H. Wußing

6000 Jahre Mathematik

Eine kulturgeschichtliche Zeitreise

Springer

Vom Zählstein zum Computer

Herausgegeben von
H.-W. Alten · A. Djafari Naini · H. Wesemüller-Kock
Institut für Mathematik und Angewandte Informatik
Zentrum für Fernstudium und Weiterbildung
Universität Hildesheim

In der Reihe „Vom Zählstein zum Computer“
sind bisher erschienen:

4000 Jahre Algebra
Alten, Djafari Naini, Folkerts, Schlosser, Schlote, Wußing
ISBN 978-3-540-43554-9

5000 Jahre Geometrie
Scriba, Schreiber
ISBN 978-3-540-22471-6

Überblick und Biographien,
Hans Wußing et al. ISBN 978-3-88120-275-6
Vom Zählstein zum Computer – Altertum (Videofilm),
H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald ISBN 978-3-88120-236-7
Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter (Videofilm),
H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald

Hans Wußing

6000 Jahre Mathematik

Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton

Unter Mitwirkung von Heinz-Wilhelm Alten und Heiko Wesemüller-Kock

Mit 305 Abbildungen, davon 161 in Farbe

Springer

Professor Dr. Hans Wußing
Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig
Karl-Tauchnitz-Str. 1
04107 Leipzig

ISBN 978-3-540-77189-0 e-ISBN 978-3-540-77192-0

DOI 10.1007/978-3-540-77192-0

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 01-99, 01A05

© 2008 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandgestaltung: deblik, Berlin
Herstellung: LE-TEX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig
Satz: Sylvia Voß und Mark Kaldewey, Hildesheim;
LE-TEX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.com

Für meine liebe Frau Gerlinde
mit herzlichem Dank für Rat und Tat

Vorwort des Herausgebers

Als der Springer Verlag an mich vor 6 Jahren mit dem Vorschlag herantrat, in der Reihe „Vom Zählstein zum Computer“ neben Bänden zur Geschichte der Mathematik in Teilgebieten wie „5000 Jahre Geometrie“ und „4000 Jahre Algebra“ auch eine stark kulturhistorisch unterlegte Gesamtgeschichte der Mathematik herauszubringen – da war mein erster Gedanke: Hans Wußing! Der international bekannte Mathematikhistoriker in Leipzig musste für diese Aufgabe gewonnen werden, hatte er doch in unserem ersten Band „Überblick und Biographien“ bereits eine kurzgefasste Übersicht gegeben und bewiesen, dass er als Angehöriger der älteren Generation einen Überblick und umfassende Kenntnis über die Entwicklung der Mathematik seit ihren Anfängen hat wie kaum ein jüngerer und zur Karriere auf Spezialisierung angewiesener Kollege.

Nach einigem Zögern hat Prof. Wußing die Aufgabe mit dem Hinweis übernommen: „Dieses Buch soll einem breiten Leserkreis einen Überblick über die Entwicklung der Mathematik von ihren Anfängen bis zum heutigen Stand vor dem Hintergrund der kulturgeschichtlichen Entwicklung der Menschheit geben.“

Diesem Anspruch ist Hans Wußing in besonderem Maße gerecht geworden. Er hat die Entstehung und Entwicklung mathematischer Begriffe, Symbole und Methoden in lebendiger Schilderung verflochten mit den historischen Ereignissen, mit den persönlichen Schicksalen der Gelehrten und den kulturellen Entwicklungen in Musik, Architektur, Bildender Kunst, Religion, Medizin, Naturwissenschaften und anderen Bereichen. Eindrucksvoll beschreibt er die Anstöße und Hintergründe für die Einführung neuer Begriffe, für die Entdeckung von Zusammenhängen und die Entstehung neuer Theorien, deren Anwendung in anderen Disziplinen und Wechselwirkungen mit ihnen. Das alles in den verschiedenen Epochen, Regionen und Kulturkreisen der Geschichte und weit über das in mathemathematikhistorischen Darstellungen übliche Maß hinaus – kurzum: eine Kulturgeschichte der Mathematik.

Natürlich können in einer auf einen Band angelegten Darstellung der Mathematikgeschichte nicht alle Schritte und Einzelheiten der Entwicklung in gleicher Ausführlichkeit behandelt werden – das würde angesichts der Fülle des Materials eine ganze Enzyklopädie erfordern. Der Autor musste den „Mut zur Lücke“ haben. Er hat ihn gehabt und eine Auswahl getroffen, die zwangsläufig subjektiv ist.

Dennoch: Als wir die vorgesehenen Abbildungen in den Text einfügten, stellte sich heraus, dass der Umfang eines Bandes gesprengt würde. So haben wir das Werk in zwei Teile zerlegt, von denen hiermit der erste Band vorgelegt wird. In ihm wird die Kulturgeschichte der Mathematik von den Anfängen bis ins 17. Jahrhundert dargestellt. Apropos: Anfänge!

Wann und womit hat eigentlich Mathematik begonnen? Mit Zählen und mit Zahlen als Kerben auf Knochen und Steinen oder mit Ornamenten

auf Tonscherben aus grauer Vorzeit? Oder erst mit elementarem Rechnen vor etwa 10 000 Jahren, als Jäger und Sammler von Nomaden zu Ackerbauern wurden, feste Siedlungen entstanden, Handel und Warenaustausch einfache Rechnungen erforderten? Oder soll (kann) man von Mathematik erst sprechen seit sich ihr markanter Wesenszug ausprägte – die Bildung abstrakter mathematischer Begriffe und die Herstellung von Beziehungen zwischen ihnen? Das geschah vor ca. 6000 Jahren, als sich mathematisches Denken in diesem Sinne im 4. Jahrtausend v. Chr. in den Hochkulturen der großen Stromtäler, Chinas, Indiens, Mesopotamiens und Ägyptens entwickelte. So haben wir „6000 Jahre Mathematik“ als Titel des Werkes gewählt.

In einem spannungsreichen Bogen führt die kulturgeschichtliche Zeitreise von den Anfängen mit Zählen, Zahlen und Figuren durch die Jahrtausende ihrer Entwicklung bis zu der im zweiten Band beschriebenen globalen Ausbreitung der Mathematik im 20. Jahrhundert und der kaum noch überschaubaren Fülle der Ergebnisse unserer Tage.

Auch die verschiedenen Aspekte der relativ jungen und in rascher Entwicklung betroffenen Ethnomathematik haben Eingang in das Werk gefunden. Dabei zeigt sich, dass die übliche chronologische Darstellung wegen der zeitlich versetzten Entwicklung in den verschiedenen Kulturkreisen oft nur schwer oder gar nicht möglich ist. Deshalb folgt zunächst ein Abschnitt über die in langen Zeiträumen unabhängig von anderen Kulturkreisen entstandene Mathematik in den präkolumbianischen Kulturen Mittel- und Südamerikas mit der überraschenden Feststellung, dass die Maya bereits vor vielen Jahrhunderten einen Kalender benutzten, der genauer als der noch heute bei uns gültige Gregorianische ist.

Im zweiten Kapitel wird die Entwicklung der Mathematik in China und Indien bis zum 16. Jahrhundert, in Japan bis zu seiner „Öffnung“ im 19. Jahrhundert dargestellt. Erst dann wird die große Entwicklungslinie aufgegriffen, die von der Frühzeit der Mathematik in Mesopotamien und Ägypten über ihre Etablierung als Wissenschaft bei den Griechen, die Weiterentwicklung und den Transfer des antiken Erbes durch die Perser und Araber ins mittelalterliche Europa und die beginnende Renaissance führt. Im letzten Kapitel dieses Bandes wird der Aufbruch zu neuen Ufern während der Wissenschaftlichen Revolution vom ausgehenden 16. bis zum Beginn des 18. Jahrhunderts beschrieben: der Wandel der Algebra zur selbständigen Disziplin, die Anfänge der analytischen Geometrie bei Descartes, die Probleme der Zahlentheorie bei Fermat, der Bau der ersten Rechenmaschinen, die Frühgeschichte der Infinitesimalmathematik und ihre Ausprägung durch die beiden großen Geister des 17. Jahrhunderts – in der Fluxionsrechnung des genialen Newton und dem Calculus des Universalgelehrten Leibniz.

Jedem Kapitel ist eine Tabelle vorangestellt, die einen Überblick über wichtige politische und kulturelle Ereignisse der jeweils behandelten Epoche bzw. Kultur vermittelt. Im ersten Abschnitt jedes Kapitels werden diese ta-

bellarischen Angaben, ihre Zusammenhänge und die Auswirkungen auf die Entwicklung von Kunst und Wissenschaft näher beschrieben. Diese Darstellung bildet den Rahmen für die in den folgenden Abschnitten behandelte Entwicklung der Mathematik, ihrer Inhalte, Methoden und Ergebnisse, eingebettet in die Verhältnisse und Lebensumstände der schöpferischen Menschen, denen all dies zu danken ist. In einer Tabelle am Schluss des Kapitels sind die wesentlichen Inhalte und Ergebnisse der darin entwickelten Mathematik zusammengefasst.

Die lebendige Darstellung wird durch viele Abbildungen unterstützt: Farbige Fotos illustrieren den kulturellen und historischen Hintergrund, Briefmarken aus aller Welt spiegeln die Wertschätzung der Gelehrten und ihrer Werke in den verschiedenen Ländern und Regionen, schwarz-weiß gezeichnete Figuren erläutern mathematische Zusammenhänge.

Für einige Abbildungen in diesem Buch ist es uns nicht gelungen, die Rechtsinhaber zu ermitteln bzw. unsere Anfragen blieben unbeantwortet. Betroffene und Personen, die zur Klärung in einzelnen Fällen beitragen können, werden gebeten, sich beim Verlag zu melden.

Die Bildseiten mit den Porträts herausragender Mathematiker der jeweiligen Periode und die Karten entwarf und gestaltete der Medienwissenschaftler und Mitherausgeber Heiko Wesemüller-Kock. Von ihm stammen auch einige Beiträge und Anregungen zum Text sowie die graphische Gestaltung – das Layout sagt man heute – des gesamten Bandes. Dafür sage ich ihm herzlichen Dank.

In äußerst mühevoller und sorgfältiger Arbeit hat Herr Wesemüller-Kock – unterstützt von Frau Anne Gottwald – die als Vorlagen gelieferten Fotos, Dias, Skizzen und Strichzeichnungen, Seiten und Titelblätter alter Werke mit dem Computer zu druckfertigen Vorlagen bearbeitet, insbesondere auch die vom Autor Hans Wußing aus seiner umfangreichen Sammlung gelieferten Briefmarken. Dafür sei beiden besonders herzlich gedankt.

Für die Umsetzung der Manuskripte in druckfertige Vorlagen auf dem Computer danke ich den Mitarbeiterinnen im Institut für Mathematik und Angewandte Informatik Bettina David, Martina Rosemeyer und Tanja Seifert sowie den Studentinnen Daniela Baehr und Sylvia Voß und dem wissenschaftlichen Mitarbeiter Mark Kaldewey.

Mein besonderer Dank gilt den Kollegen Folkerts, Kahle, Purkert, Ullrich und Sonar für die kritische Durchsicht der Texte und ihre Anregungen zu Ergänzungen und Modifikationen, den Kollegen Djafari-Naini und Kunitzsch für Anmerkungen und Korrekturen zum Kap. Mathematik in den Ländern des Islam.

Sehr herzlich danke ich vor allem dem Autor Hans Wußing für seinen intensiven Einsatz, für sein Eingehen auf meine Anregungen und die Akzeptanz meiner Vorschläge und Beiträge zur Ergänzung der Texte und Abbildungen.

Für die finanzielle Unterstützung des Projekts danke ich dem Direktor des Instituts für Mathematik und Angewandte Informatik, Prof. Dr. Förster und dem Leiter des Zentrums für Fernstudien und Weiterbildung, Prof. Dr. Wagner.

Dem Springer-Verlag Heidelberg und dem hierfür verantwortlichen Redakteur, Herrn C. Heine, danke ich für das Eingehen auf meine Wünsche und die hervorragende Ausstattung dieses Buches, Frau Köhler für die Unterstützung bei der Umsetzung in die TEX-Version.

Möge dieser Band einen breiten Leserkreis erreichen und dazu beitragen, möglichst vielen Schülern und Studenten die Scheu oder gar Angst vor der Mathematik zu nehmen, darüber hinaus vielen Menschen Einblick in die enge Verflechtung der oft als trocken und schwer verständlich geltenden Mathematik mit anderen Wissenschaften, mit menschlichen Schicksalen und mit der Entwicklung der Kultur in sechs Jahrtausenden auf unserer Erde geben.

Hildesheim, im Januar 2008 — Im Namen der Herausgeber
Heinz-Wilhelm Alten

Hinweise für den Leser

Runde Klammern enthalten ergänzende Einschübe oder Hinweise auf Abbildungen, in Zitaten markieren sie Auslassungen.
Eckige Klammern enthalten

- im laufenden Text Hinweise auf Literatur
- unter Abbildungen Quellenangaben.

Abbildungen sind nach Teilkapiteln nummeriert, z. B. bedeutet Abb. 4.1.4 die vierte Abbildung in Abschnitt 4.1 von Kapitel 4.

Die Transskriptionen chinesischer bzw. indischer Namen und Begriffe erfolgten entsprechend [Martzloff 1997] bzw. [Tropfke 1980]. Die Schreibweise von Namen und Werken islamischer Gelehrter entspricht der wissenschaftlichen Transskription aus dem Arabischen. Eine der deutschen Aussprache entsprechende Transskription ist oft in Klammern angefügt.

Die Originaltitel von Büchern und Zeitschriften sind kursiv wiedergegeben, wörtliche Zitate kursiv mit Anführungszeichen. In einigen Fällen folgen für den interessierten Leser Hinweise auf weiterführende Literatur bzw. auf Erläuterungen eines nur verknappt dargestellten Sachverhaltes mit Verweisen wie (vgl. ausführlich in. . .).

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

1 Mathematik am Anfang und Ethnomathematik 5
1.1 Zählen, Zahlen, Figuren 6
1.1.0 Einführung 6
1.1.1 Zahlen und Zahlwörter 7
1.1.2 Anfänge der Geometrie 12
1.2 Ethnomathematik 16
1.2.1 Aspekte der Ethnomathematik 17
1.2.2 Beispiel aus Afrika: Sona Geometrie 20
1.3 Kenntnisse und Leistungen der Azteken, Maya und Inka 23
1.3.0 Zur Geschichte 23
1.3.1 Die Azteken: Kalenderrechnung und ummantelte Pyramiden 26
1.3.2 Die Maya: Tempel, Pyramiden und geheimnisvolle Glyphen 28
1.3.3 Rätsel der Nazca-Kultur 34
1.3.4 Die Inka: Polygonale Festungsmauern und Sonnenheiligtümer 36

2 Entwicklung der Mathematik in asiatischen Kulturen 41
2.1 Mathematik im alten China 42
2.1.0 Das historische Umfeld 43
2.1.1 Zahlendarstellung, Rechenbrett 52
2.1.2 Einige Höhepunkte altchinesischer Mathematik 55
2.1.3 Zusammenfassung 66
2.2 Entwicklung der Mathematik in Japan 67
2.2.0 Historischer Hintergrund 67
2.2.1 Mathematik im alten Japan 69
2.2.2 Die Renaissance der japanischen Mathematik 72
2.3 Mathematik im alten Indien 81
2.3.0 Vorbemerkung 84
2.3.1 Historischer Überblick 85
2.3.2 Wichtige Quellen altindischer Mathematik 93
2.3.3 Geometrie in Indien 95
2.3.4 Indische Trigonometrie 95
2.3.5 Die Herausbildung des dezimalen Positionssystems 97
2.3.6 Arithmetik und Algebra in der indischen Mathematik . 100

3 Frühzeit der Mathematik im Vorderen Orient 103
3.1 Mathematik im alten Ägypten 104
3.1.0 Einführung: Geschichte und Schrift des alten Ägypten 104
3.1.1 Mathematische Papyri 113
3.1.2 Zahlensystem, Rechentechnik 114
3.1.3 „Hau"-Aufgaben, Pśw-Rechnungen 117
3.1.4 Algebraische Probleme 118
3.1.5 Geometrische Probleme 119
3.2 Mesopotamische (Babylonische) Mathematik 122
3.2.0 Einführung 122
3.2.1 Entwicklung der Keilschrift 124
3.2.2 Zahlenschreibweise, Zahlentafeln 128
3.2.3 Geometrie in Mesopotamien 131
3.2.4 Algebra in Mesopotamien 139
3.2.5 Zusammenfassung 141

4 Mathematik in griechisch-hellenistischer Zeit und Spätantike 143
4.0 Historische Einführung 146
4.1 Zählen, Zahlensysteme, Rechnen 150
4.2 Ionische Periode 158
4.3 Mathematik in der ionischen Periode 168
4.4 Mathematik in der athenischen Periode 177
4.5 Mathematik in der hellenistischen Periode 186
4.6 Mathematik bei den Römern 209
4.7 Die Mathematik am Ausgang der Antike 211
4.8 Nachwirkungen in byzantinischer Zeit 212

5 Mathematik in den Ländern des Islam 219
5.0 Historischer Überblick 222
5.1 Islamische Universalgelehrte des Mittelalters 232
5.2 Al-Ḫwārizmī (al-Choresmi) und seine „Algebra" 237
5.3 Spitzenleistungen in der Algebra der Muslime 244
5.4 Zum Zahlbegriff 253
5.5 Beiträge der Muslime zur Geometrie 254
5.6 Neue Quellen für mathematikhistorische Forschung 260

6 Mathematik im Europäischen Mittelalter 263
6.0 Vorbemerkung 264
6.1 Frühes Mittelalter 265
6.2 Hochmittelalter, Spätmittelalter 274
6.3 Scholastik, Gründung und Anerkennung von Universitäten ... 281
6.4 Schlussbetrachtung 296

7 Mathematik während der Renaissance 299
7.0 Historische Einführung 300
7.1 Neue Forderungen an die Mathematik 307
7.2 Rechenmeister und frühe Algebra 310
7.3 Fortschritte in Italien 313
7.4 Entwicklungen in Westeuropa 321
7.5 Frühe Algebra im deutschsprachigen Raum 328
7.6 Die sog. Deutsche Coß 331
7.7 Geometrie und Perspektive 346
7.8 Astronomie und Trigonometrie 359

8 Mathematik während der Wissenschaftlichen Revolution . 377
8.0 Allgemeine Charakterisierung 379
8.1 Gründung von Akademien und wissenschaftlichen Gesellschaften 381
8.2 Algebra wird zur selbstständigen mathematischen Disziplin . . 386
8.3 Analytische Geometrie 398
8.4 Anfänge der projektiven Geometrie 411
8.5 Rechenmethoden, Rechenhilfsmittel, erste Rechenmaschinen . 416
8.6 Zur Frühgeschichte der Infinitesimalmathematik 427
8.7 Durchbildung der infinitesimalen Methoden: Newton und Leibniz 452

Literatur 477

Abbildungsverzeichnis 491

Personenverzeichnis mit Lebensdaten 505

Sachverzeichnis 515

Einleitung

I

Mathematikgeschichte – ein hochinteressanter Teil unserer Kulturgeschichte – ist spannend, lehrreich, allgemeinbildend und sie erleichtert das Erlernen der Mathematik.

Es gibt eine reichhaltige Auswahl an Darstellungen der Entwicklung der Mathematik und ihrer Teilgebiete, zu allen Regionen und Perioden der Menschheitsentwicklung, ebenso wie Darstellungen der gesamten Mathematik. Deren Historiographie ist äußerst umfangreich und kaum noch zu überblicken. Es gibt eine international arbeitende Kommission für die Historiographie der Mathematik, deren Mitglieder über die Ländergrenzen hinweg, auf allen Kontinenten eng zusammenarbeiten. Diese Spezialrichtung der Wissenschaftsgeschichte ist weltweit in raschem Aufschwung befindlich.

Ein Mathematikhistoriker sieht sich – je nach seiner wissenschaftlichen Zielstellung und seiner Neigung – einer Reihe von Themengruppen gegenüber, unter anderem:

- Problemgeschichte, Begriffsgeschichte, innermathematische Zusammenhänge. Beispiele: Auflösung von Gleichungen, Zahlbegriff, Axiomatisierung, Abstraktion
- Mathematik und Naturwissenschaften. Beispiel: Die Physik Newtons und die Entstehungsgeschichte der Infinitesimalrechnung
- Biographisches. Beispiele: Leben und Werk von C. F. Gauß. Was heißt Kreativität?
- Institutionen, Organisationsformen. Beispiele: Akademien, Universitäten, mathematische Schulen
- Mathematik als Bestandteil der Kultur. Beispiele: Mathematik und Kunst, Literatur, Musik
- Gesellschaftliches Umfeld der Mathematik. Beispiele: Wechselbeziehungen zur Technik, Wechselbeziehungen zu Philosophie und Religion, Zusammenhang mit politischen Ereignissen wie etwa der Französischen Revolution
- Mathematik als Teil der Allgemeinbildung. Beispiele: Mathematik im Schulunterricht, Ingenieurausbildung
- Historisch-kritische Analyse von Quellentexten. Beispiele und Schwierigkeiten: Quellen finden und erschließen, Sprachschwierigkeiten, Gefahr der Überinterpretation
- Mathematik als dynamischer Entwicklungsprozess. Beispiele: Wirkungsgeschichte von Grundideen, Triebkräfte, Denken auf Vorrat
- Anwendungen der Mathematik. Beispiele: Analysis in den Natur- und Ingenieurwissenschaften, Boolesche Algebra in der Computertechnik, Zahlentheorie in der Kryptographie, Statistik und Optimierung in den Wirtschaftswissenschaften

Selbstverständlich ist diese Aufzählung nicht vollständig und bedeutet keine Rangordnung. Hier, in dieser Liste, verbirgt sich die begriffliche Unterscheidung zwischen Geschichte der Mathematik und Historiographie: Die Historiographie hat die Aufgabe, Entwicklung und Entfaltung der Mathematik als historischen Prozess zu erfassen. Historiographie ist also eine historische Wissenschaft; ihr Gegenstand, die Geschichte der Mathematik, ist die Entwicklung der Mathematik in Raum und Zeit, in allen geographischen Regionen und allen Kulturen, von den Anfängen bis in unsere Gegenwart, mit all ihren Bezügen zur Geschichte der Menschheit.

Historiographie der Mathematik ist zu einem autonomen Gebiet der Geschichtswissenschaft und zugleich ein Teilgebiet der Mathematik selbst geworden. Sie ist überdies abhängig vom Standpunkt des Forschers und vom Umfeld, in dem sich der Forscher bewegt. Man hat gelegentlich geäußert, dass jede Generation ihre eigene Geschichte neu schreiben muss.

II

Die im Springer-Verlag herausgebrachten Monographien *5000 Jahre Geometrie* (2005) und *4000 Jahre Algebra* (2005) erfuhren große Anerkennung. Sie sind hervorragend geschrieben und illustriert und vermitteln tiefe historische Einblicke in Geist und Substanz jener zwei mathematischen Hauptgebiete.

In diesem Zusammenhang entstand beim Springer-Verlag die Idee, eine die Fächer übergreifende Historiographie der Mathematik ins Auge zu fassen, leicht lesbar, mit wenigen Formeln, dafür aber mit reichlich kulturellen, philosophischen und historischen Bezügen, alle Zeiten und Kulturen berührend.

Nach jahrzehntelanger Vorlesungstätigkeit war mir klar, dass dieses Projekt in hohem Maße zugleich verlockend und verführend ist. Erst nach reiflicher Überlegung habe ich damals, vor fünf/sechs Jahren, zugesagt, wohl wissend, dass die Inangriffnahme dieser Aufgabe einer (speziellen) Art von Hybris entspricht.

Die positive Hinwendung zu diesem Projekt wurde mir durch Zureden von Kollegen, vor allem aber durch einen Rückgriff auf die Intentionen von Herodot, dem „Vater der Geschichtsschreibung“, erleichtert. Er hatte von 460 bis 430 das Perserreich, Ägypten, Sizilien und Unteritalien bereist und die Verdienste der dort wohnenden Völker gewürdigt, damit „nicht durch die Zeit verblasse, was von Menschen geschah, noch die großen Taten und Wunderwerke (...) in Ruhmlosigkeit versänken.“ Vor allem aber rühmte er die Leistungen der Griechen und beschrieb die damaligen Ereignisse, insbesondere während der Perserkriege.

Er nannte sein Hauptwerk (in lateinischer Umschrift) histories apodexis, also etwa Darlegung von Forschungsergebnissen, von Erkundungen. Das Substantiv ist hergeleitet von historeín, das bedeutet: durch eigene Anschauung oder Nachfrage erkunden, erfragen, in Erfahrung bringen. Von dorther leitet sich das Wort „Historik“ (Geschichtswissenschaft) ab.

In diesem Sinne, als „Erkundungen“ soll dieses Buch verstanden werden. Die Erkundungen sollen hinführen zu wesentlichen Wandlungen und Ereig-

nissen im Entwicklungsprozess der Mathematik, ohne immer bis ins fachwissenschaftliche Detail vorzustoßen. Es kann und soll sich im Sinne von „Erkundungen“ nicht um eine vollständige Geschichte der Mathematik handeln; das ist für einen einzelnen Autor ohnehin und schon aus Platzgründen unmöglich. Die Auswahl der „Erkundungen“ ist natürlicherweise subjektiv. Der Leser wird – wie der Autor auch – nicht wenige Lücken schmerzlich empfinden. Der Autor musste den „Mut zur Lücke“ aufbringen. Als Ausgleich wird eine umfangreiche Reihe vertiefender und weiterführender Literatur angegeben.

Die vergleichsweise oft längeren wörtlichen Zitate (in deutscher Sprache) sollen Stil und Denkweise der Mathematiker hervortreten lassen.

III

Der Leser wird bemerken, dass die Chronologie der Informationen nicht an erster Stelle steht, sondern oftmals durchbrochen wird. Dies war Absicht. Der Autor hat sich bemüht, die inneren Zusammenhänge durch gelegentliche Rückgriffe auf die Vor- und Frühgeschichte zu verdeutlichen, selbst auf die Gefahr von kurzen Wiederholungen hin. Im Idealfall sollten die Abschnitte für sich selbst gelesen werden können; das Gesamtmanuskript ist nicht durchgängig linear aufgebaut.

Das Buch wendet sich nicht in erster Linie an professionelle Mathematikhistoriker, wenn auch in der Hoffnung, dass diese „Erkundungen“ auch dort Interesse finden.

Auch handelt es sich nicht um ein Lehrbuch der Mathematik: Die Bekanntschaft mit Begriffen und Methoden der Mathematik wird im Allgemeinen vorausgesetzt, ebenso auch die Bekanntschaft mit Anspielungen auf politische und philosophische Bezüge.

IV

Ein dankbares Gedenken gilt meinen verstorbenen akademischen Lehrern: W. Schnee (Leipzig), H. Beckert (Leipzig), P. Günther (Leipzig), H. Salié (Leipzig), W. Ilberg (Leipzig), W. Menzel (Leipzig), G. Harig (Leipzig), A. P. Juschkewitsch (Moskau), D. J. Struik (Belmont, USA), J. E. Hofmann (Ichenhausen).

Diese „Erkundungen“ hätten nie veröffentlicht werden können, wenn nicht Freunde und Kollegen mir mit kritischer Durchsicht und guten Ratschlägen zu Hilfe gekommen wären: E. Blumenthal, J. Høyrup, P. Kunitzsch, J. Dauben, M. Folkerts, E. Knobloch, H. Breger, St. Deschauer, E. Fellmann, G. Howson, W. Purkert, R. Tobies, W. Morgenroth, R. Siegmund-Schultze, P. Schreiber, K. H. Schlote, D. Rowe, K. Chemla, I. Grattan Guinness, A. Vogt, H. J. Ilgauds, E. Klementz und andere.

Ein weiteres Dankeschön gilt einer Gruppe von Ärzten – Dr. Friedrich, Dr. Kamann, Dr. Bredow, Dr. Kuchta, Dr. Schmidt, Dr. Löbe, Dr. Peschel – die mir in mancher gesundheitlicher Bedrängnis zu Hilfe gekommen sind und ohne deren Eingreifen das Manuskript nicht hätte vollendet werden können.

Was wäre ein Autor ohne selbstlose Herausgeber? Hier gilt ein großes Dankeschön für unermüdliche Hilfe bei kritischer Durchsicht, für konstruktive Vorschläge und bei der Gestaltung des Manuskripts und der Abbildungen den Herren W. Alten und H. Wesemüller-Kock in Hildesheim.

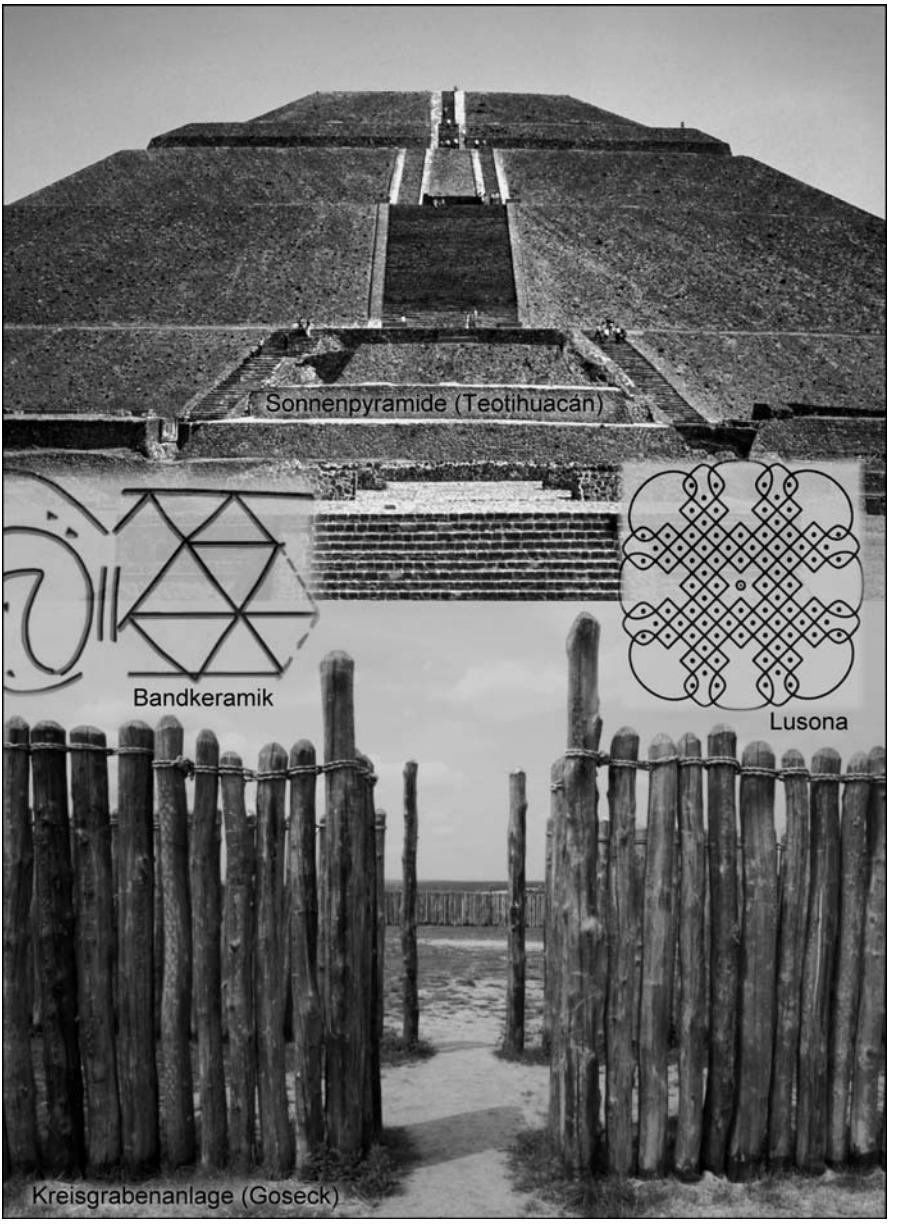
Die „Erkundungen“ wurden getragen von Primär- und Sekundärquellen und damit von der Hilfsbereitschaft und Sachkenntnis der Bibliothekarinnen: I. Letzel, B. Römer, C. Meschtschanowa an der Fakultät für Mathematik und Informatik an der Universität Leipzig, Frau Geithner am Karl-Sudhoff-Institut der Universität Leipzig, Frau V. Franke und Frau R. Schmidt am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach.

Überhaupt Oberwolfach: Zu wiederholten Malen bot das „Mathematische Paradies“ unter den Direktoren M. Barner, M. Kreck und G. M. Greuel diesem Projekt Heimstatt und ideale Arbeitsmöglichkeiten.

Es wäre für mich eine große Freude, wenn dieses Buch viele Menschen erreichen und ihnen die Mathematik näher bringen würde. Mögen sie die vielen Façetten einer Jahrtausende alten und doch ewig jungen Wissenschaft mit Freude erleben.

Hans Wußing

1 Mathematik am Anfang und Ethnomathematik



1.1 Zählen, Zahlen, Figuren

1.1.0 Einführung

Heute dürfte Einigkeit darüber bestehen, dass die Wiege der Menschheit in Zentralafrika gestanden hat.

Als Vorstufe des Zählens, Rechnens und geometrischer Figuren finden sich Kerben und Ritzungen auf Knochen und Steinen, Ornamente auf Tongefäßen aus grauer Vorzeit vor 20 000, 30 000 und viel mehr Jahren.

Erst der Übergang zur Sesshaftigkeit führte zum eigentlichen Vorgang des Zählens und dann auch des Rechnens. Dieser Wandel vom ungebundenen Leben als Jäger und Sammler zum Leben in festen Siedlungen erfolgte in mehreren Stufen über das Leben als Halbnomaden und in einem längeren Zeitraum. Er war verbunden mit Ackerbau und Viehzucht und fand zuerst in den warmen und fruchtbaren Zonen unserer Erde statt, führte zur Bildung früher Kulturen in den Tälern großer Ströme. Er vollzog sich in der Übergangszeit von der Alt- zur Jungsteinzeit, wird auch als neolithische oder agrarische Revolution bezeichnet und ins 8. Jahrtausend vor Christus datiert, liegt also – grob gesprochen – 10 000 Jahre zurück. Dieser grundsätzliche Wandel gesellschaftlichen Lebens in den so entstandenen Frühkulturen führte zu Handel und Warenaustausch zwischen Siedlungen und Völkerschaften und zog die Notwendigkeit des Zählens und der Bildung von Zahlwörtern nach sich. Deshalb kann dieser Zeitraum im weitesten Sinn als Anfang der Mathematik angesehen werden.

Die Ursprünge eigentlich mathematischen Denkens – die Bildung abstrakter mathematischer Begriffe und die Herstellung von Beziehungen zwischen ihnen – reichen jedoch auch bei großzügiger Beurteilung nur ca. 6000 Jahre zurück. Sie finden sich in den Hochkulturen, die im 4. Jahrtausend v. Chr. in den Stromtälern des Hoangho, des Indus, des Nils und im Land zwischen Euphrat und Tigris, also in Mesopotamien, entstanden.

Abb. 1.1.1 Ursprünge der Menschheit (Kenia 1982); Werkzeuge der Steinzeit: Faustkeil, geschäftete Äxte (Venda 1993)

1.1.1 Zahlen und Zahlwörter

Zählen können gehört zu den Fähigkeiten, die nur den Menschen eigen sind. Von Tieren weiß man allerdings aus Beobachtungen, dass einige Tiergattungen – Vögel, einige Säugetiere – kleinere Anzahlen bei Nachkommen oder Futtermengen unterscheiden können; fehlt ein Jungtier, so tritt bei den Eltern kurzfristig Unruhe auf.

Es gibt viele ungelöste Fragen zum Problem, wie sich die menschliche Fähigkeit zum Zählen herausgebildet hat. Einige Aufschlüsse hat man mittels archäologischer, anthropologischer, ethnologischer und sprachwissenschaftlicher Studien erhalten.

Am Beginn dürfte die Fähigkeit gestanden haben, Anzahlen konkreter Gegenstände als gleich oder als unterschiedlich zu erfassen. Kleinkinder im Alter von 4 Jahren können erkennen, ob zu einer (kleineren) Anzahl gleichartiger Gegenstände einige Exemplare hinzugekommen oder davon weggenommen worden sind.

Ethnografen berichteten zu Anfang des 20. Jahrhunderts von Expeditionen zu Völkerstämmen, die sich noch auf der Stufe der Steinzeitkultur befanden, in Zentralafrika, Ozeanien, Zentralamerika. Man zählte dort „eins“, „zwei“, „einige“ „viel“. Da, wo Zahlworte für größere Anzahlen zur Verfügung standen, gab es Fälle, wo die Zahlworte abhängig waren von der Art der Gegenstände. So hieß es bei den Ureinwohnern der Fidschi-Inseln „bole“, wenn 10 Boote, und „karo“, wenn 10 Kokosnüsse gezählt wurden. Reste dieser Bindung der Zahlworte an die Art der gezählten Gegenstände haben sich auch im deutschsprachigen Raum erhalten: Wir sprechen von Zwillingen, einem Duett, einem Paar Schuhe; eine (kleine) Mandel enthält 15, ein Schock 60 Eier.

Umgekehrt kann man aus Zahlwörtern für kleinere Anzahlen auf Zusammenhänge zwischen Sprachfamilien und damit auf die Frühgeschichte von Völkern schließen. Beispielsweise hat man innerhalb der indoeuropäischen Sprachfamilie für deutsch „zwei“, griechisch „$\delta\acute{\upsilon}o$“, lateinisch „duo“, sanskrit „dvi“, ostgotisch „twa“, englisch „two“, dänisch „to“, schwedisch „två“, irisch „da“, russisch „dva“, keltisch „da“, französisch „deux“, italienisch „due“. Hingegen gehören z. B. finnisch, ungarisch und baskisch nicht zur indoeuropäischen Sprachfamilie, weil in diesen Sprachen für „zwei“ ganz andere Worte stehen, z. B. kaksi im Finnischen.

Es gibt ausgedehnte, hoch spezialisierte sprachwissenschaftlich-mathematikhistorische Studien über den Aufbau der Zahlenreihe aus elementaren Zahlwörtern, also über die sog. Reihung der Zahlwörter. So entsteht durch Reihung das Schema 1, $1+1=2$, $2+1=3$, $2+2=4$ mit der Zählschwelle 2, die auf eine Paarung als niedrigste Form der Bündelung zurückzuführen ist und sich sprachlich früher im Dual (neben dem Plural) und zwei als beugbarem Eigenschaftswort ausgeprägt hat (z. B. „zween Herren“ und „zwo Mägde“ in alten Bibeltexten, „Der Diener zweier Herren“ in der Komödie von Goldoni). Das Schema 1, $1+1=2$, $1+1+1=3$, $1+1+1+1=4$, $5=4+1$,

verweist auf die uralte Zählschwelle 4, für die es mehrere Gründe gibt. So können maximal 4 Objekte ohne zu zählen mit einem Blick erfasst werden, die „Handbreite“ (über den Knöchel der 4 Finger ohne den Daumen einer Hand gemessen) ist ein uraltes Maß; im Lateinischen folgt auf bimus (von bi-himus = zweiwintrig), trimus, quadrimus plötzlich quinquennis (fünfjährig von quinque anni), auf semel, bis, ter, quater für einmal bis viermal folgt quinquies, und auf die Eigennamen Martius, Aprilis, Maius und Junius für die ersten 4 Monate des alten römischen Mondjahres folgten Quintilis (später Julius zu Ehren Cäsars), Sextilis (später Augustus) bis December!

Beim weiteren Aufbau der Zählreihe werden Bündel aus 5, 10 oder 20 Einheiten (entsprechend den Fingern einer Hand, beider Hände oder aller Finger und Zehen eines Menschen) gebildet, aber auch solche von 12 (Dutzend von frz. douzaine) oder 60 Einheiten (60 Sekunden = 1 Minute). Nach erneuter Reihung zwischen den Bündeln entstanden dann „Bündel höherer Ordnung“ (Hunderter, Tausender, ..., aber auch Gros für $12 * 12 = 144$). Dies hat sich sowohl in der Reihe der Zahlwörter wie auch in der Zahlschrift ausgeprägt (für weitere Einzelheiten siehe [Menninger 1958], für Zahlschriften im alten China, Ägypten, Mesopotamien, Griechenland und in der römischen Zahlschrift vgl. Kap. 2, 3 und 4).

Werfen wir einen Blick auf die Basis der Zahlensysteme: Der höchst „handgreifliche“ Ursprung des Zählens wird dort besonders deutlich, wo die Basis 10 verwendet wird. Als Grund dafür nennt Aristoteles (4. Jh. v. Chr.) den Umstand, dass alle Menschen 10 Finger haben, die sie zum Zählen benutzen. Die Thraker allerdings, so Aristoteles, hätten ein schlechtes Gedächtnis, benutzten keine großen Zahlen und zählten nur bis 4 [The History of Mathematics –A Reader– 1990, S. 1f.].

Relativ häufig trifft man auch auf eine 20er Basis (Finger und Zehen), gelegentlich auch auf eine 5er Basis (Finger einer Hand). Selten dagegen ist die Basis 12 (zweimal 6 Hauptknöchel einer geballten Faust). Neben dem Zahlsystem der Maya und der Azteken war auch das der Kelten vigesimal, d. h. auf der Basis 20 aufgebaut. Daran erinnert noch ein Relikt im französischen Zahlsystem. Die Zehner sind zwar dezimal aufgebaut: 30 ist 3 mal 10, 40 ist 4 mal 10, aber 80 ist nicht 8 mal 10, sondern 4 mal 20 (quatre-vingt). Und ein altes Pariser Pflegehaus für 300 blinde Kriegsveteranen hat den Namen *„Hôpital des Quinze-Vingts“* (Hospital der fünfzehn Zwanziger). Wie wir noch sehen werden, beruhte das Zahlsystem in Mesopotamien auf der Basis 60.

Erstaunliche Antworten erhält man auf die Frage, wie weit man in frühen Zeiten hat zählen können. Auch hier liegen ethnografische Beobachtungen zugrunde. So fand man, dass eine Einzelperson zwar nur bis zehn zählen konnte, eine Gruppe von drei solchen Menschen aber bis 1000 zählen konnte, etwa dann, wenn eine Viehherde aus einer Einzäunung heraus getrieben wurde: Drei Menschen stehen nebeneinander. Wenn ein Tier passiert, hebt der Erste einen Finger. Nach 10 Tieren sind beide Hände „voll“; dann hebt der

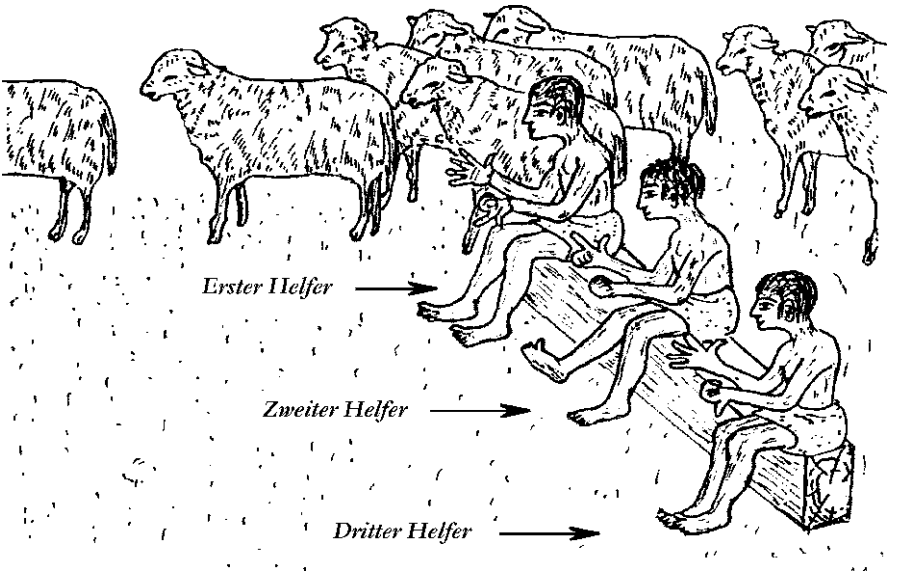


Abb. 1.1.2 Zählen einer Viehherde mit den Fingern von drei Helfern: 627 Tiere haben die Umzäunung passiert; nach [Ifrah 1987, S. 57]

Zweite einen ersten Finger, usw. Wenn dessen beide Hände voll sind, haben 100 Tiere passiert. Dann hebt der Dritte einen Finger, usw., usw.

Als erste schriftliche Zeugnisse des Zählens kann man Einkerbungen auf Knochen interpretieren, die aus der älteren oder mittleren Steinzeit stammen, also 30 000 bis 20 000 Jahre alt sind. Man hat solche „Dokumente“ in verschiedenen Gegenden der Erde gefunden.

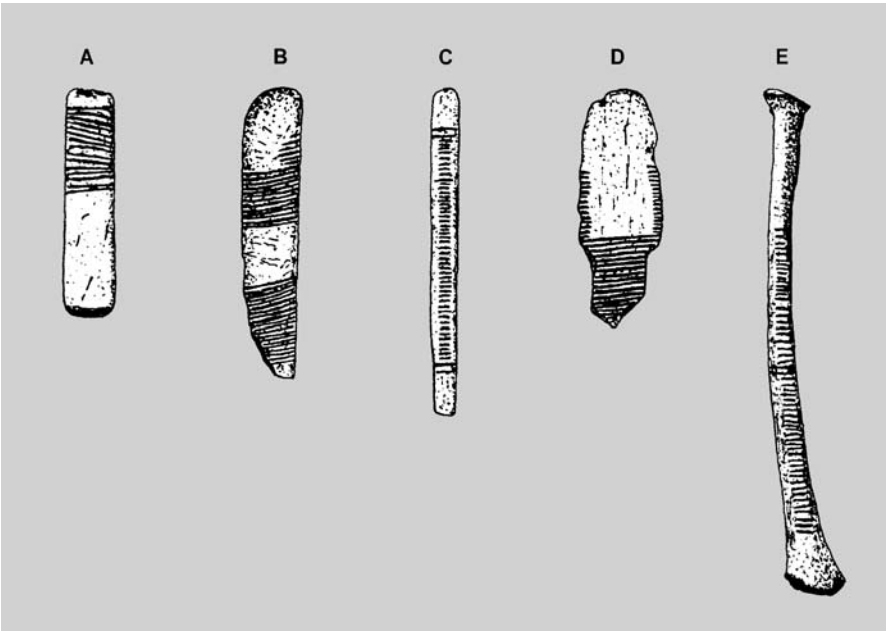


Abb. 1.1.3 Knochen mit Einkerbungen aus dem Spätpaläolithikum: A–D aus dem Aurignacien, E Wolfsknochen aus dem Magdalénien; nach [Ifrah 1987, S. 111]

Der aus Mähren stammende und 1937 aufgefundene Wolfsknochen (rechts in Abb. 1.1.3) weist 55 Einkerbungen auf, fünf Gruppen mit je 5 kurzen und sechs mit je 5 langen Kerben. Die Fünferbündelung ist offensichtlich. Aber natürlich wissen wir nicht, ob die Einkerbungen aus einem realen Vorgang des Zählens entstanden sind, und erst recht nicht, welche Gegenstände eventuell gezählt wurden.

Ganz besondere Aufmerksamkeit erregte der sog. Ishango-Knochen, benannt nach dem Fundort Ishango, einem kleinen Fischerdorf in Zentralafrika (früher Zaire, jetzt Demokratische Republik Kongo, an der Grenze zu Uganda). Er wurde 1960 bei systematischen Grabungen von dem belgischen Archäologen Jean de Heinzelin de Braucourt (1920–1998) entdeckt, in einer durch einen Vulkanausbruch verschütteten Gegend, ähnlich wie in Pompeji (vgl. [Heinzelin 1962], [Huylebrouck 2006]). Das sehr wertvolle Artefakt wird jetzt im Königlichen Museum der Naturkunde in Brüssel aufbewahrt.

Der versteinerte Knochen hat mannigfache Studien und Spekulationen ausgelöst. Er ist knapp 10 Zentimeter lang und an einem Ende mit einem Quarz verziert. Die Datierung mittels der C 14-Methode wird auf die Zeit zwischen 20 000 und 25 000 v. Chr. angesetzt; wieder andere Angaben datieren auf 6500 bis 9000. Die Einritzungen sind deutlich in drei Spalten und in Gruppen angeordnet und besitzen eine mathematische Struktur. Eine innere

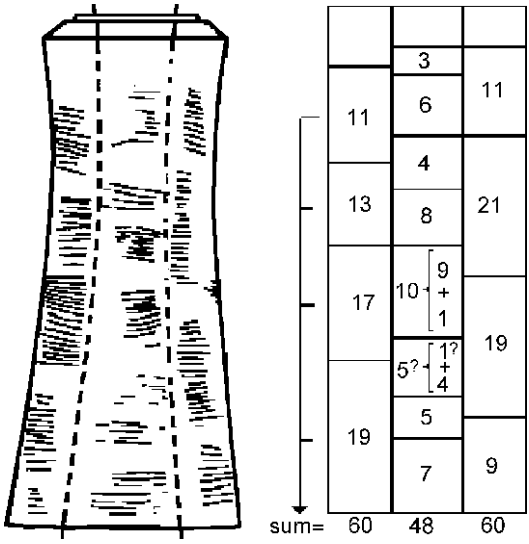


Abb. 1.1.4 Der Knochen von Ishango; Skizze der Einkerbungen auf dem Ishango-Knochen; nach [Spektrum der Wissenschaft 2/2006, S. 13]

mathematische Logik? Mathematische Spielerei mit „Zahlen“? Astronomie? Konkretes Zählen? Menstruationskalender? Bis hin zu der Vision, Frauen seien die ersten Mathematiker gewesen? Auch die Interpretation als Mondkalender findet sich, dürfte aber zu weit führen; vgl. dazu [Huylebrouck 2006].

Eine genauere Betrachtung zeigt Folgendes: Die Kerben sind in Spalten angeordnet. Die linke und die rechte Spalte haben die Summe 60, die mittlere hat die Summe 48. die linke Spalte enthält die Primzahlen 11, 13, 17, 19. Die rechte Spalte zählt $10+1$, $20+1$, $20-1$, $10-1$. Kann man daraus verbindliche Schlüsse ziehen?

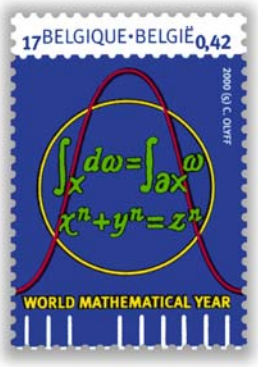


Abb. 1.1.5 Internationales Jahr der Mathematik (Belgien 2000)

Abb. 1.1.6 Ritzungen auf einem Elefantenknochen (Landesmuseum für Vorgeschichte Halle, Sachsen-Anhalt) [Foto Wesemüller-Kock]

Im Jahre 2000 wurde das internationale Jahr der Mathematik begangen. Die aus diesem Anlass herausgegebene belgische Briefmarke zeigt am unteren Rande die drei bzw. sechs Kerben aus der mittleren Spalte des Ishango-Knochens.

Der Knochen aus Mähren ist zwar älter, ist aber nicht so diffizil strukturiert und wird daher nicht als von mathematischer Art betrachtet. So kann der Ishango-Knochen als das bisher älteste bekannte mathematische Dokument betrachtet werden. Die Diskussion hält an, zumal kürzlich bei Ausgrabungen in Sachsen-Anhalt Elefantenknochen mit Ritzungen gefunden wurden, die nach Aussagen von Archäologen vom homo erectus vor ca. 370 000 Jahren stammen, deren Deutung jedoch noch offen ist.

1.1.2 Anfänge der Geometrie

Die Menschen der Frühzeit kamen mit Problemen in Berührung, die „geometrische“ Grundvorstellungen erforderten. Die bei der Nahrungssuche erforderlichen Wanderungen zwangen zur Orientierung in Raum und Zeit. Keramische Erzeugnisse hängen mit Formgestaltung zusammen, der Bau von Behausungen, Gräben und Dämmen – ohne dass abstrakte Begriffe nötig gewesen wären – mit den Vorstellungen von Körpern. Die Beobachtung des Sternenhimmels schuf irgendeine Form räumlichen Denkens.

Sehr schöne Zeugnisse von der Kenntnis geometrischer Figuren bilden die Ornamente auf Keramikerzeugnissen: Dreiecke, Parallelogramme, Kreise und andere Figuren. Die Art der Verzierung gestattet sogar die Unterscheidung verschiedener Stämme und Kulturen, z. B. die sog. Schnurkeramik und die Bandkeramik (vgl. dazu auch [Gerdes 2003]).

Abb. 1.1.7 Tongefäße mit Ornamenten aus Mitteleuropa, ca. 3.500 v. Chr.; Vase und Lendenschurz mit Ornamenten (DDR 1976, Brasilien 1975 und 1981)

Kreisgrabenanlage von Goseck (Sachsen-Anhalt)

Zu den ersten Zeugnissen astronomischer Beobachtung in Mitteleuropa gehören Kreisgrabenanlagen aus der Zeit ab etwa 5000 v. Chr. Eine Rekonstruktion der besonders gut erhaltenen Anlage bei Goseck gibt Aufschluss über das Wissen der ersten Bauernkulturen.

Abb. 1.1.8 Blick in den zweifachen Palisadenring der rekonstruierten Kreisgrabenanlage von Goseck, Sachsen-Anhalt [Foto Wesemüller-Kock]

Abb. 1.1.9 Kalendersteine bei Erdeven in der Bretagne [Foto Wesemüller-Kock]

Die Kultur der Bandkeramik wird so nach den Funden von Tongefäßen und Scherben mit entsprechenden Mustern bezeichnet und befand sich auf den fruchtbaren Lössböden. Die ersten Bauern der Linienbandkeramik siedelten in Mitteleuropa bereits vor 7500 Jahren. Zur Zeit der Stichbandkeramik (ca. 4800 v. Chr.) wurde die Kreisgrabenanlage von Goseck gebaut.

Diese Kreisgrabenanlage erlaubte den Bauern eine exakte Bestimmung der Jahreszeiten anhand des Sonnenstandes. Das war wichtig für die Bestimmung des Zeitpunktes von Aussaat und Ernte. Drei Tore sind in einem doppelten Kreis von Palisaden eingelassen. Zwei Tore markieren exakt den Sonnenaufgang und den Sonnenuntergang zur Wintersonnenwende am 21. Dezember. Ein dritter Ausgang weist nach Norden. Im Bereich des Sonnenauf- und -untergangs zur Zeit der Sommersonnenwende am 21. Juni sind die Abstände zwischen den Pfählen größer gesetzt. Das „Observatorium“ diente sicher auch kultischen Zwecken und wurde um 4800 v. Chr. gebaut, also 2000 Jahre früher als Stonehenge.

Großbauten der Steinzeit

Auch die Errichtung der megalithischen Großbauten – in Portugal, auf den Orkney-Inseln, in Südengland, Nordfrankreich, Irland, Malta und andernorts – erforderte neben beachtlichen technologischen Fähigkeiten geometrische und astronomische Kenntnisse (zu Stonehenge vgl. [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 8f.]).

Abb. 1.1.10 Taulas (Pilzaltäre) aus dem Megalithikum in Hagar Qim auf Malta [Foto Alten]

Diese Steinsetzungen sind in jüngerer Zeit genauestens analysiert worden ([A. Thom 1967], [A. Thom/A.S. Thom 1978], [A. Seidenberg 1962], [van der Waerden 1983] und andere). Dabei hat sich die enge Verbindung von astronomischen Kenntnissen mit religiösen Ritualen erwiesen; viele Einzelheiten sind noch unerforscht, manche Interpretationen umstritten. Einige Autoren gingen sogar so weit, aus der Vermessung solcher Zeugnisse der Megalithkultur zu schließen, dass weit vor der Entwicklung im klassischen Griechenland die Erbauer über die Kenntnis von Ellipse und pythagoreischen Tripeln verfügten sowie über ein verbindliches Längenmaß [The History of Mathematics –A Reader– 1990, S. 8/9]. Diese Interpretationen haben indessen einer internationalen Diskussion nicht standgehalten [Knorr 1985].

Himmelsscheibe von Nebra

Der Fund der bronzenen Himmelsscheibe von Nebra im Jahr 1999 auf dem Mittelberg nahe Halle in Sachsen-Anhalt war eine Sensation, weil auf ihr erstmals der Himmel abgebildet ist, mit Sonne, Mond und den Plejaden, einem für die Bauern wichtigen Sternbild. Die anderen Sterne ließen sich nicht zuordnen. Das Material für das Gestirn besteht aus Goldblechauflage. Etwa 1600 bis 1500 v. Chr. wurde die Scheibe mit Beigaben in den Boden gelegt. Die Differenz des Sonnenauf- und -untergangs zur Zeit der Wintersonnenwende bis zur Zeit der Sommersonnenwende beträgt an diesem geographischen

Abb. 1.1.11 Himmelsscheibe von Nebra, die Beschädigungen an der Scheibe wurden durch Raubgräber verursacht (Landesmuseum für Vorgeschichte, Halle, Sachsen-Anhalt)[Foto Wesemüller-Kock]

Ort 82 Grad in der Realität wie auch auf der Scheibe. Dadurch war sie als Kalendarium einsetzbar.

Die Barke unten auf der Scheibe kann die zur Bronzezeit angenommene Vorstellung über die Rückführung der Sonnenscheibe nachts durch die Unterwelt in die Ausgangsposition für den nächsten Tag darstellen, eine Vermutung, die auch mit dem aus derselben Zeit stammenden, in Dänemark gefundenen Sonnenwagen von Trundholm in Verbindung gebracht wird [Resch 2006, S. 13]. Die Auswertung der Himmelsscheibe ist noch nicht abgeschlossen.

1.2 Ethnomathematik

Ethnomathematik ist eine noch junge, jedoch in rascher Entwicklung befindliche wissenschaftliche Disziplin. Das *Spektrum der Wissenschaft* hat dem Thema „Ethnomathematik“ ein ganzes Heft gewidmet [Ethnomathematik 2006]. Die Beiträge beziehen sich auf allgemeine Aspekte der Ethnomathematik, behandeln aber auch einige spezielle Aspekte wie die Funde und Entwicklungen in Afrika, China und Indien, bei den Eskimos und den Indianern Nordamerikas, in den Kulturen der Maya, Azteken und Inka, aber auch Gedichte der Araber und magische Quadrate in der Welt des Islam.

Gegenwärtig ist es noch schwer, eine endgültige Definition der Ethnomathematik, ihrer Ziele und Methoden zu geben, zumal sie in enger Beziehung zu Archäologie, Anthropologie und – worauf es hier ankommt – zur Historiographie der Mathematik steht. Darum kann und darf die moderne Historiographie der Mathematik nicht an der Ethnomathematik vorbeigehen (eine ausführliche Darstellung der Entstehungsgeschichte der Ethnomathematik findet man bei [Gerdes 1997]).

Statt einer Definition wird eine Schilderung einiger ihrer Aspekte weiterhelfen, ihr Anliegen richtig einzuordnen.

1.2.1 Aspekte der Ethnomathematik

Man kann drei Aspekte der Ethnomathematik auseinanderhalten, wiewohl sie miteinander in Wechselwirkung stehen.

Der mathematikhistorische Aspekt

Die heutige, die moderne globale Mathematik ist verhältnismäßig jungen Datums im Vergleich zu den vielen Tausenden von Jahren, in denen Menschen sich der Mathematik bedienten. Die moderne Mathematik im europäischen und nordamerikanischen Raum bildete sich im Zeitraum von der Renaissance bis etwa 1900 heraus und assimilierte dabei mathematisches Wissen aus vielen Kulturen Asiens, Afrikas und Europas: Reiche Schätze an Begriffen, Methoden und Zielen wurden in die mathematische Kultur Europas „eingeschmolzen“. Die Rückbesinnung auf die nichteuropäischen Quellen ist interessant und eine bedeutende Arbeitsrichtung der Historiographie der Mathematik, die, zwar schon seit dem 19. Jahrhundert gepflegt, heute auch als eine Frage historischer Gerechtigkeit betrachtet wird. Dazu gehört die Entwicklung der Mathematik in Ägypten, Mesopotamien, China samt Japan, Indien und in der islamischen Welt (verwiesen sei etwa auf [Joseph 1991], [Selin 2000]).

In der vorliegenden Darstellung werden jenen Entwicklungen eigenständige Abschnitte gewidmet. Allerdings kann – schon aus Platzgründen – ein nur winziger Ausschnitt aus den internationalen Forschungsarbeiten geboten werden, die zu beeindruckenden Ergebnissen gelangt sind.

Die Aufgabe der Historiographie der Mathematik erstreckt sich auch auf jene mathematischen Kulturen, die entweder untergegangen sind – z. B. Maya, Inka, Azteken – oder auf mathematisches Denken von Völkern, Stämmen, das (noch) in Gebrauch ist. Dies wirkt auf uns oft fremdartig, stammt häufig von anderen Strukturen mathematischen Denkens. Es ist keineswegs primitiv, sondern beruht teilweise auf komplizierten mathematischen Denkformen, die erst mühsam entschlüsselt werden müssen. Der Erforschung jener von Völkern, Volksgruppen oder ethnisch bestimmten Gruppen getragenen Mathematiken wendet sich die Ethnomathematik zu, beispielsweise derjenigen der Kelten, von afrikanischen Völkern, von nord- und südamerikanischen Indianern und von anderen.

Als ein Standardwerk der Ethnomathematik für den amerikanischen Bereich gilt [Cross 1997]. Beispielsweise wird berichtet über die Namensgebung für Zahlen bei den Indianern des Amazonasgebietes, bei den Inuit-Jägern (Eskimos) im hohen nördlichen Amerika, von der Suche nach mittelamerikanischer Geometrie, vom Kalender- und Zahlensystem der Nootka (British Columbia) und von vielem anderen. Auch finden sich viele Details über die Mathematik bei den Azteken, Maya, Inka, über die hier in eigenen Abschnitten berichtet wird.

Diese Studien von einem runden Dutzend Autoren vermitteln auch Einsichten in die Lebensformen, aus denen die überlebensnotwendigen spezifischen Formen der Mathematik entsprungen sind, und über die teilweise katastrophalen Folgen der Eroberung jener Wohngebiete durch die Europäer. Beigegebene Literaturangaben verdeutlichen auch, dass diese Auffassungen und Zielstellungen von einer beachtlichen Anzahl engagierter Forscher vertreten werden. Es erübrigt sich fast zu betonen, dass die anfängliche Außenseiterstellung der Ethnomathematik überwunden ist.

Der pädagogische Aspekt

Der Unterricht in Mathematik nach europäischen, global verbreiteten Mustern und Vorgaben stieß und stößt bei Schülern in den Ländern der sog. Dritten Welt bei allem guten Willen und guter Absicht auf grundsätzliche Schwierigkeiten. Sie beruhen auf dem Unterschied zwischen mathematischem Denken und mathematischem Lernen.

Die Kinder aus den Entwicklungsländern sind vielfach in einer kulturellen Umgebung aufgewachsen, die sich von der „verbindlich“ gewordenen, aufgeprägten globalen Welt unterscheidet. Daher sieht sich der Unterricht von Mathematik in der verbindlich gewordenen internationalen Form (noch dazu in einer Fremdsprache) mit Schwierigkeiten konfrontiert, weil deren Begriffe und Rechenmethoden nicht im Erfahrungsschatz der Kinder liegen: Bildung großer Zahlen, Begriffe für Flächen und Körper, schriftliches Rechnen usw. (vgl. dazu ausführlich etwa [Philp 1973], [Development of Mathematical Education 1973], [Perspectives on Mathematics Education 1986]), [Ferreira 2004]).

Einen Ausweg, mindestens im Übergang zur internationalen Mathematik und damit zum Anschluss an die internationale Wissenschaft, bietet die Ethnomathematik, d. h. der Rückgriff auf die in den verschiedenen ethnischen Gruppen wurzelnden Gewohnheiten. Diese Einsicht wurde in den 60er und 70er Jahren deutlich herausgearbeitet, programmatisch formuliert und experimentell mit Erfolg umgesetzt.

Einer der aktivsten Vertreter der Ethnomathematik, der Brasilianer Ubiratan D'Ambrosio (geb. 1932), der mit dem nur selten vergebenen Kenneth O. May Prize für seine Verdienste um die Historiographie der Mathematik ausgezeichnet wurde, hat die Forderung nach Berücksichtigung der Ethnomathematik im Unterricht des öfteren deutlich formuliert, 2006 mit den Worten:

„Die unbestreitbare kulturelle Dominanz des Westens wird durch die Geschichte belegt, besonders durch diejenige der Wissenschaften und der Technik. (. . .)
Die traditionelle Mathematikgeschichtsschreibung weigert sich anzuerkennen, dass eine neue Ethnomathematik das Frühstadium ist, das neue Theorien und Praktiken durchlaufen, bevor sie in die Institution Wissenschaft Eingang finden. Deshalb beziehen die Ethnomathematiken die Anthropologie und die mündlich überlieferte Geschichte mit ein. Auf diesem Niveau müssen sie sich auch in die Lehrpläne einbringen. Die Studenten sollen sich mit den Ethnomathematiken auseinandersetzen, um ihre Fähigkeiten zur Kommunikation und zur Analyse zu bereichern, die sie später im Berufsleben brauchen. Ähnliches gilt für die Ausbildungsprogramme für zukünftige Lehrer.
Die Kinder kommen mit ihrer eigenen Geschichte in die Schule. In ihrer eigenen Erfahrung haben sie Mittel der Kommunikation und der Analyse angewandt, die sie sich selbst zugelegt oder aus ihrer kulturellen Umgebung übernommen haben. Anders gesagt, die Kinder bringen in die Schule ihre eigene Ethnomathematik mit.
Unterrichten wir die Mathematiken anderer Kulturen, etwa die der Chinesen (. . .), so verfolgen wir damit zwei Ziele: Zum einen geht es darum, eine Form des Wissens – die Mathematik – zu entmystifizieren, indem ihr die Aura des ewigen und absoluten Wissens genommen wird; zum anderen darum, die intellektuellen Erfolge fremder Zivilisationen, Kulturen, Völker, Berufe und Geschlechter anzuerkennen.“ [D'Ambrosio 2006, S. 8f.]

Der politische Aspekt

Ersichtlich hängen die beiden genannten Aspekte auch mit politischen Intentionen der Ethnomathematik zusammen, insbesondere mit der „neuen Ethnomathematik“ nach dem Zweiten Weltkrieg. Der Zusammenbruch des Kolonialsystems ermöglichte und förderte die Bestimmung des kulturellen Standortes und der frühen Geschichte der ehemals kolonialen Gebiete. Die Ethnomathematik hilft auch, die historischen Wurzeln ehemals unterdrückter Völker wieder zu entdecken. Hier liegen wohl – sofern Überspitzungen vermieden werden können – Aufgaben der Zukunft wie sie z. B. vom Nationalmuseum in Mexico-City erfüllt werden: Dort werden die präkolumbianischen Wurzeln des mexikanischen Volkes in überzeugender Weise demonstriert.
Kritisch bezüglich der Historiographie bemerkt daher D'Ambrosio:

„Nach traditioneller europäischer Auffassung ist die Geschichte der Mathematik eine geradlinige Entwicklung von einem primitiven Urzustand bis zur gegenwärtigen Hochblüte. Demnach wäre alles, was sich fern von diesem Hauptstrom abgespielt hat, eine verfehlte Bemühung,

ein nettes Kuriosum oder bestenfalls „richtige“ Mathematik in exotischem Gewand. Es ist an der Zeit, diese einseitige kolonialistische Sicht abzulegen.“ [D'Ambrosio, S. 8]

1.2.2 Beispiel aus Afrika: Sona Geometrie

Im Jahre 1997 brachte Paulus Gerdes ein Buch zur Ethnomathematik heraus, in dem u. a. am Beispiel der *Sona*-Geometrie komplizierte geometrische Muster, die *Sona*, analysiert werden.

Die *Sona* sind Sandzeichnungen einer bisher weitgehend unbekannt gebliebenen Geometrie der Bantu-Völker aus dem Süden Zentralafrikas (heute: Teile von Angola, Sambia, Kongo) [Gerdes 1997].

Paulus Gerdes (geb. 1952) stammt aus den Niederlanden und erreichte im südafrikanischen Mosambik einflussreiche Stellungen im dortigen Bildungswesen, u. a. an der Pädagogischen Universität Maputo. Er gilt als einer der führenden Vertreter der Ethnomathematik, insbesondere in pädagogischer Absicht:

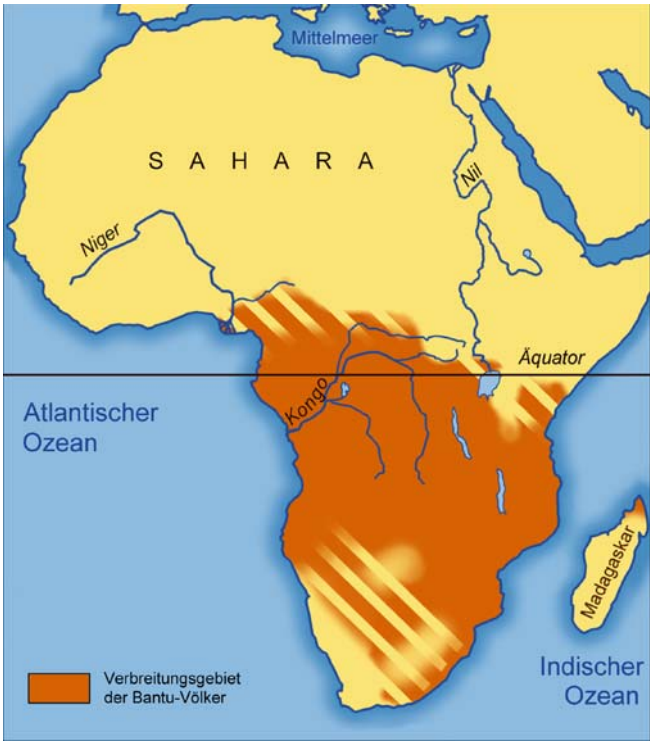


Abb. 1.2.1 Siedlungsgebiete der Bantu-Völker

> *„Eine der Zielstellungen der ethnomathematischen Forschung liegt in der Suche nach Möglichkeiten, den Mathematikunterricht besser in den kulturellen Kontext der Studenten und Lehrkräfte einzubetten. Es wird eine Mathematikausbildung angestrebt, die eine Wertschätzung der den afrikanischen Kulturen inhärenten wissenschaftlichen Wurzeln ermöglicht und dies als Grundlage nutzt, besser und schneller das wissenschaftliche Erbe der gesamten Menschheit zu erreichen.“*
> [Gerdes 1997, S. 21]

Der zweite Teil des Werkes von Gerdes ist konkreten Beispielen der Umsetzung dieser didaktischen Aufgaben gewidmet.
Wie der Autor berichtet, stieß er 1986 in der Bibliothek der Eduardo Mondlane Universität in Maputo auf eine anthropologische Studie [Fontinha 1983], die sich mit Sandzeichnungen (Sprechweise: *lusona* im Singular, *sona* im Plural) der Tschokwe (eines Volksstammes hauptsächlich in Angola) beschäftigte. Dies löste die Arbeit von Gerdes aus.

> *„Die meisten dieser Zeichnungen gehören einer alten Tradition an. Sie beziehen sich auf Sprichwörter, Fabeln, Spiele, Rätsel, Tiere usw. und sind wichtig bei der Übertragung von Kenntnissen und Weisheiten der einen Generation auf die nächste.“*
> [Fontinha 1983, S. 37], [Gerdes 1997, S. 32]

Eine erste Angabe: *Sona* sind Muster aus Linien, die geometrischen Algorithmen folgen und die Punkte eines Bezugsgitters umfassen. Bevorzugt werden Symmetrien und Monolinearität, d. h. die Linien entstehen aus einer einzigen, zusammenhängenden Linie.

Das Prinzip: Ein Sandboden wird mit einer Hand geglättet. Die Fingerspitzen des Zeige- und Mittelfingers der rechten Hand markieren im festen Abstand in senkrechten und waagerechten Linien Punkte (Vertiefungen) im

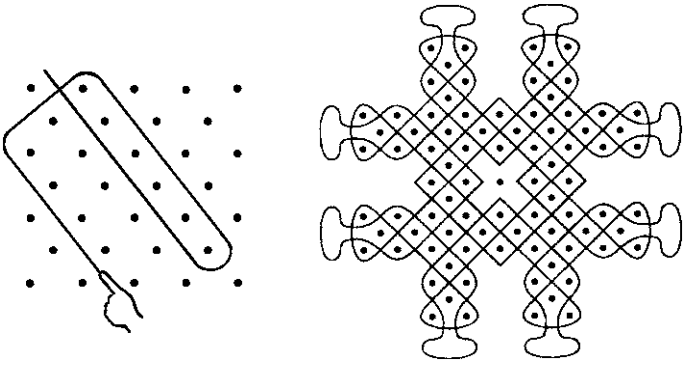


Abb. 1.2.2 a) Entstehung einer Lusona; b) Lusona „Rat der Tänzer“
[Gerdes 1997, S. 33]

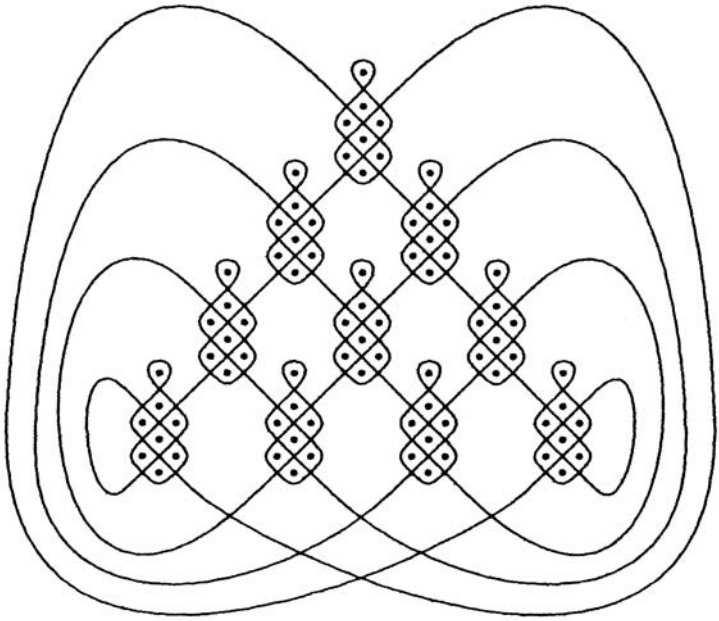


Abb. 1.2.3 „Zehn Vögel“ [Gerdes 1997, S. 235]

Sand. Die Spitze des rechten Zeigefingers zeichnet dann die Linie. Der Zeichner (bzw. der Schreiber) hat für die geplante Linie das Punkteschema (eine Art Koordinatensystem) entworfen, verfolgt also eine Absicht. Dahinter stehen Flechtmuster, geometrische „Algorithmen“, Denkspiele nach Art „Finde das fehlende Muster“, Mitteilungen an andere Menschen, Warnungen, Suche nach Symmetrieachsen und vieles andere mehr (vgl. dazu ausführlich [Gerdes 1997]).

Zu dem hinter der Zeichnung liegenden geometrischen Algorithmus sei auf das Werk von Gerdes und die dort aufgeführte, reichhaltige Literatur verwiesen.

Bei den Linien gibt es Übereinstimmungen mit Funden aus Mesopotamien und Ägypten (z. B. mit Mustern auf Skarabäen, ca. 1500 v. Chr.), aber auch direkte Beziehungen zu Indien und den Tamilen in Südindien, wo eine ähnliche Fülle von Linien, dort *kolam* genannt, existiert. Die weiblichen Bewohner der Häuser malen, manchmal in farbig wunderbarer Schönheit, komplizierte Muster vor der Haustür (vgl. ausführlich [Hoeppe 2006]).

1.3 Kenntnisse und Leistungen der Azteken, Maya und Inka

Einige Autoren rechnen die Mathematik im präkolumbianischen Amerika zur Ethnomathematik. Deshalb werden die in den Indiokulturen Mittel- und Südamerikas entwickelten mathematischen Fähigkeiten auch an dieser Stelle behandelt. Zu den Konzepten und Darstellungen geometrischer Objekte bei den Inuit und den Indianern Nordamerikas sei verwiesen auf [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005]. Über die mathematischen Denk- und Zählweisen sowie über geometrische Muster bei Stickereien unterrichten u. a. [Barta/Shockey 2006], [Barkley 2006]. Über die Zählfertigkeit der Indianer im Amazonas Gebiet berichtet [Harris 2006].

Diese Ergebnisse sind relativ neuen Datums, während Architektur, Kultur und auch die Mathematik der Azteken, der Maya und der Inka schon im 19. Jahrhundert wissenschaftliches Interesse erweckt haben.

1.3.0 Zur Geschichte

Es ist eine gedankenlose Sprechweise, im Jahre 1492 sei Amerika durch Kolumbus entdeckt worden – allenfalls wäre zu sagen, durch Europäer entdeckt (dies berücksichtigt noch nicht einmal die – wenn auch vorübergehende – Ansiedlung der Wikinger unter Leif Ericson um 1001 in Nordamerika).

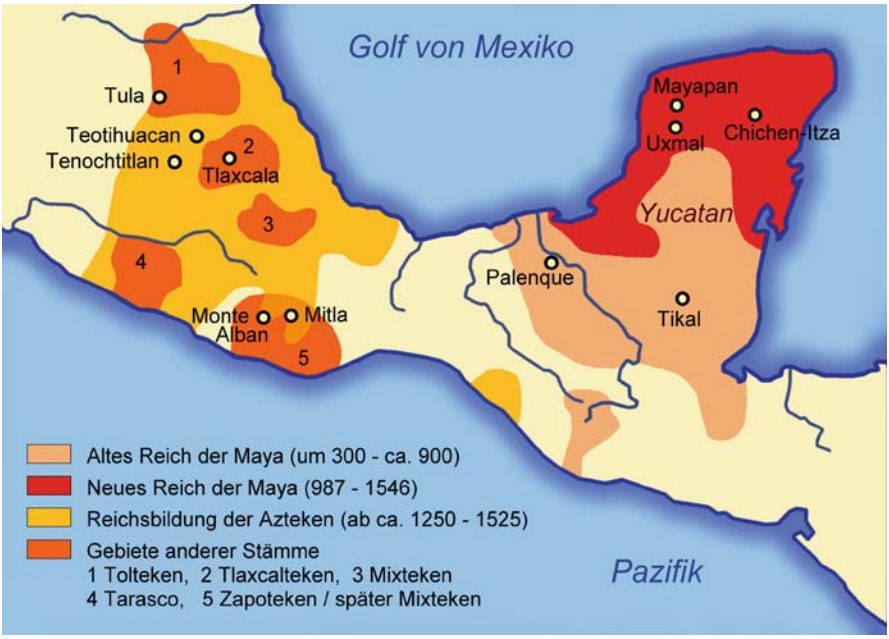


Abb. 1.3.1 Kulturen der Indios in Mittelamerika

Jedenfalls ist der amerikanische Kontinent zwischen 18 000 und 13 000 vor unserer Zeit von Ostasien her besiedelt worden, und zwar über die damals noch vorhandene Landverbindung zwischen Nordostasien und Nordwestamerika. Heute trennt dort die Beringstraße beide Kontinente. Sesshaft gewordene Stämme bzw. Völker schufen bedeutende Hochkulturen; am bekanntesten sind die der Azteken und Maya in Mittelamerika und der Inka in Südamerika. Vor etwa 7000 Jahren gelang die Züchtung von Nutzpflanzen (Bohne) und vor allem des Maises, viel später der Kartoffel. Im jetzigen Peru entstanden schon um 1800 v. Chr. lokal begrenzte Kulturen mit Kunstbauten (Dämme, Terrassen, Rückhaltebecken) zur Nutzung der spärlichen Niederschläge, die nur mit „Ingenieurwissen“ haben vollbracht werden können. An der Westseite der Anden bildete sich ca. 1400 v. Chr. die Chavinkultur. Um 1200 v. Chr. errangen die Olmeken an der südmexikanischen Golfküste die Vorherrschaft. Bei raschem Anstieg der landwirtschaftlichen Produktion (in Südamerika Maniok, Süßkartoffel, Erdnuss) und gestützt auf einen ausgedehnten Fernhandel entstanden die hochorganisierten Staatsgebilde der Maya und der Azteken und anderer Stämme in Mittelamerika. Das Reich der Inka erstreckte sich im westlichen Südamerika und besaß eine beträchtliche Ausdehnung, von Ecuador bis Chile.

Abb. 1.3.2 Tempelbezirk in Teotihuacán (*Ort der Götter*): Blick von der Mondpyramide über die Prozessionsstraße zur Sonnenpyramide
[Foto Jackhynes/Wikimedia Commons]

Abb. 1.3.3 Stadtplan von Tenochtitlán, nach einem 1576 entstandenen europäischen Druck [ÖNB Bildarchiv, Wien: E12.422-C/D]

Relikte von Gebrauchsgegenständen aus der Frühzeit besitzen wunderschöne geometrische Muster und Figuren einer bemerkenswerten künstlerischen Gestaltungskraft.

Die Großbauten der mittelamerikanischen Völker haben zu Recht unsere Bewunderung, vor allem, wenn man bedenkt, dass das Rad nicht in Gebrauch war und keine Zugtiere zur Verfügung standen. Alles musste mit menschlicher Körperkraft geleistet werden (vgl. ausführlich [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 182–239], [Welt- und Kulturgeschichte. Bd. 8, 2006, S. 415–512], [Große Zivilisationen von den Anfängen bis zur Gegenwart 2004]).

Protoklassik

Die Archäologen unterscheiden bei der Entstehung der Hochkulturen auf amerikanischem Boden – nach einer formativen Entwicklung – zwei Perioden: die Protoklassik (ca. 500 v. Chr. bis 200 n. Chr.) und die klassische Periode (ca. 200 bis 900 n. Chr.); hier erfolgte der Ausbau gesellschaftlicher Strukturen mit hoher Kunstentfaltung. In Mittelamerika fällt in die Periode der Klassik u. a. die Machtentfaltung Teotihuacáns, einer Stadt, die um 450 n. Chr. ca. 120 000 Einwohner besaß und ca. 25 Quadratkilometer bedeckte. In der Zeit der Teotihuacán-Kultur entstanden die großartigen Sonnen- und Mondpyramiden (Höhen 63 bzw. 42 m).

Die Bauten wurden unter Verwendung einfacher Hilfsmittel errichtet: Senkblei, Richtscheit, Keil, Maurerkelle, wohl auch Zirkel. Merkwürdigerweise scheint keine ausgebildete Schrift existiert zu haben.

Nach 550 trat eine Periode des Verfalls ein; eine Brandkatastrophe um 650 leitete den Untergang ein.

Die Teotihuacán-Periode hat mit ihren Errungenschaften als Leitkultur für spätere Herrschaftssysteme anderer Stämme und Völker (z. B. Zapoteken, Tolteken, Totonaken, Olmeken) gedient.

1.3.1 Die Azteken: Kalenderrechnung und ummantelte Pyramiden

In der klassischen Periode gründeten die Azteken nach langen Wanderungen 1325 ihre Hauptstadt Tenochtitlán auf einigen Inseln in einem Seengebiet, im Gebiet der heutigen Ciudad de México. Von dort aus unterwarfen die Azteken ihre Umgebung; von ihren Vorgängern wurden Pyramidenbau, Stein- und Metallbearbeitung und anderes mehr übernommen. Zusammen mit ihren Verbündeten schufen die Azteken ein ausgedehntes Reich mit etwa 6 Millionen Einwohnern. Tenochtitlán, von Wasserwegen durchzogen und durch Dämme mit dem Festland verbunden, dürfte 250 000 Einwohner besessen haben. Der Staat war straff organisiert: König, Priester, Adlige, Soldaten, Sklaven. Es gab Menschenopfer, begründet und motiviert mit religiösen Kulten.

Während eine strenge Auswahl aus niederen Schichten eine militärische Ausbildung erfuhr, erhielten die Söhne der Adligen in wohlorganisierten höheren Schulen eine Ausbildung in Militärstrategie, Naturwissenschaften, Kalenderrechnung, Rhetorik und Dichtkunst, um sie für eine Laufbahn als Offizier, Priester oder höherer Beamter vorzubereiten.

Die Azteken rechneten (wie die Maya) mit einem Positionssystem zur Basis 20. Nach ihrer Kalenderrechnung – wichtig für die Landwirtschaft – wurde das Sonnenjahr in 18 Monate zu je 20 Tagen eingeteilt; dazu gab es 5 „leere Tage“. Die Tage eines Monats erhielten Namen. Deren Bezeichnungen befin-

Abb. 1.3.4 Ausbildung in Astronomie/Astrologie zu Schulbeginn (nach altmexikanischem Kodex in Florenz) (Mexiko 1982)

Abb. 1.3.5 Aztekischer Kalenderstein (im Museo Nacional de Antropología, Mexico-City) [Foto Alten]

den sich als Glyphen auf einem Kreisband des berühmten Kalendersteines in Mexico-City. Im Zentrum dieses Steines steht die Sonne, umrahmt von den vier vorher abgelaufenen Weltzeitaltern.

Namen der Monate:	Namen der Tage:
1 Wasserbedarf	1 Alligator
2 Menschenhäutung	2 Wind
3 Kurzes Fasten	3 Wohnung
4 Langes Fasten	4 Leguan
5 Trockenheit	5 Schlange
6 Bohnenbrei	6 Menschenschädel
7 Kurzes Fasten der Herrscher	7 Hirsch
8 Großes Fasten der Herrscher	8 Kaninchen
9 Geburt der Blüten	9 Wasser
10 Obstfall	10 Hund
11 Monat der Besen	11 Affe
12 Rückkehr der Götter	12 Gras
13 Bergfest	13 Schilf
14 Vogel	14 Jaguar
15 Bannerfest	15 Adler
16 Regen	16 Geier
17 Schlechtes Wetter	17 Bewegung
18 Wiedergeburt	18 Messer
(es existieren abweichende	19 Regen
Übersetzungen)	20 Blüte

Zur Bezeichnung der Tage eines Sonnenjahres wurde die Nummer des Monats mit dem Namen kombiniert. Außerdem rechneten die Azteken wie zuvor schon die Maya nach einem „rituellen“ Kalender mit 13 Perioden zu je 20 Tagen, d. h. das Jahr zu 260 Tagen. Da das kleinste gemeinsame Vielfache von 365 und 260 die Zahl 18 980 ergibt, wiederholt sich die gleiche Konstellation beider Kennzeichnungen eines Tages jeweils nach 52 Sonnenjahren – ein Zeitraum, nach dem jedes Mal die Pyramiden einen neuen Mantel erhielten [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 192f.].

Mit Feuerwaffen und viel Glück eroberten die Spanier unter dem Konquistador Hernán Cortés (1485–1547) von 1519 bis 1521 die aztekische Hauptstadt Tenochtitlán und zerstörten sie vollständig. Aus den Steinen der aztekischen Bauten errichtete man christliche Kirchen und Verwaltungsgebäude. Man ging barbarisch gegen die Indianer vor; der letzte aztekische König wurde 1525 hingerichtet. Als Vorwand der Unterdrückung dienten die aztekischen Menschenopfer, zur gleichen Zeit, als gerade in Spanien die Inquisition wütete.

1.3.2 Die Maya: Tempel, Pyramiden und geheimnisvolle Glyphen

Die Gruppe der indianischen Völker mit der Maya-Sprache (ungefähr 2 Millionen Menschen) hat in präkolumbianischer Zeit die höchste Stufe ihrer Kultur erreicht. Sie entwickelte sich seit etwa 2000 v. Chr. im Süden Mexikos (Halbinsel Yucatán, Chiapas, Honduras, Guatemala). Die höchste Entfaltung wird auf etwa 500 n. Chr. datiert. Als die Spanier eintrafen, war der Höhepunkt bereits überschritten. Es gab zahlreiche Städte, Tempelanlagen und Pyramiden mit hervorragenden bildlichen Darstellungen. Viel davon musste aus dem wuchernden Urwald befreit werden. Manche der grandiosen Bauwerke wurden erst im 19. Jahrhundert überhaupt entdeckt, einige sogar erst im 20. Jahrhundert. Anders als im zentralisierten Staat der Azteken war das Reich der Maya eher ein Konglomerat von ungefähr 150 Stadtstaaten, mehr oder weniger groß, rings umgeben von ländlicher Bevölkerung. Der Verbund der Stadtstaaten war allerdings brüchig, es gab Auseinandersetzungen, auch militärischer Art.

Viele der Städte erweisen sich als planmäßig angelegt, Paläste, Pyramiden, öffentliche Plätze, unter Verwendung geometrischer Grundkenntnisse (ausführlich in [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 193–200]).

Der Name des Häuptlings (des Herrschers) „Kukulcan“ ist die Übersetzung seines Namens „Quetzalcoatl“ in seiner Stammessprache in die Maya-Sprache und bedeutet soviel wie „Gefiederte Schlange“. Vieles aus der Geschichte der Maya-Völker ist noch ungeklärt oder unter den Archäologen umstritten.

Die Hierarchie der zahlreichen Götter ist (noch) nicht aufgeklärt; mehr als zweihundert wurden verehrt. Menschenopfer waren üblich. Als oberster der Götter galt wohl Hunab Ku (Weltschöpfer). Sein Sohn Itzauná (Herr des Firmaments) war Schutzgott für Tag und Nacht; er galt auch als Schutzherr

Abb. 1.3.6 Pyramide des Kukulcan, genannt El Castillo, in Chichén Itzá (Yucatán, Mexiko), 10. Jahrhundert [Foto Alten]

der Wissenschaften und der Maya-Schrift. Daneben gab es einen Regengott, einen Maisgott; Mais war neben Bohnen und Jagdwild das Hauptnahrungsmittel.

Besonders große Rätsel gibt uns die Tatsache auf, dass die Maya aus dem bergigen Guatemala und Honduras nach Yucatán auswanderten. Als Grund dafür kommen die Beschädigung fruchtbaren Bodens durch Vulkanausbrüche und Erdbeben, vielleicht auch kriegerische Verwicklungen in Betracht. Im Gebiet der in den Bergen wohnenden Maya gab es 250 n. Chr. eine gewaltige Naturkatastrophe. Der Vulkan Ilopango brach aus und bedeckte im Umkreis von 75 Kilometern das Land mit Asche und Bimsstein. Jedenfalls entstand seit der Mitte des ersten Jahrtausends im Flachland von Nord-Yucatán eine große Anzahl von Maya-Städten; unter ihnen die schon 495 gegründete Stadt Chichén Itzá (soviel wie „Am Brunnen des Itzá-Stammes“).

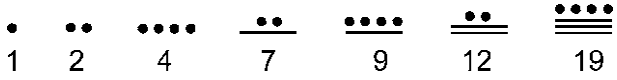
Gegen Ende des 10. Jahrhunderts wanderten Teile der aus ihren ursprünglichen Wohnsitzen vertriebenen Tolteken in die Maya-Gebiete ein. Die Kunst der Ausgestaltung der Gebäude wurde reichhaltiger, aber die Religionszeremonien wurden grausamer. Ein immerhin 200 Jahre anhaltender Friede ließ Kunst und Kultur zu neuen Höhepunkten gelangen; Historiker sprechen direkt von einer „Renaissance“ oder „Zeit der Maya-Tolteken-Kultur“.

Die Maya-Tolteken-Kultur besaß eine ausgereifte, wenn auch komplizierte Schrift, die bis heute trotz des Einsatzes von Computern noch nicht endgültig entschlüsselt werden konnte. Bezüglich Astronomie und Kalenderrechnung

Abb. 1.3.7 Tempel der 1000 Säulen mit dem Götterboten Chac-Mool im Weltkulturerbe Chichén Itzá (Yucatán, Mexiko) [Foto Alten]

waren die Maya von einer Art Leidenschaft und geradezu Besessenheit (ausführlich bei [Lounsbury 1978]). Allerdings muss man bedauernd feststellen, dass der allergrößte Teil der schriftlichen Zeugnisse durch den fanatischen Bekehrungseifer der Spanier vernichtet worden ist; nur drei, allerhöchstens vier Maya-Handschriften sind erhalten geblieben.

Das Zahlensystem war ein (unreines) Positionssystem zur Basis 20 mit einer „Null“ (wie bei den Azteken und in Europa bei den Kelten). Etwas stilisiert wurden die Zahlen 1 bis 19 durch eine Kombination von Punkten und waagerechten Strichen mit einem Punkt für eine Einheit und einem Strich für fünf Einheiten bezeichnet, also z. B.



Die Zeichen können auch senkrecht stehen, mit den Punkten auf der linken Seite. Die Interpretation des Null-Symbols ist unterschiedlich. Neben der Muschel traten weitere Glyphen als Symbol für die Null auf.

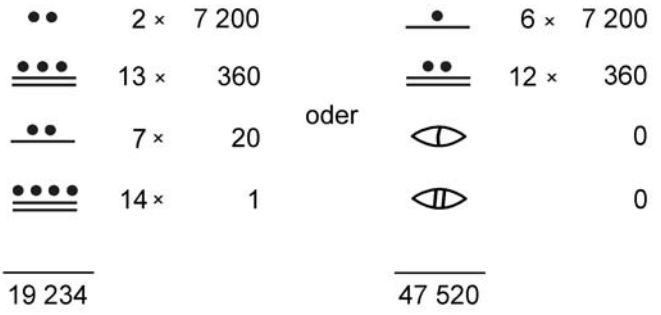
Daneben waren – insbesondere auf Keramiken und Skulpturen – die Ziffern in Form von Götterköpfen in Gebrauch. Die Ziffer 5 z. B. wurde durch den Kopf des Maisgottes, die 10 durch den Kopf des Totengottes dargestellt.

Die „höheren“ Zahlen, die eigene Namen besaßen, wurden in „unreinen“ zwanziger Schritten gebildet: So bedeutet „zehn-neun nach zwanzig“ die Zahl 39. Das Positionssystem ist jedoch nicht streng vigesimal, denn die

Abb. 1.3.8 Die kegelförmige „Pyramide des Zauberers“ in Uxmal (Yucatán) [Foto Alten]

weiteren Stellen entsprechen nicht den Potenzen von 20, sondern – vermutlich in Anlehnung an das Sonnenjahr mit 18 Monaten à 20 Tagen – den mit 18 multiplizierten Potenzen $18 * 20$, $18 * 20^2$, ...

Zahlen über 20 wurden in diesem System in senkrechten Spalten mit so vielen Zeilen aufgeführt, wie es Ordnungen gab, beginnend mit den Einheiten erster Ordnung in der untersten Zeile, z. B.



Der Dresdener Kodex einer Maya-Handschrift (in der Sächsischen Landes- und Staatsbibliothek Dresden) ist die vielleicht schönste der erhaltenen Handschriften. Ebenso kostbar sind der Madrider Kodex und der Pariser Kodex.

Der Sachverhalt mit der Null ist komplizierter als man denken sollte (vgl. dazu [Cauty/Hoppan 2006]). Man unterscheidet zwischen „kardinaler“ Null,

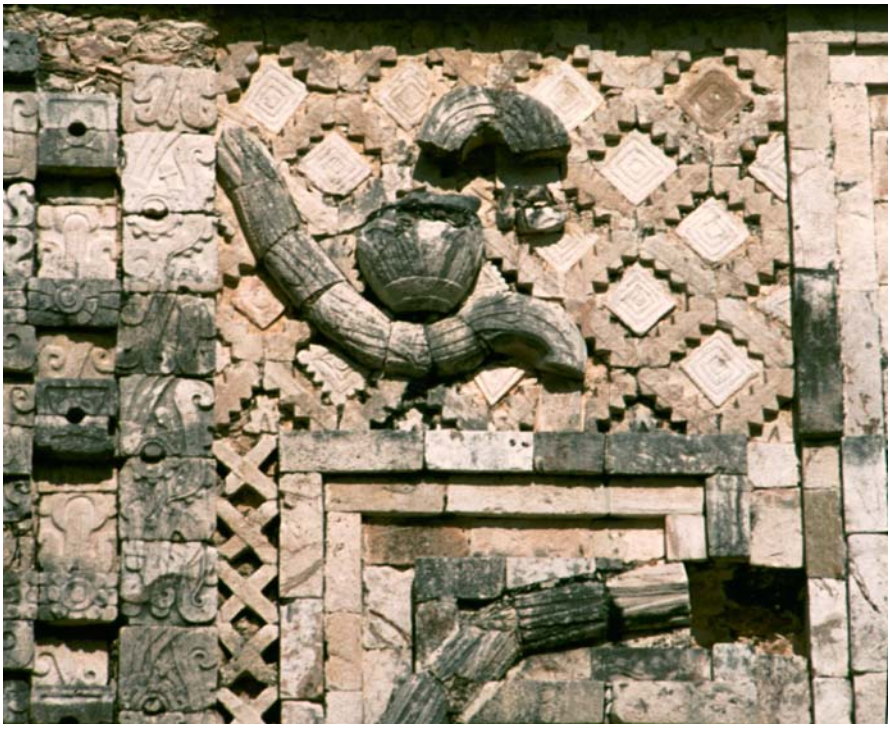


Abb. 1.3.9 Ornamente am sog. Haus der Nonnen in Uxmal [Foto Alten]

z. B. zwanzig Tage und „ordinaler“ Null, z. B. am zwanzigsten Tag. Dies ist unsere Sprechweise, gemeint ist der Unterschied zwischen einer Zeitspanne und einem fixen Datum. Um die Kompliziertheit noch zu steigern: Die Glyphen (gr. Vertiefungen; hier in der Bedeutung Bildzeichen) wechselten während des Ablaufs der Geschichte der Maya; die ordinale Null ist älter. Auch wurden in Schriftstücken und auf Bauwerken verschiedene Glyphen verwendet. Zudem unterschieden die Maya – wie später die Azteken – zwischen einem 260 Tage langen, religiös bestimmten Jahr und einem Sonnenjahr von 365 Tagen. Diese Verwicklungen wurden erst zu Beginn des 20ten Jahrhunderts durch den nordamerikanischen Archäologen Sylvanus Morley ergründet.

Das Zahlensystem der Maya stand im engsten Zusammenhang mit dem Kalender; die Himmelsbeobachtungen erfolgten mit verblüffender Präzision und waren weitaus genauer als etwa die im Europa der Renaissance, und das, obwohl die Maya nicht über Glas und damit über keine optischen Instrumente und auch nicht über Sand- oder Wasseruhren verfügten, geschweige denn über mechanische Uhren. Die Darlegung der komplizierten Einzelheiten würde hier zu weit führen; verwiesen sei auf [Lounsbury 1978].

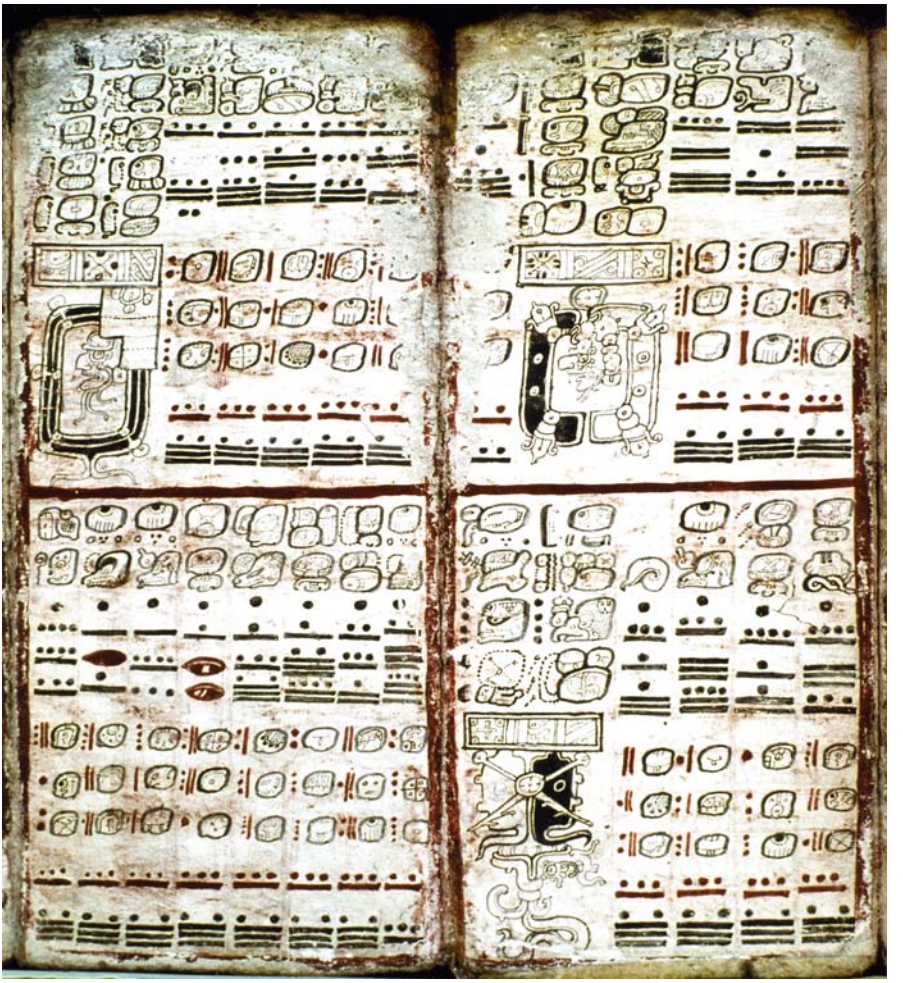


Abb. 1.3.10 Maya-Handschrift im Codex Dresdensis, Tafeln 55 und 56; Berechnung der Mond- und Sonnenfinsternisse (Codexteil B r; auf Rinde 20,8 × 9,1 cm, 12. Jh.) [SLUB Dresden/Abt. Deutsche Fotothek, Mscr. Dresd. R 310]

Jedenfalls: Die Bestimmung der Jahreslänge zu 365,242 Tagen ist genauer als die unseres gregorianischen Kalenders mit 365,2425 Tagen; ein Sonnenjahr hat jedoch exakt 365,242198 Tage; der Wert der Maya weicht also nur um $1,98/10\,000$ davon ab, der des gregorianischen Kalenders jedoch um $3,02/10\,000$! Große Aufmerksamkeit verwandten die Maya auf die Beobachtung der Venus; sie fanden für deren durchschnittliche synodische Umlaufzeit 584 Tage statt des wirklichen Wertes von 583,95 Tagen. Manches deutet sogar darauf hin, dass die Maya auch Mars, Jupiter und Merkur beobachteten

Abb. 1.3.11 Kulturen der Indios in Südamerika

[Ifrah 1987, S. 446]. Wie aus dem Dresdener Kodex hervorgeht, dürfte sogar die Vorausberechnung von Sonnenfinsternissen möglich gewesen sein.

Es sollte nicht unerwähnt bleiben, dass sich einige Bestandteile der Maya-Kultur erhalten haben. Es gibt in Mexiko zahlreiche Maya sprechende Dorfgemeinschaften; ihre Religion ist eine Art Verschmelzung von christlichem Denken mit Maya-Denkweisen.

1.3.3 Rätsel der Nazca-Kultur

Seit den 40er Jahren des 20. Jahrhunderts zog die Nazca-Kultur in Peru die Aufmerksamkeit der Archäologen auf sich; insbesondere die sog. Scharrbilder (Geoglyphen) in der Wüste südlich von Nazca warfen Fragen auf und stellten die Forscher vor Rätsel. Scharrbilder entstehen, indem man die herumliegen-

Abb. 1.3.12 Maria Reiche mit einigen Figuren der Scharrbilder (Peru 1986)

den Steine beiseite legt; so entsteht eine ca. 2 Fuß breite Spur, deren hellere Färbung sich von der Umgebung abhebt.

Kilometerlange gerade Linien, aber auch riesige Tierfiguren (Vögel, Eidechsen, Klammeraffen, Spinnen) und geometrische Gebilde bedecken eine Fläche von ca. 500 Quadratkilometern. Sie stammen aus der vorgeschichtlichen Nazca-Kultur, etwa 3.–2. Jh. v. Chr. bis ca. 7. Jh. n. Chr. (die Datierungen schwanken).

Das Rätsel besteht darin, dass man die Form der Figuren wegen ihrer ganz außerordentlichen Dimensionen nur von oben erkennen kann. Mehr noch: Wie wurden die Figuren und geometrischen Gebilde mit ihren riesigen Ausmaßen hergestellt, da doch deren Schöpfer die Zeichnungen niemals in Gänze haben erblicken können? Und: Welchem Zweck haben sie gedient?

Anhaltspunkte für eine Nutzung zu astronomischen oder kalendarischen Zwecken konnten nicht verifiziert werden. Da die Gegend zu jener Zeit teilweise begrünt und nachgewiesenermaßen bewohnt war (Gräber und Wohnanlagen wurden gefunden), sind Vermutungen zu einem gewissen Grade bestätigt worden, es handele sich um Wege zu inzwischen trocken gefallenen Wasserstellen. Auch die Annahme, dass diese Wege zeremoniellen Zwecken gedient haben, hat einiges für sich, ist aber nicht erwiesen. Ganz absurd ist die tollkühne Unterstellung, die Linien seien eine Art Hinweis oder Zeichen für Landeplätze für Außerirdische gewesen. Jedenfalls: das Rätsel ist geblieben. Inzwischen sind die Linien zur Touristen-Attraktion geworden.

Zu den Pionieren bei der Erforschung der Nazca-Linien gehört in allererster Linie die in Dresden geborene Mathematikerin Maria Reiche (1903–1998), die hohe Auszeichnungen durch die peruanische Regierung erhielt. Unter äußerst schwierigen Bedingungen hat sie die Figuren vermessen, Schritt für Schritt die Linien abschreitend, auf Leitern stehend. Um einen Blick von oben zu erhalten und die Linien zu fotografieren, ließ sie sich sogar außen an einem Hubschrauber festbinden! Sie erhielt die Auszeichnung als „Weiser des Inkareiches“ und den „Sonnenorden“ [Wußing 2003].

1.3.4 Die Inka: Polygonale Festungsmauern und Sonnenheiligtümer

Die Ursprünge der Inka liegen im Dunkeln; sie dürften im 12. Jahrhundert n. Chr. südlich des Titicaca-Sees als Bauern und Nomaden gelebt haben. Durch einen vom Mythos gestützten göttlichen „Befehl“ gründeten sie später die Hauptstadt Cuzco, Ausgangspunkt räuberischer Übergriffe auf die Nachbarn. Im 15. Jahrhundert begann man mit der Errichtung eines Großreiches, das sich vom heutigen Nordchile bis nach Kolumbien erstreckte.

Eigentlich sollte mit „Inka“ nicht ein Volk bezeichnet werden. Genau genommen ist „Inka“ ein Adelstitel, der allen männlichen Nachkommen einer kleinen Gruppe des Volkes zukam.

Abb. 1.3.13 Polygonale Festungsmauern in Sacsayhuaman bei Cuzco [Foto Alten]

Der Inkastaat wurde mit Gewalt und Zwangsarbeit zusammengehalten. Erstaunlich sind Pracht- und Festungsbauten: die Steine wurden präzise behauen und ohne Mörtel, stattdessen mit Zapfen zusammengefügt.

Bewundernswert ist ein „Straßennetz“, welches das ganze Territorium verband: Läufer überbrachten als Boten Nachrichten oder Befehle. Reittiere waren unbekannt, ebenso Rad und Wagen. Die Gesamtlänge des „Straßensystems“, betrug ca. 18 000 km. Allein 5200 km maß die Königsstraße über hohe Gebirgspässe vom Äquator bei Quito bis (zum heutigen) Valparaiso – bis zum 19. Jahrhundert die längste Verkehrsstraße in der Geschichte der Menschheit.

Es gab scharfe soziale Grenzen. An der Spitze stand der als Gott verehrte Sapā Inka, der sich als direkter Abkomme der Sonne verstand. Es folgten die „gewöhnlichen“ Inka, niedere Edelleute, Priester, Offiziere, Baumeister, Bauern und schließlich Kriegsgefangene.

Das Inkareich kannte keine Schrift in unserem Sinne. Informationen wurden mit Knotenschnüren (Quipu) fixiert. An einer Hauptschnur waren unterschiedlich lange und eingefärbte Schnüre befestigt; in welche Knoten in Gruppen zur Darstellung von Zahlen geknüpft wurden, während die Farben Gegenstände oder abstrakte Begriffe kennzeichneten: So konnten Ernteerträge, Tribute, Anzahlen von Menschen oder Tieren und anderes mehr festgehalten werden. Der Bringende musste dem Empfangenden der Nachricht die Botschaft erläutern. Die Knotenschnüre ermöglichten mathematische Operationen, u. a. Addition und Subtraktion, z. B. die Addition durch Bündelung benachbarter Schnüre (ausführlich in [Ascher/Ascher 1981]).

Abb. 1.3.14 Läufer; Quipu (Knotenschnüre für Zahlangaben) (Peru 1972)

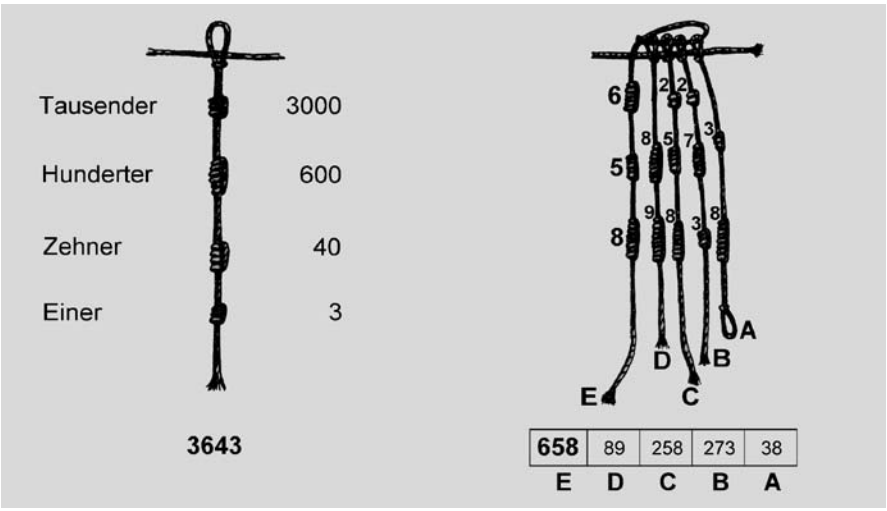


Abb. 1.3.15 a) Darstellung der Zahl 3/643 als Knotenschnur b) Interpretation eines Quipu: Das Bündel der Schnüre stellt die Addition der auf den „Nebenschnüren“ A, B, C, D dargestellten Zahlen zur Summe E auf der „Hauptschnur“ dar, Zeichnung nach [American Museum of Natural History, New York, B 8713] (vgl. Leland Locke 1923, Ifrah 1986)

Im Jahre 1527 brach unter dem Kommando des spanischen Glücksritters Francisco Pizarro (1475–1541) eine Expedition von der Westküste Panamas nach Süden ins Land der Inka auf, das sie nach strapaziösen Märschen durch Urwald und hohe Gebirge erreichte. Da sich der Inkastaat gerade in einer schweren inneren Krise befand, gelang den 167 Soldaten der Angriff. Am 16. November 1532 geriet der (letzte) Herrscher Atahualpa in Gefangenschaft. Die Spanier forderten ein ungeheures Lösegeld; ein ganzer Raum wurde mit Gegenständen aus Gold gefüllt. Dessen ungeachtet wurde Atahualpa neun Monate später grausam umgebracht. Aber auch Pizarro wurde später von seinen Kumpanen getötet.

Nur vorübergehend leisteten einige Gruppen des Inkareiches Widerstand; andere verbündeten sich sogar mit den Spaniern. Ende 1536 war das Inka-Reich zerstört. Eine letzte Gruppe der Inka-Leute zog sich ins Gebirge zurück, in die ca. 2500 m hoch gelegene Stadtfestung Machu Picchu. Die Ruinen der Stadt wurden erst 1911 vom amerikanischen Archäologen Hiram Bingham entdeckt und sind heute eine Touristenattraktion ersten Ranges. Inmitten einer grandiosen Gebirgswelt steht dort auf schmalem Sattel zwischen steilen Felswänden im Zentrum des heiligen Bezirks der Sonnentempel *Intihuatana* (Rastplatz der Sonne). Nach dem Stand des Schattens wurde dort die Zeit der Sonnenwende bestimmt.

Abb. 1.3.16 Sonnenobservatorium der Inka in Machu Picchu [Foto Alten]

Abb. 1.3.17 Die Inka-Festung und der Sonnentempel von Machu Picchu [Foto Alten]

Abb. 1.3.18 Textilkunst der Inka: Geometrische Muster einer Tunika (um 1550). Die Textilien aus dem voreuropäischen Peru zählen nach P. Kann „zu den kompliziertesten und in ihren Darstellungen Vielseitigsten." Hinter diesen sog. Tocapu-Mustern der Textilien wird eine Symbolik vermutet, die bis heute nicht entschlüsselt werden konnte. Erhalten geblieben sind diese Stoffe durch einen intensiven Totenkult und durch das in der Küstenregion Perus vorherrschende trockene Wüstenklima. [Dumbarton Oaks Research Library], [Wikimedia Commons]

2 Entwicklung der Mathematik in asiatischen Kulturen

2.1 Mathematik im alten China

	Allgemeine Geschichte	Kulturgeschichte
3000 bis 1500	Siedlungen am Gelben Fluss und am Janktsekiang	Stromtalkulturen
ca. 2205 bis 1766	Xia-Dynastie	
ca. 1500 bis 1030	Shang (Yin)-Dynastie	Bronzezeit
11. Jh. bis 481	Zhou (Chou)-Dynastie	Konfuzius (551 bis 479). Laotse (6./5. Jh. v. Chr.)
475 bis 256	Zeit der Streitenden Reiche	
221 bis 207	China geeinigt unter dem ersten Kaiser Shi-Huang-ti	Bau der chinesischen Mauer
206 v. Chr. bis 220 n. Chr.	Han-Dynastien	Blüte von Mathematik, Astronomie, Philosophie und Kunst; Theokratischer Beamtenstaat
141 bis 87 v. Chr.	Kaiser Wudi: Chinas Weltreich von Korea bis Turkmenistan	
25 n. Chr. bis 220	Späte Han-Dynastie	Buddhismus, von Indien herkommend
221 bis 280	Zeit der drei Reiche.	
280 bis ??	Zerfall des Reiches	
618 bis 906	Tang-Dynastie	Blüte von Wirtschaft und Kultur; Vorherrschaft des Buddhismus
960 bis 1127	Nördliche Sung-Dynastie	Erster Druck mit beweglichen Lettern; chinesischer Beamtenstaat mit zentralen Examen;
1127 bis 1278	Südliche Sung-Dynastie	Konfuzianismus verpflichtende Norm
1215	Einnahme Pekings durch die Mongolen. Bis 1280 ganz China von den Mongolen erobert	
1278 bis 1368	Yuan-Dynastie (Mongolenherrschaft). Kublai-Khan (1260 – 1294)	Zweite Blüte der Mathematik; Marco Polo (1254 – 1324) erreicht 1275 Peking.
1368 bis 1644	Ming-Dynastie Hauptstadt Nanjing	Erneuerung und Ausbau der chinesischen Mauer; portugiesische Kaufleute; Jesuitische Missionen
1644 bis 1911	Qing-Dynastie	Vorherrschaft des Konfuzianismus; Kolonialer Einfluss
1911	Ausrufung der Republik	
1949	Gründung der Volksrepublik	

Bemerkung: Es gibt sehr verschiedene, vom Obigen abweichende Datierungen.

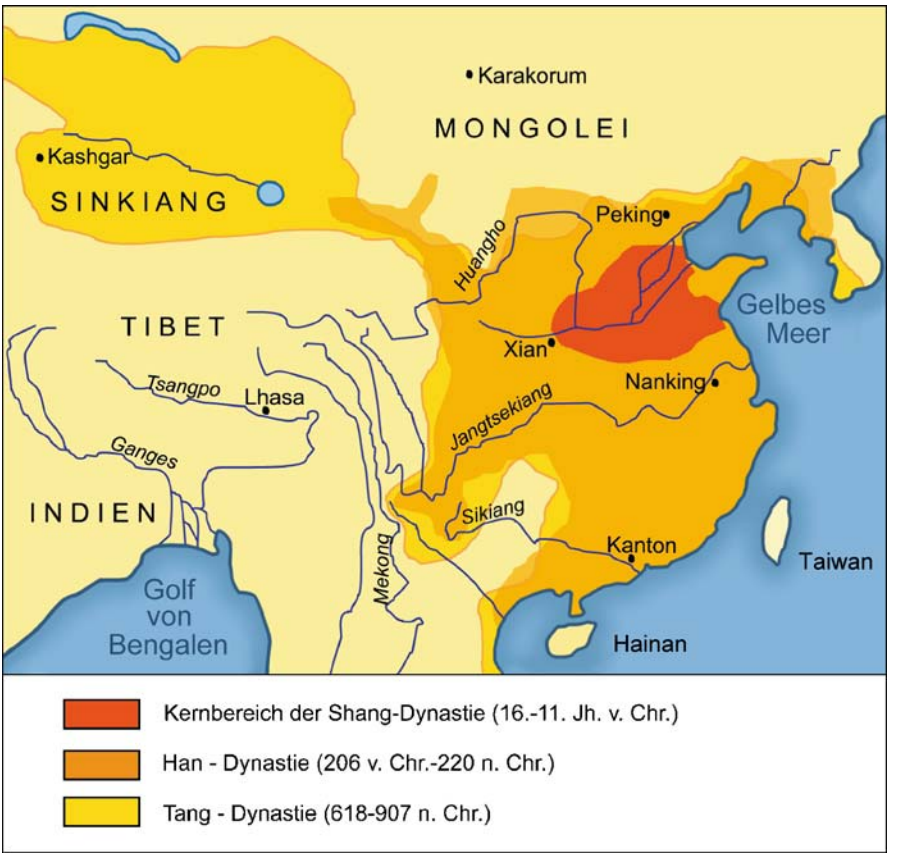


Abb. 2.1.1 China im Altertum und im Mittelalter

Vorbemerkungen

Es ist nicht einfach, auf beschränktem Raum ein einigermaßen zutreffendes Bild von der altchinesischen Mathematik zu entwerfen. Daher sei auf ausführliche Darstellungen verwiesen, die zudem auf neuere Forschungen zurückgreifen, jeweils mit ausführlichen Literaturangaben: [Mikami 1913], [Needham 1959], [Juschkewitsch 1964], [Martzloff 1997], [Li/Dù 1987], [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005], [Alten et al. 2003]. Bezüglich der Transkription von Eigennamen schließen wir uns Martzloff an.

2.1.0 Das historische Umfeld

Die wechselvolle politische Geschichte Chinas – Kampf regionaler Herrscher um Vormachtstellung, Aufstieg zur beherrschenden Großmacht Ostasiens, Emporkommen und Untergang verschiedener Dynastien, Eroberung durch

Abb. 2.1.2 Die Chinesische Mauer [Foto Alten]

die Mongolen, halbkoloniale Zeit, Eindringen der Europäer, Übergang zur bürgerlichen Republik und zur Volksrepublik – umfasst reichlich 4000 Jahre. Die Historiker datieren den Übergang zur Klassenstruktur in China auf die zweite Hälfte des zweiten Jahrtausends v. Chr. Der endgültige Übergang zum Feudalismus geschah im 3. Jahrhundert n. Chr. und währte bis zum Eindringen der Europäer in der Mitte des 19. Jahrhunderts.

Die Völker, die auf dem Gebiet des heutigen Chinas wohnten bzw. wohnen, gehören zu den ältesten und bedeutendsten Kulturvölkern, mit herausragenden Traditionen in Mathematik, Astronomie, technischen Erfindungen, Kunst und Literatur. Dabei lassen laufende oder noch ausstehende historische und archäologische Studien interessante neue Ergebnisse erwarten.

Einige Informationen über frühe mathematische, insbesondere arithmetische Kenntnisse besitzen wir aus der Mitte des 2. Jahrtausends v. Chr.; sie stehen mit einer schon hoch entwickelten Astronomie im Zusammenhang.

Bemerkenswert ist der hohe Stand der Verarbeitung von Bronze zu Gebrauchsgütern des täglichen Lebens, zu Gefäßen, Münzen, Waffen – und das schon während der Yin-Dynastie.

Kometenbeobachtungen sind aus der Zeit der Zhou-Dynastie, z. B. aus dem Jahre 613 v. Chr. überliefert. Die verschiedenartigen Gestalten der Kometen wurden sogar in antiker Seide abgebildet [Xi 1984]. Sogar die Periodizität des heute nach Halley benannten Kometen wurde erkannt. Richtig ist auch die allgemein formulierte Beobachtung, dass der Kometenschweif immer

Abb. 2.1.3 Obere Reihe: Bronzegegenstände aus der Zeit der Yin-Dynastie: Weingefäße, rechts vierfüßiges Kochgefäß (China 1964). Untere Reihe: Antike chinesische Münzen aus der Zeit vor der Einigung Chinas im Jahre 221 v. Chr.: Münze muschelförmig, messerförmig, mit Loch (China 1981)

von der Sonne abgewandt ist. Die Kometenbeobachtungen wurden auch in den folgenden Jahrhunderten kontinuierlich fortgesetzt. Um 1910 befanden sich etwa 500 Berichte über Kometen in den Archiven, die teilweise europäischen und amerikanischen Gelehrten als Unterlage zu Rückvergleichen mit eigenen Beobachtungen dienten.

Die Kalenderbestimmung – unentbehrlich für die Landwirtschaft, aber auch für die Organisation des Staates – gehörte ebenfalls zu den wesentlichen Aufgaben der chinesischen Astronomen. Von 635 bis 522 v. Chr. sind Bestimmungen der Wintersonnenwende überliefert. Im 5. Jahrhundert wurde (vorübergehend) ein Sonnenkalender mit 365,25 Tagen eingeführt, weit vor dem Julianischen Kalender der römischen Antike. Weitere Entdeckungen folgten, u. a. die der Präzession, d. h. des Fortschreitens des Frühlingspunktes.

Abb. 2.1.4 Laotse und Konfuzius [Wikimedia Commons]

In die Zeit der Zhou-Dynastie gehört das Auftreten zweier bedeutender Religionsstifter bzw. Philosophen, Konfuzius (551–479 v. Chr.) und Laotse (6./5. Jh. v. Chr.).

Bereits zur Zeit der Han-Dynastie legte man großen Wert auf die Ausbildung in Mathematik. Es gab ein System der Ausbildung von sechs- bis achtjährigen Knaben, natürlich aus privilegierten Familien stammend. Beamte hatten sich in der Tang-Zeit an der kaiserlichen Akademie einer strengen, siebenjährigen Ausbildung in Mathematik mit einer Prüfung zu unterwerfen.

Vor kurzer Zeit wurde bei Ausgrabungen ein auf Bambusstreifen geschriebenes mathematisches Manuskript entdeckt, *Suan shu shu* (etwa: Neun Kapitel über mathematische Verfahren) [Cullen 1996], [Cullen 2004], [Dauben 2004]. Auch der astronomische Text *Zhoubi suanjing* enthält Einiges an Mathematik und bietet den ersten „Beweis“ des Satzes von Pythagoras.

Wenig jünger ist das Werk *Jiuzhang Suanshu*, in anderer Transkription *Chiu Chang Suan Shu* (Neun Bücher arithmetischer Technik), das auf frühere Schriften zurückgeht. Dieses einflussreiche Werk, das die Mathematik innerhalb und außerhalb Chinas mitgeprägt hat, wurde im dritten Jahrhundert n. Chr. von Liu Hui kommentiert; in dieser Fassung aus dem Jahre 263 wurden die „Neun Bücher arithmetischer Technik“ überliefert [Vogel 1968], [Chemla/Guo 2004].

In der Tang-Zeit wurde das Werk des öfteren abgeschrieben bzw. kommentiert und schließlich einem Sammelwerk unter dem Titel *Suanjing shi shu* (Zehn beispielhafte Abhandlungen über Mathematik) eingegliedert. Dies wurde im Jahre 656 als hauptsächliches Lehrbuch eingeführt; die erste Druckausgabe (Xylographie) stammt aus dem Jahre 1084, ist aber verschollen; ein Teil des Neudruckes von 1213 ist erhalten [Juschkewitsch 1964].

Abb. 2.1.5 Erfindungen der chinesischen Antike: Trommel-Messwagen (300 v. Chr.), Seismograph (Han-Dynastie), Kompass (Südzeiger, ca. 300 v. Chr.); (Ausschnitte aus Briefmarken, China 1953)

Um 300 v. Chr. wurde ein Messwagen für Entfernungsmessungen konstruiert. Mit der Papierherstellung dürfte im 1. oder 2. Jahrhundert v. Chr. begonnen worden sein. Im 7. Jahrhundert n. Chr. (Tang-Dynastie) wurde mit dem Bau eines großen Kanals begonnen, der den Norden mit dem Süden verbinden sollte. Er war im 13. Jahrhundert vollendet und besaß eine Länge von 1700 Kilometern.

Überhaupt war die Tang-Zeit eine Periode der Blüte der Wissenschaften und der Künste, verbunden mit der Organisation des Staatswesens. Neben der Mathematik erzielte insbesondere die Astronomie weitere Fortschritte. Die Berichterstattung über Sonnenflecken (*„eine in der Mitte der Sonne hockende Krähe“*) geht auf das Jahr 140 n. Chr. zurück. Die Beobachtung von Sonnenflecken wurde systematisch fortgesetzt; bis zum 17. Jahrhundert wurden mehr als 100 Beobachtungen festgehalten.

Das Auftreten von Novae (*„Gast-Sterne“*) hat bedeutende Aufmerksamkeit erregt und wurde genauestens protokolliert. Der älteste detaillierte Bericht bezog sich auf die Nova von 134 v. Chr.; sie wurde übrigens auch in anderen Ländern „beobachtet“. Insgesamt sind in chinesischen Dokumenten bis 1700 n. Chr. etwa 90 Novae erfasst worden.

Auch die Anfertigung und Vervollkommnung der Sternkataloge gehörte zu den Aufgaben der chinesischen Astronomen. Der älteste, freilich nur in Teilen erhaltene Katalog aus dem 4. Jahrhundert v. Chr. soll die Koordinaten und Namen von 115 Sternen enthalten haben. Die Sonnenuhr wurde statt der Wasseruhr verwendet. Der hervorragende Astronom Zhang Heng (78–139) lehrte die Kugelgestalt der Erde, konstruierte eine Art Planetarium und einen sinnreich ausgedachten Seismographen, der immerhin die Richtung des Bebenherdes anzeigte.

Bei hochentwickelter Schiffbautechnik und bei Orientierung an den Sternen erreichten die Chinesen schon im 3. Jahrhundert v. Chr. die Küsten des Indischen Ozeans und die Inseln in Südostasien. Um 300 v. Chr. wurde die „Kraft“ des Magneteisensteins benutzt; ein löffelförmiger Magnet zeigt die Richtung Süden.

Seit dem 1. Jahrhundert n. Chr. drang aus Indien der Buddhismus in China ein; indische Gelehrte wirkten in China. Während der Tang-Zeit reich-

Abb. 2.1.6 Bedeutsame chinesische Erfindungen: Buchdruck mit beweglichen Lettern (11. Jh. n. Chr.), Papierherstellung (2. Jh. v. Chr.), Schießpulver (13. Jh. n. Chr.); (Haiti 1999)

ten die Handels- und Kulturbeziehungen Chinas über Mittelasien hinaus bis nach Indien und Europa. Unter kaiserlicher Aufsicht wurden wissenschaftliche Einrichtungen gegründet, u. a. ein astronomisches Büro und die kaiserliche Akademie. Nur strenge Prüfungen – auch in Mathematik – eröffneten die begehrte Beamtenlaufbahn. So gab es zur Zeit des Kaiser T'ai-tsung (627–649) angeblich 3200 staatlich geprüfte Mathematiker.

Zu den großen wissenschaftlichen Unternehmungen der Tang-Zeit gehört eine Meridian-Messung. Daran war u. a. auch Yixing (7. Jahrhundert) beteiligt, der Interpolationsformeln für astronomische Berechnungen entwickelte. Während der Sung-Dynastie, als der Konfuzianismus wiederum dominierte, kam es zu erheblichen Fortschritten: Überseehandel, Schießpulver, Kartogra-

Abb. 2.1.7 Wanderlehrer in China (China 1989)

Abb. 2.1.8 Marco Polos Rückreise von China nach Europa; zum 700. Jahrestag der Rückkehr. Die Reiseroute ist eingezeichnet (Markenblock Vatikan 2000)

phie, Druck, vorwiegend Xylographie, aber auch mit beweglichen Lettern. Besonders die Algebra erreichte einen hohen Stand mit den Abhandlungen von Qiu Jiushao (13. Jahrhundert), Li Zhi (ursprünglich Li Yeh bzw. Ye), (1192–1279), Yang Hui (13. Jahrhundert) und Zhu Shijie (13. Jahrhundert) [Alten et al. 2003, S. 124f.].

Auch während der Mongolenherrschaft fand die Mathematik eine Heimstatt bei Hofe. Die wissenschaftlichen Beziehungen reichten bis hin zu den islamischen Gelehrten; chinesische Erkenntnisse dürften im Westen verbreitet worden sein, wie Quellenvergleiche ergeben haben.

Die Reise des Venezianers Marco Polo nach China hat seinerzeit großes Aufsehen erregt und beschäftigt noch heute Historiker. Bei seiner Rückkehr nach Europa wurde er von den Genuesen gefangen gesetzt und als großer Lügner und Aufschneider wegen seiner Erzählungen über China und andere fremde Länder beschimpft.

Der Bau von astronomischen Messgeräten – insbesondere der von Armillarsphären – hat in China eine lange Tradition; sie wurden schrittweise verbessert und vervollkommnet. In Nanjing haben sich vorzügliche Instrumente – Armillarsphäre und Äquatorial-Torquetum – erhalten, gebaut während der Ming-Dynastie zwischen 1437 und 1442. Über den Einfluss islamischer Astronomie auf China unterrichtet [K. Yabuuchi 1954]. Unter den

Abb. 2.1.9 Torquetum, konstruiert von Guo Shoujing; Porträt von Guo Shoujing (China 1962)

chinesischen Astronomen tritt besonders Guo Shoujing (1231–1316) mit interessanten Konstruktionen und Berechnungen hervor. Von ihm stammen der berühmte Kalender *Shoushi li*, die sog. Chinesische sphärische Trigonometrie mit den auf Längen von Bögen, Sehnen und „Pfeilen" beruhenden Näherungsformeln, aber auch das als Wasserschraube dienende „torquetum" – ein Ergebnis seiner Beschäftigung mit dem Bau von Kanälen zur Drainage. Leider gingen die Original-Schriften von Guo Shoujing verloren und man ist daher auf spätere Quellen angewiesen, in denen seine Leistungen beschrieben werden [Martzloff 1997, S. 329].

Insgesamt aber schwächte sich der aus eigenständiger Entwicklung stammende Impuls während des 15./16. Jahrhunderts ab. Dagegen gelangten Teile der westlichen Mathematik nach China, in Zusammenhang mit dem Versuch, China zum Christentum zu bekehren. Einige Übersetzungen ins Chinesische wurden während einer ersten Periode (1600 bis 1753) durch Jesuiten vorgenommen, während einer zweiten Periode (1840–1911) durch protestantische Missionare. Die protestantischen Missionare stützten sich u. a. auf britische Werke, so zum Beispiel auf die *Elements of Algebra* von de Morgan (1806–1871). Sogar die Infinitesimalrechnung (Calculus) erreichte so China [Xu 2003].

Da sich die Christianisierung als schwierig erwies, sollten wissenschaftliche Erkenntnisse, die denen der Chinesen überlegen waren, auch die Überlegenheit der christlichen Religion indirekt erweisen [Martzloff 1997, S. 99–103].

Aus Einsicht in die relative Unterlegenheit ihrer heimischen chinesischen Astronomie nahm man um 1600 die von den Jesuiten angebotene Hilfe an, solche Texte und Hilfsmittel zu übernehmen, die wichtig mit Bezug auf die Astronomie und für militärische Zwecke sein könnten: Nepersche Stäbchen, Galileis Proportionalzirkel, Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie,

Abb. 2.1.10 Matteo Ricci
(Porträt von Yu Wen-hui um 1610) [Wikimedia Commons]

Logarithmen. Selbstverständlich lehrten die Jesuiten nicht das Copernicanische Weltsystem, sondern vertraten das geozentrische System von Brahe. Der italienische Jesuit Matteo Ricci (1552–1610) und der hochgestellte Xu Guangqi übertrugen gemeinsam die *Elemente* von Euklid und publizierten *Jihe Yuanben* (Elemente der Geometrie), gestützt auf die Kommentare von Chr. Clavius (1537–1612) zu den ersten sechs Büchern der *Elemente*.

Allerdings – eine Folge der aufs Praktische gerichteten Denkweise – hielt man in China nicht viel von Euklids *Elementen* mit ihrem strengen Aufbau, mit Postulaten, Axiomen und Definitionen.

Nach der Mitte des 19. Jahrhunderts setzten sich die internationalen Bezeichnungen und Symbole neben den Ergebnissen der westlichen Mathematik auch in China durch. Dieser ganz entscheidende Prozess ist ausführlich studiert und dargestellt worden, auch in Verbindung mit der Wiederentdeckung, Pflege und Weiterführung der heimischen antiken und mittelalterlichen Tradition. Alles dies trug nicht unerheblich zur Stärkung des chinesischen Nationalbewusstseins bei. Als Schlüsselfigur hat dabei Li Shanlan (1811–1882) eine große Rolle gespielt, der in einer eigenen „Schule“ die westliche Mathematik gezielt in China bekannt machte [Horng 1991], [Martzloff 1992].

In der bürgerlichen Republik, nach 1911, wurden führende westliche Mathematiker als Gastprofessoren nach China eingeladen, unter ihnen Konrad Knopp, Bertrand Russel, George Birkhoff, Jaques Hadamard, Norbert Wie-

ner. Andererseits studierten erstmals chinesische Studenten im Ausland, in Europa und den USA, teilweise als Folge des Boxeraufstandes, der die Gründung der Qinghua University in Peking inspirierte. Nach deren Rückkehr nach China leisteten die im Ausland ausgebildeten Studenten einen entscheidenden Beitrag zur Entwicklung der heimischen modernen Mathematik in China. Heute verfügt die Volksrepublik China über hervorragende Mathematiker, die im Inland und Ausland tätig sind (zu Einzelheiten vgl. [Dauben 2002] und Kapitel 10).

2.1.1 Zahlendarstellung, Rechenbrett

Schreibweise und Repräsentation der Zahlen haben verständlicherweise in der jahrtausendelangen Geschichte Chinas ihrerseits eine lange Geschichte. Für die Frühzeit gibt es zahlreiche Hinweise, dass Quipus (Knotenschnüre) und Kerbhölzer in Gebrauch gewesen sind. Seit dem Ende des 19. Jahrhunderts wurden archäologische Funde gemacht, die das Bild vom alten China vollständig verändert haben: Tausende von Knochen und Schildkrötenpanzern mit eingeritzten Zeichen wurden gefunden bzw. durch systematische Ausgrabungen zutage gefördert. Man hält sie im Wesentlichen für Mittel zur Wahrsage. Einige dieser Relikte benutzten Zahlzeichen mit unterschiedlichen Schreibweisen, um Anzahlen von Menschen, Tieren, Tagen, Monaten, Opfern, kriegerischen Unternehmungen u. a. m. zu fixieren. Große Mühe wurde in jüngster Zeit auf die Deutung dieser frühen Zahlzeichen verwandt. So dürfte das Zeichen für „unzählig groß“ einen Skorpion darstellen, wegen der Fruchtbarkeit dieser Tiere [Martzloff 1997, S. 179 ff.].

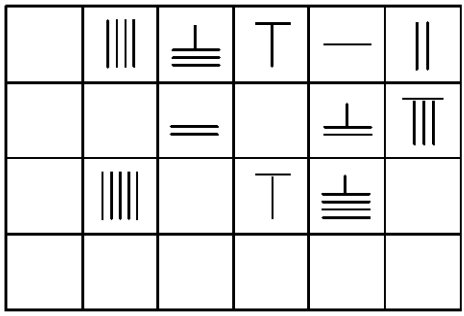
Mindestens seit dem 4. Jahrhundert v. Chr. (seit der Zeit der streitenden Reiche) kamen einfache Zahlzeichen auf, aus denen die späteren Stäbchenzahlen hervorgegangen sind. Mit ihnen rechnete man auf einem Brett mit Feldern, in die die Stäbchen gelegt wurden. Die Stäbchen bestanden aus Holz, Bambus oder Eisen; für reiche Leute wurden sie aus Elfenbein oder sogar aus Jade gefertigt.

Das chinesische Stäbchensystem ist dezimal aufgebaut, aber kein völlig durchgebildetes Positionssystem. Zwei Reihen von Ziffern gestatten es, alle Zahlen zu bezeichnen:

Die vertikal gelegten Stäbchen

für die Ziffern 1 bis 9 wurden auf dem Zahlenschachbrett auch für entsprechend viele Hunderter, Zehntausender, ... verwendet. Horizontal gelegt, also gemäß

bezeichneten diese Stabziffern Zehner, Tausender, ..., also entsprechend viele Einheiten ungerader Zehnerpotenzen. Wie im indisch-arabischen Zahlensystem „schrieb“ man die Zahlen von links nach rechts. Zur Vermeidung von Irrtümern wurden dabei die Einer in die Spalte am rechten Rand des Brettes gelegt, für eine Null wurde das entsprechende Feld leer gelassen. Mit dieser Methode konnten auf dem Brett bequem Addition und Subtraktion durch Zusammenlegen oder Wegnahme von Stäbchen, aber auch Multiplikation und Division ausgeführt werden. Als Beispiel für die Addition diene



Für die Multiplikation wurde der Multiplikand unten, der Multiplikator oben im Schachbrett ausgelegt, die Teilprodukte wurden dann in den mittleren Zeilen dargestellt und addiert. Auch Systeme linearer Gleichungen wurden auf dem Zahlenschachbrett dargestellt und gelöst (vgl. auch [Ifrah, S. 149f.] und [Alten et al. 2003, S. 116f.]).

Im 8. Jahrhundert kam aus Indien die Idee, einen Punkt für Leerstellen (Null) zu verwenden; diese Idee setzte sich jedoch zunächst nicht durch. Erst im 13./14. Jahrhundert, möglicherweise wiederum aus Indien, kam die Null in dauerhaften Gebrauch, geschrieben und gedruckt als kleiner Kreis.

Altchinesische Zahlzeichen in Hieroglyphen oder Stäbchenform blieben teilweise noch bis in die Han-Zeit und Yuan-Zeit in Gebrauch und werden sogar noch heute neben den indisch-arabischen Ziffern verwendet. Auch in Japan haben sich chinesische Zahlzeichen noch lange gehalten.

An dieser Stelle soll (wie im Kapitel Indien) auf eine andere Meinung verwiesen werden, dass nämlich die Null chinesischen Ursprunges sei. Dies ist von ernstzunehmenden Mathematikhistorikerinnen dargelegt worden [Lam/Ang 2004]. Sie haben ein wichtiges frühes chinesisches klassisches Werk übersetzt: *Sunzi Suanjing* (Mathematisches Handbuch des Meisters Sunzi), enthaltend das dezimale Positionssystem, einschließlich der Rechenmethoden für Multiplikation, Division und das Ziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln. Nach ihrer Darstellung gelangte all dies von China über Indien und die arabischen Wissenschaftszentren in den Westen.

Neben dem Rechnen mit Rechenstäbchen auf dem Zahlenschachbrett kam noch eine andere Form instrumentellen Rechnens in Gebrauch, nämlich das Rechnen mit dem *suanpan*, dem Kugelrechenbrett, einem Abakus. Es ist nicht

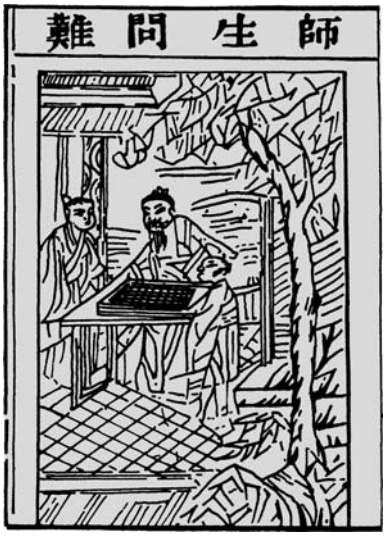


Abb. 2.1.11 Chinesischer Meister und zwei Schüler am Rechenbrett [Illustration des Suan Fa Thung Tsung 1593] (vgl. Needham 1959, S. 70; Ifrah 1986, S. 149)

genau bekannt, wann der *suanpan* erfunden wurde; in allgemeinen Gebrauch kam er wohl erst im 16. Jahrhundert.

Ein *suanpan* enthält eine Anzahl (11, 13, 17 oder mehr) parallele Stäbchen oder Drähte. Die vertikal angeordneten Stäbe, markieren dezimale Größenordnungen. Die Position der Kugeln markiert die Zahl. Über das Rechnen mit dem *suanpan* siehe [Martzloff 1997], [Juschkewitsch 1964].

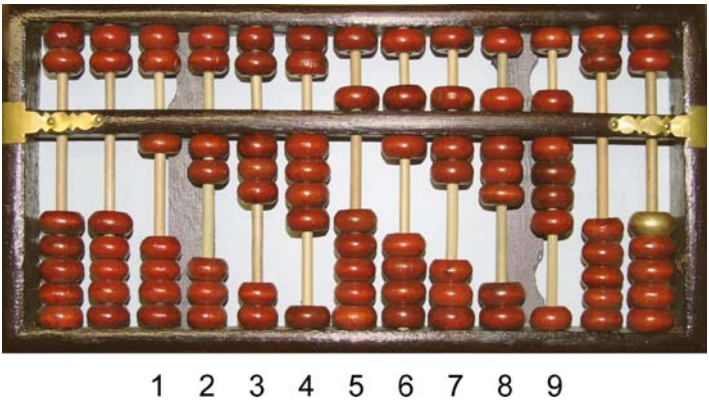


Abb. 2.1.12 *Suanpan*, eingegeben ist die Zahl 123 456 789. Die beiden letzten Spalten sind für die Einstellung von Zehnteln und Hundertsteln reserviert [Foto Wesemüller-Kock]

Der *suanpan* ist noch heute in Gebrauch, ähnlich wie die *schtschoti* in Russland, die aber einen ganz anderen historischen Ursprung haben. Im 16. Jahrhundert vermutlich gelangte der *suanpan* nach Japan, dort unter dem Namen *soroban*.

Die Rechenfertigkeit war hochentwickelt, erstreckte sich auf gemeine Brüche und auf Dezimalbrüche – eine Folge der Verwendung dezimal unterteilter Maßsysteme. Man konnte beliebige Quadrat- und Kubikwurzeln ziehen.

2.1.2 Einige Höhepunkte altchinesischer Mathematik

Aus dem 14. Jahrhundert v. Chr. sind Wahrsageknochen erhalten geblieben, aus denen hervorgeht, dass man bereits im Besitz eines Dezimalsystems war.

Während der Periode der streitenden Reiche (Ende des 5. Jahrhunderts bis zur Reichseinigung 221 v. Chr.) wirkte in China die Gruppe der Mohisten, die großen Einfluss besaß. Damals entstand eine besondere Art von Mathematik, die auf strengen Definitionen beruhte, eingebettet freilich in das philosophische System der Mohisten (Näheres dazu bei [Gericke 1984, S. 171f.]).

Es ist eine für die historische Einschätzung und Beurteilung der chinesischen Mathematik grundlegende Problemstellung, wie weit Abstraktion und strenge Herleitungen und zwingende Beweise zum Bild jener Mathematik gehören. Dieser Fragestellung ist K. Chemla in einigen Arbeiten nachgegangen und kam zu einem bejahenden, in diesem Sinne positiven Urteil [Chemla 1996], [Chemla 1997], [Chemla 2003], [Chemla 2005]. Beispielsweise spricht Liu Hui in seinem Kommentar zum *Jiuzhang suanshu* von abstrakten Prozeduren und Problemen, die deutlich von theoretischem und nicht von praktischem Interesse sind.

Etwa um 100 n. Chr. erschien das anonyme Werk *Zhoubi suanjing* (klassische Mathematik des Zhou Gnomon, „bi“ bedeutet „gnomon“). Bei „Zhou“ weiß man nicht, ob ein Ort oder eine Zeitperiode gemeint ist. Hier findet sich eine Herleitung des Satzes von Pythagoras, zwar an einem Beispiel, aber durchaus verallgemeinerungsfähig, und wohl auch so gemeint.

In einem Gitternetz (im Beispiel von 5 mal 5 Feldern) ist dem großen Quadrat ein kleines Quadrat mit der Seitenlänge c (im Beispiel ist $c = 5$ als Hypotenuse der Dreiecke mit den Seitenlängen 3 und 4) einbeschrieben. Durch Zerlegung des inneren Quadrats entstehen 4 rechtwinklige Dreiecke mit den Seiten c, a und b (im Beispiel $a = 4$, $b = 3$) und ein inneres kleines Quadrat mit der Seitenlänge $a-b$. Dann setzt sich das Quadrat c^2 zusammen gemäß $c^2 = 4 * ab/2 + (a-b)^2 = a^2 + b^2$.

Wie schon erwähnt, erzielte die Mathematik in der Periode der Han-Dynastie bedeutende Fortschritte. Durch Zusammenfügen von älteren Manuskripten entstand zwischen 200 v. Chr. und 300 n. Chr. ein Werk, das in der chinesischen Mathematik als klassisches Werk eine große Wirkung entfaltet hat, das *Jiuzhang suanshu* (in anderer Transkription *Chiu Chang Suan*

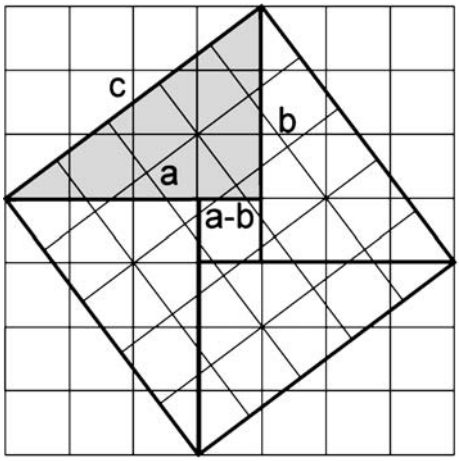


Abb. 2.1.13 Figur zum Satz des Pythagoras

Shu). Martzloff übersetzt es mit *„Computational Prescriptions in Nine Chapters“*; bei anderen Autoren [Vogel 1968] heißt es einfach „Neun Kapitel“ oder „Neun Bücher über arithmetische Technik“. Diese Kompilation ist mehrfach kommentiert worden. Schließlich, unter der Tang-Dynastie, wurden *Zhoubi suanjing* und *Jiuzhang suanshu* mit 10 weiteren Texten aus der späten Han-Zeit zusammengefasst unter dem Titel *Suanjing shishu* (The Ten Canons of Mathematical Computations). Auf diesen Text – von dem sich nur zufällig Reste erhalten haben – stützte sich die mathematische Ausbildung der Beamten an der kaiserlichen Akademie *guozixue* (Schule für die Söhne des Staates).

Gehen wir auf den Inhalt der „Neun Kapitel“ (*Jiuzhang suanshu*) genauer ein: Es handelt sich um eine anonyme Sammlung von 246 Aufgaben und zwar als Instruktionsmaterial für Praktiker. Die Aufgaben sind nach Sachverhalten und weitgehend nicht nach dem mathematischen Problemkreis geordnet. Das Lösungsverfahren wird in einer allgemeinen Regel angegeben, enthält aber keine abstrakten Beweise. Dieser aufs unmittelbar Praktische gerichtete Duktus wurde – wie viele Historiker meinen – durch die Philosophie jener Zeit geprägt, insbesondere durch den Konfuzianismus [Martzloff 1994, S. 95].

Buch 1: Ausmessen von Feldern, also Berechnung der Flächeninhalte von Rechtecken, Dreiecken, Trapezen, Kreisen, Kreissegmenten und Kreisringen; π wird mit 3 angenähert. Rechnen mit Brüchen.

Buch 2: Tausch von Feldfrüchten durch Umrechnung von Getreide- und Feldfrüchten in 50 Einheiten Hirse. Dreisatz.

Buch 3: Ausgleich von Steuereinheiten – in Geld oder Arbeitskraft – zwischen verschiedenen Regionen.

Buch 4: Geometrische Probleme, z. B. Seite eines Quadrates bzw. eines Würfels. Gebrauch irrationaler Zahlen.

Buch 5: Beurteilung von Arbeitsleistungen. Hier tritt – ähnlich wie in Mesopotamien – im Zusammenhang mit Arbeitsleistungen eine Vielzahl von Volumenberechnungen auf: Quader mit quadratischer Grundfläche, gerade Pyramiden mit trapezförmigem und dreieckigem Grundriss sowie Pyramiden mit quadratischen und rechteckigen Grundflächen. Aber auch wesentlich kompliziertere Körper werden behandelt, wie aus den Kommentaren von Liu Hui hervorgeht: Man zerlegte den Körper in bekannte Volumina. Von Körpern mit gekrümmten Oberflächen (bei der Annahme $\pi = 3$) gab es richtige Berechnungsvorschriften für die Volumina von Zylinder, Kegel und Kegelstumpf, indirekt auch für Kugeln [Juschkewitsch 1964, S. 59–62].

Buch 6: Steuerberechnungen.

Buch 7: Überschuss und Fehlbetrag. Dieses Buch vermittelt u. a. eine Methode zur Lösung linearer Gleichungen, die wir heute als Methode des doppelten falschen Ansatzes bezeichnen: Zwei angenommene Lösungen x_1 und x_2 für die Gleichung $ax + b = 0$ ergeben statt Null den zu großen Wert $c_1 > 0$ und den zu kleinen Wert $c_2 < 0$. Das führt auf die Lösung

$$x = \frac{c_1 x_2 - c_2 x_1}{c_1 - c_2} = -\frac{b}{a} \, .$$

In diesem Buch findet sich eine berühmt gewordene Aufgabe in realitätsferner Einkleidung, aber mit ernst gemeintem Sachverhalt, lineare Interpolation, die auch sonst oft benötigt wird:
„Jetzt hat man eine Wand, 5 Fuß dick. Zwei Ratten graben sich gegeneinander durch die Wand; dabei macht die große Ratte am ersten Tag 1 Fuß; die kleine Ratte macht ebenfalls am ersten Tag 1 Fuß. Die große Ratte macht jetzt an jedem Tag das Doppelte, die kleine Ratte an jedem Tag die Hälfte der Leistung vom Vortag. Frage: In wieviel Tagen treffen sie sich und wieviel hat jede gegraben? Die Antwort sagt: Es sind $2\frac{2}{17}$ *Tage. Die große Ratte gräbt 3 Fuß* $4\frac{12}{17}$ *Zoll. Die kleine Ratte gräbt 1 Fuß* $5\frac{5}{17}$ *Zoll.“*
(Zitiert nach [Vogel (Ed.), Chiu Chang Suan Shu, 1968, S. 75]; dort wird auch der Lösungsweg angegeben.)

Buch 8: Rechteckige Tabelle. Es handelt sich um eine Art Matrizenrechnung zur Lösung von Systemen linearer Gleichungen nach einem – auch in diesem Falle – allgemeingültigen Verfahren (*fang-cheng*). Dabei können auch negative Zahlen auftreten. Ein Beispiel:
„Jetzt hat man folgendes Problem: Aus 3 Garben einer guten Ernte, 2 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 39 Tou. Aus 2 Garben einer guten Ernte, 3 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer

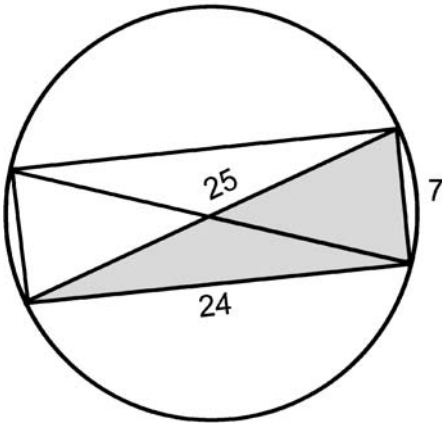


Abb. 2.1.14 Figur zur Baumstammaufgabe

schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 34 Tou. Aus 1 Garbe guter Ernte, 2 Garben mittelmäßiger Ernte und 3 Garben schlechter Ernte erhält man den Ertrag von 26 Tou. Frage: Wieviel ist jedesmal aus 1 Garbe der Ertrag der guten, mittelmäßigen und schlechten Ernte? Die Antwort sagt: Von der guten Ernte bringt 1 Garbe $9\frac{1}{4}$ *Tou. Von der mittelmäßigen Ernte bringt 1 Garbe* $4\frac{1}{4}$ *Tou. Von der schlechten Ernte bringt 1 Garbe* $2\frac{3}{4}$ *Tou.“*

(Zitiert nach [Vogel (Ed.), Chiu Chang Suan Shu, 1968, S. 80]. Es folgt die Angabe des Lösungsweges (vgl. dazu auch [Alten et al. 2003, S. 123]).

Buch 9: Das rechtwinklige Dreieck. Die Aufgaben benutzen den Satz des Pythagoras, der freilich nicht bewiesen wird. Manche Aufgaben könnten an die mesopotamische Mathematik erinnern, insbesondere an den seleukidischen Text BM 34568 (BM steht für den Aufbewahrungsort British Museum). Doch muss betont werden, dass es weder das Konzept noch den Begriff „Winkel“ (wie in der griechischen Mathematik) gibt [Raphals 2002].

Ein Beispiel aus Buch 9: Es soll aus einem Baumstamm (Querschnitt kreisförmig angenommen, Durchmesser vorgegeben) ein Balken vorgegebener Breite herausgesägt werden. Die Lösung setzt voraus, dass der Umfangswinkel über dem Durchmesser ein rechter ist [Vogel 1983].

Hochinteressant ist die näherungsweise Berechnung von π durch Liu Hui im Kommentar zum 1. Buch von *Jiuzhang suanshu*.

Die Berechnung von π hatte in China, möglicherweise durch indische Gelehrte beeinflusst, eine lange Tradition. Der Astronom und Philosoph Zhang Heng (78–139) hatte (wie?) konstatiert, dass sich das Quadrat des Kreis-

Abb. 2.1.15 Altchinesische Wissenschaftler: Zhang Heng (78–139) Astronom und Philosoph; Zu Chongzhi (429–500) Mathematiker, Astronom und Ingenieur; Seng Yixing (683–727) Astronom; Li Shizhen (1518–1539) Arzt und Pharmakologe (Ausschnitte aus Briefmarken, China 1956)

umfanges zum Umfang des dem Kreis umbeschriebenen Quadrates wie 5:8 verhält. Das läuft auf die Näherung $\pi \approx \sqrt{10} \approx 3{,}162$ hinaus. Der Fehler liegt unter 1%. Ein gewisser Wang Fan (gest. 267), ein Heerführer, gelangte (ebenfalls: unbekannt wie?) zu dem besseren Näherungswert $\pi \approx 142/45 = 3,1\bar{5}$.

Der Kommentar von Liu Hui benutzte die Annäherung an die Kreisfläche durch eine Folge einbeschriebener $k \cdot 2^n$-Ecke, beginnend mit dem Sechseck. (Dies erinnert an die zeitlich frühere Exhaustionsrechnung von Archimedes in dessen Kreisrechnung.) Liu Hui erhielt $\pi \approx 3{,}14150$. Und Liu Hui erläutert:

> *„Je feiner man teilt, um so geringer ist der Fehlbetrag. Teilt man immer weiter und weiter, so lange, bis die Teilung unmöglich wird, so erhält man eine Übereinstimmung mit der Kreisfläche, und ein Fehlbetrag tritt nicht mehr auf.“*
> (Zitiert nach [Juschkewitsch 1964, S. 58])

Noch bessere Näherungen für π fand der Astronom, Mathematiker und Ingenieur Zu Chongzhi (429–500) mit der Abschätzung

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927 \text{ bzw. dem Näherungswert } 355/113.$$

Jiuzhan suanshu (Neun Kapitel bzw. Neun Bücher) ist als Standard-Lehrbuch noch lange, bis ins 13. Jahrhundert hinein, kommentiert und analysiert worden.

Liu Hui (ca. 263 n. Chr.) hat den „Neun Kapiteln“ einen eigenen Text angefügt, bestehend aus neun Vermessungsaufgaben, unter dem Titel *Haidao suanjing* (Sea Island Computational Canon, etwa: Mathematisches Handbuch von der Insel im Meer). Es geht u. a. darum, Höhe oder Breite nicht zugänglicher Orte zu bestimmen, etwa die Höhe einer Bergspitze auf einer Insel, einen Turm auf einem Hügel, die Tiefe eines Tales.

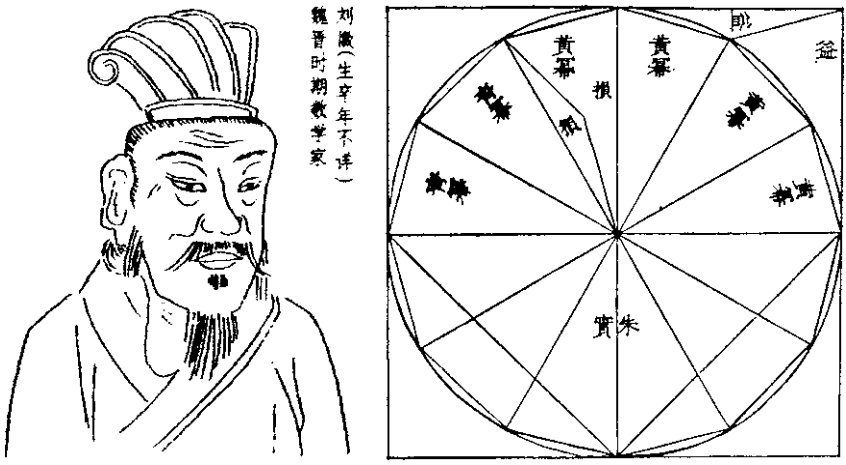


Abb. 2.1.16 Liu Hui und sein „Exhaustionsverfahren“ zur Berechnung des Kreisinhaltes (Ausschnitte aus einer Briefmarke China 2002 und einem Text von Tsai Chen aus [Joseph Needham: Science and Civilization in China, vol. 3, Cambridge University Press 1959], [Scriba/Schreiber 2005])

Die Vermessung beruht auf der Verwendung von zwei in einer Linie zum Objekt und auf gleicher Höhe senkrecht errichteten gleichlangen Messstäben, deren Abstand voneinander bekannt ist. Gefragt wird nach der Höhe der Bergspitze und nach der Entfernung zu der vorderen Stange. Da eine Strecke mit den beiden anliegenden Winkeln bekannt ist, ist das Dreieck konstruierbar sowie dessen Höhe.

In den „Neun Büchern“ werden Systeme linearer Gleichungen mit eindeutigen Lösungen behandelt. In der Folge wurden auch allgemeinere lineare Aufgaben gestellt: unbestimmte oder diophantische Gleichungen.

Berühmt wurde die „Aufgabe der 100 Vögel“. Ihr Ursprung mag ins 5. Jahrhundert zurückreichen; sie findet sich um 475 n. Chr. in einem arithmetischen Handbuch und um 566 in einem Kommentar (die Datierungen gehen auseinander: Martzloff/Juschkewitsch, Chemla). Die Aufgabe lautet:

> *„Wie viel Hähne, Hühner und Kücken kann man für 100 Münzen kaufen, wenn man insgesamt 100 Vögel kauft und wenn ein Hahn 5 Münzen, eine Henne 4 Münzen und 4 Kücken eine Münze kosten?“*
> [Juschkewitsch 1964, S. 74f.]

Die Aufgabe ist nicht eindeutig lösbar; es gibt mehrere Lösungen, z. B. 15 Hähne, 1 Huhn und 84 Küken oder: kein Hahn, 20 Hennen und 80 Küken. Dieser Aufgabentyp (mit diesen oder anderen Tieren) ist weit verbreitet. Er tritt in Indien bei Bhāskara im 12. Jahrhundert auf, bei den Muslimen Abū Kāmil und al-Kāšī, in Europa bei Alcuin und während der Renaissance. Die allgemeine Lösung derartiger Probleme stammt von Leonhard Euler (1707–1783).

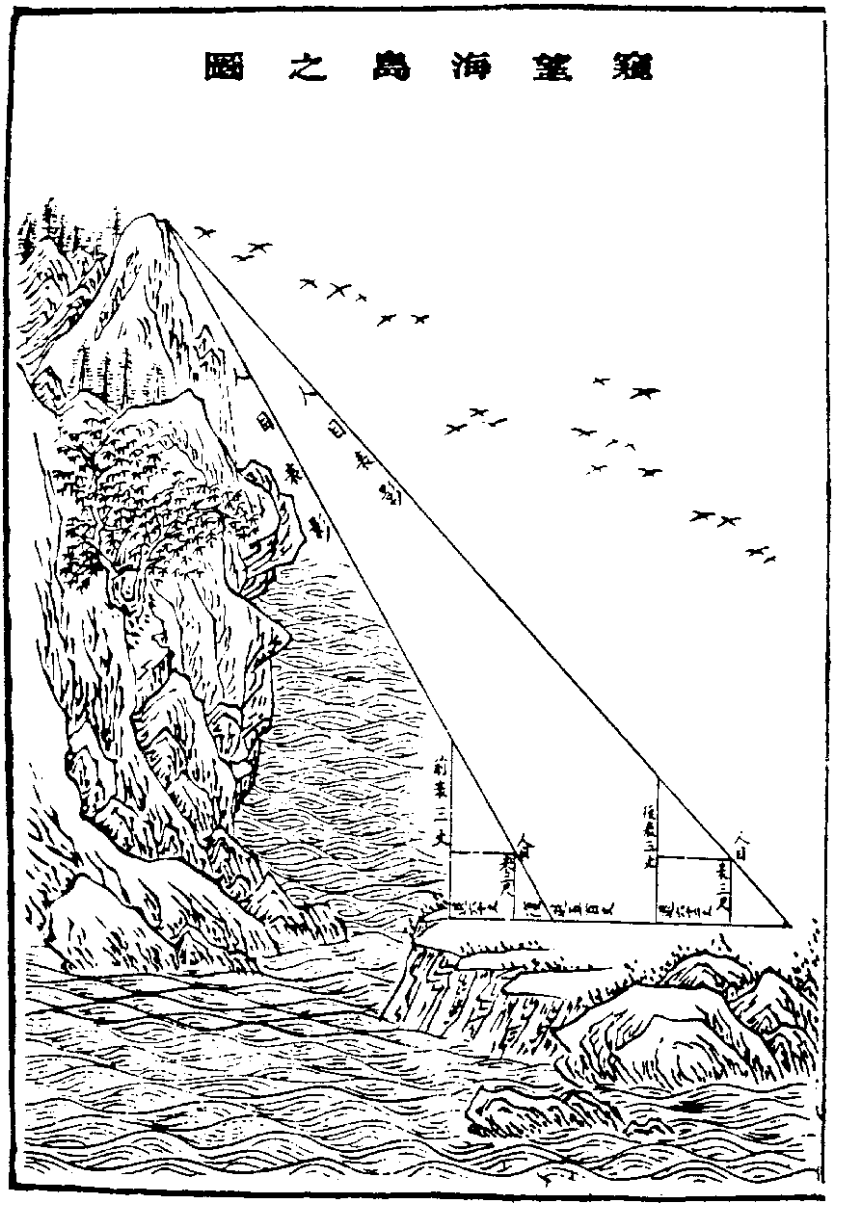


Abb. 2.1.17 Illustration der Methode der doppelten Messungen (Blockdruck aus der Enzyklopädie Tu Shu Yi Chen, 1726 [Frank G. Swets: The Sea Island Mathematical Manual: Surveying and Mathematics in Ancient China, page 10, Fig 3, 1992, University Park, PA: The Pennsylvania State University Press])

Noch eine andere, sogar noch kompliziertere zahlentheoretische Problematik tritt im alten China auf: das sog. chinesische Restproblem aus einem Mathematischen Handbuch des Meisters Sunzi, entstanden zwischen 280 und 473. Modern gesprochen: Ein Gleichungssystem muss nach verschiedenen Moduln gelöst werden.

> *„Es gibt Dinge, ihre Zahl ist unbekannt. Zählt man sie zu je drei ab, ist der Rest 2, zählt man sie zu je fünf ab, so ist der Rest 3, zählt man sie zu je sieben ab, so ist der Rest 2. Es ist gefragt, wieviel Dinge es sind.“*
> [Juschkewitsch 1964, S. 76]

Gesucht ist – in moderner Schreibweise – eine Zahl N mit $N \equiv 2 \pmod 3$, $N \equiv 3 \pmod 5$, $N \equiv 2 \pmod 7$. Eine Lösung ist $N = 233$; die kleinste Lösung ist 23. (Der originale Lösungsweg ist wiedergegeben bei [Juschkewitsch 1964, S. 76].)

Wie aus späteren Berichten hervorzugehen scheint, sind derartige Aufgaben im astronomischen Zusammenhang entstanden. Ein Autor gab im Jahre 1247 ein Beispiel an: Die Wintersonnenwende tritt alle $365\frac{1}{4}$ Tage ein. Der Mondmonat hat $29\frac{499}{940}$ Tage und der Zyklus *ki sha-tsu* umfasst 60 Tage. Nach wie vielen Jahren oder Monaten oder Tagen wird eine vorgegebene Ausgangsposition erreicht?

Das chinesische Restproblem wurde von Euler behandelt und endgültig von Gauß in seinen berühmten *Disquisitiones arithmeticae* (1801) gelöst.

Das 13. Jahrhundert (späte Sung-Zeit und Yuan-Zeit (Mongolenherrschaft)) brachte einen bedeutenden Aufschwung der chinesischen Mathematik. Es wird daher oft als „Goldenes Zeitalter“ bezeichnet. Die Gründe des plötzlichen Aufschwunges werden gegenwärtig noch diskutiert; eine endgültige Antwort ist noch nicht gefunden. Aber es dürften Einflüsse von außerhalb, von Indien und dem islamischen Bereich, wirksam gewesen sein. Beispielsweise traf im Jahre 1267 in Peking ein Mitarbeiter des Observatoriums von Maragha (Iran) ein, der eine Reihe astronomischer Geräte mitbrachte [Juschkewitsch 1964, S. 86]. Umgekehrt waren im 13. Jahrhundert chinesische Astronomen in Maragha tätig. Auch ist unstrittig, dass die mongolischen Herrscher Astronomie und Mathematik gefördert haben. Im Inhaltlichen erreichte die eigenständige chinesische Mathematik ein Niveau, das das Westeuropas im Mittelalter bei weitem übertraf. Im Einzelnen seien hervorgehoben:

- Das „Pascalsche“ Dreieck als Muster zur Berechnung von Binominalkoeffizienten
- Interpolationsformeln, analog zu den (späteren) sog. Newton-Stirling-Formeln
- Summationsformeln
- Fang-cheng-Methode zur Lösung von Systemen linearer Gleichungen (entspricht dem Gaußschen Algorithmus)

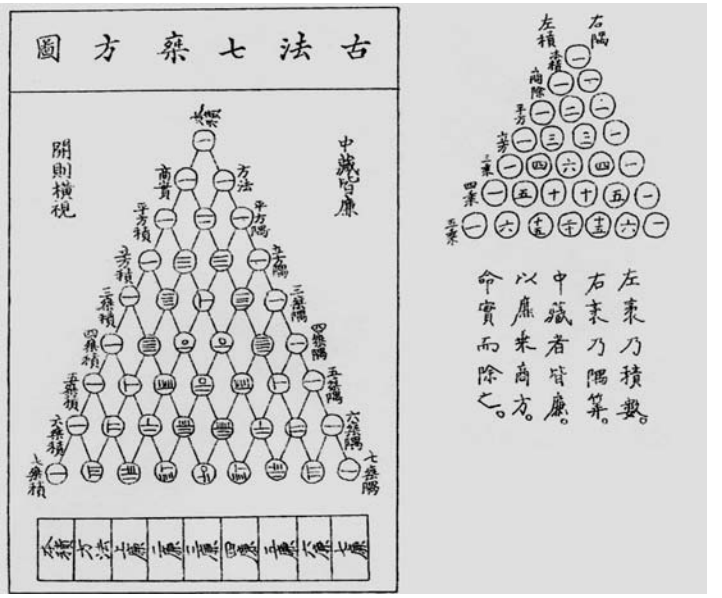


Abb. 2.1.18 „Pascalsches Dreieck“ (aus Siyuan yujian xicao und Yongle dadien) [Martzloff 1997, S. 231]

- Das sog. Chinesische Restproblem, d. h. Systeme von linearen Kongruenzen, sogar für nicht teilerfremde Moduln
- Eine spezifische Form sphärischer Trigonometrie
- Magische Quadrate
- Kreis- und Kugelpackungen
- Unendliche Reihen.

Der Höhepunkt der chinesischen Algebra ist die sog. Tianyuan-Methode. Dazu einige Erläuterungen: In unserem Sinn gibt es den Begriff „Gleichung“ nicht. Im Chinesischen handelt es sich um Polynome mit numerischen Koeffizienten. Tianyuan führt auf verschiedene Fragestellungen, unter anderem auf die Bestimmung einer Lösung (Wurzel) der „Gleichung“. Der Grad des Polynoms spielt keine Rolle; die Methode ist allgemein anwendbar. Die in der europäischen Mathematik seit der Renaissance vorherrschende Aufgabenstellung, die Lösungen in Radikalen anzugeben, wurde nicht weiter verfolgt.

Tianyuan ist eine Art Weiterentwicklung der fang-cheng-Methode. Beide Methoden beruhen auf einem Zahlenalgorithmus; die Zahlen werden mit Zahlstäbchen auf spezifische Positionen im Rechenbrett ausgelegt. Die Ziffern der „Lösung“ werden als ganzzahliger Anteil durch Probieren gefunden. Dies führt auf Hilfsgleichungen, für die die nächste Dezimale gesucht wird. (Für Einzelheiten vgl. [Juschkewitsch 1964], [Martzloff 1997] und [Alten et al. 2003, S. 124f.].)

Diese Methode, die weit zurückreicht, erhielt bei Li Zhi (1192–1279) die Benennung *tianyuan shu* (Methode des Himmelselementes). Tianyuan ist die Bezeichnung für die Unbekannte, tia bedeutet „freies Glied“, yuan „Himmel“, shu „Methode“.

Diese und andere Errungenschaften der chinesischen Mathematik sind von einer ganzen Reihe von Mathematikern gefunden und schriftlich niedergelegt worden. Einige der Texte haben sich erhalten und sind in teilweise kommentierten Ausgaben wieder zugänglich (vgl. auch in [Martzloff 1997] den Anhang *„Books and Articles in Western Languages“*, sowie Abhandlungen in Chinesisch und Japanisch).

Hier sollen einige herausragende Vertreter und deren Schriften kurz vorgestellt werden.

Li Zhi (1192–1279) stammt aus der Nähe des heutigen Beijing (Peking). Sein ursprünglicher Name war Li Yeh, den er aber wegen Namensgleichheit mit einem ungeliebten Herrscher ablegte. Er lebte zeitweise als Einsiedler, umgeben von Freunden, wurde aber schließlich gezwungen, der 1264 vom Mongolenkaiser Kublai Khan (1260–1294) gegründeten Akademie beizutreten, wirkte dort aber nur einige Zeit.

Neben zahlreichen anderen Werken stellte Li Zhi 1248 sein bedeutendstes Werk *Ceyuan haijing* (oft unter der deutschen Bezeichnung *„Der Seespiegel der Kreismessung“*) fertig. Es geht nicht – was man denken könnte – um die Berechnung von π, sondern in der Hauptsache einerseits um die Zurückführung geometrischer Aufgaben auf algebraische Gleichungen und andererseits um Aufgaben über Kreise, die Dreiecken einbeschrieben sind. Negative Koeffizienten sind durch Querstriche gekennzeichnet.

Qiu Jiushao (ca. 1202–1261) war zeitweise hoher Beamter im südchinesischen Staat Sun, der in Feindschaft stand zu dem von den Mongolen eroberten Norden Chinas. So darf man annehmen, dass er zu seinem Zeitgenossen Li Zhi keinen Kontakt hatte und keine seiner Schriften gekannt hat.

Im Jahre 1247 war das Werk *Shushu jiuzhang* (Neun Bücher über Mathematik) fertiggestellt. Es ist, trotz annähernd gleichen Titels, anspruchsvoller als das antike Buch. Nach einem zahlentheoretischen Teil enthält der Hauptteil eine ausführliche Darlegung des Verfahrens zur Auflösung von Gleichungen höheren Grades, das wir heute nach Ruffini-Horner benennen.

Yang Hui (13. Jahrhundert) lebte im Süden Chinas. Er hat zahlreiche Werke geschrieben, die sich insbesondere mit Arithmetik beschäftigten. Drei seiner Werke sind 1275 in *Yang hui suanfa* (Yang Huis Methoden der Berechnung) eingegangen, das auf Umwegen die Entwicklung der Mathematik in Korea und Japan stark beeinflusst hat.

Zhu Shijie (Ende 13. Jahrhundert) ist der letzte der bedeutenden Mathematiker jener glanzvollen Periode. Man weiß sehr wenig über ihn; jedenfalls hat er Jahrzehnte als Wanderlehrer gewirkt. Die Originaltitel seiner Abhandlungen sind verloren gegangen. Der Titel seiner rekonstruierten Abhandlung *Siyuan yugan* von 1303 wurde in der Vergangenheit oft mit „Jaspisspiegel der

vier Elemente“ übersetzt. In Anbetracht des Umstandes, dass der Titel mit vier Charakteren *si yuan yu jian* geschrieben wurde, wurde auch die Übertragung *„Mirror trustworthy as jade relative to the four origins“* vorgeschlagen, wo angespielt wird auf die Durchsichtigkeit und Klarheit des kostbaren Minerals Jade [Jock Hoe 1977]. Teile dieser Abhandlung sind anspruchsvoll. So findet man eine Form der Bezeichnung für Gleichungen höheren Grades mit vier Unbekannten, Aufgaben, die auf derartige Gleichungen führen, ferner die Beschreibung der sog. Hornerschen Methode und die Verwendung der später nach Newton benannten Näherungsformel.

Über die schwierigen Fragen der Übertragung chinesischer Titel von Arbeiten und Büchern, vor allem aber zu den altchinesischen Quellen vgl. J. W. Dauben, *Chinese Mathematics* in [Katz (Ed.) 2007, S. 187-384].

2.1.3 Zusammenfassung

Wesentliche Inhalte der chinesischen Mathematik

Ca. 1400 v. Chr.	Orakelknochen mit Zahlzeichen
Zhou-Dynastie	*Zhoubi suanjing* (*Chou Pei Suan Ching*; Klassische Arithmetik des Chou Gnomon): Satz des Pythagoras, astronomische Beobachtungen und Berechnungen, Kreis- und Dreickslehre
2. Jh. v. Chr.	Rechenbrett mit Stäbchen
bis	*Jiuzhang suanshu* (*Chiu Chang Suan Shu*; Neun Bücher arithmetischer Technik): Berechnung einfacher ebener Figuren; Näherungen für π, Kreisfläche, Kreisringe und -segmente, Inhalte von Pyramide, Kreiskegel und Kegelstumpf; Anwendungen des Satzes von Pythagoras; Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln (mit einer Art Hornerschema); doppelter falscher Ansatz für die Lösung linearer Gleichungen, fangcheng-Methode (analog dem Gaußschen Algorithmus) zur Lösung von Systemen linearer Gleichungen; quadratische Gleichungen, unbestimmte Gleichungen
3. Jh. n. Chr.	LIU HUI: *Haidao suanjing* (*Hai Tao Suan Ching*; Handbuch zur Berechnung von Inseln): Berechnung von Daten nicht zugänglicher Orte aus Messergebnissen. Kommentar zu „Neun Bücher arithmetischer Technik“: Berechnung der Kreisfläche durch Exhaustion
4./5. Jh.	*Sunzi Suanjing*: Dezimalsystem, Arithmetik, sog. chinesisches Restproblem
5. Jh.	*Zhang Qiujian Suanjing* (*Chang Chui-chin;* Arithmetisches Handbuch): Aufgaben zum kleinsten gemeinsamen Vielfachen, zu arithmetischen Reihen und Aufgabe der 100 Vögel
Ende 5. Jh.	Erste Kontakte mit indischen Gelehrten: Frühform der Trigonometrie, Kalenderrechnungen
7./8. Jh.	Übernahme der indischen Ziffern
13. Jh.	„Goldenes Zeitalter“ der chinesischen Mathematik LI ZHI (LI YEH): *Ceayuan Haijing* (Seespiegel der Kreismessung): Algebraische Formulierung geometrischer Aufgaben QIN JIUSHAO: *Shushu jiuzhang* (Neun Bücher über Mathematik): Tianyuan-Methode zur numerischen Lösung algebraischer Gleichungen (analog dem Horner-Schema) YANG HUI: Kommentar zu den „Neun Büchern“ ZHU SHIJE: Siyuan yu jian (Kostbarer Spiegel der vier Elemente): Darstellung und Lösung von Systemen nichtlinearer Gleichungen, „Horner“-Schema und Näherungsformeln wie die später nach Newton benannte
13.–15. Jh.	Austausch mathematischer Kenntnisse mit persischen und zentralasiatischen Astronomen
16. Jh.	Übermittlung mathematischer und astronomischer Kenntnisse aus Europa durch Jesuiten in China

2.2 Entwicklung der Mathematik in Japan

600 v. Chr.	Gründung Japans als Kaiserreich
400 n. Chr.	Übernahme der chinesischen Schrift
ab 7. Jh.	Aufstieg des Hofadels, Beamtenstaat
ab 13. Jh.	Die Schogun (Feldherren) sind die eigentlichen Machthaber mit Samurai als Lehnsleuten
1542 oder 1543	Portugiesische Seefahrer entdecken die japanischen Inseln
1637	Das Schogunat schließt Japan von der Außenwelt ab
17./18. Jh.	Entfaltung einer reichen eigenständigen Kultur, Wasan-Mathematik
1853/54	Der amerikanische Kommodore Perry „öffnet“ Japan für die USA
1867/68	Meiji-Reformation, Ablösung des Schogunats durch absolute Monarchie, Öffnung Japans für Handel, Übernahme westlicher Wissenschaft
1894	Chinesisch-japanischer Krieg
1904	Russisch-japanischer Krieg
7. 12. 1941	Angriff auf die USA in Pearl Harbour
1945	Atombomben auf Hiroshima und Nagasaki
ab 1950	Aufstieg zur modernen Wirtschaftsmacht

2.2.0 Historischer Hintergrund

Japan verdankt viele seiner kulturellen Güter dem Kontakt mit Korea und insbesondere mit China, vor allem in seiner Frühphase. Daher ist es naheliegend, die Entwicklung in Japan an die Darstellung der chinesischen Mathematik anzuschließen.

Im 4./3. Jahrhundert v. Chr. wanderten vom Festland Stämme auf den Inseln ein, die die Ureinwohner (Ainu) nach Norden abdrängten. Man hatte Metallgeräte in Gebrauch und betrieb Nassfeldanbau.

Nach unsicheren Datierungen, wonach es bereits um 600 v. Chr. zur Gründung eines japanischen Kaiserreiches gekommen sei, ist die Existenz eines japanischen Staates um 350 n. Chr. gesichert. Nach dem kriegerischen Einfall Japans in Korea im Jahre 380 kam man um 405/06 in Berührung mit der chinesischen Schrift; auch heutige japanische Schriftzeichen sind zum geringen Teil mit chinesischen identisch, haben aber im Allgemeinen eine andere Bedeutung. Um die Mitte des 6. Jahrhunderts drang der Buddhismus über Korea nach Japan vor, mit wechselnder Bedeutung für Japan. In der sog. Nara-Periode (710–784) – Nara war Hauptstadt – begann ein großer kultureller Aufschwung, bei erstarkendem Feudalismus. 794 wurde die Hauptstadt nach Heinau, dem heutigen Kyoto verlegt, später nach Edo, dem heutigen Tokyo. Ende des 12. Jahrhunderts bildete sich die Regierungsform des „Bakufu“ (Zeltregierung) heraus; an der Spitze stand ein „Shogun“ (Oberbefehlshaber zur Bekämpfung der Barbaren). Der Kaiser hatte kaum Regierungsgewalt.

Abb. 2.2.1 Niederländisch-japanische Beziehungen, Begegnung zweier Kulturen (Japan 2000)

In den Jahren 1274 und 1281 konnten Eroberungsversuche durch die Mongolen abgewehrt werden. Portugiesen tauchten 1543 als erste Europäer auf und brachten Feuerwaffen nach Japan. Francisco Xavier kam 1549 als erster christlicher Missionar nach Japan. 1609 folgten die Holländer, 1613 die Engländer. Allerdings schloss sich Japan 1636/39 rigoros gegen Einflüsse von außen ab; nur die Holländer durften auf einer vorgelagerten Insel eine kleine Handelsmission unterhalten. Einige wenige Bruchteile der westlichen Wissenschaft – z. B. Newtons Fernrohr – gelangten so nach Japan.

Unter Führung des US-Commodore Perry erfolgte 1853 gewaltsam die „Öffnung Japans“ für den Handel mit den USA. Die Japaner hatten noch nie Dampfschiffe gesehen; sie nannten die Furcht einflößenden Schiffe „Schwarze Schiffe“. Durch Demonstration von Kanonenschüssen und westlicher Technik (Eisenbahn, Telegraph) wurden die Japaner zum Einlenken bewegt.

Nach der sog. Meiji-Reformation von 1867/68, dem Übergang vom Feudalismus zum Kaiserreich als zunächst absolute, dann konstitutionelle Monarchie, nahm Japan eine enorme Entwicklung und hatte schon um die Jahrhundertwende in einem Sturmlauf den Anschluss an die Weltwissenschaft hergestellt. Die erste Eisenbahn fuhr bereits 1872! Westliche Gastprofessoren wirkten in Japan, japanische Studenten wurden nach Europa und den USA entsandt, um – wie es in der (damaligen) japanischen Verfassung hieß – *„Wissen auf der ganzen Erde zu suchen, auf dass die Grundlagen des Kaiserreiches sicher errichtet werden.“*

Im 20. Jahrhundert nahm Japan aktiv an der Entwicklung der Weltwissenschaft teil. Es verfügte über hervorragende Gelehrte, die teils im Lande, teils im Ausland wirkten.

2.2.1 Mathematik im alten Japan

Merkwürdigerweise – und darauf weist Martzloff [Martzloff 1997, S. 108] hin – gibt es keine umfassende Geschichte der Mathematik in Japan in einer westlichen Sprache. So sei verwiesen auf die altbewährten Darstellungen von Y. Mikami *The Development of Mathematics in China and Japan* [Mikami 1913] und von D. E. Smith/Y. Mikami *A History of Japanese Mathematics* [Smith/Mikami 1914]. Einen Überblick über die traditionelle japanische Mathematik vermittelt [Martzloff 1993]. Empfehlenswert ist der Artikel von Shigeru Nakayama: *Japanese Scientific Thought* im Vol. XV des *Dictionary of Scientific Biography*, S. 728–758, in dem die Unterschiede der naturphilosophischen Grundlagen zwischen Ost und West herausgearbeitet werden. Zur Entwicklung der Geometrie in Japan vgl. [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 129–141]. Daneben gibt es Einzelartikel biographischer Art über japanische Mathematiker.

Aus der Frühzeit Japans gibt es keinerlei verlässliche Informationen. Unter dem Kaiser Ōjin (284 v. Chr.) drangen chinesische Schriftzeichen in Japan ein und Angehörige des Adels lernten lesen und schreiben. Mit Sicherheit gab es wie überall mystische Vorstellungen über Himmel und Sterne, auch bezüglich der Zahlen. Wir wissen von einer verschollenen Rückbesinnung auf vergangene Zeiten, *Jindai monji* (etwa: Buchstaben aus dem Zeitalter der Götter), einer Art Kabbala. Einigermaßen sichere Informationen aus der Frühzeit besitzen wir dagegen vom Zahlensystem, dezimal aufgebaut und in der Lage, hohe Potenzen von 10 in Worten auszudrücken. Es gab Maßsysteme und Kalender, aber wir wissen nicht, wie man rechnete – mit Fingern oder Symbolen?

Die Einführung des Buddhismus in Japan wird häufig auf das Jahr 552 n. Chr. datiert, als eine Buddha-Statue bei Hofe aufgestellt wurde. Koreanische Priester brachten überdies die chinesische Zeitrechnung, Astrologie und Kalender. Im Jahre 604, in der Regierungszeit der Kaiserin Suiko, wurden erstmals Almanache in Japan verwendet, und in dieser Zeit erwies sich Prinz

Abb. 2.2.2 Commodore Perry „öffnet“ Japan (Markenmotiv USA 1953)

Shōtoku Taishi als Förderer des Buddhismus und des Lernens, sodass man ihn als Vater der japanischen Arithmetik und sogar (irrtümlicherweise) als Erfinder des Abakus verehrte. Bald darauf wurde das chinesische Maßsystem übernommen. Man erfand die Wasseruhr, teilte den Tag in 100 Stunden und errichtete ein Observatorium.

Im Jahre 701 errichtete man eine Art Universitätssystem, das auch Mathematik umfasste und später auf neun chinesische Lehrbücher zurückgriff, möglicherweise auf Liu Hui und auf den chinesischen Klassiker *Neun Bücher arithmetischer Technik.*

Es scheint, dass wesentliche Bestandteile der chinesischen Mathematik bewusst übernommen worden sind, wenn auch in der Kaste der Samurai Mathematik nur hinsichtlich ihres intellektuellen Gehaltes anerkannt wurde, die Bindung an kaufmännisches Rechnen jedoch verpönt war [Smith/Mikami 1914, S. 7–17]. Diese Verachtung galt auch dem Gebrauch des *soroban*, der japanischen Variante des chinesischen suanpan.

Der japanische *soroban* ist eine relativ späte Erfindung; man weiß nicht genau, wann er aus China nach Japan gekommen ist. Zu Beginn des 17. Jahrhunderts war er jedoch in häufigem Gebrauch. Gelegentlich wird dies mit Mei Wenting (1633–1721) in Verbindung gebracht [Smith/Mikami 1914, S. 19].

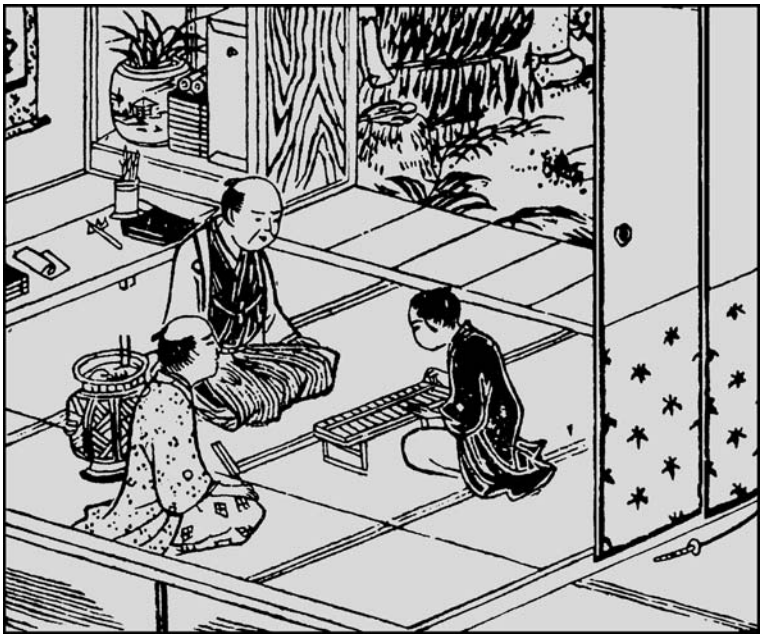
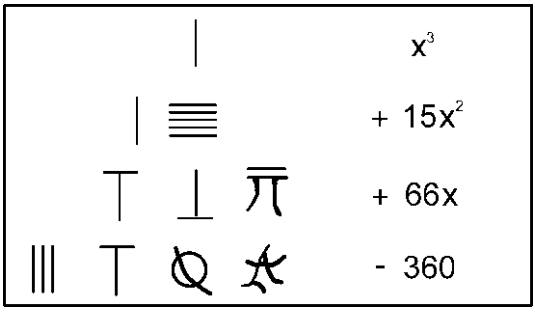


Abb. 2.2.3 Gebrauch des Soroban. Aus einem Werk von 1825 [Smith/Mikami 1914, S. 43]

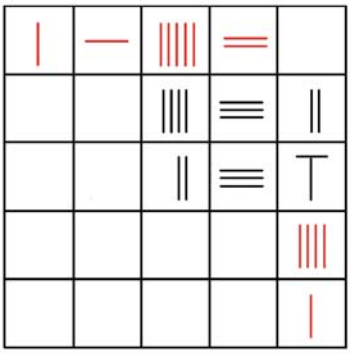
Noch 1945 erwies sich der *soroban* den damals gebräuchlichen elektrischen Rechenmaschinen als überlegen: Am 12. Nov. 1945 schlug Kiyoshi Matsuzaki, der Champion des *soroban* im japanischen Postministerium, den „als besten Bediener elektrischer Rechenmaschinen in Japan“ qualifizierten Amerikaner Thomas Nathan Woods in einem Wettkampf mit fünf Aufgaben zu den vier Grundrechenarten 4:1! [Ifrah 1986, S. 154].

Nebenher – und schon früher – waren die aus China übernommenen Rechenstäbchen in Gebrauch, genannt *sanchi* oder *sangi*. Sie wurden auf vorbereiteten Tafeln mit quadratischen Feldern ausgelegt, entsprechend dem sehr alten chinesischen Zahlensystem; rote Stäbchen repräsentieren positive, schwarze negative Zahlen. Das Verfahren diente zum Lösen von Gleichungen, unter Bezug z. B. auf den Chinesen Li Zhi (Li Yeh, 13. Jh. n. Chr.).

Beispielsweise bedeutet (in der Schreibweise von Li Zhi, 1248)



die Gleichung $1x^3 + 15x^2 + 66x - 360 = 0$. $\overline{\Pi}$ ist das Zeichen für Monade (Einheit); 𝍠 bewirkt Subtraktion; 〇 bedeutet die Null. In späterer Handhabung ist der Term $11\,520 - 432x - 236x^2 + 4x^3 + x^4$ auf dem Brett ausgelegt, von oben nach unten:



1	1	5	2	0
	-	4	3	2
	-	2	3	6
				4
				1

Dazu existierte ein sinnvoller Algorithmus, um wenigstens eine Lösung der Gleichung zu finden, ähnlich dem Hornerschen Schema. Für Einzelheiten sei verwiesen auf [Smith/Mikami 1914, S. 47–58].

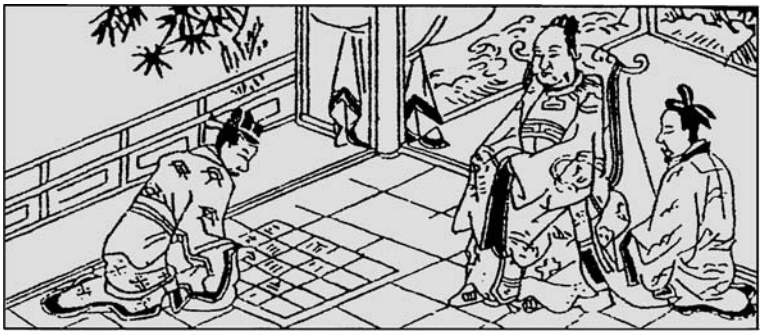


Abb. 2.2.4 Mathematiker arbeitet mit Stäbchen auf dem Rechenbrett (aus Miyake Kenrys 1795 in [Smith/Mikami 1914, S. 29])

2.2.2 Die Renaissance der japanischen Mathematik

Eine glanzvolle Periode der japanischen Mathematik wird auf die Zeit vom Ende des 16. Jahrhunderts bis etwa 1675 datiert. Gestützt auf chinesische Quellen erreichte die japanische Mathematik ein hohes Niveau, durchaus vergleichbar mit der Entwicklung in Westeuropa in der Zeit von Leibniz und Newton, bis hin zur Infinitesimalrechnung. Freilich war der naturphilosophische Hintergrund anders: In Europa ging es, philosophisch gesehen, um die Enthüllung des göttlichen Schöpfungsplanes; in der japanischen Mathematik (genannt *wasan*) eher um Schulung des Geistes, um Scharfsinn, um Kunstfertigkeit. Deren Heimstatt waren die Tempel. Auf geschmückten Holztafeln – genannt *sangaku* – wurden die mathematischen „Denksportaufgaben" angeschlagen und die Teilnehmer als Dank an die Gottheit zur Lösung aufgefordert.

Abb. 2.2.5 a) Tor zum Toshogus-Schrein in Nikko, erbaut 1636 (Japan 1978)
b) Burg Matsumoto, erbaut von Fürst Koei Ishikawa 1597 (Japan 1977)

Abb. 2.2.6 Aus der Trigonometrie (1656) von Yamada Jusei. Das Messdreieck in der Hand weist auf die Verwendung von ähnlichen Dreiecken hin. [Smith/Mikami 1914, S. 64]

Diese Periode fällt in ihrem zeitlichen Beginn fast genau zusammen mit der Edo-Periode der politischen Geschichte (1603 bis 1867/68), als Japan sich von fremden Einflüssen fast völlig abschloss. Edo war der Name („Osthauptstadt“) für die neugewählte Hauptstadt. Edo ist das heutige Tokyo. Zu Anfang des 18. Jahrhunderts hatte Edo bereits mehr als eine Million Einwohner und war damit eine der größten Städte der Erde.

Die Edo-Periode, zumindest in ihrer ersten Phase, war eine Zeit der kulturellen Hochblüte: Baukunst, Städtegründungen, Theater, Literatur (großartige Romane und Lyrik) und eben auch Mathematik. Aus einer stattlichen Reihe von Mathematikern jener Periode vom Ende des 16. Jahrhunderts bis etwa 1675 sind uns viele namentlich bekannt, und sogar ein Teil der Werke hat sich erhalten; allerdings sind manche Lebensdaten unbekannt oder unsicher.

Beginnen wir mit Yoshida Koyu (1598–1672). Er stammt aus einer Gelehrtenfamilie und löste ein breites öffentliches Interesse an Mathematik aus, nachdem er chinesisch gelernt hatte. Er war Schüler des Mathematikers Mōri Kambei (Beginn 17. Jahrhunderts), der in Kyoto lehrte und viel zur Verbreitung des *soroban* beitrug. Yoshida schrieb 1627 das Werk *Jinkoki* und dies erfuhr weite Verbreitung, auch nach dem Tode des völlig erblindeten Autors. Der Titel benutzt chinesische Ideogramme und bedeutet soviel wie „Abhandlung über Zahlen von der größten bis zur kleinsten“. Gelehrt wird das Rechnen auf dem *soroban*, einschließlich der Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln. Für π wird der Wert 3,16 angegeben. Von den ursprünglich 18 Büchern sind nur 3 erhalten; sie wurden als erste mathematische Bücher Japans auch gedruckt.

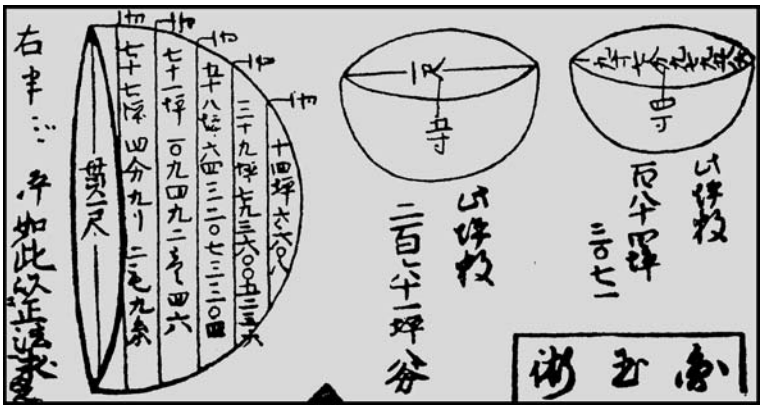


Abb. 2.2.7 Aus dem *Ketsugi-shô* von Isomura (2. Aufl. 1684) [Smith/Mikami 1914, S. 66]

Jinkoki erreichte eine solche Popularität, dass der Buchtitel zum Synonym des Rechenverfahrens wurde, ähnlich wie es in Europa mit *„Algorismus“* geschah. [Smith/Mikami 1914, S. 61].

Ein weiterer Schüler von Mōri war Imamura Chishō, der, anders als Yoshida, noch in klassischem Chinesisch schrieb. Ein 1639 erschienenes Werk (*Jugai-roku*) beschäftigte sich mit den Berechnungen von Flächen und Volumina bei Kreis, Kugel, Kegel. Für π verwendete er den Wert 3,162. Bald darauf publizierte Imamura ein Buch über den *soroban*, und zwar in Versen, damit man sich den Inhalt besser merken könne. Ähnlich war man in Indien verfahren.

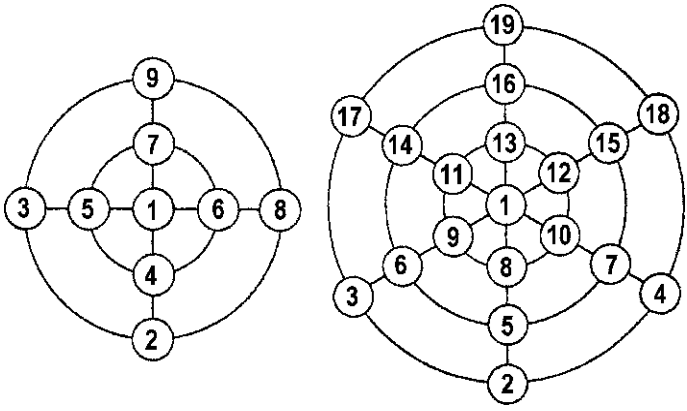


Abb. 2.2.8 Zwei einfache Beispiele magischer Kreise. In den verschiedenen Durchmessern und in den Kreisen sind die Summen der dort stehenden Zahlen jeweils gleich. [Smith/Mikami 1914, S. 71]

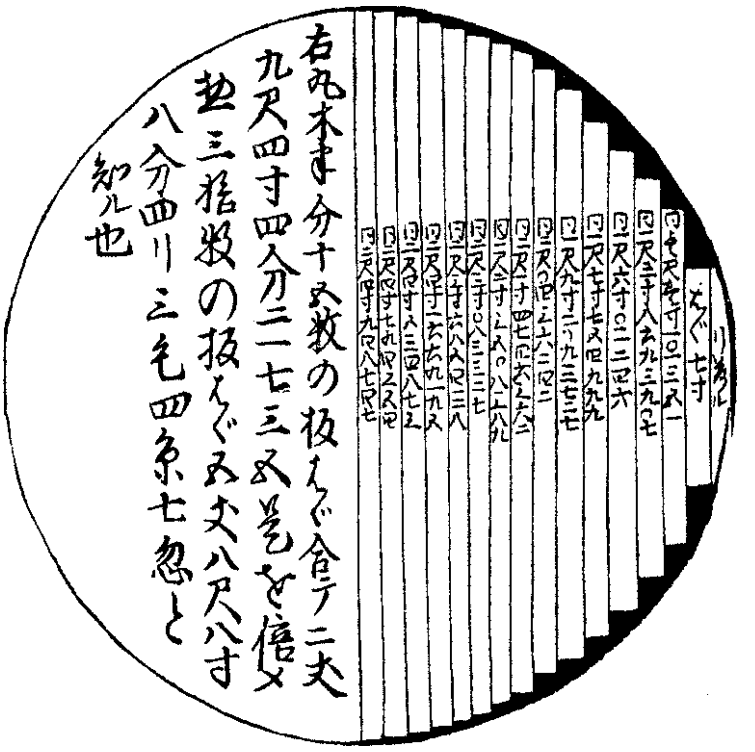


Abb. 2.2.9 Frühe Schritte hin zum Calculus (aus Sawaguchi Kazuyiki: *Kokon Sampô-ki* 1670) [Smith/Mikami 1914, S. 87]

Die Quellen würdigen eine Dreiheit von Schülern des Mōri; der dritte war Takahara Kisshu, der kaum publizierte, aber als hervorragender Lehrer hohes Ansehen genoss.

Die unmittelbar folgende Zeit (die 50er und 60er Jahre), geprägt von ausgedehntem Interesse an Mathematik, sah eine Vielzahl von Autoren und Publikationen, vgl. [Smith/Mikami 1914, S. 64ff.]. Gegenstand ihrer Abhandlungen waren kaufmännisches Rechnen, Vermessung, Approximationen von π, reguläre Polygone, magische Quadrate und magische Kreise. So publizierte Yamada Jusei 1656 eine Einführung in die Trigonometrie.

Ein anderer Mathematiker, Isomura Kittoku, ein „Enkelschüler“ von Mōri, hat ein reichhaltiges und weitreichendes Werk hinterlassen; fünf Bücher erschienen 1660 und erneut 1684. Darin werden zahlreiche Aufgaben gestellt, teilweise im Rückgriff auf Yoshida.

Ein Beispiel aus den von Yoshida übernommenen Aufgaben: *„Man soll die Länge der kleinen Achse einer Ellipse finden, deren Fläche 748,940625 und deren große Achse 38 Maßeinheiten ist.“* (Nach [Smith/Mikami 1914, S. 69])

Die Reichweite seiner Methoden umfasst Vorstufen der Integralrechnung und, nach Art der chinesischen Vorbilder, lineare Gleichungssysteme. Eine Besonderheit sind seine magischen Quadrate und magischen Kreise.

Wir übergehen viele weitere interessante Mathematiker Japans mit interessanten Ergebnissen und erwähnen nur noch Sawaguchi Kazuyuki, anfangs Schüler von Takahara Kisshu, später dann von Seki, über den noch ausführlich zu berichten sein wird. Sawaguchi schrieb das Werk *Kokon Sampō-ki* (etwa: „Alte und neue Methoden der Mathematik"), das aus sieben Büchern besteht.

Seine Näherungen an den in Europa entwickelten Calculus (die Infinitesimalrechnung) erinnern von fern an Cavalieri. Gleichungen 1. Grades heißen *„Divisionsausdrücke"*, Gleichungen höheren Grades heißen *„Wurzelausziehen-Ausdrücke"*. Eine Suche nach weiteren Wurzeln, wenn eine gefunden ist, wird nicht systematisch betrieben.
Eine Probe:

> *„Da ist ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse 6, und die Summe der Fläche und der Quadratwurzel einer Seite ist 7,2384. Gesucht sind die Längen beider Seiten."*
> [Smith/Mikami 1914, S. 88, englisch, dt. Übers. Wg]

Und eine andere Probe:

> *„Man hat ein rechteckiges Stück Land, 300 Maßeinheiten lang und 132 Maßeinheiten breit. Die Fläche soll unter 4 Männern zu gleichen Teilen in der folgenden Weise so geteilt werden, dass drei Teile quadratisch sind."*
> [Smith/Mikami 1914, S. 89, dt. Übers. Wg]

Bei Trennung der 4 Positionen durch gleichbreite Straßen gibt es folgende Lösungen (ME = Maßeinheit):

1. 3 Quadrate à 90 ME Seitenlänge, 4. Position 27 ME breit, Straßen 15 ME breit,
2. 3 Quadrate à 60 ME Seitenlänge, 4. Position 12 ME breit, Straßen 60 ME breit.

1. Lösung: Jeder erhält 8100 $(\text{ME})^2$,
   $3 * 90^2 + 27 * 300 = 4 * 8100 = 32\,400$ (Für Straßen bleiben 7200 Einheiten.)
2. Lösung: Jeder erhält 3600 $(\text{ME})^2$,
   $3 * 60^2 + 12 * 300 = 4 * 3600 = 14\,400$ (Für Straßen bleiben 25 200 Einheiten.)

Der Höhepunkt der japanischen Mathematik während der Edo-Periode verbindet sich mit dem Namen von Seki Takakazu (auch Seki Kôwa, 1642?–1708), der gelegentlich – zu Recht – mit Newton verglichen wird. Die „Ähnlichkeit" geht sogar so weit, dass Seki zufällig im selben Jahre (bei entspre-

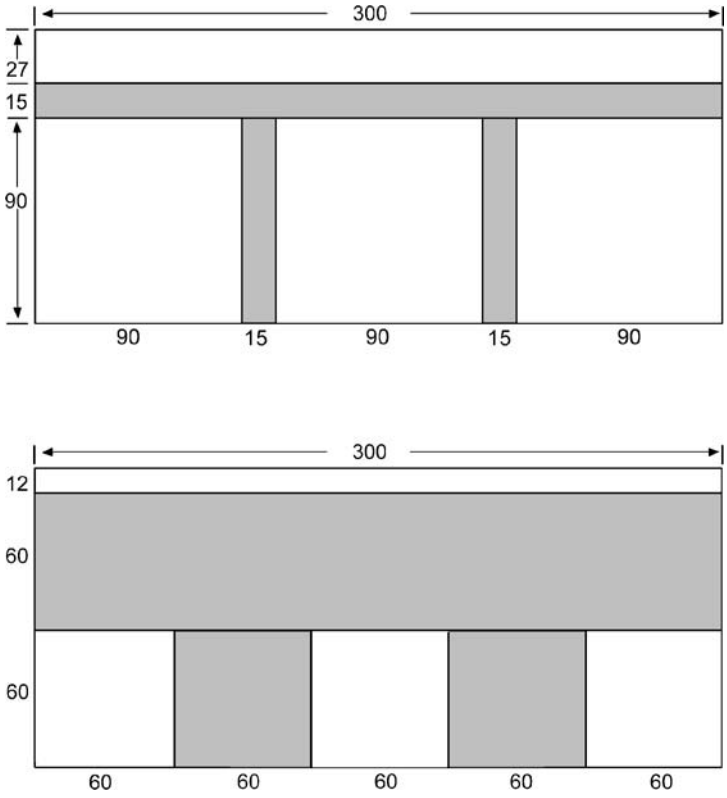


Abb. 2.2.10 Figur zur Aufteilung einer Fläche

chender Kalenderzählung) geboren wurde, als Galilei starb und Newton geboren wurde. Allerdings muss bedacht werden [Sato 2003], dass sich kein Text mit der Handschrift von Seki erhalten hat und dass sogar einige Arbeiten, die in seine Gesammelten Abhandlungen (1974) aufgenommen wurden, wohl teilweise auf seine Schüler zurückgehen. Wir schließen uns hier an den Artikel von Akira Kobori im [DSB, Vol. XII, S. 290–292] an.

Die gesicherten biographischen Daten sind kümmerlich. Seki war zweiter Sohn eines Samurai und wandte sich dennoch den Wissenschaften zu. Er studierte bei einem Schüler von Mōri, der 1622 das erste in Japanisch geschriebene Mathematikbuch *Warizansyo* (ein Buch über Division) verfasst hatte. Von besonderem Einfluss auf Seki war eine Sammlung von Problemen, die mit der chinesischen Methode des „Himmelselementes“ gelöst werden konnten. Sie gestattete, solch ein Problem in eine Gleichung mit einer Variablen zu überführen. Daraus ging in mehreren Schritten 1670 ein Werk hervor, von dem der Autor behauptete, die dortigen 15 Probleme ließen sich nicht mit der Methode des Himmelselementes lösen.

Hier setzte Seki ein. Seine Lösungen aus dem Jahre 1674 wurden von seinem Schüler Katahiro Takebe (Hikojirô Kenkô Takebe (1664–1739)) 1685 publiziert und damit bekannt gemacht, obwohl der Hauptinhalt der Methode noch einige Zeit geheimgehalten wurde. Erst eine weitere postume Darstellung eröffnete den Zugang zu Sekis Methode.

Es handelt sich um allgemeine Theorien für algebraische Gleichungen, anwendbar auf Gleichungen jeden Grades. Sie bezwecken die Suche nach Näherungslösungen (aus Mangel an eigentlichen algebraischen Denkweisen), gestützt auf das (viel später in Europa) nach dem englischen Mathematiker William George Horner (1786–1837) benannte Schema. Obwohl er weder eine Vorstellung noch einen Begriff von einer Ableitung hatte, bildete Seki für einen algebraischen Ausdruck $f(x)$ (modern geschrieben) den Ausdruck $f'(x)$ und konnte so Doppelwurzeln von $f(x) = 0$ finden. Um lineare Gleichungssysteme zu behandeln, bildete er das, was wir Determinante nennen. Im Fall von drei Gleichungen mit drei Unbekannten formulierte er für die Bezeichnung der Determinante eine Vorschrift, welche der Regel von Sarrus entspricht. Eine andere Methode ist der Bildung von Differenzen ähnlich.

Seki suchte die Summe der n ersten p-ten Potenzen zu finden, also $s_p = 1^p+2^p+\cdots+n^p$ für $p = 1, 2, 3, \ldots$ und stieß dabei auf die heute nach Bernoulli benannten Zahlen.

Mit der Methode *Enri* (etwa: Prinzip vom Kreis) leistete er die Rektifikation des Kreisumfanges, eines Kreisbogenstückes und die Kubatur der Kugel. Die Methode besteht beispielsweise darin, den Einheitskreis durch ein- bzw. umbeschriebene reguläre Polygone mit der Eckenzahl 2^n bis $n = 17$ zu approximieren. Für $n = 17$ erhielt er für π den Wert 3,141 592 653 288 902 775 5. Analog verfuhr er beim Kreisbogen. Auch erhielt er Sätze, die den Guldinschen Regeln entsprechen.

Anders als in China gab es in Japan keine staatlich geförderten Ausbildungsstätten für Mathematik. Der Unterricht spielte sich statt dessen in privaten Schulen ab, die sich im Umfeld von bedeutenden Mathematikern und

Abb. 2.2.11 Ausschnitte aus einem Bild von Seki Takakazu, aus [Masahito Fujiwara], [Wikimedia Commons] (Japan 1992)

deren Schülern bildeten. Da Methoden und Ergebnisse geheim gehalten wurden, gab es, Folge oder Ursache, teils erbitterte Fehden und Beschuldigungen.

Einige Namen von Mathematikern der Edo-Periode seien wenigstens genannt: Aida Ammei (1747–1817), Ajima Chokuyen (1739–1783), Waden Nei (1787–1840), Hasegawa Ken (ca. 1783–1838), Arima Raido (1714–1783), Koide Shuki (1797–1865), Omura Isshu (1824–1871).

Da Mathematik kaum als Wissenschaft, etwa in Verbindung mit Naturforschung, betrachtet wurde, sondern als eine Kunst, wurden z. B. die aus China vorgelegten Logarithmentafeln und einige aus den Niederlanden einfließende naturwissenschaftlich-mathematische Ergebnisse kaum beachtet. Einige Ergebnisse der westlichen Mathematik gelangten dennoch nach Japan, teils über vom Westen beeinflusste chinesische Abhandlungen, teils auch durch in Japan tätige christliche Missionare, die unter schwierigsten Lebensumständen arbeiten mussten.

Doch erzielten die zahlreichen japanischen Mathematiker während der Edo-Periode mit Scharfsinn und Phantasie hervorragende Ergebnisse, aber wir müssen darauf verzichten – schon aus Platzgründen – die einzelnen Ergebnisse den Personen zuzuordnen. Dazu sei auf die *„Chronologie der japanischen Mathematik“* in [Mikami 1913, S. 178–191] verwiesen. Es seien immerhin die Reichweite und Hauptarbeitsfelder jener im wesentlichen eigenständigen japanischen Mathematik während der Edo-Periode genannt: Oberfläche und Volumen der Kugel, Bogenlänge, Reihenentwicklungen für π, Kettenbrüche, einbeschriebene Kreise z. B. in Dreiecke oder einen größeren Kreis, Oberfläche eines Ellipsoides, Gleichungen höheren Grades mit der Suche nach Wurzeln mittels Approximationen, magische Quadrate, Rollkurven, Kettenlinie, ebene und sphärische Trigonometrie (ausführlich in [Mikami 1913], [Smith/Mikami 1914], siehe auch [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 134ff.]).

Dem gewaltsamen Sturz des Feudalsystems in der sog. Meiji-Restauration 1867–68 und der Errichtung der konstitutionellen Monarchie in Japan folgte

Abb. 2.2.12 100 Jahre Eisenbahn 1872–1972; Internationaler Kongress der Mathematiker in Kyoto 1990 (Japan 1972, 1990)

ein vollkommener Bruch mit den Traditionen, auch in Technik und Wissenschaft. Die Aneignung der von Europa und den USA geprägtem Wissenschaft wurde offizielles Ziel; selbst die Kenntnis der Schrift in den alten Texten ging verloren. Die japanische Mathematik ist schon am Ausgang des 19. Jahrhunderts, nehmend und auch bald gebend, Teil der Weltwissenschaft und der mathematischen Welt geworden. Als Anerkennung der von japanischen Gelehrten im Inland und im Ausland vollbrachten Leistungen in Mathematik und theoretischer Physik fand der Internationale Mathematikerkongress 1990 in Kyoto statt.

Wesentliche Inhalte der Mathematik in Japan

Frühzeit (bis 552 n. Chr.)	Einflüsse aus China: Chinesische Schrift- und Zahlzeichen, dezimal aufgebautes Zahlensystem
Mittelalter (552–1603)	Eindringen der chinesischen Wissenschaft: Zeitrechnung und Kalender, Maßsystem, Rechenstäbchen, Rückgriff auf chinesische Lehrbücher
17. Jh.	Renaissance der japanischen Mathematik nach Berührung mit Portugiesen und Niederländern, erster Begegnung mit europäischer Wissenschaft und unter erneutem Einströmen chinesischer Wissenschaft: Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln mit Hilfe von Rechenstäbchen, Näherungswerte für π, Rechnen mit dem *soroban*. Ab 1639 Isolation Japans und Entstehung der eigenständigen Mathematikkultur wasan als intellektueller Zeitvertreib
1627	YOSHIDA KŌYŪ: *Jinko-ki*: Sammlung von Aufgaben aus Anwendungen und Unterhaltungsmathematik
1639	IMAMURA CHISHÔ: *Jugai-soku*: Kreisfläche, Volumina von Kugel und Kegel; Studium von Kreispackungen und regelmäßigen Vielecken
1684	ISOMURA KITTOKU: *Ketsugi-sho*: Lineare Gleichungssysteme, magische Quadrate und Kreise
Um 1700	SEKI TAKAKAZU und TAKEBE KATAHIRO: Behandlung linearer Gleichungssysteme mit Determinanten und Differenzen-Methoden; Näherungslösungen algebraischer Gleichungen mit dem später nach Horner benannten Schema; Berechnung von Kreisbögen und Kugelvolumen nach dem *Enri*-Pronzip (spezielle iterative Verfahren, die auf unendliche Reihen führen)
18. Jh.	Verallgemeinerung von Kreispackungen auf Kugelpackungen

2.3 Mathematik im alten Indien

	Allgemeine Geschichte	Kulturgeschichte
ca. 2650 bis 1700	Städtische Hochkulturen im Industal: Harappa, Mohenjo-Daro	Schrift (noch nicht gültig entziffert)
nach 1500 v. Chr.	Einwanderung indoarischer Stämme aus Nordwesten	
1200–500	Vedische Zeit	1028 Preislieder auf Götter,
1200–900	Rigveda	ältestes Literaturdenkmal (erst 1000 Jahre später schriftlich fixiert)
900–600	Erste Staatsgründungen, Indoarier im Raum Delhi Vier Stände mit strenger Hierarchie	Brahmanismus im Gangestal: Feueropfer für Götter, Opfertexte in vedischer Sprache mit Reihen großer Zahlen
um 600 v. Chr.		Sanskrit entsteht als brahmanische Gelehrtensprache. Regeln für Vermessung der Opferplätze, Beginn der Geometrie
Mitte des 1. Jahrtausends	Neues Ziel der Religion: Erlösung, Glaube an Seelenwanderung und Tatvergeltung	Drei Wege zur Erlösung aus dem Kreislauf der Geburten:
560–480 ?	Siddharta Gautama Buddha	Buddhismus: Moralischer Lebenswandel, Meditation
540–478 ?	Vardhamāna Nathaputta Mahavīra	Jainismus: Moralisches Leben und harte Askese
ab 500	Wandlung des Brahmanismus	Hinduismus: Seelenwanderung gemäß dem Karma
ab 400		Heldenepen Mahābhārata und Rāmāyana
518–468	Persische Satrapie Gandhara	Aramäische Sprache und Schrift
327–325	Alexander d. Große am Indus	
322–184	Großreich der Maurya-Dynastie	Tempel und Steinplastiken
272–236	Kaiser Ashoka Maurya	Fels- und Säuleninschriften in Khāroṣṭī- und Brāhmī-Schrift mit Zahlzeichen
184 v. Chr. bis 320 n. Chr.	Verschiedene Staaten herrschen von außerhalb im NW Indiens	Hellenistischer Einfluss auf Astronomie und Mathematik: Trigonometrie

	Allgemeine Geschichte	Kulturgeschichte
320–544	Großreich der Gupta-Dynastie mit Zentrum im NO Indiens	Goldenes Zeitalter von Kunst und Wissenschaft
5. Jh. bis 12. Jh.	Viele Dynastien in Kleinstaaten	Hochblüte der Mathematik
788–820	Vedantha-Lehre des Sankara	Orthodoxer Hinduismus entsteht: Hinduklöster
700–1200	Vordringen des Islam	Bericht von āl-Bīrūnī über Indien
1001–1026	Raubzüge des Mahmud von Ghazna	Zerstörung buddhistischer Klöster
1206–1508	Sultanat von Delhi in Nordindien	
1498	Vasco da Gama landet in Calicut	Christliche Gemeinde im portug. Goa
1206–1858	Großreich der Mogul-Dynastie, ab 1700 immer mehr zerfallend	Prachtbauten der Moguln in Agra, Delhi, Lahore, Fatehpūr Sikri
1600	Gründung der East Indian Company	Einfluss westeuropäischer Kultur
1858	Indien wird britische Kolonie	Englisch Verwaltungs- und Bildungssprache
1947	Unabhängigkeit und Teilung in Indien und Pakistan	

Loblied auf die Mathematik (Mahavīra)

„Das Rechnen ist bei allen Arbeiten nützlich, die mit weltlichen, kultischen oder anderen ähnlichen religiösen Dingen zusammenhängen. Die Wissenschaft des Rechnens wird hoch geachtet in der Lehre der Liebe, in der Lehre vom Reichtum, in der Musik und im Drama, in der Kochkunst, in der Medizin, in der Architektur, bei der Silbenmessung, in der Dichtkunst und Poesie, in der Logik und Grammatik sowie in anderen Dingen. Sie wird verwendet im Zusammenhang mit der Bewegung der Sonne und anderer Himmelskörper, im Zusammenhang mit den Finsternissen und den Konjunktionen der Planeten sowie im Zusammenhang mit der Richtung, der Lage und der Zeit und mit dem Lauf des Mondes. Die Anzahl, die Durchmesser und Umfänge der Inseln, Ozeane und Berge, die Ausmaße der Ansiedlungen und der Gebäude der Weltbewohner, der Räume zwischen den Welten, der Welt des Lichtes, der Welt der Götter und der Bewohner der Hölle und andere mannigfache Vermessungen, all das wird mit Hilfe der Mathematik bewerkstelligt.“ (Deutsch zitiert in [Juschkewitsch 1964, S. 92])

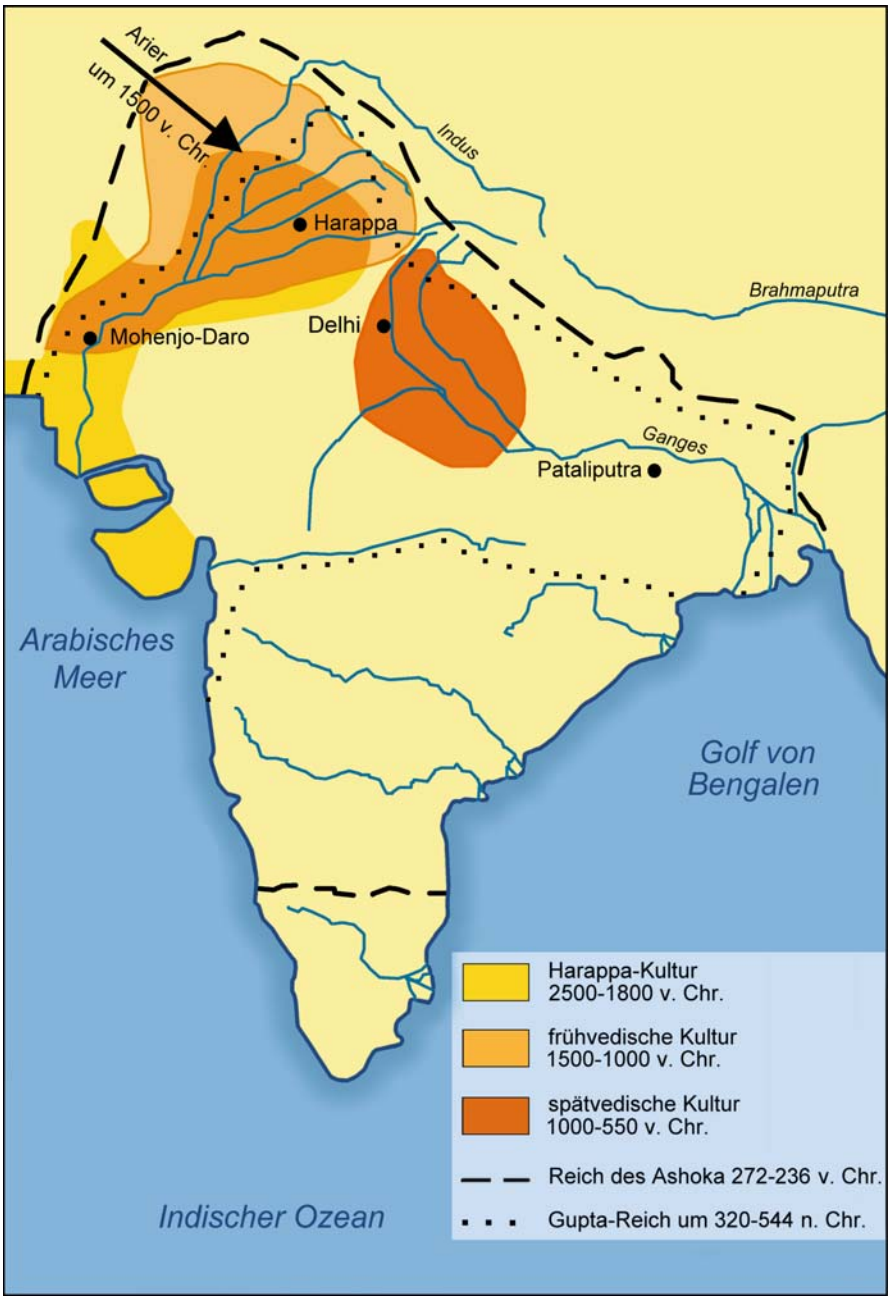


Abb. 2.3.1 Kulturen und Staaten Indiens im Altertum und im Mittelalter

Abb. 2.3.2 Sarasvati, Göttin der Wissenschaft und Lehre. An allen Schulen und Universitäten wird ihr Bild verehrt [Relief aus dem 12. Jh., Vorderseite einer Medaille aus Anlass der 4. Welt-Sanskrit-Konferenz 1979 in Weimar]

2.3.0 Vorbemerkung

Es ist außerordentlich schwierig, die aus Indien stammenden mathematischen Werke in die indische Kulturgeschichte einzufügen. Die Inder haben große Phantasie, aber keinen Sinn für Geschichte gehabt. Um seinem Werk Anerkennung zu sichern, nennt ein indischer Autor (in früherer Zeit!) anstelle seines Namens lieber den eines Menschen der Vorzeit oder – noch besser – den eines Gottes (z. B. *Sūrya-siddhānta* „Astronomisches Lehrbuch des Sonnengottes“). Eigene Erkenntnisse werden oft in einem Kommentar zu einem älteren Werk verpackt, in dem das alles angeblich schon versteckt enthalten war.

Über Art und Zeit der Autoren wird, da es auf sie wenig ankommt, oft nur ungenau oder mangelhaft unterrichtet. So ist ein außerordentlich wichtiges Werk in seiner Datierung so umstritten, dass die einen das 4./5. Jh., die anderen das 12. Jh. n. Chr. als Entstehungszeit annehmen. Wie kann man ein solches Werk historisch richtig würdigen? Und der Mann, der am Beginn der uns bekannten Geschichte der indischen Mathematik steht (5. Jh. n. Chr.), hat wahrscheinlich im Nordosten Indiens, in der Hauptstadt des Guptareiches gelebt, vielleicht aber auch in Südindien, mehrere Tausend Kilometer entfernt. Südindien scheint in der Mathematikgeschichte eine besonders große Rolle zu spielen. Festzustehen scheint, dass die indische Mathematik in dem sehr komplexen kulturellen Erbe Indiens dem brahmanisch-hinduistischen Strang zuzuordnen ist. Darauf deuten die Namen der Verfasser

Abb. 2.3.3 Mohenjo-Daro (Pakistan 1976)

und der Werke hin, sowie die Sprache, in der sie verfasst sind (Sanskrit). Die türkisch-mongolischen Muslime haben als Herrscher über Jahrhunderte wohl kaum dazu beigetragen, aber die Architektur Nordindiens stark geprägt und von da aus vielleicht Anstöße zu Hindu-Bauten, wie der Sternwarte des Jai Singh gegeben.

2.3.1 Historischer Überblick

Im dritten Jahrtausend entwickelte sich im Nordwesten des indischen Subkontinents, im Bereich des Flusses Indus (heute Pakistan) eine Hochkultur, die mit der mesopotamischen und ägyptischen durchaus verglichen werden kann. Sie hatte ihren Vorläufer in der bäuerlichen Amri-Kultur am Unterlauf des Indus in der Region Sindh (4. Jtd. v. Chr.). Ausgrabungen seit den 20er Jahren des vorigen Jahrhunderts brachten eine Stadtkultur zutage, die von etwa 2650 bis 1700 bestand. Handel und Handwerk blühten. Handelsbeziehungen reichten nach Mesopotamien, Bahrain, Persien, Afghanistan, Arabien und Zentralasien.

Mohenjo-Daro, rechts vom Indus gelegen, war wohl die bedeutendste Stadt. Sie besaß rechtwinklig zueinander angelegte breite Straßen. Die Zitadelle war aus gebrannten Ziegeln errichtet. Die Häuser der Mittelschicht verfügten über Bäder, und die gesamte Stadt besaß eine wohldurchdachte Kanalisation. Es wurden zahlreiche Terrakotta-Figuren gefunden, auch die berühmte Bronzefigur einer Tänzerin.

Harappa – in der Blütezeit mit vielleicht 40 000 Einwohnern – lag am linken Ufer eines nun trocken gefallenen Flusses. Auch hier fanden sich Überreste einer Zitadelle sowie Reste eines Schmelzofens. In Gebrauch waren genormte Ziegel (Seitenverhältnisse 1:2:4) und vereinheitlichte Gewichte.

Abb. 2.3.4 Frühe Induskultur, Siegel mit Einhorn (Pakistan 1984)

Es gab eine Schrift, die noch nicht gültig entziffert werden konnte. Doch kann man aus archäologischen Funden einige Informationen über die in den Induskulturen bekannten mathematischen Kenntnisse beziehen.

Einige Kenntnis besitzt man über die frühen Zahlenschreibweisen. Die Ziffern 1 bis 4 wurden durch eine Gruppe vertikaler Kerben dargestellt, die Ziffern 5, 6, und 7 als zwei entweder horizontal oder vertikal gekerbte Gruppen und die Ziffer 9 durch drei vertikal gekerbte Gruppen. Eine Repräsentation der 8 wurde nicht gefunden. Einige dieser Zeichengruppen finden sich auch in den späteren Khāroṣṭī- und Brāhmī-Zahlensystemen wieder. Zur Ausführung arithmetischer Operationen wurde möglicherweise ein Rechenbrett benutzt; Reste eines Abakus sind in Mohenjo-Daro gefunden worden.

An geometrischen Figuren waren Dreieck, Quadrat, Rechteck, Kreis, Kegel, Zylinder, Würfel und andere bekannt. Aus Verzierungen an Vasen, Reliefs u. ä. kann man entnehmen, dass die Menschen der Induszivilisation Strecken halbieren und äquidistant teilen konnten, Kreise zu halbieren und zu vierteln vermochten, Kreissegmente und -sektoren, konzentrische Kreise und parallele Linien konstruieren konnten. Jedoch ist nicht bekannt, ob und wie Flächen- und Rauminhalte angegeben worden sind.

Im frühen 2. Jahrtausend gingen die Städte im Indusgebiet zugrunde. In der zweiten Hälfte des 2. Jahrtausends etwa drangen in mehreren Wellen aus dem Nordwesten indoarische Stämme nach Indien ein. Sie kamen aus den südrussischen Steppen zwischen Kaspisee und Ural, wo sie im 4./3. Jahrtausend mit den Vorfahren der Perser, Griechen, Römer, Kelten, Germanen, Balten und Slawen eine Dialektgemeinschaft gebildet hatten, deren Sprache wir indogermanische (indoeuropäische) Grundsprache nennen.

Wie die Vorfahren der Perser und Afghanen, die Iraner, nannten sich auch die nach Indien ziehenden Stämme „Arier“, d. h. Edle (à*rya* heißt eigentlich der Gastfreundliche, der zum *ari* Fremdling, Gast Gehörige). Um sie von den

Abb. 2.3.5 Rigvedapriester: Er kann den ganzen *Rigveda* auswendig und auf Wunsch sofort jede beliebige Strophe der 1028 Hymnen in drei Rezitationsweisen vortragen ohne irgendwo nachzuschauen – eine enorme mnemotechnische Leistung. [Foto Morgenroth]

Iranern zu unterscheiden, nennen wir sie heute Indoarier. Sie brachten den Rigveda mit, eine Sammlung von 1028 Preisliedern auf verschiedene Götter, um irdischen Wohlstand zu erlangen. Es ist das älteste Literaturdenkmal Indiens, das erst mehr als 1000 Jahre später aufgeschrieben wurde und bis auf den heutigen Tag in bestimmten Priesterfamilien von Generation zu Generation mündlich weitergegeben wird.

Zwischen 900 und 600 v. Chr. wurden die Indo-Arier in dem Zweistromland um Ganges und Yamuna (Raum Delhi) sesshaft. Dort bildeten sich vier Stände heraus: Brahmanen (Priester), Krieger, Händler/Bauern, Handwerker/niedere Dienstleister. Der vierte Stand umfasste die dunkelhäutigen Vorbewohner, die von den Ariern unterworfen worden waren. Nur die Angehörigen der ersten drei Stände durften die inzwischen entstandenen heiligen Texte studieren.

Schon in dieser frühen Zeit wird deutlich, dass die phantasiebegabten Inder eine Vorliebe für große Zahlen hatten. Bereits im *Rigveda* gibt es die Zahl 10 000, und in der Zeit des Brahmanismus (900 bis 600 v. Chr.) sind Zahlzeichen bis zur Billion, ja sogar bis 10 Billionen überliefert.

Gegen Ende dieser Zeit bildete sich im Nordwesten Indiens auf der Grundlage eines altindischen Dialektes das *Sanskrit 1* (das Zusammengefasste, das Geschmückte) als brahmanische Gelehrtensprache heraus. Es ist Träger der hinduistischen Kultur bis heute. Die im Folgenden behandelten mathematischen Schriften sind alle in Sanskrit verfasst.

Die Regeln für das Vermessen der Opferplätze und Feueraltäre wurden mündlich weitergegeben. Zur Unterstützung des Gedächtnisses wurden sie in stark elliptischen (überkurzen, unvollständigen) Sanskritsätzen festgehalten und in den *śulvasūtras* gesammelt – das war der Beginn der Geometrie in Indien.

Um die Mitte des letzten Jahrtausends v. Chr. gab es in der Religion einen großen Wandel. Drei Erlösungsreligionen bildeten sich heraus, um dem immer mit Leid verbundenen Kreislauf von Geburt und Wiedergeburt zu entkommen: Buddhismus, Jainismus, Hinduismus.

Die Lebensdaten von Buddha sind umstritten. Die Buddhisten Sri Lankas setzen sie auf 623 bis 543, die europäischen Wissenschaftler mehrheitlich auf 560 bis 480, manche auch erst auf das 4. Jahrhundert an. Siddharta („der ein Ziel erreicht hat“) Gautama war Spross einer Adelsfamilie im indisch-nepalesischen Grenzgebiet nördlich Benares. Er verließ mit 30 Jahren seine Familie, lebte als Asket und fand nach mehrjährigem Suchen die Erleuchtung; er wurde „Buddha“, der „Erleuchtete“.

Buddha spricht von vier edlen Wahrheiten und dem achtteiligen Pfad aller Erlösung. Große Zahlen und Spekulationen über die Weltgeschichte lehnt er ab.

Eine weit später entstandene Legende erzählt jedoch, dass Buddha schon als Heranwachsender einen Wettkampf im Lesen, Schreiben, im Ringkampf, Wettlauf und Schwimmen glänzend gewonnen habe. Bei der Brautwerbung habe sich Buddha einer mathematischen Prüfung unterwerfen müssen und dabei die Aufgabe gelöst, die Zahl der „Atome in einer Meile“ anzugeben. Dabei gelang es ihm, eine Methode der Fortsetzung der Zahlenreihe zu entwickeln. Die gesuchte Riesenzahl gab er (nach unserer Schreibweise) mit 384 000 mal 7 an. Und er fügte hinzu, dass man sogar die Anzahl der „Atome“ auf der Erde und sogar die auf dreitausend Erden zählen könne. Dies erinnert an die spätere „Sandrechnung“ des Archimedes [Menninger, Bd. I, S. 149].
Über Buddha und seine Umgebung heißt es in späteren Legenden:

> *„An 32 Haupt- und 80 Nebenzeichen wird Buddha, an 32 seine Mutter, an 8 das Haus, in dem er geboren werden soll, erkannt werden. Von 10 Millionen Frauen wird seine Mutter, die Königin Maya-Devi, bedient. Hunderttausende von Heiligen und hunderttausend Millionen von Erleuchteten werden Buddha huldigen. Sein Thron ist zusammen-*

Abb. 2.3.6 Der Religionsstifter Mahāvīra und die Göttin Durga auf indischen Miniaturen (DDR 1979)

> *gesetzt aus den guten Werken während hunderttausend Millionen von kalpas (d.i. von mythischen 4320 Millionen Jahren). Der große Lotos aber, der in der Nacht der Empfängnis des Buddha aufblüht, öffnet seine Blume in einer Weite von 68 Millionen Meilen.“* [Menninger 1958, Bd. I, S. 147]

Auch die Lebensdaten von Vardhamāna Nathaputta mit dem Ehrennamen Mahavīra (großer Held) oder Jina (Sieger) sind strittig. Seine Anhänger, die Jainas, setzen sie auf 599 bis 527 fest, die europäische Forschung eher auf 540 bis 478. Sein Erlösungsweg besteht aus moralischem Verhalten und extremer Einhaltung des Gebotes der Nichtverletzung von Lebewesen (auch Ameisen, Mücken, Käfer) und ebenso extremer Askese, wie sie nur Wandermönche üben können. Auch Mahavīra vermied das brahmanische Sanskrit. Seine Lehre wurde erst 800 Jahre nach seinem Tod in einer mittelindischen Sprache erstmals aufgezeichnet. Auch die Jainas lieben große Zahlen.

Buddhismus und Jainismus spielten in Indien bis gegen 800 n. Chr. eine bedeutende Rolle. Zeitweilig waren sie in kleinen, mittleren oder gar Großreichen vorherrschende Religionen. Das gilt besonders für den Buddhismus, der im Reich des Ashoka Maurya im 3. Jahrhundert v. Chr. Staatsreligion war. Nachdem dieser Kaiser durch einen unsagbar grausamen Krieg sein an sich schon großes Reich noch um die Region Kalinga vergrößert hatte, wurde er Buddhist und ließ in Fels- und Säuleninschriften Buddhas Lehre, vor allem das Verbot des Tötens von Opfertieren, in mittelindischen Dialekten überall in seinem Reich verkünden.

Abb. 2.3.7 Löwenkapitell einer Ashoka-Säule im Museum von Sarnath. Das „Rad der Lehre“ und in die vier Himmelsrichtungen blickende Löwen symbolisieren die Ausbreitung der Lehre. Das Löwenkapitell ist heute Staatswappen der Republik Indien mit der Sanskrit-Unterschrift *satyam eva jayate* (Die Wahrheit siegt immer). [Foto Alten]

Diese Inschriften in Khāroṣṭī-Schrift (nur im äußersten Nordwesten) und Brāhmī-Schrift (überall sonst im Lande) sind die ältesten Schriftdenkmäler Indiens und sie enthalten auch Ziffern, d. h. Zahlzeichen, die keine Buchstaben sind.

Der Hinduismus ging ohne scharfe Grenze aus dem Brahmanismus hervor. Es ist die brahmanische Erlösungslehre, ein Produkt der Mischung der Lehren der Indoarier und der Vorbewohner. Ihre ältesten Zeugnisse sind die beiden Volksepen Mahābhārata (400 v. Chr. bis 400 n. Chr.) und Rāmāyana (ca. 200 v. Chr.). In der Endfassung sind beide Werke bis auf den heutigen Tag für jeden Hindu die maßgebliche Anleitung zu religiösem Verhalten. Im Gegensatz zu Buddhismus und Jainismus, wo die Götter keine Rolle mehr spielen, sind sie im Hinduismus erhalten geblieben, nur treten jetzt andere Götter deutlich hervor.

Es gibt keine Feueropfer mehr, sondern Bilderverehrung in Tempeln. Der Hinduismus bietet den in einer Vielzahl von endogamen Kasten lebenden Gläubigen verschiedene Wege zur Erlösung an (Endogamie bezeichnet eine Heiratsordnung, nach der nur innerhalb eines bestimmten sozialen Verbandes geheiratet werden darf, in Indien ist dies die „Geburtskaste“ jati). Nach der

Abb. 2.3.8 Skulptur einer schreibenden Frau (11. Jahrhundert n. Chr.); Buddhistisches Manuskript auf Birkenrinde; Welthindi-Konferenz (mit Skulptur aus dem 12. Jahrhundert), (Indien 1966, 1979, 1975)

Zeitenwende gibt es in seinen Weltgeschichten, den *Puranas* (Alte Erzählungen), eine wahre Inflation hoher Zahlen wie in den gleichzeitigen buddhistischen und jainistischen Schriften.

In den Jahrhunderten um die Zeitenwende lag der Nordwesten Indiens unter starkem hellenistischem Einfluss. Das hatte Auswirkungen z. B. auf die Entwicklung der indischen Astronomie und damit auf die Entwicklung der Mathematik.

In den ersten Jahrhunderten unserer Zeitrechnung blühte die städtische Kultur auf und führte zu einer reichhaltigen Literatur auf vielen Gebieten: Rechtswissenschaft, Staatslehre, Liebeskunst (Kamasutra), Dichtung, Philosophie. Der Höhepunkt dieser Entwicklung war die Zeit des Gupta-Reiches (320 bis 544), die als Goldenes Zeitalter Indiens gilt. In dieser Zeit beginnt die mathematische Literatur mit dem *Āryabhaṭīya* 498/9, einem vierteiligen Lehrgedicht des *Āryabhaṭa* (geb. 476), der vermutlich in der Hauptstadt des Gupta-Reiches gelebt hat.

Während des Bestehens des Gupta-Reiches erfuhren Kunst und Wissenschaft in Nord- und Mittelindien eine eindrucksvolle Blüte. Es gab wissenschaftliche Zentren, ähnlich denen mittelalterlicher europäischer Universitäten. Am berühmtesten war das buddhistische Kloster von Nālanda, wo Philosophie und Theologie, aber auch naturwissenschaftliche Disziplinen und deren Anwendungen gelehrt wurden und wo sich Studenten aus ganz Indien, aus China, Tibet, der Mongolei, aus Buchara (im heutigen Usbekistan), Japan und Korea einfanden. In jener Zeit war indischen Astronomen die Kugelgestalt der Erde bekannt. Das Sonnenjahr wurde in 12 Monate zu 30 Tagen eingeteilt und man benutzte ein Schaltjahr.

Ab 700 drängte vom Süden Indiens aus die brahmanische Gegenreformation den im Norden starken Buddhismus zurück, und der Brahmane Sankara schuf mit seiner Form der Vedantalehre den auch in Klöstern organisierten orthodoxen Hinduismus. Als Gegenreaktion legten andere Brahmanen die philosophischen Grundlagen für die hinduistischen Sekten.

In die Zeit zwischen 850 und 1200 fallen mehrere mathematische Werke, vorrangig aus Südindien, darunter „Die Krone aller anderen Lehrbücher“ des Bhāskara II (1114–1185?). Die Muslime hatten schon im 8. Jh. versucht, Indien zu unterwerfen, waren aber nur bis zum Sindh im Westen gekommen. Sie verlegten sich danach auf weit nach Indien vordringende Raubzüge. Am bekanntesten sind die Raubzüge des Türken Mahmud von Ghazna (Ostafghanistan), in dessen Begleitung sich der arabische Gelehrte al-Birūnī (973–1048) (ein Astronom, Mathematiker und Geograph) befand. 1206 entstand mit dem Sultanat von Delhi der erste islamische Staat auf indischem Boden. Im 16. Jahrhundert wurde es vom Großreich der Mogulkaiser abgelöst, die in Agra oder Delhi residierten. Sie ließen in Nordindien viele bedeutende Bauten errichten, haben aber ansonsten zur indischen Kultur wenig beigetragen.

Die indische Mathematik lebte vor allem im Süden weiter. Aus dem 16. Jh. sind mehrere Werke bekannt. Darin stieß man im astronomischen Zusammenhang bis zu den Anfängen der Infinitesimalrechnung und zur Verwendung unendlicher Reihen vor. Mit der Kolonisierung Indiens seit dem 17. Jahrhundert wurde die eigenständige Entwicklung der Mathematik zunächst un-

Abb. 2.3.9 Observatorium des Jai Singh in Jaipur [Foto Alten]

terbrochen. Dagegen wurden die astronomischen Beobachtungen mit großer Intensität weitergeführt. Daran erinnern die unter dem Maharadscha Jai Singh zwischen 1718 und 1734 in ganz Indien errichteten Observatorien. Am berühmtesten und größten ist der in seiner Residenz Jaipur errichtete Komplex.

2.3.2 Wichtige Quellen altindischer Mathematik

Die ältesten Zeugnisse zur Mathematik sind drei Werke mit stark verkürzten Merksätzen, die ohne Kommentar schwer zu verstehen sind. Sie heißen *Śulbasūtras* oder *Śulvasūtras*, was übersetzt Schnur-Leitfaden, Schnur-Regeln bedeutet. Die Texte waren zum Auswendiglernen bestimmt. Sie wurden vom Lehrer mündlich kommentiert. Erst viel später wurden sie aufgeschrieben. Gelehrt wurden Regeln zur Konstruktion von Altären mit Hilfe von Schnüren und Bambusstäben, daher der Name.

Vorschriften an die vedischen Priester regelten, wie Altäre mit quadratischem, rechteckigem, kreis- bzw. halbkreisförmigem oder trapezförmigem Grundriss zu konstruieren sind. Dabei wurden die Form der Ziegel und die Anzahl der Schichten festgelegt. In besonderen Fällen gab es Altäre in Falkenform oder radförmig.

Im Jahre 1881 wurde nahe dem Dorf Bakhshálí (Nordwestindien) ein auf Baumrinde geschriebener Text zur Arithmetik und Algebra gefunden. Es gibt verschiedene Datierungen (3./4. Jh. oder 12. Jh. n. Chr.). Diese Handschrift enthält immerhin den einfachen falschen Ansatz, lineare Gleichungen, Gleichungssysteme, quadratische Gleichungen sogar mit negativen Koeffizienten, Zinsrechnung. Die Rechnungen wurden dezimal ausgeführt [Alten et al. 2003, S. 139–144].

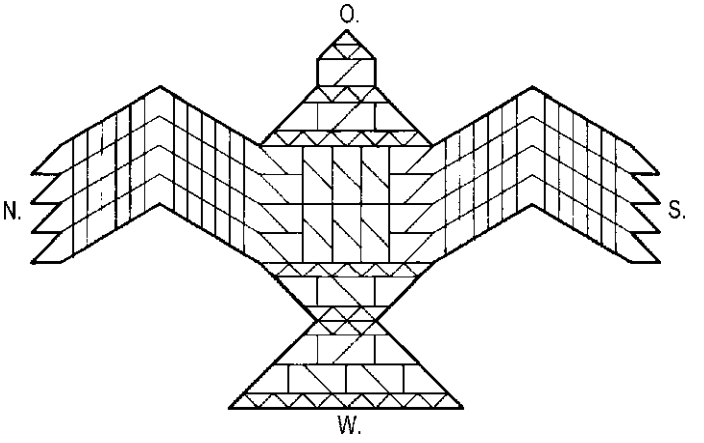


Abb. 2.3.10 Falkenförmiger Altar (eingezeichnet sind die Formen der zu verwendenden Ziegelsteine)

Ein weiteres, ebenfalls anonymes Werk stammt aus dem 4. oder 5. Jahrhundert. Der Titel lautet *Sūrya-Siddhānta* (Lehre von der Sonne). Dieses astronomische Werk befasst sich nicht eigentlich mit der Sonne, sondern damit, wie die Sonne einen Dämon unterrichtet. Es gibt vier weitere analoge „Siddhāntas“ (Unterweisungen) mit Ergebnissen aus der frühen indischen Trigonometrie. Auch der Einfluss babylonischer Astronomie und solcher aus der Seleukidenzeit ist nachweisbar. Zwar sind die Originale verloren gegangen, aber wir erfahren vom Inhalt durch einen späteren Autor (5./6. Jahrhundert) und durch einen Bericht des muslimischen Gelehrten al-Bīrūnī (973 bis 1048).

Mit Āryabhaṭa I (geb. 476) tritt uns der erste namentlich bekannte indische Mathematiker und Astronom entgegen. Im Alter von 23 Jahren verfasste er die in Versform geschriebene Abhandlung *Āryabhaṭīya*, gestützt auf die oben erwähnten astronomischen Siddhāntas. Im astronomischen Teil lassen sich griechische Einflüsse verifizieren, z. B. die Epizykeltheorie von Eudoxos. Andererseits wurde das *Āryabhaṭīya* bereits um 800 ins Arabische übersetzt. Was die Mathematik betrifft, so werden unbestimmte Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen, Dreisatz, Berechnungen von Kreisumfang und Fläche mit einem recht guten Näherungswert für π (62 832/20 000 ist ca. 3,1416), sowie ein (falscher?) Wert für das Kugelvolumen behandelt; vgl. [Elfering 1975].

Āryabhaṭa I hatte als Schüler Bhāskara I (um 522), der darauf hinwies, dass über die Darstellung seines Lehrers hinaus noch weitere mathematische Kenntnisse vorhanden seien.

Etwa 628 wurde von Brahmagupta (598–nach 665), wiederum in Versform, ein umfangreiches Werk *Brāhmasphuṭasiddhānta* (Vervollkommnung der Lehre Brahmas) verfasst; es geht über das *Āryabhaṭīya* hinaus. Zwei von zwanzig Büchern sind der Mathematik gewidmet. Arithmetik, Geometrie und Gleichungen ersten und zweiten Grades und andere algebraische Probleme werden darin behandelt. Die mathematischen Abhandlungen von Mahāvīra (9. Jahrhundert) und von Úrihara (9./10. Jahrhundert) seien hier erwähnt.

Der Höhepunkt der indischen Mathematik wurde mit dem „Kranz der Wissenschaften“ (*Siddhānta-śiromaṇi*) erreicht, niedergeschrieben um 1150 durch den Mathematiker und Astronomen Bhāskara II (1114–1185?). Das Sammelwerk besteht aus vier Teilen (Arithmetik, Geometrie, Algebra und Astronomie) und verfügt über einen klaren methodischen Aufbau, wobei sich abstrakte Darstellung und praktische Aufgabenstellung geschickt ergänzen. Unter anderem werden quadratische Gleichungen mit negativen Lösungen und die sog. Pellsche Gleichung behandelt.

Jahrhunderte lang galt der „Kranz der Wissenschaften“ als Grundlage der mathematischen Studien in Indien. Weitere Fortschritte wurden in gewissem Sinne als bloße Fortsetzung verstanden. Dazu gehören ausführliche Kommentare durch Ganeśa (geb. 1507) und Kṛṣṇa (Krischna) im 16. Jahrhundert sowie das *Tantrasaṃgraha* (Wissenschaftliches Sammelwerk) von Nīlakaṇṭha

Somasutvan zu Anfang des 16. Jahrhunderts, in dem Potenzreihenentwicklungen, z. B. von $\arctan x$ und gut konvergente Reihenentwicklungen für $\pi/4$ auftreten. Allerdings konnten diese und andere Ansätze, die einer Frühgeschichte der Infinitesimalmathematik zuzurechnen sind, in der eigenständigen indischen Mathematik unter den Bedingungen der Herrschaft der Moguldynastie und der Kolonialisierung nicht ausreifen.

2.3.3 Geometrie in Indien

Die „Schnurregeln“ weisen aus, dass schon in jenen frühen Zeiten beträchtliche geometrische Kenntnisse praktiziert wurden: Man befasste sich mit der Inhaltsbestimmung geradlinig begrenzter Flächen, mit dem Satz des Pythagoras, mit Näherungsrechnungen für Diagonalen (z. B. $\sqrt{2}$), heronischen Flächenformeln für Sehnenvierecke und anderen Fragen. In der räumlichen Geometrie waren Berechnungen für den Pyramidenstumpf und Näherungen für Volumen und Oberfläche der Kugel in Gebrauch. Dabei wurden verschiedene Näherungswerte für π verwendet, u. a. $27/8$, $243/80$ und $19/6$.

Im Übrigen ist es hochinteressant festzustellen, dass sich solche Berechnungen auch in der indischen Mathematik mit infinitesimalen, sozusagen atomistischen Überlegungen verbanden, ähnlich denen, die später in Europa beispielsweise bei Johannes Kepler auftreten werden. Zum Beispiel erklärt ein Kommentar zu Bhāskara, dass man eine Kugel als eine Gesamtheit nadelförmiger Pyramiden auffassen könne, deren Spitzen im Kugelmittelpunkt zusammenlaufen (vgl. [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005]).

2.3.4 Indische Trigonometrie

In den nachchristlichen astronomischen Texten ist der Rückgriff auf die griechisch-hellenistische Sehnengeometrie deutlich. Der von den Indern vollzogene Fortschritt bestand in der Umgestaltung der Sehnentrigonometrie zur Sinustrigonometrie. Der Zusammenhang beider Trigonometrien wird durch $\sin\alpha = \mathrm{ch}(2\alpha)/2$ vermittelt. Darin bedeutet ch die Abkürzung für Sehne (lat. chorda, auch crd. für corda ist üblich).

Der Unterschied scheint auf den ersten Blick nicht von großer Bedeutung zu sein. Und doch können die grundlegenden Zusammenhänge zwischen Seiten und Winkeln am Dreieck besonders einfach mit den Funktionen der Sinusgeometrie formuliert werden. So wurde Indien zum Ausgangspunkt der modernen Trigonometrie.

Nach Berggren [Berggren 1986, S. 32] wurde bereits in einem Manuskript aus dem 4. (oder 5.) Jahrhundert der Sinus verwendet. Im *Āryabhaṭiyā* treten – modern ausgedrückt – die trigonometrischen Verhältnisse Sinus, Kosinus und Sinus versus (Differenz zwischen Radius und Kosinus) auf. Um 500 n. Chr. wurden trigonometrische Formeln verwendet. Am Beginn des 10. Jahrhunderts wurden die Funktionen Sinus, Kosinus und Sinus versus in allen 4 Quadranten betrachtet.

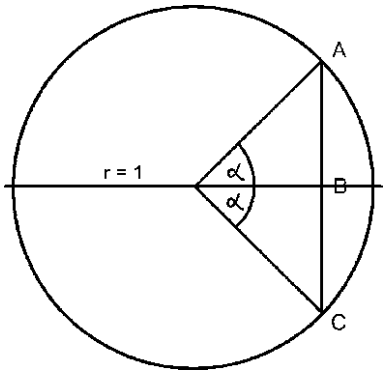


Abb. 2.3.11 Figur zur Sehnengeometrie: AC = chorda 2α, AB = $\sin\alpha$

Indessen kam es in der indischen Trigonometrie noch nicht zur Ausbildung eines geschlossenen Systems. Man blieb bei der Behandlung von Einzelproblemen, bei Methoden von Fall zu Fall. Immerhin aber führte dies in impliziter Form zu Ergebnissen, die wir heute als zentrale Sätze verstehen, z. B. zum Sinussatz und sogar zum Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie (ausführlich in [Juschkewitsch 1964, S. 163 bis 167]).

Noch ein paar Bemerkungen zur Terminologie: Der Terminus für die Sinusstrecke war im Sanskrit *bhuja jyā* (Bogensehne) oder verkürzt *jyā jiā*. Bei den Arabern wurde daraus zunächst das Wort *ǧiba*, welches in *ǧaib* Busen, Kleiderausschnitt, Erhabenheit umgedeutet wurde. Dieser Terminus ist bereits in der ersten Hälfte des 9. Jahrhunderts belegt. Bei der Übersetzung des arabischen Werkes durch Robert von Chester 1154 wurde daraus lat. sinus, was Krümmung, Bucht bedeutet, aber auch Busen, Schoß des Weibes etc.

Ganz natürlich und unverzichtbar gehören Tafeln zum Handwerkszeug der Trigonometrie. Auch von den indischen Mathematikern wurden Tafelwerke erarbeitet. Die frühesten Tafeln für den Sinus und den Sinus versus sind bereits in *Sūrya-Siddhānta* und im *Āryabhaṭīya* enthalten. Für beide Funktionen sind je 24 Werte angegeben. In der „Krone der Wissenschaften" findet sich eine von Grad zu Grad fortschreitende Sinustabelle.

Die Bedürfnisse der Astronomie hatten die Trigonometrie hervorgebracht, außerdem die prachtvollen riesigen Bauwerke, die als astronomische Instrumente hohe Messgenauigkeit ermöglichen sollten. Trotzdem scheinen die eigentlichen Ergebnisse der beobachtenden indischen Astronomie im Grundsatz nicht über die der griechisch-hellenistischen Antike hinausgegangen zu sein. Immerhin aber war die Bestimmung des Sonnenapogäums (Erdferne der Sonne) genauer als die des Ptolemaios, und die Bestimmung des Sonnenjahres war mit 365 Tagen 6 St. $12'36''$ genauer als die der Griechen mit 365 Tagen, 5 St. $55'12''$.

Dagegen führten numerische Probleme der Astronomie gegen Ende der Periode der eigenständigen indischen Mathematik zu Beginn des 16. Jahrhunderts noch zu bemerkenswerten Ergebnissen, die in Europa erst im 17./18. Jahrhundert erzielt werden konnten [Juschkewitsch 1964, S. 167 bis 174]. Beispielsweise gelang dem südindischen Mathematiker Nīlakaṇṭha Somasutvan (1444 – nach 1501) die Herleitung der unendlichen Potenzreihe für den Arcustangens. Dazu verwendete er eine Art infinitesimales Dreieck (später bei B. Pascal). Ferner finden sich bei ihm die Entwicklung einer gebrochen rationalen Funktion in eine unendliche Potenzreihe und gliedweise Integration. In diesem Zusammenhang ergab sich auch eine bemerkenswert gute Näherung für π, die mit 104 380/33 215 angegeben wurde und bis auf neun Dezimalen genau ist. Auch war sich Nīlakaṇṭha darüber im klaren, dass π – also das Verhältnis des Kreisumfanges zum Kreisdurchmesser – irrational (inkommensurabel zur Einheit) ist. Er schrieb:

> *„Ist der Durchmesser, der mit Hilfe irgendeiner Maßeinheit gemessen wird, mit dieser Einheit kommensurabel, so läßt sich der Kreisumfang nicht genau mit Hilfe der gleichen Maßeinheit messen; ist jedoch in Bezug auf irgendeine Maßeinheit der Kreisumfang meßbar, so läßt sich der Durchmesser nicht mit Hilfe dieser Einheit messen.“*
> (Zitiert bei [Juschkewitsch 1964, S. 167])

2.3.5 Die Herausbildung des dezimalen Positionssystems

Von K. Menninger stammt der kulturhistorisch höchst aufschlussreiche Ausspruch:

> *„Wir sprechen deutsch, wir schreiben römisch und wir rechnen indisch.“*
> [Menninger 1958, S. 287]

Das ist ein bemerkenswerter Sachverhalt, der die Weltkultur als von verschiedenen Völkern geschaffen ausweist und jede rassistisch, nationalistisch oder religiös-fundamentalistisch geprägte Geschichtsauffassung ad absurdum führt.

Die indischen Gelehrten und Mathematiker haben mit der Herausbildung des dezimalen Positionssystems und der Ziffernschreibweise eine wissenschaftliche und kulturelle Leistung von größter historischer Wirkung vollbracht (vgl. dazu [Alten et al. 2003, S. 134 bis 136]; [Juschkewitsch 1964, S. 102 bis 109]).

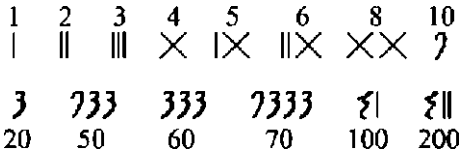
Die indische Zählweise war vom Ursprung her im Wesentlichen dezimal angelegt: nur Reste eines Vierersystems haben sich erhalten. Im Sanskrit gab es von Anfang an festgeschriebene Worte für die „Ziffern“ 1 bis 9 und die Zehnerpotenzen. Die Zahlenreihe wurde im religiösen Zusammenhang erstaunlich weit fortgeführt. So wird Buddha in der späteren Legende die Bezeichnung

einer Zehnerpotenz zugeschrieben, die wir als 10^{421} schreiben würden. Überhaupt waren große Zahlen weit verbreitet. Schon im *Rigveda* (1000 v. Chr.) behaupteten die Inder, dass es 3339 Götter gebe. Nach Meinung der Hindus besteht die Welt 311,04 Trillionen Jahre, dann ebenso lange nicht, dann wieder, und so fort.

Die ursprünglichen Ziffern- und Zahlensysteme weisen auf zu vermutende Einflüsse aus den benachbarten kulturellen Zentren hin; hier hat die mathematikhistorische Forschung noch ein weites Betätigungsfeld.

Khāroṣṭī-Ziffern

In der Khāroṣṭī-Schrift, die im 3. Jahrhundert v. Chr. in Ost-Afghanistan und Nordwestindien aufkam und bis ins 2. Jahrhundert n. Chr. in Gebrauch war, besaßen die Ziffern spezielle Symbole; ein Vierersystem überkreuzt sich mit einem Zehnersystem.



Brāhmī-Ziffern

Seit dem 3. Jahrhundert v. Chr. sind die Brāhmī-Ziffern in weitem Gebrauch. Man schrieb die Zahlen von links nach rechts.

Einer	Ziffern	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zehner	Verzifferung	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Hunderter und Tausender	Stellenschrift	100	200	500	1000		4000		70000	

Beiden Zahlsystemen ist gemeinsam, dass es spezifische Zeichen für die Ziffern 1 bis 9 gab. Aber es waren keine Positionssysteme. Immerhin aber war die Verzifferung von 1 bis 9 eine Art von innerer Voraussetzung für die Herausbildung des Dezimalsystems.

Die Quellen berichten außerdem von „merkwürdigen“ weiteren Zahlsystemen, merkwürdig, wenn auch in sich logisch und einsichtig. So wurde die „Eins“ durch ein Wort beschrieben, das nur im Singular existierende Dinge bezeichnet, z. B. „Mond“, „Erde“, „Brāhma“. Für „Zwei“ wurden Worte verwendet, die nur paarweise Auftretendes bezeichnen, z. B. „Augen“, „Hände“. Für „Fünf“ trat die Bezeichnung „Fünf Sinne“ ein. Wieder anders verfuhr

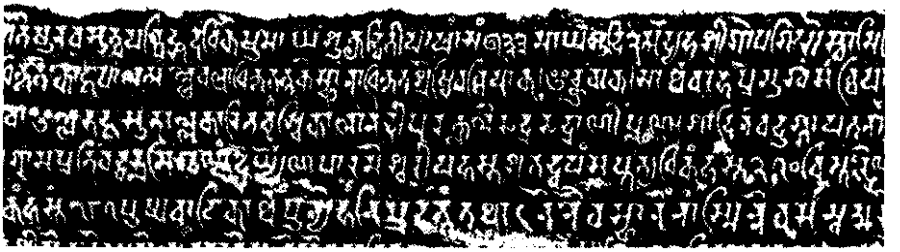


Abb. 2.3.12 Gwalior-Inschrift mit dem Nullzeichen. Gegen Ende der vierten Zeile steht die Zahl 270 mit dem Zeichen o für Null

Āryabhaṭa I: Zahlen wurden durch spezifische Silben bezeichnet [Juschkewitsch 1964, S. 104f.].

Damit ein Positionssystem funktionieren kann, muss es eine „Null“ geben. Es dürfte als sicher gelten, dass die indischen Mathematiker mit dem in Mesopotamien verwendeten inneren Lückenzeichen in Berührung gekommen sind, das dort seit der Mitte des 1. Jahrtausends v. Chr. in Gebrauch war. Doch war im Sexagesimalsystem eine „Null“ nur relativ selten vonnöten. Immerhin übernahmen die alexandrinischen Astronomen die mesopotamische Idee; auch von hier dürften Anregungen an die indischen Gelehrten ergangen sein.

Die Kombination günstiger Voraussetzungen – dezimale Denkhaltung, Ziffernschreibweise für 1 bis 9, Anregungen von außerhalb – führte schließlich zur Etablierung des dezimalen Positionssystems. Es war spätestens im 7. Jahrhundert n. Chr. weit verbreitet. Ein Nullzeichen in Form eines Kreises ist zuerst nachgewiesen in der sog. Gwalior-Inschrift aus dem Jahre 870, eingeritzt in die Wand eines kleinen Tempels in der Nähe von Gwalior (Mittelindien).

Die Inder haben die Null und das Zeichen für Null im Sanskrit *sunya* genannt, was soviel bedeutet wie Leere, Einöde, Abwesenheit von allem, Nichts. Die Araber übersetzten den Terminus mit *ṣ̄ifr*, als sie die indischen Zahlen – wohl im 8. Jahrhundert – übernahmen. Die Bedeutung blieb gleich. Als die Europäer die indisch-arabischen Ziffern übernahmen, übernahmen sie auch das arabische Wort *ṣ̄ifr*, mittellateinisch *cifra*.

In den europäischen Nationalsprachen entstanden daraus z. B. im Italienischen die Wortbildungen zefiro, zefro, zevero, zero für Null, im Englischen zero, im Französischen zéro. Noch im 15./16. Jahrhundert trugen die neun Ziffern – wegen ihrer von den Buchstaben abweichenden, künstlich anmutenden Schreibweise – die Bezeichnung „figura“. Auch bahnte sich schon früh, im 14. Jahrhundert, eine Begriffserweiterung für „Ziffer“ als Zahlzeichen allgemein an, im Englischen „cipher“ und im Französischen „chiffre“, das dort zusätzlich die Nebenbedeutung „Geheimzeichen“ erhielt. Wir sagen ja noch heute, ein Text werde chiffriert, in einer Geheimschrift geschrieben. Im Deutschen wurde aus „nulla figura“ (keine Figur) das Wort „Null“ für die Null.

Das voll ausgebildete dezimale Positionssystem mit den indischen Ziffern drang längs der Handelswege rasch nach Osten und Westen vor. Bereits im Jahre 662 verwies der syrische Bischof Sebocht auf

> *„. . . sinnvolle Entdeckungen* (der Inder) *in der astronomischen Wissenschaft, auf Entdeckungen, die scharfsinniger sind als die der Griechen und Babylonier* und sagt, dass ihre *Zahlenschreibweise, die mit Hilfe von neun Zeichen vorgenommen wird, über jedes Lob erhaben ist.“*
> (Zitiert bei [Juschkewitsch 1964, S. 107])

Am Ende des 8. Jahrhunderts erreichte die indische Zahlenschreibweise Bagdad. Die muslimischen Gelehrten erfassten rasch die Bedeutung dieser Erfindung und wurden zu Schrittmachern bei der Verbreitung des indischen dezimalen Positionssystems (vgl. dazu die Kapitel über die Mathematik in den islamischen Ländern und im europäischen Mittelalter).

Es darf nicht verschwiegen werden, dass ernstzunehmende Gelehrte die Erfindung des dezimalen Positionssystems und der Null mit der chinesischen Kultur in Verbindung bringen. In dem nicht unumstrittenen Buch *Fleeting Footsteps* [Lam/Ang 2004] schwächen die Autorinnen Lam Lay Yong und Ang Tian Se die Argumente zugunsten des indischen Ursprunges der Null als „nicht zwingend“ ab und führen Gründe für den chinesischen Ursprung des dezimalen Positionssystems und der Null an (übrigens ist Frau Lam Lay Yong, die in Singapur lebt, 2002 in Peking mit dem Kenneth O. May Prize for History of Mathematics ausgezeichnet worden). In dem Zusammenhang heißt es:

> *„It follows that the Hindu-Arabic numerical sytem could only have originated from the rod* (chinesischen, Wg) *numerical system, which was developed centuries earlier. Transmission from China to India would not have been difficult, given the extensive use of rods in ancient China, and the considerable interaction between the Chinese and Indian civilizations, which was fostered by trade and other contacts. Like printing, gunpowder and the magnet (. . .), the concept of our numeral system should rank as one of China's most significant contributions to human science and civilisation.“*
> [Lam/Ang 2004, S. 185]

2.3.6 Arithmetik und Algebra in der indischen Mathematik

Arithmetik, Algebra und Zahlentheorie erreichten einen sehr hohen Stand. Es gibt darüber ausführliche, bis ins Detail gehende Untersuchungen [Juschkewitsch 1964], vgl. auch [Alten et al. 2003].

Die Kenntnis der arithmetischen Eigenschaften der Zahl Null war fester Bestandteil der indischen Mathematik, ebenso wie sichere algorithmische Verfahren zur Beherrschung der Bruchrechnung, des Umganges mit negativen Zahlen, des Wurzelziehens und beispielsweise der Dreisatzrechnung, der Neunerprobe und anderer Verfahren.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die indischen Mathematiker die Algebra als das der Arithmetik Übergeordnete aufgefasst haben. Die Algebra (nach unserer Klassifikation würden wir auch einige Ergebnisse der Zahlentheorie hinzurechnen) stand daher in hohem Ansehen. So erklärte z. B. Bhāskara II:

> *„Die Lehre vom Rechnen mit Unbekannten ist die Quelle für die Lehre vom Rechnen mit bekannten Größen.* Und: *Die Mathematiker erklären, daß die Algebra eine Rechnungsform ist, die von einem Beweis begleitet wird: andernfalls gäbe es keinen Unterschied zwischen Arithmetik und Algebra.“*
> (Zitiert in [Juschkewitsch 1964, S. 122f.])

Die Hochachtung vor der Algebra, die die allgemeine Grundlage der gesamten Mathematik verkörpert, durchzieht die indische Mathematik. Bei Brahmagupta und Bhāskara II finden sich geradezu Loblieder auf die Algebra. Und Nārāyana (14 Jh.) schrieb:

> *„Wie diese gesamte sichtbare und unendliche Welt aus Brahma entspringt ist, so folgt aus der Algebra die gesamte Arithmetik mit ihrer unendlichen Vielfalt.“*
> (Zitiert in [Juschkewitsch 1964, S. 123])

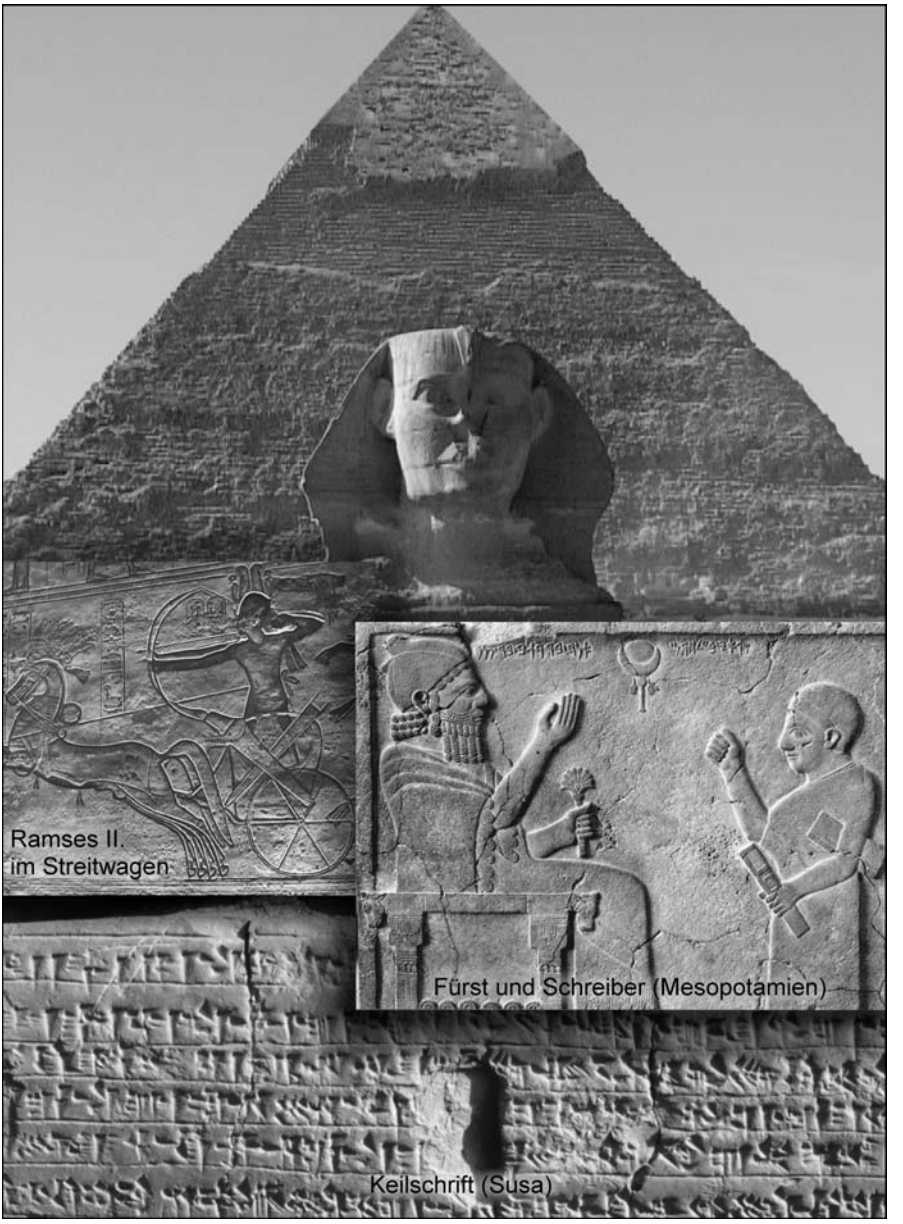
Es ist bei dieser Grundhaltung verständlich, dass die indische Algebra auf einem hohen Niveau stand. Es gab u. a. eine feste Symbolik, die sich an den Anfangsbuchstaben der entsprechenden Worte orientierte. Die unbekannte Größe (d. h. die Variable) hieß *yāvat-tāvat*, das ist „soviel-wieviel“, d. h. beliebige Menge.

Zum Spektrum der Algebra gehörten der Umgang mit Irrationalitäten, Klammern und Polynomen. Lineare und quadratische Gleichungen wurden mit verschiedenen Verfahren behandelt; auch negative Zahlen wurden – anders als in der hellenistischen Mathematik – als Lösungen von Gleichungen anerkannt. Auch war bekannt, dass eine quadratische Gleichung im Allgemeinen zwei Lösungen besitzt. Gleichungen höheren Grades wurden indes nicht betrachtet. Auch lineare Gleichungssysteme traten recht häufig auf. Im astronomischen Zusammenhang, bei der Bestimmung von periodischen Bewegungen von Himmelskörpern, wurden für verschiedene Typen unbestimmter Gleichungen ganzzahlige Lösungen gesucht. Dabei wurden unter anderem auch Kettenbruchentwicklungen verwendet.

Wesentliche Elemente der indischen Mathematik

3.–2. Jt. v. Chr.	Frühe Zahlzeichen und geometrische Konstruktionen (rechtwinkliges Straßensystem, Kanäle) in Harappa und Mohenjo-Daro am Unterlauf des Indus
um 1000 v. Chr.	Große Zahlen in Sprache und Schrift des Rigveda
7.–5. Jh. v. Chr.	*śulbasūtras* (Schnurregeln): Regeln zur Konstruktion von Dreiecken und Quadraten mittels Schnüren und Stäben an Altären. Satz des Pythagoras, Inhalte von Vielecken, Näherungen für die Länge von Diagonalen
4.–3. Jh. v. Chr.	*Khāroṣṭhī-Ziffern*: Mischung eines Vierer- und Zehnersystems
3. Jh. v. Chr.	*Brāhmī-Ziffern*: Vorstufen für die indisch-arabischen Ziffern für 1 bis 9
5. Jh. v. Chr.	ĀRYABHAṬA I: *Āryabhaṭiya*: Mathematische Merkverse für Elementargeometrie, sphärische Geometrie, Tafeln für sinus und sinus versus, quadratische Gleichungen, arithmetische Reihen, Näherungsverfahren für Quadrat- und Kubikwurzeln sowie zur griechisch beeinflussten Epizykeltheorie *Sūrya-Siddhāṇtas*: Einführung der trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus
6. Jh. n. Chr.	*Bakshālī-Handschrift:* Iterationsalgorithmus zur Berechnung von Quadratwurzeln, Einführung des Dezimalsystems für Zahldarstellungen
7. Jh.	BRAHMAGUPTA: *Brāhmasphuṭasiddhānta*: Erster Hinweis auf negative Zahlen; Regeln für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Quadrieren ganzer Zahlen; Verwendung algebraischer Ausdrucksweise; Verallgemeinerung der Heronschen Dreiecksformel auf Sehnenvierecke, Satz des Ptolemaios für Sehnenvierecke
7.–8. Jh.	Verbreitung der indischen Ziffern in Syrien und Mesopotamien
9. Jh.	*Gwalior-Inschrift*: Erster bisher bekannter Nachweis des Nullzeichens 0
10. Jh.	SRĪDHARA, ĀRYABHAṬA II: Eigenschaften der Null in Worten formuliert
12. Jh.	BHĀSKARA II: Siddhānta-śiromaṇi (Kranz der Wissenschaften) Höhepunkt der indischen Mathematik: zyklische Methoden in der Zahlentheorie; Berechnung der Kugeloberfläche durch Zerlegung in Ringe bzw. in sphärische Trapeze und Dreiecke; quadratische Gleichungen mit negativen Lösungen, unbestimmte Gleichungen
1200–1600	Kommentare zu den Werken von Bhāskara II

3 Frühzeit der Mathematik im Vorderen Orient



3.1 Mathematik im alten Ägypten

	Allgemeine Geschichte	Kulturgeschichte
3000–2700	Reichseinigung aus vordynastischen Kulturen	Erfindung der Hieroglyphen
2700–2170	Altes Reich	Bau der Pyramiden
2170–2040	Erste Zwischenzeit	Nekropole von Sakkara
2040–1794	Mittleres Reich	Mathematische Papyrî
1794–1550	Zweite Zwischenzeit	Streitwagen der Hyksos
1550–1070	Neues Reich	Tempel der Hatschepsut Amuntempel in Karnak Sonnenkult des Echnaton
1279–1213	Ramses II.	Tempel von Abu Simbel
1070–664	Dritte Zwischenzeit	
664–332	Spätzeit	Demotische Papyri
525	Eroberung durch die Perser	
332	Eroberung durch Alexander d. Gr.	Leuchtfeuer Pharos in Alexandria
332–30	Herrschaft der Ptolemäer	Alexandria wird Zentrum griechisch-hellenistischer Kultur: Euklid, Apollonios, Eratothenes
47	Brand der Bibliothek von Alexandria	Hathor-Tempel in Dendera Tempel des Chnum in Esna
30 v. bis 395 n. Chr.	Römische Herrschaft	Philae-Tempel in Assuan
391	Zerstörung des Museions von Alexandria	Christl. Klöster des Paulus, des Antonius und im Wadi Natrun
395	Ägypten wird Teil des Oströmischen Reiches	

Bemerkung: Es gibt davon abweichende Chronologien

3.1.0 Einführung: Geschichte und Schrift des alten Ägypten

Die altägyptische Kultur übt noch heute ihren Zauber aus. Es sind nicht nur die Pyramiden und Tempel, sondern auch die Prachtentfaltung der Herrschenden, wie sie uns durch Ausgrabungen zugänglich gemacht wurde, der hohe Stand der Handwerkskunst und des Ackerbaues, die Faszination der religiösen Ansichten. Nofretete und Tut-ench-Amun sind zu personifizierten Symbolen einer geheimnisumwitterten großartigen Kultur geworden.

Der Beginn dieser einzigartigen Hochkultur liegt rund 5000 Jahre zurück. Der sagenhafte König Menes soll die damals schon bestehenden Königreiche Oberägypten und Unterägypten vereinigt und die erste Hauptstadt Memphis gegründet haben. Das ist jedoch historische Legende und beschreibt einen Prozess, der in den ersten Jahrhunderten des 3. Jahrtausends v. Chr. mit der Domestizierung von Vieh und dem Anbau von Getreide an den Ufern und im Delta des Nils begann.

Er führte zunächst zur Bildung von Dörfern, deren Zusammenschluss zu größeren Gemeinschaften und zur Gründung von Königreichen in Ober- und Unterägypten, die schließlich in jahrzehntelangen Machtkämpfen um 2800 vereinigt wurden. So entstand das Alte Reich, das etwa von 2700 bis 2170 währte (die Datierungen sind umstritten) und den Beginn der eigentlichen Geschichte des alten Ägypten und seiner 30 Dynastien markiert.
In diesem Alten Reich entstanden die befestigte Hauptstadt Memphis mit Palästen und Tempeln, das Totenfeld von Sakkara mit den prachtvoll ausgemalten Gräbern der Granden des Reiches, die Mastabas und die Stufenpyramide des Pharao Djoser und die berühmten großen Pyramiden des Cheops, Chefren und des Mykerinos in Giza. Die Bilderschrift der Hieroglyphen wurde weiter entwickelt, doch sind aus der Zeit des Alten Reiches keine mathematischen Texte überliefert.
Uneingeschränkt regierten die Pharaonen als Stellvertreter der Götter auf Erden bis Machtgewinn der Provinzfürsten den Zerfall des Alten Reiches herbeiführte.

Abb. 3.1.1 Ägypten im Altertum

Nach der sog. Ersten Zwischenzeit gelang dem thebanischen Herrscher Mentuhotep der II. Dynastie um 2040 die Wiedervereinigung Ägyptens. In dem bis etwa 1790 währenden Mittleren Reich bescherten Stabilität und wirtschaftliches Wachstum Ägypten sein rund 200 Jahre währendes Goldenes Zeitalter unter der 12. Dynastie. Bis nach Nubien und Kusch im Süden, nach Libyen, Palästina und Syrien im Norden, sogar bis Kreta und zum griechischen Festland reichte der kulturelle Einfluss Ägyptens.

In dieser Zeit entstanden die berühmten Papyri, von denen später die Rede sein wird: der Papyrus Rhind, der Papyrus Moskau, der Papyrus Kahun, der Papyrus Theben und die sog. Londoner Lederrolle. Die Glaubenswelt wurde vom Osiriskult mit dem Zentrum Abydos beherrscht.

Abb. 3.1.2 Tut-ench-Amun (Goldmaske im Ägyptischen Museum, Kairo) [Foto Wesemüller-Kock]

Schwache Herrscher der 13. Dynastie führten erneut zum Zerfall des Reiches und zur Fremdherrschaft der Hyksos in der Zweiten Zwischenzeit (ca. 1790 bis 1550). Dann vermochten einheimische Herrscher der 17. Dynastie das Reich wieder zu einen.

Das Neue Reich (ca. 1550–1070) brachte die Epoche größter militärischer Ausdehnung und höchster Pracht- und Machtentfaltung. Von Nubien bis zum Euphrat reichte die Macht der Pharaonen unter den Herrschern der 18. Dynastie: Der Amun-Tempel von Karnak und der Luxor-Tempel auf dem Ostufer, der Tempel der Hatschepsut – der ersten und bis Kleopatra einzigen Frau auf Ägyptens Königsthron, – die Memnons-Kolosse und die prunkvollen Gräber im Tal der Könige im Westen der damaligen Hauptstadt Theben künden vom Luxus und Pomp jener Epoche, die Tempel und Paläste in Tell el-Amarna vom Versuch Amenophis' II. und seiner schönen Gemahlin Nofretete, die alten Götter durch den einzigen Sonnengott Aton zu ersetzen, das spektakuläre Grab des jung gestorbenen Tut-ench-Amun von der Rückkehr zu den alten Göttern in Theben.

Die Zeit der 19. Dynastie ist geprägt von Kämpfen mit den Stadtstaaten Palästinas und Syriens und gegen die in Anatolien entstandene Großmacht der Hethiter. Sie veranlassten Ramses II. zur Verlegung seiner Residenz nach

Abb. 3.1.3 Stufenpyramide des Pharao Djoser in Sakkara (um 2600 v. Chr.) [Foto Alten]

Quantir im Nildelta. Dessen ungeachtet entstanden in seiner 66 Jahre währenden Regierungzeit im ganzen Lande gewaltige Tempel und Obelisken mit den Bildern und Hieroglyphen – Inschriften zum Ruhme des Pharao. Am berühmtesten sind wohl die beiden wegen des Assuan-Staudammes nach mehr als 3000 Jahren umgesetzten Felsentempel von Abu Simbel.

Und wieder folgt auf die Glanzzeit unter Ramses II. und seinen Nachfolgern der 19. und 20. Dynastie eine Zeit des Niedergangs. Die Aufspaltung Ägyptens in ein „weltliches“ Königreich mit Sitz in Tanis im östlichen Delta und den „Gottesstaat des Amun“ mit Sitz in Theben besiegeln das Ende des Neuen Reiches.

Es folgen Jahrhunderte unter fremder Herrschaft in der Dritten Zwischenzeit. In der anschließenden Spätzeit (ab 664) erlebt Ägypten eine neue Blüte: Anknüpfung an die Vorbilder in der Kunst des Alten Reiches führt zu einer „Renaissance“. Die Eroberung durch die Perser im Jahre 525 v. Chr. beendet die Selbstständigkeit Ägyptens, die nur unter der 28.–30. Dynastie (404 bis 343) noch einmal auflebt. Die Zeit der Königsdynastien endet 332 v. Chr. mit der Eroberung Ägyptens durch Alexander d. Gr. Die von ihm an der Mittelmeerküste gegründete und nach ihm benannte Hafenstadt Alexandria sollte zur Handelsmetropole und zum geistigen Zentrum der griechisch-hellenistischen Welt aufsteigen. Davon und von der Herrschaft der Ptolemäer und anschließend der Römer bis zur Zerstörung des berühmten Museions von Alexandria wird im folgenden Kapitel berichtet.

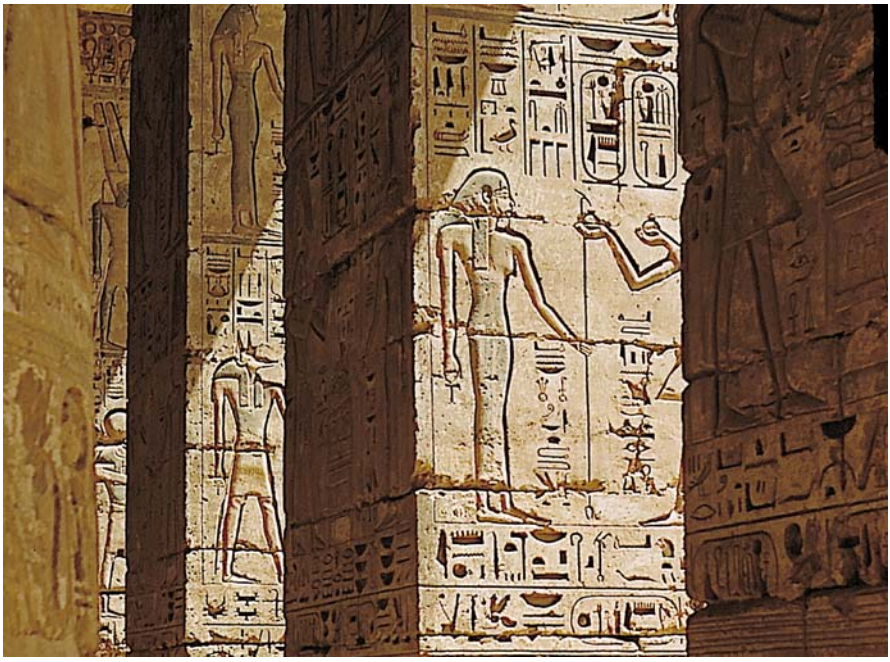


Abb. 3.1.4 Hieroglyphen am Tempel von Medinet Habu in Theben (um 1170 v. Chr.) [Foto Alten]

Die Griechen waren tief beeindruckt von der ägyptischen Kultur; die Pyramiden galten als eines der sieben Weltwunder. Die Kenntnis der altägyptischen Schrift – in all ihren Varianten – war verloren gegangen und so hielten sie die Inschriften an Tempeln für religiöse Zeichen, für heilige Zeichen, für Hieroglyphen. Sprach- und Schriftgeschichte Ägyptens sind kompliziert und können hier nicht dargestellt werden. Obwohl wir verallgemeinernd von Hieroglyphen sprechen, ging die ursprüngliche hieroglyphische Schrift in die hieratische (eine schneller, einfacher zu schreibende Schreibschrift) und diese später in die demotische Schrift über. Die Hieroglyphen sind sehr alt, gehen bis vor 3000 v. Chr. zurück und wurden, nach einigen Regulierungen, länger als 3000 Jahre benutzt. Die demotische Schrift kam ungefähr 660 v. Chr. in Gebrauch.

Da man die Hieroglyphen für Zeichen bzw. Symbole hielt und deren phonetischen Charakter nicht erkannte, blieb ein Entzifferungsversuch u. a. des deutschen Gelehrten Athanasius Kircher (1602–1680) ergebnislos.

Eine Wendung trat erst zu Anfang des 19. Jahrhunderts ein. Napoleon hatte 1799 den Versuch unternommen, Ägypten zu erobern. In seinem Gefolge befanden sich hochrangige Gelehrte, unter ihnen die Mathematiker G. Monge und J. B. J. Fourier. In Kairo wurde eine französisch geprägte Akademie gegründet. Ein riesiges Forschungsmaterial zu Geographie, Fauna,

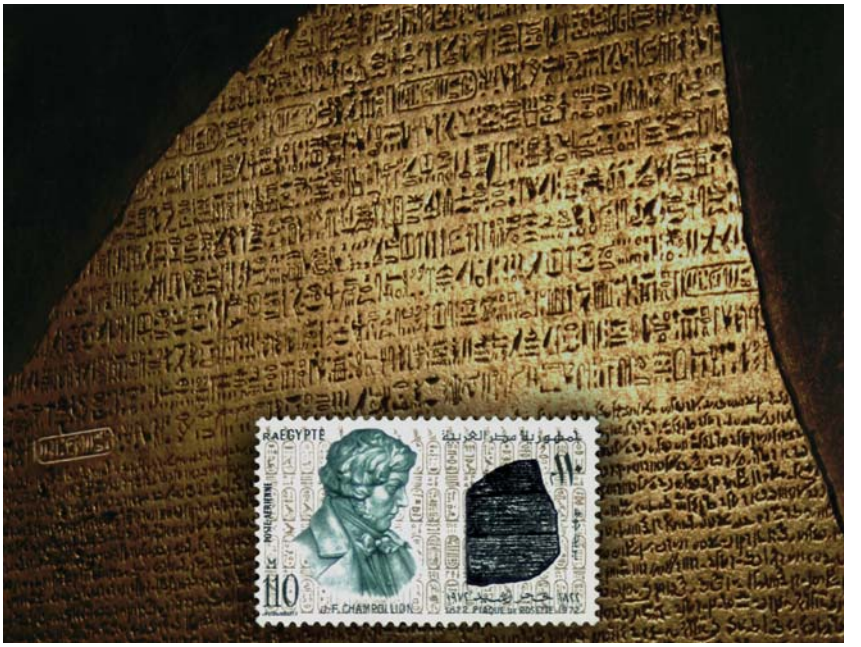


Abb. 3.1.5 Stein von Rosetta (Kopie im Römer- und Pelizaeus-Museum Hildesheim), eingefügt Briefmarke mit Champollion (Ägypten 1972), [Foto Wesemüller-Kock]

Flora und Geschichte jener Region wurde zusammengetragen und nach Paris gebracht. Die Niederlage der französischen Flotte bei Abukir gegen die Engländer schnitt das Expeditionskorps von Frankreich ab; das Unternehmen wurde abgebrochen. Napoleon floh heimlich auf einem kleinen Schiff.

1799 wurde nahe der Stadt ar-Rashid (englisch Rosetta) im nordwestlichen Nildelta zufällig ein sensationeller Fund gemacht. Der sog. Stein von Rosetta (heute im Britischen Museum) enthält Inschriften in hieroglyphischer, demotischer und griechischer Schrift; der letztere Teil war lesbar. Durch Vergleich mit einem Schlüsselwort (ein Eigenname) wurde deutlich, dass es sich bei allen Teilen um denselben Inhalt handelte. Der britische Physiker und Philologe Th. Joung (1773–1829) erzielte erste Erfolge bei der Entzifferung. Der große Wurf einer wirklichen Dechiffrierung gelang indes erst dem französischen Sprachwissenschaftler Jean-François Champollion (1790–1832) im Jahre 1822. Durch ihn wurden die Hieroglyphen lesbar; sie stellen eine Mischung dreier Grundbestandteile dar: alphabetische, Silben bedeutende und symbolische/ideographische Zeichen. Mit der Entzifferung der Hieroglyphen konnte eine Jahrtausende währende aufregende und glanzvolle Kultur erschlossen werden. Namen von Herrschern, Priestern und politische Ereignisse traten aus dem historischen Dunkel hervor.

Abb. 3.1.6 Medizinische Geräte am Tempel von Kom Ombo (Oberägypten) [Foto Mainzer]

Wissenschaft und Kultur erreichten im alten Ägypten ein beachtliches Niveau: Hoher Stand der Metallverarbeitung, Glasherstellung, Bautechnik, bildenden Kunst, Wandmalereien, aber auch in der Medizin. Die Medizin war sehr weit entwickelt: Es gab Augenärzte, Chirurgen und andere Spezialisten. Der Papyrus Ebers (UB Leipzig), weitere Papyri und Reliefs (vgl. Abb. 3.1.6) geben Auskunft über die Leistungen der Medizin im Alten Ägypten.

Nicht für jeden bedeutete die Hochkultur auch ein bequemes Leben. Die Lage der Bauern war schwer. So heißt es in einem Papyrus aus dem Neuen Reich:

> *„Erinnerst du dich nicht an das Wesen des Feldarbeiters beim Registrieren der Ernte? Die Schlange hat die eine Hälfte der Ernte weggenommen. Die Nilpferde haben das andere vertilgt. Die Mäuse sind zahlreich im Feld. Die Heuschrecke <fällt ein >, das Kleinvieh frißt und die Vögel bringen Mangel für den Feldarbeiter. Das Restliche, das auf der Tenne ist, ist zu Ende wegen der Diebe, während der Wert des geliehenen Viehs verloren ist, weil das Gespann durch Dreschen und Pflügen verreckt ist. Und dann landet der Schreiber auf dem Ufer. Er wird die Ernte registrieren, wobei die Wächter Stöcke und die Nubier Palmzweige tragen. Sie (sagen): ‚Gib das Korn her'. Wenn keines da ist, so verprügeln sie ihn furchtbar und er wird in ein Wasserloch geworfen."*
>
> (Zitiert bei [Imhausen 2003, S. 158])

Abb. 3.1.7 Ägyptischer Kalender mit 12 Monaten zu je 30 Tagen und fünf „unheilschwangeren" Tagen. Die Zeitpunkte für Beginn der Überschwemmung, Aussaat und Ernte sind abzulesen. (Ausschnitt aus einem Relief am Tempel von Kom Ombo) [Foto Wesemüller-Kock]

Besondere Bewunderung verdienen die astronomischen Kenntnisse, die bis in die Frühzeit zurückreichen. Die Beobachtung des sehr regelmäßig einsetzenden Nilhochwassers – lebenswichtig für die erneuerte Fruchtbarkeit des Ackerlandes – führte die Ägypter zu Beginn des dritten Jahrtausends auf die Festsetzung einer Jahreslänge von 365 Tagen, eingeteilt in drei Jahreszeiten mit je vier Monaten à 30 Tagen und fünf zusätzlichen Tagen (von den Griechen Epagomenen, d. h. die Aufgeschlagenen genannt).

Die Jahreszeiten entsprachen der Nilüberschwemmung, Aussaat/Wachstum und der Ernte. Die fünf Zusatztage störten die Harmonie dieses Kalenders und galten deshalb als gefährlich. Sie wurden als Vorzeichen für das nächste Jahr gedeutet und waren mächtigen Gottheiten gewidmet: Osiris, Horus, Seth, Isis, Nephtys.

In der von Göttern geschaffenen Welt und ihrer kosmischen Ordnung war auch jeder einzelne Tag des altägyptischen Kalenders einem bestimmten Gott zugeordnet, der aus der Sicht der Gläubigen die Herrschaft darüber ausübte und zugleich Schutz zu gewähren vermochte. Als Wächter und Schutzherr des gesamten Kalenders gilt der Mondgott Toth, der viele Aspekte und Funktionen in seiner Gestalt bündelte: Er war Gott der Weisheit, der Ge-

Abb. 3.1.8 Thot, der ibisköpfige Gott des Mondes, der Wissenschaften und des Schrifttums, Herr der Zeit und Rechner der Jahre (Römer- und Pelizaeus-Museum, Hildesheim) [Foto Wesemüller-Kock]

setze und heiligen Bücher, als „Schöpfer“ der Hieroglyphen darüber hinaus Gott des Schrifttums, der Wissenschaften und Künste. Er war der Schutzherr der Schreiber und der Bibliotheken und protokollierte als Götterbote und -sekretär das jeweilige Ergebnis des Totengerichts. In seiner Eigenschaft als Mondgott beherrschte er die Zeit- und Kalenderrechnung. Toth wurde als Gott der Mathematik auch mit Landvermessung und Tempelbau in Verbindung gebracht. Verehrt und dargestellt wurde er als Pavian, als Ibis (Vogel) und als ibisköpfiger Mensch.

Später erkannte man, dass das „Niljahr“ alle vier Jahre um einen Tag hinter dem erneuten Sichtbarwerden des Fixsternes Sothis (lat. Sirius, der Hundsstern) zurückblieb. So kam man auf eine Jahreslänge von $365\frac{1}{4}$ Tagen und korrigierte den Kalender im Jahre 238 v. Chr. (im Dekret von Kanopus) durch Einfügung eines Schalttages alle vier Jahre.

Dieser ägyptische Kalender war so vorzüglich, dass er unter Gaius Julius Caesar von den Römern (mit Schaltjahr) übernommen wurde. Der nach ihm benannte Julianische Kalender blieb bis zur Kalenderreform unter Papst Gregor XIII. im Jahre 1582 in katholischen Ländern in Gebrauch, in evangelischen Ländern bis ins 18. Jh., in Osteuropa sogar noch bis ins 20. Jahrhundert, weshalb die Revolution vom November 1917 als „Oktoberrevolution“ in die Geschichte eingegangen ist.

3.1.1 Mathematische Papyri

Einige wenige Papyri mathematischen Inhaltes sind erhalten geblieben; insgesamt sind etwas mehr als zehn derartige Dokumente bekannt. Einen ausführlichen Überblick über die mathematischen Papyri, über deren Inhalt, Entstehungszeit und jetzigen Aufbewahrungsort findet man im [DSB, Bd. XV, S. 704/05], ferner in [Gillings 1972].

Die bedeutendsten mathematischen Papyri stammen aus der Zeit des Mittleren Reiches. Das bedeutet, dass wir von der ägyptischen Mathematik quasi nur eine Momentaufnahme besitzen: Wir wissen nichts über die Vorgeschichte und kaum etwas über die Nachfolgegeschichte. Der Stand der Mathematik im Zeitraum des 18./17. Jahrhunderts v. Chr. ist erstaunlich hoch.

Zwei Papyri insbesondere verdanken wir die hauptsächlichen Kenntnisse. Der sog. Moskauer Papyrus (ca. 1850 v. Chr.) [Struve 1930] – er wird im Moskauer Museum der schönen Künste aufbewahrt – ist älter als der sog. Papyrus Rhind. Dieser wurde 1858 von dem schottischen Archäologen A.H. Rhind gekauft und gehört nun zu den Schätzen des Britischen Museums in London. Gelegentlich wird diese Papyrusrolle auch nach dem Schreiber

Abb. 3.1.9 Ägyptischer Schreiber (Skulptur im Ägyptischen Museum, Kairo) [Foto Wesemüller-Kock]

Ahmes benannt, der, wie er schreibt, seinen Text (um 1650) nach einer ca. 200 Jahre älteren (verlorenen) Vorlage kopierte [Eisenlohr 1891], [Peet 1923], [Chace/Archibald 1927–29].

Die weit fortgeschrittene Arbeitsteilung in Ägypten hatte den Stand der Schreiber hervorgebracht. Sie waren die ausführenden Organe der Verwaltung des Staates und je nach ihrem Rang mit mehr oder weniger Machtbefugnissen ausgestattet. Sie trieben die Steuern ein, dirigierten riesige Arbeitsheere, übten Gerichtsbarkeit aus.

Die mathematischen Texte kann man als eine Art Nachschlagewerk oder Handwerkszeug der Schreiber verstehen: Probleme der Feldvermessung (erforderlich nach den jährlich wiederkehrenden Nilüberschwemmungen), Berechnung von Steuern und Abgaben, Berechnung der Verpflegung für die Heere, Berechnung der Größe von Vorratsbehältern, Projektierung von Bauwerken – dazu sollte ein erfahrener Schreiber imstande sein.

Es hat sich ein fiktiver Brief eines Schreibers aus dem Neuen Reich an einen anderen erhalten, in dem er bemängelt, dass jener nicht imstande sei, übertragene Aufgaben zu lösen und er nun eingreifen müsse:

> *„Es fällt auf meinen Nacken (...)* (Ein ironischer Unterton ist unverkennbar) *Siehe, Du kommst und füllst mich mit Deinem Amt an. (Da will) ich Dir darlegen, was Dein Wesen ist, wenn Du sagst: ‚Ich bin der Befehlsschreiber des Heeres‘.*
> *Man gibt Dir einen See auf, den Du graben sollst. Da kommst Du zu mir, um Dich nach dem Proviant für die Soldaten zu erkundigen und sagst: ‚Rechne ihn mir aus‘. Du läßt Dein Amt im Stich und es fällt auf meinen Nacken, daß ich dir seine Ausübung lehren muß. (...)*
> *Denn sieh, Du bist ja der erfahrene Schreiber, der an der Spitze des Heeres steht. Es soll (also) eine Rampe gemacht werden, 730 Ellen lang und 55 Ellen breit, die 120 Kästen enthält und mit Rohr und Balken gefüllt ist, oben 60 Ellen hoch, (...) Man erkundigt sich nun bei den Generälen nach dem Bedarf an Ziegeln für sie, und die Schreiber sind allesamt versammelt, ohne daß einer unter ihnen etwas weiß. Sie vertrauen alle auf Dich und sagen: Du bist ein erfahrener Schreiber, mein Freund; so entscheide das schnell für uns. Sieh, Du hast einen berühmten Namen; möge man einen in dieser Stätte finden, der die übrigen dreißig groß mache. Laß es nicht geschehen, daß man von Dir sage: ‚Es gibt (auch) Dinge, die Du nicht weißt.‘“*
> (Zitiert nach [Neugebauer 1969, S. 120], vgl. auch [Fischer-Elfert 1986])

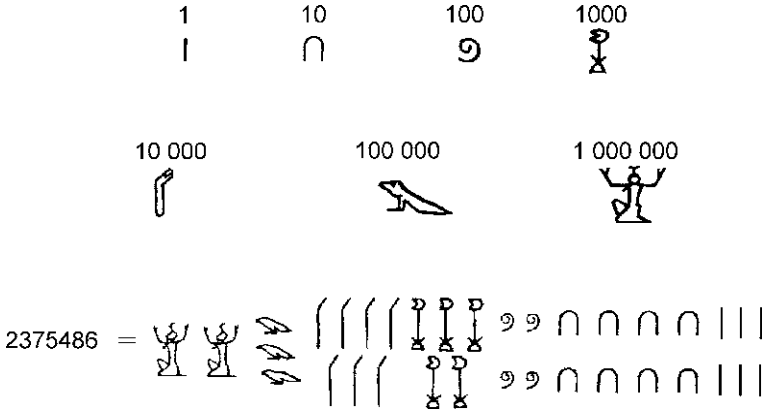
3.1.2 Zahlensystem, Rechentechnik

Das altägyptische Zahlensystem war dezimal aufgebaut aber kein Positionssystem. Das bedeutet, dass jede Zehnerpotenz ein eigenes Schriftzeichen besaß, für $10^0 = 1$, 10^1, 10^2 usw. bis 10^6. In hieroglyphischer Schrift sahen sie ungefähr so aus wie auf der folgenden Seite dargestellt.

Abb. 3.1.10 Zahlzeichen für Angaben von Mengen in Rezepturen (Relief im Laborraum des Horus-Tempels von Edfu) [Foto Wesemüller-Kock]

Die Zahlen wurden durch Reihung gebildet. Das Zeichen für 100 stellt eine Messleine dar, das für 1000 eine Lotosblume, das für 10 000 einen Schilfkolben (oder Finger), das für 100 000 eine Kaulquappe. Das Zeichen für 10^6 stellt (vermutlich) den ägyptischen Gott des Luftraumes dar.

Ursprünglich wurden die Zahlen durch Reihung der Individualzeichen gebildet, z. B.



Die Zahlzeichen erinnern, wie bereits erwähnt, noch an ihre ursprüngliche Bedeutung. Ähnliches gilt für die Rechenoperationen.

Das Schriftsymbol für „zerbrechen“ ist synonym mit Subtraktion. Der Bruch wurde durch ein über die Zahl gesetztes Zeichen (für *ro* = Mund die Hieroglyphe für *r*) bezeichnet, ursprünglich das Zeichen für ein kleines Hohlmaß, 1/320 eines Scheffels. Später wurde das Zeichen zu einem Punkt verkürzt. Dann bedeutet $\dot{n}$ soviel wie $1/n$. Statt $\dot{n}$ wird heutzutage die Schreibweise $\bar{n}$ für $1/n$ verwendet. Auch gab es noch ein Zeichen für den Bruch 2/3. Gelegentlich wurde für Subtraktion das Zeichen für „Haus“ kombiniert mit („ein Paar Beine gehen hinaus“) verwendet.

Die ägyptische Rechentechnik beruht auf fortgesetztem Verdoppeln und Halbieren. Nehmen wir zwei Beispiele: Multiplikation 13×12 und Division $21 : 8$. Der Schreiber rechnet im Beispiel der Multiplikation:

$$\begin{array}{rr} /\ 1 & 12 \\ \ \ 2 & 24 \\ /\ 4 & 48 \\ /\ 8 & 96 \end{array}$$

Die angestrichenen Positionen 1, 4, 8 sind die entscheidenden: ihre Addition ergibt den Multiplikanden 13, die Summe der zugehörigen Produkte das Ergebnis $12 + 48 + 96 = 156$.

Im Beispiel der Division wird der Dividend durch Verdoppeln bzw. fortgesetzte Halbierung des Divisors 8 aufgebaut

$$\begin{array}{rr} \ \ 1 & 8 \\ /\ 2 & 16 \\ /\ \bar{2} & 4 \\ \ \ \bar{4} & 2 \\ /\ \bar{8} & 1 \end{array}$$

Die entscheidenden Positionen 2, $\bar{2}$, $\bar{8}$ (für Verdoppeln bzw. wiederholtes Halbieren) werden angestrichen. Ihre Addition ergibt den Quotienten $2 + \bar{2} + \bar{8} = 2 + 1/2 + 1/8 = 21/8$, die Addition der zugehörigen Positionen den Dividenden: $16 + 4 + 1 = 21$.

Dies verweist auf die altägyptische Bruchrechnung, die mit Stammbrüchen $\bar{n} = 1/n$ vollzogen wurde. So ist 2/5 etwa kein Zahlenergebnis, sondern eine Aufgabe mit der Lösung: $2/5 = \overline{3} + \overline{15} = 1/3 + 1/15$.

Der Papyrus Rhind beginnt mit der hochtrabenden Ankündigung, was man alles durch ihn lernen könne, nämlich *„Regeln zum Eindringen in die Natur und zum Erkennen alles dessen, was existiert, (jedes) Mysteriums, (...), jedes Geheimnisses“* (zitiert nach [Peet 197e, englisch], dt. Übers. Wg). Dann folgt eine Tabelle von Zerlegungen der Brüche $2/n$ in Stammbrüche, bis 2/101. Beispielsweise

$$2/7 = \overline{4} + \overline{28}, \ldots, 2/99 = \overline{46} + \overline{198}\,, \quad 2/101 = \overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606}\,.$$

Bekanntlich ist die Zerlegung in Stammbrüche nicht eindeutig. Aber es wird stets die triviale Zerlegung $2/n = \bar{n} + \bar{n}$ vermieden. Es lässt sich zeigen, dass der Schreiber eine in seinem Sinne „kanonische“ Zerlegung vorgenommen hat (vgl. dazu [Neugebauer 1969, S. 137–166]).

Die Aufgaben in den Papyri sind großenteils Verwaltungsaufgaben. Dennoch kann man verschiedene Typen klassifizieren, darunter sogar solche ziemlich abstrakten Charakters.

3.1.3 „Hau“-Aufgaben, Pśw-Rechnungen

Der Papyrus Rhind enthält in den Aufgaben 24 bis 34 sog. Hau-Rechnungen. Der in der mathematikhistorischen Literatur vorwiegend verwendete Ausdruck „hau“ ist in gewissem Sinne ahistorisch: In der ägyptischen Schrift wurden die Vokale nicht geschrieben; das Wort „hau“ für „Haufen“, „Menge“ könnte also auch – wie es verschiedene Autoren tun – mit ‚aha‘ oder einfach mit ‚h‘ umschrieben werden.

Der Ausdruck hau im Sinne von Haufen, Menge übernimmt in gewissem Sinne die Rolle der gesuchten Größe; wir formulieren Hau-Rechnungen heute mit linearen Gleichungen. Ein besonders schönes, d. h. klar formuliertes Beispiel einer Hau-Aufgabe findet sich im Moskauer Papyrus.

> *„Form der Berechnung eines Haufens, gerechnet $1\frac{1}{2}$ mal zusammen mit 4.*
> *Er ist gekommen bis 10. Der Haufe nun nennt sich?*
> *Berechne du die Größe dieser 10 über dieser 4. Es entsteht 6.*
> *Rechne du mit $1\frac{1}{2}$, um zu finden 1. Es entsteht 2/3.*
> *Berechne du 2/3 von diesen 6. Es entsteht 4. Siehe: 4 nennt sich.*
> *Du hast richtig gefunden.“*
> [Struve 1930, S. 114]

Es soll also – modern gesprochen – die Gleichung $\frac{3}{2}x + 4 = 10$ gelöst werden.

Eine andere Methode ist die sog. pśw- oder pesu-Rechnung. Das Wort zeigt die Güte von Bier bzw. Brot – den Hauptnahrungsmitteln – in Abhängigkeit von der verwendeten Getreidemenge an, wobei noch Umrechnungsverhältnisse verschiedener Getreidearten ineinander zu berücksichtigen waren. Das Verhältnis $q = b/a$ der verwendeten Getreidemenge b zu der Anzahl a der Brote bzw. gefüllten Bierkrüge ist dann ein Maß für die Güte von Brot bzw. Bier. Berechnet werden soll die eine Größe aus den beiden anderen.

Es finden sich auch (endliche) arithmetische und geometrische Reihen. Hier das Beispiel einer arithmetischen Reihe. Gesucht ist das Endglied (Aufgabe Nr. 64 im Papyrus Rhind):

> *„Wenn Du aufgefordert wirst, 10 hekat* (ein Getreidemaß, 4,785 l) *Gerste unter 10 Männer aufzuteilen, wobei der Unterschied jedes Mannes gegenüber seinem Nachbarn 1/8 hekat Gerste ist. Der mittlere Anteil* (d. h. der Anteil, der sich ergeben würde, wenn jeder gleich

viel erhielte, Wg) *beträgt 1 hekat.* (Im Original steht $\frac{1}{2}$ hekat. Es muss heißen 1 hekat, Wg) *Nimm 1 von 10 weg, der Rest ist 9. Die Hälfte der gemeinsamen Differenz wird genommen, nämlich 1/16 hekat. Multipliziere sie 9 mal, das Ergebnis ist 1/2 + 1/16. Füge den mittleren Anteil dazu. Nun musst Du* (vom höchsten Anteil, der soeben berechnet worden war, Wg) *für jeden Mann 1/8 hekat bis zum letzten Mann abziehen.“*
(Nach Papyrus Rhind [Peet 1923, engl. S. 107f.])

Der Text ist ganz durchsichtig: Eine arithmetische Reihe mit $n = 10$ Gliedern, der Differenz $d = 1/8$, der Summe $s = 10$ ist gegeben. Der mittlere Anteil $m = s/n$ wird berechnet, und für das letzte Glied der Reihe erhält der Rechner den richtigen Ausdruck $m + d(n-1)/2$.

Im Papyrus Rhind findet sich eine humorvolle Rechnung zum *„Inventar eines Haushaltes: 7 Häuser, 49 Katzen, 343 Mäuse, 2401 Getreideähren, 16807 hekat, zusammen 19607.“* (Nach Papyrus Rhind, [Peet 1923, S. 121])

Abgesehen davon, dass sich in dieser Aufgabe auch die große Verehrung der Ägypter für Katzen ausdrückt, ist gemeint, dass in jedem Haus 7 Katzen leben, von denen jede 7 Mäuse frisst, die jede 7 Ähren vertilgt hätte, und aus denen wären 7 hekat als Ernte hervorgegangen.

3.1.4 Algebraische Probleme

Es ist öfter unterstellt worden, dass die Harpenodapten (ein griechischer Ausdruck für Seilspanner), die Knotenschnüre mit 3, 4, 5 Knoten verwandten und mit dem Seil einen rechten Winkel aufspannen konnten, im Besitz des Satzes von Pythagoras gewesen seien. Es gibt jedoch kein Dokument aus alter Zeit, das diese Vermutung dokumentiert. Anders dagegen steht es mit einem Papyrus (dem sog. Papyrus Kairo), der aus viel späterer Zeit (ca. 300 v. Chr.) stammt, 1938 gefunden und 1962 von R. A. Parker analysiert wurde [Parker 1972].

Der Papyrus Kairo enthält 40 Probleme mathematischen Inhalts. Neun davon beschäftigen sich mit dem Satz des Pythagoras. Darunter ist die klassische Aufgabe von einer Leiter, die ein Stück von der Wand absteht. Wie hoch reicht sie? Auch weiß der Schreiber, dass neben dem Tripel (3, 4, 5) auch mit den Tripeln (5, 12, 13) und (20, 21, 29) rechtwinklige Dreiecke entstehen.

Im Papyrus Kairo werden auch Fortschritte deutlich, die beispielsweise gegenüber dem Papyrus Rhind erzielt wurden. Aus einem geometrischen Problem entspringt – modern geschrieben – das Gleichungssystem $xy = 60$, $x^2 + y^2 = 169$ mit den Lösungen $y = 5$, $x = 12$. Außerdem gibt es Näherungsformeln, die gewöhnlich Archimedes bzw. Heron zugeschrieben werden, abstrakt $\sqrt{a^2 + b} \approx a + b/2a$. Schließlich beschäftigen sich zwei Probleme mit dem Flächeninhalt des Kreises [Gillings 1976, S. 690f.].

3.1.5 Geometrische Probleme

In reichlichem Maße finden sich in den Papyri der pharaonischen Zeiten auch geometrische Probleme: Berechnung des Inhaltes von Dreiecken und rechtwinklig begrenzten Flächenstücken mittels Zerlegung; Kreisfläche, Volumina.

Wir erkennen an der Musteraufgabe 50 aus dem Papyrus Rhind, dass die Ägypter auch einen erstaunlich genauen Wert von π besaßen. Die entsprechende Aufgabe lautet:

> *„Beispiel der Berechnung eines runden Feldes vom (Durchmesser) 9 ht (ein Längenmaß). Was ist der Betrag seiner Fläche? Nimm 1/9 von ihm (dem Durchmesser) weg. Der Rest ist 8. Multipliziere 8 mal 8. Es wird 64.“*
> (Zitiert nach [Gericke 1984, S. 55])

Man subtrahiert also $d/9$ vom Durchmesser d und quadriert. Die Fläche ist dann $(d-d/9)^2$ und dies läuft auf den Wert von $\pi \approx 56/81 = 3{,}16\ldots$ hinaus.

Interessant ist die Feststellung, dass ausgerechnet ein Neuntel abgezogen wird. Warum nicht 1/8 oder 1/10? Beide Werte liefern schlechtere Näherungen. Für die Wahl von 1/9 gibt es verschiedene Interpretationen [Gericke 1984, S. 55–58].

Die Glanzleistung der altägyptischen Geometrie ist die korrekte Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes. Sie findet sich als Aufgabe 14 im Moskauer Papyrus. Gegeben ist ein Pyramidenstumpf (schief oder gerade, das bleibt offen) mit 4 Ellen (1 Elle = 20,6 Zoll) Seitenlänge an der quadratischen Basis, 2 Ellen am Deckquadrat und 6 Ellen Höhe. Der Schreiber rechnet (frei übersetzt nach Struve):

> *„Wenn man dir sagt, ein Pyramidenstumpf von 6 Ellen Höhe,*
> *Von 4 Ellen an der Basis und 2 Ellen an der Spitze,*

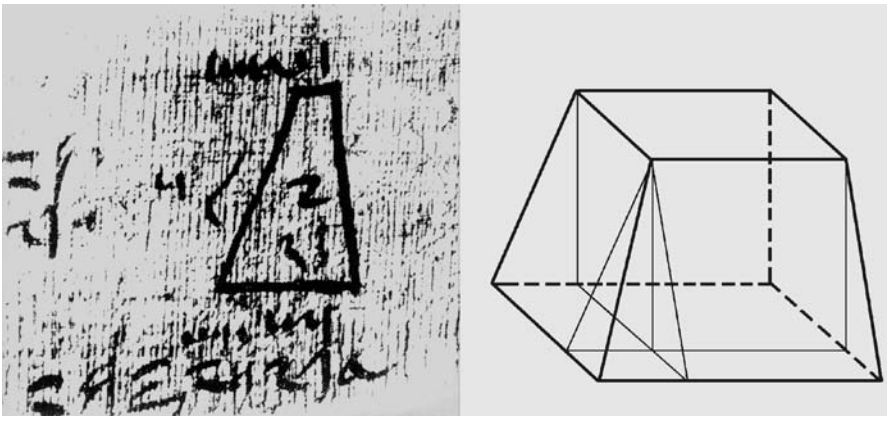


Abb. 3.1.11 Pyramidenstumpf-Aufgabe im Moskauer Papyrus (der Moskauer Papyrus ist in hieratischer Schrift geschrieben) [Neugebauer 1969, S. 127]

Rechne du mit 4, das Quadrat ist 16.
Multipliziere diese 4 mit 2. Ergebnis 8.
Rechne du mit dieser 2, sein Quadrat ist 4.
Addiere zusammen diese 16, mit diesen 8 und mit diesen 4. Ergebnis 28.
Rechne du 1/3 von 6. Ergebnis 2.
Rechne du zweimal mit 28. Resultat 56.
Siehe. Es ist 56! Du hast es richtig gefunden.“
(Vgl. auch [DSB Supplement 1978, S. 697])

Die Rechnung läuft auf die Rechenanweisung $h(a^2 + ab + b^2)/3$ hinaus. Wir wissen freilich nicht, auf Grund welcher theoretischen Überlegungen, vielleicht auch experimenteller Mittel (Ausmessung mit Sand?) diese „Formel“ gefunden werden konnte.

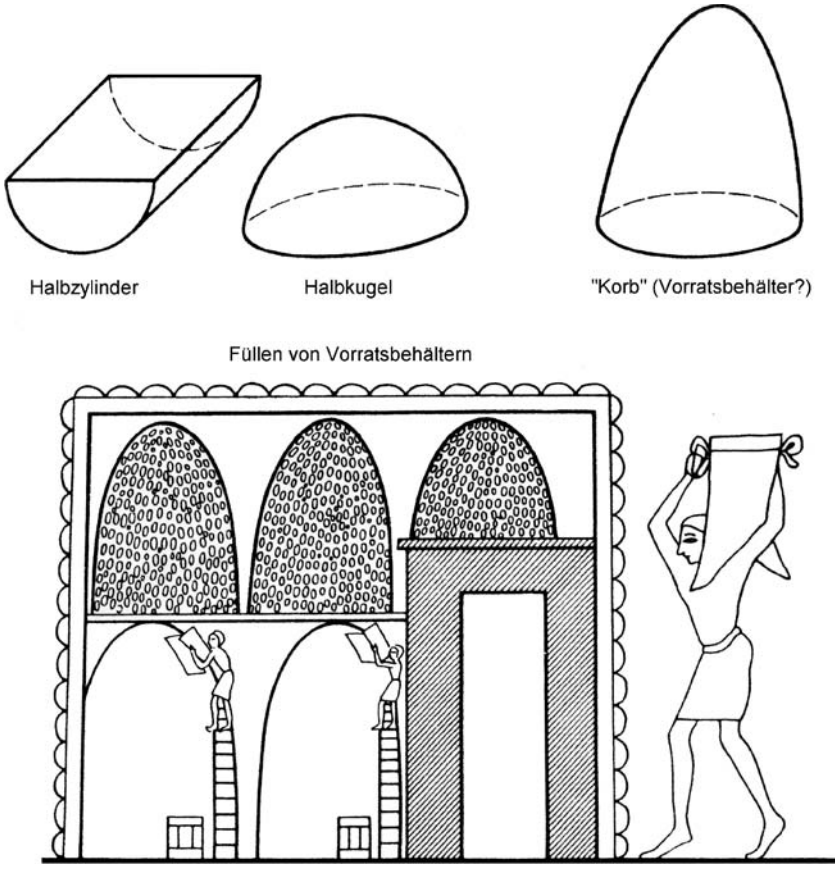


Abb. 3.1.12 Figuren zur Deutung von Aufgabe 10 Papyrus Moskau; nach [Neugebauer 1969, S. 136f.]

Besonders beschäftigt hat die Mathematikhistoriker die Aufgabe 10 im Moskauer Papyrus. Sie handelt von der Berechnung der Oberfläche eines „Korbes“. Wegen der Lücken im Text des Papyrus und der Möglichkeit verschiedener Bedeutungen des Symbols für „Korb“ gibt es unterschiedliche Interpretationen der Bezeichnungen im Text. Danach könnte es sich um die Oberfläche einer Halbkugel (Interpretation von Struve), die eines Halbzylinders (Peet) oder eines korbähnlichen Vorratsbehälters (Neugebauer) handeln.

Fassen wir zusammen: Die altägyptische Kultur war hoch entwickelt. Die Mathematik hat in den Händen der Schreiber eine Höhe erreicht, die den praktischen Problemen gerecht werden konnte und in Einzelfällen zu weiteren Fragestellungen führte. Im Allgemeinen handelt es sich um Rechenanweisungen; die „Probe“ wird mit dem Ergebnis gemacht. Aber es gibt keine Begründung dafür, dass eine Vorschrift im Allgemeinen immer zum richtigen Ergebnis führt.

Merkmale und Inhalte der Mathematik im alten Ägypten

Mathematische Methoden entstehen aus praktischen Bedürfnissen: Landvermessung, Bau von Pyramiden, Tempeln, Speichern, Bewässerungsanlagen, Abrechnungen von Lohn, Material, Abgaben. Die Methoden wurden als Handlungsanweisungen anhand konkreter Beispiele mit Proben von staatlichen Schreibern ohne Begründung oder Beweis beschrieben.
Quellen sind im Wesentlichen: Papyrus Rhind, Papyrus Moskau, Papyrus Kairo, Londoner Lederrolle – gegen Ende des Mittleren Reiches in hieratischer Schrift niedergeschrieben.
Zahlen: Natürliche Zahlen werden durch Zeichen für Zehnerpotenzen additiv im Dezimalsystem dargestellt, Brüche als Stammbrüche durch den Nenner (Sonderzeichen für $1/2$, $1/4$, $1/3$, $2/3$) bzw. als Summe von Stammbrüchen. Dazu diente eine Tabelle mit Darstellung der Brüche $2/n$ mit ungeradem Nenner n für $5 \leq n \leq 101$ als Summe von Stammbrüchen.

Arithmetik: Einfache Addition und Subtraktion, Multiplikation durch sukzessive Verdopplung des Multiplikanden, Division durch Verdopplung des Divisors; arithmetische und (endliche) geometrische Reihen.
Algebra: Lineare Gleichungen mit einfachem falschen Ansatz bzw. sog. Hau-Rechnung; rein quadratische Gleichungen; Näherungen für Quadratwurzeln.
Geometrie: Flächeninhalte von Rechteck, Dreieck und Trapez, Näherung für die Kreisfläche gemäß $F = (8/9 * d)^2$ mit Durchmesser d; Volumina von Würfel, Quader und Zylinder, „Formel“ für Volumen von Getreidespeichern, korrekte Formel für den Inhalt eines Pyramidenstumpfes.

3.2 Mesopotamische (Babylonische) Mathematik

	Allgemeine Geschichte	Kulturgeschichte
ca. 3000 bis 2700	Sumerische Stadtstaaten	Entstehung der Keilschrift auf Tontafeln
ca. 2700 bis 2000	Einwanderung und Herrschaft der Akkader	
ca. 2000 bis 1900	Neusumerisches Reich	Einführung des Positionssystems
ca. 1900 bis 1600	Altbabylonisches Reich Gesetzestafeln des Hammurapi	Hochblüte der Algebra und der Geometrie
ca. 1600 bis 1250	Hethiter und Kassiten in Mesopotamien	Astronomische Berechnungen und Beobachtungen
ca. 1200	Aufstieg Assyriens beginnt	Mathematische Keilschrifttexte, Zikkurate
883–612	Neuassyrisches Reich	Residenzen in Nimrud und Ninive
612	Zerstörung von Ninive	
625–539	Neubabylonisches Reich	Blüte von Astronomie und Astrologie
597	Zusammenbruch des Staates Juda	Babylonische Gefangenschaft der Juden
539	Kyros d. Gr. erobert Babylon, persische Herrschaft	Höhepunkt der Astronomie
330	Alexander d. Gr. erobert Babylon	
323–139	Herrschaft der Seleukiden	Hellenismus
139 v. Chr. bis 226 n. Chr.	Herrschaft der Parther	

3.2.0 Einführung

Die Griechen nannten das Land „zwischen den Strömen“ Euphrat und Tigris „Mesopotamien“, es liegt auf dem Gebiet des heutigen Irak. Übrigens vereinigten sich im Altertum Euphrat und Tigris noch nicht, sondern mündeten getrennt in den Persischen Golf.

Im verallgemeinerten Sinne wird die Bezeichnung „Mesopotamien“ in der Archäologie auch für das erweiterte Gebiet von den beiden Strömen bis zu

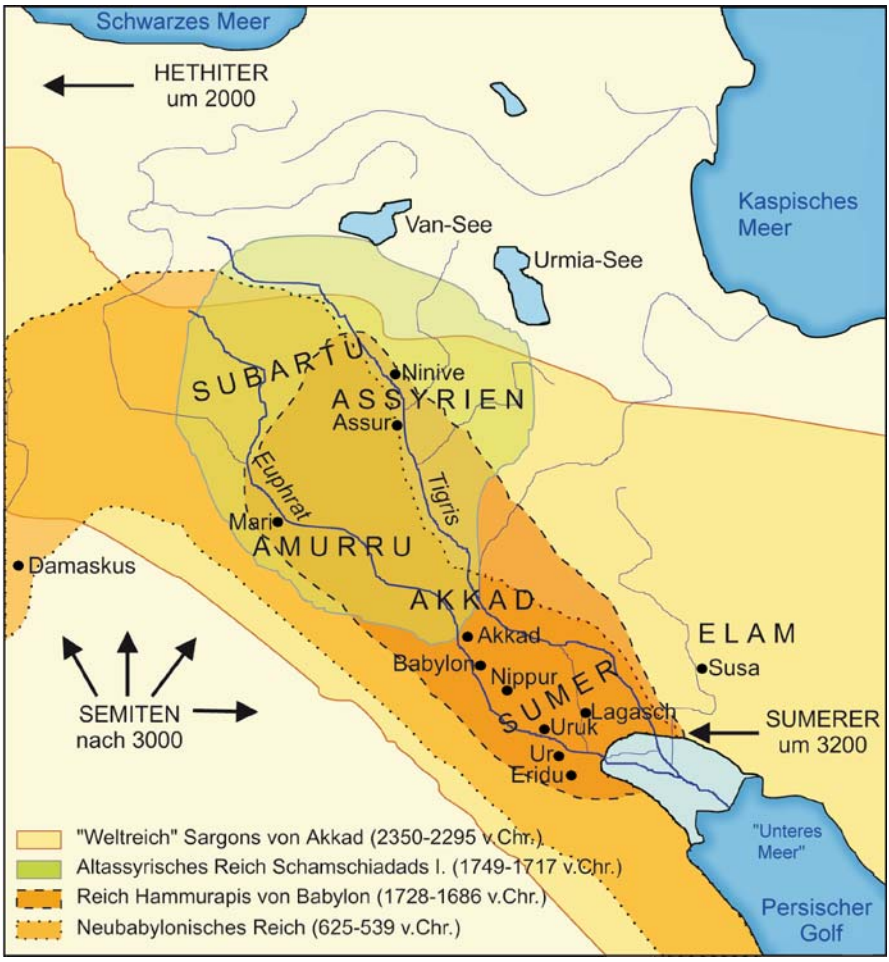


Abb. 3.2.1 Mesopotamien in der Antike

den Bergen im Iran nach Osten hin, im Norden bis in die Südtürkei und nach Westen hin bis zur syrisch-arabischen Wüste verstanden.

Die politische Geschichte ist kompliziert; viele Städte und Völkerschaften erlangten politischen Einfluss. Die Städte Ninive, Nippur und Babylon, die Völker der Sumerer, Akkader und Assyrer, die Herrscher Hammurapi und Nebukadnezar II. sind uns noch heute ein Begriff. Auch wurzeln Teile des Alten Testamentes in der Geschichte Mesopotamiens, beispielsweise die Berichte von der babylonischen Gefangenschaft des jüdischen Volkes oder die Geschichte von der Sintflut, die sich in einer Urform in mesopotamischen Texten vorfindet.

Abb. 3.2.2 Schreitende Löwen an der Straße zum Ischtar-Tor in Babylon (Rekonstruktion mit originalen, farbig glasierten Ziegelreliefs im Vorderasiatischen Museum Berlin) [Foto Alten]

Frühe neolithische Siedlungen aus dem 9./8. Jahrtausend sind im Osten Mesopotamiens gefunden worden. Im 5./4. Jahrtausend wurde durch Be- und Entwässerung der südliche Teil des Schwemmlandes erschlossen. Fruchtbares Land warf hohe Erträge ab. Im späten 2. Jahrtausend gewann Assyrien eine beherrschende Stellung, nicht zuletzt deswegen, weil dort der Metallhandel aus dem erzreichen Norden in den Süden Profit abwarf. In der zweiten Hälfte des 2. Jahrtausends wurde Babylon ein weiteres politisches Zentrum. Das Neuassyrische Reich dominierte einige Zeit; es folgte das Neubabylonische Zentralreich. Im Jahre 539 v. Chr. eroberten die Perser Babylon; schließlich verleibte Alexander der Große Mesopotamien seinem Reich ein.

In Anbetracht der wechselvollen Geschichte Mesopotamiens, von der nur ein Teil die Geschichte Babyloniens ist, soll hier von mesopotamischer Mathematik gesprochen werden, anstelle der auch weit verbreiteten Bezeichnung babylonische Mathematik.

3.2.1 Entwicklung der Keilschrift

Über die politische und ökonomische Geschichte, über Technik und Wissenschaft mit Einschluss der Mathematik sind wir relativ gut informiert, da auf Tontafeln geschriebene Texte, getrocknet oder sogar gebrannt, in großer Zahl bei Ausgrabungen gefunden worden sind. Ganze „Bibliotheken“ wurden ent-

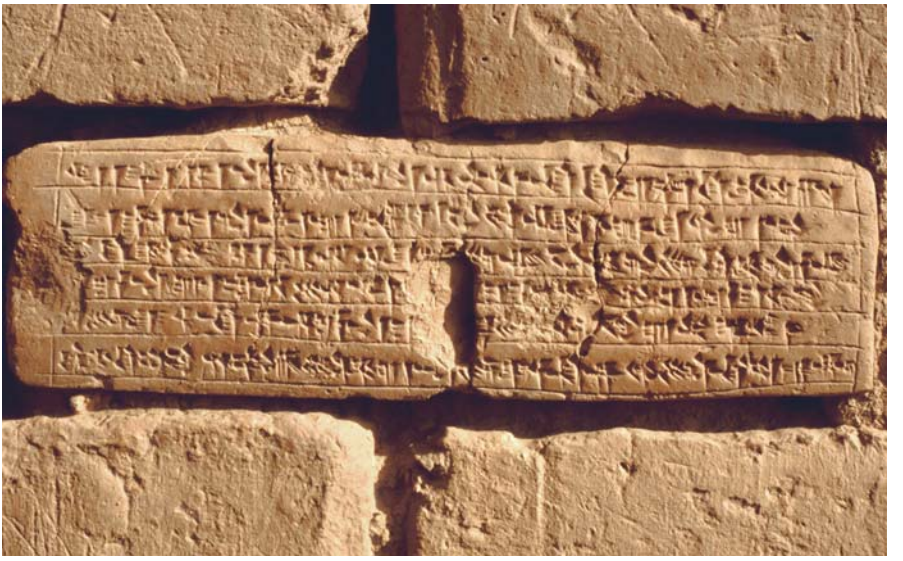


Abb. 3.2.3 Elamische Keilschrift an der Zikkurat von Tschogah Sambil (um 1250 v. Chr.) [Foto Alten]

deckt, darunter auch „schöngeistige“ Werke wie das Gilgamesch-Epos, ein Heldenepos. In der Hauptsache aber handelt es sich um Verwaltungstexte.

Als Schrift auf den Tontafeln wurden die sog. Keilschriftzeichen in vielen Versionen auf unterschiedliche Weise verwendet. Es stellte sich nach und nach heraus, dass die Keilschrift eine lange und verwickelte Geschichte hat, denn sie war von etwa 3000 bis in die letzten vorchristlichen Jahrhunderte die in Vorderasien vorherrschende Schrift, die von verschiedenen Völkern unterschiedlicher Sprachtypen übernommen wurde.

Es waren die Sumerer, die durch Keil- und Winkelhaken stilistische Ideogramme entwickelten. Diese Ideogramme wurden in der sog. akkadischen Keilschrift auch als Silbenzeichen verwendet, in der späteren babylonischen Keilschrift sogar für mehrere von einander unabhängige und grundverschiedene Silbenwerte; das ist die von Sir Henry Creswicke Rawlinson (1810–1895) an persischen Inschriften entdeckte Polyphonie der babylonischen Keilschrift.

Die ersten Keilschrifttexte wurden von Pietro de la Valle im Jahre 1626 aus Persepolis nach Europa gebracht. Die Bezeichnung Keilschrift wird dem deutschen Arzt und Forschungsreisenden Engelbert Kämpfer (1651–1716) zugeschrieben, der in seinen 1712 in Lemgo/Westfalen erschienenen *Amoenitates Exoticae* von *„litterae cuneatae“* berichtet: jedoch spricht der britische Orientalist Thomas Hyde in seiner *Historia religionis veterum Persarum* bereits 1700 von *„dactuli pyramidales seu cuneiformes“*. Die Entzifferungsversuche der untergegangenen Schrift haben eine lange Geschichte. Ein entscheidender Durchbruch gelang 1793 dem Göttinger Lehrer Georg

Uruk um 3000 v. Chr.	Lagasch um 2450	Babylon um 1850	Assur um 1300	Assur um 700	Babylon um 600	Babylon um 250	Sumerische Lesung	Akkadische Lesung	Bedeutung	Lautwert
							sche	schê'um	Getreide Korn	sche
							schar sar	kirû schaṭâru	Garten schreiben usw.	schar sar
							c	ikû	Graben	c
							ku_6 cha	nûnu	Fisch	cha, ku_6
							gud	alpu	Rind Stier	–

Abb. 3.2.4 Bildursprung und Entwicklung der Keilschriftzeichen [Wußing 1965, S. 31]

Friedrich Grotefend (1775–1863) mit viel Glück und Kombinationsvermögen auf Grund einer Wette mit Trinkkumpanen. Grotefend beschrieb 1793 in seinem erst 1893 wieder aufgefundenen Originalaufsatz *Praevia de cuneatis quas vocant inscriptionibus Persepolitanis legendis et explicandis relatio* seine Entzifferung der (auf dem Wege vom Bild zum Buchstaben) schon alphabetischen altpersischen Keilschrift. Seine Ergebnisse wurden 1805 erstmals veröffentlicht und lösten die Entzifferung der älteren elamischen und akkadischen Keilschriften aus, in denen die großspurigen Aussprüche der achämenidischen Perserkönige als zweite und dritte Version neben der altpersischen in den Felswänden bei Persepolis, Nagsh-e Rustam und Behistun auftreten.

Mit der Erfindung der Buchstabenschrift durch die Phönizier hat sich die Keilschrift überlebt. Aus dem phönizischen gingen schließlich das griechische, das lateinische und das frühslawische Alphabet hervor.

Die Entwicklung der Keilschrift hatte auch Auswirkungen auf die Schreibweise mathematischer Texte. So musste sich der Übergang von der agglutinierenden und vorwiegend einsilbigen Sprache der Sumerer zur flektierenden, mehrsilbigen semitischen Sprache der siegreichen Akkader auswirken. Andererseits aber sahen die Akkader keine Veranlassung, die hoch entwickelte Keilschrift, die sich durch Linearisierung von Ideogrammen herausgebildet hat, zu verwerfen und ebenso lebte bei den akkadischen und anderen semitischen Eroberern die sumerische Sprache als Fachsprache fort. Diese Situation hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der Rolle der lateinischen Sprache im Mittelalter. Auf diese Weise wurde ein einsilbiges, sumerisch gelesenes Keilschriftzeichen zur Silbe eines akkadischen Wortes; es repräsentierte auf der

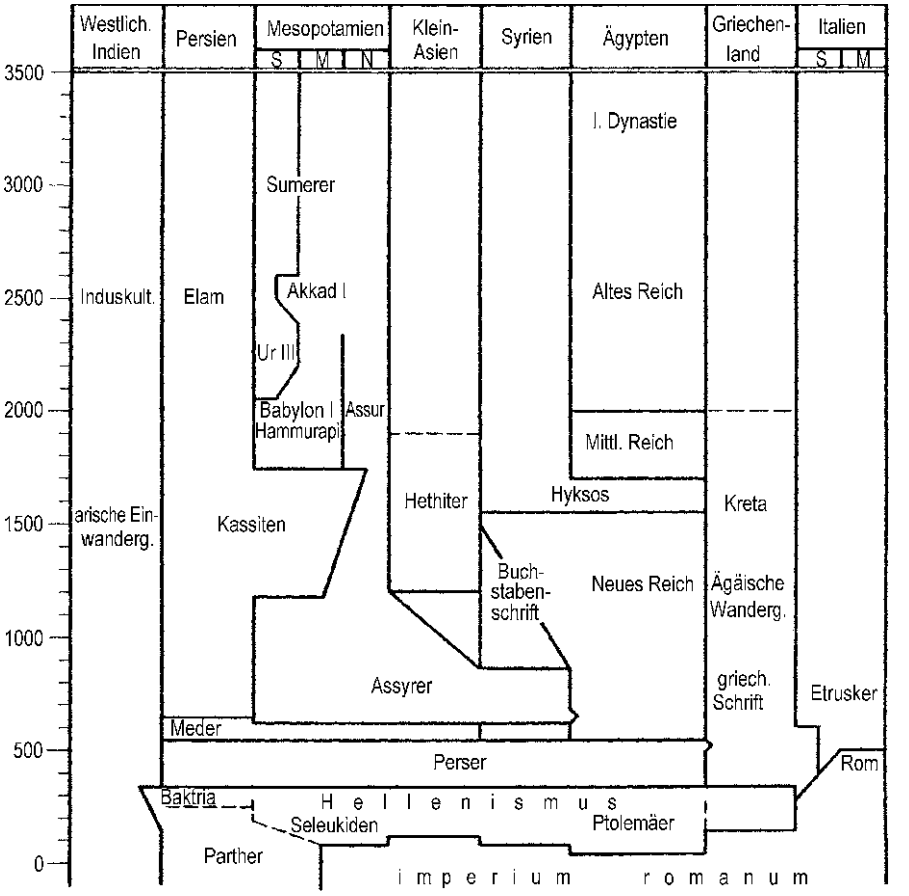


Abb. 3.2.5 Vergleichende historische Entwicklungen
[Neugebauer, 2. Aufl. 1969, S. 41]

anderen Seite nach wie vor den sumerischen Begriff. Diese Doppelstellung der Schriftzeichen, ihre sowohl ideographische als auch syllabische Funktion, besitzt eine Art Verwandtschaft mit dem Grundprinzip der Bezeichnungsweisen innerhalb der Buchstabenalgebra (ausführlich in [Neugebauer 1969, S. 40–72]).

Besonders wertvolle und aussagefähige mathematische Keilschrifttexte hat man in Susa gefunden, der Hauptstadt des damaligen Elam (jetzt im Iran). Dort sind großräumige Ausgrabungen vorgenommen worden, anfangs vom britischen Archäologen W. K. Loftus zur Mitte des 19. Jahrhunderts, hauptsächlich aber seit dem Ende des 19. Jahrhunderts und zu Anfang des 20. Jahrhunderts durch französische Archäologen. Spektakulär war die Entdeckung der Gesetzestafel des babylonischen Königs Hammurapi (ca. 1750

v. Chr.). Der Stein, eine Säule, eine Stele aus schwarzem Basalt, war als Zeugnis des Sieges über Babylon nach Susa gebracht worden. Auf der 2,25 m hohen Stele sind 285 Gesetze festgehalten, die teils recht modern anmuten, aber auch barbarische Strafen androhen [Burton 1985, S. 82].

Aus dem Codex Hammurapi:

> *„Als Marduk mich beauftragte, die Menschen zu lenken und dem Lande Sitte angedeihen zu lassen, legte ich Recht und Gerechtigkeit in den Mund des Landes und trug Sorge für das Wohlergehen der Menschen. Ich, der König, der unter den Königen hervorragt – meine Worte sind erlesen, meine Tüchtigkeit hat nicht ihresgleichen. Auf Befehl des Sonnengottes, des großen Richters des Himmels und der Erde, möge meine Gerechtigkeit im Lande sichtbar werden, auf das Wort meines Herrn Marduk mögen meine Aufzeichnungen keinen finden, der sie beseitigt(. . .)*
> *Damals (gab ich folgende Gesetze):*
> *Wenn ein Bürger einen (anderen) Bürger bezichtigt und ihm Mord vorwirft, ihn jedoch nicht überführt, so wird derjenige, der ihn bezichtigt hat, getötet (. . .)*
> *Wenn ein Bürger vor Gericht zu falschem Zeugnis auftritt und seine Aussage nicht beweist, so wird, wenn dieses Gericht ein Halsgericht ist, dieser Bürger getötet.“* [Borger 1982, S. 44 ff.]

3.2.2 Zahlenschreibweise, Zahlentafeln

Auch die Zahlen wurden in Keilschrift geschrieben; die Zahlenschreibweise hat ihrerseits eine Entwicklung durchlaufen. Im ausgereiften Zustand wurden zwei Keilschriftzeichen verwendet, der Keil (für 1) und der Winkelhaken (für 10). Mit ihnen wurden die Zahlen im Positionssystem mit der Basis 60 (Sexagesimalsystem) dargestellt, jedoch mit dezimaler Komponente in Gestalt des Winkelhakens. Dabei wurde der Keil 𒁹 für $1, 60, 60^2, \ldots$, aber auch für $60^{-1}, 60^{-2}, \ldots$ benutzt und so oft gesetzt, wie die betreffende Potenz auftrat, der Winkelhaken 𒌋 entsprechend für $10, 10 \cdot 60, 10 \cdot 60^2, \ldots$. Eine unbesetzte Stelle im Positionssystem (wo wir die Null verwenden) wurde durch deutlichen Abstand kenntlich gemacht. Erst ab etwa 600 v. Chr., also zur Perserzeit, wurde dazu ein inneres Lückenzeichen verwendet. Die Zahlen von 1 bis 59 wurden nicht (wie im Dezimalsystem 1 bis 9) durch verschiedene Ziffern dargestellt, sondern durch entsprechend viele Keile und Winkelhaken, z. B.

$$43 = 4 \cdot 10 + 3 = \text{𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹}$$

In den folgenden Beispielen trennen wir die Potenzen von 60 durch Kommata und benutzen das Semikolon als „Sexagesimalkomma“. So bedeutet 2,1; 24 die Zahl $2 \cdot 60^1 + 1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1}$ und wird in Keilschrift als 𒁹𒁹𒌋𒁹 dargestellt, wobei verkürzt 𒐖 für 𒁹𒁹𒁹 geschrieben wird.

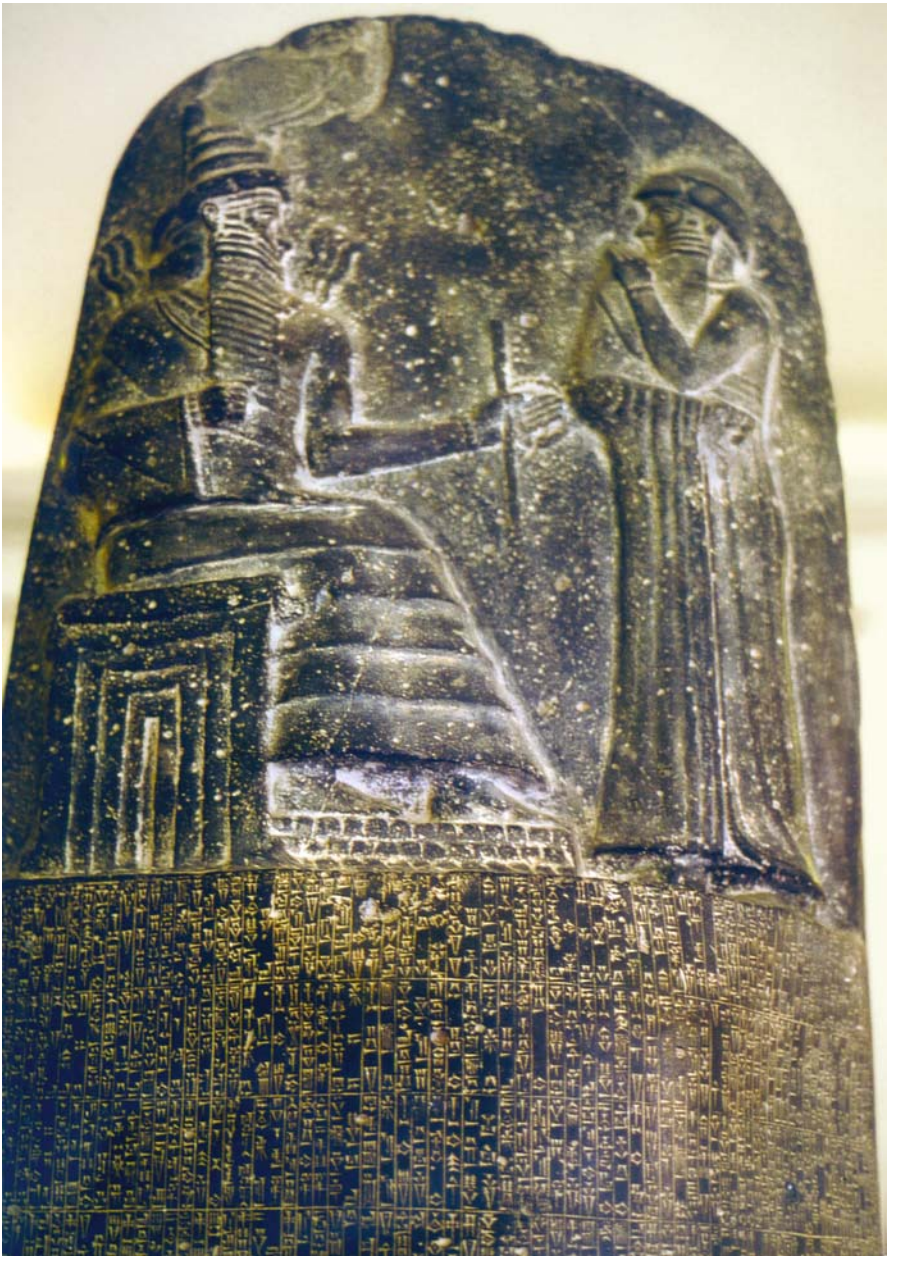


Abb. 3.2.6 Stele mit der Gesetzestafel des Königs Hammurapi (Original im Louvre, Kopie im Archäologischen Museum Teheran) [Foto Alten]

Die Größenordnung einer Zahl kann aus dem Zusammenhang erschlossen werden oder sie ist vorher bekannt. So kann z. B.

die Zahl $1 \cdot 60^3 + 54 \cdot 60^2 + 1 \cdot 60 + 22 = 1{,}54{,}1{,}22$ bedeuten, aber auch $1 \cdot 60^2 + 54 \cdot 60^1 + 1 \cdot 60^0 + 22 \cdot 60^{-1} = 1{,}54{,}1;22$.

Dabei hat das Sexagesimalsystem einen Nachteil und einen bedeutenden Vorteil. Der Nachteil besteht darin, dass das kleine Einmaleins bis 60 mal 60 reicht; ohne Hilfszahlentafeln war deshalb das Rechnen nicht möglich. In der Tat hat man eine große Anzahl solcher Rechenhilfsmittel gefunden.

Dieser Nachteil wird aber ausgeglichen durch den Umstand, dass die Bruchrechnung sozusagen größtenteils im ganzzahligen Bereich ausgeführt werden kann: Das schon verwendete Beispiel

kann gelesen werden als $0;0,1,54,1,22 = 1{\cdot}60^{-2}{+}54{\cdot}60^{-3}{+}1{\cdot}60^{-4}{+}22{\cdot}60^{-5}$, aber auch als $1,54,1,22 = 60^3 + 54 \cdot 60^2 + 60 + 22$.

Das sexagesimale Positionssystem war außerordentlich leistungsfähig und allen späteren Zahlensystemen der Antike überlegen. Daher wurde es u.a. von den griechisch-hellenistischen Mathematikern dort verwendet, wo viele und ausgiebige Rechnungen durchgeführt werden mussten, insbesondere in der Astronomie. Mit dem hellenistischen Mathematiker und Astronomen Ptolemaios (2. Jh. n. Chr.) hat sich das sexagesimale Zahlensystem in der Astronomie durchgesetzt. Er schrieb:

> *„Im allgemeinen werden wir ... die Ansätze der Zahlen nach dem Sexagesimalsystem machen, weil die Anwendung der Brüche* (d. h. der gewöhnlichen, im griechischen Zahlensystem bezeichneten Brüche, Wg) *unpraktisch ist.“*
> [Ptolemaios 1912, Bd. I, S. 25]

Mit der Übernahme durch die griechisch-hellenistische Astronomie gelangte das Sexagesimalsystem auch nach Europa und damit auch die Einteilung des Vollwinkels in 360°, des Grades in 60 Minuten von je 60 Sekunden. Und die Stunde wird heute noch eingeteilt in 60 Minuten zu 60 Sekunden.

Das Sexagesimalsystem erfordert umfangreiche Zahlentafeln. Die ältesten reichen noch in die sumerische Zeit zurück; die jüngsten stammen aus hellenistischer Zeit. Als Beispiel seien die 1854/55 gefundenen sog. „Täfelchen von Senkereh“ genannt; sie enthalten Quadratwurzeln, Quadratzahlen, Längenmaße, Kubikwurzeln. An ihnen wurde zuerst das sexagesimale Positionssystem erkannt (dazu [Neugebauer 1935, Teil I, S. 71, Anmerkung 2]). Wieder andere Tafeln stellen Reziprokentafeln und auch anderes dar, z. B. $n^2 + n^3$ und „n^2 hat n als Quadratwurzel“.

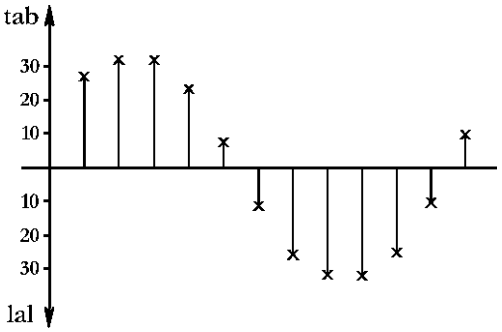


Abb. 3.2.7 Graphische Darstellung einer spätbabylonischen Zahlentafel zur Beschreibung periodischer astronomischer Vorgänge [Wußing 1965, S. 53]

Die Berechnung von nicht aufgehenden – also irrationalen – Quadratwurzeln wurde auch bewältigt und zwar mit Hilfe der Näherungsformel

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a},$$

wenn a^2 die größte noch unterhalb n liegende Quadratzahl ist.

In den Tabellentexten findet sich gelegentlich als Überrest eine subtraktive Schreibweise der Zahlzeichen. Mit einem besonderen Subtraktionszeichen, gelesen lal, bedeutet dann 20 lal 1 soviel wie 19. In astronomischen Texten der Spätzeit spielt lal zusammen mit dem entsprechenden Zeichen tab für hinzufügen die Rolle von Vorzeichen. Wenn man eine derartige astronomische Tabelle [Neugebauer 1969, S. 18] funktional interpretiert und in ein Koordinatensystem überträgt (das ist natürlich ahistorisch), so erhält man ein Diagramm wie in Abb. 3.2.7. Solche „Zahlentafeln“ wurden bei der Beschreibung periodischer astronomischer Vorgänge verwendet.

Übrigens standen Astronomie und Astrologie in Mesopotamien auf hohem Niveau und in hohem Ansehen. Die Astrologie dürfte vermutlich aus altbabylonischer Zeit stammen. Dagegen ist die mathematische Astronomie späteren Datums, sicher erst ab ca. 700 nachgewiesen und war um 400 voll entwickelt. Schon seit etwa 3000 v. Chr. wurden die Planeten mit Göttern identifiziert. Von hier führt ein direkter Weg zu den griechischen und den späteren römischen Göttern: Nebo wird Merkur, Ischtar wird Venus, Nergal wird Mars, Marduk wird Jupiter, Nibib wird Saturn. Auch gab es Bezeichnungen für Tierkreiszeichen [Resnikoff 1983, S. 75].

3.2.3 Geometrie in Mesopotamien

Die mesopotamische Mathematik ist nach Entstehungsgeschichte und Ausübung eng mit praktischen Problemen verbunden, wie auch die Lösungen an Beispielen im Allgemeinen durch Rechenschemata ohne Begründung gegeben werden. Die Betrachtung derartiger praktischer Aufgaben wirft auch

Abb. 3.2.8 Illustration zur Berechnung der Breite der Grabensohle bzw. Dammkrone bei ringförmigem Wall (Ausschnitt aus dem Keilschrifttext BM 85 194)

Licht auf die gesellschaftlichen Bedürfnisse, als deren Frucht eine leistungsfähige, rechnende Geometrie entstanden ist, die zudem anfing, ihren eigenen inneren, problemgeschichtlichen Fragestellungen nachzugehen, jenseits praktischer Probleme (dazu ausführlich [Høyrup 2002]). Greifen wir den vermutlich aus dem 7. Jahrhundert stammenden und sehr aussagekräftigen und gut erhaltenen Keilschrifttext BM 85 194 heraus (BM steht für den Aufbewahrungsort British Museum). Er enthält vielerlei mit dem Bauwesen zusammenhängende praktische Probleme, die übrigens auch andernorts behandelt wurden: Berechnungen von Dämmen, die meist trapezförmigen Querschnitt besaßen, wo nach der Neigung der Böschung, der Breite der Dammkrone und der Zahl der benötigten Arbeiter bei einer mittleren Arbeitsleistung gefragt wird; Berechnung von ringförmigen Wallbauten, von Tempelfundamenten, von Befestigungsgräben, von Kanälen, von Brunnenziegeln. Ferner geht es um die Fläche von Feldern, kombiniert mit Rechnungen: Die Gesamterträge der Ländereien erscheinen abhängig auch vom „spezifischen“ Ertrag, als Funktion der Güte des Bodens.

Der Text BM 85 194 enthält Sehnenrechnungen und Aufgaben zur „Belagerungsrechnung“: Es wird gelehrt, wie eine „dem Marduk feindliche Stadt“ durch Aufschütten eines Dammes auf die Höhe der Mauer der belagerten Stadt einzunehmen sei (Marduk war ursprünglich der Schutzgott der Stadt Babylon und wurde mit der Ausdehnung des altbabylonischen Reiches die oberste Gottheit des Großreiches).
Zitieren wir einige Beispiele, zuerst den Text zu dem oben gezeigten Ausschnitt aus dem Keilschrifttext BM 85 194:

„Ein Ringbau (?) sechzig als Umfang hab ich gekrümmt.
(Um) je 5 ist er hinausgegangen.
Eine Grabung habe ich gebaut, 6 die Tiefe;
1, 7, 30 (als) Erdmassen ist entfernt.
Je 5 über die Grabung (hinaus)
einen Damm habe ich gebaut. Selbiger Damm (hat)
1 Elle Böschungswert.
Basis, Kopf und Höhe ist was und der Umfang des Dammes ist was?
Du: Wenn sechzig der Umfang (ist), was ist der Durchmesser? Der 3-te Teil von sechzig, dem Umfang, ist entfernt.
20 siehst Du. 20 (ist) der Durchmesser. 5 die Erweiterung(?), verdopple; 10 siehst Du.
10 zu 20, dem Durchmesser, addiere; 30 siehst Du.
Den Durchmesser verdreifache;
1, 30 siehst Du; 1, 30 (ist) der Umfang der Grabung.“
[Neugebauer 1935, Teil I, S. 153]

Aus dem Text VAT 7528 (Vorderasiatische Abteilung der Staatlichen Museen Berlin) ein Beispiel zu einem Kanalbau (giš ist ein Längenmaß, SAR hier in der Bedeutung von Raummaß [Høyrup 2002, S. 17]):

„Ein kleiner Kanal. 6 giš seine Länge,
2 Ellen obere Weite, 1 Elle untere Weite,
$1\frac{1}{2}$ Ellen seine Tiefe,
1/3 SAR Erde die Leistung,
18 Leute. Die Tage (sind) was ? ...
11 Tage (und) ein 4-tel (sind) die Tage.“ [Neugebauer 1935, Teil I, S. 512]

Aus der Analyse der Rechengänge und der aus den Rechengängen erschließbaren Terminologie geht hervor, dass die Ausnutzung von Proportionalitäten

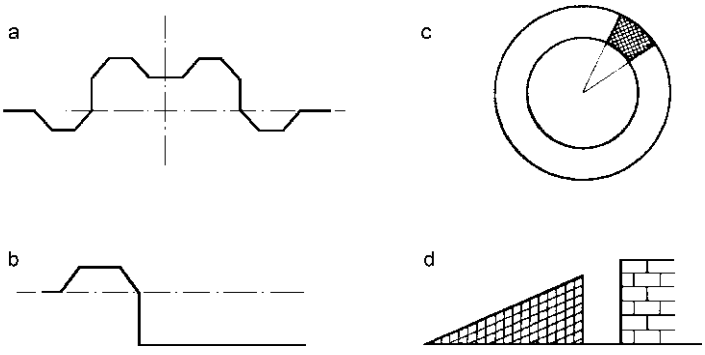


Abb. 3.2.9 a) und b): Querschnitte von Befestigungen und Wassergräben, c) Ziegelform für Brunnen, d) Zur Berechnung von Belagerungen (Zeichnung nach [Wußing])

am Dreieck und ein „Böschungswert“ bekannt waren, der auf den trigonometrischen Kotangens hinausläuft. Dies geht über die altägyptischen elementargeometrischen Kenntnisse hinaus.

Für π wurde im Allgemeinen der Wert 3 verwendet, eine schlechtere Näherung als in der ägyptischen Mathematik, aber auch $3\frac{1}{8}$ wurde als Näherungswert benutzt. Der Rauminhalt von Prismen und Zylindern wurde richtig angegeben, dagegen beruhen die Rechenmethoden zur Bestimmung der Volumina von Kegel- und Pyramidenstümpfen auf falschen „Formeln“. Die Volumenberechnung von Tetraedern ist nicht nachgewiesen.

Der Keilschrifttext YBC 7289 (Yale Babylonian Collection, New Haven) hat spezielle Aufmerksamkeit auf sich gezogen, weil dort eine recht genaue Näherung für $\sqrt{2}$ auftritt.

Auf der Keilschrifttafel findet sich die Zeichnung eines auf der Spitze stehenden Quadrates mit der Seitenlänge 30; vermutlich ist 0; 30, also $\frac{1}{2}$ gemeint (die Inschrift ist schlecht erhalten). Oberhalb der waagerechten Diagonale liest man (sexagesimal) die Zahl 1; 24, 51, 10, unterhalb 42, 25, 35. Der obere Wert entspricht

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1 + 0{,}4 + 0{,}014\,166\,6 + 0{,}000\,046\,3 = 1{,}414\,212\,9.$$

Das ist eine vorzügliche Annäherung an $\sqrt{2}$; bei 7 Dezimalen ist dies um 0,000 000 7 zu klein.

Da die Seitenlänge 0; 30 also $\frac{1}{2}$ ist, folgt aus dem Satz des Pythagoras die Länge der Diagonale zu sexagesimal 0; 42, 25, 35.

Über das Zustandekommen des oberen Diagonalwertes verweist Høyrup auf den Text YBC 7243 oder auch auf die Möglichkeit fortgesetzter Wiederholung der oben angegebenen Näherungsformel für irrationale Wurzeln (vgl. [Høyrup 2002, S. 261], auch [Alten et al. 2003, S. 39–41] und [Resnikoff 1983, S. 66/67]). Jedenfalls handelt es sich in YBC 7289 um die Anwendung des Satzes von Pythagoras.

Satz des Pythagoras

Im Jahre 1936 wurde in Susa ein altbabylonischer Keilschrift-Text aufgefunden, der die Kenntnis des Satzes von Pythagoras sicher beweist. (Im Folgenden wird die heutige Bezeichnungsweise verwendet, vgl. dazu auch [Damerow 2001].) Einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis 60 und den Schenkeln 50 wird ein Kreis mit dem Radius r umschrieben. Die Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das Dreieck BDA liefert zunächst AD = 40. Dann ist ED $= 40 - r$. Nochmalige Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das Dreieck BDE ergibt $r^2 = 30^2 + (40 - r)^2$ und man erhält für den gesuchten Radius

$$r = \frac{2500}{80} \quad \text{bzw. sexagesimal} \quad r = 31;15.$$

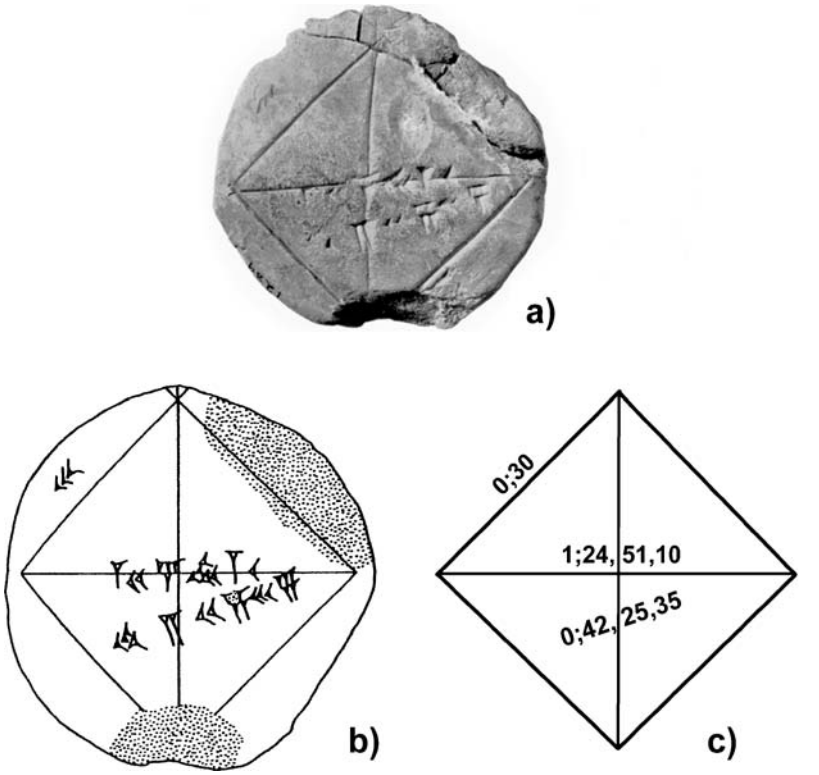


Abb. 3.2.10 Zur Berechnung von $\sqrt{2}$; a) Keilschrifttext YBC 7289 aus der Babylonischen Sammlung Yale, b) Reproduktion des Textes YBC 7289 nach Resnikoff, c) Schreibung dieses Textes mit indisch-arabischen Ziffern im Sexagesimalsystem

Berühmt ist die – auch in späteren Kulturen (ägyptisch-demotisch, chinesisch, europäische Renaissance) – sinngemäß wiederkehrende Aufgabe vom Balken, der an einer senkrechten Wand lehnt und dessen oberes Ende um ein Stück heruntergerutscht ist, Wie weit hat sich das untere Ende von der Wand entfernt? Im altbabylonischen Text BM 85 196 heißt es:

> *„Ein Balken (?) von der Länge 0; 30 (der gegen eine Mauer oder ähnliches steht) ist um 0;6 mit der Spitze herabgerutscht. Wie weit hat sich das untere Ende von der Wand entfernt?“*
> [Neugebauer 1935, Teil II, S. 47]

Die Lösung erfolgt mit Hilfe des Satzes von Pythagoras. Auch die andere Variante tritt in der seleukidischen Zeit auf: Gegeben sind die Rutschhöhe und die Entfernung von der Wand. Gesucht ist die Balkenlänge.
Interessant ist in diesem Zusammenhang der 1945 von O. Neugebauer und A. Sachs publizierte altbabylonische Text, der als „Plimpton 322“ in die

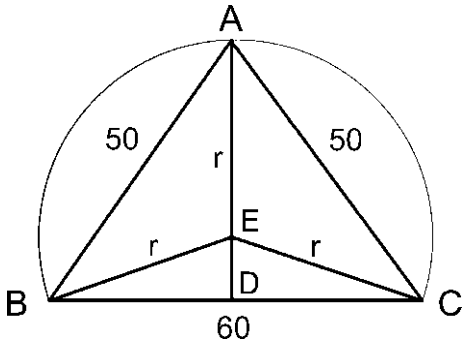


Abb. 3.2.11 Figur zum Satz des Pythagoras

Fachliteratur eingegangen ist. Darin sind in drei Spalten jeweils 15 Sexagesimalzahlen (in Keilschrift) notiert. Die Zahlen der horizontal gelesenen Tripel sind durch eine quadratische Beziehung miteinander verknüpft und werden als „pythagoreische Zahlentripel“ gedeutet.

Die zweite und die dritte Spalte tragen die Überschriften „Quadratbreite der Breite“ und „Quadratbreite der Diagonale“ – ein Hinweis auf den Zusammenhang mit rechtwinkligen Dreiecken, der jedoch umstritten ist. Zum Beispiel steht in der zweiten Zeile die Zahl $b = (56, 7)_s = 3367$ in der zweiten Spalte und die Zahl $d = (1, 20, 25)_s = 4825$ in der dritten Spalte, und in der Tat ist $d^2 - b^2 = (4825)^2 - (3367)^2 = 23\,280\,625 - 11\,336\,689 = 11\,943\,936 = (3456)^2$, d. h. mit $h = (57, 36)_s = 3456$ ist $(b, h, d) = (3367, 3456, 4825)$ ein pythagoreisches Zahlentripel, und zwar mit erstaunlich großen Zahlen, sodass man sich wirklich fragen muss, wie und ob überhaupt die Babylonier

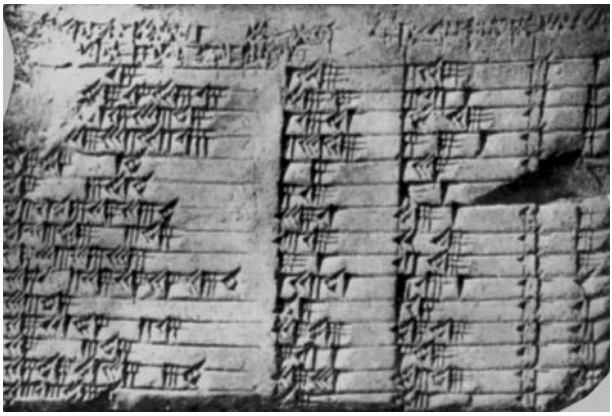


Abb. 3.2.12 Plimpton 322, altmesopotamischer Keilschrifttext (Plimpton Library, Columbia University, New York [v.d. Waerden 1966, S. 125])

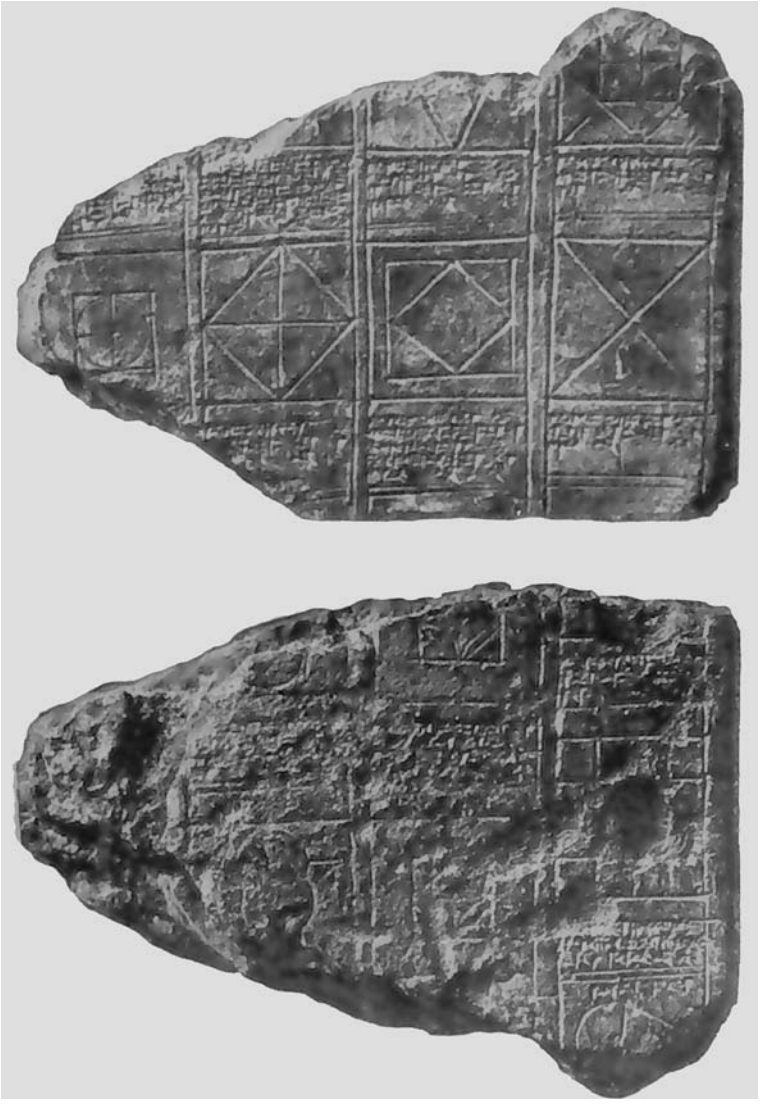


Abb. 3.2.13 Vorder- und Rückseite des Keilschrifttextes BM 15 285 [Neugebauer 1935/37, Teil II]

darauf gekommen sind (vgl. dazu auch [v.d. Waerden 1966, S. 125–128], [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 20–22] aber auch [Buck/Creighton „Sherlock Holmes in Babylon“, 1980 in Am. Math. Monthly 87, S. 335–345], [Robson: Neither Sherlock Holmes nor Babylon. A Reassessment of Plimpton 322. In: Hist. Math. 28 (2001), S. 167–206]).

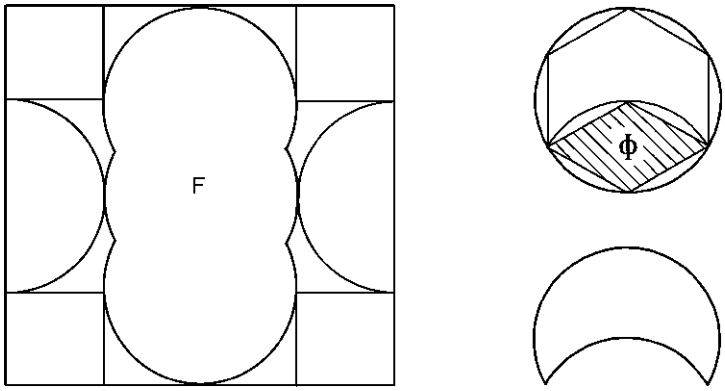


Abb. 3.2.14 Strichzeichnung einer Figur auf der Rückseite des Keilschrifttextes BM 15 285 zur Quadratur einer krummlinig begrenzten Fläche („Möndchen des Hippokrates“)

Wie Vorder- und Rückseite des Textes BM 15 285 zeigen, waren schon komplizierte und – worauf es hier ankommt – krummlinig begrenzte Figuren in den Problemkreis der Flächenberechnungen einbezogen worden.
Der Keilschrifttext erinnert ein wenig an die „Möndchen“ des Hippokrates – vielleicht ein weiterer Hinweis auf mesopotamische Wurzeln der griechisch-hellenistischen Mathematik. Übrigens: ein gelegentlich durch Näherungskonstruktionen erreichter besserer Näherungswert $3\frac{1}{8}$ für π findet sich wieder bei dem hellenistischen Ingenieur und Mathematiker Heron von Alexandria (um 62 n. Chr.).

Im schon erwähnten Text BM 85 194 und in anderen Texten wird die Tatsache benutzt, dass der Winkel am Kreis über einem Durchmesser ein rechter ist, d. h., der Inhalt des Satzes über den Thaleskreis war weit vor

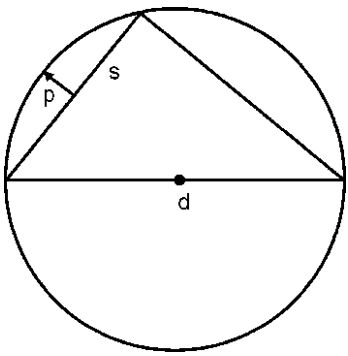


Abb. 3.2.15 Figur zur Berechnung des „Pfeiles“ p aus dem Durchmesser d und der Sehne s

Thales bekannt. In Verbindung mit dem pythagoreischen Lehrsatz diente der Thalessatz dazu, entweder aus Durchmesser d und Sehne s die als „Pfeil“ bezeichnete Strecke p oder aus „Pfeil“ und Durchmesser die Sehne zu berechnen gemäß

$$p = \frac{1}{2}\left(d - \sqrt{d^2 - s^2}\right) \quad \text{bzw.} \quad s = \sqrt{d^2 - (d-2p)^2}.$$

Bei dieser Aufgabe wird, wie auch sonst gelegentlich, die eine Rechnung als Probe auf die andere aufgefasst. Sie ist eine Vorstufe der später von Hipparch entwickelten Sehnengeometrie, die Ptolemaios an den Anfang seines astronomischen Lehrbuches *Almagest* stellte. Das sind Erscheinungen, die die kommende Entwicklung beweisender Rechenverfahren und die Entstehung des methodologisch entscheidenden Gedankens eines allgemeinen Beweises vorweg nehmen. Ganz schwach deutete sich dies auch in der ägyptischen Mathematik an: In der $2/n$-Tabelle des Papyrus Rhind folgt jeder Zerlegung von $2/n$ in Stammbrüche ein „Richtigkeitsbeweis“.

3.2.4 Algebra in Mesopotamien

In der Einleitung zu seinem Werk *Length, widths, surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and its Kin* von 2002 wirft J. Høyrup einen Blick auf die Geschichte der Entdeckung, dass die mesopotamische Mathematik in beachtlichen Teilen einen echt algebraischen Charakter hat: Im späten 19. Jahrhundert wurde das Sexagesimalsystem verifiziert. Am Ende der 20er Jahre des 20. Jahrhunderts konnte konstatiert werden, dass die mesopotamische Mathematik mindestens mit der altägyptischen Mathematik vergleichbar war.

> *„Nichtsdestoweniger trat dies als eine fabelhafte Überraschung in den späten 20er Jahren zutage, als babylonische Lösungen für Gleichungen zweiten Grades in Neugebauers Seminar in Göttingen entdeckt wurden.“* [Høyrup 2002, S. 1, englisch]

Dies hatte man bis dahin dem hellenistischen Mathematiker Diophant bzw. der indischen und der arabischen Mathematik zugeordnet. Die ersten Publikationen des Entdeckten erfolgten in dem neu (1930) gegründeten Journal *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik* (1919–31).

Schon in den 30er Jahren des vorigen Jahrhunderts hat O. Neugebauer die babylonische Algebra eingehend untersucht und alle damals bekannten einschlägigen Tabellentexte ediert und gedeutet.

Der in Teilen echt algebraische Charakter der mesopotamischen Mathematik verdient besondere Würdigung (siehe dazu [Wußing 1962, S. 44 ff.], [Alten et al. 2003, S. 29–39]).
Es folgen zwei einfache Beispiele. Dabei nehmen die Worte „Länge“, „Breite“, „Fläche“ bzw. deren Produkte und „Quadrat“ die Rolle der „Variablen“ ein. Erstes Beispiel aus BM 13 901 [Høyrup 2002, S. 50, englisch]:

„The surfa(ce) and my confrontation I have accu[mulated]: 45' is it."

Übersetzt heißt das etwa

> „Den Flächeninhalt und meine Gegenüberstellung (d. h. Seite) habe ich angehäuft und so entsteht 0; 45."

Das läuft auf die modern geschriebene Gleichung $x^2 + x = 45/60$ hinaus.

Beispiel 2 aus BM 13 901 [Høyrup 2002, S. 73–75, englisch] lautet in freier Übersetzung etwa:

> „Die Flächen meiner beiden Seiten habe ich addiert zu 0; 25, 25. Die (eine) Seite beträgt 2/3 der (anderen) Seite und (= plus) 0; 5."

Das führt – modern gesprochen – auf das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = \frac{61}{144}\,, \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{12}$$

mit der positiven Lösung $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{5}{12}$.
(Über die Lösungen durch geometrische Interpretation siehe Høyrup an den angegebenen Stellen.)

Dies waren einfache Beispiele. Andere Texte enthalten höchst komplizierte Aufgaben, z. B. ein Stück des Textes YBC 4709, das auf 4 Systeme von je zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten hinausläuft. Sie erfordern die Lösung biquadratischer Gleichungen mit zugehörigen Relationen der Gestalt $x \cdot y = \alpha$ [Neugebauer 1969, S. 71]. Auch kubische Gleichungen treten auf [Alten et al. 2003, S. 38f.].

Der Höhe der abstrakt-algebraischen Denkweise entsprechen auch die in der mesopotamischen Mathematik bewältigten Probleme: Im altbabylonischen Reich treten arithmetische, in der Seleukidenzeit (endliche) geometrische Reihen auf. Lineare, quadratische, kubische und biquadratische Gleichungen werden in verschiedenartigsten Formen behandelt. Schon in altbabylonischer Zeit findet sich das Bemühen, für quadratische Gleichungen das Problem auf Normalformen zurückzuführen. Einmal tritt sogar der Fall einer Gleichung vierten Grades auf, die sämtliche Glieder und vier reelle positive Lösungen besitzt. Gleichungssysteme werden gelöst, bis zu 10 Gleichungen mit 10 Unbekannten. Außerdem war man in der seleukidischen Zeit imstande, die Summe der 10 ersten Quadrate anzugeben. Es existieren ferner Texte, die transzendente Fragestellungen und Methoden enthalten; diese treten auf bei Zins- und Zinseszinsaufgaben und entsprechenden Umkehrungen, die – in unserer Sprechweise – Logarithmieren und Lösen von Exponentialgleichungen erfordern.

Als Widerspiegelung gesellschaftlicher Verhältnisse sind sog. „Verteilungsaufgaben" recht häufig: Verteilung der Abgaben bei Feldern mit unterschiedlichem spezifischem Ertrag, Berechnung der Entlohnung der anzuliefernden Ziegel entsprechend der beim Transport zurückgelegten Entfernung, und ähnliche Probleme. Die Verteilung eines Erbes – in Geld oder Feldflächen – an

Brüder führt auf arithmetische Reihen; der Erbteil wurde nach der Reihenfolge der Geburt gleichmäßig gestaffelt. Typisch ist etwa die folgende Aufgabe, welche die Bestimmung des Anfangsgliedes und der Differenz einer arithmetischen Reihe erfordert:

„10 Brüder; 1 2/3 Minen Silber.
Bruder über Bruder hat sich erhoben (hinsichtlich seines Anteils).
Was er sich erhoben hat, weiß ich nicht.
Der Anteil des 8-ten (ist) 6 Schekel. Bruder über Bruder
Um wie viel hat er sich erhoben.“

Die Lösung wird im babylonischen Text richtig zu 0; 1, 36 Minen Silbers angegeben [Neugebauer 1935, Bd. I, S. 240f.].

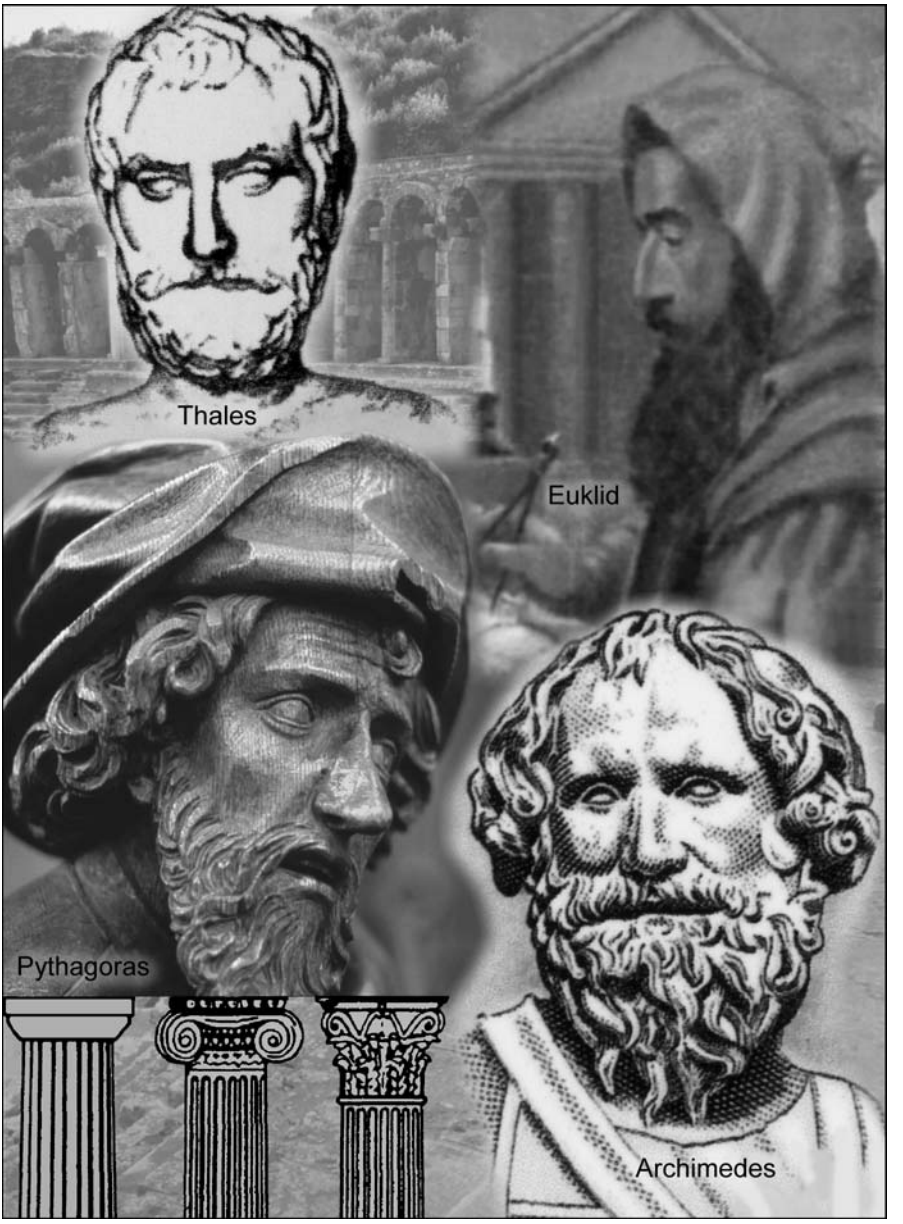
3.2.5 Zusammenfassung

Høyrup versucht in seiner schon erwähnten Studie [Høyrup 2002, S. 8f.] ein Gesamtbild, eine im gewissen Sinne neue Charakteristik zu geben, in einem mit *„The Texts, the Genre, and the Problems“* überschriebenen Teil eines einleitenden Kapitels. Er betont, dass die mathematischen Texte Schultexte sind. Sie enthalten keine Theoreme und keine theoretischen Untersuchungen. Zugleich aber wird – wenig später – festgehalten, dass einige Probleme aus praktischen Fragestellungen abgeleitet sind. Es scheint indes auch, dass über die Ausbildung der „Schreibermathematiker“ in Schreibschulen hinaus mathematische Probleme eine aus innerer Problematik erwachsende Eigendynamik entfaltet haben. Jedenfalls hat die mesopotamische Mathematik ein solch hohes Niveau erreicht, dass sich Einflüsse bis in die griechisch-hellenistische Antike nachweisen lassen. Mehr noch: man kann feststellen, dass die mesopotamische Mathematik erst nach der hellenistischen Periode übertroffen werden konnte.

Wesentliche Merkmale und Inhalte der mesopotamischen Mathematik

Mathematische Fragen, Überlegungen und Methoden entstehen im Zusammenhang mit Bauwesen, Handel, Wirtschaft und astronomischen Beobachtungen, dienen der Praxis und sind in Keilschrift auf Tontafeln geschrieben.
Quellen sind Tontafeln mit Zahlen, Tabellentexten und Aufgabensammlungen, in sumerischer, akkadischer, elamischer und persischer Keilschrift, vornehmlich aufbewahrt im British Museum, London (BM), in den Antiquités Orientales im Louvre, Paris (AO), in der Yale Babylonian Collection der Yale University, New Haven (YBC), der Vorderasiatischen Abteilung der Staatlichen Museen, Berlin (VAT) und der Bibliothéque Nationale et Universitaire, Straßburg (SKT).
Zahlen: Sexagesimalsystem in additiver Schreibweise mit dem Keil für Potenzen von 60 und dem Winkelhaken für 10, $10 * 60$, $10 * 60^2$, ..., aber auch für $10/60$, ... Solange ein Zeichen für Leerstellen (Null) fehlt, kann dieselbe Zeichenfolge verschiedene Werte repräsentieren; der jeweilige Wert muss aus dem Begleittext erschlossen werden. Erst in persischer Zeit wird durch Einführung eines Lückenzeichens Eindeutigkeit erreicht.
Arithmetik: Tabellen zur Umrechnung von Flächeneinheiten, Reziproken- und Multiplikationstabellen, später auch Tabellen für Quadrate, Quadratwurzeln, Kubikwurzeln, binomische Formeln.
Algebra: Lineare Gleichungen mit einfachem falschen Ansatz, quadratische Gleichungen der Form $x^2 + ax = b$, $x^2 - ax = b$, kubische Gleichungen, Systeme linearer und nichtlinearer Gleichungen, Berechnung pythagoreischer Zahlentripel, Näherungswerte für Quadratwurzeln (sog. babylonisches Wurzelziehen).
Geometrie: Flächeninhalte elementarer ebener Figuren (Rechteck, Trapez, Dreieck), Kreisumfang und Kreisfläche mit Näherung 3 für π, Volumina von Prismen und Zylindern (korrekt mit $\pi \approx 3$), falsche „Formeln“ für Kegel- und Pyramidenstümpfe, Verwendung des „Satzes von Pythagoras“ zur Berechnung von Böschungsmaßen der Dämme, vom Inhalt von „Möndchen“ und (zusammen mit dem „Satz des Thales“) in der Sehnengeometrie.

4 Mathematik in griechisch-hellenistischer Zeit und Spätantike



3. Jahrtausend	Entstehung der kretisch-mykenischen Hochkultur; Niedergang im 12. Jahrhundert
1194–1184	Trojanischer Krieg (traditionelles Datum)
1100–1000	Einwanderung dorischer Stämme zur Westküste Kleinasiens und auf die Ägäischen Inseln
ca. 900	Griechen übernehmen das phönizische Alphabet und passen es ihrer Sprache an.
8.–6. Jh.	Gründung griechischer „Pflanzstädte“ in Sizilien, Unteritalien, Libyen und am Schwarzen Meer
776	Erste Wettkämpfe in Olympia
ca. 600	Gründung Roms durch die Etrusker
490	Schlacht bei Marathon: Sieg der Griechen über die Perser
480	Seeschlacht bei Salamis: Vernichtung der persischen durch die griechisch-athenische Flotte
471	Erster attischer Seebund. Vorherrschaft Athens
431 bis 404	Peloponnesischer Krieg zwischen Athen und Sparta
388/87	Gründung der Akademie in Athen durch Platon
seit 338	Griechenland unter makedonischer Herrschaft
335	Gründung des Lyzeums durch Aristoteles
336 bis 323	Alexander der Große König von Mazedonien
334 bis 323	Kriegszüge nach Persien, Ägypten, Indien
311	Teilung des Alexanderreiches
264–146	Punische Kriege
47	Brand der Bibliothek von Alexandria
30	Ägypten wird römische Provinz
27 v. Chr.	Griechenland wird römische Provinz
9 n. Chr.	Schlacht im Teutoburger Wald: Römer werden geschlagen
79	Ausbruch des Vesuvs; Untergang der Städte Pompeji, Herculaneum und Stabiae
250	Erste Christenverfolgungen im gesamten römischen Reich
313	Toleranzedikt von Mailand: Christentum wird im Römischen Reich als gleichberechtigte Religion geduldet
325	Konzil von Nicäa: Entscheidung gegen die arianische Lehre
395	Endgültige Teilung des Römischen Reiches in ein Weströmisches und ein Oströmisches Reich
476	Absetzung des letzten weströmischen Kaisers Romulus Augustulus durch den Germanenkönig Odoaker
525	Einführung der christlichen Zeitrechnung
527 bis 565	Justinian I. byzantinischer Kaiser
529	Justinian schließt die Akademie in Athen
1054	Trennung der Ost- von der Westkirche
1096 bis 1099	Erster Kreuzzug
1453	Eroberung Konstantinopels durch die Türken; Ende des byzantinischen Kaiserreiches

Abb. 4.0.1
Griechisch-hellenistische Antike: Geburtsorte und Wirkungsstätten ausgewählter Mathematiker (rot)

4.0 Historische Einführung

Mit dem Begriff „Antike“ verbinden wir eine Fülle von Assoziationen über eine großartige Entwicklung in der Menschheitsgeschichte: Kunst und Philosophie, Dichtkunst und Geschichtsschreibung, Demokratie und Staatskunst, Naturwissenschaften, Mathematik und Technik, Theater, Baukunst und bildende Kunst, Kriegskunst, Kodifizierung der Rechtssprechung, Münzwesen und gesellschaftliche Differenzierung, eine Götterwelt mit menschlichen Zügen – kurz: Assoziationen zu allen Bereichen gesellschaftlichen Lebens.

Viele Gestalten jener Zeit stehen exemplarisch für die Welt der Antike; ihre Namen sagen uns noch immer viel über die Geschichte der Antike mit ihren Höhen und Tiefen: Der altgriechische Epiker Homer mit seinen Werken *Ilias* und *Odyssee*; der athenische Reformer des Rechtswesens, Solon; die griechische Lyrikerin Sappho; Pythagoras, der Schöpfer eines religiösen Kultus mit mathematischer Orientierung; der athenische Staatsmann Perikles; der griechische Historiker Herodot; der athenische Bildhauer Phidias, wesentlich beteiligt am Bau der Akropolis; der Bildhauer Praxiteles; der Komödiendichter Aristophanes; die Tragödiendichter Aischylos, Euripides und Sophokles, deren Werke noch heute aufgeführt werden; die Philosophen Sokrates, Platon und Aristoteles; der makedonische Feldherr und Welteroberer Alexander der Große; der römische Feldherr und Diktator Caesar; die letzte ägyptische Königin Kleopatra; der römische Kaiser Trajan; der römische Kaiser Konstantin, unter dem das Christentum als gleichberechtigte Religion anerkannt wurde.

Zu dem Kreis der herausragenden Persönlichkeiten gehören selbstverständlich auch Mathematiker, unter ihnen Thales, Demokrit, Hippokrates von Chios, Pythagoras, Theodoros von Kyrene, Eudoxos, Euklid, Archimedes, Eratosthenes, Apollonios, Ptolemaios, Heron von Alexandria, Diophantos, Pappos von Alexandria, Hypatia.

Abb. 4.0.2 Herakles im Kampf mit dem Zentauer Nessos (nach einer athenischen Vase Ende 7. Jh. v. Chr.); Sappho, um 600 v. Chr., Dichterin auf der Insel Lesbos; Homer, etwa 8. Jh. v. Chr., gilt als Schöpfer der „Ilias“ und der „Odyssee“ (Griechenland 1996, 1970, 1983)

Abb. 4.0.3 Odysseus bei den Sirenen. Um der Verführung durch deren Gesang zu entgehen, hat sich Odysseus am Mast festgebunden. (Römisches Mosaik im Bardo Museum, Tunis) [Foto Alten]

Die im alten Ägypten, in Mesopotamien und im alten Indien gewonnenen und praktizierten mathematischen Kenntnisse erwecken unsere Bewunderung. In einigen Fällen finden sich sogar Beweise und theoretische Überlegungen.

Und doch: Im Vergleich dazu hat die griechische Mathematik einen grundsätzlich, einen prinzipiell neuen Stand erreicht. Eine historische Wende wurde vollzogen, hin zum Typ der modernen Mathematik.

Im 8. und 7. Jahrhundert v. Chr. bildete sich zunächst in den ionisch-griechischen Stadtstaaten Kleinasiens – in Berührung mit mesopotamischen Traditionen und der persischen Ideologie – eine geistige Atmosphäre heraus, die der Entstehung wissenschaftlichen Denkens günstig war. Und so vollbrachten die Griechen unter neuen ökonomisch-politischen Bedingungen und begünstigt durch geographische und klimatische Umstände die große Leistung, aus einer nahezu empirisch entstandenen und oft nach Art von Rezepten betriebenen Mathematik eine systematische, logisch-deduktiv dargelegte, eigenständige Wissenschaft Mathematik mit spezifischen Zielsetzungen und Methoden gemacht zu haben. Das von ihnen geschaffene System der Geometrie wurde für zwei Jahrtausende das große Vorbild für den deduktiven Aufbau einer wissenschaftlichen Disziplin schlechthin und sollte sogar in der Neuzeit die Entwicklung der Mathematik nach Stil und Methode prägen.

Zeile	Ägyp.	Phön.	Hebräisch				Griechisch				Lat.	Runen	
	1	2	3 Bu	4 Lt	5 Zw	6 Nm	7 Bu	8 Lt	9 Zw	10 Nm	11	12 Bu	13 St
1	𓃾	𐤀	א	'	1	alef 'Rind'	Α α	a	1	álpha	A	ᚨ	–
2	𓉔	𐤁	ב	b	2	beth 'Haus'	Β β	b	2	bêtha	B	ᛒ	18
3		𐤂	ג	g	3	gimel 'Kamel'	Γ γ	g	3	gámma	C	–	–
4	𓂝	𐤃	ד	d	4	daleth 'Tür'	Δ δ	d	4	délta	D	ᛞ	24
5		𐤄	ה	h	5	he	Ε ε	e	5	è psilón	E	ᛖ,ᛇ	1913
6	𓌹	𐤅	ו	w	6	waw 'Nagel'	F ϛ	–	6	vaû	F	ᚠ	1
7		𐤆	ז	z	7	zajin 'Waffe'	Ζ ζ	z	7	zêta	(G)	ᛉ	7
8		𐤇	ח	h	8	heth	Η η	ä	8	êta	H	ᚺ	9
9		𐤈	ט	t	9	teth	Θ ϑ	th	9	thêta	100?	ᚦ	3

Abb. 4.0.4 Entwicklung der Buchstabenschrift: Das phönizische Alphabet wurde zur Grundlage für die alphabetisierte Schreibweise der griechischen, lateinischen und anderer Sprachen, nach [Menninger 1958, Bd. 2, S. 70]

In der Zeit von der Mitte des 2. Jahrtausends bis zum 8./7. Jahrhundert v. Chr. vollzogen sich im Osten des Mittelmeerraumes – in Kleinasien und im Vorderen Orient, im heutigen Griechenland und in Ägypten – weitreichende ökonomische, politische und soziale Veränderungen. Die politische Geschichte in jener Zeit und in jenem geographischen Raum verlief stürmisch. Um die Jahrtausendwende blieb Ägypten in der Entwicklung zurück und verlor seine dominierende Machtstellung. Hethiter und Assyrer hatten mächtige Reiche errichtet, doch im 6. Jahrhundert eroberten schließlich die Perser den ganzen Vorderen Orient und bedrohten Griechenland.

Seit Anfang/Mitte des 2. Jahrtausends waren aus dem Norden griechische Stämme – vor allem Dorer und Ionier – auf das griechische Festland, auf die Inseln der Ägäis sowie in die Küstenregionen eingewandert und hatten die dort ansässigen Bewohner verdrängt oder unterjocht. Die Phönizier, Erfinder der Alphabetisierung von Sprache und Schrift, die etwa auf dem Gebiet des heutigen Libanon ansässig waren, kolonisierten Teile der afrikanischen Nordküste. Das im 9. Jahrhundert gegründete Karthago (nahe dem heutigen Tunis), wurde so mächtig, dass es im 3. und 2. Jahrhundert v. Chr. während der drei Punischen Kriege mit den Römern einen Kampf um die Vorherrschaft im Mittelmeerraum führen konnte.

Seit dem 12./11. Jahrhundert nahm der Gebrauch von Eisen rasch zu. Gegenüber der Bronze bot Eisen bedeutende Vorteile bei Herstellung und Gebrauch von Waffen und Werkzeugen. Die einfachen Werkzeuge wie Hammer, Säge, Schere und Zange erreichten bereits damals ihre heutige Standardform.

Schiffbau, Bergbau, Töpferei, Weberei, Metallverarbeitung und andere Bereiche der materiellen Produktion konnten bedeutende Fortschritte erzielen.

Auch in Griechenland wurde eine höhere Produktivität erreicht, die an einigen Stellen über den unmittelbaren Bedarf der Umgebung hinausging. Waren wurden zum Handelsobjekt im Großmaßstab. Die rege Handelstätigkeit begünstigte die ökonomische Entwicklung der küstennahen Regionen und führte dort zur Etablierung einer einflussreichen Schicht von Händlern und Kaufleuten.

Das politische Geschehen in und um die griechischen Stadtstaaten, wechselnde Bündnisse, militärische Auseinandersetzungen innerhalb der hellenischen Welt und mit der persischen Bedrohung, Wechsel zwischen Demokratie, Tyrannis und Oligarchie, der Anstieg der Sklaverei – das alles bietet ein hochinteressantes und gelegentlich auch verwirrendes Bild (ausführlich z. B. in [Lexikon der Antike 1984]). Beispielsweise war der athenische Feldherr und Staatsmann Themistokles (524–459), Führer der Demokraten, maßgeblich verantwortlich für den Sieg der athenischen über die persische Flotte, weil er den Bau einer starken athenischen Flotte gegen Widerstand durchgesetzt hatte. Dessen ungeachtet wurde Themistokles 471 aus Athen verbannt und fand Zuflucht ausgerechnet bei den Persern. Um diese Zeit gab es in Athen bei schätzungsweise 320 000 Einwohnern nur 170 000 juristisch Freie; von ihnen war indes nur etwa ein Drittel im Besitz der athenischen Bürgerrechte und durfte aktiv am politischen Leben Athens teilnehmen. Sklaven wurden nach einem Ausdruck von Aristoteles als „sprechende Werkzeuge“ bezeichnet.

Über die Gründe der herausragenden Leistungen der Griechen in Kultur und Wissenschaft gibt es mancherlei Theorien und Meinungen. Es dürfte sich nicht um die eine oder andere alleinige Ursache gehandelt haben, sondern um das Zusammenwirken verschiedener Faktoren. So hat wohl die Staatsform der Polis – die in verschiedenartigen spezifischen Formen die Mitwirkung der freien Bürger am politischen Geschehen in ihrer Stadt ermöglichte – eine wesentliche Rolle gespielt. Aber auch der Umstand, dass die gesellschaftliche Differenzierung eine Gruppe von Privilegierten hervorgebracht hat, die die Möglichkeit hatte, sich aus dem unmittelbaren Produktionsprozess herauszulösen und sich mit Kunst, Kultur, Philosophie und Wissenschaft zu beschäftigen, gehört in das Spektrum der Voraussetzungen für das griechische „Wunder“.

Perioden der Entwicklung

Die Entwicklung der griechisch-hellenistischen Mathematik umfasst einen langen Zeitraum, etwa vom 7./6. Jahrhundert v. Chr. bis etwa zum 5. Jahrhundert n. Chr., also mehr als ein Jahrtausend.

Bei der griechisch-hellenistischen Mathematik kann man nach Methode, Inhalt und Umfang vier ziemlich deutlich sich gegeneinander abhebende Perioden unterscheiden. Es gibt allerdings Diskussionen um die Periodisierung (vgl. [Brentjes 1986]).

Eine erste, eine Früh- bzw. Vorbereitungsperiode – in der Kunstgeschichte archaische Periode genannt – wird wegen ihres engen Zusammenhanges mit der ionischen Naturphilosophie als *ionische Periode* bezeichnet und ist auf die Zeit vom Ende des 7. Jahrhunderts bis zur Mitte des 5. Jahrhunderts zu datieren. In dieser Periode erfolgte schließlich die Herausbildung der selbstständigen Wissenschaft Mathematik.

Eine zweite Periode, die in der Kunstgeschichte als klassische Epoche gilt und auf die Zeit von etwa 450 bis etwa 320/300 anzusetzen ist, wird als *athenische Periode* benannt. Das Zentrum mathematischer Aktivitäten befand sich in Athen, dem damals ökonomisch, politisch und kulturell einflussreichsten griechischen Stadtstaat. In dieser Periode erhielt die antike Mathematik eine ganz eigentümliche innere Struktur, einen besonderen Charakter, der oft als „geometrische Algebra“ bezeichnet wird (vgl. [Alten et al. 2003, Kap. 2]).

In der dritten Periode, *der hellenistischen*, die ungefähr viereinhalb Jahrhunderte bis zur Mitte des 2. Jahrhunderts n. Chr. dauerte, erreichte die Mathematik der Antike ihren Höhepunkt, und da ganz besonders in der Zeit bis 150 v. Chr. Gelegentlich spricht man auch von der *alexandrinischen* Periode, da in dieser Zeit Alexandria den unbestrittenen Mittelpunkt des kulturellen und wissenschaftlichen, insbesondere auch des mathematischen Lebens in der antiken Welt darstellte.

In der Spätantike wurde auch die Mathematik vom allgemeinen Niedergang der Wissenschaften während der Auflösung und schließlich des Zusammenbruchs der antiken Welt betroffen. Trotz einzelner Spitzenleistungen ging Wissen verloren. Dennoch konnten bedeutende Teile der antiken Mathematik von den Gelehrten des Orients in der muslimischen Welt bewahrt werden.

4.1 Zählen, Zahlensysteme, Rechnen

Vorausgreifend soll zunächst im Zusammenhang über das Rechnen in der griechisch-hellenistischen Antike und deren Zahlensysteme berichtet werden.

Für unsere Fragestellung ist die Unterscheidung zwischen der Logistik, womit die Griechen das praktische Rechnen bezeichneten, und der Arithmetik, der wissenschaftlichen Form des Rechnens, wesentlich, das alles auf dem Hintergrund der philosophischen und mathematischen Reflexion über die Begriffe „Größe“ und „Zahl“.

Wenden wir uns zunächst der Logistik zu – auf die inzwischen erfolgte Begriffsverschiebung des Wortes sei hier nicht eingegangen. Die ursprünglichen mathematischen Kenntnisse der griechischen Stämme umfassten natürlich Zählen und Rechnen. Die Helden der „Odyssee“ zählen, gelegentlich rechnen sie sogar. Recht umständlich noch und unter ausschließlicher Verwendung von Zahlworten berechnet der griechische Historiker Herodot (gest. ca. 424 v. Chr.) die Stärke des persischen Heeres unter Xerxes (reg. 486 bis 465) und die benötigte Menge an Verpflegung. Und wenn auch die von ihm

Abb. 4.1.1 Antiker Rechentisch (Abakus). Der persische Schatzmeister zählt die eingeschriebenen Abgaben zusammen. (Ausschnitt aus der sog. Dariusvase im Nationalmuseum in Neapel) [Wußing 1965, Abb. 37]

angegebene Zahl von 5 Millionen Menschen – Fußvolk, Ruderer, Reiter, Dienerschaft, Köchinnen, Dirnen, Eunuchen – auf jeden Fall weitaus zu hoch gegriffen ist, so erhalten wir doch eine Vorstellung von den Größenordnungen, die im frühen Griechenland bewältigt werden konnten. Möglicherweise hat dabei auch das Fingerrechnen eine gewisse Rolle gespielt. So wird in den „Wespen“ des Komödiendichters Aristophanes (422 v. Chr. uraufgeführt) gefordert, nicht umständlich mit Rechensteinen – offensichtlich also auf dem Abakus –, sondern gleich mit den Fingern die Zahl der Eunuchen des athenischen Staates zu berechnen und mit den für die Bezahlung der Richter aufzuwendenden Summen zu vergleichen.

Jedoch sind schon in der ionischen Periode Zahlensysteme für den schriftlichen Gebrauch aufgekommen, wohl als Folge sich ausweitender Handelstätigkeit. Es handelt sich im Prinzip um zwei verschiedene Zahlnotierungen, um ein älteres, das attische oder herodianische Zahlensystem und um das jüngere, milesische System. Das milesische System wurde vorwiegend in der klassischen Zeit verwendet und ist im byzantinischen Kulturbereich erst im Laufe des 14. Jahrhunderts durch das indisch-arabische verdrängt worden.

Die beiden Zahlensysteme unterschieden sich auch darin, in welchen Bereichen sie hauptsächlich Verwendung fanden: Das attische diente vorwiegend im kaufmännischen Leben zur Fixierung von Geld- und Warenangaben sowie zur Bezeichnung des Spalten auf dem Abakus. Zum schriftlichen Rechnen war das attische Zahlsystem denkbar ungeeignet.

Es handelt sich um ein durch ein Fünfersystem überlagertes Dezimalsystem. Die dezimalen Stufen 10, 100, 1000 und 10 000 wurden durch die Anfangsbuchstaben der griechischen Zahlwörter bezeichnet. Also bedeutete

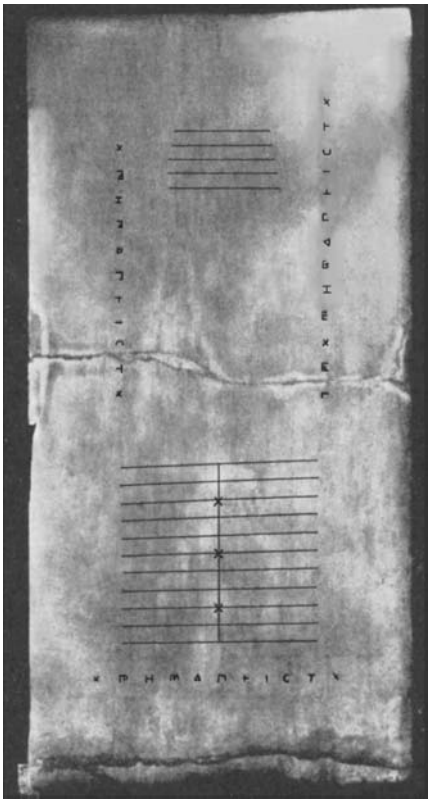


Abb. 4.1.2 Die sog. Salaminische Rechentafel, 1846 auf der Insel Salamis gefunden. Marmor 159 mal 75 cm, mit Eintragungen von attischen Zahlzeichen und speziellen Münzeinheiten [Numismatische Zeitschrift, Bd. 31, Wien 1899]

$\Delta = 10\,,$	von griechisch	ΔEKA
$H = 100\,,$	von griechisch	$HEKATON$
$X = 1000\,,$	von griechisch	$XI\Lambda IOI$
$M = 10\,000\,,$	von griechisch	$MYPIOI$

Die Einer wurden durch Striche bezeichnet. Die Bündelung zu fünf wurde mit dem Anfangsbuchstaben von griechisch $\Pi ENTE$, fünf, vorgenommen, allerdings mit der altertümlichen Schreibweise Γ für Π. Also hat man

$\left|\overline{\Delta}\right.$ als 50, $\left|\overline{H}\right.$ als 500, $\left|\overline{X}\right.$ als 5000, $\left|\overline{M}\right.$ als 50 000 zu lesen.

Demgegenüber bot das milesische Zahlensystem immerhin einige Möglichkeiten der kalkülmäßigen Durcharbeitung. Es drang daher in die wissenschaftliche Mathematik vor. Beispielsweise rechneten Archimedes und Diophantos milesisch. Im astronomischen Kontext verwendete man ohnedies das bequeme Sexagesimalsystem mesopotamischen Ursprunges.

Zur Bezeichnung der Zahlen im milesischen System verlieh man den Buchstaben des Alphabets einen Zahlenwert, und zwar zunächst für die 27 Zahlen

$$1, 2, \ldots, 9$$
$$10, 20, \ldots, 90$$
$$100, 200, \ldots, 900$$

Da aber die 24 Buchstaben des griechischen Alphabets nicht ausreichten, wurden noch drei semitische Buchstaben (Vau, Koppa, Sampi für 6, 90 und 900) herangezogen. Dann besaßen die 27 Buchstaben die folgenden Zahlenwerte:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Einer	Λ	B	Γ	Δ	E	$\digamma$	Z	H	Θ
	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	ϑ
Zehner	I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π	Q
	ι	$\varkappa$	λ	μ	ν	ξ	o	π	φ
Hunderter	P	Σ	T	Y	Φ	X	Ψ	Ω	$\curlyvee$
	ϱ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	$\curlyvee$
Tausender	$,\alpha$	$,\beta$	$,\gamma$	$,\delta$	$,\varepsilon$	$,\varsigma$	$,\zeta$	$,\eta$	$,\vartheta$

Abb. 4.1.3 Milesisches Zahlensystem; nach [Menninger 1958, Bd. 2, S. 76]

Übrigens wurden neben den kleinen auch große Buchstaben in derselben Weise verwendet.

Für die Tausender wurden wieder die Buchstaben der Einer verwendet; sie erhielten zur Unterscheidung einen Strich links unten. Zur Bezeichnung der Zehntausender waren zwei verschiedene Schreibweisen in Gebrauch. Entweder benutzte man das M, den Anfangsbuchstaben von $MYPIOI$ und schrieb die Anzahl der Zehntausender über das M, also z. B. $\overset{\lambda\beta}{M} = 32$ mal $10^4 = 320\,000$.

Oder aber – so verfuhr man vor allem in der späteren Zeit – man machte eine Zahlenangabe als Angabe in Myriaden dadurch deutlich, dass man zwei Punkte über die Buchstaben setzte. Also sind z. B. gleichwertig

$$\overset{\lambda\beta}{M} = \ddot{\lambda}\ddot{\beta} = 320\,000\,.$$

Die Bezeichnungsweise noch höherer Zehnerpotenzen – dazu war Archimedes in der „Sandrechnung“ genötigt – war nicht einheitlich. Jeder Autor benutzte seine eigene Notierung.

Da nun Buchstaben zur Bezeichnung der Zahlen verwendet wurden, bestand die Gefahr der Verwechslung. Um dem zu begegnen, wurde entweder am Schluss der Zahl oben ein Strich angebracht oder die ganze Zahl überstrichen, also z. B.

$$\alpha\ \rho\ \mu\ \varepsilon' = \overline{\alpha\ \rho\ \mu\ \varepsilon} = 1145\ .$$

Elemente einer wirklichen Bruchrechnung treten in hellenistischer Zeit – trotz der Widerstände der theoretischen Arithmetik gegen die Teilung der Eins, über die noch zu sprechen sein wird – auch in der offiziellen Mathematik auf; in der kaufmännischen Mathematik sah man natürlicherweise kaum Anlass, mit Teilen von Ganzen zu rechnen. Aus hellenistischen Papyri ersehen wir, dass trotz des starken ägyptischen Einflusses nicht ausschließlich mit Stammbrüchen gerechnet wurde. Bei Eratosthenes von Kyrene (276?–194? v. Chr.) tritt der Bruch 11/83 für die Neigung der Ekliptik auf. Zur Bezeichnung der Brüche schrieb man seit dem 3. Jahrhundert v. Chr. den Nenner über dem Zähler. Erst seit dem 1. Jahrhundert n. Chr. tritt die „indische“ Schreibweise auf, Zähler über Nenner, aus der unsere heutige Bruchschreibweise hervorgegangen ist. Das alles war Zählen und Rechnen im praktischen Bereich. Im Theoretischen ging dies zeitlich und räumlich einher mit einer philosophisch-erkenntnistheoretischen Diskussion über Zahl- und Größenbegriff, wie sie sich schließlich in den „Elementen“ des Euklid in hellenistischer Zeit niederschlug. Bekanntlich sind die Nachrichten über Pythagoras (ca. 580–ca. 500 v. Chr.) und die pythagoreische Schule unsicher und auch schwer zu datieren. Aber es dürfte feststehen, dass pythagoreische Auffassungen schon relativ früh, noch in ionischer Zeit, fixiert und schließlich modifiziert in Euklids „Elemente“ eingegangen sind.

Kernstück der Arithmetik ist der Zahlbegriff. In den Definitionen 1 und 2 von Buch VII der „Elemente“ heißt es: 1. *„Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird.“* 2. *„Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge.“* Die Eins ist danach selbst keine Zahl. Brüche werden nicht unter die Zahlen gerechnet, sie sind Verhältnisse von ganzen Zahlen. Die historischen Wurzeln dieser Definitionen liegen in der Frühzeit der griechischen Mathematik, möglicherweise wohl großenteils in der pythagoreischen Schule. Den Pythagoreern galt die Eins als aller Dinge Anfang und die Zahl als Schlüssel zum Verständnis der Welt. Der Neupythagoreer Iamblichos (ca. 250–330 n. Chr.) berichtet aus dem beträchtlichen zeitlichen Abstand von 8 Jahrhunderten über jene Frühzeit – man kann über den Grad der Zuverlässigkeit schwer urteilen:

> *„Das Wieviel, das ist die Zahl, definierte Thales als Zusammenfassung von Einheiten (nach der ägyptischen Weise, da er ja dort gelernt hatte); die arithmetische Eins im eigentlichen Sinne wird nun nicht unter diese Definition fallen, weder die Einheit noch das Eine. Pythagoras aber <definierte die Zahl> als die Entfaltung und Verwirklichung der in der Einheit liegenden erzeugenden Prinzipien; oder in anderer Weise als das vor allen Dingen im göttlichen Geist*

Abb. 4.1.4 Denkmal des Pythagoras auf der Insel Samos [Foto Tobies]

> *Vorhandene, aus dem, <d. h. aus der Zahl>, alles zusammengefügt wird und dann durchgezählt in einer unauflöslichen Ordnung bestehen bleibt. Andere wieder <definieren die Zahl> als fortschreitende Reihe von der Einheit aus bis zu ihr hin. Der Pythagoreer Eudoxos sagt: Zahl ist begrenzte Vielheit indem er Gattung und Art angibt, wie in den obigen Ausführungen die Größe (. . .) gekennzeichnet war. Die Akusmatiker* (die traditionellen Pythagoreer, Wg) *aus dem Kreis um Hippasos sagten, sie sei das erste Vorbild der Weltschöpfung und wiederum das Unterscheidungswerkzeug des göttlichen Weltschöpfers. Philolaos sagt: Die Zahl ist das herrschende und unerschaffene Band des Beharrens der innerweltlichen Dinge.“*
> (Zitiert nach [Gericke 1970, S. 28f.])

Auch Platon (427–347 v. Chr.) und Aristoteles (384–322 v. Chr.), die bedeutendsten Philosophen des Altertums, haben sich zu Zahl und Größe geäußert. Der eine stand inhaltlich der Mathematik näher, der andere trug nicht unerheblich zum methodologischen Ausbau der Wissenschaft bei.

Platon hatte Mathematik bei seinem Aufenthalt in Süditalien kennen gelernt. Seitdem betrachtete er die Mathematik als Prototyp einer Wissenschaft, die ihre Ergebnisse durch bloßes Denken finden könne. Die Folgen seiner erkenntnistheoretischen Grundposition bestanden sowohl in einer Verstärkung der methodologischen Grundlagen der Mathematik als auch in einer abweisenden Haltung gegenüber der Mathematik der Praxis. Darüber finden sich zahlreiche Zeugnisse in seinem Werk „Staat“. Im „Staat“ hat sich Platon auch geäußert, was die Teilbarkeit der Eins und damit das Verständnis von Brüchen betrifft: *„Die Meister dieser Kunst würden einen auslachen und fortweisen, wenn einer das Eins in Gedanken zerschneiden wollte.“* (Zitiert nach [Gericke 1970, S. 33].)

Eine andere Sache sind natürlich Teilmengen von gegenständlich vorhandenen Einheiten: Einen Kuchen kann man teilen, aber eben nicht *das Eins*.

Aristoteles hat um eine definitorische Bestimmung von Größe und Zahl gerungen. So heißt es in der „Metaphysik“: *„Größe heißt, was so in Teile geteilt werden kann, daß jeder Teil ein Eines und Dieses ist.“* (Zitiert nach [Gericke 1970, S. 24])

Aristoteles gelangt ausdrücklich zu der Meinung, dass die Eins keine Zahl sei. Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge. Aber er scheint nicht erkannt zu haben, dass eine nur aus einem Element bestehende Menge begrifflich nicht identisch ist mit der Eins. Auch Euklid behandelt die Eins nicht als Zahl.

Im Verständnis der Arithmetik sind Zahlen natürliche Zahlen ohne die Eins, also 2, 3, 4, . . . Und obgleich natürlich mit Brüchen (und sogar mit irrationalen Zahlen) gerechnet wurde, wurden Brüche nicht als Zahlen, sondern als Verhältnisse von Zahlen (also von natürlichen Zahlen) verstanden und so behandelt. An die Stelle der Bruchrechnung tritt bei Euklid die Lehre von den Zahlenverhältnissen.

Schließlich seien noch ein paar Worte zu den römischen Zahlzeichen (kurz: römische Zahlen) angefügt. Wenn wir auch nicht mehr mit römischen Zahlen rechnen – wie dies in Mitteleuropa noch bis ins 16. Jahrhundert üblich war –, so verwenden wir römische Zahlen noch zur Gliederung von Schriftsätzen und vermögen, wenn es gut geht, beispielsweise das Erscheinungsjahr eines älteren Buches oder kirchliche Inschriften zu entziffern. Die römischen Zahlzeichen sind Buchstaben:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Es handelt sich also um eine gegenseitige Durchdringung eines Fünfer- und eines Dezimalsystems. Im Allgemeinen wurden in der alten Zeit additive und erst später auch subtraktive Zahlbildungen benutzt, also XVIII als 18, aber XIX als 19. Doch es gab Ausnahmen. Eine noch im 20. Jh. gebräuchliche Ausnahme ist IIII statt IV für die 4 auf den Zifferblättern alter Uhren.

Hinsichtlich der Entstehung der römischen Zahlzeichen gibt es noch immer viele ungelöste Fragen. Einige Sicherheit besteht darüber, dass etruskische Einflüsse mitgewirkt haben. Die Zahlzeichen I, V und X dürften noch vor der Ausbildung des römischen Alphabets in Gebrauch gewesen sein; sie sind also sehr alt. Dagegen reichen Belege für die Verwendung der Zeichen L, D und M nur bis ins 1. Jahrhundert v. Chr. zurück; sie sind aus älteren Zahlzeichen hervorgegangen. Für interessante, auch kulturhistorisch bedeutsame Einzelheiten muss auf die umfangreiche Spezialliteratur verwiesen werden.

Zum schriftlichen Rechnen eignen sich diese Ziffern kaum; nur die Ergebnisse können eindeutig fixiert werden. Das Rechnen geschah auf dem Abakus. Erhalten gebliebene Exemplare geben gute Eindrücke vom Alltag kaufmännischen Rechnens im Römischen Weltreich.

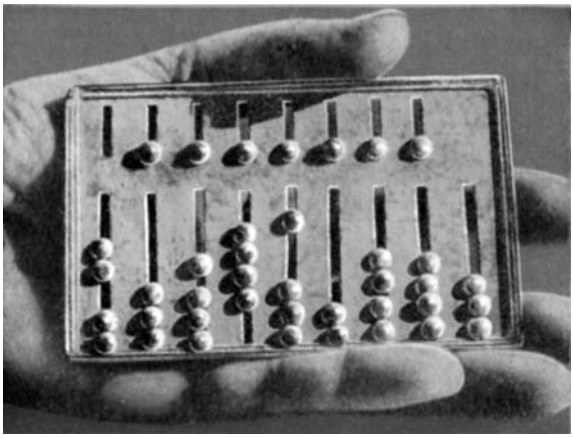


Abb. 4.1.5 Römischer Handabakus; nach [Menninger 1958, Bd. 2, S. 113]

4.2 Ionische Periode

Die Mathematik dieser Periode ist aufs Engste mit der Entstehung der ionischen Naturphilosophie verbunden, ja, sie war integrierender Teil dieser Entwicklung von weltgeschichtlicher Bedeutung.

Dem waren gänzlich andere, vorwissenschaftliche geistige Strömungen voran gegangen. Einige Blicke darauf werden die mit der ionischen Naturphilosophie entstandenen Wendungen deutlicher hervortreten lassen.

Da ist das einzigartige literarische Dokument *Theogonia* (Götterabstammung) des Hesiod (um 700 v. Chr.). Er lebte in bescheidenen Verhältnissen als Bauer und Hirte und ist der früheste, historisch nachweisbare griechische Dichter. Homer (8. Jahrhundert v. Chr.) ist als historische Figur umstritten.

Nach Hesiod ist die Welt aus dem Chaos entstanden. Über die Genealogie der Götter wird wüst spekuliert. So habe die Erdmutter Gaia ihren eigenen Mann, den Himmelsgott Uranus, durch seinen Sohn Kronos entmannen lassen. Kronos, aus Angst, von einem seiner Sprösslinge entthront zu werden, habe alle seine Kinder verschlungen. Auch ergeht sich Hesiod in Phantasien über Fabelwesen, z. B. hundertarmige Riesen, Drachen, die Hydra [Capelle 1940, S. 27].

Und da ist ferner die *Orphik* (Lehre des Orpheus), die an den mystischen, aus Thrakien stammenden griechischen Sänger Orpheus anknüpfte. Die Sage um Orpheus wurde vielfach in Dichtung und Musiktheater aufgegriffen. Sein herrlicher Gesang bewegte den Herrn der Unterwelt so sehr, dass Orpheus' Frau Eurydike auf die Erde zurückkehren durfte. Doch Orpheus wandte sich gegen ausdrückliches Verbot nach Eurydike um; nun musste sie endgültig im Totenreich verbleiben.

Die einflussreiche Gruppe der Orphiker hielt die Seele als von göttlicher Natur im Leib wie in einem Gefängnis eingeschlossen. Im Rückgriff auf den Dionysoskult haben sich Vorstellungen von Askese ausgebreitet, ebenso wie Vorstellungen von Sünde, Seelenwanderung, Vorschriften über Nahrung und vieles andere. Manches davon ist in die spätere Lehre der Pythagoreer eingeflossen.

Die Gesamtsituation in der Vorgeschichte der griechischen Philosophie bezüglich der Naturbetrachtung hat W. Capelle, Herausgeber der Schriften der Vorsokratiker, folgendermaßen eingeschätzt:

> *„Inhalt und Form des Denkens dieser Vorboten der griechischen Philosophie läßt sich etwa folgendermaßen charakterisieren. Die Natur und ihre Erscheinungen, wie Tag und Nacht, der Sternenhimmel, die Erde, das Meer, die Berge, Flüsse und Winde werden durchgehend noch als persönliche, göttliche Wesen teils männlichen, teils weiblichen Geschlechtes gedacht, die durch Zeugung von anderen göttlichen Personen und durch diese schließlich von allen gemeinsamen Ureltern abstammen. Manche der im Bereich der griechischen Welt wirksamen Naturkräfte, wie der gewaltige Ätna mit seinen vulkanischen Erschei-*

> *nungen, werden auf fabelhafte Ungetüme, wie den Riesen Typhoeus, oder auf Giganten und hundertarmige Unholde zurückgeführt, da man sich auch die gewaltigsten Naturvorgänge, wie Gewitter und Erdbeben, nur von persönlichen, übermächtigen Wesen, d. h. von Göttern, verursacht zu denken vermag. So überwiegt in diesen naiven Vorstellungen – trotz mancher latenten rationalen Keime – das ‚Dämonische'in phantastischer, ja oft geradezu grotesker Gestalt noch so sehr, daß man sich mehr als einmal, mit gutem Grunde, an altorientalische Mythen und Naturerscheinungen erinnert fühlt."*
> [Capelle 1940, S. 25f.]

So gesehen, könnte man bis zu einem gewissen Grade die *Theogonie* des Hesiod, in der Abstammung und Systematisierung der Götterwelt beschrieben werden, als eine frühe Vorstufe naturwissenschaftlichen Denkens auffassen. Übrigens entwickelte Hesiod auch die Vorstellung von der runden scheibenförmigen Erde, die vom Okeanos umflossen wird, und anderes mehr.

Und doch: Ein ganz anderes Bild zeigt sich ein bis zwei Jahrhunderte später mit dem Auftreten der sog. Vorsokratiker, also einer Gruppe von Philosophen, insbesondere von Naturphilosophen aus der Zeit vor Sokrates (470–399). Zu ihnen rechnet man unter anderen Thales von Milet (ca. 624–546), die ionischen Naturphilosophen Anaximander (ca. 611–546), Anaximenes (ca. 585–525), Anaxagoras (ca. 500–428), Demokrit (460–371), die Eleaten, Parmenides (ca. 515–445) und seinen Schüler Zenon (ca. 490–430), Heraklit (ca. 544–ca. 483), Empedokles (ca. 495–435) und bis zu einem gewissen Grade auch die Pythagoreer.

Gemeinsam war den Vorsokratikern die Suche nach einem Urprinzip und die Suche nach den Ursachen des Geschehens in der Natur, über die Beschreibung und über Mythen hinaus.

Ionische Naturphilosophie

Für den mathematikhistorischen Zusammenhang sind die ionischen Naturphilosophen und die Gruppe der Pythagoreer von besonderem Interesse. Doch ist zu beachten: Die Originalschriften der Vorsokratiker sind bis auf Ausnahmen verloren gegangen. So sind wir angewiesen auf Aussprüche und Sentenzen aus der nachfolgenden Zeit.

Die Stadt Milet an der ionischen Küste Kleinasiens (heute Türkei) war eine der bedeutendsten Handelsstädte jener Zeit. Ihre Tochterkolonien erstreckten sich weit in den Schwarzmeerraum. Milet entwickelte sich zum Zentrum der ionischen Naturphilosphie. Hier wirkten Thales, sein Schüler Anaximander, dessen Schüler Anaximenes und eine Schar Gleichgesinnter. Milet wurde 494 von den Persern zerstört. Nach späterer Überlieferung (Aristoteles) soll der Kaufmann *Thales aus Milet* der erste aus einer Reihe griechischer Philosophen gewesen sein. Doch dürften in die Bewertung von Thales viele falsche oder erfundene Details eingegangen sein. Vieldeutig, also nicht schlüssig, ist

Abb. 4.2.1 Theater von Milet [Foto Alten]

die Überlieferung, dass nach seiner Meinung Wasser der Urstoff aller Dinge sei. So schreibt Aristoteles:

> *„Von denen, die zuerst philosophiert haben, haben die meisten geglaubt, daß es nur stoffliche Urgründe der Dinge gebe. Denn woraus alle Dinge bestehen, und woraus sie als Erstem <d. h. ursprünglich> entstehen und worein sie als Letztes <d. h. schließlich> vergehen, indem die Substanz zwar bestehen bleibt, aber in ihren Zuständen wechselt, das erklären sie für das Element und den Urgrund (...) der Dinge (...) Über die Anzahl und die Art eines solchen Urgrundes haben freilich nicht alle dieselbe Meinung, sondern Thales, der Begründer von solcher Art Philosophie, erklärt als den Urgrund das Wasser (daher glaubt er auch, daß die Erde auf dem Wasser ruhe) ...“*
> [Capelle 1940, S. 70f.]

Dagegen schreibt Seneca (später als Aristoteles):

> *„Thales behauptet, die Erde werde vom Wasser getragen. Sie werde wie ein Schiff bewegt, und infolge der Beweglichkeit des Wassers schwanke sie dann, wenn die Leute sagen, sie erbebe.“*
> [Capelle 1940, S. 70]

Immerhin darf als sicher gelten, dass Thales als Bewohner einer am Meer gelegenen Stadt vom Wasser beeindruckt war, zumal er in Wüstengegenden die belebende Kraft des Wassers kennen gelernt hatte.

Nach weiteren Überlieferungen trug Thales als Mathematiker, Astronom und Politiker den Ruhm seiner Vaterstadt in alle Welt. In Ägypten soll er eine Erklärung für die regelmäßigen jährlichen Überschwemmungen geliefert und auf „erstaunliche Weise“, nämlich mit Hilfe eines Schattenstabes und unter Verwendung der Verhältnisse bei ähnlichen Dreiecken, die Höhe der Pyramiden gemessen haben. Auch habe er die Sonnenfinsternis vom 22. Mai 585 vorausgesagt; dies führte zum Abbruch einer Schlacht. Als Politiker soll Thales den Vorschlag gemacht haben, ein Bündnis der ionischen Städte gegen sich formierende Feinde zu schmieden, freilich vergeblich.

> *„Von Thales' Bedeutung als Begründer der Philosophie wie der Wissenschaft überhaupt ist (...) seine Stellung gegenüber allen Früheren klargestellt. Für die Denker der Folgezeit aber – abgesehen davon, daß er das erste Problem der griechischen Wissenschaft, die Frage nach dem Urgrunde der Dinge, aufwirft und unter Ausschaltung jeder übernatürlichen Macht beantwortet – ist seine Bedeutung vor allem diese: Thales, der Begründer einer rein rationalen Wissenschaft, hat als Gegenstand seines Denkens die Natur und findet den Urgrund der Dinge in einem empirisch gegebenen Stoff (wobei jedoch zu beachten ist, daß Thales wie seine nächsten Nachfolger den Begriff des „toten“ Stoffes noch gar nicht kennt, sondern für ihn und die nächste Denkergenerationen sind Stoff und Kraft noch völlig ungeschieden, ein natürliches Ganzes). Diese beiden Tatsachen sind für die erste Entwicklungsphase der griechischen Philosophie entscheidend.“*
> [Capelle, 1940, S. 68]

Während die Person des Thales mehr oder weniger legendenumwoben ist, wissen wir über seinen Freund und Schüler Anaximander schon Genaueres. Er schrieb als erster griechische Prosa, damit über den Gebrauch der Versform bei Homer und Hesiod hinausgehend. Ausgezeichnet als Geograph – ein erster Himmelsglobus und eine erste Erdkarte werden ihm nachgesagt – und interessiert an mathematischen Fragestellungen, nahm er als Urstoff ein *apeiron* (das Unbegrenzte) an: *„Als Materie ist das Unendliche die Ursache“* berichtet Aristoteles [Capelle 1940, S. 82]. Durch Entfaltung des *apeiron* entstehen die Gegensätze „warm“ und „kalt“, „trocken“ und „feucht“ und hieraus die Umwandlung des *apeiron* in die beobachtbaren Dinge der Welt. Capelle kommt zu dem Urteil:

> *„Anaximandros entwirft als erster unter allen Menschen eine rein physikalische Kosmogonie, d. h. eine ausschließlich auf Beobachtung und rationales Denken gegründete Entstehungsgeschichte unseres Kosmos, wie er denn auch als erster erkennt, daß unsere Welt ein „Kosmos“, d. h. ein planvoll geordnetes Ganzes ist.“* [Capelle 1940, S. 74]

Ähnliche Grunderkenntnisse dialektisch-philosophischen Denkens finden sich bei seinem Schüler Anaximenes. Als Ursubstanz sah er die Luft an: Durch Ausdehnung und Verdünnung entstehe Feuer, durch Verdichtung Winde,

Abb. 4.2.2 Demokrit, Thales, Heraklit [Deutsche Fotothek, SLUB Dresden]

Wolken, Wasser, Erde und Steine. Der Himmel sei ein halbkugelförmiges Kristallgewölbe, an dem sie Sterne befestigt sind. So bildete sich der Begriff „Fixstern".

Anaxagoras aus Klazomenai brachte die ionische Naturphilosophie nach Athen. Er war sogar mit Perikles befreundet. Als er behauptete, es gäbe keine Götter und die Sonne sei eine glühende Gesteinsmasse, wurde er der Gotteslästerung bezichtigt und musste 434/33 in die Verbannung gehen. Nur Perikles hatte ihn vor dem Todesurteil retten können.

Gegen Ende des 5. Jahrhunderts wirkte in Ephesos (Kleinasien) der Philosoph Heraklit, aus vornehmem Priestergeschlecht stammend, ein bemerkenswerter Denker, der ein „Urfeuer" als Verkörperung des Wandels aller Dinge ansah, getrieben vom Kampf der Gegensätze: *„Kampf ist der Vater von allem; der König von allem, die einen macht er zu Göttern, die andern zu Menschen, die einen zu Sklaven, die andern zu Freien."* [Capelle 1940, S. 135]

Auch werden Heraklit Sprüche zugeschrieben wie „Alles fließt" und „Wir steigen nicht zweimal in den denselben Fluss". Vieles an seiner Philosophie bleibt unklar und ist schwer einzuordnen in die Entwicklungsgeschichte der Philosophie. Schon im Altertum erhielt Heraklit den Beinamen „Der Dunkle".

Die verschiedenartigen Spekulationen innerhalb der Naturphilosophie bei der Suche nach dem Grundprinzip, nach der Grundursache mündeten bei dem außerordentlich vielseitigen Empedokles (ca. 495–435) in eine systematische Lehre: der Begriff „Element" tritt in die Geschichte der Wissenschaften ein. Nach Meinung des Empedokles liegen vier Elemente – Feuer, Wasser, Luft und Erde – als „Anfängliches" zugrunde. Sie sind unzerstörbar, ewig und können nicht ineinander übergehen. Verbindung und Trennung der Teilchen machen das Wesen des Naturgeschehens aus: Liebe und Hass, Anziehung und Abstoßung sind die Triebkräfte der Veränderung und Entwicklung. Auch bei der Interpretation anderen Naturgeschehens hat Empedokles keinen Raum

Abb. 4.2.3 Bibliothek in Ephesos [Foto Wußing]

für das Wirken von Göttern gelassen, weder bei den Phänomenen der Sonnen- und Mondfinsternisse, des Wechsels von Tag und Nacht noch beim Zustandekommen der Jahreszeiten. Einer Legende zufolge soll Empedokles freiwillig in den Krater des Ätna gesprungen sein, um seine Gottähnlichkeit zu beweisen.

Das Spektrum der Anschauungen bei den Vorsokratikern ist außerordentlich breit. Ganz extrem und schon in der Antike umstritten ist die um 540 gegründete Schule der Eleaten, benannt nach der Stadt Elea in Unteritalien. Hervorragende Vertreter waren Parmenides (ca. 540–ca. 480) und Zenon von Elea (ca. 490–430). Sie leugneten die reale Existenz von Bewegung, Veränderung, Raum und Vielfalt. Berühmt wurden die scharfsinnig vorgebrachten Paradoxien des Zenon, z. B. der „Beweis“, dass beim Wettlauf des schnellen Achilles mit der langsamen Schildkröte, die einen Vorsprung hat, Achilles niemals die Schildkröte einholen kann: Achilles kann immer nur dorthin gelangen, wo die Schildkröte schon war. Auch „bewies“ Zenon, dass der fliegende Pfeil ruht. Immerhin aber haben diese Paradoxien zur Entwicklung der Logik beigetragen, Diskussionen zum Grenzwertbegriff und zur Konvergenz unendlicher Reihen in der Analysis ausgelöst und die Problematik des Kontinuums in der Mengenlehre aufgeworfen.

Später berichtete Aristoteles u. a. über den Wettlauf zwischen Schildkröte und Achilles:

Abb. 4.2.4 Hadrianstempel in Ephesos [Foto Alten]

> *„Der zweite Beweis* (gegen die Wirklichkeit der Bewegung, Wg) *ist der sogenannte ‚Achilles'. Er gipfelt darin, daß das langsamste Wesen* (gemeint ist die Schildkröte, Wg) *in seinem Lauf niemals von dem schnellsten <Achilles> eingeholt wird. Denn der Verfolger muß immer erst zu dem Punkt gelangen, von dem das fliehende Wesen <die Schildkröte> schon aufgebrochen ist, so daß das langsamere immer einen gewissen Vorsprung haben muß."*
> [Capelle 1940, S. 178]

Zwei weitere Gruppen von Vorsokratikern haben die Mathematik der ionischen Periode und weit darüber hinaus, bis in moderne Zeiten, ganz direkt beeinflusst, die der Atomisten und die der Pythagoreer.

Da ist Leukipp aus Milet (oder Abdera, um 460), Schüler des Zenon, Gründer (oder war es Demokrit?) einer Philosophenschule um 450 in Abdera. Die Auseinandersetzung mit den Anschauungen von Zenon führte ihn zur Atomistik: Es muss feste, nicht weiter teilbare Urteilchen der Dinge geben – als Folge der Widerlegung von Zenon. Diese Atome (von griech. atomos, unteilbar) unterscheiden sich durch Gestalt, Lage und Anordnung. Die Schriften von Leukipp sind vermutlich unter der Dominanz seines Schülers Demokrit von Abdera (ca. 460–370) völlig verdrängt worden.

Demokrit war ein Mann von umfassender Bildung und Gelehrsamkeit. Seine Schriften – etwa 300 Arbeiten sind dem Titel nach bekannt – sind freilich bis auf einige Teilstücke untergegangen, aber von nachfolgenden Autoren

Abb. 4.2.5 Die vier Elemente des Empedokles (Liechtenstein 1994)

vielfältig zitiert worden. Demokrit schrieb zur Atomistik, zur Kosmogonie, über die Seele des Menschen, zum Denken, zur Erkenntnistheorie, zur Erziehung, zur Ethik. Er hat weite Reisen unternommen, angeblich nach Ägypten, Babylon und Persien.

Demokrit hat die Atomlehre des Leukipp in einigen Punkten verfeinert und sogar auf Sinnesphysiologie angewandt. Letzte kleinste, unteilbare Teilchen einer qualitativ einheitlichen Materie sollten die Bausteine aller Körper darstellen. In unablässiger Folge begegnen sie sich, treten zu strukturell verschiedenen Körpern zusammen oder die Körper zerfallen wieder in Atome. So erklären sich die Naturvorgänge, die nach Gesetzen ablaufen. Daher bemerkt Aristoteles tadelnd, im Sinne seiner Philosophie: *„Demokrit, der es ablehnt, von einer Zweckursache zu sprechen, führt alles <Geschehen>, dessen sich die Natur bedient, auf die Notwendigkeit zurück.“* [Capelle 1940, S. 417]
Eines der ganz wenigen wörtlichen Demokritfragmente lautet: *„Nur der Meinung nach gibt es süß, nur der Meinung nach bitter, warm, kalt, nur der Meinung nach Farbe, in Wahrheit gibt es nur Atome und leeren Raum.“* [Stückelberger 1988, S. 16]

Ersichtlich berührte die Atomvorstellung die Grundlagen der Mathematik und der Naturwissenschaften. Zweifellos war Demokrit ein bedeutender Denker und noch sein schärfster Gegner während der Antike, Platon (der am liebsten alle Schriften von Demokrit hätte verbrennen lassen), konnte nicht

an dessen Leistung vorbeigehen. Über die antiken Philosophen Epikur (341–271 v. Chr.) und Lukrez (97–55 v. Chr.) reichte die fruchtbare Traditionslinie der demokritischen Atomistik bis hin in die islamische Atomistik, bis hin in die europäischen Naturwissenschaften, zu Gassendi (1592–1655), Galilei (1564–1642), Newton (1643–1727) und Dalton (1766–1844).

Die Nachrichten über den Bund der Pythagoreer stammen aus jahrhundertelangem Abstand und sind entsprechend unsicher. Selbst die biographischen Angaben über den Begründer des Bundes, über Pythagoras von Samos (ca. 540–500), Sohn eines Gemmenschneiders, sind spärlich. Er sei vor der Tyrannis des Polykrates auf Samos – vgl. das Gedicht von Schiller – ausgewichen, habe Reisen nach Ägypten und Mesopotamien unternommen und sich um 525 v. Chr. in Kroton, in Unteritalien, niedergelassen und dort einen Geheimorden begründet, der einige Zeit beträchtlichen Einfluss ausgeübt hat. Nach dem Sieg der demokratischen Partei über die Aristokratie wurde der Bund verfolgt und erlosch zunächst Anfang des 4. Jahrhunderts v. Chr. Doch gab es eine Neubelebung im 1. Jahrhundert v. Chr.: aus der Zeit der sog. Neupythagoreer stammen die meisten Informationen und Legenden über den ursprünglichen Bund der Pythagoreer.

Den Bund der Pythagoreer kennzeichnen typische Merkmale einer religiösen Sekte: Konspiration, strenge Vorschriften über Kost, Kleidung, Bestattungszeremonien, Probezeit für Neulinge, Lehre von der Seelenwanderung. So wird über Pythagoras berichtet:

> *„Und – so erzählt man – einst sei er gerade vorbeigegangen, als ein Hund geschlagen wurde; da habe er Mitleid empfunden und das Wort gesprochen: ‚Hör' auf und schlag' <das Tier> nicht! Es ist ja die Seele eines befreundeten Mannes, die ich wiedererkannte, als ich das Winseln hörte.'"* [Capelle 1940, S. 100f.]

Abb. 4.2.6 Münze mit Bild des Pythagoras; Satz des Pythagoras (Griechenland 1955)

Abb. 4.2.7 Statue vor dem Zeughaus in Berlin. Ein Schüler zeigt die Tafel mit der Figur zum Beweis des Satzes von Pythagoras [Foto Hollewood Media]

Was aber den Bund der Pythagoreer aus vielen ähnlichen Mysterienkulten, teilweise orientalischen Ursprungs, heraushob und für die Geschichte der Wissenschaften und der Mathematik relevant macht, ist der Umstand, dass bei

den Pythagoreern die Vereinigung mit dem Göttlichen über die Versenkung in die wunderbaren Gesetze der Zahlenwelt erreichbar sein sollte. Das Wesen der Welt bestand für sie in der Harmonie der Zahlen. Von hierher rührt die Hinwendung zu Mathematik, Astronomie und Musiklehre freilich sozusagen als rationales Nebenprodukt des eigentlichen, des religiösen Hauptinteresses.

4.3 Mathematik in der ionischen Periode

In einer Atmosphäre der Besinnung auf das Wesen der Natur und die Art des Zusammenhanges, des Überganges vom Sammeln und Beschreiben von Fakten zum Verstehenwollen hat sich auch der Umschlag von einer rezeptartig betriebenen zu einer allgemeine Sätze aufstellenden Mathematik vollzogen, bei Klärung der Voraussetzungen, mit Definitionen und Beweisen. Wie in die Ergebnisse einer empirischen Naturwissenschaft wurde auch in den mathematischen Erfahrungsschatz – teilweise aus Mesopotamien überkommen – eine logische Struktur eingebracht.

Thales von Milet

Thales von Milet, einem der sieben Weltweisen, wurden auf mathematischem Gebiet folgende Leistungen schon in der Antike zugeschrieben (ausführlich in [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 31 ff.]): Er habe zuerst ausgesprochen, dass in jedem gleichschenkligen Dreieck die Basiswinkel und bei zwei sich schneidenden Geraden die Scheitelwinkel gleich sind sowie dass der Durchmesser die Kreisfläche halbiert. Auch stamme der eine Kongruenzsatz (Kongruenz bei Übereinstimmung in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln) von ihm, wie aus der Art der von Thales vorgenommenen Bestimmung der Entfernung zweier Schiffe auf hoher See bzw. der Bestimmung der Entfernung eines sich dem Hafen nähernden Schiffes von Land aus hervorgehe. Weitaus später hat Proklos Diadochos (410–485) im Euklid-Kommentar so geurteilt:

> *„Heil dem alten Thales, dem Entdecker vieler anderer und besonders dieses Theorems! Denn man sagt, er habe als erster erkannt und ausgesprochen, daß in jedem gleichschenkligen Dreieck die Basiswinkel gleich sind, habe aber in altertümlicher Weise für ‚gleich' die Bezeichnung ‚ähnlich' gebraucht."*
> [Proklus Diadochus 1945, S. 341f.]

An weiteren Sätzen schreibt man Thales den Satz zu, dass die Diagonalen eines Rechtecks sich gegenseitig halbieren und den – auch heute noch nach Thales benannten – Satz, dass der Peripheriewinkel im Halbkreis ein rechter ist. Die Legende berichtet, Thales habe aus Freude über die Entdeckung dieses doch schon ziemlich tief liegenden Satzes den Göttern einen Ochsen geopfert. Es scheint, dass die Kenntnis des Satzes über die Winkelsumme im

Abb. 4.3.1 Tempel des Apollon in Didyma. Eine heilige Straße führt von Milet zu der berühmten Orakelstätte, wo Zeus die göttlichen Zwillinge (gr. didymoi) Apollon und Artemis mit Leto gezeugt haben soll. [Foto Alten]

Dreieck schon in die Zeit um Thales oder bald danach fällt. Die eine Schwierigkeit hat darin bestanden, Winkel als einen der Addition unterwerfbaren Begriff zu erkennen. Nach einem Bericht des Geminus von Rhodos (wahrscheinlich um 75 v. Chr.), einem Philosophen der stoischen Richtung, der sich selbst eingehend mit dem Winkelbegriff beschäftigt hat und dabei auf dessen Geschichte eingegangen ist, hätten die alten, d. h. die frühen ionischen Mathematiker den Satz schrittweise bewiesen, erst für das gleichseitige, dann für das gleichschenklige, dann für das rechtwinklige und dann erst für das allgemeine Dreieck.

Demokrit von Abdera

Zwar hat Aristoteles den Demokrit mehrfach lobend erwähnt, aber der große Einfluss von Platon hat doch das Bild des vielseitigen Gelehrten Demokrit wesentlich getrübt. Leider sind uns von vielen seiner zahlreichen Schriften – darunter vom wissenschaftlichen Hauptwerk „Große Weltordnung“ – bis auf wenige Fragmente zur Atomistik nur noch die Titel bekannt. Sie umfassen Natur, Musik, Ethik, bildende Künste, Architektur, Astronomie.

Auf Mathematik beziehen sich die Abhandlungen „Über die Berührung von Kreis und Kugel“, „Über Geometrie“, „Über Zahlen“, „Über irrationale Strecken“, „Über Ausbreitungen“ (d. h. Abbildung der Kugeloberfläche auf die Ebene). Weiter schreibt man Demokrit die Erfindung des Gewölbebaues zu, ferner Untersuchungen über die in der Bühnenmalerei zu berücksichtigenden Gesetze der Perspektive. Es ist sicher, dass Demokrit die Volumina von Pyramide und Kegel richtig angegeben hat, wenn auch ohne einen Beweis, der den schon damals hohen Ansprüchen genügt hätte. Erst Eudoxos (408?–355?) und Archimedes (287?–212) haben Beweise geliefert, der letztere unter ausdrücklicher Anerkennung der Verdienste von Demokrit.

Ein erhalten gebliebenes Fragment von Demokrit enthält die Anregung, einen Kegel durch Schnitte parallel zur Basis in unendlich dünne Scheiben, sog. Indivisiblen, zu zerlegen. Es sind dies Überlegungen, die Keime des Integrationsverfahrens enthalten; hier hat Archimedes direkt angeknüpft. Offensichtlich stehen die Überlegungen von Demokrit im engsten Zusammenhang zur atomistischen Denkweise. Das demokritische Fragment hat folgenden Wortlaut:

> *„Wenn ein Kegel parallel zur Grundfläche durch Ebenen geschnitten wird, wie soll man sich die entstehenden Schnittflächen vorstellen, gleich oder ungleich? Sind sie ungleich, dann werden sie den Kegel ungleichmäßig machen, da er treppenartige Einschnitte und Vorsprünge erhält; sind sie dagegen gleich, so werden auch die Schnitte gleich sein, und der Kegel wird die Erscheinung eines Zylinders darbieten, insofern er aus gleichen, nicht aus ungleichen Kreisen bestehen wird, was doch sehr ungereimt ist.“* [Diels 1906, S. 412f.]

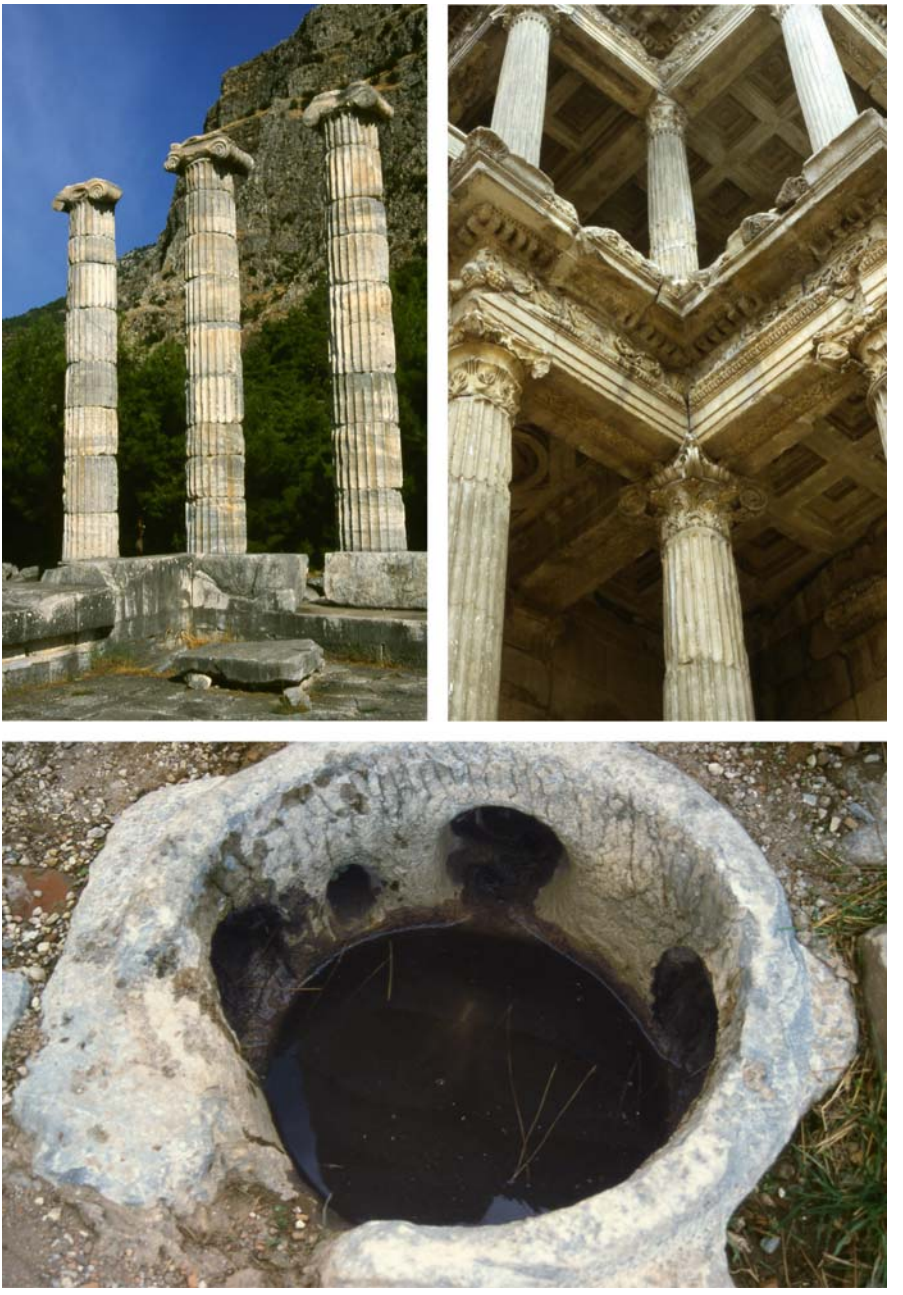


Abb. 4.3.2 Geometrie in der Architektur der griechischen Antike: Kannellierte Säulen mit ionischen Kapitellen am Athena-Tempel in Priene; Kassetten, Friese und korinthische Kapitelle um Markttor von Milet (Pergamon Museum, Berlin); Wasserverteiler in Priene für das System sich rechtwinklig kreuzender Straßen, entworfen von Hippodamos von Milet [Foto Alten]

Hippokrates von Chios

Hippokrates von Chios (um 440 v. Chr.) – nicht zu verwechseln mit Hippokrates von Kos (ca. 460–370 v. Chr.), einem Arzt, auf den der sog. Hippokratische Eid der Ärzte zurückgeht – ist in vielerlei Hinsicht eine bemerkenswerte Gestalt der griechischen Wissenschaftsgeschichte. Er soll – durch Piraten oder betrügerische Zöllner – sein Vermögen eingebüßt und dann, im Besitz des in Athen erworbenen Wissens, als Weisheitslehrer, als Sophist, seinen Lebensunterhalt bestritten haben. Diese Erzählung, ob wahr oder erfunden, spiegelt jedenfalls die neue Stellung der Wissenschaft wider: Das gesellschaftliche Interesse an Wissenschaft und Redekunst war immerhin so gestiegen, dass die Vermittlung des Wissens entlohnt wurde.

Hippokrates war der berühmteste Geometer des 5. Jahrhunderts. Er hat das damalige geometrische Wissen in einem Lehrbuch zusammengefasst; der Text ist aber vollständig verdrängt worden durch die späteren, umfangreicheren „Elemente“ des Euklid. Hippokrates führte die Bezeichnung der Eckpunkte einer Strecke durch Buchstaben ein. Er kannte den Zusammenhang zwischen Peripheriewinkel und Bogen. Er konnte das regelmäßige Sechseck, den Umkreis zu einem Dreieck und das gleichschenklige Trapez konstruieren. Er wusste, dass sich die Flächen ähnlicher Figuren wie die Quadrate über den entsprechenden Seiten verhalten. Er kannte die Verallgemeinerungen des pythagoreischen Lehrsatzes auf stumpfwinklige und spitzwinklige Dreiecke. Er konnte jedes Polygon in ein flächengleiches Quadrat verwandeln.

Schon in der Antike verbanden sich mit dem Namen Hippokrates vor allem die Untersuchungen, die er mit den sog. „Möndchen“, im Zusammenhang mit dem Problem der Quadratur des Kreises angestellt hat. (Zur Präzisierung: Es soll eine Kreisfläche in ein flächengleiches Quadrat verwandelt werden, unter ausschließlicher Verwendung der Konstruktionshilfsmittel Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten. Dass dies unmöglich ist, wurde definitiv erst im 19. Jahrhundert bewiesen!)

Das Problem der Kreisquadratur war so populär, dass Aristophanes in der Komödie „Die Vögel“ darauf eingehen konnte, ohne seine Zuschauer zu langweilen. Es wird berichtet, dass sich bereits Anaxagoras im Gefängnis mit der Kreisquadratur beschäftigt habe. Zum Unterschied von Zeitgenossen hatte er die Tiefe des Problems erkannt und hielt das Problem nicht, wie Antiphon (um 430 v. Chr.), durch die Konstruktion einbeschriebener Polygone „sehr hoher“ Eckenzahl für erledigt. Der von Antiphon und anderen begangene Fehlschluss besteht darin, dass zwar jedes einbeschriebene Polygon in ein flächengleiches Quadrat verwandelt werden kann, nicht aber die Grenzfigur. Hieran dokumentiert sich sehr deutlich, wie schwierig die begriffliche Bewältigung von Grenzübergängen zu vollziehen war (vgl. dazu die Darlegung der Entstehung der Infinitesimalrechnung im 16.,17. und 18. Jahrhundert). Dieser Fehlschluss wird natürlich auch dadurch nicht vermieden, wenn man, wie es der Sophist Bryson von Herakleia (um 410 v. Chr.) getan hat, einem Kreis

gleichzeitig Polygone um- und einbeschreibt und auf eine Art Stetigkeitsvorstellung zurückgreift. In der Sprechweise aus dem 5. Jahrhundert n. Chr. wird Brysons „Quadratur“ so beschrieben:

> *„Proklos sagte nun, Bryson habe den Kreis auf folgende Weise quadriert: Der Kreis, sagt Bryson, ist größer als jedes einbeschriebene Polygon und kleiner als jedes umbeschriebene Polygon. Im Vergleich wozu aber Größeres und Kleineres existiert, dazu existiert auch Gleiches. Es existieren aber größere und kleinere Polygone als der Kreis, also existiert auch ein ihm gleiches.“*
> [Becker 1954, S. 46]

Noch populärer als das Problem der Kreisquadratur war das Problem der Verdoppelung eines Würfels, zumal dieses an einen Orakelspruch gebunden war: Die von einer Seuche betroffenen Einwohner der Insel Delos erhielten die Auskunft des Orakels von Delphi, die Seuche werde erlöschen, wenn man den würfelförmigen Altar dem Rauminhalte nach verdoppele, unter Beibehaltung der würfelförmigen Gestalt. (In moderner Form bedeutet dies die konstruktive Lösung der Gleichung $x^3 = 2a^3$ mit Zirkel und Lineal. Dies ist, wie wir heute wissen, jedoch unmöglich.) Hippokrates konnte das Problem der Würfelverdoppelung wenigstens zurückführen auf das leichtere Problem, zwei mittlere Proportionale x und y gemäß $a : x = x : y = y : 2a$ zu finden. Spätere griechisch-hellenistische Autoren griffen auf Konstruktionen mit höheren Kurven und auf Vorstellungen der Bewegungsgeometrie zurück (vgl. [Alten et al. 2003, S. 87–90]).

Den höchsten Ruhm erntete Hippokrates mit der Konstruktion der sog. „Möndchen“, also der Entdeckung, dass sich gewisse krummlinig begrenzte Flächen quadrieren lassen, während der Kreis, die scheinbar einfachere Figur, Widerstand leistete. Hippokrates hat verschiedene Typen von Möndchen angegeben; der eine Typ hat die Gestalt: Halbkreis über AB, Mittelsenkrechte DC über Durchmesser AB, Halbkreise über AC und CB. Dann ist die Summe der beiden Möndchen M_1 und M_2 gleich dem Flächeninhalt des Dreieckes ABC. Die Möndchen sind also quadrierbar. Es gibt 5 Typen von quadrierbaren Möndchen, wie sich erst 1947 erwiesen hat [Scriba 1988].

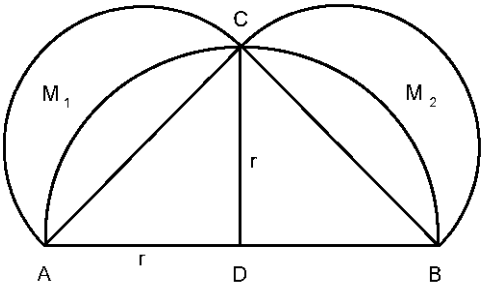


Abb. 4.3.3 Ein Typ von Möndchen des Hippokrates

Die Pythagoreer

Ähnlich wie die atomistische Grundvorstellung hat auch die Grundidee der pythagoreischen Schule eine herausragende Rolle in der Antike gespielt und zugleich weit in die Zukunft gewirkt. Nach dieser Grundidee besteht das Wesen der Welt in der Harmonie der Zahlen.

Über die Person des Pythagoras ist wenig Sicheres bekannt; so sind wir auf spätere Zeugnisse angewiesen. Übrigens sprach Aristoteles mit dem Blick auf die schon zu seiner Zeit unsichere Quellenlage nicht von Pythagoras, sondern nur von den Pythagoreern.

Nach Meinung der Pythagoreer erteilen die Zahlen den Menschen, die sich mit ihnen beschäftigen, auf mystische Weise höhere, Erkenntnis erst ermöglichende Kräfte. Der Pythagoreer Philolaos (gest. um 390 v. Chr.) sagt dazu:

> *„Denn die Natur der Zahl ist kenntnisspendend, führend und lehrend für jeglichen in jeglichem Dinge, das ihm zweifelhaft oder unbekannt ist.“* [Diels 1906, S. 243] Oder: *„Und in der Tat hat ja alles, was man erkennen kann, eine Zahl. Denn ohne sie läßt sich nichts erfassen oder erkennen.“* [Diels 1906, S. 240]

Und Aristoteles meint:

> *„Da sie (die Pythagoreer) weiter sahen, daß die Eigenschaften und Proportionen der Harmonien durch Zahlen bestimmt sind, und da es ihnen schien, daß auch alles andere seiner ganzen Natur nach den Zahlen nachgebildet sei und die Zahlen das erste der ganzen Natur seien, nahmen sie an, die Elemente der Zahlen (...) seien die Elemente aller Dinge, und der ganze Himmel sei Harmonie und Zahl.“* (Zitiert bei [Stückelberger 1988, S. 12])

Es kam innerhalb der Pythagoreer fast zwangsläufig zu Zahlenspekulationen. Zahlen wurden spezielle Eigenschaften wie Hass und Liebe, weiblich und männlich – meist polar geordnet – zugelegt. Dieser Tendenz entstammt beispielsweise der Begriff der „vollkommenen Zahl“: Eine Zahl heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist, die 1 inbegriffen. Der Neupythagoreer Nikomachos von Gerasa (um 100 n. Chr.) gab 6, 28, 496 und 8128 als Beispiele an. Die Pythagoreer stießen bis zu dem schon ziemlich tief liegenden Satz vor, dass die Zahl $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ vollkommen ist, wenn $2^m - 1$ eine Primzahl ist. Diese Einsicht entsprang einer von den Pythagoreern entwickelten Lehre von Gerade und Ungerade, die in das Buch IX der „Elemente“ von Euklid eingegangen ist. Gegenwärtig sind mindestens 44 vollkommene Zahlen bekannt. Sie sind alle gerade; die größte bekannte hat mehr als 18 Millionen Stellen. Es ist unbekannt, ob es auch ungerade vollkommene Zahlen gibt.

Schenkt man Nikomachos Glauben, so hätten sich schon die frühesten Pythagoreer mit den sog. figurierten Zahlen beschäftigt, einem Gegenstand, der

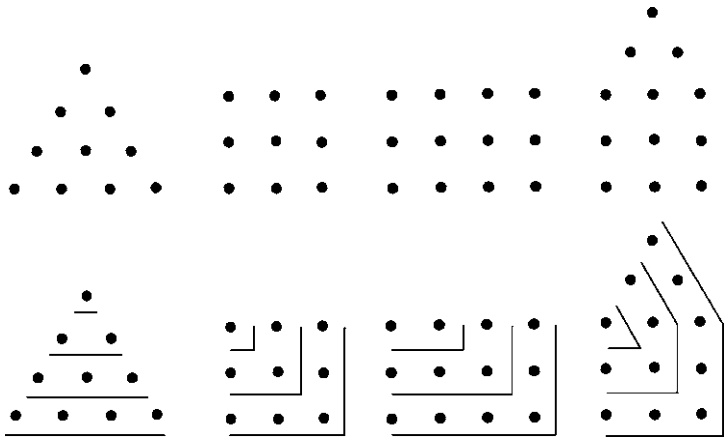


Abb. 4.3.4 Figurierte Zahlen: Dreieck-, Quadrat-, Rechteck- und Fünfeckzahlen

gekennzeichnet ist als Mischung von Geometrie, Spielerei, Zahlenmystik und Algebra. Man unterschied Dreieckszahlen, Quadratzahlen, Rechteckzahlen, fünfeckige Zahlen, usw.

Mit Hilfe der Veranschaulichung durch Figurenlegen konnte man, beinahe experimentell, einfache Reihen summieren, beispielsweise

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{1}{2}\,(n+1)\,n \quad \text{oder} \quad \sum_{\nu=1}^{n} (2\nu - 1) = n^2\ .$$

Insgesamt ist das innerhalb der Schule der Pythagoreer gefundene mathematische Wissen bedeutend, wenn es auch eingebettet war in ein ideologisch-religiöses System. Es ist in vielfacher Weise eingegangen in die „Elemente“ des Euklid.

Beispiele dafür sind:

1. Beweis für die Winkelsumme im Dreieck (behauptet Proklos in seinem Euklid-Kommentar)
2. Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks mit Hilfe des Goldenen Schnittes. Dem Pentagramm, im Mittelalter auch als Drudenfuß bezeichnet, wird von Goethe im „Faust“ eine mystische Bedeutung zuerkannt. Mephisto konnte nur deswegen ins Studierzimmer von Faust gelangen, weil der Drudenfuß an einer Stelle nicht genau genug gezeichnet war. Und nur dank einer Ratte, die eine ins Innere gerichtete Spitze angenagt hatte, konnte Mephisto den Raum wieder verlassen.
3. Der sog. Satz des Pythagoras, wonach am rechtwinkligen Dreieck die Summe der Flächen der Kathetenquadrate gleich der Fläche des Hypotenusenquadrates ist. Dieser Satz ist inhaltlich schon früher in Mesopotamien bekannt gewesen. Die Zuordnung des Satzes zur Person des Pythagoras dürfte auf den Kommentar des Proklos zurückgehen.

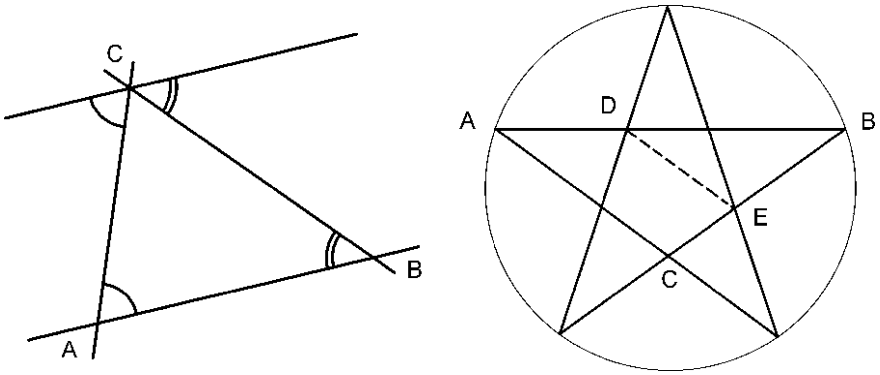


Abb. 4.3.5 Beweis für die Winkelsumme im Dreieck; Pentagramm, das Ordenszeichen der Pythagoreer

4. Die Pythagoreer der Frühzeit kannten die regulären Polyeder Würfel, Oktaeder und Dodekaeder, möglicherweise weitere. Im „Timaios“-Dialog Platons treten alle fünf regulären Polyeder auf, also auch Tetraeder und Isokaeder. Daher werden sie als Platonische Körper bezeichnet. Platon hatte sie den Grundbestandteilen der Welt zugeordnet, den Würfel der Erde, das Oktaeder der Luft, das Tetraeder dem Feuer, das Ikosaeder dem Wasser; der Weltschöpfer habe die ganze Welt in Form eines Dodekaeders angelegt.

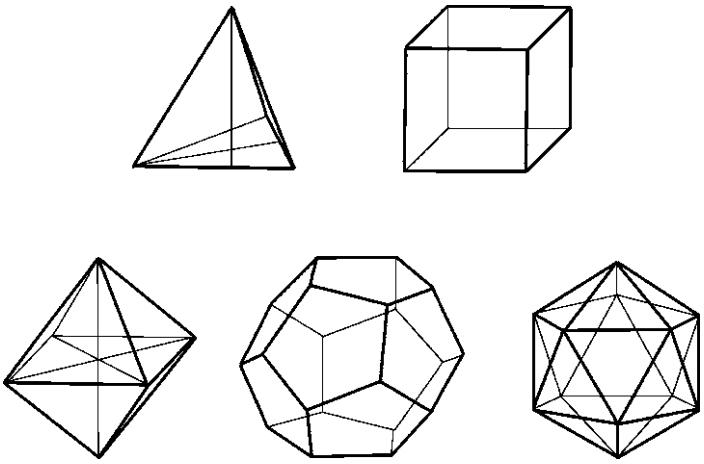


Abb. 4.3.6 Die fünf platonischen Körper: Tetraeder, Hexaeder (Würfel), Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder

Dem Ausgang der ionischen Periode gehört der den Pythagoreern nahe stehende Archytas (ca. 428–365 v. Chr.) an, Herrscher des süditalienischen Tarent, bei dem Platon in die Mathematik eingeführt worden ist. Mit ihm wird durch seine Musiktheorie die im ruhigen Bewusstsein von der Rationalität der Zahlen und der Welt verstandene „arithmetica universalis“ vollendet. So schien sich die pythagoreische Weltsicht aufs schönste zu bestätigen.

Und doch: Sogar innerhalb der pythagoreischen Schule wurde die niederschmetternde Entdeckung gemacht, dass es auch Größen gibt, die sich nicht rational ausdrücken lassen. Diese Entdeckung wird im Allgemeinen in Verbindung gebracht mit dem Pythagoreer Hippasos von Metapont (um 450 v. Chr.): Es gibt sich gegenseitig nicht messende (inkommensurable) Strecken. Strecken messen sich nicht, sind zueinander *inkommensurabel*, wenn die Länge der Strecken nicht ganzzahlige Vielfache der Länge einer als Einheitsstrecke aufgefassten dritten Strecke sind. Modern ausgedrückt: es gibt Strecken, deren Verhältnis ihrer Längen eine irrationale Zahl ist.

Die Entdeckung von Hippasos zerstörte die Grundauffassung von der „arithmetica universalis“ und damit die Grundlagen der pythagoreischen Weltsicht. Dazu passt die Legende, dass Hippasos diese katastrophale Entdeckung bekannt gemacht und damit die Geheimhaltungspflicht verletzt habe. Und als nun gar Hippasos bei einem Schiffbruch ums Leben kam, da war dies – wie es der Neupythagoreer Iamblichos empfand – eine notwendige und gerechte Strafe und hatte seine metaphysischen Gründe darin, ... *„daß alles Unausgesprochene und Unsichtbare sich zu verbergen liebt. Wenn aber eine Seele einer solchen Gestalt des Lebens begegnet und sie zugänglich und offenbar macht, so wird sie in das Meer des Werdens versetzt und von den unstäten Fluten umhergespült.“* (Zitiert nach [Becker/Hofmann 1951, S. 57])

Die Entdeckung der Inkommensurabilität dürfte, nach neueren Forschungsergebnissen, durch „Wechselwegnahme“ am Pentagramm gemacht worden sein und nicht am Quadrat, bei dem die Diagonale inkommensurabel zur Quadratseite ist (Näheres dazu in [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 35–37]).

Wir werden sehen, welche Konsequenzen der Zusammenbruch der „arithmetica universalis“ für die Entwicklung der griechischen Mathematik während der athenischen Periode hatte.

4.4 Mathematik in der athenischen Periode

Während des 5. und 4. Jahrhunderts hatte sich Athen die führende Stellung im Ensemble der griechischen Stadtstaaten erobert, politisch, ökonomisch, militärisch und als Zentrum der Wissenschaft. Unter Perikles (495?–429?) erlebte Athen Jahrzehnte der kulturellen Hochblüte. Der Peloponnesische Krieg (431–404) in der Auseinandersetzung Athens mit dem aristokratisch regierten Sparta schwächte Griechenland so sehr, dass es 338 unter makedonischen Einfluss geriet.

Abb. 4.4.1 Die Akropolis von Athen [Foto Alten]

Abb. 4.4.2 Der Parthenon – das berühmteste Beispiel griechischen Tempelbaus [Foto Alten]

Die Mathematik jener Periode wurde in erkenntnistheoretischer Hinsicht durch den Philosophen Platon (427–347 v. Chr.) geprägt. Platonische Grundauffassungen durchziehen die gesamte weitere Entwicklungsgeschichte der Mathematik, bis in unsere Gegenwart. Innermathematisch gesehen ging es um den Neuaufbau der Mathematik nach dem Zusammenbruch der „arithmetica universalis“, der von einigen Autoren geradezu als „Krise“ der griechischen Mathematik bezeichnet worden ist.

Die griechische Mathematik nahm eine spezifische Form an, die – nach einer Wortprägung des dänischen Mathematikhistorikers H.G. Zeuthen (1839–1920) – als „geometrische Algebra“ bezeichnet wird (dieser Begriff wird gelegentlich modifiziert).

Da beispielsweise $\sqrt{2}$ als Diagonale eines Quadrates geometrisch darstellbar, aber nicht als Zahl nach damaligem Zahlbegriff (weder als ganze Zahl noch als Verhältnis ganzer Zahlen) darstellbar ist, wurde die Behandlung des Irrationalen und algebraischer Probleme ins Geometrische verlagert.

Platon und die Mathematik

In Platons Philosophie spielt die Mathematik eine herausragende Rolle. Er hat Mathematik während seines Aufenthaltes bei Archytas von Tarent kennen gelernt. Mathematik galt ihm als Beispiel einer Wissenschaft, die ihre Ergebnisse durch bloßes Denken finden kann. In seinem System existieren „Stuhl“ oder „Dreieck“ objektiv als „Idee“. Bei der „Idee“ Dreieck gilt der Satz von der Winkelsumme im Dreieck wirklich und genau, während jedes aufgezeichnete Dreieck nur ein mehr oder weniger genauer „Abklatsch“ der Idee ist.

Abb. 4.4.3 Sophokles, Aristoteles, Platon (Griechenland 1998, 1978, 1998)

Bei allem Unverständnis des Abstraktionsvorganges, der zum Begriff führt, hat Platons Erkenntnistheorie dennoch und gerade deswegen die methodischen Grundlagen der Mathematik gestärkt, die, auf Definitionen und Voraussetzungen aufbauend, deduktiv die Beweise führt.

Platon legt im Dialog „Staat“ seinem ehemaligen Lehrer Sokrates die folgenden Worte in den Mund:

> *„Ich glaube nämlich, du* (gemeint ist der Gesprächspartner von Sokrates) *weißt, wie es diejenigen machen, die es mit Geometrie und Arithmetik und den verwandten Wissenschaften zu tun haben. Sie setzen das Ungerade und Gerade und die Figuren und die dreierlei Arten der Winkel und was damit verwandt ist, bei ihrem jeweiligen Beweisverfahren voraus und machen, als wären sie vollständig darüber im klaren, es einfach zur Grundlage ihrer Beweise, ohne sich irgend verpflichtet zu fühlen, sich selbst oder anderen noch Rechenschaft darüber zu geben, da es ja für jeden von selbst einleuchtend sei; vielmehr schreiten sie von diesem Ausgangspunkt alsbald zu der weiteren Ausführung fort und erreichen schließlich folgerecht denjenigen Punkt, auf dessen Klarstellung sie es abgesehen hatten. (. . .)*
> *Und also wohl auch, daß sie sich der sichtbaren Gestalten bedienen und immer von diesen reden, während den eigentlichen Gegenstand ihres Denkens nicht diese bilden, sondern jene, deren bloße Abbilder diese sind. Denn das Quadrat an sich ist es und die Diagonale an sich, um derentwillen sie ihre Erörterungen anstellen, nicht eben dasjenige, welches sie durch Zeichnung entwerfen, und so auch in den weiteren Fällen; eben die Figuren selbst, die sie bildend oder zeichnend herstellen, von denen es auch wieder Schatten und Bilder im Wasser gibt, dienen ihnen als Bilder, mit deren Hilfe sie eben das zu erkennen suchen, was niemand auf andere Weise erkennen kann als durch den denkenden Verstand.“*
> (Zitiert nach [Becker 1954, S. 95f.])

Und wozu dient Mathematik? Darüber sagt Platon im „Staat“ im Dialog zwischen Sokrates und Glaukon:

> *„Die Rechen- und Zahlenlehre hat es zur Gänze mit den Zahlen zu tun?“*
> *„Gewiß!“*
> *„Die Fächer führen also zur Wahrheit?“*
> *„In reichstem Maße“*
> *„Also gehören sie zu den Wissenschaften, die wir suchen. Der Kriegsmann muß sie wegen der Truppenabteilungen lernen, der Philosoph, weil er aus der Welt des Werdens heraustauchen und die Welt des Seins erfassen muß – andernfalls er niemals ein wirklicher Rechner wird. (. . .)*

Dann muß man, mein Glaukon, das Fach gesetzlich verankern und die zukünftigen Träger der höchsten Staatsgewalt dazu bringen, Mathematik zu studieren, aber nicht nur nach Art eines Praktikers, sondern solange, bis sie durch reines Denken zur Schau des Wesens der Zahlen vordringen, nicht wegen eines Verkaufes oder Kaufes, wie es Händler und Kaufleute machen, sondern wegen des Krieges und wegen der Seele, damit sie sich leicht vom Werden zu Wahrheit und Wesen wende. (. . .)
Hast du nun auch dies bedacht: Die mathematisch Begabten sind auch in allen anderen Wissenschaften geradezu scharfsinnig, ja selbst die Schwerfälligen haben, wenn schon sonst keinen Nutzen, so doch den Vorteil, eine schnellere Auffassung zu erlangen als bisher, wenn sie im Rechnen unterrichtet und geübt werden. (. . .)
Soweit sie (die Geometrie) *sich auf das Kriegswesen bezieht, ist sie klarerweise brauchbar; denn für das Aufschlagen des Lagers, die Besetzung von Plätzen, das Sammeln und Entfalten des Heere und für alle anderen Bewegungen des Heeres im Kampf und Marsch bedeutet es viel, ob man von Geometrie etwas versteht oder nicht. (. . .)*
Also ist die Geometrie brauchbar, wenn sie zur Schau des Seins zwingt, andernfalls nicht.“
[Platon, Staat, 2000, S. 341–344]

Desinteresse und Verachtung bezüglich der Leistungen der Mathematik für praktische Zwecke entsprechen Platons Verbundenheit mit der Aristokratie. Es ist daher in Platons Denkweise nur folgerichtig, wenn aus der Mathematik mechanische Hilfsvorstellungen und Geräte verbannt werden. In der platonischen Schule – und in großen Teilen der griechisch-hellenistischen Mathematik – waren nur Zirkel und Lineal als Konstruktionsmittel zugelassen. Zwar sind diese auch mechanischer Art, aber sie liefern die Vorstellung der beiden vollkommenen „göttlichen“ Kurven, des Kreises und der Geraden.

In diesem Zusammenhang ist ein Bericht des römischen Historikers Plutarch (geb. ca. 46, gest. nach 119 n. Chr.) zur Ansicht Platons über mechanische mathematische Hilfsmittel von Interesse:

„Platon selbst tadelte die Leute um Eudoxos und Archytas und Menaichmos, weil sie es unternommen hatten, die Würfelverdoppelung auf mechanische Einrichtungen zurückzuführen, wie wenn es nicht möglich wäre, für den, der es überhaupt versucht, rein theoretisch zwei mittlere Proportionalen zu finden. Dadurch wird nämlich das Gute an der Geometrie zugrunde gerichtet und zerstört, indem diese sich wieder zum Sinnlichen zurückwendet, statt sich nach oben zu erheben und die ewigen, unkörperlichen Bilder zu erfassen, bei denen verweilend Gott ewig Gott ist.“
(Zitiert in [v. d. Waerden 1966, S. 267f.])

Die dogmatische Einschränkung auf Zirkel und Lineal hatte auch gravierende Folgen für die griechische Astronomie. Aus der göttlichen Vollkommenheit der Planetenbahnen – Erde im Mittelpunkt, Sonne ebenfalls Planet – hat Platon die Forderung abgeleitet, ein Weltsystem zu ersinnen, das nur Kreisbahnen enthält, dies natürlich in möglichst guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Allenfalls mögliche Abweichungen könnten eintreten, seien doch die existierenden Planeten nur mehr oder weniger schlechte Kopien der vollkommenen Bewegungen in der Welt der Ideen.

Diese Aufgabe ist von dem auch als Mathematiker herausragenden Eudoxos (408?–355?) in seiner mathematisch höchst genialen *„Theorie der homozentrischen Sphären“* weitgehend gelöst worden. Später hat sich der überragende hellenistische Astronom Ptolemaios (85?–165? n. Chr.) der Forderung nach Präzisierung mit Erfolg angenommen. Das Dogma von den kreisförmigen Planetenbahnen blieb noch eineinhalb Jahrtausende bestehen. Selbst Copernicus und Galilei hielten an der Kreisbahn fest; erst Kepler fand heraus, dass die Planetenbahnen ellipsenförmig sind.

Theorie der Irrationalitäten

Das andere Zentralproblem während der athenischen Periode bestand in der Suche nach einem Ausweg aus dem Zusammenbruch der *„arithmetica universalis“* bzw. nach der Entdeckung des Inkommensurablen. Platon berichtet im Dialog *Theaitetos*, der Mathematiker Theodoros von Kyrene (gest. um 390 v. Chr.) habe für die Irrationalität der Quadratwurzeln aus 3, 5, 6, 7, 8, 10, ..., 17 Beweise angegeben. Die Szene im *Theaitetos* spielt vor dem Jahre 399 in Athen. Theodoros tritt dort als hoch betagter Gelehrter auf.

> *„Theodoros hier zeichnete uns etwas aus der Lehre von den Quadraten und bewies für die Quadrate von drei und fünf Fuß Inhalt, daß die der Seitenlänge nach dem Quadrate von einem Fuß Inhalt nicht kommensurabel seien, und so zog er jedes einzelne heran bis zum siebzehnfüßigen Quadrat. Bei diesem hielt er ganz zufällig inne.“*
> [Platon. Theaitetos 1910, S. 117]

Theodoros bewies also, dass, modern ausgedrückt, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{17}$ irrational sind. Es fällt auf, dass die Irrationalität von $\sqrt{2}$ gar nicht erwähnt wird und dass er bei $\sqrt{17}$ „zufällig“ innehielt. Es gibt verschiedene Erklärungsversuche für seine Methode und warum er bei $\sqrt{17}$ innehielt [Anderhub 1941].

Nachdem der ältere Theodoros seinen Bericht gegeben hat, lässt Platon den jüngeren Theaitetos von Athen (415–368) seine Grundidee vortragen. Die Lesart der Stelle ist allerdings umstritten.

> *„Nun fiel es uns* (Theaitetos und einem anderen athenischen Jüngling, Wg) *bei, da ja die Quadrate in ihrer Menge unendlich schienen, zu versuchen, sie in einem gemeinsamen Begriffe zusammenzufassen, um mit ihm all diese Quadrate bezeichnen zu können (...)*

Alle Zahlen schieden wir in zwei Klassen: in solche, die dem Produkt aus gleichen Zahlen entsprechen; sie verglichen wir nach ihrer Gestalt mit dem Quadrat und nannten sie quadratisch und gleichseitig (...) Die Zahlen dazwischen aber, zu denen die Drei und die Fünf und jede gehört, die dem Produkt aus gleichen Zahlen nicht entsprechen kann, sondern dem Vielfachen einer größeren Zahl und einer kleineren oder einer kleineren und einer größeren, so daß in ihrer Darstellung immer eine größere und eine kleinere sie umschließt, verglichen wir mit der länglichen Gestalt des Rechtecks und nannten sie oblonge Zahlen (...) Alle Linien, die ein nach Seiten und Flächen kommensurables Quadrat bilden, bestimmten wir als Längen; die aber ein ungleichseitiges Vieleck bilden, als solche Quadrate, die an Länge mit jenen nicht kommensurabel, jedoch der Fläche nach, deren Quadrat sie bilden. Und mit den Kubikzahlen ist es auch ähnlich.“
[Platon. Theaitetos 1910, S. 117f.]

Hier kündigt sich ein Programm zum Studium und zur Klassifizierung der (quadratischen) Irrationalitäten an, das z. B. auch Wurzelschachtelungen wie

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{a^2 - b^2}}$$

enthält, natürlich in geometrischer Form mit den Methoden der geometrischen Algebra. Diese höchst diffizilen Ergebnisse von Theaitetos sind eingegangen in das Buch X der „Elemente“; es erfordert gerade auch für den heutigen Leser wegen der ungewohnten Form große Anstrengungen bei der Lektüre. Im Buch XIII werden Ergebnisse über spezielle Klassen quadratischer Irrationalitäten auf das Studium regulärer Polyeder angewandt. Das Buch XIII endet mit dem Nachweis, dass es genau fünf reguläre Polyeder gibt: Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Das mathematische Hauptwerk der Antike endet also gewissermaßen mit einem Satz, der das Weltbild von Platon stützt.

Wie ist mit dem Widerspruch zu verfahren, dass es Strecken mit Längen gibt, die keine Repräsentation durch Zahlen (im Sinne des griechischen Zahlbegriffes) haben? Der Ausweg bestand darin, algebraische Operationen (nach unserem Empfinden) in Form geometrischer Konstruktionen durchzuführen; deren Existenz ist gesichert. Ein einfaches Beispiel:

Die binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (unsere Schreibweise) erscheint in der Form: *„Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Quadrat über der ganzen Strecke den Quadraten über den Abschnitten und zweimal dem Rechteck aus den Abschnitten zusammen gleich.“* [Euklid, Buch II, Prop. 3]

Das Kernstück der geometrischen Algebra ist die Methode der Flächenanlegung (ausführlich in [Alten et al. 2003], [Wußing 1965]). Sie gestattet die geometrische Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen. Der einfachste Fall ist der Fall der sog. parabolischen Flächenanlegung zur Lösung linearer Gleichungen vom Typ $ab = cx$ (vgl. Abb. 4.4.4b):

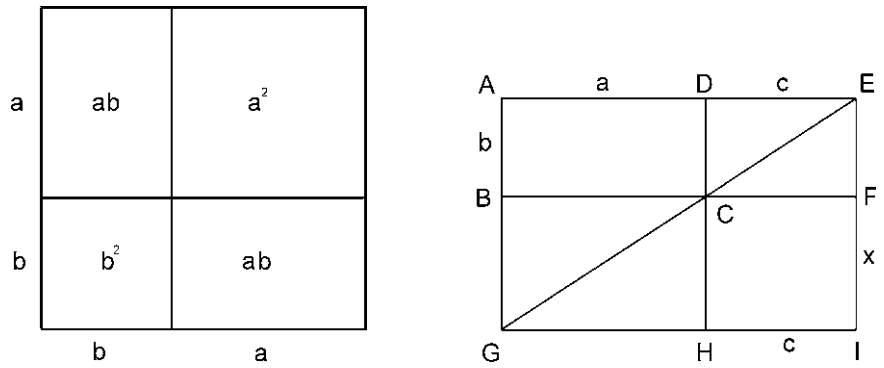


Abb. 4.4.4 Veranschaulichung der binomischen Formel (li), Figur zur parabolischen Flächenlegung (re)

Konstruiere das Rechteck $ABCD$ mit den Seiten der Länge a und b. Lege an CD das Rechteck $CDEF$ mit den Seiten der Längen b und c an. Dann schneidet die Verlängerung der Diagonalen CE die Verlängerung von AB in G. Die Ergänzung zum Rechteck liefert dann das Rechteck $CFIH$ mit den Seiten der Längen c und x und dem Inhalt cx.

Im Buch VI der „Elemente“ treten Flächenanlegungen auf, bei denen die zu konstruierende Fläche einen Flächeninhalt besitzt, der um eine gegebene Fläche F kleiner oder größer ist als eine vorgegebene Fläche: Flächenanlegung mit Defekt, Mangel (griech. élleipsis) und Flächenanlegung mit Exzess, Überschuss (griech. hyperbolé). Die Flächenanlegungen mit Defekt bzw. Überschuss entsprechen jeweils der Auflösung der Gleichungssysteme vom Typ $x \cdot y = F$, $x + y = 2a$ bzw. $x \cdot y = F$, $x - y = 2a$. Demnach liegen die parabolischen Flächenanlegungen zwischen den elliptischen und den hyperbolischen Flächenanlegungen. – Hieraus sind später bei Apollonios von Perge (262?–190 v. Chr.) in seiner Kegelschnittlehre die Bezeichnungen Ellipse, Parabel und Hyperbel entstanden.

Mit Hilfe der Flächenanlegungen können die quadratischen Gleichungen

$$x^2 = a(a - x)\,, \quad x^2 = ab\,, \quad x(2a - x) = F \quad \textit{und} \quad x(x - 2a) = F$$

gelöst werden. Die Interpretation dieser Art von Konstruktionen als geometrische Algebra ist allerdings in neuerer Zeit umstritten [Knorr 1989].

Eudoxos

Schließlich soll noch die Leistung von Eudoxos (408?–355?) bei der begrifflich-arithmetischen Bewältigung des Problems des Irrationalen hervorgehoben werden. Eudoxos von Knidos kann mit einer gewissen Berechtigung als der bedeutendste Mathematiker seiner Zeit bezeichnet werden. Darüber hinaus

hat er Bedeutendes als Astronom, als Arzt, als Rhetor und als Geograph geleistet. In Kleinasien, in Cyzicus, begründete er eine eigene wissenschaftliche Schule. Im Scherz nannten ihn seine Freunde Endoxos, den Berühmten.

Eudoxos schuf eine Größenlehre, die auch irrationale Größen einbezog, ohne allerdings bis zum Begriff der Irrationalzahl vordringen zu können. War bisher der Begriff der Proportion an die Voraussetzung gebunden, dass die im Verhältnis stehenden Zahlen ein gemeinsames Maß besitzen, also kommensurabel sind, so befreite Eudoxos sich in einem kühnen, gedanklich äußerst scharfsinnigen Schritt von dieser Einschränkung. Eine entsprechende, weitreichende Formulierung ist in Euklids „Elementen“ im Buch V zur Grundlage der Proportionenlehre auch für inkommensurable Größen geworden.

> *„Man sagt, daß Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind . . . die dasselbe Verhältnis habenden Größen sollen in Proportion stehend heißen.“*
> [Euklid, Elemente Buch V, Def. 5]

Diese Definition der Proportion benötigt ersichtlich keinerlei Voraussetzungen über die Kommensurabilität der Größen. Zugleich ist sie geeignet, alle bekannten Sätze über Proportionen beweisen zu können, eine Leistung, die es gestattet, die Verbindung zwischen der geometrischen Algebra, der Proportionenlehre, der Ähnlichkeitslehre einerseits und einer das Inkommensurable, Irrationale umfassenden Größenlehre andererseits in mathematisch korrekter Weise herzustellen. Doch war es noch ein weiter Weg bis zum Begriff der Irrationalzahl.

In unmittelbarem Zusammenhang damit hat Eudoxos bei der Grundlegung einer Art Vorstufe der späteren Integralrechnung Pionierarbeit geleistet. Seine Methode erhielt im 17. Jahrhundert, während der Suche nach übergreifenden, weitreichenden infinitesimalen Methoden die vielleicht etwas unglückliche Bezeichnung „Exhaustionsverfahren“ (von lat. exhaurire, ausschöpfen). Ihr liegt die Vorstellung zugrunde, den Flächeninhalt krummlinig begrenzter Flächen mit ein- bzw. umbeschriebenen Polygonen mit beliebig guter Annäherung „ausschöpfen“ zu können. (Die Annäherung durch umbeschriebene Polygone wird auch als „Kompressionsmethode“ bezeichnet.) Eudoxos stützte sich auf einen Satz, der die „beliebig gute Annäherung“ (Vorstufe des Konvergenzbegriffes) an eine zu messende Größe fixiert:

> *„Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muß einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.“* [Euklid. Elemente Buch X, Prop. 1]

Diesem Satz und der Eudoxischen Größenlehre liegt ein Axiom oder Postulat zugrunde, dem später Archimedes unter Berufung auf Eudoxos die folgende Fassung gab:

> *„Die größere von zwei gegebenen Größen, sei es Linie, Fläche oder Körper, überragt die kleinere um eine Differenz, die, genügend oft vervielfacht, jede der beiden gegebenen Größen übertrifft.“*
> [Archimedes 1922, S. 9]

Mit diesen Ansätzen zur Behandlung von geometrisch existierenden Grenzwerten, die auf einem exakten, indirekten Beweis durch „Ausschöpfung“ beruhen, schuf Eudoxos gedankliche Möglichkeiten, die bereits in der darauf folgenden, der hellenistischen Periode, insbesondere bei Archimedes, ihre Fruchtbarkeit offenbarten und noch bis weit in die Mathematik der Neuzeit hinaufreichen sollten.

4.5 Mathematik in der hellenistischen Periode

Nach der Ermordung (336) seines Vaters, des makedonischen Königs Philipp II., übernahm Alexander III. (der Große, 356–323) die Regierungsgewalt. Auf seinen Eroberungszügen brachte er ein riesiges Territorium unter seine Kontrolle; es umfasste das makedonische Stammland, Griechenland, Teile des Balkans bis zur Donau, Kleinasien, Ägypten, Mesopotamien, große Teile Mittelasiens, Teile des westlichen Indien. Doch war dieses riesige Reich politisch und ökonomisch instabil; nach dem unerwarteten Tod durch fieberhafte Erkrankung Alexanders (323) zerfiel es in Nachfolge-(Diadochen)-Staaten.

Aristoteles war Erzieher Alexanders gewesen; daher rührt dessen Neigung zur griechischen Kultur. Folgerichtig wurden griechische Kultur und Lebensweise in Alexanders Riesenreich in den herrschenden Kreisen Mode und verschmolzen teilweise mit den östlichen Kulturen. Man spricht von hellenistischer Kultur und Wissenschaft. Alexander selbst hatte der Vision von einer zu schaffenden einheitlichen Kultur symbolischen Ausdruck verliehen, indem er 327 die baktrische Fürstentochter Roxane geheiratet hatte.

Es gibt viele Legenden um Alexander, z. B. die Erzählung vom gordischen Knoten. Auch soll er sich in einer Art Taucherglocke unter Wasser aufgehalten haben. An günstiger Stelle, westlich vom Nildelta, wurde 332/331 Alexandria als eine der zahlreichen „Alexanderstädte“ gegründet. Das ägyptische Alexandria wurde zur glanzvollen Hauptstadt des ägyptischen Ptolemäerreiches, einem der Nachfolgestaaten von Alexanders Weltreich. Nach dem Sieg, 30 v. Chr., des römischen Feldherrn Octavianus über seinen Konkurrenten Antonius und über Kleopatra, die letzte Herrscherin Ägyptens, wurde Ägypten römische Provinz.

Alexandria wurde planmäßig mit rechtwinklig sich kreuzenden Straßen angelegt. Zu Beginn unserer Zeitrechnung dürften dort laut Schätzungen etwa eine Million Menschen gewohnt haben. Alexandria war nach Rom die zweitgrößte Stadt des Römischen Weltreiches.

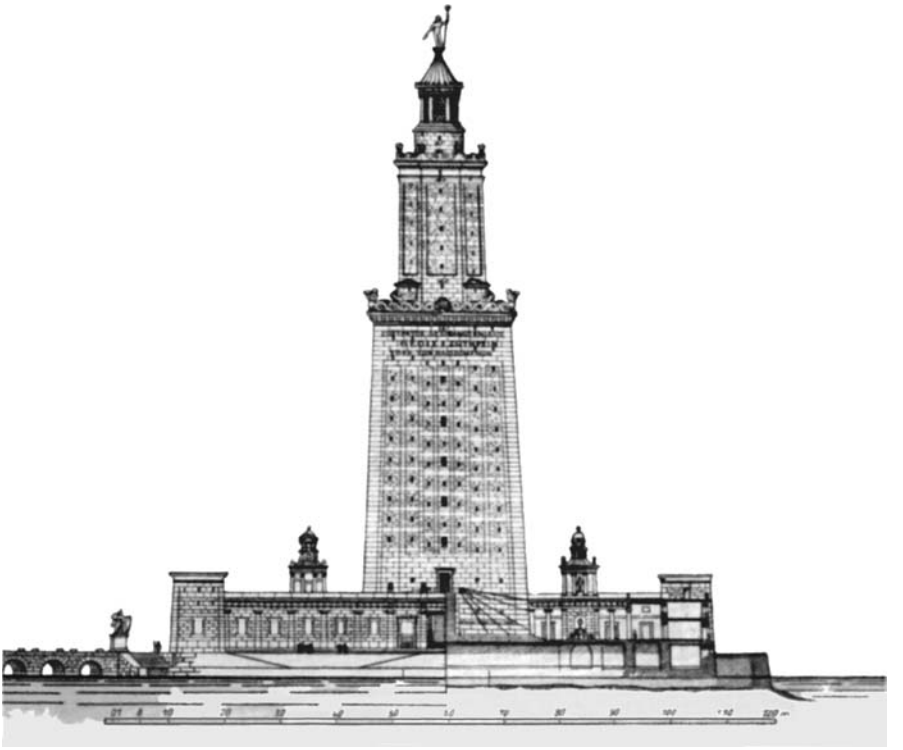


Abb. 4.5.1 Der Pharos von Alexandria – eine Rekonstruktion [H. Thiersch: Antike, Islam und Okzident, Leipzig 1909]

Auf einer Alexandria vorgelagerten Insel wurde von 299 bis 279 v. Chr. ein Leuchtturm von ca. 110 m Höhe erbaut; der Turm wurde nach seinem Standort selbst „Pharos“ genannt. Dieses Wahrzeichen Alexandrias galt schon in der Antike als eines der Weltwunder. Der Pharos wurde im 14. Jahrhundert durch Erdbeben zerstört.

Alexandria wurde das wissenschaftlich-kulturelle Zentrum der hellenistischen Welt. In Athen gab es die Platonische Akademie und die Aristotelische Schule der Peripatetiker, später die Schule der Stoa und den Garten Epikurs – aber Alexandria hatte das Museion (Sitz der Musen). Von den Ptolemäern als wahrscheinlich erstes staatlich gegründetes Forschungs- und Lehrinstitut ins Leben gerufen besaß es Hörsäle, Arbeits- und Speiseräume, eine Sternwarte, botanische und zoologische Gärten und eine systematisch zusammengetragene, ganz außerordentliche Bibliothek von ca. 400 000 Papyrusrollen. Kopisten waren angestellt, um Kunst und Wissen der Zeit zu bewahren. Auch Teile der Bibliothek von Aristoteles wurden vom Museion übernommen. Unglücklicherweise wurde die Bibliothek in den kriegerischen Auseinandersetzungen mit den Römern (47 v. Chr.) vernichtet – ein unersetzlicher Verlust für die

Abb. 4.5.2 Die Pompejus-Säule im Serapeum von Alexandria [Foto Alten]

Kulturgeschichte der Menschheit. Von rund 300 v. Chr. bis rund 150 n. Chr., also nahezu ein halbes Jahrtausend, haben die bedeutendsten damaligen Mathematiker mit dem Museion und Alexandria in Verbindung gestanden. Viele wirkten dort oder haben dort studiert, z. B. Euklid, Eratosthenes, Archimedes, Apollonios, Heron, Ptolemaios, Diophant. Der alexandrinische Astronom und Mathematiker Sosigenes wurde vom Imperator G. Iulius Caesar nach Rom berufen, um eine Kalenderreform nach dem Vorbild des ägyptischen Kalenders durchzuführen.

Dem Kreis der alexandrinischen Mathematiker gehörten neben Eratosthenes von Kyrene vermutlich Nikomedes (um 250 v. Chr.) und Diokles (um 200 v. Chr.) an, die Kurven zur zeichnerischen Lösung des Problems der Würfelverdoppelung angaben. Dionysodoros (2. Jh. v. Chr.) beschäftigte sich mit Kugelteilungsaufgaben. Hypsikles (2. Jh. v. Chr.) studierte Oberflächen und Volumina halbregulärer Körper und schrieb das Ergänzungsbuch XIV zu den „Elementen“. Zenodoros (um 180 v. Chr.) bewies, dass von je zwei regelmäßigen Polygonen das mit den meisten Winkeln den größeren Flächeninhalt besitzt. In diesen Zusammenhang gehören noch weitere Sätze, z. B.: Haben ein Kreis und ein reguläres Polygon den gleichen Umfang, so ist der Kreis grösser. Aus diesen und anderen vorbereitenden Sätze (vgl. ausführlich z. B. [v. d. Waerden 1966, S. 444f.]) schließt Zenodoros, dass von allen Figuren mit gleichem Umfang der Kreis die größte Fläche hat. Analog kommt er zu dem Schluss, dass von allen Körpern gleicher Oberfläche die Kugel das größte

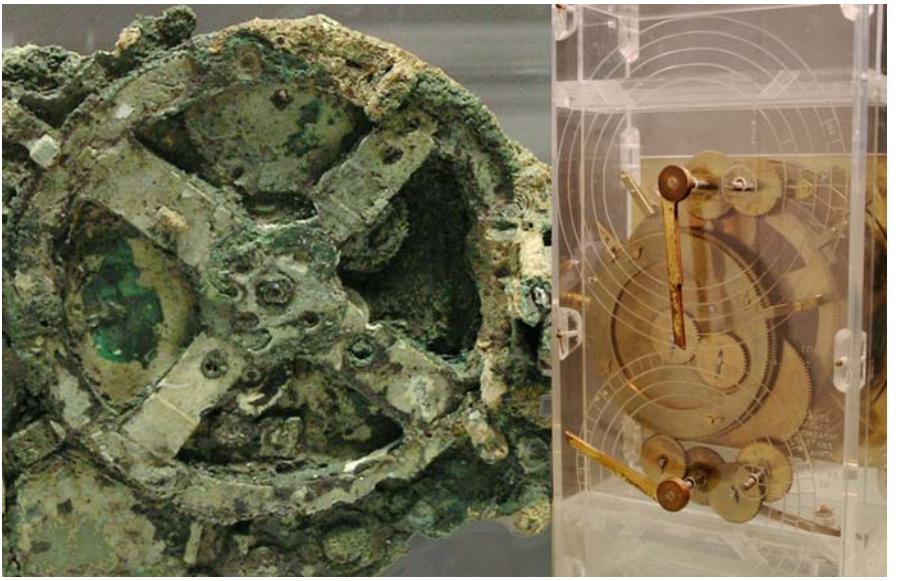


Abb. 4.5.3 Zum Gerät von Antikythera: Großes Bruchstück aus korrodierter Bronze (Nationales Archäologisches Museum, Athen, n^0 15987) [Wikimedia Commons, GNU FDL]; Rekonstruktion (Astronomisch Physikalisches Kabinett, Kassel) [Foto Wesemüller-Kock]

Volumen hat. Der Satz über die Flächen gilt nur, wenn unter „Figuren“ nur Kreise und Polygone verstanden werden. Hier wurden schon isoperimetrische Probleme aufgegriffen, die erst viel später mit den Methoden der Variationsrechnung bearbeitet und gelöst werden konnten (vgl. Kap. 9.3).

Technik und Astronomie – Antikythera

Im Jahr 1900 bargen Taucher eine Ansammlung von korrodierter Bronze in einem verrotteten Holzkasten von der Größe eines Schuhkartons. Er stammte aus einem 80 v. Chr. vor der griechischen Insel Antikythera gesunkenen Schiff und landete im Nationalmuseum von Athen. 1902 wurden Reste von Zahnrädern in dem Fund festgestellt. Erst weitere Untersuchungen (Price, Yale University) seit 1958 und Röntgenaufnahmen 1971 gaben die Funktion des Gerätes mit vielen bronzenen Zahnrädern preis. Röntgen-Schichtaufnahmen im Rahmen des *Antikythera Mechanism Research Projects*[1] im Jahr 2005 lie-

[1] Das Antikythera Mechanism Research Project konstituierte sich im Jahr 2005. Es besteht aus zwei Teams, dem Team von Hewlett-Packard und dem sog. Core-Team. Ein 7,5 Tonnen schwerer Computer-Tomograph wurde dafür in das Athener Nationalmuseum gebracht und für die Untersuchungen eingesetzt. Die Zeitschrift „Nature“ veröffentlichte Ergebnisse im November 2006.

ßen die restlichen auffindbaren Inschriften auf den Zahnrädern und Platten sichtbar werden. Es handelt sich um ein astronomisches Gerät, das Planetenbahnen nachvollzog. Die Inschriften sind zu 95% entziffert, und die Untersuchungsergebnisse wurden im Rahmen eines Symposions im Jahr 2006 vorgestellt. 30 Zahnräder (dazu sieben, die als fehlend vermutet werden) zum Teil mit 60 Grad ineinander greifend, eine Art Differentialgetriebe (wie es erst im 19. Jahrhundert n. Chr. als Patent angemeldet wurde) ließ bis auf 14 Minuten genau Sonnen- und Mondfinsternisse vorhersagen, auch die Auf- und Untergänge der damals bekannten Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn. Es vereinigte verschiedene Kalendarien und ist als eine Sensation bezüglich der Kenntnisse und technischen Fertigkeiten der griechischen Antike anzusehen. Nachbauten beweisen die Funktionsfähigkeit des Gerätes.

Euklid als Mathematiker

Viele Unklarheiten gibt es um Euklid und seine „Elemente“ (griech. stoicheia). Schon die Lebensdaten sind umstritten. Möglicherweise hat er etwa von 340 bis 270 v. Chr. gelebt und wurde dann um 300 von Athen an das Museion in Alexandria berufen. Eine andere Version nimmt an, dass er gegen Ende

Abb. 4.5.4 Euklid als Lehrmeister nach [Bildarchiv der Universität Leipzig]

des 3. Jahrhunderts in Alexandria gelebt und gewirkt hat. Es gibt sogar die – überraschende – Meinung, dass „Euklid“ nur die Bezeichnung für eine Gruppe von anonym gebliebenen Mathematikern verkörpert, die die „Elemente“ auf Grund von Vorarbeiten zusammengestellt hat. Heute wird weitgehend angenommen, dass Euklid um 300 v. Chr. gelebt hat (ausführlich in [Schreiber 1987], [Schönbeck 2003], [Steck 1981]).

Nichtsdestoweniger existieren einige Anekdoten um und über Euklid. Eine berühmte lautet: Sein König habe sich erkundigt, wie man auf einem kürzeren Weg zum Verständnis der Geometrie gelangen könne, ohne die damit verbundene Mühsal. Euklid soll geantwortet haben, dass es keinen Königsweg zur Geometrie gebe.

Wer auch immer die „Elemente“ niedergeschrieben hat, es ist ein Meisterwerk didaktischer Art und beruht auf Arbeiten von Vorgängern. Auch ist die geistige Verwandtschaft mit Platon unverkennbar, da kaum auf Anwendungen Bezug genommen wird. Die streng logische Gliederung und die Gründung des Werkes auf Axiome und Postulate dürfte von Aristoteles und seinen Abhandlungen zur Logik beeinflusst worden sein.

Die „Elemente“ bestehen aus 13 „Büchern“ (dies entspricht Kapiteleinteilungen). In späterer Zeit sind noch zwei weitere Bücher hinzugekommen: Buch XIV von Hypsikles (2. Jahrhundert v. Chr.) und Buch XV von Damaskios (6. Jahrhundert n. Chr.).

Die folgende Tabelle soll einen Überblick über die „Elemente“ vermitteln sowie über den Inhalt der Bücher, soweit dieser einigermaßen sicher ist.

Die Elemente des Euklid

Buch	Stoff	Inhalt	Ursprung
I	*planimetrische*	Vom Punkt zum pythagoreischen	ionische
	Bücher	Lehrsatz	Periode
II		Geometrische Algebra, Flächenlehre	
III		Kreislehre	
IV		ein- und umbeschriebene Regel-	insbesondere
		mäßige Vielecke	Pythagoreer
V		Ausdehnung der Größenlehre	Eudoxos
		auf Irrationalitäten	
VI		Ähnlichkeitslehre	Eudoxos
VII	*zahlentheoretische*	Teilbarkeitslehre, Primzahlen	Pythagoreer
	Bücher		
VIII		Quadrat- und Kubikzahlen,	
		geometrische Reihen	
IX		Lehre von gerade und ungerade	
X		quadratische Irrationalitäten	Theaitetos
XI	*stereometrische*	elementare Stereometrie	ionische
	Bücher		Periode
XII		Exhaustionsmethode	Eudoxos
XIII		Reguläre Polyeder	Theaitetos

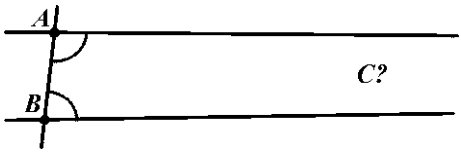


Abb. 4.5.5 Figur zur ursprünglichen Fassung des sog. Parallelenpostulates

Euklid baut sein Werk auf Definitionen, Postulaten und Axiomen auf; es folgen Lehrsätze mit Beweisen, Problemstellungen und Hilfssätzen. Die Definitionen der Grundelemente der Geometrie – Punkt, Linie, Strecke, Fläche – sind anschaulicher Art. So heißt es: *„Ein Punkt ist, was keine Teile hat. Eine Linie (ist) breitenlose Länge.“* [Euklid. Elemente Buch I, Def. 1–2]

Dies sind nicht eigentlich Definitionen, sondern Beschreibungen. Wer z.B. noch nicht den Begriff des Punktes aus der Anschauung mittels Abstraktion gewonnen hat, kann ihn aus dieser Definition auch nicht erwerben. Die weitaus größere Zahl der Definitionen aber ist durchaus streng; Eigenschaften werden maßgebend für die Definition. Beispielsweise:

> *„Von den vierseitigen (geradlinigen) Figuren ist ein Quadrat jene, die gleichseitig und rechtwinklig ist. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.“*
> [Euklid. Elemente Buch I, Def. 22–23]

Dann folgen fünf Postulate (heutzutage werden Postulat und Axiom als weitgehend synonym verstanden). Es handelt sich um geometrische Festlegungen. In den ersten drei wird postuliert, dass man jeden Punkt mit jedem durch eine Strecke verbinden, jede begrenzte Linie geradlinig zusammenhängend verlängern und Kreise mit beliebigem Radius und Mittelpunkt schlagen darf. Das vierte Postulat legt fest, dass alle rechten Winkel gleich sind. Das fünfte postuliert

> *„... daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.“*
> [Euklid. Elemente Buch I, Post. 5]

Mit diesem Postulat ist die Existenz höchstens einer Parallelen (immer zu einer vorgegebenen Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt) fixiert; die Existenz wenigstens einer Parallelen wird von Euklid bewiesen. Damit ist die Existenz genau einer Parallelen gesichert.

Das fünfte Postulat erhielt wegen dieses Zusammenhanges später die Bezeichnung „Parallelenpostulat“ (oder sogar Parallelenaxiom). Es wurde bereits in der Antike und in der muslimischen Welt viel diskutiert, weil es nicht

dasselbe Maß an Selbstverständlichkeit und Anschaulichkeit besitzt wie die anderen vier. Man hat daher seit der Antike versucht, dieses Postulat als Theorem zu beweisen. Man weiß seit der Entdeckung nichteuklidischer Geometrien im 19. Jahrhundert, dass dies nicht möglich ist; umso mehr ist der Weitblick von Euklid zu bewundern (vgl. [Engel/Stäckel 1895]).

Übrigens gibt es bei Euklid noch keine Axiome oder Postulate der Anordnung; sie werden implizit anschaulich benutzt. Hier schuf erst M. Pasch (1843–1930) begriffliche Klarheit.

Den fünf geometrischen Postulaten folgen bei Euklid logische Axiome. Sie stehen deutlich unter dem Eindruck der etwa zur gleichen Zeit durch Aristoteles vollzogenen Durchbildung der formalen Logik. In späteren Texteditionen treten neun Axiome auf; von Euklid selbst stammen die folgenden:

> *„Was demselben gleich ist, ist auch unter einander gleich. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich. ... Was einander deckt, ist einander gleich.“*(Dieses Axiom ist Grundlage der Kongruenzgeometrie) *„Das Ganze ist größer als der Teil.“*
> [Euklid, Elemente Buch I, Ax. 1, 2, 7, 8]

Der berühmte Satz, dass es mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen, also dass es unendlich viele Primzahlen gibt, wird in Buch IX, Prop. 20 bewiesen.

Die „Elemente“ stellen das vielleicht einflussreichste Werk der gesamten mathematischen Literatur dar. Bis in die nahe Vergangenheit wurden sie immer wieder studiert und sogar im Elementarunterricht an allgemeinbildenden Schulen benutzt.

Die „Elemente“ haben in ihrer Bedeutung und inneren Schönheit und ihrer meisterhaften Darlegung des Stoffes immer wieder Bewunderung hervorgerufen. Beispielsweise sei eine Äußerung von Goethe wiedergegeben, dem nun gerade nicht ein inniges Verhältnis zur Mathematik nachgesagt werden kann:

> *„Die Elemente des Euklid stehen noch immer als ein unübertroffenes Muster eines guten Lehrvortrages da; sie zeigen uns in der größten Einfachheit und notwendigen Abstufung ihrer Probleme, wie Eingang und Zutritt zu allen Wissenschaften beschaffen sein sollten.“*
> (Zitiert bei [Schönbeck 2003, S. 16])

Man würde einem großen Irrtum unterliegen, wenn man Euklid lediglich als Kompilator und herausragenden Didaktiker einordnen würde. Ganz im Gegenteil: Euklid hat weitreichende eigene Forschungsergebnisse hervorgebracht, in Mathematik und Physik. Große Teile sind freilich verloren gegangen oder nur in arabischer Übersetzung überliefert [Schönbeck 2003]. Es seien wenigstens einige Titel genannt: *Über die Zerlegung von Figuren*, *Porismen* (d. h. Sätze, mit denen man etwas finden kann), *Pseudaria* (über Trugschlüsse). Die *Dedomena* (Gegebenheiten) untersuchen, welche Teile einer Figur und deren Beziehungen zueinander – Größe, Lage, usw. – bestimmt

sind, wenn andere Teile nach Größe, Lage, usw. vorgegeben sind. Eine Kegelschnittlehre Euklids ist verloren gegangen, da sie durch die spätere, ausführlichere des Apollonios verdrängt wurde. Ferner gibt bzw. gab es Schriften Euklids zur mathematischen Physik: *Optika* (Perspektive), *Katoptrik* (Spiegelbilder), *Sectio canonis* (Musiktheorie), *Phainomena* (Theoretische Astronomie, Sphärik).

Archimedes als Mathematiker

Mit Archimedes (287?–212) erreichte die Mathematik der Antike ihren Höhepunkt. Sein Gedankenreichtum auf allen Gebieten der Mathematik, in Astronomie, Hydrostatik, Mechanik und Technik verlieh ihm schon in der Antike hohes Ansehen und legendenumwobenen Ruhm, noch gesteigert durch die Erfindung äußerst wirkungsvoller Verteidigungswaffen, mit deren Hilfe die mit Karthago verbündete Stadt Syrakus auf Sizilien den römischen Belagerern zwei Jahre lang Widerstand leisten konnte. Die Stadt fiel durch eine Kriegslist. Bei den sich üblicherweise anschließenden Plünderungen und Gewalttätigkeiten kam Archimedes ums Leben. Hieran ranken sich mehrere Versionen um seinen Tod. Die bekannteste ist jene, wonach Archimedes geometrische Figuren in den Sand gezeichnet habe, als ein römischer Soldat hinzutrat. Archimedes soll den Soldaten angeherrscht haben „Störe meine Kreise nicht“ (Noli turbare circulos meos). Daraufhin habe der Soldat ihn erschlagen.

Um Archimedes ist ein wahrer Legendenkreis entstanden. Viele, wenn auch möglicherweise nicht wahre, so doch gut erfundene Legenden kursierten: Wie er im Bade das Archimedische Prinzip des Auftriebes entdeckt, sogleich die Nutzanwendung zum Prüfen eines Kranzes auf dessen Goldgehalt begriffen habe und dann „Heureka“, „Heureka“ (Ich hab’s, ich hab’s) rufend splitternackt vom Bad über die Straßen nach Hause gelaufen sei und dass er andererseits, weil er so mit seiner geliebten Geometrie beschäftigt gewesen, Kleidung und Körperpflege vernachlässigt habe, und dass er, wenn man ihn mit List oder Gewalt doch ins Bad gebracht habe, in die seinen Körper bedeckenden Salben und Öle auch noch geometrische Figuren gezeichnet habe – und was dergleichen Geschichten mehr sind.

Die gesicherten biographischen Einzelheiten fallen dagegen recht dürftig aus. Als Sohn des Astronomen Pheidias geboren und mit König Hieron II. von Syrakus und dessen Sohn Gelon sowohl verwandt als auch in engem Kontakt stehend, gehörte er der Oberschicht seiner Vaterstadt an. Seine Ausbildung hatte er bei einem längeren Aufenthalt in Alexandria erhalten und soll dort die nach ihm benannte Wasserschraube erfunden haben. Von Syrakus aus stand er im Briefwechsel mit vielen Gelehrten, z. B. mit dem Astronomen Konon von Samos (gest. um 240 v. Chr.) und dem vielseitigen Eratosthenes von Kyrene (276?–194? v. Chr.), der seit 235 Vorsteher des Museion war und auf den eine geistreiche, ziemlich genaue Bestimmung des Erdumfanges zurückgeht. Dieser fand auch das sog. „Sieb des Eratosthenes“, eine Methode,

Abb. 4.5.6 Druckausgabe der „Elemente“, Anfang des Buches I, Venedig 1509 [UB Leipzig]

durch systematisches Streichen von zusammengesetzten Zahlen die Primzahlen herauszufiltern. Bei Messungen von Ebbe und Flut an der Straße von Messina gelang Archimedes die richtige Erklärung des in der Antike ausführlich diskutierten Phänomens.

Abb. 4.5.7 Tod des Archimedes (Mosaik Städt. Galerie Frankfurt), nach [www.math_inf.uni-greifswald.de]

Die zahlreichen Abhandlungen von Archimedes weisen ihn als einen tiefgründigen originellen Denker im Bereich der Mathematik aus und zugleich als Begründer einer mathematischen Physik. Er gilt als Entdecker der Gesetze für Hebel und schiefe Ebene, auch des Flaschenzuges.

In der *Quadratur der Parabel* gelang Archimedes die exakte Flächenberechnung eines Parabelsegmentes, indem er eine unendliche geometrische Reihe summierte (!). Nach Ergebnis und Methode rechnen wir diese Quadratur zu den Vorstufen der Integralrechnung. *Über Kugel und Zylinder*, über *Konoide und Sphäroide* beschäftigen sich u. a. mit der Bestimmung von Bogenlängen, von Oberflächen und Volumina der Kugel und ihrer Segmente und Sektoren, mit Rotationsellipsoiden und Rotationshyperboloiden sowie mit den Schwerpunkten solcher Flächen und Körper. In seiner Abhandlung *Über Spiralen* erörtert Archimedes Flächenverhältnisse an der nach ihm benannten Spirale.

In dieser Abhandlung hat sich Archimedes einen hintergründigen Scherz erlaubt, indem er absichtlich falsche Aussagen den richtigen beifügte, damit sich die Schein-Mathematiker selber bloßstellen, wenn sie behaupten, Nichtlösbares gelöst zu haben.

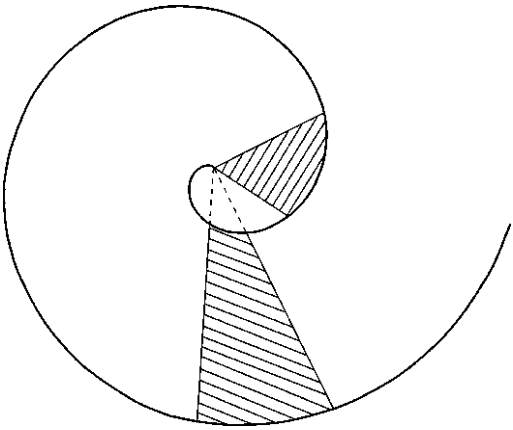


Abb. 4.5.8 Flächenstücke an der Archimedischen Spirale: Ein vom Mittelpunkt ausgehender Strahl, auf dem sich ein Punkt gleichmäßig nach außen bewegt, dreht sich gleichmäßig um den Mittelpunkt. Der Punkt beschreibt dabei die Archimedische Spirale

> *„Denn wieviele Probleme der Geometrie, die zuerst der Behandlung unzugänglich erschienen, sind schließlich doch gelöst worden! Konon starb, bevor er genügend Zeit gefunden hatte, über die Lösung der Probleme nachzudenken; sonst hätte er, indem er dies alles gefunden und noch vieles andere entdeckt hätte, die Geometrie noch mehr gefördert; wir wissen nämlich, daß er eine ungewöhnliche Kenntnis der Mathematik und einen überragenden Schaffensdrang besaß. Wir wüßten jedoch nicht, daß, obwohl Konons Tod viele Jahre zurückliegt, auch nur irgend eines dieser Probleme in Angriff genommen wäre. Ich will aber jedes von ihnen einzeln vorbringen; es trifft sich auch, daß zwei Lehrsätze, die falsch sind, am Schluß beigefügt sind, damit die, die immer behaupten, sie fänden die Lösungen, aber keinen Beweis zu Ende führen, des Geständnisses überführt werden, daß sie Unmögliches gefunden haben.“*
> [Archimedes, Über Spiralen, 1922, S. 5]

Berühmt-berüchtigt ist das Archimedes zugeschriebene Rinderproblem. Es führt auf eine sog. Pellsche Gleichung

$$x^2 - 4\,729\,494\,y^2 = 1$$

in der y ein Vielfaches von 9304 ist. Schon die kleinste Lösung dieser Gleichung ist gewaltig: Die Anzahl der Rinder ist eine Zahl, die mehr als 206 500 Ziffern besitzt! (Zum Text siehe [v. d. Waerden 1966, S. 345], [Wußing 1965, S. 225f.], siehe auch [Archibald 1918: *The Cattle Problem* in Amer. Math. Monthly 25, S. 411])

Andere Schriften, u. a. *Das Buch der Lemmata*, *Die Konstruktion des regulären Siebenecks* und *Über halbregelmäßige Körper* sind teilweise oder ganz verloren gegangen oder nur in arabischer Übersetzung erhalten geblieben.

Bedeutsam ist *Die Sandzahl* (oder die Sandrechnung), in der alle ganzen Zahlen bis $A \cdot 10^8$ mit

$$A = \left(10^8\right)^{10^8}$$

eine Benennung erhalten und die unbegrenzte Fortsetzbarkeit der Zahlenreihe ausgesprochen wird. In der nur teilweise erhaltenen „Kreisrechnung“ fand Archimedes die Abschätzung

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70} \, .$$

Weiter stammen von ihm eine Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks und die Dreiteilung eines beliebigen Winkels mit Hilfe einer *neusis* (Einschiebung; ausführlich in [Alten et al. 2003, S. 80–83]).

Im engeren Sinne physikalischen Inhaltes sind die Abhandlungen *Über das Gleichgewicht ebener Flächen oder über den Schwerpunkt ebener Flächen*, *Über schwimmende Körper*, *Über den Brennspiegel* (verloren).

Man hat sich lange gefragt, wie es Archimedes möglich war, eine solche Fülle komplizierter Probleme zu lösen. Ein erst im Jahre 1906 von dem verdienstvollen dänischen Historiker J.L. Heiberg aufgefundenes Manuskript „Methodenlehre“ (Methode der mechanisch herleitbaren Sätze) gibt Auskunft: Archimedes hat einen Teil der Sätze durch mechanisch-physikalische Überlegungen und Analogien gefunden und dann erst den exakten mathematischen Beweis ausgearbeitet.

Archimedes schrieb:

> *„Ich bin (. . .) überzeugt, daß die Methode nicht weniger nützlich ist zum Beweis der Theoreme selbst. Denn Einiges von dem, was mir auf ‚mechanische‘ Weise klar wurde, wurde später auf geometrische Art bewiesen, weil die Betrachtungsweise dieser (‚mechanischen‘) Art der (strengen) Beweiskraft entbehrt. Denn es ist leichter, den Beweis zustande zu bringen, wenn man schon vorgreifend durch die ‚mechanische‘ Weise einen Begriff von der Sache gewonnen hat, als ohne derartige Vorkenntnis.*
> *Deshalb wird man einen nicht geringen Verdienstanteil an der Entdeckung jener Theoreme, für die Eudoxos zuerst den Beweis fand – über Kegel und Pyramide, daß der Kegel der 3. Teil des Zylinders und die Pyramide der 3. Teil des Prismas mit derselben Basis und Höhe ist –, dem Demokritos zubilligen müssen, der die Sätze über diese Figuren aussprach, wenn auch ohne Beweis.“*
> (Zitiert bei [Becker 1954, S. 56])

In der „Methodenlehre“ findet Archimedes auf Grund mechanischer Überlegungen den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes, indem er es als mit Masse

Abb. 4.5.9 Manuskript aus dem Archimedes-Palimpsest
[Auktionskatalog der Fa. Christies, New York 1998]

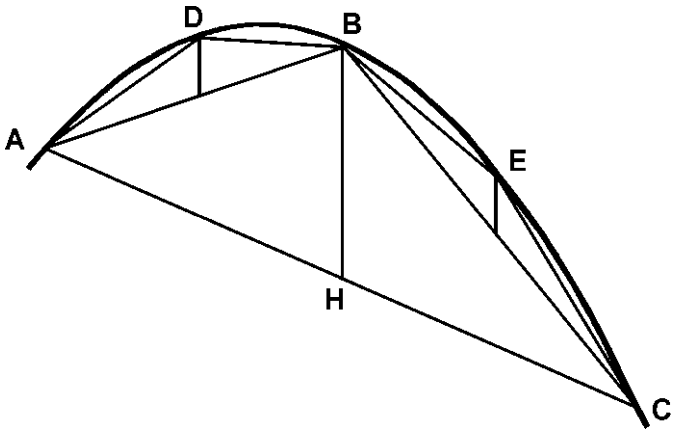


Abb. 4.5.10 Figur zur Parabelquadratur des Archimedes

behaftet gedanklich am Waagebalken aufhängt und auswiegt. Der strenge Beweis ist in der „Quadratur der Parabel“ enthalten. Dazu benötigt er die Summation einer unendlichen geometrischen Reihe. Der Konvergenzbeweis ist korrekt; die Grenzwertbestimmung erfolgt mit Partialsummen und zweimaliger Anwendung der *reductio ad absurdum* (Beweis durch Widerspruch).

Dem Parabelsegment über AC wird das Dreieck ABC einbeschrieben, H halbiert AC. Dann werden die Dreiecke ABD und BEC einbeschrieben und so fort – das Segment wird „ausgeschöpft“. Gezeigt wird so, dass der Inhalt p des Parabelsegmentes um ein Drittel größer ist als der Inhalt d des Dreiecks ABC, das mit ihm gleiche Grundlinie und „Höhe“ hat, indem sowohl die Annahme $p > \frac{4}{3}d$ als auch die Annahme $p < \frac{4}{3}d$ auf einen Widerspruch geführt werden (vgl. Videofilm „Vom Zählstein zum Computer-Altertum“ 1998, ISBN 3-88120-236-6).

Es handelt sich um ein Ergebnis voller Herausforderungen an die Zukunft: Wiederum ist eine krummlinig begrenzte Fläche als quadrierbar nachgewiesen. Welche Flächen sind es noch? So kam es, dass Archimedes einer der Vorläufer der späteren Integralrechnung werden sollte.

Archimedes ist uns auch Zeuge, dass während der Antike sogar die Vorstellung eines heliozentrischen Sonnensystems diskutiert worden ist; freilich konnte sie sich nicht durchsetzen. Hauptvertreter der heliozentrischen Auffassung war Aristarch von Samos (ca. 310–230 v. Chr.). Archimedes schrieb in der *Sandzahl*:

> *„Du weißt, daß die meisten Astronomen die Welt als eine Kugel bezeichnen, deren Mittelpunkt im Zentrum der Erde liegt und deren Radius der Größe des Sonnenabstandes entspricht. Aristarch von Samos dagegen hat in seinen Schriften die Lehre aufgestellt, daß das Weltall viel größer ist als eben behauptet wurde. Er geht von der An-*

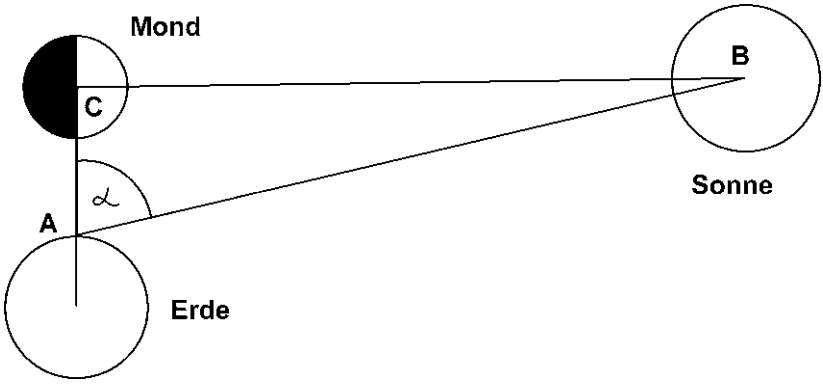


Abb. 4.5.11 Figur zu Aristarchs Berechnung der Abstände zu Sonne und Mond [Heath 1913], [v. d. Waerden 1966, S. 337f.]

> *nahme aus, daß die Fixsterne und die Sonne unbeweglich bleiben, die Erde sich aber auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegt, die sich im Mittelpunkt befindet. Die Fixsternsphäre, die denselben Mittelpunkt umwölbt, ist so groß, daß die Erdbahn zur Fixsternsphäre dasselbe Verhältnis hat wie der Mittelpunkt einer Kugel zu deren Oberfläche.“*
> (Zitiert bei [Stückelberger 1988, S. 200])

Die Meinung von Aristarch entstammte keineswegs bloßer Spekulation. Vielmehr hat er einen geistvollen Versuch unternommen, die Entfernung der Erde zu Sonne und Mond zu bestimmen: Bei Halbmond bildet die Konstellation Sonne-Mond-Erde ein rechtwinkliges Dreieck. Doch fielen Aristarchs Messwerte wesentlich zu klein aus, da er noch nicht über hinreichend zuverlässige Instrumente verfügte. Aristarch hat den Winkel Mond-Erde-Sonne zu 87° bestimmt. In Wirklichkeit beträgt er 89°50′. Zur Berechnung benutzt Aristarch Ungleichungen, die auf Hypothesen wie „Die Entfernung Erde–Sonne ist größer als 18-mal, aber kleiner als 20-mal die Entfernung Erde–Mond“ beruhen und – in moderner Formulierung – auf trigonometrische Verhältnisse hinauslaufen (siehe dazu [Heath, 1913], [v. d. Waerden 1966, S. 337f.]).

Aristarch wurde der Ungläubigkeit und Gottlosigkeit beschuldigt. Noch Plutarch warnte vor den gottlosen Ansichten von Aristarch. Dennoch sind die Vorstellungen von Aristarch nicht völlig in Vergessenheit geraten. Copernicus, der definitive Begründer der heliozentrischen Astronomie hat von Aristarch gewusst und sich auf ihn bezogen.

Apollonios von Perge: Lehre von den Kegelschnitten

Nur wenig jünger als Archimedes war Apollonios von Perge (ca. 262–ca. 190). Er hat ebenfalls in Alexandria studiert und sich lange in Pergamon, der Hauptstadt eines anderen Diadochenstaates, aufgehalten. Als Mathematiker

Abb. 4.5.12 a) Archimedes und seine Wasserschraube, b) Archimedes und das Gesetz vom Auftrieb, c) Aristarchs Überlegungen zum heliozentrischen System (Italien 1983, Griechenland 1983, 1980)

und Astronom gehört er zu den bedeutendsten Gelehrten der Antike, hat jedoch Archimedes an Tiefe und Originalität des Denkens nicht ganz erreicht. Übrigens: Beim Handelskrieg zwischen Alexandria und Pergamon war der Export von ägyptischem Papyrus verboten; daraufhin erfand man in Pergamon ein neues Schreibmaterial, das aus Tierhäuten hergestellte Pergament.

Von Apollonios stammt u. a. eine achtbändige Kegelschnittlehre, die den Titel „Konika“ (von griech. konos, Pinienzapfen, Kegel) trug. Die ersten vier Bücher sind in griechischer Sprache erhalten, die nächsten drei in arabischer Sprache überliefert, Buch VIII ist verschollen, eine Rekonstruktion wurde versucht.

Kegelschnitte waren schon vor Apollonios untersucht worden. So hatte Menaichmos (um 350 v. Chr.) Hyperbeln und Parabeln zur Lösung des Delischen Problems verwendet und Aristaios (um 330 v. Chr.) hatte Kegelschnitte als Schnittfiguren von Kegeln mit Ebenen studiert: Daher der Name Kegelschnitte. Aber erst Apollonios schuf eine einheitliche Herleitung aller Kegelschnitte – Ellipse, Parabel, Hyperbel – durch ebene Schnitte an *ein und demselben* Kegel [Apollonios: Konika 1926], [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005].

Die Apollonische Kegelschnittlehre, die ein erstaunliches Niveau besitzt, musste ohne Koordinatengeometrie und ohne Formelschreibweise auskommen und ist daher, gemessen an unseren Gewohnheiten, verhältnismäßig umständlich und schwer verständlich. Umso höher ist natürlich der Scharfsinn von Apollonios einzuschätzen, der in den Büchern VI bis VIII hauptsächlich eigene Forschungsergebnisse dargestellt hat.

Nach heutiger Terminologie behandelt Apollonios die folgenden Themenkreise:

Buch I:	Erzeugung der Kegelschnitte durch Schnitte eines Kreiskegels, Mittelpunkt, Durchmesser und konjugierte Durchmesser der Kegelschnitte
Buch II:	Achsen und Asymptoten der Hyperbel
Buch III:	Brennpunkte, Theorie von Pol und Polare, projektive Erzeugung der Kegelschnitte
Buch IV:	Anzahl der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte (Beweis, dass es höchstens vier Schnittpunkte gibt)
Buch V:	Normalen und Subnormalen, Krümmungsmittelpunkte
Buch VI:	Ähnliche Kegelschnitte
Buch VII:	Spezielle Eigenschaften der konjugierten Durchmesser
Buch VIII:	(Rekonstruktion) Determination von speziellen Konstruktionsaufgaben.

Apollonios hat noch auf einem anderen Gebiet eine weit nachwirkende Leistung vollbracht, dem der theoretischen Astronomie. Gemäß der Doktrin von Platon mussten sich die Bewegungen der Planeten auf Kreisen vollziehen. Durch eine höchst scharfsinnige Kombination von exzentrischen Kreisen und Epizyklen gelang es Apollonios, die komplizierten Planetenbewegungen gemäß der Forderung von Platon zu beschreiben.

Ptolemaios als Mathematiker

Die hellenistische Astronomie beruhte auf dem Dogma von ausschließlich kreisförmigen Bewegungen am Himmel. Ihre endgültige, trotz falscher Grundvoraussetzung dennoch glanzvolle Durchbildung erhielt sie durch Klaudios

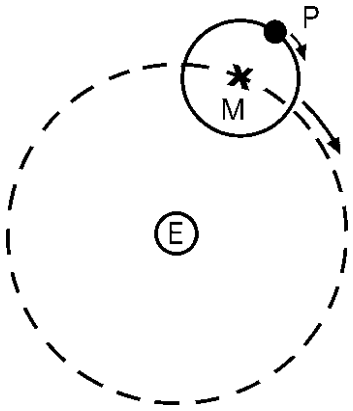


Abb. 4.5.13 Epizyklische Bewegung von Planeten. Der Planet P bewegt sich auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt M sich seinerseits auf einem Kreis um die Erde E bewegt

Ptolemaios (geb. nach 83, gest. nach 161 n. Chr.), der ein gewaltiges empirisches Material geistig verarbeitet hat, zusammengefügt unter dem Titel *Almagest* (eine arabische Version des griechischen Titels, der „Die große Zusammenfassung“ bedeutet). Innerhalb der damaligen Beobachtungsgenauigkeit deckte sich die mathematische Theorie mit dem Ablauf der Planetenbewegungen. Dies auch macht verständlich, warum das ptolemäische, das geozentrische System eineinhalb Jahrtausende lang unangefochtene Anerkennung, ja Bewunderung erfuhr, nicht nur aus ideologischen Gründen.

Der „Almagest“ enthielt außerdem eine recht gut durchgebildete ebene und sphärische Trigonometrie; sie beruht auf Vorarbeiten von Menelaos von Alexandria (um 100 n. Chr.). Doch ist die hellenistische Trigonometrie auf Sehnenrechnung aufgebaut; erst die indischen Astronomen führten sie in eine Sinustrigonometrie über.

Abb. 4.5.14 Ptolemaios. Aus einem Satz von 8 Zusammendrucken aus Anlass des 500. Geburtstages von Copernicus (Burundi 1973)

In anderen Werken benutzte Ptolemaios die stereographische Projektion der Kugel auf die Ebene, versuchte das Euklidische Parallelenpostulat zu beweisen, beschäftigte sich mit Optik, Mechanik und Harmonielehre. Darüber hinaus ist er berühmt geworden als Geograph, der die gesamte den Griechen damals bekannte Welt beschrieb sowie als Verfasser eines immer wieder benutzten astrologischen Werkes.

Schon ans Ende der hellenistischen Periode gehören zwei Mathematiker, deren Leistungen bis zu einem gewissen Grade atypisch für die griechisch-hellenistische sind: Heron von Alexandria (um 60 n. Chr.) und Diophantos von Alexandria (vermutlich um 250 n. Chr.)

Heron von Alexandria

Man kann das von Heron hinterlassene Werk als eine Art Gegenstück zu den „Elementen“ von Euklid betrachten. Euklid, Platon gedanklich nahe stehend, hatte dort fast völlig auf die Darlegung praktischer Mathematik verzichtet. Heron dagegen vertrat eine Mathematik, die der Befriedigung praktischer Bedürfnisse diente. Dies ist auch insofern bemerkenswert, als die in der damaligen Gesellschaft verachtete körperliche Tätigkeit im allgemeinen nicht Gegenstand schriftlicher Aufzeichnungen wurde. Heron gehört zu den Ausnahmen wie etwa auch die zehn Bücher über Architektur von Vitruv (1. Jh. v. Chr.).

Herons Beruf würden wir heute etwa als den eines Ingenieurs bezeichnen. Er hat viele Schriften verfasst. Zumindest erschienen unter seinem Namen Werke wie *Dioptrica* (Vermessungskunde), *Belopoiika* (Geschützkunde), *Mechanica* (Mechanik, d. h. Beschreibung und mathematische Theorie der einfachen Maschinen Hebel, schiefe Ebene, Keil, Winde, Flaschenzug), Schriften

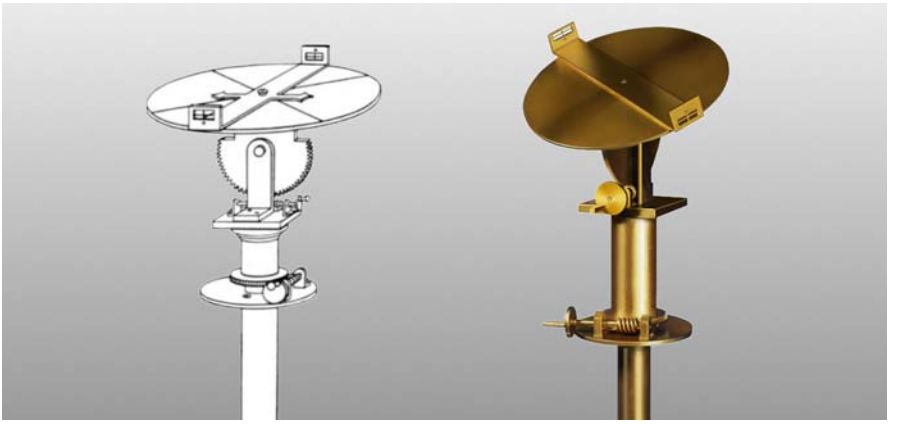


Abb. 4.5.15 Rekonstruktion der Dioptra des Heron (li.: Zeichung [Teubner, Leipzig 1903], [Wikimedia Commons]; re.: Modell im Technischen Museum Thessaloniki, nach [Antike Griechische Technologie, Ausgabe zur Expo 2000, S. 40])

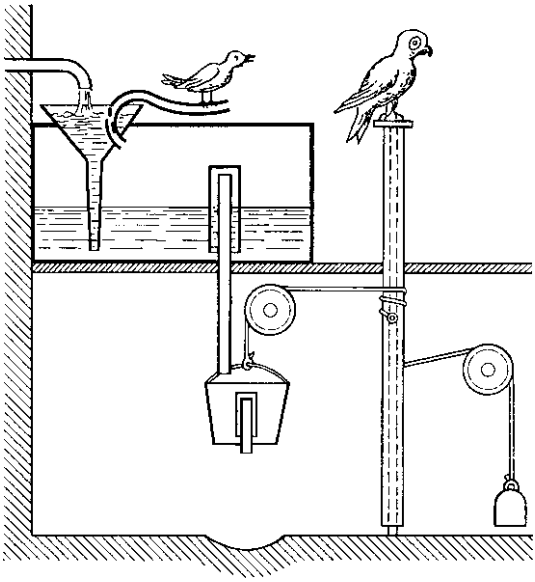


Abb. 4.5.16 „Vogelgezwitscher“ [Wußing 1965, S. 174]

über Wasseruhren, Gewölbe, Automaten sowie die berühmten *Pneumatica* (Druckwerke), in denen allerhand sinnreich konstruierte, wenn auch für die Wirtschaft belanglose Apparate beschrieben werden, die durch Dampfdruck oder Luftdruckunterschiede in Bewegung gesetzt werden: Trompeten schmettern, Tempeltüren öffnen sich, Vögel zwitschern.

Von den eigentlich mathematisch orientierten Schriften seien die *Metrica* (drei Bücher über Vermessungslehre), *Geometrica* (Flächenberechnungen) und *Stereometrica* (Volumenberechnungen) erwähnt.

Herons Schriften haben durch ihren Gegenstand und durch ihre praxisnahe Darstellung weite Verbreitung gefunden. Bei dauernder Benutzung immer wieder ergänzt, verändert und neu redigiert bleibt unklar, welche Textteile von Heron selbst stammen. Herons Schriften wurden in der Folgezeit zum Standardwerk der praktischen Mathematik. So beruhen auf Heronischen Vorbildern etwa die Feldmeßmethoden der römischen Agrimensoren, die im Tross der römischen Heere mitzogen und eine Weltkarte des römischen Weltreiches mit überraschend genauen Entfernungsangaben anfertigten (ausführlich in [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 86–92]).

Einige der mathematischen Schriften Herons sind durchaus mathematisch streng aufgebaut nach dem Schema Definitionen, Voraussetzungen, Sätze und Beweise. Einige Ergebnisse gehen über Euklid hinaus, beispielsweise die Heronische bzw. Archimedische Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

wo s die halbe Summe der Dreiecksseiten a, b, c bedeutet. Bei Heron tritt am Beispiel der Kaliberberechnung eines Geschützes die rechnerische Behandlung von dritten Wurzeln auf.

Heron berechnet den Durchmesser x der Öffnung einer Steinschleuder, durch welche der kugelförmige Stein vom Gewicht a das Geschütz verlässt, nach der Formel (modern gesprochen)

$$x = \sqrt[3]{100a} \; + \; \frac{1}{10}\sqrt[3]{100a}\,.$$

Sehr ausführlich werden auch neue Methoden zur genäherten Berechnung von Wurzeln entwickelt. Auch bei Heron findet sich die Näherungsformel zum Quadratwurzelziehen $\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \pm r} \approx a \pm \frac{r}{2a}$, wo a^2 das nächst an b liegende Quadrat bedeutet (vgl. dazu [Alten et al. 2003, S. 41]).

Heron zeichnet sich auch aus durch eine klare Einsicht in den Prozess der Entstehung mathematischen Denkens durch Abstraktion.

> *„Wo die Grundlagen der Philosophie herstammen, läßt sich durch die Philosophie zeigen. Damit wir nicht gegen die Regeln verstoßen, ist es schicklich, die Definition der Geometrie anzugeben. Die Geometrie ist also die Wissenschaft von Figuren und Größen und ihren Veränderungen, und ihr Zweck, hiervon zu handeln; die Methode aber ihrer Darstellung ist synthetisch; sie fängt nämlich mit dem Punkte an, der ohne Ausdehnung ist, und erreicht über Linie und Fläche den Körper. Ihr Nutzen dient geradezu der Philosophie; das ist ja auch die Meinung des göttlichen Platon, wo er sagt: ob diese Lehren schwer oder leicht sind, durch sie geht der Weg (...) Die Geometrie hat ihre Darstellung durch Abstraktion aufgebaut; sie nimmt nämlich den physischen Körper, der drei Dimensionen hat und Stofflichkeit, und durch Entfernung seiner Stofflichkeit hat sie den mathematischen Körper gebildet, der solide ist, und durch Abstraktion hat sie dann den Punkt erreicht, (...) Wie der alte Bericht uns lehrt, haben die meisten Menschen sich mit Vermessung und Verteilung von Land abgegeben, woraus der Name Geometrie (Landmessung) entstanden ist. Die Erfindung aber der Vermessung ist von den Ägyptern gemacht; denn wegen des Steigens des Nils wurden viele Grundstücke, die deutlich zu erkennen, unkenntlich durch das Steigen, viele auch noch nach dem Fallen, und es war dem einzelnen nicht mehr möglich, sein Eigentum zu unterscheiden; daher haben die Ägypter diese Vermessung erfunden, bald mit dem sog. Messband, bald mit der Rute, bald auch mit anderen Maßen. Da nun die Vermessung notwendig war, verbreitete sich der Gebrauch zu allen lernbegierigen Menschen.“*
> (Deutsch zitiert bei [Wußing 1989, S. 75])

Diophant von Alexandria

Auch bei Diophant ist die Lebenszeit nicht genau feststellbar. Man nimmt heute an, dass er um 250 n. Chr. gelebt hat, da er sich in einer seiner Schriften möglicherweise an den *sehr verehrten Dionysios* wendet, der 247 n. Chr. Bischof von Alexandria wurde.

Diophant hat wenigstens zwei mathematische Abhandlungen verfasst; die wichtigste ist eine aus wahrscheinlich 13 Büchern (Teilen) bestehende *Arithmetica*. Von den 13 Büchern sind sechs (I, II, III und vermutlich VIII, IX, X) griechisch überliefert. In jüngster Zeit sind weitere Teile in arabischer Sprache entdeckt worden; sie werden als Bücher IV bis VII eingeordnet. Die restlichen drei Bücher wurden bisher nicht aufgefunden. Die Nummerierung der Bücher stammt nicht von Diophant. Bevor man die Teile in arabischer Sprache fand, wurden die griechischen Texte mit I, II, III und XI, XII, XIII nummeriert, die anderen mit IV bis IX [Rashed 1994], [Sesiano 1982].

Es handelt sich um eine vom Einfachen zum Schwierigen fortschreitende Sammlung algebraischer Aufgaben. Die Lösungen – zugelassen sind (nur) positive rationale Zahlen – werden an Beispielen angegeben, ohne allerdings eine allgemeine Theorie darzubieten.
Lediglich im ersten Buch erläutert Diophant ein wenig Sinn und Methode:

> *„Da ich weiß, mein sehr verehrter Dionysios, daß Du voller Eifer bist, die Lösung arithmetischer Probleme kennenzulernen, so habe ich versucht, Dir die Wissenschaft der Arithmetik, mit den Elementen beginnend, zu erklären. Vielleicht erscheint der Stoff etwas schwierig, da er Dir noch nicht vertraut ist und da es dem Anfänger manchmal an Selbstvertrauen fehlt.“*
> [Diophant 1890, S. 5]

Später beschreibt Diophant, wie man Gleichungen löst:

> *„Wenn nun bei irgend einer Aufgabe dieselben allgemeinen Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung, aber mit ungleichen Koeffizienten stehen, so muß man Gleiches von Gleichem subtrahieren, bis zuletzt ein eingliedriger Ausdruck einem andern gleichgesetzt ist. Sollten irgend welche allgemeinen Ausdrücke auf einer Seite oder auf beiden Seiten als abzuziehende Zahlen stehen, so muß man dieselben auf beiden Seiten addieren, so daß auf jeder Seite nur hinzuzufügende Zahlen sich befinden. Darauf hat man wieder Gleiches von Gleichem zu subtrahieren, bis auf jeder Seite nur ein Ausdruck übrig ist. In dieser Weise wird so lange mit dem Ansatze der Aufgaben verfahren, bis womöglich auf jeder Seite nur ein Glied sich befindet. Später werde ich (. . .) auch noch zeigen, wie die Aufgabe gelöst wird, wenn zuletzt ein zweigliedriger Ausdruck einem eingliedrigen gleich ist.“*
> [Diophant 1890, S. 7f.]

Diophant verwendete feststehende Abkürzungen für die Variable und deren Potenzen von x^6 bis x^{-6}, für die Gleichheit und für die Subtraktion. In rechnerischer Form wurden an Beispielen behandelt: alle Typen quadratischer Gleichungen, unbestimmte Gleichungen (d. h. unterbestimmte Gleichungen in mehreren Variablen (oder Systeme solcher Gleichungen) mit der Forderung nach Lösungen in rationalen bzw. ganzen oder natürlichen Zahlen – später diophantische Gleichungen genannt), kubische und biquadratische Gleichungen. So führt die im Beispiel 24 aus Buch VIII behandelte Aufgabe: *Eine gegebene Zahl ist als Summe zweier Zahlen darzustellen. Dabei soll das Produkt der Summanden einem um seine Wurzel verminderten Kubus gleich sein* (in moderner Sprache) auf das Problem: Bestimme $x, y \in \mathbb{Q}^+$, sodass $y^3 - y = ax - x^2$ (vgl. [Alten et al. 2003, S. 100f.]). Der algebraische Charakter der *„Arithmetica“* schließt auch hervorragende Umformungstechniken ein, so zum Beispiel die Substitution von Hilfsvariablen.

Die reichen mathematischen Traditionen der alexandrinischen Schule wirkten sogar noch fort in die Zeit des Verfalls und des schließlichen Unterganges des Römischen Weltreiches. Die Diskussion um Diophant hält an; insbesondere zur Frage, ob es bei ihm Hinweise auf negative Zahlen gegeben hat [Barner 2007].

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass aus dem Werk von Diophant noch im 16. und 17. Jahrhundert wesentliche Impulse an die Begründung der modernen Algebra ergangen sind (ausführlich in [Alten et al. 2003], [Baschmakova 1972], [Reich 2003]).

Pappos von Alexandria

Der letzte herausragende Mathematiker der Antike, Pappos von Alexandria (um 320 n. Chr.), hat sich auch als Geograph und Astronom ausgezeichnet. Von ihm stammen Kommentare zum „Almagest“ und zum Buch X der „Elemente“. Das Hauptwerk von Pappos stellt das groß angelegte, allerdings leider teilweise verlorene Werk *Collectio* (Sammlung) dar, in dem sehr viele mathematische Werke referierend behandelt werden, deren Originale verloren gegangen sind. Darüber hinaus enthält die *Collectio* auch eigene Forschungsergebnisse, etwa den „Satz des Pappos“, der heute der projektiven Geometrie zugerechnet wird. In der *Collectio* finden sich auch die später nach dem Schweizer Jesuiten und Mathematiker P. Guldin (1577–1643) benannten Regeln über die Schwerpunkte von Rotationskörpern.

4.6 Mathematik bei den Römern

Die Sprache der Wissenschaft blieb auch dann im römischen Reich griechisch, als die Hellenen und andere Völker von den Römern besiegt und unterworfen worden waren. Die bekannteste Hinterlassenschaft der Römer auf dem Gebiet der Mathematik sind die römischen Zahlen; besser gesagt, die bereits erwähnten römischen Zahlzeichen.

Abb. 4.6.1 Pantheon, Kuppel mit Opaion [Foto Wesemüller-Kock]

Wenn auch die Römer – vielleicht auch wegen ihres Zahlensystems – keine besonderen Leistungen in der Mathematik hervorbrachten, so waren sie auf anderen Gebieten führend. Im Militärwesen, im Rechtswesen, in der Kunst und Literatur sowie in der Architektur zum Beispiel haben sie Außerordentliches geleistet. In der Architektur sind uns Begriffe wie Viertel einer Stadt – auch wenn es mehr als vier davon gibt – aus der römischen Zeit geläufig. Sie entspringen der klaren Gliederung in quadratische und rechtwinklige Stadtteile. Des Weiteren sind uns Theater und Aquädukte – die römischen Wasserleitungen – als noch existierende Bauwerke ein Begriff. Eines der herausragenden Bauwerke ist das Pantheon in Rom. Es wurde als Heiligtum aller Götter errichtet und ist in der Zeit zwischen etwa 114 bis 125 n. Chr. entstanden. Inschriften wurden unter Kaiser Hadrian angebracht. Eine Kuppel mit 43 Metern Durchmesser überspannt den großen runden Innenraum. Die Kuppel wurde aus Leichtbetonelementen errichtet, die in die dafür jeweils passenden Formen gegossen wurden. Das Opaion, ein Loch von neun Metern Durchmesser in der Mitte der Kuppel, ist Lüftung und einzige Lichtquelle zugleich. Durch diese Öffnung war der Kontakt zum Himmel – und damit zu den Göttern – hergestellt. Diese Kuppelkonstruktion bedurfte der sorgfältigen Planung und Berechnung; eine vergleichbare Konstruktion hat es weit über 1000 Jahre danach nicht mehr gegeben – und das Pantheon steht noch heute, fast 1900 Jahre nach seiner Errichtung.

4.7 Die Mathematik am Ausgang der Antike

Um sich greifende Stagnation, Zersetzung der gesellschaftlichen Struktur im Römischen Weltreich und militärische Angriffe von außen konnten nur vorübergehend durch Reformen aufgehalten werden. Der allgemeine Niedergang berührte und beeinflusste auch die Wissenschaften, auch die Mathematik. Neben einer Neubelebung der mystischen Ansichten der pythagoreischen Schule und dem Aufkommen des Neoplatonismus erkennt man eine durchgehende Tendenz: Wissen ging zwar erst gegen Ende der Periode verloren, aber es fiel den Wissenschaftlern sichtlich immer schwerer, den Spitzenleistungen früherer Perioden inhaltlich zu folgen. Folgerichtig entstanden enzyklopädische Darstellungen, versehen mit ausführlichen Kommentaren – zu Euklid, Archimedes, Apollonios. Sie hatten die Aufgabe, Definitionen zu erläutern, knappe Beweise ausführlich darzustellen, den gegenseitigen Zusammenhang der Sätze zu verdeutlichen. Einige solcher Kommentare stellen ernstzunehmende, teilweise hervorragende Leistungen dar, die sogar neu gefundene Ergebnisse enthalten. Überdies wurden auf diese Weise durch Kommentierung Schriften inhaltlich überliefert, deren Inhalt sonst verschollen wäre. Trotz widriger Umstände konnte sich die wissenschaftliche Tradition noch einige Zeit behaupten.

An der Platonischen Akademie in Athen schrieb Domninos von Larissa (um 450) eine Arithmetik. Unter Proklos Diadochos (410–485) gelangte die Akademie sogar noch einmal zu einiger Bedeutung. Ein umfangreicher Kommentar zu Buch I von Euklids „Elementen“ enthält den in Teilen auf Eudemos (um 300 v. Chr.) zurückgehenden berühmten „Geometerkatalog“, eine historische Bestandsaufnahme griechisch-hellenistischer Mathematiker, unter Betonung der dem Platonismus nahe stehenden Mathematiker. Inzwischen aber war das Christentum nach dem Mailänder Edikt von 313 als Religion neben anderen geduldet und unter Kaiser Theodosius d. Gr. im Jahre 380 zur Staatsreligion im Römischen Weltreich geworden. Damit geriet die Pflege „heidnischer“ Ideen immer mehr in Widerspruch zum Totalitätsanspruch der christlichen Lehre. 529 wurde die Akademie auf Befehl des christlichen Kaisers Justinian als „Stätte heidnischer und verderbter Lehren“ gewaltsam geschlossen. Schon vorher war die heidnische alexandrinische Schule untergegangen; daneben existierte seit dem 2. Jahrhundert auch eine christliche Katechetenschule, an der u. a. die Kirchenlehrer Clemens (bis 203) und Origenes (203–231) sowie der Mathematiker Proklos Diadochos wirkten.

Nach Pappos waren an der eigentlichen alexandrinischen Schule noch zwei Mathematiker hervorgetreten: Theon von Alexandria (um 370) und seine Tochter Hypatia (geb. um 370–415). Sie schrieben Kommentare zum *Almagest* und zu Euklid bzw. zu Apollonios und Diophant. Leider sind ihre Schriften verschollen, allenfalls zum Teil in arabischer Übersetzung erhalten; doch das ist sehr umstritten. Hypatia, die erste namentlich bekannte Mathematikerin, wurde Opfer eines Mordanschlages christlicher Fanatiker. Mit ihr erlosch die alexandrinische mathematische Schule.

Abb. 4.7.1 Kaiser Justinian (Mosaik in San Vitali in Ravenna) [Foto Alten]

4.8 Nachwirkungen in byzantinischer Zeit

Die griechisch-hellenistische Kultur hielt sich noch einige Zeit im byzantinischen bzw. oströmischen Reich. Freilich sind durch die politischen Ereignisse – Bildersturm (726–843), Eroberung Konstantinopels durch die Kreuzritter 1204, Erstürmung und Plünderung Konstantinopels durch die Türken 1453 – nur relativ wenige Dokumente erhalten geblieben; das betrifft auch die Mathematik. Andererseits sind einige wenige Bestandteile der antiken Kultur und der Mathematik sogar bis nach Armenien und Grusinien gelangt.

In einer ersten Phase der byzantinischen Zeit wurde die Mathematik in Athen und Alexandria betrieben; diese Städte gehörten zum oströmischen Reich. Proklos Diadochos (410–485), der berühmte und herausragende Kommentator griechischer Klassiker, stammte aus Byzanz und leitete die athenische Akademie bis zu seinem Tode. Sein Schüler Ammonios (ca. 445 bis ca. 515) war einige Zeit Leiter der christlichen alexandrinischen Schule, die bis zur Eroberung Alexandrias durch die Araber, 641/42, bestand. Simplikos (gest. 549) war Schüler von Ammonios, wirkte in Athen an der Akademie und ging nach deren Schließung im Jahre 529 einige Zeit nach Persien. Er schrieb Kommentare zu Aristoteles und Euklid; durch seinen Bericht sind

Abb. 4.8.1 Kuppel der Hagia Sophia [Foto Alten]

die Möndchen des Hippokrates überliefert worden. Ein anderer Schüler von Ammonios war Eutokios von Askalon (Palästina, geb. ca. 480), er schrieb Kommentare zu Werken von Archimedes und Apollonios sowie Studien zur Würfelverdopplung. Er war in Alexandria, als Ammonios dort wirkte und ging dann nach Byzanz.

Noch heute ist die Hagia Sophia (Heilige Weisheit; 532–537) in Konstantinopel – ursprünglich eine christliche Kirche, dann eine Moschee, heute ein Museum – ein Zeugnis höchster Baukunst und Kultur.

Einer der Baumeister, Anthemios von Tralleis (gest. 534), war zugleich ein hervorragender Mathematiker. Er kannte sich aus mit Kegelschnitten und schrieb über Brennspiegel. Die Fadenkonstruktion der Ellipse dürfte auf ihn zurückgehen. Auch ein Mitarbeiter von Anthemios, Isidor von Miletos (um 520), war Mathematiker und könnte im Zusammenhang mit dem sog. Buch XV der „Elemente“ gestanden haben.

Nach einigen Jahrhunderten, als sich Mathematik nur sehr geringer Aufmerksamkeit erfreut hatte, setzte unter dem Einfluss des Islam im 9. Jahrhundert ein erneuter Aufschwung der Mathematik ein.

Der Philosoph und Mathematiker Leon (geb. um 800, gest. um 869) lebte in Byzanz. Als sein Ruhm als herausragender Gelehrter bis zum Kalifen von Bagdad gedrungen war, wurde er durch den byzantinischen Kaiser als Leiter einer Art Universität in Konstantinopel berufen. Neben einigen eigenen Beiträgen zur Mathematik (u. a. Euklid-Kommentare) ließ Leon systematisch

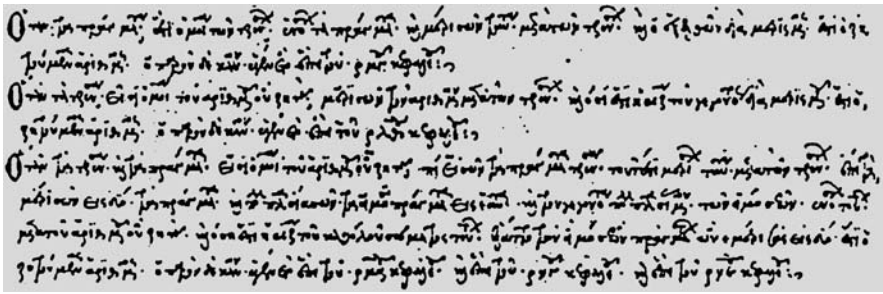


Abb. 4.8.2 Ausschnitt aus einem byzantinischen Manuskript aus dem Jahre 1436. Es handelt sich um eine Beschreibung der Lösungen quadratischer Gleichungen der Typen $ax = bx^2$, $ax^2 = b$, $ax^2 + bx = c$. (Cod. phil. gr. 65, kap. 138, fol. 76) Im Text heißt es für den Gleichungstyp $ax^2 + bx = c$: „Wenn die *tzénsa* und die *prágmatica* gleich sind dem *arithmós*. . .“ [Foto Deschauer]

die Werke der klassischen Mathematik – Euklid, Archimedes, Apollonios, Diophant, Ptolemaios – sammeln und kopieren. *„Auf diesen Handschriften beruht fast die ganze Überlieferung in griechischer Sprache.“* [Gericke 1990, S. 56].

Im 11. Jahrhundert wirkte Michael Psellos (1018 bis nach 1078), der immerhin ein Werk über das Quadrivium geschrieben hat, sich aber doch als ein relativ schwacher Mathematiker erwies: Bei der Berechnung des Flächeninhaltes eines Kreises verwendete er für π den Wert 2,828!

Ein Mönch namens Maximos Planudes (etwa 1260 bis etwa 1310) war 1297 Gesandter in Venedig und schrieb Kommentare zu Diophant. In einer anderen seiner Schriften erläuterte er die aus Indien stammenden Ziffern sowie ein Zeichen für das Nichts. Doch insgesamt gesehen verbreitete sich das Positionssystem im byzantinischen Bereich nur sehr langsam.

Manuel Moschopulos (um 1300) war Schüler und Freund von Planudes. Möglicherweise durch Vertreter der islamischen Mathematik angeregt schrieb er über magische Quadrate. Er gab Konstruktionsregeln für solche Quadrate mit den Seitenlängen $n = 2m + 1$ und $n = 4m$. Wir wissen nicht, ob er die angekündigten Regeln für $n = 4m + 2$ wirklich gefunden hat. (Näheres zur byzantinischen Mathematik findet man bei [Juschkewitsch 1964, S. 329–3359], [Hofmann 1963, S. 56–58] und [Gericke 1990, S. 54–56].)

Wegen der drohenden Türkengefahr verließen zahlreiche byzantinische Gelehrte ihre Heimat noch vor dem Fall von Konstantinopel 1453. Sie brachten auch erhebliche Teile der klassischen antiken Mathematik nach Europa, insbesondere nach Italien, und dies in einer Zeit, in der durch die gesellschaftliche Entwicklung eine große Aufnahmebereitschaft für diese kulturellen Errungenschaften herrschte. So gelangten etwa Teile der Schriften Diophants nach Italien, der dort bis dahin unbekannt gewesen war.

Die wissenschaftlichen Erben der antiken Mathematik

Die antike Mathematik ist nicht spurlos untergegangen, sondern erlangte im Gegenteil auf unterschiedlichen historischen Wegen eine bis in die Neuzeit reichende Wirkung.

Geringfügige mathematische Kenntnisse wurden über den Neoplatonismus zum Bestandteil christlicher Bildung und gingen in das Quadrivium ein, den zweiten Lehrabschnitt an mittelalterlichen Universitäten.

Einiges über das Elementare Hinausgehende wurde von den oströmischen, byzantinischen Gelehrten bewahrt. Als schließlich, nach der Eroberung Konstantinopels 1453 durch türkische Völker, byzantinische Gelehrte auch mathematische Werke der Antike im Urtext nach Italien brachten, fanden diese enthusiastische Aufnahme, da dort die enorme wirtschaftliche Entwicklung eine hohe Aufnahmebereitschaft für mathematische und naturwissenschaftliche Kenntnisse geschaffen hatte.

Das Hauptverdienst bei der Bewahrung der antiken mathematischen Kenntnisse kommt jedoch den Gelehrten des Islam zu. Diesem Umweg verdanken wir es vor allem, dass eine Vielzahl von mathematischen Ergebnissen der Antike vor dem Verlust gerettet werden konnte.

Inhalte und Ergebnisse der griechischen Mathematik

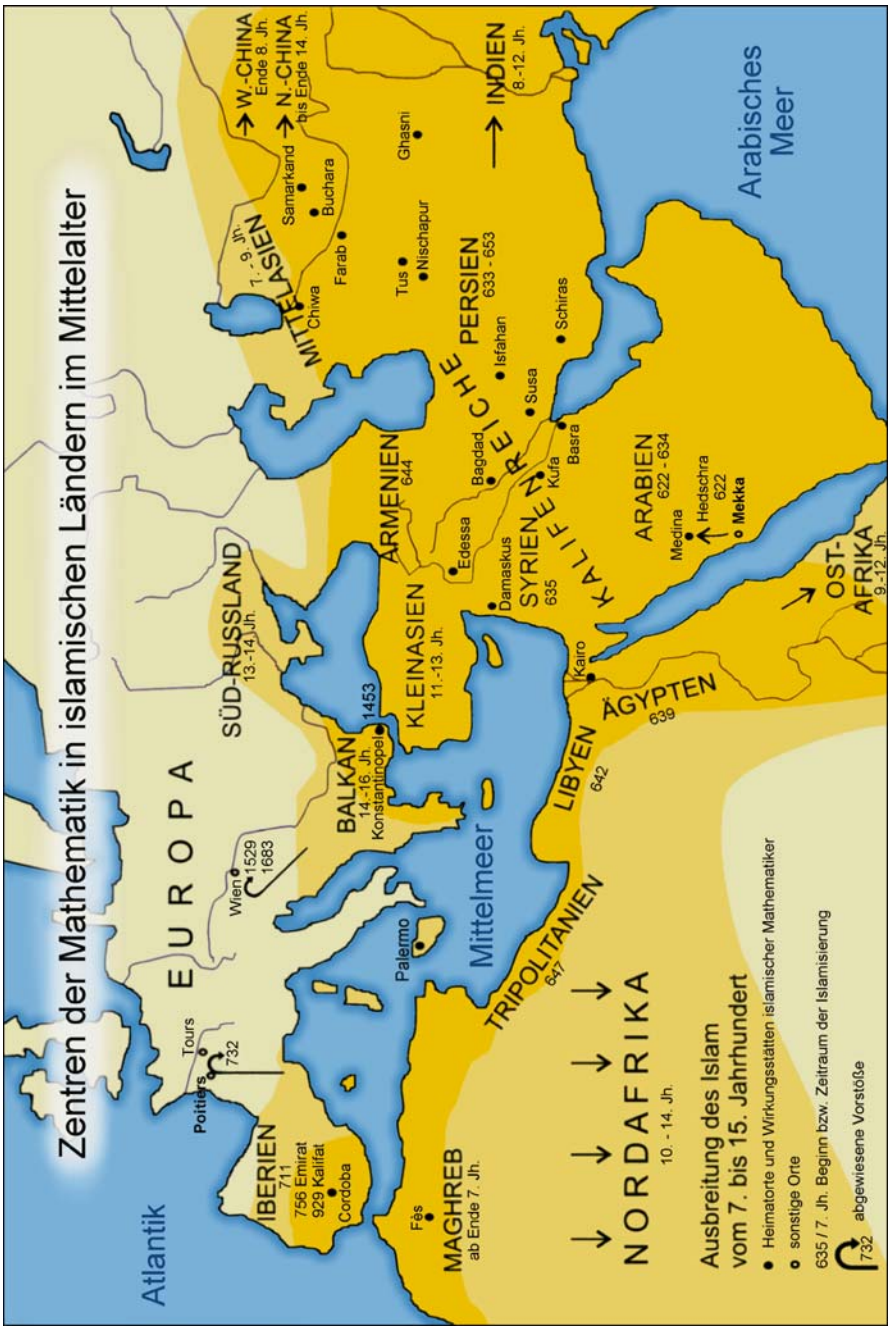
um 585 v. Chr.	Thales	Durchmesser halbiert den Kreis; Dreieck im Halbkreis ist rechtwinklig
um 550	Pythagoras	„Satz des Pythagoras“? Regelm. Fünfeck im Kreis
	Pythagoreer	Zahlenlehre: gerade und ungerade Zahlen, Theorie der Zahlenverhältnisse als Grundlage der Harmonielehre, vollkommene Zahlen
um 500	Eleaten	Anfänge der Logik
um 450	Hippasos	Dodekaeder; Entdeckung des Irrationalen
um 440	Hippokrates	Quadratur von Kreismöndchen; Lösung des delischen Problems (Würfelverdopplung) mit Hilfe von zwei mittleren Proportionalen
um 430	Anaxagoras	Versuch zur Quadratur des Kreises
um 430	Antiphon	Kreisquadratur mit einbeschriebenen Vielecken ($3 * 2^n$ oder $4 * 2^n$ Ecken)
um 420	Hippias	Dreiteilung (und Teilung in n gleiche Teile) eines Winkels mit Hilfe der Kurve Quadratrix

um 410	Bryson	Kreisquadratur mittels ein- und umbeschriebener Vielecke, „Zwischenwertsatz“
um 390	Archytas	Lösung des delischen Problems durch die Bestimmung des Schnittpunktes dreier Flächen
um 380	Theaitetos	Fünf platonische Körper mit umbeschriebenen Kugeln
um 370	Eudoxos	Proportionen und Theorie des Irrationalen, Exhaustionsmethode zur Inhaltsbestimmung krummlinig begrenzter Flächen und Volumina
um 350	Menaichmos, Brüder Deinostratos	Kreisquadratur mit der Quadratrix des Hippias, Lösung des delischen Problems mit zwei Kegelschnitten
um 330	Euklid	Elemente: Axiomatischer Aufbau der ebenen Geometrie, Parallelenpostulat, geometrische Größen, Kreislehre, Konstruktion ein- und umbeschriebener regelmäßiger Vielecke, Theorie der Proportionen und inkommensurabler Größen, Sätze über natürliche Zahlen, Geometrie des Raumes, Konstruktion der fünf regelmäßigen Polyeder (= platonische Körper), Theorie ausführbarer Konstruktionen mit Zirkel und Lineal; Lösung linearer und quadratischer Gleichungen mit Flächenanlegung und formal-geometrischen Beweisen
um 300	Aristarch	Größen und Entfernungen von Sonne und Mond
287–212	Archimedes	Kreisquadratur, Quadratur der Parabel mit Exhaustionsmethode, Winkeldreiteilung, Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks, Kugelvolumen, Spiralen, Neusis (Einschiebung)
um 240	Eratosthenes	Sieb des Eratosthenes, Berechnung des Erdumfangs, Entwurf einer Erdkarte
um 210	Apollonios	Lehre von den Kegelschnitten, platonische Körper

um 130	Hipparch	Bewegungen von Sonne und Mond nach der Exzentertheorie, Kreisteilung in 360°, Sehnentafel
um 180	Diokles	Würfelverdopplung mit Hilfe der Kissoïde
um 180	Nikomedes	Konstruktion der Konchoïde (Muschelkurve) zur Winkeldreiteilung und Würfelverdopplung
um 75 n. Chr.	Heron	Heronische Dreiecksformel, Näherungsformeln für Quadrat- und Kubikwurzeln, Flächen- und Volumenberechnungen
um 110	Marinos	Gradnetzkarte mit Hilfe der Zylinderprojektion
um 140	Ptolemaios	Sehnengeometrie im „Almagest“, Sehnentafel; Planeten- und Fixsternastrologie im „Tetrabiblos“; Kegelprojektion zur Kartographie
um 320	Pappos	Satz des Pappos; „Collectio“ mit historischen Berichten
um 250	Diophantos	Bestimmte und unbestimmte Gleichungen bis sechsten Grades und Systeme solcher Gleichungen
um 370	Theon	Euklid-Bearbeitung
um 400	Hypatia	Kommentare zu den Werken von Diophantos, Ptolemaios und Apollonios
um 400	Proklos	Kommentar zu Buch I der Elemente des Euklid
um 510	Eutokios	Kommentare zu Werken von Archimedes und den „Conica“ des Apollonios

5 Mathematik in den Ländern des Islam

622	Auswanderung Muḥammads von Mekka nach Medina (Hiğra), Beginn der islamischen Zeitrechnung		
632	Tod Muḥammads		
635	Eroberung von Damaskus und Mesopotamien		
642	Eroberung von Ägypten		
635/51	Eroberung von Persien, Ende des Sassanidenreiches		
711	Übergang nach Spanien bei Gibraltar unter dem Berberfeldherrn Ṭāriq (Gibraltar = Ǧabal Ṭāriq)		
712	Eroberung von Choresmien, Vorstoß bis zum Indus		
731	Karl Martell schlägt in der Schlacht bei Tours und Poitiers in Frankreich die Araber zurück		
9. Jh.	Araber auf Kreta und Sizilien		
	West		**Ost**
		634–644	Kalif ᶜUmar (Bücherverbrennung)
		661–750	Umayyaden-Dynastie, Sitz Damaskus
		717–720	Kalif ᶜUmar II.
		718	Umsiedlung der Gelehrten vom Museion in Alexandria nach Antiochia
		750–1517	Abbasiden, Sitz 763–1258 Bagdad
756–1031	Umayyaden, Sitz Córdoba, seit 929 eigenständiges Kalifat	754–775	Kalif al-Manṣūr, Gründer von Bagdad (ab 762)
912–961	Emir, ab 929 Kalif ᶜAbd ar-Raḥmān	768–809	Kalif Hārūn ar-Rašīd, Märchen aus 1001 Nacht
961–976	Kalif al-Ḥakam II., Bibliothek in Córdoba	813–833	Kalif al-Maᵓmūn, erbaut Haus der Weisheit (Bayt al-Ḥikma)
969–1171	Berber-Dynastie der Fatimiden in Ägypten, 969 Gründung von Kairo Begründung einer Art Akademie, Dār al-Ḥikma (Wohnsitz der Wissenschaften)	1206–1227	Čingiz-Ḫān (Dschingis-Khan)
		1258	Einbruch der Mongolen Bagdad wird erobert Ende der Abassiden-Herrschaft
1031	Zerfall des Kalifats von Córdoba	1409–1449	Uluġ Beg in Samarkand (Usbekistan)
1492	Untergang Granadas, des letzten maurischen Königreiches auf spanischem Boden, Ende der Reconquista (Rückeroberung des maurischen Spanien durch die Christen)	1517	Kairo von den Türken erobert
		1523–1527	Bābur erobert Nordindien und wird zum Gründer des Reiches und der Dynastie der Großmoguln


Zentren der Mathematik in islamischen Ländern im Mittelalter
Atlantik
EUROPA
Tours
Poitiers
732
IBERIEN
711
756 Emirat
929 Kalifat
Cordoba
Fès
MAGHREB
ab Ende 7. Jh.
Wien
1529
1683
Palermo
Mittelmeer
SÜD-RUSSLAND
13.-14. Jh.
BALKAN
14.-16. Jh.
Konstantinopel
1453
KLEINASIEN
11.-13. Jh.
ARMENIEN
644
Edessa
Damaskus
SYRIEN
635
Bagdad
KALIFEN
Kufa
Basra
PERSISCHE
Isfahan
Susa
633 - 653
Schiras
Kairo
ÄGYPTEN
639
LIBYEN
642
TRIPOLITANIEN
647
NORDAFRIKA
10. - 14. Jh.
ARABIEN
622 - 634
Medina
Hedschra
622
Mekka
OST-
AFRIKA
9.-12. Jh.
MITTELASIEN
7. - 9. Jh.
Chiwa
Samarkand
Buchara
Farab
Tus
Nischapur
Ghasni
W.-CHINA
Ende 8. Jh.
N.-CHINA
bis Ende 14. Jh.
INDIEN
8.-12. Jh.
Arabisches
Meer
Ausbreitung des Islam
vom 7. bis 15. Jahrhundert
Heimatorte und Wirkungsstätten islamischer Mathematiker
sonstige Orte
635 / 7. Jh. Beginn bzw. Zeitraum der Islamisierung
732 abgewiesene Vorstöße

Vorbemerkung

Die Länder des Nahen und Mittleren Ostens, Nordafrika und Spanien erlebten im Mittelalter vom 7. bis zum 15. Jahrhundert – im engen Zusammenhang mit der Ausbreitung des Islam – eine beispiellose Entfaltung von Kultur und Wissenschaft, von Astronomie und Geographie, von Philosophie und Medizin, von Baukunst, Gartentechnik und handwerklichen Fertigkeiten. Das Niveau Europas in dieser Zeit wurde weit übertroffen. Auch und gerade die Entwicklung der Mathematik gehört zu den vorzüglichen Errungenschaften jener islamischen Kultur des Mittelalters [Brentjes 2003].

Es gibt keine allgemein verbindliche Bezeichnung für die Mathematik jener Periode. Die Benennung „arabische Mathematik“ erfasst zwar den Umstand, dass die arabische Sprache vorwiegend die Sprache der Wissenschaft war, ähnlich dem Lateinischen im europäischen Mittelalter. Doch geht diese Bezeichnung an der Tatsache vorbei, dass nicht nur Araber, sondern auch Perser, Usbeken, Tadschiken, Turkmenen, Juden und andere Völker Träger dieser Entwicklung waren. Die Bezeichnung „Mathematik in den Ländern des Nahen und Mittleren Ostens“ ist geographisch ungenau und zudem reichlich umständlich. So wird hier die Bezeichnung „Mathematik in den Ländern des Islam“ von anderen Autoren übernommen, u. a. von [Juschkewitsch 1964], [Gericke 1990].

5.0 Historischer Überblick

Im 7. Jahrhundert entstand auf der arabischen Halbinsel eine weitere monotheistische Religion, der Islam. Deren Begründer ist Muḥammad ibn ᶜAbdallāh (um 570–632), der aus Mekka stammte und anfangs als Hirte und Kaufmann tätig war. Durch Reisen und Handelstätigkeit kam er mit verschiedensten geistigen Strömungen in Berührung, auch mit dem Christentum und der jüdischen Religion. Seit seinem 40. Lebensjahr empfing er „Offenbarungen“ durch den Erzengel Gabriel, trat für Allāh als alleinigen Gott ein und verstand sich selbst als Nachfolger von Moses und Jesus, die auch heute im Islam als Propheten geachtet werden. Die Offenbarungen Muḥammads wurden unter ᶜUṯmān (Kalif von 644–656; Kalif bedeutet soviel wie Stellvertreter) gesammelt und als „Koran“ zusammengestellt.

Muḥammad stieß mit seinen Anschauungen in Mekka auf Widerstand und musste am 16.7.622 (nach christlicher Zeitrechnung) nach Medina emigrieren. Diese Auswanderung (Hiğra oder Hedschra) wurde zum Beginn der islamischen Zeitrechnung. In Medina scharte Muḥammad eine große Anzahl von Anhängern aus der ganzen arabischen Halbinsel um sich. Im Jahre 630 besuchte er Mekka, das schon eine längere Tradition als religiöses Zentrum vorweisen konnte. Nun wurde die Kaᶜba (Kaaba) – ein würfelförmiger Bau mit einem eingemauerten schwarzen Meteoriten – zum geistigen Mittelpunkt des Islam. Schon 632 verstarb Muḥammad in Medina.

Abb. 5.0.2 a) Die Kaaba in Mekka, b) Ibn al-Hayṯam. An seine optische Theorie knüpften noch Descartes und Kepler an (Saudi-Arabien 1977/79, Pakistan 1963)

Der Schwiegervater von Muḥammad, Abū Bakr, der erste Kalif (von 632–634), vermochte die arabischen Stämme zu einigen und eine kampfkräftige Armee aufzustellen. Unter seinen Nachfolgern wurden Syrien, Mesopotamien, Persien und Ägypten erobert. Der vierte Kalif ᶜAlī ibn Abū Ṭālib (ca. 600–661), Schwiegersohn Muḥammads, wurde 661 ermordet. Daher rührt die Spaltung des Islam in die schiitische (Anhänger ᶜAlīs) und die sunnitische Richtung. Es begann das Kalifat der Umayyaden. Sie verlegten die Hauptstadt von Medina nach Damaskus.

Unter den Umayyaden setzte sich der Siegeszug der Araber fort. Von Ägypten drangen arabische Heerscharen wie ein Sturmwind durch Nordafrika vor, setzten 711 unter Ṭāriq bei dem nach ihm benannten Ǧabal Ṭāriq (Gibraltar) nach Europa über und durchquerten die Iberische Halbinsel. Erst auf französischem Boden konnte der arabische Vormarsch im Jahre 732 bei Tours und Poitiers gestoppt werden. Auch Turkestan, der Pandschab und der größte Teil der arabischen Halbinsel wurden dem arabischen Großreich einverleibt.

Zur Mitte des 8. Jahrhunderts begann die Herrschaft der Abbasiden. Bagdad wurde Hauptstadt; bei der Gründung der Stadt wurden Astrologen hinzugezogen. Dank der Förderung durch al-Manṣūr (Kalif von 754–775), seinen dritten Nachfolger Hārūn ar-Rašīd (Kalif von 786–809) und dessen Sohn al-Maᶜmūn (Kalif von 813–833) wurde Bagdad zur Pflegestätte von Kunst und Wissenschaft. Noch heute erfreuen wir uns an den „Märchen aus 1001 Nacht“.

Der Sohn von ar-Rašīd, der bereits eine Bibliothek zur Sammlung von Übersetzungen griechischer und indischer Werke ins Arabische begründet hatte, ließ zu Beginn des 9. Jahrhunderts das „Haus der Weisheit“ (*Bayt al-Ḥikma*) einrichten. Viele bedeutende Gelehrte, auch und gerade Mathematiker, haben dort gearbeitet und geforscht. Eine glanzvolle Periode für die Entwicklung der Wissenschaften war eröffnet.

Die Abbasiden vermochten es nicht, das riesige Reich zusammenzuhalten. Die Iberische Halbinsel machte sich selbstständig. Unter dem Umayyaden ᶜAbd ar-Raḥmān entstand das Emirat Andalūs mit der Hauptstadt Córdoba.

Abb. 5.0.3 Umayyaden-Moschee in Damaskus, der Hauptstadt des Riesenreiches der Umayyaden und Sitz der Kalifen von 661–775. Mit dem geometrischen Schmuck ihrer Arkaden, Minarette, Wandfriese und Gitterfenster galt die Moschee als „Weltwunder“ islamischer Baukunst. Sie birgt in einem Grabmal das Haupt Johannes des Täufers. [Foto Alten]

Auch Ägypten verselbstständigte sich. Unter der Berberdynastie der Fatimiden (969–1171) wurde der Sitz der Hauptstadt nach Kairo verlegt; Kairo (d. i. die Siegreiche) war 969 gegründet worden. Auch dort entstand an einer Art Akademie *Dār al-Ḥikma* (Wohnsitz der Weisheit) im 10. und 11. Jahrhundert ein bedeutendes wissenschaftliches Zentrum. Dort wirkte unter anderen der Astronom und Mathematiker Ibn al-Hayṯam (ca. 965–1039), der eine Theorie des Sehens schuf.

Die Mongolen bereiteten der Abbasidenherrschaft in Bagdad ein gewaltsames Ende. Im ehemaligen arabischen Herrschaftsbereich entstanden östlich gelegene neue Wissenschaftszentren, so Isfahan, Maragha, Buchara und Samarkand. Hier ließ der Herrscher Uluġ Beg (1409–1449), der sich selbst mit Astronomie beschäftigte, ein hervorragendes Observatorium erbauen.

In den westarabischen Ländern entwickelte sich Córdoba zu einem „zweiten“ Bagdad hinsichtlich der Förderung und Entwicklung der Wissenschaften. Die umfangreiche Bibliothek enthielt etwa 400 000 Bände. An vielen Orten im christlichen Teil Spaniens wurden Werke islamischer Gelehrter ins Lateinische übertragen, auch unter Vermittlung der hebräischen oder der kastilischen Sprache. Besonders bekannt wurde dafür Toledo, wo u. a. Gerhard von Cremona rund 80 Werke aus dem Arabischen ins Lateinische übertrug.

Asturien war frei geblieben von arabischer Besetzung. Von dort begann bereits im 8. Jahrhundert die Periode der Reconquista (Rückeroberung) der maurischen Gebiete durch die christlichen spanischen Staaten. Córdoba fiel 1236, Sevilla 1248, Cádiz 1262. Die letzte maurische Bastion, das Emirat Granada, wurde 1492 erobert.

Die spanischen Königreiche von Kastilien und Aragón waren durch Heirat (1469) von Isabella (1451–1504) und Ferdinand (1452–1516) vereinigt worden, im Bunde mit der katholischen Kirche. Beide erhielten den Beinamen die/der Katholische. Im Triumphzug der Spanier durch das besiegte Granada befand sich auch Kolumbus. Er hatte lange umsonst warten müssen. Nun endlich erhielt er eine kleine Flotte von drei Schiffen, um den Seeweg nach Indien zu erkunden. Im selben Jahr noch, 1492, begann die (erneute) Entdeckung und die Eroberung Amerikas durch die Europäer, aber gleichzeitig auch die Vertreibung der Juden aus Spanien.

Aus praktisch-politisch-ideologischen Gründen war das arabische Großreich in einen ostarabischen und einen westarabischen Teil zerfallen. Der westarabische Teil erstreckte sich von Ägypten bis Spanien. Die Trennung wird auch am Beispiel der Entwicklung der Mathematik deutlich: Die ostarabische Mathematik ist erheblich weiter vorangekommen als die westarabische. Einige Ergebnisse sind nicht nach Westen vorgedrungen, beispielsweise Teile der Trigonometrie. Auch haben sich die von den Indern übernommenen Ziffern in zwei unterschiedlichen Schreibweisen weitergebildet, als sogenannte ostarabische bzw. westarabische oder Ġubār-Ziffern. Dennoch ist das über die westarabische Kultur einströmende Wissen von größtem Einfluss auf die Mathematik im christlichen Europa geworden.

Abb. 5.0.4 Denkmal des Uluġ Beg in Dorpat/Tartu, Estland [Foto Kästner]

Abb. 5.0.5 Ornamente in der Außenmauer der Großen Moschee (Mezquita) in Córdoba [Foto Alten]

Abb. 5.0.6 Die Alkantara-Brücke und der Alkazar von Toledo. Toledo war das Zentrum der Übersetzungen ins Lateinische. Am Ausgang des Mittelalters wurde Toledo Hauptstadt der vereinigten Königreiche Aragón und Kastilien. [Foto Alten]

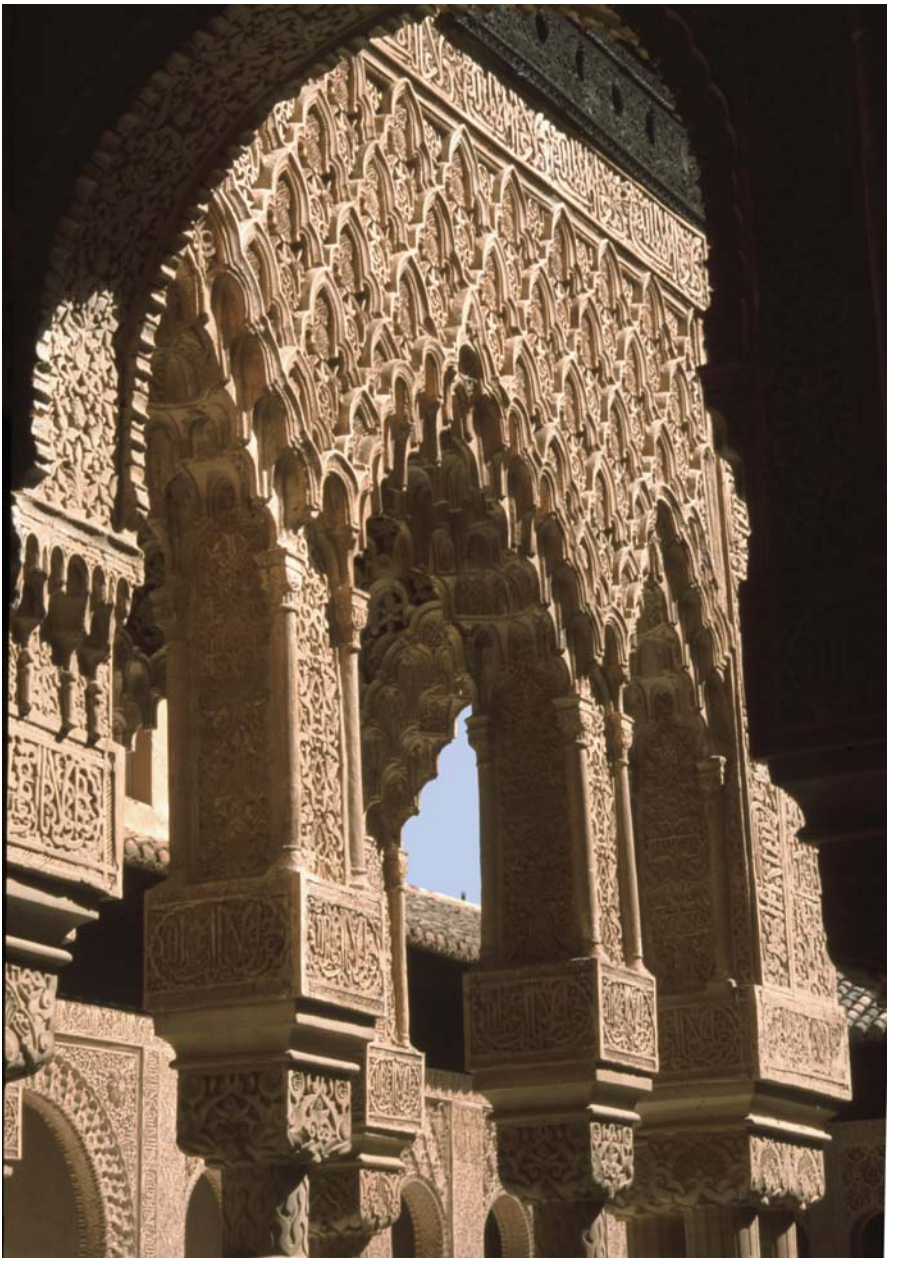


Abb. 5.0.7 Märchenhaft schmücken geometrische Ornamente die Wände im Löwenhof der Alhambra in Granada [Foto Alten]

Abb. 5.0.8 [c]Abd ar-Raḥmān (792–852), Emir von Córdoba; König Alfons VII. (1105–1157), Förderer der Übersetzerschule von Toledo (Spanien 1986)

Ohne Übertreibung kann man sagen, dass die Befolgung religiöser Vorschriften eine der Haupttriebkräfte der islamischen Mathematik während des Mittelalters darstellt.

In seiner Studie *Astronomie und Mathematik als Gottesdienst. Das Beispiel Islam* schreibt King:

> *„Jahrhundertelang hat der Islam – häufiger als jede andere Religion der Menschheitsgeschichte – wissenschaftliche Verfahren auf die verschiedensten Aspekte der Religionsausübung verwendet. Ich verweise auf*
> – *den Mondkalender*
> – *die Gebetszeiten von fünf Tagesgebeten, die sich an den Sonnenständen orientieren und*
> – *die religiöse Ausrichtung auf ein bestimmtes Gebäude.*
>
> *Vom 7. bis zum 19. Jahrhundert wurden diese drei Aspekte von muslimischen Wissenschaftlern und Rechtsgelehrten behandelt, allerdings auf ganz unterschiedliche Weise. Die Wissenschaftler konzentrierten sich auf mathematische Verfahren, die Rechtsgelehrten hielten an volkstümlichen Methoden fest. Das sind die einzigen Bereiche der traditionellen islamischen Wissenschaft, mit denen sich die Moslems heute noch beschäftigen. Sie haben eine Geschichte, die fast 1400 Jahre zurückreicht.“*
>
> [King 2005, S. 92]

Perioden der Entwicklung

In einer ersten Phase wurden große Teile der verfügbaren Schriften des kulturellen Erbes aus der griechisch-hellenistischen Antike, aus Persien, aus Byzanz, aus Indien und Ägypten zusammengetragen, darunter auch die mathematischen, astronomischen und philosophischen Schriften. Boten waren ausgesandt worden, deren Auftrag es war, systematisch Texte aufzuspüren und aufzukaufen. Allerdings hat es unter dem Kalifen [c]Umar auch eine kurze Zeit der Vernichtung nicht-islamischer Schriften gegeben.

Parallel zur Sammlung antiker Schriften ging eine ausgedehnte Übersetzungstätigkeit jener Quellen ins Arabische. Im „Haus der Weisheit“ in Bagdad sorgte man für Abschriften durch gezielte Kopiertätigkeit, und es schlossen sich erste eigene Forschungen in Astronomie und Geographie an.

Bereits um 730 wurden astronomische Texte indischen und persischen Ursprunges ins Arabische übertragen. Den Anfang hatte die Übersetzung der *Siddhāntas* gemacht. Bis zum 10. Jahrhundert lagen aus der griechisch-hellenistischen Mathematik Werke von Ptolemaios, Euklid, Hypsikles, Apollonios, Archimedes, Menelaos, Diophant und Heron in arabischer Sprache vor. Neben dem Inhaltlichen war es vor allem das methodische Vorbild des Beweisens der Sätze, das von den Muslimen übernommen wurde.

Man knüpfte überdies an das übernommene Erbe auf Gebieten an, die aus moderner Sicht der Physik, Chemie, Medizin, Pharmakologie, Biologie, Mineralogie und besonders der Philosophie zuzuordnen sind. In einigen Wissenszweigen konnte dabei das antike Niveau durch neue Fragestellungen, Untersuchungsergebnisse und Methoden nicht nur bereichert und vertieft, sondern auch qualitativ verändert werden.

Während einer zweiten Etappe, deren Beginn etwa auf die Mitte des 9. Jahrhunderts zu datieren ist, bildete sich auf der Grundlage ausgedehnter Kommentare zu den erschlossenen Quellen eine eigenständige mathematische Kultur heraus. Sie umfasste Arithmetik, Zahlentheorie, Algebra, Geometrie, Trigonometrie, Näherungsrechnung und sogar Anfänge der Analysis. Hervorragende Vertreter waren unter anderem al-Ḫwārizmī, al-Kindī und Ṯābit ibn Qurra. Im 10., 11. und 12. Jahrhundert schließlich nahmen astronomische Berechnungen und Näherungsmethoden in Algebra und Astronomie immer größeren Umfang an. Diese Zeit wird – um nur einige Gelehrte zu nennen – geprägt von Abū Kāmil (?850–930), al-Battānī (?850–929), Abū l-Wafāʾ (940–998), Ibn al-Haytam (?965–1039), al-Karaǧī (gest. um 1029), al-Bīrūnī (973–1048) und al-Ḫayyām (?1048–?1131). Im 13., 14. und 15. Jahrhundert widmete man sich verstärkt astronomischen und numerischen Problemen, möglicherweise unter dem Einfluss intensiver Kontakte zu China. Hier seien genannt Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (1201–1274) und al-Kāšī (gest. etwa 1429).

Auch die westarabischen Länder haben hervorragende Gelehrte hervorgebracht: Erwähnt seien hier Ibn Rušd (lat. Averroës; 1126–1198) und Moshe ben Maimon (lat. Maimonides; 1135–1204) aus Córdoba und al-Qalaṣādī (1400?–1486), der kurz vor dem Untergang des Emirates von Granada nach Tunis ging.

Unter dem Einfluss griechischer Quellen zeichnen sich viele Werke arabischer Gelehrter durch das Bemühen aus, die behandelten Probleme systematisch und vollständig darzulegen und gemäß dem Vorbild hellenistischer Mathematik die Sätze zu beweisen. Der Einfluss der indischen und der chinesischen Mathematik spiegelt sich in den arabischen Texten unter anderem durch die zahlreichen und umfangreichen praktischen Beispiele, Aufgaben und Methoden wider (vgl. [The Enterprise 2003]).

5.1 Islamische Universalgelehrte des Mittelalters

Neben der stattlichen Reihe von Mathematikern und anderen Fachgelehrten hat der Islam des Mittelalters zahlreiche Universalgelehrte hervorgebracht, die sich auch mit Mathematik beschäftigt haben. Überhaupt gehörte eine breite, umfassende Kenntnis des gesamten Wissensschatzes zum Bildungsideal des Islam.

Al-Kindī

Den Reigen eröffnete al-Kindī, geboren um 800, gestorben um 870. Er stammte aus einer einflussreichen Familie. In der Umgebung der aufgeklärten Abbasiden-Kalifen al-Maʾmūn und al-Muʿtaṣim in Bagdad und von ihnen gefördert konnte sich al-Kindī eingehend mit antiken Schriften, insbesondere mit Aristoteles beschäftigen, geriet aber danach vorübergehend in Konflikt mit orthodoxen Auffassungen. Er soll sogar eingekerkert gewesen sein.

Al-Kindī betonte die Notwendigkeit, sich mit Naturwissenschaften und Mathematik zu befassen, und hinterließ Abhandlungen zu Medizin, Astrologie, Astronomie, Physik, Geographie, Musiktheorie und Pharmakologie. Seine zahlreichen philosophischen Schriften – einige davon als Lehrstücke für den Sohn von al-Muʿtaṣim gedacht – erbrachten ihm den Ehrennamen „Erster Philosoph“ der arabischen Welt.

Von seinen 38 mathematischen Schriften haben sich nur 7 erhalten. Sie betreffen indische Rechenverfahren, ebene und sphärische Geometrie und andere Gebiete. Er kommentierte die „Elemente“, schrieb eine Einführung in die Zahlentheorie, befasste sich mit der Konstruktion von Sonnenuhren und der 5 Platonischen Körper. Übersetzungen seiner Schriften ins Hebräische und Lateinische haben weit ins christlich-lateinische Europa hineingewirkt.

Al-Fārābī

Auch al-Fārābī (geb. ca. 870 im Farabi Distrikt, Chorasan, Persien; gest. ca. 950 in Aleppo) gehört zu den einflussreichen Gelehrten der islamischen Welt mit umfassender Bildung, der zudem eigene Beiträge zur Mathematik geleistet hat. Er studierte – trotz anfänglicher Schwierigkeiten aus Unkenntnis der arabischen Sprache – auch in Bagdad, wurde durch einen christlichen Lehrer mit der hellenistischen Kultur vertraut und widmete sich vor allem der Interpretation von Aristoteles, der ihm als „Erster Lehrer“ in der Philosophie galt. Al-Fārābī erhielt den Ehrentitel „Zweiter Lehrer“.

In Anlehnung an Aristoteles schrieb al-Fārābī im Kommentar zu den Schwierigkeiten in den Einführungen zu den Büchern I und V des Euklid über den Abstraktionsprozess in der Mathematik (der Text ist in althebräischer Übersetzung erhalten geblieben):

Abb. 5.1.1 a) Al-Fārābī mit Musikinstrument; b) Al-Kindī; c) Al-Bīrūnī (Ägypten 1975, Syrien 1994, Iran 1973)

> *„Das Lernen ist mit einem greifbaren Körper zu beginnen, und dann ist mit der Betrachtung eines Körpers zu beginnen, der von den mit ihm verbundenen Sinneswahrnehmungen losgelöst ist; dann gehe man zur Fläche, dann zur Linie und schließlich zum Punkt über.“*
> (Zitiert bei [Juschkewitsch 1964, S. 248f.])

In diesem Sinne gehören Ibn Sīnā, Ibn Rušd und Maimonides zu den Schülern von al-Fārābī. Aber auch Platos Schriften *Staat* und *Gesetze* waren für ihn von Interesse. Übersetzungen ins Lateinische und Hebräische haben das mittelalterliche Europa stark beeinflusst.

Al-Fārābī war Musiktheoretiker und Autor eines großen Buches über Musik. Eine Legende berichtet, al-Fārābī habe einmal mit seinem Lautenspiel eine ganze Hofgesellschaft in Schlaf versetzt [Strohmaier 1979, S. 68].

Die Mathematik fasste er – wie auch Astronomie, Physik, Musiktheorie, Logik und Ethik – als Teil der Philosophie auf. Drei mathematische Schriften sind verloren; sie befassten sich mit Grundlagenfragen zur Geometrie und mit dem Größenbegriff [DSB, Bd. IV, S. 523–526].

Al-Bīrūnī

Merkwürdigerweise ist einer der bedeutendsten muslimischen Denker, der Astronom, Mathematiker, Geograph und Historiker al-Bīrūnī, erst spät im Abendland bekannt geworden, eigentlich erst im 19. Jahrhundert wirklich erschlossen worden.

Al-Bīrūnī wurde am 4. September 973 in der Stadt Kath, der Hauptstadt des damaligen Choresmien (südlich des Aralsees) geboren. Er starb vermutlich am 9. Dezember 1048 im heutigen Ghazni (Afghanistan).

Im Dienste von mehr oder weniger bedeutenden Fürsten, hoch geehrt, entlassen, verfolgt, auf der Flucht, hat er ein überaus unruhiges Leben geführt [DSB, Bd. II, S. 147–158]. Mehr oder weniger freiwillig führte ihn eine längere Reise während kriegerischer Invasionen seines Herrschers nach Indien. Al-Bīrūnī erlernte Sanskrit. Er schrieb ein ausführliches Werk über Indien, über die dortige Religion und Philosophie, über das Kastenwesen, über Hochzeitsbräuche, die heiligen Kühe, Metrologie, geographische und geodätische Einzelheiten, astronomische Beobachtungen und mathematische Ergebnisse. Aus dem Sanskrit übersetzte er Abhandlungen medizinischen, mathematischen und astronomisch-astrologischen Inhaltes ins Arabische. Umgekehrt übertrug er Ptolemaios und Euklid aus dem Arabischen in Sanskrit und dies in Versen, um den Gewohnheiten der indischen Gelehrten entgegenzukommen.

Es ist unmöglich, hier alle von ihm verfassten Werke aufzuführen. Von ca. 146 Abhandlungen, darunter 14 umfangreichen Büchern, haben sich 22 erhalten, diejenigen über Astronomie, Astrologie, Chronologie, Geographie, Pharmakologie, Indien [DSB, B. II, S. 152].

Bezüglich der Mathematik gehen auf ihn zurück die Zylinderprojektion (in Europa viel später von N. Mercator entwickelt) und die Definition der trigonometrischen Relationen am Einheitskreis. Er löste mit geometrischen Methoden kubische Gleichungen, entwickelte Näherungsverfahren und Vorstufen des Funktionsbegriffes. Auch schrieb er eine spezielle Abhandlung über das Astrolab. Er ließ einen großen Mauerquadranten errichten, beobachtete Sonnenfinsternisse, korrespondierte mit Ibn Sīnā, den er auch persönlich traf.

Ibn Sīnā (Avicenna)

Mit Ibn Sīnā (geb. 980 in Afschana, nahe Buchara, heute Usbekistan, gest. 1037 in Hamadan, heute Iran) erschien ein Stern erster Größe am Himmel der Wissenschaften. Sein Ruhm strahlte weit über die islamische Welt hinaus, unter dem latinisierten Namen Avicenna bis in unsere Zeit. Sein „Kanon der Heilkunst“ (*Al-Qānūn*) erfasste die damaligen medizinischen Kenntnisse der Griechen, Perser, Inder und Araber. Ins Lateinische übersetzt, diente der „Kanon“ in Europa noch bis ins 17. Jahrhundert als Standardlehrbuch. Philosophisch stand Avicenna in der arabischen Aristoteles-Tradition. Seine philosophischen Abhandlungen haben im 13. Jahrhundert in Europa erheblich zur Wiederbelebung aristotelischer Denkweisen beigetragen. Avicenna hat mehr als 270 Abhandlungen verfasst. Auch war er in mehreren hohen politischen Ämtern tätig. Zudem ist eine Autobiographie durch einen seiner Schüler überliefert worden.

Auch mit Mathematik war Avicenna wohl vertraut. Angeblich hat er bei einem Gemüsehändler in Buchara auf dem Basar die neue, die indische Arith-

Abb. 5.1.2 Ibn Rušd (Averroës), Moshe ben Maimon (Maimonides) (Spanien 1967); Ibn Sīnā (Avicenna) (Iran 1954)

metik kennen gelernt. Auf sich gestellt hat er die „Elemente“ des Euklid studiert. Seine mathematischen Betrachtungen betreffen den Kontingenzwinkel, Zusammenfassungen der „Elemente“ und des „Almagest“ sowie zahlentheoretische, trigonometrische und andere Probleme. Interessant ist seine Beschreibung eines Gerätes zur genaueren Positionsbestimmung von Gestirnen; vgl. dazu [Djafari Naini 1991] und den Videofilm *Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter* [Wesemüller-Kock 2004].

Ibn Rušd (Averroës)

In die erste Reihe der Wissenschaftler-Philosophen gehört auch Ibn Rušd (1126–1198), der unter dem latinisierten Namen Averroës im lateinisch-christlichen Bereich bekannt geworden ist. Averroës stammt aus Córdoba, aus einer einflussreichen Familie. Vater und Großvater bekleideten hohe Funktionen als Richter in Sevilla und Córdoba.

Averroës hat Theologie, Rechtswissenschaft und Medizin studiert und gelangte beim Kalifen Abū Yūsuf als dessen Leibarzt zu hohem Ansehen. Averroës wurde von dem wissenschaftsfreundlichen Herrscher mit der Bearbeitung der Schriften des Aristoteles beauftragt; die ausführlichen Erläuterungen und Kommentare haben einen bedeutenden Einfluß auf die Scholastik im christlichen Europa ausgeübt. Averroës galt und gilt als *der* Kommentator von Aristoteles schlechthin. In diesem Zusammenhang zeigt er sich auch bestens vertraut mit der antiken Astronomie, so etwa mit Eudoxos, Ptolemaios und sogar mit Hipparchos.

Im Jahre 1195 geriet Averroës in Konflikt mit der orthodoxen islamischen Geistlichkeit. Unter der Anklage, seine Philosophie gefährde die islamische Religion, wurde er verbannt und seine Schriften wurden verbrannt. Erst kurz

vor seinem Tode am 12. 12. 1198 durfte er an den Hof zurückkehren, nun in Marokko.

Die Assimilation der im 11. Jahrhundert im Abendland bekannt werdenden Schriften von Aristoteles und seiner islamischen und jüdischen Kommentatoren stieß wegen ihrer empirischen Aspekte auf Schwierigkeiten. In Paris wurde 1209 das Studium von Aristoteles verboten. Thomas von Aquino wurde nach Paris berufen, um den Averroismus zu bekämpfen. Siger von Brabant (ca. 1240 bis ca. 1284), ein Averroist, wurde umgebracht. Der Averroismus wurde verboten.

Rabbi Moshe ben Maimon (Maimonides)

Ebenfalls aus Córdoba stammt der jüdische Religionsphilosoph Rabbi Moshe ben Maimon, latinisiert Maimonides. Er wurde 1135 geboren und stammt aus einer berühmten Familie, die ihren Ursprung bis zu König David zurück verfolgen konnte. Durch seinen Vater erhielt Maimonides eine gründliche Ausbildung, die auch Mathematik und Astronomie einschloss.

Die Sekte der Almohaden (d. i. Bekenner der Einheit Allāhs) eroberte Córdoba, als Maimonides 13 Jahre alt war. Diese aggressive muslimische Gruppe wollte alle Juden mit Gewalt zum Übertritt zum Islam zwingen. Daher wich die Familie nach Marokko aus, später, wegen erneuter Anfeindungen und Religionsstreitigkeiten, nach Israel und Ägypten, in die Nähe von Kairo. Um seinen Lebensunterhalt zu bestreiten, praktizierte er als Arzt und schrieb medizinische Kompendien. Er starb 1204.

Maimonides fühlte sich dem umfassenden Bildungsideal des Islam verpflichtet; dementsprechend finden sich unter seinen Schriften auch solche zur Mathematik und Astronomie, und er berichtete über atomistische Lehren und über das astronomische System des Ptolemaios.

Mit zahlreichen Schriften, teils hebräisch, teils arabisch, konnte Maimonides ein geschlossenes System des jüdischen Glaubens schaffen; es hat auch in die christliche Welt hineingewirkt. Einflüsse von Maimonides lassen sich noch bei Spinoza und Leibniz nachweisen.

Ibn Ḫaldūn (Ibn Chaldun)

Obgleich Ibn Ḫaldūn keine wesentlichen Beiträge zur Mathematik geleistet hat, zeigt seine Biographie einiges über die Lebensumstände der islamischen Gelehrten und über die Beziehungen zwischen Islam und Christentum im 13./14. Jahrhundert.

Ibn Ḫaldūn wurde 1332 in Tunis geboren. Die Familie hatte ihren Wohnsitz in Sevilla kurz vor der Eroberung der Stadt (1248) durch die Christen aufgegeben. In Tunis wurden seine Eltern von der Pest dahingerafft. Er diente bei verschiedenen Herrschern, fiel in Ungnade, wurde wieder rehabilitiert – ein sehr wechselvolles Leben, nicht frei von Opportunismus. Für kurze Zeit

Abb. 5.1.3 Ibn Ḫaldūn; Al-Ḫwārizmī (Tunesien 1980, Sowjetunion 1983)

durfte er sogar nach Granada und Sevilla zurückkehren. Er unternahm die obligatorische Pilgerfahrt nach Mekka und ließ sich schließlich in Kairo nieder, reiste nach Syrien und Palästina und erhielt in Kairo eine – damals nicht ungefährliche – Position als Richter, wurde fünfmal entlassen und fünfmal wieder eingestellt.

Sein Hauptwerk „Buch der Beispiele“ – niedergeschrieben in einer Bergfestung nahe Tunis – enthält historische und gesellschaftliche Studien über die Araber, die Berber und andere Völkerschaften. Sie beruhen auf dem soziologischen Grundbegriff der Eigenschaften von Gruppen von Menschen hinsichtlich der Religion, der Gesetze, des Gefühles der Zusammengehörigkeit, Stand der Wissenschaften, Anerkennung der Gelehrten. Dies sind, freilich noch im Gewand mittelalterlichen Gelehrtentums, moderne Grundideen, die in der Philosophie und der Soziologie des 19. und 20. Jahrhuunderts aufgegriffen wurden. Ibn Ḫaldūn starb am 17. März 1406 in Kairo.

5.2 Al-Ḫwārizmī (al-Choresmi) und seine „Algebra“

Zu Beginn des 9. Jahrhunderts war in Bagdad das „Haus der Weisheit“ ins Leben gerufen worden. Zu den Ersten der dort Tätigen gehört Muḥammad ibn Mūsā al-Ḫwārizmī (al-Choresmi) (780?–850?), der von großem Einfluss auf die weitere, auch auf die europäische Entwicklung geworden ist.

Aus dem Namen al-Ḫwārizmī (al-Choresmi) hat man geschlossen, dass er im damaligen Choresmien (in der heutigen Stadt Chiwa, Usbekistan) geboren wurde. Jedenfalls hat die Usbekische Akademie der Wissenschaften zu seinem 1200. Geburtstag 1980 ein sehr schönes und eindrucksvolles, wissenschaftliches, internationales Kolloquium mit einem rauschenden Fest in Chiwa veranstaltet.

Abb. 5.2.1 Kalta Minar (Minarett) in Chiwa, Usbekistan [Foto Alten]

Al-Ḫwārizmī könnte in seiner Jugend Anhänger der Religion des Zarathustra gewesen sein. Später, in den Vorreden seiner Schriften, preist er Allāh, nach muslimischer Sitte. Al-Ḫwārizmī ist hervorgetreten als Autor seines maßgebenden Buches „Algebra“ und eines astronomischen Werkes, beide unter dem Kalifen al-Maʾmūn verfasst. Späteren Datums sind Arbeiten über die indischen Ziffern, über den jüdischen Kalender und eine Geographie. Möglicherweise war er auch Verfasser (verloren gegangener) Abhandlungen über Sonnenuhr und Astrolab.

Al-Ḫwārizmī hatte seine Algebra auf Wunsch des Kalifen al-Maʾmūn niedergeschrieben, damit die Bevölkerung mit den Problemen des täglichen Lebens zurechtkommen sollte, u. a. mit dem komplizierten islamischen Erbrecht. Er wolle, so al-Ḫwārizmī, ein kurzgefasstes Buch schreiben

> *„... von dem Rechenverfahren der Ergänzung und Ausgleichung mit Beschränkung auf das Anmutige und Hochgeschätzte des Rechenverfahrens für das, was die Leute fortwährend notwendig brauchen bei ihren Erbschaften und Vermächtnissen und bei ihren Teilungen und ihren Prozeßbescheiden und ihren Handelsgeschäften und bei allem, womit sie sich gegenseitig befassen, von der Ausmessung der Ländereien und der Herstellung der Kanäle und der Geometrie und ande-*

rem dergleichen nach seinen Gesichtspunkten und Arten.“
(Zitiert bei [Tropfke 1933, Bd. II, S. 65])

Merkwürdigerweise stellt der praktische Teil den zweiten Teil seiner „Algebra“ dar. Es ist dies aber insofern konsequent, als die dort behandelten Aufgaben eben durch (verbal formulierte!) Gleichungen beschrieben werden. Der erste Teil ist relativ abstrakt; es handelt sich um die Klassifikation der quadratischen Gleichungen.

Die in arabischer Sprache geschriebene Abhandlung von al-Ḫwārizmī hat den Titel *al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisab al-ğabr wa-l-muqābala* (in Deutsch etwa: Ein kurz gefasstes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen). Ein Beispiel erläutert die Bedeutung von „Ergänzung“ oder „Auffüllung“ bzw. „Ausgleich“ oder „Gegenüberstellung“.

Nehmen wir als Beispiel (in heutiger Formelschreibweise) die quadratische Gleichung

$$2x^2 + 100 - 20x = 58.$$

Der erste Schritt zur Lösung der Gleichung hat das Ziel, negative Terme zu beseitigen. Also werden $20x$ „ergänzt“ oder „aufgefüllt“. Man erhält

$$2x^2 + 100 - 20x + 20x = 58 + 20x.$$

Noch einmal wird „aufgefüllt“:

$$2x^2 + 100 - 58 = 58 - 58 + 20x.$$

Dann wird „gegenübergestellt“:

$$2x^2 + 42 = 20x.$$

Das führt auf die Normalform

$$x^2 + 21 = 10x.$$

Al-Ḫwārizmī stellt (verbal formuliert) sechs Typen von quadratischen Gleichungen auf:

$$\begin{array}{lll} (1)\ ax^2 = bx & (2)\ ax^2 = c & (3)\ bx = c \\ (4)\ ax^2 + bx = c & (5)\ ax^2 + c = bx & (6)\ bx + c = ax^2, \end{array}$$

jeweils mit positiven Koeffizienten. Beim Typ (1) wird die Lösung Null nicht berücksichtigt. Nur positive Lösungen werden zugelassen. Anders als bei den Indern kann der Gleichungstyp $ax^2 + bx + c = 0$ nicht behandelt werden, weil diese Gleichung keine positiven Wurzeln hat, wenn die Koeffizienten positiv sind.

Für alle Gleichungstypen – aber eben nur für spezielle Zahlenbeispiele – gibt al-Ḫwārizmī geometrische Lösungsverfahren an, die stets zum Ziele führen.

Für den Gleichungstyp (4) in der reduzierten Form $x^2 + px = q$ gibt er (in heutiger Formelschreibweise) die Lösung

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

an; vgl. [Alten at al. 2003, S. 167f.].

Nehmen wir für Typ (5) das Zahlenbeispiel $x^2+21 = 10x$, natürlich verbal formuliert. Dazu gibt al-H̆wārizmī folgende Rechenvorschrift, die geometrisch bewiesen wird:

> *„Halbiere die Wurzeln; das ergibt fünf; multipliziere dies mit sich selbst, und du erhältst fünfundzwanzig; ziehe davon die einundzwanzig ab, die dem Quadrat hinzugefügt sind; es verbleiben vier; ziehe hieraus die Wurzel – das ergibt zwei, und ziehe dies von der Hälfte der Wurzel ab, d.h. von fünf, es verbleiben drei; dies ist die Wurzel des Quadrats, das du suchst, und das Quadrat ist neun.“*
> (Zitiert bei [Juschkewitsch 1964, S. 207])

Zwei wesentliche Punkte müssen festgehalten werden: Die Gleichungen werden verbal, nicht in Formelschreibweise angegeben. Dabei wird für das Quadrat der Ausdruck „Vermögen“, für die Unbekannte „Wurzel“ verwendet. So würde der Typ (4) heißen:

> *Was das Vermögen und die Wurzel anlangt, ist gleich einer Zahl.*

Und ferner: al-H̆wārizmī hat möglicherweise auf mesopotamische Quellen zurückgegriffen und vermutlich auch auf Schriften von Diophant, insbesondere von den Griechen die Forderung nach Beweisen übernommen. Diese werden jedoch, wie gesagt, geometrisch, nicht rechnerisch geführt.

Es gab auch in der muslimischen Mathematik im 15. Jahrhundert Ansätze zur Verwendung von Symbolen, so etwa bei al-Qalaṣādī (ca. 1400–1486). Er stammt aus Spanien und starb in Tunesien. Sein Werk „Entschleierung der Wissenschaft der Arithmetik“ beispielsweise enthält die „Symbolik“: Zur Bezeichnung der Quadratwurzel setzte er den Anfangsbuchstaben von *ǧiḏr* (Wurzel) über die Zahl. Analog setzte er bei quadratischen Gliedern die Anfangsbuchstaben von *šayʾ* (Ding) bzw. *māl* (Vermögen) über die Koeffizienten.

Erst im Europa der Renaissance, das sich explizit auf al-H̆wārizmī bezieht, wird die Formulierung der Gleichungen und der Lösungswege endgültig durchgehend algebraisch unter Verwendung von Symbolen vorgenommen.

Eine arabische Handschrift von al-H̆wārizmīs „Algebra“ befindet sich in der Bodleian Library in Oxford. Der Text wurde zusammen mit einer Übersetzung ins Englische 1831 herausgegeben. Es gibt auch lateinische Versionen, die vom Engländer Robert von Chester oder vom Italiener Gerhard von Cremona (ca. 1114–1187) stammen. Sie wurden in Toledo niedergeschrieben.

Und schließlich eine Bemerkung zur Sprachgeschichte: Aus dem Wort *al-ǧabr* im Titel der „Algebra“ von al-H͡wārizmī wurde schließlich die Bezeichnung *Algebra*: das Herzstück einer Methode wurde zur Bezeichnung der Methode schlechthin. Und der Name des Autors al-H͡wārizmī wurde – auf verwickelten historischen Wegen – zum mathematischen Fachwort *Algorithmus*.

Al-H͡wārizmī und das indische Zahlensystem

Die Muslime besaßen eigene Zahlensysteme. Auf den Marktplätzen war das Fingerrechnen weit verbreitet. Schriftliches Rechnen vollzog sich ähnlich wie bei den Griechen, wo Buchstaben für Ziffern verwendet wurden. Diese Methode war noch im 10. Jahrhundert in Gebrauch.

Das indische Dezimalsystem war längs der Handelswege nach Westen vorgedrungen. Mitte des 7. Jahrhunderts wurde es vom syrischen Bischof Severus Sebocht lobend erwähnt.

Ein indischer Gelehrter brachte 773 eine indische Schrift astronomischen Inhaltes nach Bagdad an den Hof des Kalifen al-Manṣūr; es enthielt Hinweise auf das indische dezimale Positionssystem.

Al-H͡wārizmī schrieb die früheste muslimische Arithmetik, in der die indische Zählweise behandelt wird. Das arabische Original ist verloren gegangen. Es könnte den Titel getragen haben „Buch über die Addition und Subtraktion nach der Methode der Inder“.

Man muss ein wenig aufpassen: Die ältesten Texte zum indischen Rechnen, die in arabischer Sprache erhalten sind, sind mehr als 100 Jahre später als die Schrift von al-H͡wārizmī. Al-Uqlīdisī – Lebensdaten sind unbekannt – verfasste 952/953 in Damaskus eine Schrift über das indische Rechnen. Dazu kommt, dass er das schriftliche Rechnen mit Feder und Papier statt des üblichen Rechnens auf dem Staubbrett [Alten et al. 2003, S. 185f.] empfahl. Ähnliche Arbeiten zum indischen Rechnen stammen beispielsweise auch von Ibn Labbān (2. Hälfte 10. Jahrhundert) und von al-Baġdādī (gest. 1037). (Ausführlich bei [Folkerts 1997, S. 4f.])

Bis vor kurzem war nur eine, allerdings lückenhafte lateinische Version der Schrift von al-H͡wārizmī bekannt, mit erheblichen Fehlern. Vor allem fehlen dort die indischen Ziffern; die Stellen, wo sie hingehören, sind freigelassen (ausführlich bei [Juschkewitsch 1964, S. 186–203]).

Es war nun eine mathematikhistorische Sensation, als es M. Folkerts gelang, in New York eine vollständige lateinische Fassung der Arbeit von al-H͡wārizmī zu entdecken. Diese Bearbeitung enthält auch die indischen Ziffern und stammt möglicherweise aus dem 12. Jahrhundert.
Die New Yorker Fassung beginnt mit den Worten:

> *„Dixit Alchoarizmi* (Al-H͡wārizmī hat gesagt) *Wir wollen Gott, unserm Herrn und Beistand, das ihm zukommende Lob aussprechen,*

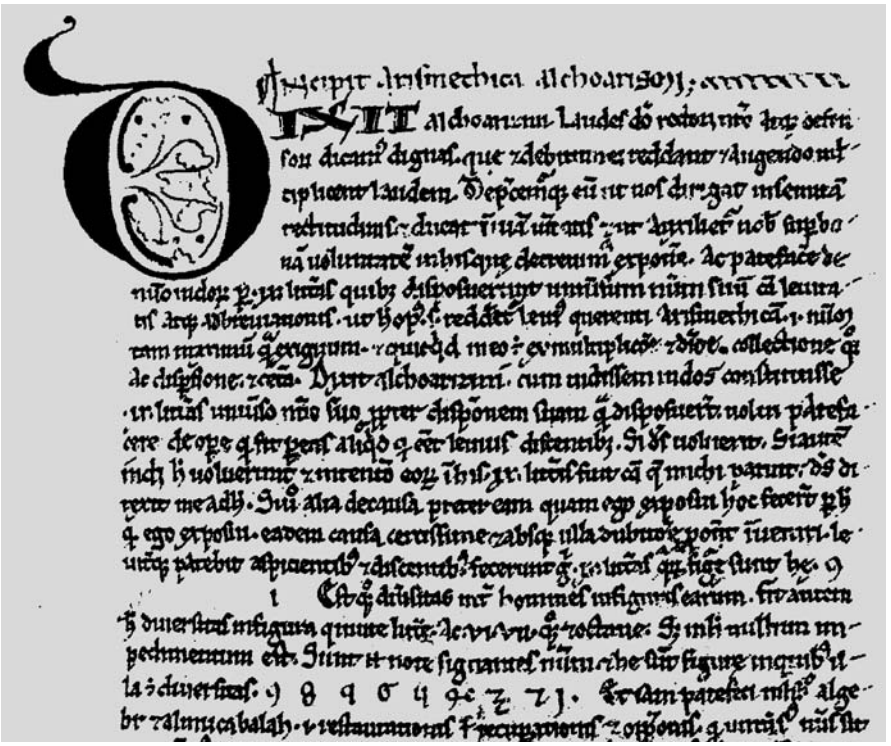


Abb. 5.2.2 Erste Seite der ältesten lateinischen Übersetzung einer Arbeit von al-Ḫwārizmī über das indische Rechnen [Folkerts 1997, Tafel I]

> *das ihm das geschuldete abstattet und durch Vermehren sein Lob vervielfältigt. Und wir wollen ihn bitten, dass er uns auf den Pfad der Geradlinigkeit und auf den Pfad der Wahrheit führt und dass er uns hilft bei unserer guten Absicht dessen, was wir beschlossen haben darzulegen und zu erörtern über die Rechenweise der Inder mit Hilfe von 9 Symbolen, mit denen sie jede einzelne Zahl um der Leichtigkeit und abgekürzten Form willen darstellen, damit nämlich dieses Verfahren leichter wird für denjenigen, der sich um die Arithmetik bemüht, d.h. sowohl um eine sehr große als auch eine sehr kleine Zahl und um all das, was mit ihr geschieht an Multiplikation und Division, Addition und Zerlegung, und um die übrigen Dinge.“*
> (Zitiert nach [Folkerts 1997, S. 29])

In seiner „Arithmetik“ lehrt al-Ḫwārizmī die Zahlendarstellung nach indischer Weise im dezimalen Positionssystem und die Grundrechenarten in dieser Zahlenschreibweise. Behandelt werden das Rechnen mit ganzen Zahlen: Addition, Subtraktion, Halbierung, Verdoppelung, Multiplikation, Neunerprobe; sodann die Division: Sexagesimalbrüche und gewöhnliche Brüche und

Grundrechenarten mit ihnen; schließlich die Bestimmung der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen und Brüchen.

Im weiteren Verlauf hat sich die arabische Ziffernschreibweise differenziert. Aus den indischen Ziffern entwickelten sich die ostarabischen und die westarabischen oder Ġubār-Ziffern. Während heutzutage die ostarabischen Ziffern bei den die arabische Schrift benutzenden Völkern bis hin zum äußersten Westen der arabisch-islamischen Welt in Marokko verwendet und dort indische Ziffern genannt werden, haben sich aus den dort gebildeten (indisch)-westarabischen Ziffern im 15. und 16. Jahrhundert die bei uns gebräuchlichen „arabischen“ Ziffern entwickelt (vgl. dazu auch [Kunitzsch 2003]).

Das Rechnen mit dem indischen dezimalen Positionssystem hat sich nur langsam durchgesetzt. Abū l-Wafāʾ hat noch zwischen 961 und 976 eine Arithmetik auf Grundlage der verbalen Zahlenbeschreibung verfasst. Eine an der Grenze vom 10. zum 11. Jahrhundert verfasste Arithmetik von al-Karaǧī (gest. zwischen 1019 und 1029) beruht auf derselben Konzeption.

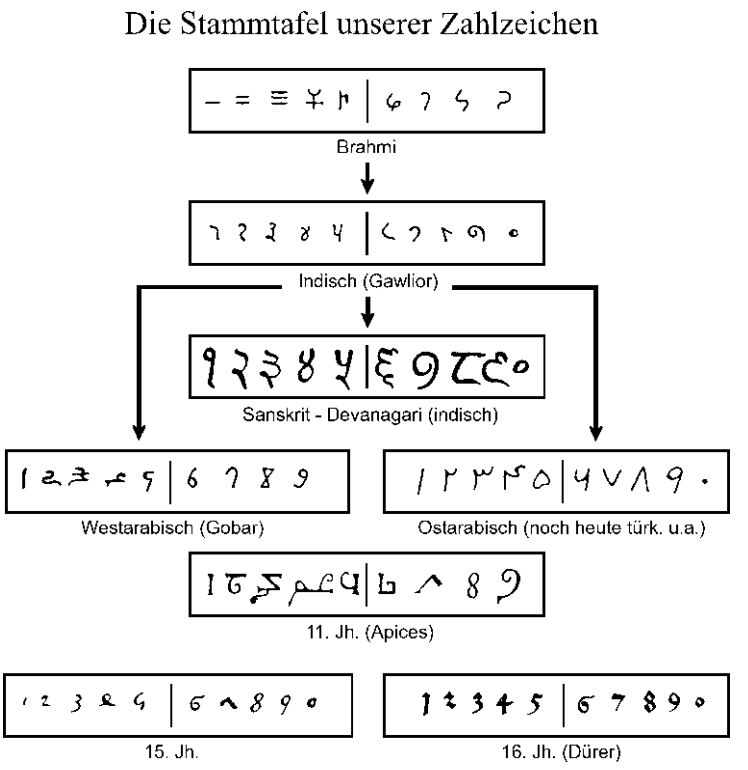


Abb. 5.2.3 Stammtafel unserer Zahlzeichen, nach [Menninger 1958]

Weit verbreitet – und das sogar noch für lange Zeit – war zudem der Gebrauch des Sexagesimalsystems, wenn auch in einer gegenüber dem mesopotamischen Vorbild verbesserten Form.

Dezimalbrüche waren bekanntlich schon in China verwendet worden. Möglicherweise hat der aus dem Iran stammende al-Kāšī (gest. 1429) davon Kenntnis erhalten. Jedenfalls behandelt er in einer großen zusammenfassenden Schrift in Buch 1 das Rechnen mit natürlichen Zahlen und die indische Ziffernschreibweise, im 2. Buch systematisch die Bruchrechnung für gewöhnliche Brüche und Dezimalbrüche. Im Buch 3 wird das Rechnen im Sexagesimalsystem vorgetragen. In Buch 4 folgen geometrische Probleme, in Buch 5 u. a. die regula falsi, Rechnen mit Irrationalitäten, einiges aus Buch X der „Elemente“, zahlentheoretische Probleme, u. a. über vollkommene und befreundete Zahlen.

Das umfangreiche wissenschaftliche Werk von al-Kāšī umfasst zahlreiche mathematische, vor allem aber astronomische Abhandlungen. Viele weitere Werke islamischer Mathematiker zur Arithmetik sind zum Teil verloren gegangen und (bisher) nur dem Namen nach bekannt, z. B. von al-Bīrūnī (973–1048) über das Berechnen dritter und vierter Wurzeln und auch eine Abhandlung von al-Ḫayyām (1048–1131). Allgemeine Verfahren zum Wurzelziehen wurden von al-Kāšī in seinem „Schlüssel zur Arithmetik“ behandelt; dieses Werk ist sogar erhalten geblieben [Alten et al. 2003, S. 190f.].

Nach al-Kāšī verbreiteten sich die Dezimalbrüche in der 2. Hälfte des 15. Jahrhunderts und im 16. Jahrhundert in der Türkei. Man verwandelte gemeine Brüche in Dezimalbrüche. Dies wird dargelegt in einer anonymen byzantinischen Handschrift; sie befindet sich jetzt in der Österreichischen Nationalbibliothek in Wien [Juschkewitsch 1964, S. 241f.].

5.3 Spitzenleistungen in der Algebra der Muslime

Im historisch-kritischen Rückblick erscheint al-Ḫwārizmī nicht eigentlich als Forscher, sondern als „Zusammenfasser“, als pädagogisch geschickter Kompilator in einer einmaligen wissenschaftshistorischen Situation. Sein erheblicher Einfluss erstreckt sich auf die nachfolgenden Generationen muslimischer Forscher auf dem Gebiet der Algebra und – wie man sehen wird – bis weit hinein in die nachfolgende Entwicklung in Europa.

Hier können nur fast stichwortartige Einblicke in die algebraischen Fähigkeiten der Muslime gegeben werden.

Die „Algebra“ von al-Ḫwārizmī wirkte anregend u. a. auf Abū Kāmil (ca. 850–ca. 930), al-Karaǧī (gest. um 1029), as-Samawʾal (gest. 1175), al-Ḫayyām (ca. 1048–ca. 1131), Šaraf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (ca. 1135–ca. 1213) , Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (1201–1274), al- Kāšī (ca. 1380–ca. 1429) und andere Gelehrte [Alten et al. 2003], [Peiffer/Dahan-Dalmedico 1994].

Abū Kāmil

Abū Kāmil knüpfte direkt an die „Algebra“ von al-Ḫwārizmī an. Der Titel eines seiner Werke *Kitāb fi l-ğabr wa-l-muqābala* (Buch über Algebra) ist fast gleich lautend mit der „Algebra“ des al-Ḫwārizmī. Weitere, erhalten gebliebene und teilweise in moderne Sprachen übersetzte Abhandlungen betreffen die Werke *Buch von seltenen Dingen in der Rechenkunst*, *Über Pentagon und Dekagon*, ferner Abhandlungen über Wurzeln, Vermessung und anderes.

Was die Algebra betrifft, so übertrifft Abū Kāmil al-Ḫwārizmī: Er behandelt unbestimmte Gleichungen, beispielsweise die Gleichung $x^2-8x-20=y^2$, die natürlich verbal formuliert wird. Als erster muslimischer Mathematiker betrachtete er Potenzen bis x^6 (Quadrat Quadrat Quadrat). Er behandelte Gleichungen vierten Grades, überdies auch biquadratische Gleichungen mit irrationalen Koeffizienten.

Wie historische Studien ergeben haben, konnte Abū Kāmil auf Heron sowie auf mesopotamische und ägyptische Quellen zurückgreifen. Andererseits lässt sich direkter Einfluss auf al-Karağī und Fibonacci nachweisen.

Über Abū Kamīl ist nichts Authentisches zur Biographie bekannt. Er erhielt jedoch schon damals den Ehrennamen „Der Rechner“.

Al-Karağī

Al-Karağī steht in der direkten Nachfolge von Abū Kāmil, al-Ḫwārizmī und auch von Diophant. Er wirkte vorwiegend in Bagdad.

Al-Karağī nimmt eine zentrale Stellung in der Geschichte der Algebra ein, die sich durch ihn zu einer weitgehend selbstständigen mathematischen Disziplin auszuformen begann.

> *„Der persische Mathematiker al-Karağī hat auf der Grundlage der algebraischen Werke von al-Ḫwārizmī und Abū Kāmil und in Anlehnung an die ‚Arithmetika‘ von Diophant die Algebra als eine eigenständige Disziplin entwickelt, indem er sich nach und nach von der geometrischen Beweisführung seiner Vorgänger abwandte und als erster das Ziel der Algebra als die Bestimmung der unbekannten Größen durch die bekannten definierte. Diese Definition blieb bis zum Anfang des 19. Jhs. gültig und wird als die Arithmetisierung der Algebra bezeichnet.“*
> (Zitiert bei [Brentjes 1990, S. 240f.]

In der Formulierung „Arithmetisierung der Algebra“, die wohl auf R. Rashed zurückgeht, tritt der Kern von al-Karağīs Leistung zutage: Der Versuch, Gleichungen und Gleichungssysteme (nach Möglichkeit) mit algebraischen Methoden zu lösen. Sein Werk ist umfangreich; ausführlich [DSB, Bd. VII, S. 240–246]).

Al-Karağī schrieb ein arithmetisches Buch *Genügendes über das Rechnen*, das bei praktischen Problemen Staatsbeamten und Kaufleuten Hilfe geben

sollte. Das algebraische Werk *Wunderbares über die Arithmetik* behandelt unbestimmte Gleichungen. Das zweiteilige Werk über Algebra, *al-Fahrī*, hat er dem Wesir von Bagdad gewidmet. Unter anderem wird das Potenzgesetz formuliert: $x^m x^n = x^{m+n}$; m, n ganz, beide positiv oder beide negativ. Polynome, die Summation endlicher arithmetischer Reihen und algebraische Umformungen von Irrationalitäten werden behandelt, vor allem aber unbestimmte Gleichungen höheren Grades, beispielsweise zwei Gleichungen in drei Unbekannten (u, v bedeuten Konstante):

$$x^2 + z = u^2\,; \quad y^2 + z = v^2$$

und viele andere Fälle.

As-Samawʾal berichtete später, al-Karağī habe die Binomialkoeffizienten bis zum Exponenten 12 angegeben.

Al-Karağī hat noch etwa 18 weitere Abhandlungen verfasst; etwa die Hälfte von ihnen ist verschollen. Dazu gehören eine Einführung in die Astronomie, eine in die indische Rechenweise und eine weitere über Gewölbe und Gebäude.

As-Samawʾal

Im gewissen Sinne kann as-Samawʾal als Schüler von al-Karağī verstanden werden, insbesondere mit seinen algebraischen Ambitionen [Peiffer, S. 87–89], [DSB, Bd. XII, S. 91–95].

As-Samawʾal wurde in Bagdad geboren, als Sohn eines jüdischen Lehrers für Religion und Literatur. Die Mutter war hoch gebildet und stammte aus Basra. Der Junge erwies sich als eine Art Wunderkind, studierte Hebräisch und Medizin und wurde mit dem indischen Zahlensystem und Vermessungstechniken bekannt. Inzwischen war das wissenschaftliche Niveau in Bagdad derart abgesunken, dass er keine Lehrer in Mathematik finden konnte und gezwungen war, autodidaktisch Euklids „Elemente“, die „Algebra“ von Abū Kāmil, Werke von al-Karağī und andere fundamentale mathematische Werke zu lesen. Damals war er 18 Jahre alt. Er war ein sehr erfolgreicher Arzt und trat mit medizinischen Schriften hervor. Auch wandte er sich gegen die Prophezeiungen der Astrologen. Seine Autobiographie enthält den Bericht von einem Traum, der ihn am 8. November 1163 bestimmte, zum Islam überzutreten.

Was die Mathematik betrifft, so schrieb er mit 19 Jahren ein vierteiliges Buch zur Algebra: *Das glänzend schöne Buch über das Rechnen.* Unter anderem tritt dort erstmals in der muslimischen Algebra eine systematische Behandlung der negativen Zahlen auf. Mit der Definition $x^0 = 1$ dehnte er die allgemeinen Rechenregeln für Potenzen aus, ohne Einschränkung der Exponenten. Behandelt werden bei einer wenn auch noch unausgereiften Symbolik: Rechnen mit Polynomen, Klassifikation der quadratischen Gleichungen, Klassifikation der Irrationalitäten im Anschluss an Buch X der „Elemente“.

Der Einfluss von as-Samawʾal ist schwer abzuschätzen. Er ist nachweisbar auf al-Kāšī, nicht aber für Europa.

ᶜUmar Ḫayyām (Omar Khayyam)

ᶜUmar Ḫayyām (ca. 1048–ca. 1131) war ein überaus produktiver Mathematiker, Astronom und Philosoph. In Europa ist er zuerst bekannt geworden als Dichter, als Verfasser von ungefähr 1000 Vierzeilern, niedergeschrieben in persischer Sprache. Auf dem Hintergrund tiefer Melancholie in Anbetracht des unvermeidbaren Todes werden Lebens- und Liebeslust gepriesen und sogar der Genuss von Wein – eine Sünde im orthodoxen Islam.
Als Beispiel seien hier einige dieser Sinnsprüche wiedergegeben.

Merk dir, von der Seele wirst du einst getrennt,
Der Weg ins Nichts dich hinter geheime Schleier lenkt.
Trink Wein, denn du weißt nicht, woher du kommst,
Sei fröhlich, du weißt nicht, wohin es dich lenkt.

Abb. 5.3.1 Text eines Vierzeilers von ᶜUmar Ḫayyām in persischer Sprache [Wikimedia Commons, GNU-FDL]

In freier Übersetzung lautet dieser Vierzeiler:

Man sagt, das Paradies mit Jungfraun sei entzückend,
ich find allein den Rebensaft berückend!
Nimm dies alsbald, und den versprochnen Schatz lass fahren,
denn Krieges Trommelklang ist nur von fern beglückend.
[Nach Wikipedia aus dem Dateiarchiv Wikimedia Commons]

Der Perser ᶜUmar Ḫayyām stammt aus Nischapur (Chorasan, im heutigen Iran). Schwierige und gefährliche politische Zustände zwangen ihn, seine Wirkungsstätten zu wechseln. Nach einem Aufenthalt in Samarkand fand er in Isfahan 18 Jahre Ruhe zur wissenschaftlichen Arbeit und leitete dort das Observatorium.

Abb. 5.3.2 Omar Khayyam (Albanien 1997)

Als [c]Umar Ḫayyām seine fürstlichen Beschützer in Isfahan verlor, wurde er wegen Gottlosigkeit verfolgt und vertrieben und unternahm eine Pilgerreise nach Mekka. Er starb in Nischapur.

[c]Umar Ḫayyām hat einen äußerst scharfsinnigen kritischen Beitrag zur Diskussion um das Parallelenpostulat von Euklid geleistet; er kann gedeutet werden als erster Beitrag zur nichteuklidischen Geometrie [DSB, Bd. VII, S. 329f.], [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 173]. Weitere mathematische Leistungen betreffen die Euklidische Proportionenlehre, Zahlentheorie, Radizieren, astronomische Tafeln.

Seine Hauptleistung aber betrifft die Algebra. Noch in Samarkand schrieb er eine umfassende Abhandlung über kubische Gleichungen. Durch ihn wurde die Unterscheidung zwischen Arithmetik und Algebra betont und der Algebra eine klare Definition gegeben, die in Europa erst wieder im 17. Jahrhundert erreicht wurde.

Algebra ist für ihn die Kunst von al-ğabr und al-muqābala, bei der unbekannte Größen aus mit ihnen in Gleichungen zusammenhängenden bekannten Größen berechnet werden sollen. Der Begriff „Größe“ ist weit gefasst, er umschließt Zahlen, Strecken, Körper und sogar die Zeit.

[c]Umar Ḫayyām gab eine Klassifikation auch der Gleichungstypen dritten Grades, natürlich verbal, ohne Symbole, vgl. [Alten et al. 2003, S. 177]. Er musste zugeben, dass es ihm nicht gelungen ist, eine Gleichung dritten Grades in Wurzelausdrücken zu lösen, hoffte aber darauf, dass Nachfolgende die Lösung finden werden. Aber er gibt für die verschiedenen Typen kubischer Gleichungen geometrische Lösungen mit Hilfe von Kegelschnitten an.
Beispielsweise behandelt er die Gleichung (modern geschrieben)

$$x^3 + \alpha x = \beta\,; \quad \alpha, \beta > 0,$$

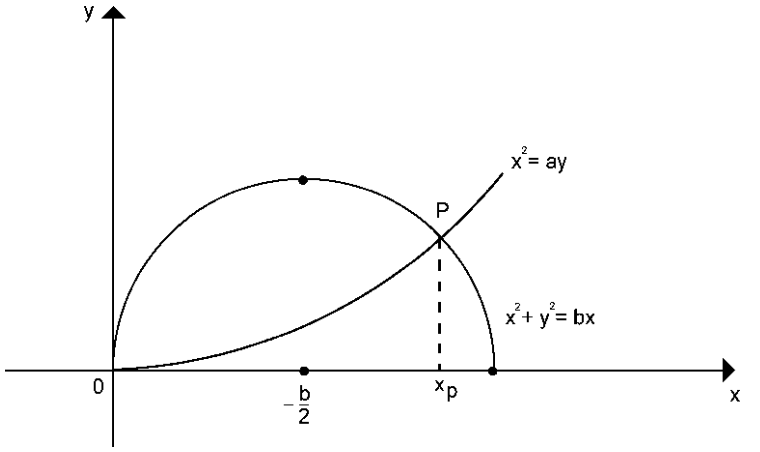


Abb. 5.3.3 Figur zur geometrischen Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + a^2x = a^2b$

schreibt aber wegen des Homogenitätsprinzipes

$$x^3 + a^2x = a^2b\,; \quad a, b > 0.$$

Er betrachtet den Kreis $x^2 + y^2 = bx$ und die Parabel $x^2 = ay$. Die x-Koordinate des Schnittpunktes P von Kreis und Parabel ist die positive Wurzel der kubischen Gleichung. (Natürlich findet sich bei al-Ḥayyām kein Hinweis auf die Existenz zweier komplexer Wurzeln).

In Europa wurde der Theorie geometrischer Lösungen im 17. Jahrhundert zur Wiedergeburt verholfen, insbesondere durch Descartes.

Al-Ḥayyām begegnete bei seinen Studien schwierigen Fragen, z. B. ob und wie viele positive Wurzeln eine kubische Gleichung haben kann. Diese und ähnliche Fragen, die sich aus dem Schnittverhalten von Kegelschnitten ergeben, wurden von Šaraf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī weitergeführt.

Šaraf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī

Šaraf ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (um 1135–1213) wurde in Tus (im heutigen Iran) geboren und wirkte in Damaskus, Aleppo, Mossul, Bagdad und Hamadan. Es gelang ihm, recht gute Ergebnisse zur Existenz positiver Wurzeln von Gleichungen dritten Grades zu erzielen. Auch studierte er Kurven an Hand der Gleichungen: Die wechselseitige Betrachtung von Gleichungen und Kurven gehört bereits in den Bereich der analytischen Geometrie. Er soll sogar numerische Näherungslösungen für kubische Gleichungen gefunden haben [Rashed 1994].

Abb. 5.3.4 Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī; Al-Kāšī (Iran 1993, 1979)

Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī

Auf dem Gebiet der numerischen Lösung von Gleichungen und der Berechnung von Wurzeln hat auch Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (1201–1274) Bedeutendes geleistet. Er stammt aus dem heutigen Iran und starb während einer Reise nach Bagdad. Im Alter von 50 Jahren wurde er Hofastrologe in Maragha unter dem Mongolenfürsten Hūlāgū Ḫān. Maraghas Observatorium wurde zu einem Zentrum mathematisch-astronomischer Forschung; dort arbeiteten Gelehrte aus Damaskus, Mossul und sogar aus China. An dieser Forschungsstätte verfasste aṭ-Ṭūsī im Jahre 1260 das erste selbstständige Werk zur Trigonometrie, die *Abhandlung über das vollständige Vierseit*. Erstmals wird hier die Lehre von der Berechnung der Dreiecke zum eigenständigen Wissenschaftszweig erhoben. Dieses umfassende Werk, beginnend mit den Grundbegriffen und Grundbeziehungen bis zum Algoritmus für die Lösung aller typischen Aufgaben, übte einen bedeutenden Einfluss auf die Entwicklung der Trigonometrie Europas aus.

Aṭ-Ṭūsī gab komplizierte Beispiele für die Berechnung von Wurzeln an, etwa $\sqrt{244\,140\,626}$ [Alten et al. 2003, S. 185–188]. Er könnte Anregungen zu dieser Arbeitsrichtung aus einem (verlorenen) Werk von ᶜUmar Ḫayyām oder aber von in Maragha wirkenden chinesischen Gelehrten empfangen haben. Andere Problemkreise betreffen Wurzeln der Art $\sqrt[k]{a^k + r}$.

Al-Kāšī

Einer der letzten bedeutenden muslimischen Mathematiker war al-Kāšī (um 1380–1429), mit dem Beinamen „Ġiyāt ad-Dīn“, was „Hilfe des Glaubens“ bedeutet. Er wurde vermutlich in Kaschan (Iran) geboren und starb in Samarkand. Nach einer schweren, von Armut geprägten Jugendzeit gelangte er

nach Samarkand, wo die durch Uluġ Beg geförderte wissenschaftliche Schule und ein Observatorium existierten. Hier wurde al-Kāšī zum Leiter des Observatoriums. Er entwickelte ein originelles Iterationsverfahren, das in seiner *Abhandlung über die Sehne und den Sinus* abgefasst war. Zwar ist diese Niederschrift verloren gegangen, wird aber am Anfang seines Hauptwerkes *Schlüssel der Arithmetik* erwähnt. Dieses Verfahren wurde von al-Kāšī zur Erstellung von astronomischen Tafeln herangezogen, wobei er $\sin 1°$ mit großer Genauigkeit berechnete. Dafür verwendete er die „Winkeldreiteilungsgleichung“

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

da sich $\sin 3°$ beliebig genau (z. B. durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal aus der Differenz von 36° am Fünfeck und 30° am Sechseck) bestimmen lässt. Mit $x = \sin 1°$, $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4}\sin 3°$ geht die Gleichung über in

$$x^3 + q = px \quad \text{bzw.} \quad x = (q + x^3)/p.$$

Da $\sin 1°$ sehr klein ist, ist $(q + x^3)/p \approx q/p$ und $x_1 = q/p$ ein guter erster Näherungswert für $\sin 1°$. Das Iterationsverfahren $x_{n+1} = q + x_n^3/p$ liefert mit jedem Schritt eine weitere Sexagesimalstelle. Auf diese Weise erhielt al-Kāšī für $\sin 1°$ – umgerechnet ins Dezimalsystem – auf 18 Stellen genau

$$\sin 1° = 0{,}017\ 452\ 406\ 437\ 283\ 571$$

(vgl. [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 179]).

Aus seiner Feder stammt eine enzyklopädische Zusammenfassung vorhandenen mathematischen Wissens, der *Schlüssel zur Arithmetik*. Zwar ist der erste Teil, *Abhandlung über die Sehne und den Sinus*, verloren gegangen, aber wir sind durch spätere Beschreibungen über dessen Inhalt informiert.

Der *Schlüssel zur Arithmetik* wurde für spätere Generationen zum Standardwerk: Gelehrt werden u. a. die binomischen Formeln, Berechnung der n-ten Wurzeln, numerische Auflösung von Gleichungen durch Iterationsverfahren, vgl. [Alten et al. 2003, S. 185ff.].

Im *Schlüssel zur Arithmetik* behandelt al-Kāšī auch die Konstruktion der die islamische Baukunst bestimmenden Kuppeln (qubba). Es gab verschiedene, mathematisch ziemlich komplizierte Konstruktionen; vgl. dazu [Dold-Samplonius 1992], [Dold Samplonius 2003].

Eine spezielle Abhandlung ist Uluġ Beg gewidmet und behandelt das Rechnen mit natürlichen Zahlen, die indische Zahlenschreibweise, das später nach Newton benannte Iterationsverfahren, gewöhnliche Brüche, Dezimalbrüche, Rechnen im Sexagesimalsystem. Es folgen geometrische Grundbegriffe, die regula falsi, das Rechnen mit Irrationalitäten, Summation endlicher Zahlenreihen und Anderes.

Aufschlussreich ist seine Definition des gewöhnlichen Bruches. Er definiert den Bruch als

Abb. 5.3.5 Kuppel des Grabmals Gur Emir in Samarkand (Anfang 15. Jh.)
[Foto Dold]

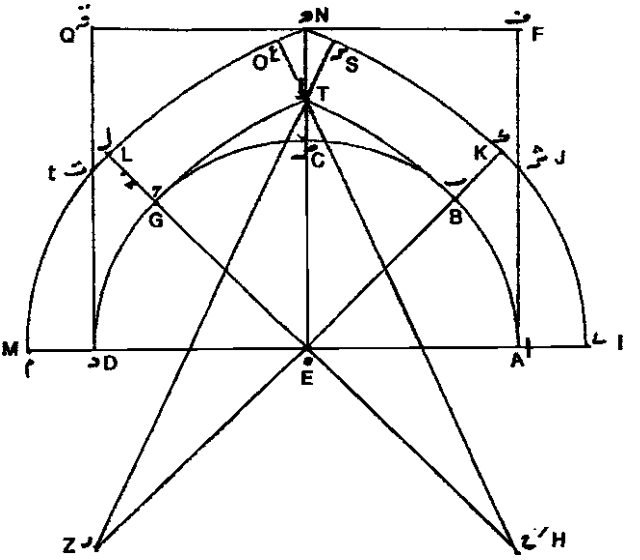


Abb. 5.3.6 Konstruktion einer Qubba, aus [Dold-Samplonius 1992, S. 176]

„... das auf das Ganze als Einheit bezogene Quantum. ... Jedes Verhältnis des Zählers eines Bruches zu seinem Nenner lässt sich unendlich vielfältig in Zahlen ausdrücken, doch das Beste hiervon für die Anwendung ist das Kleinste aus zwei ganzen Zahlen mit demselben Verhältnis; alle anderen Ausdrücke sind schlechter.“
[Juschkewitsch 1964, S. 199]

Weitere Schriften – 10 davon sind erhalten geblieben – berühren geometrische Probleme wie: Kreisumfang, iterative Bestimmung von $\sin 1^\circ$ [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 179].

5.4 Zum Zahlbegriff

Die Art und Weise der Definition von „Zahl“ bzw. die Verwendung des Zahlbegriffes ist Kernstück von Arithmetik und Algebra. Hier sei die zusammenfassende Einschätzung von A.P. Juschkewitsch zitiert:

„Die Chinesen und Inder haben die negativen Zahlen eingeführt, die Mathematiker der Länder des Nahen und Mittleren Orients gelangten zum Begriff der reellen Zahl, der sowohl die rationalen als auch die irrationalen positiven Zahlen umfaßt. Diese hervorragende theoretische Errungenschaft wurde in Europa an der Grenze vom 16. zum 17. Jahrhundert bekannt, und zwar durch die Herausgabe einer Fassung der „Darlegung des Eukleides“ des Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī in Rom ... (im Jahre 1594).

Im 17. Jahrhundert entwickelte Gregorius a Sancto Vincentio eine Theorie der quantitativen „Benennungen der Verhältnisse“, die den „Abmessungen der Verhältnisse“ seiner Vorgänger entsprachen.
Andreas Tacquet kritisierte und „korrigierte“ den Eukleides von einem Standpunkt, der dem des al-Ḥayyām nahe steht. René Descartes verknüpfte die antike allgemeine Verhältnislehre mit der Arithmetik, und Isaac Newton definierte schließlich die Zahl nicht als Zusammenfassung von Einheiten, sondern als abstraktes Verhältnis irgendeiner Größe zu einer anderen Größe derselben Art, die als Einheit gewählt wurde.
Selbstverständlich stützte sich die Entwicklung des Zahlbegriffes in Europa vor allem auf die stürmische Entwicklung der numerischen Mathematik und ging hier eigene Wege.
Bereits am Ende des 16. Jahrhunderts trat Simon Stevin entschieden dafür ein, die Irrationalitäten als Zahlen anzuerkennen; er lehnte es ab, sie als irrational oder unausdrückbar zu bezeichnen, da sie in Wirklichkeit nur inkommensurabel wären. Es wäre interessant, zu klären, ob zwischen der Verhältnislehre im 17. Jahrhundert und den Gedanken der arabischen mathematischen Literatur direkte Zusammenhänge bestanden haben.
Für die Erweiterung des Zahlbegriffes zur reellen Zahl war die Anerkennung der negativen Zahlen von großer Bedeutung. Die Mathematiker der Länder des Nahen und Mittleren Orients übernahmen diese Zahlenform von den Indern nicht; erst kürzlich wurde ein Einzelfall der Verwendung negativer Zahlen (...) im Buch des Abu-l-Wafa für die Schreiber entdeckt.“
[Juschkewitsch 1964, S. 255f.]

5.5 Beiträge der Muslime zur Geometrie

Ein wenig zugespitzt kann man feststellen, dass die Leistungen der Muslime auf dem Gebiet der Algebra die auf dem Gebiet der Geometrie deutlich übertreffen. Dies schließt natürlich einzelne hervorragende geometrische Leistungen nicht aus, vor allem in der Trigonometrie im Zusammenhang mit Astronomie. Dies wiederum stand in enger Beziehung zu religiösen Bräuchen: Festlegungen des Mondkalenders, Festsetzung der fünf täglichen Gebetszeiten nach dem Sonnenstand, die Orientierung nach Mekka in Abhängigkeit vom geographischen Standort.

So ist es nicht verwunderlich, dass sich geometrische und trigonometrische Studien auch bei Mathematikern finden, die sich als Algebraiker hervorgetan haben, und umgekehrt.

Am Anfang stand die Aneignung der „Elemente“ des Euklid; sie wurden übersetzt und kommentiert und dienten in der Folgezeit als Anregung zu weiterer Forschung (vgl. dazu ausführlich [Scriba/ Schreiber, 2. Aufl. 2005]).

In einem Abschnitt seiner schrittmachenden „Algebra“ behandelt al-H͡wārizmī geometrische Themen. Inhaltlich greift er zurück auf die ersten beiden Bücher der „Elemente“ und auf Heron. Auch findet sich ein anschaulicher Beweis des Satzes von Pythagoras für das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck, möglicherweise nach indischen Anregungen.

In der zweiten Hälfte des 9. Jahrhunderts haben die drei Brüder Banū Mūsā (Muḥammad, gest. 872, Aḥmad und Ḥasan) eine weit ausgreifende Tätigkeit entwickelt. Sie reisten beispielsweise nach Byzanz, um griechische Handschriften zu erwerben. Neben Arbeiten zur Mechanik, Astronomie und zum Instrumentenbau widmeten sie sich insbesondere der Geometrie. So wurden die sieben ins Arabische übersetzten Bücher der „Konika“ von Apollonios kommentiert, ebenso wie die Berechnungen von Flächen und Körpern. Durch Gerhard von Cremona ins Lateinische übersetzt haben diese Darlegungen – z. B. über Kreis- und Kugelberechnungen – eine große Rolle im lateinischen Mittelalter gespielt. Auch beschrieben die Brüder Banū Mūsā die antike Exhaustionsmethode.

Die muslimischen Geometer beschäftigten sich ausführlich und umfassend mit der Konstruktion von regulären Polygonen. Als mit Zirkel und Lineal konstruierbar waren damals bekannt Dreieck, Quadrat, Fünfeck, Fünfzehneck und durch Seitenverdoppelung daraus ableitbare Polygone. Reguläres Siebeneck und reguläres Neuneck boten sich als Herausforderung an, zumal das Neuneckproblem mit dem Problem der Winkeldreiteilung verquickt ist. Der Ausweg bestand in der Suche nach Lösungen mittels Kegelschnitten.

Abū l-Wafāʾ, im 10. Jahrhundert lebend und in Bagdad wirkend, schrieb eine Abhandlung *Über jene Teile der Geometrie, die die Handwerker benötigen.* Dort finden sich Konstruktionen regulärer Polygone bis zum 10-Eck sowie Konstruktionen mit fester Zirkelöffnung.

Die wunderbaren geometrischen und floralen muslimischen Ornamente – Darstellungen von Lebewesen sind im Islam untersagt – bieten ein weites Betätigungsfeld für mathematikhistorische Studien. Auch die Kreisberechnung gehörte bei den Muslimen – wie in allen Kulturkreisen – zu einem zentralen mathematischen Problemkreis. Al-H͡wārizmī gab den archimedischen und den indischen Wert für π bzw. den Kreisumfang an. Al-Kāšī trieb die Berechnung von π am Polygon mit $3 \cdot 2^{28}$ Seiten so weit, dass der von ihm erhaltene Wert für π im Dezimalsystem auf 17 Stellen genau ist.

Das Parallelenpostulat war schon in der Antike Gegenstand kritischer Betrachtung gewesen. Eine ganze Reihe muslimischer Gelehrter – u. a. T̲ābit ibn Qurra (836–901), an-Nayrīzī (gest. um 922), al-H͡Ḫayyām– suchten das Postulat zu beweisen, verwickelten sich aber – wie auch die Gelehrten in Europa noch bis ins 18. Jahrhundert – in Zirkelschlüsse (ausführlich bei [Juschkewitsch 1964, S. 277–288]).

Nicht alle der von den ostarabischen Mathematikern erzielten Fortschritte erreichten Europa. Immerhin aber beschäftigte sich der einflussreiche jesuitische Mathematiker Christoph Clavius (1537–1612) mit der Arbeit von

Abb. 5.5.1 Geometrisches Ornament mit floralen Motiven am Mausoleum Usta Ali in Shah-i-Sinda, Samarkand [Foto Alten]

Abb. 5.5.2 Florales und geometrisches Motiv im Kachelschmuck der Freitagsmoschee in Yazd, Iran [Foto Alten]

an-Nayrīzī zum Parallelenproblem, und John Wallis (1616–1703) führte um 1650 die Arbeiten von Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī weiter [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 174].

Auch die im engeren Sinne praktische Geometrie ist vertreten, sogar schon bei al-Ḫwārizmī. Seine geometrischen Ausführungen in der „Algebra“ weisen Ähnlichkeiten mit einer althebräischen Schrift auf.

Trigonometrie gehörte – im Hinblick auf die Astronomie und die daraus abgeleiteten religiösen Pflichten – zu den bevorzugten Forschungsgebieten. Hier wurden bedeutende Fortschritte erzielt.

Bereits um 800 waren in Bagdad alexandrinische und indische astronomische Werke bekannt geworden; diese beruhten auf einer Sinustrigeometrie statt auf der antiken Sehnengeometrie; vgl. dazu [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 175ff.].

Auch hier machte al-Ḫwārizmī den Anfang mit der Aneignung der neuen Methode. Er verfasste eine Sinustafel. Die Sehnentrigonometrie wurde schließlich durch die Sinusgeometrie ersetzt. Die Muslime fügten den indischen trigonometrischen Grundfunktionen Sinus und Kosinus noch Tangens und Kotangens, Sekans und Kosekans hinzu. Dazu mussten umfangreiche Tafeln erarbeitet werden; man behielt nach antiker Tradition das Sexagesimalsystem bei. Auch wurde die Trigonometrie auf den räumlichen Fall ausgedehnt, d.h. die sphärische Trigonometrie wurde entwickelt.

Einer der zentralen Repräsentanten der muslimischen Trigonometrie war Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (1201–1274). Der Mongolenfürst Hūlāgū Ḫān ließ für ihn in Maragha (Persien) im 13. Jahrhundert eine Sternwarte errichten. Aṭ-Ṭūsī studierte den Sinussatz der ebenen und sphärischen Geometrie und verfasste eine speziell der Trigonometrie gewidmete Abhandlung *Abhandlung über das vollständige Vierseit.*

Abb. 5.5.3 Uluġ Beg und Sextant (Sowjetunion 1987)

Abb. 5.5.4 Medresse des Uluġ Beg am Registan in Samarkand, Usbekistan [Foto Alten]

Der Timuriden-Fürst Uluġ Beg (das bedeutet Großprinz) (1394–1449, ermordet), Enkel des mongolischen Eroberers Tīmūr, gründete in seiner Hauptstadt Samarkand (heute in Usbekistan) eine Hochschule und um 1425 ein Observatorium.

Der Sextant im Observatorium des Uluġ Beg in Samarkand sollte möglichst erdbebensicher sein. Dazu wurde aus dem gewachsenen Fels eine Vertiefung in Gestalt eines Zylindersegments gehauen und in der mit Ziegelsteinen ausgemauerten kreisförmigen Rinne vom Radius 40,1 m das Segment eines Sextanten (sechster Teil eines Kreises) mit Unterteilung in Winkelgrade und Minuten markiert. Ein im Mittelpunkt des Kreises befindliches Loch ermöglicht die Bestimmung der jeweiligen Sonnenhöhe und die Anpeilung und Positionsbestimmung von Gestirnen.

Hervorragende Gelehrte wurden berufen und das Observatorium mit vorzüglichen Geräten (Armillarsphären, Astrolabien) ausgestattet. Uluġ Beg war selbst ein ausgezeichneter Astronom und Mathematiker. Im Jahre 1437 vollendete er *Neue astronomische Tafeln*; dort sind Sinus und Tangens für jede Minute des Bogens tabelliert. Er berechnete dort u. a. den Wert von $\sin 1°$. In Samarkand wurden Mond-, Sonnen- und Planetenbeobachtungen systematisch vorgenommen. Der auf den Beobachtungen basierende Sternatlas *Zīǧ-i Gurgānī* des Uluġ Beg ist erstaunlich genau. Er umfasst 1018 Sterne, zum Teil unter Rückgriff auf den „Almagest“ des Ptolemaios.

5.6 Neue Quellen für mathematikhistorische Forschung

Verschiedene Autoren haben auch in jüngster Zeit darauf hingewiesen, dass in arabischen und persischen Depots eine Fülle noch unbekannter, noch nicht erschlossener mathematikhistorischer Quellen liegt. Überzeugende Beweise für diese These sind die in den 1970er Jahren entdeckten Bücher IV, V, VI, VII von Diophant in arabischer Sprache [Sesiano 1982] und die neuerdings aufgefundenen und edierten Schriften zur Infinitesimalrechnung [Rashed 1993, 2000, 2002], so auch Schriften der Banū Mūsā (Berechnung der Kugel und des Zylinders), von Ṯābit ibn Qurra, von Ibn al-Hayṯam (Quadratur der Möndchen und des Kreises, Volumen des Paraboloids und der Kugel und Exhaustionsmethode) – dies in gewisser Weise in archimedischen Traditionen stehend. In der Rezension von Chirakara Sasaki (Tokyo) heißt es dazu:

> *„... wir erfahren, dass die mathematische Leistung der Araber keineswegs nur eine Vermittlerrolle des hellenistischen mathematischen Erbes in die lateinisch-christliche Zivilisation gespielt hat. Diese Leistung war auf eine Vereinfachung des Verfahrens von Archimedes bei infinitesimalen Bestimmungen und die Verbindung der beiden höchst fundamentalen mathematischen Disziplinen, Arithmetik und Geometrie, gerichtet und – höchst bedeutend dies zu betonen – auf den praktischen und heuristischen Aspekt der Mathematik durch Herausbildung einer spezifischen ars inveniendi (Erfindungskunst). Mit einem Wort, es eröffnete sich ein neuer Horizont für die mathematischen Wissenschaften.“*
>
> [Historia scientiarum, Vol. 13, Second series, Nr. 1, Juli 2003, S. 59–63. englisch; deutsche Übers. Wg]

Die Untersuchung der Mathematik in den Ländern des Islam ist seit dem 19. Jahrhundert eine international betriebene Aufgabe der Mathematikhistoriker und dürfte wohl in der Zukunft zu einem Schwerpunkt der Forschung werden.

Es gibt schon jetzt eine äußerst umfangreiche einschlägige Literatur in arabischer Sprache, aber auch in französischer, russischer, englischer und deutscher Sprache. Diese Publikationen wurden von Spezialisten mit umfassenden Sprachkenntnissen und detektivischem Scharfsinn zum Auffinden von Manuskripten geschaffen (hier konnte nur eine sehr schmale Auswahl geboten werden, oft nur andeutungsweise). Sie erschließen eine spezifische, höchst innovative Mathematik aus einem Kulturkreis, dessen Spuren weit hinausreichen in die damals erst noch bevorstehende Entwicklung der Mathematik während des europäischen Mittelalters und der Renaissance.

In der heutigen Zeit, wo aus politischen Gründen so viel vom „Kampf der Kulturen“ geredet und geschrieben wird, sollten wir die Leistungen der islamischen Wissenschaft des Mittelalters dankbar würdigen. Sie sind in dieser oder jener Form, direkt oder indirekt, in unsere Weltkultur und Wissenschaft eingegangen.

Abb. 5.6.1 Geometrische Muster und florale Ornamente des Kachelschmucks zeugen von dem Einfluss perisischer Mathematiker bei der Architektur von Moscheen in Isfahan: Eingang und Kuppel der Lutfullah-Moschee; Minarette der Imam-Moschee; Mihrab (Gebetsnische) in der Lutfullah-Moschee [Foto Alten]

Wesentliche Inhalte der Mathematik in den islamischen Ländern

8. Jh	Übernahme der indischen Ziffern
8.–10. Jh.	Übersetzungen griechischer, persischer und indischer Werke AL-ḪWĀRIZMĪ (AL-CHORESMI): Rechnen mit indischen Ziffern; ein kurzgefasstes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen: Lösung von quadratischen Gleichungen mit geometrischen Beweisen; Sinustafel
ab 9. Jh.	Geometrische Lösungen kubischer Gleichungen; Abhandlungen zum Parallelenproblem, Trigonometrie im Anschluss an Griechen und Inder
2. Hälfte 9. Jh.	BANŪ MŪSĀ: Kreisberechnung, Oberflächen und Inhalte von Körpern, Winkeldreiteilung, Fadenkonstruktion der Ellipse, Buch über Kegelschnitte ABŪ L-WAFĀ$^{\circ}$: Geometrische Konstruktionen für Handwerker, Konstruktion des regulären Siebenecks durch „Einschiebung“
9./10. Jh.	AL-FĀRĀBĪ: Kommentare zu Euklid, Musiktheorie ABŪ KĀMIL: Quadratische Gleichungen mit rationalen oder irrationalen Koeffizienten, Vogelaufgaben
10./11. Jh.	AL-BĪRŪNĪ: Übersetzungen aus dem Sanskrit ins Arabische und umgekehrt; Zylinderprojektion, Definition trigonometrischer Relationen am Einheitskreis, kubische Gleichungen mit geometrischen Methoden IBN SĪNĀ (AVICENNA): Positionsbestimmung von Gestirnen, Abhandlungen zu Zahlentheorie und Trigonometrie AL-KARAǦĪ: Algebra als eigenständige Disziplin
11. Jh.	IBN AL-HAYṬAM: Geometrische Optik, Kommentar zu Euklid
11./12. Jh.	$^{\circ}$UMAR ḪAYYĀM: Geometrische Lösung aller Typen kubischer Gleichungen mit Hilfe von Kegelschnitten; Beiträge zum Parallelenpostulat, zur Propostionenlehre Euklids und zur Zahlentheorie; astronomische Tafeln
12./13. Jh.	ŠARAF AD-DĪN AṬ-ṬŪSĪ: Geometrische und numerische Lösungen allgemeiner kubischer Gleichungen
13. Jh.	NAṢĪR AD-DĪN AṬ-ṬŪSĪ: Buch über ebene und sphärische Trigonometrie; Radizieren mit Hilfe des binomischen Satzes und des Horner-Schemas; „Beweis“ des Parallelenpostulats
15. Jh.	AL-KĀŠĪ: Lösung einer kubischen Gleichung durch ein originelles Iterationsverfahren; Berechnung von π auf 17 Dezimalstellen mit Hilfe eines regelmäßigen Polygons von $3*2^{28} = 805\,306\,368$ Seiten

6 Mathematik im Europäischen Mittelalter

375	Vorstoß der Hunnen nach Europa
451	Sieg über die Hunnen unter Attila
375–568	Völkerwanderung germanischer Stämme
375	Teilung des römischen Reiches in ein weströmisches und ein oströmisches Reich
um 430	Christianisierung Irlands durch den legendären Mönch Patrick
um 430	Beginn des fränkischen Reiches der Merowinger, Chlodwig tritt zum Christentum über
466	Zusammenbruch der römischen Herrschaft in Gallien
476	Untergang des weströmischen Reiches
um 500	Angeln, Sachsen und Juten wandern nach England ein
596	Beginn der Christianisierung der Angelsachsen
714	Karl Martell begründet die Dynastie der Karolinger
732	Araber werden bei Tours und Poitiers zurückgeschlagen
754	Pippinsche Schenkung, Stärkung des Kirchenstaates
800	Karl der Große wird in Rom zum Kaiser gekrönt
843	Karolingerreich wird in drei Teile geteilt
955	Schlacht auf dem Lechfeld: Ungarn werden zurückgeschlagen
962	Otto I. wird vom Papst zum Kaiser des Heiligen Römischen Reiches gekrönt
um 1000	Leif Erikson entdeckt die Ostküste Amerikas
1066	Schlacht bei Hastings; Normannen erobern England
1096–1270	Kreuzzüge
11./12. Jh.	Romanische Baukunst
12./13. Jh.	Städtische Kultur in Oberitalien (Pisa, Venedig, Genua, Mailand)
13./14. Jh.	Hochgotische Kathedralen in West- und Mitteleuropa
1337–1453	Hundertjähriger Krieg zwischen England und Frankreich
1453	Untergang des oströmischen Reiches
15. Jh.	Spätgotik in West- und Mitteleuropa
1480	Großfürst Iwan III. begründet das Zarentum in Moskau

6.0 Vorbemerkung

Historische Perioden pflegen nicht mit Tag und Stunde zu enden; selbst Jahresangaben unterliegen der Diskussion der Spezialisten. Beginn und Ende des Mittelalters gehören zu den weithin umstrittenen Datierungen.

Wir bringen hier den Beginn des europäischen Mittelalters mit der durch den Vorstoß der Hunnen (375) ausgelösten Völkerwanderung und dem Untergang des weströmischen Reiches (476) in Verbindung. Noch umstrittener ist das Ende des Mittelalters. Im Extremfall wird es sogar ins 17. Jahrhundert verlegt.

Wir betrachten, gerade in mathematikhistorischer Sicht, den Beginn der Renaissance (um 1450) als tief greifende Zäsur und damit als Ende des Mittelalters. Freilich differieren diese Angaben nicht unerheblich hinsichtlich geographischer Regionen (ausführlich bei [Folkerts 2006]).

6.1 Frühes Mittelalter

Während des Mittelalters herrschte ein starkes Kulturgefälle von Ost nach West. Trotz aller kriegerischen Auseinandersetzungen – in Spanien, in Sizilien und während der Kreuzzüge im Nahen Osten – gelangten Errungenschaften der islamischen Welt ins christliche Europa: Papierherstellung, Kenntnisse über Heilkräuter, Zierpflanzen und Obstgehölze, Architektur, vermutlich auch Kompass und Kenntnisse zur Pulverherstellung.

Die Muslime waren Meister des Webens (Damast), der Stahlherstellung (Damaszener Stahlklingen) und der Züchtung von Pferden („Araber“). Die muslimischen Ärzte galten mit Recht als die besten ihrer Zeit. Und ähnlich ist es mit der Übernahme islamischer Mathematik vor sich gegangen.

Das römische Weltreich war an inneren Widersprüchen und unter dem Ansturm äußerer Feinde zerbrochen. Die politische Auflösung ging einher mit dem Verfall der Wirtschaft. Fernhandel und städtisches Handwerk verfielen; Städte und Straßen zerfielen. Zum Zentrum der Wirtschaft wurde das Dorf. Vom 5. bis zum 11. Jahrhundert bildete sich der europäische Feudalismus heraus, der durch Naturalwirtschaft, die Bindung der Bauern an den Boden (Leibeigenschaft), außerökonomischen Zwang, Lehnsverhältnisse und ein vergleichsweise niedriges Niveau der Technik gekennzeichnet ist.

Dazu kam in den ersten Jahrhunderten die abweisende Haltung der sog. Kirchenväter gegen die „heidnische“ Wissenschaft. Tertullian (ca. 160–nach 220) sah in der hellenistischen Wissenschaft die Quelle der Ketzerei und betonte den unüberbrückbaren Unterschied zwischen Glauben und Wissen: *„Wissbegier ist uns nicht nötig, seit Jesus Christus; auch nicht Forschung, seit dem Evangelium.“*

Augustinus

Von den Autoren der Patristik hat Augustinus (354–430), Bischof von Hippo Regius in Nordafrika, am nachhaltigsten die Haltung der Kirche zu Naturwissenschaft und Mathematik geprägt. Anfangs stand er in den Traditionen der hellenistischen Kultur und Lebensweise, ehe er unter dem Einfluss seiner christlich orientierten Mutter zum Christentum übertrat. Zwar betonte er auch die Überflüssigkeit und die möglichen Gefahren des Studiums der heidnischen Wissenschaft. Eine andere Sache aber sei die Aneignung nützlicher Kenntnisse und Fertigkeiten, da man keine genauen Angaben über den Zeitpunkt der Errichtung des Gottesstaates machen könne und man sich daher auf die Eroberung der bestehenden Welt für das Wort Gottes einstellen müsse. Der Erwerb wissenschaftlicher Güter durch die Heiden beweise nur die Unrechtmäßigkeit ihres Besitzes. Erst die Christen können – nach Augustinus – davon den richtigen Gebrauch machen, nämlich den, die Offenbarung Gottes in der Natur zu erweisen. Und es bleibe die Hauptbedingung jeder Beschäftigung mit der Wissenschaft, dass jede Wissenschaft der Heiligen Schrift

Abb. 6.1.1 Römisches Amphitheater in Karthago. Hier lehrte Augustinus Rhetorik, geißelte Karthago als „die Pfanne, in der das Öl der Hurerei schäumt“ und klagte über die Studenten, die nur noch in die Vorlesungen kämen, um Lärm zu machen, und mehr Zeit auf Vergnügungen, denn zum Studium verwendeten. [Foto Alten]

unterworfen sei, da diese alle Fähigkeiten des menschlichen Geistes übertreffe. Seitdem war im christlichen Herrschaftsbereich für eine sehr lange Zeit das Primat des Glaubens vor dem Wissen fixiert.

Augustinus hat Mathematik auch direkt mit der christlichen Lehre in Verbindung gebracht: Gott habe die Welt in 6 Tagen geschaffen, weil 6 eine vollkommene Zahl ist (6 ist Summe ihrer echten Teiler). Und, in seiner Schrift *De doctrina christiana* (Über die christliche Lehre) liest man:

> *„Auch die Unkenntnis der Zahlen ist schuld, daß gar manche übertragene und geheimnisvolle Ausdrücke in der Heiligen Schrift nicht verstanden werden.“*
> (Zitiert bei [Gericke 1990, S. 57])

Dabei darf nicht übersehen werden, dass bei fortschreitender Christianisierung die entstehenden Klöster nicht nur ökonomische Zentren wurden, sondern zugleich Heimstätten für überkommene und neu zu erwerbende Kulturgüter:

> *„Die Wissenschaft folgt im mittleren und nordwestlichen Europa der Christianisierung. Als deren Folge entstanden viele Klöster als Stützpunkte des religiösen Lebens, aber auch der Kultur allgemein. In Frankreich hat der hl. Martin (um 315–387, seit 370/71 Bischof von*

Abb. 6.1.2 Augustinus (Vatikan 1954); PAX ET CONCORDIA SIT CONVIVIO NOSTRO (Unser Zusammenleben sei Friede und Eintracht) (Algerien 2001)

> *Tours) die ersten Klöster gegründet, Liguge bei Poitiers und Marmoutier an der Loire. Gegen Ende des 6. Jh. baute Bischof Gregor von Tours eine Abtei bei der Kirche des hl. Martin, die später durch Alkuin berühmt wurde.“*
> [Gericke 1990, S. 59]

Irland hatte nie zum römischen Weltreich gehört und war von den Stürmen der Völkerwanderung verschont geblieben. Die dortigen Klöster konnten sehr früh ihre kulturell-geistige Funktion und die Missionierung in England und auf dem Kontinent übernehmen.

In diese Gruppe der Missionare gehört auch Beda Venerabilis (d. h. der Ehrwürdige); (ca. 672/73–735), ein englischer Mönch, der sich auf weiten Reisen eine breite Bildung aneignete. Unter anderem schrieb er eine Geschichte der Christianisierung Englands und eine Abhandlung zur Berechnung des Osterdatums. Dort stellte er auch die Fingerrechnung dar. Eine Schrift *De arithmeticis propositionibus* behandelt sogar die Rechenregeln mit negativen Zahlen, wird aber wohl fälschlicherweise Beda zugeschrieben.

Der Übergang von der Spätantike in die Frühzeit des europäischen Mittelalters hat schwierige Bedingungen für die Breitenwirkung der Wissenschaften geschaffen. Doch haben neuere Publikationen mit Nachdruck und an konkreten Ergebnissen nachgewiesen, dass das Frühmittelalter keine tote Zeit für die Mathematik war, sondern in Europa eigenständige mathematische Leistungen hervorgebracht wurden, noch vor dem Einströmen mathematischer Spitzenergebnisse aus dem islamischen Bereich und unabhängig davon.

> *„Contrary to what is sometimes asserted the sciences were by no means dead in the western Middle Ages before the translations from Arabic in the twelfth century.“*
> [Folkerts 2003, S. IX]

Boethius

Die Ostgoten hatten im 5. Jahrhundert Norditalien erobert. Ein römischer Philosoph, Anitius Manlius Torquatus Severinus Boethius (475/480–524), war Konsul in Rom, hielt eine Lobrede auf den König Theoderich in Ravenna, wurde indes wegen angeblichen Hochverrates hingerichtet. Im Gefängnis verfasste er eine Schrift *Vom Trost der Philosophie*.

Wohlvertraut mit griechisch-hellenistischer Wissenschaft hatte er sich vorgenommen, diese durch Übersetzungen ins Lateinische seiner Latein sprechenden Umgebung zugänglich zu machen. Er übertrug die Arithmetik des Nikomachos von Gerasa; danach sind Zahlen behilflich zum Verständnis der Werke Gottes. In einer anderen Schrift hat er die Grundlagen der griechischen Musiktheorie in lateinischer Sprache dargelegt.

Aus zeitgenössischen Zeugnissen ergibt sich, dass Boethius auch die „Elemente“ des Euklid ins Lateinische übertragen hat. Nur Teile davon sind erhalten, und zwar in späteren Kompilationen, die heute als „Boethius Geometrie I“ (8. Jahrhundert) bzw. als „Boethius Geometrie II“ (11. Jahrhundert) bezeichnet werden.

Der Einfluss von Boethius hat auch die Struktur mittelalterlicher höherer Bildung – sogar noch bei den erst später gegründeten Universitäten – geprägt. Er verwendete die Bezeichnung *Trivium* (Dreiweg) für die Lehre von Grammatik, Logik und Dialektik und die Bezeichnung *Quadrivium* (Vierweg) für die Lehre der vier mathematischen Wissenschaften Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik (als Harmonielehre). *Trivium* und *Quadrivium* wurden zusammengefasst als *artes liberales* (freie Künste). Im Rahmen des Quadriviums erfolgte bis weit in die Renaissance hinein die mathematische Ausbildung.

Aufschwung in Frankreich

Unter dem fränkischen König Pippin III. (der Kurze; er regierte von 751 bis 768) begannen kirchliche Reformen, die von Karl dem Großen weitergeführt wurden. Geistiges und Kulturelles nahmen im Frankenreich einen so deutlichen Aufschwung, dass diese Zeit von einigen Historikern als Karolingische Frührenaissance bezeichnet wird.

Die Festigung der feudalen Gesellschaftsordnung beruhte auch auf gesteigerter Produktivität in der Landwirtschaft, dem damaligen Hauptwirtschaftszweig: Bessere Ausnutzung der tierischen Energie durch Kummet (Pferdegeschirr) und Hufeisen und verbesserte Pflugscharen erhöhten den Ertrag. Wind- und Wassermühlen milderten den chronischen Energiemangel im frühen Mittelalter.

Unter der Herrschaft der Karolinger entwickelte sich das Frankenreich zum mächtigen europäischen Großreich. Handelsbeziehungen und Austausch von diplomatischen Gesandtschaften erstreckten sich bis nach Konstantinopel und Bagdad. Es ging so weit, dass Karl der Große die Idee der byzantinischen

Kaiserin Irene wohlwollend in Erwägung zog, ihren Sohn Konstantin VI. mit seiner Tochter Rotrud zu verheiraten. Der Plan zerschlug sich jedoch. Immerhin blieb der griechische Gelehrte, der der byzantinischen Gesandtschaft angehört hatte, als Lehrer von Rotrud am Hofe Karls, wo Karl nach antikem Vorbild eine „Akademie“ von irischen, englischen und italienischen Gelehrten um sich sammelte. Übrigens hat später der deutsche Kaiser Otto II. eine byzantinische Prinzessin geheiratet.

Auch die Mathematik nahm am Aufschwung des wissenschaftlichen und kulturellen Lebens teil. Ein großer Teil der astronomisch-mathematischen Anstrengungen galt dem Computus, das ist die Berechnung der beweglichen kirchlichen Feiertage, insbesondere des Osterfestes, das ja ein zentrales Fest der Christenheit darstellt [Butzer 1993].

Karl der Große, der trotz aller Bemühungen niemals flüssig Lesen und Schreiben erlernen konnte, hatte erkannt, dass das Bildungsniveau des Klerus und seiner Beamten im Interesse der Stärkung des Staatswesens gehoben werden musste. Auf einer Reise nach Rom traf der englische Mönch Alcuin von York im Jahre 781 Karl in Padua; dieser berief Alcuin an seinen Hof.

Alcuin von York

Alcuin (ca. 732–804); (eigentlich *Alh-win*, d. h. Freund des Tempels) war seit 778 Leiter der Kathedralschule in York gewesen und hatte sich bereits einen guten Ruf als Kenner der *artes liberales* erworben. Er wirkte an der sehr erfolgreichen Palastschule in Aachen und stand im mündlichen und schriftlichen Kontakt mit Karl über theologische, astronomische und kalendarische Fragen sowie zu Fragen der Politik. Im Jahre 796 wurde Alcuin Abt des Klosters St. Martin in Tours; dort starb er am 19. Mai 804. Inzwischen, am 25. Dezember 800, war Karl vom Papst zum römischen Kaiser gekrönt worden. Nach diplomatischen Schritten wurde Karl vom „Ostkaiser“ in Konstantinopel als „Westkaiser“ akzeptiert.

Unter Alcuin wurde Tours zu einem herausragenden Bildungszentrum, wie nachfolgend auch die Schulen von Ferrières und Corbie in Frankreich, Reichenau im Bodensee, St. Gallen in der Schweiz und Fulda in Deutschland. Letztere wurde durch Hrabanus Maurus (ca. 780–856) reformiert, der eine Zeitlang Schüler von Alcuin in Tours gewesen war.

Alcuin hat eine Vielzahl von Schriften hinterlassen, u. a. über Grammatik, Orthographie, Rhetorik, über Dialektik, über das Trivium, über Astronomie. Sein Name wird in der Literatur oft in Verbindung gebracht mit einem mathematischen Text, mit der Aufgabensammlung *Propositiones ad acuendos iuvenes* (Aufgaben zur Schärfung des Geistes der Jünglinge). Doch ist keineswegs erwiesen, dass dieser Text wirklich von Alcuin stammt. Sicher ist nur, dass diese Schrift, die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache, aus dem Umfeld des fränkischen Hofes stammt und auf das 9. Jahrhundert zu datieren ist [Folkerts/Gericke, 1993].

Abb. 6.1.3 Karl der Große mit Schülern; Karolingische Minuskel – um 800 im Karolingerreich als eine neue Schreibschrift entwickelt; Kirchenslawische Schrift Glagoliza – wurde von den Slawenaposteln Kyrillos (826/27–869) und Methodios (ca. 815–885) in Osteuropa eingeführt, als in Westeuropa eine neue Schriftform aufkam. Eine Weiterentwicklung wird nach ihnen als kyrillisches Alphabet bezeichnet (Wandmalerei im Trojan-Kloster); (Frankreich 1966, Andorra 1987, Bulgarien 1969)

Die Arbeit von M. Folkerts und H. Gericke verweist auf die historischen Quellen des karolingischen Textes, auf die Herkunft der Aufgaben oder der typengleichen Aufgaben aus der altägyptischen, der mesopotamischen, der griechischen und der chinesischen Mathematik. Es handelt sich fast ausschließlich – bis auf einige Aufgaben aus der Geometrie und der Feldmessung – um Aufgaben aus der sog. Unterhaltungsmathematik, ohne praktische Bedeutung, eben zur „Schärfung des Geistes".

Wie die Autoren erwähnen, ist im alten Rom unter dem Eindruck der hochentwickelten, abstrakten hellenistischen Mathematik die These aufgekommen, dass Mathematik wenigstens zur Schärfung des Geistes nützlich sei. So schrieb Quintilian (ca. 35 – ca. 96), ein römischer Lehrer der Rhetorik: *„von der Mathematik komme Beweglichkeit des Geistes, Schärfe des Verstandes und schnelle Auffassungsgabe."* (Zitiert nach [Folkerts/Gericke 1993, S. 285])

Die Sammlung *Propositiones* enthält 53 Aufgaben mit Lösung, fast immer ohne Lösungsweg. Der Inhalt ist breit gefächert: Aufgaben vom Typ der altägyptischen Hau-Aufgaben (lineare Gleichungen), die berühmte Brunnenaufgabe, Erbschaft bei Zwillingsgeburten, „Hundert Vögel" (altchinesischer Typ), Mischungsaufgaben, Verfolgungsaufgaben, Weinkeller, Zahlen errechnen und vieles andere mehr. Am Beginn der *Propositiones* steht die Aufgabe über eine Schnecke:

Abb. 6.1.4 Karl der Große mit Alcuin und Schülern in der Palastschule [Deutsche Geschichte 1862]

> *„Eine Schnecke wird von einer Schwalbe zum Essen eingeladen, der Weg ist eine Meile (leuva) weit. Die Schnecke kann nicht mehr als eine Unze (=1/12) eines Fußes am Tag zurücklegen. Sage, wer mag, in wieviel Tagen die Schnecke zu dem Essen wandert.“*
> [Folkerts/Gericke 1993, S. 297]

Die Lösung errechnet sich nach den Maßangaben 1 leuva = 1500 Doppelschritte = 7500 Fuß = 90 000 Unzen zu 246 Jahren und 210 Tagen.
Ein zweites Beispiel (vgl. Fibonaccis Aufgabe über den Geldbeutel) handelt

> *„Von einem Geldbeutel, den ein Mann gefunden hat.*
> *Ein Mann fand auf der Straße einen Geldbeutel mit 2 Talenten. Dies sahen andere und sagten: Bruder, gib uns einen Teil von deinem Fund. Er lehnte ab und wollte ihnen nichts geben. Da überfielen sie ihn, entrissen ihm den Beutel, und jeder nahm sich 50 Solidi. Als er sah, daß er keinen Widerstand leisten konnte, griff er selbst auch zu und nahm sich 50 Solidi. Sage, wer will, wie viele Männer es waren.*
> *Lösung*
> *Mancherorts hat ein Talent 75 Pfund und 1 Pfund 72 Goldsolidi. 75 mal 72 sind 5400. Das Doppelte >2 Talente< sind 10 800. In 10 800 <Solidi> sind 50 <Solidi> 216 mal enthalten. So viele Männer waren es.“* [Folkerts/Gericke 1993, S. 352]

Abb. 6.1.5 Hrabanus Maurus (li.) überreicht mit seinem Lehrer Alcuin dem Mainzer Erzbischof Otgar (re.) eine Schrift (Darstellung in einem Manuskript, Fulda um 830/840) [Wikimedia Commons]

Hrabanus Maurus

Hrabanus Maurus (ca. 780–856) wurde in Mainz geboren, erhielt seine Erziehung im Kloster Fulda, war einige Zeit zur Weiterbildung bei Alcuin in Tours, ging zurück nach Fulda und war von 822 bis 842 Abt in Fulda und von 847 bis zu seinem Tode 856 Erzbischof von Mainz [Gericke 1990, S. 67f.].

Mit seinen Schriften hat Hrabanus Maurus einen großen Einfluss auf das Bildungswesen und auf den Fortgang der Missionierung in Deutschland östlich des Rheins ausgeübt. Später erhielt er den Ehrennamen „Praeceptor Germaniae“ (Lehrer Deutschlands). In 22 Büchern hat er über *De universo* geschrieben, von der Dreifaltigkeit Gottes bis zur unbelebten Welt.

Die von Karl dem Großen begonnene Politik der systematischen Ausbildung der Kleriker wurde von Hrabanus Maurus zielbewusst mit der Schrift *De clericorum institutione* (ca. 819, Über die Unterweisung der Geistlichen) weitergeführt, in der die *artes liberales* behandelt werden.

In der Arithmetik griff er auf die Formel zurück, dass Gott alles nach Maß, Zahl und Gewicht geordnet habe. In der Geometrie wird unter Bezug auf Varro (116–27 v. Chr.) begründet, dass durch Vermessung und Grenzfestlegungen der Nutzen der Mathematik für den Erhalt des Friedens verdeutlicht werde. Auch astronomische Probleme – Entfernung von Sonne und Mond, Berechnung des Osterdatums – werden behandelt.

Abb. 6.1.6 Gerbert von Aurillac, dargestellt als Papst Silvester II. auf einem Denkmal in Aurillac [Foto Alten], (Frankreich 1984)

Gerbert von Aurillac

Mit Gerbert von Aurillac (ca. 945–1003) begegnen wir einem hohen Geistlichen, der sogar persönlich islamische Mathematik kennen gelernt hat. Er hatte im Benediktinerkonvent von Aurillac seine Grundausbildung erhalten und studierte unter dem Bischof Hatto von Vich. Vich lag in Katalonien, also im Grenzbereich zu den von Arabern besetzten spanischen Gebieten. Dort traf er auf die muslimische Wissenschaft.

In seinem weiteren Leben wurde Gerbert in politische Machtkämpfe verwickelt, kam mit dem deutschen Kaiser Otto I. in Rom in Berührung, wurde kurzfristig Bischof von Reims, auf Veranlassung von Otto III. Bischof von Ravenna und 999 Papst unter dem Namen Silvester II. Er starb am 12. Mai 1003 in Rom.

Seine hohe Stellung in der kirchlichen Hierarchie trug dazu bei, dass seine mathematischen Schriften weite Verbreitung fanden und daher einigen Einfluss ausüben konnten. Er hinterließ eine Einführung in die Geometrie und möglicherweise ein Buch über das Astrolab. Über die arithmetischen Studien von Gerbert unterrichtet Lindgren [Lindgren 1976]. Am folgenreichsten wurde eine von Gerbert benutzte Form des Abakus. Allerdings benutzte er – eigentlich sinnwidrig – Rechensteine, die oben mit Zahlzeichen versehen waren und so den Wert des Steines bezeichneten. Diese bezifferten Rechensteine nannte man apices, von lat. apex (Gipfel, Kuppel). Auf dem „normalen“ Abakus sind die Rechensteine nicht gekennzeichnet, ihre Lage macht ihren Wert aus. Durch Gerbert wurden so die indischen Ziffern (in der westarabischen Version) vorgestellt, – auch ein Zeichen, das der Null ähnelt, für eine nicht durch Ziffern ausgefüllte „Stelle“ im Dezimalsystem. Doch erst im 12. Jahrhundert, nach der Übersetzung der Schrift von al-H͡wārizmī, konnten sie sich in Europa durchsetzen, wenn auch nur Schritt für Schritt [Folkerts 1997].

6.2 Hochmittelalter, Spätmittelalter

Das neue Jahrtausend bedeutet den Anfang einer neuen Periode des Mittelalters. Im 11. Jh. beginnt das Hochmittelalter mit einer Fülle bedeutender Ereignisse, welche die politische Landschaft und die Machtverhältnisse in Europa verändern, vor allem aber die kulturelle Entwicklung und das religiöse Leben tiefergehend prägen.

Das 11. Jh. bedeutet den Beginn der Romanik in der Baukunst und die erste Blüte deutscher Städte, den Aufstieg der Salier als deutsche Könige und Kaiser des Heiligen Römischen Reiches, die Zeit des Investiturstreites zwischen Kaiser und Papst, die Trennung von Ost- und Westkirche im Schisma von 1054, das Klosternetz von Cluny und die Kirchenreform, den Beginn der Kreuzzüge, die Gründung der Königreiche Aragón und Kastilien im Zuge der Reconquista und die Eroberung Englands unter dem Normannenherzog Wilhelm, den man deshalb später Wilhelm den Eroberer nannte.

Die *Tapisserie de la reine Mathilde* nennen die Franzosen den berühmten Teppich von Bayeux, auf dem die Vorgeschichte der normannischen Invasion, die Vorbereitungen zur Überquerung des Ärmelkanals und die Schlacht von Hastings im Jahr 1066 in mehr als 70 bewegten Szenen geschildert werden. Der „Teppich von Bayeux“ ist jedoch weder ein Teppich noch stammt er von der Königin Mathilde. Vielmehr handelt es sich um eine ca. 70 m lange und ca. 50 cm breite Leinwandrolle, auf die die dramatische Geschichte mit farbigen Wollfäden gestickt ist. In mehreren Szenen erscheint wie 1000 Jahre zuvor bei Christi Geburt der Halleysche Komet und kündigt umwälzende Veränderungen an.

Der Weihnachten 1066 zum König von England gekrönte Eroberer erklärte alles Land als Eigentum der Krone und belehnte und belohnte damit seine normannischen Gefolgsleute mit der Verpflichtung zum Beistand im Kriege.

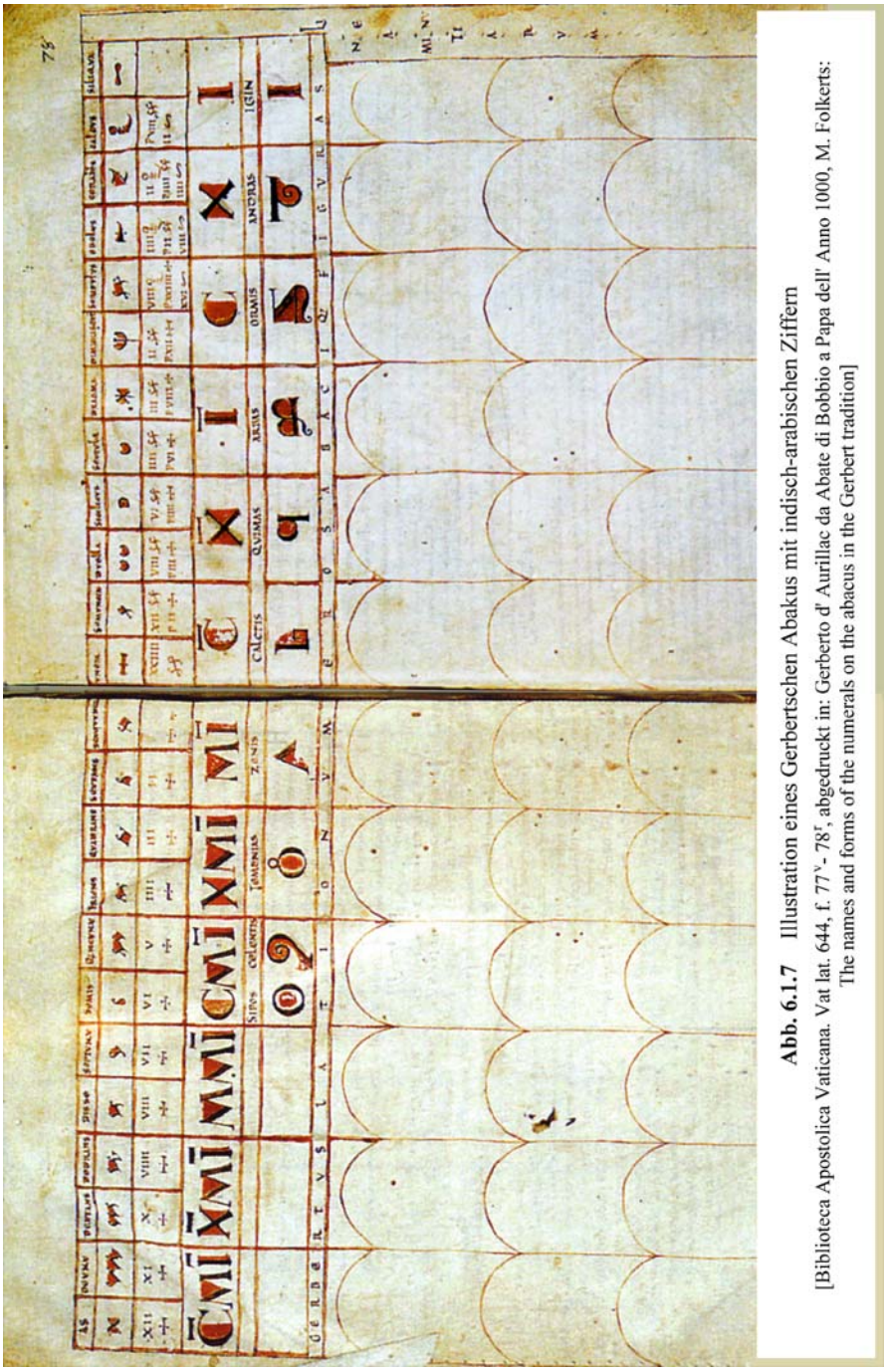


Abb. 6.1.7 Illustration eines Gerbertschen Abakus mit indisch-arabischen Ziffern
[Biblioteca Apostolica Vaticana. Vat lat. 644, f. 77ᵛ - 78ʳ, abgedruckt in: Gerberto d' Aurillac da Abate di Bobbio a Papa dell' Anno 1000, M. Folkerts: The names and forms of the numerals on the abacus in the Gerbert tradition]

Abb. 6.2.1 Aufbruch zur Schlacht von Hastings 1066; Ausschnitt aus dem Teppich von Bayeux: HIC WILLELM DUX ALLOQUITUR SUIS MILITIBUS UT PREPARENT SE VIRILITER *ET SAPIENTER AD PROELIUM* CONTRA ANGLORUM EXERCITUM – Hier ermahnt Herzog Wilhelm seine Soldaten, dass sie sich männlich *und weise auf den Kampf* gegen das Heer der Engländer vorbereiten [Foto Alten]

Die neuen Herren brachten die von ihnen in den hundert Jahren zuvor in der Normandie übernommene französische Sprache und Lebensart nach England und überlagerten so mit romanischen Elementen die zuvor von Angelsachsen und Dänen geprägte germanische Lebensweise und Sprache.

So ist es kein Wunder, dass sich schon bald der um 1070/1080 in Bath geborene Adelard mit seinen Schriften *Regule abaci*, *De eodem et diverso* und *Quaestiones naturales* und mit den Übersetzungen astronomischer Werke des al-Ḫwārizmī und der „Elemente“ Euklids ins Lateinische einen Namen machte und auch Robert von Chester in der ersten Hälfte des 12. Jhs. die „Algebra“ des al-Ḫwārizmī ins Lateinische übersetzte.

Bei aller Anerkennung der eigenständigen Leistungen in der Mathematik des Frühmittelalters bleibt doch die historische Tatsache, dass der eigentliche Aufschwung der europäischen Mathematik kausal an die Bekanntschaft mit der islamischen Mathematik gebunden war, die grundlegende Werke der griechisch-hellenistischen Mathematik und die Errungenschaften der islamischen Mathematik in Übersetzungen zugänglich machte.

Die Geschichte dieser Tradierung ist von Spezialisten der Mathematikgeschichte, die über hervorragende Sprachkenntnisse (Arabisch, Latein, Griechisch, Hebräisch) verfügen mussten, erforscht und dargestellt worden, ebenso

Abb. 6.2.2 Domesday Book 1086; 20 Jahre nach der Eroberung Englands durch die Normannen ließ William I., der Eroberer, eine Bestandsaufnahme vornehmen: Ländereien und deren Besitzer, Städte, Mühlen, ... Die vier Briefmarken zeigen Landwirtschaft, Städtebau, Armee und Geistlichkeit (England 1986)

wie die weitreichenden positiven Folgen für die Entwicklung der Mathematik während der Renaissance. Die Wirkung reicht sogar bis weit in die Neuzeit, zum Beispiel beim Aufkommen der Infinitesimalrechnung im 17. Jahrhundert.

> *„Für die mittelalterliche westliche Mathematik bedeutet das 12. Jahrhundert einen Wendepunkt, jenes Jahrhundert, in dem durch Übersetzungen aus dem Arabischen fast schlagartig eine riesige Menge neuen Wissens zur Verfügung gestellt wurde.“*
> [Busard 1997, S. 211]

Im Jahre 1085 war Toledo von den Christen rückerobert worden. Als größter Schatz fiel ihnen die hervorragend ausgestattete Bibliothek in die Hände. Der Zugriff auf Schätze der Wissenschaft war offen. Mehr als 84 Schriften sind allein durch Gerhard von Cremona und seine Helfer in Toledo ins Lateinische übersetzt worden.

Die Tradierung durch Übersetzung wurde in verschiedenen Regionen Europas von Männern geleistet, die in vielen Fällen über die bloße Übersetzung hinausgingen und eigene Adaptionen schufen. Vieles davon wurde Lehrstoff an den Universitäten. Einige Personen seien herausgehoben (ausführlich in [Juschkewitsch 1964], [Gericke 1990], [Busard 1997], [Peiffer/Daham-Dalmedico 1994]):

Adelard von Bath (ca. 1070/1080–nach 1146), Hermann von Kärnten (12. Jahrhundert), Robert von Chester (um 1150), Gerhard von Cremona (ca. 1114–1187), Johannes de Sacrobosco (1207–1256?), Campanus von Novara (?–1296), Wilhelm von Moerbeke (ca. 1215–1286).

Es sei erwähnt, dass Wilhelm von Moerbeke ein Vertrauter des sehr einflussreichen Kirchenmannes und Gelehrten Thomas von Aquin gewesen und zweimal auf der Suche nach griechischen Quellen nach Griechenland gereist ist. Unter anderem hat er alle Schriften von Archimedes übersetzt.

Den Stand der Tradierung der antiken Mathematik am Ende des 13. Jahrhunderts hat Gericke so beschrieben:

> *„Am Ende des 13. Jh. war ein großer Teil der klassischen mathematischen und naturwissenschaftlichen Literatur in lateinischer Sprache zugänglich. In der Mathematik fehlten noch die folgenden Werke:*
> *Der Sandrechner wurde 1450 von Jakob Cremona übersetzt, im Rahmen einer neuen Archimedes-Übersetzung.*
> *Die Methodenlehre wurde erst 1906 von Heiberg wiedergefunden.*
> *Von den Kegelschnitten des Apollonios existierte nur das in 2.2.5 genannte Fragment. Die griechisch erhaltenen Bücher I–IV wurden durch die Übersetzung von Commandino 1566 bekannt; vorausgegangen waren Übersetzungen von Memmo 1537 und Maurolico 1548. Eine lateinische Übersetzung der nur arabisch erhaltenen Bücher V–VII und eine Rekonstruktion des verlorenen Buches VIII gab Halley 1710.*
> *Eine Handschrift der Arithmetik von Diophant entdeckte Regiomontan 1463 in Venedig.*
> *Die „Sammlung“ des Pappos übersetzte Commandino (gedruckt 1588).*
> *Der Kommentar des Proklos zum I. Buch der Elemente Euklids wurde griechisch gedruckt in der Euklid-Ausgabe des Grynaeus 1533, in lateinischer Übersetzung von Barocius 1560.“*
> [Gericke 1990, S. 121 f.]

Parallel mit der Erschließung des antiken mathematischen Erbes wurden Ergebnisse der islamischen Mathematik durch Übersetzungen ins Lateinische dem Abendland bekannt gemacht [Alten et al. 2003, S. 204f.].

Die Schrift von al-H̆wārizmī zur Algebra wurde 1145 durch Robert von Chester ins Lateinische übersetzt und noch einmal etwas später durch Gerhard von Cremona. So lernte man die Klassifizierung der quadratischen Gleichungen und die geometrischen Beweismethoden kennen.

Plato von Tivoli (um 1150) übersetzte 1145 das „Buch der Messungen“ (*Liber embadorum)* ins Lateinische. Der Autor war der jüdische Gelehrte Abraham bar Hiyya, der in der ersten Hälfte des 12. Jahrhunderts in Barcelona lebte. In der lateinischen Welt wurde er unter dem Namen Savasorda bekannt. Seine Schrift zeichnet sich dadurch aus, dass nicht nur geometrische Lösungen für quadratische Gleichungen gegeben werden, sondern dass sich auch Einsichten in die Struktur solcher Gleichungen finden. Auf diese Arbeit hat Leonardo von Pisa später zurückgegriffen.

Abb. 6.2.3 Kirche und Kloster auf dem Mont-St.-Michel (Frankreich) [Foto Alten]

Auch die algebraische Schrift von Abū Kamīl wurde ins Lateinische (und ins Hebräische) übersetzt, ebenso das „Buch über Vergrößerung und Verringerung“. Diese und andere Schriften haben auf die nachfolgende Entwicklung einen nachhaltigen Einfluss ausgeübt. Auf diese Weise wurde man bekannt mit der Methode des doppelten falschen Ansatzes bei linearen Gleichungen und bei linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten und mit Methoden, algebraische Probleme zu lösen.

Die großartigen architektonischen Leistungen des Hoch- und Spätmittelalters waren nur möglich auf der Basis der angewandten Geometrie. Sie durften freilich, gebunden an das Zunftgeheimnis, im Allgemeinen nur mündlich weitergegeben werden. Eine Ausnahme bildet das Skizzenbuch des Villard d'Honnecourt (13. Jahrhundert), in dem Entwürfe zu herausragenden Bauwerken festgehalten sind.

Einer anderen Gattung gehören die vier sog. „Bauhüttenbüchlein“ an; sie enthalten Anweisungen für die Steinmetze. Drei davon stammen von der Familie Roriczer, die maßgeblich am Bau des Regensburger Domes beteiligt war. Sie wurden Ende des 15. Jahrhunderts gedruckt und gehören damit zu den kostbarsten Inkunabeln (ausführlich in [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 232–239]).

Dem Zeitverlauf folgend könnten Leben und Leistung des Leonardo von Pisa (oder Leonardo Fibonacci, ca. 1170–ca. 1240) auch an dieser Stelle behandelt werden. Die Beziehungen zur islamischen Mathematik treten bei ihm

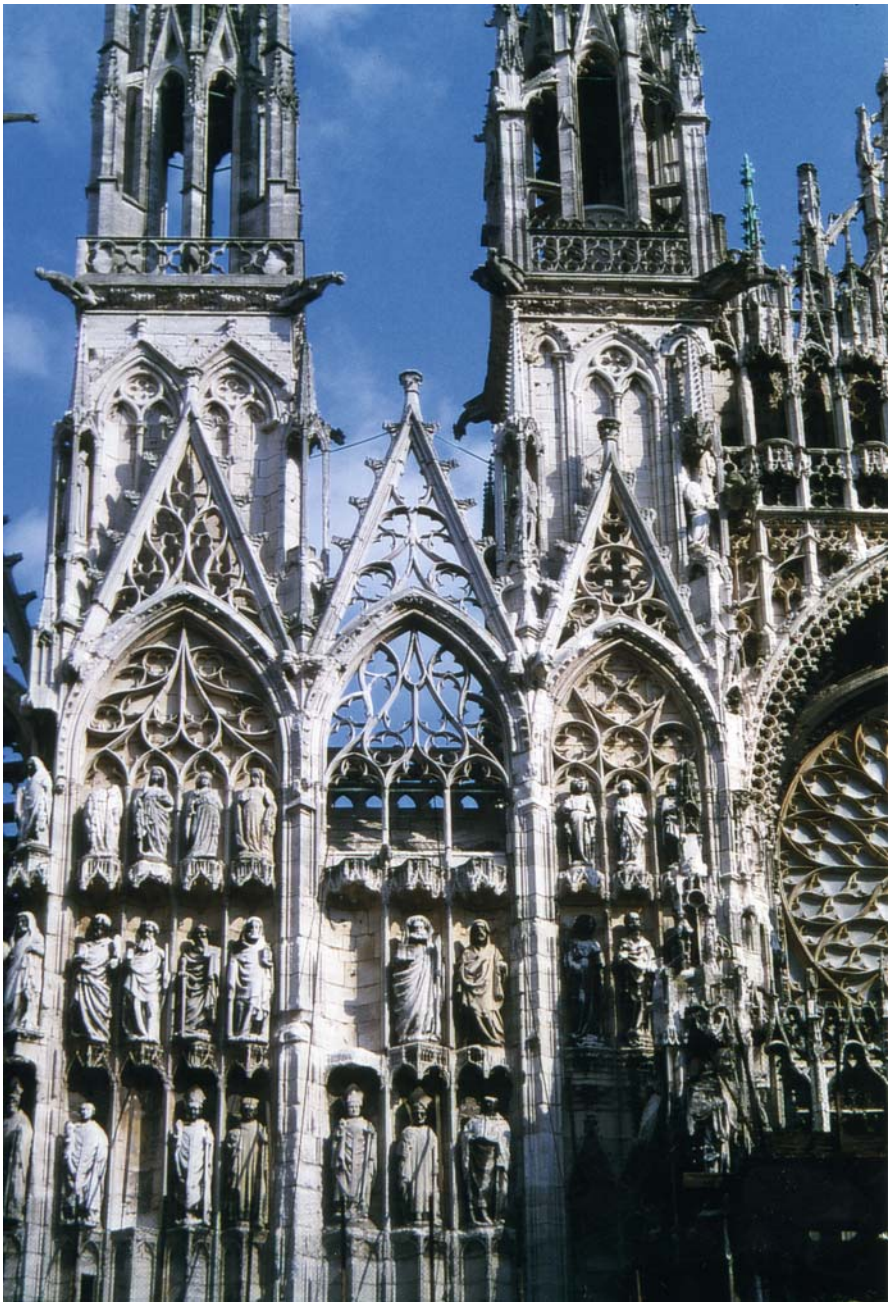


Abb. 6.2.4 Maßwerk der flamboyanten Gotik an der Kathedrale von Rouen, Frankreich [Foto Alten]

deutlich hervor. Auch die praktische Mathematik wird von ihm behandelt, zumindest in der Geometrie. Wir verschieben dies jedoch auf das Kapitel über die Mathematik während der Renaissance, weil Leonardo dem Inhalt seiner Schriften nach als „erster moderner Mathematiker“ Europas aufgefasst werden kann.

6.3 Scholastik, Gründung und Anerkennung von Universitäten

Im 11./12. Jahrhundert setzte sich in der Kirche die Erkenntnis durch, dass im Interesse der eigenen politischen und ökonomischen Macht des Klerus die Geistlichen Lesen, Schreiben und Rechnen erlernen und wissenschaftliche Bildung erwerben und über die Klöster hinaus ins öffentlichen Leben tragen sollten. Ebenso wurden in rasch aufblühenden Städten die Bürger gedrängt, sich Kenntnisse und Bildung anzueignen.

So bildete sich in der im Aufschwung befindlichen europäischen Gesellschaft eine immer deutlicher hervortretende Aufnahmebereitschaft für Wissenschaft und Bildung heraus. Drei geistige Ströme – das griechisch-hellenistische Erbe, bedeutende Teile der islamischen Mathematik und christliche Denkweisen – trafen zusammen, berührten und durchdrangen sich im Laufe des 12./13. Jahrhunderts. Die europäische Gesellschaft ging in den entwickelten Regionen ihrem Höhepunkt entgegen, wobei der Aufschwung der Produktion in der Landwirtschaft und bei Fortentwicklung des Handwerks in den Klöstern vor allem an die aufblühenden Städte gebunden war. Das städtische Handwerk spezialisierte sich und man bildete Zünfte. Quantitative und qualitative Fortschritte im Mühlenwesen, im Wasserbau, im Bergbau, bei der Eisenverarbeitung, in der Braukunst, im Salinenwesen, bei der Tuchmacherei, in der Gerberei und vielen anderen Gebieten traten zutage.

Mathematik und Naturwissenschaften fanden im europäischen Mittelalter schließlich ihre Heimstatt an den Universitäten. Dort entstand eine spezielle Form des Wissenschaftsbetriebes, die wir als Scholastik bezeichnen. Scholastik bedeutet im ursprünglichen Sinne des Wortes „Schullehre“, d. h. die systematische Vermittlung von Wissen durch Vorlesungen und Disputationen.

Logisches Denken stand hoch im Kurs. Freilich wurde die Rabulistik sehr weit getrieben und führte zu Fragen wie etwa der, wenn eine Kugel nicht durch ein Loch passt, ob dann die Kugel zu groß oder das Loch zu klein ist. Ein anderes Paradoxon rührte an den theologischen Kern, nämlich das Problem, ob der allmächtige Gott einen Stein schaffen könne, den er selbst nicht zu bewegen vermag. Eine eher böswillige Unterstellung des Humanismus ist die für das Mittelalter nicht belegte Frage, wie viele Engel auf einer Nadelspitze Platz haben. Mag so etwas uns heute als töricht oder absurd erscheinen, so sind dies doch Ergebnisse des bis zum Äußersten getriebenen logischen Schließens (auch die Mengenlehre wird am Ausgang des 19. Jahrhunderts ihre

logischen Tücken offenbaren). Übrigens waren das Gründe, warum während der Renaissance und während der Periode der Aufklärung „Scholastik“ eine abschätzige Bewertung erfuhr, als dogmatisch, unbelehrbar, rückständig und engstirnig galt.

Anfangs hatten Domschulen das gestiegene Bildungsbedürfnis des Klerus erfüllen können. Einige von ihnen wie Chartres und Reims erreichten früh ein bemerkenswertes Niveau. An anderen Orten formierten sich zunftartige Verbindungen von Studierenden und Lehrenden (lat. universitas magistrorum et scholarium) mit dem Ziel, sich die Gesamtheit aller Wissenschaften (lat. universitas literarum) anzueignen. Zwar wird als älteste Universität Europas meist Bologna genannt, doch als erste und berühmteste dieser „Universitäten“ wurde die von Paris um das Jahr 1160 von der Kirche offiziell als Lehranstalt anerkannt, also nicht gegründet. Erst später rief die Kirche organisierte Zentren christlicher Gelehrsamkeit ins Leben, so etwa Oxford und Cambridge in England nach Pariser Vorbild. (Der Legende nach wurde Oxford schon 872 von Alfred dem Großen gegründet.) Wieder andere Universitäten wurden durch weltliche Herrscher gegründet. Hierbei könnten auch Vorbilder aus der Welt des Islam mitgewirkt haben; dort hatten die Wissenschaften staatliche Förderung erhalten. Beispielsweise entstand die Universität Neapel auf Befehl des Hohenstaufenkaisers Friedrich II. und die von Salamanca im Auftrag König Ferdinands II. von Kastilien. Ein dritter Universitätstyp – aber auch dieser bedurfte der Anerkennung durch den Papst – bildete sich in relativ enger Bindung an die sich entwickelnden Städte heraus. An den berühmten norditalienischen Universitäten Bologna und Padua etwa herrschte eine „bürgerliche“ Verfassung. Ein von den Studenten gewählter Rektor – es konnte durchaus auch ein Student sein – übte eine nahezu exterritoriale Gerichtsbarkeit aus.

Abb. 6.3.1 Gedenkfeier zur Gründung der Universität Bologna; Abaelard (Italien 1986, Frankreich 1979)

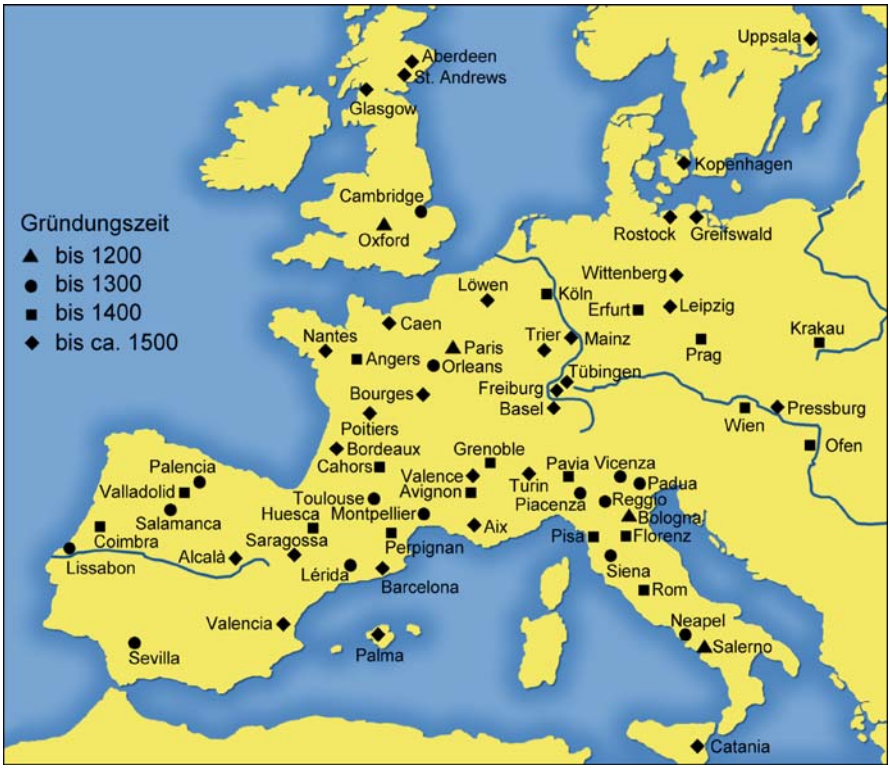


Abb. 6.3.2 Universitätsgründungen im europäischen Mittelalter

Die Reihenfolge der Universitätsgründungen im europäischen Mittelalter und ihre Verteilung in den Ländern und Regionen Europas ist interessant (vgl. Abb. 6.3.2):
Paris um 1160, Bologna 1160, Oxford vor 1167, Montpellier 1181, Cambridge 1209, Padua 1222, Neapel 1224, Toulouse 1229, Salerno vor 1231, Salamanca vor 1243, Lissabon 1290, Rom 1303, Coïmbra 1308, Pisa 1343, Prag 1348, Florenz 1349, Pavia 1361, Krakau 1364, Wien 1365, Heidelberg 1386, Köln 1388, Erfurt 1388, Leipzig 1409, St. Andrews 1411, Rostock 1419, Greifswald 1456, Freiburg i. Bsg. 1457, Basel 1460, Ingolstadt 1472, Trier 1473, Mainz 1476, Tübingen 1477, Uppsala 1477, Wittenberg 1502, Frankfurt an der Oder 1506.

Nach dem Besuch einer Lateinschule wurde der Student im Allgemeinen im Alter von 14 oder 15 Jahren an einer Universität immatrikuliert, d. h. in die Matrikel (Aufnahmeverzeichnis) eingetragen. Am Anfang stand das Studium der drei grundlegenden sprachlichen Fächer Grammatik, Rhetorik und Dialektik (Trivium); hieraus leitet sich das Wort „trivial“ im Sinne von einfach, grundlegend, elementar ab.

Es schlossen sich die vier Fächer des Quadriviums an: Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik. Diese sieben Fächer zusammen bildeten die *artes liberales* (freie Künste); unter den Bedingungen der damaligen Gesellschaft – wie schon in der römischen Antike – sind dies die Künste der Freien.

Die *artes liberales* wurden an der sog. Artistenfakultät gelehrt. Das Niveau war meist bescheiden. Gelehrt wurden die vier Grundrechenarten mit ganzen Zahlen; aber schon die Division bot oft genug unüberwindliche Schwierigkeiten. Auch die vermittelten geometrischen Kenntnisse blieben elementar. Auf geozentrischer Basis lehrte man Einiges über die Bewegung von Sonne, Mond und den Planeten. Die arithmetischen und astronomischen Kenntnisse reichten aus für den *Computus*, die Berechnung der beweglichen kirchlichen Feiertage. Die Lehre von der Musik – Musik spielt in der christlichen Liturgie eine wichtige Rolle – stützte sich auf eine elementare, mathematisch begründete Harmonielehre und knüpfte an pythagoreische Vorstellungen an: Oktave, Quarte, Quinte usw. entstehen, wenn die Saitenlängen in ganzzahligen Verhältnissen zueinander stehen. Dies lief auf das Rechnen mit Proportionen hinaus.

Das Studium an der Artistenfakultät schloss mit dem Titel eines Baccalaureus und, darauf aufbauend, eines Magisters ab. Wer weiter studieren wollte oder konnte, besuchte die medizinische, die juristische oder – als ranghöchste – die theologische Fakultät und konnte den Doktorgrad verliehen bekommen. In der Ausbildung von Geistlichen bestand das eigentliche Ziel der Hohen Schulen, denn Lehrer und Schüler waren Kleriker, lebten gemeinsam in Kollegien und bildeten die „universitas magistrorum et scholarium".

Die Universitätsvorlesungen bestanden aus dem Verlesen (Vorlesen) von Schriften der Kirchenväter, antiker und mittelalterlicher Autoren. Danach wurden die Texte ausgelegt, kommentiert und interpretiert.

Da beim Vergleich der Texte Unstimmigkeiten oder gar Widersprüche auftraten, übernahm man die von Petrus Abaelard (1079–1142) ausgebildete Methode des *sic et non* (sinngemäß etwa: So oder anders). Aussprüche berühmter Autoren wurden gegenübergestellt. So wurden zweifellos Gelehrsamkeit und Scharfsinn vermittelt.

Der Fortschritt in den Naturwissenschaften aber ist natürlich an den Rückvergleich mit der Natur gebunden; doch galt das Primat der göttlichen Offenbarung vor der menschlichen Neugier. Hier half eine Art erkenntnistheoretischer Kunstgriff weiter, der von einigen mittelalterlichen Gelehrten – Duns Scotus (um 1265–1303), Wilhelm von Ockham (ca. 1300–1349/50) – vertretene Satz von der doppelten Wahrheit: Im theologischen Zusammenhang könne etwas als wahr gelten, das sich in der Wissenschaft von der Natur als falsch erwiesen habe, und umgekehrt.

Und noch ein weiteres zentrales Problem prägte die Scholastik während des 12. und 13. Jahrhunderts, der sog. Universalienstreit, ein Streit, der mit großer Erbitterung geführt wurde. Es ging um die Frage, ob die allgemeinen Begriffe (universalia) reale, objektive Existenz besitzen oder durch Abstrak-

Abb. 6.3.3 Collegium Maius, ältester erhaltener Teil der Jagiellonen-Universität Krakau, gegründet 1364 [Bildarchiv Preußischer Kulturbesitz, Berlin] (Fotograf unbekannt, Krakau um 1980)

tion gebildete Namen (nomina) darstellen. Gibt es etwa „das Pferd“ oder nur Pferde? Der offizielle Katholizismus stellte sich meist auf die philosophisch-idealistische Seite.

Bedeutende Schwierigkeiten ergaben sich für die Kirche bei der Eingliederung des Lehrwerkes von Aristoteles in die christliche Ideenwelt, umso stärker, je deutlicher seine durch Übersetzungen und Kommentare erschlossene Leistung hervortrat. Gegen den Pariser Averroismus wurden energische Maßnahmen ergriffen, vom Verbot der Lehre bis zur Tötung der Vertreter.

Die Lehre des Averroismus, um 1250 in Paris entstanden, schließt sich an Averroës (Ibn Rušd) und seine Verehrung von Aristoteles an und vertritt die Ewigkeit der Welt und der einen, allen Menschen gemeinsamen Vernunft.

Die Einpassung von Aristoteles in die katholische Theologie erfolgte vor allem durch Albertus Magnus (ca. 1208–1280) und seinen Schüler Thomas von Aquin (1225/26–1274).

Abb. 6.3.4 Hierarchie der mittelalterlichen Wissenschaften. Sinnbildliche Darstellung aus der Margarita Philosophica [Gregor Reisch, Freiburg 1505]

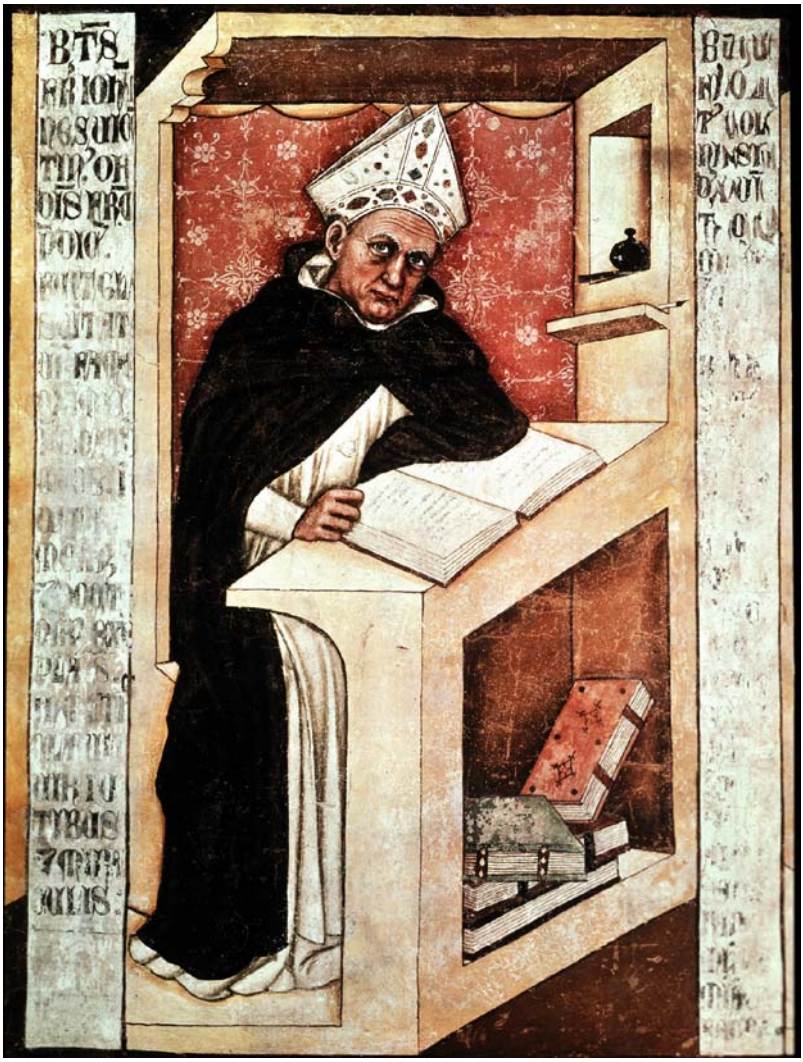


Abb. 6.3.5 Albertus Magnus, Wandmalerei im bischhöflichen Seminar von Treviso, von Tommaso de Modena, 1352 [Bildarchiv Preußischer Kulturbesitz, Berlin]

Albertus Magnus

Albertus Magnus (Albert der Große, eigentlich Graf von Bollstädt), der „doctor universalis“, stammte aus Süddeutschland und lehrte u. a. an den Universitäten von Paris und Köln. Er versuchte, das von Aristoteles und Avicenna überlieferte Wissen zu systematisieren und zugleich die aufkommende Naturbeobachtung – bei der er sich selbst ausgezeichnet hatte – mit der christlichen Theologie in Übereinstimmung zu bringen. Mit der Grundthese, dass theolo-

Abb. 6.3.6 Thomas von Aquin (Vatikan 1974)

gisches Wissen auf göttlicher Offenbarung, philosophisches Denken aber auf von Gott gesetzter Vernunft beruhe, schuf Albertus Magnus immerhin die Möglichkeit einer von der Theologie relativ unabhängigen Philosophie. Thomas von Aquin vertiefte den katholisch-orthodoxen Dogmatismus und passte ihn den Bedürfnissen seiner Zeit an.

Das europäisch-lateinische Mittelalter hat bedeutende Gelehrte hervorgebracht, darunter auch umfassend gebildete Männer mit eigenständigen mathematisch-naturwissenschaftlichen Leistungen. Freilich waren selbst die herausragenden Denker in erster Linie ihrem theologischen Anliegen verpflichtet, wonach das Ziel aller Wissenschaft darin bestehe, die Offenbarung Gottes hervorzuheben und am Beispiel der Natur sein Wirken zu belegen.

Beim Bildungsmonopol des Klerus waren fast nur Geistliche imstande, den Zugang zur Wissenschaft zu finden: Gerbert von Aurillac wurde 999 Papst unter dem Namen Silvester II., Robert Grosseteste (ca. 1168–1253) – im modernen Sinne des Wortes „Experiment“ mit Licht experimentierend – wurde vermutlich Kanzler der streng orthodoxen Universität Oxford und schließlich 1235 Bischof von Lincoln. Nicole Oresme (ca. 1320/1325–1382), der herausragende Mathematiker des Mittelalters, starb als Bischof von Lisieux. Nikolaus von Kues (1401–1464), der vielleicht kühnste mittelalterliche Denker, wurde 1448 Kardinal und 1450 Bischof von Brixen. Albertus Magnus war Ordensgeneral der Dominikaner für Deutschland.

Speziell für die Geschichte der Mathematik sind von Interesse Robert Grosseteste, sein Schüler Thomas Bradwardine (ca. 1290–1349), Roger Bacon (ca. 1214–1294), Nicole Oresme (um 1323–1382), Nikolaus von Kues (1401–1464), Levi ben Gerson (1288–1344).

Robert Grosseteste

Grosseteste (der Großköpfige) war überaus vielseitig. Neben Schriften zu Optik, Kalenderreform und Astronomie verwandte er sich für unvoreingenommene Betrachtung der Natur, und dies mit Hilfe der Mathematik: *„Alle Ursachen der Naturwirkungen müssen mit Hilfe von Linien, Winkeln und Figuren gegeben sein.“* [Juschkewitsch 1964, S. 394]. Dies erinnert an die spätere Wertschätzung der Mathematik bei Leonardo da Vinci und Galilei. Grosseteste warf sogar die Frage der Vergleichbarkeit verschiedener Unendlichkeitsstufen auf. *„Es gibt verschieden große Unendlich. Denn die Menge der ganzen Zahlen ist unendlich und größer als die ebenfalls unendliche Menge der geraden Zahlen.“* (Deutsch zitiert bei [Gericke 1990, S. 140])

Roger Bacon

Grossetestes Schüler, der Franziskaner Roger Bacon, ging den Weg seines Lehrers weiter, aber noch entschiedener. Bacon lehrte einige Zeit in Paris, dann bis 1257 in Oxford. Er studierte Mathematik, Mechanik, Astronomie und Alchemie nach griechischen, arabischen und hebräischen Texten in lateinischer Übersetzung und erhielt den Ehrentitel „doctor mirabilis“ (bewundernswerter Doktor).

Bis zu einem gewissen Grade kann man Roger Bacon als Begründer der experimentellen Naturwissenschaften verstehen, wobei der Mathematik eine entscheidende Rolle zugedacht ist. Er formulierte eine Mischungsregel für den Fall, dass zwei Mengen gleicher Substanz, aber verschiedener Intensität gemischt werden. Er wandte die Theorie der Kegelschnitte auf die Optik an, wobei er sich auf Ibn al-Haytam stützte. Der Gelehrte Witelo lernte dies um 1250 in Paris kennen, und Kepler erweiterte im 17. Jahrhundert Witelos Arbeit.

In einem dreibändigen Werk *Compendium studii philosophiae* (Anleitung zum Studium der Philosophie) bemühte er sich um eine zusammenfassende Darstellung der weltlichen Wissenschaften, verbunden mit heftigen Angriffen auf den Sittenverfall innerhalb der Kirche und auf die religiösen Orden und den Dogmatismus. Dies führte zur Klosterhaft, dort ist er wohl auch gestorben.

In seinem *Opus maius* (Großes Werk) treten Bacons naturwissenschaftliche Ansichten am klarsten zutage. Er verwarf die scholastische Methode des Beweisens durch Berufung auf Autoritäten. Die Autorität der Bibel wagte er jedoch nicht anzutasten. Dagegen wurde das „Experiment“, worunter er damals nichts anderes verstehen konnte als „Erfahrung“, als Hauptmethode der Naturergründung deklariert. Dies weist schon auf die spätere Entwicklung während der Renaissance hin.

Auch mit praktischen Dingen hat sich Bacon befasst, zum Beispiel mit der Herstellung effektiveren Schießpulvers und mit der Herstellung von Brillen auf Grund von Experimenten mit Linsen und Spiegeln.

Abb. 6.3.7 Triforium und Obergaden der Kathedrale von Lincoln, England [Foto Alten]

Vieles blieb Vision: Fliegen mit einem Ballon aus dünner Kupferfolie und gefüllt mit „flüssigem Feuer“. Es werde geben

> *„Instrumente von wunderbar ausgezeichneter Nützlichkeit, wie Maschinen zum Fliegen, oder zum Herumfahren in Fahrzeugen ohne Zugtiere und doch mit unvergleichlicher Geschwindigkeit, oder zur Seefahrt, ohne Rudermänner, schneller als durch Menschenhand für möglich gehalten wird.“*
> (Deutsch zitiert in [Geschichte der Naturwissenschaften 1983, S. 164], ausführlich in [Clegg 2003])

Levi ben Gerson

Das Leben von Levi ben Gerson (1288–1344) ist weitgehend unbekannt. Sein Bruder war Arzt von Papst Klemens VI. (um 1292–1352) in Avignon.

Levi ben Gerson war außerordentlich produktiv, doch hat er kaum eine nachhaltige Wirkung auf die Folgegeschichte ausgeübt. Seine Kenntnisse dürfte er aus hebräischen Übersetzungen antiker und arabischer Schriften geschöpft haben. Er schrieb einen Kommentar zu den „Elementen“ von Euklid, suchte das Parallelenpostulat zu beweisen, fand den Sinussatz für ebene Dreiecke und schuf ein vom ptolemäischen abweichendes Mondmodell. Auch

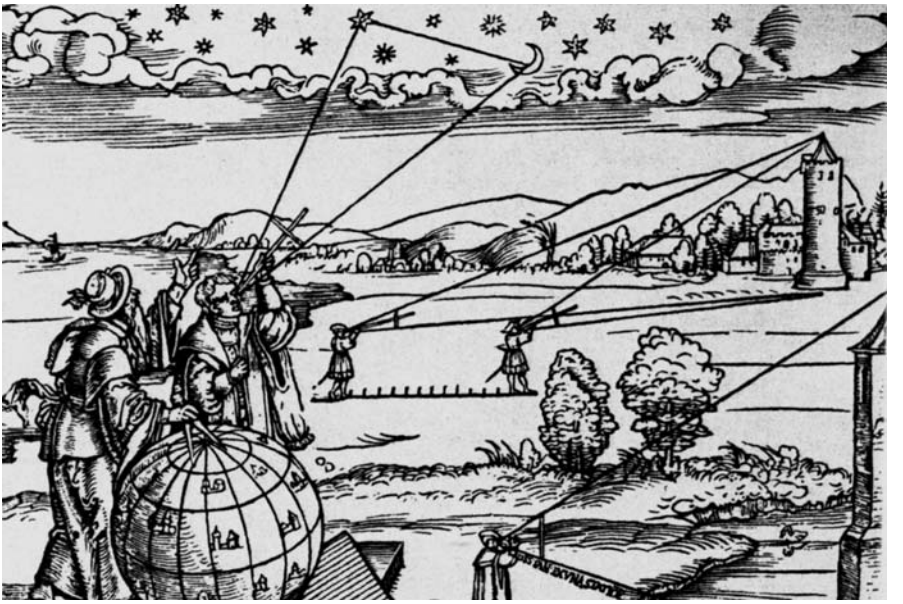


Abb. 6.3.8 Gebrauch des Jakobstabes zur Vermessung: Durch Verschieben des senkrecht auf einem Stab angebrachten Querstabes konnte man die Winkeldifferenz ablesen (zeitgen. Holzschnitt), aus [Apianus, Introductio geographica 1532], [Wikibooks.org]

beschrieb er die camera obscura. Er erfand ein bequem handhabbares Instrument zur Messung von Winkeldifferenzen, den sog. Jakobstab, der im europäischen Mittelalter weite Verbreitung fand.

Thomas Bradwardine

Ein Zentralproblem hat die Diskussionen in der Scholastik geprägt, nämlich die im Anschluss an Aristoteles aufgeworfene Frage, ob es die Möglichkeit unbegrenzter Teilbarkeit gebe oder ob atomare (griech. atomos, unteilbar) Teilchen existieren, kurz, wie die Struktur des Kontinuums beschaffen sei.

In diesem Problemfeld hat sich Thomas Bradwardine hervorgetan und eine große Rolle gespielt, auch für die spätere Entwicklung der Mathematik, insbesondere für die Frühgeschichte der Analysis. Auch hier bleibt zu beachten, dass sein Anliegen philosophischer und nicht mathematischer Art war.

Bradwardine studierte am Merton-College, dem ältesten Teil der Oxforder Universität, ging nach London, wurde Beichtvater von König Edward III. und schließlich 1349 Erzbischof von Canterbury. Bald darauf starb er an der Pest.

Bradwardine war Verfasser einer Abhandlung über Gnade und freien Willen. Er schrieb den *Tractatus proportionum ...* (Über Proportionen), wo er

Abb. 6.3.9 Merton-College in Oxford, 1264 gegründet [Foto Gottwald]

zwar den Aristotelischen Geschwindigkeitsansatz (Geschwindigkeit dem Verhältnis der bewegenden Kraft zum Widerstand proportional) kritisierte, aber seinerseits trotz erheblichen Scharfsinns ein ebenfalls falsches Bewegungsgesetz angab. Er hat weitere mathematische Abhandlungen verfasst, so eine *Geometria speculativa*. Auch findet sich bei ihm die Erweiterung der Proportionenlehre auf gebrochene Exponenten (ausführlich bei [Juschkewitsch 1965, S. 395f.]).

Von größter Wirkung auf die nachfolgende Entwicklung wurde die Abhandlung *Tractatus de continuo* (Abhandlung über das Kontinuum), entstanden zwischen 1328 und 1335. Im Anschluss an antike und muslimische Traditionen stellt Bradwardine mögliche Aussagen über das Kontinuum vor; für das griechische *atomos* benutzt er das lateinische *indivisibilis* (ebenfalls: unteilbar), einen Begriff, der in der Frühgeschichte der Analysis eine große Rolle spielen wird, so etwa bei Cavalieri 1635.

Bradwardine:

> *„Die einen wie Aristoteles, Averroës und die meisten Zeitgenossen behaupten, das Kontinuum bestehe nicht aus Atomen, sondern aus Teilen, die sich ohne Ende teilen ließen. Andere hingegen sagen, es bestehe aus Indivisibeln, und zwar auf zweierlei Art, denn Demokrit nimmt an, das Kontinuum bestehe aus unteilbaren Körpern. Ande-*

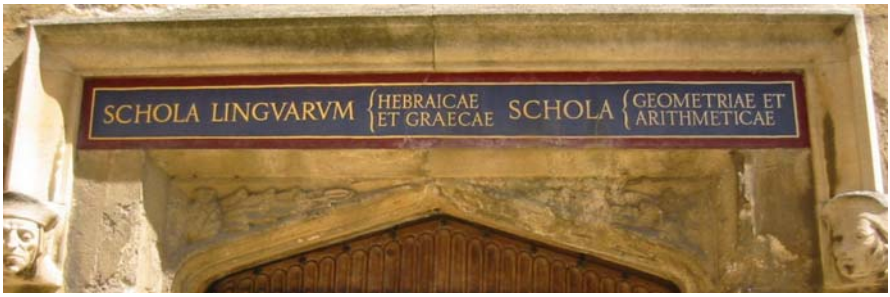


Abb. 6.3.10 Inschrift über einem Portal der Universität Oxford [Foto Gottwald]

> *re nehmen an, es bestehe aus Punkten. Auch die letzte Auffassung zerfällt in zwei, denn Pythagoras, das Haupt dieser Richtung, Platon und unser Zeitgenosse Walter* (Walter Cotton, gest. 1352) *nehmen an, das Kontinuum bestehe aus einer endlichen Anzahl von Indivisibeln, die anderen, es bestehe aus einer unendlichen Anzahl solcher. Auch diese (zuletzt genannten) zerfallen in zwei Gruppen, denn die einen, wie unser Zeitgenosse Heinrich* (Henry Harclay, gest. 1317) *behaupten, das Kontinuum besteht aus unendlich vielen Indivisibeln, die unmittelbar miteinander verbunden wären, während die anderen, wie (Robert) von Lincoln* (d.i. Robert Grosseteste) *glauben, es bestehe aus einer unendlichen Anzahl solcher, die mittelbar miteinander verbunden wären.“*
> (Deutsch zitiert bei [Juschkewitsch 1964, S. 397])

Bradwardine schloss sich der Meinung von Aristoteles an. Aus scharfsinnigen Überlegungen folgert er:

> *„Die Behauptung, derzufolge das Kontinuum aus endlich vielen indivisiblen Teilen besteht, ist allen Wissenschaften feindlich, bekämpft sie alle und wird daher von ihnen allen einmütig abgelehnt.“*
> (Deutsch zitiert bei [Juschkewitsch 1964, S.398])

Nicole Oresme

Auch Frankreich hat im Mittelalter einen herausragenden und vielseitigen Gelehrten hervorgebracht. Oresme (ca. 1330–1382) stammt aus der Normandie. Er lehrte von 1348 bis 1361 am Collège de Navarra in Paris, war in kirchlichen Funktionen in Rouen tätig, wurde schließlich 1377 Bischof von Lisieux.

Auf Geheiß des Königs Karl V. übersetzte Oresme Werke von Aristoteles – auch die pseudo-aristotelische Schrift über Ökonomie – ins Französische. Er publizierte Schriften zur Ökonomie, wie er überhaupt zur Herausbildung der

Abb. 6.3.11 Nicole Oresme, Miniatur aus dem Traité de l'espère (Bibliothéque Nationale, Paris, fonds français 565, fol. 15) [Wikimedia Commons]

französischen Fachsprache beigetragen hat. Er setzte sich im *Livre du ciel et du monde* (1377, Buch über den Himmel und die Welt) mit der Auffassung des Aristoteles von einer ruhenden Erde und einer rotierenden Fixsternsphäre auseinander und wandte sich gegen die Astrologie.

Was die Mathematik betrifft, so ist zunächst sein Werk *Algorismus proportionum* (Algorismus der Proportionen) zu nennen. Dort dehnte auch er die Lehre von den Potenzen auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten aus. Wir würden zum Beispiel schreiben

$$a^{\frac{n}{m}} = (a^n)^{\frac{1}{m}} \; ; \quad a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a^n \cdot b^m)^{\frac{1}{m \cdot n}} \, .$$

Bis zu einem gewissen Grade bereitet sich hier die spätere Theorie der Logarithmen vor.

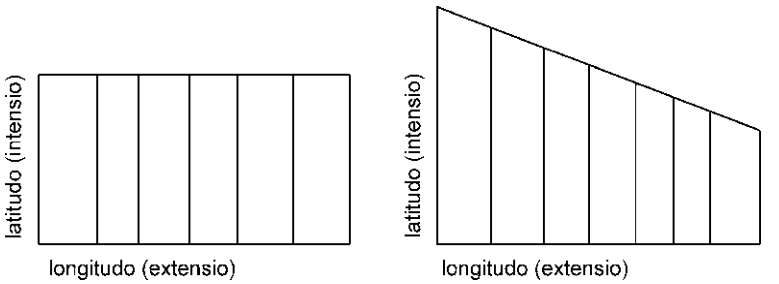


Abb. 6.3.12 Figur zur Theorie der Formlatituden

Vielleicht von noch größerer Wirkung auf die spätere Entwicklung und zwar insbesondere auf die Frühgeschichte der analytischen Geometrie wurde die sog. Theorie der Formlatituden. Im Anschluss an den englischen Scholastiker Richard Swineshead (14. Jh.), schuf Oresme eine graphische und damit anschauliche Darstellung des Zusammenhanges von Quantitäten und Qualitäten, besonders mit der Darstellung sich zeitlich ändernder Intensitäten solcher Größen wie Wärme und Kälte, Feuchtigkeit und Trockenheit, Bewegung.

Oresme zeichnete eine Strecke (Basis oder extensio oder longitudo genannt). Senkrecht dazu wurde durch Strecken die Stärke (latitudo oder intensio) der untersuchten Größe aufgetragen. Änderungen der Intensität wurden dargestellt durch Änderungen der Streckenlängen. Auf diese Weise erhielt man Flächen (figurae oder formae). Sind die latitudines konstant, so erhält man ein Rechteck, also das Bild einer gleichförmigen Bewegung, d. h. einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Im Falle gleichmäßiger Zunahme oder Abnahme (der Bewegung) erhält man ein Trapez oder ein Dreieck.

Bei der Suche nach einer wissenschaftlichen Dynamik hat die Theorie der Formlatituden eine bedeutende Rolle gespielt. Aber das ist noch nicht analytische Geometrie; es fehlt die Verbindung von Geometrie und Algebra. Auch vom Funktionsbegriff kann man noch nicht reden.

Nikolaus von Kues

Der Kusaner nimmt eine Zwischenstellung zwischen Mittelalter und Renaissance ein. Einerseits gehört er mit seinen feinsinnigen erkenntnistheoretisch-theologischen Studien [Böhlandt 2002] eher noch dem Mittelalter an, dagegen reichen seine freilich spekulativen, kosmologischen Meinungen schon ins Vorfeld von Nicolaus Copernicus und Giordano Bruno.

Der Kusaner (eigentlich Nikolaus Chryppfs oder Krebs, 1401–1464) stammt aus Kues an der Mosel und war Sohn eines Moselschiffers. Er studierte an der relativ orthodoxen Universität Heidelberg, wechselte dann an die liberale Universität Padua. Dort promovierte er 1423 zum Doktor der Rechte.

1430 wurde er zum Priester geweiht und schlug eine kirchliche Karriere ein: Dechant in Koblenz, Teilnahme am Konzil in Basel, dann im diplomatischen Dienst der Kirche. 1448 wurde er Kardinal und 1450 Bischof von Brixen, später Generalvikar in Rom.

In diplomatischer Mission schickte ihn der Papst 1438 nach Konstantinopel. Möglicherweise hat er dort Kenntnis von Teilen der byzantinischen Mathematik erhalten. Während der Rückkehr nach Italien sind ihm, wie er berichtet, Grundgedanken seines theologischen Hauptwerkes, der *coincidentia oppositorum* (etwa: Zusammenfallen der Gegensätze) gekommen: Die im Endlichen sich ausschließenden Gegensätze fallen im Unendlichen, also bei Gott, zusammen.

Die mathematischen Betrachtungen des Kusaners kreisten in mehreren Traktaten um das schon seit der Antike aktuelle Problem der Kreisquadratur. Unserem Verständnis am nächsten kommt sein Rückgriff auf eine Grundidee von Archimedes, der durch Einbeschreiben eines regelmäßigen 96-Ecks einen guten Näherungswert für das Verhältnis von Kreisumfang zum Durchmesser gefunden hatte. Cusanus behandelte das Problem, indem er zu umfangsgleichen regelmäßigen Vielecken mit wachsender Eckenzahl die Folgen von deren „Inkreisradien“ und „Umkreisradien“ bildete. Diese beiden Folgen sind konvergent und haben als gemeinsamen Grenzwert den Radius des zu den Vielecken umfangsgleichen Kreises. Daraus folgert Böhlandt, dass der Kusaner eine exakte Kreisquadratur (Konstruktion mit Zirkel und Lineal) nicht für möglich hielt [Böhlandt 2002, S. 78].

6.4 Schlussbetrachtung

Die Völkerwanderung, der Zusammenbruch des weströmischen Reiches und Machtkämpfe in Europa behinderten die Entwicklung der Wissenschaften in den Jahrhunderten des frühen („finsteren“) Mittelalters. Das Erbe der klassischen Antike war weitgehend verschüttet, lebte allenfalls fort in den Dom- und Klosterschulen des sich ausbreitenden Christentums. Dennoch war das Frühmittelalter keine tote Zeit für die Mathematik, haben doch die von Boethius im 6. Jh. ins Lateinische übersetzten „Elemente“ des Euklid eine große Rolle in der Geometrie gespielt. Seine Einteilung der freien Künste in das Trivium und das anschließende Quadrivium haben die Struktur des Studiums in den Universitäten des hohen Mittelalters geprägt. Besondere Bemühungen galten dem Computus, also der Berechnung der beweglichen christlichen Festtage. Aber erst mit der Tradierung der philosophischen und mathematischen Texte der griechisch-hellenistischen Antike – von den Arabern zunächst in ihre Sprache übersetzt, weiterentwickelt und auf die iberische Halbinsel getragen und dort ins Lateinische übersetzt – begann auch in Europa ein neuer Aufschwung der Wissenschaften, begünstigt durch die Entstehung der Städte und das Aufblühen des Handels. Langsam drang das dezimale Positionssystem der Inder vor, die Philosophie und Logik des Aristoteles erlebte neuen

Glanz in der Scholastik. Die Geometrie der Antike und ihre Weiterentwicklung in der islamischen Welt bildeten die Basis für die Bauten der Romanik und Gotik im hohen und späten Mittelalter.

Trotz vieler Fehden und Kriege, trotz Pest und mancher Behinderung durch eine dogmatisch vertretene christliche Lehre (Inquisition) erlebten die Wissenschaften allgemein und die Mathematik insbesondere neue Impulse, konzentriert in den neuen Universitäten. Zum Entwicklungsstand der Mathematik im ausgehenden Mittelalter hat sich Juschkewitsch wie folgt geäußert:

> *„Durch die Auswirkungen des ‚Hundertjährigen' englisch-französischen Krieges (1338 bis 1453), der Bauernaufstände, des Kampfes zwischen England und Schottland und anderer Ereignisse erlitt die Wissenschaft in England und Frankreich einen gewissen Rückschlag, so daß sich das Zentrum der wissenschaftlichen Forschung wieder nach Mittel- und Südeuropa zu verschieben begann. Über den mathematischen Unterricht an den Universitäten in Paris, Wien, Heidelberg u. a. in der zweiten Hälfte des 14. Jahrhunderts sind uns Dokumente überliefert. Dort wurde z. B. ein halbjähriger Vorlesungszyklus über die ersten Bücher der ‚Elemente' des Euklides abgehalten, wofür der Student als Hörergebühr 8 Groschen zu entrichten hatte (der Prager Groschen, der unter Wenzel II geprägt worden war, war eine große silberne Münze mit einem Gewicht von etwa 3,5 g). Darüber hinaus waren der ‚Algorithmus der ganzen Zahlen', der ‚Algorithmus der Brüche', die ‚Proportionen des Bradwardine', die ‚Längen der Vorgänge', der ‚Almagest' usw. Gegenstand der Lehre. Die Unterrichtsmethode bestand im Lesen von Büchern, die sowohl dem Lehrenden als auch den Hörern zur Verfügung standen, wobei die Lektüre durch mündliche Erläuterungen des Lehrers ergänzt wurde. An den Universitäten wurden mitunter mathematische Dispute organisiert, durch die den Studenten Gelegenheit geboten wurde, gleichsam ihre Fortschritte zu zeigen. (...)*
> *In Böhmen, an der Universität Prag, entfaltete der Astronom und Mathematiker Jan Šindel aus Hradec Králové* (Königgrätz) *(1375–1453) seine Tätigkeit, der auch unter dem Namen Johannes Pragensis bekannt geworden ist. Ein anderer Prager Mathematiker Křišťan aus Prachatitz (etwa 1366 bis 1439) verfaßte etwa 1400 den ‚Prosaischen Algorithmus' (Algorismus prosaycus). Etwas später wirkte Martin aus Lenezice bei Warschau (etwa 1405 bis 1463) an der Universität Prag als Professor der mathematischen Wissenschaften. Der hervorragendste Mathematiker Böhmens jener Zeit war jedoch Johannes Widmann ...*
> *An der Universität Krakau wirkte in der Mitte des 15. Jahrhunderts Martin Krol aus Przemysl, der Verfasser eines Werkes über praktische Geometrie. Albert Blar Brudziewski (1455–1597) war Zögling und später Lehrer an der Universität Krakau, an der er Vorlesungen über Arithmetik, Perspektive und Astronomie hielt und sich insbesondere mit begabten Studenten beschäftigte. In den neunziger Jahren gab*

es hier 16 Hochschullehrer für Mathematik. In den Jahren 1491 bis 1494 studierte an dieser Universität Kopernikus, der später sein Studium in Italien abgeschlossen hat.
In Österreich hat sich Georg Peuerbach (1423–1461) hervorgetan, der als Nachfolger von Johannes aus Gmunden an der Universität Wien Astronomie, Mathematik und auch römische Literatur lehrte.“
[Juschkewitsch 1964, S. 413–415]

Wesentliche Inhalte der Mathematik im europäischen Mittelalter

6. Jh.	BOETHIUS: Übersetzung der „Elemente“ ins Lateinische, Bezeichnung *Quadrivium* für die Lehre der vier mathematischen Wissenschaften: Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik
um 800	ALCUIN VON YORK: Aufgabensammlung *Propositiones*
um 1000	GERBERT VON AURILLAC: Einführung des Abakus mit indisch-arabischen Ziffern
11. Jh.	„Boethius“ Geometrie II: Kompendium mit auf Boethius fußenden Euklid-Exzerpten und Agrimensorenhandschriften ADELARD VON BATH Euklid-Übersetzung aus dem Arabischen ins Lateinische
13. Jh.	LEONARDO VON PISA (FIBONACCI): *Liber abbaci*, *Practica geometriae*, *Liber quadratorum*: Arithmetik, lineare und quadratische Gleichungen, unbestimmte Gleichungen, Näherungswerte für Quadrat- und Kubikwurzeln durch Iteration, Fibonacci-Zahlen JOARDANUS NEMORARIUS: *Elementa arithmetica*, *De numeris datis*: Proportionen, Systeme linearer Gleichungen, Typen quadratischer Gleichungen ROBERT GROSSETESTE: Schriften zur Astronomie und Kalenderreform, Betrachtungen zum Unendlichen VILLARD D'HONNECOURT: Architekturskizzenbuch JOHANNES DE SACROBOSCO: Elementare sphärische Geometrie zur Erklärung der Bewegung der Gestirne ALBERTUS MAGNUS: Kommentar zu Euklids „Elementen“ ROGER BACON: Mathematik in experimentellen Naturwissenschaften: Mischungsregel, Kegelschnitte in der Optik
14. Jh.	THOMAS BRADWARDINE: „spekulative“ Geometrie LEVI BEN GERSON: Sinussatz für ebene Dreiecke, Messung von Winkeldifferenzen mit dem Jakobstab JOHANNES DES MURIS: *Quadripartitum numerorum*: Musiktheorie, Mechanik, lineare und quadratische Gleichungen NICOLE ORESME: *Algorismus proportionum*, Theorie der Formlatituden
15. Jh.	NIKOLAUS VON KUES: „Kreisquadratur“ mit ein- und umbeschriebenen Vielecken MATTHÄUS RORICZER, HANS SCHMUTTERMAYER: Bauhüttenbücher

7 Mathematik während der Renaissance

	Allgemeine Geschichte
1410	Niederlage des Deutschen Ordens bei Tannenberg
1415	Hinrichtung des böhmischen Reformators Jan Hus
seit 1434	Florenz unter der Herrschaft der Medici
um 1450	Erfindung des Buchdruckes mit beweglichen Lettern durch J. Gutenberg
1488	Portugiesen umsegeln das Kap der Guten Hoffnung und erreichen 1498 Indien
1489	Venedig erobert Zypern
1492	Spanier entdecken den neuen Kontinent Amerika
1517	Luthers Thesen in Wittenberg, Beginn der Reformation
1524/25	Bauernkriege in Deutschland
1509/47	Herrschaft Heinrichs VIII. in England
1559	Erstmals päpstlicher Index der verbotenen Bücher
1562/98	Hugenottenkriege in Frankreich
1558/1603	Elisabeth I. Königin von England
1588	Untergang der spanischen Armada
1581	Gründung der Republik der Vereinigten Niederlande
1588–1590	Bau der Kuppel der Peterskirche in Rom
1593	Heinrich IV., König von Frankreich, tritt zum Katholizismus über
1618–1648	Dreißigjähriger Krieg

7.0 Historische Einführung

In allen Zweigen der Historiographie wird der Renaissance eine gesonderte, eine hervorgehobene Stellung in der Weltgeschichte zugewiesen: als Übergangsperiode zwischen Mittelalter und Neuzeit. Dies gilt für die politische Geschichte, für die Kulturgeschichte, für die Religionsgeschichte und auch für die Wissenschaftsgeschichte.

Freilich wird die Datierung keineswegs einheitlich gehandhabt; sie weicht zwischen den verschiedenen Zweigen der Historiographie voneinander ab und zwar sogar erheblich. Dazu kommen deutliche regionale Unterschiede; Italien gilt in vieler Hinsicht als Schrittmacher, als Heimatland der Frührenaissance. Von dort breitet sich die Renaissance nach West- und Mitteleuropa aus mit ihren politischen Merkmalen der Stadtkulturen und Nationenbildung, mit neuen Zügen in bildender und darstellender Kunst, mit einem radikalen Umsturz im Gefüge der Kirche durch die Reformation und in der Wissenschaftsgeschichte nach Inhalt und Methode, in Verbindung mit dem Renaissance-Humanismus.

Obgleich die Grenzen zwischen historischen Perioden fließend sind, soll hier der Zeitraum von der Mitte des 15. Jahrhunderts bis zum Anfang des 17. Jahrhunderts den zeitlichen Rahmen für die Mathematik in der Periode der Renaissance abgeben. Diese Chronologie schließt sich einer verbreiteten Chronologie an, wiewohl auch andere Periodisierungen vernünftig und in Gebrauch sind.

Das meisterhafte Werk (1860) von Jacob Burkhardt *Die Kultur der Renaissance in Italien* hat die Renaissance als entscheidende Umgestaltung des europäischen Geisteslebens beim Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit ins Bewusstsein des Bildungsbürgertums gehoben. Burkhardt hielt sich bewusst zurück, was detaillierte Aussagen über die Umstände in Mathematik und Naturwissenschaften betraf. Und doch:

> *„Tyrannen sowohl als freie Staaten zeigten bisweilen im 14. Jahrhundert der ganzen Klerisei eine solche Verachtung, daß noch ganz andere Dinge als bloße Naturforschung ungeahndet durchgingen. Als aber mit dem 15. Jahrhundert das Altertum mächtig in den Vordergrund trat, war die ins alte System gelegte Bresche eine gemeinsame zugunsten jeder Art profanen Forschens, nur daß allerdings der Humanismus die besten Kräfte an sich zog und auch wohl der empirischen Naturkunde Eintrag tat. Hier und da erwacht dazwischen immer wieder die Inquisition und straft oder verbrennt Ärzte als Lästerer und Nekromanten, wobei nie sicher zu ermitteln ist, welches das wahre, tiefste Motiv der Verurteilung gewesen. Bei alledem stand Italien zu Ende des 15. Jahrhunderts mit Paolo Toscanelli, Luca Paccioli und Lionardo da Vinci in Mathematik und Naturwissenschaften ohne allen Vergleich als das erste Volk Europas da und die Gelehrten aller Länder bekannten sich als seine Schüler, auch Regiomontanus und Kopernikus. Dieser Ruhm überlebte sogar die Gegenreformation, . . . “*
>
> [Burkhardt 1928, S. 286f.]

Freilich sind dies Ansichten des 19. Jahrhunderts, noch dazu aus italienischem Blickwinkel, mit der Betonung der neu entstandenen städtischen Kultur. Und doch ist der Kern der Renaissance angesprochen: Unter bewusster Anknüpfung an die Antike – deren materielle Zeugen massenhaft vor Augen standen – und bei offener Gegnerschaft zum Mittelalter, in dessen Tradition man unvermeidbar dennoch stand, bahnte sich im 15./16. Jahrhundert eine gänzliche Neuorientierung und Umgestaltung der Mathematik und der Naturwissenschaften an, die schließlich im 17./18. Jahrhundert in die Wissenschaftliche Revolution einmünden sollten.

Eine vergleichbare Entwicklung hat es bemerkenswerterweise in China trotz eines außerordentlich hohen Niveaus der mittelalterlichen Technologie und Wissenschaften nicht gegeben, mit der Folge, dass keine Konsequenzen für die Ausbildung der modernen Naturwissenschaft gezogen wurden. Über die Gründe wurde und wird fleißig diskutiert, doch besteht Einigung darüber, die Ursachen im sozio-ökonomischen Bereich zu suchen.

Die Periode der Renaissance war eine höchst unruhige Zeit, mit tiefen sozialen Widersprüchen, mit Erhebungen der Stadtbewohner und der Bauern gegen die Feudalherren, mit zahllosen kriegerischen Auseinandersetzungen, mit der Herausbildung von Nationen und Nationalstaaten, mit gärenden geistigen und kulturellen Bewegungen, geprägt durch den Übergang von der

Natural- zur Geldwirtschaft und – nicht zuletzt – durch eine glanzvolle Entfaltung von Kunst und Wissenschaft.

Zunächst richtete sich ein breites gesellschaftliches Interesse auf die aus der Antike überlieferten Kenntnisse und Wissenschaften. Viele Kulturdenkmäler zeugten vom Glanz einer Zeit, die Rom im Mittelpunkt der Welt gesehen hatte. Staunend stand man vor neuen, in Mitteleuropa bisher unbekannt gebliebenen antiken Manuskripten, die byzantinische Gelehrte, vor den Türken ausweichend, nach Italien gebracht hatten. 1453 war Konstantinopel gefallen, ein Jahr nach der Geburt von Leonardo da Vinci.

Im Streben nach Aneignung und Nutzung von Kultur und Wissenschaft der Antike und nach Wiederbelebung der als „Goldenes Zeitalter“ der Menschheit empfundenen antiken Welt und im Bemühen um eine „Wiedergeburt“ (franz.: Renaissance) der Antike spiegelte sich das Selbstbewusstsein der höfischen Kulturgesellschaft und des neu entstandenen Städtebürgertums wider. Die Träger dieser neuen Ideologie – Dichter, Gelehrte, Publizisten, Ärzte, Philosophen, Bildhauer, Handwerker, Ingenieure, Architekten, Handelsherren, Teile des Klerus und des Regionaladels – bezeichneten sich nach dem Vorbild von Petrarca als Humanisten und verstanden sich als Sendboten einer auf den Menschen und das irdische Dasein auszurichtenden Denk- und Handlungsweise.

Am Ende des 15. Jahrhunderts weitete sich die Renaissance-Forderung *„ad fontes“* (zu den Quellen) aus: Rückgriff auf die griechischen Originale, wenn möglich, verbunden mit Textkritik (Befreiung von nachträglichen Streichungen und Einschiebungen). Dazu kam die Erfindung des Buchdruckes, der den Schriften eine weitere Verbreitung ermöglichte und damit den Zugang zu den Quellen nicht nur für den einen oder anderen gelehrten Mönch, sondern auch für eine inzwischen zahlenmäßig stark angewachsene Gelehrtenschicht an Universitäten und städtischen Bildungseinrichtungen.

So bietet sich folgendes Bild bezüglich der griechisch-hellenistischen Mathematik:

Apollonios	Konika, Buch I–IV, lateinisch 1537
Archimedes	Gesamtausgabe griechisch 1544, lateinisch 1558 (Auswahl bereits 1270)
Aristoteles	nach früheren Auswahlen mehrere Gesamtausgaben, z. B. lateinisch 1472, 1495/98, 1533
Diophant	lateinisch 1575
Euklid	lateinisch 1505, griechisch 1533
Heron	Auswahl griechisch-lateinisch 1571, 1589, 1616
Menelaos	lateinisch 1558
Nikomachos	griechisch 1538, 1554
Pappos	lateinisch 1588
Platon	Gesamtausgabe lateinisch 1483/84, griechisch 1513, 1578
Ptolemaios	*„Almagest“* griechisch 1538, *„Tetrabiblos“* lateinisch 1484, griechisch 1535

Abb. 7.0.1 Leonardo da Vinci; er pflegte in Spiegelschrift zu schreiben (Monaco 2002). Entwurf einer Tragluftschraube von Leonardo da Vinci. Leonardo konnte das große und schwere Modell seines Entwurfes nicht zum Fliegen bringen: es gab zu seiner Zeit kein geeignetes leichtes Material. Seine Flugspirale ist der Vorläufer des Antriebes unserer Hubschrauber. Rund 450 Jahre brauchte Leonardos Idee zur funktionsfähigen Realisierung. (Albanien 1969)

Doch Humanismus und bloße Wiedererweckung der Antike genügten den wachsenden Bedürfnissen des Bürgertums schon seit dem Ausgang des 15. Jahrhunderts nicht mehr. Eine Fülle neuer Einsichten war erzielt worden, im Bereich der Produktion, bei der geographischen Erschließung der Erde, in Wissenschaft und Kunst. Es wurde offensichtlich, dass die Antike übertroffen werden konnte und übertroffen worden war. Tiere, Pflanzen, Erdteile waren entdeckt worden, von denen sich bei den Alten keine Spur einer Andeutung fand. Es gab Brillen, mechanische Uhren, Feuerwaffen, Spinnräder, Papiermühlen, aber noch kein Fernrohr. Es gab bedeutende Fortschritte im Bergbau, im Schiffbau, in der Metallurgie. Das Gefühl der Bewunderung der Antike verband sich mit einem rasch fortschreitenden Selbstbewusstsein, dass nämlich tätiges Wirken ein neues, ein besseres Zeitalter heraufgeführt habe. Charakter und Inhalt der Renaissance gehen somit weit über die bloße *„Wiedergeburt“* der Antike hinaus. Das gilt auch und gerade für die Mathematik.

Mechanische Künste und Erfindertätigkeit hatten sich auf den Weg zur wissenschaftlichen Mechanik begeben. Nehmen wir als Beispiel Leonardo da Vinci: Sein Leben, sein Werk als Künstler, Baumeister, Ingenieur und Erfinder mit einem ganz unglaublichen Ideenschatz – Wasserräder, Fallschirm, Luftschraube, Flugmaschinen, Unterseeboot, Gewölbe, Drehbank, Schiffsantriebe, Schleifmaschinen u. v. a. m. – darf als Symbol geistiger Schöpferkraft der Renaissance gelten. Leonardo vermochte vorauseilend Fragen wenigstens zu fixieren, die erst zwei bis drei Generationen später von Galilei, Kepler und Newton geklärt wurden und die Grundprobleme der Wissenschaftlichen Revolution ausmachen: Gravitation, Fall, Beschleunigung. Leonardo sah auch im Methodischen das Neue, die Verbindung nämlich von Theorie und Experiment, noch vor Galilei. Auch Leonardo erkannte, dass die Naturforschung

auf die Entdeckung von Naturgesetzen abzielen muss, die ihrerseits nur in mathematischer Sprache zu fassen sind [Wußing 2002, S. 7ff.].

Leonardo hatte sich unter Anspielung auf die noch umstrittene Rolle der Mathematik so ausgedrückt:

> *„Der Mann, der die höchste Gewissheit der Mathematik tadelt, nährt die Verwirrung und kann nie die Widersprüche der sophistischen Wissenschaft zum Schweigen bringen, die zu unendlichen Konflikten führen. Es gibt keine Sicherheit in der Wissenschaft, wo nicht die Mathematik angewandt werden kann.“*
> (Zitiert nach [Clark 1969, S. 63])

Werfen wir noch einen Blick auf die sozialen Strukturen, die während der Renaissance den wissenschaftlichen Fortschritt getragen haben. Die Neuorientierung der Wissenschaften ging nicht von den mittelalterlichen Universitäten aus, an denen gegen Ende des 14. Jahrhunderts deutliche Züge der Stagnation des wissenschaftlichen Lebens erkennbar wurden.

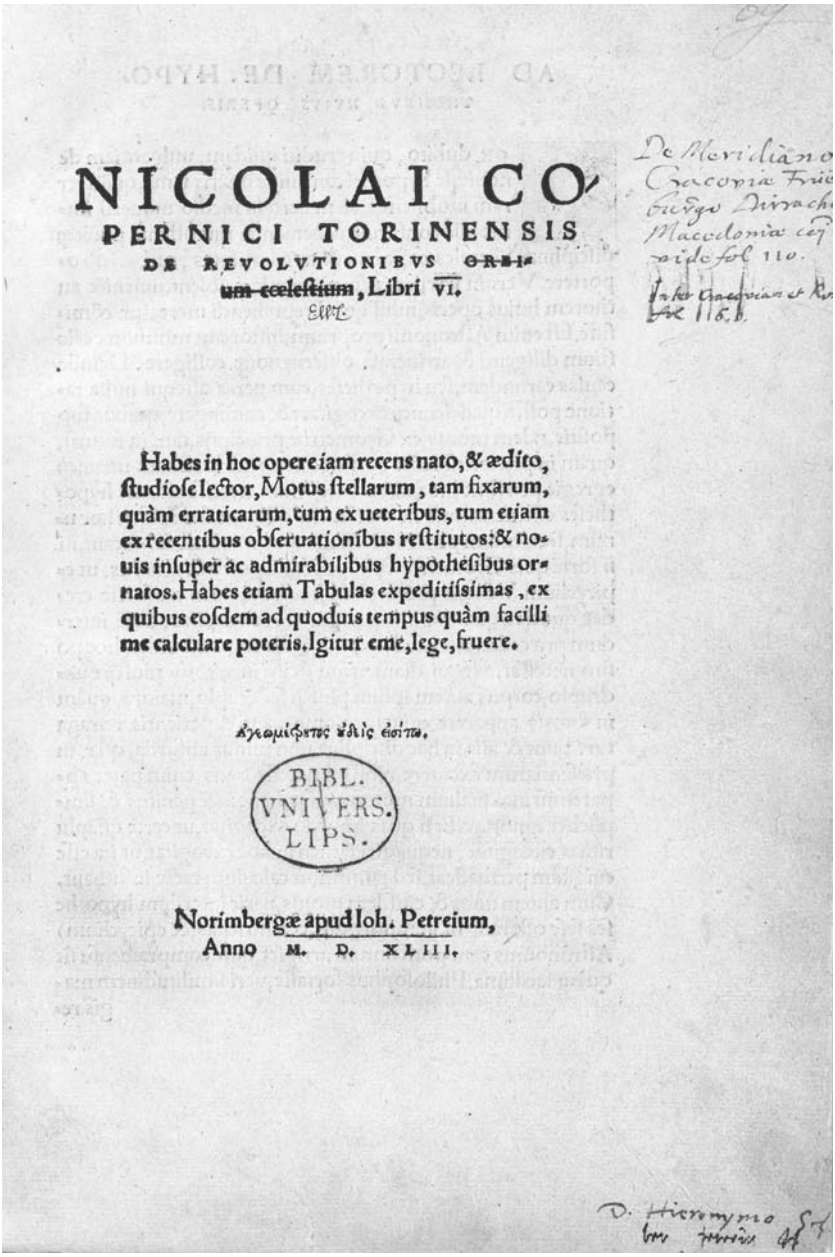
Die Erneuerung und Fortentwicklung der Wissenschaften ging vielmehr von einer mit der Entwicklung des Frühkapitalismus eng verbundenen Gruppe von Kaufleuten, Handwerkern, darstellenden und bildenden Künstlern, Priestern, Geschützmeistern, Rechenmeistern, Architekten und Ärzten aus, für die es die Sammelbezeichnung *virtuosi* oder *artifici* gab. Heute spricht man häufig auch von Künstleringenieuren, weil dieser gesellschaftlichen Schicht auch Leonardo da Vinci und Albrecht Dürer zuzurechnen sind.

Eine neue Qualität ergab sich daraus, dass die artifici sich der Darstellung der neuen Erkenntnisse in Wissenschaft und Produktion in den jeweiligen Nationalsprachen zuzuwenden begannen und damit ihre Interessenten in der Praxis besser erreichen konnten. Man spricht daher geradezu von der *„wissenschaftlich-literarischen Entdeckung der Produktion“*. Dieser Ausdruck dürfte auf G. Harig zurückgehen [Harig 1958].

Die neue Auffassung vom Sinn und Nutzen der Wissenschaft vermochte sich mit dem Erstarken des Frühkapitalismus durchzusetzen und ergriff in zunehmendem Maße auch die Vertreter der Universitätswissenschaft. Der durch die Praktiker erworbene Schatz naturwissenschaftlicher und mathematischer Kenntnisse wurde von den Vertretern der offiziellen Wissenschaft, die traditionsgemäß auf die Systematisierung des Wissens orientiert waren, theoretisch durchdrungen. Es kam zu einer Art Begegnung von Theorie und Praxis, zu einem stufenweisen Zusammenwachsen mit revolutionären Folgen: Am Beginn des 17. Jahrhunderts wurden bereits Grundlagen der klassischen Naturwissenschaft gelegt.

Hand in Hand damit ging auch ein Erstarken der naturphilosophischen Betrachtungsweise. Man fing an, die Rolle des Experimentes zu erkennen und war bereit, Sinneswahrnehmung und Beobachtung über die Berufung auf die Autoritäten der Scholastik zu stellen und sich von der Vorherrschaft aristotelisch geprägter mittelalterlicher Wissenschaft zu lösen.

Abb. 7.0.2 Blick in eine Rechenstube (Klatovskys Rechenbuch, Prag), aus [Acta historiae, New Series, Vol. 1 1997, S. 168–195]



NICOLAI CO-
PERNICI TORINENSIS
DE REVOLVTIONIBVS ORBI-
um coelestium, Libri VI.

Habes in hoc opere iam recens nato, & ædito, studiose lector, Motus stellarum, tam fixarum, quàm erraticarum, tum ex ueteribus, tum etiam ex recentibus obseruationibus restitutos: & nouis insuper ac admirabilibus hypothesibus ornatos. Habes etiam Tabulas expeditissimas, ex quibus eosdem ad quoduis tempus quàm facilime calculare poteris. Igitur eme, lege, fruere.

BIBL. VNIVERS. LIPS.

Norimbergæ apud Ioh. Petreium,
Anno M. D. XL III.

Abb. 7.0.3 Titelblatt von *De revolutionibus* und Anfang der Vorrede von Osiander. Dieses Exemplar war im Besitz von Kepler. Er durchschaute die Zusätze und Änderungen durch Osiander. Deswegen hat Kepler im Titelblatt den von Osiander stammenden Zusatz *„orbium coelestium“* durchgestrichen und die Vorrede als von Osiander herrührend gekennzeichnet [UB Leipzig]

7.1 Neue Forderungen an die Mathematik

Mit dem durchgehenden Übergang von der Natural- zur Geldwirtschaft und der sprunghaften Erhöhung des Geldumlaufs wurde eine Vielzahl von Problemen aufgeworfen: Buchhaltung, Zahlenschreibweise, Umrechnung verschiedenartigster Währungs-, Gewichts- und Maßeinheiten ineinander, Zins- und Zinseszinsrechnung, Erweiterung des Zahlenbereiches, Ausbildung von zweckmäßigen Rechenverfahren. Es entstand der Beruf des Rechenmeisters; auch innerhalb dieser Zunft bildeten sich Ansätze algebraischen Denkens und algebraischer Symbolik.

Im 15. und 16. Jahrhundert nahm die Astronomie einen raschen Aufschwung, der in der Publikation des weltbewegenden Werkes *De revolutionibus* (1543) durch Nicolaus Copernicus (1473–1543) und der Ablösung des geozentrischen durch das heliozentrische Weltbild gipfelte. Die Grundannahme der Astrologie vom Einfluss der Gestirne auf das irdische Leben, auch auf das individuelle Schicksal, war während der Renaissance unbestritten, wie überhaupt diese Zeit besonders abergläubisch war.

Da man beim Versagen eines Horoskops nicht auf Fehler im astrologischen System, sondern auf noch nicht zureichende Genauigkeit der Sternbeobachtungen schloss, erhielt die beobachtende Astronomie echte Impulse. Trotz

Abb. 7.1.1 Windrose in Sagres, Portugal. Der portugiesische Prinz Heinrich, genannt der Seefahrer, zog in Sagres eine Gruppe von Mathematikern, Astronomen, Geographen und Navigatoren zusammen, um die Seefahrt längs der Küste Afrikas nach Süden (nach Indien) systematisch vorzubereiten [Foto Wußing]

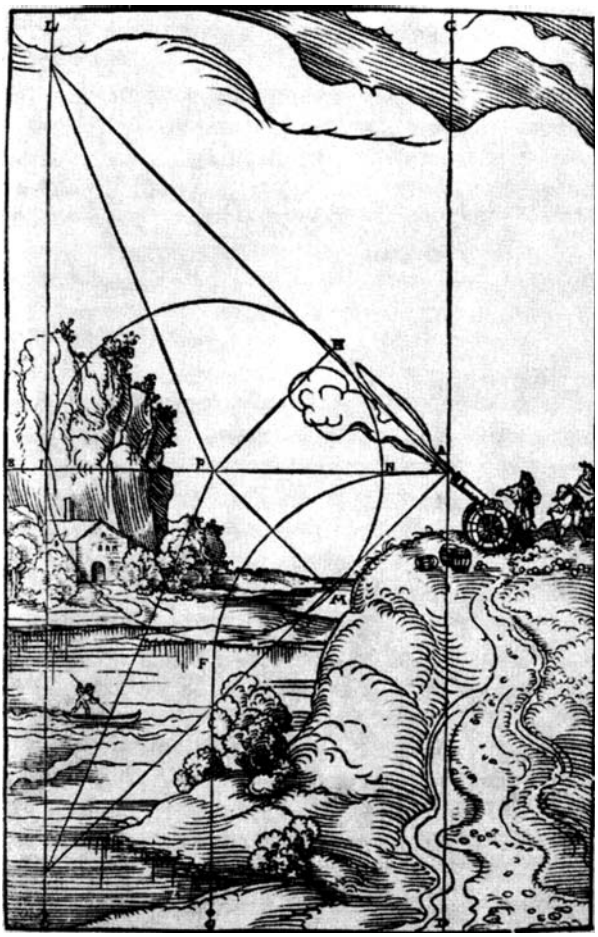


Abb. 7.1.2 Flugbahn eines Geschosses [Die new Buchsenmeisterey 1547]

ihrer Unwissenschaftlichkeit wirkte die Astrologie objektiv wie ein starkes gesellschaftliches Bedürfnis.

Die Schifffahrt, die sich von den Küsten löste und auf die hohe See hinauswagte, erforderte neue Kenntnisse und Fertigkeiten bei Navigation und im Schiffbau; hier ergaben sich Forderungen an die Trigonometrie und die Bewältigung hydrostatischer, mathematisch-physikalischer Probleme.

Das aufkommende und sich rasch entwickelnde Geschützwesen stellte die Geschützmeister vor eine Reihe von ballistisch-geometrischen Fragen: Die Flugbahn der Geschosse wurde – ein erster bedeutender Fortschritt – aus Geradenstücken und Kreisbogenteilen zusammengesetzt gedacht. Erst im 17. Jahrhundert sollte nach langen Bemühungen von Galilei und Cavalieri die Flugbahn als parabolisch erkannt werden.

Abb. 7.1.3 Kuppel der Peterskirche in Rom, mit einem Durchmesser von ca. 42 m zwischen 1588 und 1590 errichtet [Foto Alten]

Im Bauwesen waren schwierige Fragen zu lösen. Die Baukunst der Renaissance hat unter anderem kühne Kuppelkonstruktionen hervorgebracht, z. B. in der Peterskirche von Rom und die Kuppel des Domes von Florenz.

Die Anlage von Festungen erforderte bei zunehmender Durchschlagskraft der Geschosse auch den Bau in die Tiefe und förderte damit Ansatzpunkte zur späteren darstellenden Geometrie, d. h. die Kunst, Dreidimensionales in einer Zeichenebene darzustellen.

Nicht zuletzt enthielt die bildende Kunst der Renaissance zahlreiche mathematische Momente. Repräsentative Gebäude, Bildwerke, Statuen und Gemälde mussten, sollten sie dem wiederbelebten antiken Schönheitsideal genügen, nach *kanonischen Regeln* komponiert sein: Ihre Teile hatten in bestimmten Größenverhältnissen zu stehen. Dabei spielte der sog. Goldene Schnitt eine hervorragende Rolle. Die Berücksichtigung der Perspektive auf Gemälden, die neben dem Streben um realistische Darstellung zu den Errungenschaften der Renaissance-Kunst gehört, führte zum Gebrauch einiger Elemente der späteren darstellenden Geometrie wie Fluchtpunkt und Fluchtgerade.

Im Ganzen erreichte die Mathematik im unmittelbaren Zusammenhang mit der Herausbildung der Geldwirtschaft im 15. und 16. Jahrhundert eine prinzipiell neue gesellschaftliche Stellung: Mathematik war nicht länger bloßes Bildungselement im System kirchlich-scholastischer Gelehrsamkeit, eingegliedert in das Studium der sieben freien Künste. Nun, in der Renaissance

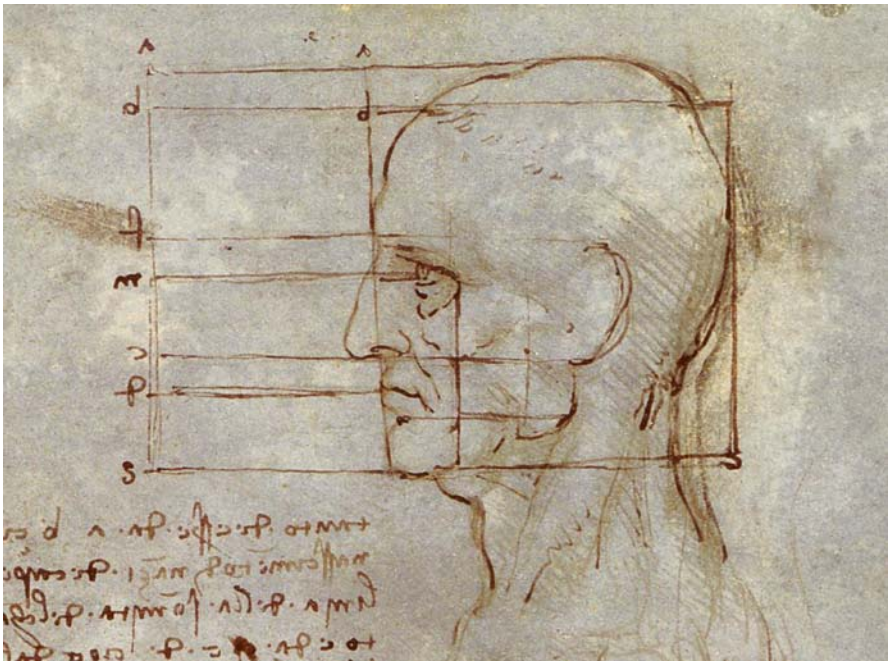


Abb. 7.1.4 Größenverhältnisse am Kopf (Beschriftung in Spiegelschrift, Handzeichnung von Leonardo da Vinci 1488/89) [www.drawingsofleonardo.org]

griff die Mathematik ins tägliche Leben ein, ihre Produktionspotenz wurde deutlich.

Aufs Ganze gesehen und ein wenig grob betrachtet, schritt die Mathematik während der Renaissance in drei Hauptrichtungen vorwärts:

- Rechenmeister und frühe Algebra
- Geometrie und Perspektive
- Astronomie und Trigonometrie

7.2 Rechenmeister und frühe Algebra

Natürlich kannte die Antike Geld in Münzform. Der Handel vollzog sich über große Entfernungen und hat eine bedeutende Rolle gespielt. Dies beweisen z. B. Münzfunde mit dem Porträt römischer Kaiser auch außerhalb der Grenzen des Römischen Weltreiches. (Die Bezeichnung „Münze“ wurde hergeleitet vom Tempel der römischen Göttin Juno Moneta, weil dort die römische Münzprägungsstätte lag.) Doch dominierte insbesondere nach dem Zusammenbruch des weströmischen Reiches die Naturalwirtschaft bis weit ins Mittelalter hinein.

In den städtischen Kulturen Italiens am Beginn der Renaissance, im 13./14. Jahrhundert, begann sich die Geldwirtschaft durchzusetzen. Der Austausch der Güter erfolgte über das Äquivalent von Edelmetall. Parallel dazu erreichte das kaufmännische Rechnen eine hohe gesellschaftliche Wertschätzung. Als Rechenhilfsmittel diente der aus der Antike übernommene Abakus. Schon früh in der Renaissance lässt sich für Italien eine beachtliche Anzahl von *maestri d'abbaco* (soviel wie Meister im Rechnen) nachweisen, die teilweise eigene Rechenschulen unterhielten. Dort wurde gegen Bezahlung gelehrt: das Rechnen mit Zahlen, deren Schreibweisen, die Grundrechenarten, die Bruchrechnung, viele Anwendungen aus dem täglichen Leben bei Kauf, Tausch, Geldgeschäften, ferner Umrechnung verschiedener Währungen und

Abb. 7.2.1 Sieg des Ziffernrechnens über das Abakusrechnen (Zeitgenössische Darstellung von 1504) [Reisch: Margarita philosophica]

Abb. 7.2.2 Dut is de garen mathe (Dies ist das Garnmaß); Inschrift am Rathaus von Hildesheim (Länge des Stabes: 2 Ellen = 108 cm)
[Foto Wesemüller-Kock]

unterschiedlichster Maßeinheiten (Länge, Entfernung, Rauminhalt), Dreisatz, Zins- und Zinseszinsrechnung, doppelte Buchführung und anderes mehr.

Gerade die Umrechnung der Systeme infolge der Zersplitterung der Währungs- und Maßsysteme musste unter den Forderungen der Praxis zu einem Hauptgegenstand der Unterrichtung an den Rechenschulen und dann auch in den gedruckten „Rechenbüchlein“ werden. Dies führte unmittelbar zur Bruchrechnung.

In der Arbeit [Deschauer 2002] wird dieser Frage für den Zeitraum von 1460 bis 1530 in frühen deutschen Rechenbüchern detailliert nachgegangen. Der Verfasser führt von dem gebräuchlichen Längenmaß „Elle“ an: Die Elle nach Wien, Linz, Nürnberg, Ofen (heute Stadtteil von Budapest), Frankfurt, Brabanter Elle, Venezianische Elle, Krakauer Elle, Elle in Flandern, Prag, Augsburg, Leipzig, Breslau und andere mehr. Beispielsweise ergibt eine Umrechnung nach [Rudolff 1526]: 1 Wiener Elle gleich 600:421 Frankfurter Ellen. Übrigens ist eine Wiener Elle für alle Bürger nachprüfbar – wie es sich gehört – am Stephansdom in Wien angebracht; sie hat die Länge von 77,8 cm. Analoges gibt es in anderen Städten.

Ähnlich zersplittert waren auch die Entfernungsmaße. Selbst heute rechnet man noch neben Metern in Meilen und Seemeilen – trotz der internationalen Meter-Konvention von 1875.

Nach und nach paarte sich auch in anderen Ländern das praktische Anliegen mit dem Interesse an theoretischen Fragen, insbesondere, nachdem man gelernt hatte, Aufgaben in Gleichungsform zu „übersetzen“ und Gleichungen aufzulösen. So wurde die alte, bewährte Methode der regula falsi (Methode des falschen Ansatzes) verdrängt und durch „cossische“ Methoden ersetzt. Diese Wendung in den Lösungsmethoden rechnen wir heute zur Geschichte der frühen Algebra (in der Person von Adam Ries ist dies besonders schön erkennbar, vgl. [Ries 1581], in [Wußing 1992, S. 76–78]).

Geographisch gesehen war das kaufmännische Rechnen ebenso wie die Wendung ins Abstrakte von Oberitalien ausgegangen, war dann durch niederländische, englische, französische und deutsche Rechenmeister weitergeführt worden (ausführlich in [Alten et al. 2003]).

7.3 Fortschritte in Italien

Bereits im 19. Jahrhundert haben italienische Mathematikhistoriker Studien zur Frühgeschichte der italienischen Algebra unternommen, gestützt vorwiegend auf handschriftliche Dokumente. Genannt seien Pietro Cossali (1768–1815), Guglielmo Libri (1803–1869) und Baldassarre Boncampagni (1821–1894). In jüngster Zeit (1985) ist eine zusammenhängende Übersicht von den Autorinnen Raffaela Franci (*1940) und Laura Toti Rigatelli (*1941) vorgelegt worden: *Towards a History of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli* [Franci/Rigatelli 1985].

Die beiden Autorinnen haben während einer Tagung am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald) deutlich gemacht, dass – in Anbetracht der Quellenlage – der Höhepunkt der frühen italienischen Algebra in die Zeit des 13./14. und des frühen 15. Jahrhunderts fällt und nicht erst mit den Namen del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli verbunden ist. Die Verschiebung des historischen Bildes erklärt sich daraus, dass die früheren Arbeiten ungedruckt bleiben mussten und daher fast völlig unbekannt blieben, während die gedruckten Schriften der späteren Zeit eine weite Verbreitung fanden.

In der Studie [Høyrup 2007] wird, anknüpfend an die Vorgeschichte, die „Abacus-Kultur“ während der frühen italienischen Algebra am Beispiel des Jacopo da Firenze (14. Jh.) dargestellt.

Leonardo von Pisa (Fibonacci)

Leonardo von Pisa oder auch Leonardo Fibonacci (ca. 1170 bis nach 1240) ist vielfach als „erster moderner Mathematiker“ des christlichen Europa bezeichnet worden, erfuhr daher in der Literatur eine besonders deutliche Aufmerksamkeit (vgl. z. B. den Artikel von K. Vogel in [DSB, Vol. IV 1971] und das Buch von H. Lüneburg [Lüneburg 1992]). Er wird deshalb erst hier behandelt, obwohl seine Schriften schon im 13. Jahrhundert entstanden.

Leonardo stammt aus einer Familie Bonacci, die sich bis ins 11. Jahrhundert in Pisa nachweisen lässt. Die „Übersetzung“ seines Namens als Sohn des

Bonacci, wie man gelegentlich liest, ist irrtümlich; Fibonacci bedeutet Mitglied der Familie Bonacci. Leonardo berichtet im Vorwort zu seinem Hauptwerk *Liber abbaci* (1202) über Einzelheiten aus seinem Leben. Der Vater vertrat etwa seit 1192 die Handelsinteressen von Pisa in Bugia (heute Bougie, Algerien). Der ihm bald nachfolgende Sohn sollte das Rechnungswesen kennenlernen, da er zum Kaufmann bestimmt war. Darüberhinaus kam er mit der Mathematik des Orients in Berührung: Er lernte die neuen indischen Ziffern kennen; Reisen führten ihn nach Ägypten, Byzanz, Syrien, Sizilien. Überall dürfte er an Disputationen teilgenommen haben. Auch berichtet er, er habe *algorismus* und die *Bögen des Pythagoras* kennen gelernt; mit letzterem dürfte der Abakus in der Tradition von Gerbert von Aurillac (940?–1003) gemeint gewesen sein.

An der Wende zum neuen Jahrhundert kehrte Leonardo nach Pisa zurück und widmete sich in den nächsten 25 Jahren der Niederschrift der gewonnenen Erkenntnisse in wissenschaftlichen Werken für Menschen, die an schwierigeren, abstrakten Fragen interessiert waren.

Als der Hohenstaufenkaiser Friedrich II., ein Kenner und Bewunderer des Orients, 1225 in Pisa Hof hielt, wurde Leonardo, der sich schon Ruhm als bedeutender Gelehrter erworben hatte, dem Kaiser vorgestellt. Friedrich II. hatte einen Gelehrtenkreis um sich versammelt, dem auch der aus Schottland stammende Michael Scotus (ca. 1175 bis ca. 1236) angehörte, der als Übersetzer aus dem Arabischen ins Lateinische hervorgetreten und als Hofastrologe tätig war. Nach 1228 liegen von Leonardos Leben kaum noch Nachrichten vor, außer dass die Republik Pisa ihm eine jährliche finanzielle Zuwendung gewährte.

Fünf Schriften von Leonardo haben sich erhalten:

1. *Liber abbaci*. Eine erste Fassung von 1202, eine zweite von 1228. Diese ist Michael Scotus gewidmet.
2. *Practica geometriae*. Niedergeschrieben 1220/21
3. *Flos*, 1225
4. Ein Brief an den Kaiserlichen Philosophen Theodoros, undatiert
5. *Liber quadratorum*, 1225

Die Schriften von Leonardo zeigen, teilweise bis ins Detail, die Bekanntschaft mit antiken griechischen, mit muslimischen und mit Quellen aus dem Mittelmeerraum (vgl. [Alten et al. 2003, S. 206–210]).

Weitere Schriften sind nur dem Titel nach bekannt, darunter ein Buch über Mathematik im Kaufmannswesen.

Der Titel *Liber abbaci* könnte in die Irre führen. Es handelt sich nicht um ein Buch über den Abakus (das (Sand-)Rechenbrett), sondern über das Rechnen ganz allgemein. Behandelt werden die römischen Zahlen, die Fingerzahlen, die indisch-arabischen Ziffern, die Brüche, die Grundrechenarten, angereichert mit zahlreichen Beispielen. Ein weiterer Themenkomplex umfasst kaufmännisches Rechnen (Preise, Zinsen, Legierungen, Umrechnung von

Währungen u. a. m.). Dort wird auch, wie früher in der chinesischen Mathematik und in der karolingischen Zeit, das *Problem der 100 Vögel* behandelt: Mit einer festen Geldsumme soll man 100 Vögel kaufen, jede Vogelart mit unterschiedlichem Preis.

Weitere Kapitel enthalten Aufgaben unterschiedlichen Typs, die zur Unterhaltungsmathematik gerechnet werden können. Genannt seien das Zisternenproblem (wie lange braucht eine Spinne, bei vorgegebener Tiefe der Zisterne und der Tagesleistung der Spinne, um wieder an die Oberfläche zu gelangen); das Problem der gefundenen Geldbörse; der Pferdekauf (einer allein kann ein wertvolles Ding z. B. ein Pferd nicht kaufen und muss sich mit anderen zusammentun); das chinesische Restproblem; das berühmte Kaninchenproblem.

Kaninchen sind bekanntlich sehr fruchtbar. Es wird unterstellt, ein Kaninchenpaar bringt ein weiteres Kaninchenpaar zur Welt, das ab dem zweiten Monat mit weiteren Geburten aufwartet. Kein Kaninchen stirbt. Und so fort. Gefragt ist nach der Zahl der Nachkommenpaare nach einem Jahr (oder allgemeiner nach n Monaten).

Die Lösung verläuft so: Beim n-ten Vermehrungsvorgang ist die Zahl der Nachkommenpaare jeweils die Summe der beiden vorhergehenden. In Formeln, als rekursive Beziehung:

$$N_{n+1} = N_n + N_{n-1}$$

(Jede Zahl ist die Summe der beiden vorhergehenden.) Mit den Anfangsgliedern 1 und 1 erhält man die sog. Fibonaccischen Zahlen

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

Erstaunlicherweise stößt man auf die Fibonaccischen Zahlen bei verschiedenen Wachstumsvorgängen, z. B. bei der Anordnung der Sonnenblumenkerne, bei der Blattstellung einiger Pflanzen, aber auch beim Goldenen Schnitt und den Abständen der Planeten von der Sonne (siehe dazu den Videofilm *Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter* von H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald). Einige der oben genannten Probleme laufen auf Gleichungen und unbestimmte Gleichungssysteme hinaus. Mit Übernahme des arabischen Wortes *šay'* (Ding) nennt Fibonacci die gesuchte Größe res. Obwohl er keine Symbole verwendet, erweist er sich als Meister von Methoden, die wir heute der Algebra zurechnen. So schließt sich Leonardo an al-Ḫwārizmī an und übernimmt dessen Klassifizierung der quadratischen Gleichungen. Die Potenzen der Unbekannten (Variablen) werden von Leonardo mit *radix* oder *res* für x, *quadratus* und *census* (arabisch māl) für x^2, *cubus* für x^3, *census de census* für x^4, *cubus cubi* für x^6 bezeichnet. Eine konstante Größe wird mit *numerus*, *denarius* oder *dragma* benannt.

Weitere Darlegungen gelten Approximationen, gestützt auf geometrische Repräsentationen, unter Rückgriff auf Euklid. Ähnlich meisterhaft erweist sich Leonardo auch in seinen anderen Abhandlungen. In *Flos* (Blume) wer-

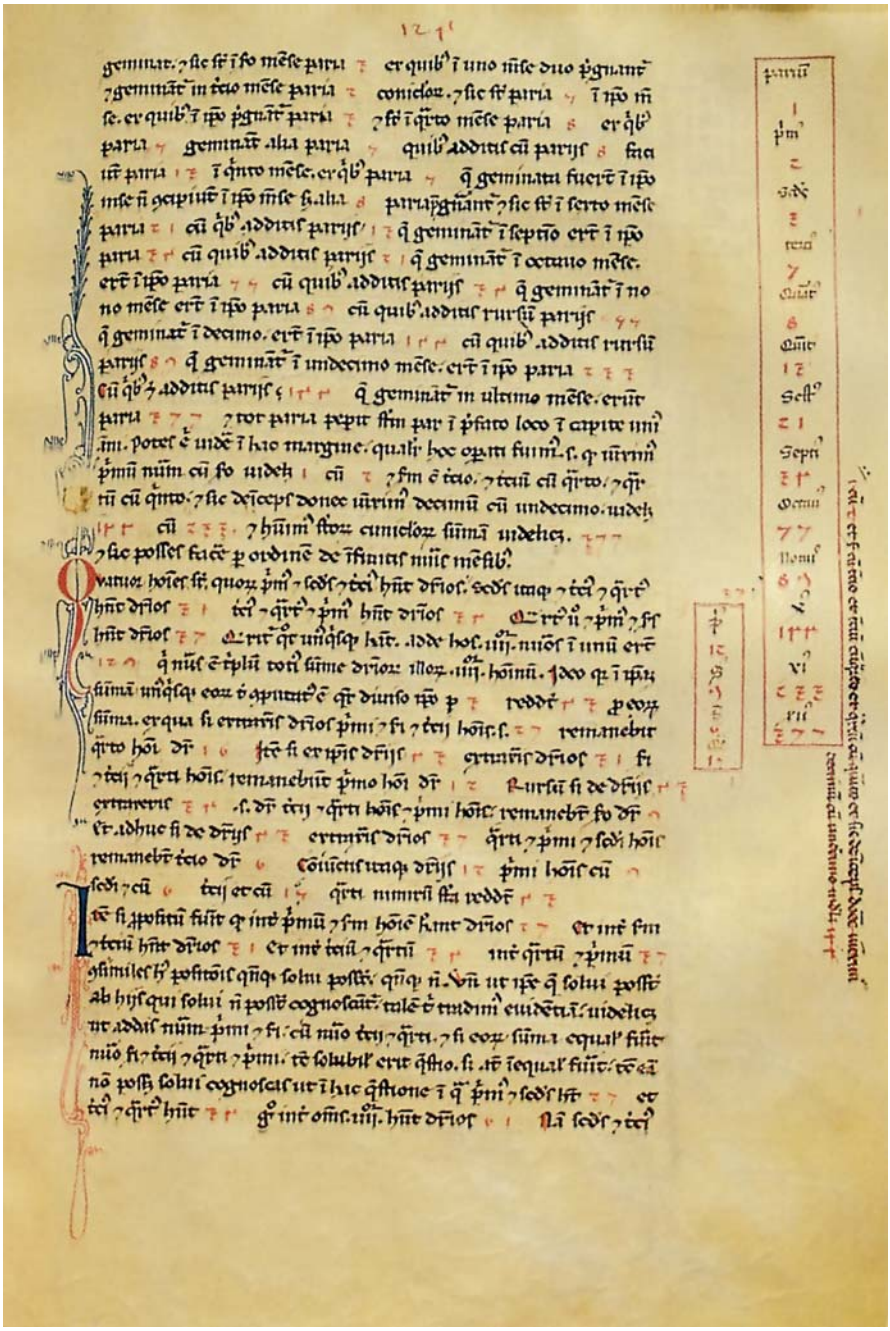


Abb. 7.3.1 Die „Fibonacci-Zahlen“ im Liber abbaci [Biblioteca Nazionale de Firenze, Codice Magliabechiano c.s. c.1.2616, fol. 124r], [Wikimedia Commons]

den algebraische Probleme behandelt. In seiner *Practica geometriae* (Vermessungskunst) und im *Liber quadratorum* (zahlentheoretischer Inhalt) zeigt er sich ebenfalls auf der Höhe der zu seiner Zeit direkt oder indirekt überlieferten griechisch-antiken und orientalischen Quellen.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass bei Leonardo wohl zum ersten Mal in Europa negative Zahlen als Lösung akzeptiert werden, freilich in vorsichtiger Form als Schulden interpretiert. Es geschieht dies beispielsweise in der berühmten Aufgabe im *Liber abbaci* von der gefundenen Geldbörse mit unbekanntem Inhalt b.

Im Falle von vier Findern, die im Besitz der jeweiligen Geldmengen x_1, x_2, x_3, x_4 sind, laufen Leonardos Textvorgaben auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + b &= 2(x_2 + x_3) \\ x_2 + b &= 3(x_3 + x_4) \\ x_3 + b &= 4(x_4 + x_1) \\ x_4 + b &= 5(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

hinaus. Und Leonardo erklärt: *„Ich werde zeigen, daß dieses Problem unlösbar ist, wenn nicht zugelassen wird, daß der erste Partner Schulden hat.“* [Tropfke 1980, S. 146/147], [Gericke 1996, S. 291]
Das Problem ist unbestimmt. Als eine Lösung findet Leonardo

$$x_1 = -1\,, \quad x_2 = 4\,, \quad x_3 = 1\,, \quad x_4 = 4\,, \quad b = 11.$$

Insbesondere der *Liber abbaci* hat nachhaltig auf die weitere Entwicklung eingewirkt, zunächst auf die in Italien. Später sind seine Aufgaben und Methoden auch in deutsche, französische und englische Bücher eingegangen. Noch bei Eulers *Algebra* (1768) finden sich Bezüge auf Leonardo.

Die „maestri d'abbaco“

Während des 12. Jahrhunderts war algebraisches Wissen aus dem muslimischen Bereich in die christliche Welt gelangt. Leonardo von Pisa ist dafür ein herausragendes Beispiel. Das 15. Kapitel über Algebra in seinem *Liber abbaci*, das sich auf al-Ḫwārizmī bezieht, hat insbesondere auf die Rechenschulen (Abakus-Schulen) einigen Einfluss ausgeübt, insbesondere durch Übersetzungen und italienische Bearbeitungen, eine für die des Lateinischen Unkundigen notwendige Voraussetzung für das Verständnis.

Die Autorinnen Toti Rigatelli und Franci berichten über eine stattliche Reihe solcher volkssprachlichen Fassungen, die sog. Abakus-Manuskripte. Die vermutlich früheste stammt aus dem Jahre 1390, eine andere ungefähr aus dem Jahre 1400. Noch viele weitere derartige Manuskripte stammen aus dem 15. Jahrhundert, von denen die des Meisters Benedetto aus Florenz eine besonders hohe Bedeutung erlangten [Franci/Rigatelli 1985]. Kürzlich hat J. Høyrup die gegenseitigen Abhängigkeiten zwischen Fibonacci und den italienischen Abbacisten untersucht [Høyrup 2004].

Eine frühe italienische Abhandlung zum Abakus, die in Teilen auf Algebra eingeht, trägt den Titel *Libro di Ragioni* und stammt von dem Florentiner Paolo Gerardi und wurde 1328 in Montpellier niedergeschrieben. Er behandelt die 6 Gleichungstypen des *Liber abbaci* von Leonardo und weitere 9 Gleichungstypen, in denen dritte Potenzen auftreten. Beispielsweise ist $ax^3 = bx^2 + cx$ reduzierbar auf einen quadratischen Typ. Dagegen sind

$$ax^3 = bx + c\,, \quad ax^3 = bx^2 + c\,, \quad ax^3 = bx^2 + cx + a$$

echt kubische Gleichungen. Die angegebenen „Lösungen“ sind freilich falsch.

Das früheste, vollständig auf Algebra orientierte Abakus-Manuskript trägt den Titel *Aliabraa – Argibra*. Es stammt vom Meister Dardi von Pisa und wurde 1344 verfasst. Drei Kopien und eine hebräische Übersetzung haben sich erhalten, ein Hinweis auf den großen, von dort auf die Abakus-Schulen ausgehenden Einfluss. Auch Dardi von Pisa hat sich mit Gleichungen dritten und vierten Grades befasst. Für eine Gleichung vom Typ $x^3 + ax^2 + bx = c$ gibt er eine Lösung an, die allerdings – wie er weiß – nur richtig ist, wenn $a^2 = 3b$ ist [Scholz 1990, S. 147f.].

Die Autorinnen Franci und Toti Rigatelli widmen einen längeren Abschnitt dem Meister Antonio de Mazzinghi, der aus Florenz stammt und seinerzeit als der geschickteste Algebraiker galt. Leider haben sich nur längere Auszüge aus seinen Schriften erhalten.

Bemerkenswerterweise führte er Bezeichnungen und Rechenregeln für Potenzen von $x^6, \ldots, x^0, \ldots, x^{-6}$ ein. Auch behandelte er Gleichungssysteme in zwei oder mehr Variablen, z. B. $n \cdot v = 6$, $n^2 + v^2 = 13$.

Zwei anonyme Florentiner Manuskripte vom Ende des 14. Jahrhunderts zeigen Fortschritte, die in die Zukunft weisen. Durch die Transformation $x = y - \frac{p}{3}$ geht die Gleichung $x^3 + px^2 = q$ in eine Gleichung $y^3 = p'y + q'$ ohne quadratisches Glied über. Auch wird von den italienischen Algebraikern ein Verfahren geboten, eine kubische Gleichung mit einer vorgegebenen Zahl als Wurzel anzugeben [Scholz 1990, S. 148f.], [Franci/Rigatelli 1985, S. 48]. Es lässt sich jedoch von hier aus keine Verbindung zu den späteren Leistungen von Scipione del Ferro bzw. Girolamo Cardano nachweisen.

Es ist hier unmöglich, auf die Fülle der italienischen Manuskripte zu Abakus und Algebra einzugehen (vgl. [Franci/Rigatelli 1985]). Die Autoren waren u.a. Vertreter der reichen Kaufmannschaft. Ein gewisser Giovanni di Bartolo arbeitete mit Filippo Brunelleschi (1377–1446) beim Bau der großen Kuppel des Florentiner Doms zusammen. Der Maler Piero della Francesca (1410–1492) war zugleich an Algebra interessiert.

Luca Pacioli

Mit Luca Pacioli (ca. 1445–1517) begegnen wir einer Schlüsselfigur in der Entwicklung der Mathematik während der Renaissance in Italien. Seine Wirkung auf die Nachfolgenden beruht auf dem Umstand, dass sein mathematisches

Abb. 7.3.2 Luca Pacioli mit seinem Schüler Guidobaldo, Herzog von Urbino (Jacopo de Barbari 1495) [Museo Nazionale di Capodimonte, Neapel], [Wikimedia Commons]

Hauptwerk – im Unterschied zu seinen Vorgängern – gedruckt wurde. Hinsichtlich seiner mathematischen Stärke kommen die Autorinnen Franci und Toti Rigatelli [Franci/Rigatelli 1985, S. 61, englisch] allerdings zu dem etwas ernüchternden Urteil, Pacioli sei zwar der einflussreichste *Abbacist* des 15. Jahrhunderts gewesen, aber keineswegs der geschickteste in mathematischer Hinsicht. Trotz der Vorbehalte war jedoch sein Hauptwerk *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità* (Venedig 1494, 2. Auflage 1523) ein wegweisendes Buch, zumal es nicht in Latein geschrieben war.

Der Lebenslauf von Pacioli lässt interessante Einblicke in die gesellschaftlichen Zustände jener Zeit zu; etwa wird die unsichere Lage der Gelehrten jener Zeit deutlich (vgl. [DSB, Vol. X., 1974]). Pacioli stammt aus einer Kleinstadt im Tal des Flusses Tiber. Man weiß wenig Genaues aus seiner Kindheit; möglicherweise erhielt er Unterricht bei dem Maler und Mathematiker Piero della Francesca, einem Pionier der Lehre von der Perspektive. Pacioli trat in die Dienste eines venezianischen Kaufmannes und konnte sich dort in Mathematik weiterbilden. Einige Zeit hielt er sich in Rom bei dem Architekten Leon Batista Alberti (1404–1472) auf.

Zwischen 1470 und 1477 trat er in Erfüllung eines Gelübdes in den Franziskaner-Orden ein. Nach seiner theologischen Ausbildung begann er 1477 bis 1480 ein Leben als Wanderlehrer der Mathematik, an der Universität Perugia, in Zara (heute Zadar, auf dem Balkan damals unter venezianischer Herrschaft), in Neapel und in Rom 1487–1489. Im Jahre 1494 war sein Hauptwerk *„Summa“* vollendet; er überwachte den Druck in Venedig. 1497 wurde er an den Hof des Herzogs von Mailand berufen, um Mathematik zu lehren. Hier traf er den bereits dort lebenden Leonardo da Vinci (1452–1519), der von Pacioli Ratschläge zur Mathematik erhielt; Leonardo seinerseits schuf Zeichnungen für Paciolis *Divina proportione* (Die göttliche Proportion, 1496/1497, publiziert 1509).

Mit der Invasion französischer Truppen 1499 wurden sie aus Mailand vertrieben und hielten sich einige Zeit in Florenz auf. Im Jahre 1500 wurde Pacioli an die Universität von Pisa berufen, um Mathematik zu lehren, später auch in Bologna (1501–1502). Dort lehrte Scipione del Ferro, der sich möglicherweise auf Anregung von Pacioli der Auflösung der Gleichung dritten Grades zuwandte.

Pacioli bereitete eine lateinische (publiziert 1509) und eine italienische Übersetzung der *„Elemente“* des Euklid vor. Die erste gedruckte Edition der *„Elemente“* war 1482 in Venedig erschienen, nach einer Bearbeitung mehrerer lateinischer Fassungen kurz nach 1250 durch Campanus von Novara. Mehrfach geriet Pacioli so in Konflikt mit seinem Orden, erhielt sogar einige Zeit Lehrverbot. Möglicherweise hat ein Privileg des Papstes auch den Neid seiner Mitbrüder hervorgerufen.

Ein Teil der *„Summa“* ist, wie gesagt, auch der Algebra gewidmet, unter Benutzung von Quellen aus der islamischen Welt. Davon profitierten Scipione del Ferro, Cardano, Tartaglia, Ferrari und andere.

Pacioli führte Bezeichnungen *gradi del caratteri* für die Potenzexponenten ein und verwendete zur Bezeichnung ein R mit kleinem Querstrich: ℞. Also bedeuten

> ℞1: eine Zahl, ℞2: cosa, die Unbekannte x, ℞3: censo, d. i. x^2, und so fort bis ℞10, d. i. x^9.

Dann folgen die Regeln für die Multiplikation der Charaktere. Die Gleichungen werden typisiert, beispielsweise (mit Angabe moderner Bezeichnungen, ohne Koeffizienten):

1. *Censo di censo equale a numero* ($x^4 = a$)
2. *Censo di censo equale a cosa* ($x^4 = x$)
3. *Censo di censo e cosa equale a censo* ($x^4 + x = x^2$)

Besondere Aufmerksamkeit verdienen, so Pacioli, Gleichungen der Typen

$$ax^3 + bx + c = 0\,; \quad ax^3 + bx^2 + c = 0\,; ax^4 + bx^2 + c = 0\ .$$

Es handelt sich um kubische und biquadratische Gleichungen. Pacioli behauptet nicht, dass die Gleichungen nicht lösbar seien. (Später hat Cardano

behauptet, Pacioli habe die Unlösbarkeit festgestellt.) Pacioli stellte lediglich fest, dass bisher noch keine allgemeinen Regeln gefunden worden seien; lediglich einige Spezialfälle seien durch Probieren gelöst worden.

In weiten Teilen der *„Summa“* behandelt Pacioli sozusagen theoretische Fragen vom Typ „errate eine Zahl“; „teile eine gegebene Zahl in zwei, drei, ... Teile so, dass ...“. Ferner werden Probleme des Geschäftslebens, z. B. Tausch, Geldwechsel, Zinsen und Geschäftsreisen behandelt. In der *„Summa“* ist zum ersten Mal im Druck ein Abschnitt über die Buchhaltung enthalten, die *Methode von Venedig*, d. i. die doppelte Buchführung. Das Problem der rechnerischen Auflösung von Gleichungen dritten und vierten Grades war jedenfalls im Bewusstsein der italienischen Mathematiker bzw. Abbacisten des 15. Jahrhunderts weithin verbreitet. Die späteren Autoren – Scipione del Ferro, Cardano, Tartaglia, Ferrari und andere – haben nicht nur von der Lektüre der *„Summa“* profitiert, sondern auch von jenen zahlreichen, Manuskript gebliebenen Abhandlungen früherer Zeit.

7.4 Entwicklungen in Westeuropa

Auch außerhalb Italiens gab es zu jener Zeit Algebraiker von Format, insbesondere in der *„Deutschen Coß“*, auf die gesondert eingegangen werden soll. Wir berichten hier zunächst über Chuquet für Frankreich, Recorde für England, Stevin für die Niederlande und Nunes für Portugal.

Nicolas Chuquet

Über Chuquet liegen nur sehr spärliche Nachrichten vor; eigentlich ist er nur bekannt geworden durch sein Werk *„Triparty“* [DSB, Vol. III., 1971].

Chuquet wurde vermutlich 1445 in Paris geboren, studierte dort wohl Medizin und wirkte als Arzt in Lyon. Er starb um 1488.

Das Manuskript *Triparty* hat als Ganzes überlebt. Doch nur ein Teil davon wurde erst 1880 gedruckt. Daraus geht hervor, dass Chuquet beachtliche mathematische Kenntnisse besessen hat. Er zitiert Boethius, Euklid, Campanus von Novara und Stellen von Archimedes, Ptolemaios und anderen.

Die Abhandlung *Le triparty en la science des nombres* (Drei Teile über die Wissenschaft von den Zahlen) wurde 1484 niedergeschrieben, hat aber einen großen Einfluss ausgeübt, obwohl sie damals ungedruckt blieb. Gelehrt wird in drei Teilen – daher der Name – das Rechnen mit rationalen Zahlen, das Rechnen mit irrationalen Zahlen und die Theorie der Gleichungen.

Die Bezeichnungen für die Potenzen der Variablen deuten schon auf die moderne Entwicklung hin. So steht 12^0 für 12, 12^1 für $12x$, 12^2 für $12x^2$, usw. Auch treten negative Potenzexponenten auf: $12^{1\tilde{m}}$ ist wegen $1\tilde{m} = -1$ zu verstehen als 12^{-1} also $12x^{-1} = \frac{12}{x}$ [Shrinks 1969, S. 60f.]. Dann folgen die Regeln für die Multiplikation von Potenzen. Bei der Behandlung quadratischer Gleichungen folgt Chuquet den bekannten Regeln; negative Wurzeln

werden nicht anerkannt. Übrigens stammen von ihm die Wortbildungen Billion, Trillion, Quadrillion für 10^{12}, 10^{18}, 10^{24} (ausführlich in [Chuquet 1985]).

Immerhin soll nicht unterschlagen werden, dass – auf dem Hintergrund der Bildung einer französischen Nation – dargelegt wird, wie einige französische Gelehrte des 16. Jahrhunderts die Ursprünge der Algebra historiographisch studiert und deren Anfänge den alten Galliern zugeschrieben haben. Von dort seien algebraische Kenntnisse zu den Chaldäern (Mesopotamien) gelangt und von dort zu den Griechen und den Arabern, aus denen die moderne Algebra des 16. Jahrhunderts erwachsen sei [Cifoletti 1996].

Robert Recorde

Auch der englische Arzt und Autor mathematischer Bücher Robert Recorde (ca. 1512–1558) gehört in die Reihe der Persönlichkeiten, die zur Entwicklung algebraischen Denkens beitrugen. Als Arzt war er bei König Edward VI. und Königin Mary tätig.

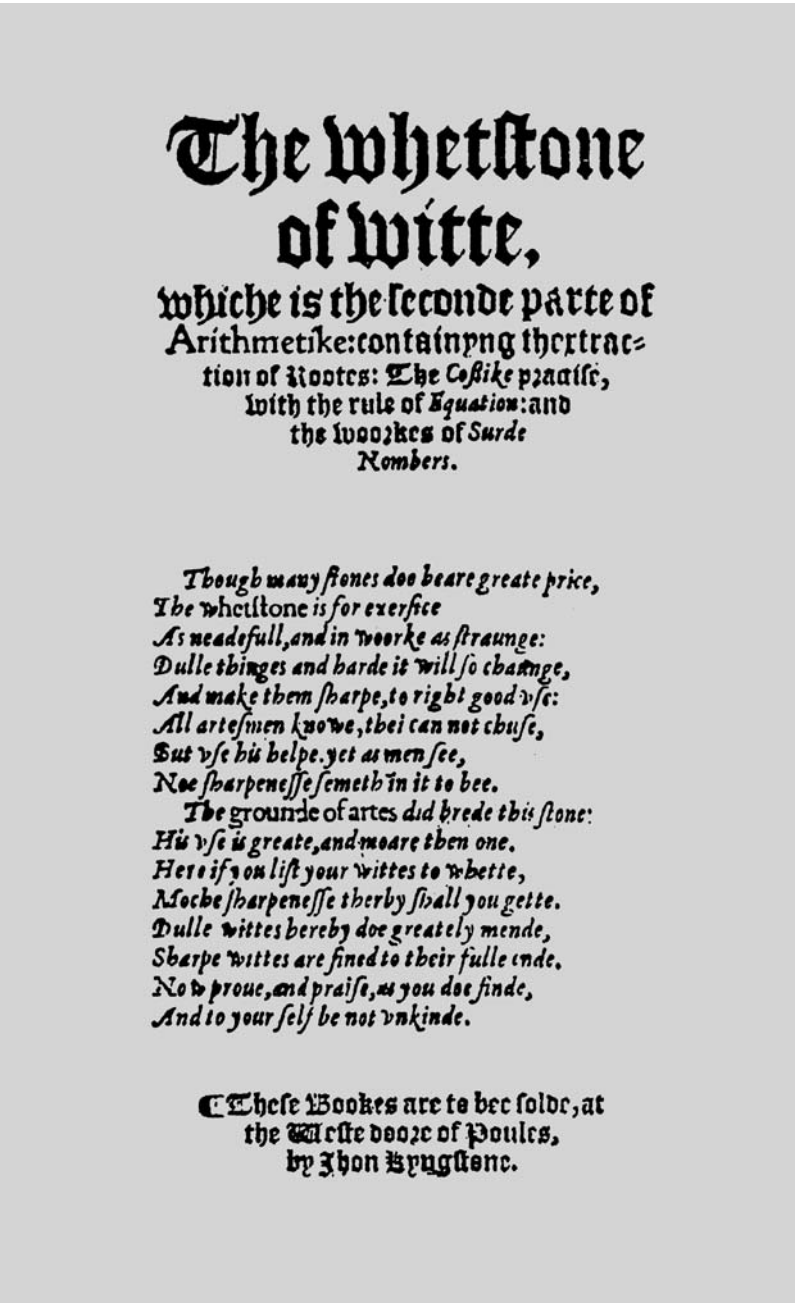
Das Anliegen seiner Bücher war wohl hauptsächlich pädagogischer Art. Die Bücher sind vorwiegend in Form von Dialogen zwischen Lehrer und Schüler geschrieben. Es scheint, dass Recorde sein Leben im Gefängnis beenden musste, möglicherweise, weil er sich in Schuldhaft befand.

Sehr erfolgreich war Recordes *The Ground of Arts* (1543; etwa: Grundlagen der Künste), das jahrhundertelang nachgedruckt wurde und die Grundelemente der Arithmetik behandelte. Der *Pathway to Knowledge* (1551; Der Weg zum Wissen) ist der Geometrie gewidmet, *The Castle of Knowledge* (1556; Die Burg des Wissens) der Astronomie.

Am nachhaltigsten im Hinblick auf die Entwicklung der Algebra war sein *The Whetstone of Witte* (1557), zu übersetzen etwa mit „Wetzstein des Verstandes“. Dort führte Recorde das moderne Gleichheitszeichen = ein, mit der Begründung, dass nichts gleicher sei als ein Paar Linien gleicher Länge. *„To avoid the tedious repetion of these words – is equal to – I will set as I do often in work use, a pair of parallels, or gemov (twin) lines of one length, thus =, because no 2 things can be more equal.“* (Modernisierte englische Sprache, zitiert nach [Katz 1993, S. 327])

Bei den von Recorde verwendeten Symbolen für die Potenzen der Unbekannten erkennt man deutlich, dass er noch der Periode der Coss zugehört, insbesondere der Deutschen Coss. Zum ersten Mal in England erschienen die Zeichen + und − im Druck, im Anschluss an Michael Stifel (1487–1567). Auch Beispiele entnahm Recorde von dem deutschen Cossisten J. Scheubel (oder Scheybl, 1494–1580). Recorde modifizierte und erweiterte die cossischen Symbole für Census, Cubus und die aufsteigende Folge der *„Sursolide“*. Das sind sehr spezielle Zeichen, die sich nicht durchgesetzt haben (vgl. [Katz 1993, S. 327]).

Jedenfalls gehört Recorde zu den Wegbereitern der Mathematik in England; er stand am Beginn einer Reihe englischer Autoren (vgl. dazu [Howson 1982]).



The whetstone of witte,

whiche is the seconde parte of Arithmetike: containyng the extraction of Rootes: The Cossike practise, with the rule of Equation: and the woorkes of Surde Nombers.

Though many stones doe beare greate price,
The whetstone is for exercise
As needefull, and in woorke as straunge:
Dulle thinges and harde it will so chaunge,
And make them sharpe, to right good vse:
All artesmen knowe, thei can not chuse,
But vse his helpe. yet as men see,
Noe sharpenesse semeth in it to bee.
The grounde of artes did frede this stone:
His vse is greate, and moare then one.
Here if you list your wittes to whette,
Moche sharpenesse therby shall you gette.
Dulle wittes hereby doe greately mende,
Sharpe wittes are fined to their fulle ende.
Note proue, and praise, as you doe finde,
And to your self be not vnkinde.

These Bookes are to bee solde, at the Weste doore of Poules, by Thon Kyngstone.

Abb. 7.4.1 Titelblatt des „*Whetstone of Witte*“ von Robert Recorde 1557

Simon Stevin

Simon Stevin (1548–1620), vielseitig als Naturforscher, Zivil- und Militäringenieur tätig und engagiert im Befreiungskampf der Niederlande gegen die Habsburger, gehört in die Reihe der Pioniere der Algebra als selbstständiger Disziplin, unmittelbar in die Zeit vor der Entstehung der Arbeiten von Vieta. Der Bereich seiner Arbeiten umfasst unter anderem Rabatt- und Zinstabellen, Berechnung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke, reguläre und halbreguläre Körper, Astronomie, Geographie, Musiktheorie, Hydraulik, hydrostatisches Paradoxon. Mit seiner Schrift *De Beghinselen des Waterwichts* (1586) wurde er ein Schrittmacher für die wissenschaftliche Mechanik [Struik 1981], [Wußing 2002].

Als Folge des Vorstoßes der Türken bis nach Wien gelangten einige Andeutungen über die in östlichen Ländern verwendeten Dezimalbrüche, die *„türkischen Zahlen“*, nach Mitteleuropa, wo sich unabhängig davon ebenfalls ähnliche Grundideen herausgebildet hatten, u. a. in der Wiener astronomischen Schule. Die endgültige Einführung der Dezimalbrüche in Europa verdankt man Stevin. In seinem 1585 veröffentlichten Büchlein *De Thiende* (Der Zehnte) erklärte er:

> *„Thiende ist eine Art der Rechenkunst, durch welche man alle unter den Menschen als notwendig anfallenden Rechnungen mittels ganzer Zahlen ohne Brüche erledigt; sie wird gefunden aus der Zehnerreihe, bestehend in den Ziffern, durch die irgendeine Zahl geschrieben wird.“*
> [Stevin 1965, S. 13]

Die von Stevin gewählte Symbolik der Dezimalzahlen ist durchsichtig: Für den Dezimalbruch 6,3759 schrieb er

$$6\ ⓪\ 3\ ①\ 7\ ②\ 5\ ③\ 9\ ④.$$

Die eingeringelten Zahlen bedeuten den ganzen, den zehnten, hundertsten, ... Teil der jeweiligen Zahl davor. In weiteren Teilen von *De Thiende* werden die Grundrechenarten gelehrt und die Anwendung der Dezimalbruchrechnung auf Landmessung, Tuchmessung, Weinmessung und Astronomie; ferner gibt es allgemein gehaltene Anweisungen für Münzmeister und Kaufleute.

Bei Stevin hängt die Schreibweise für Dezimalbrüche eng mit seiner Auffassung von „Gleichung“ zusammen; sie findet sich in einer anderen Schrift, in *L' Arithmétique* (1585). Besonders hier zeigt sich Stevin unter dem Einfluss der antiken, nun zugänglich gewordenen Abhandlung von Diophant sowie der Entdeckungen bei der Auflösung höherer, insbesondere kubischer Gleichungen. Man könnte sogar behaupten, dass *L' Arithmétique* eine Art Überblick über den Stand der Algebra am Ausgang des 16. Jahrhunderts gibt, noch vor Vieta.

Stevin bezeichnet, wiederum mit Kreisen, sozusagen die Potenzen der gesuchten Größe. So entspricht

$1\ ②$ gleich $2\ ① + 8$ der Gleichung $1x^2 = 2x + 8$ mit der Lösung $x = 4$.

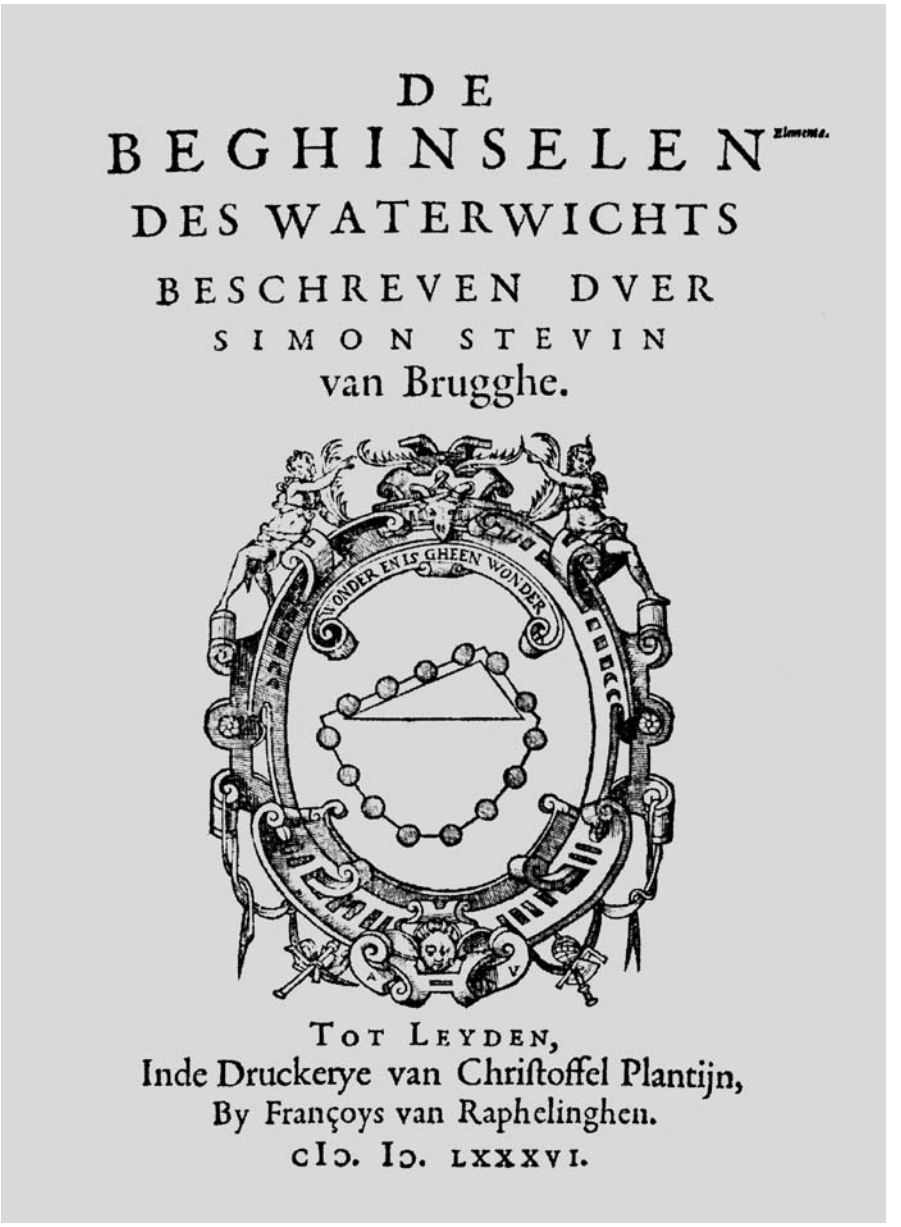


Abb. 7.4.2 Titelblatt von S. Stevin: „De Beghinselen des Waterwichts“, Leyden 1586. Über der Darstellung des Kugelkettenexperiments steht der Ausruf: *„Wonder en is gheen wonder“* (Das Wunder ist kein Wunder). (Siehe Hypomnemata mathematica, S. Stevin um 1600)

Abb. 7.4.3 Simon Stevin, Pedro Nunes (Belgien 1942, Portugal 1978)

Für kubische Gleichungen, *„von einigen weiteren unbekannten Autoren“* erfunden, schreibt Stevin (natürlich ohne Gleichheitszeichen)

$$\text{③ gleich ① ⓪ (entspricht } x^3 = ax + b)$$
$$\text{③ gleich ② ⓪ (entspricht } x^3 = ax^2 + b)\,.$$

Die Gleichung vierten Grades wird mit Ferrari in Verbindung gebracht und erscheint als

$$\text{④ gleich ③ ② ① ⓪}$$

Jedoch fehlen Stevin Kenntnisse über historische Einzelheiten. Immerhin verweist er auf die Antike, auf Luca Pacioli, Cardano, del Ferro, Tartaglia, Fior, Ferrari, Bombelli sowie auf die *Ars magna*, die jüngst erschienen sei.

Bemerkenswert ist auch der Umstand, dass sich bei Stevin eine Erweiterung des Zahlbegriffes über den der natürlichen Zahl hinaus expressis verbis findet. Im Gegensatz zu fast allen Mathematikern seiner Zeit hielt er Quadratzahlen, Quadratwurzeln, negative und irrationale Zahlen für mathematische Objekte von derselben Natur, also für gleichberechtigt. Das folgt einigermaßen zwingend sowohl aus den Tendenzen der Entwicklung der Algebra als auch aus seiner Theorie der Dezimalzahlen.

Pedro Nunes

Bis hin nach Portugal reichte der Einfluss von Pacioli, wie man an Pedro Nunes (lat. Nonius) (1502–1578) erkennen kann. Das zeigt sich besonders deutlich an den von ihm verwendeten Schreibweisen. In Anlehnung an das Italienische verwendet er *co* für cosa (x), *ce* für censo (x^2), *cu* für cubo (x^3) und $\bar{p}$ bzw. $\bar{m}$ für Plus und Minus [Katz 1993, S. 327]. Die Entwicklung in Deutschland aber scheint ihn nicht berührt zu haben.

Das Leben von Nunes ist in Teilen bekannt [DSB, Vol. X.]. Er dürfte aus einer jüdischen Familie stammen, war aber mit der Tochter eines spanischen Christen verheiratet. Nunes wurde in Alcácer do Sol im Jahre 1502 geboren, studierte 1521 und 1522 an der Universität Salamanca, 1524 oder 1525 in Lissabon, wo er den Grad eines Bakkalaureus der Medizin erwarb, der gemäß damaliger Studiengänge auch den Abschluss der Artistenfakultät mit einigen mathematischen Kenntnissen einschloss.

Er bekleidete einige akademische Ämter – darunter eine Professur für Mathematik in Lissabon –, begab sich 1537 nach Coïmbra und wurde dort ebenfalls Professor der Mathematik; 1562 wurde er „emeritiert“.

Im Herbst 1572 wurde Nunes an den Hof in Lissabon berufen, war Ratgeber für Probleme der Maße und Gewichte und hatte die Aufgabe, Seefahrer in Navigation und Kartographie zu unterrichten. Nach der verkündeten Reform der Maße und Gewichte kehrte Nunes nach Coïmbra zurück und verblieb dort bis zu seinem Tode. Zu seinen Schülern zählen unter anderem der später berühmt gewordene Jesuit und Mathematiker Christopher Clavius (1537–1612) sowie João de Castro, einer der bedeutendsten portugiesischen Navigatoren und Vizekönig von Indien.

Nunes war ein erstklassiger Geograph, Arzt, Instrumentenmacher, Astronom, Geometer und Algebraiker. So geht auf ihn die aus Erfahrungen der Seefahrer gewonnene mathematische „Entdeckung“ der Loxodrome zurück, jene für die Navigation besonders bequeme Route, bei der man unter stets gleichbleibendem Winkel zu den Längengeraden Kurs hält. Portugal war im 16. Jahrhundert eine führende Seefahrernation und im Besitz eines riesigen Kolonialreiches.

Abb. 7.4.4 Rua da matemática in Coïmbra, Portugal [Foto Alten]

1532 schrieb Nunes ein Buch über Algebra, Arithmetik und Geometrie. Dort behandelt er quadratische und spezielle kubische Gleichungen. Natürlich kann er den allgemeinen Fall der kubischen Gleichung noch nicht behandeln, da die *Ars magna* von Cardano erst 1545 erscheinen wird.

Ein Beispiel [Katz 1993, S. 327f.]: Nunes behandelt ein klassisches Problem: Es sollen zwei Zahlen x und y gefunden werden, wobei deren Produkt und die Summe ihrer Quadrate bekannt sind. Dies führt auf eine quadratische Gleichung in x^2. Nunes trifft Fallunterscheidungen bezüglich der Größenverhältnisse der beiden Variablen.

Der Text seines Buches über Algebra, Arithmetik und Geometrie, ursprünglich portugiesisch geschrieben, blieb zunächst ungedruckt. Nunes versprach sich mehr von einer spanischen Version. Er übersetzte den Text, der erst 1567 als *Libro de álgebra en arithmética y geometria* in Antwerpen erschien. Nunes stellte mit Bedauern fest, dass nun sein Werk durch bessere Bücher (Cardano!) überholt sei. Im Übrigen wünsche er sich, mit dem Blick auf ältere Autoren, insbesondere die der Antike, dass die Wege, auf denen die Ergebnisse gefunden wurden, nicht verdeckt oder verwischt würden, sondern ebenfalls dargelegt sein sollten.

7.5 Frühe Algebra im deutschsprachigen Raum

Ein wenig zeitversetzt gegenüber Italien entwickelte sich auch im deutschsprachigen Raum mathematisches Denken, auch auf dem Gebiet der Algebra, gestützt teilweise auf die wissenschaftlichen Traditionen der Klöster und Universitäten, teilweise begünstigt durch den besonders in Süddeutschland rasch aufblühenden Frühkapitalismus und den sich herausbildenden Berufsstand der Rechenmeister. Dieser spannende Prozess ist seit dem Ende des 19. Jahrhunderts, vor allem aber nach dem Ende des 2. Weltkrieges gründlich erforscht worden, u. a. durch Arbeiten von H. E. Wappler, B. Berlet, M. Curtze, W. Roch, F. Deubner, K. Vogel, E. Schröder, W. Kaunzner, M. Folkerts, H. Wußing und R. Gebhardt. Diese Arbeitsrichtung ist auch heutzutage noch ausgesprochen lebendig und ergebnisreich [R. Gebhardt 2002].

Vogel und Kaunzner haben auf die Bedeutung des süddeutschen Raumes als Wiege der seit dem 13. Jahrhundert deutlich zutage tretenden Wiederbelebung der Mathematik verwiesen, auf Wien, die reichen Handelsstädte Augsburg, Nürnberg und deren Umfeld [Vogel 1973].

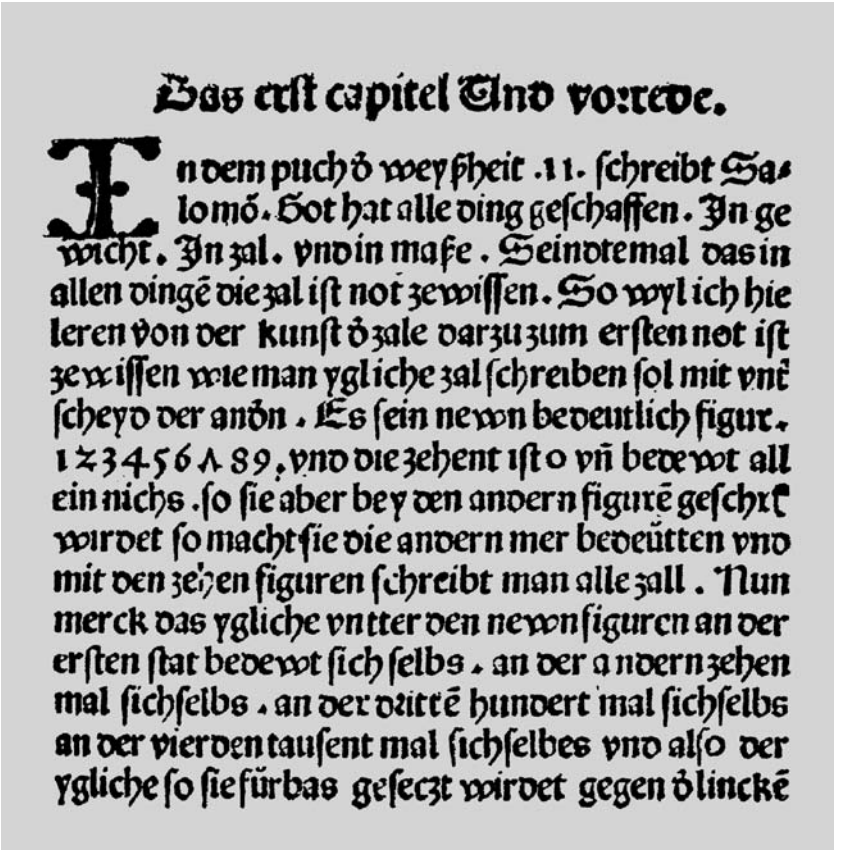
Man weiß etwa von einer schon im 10. Jahrhundert erwähnten Bibliothek in Regensburg und später im Kloster St. Emmeram bei Regensburg, die aber 1250 geplündert worden sein soll. Nach 1347 gab es dort auch einige mathematische Texte.

Seit dem 14./15. Jahrhundert belebte sich auch die Entwicklung der Mathematik, neben der der Astronomie. Zunächst wurden aus Italien, Frankreich, Spanien und England stammende Texte kopiert, die im Algebraischen letztlich auf al-Ḫwārizmī zurückgingen. Auch entstanden Anleitungen zum

Rechnen mit Brüchen, Potenzen und Wurzeln. Dazu kamen Möglichkeiten, den Unterricht an den Artistenfakultäten in mathematisch/astronomischer Hinsicht zu bereichern. Hier wurde die Wiener Universität führend.

Aus der Frühgeschichte der Algebra/Mathematik in Deutschland sind reichlich Details bekannt. Es sei verwiesen auf die Überblicksdarstellungen [Kaunzner 1992] und [E. Schröder 1988].

In Bamberg *„begann der Druck der ersten deutschen kaufmännischen Rechenbücher“* [Kaunzner 1992, S. 158]. Ein sog. Blockbuch – jede Seite wurde aus je einer Holztafel herausgeschnitten – entstand zwischen 1470 und 1480 [Vogel 1980]. Es folgten 1482 und 1483 zwei weitere Bamberger Rechenbücher, die vermutlich von dem Nürnberger Rechenmeister Ulrich Wagner (gest. 1489/90) stammen [Schröder 1988]. Ihre Inhalte sind kaufmännischer Art, mit Einschluss des Dreisatzes und von Tabellen zu Relationen von Gold- und Silberwährungen.



Das erst capitel Und vorrede.

In dem puch ō weyßheit .11. ſchreibt Salomō. Got hat alle ding geſchaffen. In gewicht. In zal. vnd in maße. Seind temal das in allen dingē die zal iſt not zewiſſen. So wyl ich hie leren von der kunſt ō zale darzu zum erſten not iſt zewiſſen wie man ygliche zal ſchreiben ſol mit vnt ſcheyd der anōn. Es ſein newn bedeutlich figur. 1 2 3 4 5 6 7 8 9. vnd die zehent iſt o vñ bedewt all ein nichs. ſo ſie aber bey den andern figurē geſchrt wirdet ſo macht ſie die andern mer bedeütten vnd mit den zehen figuren ſchreibt man alle zall. Nun merck das ygliche vntter den newn figuren an der erſten ſtat bedewt ſich ſelbs. an der andern zehen mal ſich ſelbs. an der drittē hundert mal ſich ſelbs an der vierden tauſent mal ſich ſelbes vnd alſo der ygliche ſo ſie fürbas geſeczt wirdet gegen ō linckē

Abb. 7.5.1 Seite 13 aus dem Bamberger Rechenbuch von 1483

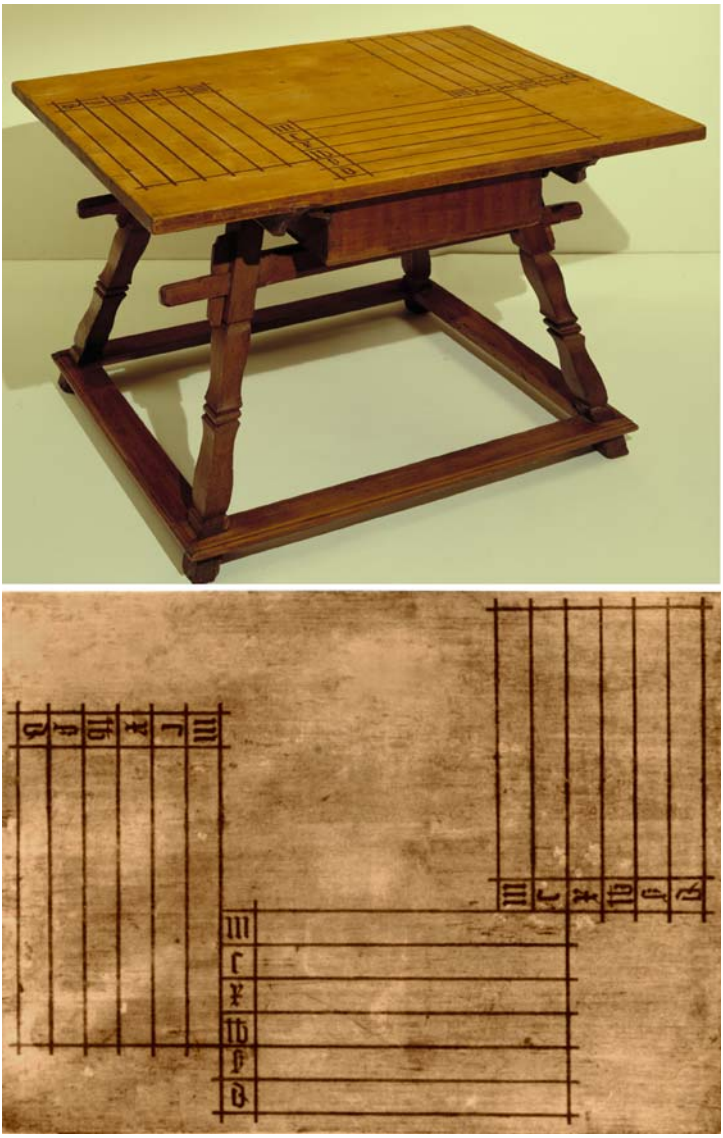


Abb. 7.5.2 Rechen- und Zahltisch im Basler Rathaus [Historisches Museum Basel]

In moderner deutscher Sprache ist dort zu lesen:

„In dem Buch der Weisheit schreibt Salomon: ‚Gott hat alle Dinge geschaffen nach Gewicht, nach Zahl und nach Maß.‘ Sintemal in allen Dingen die Zahl notwendig zu wissen ist, so will ich hier lehren von der Kunst der Zahlen. Dazu ist zum ersten notwendig zu wissen, wie

man jegliche Zahl schreiben muß zum Unterschied von den anderen. Es sind neun bedeutliche Ziffern, 1 2 3 4 5 6 7 8 9, und die zehnte ist 0 und bedeutet allein nichts. Wenn sie aber zu den anderen Ziffern geschrieben wird, so macht sie die anderen größer, und mit den zehn Ziffern schreibt man jede Zahl.
Nun merke, daß jede unter den neun Ziffern, wenn sie zuerst steht, bedeutet sich selbst, an der zweiten zehn mal sich selbst, an der dritten hundert mal sich selbst, ... und so für jegliche, wenn sie fürbaß gesetzt wird gegen die linke Hand, bedeutet alle mal zehnfach mehr, als die nächste, die vor ihr steht ...“
[Schröder 1988, S. 165]

7.6 Die sog. Deutsche Coß

Schon kurz vor dieser Zeit begann ein spezifischer Abschnitt der Algebra-Entwicklung, die sog. Deutsche Coß.

„Den Zeitraum zwischen 1460 und 1550 nennt man in der Geschichte der Mathematik ‚deutsche Coß‘, weil es den damals hier lebenden und wirkenden Fachleuten gelang, den österreichischen, den süd- und mitteldeutschen Sprachraum zum Mittelpunkt einer Entwicklung zu machen, die sich zum Ziel setzte, die mathematische Terminologie vom geschriebenen Wort zu lösen. Diese Vorstellungen konnten in großem Maße verwirklicht werden.“
[Kaunzner 1992, S. 159f.]

Die Wörter Coß und Cossist gehen auf die italienische Bezeichnung *„cosa“* (Ding/Sache) für die Unbekannte zurück. Coß ist dann sowohl das Symbol für die Unbekannte als auch für die von den Cossisten ausgeübte Kunst, Gleichungen in Symbolen zu lösen.

In Italien und Frankreich hatte man seit Ende des 14. Jahrhunderts begonnen, Fachausdrücke abzukürzen. Erinnert sei an Chuquet, Pacioli und Regiomontanus im 15. Jahrhundert. Nach unserem gegenwärtigen Wissen war Regiomontanus der Erste, der in der Algebra diejenigen Abkürzungen benutzte, die später als die Symbole der Cossisten große Verbreitung erlangten [Folkerts 1996a], [Alten et al. 2003, S. 229f.].

Um die Mitte des 15. Jahrhunderts beschäftigte sich Fridericus Amann (früher als Friedericus Gerhart benannt, gest. 1464/65) aus dem Benediktinerkloster St. Emmeram bei Regensburg mit Algebra.

Eine Sammelhandschrift, der Codex München (Clm 14908), enthält u.a. die erste uns bekannte deutsch geschriebene Algebra, die in Worten die Auflösung der sechs auf al-Ḫwārizmī zurückgehenden Typen linearer und quadratischer Gleichungen beschreibt. Die von Fridericus verwendeten Symbole erinnern an die von Regiomontanus verwendeten. Seine deutsche Algebra beginnt mit den Worten: *„Machmet in dem puech algebra und almalcobula hat*

gespruchet diese Wort: Census, radix, numerus.“ Damit unterstellt Fridericus, al-H̲wārizmī habe diese Termini eingeführt [Kaunzner 1992, S. 168].

Gegen Ende des 15. Jahrhunderts spielte Leipzig vorübergehend eine herausragende Rolle: Im Jahre 1481 wurde hier eine erste zusammenhängende große Algebraschrift verfasst [Vogel 1981]. Der aus Eger in Böhmen stammende Johannes Widmann (ca. 1460 bis nach 1500) hielt 1486 in Leipzig die erste Algebra-Vorlesung in Deutschland. Der Text dieser Vorlesung findet sich ebenfalls in der berühmten Sammelhandschrift C 80 (heute in der Sächsischen Staats- und Landesbibliothek Dresden). Dort wurden auch für Addition und Subtraktion die Zeichen + und − benutzt, ebenso wie auch in seinem in Leipzig gedruckten Rechenbuch aus dem Jahre 1489 *Behennde vnnd hubsche Rechnug auff allen Kauffmanschafften.* Von dort setzten sich + und − und allgemein durch Widmann benutzte spezielle cossische Symbole für die Potenzen der Variablen durch. (Umfassend zu Widmann vgl. [Kaunzner 1996], sprachgeschichtlich auch [Gärtner 2000]) In dieser Zeit ist auch das Wurzelzeichen aufgekommen.

Die Handschrift C 80 nimmt eine zentrale Stellung in der Algebra in Deutschland während der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts ein. Von dort führt auch eine Verbindung zu Adam Ries (1492–1559), dem bekannten deutschen Rechenmeister. Während seines Aufenthaltes in Erfurt (1517–1522) hat Ries die C 80 benutzt und, wie Widmann, Randbemerkungen angebracht. Viele der Rechenaufgaben aus C 80 sind in die *„Coß“* von Ries eingegangen.

Auch Andreas Alexander wirkte um 1500 auf dem Gebiet der Algebra. Er stammte aus Regensburg, wurde 1485 in Köln immatrikuliert und studierte von 1493 an in Leipzig. Zwischen 1502 und 1504 hielt er Vorlesungen über Mathematik, Perspektive und zu den ersten drei Büchern der *„Elemente“*.

Aus dem Anfang des 16. Jahrhunderts stammen zwei Darstellungen der Coß in deutscher Sprache. 1521 erschien von dem aus Erfurt stammenden Heinrich Schreyber (geb. vor 1496, gest. Winter 1525/26), genannt Grammateus, das Buch

> *„Ayn new kunstlich Buech welches gar gewiß und behend lernet nach der gemainen regel Detre, welschen practic, regeln falsi und etlichen regeln Cosse mancherley schöne und zuwissen notdürffig rechnung auff kauffmannschafft. . . “*

Vier Jahre später, 1525, wurde in Straßburg eine *„Coß“* von Christoph Rudolff (1500?–1545?) gedruckt: *Behend und Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre, so gemeinicklich die Coss genennt werden (. . .) Zusammen bracht durch Christoffen Rudolff vom Jauer.* Rudolff stammt aus Jauer in Schlesien und hat in Wien bei Schreyber studiert.

Das Buch von Rudolff hat einen erheblichen Einfluss auf die weitere Entwicklung ausgeübt, insbesondere, nachdem Michael Stifel (1487–1567) im Jahre 1553 eine erweiterte und verbesserte Ausgabe der Rudolffschen Coß herausgebracht hatte. Stifel hatte schon vorher, 1544, ein sehr bedeutsames

Abb. 7.6.1 Titelblatt der 4. Auflage des zuerst 1489 in Leipzig gedruckten Rechenbuches von Widmann

Buch im Druck erscheinen lassen, die *Arithmetica integra* (Gesamte Arithmetik), übrigens bei demselben Drucker Petreius (1497?–1550), der im Jahr zuvor, 1543, *De revolutionibus* von N. Copernicus (1473–1543) und ein Jahr später, 1545, *Ars magna* von Cardano zum Druck gebracht hatte.

Stifel hat ein überaus bewegtes Leben geführt. Als protestantischer Pfarrer, der an der Seite Luthers auch als Schöpfer von Kirchenliedern hervortrat, geriet er dennoch wegen einer Weltuntergangsvorhersage in nachhaltigen Gegensatz zu Luther. Nachdem er wegen der kriegerischen Auseinandersetzungen mehrfach zum Wohnsitzwechsel gezwungen worden war, hielt er im fortgeschrittenen Alter in Jena mathematische Vorlesungen.

Adam Ries, Abraham Ries und Jacob Ries als Cossisten

Der deutsche Rechenmeister Adam Ries (1492–1559), der als Verfasser dreier, immer wieder aufgelegter Rechenbücher einen geradezu legendären Ruhm im deutschsprachigen Raum erreichte, hat sich auch als Cossist betätigt. Diese Leistung war schon Ende des 19. Jahrhunderts von B. Berlet erkannt worden, wurde aber erst aus Anlass des 500. Geburtstages von Adam Ries deutlich und in der Öffentlichkeit bekannt, nach der Druckausgabe seiner *„Coß“*, deren erster Teil auf das Jahr 1524 datiert ist [Ries, Adam 1992].

Adam Ries stammt aus Staffelstein in Franken. Über seine Ausbildung ist nichts bekannt, aber er verstand Latein. Ries ließ sich einige Zeit später in Erfurt nieder und unterhielt dort eine Rechenschule, ging aber 1522/1523 in die nach Silberfunden rasch aufblühende Stadt Annaberg im Erzgebirge, arbeitete dort als „Bergbeamter“ in Vertrauensstellungen des Erzbergbaus und unterhielt eine sehr erfolgreiche Rechenschule. Zwei seiner Söhne, Abraham (1533–1604) und Jacob (?–1604) waren ebenfalls als Cossisten tätig. Abraham folgte seinem Vater als Leiter der Rechenschule und wurde, wie der Vater, Sächsischer „Hofarithmeticus“ [Wußing 1992]. Adam Ries publizierte sein erstes Rechenbuch *Rechenung auff der linihen* schon 1518 in Erfurt. Gelehrt wurde nur das Rechnen auf dem Abakus, auf den Linien, wie man sagte. Das zweite Rechenbuch, *Rechenung auff der linihen vnnd federn...* erschien erstmals 1522, ebenfalls in Erfurt. Es lehrt sowohl das Rechnen auf dem Abakus, als auch das mit „Federn“ betriebene schriftliche Rechnen mit den indisch-arabischen Ziffern. Das Buch war überaus erfolgreich und erlebte mindestens 120 Auflagen, bis weit ins 17. Jahrhundert hinein. Das dritte Rechenbuch, das umfangreichste, *Rechnung nach der lenge* (ausführlich, Wg.) *auff den Linihen und Feder...* (kurz *Practica*) wurde 1550 in Leipzig gedruckt, erlebte aber wegen der Druckkosten nur 1611 eine weitere Auflage [Wußing 1992].

Die Rechenbücher sind frei von cossischen Symbolen und algebraischen Denkweisen im engeren Sinne, etwa der Verwendung von Gleichungen. Vielmehr beruht die Lösung der Aufgaben auf der Anwendung der regula falsi. Doch es ist sicher, dass sich Ries als Cossist betrachtet hat; expressis verbis hat er sich in diesem Sinne in der *Practica* geäußert. Er spricht dort von einer

Abb. 7.6.2 Adam Ries (BRD 1992)

Coß, „*welche ich ob Gott wil/mit der Zeit auch klerlich* (d. h. klar geschrieben, Wg.) *am tag geben will.*“ [A. Ries 1611, Blatt 167, Rs.]

Zum Zeitpunkt der Erstauflage der *Practica* (1550) hatte Ries eine Handschrift zur Coß längst fertiggestellt, aber nicht zum Druck bringen können. Unter dem Titel „Coß“ sind 1664 von einem Dresdener Mathematiker 534 Seiten Handschriftliches von Adam Ries zusammengebunden und so vor dem Verlust gerettet worden. Auf historisch verschlungenen Wegen hat sich das kostbare Manuskript erhalten; es befindet sich jetzt in Annaberg-Buchholz.

Die Analyse der *„Coß“* hat ergeben [Ries, Adam 1992], [Luderer 2004], dass es sich um zwei cossische Schriften handelt. Die erste ist, wie gesagt, auf das Jahr 1524 datiert. Die zweite stammt vom altgewordenen Ries und ist undatiert, muss aber, da Ries z. B. Cardano benennt, nach 1544 niedergeschrieben worden sein.

Es sind echte cossische Schriften. Es werden cossische Symbole ϕ, $\mathscr{Q}$, $\mathscr{Y}$, $\mathcal{C}$ bis zur neunten Potenz eingeführt. Im Anschluß an al-Ḫwārizmī behandelt Adam Ries die acht Typen von Gleichungen ersten und zweiten Grades, wenn auch in anderer Reihenfolge: *„Volgenn hernach die Acht equaciones Algebre gezogenn auß seynem ersten buch genant gebra und almuchabala.“* [Kaunzner/Wußing 1992, S. 111]

Da Ries, alter Tradition gemäß, nur positive Koeffizienten zuließ, musste er Fallunterscheidungen treffen. Es fehlt – modern geschrieben – der Gleichungstyp

$$x^2 + ax + b = 0\,, \quad a, b > 0\,.$$

Diese Gleichungen besitzen keine positiven Lösungen, sondern nur negative oder gar komplexe.

Auf dieser theoretischen Basis bietet Ries eine Fülle von Aufgaben; die auf lineare Gleichungen führen und teilweise ziemlich schwierig sind. Freilich

Abb. 7.6.3 *Rechnung auff der linihen*; erstes Rechenbuch von Adam Ries, 2. Auflage 1525

wissen wir nicht, ob Ries auch quadratische Gleichungen behandelt hat; diese Teile der *„Coß“* könnten verloren gegangen sein.

Der erste Teil der *„Coß“* schließt mit einer Aufgabe über eine durch den Wind umgeknickte Stange (analoge Aufgaben sind uralt). Ihre Gesamtlänge ist gegeben sowie die Entfernung vom Fußpunkt der Stange, in der die umgebrochene Spitze den Boden berührt. Gesucht ist die Höhe der Knickstelle über dem Boden. Diese Aufgabe erfordert die Anwendung des Satzes des Pythagoras und das Ziehen der Quadratwurzel.

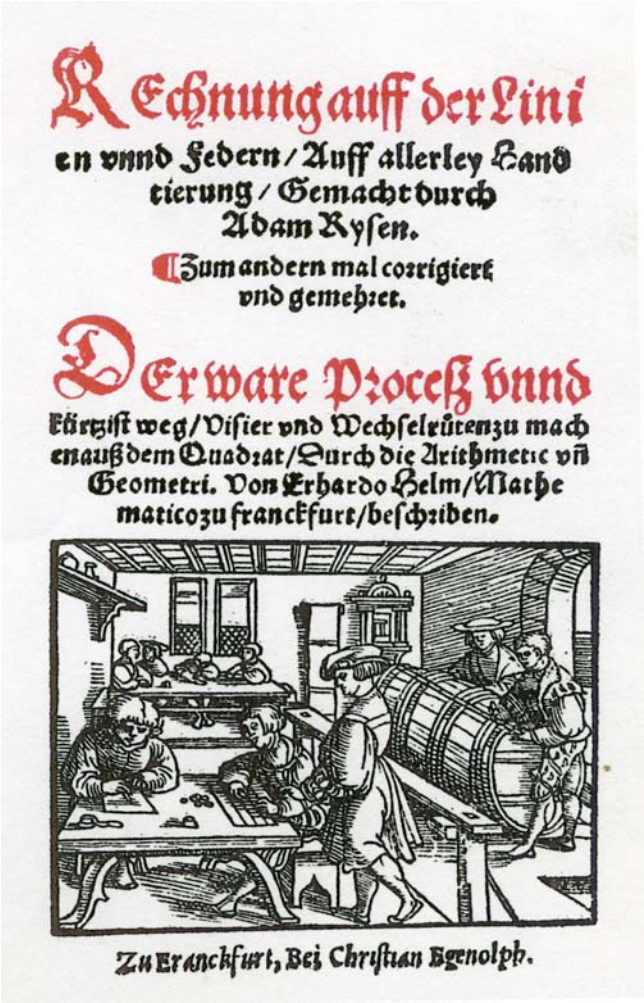

Rechnung auff der Lini
en vnnd Federn / Auff allerley Hand
tierung / Gemacht durch
Adam Ryſen.
Zum andern mal corrigiert
vnd gemehret.
Der ware Proceß vnnd
Kürtzeſt weg / Viſier vnd Wechſelrütenzu mach
en auß dem Quadrat / Durch die Arithmetic vñ
Geometri. Von Erhardo Helm / Mathe
maticozu franckfurt / beſchriben.
Zu Franckfurt, Bei Chriſtian Egenolph.

Abb. 7.6.4 Titelblatt des zweiten Rechenbuches *Rechnung auff der Linien vnnd Federn* von Adam Ries 1522 in der Ausgabe Frankfurt 1525. Im Anhang: Visieren, d.h. Ausmessen des Volumens von Fässern

Beim zweiten Teil der „*Coß*“ handelt es sich in einigen Teilen um Entwürfe. Die Schrift ist erheblich größer, weil der alt gewordene Ries sich wohl keine Brille leisten konnte. Ries hat dieses Manuskript seinen Söhnen als eine Art Vermächtnis hinterlassen; auch erwähnt er inzwischen erzielte Fortschritte in der Algebra.

„Meynen lieben Sonen Adam Abraham Jacob Isaac Vnd Paulo die Riesen genannt Zuhanden (. . .) Diveil ich dan nun mit alter beladen

Abb. 7.6.5 Denkmal von Adam Ries in Annaberg-Buchholz [Foto Wußing]

> *euch als meinen lieben sohnen nichts besseres geben und lassen mag*
> *Dan underricht gemelter Rechnung durch erforschung der Vnitet“*
> [Kaunzner Wußing 1992, S. 329f.]

(*„erforschung der Vnitet“* bedeutet soviel wie das Aufsuchen einer maßgeblichen Lösung im jeweiligen Beispiel). Mit anderen Worten: Adam Ries hat Hervorragendes auch im Felde der Coß geleistet. Nur, leider, sind seine Schriften damals nicht zum Druck gelangt. Im Vergleich der beiden Fassungen der *„Coß“*, der von 1524 und der späteren, zeigt sich die frühe Fassung als eigenständige Leistung. Die spätere wäre, wenn sie gedruckt worden wäre, sozusagen zu spät gekommen. Sie enthält jedoch einen in pädagogischer Hinsicht interessanten Zugang zum Rechnen mit den cossischen Symbolen.

Vier der fünf Söhne von Adam Ries waren auf mathematischem Gebiet tätig; dabei ragt – wie oben schon angedeutet – Abraham besonders hervor. Er hinterließ eine auf das Jahr 1578 datierte cossische Schrift, den in der Sächsischen Staats- und Landesbibliothek aufbewahrten Kodex C 411, der 1999 herausgegeben wurde [Ries, Abraham 1999]. Es handelt sich keineswegs, wie man vermuten könnte, um eine Kopie oder Variation der cossischen Schriften seines Vaters, sondern vielmehr um eine eigenständige *„Coß“*, die weit über die *„Coß“* seines Vaters hinausgeht.

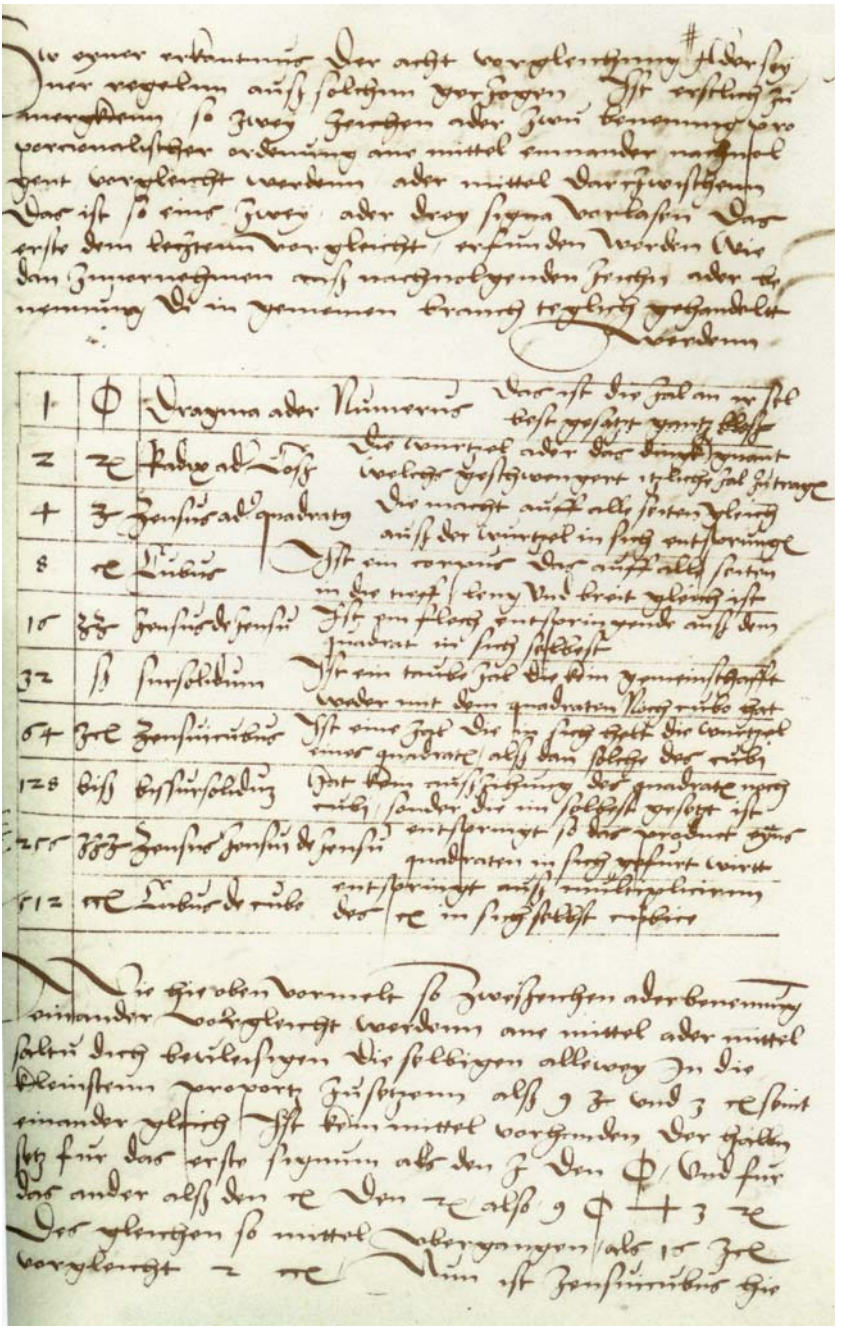


Abb. 7.6.6 Einführung der cossischen Symbole. Besonders hübsch ist die Erläuterung für die Variable Radix oder Coß: *„Die Wurtzel oder das Dingk genannt welches geschwengert itzliche Zal zu tragen.“* (zweite Zeile der Tabelle)
[Ries, Coß, S. 109]

Abb. 7.6.7 Titelblatt der Coß von Abraham Ries

Auch Abraham behandelt – wenn man Reduktionen vornimmt – dieselben Typen quadratischer Gleichungen. Er fasst alle reinen Gleichungen zu einem Typ zusammen und dehnt die Symbolik der cossischen Zeichen weiter aus. Vor allem aber stellt er, anders als der Vater, eine Fülle von Aufgaben, die wirklich auf quadratische Gleichungen führen.
Die „*Coß*“ von Abraham Ries trägt den Titel

Kurtze vnd Grundliche vnder
richtung Subtiler vnd Kunst,
reicher Rechnung In Gemein
Coß genandt. So durch Examini-
rung monadis verrichtet wurdt
Treulich Beschrieben Vnd verferti-
get durch Abraham Riesen.
Von S, Annabergk. Anno 1578.

Das Manuskript umfasst 117 Blätter.

Weiterhin befindet sich in der Dresdener Staats- und Landesbibliothek eine kurze, aber kunstvoll auf Pergament geschriebene „*Coß*“ aus der Feder von Jacob Ries, Signatur C 496. Man darf unterstellen, dass Jacob durch seinen Bruder Abraham mit der Coß vertraut gemacht worden ist, da die anderen Brüder Adam d. J., Isaac und Paul nicht als Cossisten hervorgetreten sind. Am Beginn der C 496 schrieb Jacob:

„Kurtze erclerung vber Mahomets Coß, welcher ehr, Artem Restaurationis und oppositionis Numeri genandt. Durch Jacob Riesen tzusammen getzogen. Anno 1562.“
[Ries, Jacob 1562, C 496, 1.2 Vs.]

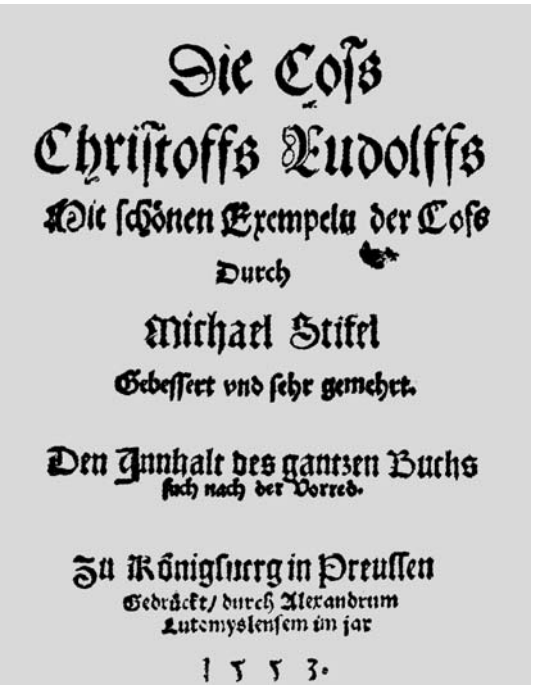

Die Coss
Christoffs Rudolffs
Die schönen Exempeln der Coss
Durch
Michael Stifel
Gebessert vnd sehr gemehret.
Den Innhalt des gantzen Buchs
fach nach der Vorred.
Zu Königsperg in Preussen
Gedruckt/ durch Alexandrum
Lutomyslensem im jar
1 5 5 3.

Abb. 7.6.8 Titelblatt der von Stifel herausgebrachten „Coß“ Christoph Rudolffs (1553)

> *„Wie ich von meinem Bruder bericht entpfangen Als hatt Mahomet in seinen buch, welches ehr Artem Restaurationis et Oppositionis Numeri genendt, Volgende gestalt von der Coß geschrieben.“*
> [Ries, Jacob 1562, C 496, Bl. 3, Vs.]

Christoph Rudolff und Michael Stifel

Zu Beginn der zweiten *„Coß“* hatte Adam Ries u. a. auf Rudolff, Stifel und Cardano verwiesen, die neuerdings Beiträge zur Algebra geleistet hätten. Zur Erinnerung: 1525 hatte Christoph Rudolff eine Coß unter dem Titel *„Behend unnd Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeinicklich die Coss genennt werden“* herausgebracht. Stifel verfasste 1553 (1554 erschienen) in Königsberg in Ostpreußen eine Neubearbeitung der *„Coß“* von Rudolff betitelt *„Die Coß Christoffs Rudolffs. Die schönen Exempeln der Coß Durch Michael Stifel Gebessert und sehr gemehrt.“*

Stifel hatte schon vorher Mathematisches publiziert. Neben einer tollkühnen Buchstabenrechnung über den bevorstehenden Weltuntergang *Ein Rechen Büchlin Vom End Christ* (Wittenberg 1532), die zu heftigen Widersprüchen führte, war 1544 die *Arithmetica integra* erschienen, mit einem

Vorwort von Ph. Melanchthon (1497–1560). Diese – zum Unterschied vom *„Rechen Büchlin“* – wissenschaftliche Schrift war wohl vor der *Ars magna* (1545) von Cardano die beste Zusammenfassung damaliger Arithmetik und Algebra. Bei der Behandlung der Multiplikation von Potenzen verweist Stifel (modern gesprochen) darauf, dass dies mit der Addition der Exponenten korrespondiert. Es folgen Bezeichnungen für die Potenzen der Unbekannten, die Zeichen + und − werden übernommen, ebenso das Quadratwurzelzeichen $\surd$. Die Gleichheit wird häufig mit dem Wort „gleich“ bezeichnet, gelegentlich auch mit einem Punkt. $1\ \text{ℊ}\ \sim 2$ entspricht der Gleichung $x = 2$.

Die *„Coß“* von Rudolff enthält das Positionssystem und die Rechenregeln.

Die zweite Hälfte seiner *„Coß“* bietet die Auflösung algebraischer Gleichungen. Anders als al-Ḫwārizmī unterscheidet Rudolff acht Typen quadratischer Gleichungen; die Lösungswege werden in Worten beschrieben. Beispiele erläutern das Verfahren. Auch Gleichungen höheren Grades treten auf, z. B. (modern gesprochen)

$$ax^n + bx^{n-1} = cx^{n-2} \ .$$

Schließlich folgen mehrere hundert Beispiele; sie werden nach den angegebenen Verfahren gelöst. Am Ende des Textes präsentiert Rudolff drei irreduzible kubische Gleichungen. Er gibt zwar die Lösungen an, aber ohne Lösungsmethode. Andere, so meint Rudolff, werden die Kunst finden, wie in solchen Fällen zu verfahren sei [Katz 1993].

Die *Arithmetica integra* von Stifel weist bedeutende Fortschritte auf [Jentsch 1986]. Stifel rechnet mit negativen Zahlen, obwohl er sie „absurde Zahlen“ *(numeri absurdi)* nennt. Er behandelt sie in der Arithmetik gleichberechtigt mit den positiven Zahlen. Damit kann er Fallunterscheidungen für quadratische Gleichungen vermeiden.

In der überarbeiteten *„Coß“* von Rudolff drückt sich Stifel voller Stolz so aus:

> *„Denn wie er* (Rudolff) *verwirfft die menge der 24 Regeln und setzet da für 8 Regeln der Coß/Also setze ich fürr die selbige 8 Regeln/eine einzige Regel/mit der ich alles ausricht/das er mit seynen 8 Regeln hat außgericht . . . “*
> [Stifel 1553, Blatt 147, Vs.]

Freilich bleibt er inkonsequent; negative Lösungen von Gleichungen erkennt er nicht als Wurzeln an.

Die Zuordnung von Potenzen zu den Potenzexponenten – auch negative Potenzexponenten werden behandelt – wird ausführlich dargestellt, mit einer starken Annäherung an die Prinzipien des späteren logarithmischen Rechnens. Auch die Wortbildung „Exponent“ stammt von Stifel. Es darf als sicher gelten, dass John Neper (1550–1617) in Schottland und Jost Bürgi (1552–1632) in Prag, denen die Aufstellung von ersten Logarithmentafeln (1614 bzw. 1620) zu danken ist, von Stifel beeinflusst worden sind.

Was das Studium der Irrationalitäten betrifft, so trifft Jentsch folgende Einschätzung:

> *„Wohl als erster Mathematiker nach der Antike durchschaut Stifel das schwierige 10. Buch der Elemente des Euklid über Irrationalitäten wieder vollständig. Durch Herausschälen des arithmetischen Kerns aus der geometrischen Hülle sowie durch Einführung cossischer Symbole, zu denen er selbst wertvolle Beiträge geliefert hat, macht er das Ganze durchsichtiger. Durch die Untersuchung von Beziehungen der Form*
>
> $$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = u + v \ ,$$
>
> *die auf die Beschäftigung mit der 'Kubikcoß' hinzielen, und allgemeinerer Wurzelausdrücke geht er über Euklid und Pacioli hinaus."*
> [Jentsch 1986, S. 23]

Es scheint, dass Stifel dem Drängen seiner Freunde gern gefolgt ist, die *„Coß"* von Rudolff neu herauszugeben. Stifel fügte den jeweiligen Kapiteln Ergänzungen an, darunter verdichtete Ausführungen aus der *Arithmetica integra* mit zahlreichen Beispielen. Stifel behandelte auch, nach der Publikation der *Ars magna*, die Lösungsformel für die kubische Gleichung.

Stifel hat die künftige Entwicklung in erstaunlichem Maße beeinflusst, so bei Simon Stevin, bei Christoph Clavius und damit bei Descartes, der die *Algebra* (1609) studiert hatte. Sogar der junge Euler (1707–1783) hat noch die Neubearbeitung der Rudolffschen *„Coß"* als Lehrbuch benutzt.

Wir können nicht an Stifels Beitrag zum Zahlbegriff vorbeigehen. Die Verwendung natürlicher Zahlen und der Brüche geht bis in die Antike zurück. Trotz der Leistung von Eudoxos hatte die Antike zwar zum Studium der geometrischen Irrationaltitäten, nicht aber zur Anerkennung des Irrationalen als Zahl vorstoßen können. Die bewusste Verwendung negativer Zahlen erfolgte bereits innerhalb der chinesischen, der indischen und gelegentlich auch in der islamischen Mathematik. In Europa erlangten negative ganze und gebrochene Zahlen erst in der Renaissance unter Kaufleuten und Rechenmeistern volle Anerkennung. Lange hingegen war die Frage umstritten, ob etwa Zahlenwerte, die sich durch Radizieren oder bei geometrischen Konstruktionen als Längen ergeben, wirkliche Zahlen sind. Beispielsweise findet man bei Stifel in der *Arithmetica integra* im Jahre 1544 die folgende scharfsinnige Überlegung:

> *„Mit Recht wird bei den irrationalen Zahlen darüber disputiert, ob sie wahre Zahlen sind oder nur fingierte (. . .). Denn bei Beweisen an geometrischen Figuren haben die irrationalen Zahlen noch Erfolg, wo uns die rationalen im Stich lassen, und sie beweisen genau das, was die rationalen Zahlen nicht beweisen konnten, jedenfalls mit den Beweismitteln, die sie uns bieten. Wir werden also veranlaßt, ja gezwungen, zuzugeben, daß sie in Wahrheit existieren, nämlich auf Grund ihrer Wirkungen, die wir als wirklich, gewiß und feststehend empfinden.*

> *Aber andere Gründe veranlassen uns zu der entgegengesetzten Behauptung, daß wir nämlich bestreiten müssen, daß die irrationalen Zahlen Zahlen sind. Nämlich wenn wir versuchen, sie der Zählung zu unterwerfen und sie mit rationalen Zahlen in ein Verhältnis zu setzen, dann finden wir, daß sie uns fortwährend entweichen, so daß keine von ihnen sich genau erfassen läßt (. . .).*
> *Es kann aber nicht etwas eine wahre Zahl genannt werden, bei dem es keine Genauigkeit gibt und was zu wahren Zahlen kein bekanntes Verhältnis hat. So wie eine unendliche Zahl keine Zahl ist, so ist eine irrationale Zahl keine wahre Zahl, weil sie sozusagen unter einem Nebel der Unendlichkeit verborgen ist.“*
> (Deutsch zitiert bei [Gericke 1970, S. 68f.])

Gleichzeitig hat Stifel eine tiefe Einsicht gewonnen; sie deutet auch darauf hin, dass er die irrationalen Zahlen als Zahlen akzeptiert. Er hat eine wichtige Eigenschaft der irrationalen Zahlen erfasst:

> *„Nun fallen. . . unendlich viele gebrochene Zahlen zwischen je zwei aufeinanderfolgende <ganze> Zahlen, und ebenso fallen auch unendlich viele irrationale Zahlen zwischen je zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen.“*
> (Deutsch zitiert bei [Gericke 1970, S. 69])

Eine vollständige Anerkennung der irrationalen Zahlen als Zahlen findet sich in Europa bei Stevin; vom Standpunkt seines dezimalen Positionssystems für alle Zahlen muss dies sogar einigermaßen zwingend erscheinen. Jedoch schuf erst die Herausbildung der Methoden der analytischen Geometrie durch Fermat und Descartes die Voraussetzung zur allgemeinen Anerkennung der irrationalen Zahlen: Jedem Punkt der Zahlengeraden entspricht eine Zahl.

Beispiele für Aufgaben der Cossisten

Um die Rechenkunst und die Rechenfähigkeiten der damaligen Cossisten anschaulich zu machen, sollen einige Beispiele angeführt werden: Zwei Beispiele von Adam Ries, eines von Abraham Ries und drei Beispiele von Stifel.
Zwei Aufgaben von Adam Ries aus dessen Rechenbuch von 1581:

> *„Item, einer spricht: Gott grüß euch Gesellen alle dreyssig. Antwortet einer/wann vnser noch so viel vnd halb so viel weren/so weren vnser dreyssig. Die frag/wie vil jhr gewesen?“*
> [A. Ries 1581, Blatt 58, Vs.]

Wir würden heute den Ansatz als Gleichung $x + x + x/2 = 30$ machen und daraus die Lösung 12 erhalten. Adam Ries aber muss, weil er auf cossische Methoden verzichten will, die Methode des doppelten falschen Ansatzes verwenden; er beschreibt den entsprechenden Rechengang in allen Einzelheiten.

„*Vihekauff*
ITem/einer hat 100 fl. (Gulden, Wg) *dafür will er 100 haupt Vihes kauffen/Ochsen/Schwein/Kälber vnd Geyssen/kost ein Ochs 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb einen halben fl. vnd ein Geyß ein ort* (Viertel, Wg.) *von einem fl. wie viel sol er jeglicher haben für die 100 fl.?*“
[Adam Ries 1581, Blatt 71 Vs.]

Diese Aufgabe findet sich vom Typ bereits in der chinesischen Mathematik; es handelt sich um unbestimmte Aufgaben mit ganzzahligen Lösungen. Ries rechnet in allen Einzelheiten vor und gibt als Lösung 12 Ochsen, 20 Schweine, 20 Kälber, 48 Ziegen. – Von fremder Hand ist in der Druckausgabe von 1581 eine weitere Lösung angegeben: 14 Ochsen, 12 Schweine, 30 Kälber, 44 Ziegen. – Insgesamt gibt es 222 Lösungen.
Eine Aufgabe aus der Coß von Abraham Ries, die auf eine quadratische Gleichung führt:

„Es seindt etliche gesellen, haben 10 fl in gemein zuuorn. Nuhn legtt ein Jder so uil fl darzu als der gesellen sein theilen als dan den halben theill wieder Vnder sich be kommbtt einer $5\frac{1}{2}$ fl wieuiel sein der gesellen geweßenn.“
Quadratisches Problem; Lösung: 10 Gesellen. [Ries, Abraham 1999, S. 131.]

Drei Aufgaben von Michael Stifel:

„Etliche sitzen in einer zech haben verzeret 75 pfennig. Gibt yeder so vil pfenning als der dritte teyl der gesellen sind. Wie vil sind yhr?“
[Stifel 1533, Blatt 357, Rs.]
Lösung: 15 Gesellen.

„Eyn Kauffmann legt an all seyn barschafft/kaufft weynber ye für 1 fl so vil pfund als der fl gehabt hat. Verkaufft die weynber wider ye 345 3/5 pfund/für so vil fl als er für die Weinber hat außgeben/löset 40 fl. Die frag wie vil seyner barschafft gewesen sey.“
[Stifel 1533, Blatt 367 Vs.]
Lösung: 24 fl.

„Etliche Haubtleute liegen zu feld. Hat yeder vndersich gleych so vil fenlun als der Hauptleut sind. Sind vnder yedem fenlin 30 mal so vil knecht als fenlum im feld sind. Man gibt yedem Haubtman zu Monat sold 150 fl. Vnd yedem Knecht gibt zu Monat sold/gleych so vil floren/als der hauptleuth sind. Befindt sich's das die knecht zu Monat sold entpfahen 125 mal so vil als die Hauptleuth. Wie vil sind der Hauptleuth?“
[Stifel 1533, Blatt 390, Vs.]
Lösung: 25 Hauptleute, 625 Fähnlein, 18 750 Knechte.

7.7 Geometrie und Perspektive

Natürlicherweise spielt die in den „Elementen“ von Euklid niedergelegte Geometrie weiterhin eine wesentliche Rolle bei der Unterweisung in Geometrie, sowohl als Teil der *artes liberales* an den Universitäten als auch an den vorwiegend aus der Reformation hervorgegangenen Gymnasien (ausführlich in [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 247ff.] mit vielen Einzeltexten, auch zur Ausbildung der geometrischen Terminologie, vgl. ferner [Tropfke 4. Bd. 1923]).

Die massenhafte Verbreitung, auch der geometrischen mathematischen Kenntnisse, wurde ermöglicht durch den Buchdruck mit seinen nachhaltigen Folgen für das Bildungswesen und die Technologie jener Zeit.

Die 1543 gegründete Gesellschaft Jesu, die sich mit Nachdruck und Gewalt der Rekatholisierung verschrieben hatte, erkannte in qualifizierter Bildung ein Mittel zur Steigerung ihrer Wirksamkeit und ihres Ansehens. In den Jesuitenkollegs spielte die Geometrie eine herausragende Rolle. Es entstanden vorzügliche Euklidausgaben, etwa die Ausgabe durch den deutschen Jesuiten Christoph Clavius (1537 bis 1612). Sie erschien erstmals 1574 in Rom und erreichte bis 1738 über 20 Auflagen. Inhaltlich ging Clavius sogar weit über den euklidischen Text hinaus. Er nahm außer den spätantiken Büchern XIV und XV noch weitere Texte auf, die neue, in den 1900 Jahren nach Euklid entstandene Ergebnisse behandelten. Übrigens übertrug Matteo Ricci (1552–1610), ein Schüler von Clavius und erster jesuitischer Missionar in China, die ersten 6 Bücher der *„Elemente“* von Clavius ins Chinesische. Das Ansehen der europäischen Wissenschaft wurde so am chinesischen Kaiserhof erheblich gestärkt.

Clavius wirkte hauptsächlich als Lehrer der Mathematik am Collegium Romanum in Rom. Unter dem Ehrennamen *„Euklid des 16. Jahrhunderts“* – machte sich Clavius um die Mathematik verdient – nicht nur um Euklid. Er schuf eine Sinus-Tabelle und schrieb eine *„Algebra“* (Rom 1608). Dort erscheinen zum ersten Mal in Italien die aus Deutschland stammenden Zeichen $+$ und $-$. Clavius verwendete ein spezielles Symbol für die Unbekannte und erkannte, dass quadratische Gleichungen zwei Lösungen haben können. Eine Abhandlung über sphärische Dreiecke enthält fast alle damals bekannten Ergebnisse der Trigonometrie.

Auch auf astronomischem Gebiet hat sich Clavius ausgezeichnet, insbesondere bei der Verbesserung des Julianischen Kalenders. Seinem Vorschlag folgend, der auf den „Preußischen Tafeln“ von Erasmus Reinhold (1511–1553) beruhte, wurde die Kalenderreform durchgeführt: auf den 4. Oktober des Jahres 1582 folgte unmittelbar der 15. Oktober. Die Kalenderreform stieß auf Widerstand, etwa bei Vieta, insbesondere aber bei den Protestanten, die sich *„nicht vom Papst in die Kirche läuten lassen“* wollten.

Allerdings war Clavius ein entschiedener Gegner des copernicanischen Systems, trotz enger Beziehungen zu Galilei [DSB, Bd. III, S. 311f.].

Clavius war ein herausragender Repräsentant der Pflege und Kommentierung von Euklids Geometrie, neben vielen anderen. Aus dem Kreis der Jesui-

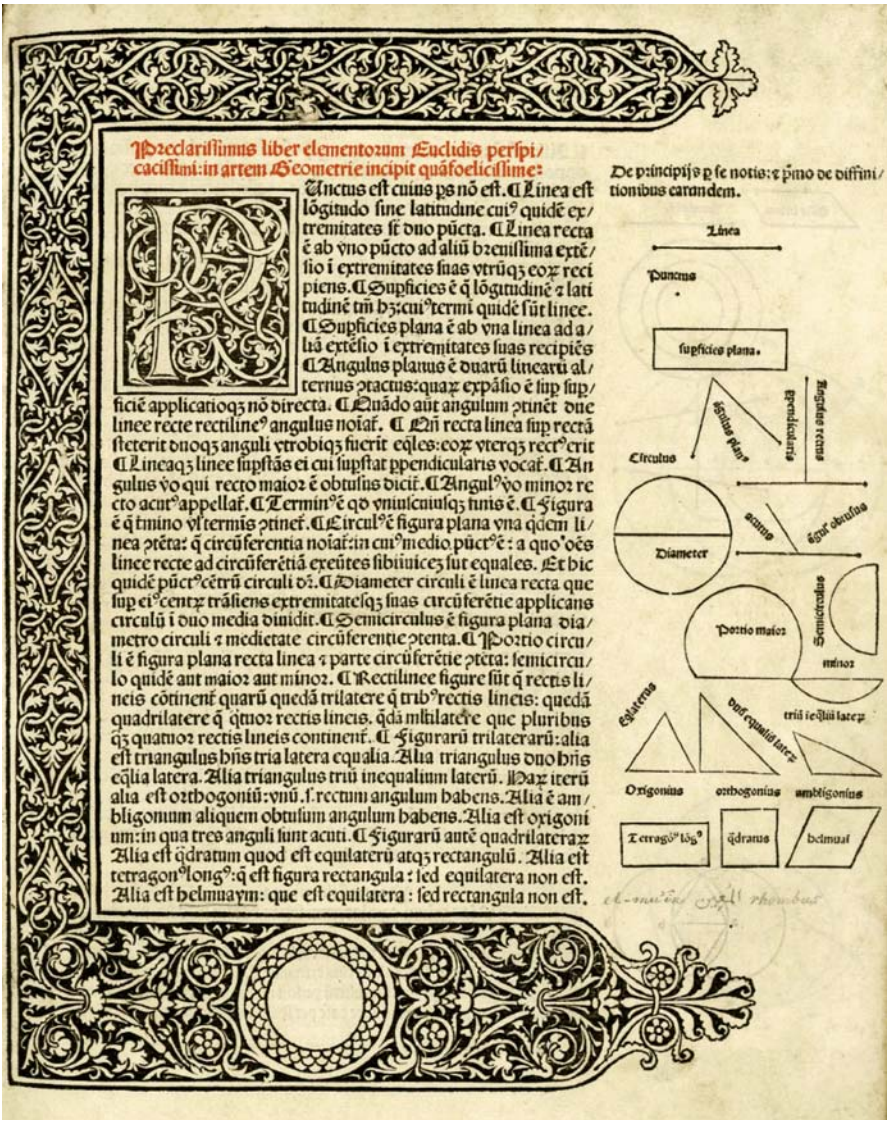


Abb. 7.7.1 Titelblatt der ersten Druckausgabe Euklid, Venedig 1482 (von Erhard Ratdolt, 25.V. 1482) [Stadtbibliothek Nürnberg, Sign.: 4° Auct. Gr. IV, 3743]

ten stammen weitere Euklidausgaben, so 1557 von Stefan Gracilis (16. Jh.), 1617 von Johannes Lanz (1564–1638) und 1620 von Charles Malapertius (1581–1630). Erwähnt sei ferner eine frühe, auf einem griechischen Manuskript beruhende Übersetzung (1505) von Bartolomeo Zamberti (geb. ca. 1473). Hier wurden die Schwierigkeiten einer Übersetzung aus dem Altgriechi-

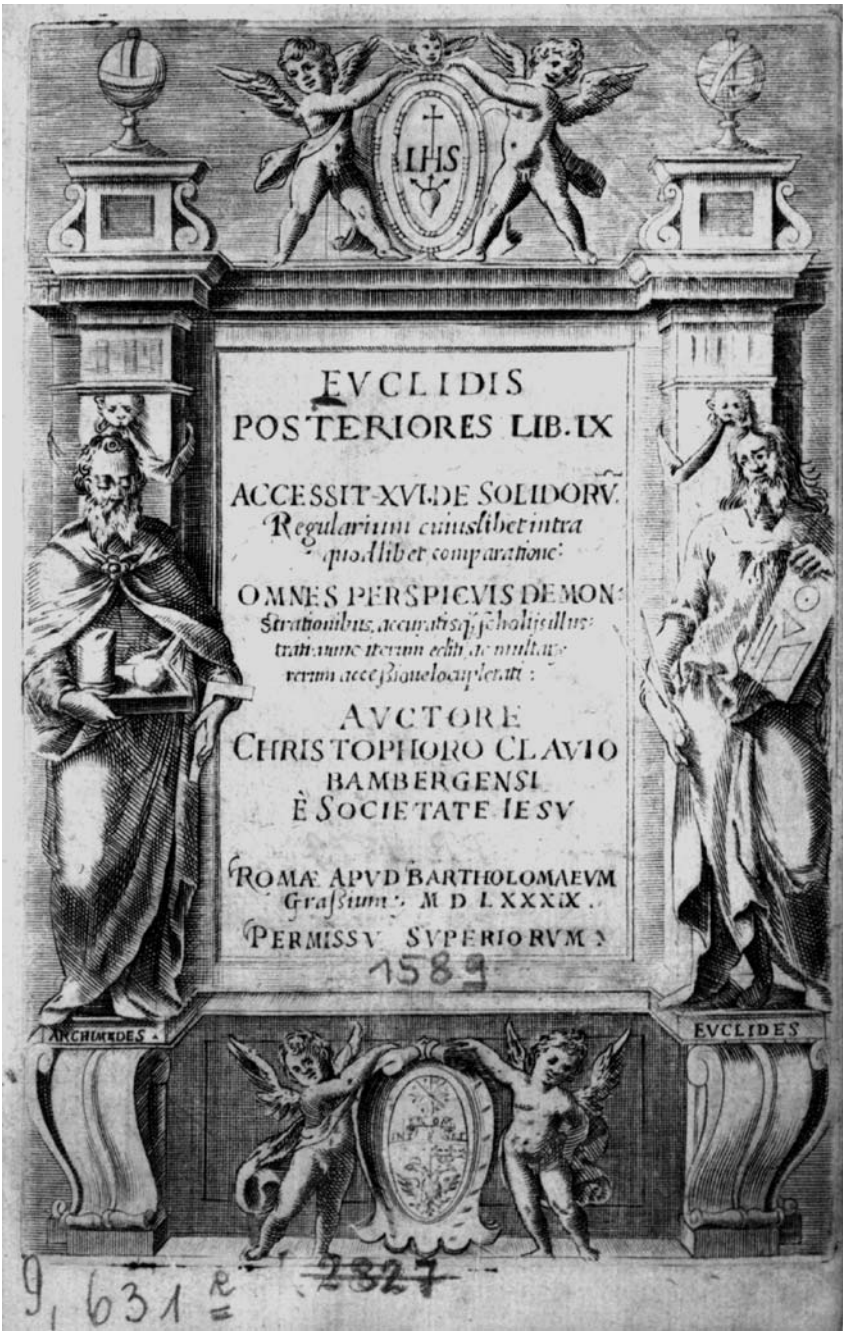


Abb. 7.7.2 Titelblatt der Euklidausgabe in der Übersetzung durch Clavius [UB Leipzig]

schen deutlich. 1533 erschien in Basel die erste griechische Druckausgabe der „Elemente“ herausgegeben von dem Gräzisten Simon Grynaeus (1493–1541).

Bis gegen Ende des 16. Jahrhunderts waren die „Elemente“ auch in volkstümlichen Ausgaben – d. h. in den Nationalsprachen – gedruckt zugänglich: 1543 italienisch, 1551 und 1570 englisch, 1555 und 1562 deutsch, 1564 und 1616 französisch, 1576 spanisch, 1606 niederländisch. Zahlreiche weitere Ausgaben folgten.

Praktische Geometrie

Die Beschäftigung mit Geometrie ging über die Aneignung und Kommentierung der „Elemente“ hinaus. An theoretischen Fragestellungen standen Kreisquadratur, der sog. Kontingenzwinkel und der sog. Makel des Euklid im Vordergrund des Interesses. Joseph Justus Scaliger (1540–1609) in Leiden war fest überzeugt, das Problem der Kreisquadratur gelöst zu haben, musste sich aber vielfältiger, berechtigter Kritik stellen.

Bei Universitätsprofessoren – wie beispielsweise Michael Maestlin (1550–1631), Lehrer von Kepler, Professor für Hebräisch in Tübingen – war es üblich, praktische Anwendungen der Geometrie schriftlich darzustellen und in Kartographie, Navigation, Feldmesskunst, Markscheidekunst zu verfolgen. Immerhin ist zu erkennen, dass Universitätsmathematik und die der artifici sich gegenseitig zu befruchten begannen.

Die großen Entdeckungsreisen und die Erschließung der eroberten Ländereien lenkten das Interesse auf Geodäsie und Kartographie. Willebrord van Royen Snellius (1580–1626), der bekannt wurde als Entdecker des Brechungsgesetzes, hat zwischen 1615 und 1617 die erste Gradmessung mit der Methode der Triangulation für eine Strecke von rund 130 km mit bemerkenswerter Genauigkeit durchgeführt [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 258].

Schon vorher war 1525 durch Jean Fernel (1497–1558), Leibarzt des französischen Königs Heinrich II., eine Gradmessung zwischen Paris und Amiens ausgeführt worden: Die Strecke wurde mit einer Kutsche abgefahren und die Radumdrehungen wurden gezählt [Bialas 1982].

> *„Das 17. Jahrhundert wird dann das Jahrhundert der ersten großangelegten Landesvermessungen, an denen Mathematiker wie J. Kepler, W. Schickard, G.D. Cassini und M. Ricci beteiligt sind. Der Tübinger Mathematikprofessor W. Schickard hat dabei anscheinend unabhängig von Snellius und zur gleichen Zeit wie dieser die Triangulation und das Rückwärtseinschneiden praktisch betrieben.“*
> [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 261]

Die Abbildung der Kugeloberfläche in die Ebene ist ein geometrisches Problem. Notwendigerweise muss es zu Verzerrungen kommen bei den Größenverhältnissen oder/und hinsichtlich der Winkeltreue.

Die Kartographie ist ein kulturhistorisch und wissenschaftshistorisch äußerst interessantes Gebiet [Kupcik] und reicht bis in die Antike zurück. Anaximandros von Milet soll eine erste Weltkarte angefertigt haben. Eratosthenes (273–195 v. Chr.) hat eine Weltkarte verfertigt, die, obwohl verschollen, nach seinen Beschreibungen rekonstruiert werden konnte.

Klaudios Ptolemaios (ca. 87–150) schuf eine *„Welt"*karte der in der alten Welt bekannten Teile der Erdkugel. Die Rekonstruktion der handschriftlich nicht erhaltenen Karte ergab, dass er eine Kegelprojektion benutzt hat [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 250ff.].

Alles in allem war dies eine hervorragende Leistung. Freilich nahm er für den Erdumfang am Äquator den zu kleinen Wert 32 000 km an, ein folgenreicher Irrtum, da der Weg nach Indien in westlicher Richtung weitaus zu kurz angenommen wurde, z. B. von Kolumbus.

In der Renaissance griff man auf die Karten des Ptolemaios zurück, vor allem, als dessen *„Geographie"* 1475 im Druck erschienen war und 1477 auch seine Karten beigefügt wurden. Die großen geographischen Entdeckungen des 16. Jahrhunderts unterstützten die Forderung nach Karten für die Seewege und für die Erschließung der eroberten Ländereien.

Abb. 7.7.3 Zur Erinnerung an Pedro Nunes und Heinrich den Seefahrer (Briefmarken-Block, Portugal 2002)

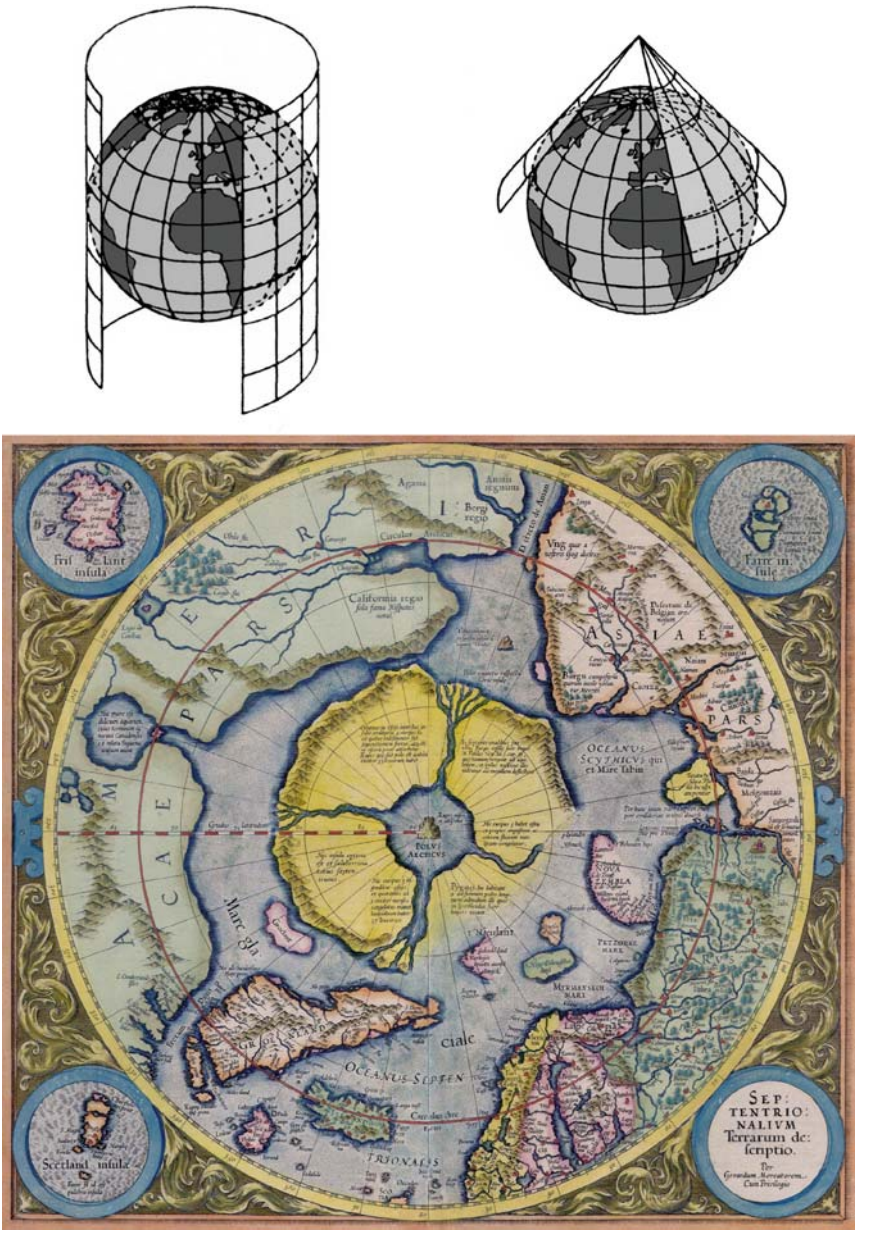


Abb. 7.7.4 Projektionen der Erdkugel auf ebene Karten. Zylinderprojektion des Marinos (2. Jh. n. Chr.) zur Wiedergabe von Längen und Breitenkreisen als orthogonales Netz für Karten nach dem sog. Mercator-Entwurf; Kegelprojektion des Ptolemaios (berührt der Kegel einen Breitenkreis, so wird ein Streifen um diesen Breitenkreis kaum verzerrt); Beschreibung der Länder des Nordens, Mercators Karte der Arktis in [Septentrionalium Terrarum descriptio, Duisburg 1623]

Abb. 7.7.5 Titelkupfer zum dreibändigen Kartenwerk Mercators, in dem erstmalig die Bezeichnung „Atlas“ auftaucht [Wikimedia Commons]

Abb. 7.7.6 Gerhard Mercator; Abraham Ortelius
[Wikimedia Commons; en. wikipedia]

Neue Projektionen wurden verwendet; sogar eine herzförmige Weltkarte wurde 1530 gedruckt.

Eine weite Verbreitung fanden Karten nach dem sog. Mercator-Entwurf. Er ist benannt nach dem flämischen Geographen und Kartographen Gerhard Mercator (eigentlich Kremer, 1512–1594). In seinem Netzentwurf werden Meridiane und Breitenkreise senkrecht zueinander angeordnet, mit der Folge, dass die Flächenverzerrungen gegen die Pole hin sehr groß werden. Die Polgegenden wurden damals ohnedies wegen der schwierigen Bedingungen von den Seeleuten gemieden. Ein beträchtlicher Vorteil für die Seefahrer bestand jedoch darin, dass die Loxodromen als Geraden erscheinen. Die Entdeckung der die Schifffahrt erleichternden Loxodromen – der Navigator hat nur einen festen Winkel zu den Längenkreisen einzuhalten – geht auf Pedro Nunes (1492–1578) zurück, der auch als Algebraiker hervorgetreten ist. Eine Loxodrome ist allerdings keineswegs die kürzeste Verbindungslinie.

Mercator gehörte einer niederländischen Schule von Kartographen an. Auf einem von ihm 1541 angefertigten Globus sind bereits Loxodromen eingetragen ebenso wie in der 1568 fertiggestellten ersten Weltkarte. Seinen noch bis heute anhaltenden Ruhm verdankt er jedoch dem erst posthum, 1595, von seinem Sohn herausgegebenen und gedruckten Weltatlas. Auf dem Titelblatt des Kartenwerks trägt der Riese Atlas die Erdkugel. So entstand der geographische Begriff *„Atlas“* (ausführlich in [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 263–265]).

Neben der niederländischen Schule der Kartenzeichner, der auch Abraham Ortelius (1527–1598) angehörte, bildeten sich kartographische Schulen in der Schweiz, in Österreich, Deutschland, in Osteuropa und England heraus. Im

17./18. Jahrhundert dominierte die französische Kartographie mit genauen Karten (ausführlich in [Kupcik 1980]).

Der lange Zeit in portugiesischen Diensten die Küsten Westafrikas befahrende Deutsche Martin Behaim (1459–1507) schuf 1492 in Nürnberg einen „Erdapfel“ – einen Globus. Doch konnte er die im selben Jahr von Kolumbus gemachte große Entdeckung eines neuen Kontinents noch nicht berücksichtigen. Der Behaimsche Globus ist der älteste erhaltene Erd-Globus. Der heute in Krakau aufbewahrte sog. Jagiellonische Weltglobus (1510) berücksichtigte zum erstenmal den neuen Erdteil Amerika. Die Herstellung von Globen, von kugelförmigen Wiedergaben der Erdkugel, wurde im 16./17. Jahrhundert zu einer Hauptaufgabe der Geographen. Für Begüterte wurde es Mode, einen Globus zu besitzen.

Albrecht Dürer

Albrecht Dürer (1471–1528) lebte und wirkte in kulturellen und wirtschaftlichen Zentren im Europa der Renaissance. Sein Großvater schon war Goldschmied gewesen und hatte seine Kunst an den Sohn in Nürnberg weitergegeben. Unser Albrecht Dürer war das dritte von 18 Kindern. Vater Dürer und sein Nachbar Koberger – ein Goldschmied (ca. 1445–1513) – gehörten zu den angesehensten Handwerksmeistern Nürnbergs. Aus der Drucker-Werkstatt von Koberger ging u.a. der Druck der bedeutenden „Weltchronik“ von Hartmann Schedel hervor. Albrecht Dürer wandte sich mit väterlicher Erlaubnis dem Zeichnen und Malen zu und lernte bei dem bedeutenden Maler Wolgemut (um 1445–1513), einem Pionier des Holzschnittes und des Kupferstiches.

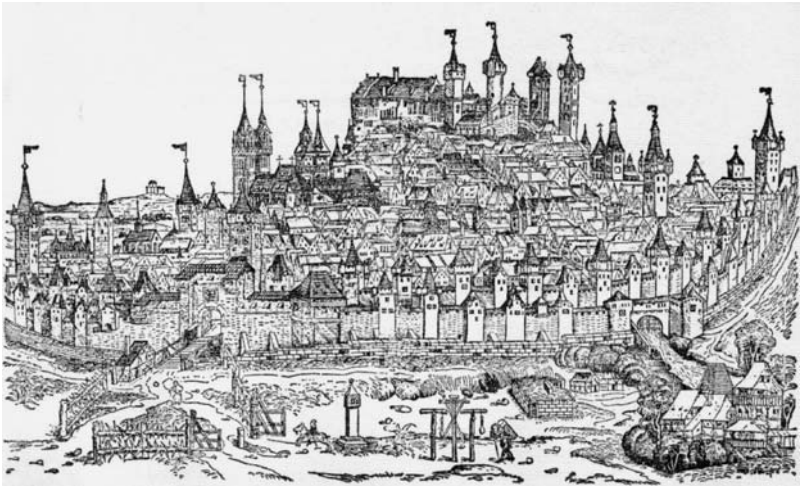


Abb. 7.7.7 Stadtansicht von Nürnberg aus Schedels Weltchronik [UB Leipzig]

Abb. 7.7.8 Albrecht Dürer, Selbstportrait 1498
[Museo Nacional del Prado, Madrid], [Wikimedia Commons]

Es folgten Wanderjahre – Colmar, Straßburg, Basel, vielleicht erstmals Italien – ehe Dürer in Nürnberg die Tochter eines einflussreichen Kunsthandwerkers heiratete. Doch verlief die Ehe glück- und kinderlos. Nach Reisen – wohl auch wegen der in Nürnberg wütenden Pest – kehrte er erst 1496 nach Nürnberg zurück, jetzt voller Pläne für Lehrwerke für Künstler auf der Basis theoretischer Grundelemente. So entstand 1525 die *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und richtscheyt* (schon 1532 lateinisch in Paris gedruckt). Die Drucklegung (1528) seiner *Vier Bücher von menschlicher Proportion* hat er nicht mehr erlebt. Dürer lebte als Gebender und Nehmender in einem Kreis ausgezeichneter Verleger, Wissenschaftler, Künstler, Drucker und einflussreicher Patrizier: Er war befreundet mit dem Humanisten und Nürnberger Ratsmitglied Willibald Pirckheimer (1470–1530) und zeichnete u. a. eine Armillarsphäre für eine von ihm herausgegebene, ins Lateinische übersetzte Ausgabe des Ptolemaios. Dürer verkehrte u. a. mit den Nürnberger Mathematikern und Astronomen Bernhard Walther (ca. 1430–1504) und Johannes Werner (1468–1522), mit dem Wiener Hofkartographen Johannes

Stöberer (lat. Stabius, ca. 1450–1522; an einer Karte der halben Erdkugel von Stabius wirkte Dürer mit) und mit dem Mathematiker Nikolaus Kratzer (1486/87–1550), dem Hofastronomen des englischen Königs Heinrich VIII.

Auch hat Dürer auf die vorzüglichen Bibliotheken von Pirckheimer, Walther und Werner zurückgreifen und so, als Autodidakt, den Zugang zur Wissenschaft der Antike und der seiner Zeit finden können.

1512 trat Dürer in die Dienste von Kaiser Maximilian. Für ihn übernahm Dürer neben anderen angesehenen Künstlern Randzeichnungen für dessen Gebetbuch und monumentale Holzschnitte wie die *„Ehrenpforte Kaiser Maximilians“* (1515). Anläßlich des Augsburger Reichstages schuf Dürer ein Holzschnittbildnis (1518) des Kaisers.

> *„Über Albrecht Dürer, den Künstler, gibt es überreichlich Literatur, und es ist nicht zu erwarten, dass diese Flut in der Zukunft versiegen wird. Über Albrecht Dürer, den Geometer, d. h. vor allem über seine beiden großen theoretischen Schriften ‚Underweysung der messung‘ (1525, erweiterte posthume Ausgabe 1538) und ‚Vier Bücher von menschlicher Proportion‘ (1528) gibt es ebenfalls erstaunlich viel Literatur, relativ neue, aber auch einiges aus dem 19. Jahrhundert, und wenn man kurze Erwähnungen mitzählen will, reicht sie sogar bis in das 16. Jahrhundert zurück. Dennoch gibt es hier ein großes Defizit. Gerade in unseren Tagen zeigt sich aber, dass vieles was Dürer gedacht und versucht hat, erst aus einem sehr aktuellen Mathematikverständnis heraus als Mathematik oder zumindest als mathematikrelevant gelten kann.“*
> [Dürer 2004], [Peiffer 1995]

Schreiber analysiert dort die einschlägige Literatur und hebt in dieser Arbeit einige Aspekte hervor, die Dürer als Geometer kennzeichnen. So erweist sich Dürer z. B. als Meister des Zweitafel-Verfahrens: Grund- und Aufriss seien gegeben; daraus wird das Zweitafelbild konstruiert. In gewissem Sinne kann man Dürer als Vorläufer von Gaspard Monge (1746–1818) und der Etablierung der darstellenden Geometrie am Ende des 18. Jahrhunderts verstehen. Und J. Sellenriek formuliert als ein anderer Kronzeuge:

> *„In aller Deutlichkeit und Klarheit erscheint im Nürnberg des Jahres 1525 erstmals das fertig ausgereifte Grund-Aufriß-Verfahren, wie es noch heute nach seiner Verwissenschaftlichung in der Darstellenden Geometrie angewendet wird. Kein Geringerer als der universelle Künstler-Forscher Albrecht Dürer stellt es in seinem gedruckten Buch in beispielhafter Weise und unübertroffener Klarheit vor.“*
> (J. Sellenriek, zitiert bei [Dürer 2004])

Hervorzuheben sind Dürers Beiträge zur exakten und näherungsweisen Bewältigung geometrischer Konstruktionsaufgaben, wobei er begrifflich klar und deutlich unterscheidet zwischen exakter und näherungsweiser Konstruktion. Dürer hat sich um eine deutsche Fachsprache bemüht, freilich haben sich

Abb. 7.7.9 Mechanische Erleichterung perspektivischen Zeichnens: Verwendung eines verstellbaren Stabes zur Fixierung des Augpunktes. Vorschläge Dürers in der 2. Auflage der [Underweysung 1525]

Wortschöpfungen wie Richtscheit (für Lineal), Eilinie (für Ellipse) nicht eingebürgert. Dies steht im Zusammenhang damit, dass er ganz spezielle Kurven und Körper „erfunden“ hat, die mittels spezieller Mechanismen oder punktweise konstruiert werden. Dürer dürfte intuitiv den mathematischen Begriff der Abbildung oder sogar den der Funktion vor Augen gehabt haben. Er gab Beiträge zur Ornamentik und zur Parkettierung. Und schließlich ging er über seine Zeitgenossen hinaus, indem er jedes mögliche Objekt in der Ebene und im Raum wie Lebewesen, Gebäude u. a. (die als Ganzes keinem einheitlichen geometrischen Gesetz genügen) zum Gegenstand der Geometrie machte – ein Bruch mit der traditionellen Meinung, dass der Gegenstand der Geometrie nur Punkte, Strecken, Dreiecke, Kreise, Kegelschnitte und platonische Körper umfasse.

Und schließlich behandelte Dürer – neben anderen Zeitgenossen – die Kunst perspektivischen Zeichnens und gab mechanische Vorrichtungen an, perspektivische Bilder zu gewinnen [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 284].

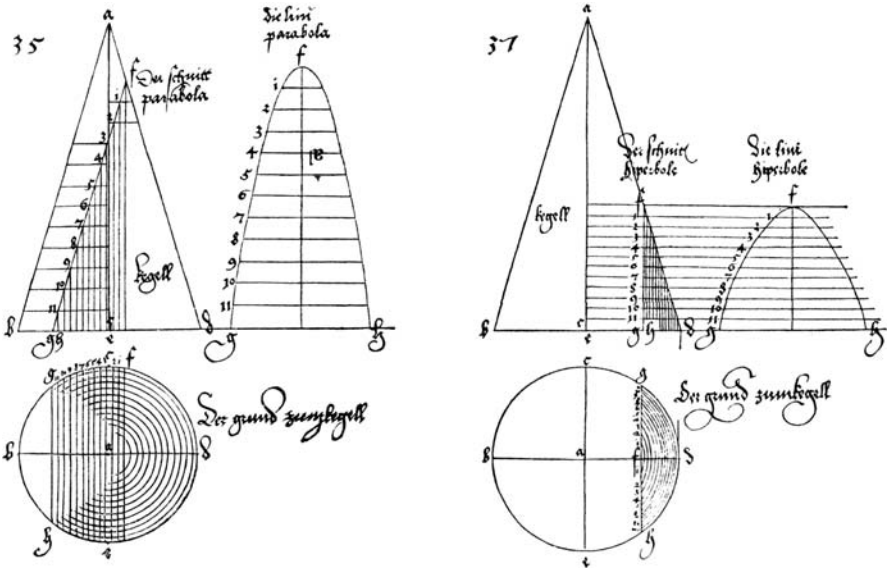


Abb. 7.7.10 Parabolischer und hyperbolischer Schnitt eines Drehkegels [Underweysung 1525]

Ein Vergleich zwischen Dürer und Leonardo liegt nahe:

> *„Dürer vollendet drei theoretische Schriften, die – bis heute mehrfach aufgelegt und gedruckt – leicht zugänglich sind. Leonardo bringt nichts zu Ende. Seine schriftliche Hinterlassenschaft wird nach seinem Tode in alle Winde zerstreut und erst in unserem Jahrhundert allmählich wieder zusammengefügt, wobei neben überraschenden Neuentdeckungen von Blättern Leonardos auch Fälschungen und Irrtümer ans Licht kommen (. . .) Dürer neigt zu theoretischem, deduktivem, systematischem Vorgehen. Leonardo ist sprunghaft, trennt selten Mathematik von Natur, Deduktion von Induktion, irrt sich häufig. Seine Stärken liegen viel mehr in der Vorwegnahme technischer Prinzipien und Erfindungen und in der subtilen Beobachtung der Natur.“*
> [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 274]

Das Bemühen um Realismus in darstellender und bildender Kunst ist die historische Wurzel der Zentralperspektive (ausführlich in [Anderssen 1992]). Vermutlich hat Filippo Brunelleschi (1377–1446), der die Domkuppel in Florenz konstruierte, bereits um 1400 ein Verfahren erfunden, aus dem Grund- und Aufriss eine korrekte perspektivische Ansicht eines Gebäudes zu konstruieren [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 275].

Bei G. Papay: *Zur Raumauffassung der Renaissance in Wissenschaft und Kunst* heißt es dazu:

> *„Mit der Festlegung des Ausgangspunktes bzw. des Fluchtpunktes erfolgte zugleich eine gesteigerte anthropometrische Auffassung des Bildraumes. Auf diese Weise erhielt die zentralperspektivische Konstruktion auch einen symbolischen Charakter. Durch die Wiedergabe der göttlichen Ordnung im Raum und ihre anthropometrische Auslegung konnte sogar eine neue Beziehung zwischen Gott und Mensch angedeutet werden, die z.B. durch Michelangelo (Die Erschaffung Adams auf der Decke der Sixtinischen Kapelle) eindrucksvoll thematisiert wurde. Das erste überlieferte Bild mit der zentralen Einpunktperspektive ist das Fresco Trinität von Masaccio, das um 1425 entstand.“*
> [Papay 1998, S. 171]

Man sollte nicht übersehen, dass die Künstler die Perspektive als eine Art Zunftgeheimnis hüteten und in ihrer Werkstatt die Kunst nur an Auserwählte weitergaben. Beispielsweise war auch Dürer nach Italien gereist, um die Perspektive kennen zu lernen. Auf der anderen Seite erschienen in der Mitte des Jahrhunderts schriftliche Darlegungen der Perspektive, so *Della pittura libri tre* (Drei Bücher über die Malerei) (1436) des wissenschaftlich gebildeten Leone Battista Alberti (1404–1472), *Trattato della architectura* (Abhandlung über die Architektur (um 1460) von Antonio Averlino Filarete (ca. 1400–1469) und *De prospectiva pingendi* (Über die Perspektive beim Malen) (um 1475) von Piero della Francesca (ca. 1420–1492).

Um 1600 schrieb Guidobaldo del Monte (1545–1607) ein zwar umständliches, aber auf Beweise gegründetes Lehrbuch der Perspektive. Seitdem breitete sich die Kunst der Perspektive über das nördlich der Alpen gelegene Europa aus, nach Frankreich, Deutschland (Dürer), den Niederlanden (Stevin) und auch nach England.

> *„Vor allem geriet sie* (die Perspektive, Wg.) *gegen Ende des 16. Jahrhunderts in die Hände der Jesuiten, die sie zur Perfektion entwickelten, für die sie aber ein Instrument ihrer Strategie war, die Menschen durch überwältigende Sinneseindrücke für den Katholizismus zurückzugewinnen.“*
> [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 276 u. 280]

7.8 Astronomie und Trigonometrie

Von altersher gab es enge Beziehungen zwischen Astronomie und Trigonometrie als dem mathematischen Werkzeug der theoretischen, der rechnenden Astronomie.

Die Entwicklung von Astronomie und Trigonometrie im Europa der Renaissance knüpfte natürlich an die Antike und an Kenntnisse aus dem islamischen Kulturgebiet an. Im 13. Jahrhundert galt die Aufmerksamkeit vor allem der Verbesserung der Tafeln. Die bis dahin bestimmenden Tafeln, die

1260/1266 auf Befehl des Königs Alfons X. von Kastilien und Leon (1226–1284) berechneten sog. Alfonsinischen Tafeln, erwiesen sich als nicht genügend genau und umfangreich [Knobloch 1996].

Auf diesem wissenschaftlichen Hintergrund entstand während des 14./15. Jahrhunderts in Wien eine herausragende astronomisch-mathematische Schule, mit Johannes von Gmunden (ca. 1380 bis), seinem Nachfolger Georg von Peuerbach (oder Peurbach) (1423–1461) sowie dessen Schüler und Freund Regiomontanus (1436–1476), der als der bedeutendste europäische Mathematiker des 15. Jahrhunderts gilt.

Johannes von Gmunden

Verschiedene Städte mit dem Namen Gmunden stritten sich um den Ruhm, Geburtsstadt des Johannes von Gmunden zu sein; heute steht Gmunden am Traunsee als Geburtsort fest. 1402 wurde Johannes an der Universität Wien immatrikuliert und promovierte 1406. Anfangs (seit 1406) hielt er Vorlesungen über nichtmathematische Gegenstände, wandte sich 1412 mathematischen Themen zu und seit 1416 bis 1425 auch der Astronomie. Er wurde an der Wiener Universität der erste speziell für Mathematik und Astronomie berufene Professor.

An der Wiener Universität übte er trotz Erkrankung mehrere verantwortungsvolle Ämter aus. Seine Grabstätte ist unbekannt. Seine mathematischen Vorlesungen lehrten das Übliche und gingen über den traditionellen Stoff der Scholastik nicht hinaus. Immerhin wird an den Ausarbeitungen seiner Vorlesungen klar, dass die muslimische Sinusgeometrie in Wien bekannt war.

Auf zwei Gebieten wies Johannes von Gmunden neue Wege: bei der Erarbeitung von Tafeln und bei der Verbesserung bekannter Tafelwerke sowie bei der Konstruktion neuartiger astronomischer Instrumente. Die Tafeln registrieren die Bewegungen von Sonne, Mond und den Planeten und anderes

Abb. 7.8.1 Siegel der Universität Wien, gegründet 1365; 600. Geburtstag des Johannes von Gmunden (Österreich 1965; 1984)

mehr. Die Beschreibung der Konstruktion und der Funktionsweise der Instrumente betreffen Astrolab, Quadrant, das Torquetum und eine zylindrische Sonnenuhr.

Zweifellos hat Johannes von Gmunden an frühere Gelehrte aus Frankreich, England und anderswo angeknüpft, aber ebenso ist unbestreitbar, dass er durch seine Lehrtätigkeit und seine zahlreichen Schriften einen umfassenden Einfluss ausgeübt hat, vorzüglich in Mitteleuropa [K. Vogel, DSB, Bd. VII, S. 117–122].

Georg von Peuerbach

Georg von Peuerbach (1423–1461) wurde ebenfalls nachhaltig durch Johannes von Gmunden beeinflusst; ihm standen aller Vermutung nach dessen Bücher und Instrumente zur Verfügung. Da Johannes 1442 gestorben war und sich Georg erst 1446 an der Universität Wien immatrikulierte, kann es wohl keinen persönlichen Kontakt, z. B. durch Teilnahme an Vorlesungen, gegeben haben.

Georg stammt aus Peuerbach in Oberösterreich, ca. 40 km westlich von Linz. Er wurde 1448 an der Universität Wien Bakkalaureus und 1453 in die Artistenfakultät aufgenommen. Zwischen 1448 und 1453 unternahm er ausgedehnte Reisen durch Deutschland, Frankreich und Italien; seit 1448 hat er sich mehrfach mit Nikolaus von Kues getroffen. Er hatte sich schon damals hohe Reputation als Astronom erworben.

Wieder in Wien war er als Hofastrologe des ungarischen Königs tätig. An der Universität hielt er zunächst Vorlesungen zur Poesie und Rhetorik.

Im Alter von 13 Jahren (1450) hatte Regiomontanus, vom Ruhm Georgs angezogen, Leipzig verlassen und sich in Wien immatrikuliert. Gemeinsame Arbeiten betrafen u. a. die Präzisierung der Alfonsinischen Tafeln, Kometenbeobachtungen und Sonnenfinsternisse. Später hat Regiomontanus Georg als seinen Lehrer bezeichnet.

1460 kam Kardinal Bessarion (ca. 1403–1472) von Rom aus in diplomatischer Mission nach Wien, um Hilfe für einen Kreuzzug gegen die Türken zur Rückeroberung von Konstantinopel einzufordern. Bessarion traf Georg von Peuerbach und Regiomontanus und ermunterte sie, eine abgekürzte Version von Ptolemaios' *Almagest* zu verfassen. Es gab auch Pläne zur weiteren Zusammenarbeit mit Bessarion unter Benutzung griechischer Manuskripte, die sich in dessen Besitz befanden. Bessarion sprach griechisch als Muttersprache, da er aus Trapezunt stammte.

Dies ist die auf dem Zusammenwirken hochmotivierter Gelehrter beruhende Entstehungsgeschichte des Werkes *Epitoma in Almagestum Ptolemaei* (Auszug aus dem Almagest von Ptolemaios), das zum bedeutendsten und modernsten Lehrbuch der geozentrischen Astronomie aufstieg. Gerade in der Verdichtung und klaren Darlegung des Ptolemäischen Textes lag das Geheimnis des Erfolges.

Georg von Peuerbach konnte nur die ersten sechs Teile vollenden; er starb jung mit nur 38 Jahren. Auf dem Totenbett soll er Regiomontanus beschworen

Abb. 7.8.2 Titelblatt der „Epitoma“ [Johannes Regiomontanus Epitoma, in: Almagestum Ptolemaei 1496]

haben, das Buch zu vollenden. Dieser erfüllte die dringende Bitte in Italien während der nachfolgenden zwei Jahre. Vermutlich 1463 (10 Jahre nach dem Fall von Konstantinopel) war der Text vollendet, versehen mit einer Widmung von Regiomontanus an Bessarion. Der Druck erfolgte allerdings erst 1496, 20 Jahre nach dem Tod von Regiomontanus. Weitere Auflagen folgten 1543 und 1550.

In der nur sehr kurzen Schaffenszeit hat Georg von Peuerbach weitere bedeutende Werke zur Astronomie verfasst, darunter die *Theoriae novae planetarum* (Neue Theorien über die Planeten) und die äußerst umfangreiche Sinustafel. Sie schreitet fort von 10′ zu 10′; frühere waren nur von halbem Grad zu halbem Grad fortgeschritten.

Das erste Werk bezog muslimische Arbeiten ein. Eine ebenfalls als Lehrwerk gedachte *Einführung in die Arithmetik* – praktisches Rechnen mit ganzen Zahlen und Brüchen – wurde mehrfach nachgedruckt, bis ins 16. Jahrhundert [C. Doris Hellmann/Noel M. Swerdlow. DSB, XV Supplementband, S. 473–479].

Unglücklicherweise starb auch Regiomontanus (1436–1476) sehr jung in Rom, an einer grassierenden Seuche. Dies und der frühe Tod von Peuerbach bremsten die verheißungsvolle Entwicklung von Astronomie und Mathematik bis in die Zeit von Brahe.

Johannes Regiomontanus

Regiomontanus (eigentlich Johannes Müller) wurde 1436 in dem fränkischen Städtchen Königsberg geboren; der Sitte der Zeit gemäß nannte er sich latinisiert Regiomontanus (d. h. Königsberger).

Abb. 7.8.3 Der ungarische König Matthias I Corvinus (Regierungszeit 1443–1490), ein begeisterter Vertreter des Renaissance-Humanismus. Hier mit einem Lorbeerkranz als Zeichen seiner Erfolge als Poet. Auf ihn geht die Gründung der weltberühmten Bibliothek *„Corvina“* zurück. Bibliothek Corvina (Ungarn 1970, 1973)

Nach kurzzeitigem Studium in Leipzig wandte sich Regiomontanus nach Wien und wurde bald Schüler und Mitarbeiter von Georg von Peuerbach. Nach dessen frühem Tod vollendete er 1463 in Rom das Manuskript des wegweisenden Werkes *Epitoma in Almagestum Ptolemaei* (Auszug aus dem Almagest des Ptolemaios). In enger Beziehung zu Bessarion erlernte Regiomontanus die griechische Sprache. In einem Brief aus dem Jahre 1464 an Giovanni Bianchini, den Hofastronomen des Herzogs von Ferrara, berichtet Regiomontanus:

> *„Hier sage ich (. . .), dass ich jetzt in Venedig Diophantos, einen griechischen Mathematiker, gefunden habe, der noch nicht ins Lateinische übersetzt ist. Es wurden nämlich nur sechs Bücher gefunden, die nun bei uns sind. Im Vorwort verspricht er aber, dass er dreizehn schreiben werde. Wenn dieses Buch, das wahrhaftig wunderschön und höchst schwierig ist, sich als vollständig erweisen sollte, dann möchte ich es ins Lateinische übersetzen, denn dafür würden meine Griechischkenntnisse ausreichen, die ich im Hauses meines hochverehrten Herrn* (Bessarion, Wg.) *mir angeeignet habe, (. . .) auf dass das lateinische Schrifttum dieses neue und höchst wertvolle Buch nicht entbehren muss.“*
> (Deutsch zitiert in [Mett 1996, S. 76f.])

Immerhin begann durch Regiomontanus die Rezeption von Diophantos.

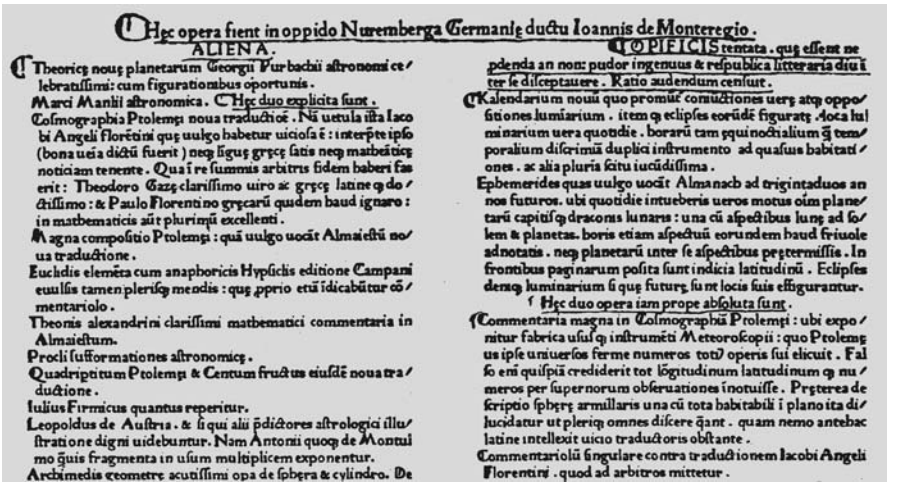
Im Frühjahr 1464 hielt Regiomontanus in Padua Vorlesungen über den muslimischen Wissenschaftler al-Farġhānī. Unter Bezug auf al-Battānī könnte Regiomontanus eine Vorform des fundamentalen Kosinussatzes der sphärischen Trigonometrie gefunden haben; er findet sich ausformuliert im Buch II seiner Abhandlung *De triangulis omnimodis* (Über alle Arten von Dreiecken).

Während der Zusammenarbeit mit Georg von Peuerbach war Regiomontanus sich der Notwendigkeit bewusst geworden, eine zusammenhängende Theorie der Trigonometrie zu erarbeiten.

Regiomontanus hat mehrfach die Unzulänglichkeit der Alfonsinischen Tafeln kritisiert. Im Jahre 1465 schreibt er an Jakob von Speyer, den Hofastrologen des Fürsten von Urbino:

> *„Wir lesen die bedeutendsten Bücher in dieser Wissenschaft nicht, noch erkundigen wir irgendwann, ob der Himmel unserer Berechnung entspricht. Ja, wir kleben ganz nach Art gutgläubiger Weiber an jenen Alfonsinischen Tafeln und ihren Abkömmlingen, gleichsam als ob sie von Gott gesandt seien und nie einen Fehler erlitten hätten.“*
> [Mett 1996, S. 81]

Seit 1467 hielt sich Regiomontanus in Buda auf, seit 1468 Hauptstadt des Königreichs Ungarn. Dort schuf er trigonometrische Tafeln, u. a. eine Sinustafel in hexagesimaler Unterteilung – die Werte sind auf 5 Stellen genau – auch eine Tangenstafel und vermutlich noch weitere genaue Tafeln. Später hat Re-



Hęc opera fient in oppido Nuremberga Germanię ductu Ioannis de Monteregio.

ALIENA.

Theoricę nouę planetarum Georgii Purbachii astronomi celebratissimi: cum figurationibus oportunis.

Marci Manlii astronomica. Hęc duo explicita sunt.

Cosmographia Ptolemęi noua traductioē. Nā uetula illa Iacobi Angeli florētini quę uulgo habetur uiciosa ē: interpte ipso (bona uia dictū fuerit) neq; ligus grȩcę satis neq; matheticę noticiam tenente. Quā re summis arbitris fidem haberi fas erit: Theodoro Gazę clarissimo uiro ac grȩcę latineq; docti ssimo: & Paulo Florentino grȩcarū quidem haud ignaro: in matbematicis aūt plurimū excellenti.

Magna compositio Ptolemęi: quā uulgo uocāt Almaiestū nouā traductione.

Euclidis elemēta cum anaphoricis Hypsicli editione Campani euulsis tamen plerisq; mendis: quę ꝓprio etiā idicabūtur cōmentariolo.

Theonis alexandrini clarissimi matbematici commentaria in Almaiestum.

Procli sufformationes astronomicę.

Quadripartitum Ptolemęi & Centum fructus eiusdē noua traductione.

Iulius Firmicus quantus reperitur.

Leopoldus de Austria. & si qui alii ꝓdictores astrologici illustratione digni uidebuntur. Nam Antonii quoq; de Montulmo ḡuis fragmenta in usum multiplicem exponentur.

Archimedis geometre acutissimi opa de sphęra & cylindro. De

TOPICIS tentata. quę essent nedenda an non: pudor ingenuus & respublica litteraria diu inter se disceptauere. Ratio audendum censuit.

Kalendarium nouū quo promūt coniūctiones uerę atq; oppositiones luminarium. item eq; eclipses eorūdē figuratę. loca luminarium uera quotidie. borarū tam equinoctialium ḡ temporalium discrimā duplici instrumento ad quasuis habitationes. ac alia pluria situ iucūdissima.

Ephemerides quas uulgo uocāt Almanach ad triginta duos annos futuros. ubi quotidie intueberis ueros motus oim planarū capitisq; draconis lunaris: una cū aspectibus lunę ad solem & planetas. boris etiam aspectuū eorundem haud friuole adnotatis. neq; planetarū inter se aspectibus ꝓtermissis. In frontibus paginarum posita sunt indicia latitudinū. Eclipses denq; luminarium si quę futurę sint locis suis effigiantur.

Hęc duo opera iam prope absoluta sunt.

Commentaria magna in Cosmographiā Ptolemęi: ubi exponitur fabrica usuſq; instrumēti Meteoroscopii: quo Ptolemęus ipse uniuersos ferme numeros totū operis sui elicuit. Falso eni quispiā crediderit tot ḡgitudinum latitudinumq; numeros per supernorum obseruationes inotuisse. Prȩterea descriptio sphȩrę armillaris una cū tota babitabili i plano ita dilucidatur ut plerisq; omnes discere ḡant. quam nemo antebac latine intellexit uicio traductoris obstante.

Commentariolū singulare contra traductionem Iacobi Angeli Florentini. quod ad arbitros mittetur.

Abb. 7.8.4 Liste der von Regiomontanus geplanten Druckausgaben (Ausschnitt)

giomontanus noch eine dezimal aufgebaute Tafel berechnet mit Schritten von Minute zu Minute. Doch wurden diese Tafeln erst 1541 in Nürnberg gedruckt.

Noch in Italien hatte Regiomontanus die Ausarbeitung einer „Tafel der ersten Sphäre“ begonnen; dort werden die täglichen Bewegungen des Himmelsgewölbes beschrieben. In Buda wurde das Werk vollendet. Er widmete es seinem Freund, dem ungarischen König Matthias I. Corvinus.

1471 verließ Regiomontanus Ungarn und ging nach Nürnberg, einer führenden Handelsstadt mit weitreichenden wissenschaftlichen und kulturellen Verbindungen. Der wohlhabende Instrumentenbauer Bernhard Walther (1430–1504), ebenfalls ein begeisterter Anhänger der Astronomie, stellte Regiomontanus astronomische Instrumente zur Verfügung und richtete ihm eine eigene Druckerei ein. Das erklärte Ziel bestand darin, der Gemeinschaft der Wissenschaftler die klassischen Schriften in Druckausgaben und sogar textkritisch gereinigt zur Verfügung zu stellen. Regiomontanus publizierte sogar eine Liste seiner Druckvorhaben. Vorgesehen zum Druck waren u. a. die Hauptwerke des Ptolemaios, die „Elemente“ Euklids, Werke von Archimedes, die Kegelschnitte des Apollonios, Werke Herons, die Optik von Witelo, die Schriften von Aristoteles zur Mechanik, und natürlich seine eigenen Abhandlungen.

Als Erstes erschien zur Würdigung seines Freundes Georg von Peuerbach die *Neue Planetentheorie*. 1474 folgten die *Ephemeriden*, die ersten derartigen Tafeln, die gedruckt wurden. Aufgelistet wurden die Positionen aller Himmelskörper von 1475 bis 1506. Übrigens führte Kolumbus – nach einer Mitteilung von Humboldt – bei seiner vierten Amerikareise die *Ephemeriden* des Regiomontanus mit sich und benutzte sie zur Vorhersage der Mondfinsternis auf Jamaika vom 29. Februar 1504, um feindliche Indianer zu

beeindrucken. Amerigo Vespucci benutzte die Ephemeriden zur Vermessung der südamerikanischen Küste, insbesondere zur Bestimmung der Lage der Orinoco-Mündung.

Das großangelegte Publikationsvorhaben brach zusammen, noch ehe es voll zur Entfaltung gekommen war. Regiomontanus wurde vom Papst nach Rom gerufen, um mitzuberaten über die notwendig gewordene Kalenderreform. Im Sommer 1475 begab sich Regiomontanus nach Rom, starb dort aber an einer Seuche. Es gab und gibt Gerüchte, Regiomontanus sei vergiftet worden.

Das Hauptwerk von Regiomontanus sind die fünf Bücher *De triangulis omnimodis* (Über alle Arten von Dreiecken). Hier löst sich die Trigonometrie ab von ihrem astronomischen Hintergrund und wird zur selbstständigen mathematischen Disziplin.

Die Notwendigkeit einer geschlossenen Darlegung der ebenen und sphärischen Trigonometrie war Regiomontanus und Georg von Peuerbach bereits bei der Arbeit an der *Epitoma* klar geworden. Im Schlusswort der *Epitoma* kündigt Regiomontanus an, er wolle eine Abhandlung über Trigonometrie schreiben.

Noch in Rom nahm er dieses Werk in Angriff, zunächst für die sphärischen Dreiecke. Er benutzt den Sinussatz und erhält Aussagen über die Seiten und die Winkel (Inhalt der Bücher 3 und 4 von *„De triangulis“*). Dann erst folgt die ebene Trigonometrie, eingegangen in die Bücher 1 und 2 – wiederum gestützt auf den Sinussatz. Hier knüpft er nachgewiesenermaßen an muslimische Gelehrte an. Erst in Buch fünf geht er wieder auf das sphärische Dreieck ein, unter Verwendung des Kosinussatzes. Das Manuskript aus den Jahren 1462/64 blieb aus verschiedenen Gründen unvollendet. Sein Freund Walther hütete eifersüchtig den Schatz, so kam es, dass *„De triangulis“* erst 1533 von Johannes Schöner (1477–1547) in Nürnberg herausgegeben werden konnte.

Um 1505 hatte der Nürnberger Kleriker Johannes Werner (1468–1528) Einblick in die Schriften von Regiomontanus erhalten und verfasste seinerseits 1514 eine *„Sphärische Trigonometrie“*. Dort benutzte er die sogenannte prosthaphairetische Formel $2\sin\alpha\sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha + \beta) - \sin(90^\circ - \alpha - \beta)$, die es gestattet, die mühsame Multiplikation von mehrstelligen trigonometrischen Werten auf eine Subtraktion zurückzuführen. Entsprechendes wird später auch die Verwendung der Logarithmen leisten.

In einer Notiz bemerkt Regiomontanus, man müsse wegen der Bewegung der Erde die Bewegung der Sterne ein wenig ändern [Zinner 1988, S. 135]. Ziemlich spekulativ hat man daraus Regiomontanus zum Vordenker der heliozentrischen Astronomie gemacht; überdies sei seine Bemerkung zu Domenico Maria di Novara (1454–1504) in Bologna gelangt; Novara war definitiv der Lehrer von Copernicus.

Über den Universalgelehrten Regiomontanus wäre noch viel zu berichten, über seine Studien zur Kreisquadratur, über vollkommene Zahlen, über seine Kalender für den Hausgebrauch, über die Konstruktion von Sonnenuhren

und Kompass und vieles andere mehr. Verwiesen sei dazu auf [Zinner 1988], [E. Rosen, DSB, XI, S. 348–352], [Folkerts 2006].

Es sei aber ausdrücklich hervorgehoben, dass Regiomontanus auch neue Wege in der Algebra beschritten hat. In einem eigenhändigen Manuskript aus dem Jahre 1456 benutzt er eine spezielle Symbolik und behandelt zahlreiche arithmetische und algebraische Probleme (New York, Columbia Universität, Plimpton 188). Und in der Handschrift seiner *„De triangulis“* verwendet er hochgestellte Zeichen für die Unbekannte x und ihr Quadrat x^2, einen langgezogenen Strich für das Gleichheitszeichen, ein Zeichen für die Quadratwurzel und eine Abkürzung für *„minus“*. Diese Symbolik ist älter als die der später entwickelten sog. Deutschen Coß. Die Verbindung zu den Algebrastudien von Johannes Widmann wird offensichtlich durch einen Quellenvergleich.
Nach Folkerts kann man urteilen:

> *„Somit ist die Sammlung des Regiomontanus ein Bindeglied zwischen den italienischen ‚maestri d'abbaco' und den deutschen Autoren algebraischer Schriften. Bei zwei Aufgaben treten schon im Gleichungsansatz negative Zahlen auf, die als Schulden interpretiert werden. Regiomontanus bemüht sich, bei Aufgaben der unbestimmten Analytik allgemeine Lösungsverfahren zu finden, er kennt die chinesische tayen-Methode zum Lösen des Resteproblems und beschäftigt sich mit dem näherungsweisen Ausziehen der Quadratwurzel. Bei einem Zinzeszinsproblem, das auf eine kubische Gleichung führt und das man in ähnlicher Form schon bei den italienischen maestri d'abbaco findet, weist Regiomontanus auf den körperlichen Gnomon hin; die beigefügte Figur lässt an die Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung denken, die Scipione del Ferro etwa 50 Jahre später fand (. . .) Aus seinem Briefwechsel wissen wir, daß Regiomontanus ahnte, wie man vorgehen müsse, um die allgemeine kubische Gleichung zu lösen, wenn er auch noch nicht dazu in der Lage war. Eine Dreiecksaufgabe in seinem Briefwechsel führt ebenfalls auf eine kubische Gleichung. Regiomontanus erkennt den Zusammenhang mit der Aufgabe, die Sehne zum Bogen 1° zu bestimmen, wenn die Sehne zum Bogen 3° bekannt ist; er wusste also, dass die Winkeldreiteilung mit der Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung zu tun hat.“*
> (Zitiert in [Alten et al. 2003, S. 230], weitere interessante Detailstudien zu Regiomontanus in [Folkerts 2006])

Und noch eine Bemerkung: Regiomontanus war kritisch gegenüber seiner Arbeit. Mit einem Schuss Selbstironie schrieb er 1464 in einem Brief:

> *„Aber ich weiß nicht, wohin die Feder entweichen wird; sie wird das ganze Papier verbrauchen, wenn ich sie nicht zurückhalte. Eine Frage nach der andern fällt mir ein und so viele schöne Fragen kommen mir in den Sinn, so dass ich ungewiss bin, welche ich vorbringen soll.“*
> (Zitiert bei [Zinner 1990, S. 117f.])

Abb. 7.8.5 Johann Regiomontanus; Nicolaus Copernicus (Porträt aus Thorn 16. Jh.), [Wikimedia Commons]

Nicolaus Copernicus

Eine spezielle Passage in der *„Epitoma“* (Buch V, Satz 22) erregte die Aufmerksamkeit von Copernicus während seines Aufenthaltes in Bologna, auch dies war ein Anstoß für die Umwälzung der Astronomie durch Copernicus.

Niklas Koppernigk (1473–1543), der seinem Namen den Sitten jener Zeit entsprechend zu Nicolaus Copernicus (häufig auch Coppernicus) latinisiert hatte und unter diesem Namen publizierte, wurde am 19. Februar 1473 in der 1213 vom Deutschen Orden gegründeten Handelsstadt Thorn (heute Toruñ) geboren, die im 14. Jahrhundert Mitglied der Hanse geworden war und seit dem Zweiten Thorner Frieden 1466 als selbstständiger Stadtstaat unter pol-

Abb. 7.8.6 Nicolaus Copernicus (BRD 1973). Die Marke ist fehlerhaft: Auf der Kreisbahn der Erde laufen zwei Planeten

Abb. 7.8.7 Stadtansicht Krakau; kolorierter Holzschnitt 1493 [Schedelsche Weltchronik 1492], [Wikimedia Commons]

nischer Oberhoheit stand. Niklas war das jüngste von vier Kindern eines aus Krakau zugewanderten Kaufmanns, der in die hoch angesehene Familie Watzenrode eingeheiratet hatte. Als Nicolaus 10 Jahre alt war, starb der Vater. Ein Onkel mütterlicherseits, Lucas Watzenrode, nahm sich der beiden Neffen Andreas und Nicolaus an.

Watzenrode stieg als hervorragender Vertreter des Humanismus im Dienst der Kirche bis zum Bischof des Ermlandes (heute Warmia) auf und nahm entschlossen am Kampf gegen Ritter des Deutschen Ordens teil. Im Jahre 1491 sandte der Onkel Nicolaus zum Studium nach Krakau, damals Hauptstadt Polens und Sitz einer der ältesten und berühmtesten Universitäten nördlich der Alpen. Nicolaus wurde von der dortigen hervorragenden mathematisch-astronomischen Tradition maßgeblich geprägt.

Nach einer Zwischenphase – 1495 bis 1496 – als Domherr in Frauenburg (heute Frombork), Bistum Ermland, ging Copernicus 1496 auf Wunsch des Onkels nach Italien und setzte dort seine Studien fort, in Bologna und Padua. 1503 promovierte er in Ferrara zum Doktor der Rechte. 1510 kehrte er nach Frauenburg zurück und führte seine astronomischen Studien weiter, zeitweise unterbrochen durch sein organisatorisches Engagement im Kampf gegen die Ritter des Deutschen Ordens. Seit Mitte 1542 schwanden seine körperlichen Kräfte. Er starb am 24. Mai 1543 und wurde im Dom von Frauenburg beigesetzt.

Den Widerspruch zwischen ptolemäischer Theorie und den Beobachtungen hatte Copernicus wohl schon in Krakau erkannt, vor allem aber in Bologna im Kontakt mit dem Regiomontanus-Schüler Domenicus Maria di Novara (1454–1504). Möglicherweise hat Copernicus schon in Italien von dem Episode

gebliebenen heliozentrischen Ansatz bei dem antiken Astronomen Aristarchos erfahren; Archimedes hatte in der *„Sandrechnung“* darüber berichtet.

Als Copernicus aus Italien zurückkehrte, dürfte er im Besitz der Idee einer heliozentrischen Astronomie gewesen sein. Die Grundideen hat er spätestens 1514 niedergelegt. Unter der Bezeichnung *Commentariolus de hypothesibus motuum coelestium* (Entwurf über die Hypothesen der himmlischen Bewegungen) ist es in die Geschichte der Wissenschaften eingegangen. Der *„Commentariolus“* war nicht zum Druck bestimmt, sondern nur zur Diskussion mit Freunden und Bekannten. (Drei Abschriften konnten bisher aufgefunden werden.) Im Ganzen handelte es sich um etwas mehr als dreitausend Worte, also ca. 7 Seiten. Copernicus bezog sich auf die Planetentheorien u. a. von Eudoxos und Ptolemaios und stellte fest, dass diese bei aller Großartigkeit nicht befriedigen können. Insbesondere sei das ptolemäische System weitaus zu kompliziert. Er, Copernicus, sei beim Nachdenken auf eine weit einfachere Lösung gestoßen:

> *„Da ich die Aufgabe anpackte, die recht schwierig und kaum lösbar schien, zeigte sich schließlich, wie es mit weit weniger und viel geeigneteren Mitteln möglich ist, als man vorher ahnte. Man muß nur einige Grundsätze, auch Axiome genannt, zugestehen.“*
> (Zitiert nach [Zinner, 1951, S. 61])

Unter anderem hält Copernicus in seinem berühmten Werk *De revolutionibus* fest, dass der Erdmittelpunkt nicht der Mittelpunkt der Welt, sondern der Schwere und der Mondbahn ist, dass alle Planetenbahnen die Sonne umgeben, als stünde sie in der Mitte, und dass alles, was uns bei der Sonne an Bewegung sichtbar ist, nicht durch sie selbst entsteht, sondern durch die Erde und durch die Erdbahn, auf der wir uns um die Sonne bewegen wie jeder andere Planet [Zinner 1951, S. 61].

Die Kunde von einer neuartigen Astronomie drang auch bis Wittenberg, ins Herz der Reformation. Der junge Wittenberger Mathematikprofessor Joachim Rheticus (Georg Joachim von Lauchen, 1514–1576) reiste 1539 nach Frauenburg, um Näheres an der Quelle zu erfahren. Er beschrieb die Ergebnisse des Copernicus in seiner *Narratio prima* (Erster Bericht), die 1540 in Danzig gedruckt wurde. Rheticus stellte die Methode von Copernicus als Wechselspiel von Beobachtung und mathematischer Durchdringung heraus. Copernicus seinerseits bemühte sich um die Bereitstellung angemessener mathematischer Hilfsmittel. In Wittenberg erschien 1542, vermittelt durch seinen Freund und Verehrer Rheticus, eine trigonometrische Schrift *De lateribus et angulis triangulorum* (Über die Seiten und Winkel der Dreiecke). Sie wurde 1551 durch Rheticus weitergeführt: 7-stellige Tafeln der trigonometrischen Funktionen in Schritten von $10''$ zu $10''$.

Im Jahre 1536 nahm Rheticus seine Vorlesungstätigkeit zur Mathematik, speziell zur Arithmetik in Wittenberg auf. Philipp Melanchthon (1497–1565) schickte der Vorlesung von Rheticus eine „Rede über den Nutzen der Arithmetik“ oder „Vorrede zur Arithmetik des Georg Joachim Rheticus“ voraus.

Abb. 7.8.8 Collegium maius in Krakau (Polen 1971)

(Es soll nicht verschwiegen werden, dass Stefan Deschauer, Dresden, diese Vorrede dem Rheticus selbst zuschreibt [Deschauer 2003].) In der Übersetzung von Gerhard Weng heißt es an einer Stelle in der langen Vorrede, in der die Studenten zum Studium der Arithmetik mit dem Blick auf den praktischen Nutzen und die philosophische Bedeutung quasi überredet werden:

> *„Ich komme also wieder zur Arithmetik zurück, weil ich mir vorgenommen hatte, besonders über sie zu sprechen. Nachdem ich ihre Nutzanwendungen dargestellt habe, die jedenfalls keineswegs unverständlich sind, glaubte ich, kurz noch etwas über ihre leichte Erlernbarkeit anfügen zu müssen. Ich weiß, daß sich die jungen Leute durch das Vorurteil ihrer Schwierigkeit von diesen Wissenschaften abschrecken lassen. Aber hinsichtlich der Elemente der Arithmetik, die man normalerweise an den Schulen lehrt und die für die tägliche Praxis herangezogen werden, irren sie sich sehr, wenn sie meinen, sie seien ungemein schwer. Die Rechenkunst leitet sich unmittelbar aus der Beschaffenheit des menschlichen Geistes ab und besitzt Beweise mit dem höchsten Gewißheitsgrad. Daher können ihre Grundlagen weder unverständlich noch schwierig sein, die ersten Regeln sind im Gegenteil so klar, daß auch Kinder sie begreifen können, weil dieses ganze Wissensgebiet aus der Beschaffenheit des menschlichen Geistes hervorgeht. Zweitens erfordern die Regeln der Multiplikation und der Division zwar etwas mehr Genauigkeit, aber ihre Gründe können dennoch von aufmerksamen Schülern schnell begriffen werden. Diese Wissenschaft verlangt genauso praktische Übung wie alle anderen.“*
> [Corpus Reformatorum XI, Sp. 284–292]

Melanchthon hat mehrfach auch anderen mathematischen Werken aus dem Umkreis der Reformation Vorreden vorangestellt. Im Vorwort (1543) zu Michael Stifels *Arithmetica integra* heißt es – wieder, nachdem er den vielfältigen Nutzen der Arithmetik hervorgehoben hat:

„... müssen alle tüchtigen Gelehrten sich mit aller Macht darum bemühen, diese Wissenschaft in die Schulen wieder aufzunehmen (...). In diesem Sinne glaube ich Michael Stifels Abhandlung über die Arithmetik jungen Studierenden empfehlen zu müssen, weil sie nicht nur zur Übung nützlich sein wird, sondern auch viel Licht in die wissenschaftliche Untersuchung der Lehrinhalte bringen wird.“
(Mitteilung von U. Reich, Bretten)

Vermutlich zwischen Ende 1529 und Mitte 1532 hat Copernicus sein groß angelegtes Werk *De revolutionibus* (Über die Umläufe) niedergeschrieben. Das eigenhändige Manuskript ist erhalten geblieben. Eine Zeitlang befand es sich im Besitz des hervorragenden böhmischen Pädagogen und Philosophen Jan Amos Comenius (1592–1670); und wird seit einigen Jahrzehnten in Krakau aufbewahrt. Es besteht aus 420 Seiten und ist sehr schön geschrieben, teilweise mit roter Tinte.

Copernicus hat lange dem Drängen seiner Freunde widerstanden, *De revolutionibus* zum Druck zu geben. Erst 1543, durch Vermittlung von Rheticus, kam es in Nürnberg zur Drucklegung, anfangs überwacht durch Rheticus, dann durch den protestantischen Nürnberger Theologen Andreas Osiander (1498–1552).

Die Nürnberger Erstausgabe besteht aus 400 Seiten. Das Werk beginnt mit einem Vorwort an den Leser, das aus der Feder von Osiander stammt. Da es aber nicht signiert war, hielt man es anfangs für die Meinung von Copernicus. Das ist gravierend, weil dort das heliozentrische System – gegen die klare Auffassung von Copernicus – lediglich als eine mathematische Hypothese unter möglichen anderen hingestellt wurde. Dieser groben inhaltlichen Veränderung, die den Zorn von Rheticus, später auch von Kepler und Alexander von Humboldt auslöste, fügte Osiander noch eine weitere hinzu, indem er dem Titel *„De revolutionibus“* noch *„orbium coelestium“* (etwa der Himmelskreise oder der Himmelsphären) hinzufügte und damit beim Leser die Meinung nahe legte, auch Copernicus sei von der realen Existenz der Himmelsphären überzeugt.

Das Buch I behandelt das Prinzipielle des heliozentrischen Systems: Welt und Erde haben Kugelgestalt. Die Bewegungen der Himmelskörper sind stetig, kreisförmig oder aus Kreisstücken zusammengesetzt. Dann werden die Eigenbewegungen der Erde beschrieben. Im Kapitel 10 des ersten Buches findet sich die berühmte eigenhändige Zeichnung des heliozentrischen Systems: Auf konzentrischen Kreisen laufen die Planeten um die Sonne als Mittelpunkt. (Für die inneren Planeten musste Copernicus doch wieder Exzenter benutzen. Erst Kepler konnte darauf verzichten.)
Einige Zeilen sollen auch demonstrieren, wie sprachgewaltig sich Copernicus ausdrücken konnte:

„In der Mitte von allen (Planeten) aber steht die Sonne. Wer aber möchte in diesem schönsten Tempel diese Leuchte an einen anderen, besseren Ort setzen als an diesen, von dem aus sie alles zu erleuchten

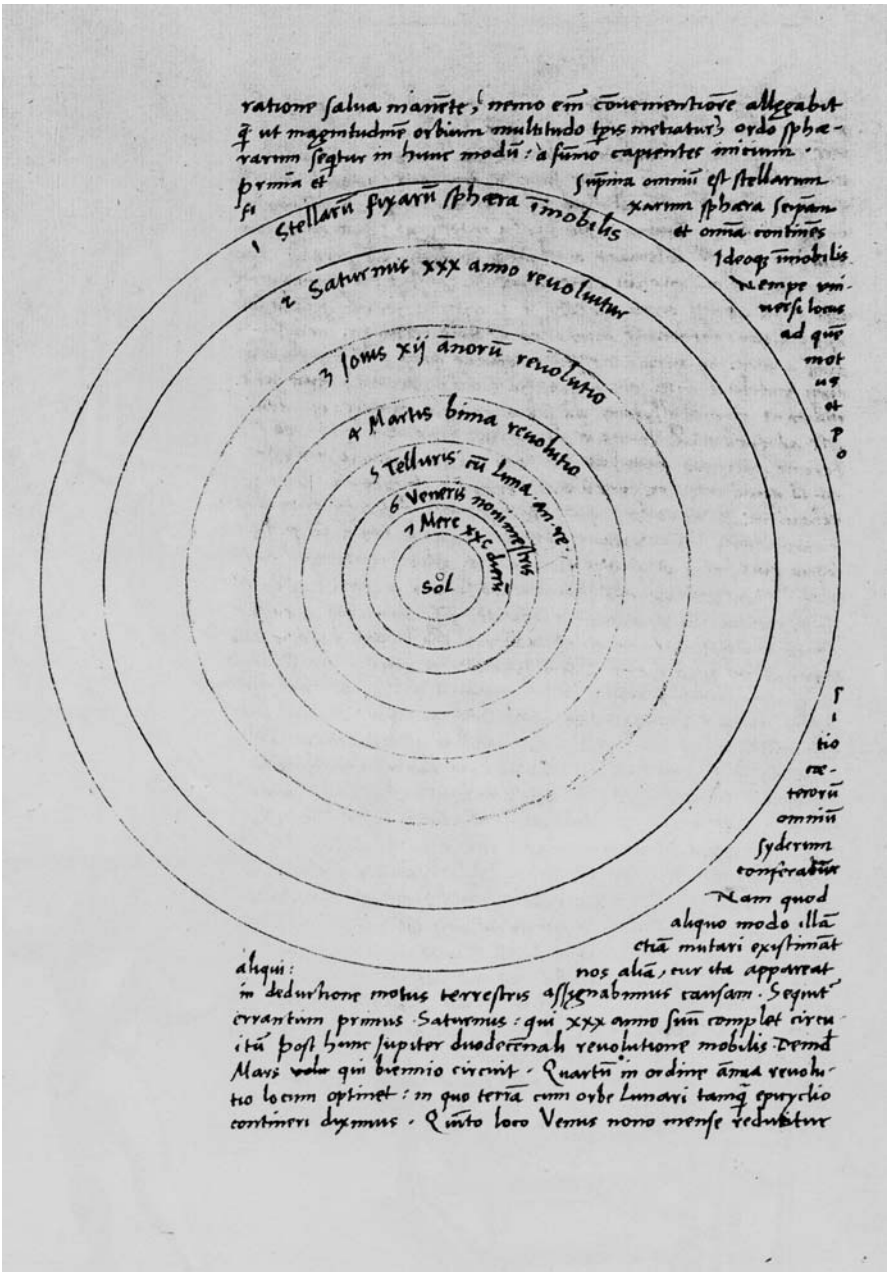


Abb. 7.8.9 Handzeichnung von Copernicus zum heliozentrischen System. In der Mitte die Sonne (sol) [Wikimedia Commons]

vermag?(...) So lenkt denn die Sonne gleichsam vom königlichen Thron aus die sie umkreisende Familie der Gestirne. Auch wird die Erde nicht im mindesten des Dienstes des Mondes beraubt, sondern der Mond steht in innigster Beziehung zur Erde, wie Aristoteles in seinem Buch über die Tiere sagt. Indessen empfängt die Erde von der Sonne und wird schwanger mit jährlicher Geburt. Wir finden also in dieser Ordnung ein bewunderungswürdiges Gleichmaß und einen bestimmten harmonischen Zusammenhang der Bewegung und Größe der Bahnen, wie er anderweitig nicht gefunden werden könnte.“
(Deutsch zitiert in [Zinner 1951, S. 100])

Die Legende will wissen, dass ein reitender Bote aus Nürnberg ein Exemplar der eben gedruckten *De revolutionibus* nach Frauenburg gebracht habe. Man habe dem sterbenden Copernicus das Buch in die Hände gelegt, er habe aber sein Meisterwerk nicht mehr erkannt.

Die ersten Tafeln – ein Tabellenwerk der Planetenbewegungen – auf heliozentrischer Basis wurden 1551 von Erasmus Reinhold (1511–1553) herausgegeben; sie verdrängten die veralteten Alfonsinischen Tafeln, obwohl – trotz aller Fortschritte – noch immer Abweichungen von den wirklichen Planetenbewegungen auftraten. Überhaupt konnte sich das Copernicanische System nur langsam und schwer durchsetzen, teils wegen weiter bestehender Unstimmigkeiten, teils wegen der von der katholischen Kirche ausgehenden Unterdrückungen. Aus historischer Sicht hat Copernicus eine Revolution des Denkens in der Astronomie ausgelöst. Sie wurde zum Symbol der zu Anfang des 17. Jahrhunderts einsetzenden Wissenschaftlichen Revolution.

Inhalte der Mathematik während der Renaissance

15. Jh.	FILIPPO BRUNELLESCHI Erfinder der „Durchschnittsmethode“ für perspektivische Darstellungen LEONE BATTISTA ALBERTI Bücher über Baukunst und Malerei PIERO DELLA FRANCESCA *De prospectiva pingendi* (Perspektive in der Malerei) LEONARDO DA VINCI Zeichnungen der regelmäßigen Körper, Entwürfe von Maschinen, Gewölben und Geräten LUCA PACIOLI *De Divina Proportione*: Goldener Schnitt, reguläre und halbreguläre Polyeder; *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalità*: Lehrstoff der Abbacus-Schulen, Lösung von Gleichungen (bis vierten Grades) durch Probieren MAESTRI D'ABBACO Lösung praktischer Probleme im indisch-arabischen Zahlensystem
um 1420	JOHANNES VON GMUNDEN *Tractatus de sinibus, chordis et arcubus*: Tafelwerke, Konstruktion neuartiger astronomischer Geräte
um 1460	GEORG VON PEUERBACH *Theoriae novae planetarum, Epitoma in Almagestum Ptolemaei* (vollendet von Regiomontanus): astronomische Daten, Sinustafel
1464–1476	JOHANNES REGIOMONTANUS *Opera collectanea* (darin: *„Epitoma . . . “, De triangulis omnimodis libri quinque, De quadratura circuli dialogus, Ephemerides Anni 1475*); erste algebraische Symbolik
1484	NICOLAS CHUQUET *Le triparty en la science des nombres*: Rechnen mit rationalen und irrationalen Zahlen, Gleichungstheorie; *La Géométrie*
1489	JOHANNES WIDMANN *Behennde vnnd hubsche Rechnug auff allen Kauffmanschafften*; erste Algebravorlesung in Deutschland
um 1500	SCIPIONE DEL FERRO Lösungsformel für Gleichungen vom Typ $x^3 + bc = c$
um 1514	NICOLAUS COPERNICUS *Commentariolus de hypothesibus motuum coelestium: Grundideen der heliozentrischen Astronomie* (nicht gedruckt, Entwurf zur Diskussion im Freundeskreis)
1518	ADAM RIES *Rechenung auf der linihen, Rechenung auff der linihen vnnd federn* (1522), *Rechnung nach der lenge auff den Linihen und Feder* (1550): Lehre vom Rechnen auf dem Abakus und mit den indisch-arabischen Ziffern; *Coß* (1550, hrsg. 1664): Verwendung der cossischen Symbole, Lösung reiner Gleichungen ersten bis vierten Grades und der drei Typen gemischt-quadratischer Gleichungen

1521	HEINRICH SCHREYBER (GRAMMATEUS) *Behend und khünstlich Rechnung nach der Regel und wellisch practic*
1525	CHRISTOFF RUDOLFF *Behend und Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebrae, so gemeinicklich die Coss genennt werden*
1525	ALBRECHT DÜRER *Underweysung*, Proportionenlehre (1528): Praktische Geometrie, insbes. Perspektive, Mehrtafelverfahren, Kurven, Parkettierung, regelmäßige Polyeder
1532	PEDRO NUNES *Libro de Algebra en Arithmetica y geometria*; Kurven konstanten Kurses (Loxodromen) in der Seefahrt
1533	GEMMA FRISIUS Triangulation zur Landesvermessung; *Arithmeticae practicae methodus* (1536/1542)
1539	MICHAEL STIFEL *Arithmetica integra; Die Coß Christoffs Rudolffs. Die schönen Exempeln der Coß Durch Michael Stifel Gebessert und sehr gemehrt* (1553)
1542	GEORG JOACHIM RHETICUS Definition der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck
1543	NICOLAUS COPERNICUS *De revolutionibus*: heliozentrisches Weltsystem
1557	ROBERT RECORDE *The Whetstone of Witte*: Einführung des Gleichheitszeichens und anderer Symbole
1569	GERARDUS MERCATOR (GERHARD KREMER) Erste Weltkarte in „Mercator-Projektion“
1578	ABRAHAM RIES *Dresdener Kodex C 411* (hrsg. 1999), weitere Cossische Zeichen, Aufgaben zu quadratischen Gleichungen
1585	SIMON STEVIN *De Thiende, Practique d'Arithmétique*: Einführung der Dezimalbrüche in Europa

8 Mathematik während der Wissenschaftlichen Revolution

1558–1603	Herrschaft der englischen Königin Elisabeth I.
1564–1642	Lebenszeit von Galilei
1582	Gregorianische Kalenderreform (zunächst in katholischen Ländern)
1589–1610	Heinrich IV. von Navarra König von Frankreich
1600	G. Bruno auf dem Scheiterhaufen in Rom hingerichtet
1607	Beginn der Kolonisierung Virginias in Nordamerika
1611–1632	Gustav II. Adolf König von Schweden
1618–1648	Dreißigjähriger Krieg
1632–1654	Christine Königin von Schweden
1633	Galilei widerruft sein Bekenntnis zum Copernicanischen System
1643–1715	Ludwig XIV. („Sonnenkönig“) regiert Frankreich als absoluter Monarch
1643	4. Januar 1643 – Isaac Newton wird in Woolsthorpe bei Grantham (Lincolnshire) geboren (Gregorianische Datierung)
1646	1. Juli 1646 – Gottfried Wilhelm Leibniz in Leipzig geboren
1649	Hinrichtung König Karls I., Einführung des Commonwealth durch Cromwell
1660	Restauration der Monarchie in England
1662	In London wird die „Royal Society“ gegründet
1665–1667	Die Universität Cambridge wegen der Pest geschlossen
1666	Gründung der französischen Akademie der Wissenschaften in Paris
1666	Großer Brand von London
1675	Der Große Kurfürst besiegt die Schweden bei Fehrbellin
1681	Ludwig XIV. besetzt Elsaß und Lothringen. William Penn gründet die Kolonie Pennsylvania
1682–1725	Peter I., der Große, Zar von Russland
1685	Jakob II., überzeugter Katholik, wird neuer englischer König
1688	Die sog. „glorious revolution“; Jakob II. wird durch Wilhelm von Oranien vertrieben, England wird konstitutionelle Monarchie
1700	Julianischer Kalender in Russland eingeführt
1703	Gründung von St. Petersburg
1707	„Union“ zwischen England und Schottland
1707–1783	Lebenszeit von Leonhard Euler
1714	Der Kurfürst von Hannover wird als Georg I. König von England
1716	14. November – Leibniz stirbt in Hannover
1725	Eröffnung der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg
1727	31. März – Newton stirbt in Kensington, nahe London

8.0 Allgemeine Charakterisierung

Der Begriff „Wissenschaftliche Revolution“ hat sich in jüngerer Zeit als Strukturbegriff in der Wissenschaftsgeschichte eingebürgert und zwar für die Zeit vom ausgehenden 16. Jahrhundert bis zum Beginn des 18. Jahrhunderts, mit dem Blick auf die gänzliche Umgestaltung der Naturwissenschaften nach Inhalt, Methode, Kommunikationsformen und gesellschaftlicher Relevanz und auf Wechselbeziehungen zu Religion und Philosophie. Bis zu einem gewissen Grade kann man sogar behaupten, dass der Typ der neuzeitlichen Mathematik und Naturwissenschaft in dieser Periode erst geschaffen wurde [Wußing 1992], [Huff 1993], [Wußing 2002], [Breger 2004].

Indessen ist bei aller Akzeptanz dieses Begriffes, der eine besonders aufregende und interessante Periode der Wissenschaftsentwicklung herausheben soll, doch unübersehbar, dass man bei näherem Zusehen auf eine Fülle sich dahinter verbergender unterschiedlicher Begriffsinhalte trifft. Hier soll indes darauf verzichtet werden, das ganze Spektrum der Auffassungen zu wissenschaftlichen Revolutionen im Allgemeinen und zur Wissenschaftlichen Revolution im Besonderen darzulegen (vgl. etwa [Bialas 1978], [Shea 1988], [Kuhn 1967]). Insbesondere sollen hier die starken Verflechtungen dieses Gegenstandes mit wissenschaftstheoretischen Grundpositionen übergangen werden, so interessant und lehrreich sie auch sein mögen.

Mit dem Begriff einer wissenschaftlichen Revolution soll hier – ohne weitere Reflexionen – die Tatsache ausgedrückt werden, dass die Entwicklung der Wissenschaften nicht gleichförmig in der Zeit verläuft, sondern Perioden rascheren oder langsameren Wachstums (und sogar Perioden des Verfalls) aufweist. Außerdem soll mit dem Eigennamen „Wissenschaftliche Revolution“ unter zahlreichen wissenschaftlichen Revolutionen – z. B. die Relativitätstheorie, der Quantenphysik oder der Darwinschen Evolutionstheorie – jene herausgehoben werden, deren historische Bedeutung die aller anderen „Teilrevolutionen“ in speziellen Bereichen der Wissenschaft im welthistorischen Zusammenhang übertrifft. Eben dies ist bei der „Wissenschaftlichen Revolution“ der Fall.

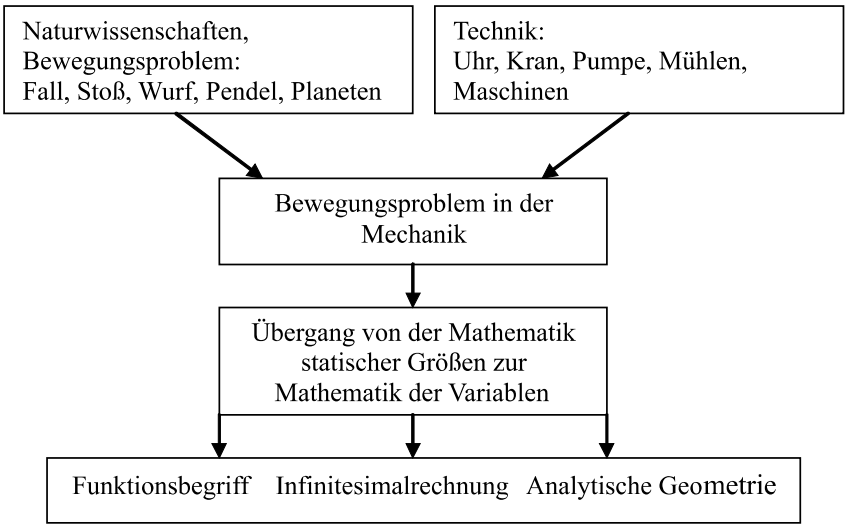
Noch in einem weiteren Punkt bedarf es der Erläuterung. Abgesehen von der semantischen Frage, wie viele Jahre eine Revolution allenfalls umfassen darf, schließen wir uns hier der von vielen Wissenschaftshistorikern vertretenen Auffassung an, dass die Wurzeln der Wissenschaftlichen Revolution bis in die Renaissance hinabreichen und ihre Wirkungen bis in die Frühaufklärung hinaufreichen.

Vier Generationen von Männern haben diese durchgreifende Wandlung vollzogen, Männer wie Copernicus, Galilei, Brahe, Kepler, Fr. Bacon, Descartes, Fermat, Guericke, Pascal, Gilbert, Huygens, Linné, Harvey, Hooke, Newton, Leibniz, Cook. Ihre Leistungen und die ihrer Mitstreiter bewirkten eine gänzliche Umgestaltung der Mathematik, der Astronomie und der Mechanik, insbesondere der Dynamik, die recht eigentlich erst als wissenschaftliche Disziplin begründet wurde. Mit der Fortentwicklung von Algebra

und Geometrie entstanden eine Mathematik der Variablen und die Infinitesimalmathematik, und damit wurde den Naturforschern ein Instrumentarium höchster Leistungsfähigkeit in die Hand gegeben. Anatomie und Physiologie schufen der Medizin eine in einigen Teilen naturwissenschaftliche Basis. Chemie, Zoologie und Botanik, Geographie und Geologie begannen, nach neuen Ufern zu streben.

Interessant ist auch ein Blick auf den Umschwung in der sozialen Stellung der Naturforscher. Als Isaac Newton 1727 starb und in einem feierlichen Staatsakt in der Westminster Abbey in London beigesetzt wurde, war die Wendung im Grundsätzlichen bereits vollzogen: in nur vier Generationen hatte sich die Naturforschung gesellschaftliche Anerkennung erworben. Giordano Bruno war im Jahre 1600 unter anderem wegen des Eintretens für die heliozentrische Astronomie öffentlich hingerichtet worden. Galileo Galilei wurde noch deswegen vor Gericht gestellt und starb 1642 im Gewahrsam der Inquisition. René Descartes hielt noch brisante Teile seines Hauptwerkes zurück und ging 1628/29 in die Emigration nach Schweden. Newton aber konnte 1687 das wohl bedeutendste Werk der Naturwissenschaft in ihrer Geschichte publizieren, die *Philosophiae naturalis principia mathematica* (etwa: Mathematische Prinzipien der Naturwissenschaft). Wegen seiner Verdienste um die Wissenschaft und um die britische Münzreform wurde er geadelt und erhielt ein pompöses Staatsbegräbnis.

Anstöße und Entwicklungen der Mathematik der Variablen in der Wissenschaftlichen Revolution



Die Entwicklung dieser drei Zweige wird in der Historiographie der Mathematik als Inhalt der *Wissenschaftlichen Revolution in der Mathematik* bezeichnet.

8.1 Gründung von Akademien und wissenschaftlichen Gesellschaften

Bereits während der Renaissance waren in Italien Akademien gegründet worden, nach dem Vorbild der Platonischen Akademie der Antike. In Neapel beispielsweise entstand 1560 eine „Academia Secretorum Naturae“ (Akademie der Geheimnisse der Natur). Größere Bedeutung erlangte die um 1601 in Rom ins Leben gerufene „Accademia dei Lincei“, der u. a. Galilei angehörte. Mit der Anspielung auf Luchse (lince = Luchs), die besonders scharfsichtig sind, sollte der hohe Anspruch auf Wahrheitssuche ausgedrückt werden. Ausdrücklich waren Priester von der Mitgliedschaft ausgeschlossen. Galilei wurde auch Wegbereiter bei der Gründung der „Accademia del Cimento“ (Akademie des Experimentes) 1657 in Florenz, die jedoch durch Intervention der Katholischen Kirche bald aufgelöst wurde.

Eine glanzvolle Entwicklung – wohl unabhängig von Italien – bahnte sich um die Mitte des 17. Jahrhunderts in England an; sie führte schließlich 1662 zur Gründung der „Royal Society“ in London, die für lange Jahrhunderte und noch heute ein führendes wissenschaftliches Zentrum darstellt. Newton war fast drei Jahrzehnte lang ihr Präsident.

Die Gründungsgeschichte der „Royal Society“ hat zwei historische Wurzeln. Nach dem Tod von Francis Bacon (1561–1626), der sich für die Erneuerung der Wissenschaften eingesetzt hatte, erschien postum 1627 die kleine, aber folgenreiche Schrift *Nova Atlantis* (Neues Atlantis), in der er einen utopischen Inselstaat „jenseits der alten und der neuen Welt“ schildert, wo organisierte wissenschaftliche Arbeit entscheidend zur Verbesserung der Lebensverhältnisse beiträgt. Der damalige englische König James I. nahm kein Interesse an diesen Ideen, wohl aber eine Gruppe von Privatleuten. Man forderte u. a. 1648 die Errichtung eines „College of Trade“ (Handelskolleg), um neue Erfindungen und neue Methoden bei der Verbesserung von Kleidung und Haushaltseinrichtung nutzbar zu machen.

Begeisterte Anhänger Bacons und der neuen Wissenschaft trafen sich seit 1644/45 ziemlich regelmäßig in London, unter anderem im sog. Gresham-College, das der vermögende Manufakturwarenhändler Thomas Gresham (1519–1579) eingerichtet hatte, um Kaufleute und Seefahrer auszubilden. Folgerichtig standen die Naturwissenschaften, Arithmetik, Geometrie, Navigation und Astronomie im Mittelpunkt der Lehrtätigkeit. Dort fanden die englischen Freunde der Experimentalwissenschaft eine feste Heimstatt.

Zum aktiven Kern der Gruppe gehörten der Mathematiker John Wallis (1616–1703), der Mathematiker und Architekt Christopher Wren (1632–1723), der die berühmte St. Pauls-Kathedrale in London schuf, der äußerst vielseitige Naturforscher Robert Boyle (1627–1691), der Physiker und einfallsreiche Experimentator Robert Hooke (1635–1702) sowie der Mathematiker Viscount Brouncker (1620?–1684).

Im Jahre 1660 gab sich die Gruppe unter der Bezeichnung „Invisible College“ (Unsichtbares Kolleg) eine Art Statut. Nach dem Ende des Bürgerkrieges

Abb. 8.1.1 Accademia dei Lincei; Francis Bacon (Ausschnitt aus Brfm. Italien 2003), [Wikimedia Commons]

und der Restauration der Monarchie erhielt die Vereinigung ein Privileg von König Charles II. als „Royal Society for the Improvement of Natural Knowledge" (Königliche Gesellschaft für die Vervollkommnung des Wissens von der Natur). Freilich erhielt die „Königliche Gesellschaft" keinerlei Unterstützung von der Krone, sie blieb – bis heute – eine private Gesellschaft, die sich mit Beiträgen ihrer Mitglieder finanziert.

Die Gesellschaft beschränkte sich absichtlich auf rein naturwissenschaftliche und gewerbefördende Tätigkeiten; sie schloss Beschäftigung mit Theologie, Metaphysik, Moral, Politik, Grammatik, Rhetorik und Logik ausdrücklich aus, wie der folgende Text von Robert Hooke belegt:

> *„Aufgabe und Ziel der Royal Society ist es:*
> *Das Wissen von natürlichen Dingen und von allen nützlichen Gewerben, Manufakturen, mechanischen Praktiken, Maschinen und Erfindungen durch Experimente zu vermehren – (nicht, sich mit Theologie, Metaphysik, Moral, Politik, Grammatik, Rhetorik oder Logik abzugeben).*
> *Diese erlaubten Künste und Erfindungen, soweit sie verlorengegangen sind, versuchen wiederzufinden.*
> *Alle Systeme, Theorien, Prinzipien, Hypothesen, Elemente, Geschichten und Experimente über natürliche, mathematische und mechanische Dinge, erfunden, berichtet oder praktiziert von jedem nennenswerten Autor der Antike oder Moderne zu prüfen. Ein vollständiges System einer soliden Philosophie zusammenzustellen, die alle Phäno-*

mene erklärt, hervorgerufen von der Natur oder der Kunst, und einen vernunftgemäßen Einklang im Hinblick auf die Ursachen der Dinge festzuhalten.
Alles zur Förderung der Ehre Gottes, zum Ruhme des Königs, des königlichen Gründers der Gesellschaft, zum Nutzen seines Königreichs und zum allgemeinen Wohl der Menschheit.“
(Zitiert nach [Hall 1965, S. 160f.])

Wie weit und international die Beziehungen der Royal Society reichten, soll wenigstens an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Der Iatromathematiker (Iatrik = Heilkunst) Giovanni Alfonso Borelli (1608–1679) wurde von der Royal Society aufgefordert, einen Bericht über den Vulkanausbruch des Ätna 1669 zu verfassen. Das Resultat ist einer der ersten Beiträge zum Entstehen einer Vulkanologie [Nuncius, XXII, 2002, Bd. 2, S. 741f.].

Auch in Deutschland trat – wiederum inspiriert von Bacon – eine Gruppe von Privatleuten, insbesondere von Ärzten, kurz nach dem Ende des Dreißigjährigen Krieges in Schweinfurt zusammen, ursprünglich unter dem Namen „Academia Naturae Curiosorum“. Sie erhielt 1672 ein Privileg des damaligen deutschen Kaisers Leopold. Der Sitz der Akademie wechselte zum Wohnsitz der jeweiligen Präsidenten, bis die „Leopoldina“ im 19. Jahrhundert ihren endgültigen Standort in Halle/Saale einnahm. Sie besteht noch heute und arbeitet erfolgreich.

Unter ganz anderen Begleitumständen kam es 1666 in Paris zur Gründung einer königlichen Akademie der Wissenschaften („Académie Royale des Sciences“). Zwar gab es auch in Frankreich allerlei Gruppen von Anhängern der neuen Wissenschaft, denen u. a. die Mathematiker Blaise Pascal (1623–1662), Pierre de Fermat (1607–1665) und Girard Desargues (1591–1661) angehörten. Schließlich aber, mit einiger Verzögerung, inaugurierte der französische absolutistische Staat selbst die Gründung einer Wissenschaftsakademie; der mächtige Finanzminister Colbert setzte die Akademie in einem feierlichen Staatsakt in ihre Rechte und Pflichten ein. Die Mitglieder wurden vom Staat ernannt und besoldet; es gab erhebliche finanzielle und materielle Zuwendungen an die Akademie.

Das wissenschaftliche Leben in Paris und allgemein in Frankreich erlitt erhebliche Rückschläge, als der „Sonnenkönig“ Louis XIV. im Jahre 1685 das Edikt von Nantes (1598) aufhob, das Religionsfreiheit gewährt hatte. Viele Hugenotten wichen dem Druck und gingen ins Ausland, unter den Mathematikern Abraham de Moivre (1667–1754) und Christiaan Huygens (1629–1695).

Das Vorbild einer vom absolutistischen Staat gegründeten Akademie machte Schule. So wurde beispielsweise unter aktiver Beteiligung von Leibniz 1700 in Berlin eine „Societas Regia Scientiarum“ (Königliche Gesellschaft der Wissenschaften) begründet.

In der Denkschrift zur Akademiegründung, 1700, formulierte Leibniz: Der Zweck der Sozietät bestehe darin,

> *„... theoriam cum praxi zu vereinigen, und nicht allein die Künste und Wissenschaften, sondern auch Land und Leute, Feldbau, Manufacturen und Commercien, und mit einem Wort die Nahrungsmittel zu verbessern, überdies auch solche Entdeckungen zu thun, dadurch die überschwengliche Ehre Gottes mehr ausgebreitet, und dessen Wunder besser als bisher erkannt (...) würden.“*
> (Zitiert nach [Finster/Heuvel 1990, S. 121])

Im Jahre 1724 hatte der russische Zar Peter I. (1672–1725), dessen Lebenswerk mit der Modernisierung Russlands verbunden ist, den endgültigen Beschluss gefasst, in dem 1703 gegründeten, 1712 zur Hauptstadt erhobenen St. Petersburg eine Akademie zu gründen. Dabei wurde er von Leibniz beraten, den der Zar nach persönlichen Kontakten zum russischen Staatsrat erhoben hatte.

Die definitive Gründung der Petersburger Akademie erfolgte im Jahre 1725. Die Arbeitsbedingungen waren von Anfang an vorzüglich. Mit der Berufung von ausländischen Gelehrten – Daniel Bernoulli (1700–1782), Jakob Hermann (1678–1733), Leonard Euler (1707–1783), Georg Bernhard Bülfinger (1693–1750), Georg Wolfgang Krafft (1701–1754), Georg Wilhelm Richmann (1711–1755) und anderen – nach Petersburg erreichte die Akademie gleich anfangs eine hervorragende Stellung im europäischen Wissenschaftsbetrieb.

Die angeworbene Gelehrtenschaft machte rasche Fortschritte; heimische Gelehrte traten an die Öffentlichkeit. 1742 wurde Michael Wasiljewich Lomonossow (1711–1765) Mitglied der Akademie.

London, Paris, Berlin und St. Petersburg mit ihren Akademien waren während des 17./18. Jahrhunderts die Zentren mathematisch-naturwissenschaftlicher Forschung. Die absolutistischen Staaten stellten den Akademikern diejenigen Aufgaben, die in ihrem militärischen oder ökonomischen Interesse lagen. Zugleich erfüllten die Akademien ein starkes Repräsentationsbedürfnis der Herrscher. Es galt geradezu als Maß der Stärke eines Staates, wie viel berühmte Gelehrte bei Hofe aufgeboten werden konnten. Andererseits schuf das Interesse der Herrscher am Glanz ihrer Akademien den Gelehrten jenen Freiraum, den sie brauchten, um ihren eigenen wissenschaftlichen Interessen nachgehen und das Bündnis mit der Aufklärungsphilosophie festigen zu können [Grau 1988].

Die Gründung der Akademien stellt einen erheblichen Fortschritt bei der Institutionalisierung der Wissenschaften dar, bot sie doch den Gelehrten und Naturforschern Heimstätten und Gedankenaustausch. Dazu trat – als Folge einer zunehmenden Flut neuer Erkenntnisse und Ergebnisse im ganzen breiten Spektrum der Wissenschaften – die Gründung wissenschaftlicher Zeitschriften, die nun einen Austausch der Ergebnisse über größere Entfernungen ermöglichten und eine Art „Gelehrtenrepublik“ begründeten. Seit Januar 1665 erschien in Paris das *Journal des Sçavans*; zwei Monate später erschienen in London die *Philosophical Transactions*. Seit 1682 wurden in Leipzig

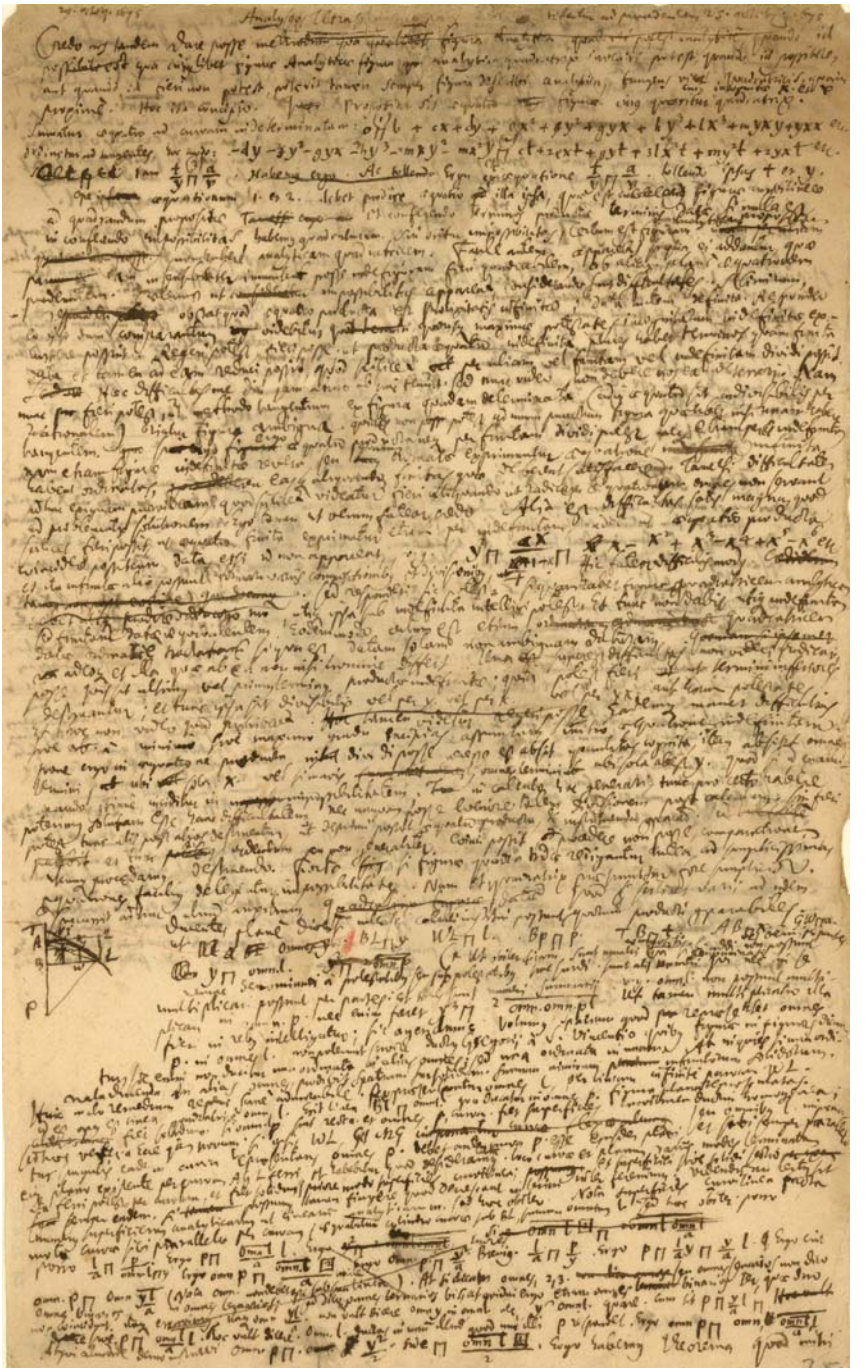


Abb. 8.1.2 Handschrift von Leibniz [Niedersächsische Landesbibliothek Hannover, Handschrift LH XXXV, VIII, 18 Bl. 2^r]

Abb. 8.1.3 Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg [Foto Alten]

die *Acta Eruditorum* (Abhandlungen der Gelehrten) herausgegeben, in denen gleich anfangs Leibniz grundlegende Arbeiten zum Infinitesimalkalkül veröffentlichte. Im Jahre 1728 begannen die *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* zu erscheinen. Eine Zählung der neu gegründeten wissenschaftlichen Zeitschriften zwischen 1725 und der Jahrhundertwende hat 74 Titel ergeben; dazu trat noch eine Vielzahl von medizinischen Zeitschriften.

8.2 Algebra wird zur selbstständigen mathematischen Disziplin

Probleme und Methoden, die wir heute der Algebra zurechnen, hatten in der mesopotamischen Mathematik, in Indien, in China, in der Antike und besonders in der Renaissance eine bedeutende Rolle gespielt. Erinnert sei nur an al-H͡wārizmī, Abū-l-Wafāʾ, Abū Kāmil und al-Karaǧī, an Leonardo Fibonacci, Stevin, Recorde, Nunes, Chuquet, die Cossisten (vgl. Kapitel 5 und 7). Die Beweise für die Lösungen algebraischer Gleichungen waren freilich im Allgemeinen geometrisch erfolgt.

Die entscheidende Wendung der Dinge, die den Übergang zur selbstständigen Disziplin Algebra nach sich zog, war der Schritt von der geometrischen Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grades zur rechnerischen Auflösung in Formelgestalt. Dieser wesentliche Fortschritt über die antike und muslimische Mathematik hinaus verbindet sich mit den Namen Scipione del

Ferro (1463?–1526), Niccolò Tartaglia (1506–1559), Girolamo Cardano (1501–1576) und Rafael Bombelli (1526–1572), (ausführlich in [Alten et al. 2003]).

Übrigens gewähren die Auseinandersetzungen um die algebraische Lösung der kubischen Gleichung auch Einblicke in die soziologisch bedingten Spannungen zwischen der Universitätswissenschaft und dem artifici-Wissen jener Zeit.

Scipione del Ferro

Um 1516 dürfte Scipione del Ferro, der als Mathematikprofessor in Bologna tätig war, die algebraische Lösung der Gleichung dritten Grades vom Typ $x^3 + ax = b$ gefunden haben [Ore 1935], [Stillwell 1989]. Von dort gelangte das Verfahren an seinen Schwiegersohn und Nachfolger Annibale della Nave. Ein Schüler von del Ferro, Antonio Maria Fior, auch Mathematiker, ging nach Venedig und forderte, den Gewohnheiten der Zeit entsprechend, den dort wirkenden Rechenmeister, Büchsenmeister und Mathematiker Niccolò Tartaglia im Jahre 1535 zu einem öffentlichen Wettbewerb heraus. Er legte Tartaglia dreißig Aufgaben vor; der Text ist erhalten geblieben. Einige Beispiele:

> „*Dies sind die dreißig Probleme, die ich, Antonio Maria Fior, Dir, Meister Niccolò Tartaglia gestellt habe.*
>
> 1. *Finde mir eine Zahl derart, dass, wenn ihr Kubus addiert wird, das Resultat sechs ist, d. h. 6.* (Führt auf $x^3 + x = 6$)
> 2. *Finde mir zwei Zahlen in doppelter Proportion derart, wenn das Quadrat der größeren Zahl multipliziert wird mit der kleineren, und wenn dieses Produkt zu den zwei ursprünglichen Zahlen addiert wird, das Ergebnis vierzig sein wird, d. h. 40.* (Führt auf $4x^3 + 3x = 40$) (. . .)
>
> 3. *Ein Mann verkauft einen Saphir für 500 Dukaten und macht einen Gewinn in der dritten Potenz seines Kapitals. Wie groß ist dieser Profit?*“(Führt auf $x^3 + x = 500$)
>
> [The History of Mathematics 1990, S. 254 (englisch), dt. Übersetzung Wg]

Erst in allerletzter Minute, in der Nacht vom 12. zum 13. Februar, fand Tartaglia die Lösung und gewann so den Wettbewerb.

Niccolò Tartaglia

Eigentlich dürfte er Fontana geheißen haben. Der Name „Tartaglia“ (der Stotterer) entstand dadurch, dass der Junge während der Plünderung von Brescia, seinem Geburtsort, durch französische Truppen so verletzt wurde, dass er stottern musste und die Behinderung lebenslang behielt. Übrigens hatte

er, der zu einem der bedeutenden Gelehrten heranwuchs, eine schwere Jugend. Als er 16 Jahre alt war, sollte er mit dem Alphabet vertraut gemacht werden, jedoch reichte das Schulgeld nur bis zum Buchstaben K. Er stahl ein Lehrbuch, bildete sich autodidaktisch weiter und lernte sogar Latein.

Tartaglia wandte sich nach Venedig, hielt öffentliche Vorlesungen über Mathematik in einer Kirche und publizierte als weitreichende Neuerung wissenschaftliche Arbeiten in italienischer Sprache – u. a. über Euklid und die Abhandlung von Archimedes über schwimmende Körper. Bei einem Probeschießen fand er heraus, dass das Geschoss bei einem Erhebungswinkel von 45° für das Geschützrohr am weitesten fliegt.

Der in Mailand wirkende Professor der Medizin, Cardano, selbst ein mit Mathematik Wohlvertrauter, hatte trotz aller Bemühungen die rechnerische Auflösung der kubischen Gleichung nicht finden können. Als er von Tartaglias Erfolg hörte, bedrängte er ihn, er solle ihm die Lösung verraten. Schließlich traf man sich in Mailand, und Tartaglia gab Cardano die Lösungsformel für spezielle Fälle kubischer Gleichungen, allerdings ohne Beweise und verlangte das hoch und heilige Versprechen von Cardano, er werde das Verfahren niemals an andere weitergeben.

Doch Cardano brach sein Versprechen und veröffentlichte Tartaglias Ergebnisse in seinem bedeutenden Buch *Artis magnae, sive de regulis algebraicis*(Die große Kunst oder über die Regeln der Algebra). Cardano stellte die Affäre in Kapitel I der „*Ars magna*“ folgendermaßen dar:

> „*In unseren Tagen hat Scipione del Ferro aus Bologna den Fall gelöst, dass der Kubus und die erste Potenz* (der Unbekannten, Alten) *gleich einer Konstanten sind – eine sehr elegante und bewundernswerte Lösung (. . .) Um nicht übertroffen zu werden, löste mein Freund Niccolò Tartaglia im Wetteifer mit ihm denselben Fall, als er sich im Wettkampf mit seinem [Scipionis] Schüler Antonio Maria Fior befand, und gab es* (die Lösung, A.) *mir auf viele Bitten hin. Denn ich war durch die Worte Luca Pacciolis getäuscht worden, der bestritt, dass irgendeine allgemeinere Regel als seine eigene entdeckt werden könne. Ungeachtet der vielen Dinge, die ich schon entdeckt hatte, wie wohl bekannt ist, hatte ich aufgegeben und mich nicht bemüht, noch weiter zu suchen. Dann jedoch, als ich Tartaglias Lösung erhalten hatte und nach einem Beweis suchte, erkannte ich, dass es noch sehr viele andere Dinge gab, die man finden könnte. Als ich diesen Gedanken mit wachsender Zuversicht verfolgte, entdeckte ich diese anderen Dinge, zum Teil selbst, zum Teil durch Lodovico Ferrari, meinen früheren Schüler (. . .). Die Beweise, außer den dreien von Mohammed* (Muḥammad ibn Musa al-H̲wārizmī, A.) *und den beiden von Lodovico, sind alle von mir.*“
>
> [Cardano, Ars magna, fol. 3, dt. Übersetzung Alten] (vgl. ferner [Katscher 2001])

Abb. 8.2.1 Girolamo Cardano, Niccolò Tartaglia [Wikimedia Commons]

Historiker führen als Entschuldigung für Cardano an, er habe möglicherweise, in Kenntnis von Scipione del Ferros Leistung Tartaglia als Plagiator empfunden. Wie dem auch sei: Tartaglia war wütend über den Vertrauensbruch. Es stand Universitätswissenschaft gegen das Wissen der Artifici; der Streit beschäftigte ganz Italien.

Auch Tartaglia ist auf den Streit eingegangen. Schon 1539 hat er von seinem Treffen mit Cardano berichtet. Schließlich gab Tartaglia in seinen teilweise autobiographisch gehaltenen *Quesiti et inventioni diverse* (Verschiedene Fragen und Erfindungen) von 1546 den Schwur von Cardano wieder, das Geheimnis zu bewahren. Dort heißt es unter anderem:

> Cardano: *„Zweifelt nicht, dass ich mein Versprechen halten werde. . . “*
> Tartaglia: *„Nun bitte, vergesst es nicht.“*
> [Tartaglia, Quesiti et inventioni diverse 1546, S. 120–122; dt. Übers. A.]

Tartaglia hatte, wie gesagt, Cardano ohne Beweise die rechnerischen Wege zur Auflösung der kubischen Gleichungstypen $x^3 + ax = b$ bzw. $x^3 = ax + b$ überlassen, übrigens in Gedichtform [Gericke 1992, S. 227]. Die Grundidee besteht darin, zwei Hilfsgrößen u und v mit den Beziehungen $u - v = b$ und $uv = (\frac{a}{3})^3$ einzuführen. Die Lösung besitzt dann die Form $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$.

Mit Rücksicht auf den historischen Befund sollte man nicht von *der* Cardanoschen Lösungsformel sprechen. Cardano war zu 23 Fallunterscheidungen gezwungen, weil er nur positive Koeffizienten verwenden konnte. Er vermochte jedoch, alle kubischen Gleichungen auf zwei Typen zu reduzieren. Da wir heute auf diese Beschränkung verzichten können, ergibt sich die sog. Cardanosche Lösungsformel.

Girolamo Cardano

Die Lebensgeschichte von Cardano (1501–1576) liest sich hochinteressant [Stillwell 1989, S. 61/62]. Er stammt aus Padua und starb in Rom. Der Vater war Rechtsanwalt und Arzt. Der Sohn begann 1520 das Medizinstudium in Pavia und promovierte 1526 in Padua. Da er von unehelicher Geburt war, hatte er anfangs Schwierigkeiten, wurde aber schließlich ein hochgeschätzter Arzt in Mailand. Spektakulär war die Heilung des Erzbischofs John Hamilton von Schottland, der schwer unter Asthma litt. Cardano fand durch Beobachtung heraus, dass Bettfedern an allergischen Reaktionen die Schuld trugen; anderes Bettzeug aus Seide und Leinen führte zur sofortigen Besserung [Katz 1993]. Die Interessen des hoch angesehenen Arztes erstreckten sich auch auf Mathematik und Probleme des Glücksspieles. Im Privaten traf es ihn mehrfach hart: Ein Onkel wurde vergiftet; dagegen scheiterten Versuche, Cardano und seinen Vater zu vergiften. Seine Frau starb 1546. Sein ältester Sohn wurde enthauptet, da er seine Frau vergiftet hatte. Cardano ging nach Bologna, aber dort wurde sein Schüler Ferrari von dessen Schwester vergiftet. Es war die Zeit der berühmtesten Giftmischerin Lucrezia Borgia.

Ein Jahr vor seinem Tode gab Cardano eine Art Autobiographie heraus, *De vita propria liber* (Das Buch des eigentlichen Lebens). Auf Tartaglia geht er nur mit der kümmerlichen Bemerkung ein, er habe von ihm nur *„einige wenige Anregungen“* erhalten. Die *Ars magna* war trotz des Beigeschmackes von Vertrauensbruch ein wegweisendens Buch, eine Art Standardwerk bis in die Zeit der Schriften von Vieta und Descartes. Die erste Auflage erschien 1545 bei Johann Petreius in Nürnberg, sogar mit einer Widmung von Andreas Osiander, der zwei Jahre zuvor das das Weltbild verändernde Werk *De revolutionibus* von Nicolaus Copernicus ebenfalls in Nürnberg herausgebracht hatte. Weitere Auflagen der *Ars magna* erschienen 1570 und 1663.

Über die von Cardano verwendete Terminologie unterrichtet [Struik 1969]; hier nur soviel: für die Unbekannte schreibt er res (lateinisch) und cosa (italienisch). In Kapitel 11 der *Ars magna* behandelt Cardano die Gleichung vom Typ $x^3 + ax = b$ und beschreibt den Rechengang folgendermaßen:

> „*Bilde die dritte Potenz von einem Drittel des Koeffizienten der Unbekannten; addiere dazu das Quadrat der Hälfte des konstanten Gliedes der Gleichung; und nimm die Wurzel aus dem Ganzen, d. h. die Quadratwurzel. Bilde sie zweimal. Zur einen addiere die Hälfte der Zahl, die du schon mit sich multipliziert hast; von der anderen subtrahiere dieselbe Hälfte. Du hast dann ein Binom* (Summe zweier Ausdrücke, A.) *und seine Apotome* (deren Differenz, A.). *Dann subtrahiere die Kubikwurzel aus der Apotome von der Kubikwurzel aus dem Binom. Der dabei übrig bleibende Rest ist der Wert der Sache* (der Unbekannten, A.).“ [Cardano 1545, fol. 30, dt. Übers. A.]

Der Lösungsweg von Cardano wird nachgezeichnet in [Alten et al. 2003, S. 258ff.].

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Abb. 8.2.2 Titelblatt der *Ars magna, sive de regulis algebraicis* [Girolamo Cardano, Nürnberg 1545]

Auflösung von Gleichungen vierten Grades

War die im Druck vermittelte rechnerische Auflösung der kubischen Gleichung schon eine große Neuheit, so erregte die Auflösung der Gleichung vierten Grades, wie sie in der *Ars magna* angeboten wurde, erst recht die Aufmerksamkeit der Mathematiker. Sie stammt von Lodovico Ferrari (1522–1565). Darauf geht Cardano in Kapitel 29 ein und redet von einer

> „*Regel, besser als die vorangehende. Es ist die von Lodovico Ferrari, der sie mir auf meine Bitte gab. Durch sie haben wir all die Lösungen für Gleichungen mit der vierten Potenz, dem Quadrat, der ersten Potenz* (der Unbekannten, A.) *und der Zahl* (dem Konstanten Glied, A.) *oder aus der vierten Potenz, dem Kubus, dem Quadrat und der Zahl (...)*“
> [Cardano 1545, fol. 73, dt. Übers. A.], ausführlich in [Alten et al. 2003, S. 261ff.]

Wie bei der kubischen Gleichung wird durch Transformation der Variablen das zweithöchste Glied beseitigt. Der Grundgedanke besteht darin, eine Beziehung zwischen zwei Quadraten herzustellen, zusammen mit einer kubischen Hilfsgleichung in einer neu eingeführten Unbestimmten. Die Lösung besteht in einer Quadratwurzel aus einer Summe von dritten Wurzeln.

Bemerkenswerterweise lässt Cardano auch negative Zahlen als Lösungen zu. Dabei musste er auf das Problem einer Quadratwurzel aus negativen Zahlen stoßen. Es findet sich dort eine geheimnisvolle, unklare Bemerkung: *„So schreitet Arithmetik scharfsinnig voran. Das Ende davon ist, wie gesagt, so raffiniert, wie es unnütz ist.“* [Cardano 1545, fol. 66, dt. Übers. A.]

Rafael Bombelli

Als hätte Cardano die kommende Entwicklung schon im Auge gehabt, wurde die Fragestellung nach Quadratwurzeln aus negativen Zahlen – wir sprechen von imaginären bzw. komplexen Zahlen – alsbald aufgegriffen und korrekt und konkret behandelt.

Der Ingenieur Rafael Bombelli (1526–1572), der sich große Verdienste um die Entwässerung von Sümpfen erworben hatte, fand, dass die Mathematiker nicht tief genug in diese Problematik eingedrungen seien, insbesondere habe Cardano den Stoff schlecht dargestellt. So kam er zu dem Entschluss, seinerseits seine neuen Erkenntnisse niederzuschreiben. Das geschah zwischen 1557 und 1560. Sein Werk *L'Algebra* erschien in drei Büchern 1572 in Bologna. Zwei weitere Bücher wurden erst 1929 aus dem Nachlass herausgegeben.

Bombelli hatte Gelegenheit gehabt, ein Manuskript von Diophant einzusehen. Dies geht aus einem auch sonst lesenswerten, historisch gehaltenem Vorwort hervor: *„..., aber nur bei ihm (Diophant) begegnet man einer perfekten Arbeitsweise, im Unterschied zu anderen Autoren“* (vgl. ausführlich [Alten et al. 2003, S. 264f.]).

L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuiſa in tre Libri.
Con la quale ciaſcuno da ſe potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copioſa delle materie, che in eſſa ſi contengono.
Poſta hora in luce à beneficio delli ſtudioſi di detta profeſſione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Roſsi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori. 1579

Abb. 8.2.3 Titelblatt von *L'Algebra* [Rafael Bombelli, Zweite Auflage 1579]

Bombelli gebrauchte eine neuartige Bezeichnungsweise: Für Wurzeln aus negativen Zahlen, die weder positiv (er schreibt piu di oder p.d.) noch negativ (meno di oder kurz m.d.) sind, schreibt er p.d.m.11 für $+\sqrt{-121}$, und m.d.m.11 bedeutet $-\sqrt{-121}$. In moderner Schreibweise gibt Bombelli folgende Rechenregeln:

$$(+1)(i) = +i\,, \quad (-1)(i) = -i\,, \; (+1)(-i) = -i\,, \quad (-1)(-i) = +i\,,$$
$$(+i)(+i) = -1\,, \; (-i)(+i) = +1\,, \; (+i)(-i) = +1\,, \quad (-i)(-i) = -1.$$

Bombelli führte auch Bezeichnungen für Quadrat- und Kubikwurzeln und eine Art von Kubikwurzeln ein, die sich von früheren unterscheiden. Diese haben ihre eigenen Rechenregeln und einen neuen Namen, wenn sie weder positiv noch negativ sind [Katz 1993, S. 235]. Auch fand Bombelli, dass sich die imaginären Bestandteile bei Anwendung der Cardanoschen Formel wegheben, wenn die Kubikwurzeln „ausziehbar“ sind [Hofmann I, 2. Aufl. 1963, S. 135]. Es wäre hier der Ort, auf die hochinteressante und spannende Geschichte der mathematischen Bezeichnungen einzugehen, für die hier allerdings kein Platz ist. Dazu sei verwiesen auf [Cajori 1928/29], [Katz 1993], [Kaunzner 1996].

Mit Bombelli bricht die Kette innovativer Mathematiker aus Italien (zunächst) ab, wohl im Zusammenhang mit der Gegenreformation und der Beschneidung der Gedankenfreiheit. So verlagerte sich das Schwergewicht der Fortentwicklung der Mathematik nach West- und Mitteleuropa.

François Viète (Franciscus Vieta)

Noch bis zum Ende des 16. Jahrhunderts bot sich die Algebra dar als eine Ansammlung höchst geistvoller Regeln bei der Behandlung spezieller Probleme. Nun aber treten allgemeine Regeln und Symbole in den Vordergrund; Algebra wird länderübergreifend zu einer weiteren mathematischen Disziplin neben der Geometrie, die bis dahin weitgehend mit Mathematik gleichgesetzt worden war.

Diese Wendung der Dinge wurde wesentlich durch François Viète (latinisiert Vieta; 1540–1603) vorbereitet und damit der Weg für René Descartes (1596–1650) geebnet. Wir werden sehen, dass durch ihn die Geometrie im gewissen Sinne algebraisiert wird.

Vieta wurde 1540 in Fontenay-le-Comte als Sohn eines Juristen geboren. Er studierte ebenfalls Jura (in Poitiers) und eröffnete in Fontenay eine erfolgreiche Anwaltspraxis. Sein Leben erfuhr eine durchgreifende Änderung, als er sich in die Dienste von Antoinette und Jean Partenay begab. Deren wissbegierige, damals elfjährige Tochter Catherine „verführte“ Vieta zu Astronomie und Mathematik.

Im Jahre 1566 siedelte Vieta nach La Rochelle über und kam, obwohl selbst Katholik, in Berührung mit kalvinistischen Kreisen und das zu einer Zeit, als sich Frankreich in erbitterten Glaubensauseinandersetzungen befand. Er machte die Bekanntschaft mit Heinrich von Navarra, der nach dem

Übertritt zum Katholizismus – „*Paris ist eine Messe wert*“ – als Heinrich IV. König von Frankreich wurde. 1571 ging Vieta als „avocat au parlement“ nach Paris und machte sich dort mit einigen Mathematikern bekannt, u. a. mit Petrus Ramus (1515–1572). In Paris wurde Vieta Zeuge der Bartholomäusnacht, als Katholiken ein Massaker unter den Protestanten anrichteten. Auch Petrus Ramus wurde getötet. Vieta war mehrfach zu Ortswechseln gezwungen; einige Zeit war ihm sogar der Aufenthalt bei Hofe verboten.

Als König Heinrich II. seinen Hof nach Tours verlegt hatte, war Vieta herangezogen worden, um gegnerische Korrespondenz zu dechiffrieren. Nach der Ermordung von Heinrich III. (1589) trat Vieta in die Dienste von Heinrich IV. und lebte in Paris. Aus gesundheitlichen Gründen schied Vieta aus dem Staatsdienst aus und starb 1603 in Paris.

Das mathematische Opus von Vieta ist umfangreich und breit gefächert; manches blieb Manuskript oder konnte erst postum erscheinen. Von Vieta stammt ein „*Canon mathematicus ...*“ (seit 1571), der u. a. Tabellen aller sechs trigonometrischen Funktionen nebst einer Darlegung der ebenen und sphärischen Trigonometrie enthält. Weitere spezielle Untersuchungen betreffen u. a. Näherungskonstruktionen für das reguläre Siebeneck, unendliche Reihen, Widerlegungen angeblicher Kreisquadraturen und die geometrische Behandlung des casus irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades. Man nimmt an, dass er mit dem später nach Moivre benannten Satz vertraut war. Allerdings war Vieta Gegner des Weltsystems von Copernicus und der Gregorianischen Kalenderreform.

Was die Algebra betrifft, so sollen folgende Werke genannt werden (vgl. die Auflistung in [Reich/Gericke 1973, S. 12–20]):

1. *In artem analyticem Isagoge* (1591)
2. *Zeteticorum libri quinque* (1593)
3. *De aequationum recognitione et emendatione Tractatus duo* (postum 1615)
4. *Ad logisticam speciosam notae priores* (postum 1631)

Die Titel dieser Arbeiten sind schwer zu übersetzen und zwar deshalb, weil sich seit Vieta der Sprachgebrauch einiger Schlüsselworte verändert hat, beispielsweise das Wort bzw. die Bedeutung von „Analysis“. Wörtlich genommen heißt 1. etwa „Einführung in die analytische Kunst“. Da es sich aber inhaltlich um eine Einführung und um Begründung des algebraischen Rechnens, der Buchstabenrechnung handelt, wählten K. Reich und H. Gericke den Titel „Einführung in die Algebra“. Analog wird 4. zu „Formeln für das algebraische Rechnen“. Bei den *„Zeteticorum...“* – es leitet sich ab von dem griechischen zētēō, suchen – handelt es sich um 5 Bücher mit Aufgaben, die mit Hilfe der Buchstabenrechnung gelöst werden. In 3. findet sich der sog. Vietasche Wurzelsatz für Gleichungen der Grade zwei bis fünf.

Die *Isagoge* beginnt mit einer überschwänglichen Widmung an Catherine. Einige Passagen lauten:

„*Unermesslich sind die Wohltaten, die Ihr mir in Zeiten größten Unglücks erwiesen habt. (. . .) Überhaupt verdanke ich Euch mein ganzes Leben, (. . .) insbesondere aber verdanke ich Euch (. . .) das Studium der Mathematik, zu dem mich Eure Liebe zu diesem Gegenstand und die großen Kenntnisse, die Ihr in diesem Fach besitzt, angeregt haben . . .* “
[Reich/Gericke 1973, S. 34]

Er sei kein Scharlatan, aber die von ihm vorgetragene Kunst erlaube es, die Lösungen aller mathematischen Probleme mit größter Sicherheit zu finden. Vieta behielt mit seiner Skepsis Recht, dass sich seine Leser an der Vielzahl von fremdartigen Fachwörtern und Kunstworten stoßen und diese ihnen die Adaption seiner Methode erschweren würden.

Immerhin wird der Unterschied zwischen der alten und der neuen Auffassung von Algebra deutlich ausgesprochen; es ist der Unterschied zwischen *Logistica numerosa* und *Logistica speciosa*:

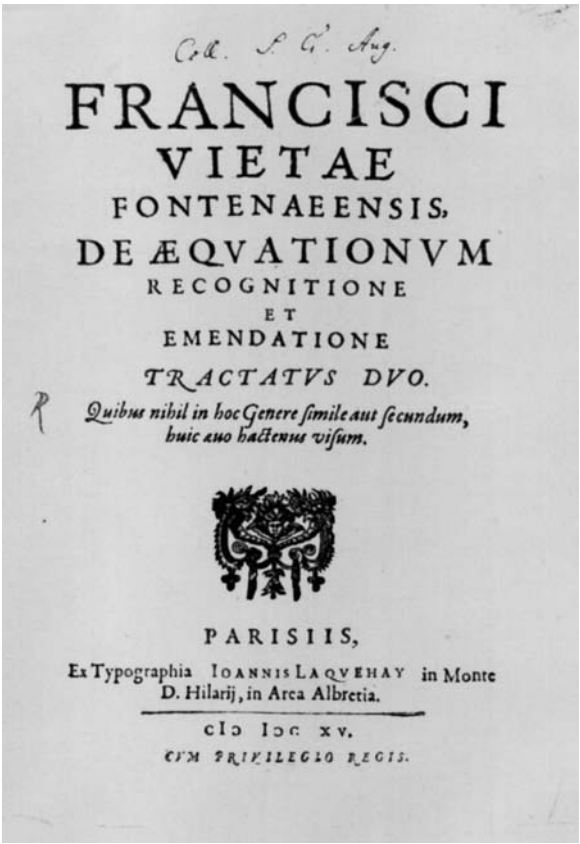
„*Die Logistica numerosa ist die, die durch Zahlen, die Logistica speciosa die, die durch die species oder formae rerum ausgeführt wird, z. B. mit Hilfe der Elemente des Alphabets.*“
[Reich/Gericke 1973, S. 44]

Eine zweite, entscheidende Stelle hat zum Inhalt die durchgängige Verwendung von Buchstaben:

„*Damit diese Arbeit durch ein schematisch anzuwendendes Verfahren unterstützt wird, mögen die gegebenen Größen von den gesuchten unbekannten unterschieden werden durch eine feste und immer gleich bleibende und einprägsame Bezeichnungsweise, wie etwa dadurch, daß man die gesuchten Größen mit dem Buchstaben A oder einem anderen Vokal E, I, O, U, Y, die gegebenen mit den Buchstaben B, G, D oder anderen Konsonanten bezeichnet.*“
[Reich/Gericke 1973, S. 52]

Nun sind allgemeingültige Formeln möglich. Die Symbole können Zahlen bedeuten, aber auch andere Größen, z. B. Strecken oder Winkel. Vieta benutzt die Zeichen + und −, aber noch nicht das Gleichheitszeichen = von Recorde. Stattdessen drückt er die Gleichheit mit den Worten *aequabitur* oder *aequale* aus. Zwar verwendet er Bruchstriche und geschweifte Klammern, die Multiplikation aber wird nach alter Gewohnheit mit *in* bezeichnet. Dazu tritt eine hoch entwickelte Umformtechnik, verbunden mit der Einsicht, dass Ausdrücke äquivalent sind, die lediglich umgeformt sind.

Vieta führt eine Reihe von Umformungen von Gleichungen an und beweist, dass – modern gesprochen – diese Umformungen äquivalente Gleichungen liefern. Nach diesen und anderen theoretischen Überlegungen Vietas in der *„Isagoge“* publizierte er 1593 (zwei Jahre nach der *„Isagoge“*) die


Coll. S. C. Aug.

FRANCISCI
VIETAE
FONTENAEENSIS,
DE ÆQVATIONVM
RECOGNITIONE
ET
EMENDATIONE
TRACTATVS DVO.
Quibus nihil in hoc Genere simile aut secundum,
huic ævo hactenus visum.

PARISIIS,
Ex Typographia IOANNIS LAQVEHAY in Monte
D. Hilarij, in Area Albretia.
cIↃ IↃC XV.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Abb. 8.2.4 Titelblatt des Buches „DE AEQVATIONVM RECOGNITIONE ET EMENDATIONE TRACTATUS DVO“ von F. Vieta, Paris 1615
[Bayerische Staatsbibliothek München]

Aufgabensammlung *„Zeteticorum. . . “*. Viele der Aufgaben schließen an Diophant an: Vieta kann aber mit seiner Bezeichnungsweise die Überlegenheit demonstrieren. (Vgl. die zusammenfassende Gegenüberstellung der Aufgaben bei Vieta, Diophant und Bombelli [Reich/Gericke 1973, S. 93ff.]. Dabei hat sich gezeigt, dass Vieta einen Zugang zu Diophant über Bombelli und über einen weiteren Text gehabt haben muss.)

Der Vietasche Wurzelsatz hat die Form (man beachte die Bezeichnungen!): Eine quadratische Gleichung in A: $(B+D)A-A^2 = BD$ hat die beiden Lösungen B und D. Für Gleichungen dritten Grades ergibt sich: Wenn B, D und G Lösungen sind, so gilt die Gleichung

$$A^3 - (B + D + G)A^2 + (BD + BG + DG)A = BDG \ .$$

Isaac Newton als Algebraiker

Newton (1642–1727) gehört als Begründer der Fluxionsrechnung hauptsächlich in die Geschichte der Infinitesimalmathematik und ganz besonders in die Geschichte der Physik: Im Jahre 1687 war eines der bedeutendsten Werke der Menschheitsgeschichte erschienen, die *Philosophiae naturalis principia mathematica* (etwa: Mathematische Prinzipien der Naturwissenschaft).

Aber Newton hat auch einen festen Platz in der Historiographie der Algebra. Newton hat zwischen 1673 und 1683 wiederholt Vorlesungen zur Algebra gehalten. Es ergab sich daraus 1707 eine *Arithmetica universalis*, eine englischsprachige Fassung erschien 1720. Dort finden sich Methoden zum Lösen von Gleichungen, Verfahren, um Teiler von Polynomen zu finden sowie Untersuchungen über Wurzeln von Gleichungen. Von besonderem Interesse sind seine Aussagen über die (elementar)symmetrischen Funktionen der Gleichungswurzeln im Anschluss an Vieta, aber nun in voller Allgemeinheit (vgl. die Anthologie von [Struik 1969]).

Auch Newtons Klassifikation der Kurven dritter Ordnung sollte wenigstens erwähnt werden; für Einzelheiten vgl. [Scriba/Schreiber 2. Aufl. 2005, S. 333f.].

8.3 Analytische Geometrie

Die Bereitstellung algebraischer Methoden gehört zu den innermathematischen historischen Voraussetzungen für die Herausbildung der analytischen Geometrie. Eine ihrer historischen Wurzeln liegt also in der Entwicklung von der Coß bis zu Vieta. Eine weitere historische Wurzel hat man in der Übernahme der antiken Kegelschnittlehre und deren Einordnung in neue Zusammenhänge zu erblicken.

Mit dem Anfang des 17. Jahrhunderts trat in der Lehre von den Kegelschnitten eine entscheidende Wende ein: Kegelschnitte waren in der Antike eine gründlich studierte, aber eben eine bloß mathematische Angelegenheit gewesen, ein bloßes gedankliches System, frei – abgesehen vom Kreis – von astronomisch-physikalischen Bezügen. Nun aber erhielten die Kegelschnitte mit der Entwicklung der Naturwissenschaften eine objektive Existenz: Ellipsen und Parabeln waren Bahnkurven wirklicher Bewegung von Himmelskörpern bzw. Geschossen. Alte Untersuchungsergebnisse wurden in ganz neue, erweiterte wissenschaftliche Zusammenhänge hineingestellt. Die Folge war – und man mag dies geradezu als historische Gesetzmäßigkeit betrachten – ein erneuter bedeutender Aufschwung einer traditionellen wissenschaftlichen Disziplin.

Zu den Fortschritten der Kegelschnittlehre kann man auch die Bemühungen von Fermat rechnen, die Bücher V bis VII der *Conica* von Apollonios zu rekonstruieren. Gregorius a Sancto Vincentio (1584–1667), ein Jesuit, beschäftigte sich mit einer zusammenfassenden Darstellung der Ergebnisse von

Apollonios und der neu erzielten Einsichten zur Kegelschnittlehre. Sein in den zwanziger Jahren entstandenes Manuskript konnte wegen der Kriegswirren des 30-jährigen Krieges erst 1647 zum Druck gelangen. Zu diesem Zeitpunkt war sein *Opus geometricum* bereits überholt.

Die entscheidenden Schriften zur analytischen Geometrie waren schon geschrieben bzw. sogar gedruckt. Sie stammten von Fermat und Descartes und zeichneten sich durch die historisch notwendig gewordene Verschmelzung von Algebra und Geometrie aus. Beide befassten sich um etwa dieselbe Zeit mit ähnlichen Problemen. Heute steht fest, dass Descartes seine Ergebnisse früher zum Druck bringen konnte (1637), dass aber Fermats erst 1679 aus dem Nachlass veröffentlichte einschlägige Schrift schon vor 1637 niedergeschrieben wurde. Außerdem bestanden wesentliche Unterschiede im Anliegen und in den Methoden der beiden hauptsächlichen Begründer der analytischen Geometrie. Descartes löste sich von den teilweise ungeschickten Bezeichnungen der Vietaschen Algebra. Doch behielt er das der alten Geometrie verhaftete Ziel noch bei, mittels geometrischer Methoden Gleichungen aufzulösen. Demgemäß ist die neue Methode der analytischen Geometrie bei Descartes nur sozusagen implizit vorhanden; man muss sie aus den von ihm durchgeführten Beispielen herauslesen.

Fermat dagegen zielte auf eine gänzlich neue Behandlungsweise der Kegelschnittlehre und darüber hinaus der Lehre von den geometrischen Örtern. Dabei strebte er eine systematische, explizite Darlegung der neuen Methoden an. Dagegen blieb er bei den Bezeichnungsweisen von Vieta stehen.

René Descartes (Cartesius)

Descartes wurde 1596 in La Haye (Touraine) geboren. Er war 32 Jahre jünger als Galilei und 46 bzw. 50 Jahre älter als Newton bzw. Leibniz. Descartes gehört also zu der mittleren Generation zwischen den Initiatoren und den Vollendern der Wissenschaftlichen Revolution [Wußing 2002], in deren Gefolge sich die moderne Naturwissenschaft und die neuzeitliche Mathematik der Variablen herausbildeten. Descartes nahm in diesem Prozess eine zentrale Stellung ein, als Mathematiker, als Naturforscher mit seinen Beiträgen zur Optik und zur Mechanik und als Schöpfer eines universellen Weltbildes, das getragen war von einer auf Vernunft gegründeten Philosophie. Seine Zeitgenossen waren fasziniert von seinem Entwurf eines umfassenden Weltbildes. Es bleibt hervorzuheben, dass Descartes – vermutlich als erster – den Begriff des Gesetzes aus dem Rechtswesen und dem religiösen Bereich auf den der Natur ausgedehnt hat, also den naturwissenschaftlichen Gesetzesbegriff geschaffen hat. Die Natur läuft nach Gesetzen ab. Diese zunächst noch vorsichtig tastende Wendung zum umfassenden Gesetzesbegriff lässt sich im *Discours de la méthode* (Abhandlung von der Methode) nachlesen; schließlich spricht er von *„bestimmten Gesetzes, die Gott in der Natur fest begründet hat“* und vom *„Zusammenhang dieser Gesetze in der Natur.“* [Descartes 1980, S. 37]

Descartes stammte aus dem französischen Berufsadel. Der junge Descartes wurde in dem auf hohem wissenschaftlichem Niveau stehenden Jesuitenkolleg

La Flèche erzogen, an dem auch Naturwissenschaften und Mathematik eine große Rolle spielten. Trotz eines Studiums der Rechtswissenschaften schlug er eine juristische Laufbahn aus und nahm – von 1617 bis 1621 – als eine Art Beobachter an einigen Feldzügen während des Dreißigjährigen Krieges teil. Dabei benutzte er sich bietende Gelegenheiten, um mit bedeutenden Gelehrten in Verbindung zu kommen, u. a. mit I. Beeckman (1588–1637), mit Stevin (1548–1620) und möglicherweise mit dem deutschen Mathematiker Johannes Faulhaber (1580–1635). Im Winter 1619/20 erfuhr Descartes eine „Erleuchtung“ bei der Suche nach einer wahrhaftigen Philosophie; zum Dank führte ihn eine Wallfahrt nach Rom.

Descartes war zeitlebens scheu und zurückhaltend und pflegte zurückgezogen zu leben. Einer seiner Wahlsprüche lautete: „*Bene vixit, qui bene latuit.*“ (Gut hat gelebt, wer sich gut verborgen gehalten hat). Dieser Ausspruch geht auf den römischen Dichter Ovid zurück. Nach einem Aufenthalt in Paris, der ihn immerhin in Berührung zu einem sich um Marin Mersenne (1588–1648) formierenden Kreis französischer Naturforscher gebracht hatte, nahm Descartes schließlich 1628/29 Aufenthalt in den republikanischen Niederlanden, in der Hoffnung, dort größere Gedankenfreiheit zu finden als im royalistischen, von Glaubenskämpfen zerrissenen Frankreich. Ihm schwebte eine umfassende Beschreibung des Universums unter dem Titel *Le Monde* (Die Welt) vor, die die Bildung der Himmelskörper und der Erde, die Entstehung des tierischen und menschlichen Körpers und schließlich sogar das Wechselspiel zwischen Körper und Denken erklären sollte.

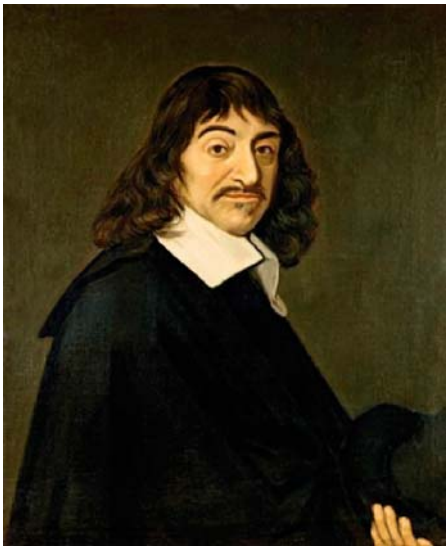


Abb. 8.3.1 René Descartes, Gemälde von Frans Hals 1648, Musée du Louvre, Paris [Wikimedia Commons]

Abb. 8.3.2 Königliche Embleme am Tor zum schwedischen Königshof [Foto Alten]

Anfang der dreißiger Jahre wurde auch in den Niederlanden die Verurteilung (1633) von Galilei bekannt; an der Universität Lüttich wurde die Erörterung der copernicanischen Lehre untersagt. Daraufhin hielt Descartes die Veröffentlichung von *Le Monde* zurück. Er entschloss sich lediglich zur – anonymen – Publikation eines relativ ungefährlichen Teiles, einer Methodenlehre, unter dem Titel *Discours de la méthode* (Abhandlung von der Methode; 1637). Aber selbst der „Discours“ brachte Descartes in ernsthafte Schwierigkeiten. Ein Professorenkolloquium in Utrecht verwarf 1642 seine Philosophie als im Widerspruch zur offiziellen Theologie stehend. Die Schriften von Descartes wurden 1663 sogar auf den päpstlichen Index der verbotenen Schriften gesetzt.

Schließlich folgte Descartes einer Einladung der schwedischen Königin Christine an den Hof nach Stockholm, um die hochgebildete Herrscherin in Philosophie zu unterweisen und in Stockholm eine Akademie zu gründen. Im Oktober 1649 traf Descartes in Stockholm ein. Seine Pflichten waren beschwerlich: Um fünf Uhr morgens hatte er sich zum Unterricht bei der Königin einzufinden und das im strengen skandinavischen Winter. Descartes zog sich eine schwere Erkältung zu und verstarb am 11. Februar 1650.

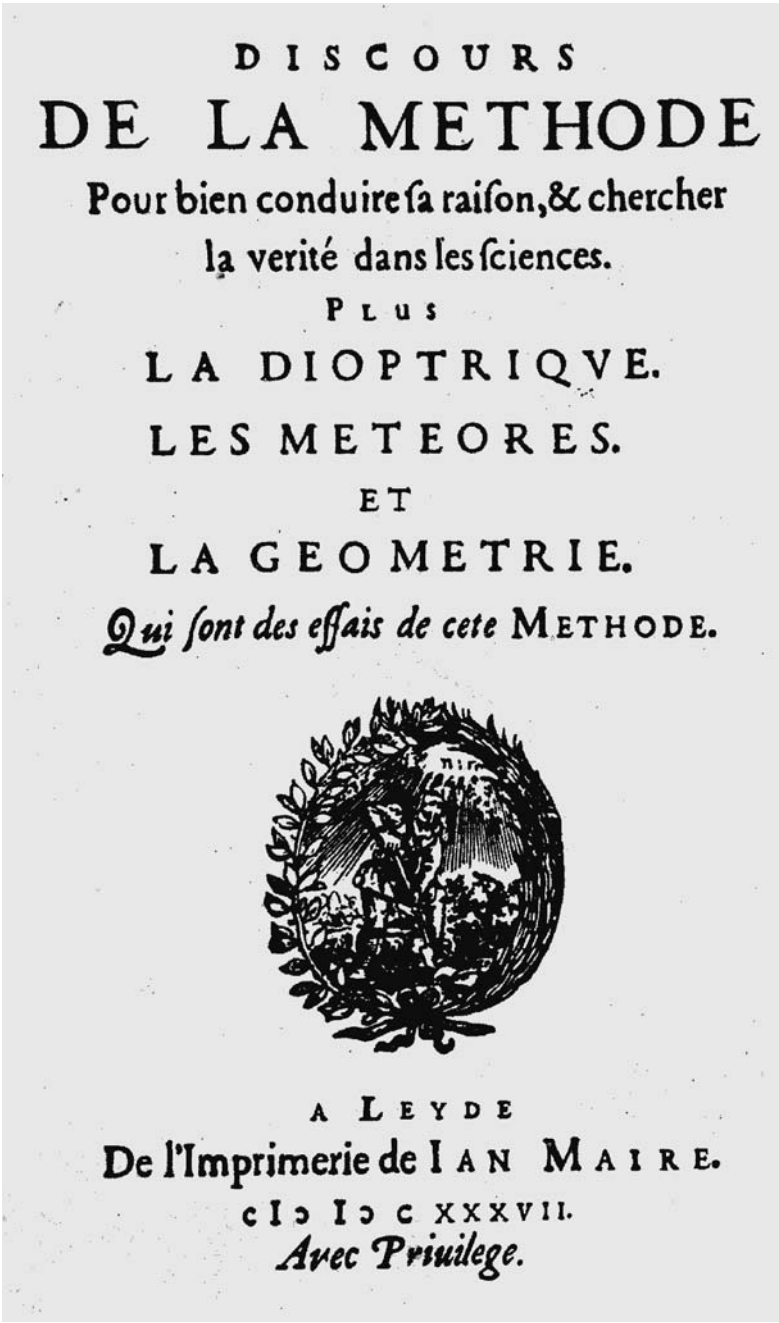

DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ C XXXVII.
Avec Priuilege.

Abb. 8.3.3 Titelblatt des Buches *Discours de la méthode* [René Descartes 1637]

Der „Discours "gehört zu den Marksteinen in der Herausbildung der modernen Naturwissenschaft und Mathematik, sowohl im Allgemeinen als auch im Speziellen.

Der „Discours" enthält drei Anhänge, gedacht als Probe auf seine philosophische Methode, einen über Meteore und Himmelserscheinungen, einen über Dioptrik und einen über Geometrie. Dieser dritte Teil ist für die Geschichte der Mathematik von außerordentlicher Bedeutung und zwar für die Entstehung der analytischen Geometrie. Scriba/Schreiber verweisen darauf, dass entsprechende Grundgedanken in klarer Form bereits 1628 in den *Regulae ad directionem ingenii* (Regeln zur Leitung des Verstandes) von Descartes formuliert wurden, allerdings erst postum gedruckt [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 329].

Auch die mathematische Leistung von Descartes entsprang seiner rationalistischen Philosophie. Es ging um klare Begriffe, um scharfe Definitionen und um einprägsame Bezeichnungen. So ist es verständlich, dass er sich des neuen Werkzeuges der symbolischen Algebra bediente, das größere Klarheit und mehr Sicherheit beim Gebrauch von Begriffen und bei Rechnungen ermöglichte. So wurde Descartes seinerseits zum Wegbereiter mathematischer Symbolik. Auf ihn geht die Gepflogenheit zurück, die Variablen mit den letzten Buchstaben des Alphabetes x, y, z zu bezeichnen. Er verwendete durchgehend die Zeichen + und −, die heutige Potenzschreibweise und das Quadratwurzelzeichen, allerdings ohne den Querstrich. Auch fehlt bei ihm noch das heutige, auf Recorde zurückgehende Gleichheitszeichen =. Stattdessen verwendete er eine Abkürzung des Wortes aequatur – eine Zusammenziehung der Buchstaben a und e.

Die Grundvorstellung der analytischen Geometrie ist noch relativ einfach. Eine Schar paralleler, nicht notwendig äquidistanter Geraden, schneidet auf einer Geraden, die nicht parallel zu denen der Schar liegt, Strecken ab, die von einem Anfangspunkt A an gemessen werden. Auf jeder der Parallelen

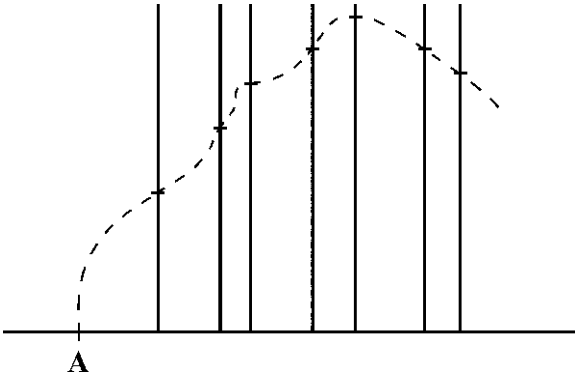


Abb. 8.3.4 Zur Grundvorstellung der analytischen Geometrie bei Descartes

der Schar liegt eine Strecke; ein Endpunkt befindet sich auf der ausgezeichneten Geraden. Wenn nun eine von Scharparallele zu Scharparallele sich nicht ändernde Beziehung zwischen den von A aus gemessenen Strecken und den Strecken auf den Parallelen besteht, dann hat man in dieser Beziehung eine Gleichung einer Kurve. Die Wortverbindung „Gleichung einer Kurve“ tritt bei Descartes allerdings nur einmal auf. Descartes verfolgte das Ziel, eine geometrische Basis für die Lösung algebraischer Probleme zu schaffen. Er schrieb:

> „*Alle Probleme der Geometrie können leicht auf einen solchen Ausdruck gebracht werden, dass es nachher nur der Kenntniss der Länge gewisser gerader Linien bedarf, um dieselben zu construiren.*
> *Und gleichwie sich die gesammte Arithmetik nur aus vier oder fünf Operationen zusammensetzt, nämlich aus den Operationen der Addition, der Subtraction, der Multiplication, der Division und des Ausziehens von Wurzeln, welches ja auch als eine Art von Division angesehen werden kann: so hat man auch in der Geometrie, um die gesuchten Linien so umzuformen, dass sie auf Bekanntes führen, nichts Anderes zu thun, als andere Linien ihnen hinzuzufügen oder von ihnen abzuziehen; oder aber, wenn eine solche gegeben ist, die ich, um sie mit den Zahlen in nähere Beziehung zu bringen, die Einheit nennen werde, und die gewöhnlich ganz nach Belieben angenommen werden kann, und man hat noch zwei andere, eine vierte Linie zu finden, welche sich zu einer dieser beiden verhält, wie die andere zur Einheit, was dasselbe ist, wie die Multiplication; oder aber eine vierte Linie zu finden, welche sich zu einer der beiden verhält, wie die Einheit zur anderen, was dasselbe ist wie die Division; oder endlich eine oder zwei oder mehrere mittlere Proportionalen zu finden zwischen der Einheit und irgend welchen anderen Linien, was dasselbe ist wie das Ausziehen der Quadrat- oder Cubikwurzel u.s.w. – Und ich werde mich nicht scheuen, diese der Arithmetik entnommenen Ausdrücke in die Geometrie einzuführen, um mich dadurch verständlicher zu machen.*“
> [Descartes 1894, S. 1f.]

Nehmen wir das Beispiel der Multiplikation:

> „*Es sei zum Beispiel AB die Einheit und es wäre BD mit BC zu multiplicieren, so habe ich nur die Punkte A und C zu verbinden, dann DE parallel mit CA zu ziehen und BE ist das Product der Multiplication*“.
> [Descartes 1894, S. 2]

Diese Passage klingt harmlos, enthält aber doch einen wesentlichen Fortschritt: Unter den mit Buchstaben bezeichneten Strecken *AB, BD,* usw. werden nicht nur die geometrischen Strecken, sondern zugleich die den Strecken (unter Zugrundelegung einer Einheit) entsprechenden Zahlenwerte verstanden).

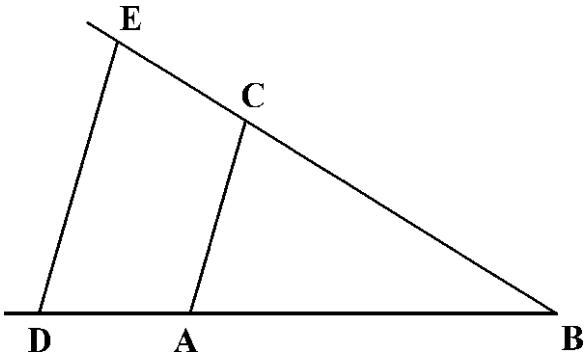


Abb. 8.3.5 Multiplikation von Strecken nach Descartes

In diesem Sinne ist die geometrische Konstruktion von Strecken gleichwertig mit dem Produkt zweier Zahlenwerte. Mehr noch: Ausdrücke wie a^2, a^3 usw. stellen eine Zahl dar und bedeuten nicht nur Flächen- bzw. Rauminhalte. Somit befreite sich Descartes – ähnlich wie zuvor Vieta – vom hemmenden Prinzip der Dimensionstreue. Nach klassischer Auffassung wäre z.B. der Ausdruck $\sqrt[3]{a - bc^5}$ ganz sinnleer: Dritte Wurzeln kann man nur (als Bestimmung der Kantenlänge eines Würfels) aus Ausdrücken der Dimension 3 ziehen. Jetzt handelt es sich jedoch um das Wurzelziehen aus einer Zahl, die nicht notwendig eine geometrische Bedeutung haben muss [Bos 2001].

Auf dieser theoretischen Basis traf Descartes die Unterscheidung zwischen zwei wesentlichen Typen von Aufgaben:

1. „Bestimmte Aufgaben". In unserer Sprechweise bedeutet das die Auflösung von algebraischen Gleichungen durch geometrische Konstruktion.
2. „Unbestimmte Aufgaben". Wir würden heute von der Konstruktion geometrischer Örter bzw. von der Abhängigkeit von Variablen sprechen.

Der erste Fall tritt ein, wenn man „genau soviel Gleichungen aufstellen" kann wie man „gesuchte Linien" hat; hat man weniger Gleichungen als gesuchte Linien, so handelt es sich um eine unbestimmte Aufgabe.

La Géométrie mündet in einen dritten Teil, in dem Descartes sozusagen die algebraischen Früchte seiner geometrisch-analytischen Untersuchungen erntet. Er unterschied bei Gleichungswurzeln zwischen „wahren" (d. h. positiven) und „falschen" (d. h. negativen) Lösungen. Er sprach davon, dass es Gleichungen n-ten Grades mit n Lösungen gibt, aber er bezog keine klare Haltung zu dem 1629 von Albert Girard (1595–1632) formulierten, wenn auch nicht bewiesenen Fundamentalsatz der Algebra.

> „*Wisset also, dass für eine Gleichung so viele verschiedene Wurzeln, d. h. Werthe der unbekannten Größe existiren können als diese unbekannte Grösse Dimensionen hat; . . .*" [Descartes 1894, S. 69]

Descartes wusste, dass jede ganzzahlige Lösung einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten das absolute Glied teilt. Ferner formulierte er die folgenden Regeln (eine schwache Form der sog. Cartesischen Zeichenregeln): Die Anzahl der positiven Wurzeln einer algebraischen Gleichung ist höchstens gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten. Die Anzahl der negativen Wurzeln ist höchstens gleich der der Zeichenfolgen der Koeffizienten.

> „*Ferner lässt sich ... feststellen, wie viele wahre und wie viele falsche Wurzeln eine Gleichung haben kann; es können nämlich so viele wahre Wurzeln vorhanden sein als die Anzahl der Wechsel der Vorzeichen + und − beträgt, und so viele falsche, wie oft zwei Zeichen + oder zwei Zeichen − aufeinander folgen.*“
> [Descartes 1894, S. 70]

Diese Regeln sind richtig; ein Beweis aber stammt erst von C.F. Gauß aus dem Jahre 1826.

Fassen wir zusammen: Von einer entwickelten analytischen Geometrie kann bei Descartes noch keine Rede sein. Es gibt z. B. kein explizit gehandhabtes Koordinatensystem. Dennoch hat Descartes mit *La Géométrie* einen bedeutenden, in die Zukunft weisenden Beitrag für die Mathematik geleistet. Die Bezeichnung „Kartesische Koordinaten“ geht auf Leibniz und die Brüder Jacob (I) und Johann (I) Bernoulli zurück.

Descartes erwähnt Cardano und „Scipio Ferreus“. Jedoch bleibt – wie u. a. auch D. J. Struik in seiner Anthologie hervorhebt – das Verhältnis zu Vieta unklar. Dies gilt auch für die Beziehung von Descartes zu dem englischen Mathematiker und Astronomen Thomas Harriot (1560–1621). Dieser hatte, vermutlich um 1610, die einflussreiche *Artis analyticae praxis* (gedruckt London 1631) geschrieben. Sie nimmt in einigen Punkten die Gleichungslehre von Descartes vorweg. Harriot verwendete das Gleichheitszeichen $=$ und die Zeichen $<$ und $>$ in unserer heutigen Bedeutung.

Mit der „Géométrie“ von Descartes wird ein grundlegendes Problem der Mathematik, das „Konstruktionsproblem“, akzentuiert. Darauf kann hier nicht eingegangen werden; verwiesen sei auf das tiefgründig angelegte Werk von H. Bos: *Redefining Geometrical Exactness* [Bos 2001].

Wie man am Beispiel von Stevin erkennen kann, ist der ungewöhnlich rasche Aufschwung der Mathematik in den Niederlanden – neben der Entfaltung einer blühenden Kultur – mit der engen Bindung an praktische Probleme (Handel, Bautätigkeit) während des Frühkapitalismus und des Befreiungskampfes gegen die Habsburger verbunden [Struik 1981], [Maanen 1984]. In dieser aufnahmebereiten Situation erfolgten Adaption und Weiterführung der damals neuesten Mathematik, insbesondere der „Géométrie“ von Descartes. Eine Zentralfigur der damaligen niederländischen Mathematik war Frans van Schooten (ca. 1615–1660). Er war mit Descartes befreundet, kannte die Schriften von Vieta und Fermat, unterrichtete an der Leidener Ingenieurschu-

le und privat die Brüder Constantijn und Christiaan Huygens (1629–1695) in Mathematik.

Van Schooten entwarf Figuren zum *Discours de la méthode*, veranstaltete eine Vieta-Ausgabe und veröffentlichte – höchst folgenreich – 1649 eine kommentierte lateinische Ausgabe der „Géométrie“. Descartes hatte französisch publiziert; nun wurde das Werk erst richtig der Gelehrtenwelt zugänglich. Es folgten 1659 und 1661 die „Géométrie“ in zwei Bänden, erweitert um neue in den Niederlanden erzielte Forschungsergebnisse (vgl. ausführlich [Maanen 1984]).

Pierre de Fermat

Fermat ist eine der Zentralfiguren der Mathematik des 17. Jahrhunderts, ja, er war vielleicht einer der bedeutendsten Mathematiker überhaupt. Er gehört zu den Schrittmachern der Infinitesimalrechnung, leistete Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und zur analytischen Geometrie.

Am berühmtesten wurden seine Beiträge zur Zahlentheorie. Erinnert sei an den kleinen Fermatschen Satz, vor allem aber an den sog. großen Fermatschen Satz, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für alle $n \geq 3$ nicht in ganzen Zahlen lösbar ist. Darüber, über die spektakulären Versuche zum Beweis dieses Satzes und den erst 1995 durch Andrew Wiles vollendeten Beweis, wird in Bd. II berichtet werden.

Noch in anderer Weise hat Fermat die Zahlentheorie angeregt, freilich mit einer falschen Behauptung. Er war der Meinung, dass jede Zahl

$$Z = 2^{2^k} + 1 \quad \text{für alle ganzen} \quad k \geq 0$$

eine Primzahl ist. Diese Aussage ist von Bedeutung für die Gaußsche Theorie der Kreisteilung und für die Aussage, welche regulären Polygone mit Zirkel

Abb. 8.3.6 Der Große Fermatsche Satz (Frankreich 2001, Tschechien 2000). Das Geburtsjahr ist falsch angegeben. Fermat wurde nach neueren Forschungen 1607 geboren

und Lineal konstruierbar sind. Doch schon Euler bewies, dass 641 die Zahl $2^{32}+1$ teilt, dass die Aussage also für $k=5$ falsch ist. Mit Hilfe eines gewaltigen Aufwandes an Computern ist die Zahl $2^{2^9}+1$ vollständig in Faktoren zerlegt worden; sie hat 155 Stellen.

Soweit die Zwischenbemerkung über die spektakulären Beiträge Fermats zur Zahlentheorie.

Nun zu „Fermat und die analytische Geometrie“. Man darf sich keine übertriebenen Vorstellungen vom Reifezustand der analytischen Geometrie bei Fermat machen. Fermat hat zur analytischen Geometrie eine kurze Abhandlung hinterlassen: *Ad locos planos et solidos isagoge* (Einführung in die ebenen und körperlichen (geometrischen) Örter). Der Titel ist nach heutiger Terminologie missverständlich. Bei den „körperlichen Örtern“ handelt es sich nicht um analytische Geometrie des Raumes. Vielmehr übernimmt Fermat die aus der Antike stammende Einteilung der geometrischen Örter in der Ebene: „ebene Örter“, d. h. Gerade und Kreis; „körperliche Örter“, d. h. Parabel, Hyperbel, Ellipse; „lineare Örter“, d. h. alle anderen Kurven. Die linearen Örter behandelt Fermat nicht. Er unterschätzte bei weitem die Schwierigkeiten, die sich dem Studium höherer Kurven entgegenstellen; er glaubte, dass deren Studium auf das der Kegelschnitte reduziert werden könne. Erst viel später, 1643 und 1650, hat Fermat diesen Irrtum korrigiert und ist außerdem zu einigen gedanklichen Ansätzen einer analytischen Geometrie des Raumes vorgestoßen.

Die *Isagoge* beginnt mit folgenden Worten:

> „*Es ist kein Zweifel, daß die Alten sehr viel über Örter geschrieben haben. Zeuge dessen ist Pappos, der zu Anfang des 7. Buches versichert, daß Apollonios über ebene, Aristaios über körperliche Örter geschrieben habe. Aber wenn wir uns nicht täuschen, fiel ihnen die Untersuchung der Örter nicht gerade leicht. Das schließen wir daraus, daß sie zahlreiche Örter nicht allgemein genug ausdrückten, wie man weiter unten sehen wird.*
> *Wir unterwerfen daher diesen Wissenszweig einer besonderen und ihm eigens angepaßten Analyse, damit in Zukunft ein allgemeiner Zugang zu den Örtern offen steht.*“
> [Fermat 1923, S. 7]

Dann kommt ohne weiteren Übergang die entscheidende Stelle, in der das Prinzip der analytischen Geometrie erstmals ausgesprochen wird:

> „*Sobald in einer Schlußgleichung zwei unbekannte Größen auftreten, hat man einen Ort, und der Endpunkt der einen Größe beschreibt eine gerade oder krumme Linie (...). Die Gleichungen kann man aber bequem versinnlichen, wenn man die beiden unbekannten Größen in einem gegebenen Winkel (den wir meist gleich einem Rechten nehmen) aneinandersetzt und von der einen die Lage und den einen Endpunkt gibt.*“ [Fermat 1923, S. 7]

Beispielsweise wird die Gleichung der Geraden folgendermaßen behandelt (zur Erinnerung: Fermat benutzt die Bezeichnungen von Vieta: Vokale bedeuten Veränderliche, Konsonanten Konstante):

> „*NZM sei eine der Lage nach gegebene Gerade, N eine fester Punkt auf ihr. NZ sei die eine unbekannte Größe A, und die an sie unter dem gegebenen Winkel NZI angesetzte Strecke ZI sei gleich der anderen unbekannten Größe E. Wenn dann* $DA = BE$*, so beschreibt der Punkt I eine der Lage nach gegebene Gerade.*“

Dann kommt der Beweis:

> „*Es ist nämlich* $B : D = A : E$*. Daher ist das Verhältnis von A zu E fest, und da außerdem der Winkel bei Z gegeben ist, kennt man die Form des Dreiecks NIZ und damit den Winkel INZ. Der Punkt N ist aber gegeben und die Gerade NZ der Lage nach bekannt. Also ist die Lage von NI gegeben. . . .*“
> [Fermat 1923, S. 7f.]

Noch eine Bemerkung zur Schreibweise: Statt der modernen Form $DA = BE$ schrieb Fermat

$$D \text{ in } A \text{ aequatur } B \text{ in } E \ .$$

Analog bewies Fermat, dass eine Gleichung der Art $AE = Z$ planum (das Dimensionsproblem im Original von Fermat umgeht Tannery in seiner „modernen“ Ausgabe im 19. Jh. durch eine hochgesetzte II am Z) eine Hyperbel, $E^2 = DA$ eine Parabel, $B^2 - A^2 = E^2$ einen Kreis, $A^2 + B^2 = E^2$ eine Hyperbel darstellt. Insgesamt lieferte Fermat so einen im Wesentlichen vollständigen Beweis des folgenden Satzes:

> „*Wenn (. . .) keine der unbekannten Größen die zweite Potenz überschreitet, wird der Ort eben oder körperlich (. . .)*“
> [Fermat 1923, S. 7]

Modern ausgedrückt: Kurven zweiter Ordnung stellen stets Kegelschnitte dar; freilich kannte Fermat noch nicht die ausgearteten Fälle als solche.

Fermats Zielstellung läuft also darauf hinaus, die Identität eines durch eine algebraische Gleichung definierten geometrischen Ortes mit schon bekannten Kurven nachzuweisen. Seine Methode besteht aber noch nicht darin, aus der Gleichung der Kurve deren Eigenschaften herzuleiten.

Durchbildung der Methoden der analytischen Geometrie

Die Anerkennung der Methoden und der Denkweisen der analytischen Geometrie vollzog sich in Etappen, teils wegen der Neuartigkeit der Ideen, teils wegen der konsequenten Verwendung von Symbolen (ausführlich in [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 331ff.]).

Abb. 8.3.7 Johann van Waveren Hudde, Johan de Witt [Wikimedia Commons], [Wikipedia.org]

Der „Discours“ von Descartes war anonym erschienen und in französischer Sprache geschrieben, also der damaligen Gelehrtengesellschaft kaum zugänglich. Abhilfe schuf eine Übersetzung 1649 ins Lateinische durch Frans van Schooten (um 1615–1660); damit wurde der „Discours“ Studiengegenstand in der holländischen Mathematikergruppe, bei Johan de Witt (1625–1672) und Jan Hudde (1628–1704). Sie fügten zahlreiche Ergänzungen ein; erweiterte Ausgaben des „Discours“ in zwei Bänden erschienen 1659/61, 1683 und 1695.

Fermats Arbeit hatte anfangs nur in Abschriften zirkuliert und wurde erst 1679 gedruckt.

Die durchgängige Verwendung von Koordinaten setzte sich allgemein durch, wohl zuerst in der englischen Schule, etwa bei John Wallis. Er behandelte 1655 nach analytischer Methode die Lehre von den Kegelschnitten und verwendete sogar negative Koordinaten.

Newton hat einen hervorragenden Beitrag zur Koordinatengeometrie geleistet [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 332–335]. Er verwendete ebene und räumliche Koordinaten in allen vier Quadranten. Die Benutzung von Polarkoordinaten eröffnete den Weg zur Verallgemeinerung des Koordinatenbegriffes, auch hin zur Beschreibung von Kurven durch Parameterdarstellungen. Newton lieferte eine Klassifikation der Kurven dritten Grades in der Ebene und gab 72 Typen an (sechs Newton bekannte, aber übergangene Typen wurden erst im 18. Jahrhundert wieder entdeckt). Diese Klassifikation wurde erst 1704 als Anhang zu den *Opticks* von Newton publiziert. Geradezu aufregend interessant sind die bildlichen Darstellungen der Kurven dritten Grades (Ovale, Glockenkurven, Neilsche Parabel; vgl. [Newton: Mathematical Works, Vol. IIa]).

Newtons Beispiel wirkte anregend. Man kann bei James Stirling (1692–1770) und Colin Maclaurin (1698–1746) schon von algebraischer Geometrie im Sinne der algebraischen Geometrie des 19. Jahrhunderts sprechen. Stirling stellte z.B. 1717 fest, dass eine Kurve n-ten Grades im Allgemeinen durch $n(n+3)/2$ Punkte fixiert ist. Maclaurin hält 1720 fest, dass eine Kurve n-ter Ordnung und eine Kurve m-ter Ordnung im Allgemeinen $m \cdot n$ gemeinsame Punkte haben.

Den nächsten großen Schritt auch in dieser Disziplin verdankt man Leonhard Euler (1707–1783), dem äußerst produktiven Schweizer Mathematiker im zweiten Band der *Introductio in analysin infinitorum* (Einführung in die Analysis der unendlich kleinen Größen) von 1748. Ihm gelang – nach einer Formulierung in [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 335] – „*die Synthese alles Fruchtbaren aus beiden Schulen*“, der französischen und der britischen. Dort finden sich u. a. der allgemeine Begriff der Gleichung einer Kurve, die Klassifikation der Kegelschnitte, die Kurven dritter und vierter Ordnung, die algebraische Behandlung (ohne Differentialrechnung) der Tangenten, Normalen, Krümmung, Wendepunkte u. a. m. Im Anhang findet sich eine allgemeine Theorie der Körper und ihrer Oberflächen und der Raumkurven (ausführlich in [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 335f.]).

Der fachspezifische Ausdruck „analytische Geometrie“ stammt wohl erst von Sylvestre François Lacroix (1765–1843), der ihn 1796/99 in seinem Lehrbuch *Cours de mathématiques* verwendete. Die „Aufrüstung“ der analytischen Geometrie mit weit reichenden algebraischen Hilfsmitteln – Determinanten, Matrizen, Gruppen, Vektoren – erfolgte erst im 19. Jahrhundert.

8.4 Anfänge der projektiven Geometrie

Mit dem nach Pappos benannten Satz hatte die Antike einen Satz hervorgebracht, den wir heute der projektiven Geometrie zurechnen und gelegentlich auch als Satz von Pappos-Pascal bezeichnen.

Eine kontinuierliche historische Entwicklung hin zu einer zusammenhängenden Disziplin „projektive Geometrie“ begann keimhaft während der Renaissance innerhalb der perspektivischen Methoden der Künstler. 1511 warf Leon Battista Alberti (1404–1472) in seinem erst postum in Nürnberg gedruckten *Trattato della pittura* die Frage nach den gemeinsamen geometrischen Eigenschaften auf, die zwei in Perspektive zueinander stehende Figuren haben (ausführlich in [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 346ff.], [Peiffer/Dahan-Dalmedico 1994, S. 129ff.], [Loeffel 1987]).

Die eigentliche Fortführung dieser Ideen verdankt man dem französischen Ingenieur und Architekten – aber im Mathematischen Autodidakt – Girard Desargues (1591–1661). Er verband einerseits die Kegelschnittlehre mit den Regeln der praktizierenden Künstler und suchte deren Techniken durch mathematische Durchdringung zu verbessern. Sein Hauptwerk *„Brouillon project*

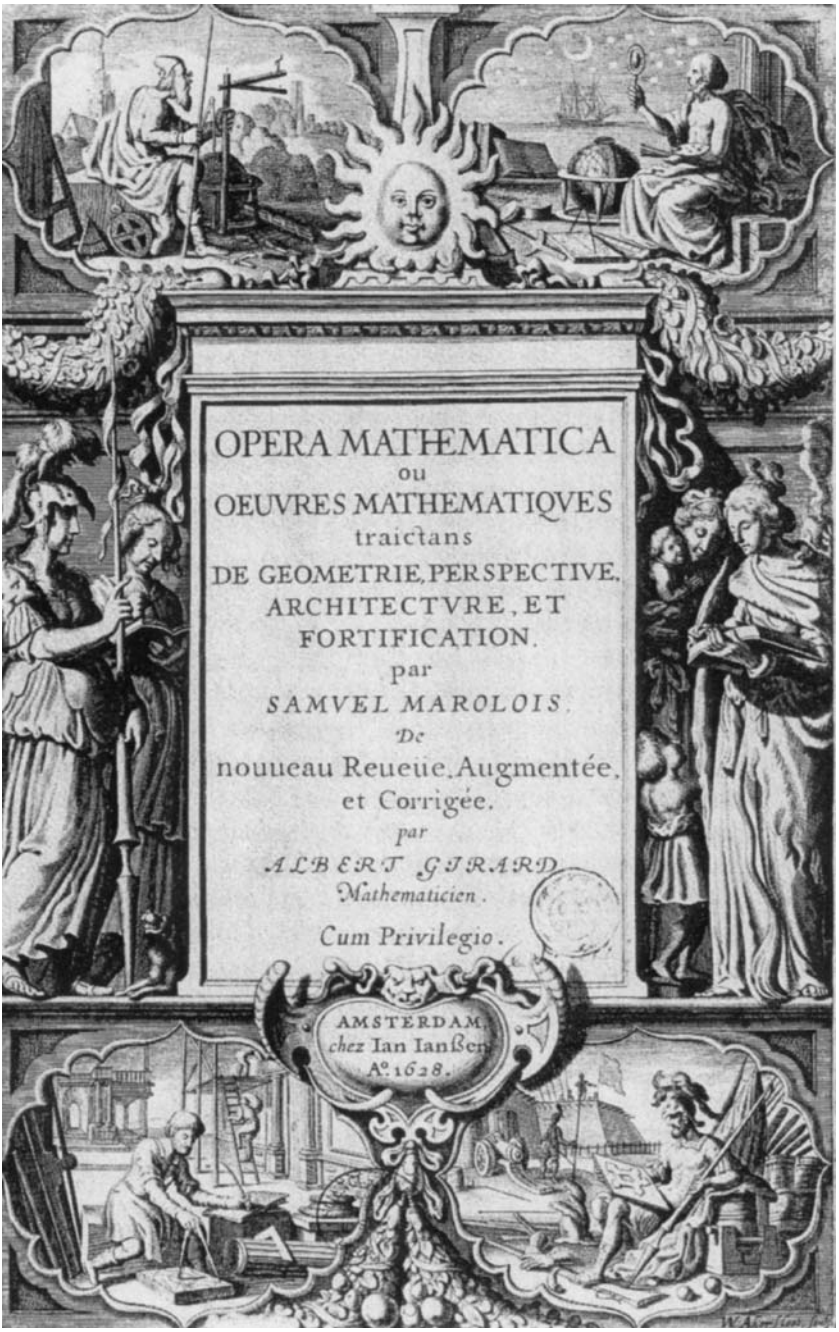


Abb. 8.4.1 Titelbild des Werkes von Samuel Marolois (1628), auf dem die Haupttätigkeiten der „Perspektiver“ dargestellt sind: Astronomie, Feldmesser, Architektur, Militärwesen

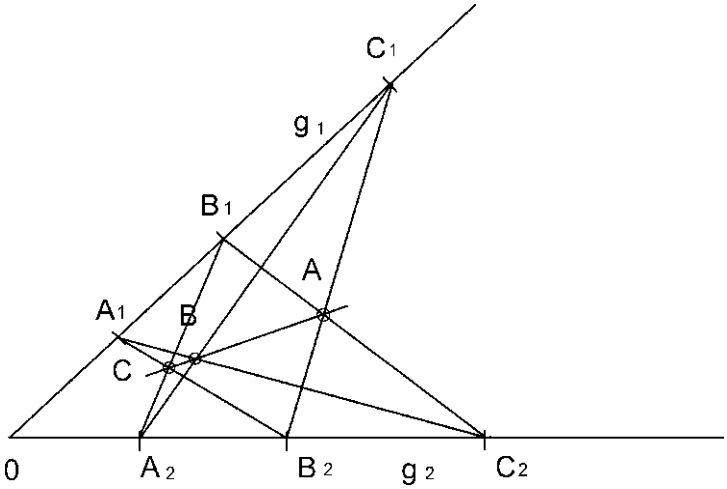


Abb. 8.4.2 Figur zum Satz von Pappos: Liegen die Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden, so schneiden sich die Gegenseiten in Punkten einer Geraden

. . . " (frei übersetzt: Erster Entwurf der Beschreibung der Ereignisse beim Zusammentreffen eines Kegels mit einer Ebene) erschien 1639, aber nur in einer Auflage von 50 Stück. Desargues verteilte die Exemplare an Mathematiker; die Resonanz war – u. a. wegen der ungewöhnlichen Terminologie – gering. Das Werk war lange verschollen; erst 1950 wurde ein Originalexemplar wieder entdeckt.

Auf Desargues gehen direkt oder indirekt die Begriffsbildungen „unendlich ferner Punkt", „harmonische Teilung" und „Doppelverhältnis" zurück; der letzte Begriff wurde erst im 19. Jahrhundert durch A.F. Möbius in moderner Formulierung in die Mathematik eingeführt. Auf Desargues geht auch die Theorie der Polaren eines Punktes zurück (vgl. ausführlich [Dhombres/Sakarovitch 1994], [Peiffer/Dahan-Dalmedico 1994, S. 131ff.], [Field/Gray 1987]).

Blaise Pascal

Der am 19. Juni 1623 in Clermont geborene Blaise Pascal (1623–1662) führte diese Ideen weiter. Sein Vater Etienne Pascal war ein hoher königlicher Finanzbeamter und stark an Mathematik interessiert. Er unterrichtete seinen Sohn selbst und führte ihn nach der Umsiedlung nach Paris in den dort von Mersenne gegründeten Kreis der sog. „Freien Akademie" ein, einer losen, aber effektiven Vereinigung von Gelehrten.

Schon früh trat die hohe Begabung des jungen Blaise für Mathematik zu Tage. Als Zwölfjähriger hatte er sich bereits den Inhalt der „Elemente" des

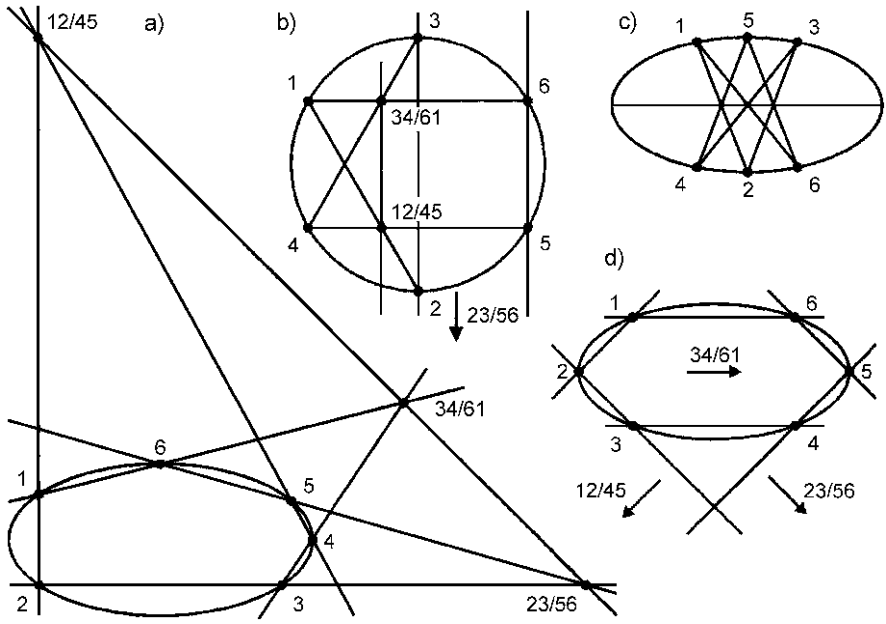


Abb. 8.4.3 Pascalsches Sehnensechseck: a) allgemeiner Fall; b), c), d) Spezialfälle

Euklid angeeignet, studierte dann Apollonius und fand in Paris Zugang zu den Ideen von Desargues zur projektiven Geometrie. Als Siebzehnjähriger trat er 1640 mit seiner Erstaunen erregenden Abhandlung *Essay pour les coniques* hervor, die bereits eine projektive Behandlungsweise der Kegelschnitte und eigene Forschungsergebnisse enthält. Dort findet sich der berühmt gewordene Pascalsche Kegelschnittsatz.

In moderner Sprechweise lautet der Satz von Pascal (vgl. Abb. 8.4.3): Sind 1, ..., 6 beliebige Punkte eines Kegelschnittes und bezeichnen 12, 23 usw. die entsprechenden Verbindungsgeraden, 12/45, 23/56 usw. die entsprechenden (eventuell uneigentlichen) Schnittpunkte dieser Geraden, so liegen 12/45, 23/56 und 34/61 auf einer (eventuell uneigentlichen) Geraden. Im letztgenannten Fall sind die drei Geradenpaare paarweise parallel (wie in Abb. 8.4.3d). (Ausführlich in [Scriba/Schreiber, 2. Aufl. 2005, S. 348f.])

Pascal hat nachfolgend ausführliche Studien zur Theorie der Kegelschnitte unternommen; Leibniz hat das Manuskript *Traité des Coniques* gesehen, einiges vom Inhalt exzerpiert und dringend die Drucklegung empfohlen. Der Sekretär der Royal Society, Henry Oldenburg (1618?–1677), hatte 1673 Leibniz auf Pascals Manuskript aufmerksam gemacht. Doch ist das Manuskript von Pascal verloren.

Über die sehr interessante Biographie von Pascal, die auch psychologisch von hohem Interesse ist, sowie über seine Beiträge zur Infinitesimalrechnung,

Abb. 8.4.4 Blaise Pascal (Frankreich 1962): Die Marke drückt zwei Seiten von Pascal aus: das Leben zwischen Mathematik (Kegelschnitte) und leidenschaftlicher Religiosität. Er schloss sich, wie seine Schwester, der reformkatholischen Partei der Jansenisten an, die in Frankreich 1713 endgültig gewaltsam unterdrückt wurde.

über die Konstruktion einer Rechenmaschine, seinen Beitrag zur Frühgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung, den experimentellen Beweis des Luftdrucks durch Bergbesteigung und anderes mehr wird an anderer Stelle berichtet werden. Hier sei nur erwähnt, dass auf ihn die Anregung zu einem öffentlichen Verkehrssystem in Paris zurückgeht, das 1662 in die Praxis umgesetzt wurde. Es ist interessant, dass Pascal mit den „Omnibuslinien" finanziell-soziale Interessen verfolgt hat: Die Erträge sollten den Armen zufließen.

Schließlich konnte Philippe de la Hire (1640–1718) bis zu einem gewissen Grade einen Abschluss der Kegelschnittlehre auf projektiver Grundlage in seinem Buch *Sectiones conicae* (1685) erreichen. Unter dem Eindruck der Erfolge der analytischen Geometrie und insbesondere der Infinitesimalmathematik geriet die projektive Geometrie zunächst in den Hintergrund. Erst durch Jean-Victor Poncelet (1788–1867) erlebte die projektive Geometrie eine glänzende Wiedergeburt. Er publizierte 1822 den *Traité des propriétés projectives des figures* (Abhandlung über die projektiven Eigenschaften der Figuren), dessen Grundideen er als Offizier der napoleonischen Armee in russischer Gefangenschaft konzipiert hatte.

Mathematik bei den Jesuiten

Die Jesuiten haben aus politisch-religiösen Gründen der Bildung große Aufmerksamkeit gewidmet und vor allem auf dem Gebiet der Geometrie teilweise hervorragende Ergebnisse erzielt und auch erheblich zur Anhebung des Bildungsniveaus beigetragen.

Der Jesuitenorden war 1534 durch Ignatius von Loyola (1491–1556) gegründet worden, erreichte teilweise einen bedeutenden politischen Einfluss – auch außerhalb Europas – wurde aber im Zeitalter der Aufklärung zurück-

gedrängt und 1773 verboten. Im Jahre 1814 wurde er wiederhergestellt. Die Gesellschaft Jesu begann mit 10 Mitgliedern und umfasste zurzeit ihrer Auflösung 1773 mehr als 23 000 Mitglieder.

J. MacDonnell, selbst Mitglied der Gesellschaft, hat 1989 eine Kollektion von 56 Kurz-Biographien (mit Angaben über ihre Hauptleistungen) von Geometern, aus den ersten zwei Jahrhunderten des Bestehens der Gesellschaft vorgelegt [MacDonnell 1989]: Darunter befinden sich Athanasius Kircher (1602–1680), Roger Boskovitsch (1711–1787), Christopher Clavius, Gregorius a S. Vincentio (1584–1667), André Tacquet (1612–1660), Christopher Scheiner (1575–1650), Johann Schall von Bell (1591–1666), Matteo Ricci (1552–1610), Paul Guldin, Vincenzo Riccati (1707–1775, Sohn von Jacopo Riccati), Girolamo Saccheri (1667–1733), Caspar Schott (1608–1666), Henoré Fabri (1607–1688), Francesco Grimaldi (1613–1663) und manche andere. Über Clavius ist schon berichtet worden.

Eine andere herausragende Persönlichkeit der dem Jesuitenorden angehörenden Mathematiker war Paul Guldin (1577–1643). Er fand, unabhängig von Pappos, die Guldinschen Regeln über die Volumina und Schwerpunkte rotierender Körper (*Centrobaryca*, 1635–1641). Er war 1597 dem Orden beigetreten, lehrte in Rom und Graz und verteidigte die gregorianische Kalenderreform. (Zur Entwicklung der Jesuiten in Prag vgl. [Schuppener/Macák 2002].)

8.5 Rechenmethoden, Rechenhilfsmittel, erste Rechenmaschinen

Die Erleichterung der Rechenarbeit war schon im Zusammenhang mit Astronomie und Navigation als dringendes Bedürfnis empfunden und behandelt worden. Die noch umständliche Methode der Prosthaphairesis (ein vor der Erfindung der Logarithmen benutztes Verfahren, Multiplikation und Division auf Addition und Subtraktion zurück zu führen, insbesondere bei den in der Astronomie häufig auftretenden Produkten trigonometrischer Terme z. B. $\sin a * \sin b = 1/2\{\sin(90° - a + b) - \sin(90° - a - b)\}$; von griech. prostithenai = addieren und apharein = subtrahieren) wurde bald durch die Verwendung der Logarithmen abgelöst. Stifel hatte die arithmetische Reihe mit der geometrischen Reihe verglichen und war dicht an die Prinzipien logarithmischen Rechnens herangekommen.

Logarithmisches Rechnen

In seiner berühmten *Artithmetica integra* schrieb Stifel:

> *„Man könnte ein ganz neues Buch über die wunderbaren Eigenschaften dieser Zahlen schreiben, aber ich muß mich an dieser Stelle bescheiden und mit geschlossenen Augen daran vorübergehen.“*

Abb. 8.4.5 Paul Guldin; Übers. des lat. Textes: *P(ater) PAULUS GULDIN wurde aus einem Andersgläubigen ein Ordensmann, aus einem Goldschmied ein Mathematiker, aus einem Laienbruder ein Priester, berühmt durch seinen Arbeitseifer, durch den wiederholten Einsatz für Seuchenopfer, als Verteidiger des Clavius, durch seine umfangreichen Centrobarica und durch die gezähmte Mur von Graz. Ebenda gelangte er zum seligen Ende aller seiner Studien, seiner körperlichen Beschwerden und Krankheiten im Jahre 1643 im 67. Lebensjahr, im 42. Jahr seiner Zugehörigkeit zur Gesellschaft Jesu. Er hinterließ sehr viele Bücher und Instrumente.* (Jahreszahl 1650 nicht genau lesbar, könnte auch, was unwahrscheinlich ist, 1630 sein)
[Universität Graz; Fotograf unbekannt]

Und weiter heißt es sogar:

> „*Addition in der arithmetischen Reihe entspricht der Multiplikation in der geometrischen, ebenso Subtraktion in jener der Division in dieser. Die einfache Multiplikation bei den arithmetischen Reihen wird zur Multiplikation in sich* (Potenzierung) *bei der geometrischen Reihe. Die Division in der arithmetischen Reihe ist dem Wurzelausziehen in der geometrischen Reihe zugeordnet, wie die Halbierung dem Quadratwurzelausziehen.*“
> (Zitiert bei [Tropfke Bd. 2 1933, S. 209])

Offensichtlich hat Stifel in der Tat das Wesen des logarithmischen Rechnens erfasst. Eine andere Frage aber ist es, die beiden Folgen mit genügend nahe beieinander stehenden Gliedern zu berechnen, so dass wirklich brauchbares Handwerkszeug entstehen konnte. Hier leistete der Schweizer Uhrmacher und Feinmechaniker Jost Bürgi (1552–1632), der in Kassel und Prag tätig war, Pionierarbeit. Umfangreiche Rechnungen im Zusammenhang mit dem Bau astronomischer Geräte ließen ihn nach Verbesserungen der Prosthaphairesis suchen. Er stieß auf Stifels Äußerungen. Zu Anfang des 17. Jahrhunderts leistete er, im Kontakt mit Kepler stehend, die Berechnung umfangreicher Tafeln; eine von $2''$ zu $2''$ fortschreitende Sinustafel ging verloren. Eine ausführliche Tafel des Vergleiches arithmetischer und geometrischer Folgen erschien 1620 unter dem Titel *Arithmetische und geometrische Progreß-Tabulen.* Natürlich fehlen bei Bürgi unsere heutigen Fachausdrücke wie Logarithmus, Basis, Exponent, Numerus. Er nennt die Glieder x_n der arithmetischen Folge „rote Zahlen“, die Glieder y_n der geometrischen Folge „schwarze Zahlen“, weil diese Zahlen im Buch rot bzw. schwarz gedruckt wurden. Die roten Zahlen sind also die Logarithmen, die schwarzen die Numeri. Eigentlich ist es eine Tafel der Antilogarithmen. Wenn man die Bürgischen Zahlen nachrechnet, so erkennt man, dass Bürgi – sozusagen instinktiv – als Basis seines Logarithmensystems eine Zahl verwendet hat, die nahe bei e liegt. Trotz des dringlichen Zuredens von Kepler – der Erfinder (also Bürgi) habe in zu großer Bedächtigkeit und Zurückhaltung das Kind seines Geistes im Stich gelassen, statt es für die Öffentlichkeit zu erziehen – konnte sich Bürgi erst spät zur Publikation entschließen, zu spät. Als die *„Progreß-Tabulen“* schließlich 1620 in Prag erschienen, wurde infolge des Dreißigjährigen Krieges fast die gesamte Auflage zerstört.

Darüber hinaus war ihm ein anderer mit der Veröffentlichung von Logarithmentafeln zuvorgekommen, der schottische Edelmann John Napier (oder Neper, 1550–1617). Ausgehend von einem speziellen mechanischen Problem gelangte auch er zur Aufstellung von Logarithmentafeln. Neper veröffentlichte seine Tafeln von 1614 an in Edinburgh unter dem Titel *Mirifici logarithmorum canonis descriptio.* Hier tritt zum ersten Mal das aus dem Griechischen abgeleitete Fachwort „Logarithmus“ auf, das etwa „Verhältniszahl“, „Rechnungszahl“ bedeutet. Das Buch heißt also etwa „Beschreibung einer Tafel wunderbarer Rechnungszahlen“. Diese Tafel zielte direkt auf eine Ver-

Abb. 8.5.1 Zeitgenössisches Portrait von J. Bürgi; Globusuhr von Bürgi [Ausschnitt aus dem Titelkupfer zu Benjamin Bramers Bericht über Bürgis Triangularinstrument, Kassel 1648], (DDR 1972)

einfachung der trigonometrischen Rechnungen und enthält die siebenstelligen Logarithmen der Winkelfunktionen Sinus und Kosinus sowie deren Differenzen, also den Logarithmus des Tangens, von Winkeln, die von Minute zu Minute fortschreiten.

Die Neperschen Logarithmen erregten große Bewunderung. verbreiteten sich rasch als Rechenhilfsmittel. Kepler hatte Nepers Logarithmentafeln etwa 1617 kennengelernt. Es dauerte einige Zeit, ehe er den Nutzen erkannt hatte und sich selbst an die Ausarbeitung logarithmischer Tafeln machte. Deren Basis unterschied sich von den von Briggs und Neper verwendeten (vgl. ausführlich [Hofmann 1963, S. 167ff.]). Keplers Logarithmentafeln wurden in den *Chilias logarithmorum* publiziert. Kepler handelte sich aber den Tadel seines alten Lehrers Maestlin (1550–1631) ein, ein Mathematiker dürfe von solchen Rechenhilfsmitteln keinen Gebrauch machen.

Der Übergang zu den dekadischen Logarithmen schließlich wurde durch den Engländer Henry Briggs (1561–1630) vollzogen, den Inhaber eines naturwissenschaftlichen Lehrstuhls an dem den praktischen Bedürfnissen der

Navigation verpflichteten Gresham-College in London. In gemeinsamen Diskussionen einigten sich Neper und Briggs auf die Annahme $\log 10 = 1$. Briggs machte sich mit Feuereifer an die Berechnung der Tafeln; von 1617 an erschienen in Teilen 14-stellige Logarithmen, die nach und nach von anderen Autoren ergänzt, verbessert und praktischer gestaltet wurden. Um die Mitte des 17. Jahrhunderts hatten die Logarithmen die prosthaphairetische Methode verdrängt.

Die Berechnungsverfahren von Neper, Briggs und anderen waren äußerst mühsam und beruhten auf komplizierten, geschickt gehandhabten Interpolationen. Eine neue, bequemere Methode der Berechung von Logarithmen beruhte auf der späteren Verwendung unendlicher Reihen. Die Definition des Logarithmus als Potenzexponent kam erst im 18. Jahrhundert auf. Die Auffassung, dass das Logarithmieren neben dem Radizieren eine zweite Umkehrung des Potenzierens darstellt, wurde schließlich erst von Euler herausgearbeitet.

Erste mechanische Rechenhilfsmittel

Auf Neper geht auch die Erfindung der ersten mechanischen Rechenhilfsmittel zurück: die der nach ihm benannten Rechenstäbchen. Er hat sie 1617 vorgestellt; es handelte sich um einen Satz von 10 ebenen Stäbchen, auf denen das kleine Einmaleins fixiert ist. Mit ihnen lassen sich Multiplikationen sehr leicht ausführen. Die Ziffern in benachbarten Diagonalfeldern werden addiert und liefern die Ziffern der Ergebnisse der Multiplikation. Beispiel: 316*6 ergibt sich aus den Ziffern der 6. Zeile der zu den Ziffern 3.1.6 gehörenden Stäbchen, also 1/8+0/6+3/6, d. h. 1896. Später wurden von anderen Erfindern gegeneinander drehbare Zylinder benutzt. Den entscheidenden Schritt zur Idee und möglicherweise sogar zur definitiven Konstruktion einer wirklichen Rechenmaschine, die selbstständig Überträge von einer (Dezimal-)Stelle zur anderen vornimmt, hat um 1623/24 bereits Wilhelm Schickard (1592–1635) in Tübingen vollzogen.

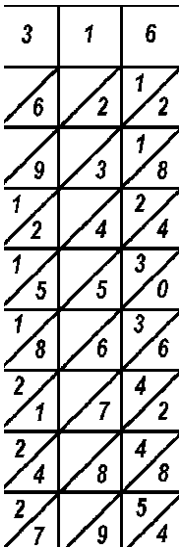


Abb. 8.5.2
Prinzipskizze zum Gebrauch der Neperschen Rechenstäbe [Wußing 1989, S. 149]

Er war vielseitig tätig als Astronom, Mathematiker, Geodät, Kupferstecher und Maler, aktiv beteiligt an der ersten Landvermessung Württembergs. Groß war sein Interesse an der Konstruktion astronomischer und geodätischer Instrumente.

Anknüpfend an das Prinzip der Neperschen Rechenstäbe entwarf er eine Rechenmaschine, eine „Rechenuhr“. Er war eng befreundet mit Kepler, der zu dieser Zeit in Prag als „Kaiserlicher Mathematiker“ an aufwändigen Rechenarbeiten zur Auswertung der Beobachtungen von Tycho Brahe beschäftigt war.

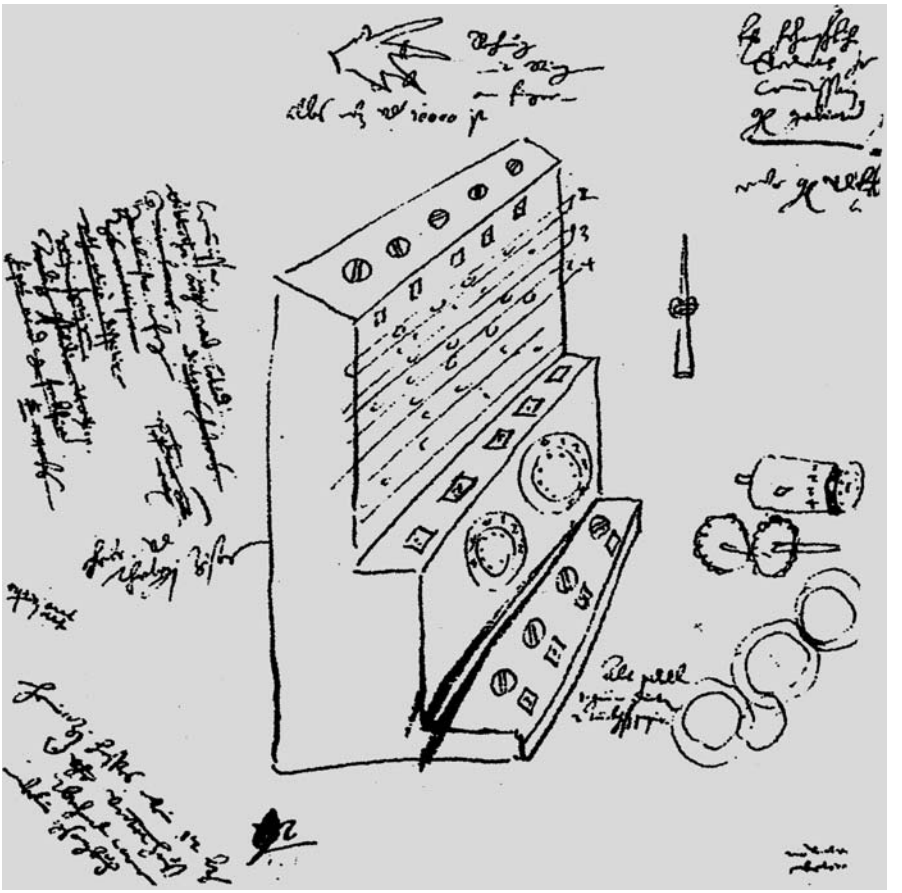


Abb. 8.5.3 Skizze von Schickard zu einer Maschine (sog. Stuttgarter Skizze, Siemens-Museum München) [Schickard 1978, S. 289]

In einem Brief vom 20. September 1623, dem auch eine Skizze seiner Maschine beigegeben war, schreibt Schickard an Kepler:

> „*Dasselbe, was du auf rechnerischem Wege gemacht hast, habe ich kürzlich mechanisch versucht und eine aus elf vollständigen und sechs verstümmelten Rädchen bestehende Maschine gebaut, welche gegebene Zahlen im Augenblick automatisch zusammenrechnet: addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert. Du würdest hell auflachen, wenn du da wärest und miterlebtest, wie sie, so oft es über einen Zehner oder Hunderter weg geht, die Stellen zur Linken ganz von selbst erhöht oder ihnen beim Subtrahieren etwas wegnimmt.*“
> (Zitiert nach B. von Freytag Löringhoff in [Seck 1978, S. 289])

Abb. 8.5.4 Rekonstruierte Schickardsche Rechenmaschine (BRD 1973)

Lange hatte man geglaubt, dass Blaise Pascal als erster eine Rechenmaschine konstruiert habe. Der kaum Zwanzigjährige entwickelte um 1640/42 eine Additions- und Subtraktionsmaschine, um seinem Vater, einem hohen französischen Finanzbeamten, die Rechenarbeiten zu erleichtern. Pascal wurde 1649 vom Kanzler Pierre Séguir mit einem königlichen Privileg zur Herstellung und zum Verkauf seiner Maschinen ausgestattet. Acht Exemplare der „Pascaline“ haben sich erhalten; der Dresdener Mathematisch-Physikalische Salon verfügt über eine solche Kostbarkeit.

Die Leistung von Schickard war lange in Vergessenheit geraten. Erst in jüngerer Zeit (1957/58) ist seine Maschine bekannt geworden und sogar nachgebaut worden [Schickard 1978]. Von der Originalmaschine Schickards hat sich nichts erhalten.

Pascal schrieb 1645 eine Abhandlung *Notwendiger Hinweis für diejenigen, die Neugierde empfinden werden, die Rechenmaschine kennenzulernen und sich ihrer näher zu bedienen.* Dort heißt es:

> „*... ich hatte die Ausführung meines Vorhabens mit einer Maschine begonnen, die nach Baumaterial und Form von dieser sehr verschieden war und die (wiewohl sie schon einigen Beifall fand) mich dennoch nicht völlig befriedigte; so daß ich, indem ich sie allmählich verbesserte, aus ihr unmerklich eine zweite machte und aus dieser, um immer noch auftretenden Mängeln, die ich nicht dulden konnte, Abhilfe zu verschaffen, eine dritte, die mit Federkraft arbeitet und in ihrer Konstruktion sehr einfach ist.(...) Nichts destoweniger fand ich, sie fortgesetzt verbessernd, immer neue Gründe, sie zu verändern; und indem ich überall irgendeinen Fehler erkannte, hier ein Arbeitshemmnis, dort eine Holprigkeit des Triebwerkes oder die Neigung, allzu leicht durch Witterungseinflüsse oder beim Transport zu Schaden zu kommen, brachte ich schließlich die Geduld auf, mehr als fünfzig verschiedene Modelle zu bauen, einige aus Holz, andere aus Elfenbein und Ebenholz, wieder andere aus Kupfer, bevor ich zur Fertigstellung jener Maschine gelangte, die ich jetzt der Öffentlichkeit übergebe.*“ (Zitiert nach [Béguin 1959, S. 101])

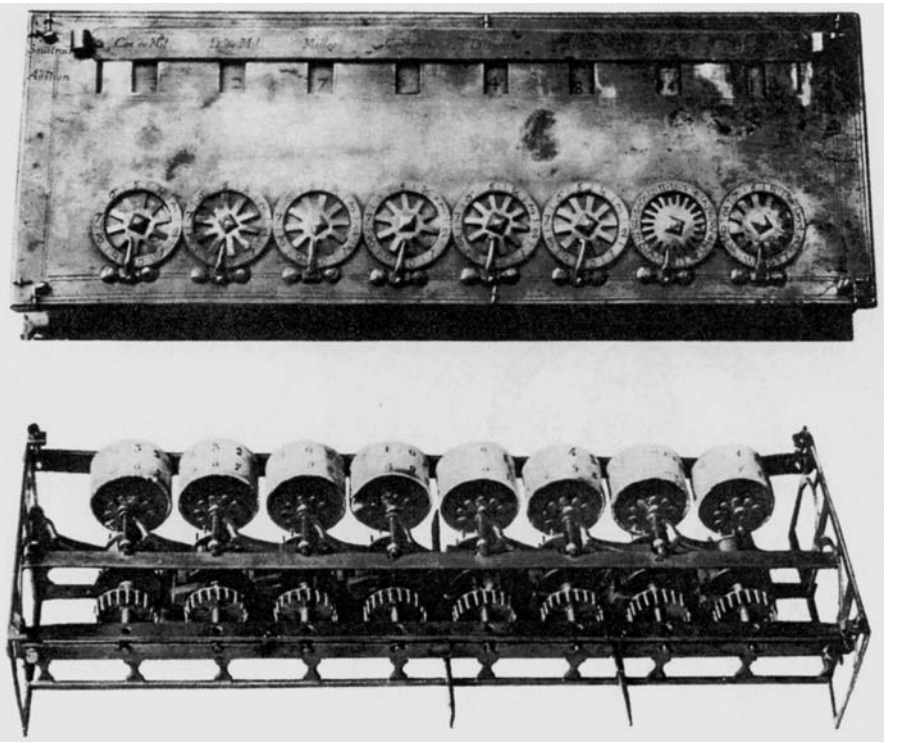


Abb. 8.5.5 Rechenmaschine „Pascaline“ (Mathematisch-Physikalischer Salon Dresden)

Nach Pascals Tode hat seine Schwester diese Leistung überschwänglich gewürdigt:

> „*So erfand er damals, mit neunzehn Jahren, seine Rechenmaschine, durch die man alle Rechenungsarten ohne Feder oder Zählmarken, ja sogar ohne irgendeine rechnerische Regel zu kennen, mit unfehlbarer Sicherheit ausführen kann. Es galt als etwas vollkommen Neues in der Natur, eine Wissenschaft, die ganz und gar im Verstand begründet ist, auf eine Maschinenfunktion reduziert und ein Mittel erfunden zu haben, um alle Rechnungsarten mit absoluter Sicherheit ohne Zuhilfenahme der Vernunft auszuführen. Diese Arbeit strengte ihn sehr an, nicht wegen der Idee und ihrer Verwirklichung, die er mühelos fand, sondern wegen der Schwierigkeit, den Arbeitern das alles verständlich zu machen. Und so dauerte es zwei Jahre, um sie zu ihrer jetzigen Vollkommenheit zu entwickeln.*“
> [Pascal 1957, S. 42]

Tatsache freilich ist, dass Pascal – wie auch seine Schwester andeutet – immer mit technischen Schwierigkeiten zu kämpfen hatte; die Feinmechanik war um diese Zeit noch nicht genügend entwickelt. Auch Leibniz hat vor ähnlichen Problemen gestanden, obgleich er einen erstklassigen Mechaniker in Paris hatte finden können.

Ähnliche Konstruktionen – mehr oder weniger angelehnt an Pascal – kamen zur Verwendung in der Addiermaschine des Engländers Samuel Morland (ca. 1625–1695) und bei dem französischen Uhrmacher René Grillet de Roven (17. Jh.). Doch scheinen sie keine ernsthafte Bedeutung erlangt zu haben.

Leibniz und seine Rechenmaschinen

Es ist allgemein bekannt, dass sich Leibniz mit dem Bau von Rechenmaschinen beschäftigt hat. Im Allgemeinen wird die Leibnizsche Rechenmaschine mit der Zeit seines Aufenthaltes in Paris, insbesondere mit den Jahren 1672/73 in Verbindung gebracht, als er mit dem Bau eines ersten Modells beschäftigt war. Kenner der Geschichte der Leibnizschen Rechenmaschine wie von Mackensen (Kassel) verweisen jedoch auf eine frühere Zeit. Leibniz dürfte keine Kenntnis von Schickard und Pascal gehabt haben. Das erste erhalten gebliebene Dokument von Leibniz zur Rechenmaschine (*„Instrumentum Arithmeticum“*) stammt aus der Zeit um 1670; es handelt sich um sieben Seiten mit einer kleinen und zudem sehr undeutlichen Skizze. Auf der Suche nach einer Ausstellung und einem Gönner pries sich Leibniz in einem Brief aus dem Jahre 1671 an Herzog Johann Friedrich in Hannover selbst an:

> „*In Mathematicis und Mechanicis habe ich vermittelst artis combinatoriae einige dinge gefunden die in praxi vitae von nicht geringer importanz zu achten, und erstlich in Arithmeticis eine Maschine, so ich eine Lebendige Rechenbank nenne, dieweil dadurch zu wege gebracht wird, daß alle zahlen sich selbst rechnen, addiren subtrahiren multipliciren dividiren, ja gar radicem Quadratam und Cubicam extrahiren ohne einige Mühe des Gemüths, wenn man nur die numeros datos in machina zeichnet, welches so geschwind gethan als sonst geschrieben, so komt die summa motu machinae selbst heraus. Und ist der nuzen noch dazu dabey, daß solange die machina nicht bricht, kein fehler in rechnen begangen werden kan; welches was für einen Nuzen in Cammern, Contorn, re militari, Feldmeßen, Tabula sinuum und Astronomi habe, und wie großer mühe es die Menschen überheben könne, leicht zu erachten.*“
> [Leibniz: Sämtliche Schriften, 2. Reihe, 1. Bd. 1926, S. 160]

Leibniz hat zeitlebens – mit Unterbrechungen – am Projekt „Rechenmaschine“ gearbeitet bzw. arbeiten lassen und einige Prototypen verfertigen lassen. (Für Einzelheiten siehe [Naumann 2001], [Mackensen 1974]; dort gibt es Details zur technischen Ausführung, insbesondere zur nicht mehr datierbaren Einführung des entscheidenden Bauteils, der sog. Staffelwalze.)

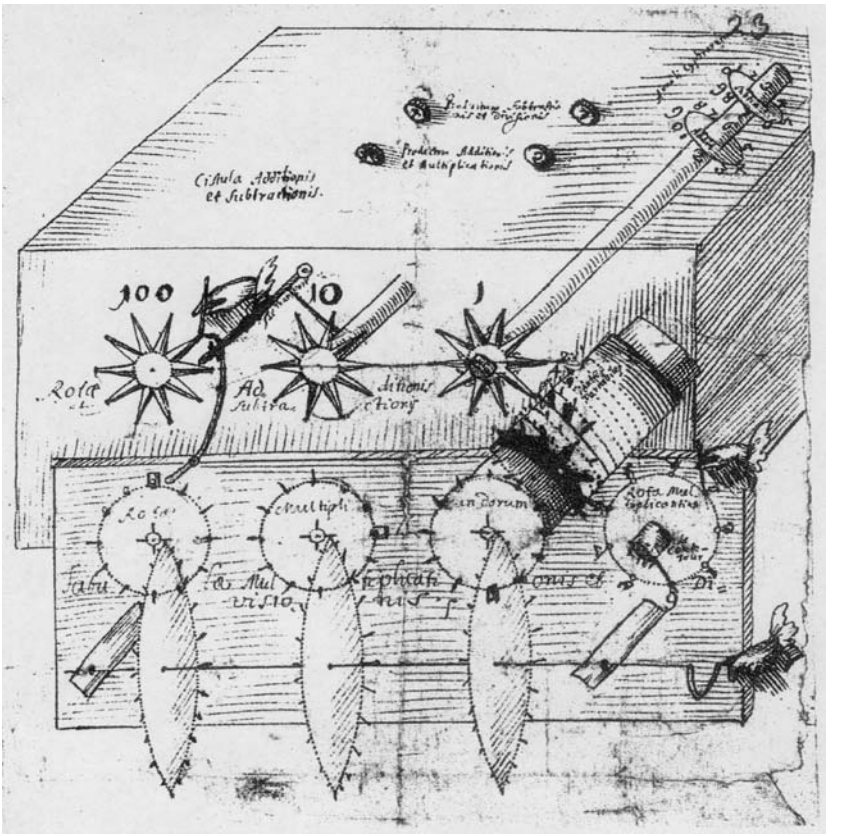


Abb. 8.5.6 Zeichnung einer Rechenmaschine mit je drei Schalt- und Resultatwerken, ca. 1673. [Niedersächsische Landesbibliothek Hannover, LH XL II, 5, Bl. 23^r]

Die sog. fünfte, die letzte Maschine wurde von einem Mechaniker in Zeitz gebaut. Zur Mitte des 19. Jahrhunderts gelangte sie über Hannover nach Göttingen zur Reparatur und schließlich wieder nach Hannover. Heute befindet sie sich in der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover. Sie hat ein feststehendes Resultatwerk und ein bewegliches Schalt- und Einstellwerk.

Auch diese letzte Maschine war nicht voll funktionsfähig; sie lieferte bei bestimmten sekundären Zehnerübertragungen falsche Ergebnisse. H. J. Lehmann (1921–1998), dem Dresdner Professor, einem Pionier der modernen elektronischen Rechentechnik, gelang 1990 ein Nachbau dieser Leibnizschen Maschine. Es zeigte sich, dass sie, nach Behebung einer relativ belanglosen Kleinigkeit, voll funktionsfähig ist.

Neuerdings hat Franz Otto Kopp im Rahmen eines Forschungsprojektes nach Konzepten von K. Popp und E. Stein an der Universität Hannover (seit 2006 Leibniz-Universität) einen Nachbau der dezimalen Rechenmaschine von

Abb. 8.5.7 Die Rechenmaschine von Leibniz [Niedersächsische Landesbibliothek Hannover]

Leibniz konstruiert, der in der Leibniz-Ausstellung im Juni 2006 erstmals der Öffentlichkeit gezeigt wurde (vgl. dazu [Kopp/Stein 2006, S. 56ff.]).

Leibniz hat – und auch darin ein Pionier der „Computer"-Technik und der Informatik – das Dualsystem propagiert und sogar die Skizze einer auf dem binären System beruhenden (mechanischen) Rechenmaschine hinterlassen [Wußing 1999]. Ein Modell dieser „Maschina Arithmeticae Dyadicae" wurde nach der Übersetzung des lateinischen Textes und dem Entwurf von L. von Mackensen 1971 vom Deutschen Museum konstruiert. Im Jahre 2004 bauten E. Stein und G. Weber in Hannover ein verbessertes Modell dieser binären Rechenmaschine, das im gesamten verfügbaren Zahlenraum richtig addiert und multipliziert [Stein/Kopp 2006, S. 60ff.]. Die von Leibniz beschriebene Binär-Maschine kann als Vorläufer der jetzigen binär rechnenden Computer angesehen werden, deren erste mechanische Ausführung 1936 von K. Zuse gebaut und als Z 1 patentiert wurde.

Es kam allerdings erst im 18. Jahrhundert zur wirklichen praktischen Verwendung von mechanischen Rechenmaschinen und zwar mit Konstruktionen, die von dem Italiener Giovanni Poleni (1683–1761), dem Wiener Anton Braun (um 1726), dem deutschen Mechaniker Jacob Leupold (1674–1727) und dem deutschen Pfarrer Philipp Matthäus Hahn (1739–1790) stammten, der am Ende des 18. Jahrhunderts Vier-Spezies-Maschinen serienmäßig herstellte. Hahn war auch an Naturwissenschaften interessiert, führte Experimente durch und suchte mit einer „Weltmaschine" Gottes Schöpfungsplan zu enthüllen.

8.6 Zur Frühgeschichte der Infinitesimalmathematik

Die Etablierung der Algebra als eigenständige mathematische Disziplin stellt einerseits einen Teil der Wissenschaftlichen Revolution dar, muss aber zugleich hoch eingeschätzt werden in ihrer Bedeutung für die Entstehung der Infinitesimalrechnung: Die Bereitstellung algebraischer Methoden, die Ausbildung einer Symbolik, die Durchbildung kalkülhaften Denkens gehören zu den unabdingbaren historischen Voraussetzungen für die Ausbildung infinitesimaler Methoden, sowohl im Formalen als auch im Methodischen.

Eine entsprechende Vorbedingung für das Entstehen der Infinitesimalmathematik erfüllt auch die Geometrie während des 16./17. Jahrhunderts. Hier stehen vielleicht sogar noch deutlicher als bei der Algebra die Rezeption und der Ausbau der aus der Antike übernommenen Methoden im Vordergrund. Ebene und räumliche Geometrie verloren im 15./16. Jahrhundert – bei der Navigation, im Bauwesen, beim Kanalbau und im Militärwesen – in den Händen der Praktiker ihren esoterischen Charakter. Zudem wurden neue Aspekte in der Geometrie – neben dem Aufkommen der analytischen Geometrie – unverkennbar: Durchbildung der antiken Kegelschnittlehre, Studium der Kurven höheren Grades, Ansätze der späteren projektiven Geometrie, Weiterführung der Ansätze der darstellenden Geometrie.

Noch ein weiterer historischer Tatbestand sei hervorgehoben. Es ist falsch und ahistorisch, die Sache so hinzustellen, als hätten Leibniz und Newton, quasi aus dem Nichts heraus, die Differential- und Integralrechnung einfach so erfunden. Ganz im Gegenteil: es gab eine lange Reihe von Vorbereitern und Wegbereitern ebenso wie eine Fülle von tastenden Versuchen, die beim Umgang mit Variablen und Grenzwerten auftretenden Probleme zu bewältigen und in eine handhabbare, kalkülmäßige Form zu bringen. Vorstufen und Vorläufer der Infinitesimalmathematik finden sich schon in der griechisch-hellenistischen Antike. Erinnert sei hier an die Entdeckung der Irrationalität durch Hippasos von Metapont, an die Größenlehre des Eudoxos, an das Paradoxon „Achilles und die Schildkröte“ von Zeno, an die Versuche zur Volumenbestimmung eines Kegels mit Hilfe „indivisibler“ Scheiben durch Demokrit, zur Kreisquadratur mittels Exhaustion durch einbeschriebene regelmäßige Polygone und an die Parabelquadratur des Archimedes (vgl. Kap. 4). Selbst am Ende des 18. Jahrhunderts waren die logischen Schwierigkeiten beim Umgang mit dem unendlich Kleinen und dem unendlich Großen noch nicht ausgeräumt.

Aus der großen Zahl einfallsreicher Mathematiker, die da und dort, im Prinzipiellen wie in besonders bemerkenswerten Spezialfällen, Wesentliches zur Herausbildung der Infinitesimalmathematik geleistet haben, seien einige Hauptvertreter hervorgehoben: die Italiener Commandino, Valerio, Galilei und seine Schüler Cavalieri und Torricelli, der Deutsche Kepler, der Schweizer Guldin, der Niederländer Huygens, die Franzosen Roberval und Fermat, die Engländer Wallis, Barrow und Newton, der Deutsch-Däne Nicolaus Mercator, die Schotten Gregory und Maclaurin und nicht zuletzt Leibniz.

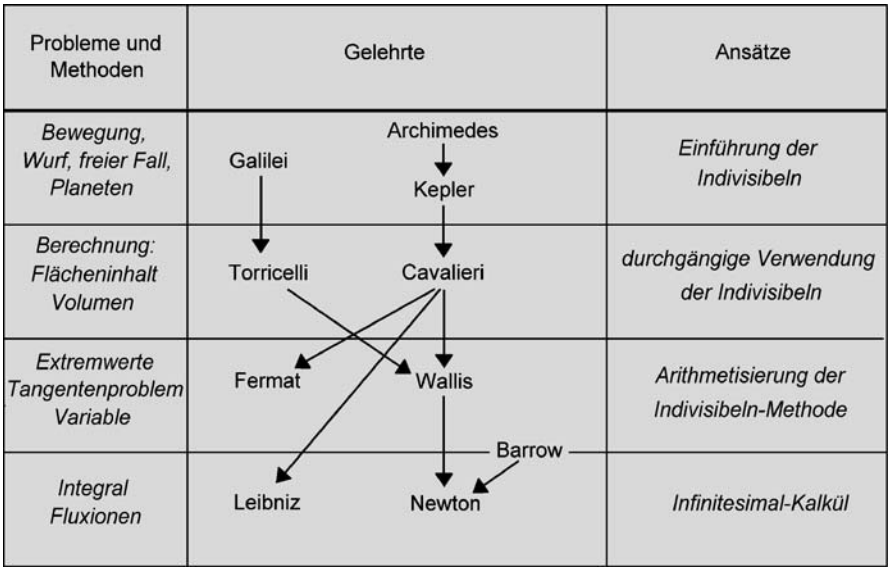


Abb. 8.6.1 Zur Frühgeschichte der Analysis: Hauptlinien der ideengeschichtlichen Entwicklung

Die Geschichte der Infinitesimalmathematik, insbesondere deren Frühgeschichte, ist in der Vergangenheit von erstklassigen Mathematikhistorikern gründlich und in vielen Einzelheiten erforscht und dargestellt worden (vgl. z. B. [Jahnke 1999] mit ausführlichem Literaturverzeichnis). Zudem muss auf den philosophischen Hintergrund des Verständnisses von „Geometrie“ verwiesen werden (vgl. z. B. [Risi 2007] zu Leibniz). Es gibt eine kaum überschaubare Fülle von einschlägigen Abhandlungen; nur auf einen sehr geringen Teil kann hier eingegangen werden. Doch soll versucht werden, die Hauptlinien der Entwicklung herauszuarbeiten, auch auf die Gefahr einer möglichen Vergröberung hin. Bei den Methoden, mit denen die neuen Fragestellungen noch mit traditionellen Verfahren in den Entwicklungsstufen der Infinitesimalmathematik angegriffen wurden, kann man zwischen geometrischen und arithmetisch-algebraischen Methoden unterscheiden. Die heutige Einteilung – Differentialrechnung, Integralrechnung, Theorie der unendlichen Reihen, Theorie der Differentialgleichungen, usw. – konnte erst auf der Basis einer weiter entwickelten Analysis getroffen werden. In der Herausbildungsphase der Infinitesimalmathematik gruppierten sich dagegen die infinitesimalen Aufgabenstellungen – deren infinitesimal-mathematische Struktur noch weitgehend unbekannt war – stärker um Sachprobleme.

Da sind zunächst mechanisch-physikalische Probleme, wie sie u. a. beim freien Fall, beim Wurf und bei der Planetenbewegung und überhaupt bei der Behandlung von Bewegungsvorgängen mit beschleunigten Bewegungen

auftreten. Diese Problemgruppe hängt direkt mit dem Fortschritt der Naturwissenschaften und zugleich mit der raschen Entwicklung der mechanischen Produktionsinstrumente zusammen.

Dazu kamen mechanisch-geometrische Probleme, wie etwa solche der Flächen- und Volumenberechnung und der Bestimmung der Schwerpunkte von Flächen und Körpern.

Und schließlich gab es eine Gruppe von geometrischen Problemen, die abstrakt, ohne direkten Bezug zur physikalischen Welt aufgeworfen waren, Studien von Kurven, Flächen und Körpern. In dieser Problemgruppe dominierte das Tangentenproblem als Aufgabe, bei einer beliebigen Kurve in einem beliebigen Punkt die Tangente zu bestimmen.

Tangentenproblem und Inhaltsbestimmung sollten sich als Zentralprobleme des differentiellen bzw. integralen Denkens erweisen. Aber es musste erst erkannt werden, dass Tangentenproblem und Flächeninhaltsproblem inhaltlich zueinander inverse Probleme sind: Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung musste erst entdeckt werden.

Galileo Galilei: Das Fallgesetz als geometrischer Grenzübergang

Wie die Geschichte der Physik lehrt, erwies sich das Fallproblem als Schlüsselproblem für die Herausbildung der Dynamik und damit der klassischen Mechanik. Das Gesetz, wonach sich beim Fall die zurückgelegten Wege wie die Quadrate der Zeiten verhalten, stand im direkten Gegensatz zur Aristotelischen Physik. Galilei konnte das richtige Gesetz durch eine Kombination scharfsinniger Deduktion und geschickter experimenteller Nachprüfung finden und bestätigen. Es war dieser fruchtbare Wechsel von Deduktion und Induktion – demonstriert in Galileis Schriften *Dialogo* (1632) und *Discorsi* (1638) –, der Galilei sowohl zu einem der Wegbereiter der klassischen Naturwissenschaft als auch der neueren Mathematik werden ließ. Auch die naturphilosophische Haltung von Galilei, wo er die Bedeutung der Mathematik für die Naturforschung hervorhebt, hat programmatisch gewirkt:

> „*Die Philosophie* (bedeutet hier soviel wie Naturwissenschaft, Wg.) *steht geschrieben in dem großen Buch, das uns fortwährend offen vor Augen liegt, dem Universum, aber man kann sie nicht begreifen, wenn man nicht die Sprache verstehen und die Buchstaben kennen lernt, worin es geschrieben ist. Es ist geschrieben in mathematischer Sprache, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren; ohne diese Mittel ist es dem Menschen unmöglich, ein Wort davon zu verstehen; es ist nur ein sinnloses Herumirren in einem finsteren Labyrinth.*“
> (Deutsch zitiert nach [Dijksterhuis 1956, S. 403])

Das Fallgesetz wurde auch in der erfolgreichen mathematisch-mechanischen Schule in den Niederlanden diskutiert. Hier sei Isaac Beeckman (1588–1637) herausgehoben, der um 1618 im Kontakt mit Descartes das Fallgesetz mit

Hilfe eines geometrisch geführten Grenzübergangs fand, und das zeitlich noch vor Galilei [Wußing 1989, S. 153–155].

In einem Diagramm von Geschwindigkeit und Zeit t (vgl. Abb. 8.6.2) werden Geschwindigkeitsanteile γ und Zeitabschnitte τ aufgetragen. Die jeweiligen Produkte ergeben Rechtecke; sie symbolisieren Wegstrecken. Nach der Wahl verschiedener Vielfacher des Zeitabschnittes τ entsteht ein Treppenzug. Geht der Zeitabschnitt τ gegen Null – das bedeutet eine kontinuierliche, also die reale Bewegung –, dann glättet sich der Treppenzug. Bei zwei verschiedenen Strecken zu zwei verschiedenen Zeitabschnitten $t_1 = n_1\tau$ und $t_2 = n_2\tau$ entstehen zwei Dreiecke. Und da sich deren Flächeninhalte wie die Quadrate gleichliegender Seiten verhalten, verhalten sich die Strecken wie die Quadrate gleichliegender Seiten. Das ist das Fallgesetz.

Zur Mitte des 17. Jahrhunderts ist die Vorstellung variabler Größen durch Descartes, danach der Begriff der fließenden Größen durch Newton ins Spiel um die Infinitesimalmathematik gekommen. Diese Feststellung führt uns zu der Frage nach den historischen Ursachen jenes durchgreifenden Überganges von der Mathematik konstanter Größen zur Mathematik der Variablen.

Auf der theoretisch-mathematischen Seite steht der historische Beobachter der Tatsache gegenüber, dass die uns heute so vertraute Form der Infinitesimalmathematik keineswegs im ersten Anlauf entstanden ist. Es brauchte dazu drei bis vier Generationen; die historische Feinanalyse zeigt viele sich überkreuzende Ideenverbindungen.

Andererseits ist das Auftreten einer Mathematik veränderlicher Größen (wenn auch in verschiedensten Ausprägungen) in nur wenigen Generationen nicht verständlich als das Resultat einer evolutionären, kontinuierlichen Entwicklung. Es bedurfte – diese historische These sei gewagt – eines fokussierenden, sich auf eine zentrale Fragestellung richtenden Problembewusstseins mit entsprechender Denkweise. Der Autor erblickt sie im Bewegungsproblem, also in der Forderung, eine Mathematik bereitzustellen, die die mathematische

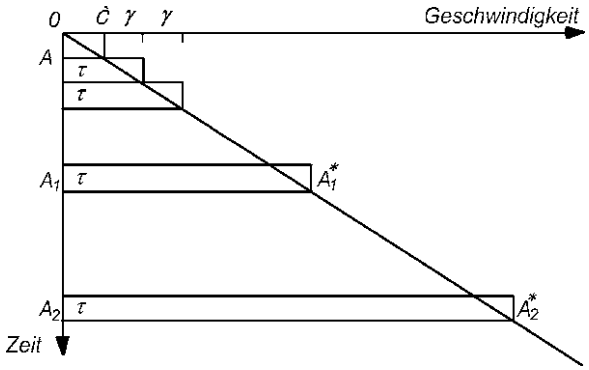


Abb. 8.6.2 Graphische Herleitung des Fallgesetzes [Wußing 1989, S. 155]

Bewältigung des Bewegungsproblems ermöglichte: Die Mathematik variabler Größen sozusagen als mathematische Widerspiegelung eines Grundproblems damaliger Wissenschaft, des Bewegungsproblems.

Das Wort „Bewegung“ umfasst sehr viel, sowohl zentrale naturwissenschaftliche Fragestellungen als auch Bewegungsprobleme der praktischen Mechanik und Maschinenkunde jener Zeit. Aus beiden Sphären ergingen wesentliche Impulse an die Entwicklung einer Mathematik variabler Größen. Damit soll die Rolle rein mathematischer Triebkräfte und Antriebe keineswegs negiert oder abgeschwächt werden.

Auf den physikalisch-naturwissenschaftlichen Sachverhalt wird hier nicht näher eingegangen. Die Stichworte Planetenbewegung, Stoß, Wurf, Fall, Bewegungsgröße, Kraftbegriff, wahres Kraftmaß, Ballistik, Balkenbiegung, Pendel, Schleppkurve, Kettenlinie und viele andere werden uns bei der Schilderung der Leistungen der Mathematiker begegnen.

Zu den praktischen Problemen sei hier noch Folgendes angemerkt. Es gab in den ökonomisch fortgeschrittenen Ländern Europas eine auch zahlenmäßig recht starke Gruppe von „Mechanici“, von Wasserbau- und Festungsbaumeistern, von Schiffsbauern, Bergwerk- und Bauingenieuren. Deutlich ist auch das Hervortreten theoretischer Interessen und Kenntnisse. Die „Mechanici“ wussten oder ahnten, dass in ihrem Wirkungskreis Probleme bestanden, die einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Behandlung bedurften. Ganz typisch ist die Untersuchung der Kraftverhältnisse an beweglichen Teilen von Maschinen, z. B. von Wasserrädern. Deren Dimension muss der zur Verfügung stehenden Wassermenge angeglichen werden; sonst dreht sich das Rad zu schnell oder zu langsam.

Nehmen wir als Beispiel den unternommenen Versuch ca. 1700 der Berechnung der Kraft eines oberschlächtigen Wasserrades durch den Leipziger Mechaniker Jacob Leupold (1674–1727). Das Volumen der Kammern wird in kleinere Volumina unterteilt; von den darin befindlichen Wassermengen kann das Drehmoment bestimmt werden. Die Summation aller (differentiell bestimmten) Drehmomente gibt Rückschlüsse auf die Kraft des Wasserrades.

Wir Heutigen stehen bewundernd vor der geistigen Leistung, die zur Infinitesimalmathematik geführt hat. Das würde noch deutlicher werden, wenn man versuchen müsste, Probleme mit den Mitteln der damaligen Mathematik zu lösen.

Keine Herabsetzung dieser historischen Leistung bedeutet jedoch die Feststellung, dass oft naive Erwartungen an die Leistungsfähigkeit der Infinitesimalmathematik geknüpft und gelegentlich auch enttäuscht wurden. Als klassisches Beispiel wird hierfür gern ein Ausruf Friedrichs des Großen beim Versagen der nach Eulers Berechnungen angelegten Wasserspiele von Sanssouci angeführt. Zu Voltaire gewandt kommentierte der König dieses Ereignis mit den Worten „Oh, Eitelkeit der Eitelkeiten. Eitelkeit der Mathematik!“ und wies damit die Schuld am Versagen der Mathematik zu, kaschierte so jedoch

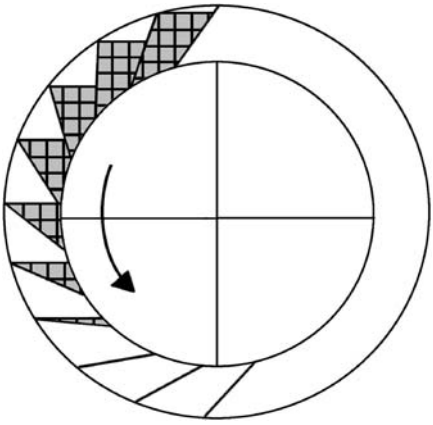


Abb. 8.6.3 Figur zur Berechnung der Antriebskraft eines oberschlächtigen Wasserrades (nach Jacob Leupold)

nur das eigene Versäumnis, die erforderlichen Mittel für die nach Eulers Berechnungen erforderlichen Maschinen zur Verfügung zu stellen.

Die Kluft zwischen empirisch gewachsener, bewunderungswürdiger und leistungsfähiger Ingenieur- und Wasserbaukunst einerseits und der rationalen Mechanik, die sich infinitesimaler Methoden bediente, andererseits konnte erst langsam im 18./19. Jahrhundert geschlossen werden. Der französische Ingenieur Bernard Forest de Bélidor (1697–1761) mit seinem Buch *La science des ingenieurs* von 1729 dürfte der Erste gewesen sein, der sich der Infinitesimalmathematik bedient hat. Der Durchbruch allerdings erfolgte erst während der Industriellen Revolution mit Männern wie Navier, Poncelet, Coriolis und anderen.

Fortentwicklung des antiken Erbes

Unter den Mathematikhistorikern besteht weitgehend Einigkeit darüber, dass bei Eudoxos und Archimedes Frühformen infinitesimalen Denkens vorlagen. Mit der Wiedergeburt der Antike wird Archimedes zum Bezugspunkt und zum Anknüpfungspunkt der neuzeitlichen Infinitesimalmathematik. So lassen sich direkte Einflüsse von Archimedes nachweisen u. a. bei Kepler, Galilei, Torricelli und Cavalieri, die den Reichtum der archimedischen Denkweisen und deren Tragweite demonstrieren konnten.

Commandino und Valerio

Der Italiener Federico Commandino, im Dienste verschiedener geistlicher und weltlicher Fürsten, hat sich ausgezeichnet als Übersetzer wesentlicher Schriften von Archimedes (1558), von Ptolemaios und von Pappos (1588). Die

Arbeit von Archimedes über *Schwimmende Körper* regte Commandino an, seinerseits Gravitationszentren von Körpern zu bestimmen; eine entsprechende Abhandlung wurde 1565 in Bologna publiziert.

Commandinos Schüler Luca Valerio (1552–1618) hatte auch bei Clavius in Rom studiert, war eine Zeitlang Lehrer des Papstes Clemens VIII., war Mitglied der Accademia dei Lincei und stand in Beziehung zu Galilei, der ihn als „größten Mathematiker, als neuen Archimedes unserer Zeit“ lobte.

Valerio bewegte sich im Themenkreis von Commandino. Sein dreibändiges Werk *De centro gravitatis solidorum* (Über das Gravitationszentrum von Körpern) erschien 1604. Er fand das Volumen der (Halb-)Kugel, indem er den Kugelinhalt mit eingeschriebenen Kegeln und Zylindern bestimmte. Ähnlich konnte er auch Volumen und Schwerpunkt des Rotationsellipsoides und des zweischaligen Rotationshyperboloides berechnen.

Methodisch lehnten sich Commandino und Valerio und andere Mathematiker eng an die sog. „Exhaustionsrechnung“ an (von lat. exhaurire, ausschöpfen; die etwas unglückliche Bezeichnung stammt allerdings erst 1647 von Gregorius a San Vincentio und wird inzwischen durch die Bezeichnung „Kompressionsmethode“ für die Näherung durch umbeschriebene Vielecke ergänzt), indem sie z. B. Flächen mit gekrümmter Begrenzung durch um- und einbeschriebene Rechtecke (Treppenfiguren) ersetzten und so für den wahren Flächeninhalt obere bzw. untere Schranken angaben. Die Vermehrung der Rechteckstreifen lieferte bessere Schranken.

Dies alles erinnert an die heutige Integralrechnung. Man könnte erwarten, dass der Ausbau der Methode der Exhaustion auf direktem Wege zur Integralrechnung hätte führen können oder sogar müssen. Das war jedoch nicht der Fall. Der Gang der Geschichte war auch hier nicht glatt, nicht ohne Umwege. Die Exhaustionsrechnung stellte wohl eine erste, methodisch sogar in sich geschlossene Form eines Teiles der Infinitesimalmathematik dar. Historisch aber ist ihr Inhalt erst über weitere Zwischenetappen indirekt in die moderne Integralrechnung eingegangen.

Johannes Kepler: Mathematiker und Astronom

Kepler hat ein überaus unruhiges Leben führen müssen. In den Zeiten aufgeregter und unduldsamer religiöser Auseinandersetzungen musste er mehrfach seinen Aufenthalt wechseln. Seine soziale Lage war in den Wirren des Dreißigjährigen Krieges unsicher; aus finanziellen Gründen hat er nicht wenige Horoskope verfasst. Nur mit Hilfe seiner Autorität als Kaiserlicher Mathematiker konnte er seine als Hexe angeklagte Mutter vor Folter und Scheiterhaufen retten.

Kepler wurde am 27. Dezember 1571 in Weil der Stadt geboren. Nach dem Besuch einer Lateinschule und von Klosterschulen studierte er seit 1589 evangelische Theologie an der Universität Tübingen und hatte das Glück, von dem hervorragenden Mathematiker, Astronomen und Altphilologen Michael Maestlin (1550–1631) in Astronomie unterwiesen zu werden. Durch ihn wurde

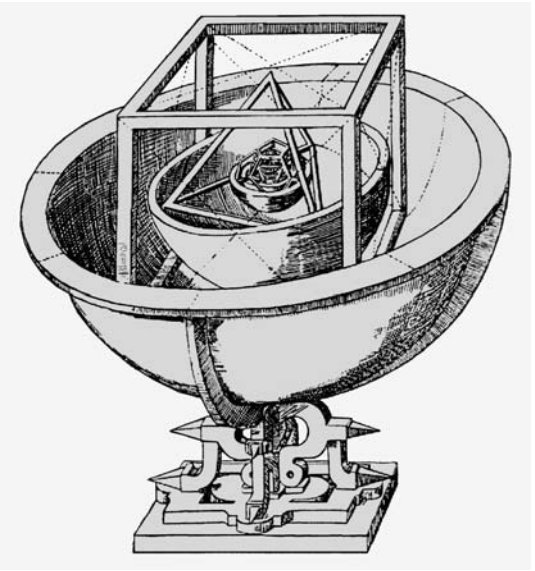


Abb. 8.6.4 Bildliche Darstellung der Abstandsverhältnisse von der Sonne und fünf Planeten mit den ineinander geschachtelten Platonischen Körpern [Mysterium Cosmographicum, Tübingen 1596, Tafel III], [Wikimedia Commons]

Kepler mit der copernicanischen, heliozentrischen Lehre bekannt. Seit 1594 arbeitete Kepler als Mathematiker und Astronom im reformierten Graz. Dort publizierte er das *Mysterium Cosmographicum* (Weltgeheimnis), ein großer Wurf. Er ordnete – spekulativ zwar, aber höchst genial und visionär – die Sonne und die damals bekannten fünf Planeten nach deren ungefähren Entfernungen derart an, dass sie sich jeweils auf den Sphären zwischen den fünf ineinander geschachtelten platonischen Körpern einpassten und begründete dies so:

> *„Wenn nun, so dachte ich mir, Gott bei den Bahnen die Bewegungen den Entfernungen angepaßt hat, so muß er sicher auch die Entfernungen irgendeinem anderen Ding angepaßt haben.“*
> (Zitiert nach [Zinner 1951, S. 106].)

Von der Gegenreformation aus Graz vertrieben wandte sich Kepler nach Prag und wurde zunächst eine Art Assistent von Brahe, nach dessen Tod als Kaiserlicher Mathematiker bestätigt. Als Nachfolger Brahes konnte er über dessen unermesslich reiches Beobachtungsmaterial verfügen.

Zunächst wandte sich Kepler glücklicherweise den Daten des Mars zu – dessen Laufbahn die größte Exzentrizität besitzt – und konnte nach mühseligen Rechnungen (*„Mars wehrt sich ständig“*) herausfinden, dass die Marsbahn elliptisch ist. Kepler verallgemeinerte sein Ergebnis auf alle Planeten und publizierte 1609 mit finanzieller Unterstützung des Kaisers Rudolph II.

Abb. 8.6.5 Denkmal Brahe/Kepler in Prag [Foto Schreiber]

die *Astronomia nova de motibus stellae Martis* (Die neue Astronomie über die Bewegungen des Sternes Mars). Dort werden die beiden ersten Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung formuliert. Das dritte Gesetz wird 1619 in seinem Werk *Harmonice mundi* (Weltharmonik) ausgesprochen.

Das Jahr 1611 war für Kepler voller persönlicher Tragödien. Seine Frau wurde schwer krank. Drei seiner Kinder erkrankten an den Blattern; der Lieblingssohn starb. Und in Prag wurde sein Gönner, Kaiser Rudolph II., zum Rücktritt gezwungen.

Wegen mancherlei Schwierigkeiten verließ Kepler Prag 1612 und ging nach Linz, wurde wieder vertrieben, ging 1626 nach Ulm, um den Druck der *Rudolphinischen Tafeln* (1627 vollendet) zu überwachen. Da er nicht zum Katholizismus übertreten wollte, verlor er seine Stellung am Kaiserlichen Hofe. Auch sein dringlicher Wunsch, in Tübingen eine Professur zu erhalten, schlug fehl wegen theologischer Differenzen zu den lutherischen Orthodoxen. Schließlich trat Kepler 1628 in die Dienste des Kaiserlichen Generals Wallenstein, hauptsächlich als Astrologe. Die Familie begab sich nach Sagan. Um ausstehende

Abb. 8.6.6 Tycho Brahes Beobachtung mit dem Mauerquadranten [Astronomiae Instauratae Mechanica, Wandsbek 1598], [Wikimedia Commons]

Abb. 8.6.7 Kepler; Keplers tastende Versuche, die Bahn des Planeten Mars aus Kreisbogenstücken und Ovalen zusammen zu setzen. Die Sonne ist bereits nicht mehr im Zentrum (DDR 1971, BRD 1971)

Gehälter einzufordern, reiste Kepler zu Pferde 1630 zum Reichstag nach Regensburg, starb aber dort am 15. November 1630 an Erschöpfung.

Kepler war von allen Wegbereitern der Infinitesimalrechnung der vielleicht phantasievollste. Sein Lebenswerk trägt Züge einer faszinierenden Mischung von Phantasie und naturwissenschaftlicher Exaktheit, von Mystizismus und rationalem Denken, von Neoplatonismus und Naturbeobachtung.

Von seinen Beiträgen zur Infinitesimalrechnung ist seine sog. „Faßrechnung“ besonders aufschlussreich. Mit dem ihm eigenen hintergründigen Humor berichtet er über den Anlass zur Entstehung seiner Schrift *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615) (Neue Stereometrie der Weinfässer):

> „*Als ich im November des letzten Jahres (1613) meine Wiedervermählung feierte, zu einer Zeit, da an den Donauufern bei Linz die aus Niederösterreich herbeigeführten Weinfässer nach einer reichlichen Lese aufgestapelt und zu einem annehmbaren Preise zu kaufen waren, da war es die Pflicht des neuen Gatten und sorglichen Familienvaters, für sein Haus den nötigen Trunk zu besorgen. Als einige Fässer eingekellert waren, kam am 4. Tage der Verkäufer mit der Meßrute, mit der er alle Fässer, ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung ihrem Inhalte nach bestimmte. Die Visierrute wurde mit ihrer metallenen Spitze durch das Spundloch quer bis zu den Rändern der beiden Böden eingeführt, und als die beiden Längen gleich gefunden worden waren, ergab die Marke am Spundloch die Zahl der Eimer im Fasse. Ich wunderte mich, daß die Querlinie durch die Faßhälfte ein Maß für den Inhalt abgeben könne, und bezweifelte die Richtigkeit der Methode, denn ein sehr niedriges*

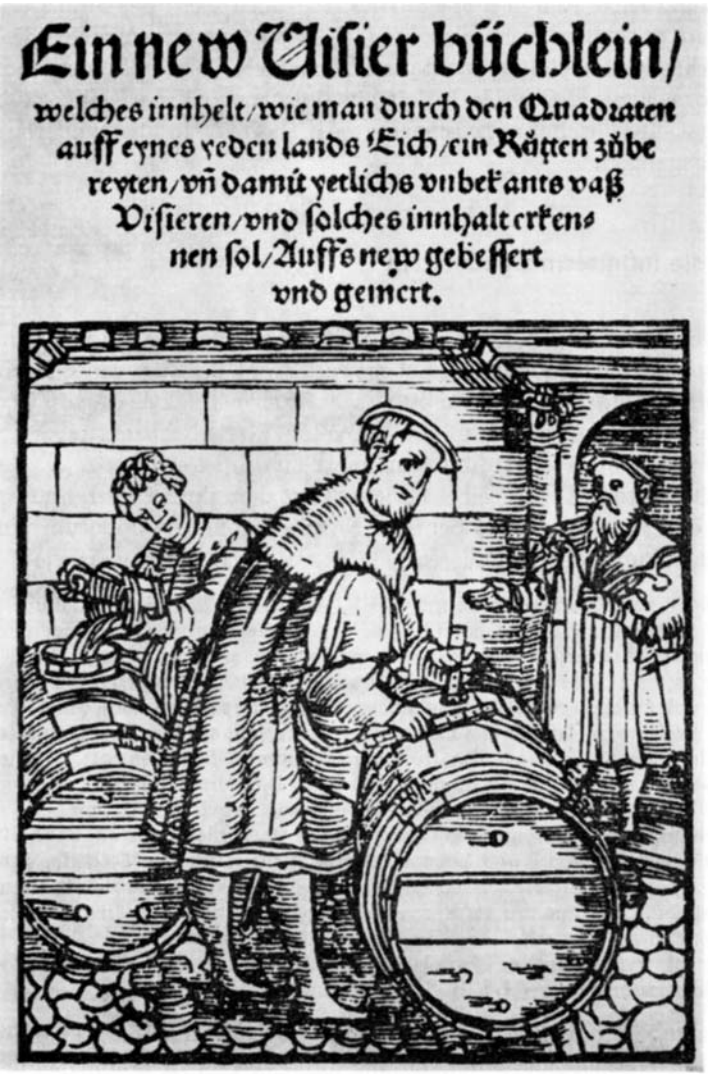


Abb. 8.6.8 Titelblatt eines Visierbüchleins [J. Frey, Nürnberg, 15. Jh.]

Faß mit etwas breiteren Böden und daher sehr viel kleinerem Inhalt könnte dieselbe Visierlänge besitzen. Es schien mir als Neuvermähltem nicht unzweckmäßig, ein neues Prinzip mathematischer Arbeiten, nämlich die Genauigkeit dieser bequemen und allgemein wichtigen Bestimmung nach geometrischen Grundsätzen zu erforschen und die etwa vorhandenen Gesetze ans Licht zu bringen.“
[Kepler 1908, S. 99f.]

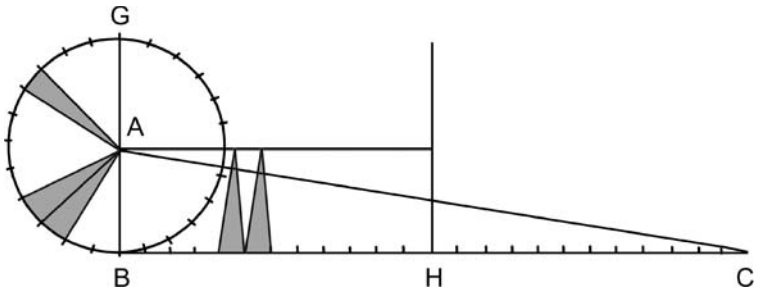


Abb. 8.6.9 Figur zur Infinitesimalgeometrie Keplers bei der Kreisflächenbestimmung: Der Kreisinhalt ist dem Inhalt des Dreiecks ABC gleich.

Damit wird die Visierkunst, d. h. die Ausmessung des Inhalts von Fässern, durch Kepler einer wissenschaftlichen Behandlung unterworfen. Er kommt zu dem Ergebnis, dass ein aus einem Zylinder und zwei Kegelstümpfen zusammengesetzter Hohlkörper hinsichtlich der Inhaltsbestimmung mittels Visierrute nicht wesentlich von einem Fass mit gekrümmten Dauben abweicht – und zwar bei österreichischer Bauart, dagegen wesentlich bei Fässern rheinischer Konstruktion, die bauchiger gebaut wurden.

Mit der Berechnung von Fassinhalten hat sich Kepler in der „Faßrechnung“ nicht begnügt. Kepler zeigte, dass 92 verschiedene Rotationskörper durch Rotation von Kegelschnitten um verschiedene Achsen entstehen. Er gab genäherte Volumenbestimmungen an und verlieh den Körpern Namen aus dem täglichen Leben: Apfel, Zitrone, Spindel, Kürbis, Birne, Pflaume, usw. Damit ging Kepler weit über die von Archimedes, Commandino, Valerio und anderen behandelten Körper hinaus. Auch für die praktischen Belange wollte Kepler Hilfe leisten, indem er der mit komplizierten Beweisen arbeitenden lateinischen Fassung im Jahre 1616 in deutscher Sprache ein für das tägliche Leben bestimmtes Visierbüchlein nachfolgen ließ, unter dem Titel *„Auszug aus der Uralten Messekunst Archimedes ...“*. Dort werden ohne Begründung Vorschriften zur Inhaltsbestimmung und Anfertigung von Fässern gegeben, ferner Angaben zum Vergleich von unterschiedlichen Gewichts-, Längen- und Getreidemaßen.

Auch methodologisch hat Kepler einen neuen Abschnitt in der Frühgeschichte der Infinitesimalrechnung eingeleitet. Durch ihn wurde der bis dahin vorwiegend im philosophischen Sinne gebrauchte Begriff des Unendlich-Kleinen in die Mathematik/Geometrie eingebürgert; man spricht daher direkt von Infinitesimalgeometrie. So gibt er den Flächeninhalt des Kreises folgendermaßen an:

> *„Der Umfang des Kreises BG hat so viele Teile als Punkte, nämlich unendlich viele; jedes Teilchen kann angesehen werden als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Schenkeln AB, so daß in der Kreisfläche unendlich viele Dreiecke liegen, die sämtlich mit ih-*

> *ren Scheiteln im Mittelpunkt A zusammenstoßen. Es werde nun der Kreisumfang zu einer Geraden BC ausgestreckt. So werden also die Grundlinien jener unendlich vielen Dreiecke oder Sektoren sämtlich auf der einen Geraden BC abgebildet (imginatae) und nebeneinander angeordnet.*"
> [Kepler 1908, S. 101]

Auf ähnliche Weise verfuhr Kepler bei der Volumenbestimmung der Kugel:

> „*Die Kugel besteht aus unendlich vielen Kegeln, deren Scheitel im Mittelpunkte zusammentreffen, und deren auf der Oberfläche gelegene Grundflächen durch Punkte ersetzt sind.*"
> [Kepler 1908, S. 101]

Keplers Methode lässt natürlich von unserem Standpunkt aus die notwendige Strenge vermissen; auch Kepler war sich dieser Unzulänglichkeit bewusst.

Cavalieri und Torricelli: Methode der Indivisibeln

Ein Galilei-Schüler, Bonaventura Cavalieri (1598?–1647), hat vielleicht am deutlichsten die bei Kepler noch verborgenen Möglichkeiten erkannt. Zum anderen knüpfte Cavalieri an die antike Tradition von Demokrit an, auf die Archimedes angespielt hatte.

Während des Mittelalters hatten, freilich in theologischer Einhüllung, Vorstellungen über Teilbarkeit oder Unteilbarkeit eine große Rolle gespielt. Aus dem griechischen Wort „atomos" (unteilbar) wurde durch Übersetzung ins Lateinische „indivisibilis" (nicht teilbar). In der naturphilosophischen Bedeutung als kleinster Teil des Kontinuums dürfte das Fachwort „Indivisibel" im 14. Jahrhundert von dem englischen Scholastiker Thomas Bradwardine (1290?–1349) geprägt worden sein. Auch bei Kepler sind diese und ähnliche Vorstellungen nachweisbar. Gelegentlich spricht er davon, dass Körper zu Körpern gewordene Flächen darstellen, indem die Flächen geflossen sind. Die Flächen nehmen sozusagen die Rolle der Unteilbarkeit hinsichtlich des Körpers ein.

Diese und andere Ansätze hat Cavalieri zu systematisieren versucht. Im Jahre 1635 erschien sein Buch „*Geometria indivisibilibus continuorum...*" (Geometrie der kontinuierlichen Indivisibeln, nach einer gewissen neuen Methode vorgebracht); 1653 folgte eine verbesserte Ausgabe. Trotzdem: Es ist schwer, eine klare Vorstellung von Cavalieris Ansichten zu erhalten, da er insbesondere nicht erklärt, was eine Indivisible im mathematischen Sinne darstellt (das dürfte auch schwierig gewesen sein). Cavalieri hat daher später wegen der ihm gemachten Vorwürfe ein Bild gebraucht: Ebene Figuren sind aufzufassen als ein Gewebe aus parallelen Fäden. Körper sind als Bücher aufzufassen, welche aus zueinander parallelen Blättern bestehen. Doch besteht

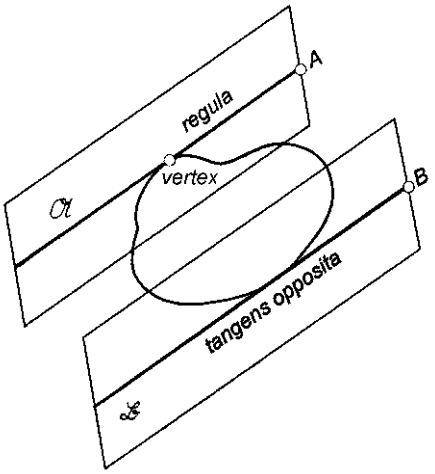


Abb. 8.6.10 Grundvorstellung zum Cavalierischen Prinzip [Wußing 1989, S. 169]

ein Unterschied. Die Fäden bzw. Blätter sind nur in endlicher Anzahl vorhanden und sie besitzen, zum Unterschied von den Indivisibeln, eine endliche Dicke.

Man könnte Cavalieris verschwommene Idee so interpretieren: Die Indivisibeln sind unendlich dünne Gebilde, die eine um Eins kleinere Dimension besitzen als das von ihnen in ihrer Gesamtheit gebildete stetige Ganze.

Das Cavalierische Prinzip spielt im heutigen Schulunterricht eine wichtige Rolle. Hier folgt nun das Cavalierische Prinzip in der Originalform:

Cavalieri unterstellt, dass sich bei jeder geschlossenen ebenen Figur eine Gerade A als Berührungslinie (bezeichnet als „regula“, d. i. Latte, Leiste, Lineal) finden lässt, welche nur einen Punkt („vertex“, d. i. Scheitel) mit der Berandung gemeinsam hat. Zur „regula“ gibt es unendlich viele parallele Geraden und schließlich wieder eine, die „tangens opposita“ B (die gegenüberliegende Berührende), die die Figur abschließend berührt. Nun denkt sich Cavalieri durch A eine Ebene $\mathfrak{A}$ und durch B eine weitere, zu $\mathfrak{A}$ parallele Ebene $\mathfrak{B}$ gelegt. $\mathfrak{A}$ bewegt sich parallel zu sich selbst, bis $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ übergeht. Diese Bewegung bezeichnet Cavalieri als „Fließen“ – die Grundvorstellung „fließender Größen“ wird in der weiteren Geschichte der Infinitesimalmathematik eine wesentliche Rolle spielen, insbesondere bei Barrow und bei Newton. Die Durchschnittsmengen der fließenden Ebenen mit der ebenen Figur bilden in den Worten von Cavalieri die „Gesamtheit der Geraden der Figur“ (*omnes lineae figurae*) – diese Wendung wird später von Leibniz wieder aufgegriffen werden.

Für den Raum geht Cavalieri ähnlich vor: Die Stelle der regula nimmt eine Ebene ein. Diese regula erzeugt beim Fließen die „Gesamtheit der Ebenen des Körpers“ (*„omnia plana solidi“*).

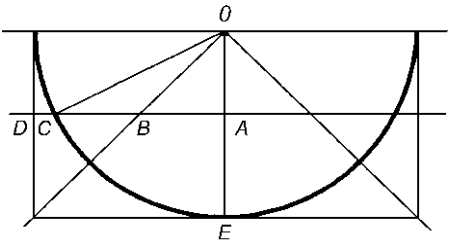


Abb. 8.6.11 Figur zur Berechnung des Kugelvolumens

Das Cavalierische Prinzip wird in zwei Fundamentalsätzen im Original folgendermaßen formuliert:

> *„1. Die Gesamtheit der Indivisibeln eines und desselben Gebildes ist unabhängig von der Regula.*
> *2. Ebene Figuren oder auch Körper stehen in demselben Verhältnisse wie die Gesamtheiten ihrer Geraden bzw. Ebenen, welche nach irgendeiner Regula genommen werden.“*
> (Deutsch zitiert nach [Cantor, M. Bd. 2, 1892, S. 761])

Cavalieri verwendete diese Festlegungen nach Art von Axiomen, war sich aber ihres heuristischen Charakters bewusst: Die Methode ist gut und richtig, weil sie richtige Ergebnisse liefert.

Zur Berechnung des Kugelvolumens z. B. geht Cavalieri so vor: Einer Halbkugel wird ein Zylinder umbeschrieben und dem Zylinder ein Kegel einbeschrieben. Eine Ebene, die senkrecht auf dem Radius $\overline{OE}$ steht, schneidet dann Kreise aus mit den Radien $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ und $\overline{AB}$, wobei $\overline{CA}^2 + \overline{AO}^2 = \overline{CO}^2$ gilt. Wegen $\overline{AO} = \overline{AB}$ und $\overline{CO} = \overline{DA}$ hat man $\overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{DA}^2$. Also ist – indem man sich diese Gleichung mit π multipliziert denkt – die Summe der Flächeninhalte der Schnittkreise der Kugel und des Kegels gleich dem Flächeninhalt des Schnittkreises des Zylinders. Die Ebene war in ihrer Lage nicht beschränkt. Was für das eine Tripel der Quadrate der Indivisibeln gilt, so schließt Cavalieri, gilt auch für deren Gesamtheiten. Also wendet er sein Prinzip an und erhält nacheinander

$$V_{\text{Kugel}} + V_{\text{Kegel}} = V_{\text{Zylinder}}\,,\; V_{\text{Zylinder}} = 3\,V_{\text{Kegel}}\,,\; V_{\text{Kugel}} = \frac{2}{3}\,V_{\text{Zylinder}}.$$

Damit hatte Cavalieri natürlich kein neues Ergebnis gefunden; schon Archimedes war ja auf diesen Satz besonders stolz gewesen. Neu war bei Cavalieri nur die auf systematischem Gebrauch der Indivisibeln beruhende Methode. Immerhin aber gelangte er unter Anwendung einiger Kunstgriffe zu Integrationen, die wir heute schreiben würden als

$$\int_o^a x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3 \quad \text{und} \quad \int_o^a x^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{5}a^5\ .$$

Abb. 8.6.12 Cavalieri, Torricelli

Diese Integrationen von Potenzfunktionen waren freilich in der Zwischenzeit auch andernorts geleistet worden, u. a. durch Fermat und Wallis.

Evangelista Torricelli (1608–1647) war einer der letzten direkten Schüler von Galilei und übernahm nach dessen Erblindung die Schlussredaktion der *Discorsi*. Torricelli spielte bekanntlich auch in der Geschichte der Physik eine herausragende Rolle: bei der Widerlegung des sog. horror vacui. Torricelli war zugleich ein ausgezeichneter Mathematiker. Er beherrschte die Exhaustionsmethode und die Methode der Indivisibeln. Unter Kombination beider Verfahren leistete er auf elf verschiedene Arten die Quadratur der Parabel und schließlich die der Zykloide (das Wort Zykloide stammt von Galilei). Die mechanische Interpretation der Parabel – gemäß Galilei – als wirkliche Bewegung führte Torricelli zum Begriff der Einhüllenden einer Kurvenschar: Er betrachtete die durch Variation des Abwurfwinkels entstehende Schar von Wurfparabeln und fand die Sätze, dass die Einhüllende der Schar ebenfalls eine Parabel ist und dass der geometrische Ort der Scheitelpunkte aller Parabeln der Schar wiederum eine Parabel ist. Eine mathematische Entdeckung Torricellis führte sogar zu schweren Zweifeln an der Richtigkeit der Mathematik überhaupt. Bei der von ihm geleisteten Kubatur eines Rotationshyperboloides tritt zum ersten Mal ein uneigentliches Integral auf. Und schlimmer noch: der Rauminhalt eines sich ins Unendliche erstreckenden Körpers ist endlich! Das Resultat wirkte höchst paradox. In unserer Schreibweise integrieren wir gemäß

$$\pi \int_a^\infty \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \pi \frac{1}{a} \ .$$

Also: Das Volumen des unendlichen Körpers ist gleich dem Rauminhalt des Zylinders der Höhe a mit dem Radius $\frac{1}{a}$.

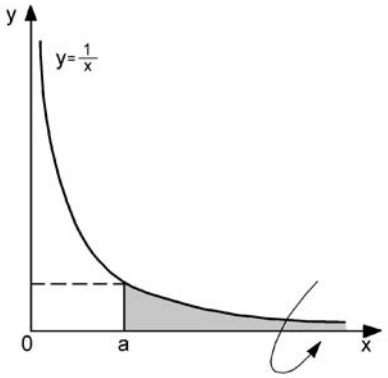


Abb. 8.6.13 Figur zum Volumen eines Rotationshyperboloides

Die Schwächen der Indivisibeln-Methode verhinderten die dauernde und allgemeine Anerkennung. Sie war fragwürdig und logisch ungesichert. Außerdem war sie unbrauchbar für die Berechnung von Oberflächen und Bogenlängen. Die rechnerisch-algebraische Durchbildung der Indivisibeln-Methode bot jedoch weiteren Spielraum. Dieser Aufgabe hat sich eine große Anzahl von Mathematikern zur Mitte des 17. Jahrhunderts gewidmet und bemerkenswerte Forschritte erzielt, unter ihnen Gregorius, Roberval, Fermat. So vermochte Fermat in diesem Zusammenhang unter Verwendung archimedischer Grundgedanken durch Zerlegung große Klassen von Funktionen zu integrieren, die Klassen der allgemeinen Parabeln, der allgemeinen Hyperbeln (außer der gleichseitigen Hyperbel $xy = 1$) und der allgemeinen Spiralen mit den Gleichungen

$$\left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^m, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(\frac{x}{a}\right)^m = 1, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^n = \left(\frac{r\varphi}{a\alpha}\right)^m,$$

m und n sind dabei zueinander teilerfremde natürliche Zahlen und $m > n$.

Um eben diese Zeit, um die Mitte des 17. Jahrhunderts, erzielte der Physiker und Astronom Christiaan Huygens (1629–1695) weitreichende neue Ergebnisse, unter bewusstem Verzicht auf die von ihm als unexakt abgelehnte Indivisibeln-Methode und unter Rückgriff auf die strengere Archimedische Exhaustionsmethode. Ihm gelang die Rektifikation der Parabel, die Komplanation von Rotationsflächen zweiter Ordnung, und schließlich stellte er um 1673 eine Theorie der Evoluten und Evolventen auf, diese letztere im Zusammenhang mit der Konstruktion einer Pendeluhr mit Zykloidenpendel. Später jedoch vermochte sich Huygens nicht der Infinitesimalrechnung anzuschließen, weder in der Form der Fluxionsrechnung von Newton noch in der Form des Calculus von Leibniz.

Abb. 8.6.14 Christiaan Huygens; Ergebnisse der Forschung von Huygens und Newton (Niederlande 1928, 1988)

John Wallis: Arithmetisierung der Indivisibelnmethode

Ein typisches Beispiel soll die Arithmetisierung der Indivisibeln-Methode verdeutlichen; sie führte dicht an die rechnerische Behandlung von Grenzübergängen heran. Hier kommt der Engländer John Wallis (1616–1703) zur Sprache, der sich nicht nur als Mathematiker, sondern auch als Arzt, Logiker, Theologe und Philologe ausgezeichnet hat. Wallis hatte sich ursprünglich mit Algebra befasst, dann aber lernte er die Arbeiten von Cavalieri und Torricelli kennen und beschäftigte sich mit Quadraturen und Kubaturen. Nach einer Reihe von Einzelarbeiten erschien 1656 die zusammenfassende *Arithmetica infinitorum* (Arithmetik der unendlichen Größen). Der Titel ist gut gewählt. Es kam ja darauf an, bei Quadraturen und Kubaturen möglichst rechnerisch zu verfahren.

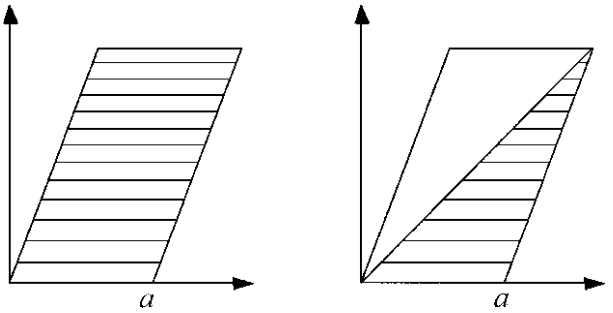


Abb. 8.6.15 Zur Volumenberechnung einer Pyramide nach der Indivisibelnmethode

Abb. 8.6.16 John Wallis (Kupferstich von W. Fairthorne 1668)

Cavalieri hatte mit seiner Methode den bekannten Satz bewiesen, dass sich die Volumina eines Prismas zur einbeschriebenen Pyramide wie 3:1 verhalten. In seiner Sprechweise: Die Gesamtheit der Indivisibelnquadrate eines Parallelogramms verhält sich zur Gesamtheit der Indivisibelnquadrate eines durch eine Diagonale herausgeschnittenen Dreiecks wie 3:1. In unserer Schreibweise führt das auf

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n \cdot n^2} = \frac{1}{3} \ .$$

Wallis erkannte nun den engen Zusammenhang zwischen dem von Cavalieri betrachteten und in Anlehnung an die Stereometrie bestimmten Grenzwert und dem Quadraturproblem der Parabeln. Er erkannte, modern ausgedrückt, die Äquivalenz von

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n \cdot n^2} = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \,.$$

Nach kühner Induktion für die Integration der Parabeln $y = x^m$ ($m > 0$, ganz) behauptete er die Äquivalenz von

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^m + 2^m + \ldots n^m}{n \cdot n^m} = \frac{1}{m+1} \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^m \mathrm{d}x = \frac{1}{m+1} \,.$$

Den Beweis für den linken Grenzwert führte Wallis rechnerisch – im Unterschied zu Cavalieri. Für $m = 3$ etwa setzte er voraus, dass $1/4$ herauskommt. Daher rechnete er für $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$1 = 1/4 + 3/4\,; \quad 9/16 = 1/4 + 5/16\,; \quad 4/9 = 1/4 + 7/36\,; \ldots$$

Er bestimmte also den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1+2n}{n^2 \cdot 2^2} \right) = \frac{1}{4} \,.$$

Er schreibt:

> „*Der Bruch, um welchen* $1/4$ *übertroffen wird, hat zum Nenner offenbar stets um* 4 *zunehmende Zahlen und wird stetig kleiner, so dass er endlich kleiner als jeder beliebige angebbare Wert wird, und wenn man bis ins Unendliche die Versuche ausdehnt, geradezu verschwindet.*“

Und an einer anderen Stelle gebraucht Wallis die Formulierung:

> „*. . . der Unterschied* (zum wahren Wert, Wg) *wird kleiner als jede nur angebbare Größe*“
> [Cantor, M. Bd. 2, 1892, S. 823]

Damit hat Wallis das allgemeine Resultat (in unserer (Schreibweise)

$$\int_0^1 x^m \mathrm{d}x = \frac{1}{m+1} \quad \text{für} \quad m > 0\,, \quad \text{ganz} \,.$$

Und nun geht Wallis zu einer extrem kühnen Induktion über. Er behauptet die Richtigkeit dieser Beziehung für alle Potenzfunktionen $y = x^m$, also

$$\int_0^1 x^m \mathrm{d}x = \frac{1}{m+1} \quad \text{für alle} \quad m \neq -1 \,,$$

also für alle positiven und negativen, ganzen und gebrochenen und sogar irrationalen m. Nur $m = -1$ muss er natürlich ausschließen.

Mit dieser Induktion stand Wallis unter dem philosophischen Einfluss von Francis Bacon (1561–1626), dem großen Verfechter der Methode des Aufsteigens vom Speziellen zum Allgemeinen. Bei Wallis handelte es sich also keineswegs um mathematische oder vollständige Induktion; diese ist wohl erst von Pascal als mathematische Neuerung aufgebracht worden.

Wallis dagegen hat die Induktion im Baconschen Sinne als allgemeines wissenschaftliches Prinzip benutzt und daher auch gar nicht die Notwendigkeit empfunden, den Satz allgemein zu beweisen. Für irrationale Exponenten hätte er auch gar nicht die Möglichkeit dazu besessen.

Mit dem Blick auf die Vielseitigkeit und Bedeutung seien noch zwei Bemerkungen zu Wallis angebracht. Wallis hat 1685 eine Abhandlung unter dem Titel *A Treatise of Algebra both historical and practical* (Abhandlung über Algebra, sowohl historisch als auch praktisch) veröffentlicht und würdigt dort die Leistungen von Oughtred, Harriot, Pell, Newton und seine eigenen. Auch diskutiert er das Auftauchen und die Bezeichnung der indisch-arabischen Ziffern. Er ist daher gelegentlich [Stedall 2003] als der erste moderne Mathematikhistoriker bezeichnet worden.

Wallis gehörte zu jenen, die Newton bedrängten, er möge seine Ergebnisse bekannt machen, im Interesse des internationalen Ansehens der englischen Wissenschaft.

Pierre de Fermat: Das Tangentenproblem

Bei der Betrachtung der Methode und der Ergebnisse von Wallis könnte man meinen, die Differential- und Integralrechnung stünde kurz vor der Geburt, hätte nun gleich sozusagen heraussspringen müssen. Das war jedoch nicht der Fall. Es war noch eine weitere Komponente historisch notwendig, nämlich die Diskussion um das allgemeine Tangentenproblem und die Hinwendung zu (einfachen) Extremwertproblemen.

Dieser Problemkomplex wurde insbesondere von Fermat schon zu einem relativ frühen Zeitpunkt sehr weit vorangebracht. Um 1628/29 fand er eine Methode, in einfachen Fällen Extremwerte zu berechnen. Und schließlich verband Fermat Extremwertbetrachtungen mit physikalischen Fragestellungen; u. a. gelangte er zur Konstatierung des kürzesten bzw. extremen Lichtweges bei Lichtbrechung [Wußing 1989, S. 166].

Ursprünglich hatte er sein Verfahren nur für ganzrationale Funktionen entwickelt; aber später sprach er es in voller Allgemeinheit aus. Freilich fehlt eine strenge Begründung; die Methode rechtfertigt sich durch den Erfolg. Gewöhnlich ruft er daher in solchen Abhandlungen mit berechtigtem Stolz aus:

> *„Eine allgemeinere und schönere Methode kann man wohl nicht angeben.“*

Aus der Methode der Bestimmung der Maxima und Minima entwickelte Fermat ein Verfahren, um die Kurventangenten zu konstruieren. Beispielsweise (der Leser möge sich nicht dadurch verwirren lassen, dass im nachfolgenden Text Großbuchstaben sowohl für die Länge von Strecken als auch zur Bezeichnung ihrer Endpunkte verwendet werden; dadurch wird weitgehende Annäherung an den Originaltext erreicht) sei an eine quadratische Parabel mit dem Scheitel D in B eine Tangente zu legen. Dann gilt wegen der Eigenschaften der Parabel $\overline{CD} : \overline{DI} > \overline{BC}^2 : \overline{OI}^2$.

Aus Ähnlichkeitssätzen folgt:

$$\overline{BC}^2 : \overline{OI}^2 = \overline{CE}^2 : \overline{IE}^2, \text{ also } \overline{CD} : \overline{DI} > \overline{CE}^2 : \overline{IE}^2 .$$

Setzt man $\overline{CD} = D$, $\overline{CE} = A$ und $\overline{CI} = E$, dann ist $D : (D - E) > A^2 : (A^2 + E^2 - 2AE)$. $\overline{CI} = E$ ist entstanden durch Verschiebung von C nach I. Das erinnert an die Bildung $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ beim Differenzenquotienten.)

Durch Ausmultiplizieren, Weglassen der gemeinsamen Glieder und Ersetzung von $>$ durch $\approx$ erhält man $DE^2 - 2DAE \approx -A^2E$. Nach Division durch E (das endlich ist) erhält man $DE + A^2 \approx 2DA$. Dann streicht man den mit E behafteten Term DE. (Erinnert an den Grenzübergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten für $h \to o$). Es folgt $A^2 = 2DA$ oder $A = 2D$. Die Tangente ist konstruierbar!

Der Zusammenhang mit dem Differenzenquotienten wird deutlich, wenn man moderne Bezeichnungen verwendet und dazu in Abb. 8.6.17 ein Koordinatensystem mit Nullpunkt in D und nach links gerichteter x-Achse legt. Dann hat die Parabel die Gleichung $y^2 = x$ bzw. $y = f(x) = \pm\sqrt{x}$. Sind x und $x + h$ die x-Koordinaten von C und I, so ist $\overline{CD} = x = f^2(x)$, $\overline{DI} = x + h = f^2(x + h)$ also

$$\overline{CD} : \overline{DI} = x : (x + h) = f^2(x) : f^2(x + h)$$

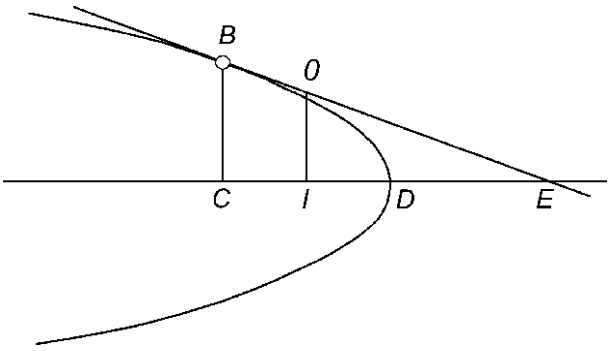


Abb. 8.6.17 Konstruktion einer Tangente an die quadratische Parabel nach Fermat

Abb. 8.6.18 Blaise Pascal, Pierre de Fermat

Daraus folgt

$$\begin{aligned} xf^2(x+h) &= (x+h)f^2(x) \\ x[f^2(x+h) - f^2(x)] &= hx \\ \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \tfrac{1}{f(x+h)+f(x)} \end{aligned}$$

und wegen der Stetigkeit von f für $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = \frac{1}{2\,f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Fermat sagt zu seiner Methode:

> „*Die Methode* (der Tangentenbestimmung, Wg) *versagt nie; sie kann sogar auf eine große Anzahl sehr schöner Aufgaben ausgedehnt werden; mit ihrer Hilfe finden wir die Schwerpunkte von Figuren, die von Kurven und Geraden begrenzt sind, sowie auch von Körpern und noch vieles andere, worüber wir vielleicht noch ein andermal berichten werden, wenn wir dazu Muse finden.*“
> [Fermat, 1934, S. 4].

Leider hat Fermat für dieses weitgesteckte Programm nicht die Muße gefunden.

Blaise Pascal: Das charakteristische Dreieck

Es gab aufgeregte Diskussionen über die Tragweite der Fermatschen Tangentenmethode; gerade die Anhänger von Descartes hatten Einwände. Aber immerhin rückte das Tangentenproblem in den Mittelpunkt des Interesses und beschleunigte die Herausbildung der Infinitesimalrechnung.

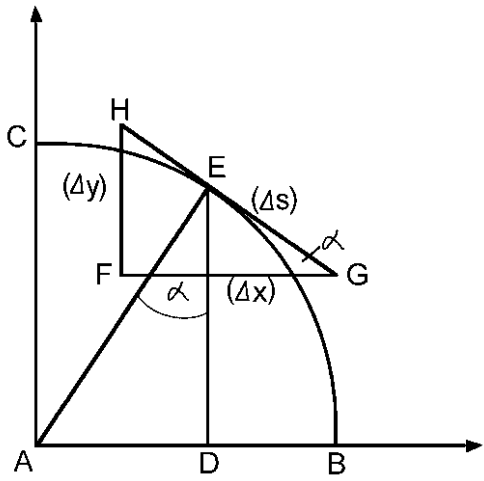


Abb. 8.6.19 Das charakteristische Dreieck bei Pascal

Noch ein weiterer französischer Gelehrter, Pascal, hat einen wesentlichen Beitrag zur Bewältigung des Tangentenproblems geleistet, und zwar so, dass Leibniz davon direkt profitieren konnte. Im Jahre 1659 hatte Pascal die Schrift *Traité du sinus du quart de cercle* (Abhandlung über die Sinus des Viertelkreises) veröffentlicht. Leibniz, der sich zu Anfang der 70er Jahre in Paris aufhielt, bemerkte in dieser Abhandlung, wie er sich ausdrückte, *„ein großes Licht, das der Autor selbst nicht gesehen habe.“*

Bei der Berechnung des statischen Momentes eines Viertelkreisbogens wurde Pascal auf die folgende (modernisierte) Figur geführt: Gegeben sei ein Kreisquadrant ABC, E der Fußpunkt des Kreisradius AE und D der Fußpunkt des Lotes von E auf die x-Achse. Mit einem Tangentenstück GH wird ein kleines rechtwinkliges Dreieck FGH konstruiert, dessen Katheten parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔAED und ΔHGF gilt $\overline{AE} : \overline{ED} = \overline{HG} : \overline{GF}$. Anders ausgedrückt: Die beiden Dreiecke mit den Seiten $\overline{AE}$ und $\overline{GF}$ bzw. $\overline{HG}$ und $\overline{ED}$ sind flächengleich. Und beiläufig macht Pascal die Bemerkung: Für kleine Dreiecke kann der Bogen der Kurve durch die Tangente ersetzt werden.

Leibniz erkannte nun, dass entsprechende Proportionen bzw. entsprechende Flächengleichheiten nicht nur für den Kreisbogen, sondern für jede Kurve gelten; man hat nur den Kreisradius durch die Kurvennormale zu ersetzen: Leibniz nannte das – infinitesimal klein gedachte – Dreieck ΔFGH mit den Seiten Δx, Δy und Δs „triangulum characteristicum“ (charakteristisches Dreieck); wir sprechen heute von Anstiegs- oder Steigungsdreieck.

8.7 Durchbildung der infinitesimalen Methoden: Newton und Leibniz

Die Herausbildung ausgereifter infinitesimaler Methoden setzte die genaueste Kenntnis der antiken und der von Kepler und Cavalieri stammenden geometrischen Ansätze ebenso voraus wie die Akzeptanz und Übernahme der algebraischen Kalküle von Vieta, Descartes und Fermat. So folgten historisch die Etappen des Ausbaues der antiken Verfahren der Exhaustionsrechnung, die Theorie der Indivisibeln und deren Arithmetisierung aufeinander. Parallel dazu erfolgte die Behandlung der Tangenten, der Quadratur der allgemeinen Parabeln sowie die Hinwendung zu Extremwertaufgaben.

Dies alles gehört zu den logisch-historischen Voraussetzungen für den didaktischen Umschlag in die Ausbildung kalkülmäßig beherrschbarer infinitesimaler Methoden; dieser konnte daher erst nach 1660 vollzogen werden. Mit der Erfindung der Fluxionsrechnung durch Newton und schließlich mit der Entwicklung des Calculus durch Leibniz wird die Infinitesimalmathematik nach Form und Inhalt einen gewissen vorläufigen Abschluss erreichen.

Das 18. Jahrhundert sah dann den weiteren Ausbau der infinitesimalen Methoden, die volle Herausbildung des Funktionsbegriffes und die höheren Gefilde der Analysis, wie z. B. die Theorie der Differentialgleichungen und die Variationsrechnung, dies alles begleitet von ideologischen und methodologischen Auseinandersetzungen um das Wesen des sog. Unendlich-Kleinen.

Newton und die Fluxionsrechnung

Mit Wallis hatte die Infinitesimalmathematik auf der britischen Insel bereits einen hervorragenden Vertreter gefunden. Ein jüngerer Landsmann, Isaac Barrow (1630–1677), soll ebenfalls aus der großen Schar der Pioniere der Infinitesimalmathematik hervorgehoben werden. Er war ursprünglich Theologe und wurde 1660 Professor für Griechisch an der Universität von Cambridge, später Professor für Mathematik am Gresham-College. 1655 ließ er eine Übersetzung der fünfzehn Bücher von Euklid erscheinen, die sehr erfolgreich war.

Von 1662 bis 1669 war er Inhaber des einzigen naturwissenschaftlichen Lehrstuhls in Cambridge, des sog. Lucasischen Katheders. Barrow hielt Einführungsvorlesungen über Mathematik (1664–1666) sowie Vorlesungen über Optik und Geometrie (1666/68) bzw. (1668/69).

Newton hörte Vorlesungen bei Barrow und kann durchaus als dessen Schüler bezeichnet werden. In Barrows *Lectiones Opticae et Geometriae* (Optische und geometrische Vorlesungen; 1668 vollendet, aber erst 1670 publiziert) wird Newton erstmals als Wissenschaftler erwähnt:

> *„Unser berühmter und wissensreicher Kollege Dr. Isaacus Newtonus hat dieses Manuskript durchgesehen, einige notwendige Korrekturen vorgenommen und persönlich einiges hinzugefügt, was sich an mehreren Stellen angenehm bemerkbar macht.“*
> (Zitiert bei [Wußing 1990, S. 39])

Im Original heißt die Passage:

> *„Quorum unus (. . .) D. Isaacus Newtonus, collega noster (peregregiae vir indolis ac insignis peritiae) exemplar revisit, aliqua corrigenda monens, sed et de suo nonnulla penu suggerens, quae nostris alicubi cum laude innexa cernes. . . “*
> [Barrow 1670, S. 6]

Jedenfalls haben Barrow und Newton einige Zeit zusammengearbeitet. Durch Barrow wurde Newton unter anderem auch mit der Konzeption der „fließenden Größen“ bekannt gemacht, möglicherweise schon als Student. 1669 verzichtete Barrow auf seinen Lehrstuhl zugunsten von Newton und beschäftigte sich mit theologischen Fragen.

Eine sehr wichtige, zentrale Erkenntnis der Infinitesimalmathematik geht auf Barrow zurück, wir bezeichnen sie heute als Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Barrow erkannte mehr oder weniger deutlich – es gibt unterschiedliche Interpretationen –, dass Quadratur (also Flächenberechnung) und Tangentenbestimmung zueinander inverse Operationen sind (vgl. [Maanen 1999, S. 86–88]). J. v. Maanen stellt zusammenfassend fest:

> *„Die Erkenntnis über die inverse Beziehung zwischen Quadratur und Tangente ist also vorhanden. Ein Algorithmus zur Nutzung dieser Erkenntnis und die angemessenen Symbole fehlen noch. Sie kamen in den Arbeiten von Newton und Leibniz, und Newton hatte sie sogar schon handschriftlich niedergelegt, als Barrow seine „Lectiones“ 1670 veröffentlichte.“*
> [Maanen 1999, S. 88]

Isaac Newton war einer der bedeutendsten Naturforscher, den die Menschheit bisher hervorgebracht hat. Er konstruierte ein Spiegelteleskop, erkannte, dass weißes (Sonnen)Licht aus Spektralfarben zusammengesetzt ist, fand das allgemeine Gravitationsgesetz, trieb chemische Studien, beschäftigte sich mit theologischen Fragen, organisierte das britische Münzwesen, leistete als Präsident der Royal Society wirksame Arbeit bei der Organisation der Wissenschaften, schuf mit seiner Fluxionsrechnung eine spezifische Form der Infinitesimalmathematik und leistete wesentliche Beiträge zur Reihenlehre und zur Algebra.

In einem feierlichen Staatsbegräbnis wurde Newton – wie viele bedeutende Persönlichkeiten Britanniens – in der Westminster Abbey beigesetzt. Auf einem pompösen Memorial wurde die folgende Grabinschrift angebracht. Sie ist zugleich ein Zeitzeugnis:

> *„Hier ruht Sir Isaac Newton, welcher als Erster mit nahezu göttlicher Geisteskraft die Bewegungen und Gestalten der Planeten, die Bahnen der Kometen und die Fluten des Meeres durch die von ihm entwickelten mathematischen Methoden erklärte, die Verschiedenheit*

> *der Lichtstrahlen sowie die daraus hervorgehenden Eigentümlichkeiten der Farben, welche vor ihm niemand auch nur geahnt hatte, erforschte, die Natur, die Geschichte und die Heilige Schrift fleißig, scharfsinnig und zuverlässig deutete, die Majestät des höchsten Gottes durch seine Philosophie darlegte und in evangelischer Einfachheit der Sitten sein Leben vollbrachte. Es dürfen sich alle Sterblichen beglückwünschen, daß diese Zierde des menschlichen Geschlechts ihnen geworden ist. Er wurde am 25. Dezember 1642 geboren und starb am 20. März 1727.“*
> (Zitiert bei [Wawilow 1951, S. 202])

Joseph Louis Lagrange, hauptsächlich mit dem Blick auf die Entdeckung der allgemeinen Gravitationskraft, ruft aus: *„Newton ist der Glücklichste; das System der Welt kann man nur einmal entdecken.“*

Und Albert Einstein, durch dessen Wirken Newtons Gravitationstheorie in einen größeren allgemeineren Zusammenhang gestellt wurde, sagt:

> *„Newton verzeih mir; du fandest den einzigen Weg, der zu deiner Zeit für einen Menschen von höchster Denk- und Gestaltungskraft eben noch möglich war. Die Begriffe, die du schufst, sind auch jetzt noch führend in unsrem physikalischen Denken, obwohl wir nun wissen, daß sie durch andere, der unmittelbaren Entfernung ferner stehende ersetzt werden müssen, wenn wir ein tieferes Begreifen der Zusammenhänge anstreben.“* (Zitiert bei [Wußing 1990, S. 121])

Das Geburtsdatum in der Grabinschrift – 25. 12. 1642 – beruht auf dem damals noch in England gültigen Julianischen Kalender. So kann man den symbolischen Zusammenhang herstellen, dass Newton im selben Jahr geboren wurde, in dem sein Wegbereiter Galilei starb (nach gregorianischer, heutiger Datierung fiel Newtons Geburt auf den 4. Januar 1643).

Newton stammt aus Woolsthorpe bei Grantham/Lincolnshire. Der Vater, ein Landpächter, war noch vor der Geburt des Jungen gestorben. Einsichtsvolle Verwandte und Lehrer ermöglichten ihm den Besuch der Lateinschule, so dass er 1661 am Trinity College in Cambridge immatrikuliert werden konnte, als „subsizar“ (dienender Student) wegen seiner schlechten finanziellen Lage. Cambridge war damals eine noch weitgehend mittelalterlich organisierte Universität, kaum erreicht von der Ideenflut der Wissenschaftlichen Revolution. Professoren durften im Allgemeinen nicht heiraten. Erst 1663 trat eine Wendung ein, als ein gewisser Henry Lucas im Trinity College den ersten naturwissenschaftlichen Lehrstuhl begründete. Dieser wurde von Isaac Barrow eingenommen, durch den Newton in die moderne Naturwissenschaft eingeführt wurde, insbesondere hinsichtlich der Optik. Wegen eines verheerenden Pestzuges verließ Newton 1665–67 seinen Studienort und ging in seine Heimat zurück; jedermann, der konnte, flüchtete aus den Städten. In ländlicher Stille fand Newton dort die entscheidenden Ansätze aller seiner späteren großartigen Leistungen in Optik, Farbenlehre, Mathematik und Philosophie; frei-

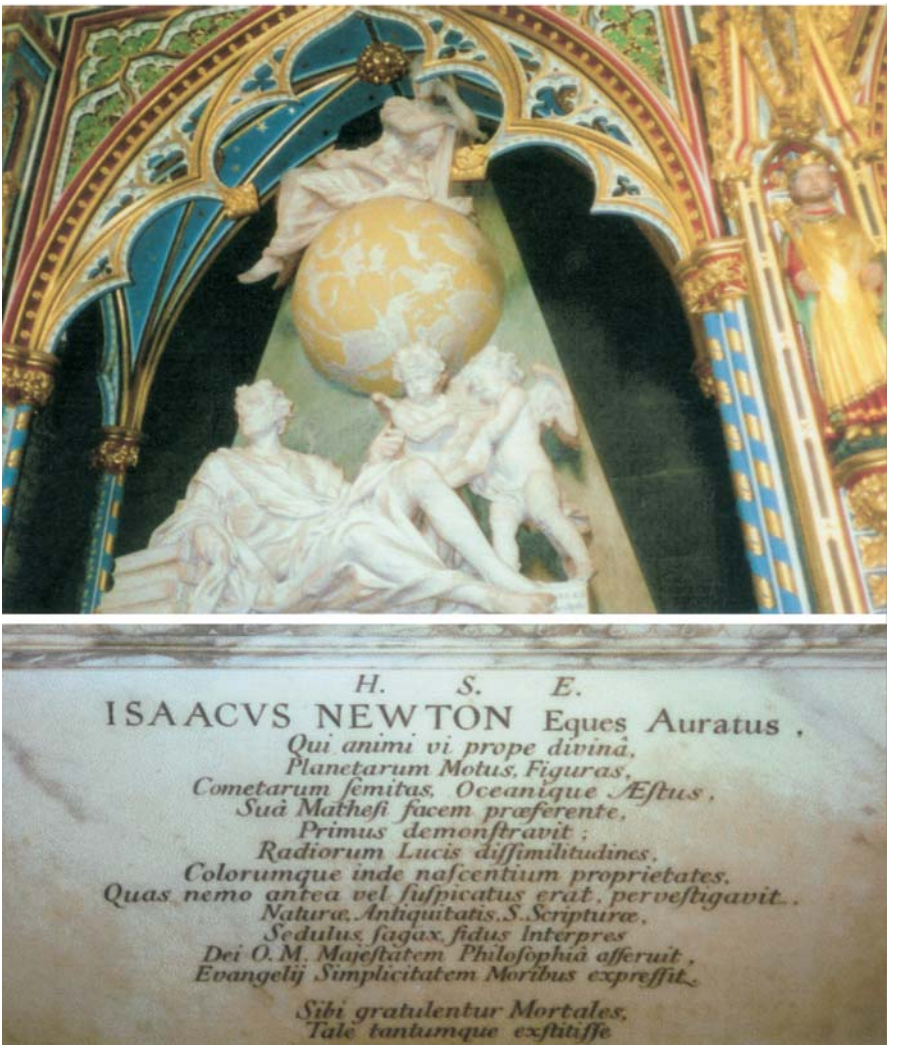


Abb. 8.7.1 Newtons Grabmal in der Westminster Abtei [Foto Wußing]

lich sind viele Ideen erst später ausgreift und in Publikationen eingemündet. Rückblickend hat sich Newton so geäußert:

> *„Anfang des Jahres 1665 fand ich die Annäherungsmethode für Reihen und die Methode, um jede Größe eines jeden Binoms in eine solche Reihe zu überführen. Im gleichen Jahr fand ich im Mai die Tangentenmethode von Gregory und Slusius und im November hatte ich die direkte Methode der Fluxionen und im nächsten Jahr im Januar die Farbentheorie; und im folgenden Mai erhielt ich Zugang*

zu der umgekehrten Methode der Fluxionen. Und im gleichen Jahr fing ich an, darüber nachzudenken, die Schwerkraft auf die Umlaufbahn des Mondes auszudehnen, und (nachdem ich festgestellt hatte, wie die Kraft zu schätzen sei, mit der eine Kugel, die sich innerhalb einer Sphäre dreht, die Oberfläche der Sphäre preßt) leitete (...) aus Keplers Regel ab, daß die Kräfte, die Planeten in ihren Umlaufbahnen halten, den Quadraten ihrer Entfernungen von den Mittelpunkten, um die sie kreisen, umgekehrt proportional sein müssen: Dabei verglich ich die erforderliche Kraft, um den Mond auf seiner Umlaufbahn zu halten, mit der Schwerkraft an der Erdoberfläche und fand, daß sie dem ziemlich genau entsprach. All dies geschah in den beiden Pestjahren 1665 und 1666, denn in jenen Tagen stand ich in der Vollkraft meiner Jahre für die Erfindung und beschäftigte mich mehr als irgendwann seither mit Mathematik und Philosophie.“
(Zitiert nach [Hall 1965, S. 330])

Bereits 1666 verfasste Newton eine Abhandlung über Farben, 1667 wurde er Mitglied des Lehrkörpers. 1668 verfertigte er ein erstes Exemplar seines Spiegelteleskopes; als Anerkennung wurde er 1672 Mitglied der Royal Society. In der Zwischenzeit beschäftigte sich Newton mit Arbeiten über Reihentheorie und Farbentheorie, ohne sie zunächst zu publizieren. 1676 gab es einen Briefwechsel mit Leibniz über Infinitesimalmathematik, freilich in verschlüsselter Form. 1687 erschienen die *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Mathematische Prinzipien der Naturwissenschaft), das vielleicht bedeutendste Werk der Naturwissenschaft. In ihm werden die Fundamente der Physik (Masse, Kraft, Beschleunigung) gelegt und die allgemeine Gravitationstheorie formuliert. In den Jahren um 1693 litt Newton unter schweren Depressionen. 1696 wurde er „Warden of the mint“, 1699 „Master of the mint“ und reformierte das britische Währungssystem. 1703 wurde er Präsident der Royal Society und 1705 geadelt. Nach und nach erschienen grundlegende Arbeiten von Newton (1704: Optik; 1704: Über die Quadratur der Kurven; 1707: Arithmetica universalis; 1711: Über die Reihenlehre; weitere Auflagen der „Principia“und anderes mehr).

Am 28. Februar 1727 führte Newton zum letzten Mal den Vorsitz in der Royal Society. Er starb am 31. März 1727.

Newton war in erster Linie Physiker, zugleich aber auch ein bedeutender Mathematiker mit erheblicher Folgewirkung (über seinen Beitrag zur Algebra wurde bereits berichtet). Von Newtons Beiträgen zur Infinitesimalrechnung kommen im Wesentlichen drei selbstständige Abhandlungen in Betracht, dazu einige längere Passagen aus den „Principia“.

Im britischen Bürgerkrieg wurde Cambridge 1642 von Cromwells Truppen erobert; eine höchst unruhige Zeit brach an, mit Entlassungen und Wiedereinstellungen durch royalistisch gesinnte Herrscher. Merkwürdigerweise waren die Studentenzahlen davon kaum betroffen [Feingold 1990].

Abb. 8.7.2 Legende vom fallenden Apfel, der Newton auf die Idee der allgemeinen Gravitation brachte (dieses Märchen stammt von Voltaire, der seinen Landsleuten Newtons Gravitationstheorie nahe bringen wollte); Veranschaulichung von Newtons Farbentheorie; (Auswahl aus einem vierteiligen Satz zum 300. Jahrestag des Erscheinens der „Principia“, Großbritannien 1987)

Abb. 8.7.3 Newtons Wohnung im Trinity College [Foto Wußing]

Abb. 8.7.4 Isaac Newton [Gemälde von G. Kneller 1702, National Portrait Gallery London], [Wikimedia Commons]

Erst in den 80er Jahren trat der Niedergang ein. Newton hatte entscheidende Anregungen durch die Lektüre der mathematischen Arbeiten seiner Landsleute J. Wallis (1616–1703), W. Brouncker (ca. 1610–1684), des Schotten J. Gregory (1738–1675) und des aus Norddeutschland stammenden Nicolaus Mercator (1620–1687). Sie gelangten u. a. zu Reihenentwicklungen für die Logarithmusfunktion

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u} = ln\, x \quad \text{und für} \quad \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = ln\, 2\ .$$

Nun endlich ließ sich Newton von seinen Freunden bewegen, seine eigenen bedeutenden Ergebnisse zur Reihenlehre niederzuschreiben. Die Abhandlung war im Sommer 1669 fertig gestellt und wurde unter dem Titel *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (Über die Rechenkunst mittels Gleichungen mit unendlichen vielen Gliedern) bei der Royal Society hinterlegt, galt damit als publiziert und stand allen zur Einsicht offen. Auch Leibniz hat sie während seines Londoner Aufenthaltes eingesehen (übrigens bezog sich der spätere Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz nicht auf die Reihenlehre). Die Arbeit wurde allerdings erst viel später, 1711, gedruckt.

Die Fluxionsrechnung lag bereits 1671 druckfertig vor, sie enthielt seine Infinitesimalrechnung zusammen mit einer verbesserten Darstellung der unendlichen Reihen. Dieses Buch trug den Titel *Methodus fluxionum et serierum*

infinitorum (Methode der fließenden Größen und der unendlichen Reihen). Wie bei anderen Werken von Newton auch erfolgte zunächst keine Drucklegung, zum Teil deshalb, weil der große Brand von London im Jahre 1666 die ganze Stadt und darunter alle Druckereien zerstört hatte. Erst 1736 erschien die Fluxionsrechnung in englischer Übersetzung im Druck, das heißt, nach Newtons Tode und zu einem Zeitpunkt, als ihr Inhalt schon überholt war.

Newton – der Physiker – ging bei seinen Überlegungen zur Infinitesimalmathematik von mechanisch-physikalischen Grundvorstellungen aus, die er später in den „Principia“ explizit dargelegt hat: Es gibt eine objektiv existierende, unabhängig von allen Geschehnissen verlaufende Zeit. Alle Körper bewegen sich in einem objektiv existierenden Raum, der unabhängig ist von allen darin befindlichen Körpern. Alle veränderlichen Größen sind physikalische Größen, die von der objektiv verlaufenden Zeit abhängen. Diese Größen, die von der Zeit abhängenden Variablen also, nennt Newton „Fluenten“. Die Geschwindigkeiten – wir würden sagen: ihre Ableitungen nach der Zeit – heißen „Fluxionen“ (oder Wachstumsgeschwindigkeiten). Und er erklärt und definiert in den Abhandlungen über die Quadratur der Kurven 1704 (im Anschluss an Cavalieri und Barrow):

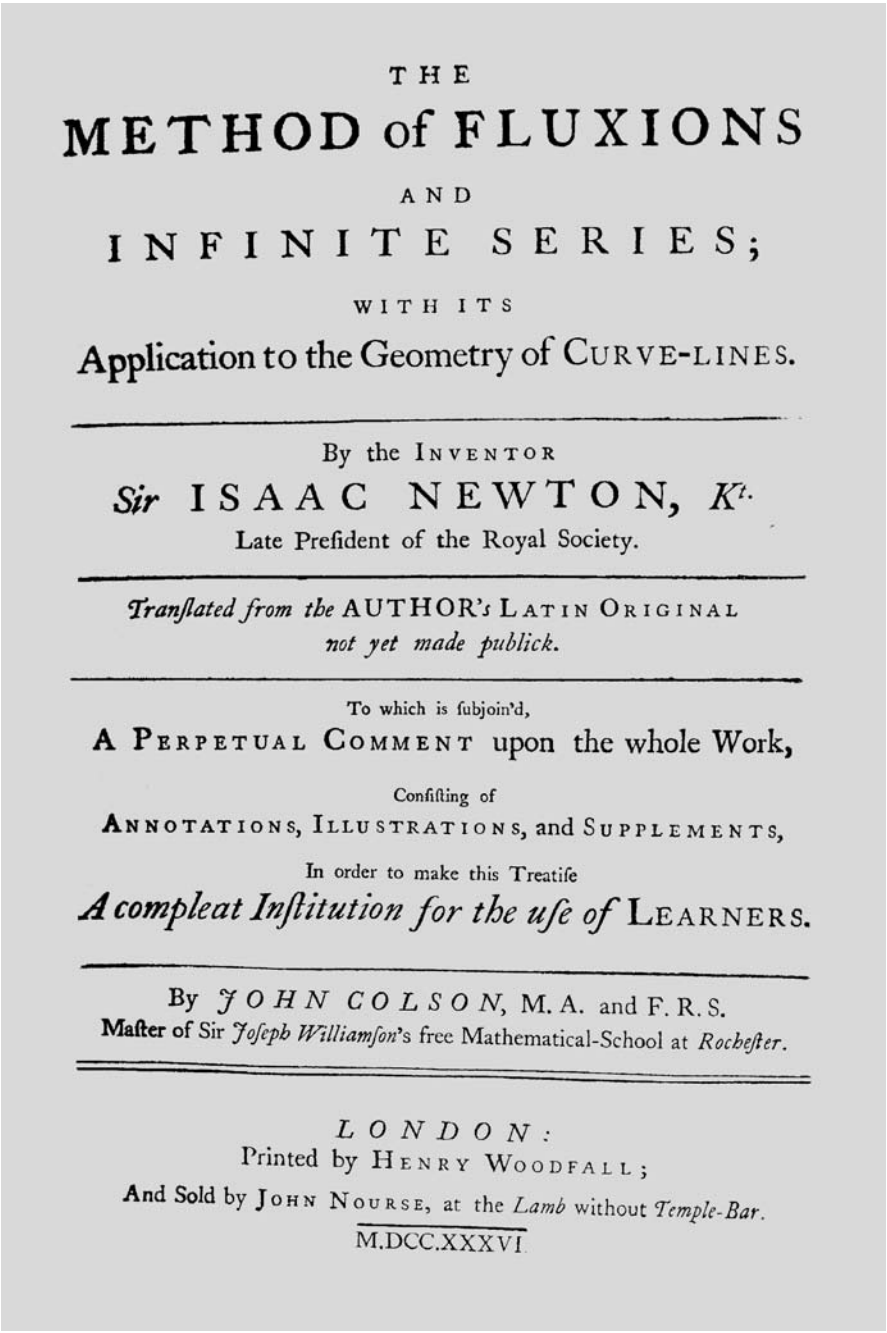
> *„Ich betrachte hier die mathematischen Größen nicht als aus äußerst kleinen Teilen bestehend, sondern als durch stetige Bewegung beschrieben.“* [Newton 1908, S. 3]
>
> „*Die unbestimmten Größen betrachte ich im folgenden als in stetiger Bewegung wachsend oder abnehmend, d. h. als fließend oder abfließend. Und ich bezeichne sie mit den Buchstaben z, y, x, v und ihre Fluxionen oder Wachstumsgeschwindigkeiten drücke ich durch dieselben Buchstaben mit Punkten versehen aus, also durch* $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$. *Von diesen Fluxionen gibt es wieder Fluxionen oder mehr oder weniger rasche Änderungen. Man kann sie die zweiten Fluxionen von z, y, x, v nennen und so bezeichnen:* $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$; ...“
> [Newton 1908, S. 7]

Die Fluxionspunkte treten frühestens 1693 auf.

Der dritte wichtige Begriff der Newtonschen Fluxionsrechnung ist das *„Moment einer Größe“*. Newton beschreibt es als einen *„gerade noch wahrnehmbaren Zuwachs einer Größe“* und bezeichnet es mit o. Demnach ist o das Moment der Zeit, xo das Moment der Fluente x und $\dot{x}o$ das Moment der Fluxion $\dot{x}$; dies letztere würde etwa dem heutigen Differential entsprechen.

Auf diesen Grundbegriffen beruhte Newtons Fluxionsrechnung, die durch ihn zu einem weitreichenden mathematischen Hilfsmittel und zugleich zu einer geschlossenen mathematischen Theorie ausgestaltet wurde. In *The Method of Fluxions und Infinite Series* behandelt Newton drei große Themenkreise:

1. Eine Beziehung zwischen Fluenten ist gegeben. Gesucht ist die Beziehung zwischen ihren Fluxionen. Das ist das Grundproblem der Differentiation.



THE

METHOD of FLUXIONS

AND

INFINITE SERIES;

WITH ITS

Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR

Sir ISAAC NEWTON, *Kt.*

Late Prefident of the Royal Society.

Tranſlated from the AUTHOR's LATIN ORIGINAL *not yet made publick.*

To which is ſubjoin'd,

A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,

Conſiſting of

ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,

In order to make this Treatiſe

A compleat Inſtitution for the uſe of LEARNERS.

By *JOHN COLSON*, M. A. and F. R. S.

Maſter of Sir *Joſeph Williamſon*'s free Mathematical-School at *Rocheſter*.

LONDON:

Printed by HENRY WOODFALL;

And Sold by JOHN NOURSE, at the *Lamb* without *Temple-Bar*.

M.DCC.XXXVI.

Abb. 8.7.5 Titelblatt des Buches *The Method of Fluxions and Infinite Series*, London 1736

2. Eine Gleichung ist vorgegeben, in der neben Fluenten auch Fluxionen von Größen auftreten. Gesucht sind die Beziehungen zwischen jenen Fluenten. Dies ist das Grundproblem der Integration. Doch schließt dies ausdrücklich mehr ein als die Bestimmung einer Stammfunktion, nämlich auch das der Integration von (gewöhnlichen) Differentialgleichungen.
3. Anwendungen der Fluxionsrechnung, u. a. auf die Bestimmung der Tangenten an Kurven, auf die Berechnung von Maxima und Minima und des Krümmungsmaßes von Kurven, auf die Quadratur und Rektifikation von Kurven.

Das Integrations-(Quadratur)Problem erscheint als Umkehrung der Differentiation (Fluxionenbildung). Da die Bildung der Fluxionen rechnerisch einfach zu vollziehen und auch auf Irrationalitäten, wie z. B. Wurzelfunktionen auszudehnen ist, stellt Newton in *Quadratura curvarum* eine Tabelle von Integrationsergebnissen auf, die er durch inverse Interpretation von Differentiationsergebnissen gewonnen hat.

Diese Grundauffassung – Integrationen gewonnen als Umkehrung des Differenzierens – hat sich noch lange gehalten. Erst im 19. Jahrhundert wurde die Integration, verbunden mit einem erweiterten Integralbegriff, als von der Differentiation unabhängige Operation studiert.

Die folgenden Beispiele stammen aus *„The Method of Fluxions ...“*. Es soll die Gleichung $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ differenziert werden; x und y repräsentieren Variable in Abhängigkeit von der Zeit. Bei Newton heißt es:

> *„Sei nun irgendeine Gleichung $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ gegeben und ersetze $x + \dot{x}o$ für x und $y + \dot{y}o$ für y, dann ergibt sich*
>
> $$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2oox + \dot{x}^3o^3 \\ \quad - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2oo \\ \quad + axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo \\ \quad - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2ooy - \dot{y}^3o^3 \end{array}\right\} = 0$$
>
> *Nun ist nach Voraussetzung $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, welche demnach gestrichen werden. Die verbleibenden Terme werden durch o dividiert, es bleiben*
>
> $$3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3oo - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3oo = 0\ .$$
>
> *Aber da vorausgesetzt war, dass o unendlich klein ist und dass es die Momente der Größen repräsentieren kann, werden die Terme, die damit multipliziert sind, nichts sein in Anbetracht des Restes. Deswegen verschmähe ich sie und es bleibt*
>
> $$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0\ .“$$

[Newton 1736, S. 24f engl.], [Newton 1969, S. 75]

Im folgenden Beispiel wird eine Gleichung integriert, die sowohl Fluenten als auch Fluxionen enthält. Für $\dot{y}\dot{y} = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}yy$ gibt Newton als Lösung die Reihenentwicklung

$$y = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 - + \cdots .$$

Bei alledem war sich Newton der Schwierigkeiten bezüglich der logischen Grundlagen seiner Infinitesimalrechnung bewusst. Er wollte sich von der antiken Methode der Bestimmung von Grenzwerten mittels indirekter Beweise ebenso lösen wie von der schwer durchschaubaren Methode der Indivisibeln. Er bemühte sich um eine korrekte Grundlage für Grenzübergänge mit der Methode der „ersten und letzten Verhältnisse". Im Abschnitt I des Buches I der *„Principia"* schreibt er:

> „*Grössen, wie auch Verhältnisse von Grössen, welche in einer gegebenen Zeit sich beständig der Gleichheit nähern und einander vor dem Ende jener Zeit näher kommen können als jede gegebene Grösse, werden endlich einander gleich.*
> *Wollte man dies bestreiten, so sei ihr letzter Unterschied = D. Sie könnten sich daher der Gleichheit nicht weiter nähern, als bis auf den gegebenen Unterschied, was gegen die Voraussetzung ist.*"
> [Newton 1872, S. 46]
>
> „*Ich habe ...* (dies, Wg) *vorausgeschickt, um künftig der weitläufigen Beweisführung mittelst des Widerspruchs, nach der Weise der alten Geometer, überhoben zu sein. Die Beweise werden nämlich kürzer durch die Methode der untheilbaren Grössen* (der Indivisibeln, Wg). *Da aber die Methode der Untheilbaren etwas anstössig (durior) ist und daher für weniger geometrisch gehalten wird, so zog ich es vor, die Beweise der folgenden Sätze auf die letzten Summen und Verhältnisse verschwindender und auf die ersten werdender Grössen zu begründen, (...)*
> *Jene letzten Verhältnisse, mit denen die Grössen verschwinden, sind in der Wirklichkeit nicht die Verhältnisse der letzten Grössen, sondern die Grenzen, denen die Verhältnisse fortwährend abnehmender Grössen sich beständig nähern, und denen sie näher kommen, als jeder angebbare Unterschied beträgt, welche sie jedoch niemals überschreiten und nicht früher erreichen können, als bis die Grössen ins Unendliche verkleinert sind.*
> [Newton 1872, S. 53f.]
>
> *„Es besteht der Einwand, daß es kein letztes Verhältnis verschwindender Größen gebe, weil, bevor sie verschwunden seien, das Verhältnis kein letztes sei, wenn sie aber verschwunden seien, kein Verhältnis statthabe. Aber mit demselben Argument kann man behaupten, es gebe keine letzte Geschwindigkeit eines Körpers, der an einem bestimmten Orte ankommt, wo die Bewegung endet...*"
> (Zitiert nach [Becker/Hofmann 1951, S. 151])

Abb. 8.7.6 George Berkeley, Bischof von Cloyne (1685–1753). Er war mit dem Dichter Jonathan Swift (1667–1745), dem Verfasser von *„Gullivers Reisen“,* befreundet; Spinoza (Irland 1985, Israel 2002)

Diese Äußerungen sind aufschlussreich. Einerseits zeigen sie das wahre Bewusstsein Newtons für das Grenzwertproblem mit einem Versuch, eine Lösung anzubieten, andererseits ist er sich im Klaren über logische Schwierigkeiten.

Die befürchteten Einwände wurden alsbald vorgebracht, unter anderem von Jonathan Swift (1667–1745), dem Verfasser von *Gullivers Reisen* und besonders massiv von dem irischen Bischof George Berkeley (1685–1753). Er benutzte die bestehenden Grundlagenschwierigkeiten der Mathematik, um die von der Mathematik und den Naturwissenschaften ausgehende Unterstützung der Frühaufklärung zurückzudrängen. (Übrigens war Newton irritiert und entrüstet, dass aus seinen „Principia“ atheistische Folgerungen gezogen wurden.) In der Schrift *„The Analyst. . . “* (Der Analytiker oder eine Erörterung, gerichtet an einen ungläubigen Mathematiker) von 1734, die sich vermutlich gegen den areligiös eingestellten Astronomen Edmond Halley (1656–1742) richtete, machte Berkeley geltend, dass Religion und Glaubenssätze jedenfalls einen höheren Grad an Gewissheit hätten als die immer wieder als Muster einer zuverlässigen Wissenschaft benannte Mathematik; diese besäße genug dunkle Punkte und sogar mystische Punkte. So heißt es bei Berkeley:

> *„Es ist allerdings zuzugeben, daß er* (gemeint ist Newton, Wg) *Fluxionen wie ein Baugerüst verwendete, nämlich als Dinge, die beiseitezulegen oder zu eliminieren sind, sobald man endliche, zu ihnen proportionale Linien gefunden hat. Dann werden diese endlichen Repräsentanten aber mit Hilfe von Fluxionen gefunden! Was man auch immer mit diesen Repräsentanten und Proportionen erhält, muß den Fluxionen zugeschrieben werden, die deswegen vorher verstanden werden müssen. Und was sind diese Fluxionen? Die Geschwindigkeiten*

verschwindender Inkremente? Und was sind eben diese verschwindenden Inkremente? Sie sind weder endliche Größen noch unendlich kleine und doch auch nicht nichts. Dürfen wir sie nicht die Geister verstorbener Größen nennen?“
[Berkeley 1969, S. 121]

Bei aller Schärfe der Angriffe gegen die Infinitesimalmathematik, die sich von verschiedenen Autoren auch gegen den Calculus von Leibniz richtete, darf man doch feststellen, dass die Diskussion um die Grundlagen der Infinitesimalmathematik scharfsinnig und zugleich problemfördernd geführt wurde. Doch erst ab Beginn des 19. Jahrhunderts wurden die Grundlagen der Analysis gelegt, mit scharfen Definitionen für Grenzwert, Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit usw.

Leibniz und der Calculus

Leibniz nimmt nicht nur in einer Geschichte der Mathematik einen Ehrenplatz ein, sondern auch in einer Geschichte der Philosophie und in einer Geschichte der Geschichtswissenschaften. Leibniz lieferte wesentliche Beiträge zur theoretischen und praktischen Mechanik, zur Biologie, zur theoretischen Logik, zur Konstruktion von Rechenmaschinen. Er kümmerte sich um Bergwerke, Seidenraupenzucht und vielerlei produktionswirksame technische Verbesserungen. Leibniz war ein hervorragender Jurist und als Diplomat in wichtigen politischen Missionen tätig. Er bemühte sich um den Ausgleich zwischen der katholischen und der reformierten Kirche in Deutschland. Auf seine Initiative ging die Gründung einer Akademie in Berlin zurück. Als einer der ersten lenkte Leibniz das kulturhistorische Interesse Europas auf den Fernen Osten, insbesondere auf China.

Leibniz war von einer fast unglaublichen geistigen Beweglichkeit und raschen Auffassungsgabe, von einem nie erlahmenden Arbeitseifer und schier unerschöpflichem Ideenreichtum. *„Die Ruhe ist eine Stufe zur Dummheit. Man muß stets etwas finden, was es zu tun, zu denken, zu entwerfen gilt, wofür man sich interessiert, sei es für die Öffentlichkeit oder den einzelnen.“* (Zitiert nach [Finster/Heuvel 1990, S. 53]). Er hat viel veröffentlicht. Noch mehr aber wurde erst nach seinem Tode herausgegeben. Bis heute ist viel Bedeutendes noch nicht erschlossen, das sich im Nachlass befindet. Dazu kommt ein ausgedehnter Briefwechsel.

Gottfried Wilhelm Leibniz wurde (nach dem damals noch gültigen Julianischen Kalender) am 21. Juni 1646 (nach Gregorianischem Kalender am 1. Juli 1646) in Leipzig geboren. Sein Vater war Professor der Moralphilosophie an der Leipziger Universität. Leibniz bildete sich weitgehend selbstständig in der hervorragenden väterlichen Bibliothek, studierte in Leipzig und Jena und ging – angeblich wegen seiner Jugend in Leipzig an der Promotion gehindert – nach Altdorf, wo er 1666 promovierte. Er schlug eine akademische Karriere aus. Im diplomatischen Dienst gelangte er 1672 nach Paris mit dem freilich

Abb. 8.7.7 Porträt von Leibniz [Historisches Museum Hannover]

vergeblichen Versuch, den französischen Expansionsdrang von Deutschland weg nach Ägypten zu lenken.

In Paris wurde Leibniz mit der modernen Naturwissenschaft und Mathematik bekannt. Weder in Paris noch in London vermochte er eine angemessene Stellung zu finden, obwohl er Mitglied beider Akademien wurde. So trat er in hannoversche Dienste und besuchte auf der Reise nach Hannover den bedeutenden jüdischen Philosophen Baruch Spinoza (1632–1677). In Hannover fiel er nach produktiven Jahren bei seinem an Wissenschaft uninteressierten neuen Herrscher am Hofe in Ungnade und starb krank und verbittert am 14. November 1716 in Hannover. Es wird berichtet, dass kein Mitglied des Hofes seinem Sarg folgte. Ein Zeitgenosse drückte es so aus, Leibniz sei wie ein Straßenräuber begraben worden. (Über Krankheit, Tod und Grablegung berichtet im Detail [Sonar 2007]).

Nach vierzig Jahren erfolgreichen Wirkens in Hannover fand Leibniz seine letzte Ruhestätte in der Kirche St. Johannis in der Calenberger Neustadt. Ihm zu Ehren trägt die Universität Hannover seit dem 1. Juli 2006 den Namen Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover.

Abb. 8.7.8 Ruhestätte von Leibniz in der Kirche St. Johannis, Hannover [Foto Gottwald]

In Paris, anfangs unterstützt durch Huygens, eignete sich Leibniz in einem Sturmlauf ohnegleichen die neueste Mathematik an, studierte Pascal (stieß dort auf das „charakteristische Dreieck"), Gregorius a Sancto Vincentio, Descartes und andere, drang in die Gedankenwelt der Indivisibeln ein und lernte die Ergebnisse der britischen Mathematiker Wallis und Gregory kennen.

Cavalieri hatte das „Fließen" von Größen untersucht, die in ihrer Gesamtheit Flächen bzw. Körper bilden. Newton übernahm die Vorstellung des „Fließens", Leibniz dagegen die der „Gesamtheit". Am 29. Oktober 1675 hat Leibniz in einer Notiz zur Selbstverständigung seine Ideen aufgeschrieben. Es ist dies sozusagen die Geburtsurkunde der Leibnizschen Infinitesimalrechnung, des Calculus (seines schlechten Gedächtnisses wegen hatte Leibniz die Gewohnheit, alle Gedankenblitze und Ideen schriftlich festzuhalten. So sind wir über vieles authentisch informiert). Der Altmeister der Historiographie der Mathematik in Deutschland, Moritz Cantor (1829–1920), hat die entscheidenden Notizen von Leibniz vom 26. und 29. Oktober und vom 11. November 1675 festgehalten und interpretiert, gestützt auch auf [Gerhardt 1855, S. 59 bzw. 125f.]. Bei Cantor heißt es:

„Am 26. October treten die Cavalierischen Gesammtheiten auf. Omnia w, omn xw und dergleichen Ausdrücke kehren fort und fort wieder. Am 29. October 1675 erfolgt der grosse Schritt der Erfindung des neuen Algorithmus. Utile erit scribi $\int$ *pro omn. ut* $\int l$ *pro omn.* l *id est summa ipsorum* l*, es wird nützlich sein* $\int$ *statt omnia zu schreiben, um die Summe einer Gesammtheit zu bezeichnen. Hier zeige sich, heisst es in der an demselben Tage geschriebenen Fortsetzung weiter, eine neue Gattung des Calculs; sei dagegen* $\int l = ya$ *gegeben, so biete sich ein entgegengesetzter Calcul mit der Bezeichnung* $l = ya/d$*, nempe ut* $\int$ *augebit, ita d minuet dimensiones.* $\int$ *autem significat summam, d differentiam, das heisst auf deutsch: Wie nämlich* $\int$ *die Abmessungen vermehrt, so vermindert sie d.* $\int$ *aber bedeutet Summe, d Differenz.*

Wie allmälig die Sprache sich vervollkommnete, zeigt ein handschriftlich erhaltener in unserem Jahrhunderte zum Druck beförderter Aufsatz vom 11. November 1675 über inverse Tangentenaufgaben, ‚Methodi tangentium inversae exempla'. Am Anfange ist das $\int$ *und das als Nenner eines Bruches auftretende d ganz so wie in den früheren Aufsätzen benutzt. Auf einmal erscheint mitten im Texte dx, und eine Randnote Leibnizens sagt, dx sei das gleiche wie* x/d*, nämlich die Differenz zweier nächstliegender x-Werte, und noch etwas später kommt auch dy vor und* $\int y dy = y^2/2$*, also genau so geschrieben, wie es später geblieben ist, während im Aufsatze selbst Zeichen wie* $\int x$*,* $\int \sqrt{x^2 + y^2}$ *usw. auch nachher neben* $\int dx$*,* $\int dy$ *usw. auftreten.“* [Cantor 1900, S. 166f.]

Leibniz hat sich lange mit der Absicht getragen, eine zusammenhängende Darstellung der Infinitesimalmathematik zu schreiben, eine „scientia infiniti“. Doch ließen dies die Lebensumstände nach 1676 nicht zu. Ihm blieb nur der Weg der Publikation von – freilich äußerst bedeutsamen – Einzelergebnissen.

Es steht fest – wie sich im Nachlass fand – dass Leibniz bereits seit 1672, gegen das Ende des Pariser Aufenthaltes, also weit vor der Publikation der „*Nova methodus*“, im Besitz weitreichender Erkenntnisse zum künftigen „Calculus“ gewesen ist. Damals wurden mehrere Abhandlungen nicht publiziert, u. a. ein *Calculus Tangentium differentialis* (1676), die *Methodi tangentium inversae exempla* (1675), eine *Méthode nouvelle des Tangentes* (Ende Juli 1677) und die *Elementa calculi novi* (undatiert) [Heß, 1984].

Leibniz entschied sich, einzelne Arbeiten zu publizieren, möglicherweise wohl auch dadurch motiviert, dass sein Landsmann Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651–1703) mit einer Reihe von Arbeiten im Zusammenhang mit dem Tangentenproblem hervorgetreten war.

So begann Leibniz 1682 mit der Publikation, und zwar in den Leipziger *Acta Eruditorum*. Zunächst erschien eine Abhandlung über die unendliche Reihe für $\pi/4$ nebst dem Konvergenz-Kriterium für alternierende Reihen. Im Oktober 1684 publizierte er die wegweisende Abhandlung *„Nova methodus . . . “* (Neue Methode der Maxima, Minima sowie der Tangenten, die sich weder an gebrochenen, noch an irrationalen Größen stößt, und eine eigentümliche darauf bezügliche Rechenart). Sie enthält eine Art Definition des Differentials, ohne Beweis (gefunden durch die ars inveniendi) die Differentiationsregeln für Summe, Produkt, Quotient und Potenz, die Kettenregel, ferner die Bedingungen $\mathrm{d}v = 0$ für die Extremwerte und $\mathrm{dd}v = 0$ für die Wendepunkte. Zum ersten Mal tritt das Wort „Differentialgleichung“ auf. Zwei Jahre später benutzte Leibniz das Integralzeichen zum ersten Mal im Druck. Es folgten Arbeiten, in denen die Tragweite des neuen Kalküls an Beispielen – (Fermatsches Prinzip), elastischer Widerstand eines Balkens, Isochrone, Maß der Kraft, Kettenlinie u. a. m. – demonstriert wurde. Das Zeitalter der Infinitesimalmathematik hatte begonnen. In Anbetracht der Bedeutung der *„Nova Methodus . . . “* für die Geschichte der Infinitesimalrechnung bzw. des „Calcu-

lus“ fand 1984 zum 300-jährigen Jubiläum des Erscheinens ein internationales Symposium statt [Studia Leibnitiana, 1984]. Dort wurden viele Aspekte seines schrittmachenden Werkes analysiert, darunter auch die Ungenauigkeiten und Fehler dieser Abhandlung [Heß, 1984]. An der Gesamteinschätzung „schrittmachend“ hat sich natürlich nichts geändert.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass Leibniz hier nun auch öffentlich den gegenseitigen Zusammenhang Quadratur-Tangente ausspricht, einen Zusammenhang, den wir heute als Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung bezeichnen. *„Ich will nun zeigen, daß das allgemeine Problem der Quadraturen sich auf die Auffindung einer Linie reduziert, die ein gegebenes Neigungsgesetz hat.“* [Leibniz, 1920, S. 30]
In *„Nova methodus“* erläutert Leibniz die Tragweite seines Kalküls:

> *„Kennt man, wenn ich so sagen soll, den obigen Algorithmus dieses Kalküls, den ich Differentialrechnung nenne, so lassen sich alle andern Differentialgleichungen durch ein gemeinsames Rechnungsverfahren finden, es lassen sich die Maxima und Minima sowie die Tangenten erhalten, ohne daß es dabei nötig ist, Brüche oder Irrationalitäten oder andere Verwicklungen zu beseitigen, was nach den bisher bekannt gegebenen Methoden doch geschehen mußte. Der Beweis alles dessen wird für einen in diesen Dingen Erfahrenen leicht sein, wenn er nur den bisher nicht genug erwogenen Umstand beachtet, daß man dx, dy, dv, dw, dz als proportional zu den augenblicklichen Differenzen, d.h. Inkrementen oder Dekrementen, der x, y, v, w, z (eines jeden in seiner Reihe) betrachten kann. So kommt es, daß man zu jeder vorgelegten Gleichung ihre Differentialgleichung aufschreiben kann (. . .). Es ist auch klar, daß unsere Methode die transzendenten Linien beherrscht, die sich nicht auf die algebraische Rechnung zurückführen lassen oder von keinem bestimmten Grade sind, und zwar gilt das allgemein, ohne besondere, nicht immer zutreffende Voraussetzungen. Man muß nur ein für allemal festhalten, daß eine Tangente zu finden so viel ist wie eine Gerade zeichnen, die zwei Kurvenpunkte mit unendlich kleiner Entfernung verbindet . . . “*

Und ein wenig später:

> *„In allen diesen Fällen und in viel verwickelteren ist unsere Methode von derselben überraschenden und geradezu beispiellosen Leichtigkeit.Dies sind nur die Anfänge einer viel höheren Geometrie, die sich auch zu den schwierigsten und schönsten Problemen der angewandten Mathematik hinerstreckt, und nicht leicht wird jemand diese Dinge ohne unsere Differentialrechnung oder eine ähnliche mit gleicher Leichtigkeit behandeln.“* [Leibniz 1920, S. 6ff.]

Seit seiner Studienzeit hatte Leibniz die Idee einer allgemeinen Begriffsschrift vorgeschwebt, er nannte sie „charakteristica universalis“ oder auch „ars inve-

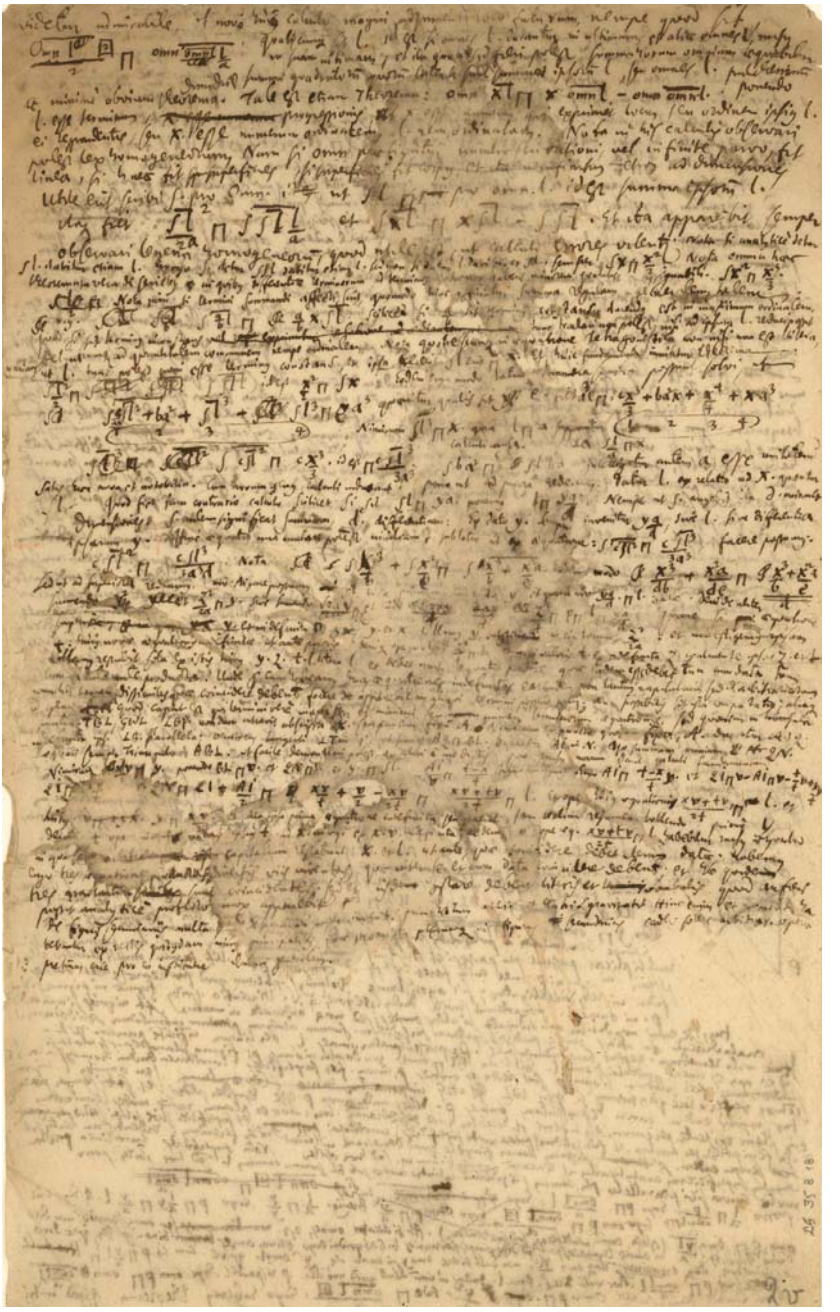


Abb. 8.7.9 Reproduktion der Originalhandschrift Leibniz vom 29. Oktober 1675, mit der Einführung des Integral- und Differentialzeichens. Man liest ungefähr in der Mitte: $\int$ .autem significat summarum, d. differentiam [Niedersächsische Landesbibliothek Hannover, Signatur LH XXXV, VIII, 18, Bl. 2^v]

Abb. 8.7.10 Ramón Llull (Raimundus Lullus) [Foto Kästner]

niendi“ (Kunst des Erfindens). Hier knüpfte Leibniz an Ideen des mittelalterlichen spanischen Gelehrten Raimundus Lullus (ca. 1232–1316) an. Mit ihrer Hilfe sollte es möglich sein, durch eine Art Rechnung aus allen denkmöglichen Aussagen die richtigen herauszufinden. Gewiss war dies eine Utopie, aber es war eine großartige Idee, die auf die spätere mathematische Logik hindeutet. Im Rahmen dieser Denkweise hat Leibniz großen Wert auf zweckmäßige Bezeichnungen gelegt:

„Bei den Bezeichnungen ist darauf zu achten, daß sie für das Erfinden bequem sind. Dies ist am meisten der Fall, so oft sie die innerste Natur der Sache mit Wenigem ausdrücken und gleichsam abbilden. So wird nämlich auf wunderbare Weise die Denkarbeit vermindert.“ [Leibniz 1920, S. 74] (Diese Äußerung stammt schon aus dem Jahre 1675.)

Getreu diesem Vorsatz hat Leibniz nach Vieta und Descartes und zeitlich vor Euler Entscheidendes zur Herausbildung der mathematischen Symbolik beigetragen. Das Integralzeichen $\int$ ist aus dem großen S von „summatio“ hervorgegangen; 1686 trat das Integralzeichen zum ersten Mal im Druck auf. Ursprünglich sprach Leibniz beim Integrieren von „calculus summatorius“ oder „methodus tangentium inversa“ (umgekehrte Tangentenmethode). Das Wort Integral wurde von Jacob Bernoulli 1690 geprägt und leitet sich ab von lat. integro, ich stelle unversehrt wieder her (den durch Differenzieren geänderten Zustand). Andererseits übernahmen die Bernoullis das Integralzeichen. Das Differentialzeichen d rührt von Differenz her. Auf Leibniz gehen ferner zurück die Erfindung der Indizes, die Überstreichung von Buchstaben, die Determinantenschreibweise, die Schreibweise $a{:}b = c{:}d$ mit Doppelpunkt und Gleichheitszeichen für eine Proportion, die Verwendung der Potenzschreibweise auch für variable Exponenten u. a. m. Durch Leibniz wurden weiterhin die Begriffe Ordinate, Abszisse, Differentialgleichung und Funktion fester Bestandteil der mathematischen Begriffssprache.

Der große Vorzug der Leibnizschen Infinitesimalrechnung besteht in ihrer kalkülmäßigen Handhabbarkeit; darauf beruhte schließlich ihr Sieg über die Newtonsche Fluxionsrechnung, zunächst wenigstens auf dem Kontinent.

Auch Leibniz war sich der Unbestimmtheiten und Widersprüchlichkeiten seines Differentialbegriffes und des Umganges mit den „unendlich kleinen Größen“ sehr wohl bewusst. Es gibt zahlreiche unterschiedliche, ja gelegent-

lich sich widersprechende Äußerungen von ihm zum Umgang mit dem Unendlichen. Die folgende Passage stammt aus dem Jahre 1702:

> „*Um daher diese subtilen Streitfragen zu vermeiden, begnügte ich mich, da ich meine Erwägungen allgemein verständlich machen wollte, das Unendliche durch das Unvergleichbare zu erklären, d.h. Größen anzunehmen, die unvergleichlicher größer oder kleiner als die unsrigen sind. Auf diese Weise nämlich erhält man beliebig viele Grade unvergleichlicher Größen, sofern ein unvergleichlich viel kleineres Element, wenn es sich um die Feststellung eines unvergleichlich viel größeren handelt, bei der Rechnung außer acht bleiben kann. So ist etwa ein Teilchen der magnetischen Materie, die das Glas durchdringt, einem Sandkorn, dieses wiederum der Erdkugel, die Erdkugel schließlich dem Firmament nicht vergleichbar (...).*
> *Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, daß die unvergleichlich kleinen Größen, selbst in ihrem populären Sinn genommen, keineswegs konstant und bestimmt sind, daß sie vielmehr, da man sie so klein annehmen kann, als man nur will, in geometrischen* (d. h. mathematischen, Wg) *Erwägungen dieselbe Rolle wie die Unendlichkleinen im strengen Sinne spielen. Will nämlich ein Gegner unseren Sätzen die Richtigkeit absprechen, so zeigt unser Kalkül, daß der Irrtum geringer ist, als irgendeine angebbare Größe, da es in unserer Macht steht, das Unvergleichbarkleine – das man ja immer so klein, als man nur will, annehmen kann – zu diesem Zweck hinlänglich zu verringern (...) und zweifellos liegt darin der strenge Beweis unserer Infinitesimalrechnung.*“
> (Zitiert nach [Becker 1954, S. 165/166])

Der Prioritätsstreit

Das Leben der alternden Gelehrten Newton und Leibniz wurde erheblich belastet durch den Prioritätsstreit um die Erfindung der Infinitesimalrechnung. Es handelt sich um einen sehr verwickelten historischen Vorgang; nur wenige Einzelheiten können hier dargestellt werden (vgl. ausführlich [Westfall 1996]).

Nach einigem Hin und Her mit gegenseitigen Vorwürfen und Unterstellungen setzte die Royal Society 1712 eine Untersuchungskommission ein, die sich freilich parteiisch verhielt, ohne Rücksprache mit Leibniz. Newton wirkte aktiv mit, aber im Hintergrund. Heute steht fest, dass beide Erfinder unabhängig voneinander zu ihren Ergebnissen gekommen sind. Die Londoner Kommission, so wurde fixiert, stellte Newton als Erstentdecker heraus und fällte ein vernichtendes Urteil. Es heißt dort

> „*... daß die Differentialmethode ein und dasselbe ist wie die Fluxionsmethode, abgesehen vom Namen und der Art der Bezeichnung. (...) Und deshalb betrachten wir es als das eigentliche Problem, nicht*

> *wer diese oder jene Methode erfunden hat, sondern wer die Methode als erster entdeckt hat. Und wir glauben, daß alle, die Leibniz für den Ersterfinder gehalten haben, wenig oder nichts von seiner lang zurückliegenden Korrespondenz mit Mr. Collins und Mr. Oldenburg wußten. Noch wußten sie, daß Mr. Newton seit 15 Jahren im Besitz der Methode war, als Leibniz sie in den Leipziger Acta Eruditorum zu veröffentlichen begann.*
> *Deshalb sehen wir Mr. Newton als Ersterfinder an und glauben, daß Mr. Keill* (Vorsitzender der Kommission, Wg)*, als er eben dies sagte, Mr. Leibniz keineswegs beleidigt hat.*“
> (Zitiert nach [Westfall 1996, S. 355])

Der Vorwurf des Plagiats stützte sich auch und wesentlich auf die Tatsache, dass Leibniz während seines Aufenthaltes in London 1676 Zugang zu Manuskripten von Newton gehabt hatte, die dieser bei der Royal Society hinterlegt hatte. Dabei war anfangs das Verhältnis Newton-Leibniz nicht gerade freundschaftlich, aber doch korrekt gewesen, sogar einigermaßen liebenswürdig im Ton. Immerhin wurden einige Briefe gewechselt. Ein erster Brief von Newton vom Frühsommer 1676 gelangte erst im August in die Hände von Leibniz. Dieser hob in seiner Antwort die Verdienste von Newton um die Reihenlehre (um die es im Prioritätsstreit nie ging), um das Spiegelteleskop und die Farbenlehre hervor und teilte ihm eigene mathematische Ergebnisse mit. Der zweite Brief von Newton an Leibniz vom 27. Oktober 1676 ließ klar erkennen, dass Newton nicht an der Fortsetzung der Korrespondenz interessiert war und, anders als Leibniz, sich bemühte, seine Methoden geheim zu halten. In diesem Brief ist auch eines der berühmten Anagramme enthalten, in dem Newton, aber eben verschlüsselt, Leibniz über die Fluxionsrechnung informiert. Das Anagramm lautet, indem es die im Satz vorkommenden Buchstaben aufzählt:

6a 2c d ae 13e 2f 7i 3l 9n 4o 4q 2r 4s 9t 12v x .

Die Lösung lautet: *Data Aequatione quotcumque, fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, et vice versa* (Bei gegebener Gleichung zwischen beliebig vielen fließenden Größen deren Fluxionen zu finden und umgekehrt); (Zählung und Text nach [More 1962, S. 190]).

Für Leibniz war dieses Buchstabenrätsel natürlich unverständlich. Man hat gelegentlich gesagt, dass es eines viel höheren Scharfsinnes bedurft hätte, aus diesem Anagramm Newton das Geheimnis seiner mathematischen Methode zu entreißen, als selbstständig die Differential- und Integralrechnung zu erfinden. Mit seiner Publikation von 1684 zum Calculus beging Leibniz eine unverzeihliche Unterlassung, indem er nicht auf Newton und dessen Studien zur Infinitesimalmathematik verwies, die ihm, wenigstens in Teilen, wohl bekannt waren. Die Verstimmung in London und Cambridge war verständlich. Die Situation wurde von dritter und vierter Seite noch angeheizt.

Dessen ungeachtet ging Newton in der ersten und in der zweiten Auflage der „Principia“ auf Leibniz ein, wenn auch mit dem Anspruch auf seine,

Newtons, starke Position bei der Feststellung seiner originalen Urheberschaft. Dort heißt es:

> „*In Briefen, die ich vor etwa 10 Jahren* (also 1676, Wg) *mit dem sehr gelehrten Mathematiker G.W. Leibniz wechselte, zeigte ich demselben an, daß ich mich im Besitze einer Methode befände, nach der man Maxima und Minima bestimmen, Tangenten ziehen und ähnliche Aufgaben lösen könne, und zwar lasse sie sich ebensogut auf irrationale wie auf rationale Größen anwenden. Indem ich die Buchstaben der Worte, die meine Meinung aussprachen, versetzte, verbarg ich dieselbe. Der berühmte Mann antwortete mir darauf, er sei auf eine Methode derselben Art verfallen, die er mir mitteilte, und die von der meinigen kaum weiter abwich als in der Form der Worte und Zeichen.*“
> (Zitiert nach Kowalewski in [Newton 1908, S. 54].)

Doch dieser Hinweis auf Leibniz fehlt in der dritten Auflage der „Principia“; Leibniz war inzwischen verstorben.

Chronologie zum Prioritätsstreit
(nach Hall, A. R. *„Philosophers at War“*)

1661	Newton bezieht die Universität Cambridge, Leibniz beginnt das Studium in Leipzig.
1664–66	Newtons anni mirabiles in seiner Heimat
1666	Leibniz schreibt über Kombinatorik. Newton (Oktober) verfasst seine zweite Abhandlung über Fluxionen.
1669	Newton übergibt Manuskript über Reihenlehre an Barrow und Collins.
1670	Leibniz beginnt Korrespondenz mit der Royal Society.
1671	Newton schreibt seine Abhandlung über Reihen und Fluxionen nieder. Sein Teleskop wird nach London gesandt.
1672	Leibniz geht von Mainz nach Paris. Bekanntschaft mit Huygens. Newton publiziert seine optischen Briefe.
1673	Erster Besuch (Januar bis März) von Leibniz in London. Nach Rückkehr nach Paris schnelle Entfaltung seiner mathematischen Fähigkeiten
1675	Oktober. Leibniz' erste Ideen zum Differentialkalkül
1676	Juni. Newton schreibt den Ersten Brief an Leibniz; im Oktober folgt der Zweite Brief. Auf dem Weg nach Hannover kurzer Aufenthalt von Leibniz in London.
1677	Juni. Leibniz empfängt den Zweiten Brief von Newton und teilt ihm als Antwort im Umriss seine Differentialmethode mit.
1682	Leibniz publiziert zur Quadratur des Kreises.
1684	Leibniz publiziert einen Überblick über seinen Differentialkalkül.
1687	Newton beschreibt in seinen „Principia“ die Rechnung mit Hilfe von „Momenten“ und erwähnt seinen Zweiten Brief und Leibniz' Antwort darauf.
1691	Newton schreibt über die Quadratur der Kurven.

1695–99	In Wallis' Werken werden Newtons Briefe in erweiterter Form zur Infinitesimalmathematik publiziert.
1697	Johann Bernoulli fordert die Gelehrten mit dem Brachystochronenproblem heraus; dieses wird anonym von Newton gelöst.
1699	Fatio de Duillier (1656–1720) behauptet die Priorität und Überlegenheit der Fluxionsrechnung.
1704	Newton publiziert, zusammen mit den *Opticks,* die Quadratur der Kurven und die Klassifikation der Kurven dritter Ordnung.
1705	Leibniz rezensiert die *Opticks* und die mathematischen Essais.
1710	In den *Théodicée* greift Leibniz die Gravitationstheorie von Newton an. John Keill beschuldigt Leibniz des Plagiates.
1711	Leibniz fordert vergeblich Entschuldigung von der Royal Society.
1713	Zweite Auflage der „*Principia*“ (Sommer). Leibniz pflichtet der Meinung von Johann Bernoulli bei, dass Newton den Kalkül von Leibniz plagiiert hat. Johann Bernoulli publiziert mathematische Kritik an den Principia. Keill nimmt die systematische Verteidigung von Newton in Angriff.
1715	Der erste kritische Brief von Leibniz zur Newtonschen Philosophie ist gerichtet an Samuel Clarke (1675–1729).
1716	(14. November) Tod von Leibniz. Der Disput zwischen Bernoulli, Keill und anderen hält an.
1722	Publikation harter Kritik an Leibniz
1727	(20. März) Tod von Newton

Geben wir abschließend zum Thema Prioritätsstreit ein zusammenfassendes Urteil wieder, das R. Westfall, ein hervorragender Biograph Newtons, so gefällt hat.

> *„In meiner Darstellung der Kontroverse geht es nicht um die Prioritätsfrage. Für mich persönlich liegt der Fall seit der Untersuchung der von den beiden Kontrahenten hinterlassenen Briefe klar. Newton erfand seine Fluxionsmethode in den Jahren 1665 und 1666. Etwa zehn Jahre später erfand Leibniz nach eigener, unabhängiger Forschungsarbeit seinen Differentialkalkül. Newton behauptete stets, in den für ihn typischen immer wieder neuen Formulierungen, daß Zweiterfinder keine Rechte hätten. Er hätte kein absurderes Argument vorbringen können. Der Ersterfinder hielt seine Entdeckung unter Verschluß und gab anderen gegenüber so gut wie nichts preis. Der Zweiterfinder veröffentlichte seinen Kalkül und erschloß der westlichen Mathematik dadurch eine neue Dimension. Das wurde auch Newton schließlich klar, und mindestens die Hälfte seiner Wut traf Leibniz stellvertretend für Newtons früheres Ich, das einen solchen Schatz im Boden vergraben hatte.“*
> [Westfall 1996, S. 348f.]

Inhalte und Ergebnisse der Mathematik während der wissenschaftlichen Revolution

1596	Keplers *Mysterium Cosmographicum*
1609	Publikation der *Astronomia Nova* durch Kepler
1615	Kepler veröffentlicht *Nova Stereometria Doliorum Vinariorum*
1619	Veröffentlichung der *Harmonice mundi* durch Kepler, Descartes entdeckt den „Eulerschen“ Polyedersatz
1628/29	Fermat entwickelt eine Methode zu Bestimmung von Maxima und Minima
1637	*Discours de la méthode* von Descartes erscheint
1638	Die *Discorsi* von Galilei erscheinen
1640	Pascals erstes Werk *Essay pour les coniques* erscheint
1642	Pascal beginnt mit der Konstruktion von Rechenmaschinen
1657	Huygens publiziert zum Glücksspiel, von Pascal erscheinen die *Elemente der Geometrie*
1664	Newton berechnet Kurvenlängen, Tangenten und Kreissektoren mit unendlichen Reihen
1672	Leibniz beginnt in Paris mit der Konstruktion von Rechenmaschinen
1673/83	Newton schreibt die *Arithmetica universalis* (erst 1707 erschienen)
1675	Grundlegende Erkenntnisse von Leibniz zur Infinitesimalrechnung
1682	Newton findet das allgemeine Gravitationsgesetz
1684	Leibniz publiziert *Nova methodus* – eine wesentliche Arbeit zur Differentialrechnung
1687	Newton publiziert *Philosophiae naturalis principia mathematica*
1704	Halley erkennt die Periodizität des Umlaufs des nach ihm benannten Kometen. Newton publiziert die *Opticks* mit dem Anhang *Quadratura Curvarum*
1711	Newton publiziert seine Abhandlung über unendliche Reihen
1712	Royal Society beschuldigt Leibniz offen des Plagiats
1713	*Ars conjectandi* von Jakob Bernoulli erscheint
1715	Taylor veröffentlicht zur Infinitesimalrechnung
1736	Publikation von Newtons *The Method of Fluxions and Infinite Series* als Übersetzung ins Englische

Literatur

Abkürzungen und Werke zur allgemeinen Information:

BM: British Museum. London

Chronologie: Chronologie der Naturwissenschaften (2002). Ed.: K.-H. Schlote. Frankfurt (M.)

Companion: Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences. Vol. 1/Vol. 2 (1994). Ed.: I. Grattan-Guinness. London/New York

Development in Mathematical Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education. (1973): Ed.: A. G. Howson. Cambridge

DSB: Dictionary of Scientific Biography. Vol. I bis XVI (1970–1980): Ed.: Ch. C. Gillispie. New York

Grosse Zivilisationen: (Aus dem Englischen), Köln 2004

Landmark: Landmark Writings in Western Mathematics 1640–1940. (2005). Ed.: I. Grattan-Guinness. Amsterdam

Lexikon bedeutender Mathematiker: Ed.: S. Gottwald/H.-J. Ilgauds/K.-H. Schlote. Thun-Frankfurt (M.) 1990

Lexikon der Antike: Ed.: J. Irmscher. 9. Aufl. Leipzig 1987

Lexikon früher Kulturen: Ed.: J. Herrmann. 2 Bände. Leipzig 1984

Perspectives on Mathematics Education: Ed.: B. Christiansen/A. G. Howson/M. Otte. Dortrecht/Boston/Lancaster/Tokyo 1986

VAT: Vorderasiatische Abteilung der Staatlichen Museen Berlin. Welt- und Kulturgeschichte Bd. 09: Zeitalter des Absolutismus. Mannheim 2006

Vedic Mathematics: Ed.: V. S. Agravala, revised edition. Delhi 1992

YBC: Yale Babylonian Collection. New Haven

Alten, H.-W. et al. 2003: 4000 Jahre Algebra. Berlin/Heidelberg/New York

Amphora 1992: Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag. Ed.: S. S. Demidov/M. Folkerts/D. E. Rowe/Chr. J. Scriba. Basel/Boston/Berlin

Anderhub, H. J. 1941: Joco-Seria. Aus den Papieren eines reisenden Kaufmannes. Wiesbaden

Andersen, K. 1985: Cavalieri's method of indivisibles. In: Archiv Hist. Exact Sci. 31(1985), S. 291–367

Andersen K. 1992a: Brook Taylor's Work on Linear Perspective. Heidelberg

Andersen, K. 1992b: Perspective and the Plan and Elevation Technique, in particular in the Work by Piero della Francesca. In: Amphora. Basel/Boston, S. 1–23

Andersen, K. 1992c: The History of Linear Perspective from 1453 to the End of the 18^{th} Century. In: Transact. of the XVth Congress of the Internt. Assoc. of Bibliophiles. Copenhagen

Apollonios von Perge 1926: Conica. Deutsch von A. Czwalina. München/Berlin

Archibald, R. A. 1918: The Cattle Problem. In: Am. Math. Monthly 25(1918), S. 411

Archimedes 1922a: Kugel und Zylinder. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Dr. A. Czwalina. Leipzig

Archimedes 1922b: Über Spiralen. Übersetzt und mit Anmerkungen von A. Czwalina. Leipzig
Archimedes 1925: Über schwimmende Körper und die Sandzahl. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Dr. A. Czwalina. Leipzig
Ascher, M./Ascher, R. 1981: Mathematics of the Incas. Code of the Quipu. Mineola/New York
Barkley, C. 2006: Perlen für gespiegelte Muster. In: Spektrum der Wissenschaft 2/2006, S. 65–67
Barner, Kl. 2007: Negative Größen bei Diophant? Teil I: In: NTM Schriftenreihe. N.S. Vol. 15. Nr. 1. S. 18–49
Barrow, I. 1670: Lectiones opticae et geometriae. London
Barta, J./Shokey, T. 2006: Mathematik ohne Worte. In: Spektrum der Wissenschaft 2/2006, S. 60–64
Baschmakova, I. G. 1972: Diophant und diophantische Gleichungen. Basel/Stuttgart. Aus dem Russischen
Baschmakova, I. G. 1974: Diophant und diophantische Gleichungen. Berlin. Aus dem Russischen
Baschmakova, I. G. 1981: Arithmetic of Algebraic Curves from Diophantos to Poincaré. In: Hist. math. 8 (1981), S. 417–438
Becker, O. 1954: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Freiburg/München
Becker, O./Hofmann, J. E. 1951: Geschichte der Mathematik. Bonn
Béguin, A. 1959: Pascal. Hamburg. Aus dem Französischen
Berggren, J. L. 1986: Episodes in the Mathematics of Medieval Islam. New York/Berlin/Heidelberg/London/Paris/Tokyo
Berkeley, G. 1969: Schriften über die Grundlagen der Mathematik und Physik. Einleitung von Wolfgang Breidert. Frankfurt/M
Bialas, V. 1978: Wissenschaftliche und technische Revolutionen in Vergangenheit und Gegenwart. Köln
Bialas, V. 1982: Erdgestalt, Kosmologie und Weltanschauung. Stuttgart
Böhlandt, M. 2002: Wege ins Unendliche. Die Quadratur des Kreises bei Nikolaus von Kues. München
Bombelli, R. 1572: L'Algebra. Bologna
Borger, R. et al. 1982: Ed. Texte aus der Umwelt des Alten Testamentes, Bd. 1. Rechtsbücher. Gütersloh
Bos, H. J. M. 2001: Redefining Geometrical Exactness. Descartes Transformation of the Early Modern Concept of Construction. Heidelberg
Breger, H. 2004: Ebenen der Abstraktion. Bernoulli, Leibniz und Barrows Theorem. In: Form, Zahl, Ordnung. Festschrift für Ivo Schneider zum 65. Geburtstag. Wiesbaden S. 193–202
Brentjes, S. 1986: Die Entwicklung der antiken griechischen Mathematik im Lichte einiger Tendenzen der gegenwärtigen Forschung. In: Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte. Berlin. S. 81–102
Brentjes, S. 1990a: As-Samaw'al. In: Lexikon bedeutender Mathematiker. Ed.: S. Gottwald, H.-J. Ilgauds, K.-H. Schlote. Leipzig S. 409–410
Brentjes, S. 1990b: Al-Karagi. In: Lexikon bedeutender Mathematiker. Ed.: S. Gottwald/ H.-J. Ilgauds/K.-H. Schlote. Leipzig S. 240/241

Brentjes, S. 2003: Between doubts and certainities: on the place of history of science in Islamic societies within the field of history. In: NTM. N.S. 11(2003), S. 65–79

Burkhardt, J. 1928: Die Kultur der Renissance in Italien. 18. Aufl. Leipzig

Burton, D. M. 1985: The History of Mathematics. An Introduction. Boston/London/Sydney/Toronto

Busard, H. L. L. 1997: Über die Entwicklung der Mathematik in Westeuropa zwischen 1100 und 1500. In: NTM, N.S. Vol. 5 ,Nr. 4. 1997, S. 211–235

Butzer, P. L. 1993: Mathematics in west and east from the fifth to tenth centuries: An overview. In: Science in Western and Eastern Civilization in Carolingian Times. Ed.: P. L. Butzer/D. Lohrmann. Basel 1993, S. 443–481

Cajori, F. 1928/29: History of Mathematical Notations. 2 Bände. Chicago

Cajori, F. 1991: A History of Mathematics. 5. Aufl. New York

Cantor, M. 1892: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. 2. Leipzig

Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig. Bd. 1, 3. Aufl. 1907, Bd. 2., 2. Aufl. 1899/1900, Bd. 3, 2. Aufl. 1900/1901, Bd. 4. 1908

Capelle, W. 1940 (Ed.): Die Vorsokratiker. Die Fragmente und Quellenberichte übersetzt und eingeleitet von W. Capelle. 3. Aufl. Stuttgart

Cardano, G. 1545: Artis Magnae, sive de Regulis Algebraicis. Liber unus. Nürnberg

Cardano, G. 1993: Ars magna or of the rules of algebra. Translated by T. Richard Witmer. With a foreword by Oystein Ore. New York

Cauty, A./Hoppan, J.-M. 2006: Die zwei Nullen der Maya. In: Spektrum der Wissenschaft. 2/2006. S. 22–25

Chace, A. B./Büll, L. S./Manning, H. P./Archibald, A. C. 1927–1929: The Rhind Mathematical Papyrus. 2 Bände. Berlin/Ohio

Chemla, K. 1997: What is at Stake in Mathematical Proofs from Third-Century China? In: Science in Context 2(1997), S. 227–251

Chemla. K. 1996: Relations between procedure and demonstration. Measuring the Circle in the Nine Chapters on Mathematical Procedures and the Commentary by Liu Hui (3rd century). In: History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences. Göttingen, S. 69–112

Chemla, K. 2003: Generality Above Abstraction: The General Expressed in Terms of the Paradigmatic in Mathematics in Ancient China. In: Science in Context 16. S. 413–458

Chemla, K. 2005: Geometrical Figures and Generality in Ancient China and Beyond: Liu Hui and Zhao Shuang, Plato and Thabit ibn Qurra. In: Science in Context 18(1), S. 123–166

Chemla, K./GUO Shuchun 2004: Les Neuf chapitres. Le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaries. Paris

Chuquet, N. 1985: Renaissance mathematician. Dortrecht/Boston/Lancaster

Cifoletti, G. 1996: The Creation of the History of Algebra in the Sixteenth Century. In: Mathematical Europe. Paris, S. 123–144

Clark, K. 1969: Leonardo da Vinci in Selbstzeugnissen und Bilddokumenten. Reinbek bei Hamburg

Clegg, B. 2003: The First Scientist. A Life of Roger Bacon. London

Closs, M. P. 1996: Native American Number Systems. In: Native American Mathematics. Austin, S. 33–35

Closs, M. P. (Ed.) 1997: Native American Mathematics. 2. Aufl. University of Texas Press. Austin

Cullen, Chr. 1996: Astronomy and Mathematics in Ancient China: the Zhou bi suan jing. Cambridge University Press

Cullen, Chr. 2004: The Suan shu shu. Writings on Reckoning. Needham Research Institute Working Papers: 1 (2004). Available: *http://www.nri.org.uk.suanshushu.html*

D'Ambrosio, U. 1985: Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. In: For the Teaching and Learning of Mathematics 5(1), (1985), S. 44–48

D'Ambrosio, U. 2006: Einführung. Ethnomathematik. In: Spektrum der Wissenschaft. 2(2006). Heidelberg, S. 8–9

D'Ambrosio, U./Marmé, M. 1998: Mathematic, peace and ethics. In Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. Bd. 30 (Heft 3), S. 64–66

Damerow, P. 2001: Kannten die Babylonier des Satz des Pythagoras? In: Changing Views on Ancient New Eastern Mathematics. Ed.: J. Høyrup/P. Damerow. Berlin. S. 219–310

Damerow, P./Lefèvre, W. 1981: Rechenstein, Experiment, Sprache. Stuttgart

Dauben, J. 1985: The History of Mathematics from Antiquity to the Present. A Selective Bibliography. New York/London

Dauben, J. 1992: The 'Pythagorean Theorem' and Chinese Mathematics. In: Amphora, S. 133–155

Dauben, J. 2002: Internationalizing Mathematics East and West: Individuals and Institutions in the Emergence of a Modern Mathematical Community in China. In: Mathematics Unbound: The Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800–1945. Ed.: E. K. Parshall/A. C. Rice. Providence/London. S. 253–285

Dauben, J. 2004: The Suan Shu Shu (A Book on Number and Computation). Preliminary Investigation. In: Form, Zahl, Ordnung. Festschrift zum 65. Geburtstag von Ivo Schneider. Wiesbaden, S. 151–168

Dauben, J. W. The Suan shu shu. A Book of Numbers and Computations. In: Archiv Hist.: Exact Sci. (Forthcoming)

Descartes, R. 1894: La Géometrie. (Als erster Teil des Discours de la méthode). Deutsch von L. Schlesinger

Descartes, R. 1980: Ausgewählte Schriften. Ed.: G. Irrlitz. Leipzig

Deschauer, St. 2002: Vom Umgang mit Längenmaßen in den frühen deutschen Rechenbüchern. In: Mathematikunterricht 2002, S. 31–48

Deschauer, St. 2003: Arithmetik-Vorlesung des Georg Joachim Rheticus Wittenberg 1536. München. Algorismus Heft 42

Dhombres, J./Sakaravitch, J. (Ed.) 1994: Desargues en son temps. Paris

Di Hus, U. 1989: Peano. In: Geschichte der Analysis. Ed.: M. von Renteln. Karlsruhe. S. 201–217

Diels, H. 1906: Die Fragmente der Vorsokratiker. Griechisch und Deutsch von Hermann Diels. Erster Band, 2. Aufl. Berlin

Dieudonné, J. 1985: Geschichte der Mathematik 1700–1900. Berlin. Aus dem Französischen

Dijksterhuis, E. J. 1956: Die Mechanisierung des Weltbildes. Ins Deutsche übertragen von H. Habicht. Berlin/Göttingen/Heidelberg

Diophantos von Alexandria 1890: Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantos von Alexandria. Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von G. Wertheim. Leipzig

Djafari Naini, A. 1982: Geschichte der Zahlentheorie im Orient, im Mittelalter und zu Beginn der Neuzeit unter besonderer Berücksichtigung persischer Mathematiker. Braunschweig

Dold-Samplonius, Y. 1992: The XVth Century Timurid Mathematician Ghiyath al-Di Jamshid al-Kashi and his Computation of the Quabba. In: Amphora, S. 171–181

Dold-Samplonius, Y. 2003: Calculating Areas and Volumes in Islamic Architecture. In: The Enterprise of Science in Islam. Cambridge (Mass.)/London, S. 235–265

Dürer, A. 2004: Die Underweysung... Ed.: P. Schreiber. In: Dürer – das druckgraphische Werk, Band III. München/Berlin/London/New York

Eisenlohr, A. 1877: Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter. Leipzig

Elfering, K. 1975: Die Mathematik des Aryabhata I. München

Engel, F./Stäckel, P. 1895: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Leipzig

Euklid: Die Elemente. I. Teil (1933) (Buch I–III), II. Teil (1933) (Buch IV–VI), III. Teil (1935) (Buch VII–IX), IV. Teil (1936) (Buch X), V. Teil (1937) (Buch XI–XIII). Leipzig

Fauvel, J./Gray, J. (Ed.) 1987: The History of Mathematics. – A Reader. The Open University. Reprint 1990

Feingold, M. 1990: Before Newton. The Life and the Times of Isaac Barrow. Ed.: M. Feingold. Cambridge University Press

Fermat, P. de 1923: Einführung in die ebenen und körperlichen Örter. Ed.: H. Wieleitner. Leipzig

Fermat, P. de 1934: Abhandlungen über Maxima und Minima. Ed.: H. Miller. Leipzig

Ferreira, E. S. 2004: Os indios Waimiri-Atroari e a etnomatemática. In: Gels Knijnik. Etnomatemática Curriculo e forma cao de professors. EDUNISIC. Vol. 1., S. 70–88

Field, J. V./Gray, J. J. 1987: The Geometrical Work of Girard Desargues. New York/Berlin/Heidelberg/London/Paris/Tokyo

Finster, R./Heuvel, G. van den 1990: Gottfried Wilhelm Leibniz. Reinbek bei Hamburg

Fischer-Elfert, H.-W. 1986: Die satyrische Streitschrift des Papyrus Anastasi I. In: Ägyptologische Abhandlungen. Bd. 44. Wiesbaden, S. 118–132

Folkerts, M. 1996: Johannes Regiomontanus – Algebraiker und Begründer der algebraischen Symbolik. In. Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit. Annaberg-Buchholz, S. 19–28

Folkerts, M. 1997: Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Hwarizmi. Edition, Übersetzung und Kommentar von Menso Folkerts unter Mitarbeit von Paul Kunitzsch. Bayr. Akad. D. Wiss. Phil.-hist Klasse, Abhandlungen. Neue Folge, Heft 113. München

Folkerts, M. 2003: Essays on Early Medieval Mathematics. The Latin Tradition. Copyright M. Folkerts

Folkerts, M. 2006: The Development of Mathematics in Medieval Europa. Aldershot Hampshire

Folkerts, M./Gericke, H. 1993: Die Alcuin zugeschriebenen propositiones ad acuendos iuvenes. In: Science in Western and Eastern Civilization in Carolingian Times, S. 283–362
Fontinha, M. 1983: Desenhos na areia des Quiocos do Nordeste de Angola. Lisbao
Franci, R./Toti Rigatelli, L. 1985: Towards a History of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli. In: Janus 72, S. 17–82
Gärtner, B. 2000: Johannes Widmanns „Behend vnd hubsche Rechenung“. Die Textsorte ‘Rechenbuch’ in der Frühen Neuzeit. Tübingen
Gebhardt, R. (Ed.) 2002: Verfasser und Herausgeber mathematischer Texte der frühen Neuzeit. Annaberg-Buchholz
Gerdes, P. 1991: Lusona: Geometrical Recreation of Africa. Maputo
Gerdes, P. 1997: Ethnomathematik – dargestellt am Beispiel der Sona Geometrie. Heidelberg/Berlin/Oxford
Gerdes, P. 2003: Awakening of Geometrical Thought in Early Culture. University of Minnesota
Gericke, H. 1970: Geschichte des Zahlbegriffes. Mannheim/Wien/Zürich
Gericke, H. 1984: Mathematik in Antike und Orient. Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo
Gericke, H. 1990: Mathematik im Abendland. Berlin/Heidelberg/New York/London/Paris/Tokyo/Hong Kong
Gericke, H. 1996: Zur Geschichte der negativen Zahlen. In: History of Mathematics. States of the Art. Academic Press, S. 279–306
Gillings, R. 1976: The Mathematics of Ancient Egypt. In: DSB Vol. XIV
Grau, C. 1988: Berühmte Wissenschaftsakademien. Leipzig
Hall, A. R. 1965: Die Geburt der naturwissenschaftlichen Methode. Gütersloh. Aus dem Englischen
Harig, G. 1958: Über die Entstehung der klassischen Naturwissenschaften in Europa. In: Dtsche Z. Philosophie. 6 (1958), S. 419–450
Harig, G. 1962: Die Tat des Kopernikus. Leipzig/Jena/Berlin
Harris, R. 2006: Rechnen ohne Zahlen. In: Spektrum der Wissenschaft. 2. (2006), S. 68–71
Heinzelin, J. de 1962: Ishango. In: Scientific American. 206(1962), S. 105–116
Heß, H.-J. 1984: Zur Vorgeschichte des ‘Nova Methodus’ (1676–1684). In: studia leibnitiana. Sonderheft 14: 300 Jahre Nova Methodus von G. W. Leibniz. Wiesbaden/Stuttgart, S. 64–102
Hoeppe, G. 2006: Kolans: Technologie der Verzauberung. In: Ethnomathematik. Spektrum der Wissenschaft 2(2006), S. 52–59
Hofmann, E. 1963: Geschichte der Mathematik. Bd. 1. 2. Aufl. Berlin
Hogendijk, J. P./Sabra, A. I. (Ed.) 2003: The Enterprise of Science in Islam. New Perspectives. Cambridge (Mass.)/London
Horng, Wan-Sheng 1991: Li Shalan, The Impact of Western Mathematics in China during the late 19^{th} Century. Ph.D. Thesis. City University of New York
Howson, G. 1982: A History of Mathematics Education. Cambridge
Høyrup, J. 2002: Length, Widths, Surfaces and Its Kin. New York
Høyrup, J. 2004: Leonardo Fibonacci and Abbaco Culture. A Proposal to Invert the Roles. Filosofi og videnskabsteori pa Roskilde Univesitetscenter. Raekke. Nr. 1

Høyrup, J. 2007: Jacopo da Firenze. His Traktatus Algorismi and Early Italian Abbacus Culture. Basel/Boston/Berlin
Huff, T. E. 1993: The Rise of Early Modern Science. Cambridge University Press
Huylebrouck, D. 2006: Afrika, die Wiege der Mathematik. In: Spektrum der Wissenschaft. Ethnomathematik. 2(2006), S. 10–15
Ifrah, G. 1987: Universalgeschichte der Zahlen. 3. Aufl. Frankfurt/M./New York. Aus dem Französischen
Imhausen, A. 2003: Ägyptische Algorithmen. Eine Untersuchung zu den mittelägyptischen mathematischen Aufgabentexten. Wiesbaden
Jentsch, W. 1986: Michael Stifel – Mathematiker und Mitstreiter Luthers. In: NTM (1986) (1), S. 11–34
Jock Hoe 1977: Les systèmes d'equations-polynomes dans le Siyuan yujian (1303). Paris Institut des Hautes Etudes Chinoises. Vol. 6
Joseph, G. G. 1991: The Crest of the Peacock. The Non-European Roots of Mathematics. Penguin Book. Harmondsworth England
Juschkewitsch, A. P. 1964: Mathematik im Mittelalter. Leipzig. Aus dem Russischen
Juschkewitsch, A. P. 1964: Über ein Werk des Abu 'Abdalla Muhammad ibn Musa al-Huwarizmi al Magusi zur Arithmetik der Inder. In: Beiheft zur Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin. Zum 60. Geburtstag Gerhard Harigs. Ed.: I. Strube und H. Wußing. Leipzig, S. 21–63
Katscher, F. 2001: Die kubischen Gleichungen bei Nicolo Tartaglia. Die relevanten Textstellen aus seinen Quesiti et Inventioni diversi auf deutsch übersetzt und kommentiert. Österr. Akad. Wiss. Math-Nat. Klasse. Wien
Katz, V. J. 1993: History of Mathematics. An Introduction. New York
Katz, V. J. (Ed.) 2007: The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam. A Sourcebook. Princeton/Oxford
Kaunzner, W. 1992: Über das wissenschaftliche Umfeld und die mathematischen Handschriften von Adam Ries. In: Adam Rieß vom Staffelstein. Rechenmeister und Cossist. Staffelsteiner Schriften. Bd. 1. Staffelstein, S. 157–279
Kaunzner, W. 1996: Johannes Widmann, Cossist und Verfasser des ersten großen deutschen Rechenbuches. In: Mathematiker und Cossisten der frühen Neuzeit. Ed.: R. Gebhardt. Annaberg-Buchholz, S. 37–51
Kepler, J. 1908: Neue Stereometrie der Fässer (1615). Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von R. Klug. Leipzig
King, D. 1999: World-Maps for Finding the Direction and Distance to Mecca. Innovation and Tradition in Islamic Science. Leiden
King, D. 2005: Astronomie und Mathematik als Gottesdienst. Das Beispiel Islam. In: Die mathematischen Wurzeln der Kultur, S. 91–123
Kline, M. 1972: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York/Oxford University Press
Knobloch, E. 1996: Zur Rezeption der arabischen Astronomie im 15. und 16. Jahrhundert. In: History of Mathematics: States of the Art. Academic Press, San Diego, S. 237–261
Knorr, W. 1985: The Geometer and the Archaeastronomers. In: Brit. J. Hist. Sci. 18(1985), S. 202; 208–211
Knorr, W. 1989: Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry. Basel

Kopp, F. O./Stein, E. 2006: Es funktioniert doch – mit zwei Korrekturen: Zehnerüberträge der Leibniz-Maschine. In: Unimagazin Hannover. 3/4. 2006, S. 56–59
Kuhn, Th. S. 1967: Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen. Frankfurt/M. Aus dem Amerikanischen
Kunitzsch, P. 2003: The Transmission of Hindu-Arabic Numerals Reconsidered. In: The Enterprise of Science in Islam. Cambridge (Mass.)/London, S. 3–21
Kupcik, I. 1980: Alte Landkarten. Von der Antike bis zum Ende des 19. Jahrhunderts. Praha
Lam Lay Yong/Ang Tian Se (2004): Fleeting Footsteps. Tracing the Conception of Arithmetic and Algebra in Ancient China. Singapore
Landmark: Landmark Writings in Western Mathematics. 1640–1940. (2005): Ed.: I. Grattan-Guinness. Amsterdam
Leibniz, G. W. 1920: Leibniz über die Analysis des Unendlichen. Eine Auswahl Leibnizscher Abhandlungen aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Gerhard Kowalewski. Leipzig
Li Yan/Dù Shiràn 1987: Chinese Mathematics. A Concise History. Oxford University Press. Aus dem Chinesischen
Libbrecht, U. 1973: Chinese Mathematics in the Thirteenth Century. Cambridge (Mass.)
Lindgren, U. 1976: Gerbert von Aurillac und das Quadrivium. Wiesbaden
Loeffel, H. 1987: Blaise Pascal 1623–1662. Basel/Boston
Lounsbury, F. G. 1978: Maya Numeration, Computation, and Calendrical Astronomy. In: DSB Vol. XV. Supplement, S. 759–818
Luderer, B. (Ed.) 2004: Adam Ries and his 'Coss'. A Contribution to the Development of Algebra in the 16th Century Germany. Leipzig
Lüneburg, H. 1992: Leonardo Pisani Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers. Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich
MacDonnell, J. 1989: Jesuit Geometers. St. Louis, Missouri
Maanen, J. A. van 1984: Die Mathematik in den Niederlanden im 17. Jahrhundert und ihre Rolle in der Entwicklungsgeschichte der Infinitesimalrechnung. In: Studia leibnitiana. Wiesbaden, S. 1–13
Maanen, J. A. van 1999: Barrow ahnt den Hauptsatz. In: Geschichte der Analysis. Ed.: H. N. Jahnke. Heidelberg/Berlin, S. 86–88
Mackensen, L. von 1974: Leibniz als Ahnherr der Kybernetik – ein bisher unbekannter Vorschlag einer 'Machina arithmeticae dyadicae'. In: Akten des II. Internationalen Leibniz-Kongresses. Bd. II. Wissenschaftstheorie und Wissenschaftsgeschichte. Wiesbaden, S. 255–268
Martzloff, J.-Cl. 1990: A Survey of Japanese Publications on the History of Japanese Traditional Mathematic (Wasan) from the last 30 Years. In: Hist. math. 17(1990), Nr. 4, S. 366–373
Martzloff, J.-Cl. 1992: Li Shalan (1811–1882) and Chinese Traditional Mathematics. In: Mathematical Intelligencer, 14(4), S. 32–37
Martzloff, J.-Cl. 1994: Chinese Mathematics. In: Companion, Bd. 1, S. 93–103
Martzloff, J.-Cl. 1997: A History of Chinese Mathematics, Berlin/Heidelberg/New York. Aus dem Französischen
Menninger, K. 1958: Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. Göttingen

Mett, R. 1996: Regiomontanus. Wegbereiter des neuen Weltbildes. Stuttgart/Leipzig
Mikami, Y. 1913: The Development of Mathematics in China and Japan. Leipzig. Nachdruck New York 1974
More, L. Tr. 1962: Isaac Newton. A Biography. Dover Publications. New York
Naumann, F. 2001: Vom Abakus zum Internet. Die Geschichte der Informatik. Darmstadt
Needham, J. 1959: Science and Civilisations in China. Vol. 3. Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth. Cambridge
Nesselmann, G. H. F. 1842: Die Algebra der Griechen. Nachdruck Frankfurt 1969
Netz, R./Noel, W. 2007: Der Kodex des Archimedes. Das berühmteste Palimpsest der Welt. München. Aus dem Englischen
Neugebauer, O. 1935/1937: Mathematische Keilschrifttexte. In: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. A 3 1/2 Berlin 1935 und 1937. Teil I: Texte; Teil II: Register, Glossar, Nachträge, Tafeln; Teil III: Ergänzungsheft
Neugebauer, O. 1969: Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. Erster Band. Vorgriechische Mathematik. Zweite, unveränderte Auflage. Berlin/Heidelberg/New York
Newton, I. 1969: The Mathematical Papers of Isaac Newton. Vol. III. 1670–1673. Ed.: D. T. Whiteside. Cambridge
Newton, I. 1736: The Method of Fluxions and Infinite Series with its Application to the Geometry of Curve-Lines. London
Newton, I. 1872: Sir Isaac Newton's Mathematische Prinzipien der Naturlehre. Mit Bemerkungen und Erläuterungen. Herausgegeben von J. Ph. Wolfers. Berlin
Newton, I. 1908: Abhandlungen über die Quadratur der Kurven. Ed.: G. Kowalewski. Leipzig
Newton, I. 1967–1976: The Mathematical Papers of Isaac Newton. Ed.: D. T. Whiteside. Cambridge
Newton, I. 1999: Die mathematischen Prinzipien der Physik. Übersetzt und herausgegeben von V. Schüller. Berlin/New York
Ore, O. 1935: On the Foundation of Abstract Algebra. In: Annals of Math. 36(1935), S. 406–473
Papay, G. 1998. Zur Raumauffassung in Wissenschaft und Kunst. Ed.: K. Sachs-Hombach/K. Rehkämpen. Magdeburg, S. 169–185
Parker, R. A. 1972: Demotic Mathematical Papyri. Brown Egyptological Studies VII. Providence, Rhode Island/London
Pascal 1957: Ausgewählt und eingeleitet von R. Schneider. Frankfurt/M.
Peet, E. T. 1923: The Rhind Mathematical Papyrus. London
Peet, T. E. 1898: The Rhind Mathematical Papyrus. Faksimile-Ausgabe. London
Peiffer, J. 1995: A. Dürer. Géometrie. Paris
Peiffer, J./Dahan-Dalmedico, A. 1994: Wege und Irrwege – Eine Geschichte der Mathematik. Basel/Boston/Berlin. Aus dem Französischen
Philp, H. 1973: Mathematical education in developing countries – some problems of teaching and learning. In: Development of Mathematical Education. Cambridge, S. 154–180
Platon 1910: Theaitetos. Ins Deutsche übertragen von Karl Preisendanz. Jena
Platon 2000: Der Staat (Politeia). Ed.: Karl Vretska. Ergänzte Ausgabe, Stuttgart

Platon. Staat. 1855–1914: Langenscheidtsche Bibliothek sämtlicher griechischen und römischen Klassiker, Band 40. Berlin/Stuttgart

Proclus Diadochus 1945: Kommentar zum ersten Buch von Euklid's ‚Elementen'. Aus dem Griechischen übertragen von P. Leander Schönberger. Eingeleitet von Max Steck. Halle/Saale

Ptolemaios von Alexandria 1912/1913: Almagest. Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie. Aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden Anmerkungen versehen von K. Manitius. 1. Band. Leipzig 1912; 2. Band. Leipzig 1913

Raphals, L. 2002: When is a Triangle Not a Triangle? Newsletter of the Centre for Cross Cultural Studies. City University of Hong Kong, Vol. 5

Rashed, R. 1974/1975: Les travaux perdus de Diophante. In: Revue d'Histoire des sciences. Vol. 27(1974), S. 97–122; Vol. 28(1975) S. 3–10

Rashed, R. 1994: The development of Arabic mathematics. Between arithmetic and algebra. Dortrecht/Boston/London

Rashed, R./Vahabzadeh, B. 2000: Omar Khayyam, the mathematician. New York

Reich, K. 2003: Die Rezeption Diophants im 16. Jahrhundert. In: NTM 11(2003), S. 80–89

Reich, K./Gericke, H. 1973: Einführung in die Neue Algebra. München

Resch, M. 2006: Archäologische Blätter. Beiheft 4(2006). Ausstellungskatalog

Resnikoff, H. L./Wells, R. O. Jr. 1983: Mathematik im Wandel der Kulturen. Braunschweig/Wiesbaden. Aus dem Amerikanischen

Rider, R. E. 1982: A Bibliography of Early Modern Algebra. Berkeley

Ries, Abraham 1999: Die Coß. Ed.: H. Wußing. München. Algorismus Heft 30

Ries, Adam 1992: Die Coß. Faksimile. Editiert und kommentiert W. Kaunzner/H. Wußing. Stuttgart/Leipzig

Ries, Adam 1991: Das zweite Rechenbuch von Adam Ries. Nachdruck der Erstausgabe Erfurt 1522. Mit einer Kurzbiographie, bibliographischen Angaben und einer Übersicht über die Fachsprache. Ed.: St. Deschauer. München

Ries, Adam 1991: Rechnng auff der linihen. Erfurt 1525. Nachdruck und Rekonstruktion. Offizin Paul Hartung in Hamburg

Ries, Adam 1992: Das 1. Rechenbuch von Adam Ries. Nachdruck der 2. Auflage Erfurt 1525. Mit einer Kurzbiographie, einer Inhaltsanalyse, bibliographischen Angaben, einer Übersicht über die Fachsprache und einem metrologischen Anhang. Ed.: St. Deschauer. München. Algorismus Heft 6

Ries, Jacob 1562: Coß. Landesbibliothek Dresden. Auf Pergament geschrieben

Risi, V. de 2007: Geometry and Monadology. Leibniz's Analysis Situs and Philosophy of Space. Basel/Boston/Berlin

Robson, E. 2001: Neither Sherlock Holmes nor Babylon. A Reassessment of Plimpton 322. In: Hist. math. 28(2001), S. 167–206

Rudolff, Chr. 1526: Kunstliche Rechnung mit der Ziffer vnd mit den zal pfennigen... durch Christoffen Rudolff verfertigt. Wien

Sato Ken-ichi 2003: History of Mathematics in Early Modern Japan: Searching fort he True Portrait of Seki Takakazu. Rezension durch A. Horiuchi. In: NTM 11(2003), S. 279–283

Schlote, K.-H. 2002: Chronologie der Naturwissenschaften. Frankfurt (M.)

Schneider, R. 1954: Pascal. Frankfurt (M.)/Hamburg

Scholz, E. 1990: Geschichte der Algebra. Mannheim

Schönbeck, J. 2003: Euklid. Basel/Boston/Berlin
Schreiber, P. 1987: Euklid. Leipzig
Schreier, W. 1988: Ed.: Geschichte der Physik. Ein Abriß. Berlin
Schröder, E. 1988: Ed.: Ulrich Wagner. Das Bamberger Rechenbuch von 1483. Berlin
Schuppener, G./Macák, K. 2002: Prager Jesuiten – Mathematik von 1600–1740. Leipzig
Scriba, Chr. 1988: Welche Kreismonde sind elementar quadrierbar? Die 2400jährige Geschichte eines Problems bis zur endgültigen Lösung in den Jahren 1933/47. In: Mitt. d. Ges. in Hamburg. 11(1988), S. 517–539
Scriba, Chr./Schreiber, P. 2001: 5000 Jahre Geometrie. Berlin/Heidelberg/ New York
Scriba, Chr./Schreiber, P. 2005: 5000 Jahre Geometrie. 2. Aufl. Berlin/Heidelberg/New York
Seck, F. (Ed.) 1978: Wilhelm Schickard 1592–1635. Astronom, Geograph, Orientalist, Erfinder der Rechenmaschine
Seidenberg, A. 1962: Ritual Origin of Counting. In: Arch. Hist. Exact Sci. 2(1962), S. 8–10
Selin, H. (Ed.) 2000: Mathematics across cultures. The history of non-western mathematics. Dortrecht
Sesiano, J. 1982: Books IV to VII of Diophantos' Arithmetica in the Arabic Translation Attributes to Qusta ibn Luqa. New York/Heidelberg/Berlin
Shea, W. R. (Ed.) 1988: Revolutions in Science. Their Meaning and Relevance. Watson Publishing International
Smith, D./Mikami, Y. 1914: A History of Japanese Mathematics. Leipzig
Sonar, Th. 2007: Tod und Grablege von Gottfried Wilhelm Leibniz – Was wissen wir sicher? In: Festschrift für Karin Reich, S. 101–110
Steck, M. 1981: Bibliographia Euklideana. Ed.: M. Folkerts. Hildesheim
Stedall, J. 2003: The Great Invention of Algebra. Thomas Harriot's Treatise on Equations. Oxford University Press
Stevin, S. 1965: De Thiende. Übersetzt und erläutert von H. Gericke und K. Vogel. Frankfurt/M.
Stifel, M. 1533: Die Coß Cristoff Rudolffs. Mit schönen Exempeln der Coß durch Michael Stifel. Gebessert und sehr gemehrt. Zu Königsperg in Preussen. (Erschienen 1554)
Stifel, M. 1544: Arithmetica integra. Nürnberg
Stillwell, J. 1989: Mathematics and Its History. New York/Berlin/Heidelberg/ London/Paris/Tokyo
Strohmaier, G. 1979: Denker im Reich der Kalifen. Leipzig/Jena/Berlin
Struik, D. J. 1948: Stone Age Mathematics. In: Scientific American. Bd. 179, S. 44–49
Struik, D. J. 1969: A Source Book in Mathematics, 1200–1800. Harvard University Press
Struik, D. J. 1981: The Land of Stevin and Huygens. Dortrecht
Struve, W. W. 1930: Mathematischer Papyrus des staatlichen Museums der schönen Künste. In: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abt. A. 1. Berlin
Stückelberger, A. 1988: Einführung in die antiken Naturwissenschaften. Darmstadt

Szabo, I. 1987: Geschichte der mechanischen Prinzipien. Dritte Aufl. Basel/Boston/Stuttgart
Tartaglia, N. 1546: Quesiti et inventioni diverse. Venedig
Thom, A. 1967: Megalithic Sites in Britain. Oxford, S. 34–35
Thom, A./Thom, A. S. 1978: Megalithic Remains in Britain and Brittany. Oxford
Toti Rigatelli, L. 1996: Evariste Galois 1811–1832. Basel/Boston/Berlin
Tropfke, J. 1933: Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 2. Arithmetik. 3. Aufl. Berlin/Leipzig
Tropfke, J. 1980: Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1. 4. Aufl. Berlin/New York
Tropfke, J. 1923: Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 4. Ebene Geometrie. 2. Aufl. Berlin/Leipzig
Vogel, K. 1968: Chiu Chang Suan Shu: Neun Bücher arithmetischer Technik. Ein chinesisches Rechenbuch für den praktischen Gebrauch aus der frühen Han-Zeit (202 v. Chr. bis 9. Chr.). Aus dem Chinesischen übersetzt und erläutert von Kurt Vogel. Braunschweig
Vogel, K. 1973: Der Donauraum, die Wiege mathematischer Studien in Deutschland. München
Vogel, K. 1980: Das Bamburger Blockbuch. Ein xylographisches Rechenbuch aus dem 15. Jahrhundert. München
Vogel, K. 1983: Ein Vermessungsproblem reist von China nach Paris. In: Hist. Math. 10(1983), S. 360–367
Waerden, B. L. van der 1966: Erwachende Wissenschaft. 2. Aufl. Basel/Stuttgart. Aus dem Holländischen
Waerden, B. L. van der 1983: Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo
Wawilow, S. I. 1951: Isaac Newton. Berlin. Aus dem Russischen
Westfall, R. 1996: Isaac Newton. Heidelberg/Berlin/Oxford. Aus dem Englischen
Wußing, H. 1965: Mathematik in der Antike. 2. Aufl. Leipzig
Wußing, H. 1989: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. 2. Aufl. Berlin
Wußing, H. (Ed.) 1983: Geschichte der Naturwissenschaften. Leipzig
Wußing, H. 1990: Isaac Newton. 4. Aufl. Leipzig
Wußing, H. 1992: Adam Ries und seine Rechenbücher. In: Adam Rieß von Staffelstein, Rechenmeister und Cossist. Staffelsteiner Schriften. Bd. 1, Staffelstein, S. 143–156
Wußing, H. 1992: Adam Ries. 2. Aufl. Stuttgart/Leipzig/Zürich
Wußing, H. 1999a: Zur Geschichte der Polytechnischen Gesellschaft zu Leipzig (1825–1844). Eine Bürgerinitiative zu Beginn der Industrialisierung Sachsens. In: Sitzungsberichte der Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig. Math.-nat. Klasse. Bd. 127, Heft 3. 1999, S. 3–21
Wußing, H. 1999b: Ars inveniendi – Leibniz zwischen Entdeckung, Erfindung und technischer Umsetzung. In: Wissenschaft und Weltgestaltung. Internationales Sympsion zum 350. Geburtstag von Gottfried Wilhelm Leibniz vom 9. bis 11. April 1996 in Leipzig. Ed.: K. Nowak und H. Poser, Hildesheim/Zürich/New York, S. 231–253
Wußing, H. 2002: Die Große Erneuerung. Zur Geschichte der Wissenschaftlichen Revolution. Basel/Boston/Berlin

Wußing, H. 2003: Maria Reiche: Herrin und Beschützerin der Linien. In: Il sogno di Galois. Siena, S. 293–307
Wußing, H./Remane, H. 1989: Wissenschaftsgeschichte en miniature. Berlin
Xi Ze-Zong 1984: The Comentary Atals in the Silk Book of the Han Tomb at Mawangdui. In: Chinese Astronomy 8(1984), S. 1–7
Xu Yibao 2003: Bertrand Russell and the Introduction of Mathematical Logic in China. In: History and Philosophy of Logic. 24(3), S. 181–196
Yabuuchi, K. 1954: Indian and Arabian Astronomy in China. In: Silver Jubilee Volume of the Zinbun Kagaku Kenkyusyo, Koyto, S. 585–603
Zeuthen, H. G. 1966: Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Kopenhagen 1886; Nachdruck 1966
Zinner, E. 1951: Astronomie. Geschichte ihrer Probleme. Freiburg/München
Zinner, E. 1988: Entstehung und Ausbreitung der copernicanischen Lehre. Zweite, durchgesehene und ergänzte Auflage. München
Zinner, E. 1990: Regiomontanus: His Life and Work. Translated by E. Brown. Amsterdam/New York/Oxford/Tokyo

Abbildungsverzeichnis

Für einige Abbildungen in diesem Buch ist es uns nicht gelungen, die Rechtsinhaber zu ermitteln, bzw. unsere Anfragen blieben unbeantwortet. Betroffene und Personen, die zur Klärung in einzelnen Fällen beitragen können, werden gebeten, sich beim Verlag zu melden.

1.1.1 Ursprünge der Menschheit; Werkzeuge der Steinzeit: Faustkeil, geschäftete Äxte (Brfm. Kenia 1982, Venda 1993) ... 6
1.1.2 Zählen einer Viehherde mit den Fingern von drei Helfern; nach [Ifrah 1987, S. 57] ... 9
1.1.3 Knochen mit Einkerbungen aus dem Spätpaläolithikum; nach [Ifrah 1987, S. 111] ... 10
1.1.4 Der Knochen von Ishango; Skizze der Einkerbungen auf dem Ishango-Knochen; nach [Spektrum der Wissenschaft 2/2006, S. 13] ... 11
1.1.5 Internationales Jahr der Mathematik (Brfm. Belgien 2000) ... 11
1.1.6 Ritzungen auf einem Elefantenknochen (Landesmuseum für Vorgeschichte Halle, Sachsen-Anhalt) [Foto Wesemüller-Kock] ... 12
1.1.7 Tongefäße mit Ornamenten aus Mitteleuropa, ca. 3.500 v. Chr.; Vase und Lendenschurz mit Ornamenten (Brfm.: DDR 1976, Brasilien 1975 und 1981) ... 13
1.1.8 Kreisgrabenanlage von Goseck, Sachsen-Anhalt [Foto Wesemüller-Kock] ... 13
1.1.9 Kalendersteine bei Erdeven in der Bretagne [Foto Wesemüller-Kock] ... 14
1.1.10 Taulas (Pilzaltäre) aus dem Megalithikum in Hagar Qim auf Malta [Foto Alten] ... 15
1.1.11 Himmelsscheibe von Nebra (Landesmuseum für Vorgeschichte, Halle, Sachsen-Anhalt), [Foto Wesemüller-Kock] ... 16
1.2.1 Siedlungsgebiete der Bantu-Völker ... 20
1.2.2 a) Entstehung einer Lusona; b) Lusona „Rat der Tänzer“ [Gerdes 1997, S. 33] ... 21
1.2.3 „Zehn Vögel“ [Gerdes 1997, S. 235] ... 22
1.3.1 Kulturen der Indios in Mittelamerika (Karte) ... 23
1.3.2 Tempelbezirk in Teotihuacán (*Ort der Götter*) [Foto Jackhynes/Wikimedia Commons] ... 24
1.3.3 Stadtplan von Tenochtitlán [ÖNB Bildarchiv, Wien: E12.422-C/D] ... 25
1.3.4 Ausbildung in Astronomie/Astrologie zu Schulbeginn (nach altmexikanischem Kodex in Florenz) (Brfm. Mexiko 1982) ... 26

1.3.5 Aztekischer Kalenderstein (im Museo Nacional de Antropología, Mexico-City) [Foto Alten] 27
1.3.6 Pyramide des Kukulcan in Chichén Itzá (Yucatán, Mexiko), 10. Jahrhundert [Foto Alten] 29
1.3.7 Tempel der 1000 Säulen mit dem Götterboten Chac-Mool im Weltkulturerbe Chichén Itzá (Yucatán, Mexiko) [Foto Alten] 30
1.3.8 Die kegelförmige „Pyramide des Zauberers“ in Uxmal (Yucatán) [Foto Alten] 31
1.3.9 Ornamente am sog. Haus der Nonnen in Uxmal [Foto Alten] . 32
1.3.10 Maya-Handschrift im Codex Dresdensis [SLUB Dresden/Abt. Deutsche Fotothek, Mscr. Dresd. R 310] 33
1.3.11 Kulturen der Indios in Südamerika (Karte) 34
1.3.12 Maria Reiche mit einigen Figuren der Scharrbilder (Brfm.-Block Peru 1986) 35
1.3.13 Polygonale Festungsmauern in Sacsayhuaman bei Cuzco [Foto Alten] 36
1.3.14 Läufer; Quipu (Knotenschnüre für Zahlangaben) (Brfm. Peru 1972) 37
1.3.15 a) Darstellung der Zahl 3/643 als Knotenschnur b) Interpretation eines Quipu [American Museum of Natural History, New York, B 8713] (vgl. Leland Locke 1923, Ifrah 1986) 38
1.3.16 Sonnenobservatorium der Inka in Machu Picchu [Foto Alten] 39
1.3.17 Die Inka-Festung und der Sonnentempel von Machu Picchu [Foto Alten] 39
1.3.18 Textilkunst der Inka: Geometrische Muster einer Tunika (um 1550) [Dumbarton Oaks Research Library], [Wikimedia Commons] 40

2.1.1 China im Altertum und im Mittelalter (Karte) 43
2.1.2 Die Chinesische Mauer [Foto Alten] 44
2.1.3 Obere Reihe: Bronzegegenstände. Untere Reihe: Antike chinesische Münzen (Brfm. China 1964, China 1981) 45
2.1.4 Laotse und Konfuzius [Wikimedia Commons] 46
2.1.5 Erfindungen der chinesischen Antike (Ausschnitte aus Briefmarken, China 1953) 47
2.1.6 Bedeutsame chinesische Erfindungen: Buchdruck mit beweglichen Lettern (11. Jh. n. Chr.), Papierherstellung (2. Jh. v. Chr.), Schießpulver (13. Jh. n. Chr.); (Brfm. Haiti 1999) 48
2.1.7 Wanderlehrer in China (Brfm. China 1989) 48
2.1.8 Marco Polos Rückreise von China nach Europa (Markenblock Vatikan 2000) 49

2.1.9 Torquetum, konstruiert von Guo Shoujing; Porträt von Guo Shoujing (Brfm. China 1962) 50
2.1.10 Matteo Ricci (Porträt von Yu Wen-hui um 1610) [Wikimedia Commons] 51
2.1.11 Chinesischer Meister und zwei Schüler am Rechenbrett [Illustration des Suan Fa Thung Tsung 1593] (vgl. Needham 1959, S. 70; Ifrah 1986, S. 149) 54
2.1.12 *Suanpan*, eingegeben ist die Zahl 123 456 789 [Foto Wesemüller-Kock] 54
2.1.13 Figur zum Satz des Pythagoras 56
2.1.14 Figur zur Baumstammaufgabe 58
2.1.15 Altchinesische Wissenschaftler (Ausschnitte aus Briefmarken, China 1956) 59
2.1.16 Liu Hui und sein „Exhaustionsverfahren“ zur Berechnung des Kreisinhaltes (Ausschnitte aus einer Briefmarke China 2002 und einem Text von Tsai Chen aus [Joseph Needham: Science and Civilization in China, vol. 3, Cambridge University Press 1959], [Scriba/Schreiber 2005]) 60
2.1.17 Illustration der Methode der doppelten Messungen (Blockdruck aus der Enzyklopädie Tu Shu Yi Chen, 1726 [Frank G. Swets: The Sea Island Mathematical Manual: Surveying and Mathematics in Ancient China, page 10, Fig 3, 1992, University Park, PA: The Pennsylvania State University Press]) 61
2.1.18 „Pascalsches Dreieck“ (aus Siyuan yujian xicao und Yongle dadien) [Martzloff 1997, S. 231] 63
2.2.1 Niederländisch-japanische Beziehungen, Begegnung zweier Kulturen (Brfm. Japan 2000) 68
2.2.2 Commodore Perry „öffnet“ Japan (Markenmotiv USA 1953) . . . 69
2.2.3 Gebrauch des Soroban, aus einem Werk von 1825 [Smith/Mikami 1914, S. 43] 70
2.2.4 Mathematiker arbeitet mit Stäbchen auf dem Rechenbrett (aus Miyake Kenrys 1795 in [Smith/Mikami 1914, S. 29]) 72
2.2.5 a) Tor zum Toshogus-Schrein in Nikko b) Burg Matsumoto (Brfm. Japan 1978, 1977) 72
2.2.6 Aus der Trigonometrie (1656) von Yamada Jusei [Smith/Mikami 1914, S. 64] 73
2.2.7 Aus dem *Ketsugi-shô* von Isomura (2. Aufl. 1684) [Smith/Mikami 1914, S. 66] 74
2.2.8 Zwei einfache Beispiele magischer Kreise [Smith/Mikami 1914, S. 71] 74
2.2.9 Frühe Schritte hin zum Calculus (aus Sawaguchi Kazuyiki: *Kokon Sampô-ki* 1670) [Smith/Mikami 1914, S. 87] 75
2.2.10 Figur zur Aufteilung einer Fläche 77

2.2.11 Ausschnitte aus einem Bild von Seki Takakazu, aus [Masahito Fujiwara], [Wikimedia Commons] (Brfm. Japan 1992) 78
2.2.12 100 Jahre Eisenbahn 1872–1972; Internationaler Kongress der Mathematiker in Kyoto 1990 (Brfm. Japan 1972, 1990) ... 79
2.3.1 Kulturen und Staaten Indiens im Altertum und im Mittelalter (Karte) 83
2.3.2 Sarasvati, Göttin der Wissenschaft und Lehre [Relief aus dem 12. Jh., Vorderseite einer Medaille aus Anlass der 4. Welt-Sanskrit-Konferenz 1979 in Weimar] 84
2.3.3 Mohenjo-Daro (Brfm. Pakistan 1976) 85
2.3.4 Frühe Induskultur, Siegel mit Einhorn (Brfm. Pakistan 1984) . 86
2.3.5 Rigvedapriester [Foto Morgenroth] 87
2.3.6 Der Religionsstifter Mahāvīra und die Göttin Durga auf indischen Miniaturen (Brfm. DDR 1979) 89
2.3.7 Löwenkapitell einer Ashoka-Säule im Museum von Sarnath. Das „Rad der Lehre“ und in die vier Himmelsrichtungen blickende Löwen [Foto Alten] 90
2.3.8 Skulptur einer schreibenden Frau (11. Jahrhundert n. Chr.); Buddhistisches Manuskript auf Birkenrinde; Welthindi-Konferenz (mit Skulptur aus dem 12. Jahrhundert), (Brfm. Indien 1966, 1979, 1975) 91
2.3.9 Observatorium des Jai Singh in Jaipur [Foto Alten] 92
2.3.10 Falkenförmiger Altar 93
2.3.11 Figur zur Sehnengeometrie: AC = chorda 2α, AB = $\sin\alpha$ .. 96
2.3.12 Gwalior-Inschrift mit dem Nullzeichen 99

3.1.1 Ägypten im Altertum 105
3.1.2 Tut-ench-Amun (Goldmaske im Ägyptischen Museum, Kairo) [Foto Wesemüller-Kock] 106
3.1.3 Stufenpyramide des Pharao Djoser in Sakkara (um 2600 v. Chr.) [Foto Alten] 107
3.1.4 Hieroglyphen am Tempel von Medinet Habu in Theben (um 1170 v. Chr.) [Foto Alten] 108
3.1.5 Stein von Rosetta (Kopie im Römer- und Pelizaeus-Museum Hildesheim), eingefügt Briefmarke mit Champollion [Foto Wesemüller-Kock], (Ägypten 1972) 109
3.1.6 Medizinische Geräte am Tempel von Kom Ombo (Oberägypten) [Foto Mainzer] 110
3.1.7 Ägyptischer Kalender [Foto Wesemüller-Kock] 111
3.1.8 Thot, der ibisköpfige Gott des Mondes, der Wissenschaften und des Schrifttums, Herr der Zeit und Rechner der Jahre (Römer- und Pelizaeus-Museum, Hildesheim) [Foto Wesemüller-Kock] 112

3.1.9 Ägyptischer Schreiber (Skulptur im Ägyptischen Museum, Kairo) [Foto Wesemüller-Kock] 113
3.1.10 Zahlzeichen für Angaben von Mengen in Rezepturen (Relief im Laborraum des Horus-Tempels von Edfu) [Foto Wesemüller-Kock] 115
3.1.11 Pyramidenstumpf-Aufgabe im Moskauer Papyrus [Neugebauer 1969, S. 127] 119
3.1.12 Figuren zur Deutung von Aufgabe 10 Papyrus Moskau; nach [Neugebauer 1969, S. 136f.] 120
3.2.1 Mesopotamien in der Antike 123
3.2.2 Schreitende Löwen an der Straße zum Ischtar-Tor in Babylon (Rekonstruktion im Vorderasiatischen Museum Berlin) [Foto Alten] 124
3.2.3 Elamische Keilschrift an der Zikkurat von Tschogah Sambil (um 1250 v. Chr.) [Foto Alten] 125
3.2.4 Bildursprung und Entwicklung der Keilschriftzeichen (Zeichnung nach [Wußing 1965, S. 31]) 126
3.2.5 Vergleichende historische Entwicklungen [Neugebauer, 2. Aufl. 1969, S. 41] 127
3.2.6 Stele mit der Gesetzestafel des Königs Hammurapi (Original im Louvre, Kopie im Archäologischen Museum Teheran) [Foto Alten] 129
3.2.7 Graphische Darstellung einer spätbabylonischen Zahlentafel zur Beschreibung periodischer astronomischer Vorgänge (Zeichnung nach [Wußing 1965, S. 53]) 131
3.2.8 Illustration zur Berechnung der Breite der Grabensohle bzw. Dammkrone bei ringförmigem Wall (Ausschnitt aus dem Keilschrifttext BM 85 194) 132
3.2.9 a) und b): Querschnitte von Befestigungen und Wassergräben, c) Ziegelform für Brunnen, d) Zur Berechnung von Belagerungen (Zeichnung nach [Wußing]) 133
3.2.10 Zur Berechnung von $\sqrt{2}$; a) Keilschrifttext YBC 7289 aus der Babylonischen Sammlung Yale, b) Reproduktion des Textes YBC 7289 nach Resnikoff, c) Schreibung dieses Textes mit indisch-arabischen Ziffern im Sexagesimalsystem 135
3.2.11 Figur zum Satz des Pythagoras 136
3.2.12 Plimpton 322, altmesopotamischer Keilschrifttext (Plimpton Library, Columbia University, New York [v.d. Waerden 1966, S. 125]) 136
3.2.13 Vorder- und Rückseite des Keilschrifttextes BM 15 285 [Neugebauer 1935/37, Teil II] 137

3.2.14 Strichzeichnung einer Figur auf der Rückseite des Keilschrifttextes BM 15 285 („Möndchen des Hippokrates“) 138
3.2.15 Figur zur Berechnung des „Pfeiles“ p aus dem Durchmesser d und der Sehne s 138

4.0.1 Griechisch-hellenistische Antike (Karte) 145
4.0.2 Herakles im Kampf mit dem Zentauer Nessos (nach einer athenischen Vase Ende 7. Jh. v. Chr.); Sappho, um 600 v. Chr., Dichterin auf der Insel Lesbos; Homer, etwa 8. Jh. v. Chr. (Brfm. Griechenland 1996, 1970, 1983) 146
4.0.3 Odysseus bei den Sirenen (Römisches Mosaik im Bardo Museum, Tunis) [Foto Alten] 147
4.0.4 Entwicklung der Buchstabenschrift, nach [Menninger 1958, Bd. 2, S. 70] 148
4.1.1 Antiker Rechentisch (Abakus) (Ausschnitt aus der sog. Dariusvase im Nationalmuseum in Neapel) [Wußing 1965, Abb. 37] 151
4.1.2 Die sog. Salaminische Rechentafel [Numismatische Zeitschrift, Bd. 31, Wien 1899] 152
4.1.3 Milesisches Zahlensystem; nach [Menninger 1958, Bd. 2, S. 76] . 153
4.1.4 Denkmal des Pythagoras auf der Insel Samos [Foto Tobies] . . 155
4.1.5 Römischer Handabakus; nach [Menninger 1958, Bd. 2, S. 113] . . 157
4.2.1 Theater von Milet [Foto Alten] 160
4.2.2 Demokrit, Thales, Heraklit [Deutsche Fotothek, SLUB Dresden] . 162
4.2.3 Bibliothek in Ephesos [Foto Wußing] 163
4.2.4 Hadrianstempel in Ephesos [Foto Alten] 164
4.2.5 Die vier Elemente des Empedokles (Brfm. Liechtenstein 1994) . 165
4.2.6 Münze mit Bild des Pythagoras; Satz des Pythagoras (Brfm. Griechenland 1955) 166
4.2.7 Statue vor dem Zeughaus in Berlin. Ein Schüler zeigt die Tafel mit der Figur zum Beweis des Satzes von Pythagoras [Foto Hollewood Media] 167
4.3.1 Tempel des Apollon in Didyma [Foto Alten] 169
4.3.2 Geometrie in der Architektur der griechischen Antike [Foto Alten] 171
4.3.3 Ein Typ von Möndchen des Hippokrates 173
4.3.4 Figurierte Zahlen: Dreieck-, Quadrat-, Rechteck- und Fünfeckzahlen 175
4.3.5 Beweis für die Winkelsumme im Dreieck; Pentagramm, das Ordenszeichen der Pythagoreer 176
4.3.6 Die fünf platonischen Körper: Tetraeder, Hexaeder (Würfel), Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder 176
4.4.1 Die Akropolis von Athen [Foto Alten] 178

4.4.2 Der Parthenon – das berühmteste Beispiel griechischen Tempelbaus [Foto Alten] 178
4.4.3 Sophokles, Aristoteles, Platon (Brfm. Griechenland 1998, 1978, 1998) 179
4.4.4 Veranschaulichung der binomischen Formel (li), Figur zur parabolischen Flächenlegung (re) 184
4.5.1 Der Pharos von Alexandria – eine Rekonstruktion [H. Thiersch: Antike, Islam und Okzident, Leipzig 1909] 187
4.5.2 Die Pompejus-Säule im Serapeum von Alexandria [Foto Alten] 188
4.5.3 Zum Gerät von Antikythera: Großes Bruchstück aus korrodierter Bronze (Nationales Archäologisches Museum, Athen, n^0 15987) [Wikimedia Commons, GNU FDL]; Rekonstruktion (Astronomisch Physikalisches Kabinett, Kassel) [Foto Wesemüller-Kock] 189
4.5.4 Euklid als Lehrmeister nach [Bildarchiv der Universität Leipzig] . 190
4.5.5 Figur zur ursprünglichen Fassung des sog. Parallelenpostulates 192
4.5.6 Druckausgabe der „Elemente“, Anfang des Buches I, Venedig 1509 [UB Leipzig] 195
4.5.7 Tod des Archimedes (Mosaik Städt. Galerie Frankfurt), nach [www.math_inf.uni-greifswald.de] 196
4.5.8 Flächenstücke an der Archimedischen Spirale 197
4.5.9 Manuskript aus dem Archimedes-Palimpsest [Auktionskatalog der Fa. Christies, New York 1998] 199
4.5.10 Figur zur Parabelquadratur des Archimedes 200
4.5.11 Figur zu Aristarchs Berechnung der Abstände zu Sonne und Mond [Heath 1913], [v. d. Waerden 1966, S. 337f.] 201
4.5.12 a) Archimedes und seine Wasserschraube, b) Archimedes und das Gesetz vom Auftrieb, c) Aristarchs Überlegungen zum heliozentrischen System (Brfm.: Italien 1983, Griechenland 1983, 1980) 202
4.5.13 Epizyklische Bewegung von Planeten 203
4.5.14 Ptolemaios (Aus einem Satz von 8 Zusammendrucken aus Anlass des 500. Geburtstages von Copernicus, Brfm. Burundi 1973) 204
4.5.15 Rekonstruktion der Dioptra des Heron (li.: Zeichung [Teubner, Leipzig 1903], [Wikimedia Commons]; re.: Modell im Technischen Museum Thessaloniki, nach [Antike Griechische Technologie, Ausgabe zur Expo 2000, S. 40]) 205
4.5.16 „Vogelgezwitscher“ [Wußing 1965, S. 174] 206
4.6.1 Pantheon, Kuppel mit Opaion [Foto Wesemüller-Kock] 210
4.7.1 Kaiser Justinian (Mosaik in San Vitali in Ravenna) [Foto Alten] 212

4.8.1 Kuppel der Hagia Sophia [Foto Alten] 213
4.8.2 Ausschnitt aus einem byzantinischen Manuskript [Foto Deschauer] 214

5.0.1 Zentren der Mathematik in islamischen Ländern im Mittelalter (Karte) 221
5.0.2 a) Die Kaaba in Mekka, b) Ibn al-Haytam (Brfm.: Saudi-Arabien 1977/79, Pakistan 1963) 223
5.0.3 Umayyaden-Moschee in Damaskus [Foto Alten] 224
5.0.4 Denkmal des Uluġ Beg in Dorpat/Tartu (Estland) [Foto Kästner] 226
5.0.5 Ornamente in der Außenmauer der Großen Moschee (Mezquita) in Córdoba [Foto Alten] 227
5.0.6 Die Alkantara-Brücke und der Alkazar von Toledo [Foto Alten] 228
5.0.7 Geometrische Ornamente an Wänden im Löwenhof der Alhambra in Granada [Foto Alten] 229
5.0.8 ᶜAbd ar-Raḥmān (792–852), Emir von Córdoba; König Alfons VII. (1105–1157), Förderer der Übersetzerschule von Toledo (Brfm. Spanien 1986) 230
5.1.1 a) Al-Fārābī mit Musikinstrument; b) Al-Kindī; c) Al-Bīrūnī (Brfm.: Ägypten 1975, Syrien 1994, Iran 1973) 233
5.1.2 Ibn Rušd (Averroës), Moshe ben Maimon (Maimonides); Ibn Sīnā (Avicenna) (Brfm.: Spanien 1967, Iran 1954) 235
5.1.3 Ibn Ḫaldūn; Al-Ḫwārizmī (Brfm.: Tunesien 1980, Sowjetunion 1983) 237
5.2.1 Kalta Minar (Minarett) in Chiwa, Usbekistan [Foto Alten] . . 238
5.2.2 Erste Seite der ältesten lateinischen Übersetzung einer Arbeit von al-Ḫwārizmī über das indische Rechnen [Folkerts 1997, Tafel I] 242
5.2.3 Stammtafel unserer Zahlzeichen, nach [Menninger 1958] 243
5.3.1 Text eines Vierzeilers von ᶜUmar Ḫayyām in persischer Sprache [Wikimedia Commons, GNU-FDL] 247
5.3.2 Omar Khayyam (Brfm. Albanien 1997) 248
5.3.3 Figur zur geometrischen Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + a^2x = a^2b$ 249
5.3.4 Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī; Al-Kāšī (Brfm.: Iran 1993, 1979) 250
5.3.5 Kuppel des Grabmals Gur Emir in Samarkand (Anfang 15. Jh.) [Foto Dold] 252
5.3.6 Konstruktion einer Qubba, aus [Dold-Samplonius 1992, S. 176] . 253
5.5.1 Geometrisches Ornament mit floralen Motiven am Mausoleum Usta Ali in Shah-i-Sinda, Samarkand [Foto Alten] 256

5.5.2 Florales und geometrisches Motiv im Kachelschmuck der Freitagsmoschee in Yazd, Iran [Foto Alten] 257
5.5.3 Ulug Beg und Sextant (Brfm. Sowjetunion 1987) 258
5.5.4 Medresse des Ulug Beg am Registan in Samarkand, Usbekistan [Foto Alten] 259
5.6.1 Geometrische Muster des Kachelschmucks von Moscheen in Isfahan [Foto Alten] 261

6.1.1 Römisches Amphitheater in Karthago [Foto Alten] 266
6.1.2 Augustinus; Friede und Eintracht (Brfm.: Vatikan 1954, Algerien 2001) 267
6.1.3 Karl der Große mit Schülern; Karolingische Minuskel; Kirchenslawische Schrift Glagoliza (Brfm.: Frankreich 1966, Andorra 1987, Bulgarien 1969) 270
6.1.4 Karl der Große mit Alcuin und Schülern in der Palastschule [Deutsche Geschichte 1862] 271
6.1.5 Hrabanus Maurus (li.) überreicht mit seinem Lehrer Alcuin dem Mainzer Erzbischof Otgar (re.) eine Schrift (Darstellung in einem Manuskript, Fulda um 830/840) [Wikimedia Commons] 272
6.1.6 Gerbert von Aurillac, dargestellt als Papst Silvester II. auf einem Denkmal in Aurillac [Foto Alten], (Brfm. Frankreich 1984) 273
6.1.7 Illustration eines Gerbertschen Abakus mit indisch-arabischen Ziffern 275
6.2.1 Aufbruch zur Schlacht von Hastings 1066 [Foto Alten] 276
6.2.2 Domesday Book 1086 (Brfm. England 1986) 277
6.2.3 Kirche und Kloster auf dem Mont-St.-Michel, Frankreich [Foto Alten] 279
6.2.4 Maßwerk der flamboyanten Gotik an der Kathedrale von Rouen, Frankreich [Foto Alten] 280
6.3.1 Gedenkfeier zur Gründung der Universität Bologna; Abaelard (Brfm. Italien 1986, Frankreich 1979) 282
6.3.2 Universitätsgründungen im europäischen Mittelalter (Karte) 283
6.3.3 Collegium Maius [Bildarchiv Preußischer Kulturbesitz, Berlin] (Fotograf unbekannt, Krakau um 1980) 285
6.3.4 Hierarchie der mittelalterlichen Wissenschaften, (Sinnbildliche Darstellung aus der Margarita Philosophica) [Gregor Reisch, Freiburg 1505] 286
6.3.5 Albertus Magnus, Wandmalerei im bischhöflichen Seminar von Treviso, von Tommaso de Modena, 1352 [Bildarchiv Preußischer Kulturbesitz, Berlin] 287
6.3.6 Thomas von Aquin (Brfm. Vatikan 1974) 288

6.3.7 Triforium und Obergaden der Kathedrale von Lincoln, England [Foto Alten] 290
6.3.8 Gebrauch des Jakobstabes zur Vermessung, aus [Apianus, Introductio geographica 1532], [Wikibooks.org] 291
6.3.9 Merton-College in Oxford [Foto Gottwald] 292
6.3.10 Inschrift über einem Portal der Universität Oxford [Foto Gottwald] 293
6.3.11 Nicole Oresme, Miniatur aus dem Traité de l'espère (Bibliothéque Nationale, Paris, fonds français 565, fol. 15) [Wikimedia Commons] 294
6.3.12 Figur zur Theorie der Formlatituden 295

7.0.1 Leonardo da Vinci (Brfm.: Monaco 2002, Albanien 1969) 303
7.0.2 Blick in eine Rechenstube (Klatovskys Rechenbuch, Prag), aus [Acta historiae, New Series, Vol. 1 1997, S. 168–195] 305
7.0.3 Titelblatt von *De revolutionibus* [UB Leipzig] 306
7.1.1 Windrose in Sagres, Portugal [Foto Wußing] 307
7.1.2 Flugbahn eines Geschosses [Die new Buchsenmeisterey 1547] . . . 308
7.1.3 Kuppel der Peterskirche in Rom [Foto Alten] 309
7.1.4 Größenverhältnisse am Kopf (Beschriftung in Spiegelschrift, Handzeichnung von Leonardo da Vinci 1488/89) [www.drawingsofleonardo.org] 310
7.2.1 Sieg des Ziffernrechnens über das Abakusrechnen (Zeitgenössische Darstellung von 1504) [Reisch: Margarita philosophica] 311
7.2.2 Dut is de garen mathe (Dies ist das Garnmaß); Inschrift am Rathaus von Hildesheim [Foto Wesemüller-Kock] 312
7.3.1 Die „Fibonacci-Zahlen" im Liber abbaci [Biblioteca Nazionale de Firenze, Codice Magliabechiano c.s. c.1.2616, fol. 124r], [Wikimedia Commons] 316
7.3.2 Luca Pacioli mit seinem Schüler Guidobaldo, Herzog von Urbino (Jacopo de Barbari 1495) [Museo Nazionale di Capodimonte, Neapel], [Wikimedia Commons] 319
7.4.1 Titelblatt des *„Whetstone of Witte"* von Robert Recorde 1557 323
7.4.2 Titelblatt von S. Stevin: „De Beghinselen des Waterwichts" (S. Stevin um 1600) 325
7.4.3 Simon Stevin, Pedro Nunes (Brfm. Belgien 1942, Portugal 1978) 326
7.4.4 Rua da matemática in Coïmbra, Portugal [Foto Alten] 327
7.5.1 Seite 13 aus dem Bamberger Rechenbuch von 1483 329
7.5.2 Rechen- und Zahltisch im Basler Rathaus [Historisches Museum Basel] 330
7.6.1 Titelblatt der 4. Auflage des zuerst 1489 in Leipzig gedruckten Rechenbuches von Widmann 333

7.6.2 Adam Ries (Brfm. BRD 1992) 335
7.6.3 *Rechnung auff der linihen*; erstes Rechenbuch von Adam Ries, 2. Auflage 1525 336
7.6.4 Titelblatt des zweiten Rechenbuches *Rechnung auff der Linien vnnd Federn* 337
7.6.5 Denkmal von Adam Ries in Annaberg-Buchholz [Foto Wußing] 338
7.6.6 Einführung der cossischen Symbole [Ries, Coß, S. 109] 339
7.6.7 Titelblatt der Coß von Abraham Ries 340
7.6.8 Titelblatt der von Stifel herausgebrachten „Coß“ Christoph Rudolffs (1553) 341
7.7.1 Titelblatt der ersten Druckausgabe Euklid, Venedig 1482 (von Erhard Ratdolt, 25.V. 1482) [Stadtbibliothek Nürnberg, Sign.: 4° Auct. Gr. IV, 3743] 347
7.7.2 Titelblatt der Euklidausgabe in der Übersetzung durch Clavius [UB Leipzig] 348
7.7.3 Zur Erinnerung an Pedro Nunes und Heinrich den Seefahrer (Briefmarken-Block, Portugal 2002) 350
7.7.4 Projektionen der Erdkugel auf ebene Karten; Mercators Karte der Arktis in [Septentrionalium Terrarum descriptio, Duisburg 1623], [Wikimedia Commons] 351
7.7.5 Titelkupfer zum dreibändigen Kartenwerk Mercators [Wikimedia Commons] 352
7.7.6 Gerhard Mercator; Abraham Ortelius [Wikimedia Commons; en. wikipedia] 353
7.7.7 Stadtansicht von Nürnberg (aus Schedels Weltchronik) [UB Leipzig] 354
7.7.8 Albrecht Dürer, Selbstportrait 1498 [Museo Nacional del Prado, Madrid], [Wikimedia Commons] 355
7.7.9 Mechanische Erleichterung perspektivischen Zeichnens [Underweysung 1525] 357
7.7.10 Parabolischer und hyperbolischer Schnitt eines Drehkegels [Underweysung 1525] 358
7.8.1 Siegel der Universität Wien, gegründet 1365; 600. Geburtstag des Johannes von Gmunden (Brfm.: Österreich 1965; 1984) 360
7.8.2 Titelblatt der „Epitoma“ [Johannes Regiomontanus Epitoma, in: Almagestum Ptolemaei 1496] 362
7.8.3 Der ungarische König Matthias I Corvinus; Bibliothek Corvina (Brfm.: Ungarn 1970, 1973) 363
7.8.4 Liste der von Regiomontanus geplanten Druckausgaben (Ausschnitt) 365
7.8.5 Johann Regiomontanus; Nicolaus Copernicus (Porträt aus Thorn 16. Jh.), [Wikimedia Commons] 368

7.8.6 Nicolaus Copernicus (Brfm. BRD 1973) 368
7.8.7 Stadtansicht Krakau; kolorierter Holzschnitt 1493 [Schedelsche Weltchronik 1492], [Wikimedia Commons] 369
7.8.8 Collegium maius in Krakau (Polen 1971) 371
7.8.9 Handzeichnung von Copernicus zum heliozentrischen System [Wikimedia Commons] 373

8.1.1 Accademia dei Lincei; Francis Bacon (Ausschnitt aus Brfm. Italien 2003), [Wikimedia Commons] 382
8.1.2 Handschrift von Leibniz [Niedersächsische Landesbibliothek Hannover, Handschrift LH XXXV, VIII, 18 Bl. 2^r] 385
8.1.3 Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg [Foto Alten] . 386
8.2.1 Girolamo Cardano, Niccolò Tartaglia [Wikimedia Commons] . . 389
8.2.2 Titelblatt der *Ars magna, sive de regulis algebraicis* [Girolamo Cardano, Nürnberg 1545] 391
8.2.3 Titelblatt von *L'Algebra* [Rafael Bombelli, Zweite Auflage 1579] . 393
8.2.4 Titelblatt des Buches „DE AEQVATIONVM RECOGNITIONE ET EMENDATIONE TRACTATUS DVO“ von F. Vieta, Paris 1615 [Bayerische Staatsbibliothek München] 397
8.3.1 René Descartes (Gemälde von Frans Hals 1648, Musée du Louvre, Paris) [Wikimedia Commons] 400
8.3.2 Königliche Embleme am Tor zum schwedischen Königshof [Foto Alten] 401
8.3.3 Titelblatt des Buches *Discours de la méthode* [René Descartes 1637] 402
8.3.4 Zur Grundvorstellung der analytischen Geometrie bei Descartes 403
8.3.5 Multiplikation von Strecken nach Descartes 405
8.3.6 Der Große Fermatsche Satz (Brfm.: Frankreich 2001, Tschechien 2000), [Barner 2001] 407
8.3.7 Johann van Waveren Hudde, Johan de Witt [Wikimedia Commons], [Wikipedia.org] 410
8.4.1 Titelbild des Werkes von Samuel Marolois (1628) 412
8.4.2 Figur zum Satz von Pappos 413
8.4.3 Pascalsches Sehnensechseck: a) allgemeiner Fall; b), c), d) Spezialfälle 414
8.4.4 Blaise Pascal (Brfm. Frankreich 1962) 415
8.4.5 Paul Guldin [Universität Graz] 417
8.5.1 Zeitgenössisches Portrait von J. Bürgi; Globusuhr von Bürgi [Ausschnitt aus dem Titelkupfer zu Benjamin Bramers Bericht über Bürgis Triangularinstrument, Kassel 1648], (DDR 1972) 419
8.5.2 Prinzipskizze zum Gebrauch der Neperschen Rechenstäbe [Wußing 1989, S. 149] 420

8.5.3 Skizze von Schickard zu einer Maschine (sog. Stuttgarter Skizze, Siemens-Museum München) [Schickard 1978, S. 289] . . . 421
8.5.4 Rekonstruierte Schickardsche Rechenmaschine (Brfm. BRD 1973) . . . 422
8.5.5 Rechenmaschine „Pascaline“ (Mathematisch-Physikalischer Salon Dresden) . . . 423
8.5.6 Zeichnung einer Rechenmaschine mit je drei Schalt- und Resultatwerken, ca. 1673. [Niedersächsische Landesbibliothek Hannover, LH XL II, 5, Bl. 23^r] . . . 425
8.5.7 Die Rechenmaschine von Leibniz [Niedersächsische Landesbibliothek Hannover] . . . 426
8.6.1 Zur Frühgeschichte der Analysis: Hauptlinien der ideengeschichtlichen Entwicklung . . . 428
8.6.2 Graphische Herleitung des Fallgesetzes [Wußing 1989, S. 155] . 430
8.6.3 Figur zur Berechnung der Antriebskraft eines oberschlächtigen Wasserrades (Eigenzeichnung nach Jacob Leupold) . . . 432
8.6.4 Bildliche Darstellung der Abstandsverhältnisse von der Sonne und fünf Planeten mit den ineinander geschachtelten Platonischen Körpern [Mysterium Cosmographicum, Tübingen 1596, Tafel III], [Wikimedia Commons] . . . 434
8.6.5 Denkmal Brahe/Kepler in Prag [Foto Schreiber] . . . 435
8.6.6 Tycho Brahes Beobachtung mit dem Mauerquadranten [Astronomiae Instauratae Mechanica, Wandsbek 1598], [Wikimedia Commons] . . . 436
8.6.7 Kepler; Keplers tastende Versuche, die Bahn des Planeten Mars aus Kreisbogenstücken und Ovalen zusammen zu setzen (Brfm.: DDR 1971, BRD 1971) . . . 437
8.6.8 Titelblatt eines Visierbüchleins [J. Frey, Nürnberg, 15. Jh.] . . . 438
8.6.9 Figur zur Infinitesimalgeometrie Keplers bei der Kreisflächenbestimmung . . . 439
8.6.10 Grundvorstellung zum Cavalierischen Prinzip (Eigenzeichnung nach [Wußing 1989, S. 169]) . . . 441
8.6.11 Figur zur Berechnung des Kugelvolumens . . . 442
8.6.12 Cavalieri, Torricelli [Wikimedia Commons] . . . 443
8.6.13 Figur zum Volumen eines Rotationshyperboloides . . . 444
8.6.14 Christiaan Huygens; Ergebnisse der Forschung von Huygens und Newton (Brfm. Niederlande 1928, 1988) . . . 445
8.6.15 Zur Volumenberechnung einer Pyramide nach der Indivisibelnmethode . . . 445
8.6.16 John Wallis (Kupferstich von W. Fairthorne 1668) . . . 446
8.6.17 Konstruktion einer Tangente an die quadratische Parabel nach Fermat . . . 449
8.6.18 Blaise Pascal, Pierre de Fermat [Wikimedia Commons] . . . 450

8.6.19 Das charakteristische Dreieck bei Pascal 451
8.7.1 Newtons Grabmal in der Westminster Abtei [Foto Wußing] . . 455
8.7.2 Legende vom fallenden Apfel; Veranschaulichung von Newtons Farbentheorie (Brfm. Großbritannien 1987) 457
8.7.3 Newtons Wohnung im Trinity College [Foto Wußing] 457
8.7.4 Isaac Newton [Gemälde von G. Kneller 1702, National Portrait Gallery London], [Wikimedia Commons] 458
8.7.5 Titelblatt des Buches *The Method of Fluxions and Infinite Series*, London 1736 460
8.7.6 George Berkeley, Spinoza (Brfm. Irland 1985, Israel 2002) 463
8.7.7 Porträt von Leibniz [Historisches Museum Hannover] 465
8.7.8 Ruhestätte von Leibniz in Hannover [Foto Gottwald] 466
8.7.9 Reproduktion Originalhandschrift Leibniz [Niedersächsische Landesbibliothek Hannover, Signatur LH XXXV, VIII, 18, Bl. 2^v] . . . 469
8.7.10 Ramón Llull (Raimundus Lullus) [Foto Kästner] 470

Personenverzeichnis mit Lebensdaten

Bei den Lebensdaten bedeutet „ca.“ grob geschätzt, „um 370“ +(−) kleine Fehler, „370?“ wahrscheinlich 370, aber es ist nicht ganz sicher.

Abaelard, Petrus (1079–1142), 284
Abū Kāmil, *siehe* Kāmil
Abū l-Wafāʾ, *siehe* Wafāʾ
Adelard von Bath (1080–1160), 276, 278
Aischylos, 146
al-Baġdādī, *siehe* Baġdādī
al-Battānī, *siehe* Battānī
al-Bīrūnī, *siehe* Bīrūnī
al-Fārābī, *siehe* Fārābī
al-Farġhānī, *siehe* Farġhānī
al-Karaǧī, *siehe* Karaǧī
al-Kāšī, *siehe* Kāšī
al-Qalaṣādī, *siehe* Qalaṣādī
al-Uqlīdisī, *siehe* Uqlīdisī
Alberti, Leon Battista (1404–1472), 319, 359, 411
Albertus Magnus, Graf von Bollstädt (ca. 1208–1280), 285, 287, 288
Alcuin von York (735–804), 60, 269, 272
Alexander, Andreas, 332
Alexander der Große (356–323), 107, 124, 146, 186
Amann, Fridericus (gest. 1464/65), 331, 332
Amenophis II., 106
Ammei, Aida (1747–1817), 79
Ammonios (ca. 445–ca. 515), 212, 213
an-Nayrīzī, *siehe* Nayrīzī
Anaxagoras (ca. 500–428), 159, 162, 172, 215
Anaximandros von Milet (ca. 611–546), 159, 161, 350
Anaximenes (ca. 585–525), 159, 161
Annibale della Nave, 387
Anthemios von Tralleis (gest. 534), 213
Antiphon (um 430 v. Chr.), 172, 215
Apollonios von Perge (262?–190 v. Chr.), 104, 146, 184, 188, 194, 201–203, 211, 213, 214, 216, 217, 231, 255, 278, 302, 365, 398, 399, 408
Aquino, Thomas von (1225/26–1274), 236, 278, 285, 288
Archimedes (287?–212 v. Chr.), 59, 88, 118, 146, 152, 153, 170, 186, 188, 194–198, 200–202, 211, 213, 214, 216, 217, 231, 260, 278, 296, 302, 321, 365, 370, 388, 427, 432, 433, 439, 440, 442
Archytas (ca. 428–365 v. Chr.), 177, 179, 181, 216
Aristaios (um 330 v. Chr.), 202, 408
Aristarch von Samos (ca. 310–230 v. Chr.), 200, 201, 216, 370
Aristophanes, 146, 151, 172
Aristoteles (384–322 v. Chr.), 8, 144, 146, 149, 156, 159–161, 163, 165, 170, 174, 186, 187, 191, 193, 212, 232, 234–236, 285, 287, 291–294, 296, 302, 365, 374
Āryabhaṭa I, 94, 99
as-Samawʾal, *siehe* Samawʾal
Ashoka Maurya (3. Jh. v. Chr.), 89
aṭ-Ṭūsī, *siehe* Ṭūsī
Atahualpa, 38
Augustinus von Hippo (354–430), 265, 266
Aurillac, Gerbert von, *siehe* Gerbert
Averroës, *siehe* Rušd, Ibn
Avicenna, *siehe* Sīnā, Ibn

Bacon, Francis (1561–1626), 379, 381, 383, 448
Bacon, Roger (ca. 1214–1294), 288, 289
Baġdādī, Abu Mansur ibn Tahir al- (980–1037), 241
Banū Mūsā (Muḥammad, gest. 872, Aḥmad und Ḥasan), 255, 260
Barocius, Franciscus (1537–1604), 278
Barrow, Isaac (1630–1677), 427, 441, 452–454, 459, 473
Bartolo, Giovanni di, 318
Battānī, al- (?850–929), 231, 364

Beeckman, Isaac (1588–1637), 400, 429
Beg, Uluġ (1409–1449), 225, 251, 259
Behaim, Martin (1459–1507), 354
Bélidor, Bernard Forest de (1697–1761), 432
Benedetto von Florenz, 317
Berkeley, George (1685–1753), 463, 464
Bernoulli, Daniel (1700–1782), 384
Bernoulli, Jakob, 406, 470
Bernoulli, Johann (1667–1748), 406
Bessarion (ca. 1403–1472), 361, 363, 364
Bhāskara I (um 522), 94
Bhāskara II (1114–1185?), 60, 92, 94, 95, 101
Bingham, Hiram , 38
Birkhoff, George, 51
Bīrūnī, al- (973–1048), 92, 94, 231, 233, 234, 244
Boethius, Anitius Manlius Torquatus Severinus (475/480–524), 268, 296, 321
Bombelli, Rafael (1526–1572), 313, 326, 387, 392, 394, 397
Boncampagni, Baldassarre (1821–1894), 313
Borelli, Giovanni Alfonso (1608–1679), 383
Boskovitsch, Roger (1711–1787), 416
Boyle, Robert (1627–1691), 381
Bradwardine, Thomas (1290?–1349), 288, 291–293, 297, 440
Brahe, Tycho, 51, 363, 379, 420, 434
Brahmagupta (598–nach 665), 94, 101
Braun, Anton, 426
Briggs, Henry (1561–1630), 419, 420
Brouncker, William (1620?–1684), 381, 458
Brudziewski, Albert Blar (1455–1597), 297
Brunelleschi,Filippo (1377–1446), 318, 358
Bruno, Giordano (1548–1600), 295, 380
Bryson von Herakleia (um 410 v. Chr.), 172, 173, 216
Buddha, 88, 89, 97
Bülfinger, Georg Bernhard (1693–1750), 384
Bürgi, Jost (1552–1632), 342, 418
Burkhardt, Jacob, 301

Caesar, Gaius Julius, 112, 146, 188
Campanus von Novara (?–1296), 278, 320, 321
Cantor, Moritz (1829–1920), 442, 447, 466
Cardano, Girolamo (1501–1576), 313, 318, 320, 321, 326, 328, 334, 335, 341, 342, 387–390, 392, 406
Cassini, Giovanni Domenico (1625–1712), 349
Cavalieri, Bonaventura (1598–1647), 76, 292, 308, 427, 432, 440–442, 445–447, 452, 459, 466
Champollion, Jean-François (1790–1832), 109
Chefren, 105
Cheops, 105
Chester, *siehe* Robert von Chester
Chishō, Imamura, 74
Chokuyen, Ajima (1739–1783), 79
Chongzhi, Zu (429/430–500/501), 59
Choresmi, al-, *siehe* Ḫwārizmī
Chryppfs, Nikolaus, *siehe* Nikolaus von Kues
Chuquet, Nicolas (ca. 1445– ca. 1488), 321, 331, 386
Clavius, Christopher (1537–1612), 51, 255, 327, 343, 346, 416, 433
Collins, John (1624–1683), 472
Columbus, *siehe* Kolumbus
Comenius, Jan Amos (1592–1670), 372
Commandino, Federico (1509–1575), 278, 427, 432, 433, 439
Cook, James (1728–1779), 379
Copernicus, Nicolaus (1473–1543), 182, 201, 295, 298, 301, 307, 334, 366, 368–370, 372, 374, 379, 390, 395
Coriolis, Gustave-Gaspard de (1792–1843), 432
Cortés, Hernán (1485–1547), 28
Cossali, Pietro (1768–1815), 313
Cotton, Walter (gest. 1352), 293
Cremona, *siehe* Gerhard von Cremona
Cremona, Jakob, 278
Cusanus, *siehe* Nikolaus von Kues

da Vinci, Leonardo, *siehe* Leonardo da Vinci
Dalton, John (1766–1844), 166
Damaskios (6. Jahrhundert n. Chr.), 191
Dardi von Pisa, 318
de Morgan, Augustus (1806–1871), 50
Deinostratos, 216
Demokrit von Abdera (460–371), 146, 159, 164, 165, 170, 198, 292, 427, 440
Desargues, Girard (1591–1661), 383, 411, 413
Descartes, René (1596–1650), 343, 344, 379, 380, 390, 394, 399–401, 403–407, 410, 429, 430, 450, 452, 466, 470
Diokles (um 200 v. Chr.), 188
Dionysodoros (2. Jh. v. Chr.), 188
Diophant(os) von Alexandria (vermutlich um 250 n. Chr.), 139, 146, 152, 188, 205, 208, 209, 211, 214, 217, 231, 240, 245, 260, 278, 302, 324, 364, 392, 397
Domninos von Larissa (um 450), 211
Dürer, Albrecht (1471–1528), 304, 354–359

Einstein, Albert (1879–1955), 454
Empedokles (ca. 495–435), 159, 162, 163
Epikur (341–271 v. Chr.), 166, 187
Eratosthenes von Kyrene (276?–194?), 146, 154, 188, 194, 350
Ericson, Leif, 23
Eudemos (um 300 v. Chr.), 211
Eudoxos von Knidos (408?–355?), 146, 156, 170, 181, 182, 184–186, 198, 216, 235, 343, 370, 427, 432
Euklid (360?–290? v. Chr.), 51, 104, 146, 154, 156, 168, 172, 174, 175, 185, 188, 190–194, 205, 206, 211, 212, 214, 216, 231, 232, 234, 235, 246, 248, 254, 268, 276, 290, 296, 297, 302, 315, 320, 321, 343, 346, 349, 388, 452
Euler, Leonhard (1707–1783), 60, 62, 317, 343, 384, 408, 411, 420, 431, 432, 470
Euripides (um 480–407), 146
Eutokios von Askalon (Palästina, geb. ca. 480), 213, 217

Fabri, Henoré (1607–1688), 416
Fan, Wang (?-267), 59
Farġhānī, al-, 364
Fārābī, al- (ca. 870–ca. 950), 232, 233
Faulhaber, Johannes (1580–1635), 400
Fermat, Pierre de (1607–1665), 379, 383, 398, 399, 406–410, 427, 443, 444, 448–450, 452, 467
Fernel, Jean (1497–1558), 349
Ferrari, Lodovico (1522–1565), 320, 321, 326, 388, 390, 392
Ferro, Scipione del (1463?–1526), 313, 318, 320, 321, 326, 367, 387–389
Fibonacci, Leonardo (1170– ca. 1240), 245, 271, 278, 279, 281, 313–315, 317, 318, 386
Filarete, Antonio Averlino (ca. 1400–1469), 359
Fior, Antonio Maria, 387
Fiore, Antonio Maria, 326, 387, 388
Fourier, Jean Baptiste Joseph de (1768–1830), 108
Francesca, Piero della (1410–1492), 318, 319, 359
Frans van Schooten, *siehe* Schooten

Galilei, Galileo (1564–1642), 77, 166, 182, 289, 303, 308, 346, 379–381, 399, 401, 427, 429, 430, 432, 433, 440, 443, 454
Ganeśa (geb. 1507), 94
Gassendi, Pierre (1592–1655), 166
Gauß, Carl-Friedrich (1777–1855), 62, 406
Geminus von Rhodos (um 75? v. Chr.), 170
Gerardi, Paolo, 318
Gerbert von Aurillac (als Silvester II. Papst von 999–1003), 273, 274, 288, 314
Gerdes, Paulus (geb. 1952), 20–22

Gerhard von Cremona (ca. 1114–1187), 225, 240, 255, 277, 278
Gerhart, Friedericus, *siehe* Amann, Fridericus
Gerson, Levi ben (1288–1344), 288, 290
Gilbert, William (1544–1603), 379
Girard, Albert (1595–1632), 405
Glaukon, 180, 181
Goethe, Johann Wolfgang von (1749–1832), 175, 193
Gracilis, Stefan (16. Jh.), 347
Gregor XIII. (Papst von 1572–1582), 112
Gregory, J. (1738–1675), 427, 455, 458, 466
Gresham, Thomas (1519–1579), 381
Grimaldi, Francesco (1613–1663), 416
Grosseteste, Robert (ca. 1168–1253), 288, 289, 293
Grotefend, Georg Friedrich (1775–1863), 126
Grynaeus, Simon (1493–1541), 278, 349
Guericke, Otto von (1662–1686), 379
Guldin, Paul (1577–1643), 209, 416, 427

Hadamard, Jaques (1865–1963), 51
Hahn, Philipp Matthäus (1739–1790), 426
Ḫaldūn, Ibn (1332–1406), 236, 237
Halley, Edmond (1656–1742), 278, 463
Hammurapi, 123, 127, 129
Harclay, Henry (gest. 1317), 293
Harriot, Thomas (1560–1621), 406, 448
Harvey, William (1811–1866), 379
Hatschepsut (1479–1458/57 v. Chr.), 106
Haytam, Ibn al- (965?–1039), 225, 231, 260, 289
Ḫayyām, ᶜUmar al- (1048?–1131?), 231, 244, 247–250, 254, 255
Heinzelin de Braucourt, Jean de (1920–1998), 10
Heng, Zhang (78–139), 58
Heraklit (ca. 544–ca. 483), 159, 162
Hermann von Kärnten (12. Jahrhundert), 278
Hermann, Jakob (1678–1733), 384
Herodot (gest. ca. 424 v. Chr.), 146, 150
Heron von Alexandria (um 60 n. Chr.), 118, 138, 146, 188, 205–207, 231, 245, 255, 302, 365
Hesiod (um 700 v. Chr.), 158, 159, 161
Hikojirô Kenkô Takebe (1664–1739), 78
Hipparch(os) (um 180–127 v. Chr.), 139, 235
Hippasos von Metapont (um 450 v. Chr.), 156, 177, 215, 427
Hippias von Elis (um 420 v. Chr.), 215
Hippokrates von Chios (um 440 v. Chr.), 146, 172, 173, 213, 215
Hippokrates von Kos (ca. 460–370 v. Chr.), 172
Hire, Philippe de la (1640–1718), 415
Hiyya, Abraham bar (1070–1136), 278
Homer (8. Jahrhundert v. Chr.), 146, 158, 161
Honnecourt, Villard de (13. Jahrhundert), 279
Hooke, Robert (1635–1702), 379, 381, 382
Horner, William George (1786–1837), 71, 78, 80
Hudde, Jan (1628–1704), 410
Hui, Liu, 59
Hui, Yang (13. Jahrhundert), 49, 64, 66
Humboldt, Alexander von (1769–1859), 365, 372
Huygens, Christiaan (1629–1695), 379, 383, 407, 427, 444, 466
Ḫwārizmī, Muḥammad ibn Musa al-, 231, 237–242, 244, 245, 255, 258, 274, 276, 278, 315, 317, 328, 331, 332, 335, 342, 386, 388
Hypatia von Alexandria (geb. um 370–415), 146, 211
Hypsikles (2. Jh. v. Chr.), 188, 191, 231

Iamblichos (ca. 250–330 n. Chr.), 154, 177
Ibn Chaldun, *siehe* Ḫaldūn, Ibn
Ibn Ḫaldūn, *siehe* Ḫaldūn, Ibn
Ibn Labbān, *siehe* Labbān, Ibn
Ibn Rušd, *siehe* Rušd, Ibn

Ibn Sīnā (Avicenna) (980–1037), 233, 234, 287
Isidor von Miletos (um 520), 213
Isshu, Omura (1824–1871), 79

Jacopo da Firenze (14. Jh.), 313
Jai Singh, 85, 93
Jiushao, Qiu (ca. 1202–1261), 49, 64
Johannes von Gmunden (ca. 1384–1442), 298, 360, 361
Joung, Th. (1773–1829), 109

Kambei, Mōri, 73–75, 77
Kāmil, Abū(?850–930), 60, 231, 244–246, 279, 386
Karaǧī, Muḥammad al- (gest. um 1029), 231, 243–246, 386
Kāšī, Ǧamsīd ibn Masᶜūd al- (um 1380–1429), 60, 231, 244, 246, 250, 251, 255
Kazuyiki, Sawaguchi, 76
Ken, Hasegawa (ca. 1783–1838), 79
Kepler, Johannes (1571–1630), 95, 182, 289, 303, 349, 372, 379, 418–421, 427, 432–435, 437, 439, 440, 452, 456
Khayyam,Omar, *siehe* Ḫayyām,ᶜUmar al-
Kindī, al- (800?–870?), 231, 232
Kircher, Athanasius (1602–1680), 108, 416
Kisshu, Takahara, 75, 76
Kittoku, Isomura, 75
Kleopatra (69–30 v. Chr.), 106, 186
Knopp, Konrad (1882–1957), 51
Kolumbus, Christoph (1451–1506), 23, 225, 350, 354, 365
Konfuzius (551–479 v. Chr.), 46
Konon von Samos (gest. um 240 v. Chr.), 194, 197
Kopernikus, *siehe* Copernicus, Nicolaus
Koppernigk, Niklas, *siehe* Copernicus, Nicolaus
Koyu, Yoshida (1598–1672), 73–75
Krafft, Georg Wolfgang (1701–1754), 384
Kratzer, Nikolaus (1486/87–1550), 356
Krischna, 94
Křišťan aus Prachatitz (ca. 1366–1439), 297
Krol, Martin, 297
Kṛṣṇa, *siehe* Krischna
Kublai-Khan (1260–1294), 64
Kusaner, *siehe* Nikolaus von Kues

Labbān, Ibn (971–1029), 241
Lacroix, Sylvestre François (1765–1843), 411
Lanz, Johannes (1564–1638), 347
Laotse (6./5. Jh. v. Chr.), 46
Lauchen, Georg Joachim von, *siehe* Rheticus, Joachim
Lehmann, H. J. (1921–1998), 425
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716), 72, 236, 379, 383–386, 399, 406, 414, 424–428, 441, 444, 451–453, 456, 458, 464–468, 470–473
Leon (ca. 800–869), 213
Leonardo da Vinci (1452–1519), 289, 301–304, 320, 358
Leonardo von Pisa, *siehe* Fibonacci, Leonardo
Leukipp aus Milet (oder Abdera, um 460), 164, 165
Leupold, Jacob (1674–1727), 426, 431
Libri, Guglielmo (1803–1869), 313
Linné, Carl von (1707–1778), 379
Liu Hui, 46, 55, 57, 58, 70
Lomonossow, Michael Wasiljewich (1711–1765), 384
Loyola, Ignatius von (1491–1556), 415
Lucas, Henry, 454
Lukrez (97–55 v. Chr.), 166
Lullus, Raimundus (ca. 1232–1316), 470

MacDonnell, Joseph, 416
Maclaurin, Colin (1698–1746), 411, 427
Maestlin, Michael (1550–1631), 349, 419, 433
Mahāvīra (9. Jahrhundert), 94
Maimon, Rabbi Moshe ben (lat. Maimonides; 1135–1204), 231, 233, 236
Maimonides, *siehe* Maimon, Moshe ben

Malapertius, Charles (1581–1630), 347
Marduk (babyl. Gottheit), 128, 132
Martin aus Lenezice (ca. 1405–1463), 297
Matsuzaki, Kiyoshi, 71
Maurolico, Francesco (1494–1575, 278
Maurus, Hrabanus (ca. 780–856), 269, 272
Mazzinghi, Antonio de, 318
Melanchthon, Philipp (1497–1565), 342, 370, 371
Memmo, 278
Menaichmos (um 350 v. Chr.), 181, 202, 216
Menelaos von Alexandria (um 100 n. Chr.), 204, 231, 302
Mercator, Gerhard (1512–1594), 353
Mercator, Nicolaus (1620–1687), 234, 427, 458
Mersenne, Marin (1588–1648), 400
Michelangelo (1475–1564), 359
Möbius, August Ferdinand (1790–1868), 413
Moerbeke, Wilhelm von (ca. 1215–1286), 278
Moivre, Abraham de (1667–1754), 383, 395
Monge, Gaspard (1746–1818), 108, 356
Monte, Guidobaldo del (1545–1607), 359
Morland, Samuel (ca. 1625–1695), 424
Morley, Sylvanus, 32
Moschopulos, Manuel (um 1300), 214

Napier, John (oder Neper, 1550–1617), 342, 418–420
Navier, Claude Louis Marie Henri (1785–1836), 432
Nayrīzī, an- (875?–940?), 255, 258
Nebukadnezar II. (605–562 v.Chr.), 123
Nei, Waden (1787–1840), 79
Neper, *siehe* Napier
Newton, Isaac (1642–1727), 65, 66, 68, 72, 76, 77, 166, 251, 254, 303, 379–381, 398, 399, 410, 411, 427, 430, 441, 444, 448, 452–456, 458, 459, 461–463, 466, 471–473
Nikolaus von Kues (1401–1464), 288, 295, 296, 361
Nikomachos von Gerasa (um 100 n. Chr.), 174, 268, 302
Nikomedes (um 250 v. Chr.), 188
Nofretete (um 1350 v. Chr.), 104, 106
Novara, Domenico Maria di (1454–1504), 366, 369
Nunes, Pedro (lat. Nonius) (1502–1578), 321, 326–328, 353, 386

Ockham, Wilhelm von (ca. 1300–1349/50), 284
Ōjin, 69
Oldenburg, Henry (1618?–1677), 414, 472
Oresme, Nicole (d') (1323–1382), 288, 293, 295
Ortelius, Abraham (1527–1598), 353
Osiander, Andreas (1498–1552), 372, 390
Oughtred, William (1575–1660), 448

Pacioli, Luca (ca. 1445–1517), 301, 313, 318–321, 326, 331, 343, 388
Pappos von Alexandria (um 320 n. Chr.), 146, 209, 211, 217, 278, 302, 408, 411, 416, 432
Parmenides (ca. 540–ca. 480), 159, 163
Pascal, Blaise (1623–1662), 97, 379, 383, 414, 415, 422–424, 448, 450, 451, 466
Pasch, Moritz (1843–1930), 193
Pell, John (1611–1685), 448
Perikles (495?–429?), 146, 162, 177
Perry, Matthew Calbraith (1794–1858), 68
Petreius, Johann, 334, 390
Peuerbach, Georg von (1423–1461), 298, 360, 361, 363–366
Pheidias (5. Jh.v.Chr.), 194
Philolaos (gest. um 390 v. Chr.), 156, 174
Pirckheimer, Willibald (1470–1530), 355, 356
Pizarro, Francisco (1475–1541), 38
Planudes, Maximos (ca. 1260–ca. 1310), 214

Plato von Tivoli (um 1150), 233, 278
Platon (427–347 v. Chr.), 146, 156, 165, 170, 176, 177, 179–183, 191, 203, 205, 207, 293, 302
Poleni, Giovanni (1683–1761), 426
Polo, Marco (1254 – 1324), 49
Poncelet, Jean-Victor (1788–1867), 415, 432
Pragensis, Johannes, *siehe* Šindel, Jan
Praxiteles (4. Jh. v.Chr.), 146
Proklos Diadochos (410–485), 168, 173, 175, 211, 212, 278
Psellos, Michael (1018 bis nach 1078), 214
Ptolemaios, Klaudios (ca. 83– ca. 161), 96, 130, 139, 146, 182, 188, 203–205, 214, 231, 234–236, 259, 302, 321, 350, 355, 361, 365, 432
Pythagoras von Samos (ca. 569– ca. 475 v. Chr.), 134, 146, 154, 166, 174, 175, 293

Qalaṣādī, al- (1400?–1486), 231, 240
Quintilian (ca. 35 – ca. 96), 270

Raido, Arima (1714–1783), 79
Ramses II. (1290–1224v.Chr.), 106, 107
Ramus, Petrus (1515–1572), 395
Recorde, Robert (ca. 1512–1558), 321, 322, 386, 396, 403
Regiomontan(us) o. Johann Müller (1436–1476), 278, 301, 331, 360, 361, 363–367
Reiche, Maria (1903–1998), 36
Reinhold, Erasmus (1511–1553), 346, 374
Rheticus, Joachim (1514–1576), 370–372
Rhind, Alexander Henry (1833–1863), 113
Ricci, Matteo (1552–1610), 51, 346, 349, 416
Richmann, Georg Wilhelm (1711–1755), 384
Ries, Abraham (1533–1604), 334, 337, 338, 340, 344, 345
Ries, Adam (1492–1559), 313, 332, 334–338, 340, 341, 344
Ries, Jacob (?–1604), 334, 337, 340
Robert von Chester (um 1150), 96, 240, 276, 278
Roberval, Gilles Personne de (1620–1675), 427, 444
Roriczer, 279
Roven, René Grillet de (17. Jh.), 424
Rudolff, Christoph (1500?–1545?), 332, 341–343
Rušd, Ibn (lat. Averroës; 1126–1198), 231, 233, 235, 285, 292
Russel, Bertrand Arthur William (1872–1970), 51

Saccheri, Girolamo (1667–1733), 416
Sacrobosco,Johannes de (1207–1256?), 278
Samawʾal, as-(1130?–1175), 244, 246
Sancto Vincentio, Gregorius a (1584–1667), 254, 398, 416, 433, 466
Sankara, 92
Sappho, (um 600 v.Chr.), 146
Savasorda, *siehe* Hiyya, Abraham bar
Scaliger, Joseph Justus (1540–1609), 349
Schall von Bell, Johann (1591–1666), 416
Scheiner, Christopher (1575–1650), 416
Scheubel oder Scheybl, J. (1494–1580), 322
Schickard, Wilhelm (1592–1635), 349, 420–422, 424
Schöner, Johannes (1477–1547), 366
Schooten, Frans van (ca. 1615–1660), 406, 407, 410
Schott, Caspar (1608–1666), 416
Schreyber, Heinrich (ca. 1496–1525/26), 332
Scipio Ferreus, 406
Scotus, John Duns (1265/66–1308), 284
Scotus, Michael (ca. 1175–ca. 1236), 314
Se, Ang Tian, 100
Sēbōcht (Sebocht oder Sēbōkht, Severus), (?–666/67), 100, 241
Seneca, Lucius Annaeus (um 0–65 n. Chr.), 160

Shanlan, Li (1811–1882), 51
Shijie, Zhu (13. Jahrhundert), 49, 64
Shoujing, Guo (1231–1316), 50
Shuki, Koide (1797–1865), 79
Siger von Brabant (1240?–1284?), 236
Silvester II., *siehe* Gerbert von Aurillac
Simplikos (gest. 549), 212
Šindel, Jan (1375–1453), 297
Snellius, Willebrord van Royen (1580–1626), 349
Sokrates (470–399), 146, 159, 180
Solon (ca. 640–561 v.Chr.), 146
Somasutvan, Nīlakaṇṭha (1444 – nach 1501), 95, 97
Sophokles (um 496–406 v.Chr.), 146
Sosigenes (1. Jh. v. Chr.), 188
Spinoza, Baruch (1632–1677), 236, 465
Stevin, Simon (1548–1629), 254, 321, 324, 326, 343, 344, 359, 386, 400, 406
Stifel, Michael (1487–1567), 322, 332, 334, 341–345, 371, 372, 416, 418
Stirling, James (1692–1770), 411
Stöberer, Johannes (lat. Stabius; ca. 1450–1522), 356
Suiko, 69
Sunzi, 53, 62
Swift, Jonathan (1667–1745), 463
Swineshead, Richard (14. Jh.), 295

Ṯābit ibn Qurra (836–901), 231, 255, 260
Tacquet, André (1612–1660), 416
T'ai-tsung, (Kaiser von 627–649), 48
Taishi, Shōtoku, 70
Takakazu, Seki (auch Kôwa, Seki, 1642?–1708), 76–78
Tannery, Jules (1848–1900), 409
Tartaglia, Niccolò (1506–1559), 313, 320, 321, 326, 387–390
Tertullian (ca. 160 – ca. 220), 265
Thales von Milet (um 625 – um 547 v.Chr.), 146, 154, 159–161, 168, 170, 215
Theaitetos von Athen (415–368), 182, 183, 216
Themistokles (524–459), 149
Theodoros von Kyrene (gest. um 390 v. Chr.), 146, 182
Theon von Alexandria (um 330 – um 400), 211
Torricelli, Evangelista (1608–1647), 427, 432, 443, 445
Toscanelli, Paolo dal Pozzo (1397–1482), 301
Ṭūsī, Naṣīr ad-Dīn aṭ- (1201–1274), 231, 244, 250, 253, 258
Ṭūsī, Šaraf ad-Dīn aṭ- (ca. 1135–ca. 1213), 244, 249
Tut-ench-Amun (um 1345 v. Chr.), 104, 106

Uqlīdisī, al- (10. Jh.), 241
Úrihara (9./10. Jahrhundert), 94

Valerio, Luca (1552–1618), 427, 433, 439
Vardhamāna Nathaputta (Ehrentitel Mahavīra; (599–527) bzw. (540–478)), 82, 89
Varro, Marcus Terentius (116–27 v. Chr.), 272
Venerabilis, Beda (ca. 672/73–735), 267
Vieta, *siehe* Viète
Viète, François (1540–1603), 324, 346, 390, 394–399, 405–407, 409, 452, 470
Vincenzo Riccati (1707–1775), 416
Voltaire, François-Marie (eigentl. Arouet; 1694–1778), 431

Wafāʾ, Abū l- (940–998), 231, 243, 254, 255, 386
Wagner, Ulrich (gest. 1489/90), 329
Wallis, John (1616–1703), 258, 381, 410, 427, 443, 445–448, 452, 458, 466
Walther, Bernhard (ca. 1430–1504), 355, 356, 365, 366
Watzenrode, Lucas, 369
Wenting, Mei (1633–1721), 70
Werner, Johannes (1468–1522), 355, 356, 366
Widmann, Johannes (ca. 1460–nach 1500), 297, 332, 367
Wiener, Norbert (1894–1960), 52

Wiles, Andrew (1953), 407
Witelo, Erazmus Ciolek (nach 1220–um 1230/35), 289, 365
Witt, Johan de (1625–1672), 410
Wolgemut, Michael (um 1445–1513), 354
Woods, Thomas Nathan, 71
Wren, Christopher (1632–1723), 381

Xavier, Francisco de Jassu y (1506–1552), 68
Xerxes (reg. 486 bis 465), 150

Ye, Li, *siehe* Zhi, Li
Yixing, Seng (683–727), 48
Yong, Lam Lay, 100

Zamberti, Bartolomeo (geb. ca. 1473), 347
Zenodoros (um 180 v. Chr.), 188
Zenon von Elea (um 495–um 430 v.Chr.), 159, 163, 164, 427
Zeuthen, Hieronymus Georg (1839–1920), 179
Zhi, Li (1192–1279), 49, 64, 66
Zuse, Konrad Ernst Otto (1910–1995), 426

Sachverzeichnis

Abacus, *siehe* Abakus
Abakus, 53, 70, 86, 151, 157, 274, 311, 314, 318, 334
  -Kultur 313
  -Manuskripte 317, 318
  -Schulen 317, 318
Abbacist, 317, 319, 321
Abbasiden, 223
Abbildung, 357
Abbildung der Kugeloberfläche, 349
Abstraktion, 207
Abszisse, 470
Abu Simbel, 107
Abukir, 109
Académie Royale des Sciences, 383
Academia Naturae Curiosorum, 383
Academia Secretorum Naturae, 381
Accademia dei Lincei, 381, 433
Accademia del Cimento, 381
Ackerbau und Viehzucht, 6
Acta Eruditorum, 386
ad fontes, 302
Addiermaschine, 424
Addition, 332
Additions- und Subtraktionsmaschine, 422
aequabitur, 396
aequale, 396
agrarische Revolution, 6
Agrimensoren, 206
Akademie(n), 269, 381, 384, 464
  in Athen 144
  Platonische 187, 211
Akkader, 123, 126
akkadische Keilschrift, 125, 126
Alexandria, 107, 150, 186
alexandrinische Schule, 211
Alfonsinische Tafeln, 360, 361, 364, 374
Algebra, 63, 231, 245, 320, 322, 324, 328, 329, 331, 332, 337, 341, 342, 346, 367, 379, 386, 394, 398, 399, 427, 448, 453, 456
  babylonische 139
  der Muslime 244
  deutsche 331
  Einführung in die 395
  Fundamentalsatz der 405
  geometrische 150, 179
  symbolische 403
Algebraiker, 353
algebraische
  Gleichung(en) 64, 78
  Kalküle 452
  Lösung der kubischen Gleichung 387
  Probleme 94, 118, 279, 317, 367
Algebraschrift, 332
algorismus, 314
Algorismus der Proportionen, 294
Algorithmus, 241
Almagest, 204, 259, 361
Alt- zur Jungsteinzeit, 6
alternierende Reihen, 467
Altes Reich, 105
Altes Testament, 123
altpersische Keilschrift, 126
Anagramm, 472
Analysis, 395, 428
  der unendlich kleinen Größen 411
  Frühgeschichte der 291
  Grundlagen der 464
Angriffe gegen die Infinitesimalmathematik, 464
Antike, 328, 350, 356, 359
antike Astronomen, 370
antike Kegelschnittlehre, 398
Antikythera, 189
Antilogarithmen, 418
Anwendungen der Fluxionsrechnung, 461
apices, 274
Apollonische Kegelschnittlehre, 202
Aquädukte, 210
Architektur, 210
Aristoteles
  Kommentator von 235
  Tradition 234
Arithmetica, 208, 209
arithmetica universalis, 177, 182

Arithmetik, 150, 231, 268, 322, 342, 370, 371, 381
  Schlüssel zur 244, 251
arithmetische
  Folge(n) 418
  Probleme 367
  Reihe(n) 117, 118, 140, 141, 246, 416
Arithmetisierung, 452
  der Algebra 245
  der Indivisibeln-Methode 445
Armillarsphäre(n), 259, 355
ars inveniendi, 467, 470
artes liberales, 268, 269, 284, 346
Artifici, 304, 349, 389
Artistenfakultäten, 284, 327, 329, 361
Assyrer, 123, 148
Assyrien, 124
Astrolab, 234, 238, 259, 274, 361
Astrologie, 131
Astronom, 361, 370
Astronomie, 289, 310, 322, 324, 359, 360, 363, 365, 370, 374, 381, 394, 416
  geozentrische 361
  heliozentrische 201, 366, 370, 380
  mathematische 131
  Umgestaltung der 379
astronomische
  Instrumente 360, 365
  Tafeln 248, 251
Asymptoten, 203
Athen, 149
Atome, 88, 164, 165
Atomistik, 164–166, 170
atomos, 292, 440
attischer Seebund, 144
Aufbau der Zahlenreihe, 7, 8
Aufgaben zur Belagerungsrechnung, 132
Aufklärungsphilosophie, 384
Auflösung von
  algebraischen Gleichungen 342
  Gleichungen dritten Grades 320
  kubischen Gleichungen 392
  kubischen Gleichungstypen 389
Aufriss, 356, 358
Ausbau der infinitesimalen Methoden, 452
Averroismus, 236, 285
Axiome, 192, 193
Azteken, 23, 24, 26

Babylon, 123, 124
babylonische Algebra, 139
babylonische Keilschrift, 125
Baccalaureus, 284
Bagdad, 220
Balkenbiegung, 431
Ballistik, 431
Bamberger Rechenbücher, 329
Bandkeramik, 12, 14
Bartholomäusnacht, 395
Basis, 418
  -winkel 168
  der Zahlensysteme 8
Bayt al-Ḥikma, 220
Beginn des europäischen Mittelalters, 264
Begriff des Gesetzes, 399
Behaimscher Globus, 354
Belopoiika, 205
Berechnung
  der Verpflegung für die Heere 114
  des Kugelvolumens 442
  des Osterdatums 267
  ringförmiger Wallbauten 132
  von Befestigungsgräben 132
  von Brunnenziegeln 132
  von Kanälen 132
  von Steuern und Abgaben 114
  von Tempelfundamenten 132
  von Vorratsbehältern 114
Beringstraße, 24
Beschleunigung, 456
bestimmte Aufgaben, 405
Bestimmung der Maxima, 449
Bestimmung der Minima, 449
Bewegungsgröße, 431
Bewegungsproblem, 430, 431
Bewegungsvorgänge mit beschleunigten Bewegungen, 428
Beweismethoden, geometrische, 278
Bildung von Zahlwörtern, 6
Bildungsmonopol des Klerus, 288
Binomialkoeffizienten, 246
binomische Formeln, 183, 251
binäre Rechenmaschine, 426

Blockbuch, 329
Bögen des Pythagoras, 314
Bogenlängen, 444
Brechungsgesetz, 349
Breite der Dammkrone, 132
Breitenkreise, 353
Brennpunkte, 203
britisches Münzwesen, 453
Bronze, 148
Bruch, 156, 251, 314, 343, 363
Bruchrechnung, 154, 311
Bruchschreibweise
  indische 154
Bruchstriche, 396
Buch der Beispiele, 237
Buchara, 225
Buchdruck, 302, 346
Buchhaltung, 307, 321
Buchstabenrechnung, 341, 395
Buchstabenschrift, 126
byzantinische
  Gelehrte 215
  Mathematik 296
  Zeit 212
Byzanz, 212, 213

Calculus, 444, 452, 464, 466, 467, 472
calculus summatorius, 470
camera obscura, 291
Cardanosche Lösungsformel, 389
Cartesische Zeichenregeln, 406
casus irreducibilis, 395
Cavalierisches Prinzip, 441, 442
censo, 320
Census, 322
charakteristica universalis, 468
charakteristisches Dreieck, 451, 466
Chavinkultur, 24
Chefren, 105
chemische Studien, 453
Cheops, 105
Chichén Itzá, 29
China, 464
chinesisches Restproblem, 315
Christenverfolgungen, 144
Christianisierung, 266
Ciudad de México, 26
Codex Hammurapi, 128
Codex München (Clm 14908), 331
coincidentia oppositorum, 296
Collectio, 209
Collegium Romanum, 346
Computer, 426
Computus, 269, 284
copernicanische Lehre, 401, 434
copernicanisches System, 346, 374
Córdoba, 225
cosa, 320, 390
Coß (Coss), 322, 331, 335, 338, 341, 398
cossische
  Methoden 313
  Schriften 335
  Symbole 332, 334, 335, 338
Cossisten, 331, 334, 386
Cubus, 322
Cuzco, 36

darstellende Geometrie, 356
Dedomena, 193
Definitionen, 192
dekadische Logarithmen, 419
Demokratie, 149
Determinanten, 411
Determinantenschreibweise, 470
deutsche Algebra, 331
Deutsche Coß (Coss), 321, 322, 331
deutsche Fachsprache, 356
deutsche Rechenmeister, 332, 334
Dezimalbruchrechnung
  in Astronomie 324
  in Landmessung 324
  in Tuchmessung 324
  in Weinmessung 324
Dezimalbrüche, 244, 251, 324
dezimales Positionssystem, 344
Dezimalsystem, indisches, 241
Dezimalzahlen, 324
Diadochen-Staaten, 186
Differential, 467
  -begriff 470
  -gleichung 467, 470
  -rechnung 427, 428, 448, 468, 472
  -zeichen 470
Differentiationsergebnisse, 461
Differentiationsregeln, 467
Differenzenquotient, 449

Differenzierbarkeit, 464
Dimensionstreue, 405
Dioptrica, 205
Dioptrik, 403
Division, 116, 416
doctor mirabilis, 289
doctor universalis, 287
Domschulen, 282
Doppelpunkt, 470
doppelte Buchführung, 312, 321
Doppelverhältnis, 413
Dorer, 148
drei semitische Buchstaben, 153
Dreieck(e), 357
  charakteristisches 451, 466
  Inhalt vom 119
  rechtwinkliges sphärisches 324
  sphärische 346, 366
  Winkelsumme im 175, 179
  ähnliche 161
Dreisatz, 312, 329
Dresdener Kodex, 31, 34
Dualsystem, 426
Dynamik, 429

ebene Trigonometrie, 366
ebene und räumliche Koordinaten, 410
ebene und sphärische Trigonometrie, 204, 395
Einführung der christlichen Zeitrechnung, 144
Einhüllende einer Kurvenschar, 443
Einkerbungen auf Knochen, 9
Einschränkung auf Zirkel und Lineal, 182
Einstellwerk, 425
Eisen, 148
elastischer Widerstand, 467
Elea, 163
Eleaten, 163
elementarsymmetrische Funktionen, 398
Elemente, 190, 191, 232
Ellipse, 184, 398
Entfernung der Erde zu Sonne und Mond, 201
Ephemeriden, 366
Ephesos, 162
Epikur, Garten, 187
Epizyklen, 203
Erbrecht, 238
Erdkarte, 161
erforschung der Vnitet, 338
Erste Wettkämpfe in Olympia, 144
Erster Kreuzzug, 144
Erweiterung der Proportionenlehre auf gebrochene Exponenten, 292
Erweiterung des Zahlenbereiches, 307
Erzeugung der Kegelschnitte, 203
Ethnomathematik, 16, 17, 19
Etrusker, 144
etruskische Einflüsse, 157
Euklidausgaben, 346
Euphrat, 122
Euphrat und Tigris, 6
Evoluten, 444
Evolventen, 444
Exhaustion(s), 433
  -methode 260, 443, 444
  -rechnung 433, 452
  -verfahren 185
Experiment, 288, 289, 304
Exponent, 342, 418
Extremwertaufgaben, 452
Extremwerte, 448, 467
Extremwertprobleme, 448

Fadenkonstruktion der Ellipse, 213
Fall, 431
Fallgesetz, 429
Fallproblem, 429
Farben, 456
Farbenlehre, 472
Farbentheorie, 456
Faßrechnung, 437
Feldmesskunst, 349
Feldvermessung, 114
Fermatscher Satz
  großer 407
  kleiner 407
Fermatsches Prinzip, 467
Fibonacci-Zahlen, 315
Fibonaccis Aufgabe, 271
figurierte Zahlen, 174
Fingerzahlen, 314
Fläche von Feldern, 132

Flächen, 429
Flächenanlegung
  mit Defekt 184
  mit Exzess 184
Flächenberechnung, 429
Flächeninhalt
  des Kreises 118
  eines Dreiecks 206
Flächenverzerrung, 353
Fließen, 466
fließende Größen, 430, 453
Fluchtgerade, 309
Fluchtpunkt, 309
Fluenten, 459, 462
Flugbahn, 308
Fluxionen, 459, 461, 462
Fluxionsrechnung, 398, 452, 453, 458, 459, 472
  Anwendungen der 461
Formeln für das algebraische Rechnen, 395
Formlatituden, 295
fortschreitende Sinustafel, 418
Frankenreich, 268
Frühaufklärung, 379, 463
frühe Algebra, 310, 313
Frühformen infinitesimalen Denkens, 432
Frühgeschichte der Analysis, 291
Frühgeschichte der analytischen Geometrie, 295
Frühkapitalismus, 304, 328, 406
Frühmittelalter, 267
Fundamentalsatz der Algebra, 405
Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, 429, 468
Funktion, 357, 470
Funktionsbegriff, 295, 452

Gaußsche Theorie der Kreisteilung, 407
Geldbörse, gefundene, 315, 317
Geldwechsel, 321
Geldwirtschaft, 307, 311
Gelehrtenrepublik, 384
Genealogie der Götter, 158
Geodäsie, 349
Geographie, 324
Geometer, 356
Geometerkatalog, 211
Geometrica, 206
Geometrie, 231, 254, 274, 310, 322, 346, 349, 357, 380, 381, 394, 399, 403, 415, 427
  algebraische 411
  analytische 344, 398, 399, 403, 406–409, 411, 415, 427
  darstellende 309, 427
  Frühgeschichte der analytischen 295
  projektive 411, 415, 427
  räumliche 427
geometrisch geführter Grenzübergang, 430
geometrische
  Folge 418
  Irrationaltitäten 343
  Konstruktionsaufgaben 356
  Reihe 117, 140, 416
  Terminologie 346
  Örter 399, 408, 409
geozentrische Astronomie, 361
Gesamtheit (bei Leibniz), 466
Gesamtheit der Geraden, 441
Geschäftsleben, 321
Geschützwesen, 308
geschweifte Klammern, 396
Gesellschaft Jesu, 346, 416
Gesetze, 233
Gesetze der Zahlenwelt, 168
Gesetzesbegriff, 399
  naturwissenschaftlicher 399
Gilgamesch-Epos, 125
Glaubenssätze, 463
gleich, 342
Gleichheitszeichen, 322, 367, 396, 403, 406, 470
Gleichung(en), 239, 245, 313, 315, 320, 324, 331, 334, 344, 398
  biquadratische 140, 209, 245, 320
  der Geraden 409
  diophantische 60, 209
  dritten Grades 248, 249, 321, 395, 397
  dritten und vierten Grades 318, 386
  echt kubische 318
  einer Kurve 404, 411

ersten Grades 76
ersten und zweiten Grades 94, 335
höheren Grades 64, 65, 76, 79, 101, 246, 342
irreduzible kubische 342
kubische 140, 142, 209, 234, 248, 249, 318, 320, 324, 326, 328, 367
lineare 53, 57, 60, 62, 93, 117, 140, 142, 183, 270, 279, 335
n-ten Grades 405
numerische Auflösung 251
Pellsche 94, 197
quadratische 93, 94, 101, 140, 142, 183, 184, 209, 214, 239, 278, 321, 328, 336, 340, 342, 345, 346, 397
reine 340
Theorie der 321
Typen linearer 331
Typen quadratischer 331
Umformungen äquivalenter 396
unbestimmte 60, 101, 209, 245, 246
vierten Grades 140, 245, 321, 326, 392
zweiten Grades 139
Gleichungslehre von Descartes, 406
Gleichungssysteme, 62, 76, 78, 93, 118, 140, 184, 245, 317, 318
unbestimmte 315
Gleichungstypen, 214, 239, 240, 318
Gleichungswurzeln, 398, 405
Globus, 353, 354
Goldener Schnitt, 309, 315
Gradmessung, 349
Granada, 225
Gravitationsgesetz, 453
Gravitationstheorie, 454, 456
Gravitationszentren von Körpern, 433
Grenzwert, 427, 447, 462, 464
Grenzwertproblem, 463
Gresham-College, 381, 420, 452
Größenlehre, 427
Großbauten, 25
Grundprinzip, 162
Grundprobleme
der Differentiation 459
der Integration 461
der Wissenschaftlichen Revolution 303
Grundrechenarten, 311, 314, 324
Grundriss, 356, 358
Gründung der Akademien, 384
Gruppen, 411
Guldinsche Regeln, 416

Hagia Sophia, 213
Halbkugel, 121
Halbzylinder, 121
Halleyscher Komet, 274
Handschrift C 80, 332
Harmonie der Zahlen, 174
Harmonielehre, 284
harmonische Teilung, 413
Harpenodapten, 118
Hau-Aufgaben, 117, 270
Hau-Rechnungen, 117
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 453
Haus der Weisheit, 223, 231, 237
hebräische Übersetzungen, 290
heliozentrische Astronomie, 201, 366, 370
heliozentrische Basis, 374
heliozentrischer Ansatz, 370
heliozentrisches System, 200, 372
Hethiter, 148
Hieroglyphen, 105, 108
Hiğra, 220, 222
Himmelsglobus, 161
Himmelskörper, 365
Himmelsphären, 372
Hippokratischer Eid, 172
Hoangho, 6
Hochmittelalter, 274
Hofastrologe, 361
Horoskop, 307
horror vacui, 443
Humanismus, 369
Humanisten, 302
Hundert Vögel, 270, 315
Hydraulik, 324
hydrostatisches Paradoxon, 324
Hyperbel, 184, 202, 203, 408, 409
allgemeine 444

Iatromathematiker, 383
Ideogramme, 125
indirekter Beweis, 462

Indivisibel, 292, 440, 452
Indivisibeln, 440–444, 462, 466
Indizes, 470
Induktion, 448
Indus, 6
Industrielle Revolution, 432
infinitesimale Methoden, 427, 432, 452
Infinitesimalgeometrie, 439
Infinitesimalmathematik, 380, 398, 415, 427, 428, 430–433, 452, 453, 456, 459, 467, 472
  Angriffe gegen die 464
  Grundlagen der 464
  neuzeitliche 432
Infinitesimalrechnung, 172, 277, 407, 414, 427, 437, 439, 444, 450, 458, 467, 471
  Beiträge zur 456
  Leibnizsche 466, 470
  logische Grundlagen Newtons 462
Inhaltsbestimmung, 429
Inka, 23, 24, 36
inkommensurable Strecken, 177
Inkunabeln, 279
inneres Lückenzeichen, 128
Integral, 470
  -begriff 461
  -rechnung 427, 428, 433, 448, 472
  -zeichen 467, 470
  uneigentliches 443
Integration, 442
  als Umkehrung des Differenzierens 461
  der Parabeln 447
  von Differentialgleichungen 461
  von Potenzfunktionen 443
Integrations-(Quadratur)Problem, 461
Integrationsverfahren, 170
Integrierbarkeit, 464
Invisible College, 381
Ionier, 148
Ionische Naturphilosophie, 158, 159
Irrationalität, 244, 246, 251, 343, 427, 461
Irrationalität der Quadratwurzeln, 182
Isfahan, 225, 247
Ishango-Knochen, 10
Islam, 222
islamische Mathematik, 278
islamische Universalgelehrte, 232
Isochrone, 467
isoperimetrische Probleme, 189
Iterationsverfahren, 251

Jagiellonischer Weltglobus, 354
Jahreslänge, 111
Jakobstab, 291
Jesuiten, 347, 415
Julianischer Kalender, *siehe* Kalender

Kaaba, 222
Kairo, 220, 225
Kalender, 366
  altägyptischer 111, 112
  gregorianischer 33, 464
  jüdischer 238
  Julianischer 112, 346, 454, 464
  Mond- 254
  ritueller 28
  Sonnen- 45
Kalenderreform, 188, 289, 346, 366
  gregorianische 395, 416
kalkülhaftes Denken, 427
Kaninchenproblem, 315
Kanon der Heilkunst, 234
kanonische Regeln, 309
Karnak, 106
Karolingische Frührenaissance, 268
Karolingische Minuskel, 270
Kartesische Koordinaten, 406
Karthago, 148
Kartographie, 349, 350, 354
Kathedralschule in York, 269
katholisch-orthodoxer Dogmatismus, 288
katholische Theologie, 285
Katholizismus, 395
Katoptrik, 194
kaufmännisches Rechnen, 311, 314
Kegelprojektion, 350, 351
Kegelschnitte, 202, 289, 357, 398, 409, 410, 414
  Erzeugung der 203
  projektive Erzeugung der 203
Kegelschnittlehre, 184, 202, 398, 399, 411, 415, 427
  antike 398

Apollonische 202
Keilschrift, 125
akkadische 125, 126
altpersische 126
babylonische 125
Keilschrifttexte, 125, 132
Keilschriftzeichen, 125, 128
Keplers Logarithmentafeln, 419
Keplersche Gesetze, 435
Kerben und Ritzungen auf Knochen, 6
Kettenlinie, 431, 467
Kirchenväter, 265, 284
Klassifikation der
(quadratischen) Irrationalitäten 183
Kegelschnitte 411
Kurven dritter Ordnung 398
quadratischen Gleichungen 239, 246, 278, 315
klassische Periode, 25
Klöster, 328
Knotenschnüre, 37
Kodex C 411, 338
Kometenbeobachtungen, 361
Kommentare, 211
Kompass, 367
Komplanation von Rotationsflächen, 444
Kompressionsmethode, 185, 433
Kongruenzsatz, 168
Konika, 202, 255
Konstantinopel
Eroberung 144
Konstruktion, 361
astronomischer und geodätischer Instrumente 420
des regelmäßigen Fünfecks 175
mit Zirkel und Lineal 181, 296
von Sonnenuhren 366
Konstruktionen
mit fester Zirkelöffnung 255
Kontingenzwinkel, 235, 349
Kontinuum, 292, 293
Konvergenz, 464
Konvergenz-Kriterium, 467
Konzil von Nicäa, 144
Koordinaten, 410
Koordinatengeometrie, 410
Koordinatensystem, 406
Körper, 429
halbreguläre 324
platonische 176, 232, 357
reguläre 324
Kosekans, 258
Kosinus, 258, 419
Kosinussatz, 364, 366
Kosmogonie, 165
Kotangens, 258
Kraft, 456
Kraftbegriff, 431
Kraftmaß, 431
Kreis, 357
-berechnung 255
-fläche 119
-quadratur 172, 349, 366, 395, 427
-umfang 253, 255
Kreuzzüge, 274, 361
Krise der griechischen Mathematik, 179
Krümmung, 411
Krümmungsmittelpunkt, 203
Kubaturen, 443, 445
Kubikwurzeln, 130
kubische Hilfsgleichung, 392
Kugelinhalt, 433
Kugelvolumen, 260, 442
Kulturgefälle, 265
Kunst der Perspektive, 359
Kuppelkonstruktionen, 309
Kurven, 429
dritten Grades 410
dritter und vierter Ordnung 411
höheren Grades 427
m-ter Ordnung 411
zweiter Ordnung 409
Kurventangenten, 449

Landvermessung, 420
Längenkreise, 353
Längenmaße, 130
latitudines, 295
Lehre von den Kegelschnitten, 398
Lehre von Gerade und Ungerade, 174
Leibnizsche Rechenmaschine, 424, 425
Lichtbrechung, 467
Lichtweg, 448
Linearisierung von Ideogrammen, 126

Logarithmen, 294, 366, 416, 418
-system 418
-tafeln 342, 418, 419
dekadische 419
Nepersche 419
siebenstellige 419
Logarithmieren, 140, 420
logarithmisches Rechnen, 342, 416, 418
Logarithmus, 418, 420
-funktion 458
des Tangens 419
Logistica numerosa, 396
Logistica speciosa, 396
Logistik, 150
Londoner Lederrolle, 105, 121
Lösungen algebraischer Gleichungen, 386
Lösungsformel für die kubische Gleichung, 343
Lösungsformel für spezielle Fälle kubischer Gleichungen, 388
Loxodrome, 327, 353
Lucasischer Katheder, 452
Luftdruck, 415
lusona, 21
Luxor-Tempel, 106
Lösen von Exponentialgleichungen, 140

Madrider Kodex, 31
maestri d'abbaco, 311, 317, 367
magische Quadrate, 214
Magister, 284
Makel des Euklid, 349
Maragha, 225
Marathon, 144
Marduk (babyl. Gottheit), 131
Markscheidekunst, 349
Marsbahn, 434
Maschina Arithmeticae Dyadicae, 426
Maß der Kraft, 467
Masse, 456
Maßeinheiten, 312
Mathematik, 363, 394
der Variablen 380, 399, 430
in den Ländern des Islam 222
in der hellenistischen Periode 186
in der ionischen Periode 168
konstanter Größen 430
variabler Größen 431
mathematische
Astronomie 131
Begriffssprache 470
Logik 470
Papyri 113
Prinzipien der Naturwissenschaft 380
Symbolik 403, 470
Matrikel, 283
Matrizen, 411
Maxima, 467
Maya, 8, 17, 23, 24, 28
Maya-Handschriften, 30
Maya-Sprache, 28
Mechanica, 205
Mechanici, 431
Mechanik, 324, 399
praktische 464
theoretische 464
mechanische
Rechenhilfsmittel 420
Rechenmaschinen 426
megalithische Großbauten, 14
Mekka, 222
Memphis, 105
Mengenlehre, 281
Mercator-Entwurf, 353
Meridiane, 353
Mesopotamien, 122
Methode des *sic et non*, 284
Methode des doppelten falschen Ansatzes, 279, 344
Methodenlehre, 198, 401
methodus tangentium inversa, 470
Milet, 159
Minima, 467
minus, 367
Mischungsregel, 289
Mittelalter, 264
mittelamerikanische Völker, 25
Moment
der Fluente 459
der Fluxion 459
der Zeit 459
einer Größe 459
Mondbeobachtungen, 259

Möndchen des Hippokrates, 138, 172, 173
Mondfinsternis auf Jamaika, 365
Mondkalender, 11, 254
Moskauer Papyrus, 113, 117, 119, 121
Multiplikation, 116, 396, 404, 416
  von Potenzen 342
Museion, 187, 188, 190
Musiktheorie, 268, 324
Mykerinos, 105
Myriaden, 153

Nachbau der dezimalen Rechenmaschine, 425
Näherungsformel, 207
Näherungsrechnung, 231
Naturalwirtschaft, 265, 307, 310
Naturphilosophie, 162
naturwissenschaftlicher Lehrstuhl, 454
Navigation, 308, 349, 381, 427
Nazca-Kultur, 35
negative
  Koordinaten 410
  Lösungen von Gleichungen 342
  Potenzexponenten 321, 342
Neigung der Böschung, 132
neolithische Revolution, 6
neolithische Siedlungen, 124
Neoplatonismus, 211, 437
Nepersche Rechenstäbe, 420
Neuassyrisches Reich, 124
Neubabylonisches Zentralreich, 124
Neues Reich, 106
neunte Potenz, 335
Neupythagoreer, 166
Newtonsche Fluxionsrechnung, 470
Nil, 6
Nilhochwasser, 111
Niljahr, 112
Ninive, 123
Nippur, 123
Nord-Yucatán, 29
Normale, 411
Normale und Subnormale, 203
Null, 274
  kardinale 31
  ordinale 32
Null-Symbol, 30
Numeri, 418
numerische Lösung von Gleichungen, 250
numerische Näherungslösungen für kubische Gleichungen, 249
Numerus, 418

Oberflächen, 444
Observatorium, 259
Odyssee, 150
Olmeken, 24
omnes lineae figurae, 441
Optik, 289, 399
Optika, 194
Orakel von Delphi, 173
ordinale Null, 32
Ordinate, 470
Ornamentik, 357
Orphik, 158
Ostkaiser, 269

Palastschule in Aachen, 269
Pantheon, 210
Pappos-Pascal, 411
Papyrus, 202
  Kahun 105
  Kairo 118, 121
  Moskau(er) 105, 113, 117, 119, 121
  Rhind 105, 113, 117–119, 121, 139
  Theben 105
Parabel(n), 184, 398
  -quadratur 427
  -segment 198
  allgemeine 444
  Rektifikation der 444
parabolische Flächenanlegung, 183
Paraboloids, Volumen des, 260
Paradoxien des Zenon, 163
Parallelen
  -axiom 192
  -postulat 192, 248, 255, 290
  -problem 258
Parameterdarstellungen, 410
Pariser Kodex, 31
Parkettierung, 357
Pascaline, 422
Patristik, 265
Peloponnesischer Krieg, 144, 177
Pendel, 431

Pentagramm, 177
Pergament, 202
Pergamon, 201
Periode
  alexandrinische 150
  athenische 150
  hellenistische 150
  ionische 150, 158
Perioden der Entwicklung, 149
periodische astronomische Vorgänge, 131
Peripatetiker, 187
Peripheriewinkel im Halbkreis, 168
Perser, 124, 148
Perspektive, 309, 310, 319, 332, 359
perspektivische Methoden, 411
perspektivische Zeichnens, 357
Pestzug, 454
Petersburger Akademie, 384
Pferdekauf, 315
Phainomena, 194
Pharaonen, 105
Pharos von Alexandria, 187
Philosophical Transactions, 384
Phönizier, 126, 148
phönizisches Alphabet, 144
Plagiat, 472
Planeten, 363
  -bahnen 370
  -beobachtungen 259
  -bewegung 431
  -theorien 370
Platon und die Mathematik, 179
Platonische Körper, 176, 232, 357
Plimpton 322, 135
Pneumatica, 206
Polarkoordinaten, 410
Polis, 149
Porismen, 193
Positionssystem, 26, 30, 214, 342
  dezimales 242, 344
  sexagesimales 130
  vigesimales 30
Postulate, 192
Potenz
  -exponent 320
  -schreibweise 403, 470
Potenzen, 246, 318
  der Unbekannten 315, 322, 342
  der Variablen 321, 332
  mit gebrochenen Exponenten 294
Potenzexponent, 342, 420
präkolumbianisches Amerika, 23
Preußische Tafeln, 346
Primat des Glaubens, 266
Primzahl, 407
Prinzip des Auftriebes, 194
Prioritätsstreit, 471, 473, 474
Projektierung von Bauwerken, 114
Projektion(en), 351, 353
  stereographische 205
projektive Erzeugung der Kegelschnitte, 203
Proportion, 291, 470
Proportionalitäten am Dreieck, 134
Proportionenlehre, 185, 248
Prosthaphairesis, 416, 418
prosthaphairetische
  Formel 366
  Methode 420
Protoklassik, 25
Pseudaria, 193
pśw- oder pesu-Rechnung, 117
Ptolemäer, 107
Ptolemäerreich, 186
ptolemäische Theorie, 369
ptolemäisches System, 370
Punische Kriege, 144, 148
Punkte, 357
Pythagoreer, 154, 159, 164, 166
pythagoreische(r)
  Lehrsatz 139
  Schule 154
  Zahlentripel 136

Quadrant, 361
Quadrat, 367
Quadrat- und Kubikwurzeln, 394
Quadratur, 445, 453
  allgemeiner Parabeln 452
  der Kurven 459
  der Parabel 196, 200, 443
Quadratur-Tangente, 468
Quadratwurzel, 130, 131, 336, 367
  -zeichen 342, 403
  -ziehen 207

aus negativen Zahlen 392
Quadratzahlen, 130
Quadrivium, 214, 215, 268, 284
qubba, 251
Quipu, 37

Rabatttabellen, 324
Radizieren, 248, 343, 420
Raum, 459
Rauminhalt von Prismen, 134
Rauminhalt von Zylindern, 134
Rechenbuch, 344
Rechenbücher, 329, 334
Rechenbüchlein, 312
Rechenmaschine
binäre 426
Rechenmaschine(n), 415, 420, 424, 464
Rechenmeister, 307, 310, 328, 329, 343, 387
Rechenregeln für ganze positive Zahlen, 342
Rechenschule, 334
Rechensteine, 151, 274
Rechenstäbchen, 420
Rechnen
mit Brüchen 329
mit Potenzen 329
mit Proportionen 284
mit Wurzeln 329
rechnerische Auflösung der kubischen Gleichung, 388
Rechnungszahl, 418
Reconquista, 220, 225
reductio ad absurdum, 200
Reformation, 370, 371
regelmäßige Polygone, 427
regula, 441, 442
regula falsi, 244, 313, 334
reguläre
Körper 324
Neunecke 255
Polyeder 176
Polygone 255, 407
Siebenecke 395
Reich der Maya, 28
Reihenentwicklung, 458, 462
Reihenlehre, 453, 458, 472
Reihentheorie, 456
Religion, 463
Renaissance, 277, 282, 289, 300, 318, 343, 350, 354, 359, 379, 381, 411
res, 315, 390
Resultatwerk, 425
Reziprokentafeln, 130
Romanik, 274
Rosetta, 109
Rotationsellipsoid, 433
Rotationshyperboloid, 433
Royal Society, 381–383, 453, 456, 458, 471, 472

Sakkara, 105
Salamis, 144
Samarkand, 225
Sammelhandschrift C 80, 332
Sandrechnung, 153
Satz des Pythagoras, 46, 55, 58, 95, 118, 134, 135, 142, 175, 255, 336
Satz von der doppelten Wahrheit, 284
Sçavans, 384
Schaltwerk, 425
Scharrbilder, 34
Schattenstab, 161
Schleppkurve, 431
Schnurkeramik, 12
Scholastik, 282, 284, 291, 360
scholastische Methode des Beweisens, 289
Schwerpunkt(e), 429
ebener Flächen 198
rotierender Körper 416
schwimmender Körper 198
von Figuren 450
von Rotationskörpern 209
scientia infiniti, 467
Sectio canonis, 194
Sehnengeometrie, 139, 258
Sehnenrechnung, 132, 204
Sekans, 258
seleukidische Zeit, 135, 140
Sesshaftigkeit, 6
Sexagesimalsystem, 128, 130, 139, 152, 244, 251, 258
Siddhāntas, 231
Sinus, 258, 259, 419
Sinus-Tabelle, 346

Sinusgeometrie, 360
Sinussatz, 258, 290, 366
Sinustafel, 258, 363, 364
  fortschreitende 418
Sinustrigeometrie, 258
Sinustrigonometrie, 204
Slawenapostel, 270
Societas Regia Scientiarum, 383
Sona, 20, 21
Sona-Geometrie, 20
Sonnen
  -beobachtungen 259
  -finsternis 161, 361
  -jahr 26, 32
  -stand 254
  -uhr, zylindrische 361
  -uhren 232, 238
Spektralfarben, 453
spezielle Klassen quadratischer Irrationalitäten, 183
spezifischer Ertrag, 140
sphärische Dreiecke, 346, 366
sphärische Trigonometrie, 258, 366
Spiegelteleskop, 453, 456, 472
Spätmittelalter, 274
St. Pauls-Kathedrale, 381
St. Petersburg, 384
Staat, 180, 233
städtische Kultur, 301
Staffelwalze, 424
statisches Moment, 451
Stein von Rosetta, 109
Steinzeitkultur, 7
Stereometrica, 206
Stereometrie, 446
Sternwarte, 258
Stetigkeit, 464
Stoa, 187
Stonehenge, 14
Stoß, 431
Straßensystem, 37
Strecken, 357
Struktur des Kontinuums, 291
Studium regulärer Polyeder, 183
Subtraktion, 116, 332
Sumerer, 123
Sursolide, 322
Susa, 127, 134
Symbole, 240, 394, 396, 409
Symbolik, 367
Symbolik der cossischen Zeichen, 340
symbolische Algebra, 403
Syrakus, 194

Tabellen aller sechs trigonometrischen Funktionen, 395
Täfelchen von Senkereh, 130
Tafeln, 360, 374
Tangens, 258, 259
Tangenstafel, 364
Tangente(n), 411, 449, 452, 467
  -bestimmung 453
  -methode 450
  -problem 429, 448, 450, 451, 467
Tausch, 321
Teilbarkeit, 440
Teiler von Polynomen, 398
Teilung des Römischen Reiches, 144
Tenochtitlán, 26, 28
Teotihuacán, 25, 26
Teppich von Bayeux, 274
Textkritik, 302
Thaleskreis, 138
Theogonie, 159
theologische Fragen, 453
theoretische Logik, 464
Theorie
  der Differentialgleichungen 428, 452
  der Formlatituden 295
  der homozentrischen Sphären 182
  der Irrationalitäten 182
  der Polaren 413
  der unendlichen Reihen 428
  von Pol und Polare 203
Tigris, 122
Toledo, 225, 277
Toleranzedikt, 144
Tolteken, 29
Tontafeln, 124
Torquetum, 361
Tours, 269
Tradierung der antiken Mathematik, 278
transzendente Fragestellungen, 140
Trennung der Ost- von der Westkirche, 144

Triangulation, 349
Trigonometrie, 231, 250, 254, 258, 308, 310, 346, 359, 364, 366
  ebene 366
  ebene und sphärische 204, 395
  sphärische 366
trigonometrische Tafeln, 364
Trinity College, 454
Trivium, 268, 269, 283
Trojanischer Krieg, 144

Umayyaden, 223
Umformtechnik, 396
umgekehrte Tangentenmethode, 470
Umgestaltung
  der Astronomie 379
  der Dynamik 379
  der Mathematik 379
  der Mechanik 379
Umkehrung der Differentiation (Fluxionenbildung), 461
Umkehrung des Potenzierens, 420
Umrechnung verschiedenartigster Währungs-, Gewichts- und Maßeinheiten, 307
Unbekannte, 320, 331, 346, 367, 390
unbestimmte Aufgaben, 405
  mit ganzzahligen Lösungen 345
unendlich ferner Punkt, 413
unendlich klein, 427, 439, 452
unendliche Reihe für $\pi/4$, 467
unendliche Reihen, 395, 420, 458
Unendlichkeitsstufen, 289
Universalienstreit, 284
Universität, 282, 328, 346
  Konstantinopel 213
  Wien 360, 361
Universitätsgründungen, 283
Unteilbarkeit, 440
Unterhaltungsmathematik, 270, 315
Unterricht in Mathematik, 18
Ursubstanz, 161

Variable, 209, 403, 427
variable Größen, 430
Variationsrechnung, 189, 452
Vektoren, 411
Venus, 33
Verdoppelung eines Würfels, 173
Verhältniszahl, 418
Verteilung eines Erbes, 140
Verteilungsaufgaben, 140
vertex, 441
vier Elemente, 162
Viertelkreisbogen, 451
Vietascher Wurzelsatz, 395, 397
virtuosi, 304
Visierkunst, 439
Visierrute, 439
vollständige Induktion, 448
Volumen, 119
  -berechnung 429
  der (Halb-)Kugel 433
  der Kugel 440
  eines Prismas 446
  eines Pyramidenstumpfes 119
Vorsokratiker, 158, 159, 163, 164

Wahrscheinlichkeitsrechnung, 407, 415
Währungssystem, 456
Wechsel von Deduktion und Induktion, 429
Wechselwegnahme, 177
Weltatlas, 353
Weltkarte, 350, 353
Weltsystem von Copernicus, 395
Weltuntergang, 334, 341
Wendepunkte, 411
Werkzeuge, 148
Wert von π, 119
Westkaiser, 269
Wiener Universität, 360
Winkeldreiteilung, 255
Winkelfunktion, 419
Winkelsumme, 168
Winkelsumme im Dreieck, 175, 179
Winkeltreue, 349
Wissenschaftliche Revolution, 301, 374, 379, 399, 427, 454
wissenschaftliche Zeitschriften, 384
Wohnsitz der Weisheit, 225
Wolfsknochen, 10
Wurf, 431
Würfelverdoppelung, 188
Wurzel(n)
  aus negativen Zahlen 394
  dritte 244

n-te 251
negative 321
vierte 244
Wurzelfunktionen, 461

Zahlbegriff, 154, 253, 254, 343
Zahlen
befreundete 244
Fibonacci- 315
figurierte 174
Finger- 314
ganze 363
imaginäre 392
irrationale 321, 344
komplexe 392
natürliche 343
negative 246, 254, 317, 342, 343, 392
negative ganze 343
negative gebrochene 343
positive 342
rationale 321
türkische 324
vollkommene 174, 244, 266, 366
Zahlengerade, 344
Zahlenreihe
Aufbau der 7, 8
Zahlenschreibweise, 307
Zahlenschreibweise, indische, 251
Zahlensystem(e), 151
altägyptisches 114
attisches 151
der Maya 32
Dezimalsystem 151
Fünfersystem 151
herodianisches 151
milesisches 151–153
Sexagesimalsystem 128, 130, 139, 142, 152, 244, 251, 258
vigesimales 8, 30
Zahlentafeln, 130
Zahlentheorie, 231, 248, 407, 408
Zahlzeichen
römische 157, 209
Zeit, 459
Zentralperspektive, 358
Zerlegung von Figuren, 193
Ziffern, 225
Ġubār 225, 243
indisch-arabische 99, 314, 334, 448
indische 238, 274, 314
ostarabische 243
westarabische 243
Zins- und Zinseszinsrechnung, 307, 312
Zinsen, 321
Zinstabellen, 324
Zirkel und Lineal, 181
Zusammenbruch der „arithmetica universalis“, 177, 179
Zweitafel-Verfahren, 356
Zweitafelbild, 356
Zykloide, 443
Zykloidenpendel, 444
Zylinderprojektion, 234, 351
zylindrische Sonnenuhr, 361

Überstreichung von Buchstaben, 470