zur Galoisschen Theorie analoge Theorie für die Lösung von Differentialgleichungen zu entwickeln. Mit weiteren Arbeiten haben Picard 1887 und Ernest Vessiot (1865–1952) 1892 diese Theorie weiter ausgebaut und zu einem gewissen Abschluß gebracht. Sie waren es zugleich, die Lies gruppentheoretische

Zielsetzungen anerkannten und deutlicher zur Geltung brachten und damit auch die durch den Übergang von den Permutationsgruppen zu den Transformationsgruppen bedingten Fortschritte hervortreten ließen. Die weitere Beschäftigung mit der Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen hatte, wie bereits mit Lies Äußerungen zur Existenz der Inversen angedeutet wurde, Auswirkungen auf die Erkenntnis der eine Gruppe charakterisierenden Eigenschaften, d. h. auf die abstrakte axiomatische Formulierung des Gruppenbegriffs. Bevor dies jedoch weiterverfolgt wird, soll noch ein Blick auf die anderen algebraischen Gebiete geworfen werden.

8.4 Die ersten Strukturuntersuchungen bei hyperkomplexen Systemen

Ein weiteres Gebiet, das in den 70er Jahren eine deutliche Profilierung erhielt, war die Untersuchung hyperkomplexer Zahlensysteme. Die diesbezüglichen Ergebnisse standen nicht so im Blickpunkt wie jene über Transformationsgruppen oder zur Galois-Theorie und waren mit teilweise sehr unterschiedlichen Fragestellungen in der Mathematik verknüpft. In gewisser Hinsicht stellten die Fortschritte bei den hyperkomplexen Systemen einen weiteren Gradmesser dar, inwieweit algebraisches Denken größere Teile der Mathematik durchdrungen hatte.

Im vorangegangenen Kapitel (Abschnitt 7.6) sind bereits jene Entwicklungen betrachtet worden, die mit Fragen der linearen Algebra in Verbindung stehen. Da diese Forschungen, wie die Beispiele Graßmann und Cayley zeigen, auf einem beachtlichen Abstraktionsniveau stattfanden, bildeten sie eine Hauptquelle, aus der die Überlegungen zu hyperkomplexen Systemen ihre Anregungen erfuhren. Ergänzend sei zu Cayley noch erwähnt, daß er in der Arbeit, in der er eine abstrakte Definition der endlichen Gruppe vorlegte, auch erstmals eine Gruppenalgebra, die Gruppenalgebra der symmetrischen Gruppe $_3$, konstruierte und damit ein weiteres Beispiel für ein hyperkomplexes System angab. Cayley bildete die formalen Summen aus den Gruppenelementen, definierte deren Addition elementweise und erklärte die Multiplikation durch die Gruppenoperation, wobei er die Linearität der Verknüpfung stillschweigend voraussetzte. Anschließend hob er nicht nur hervor, daß die Menge dieser Größen ein hyperkomplexes System bildet, sondern auch, daß dieses System von den bis dahin bekannten Systemen verschieden sei:

„It does not appear that there is in this system anything analogous to the modulus $w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ *, so important in the theory of quaternions.“* [Cayley 1854, S. 129]

Die Bildung der Gruppenalgebra erwies sich wie die des Gruppenbegriffs als historisch zu früh, doch wurde damit in der späteren Entwicklung die enge Beziehung zwischen den Darstellungen der endlichen Gruppen und den Darstellungen der Gruppenalgebra hergestellt.

Ende der 60er Jahre lagen somit eine ganze Reihe von hyperkomplexen Systemen vor. Neben den bisher erwähnten Quaternionen und Biquaternionen *Hamiltons*, den Matrizenalgebren, und *Graßmanns* Produktbildungen seien noch Saint Venants Studien zur Multiplikation von Vektoren und Cauchys *„clefs algébriques“* genannt. Die Einführung letzterer war möglicherweise von Graßmanns Studien angeregt. Die *„clefs“* hatten ebenfalls den Charakter abstrakter Einheiten, die je nach der Multiplikation, die man für sie definierte, unterschiedliche hyperkomplexe Systeme bildeten. Cauchy hat seine Ideen jedoch nur angedeutet und nicht genauer entwickelt. So vermerkte er zum Beispiel, daß sich die imaginären Zahlen und die Quaternionen seinen *„clefs“* unterordnen, ohne dies im Detail auszuführen.

8.4.1 Hankels „Theorie der complexen Zahlensysteme“

Eine Zusammenfassung der vielfältigen Ansätze zu hyperkomplexen Zahlen bot dann Hermann Hankel 1867 in seinem Buch *„Theorie der complexen Zahlensysteme“*, das man als Grundstein für eine eigenständige Theorie betrachten kann. Erstmals wurden die Forschungen der englischen algebraischen Schule im deutschen Sprachraum systematisch behandelt und mit der kontinentalen Entwicklung verwoben. Hankel gab in dem Buch einen Aufbau des Zahlensystems bis zu den imaginären Zahlen und setzte dies für höhere komplexe Zahlen fort, so daß die reellen und komplexen Zahlen als Spezialfall einer allgemeineren Theorie erschienen. Deutlich betonte er, daß die unterschiedlichen Systeme höherer komplexer Zahlen, also die hyperkomplexen Systeme, durch die verschiedenen Definitionen der Produktbildung entstanden. Mit der Unterscheidung zwischen begrenzten und unbegrenzten Systemen und dem Nachweis, daß unter den linearen Systemen kein höheres komplexes Zahlensystem existiert als die komplexen Zahlen selbst, das assoziativ, distributiv und nullteilerfrei ist, rückte er das Studium der Struktur dieser Systeme stärker in den Mittelpunkt der Betrachtungen. Begrenzt nannte er ein System, wenn die multiplikative Verknüpfung nicht auf neue Einheiten führte, in unbegrenzten Systemen lieferte die Multiplikation der Grundeinheiten stets neue Einheiten, es existierte also keine endliche Basismenge. Ausführlicher analysierte Hankel die Quaternionen und die alternierenden Zahlen und schenkte insbesondere der geometrischen Umsetzung und Anwendung dieser Systeme große Aufmerksamkeit. Schließlich eröffnete er noch die Verbindung zu den algebraischen Zahlkörpern, indem er auch die *„von Gauss und Dirichlet in die Zahlenlehre eingeführten allgemeinen complexen ganzen Zahlen“* [Hankel 1867, S. 103] als Beispiele für hyperkomplexe Zahlen einordnete. Diese von Hankel nur formal benannte Beziehung zwischen zwei mathematischen Forschungsthemen sollte in den Händen von Dedekind sehr bald eine sehr fruchtbare Bearbeitung erfahren. Hankels Verdienst bleibt es, mit seinem Buch die vorhandene Vielfalt hyperkomplexer Systeme weitgehend erfasst, sehr gut dargestellt und zum Teil zu Forschungsrichtungen vereint zu haben.

Zugleich leitete er in ersten Ansätzen einen Wandel in den Forschungszielen hin zur Strukturuntersuchung ein. Mit Blick auf die Gesamtentwicklung der Mathematik ist die Entstehungsgeschichte des Buches noch bemerkenswert. Hankel schrieb das Buch als Lehrbuch zur Funktionentheorie und wollte damit dem Bedürfnis nach einer zusammenfassenden exakten Darstellung dieses in rascher Entwicklung begriffenen Zweiges der Mathematik Rechnung tragen. Entsprechend seinen Vorstellungen vom Aufbau der Mathematik sollte in diesem ersten Teil ein allgemeines begriffliches Fundament in Form der Theorie hyperkomplexer Zahlen gelegt werden. Somit waren es weniger konkrete algebraische Forschungen, als vielmehr Belange der Lehre und Überlegungen zum Aufbau einer mathematischen Theorie, die die Schaffung dieses wichtigen Werkes stimulierten.

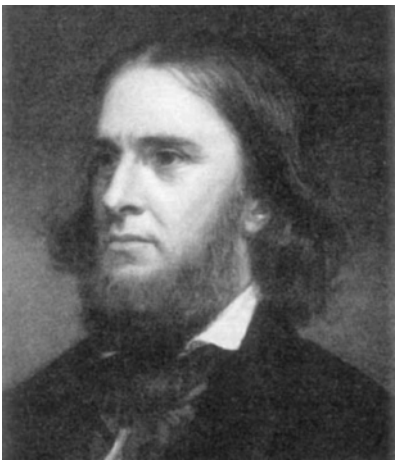
Bei der Ausformung dieser Ansichten hat zweifellos auch Hankels Kontakt zu führenden deutschen Mathematikern eine Rolle gespielt. Hankel hatte sein 1857 in Leipzig begonnenes Studium 1860 in Göttingen bei Riemann und 1861 für kurze Zeit in Berlin bei Kronecker und Weierstraß fortgesetzt. Vor allem Riemann hat ihn wissenschaftlich stark beeinflußt, und wiederholt griff er in seinen Arbeiten Themen der Riemannschen Forschungen zur Funktionentheorie und Analysis auf. Nach der Habilitation 1863 in Leipzig und der Tätigkeit als Privatdozent an der Leipziger Universität nahm Hankel 1867 eine Professur in Erlangen an und wechselte 1869 an die Universität Tübingen. Neben den mathematischen Forschungen interessierte er sich seit seiner Gymnasialzeit auch sehr für die Geschichte der Mathematik, und viele seiner Arbeiten enthielten sehr sachkundige historische Bemerkungen zur behandelten Thematik. Diese geschickte Kombination von historischen Fakten mit mathematischen Ausführungen kam speziell in der oben besprochenen *„Theorie der complexen Zahlensysteme“* sehr vorteilhaft zur Geltung. Hankels früher Tod 1873 verhinderte die Vollendung eines geplanten umfassenden mathematikhistorischen Werkes, doch gelten die aus dem Nachlaß publizierten Ausarbeitungen als eine wichtige Zwischenstation auf dem Weg zu den großen zusammenfassenden Darstellungen zur Mathematikgeschichte wie sie dann von Moritz Cantor und anderen geschaffen wurden.

8.4.2 Die Klassifikation der Algebren bei Benjamin Peirce

Der nächste entscheidende Entwicklungsschritt in der Untersuchung hyperkomplexer Systeme wurde jedoch nicht in Europa vollzogen, sondern im aufstrebenden Nordamerika. Nachdem bereits in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts nicht zuletzt dank einer allgemeinen Bildungsreform in den USA eine stärkere Betonung der naturwissenschaftlichen Bildung mit dem Ziel erfolgt war, den Anschluß an das Wissenschaftsniveau in Europa zu erreichen, kam es nach der Jahrhundertmitte u. a. stimuliert durch die sich aus dem Wachsen von Industrie und Landwirtschaft resultierenden Fragestellungen zu einer weiteren Umgestaltung und zu einem Aufschwung von Mathematik und Naturwissenschaften. Eine Auswirkung dieses Prozesses war die



Hermann Hankel



Benjamin Peirce

Gründung mehrerer Universitäten und anderer höherer Bildungseinrichtungen. Das Ausgangsniveau der Mathematik war sehr niedrig. Seit den 20er Jahren entstanden mehrere Mathematiklehrbücher und Übersetzungen von französischen Originalwerken. In dieser Hinsicht läßt sich dieser Aufschwung mit dem Neuanfang auf mathematischem Terrain in England vergleichen. Jedoch entwickelte sich in den USA erst allmählich eine mathematische Forschung, die vorrangig auf Probleme der Anwendung konzentriert blieb. Mit Benjamin Peirce, der seit 1833 als Professor an der Harvard University wirkte, rückten in den 60er Jahren erstmals Fragen ohne direkten Anwendungsbezug in das Blickfeld und mündeten in eigenständige Forschungen ein. Er gilt deshalb mit Recht als Vater der reinen Mathematik in den USA. Doch auch Peirce hatte sich zuvor intensiv mit Anwendungsfragen beschäftigt und war sehr gut mit verschiedenen Entwicklungen der französischen und britischen Mathematik vertraut, u. a. war er an der Übersetzung von Laplaces *„Mécanique céleste“* beteiligt und ein eifriger Anhänger von Hamiltons Quaternionen. 1847 hatte er über Kometenbahnen sowie deren Berechnung publiziert und seit 1852 arbeitete er mit der amerikanischen Vermessungsbehörde zusammen und förderte insbesondere die Ausdehnung des geodätischen Systems ins Landesinnere und die Vereinigung des Triangulationsnetzes der Ostküste mit dem der Westküste. Für eine ausführliche Analyse der Entwicklung der Mathematik in den USA und speziell der verschiedenen Bemühungen am Ende des 19. Jahrhunderts, den Anschluß an das europäische Niveau herzustellen, wird auf [Tarwater 1977] und [Parshall, Rowe 1994] verwiesen.

In seinem Werk zu hyperkomplexen Systemen trat dann deutlich eine formallogische Betrachtungsweise hervor, was wohl vorrangig dem Einfluß der logischen Studien seines Sohnes Charles Sanders und dem Studium der logischen Arbeiten von George Boole und Augustus De Morgan geschuldet war. Außer-

dem wurden weitere Einflüsse der englischen und französischen Mathematik deutlich (vgl. dazu [Schlote 1988, Kap. 2.2]). Peirces Arbeit erschien 1870 zunächst nur als Privatdruck in etwa 100 Exemplaren unter dem Titel *„Linear Associative Algebra“*. Die formal-logischen Vorstellungen dokumentierten sich gleich zu Beginn der Arbeit in seiner Definition der Mathematik als *„the science which draws necessary conclusions“*. [B. Peirce 1881, S. 98] Der Diskussion dieser Definition schloß sich dann eine Charakterisierung der Algebra als formale Mathematik und eine Unterscheidung in gewöhnliche oder arithmetische, logische und eine nicht näher bezeichnete dritte Art von Algebra an. Für diese Typen erklärte er je drei Teile:

„The symbols of an algebra, with the laws of combination, constitute its language; the methods of using the symbols in the drawing of inferences is its art; and their interpretation is its scientific application.“ [B. Peirce 1881, S. 98]

Im weiteren behandelte er aber nur den ersten Teil, die Sprache. Dieser Teil war für Peirce entsprechend seines Mathematikbegriffs von besonderem Interesse. Die Symbolik entkleidete *„die Gedanken ihrer äußeren Form“*, ließ ihre Verknüpfung und Abhängigkeit deutlich werden und deckte so Ähnlichkeiten im logischen Schema von scheinbar völlig verschiedenen Problemstellungen auf. Eine wichtige Aufgabe sah Peirce in der Analyse dieser logisch-algebraischen Schemata und der Bestimmung der verschiedenen Typen. Diese Schemata waren letztlich hyperkomplexe Systeme, Peirce sprach von Algebren ohne über die damit entstehende doppelte Bedeutung des Begriffs zu reflektieren, so daß die Analyse der Algebren die Aufklärung von deren Struktur beinhaltete.

Peirce kommt das Verdienst zu, als erster systematisch Untersuchungen zur Struktur hyperkomplexer Systeme durchgeführt und erste Klassifikationsprinzipien aufgestellt zu haben. Die Klassifikation behandelte er dann als rein mathematisches Problem, ohne die eingangs skizzierten philosophischen und logischen Erörterungen. Einige der Kriterien, wie die Einteilung der Algebren nach der Anzahl der Basiselemente, erscheinen vom modernen Standpunkt trivial, doch lieferten sie Peirce ein Mittel, um die formulierte Aufgabe in Angriff nehmen zu können. In der Arbeit gab er 163 Algebren mit höchstens 6 Basiselementen an. Die Darlegung der Klassifikationsprinzipien war jedoch so allgemein gehalten, daß diese Einschränkung in der Anzahl der Basiseinheiten keine Rolle spielt. Hinsichtlich des Begriffssystems setzte Peirce die Begriffe kommutativ, assoziativ und distributiv als bekannt voraus, ein Zeichen, daß der Abstraktionsprozess in der Algebra auch im Bezug auf eine neue Terminologie vorankam. Als weitere Eigenschaft definierte er die Linearität, d. h. das Produkt zweier Basiseinheiten ist wieder eine Linearkombination der Basiseinheiten. Dies sicherte Peirce zunächst die Abgeschlossenheit des Systems. Zugleich vermerkte er, daß eine Algebra mit endlich vielen unabhängigen Begriffen (Einheiten) bei geeigneter Wahl der Basiselemente stets eine lineare Algebra ist. Als Koeffizienten wählte er die komplexen Zahlen, er unterschied

aber deutlich zwischen den Koeffizienten und den Größen aus dem Grundbereich der Algebra und hielt auch hier die Ausführungen so allgemein, daß sie für einen beliebigen Körper als Koeffizientenbereich gelten. Gegenstand seiner Analyse waren, wie es der Titel der Arbeit andeutet, endliche lineare assoziative Algebren mit komplexen Koeffizienten; die Kommutativität setzte er im allgemeinen nicht voraus.

Als weitere Klassifikationsprinzipien, neben der Unterscheidung nach der Anzahl der Basiselemente, formulierte er das *„Principle of the substitution of letters“*, später oft als Äquivalenzprinzip bezeichnet, sowie die Einteilung in reine und gemischte Algebren. Ersteres besagte, in moderner Terminologie, daß zwischen isomorphen Algebren nicht unterschieden werden muss. Als rein bezeichnete Peirce eine Algebra, wenn in den Produkten einer Einheit mit je einer der übrigen Einheiten alle Einheiten mindestens einmal auftraten. Im anderen Fall, also in gemischten Algebren, ließen sich die Einheiten in mindesten zwei Mengen teilen, so daß, die Mengen als paarweise durchschnittsfremd vorausgesetzt, das Produkt von Einheiten aus verschiedenen Mengen stets Null ergibt. Diese Definitionen waren nicht exakt formuliert, doch kann man in diesen Überlegungen einen ersten Vorstoß zum Begriff der direkten Summe von Algebren sehen. Das hohe, von Peirce gewählte Abstraktionsniveau kam übrigens auch dadurch zum Ausdruck, daß die bisher besprochenen Klassifikationsprinzipien angegeben wurden, ohne auf die Verknüpfungsoperationen in der Algebra genauer eingehen zu müssen. Bei der Betrachtung der Multiplikation führte Peirce dann als weitere wichtige Begriffe, die des *„Nilfactor“*, des idempotenten und des nilpotenten Elements ein. Ersteren übernahm er von Hamilton, letztere waren völlig neu. Die Definition des *„Nilfactors“* war die erste publizierte, allerdings noch unvollständige Charakterisierung des Begriffs Nullteiler. Zuvor hatte Karl Weierstraß bereits 1861/62 eine exakte Definition gegeben, diese aber erst 1883 Hermann Amandus Schwarz in einem Brief mitgeteilt. Weierstraß schrieb:

„Eine derartige Größe b ist dadurch charakterisiert, daß sich ihr, und zwar auf unendlich viele Arten, eine andere Größe c, die nicht gleich Null ist, so zugesellen läßt, daß $bc = 0$ *ist; ich will sie deshalb „Theiler der Null“ nennen, und diese Benennung auch für den Fall ausdehnen, wo sie selbst den Wert Null hat.“* [Schwarz 1884, S. 398]

Der Brief wurde von Schwarz 1884 veröffentlicht. Ein idempotentes Element definierte Peirce durch die Relation $a^n = a$, was er aber sogleich auf $a^2 = a$ einschränkte, und ein nilpotentes durch $a^n = 0$. Dabei könnte die Definition der Idempotenz durch Booles Indexgesetz in dessen algebraischer Logik angeregt worden sein.

Die Einführung der idem- und nilpotenten Elemente bildete auch die Basis für das vielleicht interessanteste Kriterium zur Strukturanalyse der Algebren: die später nach Peirce benannte Zerlegung einer Algebra. Zunächst unterschied Peirce, ob die Algebra einen idempotenten Ausdruck enthielt oder nicht. Im ersten Fall nannte er sie idempotent, im zweiten Fall nilpotent. Diese Bezeichnungen wurden durch zwei Sätze von Peirce gerechtfertigt. Einerseits

zeigte er, daß jede (endlich dimensionale) lineare assoziative Algebra entweder mindestens einen idempotenten oder einen nilpotenten Ausdruck enthält, und andererseits wies er in einer Algebra ohne einen idempotenten Ausdruck alle Elemente als nilpotent nach. In einer Algebra mit idempotenten Element i zerlegte er jedes Element a der Algebra in vier Bestandteile a_k ($k = 1, 2, 3, 4$): $a_1 = iai$, $a_2 = i(a - ai)$, $a_3 = (a - ia)i$, $a_4 = a - ia - ai + iai$ und teilte die Elemente der Algebra in vier entsprechende Gruppen ein. Durch geeignete Wahl der Basiselemente erreichte er, daß die erste Gruppe nur ein idempotentes Element enthielt und alle weiteren, eventuell noch vorhandenen idempotenten Elemente zur vierten Gruppe gehörten, so daß für diesen Teil die Zerlegung wiederholt werden konnte. Für die Multiplikation von Elementen aus den einzelnen Gruppen gab er an, zu welcher Gruppe das Produkt gehörte und stellte dies in einer Multiplikationstabelle im Sinne der Komplexmultiplikation zusammen. Beispielsweise liefert die Multiplikation eines Elements der ersten Gruppe mit einem der zweiten Gruppe ein Element der zweiten Gruppe, während man bei der Vertauschung der Reihenfolge stets Null erhält. Schließlich folgerte Peirce noch, daß in einer reinen Algebra die erste und vierte Gruppe nur dann gemeinsam vorkommen, wenn auch die beiden anderen Gruppen auftreten. Die Analyse der nilpotenten Algebren erwies sich als wesentlich schwieriger und Peirce mußte sich mit der Formulierung einiger Ansatzpunkte begnügen. Doch reichten die von ihm geschaffenen Prinzipien aus, um die erwähnte Charakterisierung der Algebren mit bis zu sechs Basiseinheiten an Hand ihrer Multiplikationstabelle vorzunehmen.

Mit dem Streben, unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen die Eigenschaften abstrakter Algebren zu ermitteln, erwies sich Peirce zwar als ein würdiger Erbe der Traditionen von Peacock und Hamilton und prägte eine neue Richtung der mathematischen Forschung, doch fand er zunächst kaum Anerkennung. In den USA war die mathematische Forschung in ihrem Niveau noch zu unterentwickelt und sehr stark auf Anwendungen orientiert, so daß es erst Ende der 80er Jahre zu einer verstärkten Rezeption der Ergebnisse kam. Zusammen mit den inzwischen in Europa erzielten Fortschritten hat die Peircesche Arbeit trotz der zeitlichen Verzögerung noch wesentlichen Einfluß auf die Ausprägung der algebraischen Forschungen in den USA ausgeübt. Auch in Europa war die Resonanz auf Peirces Ideen gering und beschränkte sich zunächst auf Reaktionen englischer Mathematiker. Die Situation verbesserte sich etwas, nachdem die Arbeit 1881 in dem erst drei Jahre zuvor von James Joseph Sylvester, Benjamin Peirce und Simon Newcomb gegründeten Zeitschrift *„American Journal of Mathematics“* nochmals abgedruckt und von Peirce bzw. seinem Sohn durch Zusätze ergänzt wurde. Speziell die Supplemente von Charles Sanders Peirce enthielten wichtige neue Erkenntnisse. Er beweis zum einen, *„that any associative algebra – may be represented in a matrix“* [C. S. Peirce 1881, S. 223], zum anderen, daß die reellen Quaternionen, die komplexen und die reellen Zahlen die einzigen assoziativen Algebren mit eindeutiger Division (Divisionsalgebren) über den reellen Zahlen sind.

Die Vorstellungen zur Darstellung von Algebren durch Matrizen entwickelte C. S. Peirce um 1870 im Rahmen seiner logischen Studien und publizierte den obigen Satz erstmals 1875. In den Kommentaren zur Arbeit seines Vaters gab er zu jeder der dort verzeichneten Algebren die sog. *„relative form“* an, aus der leicht die Darstellung der Algebra folgte. Den zweiten Satz über die Divisionsalgebren hatte C. S. Peirce unabhängig von G. F. Frobenius abgeleitet, der denselben 1878 angab. Die Aussage des Satzes stand gleichsam für einen neuen Typ in den Strukturaussagen, verdeutlichte sie doch, daß es trotz der zahlreichen, inzwischen bekannten Algebren nur sehr wenige gab, welche die von den Zahlen vertrauten Eigenschaften besaßen.

Den entscheidenden Impuls für die Rezeption der Peirceschen Arbeit und der Vorstellungen zur Matrizendarstellung gab allerdings Sylvester 1881. Anknüpfend an Cayleys Arbeit zur Matrizentheorie von 1858 und dessen Hinweis auf die Darstellung der Quaternionen durch 2×2-Matrizen, schuf er in Analogie dazu das System der Nonionen sowie deren Darstellung durch 3×3-Matrizen und führte eine Methode von C. S. Peirce genau aus, wie man eine Matrix als System hyperkomplexer Größen (Algebra) schreiben kann. Durch die Publikation der Ergebnisse in den Comptes Rendus der Pariser Akademie wurden diese in Europa bekannt und regten weitere Studien an.

Die Angabe der 163 Algebren durch Benjamin Peirce lieferte zugleich einen deutlichen Hinweis darauf, daß künftig Fortschritte eher im Stile des Frobenius-Peirceschen Satzes zu suchen waren. Der Aufwand für eine rechnerische Behandlung der Strukturanalyse erwies sich als zu umfangreich. Mit steigender Anzahl der Basiselemente nahm die Zahl der möglichen hyperkomplexen Systeme so stark zu, daß eine Angabe aller Algebren schon für kleine Basismengen kaum noch durchführbar war und nicht als sinnvoll erschien. Der Fortschritt konnte nur in einer Verstärkung der strukturellen Betrachtungen bestehen und dies stützte genau jene Tendenzen, die sich auch in den anderen Gebieten der Algebra abzeichneten.

Wesentliche Inhalte und Ereignisse in der Algebra 1850–1875

1853	Leopold Kronecker vereinigt in seiner Arbeit über algebraisch auflösbare Gleichungen die Ideen von Galois und Abel.
1853	William Rowan Hamilton stellt in den „Lectures on Quaternions“ wichtige Resultate über Quaternionen zusammen, führt dabei u. a. die Biquaternionen ein und erkennt das Auftreten von Nullteilern.
1854	Arthur Cayley gibt eine abstrakte Definition des Gruppenbegriffs mit Hilfe einer Gruppentabelle.
1854	Arthur Cayley beginnt eine zehnteilige Artikel-Serie, in der er wichtige Elemente der Invariantentheorie und deren Verbindung zur Geometrie entwickelt.
1854	George Boole erfaßt die Gesetze des logischen Denkens durch algebraische Relationen und schafft damit die Algebra der Logik.
1855	Charles Hermite untersucht die Eigenschaften der später nach ihm benannten Formen und Matrizen.
1858	Arthur Cayley publiziert eine erste Übersicht zu arithmetischen Operationen mit Matrizen und gibt für ein spezielles hyperkomplexes System die Darstellung als Matrizenalgebra an.
1859	Arthur Cayley gibt die nach ihm benannte Maßbestimmung an und bettet die metrische (euklidische) Geometrie in die projektive ein.
1860	Émile Mathieu entdeckt fünf einfache endliche Gruppen, die sich nicht in die allgemeine Theorie einordnen lassen. Sie werden später als sporadische Gruppen bezeichnet.
1861/62	Karl Weierstrass lehrt in seinen Vorlesungen eine exakte Definition des Nullteilers.
1863	Alfred Clebsch veröffentlicht eine ausführliche, systematische Darstellung der sog. Clebsch-Aronhold-Symbolik.
1866	In der dritten Auflage von Serrets Algebralehrbuch erscheint die erste lehrbuchmäßige Darstellung der Galois-Theorie.
1867	Hermann Hankel faßt in den Buch „Theorie der complexen Zahlensysteme“ viele Resultate über hyperkomplexe Systeme zusammen.
1868	Paul Gordan weist für eine beliebige binäre Form die Existenz eines endlichen vollständigen Fundamentalsystems nach.
1868	Camille Jordan entwickelt eine Klassifikation der Bewegungsgruppen.
1868	Karl Weierstrass publiziert seine Elementarteilertheorie.
1869	Camille Jordan formuliert den später nach ihn benannten Satz über Kompositionsreihen.
1870	Camille Jordan vollendet mit dem Buch „Traité des substitutions ...“ die Herausbildung des permutationstheoretischen Gruppenbegriffs und fördert die Verbreitung der Galois-Theorie.
1871	Richard Dedekind definiert im X. Supplement zur Dirichlets „Vorlesungen über Zahlentheorie“ den Körperbegriff als Zahlkörper und entwickelt die Idealtheorie.
1871	Benjamin Peirce publiziert eine erste Strukturuntersuchung hyperkomplexer Systeme und führt u. a. die idempotenten und nilpotenten Elemente ein.
1872	Felix Klein formuliert eine Definition für den Begriff der Transformationsgruppe.
1872	Im „Erlanger Programm“ liefert Felix Klein eine Klassifikation der Geometrie mit gruppentheoretischen Mitteln.
1872	Peter Sylow stellt die nach ihm benannten Sätze für Permutationsgruppen auf.
1872	Camille Jordan gibt in Forschungen zu Differentialgleichungen die Transformation einer Matrix auf Jordansche Normalform an.
1873	Georg Cantor beweist die Abzählbarkeit der algebraischen und die Nichtabzählbarkeit der reellen Zahlen.
1873	Charles Hermite beweist die Transzendenz der Zahl e.
1873	Ernst Schröder beginnt mit dem Aufbau der „absoluten Algebra“.
1874	Sophus Lie beginnt mit dem systematischen Aufbau der Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen.
1874	Leopold Kronecker zeigt die Äquivalenz der von Weierstrass und Jordan erzeugten Normalformen einer Matrix.

8.5 Aufgaben zu Kapitel 8

Aufgabe 8.1.1: Konjugierte Untergruppen

Sei G eine Gruppe, U eine Untergruppe von G und a ein beliebiges Element von G. Man zeige: Der Komplex $a^{-1}Ua = \{x = a^{-1}ua \text{ mit } u \text{ aus } U\}$ ist eine Gruppe. Diese Gruppe wird eine zu U konjugierte Gruppe genannt.

Aufgabe 8.1.2: Nebenklassen

Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe der Ordnung n. Man zeige: Für ein beliebiges Element g aus G enthält auch jede Rechts-Nebenklasse Hg bzw. Links-Nebenklasse gH jeweils n verschiedene Elemente. Weiterhin sind zwei Rechts-Nebenklassen bzw. Links-Nebenklassen von H entweder miteinander identisch oder sie haben kein Element gemeinsam. [Perron, Bd. 2, S. 118]

Aufgabe 8.1.3: Normalteiler

Bei der Untersuchung der konjugierten Untergruppen u. a. im Rahmen der Studien zur Galois-Theorie erkannten die Mathematiker die besondere Rolle der Normalteiler, d. h. jener Untergruppen von G, die mit all ihren konjugierten Gruppen übereinstimmten. Man zeige:

a) Für zwei Untergruppen U, V der Gruppe G, von denen wenigstens eine ein Normalteiler ist, gilt $UV = VU$ und UV ist eine Untergruppe von G. (UV bezeichnet die Komplexmultiplikation von U und V, d. h. $UV = \{uv :$ u aus U und v aus $V\}$).

b) Wenn U und V beide Normalteiler sind, so ist UV entweder gleich G oder ein Normalteiler von G.

c) Wenn U und V zwei verschiedene maximale Normalteiler von G sind (d. h. es gibt keinen Normalteiler X von G, der U oder V als Normalteiler enthält), dann gilt $UV = G$. [Perron, Bd. 2, S. 122, 124]

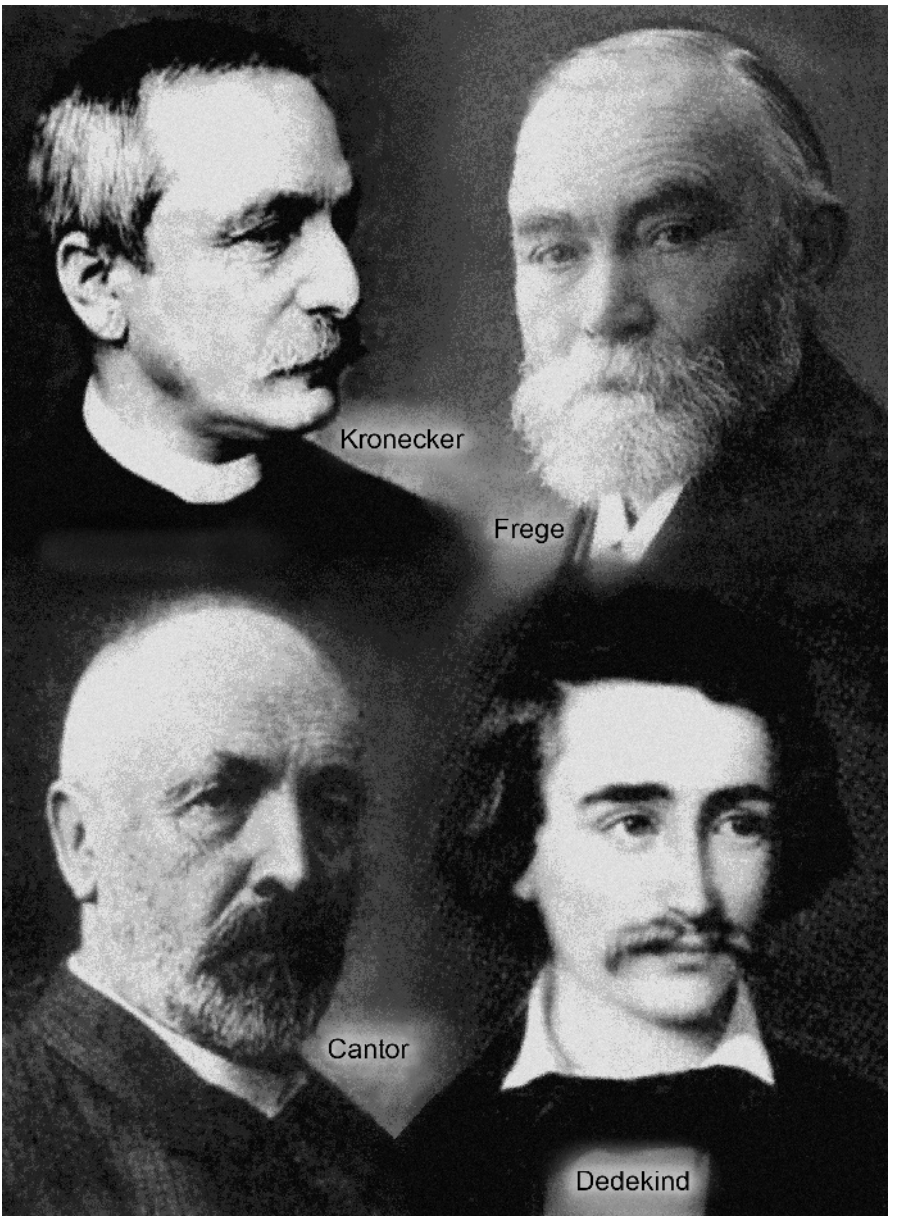
Aufgabe 8.3.1: Normalteiler und Faktorgruppe

Man zeige, daß in der Gruppe der euklidischen Bewegungen in der Ebene die Gruppe der ebenen Translationen einen Normalteiler bildet und daß die Faktorgruppe der ebenen euklidischen Bewegungen nach diesem Normalteiler zur Gruppe der Drehungen um einen Punkt isomorph ist.

Aufgabe 8.4.1: Quaternionen

Man gebe die Multiplikationstabelle der Quaternionen als Algebra mit 4 Basiseinheiten an.

9 Algebra an der Wende zum 20. Jahrhundert – erste Schritte zur abstrakten Algebra



1876	R. Koch entdeckt die Milzbrandbakterien als Krankheitserreger.
1877	Krieg Rußlands gegen die Türkei, in dessen Ergebnis 1878 die Balkanstaaten ihre Unabhängigkeit erlangen
1878	Der deutsche Reichstag beschließt das von Bismarck vorgelegte Sozialistengesetz (bis 1890 in Kraft).
1979	T. A. Edison erfindet die Kohlefadenlampe mit Schraubsockel.
1881	L. v. Ranke beginnt mit der Publikation seiner 16 bändigen „Weltgeschichte“.
1882	Deutschland, Italien und Österreich begründen den Dreibund.
1882	Großbritannien besetzt Ägypten.
1882	R. Koch entdeckt den Tuberkelbazillus.
1883	G. Daimler erhält ein Patent auf den von ihm konstruierten Benzinmotor.
1884	S. Arrhenius publiziert seine Theorie der elektrolytischen Dissoziation.
1886	H. Hertz erzeugt Radiowellen und weist sie als elektromagnetische Wellen nach.
1889	Gründung der sozialdemokratischen „Zweiten Internationale“ in Paris
1889	Japan wird konstitutionelle Monarchie.
1890	E. v. Behring und S. Kitasato erkennen den Zusammenhang zwischen Immunität und dem Auftreten von Antikörpern im Blut.
ca. 1890 – ca. 1910	Zeit des Impressionismus und Naturalismus in Literatur und Kunst
1894–1895	Japanisch-Chinesischer Krieg, Korea erringt die Unabhängigkeit von China.
1895	S. Freund begründet die Psychoanalyse.
1895	C. Röntgen entdeckt die X-Strahlen (Röntgen-Strahlen).
1896	Entdeckung der radioaktiven Strahlung des Urans durch A. Becquerel
1896	Erste Olympische Spiele der Neuzeit in Athen
1898	Spanisch-Amerikanischer Krieg, Kuba wird unabhängig (ab 1901 unter Schutz der USA), die USA erwerben erstmals Kolonien und begründen ihre Stellung als Weltmacht.
1900	M. Planck erkennt, daß Emission und Absorption von Strahlung in Energiequanten erfolgt und leitet einen grundlegenden Wandel der Physik ein.
1900	Die europäischen Großmächte schlagen den Boxer-Aufstand in China nieder.
Ab ca. 1900	Parallelentwicklung verschiedener Kunstrichtungen, die in ihrer Vielfalt den Beginn der Moderne markieren (Jugendstil, Expressionismus, Dekadenz, Neuklassik usw.)
1901	E. Fischer gelingt der Aufbau von Eiweißstoffen aus Aminosäuren.
1904	T. Boveri erkennt die Chromosomen als Träger der Erbanlagen.
1904–1905	Japanisch-Russischer Krieg um Korea und die Mandschurai endet mit dem Sieg Japans.g
1905	Revolution in Rußland
1905	In drei grundlegenden Arbeiten stellt A. Einstein die Lichtquantenhypothese auf, entwickelt die Spezielle Relativitätstheorie und erklärt die Brownsche Molekularbewegung.
1905/06	1. Marokko-Krise
1905/07	Wirtschaftskrise in führenden Industriestaaten
1907	Frankreich, Großbritannien und Rußland schließen sich im Entente-Bündnis zusammen.
1909	R. E Peary erreicht als erster Mensch den Nordpol.
1911	R. Amundsen erreicht als erster Mensch den Südpol.
1911	E. Rutherford stellt ein Atommodell mit massereichem Kern und Elektronenhülle vor.
1912	Tibet trennt sich von China (Friedensschluß 1920).
1912/13	Balkankriege
1913	N. Bohr entwickelt sein Atommodell.
1914–1918	Erster Weltkrieg
1914	Eröffnung des Panama-Kanals
1915	A. Einstein publiziert die Allgemeine Relativitätstheorie.
1917	Revolutionen in Rußland, Sturz des Zaren, Errichtung einer Sowjetrepublik
1918/19	revolutionäre Erhebungen in mehreren Ländern, Bürgerkrieg in Rußland (bis 1921)
1918/19	Grippe-Epidemie fordert weltweit ca. 20 Millionen Tote.
1920	M. Gandhi beginnt den gewaltlosen Kampf um ein unabhängiges Indien.
1920	Öffentlicher Rundfunk in den USA

9.0 Vorbemerkungen

Im Verlauf der 70er Jahre des 19. Jahrhunderts trat die Mathematik in eine neue Entwicklungsphase ein. In den vorangegangenen Jahrzehnten hatte man nicht nur eine Fülle von neuen Resultaten in traditionsreichen wie in neuen Gebieten der Mathematik erzielt, sondern man gelangte auch zu einer neuen Sichtweise auf die Objekte, die sich vielfach in begrifflichen Änderungen in den einzelnen Gebieten artikulierte. Erinnert sei nur an die Bemühungen um eine exakte Fundierung der Analysis und an den im vorangegangenen Kapitel dargestellten Wandel in der Geometrie (vgl. auch [Scriba, Schreiber 2000, Kap. 7]). Nach den zahlreichen Erweiterungen der mathematischen Erkenntnisse und den Möglichkeiten zu deren Anwendung sahen die Mathematiker zunehmend die innere Strukturierung der mathematischen Theorien als eine weitere Forschungsaufgabe an. Durch die vielfältigen Spezialisierungen in den einzelnen Teilgebieten ging für viele Mathematiker der Überblick über die Gesamtdisziplin verloren, die Wiederherstellung der alten Einheit auf neuer Stufe oder besser das Auffinden vereinheitlichender, übergreifender Begriffe und Methoden erschien ihnen als eine wichtige Aufgabe. Hinzu kam, daß mit den Unmöglichkeitsbeweisen, wie der Unlösbarkeit der allgemeinen Gleichung 5. und höheren Grades in Radikalen, die Frage nach der Reichweite mathematischer Methoden und dem Wesen mathematischer Beweise neu durchdacht werden mußte. Auch die wachsende Kompliziertheit der mathematischen Begriffsbildungen weckte das Bedürfnis nach einer logischen Durchdringung und Analyse der verwendeten sprachlichen und deduktiven Mittel. Schließlich lieferte das Hauptbetätigungsfeld der Mathematiker jener Zeit, die Ausbildung von Lehramtskandidaten, weitere Anregungen, um nach neuen Darstellungsprinzipien und ordnenden Methoden für die Stoffülle zu suchen. Die Überlegungen zur Bewältigung dieser Probleme bildeten die Basis jener Studien, aus denen ein Jahrzehnt später die axiomatische Methode, die Bestrebungen zum exakten logischen Aufbau der einzelnen Theorien und die Ansätze zur Mengenlehre und zur mengentheoretischen Durchdringung einzelner Teile der Mathematik hervorgingen. All diese Tendenzen spielten auch in der Algebraentwicklung eine wichtige Rolle, wie sie zuvor durch die Fortschritte der Algebra mit hervorgebracht worden waren. Sie bildeten den großen Rahmen, in dem sich die weiteren Fortschritte der Algebra vollzogen. Zur Abrundung dieses Bildes muß jedoch noch erwähnt werden, daß in den letzten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts speziell in Deutschland einige negative Effekte der vorangegangenen Entwicklung spürbar wurden. Die Mathematik hatte im Prozeß der Emanzipation der einzelnen Naturwissenschaften am Ende des 18. und zu Beginn des 19. Jahrhunderts und als Reaktion auf die innerdisziplinären Begründungsprobleme, die sich aus der Vernachlässigung der logischen Grundlagen in der vorangegangenen Wachstumsperiode ergaben, einen Wandel zur reinen Mathematik vollzogen. Die Anwendungen der Mathematik in anderen Wissenschaften wurden vernachlässigt bzw. erfuhren eine übertrieben theoretische Ausprägung. Dabei ging die Anlehnung an

die Mathematik soweit, in einzelnen technischen Wissensgebieten das Konstruieren deduktiv gestalten zu wollen. Dies alles gipfelte in teilweise heftigen Auseinandersetzungen um die Rolle der Mathematik in den technischen Wissenschaften in den 90er Jahren, in denen schließlich das Verhältnis der Mathematik zu den Anwendungen in anderen Wissenschaften neu bestimmt wurde. Im folgenden sollen jene Aspekte der oben genannten drei Entwicklungstendenzen grob umrissen werden, die für die weitere Entwicklung der Algebra besonders wichtig erscheinen.

9.1 Mengenlehre und Algebra der Logik

Durch die Mengenlehre wurde jenes Begriffssystem hervorgebracht, das es ermöglichte, die abstrakten algebraischen Bildungen adäquat zu erfassen und die algebraischen Inhalte der einzelnen Sachverhalte deutlich werden zu lassen. Zugleich enthielt die Mengenlehre Methoden, um beliebige algebraische Objekte, die verschiedenen algebraischen Strukturen, zu konstruieren. Ihren Ausgangspunkt nahm die Mengenlehre Anfang der 70er Jahre in Untersuchungen von Georg Cantor zur Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe und in dem 1872 begonnenen Briefwechsel Cantors mit Richard Dedekind über mengentheoretische Fragen. Dedekind hatte bereits über ein Jahrzehnt vorher in seinen algebraischen Arbeiten eine mengentheoretische Betrachtungsweise verwendet und faktisch mit Mengen gerechnet, ohne dies aber explizit zu betonen. Deutlich sichtbar wurde die mengentheoretische Herangehensweise Dedekinds 1871 in den Ausführungen zur Idealtheorie, auf die im folgenden Abschnitt noch näher eingegangen wird. Cantor, der sich 1869 in Halle habilitiert hatte, formulierte in einer 1872 publizierten Arbeit sowohl die heute nach ihm benannte Fundierung der reellen Zahlen mit Hilfe von Fundamentalfolgen als auch die Definition der ersten Ableitung M' einer linearen Punktmenge M als Menge der Häufungspunkte von M. Beim Studium der Ableitungsordnungen von Punktmengen entdeckte er dann, da die natürlichen Zahlen zur Kennzeichnung dieser Ordnungen nicht ausreichten, die transfiniten Ordinalzahlen. Als Beginn der Mengenlehre wird häufig Cantors Beweis der Abzählbarkeit der algebraischen und der Nichtabzählbarkeit der reellen Zahlen angesehen, den er 1873 Dedekind brieflich mitteilte und 1874 publizierte. Das Ergebnis kann man auch so formulieren, daß fast alle reellen Zahlen transzendent sind. Hinsichtlich des Begriffs der transzendenten Zahl sei daran erinnert, daß Liouville 1844 die Existenz von Zahlen nachwies, die nicht Nullstellen irgendeines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten waren. Damit war zugleich die Basis für die Unterscheidung der irrationalen Zahlen in algebraische und transzendente gelegt: die algebraischen Zahlen genügen einer solchen Polynomgleichung, die transzendenten nicht. Der Cantorsche Satz klärte die wichtige Frage nach der *„Anzahl“* der transzendenten Zahlen, und im gleichen Jahr 1873 stellte Hermite die Transzendenz von e fest. Fünf Jahre später zeigte Cantor die Gleichmächtigkeit

der Punktmengen von Einheitsstrecke und Einheitsquadrat. Er hatte inzwischen 1872 eine außerordentliche Professur an der Universität Halle erhalten und wurde 1879 zum ordentlichen Professor berufen. In dieser Position wirkte er in Halle bis zu seiner Emeritierung 1913. Jedoch litt er ab 1884 an schweren Depressionen, die oft längere klinische Behandlungen erforderten und den Gang seiner Forschungen unterbrachen. Da die neuen Ideen der Mengenlehre von vielen Mathematikern skeptisch, oft ablehnend betrachtet wurden, versuchte Cantor, sein Werk auch philosophisch zu untermauern. Dazu führte er umfangreiche Studien zur Philosophiegeschichte durch.

Das Kernstück blieben aber die Forschungen zur Mengenlehre. 1879 bis 1884 faßte Cantor seine Ergebnisse zur Mengenlehre erstmals in sechs Arbeiten *„Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten“* zusammen, 1895/97 folgte ein zweiter verbesserter Überblick, der die bekannte Mengendefinition enthielt und eine Begründung der transfiniten Mengenlehre lieferte. Doch Cantor wußte seit 1883 auch um eine erste Antinomiein seiner Theorie, die eine neue Klärung der Grundlagen notwendig machte. Zwischenzeitlich hatte Dedekind in seiner um die Mitte der 70er Jahre verfaßten, erst 1888 erschienenen Begründung der natürlichen Zahlen eine weitere Anwendung der Mengenlehre gegeben. In den 90er Jahren wurde dann allmählich die große Bedeutung der Mengenlehre für die Mathematik von den Mathematikern erkannt, und es begann die mengentheoretische Durchdringung erster Teilgebiete der Mathematik. Zu Leben und Werk Cantors vgl. auch [Purkert/Ilgauds 1987].

In der Logik waren die Beziehungen zur Algebra teilweise enger und weiter zurückreichend, erwies sich doch eine wesentlicher Teil der Logik, die Algebra der Logik, in einzelnen Entwicklungsabschnitten als nahezu untrennbar mit der Algebra verbunden. An erster Stelle sind hier Booles Arbeiten zur Logik zu nennen, die bereits im Zusammenhang mit den Forschungen der englischen algebraischen Schule Erwähnung fanden (vgl. Abschn. 7.3.4) und die uns ins Jahr 1847 zurückführen. Ausgehend von den neuen Ideen der symbolischen Algebra und des Operatorenkalküls konstruierte Boole in *„The Mathematical Analysis of Logic“* einen logischen Kalkül, der die Auswahl gewisser Objekte aus einer beliebigen Zusammenfassung von Objekten und das Zusammenfassen der ausgewählten Objekte zu einer Klasse als zentrale geistige Operation annahm. Im Ergebnis entstand die erste nichtquantitative Interpretation wichtiger Ideen der symbolischen Algebra. Die grundlegenden Relationen des Booleschen Kalküls waren die Distributivität und die Kommutativität der Auswahloperation sowie die von Boole als Indexgesetz bezeichnete Relation $x^n = x$, welche besagt, daß die Wiederholung derselben Auswahl kein neues Ergebnis liefert. In der 1854 publizierten Monographie *„An Investigation of the Laws of Thought“* rückte Boole stärker den Aufbau der Logik als Wissenschaft in den Blickpunkt, als Wissenschaft, die die Gesetze des Denkens erfaßt. Es war also nicht mehr die symbolische Algebra, deren Gesetze im Rahmen der Logik interpretiert werden können, sondern er ging jetzt von den Gesetzen des Denkens aus, und diese Gesetze behan-

delte er nach den Prinzipien der symbolischen Algebra. Man spricht auch davon, daß Boole die Analogie zur Algebra psychologisch begründete (vgl. [Peckhaus 1997, S. 210ff.] sowie die dort zitierte Literatur). Als grundlegende Gesetze des Kalküls formulierte Boole die Kommutativität der logischen Addition und Multiplikation ($x + y = y + x$, $xy = yx$), die Dualität $x^2 = x$ und die Distributivität von logischer Multiplikation bezüglich logischer Addition $z(x + y) = zx + zy$. Er vermerkte auch, daß bei einer quantitativen Interpretation der Symbole diese nur die Werte 0 und 1 annehmen können und die so entstehende Algebra völlig mit der Algebra der Logik übereinstimmt [Boole 1854, S. 37f.]. Dabei kann Algebra nicht nur im Sinne des Operierens in dem algebraischen Kalkül, sondern auch als hyperkomplexes System verstanden werden.

Die Rezeption der Booleschen Ideen war zunächst gering. Eine Fortsetzung fand die Algebra der Logik dann durch William Stabley Jevons und John Venn. Ersterer schuf 1864 ausgehend von Boole eine eigene Wissenschaftslehre mit einer starken logischen Komponente und letzterer 1881 eine die historische Entwicklung der symbolischen Logik betonende, von Boole abweichende, eigenständige Darstellung, mit der er zugleich die Beziehung zu verschiedenen anderen Entwicklungsrichtungen herstellte. Beide übten einen starken Einfluß auf die Entwicklung der mathematischen Logik in Großbritannien aus und plädierten für eine klare Trennung von Mathematik und Logik. In dem gleichen Zeitraum hatte in den USA Charles Sanders Peirce in den ab 1870 publizierten Studien zur *„Logik der Relative“* die Boolesche Algebra durch die Einführung einer neuen dyadischen Relation *„Inklusion“* beträchtlich erweitert und wichtige Anregungen für die weitere Forschung geliefert. Auf die von ihm hergestellten Verbindungen zu der Arbeit seines Vaters Benjamin Peirce über assoziative Algebren ist schon hingewiesen worden.

9.1.1 Schröders Algebra der Logik und Freges Logizismus

Als Höhepunkt der Algebra der Logik werden meist die ab 1890 erschienenen *„Vorlesungen über die Algebra der Logik“* von Ernst Schröder angesehen. Bis 1895 publizierte er drei Bände dieses unvollendet gebliebenen Werkes, 1905 wurde von Karl Eugen Müller ein zweiter Teil des zweiten Bandes aus dem Nachlaß ediert. Ähnlich wie Leibniz strebte Schröder nach der Schaffung einer wissenschaftlichen Universalsprache, die dann zur Reform des Wissenschaftssystems dienen sollte. Es ging ihm um eine bessere Begründung der Naturwissenschaften, die ihre Basis in einer verbesserten Fundierung der Mathematik finden sollte. Schröders Forschungen ordnen sich damit in die Bestrebungen zur Begründung der Mathematik ein. Den Ausgangspunkt seines Systems bildete eine *„absolute Algebra“*, als deren Modell er dann die Logik aufbaute.

Schröder, Sohn des engagierten Mannheimer Naturwissenschaftlers und Schuldirektors Heinrich Schröder, hatte ab 1860 in Heidelberg Naturwissenschaf-

ten und Mathematik, u. a. bei Gustav Robert Kirchhoff und Robert Wilhelm Bunsen, studiert und war zwei Jahre später ohne Dissertation promoviert worden. Ein Stipendium ermöglichte ihm für weitere zwei Jahre die Vertiefung seiner Studien in dem berühmten mathematisch-physikalischen Seminar der Universität Königsberg. Nach bestandener Prüfung für Lehramtskandidaten habilitierte er sich am Polytechnikum in Zürich und lehrte dort 1864–1868 als Privatdozent sowie gleichzeitig an der Kantonsschule in Zürich. Nach weiteren Jahren im Schuldienst und der Kriegsteilnahme 1870 erhielt er 1874 einen Ruf als Professor an die Polytechnische Schule in Darmstadt und ging 1876 an das Polytechnikum in Karlsruhe, wo er bis zu seinem Lebensende 1902 blieb. Schröder gehörte zu jenen, die bereits frühzeitig die Cantorsche Mengenlehre unterstützten. Sein bekanntester Beitrag ist ein Beweisversuch für den schon von Cantor vermuteten Satz von Schröder – Bernstein. Aus seinem frühen Schaffen sind zwei Arbeiten hervorzuheben, die sich zwar ebenfalls den Bemühungen um eine Begründung der Mathematik unterordnen und zur kombinatorischen Analysis gehören, die aber später für die Entwicklung der Theorie komplexer dynamischer Systeme bedeutsam wurden. Für Einzelheiten vergleiche man [Alexander 1994].

Die beim Aufbau der *„absoluten Algebra“* von Schröder erbrachten algebraischen Leistungen waren nicht neu, es besticht aber die Zusammenfassung verschiedener Elemente und deren systematische Anwendung auf die Logik. Peckhaus stellte Schröders absolute Algebra und dessen Begründung der Logik in den Kontext der Diskussionen um die algebraische Analysis in Deutschland. Er benannte dabei Carl Friedrich Hindenburg und dessen Schule zur kombinatorischen Analysis, Martin Ohm mit seinem *„Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik“*, Hermann Günther Graßmann mit der *„Ausdehnungslehre“* und dem *„Lehrbuch der Arithmetik“*, Robert Graßmanns Wissenschaftslehre und Logik sowie Hermann Hankels Untersuchungen über hyperkomplexe Zahlensysteme als die Forschungen, die einen spürbaren Einfluß auf Schröders Schaffen hatten. Für eine ausführliche Analyse der Schröderschen Logik einschließlich der Einflußfaktoren auf deren Aufbau vergleiche man [Peckhaus 1997, Kap. 6]. In seinem Hauptwerk belegte Schröder außerdem die Kenntnis der neueren algebraischen Arbeiten von Dedekind und Kronecker sowie der mengentheoretischen Ausführungen von Cantor und Dedekind. Die Algebra der Logik Schröders kann damit als ein Beispiel gelten, inwieweit die abstrakten algebraischen Betrachtungsweisen in Verbindung mit Elementen der Mengenlehre begannen, in andere Teilgebiete der Mathematik auszustrahlen. Ein Blick auf die Entwicklung der *„absoluten Algebra“* zeigt, daß Schröder an diesem Prozeß aktiv teilgenommen hat. Erstmals hatte er 1873 zur absoluten Algebra in dem *„Lehrbuch der Arithmetik und Algebra“* publiziert und die Ziele seiner Untersuchungen formuliert. In dem *„Lehrbuch ...“* definierte er die Mathematik als Lehre von den Zahlen. Diese Definition war recht weitreichend, denn er gab keine quantitative Bestimmung des Zahlbegriffs, sondern hielt sogar die Einführung von Zahlen,



Ernst Schröder



Giuseppe Peano

die allgemeiner als die hyperkomplexen Zahlen waren, für möglich, wenn diese sich als zweckmäßig erwiesen. Seine Charakterisierung der Zahl als willkürlich vom Menschen geschaffene Zeichen zur Erreichung unterschiedlichster Zwecke ähnelt der bekannten, 1888 von Dedekind publizierten Formulierung:

„Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen.“ [Dedekind 1888, S. VIIf.]

Bei der konstruktiven Einführung der natürlichen Zahlen benutzte Schröder dann Mengen als Zusammenfassungen von Einheiten, wobei die Einheiten die zu zählenden Objekte darstellten. Die für die absolute Algebra relevanten Betrachtungen gehörten zum Inhalt des vierten Kapitels des *„Lehrbuches“*, in dem er die Verknüpfungsgesetze der verschiedenen, von ihm für das Rechnen mit Zahlen erklärten Operationen *„in realer Hinsicht“* wie auch formal behandelte. Die Untersuchung der Verknüpfungsgesetze würde es letztlich ermöglichen, die verschiedenen, bei unterschiedlichsten Anwendungen auftretenden Zahlensysteme (Zahl in Schröders abstrakten Sinne) ausgehend von den Verknüpfungsoperationen und den zugehörigen Verknüpfungsregeln zu analysieren. Unter Hinweis auf Hankel diskutierte Schröder z. B. ein System mit assoziativer, aber nicht kommutativer Multiplikation. Die Analyse der für ein Zahlengebiet definierbaren Verknüpfungen, das vollständige Erfassen der aus gewissen vorausgesetzten Eigenschaften ableitbaren Folgerungen sowie die Bestimmung der mit Hilfe der definierten Verknüpfungsoperationen konstruierbaren geschlossenen Zahlensysteme bildeten wichtige Ziele der formalen Algebra. Durch die Angabe der möglichen realen Interpretation der abstrakten Zahlen und Verknüpfungsoperationen, sei sie geometrisch, physikalisch oder sonst wie, entwickelte sich nach Schröders Vorstellungen aus der formalen Algebra die absolute Algebra. Der Aufbau der absoluten Algebra

beinhaltete also unweigerlich sorgfältige abstrakte Überlegungen zu algebraischen Systemen, bedingt durch die Anlehnung an Zahlensysteme, vor allem zu hyperkomplexen Zahlen. Auch wenn Schröder nicht zu Strukturbetrachtungen für diese algebraischen Systeme vorstieß, so darf die Bedeutung seiner Arbeiten für die Algebra nicht unterschätzt werden. Sie liegt in der Vertiefung der Beziehungen zwischen Algebra und Logik, indem er die Interpretierbarkeit algebraischer Operationen in der Logik aufdeckte und dies auf einer allgemeinen, abstrakten Basis realisierte.

Die Umgestaltung des ursprünglich algebraisch dominierten Forschungsprogramms in ein formal-logisches war wesentlich durch Schröders wachsende Kenntnis der Arbeiten seiner Zeitgenossen bedingt, also den eingangs genannten Einflüssen zu verdanken. Eine ausführliche Fußnote im *„Lehrbuch“* verdeutlicht, daß Schröder beispielsweise das 1872 von Robert Graßmann herausgegebene Werk *„Die Formenlehre oder Mathematik“* erst während des Korrekturvorganges zu seinem Buch kennenlernte, und die Lektüre äußerst anregend auf ihn wirkte. Bereits 1874 gab Schröder eine Verallgemeinerung seiner Ansichten bekannt und führte den Begriff der *„Operationsstufe“* ein, unter dem er eine Operation und die zugehörigen Inversen zusammenfaßte. In dieser Zeit entdeckte er auch die Dualität von logischer Addition und Multiplikation sowie die Analogie zwischen algebraischer und logischer Struktur und begann sich auf formal-logische Untersuchungen zu konzentrieren. Zugleich vertiefte er kontinuierlich seine Kenntnis der aktuellen logischen Arbeiten sowie der klassischen Werke von Boole und anderen. Eine wichtige Erweiterung erfuhren seine logischen Studien durch die Logik der Relative, die er im Anschluß an Charles Sanders Peirce übernahm und ausbaute. Diese Überlegungen gestalteten sich viel umfangreicher als Schröder dies angenommen hatte und mündeten in ein Programm zur Grundlegung formalisierbarer oder mit formalen Mitteln arbeitender Wissenschaften ein. Die Bedeutung der ausgedehnten logischen Forschungen Schröders für die Algebra liegen in der Behandlung der Logik vom strukturellen Standpunkt aus und in der Erkenntnis der algebraischen Struktur der Logik. Als wichtige Struktur erwies sich dabei die des Verbandes. So trat in Schröders *„Vorlesungen ...“* erstmals ein nichtdistributiver Verband auf, ohne daß Schröder jedoch den Begriff des Verbandes benutzte bzw. definierte.

Neben der algebraischen gab es noch eine zweite Richtung der Logikentwicklung, die gewöhnlich als Logisierung der Mathematik oder Logizismus bezeichnet wird und die sich mehrfach in heftiger Diskussion mit der ersteren befand. Der entscheidende Unterschied, der die Herausbildung der verschiedenen Richtungen in der Forschungen zu den Grundlagen der Mathematik zur Folge hatte, lag in den Auffassungen zum Gegebensein mathematischer Objekte. Während Frege eine Erklärung dieser Objekte für unverzichtbar hielt, sahen andere sie, etwa die Zahlen, als a priori gegeben an. Über die Methode, die am besten geeignet für die Behandlung der mathematischen Objekte und

den Aufbau der Mathematik war, herrschte dagegen sehr bald Einigkeit. Es war dies die axiomatische Methode.

Ein Repräsentant der logizistischen Auffassungen war Gottlob Frege. Der aus Wismar stammende Frege hatte in Jena (1869–1871) und Göttingen (1871–1873) neben Mathematik auch Physik, Chemie und Philosophie studiert. 1874 habilitierte er sich in Jena mit einer Arbeit zum Größenbegriff. Der Universität Jena blieb er bis zu seiner Versetzung in den Ruhestand 1918 treu, ab 1879 als außerordentlicher Professor und ab 1896 als Honorarprofessor. Seine grundlegenden Arbeiten zur mathematischen Logik fanden jedoch zu seinen Lebzeiten kaum Anerkennung, was einen formalen Ausdruck in der Tatsache fand, daß Frege nie eine Berufung als Ordinarius erhielt. Obwohl er in Jena ein umfangreiches Vorlesungsprogramm bewältigte, hat er nur gelegentlich über Logik und seine damit verbundenen Forschungen vorgetragen.

Erste wichtige Ergebnisse publizierte Frege 1879 in der *„Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens“*. Mit der Begriffsschrift, der ersten vollständig formalisierten Sprache, wollte er sich die notwendigen Mittel schaffen, um eine exakte begriffliche Begründung der Mathematik und der Wissenschaften im allgemeinen geben zu können. Nachdem Frege 1884 sein Programm zur Fundierung der Arithmetik formuliert hatte, setzte er dies in seiner zweibändigen Monographie *„Grundgesetze der Arithmetik“* (1893/1903) um. Die schon sicher geglaubte Realisierung des Programms erwies sich jedoch als Trugschluß: Noch vor Veröffentlichung des zweiten Bandes brachte Bertrand Russell das kunstvoll geformte Gebäude durch eine von ihm aufgedeckte Antinomie ins Wanken. Zunächst war Frege überzeugt, diese Antinomie beseitigen zu können und unternahm verschiedene Versuche zur Umgestaltung seiner Theorie, ohne aber letztlich erfolgreich zu sein. Den Russellschen Weg, das Problem mit Hilfe der Typentheorie zu lösen, lehnte er wegen der Verwendung nichtlogischer Mittel ab. Obwohl Frege selbst sein Programm dann als gescheitert betrachtete, hat er unbestritten die Entwicklung der Logik wesentlich gefördert und bedeutende Ideen zu deren Ausgestaltung hervorgebracht.

Wichtige Beiträge zum Logizismus lieferte auch der Italiener Giuseppe Peano. Der aus einer Bauernfamilie im Piemont stammende Peano hatte 1876–1880 an der Universität Turin studiert und blieb der Universität bis zu seinem Tod 1932 treu. 1890 wurde er außerordentlicher Professor für Analysis, fünf Jahre später erhielt er ein Ordinariat. Außerdem lehrte er von 1886–1901 als Professor an der Turiner Militärakademie. Peano erzielte wichtige Resultate zur Analysis, die er selbst als seine bedeutendsten einschätzte. Mit mehreren berühmten Gegenbeispielen deckte er Unkorrektheiten im Gebrauch von Begriffen auf, so zeigte er mit der nach ihm benannten Kurve, daß bei stetigen, aber nicht eineindeutigen Abbildungen die Dimension nicht erhalten zu bleiben braucht. Besonders engagierte er sich für die Überwindung von Dummheit und sprachlichen Verständigungsschwierigkeiten, was u. a. in seinem Wirken für eine Reform des Mathematikunterrichts in Italien und seiner

zunehmenden Beschäftigung (ab 1900) mit der Entwicklung einer künstlichen internationalen Sprache zum Ausdruck kam. Seine grundlegenden Beiträge zur mathematischen Logik und zur Axiomatik wurden zu seinen Lebzeiten kaum anerkannt, so daß er vor allem über seine Schüler und Mitarbeiter die Hinwendung zur Axiomatik und zum strukturellen Denken gefördert hat.

Bereits die 1889 publizierten Prinzipien der Arithmetik, die auch das bekannte Axiomensystem für die natürlichen Zahlen enthielten, basierten auf den Überlegungen für eine formalisierte Sprache, die Peano als Pasigraphie bezeichnete. Er hat diese Sprache in den folgenden Jahrzehnten weiter vervollständigt und in den fünf Bänden des *„Formulaire de mathématiques“* insbesondere die prinzipielle Möglichkeit aufgezeigt, daß durch Erweiterung seiner Pasigraphie alle Gebiete der Mathematik in dieser formalen Sprache dargestellt werden können. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß Peano in seinen Forschungen auch auf Vertreter der algebraischen Richtung wie Boole, Peirce oder Schröder verwies und in programmatischen Erklärungen algebraische Aspekte mit einschloß. So sprach er davon, daß mittels der Pasigraphie dargestellte Aussagen in Form und Präzision den Gleichungen der Algebra ähneln und daraus analog der Auflösung von Gleichungen neue Aussagen abgeleitet werden können. Peano hatte die Symbole der Pasigraphie sehr sorgfältig gewählt, so daß eine ganze Reihe von ihnen zu Standardbezeichnungen wurden.

All die erwähnten logischen Untersuchungen haben einerseits die Entwicklung der Mathematik im Sinne der skizzierten Tendenz zur Präzisierung der einzelnen Schlußweisen beeinflußt und vorangebracht, andererseits waren sie ein wichtiger Bestandteil einer sich als eigenständig herausbildenden mathematischen Teildisziplin, der mathematischen Logik. Die verschiedenen Auffassungen zur und die Diskussionen über die Stellung der Logik in der Mathematik sollen hier nicht weiter thematisiert werden.

9.1.2 Die axiomatische Methode

Die Forschungen zur Logik enthielten zugleich einen wichtigen Beitrag zur Herausbildung der axiomatischen Methode. In ihren Ursprüngen geht diese Methode bis in die griechische Antike zurück und brachte die allgemeine Auffassung zum Ausdruck, wie man sich den Aufbau der Mathematik als deduktive Wissenschaft vorstellte. Das für zwei Jahrtausende wirkende Vorbild waren die *„Elemente“* Euklids. Das darin angegebene Axiomen- (und Postulaten-)system der Geometrie, insbesondere die Stellung des Parallelenaxioms, bildete ebenso für zwei Jahrtausende einen Forschungsgegenstand für die Mathematiker. Anfang der 80er Jahre des 19. Jahrhunderts erfolgte dann im Rahmen der Geometrie eine weitere Durchbildung der axiomatischen Methode. 1882 präsentierte Moritz Pasch im Bestreben, die vielfältigen geometrischen Untersuchungen auf eine einheitliche Basis zu stellen, ein neues Axiomensystem für die Geometrie und beschrieb mit folgenden Worten die charakteristischen Merkmale der Methode:

„Die Mathematik stellt Relationen zwischen den mathematischen Begriffen auf, welche den Erfahrungsthatsachen entsprechen sollen, aber weitaus in ihrer Mehrzahl der Erfahrung nicht unmittelbar entlehnt, sondern 'bewiesen' werden; die (ausser den Definitionen der abgeleiteten Begriffe) zur Beweisführung nothwendigen Erkenntnisse bilden selbst einen Theil der aufzustellenden Relationen. Nach Ausscheidung der auf Beweise gestützten Sätze, der Lehrsätze, bleibt eine Gruppe von Sätzen zurück, aus denen alle übrigen sich folgern lassen, die Grundsätze; diese sind unmittelbar auf Beobachtungen gegründet, freilich auf Beobachtungen, welche seit undenklichen Zeiten sich unaufhörlich wiederholt haben, ...

Die Grundsätze sollen das von der Mathematik zu verarbeitende empirische Material vollständig umfassen, so daß man nach ihrer Aufstellung auf die Sinneswahrnehmungen nicht mehr zurückzugehen braucht“ [Pasch 1882, S. 17].

Zuvor hatte Pasch analog zwischen Grundbegriffen und abgeleiteten Begriffen unterschieden. Während letztere definiert werden, ist dies bei ersteren nicht der Fall, und sie lassen sich nicht auf andere, einfachere Begriffe zurückführen. Für die Grundbegriffe galt:

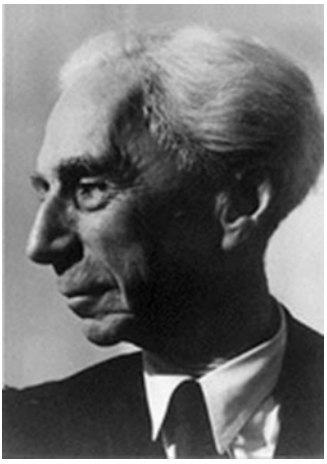
„ ... keine Erklärung ist im Stande, dasjenige Mittel zu ersetzen, welches allein das Verständnis jener einfachen, auf andere nicht zurückführbaren Begriffe erschliesst, nämlich den Hinweis auf geeignete Naturobjecte ...“ [Pasch, 1882, S. 16]

Die Tatsache, daß die Gelehrten bei geometrischen Untersuchungen häufig auf Mittel der Anschauung im dreidimensionalen Raum zurückgegriffen hatten, ließ den mit der axiomatischen Methode verbundenen Abstraktionsprozeß deutlich hervortreten und veranlaßte nun jene Mathematiker, die sich wie Pasch um die Begründung der Geometrie mühten, diesen Aspekt besonders zu betonen. Insgesamt ging Pasch, der ab 1870 an der Universität Gießen als Privatdozent bzw. ab 1875 als ordentlicher Professor lehrte, beim Aufbau der euklidischen Geometrie erstmals deutlich über die *Elemente* Euklids hinaus, indem er die logische Strenge der Darstellung verbesserte und Lücken im Begriffssystem und in Beweisen ausfüllte. Insbesondere gelang ihm die korrekte Erfassung der Anordnungsbeziehungen durch die Einführung der Zwischenrelation als weiteren Grundbegriff neben Inzidenz und Kongruenz. Die Forschungen zur Begründung der Geometrie und in diesem Zusammenhang die Studien zur Axiomatik fanden dann 1899 in Hilberts Buch *„Die Grundlagen der Geometrie“* einen Höhepunkt. Für eine genauere Darstellung dieses Prozesses vergleiche man die Ausführungen in [Scriba/Schreiber 2000, Kap. 8.1] und das Buch von Toepell [Toepell 1986].

Neben der Geometrie bildete die Arithmetik ein zentrales Gebiet für die Entwicklung und Anwendung der axiomatischen Methode. Die Begründung der Zahlbereiche und des Rechnens in ihnen war noch nicht abgeschlossen und harrte speziell bezüglich der natürlichen Zahlen einer Lösung. So verwundert es wohl kaum, daß in dem allgemeinen Bestreben um eine Verschärfung der



Moritz Pasch



Bertrand Russell

Grundlagen der Mathematik der Aufbau der Arithmetik von mehreren Mathematikern in Angriff genommen wurde. Dabei kam Frege und Peano das Verdienst zu, die Ausdehnung der axiomatischen Methode von der Geometrie auf die Arithmetik vollzogen zu haben. Letzterer publizierte 1889 die *„Arithmetices principia ...“*, nachdem er bereits ein Jahr zuvor, anknüpfend an Graßmanns *„Ausdehnungslehre“*, reelle Vektorräume und weitere wichtige Begriffe der linearen Algebra definiert hatte. In den arithmetischen Studien stützte er sich außer auf Graßmanns Lehrbuch der Arithmetik und Arbeiten von Charles Sanders Peirce vor allem auf Dedekinds Begründung der natürlichen Zahlen in der Schrift *„Was sind und was sollen die Zahlen?“* (1888). Dedekind behandelte das Problem vom Standpunkt der Mengenlehre aus, die nach Peano benannten Axiome wurden von ihm als Sätze mengentheoretisch abgeleitet. Die Schrift ist deshalb bereits als wichtiger Beitrag zur Mengenlehre erwähnt worden. Peano beschrieb die natürlichen Zahlen durch die folgenden Axiome, die hier in abgewandelter Form unter Verzicht auf die Peanosche Pasigraphie wiedergegeben werden:

1. Null ist eine natürliche Zahl.
2. Ist n eine natürliche Zahl, so ist auch der Nachfolger $S(n)$ von n eine natürliche Zahl.
3. Ist n eine natürliche Zahl, so gilt $S(n) \neq 0$.
4. Hat Null die Eigenschaft E und folgt aus der Tatsache, daß n die Eigenschaft E besitzt stets, daß der Nachfolger $S(n)$ die Eigenschaft E hat, so haben alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft E. Oder mit anderen Worten: Die Eigenschaft E folgt aus der Eigenschaft eine natürliche Zahl zu sein. (Induktionsprinzip)
5. Sind n und m natürliche Zahlen, so folgt aus $S(n) = S(m)$ stets $n = m$.

1891 wies Peano für dieses Axiomensystem bereits eine Eigenschaft nach, die in den logisch-abstrakten Untersuchungen zur Axiomatik eine große Rolle spielen sollte, nämlich die Unabhängigkeit der Axiome des vorgelegten Systems, d. h. keines der Axiome des Systems kann als Folgerung der übrigen Axiome abgeleitet werden. Nur wenig später in der zweiten Hälfte der 90er Jahre behandelten David Hilbert und Mario Pieri unabhängig voneinander im geometrischen Kontext die zweite wichtige Frage bei der Aufstellung von Axiomensystemen, die (semantische) Widerspruchsfreiheit des Systems. Dabei handelt es sich um den Nachweis, daß aus den Axiomen des Systems durch logisches Schließen kein Widerspruch, eine Aussage und ihr Gegenteil, gefolgert werden kann. Dieser Nachweis wird häufig durch die Angabe eines Modells geführt, von dem die Widerspruchsfreiheit bekannt ist. Eine dritte zentrale Forderung an ein Axiomensystem zum Aufbau einer mathematischen Theorie war die Vollständigkeit. Diese Eigenschaft steht im engen Zusammenhang mit der Widerspruchsfreiheit und besagt, daß das System in gewisser Weise hinreichend umfangreich ist, so daß der Inhalt der durch das System begründeten Theorie im wesentlichen eindeutig festgelegt ist.

Auch Frege leistete in seinen Arbeiten wesentliche Beiträge zur Ausgestaltung der axiomatischen Methode. Bereits in der *„Begriffsschrift“* schuf er ein in seiner schwierigen Symbolik formuliertes Axiomensystem der Logik, das bis auf wenige Änderungen noch heute Bestand hat. In diesem Buch baute er auch eine Theorie der Folgen auf, die wie Dedekind 1893 bekannte, sehr enge Berührungspunkte mit dessen Theorie der Ketten aufwies. Schließlich präsentierte er in den *„Grundgesetzen der Arithmetik“* ein Axiomensystem der Logik, das die Basis seiner Zurückführung der Arithmetik auf die Logik bilden sollte.

Neben der Anwendung der axiomatischen Methode in weiteren Gebieten der Mathematik begannen ab der Wende zum 20. Jahrhundert allgemeine Betrachtungen über Axiomensysteme eine größere Rolle in den Forschungen zu spielen. Im Mittelpunkt stand die Analyse von Axiomensystemen hinsichtlich Unabhängigkeit, Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit. Als Bestandteil der Untersuchungen formaler Systeme fiel die Weiterentwicklung der axiomatischen Methode hauptsächlich in das Gebiet der mathematischen Logik. Als eine gewisse Zäsur kann dabei das Erscheinen der *„Principia mathematica“* von Bertrand Russell und Alfred North Whitehead in den Jahren 1910–1913 gelten. Auch von Nichtmathematikern wurde die Mathematik nun als eine Wissenschaft gesehen, in der man aus beliebigen Voraussetzungen richtige Schlußfolgerungen zog, oder wie Russell es 1903 exakter ausdrückte:

„Pure Mathematics is the class of all propositions of the form „ p implies q,“ where p and q are propositions containing one or more variables, the same in the two propositions, and neither p nor q contains any constants except logical constants.“ [Russell 1903, S. 3. Siehe auch S. Vii f.]

Russell will nach eigenen Angaben den 1903 in den *„Priciples of mathematics“* formulierten logizistischen Begründungsversuch der Mathematik un-

abhängig von Frege gefunden haben. Der Logizismus sah ganz dem obigen Zitat entsprechend die Mathematik als einen Teil der Logik an und war eine der Hauptrichtungen, die sich im Ringen um eine Fundierung der Mathematik an der Wende zum 20. Jahrhundert herausbildete. Russell modifizierte das Fregesche Programm und entwickelte die verzweigte Typentheorie zur Vermeidung der bekannten Antinomien. Zusammen mit seinem Lehrer Whitehead präsentierte er in den *„Principia mathematica“* die dabei gefundenen Resultate und unternahm einen Neuaufbau der Mengenlehre und weiter Teile der durch die Mengenlehre darstellbaren Mathematik, ein Aufbau, der in Form der einfachen Typentheorie auch gegenwärtig zur Axiomatisierung der Mengenlehre benutzt wird. Der philosophische Logizismus ist inzwischen infolge der Erkenntnisse über die Gabelbarkeit der Mengenlehre an bestimmten Axiomen im wesentlichen erloschen.

Bereits in diesen Phasen mathematischer Forschung hatte sich Russell für sozialwissenschaftliche Fragen interessiert und als Pazifist betätigt. Soziale und philosophische Themen rückten in den 30er Jahren immer mehr in den Mittelpunkt seines Schaffens, nach 1945 dominierte zunehmend sein politisches Wirken, u. a. war er nach 1960 ein führender Vertreter der Weltfriedensbewegung. Whitehead hat sich nach der Beschäftigung mit der *„universellen Algebra“* und der Logik vor allem mit den Grundlagen der Physik auseinandergesetzt und u. a. in Konkurrenz zur Einsteinschen Relativitätstheorie eine eigene Gravitationstheorie aufgestellt. Diese Forschungen waren eingebettet in den Kontext allgemeiner naturphilosophischer Überlegungen.

Frühzeitige Anwendungen der axiomatischen Methode fanden sich auf dem Gebiet der Algebra. Das Zusammenspiel der drei skizzierten Tendenzen, die Entstehung der Mengenlehre und die beginnende mengentheoretische Durchdringung mathematischer Teilgebiete, die Herausbildung der mathematischen Logik und die formal-logische Analyse einiger mathematischer Disziplinen sowie die Entwicklung der axiomatischen Methode und der sich allmählich ausprägenden Auffassung von der Mathematik als Strukturmathematik, bildeten den Hintergrund, vor dem die Fortschritte in der Algebra erreicht wurden, die jetzt wieder näher in den Blick genommen werden sollen.

9.2 Die Herausbildung des abstrakten Gruppenbegriffs

Einen ersten abstrakten Gruppenbegriff hatte Cayley für endliche Gruppen bereits 1854 formuliert, der aber auf Grund der fehlenden Untermauerung mit konkreten mathematischen Sachverhalten mehr als gedankliche Spekulation, denn als Abstraktion aus bewährten mathematischen Vorstellungen erscheinen mußte und keine historische Wirkung erzielte (vgl. Kap. 7.4.2). Als Cayley sich jedoch nach mehr als 20 Jahren 1878 erneut mit gruppentheoretischen Arbeiten zu Wort meldete, erzielte er eine nachhaltige Wirkung und initiierte sowohl mehrere Arbeiten, die zur sukzessiven Ausformung des

abstrakten axiomatischen Gruppenbegriffs führten, als auch weitere Arbeiten mit abstrakt gruppentheoretischem Charakter. Das Wesen dieses sich innerhalb weniger Jahre vollziehenden Prozesses besteht darin, daß auf dem Ende der 70er Jahre erreichten Kenntnisstand in rascher Folge eine Verschmelzung der drei historischen Wurzeln des Gruppenbegriffs erfolgte und ein neues Abstraktionsniveau erreicht wurde [Wußing 1969]. In Cayleys Arbeiten spielten diese Prozesse jedoch noch keine Rolle. Cayley fußte zum einen auf der Theorie der Permutationsgruppen und zum anderen auf einer Verallgemeinerung von Auffassungen der englischen algebraischen Schule. Sein Ausgangspunkt zur Definition der Gruppe, die auf nicht näher bestimmten Buchstabensymbolen operierenden Funktionssymbole, erinnert sehr stark an eine Weiterentwicklung früherer Ansichten von Duncan Farquharson Gregory. Ohne den allgemeinen abstrakten Rahmen zu verlassen, stellte Cayley die Beziehungen zu den Permutationsgruppen her, indem er Substitutionen als eine mögliche Interpretation der Funktionssymbole angab. Auch die Definition der Gruppe folgt im Sprachgebrauch der englischen algebraischen Schule:

„A set of symbols $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *, such that the product* $\alpha\beta$ *of each two of them (in each order,* $\alpha\beta$ *or* $\beta\alpha$ *), is a symbol of the set, is a group ... A group is defined by means of the laws of combination of its symbols.“* [Cayley 1889, Vol. 10, S. 402]

Cayleys Betrachtungen beschränkten sich auf endliche Gruppen und er formulierte die Aufgabe, alle Gruppen für eine vorgegebene Ordnung n aufzustellen. Auch in diesem Punkt gab er den Zusammenhang zu den Permutationsgruppen an und brachte in dem nach ihm benannten Satz zum Ausdruck, daß sich jede endliche Gruppe als Permutationsgruppe darstellen läßt.

Die Verschmelzung zwischen gruppentheoretischen Ideen aus dem Gebiet der Permutationsgruppen und der Zahlentheorie trat nur wenig später in der Arbeit von Georg Frobenius und Ludwig Stickelberger (1850–1936) deutlich hervor [Frobenius/Stickelberger 1879]. Beide Gelehrte lehrten zu diesem Zeitpunkt am Polytechnikum in Zürich, der heutigen ETH, Frobenius seit 1875 als Professor und Stickelberger als Privatdozent. Zuvor hatten beide einen Teil ihrer Ausbildung in Berlin absolviert, Frobenius erhielt dort im gleichen Jahr 1874 eine außerordentliche Professur in dem Stickelberger bei Weierstraß promovierte. Während Stickelberger, der 1879–1924 in Freiburg/Br. lehrte, nur mit wenigen, aber wichtigen Arbeiten hervortrat, hat Frobenius nach seiner Berufung an die Berliner Universität (1892) die Tradition von Kummer und Kronecker fortgesetzt und richtungsweisende Beträge zur Gruppentheorie und zur Darstellungstheorie geleistet.

Ausgehend von zahlentheoretischen Studien über Potenzreste bei Euler und Gauß sowie von den Arbeiten zur Auflösung algebraischer Gleichungen von Lagrange und Abel , nahmen Frobenius und Stickelberger in ihrer gemeinsamen Arbeit weiterführende Resultate von Gauß bzw. Ernst Schering über die Zerlegungen einer Gruppe in primäre Gruppen bzw. in elementare Gruppen, von deren Ordnung jede durch die folgende teilbar ist, genauer in den Blick

und suchten eine Antwort auf die Frage, ob es gewisse, allen diesen Zerlegungen gemeinsame Eigenschaften gäbe. Für die abstrakte Formulierung der Zusammenhänge lehnten sie sich methodisch an Dedekinds Modultheorie an:

„Um die abstracte Entwicklung möglichst bequem und fasslich darstellen zu können, knüpfen wir sie an die Untersuchung der Klassen von Zahlen an, die in bezug auf einen gegebenen Modul incongruent und relativ prim zu demselben sind, ohne dabei von den speciellen Eigenschaften dieser Elemente Gebrauch zu machen.“ [Frobenius/Stickelberger 1879, S. 218]

Die Definition der Gruppe war allgemein gehalten, unterschied sich hinsichtlich der gestellten Forderungen aber nicht von früheren Definitionen. In einer Fußnote wurden unendliche Gruppen ausdrücklich eingeschlossen. Wichtige Anregungen für das weitere Vorgehen entnahmen sie der Dedekindschen Teilbarkeitslehre, wie er sie im X. Supplement zu Dirichlets *„Zahlentheorie“* publiziert hatte, und der Kroneckerschen Arbeit über Eigenschaften der Klassenanzahl idealer komplexer Zahlen von 1870. Sie erklärten die Teilbarkeit von Gruppen: *„Wenn alle Elemente der Gruppe B auch der Gruppe A angehören, so heisst A durch B theilbar, ...“* [Frobenius/Stickelberger 1879, S. 220], definierten als weitere wichtige Begriffe den der Basis, des Rangs einer Gruppe (als Anzahl der Basiselemente) und der primären Gruppe (Gruppenordnung ist eine Primzahlpotenz) und übertrugen den Irreduzibilitätsbegriff auf Gruppen. Eine Gruppe nannten sie irreduzibel, bei ihnen noch irreductibel, *„wenn sie nicht in zwei Factoren zerfällt werden kann, ohne daß einer derselben gleich der ganzen Gruppe ist.“* [Frobenius/Stickelberger 1879, S. 218] Als wesentliches Ziel der Arbeit konstatierten Frobenius und Stickelberger dann den Basissatz für abelsche Gruppen:

„I. Eine Gruppe, die nicht irreductibel ist, kann in lauter irreductible Factoren zerlegt werden.

Eine solche Zerlegung ist in der Regel auf viele verschiedene Weisen möglich. Wie man sie aber auch ausführen mag, man erhält doch stets die gleiche Anzahl von irreductiblen Factoren, und dieselben können einander in zwei verschiedenen Zerlegungen so zugeordnet werden, daß die entsprechenden Factoren von gleicher Ordnung sind. Der Beweis dieser Behauptung (§8), sowie die genaue Charakterisierung der irreductiblen Factoren einer Gruppe (§9) bildet den Hauptgegenstand der folgenden Untersuchung.“ [Frobenius/Stickelberger 1879, S. 221]

Abschließend behandelten sie aus dem Gebiet der Zahlentheorie die Reste der Potenzen rationaler ganzer Zahlen in bezug auf einen zusammengesetzten Modul und die Reste der Potenzen komplexer ganzer Zahlen.

Eine weitere Publikation, welche die im Rahmen der Zahlentheorie entwickelte implizite Charakterisierung des Gruppenbegriffs mit der Theorie der Permutationsgruppen verband, war 1882 das Buch *„Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra“* von Eugen Netto (1846–1919). Netto, ein Schüler von Kronecker und sehr gut mit dessen Auffassungen vertraut, griff dabei nicht nur auf dessen schon erwähnte Arbeit über Eigenschaften

der Klassenanzahl idealer komplexer Zahlen zurück, sondern nahm auch auf die ebenfalls 1882 erschienene Festschrift zu Kummers Goldenem Doktorjubiläum *„Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen“* Bezug, die er zu seinem Bedauern nur noch in Ansätzen für seine Substitutionentheorie benutzen konnte. Inhaltlich fußte Netto bezüglich der Theorie der Permutationsgruppen natürlich wesentlich auf den bekannten, schon klassischen Monographien von Serret [Serret 1849] und Jordan [Jordan 1870], wobei er sich in den Begriffen und Bezeichnungen eng an Jordan anschloß. In der Diktion seiner Darstellung berief er sich jedoch ganz auf Kronecker und begründete den Übergang zu abstrakten Darlegungen ganz im Stile des axiomatischen Denkens damit, die grundlegenden Gemeinsamkeiten verschiedener Theorien herauszuarbeiten und die Konzepte übertragen zu können.

„Die im vorliegenden Buche durchgeführte Darstellung der Substitutionentheorie weicht in mehreren nicht unwesentlichen Punkten von den bisher üblichen ab. Hierbei waren Gesichtspunkte massgebend, welche hervorgehoben werden müssen.

Es ist unzweifelhaft, daß der Kreis der Anwendungen eines Algorithmus sich ausdehnen wird, wenn es gelingt, die Grundlagen und den Aufbau desselben von allen nicht unbedingt geforderten Voraussetzungen zu befreien, und ihm durch die Allgemeinheit der Objekte, mit denen er arbeitet, auch die Möglichkeit des Eingreifens in die verschiedensten Gebiete zu geben. Dass die Theorie der Gruppenbildung eine solche Darstellung zulässt, spricht für ihre weitgreifende Bedeutung und für ihre Zukunft.“ [Netto 1882, S. III]

Nach dieser Ankündigung war der Inhalt des Buches eher ernüchternd. Netto blieb im großen und ganzen noch sehr eng der Theorie der Permutationsgruppen verhaftet. Die Definition des Gruppenbegriffs brachte keine neuen Gesichtspunkte. Lediglich bei der Analyse der abelschen Gruppen verließ er den Boden der Permutationsgruppen und übernahm in §§ 131 und 132 fast wörtlich die Kroneckerschen Ausführungen mit der impliziten Gruppendefinition, ohne – und das ist interessant - die Bezeichnung Gruppe zu gebrauchen. Mit dem Hinweis, daß im vorliegenden Fall der Substitutionsgruppen die abstrakten Elemente durch Substitutionen ersetzt werden müssen (Man erinnere sich, daß im damaligen Sprachgebrauch der Übergang von zwei Anordnungen (Permutationen) als Substitution bezeichnet wurde.), verließ er die abstrakte Ebene der Darlegungen, sprach jetzt auch wieder von (Substitutions-) Gruppen und folgerte sofort den Basissatz für endliche Gruppen. Auch bei den Ausführungen zu ein- und mehrstufigen Isomorphismen von Gruppen, d. h. von isomorphen bzw. homomorphen Abbildungen, blieb er im Konkreten, nämlich in der Theorie der Permutationsgruppen und verzichtete auf eine abstrakte Darstellung. Dazu hätte es lediglich einer Fortführung der Kroneckerschen Ansätze bedurft, da Nettos diesbezügliche Untersuchungen nicht von speziellen Eigenschaften der Substitutionen abhingen. Somit hatte Netto zwar die Bedeutung des Gruppenbegriffs erkannt und sich um eine abstrakte Formulierung bemüht, aber, und dies macht seine Grenzen deutlich, er



Eugen Netto



Heinrich Weber

vermochte nicht, die Permutationstheorie von diesem abstrakten Standpunkt konsequent zu präsentieren oder gar den aus Zahlentheorie und Permutationstheorie abstrahierten allgemeinen Begriff an die Spitze der Darlegungen zu stellen.

Ebenfalls ein gewisses Zwischenstadium auf dem Weg zum abstrakten Gruppenbegriff verkörperte die 1882 erschienene Arbeit *„Beweis des Satzes, daß jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist“* von Heinrich Weber. Sie hatte eine klare zahlentheoretische Zielstellung. Weber bezog sich dabei auf Arbeiten von Dirichlet, Schering, Mertens und Kronecker, strebte aber zugleich eine allgemeine abstrakte Darstellung an, mit der er eine größere Verständlichkeit erreichen wollte. Dieser Aspekt macht die Ausführungen für die Entwicklung der Algebra interessant und, da Weber das Abstraktionsniveau in der ganzen Arbeit beibehält, zu einem Beispiel für die Anwendung der axiomatischen Methode. Die algebraischen Grundlagen faßte Weber in einem einleitenden Abschnitt zusammen und definierte:

„Ein System G von h Elementen irgendwelcher Art, $\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_h$ heißt eine Gruppe vom Grade h, wenn es den folgenden Bedingungen genügt:

Durch irgend eine Vorschrift, welche als Composition oder Multiplikation bezeichnet wird, leitet man aus zwei Elementen des Systems ein neues Element desselben Systems her. In Zeichen $\Theta_r\Theta_s = \Theta_t$.

Es ist stets

$$(\Theta_r\Theta_s)\Theta_t = \Theta_r(\Theta_s\Theta_t) = \Theta_r\Theta_s\Theta_t.$$

Aus $\Theta\Theta_r = \Theta\Theta_s$ und aus $\Theta_r\Theta = \Theta_s\Theta$ folgt stets $\Theta_r = \Theta_s$.“

[Weber 1882, S. 302]

Es spricht für den axiomatischen Standpunkt, daß Weber beim Übergang zu abelschen Gruppen in der Definition lediglich das Hinzutreten einer weiteren Bedingung

IV. „Für je zwei Elemente Θ_r, Θ_s *der Gruppe ist* $\Theta_r\Theta_s = \Theta_s\Theta_r, \ldots$“

[Weber 1882, S. 304] zu den bereits bekannten vermerkte. Als Folgerung aus der Gruppendefinition bewies er u. a. die Existenz eines Einselements, von ihm als Hauptelement bezeichnet, und des reziproken Elements zu einem beliebig vorgegebenen Element. Das Haupttheorem dieses Abschnitts war nach der Definition weiterer Begriffe der schon mehrfach erwähnte Basissatz für endliche abelsche Gruppen. Die in diesem Theorem nachgewiesene Darstellung eines Gruppenelementes als Produkt von Potenzen der Basiselemente bildete für Weber dann den Ausgangspunkt für die abstrakte, nur auf gruppentheoretische Überlegungen gegründete Einführung des Charakters eines Elements und den Aufbau einer Theorie der Charaktere. Wie der Basissatz war diese Theorie nicht neu, Weber knüpft ausdrücklich an Dirichlet an. Hervorzuheben ist auch hier die konsequent gruppentheoretische Formulierung. Die Webersche Darstellung war hinsichtlich Abstraktionsniveau und Klarheit beispielhaft. Um als Schlußpunkt bei der Herausbildung des abstrakten Gruppenbegriffs gelten zu können, fehlte ihr jedoch die Zusammenfassung der verschiedenen Traditionslinien; denn bei seiner Definition der Gruppe bezog Weber weder die Forschungen über Permutationsgruppen noch über Transformationsgruppen ein.

In der Folgezeit hat Weber mit weiteren Arbeiten, über die noch zu berichten sein wird, die Entwicklung der Algebra und der Zahlentheorie wesentlich befördert. Doch er war darüber hinaus ein sehr vielseitiger Mathematiker und ein guter Lehrer, der seine Schüler, unter ihnen David Hilbert und Hermann Minkowski, zu begeistern und zu inspirieren wußte. Wichtige Ergebnisse erzielte er zur Analysis, über algebraische Funktionen und zur mathematischen Physik. Er stand dabei ganz in der Tradition des Königsberger mathematisch-physikalischen Seminars, in dem er nach der Promotion in Heidelberg (1863) seine Studien vertieft hatte und 1875–1883 als Professor lehrte. Einen prägenden Einfluß auf seine Forschungen hatte die Freundschaft mit Dedekind und die Beschäftigung mit dem Schaffen Riemanns, dessen *„Gesammelte Werke“* er mit Dedekind herausgab. Eine grundlegend überarbeitete Fassung von Riemanns Vorlesungen über *„Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik“* stammt ebenfalls aus seiner Feder. Weitere wichtige Stationen seiner akademischen Laufbahn waren das Polytechnikum in Zürich (1870–1875) sowie die Universitäten in Marburg (1884–1892), Göttingen (1892–1895) und Straßburg (1895–1913). Bei letzterer handelte es sich um die 1872 gegründete und aus politischen Gründen besonders geförderte deutsche Universität.

Die bei Weber noch fehlende explizite Zusammenführung der drei historischen Wurzeln der Gruppentheorie wurde noch im gleichen Jahr, ja sogar im gleichen Band der *„Mathematischen Annalen“* von Walter v. Dyck vollzo-

gen. Es ist deshalb legitim, die Herausbildung des abstrakten axiomatischen Gruppenbegriffs mit dem Jahr 1882 zu verknüpfen. Die Verbindung zwischen den einzelnen Richtungen wurde von Dyck ganz bewußt vollzogen. Mehrfach hob er hervor, daß er von der speziellen Darstellungsform der Gruppen absehen will und es ihm um das Erkennen der *„zur Gruppenbildung wesentlichen Eigenschaften“* geht. Als Schüler von Klein war er mit allen drei Traditionslinien gruppentheoretischer Forschungen vertraut, hatte selbst zu den Anwendungen der Gruppentheorie in der Geometrie geforscht und näherte sich dem notwendigen Abstraktionsschritt gerade durch diese geometrische Betrachtungsweise. Die dadurch erzielte *„Versinnlichung gruppentheoretischer Operationen“* ermöglichte es, in einfachen Fällen die Gesamtheit der Operationen einer Gruppe in ihrer gegenseitigen Stellung zu überblicken und *„das Wesentliche einer Gruppe von den durch die specielle Erscheinungsform zufällig hineingetragenen Eigenschaften zu sondern“* [Dyck 1882, S. 4]. Er verkannte jedoch nicht die Gefahr, daß die geometrische Sichtweise zu einer gewissen Einseitigkeit führen kann.

„Für die Weiterentwickelung der vorliegenden gruppentheoretischen Probleme hat nämlich an Stelle jeder geometrischen Sprechweise die analytische (combinatorische) Formulirung einzutreten. Für sie aber hat diese erste geometrische Orientirung gewisse Gesichtspuncte ergeben, die in der geometrischen Fassung, wie ihrem analytischen Inhalte nach, zu entwickeln, den Zweck der vorliegenden Arbeit bildet.“ [Dyck 1882, S. 5]

Die unmittelbare Anregung zu dem zweiteiligen Artikel erhielt Dyck durch die eingangs erwähnten Arbeiten Cayleys, dessen Gruppendefinition er als Motto über seine Arbeit stellte. Da er sich hinsichtlich der abstrakten Auffassungen auf Graßmanns *„Ausdehnungslehre“*, Hankels *„Complexe Zahlensysteme“* und Schröders *„Absolute Algebra“* berief, manifestierte sich damit zugleich die Wirkung der zu Beginn des Kapitels geschilderten allgemeinen Entwicklungstendenzen. Auch sprachlich wurde die Nähe zu den obigen Arbeiten deutlich, wenn er konstatierte:

„Indem wir ... die gruppentheoretischen Operationen rein formal auffassen, zeigt sich deutlich ihre Stellung in einer formalen Entwickelung analytischer Operationen überhaupt. Es sind Multiplicationsoperationen, welche das associative, nicht aber das commutative Princip befolgen. Dabei wird diesen Operationen durch gewisse Multiplicationsregeln ... der Charakter eines speciellen Operationskreises ertheilt, der eine unendliche oder auch eine endliche Gruppe von Operationen umfasst.“ [Dyck 1882, S. 2]

In den Darlegungen ging Dyck aus von gewissen erzeugenden Operationen A_1, A_2, A_3, ... A_m, die er nicht näher bestimmte, und betrachtete die durch *„Iteration und Combination dieser Operationen“* entstehende Gruppe, in heutiger Terminologie also die von den A_i erzeugte freie Gruppe. Jedes Element der Gruppe wird durch einen Ausdruck der Form $A_1^{\mu_1} A_2^{\mu_2} ... A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} ...$ dargestellt, und da er zunächst keinerlei Relationen zwischen den Elementen forderte, waren all diese Ausdrücke verschieden. Beispielsweise stimmen wegen



Ludwig Otto Hölder



Walter von Dyck

der fehlenden Kommutativität der Verknüpfung die Ausdrücke $A_1A_2A_1$ und $A_1^2A_2$ im allgemeinen nicht überein. Dyck nahm außerdem an, daß zu jedem A_i auch die inverse Operation zur Gruppe gehört und gab dann den Gruppen durch das Stellen weiterer Bedingungen eine spezielle Struktur. Diese zu erfüllenden Relationen schrieb er in der Form $F_h(A_i) = 1$. Ein wichtiges Resultat der Arbeit war der Nachweis, daß die durch diese Relationen erhaltene Gruppe $\overline{G}$, modern formuliert, eine Faktorgruppe der Ausgangsgruppe G ist. Zuvor hatte Dyck bereits erklärt, daß er seinem abstrakten Ausgangspunkt entsprechend isomorphe Gruppen als identisch ansehen werde.

Dyck setzte dann seine Erkenntnisse für spezielle Gruppen um und widmete sich der geometrischen Versinnlichung der Gruppe G. Er behandelte sowohl die in Verbindung mit den Transformationen elliptischer Funktionen untersuchten Transformationsgruppen als auch die Permutationsgruppen und die Polyedergruppen und zeigte, daß sie in der abstrakten Theorie inbegriffen waren und durch zweckmäßige Umformung der Relationen $F_h(A_i) = 1$ erhalten werden konnten. Im zweiten, 1883 erschienenen Teil der Arbeit unterstrich Dyck nochmals das Verhältnis der abstrakten Theorie zu den vielfältigen Detailstudien über spezielle Gruppen und brachte Aspekte einer axiomatischen Darstellung stärker zur Geltung. Den Wert und die Ausnutzung spezieller Gegebenheiten bei der Lösung der konkreten Probleme stellte er nicht in Abrede, es ging ihm aber vor allem um die Frage, *„in wie weit sie* (die speziellen Beziehungen, K.-H. S.) *in rein gruppentheoretischen und in wie weit in anderen Eigenschaften des gestellten Problems ihre Begründung finden.“* [Dyck 1883, S. 71]

Die besprochenen *„Gruppentheoretischen Studien“* waren Bestandteil der Dyckschen Habilitationsschrift, auch in seinem weiteren mathematischen Schaffen folgte Dyck mehrfach Anregungen Kleins. Eine besondere Wirk-

samkeit entfaltete er jedoch, auch dabei quasi dem Beispiel seines Lehrers folgend, als Wissenschaftsorganisator. So war Dyck zwölf Jahre Rektor der Technischen Hochschule München (1900–1906, 1919–1925), bekleidete wichtige Leitungsfunktionen u. a. in der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, im Deutschen Museum sowie in der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft und förderte maßgeblich die Herausgabe der *„Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“*.

Die bisherigen Ausführungen zeigen, daß mit der Formulierung des abstrakten Gruppenbegriffs die Gruppenaxiome keineswegs schon vollständig vorlagen. Die Definition einer Gruppe, wie die oben zitierte von Heinrich Weber, war die Ausnahme, oft begnügte man sich damit, die Abgeschlossenheit der Menge gegenüber der Gruppenoperation zu fordern. Die weitere Herausbildung der Gruppenaxiome vollzog sich nun parallel zur Ausbreitung des Gruppenbegriffs. Ein wichtiger Beitrag resultierte aus den Bemühungen von Sophus Lie, die Theorie der unendlichen Transformationsgruppen systematisch aufzubauen. Hatte bereits die Formulierung des abstrakten Gruppenbegriffs wesentliche Impulse aus der Verschmelzung von Studien zu Permutations- und Transformationsgruppen erhalten, so lieferte dieser Prozeß bei gleichzeitiger Ausweitung der Betrachtungen auf unendliche Gruppen auch die Ausformung der Gruppenaxiome. Lie hatte im Streben nach einer Klassifikation der Transformationsgruppen eine Schar von Transformationen mit einem Differentialgleichungssystem verknüpft und die Gruppeneigenschaft durch Bedingungen an die Lösungen dieses Systems charakterisiert. (vgl. Abschn. 8.3.2) Bei dem systematischen Aufbau der Theorie wählte Lie diese Beziehung als Ausgangspunkt und definierte die Transformationsgruppen mit Hilfe der Lösungen eines Systems (partieller) Differentialgleichungen und den Eigenschaften, welche die Lösungen des System erfüllen sollten. Insbesondere mußte mit zwei Transformationen, die Lösungen des Systems waren, auch deren Nacheinanderausführung wieder eine Lösung des Systems sein. Dies war, wie Lie sofort anmerkte, eine Einschränkung der untersuchten Gruppen, denn es gab Transformationsgruppen, die sich nicht auf diese Weise definieren ließen. Er rechtfertigte den Schritt aber durch Hinweise auf die angestrebte Anwendung der Resultate in einer allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen und die großen Schwierigkeiten, die bei Einbeziehung dieser Gruppen das Auffinden allgemeiner Resultate außerordentlich behindern würden. Außerdem forderte er dann:

„Zur Vereinfachung der Theorie führen wir noch eine zweite Voraussetzung ein, wir wollen nämlich nur solche unendliche continuirliche Gruppen betrachten, deren Transformationen paarweise zu einander invers sind. In dieser Voraussetzung liegt dann zugleich, daß die betreffenden Gruppen die identische Transformation enthalten, denn führen wir zwei zu einander inverse Transformationen einer Gruppe aus, so bekommen wir wieder eine Transformation der Gruppe, eben die identische Transformation.“ [Lie 1891, S. 319]

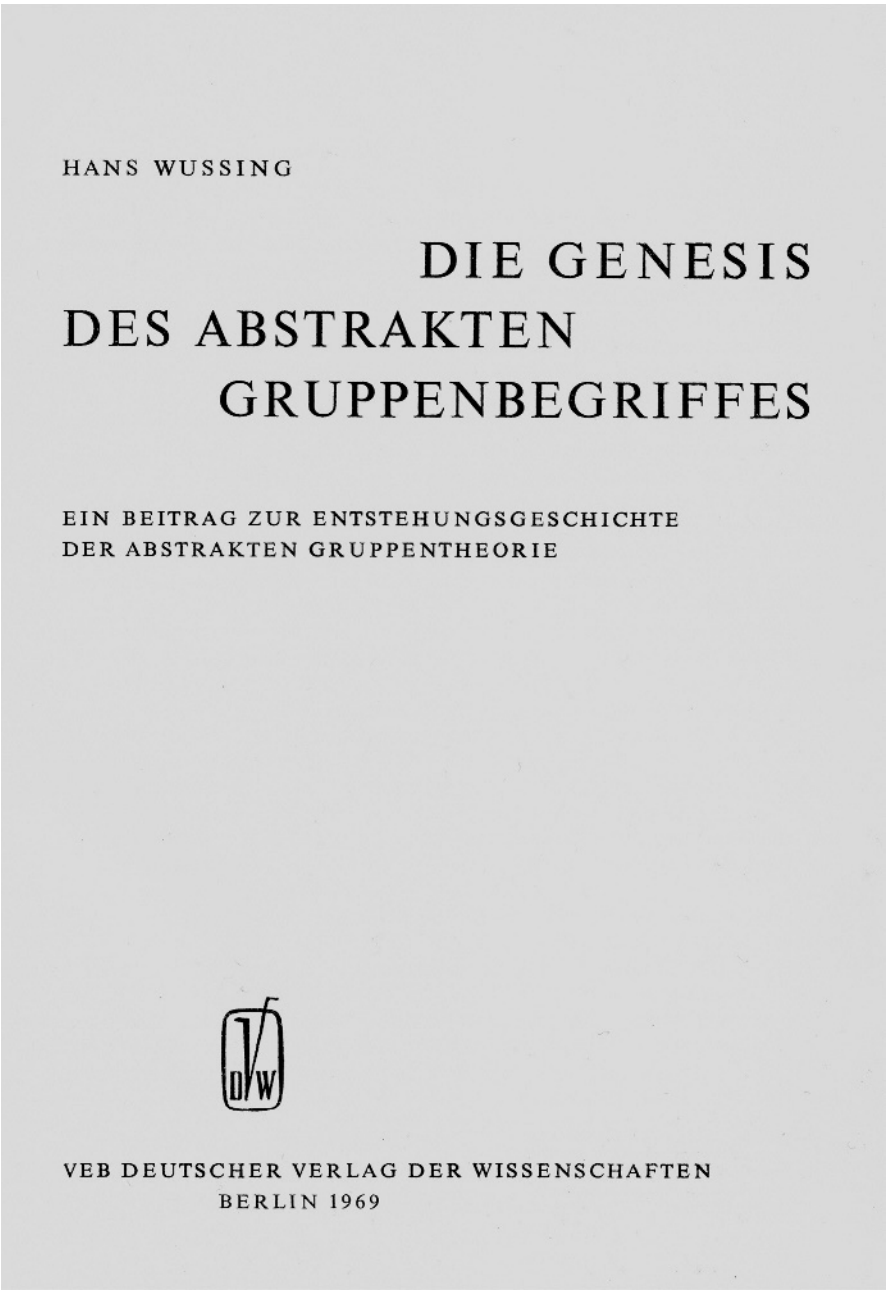


Abb. 9.2.1. Titelblatt des Buches „Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes“ von Hans Wussing

Diese zweite Voraussetzung stellte jedoch keine Einschränkung dar. Lie hatte sie zuvor, 1889 [Lie 1889, S. 558], unabhängig von der ersten Forderung formuliert, wies aber jetzt nach, daß sie in jeder durch Differentialgleichungen definierten Transformationsgruppe erfüllt war. Damit hatte Lie aus methodischen Gründen zwei wichtige Gruppenaxiome fixiert und zwar jene zwei, die sich – sah man von der speziellen Realisierung der Transformationsgruppe ab – für unendliche Gruppen nicht aus den übrigen Eigenschaften der Gruppendefinition ableiten ließen. Mit Blick auf den abstrakten axiomatischen Gruppenbegriff war dabei insbesondere die Unterscheidung zwischen Voraussetzung (Axiom), und dem im konkreten Fall stets erfüllten Sachverhalt wichtig. Lie hat später, 1894, seine klaren Einsichten in die Bedeutung des Gruppenbegriffs in der Mathematik und die mit der Ausdehnung gruppentheoretischen Denkens einhergehende abstraktere Fassung des Begriffs in einem Artikel zur Würdigung der Leistungen Galois' artikuliert. Er löste den Begriff jetzt deutlich von den Realisierungen als Transformationsgruppe ab, forderte als definierende Eigenschaft jedoch nur die Abgeschlossenheit der Menge gegenüber der Verknüpfungsoperation. Diese Definition sollte dann durch die Angabe weiterer Eigenschaften (Axiome) präzisiert werden:

„Pratiquement, on précise dans chaque cas particulier cette définition. ... Enfin, on n'a pas encore montré, d'une facon entièrement satisfaisante au point de vue purement théoretique, s'il était nécessaire d'ajouter à la définition de groupes continus que parmi leurs transformations se trouve la transformation identique. En étendant la notion de groupe à des opérations quelconques, on n'a pas le droit de conclure que de la définition donnée plus haut résulte le partage des opérations du groupe en couples d'opérations inverses. Il arrive aussi que le principe d'associativité n'est pas valable pour tous les groupes d'opérations.“ [Galois 1989, S. 74f.]

Berücksichtigt man die inzwischen erreichten Fortschritte in der Formulierung des abstrakten Gruppenbegriffs, so blieb Lie trotz der impliziten Angabe aller Gruppenaxiome und der angedeuteten Möglichkeit, durch das Fordern unterschiedlicher Axiome verschiedene Gruppen zu erhalten, hinter dem aktuellen Forschungsstand zurück. Die Orientierung auf unendliche kontinuierliche Transformationsgruppen wirkte hier wohl zu stark auf ihn.

Zu diesem Zeitpunkt war die abstrakt-axiomatische Formulierung der Gruppendefinition in weiteren Anwendungen deutlich vorangekommen. So hatte Frobenius 1887 in der Absicht, einen abstrakten Beweis für die von Ludwig Sylow 1872 für Permutationsgruppen abgeleiteten Sätze zu geben, vier Postulate aufgestellt, die für ein System nicht näher bestimmter Elemente die Eigenschaft erzwang, eine endliche Gruppe zu sein. Bewußt berief er sich nicht auf den Satz, daß jede endliche Gruppe als Permutationsgruppe realisiert werden kann, sondern strebte einen unabhängigen Beweis an. Auf dieser Basis zeigte er, daß jede endliche Gruppe, deren Ordnung durch die ν-te Potenz der Primzahl p teilbar ist, stets eine Untergruppe der Ordnung p^ν besitzt, kurz p-Sylow-Gruppe genannt. Weitere Schritte vollzog Otto Hölder

1889 in Untersuchungen zur Galois-Theorie, in denen er sich unter Hinweis auf Abel, Kronecker und Jordan mit dem Prozeß der Hinzunahme gewisser Hilfsgrößen zu dem Rationalitätsbereich der Gleichung befaßte. Nach einer Anregung von Klein fragte Hölder, ob es möglich ist, eine vorgegebene Gleichung zu lösen, indem man die Wurzeln einer Folge von Hilfsgleichungen zum Grundbereich adjungiert. Dabei sollte keine der adjungierten Hilfsgrößen eine *„accessorische Irrationalität“* und die Galois-Gruppe jeder Hilfsgleichung nach der Adjunktion aller Wurzeln der Hilfsgleichungen einfach sein. Eine *„accessorische Irrationalität“* bezeichnete eine Größe, die nicht rational durch die Elemente des Grundbereiches und die bereits adjungierten Wurzeln der Hilfsgleichungen ausdrückbar war. In Anlehnung an die Dycksche Arbeit gründete er seine Darlegungen auf abstrakte gruppentheoretische Resultate und begann mit der abstrakten Gruppendefinition. Die einzelnen Axiome zur Bestimmung der Gruppeneigenschaft waren klar strukturiert und stimmten inhaltlich mit den von Frobenius angegebenen überein. Er forderte für eine Gesamtheit von endlich vielen Operationen (Gruppenelementen) die Eindeutigkeit der Verknüpfung zweier Operationen zu einer dritten innerhalb der Gesamtheit, die Gültigkeit des Assoziativgesetzes, und daß für Operationen A, B, C aus $AB = AC$ bzw. $BA = CA$ stets $B = C$ folgt. Ausdrücklich betonte er, daß das Kommutativgesetz nicht erfüllt sein muß, und daß wegen der endlichen Anzahl der Operationen aus diesen Eigenschaften die Existenz einer identischen Operation folgt sowie zu jeder Operation A eine eindeutig bestimmte inverse Operation bestimmt werden kann. Als weiteren wichtigen Begriff definierte er dann die Faktorgruppe und verschärfte das Jordansche Resultat zu dem bekannten Satz von Jordan- Hölder: Zu jeder Gruppe gibt es eine Hauptreihe von ineinander enthaltenen Gruppen, die mit der nur aus der Identität bestehenden Gruppe endet, wobei jede der Gruppen ein maximaler Normalteiler in der vorangegangenen Gruppe ist, und diese Folge von Gruppen ist bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt, d. h. die aus zwei aufeinanderfolgenden Gruppen gebildeten Faktorgruppen sind bis auf Isomorphie und Reihenfolge durch die Ausgangsgruppe eindeutig festgelegt. Eine solche Folge von Gruppen wird Kompositionsreihe genannt und der Satz lautet dann in der heute üblichen Terminologie, daß die Kompositionsreihe einer Gruppe bis auf Isomorphie und Reihenfolge der Faktoren eindeutig bestimmt ist. Ergänzend sei noch vermerkt, daß im Zuge der weiteren Entwicklung der abstrakten Algebra der Satz 1928 von Otto Schreier auf unendliche Gruppen und auf sogenannte Gruppen mit Operatoren ausgedehnt wurde [Schreier 1928]. In den 90er Jahren wandte sich Hölder auf dem erreichten Abstraktionsniveau der von Cayley gestellten Aufgabe zu, alle Gruppen zu einer gegebenen Ordnung anzugeben und beschäftigte sich anknüpfend an Frobenius' Ausführungen zu den Sylowschen Gruppen intensiv mit der Struktur einfacher und zusammengesetzter Gruppen (vgl. z. B. [Hölder 1892], [Hölder 1893], [Hölder 1895]). Im übrigen war Hölder ein sehr vielseitiger Mathematiker, der auf vielen Gebieten der Mathematik wichtige

Beiträge geleistet hat. Neben der Algebra waren dies u. a. verschiedene Gebiete der Analysis, die Zahlentheorie, die Mechanik, die Geometrie und die Grundlagen der Mathematik. Zahlreiche Begriffe und Sätze der Mathematik sind heute mit seinem Namen verbunden. 1899 wurde er Nachfolger von Lie in Leipzig, wo er auch nach seiner Emeritierung 1928 aktiv war und Vorlesungen hielt. Die meisten der algebraischen Arbeiten entstanden während seiner Tätigkeit an den Universitäten Göttingen (1884–1889) und Tübingen (1889–1896).

Nur wenige Jahre später war es wieder eine Arbeit zur Galois-Theorie [Weber 1893], in der eine abstrakte axiomatische Definition des Gruppenbegriffs gegeben wurde. Die Definition umfaßte nun auch die unendlichen Gruppen und diente zugleich als Basis für eine Bestimmung des Körperbegriffs. Dies unterstreicht die langanhaltende und ungeheuer anregende Rolle, welche die Galois-Theorie in der Geschichte der Algebra gespielt hat. Dabei war diese Wirksamkeit nicht auf die Gruppentheorie beschränkt, sondern ist, wie die Darlegungen in den vorangegangenen Kapiteln zeigen, durchaus übergreifend zu sehen: Sie erfaßte gleichermaßen die Körpertheorie und strahlte in viele Gebiete der Mathematik aus. Als Beispiel sei Heinrich Weber zitiert, der in der Einleitung zu obiger Arbeit die Behandlung der Galois-Theorie von einem die algebraischen Grundstrukturen betonenden Standpunkt als methodische Neuerung hervorhob:

„Im Folgenden ist der Versuch gemacht, die Galois'sche Theorie der algebraischen Gleichungen in einer Weise zu begründen, die soweit möglich alle Fälle umfasst, in denen diese Theorie angewandt worden ist. Sie ergiebt sich hier als eine unmittelbare Consequenz des zum Körperbegriff erweiterten Gruppenbegriffs, als ein formales Gesetz ganz ohne Rücksicht auf die Zahlenbedeutung der verwendeten Elemente. ... Die Theorie erscheint bei dieser Auffassung freilich als ein reiner Formalismus, der durch Belegung der einzelnen Elemente mit Zahlenwerten erst Inhalt und Leben gewinnt. Dagegen ist diese Form auf alle denkbaren Fälle, in denen die gemachten Voraussetzungen zutreffen, anwendbar, die einerseits in die Functionentheorie andererseits in die Zahlentheorie hinübergreifen.“ [Weber 1893, S. 521]

Die von Weber an den Anfang gestellte axiomatische Gruppendefinition stimmt zunächst inhaltlich mit der oben erwähnten Charakterisierung bei Hölder überein, jedoch ging er von einem System $\mathfrak{S}$ von endlich oder unendlich vielen Dingen aus. Statt im Falle eines endlichen Systems die Existenz eines identischen und eines inversen Elements aus den Axiomen zu folgern, bewies er:

„4) *Wenn von den drei Elementen* A, B, C *zwei beliebig aus* $\mathfrak{S}$ *genommen werden, so kann man das dritte immer und nur auf eine Weise so bestimmen, daß* $AB = C$ *ist.*“ [Weber 1893, S. 522]

und merkte zu dem Beweis als entscheidenden Unterschied für unendliche Gruppen an:

„Für unendliche Gruppen ist dieser Schluss nicht mehr zwingend. Für unendliche Gruppen wollen wir also die Eigenschaft 4) noch als Forderung in die Begriffsbestimmung mit aufnehmen.“ [Weber 1893, S. 523]

Damit waren auch die unendlichen Gruppen vollständig axiomatisch definiert. Durch eine Fülle von Beispielen dokumentierte Weber das vielfältige Erscheinungsbild von Gruppen und berücksichtigte dabei mit Ausnahme der kontinuierlichen Transformationsgruppen, also der Lie-Gruppen, alle Typen, die bei der Genesis des abstrakt-axiomatischen Gruppenbegriffs eine Rolle gespielt hatten. Erwähnenswert ist außerdem, daß Weber, ganz in Sinne seines Lehrers Dedekind, mit den strukturellen Überlegungen nicht bei den Gruppen stehen blieb und eine Ausdehnung des Formalismus für sinnvoll hielt. In der gleichen Arbeit beschrieb er den Körperbegriff als eine Erweiterung der Gruppe, als eine Gruppe mit zwei Kompositionen, und deutete an, daß auch Systeme mit drei Kompositionen bzw. andere Begriffsbildungen eine Untersuchung wert sein könnten.

Die weitere Durchsetzung des abstrakten Gruppenbegriffs kann im Rahmen des breiteren Prozesses einer stärkeren Hinwendung zum Gebrauch abstrakter algebraischer Strukturbegriffe betrachtet werden. Die Herausbildung abstrakter algebraischer Begriffe war in den einzelnen Zweigen der Algebra weit genug vorangekommen, um dieses Phänomen in seiner Wirkung auf die gesamte Disziplin spürbar werden zu lassen. Dies wird im Abschnitt 10.1 behandelt werden.

Bei den im Vorangegangenen dargestellten Fortschritten in der abstrakten axiomatischen Gruppendefinition von Dyck bis Weber darf jedoch nicht vergessen werden, daß dieser Prozeß von zahlreichen Untersuchungen zu konkreten Gruppen begleitet war, seien es Permutations- oder Transformationsgruppen oder endliche Gruppen auf dem neu gewonnenen abstrakten Niveau. So wie Hölder begannen sich in den Jahrzehnten um die Jahrhundertwende mehrere Mathematiker verstärkt dem Studium der endlichen Gruppen zuzuwenden. Besonders deutsche und amerikanische Mathematiker griffen die abstrakten Untersuchungen auf, was auf Grund der historischen Gegebenheiten aber nicht verwundert. So wie Deutschland in der gesamten Wissenschaftsentwicklung in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts eine Spitzenstellung in der Welt erreicht hatte, galt dies auch für die Mathematik. Insbesondere die uns hier interessierende Entstehung und Etablierung abstrakter algebraischer Begriffsbildungen und Methoden war in den Jahrzehnten vor der Jahrhundertwende von deutschen Wissenschaftlern dominiert worden. Zur gleichen Zeit unternahmen die USA große Anstrengungen zum Aufbau einer eigenen Wissenschaft und einer universitären Ausbildung, wobei sie auch wesentlich auf Erfahrungen in Deutschland zurückgriffen. Nicht zuletzt nutzten mehrere junge Gelehrte angesichts des mageren Stellenangebots für eine Professorenkarriere in Deutschland die Möglichkeit, an einer amerikanischen Hochschuleinrichtung eine Lehrposition anzutreten.



Georg Frobenius



Eliakim Hastings Moore

In den Forschungen zu endlichen Gruppen wurde das Begriffssystem der Gruppentheorie auf dem abstrakten Niveau weiter vervollkommnet. Richard Dedekind und George Abram Miller führten den Kommutator und Kommutatorgruppen ein ([Dedekind 1897], [Miller 1898]), Otto Hölder und Eliakim Hastings Moore die Automorphismen einer Gruppe ([Hölder 1893], [Moore 1895]). Auch William Burnside widmete sich in seinem Lehrbuch *„Theory of groups of finite order“* [Burnside 1897] dem Studium von Automorphismen und hatte wohl die Analyse der Automorphismengruppen einiger elementarer Gruppen in den Blick genommen. In dem Buch stellte er auch die damals bekannten Sätze über einfache Gruppen zusammen und hat im Zusammenhang mit den 1861 von Émile Léonard Mathieu angegebenen Gruppen vermutlich den Terminus der sporadischen einfachen Gruppe geprägt. Burnsides Ziel war der Aufbau einer Theorie endlicher Gruppen, unabhängig von jeder speziellen Art die Gruppen darzustellen, doch orientierte er sich in der ersten Auflage des Buches noch sehr stark auf die Permutationsgruppen, die er als wertvolles Studienobjekt für diesen Zweck ansah. Leonard Eugene Dickson unternahm, angeregt durch Arbeiten über Lie-Gruppen, umfangreiche Forschungen über endliche lineare Gruppen, d. h. der umkehrbaren linearen Transformationen eines Vektorraumes. Da diese Transformationen durch reguläre $(n \times n)$-Matrizen beschrieben werden können, entsprach dies der Theorie der multiplikativen Gruppe dieser Matrizen. Die Ergebnisse faßte Dickson u. a. 1900 in einer Monographie zusammen. Einen wesentlichen Beitrag zur Gruppentheorie lieferte schließlich ab 1896 Frobenius mit seiner Theorie der Charaktere, mit der er Ideen von Dirichlet und Dedekind im Bereich der abelschen Gruppen fortführte. Diese Arbeiten haben eine enge Beziehung zu Fragen der Darstellungstheorie, so daß auf sie im Abschnitt 9.5.2 näher eingegangen wird.

9.3 Dedekind und Kronecker: Algebraische Zahlen, Ideale und Divisoren, Körper

Wir haben die Idealtheorie in einem noch ursprünglichen, recht schwer verständlichen Zustand verlassen: bei Kummers Theorie der idealen Zahlen (vgl. Abschn. 7.5.2). Die seit den 70er Jahren des 19. Jahrhunderts zutage tretenden Entwicklungen können als ein Musterbeispiel für die sich in der Mathematik vollziehenden Umgestaltungen gelten. In den Personen Dedekinds und Kroneckers traten sich am gleichen Untersuchungsgegenstand zwei Forscher mit völlig verschiedenen Grundauffassungen gegenüber. Kronecker war Anhänger eines konstruktiven, finitistischen Herangehens an die Begründung der Mathematik. Mathematische Begriffsbildungen und Beweise sollten in endlich vielen Schritten nachvollziehbar sein und im Ergebnis zur Konstruktion des jeweiligen Objektes führen. Die Definition von Begriffen mit Hilfe unendlicher Mengen, ohne die Angabe, wie die Elemente der Menge erhalten, also konstruiert, werden können, bzw. wie man von einem Objekt entscheiden kann, ob es zur Menge gehört, waren für ihn unannehmbar. Sein Hauptziel war es, die irrationalen Zahlen zu vermeiden und die gesamte Mathematik auf die ganzen Zahlen und die mit ihnen unmittelbar verknüpften Begriffe und Gesetzmäßigkeiten zu gründen, oder anders ausgedrückt, Kronecker wollte die Mathematik arithmetisieren. Dedekind gehörte dagegen zu den Schöpfern der modernen Mengenlehre und hat mit seinen Vorstellungen, grundlegende Begriffe der Mathematik als Mengen mit Struktur zu bestimmen, sie durch innere Eigenschaften zu charakterisieren, wesentlich an dem eingangs beschriebenen strukturellen Wandel der Mathematik mitgewirkt. Schon frühzeitig hatte er erkannt, daß mit dem Übergang zu abstrakteren Begriffen die Darlegung mathematischer Sachverhalte und Zusammenhänge eine größere Klarheit und mathematische Strenge gewinnen kann. Diese Einsicht setzte er mit sicherem Blick für geeignete mathematische Abstraktionen eindrucksvoll um.

„ ... die größten und fruchtbarsten Fortschritte in der Mathematik und anderen Wissenschaften sind vorzugsweise durch die Schöpfung und Einführung neuer Begriffe gemacht, nachdem die häufige Wiederkehr zusammengesetzter Erscheinungen, welche von den alten Begriffen nur mühsehlig beherrscht werden, dazu gedrängt hat. Über diesen Gegenstand habe ich im Sommer 1854 bei Gelegenheit meiner Habilitation als Privatdocent zu Göttingen einen Vortrag ... zu halten gehabt, dessen Absicht auch von Gauß gebilligt wurde; ...“
[Dedekind 1888, S. XI]

Trotz der unüberwindbaren Gegensätze in den mathematisch-philosophischen Grundauffassungen und der Konkurrenz bei der Bearbeitung verschiedener mathematischer Probleme haben sich beide Gelehrte mit großer Hochachtung über einander und die Leistungen des Widersachers geäußert. Dieser gegenseitigen Wertschätzung und dem Charakter Dedekinds, der das ruhige, etwas zurückgezogene Forschen liebte, war es wohl auch zu danken, daß es zu keinen Prioritätsstreitigkeiten kam. Gelegenheit zu letzterem hätte es durchaus

gegeben, da Dedekind und Kronecker erst nach jahre- bzw. jahrzehntelangen Forschungen jeweils vollständige Theorien publizierten, so daß die einzelnen Entwicklungsschritte im Dunkeln blieben. So hatte Kummer bereits 1859 auf eine in Kürze erscheinende *„Theorie der allgemeinsten complexen Zahlen“* von Kronecker hingewiesen, doch sollte diese noch 22 Jahre auf sich warten lassen.

Eine wichtige Frage für den weiteren Fortschritt in der Behandlung der Kummerschen Theorie der idealen Primfaktoren war die Charakterisierung der ganzen algebraischen Zahlen in den algebraischen Zahlkörpern $\mathbb{Q}(\alpha)$ über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. In den bisherigen Arbeiten von Dirichlet, Kummer u. a. bezeichnete eine ganze algebraische Zahl eine Lösung der Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ mit ganzen Zahlen a_1, ... a_n. Dedekind und Kronecker beschäftigten sich mit der Frage, ob diese Beschreibung einer ganzen algebraischen Zahl, wenn man sie als Definition wählt, auch allgemein gültig war und nicht nur für spezielle Zahlkörper galt. Die Überlegungen beider Gelehrten zur Beantwortung der Frage wurden leider nicht überliefert, sondern nur deren Antwort in Form von vollständigen Theorien. Beide Gelehrte erkannten in ihren Forschungen die Bedingungen, die eine natürliche Verallgemeinerung des Begriffs der ganzen algebraischen Zahl erfüllen mußte: 1. Summe und Produkt ganzer Zahlen mußte wieder ganze Zahlen sein. 2. Eine rationale Zahl sollte genau dann eine ganze Zahl im Sinne der neuen Definition sein, wenn sie im gewöhnlichen Sinne eine ganze Zahl war. 3. Mit einer ganzen Zahl sollten auch deren Konjugierte eine ganze Zahl sein. Charakterisiert man die ganzen algebraischen Zahlen gemäß der obigen Definition, so erfüllte die Menge dieser Zahlen die angegebenen drei Bedingungen.

Dedekind hat die Ergebnisse seiner Forschungen erstmals 1871 in der zweiten Auflage von Dirichlets *„Vorlesungen über Zahlentheorie“* im X. Supplement veröffentlicht. Obwohl er diese Darlegungen für die dritte bzw. vierte Auflage der Vorlesungen, dann als XI. Supplement, überarbeitete und wesentlich ergänzte, handelte es sich bei dem X. Supplement nicht etwa um einen ersten vorsichtigen Versuch, die Problematik in den Griff zu bekommen. Im Gegenteil, Dedekind präsentierte eine vollständige Theorie und eröffnete einen völlig neuen Blick auf die Dinge. Ganz in Sinne seines Strebens, die Wesenszüge einer Theorie herauszuarbeiten und möglichst allgemeine Aussagen zu erhalten, stellte er den Begriff des Körpers und dessen grundlegende Eigenschaften an den Anfang der Untersuchungen über algebraische Zahlen, um auf diese Weise einen weitgreifenden Überblick über die algebraische Zahlentheorie zu geben:

„Indem wir versuchen, den Leser in diese neuen Ideen einzuführen, stellen wir uns auf einen etwas höheren Standpunkt und beginnen damit, einen Begriff einzuführen, welcher wohl geeignet scheint, als Grundlage für die höhere Algebra und die mit ihr zusammenhängenden Teile der Zahlentheorie zu dienen.

I. Unter einem Körper wollen wir jedes System von unendlich vielen reellen oder komplexen Zahlen verstehen, welches in sich so abgeschlossen und vollständig ist, daß die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von je zwei Zahlen immer wieder eine Zahl desselben Systems hervorbringt.“ [Dedekind 1964, S. 223f.]

Damit definierte er erstmals explizit Körper als Grundobjekt, als eigenständiges algebraisches Objekt, und diese Definition erfolgte nicht durch eine Beschreibung der Elemente des Körpers, sondern durch die Angabe der Eigenschaften, welche die Operationen mit den Körperelementen erfüllen müssen. Die Körper selbst wurden Gegenstand der Betrachtungen, nicht nur deren Elemente. Zwar behandelte Dedekind im X. Supplement nur Zahlkörper, doch die grundsätzlich neue Rolle, die er dem Körperbegriff zuwies, blieb davon unberührt.

Entsprechend seinem Ziel, die Arithmetik der Zahlkörper zu präsentieren, definierte Dedekind die für die Teilbarkeitslehre nötigen Begriffe, wie Divisor, Multiplum (Vielfaches), größter gemeinschaftlicher Divisor und kleinstes gemeinschaftliches Multiplum. So nannte er einen Körper A Divisor des Körpers B, wenn alle in A enthaltenen Zahlen auch in B liegen, d. h. der Divisor A war ein Unterkörper von B. Der kleinste Körper wird durch die rationalen Zahlen gebildet, der größte durch den Körper *„aller Zahlen“*. Nach der Einführung der konjugierten Körper mit Hilfe isomorpher Abbildungen betrachtete Dedekind dann die endlichen algebraischen Erweiterungen des Körpers der rationalen Zahlen und kam damit in diesem abstrakteren Rahmen auch auf jene Probleme zurück, welche die Mathematiker seit Galois in Verbindung mit der Lösbarkeit von Gleichungen in Radikalen beschäftigt hatten. Dedekind charakterisierte die Körpererweiterungen als Körper, die nur eine endliche Anzahl von Divisoren haben, und bezeichnete sie als endliche Körper. Dabei wählte er für den Aufbau der Theorie einen hyperkomplexen Standpunkt, d. h. er betrachtete die Körpererweiterungen als endlichdimensionale Algebren über den rationalen Zahlen, so daß die Ausführungen über die Wahl einer Basis, die Linearunabhängigkeit von deren Elementen, die Diskriminante bzw. die Norm eines Elementes gleichsam für die Theorie der Algebren und der Vektorräume bedeutungsvoll waren. Nachdem er sich die nötigen allgemeinen Grundlagen geschaffen hatte, wandte sich Dedekind dem engeren Gegenstand der Untersuchungen zu. Er definierte die ganzen algebraischen Zahlen, die Grundbegriffe der Teilbarkeitslehre wie Teilbarkeit, Primzahl, Einheit usw. sowie den Modulbegriff und begann mit dem Aufbau einer Arithmetik der Moduln. Als Modul bezeichnete er ein System von Zahlen, deren Summe und Differenz zu dem gleichen System gehören. Da Dedekind nur Moduln über den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ im Blick hatte, war es selbstverständlich, daß mit einem Element m des Moduls auch die Produkte hm bzw. mh, h eine ganze Zahl, zum Modul gehörten. In der allgemeinen Moduldefinition, wenn also der Ring der ganzen Zahlen durch einen abstrakten Ring ersetzt wird, muß dies zusätzlich gefordert werden. Insbesondere wies Dedekind die

ganzen algebraischen Zahlen als $\mathbb{Z}$-Modul der Dimension n nach, d. h. in dem Körper $\mathbb{Q}(\alpha)$ existieren n ganze algebraische Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, so daß jede ganze algebraische Zahl eindeutig als Linearkombination dieser ω_i mit ganzen Zahlen als Koeffizienten darstellbar ist: $\omega = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_n\omega_n$, $h_i \in \mathbb{Z}$. Kernstück der Untersuchungen bildete natürlich die Frage nach der Primzahlzerlegung der ganzen Zahlen. Um eine größere Sicherheit der Beweisführung zu erlangen, ging Dedekind nun mit Verweis auf Kummers ideale Zahlen dazu über, künftig stets das ganze System der ganzen Zahlen eines endlichen Körpers zu betrachten und fuhr fort:

„Wir gründen die Theorie der in $\mathfrak{o}$ *enthaltenen Zahlen d. h. aller ganzen Zahlen des Körpers* Ω *, auf den folgenden neuen Begriff: Ein System* $\mathfrak{a}$ *von unendlich vielen in* $\mathfrak{o}$ *enthaltenen Zahlen soll ein I d e a l heißen, wenn es den beiden Bedingungen genügt:*

I. Die Summe und Differenz je zweier Zahlen in $\mathfrak{a}$ *sind wieder Zahlen in* $\mathfrak{a}$.

II. Jedes Produkt aus einer Zahl in $\mathfrak{a}$ *und einer Zahl in* $\mathfrak{o}$ *ist wieder eine Zahl in* $\mathfrak{a}$." [Dedekind, 1964, S. 251]

Die Teilbarkeit zweier Ideale erklärte er mengentheoretisch: Das Ideal $\mathfrak{d}$ ist Teiler des Ideals $\mathfrak{a}$, wenn alle Zahlen von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{d}$ enthalten sind, oft verkürzt formuliert als *„Teilen heißt umfassen"*. Es folgten die Definition der Begriffe Primideal bzw. Hauptideal. Ein Primideal ist ein von der Menge aller ganzen algebraischen Zahlen $\mathfrak{o}$ und von dem nur aus dem Nullelement bestehenden Ideal (Nullideal) verschiedenes Ideal, das mit dem Produkt zweier Elemente mindestens eines der beiden Elemente enthält. Ein Hauptideal bezeichnet die Menge aller Zahlen, die durch eine beliebig vorgegebene ganze algebraische Zahl η teilbar sind, man spricht auch von dem von η erzeugten Ideal $\mathfrak{i}(\eta)$. Schließlich bewies Dedekind den angestrebten Hauptsatz: Jedes Ideal von ganzen Zahlen läßt sich bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig als Produkt von endlich vielen Primidealpotenzen darstellen. Damit war die Idealtheorie als sinnvolle Verallgemeinerung der Theorie der gewöhnlichen ganzen Zahlen nachgewiesen. Doch Dedekind ging in seinen algebraisch-zahlentheoretischen Forschungen noch weiter. Jedem Ideal (außer dem Nullideal) ordnete er eineindeutig eine ideale komplexe Zahl im Kummerschen Sinne zu, was die Übertragung von wesentlichen Resultaten der Kummerschen Theorie ermöglichte. Er nahm eine Einteilung der Ideale in Klassen vor, verknüpfte diese Klassen, was zur Idealklassengruppe führte, und leitete die Endlichkeit der Klassenzahl ab. Zur Bestimmung der Klassenzahl hat Dedekind später im XI. Supplement die Riemannsche Zeta-Funktion zu der heute nach ihm benannten Zeta-Funktion verallgemeinert. Zum Abschluß des X. Supplements wandte er die entwickelte Theorie auf die quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ an, die ihm wohl sowohl als Anregung für die Schaffung der Idealtheorie als auch als Testobjekt für die gefundenen Resultate dienten.

Die Resonanz auf die Idealtheorie war sehr spärlich und für Dedekind sehr enttäuschend [Edwards 1980, S. 347ff.]. Er selbst sah die Ursache dafür allein in der ungünstigen Art der Darstellung, die er seiner Theorie gegeben hatte

und beschloß, einen veränderten, ausführlicheren Aufbau der Theorie zu entwickeln. Das Ergebnis waren der Artikel *„Sur la théorie des nombres entiers algébriques“* [Dedekind 1877] und das XI. Supplement zur dritten Auflage von Dirichlets Zahlentheorie [Dedekind 1871]. Dedekind ließ zum einen den hyperkomplexen Standpunkt nicht mehr hervortreten und rückte die Definition des Produkts von Idealen an den Anfang. Damit erhielt die Theorie eine größere Eigenständigkeit, denn die zuvor in der Darstellung bestehende Analogie zu Kummers Theorie der idealen Zahlen ging verloren. Gleichzeitig entstand als neues Problem der Nachweis, daß zu zwei Idealen A und B mit $A \subset B$ ein Ideal C existiert, so daß $A = BC$ ist, und daß die daraus resultierende Teilbarkeitsdefinition, B teilt A, wenn es ein Ideal C gibt mit $A = BC$, mit der bisherigen Definition äquivalent war. Die Lösung dieses Problems sollte Dedekind große Mühe bereiten und ihn über ein Jahrzehnt beschäftigen. Nach einem technisch schwierigen Beweis legte er 1894 in der vierten Auflage von Dirichlets Zahlentheorie einen neuen Beweis auf der Basis einer umfangreichen Modultheorie vor, die er seit dem Ende der 80er Jahre aufgebaut und mit vielen neuen Einsichten bereichert hatte (vgl. [Edwards 1880, 350-352]). Gleichzeitig präsentierte er die Idealtheorie in einer abschließenden Form, die seinen Ansprüchen von einem abstrakten, exakten Aufbau einer mathematischen Theorie gerecht wurde. Einen im gleichen Jahr von Adolf Hurwitz vorgeschlagenen wesentlich einfacheren Zugang [Hurwitz 1894], der weitgehend mit dem von ihm selbst 1892 gegebenen übereinstimmte, lehnte Dedekind ab [Dedekind 1895].

Zehn Jahre nach dem Erscheinen von Dedekinds X. Supplement trat auch Kronecker mit seiner, bereits 1859 von Kummer angekündigten Theorie der algebraischen Größen an eine breitere Öffentlichkeit und publizierte sie Anfang des Jahres 1882 als Festschrift zum Goldenen Doktorjubiläum seines Lehrers und Freundes Kummer [Kronecker 1882]. Das offizielle Publikationsdatum war der 10. September 1881, der Tag des Jubiläums. Die Kroneckersche Festschrift enthielt jedoch mehr als die Theorie der Primzerlegung in beliebigen algebraischen Zahlkörpern. Sie umfaßte u. a. neben den körpertheoretischen Grundlagen eine Darstellung der Galois-Theorie *„von ausgesprochen eigener Prägung“* [Neumann 1997, S. 303] und in Umrissen eine großangelegte Theorie der algebraischen Funktionenkörper, in die sich die Theorie der Zahlkörper als Spezialfall einordnete. Es erwies sich aber für viele Mathematiker als sehr schwierig, den Kroneckerschen Gedankengängen in der mit Spannung erwarteten Arbeit zu folgen, noch heute gilt die Arbeit als schwer lesbar. Weierstraß bemerkte beispielweise dazu: *„Sie enthält die Resultate langjähriger Forschungen in concisester Form ... so daß ich fürchte, sie wird vorderhand mehr bewundert als studirt werden.“* [Bölling 1993, S. 259] Selbst Dedekind hat das Studium der Festschrift große Schwierigkeiten bereitet, man vergleiche dazu den Artikel von Edwards, Neumann und Purkert [Edwards et al. 1982]. Deshalb regte er 1893 an, ein Schüler Kroneckers möge eine vollständige und systematische Ausarbeitung der Theorie vornehmen

[Dedekind 1930, Bd. 3, S.427]. Dies hatte sein Freund H. Weber bereits 1887 getan. Wie O. Neumann in einer detaillierten Analyse der Kroneckerschen Divisorentheorie [Neumann 2002] vermutet, hat Weber diese Ausarbeitung in sein *Lehrbuch der Algebra* von 1895/96 [Weber 1895] als Theorie der Funktionale übernommen. Dabei stellte Weber sowohl die Beziehung zu Kummers idealen Zahlen als auch zu Dedekinds Idealen her:

„Es liegt nahe, die Functionale des Körpers Ω, mit denen wie mit den Zahlen in Ω gerechnet wird, geradezu als *ideale Zahlen* des Körpers Ω zu bezeichnen. Diese Ausdrucksweise würde sich einerseits an die Idealfactoren von *Kummer*, andererseits an die von Dedekind eingeführten Ideale anschliessen, die zu den Functionalen in einer sehr nahen, später zu erörternden Beziehung stehen." [Weber 1895, S. 500]

In verschiedenen Darstellungen zur Ideal- und Divisorentheorie fand jedoch insbesondere in den letzten Jahrzehnten die Webersche Darlegung der Kroneckerschen Theorie keine Beachtung. Stattdessen wurde oft die von dem ungarischen Mathematiker Gyula König 1903 publizierte Monographie „*Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen*" genannt. König war zwar kein Kronecker-Schüler, hatte sich aber das Ziel gesetzt, den Geist der Kroneckerschen Methode stärker zu verbreiten, und in diesem Bestreben eine kritische Überarbeitung der Theorie vorgenommen.

Kronecker leitete seine Arbeit mit der Bemerkung ein, im Ergebnis seiner algebraischen und zahlentheoretischen Studien der arithmetischen Seite der Algebra besondere Aufmerksamkeit zu schenken, und resümierte kurz die bisherige Verwendung des Körperbegriffs. Er hielt an dem Begriff des *„Rationalitäts-Bereichs"* fest, den er teilweise implizit nach der Arbeit *„Ueber die algebraisch auflösbaren Gleichungen"* (1853) vor allem in den Arbeiten der 70er Jahre sowie in seinen Vorlesungen benutzt und entwickelt hatte. Dedekinds Begriff Körper lehnte er ab, da dadurch für die Zahlengröße eine Vorstellung assoziiert werden könne, die stärker auf die Anordnung als Maßgröße Bezug nimmt, als auf die algebraischen Eigenschaften. Kronecker ging von gewissen, nicht näher bestimmten Größen $\Re'$, $\Re''$, $\Re'''$, ... aus und definierte den Rationalitätsbereich ($\Re'$, $\Re''$, $\Re'''$, ...) als Erweiterungskörper des Körpers der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bei Adjunktion der Größen $\Re', \Re'', \Re''', \ldots$:

„Der Rationalitäts-Bereich ($\Re', \Re'', \Re''', \ldots$) *enthält, wie schon die Bezeichnung deutlich erkennen lässt, alle diejenigen Grössen, welche rationale Funktionen der Grössen* $\Re', \Re'', \Re''', \ldots$ *mit ganzzahligen Coefficienten sind."* [Kronecker 1882, S. 4]

Den Größenbegriff wollte er dabei *„in der weitesten arithmetisch-algebraischen Bedeutung"* nehmen, so daß auch Formen beliebig, aber endlich vieler Veränderlicher unter einer Größe verstanden werden konnten. Er betonte, daß die Einteilung in Rationalitätsbereiche nur auf die algebraischen Eigenschaften Bezug nahm, nicht aber auf Größenrelationen und somit $\sqrt{2}$ und eine noch so nahe bei ihr liegende rationale Zahl begrifflich völlig getrennte

Objekte waren. Kronecker führte dann die Gattungsbereiche ein, die durch Adjunktion eines algebraischen Elements zu einem natürlichen Rationalitätsbereich entstanden. Die natürlichen Rationalitätsbereiche wurden durch den Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und dessen transzendente Erweiterungen mit endlichem Transzendenzgrad (d. h. zu $\mathbb{Q}$ werden endlich viele transzendente Größen adjungiert) gebildet, wobei er anmerkte, daß einerseits die Adjunktion einer transzendenten Größe der Adjunktion einer Unbestimmten gleichkam, und es andererseits ausreicht, jene natürlichen Rationalitätsbereiche zu betrachten, zu denen noch die Wurzel einer irreduziblen algebraischen Funktion der Größen $\Re'$, $\Re''$, $\Re'''$, ... hinzugetreten war. Letzteres entspricht dem Satz vom primitiven Element. Ausdrücklich wandte sich Kronecker gegen die Adjunktion unendlich vieler Größen, es genüge *„sich nur die Adjunction besonderer, aus der Untersuchung selbst sich ergebender Grössen vorzubehalten“* [Kronecker 1882, S. 10]. Auch die Körper aller algebraischen Zahlen oder aller algebraischen Funktionen faßte er nicht unter den Begriff des Rationalitätsbereichs, sondern sprach dann von einem *„Grössenreich“*. Dies unterstreicht nochmals den Kroneckerschen Finitheitsanspruch und verdeutlicht die Unterschiede zu Dedekind, der mit seinem Körperbegriff problemlos die Menge aller algebraischen Zahlen als Körper erfassen konnte.

Nach der Einteilung der ganzen algebraischen Zahlen, deren Darstellung durch eine Basis, Betrachtungen über die Irreduziblität ganzer Funktionen und über Diskriminanten und deren Teiler sowie der Behandlung der Galois-Theorie baute Kronecker im zweiten Teil der Arbeit seine Teilbarkeitslehre, die Divisorentheorie, auf.

Zuvor sei aber kurz dem Hinweis Kroneckers auf seine früheren Forschungen nachgegangen; für eine ausführliche Darstellung sei auf [Purkert 1972] verwiesen. Wie aus der bereits erwähnten Ankündigung Kummers und mehreren Bemerkungen von Zeitgenossen hervorgeht, war Kronecker Ende der 50er, Anfang der 60er Jahre zu grundlegenden Einsichten über die Arithmetik algebraischer Größen vorgestoßen und hatte dabei den Körperbegriff als wesentlichen Grundbegriff für diese Theorie herausgearbeitet. Zu jenen Arbeiten, auf die er in der Festschrift direkt Bezug nahm, gehörten jene aus dem Jahre 1873 über Sturmsche Reihen [Kronecker 1873] bzw. dem Jahre 1879, die eine Zusammenfassung seiner Einsichten zur Galois-Theorie enthielt [Kronecker 1879]. Während Kronecker in der ersten Arbeit insbesondere faktisch eine Unterscheidung von algebraischen und transzendenten Erweiterungen vornahm und den Satz vom primitiven Element ableitete, prägte er in der letzteren mit *„Rationalitäts-Bezirk“* erstmals einen Begriff für den Koeffizientenkörper einer Gleichung. Daraus ging dann die obige Definition des Rationalitätsbereichs hervor.

Doch zurück zur Festschrift von 1881. Der zentrale Begriff seiner Teilbarkeitstheorie war für Kronecker nicht der des Primideals, weil dieser vom betrachteten Grundkörper abhing, sondern der Begriff des größten gemeinsamen Teilers. Bei vorgegebenem Rationalitätsbereich, d. h. vorgegebenem Zahl- oder

Funktionenkörper K bezeichnete er ein Polynom mit Koeffizienten aus K als eine Form (mit Koeffizienten aus K). Eine solche Form hieß ganz, wenn alle ihre Koeffizienten ganze Zahlen von K waren. Für eine Menge $x_1, x_2, \ldots \quad x_n$ von ganzen algebraischen Zahlen definierte er den größten gemeinsamen Teiler dann, indem er alle Zahlen z angab, die durch diesen größten gemeinsamen Teiler teilbar waren. Dazu bildete er die Form $\psi = u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_nx_n$ mit den Unbestimmten u_i sowie die Norm $N(\psi)$ zu dieser Form. Die Norm $N(\psi)$ ist eine homogene Form vom Grad n in den u_i, deren Koeffizienten als gewöhnliche ganze Zahlen nachgewiesen werden können. Ist p der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten von $N(\psi)$, so wird die algebraische Zahl z genau dann von dem größten gemeinsamen Teiler der x_i, geteilt, wenn die Koeffizienten der Form $zN(\psi)\frac{1}{\psi}$ durch die gewöhnliche Zahl p teilbar sind.

Bei diesen Überlegungen wurde K als Normalkörper vorausgesetzt, so daß zu jedem Element auch alle seine Konjugierten gebildet werden können und die Norm eines Elementes x als Produkt aller Konjugierten von x sinnvoll erklärt ist. Die Teilbarkeitstheorie entwickelte Kronecker dann in dieser allgemeinen Weise für Formen und zeigte, daß die obige Definition der Teilbarkeit die üblichen Eigenschaften erfüllt. Dazu definierte er für zwei ganze Formen α und β (mit Koeffizienten im Körper K), daß β durch den zu α gehörigen Divisor mod $[\alpha]$ teilbar ist, in Zeichen $\beta \equiv 0 \bmod [\alpha]$, wenn alle Koeffizienten der ganzen Form $\beta N(\alpha)/\alpha$ durch den größten gemeinsamen Teiler p der Koeffizienten von $N(\alpha)$ teilbar sind. Der zu α gehörige Divisor war dabei als $\alpha p/N(\alpha)$ erklärt worden. Der zu β gehörige Divisor mod $[\beta]$ hieß dann durch den Divisor von α teilbar, wenn $\beta \equiv 0 \bmod [\alpha]$ war, und Kronecker nannte zwei Divisoren mod $[\alpha]$ und mod $[\beta]$ absolut äquivalent, wenn beide durcheinander teilbar waren. Neben anderen Eigenschaften bewies er den grundlegenden Satz: Ist α eine algebraische Form, sind β und δ ganze Formen mit Koeffizienten in K, und ist δ eine primitive Form (d. h. der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten von $N(\delta)$ ist 1 und es gelte $\beta\delta \equiv 0 \bmod [\alpha]$), dann gilt $\beta \equiv 0 \bmod [\alpha]$. Eine wichtige Folgerung aus diesem Satz ist die Transitivität der absoluten Äquivalenz als Relation zwischen Divisoren. In einem zweiten Fundamentaltheorem zeigte Kronecker, daß Divisoren, welche die gleichen Koeffizienten haben, absolut äquivalent sind, d. h. jeder Divisor ist einem linearen (von einer Linearform gebildeten) Divisor äquivalent. Nach Einführung der Primdivisoren als Divisoren, die im Sinne der obigen Teilbarkeitsdefinition nur durch sich selbst oder Eins teilbar sind, leitete er analog zur Zerlegung eines Ideals in Primideale ab, daß jeder Divisor einem Produkt von Primdivisoren absolut äquivalent und diese Zerlegung bis auf absolute Äquivalenz und die Reihenfolge der Faktoren eindeutig bestimmt ist. Kronecker stellte dann einige Beziehungen zur Kummerschen Theorie her und vertiefte seine Studien mit Divisorensystemen höherer Stufe weiter, was aber hier nicht näher ausgeführt werden soll.

Es sei noch der Zusammenhang der Kroneckerschen Theorie mit Dedekinds Idealen hergestellt: Ist α eine Form über dem Körper K, dann betrachtet man das von den Koeffizienten von α erzeugte Ideal I. Dieses Ideal I ist für absolut

äquivalente Formen gleich, so daß jeder Äquivalenzklasse absolut äquivalenter Formen ein Ideal von K zugeordnet werden kann. Die umgekehrte Zuordnung ergibt sich, indem man zu vorgegebenem Ideal eine endliche Basis des Ideals bestimmt und damit eine Form definiert. Dem Produkt zweier Formen entspricht dann genau das Produkt der zugeordneten Ideale und umgekehrt, so daß auch die Primelemente einander entsprechen und die Korrespondenz der beiden Hauptsätze hergestellt werden kann.Es muß aber betont werden, daß diese Beziehung zwischen den Theorien Kroneckers und Dedekinds auf den Kenntnissen der modernen Algebra basiert. Kronecker hatte bekanntlich den Gebrauch mengentheoretischer Vorstellungen konsequent abgelehnt und folglich Begriffe wie Ideal oder Modul (als algebraisches Objekt) bewußt nicht benutzt, er hätte also eine solche Analogie zwischen den beiden Theorien selbst nie hergeleitet.

Trotz der erwähnten Schwierigkeiten, die sich dem Leser bei der Lektüre der *„Festschrift“* boten, erzielten die Kroneckerschen Ideen vor allem durch Kroneckers Vorträge an der Berliner Akademie, seine Vorlesungen an der Universität und durch viele persönliche Kontakte einen beachtlichen Einfluß. Ja, bis zum ersten Jahrzehnt des 20. Jahrhunderts dürften die Kroneckerschen Methoden eine stärkere Beachtung und Verbreitung erfahren haben als die abstrakten Begriffe und Ideen Dedekinds. Zu jenen, die die vielen, in der Festschrift enthaltenen Ideen ausformten und klarer darstellten, gehörten so bekannte Mathematiker wie Kurt Hensel, Helmut Hasse sowie Hermann Weyl. Barthel Leendert van der Waerden hat 1930 *„die Perlen, die unter diesem Wortschwall verborgen“* [van der Waerden 1966, S. 159] waren, in sein einflussreiches, heute schon klassisches Standardwerk *„Moderne Algebra“* aufgenommen. Schließlich rühmte André Weil 1950 die Leistung Kroneckers als einen Versuch, einen neuen Zweig der Mathematik zu schaffen, der die Zahlentheorie und die algebraische Geometrie als Spezialfälle enthielt [Weil 1950, S. 50]. Für einen Vergleich der Teilbarkeitstheorien von Kronecker und Dedekind sowie von Zolotarev und deren Einordnung in die allgemeine Theorie der Ringe mit einer Theorie des größten gemeinsamen Teilers sei auf [Neumann 2002] verwiesen.

Unbeachtet von der mathematischen Welt in West- und Mitteleuropa schuf der Russe Egor Ivanovič Zolotarev einen eigenen Zugang zur Theorie der algebraischen Zahlen. Zolotarev gehörte zu den großen Talenten in der von Pafnuti Lvovič Čebyšev ab 1847 in Petersburg aufgebauten mathematischen Schule. Nachdem die russische Mathematik in den Jahrzehnten um die Wende zum 19. Jahrhundert u. a. durch ein zu enges Verharren in der Eulerschen Tradition den Anschluß an das internationale Spitzenniveau verloren hatte, brachten nach Nikolaj Ivanovič Lobačevskij und Mihail Vassilevič Ostrogradskij die Vertreter dieser Schule in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts auf mehreren Gebieten der Mathematik beachtliche Resultate hervor. Neben der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Analysis sowie ihren Anwendungen auf physikalische Probleme gehörte die Zahlentheorie zu diesen bevorzugten For-

schungsgebieten, so daß auch von einer Petersburger Schule der Zahlentheorie gesprochen wird. Zu ihr werden Čebyšev, Alexksandr Nikolaevič Korkin, Andrej Andreevič Markov, Georgij Feodosjevič Voronoj, Zolotarev u. a. gerechnet.

Für die hier behandelte Thematik sind besonders die Arbeiten des bereits 1878 im Alter von 31 Jahren an den Folgen eines Unfalls verstorbenen Zolotarev interessant. Nachdem er sich bereits in der Dissertation mit Fragen der Arithmetik algebraischer Zahlen beschäftigt hatte, verfaßte er 1876 die umfangreichste Ausarbeitung seiner Theorie [Zolotarev 1880]. Er definierte zunächst die ganzen algebraischen Zahlen im Zahlkörper $\mathbb{Q}(\theta)$ und dann die ganzen Zahlen mod p: Die rationale Zahl m/n heißt ganze Zahl modulo p, wenn der Nenner n nicht durch p teilbar ist, eine algebraische Zahl α heißt ganz modulo p, wenn sie einer Gleichung $\alpha^m + b_1\alpha^{m-1} + ... + b_m = 0$ genügt, in der die b_i ganzrationale Zahlen mod p sind. Für die ganzen Zahlen mod p aus $\mathbb{Q}(\theta)$ wies Zolotarev dann die Ringeigenschaften nach, ohne den Ringbegriff zu benutzen, und charakterisierte die Eigenschaften, ganze Zahl in $\mathbb{Q}(\theta)$ zu sein und ganze Zahl mod p für alle Primzahlen p zu sein, als äquivalent. Ein Großteil der Untersuchungen war dann dem Studium der ganzen Zahlen mod p und der Teilbarkeit in dieser Menge gewidmet. Stellvertretend seien einige wichtige Ergebnisse erwähnt: Wenn im Ring der ganzen Zahlen mod p das Produkt $\beta\gamma$ zweier ganzer Zahlen durch die Zahl α teilbar und β relativ prim zu α ist, dann ist γ durch α teilbar. Der Ring der ganzen Zahlen mod p ist ein Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung, wobei es nur endlich viele Primfaktoren bis auf Einheiten gibt. Nach dieser ßemi-lokalen"Betrachtung der Theorie ging Zolotarev wieder zur globalen Theorie der ganzen Zahlen in $\mathbb{Q}(\theta)$ über und entwickelte eine entsprechende Theorie. Zu einer kleinen Beweislücke siehe [Neumann 2002, S.180]. Abgesehen von der fehlenden begrifflichen Durchdringung bot Zolotarevs Theorie ebenfalls Potential für verschiedene Verallgemeinerungen. So war vielfach die Übertragung auf Funktionenkörper möglich und ein großer Teil mündete in das Studium sogenannter lokaler und semilokaler Ringe ein. Gelegentlich wird in Zolotarevs Darlegungen ein Vorgriff auf die Henselsche *„p-adik“* gesehen [Kolmogorov 1978, S. 112], doch fehlt der Grenzübergang zu unendlichen $p-$ adischen Reihen.

Die Kummersche Theorie der idealen Primfaktoren bot somit die Anregung zu drei interessanten Entwicklungen, von denen jede grundlegende Impulse für den weiteren Fortschritt der Mathematik enthielt. Eine zweite, nicht weniger wichtige Anregung resultierte aus der Entwicklung der Funktionentheorie und dort speziell aus dem Bestreben, die von Riemann und Weierstraß erzielten Ergebnisse zur Theorie der algebraischen Funktionen algebraisch oder wie man es damals nannte, arithmetisch abzuleiten. Man vergleiche dazu etwa die detaillierten Darlegungen in [Ullrich 1999].

Die obige Darstellung bedarf jedoch noch einer wichtigen Ergänzung, könnte sie doch zu dem Schluß verleiten, Dedekind hätte sich in seinen Untersuchungen nur auf Zahlkörper gestützt und wäre nicht wie Kronecker zu analogen Aussagen in Funktionenkörpern vorgestoßen. Das Gegenteil war der Fall.

1880 reichten Dedekind und H. Weber eine gemeinsame Arbeit *„Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen“* zur Veröffentlichung in Crelles Journal ein. Die Arbeit erschien jedoch erst 1882 im gleichen Band wie Kroneckers *„Grundzüge“*. Kronecker hatte als Herausgeber von Crelles Journal die beiden Autoren gebeten, deren eingereichte Publikation bis zur Fertigstellung seiner Theorie der algebraischen Größen zurückstellen zu dürfen. Dedekind und Weber dürften bei ihrer Einwilligung wohl eine Verzögerung von einigen Wochen erwartet haben, aber nicht von fast eineinhalb Jahren. Während Dedekind in Kroneckers Vorgehen keine böse Absicht sah, beurteilten mehrere Zeitgenossen dieses Verhalten als äußerst kritikwürdig. Dedekind ließ sich jedoch nicht zu einer Auseinandersetzung mit Kronecker drängen und hat auch später derartige Diskussionen, insbesondere zu Prioritätsansprüchen, abgelehnt.

Die Zusammenarbeit von Dedekind und Weber entsprang ihrer gemeinsamen Beschäftigung mit der Herausgabe der Riemannschen Werke. In der 1880 vollendeten Arbeit stellten sie sich das Ziel, *„die Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, welche eines der Hauptergebnisse der Riemannschen Schöpfung ist, von einem einfachen und zugleich strengen und völlig allgemeinen Gesichtspunkt aus zu begründen.“* [Dedekind/Weber 1882, S. 181] Ein wesentliches Ziel dieser Darlegung der Riemannschen Ideen im algebraisch-zahlentheoretischen Rahmen war es, die Analogie zwischen der Theorie der algebraischen Zahlen und jener der algebraischen Funktionen aufzuzeigen. (Man vergleiche hierzu die eingehende Analyse von P. Ullrich [Ullrich 1999].) Ihr Anspruch war zwar weit geringer als der Kroneckersche, doch erwies sich die Beschränkung auf Funktionen einer Variablen als sehr vorteilhaft, um die Unterschiede zur Theorie der algebraischen Zahlen genau herauszuarbeiten und die Theorie in einer gewissen Vollständigkeit entwickeln zu können. Nach der Einführung des Körpers algebraischer Funktionen als *„ein System solcher Functionen von der Beschaffenheit, daß die Anwendung der vier Species auf Functionen des Systems immer zu Functionen desselben Systems führt“*, [Dedekind/Weber 1882, S. 182] bauten sie die Theorie systematisch in Analogie zu den algebraischen Zahlen auf und definierten Grundbegriffe wie Basis eines Körpers, Modul, Norm, Diskriminante, ganze algebraische Funktion, Teilbarkeit ganzer Funktionen etc. Die Teilbarkeitstheorie entwickelten sie zunächst für Moduln, was auch die Definition des Produktes zweier Moduln und der Kongruenz bezüglich eines Moduls bedingte, um sie dann für Ideale zu formulieren und u. a. die eindeutige Primidealzerlegung für Ideale im Ring der ganzen algebraischen Funktionen abzuleiten. Im zweiten Teil der Arbeit stand die Theorie der Riemannschen Fläche im Mittelpunkt und begann mit der algebraischen Definition der Punkte der zum Körper der algebraischen Funktionen gehörigen Riemannschen Fläche und der Fläche selbst als Gesamtheit aller dieser Punkte. Die nachfolgenden Betrachtungen reichten schließlich bis zur rein algebraischen Einführung der Differentiation und der Differentiale im Körper der algebraischen Funktio-

nen und zum Beweis des Satzes von Riemann-Roch. In vielen Fällen werden hier die ersten Ansätze zu Entwicklungen greifbar, die sich später als sehr fruchtbar erwiesen. Dies betraf Elemente einer Verzweigungstheorie ebenso wie die Bewertungstheorie. Für eine detaillierte Würdigung der Dedekind-Weberschen Arbeit muß auf die Darlegungen von W.-D. Geyer [Geyer 1981], W. Strobl [Strobl 1982] und O. Neumann [Neumann 1997] verwiesen werden.

9.4 Die axiomatische Fixierung des Körperbegriffs

In den vorangegangenen Darlegungen ist deutlich der starke Einfluß der algebraischen Zahlentheorie auf die Herausbildung algebraischer Strukturen wie Ideal und Körper hervorgetreten. Hinzu kam, daß diese Überlegungen zugleich eine Betrachtung der Galois-Theorie einschlossen. Es vereinten sich hier zentrale Fragestellungen der Zahlentheorie und der Algebra, was das Interesse an diesen Forschungen und ihren Ergebnissen zweifellos erhöhte und die Wirksamkeit der neuen Ideen und Begriffsbildungen vor Augen führte. Von den vielen Arbeiten, die an die besprochenen grundlegenden Darstellungen anknüpften, können nur einige stellvertretend erwähnt werden. Kronecker wandte sich 1887 nochmals dem Fall einer algebraischen Körpererweiterung zu. Bereits 1873 hatte er, wie schon kurz erwähnt wurde, für transzendente Erweiterungen festgestellt:

„In der That kann ... jede Grösse, welche nicht in einer algebraischen Beziehung zu den übrigen steht, für alle algebraischen Fragen als eine neue unabhängige Variable gelten; ...“ [Kronecker 1873, S. 312]

Mit anderen Worten: Ist α eine transzendente Zahl über dem Körper K, so ist der durch Adjunktion von α zu K entstehende Körper $K(\alpha)$ isomorph zum Körper $K(x)$ der rationalen Funktionen in einer Veränderlichen mit Koeffizienten aus K.

Ist α dagegen eine algebraische Zahl und $p(x)$ ein normiertes irreduzibles Polynom, das α als Nullstelle hat, so muß bei obiger Zuordnung beachtet werden, daß in $K(\alpha)$ zusätzlich die Relation $p(\alpha) = 0$ gilt. Man bildet deshalb unter den Polynomen über K die Restklassen modulo $p(x)$, d. h. alle Polynome, die bei der Division durch $p(x)$ den gleichen Rest ergeben, werden in einer Restklasse zusammengefaßt. Die Menge dieser Restklassen, bezeichnet als $K[x]/(p(x))$, bildet einen Körper und hat die gleichen algebraischen Eigenschaften wie der Zahlkörper $K(\alpha)$; dabei ist $(p(x))$ das von $p(x)$ erzeugte Ideal. Beide Körper sind zueinander isomorph. In dem Bestreben, die irrationalen Größen in der Algebra entbehrlich zu machen und für Funktionen eine Zerlegung in Linearfaktoren ohne Rückgriff auf die irrationalen Wurzeln anzugeben, zeigte Kronecker nun, daß obiger Sachverhalt auch für den Zerfällungskörper eines Polynoms gilt. Dabei versteht man unter dem Zerfällungskörper eines Polynoms $p(x)$ mit Koeffizienten aus K den kleinsten Erweiterungskörper K' von K, in dem $p(x)$ vollständig in Linearfaktoren

zerfällt. Kronecker hat die einzelnen Sachverhalte in der Sprache der Kongruenzen formuliert und Beispiele für die Zerlegung einer Funktion unter Vermeidung irrationaler Größen angegeben, die Zusammenfassung der Elemente zum Restklassenkörper nahm er nicht explizit vor. Trotzdem stellten die Betrachtungen einen wesentlichen Beitrag bei der Herausbildung des abstrakten Körperbegriffs dar, da sie die Reihe der Beispiele, die einen Anreiz zum abstrakten Begriff bilden, um ein wichtiges ergänzten. In moderner Terminologie lautete das Kroneckersche Resultat: $K(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) \cong K[x]/(G(x))$; α_1, α_2, ..., α_n die Nullstellen des gegebenen Polynoms $f(x)$ und $G(x)$ die Galoissche Resolvente von $f(x)$.

Im gleichen Jahr 1873 vollendete Weber seine mehrteilige, ein Jahr zuvor begonnene Abhandlung *„Theorie der Abel'schen Zahlkörper“*, die das Ziel hatte, alle Abelschen Zahlkörper vollständig zu bestimmen und darzustellen. Die Aufgabe wird durch den Beweis des Satzes von Kronecker-Weber gelöst, daß jede abelsche Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen Teilkörper eines Kreisteilungskörpers ist und umgekehrt jeder Teilkörper eines Kreisteilungskörpers abelsch ist. Den Satz hatte Kronecker 1853 ohne Beweis angegeben. (vgl. Abschn. 8.1.1) Die Arbeit zeigte eine zunehmende Vertrautheit mit den körpertheoretischen Begriffen, u. a. wurden konjugierte Körper und Normalkörper definiert. Den methodischen Schwerpunkt bildete aber die Bestimmung der Untergruppen der dem vorgelegten Kreisteilungskörper zugeordneten Galoisschen Gruppe, um dann dazu die Unterkörper aufzufinden.

Von grundsätzlicher Bedeutung für die Herausbildung des Körperbegriffs war Webers schon bezüglich der Gruppentheorie besprochene Arbeit aus dem Jahre 1893: *„Die allgemeinen Grundlagen der Galoisschen Gleichungstheorie“*. Es ging Weber um eine möglichst allgemeine Begründung der Galois-Theorie, und dies ließ ihn den begrifflichen Formulierungen eine besondere Aufmerksamkeit schenken. Einleitend hob er die Vorteile hervor, welche die formale, nahezu axiomatische Behandlung der Theorie mit sich brachte, und betonte als wichtigsten Fakt die Einbeziehung der endlichen Körper in den abstrakten Körperbegriff:

„Ich beginne, um vollkommen klar zu sein, mit einer genauen Begriffsbestimmung des Gruppen- und Körperbegriffs, wobei besonders der Körperbegriff so gefasst ist, daß er auch auf Gebilde anwendbar ist, die bisher unter diesem Namen nicht mitbezeichnet waren, die aber doch alle für unsere Frage entscheidenden Merkmale besitzen, nämlich die endlichen Körper, im eigentlichen Sinne, d. h. Körper die nur aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehen.“ [Weber 1893, S. 521]

Diese Ankündigung setzte Weber dann sogleich um und formulierte eine axiomatische Definition von Gruppe und Körper. Den Körperbegriff ordnete er dabei dem der Gruppe unter, indem er einen Körper als eine Gruppe mit *„zwei Arten der Composition“* auffaßte, die erste Operation Addition, die zweite Multiplikation nannte und einige einschränkende Bedingungen stellte. Diese Bedingungen beinhalteten die Kommutativität beider Operationen, daß das Nullelement bei verschiedenen Relationen für die Multiplikation als Aus-

nahmeobjekt ausgeschlossen wurde und daß die beiden Operationen distributiv verknüpft waren. Als Beispiele für einen Körper führte er den Körper der rationalen Zahlen, die algebraischen Zahlkörper sowie die endlichen Körper an, für letztere speziell die Restklassenkörper der ganzen Zahlen nach einer Primzahl. Am Ende des Artikels leitete er noch ein Kriterium zur Unterscheidung zwischen endlichen und unendlichen Körpern ab. Weber unterstrich seinen abstrakten Ausgangspunkt durch den Hinweis, daß man durch Abänderung der Axiome weitere, zu analysierende Systeme erhalten könne und nannte als derartige Möglichkeiten: das Auftreten von Nullteilern zuzulassen, die Kommutativität der Operationen nicht zu fordern bzw. eine dritte Verknüpfung zu betrachten. Er wandte sich dann dem Studium der algebraischen Körpererweiterungen zu, definierte die sogenannten Formenkörper, die aus allen rationalen Funktionen in den Unbestimmten x, y, z, ... mit Koeffizienten aus einem vorgegebenen Körper Ω gebildet wurden, und untersuchte die ganzen Elemente dieser Körper sowie die Teilbarkeitseigenschaften. In Form der *„Congruenzkörper“* studierte er die Restklassenkörper des Polynomringes $\Omega[t]$ nach dem von einem irreduziblen Polynom erzeugten Ideal und vermerkte u. a., daß alle endlich-algebraischen Zahl- und Funktionskörper als *„Congruenzkörper“* erhalten werden können. Auf dieser Basis formulierte er schließlich die angestrebte Begründung der Galois-Theorie, *„die soweit möglich alle Fälle umfasst, in denen diese Theorie angewandt worden ist.“* [Weber 1893, S. 521]

Mit dieser Arbeit rückte Weber, ebenso wie Dedekind in dem ein Jahr später erschienenen XI. Supplement zur 4. Auflage von Dirichlets Vorlesungen zur Zahlentheorie, die Theorie einer bestimmten Klasse von Körpererweiterungen in den Mittelpunkt der Galois-Theorie. Er arbeitete mit der Automorphismengruppe des jeweils betrachteten Erweiterungskörpers und wies sie als isomorph zur traditionellen Galois-Gruppe nach. Eine derartige Auffassung der Galois-Gruppe als Automorphismengruppe hatte Dedekind bereits ab 1857 in Vorlesungen vorgetragen, aber nicht publiziert [Purkert 1976], [Scharlau 1981]. In einem Manuskript gab er bereits zu diesem frühen Zeitpunkt der Galois-Theorie eine lehrbuchmäßige Darstellung [Scharlau 1982]. Damit brachten die oben genannten Arbeiten eine längere Beschäftigung mit diesem Gegenstand zu einem vorläufigen Abschluß und markierten einen wichtigen Schritt sowohl in der Ausformung abstrakter algebraischer Begriffe als auch beim Übergang zu einer allgemeineren Auffassung der Galois-Theorie. Es sei aber betont, daß es noch nicht um ein Studium der Körper an sich als Objekte der Algebra ging. Die körpertheoretischen Untersuchungen blieben dem Ziel untergeordnet, die Galois-Theorie möglichst allgemein zu formulieren.

Einen wesentlichen Einfluß auf die Verbreitung dieser abstrakten Definitionen und Auffassungen von den algebraischen Objekten sowie der Methoden zur Behandlung der algebraischen Fragestellungen übte Webers *„Lehrbuch der Algebra“* aus, das 1895/96 in zwei Bänden erschien. Mehr als eine Generation von Mathematikern wurde von diesem Buch geprägt, das erst nach über


Hermann Minkowski


Kurt Hensel


Ernst Steinitz

30 Jahren durch van der Waerdens *„Moderne Algebra“* abgelöst wurde. Die Galois-Theorie bildete einen wichtigen Bestandteil des Buches, ihre Darstellung war dem Charakter des Buches entsprechend ausführlicher und leichter faßbar. Die Bestimmung der Galois-Theorie als ein Studium von Körpererweiterungen und der zugehörigen Gruppen behielt Weber bei, die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen behandelte er als Anwendung und trennte dies klar von der Theorie ab. Für eine ausführliche Besprechung der Weberschen Arbeiten wie der gesamten Entwicklung der Galois-Theorie sei auf [Kiernan 1971] verwiesen.

Zeitlich fast parallel zu den Weberschen Arbeiten begann Hilbert, sich mit der algebraischen Zahlentheorie zu beschäftigen. 1893 wurden Hilbert und Minkowski von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) gebeten, einen Überblick über den aktuellen Stand der Zahlentheorie zu geben. Während Minkowski den Teil zur Theorie der rationalen Zahlen zusammenstellen sollte, widmete sich Hilbert der Theorie der algebraischen Zahlen. Hilbert und Minkowski hatten sich während ihres Studiums in Königsberg angefreundet, eine enge, für beide bedeutsame Freundschaft, die bis zu Minkowskis Tod 1909 bestand. Während Hilbert den Anfang seiner wissenschaftlichen Laufbahn vollständig in Königsberg absolvierte und dann 1895 als Ordinarius nach Göttingen wechselte, wo er wesentlich zum Aufstieg der dortigen Universität zu einem führenden mathematisch-physikalischen Lehr- und Forschungszentrum beitrug, habilitierte sich Minkowski 1887 in Bonn und kehrte dann 1894/95 an der Universität Königsberg sowie 1902 in Göttingen an die Seite Hilberts zurück. Zwischenzeitlich lehrte er 1896–1902 als Professor am Polytechnikum in Zürich. Beide Mathematiker waren sehr vielseitige Vertreter ihres Faches und haben die Mathematikentwicklung außerordentlich stark beeinflußt. Insbesondere galt Hilbert zu Beginn des 20. Jahrhunderts als einer der bedeutendsten und leistungsfähigsten Mathematiker. Hilberts Lebenswerk läßt sich deutlich in sechs Abschnitte gliedern, von denen mit Blick auf die Algebra vor allem die ersten drei wichtig sind, in denen er sich mit der Invariantentheorie, mit der Theorie der algebraischen Zahlkörper und in Verbindung mit den Grundlagen der Geometrie mit der axiomatischen Me-

thode beschäftigte. Die übrigen drei Forschungsgebiete waren die Theorie der Integralgleichungen, die mathematische Physik und die Grundlagen der Mathematik. Eine nahezu legendäre Berühmtheit erreichte sein Vortrag auf dem II. Internationalen Mathematiker-Kongreß in Paris im Jahre 1900, in dem er anhand von 23 Problemen darlegte, welch vielfältige Fragestellungen noch von den Mathematikern zu bearbeiten waren. Zugleich verbreitete er einen ungebrochenen Forschungsoptimismus:

„Diese Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit: wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus.“ [Hilbert 1971, S. 34]

Die von Hilbert formulierten Probleme erwiesen sich als sehr anregend und haben zahlreiche Untersuchungen stimuliert. Zu den Kollegen, mit denen sich Hilbert bei der Abfassung seines Pariser Vortrages beriet und die ihn unterstützten, gehörte auch Minkowski.

Minkowski hat in seinem Schaffen in genialer Weise geometrische Vorstellungen mit neuen Ideen in anderen Gebieten der Mathematik verknüpft, was zu grundlegenden Arbeiten in der Zahlentheorie, der Speziellen Relativitätstheorie und der Mathematischen Physik, der Theorie konvexer Punktmengen u. a. führte. Da hier nur wenige Stichworte zu Leben und Werk von Hilbert bzw. Minkowski gegeben werden können, sei für eine genauere Darstellung aus der bezüglich Hilbert recht umfangreichen Literatur stellvertretend auf [Reid 1970], [Weyl 1944], [Hilbert 1909] [Minkowski 1973] und [Hancock 1964] verwiesen.

Die starke Beanspruchung durch die grundlegenden Forschungen zu dem Buch über die Geometrie der Zahlen veranlaßten Minkowski jedoch, seinen Beitrag zu dem von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) erbetenen Bericht zum Stand der Zahlentheorie abzusagen. Doch leistete er letztlich mit der Publikation seines Buches zur Geometrie der Zahlen im Jahre 1910 einen schöpferischen, über die Zielstellung des Berichts hinausgehenden Beitrag zur Zahlentheorie. Außerdem förderte er die Entwicklung durch seine sorgfältigen kritischen Kommentare zu dem Hilbertschen Manuskript. Die Arbeit Hilberts *„Die Theorie der algebraischen Zahlkörper“*, im Vorwort auf den April 1897 datiert, erschien in den Jahresberichten der DMV für das Jahr 1896 und gilt seitdem als ein Meisterstück der mathematischen Literatur. Hilbert gab einen umfassenden systematischen Überblick über die algebraische Zahlentheorie. Dabei füllte er zahlreiche Lücken aus, fügte wichtige eigene Resultate hinzu, vereinfachte vielfach die Darstellung der Beweise und formte große Teile der heute üblichen Bezeichnungen. Im einzelnen umfaßten die fünf Teile des *„Zahlberichts“* die allgemeine Dedekindsche Theorie der Zahlkörper, die Galoisschen Erweiterungen, die quadratischen Zahlkörper, die Kreisteilungskörper und die Kummerschen Körper. Hilbert bevorzugte zwar, wie es die Kapitelüberschrift andeutet, die Dedekindsche idealtheoretische Begründung der Theorie, hat aber die Kroneckerschen Methoden

erläutert und bemühte sich um eine ausgewogene Beurteilung der beiden Forschungsrichtungen. Erstmals in der Literatur arbeitete er den Zusammenhang zwischen beiden Theorien und die Gleichwertigkeit der beiden körpertheoretischen Zugangsweisen heraus. Im zweiten Abschnitt behandelte Hilbert die Galoisschen Körper. Durch die enge Beziehung zwischen einem Galois-Körper und seiner Galois-Gruppe sowie den Beziehungen zwischen den Unterkörpern des Körpers und den Untergruppen der Galois-Gruppe lassen sich Fragen der Körpererweiterungen leichter und vollständiger behandeln. Insbesondere gelang Hilbert eine weitgehende Aufklärung der sog. Verzweigungen, mit denen er sich schon in einer Arbeit aus dem Jahre 1894 beschäftigt hatte. Konsequent nutzte er die erwähnte Beziehung zwischen Körper und Gruppe, führte dabei die Zerlegungs-, Trägheits- und Verzweigungsgruppe eines Primideals ein und vertiefte die bei Dedekind, Kronecker und anderen zutage getretene Verbindung zwischen algebraischer Zahlentheorie und klassischer Galois-Theorie. Die folgenden Kapitel waren dann dem eingehenden Studium spezieller Galoisscher Körper gewidmet, von denen er viele bekannte Ergebnisse auf neue Art und unter Schaffung einer „neuen“ Sprache verständlicher zusammenstellte.

Der Hilbertsche Zahlbericht hat die weitere Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie nachhaltig beeinflußt. Zugleich demonstrierte er eindrucksvoll die Verwendung algebraischer Methoden und hat durch diese Beispielwirkung deren weitere Herausbildung stimuliert, ohne auf abstrakte Begriffsbildung Bezug zu nehmen. Etwas pointiert formuliert: Hilbert benutzte alle Mittel zu einer strukturellen Darstellung der Algebra und hat an deren Entwicklung aktiv mitgewirkt, aber er betrieb keine Strukturmathematik und führte keine Untersuchung algebraischer Strukturen durch. Die Begriffsbildungen wie Körper, Gruppe, Modul etc., die sich als zentrale algebraische Strukturen erweisen sollten, waren für ihn wichtige Mittel, um konkrete Forschungen etwa der algebraischen Zahlentheorie vorzunehmen, aber sie bildeten nicht selbst den Gegenstand abstrakter Analysen. Diese Einschätzung wird dadurch bestätigt, daß Hilbert z. B. den Ringbegriff konkret als Zahlring oder Integritätsbereich einführte und kaum Beziehungen zwischen den bei verschiedenen Studien verwendeten algebraischen Begriffen, etwa zwischen Modul und Gruppe, herstellte. Letzteres hätte ihn zur Herausarbeitung der Unterschiede zwischen den einzelnen Begriffen bzw. zu deren Übereinstimmung geführt, wofür es aber keine Hinweise gibt. Für eine ausführliche Diskussion der gesamten Problematik sei auf [Corry 1996] verwiesen.

Stimulierend für die weitere Entwicklung der Körpertheorie erwiesen sich die Arbeiten von Hensel zur Theorie der p-adischen Zahlen, mit denen er ab 1897 hervortrat. Als Motivation nannte er die Analogie zwischen den Resultaten der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen und der der algebraischen Zahlen, durch die es ihm möglich erschien, die Zerlegung der algebraischen Zahlen mit einer einfacheren Methode herzuleiten, die der Entwicklung einer algebraischen Funktion in eine Potenzreihe für die

Umgebung einer beliebigen Stelle entsprach [Hensel 1899, S. 83f.]. Hensel vermutete also, daß auf Grund der Analogie in den Ergebnissen auch die Beweismethoden angeglichen werden konnten, und er schätzte die Methoden der Funktionentheorie *„bezüglich ihrer Brauchbarkeit und Wirksamkeit“* als wesentlich effektiver ein [Hensel 1908, S. 1]. Während seines wissenschaftlichen Werdeganges hatte er sich sehr gute Kenntnisse in beiden Disziplinen, Zahlentheorie und Funktionentheorie, angeeignet. Als Schüler von Kronecker war Hensel mit dessen Theorie bestens vertraut, aber er gehörte zu den wenigen, die zugleich die Dedekindschen Arbeiten schätzten und genau studierten. Außerdem hörte er in Berlin die Weierstraßschen Vorlesungen und hatte als Privatdozent ab 1886 wöchentlich Kontakt zu Weierstraß. Vor diesem Hintergrund ist es nicht verwunderlich, daß Hensel versuchte, beeindruckt vom Kalkül der Potenzreihenentwicklung, diese Methode auch zur Untersuchung von Zahlen anzuwenden. Zusammen mit Georg Landsberg entwickelte er die Dedekind-Webersche Theorie der algebraischen Funktionen weiter und stellte die Resultate in dem Buch *„Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen“* auf der Basis der Weierstraßschen Ideen und unter Rückgriff auf die Potenzreihenentwicklungen dar. Ab 1902 wirkte Hensel dann bis zur Emeritierung als Professor der Mathematik an der Universität Marburg.

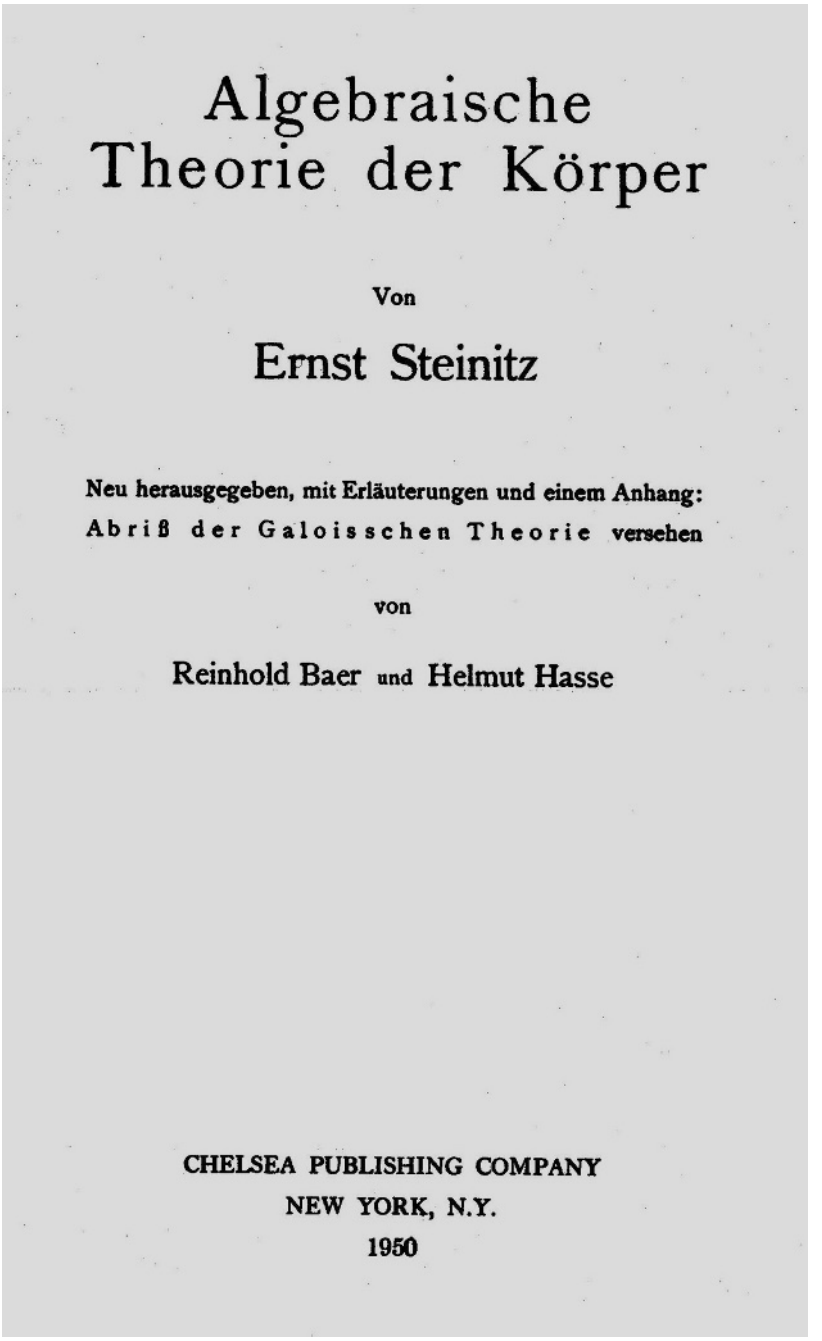
Hensel ging zunächst aus von der Darstellung einer positiven ganzen Zahl in einem p-adischen Zahlsystem, d. h. einem Zahlsystem, in dem die Basis abweichend von dem üblichen Zahlsystem nicht die Zahl 10, sondern eine Primzahl p ist. Eine Zahl C entspricht dann der endlichen Summe $C = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + ... + c_n p^n$, wobei c_i ganze Zahlen mit $0 \leq c_1 \leq p-1$ sind. Um die Ausführbarkeit der arithmetischen Grundoperationen zu sichern, erwies es sich als notwendig, diesen Zahlbereich durch Hinzunahme der entsprechenden unendlichen Reihen zu erweitern, so daß er dann eine p-adische Zahl C definierte durch $C = c_i p^i + c_{i+1} p^{i+1} + c_{i+2} p^{i+2} + ... + c_k p^k + ...$ Dabei war i eine beliebige ganze Zahl, konnte also auch negativ sein. Die negativen Exponenten waren notwendig, um auch rationale Zahlen durch eine Potenzreihe darzustellen. Mit der Erweiterung des Bereichs der p-adischen Zahlen stellte sich für Hensel das Problem der Konvergenz dieser Reihen. Er erkannte, daß die Reihen im allgemeinen nicht im gewöhnlichen Sinne bezüglich des durch den Absolutbetrag definierten Abstandsbegriffs konvergieren. Der von Hensel eingeführte Abstandsbegriff war etwas kompliziert und umständlich zu gebrauchen, erfüllte aber seinen Zweck und regte weitere wichtige Überlegungen an, die dann bei Josef Andreas Kürschák in die Bewertungstheorie einmündeten. Danach ordnet man der obigen p-adischen Zahl C den p-adischen Absolutbetrag $|C|_p = p^{-i}$ zu, und weist nach, daß der p-adische Absolutbetrag analoge Eigenschaften wie der übliche Absolutbetrag besitzt. Die durch den p-adischen Absolutbetrag definierte Konvergenz war der von Hensel eingeführten äquivalent. Die Menge der Zahlen C mit einer p-adisch konvergenten Reihenentwicklung bildeten nun für Hensel den weiteren Untersuchungsgegenstand, und er wies diese Menge als Körper $K(p)$ nach.

Entscheidend war dabei, daß dieser Körper $K(p)$, der heute gewöhnlich mit Q_p bezeichnet wird, nicht in das vertraute Schema passte, er ließ sich nicht als Zahl- oder Funktionenkörper einordnen, und genau aus dieser Eigenschaft resultierte die anregende Wirkung der Henselschen Untersuchungen für die Weiterentwicklung des Körperbegriffs. (Man beachte, daß die Dedekindschen Zahlkörper alle Unterkörper des Körpers der komplexen Zahlen waren.) Hensels ursprüngliches Ziel, eine neue Methode zur Charakterisierung transzendenter Zahlen zu schaffen, schlug jedoch fehl. Der von ihm 1905 vorgestellte Beweis für die Transzendenz von e erwies sich als fehlerhaft, was zu einem spürbar nachlassenden Interesse an der Theorie der p-adischen Zahlen bei vielen Mathematikern führte. Für eine detaillierte Behandlung der Genesis der p-adischen Zahlen und des Henselschen Transzendenzbeweises sei auf [Ullrich 1998a] und [Ullrich 1998b] verwiesen. Erst 1987 konnte ein Transzendenzbeweis von e mit p-adischen Methoden geführt werden. Erwähnenswert ist noch, daß auch das meist nach Hasse benannte Lokal-Global-Prinzip, das eine wichtige Rolle in vielen Forschungen der algebraischen Zahlentheorie spielt, in den Grundzügen auf Hensel zurückgeht. In seiner Synthese von Analysis und den algebraischen Forschungen Dedekindscher und Kroneckerscher Prägung schuf Hensel mehrere fruchtbare Ideen für die Entwicklung der Algebra, ohne sie inhaltlich und begrifflich völlig auszuformen.

Einen grundlegenden Wandel in der Zielsetzung der algebraischen Forschungen und damit einen wichtigen Schritt in Richtung auf die abstrakte Algebra vollzog Ernst Steinitz 1910 mit seiner Arbeit *„Algebraische Theorie der Körper“*. Steinitz hatte ab 1890 in Breslau (Wroclaw) und Berlin studiert und lehrte nach der Habilitation 1894 in Breslau ab 1896 an der TH Berlin-Charlottenburg. Weitere Wirkungsstätten als Professor waren dann 1910 die Technische Hochschule in Breslau und ab 1920 die Universität Kiel. Neben seinem grundlegenden Beitrag zur Körpertheorie sind die Arbeiten zur Theorie der Polyeder, zur linearen Algebra und über Elementarteiler von Matrizen aus ganzen algebraischen Zahlen hervorhebenswert. In der *„Algebraische(n) Theorie der Körper“* machte er, begrifflich an die Arbeit Webers zur Galois-Theorie [Weber 1893] anknüpfend, den Körperbegriff selbst, als abstrakte algebraische Struktur, zum Untersuchungsgegenstand:

„Während aber bei Weber das Ziel eine allgemeine, von der Zahlenbedeutung der Elemente unabhängige Behandlung der Galoisschen Theorie ist, steht für uns der Körperbegriff selbst im Mittelpunkt des Interesses. Eine Übersicht über alle möglichen Körpertypen zu gewinnen, und ihre Beziehungen untereinander in ihren Grundzügen festzustellen, kann als Programm dieser Arbeit gelten.

Zu diesen allgemeinen Untersuchungen wurde ich besonders durch Hensels Theorie der algebraischen Zahlen ... angeregt, in welcher der Körper der p-adischen Zahlen den Ausgangspunkt bildet, ein Körper, der weder den Funktionen- noch den Zahlkörpern im gewöhnlichen Sinne des Wortes beizuzählen ist.“ [Steinitz 1930, S.5]


Algebraische
Theorie der Körper

Von

Ernst Steinitz

Neu herausgegeben, mit Erläuterungen und einem Anhang:
Abriß der Galoisschen Theorie versehen

von

Reinhold Baer und Helmut Hasse

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
NEW YORK, N.Y.
1950

Abb. 9.4.2. Titelblatt vom Nachdruck des Buches „Algebraische Theorie der Körper“ von Ernst Steinitz

Diese Zielsetzung hat Steinitz dann mustergültig umgesetzt. Es darf jedoch nicht verkannt werden, daß es noch einige, von Steinitz nicht erwähnte Fakten gab, die gleichfalls dazu beitrugen, den Boden für derartige, abstrakte algebraische Betrachtungen zu bereiten. Neben den früher schon besprochenen Entwicklungen in der Gruppentheorie und der Zahlentheorie muß vor allem die amerikanische Schule zur Analyse axiomatischer Systeme erwähnt werden. Diese Schule, die als eines der ersten Beispiele eigenständiger Forschung der aufstrebenden US-amerikanischen Mathematik gilt, bildete sich um die Wende zum 20. Jahrhundert unter der Leitung von Eliakim Hastings Moore an der 1890 neu gegründeten Universität Chicago heraus.

Der Aufschwung der Mathematik orientierte sich stark an der Entwicklung in Deutschland und wurde u. a. von Gastvorträgen und der Lehrtätigkeit deutscher Wissenschaftler gefördert. Für eine umfassende Darstellung des Prozesses sei auf [Parshall/Rowe 1994] verwiesen. 1901 begann Moore, der zuvor schon zur algebraischen Geometrie und zur Gruppentheorie geforscht hatte, sich mit Hilberts *„Grundlagen der Geometrie“* auseinanderzusetzen. Besondere Aufmerksamkeit widmete er dabei den Fragen der Axiomatik, d. h. den Beziehungen zwischen einzelnen Gruppen von Axiomen, der logischen Reduzierbarkeit und der Widerspruchsfreiheit des Systems.

Edward Huntington verstärkte den in diesen Forschungen enthaltenen Trend und machte das Studium der Eigenschaften beliebiger Axiomensysteme zum Gegenstand der Untersuchung. Er begann seine Analyse mit zwei von Weber bzw. Burnside benutzten Axiomensystemen für Gruppen. In den folgenden Jahren wurden dann verschiedene Axiomensysteme für Gruppen, Körper, und assoziative Algebren, aber auch für die projektive Geometrie und die Algebra der Logik von Moore, Huntington, Dickson, Veblen u. a. auf Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit untersucht. Gleichzeitig setzte sich die mit Peano begonnene axiomatische Begründung des Zahlensystems mit entsprechenden Systemen für die reellen und die komplexen Zahlen von Hilbert (1900) bzw. Huntington (1905) fort. Die Verwendung der Axiomatik hatte also im ersten Jahrzehnt des 20. Jahrhunderts an Kontur gewonnen.

Die Steinitzsche Zielsetzung ging jedoch deutlich über diesen Trend hinaus. Ihn interessierte nicht die logische Untersuchung des Axiomensystems eines Körpers, sondern die algebraische Struktur, die er aus den Axiomen ableiten konnte. Ausgehend von den einfachsten Körpern wollte er alle anderen daraus aufbauen, eine gewaltige Aufgabe.

Steinitz gliederte sein Buch in vier Kapitel. Nach den Grundlagen behandelte er in den folgenden Kapiteln die algebraischen, die unendlichen algebraischen und die transzendenten Erweiterungen. Ausgehend vom Begriff eines Systems mit doppelter Komposition und der Definition der Isomorphie zweier solcher Systeme charakterisierte er ein System S mit doppelter Komposition als Körper, wenn es die folgenden Axiome (Steinitz sprach von Bedingungen) erfüllte:

assoziatives Gesetz der Addition $(a + b) + c = a + (b + c)$

kommutatives Gesetz der Addition $a + b = b + a$

assoziatives Gesetz der Multiplikation $(ab)c = a(bc)$

kommutatives Gesetz der Multiplikation $ab = ba$

distributives Gesetz $a(b + c) = ab + ac$

Gesetz der unbeschränkten und eindeutigen Subtraktion.
Für beliebige Elemente a, b aus S ist die Gleichung $a + x = b$ stets eindeutig lösbar.

Gesetz der unbeschränkten und eindeutigen Multiplikation.
In S existiert ein Element $a \neq 0$. Für ein solches a und beliebiges b aus S ist die Gleichung $ax = b$ stets eindeutig lösbar.

Nach einigen einfachen Folgerungen aus den Axiomen, wie der Existenz des Null- bzw. Einselements, der Nullteilerfreiheit und der Übertragbarkeit von Sätzen über lineare Gleichungssysteme auf beliebige Körper, klärte er die für seine Zielsetzung wichtigen Begriffe des Teilkörpers, des Erweiterungskörpers, der Adjunktion einer Menge und der Konstruktion des Quotientenkörpers aus einem Integritätsbereich. Die Primkörper, d. h. Körper ohne echten Teilkörper, wurden von Steinitz als grundlegende Bausteine beim Aufbau der verschiedenen Körper erkannt und in dieser Eigenschaft erstmals hervorgehoben: In jedem Körper existiert ein eindeutig bestimmter Primkörper als kleinster Unterkörper. Als erstes Kriterium zur Klassifikation der Körper bot sich die Unterscheidung nach dem in ihnen enthaltenen Primkörper an, und Steinitz führte dazu die Charakteristik eines Körpers K ein. Er setzte diese Null, falls der Primkörper von K dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen isomorph war, und p, falls sich der Primkörper isomorph zum Restklassenkörper $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/(p)$ der ganzen Zahlen modulo einer Primzahl p erwies. Andere Fälle können nicht auftreten. Die nun folgende Analyse der Körpererweiterungen begann er mit den einfachen Erweiterungen, bei denen nur ein Element zum Ausgangskörper adjungiert wurde. Dies führte ihn zu der grundlegenden Unterscheidung zwischen algebraischen und transzendenten Erweiterungen. In transzendenten Erweiterungen sind alle Potenzen des adjungierten Elements α im Bezug auf den Grundkörper K linear unabhängig, d. h. aus $c_0\alpha^0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + ... = 0$ (mit c_i aus K) folgt $c_i = 0$ für alle i; in algebraischen Körpern ist dies nicht der Fall. Zwei beliebige einfache transzendente Erweiterungen von K wies er als äquivalent nach, denn für ein beliebiges transzendentes Element α über K, ist $K(\alpha)$ isomorph zu dem Funktionenkörper $K(x)$ mit der Unbestimmten x. Dabei bedeutete die Äquivalenz zweier Erweiterungen, daß zwischen beiden Erweiterungskörpern ein Isomorphismus existiert, der den Grundkörper K elementweise festläßt. Ist α algebraisch über K und $\varphi(x)$ das irreduzible Polynom, das α als Nullstelle hat, dann gilt $K(\alpha) \cong K[x]/(\varphi(x))$. Steinitz benutzte jedoch nicht die Idealschreibweise, sondern sprach vom Restklassenring $K[x]$ modulo $\varphi(x)$. Nach der Definition der algebraischen (d. h. jedes Element des Erweiterungskörpers ist algebraisch bezüglich K) und der endlichen Erweiterungen (d. h. der Erweiterungskörper

ist ein endlichdimensionaler Vektorraum über K) gab er dann eine vollständige Klassifikation derselben. Als weitere Körpertypen führte er die vollkommenen, die normalen und die separablen Körper ein, letztere bezeichnete er als Körper erster Art. Insgesamt entwickelte er alle nötigen Begriffe und Sätze, um die Galois-Theorie, ohne sie explizit aufzubauen, als Theorie der endlichen, normalen, separablen Körpererweiterungen darzustellen und damit die Gültigkeit des Hauptsatzes der Galois-Theorie genau abzugrenzen. Im dritten Kapitel wandte sich Steinitz den unendlichen algebraischen Erweiterungen zu und krönte die Untersuchung mit dem Hauptsatz, daß zu jedem Körper K ein bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmter algebraisch abgeschlossener Körper existiert. Neben dem algebraischen Ergebnis verdient hierbei die Verwendung des Zermeloschen Wohlordnungssatzes im Beweis des Satzes eine besondere Erwähnung. Der Wohlordnungssatz bzw. das dazu äquivalente Auswahlprinzip waren damals unter den Mathematikern noch sehr umstritten und die Steinitzsche Arbeit lieferte eine der wichtigen frühen Anwendungen. Steinitz fügte in die Arbeit eigens einen Abschnitt zur Vermittlung der mengentheoretischen Grundbegriffe ein und verteidigte den Rückgriff auf das Auswahlaxiom mit einem Hinweis auf den damit verbundenen Nutzen:

„Noch stehen viele Mathematiker dem Auswahlprinzip ablehnend gegenüber. Mit der zunehmenden Erkenntnis, daß es Fragen in der Mathematik gibt, die ohne dieses Prinzip nicht entschieden werden können, dürfte der Widerstand gegen dasselbe mehr und mehr schwinden.“ [Steinitz 1930, S. 8]

Auf den Wohlordnungssatz mußte Steinitz dann auch beim Studium der transzendenten Erweiterungen zurückgreifen, beispielsweise in der Theorie des Transzendenzgrades oder zum Beweis des Satzes, daß jede Erweiterung eines Körpers zerlegt werden kann in eine rein transzendente und eine nachfolgende algebraische Erweiterung. Zuvor hatte er die nötigen Begriffe, wie transzendente und rein transzendente Erweiterung sowie algebraisch abhängig, definiert.

Bei Zusammenfassung der Ergebnisse ergab sich somit eine vollständige Klassifikation der endlichen Erweiterungskörper und eine systematische Übersicht für unendliche Erweiterungen, wobei die Herleitung ganz abstrakt, auf der Basis der Körperaxiome erfolgte. Zugleich hatte Steinitz seine Betrachtungen wesentlich auf die Mengenlehre gegründet, und erst die Einbeziehung mengentheoretischer Sätze und Schlußweisen ermöglichte den Beweis grundlegender Aussagen über unendliche Erweiterungen. Die zu diesem Zeitpunkt einzigartige Verbindung von abstrakten algebraischen Untersuchungen mit axiomatischem Denken und mengentheoretischer Begründung ließen die Steinitzsche Arbeit zu einem wichtigen Eckpfeiler bei der Entstehung der *„modernen abstrakten Algebra“* werden. Vor allem als methodisches Vorbild, aber auch hinsichtlich konkreter körpertheoretischer Probleme, wirkte die Arbeit als äußerst anregend auf die Zeitgenossen und die nachfolgende Mathematikergeneration.

9.5 Die Profilierung weiterer Teilgebiete der Algebra

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten die Grundzüge der Algebraentwicklung um die Wende zum 20. Jahrhundert am Beispiel der im Mittelpunkt der algebraischen Forschung stehenden Themen, Gruppen, Körper und Ideale, dargelegt worden ist, soll nun das Bild durch einen Blick auf weitere wichtige Problemfelder abgerundet werden.

9.5.1 Hyperkomplexe Systeme (Algebren)

Nachdem Benjamin Peirce und Hermann Hankel um 1870 bereits erste Ansätze zur Klassifikation der Algebren entwickelt hatten (vgl. Abschn. 8.4), waren die Untersuchungen in den nachfolgenden Jahrzehnten primär darauf gerichtet, Prinzipien zur Einteilung der Algebren aufzufinden und die für die verschiedenen Klassen typische Struktur anzugeben. Zunächst sei an die hyperkomplexen Methoden Dedekinds erinnert, die er 1871 in der zweiten Auflage von Dirichlets Vorlesungen zur Zahlentheorie verwendete. 1885 kam er darauf zurück,

„weil die analytische Behandlung, welche die Theorie der endlichen Körper verlangt, sich fast wörtlich auf die Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten übercomplexen Größen anwenden läßt; man braucht nur den Körper der rationalen Zahlen, auf welchen bei jener Untersuchung die Coordinaten beschränkt waren, zu ersetzen durch den Körper aller reellen oder lieber durch den Körper aller complexen Zahlen, ...“ [Dedekind 1885, S. 141f.]

Als Ergebnis seiner Studien bewies Dedekind, daß jede endliche kommutative Algebra über den komplexen Zahlen ohne Radikal eine direkte Summe von Körpern ist, die jeweils zum Körper der komplexen Zahlen isomorph sind. Als Radikal bezeichnet man dabei die Menge der Größen, die ein nilpotentes Ideal erzeugen. Dabei heißt allgemein ein Ideal $\mathfrak{a}$ nilpotent, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, für die $\mathfrak{a}^n = (0)$ gilt. Außerdem muß noch angemerkt werden, daß die Mathematiker über ein halbes Jahrhundert lang um eine geeignete Definition des Radikalbegriffs für Algebren gerungen haben. Dedekind besaß noch keinen expliziten Radikalbegriff und hatte die nilpotenten Elemente direkt ausgeschlossen. Den verschiedenen Radikalbegriffen ist im wesentlichen die Eigenschaft gemeinsam, daß das Radikal ein dem vorgelegten Ring bzw. der Algebra eindeutig zugeordnetes zweiseitiges Ideal ist, so daß der Restklassenring des Ringes (der Algebra) nach seinem Radikal möglichst das Nullideal als Radikal besitzt. Außerdem sollen Ringe (Algebren) ohne Radikal, d. h. nur mit dem Nullideal als Radikal, eine möglichst einfache Struktur haben, z. B. die direkte Summe von Ringen (Algebren) sein.

Auslöser für den Dedekindschen Artikel war die Publikation eines Briefes von Weierstraß durch H. A. Schwarz, in dem ersterer über seine seit den 60er Jahren in Vorlesungen vorgetragene Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten Größen (d. h. die Theorie der hyperkomplexen Zahlen) berichtete. Weierstraß

ging von der von Gauß aufgeworfenen Frage aus, *„warum die Relation zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können, ...“* [Gauß 1870, Bd. 2, S. 178], und leitete ab, daß eine kommutative Algebra über den reellen Zahlen mit mehr als zwei Einheiten stets Nullteiler besitze. Weierstraß vertrat die Ansicht, daß man zwar in einer Arithmetik allgemeiner komplexer Größen entsprechende Resultate auf den größeren Bereich verallgemeinern kann, aber prinzipiell keine neuen Einsichten erzielt. Er glaubte, auch Gauß habe diese Einsicht besessen und dies in der oben zitierten Formulierung zum Ausdruck bringen wollen.

Im Gegensatz dazu sah Dedekind sehr wohl einen Unterschied zwischen der Arithmetik der komplexen Zahlen und jener der höheren komplexen Zahlen und artikulierte seinen Einspruch in der erwähnten Publikation. Für ihn waren die höheren komplexen Zahlen aber keine neuen Größen, sondern längst in der Algebra gebräuchlich. Auch diesmal präsentierte er seine Darlegungen in verallgemeinerungsfähiger Form, so daß sie als Vorbild für weitere Strukturuntersuchungen dienen konnten. Die Arbeiten von Dedekind und Weierstraß belegten die lang anhaltende anregende Wirkung der Gaußschen Fragestellung und zugleich die stimulierende Ausstrahlung der körpertheoretischen und der zahlentheoretischen Forschungen auf das Studium hyperkomplexer Systeme (Algebren). Außerdem trugen die Arbeiten zu einer stärkeren Akzeptanz von Überlegungen zu hyperkomplexen Zahlen bei. Hölder, Julius Petersen, Eduard Weyr, Hilbert und Eduard Study publizierten danach ebenfalls zu den Eigenschaften hyperkomplexer Zahlsysteme. Otto Stolz behandelte sie 1886 in seinen Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, wobei er sich an die Hankelschen Darlegungen (vgl. Abschn. 8.4.1) anschloß. Wie Stolz sah die Mehrzahl der Mathematiker in der Theorie der hyperkomplexen Zahlen eine nützliche Erweiterung der komplexen Zahlen und eine geeignete Basis zur abstrakten Begründung derselben.

Einen neuen Impuls erhielt die weitere Entwicklung durch die Verschmelzung der aufgezeigten Ideenströme mit den Lieschen Untersuchungen über kontinuierliche Transformationsgruppen, deren wichtige Rolle für die Gruppentheorie bereits gewürdigt wurde (vgl. Abschn. 8.3.2). Erste Anregungen gaben Lie und Poincaré, letzterer verwies erstmals ausdrücklich darauf, daß Beziehungen zwischen Algebren und gewissen kontinuierlichen Transformationsgruppen bestehen und lenkte zugleich die Aufmerksamkeit auf die Darstellung eines hyperkomplexen Systems als Matrizenalgebra und die Möglichkeit, aus der Analyse der charakteristischen Gleichung Aussagen über die Algebra ableiten zu können [Poincaré 1884]. Georg Scheffers und Study setzten diesen Weg zielstrebig fort und klärten die Struktur der niedrigdimensionalen Algebren auf. *„Alle verschiedenen Typen von Systemen in n Grundzahlen anzugeben“*, stellte sich Study als Aufgabe [Study 1889, S. 240] und klassifizierte die Systeme mit 2, 3 bzw. 4 Einheiten. Neben den konkreten Einzelergebnissen hatten einige der Studyschen Arbeiten noch eine integrierende Funktion,

da Study die schon von anderen Mathematikern formal hergestellten Beziehungen zwischen hyperkomplexen Zahlen und Forschungen über Matrizen, Bilinearformen oder Transformationsgruppen klar aufzeigte und für das Studium der hyperkomplexen Systeme nutzte. Damit wurde die Theorie der hyperkomplexen Systeme wesentlich bereichert. Ohne die Poincarésche Arbeit zu kennen, konstruierte er die Zuordnung zwischen einem hyperkomplexen System und bestimmten Transformationsgruppen und klärte damit den behaupteten Zusammenhang auf. Wichtigstes Element der Studyschen Klassifikation war die Verwendung des Minimalpolynoms, das er in Anlehnung an Weierstraß einführte, jedoch ohne es begrifflich auszuzeichnen. Als Minimalpolynom eines Systems mit n Einheiten wird dabei das Polynom niedrigsten Grades $k \leq n$ bezeichnet, dem alle Elemente des Systems genügen. Derartige Betrachtungen hatten bereits Benjamin Peirce und Weierstraß durchgeführt, und letzterer hatte den Fall $k = n$ genauer dargelegt. Study klassifizierte die Systeme mit bis zu vier Basiseinheiten in Abhängigkeit von k und den jeweils auftretenden Nullstellen des Minimalpolynoms (einfache oder mehrfache, reelle oder konjugiert komplexe Nullstellen). Außerdem hob er die Bedeutung des Koeffizientenbereichs hervor, indem er zwischen Systemen über den reellen bzw. den komplexen Zahlen unterschied. Den Nutzen der Studien über Systeme hyperkomplexer Zahlen sah Study *„im Wesentlichen darin, daß sie gewisse Gruppen von Transformationen in einer sehr einfachen Weise erstens zu bestimmen und zweitens darzustellen gestatten.“* [Study 1889, S. 214]

Scheffers, ein Schüler von Lie, ging in seinen Forschungen von den Arbeiten Weierstraß' und Dedekinds aus, integrierte aber zunehmend die Ideen des zuvor in Leipzig wirkenden Study. Study, der sich 1885 in Leipzig habilitiert hatte, ging 1889 als Privatdozent an die Universität Marburg und 1893/94 als Lecturer an die Johns Hopkins Universität Baltimore, bevor Bonn 1894-1897 sowie ab 1904 seine Hauptwirkungsstätte wurde. Vor allem durch die virtuose Anwendung invariantentheoretischer Methoden erwarb er sich einen Ruf als ausgezeichneter Geometer, der viele neue geometrische Ideen förderte. Scheffers folgte sowohl in seiner Dissertation (1890) als auch in seiner Habilitationsschrift (1891) den Anregungen Lies und hatte in den folgenden Jahren großen Anteil an der Edition von drei Bänden mit Vorlesungen bzw. einer zusammenfassenden Darstellung Lies zur Theorie der Berührungstransformationen. Als Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt (1896–1907) und der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg (1907–1935) erwarb er sich dann einen guten Ruf als vielseitiger Lehrbuchautor und als Forscher auf dem Gebiet der Differentialgeometrie. Die hier zu besprechenden Arbeiten standen also am Beginn der Forschungsaktivitäten von Scheffers, und erst in deren Verlauf lernte er auch die oben besprochenen Arbeiten Studys kennen.

Den Zusammenhang zu den Transformationsgruppen stellte Scheffers her, indem er die Produktbildung $xy = z$ in einem hyperkomplexen System für festes y als eine Transformation des Systems in sich interpretierte (x, y, z sind Elemente aus dem hyperkomplexen System). Durchläuft y alle Elemente des

Systems, so erhält man eine Schar von Transformationen, die eine Gruppe bilden. Er betrachtete auch die zu der Transformationsgruppe gehörigen infinitesimalen Transformationen und zeigte, modern formuliert, daß eine Algebra mit der Kommutatorbildung $[x, y] = xy - yx$ als Multiplikation eine Lie-Algebra wird. Zur Klassifikation der hyperkomplexen Systeme zog er wesentlich die Determinante $\Delta_x = \det\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}^{i} x_j\right)$ heran (a_{jk}^{i} die Multiplikationskonstanten und x_j die Koeffizienten eines beliebigen Elementes aus dem hyperkomplexen System). Die Determinante war zuvor schon von Weierstraß und Dedekind betrachtet worden. Eine wichtige Ergänzung der bisherigen Klassifizierungsmethoden war die Übertragung einer Einteilung der Transformationsgruppen in zwei Klassen auf die hyperkomplexen Systeme, was zur Unterscheidung zwischen Kegelschnitt- und Nichtkegelschnittsystemen führte. Da erstere stets eine Teilalgebra enthielten, die zu den Quaternionen isomorph war, sprach Scheffers später von Quaternionen- und Nichtquaternionensystemen. Für letztere wies er u. a. die Existenz einer Basis $\{e_i\}$ nach, so daß jedes Produkt $e_k e_{k+i}$ eine Linearkombination der Einheiten e_1, e_2, ..., e_k ist. In der modernen Theorie der Lie-Gruppen ergibt sich hier ein Zusammenhang zur Theorie der nichtauflösbaren und auflösbaren Lie-Gruppen. Neben diesen Resultaten zur Struktur der Quaternionen- und Nichtquaternionensysteme gelang Scheffers die Aufstellung aller Systeme mit 5 Basiseinheiten, wobei er zu der Studyschen Methode überging und die Systeme nach dem Grad des Minimalpolynoms klassifizierte. In der Übersichtsdarstellung von 1891 [Scheffers 1891] führte er dann einer Anregung Studys folgend zusätzlich die Unterscheidung zwischen reduziblen und irreduziblen Systemen ein, wobei er, in moderner Terminologie formuliert, eine Algebra als reduzibel bezeichnete, wenn sie die direkte Summe zweier echter Teilalgebren war. Die Algebra A ist die direkte Summe der Teilalgebren B und C, wenn gilt: $A = B + C$ und $BC = 0$. Da Scheffers die Eindeutigkeit der Zerlegbarkeit eines hyperkomplexen Systems in irreduzible Systeme und die multiplikative Zusammensetzung des Minimalpolynoms des Systems aus den Minimalpolynomen der irreduziblen Teilsysteme nachweisen konnte, war ihm die Übertragung eines wichtigen Begriffs für die Klassifikation der Algebren gelungen, und die Aufgabe reduzierte sich nun im wesentlichen auf die Bestimmung der irreduziblen hyperkomplexen Systeme. In diesem Sinne bestimmte er alle irreduziblen Quaternionensysteme mit bis zu acht Basiseinheiten. Die von ihm ebenfalls definierte *„Multiplikation von Zahlensystemen“* brachte außer der Einsicht, daß die Menge der hyperkomplexen Systeme wieder ein solches System bildet, keine bemerkenswerten Resultate. Interessant ist die Scheffersche Sicht auf die Stellung der Theorie hyperkomplexer Systeme, die er der Theorie der Transformationsgruppen unterordnete und als einen Teil derselben betrachtete [Scheffers 1891, S. 388, 293]. Mit diesem Herabsetzen der Algebrentheorie zu einer Untersuchungsmethode für Transformationsgruppen verkannte Scheffers zweifellos die Situation, doch da er sich als Lie-Schüler

lange und sehr intensiv an der Entwicklung der Lieschen Theorie beteiligte, ist dieser Überschwang verständlich. Trotz der Übertreibung verdeutlicht die Einschätzung den großen Stellenwert, den die Forschungen über Transformationsgruppen in jenen Jahren hatten.

Etwa zeitgleich gelang Wilhelm Killing bei einer ganz anderen Zielstellung ein grundlegender Beitrag zur Struktur der Lie-Algebren, der zunächst nur wenig Beachtung fand. Killings Interesse galt vor allem den Grundlagen der Geometrie, mit denen er sich seit seiner Studienzeit 1865/72 beschäftigte. Viele neue Impulse erhielt er durch die Fortsetzung des Studiums an der Berliner Universität ab dem Wintersemester 1867/68, wobei die Seminare seines Lehrers Weierstraß besonders anregend auf ihn wirkten. Nach der Erforschung einiger *„Raumformen“* (Geometrien), wandte sich Killing der Erweiterung der Raumformen zu. In die axiomatisch definierte Raumform führte er unendlich kleine (gleichförmige) Bewegungen ein, die er analytisch beschrieb und deren Zusammensetzung er dann untersuchte. Als Resultat erhielt er eine Verbindung zwischen den Grundlagen der Geometrie und den Gruppen dieser infinitesimalen Bewegungen, die nichts anderes als Lie-Algebren waren. Erst nach der Veröffentlichung seiner Arbeit [Killing 1884], die als Schulprogramm erschien, wurde er von Klein auf die Lieschen Arbeiten hingewiesen und begann 1885 einen fruchtbaren Briefwechsel mit dem Lie-Schüler Friedrich Engel in Leipzig. Der von W. Hein publizierte Briefwechsel [Hein 1997] liefert interessante Einblicke in diese Schaffensperiode Killings sowie einen Überblick über sein Werk. Für eine genaue Analyse der Killingschen Arbeiten, deren Beziehungen zu den geometrischen Forschungen der Zeit und ihren Platz in der Geschichte der Lie-Algebren sei auf [Hawkins 1980] und [Hawkins 1982] verwiesen.

Engel veranlaßte Killing auch, die Liesche Terminologie zu übernehmen und in einigen Punkten Lies Priorität anzuerkennen. Zur Terminologie sei dabei noch angemerkt, daß die Bezeichnungen Lie-Gruppe bzw. Lie-Algebra erst in den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts geprägt wurden, vorher sprach man von kontinuierlichen (Transformations-)Gruppen und Gruppen infinitesimaler Transformationen. Im Bestreben, einen Überblick über die verschiedenen Raumformen zu erhalten, und die Weierstraßsche Theorie der Elementarteiler als methodischen Leitfaden nutzend, schuf Killing 1888–90 in einer vierteiligen Arbeit eine Klassifikation der einfachen Lie-Algebren [Killing 1888]. Mit zahlreichen Anregungen, aber auch mit aufmunternden Worten hat Engel die Entstehung und Publikation der vier Artikel spürbar unterstützt. Killing gab vier Grundtypen und sechs Spezialfälle für die Struktur der einfachen Lie-Algebren an und hatte damit erstmals eine große Klasse von Algebren vollständig klassifiziert. Bei den dabei verwendeten Begriffen wird der Einfluß der Gruppentheorie spürbar. So hieß eine Transformationsgruppe (Lie-Algebra) einfach, wenn sie keine invariante Untergruppe besitzt, d. h. wenn in der Algebra kein echtes Ideal existiert. Eine Untergruppe (Teilalgebra) U hieß invariant in der Transformationsgruppe (Lie-Algebra) G, wenn für

X aus U und Y aus G das Produkt (X, Y) stets in U lag. Als neue Klasse von Lie-Algebren führte Killing die halbeinfachen Lie-Algebren ein, die er als Zusammensetzung von einfachen Lie-Algebren definierte und die mit letzteren viele Eigenschaften gemeinsam besaßen. Eine Lie-Algebra war die Zusammensetzung zweier Lie-Algebren, wenn das Produkt von zwei Elementen aus verschiedenen Teilalgebren stets Null war. Das wichtigste Element der Killingschen Klassifikation bildete die von ihm eingeführte charakteristische Gleichung, auch Killingsche Gleichung genannt, zu deren Definition er implizit Elemente der modern als adjungierte Darstellung bezeichneten Abbildung verwendete und durch deren Untersuchung mittels der Elementarteilertheorie er einen völlig neuen Blick auf das Studium der Lie-Algebren eröffnete.

Die Arbeit Killings hat die weiteren Forschungen zur Struktur der Lie-Algebren und der linearen assoziativen Algebren entscheidend beeinflußt. Zwar waren die Darlegungen hinsichtlich Exaktheit und Eleganz noch verbesserungsbedürftig, worüber sich Killing völlig im Klaren war, doch in den Grundideen bildeten sie die Basis für die bedeutenden Beiträge von Élie Cartan , Joseph Henry Maclagan Wedderburn, Hermann Weyl und anderen bis hin zur modernen Entwicklung der abstrakten harmonischen Analyse und der Kac-Moody-Algebren. Killing hatte die Bedeutung seiner Arbeit nicht erkannt und den Weg zum Studium von Lie-Algebren nicht weiterverfolgt, er wandte sich wieder den Raumformen zu. Eine wichtige persönliche Konsequenz der vierteiligen Publikation war für Killing, daß er 1892 eine Professur an der Universität Münster und damit bessere Möglichkeiten zur Forschung erhielt, nachdem er zuvor an verschiedenen Gymnasien, vor allem in Braunsberg (Braniewo), gelehrt hatte.

Die Präzisierung und Vertiefung der Killingschen Resultate wurde von Élie Cartan vorgenommen. Dabei eröffnete dem aus einfachen Verhältnissen stammenden Cartan nur der glückliche Umstand, durch die Initiative eines Schulinspektors ein staatliches Stipendium zu erhalten, den Weg zu einer höheren Ausbildung. Cartan dankte diese Gunst, indem er einer der bedeutendsten Mathematiker in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurde. Nach dem Studium an der Pariser École Normale Supérieure lehrte und forschte er in Montpellier, Lyon, Nancy und ab 1912 als Professor an der Sorbonne in Paris. In seinen Forschungen schuf er Grundlegendes zur Analysis differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, wobei er in einzigartiger Weise die Differentialgeometrie und die Theorie der Differentialgleichungssysteme eng mit der Theorie der Lie-Gruppen verband. Als seine bedeutendste Leistung gilt meist die Schaffung des Kalküls der äußeren Differentialformen, den er mit großer Virtuosität auf verschiedenste Problem erfolgreich anwandte und der u. a. die Verwendung neuer algebraischer Überlegungen ermöglichte.

Mit seiner Dissertation betrat Cartan 1894 das Feld der Lie-Gruppen, das er für die folgenden drei Jahrzehnte fast allein beherrschen sollte. Er hatte sich eingehend mit der Theorie der Transformationsgruppen beschäftigt, kannte die vielfältigen Anwendungen der Gruppentheorie in den Naturwis-

senschaften und sah eine zentrale Aufgabe in der Aufklärung struktureller Aspekte, die zu einer Klassifikation unterschiedlicher Objekte führte. In der Dissertation [Cartan 1894] korrigierte er die Anzahl der Ausnahmefälle in der Killingschen Klassifikation von sechs auf fünf und arbeitete die Bedeutung der Killingschen (charakteristischen) Gleichung klar heraus. So konnte er eine integrable (auflösbare) bzw. halbeinfache Lie-Algebra vollständig durch Eigenschaften des Koeffizienten bei der dritthöchsten Potenz der Unbestimmten in dieser Gleichung charakterisieren. Weiterhin bewies er den zentralen Struktursatz, daß es in einer nichtintegrablen (nichtauflösbaren) Lie-Algebra A eine größte integrable Teilalgebra Γ gibt, die eine zu A homomorphe (bei Cartan noch isomorphe) halbeinfache Algebra A/Γ bestimmt [Cartan 1894, S. 97]. Für viele der von Killing angegebenen Einzelresultate deckte Cartan die inneren Zusammenhänge auf und formte den Grundstock einer umfassenden Theorie, der Theorie der halbeinfachen Lie-Algebren.

Bei der intensiven Beschäftigung mit den kontinuierlichen Transformationsgruppen war Cartan die Beziehungen zwischen diesen Gruppen und den hyperkomplexen Systemen, die von Lie, Scheffers, Study u. a. dargelegt worden waren, nicht entgangen. So ergänzte er 1895 seine Ausführungen zu einem Struktursatz für Lie-Algebren durch eine Formulierung der Aussage für hyperkomplexe Systeme. Damit eröffnete er nicht nur den Weg für die Übertragung der Strukturaussagen, sondern stärkte auch die Profilierung der Algebrentheorie als eigenständiges Teilgebiet der Algebra. In den folgenden Jahren realisierte er diesen Ansatz und schuf die Grundzüge einer Strukturtheorie für lineare assoziative Algebren. Die Haupttheoreme dieser Theorie hatte Theodor Molien 1891 bereits abgeleitet, doch hatte Cartan die entsprechende Publikation nicht zur Kenntnis genommen. Moliens Zugang zu den hyperkomplexen Systemen entsprach dem der arithmetisch geprägten Richtung von Weierstraß, Dedekind und anderen. Molien war mit dem aktuellen Forschungsstand sehr gut vertraut, kannte die Arbeiten von Frobenius, Sylvester, Lie, Engel, Scheffers usw., war eng mit Study und Adolf Hurwitz befreundet und hatte 1883–85 unter Klein Fragen der Gruppentheorie studiert. Seit 1885 wirkte er in Dorpat, ab 1888 gemeinsam mit Friedrich Schur. Ausgangspunkt in der 1891 vollendeten Dissertation [Molien 1893] war für Molien die Analyse des Systems der Multiplikationskonstanten und die Definition des begleitenden Systems A' zu einer assoziativen Algebra A über den komplexen Zahlen: Für zwei beliebige Elemente x, u aus A ist $x' = xu$, d. h. $x'_i = \sum_{k,l=1}^{n} a^i_{kl} x_k u_l$ $(1 \leq i \leq n)$. Läßt sich die Basis von A so wählen, daß die ersten r Komponenten x'_i des Produktes xu nur von den ersten r Komponenten der Faktoren abhängen, d. h. $x'_i = \sum_{k,l=1}^{r} a^i_{kl} x_k u_l$ $(1 \leq i \leq r)$, dann definieren diese r Gleichungen das begleitende System A'. Mit anderen Worten: Ist $\{e_i\}$ eine entsprechende Basis von A, so bilden die Einheiten $e_{r+1}, ...e_n$ ein zweiseitiges Ideal in A. Ein hyperkomplexes System, das kein

begleitendes System besitzt, nannte Molien *„ursprünglich“*, und dieser Begriff ist dem der einfachen Algebra äquivalent. Neben der charakteristischen Gleichung und dem Minimalpolynom, von ihm Ranggleichung genannt, zog er noch spezielle, auf dem hyperkomplexen System definierte Bilinearformen zu seinen Untersuchungen heran und fügte den Einsichten seiner Vorgänger, wie sich die Struktur des hyperkomplexen Systems in Eigenschaften dieser Polynome niederschlug, mehrere neue, vor allem die Einfachheit des Systems betreffende hinzu. Er kam dann zu dem grundlegenden Resultat, daß jedes hyperkomplexe System in die (direkte) Summe von ursprünglichen (einfachen) Systemen und einem Restsystem zerfällt und jedes einfache System einem vollständigen Matrizenring isomorph ist. Damit war die Struktur der einfachen Algebren über den komplexen Zahlen aufgeklärt. Für eine weitere Analyse der Molienschen Arbeiten sei auf [Hawkins 1972] verwiesen.

Wie bereits vermerkt, gelangte Cartan ausgehend von seinen Untersuchungen über kontinuierliche Transformationsgruppen zu völlig analogen Aussagen zur Struktur assoziativer Algebren [Cartan 1897], [Cartan 1898]. Das bei der Zerlegung einer Algebra in die direkte Summe einfacher Algebren auftretende Restsystem charakterisierte er als nilpotente invariante Teilalgebra. Wichtige Orientierungen lieferte ihm auch die Scheffersche Einteilung in Quaternionen- und Nichtquaternionensysteme. Ausführlich behandelte Cartan die reellen Systeme, d. h. die Algebren über den reellen Zahlen, und dokumentierte mit diesen Ergebnissen in einer bisher nicht gekannten Ausführlichkeit den Einfluß des Koeffizientenbereichs auf die Struktur der Algebra. Trotz der engen Beziehungen zu den Transformationsgruppen betonte Cartan die Eigenständigkeit der Strukturuntersuchungen für assoziative Algebren, was letztlich eine Hervorhebung des algebraischen Charakters dieser Forschungen bedeutete.

Diese Etablierung der Algebrentheorie als spezielles Teilgebiet der Algebra wurde fast zeitgleich durch den Artikel von Study in der *„Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“* unterstrichen. Die Schaffung dieser Enzyklopädie war 1895 von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung auf Initiative von Franz Meyer, Felix Klein und Heinrich Weber diskutiert und beschlossen worden. Man wollte den Notwendigkeiten der Zeit und dem veränderten Wechselverhältnis zwischen der Mathematik und den Naturwissenschaften Rechnung tragen. Nach der raschen und umfassenden Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert sollte die Enzyklopädie

„in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten ... geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts“ nachweisen [Encyklopädie 1898, Bd. 1,1, S. IX].

Die *„Theorie der gemeinen und höheren complexen Zahlen“* [Study1898] bildete den Abschnitt 4 im ersten Teil des Bandes I – Arithmetik und Algebra –

und stand damit gleichberechtigt neben Galois-Theorie, Theorie der algebraischen Zahlkörper, Mengenlehre, partiellen Differentialgleichungen und anderen im starken Aufschwung befindlichen Gebieten der Mathematik. Study lieferte mit seinem Beitrag eine Übersicht über die wichtigsten Resultate zur Theorie hyperkomplexer Systeme, die auch eine erste Würdigung der Arbeiten Moliens und einen Hinweis auf die Artikel Cartans enthielt. Ein wichtiger Effekt dieser Übersicht war insbesondere ein Entwirren der Begriffsvielfalt, zu der es in den vorangegangenen Jahren durch mehrere zeitlich parallel entstandene Publikationen gekommen war. Zehn Jahre später hat dann Cartan für die französische Übersetzung der *„Enzyklopädie“* den Studyschen Beitrag grundlegend überarbeitet und umfangreiche Ergänzungen und Veränderungen vorgenommen [Cartan 1908]. Durch die in der Zwischenzeit erzielten Fortschritte konnte er der Algebrentheorie eine wesentlich abgerundetere Darstellung geben und die vielfältigen Beziehungen der hyperkomplexen Methoden zu anderen mathematischen Teilgebieten hervortreten lassen, ohne die Eigenständigkeit der Theorie in Frage zu stellen. Cartan referierte auch die Ergebnisse einiger US-amerikanischer Mathematiker, den krönenden Abschluß dieser Entwicklungslinie erfaßte er jedoch nicht mehr.

Dieser Abschluß bestand in einer Synthese von klassischer Theorie, axiomatischer Methode und formal logischen Betrachtungen zu einer abstrakten Algebrentheorie über beliebigen Körpern. Auf die Studien zu Axiomensystemen und zur Logik als einer bevorzugten Forschungsrichtung in der jungen aufstrebenden US-amerikanischen Mathematik ist schon verwiesen worden. Die Gruppen um Huntington und Moore schufen damit jenes anregende geistige Klima, das den Übergang zur Algebrentheorie als abstrakter, axiomatisch begründeter Strukturtheorie begünstigte. Nachdem George Pratt Starkweather ab 1899 die Schefferschen Klassifikationsmethoden analysiert und weitere hyperkomplexe Systeme bestimmt hatte, nahm Herbert Edwin Hawkes ab 1902 eine erste Verschmelzung der amerikanischen und europäischen Traditionslinien vor, wie sie sich in den Arbeiten von Benjamin und Charles Sanders Peirce bzw. von Scheffers, Study, Molien u. a. dokumentierte. Innerhalb weniger Jahre wurde eine Fülle von Einzelresultaten erzielt und 1907 unternahm James Byrnie Shaw einen mit Studys Enzyklopädieartikel vergleichbaren Versuch zur Vereinheitlichung der Theorie in seiner *„Synopsis of Linear Associative Algebras“*, der aber sehr rasch überholt sein sollte. Leonard Eugene Dickson hatte 1903 in dem oben skizzierten Kontext die Axiomensysteme für einen abstrakten Körper bzw. für eine lineare assoziative Algebra über einem beliebigen Körper nach rein logischen Gesichtspunkten, wie Widerspruchsfreiheit und Äquivalenz der Axiomensysteme untersucht [Dickson 1903a], [Dickson 1903b]. Die Definition sollte u. a. das Nebeneinander der Bezeichnungen hyperkomplexes System, System hyperkomplexer Zahlen und Algebra beseitigen. Nach Dickson wurde eine lineare assoziative Algebra kurz als Algebra bezeichnet. Mit der Frage nach den möglichen Divisionsalgebren entdeckte Dickson dann ein scheinbar gelöstes Problem, das über Jahre hinweg Stoff



Leonard Eugene Dickson



Joseph Henry Maclagan Wedderburn

für neue Forschungen bot. Den Schlußpunkt dieser Entwicklungsphase bildeten die Arbeiten von Wedderburn, der nach dem Studium in Edinburgh 1904 in dem auf geometrische Untersuchungen orientierten Kreis um Moore und Dickson an der Universität Chicago seine Kenntnisse vertiefte, bevor er an den Universitäten in Edinburgh (1905–1909) und Princeton (1909–1914, 1918–1945) eine Lehrtätigkeit ausübte. Wichtigstes Resultat des Chicagoer Aufenthalts war die Aussage, daß jeder endliche Schiefkörper kommutativ und damit ein Galois-Feld ist. Unabhängig von Wedderburn hatte auch Dickson einen Beweis dieses Satzes gefunden, aus dem sofort eine Klassifikation aller endlichen halbeinfachen Algebren folgte, der aber darüber hinaus wichtige Anwendungen in der Geometrie und Zahlentheorie hatte. Zusammen mit Oswald Veblen leitete Wedderburn in den folgenden Jahren wichtige Erkenntnisse zur projektiven Geometrie, genauer über Pascalsche und Desarguesche Geometrien, ab. (Vgl. dazu [Parshall 1983])

Mit seiner Arbeit *„On Hypercomplex Numbers“* (1908) legte Wedderburn dann den Grundstein für eine abstrakte Algebrentheorie. Da die bisherigen Methoden zur Klassifikation meist von dem speziellen Koeffizientenbereich (reelle bzw. komplexe Zahlen) abhingen, wählte er bewußt einen axiomatisch-mengentheoretischen Ausgangspunkt, der ihn zu einem abstrakten Aufbau der Theorie führte. Als methodisches Vorbild diente ihm die Gruppentheorie. Wedderburn ging vom Rechnen mit Komplexen aus, was ihm die elegante Definition wichtiger Begriffe ermöglichte. So charakterisierte er die Invarianz eines Teilkomplexes B (als linearer Unterraum) in der Algebra A durch $AB \subseteq B$ und $BA \subseteq B$, d. h. B ist ein zweiseitiges Ideal in A, und die Reduzibilität einer Algebra A in die Summe der Teilalgebren B und C durch $A = B + C$ und $BC = 0 = CB$. Die grundlegenden Strukturätze Wedderburns verallgemeinerten dann die Resultate von Peirce, Molien, Cartan u. a.

und besagten, daß jede Algebra (als Vektorraum) die direkte Summe einer halbeinfachen Algebra und einer eindeutig bestimmten, maximalen nilpotenten, invarianten Algebra ist, jede halbeinfache Algebra eindeutig als direkte Summe von einfachen Algebren dargestellt werden kann, und daß jede einfache Algebra eine volle Matrizenalgebra über einer Divisionsalgebra ist. Zuvor hatte er für die heute als Radikal bezeichnete maximale nilpotente, invariante Algebra nachgewiesen, daß sie alle nilpotenten invarianten Teilalgebren enthielt, und die halbeinfachen Algebren als Algebren ohne Radikal definiert. Schließlich versuchte Wedderburn, die Reichweite seiner Theorie abzustecken. Für nichtassoziative Algebren blieben mehrere Aussagen gültig, doch konnte eine solche Algebra einfach sein und trotzdem nur nilpotente Elemente enthalten.

Wie die Steinitzsche Arbeit in der Körpertheorie so markierte Wedderburn den Übergang zur *„modernen Algebra“* in der Algebrentheorie. Nach der Rezeption der Ideen Wedderburns, die maßgeblich durch Arbeiten von Dickson gefördert wurde, war die Algebrentheorie *„a very different thing from what it was before. Much of it took on the grace of civilized generality and unity.“* [Bell 1938, S. 30]. Das Studium der nilpotenten und der Divisionsalgebren bildete das bevorzugte Thema der weiteren algebrentheoretischen Forschungen, wobei insbesondere durch die Bearbeitung und Fortsetzung der klassischen Theorie mit den neuen Methoden die Vorteile der abstrakten Herangehensweise deutlich hervortraten und immer besser verstanden wurden.

9.5.2 Darstellungen von Gruppen und Algebren

Mehrfach ist in den vorangegangenen Abschnitten auf *Darstellungen* von Algebren bzw. Gruppen und wichtige Resultate über dieselben hingewiesen worden. Nachfolgend soll die historische Entwicklung dieses Teilgebietes der Algebra kurz skizziert werden. Mit dem Begriff der Darstellung folgten die Mathematiker der im täglichen Leben häufiger auftretenden Vorgehensweise in schwierigen Situationen: bei einer komplizierten Problemlage den Sachverhalt auf eine uns vertraute Sachlage zu übertragen, die Fragestellung zunächst dort zu entscheiden und diese Lösung als Orientierung für die Bewältigung des Ausgangsproblems zu nehmen. Eine Darstellung eines algebraischen Objektes kann vereinfacht als eine homomorphe Zuordnung zu einer Menge von linearen Abbildungen eines Vektorraumes gekennzeichnet werden, wobei diese Menge der Abbildungen häufig durch Matrizen repräsentiert wird. Die Anfänge der Darstellungstheorie sind durch die Realisierung der Quaternionen bzw. der Nonionen als Matrizen und der von C. S. Peirce und Frobenius unabhängig voneinander bewiesenen Einsicht markiert, daß jede (endlich dimensionale) assoziative Algebra als Matrizenalgebra dargestellt werden kann. Schließlich sei daran erinnert, daß in den Strukturätzen über Algebren die Realisierung der einfachen Algebren als Matrizenalgebren ein wichtiges Teilergebnis war. Die Einsichten in die Struktur der Algebren bildeten dann am

Ende des 19. Jahrhunderts einen möglichen Zugang zur Darstellungstheorie von Gruppen. Molien ordnete jeder endlichen Gruppe die Gruppenalgebra zu, eine Bildung, die Cayley erstmals 1854 vorgenommen hatte (vgl. Abschn. 7.4.2), und konnte auf diese Algebra jene Betrachtungen anwenden, die er in seiner Strukturtheorie vorgenommen hatte. Sein Ziel war es, unter Heranziehung der *„Theorie der höhern complexen Zahlensysteme“* einige allgemeine Sätze über die *„Darstellbarkeit einer gegebenen discreten Gruppe“* abzuleiten [Molien 1897, S. 259]. Er bewies zunächst die Zerlegung einer endlichen Gruppe in irreduzible Komponenten sowie die vollständige Reduzibilität jeder regulären Darstellung einer endlichen Gruppe und konzentrierte sich dann auf die irreduziblen Bestandteile. Er erkannte u. a., daß jede irreduzible Darstellung einer Komponente der regulären Darstellung isomorph ist und fand die Beziehung zwischen dem Grad der irreduziblen Darstellung und der Gruppenordnung. In seinen Darlegungen formulierte er auch eine wichtige Relation, die nichts anderes als die Orthogonalität der Gruppencharaktere ausdrückte, doch hat Molien erst später aus den Arbeiten von Frobenius die Bildung der Gruppencharaktere kennengelernt. Es tritt uns hier wieder das Phänomen der Parallelentwicklung wissenschaftlicher Ergebnisse entgegen, das bei der retrospektiven Betrachtung meist eine gewisse Verwunderung auslöst, das aber zugleich mit aller Deutlichkeit aufzeigt, wie vielschichtig und störanfällig der wissenschaftliche Kommunikationsprozeß sein kann. Molien und Frobenius erzielten fast zeitgleich analoge Ergebnisse zur Darstellungstheorie endlicher Gruppen. Beide näherten sich dem Thema aus unterschiedlichen Positionen, was die Unabhängigkeit ihrer Forschungen unterstreicht, doch hätten die gegenseitige Kenntnis der Arbeiten bzw. ein Gedankenaustausch die Entwicklung zweifellos beschleunigt. Frobenius wurde im Herbst 1897 von Study auf die Arbeiten von Molien hingewiesen und nahm dann brieflichen Kontakt zu Molien auf, wodurch letzterer wiederum von den Frobeniusschen Resultaten Kenntnis erhielt.

Frobenius' Beschäftigung mit den Gruppencharakteren und der Darstellungstheorie endlicher Gruppen ging auf eine Anregung Dedekinds zurück. Dedekind hatte eine allgemeine Definition der Charaktere für endliche Abelsche Gruppen 1879 in der dritten Auflage von Dirichlets *„Vorlesungen über Zahlentheorie“* vorgenommen, wobei er sich auf Vorleistungen von Kronecker, Schering und Gauß stützte. Letzterer hatte den Begriff des Charakters bereits 1801 in den *„Disquisitiones arithmeticae“* beim Studium quadratischer Formen eingeführt. Zur Verbreitung der Dedekindschen Ideen über Gruppencharaktere trug dann Weber bei, der u. a. in seinem *„Lehrbuch der Algebra“* (1896) den Begriff auf nichtabelsche Gruppen erweiterte und Charaktere als beliebige komplexwertige Funktionen χ auf der Gruppe mit $\chi(gg') = \chi(g)\chi(g')$ definierte. Etwa um 1880 kam Dedekind in Studien zur Galois-Theorie auch zur Einführung der sogenannten Gruppendeterminante und erkannte sehr bald, daß für endliche Abelsche Gruppen die Gruppendeterminante in ein Produkt von Linearfaktoren zerfiel, mit den Gruppen-

charakteren als Koeffizienten. Später, 1886, stellte er bei der Berechnung der Gruppendeterminante für nichtkommutative Gruppen fest, daß er ebenfalls eine Zerlegung in Linearfaktoren erreichen konnte, wenn er als Koeffizienten hyperkomplexe Zahlen zuließ. Eine allgemeine Aussage gelang Dedekind nicht, und er hat diese Forschungen nicht intensiv weiterbetrieben, doch fragte er 1895 bei Frobenius, der 1892 der Nachfolger von Kronecker an der Berliner Universität geworden war und dessen gruppentheoretischen Arbeiten Dedekind schätzte, recht pauschal an:

„ ... drängen sich in Ihre Untersuchung auch übercomplexe Grössen ein mit nicht commutativer Multiplication?“ [Dedekind Werke Bd. 2, S. 419f.]

Nach weiteren Briefen Dedekinds (1896), in denen er seine bisherigen Untersuchungen über die Gruppendeterminante und Gruppencharaktere darlegte sowie einige Vermutungen äußerte, begann Frobenius, weiterhin im engen Gedankenaustausch mit Dedekind stehend, sich mit den Problemen auseinanderzusetzen. Innerhalb von vier Jahren publizierte Frobenius mehrere fundamentale Arbeiten über Gruppencharaktere, in denen er deren Beziehung zur Darstellungstheorie herausarbeitete. Er deckte wichtige Eigenschaften der Charaktere auf und bewies u. a. die oben angegebenen Resultate von Molien. Er gab mehrere Methoden zur Berechnung der Charaktere an und berechnete die Charaktertafel für mehrere Gruppen. Nach dem Studium der Molienschen Arbeiten formulierte er seine Ergebnisse unter Verwendung der Matrizendarstellung und wies die von ihm zu jedem Primfaktor der Gruppendeterminante definierten Charaktere jeweils als Spur der irreduziblen Darstellungen nach.

Schließlich gelangte auch Burnside in den Jahren vor der Jahrhundertwende zu zahlreichen Einsichten über Darstellungen und Gruppencharaktere, um dann im Jahre 1900 mit zwei Arbeiten völlig überraschend die Tür zu neuen Forschungen aufzustoßen, indem er erstmals mit Hilfe der Theorie der Charaktere Aussagen über die Struktur der Gruppe ableitete. Burnside, der seit 1885 als Professor am Royal Naval College in Greenwich lehrte und sich zunächst mit Fragen der Mathematischen Physik und der komplexen Funktionentheorie beschäftigt hatte, wandte sich ab 1893 verstärkt dem Studium von Gruppen zu und trat sehr bald mit neuen Ergebnissen über endliche Gruppen hervor (vgl. Absch. 9.2). Sein Interesse beschränkte sich jedoch nicht auf die endlichen Gruppen, sondern schloß auch die stetigen Transformationsgruppen ein, so daß er einer der wenigen britischen Mathematiker war, der mit der Theorie der Lie-Gruppen vertraut war. Wohl vertraut mit Cartans Struktursätzen für Lie-Algebren und der Schefferschen Ausarbeitung von Lies *„Vorlesungen über continuirliche Transformationsgruppen“* näherte er sich der Darstellungstheorie für Gruppen, ähnlich wie Molien, über das Studium der Gruppenalgebra, die er jedoch als Lie-Algebra betrachtete. Er deckte einige Zusammenhänge zwischen den kontinuierlichen Gruppen mit n Parametern und den endlichen Gruppen der Ordnung n auf und bewies zahlreiche der grundlegenden Frobeniusschen Theoreme zur Darstellungstheorie neu. Auch wenn Burnside später seine Unabhängigkeit betonte, muß doch



Issai Schur



William Burnside

berücksichtigt werden, daß er bei diesen Arbeiten auch einige der Frobeniusschen Arbeiten kannte. Für eine genaue Analyse dieser Abhängigkeit wie für die gesamte Theorie der Gruppencharaktere sei auf die Arbeiten von Hawkins [Hawkins 1971], [Hawkins 1972] und [Hawkins 1974] verwiesen. Das herausragende Resultat bei der erstmaligen Verwendung der Gruppencharaktere zur Strukturuntersuchung bei Gruppen war die Auflösbarkeit aller Gruppen von ungerader Ordnung kleiner als 40 000.

Von nun an spielte die Theorie der Gruppencharaktere eine wichtige Rolle in der Entwicklung der Gruppentheorie. Frobenius war diesen neuen Anregungen unmittelbar gefolgt und bewies 1901 die Zerlegung der heute als Frobenius-Gruppen bezeichneten Gruppen in ein Produkt aus einem Normalteiler (Frobenius-Kern) und einer Untergruppe, die ihr eigener Normalisator ist, eines der wenigen Resultate aus jener Zeit, das auch später nicht ohne Verwendung der Gruppencharaktere bewiesen werden konnte. 1905 stellte Dickson eine Verbindung zur Körpertheorie her, indem er jedem Fastkörper eindeutig eine gewisse Frobenius-Gruppe zuordnete, so daß die Klassifikation dieser Frobenius-Gruppen jener der endlichen Fastkörper äquivalent war. Unter Fastkörper verstand Dickson eine Menge, die mit zwei Operationen, Addition und Multiplikation, versehen war, in der jedoch die multiplikative Gruppe nicht die gesamte Menge umfaßte und nicht kommutativ war.

Im gleichen Jahr veröffentlichte Issai Schur, ein Schüler von Frobenius, eine Neubegründung der Darstellungstheorie der Gruppen, bei der er wesentlich auf den heute als Schursches Lemma bekannten Satz zurückgriff. Außerdem führte er wichtige neue Ideen und Begriffe in die Algebra ein, die einen spürbaren Einfluß auf die weitere Entwicklung ausübten. Bereits 1901 hatte er in seiner Dissertation die polynomialen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe über dem Körper der komplexen Zahlen mit Methoden bestimmt, die

noch heute in der Theorie der algebraischen Gruppen angewandt werden. Bei der Untersuchung von Darstellungen endlicher Gruppen über algebraischen Zahlkörpern definierte er den später nach ihm benannten Index und in Verbindung mit projektiven Darstellungen den ebenfalls nach ihm benannten Schurschen Multiplikator.

Aus der Fülle von Resultaten zur Darstellungstheorie seien noch zwei allgemeineren Charakters erwähnt: Der Satz von Maschke und die Young-Tableaus. Heinrich Maschke gehörte zu jenen Mathematikern, die am Ende des 19. Jahrhunderts keine Entwicklungschancen in Deutschland sahen und in die USA auswanderten. Er vollzog diesen Schritt 1891 und wirkte ab 1892 in der noch jungen mathematischen Abteilung der Universität Chicago, nachdem er zuvor als Lehrer in Berlin und als Mitarbeiter von Klein in Göttingen tätig war. In Chicago arbeitete er mit Oskar Bolza und Moore zusammen. Anknüpfend an Ergebnisse von Moore über die Existenz einer invarianten Hermiteschen Form für jede endliche Gruppe linearer Transformationen mit komplexen Koeffizienten bewies Maschke 1898 den nach ihm benannten Satz: Jede endliche Gruppe linearer Transformationen ist vollständig reduzibel. Allgemeiner: Jede Darstellung einer endlichen Gruppe über einem Körper der Charakteristik Null oder mit einer zur Gruppenordnung teilerfremden Charakteristik ist vollständig reduzibel. Die Young-Tableaus wurden von dem in Cambridge tätigen Alfred Young eingeführt, der zunächst zur Invariantentheorie arbeitete und sich dann mit der Darstellung der symmetrischen Gruppen und deren Gruppenalgebra beschäftigte. In einer Reihe von Arbeiten verdeutlichte er ab 1900 die Bedeutung der Partitionen für die Darstellungen dieser Gruppen. Jeder Partition der Zahl n entsprach dabei ein Young-Tableau und dieses ist mit einer irreduziblen Darstellung der symmetrischen Gruppe $_n$ verknüpft. Frobenius, der zunächst unabhängig von Young einige Ergebnisse über die Darstellung der symmetrischen Gruppen publiziert hatte, gelang dann 1903 der Nachweis, daß mit Hilfe der Young-Tableaus alle irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppen erhalten werden konnten.

Die Darstellungstheorie fand auch in den folgenden Jahren immer wieder das Interesse der Mathematiker und wurde um viele bemerkenswerte Erkenntnisse bereichert. Sehr bald sollte sie durch ihre Bedeutung für die mathematische Behandlung der Quantenmechanik stärker ins Zentrum der Forschungen von Mathematikern und theoretischen Physikern rücken.

9.5.3 Die algebraische Geometrie

Bereits mehrfach ist auf eine enge Verbindung zwischen algebraischen Vorstellungen und Entwicklungen in anderen Gebieten der Mathematik verwiesen worden, und gewöhnlich hat sich diese gegenseitige Beeinflussung fruchtbringend auf beide Gebiete ausgewirkt. Im 20. Jahrhundert sollte mit der algebraischen Geometrie dann aus einer dieser seit dem Altertum bestehenden Wech-

selbeziehung ein neues eigenständiges Teilgebiet der Mathematik hervorgehen. Im Verlaufe dieses Entwicklungsprozesses kam es zu mehreren tiefliegenden Veränderungen in der Auffassung, was der Gegenstand der algebraischen Geometrie ist. Grundsätzlich ist die algebraische Geometrie ein Teilgebiet der Geometrie und kann sehr grob und ganz allgemein als die Behandlung geometrischer Sachverhalte mit algebraischen Methoden beschrieben werden. In diesem Sinne können ihre Anfänge bis in die Antike zurückverfolgt werden, doch hat sie sich nicht zuletzt durch den Einfluß der abstrakten Algebra zu einer Theorie der Schemata und der algebraischen Räume gewandelt.

Zu den frühen Elementen gehörten das Studium der Kegelschnitte bei Apollonius und später als Kurven zweiter Ordnung bei Descartes und Fermat, die Klassifikation der Kurven dritter Ordnung durch Newton, die Analyse des Schnittverhaltens algebraischer Kurven durch Cramer, Euler und Bézout usw. All diese Probleme wurden innerhalb der Geometrie behandelt, für Details sei der Leser etwa auf [Scriba/Schreiber 2000] und [Kline 1972] verwiesen. In diesen Wechselbeziehungen zwischen Algebra und Geometrie entstanden auch neue algebraische Ideen und Methoden zur Meisterung der geometrischen Probleme. Die Fortschritte in der Eliminations- und der Determinantentheorie in Verbindung mit dem Studium von Kurven und deren Schnittpunkten sind in den Ausführungen zur linearen Algebra schon genannt worden. Das Aufblühen der projektiven Geometrie in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts eröffnete die Möglichkeiten, das Studium höherer Kurven und Flächen zu intensivieren und zahlreiche allgemeine Aussagen über verschiedene Lagebeziehungen bei algebraischen Kurven und Flächen abzuleiten. So schneiden sich zwei Kurven zweiter Ordnung in maximal vier Punkten, und Newtons 72 Typen der Kurven dritten Ordnung ließen sich in drei projektiv verschiedene Klassen einteilen. Der ab 1836 zusätzlich als Professor für Physik an der Universität Bonn tätige und später auch auf physikalischem Gebiet sehr erfolgreiche Mathematiker Julius Plücker analysierte das Schnittverhalten höherer Kurven, klärte mit den sog. Plückerschen Formeln die Beziehungen zwischen der Ordnung und der Klasse einer Kurve sowie verschiedenen Singularitäten der Kurve (Doppelpunkte, Umkehrpunkte) auf und stellte die Ergebnisse 1839 in der *„Theorie der algebraischen Curven“* detailliert dar. Wichtige Themenkreise bildeten die Vorstellungen über geometrische Transformationen, die bis zu Kleins Erlanger Programm führten (vgl. Absch. 8.3.1), und das Dualitätskonzept.

Neue Akzente entstanden durch die sich entwickelnde Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Mit der Theorie der später nach ihm benannten Fläche und den Untersuchungen zur Klassifikation aller meromorpher Funktionen auf diesen Flächen stieß Riemann ab den 50er Jahren des 19. Jahrhunderts in völlig neue Gebiete vor und brachte eine Fülle neuer Fragestellungen und Ideen hervor. Er charakterisierte diese Funktionen durch ihre Singularitäten und ihre *„Perioden“* auf den Riemannschen Flächen und unterschied die Funktionen in drei Gattungen, wobei er erstmals auch topo-



Julius Plücker



Alfred Clebsch

logische Vorstellungen verwendete. In diesen Studien führte er den Begriff der birationalen Transformation zwischen zwei Funktionen ein (oder zwischen zwei irreduziblen algebraischen Kurven, wie man bei Betonung einer geometrischen Sprechweise sagen würde), die sich in entsprechenden Relationen der zugehörigen Riemannschen Flächen niederschlug und dann zur Bildung von Äquivalenzklassen von Kurven bzw. Flächen Anlaß gab. Zwischen zwei algebraischen Kurven $F(x, y)$ und $F_1(x_1, y_1)$ liegt eine birationale Transformation vor, wenn die Unbestimmten x, y und x_1, y_1 durch rationale Funktionen in einander überführt werden (d. h. $x_1 = \varphi(x, y)$, $y_1 = \eta(x, y)$ und umgekehrt $x = \nu(x_1, y_1)$, $y = \mu(x_1, y_1)$ mit rationalen Funktionen φ, η, ν und μ). Dabei unterschied man sehr bald zwischen Transformationen, die nur die beiden Kurven eineindeutig aufeinander abbilden, und jenen, welche die ganze Fläche eineindeutig abbilden. Letztere Transformationen werden Cremona-Transformationen genannt, nach dem italienischen Mathematiker Luigi Cremona, der 1854 erstmals derartige Abbildungen einführte und untersuchte. Die Bestimmung der Invarianten dieser Äquivalenzklassen bei birationalen Transformationen wurde eines der zentralen Forschungsziele der algebraischen Geometrie. Eine erste Invariante hatte Riemann mit dem (topologischen) Geschlecht p einer Fläche bzw. algebraischen Funktion gefunden und dann zu gegebenen p die verschiedenen Äquivalenzklassen an Hand der Verzweigungsstruktur der entsprechenden Riemannschen Flächen beschrieben. Den Begriff *„Geschlecht“* prägte Clebsch, der, nach vergeblichen Bemühungen die Riemannschen Ideen zu verstehen, einen eigenen Aufbau der Abelschen Funktionen gab und 1863, mit der Aufsehen erregenden Arbeit *„Über die Anwendung der Abelschen Integrale in der Geometrie“* beginnend, die Verbindung zur Theorie der algebraischen Kurven herstellte. Für diesen funktionentheoretischen Zugang zur algebraischen Geometrie hat



Alexander Willhelm von Brill



Emanuel Lasker

er dann Grundlegendes geleistet, u. a. arbeitete er die Bedeutung des Geschlechts für die Klassifikation der algebraischen Kurven klar heraus. Daneben war er ab etwa 1865 zusammen mit Gordan an der Schaffung eines sog. algebraisch-geometrischen Zugangs zur algebraischen Geometrie beteiligt. Gemeinsam leiteten sie bekannte und neue Sätze mit algebraischen Methoden ab. Viele der Lücken in ihren oft unvollständigen Beweisen wurden ab 1871 von Alexander Brill und Max Noether geschlossen. 1874 bewiesen letztere u. a. algebraisch den Satz von Riemann-Roch und die Invarianz des Geschlechts bei birationalen Abbildungen sowie den Brill-Noetherschen Restsatz. Bei dem Ausbau der Theorie der algebraischen Kurven konzentrierten sie sich auf die ebenen algebraischen Kurven mit einfachen Singularitäten und glaubten, nicht zuletzt auf Grund zweier von ihnen entdeckter Transformationstheoreme, daß man die Kurven mit komplizierteren Singularitäten als Grenzfälle dieser einfacheren Kurven erhalten könne. Außerdem arbeiteten Cayley, Clebsch und Noether erste deutliche Unterschiede zwischen der Theorie der algebraischen Kurven und der der algebraischen Flächen heraus. Um 1890 bildete sich dann die italienische Schule der algebraischen Geometrie unter der Leitung von Guido Castelnuovo, Frederigo Enriques und dem etwas später dazu kommenden Francesco Severi heraus und verallgemeinerte den Brill-Noetherschen Zugang zum Studium von algebraischen Flächen und höherdimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeiten (Varietäten).

Zu Beginn der 80er Jahre des 19. Jahrhunderts wurde mit mehreren Publikationen ein dritter, der sog. arithmetische oder algebraisch-zahlentheoretische Zugang zur Theorie der Abelschen Funktionen von Kronecker, Dedekind und Weber geschaffen, wobei die Forschungen teilweise weiter zurückreichen. Gelegentlich werden auch einige der von Weierstraß in Vorlesungen vorgetragenen Ergebnisse zu dieser Richtung gerechnet. Stärker als in der zuvor skiz-

zierten Richtung konzentrierten sich diese Mathematiker auf die Benutzung algebraischer Begriffe und Methoden. Grundlegend war die Analogie zwischen den algebraischen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers und den algebraischen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche. Das Bestreben, die in der Theorie der algebraischen Zahlen erkannten Sachverhalte auf algebraische Funktionen zu übertragen, hat die Herausbildung abstrakter algebraischer Begriffe und einer ebensolchen Darstellungsweise stark gefördert. Die Ergebnisse von Kronecker, Dedekind und Weber bildeten Meilensteine auf dem Weg zur abstrakten Algebra, aber auch zur modernen algebraischen Geometrie, die Arbeiten [Kronecker 1882] und [Dedekind/Weber 1882] sind in ihrer Bedeutung für die Algebra bereits besprochen worden. (vgl. Abschn. 9.3) Die sich hier offenbarende Brücke zwischen algebraischer Zahlentheorie, Algebra und algebraischer Geometrie mag manchen vielleicht zunächst in Erstaunen versetzen, doch wird das Bild klarer, wenn man sich vergegenwärtigt, daß das Anliegen der algebraischen Geometrie vereinfacht als das Studium der Lösungsmenge von Polynomgleichungssystemen $f_i(x_1, ...x_n) = 0$ $(i = 1, 2, ... m)$ in mehreren Unbestimmten beschrieben werden kann, daß also algebraische Varietäten durch Polynomideale erzeugt werden. Eine solche Beschreibung regt zugleich die geometrische Interpretation der Aufgabe als Schnitt $(n-1)$-dimensionaler Flächen im n-dimensionalen Raum an. Für die Bestimmung der Lösungsmenge von Polynomgleichungen waren sowohl Eliminationsmethoden als auch die Eigenschaften von Polynomen und von Zahlen der Lösungsmenge von Interesse. Dies führte u. a. zu den eliminationstheoretischen Methoden, wie sie von Kronecker und seinen Schülern entwickelt wurden, und zu Ergebnissen in der Theorie der Polynomideale. Zu letzteren gehören Hilberts Nullstellensatz, daß für ein Polynom g, das in allen gemeinsamen Nullstellen der Polynome $f_i(x_1, ...x_n) = 0$ $(i = 1, 2, ... m)$ verschwindet, eine ganze Zahl s und Polynome c_i existieren, so daß $g^s = \sum c_i f_i$ gilt, sowie die Sätze von Emanuel Lasker (1868–1941, einst Weltmeister im Schach) und Francis Sowerby Macaulay (1862–1937) über die Zerlegung von Idealen in Primärideale. Diese Mathematiker setzten den von Kronecker eröffneten Weg fort, geometrische Eigenschaften von Varietäten in eine algebraische Sprache zu übertragen.

So hat die algebraische Geometrie mit vielen Fragestellungen algebraische Forschungen angeregt und ein großes Reservoir zur Anwendung neuer algebraischer Erkenntnisse bereitgestellt. Mit der fortschreitenden Etablierung der abstrakten Algebra im 20. Jahrhundert vollzog auch die algebraische Geometrie eine Wendung zur abstrakten Theorie, wodurch nicht zuletzt die skizzierten unterschiedlichen Zugänge auf eine einheitliche Basis gestellt wurden.

Wichtige Ereignisse der Algebraentwicklung 1871–1920

1876 E. I. Zolotarev verfaßt einen Zugang zur Theorie der algebraischen Zahlen, der die Idee der $p-$adischen Zahlen benutzt.
1878 A. Cayley formuliert erneut eine abstrakte Definition der endlichen Gruppe.
1878 G. Frobenius entwickelt eine umfassende Matrizentheorie, wobei er u. a. den Matrizenkalkül mit der Elementarteilertheorie vereinigt.
1878 G. F. Frobenius gibt die möglichen assoziativen Divisionsalgebren an. Das Resultat wird unabhängig auch von C. S. Peirce erzielt und 1881 publiziert.
1879 G. Frobenius und L. Stickelberger leiten den Basissatz für abelsche Gruppen ab.
1879 G. Cantor publiziert bis 1884 die Grundlagen der Mengenlehre.
G. Frege entwickelt in der „Begriffsschrift“ die erste vollständig formalisierte Sprache zum exakten Aufbau der Mathematik.
1880 R. Dedekind und H. Weber vollenden ihre Arbeit zur Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, die 1882 erscheint.
1881 J. W. Gibbs entwickelt eine Vektoranalysis.
1882 W. v. Dyck gibt eine abstrakte axiomatische Definition der Gruppe an.
L. Kronecker veröffentlicht seine allgemeine Theorie der algebraischen Größen.
1887 G. Frobenius gibt einen abstrakten Beweis der Sylowschen Sätze.
1888–1893 S. Lie publiziert mit Unterstützung seiner Schüler sein dreibändiges grundlegendes Werk „Theorie der Transformationsgruppen“.
1888 D. Hilbert formuliert einen reinen Existenzbeweis für ein endliches vollständiges Fundamentalsystem für ein endliches System n-ärer Formen k-ten Grades.
1889 O. Hölder verschärft die Ergebnisse Jordans zum Satz von Jordan-Hölder.
1890 E. Schröder faßt seine Ergebnisse in der dreibändigen „Algebra der Logik“ zusammen.
1891 S. Lie präzisiert die Gruppendefinition durch die Axiome zur Existenz des Einselements und des inversen Elements.
1893 H. Weber veröffentlicht eine allgemeine Darstellung der Galois-Theorie als Theorie der Körpererweiterungen. Dabei definiert er Gruppen- und Körperbegriff axiomatisch.
1893 D. Hilbert publiziert den nach ihm benannten Basissatz.
1893 O. Heaviside und A. Föppl verhelfen durch die Verwendung der Vektoranalysis in Darstellungen zur Elektrodynamik der Vektorrechnung zum Durchbruch.
1894 R. Dedekind gibt im XI. Supplement seiner Idealtheorie und der Galois-Theorie als Theorie der Körpererweiterungen eine abschließende Gestalt.
1895 G. Cantor veröffentlicht bis 1897 eine überarbeitete Zusammenfassung der Mengenlehre einschließlich der Theorie transfiniter Mengen.
1896 G. Frobenius beginnt mit dem Aufbau der Theorie der Gruppencharaktere.
1897 W. Burnside publiziert seine Monographie zur Theorie der endlichen Gruppen.
D. Hilbert vollendet seinen „Zahlbericht“.
1897 R. Dedekind legt in den Arbeiten über Dualgruppen seine Ergebnisse über Verbände vor.
1898 A. N. Whitehead publiziert seine Übersicht über die „universelle Algebra“.
1898 A. Hurwitz beweist, daß die Normgleichung nur für Systeme mit 1, 2, 4 oder 8 Basiseinheiten erfüllt wird.
1900 D. Hilbert benennt in einem Vortrag auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Paris 23 Probleme für die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert.
1913 J. A.Kürschak führt den Begriff des bewerteten Körpers ein und weist die Existenz der Komplettierung eines Körpers nach.
1914 A. Fraenkel gibt eine axiomatische Definition des Ringbegriffs.
1918 A. Ostrowski bestimmt alle Bewertungen des Körpers der rationalen Zahlen.

9.6 Aufgaben zu Kapitel 9

Aufgabe 9.2.1: Darstellung endlicher Gruppen als Permutationsgruppen
Ein wichtiges Resultat beim Studium der Permutationsgruppen bildete die Einsicht, daß jede abstrakte Gruppe endlicher Ordnung als Permutationsgruppe dargestellt werden kann. Seien a_1, a_2, ... , a_n die Elemente einer endlichen Gruppe der Ordnung n, dann ist das Produkt $a_i a_k$ zweier Gruppenelemente wieder ein Element der Gruppe, das mit $a_{(i,k)}$ bezeichnet werden soll, also $a_i a_k = a_{(i,k)}$. Für einen beliebig gewählten Index k $(1 \leq k \leq n)$ durchlaufen die Produkte $a_1 a_k$, $a_2 a_k$, ..., $a_n a_k$ alle Gruppenelemente. Mit der obigen Bezeichnungsweise sind diese Produkte gleich $a_{(1,k)}$, $a_{(2,k)}$, ..., $a_{(n,k)}$ und die Indizes $(1,k)$, $(2,k)$, ... , (n,k) sind eine Permutation der Ziffern 1, 2, ..., n. Ordnet man nun dem Gruppenelement a_k die Permutation $\pi_k = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ (1,k), & (2,k), & \ldots, & (n,k) \end{pmatrix}$ zu, so wird dadurch eine eineindeutige Zuordnung zwischen dem Gruppenelement und der Permutation π_k definiert.

Man zeige, daß dem Produkt $a_i a_k$ der Gruppenelemente das Produkt $\pi_i \pi_k$ der Permutationen entspricht und die Permutationen eine Darstellung als Permutationsgruppe liefern. [Perron, Bd. 2, S. 108]

Aufgabe 9.2.2: Ein Satz von Dyck
Man beweise den von W. Dyck angegeben Satz: Seien die Gruppen G_1 und G_2 durch definierende Relationen in derselben Menge von Erzeugenden gegeben. Jede definierende Relation von G_1 komme unter den definierenden Relationen von G_2 vor. Dann ist G_2 einer Faktorgruppe von G_1 isomorph.

Aufgabe 9.2.3: Automorphismengruppe
Man beweise: Die Gesamtheit aller Automorphismen eines Ringe bildet eine Gruppe, die Automorphismengruppe des Ringes. Die Verknüpfung wird durch die Hintereinanderausführung der Automorphismen im Sinne von Abbildungen gegeben.[Lugowski, II, S. 38]

Aufgabe 9.3.1: Hauptidealringe
Das von einem Element a des Ringes R erzeugte Ideal $A = (a)$ wird als Hauptideal bezeichnet. Es besteht aus allen Ausdrücken der Form $ra + na$ mit r aus R und einer ganzen Zahl n. Die Ringe, in denen jedes Ideal ein Hauptideal ist, werden besonders ausgezeichnet und heißen Hauptidealringe. Man zeige, daß der Ring G der ganzen Zahlen und der Ring $K[x]$ der Polynome in einer Unbestimmten x über einem (kommutativen) Körper K Hauptidealringe sind.

Aufgabe 9.3.2: Ideale in Ringen
Für ein fest gewähltes Element a aus einem kommutativen Ring R bilde man die Menge $(a) = \{ra + ga$, mit r aus R und g eine ganze Zahl$\}$. Man beweise: (a) ist ein Ideal in R, das von a erzeugte Ideal, und es ist das kleinste Ideal von R, das a enthält.[Lugowski, II, S. 29]

Aufgabe 9.3.3: Primfaktorzerlegung in enklidischen Ringen
Die aus der Arithmetik bekannte (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutige Darstellbarkeit einer ganzen Zahl als Produkt von Primzahlpotenzen regte die

Mathematiker immer wieder zu Verallgemeinerungen an. Man zeige, daß die Aussage allgemein für sog. euklidische Ringe gilt. Dabei heißt ein kommutativer Ring R euklidisch, wenn jedem Ringelement $a \neq 0$ eine nicht negative ganze Zahl $g(a)$ zugeordnet werden kann mit den Eigenschaften:

Für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ ist $ab \neq 0$ und $g(ab) \geq g(a)$.

Zu je zwei Ringelementen a, b ($a \neq 0$) gibt es Elemente q, r aus R, so daß $b = aq + r$ ist, wobei entweder $r = 0$ ist oder $g(r) < g(a)$ gilt.

Hinweis: Man zeige zunächst, daß in R für einen echten Teiler b des Elementes a gilt: $g(b) < g(a)$; und leite dann durch Induktion nach $g(a)$ die Zerlegung jedes von Null verschiedenen Elementes in ein Produkt von Primelementen ab. Schließlich beweist man noch die Eindeutigkeit der Zerlegung.

(Einen vollständigen Beweis findet man in [Waerden 1930, 1931, Bd. 1, S. 70ff.]

Aufgabe 9.3.4: Primfaktorzerlegung in Polynomringen

Die obige Aussage über die eindeutige Zerlegung eines Ringelementes in ein Produkt von Primfaktoren läßt sich verallgemeinern. Wie im vorangegangenen Kapitel dargelegt wurde, war es das herausragende Ergebnis der Dedekindschen Idealtheorie, die eindeutige Zerlegbarkeit jedes im Ring der ganzen algebraischen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers enthaltenen Ideals in ein Produkt von endlich vielen Primidealpotenzen nachzuweisen. Der Beweis dieser Aussage würde den Rahmen dieser Darlegungen sprengen, doch soll wenigstens eine andere, auf Gauß zurückgehende Verallgemeinerung formuliert werden: Gilt in einem kommutativen nullteilerfreien Ring R mit Einselement der Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primfaktoren, so ist er auch für den Polynombereich $R[x]$ richtig.

Zum Beweis zerlegt man ein beliebiges Polynom $f(x)$ aus $[x]$ in den Inhalt und ein primitives Polynom, d. h. $f(x) = dp(x)$. Dabei ist der Inhalt d als der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten von f definiert und p bezeichnet ein Polynom vom Inhalt Eins. Zu vorgegebenen $f(x)$ sind d und $p(x)$ bis auf Einheitsfaktoren eindeutig bestimmt. Mittels indirekten Beweis zeige man durch Betrachtung der auftretenden Koeffizienten, daß das Produkt zweier primitiver Polynome wieder ein primitives Polynom ist.

Der weitere Beweis basiert auf folgender Idee: Da R ein kommutativer nullteilerfreier Ring ist, kann man dazu einen eindeutig bestimmten Quotientenkörper Q_R konstruieren. In dem Polynombereich $Q_R[x]$ gilt die eindeutige Zerlegung in Primfaktoren. Die Frage ist nun, ob man eine Beziehung zwischen den Polynomen in $Q_R[x]$ und $R[x]$ so herstellen kann, daß sich die Zerlegung überträgt.

Dazu schreibt man jedes Polynom $\phi(x)$ aus $Q_R[x]$ in der Form $f(x)/b$ mit $f(x)$ aus $R[x]$ und b aus R und wobei b das Produkt aller Nenner der Koeffizienten von $\phi(x)$ ist. Ist p das zu f gehörige primitive Polynom und d der Inhalt von f, so erhält man die Darstellung $\phi(x) = (d/b)f(x)$. Man beweise, daß dies die gesuchte Zuordnung liefert. Genauer: Das primitive Polynom $p(x)$ ist eindeutig bis auf Einheiten in R durch $\phi(x)$ bestimmt und umgekehrt ist $\phi(x)$ durch $p(x)$ bis auf Einheiten in $Q_R[x]$ festgelegt. Dem Produkt zweier Polynome $\phi(x)$ und $\psi(x)$ aus $Q_R[x]$ entspricht dann bis auf Einheiten das Produkt der zugehörigen Einheitsformen und umgekehrt. Weiterhin folgt aus der Unzerlegbarkeit von $\phi(x)$ in $Q_R[x]$ die Unzerlegbarkeit von $p(x)$ in $R[x]$ und umgekehrt.

Nach dem Beweis dieser Behauptung kann mittels obiger Zuordnung die Primfaktorzerlegung der Polynome $\phi(x)$ auf die primitiven Polynome $p(x)$ übertragen

werden. Um den Beweis abzuschließen, stellt man fest, daß ein beliebiges Polynom $f(x)$ aus $R[x]$ entweder eine unzerlegbare Konstante oder ein unzerlegbares primitives Polynom oder als Produkt seines Inhaltes mit einem primitiven Polynom geschrieben werden kann. Im letzten Fall zerlegt man beide Faktoren getrennt in Primfaktoren und erhält die gesuchte Zerlegung. (Die Zerlegung des Inhaltes ist nach Voraussetzung über R eindeutig bis auf Einheiten möglich, die Zerlegung des primitiven Polynoms folgt aus obiger Konstruktion.) Man führe die angedeuteten Beweisschritte im Detail aus. [Waerden 1930, 1931, Bd. 1, § 21]

Aufgabe 9.3.5: Homomorphiesatz für Ringe
Gegeben sei ein Homomorphismus f des Ringes R auf den Ring S mit dem Kern $K = \{a \in R : f(a) = 0\}$. Sei $[a]$ die Restklasse von $a \in R$ bezüglich K und $a' = f(a)$. Man zeige: Dann ist die Abbildung φ mit $\varphi(a') = [a]$ ein Isomorphismus von S auf R/K.

Aufgabe 9.3.6: Separable Polynome
Sei K ein Körper und $K[x]$ der Polynomring über K. Ein irreduzibles Polynom $f(x)$ aus $K[x]$ heißt separabel, wenn es nur einfache Nullstellen besitzt, sonst inseparabel. Man beweise, daß $f(x)$ genau dann inseparabel ist, wenn $f'(x) = 0$ gilt.
Hinweis: Man benutze die Aussage, daß ein Polynom $f(x) \neq 0$ aus $K[x]$ genau dann keine mehrfache Nullstelle hat, wenn $f(x)$ und $f'(x)$ teilerfremd sind.

Aufgabe 9.4.1: Ideale eines Körpers
Man zeige, daß ein Körper nur die trivialen Ideale besitzt, das Nullideal und sich selbst.

Aufgabe 9.4.2: Typen von Primkörpern
Man beweise, daß (bis auf Isomorphie) nur die zwei von Steinitz angegebenen Typen von Primkörpern, der Körper der rationalen Zahlen und die Restklassenkörper der ganzen Zahlen modulo einer Primzahl p, existieren.
Hinweis: Man betrachte die Menge der Vielfachen des Einselements. [Steinitz, S. 18]

Aufgabe 9.4.3: Endliche Körpererweiterung
Man beweise den Steinitzschen Satz: Jede endliche Körpererweiterung ist algebraisch.

Aufgabe 9.4.4: Durchschnitt von Unterkörpern
Man beweise, daß der Durchschnitt D von beliebig vielen Unterkörpern eines Körpers K wieder ein Unterkörper von K ist.

Aufgabe 9.4.5: Körper von Primzahlcharakteristik
In seiner Klassifikation der Körper zeigte Steinitz den Satz: Die $p-$te Potenz aller Elemente eines Körpers K von der Charakteristik p bilden einen Körper K^p. Ist der Körper K vollkommen, so ist K^p mit K identisch, sonst nur ein Teil von K. Man erhält eine isomorphe Beziehung zwischen K und K^p, indem man jedem Element von K seine $p-$te Potenz zuordnet. Man beweise diesen Satz.
Hinweis: Steinitz wies zunächst nach, daß ein Körper der Charakteristik p (p Primzahl) vollkommen ist, wenn sich in ihm die Ausziehung der p-ten Wurzel (die sich

hier als eindeutige Operation erweist) ausnahmslos ausführen läßt, sonst unvollkommen. [Steinitz, S. 50ff.]

Aufgabe 9.4.6: Homomorphe Bilder eines Körpers
Man gebe die homomorphen Bilder eines Körpers an.

Aufgabe 9.4.7: p-adische Darstellung natürlicher Zahlen
Man beweise den von Hensel in seiner Einführung in die Theorie der $p-$adischen Zahlen formulierten Satz: Jede natürliche Zahl g läßt sich auf eine einzige Weise nach steigenden Potenzen der Primzahl p entwickeln, d. h. so in der Form $g = a_0 + a_1 p + ... + a_s\ p^s$ darstellen, daß die Koeffizienten a_i eindeutig bestimmte Zahlen der Reihe 0, 1, ... , $p - 1$ sind. [Hensel, Bd. 1]

Aufgabe 9.4.8: Entwicklung natürlicher Zahlen als p-adische Zahlen
Man entwickle 216 als p-adische Zahl für $p = 2$, 3, und 5.

Aufgabe 9.4.9: Rechnen mit p-adischen Zahlen
Als abkürzende Bezeichung für eine p-adische Zahl $g = a_0 + a_1 p + \ldots + a_s p^s$ schrieb Hensel $g = a_0 a_1 a_2 \ldots a_s$ Man überlege sich, daß eine p-adische Zahl g ungeändert bleibt, wenn man zwei aufeinanderfolgende Ziffern a_i, a_{i+1} durch $a_i + p$, $a_{i+1} - 1$ ersetzt.

Unter Berücksichtigung dieser Regel bestimme man für die p-adischen Zahlen mit $p = 5$ die folgende Summe bzw. Differenz:

$2, 3102114 + 3, 14120213$ sowie $3, 1300231 - 4, 2432340$.

Hinweis: Die Operationen werden von links nach rechts ausgeführt.[Hensel, Bd. 1]

10 Die Algebra im 20. Jahrhundert



1921	Freistaat Irland gegründet
1921	F. G. Banting isoliert mit Mitarbeitern das Insulin.
1921	Politische Neuordnung in verschiedenen Staaten Kleinasiens
1922	Gründung der UdSSR
1922	Neunmächteabkommen über Öffnung Chinas, Viermächteabkommen über Besitzstände im Pazifik
1923	A. H. Compton / L.-V.-P. de Broglie: physikalische Objekte haben sowohl Teilchen- als auch Wellencharakter.
1923	Atatürk wird erster Präsident der türkischen Republik.
1923	Th. H. Morgan publiziert mit seinen Mitarbeitern eine grundlegende Zusammenfassung der Ergebnisse zur Chromosomen-Theorie der Vererbung.
1924	J. V. Stalin übernimmt die Macht in der Sowjetunion und errichtet ein totalitäres Regime.
1927	Ch. A. Lindbergh überfliegt erstmals im Non-Stop-Flug den Nordatlantik.
1927	Einrichtung von überseeischen Funksprechverbindungen
1927	Erster erfolgreicher Tonfilm in den USA
1928	Grundlegende Fortschritte in der Quantenphysik durch N. Bohr (Komplementaritätsprinzip), W. Heisenberg (Unbestimmtheitsrelation), P. Dirac (relativistische Quantenphysik) und A. Sommerfeld (Elektronentheorie der Metalle)
Ab 1928	militärische Auseinandersetzungen zwischen Japan und China
1929–1933	Weltwirtschaftskrise
1929	Erste Fernsehsendung in Berlin, ein Jahr später erste drahtlose Übertragung
1933	Nationalsozialistische Partei übernimmt die Macht in Deutschland.
1938	Entdeckung der Kernspaltung am Uran durch O. Hahn, L. Meitner und F. Straßmann
1939–1945	Zweiter Weltkrieg
1941	K. Zuse baut den ersten funktionstüchtigen programmgesteuerten eletromechanischen Rechner.
1945	Atombombenabwürfe auf Hiroshima und Nagasaki. Die verheerenden Folgen führen bei vielen Gelehrten zu einem Umdenken bezüglich der Verantwortung der Wissenschaftler.
1945	Gründung der Vereinten Nationen (UNO)
1946	Beginn des Kalten Krieges
1949	Gründung der BRD und der DDR
1950	Beginn der Kriege in Indochina und Korea
1957	Die Sowjetunion startet den ersten künstlichen Satelliten „Sputnik I“. Die USA starten ein umfangreiches Programm, um die Rückstände in der Weltraumforschung aufzuholen.
1961	Erster bemannter Raumflug durch den Kosmonauten J. Gagarin
1965	Die Leistungsfähigkeit der Computer wird duch den Einsatz integrierter Schaltkreise wesentlich erhöht.
1975	Einsatz von Computern mit Mikroprozessoren
1989	Ende des Kalten Krieges, Zusammenbruch der sozialistischen Gesellschaftssysteme in Mittel- und Osteuropa

10.0 Vorbemerkungen

Bevor in diesem abschließenden Kapitel die Entwicklung der Algebra im 20. Jahrhundert skizziert werden soll, erscheint es angebracht, wenigstens schlaglichtartig mit einigen Bemerkungen den historischen Hintergrund anzudeuten, vor dem diese Entwicklung stattfand.

An erster Stelle ist dabei der dominierende Einfluß der beiden schrecklichen Weltkriege zu nennen, in denen die Zahl der Opfer eine neue, bisher unvorstellbare Größenordnung erreichte und in denen ein riesiges Wirtschaftspotential vernichtet wurde. Mit dem Einsatz der Atombomben im August 1945 wurde auf grausame Weise deutlich, daß die Kriegstechnik einen die Existenz der Menschheit bedrohenden Stand erreicht hatte. Die Gefahr eines Atomkrieges blieb in der folgenden Auseinandersetzung der Gesellschaftssysteme im sog. Kalten Krieg lange Zeit latent. Der große Anteil von Wissenschaftlern an der Herstellung von Waffen und Waffensystemen, speziell am Bau der Atombombe, vergrößerte die Furcht vor und das Mißtrauen gegenüber den Wissenschaften bis hin zu wissenschaftsfeindlichen Haltungen. Für viele Gelehrte wurden die verheerenden Folgen der Atombombenabwürfe auf Hiroshima und Nagasaki zu einem Schlüsselereignis, um über die Nutzung der Ergebnisse ihrer wissenschaftlichen Forschungen genauer nachzudenken und um künftig zu versuchen, deren mißbräuchliche Verwendung zu verhindern.

Der Einfluß von Naturwissenschaften, Technik und Mathematik auf das Voranschreiten der Wirtschaft hat sich ständig weiter erhöht und ist heute allgegenwärtig. Die Wissenschaften sind zur unverzichtbaren Voraussetzung und zum Bestandteil des Produktionsprozesses geworden. Grundlegende wirtschaftliche Umwälzungen des 20. Jahrhunderts hatten ihren Ursprung in den Naturwissenschaften und der Mathematik. Entsprechend verstärkte sich auch die Korrelation zu Ereignissen in Ökonomie und Gesellschaft. Das Auf und Ab der Wirtschaftszyklen zeigte auch in den Wissenschaften deutliche Spuren. Die Professionalisierung der Wissenschaften erreichte ungeahnte Ausmaße. Der Beruf des Mathematikers wurde zu einem Massenberuf, mit fließenden Übergängen zu den Computerwissenschaften/Informatik, zur Betriebswirtschaftslehre, zu den ingenieurwissenschaftlichen Richtungen, zur Finanzwirtschaft u. a. Doch obwohl die wachsende Bedeutung der Mathematik und Naturwissenschaften unbestritten war und ist, sahen sich diese Wissenschaften wiederholt mit einer abnehmenden Bereitschaft konfrontiert, ihre allseitige Entwicklung zu finanzieren. Statt dessen sollten vorwiegend die gewinnträchtigen Richtungen gefördert werden. Auch dieser äußere Druck hatte zur Folge, daß die Mathematiker sich im größeren Umfang als zu Beginn des Jahrhunderts mit Fragen der angewandten Mathematik beschäftigten.

Die Geisteshaltung der Zeit erfuhr ebenfalls einen durchgreifenden Wandel. Durch die Relativitätstheorie verloren Raum und Zeit ihren absoluten Charakter. Die Erkenntnisse der Elementarteilchenphysik untergruben die Jahrhunderte alte Denkstruktur von Ursache und Wirkung, da hier das Kausal-

gesetz nicht anwendbar war. Doch waren diese Resultate im Detail mit dem Alltagsbewußtsein nicht mehr erfaßbar, die Kluft zwischen den hochspezialisierten Wissenschaften und dem Verständnis in breiten Kreisen der Bevölkerung wurde immer größer und galt zunehmend als unüberbrückbar. Auch innerhalb der einzelnen Wissenschaften verstärkte sich das Spezialistentum in teilweise beängstigendem Maße. In den Geistes-, Sozial- und Kunstwissenschaften fand diese Entwicklung in eigenen Systemen ihren Ausdruck. In der Philosophie entstanden verschiedene Grundströmungen, denen die Untersuchung der menschlichen Sprache als Aufgabe gemeinsam war und die als Analytische Philosophie, Logischer Positivismus, Common-Sense-Philosophy u. a. bekannt wurden. Einer ihrer Forschungsgegenstände war auch die logische Analyse wissenschaftlicher Aussagen und Prinzipien zu deren Verifikation.

In den 70er Jahren erhielten Umweltprobleme einen nennenswerten Stellenwert im öffentlichen Bewußtsein. Erst allmählich begannen die Menschen zu akzeptieren, daß der gewaltige Wissenszuwachs der vorangegangenen 150 Jahre durch einen riesigen materiellen Aufwand erkauft worden war und das ungeheure Wirtschaftswachstum in diesen Jahren auch eine ganze Reihe negativer Auswirkungen hatte. Die Lösung dieser Probleme erforderte ein globales Handeln der Menschen und mit dem Zurückstellen regionaler Interessen eine grundlegende Umorientierung im öffentlichen Bewußtsein. Neben einem allgemeinen Vertrauen in die Leistungsfähigkeit der Wissenschaften bei der Lösung der globalen Menschheitsprobleme wuchs die Angst und Skepsis vor der Verwertung wissenschaftlicher Resultate. Immer stärker trat die Frage in den Vordergrund, ob das technisch Machbare auch realisiert werden sollte oder ob der jeweilige Eingriff in die Natur tatsächlich zum Wohle und Fortschritt der Menschheit beiträgt. Eine Problematik, die unverändert aktuell ist und in deren Diskussion, wie z. B. die Frage der Gentechnologie zeigt, sehr gegensätzliche Meinungen vertreten werden.

Die Mathematik hat vor diesem Hintergrund die am Ende des 19. Jahrhunderts begonnene Wandlung zum Denken in Begriffen und neuen Strukturen fortgesetzt und vollendet. Die Fundamente wurden methodologisch, logisch und philosophisch tiefer gelegt, mit der Mengenlehre kam ein neuer tragender Bestandteil hinzu. Zugleich eröffneten sich neue Möglichkeiten, da die Gegenstände der Forschung nun nicht mehr eine unmittelbare Entsprechung in der materiellen Welt haben mußten. Das Austesten dieser Möglichkeiten erwies sich als außerordentlich erfolgreich und brachte zahlreiche neue abstrakte Begriffe und Theorien hervor. Neben der axiomatischen Fundierung und dem Ausbau der Mengenlehre erreichten die Abstraktionen speziell auf dem Gebiet der Analysis ein beachtliches Niveau, die in die Funktionalanalysis und in die mengentheoretische Topologie mit der Theorie der topologischen Räume einmündeten. Die Theorie der Riemannschen Flächen erhielt durch Hermann Weyl eine feste Basis. Die Verästelung der Mathematik in immer neue Spezialgebiete setzte sich fort. Nach der Mitte des 20. Jahrhunderts erreichte das Wachstum der Mathematik ein solches Tempo, daß sich

etwa alle zwölf Jahre die Zahl der publizierten mathematischen Arbeiten verdoppelte, ähnlich schnell nahm die Zahl der aktiv tätigen Mathematiker zu. Für das Jahr 2000 schätzt man die Zahl der mathematischen Arbeiten auf etwa 100 000. Schon Hilbert hatte in seinem Vortrag auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Paris im Jahre 1900 das Problem des Zerfalls in mehrere Spezialgebiete gesehen und leidenschaftlich für die Einheit der Mathematik plädiert:

„... es drängt sich uns die Frage auf, ob der Mathematik einst bevorsteht, was anderen Wissenschaften längst widerfahren ist, nämlich daß sie in einzelne Teilwissenschaften zerfällt, deren Vertreter kaum noch einander verstehen und deren Zusammenhang daher immer loser wird. Ich glaube und wünsche dies nicht; die mathematische Wissenschaft ist meiner Ansicht nach ein unteilbares Ganzes, ein Organismus, dessen Lebensfähigkeit durch den Zusammenhang seiner Teile bedingt wird. Denn bei aller Verschiedenheit des mathematischen Wissenstoffes im einzelnen gewahren wir doch sehr deutlich die Gleichheit der logischen Hilfsmittel, die Verwandtschaft der Ideenbildungen in der ganzen Mathematik und die zahlreichen Analogien in ihren verschiedenen Wissensgebieten. Auch bemerken wir: je weiter eine mathematische Theorie ausgebildet wird, desto harmonischer und einheitlicher gestaltet sich ihr Aufbau, und ungeahnte Beziehungen zwischen bisher getrennten Wissenszweigen werden entdeckt. So kommt es, daß mit der Ausdehnung der Mathematik ihr einheitlicher Charakter nicht verloren geht, sondern desto deutlicher offenbar wird.“ [Hilbert 1971, S. 79]

50 Jahre später stellte Jean Dieudonné im Namen der Bourbaki-Gruppe die gleiche Frage:

„... whether the domain of mathematics is not becoming a tower of Babel, in which autonomous disciplines are being more and more widely separated from one another, not only in their aims, but also in their methods and even in their language.“ [Bourbaki 1950, S. 221] Auch die Antwort war ähnlich, wobei er die Hilbertschen Argumente unter dem Begriff der axiomatischen Methode zusammenfassen konnte:

„Today, we believe however, that the internal evolution of mathematical science has, in spite of appearance, brought about a closer unity among its different parts, so as to create something like a central nucleus that is more coherent than it has ever been. The essential part of this evolution has been the systematic study of the relations existing between different mathematical theories, and which has led to what is generally known as the ‚axiomatic method‘.“ [Bourbaki 1950, S. 221]

Unter maßgeblicher Beteiligung der Bourbaki-Gruppe hatte die Mathematik zu diesem Zeitpunkt durch das Strukturkonzept eine neue Gestalt bekommen. Das Studium von Strukturen war für mehrere Jahrzehnte zum Hauptgegenstand der Mathematik geworden. Als Ergebnis eines fast ein Jahrhundert währenden Prozesses hatten die Mathematiker erkannt, daß man für viele Problemstellungen von den konkreten Objekten abstrahieren konnte und daß

vor allem die Verknüpfung zwischen den Objekten und die Eigenschaften der durch die Verknüpfungsregeln definierten Struktur wichtig waren. Eine solche Betrachtungsweise ließ die oft unter vielen Einzelheiten verborgenen grundlegenden Ideen von Theorien deutlich hervortreten und offenbarte teilweise überraschende Analogien zwischen scheinbar völlig verschiedenen Teilgebieten. Die Bourbaki-Gruppe, eine Gruppe junger, überwiegend französischer Mathematiker, begann Mitte der 30er Jahre einige mathematische Disziplinen nach diesem Konzept aufzubauen und in Monographien darzustellen. Sie erkannten die algebraischen, die topologischen und die Ordnungsstrukturen als die logisch einfachsten, als sog. Mutterstrukturen, aus denen sich durch vielfältige Vermischungen und Abstufungen die übrigen Teilgebiete der Mathematik ergeben sollten. Große Teile der Mathematik konnten auf diese Weise erfaßt werden, und die Bourbaki-Gruppe hat mit ihren Büchern einen starken Einfluß auf die Mathematikentwicklung ausgeübt. Der Begriff der Struktur und das Bestreben Strukturen aufzudecken hat in den Dekaden nach der Jahrhundertmitte über die Mathematik hinaus einen starken Einfluß auf das Denken in anderen Wissenschaften ausgeübt. Struktur der Sprache, Struktur des Denkens, Struktur der Gesellschaft, Struktur der Materie, alles sollte mit dem Strukturbegriff erfaßt werden. Doch traf diese sehr abstrakte Darstellungsweise im letzten Drittel des 20. Jahrhunderts zunehmend auf Widerspruch, was zu einer deutlichen Abkehr von diesen Auffassungen führte. Unbestritten blieb das Verdienst, grundlegende Ideen der einzelnen mathematischen Theorien und wichtige Beziehungen zwischen ihnen aufgedeckt und eine effektive Terminologie und Methodik für die Behandlung vieler Fragestellungen geschaffen zu haben. Zurückgedrängt wurden gewisse Einseitigkeiten und Übertreibungen bei der Umsetzung der abstrakten Behandlung der Mathematik. Fragen der Anwendungen und der Numerik rückten wieder stärker in den Blickpunkt der Forschung. Die sich um 1970 als eigenständige Disziplin verselbständigende Informatik veränderte die Arbeit vieler Mathematiker beträchtlich. Algorithmen und Approximationen erhielten einen neuen Stellenwert, die diskrete Mathematik erfuhr einen großen Aufschwung.

Abschließend kehren wir nochmals zu den gesellschaftlichen Rahmenbedingungen zurück. Die erste Hälfte des Jahrhunderts war durch einen deutlichen Wechsel in den mathematischen Führungspositionen gekennzeichnet. Deutschland verlor die absolute Vorrangstellung, übte aber weiterhin einen starken Einfluß auf die mathematische Forschung aus und bestimmte in vielen Gebieten das Spitzenniveau mit. Durch die Vertreibung zahlreicher Naturwissenschaftler aus rassistischen und/oder politischen Gründen durch die Nationalsozialisten wurde die wissenschaftliche Leistungsfähigkeit Deutschlands ab 1933 drastisch verringert. Nach [Pinl 1969] bzw. [Siegmund-Schultze 1998] erhielten 130 Mathematiker in Deutschland, Österreich und der Tschechoslowakei ein Lehrverbot, etwa 100 von ihnen flohen, die Hälfte davon in die USA. Zu den Flüchtlingen gehörten so bedeutende Vertreter ihres Faches wie Isaac Paul Bernays, Richard Brauer, Richard Courant, Kurt Gödel, Emmy

Noether, Otto Neugebauer, John von Neumann und Hermann Weyl. Der Zustrom dieser hervorragenden Gelehrten beschleunigte den Aufstieg der USA zu einem der führenden Länder in der Entwicklung der Mathematik. Daneben erreichte auch die Sowjetunion dank einer kontinuierlichen staatlichen Förderung Spitzenniveau. Wenig später, Ende der 30er Jahre, gelang es Frankreich vor allem durch die Bourbaki-Gruppe, sich wieder, wie vor dem 1. Weltkrieg, als ein Zentrum der Mathematikentwicklung zu etablieren. Schließlich bildeten sich in mehreren Ländern kleinere Gruppen, die in einzelnen Teilbereichen der Mathematik mit grundlegenden Beiträgen zum Erkenntnisfortschritt hervortraten. Die internationale Zusammenarbeit war durch die beiden Weltkriege und die politischen Spannungen sowohl in der Vorkriegs- als auch in der Nachkriegszeit über längere Phasen empfindlich gestört.

Nach dem 2. Weltkrieg übernahmen die USA allein die dominierende Position in der mathematischen Forschung. Frankreich, Großbritannien und die Sowjetunion, trotz der Kriegsopfer und der stalinistischen Repressalien gegen verschiedene Wissenschaftler, festigten ihre Position. Am eindrucksvollsten waren wohl die Fortschritte der japanischen Mathematiker, doch auch die Entwicklung in Ländern wie Indien und Brasilien ist bemerkenswert. Die internationale Zusammenarbeit intensivierte sich, gefördert durch die Internationale Mathematiker-Vereinigung. Ab 1950 trafen sich die besten Mathematiker der Welt wieder alle vier Jahre auf den Internationalen Mathematiker-Kongressen (der Kongreß für 1982 wurde auf Grund der politischen Ereignisse in Polen ein Jahr später in Warschau abgehalten), der letzte Vorkriegskongreß fand 1936 in Oslo statt. Auf dem Osloer Kongreß wurde erstmals die Fields-Medaille für herausragende mathematische Leistungen vergeben. Diese Medaille wird gewöhnlich als die bedeutendste mathematische Auszeichnung angesehen und oft auch als *„Nobelpreis für Mathematik“* bezeichnet.

10.1 Die Etablierung der modernen abstrakten Algebra

Da es in diesem Rahmen nicht möglich ist, die ungeheuer vielfältige Entwicklung algebraischer Ideen im 20. Jahrhundert auch nur annähernd adäquat darzustellen, soll hier lediglich versucht werden, einige Entwicklungslinien zu skizzieren. Einen ersten Schwerpunkt bildet die Etablierung der abstrakten Algebra in den 20er Jahren. Mit den Arbeiten von Steinitz, Wedderburn u. a. hatte die Algebra eine erste wichtige Stufe hinsichtlich Abstraktion und axiomatischer Darstellung erreicht. Für den nach einer kurzen ruhigen Phase mit wenigen herausragenden Ergebnissen Anfang der 20er Jahre des 20. Jahrhunderts einsetzenden Aufschwung der Algebra spielten die Fortschritte einer abstrakten axiomatischen Darstellung in anderen Gebieten der Mathematik, wie Mengenlehre, Topologie und Analysis eine wichtige Rolle. Man denke nur daran, daß der abstrakte Vektorraumbegriff genau in jenen Jahren durch Hermann Weyl, Stefan Banach und Norbert Wiener axiomatisch

definiert und erfolgreich eingesetzt wurde. Während Weyl ihn in den Darlegungen zur Relativitätstheorie nutzte [Weyl 1918], bildete er für Banach und Wiener die Basis für den Aufbau einer allgemeinen Theorie der vollständigen normierten linearen Räume und der Operationen in ihnen [Banach 1922] [Banach 1932], heute als Theorie der Banach-Räume ein Grundbestandteil der Funktionalanalysis. Es war wohl nicht zufällig, daß auch in der Algebra in jenen Jahren ein wichtiger Schritt in Richtung auf die abstrakte Algebra durch Emmy Noether vollzogen wurde. Der Gegenstand ihrer Forschungen kann grob als eine allgemeine Ringtheorie umrissen werden.

10.1.1 Aufbau einer allgemeinen Ring- und Idealtheorie

Der Ringbegriff war erstmals 1914 von Abraham Fraenkel in seiner Dissertation axiomatisch definiert und eingehend untersucht worden. Die Forschungen waren aus der Beschäftigung mit den p-adischen Zahlen Hensels hervorgegangen. Diese hatte Fraenkel 1912 axiomatisch charakterisiert und dann insbesondere die Eigenschaften der Axiomensysteme im Stile der amerikanischen Schule um Huntington untersucht. Nach der Dissertation bei Hensel in Marburg habilitierte sich Fraenkel dort 1916 mit einer weiteren Arbeit zur Ringtheorie und wirkte dort, unterbrochen vom Kriegsdienst, bis 1921 als Privatdozent, dann bis 1928 als außerordentlicher Professor. Fraenkel war ein überzeugter Zionist und emigrierte 1933 nach Israel. Dort lehrte er als Professor an der Universität Jerusalem, an der er bereits 1929–1931 eine Gastprofessur inne hatte.

In der Dissertation studierte Fraenkel zunächst die Eigenschaften eines Axiomensystems für Ringe, doch machte er dann die Ringe selbst zum Objekt seiner Untersuchungen, wie Steinitz es für die Körper getan hatte. Er analysierte verschiedene Zerlegungseigenschaften, ohne zum Idealbegriff zu kommen, und bewies die Zerlegung von separablen Ringen in eine Summe von einfachen Ringen. Die Separabilität und die Einfachheit von Ringen definierte er durch spezielle Teilbarkeitseigenschaften. Trotz beträchtlicher Unterschiede im Detail kann die Rolle der einfachen Ringe beim Aufbau der separablen Ringe mit der der Primkörper in der Steinitzschen Körpertheorie verglichen werden. Bevor sich Fraenkel Anfang der 20er Jahre ganz der Mengenlehre zuwandte, schrieb er noch zwei weitere Arbeiten zur Ringtheorie, in denen ihm die Steinitzsche Theorie weiterhin als methodisches Vorbild und die p-adischen Zahlen als konkretes Modell dienten. Der Orientierung an den p-adischen Zahlen waren auch die Abweichungen geschuldet, die in den Ringaxiomen im Vergleich zu der später gebräuchlichen Definition auftraten. In den Forschungen zur Mengenlehre war Fraenkel dann sehr erfolgreich. Er verallgemeinerte das Zermelosche Axiomensystem und baute die Darstellung der Mengenlehre u. a. bezüglich der Ordnungs- und Wohlordnungstheorie aus.

Emmy Noether hatte 1908 mit einem invariantentheoretischen Thema bei Paul Gordan in Erlangen promoviert und beschäftigte sich auch danach –



Abraham Fraenkel



Edmund Landau

ganz im klassischen Sinne auf die Bestimmung der Invarianten orientiert – mit diesem Gebiet. Erst allmählich, im Verlauf eines Jahrzehnts, wandelte sie sich zur Vertreterin der abstrakten Algebra, nicht zuletzt dank der Zusammenarbeit mit Ernst Fischer in Erlangen und ab 1915 mit Hilbert in Göttingen. Emmy Noether war die Tochter des bekannten Mathematikers Max Noether, von dem einige bedeutende Leistungen im Abschnitt zur algebraischen Geometrie gewürdigt wurden. Sie gehört zu den wenigen Frauen am Anfang des 20. Jahrhunderts, die trotz der damals noch vielen Vorbehalte und Behinderungen ein Universitätsstudium aufnahmen und eine Laufbahn als Hochschullehrer einschlugen. Unter großen persönlichen Entbehrungen eroberte sie sich einen geachteten Platz unter den männlichen Kollegen. Die Habilitation E. Noethers konnte Hilbert erst im Jahre 1919 mit der Unterstützung seiner Kollegen in der Philosophischen Fakultät der Göttinger Universität durchsetzen, die früheren Versuche waren an den Gesetzeshürden gescheitert. Die Anstellung als ordentlicher Professor blieb E. Noether trotz ihrer bedeutenden wissenschaftlichen Resultate zeitlebens versagt, 1922 erhielt sie den Titel eines nichtbeamteten außerordentlichen Professors und erst 1923 einen bezahlten Lehrauftrag. Für eine ausführliche Würdigung sei auf [Dick 1970] und [Teicher 1999] verwiesen.

Die erste Arbeit, die E. Noether im Stil der abstrakten Algebra schrieb, war 1919 eine gemeinsame Publikation mit Werner Schmeidler. Der Gegenstand war eine schon 1915 von Edmund Landau angeregte Frage nach der Übertragung Dedekindscher Zerlegungssätze auf nichtkommutative Strukturen. Landau hatte bei dieser Gelegenheit Noether auch auf die Dedekindschen Schriften hingewiesen, die fortan für sie zu einer Fundgrube von Ideen werden sollten. An Hand von formalen Differentialausdrücken oder Differentialoperatoren, wie man heute sagen würde, kamen Noether und Schmeidler zur

Definition des Modulbegriffs und solcher Bildungen wie direkten Summen- und Durchschnittsdarstellungen, Restklassenmodul usw. Erstmals wurden auch die einseitigen Moduln und Ideale definiert. Noether und Schmeidler abstrahierten von der konkreten Bedeutung der Objekte und richteten ihre Aufmerksamkeit auf die Verknüpfungen zwischen den Objekten und die dafür geltenden formalen Regeln. Auf dieser Basis traten die abstrakten algebraischen Eigenschaften deutlich hervor und die Zerlegungseigenschaften konnten in Analogie zu den Polynomidealen abgeleitet werden. Die Arbeit folgte in der Intention ganz dem strukturellen Denken und markiert einen wichtigen Übergangsschritt, Übergangsschritt deshalb, weil, wie L. Corry betonte, die Begründung der Sätze über Polynomideale im Konkreten durch Eigenschaften des Systems der reellen bzw. komplexen Zahlen erfolgte [Corry 1996, S. 226].

Den vollständigen Übergang vollzog E. Noether 1921 in der Arbeit *„Idealtheorie in Ringbereichen“* [Noether 1921]:

„Den Inhalt der vorliegenden Arbeit bildet die Übertragung der Zerlegungssätze der ganzen Zahlen, bzw. der Ideale in algebraischen Zahlkörpern, auf Ideale in beliebigen Integritäts-, allgemeiner Ringbereichen.“ [Noether 1921, S. 25]

Bisher war der Ringbegriff von den Mathematikern kaum beachtet worden, jetzt machte Noether ihn zum zentralen Gegenstand der Untersuchungen und baute die kommutative Ringtheorie abstrakt und im vollem Umfange auf. Was die Übertragung der Zerlegungssätze betraf, so bemerkte sie, daß die Irreduzibilität der Zerlegung für die ganzen Zahlen auf vier verschiedene Weisen charakterisiert werden kann. Ist $g = p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} ... p_n^{\rho_n} = q_1 q_2 ... q_n$ eine Zerlegung der ganzen Zahl g, so gilt z. B. für die Primzahlpotenzen q_i, daß sie zum einen paarweise teilerfremd sind, die Faktoren nicht weiter in Faktoren mit der gleichen Eigenschaft zerlegt werden können und außerdem das Produkt der q_i ihrem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen gleich ist. Zum anderen ist jede Komponente der Zerlegung primär, d. h., ist ein Produkt bc durch q_i teilbar, aber b nicht, so gibt es eine Potenz von c, die durch q_i teilbar ist, und die q_i sind zugleich die größten primären Komponenten. Ausgehend von einem abstrakten Aufbau der Theorie gelang es Noether nun, die verschiedenen Charakterisierungen der Zerlegung einer Zahl auf Ideale in beliebigen Ringbereichen zu übertragen und darüber hinaus noch mehrere neue Sätze abzuleiten, die auch für Polynomideale bisher unbekannt waren. Dabei erkannte sie, daß all diese Sätze auf einer speziellen strukturellen Eigenschaft der Ringbereiche basierten, der sog. Endlichkeitsbedingung, die besagt, daß jedes Ideal des Ringes eine endliche Basis besitzt. Diese Eigenschaft wies Noether als äquivalent zur Gültigkeit des Teilerkettensatzes bzw. zur Erfüllung der aufsteigenden Kettenbedingung nach. Ein Ring erfüllt den Teilerkettensatz bzw. die aufsteigende Kettenbedingung, wenn in ihm jede aufsteigende Kette von Idealen, in der jedes Ideal Teiler des vorangegangenen ist, nur endlich viele verschiedene Glieder hat. Damit waren die Zerlegungssätze eine Folgerung aus allgemeinen Struktureigenschaften der Ringe, eine Bezugnahme etwa auf

die speziellen Eigenschaften der Polynombereiche war völlig überflüssig. Dies stellte nicht nur eine großartige Abstraktionsleistung dar, sondern begründete auch eine neue Sichtweise auf die Algebra. Die Endlichkeitsbedingung oder eine ihr äquivalente Forderung wurde als Eigenschaft von der untersuchten Struktur vorausgesetzt, definierte faktisch eine neue Teilstruktur und für diese folgten bestimmte Aussagen, hier die Zerlegungssätze. Der Nachweis, daß bestimmte Bereiche diese Voraussetzungen erfüllten, war ein davon völlig unabhängiges Problem und von den allgemeinen Untersuchungen völlig losgelöst. Sehr vorteilhaft erwies sich die von Noether bemerkte Äquivalenz der Endlichkeitsbedingung mit dem Teilerkettensatz bzw. verschiedenen anderen Bedingungen, wie der Existenz wenigstens eines maximalen Ideals in jeder Menge von Idealen (Maximalbedingung für Ideale). Während der Teilerkettensatz gut für abstrakte Beweise geeignet war, ließ sich die Gültigkeit der Endlichkeitsbedingung leichter nachweisen.

Hatte Noether die strukturelle Auffassung in der Arbeit zur Ringtheorie bereits klar demonstriert, so war die axiomatische Methode noch im Hintergrund geblieben. Diese trat dann in ihrer zweiten großen Arbeit *„Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern“* [Noether 1926] deutlich hervor. Die dabei von Noether geschaffene elegante Mischung von Denken in algebraischen Strukturen und axiomatischer Methode prägten jenen Stil, der typisch für die neue Auffassung der Algebra wurde. Das Ziel der Arbeit war die abstrakte Charakterisierung jener Ringe, *„deren Idealtheorie mit der des Ringes aller algebraisch ganzen Zahlen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers übereinstimmt“*, d. h. es ging um eine Abstraktion aus der Dedekindschen Theorie. Wieder gelang Noether eine fast vollständig Lösung, indem sie diese Ringe, die heute meist als Dedekindsche oder ZPI-Ringe bezeichnet werden, durch fünf Axiome bestimmte. Sie stellte diese Axiome an den Anfang der Arbeit und machte dann die Bedeutung der einzelnen Axiome deutlich. Als wichtige *„Nebenresultate“* leitete sie die Isomorphiesätze für Moduln und Ringe ab. Mit dem Nachweis, daß in Zahl- und Funktionenkörpern das angegebene Axiomensystem erfüllt war, stellte sie den Anschluß an die klassische Theorie her.

Diese Verknüpfung der abstrakten Theorie mit den klassischen Ergebnissen war für die Legitimation der neuen Ideen sehr wichtig. Es ging nicht um eine Abstraktion der Abstraktion willen, sondern um eine bessere Widerspiegelung und Hervorhebung der algebraischen Eigenschaften bei den verschiedenen Sachverhalten. In diesem Sinne mühte sich Noether beispielsweise um eine Einordnung der klassischen Eliminationstheorie, die ja in der algebraischen Geometrie von großer Bedeutung war. Ein Teilschritt war die Bearbeitung der Dissertation des im I. Weltkrieg nach Kämpfen vor Dixmuiden vermißten Kurt Hentzelt, die dem *„allgemeinen Problem der Eliminationstheorie, die gemeinsamen Nullstellen aller Polynome eines Ideals zu bestimmen“* gewidmet war. In einer Anmerkung verdeutlichte sie ihren Standpunkt:

„Diese ganz auf Grund eigener Ideen verfaßte Dissertation ist lückenlos aufgebaut; aber Hilfssatz reiht sich an Hilfssatz, alle Begriffe sind durch Formeln mit vier und fünf Indizes umschrieben, der Text fehlt fast vollständig, so daß dem Verständnis die größten Schwierigkeiten bereitet werden. ...

Ich gebe die Arbeit in rein begrifflicher Fassung wieder, wodurch eine große Vereinfachung der durchweg in den Grundgedanken auf Hentzelt zurückgehenden Beweise erzielt wird, und, wie ich hoffe, die Schönheit der Arbeit offenbar wird.“ [Hentzelt/Noether 1923, S. 53]

Noch im gleichen Jahr gelangen ihr weitere wichtige Fortschritte bei der Einordnung der Eliminationstheorie in die allgemeine Idealtheorie. Eine Neubegründung der Nullstellentheorie der Polynomideale auf der Basis der abstrakten Idealtheorie publizierte dann Barthel Leendert van der Waerden, einer ihrer bekanntesten Schüler, der 1924 nach seiner Promotion nach Göttingen gekommen war und sich dem Kreis um Noether anschloß. Bereits vor van der Waerdens Ankunft in Göttingen hatte Noether analoge Resultate erhalten und darüber vorgetragen, doch überließ sie dem jungen Kollegen die alleinige Veröffentlichung. In der Summe all dieser Forschungen formten Noether und ihre Schüler die Idealtheorie zu einer Säule der modernen abstrakten Algebra und schufen die Basis für weitere fruchtbare Studien. Als Beispiel seien die Studien von Wolfgang Krull genannt, der 1920/21 ein Studienjahr in Göttingen weilte, aber nur eine einzige Vorlesung von Noether hörte. Trotzdem griff er ihre Ideen rasch auf und wirkte für deren Verbreitung. Für über zwei Jahrzehnte bildete die Theorie kommutativer Ringe sein bevorzugtes Arbeitsgebiet, auf dem er viele neue Ergebnisse erzielte. So eröffnete er 1928 mit der Einführung der später nach ihm benannten Dimension von Ringen und Idealen völlig neue Entwicklungen in der Theorie der Noetherschen Ringe. Große Bedeutung, insbesondere in der algebraischen Geometrie, erlangten seine seit Beginn der 30er Jahre durchgeführten Untersuchungen über die sog. Krull-Ringe und die Stellenringe, auch als lokale Ringe bezeichnet. Auch die Anwendung des Lokal-Global-Prinzips in der kommutativen Algebra hat Krull durch seine Arbeiten stark gefördert. Mit dem Ergebnisbericht *„Idealtheorie“* präsentierte er 1935 einen zusammenfassenden Überblick über die neugestaltete Theorie im kommutativen Fall, die allgemeine Modul-, Ring- und Idealtheorie fand 1939 in seinem gleichnamigen Beitrag für die zweite Auflage der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften eine umfassende Behandlung. Nach seinem Wechsel von Erlangen an die Universität Bonn (1939) und der Einberufung zum Kriegsdienst traten neben die algebraischen Arbeiten auch solche über Differentialgleichungen, Hilbert-Räume u. a. Begonnen hatte Krull seine wissenschaftliche Laufbahn in Freiburg, wo er 1921 promovierte und nach der Habilitation 1922 und einer Privatdozentur vier Jahre später zu außerordentlichen Professor aufstieg, bevor er 1928 Nachfolger von Johann Radon in Erlangen wurde.



Wolfgang Krull



Emil Artin

10.1.2 „Moderne Algebra“

Emmy Noether hatte sich in der Zwischenzeit der Gestaltung einer weiteren Säule der Algebra, der Algebrentheorie, zugewandt und der *„Erfassung des Nichtkommutativen“* einen großen Teil ihrer Aufmerksamkeit geschenkt. Diese Untersuchungen waren sehr breit angelegt, verarbeiteten viele Resultate aus mehreren Gebieten der Algebra und wirkten ihrerseits auf diese Gebiete positiv zurück. Nicht einzelne Teile, sondern die gesamte Algebra erhielt ein neues Gesicht, das in van der Waerdens Buch *„Moderne Algebra“* seinen brillanten Ausdruck fand.

Zunächst soll aber das Bild noch durch einige spezielle Beiträge abgerundet werden. Emil Artin, der 1921 in Leipzig promoviert hatte, dann von 1922 bis zu seiner Emigration 1937 an der 1919 neu gegründeten Universität Hamburg tätig war (ab 1925 als Professor) und sehr eng mit der Gruppe um Noether zusammenarbeitete, hatte sich besonders dem Studium der sog. Klassenkörper verschrieben und grundlegende Beiträge zum Aufbau der Klassenkörpertheorie geleistet. Die Behandlung dieser meist zur algebraischen Zahlentheorie gerechneten Probleme erforderte eine intensive Beschäftigung mit algebraischen Fragen und fand großes Interesse bei den Vertretern der abstrakten Algebra. Die dann in den 30er Jahren von Artin, Jacques Herbrand, Hasse und Claude Chevalley gegebene rein algebraische Beschreibung der Klassenkörpertheorie bezeugte eindrucksvoll die Kraft des neuen algebraischen Denkens. Als eines der Resultate der algebraischen Studien konnte Artin 1927 die Wedderburnschen Struktursätze für Algebren über einem Körper verallgemeinern auf Ringe, die eine zur aufsteigenden Kettenbedingung duale absteigende Kettenbedingung erfüllen. Noether und ihre Schüler setzten diese Ansätze fort und formulierten die Theorie für Ringe, die einer Kettenbedingung genügen und über einem Körper mit beliebiger Charakteristik definiert sind. Bisher hatte

man immer nur algebraisch abgeschlossene Körper der Charakteristik Null betrachtet. Diese Studien brachten zwar beträchtliche Fortschritte, führten aber noch nicht zu der gewünschten allgemeinen Theorie, da es trotz der Ansätze von Gottfried Köthe u. a. nicht gelang, dem Begriff des Radikals die nötige allgemeine, aber flexible Gestalt zu geben. Dies wurde eine der großen Leistungen von Nathan Jacobson, der auf der Basis einer neuen Definition des Radikals 1943 die Ausdehnung der Theorie auf Ringe ohne Endlichkeitsbedingung veröffentlichte.

In den Studien über Algebren wurden auch erstmals im stärkeren Maße die amerikanischen Arbeiten berücksichtigt. Während Wedderburns grundlegende Arbeiten von 1905 und 1908 keine ihrer Bedeutung angemessene Besprechung in dem Standardreferateorgan der damaligen Zeit, dem *„Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“*, fanden, erschien Dicksons Buch *„Algebras and their arithmetics“* vier Jahre nach der Originalausgabe 1927 überarbeitet in deutscher Übersetzung. Dickson gab in dem Werk nicht nur einen Überblick über die Algebrentheorie und machte die von ihm und seinen Schülern an der Universität Chicago erzielten Ergebnisse über zyklische und Divisionsalgebren bekannt, sondern lieferte zugleich ein weiteres Beispiel für eine abstrakte axiomatische Darstellung eines mathematischen Teilgebietes. Er kombinierte die amerikanische Tradition der logischen Untersuchung von Axiomensystemen mit konkreten, auf abstrakter Basis durchgeführten algebraischen Studien und konnte in dieser Form stimulierend für die weitere Ausgestaltung der abstrakten Algebra wirken, oder wie Artin es rückblickend einschätzte:

„While the Europeans obtained very advanced results in the classification of their special cases (von Algebren, K.-H. S.) *with methods that were not well adapted to generalization, the Americans achieved an abstract formulation of the problem, developed a very suitable terminology, and discovered the germs of the modern methods.“* [Artin 1950, S. 65]

Die Forschungen über Algebren hatten durch die Arbeiten der amerikanischen Mathematiker um Dickson und Adrian Abraham Albert einen großen Aufschwung genommen. Nun beteiligten sich zunehmend Mathematiker wie Emil Artin, Richard Brauer, Helmut Hasse, Max Deuring und Andreas Speiser daran, die zum Kreis um Emmy Noether gehörten oder deren abstrakter Auffassung von Algebra nahe standen. Inhaltlich bildete die Charakterisierung der Divisionsalgebren über dem Körper der p-adischen Zahlen bzw. über einem beliebigen Körper algebraischer Zahlen sowie die Ermittlung von deren Eigenschaften ein wichtiges Thema der Untersuchungen. Die Ergebnisse brachten eine Vertiefung der Strukturaufklärung für einzelne Klassen von Algebren, etwa die einfachen Algebren, aber auch Einsichten in die Zahlentheorie der Algebren und den Zusammenhang mit der Arithmetik der Zahlkörper.

Die Bedeutung der Noetherschen Arbeiten über Algebren ist wohl neben den verschiedenen Einzelresultaten vor allem darin zu sehen, daß auf der Basis eines abstrakten, modultheoretischen Aufbaus der Theorie die in früheren

Arbeiten enthaltenen Keime für weitreichende Verbindungen in andere mathematische Gebiete umfassend entwickelt wurden. Dies gilt sowohl für die Vertiefung der von Molien aufgezeigten Beziehungen zwischen Algebren und der Darstellung endlicher Gruppen, als auch für die in der algebraischen Zahlentheorie bedeutsamen Studien über verschränkte Produkte, über normale zyklische Algebren und über relativ-galoissche Zahlkörper. Noether hatte erkannt, daß der Aufbau einer abstrakten Theorie der Ideale in und der Moduln über nichtkommutativen Ringen äußerst sinnvoll sein konnte, da deren Anwendung in Analogie zur kommutativen Theorie neue Wege zur Lösung arithmetischer Fragestellungen eröffnete. Ihre eigenen Ergebnisse und die nachfolgende Entwicklung haben diese Vermutung eindrucksvoll bestätigt. Mehrfach konnten aus den Einsichten über Algebren neue Aussagen für den kommutativen Fall abgeleitet werden, und Noether nannte diese Methode dann *„die Anwendung des Nichtkommutativen auf das Kommutative“*. In ihrem Hauptvortrag auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Zürich 1932 beschrieb sie das Wesen dieses Prinzips mit Blick auf die Anwendung in der Zahlentheorie mit den Worten:

„Man sucht vermöge der Theorie der Algebren invariante und einfache Formulierungen für bekannte Tatsachen über quadratische Formen oder zyklische Körper zu gewinnen, d. h. solche Formulierungen, die nur von Struktureigenschaften der Algebren abhängen. Hat man einmal diese invarianten Formulierungen bewiesen ..., so ist damit von selbst eine Übertragung dieser Tatsachen auf beliebige galoissche Körper gewonnen.“ [Noether 1932, S. 189]

Für die Intensität der Forschungen über Algebren spricht die Tatsache, daß bereits 1935 eine weitere Zusammenfassung der neueren Ergebnisse angebracht erschien [Deuring 1935, S. III]. Es handelte sich um den Ergebnisbericht *„Algebren“* des Noether-Schülers Deuring. Im Charakter entsprach der Bericht der schon erwähnten Publikation von Krull zur Idealtheorie. Beide Berichte erschienen in der Reihe *„Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete“*, die von der Leitung des deutschen mathematischen Referateorgans *„Zentralblatt für Mathematik“* seit 1932 herausgegeben wurde und das Ziel hatte, *„in einzelnen selbständigen Berichten in Problemstellung, Literatur und hauptsächliche Entwicklungsrichtung spezieller moderner Gebiete einzuführen.“* [Reidemeister 1932, S. III] Gleichzeitig muß man berücksichtigen, daß nicht nur die Fülle der Ergebnisse, sondern wohl auch der Wunsch, diese Gebiete im Stil der modernen Algebra darzustellen, die Entstehung dieser Veröffentlichungen gefördert hat.

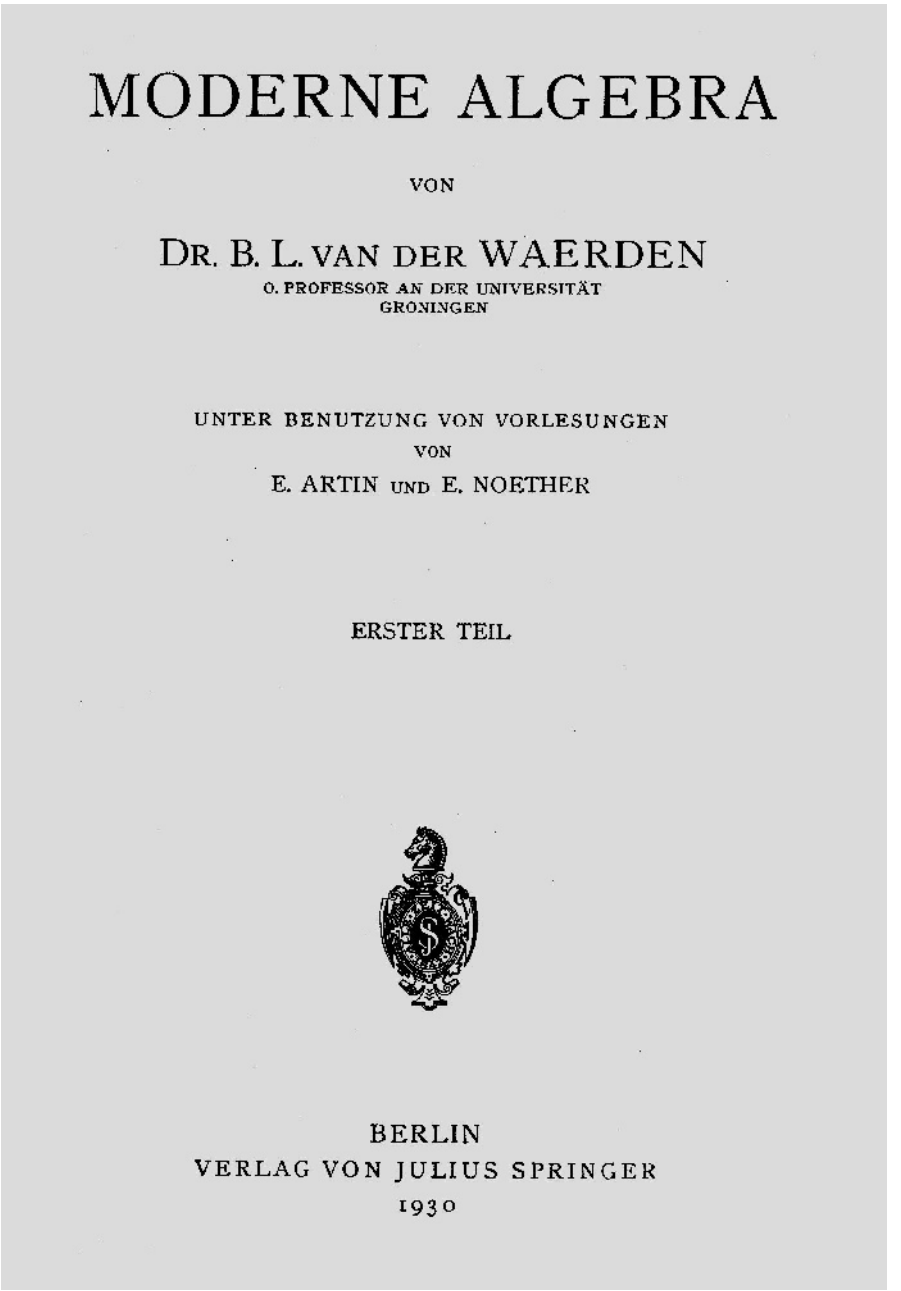
Mit den Studien über Algebren kam gleichzeitig eine allgemeine Tendenz zum Tragen, die schon Dedekind im X. Supplement bevorzugt hatte, dann aber wieder etwas in den Hintergrund gerückt war: Die sog. Linearisierung der Algebra. Im Wesen beruhte dies darauf, daß sich viele Überlegungen in der Algebra auf dem Modulbegriff aufbauen lassen und man bei dieser Betrachtungsweise viele Bildungen der linearen Algebra anwenden kann, die als Ergebnis zwar wieder einen Modul ergeben, aber im allgemeinen z. B. keine

Ideale ergeben. Es ist also sinnvoll, zu versuchen, die einzelnen Aussagen ganz allgemein für Moduln abzuleiten, und sie nicht durch eine zu enge Begriffswahl unnötig einzuschränken. Auch dieser Aspekt dokumentiert den Wandel, der sich in der Algebra seit Ende der 20er Jahre deutlich abzeichnete.

Schließlich seien noch einige Fortschritte in der Körpertheorie und aus ihr hervorgegangene Forschungen genannt. Bereits 1913 hatte Kürschák, angeregt von Hensels Körper der p-adischen Zahlen, den Begriff des bewerteten Körpers definiert und die Existenz der Komplettierung eines Körpers bezüglich einer Bewertung nachgewiesen. 1918 bestimmte Alexander Ostrowski alle Bewertungen des Körpers der rationalen Zahlen. Forschungen zur Bewertungstheorie spielten auch in den folgenden Jahren eine wichtige Rolle, da sie eine Brücke zwischen Algebra, Analysis und Zahlentheorie schlugen. Ein weiterer wichtiger Begriff war der des formal-reellen Körpers, den Artin und Schreier ab Mitte der 20er Jahre untersuchten. Sie definierten diese Körper 1927 durch die Eigenschaft, daß -1 in ihnen nicht als Summe von Quadraten geschrieben werden kann. Bemerkenswerterweise konnten sie genau diese Körper als jene nachweisen, in denen die übliche Ordnungsrelation eingeführt werden kann. Die Ergebnisse über formal-reelle Körper, zu denen es keine echte formal-reelle algebraische Erweiterung gibt, sog. reell-abgeschlossene Körper, bildeten dann im gleichen Jahr die Basis für Artins Lösung des 17. Hilbertschen Problems. Dieses Problem forderte die Darstellbarkeit einer rationalen Funktion mit reellen Koeffizienten, die stets nichtnegative Werte annimmt, als Quadratsumme von rationalen Funktionen mit reellen Koeffizienten.

Außerdem fiel Artins abstrakte Formulierung der Galois-Theorie in diese Zeit. Er stellte sie erstmals 1926 in einer Vorlesungsreihe vor, und durch die Aufnahme in van der Waerdens Algebra-Lehrbuch wurde sie allgemein publik. Artin hat sich weiterhin intensiv mit der Galois-Theorie beschäftigt und die Darstellung verbessert. Nach seiner Emigration in die USA, wo er als Professor vor allem an den Universitäten in Bloomington (1938–1946) und Princeton (1946–1958) lehrte, publizierte er 1938 bzw. 1942 seine Neubegründung der Theorie, die großen Anklang fand und mehrfach als Vorbild für die Behandlung der Galois-Theorie diente. Artin leitete dabei den Hauptsatz der Theorie ab, ohne den Satz vom primitiven Element heranzuziehen. Der erste diesbezügliche Beweis war bereits in dem Lehrbuch von Otto Haupt aus dem Jahre 1929 enthalten und ging auf Friedrich Karl Schmidt zurück. Das Lehrbuch enthielt auch eine Übersicht über die Galois-Theorie für unendliche Körpererweiterungen, die Krull 1928 geschaffen hatte.

Die angegebenen Beispiele belegen die Fülle und Breite der algebraischen Ergebnisse in den 20er Jahren des 20. Jahrhunderts und veranschaulichen den Aufschwung, den die Algebraentwicklung nahm. Das allgemeine Symbol der neuen Auffassung von Algebra wurde dann das schon erwähnte Lehrbuch *„Moderne Algebra“* von van der Waerden. Sein Titel wurde gleichsam zur Bezeichnung der ganzen Richtung. Durch dieses Lehrbuch rückte die Algebra


MODERNE ALGEBRA

VON

DR. B. L. VAN DER WAERDEN

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
GRONINGEN

UNTER BENUTZUNG VON VORLESUNGEN
VON
E. ARTIN UND E. NOETHER

ERSTER TEIL

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1930

Abb. 10.1.1. Titelblatt „Moderne Algebra“ von B. L. van der Waerden 1930

„schlagartig“, wie Garrett Birkhoff vermerkte, in den Mittelpunkt der mathematischen Forschungen und stand gleichberechtigt neben so großen traditionsreichen Gebieten wie Analysis oder Geometrie:

„Even in 1929 its concepts and methods (i. e. of *„modern“* algebra) *were still considered to have marginal interest as compared with those of analysis in most universities, including Harvard. By exhibiting their mathematical and philosophical unity and by showing their power as developed by E. Noether and her other younger colleages (most notably E. Artin , R. Brauer, and H. Hasse) van der Waerden made „modern algebra“ suddenly seem central in mathematics. It is not too much to say that the freshness and enthusiasm of his exposition electrified the mathematical world – especially mathematicians under 30 like myself.“* [Birkhoff 1973, S. 771]

Van der Waerdens Buch bildete den krönenden Abschluß einer ganzen Reihe von Algebra-Lehrbüchern, die in den 20er Jahren in rascher Folge erschienen waren, nachdem in den Jahrzehnten zuvor das Webersche Lehrbuch mit seinen verschiedenen Editionen recht klar dominiert hatte. Stellvertretend seien A. Speiser, R. Fricke, L. E. Dickson, H. Hasse, Oskar Perron und O. Haupt in der chronologischen Reihenfolge des Erscheinens ihrer Lehrbücher als Autoren genannt. All diese Bücher wurden durch van der Waerdens *„Moderne Algebra“* in den Hintergrund gedrängt. Durch den klaren und eleganten Stil wurde das Buch für Jahrzehnte die *„Bibel“* der Algebraiker und wird noch heute als Lehrbuch empfohlen. Van der Waerden orientierte sich bei der Ausarbeitung des Buches an den Werken von jenen beiden Protagonisten der abstrakten Algebra, die in der obigen Aufzählung der Lehrbuchautoren fehlen, Noether und Artin . Die Vorlesungen, die er bei beiden hörte, haben einen großen Einfluß auf die Textgestaltung ausgeübt, eine Tatsache, zu der er sich immer bekannte und die er u. a. in der Einleitung und durch den Untertitel *„Unter Benutzung der Vorlesungen von E. Artin und E. Noether* “ zum Ausdruck brachte. Ja, die Ausarbeitung der Artinschen Algebra-Vorlesung vom Sommer 1926 durch van der Waerden bildete auch den Ausgangspunkt des Buches. Ursprünglich sollte dies die Basis eines gemeinsamen Lehrbuches zur Algebra sein, doch Artin überließ angesichts der vorzüglichen Ausarbeitung van der Waerden die alleinige Fertigstellung des Werkes. Einleitend charakterisierte dieser das Ziel des Buches mit folgenden Worten, die zugleich die neuen Gesichtspunkte deutlich hervorhoben:

„Die „abstrakte“, „formale“ oder „axiomatische“ Richtung, der die Algebra ihren erneuten Aufschwung in der jüngsten Zeit verdankt, hat vor allem in der Körpertheorie, der Idealtheorie, der Gruppentheorie und der Theorie der hyperkomplexen Zahlen zu einer Reihe von neuartigen Begriffsbildungen, zur Einsicht in neue Zusammenhänge und zu weitreichenden Resultaten geführt. In diese ganze Begriffswelt den Leser einzuführen, soll das Hauptziel des Buches sein.“ [Waerden 1930, 1931, S. 1]

Die einzelnen Teilgebiete der Algebra standen gleichberechtigt nebeneinander und erhielten eine einheitliche axiomatische Behandlung. Zugleich trat

der strukturelle Aspekt deutlich hervor, wurde die Gleichheit in den Behandlungsmethoden erkennbar. Ganz wie van der Waerden E. Noethers Forschungsmaxime charakterisiert hatte, waren alle Beziehungen *„von ihren besonderen Objekten losgelöst und auf allgemeine begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt“* worden [Waerden 1935, S. 469]. Die axiomatische Methode war von einer Methode zur Klärung und Vertiefung der logischen Grundlagen zu einer effektiven und erfolgreich eingesetzten Forschungsmethode umgesetzt worden. Nach H. Weyl wandte E. Noether sie meisterhaft an und machte die Algebra zum Eldorado der Axiomatik [Weyl 1935, S. 214].

Abschließend soll noch auf eine Besonderheit in dieser Entwicklungsetappe der Algebra hingewiesen werden. Die entscheidende Wandlung zur modernen Algebra war vorrangig das Werk deutschsprachiger Mathematiker und hatte kaum Bezug zu den Forschungen in anderen Ländern, die einer breiteren, kalkulatorische Gesichtspunkte einschließenden Auffassung von Algebra folgten. Dies hatte seinen Grund in der besonderen historischen Situation nach dem Ersten Weltkrieg, in der Deutschland wesentlich auf Betreiben Frankreichs in der Mathematik für fast ein Jahrzehnt isoliert blieb und die internationale Kommunikation empfindlich gestört war. Zugleich hatte Frankreich zahlreiche junge Mathematiker im Krieg verloren und mußte große Anstrengungen auf die Ausbildung einer neuen Mathematikergeneration verwenden. Erst Mitte der 20er Jahre erfolgte allmählich wieder eine engere Kontaktaufnahme mit ausländischen Kollegen und eine gegenseitige Rezeption der inzwischen erzielten Ergebnisse. Angesichts dieser Tatsachen ist es wohl nicht verwunderlich, daß die Mathematiker in Deutschland die bereits am Ende des 19. Jahrhunderts begründete Tendenz zur Abstraktion fortsetzten. Von den übrigen Forschungen seien die Studien zur Gruppentheorie – etwa von Philip Hall über Gruppenerweiterungen – und zur universellen Algebra genannt. Alfred North Whitehead hatte 1898 in dem Buch *„A treatise of universal algebra“* die Algebra in der Tradition der englisch algebraischen Schule behandelt, was auch die algebraische Logik einschloß.

10.2 Von der Algebra zur Mathematik der Strukturen

Mit der *„Moderne*(n) *Algebra*“ von van der Waerden und den daran anknüpfenden Publikationen wie den Ergebnisberichten von Krull und Deuring hatte die Algebra ein deutliches Gesicht als eine Mathematik algebraischer Strukturen bekommen. In den 30er Jahren setzte sich diese Entwicklung fort und gewann deutlich an Breitenwirkung. Die wesentlichen Impulse kamen zunehmend von Mathematikern in den USA und Frankreich, während in Deutschland die Forschung durch die Veränderungen in der politischen Situation und die nachfolgende Vertreibung zahlreicher Gelehrter sehr gestört wurde und an Dynamik verlor. Der markanteste neue Aspekt war die Ausdehnung des Strukturbegriffs über die Algebra hinaus und das Bestreben, die

gesamte Mathematik als Strukturmathematik darzustellen. Im historischen Rückblick werden diese Vorstellungen vor allem mit der Bourbaki-Gruppe von französischen Mathematikern verknüpft, die mit ihren Werken zweifellos die größte Wirkung erzielte. Es gab jedoch auch unter den amerikanischen und den deutschsprachigen Mathematikern einige beachtenswerte Ansätze zu diesen Abstraktionen, die ebenfalls recht wirksam waren. Sie sind nicht zuletzt ein Ausdruck jener breiten, durchgreifenden Wandlung der Mathematik, die in den 20er Jahren immer klarere Konturen angenommen hatte (vgl. Abschn. 10.1). Im Rahmen des gewachsenen Interesses an Grundlagenuntersuchungen widmeten sich einzelne Gelehrte wiederholt den Fundamenten der einzelnen Gebiete, sei es aus formal logischer Sicht, sei es zur Analyse mengentheoretischer Aspekte oder um die Anwendung der axiomatischen Methode zu verbessern. Dies bedingte zunächst im wesentlichen ähnliche Abstraktionen, wie sie von Noether, Artin etc. auf dem Weg zur modernen Algebra vollzogen wurden. Die Forschungen enthielten meist implizit den Keim, den Aspekt der gemeinsamen Struktur stärker zu betonen, letztlich den Abstraktionsprozeß fortzusetzen und allgemeine methodologische Überlegungen anzustellen. Es sei aber betont, daß diese Ansätze auch in der Algebra vorhanden waren, es sich also nicht um eine Entwicklung neben der Algebra handelte, sondern um Ergebnisse, die sowohl in als auch außerhalb der Algebra erzielt wurden und die dann in eine neue Entwicklungsphase der Algebra einmündeten. Zu Recht vermerkte Herbert Mehrtens, daß die moderne Algebra mehrfach als Vorbild und als Lieferant von Methoden und Begriffen für diese Entwicklung diente, in der Noetherschen Schule jedoch auf eine *„derartige, nicht mehr an inhaltlichen Problemen orientierte Abstraktion“* kein Wert gelegt wurde [Mehrtens 1979, S. 157].

Die Betonung der gemeinsamen strukturellen Basis von verschiedenen Theorien konnte sehr unterschiedlich sein. Saunders MacLane charakterisierte z. B. die Algebra als die Untersuchung der Struktur von Axiomensystemen und vermerkte an anderer Stelle:

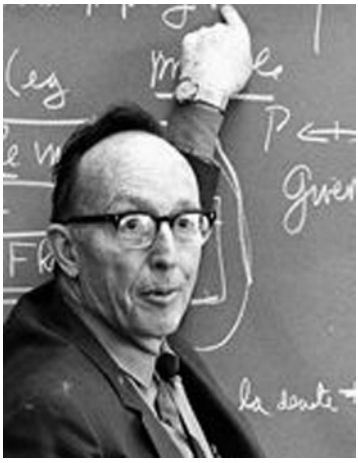
„Any algebraic variety, such as „group“, a „field“, a „group with operators“, and the like, concerns essentually a system composed of a number of functions. If this notion of a system be extended to include relations as well, then we can say that any abstract mathematical theory consists of some system and a number of axioms and theorems about this system. ... In the first place, many typical algebraic concepts ... are really relations between systems and can be defined with complete generality. ... Many algebraic theorems may be viewed as special cases of the general theorem that two isomorphic systems have the same structure.“ [MacLane 1934, S. 53f.]

Die von MacLane angegebenen Fragen zu allgemeinen Strukturuntersuchungen entsprachen jenen Problemen, die bei der Entstehung der abstrakten Algebra eine Rolle spielten und zum großen Teil in van der Waerdens Buch ihren Niederschlag gefunden hatten.

Während MacLanes Überlegungen auf dem nicht genau bestimmten Begriff des axiomatisch definierten Systems fußten, wählten Øystein Ore und Birkhoff eine zum Begriff des Verbandes äquivalente Bildung als Basis für ihre allgemeinen Betrachtungen. Beide waren, wie sie selbst bezeugten, sehr gut mit dem aktuellen Forschungsstand zur abstrakten Algebra vertraut. Dabei erscheint der Wandel in Ores Intentionen recht überraschend. Ore hatte in Oslo, Göttingen und Paris studiert und lehrte dann, abgesehen von einem fast zehnjährigen Intermezzo an der Yale Universität in New Haven (1936–1945), an der Universität Oslo. 1930–32 war er an der Herausgabe der gesammelten Werke Dedekinds beteiligt und hatte dabei insbesondere mit E. Noether zusammengearbeitet. Trotzdem hatte er in seinen algebraischen Forschungen, der Übertragung von Zerlegungssätzen auf nichtkommutative Polynomringe, nicht auf die Ideen Noethers zurückgegriffen, sondern benutzte im Stile von Lasker und Macaulay die speziellen Eigenschaften der Polynome. 1935 offenbarte er dann in einer Begründung der abstrakten Algebra eine weitgehende Abkehr von seiner bisherigen Auffassung von Algebra. Seine Grundidee war folgende: Da viele Theoreme über verschiedene algebraische Bereiche eine große Ähnlichkeit aufwiesen, beruhten sie vermutlich auf gemeinsamen, ganz allgemeinen strukturellen Eigenschaften. Das Ziel seiner Forschungen war die Aufdeckung dieser Eigenschaften. Dies entsprach gemäß Ore einer weiteren, über die bisherige Betrachtungsweise der Algebra hinausgehenden Abstraktion, bei der man sich nur noch für die Relationen zwischen verschiedenen ausgezeichneten Teilgebieten interessierte. Die vorliegende Algebra war durch eine Abstraktion entstanden, bei der nur von der Spezifik der Elemente abgesehen wurde und die Beziehungen zwischen ihnen im Mittelpunkt standen.

„In the discussion of the structure of algebraic domains, one is not primarily interested in the elements of these domains but in the relations of certain distinguished sub-domains ... For all these systems there are defined the two operations of union and cross-cut satisfying the ordinary axioms. This leads naturally to the introduction of new systems, which we shall call structures, having these two operations. The elements of the structure correspond isomorphically with respect to union and cross-cut to the distinguished subdomains of the original sub-domain while the elements of the original domain are completely eliminated in the structure.“ [Ore 1935, S. 406]

Bezüglich der beiden Operationen sind nun die Elemente der Struktur den ausgezeichneten Teilgebieten des Ausgangsgebiets isomorph, während die einzelnen Elemente der Teilgebiete bei der Betrachtung der Struktur völlig eliminiert sind. In den folgenden Jahren machte Ore dann mehrere Anwendungen seines Strukturkonzepts (Struktur ist hier als mathematisches Objekt zu verstehen!) vor allem in der Gruppentheorie, wobei Zerlegungseigenschaften wieder einen wichtigen Untersuchungsgegenstand bildeten, bevor er sich dann vor allem der Graphentheorie zuwandte. Als Beispiele seien die Herleitung einer transfiniten Version des Satzes von Jordan-Hölder und der Aufbau einer Theorie der Quasigruppen genannt. Die Quasigruppen gehören in die breite



Saunders MacLane



Garrett Birkhoff

Palette der Verallgemeinerungen des Gruppenbegriffs, die damals von mehreren Mathematikern in Angriff genommen wurden und zu teilweise sehr fruchtbaren Begriffsbildungen wie Halbgruppe, Gruppoid führten. All diese Begriffe entstanden durch eine Reduzierung des Axiomensystems für eine Gruppe, im Falle der Quasigruppe verzichtete Ore auf die Assoziativität der Gruppenoperation sowie die Existenz eines Einselements und der Inversen und forderte nur, daß zu Elementen a und b zwei Elemente x, y der Quasigruppe existieren, mit $ax = b$ und $ya = b$. Besonders hervorzuheben ist noch das Brandtsche Gruppoid, das Heinrich Brandt im Rahmen zahlentheoretischer Forschungen 1926 eingeführt hatte. Ohne auf die Details dieser Entwicklung einzugehen, muß festgehalten werden, daß die Theorie der Gruppoide und Halbgruppen über die Zahlentheorie hinaus sehr vielfältige Anwendungen erfuhr und etwa in den Untersuchungen über theoretische Syntaxen und Sprachen sowie in der Automatentheorie eine wichtige Rolle spielt. Das Brandtsche Gruppoid war schließlich ein Ausgangspunkt für den Kategorienbegriff von Eilenberg-MacLane, einer abstrakten algebraischen Bildung, die noch näher betrachtet werden wird.

10.2.1 Die Entstehung der Verbandstheorie

Bevor auf die verbandstheoretischen Studien von Garrett Birkhoff, dem Sohn des durch zahlreiche Resultate auf den verschiedenen Teilgebieten der Analysis und über dynamische Systeme bedeutenden amerikanischen Mathematikers George David Birkhoff, näher eingegangen werden wird, soll kurz die Entwicklung der Verbandstheorie skizziert werden. Der Verbandsbegriff wurde erstmals bereits Ende des 19. Jahrhunderts von Ernst Schröder und Dedekind eingeführt, blieb aber für mehrere Jahrzehnte im wesentlichen unbeachtet. Schröder hatte sich intensiv dem Aufbau der Logik gewidmet und zur

Erfassung der logischen Operationen auf die Mittel der Algebra zurückgegriffen (vgl. Abschn. 9.1.1). In den Studien zu den allgemeinen Verknüpfungen, die in seinen logischen Kalkül und einen axiomatisch orientierten Aufbau der Logik einmündeten, deckte er die Unterschiede seines logischen Kalküls zu den üblichen (an den arithmetischen Operationen orientierten) algebraischen Kalkülen auf. Er erkannte die Unabhängigkeit des Distributivgesetzes von den anderen Verknüpfungsregeln und die Tatsache, daß nur ein Distributivgesetz, z. B. $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$, vorausgesetzt werden muß, das dazu duale Gesetz $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ konnte er dann daraus ableiten. Damit hatte er aber die Verbandsstruktur im Logikkalkül herausgearbeitet. Am genauesten führte Schröder dies in seinen mehrbändigen *„Vorlesungen über die Algebra der Logik“* aus.

Diese Vorlesungen bildeten dann auch für Dedekind einen Anreiz zu seinen verbandstheoretischen Veröffentlichungen, die eigentliche Wurzel bildeten jedoch seine algebraischen Studien, insbesondere zur Teilbarkeitslehre (vgl. Abschn. 9.3). Mit der mengentheoretischen Interpretation der Teilbarkeitsbeziehung legte er zugleich die Basis für das Erkennen verbandstheoretischer Eigenschaften, die sich im Operieren mit Moduln bzw. Idealen und deren größtem gemeinsamen Teiler und deren kleinstem gemeinschaftlichen Vielfachen ergaben. Entscheidend dabei war, daß die Bildung des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen als Operationen in der Menge der Moduln, Ideale oder auch anderer algebraischer Objekte aufgefaßt wurden. Einen zweiten Schritt bildete dann die Erkenntnis, daß es sinnvoll war, auch in diesem Fall nach der entstehenden algebraischen Struktur zu fragen, also etwa zu untersuchen, ob die Menge der Moduln mit den genannten Verknüpfungen (größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches) eine algebraische Struktur erhielt. Die nötigen Begriffe und Bezeichnungen sowie die Herleitung der einzelnen Resultate hatte Dedekind 1871 im X. Supplement zu Dirichlets Zahlentheorie bzw. den überarbeiteten Versionen in den nachfolgenden Auflagen sowie in einigen ergänzenden Arbeiten vorgenommen. Im XI. Supplement von 1894 findet sich beispielsweise eine vollständige axiomatische Charakterisierung eines Verbandes, wobei er auch, da er Verbände von Moduln betrachtete, die spezielle, als Modulargleichung bezeichnete Eigenschaft $m+(a-b) = (m+a)-b$ hervorhob. Darin bezeichnen a, b, m Moduln, $+$ die Bildung des größten gemeinsamen Teilers, $-$ die Bildung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen, und m sei teilbar durch b, d. h. m ist als Menge in b enthalten. Verbände mit dieser Eigenschaft werden heute modulare oder Dedekindsche Verbände genannt. Dedekind hatte bereits 1877 bei Betrachtungen über Idealklassen eine äquivalente Beschreibung der Modulargleichung durch zwei Gleichungen gegeben. Die verbandstheoretischen Vorstellungen entwickelte er erst 1897 in Form der Dualgruppen systematisch. Aus verschiedenen Stellen in Dedekinds Arbeiten und aus seinem Nachlaß wird jedoch deutlich, daß er bereits früher abstrakte Untersuchungen der Gruppe der Moduln durchgeführt hatte. In seinen Forschungen zur

algebraischen Zahlentheorie war er immer wieder auf die Verbandsstruktur geführt worden und hatte bei Moduln, Idealen und Zahlen, aber auch bei Körpern und Gruppen verschiedene Modelle von Verbänden vorliegen. Mit Schröders logischen Systemen trat dann ein weiteres Modell aus einem völlig anderen Teilgebiet der Mathematik hinzu. Das Erscheinen von Schröders *„Vorlesungen zur Algebra der Logik“* diente Dedekind als formaler Anlaß, um seine abstrakten Untersuchungen über Dualgruppen zu publizieren [Dedekind 1897b]. In der Arbeit gab Dedekind eine klare axiomatische Definition der Dualgruppe, die der modernen Verbandsdefinition entspricht:

„Ein System $\mathcal{A}$ von irgendwelchen Dingen α, β, γ , ... soll eine Dualgruppe heißen, wenn es zwei Operationen $\pm$ gibt, welche aus je zwei Dingen α, β zwei ebenfalls in $\mathcal{A}$ enthaltene Dinge $\alpha \pm \beta$ erzeugen, und zugleich den Bedingungen A genügen.“ [Dedekind 1930, Bd. 2, S. 113]

Die Bedingungen A umfassen das Kommutativ-, das Assoziativ- und das Verschmelzungsgesetz für die Operationen $\pm$, also die Formeln:

$$\begin{array}{cc} \alpha + \beta = \beta + \alpha & \alpha - \beta = \beta - \alpha \\ \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma & \alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma \\ \alpha + (\alpha - \beta) = \alpha & \alpha - (\alpha + \beta) = \alpha \end{array}$$

(Man beachte, daß Dedekind mit $+$ und $-$ abstrakte Operationen bezeichnet, die nicht mit den entsprechenden arithmetischen Operationen zu verwechseln sind. Um diese Verwechslungen zu vermeiden, werden $+$ und $-$ meist durch $\cap$ und $\cup$ bzw. $\sqcap$ und $\sqcup$ ersetzt.)

Nach der Angabe der ihm bekannten wichtigen Beispiele für das Auftreten von Dualgruppen, wobei das Fehlen der Geometrie zu vermerken ist, behandelte Dedekind das distributive und das modulare Gesetz. Die Dualgruppen, die diesen Gesetzen genügen, nannte er vom Idealtypus bzw. vom Modultypus, da die von Idealen bzw. von Moduln gebildete Dualgruppe jeweils ein Modell für die entsprechende Gruppe lieferte. Dedekind stellte dann die Beziehungen zwischen diesen zusätzlichen Axiomen klar heraus, jede Dualgruppe vom Idealtypus ist auch vom Modultypus, aber es gibt Dualgruppen vom Modultypus, die nicht vom Idealtypus sind. Weiterhin existieren Dualgruppen, die nicht vom Modultypus sind. In seinen Untersuchungen bemerkte Dedekind auch, daß man eine Ordnungsrelation in einer Dualgruppe definieren kann, doch hat er diese Idee nicht weiter ausgebaut. In diesem Punkt blieb er, wie Mehrtens feststellt, in der Tradition der zahlentheoretischen Betrachtungen – ein abstrakter Ordnungsbegriff lag zu jener Zeit noch nicht vor. [vgl. Mehrtens 1979, S. 100f.] Dedekinds Arbeit zu den Dualgruppen wurde später von E. Noether und auch von Bourbaki wegen ihrer klaren abstrakt-axiomatischen Ausrichtung gewürdigt und als einer der ersten Beiträge zur axiomatischen Algebra bezeichnet.

In einer zweiten Arbeit widmete sich Dedekind dem Studium des von drei Moduln erzeugten Verbandes, den er als aus 28 Elementen bestehend nachwies und dessen Eigenschaften er aufzeigte. Da er im XI. Supplement von

1894 bereits einige Ergebnisse erwähnt hatte, griff Dedekind hier auf ältere Untersuchungen zurück. Neben der Analyse des konkreten Beispiels bildeten abstrakte Fragestellungen wie der sog. Kettensatz den Gegenstand der Arbeit.

Die Arbeiten von Schröder und Dedekind fanden zunächst keine unmittelbare Fortsetzung. Schließt man sich dem Standpunkt Ores an, daß der Übergang zur Verbandsstruktur einen zweiten, der Definition der abstrakten algebraischen Begriffe nachfolgenden Abstraktionsschritt erfordert, so können die Ansätze zur Verbandstheorie bei Schröder und Dedekind als historisch verfrüht eingestuft werden. In diesem Sinne war es zunächst erforderlich, den Weg zur abstrakten Algebra zu gehen, um dann zu weiteren abstrakten Bildungen fortzuschreiten. Da für die meisten Mathematiker die Anwendung der neuen Ideen keine nennenswerten Verbesserungen in der Behandlung der konkreten mathematischen Probleme mit sich brachte, bestand kein Anlaß diesen abstrakten Überlegungen zu folgen. Erst Ende der 20er Jahre kam es dann aus verschiedenen Richtungen zu einer Annäherung an die Verbandsstruktur, die sehr rasch in den Aufbau einer umfassenden Theorie überging. Den wichtigsten Nährboden für diese Entwicklung bildeten die Fortschritte in den verschiedenen Teilen der Mathematik hinsichtlich des abstrakten axiomatisch-mengentheoretischen Aufbaus der einzelnen Theorien, wie er speziell für die Algebra in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben wurde.

Karl Menger kam 1928 in einer Kombination von Grundlagenuntersuchungen zur Mengenlehre und geometrischen Überlegungen zur Definition einer von ihm als Feld bezeichneten Struktur, die einen Verband darstellte. Durch eine Abschwächung des Axiomensystems erhielt er dann eine Charakterisierung der projektiven Geometrie als Verband. Ausgehend von der Logik und den Schröderschen Studien legte Fritz (!) Klein ab 1929 einige Überlegungen zu Grundlagenfragen, speziell zur Rolle von abstrakten Verknüpfungen und den axiomatischen Strukturen vor. Den unmittelbaren Anlaß lieferten Fragen der Zahlentheorie und Algebra. Fritz Klein erkannte, daß es sich meist um Mengensysteme handelte, die gegenüber den Mengenoperationen Bildung des Durchschnitts bzw. der sog. relativen Vereinigung abgeschlossen waren. Die zugrunde liegende Struktur bezeichnete er 1932 als Verband und stellte die Verbände an den Anfang der axiomatischen Studien, wies ihnen also die Rolle eines strukturellen Grundbegriffs zu.

Um das Bild der Vorgeschichte der Verbandstheorie abzurunden, seien noch einige Studien genannt, die im Rahmen der abstrakten Algebra bzw. der amerikanischen Tradition zur Untersuchung von Axiomensystemen durchgeführt wurden. Wolfgang Krull (1924, 1928) und Heinrich Grell (1927) hatten in ihren Forschungen zur Idealtheorie auch verbandstheoretische Überlegungen hervorgebracht. Die Grellsche Arbeit hatte sogar sehr enge Bezüge zu Dedekinds Dualgruppenarbeit, obwohl er erst nachträglich von E. Noether auf diese Publikation hingewiesen worden war. Da die behandelte Fragestellung – Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe – eine Verallge-

meinerung der entsprechenden Dedekindschen Aufgabe war, ist dies nicht verwunderlich. In der Endfassung seiner Arbeit lehnte sich Grell auch in der Terminologie an Dedekind an. In die amerikanische Traditionslinie gehören Arbeiten von Huntington, Orrin Frink, Albert Bennett u. a., die sich um die Analyse von Booleschen Algebren rankten.

Studien zur abstrakten Algebra, u. a. van der Waerdens *„Moderne Algebra“*, bildeten auch den unmittelbaren Ausgangspunkt für Garrett Birkhoff. Dieser hatte bis 1932 an der Harvard Universität Cambridge (Mass.) studiert und lehrte fortan an dieser Universität, ab 1946 als Professor, außerdem war er auch in der Industrie tätig. Ein spezieller Themenkreis der Birkhoffschen Forschungen in den Jahren 1932/33 war die Gruppentheorie, in der er insbesondere an die Ergebnisse von Robert Remak über die Zerlegbarkeit endlicher Gruppen in direkt unzerlegbare Faktoren anknüpfte. Birkhoff war von der Nützlichkeit und den Möglichkeiten einer abstrakten Betrachtung mathematischer Theorien, wie sie in der Anwendung der axiomatischen Methode und in der modernen Algebra zum Ausdruck kam, überzeugt. Anders als bei Dedekind und Schröder, die sich erst durch eigene Beiträge den Weg zu abstrakteren Auffassungen bahnen und selbst wichtige Teile der neuen Methodik schaffen mußten, konnte Birkhoff diese veränderte Sichtweise und die zu ihrer Untermauerung dienenden Einzelresultate als Allgemeingut voraussetzen und gleich in seiner ersten Arbeit 1933 wichtige Teile der Verbandstheorie entwickeln. Er definierte eine verallgemeinerte Algebra mit ganz allgemeinen Operationen, wobei Algebra hier als mathematisches Objekt zu verstehen ist und weitgehend dem heute üblichen Begriff der universellen Algebra entspricht. Am System der Teilalgebren, das gegenüber der Bildung von beliebigen Durchschnitten und Verbindungen abgeschlossen ist, leitete er die Verbandseigenschaften ab. Dabei bezeichnet Verbindung den Durchschnitt aller umfassenden Teilalgebren. Die sich ergebende Verbandsdefinition war sehr allgemein, für viele Fälle war es jedoch sinnvoll, den Begriff etwas einzuschränken und nur endlichstellige bzw. zweistellige Operationen anzunehmen. Unter Verweis auf Klein gab Birkhoff auch diese Definition eines Verbandes an. Er ergänzte seine Ausführungen durch die Betrachtung der modularen und distributiven Verbände und zeigte als wichtige Anwendung, daß jeder distributive Verband einem Mengenverband und jeder endlichen Booleschen Algebra ein Mengenkörper entsprach. Weitere Anwendungen gab er in der Gruppen- und Ringtheorie. Durch ein breites Forschungsspektrum war Birkhoff in der Lage, innerhalb weniger Jahre die Verbandstheorie mit zahlreichen Bereichen der Mathematik erfolgreich zu verknüpfen und so die Bedeutung der neuen Begriffsbildung an mehreren Modellen nachzuweisen. Neben der Algebra schlug er die Brücke zur Mengenlehre, zur Maßtheorie, zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, zur Geometrie und zur Topologie. Mit seinen Arbeiten hob Birkhoff den Verbandsbegriff als Verallgemeinerung der in all diesen Gebieten vorhandenen strukturellen Gemeinsamkeiten hervor, machte diesen einheitlichen Begriff zum Gegenstand einer eigenständigen Untersu-

chung und zeigte die Möglichkeiten der Verbandstheorie auf. 1940 publizierte er die erste Monographie zur Verbandstheorie, nachdem ein Jahr zuvor Hans Hermes und Gottfried Köthe wichtige Resultate in einem Beitrag zur *„Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“* zusammengefaßt dargestellt hatten. Die rasche Etablierung der Verbandstheorie bis zum Ende der 30er Jahre ist in Verbindung mit den Erfolgen der Strukturmathematik zu sehen. Sowohl die Aufdeckung struktureller Gemeinsamkeiten und deren Formulierung mit Hilfe der axiomatischen Methode als auch die eigenständige Untersuchung der abstrakten Systeme einschließlich weiterer Verallgemeinerungen hatten sich als sehr fruchtbar erwiesen und waren allmählich zum Allgemeingut der Mathematiker geworden. Auf diesem Fundament konnte die Verbandstheorie, deren wichtigste Wurzeln in der Entwicklung der modernen Algebra lagen, aufbauen und die vielfältigen Beziehungen zu anderen Teilgebieten der Mathematik herausarbeiten. Diese Anwendungen lieferten die Rechtfertigung für die vollzogenen Abstraktionen sowie zugleich den Anreiz für weitere Untersuchungen und bildeten den Nährboden, auf dem eine rasche Etablierung der Theorie erfolgen konnte.

Bezüglich des Aufschwungs der Strukturmathematik in den 30er Jahren sei noch ein Argument angeführt, das sich aus den persönlichen Erinnerungen verschiedener Mathematiker ableiten läßt und auf das H. Mehrtens hingewiesen hat [Mehrtens 1979, S. 200]. Die Ausbildung an den meisten Universitäten folgte noch weitgehend den klassischen Darstellungen der Mathematik; Lehrbücher, welche die neuen Ideen, z. B. der abstrakten Algebra, integrierten, waren erst im Entstehen. Die jungen Mathematiker lernten die moderne Mathematik erst relativ spät, mit der Annäherung an eine Forschungstätigkeit kennen und schätzen. Die dabei auftretende Diskrepanz zwischen der scheinbar unfruchtbaren konservativen Ausbildung und den Erfolgen der modernen Mathematik erzeugte den Impetus, im Abstraktionsprozeß fortzufahren und die Strukturmathematik weiter auszubilden.

10.2.2 Bourbaki und Strukturkonzepte

Die Unzufriedenheit mit der klassischen Darstellung der Analysis in den französischen Lehrbüchern war auch der unmittelbare Anlaß für die Gründung der Bourbaki-Gruppe. Ende 1934 traf sich erstmals eine Reihe junger französischer Mathematiker und stellte sich das Ziel, in gemeinsamer Arbeit ein Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung zu verfassen. Dieses sollte so modern wie möglich sein und für 25 Jahre den Standard in der Lehre dieses Teilgebietes bestimmen. Zu den Gründungsmitgliedern der Gruppe gehören Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Paul Dubreil, Charles Ehresmann, Jean Leray, Szolem Mandelbrojt, René de Possel und André Weil. Später schlossen sich weitere bedeutende Mathematiker der Gruppe an, unter ihnen Samuel Eilenberg, Alexander Grothendieck, Pierre Samuel und Jean-Pierre Serre, während andere ihre Mitarbeit an dem



Jean Dieudonné



Henri Cartan

Projekt einstellten. Um eine ständige Erneuerung der Gruppe zu sichern und ein Festhalten an veralteten Konzepten zu verhindern, sollten die Mitglieder der Gruppe nicht älter als 50 Jahre sein, ein Grundsatz, der in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts mehrfach durchbrochen wurde. Ein Wesenszug der gemeinsamen Arbeit war die Diskussion der von einzelnen Mitgliedern der Gruppe ausgearbeiteten Kapitel des Buches, in deren Ergebnis die einzelnen Manuskripte immer wieder neu geschrieben und verbessert wurden, bis alle der vorgelegten Formulierung zustimmten. Doch die Diskussionen konnten sich nicht auf inhaltliche Fragen beschränken, auch methodische und methodologische Probleme waren zu lösen. Sollte der Stoff abstrakt axiomatisch dargestellt werden, welche Begriffe sollten als Basis gewählt werden? Viele weitere Fragen mußten geklärt werden. Rückblickend bezeichneten einige Bourbaki-Mitglieder die Fertigstellung der Bücher als ein Wunder angesichts der großen Meinungsverschiedenheiten. In diesem Prozeß wurden wichtige Begriffe herausgearbeitet oder exakter gefaßt und so eine feste begriffliche Basis für viele Teilgebiete der Mathematik geschaffen. Aus dem Plan, ein modernes Analysislehrbuch zu schaffen, wurde allmählich ein Programm zu einer einheitlichen umfassenden Darstellung des Gesamtbildes der Mathematik. Sehr bald erkannte die Bourbaki-Gruppe, daß man sich auf ausgewählte wichtige Teile der Mathematik beschränken mußte. Für eine ausführliche Analyse der Gründung der Bourbaki-Gruppe und deren Aktivitäten in der ersten Dekade ihres Bestehens sei auf die Arbeiten von L. Beaulieu verwiesen [Beaulieu 1989], [Beaulieu 1994].

Zur Realisierung des neuen Programms wurden ab 1939 unter dem Namen Nicolas Bourbaki die berühmten Bände der Reihe *„Eléments de mathématiques“* veröffentlicht. Mit diesen Büchern sowie mit ihren eigenen Werken haben die Mitglieder der Bourbaki-Gruppe einen prägenden Einfluß auf die Entwick-

lung der Mathematik ausgeübt. Von zentraler Bedeutung war dabei, daß die Gruppe ein neues Bild der Mathematik als einer Mathematik der Strukturen entwickelte und in den Publikationen umsetzte. Basierend auf dem Strukturkonzept errichtete man sprichwörtlich eine *„Architektur der Mathematik“*, so auch der Titel eines Artikels, in dem Dieudonné 1948 unter dem Namen Bourbaki die Ansichten zum Aufbau programmatisch zusammenfaßte. Die Strukturen erschienen als das geeignete Mittel, um die Einheit der Mathematik zu sichern und in der mathematischen Praxis zum Tragen zu bringen:

„Each structure carries with it its own language, freighted with special intuitive references derived from the theories from which the axiomatic analysis ... has derived the structure. And, for the research worker who suddenly discovers this structure in the phenomena which he is studying, it is like a sudden modulation which orients at once the stroke in an unexpected direction in the intuitive course of his thought and which illumines with a new light the mathematical landscape in which he is moving about. ... Mathematics has less then ever been reduced to a purely mechanical game of isolated formulas; more then ever does intuition dominate in the genesis of discoveries. But henceforth, it possesses the powerful tools furnished by the theory of the great types of structures; in a single view, it sweeps over immense domains, now unified by the axiomatic method, but which were formerly in a completely chaotic state.“ [Bourbaki 1950, S. 227f.]

Es deutet sich auch der formalistische Standpunkt an, den die Bourbakisten in der Behandlung der Mathematik einnahmen. Doch hat man dies nicht als Grundhaltung zur Behandlung der Mathematik interpretiert und wich mehrfach davon ab. Dem entsprach, daß sich die Mitglieder der Bourbaki-Gruppe an den Diskussionen zwischen des Anhängern des Intuitionismus, des Formalismus und des Logizismus um die Grundlagen der Mathematik nicht beteiligten. Auch das Strukturkonzept wurde keineswegs immer konsequent in allen Büchern der Gruppe umgesetzt. Die formale Theorie der Strukturen wurde im Kapitel 4 des Buches zur Mengenlehre entwickelt, das erstmals 1957 erschien. Dort traten als Beispiele jene drei Strukturen auf, die Bourbaki auch als Mutterstrukturen bezeichnete: die algebraischen, die topologischen und die Ordnungsstrukturen. Ein großer Teil der in diesem Kapitel entwickelten Theorie der Strukturen fand jedoch, wie Corry zeigte, in den anderen Bänden der *„Eléments“* keine Anwendung, und diese Theorie hatte nicht die Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik, die ihr gewöhnlich zugeschrieben wird [Corry 1996, S. 321-342]. Die Ursache liegt vor allem darin, daß der Begriff der Struktur in zahlreichen Publikationen auch von Mitgliedern der Bourbaki-Gruppe nicht im Sinne der abstrakten formalen Definition, sondern in einer anschaulicheren, aber nicht exakt definierten Bedeutung gebraucht wurde. So entstand ein Bild der Mathematik als Theorie der Strukturen, mit dem man allgemein den Übergang zum abstrakten, axiomatisch fundierten streng deduktiven Aufbau der einzelnen Teilgebiete der Mathematik verband, aber nicht die strenge Gliederung der Mathematik nach der formalen Struk-

turtheorie. Hinzu kam, daß die disziplinäre Aufspaltung der Mathematik in verschiedene Teilgebiete durchaus dem Bild von verschiedenen Strukturen und deren Ineinandergreifen entsprach. Dies mindert nicht die Leistung der Bourbaki-Gruppe und deren Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert.

Für die Algebra war das Wirken der Bourbaki-Gruppe vor allem in zweierlei Hinsicht von Bedeutung. Zum einen wurde die Bedeutung der Algebra durch die Kennzeichnung als Grundstruktur weiter erhöht. Zugleich profitierte sie, wie jedes der behandelten Gebiete, von der Zusammenfassung der in den letzten Jahren erzielten Ergebnisse und der Neustrukturierung des gesamten Aufbaus, doch war dieser Impuls mit Blick auf van der Waerdens *„Moderne Algebra“*, die ja eine wichtige Vorbildfunktion für die Bourbaki-Gruppe hatte, schwächer als bei anderen Teilgebieten. Zum zweiten bedingten die zahlreichen Anwendungen algebraischer Methoden eine intensive Beschäftigung mit vielen speziellen algebraischen Fragen.

Das Erscheinen der ersten Kapitel von Bourbakis *„Algebra“* im Jahre 1942 kann auch als der Beginn einer neuen Phase in der Entwicklung der Strukturmathematik angesehen werden. Nicht nur, daß damit die Algebra im Sinne des Bourbakischen Strukturkonzepts vorlag, im gleichen Jahr erschien auch die erste Arbeit, in der die Begriffe *„Kategorie“* und *„Funktor“* benutzt wurden und die damit am Anfang der Kategorientheorie steht. Ein Jahr zuvor war der *„Survey of modern algebra“* von Birkhoff und MacLane erschienen, das erste englischsprachige Lehrbuch, das die Algebra im Stile von van der Waerdens Buch darlegte. Dabei war es vor allem die Kategorientheorie, welche die Merkmale der neuen Entwicklungsphase in sich vereinigte. Sie stellte einerseits die Fortsetzung der in Verbindung mit der Verbandstheorie, dem Oreschen Strukturbegriff und entsprechenden verwandten Überlegungen geschaffenen Vorstellungen dar, andererseits eine gewisse Alternative zur Bourbakischen Strukturtheorie. Wichtige Impulse für ihre Herausbildung und Anerkennung erhielt sie aus den Anwendungen der abstrakten Algebra, insbesondere in der Geometrie und der Topologie.

Wie in den verschiedenen Ansätzen zu einer Strukturtheorie wurde auch in der Kategorientheorie von den einzelnen mathematischen Objekten abstrahiert und nur die Zusammenfassung zu neuen Objekten wie Gruppen, Vektorräumen, Mengen usw. betrachtet. Im Mittelpunkt standen die Beziehungen zwischen diesen neuen Objekten, wobei sich für verschiedene Fragestellungen die gleichzeitige Untersuchung all dieser Relationen als notwendig und günstig erwies. Diese Beziehungen werden durch die sog. Morphismen erfaßt, und eine Kategorie enthält neben der Menge der Objekte die Menge der Morphismen als zweiten grundlegenden Bestandteil. Um von einer Kategorie sprechen zu können, müssen die Morphismen noch gewisse Bedingungen erfüllen, die ihrem Wesen nach bereits bei anderen algebraischen Betrachtungen eine Rolle spielten:

Zu zwei Objekten A, B der Kategorie gibt es wenigstens einen Morphismus f, der A in B abbildet und zu jedem Objekt A existiert ein eindeutig bestimmter identischer Morphismus 1_A.

Ist C ein weiteres Objekt und g ein Morphismus von B in C, so existiert die Komposition $f \bullet g$ der Morphismen f und g, die A in C abbildet.

Für diese Komposition der Morphismen wird das Assoziativgesetz gefordert und ferner, daß der identische Morphismus als Identität bei der Komposition mit f wirkt, d. h. $1_A \bullet f = f = f \bullet 1_B$.

Beispiele für Kategorien sind etwa die Kategorie Grp mit allen Gruppen als Objekten und den Homomorphismen zwischen Gruppen als Morphismen, die Kategorie Set aller Mengen und der Funktionen zwischen ihnen oder die Kategorie Top aller topologischen Räume und der stetigen Funktionen. Es sei noch angemerkt, daß es möglich ist, den Kategorienbegriff allein mit Hilfe der Morphismen zu definieren. Diese Definition erwies sich als kompliziert und nicht gut handhabbar, unterstreicht aber die besondere Bedeutung, die entsprechend den Grundgedanken der Kategorientheorie den Relationen zwischen den Objekten beigemessen wird.

Ein weiterer Abstraktionsschritt war schließlich die Untersuchung von Abbildungen zwischen Kategorien, die zum Begriff des Funktors führte. Als besonderes Charakteristikum eines Funktors ist hervorzuheben, daß er sowohl die Objekte der beiden Kategorien, als auch die zugehörigen Morphismen abbildet und dabei die Identität und die Komposition respektiert. In Formeln bedeutet das: Ist F ein Funktor von der Kategorie K auf die Kategorie H, so wird jedes A aus K auf $F(A)$ aus H abgebildet und der Morphismus f von A auf B hat den Morphismus $F(f)$ der Kategorie H als Bild und $F(f)$ bildet $F(A)$ auf $F(B)$ ab. Außerdem gilt $F(1_A) = 1_{F(A)}$ und $F(f \bullet g) = F(f) * F(g)$.

Die Kategorientheorie fand zunächst keine große Resonanz bei den Mathematikern, obwohl bereits Ende der 30er Jahre in mehreren Arbeiten Elemente der Kategorientheorie in impliziter Form aufgetreten waren. Den Begriff der Kategorie, allerdings mit einer von obiger Definition abweichenden Bedeutung, hatten Lasar Aronovič Ljusternik und Lev Genrichovič Schnirelmann Ende der 20er Jahre bei der Anwendung topologischer Methoden in der Variationsrechnung eingeführt. Trotz der engen Verknüpfung der Entstehung der Kategorientheorie mit Fragen der algebraischen Topologie hoben Eilenberg und MacLane bereits in einer der nachfolgenden Arbeiten 1945 die allgemeinen Gesichtspunkte hervor und stellten sie damit in die oben skizzierte Traditionslinie der abstrakten Algebra:

„In a metamathematical sense our theory provides general concepts applicable to all branches of abstract mathematics, and so contributes to the current trend towards uniform treatment of different mathematical disciplines. In particular, it provides opportunities for the comparison of constructions and for the isomorphism occuring in different branches of mathematics; in this way it may occasionally suggest new results by analogy.

The theory also emphasizes that, whatever new abstract objects are constructed in a specified way out of given ones, it is advisable to regard the construction of the corresponding induced mappings on these new objects as an integral part of the definition ... This emphasis on the specification of the type of mappings employed gives more insight into the degree of invariance of the various concepts involved.“ [Eilenberg/MacLane 1945, S. 236]

Die Kategorientheorie hat sich dann in enger Verbindung mit dem Aufschwung der algebraischen Topologie in den 40er Jahren sehr rasch entwickelt und bot für zahlreiche mathematische Sachverhalte den Rahmen für eine einheitliche abstrakte Darstellung. Sie ermöglichte später auch eine neue alternative Behandlung einiger Grundlagenfragen der Mathematik.

An dieser Stelle sei eine allgemeine Bemerkung zur Durchsetzung neuer algebraischer Theorien eingeflochten. Mehrfach wurde in diesem historischen Abriß darauf hingewiesen, daß die Durchsetzung und Rezeption neuer Ideen in der Algebra meist einen längeren Zeitraum beanspruchte, wie dies gewöhnlich bei wissenschaftlichen Neuerungen der Fall ist. Die Kriterien, um diese Rezeption zu messen, sind dabei unterschiedlich und u. a. vom betrachteten Zeitraum abhängig. Für die Entwicklung im 20. Jahrhundert kann die Übernahme in den Lehrbetrieb der Universitäten als ein Kriterium für die allgemeine Anerkennung der neuen Ideen genommen werden. So wurde das Erscheinen des Lehrbuches von Birkhoff und MacLane bzw. die Mitte der 40er Jahre wiederholt als der Zeitpunkt bezeichnet, zu dem die moderne abstrakte Algebra weitgehend in den Studienbetrieb Eingang gefunden hatte. Die Übernahme der Bourbakischen Ideen kann man etwa auf die Mitte der 60er Jahre datieren, ähnliches gilt für die Kategorientheorie. Ein weiteres Indiz für die Fortschritte in der Verbreitung der abstrakten Algebra waren das Weglassen des Attributs *„moderne“* durch van der Waerden bei der Neuedition seines Algebrabuches im Jahre 1955 und das Ersetzen des Lehrbuches von Birkhoff und MacLane durch ein neues der gleichen Autoren im Jahre 1960 ebenfalls unter dem Titel Algebra. Diese Art der Algebra war nun nicht mehr neu, sondern galt als üblicher Standard bzw. klassisch. Birkhoff und MacLane gründeten dabei ihre Darstellung auf wesentliche Elemente der Kategorientheorie sowie auf Ideen der *universellen Algebra*, machten also auch diese Abstraktionen zum Gegenstand der Lehrbuchliteratur.

10.3 Die Wechselwirkung der abstrakten Algebra mit anderen Teilgebieten der Mathematik

In diesem Abschnitt soll an einigen Beispielen das Vordringen algebraischer Methoden in andere Bereiche der Mathematik und in die Physik behandelt werden, das sich in Verbindung mit der Herausbildung der abstrakten Algebra vollzog. Ohne dies in jedem Einzelfall hervorzuheben, hat häufig auch die Algebra weitere Impulse für ihre Entwicklung erfahren. Diese richteten

sich primär auf die Lösung konkreter Probleme und weniger auf die Stimulierung weiterer Abstraktionen. Durch die erfolgreiche Anwendung der algebraischen Methoden wurden jedoch zugleich das erreichte Abstraktionsniveau legitimiert und somit zumindest die vorgenommenen Verallgemeinerungen als sinnvoll nachgewiesen.

10.3.1 Die algebraische Geometrie

Die klassische algebraische Geometrie; wie sie im Anschluß an Max Noether vor allem durch die italienischen Geometer um Castelnuovo und Severi ausgeformt worden war, nahm in ihren Grundbegriffen noch stark auf die geometrische Intuition Bezug. Häufig lagen den Überlegungen der Körper der reellen bzw. der komplexen Zahlen oder andere Zahlkörper als Grundkörper zugrunde. Doch schon Dedekind und Weber hatten in ihrer Arbeit von 1882 vermerkt, daß sie in ihren Betrachtungen nur die algebraische Abgeschlossenheit des Grundkörpers verwendet hatten. Mit der allmählichen Etablierung einer abstrakten algebraischen Betrachtungsweise ergab sich bezüglich der algebraischen Geometrie die Aufgabe, diese ebenfalls auf solch eine abstrakte Basis zu stellen. Dies konnte dadurch geschehen, daß in den auftretenden Gleichungen die Koeffizienten bzw. bei den Punkten die Koordinaten in beliebigen Körpern gewählt wurden und alle Folgerungen von einem streng algebraischen Standpunkt ohne Heranziehung der Analysis oder der Topologie vorgenommen wurden. Zugleich verdeutlichten die teilweise komplizierten und nicht einheitlichen Definitionen verschiedener Begriffe, die das Verständnis der einzelnen Arbeiten erschwerten und auch zu Meinungsverschiedenheiten führten, daß die logischen Grundlagen dieses Teilgebietes stark verbesserungsbedürftig waren. Dementsprechend unterzogen E. Noether, Krull, van der Waerden, F. K. Schmidt u. a. die Grundbegriffe der algebraischen Geometrie einer kritischen Analyse und gaben ihnen eine algebraische Formulierung. Dabei schufen sie große Teile jenes Gebietes, das gewöhnlich als kommutative Algebra bezeichnet wird. Eine wichtige Basis stellte die von Noether und Krull entwickelte allgemeine Ring- und Idealtheorie dar. Neben den Zerlegungssätzen für Ideale, auf deren Bedeutung für die algebraische Geometrie schon hingewiesen wurde, seien die Heranziehung zahlreicher bewertungstheoretischer Resultate sowie der Theorie der lokalen Ringe – das sind kommutative Ringe, die nur ein maximales Ideal besitzen – erwähnt. Die Bedeutung dieser Ergebnisse für die algebraische Geometrie wurde größtenteils erst mit der allgemeinen Durchsetzung der abstrakten Algebra Anfang der 40er Jahre erkannt. Anknüpfend an Vorarbeiten von E. Noether strebte van der Waerden eine Neubegründung der algebraischen Geometrie an und widmete sich zunächst der Verallgemeinerung und rein algebraischen Definition des allgemeinen Punktes auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit und der Schnittvielfachheit. Zur Definition eines geeigneten Begriffs der Vielfachheit führte er u. a. die Idee der relationstreuen Spezialisierung ein, die grob

formuliert verlangt, daß beim Übergang von einer irreduziblen Mannigfaltigkeit zu einer Untermannigfaltigkeit niedrigerer Dimension die algebraischen Relationen zwischen den Punkten erhalten bleiben oder anders ausgedrückt, daß beim Ersetzen der Unbestimmten und Parameter in den Gleichungen durch speziellere Wertsysteme die algebraischen Relationen zwischen den Lösungen und den Parametern bestehen bleiben. Mit den neuen algebraischen Mitteln löste van der Waerden eine ganze Reihe von Problemen der algebraischen Geometrie. Insbesondere gelang ihm eine Verallgemeinerung des Bézoutschen Satzes auf den Schnitt einer $(n-r)$-dimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeit mit einer r-dimensionalen in einem n-dimensionalen projektiven Raum. Der Bézoutsche Satz besagte (was natürlich bereits eine Verallgemeinerung der ursprünglichen Aussage von Bézout war), daß die Anzahl der Schnittpunkte von n algebraischen Hyperflächen im n-dimensionalen projektiven Raum gleich dem Produkt der Gradzahlen der einzelnen Hyperflächen ist, wenn die Schnittpunkte mit ihrer Vielfachheit genommen werden und es insgesamt nur endlich viele gibt. 1933 begann van der Waerden mit einer Serie von Arbeiten unter dem Titel *„Zur algebraischen Geometrie“*, in denen er einen systematischen und strengen Neuaufbau dieses Gebietes vornahm und viele Resultate anderer Mathematiker verarbeitete. Bis 1958 erschienen 19 Beiträge in dieser Serie.

Ab den 40er Jahren leistete auch André Weil wichtige Beiträge zur Neubegründung der algebraischen Geometrie. Bei den grundlegenden Begriffen sei speziell die verbesserte Definition der Schnittvielfachheit hervorgehoben, die er von gewissen Restriktionen befreite, die van der Waerden noch hatte fordern müssen und welche die Anwendung dieser Definition merklich erschwerten. Weils Arbeiten standen im engen Zusammenhang mit zahlentheoretischen Problemen und führten u. a. zur Verallgemeinerung der Riemannschen Zeta-Funktion und zum Beweis der Riemannschen Vermutung für gewisse Funktionenkörper. 1946 publizierte er eine monographische Darstellung der abstrakten algebraischen Geometrie, bei der er von beliebigen Körpern ausging.

Ende der 40er Jahre begannen weitere abstrakte Begriffe das Bild der Mathematik im Sinne des Bourbakischen Strukturkonzepts zu verändern. Jean Leray hatte 1945 in einer kurzen Mitteilung eine Definition der Garben und der Spektralfolgen gegeben, die Leray und Henri Cartan in den folgenden Jahren zu einem wichtigen Werkzeug in vielen Teilgebieten der Mathematik ausbauten. Große Fortschritte erzielten die algebraische Topologie, die Differentialgeometrie und die Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten. Gleichzeitig fand auch der in den 30er Jahren eingeführte Begriff des Vektorbündels Eingang in die algebraische Geometrie. Begünstigt wurde die Übernahme dieser Grundbegriffe in die algebraische Geometrie durch eine Entdeckung von Oscar Zariski, dem es beim Studium von Singularitäten auf projektiven algebraischen Mannigfaltigkeiten gelungen war, mit algebraischen Mitteln eine Topologie auf einer Mannigfaltigkeit zu definieren. Weil bemerkte dann, daß diese



Hermann Weyl



Oscar Zariski

später nach Zariski benannte Topologie auch für die Mannigfaltigkeiten der abstrakten algebraischen Geometrie definiert werden konnte. Damit war das Tor geöffnet, um die Übertragung von verschiedenen Methoden und Resultaten in Angriff zu nehmen, die auf topologischen Eigenschaften beruhten. Von den zahlreichen Mathematikern, die neben den schon genannten an diesem Prozeß beteiligt waren, seien Alexander Grothendieck, Jean-Pierre Serre, Shing - Shen Chern, Kunihiko Kodaira, Friedrich Hirzebruch und Claude Chevalley erwähnt. Ein Problem, auf das sich viele Forschungen konzentrierten, war die Verallgemeinerung des Satzes von Riemann-Roch. Nachdem Friedrich Karl Schmidt bereits in den 30er Jahren eine erste Verallgemeinerung dieses Satzes abgeleitet und wichtige Vorarbeiten in Verbindung mit zahlentheoretischen Studien geleistet hatte, hatten sich fast alle der oben erwähnten Mathematiker mit diesem Satz beschäftigt. Eine erste Verallgemeinerung des Riemann-Rochschen Satzes auf projektive algebraische (nichtsinguläre) Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension konnte dann Hirzebruch 1954 publizieren, wobei er insbesondere auf Resultate von Cartan, Kodaira, Serre u. a. zur Garbentheorie zurückgriff. Schließlich brachte Grothendieck die abstrakte Betrachtungsweise weiter voran und begann etwa 1957 damit, sein Programm von einer großen Verallgemeinerung der algebraischen Geometrie zu realisieren. Die neue Theorie sollte alle bisherigen Entwicklungen enthalten und ging von der Kategorie aller kommutativen Ringe mit Einselement aus. Von grundlegender Bedeutung für dieses Programm war die Theorie der sog. Schemata, eine gigantische von Grothendieck entwickelte Theorie, die seitdem eine dominierende Rolle in der algebraischen Geometrie spielt. In der neuen abstrakten Geometrie fand übrigens auch der allgemeine Punkt, nun wohl begründet, seinen festen Platz, und die topologischen Argumentationen aus der italienischen Schule waren wieder anwendbar.

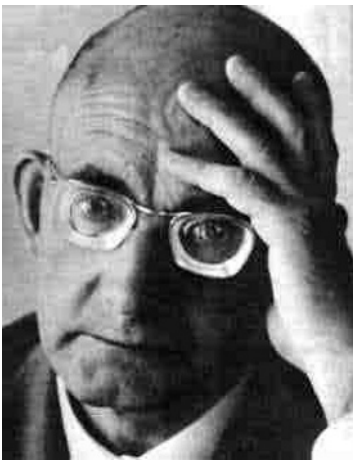
10.3.2 Anwendungen der Algebra in der Physik

Traditionsgemäß gibt es enge Beziehungen zwischen Mathematik und Physik, war doch die Lösung vieler physikalischer Fragestellungen an den Einsatz entsprechender mathematischer Methoden geknüpft. Umgekehrt verdankte die Mathematik wichtige Impulse zur Entwicklung neuer Theorien und Methoden häufig der Beschäftigung mit physikalischen Problemen. Ein wichtiges Beispiel lieferte im 20. Jahrhundert auch die Algebra. Es handelt sich dabei um die Suche nach einer befriedigenden Begründung der Quantenmechanik, die sich in den ersten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts sehr rasch entwickelt hatte. Bei dieser Suche zogen die Mathematiker Methoden aus vielen Gebieten der Mathematik heran.

Im folgenden sollen nur Methoden vorgestellt werden, die wesentlich algebraische Mittel benutzten. Bekanntlich gab es zunächst vier verschiedene Ansätze zur Formulierung der Quantenmechanik: Die Matrizenmechanik Heisenbergs, die Wellenmechanik Schrödingers, den Formalismus Diracs und den Operatorenformalismus von Born und Wiener. Grundlegend für Wiener war die Interpretation der physikalisch beobachtbaren Größen, der Observablen, als Operatoren in einem Hilbertraum, sowie der Nachweis, daß für die Observablen algebraische Operationen definiert werden können und die Beschreibung des physikalischen Zustands eines Systems durch eine sog. Zustandsfunktion. Die Zustandsfunktionen bilden den Hilbert-Raum, auf dem die Operatoren definiert sind. In mehreren bedeutenden Arbeiten wurden Ende der 20er Jahre dann die Beziehungen dieser Theorien zueinander aufgeklärt. Pascual Jordan zeigte 1933, daß die Observablen mit diesen Operationen eine kommutative, nichtassoziative distributive Algebra bilden. Diese Algebren werden heute als Jordan-Algebren bezeichnet. Die Aufklärung der Struktur und der Darstellungen von Jordan-Algebren wurde ein neues Forschungsproblem, bei dessen Lösung Algebra und Funktionalanalysis eng zusammenspielten. Aus den Resultaten erhoffte man sich dann eine genauere Beschreibung quantenmechanischer Prozese und die Möglichkeit, neue Einsichten ableiten zu können. Das größte Manko der Theorie war jedoch, daß die quantenmechanischen Größen nicht mit beschränkten Operatoren über endlichdimensionalen Räumen darstellbar waren, sondern unbeschränkte Operatoren und unendlichdimensionale Räume erforderten. Entsprechend konnte die grundlegende Kommutatorrelation $pq - qp = (h/2\pi i)I$ (q repräsentiert die Ortskoordinaten, p die Impulskoordinaten des Teilchens, h das Plancksche Wirkungsquantum und I den identischen Operator) nicht realisiert werden. Neben anderen widmete sich John von Neumann, der bereits 1927 in seinem Artikel *„Mathematische Begründung der Quantenmechanik“* eine abstrakte Definition des Hilbert-Raumes gegeben und die Theorie der Operatoren auf diesen Räumen systematisch entwickelt hatte, dieser Herausforderung und fügte den algebraischen Bedingungen 1936 einige topologische hinzu, ohne eine endgültige Lösung zu erreichen. Doch bildeten diese Studien einen wichtigen Anreiz für die Theorie der Operatorenalgebren, wie sie von Neumann für die nach ihm benannten Algebren Ende der 30er Jahre entwickelte.

Ein weiteres Konzept zur Beschreibung quantenmechanischer Vorgänge stellten Birkhoff und von Neumann 1936 unter Rückgriff auf Elemente der Verbandstheorie vor. Die Verbandsstruktur wurde durch die abgeschlossenen Unterräume des zugrunde gelegten Hilbert-Raumes, des Zustandsraumes, geliefert. In diesen Forschungen kamen auch von Neumanns Kenntnisse aus dem Studium der von Neumann-Algebren und der in diesem Zusammenhang von ihm aufgedeckten Beziehungen zwischen den stetigen Geometrien und den endlichdimensionalen projektiven Geometrien zum Tragen.

Einen anderen Weg hatte Weyl eingeschlagen. Er hatte sich intensiv mit Darstellungen von Lie-Gruppen beschäftigt. Anknüpfend an Resultate von Schur und Élie Cartan sowie im regen Gedankenaustausch mit letzterem und später mit E. Noether erzielte er wertvolle neue Resultate. U. a. stellte er den Zusammenhang zwischen den Methoden von Schur und E. Cartan für die Darstellungen der speziellen linearen Gruppe her, bewies die vollständige Reduzibilität dieser Darstellungen und dehnte seine Theorie auf alle halbeinfachen Gruppen aus. Etwa 1927 wandte er sich dann der Anwendung der Gruppendarstellungen in der Quantenmechanik zu. Er betrachtete die zwischen den Orts- und Impulskoordinaten bestehenden Kommutatorrelationen als definierende Relationen für die Multiplikation in der Menge dieser Größen, die dadurch die Struktur einer Lie-Algebra erhielt. Er ging dann zur Untersuchung der zugehörigen Lie-Gruppe über und leitete, teilweise heuristisch, neue Ergebnisse zur Darstellung dieser Gruppen ab. Die exakte Begründung einiger dieser Argumentationen führte zu neuen Einsichten über einparametrige Gruppen unitärer Transformationen und zum Nachweis der Eindeutigkeit für gewisse irreduzible unitäre Darstellungen von Lie-Gruppen. Die systematische Präsentation seiner Ideen zur Anwendung der Gruppentheorie in der Monographie *„Gruppentheorie und Quantenmechanik“* (1928) wirkte sehr anregend auf die weitere Entwicklung. Eine weitere Anwendung der Darstellungstheorie gab Weyl einige Jahre später zusammen mit R. Brauer, als beide anknüpfend an Diracs Quantentheorie des Elektrons die Darstellung der Spinoralgebra behandelten. Paul Dirac hatte die Spinoren 1928 eingeführt, als er eine gegenüber der Lorentz-Transformation invariante Gleichung für das Elektron aufstellte, die später nach ihm benannte Gleichung. Den Begriff Spinor verwendete er nicht, dieser wurde erst von Weyl und Brauer geprägt, die dann u. a. eine Darstellung der Gruppe der Rotationen in n Dimensionen herleiteten. Bei all diesen Untersuchungen spielten die sog. Clifford-Algebren eine wichtige Rolle, die Clifford als Anwendung des Graßmannschen äußeren Produkts bei geometrischen Betrachtungen bereits 1878 definiert hatte. Man erhält die erste Clifford-Algebra, wenn man von n Einheiten e_k $(k = 1, ...n)$ ausgeht, die Produktbildung den Bedingungen $e_k^2 = -1$ und $e_k e_j = -e_j e_k$ unterwirft und als Basis der Algebra die 2^n Größen 1, e_k, $e_k e_j$ $(k < j)$, $e_k e_j e_l$ $(k < j < l)$ usw. wählt. Durch die zusätzliche Forderung, daß nur Produkte mit einer geraden Anzahl von Faktoren auftreten sollen, erhält man die sog. zweite Clifford-Algebra, die eine Teilalgebra der ersten ist. Den Zu-



Pavel Sergejevič Aleksandroff



Heinz Hopf

sammenhang zwischen der zweiten Clifford-Algebra und den Rotationen in n Dimensionen erkannte erstmals Rudolf Lipschitz 1884, seine Arbeit fand aber wenig Beachtung. Die Clifford-Algebren spielten dann eine wichtige Rolle in der Theorie der Lie-Gruppen.

10.3.3 Die algebraische Durchdringung der Topologie

Ein weiteres Teilgebiet der Mathematik, das unter dem Einfluß der abstrakten Algebra einen deutlichen Wandel erfuhr, war die kombinatorische Topologie. Diese hatte durch Poincaré in den Jahren 1895–1901 eine erste systematische Behandlung erfahren. Sie war entstanden in dem Bestreben, mit kombinatorischen bzw. algebraischen Methoden geometrische Fragen über Kurven, Flächen und Räume zu lösen, insbesondere deren topologische Invarianten zu bestimmen und, grob formuliert, um die Abweichungen der einzelnen Gebilde von in ihren Eigenschaften bekannten Mannigfaltigkeiten zu ermitteln. Lange Zeit bildete die Untersuchung von kombinatorischen Eigenschaften von Polyedern und deren Zerlegungen in sog. Simplizes das wichtigste Verfahren der kombinatorischen Topologie. Unter einem Simplex kann man sich dabei, etwas vereinfacht, im euklidischen Raum die von n linear unabhängigen Punkten erzeugte konvexe Punktmenge vorstellen. Für die Simplizes wurde jeweils der Rand definiert und durch einen entsprechenden Operator beschrieben. Dieser Operator diente zugleich zur Charakterisierung der sog. Zyklen. Um gewisse Beziehungen zwischen der Menge der Ränder und der der Zyklen zu erfassen, hatte Poincaré den Begriff der Homologie eingeführt und diese durch gewisse ganze Zahlen, genauer die sog. Bettischen Zahlen und die Torsionskoeffizienten, beschrieben. Es dauerte jedoch bis zur Mitte der 20er Jahre, bis der algebraische Hintergrund dieser Betrachtungen erkannt

wurde. E. Noether wies in Gesprächen mit Pavel Sergejevič Aleksandroff, Heinz Hopf und anderen 1925/26 darauf hin, daß das Verfahren durch die Verwendung gruppentheoretischer Ideen übersichtlicher beschrieben werden könne, insbesondere daß die Menge der Ränder bzw. der Zyklen jeweils Gruppen bilden, aus denen als Faktorgruppe die Homologiegruppe hervorging. Hopf setzte diese Anregungen 1928 um. Unabhängig von ihm definierte auch Walther Mayer die Homologiegruppen in einer 1927 eingereichten Arbeit über abstrakte Topologie, nachdem er von Leopold Vietoris die Verwendung der gruppentheoretischen Terminologie kennengelernt hatte. Die neue Terminologie der Homologiegruppen fand relativ rasch allgemeine Anerkennung. Ihre Vorteile demonstrierte sie auch bei der Beschreibung weiterer Versuche, die vorhandenen Methoden der algebraischen Topologie zu verallgemeinern bzw. zu ergänzen. Hierzu zählte das Erfassen gewisser Dualitätsbeziehungen, die Definition der Kohomologiegruppen und die Bestimmung einer Multiplikation für die Elemente der Homologie- bzw. Kohomologiegruppen. Die Untersuchung dieser multiplikativen Struktur bildete den Ausgangspunkt für die als H-Räume und als Hopf-Algebren bezeichneten Bildungen. In ihrem Buch *„Topologie“* sprachen Aleksandroff und Hopf 1935 von einer starken Tendenz zur Algebraisierung auf gruppentheoretischer Grundlage, der sie in dem Werk gefolgt seien. Herbert Seifert und William Threlfall benutzten ihrerseits die Homologiegruppen in ihrem *„Lehrbuch der Topologie“* (1934) wie selbstverständlich.

Die weitere Entwicklung der Homologietheorie war dann eng mit der Kategorientheorie verknüpft, diente erstere doch als ein erstes wichtiges Beispiel für die letztere. Dieser Zusammenhang wird klar, wenn man sich folgendes verdeutlicht: Zu einem beliebigen Raum bestimmt man zunächst mit Hilfe des Randoperators die Homologiegruppe. Betrachtet man nun eine Klasse von Räumen und die stetigen Abbildungen zwischen diesen, so kann jedem Raum eine Homologiegruppe zugeordnet werden. Zugleich induziert aber jede stetige Abbildung zwischen zwei Räumen einen Homomorphismus der Homologiegruppen, und diese Zuordnung respektiert die Identität und die Verknüpfung zweier Abbildungen. Die Mengen der Räume und der Abbildungen bzw. der Homologiegruppen und der Homomorphismen besitzen aber genau die Eigenschaften, die in der Definition des Kategorienbegriffs gefordert werden, und die oben beschriebene Zuordnung zwischen ihnen erfüllen die Funktoreigenschaften. Genau diesen Sachverhalt erfaßten dann Eilenberg und MacLane 1942 mit der Definition der Begriffe Kategorie und Funktor.

Ein weiteres Teilgebiet der algebraischen Topologie ist die Homotopietheorie, die ebenfalls bis auf Poincaré zurückgeht, auf die aber an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden kann. Auch in der Homotopietheorie spielen algebraische Betrachtungen eine wichtige Rolle. Zugleich waren die dort vorliegenden Verhältnisse Ausgangspunkt für weitere abstrakte Begriffe, etwa den des adjungierten Funktors. In den folgenden Jahren entwickelten die Mathematiker immer umfassendere und ausgeklügeltere Methoden um die ver-

schiedenen Probleme zu lösen, beispielsweise um die Poincarésche Vermutung über die Homöomorphie einer n-dimensionalen Sphäre zu einer geschlossenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit gleichen Homotopietyps (d. h. mit verschwindender Fundamentalgruppe und trivialer Homologie höherer Dimension) zu beweisen oder um Fragen der Überlagerung von Räumen in Angriff zu nehmen, wie man sie etwa von den Riemannschen Flächen kennt. Dies schloß die Suche nach immer neuen Wegen zur Berechnung der Homologie-, Kohomologie- bzw. Homotopiegruppen für konkrete Mannigfaltigkeiten oder Klassen von ihnen ein, wobei man Elemente aus verschiedenen Bereichen der Mathematik heranzog. Viele dieser Methoden, die unter dem Begriff der homologischen Algebra zusammengefaßt werden, wirkten auch auf die Algebra zurück und haben deren Bild weiter verändert. Im übrigen ergab sich bei vielen Fragen die etwas überraschende Einsicht, daß die Verhältnisse in Räumen mit drei und vier Dimensionen viel komplizierter sind, als in höher dimensionalen Räumen, sich deren Eigenschaften also wesentlich unterscheiden.

10.3.4 Algebraische Methoden in anderen Bereichen

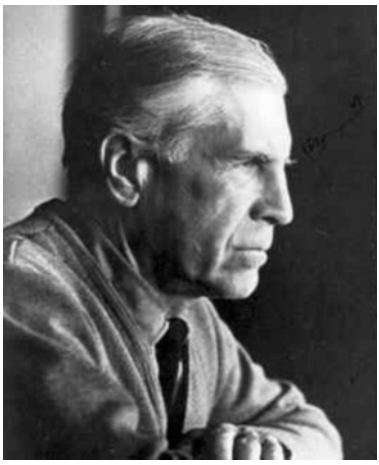
Im folgenden soll noch an einigen weiteren Beispielen das Vordringen algebraischer Ideen und Methoden in andere Bereiche der Mathematik kurz skizziert werden, ohne dies in separate Abschnitte zu gliedern.

Als erstes seien einige Forschungen genannt, die sich an die Verbandstheorie anschlossen. Auf die Zusammenhänge mit der Geometrie wurde bereits verwiesen. Die Ansätze von Birkhoff und Menger wurden vor allem von letzterem und seinen Schülern Ende der 30er Jahre mit Arbeiten zur Begründung der Geometrie fortgesetzt, die sich sowohl auf die projektive, wie auf die affine und die nichteuklidische Geometrie bezogen. Die größte Aufmerksamkeit erregte wohl von Neumanns kurzzeitige Beschäftigung mit verbandstheoretischen Methoden, die ihn ausgehend von den Studien über Operatorenalgebren zur stetigen Geometrie und zu Anwendungen in der Quantenmechanik führten. In den Untersuchungen der Operatorenalgebren hatte er mit Hilfe von Projektionsoperatoren auf abgeschlossenen Teilräumen des Hilbertraumes eine Dimensionsfunktion für eine Teilmenge der Algebren definiert. Diese Dimensionsfunktion erlaubte die Klassifikation der Algebren in Typklassen. Dies war die berühmte Einteilung der von Neumann-Algebren in fünf Klassen. Für zwei dieser Klassen war die Dimensionsfunktion stetig. Diese Vorgehensweise nutzte er dann zur Konstruktion von Beispielen für stetige Geometrien, d. h. Geometrien, in denen die Dimension der einzelnen Räume alle Werte in einem gewissen Intervall annehmen kann.

Die Neumannschen Arbeiten machten bereits auf das Auftreten von Elementen der Verbandstheorie in der Funktionalanalysis aufmerksam. Die wohl wichtigste Anwendung auf diesem Gebiet war die Ausnutzung der Möglichkeit, durch die Verbandsstruktur eine Halbordnung auf der betrachteten Menge zu definieren. Bereits 1928 hatte Frédéric Riesz eine auf einer Menge von

Funktionen definierbare Ordnungsstruktur in der Spektraltheorie zur Zerlegung linearer Operatoren genutzt. Die verbandstheoretischen Gesichtspunkte blieben jedoch im Hintergrund. Ähnlich verhielt es sich bei der Verallgemeinerung des Konvergenzbegriffes der Analysis auf sog. Moore-Smith- oder verallgemeinerte Folgen, bei denen als Indexmenge nicht die Folge der natürlichen Zahlen, sondern eine beliebige gerichtete Menge verwendet wird. Dies mündete ein in die Theorie der halbgeordneten linearen Räume, die Leonid Vital'evič Kantorovič ab 1935 mit seinen Schülern aufbaute und die ein anerkanntes Teilgebiet der Funktionalanalysis wurde. In dem Vorwort zu der ersten systematischen Darstellung dieser Theorie hob Kantorovič 1950 die Zusammenhänge mit der allgemeinen Entwicklung in Richtung auf eine abstrakte Mathematik hervor und ließ auch die Bourbakische Strukturtheorie anklingen. Ähnlich den Bourbakischen Grundstrukturen unterschied er drei grundlegende Eigenschaften der Menge der reellen Zahlen: die algebraischen Operationen, die Limesbeziehungen und die Anordnung. Diese Eigenschaften blieben bei den abstrakten Begriffsbildungen erhalten und fanden ihren Niederschlag zum einen in den Begriffen Gruppe, Ring, Körper usw., zum zweiten den Begriffen des topologischen und des metrischen Raumes und zum dritten in dem der geordneten Menge. Außerdem verwies er auf die topologischen Gruppen und linearen Räume als eine Vereinigung der ersten beiden Eigenschaften. Die Verallgemeinerung des Begriffs der Anordnung sei im Vergleich mit den beiden anderen Eigenschaften völlig unzureichend und dies sollte mit dem vorgelegten Werk korrigiert werden [Kantorovič 1950, S. 12f.]. Es muß jedoch vermerkt werden, daß bereits Kantorovič kaum auf verbandstheoretische Aspekte reflektierte und diese in der weiteren Entwicklung der Theorie halbgeordneter Räume kaum noch eine Rolle spielten.

Wichtige Anwendungen der Verbandstheorie in der Funktionalanalysis brachten auch die Arbeiten von Marshall Harvey Stone in den 30er Jahren, wobei wiederum verbandstheoretische Aspekte im Hintergrund blieben. Angeregt durch die von Neumannschen Arbeiten zur Theorie der Hilberträume und der Operatoren auf ihnen kam er zur systematischen Analyse der Struktur Boolescher Algebren. Dies beinhaltete die Charakterisierung der Booleschen Algebren als spezielle Ringe, deren Darstellung als Mengenalgebra, den Aufbau einer Idealtheorie in den sog. Booleschen Ringen bis hin zur Klassifizierung dieser Ringe mit Hilfe dieser Idealtheorie und die Topologisierung der Booleschen Ringe. Bei der Aufklärung der Beziehungen zwischen topologischen Räumen und den mit einer Topologie versehenen Booleschen Ringen stellte Stone u. a. das Verfahren zur Einbettung eines vollständig regulären Raumes in einen kompakten auf, das heute als Stone-Čech-Kompaktifizierung bekannt ist. Die Darstellung einer Booleschen Algebra als Mengensystem fanden Stone und Birkhoff unabhängig 1933. Bemerkenswert ist noch die Verbindung von Stones Topologisierungsverfahren mit Anwendungen der Booleschen Algebren in der Logik, die später neue Impulse in der Modelltheorie hervorbrachte.



Lev Semenovič Pontrjagin



Leonid Vitaljevič Kantorovič

Die von Kantorovič als Kombination zweier struktureller Grundeigenschaften erwähnten topologischen Gruppen erfuhren ebenfalls eine intensive Erforschung ihrer Theorie. Das Bild von der Kombination zweier Strukturen wird der Definition der topologischen Gruppe durchaus gerecht, denn man fordert neben den Gruppeneigenschaften, daß in der Gruppe eine Topologie erklärt ist, mit der die Gruppe ein topologischer Raum wird, und daß die Gruppenoperationen in dieser Topologie stetig sind. In diesem Sinne stehen sie stellvertretend für den allgemeinen Trend, diese beiden Grundstrukturen zu vereinen. Dieser Trend brachte durch die Übertragung auf Ringe bzw. Körper das riesige Gebiet der topologischen Algebren mit den Banach-, C*-, von Neumann-, W*-Algebren usw. als Spezialfällen hervor.

Der abstrakte Begriff der topologischen Gruppe wurde 1925 von Otto Schreier definiert. Ein wichtiges Beispiel für die topologischen Gruppen bildeten Lies kontinuierliche Gruppen. In Form der kontinuierlichen Transformationsgruppen (vgl. Abschn. 8.3.2) hatten die topologischen Gruppen immer das Interesse der Mathematiker gefunden. Dieses wurde noch durch Hilbert verstärkt, als er 1900 in seinem 5. Problem die Frage stellte *„inwieweit der Liesche Begriff der kontinuierlichen Transformationsgruppe auch ohne Annahme der Differenzierbarkeit der Funktionen unserer Untersuchung zugänglich ist.“* [Hilbert 1971, S. 44] Mit der Entwicklung der Theorie der topologischen Gruppen erfuhr diese Formulierung eine gewisse Modifikation, und 1952 konnten Andrew Gleason und Deane Montgomery diese veränderte Aufgabe positiv entscheiden. Vorausgegangen waren mehrere Jahrzehnte intensiver Forschungen mit vielen neuen Einsichten über topologische Gruppen. Weyl hatte eine Idee von Hurwitz zur Integration über Gruppen aufgegriffen, systematisch entwickelt und mit diesen neuen Mitteln 1927 die Cartansche Theorie der halbeinfachen Lie-Gruppen und ihrer Darstellungen vollendet. Die Definition der topolo-

gischen Begriffe für topologische Gruppen bot zunächst keine prinzipiellen Schwierigkeiten, entscheidend war, ob und wie diese Begriffe für die Lösung der einzelnen Probleme genutzt werden konnten. Von grundlegender Bedeutung war die von Alfred Haar 1933 nachgewiesene Existenz eines invarianten Maßes auf einer lokal kompakten Gruppe. Weitere Beiträge in den folgenden Jahren lieferten von Neumann und Lev Semenovič Pontrjagin, die mit Hilfe der Integration nach einem invarianten Maß wichtige Aussagen über die Struktur und die Darstellungen dieser Gruppen ableiten konnten und insbesondere bis 1935 das Hilbertsche Problem für die kompakten und die kommutativen lokal kompakten Gruppen lösten. Zur endgültigen Lösung des Problems mußten dann aber neue Wege beschritten werden, da die benutzten darstellungstheoretischen Resultate nicht anwendbar waren.

Die Betrachtung einiger Beziehungen der algebraischen Forschungen zur Entwicklung in anderen Teilen der Mathematik kann nicht beendet werden, ohne auf die starken Veränderungen hinzuweisen, die sich infolge des Aufschwungs der Computertechnik in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts vollzogen. Dies führte u. a. zu einer Renaissance der numerischen Verfahren bei einer stärkeren Betonung des algorithmischen Aspekts, zu einer eigenständigen Automatentheorie unter Einschluß wichtiger logischer Aspekte sowie zu Forschungen über die Komplexität und Optimierung der verschiedenen Rechenverfahren. Da diese Untersuchungen letztlich zu einem neuen Bild der Mathematik und der Algebra im besonderen führten, soll die Entwicklung im folgenden Abschnitt separat dargestellt werden.

10.4 Computeralgebra

10.4.1 Vorbemerkungen

Versteht man unter Computeralgebra zunächst grob die Nutzung des Computers bei der Verarbeitung mathematischer Sachverhalte in symbolischer Form etwa mittels Formeln, Funktionen o. ä., so ordnet sich eine solche zeitlich ein in die Entstehung zahlreicher anderer Anwendungen des Computers, die unser Leben in den letzten Jahren des 20. Jahrhunderts zunehmend beeinflußt haben und an die wohl auch Pioniere wie Charles Babbage oder Konrad Zuse in ihren kühnsten Träumen nicht zu denken gewagt hätten. Einleitend seien zunächst dazu ein paar Bemerkungen angefügt.

Die Vorläufer unserer heutigen Computer waren Maschinen zum möglichst schnellen und möglichst sicheren Rechnen. Die ersten davon wurden bereits im 17. Jahrhundert konstruiert. Sie beherrschten im wesentlichen die vier Grundrechenarten.

Die zunächst rein mechanisch realisierten derartigen Maschinen lieferten mathematisch nichts Neues, verarbeiteten und speicherten keine Informationen

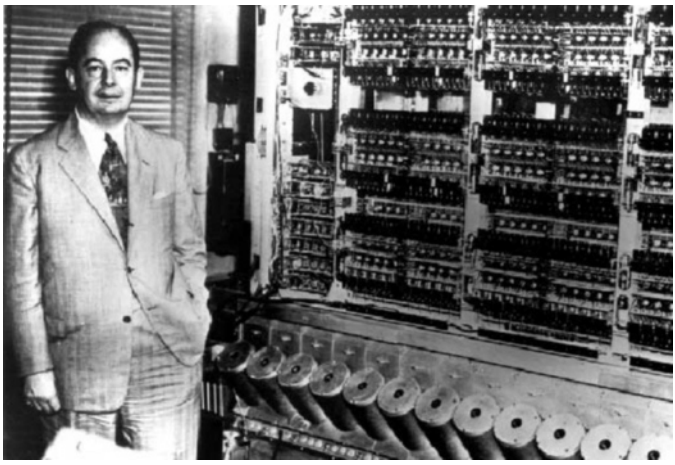


Abb. 10.4.2. John von Neumann mit seinem Rechner

in unserem heutigen Sinne. Dies wurde erst möglich, nachdem elektromechanische bzw. elektronische Bauelemente in die Fertigung einbezogen wurden. Die Idee von programmierbaren Maschinen war dagegen schon länger da, ebenso diejenige, Maschinen zu algebraischen Umformungen ganz allgemeiner Art einsetzen zu können (Charles Babbage); darüber wird noch zu berichten sein.

Zwischen der Formulierung dieser Gedanken und ihrer Realisierung lag ein langer Zeitraum. Gründe dafür sind sicher in der technischen Entwicklung ebenso zu suchen wie im fehlenden großzügigen Engagement der Industrie und dem nur vereinzeltem Drängen von Naturwissenschaftlern und Technikern. Ideen wie der konsequente Einsatz des Dualsystems mußten erst geboren werden. Der interessierte Leser findet zahlreiche ausführliche Informationen (und ein weiterführendes Literaturverzeichnis) zum Beispiel in [Naumann 2001] oder [Petzold 1992].

Mittels Analogrechentechnik stellten sich bereits in den 30-er Jahren erste Erfolge z. B. bei der Lösung von Differentialgleichungen oder beim Lösen linearer Gleichungssysteme ein.

Aber erst der Übergang zur Digitaltechnik ermöglichte die weiterreichende Nutzung des Computers. Aus maschinenorientierten wurden problemorientierte Programmiersprachen.

Die technischen Entwicklungen wie etwa das Finden und Herstellen von Datenspeichern mit ungeahnter Kapazität oder die Miniaturisierung des Computers beeinflußten die damit zu bewältigenden Aufgabenstellungen, die sich teilweise erst durch diese technischen Gegebenheiten definierten. Beispielhaft, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, seien hier stichpunktartig Anwendungen der Rechentechnik erwähnt, in deren zeitliche Entstehung auch diejenige der Computeralgebra fällt:

- Textverarbeitung
- Büroautomatisierung
- Übersetzungen von Fremdsprachen auf hohem Niveau
- Datenbanken mit Möglichkeiten der Wissenspräsentation
- Statistische Anwendungen
- Robotik
- Bild- und Mustererkennung und Möglichkeiten der Korrektur
- Automatische Programmentwicklung
- Internet.

Diese Anwendungen beherrschen mittlerweile, wenn auch nicht alle gleichermaßen, einen nicht unbedeutenden Teil unseres täglichen Lebens; Computer sind in der Mehrzahl aller Haushalte präsent, die Nutzung in den Schulen greift immer mehr um sich.

Es ist sicher kein Wunder, daß die Computertechnik auch keinen Bogen um Teile der Mathematik machte. Waren etliche der numerisch arbeitenden Mathematiker von vornherein prädestiniert, den Computer für sich zu entdecken, so gab es viele Zweifel und viele Zweifler an der Nutzung bei mathematischen Sachverhalten in symbolischer Form. Diese lag, wie viele andere Anwendungen, auch nicht von vornherein offen auf der Hand. Insbesondere Forderungen von Physikern und Technikern beeinflußten diese Entwicklung nachhaltig.

Die Computeralgebra hat sicher ihre Grenzen und ersetzt nicht mathematisches Studium oder Forschen, aber sie eröffnet Möglichkeiten, über die im folgenden etwas genauer berichtet werden wird.

10.4.2 Charakterisierung der Computeralgebra

Um innerhalb einer Geschichte der Algebra über die Entwicklung der Computeralgebra zu schreiben, erscheint es nötig, nach den einleitenden Bemerkungen eine etwas genauere Charakterisierung dieses sehr jungen Wissenschaftsgebietes vorzunehmen.

Das Wort Algebra im Titel läßt vielleicht zuerst vermuten, daß mit Hilfe von Computern algebraische Umformungen oder Rechnungen in algebraischen Strukturen durchgeführt werden. Aber: Computeralgebra ist nicht nur einfach die Nutzung des Computers in der Algebra, wobei der Computer vielleicht längere, mit Hand kaum durchführbare Rechnungen übernimmt als ein in dieser Beziehung dem Menschen weit überlegenes Instrument, als wissenschaftliches Hilfsmittel. Andere, inzwischen nicht mehr übliche Bezeichnungen wie „Formelmanipulation“ oder „Symbolisches Rechnen“ lassen besser erkennen, daß Computeralgebra ein viel größeres Gebiet umfaßt und zu einer Querschnittsdisziplin geworden ist: Große Teile der algorithmischen Mathematik werden mit Methoden und praktischen Möglichkeiten der Informatik verbunden. Die Bearbeitung von Symbolen, von Formeln, von exakt dargestellten, nicht gerundeten rationalen Zahlen steht dabei im Mittelpunkt.

Typische Aufgaben, die im Rahmen der Computeralgebra vom Rechner erledigt werden, sind: exakte Lösung von Systemen algebraischer Gleichungen, Zerlegung von (großen) natürlichen Zahlen in Primfaktoren bzw. von Polynomen in ein Produkt irreduzibler Polynome; Berechnung von Charakteren endlicher Gruppen; Bestimmung von Grenzwerten; Berechnung von Ableitungen, Stammfunktionen sowie Lösen von Differentialgleichungen in geschlossener Form.

Beispielhaft seien eine Reihe leicht verständlicher Befehle (Computeralgebrasystem MAPLE) und die vom Computer errechneten Resultate, ausgegeben in üblicher mathematischer Notation, hier angegeben:

> **ifactor(285984040963051431);**

$(3)^{10}(7)(11)(13)^3(31)^5$

> **factor(**$x \wedge 10 - 2 * x \wedge 6 + x \wedge 5 - x \wedge 3 - x \wedge 2 + 2$**);**

$(x-1)(x+1)(x^8 + x^6 - x^4 + x^3 - x^2 - 2)$

> **for i to 3 do diff(**$ln(x \wedge 5) * sin(x), x\$i$**) od;**

$5\frac{\sin(x)}{x} + \ln(x^5)\cos(x)$
$-5\frac{\sin(x)}{x^2} + \frac{10\cos(x)}{x} - \ln(x^5)\sin(x)$
$10\frac{\sin(x)}{x^3} - \frac{15\cos(x)}{x^2} - \frac{15\sin(x)}{x} - \ln(x^5)\cos(x)$

> **dsolve(diff(y(x),x)-3* y(x)-sin(x));**

$y(x) = -\frac{1}{10}\cos(x) - \frac{3}{10}\sin(x) + e^{(3x)}_C1$

($_C1$ bezeichnet eine beliebige Konstante).

Diese Aufzählung, die bei weitem nicht alles erfaßt, was man einem Computer abfragen kann, zeigt, daß die Aufgabenstellungen zu vielen Gebieten der Mathematik gerechnet werden können. Bei der Bearbeitung im Computer ist allerdings eine gewisse Algebraisierung unerläßlich, so daß der mittlerweile etablierte Titel „Computeralgebra“ doch gerechtfertigt erscheint. Die Algebra tritt als Sprache der Mathematik, verbunden mit den Möglichkeiten, die ein Computer bietet, in Erscheinung. Ein Vergleich zu den von Condillac formulierten Thesen (vgl. Abschn. 6.3) scheint angebracht.

Nach [Buchberger 1986] befaßt sich Computeralgebra mit algorithmischen Verfahren für die Behandlung von Problemen, deren Eingaben (Inputs) und deren Ausgaben (Outputs) algebraische Objekte sind, die in verschiedenen algebraischen Bereichen liegen können. Beispiele solcher Bereiche sind: die ganzen Zahlen, ein Polynomring, ein Körper von Funktionen, ein Differentialkörper, eine Gruppe, eine Lie-Algebra, . . .

Der Computer bearbeitet diese Eingaben ähnlich zum Vorgehen eines Mathematikers nach wohldefinierten Regeln; die bearbeiteten Objekte sind meistens exakt dargestellt oder symbolisch gegeben; intern sind die Objekte zwar durch (lineare) Zeichenreihen repräsentiert, das Operieren mit diesen Zeichenreihen entspricht aber einer algebraischen Bearbeitung. Auf dem Bildschirm erscheinen diese in üblicher mathematischer Notation.

Eine Umwandlung von z. B. auf dem Bildschirm unübersichtlich groß erscheinenden Bruchdarstellungen rationaler Zahlen in Dezimalbrüche mit praktisch beliebig vielen Stellen ist allerdings möglich. Auch die Verflechtung mit numerisch arbeitenden Programmen bzw. die Einbindung numerisch arbeitender Algorithmen in die Systeme ist weit fortgeschritten, ebenso die Visualisierung geometrischer Objekte. Diese Aspekte der Entwicklung werden im folgenden jedoch keine weitere Erwähnung finden.

Computeralgebra ist in gewissem Sinne die Ausprägung algorithmischer Mathematik, wobei effiziente Algorithmen für die verschiedensten Bereiche im Mittelpunkt stehen. Von diesem Standpunkt aus könnte man Wurzeln der Computeralgebra bereits in gewissen Algorithmen aus der Antike (wie dem Euklidischen Algorithmus) suchen. Dies erscheint jedoch etwas weit hergeholt. Es ist eher angebracht, das 19. und die erste Hälfte des 20. Jahrhunderts in die Betrachtung einzubeziehen. In diesem Zeitraum entstanden viele Ideen, die später zur rechentechnischen Lösung zahlreicher mathematischer Aufgaben beitrugen und heute in Computeralgebrasystemen realisiert sind.

Als Beispiel sei hier die Berechnung von Stammfunktionen (unbestimmten Integralen) von elementaren Funktionen in geschlossener Form erwähnt (siehe auch unten). Es gibt mittlerweile Algorithmen, die entscheiden, ob eine elementare Funktion eine ebensolche Stammfunktion besitzt. Sie sind in den gängigen Computeralgebrasystemen implementiert. Grundlagen für derartige Algorithmen wurden bereits durch Arbeiten von Liouville um 1835 geschaffen. Diese Algorithmen arbeiten im Rahmen eines algebraisch formulierbaren Kalküls.
Zunächst würde man dazu tendieren, z. B. von „Computeranalysis“ o. ä. zu sprechen; aber hier ist, wie auch bei anderen Problemstellungen, der algebraische Hintergrund und Zugang entscheidend und notwendig.

Neben der Entwicklung der Algorithmen muß die Entwicklung der Rechentechnik verfolgt werden, um die Wurzeln einer anderen Komponente der Computeralgebra zu erkennen. Die wahrscheinlich allerersten ernstzunehmenden Versuche und Gedanken zur automatisierten Berechnung algebraischer Größen sind bereits Mitte des 19. Jahrhunderts bei Charles Babbage und Lady Ada Augusta, Countess of Lovelace, zu finden. So schreibt Babbage in [Babbage 1836]:

“This day I had for the first time a general but very indistinct conception of the possibility of making an engine work out *algebraic* developments – I mean without *any* reference to the *value* of the letters.“

Wenige Jahre später läßt A. A. Lovelace in [Lovelace 1843] erkennen, daß auch sie die Möglichkeiten algebraischer Berechnungen der analytischen Maschine von Babbage sieht:

“The machine is not only capable of executing those numerical calculations which depend on a given algebraic formula, but it is also fitted for analytical calculations in which there are one or several variables to be considered.“

Sehr interessant ist ihr Resümee am Ende des genannten Artikels:

"To recapitulate: it (die Maschine) will afford the following advantages: First, rigid accuracy. . . .

Secondly, economy of time: . . .

Thirdly: economy of intelligence: . . . "

Larcombe beschreibt in einem Artikel in [Wester 1999] ausführlich die Visionen von Charles Babbage und Lady Ada Augusta, bis zu deren befriedigender Realisierung noch mehr als 100 Jahre vergehen sollten. Es scheint so zu sein, daß in diesem Zeitraum von rund 100 Jahren kaum jemand echt an die Möglichkeit glaubte oder dachte, existierende oder neu entwickelte Algorithmen zur Berechnung algebraischer (nichtnumerischer) Objekte mittels einer Maschine umzusetzen. Die technischen Möglichkeiten waren, wie einleitend geschildert, noch im Entstehen.

Von Anfängen einer echten Wissenschaftsdisziplin Computeralgebra läßt sich erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts sprechen. Zwei wesentliche Triebkräfte für die Entstehung der Computeralgebra waren die Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitung einerseits, andererseits der steigende Bedarf von insbesondere Physikern und Mathematikern, umfangreiche Rechnungen formelmäßig durchführen zu müssen, die mit Hand praktisch unmöglich oder nur sehr aufwendig zu realisieren waren. Neben der Erarbeitung von effizienten Algorithmen sowie der nötigen Hard- und Software kommt gerade dem Anwendungsaspekt eine Rolle bei der Entwicklung des Wissenschaftsgebietes Computeralgebra zu.

So sollten diese drei genannten Komponenten, die sich in ihrer Entwicklung ständig gegenseitig beeinflußten und im Laufe der Jahre befruchtend aufeinander eingewirkt haben, unbedingt zur Computeralgebra gerechnet werden:

- Die Entwicklung von (schnellen) Algorithmen und ihre mathematischen Grundlagen
- Die Entwicklung von Computeralgebrasystemen
- Die Anwendungen (im folgenden nur hin und wieder erwähnt).

Weitere Triebkräfte der Entwicklung der Computeralgebra bis zum heutigen Stand waren Forderungen nach Nutzerfreundlichkeit der Systeme und einem möglichst breitem Anwendungsfeld. Datenstrukturen, Normalformen, Vereinfachungen von Termen mußten neu bedacht werden, Komplexitätsfragen spielten ebenfalls eine große Rolle.

Sehr gut kommt dies in folgender Charakterisierung der Computeralgebra durch H. B. Matzat in [Computeralgebra in Deutschland 1993] zum Ausdruck, die abschließend in diesem Abschnitt zitiert sei:

„Die Computeralgebra ist ein Wissenschaftsgebiet, das sich mit Methoden zum Lösen mathematisch formulierter Probleme durch symbolische Algorithmen und deren Umsetzung in Soft- und Hardware beschäftigt. Sie beruht

auf der exakten endlichen Darstellung endlicher oder unendlicher mathematischer Objekte und Strukturen und ermöglicht deren symbolische und formelmäßige Behandlung durch eine Maschine. Strukturelles mathematisches Wissen wird dabei sowohl beim Entwurf als auch bei der Verifikation und Aufwandsanalyse der betreffenden Algorithmen verwendet. Die Computeralgebra kann damit wirkungsvoll eingesetzt werden bei der Lösung von mathematisch modellierten Fragestellungen in zum Teil sehr verschiedenen Gebieten der Informatik und Mathematik sowie in den Natur- und Ingenieurwissenschaften.“

10.4.3 Die Entwicklung von Algorithmen

Die innerhalb der Computeralgebra verwendeten Algorithmen haben in der Regel als Input und als Output gewisse algebraische Objekte. Zahlreiche Arbeiten, die man heute der Computeralgebra zurechnet, beschäftigen sich mit der Entwicklung von derartigen Algorithmen bzw. zielen auf die Verbesserung schon vorhandener solcher Algorithmen.

Denkt man beispielsweise an den Euklidischen Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier Polynome mit rationalen Koeffizienten in einer Unbekannten, so zeigten Rechnungen mit den ersten Computeralgebrasystemen folgendes Phänomen:

Während der Abarbeitung des Euklidischen Algorithmus treten bei den Zwischenresultaten Koeffizienten auf, die viel größer sind als die Inputs bzw. Outputs (“intermediate expression swell“). Der auf dem Papier scheinbar funktionierende einfache Algorithmus hat eine ziemlich große, wenn auch polynomiale Komplexität. Auch wenn die Rechentechnik noch in den Kinderschuhen steckte, traten hier prinzipielle Schwierigkeiten zutage. Varianten des Euklidischen Algorithmus mit geringerer polynomialer Komplexität wurden daraufhin entwickelt.

Dieses Beispiel ist nicht untypisch: Der Umgang mit der Rechentechnik erforderte Varianten bestehender Algorithmen, neue theoretische Einsichten, teilweise völlig neue Ideen. Dabei ist sehr häufig äußerst anspruchsvolle mathematische Theorie zu entwickeln, die nicht mit Existenzsätzen oder prinzipiellen Lösungen endet, sondern außerdem effiziente Algorithmen liefert.

Eine derartige Idee, die bei gewissen Berechnungen in den Mittelpunkt rückte, war die folgende: Das Rechnen mit ganzen Zahlen wird zeitweise ersetzt durch das Rechnen in einem (oder mehreren) Restklassenring(en) modulo einer (bzw. mehrerer) Primzahl(en). Gelingt eine Lösung des untersuchten Problems in diesem meist einfacherem (dem modularem) Fall durch modulare Algorithmen, so gelangt man durch Rücktransformation zu einer Lösung des ursprünglichen Problems. Die Rücktransformation verlangt zusätzliche theoretische Hilfsmittel. Die oben erwähnte Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier Polynome wird beispielsweise meistens so durchgeführt.

Als eine der Wurzeln für diese Idee könnte man die Entwicklung des Begriffs eines endlichen Körpers erwähnen (vgl. Abschnitte 9.3, 9.4). Hier gilt jedoch sicher die Einschränkung, daß die Entstehung und Entwicklung der Körpertheorie aus anderen Gründen erfolgte als zur Umsetzung der oben genannten Idee. Denn die Nutzung von endlichen Körpern in der Computeralgebra hat vor allen zwei Gründe: Die Arithmetik ist relativ einfach (beschränkte Länge der Zahlen) und die Körperstruktur ist meist reichhaltiger als diejenige des Bereichs, den sie ersetzt. Beispielsweise ist ein Polynomring über einem Körper ein Euklidischer Ring.

Eine zentrale Rolle bei der Bewältigung von Aufgaben, die man der Computeralgebra zurechnet, spielen immer wieder (multivariate) Polynome mit ganzzahligen oder rationalen Koeffizienten oder Koeffizienten aus algebraischen Zahlkörpern. Dies spiegelt sich wider in der Auswahl dreier Aufgabenstellungen, die jetzt etwas ausführlicher dargestellt werden sollen und deren teilweise oder vollständige theoretische und algorithmische Bewältigung in den Jahren 1960 – 2000 gelang, beeinflußt durch Entwicklung immer leistungsfähigerer Computer:

a) Faktorisierung von Polynomen

b) Gröbnerbasen und Buchberger-Algorithmus

c) Unbestimmte Integration

Weitere derartige Aufgabenstellungen, die hier wenigstens Erwähnung finden sollen, sind beispielsweise:

- Realisierung einer Arithmetik von ganzen bzw. rationalen Zahlen und Polynomen über verschiedenen Zahlbereichen: Unverzichtbarer Bestandteil jedes Computeralgebrasystems; u. a. ist das Rechnen mit praktisch unbegrenzter Genauigkeit zu realisieren.

- Bearbeitung von Primzahlproblemen, Faktorisierung ganzer Zahlen: Primzahltests, Faktorisierungsalgorithmen stellen aktuelle Forschungsgegenstände dar; Anwendungen kennt man etwa in der Kryptologie oder in der Codierungstheorie.

- Lösen von Differentialgleichungen: Das gegenwärtig vielleicht am stärksten bearbeitete Gebiet, in dem man mittels computeralgebraischer Methoden Lösungen sucht; u. a. wurden hier viele Ideen realisiert, die bereits auf Sophus Lie zurückgehen. Daneben gibt es zahlreiche neue Ansätze und Resultate.

- Berechnung gruppentheoretischer Größen bei endlichen Gruppen: Einige spezielle Systeme wurden zum genannten Zweck entwickelt. Es entstand z. B. ein abrufbarer Atlas (der sogenannte Cambridge-Atlas) der Charaktere endlicher Gruppen; Mehrfachberechnungen sind i. a. nicht mehr notwendig.

- Berechnungen von Größen aus der Theorie der Lie-Gruppen und Lie-Algebren: Insbesondere bei den halbeinfachen Strukturen lassen sich Weylgruppe, Wurzeln, Gewichte berechnen.

a) Faktorisierung von Polynomen

Die Idee, modulare Betrachtungen zur Lösung von Problemen über dem Bereich $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen zu nutzen, wird besonders wirksam bei der Faktorisierung von Polynomen aus $\mathbb{Z}[x]$ (in zunächst einer Unbekannten x) in irreduzible Bestandteile. Das klassische Verfahren von Kronecker (vergleiche [Mignotte 1991]) scheitert an zu großem Rechenaufwand und auch an der nicht effektiv gelösten Faktorisierung ganzer Zahlen. Polynomfaktorisierung dagegen ist weitestgehend, d. h. im Rahmen von üblicherweise auftretenden Anforderungen, durchführbar. Hier wieder einige wenige Beispiele, berechnet in MAPLE (der Befehl expand bewirkt, daß die vorgegebene Produktdarstellung vom Rechner nicht gespeichert wird!):

$>$ a**:=expand(**$(x \wedge 2 - 2 * x + 1) * (x \wedge 2 + 2 * x - 1) * (x \wedge 3 + 3 * x \wedge 2 + 3 * x + 1) * (x \wedge 8 + x \wedge 6 - x \wedge 4 + x \wedge 3 - x \wedge 2 - 2)$**);**

b**:=expand(**$(x * y \wedge 4 - 3 * x \wedge 2 * y \wedge 2 + 2) * (x \wedge 2 * y - x * y + 1) \wedge 2$**) ;**

$$a := 2 - 2x - 9x^2 + 7x^5 + 11x^4 - 4x^{10} + 3x^9 + 7x^8 - 6x^6 - 6x^7 - 3x^{11} + x^{15} - 3x^{14} - 4x^{12}$$

$$b := x^5y^6 - 2x^4y^6 + 2x^3y^5 + x^3y^6 - 2x^2y^5 + xy^4 - 3x^6y^4 + 6x^5y^4 - 6x^4y^3 - 3x^4y^4 + 6x^3y^3 - x^2y^2 + 2x^4y^2 - 4xy + 2$$

$>$ **factor(a);**
$(x^2 + 2x - 1)(x^8 + x^6 - x^4 + x^3 - x^2 - 2)(x - 1)^2(x + 1)^3$

$>$ **factor(b);**
$-(-xy^4 + 3x^2y^2 - 2)(x^2y - xy + 1)^2.$

Welche Algorithmen laufen nun tatsächlich ab? Sei f ein primitives Polynom aus $\mathbb{Z}[x]$ (d. h. der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten ist 1). $q = p^k$, $k > 0$ bezeichne die k-te Potenz einer (meist ungeraden) Primzahl p, so daß $\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}/(q)$ ein Körper ist.

Der Übergang von $f \in \mathbb{Z}[x]$ zu $\overline{f} = f(\mathrm{mod} q)$ bereitet keine Schwierigkeiten. Die Zerlegung von $\overline{f}$ in über $\mathbb{Z}_q$ irreduzible Faktoren gelingt dann, je nach Verfahren, in einem oder mehreren Schritten:

1. Herstellen der quadratfreien Zerlegung: mehrfach auftretende Faktoren werden hier bereits berechnet:
2. Zerlegung nach verschiedenen Graden: Zerlegung eines quadratfreien Polynoms in ein Produkt, wobei der i-te Faktor nur aus irreduziblen Faktoren i-ten Grades zusammengesetzt ist; sind keine irreduziblen Faktoren etwa vom Grade k vorhanden, so wird dies erkannt. Hat der i-te Faktor Grad i, so ist er bereits irreduzibel.
3. Zerlegung nach gleichen Graden: Zerlegung der Faktoren von 2. in über $\mathbb{Z}_q$ irreduzible Faktoren.

In einem nachfolgenden Schritt 4 sind aus den Faktoren von $\overline{f}$, berechnet nach 2. und 3., diejenigen von f zu gewinnen. Zu bedenken ist hier, daß irreduzible Faktoren von f zwar in Faktoren von $\overline{f}$ übergehen, diese aber über $\mathbb{Z}_q$ nicht mehr irreduzibel sein müssen. Die Zerlegung über $\mathbb{Z}_q$ ist also feiner.

Ist q selbst Primzahl, hinreichend groß, so stimmen die Zerlegungen von f und $\overline{f}$ überein. Dies ist neben der Nutzung modularer Methoden ein wesentlicher Punkt. Eine Strategie A besteht darin, solche q zu bestimmen. Man erhält sie durch gewisse Abschätzungen, das Rechnen in $\mathbb{Z}_q$ gestaltet sich durch das große q jedoch nachteilig.

Strategie B geht von einer kleinen Primzahl p aus. Auf der Grundlage von Hensels Lemma gelingt dann das sogenannte " Hensel lifting":

$$\text{Zu } \overline{f} = \overline{f1} * \overline{f}2 \quad \in \mathbb{Z}_p\ [x] \text{ wird } \overline{\overline{f}} = \overline{\overline{f1}} * \overline{\overline{f2}} \quad \in \mathbb{Z}_{p^2}\ [x]$$

konstruiert. Hat man das "Hensel lifting" mehrfach durchgeführt, so werden die Faktoren von f, wenn vorhanden, tatsächlich gefunden.

Varianten bestehen zum Beispiel in folgendem Vorgehen:

f wird bereits in $\mathbb{Z}[x]$ quadratfrei gemacht. q wird danach, eventuell im Rahmen eines probabilistisch arbeitendem Verfahrens, so gewählt, daß auch $\overline{f}$ quadratfrei bleibt. So kann man dann gleich mit Schritt 2 fortfahren.

Schritte im Hensel lifting werden ersetzt durch den sogenannten LLL-Algorithmus [Lenstra, Lenstra, Lovacs 1982].

Die Ausdehnung obiger Verfahren auf Polynome mit Koeffizienten aus algebraischen Zahlbereichen ist ebenso wie die Ausdehnung auf den multivariaten Fall befriedigend gelungen.

Grundlegende Ideen bzw. das Aufstellen der Algorithmen für die geschilderten Schritte stammen von Berlekamp, Zassenhaus und Cantor – Zassenhaus und zwar [Berlekamp 1967] bzw. [Berlekamp 1970] für Schritt 2 und Schritt 3 zusammengefaßt, [Zassenhaus 1969] für Schritt 2, [Cantor – Zassenhaus 1981] für Schritt 3.

Für den 4. Schritt sind Hensel [Hensel 1918] mit seinen grundlegenden Arbeiten und Zassenhaus [Zassenhaus 1970] als Pioniere zu erwähnen. Letzterer hat als erster das „Hensel lifting" zur Faktorisierung von Polynomen eingesetzt.

Die Wurzeln der Algorithmen liegen zum Teil aber schon bei Gauß, Legendre, Galois u. a. Einen sehr guten Überblick vermittelt [v. z. Gathen, Gerhard 1999]; der erstgenannte Autor ist selbst neben zahlreichen weiteren, z. B. Erich Kaltofen, mit mehreren Arbeiten an der Entwicklung und Verbesserung von Verfahren zur Faktorisierung von Polynomen beteiligt.

b) Gröbner-Basen, der Buchberger-Algorithmus

Zahlreiche Aufgabenstellungen lassen sich auf die Beantwortung einer der beiden folgenden Fragen reduzieren:

Gegeben ist ein Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$ in n Unbekannten über einem Körper K und I sei das von $f_1, \ldots, f_k \in K[x_1, \ldots, x_n]$ erzeugte Ideal, $\{f_1, \ldots, f_k\}$ sei also eine Idealbasis von I.

a) Für $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ ist zu entscheiden, ob $f \in I$ (die Frage nach der sogenannten Idealmitgliedseigenschaft).

b) Welches sind diejenigen Elemente $y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$, für die gilt: $\mathrm{f}_1(y) = \ldots = \mathrm{f}_k(y) = 0$ (die Frage nach der Lösungsmenge eines polynomialen Gleichungssystems bzw. der Varietät zu I)?

Als grundlegend bei der Lösung dieser Probleme erwies sich der Begriff der Gröbner-Basis für ein Polynomideal I, der durch [Buchberger 1965/1970] geprägt wurde. Er benannte sie nach seinem Lehrer Wolfgang Gröbner. Eine solche Gröbner-Basis gestattet es, obige Fragen „relativ leicht“ zu beantworten.

Vorausgegangen war die Definition und der nichtkonstruktive Beweis der Existenz von sogenannten Standardbasen für Potenzreihenringe mit ähnlichen Eigenschaften durch [Hironata 1964].

Noch viel früher bewies Hilbert in [Hilbert 1890] seinen berühmten Basissatz (Existenz einer endlichen Basis für Polynomideale) und den Teilerkettensatz. Die ursprünglichen Beweise dazu waren nicht konstruktiv, wurden aber später durch konstruktive ergänzt (vgl. S. 453).

Buchberger entwickelte gleichzeitig mit dem Begriff der Gröbner-Basis einen heute nach ihm benannten Algorithmus, der gestattet, eine solche Basis zu berechnen. Die Terminierung des Algorithmus wird durch das Lemma von Dickson geliefert. Der Umfang der nötigen Rechnungen ist hier gewöhnlich so groß, daß ein Computeralgebrasystem dafür unbedingt notwendig ist.

Dieser Algorithmus fand mittlerweile zahlreiche Verbesserungen und Erweiterungen. Er ist gewiß einer der am meisten benutzten, fundamentalen Algorithmen in der Computeralgebra. Er verallgemeinert sowohl den Gaußschen Algorithmus für lineare Polynome als auch den Euklidischen Algorithmus für univariate Polynome.

Eine exakte Definition einer Gröbner-Basis sowie Beschreibungen des Buchberger-Algorithmus findet man in fast allen Büchern über Computeralgebra (z. B. [Geddes, Csapor, Labahn 1992] oder [v. z. Gathen, Gerhard 1999]). In letzterem ist auch die Frage nach der Komplexität des Buchberger-Algorithmus beleuchtet, ein nicht vollständig gelöstes Problem: Sie kann doppelt exponentiell in der Anzahl der Variablen sein, so daß Schwierigkeiten bei Rechnungen mit vielen Variablen zu erwarten sind.

Buchberger selbst hat einen großen Einfluß auf die Entwicklung der Computeralgebra ausgeübt. Er war der Begründer des Journals of Symbolic Computation und zehn Jahre dessen Haupteditor; in Linz gründete er 1970 das RISC (Research Institut for Symbolic Computation).

Hier eine kleine Auswahl der Anwendungen der Gröbner-Basen und damit des Buchberger-Algorithmus:

Lösen von Polynomgleichungen

Entscheidung von Idealmitgliedseigenschaft, Gleichheit bzw. Inklusion von Idealen

Größter gemeinsamer Teiler multivariater Polynome und multivariate Faktorisierung

Symbolische Integration

Geometrisches Theoremproving.

c) Integration in geschlossener Form

Das zu lösende Problem besteht darin, zu einer gegebenen Funktion f eine Funktion F zu finden, so daß die Ableitung F' mit f übereinstimmt. F heißt dann eine Stammfunktion oder ein unbestimmtes Integral zu f, manchmal auch Antiableitung (antiderivative). Die Addition einer beliebigen Konstanten zu einer Stammfunktion liefert bekanntlich alle Stammfunktionen.

In der Schule bzw. in einführenden Studentenkursen wird das Problem, wenn überhaupt, meistens durch eine Reihe von Heuristiken wie partielle Integration, Integration durch Substitution oder Nachschlagen in Integraltafeln gelöst. Für gewisse Funktionenklassen existieren aber auch algorithmische Herangehensweisen.

Für rationale Funktionen gelingt bekanntermaßen über die Partialbruchzerlegung die Bestimmung von Stammfunktionen, ein Verfahren, was bereits auf Johann Bernoulli zurückgeht. Hierbei werden jedoch die reellen Nullstellen des Nennerpolynoms benötigt (allgemeiner: gewisse algebraische Zahlen), diese sind meist nur näherungsweise und nicht exakt gegeben.

Algorithmen, die die unbestimmte Integration rationaler Funktionen vorantrieben und die die Nutzung algebraischer Zahlen vermeiden, entstanden bereits im 19. Jahrhundert: Ostrogradski, Hermite und Horowitz leisteten hier, wohl unabhängig voneinander, Pionierarbeit. Bei von ihnen entwickelten Verfahren wird das Problem der Bestimmung einer Stammfunktion für f/g, f, $g \in K[x]$, K Körper der Charakteristik 0, teilweise durchgeführt bis auf ein oder mehrere Summanden speziellerer Gestalt, nämlich p/q mit p, $q \in K[x]$, $\deg(p) < \deg(q)$ und q quadratfrei. $\int \frac{p}{q}$ heißt der logarithmische Teil der gesuchten Stammfunktion.

Verschiedene algorithmische Lösungen des letzten Problems entstanden unter dem Einfluß der neuen Möglichkeiten, die ein Computer bietet. Der bekannteste ist der Rothstein-Trager-Algorithmus, der die Nullstellen einer bestimmten Resultante berechnet, so daß algebraische Zahlen nun in die Rechnung eingehen, allerdings in minimalem, nicht reduzierbarem Umfang. Modifikationen wurden z. B. geliefert in Form des Lazard-Rioboo-Trager-Algorithmus, der Subresultanten benutzt und des Czichowski-Algorithmus, der Gröbner-Basen einbezieht.

Spätestens seit Liouville (etwa 1835) ist jedoch bekannt, daß es Funktionen gibt, die sich in „geschlossener Form“ darstellen lassen, für die jedoch keine Stammfunktion in einer solchen Form existiert. Beispiel dafür ist etwa die

Funktion $f(x) = \exp(x)/x$. Es sei ausdrücklich vermerkt, daß eine prinzipiell existierende Lösung nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der Form $\int_a^x f(t)dt$ hier nicht zur Diskussion steht. Auch spezielle Funktionen wie der Integralsinus oder das Fehlerintegral finden zunächst keine Berücksichtigung.

In die Zeit des Beginns der Computeralgebra fällt die Entwicklung einer Entscheidungsprozedur durch Risch [Risch 1969 und 1970], die in algorithmischer Weise eine Stammfunktion zu f, gegeben in geschlossener Form, in ebensolcher Form berechnet oder die Unmöglichkeit einer solchen Darstellung dokumentiert. Grundlage dafür sind erstens die Präzisierung des Begriffs der elementaren Funktion durch Ritt in den 40-er Jahren durch die Einführung der sogenannten Differentialkörper und zweitens die Ideen von [Liouville 1833 und 1835], die ihreseits auch Ritt beeinflußt haben dürften.

Ein Differentialkörper K ist ein Körper mit einer „Differentiation“ (ähnlich dem Körper der rationalen Funktionen) in dem die Ableitung eines jeden Elementes ist wieder Element von K ist. Etwas präziser:

Ein Differentialkörper K ist ein Körper der Charakteristik 0 mit einer Abbildung D: $K \to K$; $D(f+g) = D(f) + D(g)$ und $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ gelten uneingeschränkt.

$K_0 = \{c \in K;\ D(c) = 0\}$ heißt der (Teil-)Körper der Konstanten, D heißt Differentiation.

Ist L ein Erweiterungskörper von K mit einer Erweiterungsdifferentiation, die ebenfalls mit D bezeichnet sei, so läßt sich die Frage nach einer Stammfunktion folgendermaßen formulieren: Gegeben $f \in K$; gesucht $F \in L$ mit $D(F) = f$.

Wenn man von algebraischen Erweiterungen zunächst absieht, reicht es für die Lösung des Problems, nur endlich viele (nicht schwer zu definierende) transzendente logarithmische bzw. exponentielle Erweiterungen zuzulassen. Denn die Liouvilleschen Ideen lassen sich in moderner Sprechweise etwa so formulieren:

$f \in K$ besitze in einer endlichen elementaren Erweiterung eine Stammfunktion. Dann läßt sich f darstellen als $D(a_0) + \sum c_i D(a_i)/a_i$ mit c_i, $a_i \in K$. Die transzendenten Elemente $log(a_i)$ sind nun zu K zu adjungieren und $F = a_0 + \sum c_i log(a_i)$ ist die gesuchte Stammfunktion.

Der Algorithmus von Risch entscheidet, ob sich F in der obigen Form darstellen läßt. Falls dies nicht der Fall ist, so ist keine Stammfunktion der beschriebenen Art vorhanden.

Läßt man neben logarithmischen bzw. exponentiellen Erweiterungen noch endlich viele algebraische Erweiterungen zu, so gelangt man zu einer Präzisierung der Begriffe elementare Funktion bzw. elementare (= geschlossen darstellbare) Stammfunktion als Elemente eines Differentialkörpers und eines entsprechenden Erweiterungskörpers.

Einen umfassenden Überblick zu dieser Thematik findet man in [Bronstein 1997]. Bronstein selbst hat in den 80er und 90er Jahren neben weiteren Autoren zahlreiche bedeutende Beiträge zur Umsetzung und Erweiterung des Algorithmus von Risch geleistet.

Ausdrücklich sei noch einmal erwähnt: Die Elemente von L sind Polynome in gewissen transzendenten Erweiterungen von K, so daß eine Verarbeitung mittels Computer in den Bereich Polynomalgebra fällt. Der Grenzwertbegriff spielt keine Rolle mehr.

Einige Beispiele seien zur Illustration wieder mittels MAPLE berechnet (im dritten Beispiel wird keine elementare Stammfunktion gefunden):

$> \mathbf{int}(x \wedge 2/(x-1), x);$

$\frac{1}{2}x^2 + x + \ln(x-1)$

$> \mathbf{int}(sin(x) \wedge 5 * cos(x) \wedge 2, x);$

$-\frac{1}{7}\sin(x)^4\cos(x)^3 - \frac{4}{35}\sin(x)^2\cos(x)^3 - \frac{8}{105}\cos(x)^3$

$> \mathbf{int}(exp(x \wedge 5) * sin(x), x);$

$\int e^{(x^5)}\sin(x)dx$

10.4.4 Die Entwicklung von Computeralgebrasystemen

Die Entwicklung von Computeralgebrasystemen als Softwarepakete ist ein wichtiger Teil des Entstehens der Wissenschaftsdisziplin Computeralgebra. Darum seien hier einige Bemerkungen angefügt.

Die Entwicklung von Computeralgebrasystemen ist aus der Sicht des beginnenden 21. Jahrhunderts zeitlich in die letzten 40–50 Jahre des 20. Jahrhunderts (bis heute) einzuordnen. Die erste Jahreszahl, die in diesem Zusammenhang zu erwähnen ist, ist höchstwahrscheinlich 1953. In diesem Jahr wurden Programme von H. G. Kahrimanian bzw. J. Nolan geschrieben, die sich beide mit der analytischen (nichtnumerischen, symbolischen) Differentiation von Funktionen mittels eines digital arbeitenden Computers beschäftigten [Bronstein 1997, S. VI]. Doch größere Erfolge bei der automatisierten Bearbeitung mathematischer Formeln oder Funktionen blieben zunächst aus, da die Entwicklung von Rechentechnik einerseits von der Hardwareseite aus noch in den Kinderschuhen steckte, andererseits auch prinzipielle Programmiergrundlagen erst geschaffen werden mußten. Zahlreiche Entwicklungen der damaligen Zeit waren auch allein auf numerische Computerrechnungen ausgerichtet. Im Gegensatz etwa zu ALGOL oder FORTRAN war LISP ein Listenverarbeitungssystem, entstanden 1960/61, welches symbolische Rechnungen unterstützte. Auf der Grundlage von LISP entstanden einige der ersten wirkungsvollen Computeralgebrasysteme.

Viele Systeme waren zunächst auf die Realisierung spezieller Aufgaben ausgerichtet, etwa auf das automatisierte Rechnen mit Polynomen oder die au-

tomatisierte Berechnung anderer spezieller algebraischer Größen. Auch gegenwärtig existieren etliche derartige Programmpakete.

Das erste System, welches universellere Aufgaben bewältigte, war das 1968 durch Anthony Hearn an der Stanford-Universität entwickelte, interaktive System REDUCE auf der Grundlage von LISP. Wenige Jahre danach entstanden weitere derartige Mehrzwecksysteme (general purpose systems) wie REDUCE 2, SCRATCHPAD oder MACSYMA. Zentren dieser Entwicklung lagen vornehmlich in den USA (Stanford, M.I.T., IBM Research).

Der immer größer werdende Umfang der Programmpakete verlangte nach neuen prinzipiellen Lösungen für gewisse Aufgaben; erstmals bei REDUCE entstanden verschiedene Plattformen, die nicht immer gleichzeitig alle aktiv sein mußten; auch Teile von LISP wurden ausgelagert bzw. Varianten von LISP von geringerem Umfang wurden entwickelt und verwendet.

Ende der 70-er entstand ein kleineres System (muMATH), welches erstmalig auf den damaligen PC's einsetzbar war. Natürlicherweise waren die Möglichkeiten für mathematische Berechnungen geringer als bei den großen Geschwistern, aber zur Verbreitung der Computeralgebra trug dieses System gewaltig bei.

Die Mehrzwecksysteme MAPLE und MATEMATICA, heute vielleicht die am weitesten verbreiteten Systeme, sind Entwicklungen der 80-er Jahre, ebenso der muMATH-Nachfolger DERIVE, bedeutsam zum Beispiel als System zum Einsatz in der Schule. Mittlerweile sind hier mehrere, ständig verbesserte Versionen entstanden, die sich durch immer modernere, sehr nutzerfreundliche Oberflächengestaltung auszeichnen; die Entwicklung der Grafikfähigkeit ist ein weiteres Merkmal der Entwicklung der letzten Jahre. Durch Hardwareentwicklungen, insbesondere die Speicherkapazität betreffend, sind alle Systeme auch auf normalen PC's lauffähig.

Es gibt eine Reihe weiterer etablierter Mehrzwecksysteme (z. B. AXIOM, hervorgegangen aus SCRATCHPAD, MATLAB mit MAPLE-Kern, MUPAD, ein jüngeres System, entwickelt in Paderborn), daneben zahlreiche Systeme (weltweit sicher mehr als 50) ausgerichtet auf spezielle Aufgaben. Beispiele dafür sind:

GAP (berechnende Gruppentheorie)

LiE (Berechnungen im Zusammenhang mit Lie-Gruppen)

SINGULAR (algebraische Geometrie, Singularitätentheorie)

FELIX (bietet u. a. Möglichkeiten nichtkommutativen Rechnens).

Die Namen der Systeme sind häufig die Anfangsbuchstaben englischer Wörter, die auf Aufgabenstellungen hinweisen (GAP – Groups, Algorithms and Programming) oder sie deuten die Herkunft an (MAPLE – Ahorn, in Waterloo, Kanada entwickelt).

Viele von diesen Systemen entstanden im Gegensatz zu früher jetzt auch außerhalb der USA, insbesondere in Deutschland. Einen guten Überblick vermittelt hier die Broschüre [Computeralgebra in Deutschland 1993]. Große

Übersichten findet man in [Geddes, Csapor, Labahn 1992] und in [Wester 1999]. Ganz aktuell kann man sich im Internet informieren.

Ein Ende der Entwicklung ist nicht abzusehen, es hat sich auch bis jetzt kein „bestes“ Computeralgebrasystem herausgeschält. Mittlerweile gibt es Bemühungen, die Fähigkeiten mehrerer Systeme bei der Lösung von Aufgaben zu nutzen, ohne daß man diese Systeme sämtlich beherrschen oder besitzen muß. Dazu wurden in den neunziger Jahren Standards vorgeschlagen und teilweise entwickelt, die mathematische Objekte plattformunabhängig beschreiben und so gestatten, sie in mehreren Computeralgebrasystemen zu bearbeiten, somit also die Vorzüge mehrerer Systeme gleichzeitig zu nutzen. Das Projekt ist unter dem Namen OPENMATH zusammengefaßt. Genaueres ist z. B. bei [Wester 1999] nachzulesen.

10.4.5 Anwendungen der Computeralgebra, mathematische Bildung, Präsentation in der Gesellschaft

Wenn auch nicht immer vordergründig sichtbar, ist die Entwicklung von Computeralgebrasystemen ein Prozeß, der die Entwicklung von Bereichen der menschlichen Gesellschaft durchaus beeinflussen kann und wird. Beeindruckend und auch charakteristisch ist die folgende, in [Pavelle, Rothstein, Fitch 1992] geschilderte Begebenheit: 1867 veröffentlichte der französische Astronom Delaunay in zwei Bänden Ergebnisse, die die Bahn des Mondes in Abhängigkeit von der Zeit (unter dem Einfluß der Sonne und der Erde) beschreiben; zur Herleitung seiner Resultate benötigte Delaunay 20 Jahre seines Lebens.

Fast genau 100 Jahre später wurden seine Berechnungen mittels eines Computeralgebrasystems im Zusammenhang mit Satellitenbahnberechnungen überprüft. Der Computer benötigte für die gleiche Arbeit 20 Stunden: Dies ist ein überzeugender riesiger Sprung in den Möglichkeiten, wissenschaftliche oder technische Berechnungen durchführen zu können, geradezu die Erschließung einer neuen Dimension!

Heute ist die Nutzung von Computeralgebrasystemen in allen ingenieurwissenschaftlichen Richtungen, in Physik, Chemie und Biologie, auch in der Ökonomie beinahe selbstverständlich. Formelmäßige Lösungen von Problemen gestatten meistens sowohl qualitative als auch quantitative Einsichten und sind einer rein numerischen Lösung überlegen.

Anwendungen in der Mathematik wurden schon in den vorigen Abschnitten erwähnt. Oft bestehen diese auch darin, umfangreiche Beispiele durchzurechnen, daraus Vermutungen abzuleiten und diese dann in klassischer Art zu beweisen. Damit wird die Mathematik in gewissen Grenzen auch zu einer experimentellen Wissenschaft.

Die prinzipielle Verfügbarkeit von Computeralgebrasystemen in sehr vielen Lebensbereichen macht auch nicht Halt vor dem Gebiet des Lernens von Mathematik.

Die Einführung des elektronischen Taschenrechners machte es möglich, daß dem Schüler per Knopfdruck alles (und noch mehr) handhabbar gemacht wird, was er üblicherweise im „Rechenunterricht“ der ersten acht Klassen lernt.

Die Entwicklung der Computeralgebra brachte es mit sich, daß im Prinzip die gesamte Schulmathematik, darüberhinaus sehr viele mathematische Werkzeuge der Hochschulausbildung, insbesondere für die Ingenieurwissenschaften, im Computer, im PC, selbst in besseren Taschenrechnern zur Verfügung stehen. Grenzen der Nutzbarkeit, gegeben etwa durch ein sehr kleines Display, werden vielleicht schon bald durch aufklappbare Bildschirme o. ä. weiter hinausgeschoben werden.

Ist damit die Schulmathematik am Ende? Völlig klar sollte sein, daß sich diese in manchem Punkt ändern wird, daß formales Rechnen beispielsweise mit Funktionen oder die Umformung algebraischer Ausdrücke vielleicht bald vernachlässigt werden kann zugunsten inhaltlicher Betrachtungen. Analoges trifft zu auf die Mathematikausbildung an den Hochschulen, sowohl in zahlreichen angewandten Wissenschaften als auch der Mathematik selbst. Es wäre sicher töricht, den technischen Fortschritt zu ignorieren und alles beim alten zu lassen.

Eingehend beschäftigt sich [Buchberger 2000] mit diesen Fragen. Ferner findet man in [Koepf 2000] und in [Wester 1999] Überblicke über den Stand der Einführung von Computeralgebra in der Schulausbildung.

Seinen Niederschlag findet diese Entwicklung ferner in der Gründung eines eigenen Journals zu diesen Fragen (International Journal of Computer Algebra in Mathematical Education, seit 1997).

Zur Sammlung und konzentrierten Darstellung von Ideen und Algorithmen der Computeralgebra wurde bereits 1967 das SIGSAM – Bulletin (SIGSAM - Special Interest Group on Symbolic & Algebraic Manipulation) und 1985 das Journal of Symbolic Computation gegründet. Seit 1996 erscheint The SAC Newsletter (SAC - Symbolic & Algebraic Manipulation). Daneben existieren weitere Zeitschriften, ausgerichtet auf spezielle Computeralgebrasysteme. Viele zur Computeralgebra gehörende Arbeiten sind auch in Zeitschriften erschienen, die in ihrem Titel das Wort Computation o. ä. enthalten.

Die vielleicht bedeutendste internationale Konferenz zu Fragen der Computeralgebra findet seit 1981 jährlich, seit 1988 unter dem Namen ISSAC (Internationales Symposium on Symbolic and Algebraic Manipulation) statt. Begonnen wurde diese Tagungsreihe bereits im Jahre 1966. Ausführliche Informationen dazu, zu anderen Konferenzen zur Computeralgebra, auch zur Presentation im Internet findet man bei [Wester1999]. Zwei Internetadressen sind am Ende des Literaturverzeichnisses erwähnt.

In Deutschland ist die Computeralgebra im Rahmen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung durch eine eigene Untergruppe repräsentiert.

Wichtige Ereignisse der Algebraentwicklung seit 1921

1921	E. NOETHER entwickelt eine abstrakte Idealtheorie in Ringbereichen und leitet die Begründung der abstrakten Algebra ein.
1923	L. E. DICKSON faßt in der Monographie „Algebras and their arithmetics“ wichtige Ergebnisse zur Algebra und Zahlentheorie zusammen.
1926	E. NOETHER begründet die abstrakte Theorie der Dedekind-Ringe.
1926	H. BRANDT führt den Gruppoidbegriff ein.
1927	E. ARTIN und O. Schreier definieren den Begriff des formal-reellen Körpers und studieren diese Körper.
1927	E. ARTIN überträgt die Wedderburnschen Struktursätze auf Ringe mit Kettenbedingung.
1928	E. NOETHER beginnt mit der Anwendung nichtkommutativer Methoden zur Erforschung kommutativer Strukturen.
1928	W. KRULL entwickelt eine Galois-Theorie für unendliche Körpererweiterungen.
1928	O. SCHREIER verallgemeinert den Satz von Jordan-Hölder auf unendliche Gruppen.
1930	B. L. VAN DER WAERDEN veröffentlicht das Lehrbuch „Moderne Algebra“. Dieses gibt eine einheitliche axiomatische Darstellung der Algebra und wird für Jahrzehnte zum Standardlehrbuch.
1933	C. CHEVALLEY gibt einen systematischen Aufbau der lokalen Klassenkörpertheorie ohne Rückgriff auf die globale Theorie und führt die Begriffe des Idel und Adel ein.
1933	B. L. VAN DER WAERDEN entwickelt in 18 Arbeiten bis 1958 eine Neubegründung der algebraischen Geometrie auf der Basis der abstrakten Algebra.
1934	G. BIRKHOFF stellt allgemeine Überlegungen zu algebraischen Strukturuntersuchungen vor.
1934	Mehrere junge französische Mathematiker schließen sich zur Bourbaki-Gruppe zusammen.
1934	M. H. STONE zeigt die Isomorphie eines Booleschen Verbandes mit einem Teilmengenverband sowie die Zuordnung zwischen Booleschem Verband und Booleschem Ring.
1934	H. SEIFERT und W. THRELFALL wenden im „Lehrbuch der Topologie“ erstmals Elemente der abstrakten Algebra in der Topologie an.
1935	O. ORE stellt Untersuchungen zu einem zum Verband äquivalenten Begriff vor.
1935	Mit dem Ergebnisberichten „Idealtheorie“ bzw. „Algebren“ geben W. KRULL bzw. M. DEURING einen Überblick über die kommutative Idealtheorie bzw. die Algebrentheorie, vier Jahre später folgt die Übersicht über die allgemeine Ring- und Idealtheorie.
1935	R. BRAUER beginnt die Theorie der modularen Darstellungen auszuarbeiten.
1938	E. ARTIN gibt eine Neubegründung der Galois-Theorie, ohne den Satz vom primitiven Element zu benutzen.
1939	Mit der Veröffentlichung des ersten Buchs der Bourbaki-Gruppe beginnt diese mit der Umsetzung ihres Programms zur systematischen Darstellung der Mathematik auf der Basis des Strukturkonzepts.
1939	I. M. GELFAND begründet die Theorie der Banach-Algebren.

1940 G. Birkhoff publiziert die erste Monographie zur Verbandstheorie.
1940 D. Barbillian erforscht die Verbindung zwischen Ringen und gewissen projektiven Geometrien, sog. Ringgeometrien.
1941 Mit seiner Methode der lokalen Theoreme erzielt A. I. Malzev wichtige Einsichten über Gruppen und algebraische Systeme, die später u. a. in der Modelltheorie bedeutsam sind.
1942 S. Eilenberg und S. MacLane führen die Begriffe Kategorie und Funktor ein und entwickeln in den folgenden Jahren erste Grundlagen der Kategorientheorie.
1942 R. Brauer vollendet den Neuaufbau der Theorie der Gruppencharaktere mit Hilfe der modularen Darstellungen.
1943 N. Jacobsen gibt eine abstrakte Definition des Radikalbegriffs für Ringe.
1943 S. Eilenberg und S. MacLane gelingt eine abstrakte Definition der Homologie- und Kohomologietheorie. Dies wird der Ausgangspunkt der homologischen Algebra.
1944 O. Zariski definiert eine nichtseparierte Topologie auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit.
1946 A. Weil publiziert einen systematischen Aufbau der abstrakten algebraischen Geometrie.
1948 R. Godement beweist wichtige Resultate über unitäre Darstellungen lokalkompakter Gruppen.
1951 A. I. Malzev beweist den Satz von Malzev-Kolchin über auflösbare lineare Gruppen.
1952 In dem Buch „Foundations of Algebraic Topology“ verdeutlichen S. Eilenberg und N. Steenrod an Hand der algebraischen Topologie die vereinheitlichende Wirkung der Kategorientheorie.
1952 A. Gleason, D. Montgomery und L. Zippin lösen das fünfte Hilbertsche Problem für lokalkompakte Gruppen.
1953 H. G. Kahrimanian und J. Nolan schreiben Programme zur nichtnumerischen Differentiation von Funktionen mittels eines digital arbeitenden Computers.
1954 R. Brauer stellt neue Einsichten zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen vor.
1957 A. Grothendieck legt in mehreren Vorträgen und Publikationen bis 1961 eine weitgehende (geniale) Verallgemeinerung der algebraischen Geometrie vor, wobei die Theorie der Schemata und Garben die Grundlage bildet.
1958 D. Kan führt eine Dualitätsbeziehung in die Menge der Funktoren ein und definiert den adjungierten Funktor.
1962 In seinen Studien zur Zerlegung einfacher Gruppen führt J. Tits die sog. Tits-Systeme ein.
1963 W. Feit und J. G. Thompson beweisen unter Rückgriff auf vielfältige gruppentheoretische Methoden, daß jede endliche Gruppe ungerader Ordnung auflösbar ist.
1965 B. Buchberger prägt den Begriff der Gröbner-Basis und gibt einen Algorithmus zur Berechnung einer solchen an.
1966 Z. Janko entdeckt eine weitere isolierte einfache Gruppe, eine sog. sporadische Gruppe, und regt die Suche nach derartigen Gruppen neu an.

1967	E. R. Berlekamp stellt grundlegende Einsichten zur algorithmischen Faktorisierung von Polynomen unter Benutzung endlicher Körper vor.
1969	Die Entscheidung, ob eine geschlossen dargestellte Funktion eine ebensolche Stammfunktion besitzt sowie deren Berechnung wird durch den Algorithmus von R. H. Risch möglich.
1973	B. Fischer und R. L. Griess jr. entdecken in Forschungen zur Klassifikation endlicher einfacher Gruppen die größte sporadische Gruppe, die sog. Monster-Gruppe.
1977	M. Atiyah und W. Schmid weisen die Existenz einer Darstellung kompakter Lie-Gruppen ohne Benutzung der Gruppencharaktere nach.
1980	L. Scott vollendet die Aufklärung der Struktur der endlichen alternierenden Gruppen.
1981	Unter Verwendung zahlreicher Ergebnisse anderer Mathematiker gibt D. Gorenstein eine vollständige Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen.

10.5 Aufgaben zu Kapitel 10

Aufgabe 10.2.1: Restklassenringe
In der Menge der ganzen Zahlen bilde man die Restklassen nach der ganzen Zahl m und zeige, daß die Menge der Restklassen $[a]$ mod m einen kommutativen Ring von m Elementen bilden. [Lugowski, Bd. II, S. 14]

Aufgabe 10.2.2: Kommutative Ringe
Beweise, daß die Gesamtheit aller Zahlen $a + b\sqrt{k}$ mit beliebigen ganzen Zahlen a und b für jede feste ganze Zahl k einen kommutativen Ring bilden. [Lugowski, Bd. II, S. 15]

Aufgabe 10.2.3: Ringe quadratischer Matrizen
Man betrachte die Menge der quadratischen Matrizen $A = (a_{ik})$ mit $i, k = 1, 2, \ldots, n$ mit reellen Zahlen a_{ik} und zeige, daß diese Menge mit den üblichen Matrizenoperationen einen Ring, den vollen Matrizenring, bildet.

Literaturverzeichnis

[Abel 1824] Abel, Niels Henrik: Mémoire sur les équations algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'èquation générale du cinquième degré. Christiania 1824. In: Abel 1881, Bd. 1, S. 28–33

[Abel 1826] Abel, Niels Henrik: Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höheren Graden als den vierten allgemein aufzulösen. J. reine u. angew. Math. (Crelles J.) 1(1826) S. 65–84 In: Abel 1881, Bd. 2, S. 66–87

[Abel 1827] Abel, Niels Henrik: Recherches sur les fonctions elliptiques. J. reine u. angew. Math. (Crelles J.) 2(1827) S. 101–181. In: Abel 1881, Bd. 2, S. 263–388

[Abel 1829] Abel, Niels Henrik: Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algebriquement. J. reine u. angew. Math. (Crelles J.) 4(1829) S. 131–156. In: Abel 1881, Bd. 1, S. 478–507

[Abel 1881] Abel, Niels Henrik: Oeuvres complètes. Publiée aux frais de l'état norvégien par MM. L. Sylow et S. Lie. 2 Vols. Christiania 1881

[Abū Kāmil] Abū Kāmil: The Book of Algebra. Frankfurt am Main: Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften 1986

[Alexander 1994] Alexander, Daniel S.: A history of complex dynamics. From Schröder to Fatou and Julia. Wiesbaden 1994

[Archimedes a] Archimedes: Kugel und Zylinder. Deutsch v. A. Czwalina. Ostwalds Klassiker Bd. 202, S. 1922f.

[Archimedes b] Archimedes: The works of Archimedes with the method of Archimedes. Hrsg. Heath, Th. L. 1887. Nachdruck New York: Dover Publ. Inc. 1953.

[Artin 1950] Artin, Emil: The Influence of J. H. M. Wedderburn on the Development of Modern Algebra. Bull. American Math. Soc. 1950, S. 65–72

[Babbage 1836] Babbage, Ch., Scribbling books. volume 2, Science Museum Library, London 1836

[Banach 1922] Banach, Stefan: Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fund. Math. 3(1922), S. 133–181

[Banach 1932] Banach, Stefan: Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932

[Basmakova 1972] Basmakova, I. G.: Diophant und diophantische Gleichungen, (Übersetzung aus dem Russischen von Dr. Ludwig Boll, Berlin). Basel-Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1972

[Beaulieu 1989] Beaulieu, L.: Bourbaki. Une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux, 1934–1944. 2 Bde., Dissertation. Université de Montréal, 1989

[Beaulieu 1994] Beaulieu, L.: Dispelling the myth: questions and answers about Bourbaki's early work, 1934–1944. In: Sasaki, Ch. et al. (Hrsg.): The intersection of history and mathematics. Basel u. a., 1994, S. 241–252

[Bekemeier 1987] Bekemeier, B.: Martin Ohm (1792–1872): Universitäts- und Schulmathematik in der neuhumanistischen Bildungsreform. Göttingen 1987

[Belhoste 1991] Belhoste, Bruno: Augustin-Louis Cauchy. A Biography. Translated by Frank Ragland. New York et all.: Springer 1991

[Bell 1938] Bell, Eric: Fifty Years of Algebra in America, 1888–1938. In: Semicentennial Addresses of the American Mathematical Society. New York 1938, Bd. 2, S. 1–34

[Bell 1967] Bell, Eric T.: Die großen Mathematiker. Düsseldorf, Wien 1967

[Berggren 1986] Berggren, J.l.: Episodes in the Mathematics of Medieval Islam. New York, Berlin u. a.: Springer 1986

[Berlekamp 1967] Berlekamp, E. R.: Factoring polynomials over finite fields. Bell System Technical Journal 46, S. 1853–1859
[Berlekamp 1970] Berlekamp, E. R.: Factoring polynomials over large finite fields. Math. of Computation 24 (1970) S. 713–735
[Betti 1852] Betti, Enrico: Sulla risoluzione dell'equazioni algebriche. Ann. Sc. Mat. Fis. 3(1852). In: Betti 1903, S. 31–80
[Betti 1855] Betti, Enrico: Sopra le teorica delle sostituzioni. Ann. Sc. Mat. Fis. 6(1855). In: Betti 1903, S. 102–123
[Betti 1903] Betti, Enrico: Opere matematiche. Pubblicate per cura della R. Accademia de'Lincei, Bd. 1, Milano 1903
[Birkhoff 1934] Birkhoff, Garrett: General Properties of Algebraic Systems. Bull. American Math. Soc., 2. Ser., 40(1934), S. 53–54
[Birkhoff 1973] Birkhoff, Garrett: Current Trends in Algebra. Amer. Math. Monthly 80(1973), S. 760–782
[Bôcher 1907] Bôcher, Maxime: Introduction to higher algebra New York 1907
[Bölling 1993] Bölling, Reinhard: Briefwechsel zwischen Karl Weierstraß und Sofja Kowalewskaja. Hrsg., eingeleitet und kommentiert von R. Bölling. Berlin 1993
[Bombelli 1572] Bombelli, R.: L'Algebra, Bologna 1572
[Boncompagni 1857] Boncompagni, B.: Il Liber abbaci di Leonardo Pisano. Roma 1857
[Boole 1844] Boole, George: On a General Method of Analysis. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 134(1844), S. 225–282
[Boole 1847] Boole, George: The Mathematical Analysis of Logic. Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning. Cambridge 1847
[Boole 1854] Boole, George: An Investigation of the Laws of Thought. London 1854
[Bos 2001] Bos, Henk J. M.: Redefining Geometrical Exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction. (Sources and studies in the history of mathematics and physical sciences). New York, u. a.: Springer 2001
[Bourbaki 1950] Bourbaki, Nicolas: The Architecture of Mathematics. Amer. Math. Monthly 67(1950), S. 221–232
[Bourbaki 1971] Bourbaki, N.: Elemente der Mathematikgeschichte. Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht 1971
[Brentjes 1990] Brentjes, S.: al-Karaǧī, as-Samawʾal in: Gottwald, Ilgauds, Schlote (Hrg.): Lexikon bedeutender Mathematiker. Thun-Frankfurt (M.): Verlag Harry Deutsch 1990, S. 409–410
[Brewer 1981] Brewer, James W. (Hrsg.): Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work. New York u. a., 1981. (Pure and applied mathematics, Vol. 69)
[Brieskorn 1981] Brieskorn, E.: Ebene algebraische Kurven, Basel 1981
[Bronstein 1997] Bronstein, M.: Symbolische Integration I: transcendential functions. Berlin, u. a.: Springer 1997
[Brunner 1999] Brunner, Bodil; Jesper Lützen (Eds.): Caspar Wessel: On the Analytical Representation of Direction. An Attempt Applied Chiefly to Solving Plane and Spherical Polygons. 1797. Translated by Flemming Damhus. Introductory chapters by Bodil Brunner, Nils Voje Johansen, and Kirsti Andersen. Matematisk-fysiske Meddelelser 46:1. Det Kongelige Danske Vedenskabernes Selskab, Copenhagen 1999
[Buchberger 1965] Buchberger, B.: Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal. Habilitationsschrift, Universität Innsbruck, Math. Inst. 1965

[Buchberger 1970] Buchberger, B.: Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems. aequationes mathematicae 4(3) (1970) S. 271, 272 und 374–383

[Buchberger 1986] Buchberger, B. et al.: Rechnerorientierte Verfahren. Stuttgart 1986

[Buchberger 2000] Buchberger, B.: Computer-Algebra: Das Ende der Mathematik? Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 2 (2000), S. 16–26

[Bühler 1987] Bühler, Walter K.: Gauß: eine biographische Studie. Berlin et al. 1987

[Burnside 1897] Burnside, William: Theory of Groups of Finite Order. Cambridge 1897, 1911

[Cajori 1928/29] Cajori, F.: History of mathematical notations. 2 vols., Chicago 1928/29

[Cantor 1880] Cantor, M. 1880: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 4 Bde., versch. Aufl. 1880ff., Leipzig: Teubner, Reprint: Johnson Reprint Corporation, New York 1965.

[Cantor, Zassenhaus 1981] Cantor, D. G. und Zassenhaus, H.: A New Algorithm for Factoring Polynomials Over Finite Fields. Mathematics of Computation 36 (154) (1981), S. 587–592

[Cardano 1545] Cardano, G.: Artis Magnae, sive de Regulis Algebraicis. Lib.unus. Nürnberg 1545

[Cardano 1993] Cardano, G.: Ars magna or the rules of algebra. Translated by T. Richard Witmer. With a foreword by Øystein Ore. Dover edition: New York 1993

[Cartan 1894] Cartan, Elie: Sur la structure des groupes de transformation finis et continus. Thèse Paris 1894. In: Oeuvres complètes. 3 Teile zu je 2 Bänden. Paris 1952–1955. Bd. 1,1 S. 137–287

[Cartan 1897] Cartan, Elie: Sur les systèmes de nombres complexes. C. R. Acad. Sci. Paris 124(1897), S. 1217–1220

[Cartan 1898] Cartan, Elie: Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes. Annales Fac. Sc. Toulouse 12B(1898), S. 1–99

[Cartan 1908] Cartan, Elie: Nombres complexes. Encyclop. Sci. mathémat. I,1, 1908, S. 329–468

[Cauchy 1815] Cauchy, Augustin-Louis: Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. Journal École polytechnique 10(1815), S. 29–112. In: Cauchy 1882, 2. Ser., Bd. 2, S. 91–169

[Cauchy 1844] Cauchy, Augustin-Louis: Mémoire sur les arrangements que l'on forme avec des lettres données, et sur les permutations ou substitutions à l'aide desquelles on passe d'un arrangement à un autre. In: Exercises d'analyse et de physique mathématique. Vol. 3, Paris 1844, S. 151–252

[Cauchy 1882] Cauchy, Augustin-Louis: Oeuvres complétes. 1. Ser. 12 vols., 2. Ser. 15 vols., Paris 1882–1974

[Cayley 1854] Cayley, Arthur: On the theory of groups, as depending on the symbolic equations $\Theta^n = 1$. Philosophical Mag. 7(1854) 40–47, 408f. In: Cayley 1889, Vol. 2, S. 123–130

[Cayley 1858] Cayley, Arthur: A Memoir on the Theory of Matrices. Phil. Trans. Royal Soc. London 148(1858), S. 17–37. In: Cayley 1889, Vol. 2, S. 475–496

[Cayley 1878] Cayley, Arthur: The theory of groups. Amer. J. of Math. 1(1878) In: Cayley 1889, Vol. 10, S. 401–403

[Cayley 1889–1898] Cayley, Arthur: The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley. 13 Vols. Cambridge 1889–1898

[Chabert 1999] Chabert, J.-L.: A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip. Berlin/Heidelberg 1999

[Chandler 1982] Chandler, Bruce; Magnus Wilhelm: The historiy of combinatorical group theory: a case study in the history of ideas. New York u. a., 1982

[Computeralgebra in Deutschland 1993] Autorenkollektiv, Passau 1993: Offset Druckerei R. Esen

[Condillac 1959] Condillac, Étienne Bonnot de: Die Logik oder die Anfänge der Kunst des Denkens. Die Sprache der Rechnens. Herausgegeben von G. Klaus. Übersetzt von E. Salewski. Berlin 1959

[Corry 1996] Corry, Leo: Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures. Science Networks Vol. 17. Birkhäuser Verlag Basel et. al. 1996

[Crowe 1967] Crowe, Michael J.: A History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of a Vectorial System. Notre Dame, London, 1967, ^{2}1985 New York.

[Czwalina 1952] Czwalina, Arthur: Arithmetik des Diophant aus Alexandria, (aus dem Griechischen übertragen und erklärt). Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1952

[De Morgan 1835] De Morgan, Auguste: The Elements of Algebra preliminary to the Differential Calculus, and Fit for the Higher Classes of Schools in Which the Priciples of Arithmetic are Taught. London 1835

[De Morgan 1841] De Morgan, Auguste: On the Foundation of Algebra. Transactions Cambridge Phil. Soc. 7, part II (1841), S. 173–188 (Read Dec. 9, 1839)

[Dedekind 1871] Dedekind, Richard (Hrsg.): Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet mit Zusätzen des Herausgebers. 2. Aufl. Braunschweig 1871; 3. Aufl. 1879; 4. Aufl. 1894. Das Supplement X (2. Aufl.) wurde teilweise wieder abgedruckt in [Dedekind 1930–1932], Bd. 3, S. 223–261; Supplement XI (3. Aufl.) ebenda, S. 297–313; Supplement XI (4. Aufl.) ebenda, S. 1–122

[Dedekind 1877] Dedekind, Richard: Sur la théorie des nombres entiers algébriques. Paris 1877 (auch in: Bull. des Sci. Math. Astron. Ser. 1, 11(1876), S. 278–288; Ser. 2; 1(1877), S. 17–41, 69–92, 144–164, 207–248; zitiert nach [Dedekind 1964]

[Dedekind 1882] Dedekind, Richard; Weber, Heinrich: Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 92(1882), S. 181–290

[Dedekind 1885] Dedekind, Richard: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen 1885, S. 141–159

[Dedekind 1887] Dedekind, Richard: Erläuterungen zur Theorie der sogenannten allgemeinen complexen Größen. Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen 1887, S. 1–7

[Dedekind 1888] Dedekind, Richard: Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1888

[Dedekind 1895] Dedekind, Richard: Ueber die Begründung der Idealtheorie. Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1895, S. 106–113

[Dedekind 1897] Dedekind, Richard: Ueber Gruppen, deren sämmtliche Theiler Normaltheiler sind. Math. Annalen 48(1897), S. 548–561

[Dedekind 1897] Dedekind, Richard: Ueber Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Theiler. Festschrift der Technischen Hochschule Braunschweig bei Gelegenheit der 69. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte. Braunschweig 1897, S. 1–40. In: [Dedekind 1930] Bd. 2, S. 103–147

[Dedekind 1930] Dedekind, Richard: Gesammelte mathematische Werke. Hrsg. von R. Fricke, E. Noether und Ø. Ore. 3 Bände, Braunschweig 1930, 1931, 1932
[Dedekind 1964] Dedekind, Richard: Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen. Mit einem Geleitwort von B. L. van der Waerden. Berlin 1964
[Descartes 1894] Descartes, René: La Géométrie. (Als Teil des Discours de la méthode). Deutsch von L. Schlesinger. Berlin 1894
[Descartes 1980] Descartes, René: Ausgewählte Schriften. Ed. G. Irrlitz. Leipzig 1980
[Dick 1970] Dick, Auguste: Emmy Noether (1882–1935). Basel u. a. 1970. (Beihefte zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik“, Nr. 13)
[Dickson 1903] Dickson, Leonard E.: Definitions of a Linear Associative Algebra by Independent Postulates. Transactions AMS 4(1903), S. 21–26
[Dickson 1906] Dickson, Leonard E.: Linear Algebras in which Division is Always Uniquely Possible. Transactions AMS 7(1906), S. 370–390
[Dickson 1923] Dickson, Leonard E.: Algebras and Their Arithmetics. 1923
[DSB 1970] Dictionary of Scientific Biography. Chief Ed. Charles Coulston Gillispie. XIV Bde. und 2 Supplemente. New York 1970–1978
[Dieudonné 1985] Dieudonné, Jean: Geschichte der Mathematik 1700–1900. Ein Abriß. Braunschweig, Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn 1985
[Dieudonné 1989] Dieudonné, Jean: A history of algebraic and differential topology 1900–1960. Boston u. a. 1989
[Diophant a] Diophant: Arithmetik des Diophantos aus Alexandria. (aus dem Griechischen übertragen von A.Czwalina). Göttingen 1952.
[Diophant b] Diophant: Books IV to VII of Diophantus Arithmetica in the Arabic translation attributed to Qusta ibn Luqa: Ed. J. Sesiano, New York-Heidelberg-Berlin: Springer Verlag 1982
[Dirichlet 1832] Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune:Démonstration d'une proprieté analogue a la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers quelconques. J. reine u. angew. Math. (Crelles J.) 9(1832) S. 379–389
[Dirichlet 1889–1897] Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune: Werke. Hrsg. von Leopold Kronecker und Lazarus Fuchs. 2 Bde. 1889–1897
[Djafari Naini 1982] Djafari Naini, Alireza: Geschichte der Zahlentheorie im Orient. Braunschweig: Verlag Kose & Co 1982
[Djafari Naini 1991] Djafari Naini, Alireza 1991: Astronomisches Instrument des Ibn Sinā in: Bojnurdi, K.M.(Ed.): The Great Islamic Encyclopaedia, Bd. 4, S. 32–35, First Edition, Teheran (in Farsi, demnächst Übersetzung in Arabisch und Englisch)
[Djafari Naini 1997] Djafari Naini, Alireza: Al-Chorezmi in: Wußing, H.: Vom Zählstein zum Computer. Mathematik in der Geschichte Bd. 1: Überblick und Biographien. Hildesheim: Verlag Franzbecker 1997, S. 76–77
[Dold-Samplonius 1990] Dold-Samplonius, Yvonne: Quadratic Equations in Arab Mathematics. In: Die Blütezeit der Arabischen Wissenschaft. Heinz Balmer und Beat Glaus (Hrsg.), Zürich 1990, S. 67–78.
[Dyck 1882] Dyck, Walter von: Gruppentheoretische Studien. Math. Annalen 20(1882), S. 1–44
[Dyck 1883] Dyck, Walter von: Gruppentheoretische Studien II. Ueber die Zusammensetzung einer Gruppe discreter Operationen, über ihre Primitivität und Transitivität. Math. Annalen 22(1883), S. 70–108
[Ebbinghaus 1988] Ebbinghaus u. a.: Zahlen. Zweite überarbeitete und ergänzte Auflage. Berlin: Springer 1988

[Edwards 1880] Edwards, Harold M.: The genesis of ideal theory. Arch. Hist. Exact Sci. 23(1980), S. 321–378

[Edwards 1982] Edwards, Harold M.; Neumann, Olaf; Purkert, Walter: Dedekinds „Bunte Bemerkungen“ zu Kroneckers „Grundzüge“. Arch. Hist. Exact Sci. 27(1982), S. 49–85

[Elfering1975] Elfering, K.: Die Mathematik des Aryabhata I. München: Wilhelm Fink Verlag 1975

[Egmont 1980] Egmont, Warren Van: Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A catalog of Italian abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600. Florenz 1980

[Eilenberg 1945] Eilenberg, Samuel; MacLane, Saunders: General theory of natural equivalences. Trans. Amer. Math. Soc., 28(1945), S. 231–294

[Encyklopädie 1898–1926] Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In sieben Bänden. Leipzig 1898–1926

[Euklid] Euklid: Die Elemente, nach Heibergs Text aus dem Griech. übersetzt u. herausgeg. von Cl. Thaer. Ostwalds Klassiker, Bd. 235 (1933), 236, 240–43 (1937). Reprints Leipzig 1984. 8. Auflage in 1 Bd. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft 1991.

[Euler 1789] Euler, L.: Auszug aus Herrn Leonhard Eulers vollständigen Anleitung zur Algebra mit einigen Erläuterungen und Vermehrungen herausgegeben von Johann Jacob Ebert. Teil I/II. Frankfurt am Mayn 1789. - Dritter Teil, enthaltend die Zusätze von de la Grange, aus dem Französischen übersetzt, und mit Erläuterungen und einigen dahin einschlagenden Abhandlungen begleitet, von Hofrat Kaußler. Frankfurt am Main 1796

[Euler/Grüson 1796] Euler, L.: Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niederen und höheren Algebra nach der französischen Ausgabe des Herrn de la Grange mit Anmerkungen und Zusätzen herausgegeben von Johann Philipp Grüson. Berlin 1796

[Euler 1972] Euler, L.: Elements of Algebra. Translated by Rev. John Hewlett. New York et al. 1972

[Eves 1976] Eves, H.: An Introduction To the History of Mathematics. Fourth Edition. New York: Holt, Reinhart and Winston 1976

[Fauvel/Gray 1987] Fauvel, J.; Gray, J.: The History of Mathematics. Edited by John Fauvel and Jeremy Gray at the Open University. The Open University 1987. Reprint 1990

[Fisch 1999] Fisch, Menachem: The Making of Peacock's Treatise on Algebra: A Case of Creative Indecision. Arch. Hist. Exact Sci. 54(1999), S. 137–179

[Folkerts 1972] Folkerts, M.: Pseudo-Beda: De arithmeticis propositionibus. Eine mathematische Schrift aus der Karolingerzeit. In: Sudhoffs Archiv 56 (1972), S. 22–43

[Folkerts 1996] Folkerts, Menso: Andreas Alexander -Leipziger Universitätslehrer und Cossist? In: R. Gebhardt (Hrsg.): Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit, Annaberg-Buchholz 1996, S. 53–61

[Folkerts 1996 a] Folkerts, Menso: Johannes Regiomontanus – Algebraiker und Begründer der algebraischen Symbolik. In: Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit. Beiträge zum wissenschaftlichen Kolloquium am 21. September 1996 in Annaberg-Buchholz. Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz, Band 7; 1996, S. 19–28

[Folkerts 1996 b] Folkerts, Menso: Regiomontanus' role in the transmission and transformation of Greek mathematics. In: Traditions, Transmission, Transformation. Proceedings of two conferences on pre-modern science held at the University of Oklahoma; ed. by F. Jamil Ragep and Sally P. Ragep with Steven Livesey; Leiden 1996, S. 89–113

[Folkerts 1997] Folkerts, M.: Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Hwarizmi. Edition, Übersetzung und Kommentar von Menso Folkerts unter Mitarbeit von Paul Kunitzsch; Bayerische Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-historische Klasse. Abhandlungen. Neue Folge, Heft 113; München

[Franci/Rigatelli 1985] Franci, R.;Rigatelli,T.: Towards a History of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli. In: Janus 72 (1985), S. 17–82

[Frege 1879] Frege, Gottlob: Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle 1879

[Frege 1884] Frege, Gottlob: Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau 1884

[Fritsche 1999] Fritzsche, Bernd: Sophus Lie. A sketch of his life and work. Journal of Lie Theory 9(1999), S. 1–38

[Frobenius 1878] Frobenius, Georg: Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. J. reine und angew. Math. 84(1878), S. 1–63

[Galois 1908] Galois, Evariste: Manuscripts de Evariste Galois. Publiées par P. Tannery. Paris 1908

[Galois 1989] Galois, Evariste: Oeuvres Mathématiques, publiées en 1846 dans le Journal de Liouville. Suivies d'une étude par Sophus Lie: Influence de Galois sur le Développement des Mathematiques. Paris 1989

[v. z. Gathen/Gerhard 1999] von zu Gathen, J. und Gerhard, J. : Modern Computer Algebra. Cambridge University Press 1999

[Gauß 1870] Gauß, Carl Friedrich: Werke, 12 Bde., Göttingen 1870–1927

[Gauß 1889] Gauß, Carl Friedrich: Untersuchungen über höhere Arithmetik. Deutsch herausgegeben von H. Maser. Berlin 1889

[Gauß 1890] Gauß, Carl Friedrich: Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten und zweiten Grades. (1799–1849) Herausgeg. von E. Netto. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 14) Leipzig 1890

[Gebhardt 1999] Gebhardt, R.: Rechenbücher und mathematische Texte der frühen Neuzeit. Annaberg-Buchholz 1999

[Geddes/Csapor/Labahn 1992] Geddes, K. O., Csapor, S. R. und Labahn, G.: Algorithms for Computeralgebra. Boston ^{3}1992, Kluwer Academic Publishers

[Gerhardt 1899] Gerhardt, C. I.: Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern. Bd. 1, Berlin 1899

[Gericke 1970] Gericke, Helmuth.: Geschichte des Zahlbegriffs. Mannheim, Wien, Zürich 1970

[Gericke 1984] Gericke, H.: Mathematik in Antike und Orient. Berlin u. a.: Springer-Verlag 1984

[Gericke 1992] Gericke, H.: Mathematik in Antike und Orient, Mathematik im Abendland von den römischen Feldmessern bis zu Descartes. Berlin u. a.: Springer Nachdruck beider Bände in einem Band: Wiesbaden: Fourier-Verlag. 1992

[Gerl 1999] Gerl, Armin: Fridericus Amann. In: R. Gebhardt (Hrsg.): Rechenbücher und mathematische Texte der frühen Neuzeit. Annaberg-Buchholz 1999, S. 1–12

[Geyer 1981] Geyer, Wulf-Dieter: Die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen nach Dedekind und Weber. In [Scharlau 1981], S. 109–133

[Ghislaine 1990] Ghislaine, L'Huillier: Le Quadripartitum numerorum de Jean de Murs. Introduction et édition critique, Genf/Paris 1990

[Gibbs 1906] Gibbs, Josiah Willard: Elements of vector analysis. New Haven 1881. In: Gibbs, J. W.: The scientific papers. London, New York, Bombay, 1906, Bd. 2, S. 17–90

[Gillings 1972] Gillings, J. R.: Mathematics in the time of the pharaohs. The MIT Press 1972, reprint Dover 1982

[Gillispie 1970–1978] Gillispie, C. C.: Dictionary of Scientific Biography. Ed. C. C. Gillispie. 16+2 Bände. New York 1970–1978

[Gottwald/Ilgauds/Schlote 1990] Gottwald, S.; Ilgauds, H.-J.; Schlote, K.-H. (Hrsg.):Lexikon bedeutender Mathematiker. Leipzig 1990

[Graßmann 1824] Graßmann, Justus Günther: Raumlehre für die unteren Klassen der Gymnasien und für Volksschulen. Zweiter Theil: Ebene räumliche Größenlehre. Berlin 1824

[Graßmann 1829] Graßmann, Justus Günther: Zur physischen Krystallonomie und geometrischen Combinationslehre. Stettin 1829

[Graßmann 1835] Graßmann, Justus Günther: Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Für die oberen Klassen der Gymnasien. Berlin 1835

[Graßmann 1840] Graßmann, Hermann Günther:Theorie der Ebbe und Flut. 1840 In: [Graßmann 1894] Bd. 3,1, S. 1–353.

[Graßmann 1844] Graßmann, Hermann Günther: Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch neue Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, die Lehre vom Magnetismus und die Kristallonomie erläutert. Leipzig 1844. In: [Graßmann 1894] Bd. 1,1,

[Graßmann 1861] Graßmann, Hermann Günther: Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Berlin 1861

[Graßmann 1894] Graßmann, Hermann Günther: Hermann Graßmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke. Hrsg. F. Engel. 3 Bde. (6 Theile), Leipzig 1894–1911

[Graßmann 1872] Graßmann, Robert: Die Formenlehre oder Mathematik. Stettin 1872

[Graves 1882] Graves, Robert P.: Life of Sir William Rowan Hamilton. 3 vols. Dublin 1882–1889

[Gray 1997] Gray, Jeremiy: Algebraic geometry between Noether and Noether – a forgotten chapter in the history of algebraic geometry. Rev. Hist. Math. 3 (1997) Nr. 1, S. 1–48

[Gregory 1840] Gregory, Duncan Farquharson: On the Real Nature of Symbolical Algebra. Transactions Royal Soc. Edinburgh 14(1840), S. 208–216

[Hancock 1939] Hancock, Harris: Development of the Minkowski geometry of numbers. 2 vols. (Reprint der Ausgabe von 1939), New York 1964

[Hankel 1867] Hankel, Hermann: Theorie der complexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung. Leipzig 1867

[Hankins 1980] Hankins, Thomas L.: Sir William Rowan Hamilton. Boltimore, London 1980

[Hawkins 1971] Hawkins, Thomas: The Origin of the Theory of Group Characters. Arch. Hist. Exact Sci. 7(1971), S. 142–170

[Hawkins 1972] Hawkins, Thomas: Hypercomplex Numbers, Lie Groups, and the Creation of Group Representation Theory. Arch. Hist. Exact Sci. 8(1972), S. 243–287

[Hawkins 1974] Hawkins, Thomas: New Light on Frobenius' Creation of the Theory of Group Characters. Arch. Hist. Exact Sci. 12(1974), S. 217–243

[Hawkins 1980] Hawkins, Thomas: Non-Eulidean Geometry and Weierstrasssian Mathematics: The Background to Killing's Work on Lie Algebras. Hist. Mathematica 7(1980), S. 289–342

[Hawkins 1982] Hawkins, Thomas: Wilhelm Killing and the Structure of Lie Algebras. Archive Hist. Exact Sci. 26(1982), S. 126–192

[Heath 1887] siehe [Archimedes b]

[Heath 1921] Heath, Th. L. 1921: A History of Greek Mathematics. 2 Vols. Oxford: Clarendon Press. Reprint: New York: Dover Publ. Inc. 1981

[Hein 1997] Hein, Wolfgang (Hrsg.): Wilhelm Killing. Briefwechsel mit Friedrich Engel zur Theorie der Lie-Algebren. (Dokomente zur Geschichte der mathematik Band 9) Braunschweig/Wiesbaden 1997

[Hensel 1899] Hensel, Kurt: Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen. Jahresber. DMV 6(1899), 1. Heft, S. 83–88

[Hensel 1908] Hensel, Kurt: Theorie der algebraischen Zahlen. Bd. 1, Leipzig 1908

[Hensel 1918] Hensel, K. 1918: Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen. Mathematische Zeitschrift 2, S. 435–452

[Hentzelt 1923] Hentzelt, Kurt; Noether, Emmy: Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten. Bearbeitet von Emmy Noether. Math. Annalen 88(1923), S. 53–79

[Herstein 1964] Herstein, J. N.: Topics in Algebra. Massachussetts-Toronto-London: Blaisdell Publishing Company, Waltham. 1964

[Hessel 1830] Hessel, Johann Friedrich Christian: Krystallonomie oder Krystallometrie und Krystallographie, auf eigenthümliche Weise und mit Zugrundelegung neuer allgemeiner Lehren der reinen Gestaltenkunde, sowie vollständiger Berücksichtigung der wichtigsten Arbeiten und Methoden anderer Krystallographen bearbeitet. J. S. T. Gehlers Physikalisches Wörterbuch. Bd. 8, Leipzig 1830. Separat 1831; Neudruck Leipzig 1897

[Hilbert 1890] Hilbert, David: Ueber die Theorie der algebraischen Formen. Math. Annalen 36(1890), S. 473–534

[Hilbert 1897] Hilbert, David: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper (Zahlbericht). Jahresber. DMV 4(1897), S. 175–546

[Hilbert 1909] Hilbert, David: Hermann Minkowski: Gedächtnisrede, geh. in d. öffentl. Sitzung d. Kgl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen 1. Mai 1909. Nachr. Kgl. Gesell. Wiss. Göttingen: Geschäftl. Mitteilungen 1909, H. 1. (Auch in: Minkowski, H.: Ausgewählte Arbeiten zur Zahlentheorie und zur Geometrie. Hrsg. und mit e. Anh. vers. von E. Krätzel und B. Weissbach. Leipzig, 1989 (Teubner-Archiv zur Mathematik; Bd. 12)

[Hilbert 1971] Hilbert, David: Die Hilbertschen Probleme. Erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von P. S. Alexandrov. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Bd. 252), Leipzig 1971

[Hironata 1964] Hironata, Heisuke: Resolution of singularities of an analystic variety over a field of characteristic zero. Annals of Math. 79(1), 1964, I: S. 109–203; II: S. 205–326

[Hochheim 1878–1880] Hochheim, A: Kāfi fi-l-ḥisab (Genügendes über das Rechnen) des Abu Bekr Muhammed Ben Alhhusein Alkarakhi. Bd. 1–3, Halle (Saale) 1878–1880

[Hofmann 1963] Hofmann, J. E.: Geschichte der Mathematik, Bd. I, 2. Auflage 1963

[Hölder 1886] Hölder, Otto: Bemerkungen zu der Mittheilung des Herrn Weierstraß: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen. Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen 1886, S. 241–244

[Hölder 1892] Hölder, Otto: Die einfachen Gruppen im ersten und zweiten Hundert der Ordnungszahlen. Math. Annalen 40(1892), S. 55–88

[Hölder 1893] Hölder, Otto: Die Gruppen der Ordnungen p^3, q^2, pqr, p^4. Math. Annalen 43(1893), S. 301–412

[Hölder 1895] Hölder, Otto: Bildung zusammengesetzter Gruppen. Math. Annalen 46(1895), S. 321–422

[Howson 1982] Howson, G.: A History of Mathematics Education. Cambridge University Press, Cambridge 1982

[Høyrup 1999] Høyrup, Jens: The founding of Italian vernacular algebra. Roskilde Universitetscenter, 1999, Nr. 2

[Høyrup 2002] Høyrup, Jens: Lengths, widths, surfaces a portrait of old babylonian algebra and its kin. New York u. a.: Springer 2002

[Hughes 1981] Hughes, Barnabas Bernard: Jordanus de Nemore, De numeris datis. A Critical Edition and Translation. Berkeley/Los Angeles/London 1981

[Hughes 1986] Hughes, Barnabas Bernard: Gerard of Cremonas Translation of al-Chorezmis al-Jabr: A Critical Edition. In: Medieval Studies 48, 1986, S. 211–263

[Hughes 1989] Hughes, Barnabas Bernard: Robert Chesters Latin translation of al-Chorezmis al-Jabr. A New Critical Edition, Stuttgart, 1989

[Hurwitz 1894] Hurwitz, Adolf: Ueber die Theorie der Ideale. Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1894, S. 291–298

[Ide 1803] Ide, D.: Johann Joseph Anton: Anfangsgründe der reinen Mathematik. Erster Theil: Arithmetik. Berlin 1803

[Ifrah 1987] Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Deutsche Übers.: Alexander von Platen. 2., durchges. u. um e. Reg. erw. Aufl.; Frankfurt/Main ; New York 1987

[Jacopo de Florentia 1307] Jacopo de Florentia: Tractatus algorismi (1307), the chapter on algebra. Ed. J. Høyrup. In: Centaurus, 25 (2000), S. 21–69

[Jentsch 1986] Jentsch, W.: Michael Stifel – Mathematiker und Mitstreiter Luthers. In: NTM (23)(1986), H. 1, S. 11–34

[Jordan 1867] Jordan, Camille: Mémoire sur la résolution algébrique des équations. J. de math. pure appl. 2. Serie, 12(1867), S. 109–157

[Jordan 1868/69] Jordan, Camille: Mémoire sur les groupes de mouvements. Ann. mat. pura ed appl., Ser. 2, 2(1868/69), S. 167–215, S. 322–345

[Jordan 1869] Jordan, Camille: Commentaire sur Galois. Math. Annalen 1(1869), S. 141–160.

[Jordan 1870] Jordan, Camille: Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris, 1870.

[Jörgensen 1999] Jörgensen, D.: Der Rechenmeister. Berlin 1999

[Jung 1908] Jung, Franz: Einige vektoranalytische Bezeichnungs- und Benennungsfragen. Jahresber. DMV 17(1908), S. 383–390

[Juschkewitsch 1964] Juschkewitsch, A.P.: Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Leipzig 1964

[Kant 1912] Kant, Immanuel: Versuch, den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen. In: Cassirer, Ernst (Hrsg.): Immanuel Kants Werke. 11 Bde. Berlin 1912–1918, Bd. 2, S. 203–242

[Kantorovič 1950] Kantorovič, Leonid Vital'evič; Vulich, Boris Zacharovič; Pinsker, Aron Grigor'evič: Funkcional'nyj analiz v poluuporjadočennych prostranstvach. Moskau, Leningrad 1950

[Kästner 1758] Kästner, Abraham Gotthelf: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspektiv. Göttingen 1758

[Katz 1993] Katz, V. J.: A History of Mathematics. An Introduction. New York 1993

[Kaunzner 1968] Kaunzner, Wolfgang: Über Johannes Widmann von Eger. München 1968

[Kaunzner 1992] Kaunzner, Wolfgang: Über das wissenschaftliche Umfeld und die mathematischen Handschriften von Adam Ries. In: Adam Rieß vom Staffelstein. Rechenmeister und Cossist. Staffelsteiner Schriften. Band 1. Staffelstein 1992. S. 157–279

[Kaunzner 1986] Kaunzner, Wolfgang: Die lateinische Algebra in MS Lyell 52 der Bodleian Library, Oxford, früher MS Admont 612. In: Aufsätze zur Geschichte der Naturwissenschaften und Geographie. Hrg. von Günther Hamann. Wien 1986, S. 47–89

[Kaunzner/Wußing 1992] Kaunzner, Wolfgang; Wußing, Hans(Hrsg): Adam Ries, Coß. Hrsg. u. kom. von W. Kaunzner und H. Wußing. Stuttgart/Leipzig 1992

[Kaunzner 1996] Kaunzner, Wolfgang: Johannes Widmann, Cossist und Verfasser des ersten großen deutschen Rechenbuches. In: R. Gebhardt (Hrsg.): Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit. Annaberg-Buchholz 1996, S. 37–51

[al-Khayyām a] al-Khayyām, ʿUmar: L'algébre dʾOmar Alkhayyāmī. Ed. und franz. Übers. F. Woepcke. Paris 1851. Nachdruck 1986

[al-Khayyām b] Khayyām, Omare: Hakim Omare Khayyam As An Algebraist. Textes and Persian translation of Khayyam's Works on Algebra, with introductory chapters and commentaries by G. H. Mossaheb. Second Edition Tehran 2000

[al-Khawārizmī a] al-Khawārizmī, Muḥammad b. Mūsā: The Algebra of Mohammed (transl. By F. Rosen). London 1831

[-Khawārizmī b] al-Khawārizmī, Muḥammad b. Mūsā: „al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala" (translated by H.Khadiw-i Djam). Tehran 1985

[Kiernan 1971/72] Kiernan, B. Melvin: The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin. Arch. Hist. Exact Sci. 8(1971/72), S. 40–154

[Killing 1884] Killing, Wilhelm: Erweiterung des Raumbegriffes. Braunsberg 1884

[Killing 1888–1890] Killing, Wilhelm: Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. (4 Teile), Math. Annalen 31(1888), S. 252–290; 33(1889, S. 1–48; 34(1889), S. 57–122; 36(1890), S. 161–189

[Klein 1871] Klein, Felix: Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (1. Aufsatz). Math. Annalen 4(1871), S. 573–625

[Klein 1871] Klein, Felix; Lie, Sophus: Ueber diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Math. Annalen 4(1871), S. 50–84

[Klein 1872a] Klein, Felix: Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Annalen 5(1872), S. 257–277

[Klein 1872b] Klein, Felix: Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (Zweiter Aufsatz). Math. Annalen 6(1872), S. 112–145

[Klein 1872c] Klein, Felix: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872. Wiederabdruck: Math. Annalen 43(1893) S. 63–100 (Erschien auch als: Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften Bd. 253, Leipzig 1974, Frankfurt/M. 1997)

[Klein 1875/76] Klein, Felix: Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Math. Annalen 9(1875/76), S. 183–208

[Klein 1877] Klein, Felix: Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder. Math. Annalen 12(1877), S. 503–560

[Klein 1884] Klein, Felix: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Leipzig 1884. Reprograph. Nachdr. der Ausg. Leipzig 1884; hrsg. mit einer Einführung und mit Kommentaren von Peter Slodowy. Birkhäuser Verlag Basel u. a.; Teubner Verlag Stuttgart u. a. 1993

[Klein 1926] Klein, Felix: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. 2 Bde. Berlin 1926

[Kleiner 1987] Kleiner, Israel: A sketch of the evolution of (noncommutative) ring theory. Enseign. Math. II. Ser. 33(1987) S. 227–267

[Kline 1972] Kline, Morris: Mathematical Thought From Ancient to Modern Times. Oxford et al. 1972

[Knobloch 1981] Knobloch, Eberhard: Symbolik und Formalismus im mathematischen Denken des 19. und beginnenden 20. Jahrhunderts. In: Dauben, J. W. (Ed.): Mathematical Perspectives. New York et al. 1981, S. 139–165

[Knorr 1975] Knorr, Wilbur Richard: The Evolution of the Euclidean Elements. Dordrecht-Boston 1975

[Koch 1991] Koch, Helmut: Introduction to Classical Mathematics Vol. I: From the Quadratic Reciprocity Law to the Uniformization Theorem (Mathematics and its Applications, Vol. 70) Kluwer Academic Publishers, Dordrecht u. a. 1991

[Koepf 2000] Koepf, W.: Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung, Mitt. DMV 3 (2000), S. 39–40

[Kolmogorov 1978] Kolmogorov, A. N., Jukevič, A. P. (Hrsg.): Matematika XIX veka: Matematičeskaja logika, algebra, teorija Čisel, teorija verojatnostej. Moskva 1978. Englische Übersetzung: Kolmogrov, A. N.; Yushkevich, A. P. (eds.): Mathematics of the 19th century. Mathematical logic, algebra, number theory, probability theory. Translated from the Russian by A. Shenitzer, H. Grant and O. B. Sheinin. Basel u. a. 1992

[Kronecker 1853] Kronecker, Leopold: Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen. (I. Abh.) Monatsber. Akad. Berlin 1853, S. 365–374. In: [Kronecker 1895]. Bd. 4, S. 1–111.

[Kronecker 1873] Kronecker, Leopold: Über die verschiedenen Sturm'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen. Monatsber. Akad. Berlin 1873, S. 117–154. In: [Kronecker 1895] Bd. 1, S. 303–348.

[Kronecker 1879] Kronecker, Leopold: Einige Entwicklungen aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Monatsber. Akad. Berlin 1879, S. 205–229. In: [Kronecker 1895]. Bd. 4, S. 73–96.

[Kronecker 1882] Kronecker, Leopold: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. J. reine u. angew. Math. 92(1882), S. 1–122.

[Kronecker 1895] Kronecker, Leopold: Werke. Hrsg. Kurt Hensel. 5 Bde. Berlin, Leipzig 1895–1930

[Kummer 1847] Kummer, Ernst Eduard: Zur Theorie der complexen Zahlen. J. f. d. reine u. angew. Math. 35(1847), S. 319–326

[Kummer 1847] Kummer, Ernst Eduard: Ueber die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren. J. f. d. reine u. angew. Math. 35(1847), S. 327–367

[Laguerre 1867] Laguerre, Edmond Nicolas: Sur le calcul des systèmes linéaires. J. École impér. polytechn. 25(1867), S. 215–264

[Lenstra/Lenstra/Lovasz 1982] Lenstra, A. K.; Lenstra JR, H. W.; Lovasz, L.: Factoring polynomials with Rational Coefficients. Math. Annalen 261 (1982), S. 515–534

[Lewis 1977] Lewis, Albert C.: H. Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik. Ann. of Sci., Vol. 34 (1977), S. 103–162

[Lie 1880] Lie, Sophus: Theorie der Transformationsgruppen. I. Math. Annalen 16(1880), S. 441–528

[Lie 1888] Lie, Sophus: Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt (Erster Band). Leipzig, Berlin 1888

[Lie 1889] Lie Sophus: Ein Fundamentalsatz in der Theorie der unendlichen Gruppen. Chr. Forh. Aar 1889 (1889). In: [Lie 1924], S. 558–560

[Lie 1891] Lie, Sophus: Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuirlichen Transformationsgruppen. Erste Abhandlung. Ber. Königl. Sächs. Gesell. Wiss., Math.-Phys. Cl. 43(1891), S. 316–352; Zweite Abhandlung. Ebenda, S. 353–393

[Lie 1893] Lie, Sophus: Theorie der Transformationsgruppen. Dritter Abschnitt (Dritter Band). Leipzig 1893

[Lie 1924] Lie, Sophus: Gesammelte Abhandlungen. Bd. 5, Leipzig, Kristiania 1924

[Liouville 1833] Liouville, J. 1833: Sur la determination des Integrales dont la valeur est algébrique. Journal de l È cole Polytechnique 14, Premiere Mémoire: 124–148, Second Mémoire: 149–193

[Liouville 1835] Liouville, J. 1835: Mémoire sur l'integration d'une classe de fonctions transcendantes. J. reine u. angew. Mathematik 13, 93–118

[Lovelace 1843] Lovelace, Ada Augusta, Countess of: Sketch of the analytical machine. In: The Works of Charles Babbage. William Pickering, London 1989, Bd. 3

[Luckey 1951] Luckey, P. Die Rechenkunst bei, Ǧamšīd ben masᶜūd al-Kāšī mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens. Wiesbaden: Steiner 1951

[Lüneburg 92] Heinz Lüneburg: Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers, Mannheim 1992

[Lützen 1990] Lützen, Jesper: Joseph Liouville 1809–1882 : Master of Pure and Applied Mathematics. New York u. a.: Springer 1990

[Lützen 1998] Lützen, Jesper (Ed.): Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers. Proceedings of the Wessel Symposium at The Danish Academy of Sciences and Letters, Copenhagen, August 11–15, 1998. Matematisk-fysiske Meddelelser 46:2. Det Kongelige Danske Vedenskabernes Selskab, Copenhagen 2001

[Martzloff 1997] Martzloff, J.-C.: A History Of Chinese Mathematics. (Übersetzung aus dem Französischen von Stephen S. Wilsor, Gloucestershire) Berlin-Heidelberg: Springer Verlag 1997

[Mehrtens 1979] Mehrtens, Herbert: Die Entstehung der Verbandstheorie. Hildesheim 1979

[Menninger 1958] Menninger, K.: Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. 2. Auflage. Bd.1.2, Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht 1958

[Mignotte 1992] Mignotte, M.: Mathematics for Computer Algebra. Berlin 1992

[Miller 1898] Miller, George Abram: On the Commutator Groups. Bull. Amer. Math. Soc. 4(1898), S. 510–515

[Minkowski 1911] Minkowski, Hermann: Gesammelte Abhandlungen. Hrsg. von David Hilbert unter Mitwirkung von A. Speiser und H. Weyl. 2 Bde., Leipzig, Berlin 1911

[Minkowski 1973] Minkowski, Hermann: Briefe an David Hilbert. Mit Beitr. u. hrsg. von Lily Rüdenberg. Berlin, Heidelberg, New York, 1973

[Möbius 1827] Möbius, August Ferdinand: Der barycentrische Calcul. Leipzig 1827

[Molien 1893] Molien (Molin), Theodor: Ueber Systeme höherer complexer Zahlen. Math. Annalen 41(1893), S. 83–156

[Molien 1897] Molien (Molin), Theodor: Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen Substitutionsgruppen. Sitz.-Ber. Naturforsch. Gesell. Dorpat, Nr. 11 1897, S. 259–274

[Moore 1895] Moore, Eliakim Hastings: The Group of Holoedric Transformation into Itself of a Given Group. Bull. Amer. Math. Soc. 1(1895), S. 61–66

[Muth 1899] Muth, Peter: Theorie und Anwendung der Elementartheiler (1899)

[Naumann 2001] Naumann, F.: Vom Abakus zum Internet. Darmstadt 2001, Primusverlag

[Nesselmann 1842] Nesselmann, Georg H. F.:Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra. Nach Quellen bearbeitet. Erster Teil: Die Algebra der Griechen. Berlin: G. Reimer 1842

[Netto 1882] Netto, Eugen: Die Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra. Leipzig 1882

[Neugebauer 1935–1937] Neugebauer, Otto: Mathematische Keilschrifttexte-Texte, I-III (MKT). Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. A: Berlin I,II 1935, III 1937. Nachdruck Berlin-New York etc.: Springer 1973

[Neugebauer 1945] Neugebauer, O., Sachs, A.: Mathematical Cuneiform Texts (MCT), American Oriental Series, vol. 29. New Haven, Connecticut 1945

[Neugebauer 1969] Neugebauer, Otto: Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, Bd.1:Vorgriechische Geschichte. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969

[Neumann 1979] Neumann, Olaf: Bemerkungen aus heutiger Sicht über Gauss' Beiträge zu Zahlentheorie, Algebra und Funktionentheorie. NTM, Schriftenr. Gesch. Naturwiss. Tech. Med. 16(1979), H. 2, 22–39; Teil II (Zur Genesis der algebraischen Zahlentheorie. II.). ebenda, 17(1980), H. 1, 32–48; Teil III (Zur Genesis der algebraischen Zahlentheorie. III.). ebenda, 17(1980), H. 2, S. 38–58

[Neumann 1989] Neumann, Peter M.: On the date of Cauchy's contributions to the founding of the theory of groups. Bulletin of the Australian Mathematical Society 40 (1989), S. 293–302.

[Neumann 1997] Neumann, Olaf: Die Entwicklung der Galois-Theorie zwischen Arithmetik und Topologie (1850 bis 1960). Arch. Hist. Exact Sci. 50(1997), S. 291–329

[Neumann 2002] Neumann, Olaf: Was sollen und was sind Divisoren? Math. Sem. Ber. 48 (2002) S. 139–192

[Noether 1920] Noether, Emmy; Schmeidler, Werner: Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differenzial- und Differenzausdrücken. Math. Zeitschrift 8(1920), S. 1–35
[Noether 1921] Noether, Emmy: Idealtheorie in Ringbereichen. Math. Annalen 83(1921), S. 24–66
[Noether 1926] Noether, Emmy: Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern. Math. Annalen 96(1926), S. 26–61
[Noether 1929] Noether, Emmy: Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. Math. Zeitschrift 30(1929), S.641–692
[Noether 1932] Noether, Emmy: Hyperkomplexe Systeme in ihrer Beziehung zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie. In: Verhandlungen des Internationalen Mathematiker- Kongresses Zürich 1932. Hrsg.von Walter Saxer, Zürich 1932, Bd. I, S. 189–194
[Nový 1973] Nový, Lubos: Origins of Modern Algebra. Prague 1973
[Ohm 1828] Ohm, Martin: Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik. Erster Theil: Arithmetik und Algebra enthaltend. 2. Aufl.; Berlin 1828
[Ore 1935] Ore, Øystein: On the Foundation of Abstract Algebra, I. Annals of Math., 36(1935), S. 406–437
[Parshall 1983] Parshall, Karen Hunger: In Pursuit of the Finite Division Algebra Theorem and Beyond: Joseph H. M. Wedderburn, Leonard E. Dickson, and Oswald Veblen. Arch. Internat. d'histoire des sciences, 33(1983), S. 274–299
[Parshall 1994] Parshall, Karen Hunger; Rowe, David E.: The Emergence of the American Mathematical Research Community: 1876–1900 ; J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore. History of mathematics, Vol. 8; Providence, RI, 1994
[Pasch 1882] Pasch, Moritz: Vorlesung über neuere Geometrie. Leipzig 1882
[Pavelle, Rothstein, Fitch 1982] Pavelle, R., Rothstein, M., Fitch, J.: Computer-Algebra, Spektrum der Wissenschaft, Februar 1982
[Peacock 1830] Peacock, George: A Treatise of Algebra. London 1830
[Peacock 1834] Peacock, George: Report on the Recent Progress and Present Stade of Certain Branches of Analysis. In: Reports of the Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science for 1833. London 1834, S. 185–352
[Peano 1889] Peano, Guiseppe: Arithmetices principia, nova methodo exposita. Turin 1889
[Peckhaus 1997] Peckhaus, Volker: Logik, Mathesis universalis und allgemeine Wissenschaft. Leibniz und die Wiederentdeckung der formalen Logik im 19. Jahrhundert. Berlin 1997
[Peiffer/Dahan-Dalmedico 1994] Peiffer, J., Dahan-Dalmedico, A.: Wege und Irrwege – Eine Geschichte der Mathematik. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag 1994
[Peirce 1881] Peirce, Benjamin: Linear Associative Algebra. Amer. J. of Math. 4(1881), S. 97–229
[Petersen 1887] Petersen, J.: Ueber n-dimensionale complexe Zahlen. Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen 1887, S. 489–502
[Petzold 1992] Petzold, H.,: Moderne Rechenkünstler, München 1992
[Pier 1994] Pier, Jean-Paul (Hrsg.): Development of Mathematics 1900–1950. Basel u. a.: Birkhäuser Verlag 1994
[Pier 2000] Pier, Jean-Paul(Hrsg.): Development of Mathematics 1950–2000. Basel u. a.: Birkhäuser Verlag 2000

[Pinl 1969–1976] Pinl, M.: Kollegen in einer dunklen Zeit. Teil I, Jber. DMV 71(1969), S. 167–228; Teil II, ebenda 72(1971), S. 165–189; Teil III, ebenda, 73(1972), S. 153–208; Teil IV (mit A. Dick), ebenda, 75(1974), S. 166–208; Nachtrag und Berichtigung, ebenda, 77(1976), S. 161–164

[Poincaré 1884] Poincaré, Henri: Sur les nombres complexes. C. R. Acad. Sci. Paris 99(1884), S. 740–742

[Purkert 1971, 1973] Purkert, Walter: Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffs. 1. Teil. NTM- Schriftenr., Gesch. Naturwiss., Technik Med., 8(1971) H. 1, S. 23–37; 2. Teil, 10(1973), H. 2, S. 8–20.

[Purkert 1972] Purkert, Walter: Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffs. Diss. A. Leipzig, 1972.

[Purkert 1976] Purkert, Walter: Ein Manuskript Dedekinds über Galois-Theorie. NTM- Schriftenr., Gesch. Naturwiss., Technik Med., 13(1976) H. 2, S. 1–16

[Purkert/Ilgauds 1987] Purkert, Walter; Ilgauds, Hans Joachim: Georg Cantor: 1845–1918. Völlig überarb. u. erw. Fassung. (Vita mathematica, Bd. 1). Basel u. a.: Birkhäuser Verlag 1987

[Pycior 1981] Pycior, Helena: George Peacock and the British origins of symbolical algebra. Hist. Math. 8(1981) S. 23–45

[Pycior 1982] Pycior, Helena: Early criticism of the symbolical approach to algebra. Hist. Math. 9 (1982) S. 392–412

[Rashed 1994] Rashed, R.: The development of Arabic mathematics: Between arithmetic and algebra. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publ. 1994

[Reich/Gericke 1973] Reich, Karin; Gericke, Helmuth: Einführung in die Neue Algebra. München 1973

[Reid 1970] Reid, Constanze: Hilbert. Berlin u. a. 1970

[Reidemeister 1932] Reidemeister, Kurt: Knotentheorie. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Bd. 1,1. Berlin 1932

[Rider 1982] Rider, R. E.: A Bibliography of Early Modern Algebra. 1500–1800. University of California, Berkeley 1982

[Rigatelli 1996] Rigatelli, Toti L.: Evariste Galois (1811–1832). Vita Mathematica Bd. 11. Basel et al. 1996.

[Ries, Abraham 1999] Ries, Abraham: Die Coß von Abraham Ries. Ed. H. Wußing. Institut für Geschichte der Naturwissenschaften. München 1999

[Ries, Adam 1574] Ries, Adam: Rechenbuch Linien und Ziphren 60. Auflage, Frankfurt, 1574

[Ries, Adam 1611] Ries, Adam: Rechenung nach der lenge auf den Linien vnd Feder. Darzu Fortheil vnd behendigkeit durch die Proportiones, Practica genant / Mit gründlichem vnterricht des visierens. Durch Adam Riesen. Wittenberg 1611

[Ries, Adam 1992] Ries, Adam: Ries, Coß. Herausgegeben und kommentiert von Wolfgang Kaunzner und Hans Wußing. Stuttgart/Leipzig 1992

[Ries, Jacob 1562] Ries, Jacob: Coß. Landesbibliothek Dresden C 496. Auf Pergament geschrieben 1562

[Risch 1969] Risch R. H.: The problem of integration in finite terms. Transactions Amer. Math. Soc. 139 (1969), S. 167–189

[Risch 1970] Risch R. H.: The solution of the problem of integration in finite terms, Bulletin of the Amer. Math. Soc. 76 (1970), S. 605–608

[Ritt 1948] Ritt, J. F.: Integration in finite terms, New York 1948, Columbia University Press

[Roth 1608] Roth, Peter: Arithmetica philosophica. 1608
[Rudolff 1525] Rudolff, Chr.: Behend vnd Hubsch Rechnung durch die Kunstreichen regeln Algebre, so gemeinicklich die Coss genennt werden ... Zusammen bracht durch Christoffen Rudolff vom Jawer. Straßburg 1525
[Russel 1903] Russell, Bertrand Arthur William: The Principles of Mathematics. London 1903
[Scharlau 1981] Scharlau, Winfried (Hrsg.): Richard Dedekind 1831–1981. Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag. Braunschweig/Wiesbaden. 1981
[Scharlau 1982] Scharlau, Winfried: Unveröffentliche algebraische Arbeiten Richard Dedekinds aus seiner Göttinger Zeit 1855–1858. Archive for History of Exact Sciences 27 (1982), S. 335–355.
[Scheffers 1889] Scheffers, Georg: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen. Ber. Königl. Sächs. Gesell. Wiss. Leipzig 41(1889), S. 290–307
[Scheffers 1891] Scheffers, Georg: Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen. Math. Annalen 39(1891), S. 293–390
[Schlote 1988] Schlote, Karl-Heinz: Die Entwicklung der Algebrentheorie bis zu ihrer Formierung als abstrakte algebraische Theorie. Dissertation B, Uinversität Leipzig 1988
[Schlote 1988] Schlote, Karl-Heinz: Zum Einfluß Condillacs auf die Entwicklung der Mathematik. Wiss. Zeitschrift, WPU Rostock, Gesellschaftswiss. Reihe 37(1988), H. 9, S. 50–55
[Schneider 1993] Schneider, Ivo: Johannes Faulhaber (1580–1635) – Rechenmeister aus einer Welt des Umbruchs. Basel 1993
[Schneider 1999] Schneider, Ivo: Peter Roth (V April 1617). In: Rechenbücher und mathematische Texte der frühen Neuzeit. Annaberg-Buchholz 1999, S. 303–312
[Scholz 1984] Scholz, Erhard: Hermann Graßmanns Analysis in Vektorräumen. Mathematische Semesterberichte 31 (1984), S. 177–194
[Scholz 1988] Scholz, Erhard: Symmetrie - Gruppe - Dualität. Zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts. Basel, Boston etc. 1989
[Scholz 1990] Scholz, E.: Geschichte der Algebra. Bibliographisches Institut Brockhaus AG, Mannheim 1990.
[Schreier 1928] Schreier, Otto: Über den Jordan-Hölderschen Satz. Abh. Math. Seminar Hamburg 6(1928), S. 300–302
[Schröder 1873] Schröder, Ernst: Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Bd. 1. Die sieben algebraischen Operationen. Leipzig 1873
[Schröder 1895] Schröder, Ernst: Vorlesungen über die Algebra der Logik. 3 Bde. 18-1895
[Scriba/Schreiber 2000] Scriba, Chr. J.; Schreiber, P.: 5000 Jahre Geometrie. Hrsg. von: Alten, Djafari Naini, Wesemüller-Kock. Berlin, Heidelberg, New York 2000, Nachdrucke 2002 und 2003, Neuauflage 2005
[Serret 1849] Serret, J.-A.: Cours d'Algèbre supérieure. Paris 1849, 2. Aufl. 1854, 3. Aufl. 1866
[Sesiano 1977] Sesiano, Jacques: „Le traitement des équations indéterminées dans le Badiʿfiʾl ḥisāb dʾAbū Bakr al-Karaǧī. Archive for History of Exact Sciences 17, S. 297–379
[Sesiano 1982] Sesiano, Jacques: Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica. In the Arabic Translation Attributed to Qusta ibn Luqa. Heidelberg 1982

[Sesiano 1993] Sesiano, Jacques: La version latine médiévale de l'Algèbre d'Abū Kāmil. In: Vestigia Matematica, ed. M. Folkerts/ J. P. Hogendijk. Amsterdam/Atlanta 1993, S. 315–452

[Sezgin 1974] Sezgin, F.: Geschichte des Arabischen Schrifttums. Bd. 5. E.J. Brill, Leiden. 1974

[Shaw 1907] Shaw, J. B.: Synopsis of Linear Associative Algebras. Washington 1907

[Siegmund-Schultze 1998] Siegmund-Schultze, Reinhard: Mathematiker auf der Flucht vor Hitler: Quellen und Studien zur Emigration einer Wissenschaft. (Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Bd. 10). Braunschweig u. a.: Vieweg 1998

[Steinitz 1930] Steinitz, Ernst: Algebraische Theorie der Körper. Neu herausgegeben, mit Erläuterungen und einem Anhang: Abriß der galoisschen Theorie versehen von Reinhold Baer und Helmut Hasse. Berlin, Leipzig 1930

[Stevin 1955–1968] Stevin, S.: The Principal Works of Simon Stevin. Amsterdam 1955–1968

[Stevin 1965] Stevin, S.: De Thiende. Übersetzt und erläutert von H. Gericke und K. Vogel. Frankfurt/M. 1965

[Stifel 1544] Stifel, M.: Arithmetrica integra. Nürnberg 1544

[Stifel 1553] Stifel, M.: Die Coß Christoffs Rudolphs mit schönen Exempeln der Coß gebessert und sehr gemehrt. Zu Königsperg in Preussen, 1553 (erschienen 1554)

[Stillwell 1989] Stillwell, John: Mathematics and Its History. Berlin/Heidelberg 1989

[Stolz 1886] Stolz, Otto: Vorlesung über allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten bearbeitet von Dr. Otto Stolz. Zweiter Theil: Arithmetik der complexen Zahlen mit geometrischen Anwendungen. Leipzig 1886

[Strobl 1982] Strobl, Walter: Über die Beziehungen zwischen der Dedekindschen Zahlentheorie und der Theorie der algebraischen Funktionen von Dedekind und Weber. Abh. Braunschweiger Wiss. Gesell. XXXIII(1982). Festschrift der Braunschweiger Wissenschaftlichen Gesellschaft und der Technischen Universität Carola Wilhelmina zu Braunschweig zur 150. Wiederkehr des Geburtstages von R. Dedekind. S. 225–246

[Struik 1969] Struik, Dirk J.: A Source Book in Mathematics, 1200–1800. Harvard University Press, Cambridge/Mass. 1969

[Struik 1976] Struik, Dirk J.: Abriß der Geschichte der Mathematik, Sechste erweiterte Auflage (Deutsche Übersetzung nach der zweiten Auflage: H.Karl, Potsdam) VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1976

[Stubhaug 2000] Stubhaug, Arild: Niels Henrik Abel and His Time: Called too soon by Flames afar. Berlin u. a. 2000

[Stubhaug 2002] Stubhaug, Arild: The mathematician Sophus Lie. It was the audacity of my thinking. Berlin u. a. 2002

[Study 1889] Study, Eduard: Complexe Zahlen und Transformationsgruppen. Ber. Königl. Sächs. Gesell. Wiss. Leipzig 41(1889), S. 177–228

[Study 1898] Study, Eduard: Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen. In: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Leipzig 1898/1904, Bd. 1, Theil 1, S. 148–183 (abgeschlossen im November 1898)

[Suter 1910/1911] Suter, H.: Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abū Kāmil al-Miṣrī. Bibliotheca Mathematica 11, 1910/1911, S. 100–120

[Sylvester 1864] Sylvester, James Joseph: Algebraical researches, containing a disquisition on Newton's rule for the discovery of imaginary roots, and an allied rule applicable to a particular class of equations,... Phil. Trans. 154(1864), 579–666; In: The coll. math. papers of James Joseph Sylvester. 4 vls. Cambridge 1904–1912. Vol. 2, S. 376–479

[Szabo 1969] Szabo, Arpad: Anfänge der griechischen Mathematik. Wien: R. Oldenbourg 1969

[Tarwater 1977] Tarwater, Dalton (Hrsg.): The Bicentennial Tribute to American Mathematics 1776–1976. Providence (RI) 1977

[Teicher 1999] Teicher, Mina (Hrsg.): The Heritage of Emmy Noether. Ramat-Gan, 1999. (Israel Mathematical Conference Proceedings, Vol. 12)

[Thaer] Thaer, Cl. siehe Euklid

[Thureau-Dangin 1938] Thureau-Dangin, F.: Textes Mathématiques Babyloniens, Leiden 1938

[Toepell 1986] Toepell, Michael: Über die Entstehung von David Hilberts „Grundlagen der Geometrie". Göttingen 1986.

[Tropfke 1940] Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik, Band 3: Algebra. 3. Auflage. Berlin: W. de Gruyter 1940

[Tropfke 1980] Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik, Bd. 1 Arithmetik und Algebra, Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich und Helmuth Gericke. Walter de Gruyter, Berlin, 1980

[aṭ-Ṭūsī] aṭ-Ṭūsī, Naṣr ad-dīn: Gāwamiʿal-ḥisāb, Teheraner Universitätsbibliothek (Mikrofilm)

[Ullrich 1998a] Ullrich, Peter: The Genesis of Hensel's p-adic Numbers. In: Paul L. Butzer, Hubertus Th. Jongen und Walter Oberschelp (Hrsg.): Charlemagne and his Heritage: 1200 Years of Civilization and Science in Europe, Vol. 2: Mathematical Arts. Brepols Publishers: Turnhout 1998, S. 163–178

[Ullrich 1998b] Ullrich, Peter: Der Henselsche Beweisversuch für die Transzendenz von e. In: Michael Toepell (Hrsg.): Mathematik im Wandel. Band 1. Hildesheim u. a. 1998, S. 320–329

[Ullrich 1999] Ullrich, Peter: Die Entdeckung der Analogie zwischen Zahl- und Funktionskörpern: der Ursprung der „Dedekind-Ringe". Jahresber. d. Dt. Math. Verein. 101 (1999), S. 116–134

[Vandermonde 1771] Vandermonde, Alexandre Théophile: Mémoire sur la résolution des équations. Hist. Acad. Sc. Paris, année 1771. Paris 1774, S. 365–416

[Vieta 1646] Vieta, F.: Francisci Vietae Opera Mathematica. Ed. Frans van Schooten. Leiden 1646

[Vieta 1973] Vieta, F.: Einführung in die Neue Algebra. Übersetzt und erläutert von Karin Reich und Helmuth Gericke. München 1973

[Vieta 1983] Vieta, F.: The Analytic Art. Nine Studies in Algebra, Geometry and Trigonometry from the Opus Restitutae Mathematical Analyseos, seu Algebrâ Novâ. Translated by T. Richard Witmer. Kent (Ohio) 1983

[Vogel 1958] Vogel, K.: Vorgriechische Mathematik Teil I, Vorgeschichte und Ägypten (=Mathemat. Studienhefte, Heft 1). Hannover: Schroedel Verlag; Paderborn: Verlag Schöningh 1958

[Vogel 1959] Vogel, K.: Vorgriechische Mathematik Teil II. Die Mathematik der Babylonier. Hannover: Schroedel Verlag; Paderborn: Verlag Schöningh 1959

[Vogel 1968] Vogel,K.: Chiu Chang Suan Shu. Neun Bücher Aritmetischer Technik. (Osterwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, N.F. 4) Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1968

[Vogel 1973] Vogel, Kurt: Der Donauraum, die Wiege mathematischer Studien in Deutschland. München 1973, (wieder abgedruckt in: Kleinere Schriften zur Mathematik. Stuttgart 1988, S. 597–659)

[Vogel 1980] Vogel, Kurt: Das Bamberger Blockbuch. Herausgegeben und erläutert von Kurt Vogel: München u. a. 1980

[Vogel 1981] Vogel, Kurt: Die erste deutsche Algebra aus dem Jahre 1481. Nach einer Handschrift aus C 80 Dresdensis, herausgegeben und erläutert von Kurt Vogel. Bayer. Akad. der Wiss., Math.- naturwiss. Klasse, Abhandln., Neue Folge, Heft 160, München 1981

[Vogel] Vogel, Kurt: Fibonacci Leonardo or Leonardo of Pisa. In: Dictionary of Scientific Biography, Vol. IV, S. 604–613

[Waerden 1930, 1931] Waerden, Bartel Leendert van der: Moderne Algebra. Bd. 1, Berlin 1930, Bd. 2, Berlin 1931

[Waerden 1935] Waerden, Bartel Leendert van der: Nachruf auf Emmy Noether. Math. Annalen 111(1935), S. 469–476

[Waerden 1966 a] Waerden, Bertel Leendert van der: Die Algebra seit Galois. Jahresber. DMV 68(1966), S. 155–165

[Waerden 1966 b] Waerden, B.L. van der: Erwachende Wissenschaft, Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik. (aus dem Holländischen übersetzt von Helga Habicht). Zweite, ergänzte Auflage, Birkhäuser Verlag, Basel 1966

[Waerden 1983] Waerden, B. L. van der: Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. Berlin, Heidelberg: Springer 1983

[Waerden 1985] Waerden, Bartel Leendert van der: A History of Algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin et al. 1985

[Wagner 1988] Wagner, D. B.: Das Bamberger Rechenbuch von 1483. Mit einem Nachwort von Eberhard Schröder. Berlin 1988

[Wappler 1887] Wappler, F.: Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert. Programm des Gymnasiums Zwickau. Zwickau 1887

[Weber 1882] Weber, Heinrich: Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist. Math. Annalen 20(1882), S. 489–503

[Weber 1893] Weber, Heinrich: Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie. Math. Annalen 43(1893), S. 521–549

[Weber 1895/96] Weber, Heinrich: Lehrbuch der Algebra. 2 Bde.: Braunschweig 1895/96

[Wedderburn 1908] Wedderburn, Joseph Henry Maclagan: On Hypercomplex Numbers. Proc. London Math. Soc. (2) 6(1908), S. 77–118

[Weierstaß 1884] Weierstaß, Karl: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen. Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen 1884, S. 395–419

[Weil 1950] Weil, André: Number Theory and Algebraic Geometry. Proceed. Internat. Congr. Math. Cambridge (Mass.) 1950. Vol. II, S. 90–100

[Weil 1992] Weil, André: Zahlentheorie. Ein Gang durch die Geschichte. Von Hammurapi bis Legendre. Aus dem Engl. v. Herbert Pieper. Basel u. a.: Birkhäuser 1992

[Weinberg 1935] Weinberg, Josef: Die Algebra des Abu Kamil Soga ben Aslam München: Druck des Salesianischen Offizin, 1935. Translation of the first part of the Algebra, based on the Hebrew and Latin versions.

[Wesemüller-Kock, Gottwald 1998] Wesemüller-Kock, H.; Gottwald, A.: Vom Zählstein zum Computer - Altertum (Film). Verlag Franzbecker 1998
[Wesemüller-Kock, Gottwald 2004] Wesemüller-Kock, H.; Gottwald, A.: Vom Zählstein zum Computer - Mittelalter (Film). Universität Hildesheim 2004
[Wester 1999] Wester, H. J.: Computer Algebra Systems: a practical guide, Chichester 1999, John Wiley & Sons Ltd.
[Weyl 1918] Weyl, Hermann: Raum, Zeit, Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. Berlin 1918
[Weyl 1935] Weyl, Hermann: Emmy Noether. Scripta Mathematica, Ser. III, 3(1935), S. 201–220
[Weyl 1944] Weyl, Hermann: David Hilbert and His Work. Bull. Americ. Math. Soc. 50(1944), S. 612–654; (auch enthalten in [Reid 1970]
[Widmann 1489] Widmann, Johannes: Behennde vnnd hübsche Rechnung auff allen Kauffmannschafften. Leipzig 1489
[Woepcke 1853] Woepcke, F.: Extrait du Fakhrī: Traité d'algébre par Abou Bekr Mohammed Ben Alhacan Al Karkhi. Paris: Duprat 1853. Nachdruck Hildesheim: Olms 1982
[Woodhouse 1803] Woodhouse, Robert: The Principles of Analytical Calculation. Cambridge 1803
[Wußing 1969] Wussing, Hans: Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes. Berlin 1969 (Amerikan. Ausgabe 1984)
[Wußing 1979] Wußing, H. u. a.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979, 2. Aufl. Berlin 1989
[Wußing 1989] Wußing, Hans: Carl Friedrich Gauß. (Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Bd. 15) 4. Aufl. Leipzig 1989
[Wußing/Arnold 1989] Wußing, Hans; Arnold, W.: Biographien bedeutender Mathematiker. Ed. H. Wußing/ W. Arnold. 4. erg. u. bearb. Aufl. Berlin 1989
[Wußing 1992] Wußing, Hans: Adam Ries und seine Rechenbücher. In: Adam Rieß vom Staffelstein. Rechenmeister und Cossist. Staffelsteiner Schriften. Band 1. Staffelstein 1992. S. 143–156
[Wußing 1992] Wußing, Hans: Adam Ries. 2. Aufl. Stuttgart/Leipzig 1992
[Wußing 1993] Wußing, Hans: Über den Codex C 411 von Abraham Ries zur Coß. In: NTM, N. S., Vol. 1, Nr. 2 (1993), S. 83–99
[Wußing 1997] Wußing, Hans, u. a.: Vom Zählstein zum Computer. Mathematik in der Geschichte. Bd. 1: Überblick und Biographien. Hrsg. von: Alten, Djafari Naini, Wesemüller-Kock. Verlag Franzbecker Hildesheim 1997
[Wußing 1998] Wußing, Hans: Ein neues Weltbild setzt sich durch. Naturwissenschaft und Technik. In: Die Weltgeschichte. Band 4. Leipzig/Mannheim. 1998, S. 52–69
[Wußing 1999] Wußing, Hans (Hrsg.): Die Coß von Abraham Ries. Inst. für Gesch. d. Naturwiss. München 1999
[Wußing/Dietrich/Purkert/Tutzke 1992] Wußing, H.(Hrsg.); Dietrich; Purkert; Tutzke: fachlexikon forscher und erfinder. Thun, Frankfurt am Main 1992
[Wußing 2002] Wußing, Hans: Die Große Erneuerung. Basel 2002
[Yaglom 1988] Yaglom, Isaak Moiseevich: Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century. Boston, Basel 1988
[Zassenhaus 1969] Zassenhaus, H.: On Hensel Factorization I. Journal of Number Theory 1 (1969), S. 291–311
[Zolotarev 1880] Zolotarev, Egor Ivanovič: Sur la théorie des nombres complexes. J. math. pures et appl. (3) 6(1880), S. 51–84, S. 129–166.

Personenregister mit Lebensdaten

Bei den Lebensdaten bedeutet „ca.“ grob geschätzt, „um 370“ 370 +(-) kleiner Fehler, „370?“ wahrscheinlich 370, aber es ist nicht ganz sicher.

Abbati, Pietro, Conte Marescotti (1768–1842) 325
Abū Bakr (632–634) 149, 211
Abū Kāmil, Suǧā ibn Aslam al Miṣrī (ca. 850–930) 158, 165, 166, 169, 168–172, 174, 196, 205, 210, 251
Abū l-Ǧūd (um 1000) 251
Abū l-Wafā', Muḥammad (940–998) 185, 251
Abel, Niels Henrik (1802–1829) 316, 328–330, 350–355, 357, 358, 396, 434–438, 444, 490, 500
Abraham ibn Ezra (um 1090–1167) 205
Ahmes (ägypt. Schreiber) 11
al-ᶜĀmilī, Bahāᵓad-Dīn (1547–1622) 169, 191
al-Ḫayyām, ᶜUmar (1048?–1131?) 79, 160, 168, 175–183, 185, 187, 189–192, 209, 251
al-Ḫwārizmī, Muḥammad ibn Mūsā (780?–850?) 42, 121, 158, 162, 165–169, 171, 195, 203, 204, 208, 211, 215, 227, 230, 235, 239, 240, 251, 253, 256, 258
al-Bīrūnī, Abū al-Raiḥān Muḥammad (973–1048) 185
al-Fazārī, Muḥammad (?–777) 156
al-Kāšī, Ǧamsīd ibn Masᶜūd (um 1380–1429) 125, 190, 191
al-Karaǧī, Muḥammad (gest. um 1029) 158, 168, 171, 173–175, 188, 196, 209–211, 251
al-Qalaṣādī (?–1486) 121, 156, 163
Albert, Adrian Abraham (1905–1972) 564
Aleksandroff, Pavel Sergeevič (1896–1982) 588, 589
Alexander, Andreas (auch Allexander) 231, 237
Amann, Fridericus (gest. 1464/65) 230
Anaxagoras (ca. 500–um 425 v. Chr.) 46
Anaximander (um 610–546 v. Chr.) 51
Anaximenes (um 585–um 525 v. Chr.) 46
Annibale della Nave 253
Antiphon (um 480–411 v. Chr.) 90
Apollonios von Perge (ca. 260–190 v. Chr.) 6, 46, 57, 61, 156, 201, 542
Aquinas 231
Arbogast (1786–1853) 314
Archimedes von Syracus (287?–212 v. Chr.) 6, 46, 54, 56, 57, 60, 61, 74–81, 83–85, 95, 102, 156, 201, 255
Archytas von Tarent (428?–365 v. Chr.) 54, 87–89, 102
Argand, Jean Robert (1768–1822) 307, 308
Aristarch von Samos (ca. 310–ca. 230 v. Chr.) 46
Aristoteles (384–322 v. Chr.) 46, 52, 54, 55, 87, 200, 201
Aronhold, Siegfried Heinrich (1819–1884) 451
Artin, Emil (1898–1962) 563, 564, 566, 568, 570, 612
Āryabhaṭa I (geb. 476) 120, 133, 135, 139–142, 144, 633
as-Samawᵓal (?–1240) 174, 175, 196
aṭ-Ṭūsī, Šaraf ad-Dīn (um 1135–1213) 180, 189
aṭ-Ṭūsī, Naṣīr ad-Dīn (1201–1274) 115, 160, 185–188, 196

Bézout, Étienne (1730–1783) 317, 319–321, 336, 337, 542, 584
Bôcher, Maxime (1867–1918) 409
Babbage, Charles (1792–1871) 368, 369, 597
Bacon, Roger (1214–1294) 200
Banach, Stefan (1892–1945) 557, 558, 592

Barrow, Isaac 243, 281
Bartolo, Giovanni di 218
Bellavitis, Giusto (1803–1880) 412
Benedetto von Florenz 215, 216
Bennett, Albert Arnold (1888–1971) 575
Berlekamp, Elwyn R. (geb. 1940) 602
Berlet, Bruno (1825–1892) 227, 233
Bernays, Paul Isaac (1888–1977) 556
Bernoulli, Daniel (1700–1782) 287
Bernoulli, Johann I (1667–1748) 285–287, 336, 604
Bernoulli, Nikolaus 287
Betti, Enrico (1823–1892) 435, 439, 440, 442
Bhāskara II (1114–1185?) 134, 137, 143, 144
Biagio (?– um 1340) 216, 218
Bingen, Hildegard von 200
Birkhoff, Garrett (1911–1996) 568, 571, 572, 576, 580, 582, 587, 590, 591, 612
Boetius (Boethius), Anitius Manilius Torquatus Severinus (480?–524) 237
Boglione siehe Bond
Bohetius Campanus siehe Boetius
Bolza, Oskar (1857–1942) 540
Bolzano, Bernard (1781–1848) 288, 305, 306, 412
Bombelli, Rafaelo (1526–1572) 180, 215, 224, 260, 263–266, 273, 290, 293, 294
Boncompagni, Baldassarre (1821–1894) 215
Bond, Jean 264
Boole, George (1815–1864) 314, 375–377, 382, 390, 405, 447, 448, 468, 479, 480, 483, 485
Borchardt, Carl Wilhelm (1817–1880) 403
Bourbaki, Nicolas 574
Bradwardine, Thomas (1290?–1349) 200
Brahmagupta (598–nach 665) 133, 134, 137, 139, 140, 142–144, 161, 167, 168
Brandt, Heinrich Karl Theodor (1886–1954) 572
Brauer, Richard Dagobert (1901–1977) 556, 564, 587
Brill, Alexander Wilhelm von (1842–1935) 542
Brioschi, Francesco (1824–1897) 445, 451
Bronstein, Manuel 605
Brunelleschi, Filippo (1377–1446) 217, 218
Buchberger, Bruno (geb. 1942)
Buée, Adrien Quentin (1748–1826) 307, 412
Bürgi, Jost (1552–1632) 240
Bunsen, Robert Wilhelm (1811–1899) 481
Burnside, William (1852–1927) 460, 502, 523, 539, 540

Canacci, Raffaello 215
Cantor, Georg (1845–1918) 473, 478, 479, 481, 546, 602
Cantor, Moritz Benedikt (1829–1920) 467
Cardano, Girolamo (1501–1576) 60, 169, 180, 215, 218–220, 224, 225, 233, 235, 239, 253, 255–266, 273, 280, 283, 290, 292–294
Carnot, Lazare Nicolas Marguerite (1753–1823) 303
Cartan, Élie Joseph (1869–1951) 532–536, 539, 587
Cartan, Henri Paul (geb. 1904) 578, 584, 585
Castelnuovo, Guido (1865–1952) 543, 582
Cauchy, Augustin-Louis (1789–1857) 301, 308, 310, 314, 328, 330, 338, 339, 345, 346, 354, 355, 358, 362–366, 375, 381, 390, 399–404, 406, 408, 412, 419, 423, 434, 438, 440, 442, 466
Cayley, Arthur (1821–1895) 365, 386–388, 390, 391, 402, 404, 406–408, 423, 445, 447–452, 454, 455, 465, 472, 473, 489, 490, 495, 500, 538, 544, 546
Čebyšev, Pafnuti Lvovič (1821–1894) 512, 513
Chasles, Michel (1793–1880) 449

Chern, Shiing-shen (geb. 1911) 585
Chevalier, Auguste (1806–1868) 356, 359, 361
Chevalley, Claude (1906–1984) 563, 577, 585
Chuquet, Nicolas (1445?–1488?) 220, 221, 229, 245
Clairaut, Alexis-Claude (1713–1765) 311, 313
Clavius, Christoph (1537–1612) 225, 241
Clebsch, Alfred (1833–1872) 406, 445, 451, 452, 454, 543, 544
Clifford, William Kingdon (1845–1879) 587
Coleridge, Samuel Taylor (1715–1780) 378
Condillac, Étienne Bonnot de (1715–1780) 311–313, 368, 376
Condorcet, Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, Marquis de (1743–1794) 376
Copernicus, Nicolaus (1473–1543) 258
Cossali, Pietro (1768–1815) 215
Coulomb, Jean 577
Courant, Richard (1888–1972) 556
Cramer, Gabriel (1704–1752) 336, 541
Crelle, August Leopold (1780–1855) 336, 354, 396, 399, 432
Cremona, Luigi (1830–1903) 418, 455, 543
Curtze, Maximilian 227
Czwalina, Arthur 97

D' Alembert, Jean-Baptist le Rond (1717–1783) 286, 313
Darboux, Jean Gaston (1842–1917) 461
Dardi von Pisa (14. Jh.) 216
de Morgan, Augustus (1806–1871) 371–373, 375, 377, 381, 382, 468
Dedekind, Richard (1831–1916) 395, 400, 466, 478, 479, 481, 482, 487, 488, 494, 502–508, 510, 513, 514, 517, 520, 527, 528, 530, 533, 538, 539, 544, 545, 565, 572–576, 583
Deinostratos (4. Jh. v. Chr.) 91, 92, 102
Delaunay, Charles Eugène (1814–1872) del Ferro, Scipione (1465?-1525) 180, 215, 218, 220, 224, 230, 245, 253, 255, 256, 273, 290, 292, 293, 318
dell'Abbaco, Paolo 216
Delsarte, Jean Frédéric Auguste (1903–1968) 578
Descartes, René (1596–1650) 125, 184, 241, 244, 258, 266, 274–284, 293, 295, 302, 400, 402, 410, 542
Deuring, Max Friedrich (1907–1984) 564, 565, 569
Dickson, Leonard Eugene (1874–1954) 503, 524, 535–537, 540, 564, 568
Dieudonné, Jean-Alexandre (1906–1992) 555, 578
Diokles (1./2. Jh. n. Chr.) 91
Dionysios (um 250 n. Chr.) 57, 97
Diophant(os) (vermutlich um 250) 6, 18, 30, 36, 42, 46, 57–59, 61, 94–99, 101, 102, 142, 156, 167, 168, 173, 210, 224, 264, 266, 273
Dirac, Paul Adrien Maurice (1902–1984) 587
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune (1805–1859) 396–399, 403, 412, 466, 493, 494, 503, 505
Dove, Heinrich Wilhelm (1803–1879) 396, 577
Dubreil, Paul (1904–1994) 578
Dyck, Walter von (1856–1934) 494–496, 502

Edwards, Herold M. 508
Ehresmann, Charles (1905–1979) 578
Eilenberg, Samuel (1913–1998) 578, 581, 589
Eisenstein, Ferdinand Gotthold Max (1823–1852) 381, 382, 395–397, 404–407, 451
Elliott, Edwin Balley (1851–1937) 449
Empedokles von Akragas (ca. 500–430 v. Chr.) 46
Engel, Friedrich (1861–1941) 461, 531, 533
Enriques, Frederigo (1871–1946) 543
Eratosthenes von Kyrene (276?–194? v. Chr.) 6, 57
Eudemos von Rhodos (4. Jh. v. Chr.) 87, 88

Eudoxos von Knidos (ca. 408–347 v. Chr.) 54, 61, 62, 87, 242
Euklid (360?–290? v. Chr.) 6, 46, 54–56, 59–63, 65, 67–70, 72, 73, 75, 94, 102, 150, 156, 157, 167–170, 174, 192, 201, 203, 205, 209, 210, 231, 240, 241, 251, 255, 258, 260, 303, 485, 486
Euler, Leonhard (1707–1783) 82, 166, 206, 241, 244, 250, 283, 286–290, 292, 293, 295, 302, 303, 311, 313, 317–321, 326, 332, 336, 337, 340, 344, 356, 375, 384, 396, 400, 401, 423, 490, 542
Euripides (um 480–407 v. Chr.) 46
Eutokios von Askalon (ca. 480–? n. Chr.) 76, 77, 86–88, 102

Fagnano, Giulio Carlo (1682–1766) 352
Faulhaber, Johannes (1580–1635) 276, 285
Fermat, Pierre de (1607/08–1665) 102, 246, 276, 284, 285, 404, 412, 429, 543
Ferrari, Ludovico (1522–1565) 60, 220, 224, 256, 258, 261, 265, 292, 293
Ferro, Scipione del (1465?–1526) 180, 215, 218, 220, 224, 230, 245, 253, 255, 256, 273, 281, 290, 292, 293, 318
Fiore, Antonio Maria 253, 255, 256
Fischer, Ernst (1875–1954) 558
Föppl, August (1854–1924) 421
Fontana siehe Tartaglia
Fourier, Jean-Baptiste Joseph de (1768–1830) 314, 409
Fraenkel, Abraham (1891–1965) 558
Français, Jacques Frédéric (1775–1833) 308
Francesca, Piero della (um 1420–1492) 218
Franci, Raffaela 208, 215, 216, 218–220
Frege, Gottlob (1848–1925) 483, 484, 487, 488
Frend, William (1757–1841) 303
Frenet, Jean Frédéric (1816–1900) 439
Fricke, Robert Karl Emanuel (1861–1930) 460, 568
Fridericus Gerhart siehe Amann
Frink, Orrin (1901–1988) 575
Frobenius, Georg Ferdinant (1849–1917) 407–409, 460, 472, 490, 491, 499, 500, 503, 533, 537–541
Fuchs, Lazarus (1833–1902) 409, 460

Galilei, Galileo (1564–1642) 250, 274, 275, 410
Galois, Evariste (1811–1832) 328, 354–361, 390, 434–438, 441, 443–445, 506, 602
Gauß, Carl Friedrich (1777 - 1855) 82, 280, 286, 308–310, 316, 317, 325–328, 331–334, 337, 338, 340, 342–345, 348, 351, 352, 354–356, 361, 384, 391–397, 404, 406–408, 411, 412, 424, 434, 435, 447, 490, 528, 538, 548, 602
Gerardi, Paolo 215, 218
Gergonne, Joseph-Diaz (1771–1859) 308, 345, 432
Gerhard von Cremona (1114?–1187) 162, 204
Gibbs, Josiah Willard (1839–1903) 421
Girard, Albert (1595–1632) 244, 280, 284–286
Gleason, Andrew Mattei (geb. 1921) 592
Gmunden, Johannes von (ca. 1380/84–1442) 227
Gödel, Kurt (1906–1978) 556
Goldbach, Christian (1690–1764) 383
Gordan, Paul (1837–1912) 452, 453, 458, 544, 558
Grammateus siehe Schreyber
Graßmann, Hermann Günther (1809–1877) 373, 4113, 413–415, 417–420, 465, 481
Graßmann, Justus Günther (1779–1852)
Graßmann, Robert (1815–1901) 483, 485
Graves, John Thomas (1806–1870) 381, 386–388
Gregory, Duncan Farquharson (1813–1844) 371, 373–376, 390, 490
Gregory, James (1638–1675)
Grell, Heinrich (1903–1974) 575
Gröbner, Wolfgang (1899–1980) 602

Grothendieck, Alexander (geb. 1928) 578, 585

Haar, Alfred (1885–1933) 592
Hall, Philip (1904–1982) 569
Hamburger, Meyer (1838–1903) 409
Hamilton, William Rowan (1805–1865) 310, 372, 373, 375, 377–382, 384–387, 407, 419, 421, 463, 470, 471
Hankel, Hermann (1839–1873) 310, 466, 467, 481, 482, 526
Harriot, Thomas (um 1560–1621) 125, 281, 284, 293
Hasse, Helmut (1898–1979) 512, 522, 563, 564, 568
Haupt, Otto (1887–1988) 566, 568
Hawkes, Herbert Edwin (1872–1943) 535
Hearn, Anthony 607
Heath, Thomas Little (1861–1940) 96
Heaviside, Oliver (1850–1925) 421
Hekataios von Milet (ca. 558–480 v. Chr.) 46
Helmholtz, Hermann von (1821–1894) 455, 457
Hensel, Kurt (1861–1941) 512, 513, 520–522, 558, 601
Hentzelt, Kurt (–1914?) 561
Heraklit (um 550–480 v. Chr.) 46
Herbrand, Jacques (1908–1931) 563
Herder, Johann Gottfried (1744–1803) 312
Hermes, Hans (geb. 1912) 576
Hermite, Charles (1822–1901) 406, 407, 438, 439, 441, 442, 445, 451, 460, 478, 604
Herodot (484–425) 8–10
Heron von Alexandria (wahrsch. um 100 n. Chr.) 6, 42, 95, 156, 210
Herschel, Johann Frederick William (1792–1871) 368, 369
Hesse, Ludwig Otto (1811–1874) 445, 451
Hessel, Johann Friedrich (1796–1872) 413
Hilbert, David (1862–1943) 453, 454, 457, 494, 518–520, 524, 528, 555, 559, 592, 603
Hill, George William (1838–1914) 409
Hindenburg, Carl Friedrich (1741–1808) 481
Hippasos von Metapont (um 450 v. Chr.) 51, 52
Hippias von Elis (um 420 v. Chr.) 91, 102
Hippokrates von Chios (um 450–um 400 v. Chr.) 46, 86, 87, 102
Hirzebruch, Friedrich (geb. 1927) 585
Hispalensis, Johannes (um 1150) 205
Hölder, Ludwig Otto (1859–1937) 445, 500–502, 528
Holmboe, Bernt Michael (1795–1850) 354
Hopf, Heinz (1894–1971) 588, 589
Horner, William George (1786–1837) 119, 125, 335
Hudde, Jan (1628–1704) 317, 318
Humboldt, Alexander von (1769–1859) 396, 397
Humboldt, Wilhelm von (1767–1835) 300, 303
Huntington, Edward Vermilye (1874–1952) 523, 535, 558, 575
Hurwitz, Adolf (1859–1919) 388, 508, 533, 592
Hypsikles (2. Jh. v. Chr.) 156
Høyrup, Jens 215

Iamblichos (ca. 250–ca. 330 n. Chr.) 51, 94
Ide, Johann Joseph Anton (1775–1806) 304
Isḥāq ibn Ḥunayn (830- 910) 156

Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804–1851) 350, 361, 394–397, 403, 435, 449, 451
Jacobson, Nathan (1910–1999) 563
Jevons, William Stanley (1835–1882) 480
Joachimsthal, Ferdinand (1818–1861) 397
Johannes de Muris (Jean de Murs) (um 1290/95 - nach 1345) 210, 212, 213, 237, 245
Johannes von Palermo 209
Jordan, Camille (1838–1922) 365, 409, 441–446, 455, 457, 458, 460, 461, 492, 500

Jordan, Ernst Pascual (1902–1980) 586
Jung, Franz (1872–1957) 421
Juschkewitsch, Adolf Pawlowitsch (1906–1993) 120, 164, 194, 210, 251

Kästner, Abraham Gotthelf (1719–1800) 303
Kahrimanian, H. G. 606
Kant, Immanuel (1724–1804) 298, 303
Kantorovič, Leonid Vital'evič (1912–1986) 590, 591
Karsten, Wenceslaus Johann Gustav (1732–1787) 304
Kaunzner, Wolgang 204, 227, 229–231, 235
Killing, Wilhelm (1847–1923) 531–533
Kirchhoff, Gustav Robert (1824–1887) 481
Kirkman, Thomas Penyngton (1806–1895) 388
Klein, Felix (1849–1925) 395, 454–461, 473, 495, 500, 531, 533, 534, 541, 576
Klein, Fritz (1892–1961) 575
Klügel, Georg Simon (1739–1812) 362
Kodaira, Kunihiko (1915–1997) 585
König, Gyula (Julius) (1849–1913) 509
Köthe, Gottfried (1905–1989) 564, 577
Kolmogorov, Andrej Nikolaevič (1837–1908) 591
Korkin, Alexandr Nikolaevič (1837–1908) 513
Kronecker, Leopold (1823–1891) 334, 335, 397, 398, 408, 409, 436–439, 445, 467, 473, 481, 490–493, 500, 504, 505, 508–511, 514–516, 520, 521, 538, 539, 544–546
Krull, Wolfgang (1899–1971) 562, 565, 566, 569, 575, 583
Kürschák, Josef Andreas (1864–1933) 521, 566
Kummer, Ernst Eduard (1810–1893) 397–400, 445, 490, 505, 508

Lacroix, Sylvestre François (1765–1843) 370
Lagrange, Joseph Louis (1736–1813) 289, 311, 313, 318–323, 326, 328, 330, 332, 337, 340, 342, 345, 354, 355, 362, 375, 384, 396, 401, 403, 434, 444, 447, 490
Laguerre, Edmond Nicolas (1834–1886) 407, 408
Lamé, Gabriel (1795–1870) 399
Landau, Edmund (1877–1938) 559
Landsberg, Georg (1865–1912) 521
Laplace, Pierre Simon (1749–1827) 289, 332, 337, 375, 402, 403
Lasker, Emanuel (1868–1941) 544, 545, 571
Lavoisier, Antoine Laurent de (1743–1794) 298, 313
Legendre, Adrien-Marie (1752–1833) 316, 340, 354, 384, 602
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716) 244, 274, 285, 286, 313, 317, 335, 410, 480
Leonardo von Pisa (Fibonacci) (1170–1240) 5, 30, 120, 121, 139, 162, 166, 169, 204–206, 208–212, 214, 215, 218, 245, 251, 264
Leray, Jean (1906–1998) 577, 584
Li Ye (1178–1265) 115, 124–126
Libri, Guglielmo (1803–1869) 215
Lie, Marius Sophus (1842–1899) 454–458, 460–464, 497, 499, 501, 528, 529, 533
Lindemann, Carl Louis Fedinand von (1852–1939) 90
Liouville, Joseph (1809–1882) 356, 361–363, 399, 400, 423, 438, 439, 442, 478, 597, 604
Lipschitz, Rudolf (1832–1903) 588
Liu Hui (3. Jh. n. Chr.) 113
Liu Zhuo (544–610) 114
Ljusternik, Lasar Aronovič (1899–1981) 581
Lloyd, Humphrey (1800–1881) 384
Lobačevskij, Nikolaj Ivanovič (1792–1856) 348, 434, 512
Locke, John (1632–1704) 311, 312, 368
Lodovico siehe Ferrari

Lovelace, Ada Augusta Countess of (19. Jh.) 597

Macaulay, Louis Floyd (geb. 1924) 545, 571
MacLane, Saunders (geb. 1909) 570, 572, 580–582, 589, 612
MacMahon, Percy Alexander (1854–1929) 449
Magnus, Albertus (um 1193–1280) 200
Mahāvīra (um 850) 137, 140, 141, 143
Malfatti, Gian Francessco (1731–1807) 323, 325
Mandelbrojt, Szolem (1899–1983) 577
Markov, Andrej Andreevič (1856–1922) 513
Maschke, Heinrich (1853–1908) 541
Mathieu, Émile Léonard (1835–1890) 473, 503
Maxwell, James Clerk (1831–1879) 421, 430
Mayer, Walther (1887–1948) 589
Mazzinghi, Antonio de 216, 218
Menaichmos (um 360 v. Chr.) 87, 91, 102, 177
Menelaos von Alexandria (um 100 n. Chr.) 156, 201
Menger, Karl (1902–1985) 575, 590
Mersenne, Marin (1588–1648) 274
Mertens, Franz (1840–1927) 493
Metzler, William Henry (1863–1943) 410
Meyer, Franz (1856–1934) 534
Mill, John Stuart (1806–1873) 375
Miller, George Abram (1863–1951) 503
Minkowski, Hermann (1864–1909) 394, 494, 518, 519
Möbius, August Ferdinand (1790–1868) 411–413, 418, 449
Moivre, Abraham de (1667–1754) 267, 321
Molien, Theodor (1861 – 1941) 460, 533–536, 538, 539, 565
Montgomery, Deane (1909–1992) 592, 612
Moore, Eliakim Hastings (1862–1932) 503, 524, 535, 536, 541
Müller, Karl Eugen (1865–1932) 480
Müller, Johannes (1436–1476) 227, 245
Murphy, Robert (1806–1843) 375
Muth, Peter (1860–1909) 410

Nemorarius, Jordanus (13. Jh.) 210–213, 229, 245
Neper, John (1550–1617) 240
Netto, Eugen (1846–1919) 491, 492
Neugebauer, Otto (1899–1990) 27, 35, 556
Neumann, Franz Ernst (1798–1895) 396, 508
Neumann, John von (1903–1957) 556, 586, 587, 590, 593, 594
Newcomb, Simon (1835–1909) 471
Newton, Isaac (1643–1727) 244, 250, 274, 281–283, 293, 302, 311, 313, 367, 410, 542
Nikomachos von Gerasa (um 130 n. Chr.) 201
Noether, Emmy (1882–1935) 452, 556, 558–565, 568–571, 574, 575, 583, 587, 589, 612
Noether, Max (1844–1921) 544, 583
Nolan, James Francis 606
Nunes, Pedro (lat. Nonius) (1502–1578) 224, 225

Ohm, Georg Simon (1789–1854) 304, 348
Ohm, Martin (1792–1872) 304, 305, 345, 381, 481
Ore, Øystein (1899–1968) 253, 571, 572, 612
Oresme, Nicolaus (um 1323–1382) 200
Oronce siehe Fine
Ostrogradskij, Mihail Vassilevič (1801–1862) 512, 604
Ostrovski, Alexander Markovič (1893–1986) 546, 566

Pṛthūdakasvāmī (9. Jh.) 143
Pacioli, Luca (um 1445–1517) 210, 218–220, 224, 241, 245, 264
Pappos von Alexandria (um 320 n. Chr.) 59, 61, 80, 201, 279

Parmenides von Elea (ca. 515–445 v. Chr.) 46
Pasch, Moritz (1843–1930) 457, 485–487
Peacock, George (1791–1859) 305, 308, 368–372, 374, 377, 379, 423, 471
Peano, Giuseppe (1858–1932) 482, 484, 485, 487, 488, 524
Peirce, Benjamin (1809–1880) 467–472, 480, 485, 527, 529
Peirce, Charles Sanders (1839–1880) 468, 471, 472, 480, 483, 487, 535–537
Perron, Oskar (1880–1975) 346, 426, 428, 474, 547, 568
Petersen, Julius Peter Christian (1839–1910) 528
Petreius (um 1560) 233
Peuerbach, Georg (1423–1461) 227
Pfaff, Johann Friedrich (1765–1825) 331, 411
Phidias (5. Jh. v. Chr.) 46, 56
Picard, Émile (1856–1941) 464
Pieri, Mario (1860–1913) 488
Pinl, Maximilian (1897–1978) 556
Plato von Tivoli (um 1150) 205
Platon (427 – 347 v. Chr.) 46, 52, 54, 200, 201
Plücker, Julius (1801–1868) 430, 449, 542, 543
Poincaré, Jules Henri (1854–1912) 441, 457, 460, 528, 588, 589
Poisson, Siméon Denis (1781–1840) 356, 358
Poncelet, Jean Victor (1788–1867) 449
Pontrjagin, Lev Semenovič (1908–1988) 592, 593
Possel, René de (1905–1974) 577
Proklos Diadochos (410–485) 59, 88
Ptolemaios 6, 42, 59, 128, 150, 156, 200, 201
Puiseux, Victor (1820–1883) 438, 445
Purkert, Walter 508
Pythagoras (ca. 580–ca. 500 v.Chr.) 30, 46, 51, 59, 86, 111, 237

Qin Jiushao (ca.1200–ca.1261) 115, 124, 125
Qusṭā ibn Lūqā 121

Radon, Johann Karl August (1887–1956) 562
Ramus, Petrus (Pierre de la Ramée, 1515–1572) 267
Recorde, Robert (1510?–1558) 222–224, 227, 247, 248, 268, 269, 274, 279
Regiomontanus, Johannes (eigtl. Müller, 1436–1476) 205, 211, 213, 227, 229, 230, 245
Remak, Robert Erich (1888–1942) 576
Riemann, Bernhard (1826–1866) 430, 457, 467, 513, 542, 543
Ries, Abraham (1533?–1604) 238, 239, 245, 248
Ries, Adam (1492–1559) 204, 212, 231, 233–239, 245–248, 250
Ries, Adam d. J. 239
Ries, Isaac 239
Ries, Jacob (gest. 1604) 234, 239
Ries, Paul 238
Riesz, Frédéric (1880–1956) 590
Rigatelli, Laura Toti 208, 215, 216, 218–220
Risch, R. H. 605
Ritt, Joesph Fels 604
Robert von Chester (um 1150) 162, 204
Rodrigues, Olinde (1794–1851) 457
Roth, Peter (1580?–1617) 283, 284
Rudolff, Christoff (1500?–1549?) 233, 237, 239, 241
Ruffini, Paolo (1765–1822) 119, 125, 316, 323–325, 328, 330, 345, 362–364
Russell, Bertrand (1872–1970) 484, 487–489

Saint Venant, Adhémar-Jean-Claude Barré de (1797–1886) 419
Salmon, George (1819–1904) 449
Samuel, Pierre (geb. 1921) 577
Savasorda (Abraham bar Hiyya) (1070?–1136) 205, 210, 211
Scheffers, Georg Wilhelm (1866–1945) 528–530, 533, 535
Schellbach, Karl Heinrich (1804–1892) 396

Schering, Ernst Christian Julius (1833–1897) 490, 493, 538
Scheubel, J. (oder Scheybl) (1494–1580) 221
Schmeidler, Werner (1890–1969) 559, 560
Schmidt, Friedrich Karl (1901–1977) 566, 583, 585
Schnirelmann, Lev Genrichoviè (1905–1938) 581
Schönemann, Theodor (1812–1868) 435
Schreier, Otto (1901–1929) 500, 566, 592, 612
Schreyber, Heinrich (Grammateus, ca. 1494–1525) 233, 239
Schröder, Ernst (1841–1902) 473, 480–483, 485, 546, 572–576
Schur, Friedrich (1856–1932) 533
Schur, Issai (1875–1941) 460, 540, 587
Schwarz, Hermann Amandus (1843–1921) 470, 527
Scipio Ferreus siehe Ferro
Scribelio siehe Schreyber
Seifert, Herbert (geb. 1907) 589, 612
Seki, Takakazu (Seki Kōwa) (1642?–1708) 124, 335
Serre, Jean-Pierre (geb. 1926) 577, 585
Serret, Joseph Alfred (1819–1885) 365, 423, 434, 435, 438–441, 455, 473, 492
Servois, François-Joseph (1767–1847) 308, 316, 345, 375
Severi, Francesco (1879–1961) 544, 583
Shaw, James Byrnie (1866–1948) 535
Sima Qian (145–73 v. Chr.) 107
Smith, Henry John Stephen (1826–1883) 404
Sohncke, Ludwig Adolph (1807–1853) 396
Sokrates (469–399 v.Chr.) 46, 52
Sophokles (um 496–406 v. Chr.) 46
Speiser, Andreas (1885–1970) 564, 568
Śridhara (9./10. Jh.) 137, 140
Śripati (11. Jh.) 195
Starkweather, George Pratt (1873–1901) 535
Steiner, Jakob (1796–1863) 449
Steinitz, Ernst (1871–1928) 518, 522–526, 549, 557, 558
Stevin, Simon (1548–1620) 220, 223, 224, 241, 244, 246, 266, 274, 284, 293, 410
Stickelberger, Ludwig (1850–1936) 490, 491, 546
Stifel (auch Stieffel), Michael (1487?-1567) 221, 233, 237, 239–243, 245, 264
Stolz, Otto (1842–1905) 454, 455, 528
Stone, Marshall Harvey (1903–1989) 591, 612
Study, Eduard (1862–1930) 528–530, 533–535, 538
Sturm, Jacques Charles François (1803–1855) 402
Sunzi (3./4. Jh. n. Chr.) 113
Sylow, Peter Ludwig Mejdell (1814–1897) 473, 499
Sylvester, James Joseph (1814–1897) 387, 404, 407, 448–452, 471, 472, 533

Taber, Henry (1860–1936) 408
Tait, Peter Guthrie (1831–1901) 421
Takagi, Teiji (1875–1960) 438
Tartaglia, Niccolò (1506?-1559) 60, 180, 215, 220, 224, 253, 255–258, 260, 265, 273, 293, 318
Thales (624 – 548 v. Chr.) 42, 46, 49–51, 102
Theaetet (gest. 369 v. Chr.) 54, 61
Theon von Alexandria (ca. 330–ca. 400) 271
Threlfall, William Richard (1888–1949) 589, 612
Thymaridas von Paros (ca. 250–ca. 330 n. Chr.) 94, 400
Tschirnhaus, Ehrenfried Walter von (1651–1708) 250, 317, 319
Turnbull, Herbert Westren (1885–1961) 449

Vandermonde, Alexandre Théophile (1735–1796) 318, 321–323, 337, 338, 345, 362

Varignon, Pierre (1654–1722) 410
Veblen, Oswald (1880–1960) 524, 536
Venn, John (1834–1923) 480
Vessiot, Ernest Paulin Joseph (1865–1952) 464
Viète, François (Vieta, Franciscus) (1540 – 1603) 34, 125, 204, 223, 258, 261, 266, 267, 270, 272–274, 279, 280, 282, 293–295, 302, 400
Viète, François (Vieta, Franciscus) (1540 – 1603) 191, 224, 266–269
Vietoris, Leopold Franz (1891–2002) 589
Vogel, Kurt (1888–1985) 14, 15, 17, 120, 223, 227, 229, 230
Voronoj, Georgij Feodosjevič (1868–1908) 513

Waerden, Bartel Leendert van der (1903–1996) 17, 30, 34, 333, 334, 426, 512, 517, 548, 549, 562, 563, 566–570, 576, 580, 582–584, 612
Wagner, Ulrich (gest. 1489/90) 229, 245
Wallis, John (1616–1703) 306
Wantzel, Pierre Laurent (1814–1848?) 83, 399
Wappler, H. E. 227
Waring, Edward (1734?–1798) 318, 321–323
Warren, John (1796–1852) 308, 380
Weber, Heinrich (1842–1913) 437, 493, 494, 497, 501, 502, 509, 514, 516–518, 522, 524, 534, 538, 544–546, 583
Wedderburn, Joseph Henry Maclagan (1882–1948) 532, 536, 537, 557, 563, 564, 612
Weierstraß, Karl Theordor Wilhelm (1815–1897) 397, 399, 403, 404, 408, 409, 467, 470, 473, 490, 508, 513, 521, 527–531, 533, 544
Weil, André (1906–1998) 512, 577, 584
Wessel, Caspar Geodät (1745–1818) 306, 307, 345, 410, 412
Weyl, Hermann (1885–1955) 512, 519, 532, 554, 557, 558, 569, 585, 587, 592
Weyr, Eduard (18521903) 528
Whewell, William (1794–1866) 372
Whitehead, Alfred North (1861–1947) 488, 489, 546, 569
Widmann, Johannes (ca. 1460 - nach 1500) 229–232, 240, 245
Wiener, Norbert (1894–1964) 557, 558, 586
Woodhouse, Robert (1773–1827) 367, 368
Wußing, Hans (geb. 1927) 227, 235, 238, 326

Yang Hui (13. Jh.) 127
Young, Alfred (1873–1940) 541

Zarathustra (um 600 v. Chr.) 51
Zariski, Oscar (1899–1986) 584, 585, 612
Zassenhaus (1912–1991) 602
Zenon (um 490–430 v. Chr.) 52
Zhu Shijie (Ende des 13.Jhs.5) 115, 125–127
Zolotarev, Egor Ivanovič(1847–1878) 512, 513, 546
Zuse, Konrad (1910–1995) 552, 593

Index

Abakus 113, 117, 118
Abbacus 206, 214–216, 218
Abgeschlossenheit 444, 462
absolut äquivalent 511
Abzählbarkeit 478
Addition 5
Adjungieren 358
Adjunktion 359, 360, 437, 500, 510, 515
– von Größen 358
Akademie 54
al-ğabr 158, 163, 166, 203, 239, 251
al-muqābala 163, 239
Algebra 205, 470
– absolute 480–482
– abstrakte 500, 526, 564, 570, 571, 577
– assoziative 537
– babylonische 94
– endliche kommutative 527
– formale 94, 482
– Fundamentalsatz der 244
– geometrische 60–62, 102
– kommutative 528
– lineare 469, 542
– lineare assoziative 535
– n-dimensionale 373
– nichtassoziative distributive 586
– rhetorische 95
– symbolische 266, 277, 370, 374, 376, 479
– synkopierte 95, 102
– universelle 576, 582
Algebra der Logik 376, 377, 479–481, 574
algebraisch auflösbar 351
Algebraisierung 596
Algebren 373, 375, 388, 406, 407, 420, 421, 463, 469, 470
– abstrakte 471
– assoziative 470, 471, 532–534
– Darstellung 472
– einfache 537
– halbeinfache 536, 537
– Klassifikation 527
– nichtassoziative 537
– normale zyklische 565
ALGOL 606
Algorithmus 36, 138, 158, 597, 598, 601, 603
– schneller 598
– von Risch 605
Analogrechentechnik 594
Analysis 271, 301, 311, 313, 349, 367, 369, 378, 388, 394, 439, 440, 512, 557
– kombinatorische 481
Ansatz
– doppelter falscher 120, 127, 193, 205
– einfacher falscher 15, 17, 19, 29, 30, 43, 120, 131
Antithesis 272
Apotome 260
Approximation 175, 191
Arithmetik 57, 62, 302, 303, 370, 372, 378, 379, 393, 486
– Modell der 373
– universelle 302, 369
artefici-Wissenschaft 253, 256
assoziativ 343, 382, 466, 469
Assoziativgesetz 304, 307, 370, 376, 417, 500
Assoziativität 343, 375, 384, 385, 388, 390
Astronomie 266, 287, 301
Aufgaben
– unbestimmte 279
Aufklärung 300, 312, 366
Auflösbarkeit 316, 320, 323, 325, 327, 328, 330, 350–352, 354, 358, 360, 436, 437, 442, 445, 446, 518
Auflösung 317
Auflösungsproblem 436
Auflösungstheorie 353, 355, 361, 362, 366, 438–440, 446, 456
Auswahlaxiom 526
Automatentheorie 593
Automorphismengruppe 503, 517, 547
Axiom 62, 487
Axiomensystem 575
– für die Geometrie 485
– für die natürlichen Zahlen 485

Babylonische Mathematik 24
Bakhshālī-Handschrift 141
Ballistik 287
baryzentrischer Kalkül 411
Basissatz
– für abelsche Gruppen 491
– für endliche abelsche Gruppen 494
– für endliche Gruppen 492
Begründung
– der Geometrie 486
– der natürlichen Zahlen 479, 487
Bewertungen 566
Bewertungstheorie 515, 521
Bilinearformen 400, 403, 404, 534
Binomium 260
Biquaternionen 386
Boolesche Algebren 576, 591
– Darstellung 591
Boolesche Ringe 591
Bourbaki-Gruppe 556, 577, 578, 580
Brāhmī-Zahlen 135
Brāhmī-Zahlzeichen 145
Brāhmī-Ziffern 135, 136
Bruchstrich 272
Buchberger-Algorithmus 600, 603
Buchstaben
– Verwendung 271
Buchstabenrechnen 310
Buchstabenrechnung 267, 302, 304, 370

Cardanische Lösungsformel 261
Cartesische Zeichenregel 280, 284
casus irreducibilis 267, 284
Cayley-Zahlen *siehe* Oktonionen
Charakteristik Null 541, 604
Clifford-Algebren 587, 588
Computeralgebra 593–598, 605, 609
Computeralgebrasystem 598, 603, 606, 608
Computeranalysis 597
Copernicanisches Weltsystem 267
cosa 258
Coß 164, 204, 212, 220, 221, 229, 231, 233–235, 237–239, 241, 283
Cossisten 164, 204, 229, 233
Cramersche Regel 336, 400
Cremona-Transformation 543
Cubus 258
Czichowski-Algorithmus 604

Darstellungstheorie 407, 408, 460, 503, 537–541
Definition 52, 277
Delisches Problem 86
DERIVE 607
Determinante 335–340, 402, 404, 410, 441, 451
Determinantentheorie 338, 339, 447, 451, 542
Dezimalbruch 224
Dezimalbruchrechung 224
Dezimalsystem 4
Dezimalzahlen 224
Diagonalisierung 400
Differentialgleichung 287
Differentialkörper 605
Differentialrechnung 287
Digitaltechnik 594
Dimensionstreue 64, 75, 171, 279
Diorismos 69, 70
Diskriminante 332, 340, 447
distributiv 316, 387, 466, 469
Distributivgesetz 304, 306, 370, 382, 417, 420, 573
Divisionsalgebra 373, 471, 535, 537, 564
Divisionsverfahren 14, 18
Divisor 511
Divisorentheorie 509, 510
Dualgruppe 573, 574
Dualsystem 594

École Normale 300
École Normale Supérieure 532
École Polytechnique 299, 300, 402, 406, 438, 441
Eigenvektor 401
Eigenwert 401, 402, 406
Einheiten 244, 307, 309, 380, 381, 392, 419, 420, 436, 466, 470
Einheitswurzel 319, 322, 340, 365, 391, 395, 397–399
– primitive 327, 397
Einschiebung 80, 84
– nach Archimedes 81
– nach Pappos 80
Einselement 344, 445

Element
– idempotentes 470
– nilpotentes 470
Elementarteiler 403, 404, 522
Elementarteilertheorie 408, 409, 453, 532
Elemente 55, 60, 62, 63, 231
Eléments de mathématiques 578
Eliminationstheorie 336, 337, 542, 561, 562
elliptisch 66
Endlichkeitsbedingung 561
Enthymem 271
Erbteilungsaufgaben 165
Ergänzung
– quadratische 171, 236
Erlanger Programm 458
Erweiterung
– algebraische 525, 526
– einfache 525
– transzendente 510, 515, 525, 526, 606
– unendliche algebraische 526
Erweiterungskörper 436, 525, 605
– endlicher 526
Euklidischer Algorithmus 394, 399, 599
Euklidischer Ring 600
Exegetike 271
Exponent 240, 266

Faktoren
– irreduzible 399
Faktorgruppe 446, 500, 589
Fangcheng-Methode 122–124, 193
Fastkörper 540
FELIX 607
Fläche
– algebraische 542, 544
Flächenanlegung 62, 66, 88
– elliptische 67
– hyperbolische 67
Fluxionen 367
Fluxionsrechnung 281
Formel
– binomische 36, 42, 118
– Heronische 41, 44
Formelmanipulation 595
Formen
– binäre 452
– binäre quadratische 447
– Hermitesche 406
– kubische 396
– quadratische 338, 340, 342, 401, 403, 404, 406, 449, 450
– ternäre 451
Formenlehre 417
FORTRAN 606
Frobenius-Gruppen 540
Fundamentalfolgen 478
Fundamentalsatz der Algebra 280, 283–286, 316, 331, 332, 334
Fundamentalsystem 452, 453
Fundierung der reellen Zahlen 478
Funktion
– algebraische 514
– elementarsymmetrische 332, 333
– lineare 388
– symmetrische 282
– transzendente 445
– trigonometrische 267
Funktionalanalysis 410
Funktionaldeterminante 451
Funktionenkörper 436, 513, 561
– algebraischer 508
Funktor 580, 581, 589

Galois-Feld 356, 357, 435
Galois-Gruppe 359, 438, 442, 445, 520
Galois-Körper 520, 536
Galois-Theorie 320, 361, 434–436, 439, 441, 442, 444, 446, 465, 500, 501, 508, 510, 516–518, 520, 522, 526, 535, 566
GAP 607
Garben 584
Garbentheorie 585
Gaußsche Perioden 327
Gaußscher Algorithmus 122, 123, 127
Geodäsie 287, 301
Geometrie 266, 349
– algebraische 336, 388, 454, 543–545, 583
– analytische 274, 276
– Begründung 486
– nichteuklidische 455
Geschlecht 543
Gesetz
– distributives 574

– modulare 574
Gleichheitszeichen 221, 272, 277
Gleichung einer Kurve 277
Gleichungen
– algebraische 337, 596
– biquadratische 59, 74, 84, 85, 253
– Diophantische 144
– dritten Grades 189, 190, 216, 220, 318, 323
– dritten und vierten Grades 317
– fünften Grades 317, 319, 323, 328, 330
– kubische 24, 38, 42, 59, 60, 74–76, 80, 83, 160, 175, 180, 181, 191, 215, 218, 224, 230, 251, 253, 255, 260–262, 273, 274, 284, 292
– lineare 15, 19, 30, 43, 59, 67, 121, 131, 139, 140, 165, 205, 206, 211, 213, 230, 251
– m-ten Grades 332
– n-ten Grades 316, 320, 322, 327, 328
– quadratische 34, 43, 59, 62, 72, 131, 133, 134, 140–142, 144, 145, 166, 169, 170, 203, 205, 206, 210, 211, 213, 216, 230, 238, 240, 251, 273, 280, 282
– rein quadratische 69
– transzendente 60
– unbestimmte 94, 100, 127, 144, 206
– unbestimmte lineare 165
– unbestimmte quadratische 210
– vierten Grades 183, 216, 220, 224, 261, 262, 319
Gleichungssystem 97, 218
– lineares 94, 122, 335, 336, 339, 400
– nichtlineares 37, 42, 125
Gnomone 174
Goldene Proportion 51
Graphentheorie 571
Gregorianische Kalenderreform 267
Gröbner-Basis 600, 603, 604
Größe
– arithmetische 302
– extensive 419, 420
– geometrische 302
– imaginäre 265, 288, 307, 309
Größensystem 382
Grundkörper 351, 438, 583
Gruppe 357–359, 361, 390, 391, 417, 435, 438, 442, 444, 445, 458, 516
– abelsche 492, 494, 503
– affine 456
– auflösbare 446
– Automorphismen 503
– Definition 490, 491
– einfache 503
– endliche 460, 465, 499, 502, 503, 539, 541
– endliche abelsche 344
– endliche lineare 503
– endliche orthogonale 413
– endliche zyklische 327
– freie 495
– halbeinfache 587
– kontinuierliche 463, 464, 539
– lineare 587
– lokal kompakte 593
– mit Operatoren 500
– nichtabelsche 538
– sporadische einfache 503
– Sylowsche 500
– symmetrische 325, 443
– topologische 591–593
– transitive 443, 444
– unendliche 491, 499–502
– Zerlegungen 490
– zyklische 324, 327, 441
Gruppen infinitesimaler Transformationen 531
Gruppenalgebra 465, 541
Gruppenbegriff 455, 458, 460, 465, 491
– abstrakter 489, 490, 493, 494, 497, 502
– abstrakter axiomatischer 495, 499
– Definition 501
Gruppencharaktere 538–540
Gruppendarstellung 587
Gruppendefinition
– axiomatische 501
Gruppendeterminante 538, 539
Gruppentheorie 455, 456, 459
Gruppoid 572

Halbgruppe 572
Hau-Rechnung 15, 19
Hauptachsentransformation 401, 402
Hauptideal 507

Hauptidealring 547
Hauptsatz der symmetrischen Funktionen 332
Hensel lifting 602
Hieroglyphen 8
Hieroglyphenziffern 116
Hilbert-Raum 586
Hilbertscher Basissatz 453
Himmelskörper 275
Höhensatz 278
Homöomorphie 590
Homogenität 64, 67, 75, 272
Homologie 588, 590
Homologiegruppe 589
Homologietheorie 589
Homomorphie 459
Homomorphiebegriff 374
Homomorphiesatz 549
Homomorphismus 446, 589
Homotopiegruppe 590
Homotopietheorie 589
Hopf-Algebren 589
Horner-Schema 119, 120, 186, 192
Horner-Verfahren 124, 185
Hyperbel 77–79, 179, 181, 184
hyperbolisch 66
hyperkomplexe Systeme *siehe* Algebren
Hypobibasmus 272

Ideale 511, 512, 560, 573, 574, 583
– in Ringen 547
– Zerlegung 545
Idealtheorie 478, 504, 507, 562, 565, 575, 583, 591
Idealtypus 574
imaginär 244
Indexgesetz 376
Individualzeichen 116, 134
Induktion 52
Industrielle Revolution 299, 431
Infinitesimalmathematik 266, 281, 285
Infinitesimalrechnung 75
inkommensurabel 61, 65, 244
Integral 286
Integralrechnung 287
Integration 285, 286
– unbestimmte 600
Integritätsbereich 520
intermediate expression swell 599
Interpretation 373
Intervallschachtelung 40
Invariante 447–454
Invariantentheorie 405, 447–449, 451, 453, 454, 518
Inverses 392
irrational 244
Irrationalität 54, 62, 251, 395
– Euklidische 251
Irrationalzahl
– algebraische 90
irreduzibel 351, 352, 452, 510
Irreduzibilität 326, 437, 442
isomorph 515, 571
Isomorphie 458, 459, 500, 524
Isomorphiebegriff 374
Isomorphismus 446, 492
Iteration 191
Iterationsalgorithmus 206
Iterationsmethode 190

Jordan-Algebren 586
Jordansche Normalform 404, 445

Kai fang-Methode 118, 193
Kartographie 287
Kategorie 580, 581, 585, 589
Kategorientheorie 581, 582, 589
Kegelschnitt 180, 251, 274, 280, 282, 336, 542
Keilschrift 22, 24, 27, 40
Keilschrifttexte 34
Kharoṣṭhī-Zahlen 134, 145
Kissoïde 91
Klassenkörpertheorie 563
kleiner Fermatscher Satz 340
Körper 329, 335, 356, 361, 373, 378, 397, 438, 470, 505, 506, 596
– algebraisch abgeschlossener 526
– bewerteter 566
– Charakteristik 525
– endlicher 356, 516, 517
– formal-reeller 566
– konjugierter 506, 516
– Platonischer 54
Körperbegriff 501, 502, 509, 510, 515, 516

Körpererweiterung 327, 506, 516, 518, 520, 524
– algebraische 515, 517
– endliche 549
– separable 526
– unendliche 566
Körperstruktur 600
Körpertheorie 520, 522, 540
Kohomologiegruppe 589
kommutativ 316, 343, 469
Kommutativgesetz 307, 370, 381, 382, 417, 500
Kommutativität 304, 306, 343, 365, 382, 517
Kommutatorrelation 586
Kompositionsreihe 442, 445, 446, 500
Konchoïde 91
Kongruenz 340, 342, 356, 392, 404, 435, 516
Konjugierte 395
Kontinuitätsprinzip 288
Koordinaten
– homogene 403
Koordinatenachsen 283
Kovariante 450, 452
Kreisteilung 350
Kreisteilungsgleichung 321, 325–328, 351, 352, 395, 437
Kreisteilungskörper 398, 399, 436, 437, 516, 519
Kreisteilungstheorie 351
Kreiszahl 90
Krull-Ringe 562
Kubikwurzel 86, 118, 120, 124, 127, 133, 139, 185, 210, 265, 266
kubische Gleichung
– Normalform 261
Kubus 231
Kugelsegment 75, 79
Kurve
– algebraische 283, 542–544
– dritten Grades 282

Lazard-Rioboo-Trager-Algorithmus 604
Lederrolle 8, 12
Leerstelle 28
LiE 607
Lie-Algebren 463, 530, 531, 533, 539, 587, 600
– einfache 531
– halbeinfache 533
Lie-Gruppen 463, 502, 503, 530–532, 539, 587, 588, 600
– Darstellung 587, 592
– halbeinfache 592
Linearfaktor 288, 334
Linksnebenklassen 360
LISP 606
LLL-Algorithmus 602
Locus ad quattuor lineas 279
Lösung
– imaginäre 284
– komplexe 284
– negative 206, 236, 280
– numerische 190
Lösungsformel 167, 255
– Cardanische 261
Logik 371, 572, 575
– mathematische 489
– symbolische 376, 480
Logikkalkül 573
Logistica numerosa 271
Logistica speciosa 271
Logizismus 483, 484, 489, 579
Lückenzeichen 28, 42

MACSYMA 607
Maestri d'abbaco 214, 230
Mannigfaltigkeit
– algebraische 583, 584
– komplexe 584
MAPLE 607
MATEMATICA 607
MATLAB 607
Matrix 335, 337, 400–404, 406, 407, 445, 453, 472, 522
– Rang 408
– unendliche 410
Matrizenalgebra 528, 537
Matrizenring 534
Maximumproblem 103
Mechanik 301
Meister des Abbacus 203
Mengenkörper 576
Mengenlehre 477–479, 481, 487, 489, 504, 526, 535, 554, 557, 558, 576, 579

Methode
– analytische 311–313
– axiomatische 477, 483, 485, 486, 488, 489, 493, 518, 524, 535, 555, 561, 570, 577
– synthetische 311
Minimalpolynom 408, 529, 530, 534
Modell 370
Modell der Arithmetik 373
Moderne Algebra 517, 563, 567, 569, 576
Modul 340, 422, 506, 512, 573, 574
Modulbegriff 506, 560, 565
Modultypus 574
Morphismus 580, 581
Multiplikation 278
Multiplikation von Strecken 278
Multiplikationstafeln 42
Multiplikationsverfahren 13, 16
MUPAD 607
Museion 56, 57
Mutterstrukturen 556, 579

Näherungen 189
Näherungslösung 52
Näherungsverfahren 138, 187
Näherungswert 39, 42, 190
Navigation 287
von Neumann-Algebren 590
nichtkommutativ 414, 417, 457
Nichtkommutativität 390, 405, 406
nilpotent 534, 537
Noethersche Ringe 562
Normalform 272
– kubische Gleichung 261
Normalisator 540
Normalkörper 516
Normalteiler 360, 439, 442, 443, 445, 500
Normgleichung 382, 387, 388
Null 135–137, 145, 162, 167
Null-Zeichen 136
Nullteiler 377, 382, 386, 407, 470, 517, 528
nullteilerfrei 466
Nullteilerfreiheit 525
Numerus 230, 231

Oktaven 387
Oktonionen 387, 388
OPENMATH 608
Operationen 390
– algebraische 591
Operatoren 374, 377
– lineare 591
Operatorenalgebren 586, 590
Operatorenkalkül 479
Operatorenrechnung 314, 316, 374, 375, 381, 448
Optik 287, 301
Ordinalzahlen
– transfinite 478
Ort
– geometrischer 279, 280

Papyrus Moskau 8, 12, 17
Papyrus Rhind 8–10, 13–17, 43
Parabel 66, 77, 79
Parabelquadratur 57
Parabolismus 272
Parallelogrammregel 410
Partialbruchzerlegung 286, 287
Perioden 327
Permanenzprinzip 305, 369, 370, 379
Permutation 323, 324, 352, 356, 358–360, 362–364, 390, 435, 438–440, 444, 446
– gerade 338
– ungerade 338
– Zyklendarstellung 364
Permutationsgruppe 324, 325, 330, 352, 362, 365, 366, 390, 391, 435, 439–441, 444, 445, 455, 459, 490–492, 496, 499, 503, 547
Permutationstheorie 338, 435
Pluquaternionen 388
Polyedergruppen 496
Polygon 66
– reguläres 62
Polygonalzahlen 102
Polynom 283, 285, 286, 288
– irreduzibles 517
Polynome
– Division der 173, 175
Polynomfaktorisierung 600–602
Polynomideal 545, 560, 603
Polynomring 517, 596, 600
Poristike 271

Positionssystem 20, 22, 28, 42, 116, 136
– dezimales 136
Postulate 51, 62
Potenzen 221
Potenzgesetz 173, 175
Potenzschreibweise 277, 284
Primdivisor 511
Primelement 512
Primelementzerlegung 398, 400
Primfaktorzerlegung 398, 547, 548
Primideal 507
Primidealzerlegung 514
Primkörper 525, 558
Primzahl 393, 397, 599
Primzahlcharakteristik 549
Primzahlzerlegung 393, 398
Produkt
– äußeres 418
– alternierendes 418
Programmiersprache
– maschinenorientierte 594
– problemorientierte 594
Projektionsoperatoren 590
Proportionale
– mittlere 69, 87–89, 273
– vierte 68
– zwei mittlere 87
Proportionen 54, 211
Proportionenlehre 61, 62, 206
Propositionen 55, 62
Pythagoreer 88, 102

quadratisches Reziprozitätsgesetz 340
Quadratrix 90–93
Quadratur des Kreises 52, 60, 90
Quadratwurzel 64, 118, 120, 124, 127, 133, 137, 138, 141, 145, 167, 193, 229, 237, 266, 278
– aus negativen Zahlen 260, 265
Quadratwurzelzeichen 277
Quantenmechanik 586
Quasigruppe 571, 572
Quaternionen 310, 373, 380, 382, 384–387, 391, 407, 420, 421, 466, 468, 471, 530, 534, 537
Quotientenkörper 335

Radikal 358, 360, 442, 527, 537
Radikalausdruck 352
Radix 230, 231
Rang
– Matrix 408
Rationalitätsbereich 509, 510
Raum
– endlichdimensionaler 586
– halbgeordneter linearer 591
– normierter linearer 558
Rechenbrett 116–118, 121, 124–127
Rechenmeister 214, 233
Rechentechniken
– indisch-arabische 227
Rechnen
– kaufmännisches 204
– logarithmisches 240
– symbolisches 595
Rechtsnebenklassen 360
rectangle 282
REDUCE 607
reduzibel 358
Regula falsi 234
Reihe
– arithmetische 145
– unendliche geometrische 267
Rekursionsformel 44, 138
Relativitätstheorie 489
Repräsentant 343
res 258
Resolvente 318, 319
– Galoissche 516
– Huddesche 318
– kubische 262
– Lagrangesche 320
Reste
– biquadratische 308, 392
– kubische 392
Restklassen 356, 365, 515
Restklassenkörper 356, 516, 517
Restklassenring 525, 599
Reziprokentafeln 28, 42
Reziprozitätsgesetz
– biquadratisches 393, 395, 397
– kubische 392, 393
– kubisches 395–397
– quadratisches 391, 392, 394
Rhetike 271
Riemann-Rochscher Satz 585

Riemannsche Fläche 514, 542
Ring 417, 506
– der ganzen algebraischen Funktionen 514
– der ganzen Zahlen 513
– enklidischer 547
– kommutativer 562
– nichtkommutativer 565
– separabler 558
Ringbegriff 520, 558
Ringtheorie 558, 560, 561, 583
Rothstein-Trager-Algorithmus 604
Royal Society 281

Satz vom primitiven Element 510
Satz von Viète 34
Schemata 585
Schnittvielfachheit 583, 584
Schnurregeln 130, 138, 139, 141
SCRATCHPAD 607
Sexagesimalsystem 5, 20, 22, 27, 38, 136
Sieb des Eratosthenes 57
Siebeneck 60, 80
– regelmäßiges 80, 82, 83, 104, 267
SINGULAR 607
Singularitäten 542
Skalar 386
Spinor 587
Spinoralgebra 587
Stammbruch 13, 14, 17, 19
Stammbruchtabelle 14
Stammbruchzerlegung 12, 18
Stetigkeit 334
Strahlensatz 68, 93
Strecken
– gerichtete 413, 414
– inkommensurable 51
Struktur 316, 555
– algebraische 361, 524, 573
– nichtkommutative 559
Strukturbegriff 556
Strukturbetrachtung 309, 310, 361
– algebraische 307
Strukturkonzept 571, 579
Strukturmathematik 520, 577
Strukturtheorie 535, 538, 580, 591
Suanpan 117
Substitution 337, 338, 342, 358, 359, 363, 440
Subtraktion 28
Summe
– direkte 470, 530
Syllogismus 271
Symbole 272
– cossische 235
– Interpretation der 372
Symbolik 265, 277
– algebraische 229
Symbolkalkül 375
symmetrisch 402
Synthesis 271
System
– hyperkomplexes 408, 418, 465–469, 528, 530, 533
– irreduzibles 530
– nichtkommutatives hyperkomplexes 407
– nichtlineares 34
System hyperkomplexer Größen *siehe* Algebren

Taschenrechner, elektronischer 609
Teilalgebren 576
Teilbarkeit 52, 507, 513, 558
Teilbarkeitslehre 510, 512, 573
Teilerkettensatz 560, 561, 603
Teilkörper 525
Theoretische Mechanik 287
Theorie
– der Charaktere 494
– der Ringe 512
– der Strukturen 579
– halbgeordneter Räume 591
Topologie 557
Topologisierung 591
Transformation 462
– lineare 404
– orthogonale 401
Transformationsgruppe 455–458, 460–462, 464, 465, 496, 497, 499, 529, 530, 532, 534, 539
– Klassifikation 497
– kontinuierliche 456, 460, 463, 528, 531–534, 592
– unendliche 497
– unendliche kontinuierliche 499

Transitivität 324
Transponierte 406
Transzendenzbeweis 522
Trigonometrie
– ebene 267
– sphärische 267
Typentheorie 489

Übersetzungen 204
Unbekannte 258
Universitätswissenschaft 253, 256
Untergruppe 357, 443, 446
Unterkörper 506

Variable 274
Variablentransformation 261
Variationsrechnung 287
Vektor 386, 413, 415, 419, 466
Vektoranalysis 421
Vektorbegriff 410
Vektorbündel 584
Vektorraum 410, 415, 417, 419
– dreidimensionaler 413
– endlichdimensionaler 526
– reeller 487
Vektorraumbegriff 557
Vektorrechnung 371, 410, 412, 421, 422
Venedig 255
Verband 483, 573, 575
– distributiver 576
– modularer 576
Verbandsbegriff 572, 576
Verbandstheorie 575, 577, 590, 591
Verfahren
– algorithmisches 596
Verknüpfungsoperationen 482
Verknüpfungsregeln 372–376, 382, 388, 407, 482
Verschmelzungsgesetz 574
Verzweigungstheorie 515
Vogelaufgaben 165
von Neumann-Algebren 590

wa-l-muqābala 251
Wahrscheinlichkeitsrechnung 258, 512
Winkel 50
Winkeldreiteilung 52, 60, 83, 84, 91
Wissenschaftliche Revolution 274
Wohlordnungssatz 526
Würfelverdopplung 52, 60, 86, 89, 91, 210
Wurzel
– affirmative 282
– komplexe 292
– negative 282
Wurzelsatz von Vieta 273
Wurzelziehen
– Babylonisches 41, 44
– Heronisches 41

Zahl 109
Zahlbuchstaben 95
Zahlen 2, 4, 28
– algebraische 399, 478, 510, 512–514, 518, 520, 545, 564
– assoziierte 392
– ganze 394
– ganze algebraische 505, 506, 522, 561
– ganze Gaußsche 392
– ganze komplexe 309, 394, 395
– gebrochene 243
– hyperkomplexe 380–382, 385, 391, 527–529, 539
– ideale 398–400, 436, 504, 508, 509
– ideale komplexe 507
– imaginäre 284, 290, 302, 303, 306, 308, 317, 381, 466
– irrationale 61, 64, 171, 220, 224, 242, 243, 478, 504
– komplexe 284–286, 304, 306–308, 310, 317, 334, 373, 379, 380, 393, 412, 466, 469, 471
– natürliche 482, 486
– negative 5, 133, 143, 167, 224, 240, 262, 302–304, 306, 415
– p-adische 513, 520, 521, 550, 558, 564, 566
– rationale 167
– reelle 307, 308, 317, 334, 378, 379, 419
– transzendente 478, 522
– unendliche 243
Zählen 2, 4
Zahlengerade 244
Zahlensystem 482
– Aufbau 305, 466

– dezimales 109
– hyperkomplexes 465, 481
Zahlentheorie 490, 512
– algebraische 545, 563, 574
Zahlkörper 506, 513
– abelscher 516
– algebraischer 466, 505, 508, 518, 535, 545, 560, 561
– imaginär-quadratischer 438, 515
– quadratischer 394, 507, 519
Zahlschriften 4, 5
Zahlsystem 4, 5, 12, 27
– indisch-arabisches 214
Zahlwörter 4, 5
Zahlzeichen 4, 22, 27
Zeichen $+, -$ 272, 277
Zensus 230, 231
Zerfällungskörper 322, 333, 335, 515
Zetesis 271
Zetetike 271
Ziffer 28
Ziffern
– arabische 40, 162
– indische 161, 162
Zinseszins 230
Zinsrechnung 208
Zinstabellen 223
Zirkel und Lineal 83, 90, 92, 93, 104, 326, 327, 361
ZPI-Ringe 561
Zwischenwertsatz 288
Zyklen 440