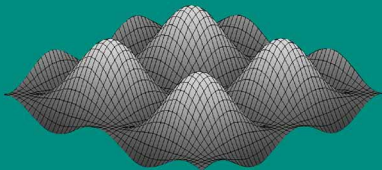


- Klaus Gürlebeck
- Klaus Habetha
- Wolfgang Spröbig

Funktionentheorie in der Ebene und im Raum



Birkhäuser

■ Klaus Gürlebeck
■ Klaus Habetha
■ Wolfgang Spröβig

Funktionentheorie in der Ebene und im Raum

Birkhäuser Verlag
Basel · Boston · Berlin

Autoren:

Klaus Gürlebeck
Institut für Angewandte Mathematik
Bauhaus-Universität Weimar
Coudraystr. 13
D-99423 Weimar
e-mail: klaus.guerlebeck@bauing.uni-weimar.de

Klaus Habetha
Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen
Templergraben 55
D-52062 Aachen
e-mail: habetha@math2.rwth-aachen.de

Wolfgang Sprößig
Institut für Angewandte Analysis
Fakultät für Mathematik
TU Bergakademie Freiberg
Prüferstr. 9
D-09596 Freiberg
e-mail: sproessig@math.tu-freiberg.de

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN 3-7643-7369-5 Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Berlin

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechts.

Das Titelbild veranschaulicht den Betrag der im Abschnitt 11.2.5 definierten quaternionenwertigen Exponentialfunktion in der x_1 - x_2 -Ebene.

© 2006 Birkhäuser Verlag, Postfach 133, CH-4010 Basel, Schweiz
Ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
Gedruckt auf säurefreiem Papier, hergestellt aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff. TCF ∞
Printed in Germany
ISBN-10: 3-7643-7369-5
ISBN-13: 978-3-7643-7369-6

e-ISBN: 3-7643-7430-6

9 8 7 6 5 4 3 2 1

www.birkhauser.ch

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	xi
I Zahlen	1
1 Komplexe Zahlen	2
1.1 Entdeckungsgeschichte	2
1.2 Definition und Eigenschaften	3
1.3 Darstellungen und geometrische Aspekte	10
1.4 Aufgaben	14
2 Quaternionen	15
2.1 Entdeckungsgeschichte	15
2.2 Definition und Eigenschaften	16
2.3 Abbildungen und Darstellungen	24
2.3.1 Basismorphismen	25
2.3.2 Drehungen im $\mathbb{R}^3$	27
2.3.3 Drehungen des $\mathbb{R}^4$	30
2.3.4 Darstellungen	32
2.4 Vektoren und geometrische Aspekte	34
2.4.1 Bilineare Produkte	38
2.4.2 Multilineare Produkte	44
2.5 Anwendungen	47
2.5.1 Visualisierungen der Sphäre S^3	47
2.5.2 Elemente der sphärischen Trigonometrie	49
2.6 Aufgaben	51
3 Clifford-Zahlen	52
3.1 Entdeckungsgeschichte	52
3.2 Definition und Eigenschaften	54
3.2.1 Definition der Clifford-Algebra	54
3.2.2 Strukturen und Automorphismen	57
3.2.3 Absoluter Betrag	60
3.3 Geometrische Anwendungen	63
3.3.1 Spin-Gruppe	63
3.3.2 Konstruktion von Drehungen des $\mathbb{R}^n$	65

	3.3.3	Drehungen des $\mathbb{R}^{n+1}$	68
3.4		Darstellungen	69
3.5		Aufgaben	73
II		Funktionen	75
4		Topologische Aspekte	76
4.1		Topologie und Stetigkeit	76
4.2		Reihen	81
4.3		Riemannsche Sphären	86
	4.3.1	Komplexer Fall	86
	4.3.2	Höhere Dimensionen	89
4.4		Aufgaben	90
5		Holomorphe Funktionen	92
5.1		Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$	92
5.2		Differenzierbarkeit in $\mathbb{H}$	98
	5.2.1	Mejlikhzhons Resultat	99
	5.2.2	$\mathbb{H}$ -Holomorphie	100
	5.2.3	Holomorphie und Differentialformen	104
5.3		Differenzierbarkeit in $\mathcal{C}\ell(n)$	107
5.4		Aufgaben	110
6		Potenzen und Möbiustransformationen	111
6.1		Potenzfunktionen	111
	6.1.1	Potenzfunktionen in $\mathbb{C}$	111
	6.1.2	Potenzfunktionen in höheren Dimensionen	112
6.2		Möbiustransformationen	117
	6.2.1	Möbiustransformationen in $\mathbb{C}$	117
	6.2.2	Möbiustransformationen in höheren Dimensionen	121
6.3		Aufgaben	127
III		Integration und Integralsätze	129
7		Integralsätze und Integralformeln	130
7.1		Cauchyscher Integralsatz und dessen Umkehrung	130
7.2		Formeln von Borel–Pompeiu und Cauchy	133
	7.2.1	Formel von Borel–Pompeiu	133
	7.2.2	Formel von Cauchy	135
	7.2.3	Formeln von Plemelj–Sokhotzki	137
	7.2.4	Zur Geschichte der Formeln von Cauchy und Borel– Pompeiu	142
7.3		Folgerungen aus der Integralformel von Cauchy	145
	7.3.1	Höhere Ableitungen holomorpher Funktionen	145
	7.3.2	Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip	149
	7.3.3	Satz von Liouville	151
	7.3.4	Integralformeln von Schwarz und Poisson	152
7.4		Aufgaben	154

8	Teodorescu-Transformation	156
8.1	Eigenschaften der Teodorescu-Transformation	156
8.2	Hodge-Zerlegung des quaternionalen Hilbertraums	162
8.2.1	Hodge-Zerlegung	162
8.2.2	Darstellungssatz	164
8.3	Aufgaben	165
IV	Reihenentwicklungen und lokales Verhalten	167
9	Potenzreihen	168
9.1	Konvergenzsätze vom Weierstraß-Typ, Potenzreihen	168
9.1.1	Konvergenzsätze von Weierstraß	168
9.1.2	Potenzreihen in $\mathbb{C}$	170
9.1.3	Potenzreihen in $C\ell(n)$	174
9.2	Taylor- und Laurentreihen in $\mathbb{C}$	175
9.2.1	Taylorreihen	175
9.2.2	Laurentreihen	179
9.3	Taylor- und Laurentreihen in $C\ell(n)$	181
9.3.1	Taylorreihen	181
9.3.2	Laurentreihen	188
9.4	Aufgaben	191
10	Orthogonalentwicklungen in $\mathbb{H}$	193
10.1	Vollständige $\mathbb{H}$ -holomorphe Funktionensysteme	193
10.1.1	Polynomiale Systeme	195
10.1.2	Innere und äußere sphärische Funktionen	198
10.1.3	Harmonische Kugelfunktionen	202
10.1.4	$\mathbb{H}$ -holomorphe Kugelfunktionen	204
10.1.5	Vollständigkeit in $L^2(\mathbb{B}_3) \cap \ker \bar{\partial}$	209
10.2	Fourierentwicklung in $\mathbb{H}$	210
10.3	Anwendungen	211
10.3.1	Ableitungen $\mathbb{H}$ -holomorpher Polynome	211
10.3.2	Stammfunktionen $\mathbb{H}$ -holomorpher Funktionen	215
10.3.3	Dekompositionssatz und Taylorentwicklung	221
10.4	Aufgaben	223
11	Elementare Funktionen	226
11.1	Elementare Funktionen in $\mathbb{C}$	226
11.1.1	Exponentialfunktion	226
11.1.2	Trigonometrische Funktionen	227
11.1.3	Hyperbolische Funktionen	230
11.1.4	Logarithmus	231
11.2	Elementare Funktionen in $C\ell(n)$	233
11.2.1	Polare Zerlegung des Cauchy–Riemann-Operators	233
11.2.2	Elementare radiale Funktionen	237
11.2.3	Fueter–See Konstruktion holomorpher Funktionen	243
11.2.4	Cauchy–Kowalewski-Fortsetzung	248

	11.2.5	Trennung der Variablen	253
	11.3	Aufgaben	259
12	Lokale Struktur holomorpher Funktionen		262
	12.1	Nullstellenverhalten	262
		12.1.1 Nullstellen in $\mathbb{C}$	262
		12.1.2 Nullstellen in $C\ell(n)$	265
	12.2	Isolierte Singularitäten holomorpher Funktionen	269
		12.2.1 Isolierte Singularitäten in $\mathbb{C}$	269
		12.2.2 Isolierte Singularitäten in $C\ell(n)$	275
	12.3	Residuensatz und Argumentprinzip	278
		12.3.1 Residuensatz in $\mathbb{C}$	278
		12.3.2 Argumentprinzip in $\mathbb{C}$	281
		12.3.3 Residuensatz in $C\ell(n)$	285
		12.3.4 Argumentprinzip in $C\ell(n)$	287
	12.4	Berechnung reeller Integrale	290
	12.5	Aufgaben	295
13	Spezielle Funktionen		298
	13.1	Eulersche Gammafunktion	298
		13.1.1 Definition und Funktionalgleichungen	298
		13.1.2 Stirlingsche Formel	303
	13.2	Riemannsche Zetafunktion	307
		13.2.1 Dirichletreihen	307
		13.2.2 Riemannsche Zetafunktion	310
	13.3	Automorphe Formen und Funktionen	313
		13.3.1 Automorphe Funktionen und Formen in $\mathbb{C}$	313
		13.3.2 Automorphe Funktionen und Formen in $C\ell(n)$. .	320
	13.4	Aufgaben	334
Anhang			337
	A.1	Differentialformen im $\mathbb{R}^n$	338
		A.1.1 Alternierende Abbildungen	338
		A.1.2 Differentialformen	343
		A.1.3 Aufgaben	350
	A.2	Integration und Mannigfaltigkeiten	351
		A.2.1 Integralbegriffe	351
		A.2.1.1 Integration im $\mathbb{R}^{n+1}$	351
		A.2.1.2 Koordinatenwechsel in Differentialformen	352
		A.2.1.3 Mannigfaltigkeiten und Integration	354
	A.2.2	Sätze von Stokes, Gauß und Green	365
		A.2.2.1 Satz von Stokes	365
		A.2.2.2 Satz von Gauß	365
		A.2.2.3 Satz von Green	367
	A.2.3	Aufgaben	368

A.3	Einige Funktionenräume	371
A.3.1	Räume hölderstetiger Funktionen	371
A.3.2	Räume differenzierbarer Funktionen	372
A.3.3	Räume integrierbarer Funktionen	373
A.3.4	Distributionen	374
A.3.5	Hardy-Räume	375
A.3.6	Sobolev-Räume	375
A.4	Eigenschaften holomorpher Kugelfunktionen	377
A.4.1	Eigenschaften der Legendre-Polynome	377
A.4.2	Norm der holomorphen Kugelfunktionen	378
A.4.3	Skalarprodukte holomorpher Kugelfunktionen	382
A.4.4	Vollständige Orthonormalsysteme in $\mathcal{H}_{n,\mathbb{H}}^+$	384
A.4.5	Ableitungen holomorpher Kugelfunktionen	388
A.4.6	Aufgaben	389
Literaturverzeichnis		391
Index		399

Vorwort

Die *Funktionentheorie*, im englischen Sprachraum auch *Komplexe Analysis* genannt, hat in ihrer mehr als 200jährigen Geschichte eine Vielzahl tieflegender und ästhetischer Ergebnisse hervorgebracht. Im klassischen Verständnis ist die Funktionentheorie die Theorie komplex differenzierbarer Funktionen einer komplexen Veränderlichen oder auch die Theorie der *holomorphen Funktionen*. Diese sind die Lösungen eines (2×2) -Systems partieller Differentialgleichungen, die man üblicherweise Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen (CRD) nennt.

Zwar standen die Algebra der reellen Quaternionen nach W.R. Hamilton seit 1843 und die reellen Clifford-Algebren nach W.K. Clifford seit 1878 zur Verfügung, aber bis in die dreißiger Jahre des vorigen Jahrhunderts war die Auffassung vorherrschend, dass es sich bei der Funktionentheorie um eine rein zweidimensionale Theorie handle. Erst die Gruppe um den Schweizer Mathematiker R. Fueter und die rumänischen Mathematiker G.C. Moisil und N. Teodorescu begannen ab 1930 eine Funktionentheorie in der Algebra der reellen Quaternionen und in Clifford-Algebren zu entwickeln. Beginnend mit dem Ende der 1960er Jahre schuf eine Gruppe von belgischen Mathematikern um R. Delanghe in Gent eine reichhaltige Funktionentheorie in höheren Dimensionen. Seit 1990 hat die Anzahl der einschlägigen Arbeiten sehr stark zugenommen. In der Clifford-Analysis wird heute intensiv geforscht, davon zeugen auch die mehr als 9000 Einträge in unserer Datenbank über einschlägige Literatur, die auf der dem Buch beiliegenden CD zu finden ist.

Mit dem vorliegenden Lehrbuch soll ein erster Versuch gemacht werden, wesentliche Elemente der klassischen Funktionentheorie und ihrer höherdimensionalen Verallgemeinerungen in einer einheitlichen Darstellung für die universitäre Lehre bereit zu stellen. Als Interessenten stellen wir uns Studenten der Mathematik, Physik sowie mathematisch interessierte Studenten anderer Studiengänge ab dem dritten Semester vor. Wir haben uns um eine in sich geschlossene Präsentation des umfangreichen Stoffes bemüht. Dabei werden analytische, geometrische und auch numerische Aspekte berücksichtigt. Geschichtliche Hinweise an manchen Stellen sollen die Entwicklung des Gebietes aufzeigen und wesentliche Persönlichkeiten vorstellen.

Im ersten Kapitel werden die komplexen Zahlen, die Quaternionen und die Clifford-Zahlen eingeführt, wobei wir uns bemüht haben, die Parallelität des Vorgehens

deutlich zu machen. Dabei nehmen natürlich Quaternionen und Clifford-Zahlen deutlich mehr Raum als die komplexen Zahlen ein. Wir behandeln neben den algebraischen und geometrischen Eigenschaften insbesondere auch Drehungen und Darstellungen.

Im ersten Abschnitt des zweiten Kapitels stellen wir die topologischen und analytischen Grundlagen für die Behandlung von Funktionen bis hin zu den Riemannschen Sphären bereit. Dieser Abschnitt ist wegen der Verwandtschaft zur klassischen Analysis bewusst kurz gehalten. Der zweite Abschnitt behandelt dann einige der möglichen Definitionen der Holomorphie, wobei wir diesen Namen auch in höheren Dimensionen beibehalten, denn die Definitionen sind weitgehend dimensionsunabhängig. Die Literatur verwendet hier meist den Weierstraßschen Begriff der monogenen Funktion. Es erscheint uns aber zumindest zweifelhaft, ob dieser die Sachlage am Besten beschreibt (vgl. Schluss des Abschnittes 5). Auch passt die holomorphe Funktion begrifflich besser zur meromorphen Funktion. Übrigens lässt sich seit den Arbeiten von H. Malonek der Holomorphiebegriff über die lokale Approximierbarkeit durch geeignete lineare Funktionen einführen, so dass auch in dieser Hinsicht die Analogie in allen Dimensionen gegeben ist. Der dritte Abschnitt ist "einfachen" Funktionen gewidmet, nämlich Potenzen und Möbiustransformationen. Als Potenzfunktionen sind in höheren Dimensionen die nach R. Fueter benannten Polynome besonders geeignet, die viele schöne Eigenschaften haben. Leider führt die Reduktion der Fueter-Polynome auf den ebenen Fall zu den Potenzen $(-iz)^n$ und nicht zu z^n ; die Parallelität ist aber dennoch gegeben. Den Möbiustransformationen in höheren Dimensionen hat sich insbesondere L.V. Ahlfors gewidmet, auch für diese ist die Vergleichbarkeit für alle Dimensionen deutlich zu erkennen.

Die notwendigen Hilfsmittel zur Integration haben wir in Anhang 2 zusammengestellt, ebenso wie eine kurze Einführung in die Theorie der Differentialformen in Anhang 1. Wir glauben, dass dies hilfreich sein kann, da diese Gebiete in den Anfängervorlesungen häufig nur sehr kurz, wenn überhaupt, behandelt werden. Allerdings verzichten wir auf den Beweis des Integralsatzes von Stokes, da dies zu weit vom Thema wegführen würde. Der Integralsatz von Cauchy und die Integralformel von Borel–Pompeiu sind dann einfache Folgerungen aus dem Satz von Stokes. Wir gehen aber auch auf die Randwertformeln von Plemelj–Sokhotzki ein. Folgerungen aus der Integralformel von Cauchy schließen sich an. Überdies wird die Teodorescu-Transformation untersucht und die Hodge-Zerlegung des quaternionischen Hilbertraumes behandelt. Die dafür notwendigen Funktionenräume werden kurz im Anhang 3 vorgestellt.

Das abschließende Kapitel ist verschiedenen Bereichen der Funktionentheorie gewidmet. Die Taylor- und Laurentreihen stehen an der Spitze. Dabei ist der Aufwand in höheren Dimensionen deutlich größer als in der Ebene, aber die Ähnlichkeit ist natürlich gegeben. Da die Taylorreihe in den Dimensionen größer zwei leider keine Orthogonalentwicklung ist, wird für Quaternionen ein Übergang zu

Orthogonalentwicklungen vorgestellt, der für numerische Zwecke besonders geeignet ist.

Die elementaren Funktionen in der Ebene bieten keine besonderen Schwierigkeiten. Sie sind mehr oder weniger kanonisch gegeben. Es ist ein Kennzeichen aller Übertragungen in höhere Dimensionen, dass ein Königsweg nicht mehr vorhanden ist. So ist es auch hier. Besonders sei auf die verschiedenen Verallgemeinerungen der Exponentialfunktion hingewiesen, wobei einer, die man mit Trennung der Variablen erhalten kann, besondere Bedeutung zukommt. Sie ist ein geeigneter Kern einer Fouriertransformation für quaternionenwertige Funktionen.

Der Abschnitt über die lokale Struktur holomorpher Funktionen zeigt deutlich, dass hier noch ein aktives Feld der Forschung in höheren Dimensionen vorliegt. Die aus der Ebene gewohnten angenehmen Eigenschaften von Nullstellen und isolierten Singularitäten gehen im Raum auf den ersten Blick verloren. Es fehlt noch eine geeignete Sicht, um alle Erscheinungen zu verstehen. Immerhin lässt sich der Residuensatz übertragen, und auch erste Ansätze für das Argumentprinzip wurden gefunden.

Der letzte Abschnitt ist den speziellen Funktionen gewidmet, wobei zuerst die Gammafunktion und die Riemannsche Zetafunktion behandelt werden. Schließlich bieten die Ausführungen über automorphe Funktionen und Formen in $C\ell(n)$ einen Einblick in neueste Forschungen auf diesem Gebiet.

Aufgaben am Ende jedes Abschnittes sollen dem Leser bei der Einarbeitung in das Gebiet eine Hilfe sein. Die Verwendung der (Schief-) Körperstruktur der reellen Quaternionen gestattet es, manche Aussagen präziser und leserfreundlicher als in allgemeinen Clifford-Algebren zu formulieren. Zudem sind für die Anwendungen der $\mathbb{R}^3$ und der $\mathbb{R}^4$ von besonderem Interesse. Daher haben wir mitunter auf den allgemeineren Fall reeller Clifford-Algebren $C\ell(n)$ verzichtet.

In die Darstellung der höherdimensionalen Ergebnisse sind Resultate vieler auf dem Gebiet der Clifford-Analyse arbeitenden Kollegen eingeflossen. Insbesondere möchten wir den Herren Prof. Dr. H. Krüger (Kaiserslautern), Prof. Dr. H. Malonek (Aveiro), Priv.-Doz. Dr. R. S. Kraußhar (Gent) danken, die Abschnitte des Manuskripts mitgestaltet haben. Für Diskussionen zu Detailfragen danken wir Prof. Dr. F. Sommen (Gent) und Prof. Dr. M. Shapiro (Mexiko). Für Verbesserungen im Manuskript haben wir insbesondere Herrn Prof. Dr. G. Jank (Aachen) und dem Herausgeber, Herrn Dr. T. Hempfling (Birkhäuser-Verlag) zu danken. Den kritischen Bemerkungen der Gutachter zu einer ersten Version des Buches sei ebenfalls Dank gesagt. Die sorgfältige Anfertigung der Zeichnungen durch Frau M. Sprößig und Herrn T. Lahmer hat uns wesentlich geholfen. Unsere Frauen haben für die langwierigen Arbeiten am Manuskript stets das notwendige Verständnis aufgebracht.

Weimar, Aachen und Freiberg im August 2005

Klaus Gürlebeck, Klaus Habetha und Wolfgang Sprößig

1 Komplexe Zahlen

1.1 Entdeckungsgeschichte

Die europäische Renaissance als Wiedergeburt humanistischen Gedankengutes begann in der Mitte des 14. Jahrhunderts in Italien und hatte ihre Blütezeit im 16. Jahrhundert, wobei sich die Ideen der Erneuerung in den Naturwissenschaften und der Mathematik mit Verzögerung durchsetzten. Insbesondere erfuhr die Algebra einen wesentlichen Schub, wichtige Beiträge sind auch aus der Mechanik, der Astronomie, der Trigonometrie sowie der Geometrie bekannt. Einige Gelehrte begannen die mathematischen Leistungen der Antike aufzuarbeiten. So fanden die Werke von ARCHIMEDES, APPOLONIUS, EUKLID und HERON VON ALEXANDRIA beträchtliches Interesse. Man fand heraus, dass bereits HERON im Jahre 50 u. Z. in seinem Buch *Stereometria* Wurzeln aus negativen Zahlen beschrieben hat.

Der Haupteinfluss der algebraisch orientierten Mathematik dieser Zeit kam jedoch aus dem arabischen Raum. In dem 499 von ARYABHATA (d.Ä.) verfassten Hauptwerk *Aryabhatya* werden erstmalig Regeln für das Auffinden von Wurzeln aus negativen Zahlen beschrieben. Durch die Methode der "Vervollständigung der Quadrate" waren schon die Babylonier in der Lage, quadratische Gleichungen mit positiven Koeffizienten zu lösen.

Die Algebraiker der Renaissance hatten zwei Hauptaufgaben: Erstens das Zahlensystem zu erweitern und damit die Bedeutung der negativen und komplexen Zahlen zu verstehen und zweitens eine effiziente mathematische Symbolik zu entwickeln.



Girolamo Cardano

Mit Ausnahme von DIOPHANTUS VON ALEXANDRIA herrschte bei den antiken griechischen und arabischen Mathematikern die Neigung vor, mit rhetorischen Mitteln mathematische Sachverhalte zu beschreiben. Mit seinem 1545 in Nürnberg gedruckten Hauptwerk *Artis magnae sive de regulis algebraicis* oder kurz *Ars magna* legte GIROLAMO CARDANO (1501–1576) den Grundstein für eine moderne Mathematik. Er zeigte in seinem Buch nicht nur, wie man kubische Gleichungen löst, sondern gab auch unter Benutzung von Wurzeln aus negativen Zahlen Lösungsformeln für algebraische Gleichungen der Ordnung vier an. CARDANO selbst wird mitunter als Personifizierung der Renaissance angesehen. In einzigartiger Weise gelang es ihm, die Brücke zwischen den mittelalterlichen und den modernen Anschauungen herzustellen. Einerseits war er Anhänger und aktiver Verfechter des Okkultismus und einer natürlichen Magie. Er verfasste umfangreiche Abhandlungen zur Handlesekunst und Traumdeutung und schrieb über Geister, Engel und Dämonen. Andererseits sind seine Forschungen völlig frei von mystischen und

übernatürlichen Einflüssen. Dabei ist CARDANO nicht der eigentliche Entdecker der von ihm verbreiteten Lösungsmethoden.

Diese gehen auf SCIPIONE DAL FERRO (1465–1526) und NICCOLÒ FONTANA („TARTAGLIA“) (1500–1557) zurück. Obwohl er TARTAGLIA versprechen musste, das ihm anvertraute „Geheimwissen“ zur Lösung der algebraischen Gleichungen dritter und vierter Ordnung nicht ohne sein Einverständnis zu veröffentlichen, sah es CARDANO als seine Pflicht an, diese neuen Methoden mit Hinweis auf ihre Entdecker der damaligen mathematischen Welt bekannt zu geben. Es ist hochinteressant, sich mit dieser faszinierenden historischen Episode, die sich um die *Ars magna* rankt, zu beschäftigen.



Niccolò Fontana

Eine neue Etappe begann mit RENÉ DESCARTES (1596–1650). Er führte 1637 die Terme *reell* und *imaginär* ein und trug mit seinen Arbeiten wesentlich zur Popularisierung dieses neuen Zahlbegriffs bei. ALBERT GIRARD (1595–1632) gab geometrische Interpretationen von Wurzeln aus negativen Zahlen. Auch in den Aufsätzen des deutschen Universalgelehrten GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) finden sich Bezüge zu imaginären Zahlen. Er schreibt 1675, dass eine imaginäre Zahl „eine wundervolle Kreatur einer idealen Welt, von fast amphibischer Natur zwischen den Dingen ist, die sind, und welchen, die es nicht gibt“. Wesentliche Beiträge lieferten in der Folgezeit JOHN WALLIS (1616–1703), ROGER COTES (1682–1716) und vor allem LEONHARD EULER (1707–1783), der auch 1777 das Symbol $i = \sqrt{-1}$ einführte. Schon früher fand EULER die Relation

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

und damit speziell das erstaunliche Resultat:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Den Begriff *komplexe Zahl* führte erst 1832 CARL FRIEDRICH GAUSS ein. Seither ist für eine komplexe Zahl z die Schreibweise $z = x + iy$ üblich. Die strenge mathematische Einführung der komplexen Zahlen als Paare reeller Zahlen geht auf WILLIAM ROWAN HAMILTON (1837) zurück.

1.2 Definition und Eigenschaften

Die komplexen Zahlen können auf verschiedene Art und Weise eingeführt werden: Wir versuchen hier im Einklang mit den späteren Kapiteln zu bleiben und wollen einen Erweiterungskörper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ definieren, haben also eine Menge und entsprechende Verknüpfungen festzulegen:

Definition 1.1 (Körper der komplexen Zahlen). Die Menge $\mathbb{C} := \{z : z = (x, y), x, y \in \mathbb{R}\}$ sei die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen. Die Zahlen x und y heißen *Koordinaten* von z .

Die *Addition* wird koordinatenweise definiert:

$$z_1 + z_2 := (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

für

$$z_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{C},$$

ebenso die Multiplikation mit einer reellen Zahl a :

$$a(x, y) := (ax, ay).$$

Die *Multiplikation* wird als lineare Fortsetzung der Multiplikation der Basiselemente $\mathbf{1}$ und i definiert, wobei $\mathbf{1} := (1, 0)$ das Einselement der Multiplikation sein soll und $i := (0, 1)$ soll der Regel $i^2 = -1$ genügen.

Dazu nun einige Bemerkungen: Die Multiplikation mit reellen Zahlen ermöglicht die übliche Darstellung für die *komplexen Zahlen*:

$$z = (x, y) = 1x + iy = x + iy,$$

Dabei wird statt $x + i0$ einfach x und statt $0 + iy$ nur iy geschrieben, insbesondere statt $\mathbf{1}$ nur 1 (oder gar nichts). Die Fortsetzung der Multiplikation der Basiselemente geschieht durch formales Ausmultiplizieren:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2),$$

wobei $i^2 = -1$ verwendet worden ist.

Das Zahlenpaar $(0, 0)$ ist offensichtlich das neutrale Element der Addition. Es bleibt eine etwas ermüdende Aufgabe nachzuprüfen, dass die Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ assoziativ und distributiv sind, während die Kommutativität unmittelbar aus der Definition folgt. Ebenso existieren entsprechende inverse Elemente. Damit ist $\mathbb{C}$ tatsächlich ein Körper, der *Körper der komplexen Zahlen*.

Identifizieren wir die komplexen Zahlen $x + i0$ mit den reellen Zahlen, so entsprechen Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ der in $\mathbb{R}$, so dass $\mathbb{C}$ ein Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ ist. Auch die oben definierte Multiplikation mit einer reellen Zahl, die eine Vektorraumstruktur zur Folge hat, ist in der Multiplikation in $\mathbb{C}$ enthalten.

Offenbar lassen sich die komplexen Zahlen $x + iy$ eineindeutig den Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ zuordnen, allerdings multipliziert man die Vektoren nicht wie komplexe Zahlen, so dass die Struktur von $\mathbb{C}$ reicher ist.

In höheren Dimensionen werden die Basiselemente häufig mit e_0, e_1 usw. bezeichnet: das lohnt in der Ebene noch nicht, da hier Summationszeichen in der Darstellung keine Verkürzung bringen.

Definition 1.2. Es wird $x =: \operatorname{Re} z$ *Realteil* und $y := \operatorname{Im} z$ *Imaginärteil* der komplexen Zahl $z = (x, y)$ genannt. Die Zahl $\bar{z} := x - iy$ heißt *konjugiert komplexe Zahl* zu z . Der Ausdruck $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ wird als *Betrag* von z bezeichnet.

Der Betrag einer komplexen Zahl ist natürlich gleich der euklidischen Norm des entsprechenden zweidimensionalen Vektors.

Lemma 1.3. *Es seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gelten folgende Beziehungen:*

- (i) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, (ii) $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$,
- (iii) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, $z \neq 0$, (iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
- (v) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, (vi) $\overline{\bar{z}} = z$,
- (vii) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, insbesondere für alle $n \in \mathbb{Z}$ (viii) $|z^n| = |z|^n$,
- (ix) $|\bar{z}| = |-z| = |z|$.

Beweis. Die Beziehungen (i)–(vi) und (ix) erfordern nur einfache Rechnungen. Für (vii) schreibt man $|z_1 z_2|^2 = \overline{z_1 z_2} z_1 z_2 = \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_1 z_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$. $\square$

Dieses Lemma zeigt, dass die Konjugation mit der Addition und der Multiplikation in $\mathbb{C}$ verträglich ist: (iv), (v) und (vi) bedeuten, dass die Konjugation eine *Involution* ist. Daher findet sich in der Physik und Operatortheorie häufig die Bezeichnung z^* statt $\bar{z}$. Der Leser überlege sich, dass die Konjugation der einzige Automorphismus in der Algebra $\mathbb{C}$ neben der Identität ist. Es folgt ein Beispiel:

Beispiel 1.4. Wenn man einen Bruch zweier komplexen Zahlen in Real- und Imaginärteil zerlegen will, so erweitert man ihn mit dem konjugiert komplexen Ausdruck des Nenners:

$$\frac{i+3}{2i-4} = \left(\frac{i+3}{2i-4} \right) \left(\frac{-2i-4}{-2i-4} \right) = \frac{-10-10i}{20} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Bemerkung 1.5. In Lemma 1.3 sind die folgenden Aussagen enthalten: Man kann eine Summe von zwei Quadraten als Produkt linearer Ausdrücke schreiben, natürlich unter Verwendung der komplexen Einheit i :

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy).$$

Ebenso gilt der *Zwei-Quadrate-Satz*:

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)^2,$$

der besagt, dass sich ein Produkt von zwei Quadratsummen wieder als Quadratsumme schreiben lässt. In höheren Dimensionen rankt sich um diesen Satz eine umfangreiche Theorie (vgl. [65]).

Es folgen nun einige Ungleichungen für den Betrag einer komplexen Zahl:

Lemma 1.6. *Für den Betrag einer komplexen Zahl gilt:*

- (i) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- (ii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$
- (iii) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$

Mit dem so genannten *euklidischen Abstand* $|z_1 - z_2|$ zweier komplexen Zahlen wird $\mathbb{C}$ zu einem metrischen Raum. In Abschnitt 4.1 werden wir das näher ausführen.

Beweis. Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung und (iii) mit Hilfe von Lemma 1.3 und (i):

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_2 \overline{z_1}) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_2||\overline{z_1}| = (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

(iii) erhält man aus (ii), denn $|z_1| = |z_2 + z_1 - z_2| \leq |z_2| + |z_1 - z_2|$, also $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$. Nun kann man noch z_1 und z_2 vertauschen, eine der beiden linken Seiten ist gleich $||z_1| - |z_2||$, damit folgt die Ungleichung (iii). $\square$

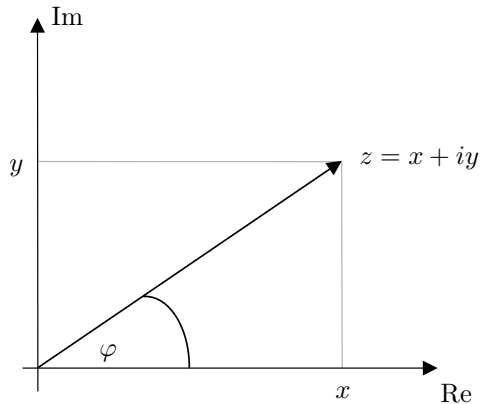


Abbildung 1.1

Komplexe Zahlen kann man als Punkte in der so genannten *GAUSSschen* oder *ARGANDschen Zahlenebene* mit rechtwinkligen Koordinaten oder auch mit Polarkoordinaten veranschaulichen (s. Abbildung 1.1) Jede komplexe Zahl $z = x + iy$ kann dort mit $r := |z|$ wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} z &= r \frac{z}{r} = r \left(\frac{x}{r} + i \frac{y}{r} \right) = r \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \end{aligned}$$

Die letzte Darstellung heißt *trigonometrische Form* oder *Polarform* der komplexen Zahl z . Analog zum $\mathbb{R}^2$ heißen r und φ *Polarkoordinaten* von z . Dabei gibt r den Abstand des Punktes z vom Nullpunkt der Gaußschen Ebene an, φ beschreibt den Winkel der positiven reellen Achse mit der Verbindung von 0 und z . Die Koordinate φ wird *Argument* von z genannt, in Zeichen: $\arg z$. Ist $-\pi < \varphi \leq \pi$, so spricht man vom *Hauptwert* des Argumentes. Üblicherweise werden wir mit diesem Hauptwert rechnen. Grundsätzlich ist aber das Argument nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π festgelegt.

Die Umrechnungsformeln zwischen euklidischen und polaren Koordinaten lauten für $x \neq 0$:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$

Dabei ist bei der Festlegung von φ im 2. Quadranten π zu addieren, im 3. Quadranten ist π zu subtrahieren, um auf den Hauptwert des Argumentes zu kommen. Es wird angenommen, dass sich der Arcustangens zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ bewegt, wenn sein Argument von $-\infty$ nach ∞ läuft.

Im Jahre 1799 stellte CASPAR WESSEL komplexe Zahlen durch geometrische Figuren in der Ebene dar. Von seiner Arbeit wurde allerdings nur wenig Notiz genommen. Unabhängig davon fand der Buchhalter JEAN ROBERT ARGAND 1806 eine geometrische Interpretation der komplexen Zahlen. Schließlich war es C. F. GAUSS, der die Darstellung komplexer Zahlen durch Pfeile in der Ebene realisierte, was sich in der Folgezeit durchsetzte.

Das Rechnen mit komplexen Zahlen in Polarkoordinaten erweist sich bei der Multiplikation und Division (Abbildung 1.2) als besonders einfach:

Lemma 1.7. *Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert. Sie werden dividiert, indem man die Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert.*

Beweis. Es seien $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ zwei komplexe Zahlen in trigonometrischer Darstellung. Dann folgt nach Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Für die Division ergibt sich

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad \square$$

Eine wichtige Folgerung hieraus ist die nach ABRAHAM DE MOIVRE (1667–1754) benannte Formel aus dem Jahr 1707:

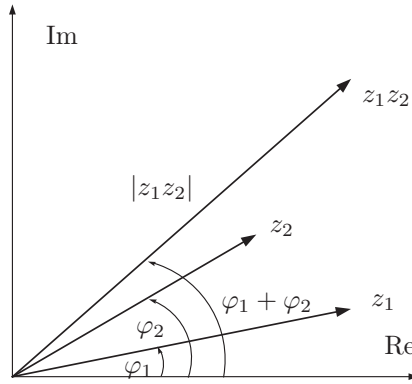


Abbildung 1.2

Folgerung 1.8 (De Moivre-Formel). Es gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

wobei jedes Argument φ von z gewählt werden kann.

Beweis. Der Beweis erfolgt für positive $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe einer einfachen vollständigen Induktion. Für $n = 0$ steht auf beiden Seiten der Formel 1 und für negative n muss der Kehrwert der Formel für positive n gebildet werden, wobei $(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)(\cos n\varphi - i \sin n\varphi) = 1$ zu berücksichtigen ist. $\square$

Die Formel von de Moivre ermöglicht es nun, das Wurzelziehen von positiven reellen Zahlen auf jede komplexe Zahl auszudehnen:

Lemma 1.9 (Wurzelziehen). Die komplexe Zahl $a \neq 0$ habe die trigonometrische Darstellung

$$a = |a|(\cos \psi + i \sin \psi).$$

Die Zahl a besitzt für jedes natürliche n genau n verschiedene n -te Wurzeln in $\mathbb{C}$, d.h. Lösungen der Gleichung $z^n = a$. Diese berechnen sich nach der Formel

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\psi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\psi + 2k\pi}{n} \right)$$

für $k = 0, \dots, n-1$.

Aus dieser Formel folgt, dass alle z_k als Punkte auf der Kreislinie vom Radius $\sqrt[n]{|a|}$ liegen, und benachbarte Punkte sich in ihrem Argument um $\gamma = 2\pi/n$ unterscheiden. Der Periodizität der Winkelfunktionen halber erhält man alle diese Punkte durch die Festlegung $k = 0, 1, \dots, n-1$ in der obigen Formel.

Beispiel 1.10. Es sei $z^3 = 1$. Die rechte Seite hat dann die Darstellung $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$. Es folgt (Abbildung 1.3)

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos \frac{0}{3} + i \sin \frac{0}{3} = 1 \\ z_2 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \quad (\text{im 2. Quadranten}) \\ z_3 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \quad (\text{im 3. Quadranten}). \end{aligned}$$

Bemerkung 1.11. Die Formel von de Moivre zeigt, dass das so genannte Kreisteilungsproblem, d.h., das Einbeschreiben eines regelmäßigen n -Ecks in die Einheitskreislinie $\{|z| = 1\}$, durch die Lösung der Gleichung

$$z^n = 1$$

angegeben werden kann, also durch

$$z_k = \cos \frac{2\pi i k}{n} + i \sin \frac{2\pi i k}{n} \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

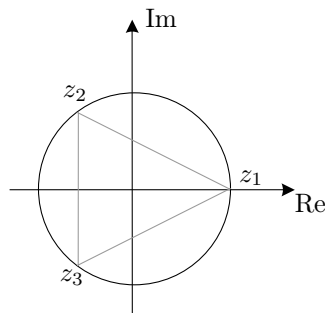


Abbildung 1.3

Die Behandlung des Kreisteilungsproblems kann als ein Spezialfall der Lösung der allgemeinen algebraischen Gleichung n -ter Ordnung angesehen werden:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0.$$

Dafür gibt es den *Fundamentalsatz der Algebra*:

Satz 1.12 (Fundamentalsatz der Algebra). Das Polynom $P_n(z)$ vom Grad n besitzt genau n Nullstellen, wenn diese entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden, d.h. $P_n(z)$ kann in der Form

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_p)^{n_p}$$

mit $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$ und $a_n \neq 0$ geschrieben werden. Wenn die komplexen Zahlen z_j paarweise verschieden sind, bezeichnet n_j die Vielfachheit der Nullstelle z_j .

Den Beweis dieses Satzes werden wir erst später erbringen, wenn die notwendigen Hilfsmittel bereitgestellt sind.

Der flämische Mathematiker ALBERT GIRARD sprach erstmalig 1629 die Vermutung aus, dass jede algebraische Gleichung n -ter Ordnung n Wurzeln hat, welche jedoch in einem größeren Zahlbereich als $\mathbb{C}$ zu suchen sind. Der erste Ernst zu nehmende Versuch, diese berühmte Vermutung zu beweisen, wurde 1746 von JEAN-BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT unternommen. Für Polynome mit reellen Koeffizienten gab es 1749 einen Beweis von L. EULER, der auf einer Idee aus der „Ars Magna“ basierte. Unter der Voraussetzung, dass die Lösungen existieren, konnte PIERRE SIMON LAPLACE 1795 einen sehr eleganten Beweis liefern. In C. F. GAUSS' Doktorarbeit wurde wohl der erste vollständige Beweis des Fundamentalsatzes gegeben. Allerdings geht der vielleicht einfachste Beweis, beruhend auf D'ALEMBERTS Idee, auf J. R. ARGAND zurück und wurde 1814 veröffentlicht. Ein konstruktiver Beweis wurde schließlich erst 1940 von HELLMUTH KNESER angegeben.

1.3 Darstellungen und geometrische Aspekte

Die Multiplikation einer komplexen Zahl mit $\cos \varphi + i \sin \varphi$ beschreibt eine *Drehung* der Gaußschen Ebene um den Winkel φ , denn das Argument jeder komplexen Zahl z wird dabei um den Winkel φ vergrößert. Alle diese Rotationen formen eine Gruppe, die *spezielle orthogonale Gruppe* $SO(2)$, wobei die Zahl 2 die Dimension des zu Grunde liegenden $\mathbb{R}$ -Vektorraumes $\mathbb{C}$ angibt. Offenbar ist 1 das neutrale Element dieser Gruppe, das inverse Element zu $\cos \varphi + i \sin \varphi$ wird durch $\cos \varphi - i \sin \varphi$ gegeben.

Da die Drehungen in der Ebene auch durch die Multiplikation des Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit einer Matrix dargestellt werden können, liegt es nahe zu fragen, ob dies mit der Multiplikation komplexer Zahlen in Zusammenhang steht. In der Tat gilt:

Lemma 1.13. *Die Abbildung $M : z \rightarrow M(z)$ von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ auf die reellen (2×2) -Matrizen der speziellen Gestalt*

$$M(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

ist ein Ringisomorphismus von $\mathbb{C}$ auf den Unterring von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ der Matrizen der angegebenen Gestalt.

Beweis. Die Gleichungen $M(z + z') = M(z) + M(z')$, $M(zz') = M(z)M(z')$ lassen sich leicht für zwei komplexe Zahlen z und z' nachrechnen. $\square$

Wir haben damit eine so genannte *Darstellung* der komplexen Zahlen durch Matrizen gefunden, also eine isomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ in die linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$ in sich. Dabei entsprechen sich $M^\top$ und $\bar{z}$, ebenso $\det M$ und $|z|^2$ sowie

Spur M und $2\operatorname{Re} z$. Die vorher betrachteten Rotationen entsprechen den uns aus der Ebene bekannten Rotationsmatrizen, nämlich

$$R(\varphi) := M(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

wobei $\varphi \in \mathbb{R}$ ist. Leicht zu sehen ist auch, dass

$$R(\varphi + \psi) = R(\varphi)R(\psi) \quad (\varphi, \psi \in \mathbb{R}).$$

Die Abbildung $R : \varphi \rightarrow R(\varphi)$ stellt damit einen Homomorphismus der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ auf die multiplikative Gruppe der angegebenen Drehmatrizen dar. Jede dieser Matrizen entspricht vermöge unserer Zuordnung einem Punkt auf der *Einheitskreislinie* $S^1 = \{z : |z| = 1\}$, dem Rand des *Einheitskreises* oder genauer der *Einheitskreisscheibe* $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$. Übrigens spielt die Mehrdeutigkeit des Argumentes hier keine Rolle, denn die Addition von $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, zu φ ändert den Wert von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ nicht. Wegen $R(\pi) = R(-\pi)$ bleiben die Elemente der Matrix von $R(\varphi)$ stetig, wenn man den Wert von φ auf der negativen reellen Achse von π zu $-\pi$ springen lässt.

Bemerkung 1.14. Schließlich sei auf einen Zusammenhang zwischen *Drehungen* und *Spiegelungen* hingewiesen. Durch die Konjugation wird jede komplexe Zahl an der reellen Achse gespiegelt. Damit kann man die Spiegelung an einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt wie folgt beschreiben: Bildet die Gerade mit der positiven reellen Achse den Winkel α , so wird sie durch $(\cos \alpha - i \sin \alpha)z$ in die reelle Achse gedreht, die Spiegelung ist dann durch die Konjugation gegeben. Danach hat man die Gerade zurückzudrehen, so dass der Spiegelungspunkt z' zu z durch

$$z' = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 \bar{z} = (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) \bar{z}$$

ausgedrückt wird. Führt man noch eine Spiegelung aus, so ergibt sich

$$z'' = (\cos(2\beta + 2\alpha) + i \sin(2\beta + 2\alpha))z.$$

Das ist aber eine Drehung um den Nullpunkt. Wir können festhalten:

Zwei Spiegelungen von $\mathbb{C}$ an Geraden durch den Nullpunkt ergeben eine Drehung von $\mathbb{C}$ um Null. Umgekehrt kann man jede Drehung in zwei Spiegelungen zerlegen.

Wir sind nun in der Lage, einige Aussagen der analytischen Geometrie in der Ebene durch komplexe Zahlen auszudrücken. Eine Gerade in der Ebene wird durch eine Gleichung der Form $ax + by + c = 0$ beschrieben mit reellen a, b, c und $a^2 + b^2 > 0$. Wenn wir die Formeln aus Lemma 1.3 verwenden, erhalten wir

$$(a - ib)z + (a + ib)\bar{z} + 2c = 0$$

oder

$$\overline{N}z + N\bar{z} + 2c = 0$$

mit der komplexen Zahl $N := a + ib \neq 0$ und einem reellen c . Dies kann auch in der Form $\operatorname{Re}(\overline{N}z) + c = 0$ geschrieben werden.

Für zwei Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^2$ ist das Skalarprodukt durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := x_1x_2 + y_1y_2$$

definiert. Für die entsprechenden komplexen Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ heißt der Ausdruck

$$\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 = \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

Skalarprodukt. Für die *Geradengleichung*

$$\operatorname{Re}(\overline{N}z) + c = 0$$

bedeutet das, dass für zwei Punkte z_1 und z_2 auf der Geraden gilt

$$\operatorname{Re}(\overline{N}(z_1 - z_2)) = 0.$$

Dies besagt, dass der N entsprechende Vektor senkrecht zur Geraden steht. Wir haben damit die *Orthogonalität* komplexer Zahlen eingeführt, die in der Gaußschen Ebene veranschaulicht werden kann. Man überlegt sich leicht, dass der dem Nullpunkt am nächsten liegende Punkt auf der Geraden durch

$$z_0 = \frac{-cN}{|N|^2}$$

gegeben wird.

Schließlich sei daran erinnert, dass eine Gerade auch durch eine *Parameterdarstellung* beschrieben werden kann. Wenn A eine komplexe Zahl ist, die einem Vektor in Richtung der Geraden entspricht – also senkrecht zu N – und z_0 ein Punkt auf der Geraden, so lautet deren Parameterdarstellung

$$z(t) = At + z_0, \quad -\infty < t < \infty.$$

Man kann die verschiedenen Geradengleichungen leicht ineinander umrechnen.

Analog zum Skalarprodukt kann man durch

$$[z_1, z_2] := x_1y_2 - x_2y_1 = \operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2)$$

ein *Vektorprodukt* (oder *Kreuzprodukt*) in $\mathbb{C}$ einführen. Dem entspricht im $\mathbb{R}^2$ die Operation $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot J \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, wobei

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Rotationsmatrix um den Winkel $-\pi/2$ darstellt. Dies liefert für das Vektorprodukt die Formel $[z_1, z_2] = \operatorname{Re}(\overline{z_1}(-i)z_2) = \operatorname{Im} \overline{z_1}z_2$. Die Matrix J tritt auch in der Krümmungstheorie ebener Kurven auf und heisst dort *CARTAN-Matrix*. Ist $[z_1, z_2] = 0$, so liegen z_1 und z_2 auf einer Geraden durch den Nullpunkt, sie sind *kollinear*. Außerdem gilt die Beziehung

$$\overline{z_1}z_2 = z_1 \cdot z_2 + i[z_1, z_2].$$

Eine weitere elementare geometrische Figur in der Ebene ist die Kreislinie, die durch ihren *Mittelpunkt* z_0 und den *Radius* R gegeben ist. Sie enthält alle Punkte, die von z_0 den Abstand R haben, also

$$S_R(z_0) := \{z : |z - z_0| = R\}.$$

Die *Kreisgleichung* kann in der Form

$$(z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = z\overline{z} - 2\operatorname{Re} z\overline{z_0} + z_0\overline{z_0} = R^2$$

geschrieben werden. Die *Tangente* an solch eine Kreislinie in einem ihrer Punkte $z_1 \in S_R(z_0)$ ist die Gerade durch z_1 , die orthogonal zur Differenz $z_1 - z_0$ liegt (Abbildung 1.4). Ihre Gleichung lautet somit

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\overline{z_1 - z_0})(z - z_1) &= 0 \quad \text{oder} \\ \operatorname{Re}(\overline{z_1 - z_0})z &= \operatorname{Re}(\overline{z_1 - z_0})z_1. \end{aligned}$$

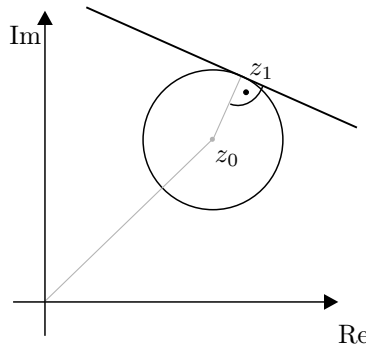


Abbildung 1.4

Auch eine Kreislinie kann mit einer *Parameterdarstellung* beschrieben werden. Diese lautet einfach

$$z(t) = z_0 + R(\cos t + i \sin t), \quad -\pi < t \leq \pi.$$

Die Gleichungen sowohl für Geraden als auch für Kreislinien können in der Formel

$$Az\overline{z} + \operatorname{Re}(\overline{B}z) + C = 0$$

zusammengefasst werden. Dabei sind A und C reell, B ist eine beliebige komplexe Zahl und es muss gelten $|B|^2 - AC > 0$. Für $A \neq 0$ liegt eine Kreislinie vor, für $A = 0$ eine Gerade. $\operatorname{Re}(\overline{B}z)$ ist gerade das Skalarprodukt der beiden B und z entsprechenden Vektoren.

1.4 Aufgaben

1. Für beliebige komplexe Zahlen z_1 und z_2 beweise man die Gleichheit (*Apollonius-Identität*):

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

2. Man bestimme den geometrischen Ort aller Punkte der komplexen Ebene, für den

$$\text{a) } \operatorname{Im} \frac{z-1}{z+i} \leq 0, \quad \text{b) } |z-2| - |z+2| < 2$$

gilt.

3. Man beweise die Formel von de Moivre und untersuche, ob diese auf rationale Exponenten erweitert werden kann.
4. Man zeige, dass die Summe aller Wurzeln der Gleichung $z^n = 1$ verschwindet. Man beweise, dass diese die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks bilden.
5. Man berechne die Wurzeln der Gleichung $32z^5 = (z+1)^5$.
6. Man zeige mit Hilfe komplexer Zahlen:

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{\sin(n+1/2)\theta}{2 \sin \theta/2},$$

$$\text{b) } \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin(n+1)\theta/2}{\sin \theta/2} \sin(n\theta/2).$$

7. Man zeige, dass die paarweise verschiedenen Punkte z_1, z_2, z_3 genau dann auf einer Geraden liegen, wenn die Größe $(z_3 - z_1)/(z_2 - z_1)$ reell ist.
8. Man spricht bei einer Abbildung $z' = f(z)$ von einer *Spiegelung am Einheitskreis*, wenn z und z' auf demselben, vom Nullpunkt ausgehenden Strahl liegen und $|z||z'| = 1$ ist. Man gebe $f(z)$ an und bestimme z' auch geometrisch.

2 Quaternionen

2.1 Entdeckungsgeschichte

Es ist wohl häufig so, dass mathematische Resultate als das Werk vieler zunächst im Verborgenen heranreifen, um dann urplötzlich von verschiedenen Wissenschaftlern innerhalb kurzer Zeit formuliert zu werden. Es ist mitunter schwierig festzustellen, wer nun eigentlich die entscheidende Idee hatte und als Entdecker oder Erfinder benannt werden sollte. Oftmals gehen die Meinungen darüber deutlich auseinander. So behauptete W. Blaschke in seinem Festvortrag anlässlich des 250. Geburtstages von LEONARD EULER mit dem Titel „Euler und die Geometrie“ (Berlin, 23.03.1957), dass Euler der erste war, der Quaternionen definiert hat (vgl. [12]). In einem Brief an Christian Goldbach vom 4.5.1748 definiert Euler im Rahmen seiner Untersuchungen zu Parameterdarstellungen von Bewegungen im euklidischen Raum Quaternionen, ohne diese so zu benennen.

Es scheint allerdings so zu sein, dass Euler den fundamentalen Charakter dieser Struktur nicht erkannte. Er benutzte lediglich „vektorielle Quaternionen“ in seinen kinematischen Untersuchungen, ohne jedoch diesen neuen Zahlentyp tiefgründig zu studieren. Dieser Gedanke war dann für lange Zeit vergessen. Fast 100 Jahre später initiierte der französische Mathematiker und Philosoph OLINDE RODRIGUES den Gebrauch von den Quaternionen ähnlichen Zahlen zur Beschreibung von Drehungen im dreidimensionalen Raum. Auch GAUSS arbeitete schon mit Formeln in Quaternionen, die er 1819 in einer Note benutzte, die damals nicht publiziert wurde.



Leonhard Euler (1707–1783)

Als Entdecker der Quaternionen gilt jedoch ein anderer – SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON –, einer der faszinierendsten Wissenschaftler des 19. Jahrhunderts. Bereits in den frühen dreißiger Jahren beschäftigte er sich mit algebraischen Fragestellungen. So konnte Hamilton 1833 zeigen, dass die komplexen Zahlen eine Algebra bilden, falls die Einheiten 1 und i mit $1^2 = 1$ und $i^2 = -1$ benutzt werden. Alle Elemente seiner Algebra haben dann die Form $x + iy$, wobei x, y reelle Zahlen sind.

Mehr als zehn Jahre lang versuchte er dieses Ergebnis auf so genannte *Triplets* auszudehnen, d.h. die reelle Einheit 1 wurde zusammen mit zwei weiteren „imaginären“ Einheiten i und j untersucht. In späteren Arbeiten nannte er diese Zahlentripel *Vektoren*. Dabei konnte er sich gut vorstellen, wie diese Vektoren zu addieren und zu multiplizieren sind, jedoch gelang es ihm nicht eine geeignete Division zu finden – er war darüber sehr unglücklich. Dieses Problem nicht lösen zu können

war für ihn in Anbetracht seiner sonstigen brillanten wissenschaftlichen Leistungen eine recht ungewohnte Situation. Erst durch Hinzufügen einer weiteren imaginären Einheit und den Verzicht auf die Kommutativität gelang es ihm, durch Vektoren zu dividieren. Um die Entdeckung der Quaternionen rankt sich folgende kleine Geschichte:

Es war Montag, der 16. Oktober des Jahres 1843 vormittags, Hamilton hatte eine Sitzung der Royal Irish Academy zu leiten. Seine Frau begleitete ihn auf dem Weg entlang des Royal Canals in Dublin. Dabei kam ihm der entscheidende Gedanke zur Lösung seines zehn Jahre alten Problems. Mit seinem Taschenmesser ritzte er in den Stein der Broome Bridge die berühmten Formeln:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1.$$

In einem kurz vor seinem Tod an seinen ältesten Sohn verfassten Brief bezeichnete er obige Brücke irrtümlicherweise als Brougham Bridge, wie sie auch heute noch heißt.

Hamilton nannte fortan die neuen Zahlen

$$q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

Quaternionen. Die erste Arbeit über Quaternionen erblickte am 14. November 1843 in den Council Books der Royal Academy auf dem “First General Meeting of the Session” das Licht der Welt (vgl. [6]). Was die Namensgebung betrifft, so äußert sich P.G. TAIT, der wohl einzige Schüler Hamiltons, wie folgt:

Quaternion bedeutet im Lateinischen „Menge der Vier“, die griechische Übersetzung dieses Wortes ist „Tetractys“. Hamilton als profunder Kenner der griechischen Sprache und Bewunderer der pythagoräischen Schule scheint einen Zusammenhang zwischen seiner Struktur und der pythagoräischen Tetractys, die als Quelle aller Dinge angesehen wurde, hergestellt zu haben.

Weitere interessante Auffassungen zur Herkunft der Bezeichnung „Quaternion“ kann der Leser in S.L. ALTMANS Buch [6] finden.

2.2 Definition und Eigenschaften

Wir wollen nun mit einer systematischen Darlegung der reellen Quaternionen beginnen, dazu müssen wir wie in $\mathbb{C}$ eine Menge mit den entsprechenden Verknüpfungen definieren:

Definition 2.1. Die Menge $\mathbb{H} := \{x : x = (x_0, x_1, x_2, x_3), x_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, 3\}$ sei die Menge der geordneten Quadrupel reeller Zahlen. Die Zahlen x_0, x_1, x_2, x_3 heißen *Koordinaten von x* . Zwei Quadrupel $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ sind genau dann gleich, wenn die *Koordinaten* einzeln gleich sind: $x_k = y_k$, $k = 0, 1, 2, 3$. Die *Addition* wird koordinatenweise definiert:

$$x + y := (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

ebenso die *Multiplikation mit einer reellen Zahl* λ

$$\lambda x := (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Die *Multiplikation* wird als lineare Fortsetzung der Multiplikation der Basiselemente eingeführt, dabei wird die *Standardbasis* des $\mathbb{R}^4$, $e_0 := (1, 0, 0, 0)$, $e_1 := (0, 1, 0, 0)$, $e_2 := (0, 0, 1, 0)$, $e_3 := (0, 0, 0, 1)$, benutzt: e_0 soll das Einselement der Multiplikation sein, die anderen drei Basiselemente genügen der Regel

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

mit dem Kroneckersymbol δ_{ij} sowie der Beziehung

$$e_1 e_2 = e_3.$$

Die Eigenschaften, die wir in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ kennen gelernt haben, haben die folgende Struktur gemeinsam, die als *Vektorraum* bezeichnet wird, selbstverständlich ist uns der $\mathbb{R}^n$, speziell in unserem Zusammenhang für $n = 1, 2, 3, 4$, mit dieser Struktur bekannt.

Definition 2.2. Eine Menge V mit den folgenden Eigenschaften heißt *$\mathbb{R}$ -Vektorraum* oder *reeller Vektorraum*, wenn gilt:

- (i) Es sei auf V eine Addition erklärt und V bezüglich dieser Addition eine kommutative Gruppe.
- (ii) Es sei eine Multiplikation von Zahlen aus $\mathbb{R}$ und Vektoren aus V erklärt, die den nachstehenden Regeln genügt: Für $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ und 1 das Einselement aus $\mathbb{R}$ (also die reelle Zahl 1) gilt:

$$a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}, \quad (a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v} \quad (\text{Distributivität}),$$

$$(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v}) \quad (\text{Assoziativität}),$$

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v} \quad (\text{Existenz des Einselements}).$$

Der Vektorraum heißt reell, da für die Multiplikation nur reelle Zahlen zugelassen sind, selbstverständlich kann man auch andere Körper verwenden, wie z.B. $\mathbb{C}$.

Vektorräume werden an vielen Stellen benötigt. Auf diese Weise wird im $\mathbb{R}^4$ wie schon früher betrachtet die übliche Vektorraumstruktur eingeführt und die kanonische Darstellung der *reellen Quaternionen*

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \sum_{k=0}^3 x_k e_k$$

ermöglicht. Oftmals wird e_0 als Einselement gar nicht geschrieben.

Die obige Multiplikationsregel kann man der Deutlichkeit halber auch etwas ausführlicher hinschreiben:

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1; \quad e_i e_j = -e_j e_i, \quad i \neq j = 1, 2, 3.$$

Die letzte Beziehung kann in der zyklischen Schreibweise

$$e_{i+1}e_{i+2} = e_{i+3}, \quad i = 0, 1, 2 \pmod{3}.$$

angegeben werden. Übrigens hat HAMILTON die Basiselemente mit $i := e_1$, $j := e_2$, $k := e_3$ bezeichnet, wodurch die Verwandtschaft mit $\mathbb{C}$ oder besser die Erweiterung der komplexen Zahlen noch deutlicher wird. Wegen $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ können diese Basiselemente auch als imaginäre Einheiten bezeichnet werden. Es ist sofort abzulesen, dass die Multiplikation nicht kommutativ ist, so dass die Quaternionen keinen Körper bilden, wohl aber einen Schiefkörper. Die Fortsetzung der Multiplikation auf allgemeine Quaternionen geschieht einfach durch formales Ausmultiplizieren:

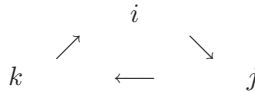
$$\begin{aligned} xy &= (x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)(y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) \\ &= (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) \\ &\quad + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)e_1 \\ &\quad + (x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1)e_2 \\ &\quad + (x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0)e_3 \end{aligned}$$

Diese nicht sehr handliche Multiplikationsformel sei hier nur hingeschrieben; computeralgebraisch stellt sie kein Problem dar.

ARTHUR CAYLEY, ein englischer Mathematiker (1821–1895), der nach HAMILTON die ersten Arbeiten mit Quaternionen verfasste, entwickelte ein einfaches Schema zur Beschreibung dieser Multiplikation, das heute unter dem Namen *Cayley-Tafel* bekannt ist:

	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Auch nachstehendes Diagramm ist oft sehr nützlich:



Der irische Politiker und Patriot EAMON DE VALERA (1882–1975), der dreimal Premierminister und von 1959 bis 1973 Präsident des Freistaates Irland war, sollte am Ostermontag, dem 24. April 1916, in Dublin wegen Hochverrats gegen die britische Krone hingerichtet werden. Auf Grund glücklicher Umstände wurde seine Todesstrafe in eine langjährige Haftstrafe umgewandelt. Valera, der selbst Mathematiklehrer gewesen war, ritzte voller Nationalstolz auf einer weißen Wand in seiner Zelle die Definitionsgleichungen für die Quaternionen ein.

Das Quadrupel $(0, 0, 0, 0)$ ist offensichtlich das neutrale Element der Addition, es ist eine noch ermüdendere Aufgabe als in $\mathbb{C}$ nachzuprüfen, dass die Addition und Multiplikation assoziativ und distributiv sind: die Addition ist natürlich kommutativ, die Multiplikation nicht, wie bereits bemerkt. Das inverse Element der Addition zu x ist offensichtlich $-x$, das der Multiplikation werden wir gleich einfach beschreiben, so dass die reellen Quaternionen einen Schiefkörper bilden, den *Schiefkörper der reellen Quaternionen* $\mathbb{H}$.

Identifizieren wir die Quaternionen der Form $x_0 + e_1 x_1$ mit den komplexen Zahlen $x_0 + i x_1$, so überzeugt man sich leicht, dass die Multiplikation in $\mathbb{H}$ in die komplexe Multiplikation übergeht, so dass $\mathbb{C}$ ein Unterkörper von $\mathbb{H}$ ist.

Offenbar lassen sich die Quaternionen x eindeutig den Vektoren $(x_0, x_1, x_2, x_3)^\top$ des $\mathbb{R}^4$ zuordnen (die Transposition soll andeuten, dass die Vektoren üblicherweise als Spaltenvektoren geschrieben werden). Aber wie in $\mathbb{C}$ ist die Struktur der Quaternionen reicher als die eines Vektorraumes.

Definition 2.3. Für eine Quaternion $x = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ heiße x_0 *Skalarteil* $\text{Sc}(x)$ der Quaternion. Die Quaternion $\mathbf{x} := x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ werde *Vektorteil* $\text{Vec}(x)$ der Quaternion genannt, so dass man $x = x_0 + \mathbf{x}$ schreiben kann. Die x zugeordnete Quaternion $\bar{x} := x_0 - \mathbf{x}$ heiße *konjugierte Quaternion* zu x . Der Ausdruck $|x| := \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ wird dann als *Betrag* der Quaternion bezeichnet. Für die *Menge aller Vektoren* schreibt man $\text{Vec } \mathbb{H}$, für die *Menge aller Skalare* hingegen $\text{Sc } \mathbb{H}$.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass der Vektorteil einer Quaternion die Basiselemente enthält, er ist also keine reelle Zahl, wie es beim Imaginärteil komplexer Zahlen der Fall ist. Der Betrag einer Quaternion ist auch hier gleich dem Betrag des entsprechenden Vektors im $\mathbb{R}^4$. $\text{Vec } \mathbb{H}$ und $\text{Sc } \mathbb{H}$ sind reell-lineare Unterräume von $\mathbb{H}$, leider ist $\text{Vec } \mathbb{H}$ bezüglich der Quaternionenmultiplikation nicht abgeschlossen. $\text{Sc } \mathbb{H}$ kann offensichtlich mit $\mathbb{R}$ und $\text{Vec } \mathbb{H}$ mit dem $\mathbb{R}^3$ identifiziert werden.

Da dem Vektorteil einer Quaternion stets eine physikalische Bedeutung zugeordnet werden konnte, führte W.R. HAMILTON 1846 dafür den Begriff des *Vektors* ein. Noch heute wird in Ingenieurvorlesungen oft die Hamiltonsche Bezeichnung $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ für die Basiselemente im $\mathbb{R}^3$ verwendet. Ein Vektor im Hamiltonschen Sinne ist somit in der Form

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}$$

darstellbar.

Es gelten dem Komplexen entsprechende Regeln:

Lemma 2.4. *Es seien $x, y \in \mathbb{H}$, dann sind folgende Beziehungen richtig:*

- (i) $\text{Sc}(x) = \frac{(x+\bar{x})}{2}$, (ii) $\text{Vec}(x) = \frac{(x-\bar{x})}{2}$,
- (iii) $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$ (iv) $x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}, x \neq 0$,
- (v) $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$, (vi) $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$,
- (vii) $\overline{\bar{x}} = x$, (viii) $|xy| = |x||y|$
- (ix) $|\bar{x}| = |-x| = |x|$, (x) $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}, xy \neq 0$.

Eigenschaft (iv) zeigt, dass $\mathbb{H}$ tatsächlich ein Schiefkörper ist, da hier das multiplikative Inverse angegeben ist; (x) folgt aus der Nichtkommutativität und muss als ungewohnt beachtet werden.

Beweis. Die Beziehungen (i)–(vii) und (ix) erfordern nur einfache Rechnungen. Für (viii) schreibt man $|xy|^2 = xy\bar{x}\bar{y} = xy\bar{y}\bar{x} = |y|^2|x|^2$. (x) Der Assoziativität halber kann man wie folgt rechnen:

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = xx^{-1} = 1. \quad \square$$

Bemerkung 2.5. Analog zu $\mathbb{C}$ ist bemerkenswert, dass wir in $\mathbb{H}$ die vierfache Quadratsumme

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)(x_0 - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3)$$

als Produkt zweier linearer Ausdrücke darstellen können. Das ist wie in $\mathbb{C}$ keineswegs selbstverständlich. Ebenso gilt der *Vier-Quadrate-Satz*

$$\begin{aligned} & (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ &= (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3)^2 + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)^2 \\ & \quad + (x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1)^2 + (x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0)^2, \end{aligned}$$

der besagt, dass sich ein Produkt von zwei vierfachen Quadratsummen wieder als Quadratsumme schreiben lässt (vgl. [65])

Dem komplexen Fall entsprechen Aussagen über den Betrag von Quaternionen:

Lemma 2.6. *Es seien x und y Quaternionen, dann gilt für den Betrag*

- (i) $|\text{Sc}(x)| \leq |x|, \quad |\text{Vec}(x)| \leq |x|$
- (ii) $|x + y| \leq |x| + |y| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$
- (iii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Beweis. Der Beweis verläuft wie in $\mathbb{C}$. $\square$

Mit dem *euklidischen Abstand* $|x - y|$ wird $\mathbb{H}$ zu einem metrischen Raum. Diese Aussagen entsprechen denen im Komplexen, was in Abschnitt 4.1 zu behandeln sein wird. Wir befassen uns jetzt mit spezifischen Eigenschaften der Quaternionen:

Die Multiplikation zweier Quaternionen ergibt

$$xy = (x_0 + \mathbf{x})(y_0 + \mathbf{y}) = x_0y_0 + x_0\mathbf{y} + y_0\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{y}.$$

Wir wollen uns das letzte Produkt $\mathbf{x}\mathbf{y}$ näher ansehen:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\mathbf{y} &= -(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ &\quad + (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3 \\ &= -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{y},\end{aligned}$$

mit dem *Skalarprodukt* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ und dem *Vektor- oder Kreuzprodukt* $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ der beiden Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$. Diese Produkte sind historisch auf diesem Wege eingeführt worden und haben sich erst später von der Theorie der Quaternionen ‚emanzipiert‘. Wir halten aber fest:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \quad \text{und} \quad \mathbf{x} \times \mathbf{y} := \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Wir bemerken auch noch, dass

$$|x|^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2.$$

Ein Skalarprodukt existiert natürlich nicht nur für die Vektoren, sondern auch für die Quaternionen selbst. Nur ein Analogon zum Vektorprodukt lässt sich nicht so einfach erklären:

Definition 2.7 (Skalarprodukt). Es seien $x, y \in \mathbb{H}$. Das Produkt

$$\begin{aligned}x \cdot y &= \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) = \text{Sc}(x\bar{y}) = \text{Sc}(y\bar{x}) \\ &= x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3\end{aligned}$$

wird *Skalarprodukt* der Quaternionen x und y genannt. Für $x \cdot y = 0$ heißen x und y *orthogonal* zueinander.

Lemma 2.8. Es seien x, y, z beliebige Elemente in $\mathbb{H}$. Dann gilt

- (i) $\text{Sc}(xyz) = \text{Sc}(yzx) = \text{Sc}(zxy)$,
- (ii) Es ist $\text{Sc}(xyz) = \bar{x} \cdot (yz)$ eine reelle Zahl, die auch skalares Dreifachprodukt der Quaternionen x, y, z (in dieser Reihenfolge) genannt wird.

Beweis. Der Beweis ist dem Leser vorbehalten (vgl. Aufgabe 2.6.1). □

Bemerkung 2.9. Wir haben bisher mit $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ gearbeitet, diese Mengen haben sowohl eine Vektorraumstruktur als auch eine Körperstruktur. Man nennt sie *Algebren*. Da überdies alle von Null verschiedenen Elemente ein multiplikatives Inverses besitzen, spricht man von *Divisionsalgebren*. Der nachstehende Satz zeigt, dass es keine weiteren assoziativen Divisionsalgebren über dem Körper der reellen Zahlen gibt:

Satz 2.10 (Satz von Frobenius). *Die einzigen endlich-dimensionalen assoziativen Divisionsalgebren über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$.*

Beweis. Wir verweisen auf das Buch [71]. □

Gänzlich anders als im Komplexen stellen sich die Lösungsverhältnisse bei quadratischen Gleichungen dar. Wir formulieren dies in nachstehendem Lemma:

Lemma 2.11. (i) *Die zueinander konjugierten Quaternionen $x = x_0 + \mathbf{x}$ und $\bar{x} = x_0 - \mathbf{x}$ genügen der quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten*

$$\xi^2 - 2x_0\xi + |x|^2 = 0.$$

- (ii) *Eine Quaternion ist genau dann ein von Null verschiedener Vektor, wenn x^2 reell und negativ ist.*
- (iii) *Eine von Null verschiedene Quaternion ist genau dann reell, wenn x^2 reell und positiv ist.*
- (iv) *Die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung in $\mathbb{H}$ mit reellen Koeffizienten besteht entweder aus einem Element, zwei Elementen oder einer zwei-dimensionalen Sphäre.*

Beweis. (i) Einsetzen in die angegebene Gleichung liefert

$$(x_0 \pm \mathbf{x})^2 - 2x_0(x_0 \pm \mathbf{x}) + x_0^2 - x^2 = 0$$

und damit bereits das gewünschte Ergebnis.

(ii) Für ein beliebiges $x \in \mathbb{H}$ folgt

$$x^2 = (x_0 + \mathbf{x})(x_0 + \mathbf{x}) = x_0^2 - |\mathbf{x}|^2 + 2x_0\mathbf{x}.$$

Es sei zunächst $x = \mathbf{x}$, dann ist $x^2 = -|\mathbf{x}|^2 < 0$. Gilt umgekehrt $\mathbb{R} \ni x^2 < 0$, dann haben wir $2x_0\mathbf{x} = x^2 - x_0^2 + |\mathbf{x}|^2 \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $x_0 = 0$ oder $\mathbf{x} = 0$. Ist $x_0 = 0$, so sind wir fertig. Wenn $\mathbf{x} = 0$ sein sollte, dann würde $x^2 = x_0^2 > 0$ sein, was der Voraussetzung widerspräche. Somit kann der zweite Fall nicht eintreten.

(iii) Der Beweis ist völlig analog zum Beweis von (ii).

(iv) Mit quadratischer Ergänzung wird aus der Gleichung

$$x^2 + 2ax + b = 0, \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

wie üblich

$$(x + a)^2 = a^2 - b.$$

Ist die rechte Seite nichtnegativ, so ergeben sich gemäß (iii) die bekannten reellen Wurzeln der quadratischen Gleichung. Ist die rechte Seite negativ, so muss nach (ii) $x + a$ ein Vektor sein, dessen Betrag $\sqrt{b - a^2}$ ist. Das aber ist eine Sphäre im $\mathbb{R}^3$ mit eben diesem Radius. □

Im folgenden Lemma wollen wir eine Reihe wichtiger Eigenschaften auflisten:

Lemma 2.12. *Es seien x und y zwei Quaternionen bzw. $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ zwei Vektoren. Dann gelten die Beziehungen:*

- (i) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\text{Sc}(\mathbf{xy}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{xy} + \mathbf{yx})$.
- (ii) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \text{Vec}(\mathbf{xy}) = \frac{1}{2}(\mathbf{xy} - \mathbf{yx})$.
- (iii) Aus $x^2 = y^2$ folgt nicht notwendig $x = \pm y$.
- (iv) Eine Quaternion x ist genau dann reell, wenn für jede andere Quaternion y gilt $yx = xy$.

Beweis. Die Eigenschaften (i) und (ii) folgen unmittelbar aus der Definition. Zu (iii) ist zu bemerken, dass nach dem vorigen Lemma für $x^2 = y^2$ reell und negativ nur festgelegt ist, dass x bzw. y auf einer Sphäre im $\mathbb{R}^3$ liegen, sie also keineswegs bis auf das Vorzeichen gleich sein müssen. (iv) Reelle Zahlen kommutieren natürlich mit einer beliebigen Quaternion. Es gelte nunmehr $yx = xy$ für alle $y \in \mathbb{H}$. Dann folgt speziell für $y = e_1$

$$xe_1 = -x_1 + x_0e_1 - x_2e_3 + x_3e_2 = -x_1 + x_0e_1 + x_2e_3 - x_3e_2 = e_1x,$$

woraus sich $0 = x_2e_3 - x_3e_2$ ergibt. Also muss $x_2 = x_3 = 0$ gelten. In derselben Weise erhält man auch, dass $x_1 = 0$ ist. $\square$

Es folgt ein Lemma über die Beziehung zwischen Quaternionen und Vektoren:

Lemma 2.13. (i) *Es sei x eine Quaternion. Dann existiert ein Vektor $\mathbf{a} \neq 0$, so dass $x\mathbf{a}$ wieder ein Vektor ist.*

- (ii) *Eine beliebige Quaternion x ist als Produkt zweier Vektoren darstellbar.*
- (iii) *Aus jeder Quaternion a lässt sich in $\mathbb{H}$ wenigstens eine Wurzel berechnen, d.h. es gibt ein $x \in \mathbb{H}$ mit $x^2 = a$.*
- (iv) *Jede Quaternion e mit $|e| = 1$ lässt sich in der Form*

$$e = \mathbf{xyx}^{-1}\mathbf{y}^{-1}$$

darstellen.

Beweis. (i) Für $x = x_0 + \mathbf{x}$ und $\mathbf{x} = 0$ kann $\mathbf{a}$ beliebig gewählt werden. Für $\mathbf{x} \neq 0$ sei $\mathbf{a} \neq 0$ ein Vektor orthogonal zu $\mathbf{x}$. Dann gilt wegen $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0$

$$x\mathbf{a} = x_0\mathbf{a} + \mathbf{x} \times \mathbf{a} \in \text{Vec } \mathbb{H}.$$

- (ii) Es sei $\mathbf{a}$ wie in (i) gewählt, dann gilt

$$x\mathbf{a} = \mathbf{b}, \text{ also } x = \mathbf{ba}^{-1},$$

und das Inverse eines Vektors ist wieder ein Vektor. Die Lösung der Teilaufgaben (iii) und (iv) soll dem Leser vorbehalten werden (vgl. Aufgaben 2.6.2, 2.6.3). $\square$

Neben diesen elementaren Eigenschaften weisen reelle Quaternionen bemerkenswerte Analogien zu den komplexen Zahlen auf, wobei natürlich immer von der Kommutativität abgesehen werden muss.

Satz 2.14. Jede Quaternion $x \in \mathbb{H}$ mit $\mathbf{x} \neq 0$ gestattet die trigonometrische Darstellung

$$x = |x|(\cos \varphi + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \sin \varphi).$$

Dabei gelten die wegen $x_0^2 + |\mathbf{x}|^2 = |x|^2$ zulässigen Festlegungen

$$\cos \varphi = \frac{x_0}{|x|}, \quad \sin \varphi = \frac{|\mathbf{x}|}{|x|}, \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \in S^2 \quad (-\pi \leq \varphi \leq \pi),$$

wobei S^2 die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Beweis. Offensichtlich ist

$$x = |x| \left(\frac{x_0}{|x|} + \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \frac{|\mathbf{x}|}{|x|} \right) = |x|(\cos \varphi + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \sin \varphi). \quad \square$$

Beispiel 2.15. Es sei $x = 1 + 2e_1 + 2e_2 + e_3$, dann ist $|x| = \sqrt{10}$, $|\mathbf{x}| = 3$, $\varphi = \arccos(1/\sqrt{10}) = \arcsin(3/\sqrt{10})$. Somit erhalten wir die Darstellung

$$x = \sqrt{10} \left[\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{(2e_1 + 2e_2 + e_3)}{3} \frac{3}{\sqrt{10}} \right]$$

und sehen auch, dass eine Berechnung keinerlei Probleme macht.

Folgerung 2.16 (Formel von de Moivre). Es seien $x = x_0 + \mathbf{x} \in \mathbb{H}$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$; dann gilt:

$$(\cos \varphi + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \sin n\varphi.$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass gegenüber dem komplexen Fall die imaginäre Einheit i hier durch ein Element der 2-dimensionalen Einheitssphäre ersetzt werden muss. Es gilt aber trotzdem

$$\boldsymbol{\omega}^2(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right)^2 = -1.$$

Der Beweis erfolgt dann für positive n durch vollständige Induktion. Der Fall $n = 0$ liefert auf beiden Seiten 1, und für negative n gilt

$$(\cos \varphi + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \sin \varphi)^{-n} = (\cos \varphi + \overline{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}) \sin \varphi)^n = \cos n\varphi - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \sin n\varphi. \quad \square$$

2.3 Abbildungen und Darstellungen

Bislang haben wir uns vor allem mit der strukturellen Seite der reellen Quaternionenalgebra beschäftigt. Besondere Aufmerksamkeit soll nun dem Studium von algebraischen Automorphismen bzw. Antiautomorphismen von $\mathbb{H}$ gewidmet werden, sind doch diese spezifischen Abbildungen innerhalb der Quaternionenalgebra eng mit Drehungen und Spiegelungen im $\mathbb{R}^4$ sowie im $\mathbb{R}^3$ verbunden. Dabei hat ein Automorphismus h unter anderem die multiplikative Eigenschaft $h(xy) = h(x)h(y)$, $x, y \in \mathbb{H}$, zu erfüllen, während ein Antiautomorphismus k der Beziehung $k(xy) = k(y)k(x)$, $x, y \in \mathbb{H}$, genügen muss. Unsere Ausführungen stützen sich teilweise auf Resultate, welche in den Monographien [117] und [6] enthalten sind. Schließlich werden Darstellungen der Quaternionenalgebra im Matrizenring $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ untersucht.

2.3.1 Basismorphismen

Zunächst wollen wir bemerken, dass zwischen dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ und dem $\mathbb{R}$ -linearen Unterraum $\text{Vec } \mathbb{H}$ von $\mathbb{H}$ nicht unterschieden zu werden braucht. Als reelle Vektorräume sind auch $\mathbb{H}$ und $\mathbb{R}^4$ auf natürliche Weise isomorph.

Im Vergleich zu $\mathbb{C}$ gibt es in $\mathbb{H}$ mehr Möglichkeiten, eine Involution zu definieren. Wir unterscheiden daher verschiedene Involutionen:

Definition 2.17. (i) Es sei $x \in \mathbb{H}$. Die Abbildung $x \rightarrow \bar{x}$ mit

$$\bar{x} = \text{Sc}(x) - \text{Vec}(x) \in \mathbb{H}$$

wird *Konjugation* in $\mathbb{H}$ genannt. Das entsprechende Element $\bar{x}$ ist dann, wie wir bereits wissen, die zu x *konjugierte Quaternion*. Weiterhin gilt $\overline{xy} = \bar{y} \bar{x}$, also liegt ein Antiautomorphismus vor.

(ii) Die Abbildung $x \rightarrow \hat{x}$

$$\hat{x} := e_2 x e_2^{-1} \in \mathbb{H}$$

heißt *Hauptinvolution* in $\mathbb{H}$. Das Element $\hat{x}$ heißt *Involute* zur Quaternion x .

(iii) Die Komposition von Konjugation und Hauptinvolution

$$\tilde{x} := \hat{\bar{x}} = \bar{\hat{x}}$$

wird schließlich *Reversion* in $\mathbb{H}$ genannt. Das Element $\tilde{x}$ ist die *Reverse* zur Quaternion x .

Bemerkung 2.18. Geometrisch kann $x \rightarrow \hat{x}$ als Spiegelung an der Ebene $\{\lambda + \mu e_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ angesehen werden. Quaternionen werden somit an der von e_0 und e_2 aufgespannten Ebene gespiegelt, Vektoren im $\mathbb{R}^3$ werden an der $\mathbf{e}_2$ -Achse gespiegelt und es gilt $\widehat{xy} = \hat{x} \hat{y}$. Die Hauptinvolution ist daher ein Automorphismus. Wir sehen aber auch, dass sich die Reihenfolge der Faktoren im Quaternionenprodukt bei Anwendung der Reversion umgekehrt hat, also ein Antiautomorphismus vorliegt. Gerade letztere Eigenschaft gibt der Reversion ihren Namen.

Als nächstes wollen wir die Automorphismen von $\mathbb{H}$ charakterisieren:

Satz 2.19 (Rodrigues, Porteous). *Ein beliebiger Automorphismus oder Antiautomorphismus m der Algebra $\mathbb{H}$ gestattet stets die Darstellung*

$$m(x) := \text{Sc}(x) + h(\text{Vec}(x)), \quad x \in \mathbb{H},$$

mit einem orthogonalen Automorphismus h von $\mathbb{R}^3$.

Beweis. Sei $m(1) = y_0 + \mathbf{y}$ mit $y_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt wegen $m(1) = m(1^2) = m^2(1) :$

$$y_0^2 - |\mathbf{y}|^2 + 2y_0\mathbf{y} = y_0 + \mathbf{y}.$$

Für $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ wäre $2y_0 - 1 = 0$, das ginge nicht wegen $y_0 - y_0^2 = 1/4 = -|\mathbf{y}|^2$. Also ist $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $y_0 = 1$ und $m(x_0) = x_0$ für reelle x_0 . Damit folgt für beliebige $x = x_0 + \mathbf{x}$:

$$m(x) = x_0 + m(\mathbf{x}).$$

Wäre nun ähnlich wie eben $m(\mathbf{x}) = y_0 + \mathbf{y}$, so wäre

$$m(\mathbf{x}^2) = -m(|\mathbf{x}|^2) = -|\mathbf{x}|^2 = y_0^2 - |\mathbf{y}|^2 + 2y_0\mathbf{y}.$$

Hier muss $y_0\mathbf{y} = \mathbf{0}$ sein, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ist wegen $-|\mathbf{x}|^2 = y_0^2$ ausgeschlossen, also bleibt nur $y_0 = 0$ und $m(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$. Damit ist die Einschränkung $m|_{\mathbb{R}^3} =: h$ ein Automorphismus des $\mathbb{R}^3$, wegen $m(|\mathbf{x}|^2) = |\mathbf{x}|^2$ ist dieser normerhaltend und daher orthogonal. $\square$

Ein sehr wichtiger Automorphismus von $\mathbb{H}$ wird durch

$$\rho_y(x) := yxy^{-1}, \quad y \in \mathbb{H},$$

definiert, natürlich muss $y \neq 0$ sein. Die so eingeführte Abbildung soll nun hinsichtlich ihrer algebraischen und topologischen Eigenschaften analysiert werden.

Satz 2.20. *Für $x, x' \in \mathbb{H}$ und $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ besitzt die Abbildung ρ_y folgende Eigenschaften:*

- (i) $\rho_y(\lambda x + \lambda' x') = \lambda \rho_y(x) + \lambda' \rho_y(x')$ ($\mathbb{R}$ -Linearität).
- (ii) $\rho_y(xx') = \rho_y(x)\rho_y(x')$ (Multiplikativität).
- (iii) ρ_y ist ein isometrischer Automorphismus auf $\mathbb{H}$.
- (iv) Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^4$ ist unter der Abbildung ρ_y invariant, d.h.

$$\rho_y(x) \cdot \rho_y(x') = x \cdot x'.$$

- (v) Es gilt $\rho_y \rho_{y'} = \rho_{yy'}$.

Beweis. Da die Beziehungen (i) und (ii) sehr einfach zu zeigen sind, wollen wir nur die drei letzten Eigenschaften nachweisen. Zunächst stellen wir fest, dass $\rho_y^{-1} : x \in \mathbb{H} \rightarrow y^{-1}xy$ die Inverse zu ρ_y ist, also $\rho_y^{-1} = \rho_{y^{-1}}$. Daher ist ρ_y ein Automorphismus. Außerdem gilt

$$|\rho_y(x)| = |yxy^{-1}| = |x|,$$

womit (iii) bewiesen wäre. Um (iv) zu erhalten, rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \rho_y(x) \cdot \rho_y(x') &= \frac{1}{2} \left[\rho_y(x') \overline{\rho_y(x)} + \rho_y(x) \overline{\rho_y(x')} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[yx'y^{-1} \overline{yxy^{-1}} + yxy^{-1} \overline{yx'y^{-1}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[yx'y^{-1} \overline{y^{-1}x} \overline{y} + yxy^{-1} \overline{y^{-1}x'} \overline{y} \right] \\ &= \frac{1}{2} y(x'\overline{x} + x\overline{x'}) \overline{y} \frac{1}{|y|^2} = x \cdot x'. \end{aligned}$$

Aus der Assoziativität folgt schließlich die letzte Beziehung:

$$\rho_y \rho_{y'}(x) = y(y'xy'^{-1})y^{-1} = yy'(xyy')^{-1} = \rho_{yy'}(x). \quad \square$$

Da ρ_y nicht von $|y|$ abhängt, kann man sich auf diejenigen y mit $|y| = 1$ beschränken, das sind die Elemente der Einheitssphäre S^3 im $\mathbb{R}^4$, also

$$S^3 := \{y \in \mathbb{H} : |y| = 1\}.$$

Es seien $x, y \in S^3$, dann folgt wegen $|xy| = |x||y|$, dass auch $xy \in S^3$. Weiter ist die Zahl $1 \in S^3$ und $\overline{y} = y^{-1} \in S^3$. Damit ist gezeigt:

Lemma 2.21. *S^3 ist eine Untergruppe von $\mathbb{H}$ und die Abbildung $y \rightarrow \rho_y$ ist ein Homomorphismus von $\mathbb{H}$ auf S^3 .*

Wir wollen uns nun mit den Eigenschaften des Automorphismus ρ_y im $\mathbb{R}^3$ beschäftigen, woraus wir auch Einsichten in das Verhalten in $\mathbb{H}$ gewinnen werden.

2.3.2 Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Wir beginnen mit der Betrachtung von ρ_y im $\mathbb{R}^3$. In dieser wie in höheren Dimensionen ist eine *Drehung* eine Abbildung

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

mit einer orthogonalen Matrix A , d.h. $A^{-1} = A^\top$ und $\det A = 1$. Diese Matrizen bilden die Gruppe $SO(3)$. Dabei bedeutet $\det A = 1$, dass die Orientierung erhalten bleibt, für $\det A = -1$ liegt eine *Spiegelung* vor. Zunächst können wir festhalten, dass des Satzes von Rodrigues–Porteous 2.19 wegen $\rho_y(\mathbf{x})$ wieder ein Vektor ist, denn ein Skalarteil von $\mathbf{x}$ existiert ja nicht. Daher ist ρ_y (wir verwenden dieselbe Bezeichnung auch für die Einschränkung auf den $\mathbb{R}^3$) gleichfalls ein Automorphismus des $\mathbb{R}^3$ mit den in Satz 2.20 aufgelisteten Eigenschaften. Zusätzlich ist ρ_y im $\mathbb{R}^3$ mit dem Vektorprodukt vertauschbar, denn

$$\begin{aligned} \rho_y(\mathbf{x}) \times \rho_y(\mathbf{x}') &= \frac{1}{2} [\rho_y(\mathbf{x}) \rho_y(\mathbf{x}') - \rho_y(\mathbf{x}') \rho_y(\mathbf{x})] \\ &= \frac{1}{2} [y\mathbf{x}y^{-1}y\mathbf{x}'y^{-1} - y\mathbf{x}'y^{-1}y\mathbf{x}y^{-1}] \\ &= \frac{1}{2} y [\mathbf{x}\mathbf{x}' - \mathbf{x}'\mathbf{x}] y^{-1} = \rho_y(\mathbf{x} \times \mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Damit können wir formulieren:

Die Abbildung ρ_y ist ein Automorphismus des $\mathbb{R}^3$, der das kanonische Skalarprodukt invariant lässt. Sie ist homomorph bezüglich des Vektorproduktes, wie sofort aus obiger Rechnung folgt.

Wegen der letzten Eigenschaft lässt ρ_y auch die Orientierung invariant, ist also eine Drehung, was wir im nächsten Lemma auch anschaulich sehen werden.

Die Betrachtung von Drehungen war ursprünglich nicht mit dem Gebrauch von Quaternionen verbunden. Bereits LEONHARD EULER versuchte 1775 das Problem der Hintereinanderausführung von zwei affinen Transformationen zu beschreiben. Nach Elimination von drei Parametern erwiesen sich die restlichen als Drehachsen beziehungsweise Drehwinkel. Er führte somit die Aufgabenstellung auf ein rein algebraisches Problem zurück. Geschlossene algebraische Ausdrücke konnte er jedoch nicht erhalten. BENJAMIN OLINDE RODRIGUES (1794–1851), der Sohn eines Bankiers in Bordeaux, war hingegen erfolgreicher. Er betrachtete Drehungen als allgemeine Bewegungen auf einer Sphäre und löste 1840 Eulers Problem der Komposition zweier Drehungen auf konstruktive Weise.

Mit Hilfe der Quaternionentheorie berechnen wir auf einfache Weise das Bild $\mathbf{x}'$ eines Vektors $\mathbf{x}$ unter der Abbildung ρ_y :

Es sei $y \in S^3$, wie wir bereits wissen, kann dies gemäß Satz 2.14 in der Form $y = y_0 + \mathbf{y} = y_0 + \boldsymbol{\omega}|\mathbf{y}|$ mit $y_0^2 + |\mathbf{y}|^2 = 1$ und $\boldsymbol{\omega}^2 = -1$ angegeben werden. Wie üblich setzen wir $y_0 =: \cos \varphi$ und $|\mathbf{y}| =: \sin \varphi$. Zuerst gilt

$$\rho_y(\boldsymbol{\omega}) = (y_0 + \boldsymbol{\omega}|\mathbf{y}|)\boldsymbol{\omega}(y_0 - \boldsymbol{\omega}|\mathbf{y}|) = (y_0^2 + |\mathbf{y}|^2)\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ bei der Abbildung ρ_y invariant bleibt. Es folgt

$$\begin{aligned} \rho_y(\mathbf{x}) &= y_0\mathbf{x}y_0 - y_0\mathbf{x}|\mathbf{y}|\boldsymbol{\omega} + |\mathbf{y}|\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}y_0 - |\mathbf{y}|^2\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}\boldsymbol{\omega} \\ &= y_0^2\mathbf{x} + y_0|\mathbf{y}|(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x} - \mathbf{x}\boldsymbol{\omega}) - |\mathbf{y}|^2\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}\boldsymbol{\omega} \\ &= \mathbf{x}\cos^2\varphi + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})\sin 2\varphi - \boldsymbol{\omega}\mathbf{x}\boldsymbol{\omega}\sin^2\varphi. \end{aligned}$$

Wegen

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{x}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{x}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{x}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{x} + (\boldsymbol{\omega}\mathbf{x} + \mathbf{x}\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} = \mathbf{x} - 2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\omega}.$$

erhalten wir das wichtige Resultat:

Lemma 2.22. a) **Formel von Euler–Rodrigues.** Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ werde vermöge ρ_y in einen Punkt $\mathbf{x}'$ abgebildet. Dann gilt mit $y = y_0 + \mathbf{y} = y_0 + \boldsymbol{\omega}|\mathbf{y}|$ und $\boldsymbol{\omega}^2 = -1$, $y_0 = \cos \varphi$, $|\mathbf{y}| = \sin \varphi$

$$\mathbf{x}' := \rho_y(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cos 2\varphi + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})\sin 2\varphi + (1 - \cos 2\varphi)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\omega}.$$

b) Jede Abbildung ρ_y ist eine Drehung um die Achse $\boldsymbol{\omega}$ und den Winkel 2φ . Umgekehrt kann jede Drehung im $\mathbb{R}^3$ durch einen Automorphismus der Form $\rho_y = yxy^{-1}$ mit $y \in \mathbb{H}$ dargestellt werden.

Bemerkung 2.23. Mit Hilfe quaternionischer Exponentialfunktionen, die wir später einführen werden (Abschnitt 11.2), können Drehungen im $\mathbb{R}^3$ vorteilhaft beschrieben werden. Die Drehachse konsekutiver Drehungen lässt sich dann relativ elegant berechnen (vgl. auch [55]).

Beweis. Teil a) war vor der Formulierung des Lemmas bewiesen worden, es bleibt Teil b) zu zeigen. Dass in der Tat eine Drehung um die Achse ω vorliegt, sieht man vielleicht am besten, indem man die Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ in die Komponenten parallel zu ω und senkrecht dazu zerlegt. Man überlegt sich leicht, dass diese Zerlegung das Aussehen

$$\mathbf{x} =: \mathbf{z} + (\omega \cdot \mathbf{x})\omega, \quad \mathbf{x}' =: \mathbf{z}' + (\omega \cdot \mathbf{x}')\omega.$$

hat. Wegen der Invarianz des Skalarproduktes gemäß 2.20 (iv) und $\rho_y(\omega) = \omega$ gilt erst einmal $\omega \cdot \mathbf{x} = \omega \cdot \mathbf{x}'$. Einsetzen in die Formel von Euler–Rodrigues liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \mathbf{x}' - (\omega \cdot \mathbf{x}')\omega \\ &= \mathbf{x} \cos 2\varphi + (\omega \times \mathbf{x}) \sin 2\varphi - (\omega \cdot \mathbf{x})\omega \cos 2\varphi \\ &= \mathbf{z} \cos 2\varphi + (\omega \times \mathbf{z}) \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besagt gerade, dass $\mathbf{z}$ in der zu ω senkrechten Ebene durch den Nullpunkt um den Winkel 2φ gedreht wird, denn in dieser Ebene stellen $\mathbf{z}$ und $\omega \times \mathbf{z}$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem dar. Die Komponente von $\mathbf{x}$ in Richtung ω , also der Abstand zu der Ebene, bleibt unverändert. Das aber beschreibt die Drehung des $\mathbb{R}^3$ um die Achse ω um den Winkel 2φ . Wir haben hier anschaulich eine Drehung beschrieben; dass dies auch mit der zu Beginn dieses Unterabschnittes gegebenen Definition übereinstimmt, haben wir oben bereits erwähnt.

Es bleibt noch die Umkehrung zu zeigen, dass jede Drehung durch ein ρ_y dargestellt werden kann: Dazu müssen nur die Drehachse ω und der Drehwinkel 2φ gegeben sein; aus diesen lassen sich sofort y_0 und $|\mathbf{y}|$ bestimmen, damit auch $\mathbf{y}$ und y . $\square$

Betrachtet man $\rho_{\mathbf{y}}$ mit einem Vektor $\mathbf{y}$, so ist $y_0 = 0$ und damit $\varphi = \pi/2$. Das bedeutet eine Drehung um die Achse $\mathbf{y}$ und um den Winkel π . Das kann aber auch als Spiegelung an der Achse $\mathbf{y}$ interpretiert werden. Da sich gemäß 2.13 (ii) jede Quaternion als Produkt zweier Vektoren darstellen lässt, kann man formulieren:

Folgerung 2.24. *Jede Drehung im $\mathbb{R}^3$ kann als Produkt zweier Spiegelungen an Geraden durch Null mit geeigneten Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ dargestellt werden:*

$$\rho_y = \rho_{\mathbf{a}}(\rho_{\mathbf{b}}) = \rho_{\mathbf{ab}}.$$

Es sei aber ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es sich um Spiegelungen an Geraden im $\mathbb{R}^3$ handelt und nicht um solche an Ebenen.

Spiegelungen an einer Ebene (durch den Nullpunkt) mit der Normalen $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$, kann man durch Zerlegung von $\mathbf{x}$ in eine Komponente parallel zur Ebene und eine in Richtung $\mathbf{n}$ leicht beschreiben:

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n},$$

und die Spiegelung bedeutet, dass der Anteil in Richtung $\mathbf{n}$ das Minuszeichen bekommt, so dass für den Spiegelungspunkt $\mathbf{x}'$ gilt

$$\mathbf{x}' = \mathbf{z} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n}.$$

Nun ergibt die sukzessive Spiegelung an zwei zueinander senkrechten Ebenen gerade die Spiegelung an der Schnittgerade der beiden Ebenen, das lässt sich auch rechnerisch belegen: Wegen $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0$ gilt einerseits

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'' &= \mathbf{x}' - 2(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{x}')\mathbf{n}' \\ &= \mathbf{x} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n} - 2(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{x})\mathbf{n}'.\end{aligned}$$

Andererseits ergibt die Formel von Euler–Rodrigues mit $\boldsymbol{\omega} := \mathbf{n} \times \mathbf{n}'$

$$\mathbf{x}'' = -\mathbf{x} + 2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\omega}.$$

Gleichsetzen beider Formeln liefert schließlich

$$\mathbf{x} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})\mathbf{n} + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{x})\mathbf{n}' + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\omega},$$

und das ist richtig, denn es handelt sich um die Darstellung von $\mathbf{x}$ im durch $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ und $\boldsymbol{\omega}$ gegebenen Koordinatensystem. Wir haben bewiesen:

Folgerung 2.25. *Jede Drehung im $\mathbb{R}^3$ lässt sich aus höchstens vier Spiegelungen an Ebenen zusammensetzen.*

Schließlich noch ein Lemma zur näheren Bestimmung der Beziehung von S^3 und $SO(3)$.

Lemma 2.26 (Porteous). *Die Abbildung*

$$\rho : S^3 \rightarrow SO(3) \quad \text{mit} \quad \rho(y) = \rho_y$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker \rho = \{-1, 1\}$.

Beweis. Die letzten Lemmata besagen unter anderem, dass jede Drehung im $\mathbb{R}^3$, also jedes Element von $SO(3)$ als Bild auftritt, wir haben eine surjektive Abbildung. Dem Satz 2.20 (v) ist zu entnehmen, dass yy' in $\rho_{yy'}$ übergeht, also liegt ein Homomorphismus vor. Ist $y \in \ker \rho$, so muss ρ_y die identische Drehung sein, die alle Vektoren invariant lässt. Dafür gilt

$$\rho_y(\mathbf{x}) = y\mathbf{x}y^{-1} = \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3),$$

woraus $y\mathbf{x} = \mathbf{x}y$ für alle $\mathbf{x}$ folgt. Offenbar kann man zu $\mathbf{x}$ einen beliebigen Skalarteil addieren, so dass auch $yx = xy$ für alle Quaternionen x gilt. Nach Lemma 2.12 (iv) muss y dann notwendigerweise reell sein. Da aber $|y| = 1$ ist, bleibt nur noch $y = \pm 1$. $\square$

2.3.3 Drehungen des $\mathbb{R}^4$

Schließlich sei noch auf die Drehungen des $\mathbb{R}^4$ eingegangen. Wie oben bemerkt werden diese durch orthogonale Matrizen vermittelt, die Längen invariant lassen und die Determinante 1 haben ($SO(4)$). Da die Abbildungen ρ_y immer eine Gerade in Richtung $\boldsymbol{\omega}$ invariant lassen, außerdem die reelle Achse in $\mathbb{H}$, bleibt unter ihnen immer eine zweidimensionale Ebene E_1 in $\mathbb{H}$ invariant. In der darauf senkrechten

zweidimensionalen Ebene E_2 , die mit E_1 nur den Nullpunkt gemeinsam hat (im $\mathbb{R}^4$ versagt unsere Vorstellungskraft!), wird dann um den Winkel 2φ gedreht. Für einen Vektor $\mathbf{y}$ wird durch $\rho_{\mathbf{y}}$ an der von $\mathbf{y}$ und e_0 aufgespannten Ebene gespiegelt. Daher kann man mit den $\rho_{\mathbf{y}}$ nicht alle Bewegungen von $\mathbb{H}$ beschreiben.

Allgemein kann eine vierreihige orthogonale Matrix als ersten Fall 4 reelle Eigenwerte haben, diese müssen der Längeninvarianz wegen alle gleich 1 sein, man hat also die Identität. Als zweiter Fall können zwei reelle Eigenwerte und zwei konjugiert komplexe auftreten. Erstere müssen wieder gleich 1 sein, die Eigenvektoren bestimmen eine invariante Ebene, die zu den komplexen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren bestimmen auch eine Ebene, in der um einen geeigneten Winkel gedreht wird. Das ist im Wesentlichen der vorher abgehandelte Fall. Als dritte und letzte Möglichkeit kann die Drehmatrix zwei Paare konjugiert komplexer Eigenwerte haben, in den von den zugehörigen Eigenvektoren aufgespannten, aufeinander senkrechten Ebenen wird um einen geeigneten Winkel gedreht. Dieser Fall ist mit den vorherigen Betrachtungen nicht erfasst. Da sich jede Drehung als Komposition von Spiegelungen zusammensetzen lässt, gilt dies auch für alle Drehungen des $\mathbb{R}^4$. Die grundlegende Aussage zu Drehungen des $\mathbb{R}^4$ ist aber der nachfolgende Satz:

Satz 2.27 (Satz von Cayley). *Die Drehungen von $\mathbb{H}$ sind genau die Abbildungen*

$$x \rightarrow x' = axb$$

mit $|a| = |b| = 1$ und $a, b \in \mathbb{H}$.

Beweis. Zunächst handelt es sich um eine orthogonale Abbildung, denn

$$\begin{aligned} x' \cdot y' &= \frac{1}{2}(x' \overline{y'} + y' \overline{x'}) \\ &= \frac{1}{2}a(xb \overline{b\overline{y}} + yb \overline{b\overline{x}})\overline{a} = x \cdot y. \end{aligned}$$

Um nun noch zu zeigen, dass ax bzw. xb Drehungen definieren, ist für die entsprechende Matrix nachzurechnen, dass die Determinante den Wert 1 hat. Für ax lautet die Matrix der Multiplikationsregel halber

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

mit $\det A = |a|^4 = 1$; analog folgt dies für xb . Da $SO(4)$ eine Gruppe ist, ergibt die Komposition zweier Drehungen wieder eine solche, also definiert $x' = axb$ tatsächlich eine Drehung.

Ist umgekehrt die Drehung T gegeben, so sei $T(e_0) =: a$. Dann ist $a^{-1}T$ auch eine Drehung T_1 mit $T_1(e_0) = e_0$. Damit bleiben aber die reellen Zahlen invariant unter T_1 , T_1 ist mithin eine Drehung des $\mathbb{R}^3$, die nach dem vorangehenden Unterabschnitt die Form $T_1(x) = bxb^{-1}$ hat. Damit gilt $T(x) = abxb^{-1}$, und das ist die andere Richtung der Behauptung. $\square$

2.3.4 Darstellungen

Bekanntlich bilden alle reellen bzw. komplexen $(n \times n)$ -Matrizen einen Ring, den so genannten *vollen Matrizenring* $\mathbb{R}^{n \times n}$ bzw. $\mathbb{C}^{n \times n}$. Oftmals ist es nützlich zu schauen, wie sich zu untersuchende algebraische Strukturen als isomorphe Bilder im Matrizenring darstellen, also durch Automorphismen von $\mathbb{R}^4$ oder auch $\mathbb{C}^2$. Unser Ziel ist es, zum Schiefkörper der reellen Quaternionen geeignete nichtkommutative Unterkörper in $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ sowie in $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ zu finden, die sich als isomorphe Bilder erweisen.

Es seien mit $x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ und $y = y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ zwei beliebige Quaternionen gegeben. Durch Ausmultiplizieren des Quaternionenprodukts xy erhalten wir

$$\begin{aligned} xy = & (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) \\ & + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)e_1 \\ & + (x_0y_2 - x_1y_3 + x_2y_0 + x_3y_1)e_2 \\ & + (x_0y_3 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_0)e_3. \end{aligned}$$

Vermöge der üblichen Isomorphie wird dieser Quaternion der $\mathbb{R}^4$ -Vektor

$$\begin{pmatrix} x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 \\ x_1y_0 + x_0y_1 - x_3y_2 + x_2y_3 \\ x_2y_0 + x_3y_1 + x_0y_2 - x_1y_3 \\ x_3y_0 - x_2y_1 + x_1y_2 + x_0y_3 \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Dieser Vektor ist nichts anderes als das Resultat einer linksseitigen Anwendung der Matrix

$$L_x := \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}$$

auf den $\mathbb{R}^4$ -Vektor $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)^\top$, d.h. es gilt

$$\begin{pmatrix} x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 \\ x_1y_0 + x_0y_1 - x_3y_2 + x_2y_3 \\ x_2y_0 + x_3y_1 + x_0y_2 - x_1y_3 \\ x_3y_0 - x_2y_1 + x_1y_2 + x_0y_3 \end{pmatrix} = L_x y.$$

Damit wurde der Quaternion x die Matrix L_x in natürlicher Weise zugeordnet:

$$x \rightarrow L_x \quad \text{mit} \quad xy = L_x y$$

für alle $y \in \mathbb{H}$, daher wird L_x eine *Links-Darstellung* der Quaternion x in $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ genannt. Es ist nicht schwierig, die Eigenschaften

- (i) $L_1 = E$
- (ii) $L_{\bar{x}} = L_x^\top$
- (iii) $L_{x\tilde{x}} = L_x L_{\tilde{x}}$
- (iv) $\det L_x = |x|^4$

nachzurechnen. Schließlich sei noch auf die Zerlegung

$$L_x = x_0 E + X$$

mit $X^\top = -X$ hingewiesen.

Völlig analog kann auch eine *Rechts-Darstellung*

$$R_x = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 \\ x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 \\ x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 \end{pmatrix}$$

der Quaternion x in $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ erhalten werden, wobei $yx = R_x y$ ist. Die Eigenschaften (i), (ii) und (iv) gelten weiter, während (iii) durch

$$R_{x\tilde{x}} = R_{\tilde{x}} R_x$$

zu ersetzen ist. Weitere Matrixdarstellungen in $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ sind möglich, sollen aber hier nicht erörtert werden. Folgen wir weiter den Ausführungen in [94], so kann gezeigt werden, dass

$$L_{e_1} L_{e_2} L_{e_3} = -E, \quad R_{e_1} R_{e_2} R_{e_3} = E$$

ist, wobei E die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ bezeichnet. Die beiden Mengen $\{L_x \in \mathbb{R}^{4 \times 4} : x \in \mathbb{H}\}$ und $\{R_x \in \mathbb{R}^{4 \times 4} : x \in \mathbb{H}\}$ bilden zu $\mathbb{H}$ isomorphe Unteralgebren von $\mathbb{R}^{4 \times 4}$.

Quaternionen können auch mittels Matrizen aus $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ dargestellt werden. Eine der Physik nahe stehende Zuordnung ist die folgende:

$$x_0 e_0 + e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3 \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 - ix_3 & -ix_1 - x_2 \\ -ix_1 + x_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix}.$$

Diese Zuordnung erscheint natürlich, wenn man die orthogonalen Einheitsvektoren e_0, e_1, e_2, e_3 auf Varianten der so genannten *Pauli-Matrizen* abbildet, d.h. man setzt als Pauli-Matrizen

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und identifiziert die e_j der Reihe nach mit $\sigma_0, -i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3 = \sigma_1 \sigma_2$. Wir erhalten eine Unteralgebra von $\mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Bemerkung 2.28. In Analogie zu den nicht-kommutativen Quaternionen veröffentlichte CLYDE DAVENPORT eine Monographie mit dem Titel “*A commutative hypercomplex calculus with applications to special relativity*” [30]. Er benutzte anstelle der Pauli-Matrizen die so genannten *Davenport-Zahlen*, welche lauten

$$e_1 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Es kann gezeigt werden, dass die Gesamtheit aller Davenport-Zahlen nach Einführung der üblichen Addition und einer geeigneten Multiplikation eine kommutative Algebra bildet, welche auch *D-Raumalgebra* genannt wird. Solche Algebren wurden insbesondere von B. PEIRCE (1881) [112] und E. STUDY (1889) [147] näher untersucht. Ähnlich den Study-Zahlen in der Ebene ist die mathematische Reichhaltigkeit der Davenport-Zahlen nicht gegeben, und daher sind diese nur für sehr spezielle Zwecke einsetzbar. Weitere Informationen zu diesen Strukturen findet man in [30].

2.4 Vektoren und geometrische Aspekte

Im Juli 1846 erschien im *Philosophical Magazine* der Royal Irish Academy ein Artikel von W.R. Hamilton über Quaternionen, in welchem er unter anderem erstmalig die Worte *Vektor* und *Skalar* als Anteile einer Quaternion einführte. Er betrachtete eine Quaternion in der folgenden Schreibweise:

$$q = w + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z.$$

Er schreibt dort ([29], S. 31):

The algebraically real part may receive ... all values contained on the one scale of progression of number from negative to positive infinity; we shall call it therefore the scalar part, or simply the scalar of the quaternion, ... On the other hand the algebraically imaginary part, being geometrically constructed by a straight line or radius vector, which has in general for each determined quaternion, a determined length and determined direction in space, may be called vector part, or simply the vector of a quaternion.

Er führte für den Skalarteil der Quaternion q die Bezeichnung “S. q ” bzw. “Scal. q ” ein. Der Vektorteil obiger Quaternion wurde mit “V. q ” bzw. “Vect. q ” abgekürzt. W.R. Hamilton kreierte diese Symbole nur, um eine schnelle Separierung von Real- und Imaginärteil einer Quaternion zu erreichen. Wenn man etwa die zwei Vektoren

$$v = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \quad \text{und} \quad v' = \mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z'$$

betrachtet und deren Quaternionenprodukt aufschreibt, so erhielt Hamilton geeignete Definitionen von Skalarprodukt und Kreuzprodukt. Diese hatten folgendes

Aussehen:

$$\begin{aligned} S.vv' &= -(xx' + yy' + zz'), \\ V.vv' &= \mathbf{i}(yz' - zy') + \mathbf{j}(zx' - xz') + \mathbf{k}(xy' - yx'). \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt wird heute in der Regel als $-S.vv'$ eingeführt, während die Definition für das Kreuzprodukt unverändert gilt. Daher kann man Hamilton durchaus als Begründer der Vektorrechnung, dem späteren Konkurrenzunternehmen zum Quaternionenkalkül, ansehen. Die Vektorrechnung, vor allem von dem Amerikaner JOSIAH W. GIBBS (1839–1903) und dem Engländer OLIVER HEAVISIDE (1850–1925) entwickelt, hat sich als leicht zu erlernendes Handwerkszeug von der “Mutter”, den Quaternionen, emanzipiert und ist ein eigenständiges Gebiet geworden.

Allerdings sind eine Reihe physikalischer Größen wie Masse, Ladung, Zeit, Temperatur bereits durch die Angabe einer einzigen Zahl, eines Skalars, definiert. In vielen Situationen sind aber auch die Richtung physikalischer Wirkungen und Abläufe von Interesse. Größen dieser Art sind zum Beispiel Weg, Kraft, Geschwindigkeit, elektrische Feldstärke, diese werden mittels Vektoren beschrieben. Der Charakter der auf diese Weise erfassten Größen kann ganz nach Art der Anwendungen sehr verschieden sein, wir wollen einige Beispiele betrachten:

Beispiel 2.29 (Lokal gebundene Vektoren). Teilchen eines fließenden Mediums in einem Flussbett besitzen individuelle Geschwindigkeiten, die sich in Betrag und Richtung unterscheiden. Man beschreibt die Geschwindigkeit der einzelnen Teilchen durch Vektoren, diese sind somit an den jeweiligen Ort gekoppelt, man spricht von *lokal gebundenen Vektoren*. Die Beschreibung der gesamten Strömung geschieht also durch ein *Geschwindigkeitsfeld*. Solche *Vektorfelder* treten häufig bei der Beschreibung von Naturphänomenen auf.

Beispiel 2.30 (Linienvektor). Kraftvektoren können stets entlang ihrer Wirkungsline verschoben werden, ohne dass sich die physikalische Situation ändert und werden daher als *Linienvektoren* bezeichnet.

Da Linienvektoren nur in speziellen physikalischen Anwendungen von Bedeutung sind, wollen wir uns im weiteren nur mit lokal gebundenen und freien Vektoren im $\mathbb{R}^3$ beschäftigen. Dazu denken wir den uns umgebenden Raum mit einem orthonormalen Koordinatensystem versehen, so dass jeder Punkt durch seine drei Koordinaten beschrieben werden kann: $A = (a_1, a_2, a_3)$. Jedem Paar von Punkten A, B können wir den in A lokal gebundenen Vektor $\overrightarrow{AB}$ anhängen, der durch $B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ problemlos einem Vektor in $\text{Vec } \mathbb{H}$ oder $\mathbb{R}^3$ zugeordnet werden kann.

Speziell heißen die im Nullpunkt lokal gebundenen Vektoren *Ortsvektoren*, da sie die Punkte des Raumes beschreiben. Die Menge aller im Punkt A gebundenen Vektoren heißt *Tangentialraum* $T_A(\mathbb{R}^3)$ des $\mathbb{R}^3$ im Punkt A . Die Gesamtheit der Ortsvektoren entspricht dann dem Tangentialraum $T_0(\mathbb{R}^3)$. Wir kommen nun zu den so genannten *freien Vektoren*.

Beispiel 2.31. Wir führen in der Menge aller lokal gebundenen Vektoren $\overrightarrow{AB}$ eine Äquivalenzrelation ein:

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \text{ genau dann, wenn } B - A = D - C.$$

Dass dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist, kann man sich sofort überlegen, da sie symmetrisch, transitiv und reflexiv ist, die zugehörigen Äquivalenzklassen $[\overrightarrow{AB}]$ bezeichnen wir als *freie Vektoren*. Diese Klassen umfassen gerade alle lokal gebundenen Vektoren, die dieselbe Koordinatendifferenz besitzen, also dem gleichen Element des $\mathbb{R}^3$ zugeordnet sind. Jede Klasse enthält genau einen Ortsvektor als Repräsentanten. Auf diese Weise können wir Eigenschaften der Vektoren des $\mathbb{R}^3$ auf die Geometrie des uns umgebenden Raumes übertragen, das soll nun im folgenden geschehen.

Da die jetzt betrachteten Größen nur von der Koordinatendifferenz zweier Punkte A und B abhängen, sind sie für die freien Vektoren sinnvoll definiert und stellen entsprechende geometrische Objekte dar. Dazu gehören der *euklidische Abstand* $d(A, A')$ zweier Punkte A und A' , gegeben durch die Norm des zugeordneten Vektors $|\overrightarrow{AA'}|$. Ist $|\overrightarrow{AA'}| = 1$, so heißt sowohl der in A gebundene wie der freie Vektor $[\overrightarrow{AA'}]$ *Einheitsvektor*. Im allgemeinen kürzen wir Einheitsvektoren mit einem kleinen fett gedruckten $\mathbf{e}$ ab, ebenso wie Ortsvektoren $\overrightarrow{OX}$ mit einem kleinen fett gedruckten $\mathbf{x}$.

Wir können uns die geometrische Bedeutung der uns schon bekannten Vektoroperationen überlegen: So kann man sich die Addition zweier Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ an dem Parallelogramm veranschaulichen, dass diese beiden Vektoren aufspannen, die Summe ist die von O ausgehende Diagonale in diesem Parallelogramm. Addieren wir zwei freie Vektoren $[\overrightarrow{OA}]$ und $[\overrightarrow{OB}]$, so können wir aus der zweiten Klasse auch einen Repräsentanten wählen, der in A lokal gebunden ist, dessen Endpunkt ist dann gerade die Summe der beiden Vektoren. Natürlich kann man die Kommutativität und Assoziativität der Addition ablesen. Dem *Nullvektor* $\mathbf{0}$ entspricht ein Vektor der Länge Null, $[\overrightarrow{AA}]$, der durchaus vom Nullpunkt O zu unterscheiden ist. Dass diese Addition zum Beispiel auch der Addition von Kräften in der Physik entspricht, macht die Vektoren als Beschreibung von Kräften zum wichtigen Handwerkszeug.

Multiplizieren wir einen Vektor mit einer reellen Zahl $r > 0$, so ändern wir nicht seine Richtung, sondern nur seine Länge um den Faktor r . Ist der Faktor $r < 0$, insbesondere $r = -1$, so ist $-\overrightarrow{AB}$ der *entgegengesetzte Vektor* $\overrightarrow{BA}$, die Addition von $[\overrightarrow{AB}]$ und $[\overrightarrow{BA}]$ ergibt den Nullvektor. Alle weiteren Rechenregeln des Vektorraumes übertragen sich natürlich auf die Ortsvektoren oder die freien Vektoren. Wir werden das zukünftig nicht mehr besonders erwähnen, aber gegebenenfalls die geometrische Veranschaulichung jederzeit heranziehen.

Wir wollen noch einen wichtigen Begriff aus der Vektorraumtheorie erwähnen:

Definition 2.32 (Lineare Abhängigkeit). Die Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ werden *linear abhängig* genannt, wenn es reelle Zahlen $r_1, r_2, \dots, r_n$ gibt, für die $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 \neq 0$ ist, so dass $r_1 \mathbf{a}_1 + \dots + r_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ gilt. Sind solche Zahlen nicht auffindbar, so nennt man die Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ *linear unabhängig*.

Bemerkung 2.33. Der Begriff der linearen Abhängigkeit wird für $n = 2$ mit *Kollinearität* bezeichnet. Für drei Vektoren sagt man im Falle der linearen Abhängigkeit, dass sie *komplanar* sind.

Dem liegt folgendes zu Grunde: Sind zwei Vektoren kollinear, so ist einer ein reelles Vielfaches des anderen. Wir können dies mit dem in Abschnitt 2.2 eingeführten Vektorprodukt beschreiben, denn dieses ist nach Definition genau dann Null, wenn die beiden Vektoren parallel oder kollinear sind.

Für die Beschreibung der Komplanarität brauchen wir ein dreifaches Produkt, das wir erst später kennen lernen werden.

Wir wollen noch eine kleine Betrachtung aus der Mechanik anschließen:

Beispiel 2.34 (Schwerpunkt). Der Schwerpunkt $\mathbf{s}$ mehrerer Punktmassen m_k in Punkten $\mathbf{x}_k$ errechnet sich aus der Formel

$$\mathbf{s} = \frac{\sum m_k \mathbf{x}_k}{\sum m_k}.$$

Für zwei Punkte teilt der Schwerpunkt die Verbindungsstrecke im Verhältnis $m_1 : m_2$, denn

$$\mathbf{s}_{12} - \mathbf{x}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \quad \mathbf{s}_{12} - \mathbf{x}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2).$$

Die Streckenlängen stehen also im Verhältnis $m_1 : m_2$.

Nimmt man einen weiteren Massenpunkt $\mathbf{x}_3$ mit der Masse m_3 hinzu, so folgt für den Schwerpunkt

$$\mathbf{s}_{123} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 + m_3 \mathbf{x}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \mathbf{s}_{12} + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} (\mathbf{x}_3 - \mathbf{s}_{12}).$$

Aus $(m_1 + m_2 + m_3) \mathbf{s}_{123} = m_3 \mathbf{x}_3 + (m_1 + m_2) \mathbf{s}_{12}$ folgt, dass die Strecke $\overline{X_1 S_{12}}$ durch S_{123} im Verhältnis $(m_1 + m_2) : m_3$ geteilt wird. Entsprechendes gilt auch für die anderen Ecktransversalen. Daraus folgt, dass der Schwerpunkt oder Massenmittelpunkt dreier in den Ecken eines Dreiecks konzentrierten Punktmassen Schnittpunkt der Verbindungslinien der Ecken mit dem Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt der Gegenseite ist. Hierbei teilt S_{ij} die Strecke $\overline{X_i X_j}$ im Verhältnis $m_i : m_j$ für $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$. Unmittelbar erhält man

$$\frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{m_3}{m_2} \cdot \frac{m_1}{m_3} = 1.$$

Damit haben wir den bekannten Satz von TOMASSO CEVA (1648–1737) gezeigt:

Satz 2.35 (Satz von Ceva). *Schneiden sich in einem Dreieck drei Ecktransversalen in einem Punkt, so ist das Produkt aller Teilungsverhältnisse der Seiten gleich eins.*

Folgerung 2.36. *Gilt $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, so teilt s_{123} jede der drei Transversalen, die die Ecken mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, im Verhältnis 2 : 1.*

2.4.1 Bilineare Produkte

In Abschnitt 2.2 haben wir die von Hamilton eingeführten Produkte für Vektoren kennen gelernt, die sich später mit der Vektorrechnung verselbständigen haben. Wir wollen sowohl Eigenschaften dieser Produkte beweisen wie auch die geometrische Bedeutung näher untersuchen. Wir bewegen uns dabei immer in $\text{Vec } \mathbb{H}$ oder auch in $\mathbb{H}$, bei geometrischen Fragen gehen wir gegebenenfalls zu Ortsvektoren oder freien Vektoren über. Die Produkte ermöglichen es, in den Anwendungen eine größere Vielfalt von Situationen zu erfassen.

Wir erinnern daran, dass wir in Abschnitt 2.2 für zwei Vektoren $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ und $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$ die folgenden beiden Produkte definiert haben:

Das *Skalarprodukt*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\text{Sc } \mathbf{x}\mathbf{y} = -\frac{1}{2}(\mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

und das *Vektorprodukt*

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \text{Vec } \mathbf{x}\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{y}\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Dabei ist die Determinante formal definiert und nach der ersten Zeile zu entwickeln. Wir halten zuerst die algebraischen Eigenschaften der beiden Produkte fest und überlegen uns danach die geometrische Bedeutung. Das Vektorprodukt wurde übrigens 1901 in einer Arbeit von Gibbs in die Vektorrechnung übernommen.

Lemma 2.37. *Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Vec } \mathbb{H}$.*

- (i) **Homogenität.** *Skalar- und Vektorprodukt sind beide homogen, d.h. es gilt für reelles r*

$$r(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (r\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (r\mathbf{y}) \text{ sowie } r(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = (r\mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times (r\mathbf{y}).$$

- (ii) **Distributivität.** *Skalar- und Vektorprodukt sind beidseitig distributiv, d.h. es gilt*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \text{ und } (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z} \text{ und } (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{z} + \mathbf{y} \times \mathbf{z}. \end{aligned}$$

- (iii) *Das Skalarprodukt ist kommutativ, das Vektorprodukt antikommutativ, d.h. es gilt*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \text{ und } \mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}.$$

Beweis. (i) Die Beweise für Skalar- und Vektorprodukt laufen völlig parallel. Weil reelle Zahlen mit Quaternionen vertauschbar sind, folgt aus

$$r(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = -\frac{r}{2}(\mathbf{xy} + \mathbf{yx})$$

sofort die Behauptung, da man das r sowohl an das $\mathbf{x}$ wie an das $\mathbf{y}$ heranziehen kann.

(ii) Wiederum läuft der Beweis für das Skalar- wie für das Vektorprodukt völlig parallel, von den vier Gleichungen sei eine herausgegriffen: Aus der Distributivität der Quaternionenmultiplikation ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) - (\mathbf{y} + \mathbf{z})\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{xy} + \mathbf{xz} - \mathbf{yx} - \mathbf{zx}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z}. \end{aligned}$$

(iii) Die Kommutativität des Skalarproduktes und die Antikommutativität des Vektorproduktes sind sofort aus den Definitionen abzulesen. $\square$

Wir kommen nun zu den geometrischen Deutungen der Produkte, zuerst beim Skalarprodukt. Wegen $\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}$ hat man

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} = |\mathbf{x}|^2,$$

das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist also das Quadrat seiner Länge. Daraus folgt

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

nach dem Kosinussatz der ebenen Geometrie ergibt sich schließlich

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \alpha,$$

wenn α der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist.

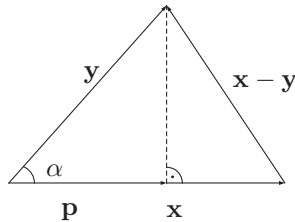


Abbildung 2.1

Aus der Abbildung ist auch abzulesen, dass $|\mathbf{y}| \cos \alpha$ die Länge der Projektion $\mathbf{p}$ von $\mathbf{y}$ auf $\mathbf{x}$ ist, was dem Kathetensatz der Geometrie entspricht. Außerdem halten wir fest:

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann Null, wenn die Vektoren zueinander orthogonal sind, in Zeichen $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Zusätzlich haben wir bewiesen:

Folgerung 2.38. *Wegen $|\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq 1$ erhalten wir*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|;$$

das ist die bekannte Schwarzsche Ungleichung.

Schwarzsche Ungleichung

HERMANN A. SCHWARZ (1843–1921) deutscher Mathematiker, tätig in Halle, Zürich, Göttingen und Berlin. Er arbeitete in der Analysis und leistete wichtige Beiträge zur Funktionentheorie.

Wir wenden uns nun den einfachen geometrischen Gebilden im $\mathbb{R}^3$ zu, nämlich den Geraden, Ebenen und Kugeln. Wenn man eine Gleichung der Form $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$ nach $\mathbf{x}$ auflösen, will, so ist die Antwort die folgende:

Lemma 2.39 (Ebenengleichung). *Es sei $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ ein gegebener Vektor und d reell. Dann wird die allgemeine Lösung der Gleichung*

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$$

durch

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} d + \mathbf{y} \tag{2.1}$$

gegeben, dabei ist $\mathbf{y}$ ein beliebiger zu $\mathbf{n}$ orthogonaler Vektor. Die Gleichung (2.1) definiert die Ebene durch den Punkt $\mathbf{n}d/|\mathbf{n}|^2$ orthogonal zu $\mathbf{n}$. Also ist $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$ eine Ebenengleichung im $\mathbb{R}^3$, ist der Vektor $\mathbf{n}$ ein Einheitsvektor, so spricht man auch von der Hesseschen Normalform einer Ebenengleichung, $\mathbf{n}$ ist die Normale der Ebene.

Beweis. Offensichtlich ist $\mathbf{x}_0 := \mathbf{n}d/|\mathbf{n}|^2$ eine Lösung der Gleichung. Hinzu addieren kann man noch alle Vektoren $\mathbf{y}$, für die $\mathbf{n} \cdot \mathbf{y} = 0$ ist, das ergibt den obigen Ausdruck für die allgemeine Lösung. Geometrisch legt aber im $\mathbb{R}^3$ ein in einem Punkt $\mathbf{x}_0$ angehängter Vektor $\mathbf{n}$ eine zu ihm senkrechte Ebene fest, die gerade durch unsere Gleichung bestimmt wird. $\square$

Damit haben wir die Beschreibung eines ersten geometrischen Gebildes, einer Ebene, kennen gelernt.

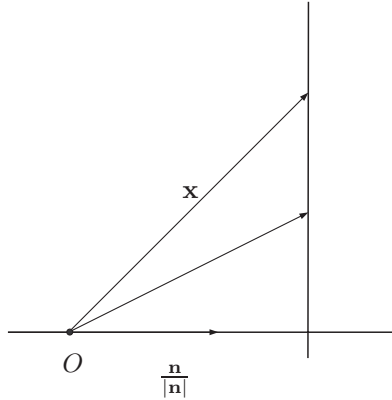


Abbildung 2.2

Beispiel 2.40 (Kugeloberfläche). a) Es sei X ein Punkt der Oberfläche einer Kugel um den Mittelpunkt M mit dem Radius r . Offenbar gilt $|\overline{XM}|^2 = r^2$, also $(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{m}) = |\mathbf{x} - \mathbf{m}|^2 = r^2$. Für $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ folgt $|\mathbf{x}| = r$. Ganz ähnlich wie in $\mathbb{C}$ ist die *Tangentialebene* im Punkt $\mathbf{x}_0$ diejenige Ebene, zu der der Radiusvektor $\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}$ im Punkt $\mathbf{x}_0$ orthogonal ist. Ihre Gleichung lautet daher

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}) = \mathbf{x}_0 \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}).$$

b) Als weiteres Beispiel sei die *Parameterdarstellung einer Ebene* angegeben: Wenn $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ zwei nicht kollineare Vektoren in der betrachteten Ebene etwa durch den Punkt $\mathbf{x}_0$ sind, so kann man jeden Punkt der Ebene erreichen, indem man zu $\mathbf{x}_0$ beliebige reelle Vielfache von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ addiert, das ergibt die Gleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Bevor wir nun zu geometrischen Betrachtungen am Vektorprodukt übergehen, wollen wir ein Lemma beweisen, das von Lagrange stammt:

Der französische Mathematiker JOSEPH L. LAGRANGE (1736–1813) wirkte in Turin, Berlin und Paris und verfasste vor allem Arbeiten zur Mechanik und Analysis.

Lemma 2.41 (Lagrange-Identität). Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ Vektoren. Dann gilt

$$|\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} \times \mathbf{y}|^2.$$

Beweis. Wir hatten nach Hamilton die Beziehung

$$\mathbf{xy} = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{y},$$

woraus bei Übergang zu Beträgen folgt

$$|\mathbf{x}\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} \times \mathbf{y}|^2,$$

und das ist die Behauptung. $\square$

Nun zu geometrischen Eigenschaften des Vektorproduktes. Die Gleichung:

$$4\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = -\mathbf{x}(\mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{y}\mathbf{x}) - (\mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{y}\mathbf{x})\mathbf{x} = -\mathbf{x}^2\mathbf{y} + \mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{x} - \mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{x}^2 = 0$$

(wegen des reellen $\mathbf{x}^2$) liefert sofort, dass $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ senkrecht auf $\mathbf{x}$ steht. Ganz analog folgt dies für $\mathbf{y}$, wir halten fest:

Der Vektor $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ ist orthogonal zu $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.

Aus der Lagrangeschen Identität folgt

$$|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 \sin^2 \alpha$$

mit dem Winkel $\alpha = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Damit ist der Betrag des Vektorproduktes gerade der Flächeninhalt des durch $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aufgespannten Parallelogramms. Also gestattet der Vektor $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ die Darstellung

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|(\sin \alpha) \mathbf{e}_{\mathbf{x} \times \mathbf{y}},$$

die man auch *orientierten Flächeninhalt* nennt. Dabei ist $\mathbf{e}_{\mathbf{x} \times \mathbf{y}}$ ein zu $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ orthogonaler Einheitsvektor. Dieser muss wegen des speziellen Falles $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ und

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_3$$

der *Rechte-Hand-Regel* genügen, das heißt, zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung $\mathbf{x}$ und der Zeigefinger in Richtung $\mathbf{y}$, dann muss der Mittelfinger in Richtung $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ weisen. Dabei ist natürlich vorausgesetzt worden, dass unser Koordinatensystem dieser Rechte-Hand-Regel genügt. Offenbar gilt

$$\mathbf{e}_{(-\mathbf{x}) \times \mathbf{y}} = \mathbf{e}_{\mathbf{x} \times (-\mathbf{y})} = -\mathbf{e}_{\mathbf{x} \times \mathbf{y}}.$$

Ähnlich wie beim Skalarprodukt kann man die Frage nach der Auflösung der Vektorgleichung $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ stellen, das Ergebnis ist das folgende:

Lemma 2.42 (Plückersche Geradengleichung). *Es seien $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ vorgegebene Vektoren mit $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Dann ist die allgemeine Lösung der Gleichung*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

durch

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} + t\mathbf{a}$$

gegeben, wobei t eine beliebige reelle Zahl ist. Das ist eine Gerade durch den Punkt $\mathbf{b} \times \mathbf{a}/|\mathbf{a}|^2$ in Richtung $\mathbf{a}$, die Ausgangsgleichung heißt auch *Plückersche Geradengleichung*.

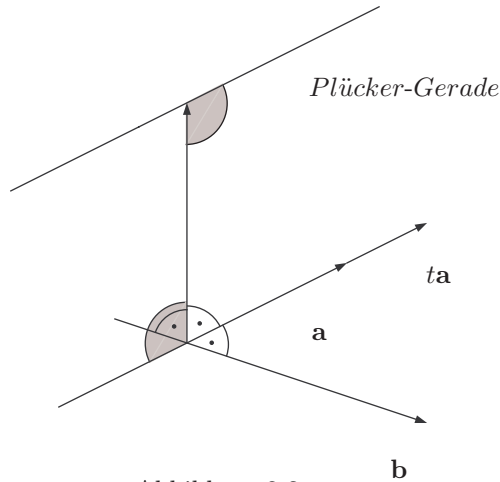


Abbildung 2.3

Der deutsche Mathematiker JULIUS PLÜCKER (1801–1868) arbeitete an verschiedenen Universitäten, zum Schluss über 30 Jahre als Professor für Mathematik und Physik an der Universität Bonn. Seine wichtigen mathematischen Arbeiten beschäftigen sich mit der analytischen Geometrie.

Beweis. Die notwendige Lösbarkeitsbedingung $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ ergibt sich aus der Richtung des Kreuzproduktes orthogonal zu $\mathbf{a}$. Die Lösung selbst kann nur orthogonal zu $\mathbf{b}$ gesucht werden, das legt einen Versuch mit $\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ nahe, es gilt wegen $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) &= \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{b}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} \end{aligned}$$

und damit

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}.$$

Somit ist $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{b} \times \mathbf{a})/|\mathbf{a}|^2$ tatsächlich eine Lösung unserer Gleichung, addiert werden können alle Vektoren, die kollinear zu $\mathbf{a}$ sind, damit ihr Vektorprodukt mit $\mathbf{a}$ verschwindet. Das ist die angegebene Lösung. Offenbar beschreibt diese Lösung des einen freien Parameters wegen eine Gerade. Unsere Ausgangsgleichung geht auf Plücker zurück, der damit eine kompakte Beschreibung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ bzw. in $\text{Vec}\mathbb{H}$ angegeben hat. $\square$

Mitunter können spezielle Eigenschaften des Quaternionenprodukts zweier Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ausgenutzt werden, um die gegenseitige geometrische Lage mit algebraischen Mitteln zu charakterisieren:

Lemma 2.43. *Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ Vektoren. Dann gilt*

- (i) $\mathbf{xy} = \mathbf{yx}$ genau dann, wenn $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ zueinander kollinear sind, und

(ii) $\mathbf{x}\mathbf{y} = -\mathbf{y}\mathbf{x}$ genau dann, wenn $\mathbf{x}$ orthogonal zu $\mathbf{y}$ liegt.

Beweis. (i) und (ii) folgen sofort aus den Beziehungen

$$0 = \mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{y}\mathbf{x} = 2(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \quad \text{und} \quad 0 = \mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x} = -2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \quad \square$$

2.4.2 Multilineare Produkte

Eine multiplikative Verknüpfung von mehr als zwei Vektoren in Skalar- oder Vektorproduktform bringt einige Unwegsamkeiten mit sich. Während das Vektorprodukt nicht assoziativ ist, d.h. im Allgemeinen die Vektoren $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z}$ und $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$ voneinander verschieden sind, ist das Skalarprodukt überhaupt nur für zwei Vektoren definiert. Eine alternierende Anwendung beider Produkte ist auch nicht ohne Einschränkungen möglich, da jedenfalls zuerst das Vektorprodukt gebildet werden muss. Hieraus ist bereits ersichtlich, dass Mehrfachprodukte stets mit sehr spezifischen Eigenschaften zu erwarten sind. Völlig unproblematisch ist hingegen die Benutzung der Quaternionenmultiplikation. Diese ist uneingeschränkt ausführbar und darüber hinaus assoziativ, was bei der Untersuchung der Mehrfachprodukte eine wichtige Rolle spielen wird.

Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ Vektoren. Nach dem Quaternionenkalkül ist der Assoziativität wegen $(\mathbf{x}\mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{x}(\mathbf{y}\mathbf{z})$. Allerdings kann nicht mehr gewährleistet werden, dass das Quaternionenprodukt zweier Vektoren wieder ein Vektor ist. Wir wissen bereits, dass

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{y},$$

also gilt

$$(\mathbf{x}\mathbf{y})\mathbf{z} = -(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z} - (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} + (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z}.$$

Andererseits haben wir auch die Identität

$$\mathbf{x}(\mathbf{y}\mathbf{z}) = -\mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) - \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}).$$

Zwei Quaternionen sind gleich, wenn Skalar- und Vektorteil übereinstimmen. Durch Vergleich von Skalar- und Vektorteil erhält man

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} \\ \text{(ii)} \quad & \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{z}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} + \mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Die Auswertung von (i) ergibt, dass die Zeichen “ $\cdot$ ” und “ $\times$ ” im Doppelprodukt austauschbar sind. Daher kann man zu einer neuen Bezeichnung übergehen, die die Multiplikationszeichen nicht mehr explizit enthält, wir definieren:

Definition 2.44 (Spatprodukt). Für drei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ heißt

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$$

deren *Spatprodukt*.

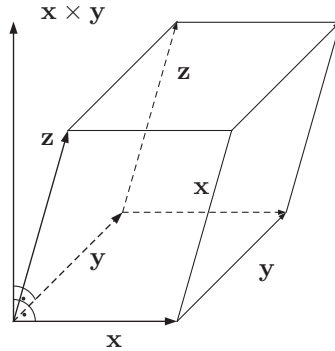


Abbildung 2.4

Wir stellen einige Eigenschaften des Spatproduktes zusammen:

Lemma 2.45. (i) *Das Spatprodukt definiert eine trilineare Vectorform, d.h. es ist in jeder Komponente $\mathbb{R}$ -homogen und distributiv, also beispielsweise*

$$(\mathbf{x}, s\mathbf{y} + t\mathbf{y}', \mathbf{z}) = s(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + t(\mathbf{x}, \mathbf{y}', \mathbf{z}) \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

(ii) *Bei zyklischer Vertauschung der Vektoren im Spatprodukt ändert sich das Vorzeichen nicht, bei antizyklischer Vertauschung ändert es sich, also*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}) = (\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = -(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = -(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

(iii) **Volumen.** *Das Spatprodukt entspricht dem orientierten Volumen des durch die drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds. Die Definitionen von Skalar- und Vektorprodukt liefern die Formel*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = |\mathbf{x}||\mathbf{y}||\mathbf{z}| \sin \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cos \angle(\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Daher ist das Spatprodukt genau dann Null, wenn die drei Vektoren komplanar sind.

(iv) **Determinantendarstellung.** *Es gilt*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Beweis. (i) Diese Eigenschaft gilt einfach deshalb, weil sie für das Skalar- und das Vektorprodukt erfüllt ist.

(ii) Die Aussage ergibt sich aus der Vertauschbarkeit von “ $\cdot$ ” und “ $\times$ ”, wie oben gezeigt, und aus der Kommutativität des Skalarproduktes sowie der Antikommutativität des Vektorproduktes.

(iii) Der Beweis folgt unmittelbar aus den geometrischen Deutungen von Skalar- und Vektorprodukt. Genau wenn das Volumen eines solchen Spates Null ist, sind die drei Vektoren komplanar, wir haben damit eine Formel zur Nachprüfung der Komplanarität gefunden.

(iv) Wir erhalten unmittelbar

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} \\ &= \left(\begin{vmatrix} x_2 x_3 \\ y_2 y_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} x_3 x_1 \\ y_3 y_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \right) \cdot (z_1 \mathbf{e}_1 + z_2 \mathbf{e}_2 + z_3 \mathbf{e}_3) \\ &= z_1 \begin{vmatrix} x_2 x_3 \\ y_2 y_3 \end{vmatrix} + z_2 \begin{vmatrix} x_3 x_1 \\ y_3 y_1 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

und daraus die Behauptung. $\square$

Nachstehende Untersuchungen sind dem doppelten Vektorprodukt gewidmet.

Lemma 2.46 (Entwicklungsformel). *Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ Vektoren. Dann gilt*

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}.$$

Beweis. Aus der Definition von Skalar- und Vektorprodukt folgt unter Berücksichtigung von $2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} + \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})$ und entsprechend für den zweiten Summanden

$$\begin{aligned} &4[(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}] \\ &= -(\mathbf{z}\mathbf{x} + \mathbf{z}\mathbf{x})\mathbf{y} - \mathbf{y}(\mathbf{z}\mathbf{x} + \mathbf{z}\mathbf{x}) + (\mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x})\mathbf{z} + \mathbf{z}(\mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}(\mathbf{y}\mathbf{z} - \mathbf{z}\mathbf{y}) - (\mathbf{y}\mathbf{z} - \mathbf{z}\mathbf{y})\mathbf{x} = 4\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}). \end{aligned}$$

$\square$

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich

Folgerung 2.47 (Summenidentität des doppelten Vektorprodukts). *Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ Vektoren. Dann gilt:*

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0.$$

Beweis. Wenden wir den Entwicklungssatz der Reihe nach auf jedes der drei Produkte an, so folgt

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) - \mathbf{z}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + \mathbf{z}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) + \mathbf{x}(\mathbf{z} \cdot \mathbf{y}) - \mathbf{y}(\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}) = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Der Entwicklungssatz für das doppelte Vektorprodukt gestattet die Hinzunahme weiterer Vektoren, was zu einer vektoriellen Form der Lagrange-Identität führt:

Lemma 2.48 (Lagrange-Identität). *Es sei $\mathbf{w}$ ein weiterer Vektor. Für das Skalarprodukt zweier Vektorprodukte gilt:*

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} & \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} & \mathbf{y} \cdot \mathbf{w} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) &= [(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z}] \cdot \mathbf{w} \\ &= [\mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) - \mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})] \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar die Determinantendarstellung. $\square$

Wird nun der Faktor $\mathbf{z} \times \mathbf{w}$ mit dem Vektorprodukt hinzugenommen, so kann für das vierfache Vektorprodukt wie folgt gerechnet werden:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) = \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{w})) - \mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{w})) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) - \mathbf{x}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}).$$

Insbesondere ist dann bei Substitution von $\mathbf{z}$ durch $\mathbf{y}$ und von $\mathbf{w}$ durch $\mathbf{z}$ die nachstehende Beziehung bewiesen:

Lemma 2.49 (Regel des doppelten Faktors). *Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ Vektoren. Dann gilt*

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

2.5 Anwendungen

2.5.1 Visualisierungen der Sphäre S^3

Es werden einer beliebigen Quaternion $x = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ die komplexen Zahlen $z_1 := x_0 + ix_1$ und $z_2 := x_2 + ix_3$ zugeordnet. Diese gestattet dann die Darstellung $x = z_1 + z_2\mathbf{j}$. Eine Quaternion $x \in S^3$ entspricht dabei einem Paar komplexer Zahlen $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$ mit $|x|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Auf natürliche Weise finden wir nun eine Abbildung m , die x eine unitäre Matrix vom Typ 2×2 mit komplexen Einträgen zuordnet. Wir definieren:

$$m(x) := \begin{pmatrix} z_1 & \bar{z}_2 \\ -z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Alle unitären Matrizen mit $\det m(x) = 1$ bilden die *unitäre Gruppe* $SU(2)$. Außerdem ist $m^T = m^{-1}$.

Lemma 2.50. *Die Abbildung $m : S^3 \rightarrow SU(2)$ mit $x \rightarrow m(x)$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Identität $m(xx') = m(x)m(x')$ ist nachzuprüfen. In der Tat, es sei $x' = z'_1 + z'_2\mathbf{j}$ eine weitere Quaternion mit $z'_1, z'_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$(z_1 + z_2\mathbf{j})(z'_1 + z'_2\mathbf{j}) = (z_1z'_1 - z_2\bar{z}'_2) + (z_1z'_2 + z_2\bar{z}'_1)\mathbf{j}.$$

Die entsprechende Matrixmultiplikation lautet

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z'_1 & z'_2 \\ -\bar{z}'_2 & \bar{z}'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z'_1 - z_2 \bar{z}'_2 & z_1 z'_2 + z_2 \bar{z}'_1 \\ -(\bar{z}_1 z'_2 + z_2 \bar{z}'_1) & \bar{z}_1 z'_1 - z_2 \bar{z}'_2 \end{pmatrix},$$

was unsere Beziehung beweist. $\square$

Die Identifizierung von S^3 und $SU(2)$ erlaubt es uns, Pole, Meridiane und Breitenkreise auf S^3 in einem formalen algebraischen Kalkül zu beschreiben. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst das charakteristische Polynom der Matrix $m(x) = m(z_1, z_2) \in SU(2)$, das durch

$$\det(m(z_1, z_2) - \lambda I) = (z_1 - \lambda)(\bar{z}_1 - \lambda) + |z_2|^2 = \lambda^2 - (z_1 + \bar{z}_1)\lambda + 1$$

gegeben ist. Der Wert $x_0 = \operatorname{Re} z_1 \in [-1, 1]$ ist gerade die halbe Spur der Matrix $m(x)$ oder der Skarteil der Quaternion x . Dieser kann benutzt werden, um Breitenkreise auf S^3 zu beschreiben. Dies geschieht völlig analog zum $\mathbb{R}^3$. Leider hat man nur diesen Analogieschluss, um die Anschaulichkeit auszudrücken. Es gilt

$$m(z_1, z_2) : \quad \det m(x) = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} z_1 = x_0.$$

Ein „Breitenkreis“ auf S^3 kann durch die Formel

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - x_0^2$$

beschrieben werden. Das sind zweidimensionale Kugeln, für $x_0 = 0$ liegt der „Äquator“ vor. Für $x_0 = \pm 1$ folgt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, das wären dann die beiden Pole. Analog wären im $\mathbb{R}^3$ die Breitenkreise mit $x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_0^2$ zu beschreiben. Der Parameterwert $x_0 = 0$ entspräche dem Äquator und $x_0 = \pm 1$ mit $x_1 = x_2 = 0$ den Polen.

Bemerkung 2.51. Die Breitenkreise sind einer ganzen Klasse $\mathcal{M}_m$ von unitären Matrizen zugeordnet, da alle Matrizen

$$\mathcal{M}_m = \{m' m m'^{-1} : m' \in SU(2)\}$$

dieselbe Spur x_0 besitzen. Umgekehrt ist jede dieser Ähnlichkeitsklassen eindeutig mit einem Breitenkreis auf S^3 verbunden.

Eine verfeinerte geometrische Visualisierung der Sphäre S^3 kann mit Hilfe der Funktion $\psi : S^3 \rightarrow [-1, 1]$ mit $\psi(z_1, z_2) = |z_1|^2 - |z_2|^2$ vorgenommen werden. Wir betrachten dabei folgende Niveaus:

$$N_{\psi_0} := \{(z_1, z_2) \in S^3 : \psi(z_1, z_2) = \psi_0, \quad \psi_0 \in [-1, 1]\}.$$

Dafür gilt wegen $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$

$$|z_1|^2 = \frac{1 + \psi_0}{2} \quad \text{und} \quad |z_2|^2 = \frac{1 - \psi_0}{2}.$$

Unmittelbar ist klar, dass N_1 und N_{-1} gerade den Einheitskreisen im ersten bzw. zweiten Faktor des $\mathbb{C}^2$ entsprechen. Schließlich erhalten wir, dass N_{ψ_0} mit $-1 < \psi_0 < 1$ das kartesische Produkt der beiden Kreise ist, d.h. durch

$$N_{\psi_0} := \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 = \frac{1 + \psi_0}{2} ; |z_2|^2 = \frac{1 - \psi_0}{2} \right\}$$

ist ein Torus gegeben. Man sagt auch, dass die Tori (mit $\psi_0 \in (-1, 1)$), welche *Clifford-Tori* genannt werden, Schichten der Sphäre S^3 sind.

2.5.2 Elemente der sphärischen Trigonometrie

Besonders günstig können Mehrfachprodukte bei der Begründung von Elementarbeziehungen der sphärischen Trigonometrie angewandt werden. Die sphärische Trigonometrie ist für spezielle ingenieurwissenschaftliche Richtungen, insbesondere den Bergbau und das Markscheidewesen, von Wichtigkeit. Es ist nicht das Ziel dieses kleinen Abschnitts, die sphärische Trigonometrie vollständig abzuhandeln, sondern es soll nur an Hand ausgewählter Beispiele die Nützlichkeit quaternionischen Rechnens unter Beweis gestellt werden.

Ein sphärisches Dreieck entsteht, wenn man aus der Einheitskugel ein Tetraeder herauschneidet, dessen eine Ecke im Mittelpunkt der Kugel, der als Ursprung dient und daher mit O bezeichnet wird, liegen soll. Die Eckpunkte des sphärischen Dreiecks A, B, C entsprechen den Ortsvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Die Winkel zwischen den Seitenvektoren werden der Reihe nach mit $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \gamma$, $\angle(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha$, $\angle(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = \beta$ bezeichnet. Die Winkel zwischen den Seitenflächen des Tetraeders werden als Winkel im sphärischen Dreieck angesehen.

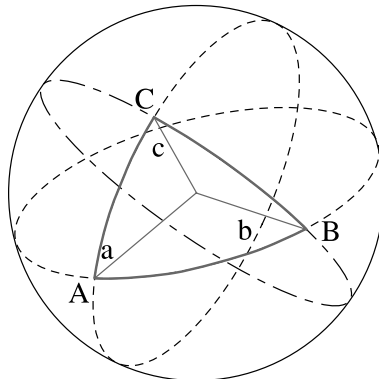


Abbildung 2.5

Dabei sollen die Winkel in den Punkten A, B, C mit α', β', γ' bezeichnet werden. Aus der Abbildung geht hervor, dass für $\alpha'' = \angle(\mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ gilt $\alpha'' = \pi - \alpha'$. Zu beachten ist, dass die bei der Winkelbeschreibung doppelt vorkommenden

Vektoren innen stehen. Daraus folgt trivialerweise $\cos \alpha'' = -\cos \alpha'$, $\sin \alpha'' = \sin \alpha'$. Analoges gilt natürlich auch für die restlichen beiden Winkel.

Lemma 2.52 (Sphärischer Kosinussatz). *Es gilt die nachstehende Formel:*

$$\cos \beta = \cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta'.$$

Beweis. Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ Vektoren mit $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$. Die LAGRANGE-Identität liefert

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta.$$

Für die linke Seite erhalten wir

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta'' = -\sin \gamma \sin \alpha \cos \beta',$$

woraus die gewünschte Beziehung folgt. $\square$

Lemma 2.53 (Sphärischer Sinus-Kosinus-Satz). *Mit den eingeführten Bezeichnungen gilt folgende Beziehung:*

$$\sin \alpha \cos \gamma' = \cos \gamma \sin \beta - \cos \beta \sin \gamma \cos \alpha'.$$

Beweis. Geht man von der offensichtlichen Identität

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix} = 0 \quad (1. \text{ Zeile} = 2. \text{ Zeile!})$$

aus und entwickelt nach der ersten Zeile, so folgt

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \end{vmatrix} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Anwendung der Lagrange-Identität ergibt

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})[(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})[(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})[(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] = 0,$$

also

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})|\mathbf{a} \times \mathbf{c}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})[(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] = 0$$

und damit

$$-\sin \beta \sin \alpha \cos \gamma'' - \cos \gamma \sin^2 \beta - \cos \beta \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha'' = 0.$$

Die Division durch $\sin \beta$ und die Gleichungen $\cos \gamma'' = -\cos \gamma'$ bzw. $\cos \alpha'' = -\cos \alpha'$ beweisen unseren Satz. $\square$

Lemma 2.54 (Sphärischer Sinussatz). *Es gilt:*

$$\frac{\sin \beta'}{\sin \beta} = \frac{\sin \gamma'}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}.$$

Beweis. Aus der Regel des doppelten Faktors folgt am Kantenvektor $\mathbf{b}$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \sin(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = V |\mathbf{b}|, \quad \text{wobei } V := |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| \text{ ist.}$$

Wegen $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$ ergibt sich hieraus

$$\sin \gamma \sin \alpha \sin \beta' = V.$$

Da eine entsprechende Formel auch an den Kantenvektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$ gilt, erhalten wir

$$V = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma' = \sin \beta \sin \gamma \sin \alpha' = \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta'$$

und daraus die Behauptung. □

2.6 Aufgaben

1. Es seien x, y, z beliebige Elemente in $\mathbb{H}$. Man beweise
 - (a) $\text{Sc}(xyz) = \text{Sc}(yzx) = \text{Sc}(zxy)$.
 - (b) Es ist $\text{Sc}(xyz) = \bar{x} \cdot (yz)$ eine reelle Zahl.
2. Man zeige, dass sich aus jeder Quaternion a in $\mathbb{H}$ wenigstens eine Wurzel berechnen lässt, d.h. es gibt wenigstens ein $x \in \mathbb{H}$ mit $x^2 = a$.
3. Man beweise, dass sich jede Quaternion e mit $|e| = 1$ in der Form

$$e = \mathbf{x} \mathbf{y} \mathbf{x}^{-1} \mathbf{y}^{-1}$$

darstellen lässt.

4. Wir betrachten ein von den Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ aufgespanntes Tetraeder, die restlichen Kanten sind dann geeignete Differenzen dieser drei Vektoren. Man zeige, dass die Summe der so genannten orientierten Flächeninhalte aller Seitenflächen (alle Flächen entweder gleichzeitig nach außen oder nach innen orientiert !) gleich Null ist. Kann dieser Satz auf beliebige Polyeder ausgedehnt werden ?

3 Clifford-Zahlen

3.1 Entdeckungsgeschichte

Während bis zur Raumdimension drei die Anschaulichkeit eine wesentliche Grundlage der mathematischen Erkenntnis ist, muss man sich in höherdimensionalen Räumen von jeglicher räumlichen Vorstellung trennen. So schreibt H. GRASSMANN 1844 in seiner von den Zeitgenossen wenig verstandenen Abhandlung *Die lineale Ausdehnungslehre*:

Schon lange war es mir nämlich einleuchtend geworden, dass die Geometrie keineswegs in dem Sinne wie die Arithmetik oder die Kombinationslehre als ein Zweig der Mathematik anzusehen sei, vielmehr die Geometrie schon auf ein in der Natur gegebenes (nämlich den Raum) sich beziehe, und dass es daher einen Zweig der Mathematik geben müsse, der in rein abstrakter Weise ähnliche Gesetze aus sich erzeuge, wie sie in der Geometrie an den Raum gebunden erscheinen.



Hermann G. Grassmann (1809–1877)

Diese Anschauung, initiiert durch H. Graßmann, führt D. HILBERT in seiner Festschrift von 1899 dazu, den Begriff der Anschauung vollständig aus der Geometrie zu streichen. Graßmanns Arbeit blieb in seiner Zeit weitestgehend unbeachtet, was möglicherweise daran lag, dass die meisten Kollegen in der Begriffswelt des dreidimensionalen Raumes dachten.

Erst 18 Jahre später im Jahre 1862 erschien die methodisch stark verbesserte zweite Auflage seines früheren Buches. Diese, nicht zuletzt popularisiert durch H. HANKELS Buch (1867) *Theorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamiltonschen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung*, beeinflusste nachhaltig die Entwicklung verschiedener grundlegender Theorien wie den Tensorkalkül, die Vektoranalysis oder auch die Clifford-Analysis. Die algebraischen Grundterme der Ausdehnungslehre werden als *extensive Größen* oder *Elementargrößen* bezeichnet, die sich durch zwei Produktbildungen miteinander verknüpfen lassen, das *innere* und das *äußere Produkt*. Letzteres führt zu k -Vektoren und schließlich zu antisymmetrischen Tensoren. In moderner Schreibweise forderte Graßmann von seinen Elementargrößen $e_1, \dots, e_n$, dass sie nachstehende algebraische Eigenschaften erfüllen sollen:

- (i) $e_i e_j + e_j e_i = 0, \quad e_i^2 = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$
- (ii) $e_i (e_j + e_k) = e_i e_j + e_i e_k.$

Damit sind gerade die Basisbeziehungen der nach ihm benannten *Graßmann-Algebra* definiert.

HERMANN GÜNTER GRASSMANN (1809–1877) wurde als drittes von 12 Kindern 1809 geboren. Im Jahre 1827 begann er an der Universität Berlin Theologie und Philologie zu studieren. Nach seiner Rückkehr nach Stettin bildete er sich neben seinem Unterricht als Lehrer als Autodidakt in Mathematik und Physik weiter. 1834 nahm er eine Stelle an der Berliner Gewerbeschule an, kehrte aber schon 1835 nach Stettin zurück. Um 1840 schrieb Graßmann als Prüfungsarbeit ein Buch zur Theorie von Ebbe und Flut. Er bewarb sich mehrere Male um eine Universitätsstelle, leider ohne Erfolg. So blieb er sein Leben lang Professor am damaligen Stettiner Gymnasium. Er heiratete 1849, 11 Kinder wurden in den Folgejahren geboren. Er war nicht nur ein hervorragender Mathematiker, sondern auch ein Sprachwissenschaftler von Weltruf. So schuf er 1875 das *Wörterbuch zum Rig-Veda*. Das Vega gilt als Vorstufe des Sanskrit, das Rig-Veda als Grundlage des Hinduismus. Graßmann interessierte sich insbesondere für spezielle Verwandtschaften zwischen der lateinischen und der griechischen Sprache. Darüber hinaus beschäftigte er sich mit Gotisch, Altpreußisch, Russisch, Altpersisch, Litauisch und Slawisch. Es gibt sogar in der Sprachwissenschaft das „Graßmannsche Aspiratengesetz“ (Aspirat – Hauchlaut). 1876 erhielt er die Ehrendoktorwürde der Universität Tübingen. Er verstarb ein Jahr später an einem Nierenleiden.

Die geniale Verknüpfung von Graßmanns Ausdehnungslehre und Hamiltons Quaternionen führte 1876–1878 W.K. CLIFFORD zur Struktur einer so genannten *Geometrischen Algebra*, wie Clifford sie nannte. In seiner berühmten, 1878 veröffentlichten Arbeit *Applications of Grassmanns Extensive Algebra* schuf er eine neue Algebra, die von Skalaren, Vektoren und allgemein von so genannten k -Vektoren ($1 \leq k \leq n$) erzeugt wird und deren Elemente heute *Clifford-Zahlen* heißen. Die k -Vektoren werden mit Hilfe von Graßmanns äußerem Produkt gebildet. Jede reelle Linearkombination von k -Vektoren und Skalaren ist dann eine Clifford-Zahl.



William K. Clifford (1845–1879)

Der englische Philosoph und Geometer WILLIAM KINGDON CLIFFORD (1845–1879) war als Professor für Angewandte Mathematik an das Londoner University College berufen worden. Er wurde bald darauf Fellow of the Royal Society. Schon 35-jährig starb er 1879 auf Madeira an Tuberkulose.

Komplexe Zahlen und reelle Quaternionen sind einfache Beispiele von Clifford-Zahlen. In M. CHISHOLMS Buch *Such Silver Currents* wird Cliffords Verhältnis zu J. C. MAXWELL, der bei Cliffords Berufung einer der Gutachter war, wie folgt beschrieben:

After 1874 Clifford and Maxwell often met as Fellows of the Royal Society. They shared a mutual belief in the importance of Hamiltons “quaternion methods”, and used them in their teachings and writings. Later religious differences would complicate this relationship and their attitudes to fundamental research.

Ein anderer bedeutender Mathematiker seiner Zeit war RUDOLF LIPSCHITZ (1832–1903), er entdeckte 1880 [92] bei seinen Untersuchungen zu Summen von Quadraten die *Geometrische Algebra* erneut. Er war es auch, der als erster in höherdimensionalen Räumen geometrische Anwendungen formulierte. K. THEODOR VAHLEN (1869–1945) führte 1902 [154] eine Multiplikationsregel zwischen zwei Basiselementen einer Clifford-Algebra ein. Erst 1986 wurde diese Regel unter Benutzung von Walsh-Funktionen in einer Arbeit von P.E. HAGMARK und P. LOUNESTO wesentlich verallgemeinert. Ein bedeutender Fortschritt wurde 1908 von E. CARTAN erzielt, der Beziehungen zwischen allgemeinen Clifford-Algebren und Matrix-Algebren entdeckte und das Periodizitäts-Theorem bewies.

3.2 Definition und Eigenschaften

3.2.1 Definition der Clifford-Algebra

W.K. CLIFFORD hat die Hamiltonsche Idee der Quaternionen auf den $\mathbb{R}^n$ ausgedehnt, dazu musste er die Multiplikation im $\mathbb{R}^n$ erklären, was er völlig analog zu Hamilton durchführte:

Definition 3.1. Es sei der $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Basis $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ gegeben. Für die Multiplikation seien die folgenden Regeln vorgegeben: e_0 sei das Einselement und es sei $p \in \{0, \dots, n\}$, $q := n - p$; es gelte

$$\begin{aligned} e_i e_j &= -e_j e_i, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n, \\ e_1^2 &= e_2^2 = \dots = e_p^2 = 1, \quad e_{p+1}^2 = \dots = e_{p+q}^2 = -1. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Basis einer Algebra $\mathcal{A} =: Cl_{p,q}$:

$$e_0, e_1, \dots, e_n, e_1 e_2, \dots, e_{n-1} e_n, e_1 e_2 e_3, \dots, e_1 e_2 \dots e_n.$$

Die Addition und die Multiplikation mit einer reellen Zahl werden koordinatenweise definiert. Es gelte ferner die Bedingung

$$e_1 e_2 \dots e_n \neq \pm 1 \quad \text{falls} \quad p - q \equiv 1 \pmod{4}.$$

Die sich so ergebende Algebra heißt (*universelle*) *Clifford-Algebra* $Cl_{p,q}$.

Dazu nun eine ganze Reihe von Bemerkungen:

Bemerkung 3.2. a) Dass $C\ell_{p,q}$ ein reeller Vektorraum ist, ist sehr leicht einzusehen, dass sich genau die angegebenen 2^n Basiselemente ergeben, lässt sich gleichfalls leicht nachprüfen, denn Quadrate der e_i reduzieren sich durch die Vorgaben. Die weiteren Regeln einer Algebra sind ohne Probleme erfüllt, Kommutativität ist offenbar nicht gegeben (falls $n > 1$), die Assoziativität ist in der Definition enthalten, da wir die Basiselemente ohne Klammersetzung angeben. Die Distributivität lässt sich nachrechnen, wenn in der Klammer zwei Basiselemente gleicher Stufe stehen, sonst wird sie durch die lineare Fortsetzung definiert. Es gibt weitere Verallgemeinerungen, bei denen einige der Basiselemente das Quadrat 0 haben.

b) Die Basiselemente werden auch in der leicht verständlichen Form

$$e_{i_1 i_2 \dots i_p} := e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_p}$$

angegeben. Dies kann noch deutlich verkürzt werden, indem wir als Index an den Basiselementen die Elemente A der Potenzmenge $\mathcal{P}_n$ von $\{1, \dots, n\}$ verwenden, die Elemente von A denken wir uns natürlich der Größe nach geordnet. Dabei entspricht die leere Menge dem Index 0, wir beschreiben also die Elemente von $C\ell_{p,q}$ in der Form

$$x = \sum_{A \in \mathcal{P}_n} x_A e_A.$$

Solch eine Zahl heißt *Clifford-Zahl*. Wir verwenden übrigens $|A|$ für die Anzahl der Elemente von A . Es gibt auch andere Bezeichnungen für $C\ell_{p,q}$, so z.B. das von F. Sommen eingeführte $\mathbb{R}_{p,q}$, das zweifellos auch seine Vorzüge hat.

c) Die Signatur (p, q) bleibt nach dem Satz von Sylvester aus der linearen Algebra bei Basiswechseln invariant, so dass insoweit die obige Definition sinnvoll ist. Wir werden häufig mit der Algebra $C\ell_{0,n}$ umgehen und führen dafür eine besondere Bezeichnung ein:

$$C\ell_{0,n} =: C\ell(n).$$

d) Die Clifford-Algebra zu einem beliebigen (reellen) Vektorraum V kann auch mittels einer quadratischen Form $Q(x)$ über V eingeführt werden. Dann wird das Produkt durch die Bedingung

$$x^2 = Q(x)$$

reduziert, in unserem obigen Fall wäre

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 \quad (p + q = n)$$

zu wählen. Für $i = 1, \dots, p$ ergibt sich durch Einsetzen von e_i

$$e_i^2 = Q(e_i) = 1,$$

entsprechend für die restlichen e_i die Gleichung $e_i^2 = -1$. Setzt man in $x^2 = Q(x)$ den Vektor $e_i + e_j$ ein, so erhält man die Vertauschungsregel $e_i e_j + e_j e_i = 0$. Ein solches Paar (V, Q) definiert also jeweils eine Clifford-Algebra.

Beispiel 3.3. a) Der Index $n = 0$ ist zulässig. In diesem Fall ist der Vektorraum V leer, und wir bekommen als zugehörige Clifford-Algebra die reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

b) (*Algebra der komplexen Zahlen*). Es sei $n = 1$ und $p = 0$. Dann ist $Cl_{0,1}$ der von den Elementen 1 und e_1 mit $e_1^2 = -1$ aufgespannte Vektorraum, es handelt sich also um die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, dabei sind natürlich 1 und $e_1 = i$ als Basisvektoren in unserem Sinne aufzufassen.

c) (*Algebra der dualen Zahlen*). Es sei $n = 1$ und $p = 1$. Dann ist $Cl_{1,0}$ die Algebra der *dualen Zahlen*, aufgespannt von den Elementen 1 und e_1 mit $e_1^2 = 1$. Der erhebliche Nachteil gegenüber den komplexen Zahlen ist das Auftreten von Nullteilern, so ist

$$(1 + e_1)(1 - e_1) = 0,$$

obwohl die Faktoren nicht Null sind.

d) (*Algebra der reellen Quaternionen*). Hierfür sei $n = 2$ und $p = 0$. Dann haben wir als Basis die Elemente 1, e_1, e_2, e_1e_2 , das entspricht genau den Basiselementen von $\mathbb{H}$, auch bezüglich der Rechenregeln. Also folgt die Isomorphie $Cl_{0,2} \cong \mathbb{H}$, wobei wie in $\mathbb{H}$ die Basiselemente als Vektoren im $\mathbb{R}^4$ aufzufassen sind.

e) (*Algebra der komplexen Quaternionen*). Es sei nun $n = 3$ und $p = 0$. Dann wird $Cl_{0,3}$ zu einer Clifford-Algebra, die von dem anti-euklidischen Raum mit $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$ erzeugt wird. Die Basis besteht aus Vektoren e_1, e_2, e_3 , Bivektoren (oder 2-Vektoren) e_{12}, e_{23}, e_{13} und dem 3-Vektor e_{123} . Aufgrund der algebraischen Beziehung

$$e_{123}^2 = 1$$

spricht man bei e_{123} von einem *Pseudoskalar*. Es ist leicht zu zeigen, dass

$$e_{123}e_i = e_ie_{123}$$

ist, e_{123} also zum Zentrum der Algebra gehört. Man kann diese Algebra auch in Verbindung mit den in Abschnitt 2.3 eingeführten Pauli-Matrizen bringen. Dies wird unten in Beispiel 3.21 (7) näher ausgeführt. Hier fassen wir ein Element

$$x = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_1e_2 + x_5e_2e_3 + x_6e_3e_1 + x_7e_1e_2e_3$$

der Algebra in folgender Art zusammen:

$$x = (x_0 + x_1e_1) + (x_4 - x_2e_1)e_1e_2 + (x_5 + x_7e_1)e_2e_3 + (x_6 + x_3e_1)e_3e_1.$$

Da die Bivektoren auch das Quadrat -1 haben und den sonstigen Regeln für die Basis der Quaternionen genügen, liegt hier Isomorphie zur Quaternionenbasis vor, bei Identifizierung von e_1 mit dem komplexen i erhalten wir die Isomorphie zu den Quaternionen mit komplexen Koeffizienten.

e) (*Raum-Zeit-Algebra*). Dazu sei $n = 4$ und $p = 1$. Dann wird die Algebra $Cl_{1,3}$ von den Elementen 1, $e_1, e_2, e_3, e_4, e_{12}, \dots, e_{1234}$ aufgespannt, der erzeugende Vektorraum hat die Signatur $(1, 3)$ und wird als *Minkowski-Raum* bezeichnet. Es sei aber bemerkt, dass $\mathbb{H}$ als 4-dimensionaler Raum auch die Signatur $(1, 3)$ hat, man den Minkowski-Raum also auf verschiedene Weise in eine Algebra einbetten kann.

3.2.2 Strukturen und Automorphismen

Die $\mathbb{R}$ -lineare Hülle

$$\text{span}\{e_A : |A| = k\}$$

bildet den $\mathbb{R}$ -linearen Teilraum der so genannten k -Vektoren, den wir fortan mit $Cl_{p,q}^k$ bezeichnen wollen. Offenbar gibt es in diesem Raum $\binom{n}{k}$ Basiselemente. Hieraus folgt, dass die Vektorraumdimension der (universellen) Algebra $Cl_{p,q}$ sich nach der Formel

$$\dim_{\mathbb{R}} Cl_{p,q} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

berechnet. Es sei $[\cdot]_k : Cl_{p,q} \rightarrow Cl_{p,q}^k$ die lineare Projektion mit

$$[x]_k := \sum_{|A|=k} x_A e_A.$$

Damit kann ein beliebiges Element $x \in Cl_{p,q}$ in der Form

$$x = [x]_0 + [x]_1 + \dots + [x]_n$$

geschrieben werden. Überdies sei

$$Cl_{p,q}^+ = \bigoplus_{2 \leq 2\ell \leq n} Cl_{p,q}^{2\ell} \quad \text{und} \quad Cl_{p,q}^- = \bigoplus_{1 \leq 2\ell+1 \leq n} Cl_{p,q}^{2\ell+1}.$$

Die Dimensionen dieser Teilräume sind gerade 2^{n-1} , wie leicht einzusehen ist. Der Teilraum mit den geraden Stufen ist sogar eine Teilalgebra, da bei der Multiplikation der entsprechenden Basiselemente wieder eine gerade Anzahl von Faktoren herauskommt.

Wir wollen eine algebraische Eigenschaft von $Cl(n)$ festhalten, wobei das *Zentrum* bekanntlich aus den Elementen der Algebra besteht, die mit allen anderen Elementen vertauschbar sind. Auf einen Nachweis soll hier verzichtet werden (vgl. Aufgabe 3.5.3).

Lemma 3.4. *Das Zentrum der Algebra $Cl(n)$ besteht für gerades n aus den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, für ungerades n wird es von e_0 und dem Pseudoskalar $e_1 e_2 \dots e_n$ erzeugt.*

Nunmehr sind wir in der Lage, wichtige Automorphismen mit gewissen Invarianzeigenschaften zu beschreiben. Wir definieren nachstehend die Hauptinvolution ($\text{Inv } M$), die Konjugation ($\text{Inv } C$) und die Reversion ($\text{Inv } R$):

Definition 3.5. Falls für beliebige Elemente $x, y \in Cl_{p,q}$ die Identitäten

- (i) $\text{Inv } M(xy) = \text{Inv } M(x) \text{Inv } M(y)$
- (ii) $\text{Inv } M(e_i) = -e_i \quad (i = 1, \dots, n)$

erfüllt sind, so heißt $\text{Inv } M$ *Hauptinvolution* oder *Inversion*. Dafür wird auch üblicherweise $\text{Inv } M(x) =: \tilde{x}$ geschrieben.

Dass es solch eine Involution wirklich gibt, zeigt das

Lemma 3.6. *Es sei $x \in C\ell_{p,q}$, dann gilt*

$$\text{Inv } M(x) = \tilde{x} = [x]_0 - [x]_1 + [x]_2 - [x]_3 + \dots,$$

d.h. $C\ell_{p,q}^+$ und $C\ell_{p,q}^-$ sind Eigenräume des Operators $\text{Inv } M$.

Beweis. Der Beweis ist eine einfache Folgerung aus der Definition. $\square$

Für einen k -Vektor x ist im Allgemeinen: $\tilde{x} := (-1)^k x$. Für beliebige Clifford-Zahlen gilt $\widetilde{\tilde{x}y} = \tilde{x}\tilde{y}$.

Definition 3.7. Falls für beliebige Elemente $x, y \in C\ell_{p,q}$ die Beziehungen

- (i) $\text{Inv } C(xy) = \text{Inv } C(y)\text{Inv } C(x)$
- (ii) $\text{Inv } C(e_i) = -e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

erfüllt sind, so heißt $\text{Inv } C$ die *Clifford-Konjugation*. Dafür schreibt man

$$\text{Inv } C(x) =: \overline{x}.$$

Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, werden wir von der *Konjugation* sprechen, die natürlich den Konjugationen in $\mathbb{H}$ und $\mathbb{C}$ entspricht. Auch hier muss die Existenz einer solchen Involution diskutiert werden:

Lemma 3.8. *Für beliebiges $x \in C\ell_{p,q}$ gilt*

$$\text{Inv } C(x) = \overline{x} = [x]_0 - [x]_1 - [x]_2 + [x]_3 + [x]_4 - \dots,$$

d.h. für $x \in C\ell_{p,q}^k$ ist

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x, & \text{wenn} & & k \equiv 0, 3 \pmod{4}, \\ \overline{x} &= -x, & \text{wenn} & & k \equiv 1, 2 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis folgt wiederum unmittelbar aus der Definition. $\square$

Für einen k -Vektor x gilt die Formel

$$\text{Inv } C(x) = \overline{x} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} x$$

und für beliebige x, y folgt $\overline{\overline{xy}} = \overline{y}\overline{x}$, es liegt also ein Antiautomorphismus vor. Schließlich wollen wir die Reversion definieren, die gerade die Hintereinanderausführung von Konjugation und Hauptinvolution ist.

Definition 3.9. Falls für beliebige Elemente $x, y \in C\ell_{p,q}$ die Beziehungen

- (i) $\text{Inv } R(xy) = \text{Inv } R(y)\text{Inv } R(x)$
- (ii) $\text{Inv } R(e_i) = e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

erfüllt sind, so heißt $\text{Inv } R$ *Reversion*. Dafür schreibt man $\text{Inv } R(x) =: \hat{x}$.

Wie vorher ein Lemma zur Existenz einer solchen Involution:

Lemma 3.10. Für beliebiges $x \in C\ell_{p,q}$ gilt

$$\text{Inv } R = \hat{x} = [x]_0 + [x]_1 - [x]_2 - [x]_3 + [x]_4 + \dots,$$

d.h. für $x \in C\ell_{p,q}^k$ ist:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x, & \text{wenn} & & k \equiv 0, 1 \pmod{4} \\ \hat{x} &= -x, & \text{wenn} & & k \equiv 2, 3 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Beweis. Der Nachweis soll dem Leser als Übungsaufgabe dienen (vgl. Aufgabe 3.5.4). $\square$

Für einen k -Vektor x gilt

$$\text{Inv } R(x) = \hat{x} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} x.$$

Damit folgt z.B. $\text{Inv } R(e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}) = e_{i_k} e_{i_{k-1}} \dots e_{i_1}$, mithin $\widehat{\widehat{xy}} = \widehat{\hat{y} \hat{x}}$, also ist dies auch ein Antiautomorphismus. Schließlich sei auf die folgenden Beziehungen hingewiesen:

$$\hat{x} = \overline{\tilde{x}} = \tilde{\tilde{x}} \quad \text{und} \quad \tilde{x} = \hat{\hat{x}} = \overline{\overline{x}}.$$

Wir wollen nun die Verbindungen zu den uns bekannten Produkten von Vektoren herstellen. Dazu seien x, y Vektoren aus $C\ell_{p,q}^1 \subset C\ell_{p,q}$. Diese haben die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{und} \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

Wir definieren das *innere Produkt* oder *Skalarprodukt* von x und y durch

$$x \cdot y := -\frac{xy + yx}{2} = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

was dem Skalarprodukt der Vektorrechnung entspricht. Hieraus folgt unmittelbar

$$e_i \cdot e_j = -\frac{e_i e_j + e_j e_i}{2} = 0 \quad (i \neq j).$$

Die Basiselemente sind somit orthogonal und es gilt

$$e_i \cdot e_i = e_i^2 = \begin{cases} 1, & i = 1, \dots, p \\ -1, & i = p+1, \dots, n \end{cases}$$

Für $x = y$ entsteht gerade die im vorigen Unterabschnitt erwähnte quadratische Form

$$x^2 = x \cdot x = Q(x).$$

Aus der Definition folgt sofort die Kommutativität des inneren Produkts. Damit repräsentiert es den symmetrischen Teil des Clifford-Produktes zweier Vektoren. Das Clifford-Produkt selbst spaltet sich in eine Summe aus diesem symmetrischen Teil und einem antisymmetrischen Teil:

$$xy = \frac{(xy + yx)}{2} + \frac{(xy - yx)}{2}.$$

Den antisymmetrischen Teil werden wir in Anhang 1 in Beispiel A.1.7 c als das *äußere Produkt* oder *Graßmann-Produkt* kennen lernen. Das Skalarprodukt definiert auf unserem Vektorraum die Bilinearform $x \cdot y = Q(x, y)$, für die offenbar $Q(x, x) = Q(x)$ gilt. Man kann übrigens $Q(x, y)$ auch direkt aus $Q(x)$ durch die Gleichung

$$Q(x, y) = \frac{Q(x + y) - Q(x) - Q(y)}{2}$$

gewinnen.

3.2.3 Absoluter Betrag

Für ein Element $x \in C\ell_{p,q}$ bezeichnen wir wie üblich den *absoluten Betrag* mit

$$|x| := \left(\sum_{A \in \mathcal{P}_n} x_A^2 \right)^{1/2}.$$

Damit kann die Clifford-Algebra als ein euklidischer Raum der Dimension 2^n mit euklidischer Metrik angesehen werden. Wir listen zuerst die bekannten Regeln für die Konjugation und den absoluten Betrag auf, soweit sie hier gelten.

Lemma 3.11. *Es gelten die folgenden Beziehungen, wobei $\text{Sc}(x) = [x]_0 = x_0$ der Skalarteil der Clifford-Zahl x und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei:*

- (i) falls x Paravektor: $\text{Sc } x = \frac{x + \bar{x}}{2}$, (ii) $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$,
- (iii) $\bar{\bar{x}} = x$, (iv) $\overline{xy} = \bar{y} \bar{x}$,
- (v) $|\bar{x}| = |-x| = |x|$, (vi) $|\lambda x| = |\lambda| |x|$,
- (vii) $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

Die Beweise sind sehr einfach und analog zu denjenigen in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$.

So weit, so gut, aber wir hatten in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ noch weitere Regeln, die hier leider Schwierigkeiten bereiten. Dazu gehört einmal die Existenz des Inversen der Multiplikation, die in $C\ell_{p,q}$ nicht immer gegeben ist:

Lemma 3.12. (i) Für $p > 0$ oder für $p = 0$ und $q = n \geq 3$ enthält $C\ell_{p,q}$ Nullteiler.

- (ii) Für $p = 0$ und für alle n besitzen wenigstens die von Null verschiedenen so genannten Paravektoren, welche nur aus Skalar und Vektor bestehen, das bekannte Inverse

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{x\bar{x}}, \quad x \neq 0.$$

- (iii) Die positiven und negativen Basiselemente $\{\pm e_A : A \in \mathcal{P}_n\}$ bilden eine Gruppe.

Beweis. (i) Für $p > 0$ waren bereits oben Nullteiler angegeben worden:

$$(1 + e_1)(1 - e_1) = 0.$$

Damit haben dort auch die 1-Vektoren nicht immer multiplikative Inverse. Für $p = 0$ und $n = q \geq 3$ gibt es die Nullteiler

$$(1 + e_{123})(1 - e_{123}) = 0,$$

denn es ist $e_{123}^2 = 1$.

- (ii) Für Paravektoren gilt

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad \bar{x} = x_0 - \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

und damit

$$\begin{aligned} \bar{x}x = x\bar{x} &= x_0^2 - \sum_{i,k=1}^n x_i x_k e_i e_k \\ &= x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i < k} x_i x_k (e_i e_k + e_k e_i) = |x|^2, \end{aligned}$$

also ist $\bar{x}/|x|^2$ das multiplikative Inverse von x .

- (iii) Das Produkt zweier Basiselemente ist unabhängig vom Vorzeichen wieder ein solches Element. e_0 ist natürlich das Einselement und das Inverse zu $\pm e_A$ ist gerade $\pm \bar{e}_A$. $\square$

Die soeben für Paravektoren verwendete gewohnte Gleichung $x\bar{x} = |x|^2$ ist leider nicht für alle Clifford-Zahlen richtig. Man hat allgemein:

Lemma 3.13. (i) Für beliebige Clifford-Zahlen gilt:

$$\text{Sc}(\bar{x}y) = \text{Sc}(x\bar{y}) = x \cdot y$$

mit dem Skalarprodukt der als Vektoren im $\mathbb{R}^{2^n}$ aufgefassten x und y .

- (ii) Speziell gilt $\text{Sc}(x\bar{x}) = |x|^2$ und

$$\bar{x}x = \sum_{e_A^2=1} (x \cdot (x e_A)) e_A, \quad x\bar{x} = \sum_{e_A^2=1} (x \cdot (e_A x)) e_A.$$

Aus (ii) ist zu sehen, dass $\overline{x}x$ zwar mit $x \cdot x = |x|^2$ beginnt, aber in der Regel folgen weitere Summanden mit $e_A \neq e_0$.

Beweis. (i) Es ist

$$\begin{aligned}\overline{x}y &= \sum_{A,B} x_A y_B \overline{e}_A e_B = \sum_C \left(\sum_{\overline{e}_A e_B = \pm e_C} \pm x_A y_B \right) e_C \\ &= \sum_{\overline{e}_A e_B = \pm e_0} \pm x_A y_B + \sum_{C \neq \{0\}} \left(\sum_{\overline{e}_A e_B \neq \pm e_C} \pm x_A y_B \right) e_C,\end{aligned}$$

wobei $\overline{e}_A e_B = \pm e_0$ wegen der Gruppeneigenschaft nur für $A = B$ und mit $+e_0$ gelten kann. Also haben wir

$$\text{Sc}(\overline{x}y) = \sum_A x_A y_A = x \cdot y.$$

Die Aussage für $x\overline{y}$ folgt analog.

(ii) Wegen $e_B e_A = \pm e_0$ nur für $B = A$ gilt für beliebiges y

$$\text{Sc}(ye_A) = \text{Sc}\left(\sum_B y_B e_B e_A\right) = y_A e_A^2$$

und

$$y = \sum_A \text{Sc}(ye_A) \overline{e}_A.$$

Damit folgt speziell für $y = \overline{x}x$

$$\begin{aligned}\overline{x}x &= \sum_A \text{Sc}(\overline{x}x e_A) \overline{e}_A \\ &= \sum_A (x \cdot (x e_A)) \overline{e}_A = \sum_{e_A^2=1} (x \cdot (x e_A)) e_A.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der Beziehung

$$x \cdot (x e_A) = (x e_A) \cdot x = 0$$

für alle x und die A mit $\overline{e}_A = -e_A$. Dies ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}x \cdot (x e_A) &= \text{Sc}(\overline{x}x e_A) = \text{Sc}(\overline{\overline{x}x e_A}) = \text{Sc}(\overline{x}x \overline{e}_A) \\ &= x \cdot (x \overline{e}_A) = -x \cdot (x e_A),\end{aligned}$$

also ist tatsächlich $x \cdot (x e_A) = 0$. □

Für den Betrag eines Produktes beweisen wir nun den nachfolgenden Satz, der zwar nicht die beste Konstante angibt, aber doch eine brauchbare Abschätzung liefert.

Satz 3.14. (i) Für jedes n gibt es eine Konstante K_n , so dass für alle x, y

$$|xy| \leq K_n |x| |y|$$

ist. Es gilt auf jeden Fall

$$K_n \leq 2^{n/2}.$$

(ii) Wenn y der Beziehung $y\bar{y} = |y|^2$ genügt, also ein Inverses besitzt, so gilt

$$|xy| = |yx| = |x| |y|.$$

In $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ ist $K_1 = K_2 = 1$. Die im Satz angegebene Abschätzung ist also nicht bestmöglich.

Beweis. (i) Aus $xy = \sum_A xy_A e_A$ folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|xy| \leq \sum_A |xy_A e_A| = \sum_A |y_A| |x e_A|.$$

In

$$x e_A = \sum_B x_B e_B e_A$$

läuft mit B auch $e_B e_A$ durch alle Teilmengen $C \subset \mathcal{P}_n$, so dass

$$|x e_A|^2 = \sum_B |x_B|^2 = |x|^2$$

und mit der Schwarzschen Ungleichung

$$|xy|^2 \leq \left(\sum_A |y_A| |x| \right)^2 \leq |x|^2 \left(\sum_A 1 \right) \left(\sum_A |y_A|^2 \right) \leq 2^n |x|^2 |y|^2.$$

(ii) $|xy|^2 = \text{Sc}(xy \overline{xy}) = \text{Sc}(xy \bar{y} \bar{x}) = \text{Sc}(x \bar{x} |y|^2) = |y|^2 \text{Sc}(x \bar{x}) = |y|^2 |x|^2$. Die andere Richtung $|yx|^2$ ist analog zu beweisen. $\square$

3.3 Geometrische Anwendungen

3.3.1 Spin-Gruppe

Der Einfachheit halber werde für diese Betrachtungen die reelle Clifford-Algebra $Cl_{0,n} = Cl(n)$ vorausgesetzt. Wir betrachten 1-Vektoren in $Cl(n)$, also Vektoren im $\mathbb{R}^n$. In $\mathbb{C}$ (Abschnitt 1.3), $\mathbb{R}^3$ (Abschnitt 2.3) und in $\mathbb{H}$ haben wir bereits Drehungen betrachtet. Auch hier verstehen wir unter einer *Drehung* im $\mathbb{R}^n$ eine lineare Transformation der Form

$$v = (v_1, \dots, v_n) \rightarrow T(v) = \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij} v_j \right),$$

die das Skalarprodukt von Vektoren und die Orientierung erhält. Die Gruppe derartiger Transformationen heißt *spezielle orthogonale Gruppe* und wird mit $SO(n)$ bezeichnet. Die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind *orthogonale Matrizen* mit $A^{-1} = A^\top$. Wegen der Orientierungserhaltung muss $\det A = +1$ sein.

Wir wollen uns zuerst Spiegelungen im $\mathbb{R}^n$ zuwenden, aus denen sich die Drehungen aufbauen lassen. Anschaulich ist eine *Spiegelung* an einer durch den Einheitsvektor u bestimmten Ebene $x \cdot u = 0$ mit u als Normale eine Abbildung, bei der die zu u senkrechte Komponente von x unverändert bleibt, während die zu u parallele Komponente mit einem Minuszeichen versehen wird. In Formeln wird x entsprechend zerlegt,

$$x = x_u + (u \cdot x)u,$$

wobei x_u zu u orthogonal ist, so dass der gespiegelte Punkt x' sich zu

$$x' := R_u(x) := x_u - (u \cdot x)u = x - 2(u \cdot x)u$$

ergibt. Wegen $u^2 = u \cdot u = -1$ folgt weiter

$$R_u(x) = x + (ux + xu)u = uxu.$$

Diese Abbildung ist isometrisch, denn

$$\begin{aligned} R_u(x) \cdot R_u(y) &= (uxu) \cdot (uyu) = -2[uxuuyu + yuuxu] \\ &= 2u[xy + yx]u = x \cdot y. \end{aligned}$$

Die zugehörige Abbildungsmatrix ist in Matrixmultiplikation

$$A = E - 2uu^\top$$

mit der Einheitsmatrix E und

$$A^\top = A = A^{-1},$$

letzteres, da die inverse Abbildung gleich der ursprünglichen ist. Allerdings muss $\det A = -1$ sein, da eine Spiegelung die Orientierung nicht erhält (was man auch nachrechnen kann). Führt man schließlich zwei Spiegelungen hintereinander aus, so ergibt sich eine Abbildung mit orthogonaler Matrix, aber der Determinante $+1$, also eine Drehung. Wir fassen zusammen:

Lemma 3.15. *Eine Spiegelung an einer $(n - 1)$ -dimensionalen (Hyper-) Ebene $u \cdot x = 0$ im $\mathbb{R}^n$ mit einem Einheitsvektor u wird durch*

$$R_u(x) = x - 2(u \cdot x)u = uxu$$

beschrieben, die Komposition zweier Spiegelungen ergibt eine Drehung

$$T(x) = u_2 u_1 x u_1 u_2.$$

Wie bereits Hamilton feststellte, kann man in der Tat jede Drehung als Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen gewinnen. Diesem Problem wollen wir uns jetzt zuwenden. Dazu definieren wir zunächst:

Definition 3.16. Die *Spin-Gruppe* $\text{Spin}(n)$ sei die Gesamtheit aller Produkte einer geraden Anzahl von Einheitsvektoren aus dem $\mathbb{R}^n \cong \mathcal{Cl}^1(n)$.

Dabei wird natürlich das leere Produkt zugelassen, es ist gleich dem Einselement e_0 der Clifford-Algebra. Dass es sich tatsächlich um eine Gruppe handelt, sieht man daran, dass sich höchstens Paare von solchen Vektoren annullieren, so dass die gerade Anzahl von Faktoren erhalten bleibt. Für ein Produkt

$$s = u_1 u_2 \dots u_{2k}$$

ist das Inverse durch

$$\bar{s} = \overline{u_{2k}} \dots \overline{u_2} \overline{u_1} = u_{2k} \dots u_2 u_1$$

gegeben. Definiert man nun eine Abbildung $h : \text{Spin}(n) \rightarrow SO(n)$ durch $h(s)(x) := \bar{s} x s$, so kann man fragen, wie diese Abbildung aussieht. Dass sie surjektiv ist, wollen wir im nächsten Unterabschnitt beweisen. Sie ist aber nicht injektiv: Ist $h(s)$ gleich der identischen Abbildung, also

$$h(s)(x) = \bar{s} x s = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so kommutiert s mit allen Basiselementen e_j und gehört damit zum Zentrum der Algebra $\mathcal{Cl}(n)$. Die Spin-Gruppe ist Teilmenge der geraden Teilalgebra $\mathcal{Cl}(n)^+$, deren Elemente nicht mit allen e_j vertauschbar sind, so ist z.B. $(e_i e_j) e_j = -e_i \neq e_j (e_i e_j) = e_i$ für $i \neq j$. Daher muss $h(s)$ reell sein, das geht aber bis auf das Vorzeichen nur für die Identität. Damit ist gezeigt worden:

Satz 3.17. Die Abbildung $h : \text{Spin}(n) \rightarrow SO(n)$ ist eine zweifache Überdeckung, d.h. das vollständige Urbild eines gegebenen Elementes aus $SO(n)$ besteht genau aus zwei Elementen.

3.3.2 Konstruktion von Drehungen des $\mathbb{R}^n$

Wir wollen das Problem der Konstruktion von Drehungen des $\mathbb{R}^n$ mit Hilfe Clifford-algebraischer Überlegungen behandeln. Unsere Ausführungen folgen dabei einer Abhandlung von H. KRÜGER (Kaiserslautern), die uns freundlicherweise für unser Buchprojekt zur Verfügung gestellt wurde.

Eine allgemeine lineare Isometrie oder orthogonale Abbildung T wird auch dadurch gekennzeichnet, dass sie eine beliebige Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ in eine andere Orthonormalbasis $\{g_1, \dots, g_n\}$ vermöge der Vorschrift

$$g_k = T(e_k)$$

abbildet. Selbstverständlich lassen sich die g_k durch die e_k ausdrücken, die Koeffizienten sind dann gerade die Elemente der zugehörigen Drehmatrix, wenn die Orientierung übereinstimmt, sonst hat die Matrix die Determinante -1 . Wir wollen

hier aber innerhalb der Clifford-Algebra arbeiten. Unmittelbar aus der Definition folgt

$$g_j \cdot g_k = T(e_j) \cdot T(e_k) = e_j \cdot e_k = \delta_{jk}.$$

Die Linearität von T liefert sofort für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Eigenschaft

$$T(x) \cdot T(y) = x \cdot y.$$

Ziel weiterer Betrachtungen ist es, Spiegelungen R_u zu konstruieren, die die Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ sukzessive in die Orthonormalbasis $\{g_1, \dots, g_n\}$ überführen.

Als erstes überlegen wir uns, dass es zu zwei Einheitsvektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq y$ stets einen Einheitsvektor u gibt, so dass $R_u(x) = y$ ist. In der Tat braucht man nur $u = (x - y)/|x - y|$ zu wählen, dann ist wegen $x^2 = y^2 = -1$

$$\begin{aligned} R_u(x) &= \frac{1}{|x - y|^2} (x - y)x(x - y) = \frac{x^3 - x^2y - yx^2 + yxy}{2(1 - x \cdot y)} \\ &= \frac{y(1 - x \cdot y)}{1 - x \cdot y} = y. \end{aligned}$$

Diese wichtige Abbildung wird im Weiteren wesentlich benutzt.

Es seien nun $\{e_1, \dots, e_n\}$ und $\{g_1, \dots, g_n\}$ die beiden Orthonormalbasen, die wir ineinander überführen wollen. Ist $e_1 = g_1$, so ist im ersten Schritt nichts zu tun, sonst definieren wir $u_1 := (e_1 - g_1)/|e_1 - g_1|$. Dann führt R_{u_1} den Basisvektor e_1 in den neuen Basisvektor g_1 über. Leider wirkt R_{u_1} auch auf die anderen Basisvektoren. Wir setzen

$$e_k^{(1)} := R_{u_1}(e_k) \quad (2 \leq k \leq n).$$

Nach den Eigenschaften von R_{u_1} muss aber

$$e_j^{(1)} \cdot e_k^{(1)} = e_j \cdot e_k = \delta_{jk} \quad (2 \leq j, k \leq n)$$

sein. Für $k = 2$ wird mit $x = e_2^{(1)}$ und $y = g_2$ die Überlegung wiederholt, falls nicht zufällig $e_2^{(1)} = g_2$ ist. Für $e_2^{(1)} \neq g_2$ sei

$$u_2 := \frac{e_2^{(1)} - g_2}{|e_2^{(1)} - g_2|}.$$

R_{u_2} bildet wie gewünscht $e_2^{(1)}$ in g_2 ab. Erfreulicher Weise wird bei dieser Spiegelung g_1 invariant gelassen: Erst einmal folgt

$$R_{u_2}(g_1) = -u_2 g_1 u_2 = -u_2 (g_1 u_2 + u_2 g_1) + u_2^2 g_1 = -2u_2 (g_1 \cdot u_2) + g_1,$$

wir müssen noch das folgende Skalarprodukt untersuchen:

$$g_1 \cdot u_2 = \frac{1}{|e_2^{(1)} - g_2|} g_1 \cdot (e_2^{(1)} - g_2).$$

Dabei ist $g_1 \cdot g_2 = 0$ nach Voraussetzung und

$$g_1 \cdot e_2^{(1)} = R_{u_1}(e_1) \cdot R_{u_1}(e_2) = e_1 \cdot e_2 = 0.$$

Also bleibt g_1 unter R_{u_2} tatsächlich invariant.

Jetzt führen wir eine vollständige Induktion nach k durch: Es seien bereits

$$\begin{aligned} g_1 &= R_{u_1}(e_1), \quad u_1 = \frac{e_1 - g_1}{|e_1 - g_1|}, \\ g_2 &= R_{u_2}(e_2^{(1)}), \quad u_2 = \frac{e_2^{(1)} - g_2}{|e_2^{(1)} - g_2|}, \\ &\dots \\ g_{k-1} &= R_{u_{k-1}}(e_{k-1}^{(k-2)}), \quad u_{k-1} = \frac{e_{k-1}^{(k-2)} - g_{k-1}}{|e_{k-1}^{(k-2)} - g_{k-1}|} \end{aligned}$$

konstruiert, wobei gegebenenfalls R_{u_j} die Identität ist, wenn $e_j^{(j-1)} = g_j$ sein sollte. Dabei lassen die R_{u_j} die g_i mit $i < j$ jeweils invariant. Zum Schluss von $k-1$ auf k definieren wir wieder

$$e_j^{(k-1)} := R_{u_{k-1}}(e_j^{(k-2)}), \quad j = k, \dots, n.$$

Wie vorher wird

$$u_k := \frac{e_k^{(k-1)} - g_k}{|e_k^{(k-1)} - g_k|}$$

gesetzt und es gilt

$$R_{u_k}(e_k^{(k-1)}) = g_k.$$

Zu überlegen ist, ob die vorherigen g_j dabei invariant bleiben. Jedenfalls erhalten wir für $j < k$

$$R_{u_k}(g_j) = -u_k g_j u_k = u_k^2 g_j - u_k(u_k g_j + g_j u_k) = g_j + 2u_k(u_k \cdot g_j).$$

Es bleibt das Verschwinden des Skalarproduktes

$$u_k \cdot g_j = \frac{1}{|e_k^{(k-1)} - g_k|} (e_k^{(k-1)} - g_k) \cdot g_j$$

zu zeigen. Nach Voraussetzung ist $g_k \cdot g_j = 0$. Für den Rest kann man wieder

$$e_k^{(k-1)} \cdot g_j = R_{u_{k-1}}(e_k^{(k-2)}) \cdot R_{u_{k-1}}(g_j) = e_k^{(k-2)} \cdot g_j$$

schreiben und das ist Null nach Induktionsvoraussetzung.

Übrigens werden sowohl e_n wie g_n durch die anderen Basiselemente und die Orientierung festgelegt. Sind also die beiden Orthonormalsysteme gleich orientiert, so entfällt der letzte Schritt.

Somit haben wir folgenden Satz erhalten:

Satz 3.18. Jede Isometrie des $\mathbb{R}^n$, insbesondere jede Drehung, ist ein Produkt von höchstens $n-1$ Spiegelungen an den durch Vektoren u_k definierten Ebenen $u_k \cdot x = 0$, $k = 1, \dots, n-1$. Dabei wird die Basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ in die Basis $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ mit $g_k = T(e_k)$ transformiert, wobei gilt

$$T = R_{u_{n-1}} \circ \dots \circ R_{u_2} \circ R_{u_1}.$$

Speziell ist jede Drehung Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen.

Bemerkung 3.19. Falls $u \cdot v = 0$, so ist das Produkt $R_u \circ R_v$ kommutativ, d.h.

$$(R_u \circ R_v)(x) = (R_v \circ R_u)(x),$$

denn dann ist $0 = u \cdot v = -2(uv + vu)$, also $uv = -vu$ und damit

$$(R_u \circ R_v)(x) = uvxvu = vuxuv = (R_v \circ R_u)(x).$$

Insbesondere sind alle Kompositionen $R_{e_j} \circ R_{e_k}$ kommutativ.

3.3.3 Drehungen des $\mathbb{R}^{n+1}$

Die Drehungen des $\mathbb{R}^{n+1}$ unterscheiden sich von denen des $\mathbb{R}^n$ in folgender Weise:

Satz 3.20. Man bezeichnet mit Γ_{n+1} die so genannte Clifford-Gruppe, die Menge aller endlichen Produkte von Paravektoren, die von Null verschieden sind. Drehungen des $\mathbb{R}^{n+1}$ haben stets die Form

$$x' = u x \hat{u} = u x \tilde{u}^{-1},$$

wobei die $u \in \Gamma_{n+1}$ endliche Produkte von Paraeinheitsvektoren sind. Ferner bezeichnet $\tilde{u}$ die Inversion und $\hat{u}$ die Reversion.

Beweis. Die Spiegelung an einer Ebene mit dem Einheitsparavektor $\bar{u}$ als Normale ist, wie oben beschrieben, durch

$$x' = x - 2(\bar{u} \cdot x)\bar{u} = x - (\bar{u}\bar{x} + x\bar{u})\bar{u} = -\bar{u}\bar{x}\bar{u}$$

gegeben. Eine zweite Spiegelung mit $u = 1$, $x'' = -\bar{x}'$, die mit der ersten vertauschbar ist, führt auf $x'' = uxu$. Dies ist mithin eine Drehung. Die Komposition mehrerer Drehungen führt auf Ausdrücke der Form

$$x' = u_k \dots u_1 x u_1 \dots u_k.$$

Mit $u := u_k \dots u_1$ wird $u_1 \dots u_k = \hat{u}$, da $\hat{u}_j = u_j$ ist. Wegen

$$\tilde{u} \hat{u} = \tilde{u} \bar{u} = |u|^2 = |u_1|^2 \dots |u_k|^2 = 1$$

kann die Drehung auch in der Form

$$x' = u x \tilde{u}^{-1} = u x \hat{u}$$

geschrieben werden.

Umgekehrt ist nach Satz 3.18 jede Drehung T die Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen R_u , also

$$T = R_{u_{2k}} \circ \dots \circ R_{u_1}.$$

Schaltet man jetzt $2k$ Spiegelungen $R_i(x) = -\bar{x}$ vor, so ergeben diese einerseits wegen der geraden Anzahl zusammen die Identität. Andererseits können sie an die R_{u_i} herantauscht werden und liefern dann wie oben die gewünschte Form. $\square$

3.4 Darstellungen

Wie in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ soll untersucht werden, ob man jeder Clifford-Algebra eine isomorphe Matrixalgebra zuordnen kann. Dazu sind einige fundamentale Aussagen zu beweisen. Zunächst wollen wir uns den niedrigdimensionalen Fällen zuwenden. Hierfür ist es nützlich, die schon in Abschnitt 2.3 verwendeten Pauli-Matrizen zu benutzen:

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man sieht leicht ein, dass $\sigma_k^2 = \sigma_0$ für $k = 1, 2, 3$ gilt. Weiterhin erfüllen die Pauli-Matrizen die Antikommutator-Relationen:

$$\sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 0 \quad (j \neq k; j, k = 1, 2, 3).$$

Mit $\mathcal{A}^{d \times d}$ hatten wir den Ring aller $(d \times d)$ -Matrizen über einer Algebra $\mathcal{A}$ bezeichnet. Bisher können wir folgende Darstellungen im Einzelnen angeben:

Beispiel 3.21. 1. $\mathcal{C}\ell_{0,0}$: Ein Element $x \in \mathcal{C}\ell_{0,0}$ hat x die Form $x = x_0 e_0$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$, also $\mathcal{C}\ell_{0,0} \cong \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{1 \times 1}$.

2. $\mathcal{C}\ell_{1,0}$: Für die Algebra der dualen Zahlen hat man die Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Die $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -Matrizen σ_0 und σ_1 bilden dazu eine isomorphe Basis. Damit können wir einem Element der Algebra $x = x_0 + x_1 e_1$ die Matrix $x_0 \sigma_0 + x_1 \sigma_1$ zuordnen und haben als Darstellung die Matrizen

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{pmatrix}.$$

Man kann hierfür auch $\mathcal{C}\ell_{1,0} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ schreiben.

3. $\mathcal{C}\ell_{0,1}$: Diese Algebra ist gerade gleich $\mathbb{C}$ und die Basis kann z. B. auf die Matrizen $\sigma_0, -i\sigma_2$ abgebildet werden. Wir erhalten damit für eine komplexe Zahl $x = x_0 + ix_1$ die Darstellung

$$\begin{pmatrix} x_0 & -x_1 \\ x_1 & x_0 \end{pmatrix},$$

wie wir sie schon in Lemma 1.13 kennen gelernt haben.

4. $\mathcal{Cl}_{2,0}$: Der Basis e_0, e_1, e_2, e_1e_2 mit $e_1^2 = e_2^2 = 1$ können wir die Matrizen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3, \sigma_1\sigma_3$ zuordnen, so dass sich für ein Element $x = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_1e_2$ als Darstellung ergibt:

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_2 & x_1 - x_3 \\ x_1 + x_3 & x_0 - x_2 \end{pmatrix}$$

Das liefert die volle Matrixalgebra $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

5. $\mathcal{Cl}_{1,1}$: Die Basiselemente lauten wieder e_0, e_1, e_2, e_1e_2 mit $e_1^2 = -e_2^2 = 1$, diesen können die Matrizen $\sigma_0, \sigma_1, i\sigma_2, \sigma_1i\sigma_2$ zugeordnet werden. Ein beliebiges Element $x = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_1e_2$ hat somit die Darstellung

$$\begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix}$$

Das ist wieder die volle Matrixalgebra $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

6. $\mathcal{Cl}_{0,2}$: Hier handelt es sich um die reellen Quaternionen, der üblichen Basis können die Matrizen $\sigma_0, -i\sigma_1, -i\sigma_2, \sigma_1\sigma_2 (= -i\sigma_3)$ zugeordnet werden. Ein beliebiges Element von $\mathbb{H}$ hat dann als Darstellung die Form

$$x = \begin{pmatrix} x_0 - ix_3 & -x_2 - ix_1 \\ x_2 - ix_1 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix}$$

Das haben wir bereits in Abschnitt 2.3 ausgerechnet, es handelt sich nicht um $\mathbb{C}^{2 \times 2}$, sondern um $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

7. $\mathcal{Cl}_{3,0}$: Die Basis dieser Algebra kann den Pauli-Matrizen zugeordnet werden. Wegen $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1$ und $\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$ sowie $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_0$ erhält ein beliebiges Element

$$x = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_1e_2 + x_5e_2e_3 + x_6e_3e_1 + x_7e_1e_2e_3$$

der Algebra die komplexe Darstellung

$$\begin{pmatrix} (x_0 + ix_7) + (x_3 + ix_4) & (x_1 + ix_5) + (x_6 - ix_2) \\ (x_1 + ix_5) + (x_6 + ix_2) & (x_0 + ix_7) - (x_3 + ix_4) \end{pmatrix},$$

d.h. $\mathcal{Cl}_{3,0} \cong \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Wir können auch die Isomorphie zu den komplexen Quaternionen herstellen, müssen dazu nur x anders zusammenfassen:

$$x = (x_0 + ix_7)\sigma_0 + (x_4 + ix_3)\sigma_1\sigma_2 + (x_5 + ix_1)\sigma_2\sigma_3 + (x_6 + ix_2)\sigma_1\sigma_3.$$

An diesem Beispiel wird deutlich, dass Darstellungen keineswegs eindeutig bestimmt sind. Dass die letzte Darstellung isomorph zu den komplexen Quaternionen ist, sieht man daran, dass die Basiselemente jetzt denen der reellen Quaternionen entsprechen.

Wir wollen nun zeigen, dass alle anderen Clifford-Algebren Tensorprodukte der hier angegebenen sind. Die nachstehende Darstellung sind Resultate von F. Sommen, entstanden in einer Zusammenarbeit mit dem dritten Autor.

Satz 3.22 (Reduzierung der Dimension). *Die Algebren $Cl_{p+1,q+1}$ und $Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$ sind zueinander isomorph.*

Beweis. Die Basis der Algebra $Cl_{p+1,q+1}$ kann man in der Form

$$\check{e}_1, \dots, \check{e}_{p+1}, e_1, \dots, e_{q+1},$$

angeben mit $\check{e}_i^2 = 1$, $e_i^2 = -1$. Es sei nun $e := e_{q+1}$, $\check{e} := \check{e}_{p+1}$. Wir sehen leicht, dass der Bivektor $e\check{e}$ mit allen Elementen $\check{e}_1, \dots, \check{e}_p, e_1, \dots, e_q$ kommutiert und das Quadrat 1 hat. Daher erzeugen die Elemente

$$\begin{aligned} \check{E}_1 &= \check{e}_1 e \check{e}, \dots, \check{E}_p = \check{e}_p e \check{e}, \\ E_1 &= e_1 e \check{e}, \dots, E_q = e_q e \check{e} \end{aligned}$$

auch die Algebra $Cl_{p,q}$, ebenso ist $Cl_{p+1,q+1}$ isomorph zur von den Elementen $\check{E}_1, \dots, \check{E}_p, E_1, \dots, E_q, e, \check{e}$ erzeugten Algebra. Weiter kann man die Elemente von $Cl_{p+1,q+1}$ in der Form $x_0 + x_1 e + x_2 \check{e} + x_3 e \check{e}$ mit Elementen $x_i \in Cl_{p,q}$ schreiben. Daher ist $Cl_{p+1,q+1} \cong Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$. $\square$

Da nach den vorangehenden Betrachtungen $Cl_{1,1}$ isomorph zur vollen Matrixalgebra $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist, haben wir eine Reduzierung von p und q bei Übergang zu entsprechenden Matrizen.

Folgerung 3.23. *Es gelten die Beziehungen:*

$$Cl_{p+1,q+1} \cong Cl_{p,q}^{2 \times 2}, \quad Cl_{p+2,q+2} \cong Cl_{p,q}^{4 \times 4}$$

und damit

$$\begin{aligned} Cl_{p,q} &\cong Cl_{p-q,0}^{2^q \times 2^q} & \text{für } p \geq q, \\ Cl_{p,q} &\cong Cl_{0,q-p}^{2^p \times 2^p} & \text{für } q \geq p. \end{aligned}$$

Somit haben wir nur noch die Algebren $Cl_{p,0}$ und $Cl_{0,q} = Cl(q)$ zu untersuchen. Wir betrachten zunächst zwei nützliche Beispiele:

Beispiel 3.24. Es gilt (vgl. Aufgabe 3.5.6):

- a) $Cl_{2,2} \cong Cl_{1,1} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{R}^{4 \times 4}$.
- b) $Cl_{1,2} \cong Cl_{0,1} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}l_{1,1} \cong \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Satz 3.25 (Austauscheigenschaft). *Es ist $Cl_{p+1,q} \cong Cl_{q+1,p}$.*

Beweis. Die kanonische Basis von $Cl_{p+1,q}$ sei,

$$\check{e}_1, \dots, \check{e}_{p+1}, e_1, \dots, e_q.$$

wir setzen $\check{e} := \check{e}_{p+1}$. Eine isomorphe Algebra wird durch die Elemente

$$\begin{aligned}\check{E}_1 &:= e_1\check{e}, \dots, \check{E}_q := e_q\check{e}, \check{E}_{q+1} := \check{e} \\ E_1 &= \check{e}_1\check{e}, \dots, E_p = \check{e}_p\check{e},\end{aligned}$$

erzeugt, die aber offensichtlich auch die Generatoren einer Algebra $Cl_{q+1,p}$ sind. $\square$

Für $p > 1$ folgt auf Grund der Sätze 3.22 und 3.25 sowie der Folgerung 3.23

$$Cl_{p,0} \cong Cl_{1,p-1} \cong Cl_{0,p-2} \otimes Cl_{1,1} \cong Cl_{0,p-2}^{2 \times 2}.$$

Zusammenfassend können wir daher formulieren

Lemma 3.26. *Für die ersten acht Algebren $Cl_{p,0}$ folgt*

$$\begin{aligned}Cl_{0,0} &\cong \mathbb{R}^{1 \times 1}, \\ Cl_{1,0} &\cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \\ Cl_{2,0} &\cong \mathbb{R}^{2 \times 2}, \\ Cl_{3,0} &\cong \mathbb{C}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^{4 \times 4}, \\ Cl_{4,0} &\cong Cl_{0,2} \otimes Cl_{1,1} \cong \mathbb{H}^{2 \times 2}, \\ Cl_{5,0} &\cong Cl_{0,3} \otimes Cl_{1,1} \cong (\mathbb{H} \otimes \mathbb{C})^{2 \times 2}, \\ Cl_{6,0} &\cong Cl_{0,4}^{2 \times 2}, \\ Cl_{7,0} &\cong Cl_{0,5}^{2 \times 2}.\end{aligned}$$

Es verbleiben die Clifford-Algebren $Cl_{0,p} = Cl(p)$. Dazu und auch der letzten beiden nicht zufrieden stellenden Zeilen wegen ist jedoch noch eine Modifikation des Dimensions-Reduzierungs-Prinzips notwendig, genauer: wir benötigen eine Eigenschaft, die die Algebra $Cl_{0,p}$ wieder in Relation zu $Cl_{p,0}$ bringt.

Satz 3.27. *Es gilt der Isomorphismus*

$$Cl_{p,q+2} \cong Cl_{q,p} \otimes Cl_{0,2} \cong Cl_{q,p} \otimes \mathbb{H}.$$

Beweis. Ähnlich wie beim Beweis der letzten Sätze setze man bei gegebener Basis

$$\check{e}_1, \dots, \check{e}_p, e_1, \dots, e_q, e_{q+1}, e_{q+2}$$

durch

$$\begin{aligned}\check{E}_1 &= e_1 e_{q+1} e_{q+2}, \dots, \check{E}_q = e_q e_{q+1} e_{q+2}, \\ E_1 &= \check{e}_1 e_{q+1} e_{q+2}, \dots, E_p = \check{e}_p e_{q+1} e_{q+2}, E_{p+1} = e_{q+1}, E_{p+2} = e_{q+2}.\end{aligned}$$

eine neue Basis fest. Diese Elemente erzeugen auch $Cl_{p,q+2}$, während die Elemente $\check{E}_1, \dots, E_p$ gerade die Algebra $Cl_{q,p}$ generieren. Man kann also wieder e_{q+1}, e_{q+2} und $e_{q+1} e_{q+2}$ als Basis mit Koeffizienten aus $Cl_{q,p}$ nehmen. Das aber ist die behauptete Isomorphie. $\square$

Damit erhalten wir nachstehende Darstellungen, wobei z.B. gemäß Satz 3.27 verwendet wird:

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong Cl_{0,2} \otimes \mathbb{H} \cong Cl_{2,2} \cong \mathbb{R}^{4 \times 4},$$

letzteres gemäß Beispiel 3.24 a.

Folgerung 3.28. *Somit haben wir erhalten:*

$$\begin{aligned} Cl_{0,1} &\cong \mathbb{C}, \\ Cl_{0,2} &\cong \mathbb{H}, \\ Cl_{0,3} &\cong Cl_{1,0} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \\ Cl_{0,4} &\cong Cl_{2,0} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H}^{2 \times 2}, \\ Cl_{0,5} &\cong Cl_{3,0} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^{4 \times 4} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H}^{4 \times 4}, \\ Cl_{0,6} &\cong Cl_{4,0} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H}^{2 \times 2} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^{8 \times 8}, \\ Cl_{0,7} &\cong Cl_{5,0} \otimes \mathbb{H} \cong (\mathbb{H} \otimes \mathbb{C})^{2 \times 2} \otimes \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Als Ergänzung zur vorherigen Aufstellung folgt

$$\begin{aligned} Cl_{6,0} &\cong Cl_{0,4}^{2 \times 2} \cong \mathbb{H}^{4 \times 4}, \\ Cl_{7,0} &\cong Cl_{0,5}^{2 \times 2} \cong \mathbb{H}^{8 \times 8}. \end{aligned}$$

Die restlichen Clifford-Algebren können mit Hilfe des Bottschen Periodizitätsgesetzes berechnet werden:

Satz 3.29 (Periodizitätsgesetz von Bott). *Es gilt*

$$Cl_{p+8,q} \cong Cl_{p,q+8} \cong Cl_{p,q} \otimes \mathbb{R}^{16 \times 16} \cong Cl_{p,q}^{16 \times 16}.$$

Beweis. Wir erhalten aus den vorherigen Sätzen

$$\begin{aligned} Cl_{p+4,q} &\cong Cl_{q+1,p+3} \cong Cl_{p+1,q+1} \otimes \mathbb{H} \\ &\cong Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1} \otimes \mathbb{H} \cong Cl_{p,q} \otimes \mathbb{H}^{2 \times 2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} Cl_{p+8,q} &\cong Cl_{p+4,q} \otimes \mathbb{H}^{2 \times 2} \cong Cl_{p,q} \otimes \mathbb{H}^{2 \times 2} \otimes \mathbb{H}^{2 \times 2} \\ &\cong Cl_{p,q} \otimes \mathbb{H}^{4 \times 4} \cong Cl_{p,q} \otimes \mathbb{R}^{16 \times 16}. \end{aligned}$$

□

3.5 Aufgaben

1. Man zeige, dass die Menge $Cl(n)$ aller Produkte von nicht-verschwindenden Paravektoren eine Gruppe bildet, die Gruppe Γ_n . Für $a, b \in Cl(n)$ und a aus der Clifford-Gruppe Γ_{n+1} gilt die Beziehung:

$$|ab| = |a||b|.$$

2. Es sei x ein Paravektor. Man beweise die Identität:

$$\sum_{i=0}^n e_i x e_i = -(n-1)\bar{x}$$

3. Man beweise, dass das Zentrum der Algebra $C\ell(n)$ für gerades n nur aus den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ besteht und für ungerades n von 1 und $e_1 e_2 \dots e_n$ erzeugt wird (vgl. Lemma 3.4).

4. Für beliebiges $x \in C\ell_{p,q}$ gilt

$$\text{Inv } R = \hat{x} = [x]_0 + [x]_1 - [x]_2 - [x]_3 + [x]_4 + \dots,$$

d.h. für $x \in C\ell_{p,q}^k$ ist:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x, & \text{wenn } k &\equiv 0, 1 \pmod{4} \\ \hat{x} &= -x, & \text{wenn } k &\equiv 2, 3 \pmod{4}. \end{aligned}$$

5. Man zeige, dass für Paravektoren x die Identität

$$\sum_{i=0}^n e_i x e_i = -(n-1)\bar{x}.$$

gilt.

6. Man zeige die Beziehungen: (i) $C\ell_{2,2} \cong C\ell_{1,1} \otimes C\ell_{1,1} \cong \mathbb{R}^{4 \times 4}$.
(ii) $C\ell_{1,2} \cong C\ell_{0,1} \otimes C\ell_{1,1} \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}\ell_{1,1} \cong \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

4 Topologische Aspekte

4.1 Topologie und Stetigkeit

Wir haben bereits Abstände in $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathcal{Cl}(n)$ kennen gelernt. Alle haben nachstehende Eigenschaften und definieren daher eine *Metrik* in den entsprechenden Mengen: Für den Abstand $d(z_1, z_2)$ soll für alle z_1, z_2, z_3 gelten:

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &\geq 0, \quad d(z_1, z_2) > 0 \Leftrightarrow z_1 \neq z_2, & (\text{Positivität}) \\ d(z_1, z_2) &= d(z_2, z_1), & (\text{Symmetrie}) \\ d(z_1, z_2) &\leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2) & (\text{Dreiecksungleichung}). \end{aligned}$$

Dies ist in den zugehörigen Abschnitten gezeigt worden.

Die topologischen Grundbegriffe und die Konvergenz werden nun wie in metrischen Räumen üblich definiert. Wir gehen also von einem (im folgenden immer reellen) Vektorraum X mit einer gegebenen Metrik d aus und spezifizieren dies nicht. Zu bemerken ist auch, dass Teilmengen von X gleichfalls metrische Räume mit der induzierten Metrik sind, so dass wir mit den folgenden Definitionen immer auch Teilmengen von $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ oder $\mathcal{Cl}(n)$ erfassen.

Definition 4.1 (Folge und Grenzwert). Es sei X ein Vektorraum mit der Metrik d . Eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in X , üblicherweise geschrieben $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder kürzer (z_n) , wird *Folge aus X* genannt. Man sagt, eine Folge (z_n) habe den *Grenzwert* $a \in X$ oder *konvergiere gegen a* , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ existiert, so dass $d(z_n, a) < \varepsilon$ für jedes $n > N(\varepsilon)$. Man schreibt dafür kurz $z_n \rightarrow a$.

Das ist die schon aus dem Reellen bekannte Definition; wir verzichten auf Beispiele. Es sei aber darauf hingewiesen, dass der Begriff der Cauchy-Folge analog aus dem Reellen übernommen wird und das Cauchy-Kriterium auch hier gilt. Eine Folge kann natürlich auch mit einem anderen Index als 1 beginnen.

Lemma 4.2. *Eine Folge von Zahlen (x_n) aus $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ oder $\mathcal{Cl}(n)$ konvergiert genau dann, wenn die reellen Folgen der Komponenten konvergieren.*

Der Beweis wird dem Leser als Übung empfohlen (vgl. Aufgabe 4.4.1). Die topologischen Grundbegriffe werden wie in metrischen Räumen definiert:

Definition 4.3 (Topologie). Es sei X ein Vektorraum mit der Metrik d und $M \subset X$.

- (i) Eine Kreisscheibe $B_\varepsilon(z_0) := \{z \in X : d(z, z_0) < \varepsilon\}$ heißt ε -*Umgebung*, eine Menge $U \supset B_\varepsilon(z_0)$ *Umgebung* des Punktes z_0 .
- (ii) Man sagt, eine Menge M habe einen *Häufungspunkt* a , wenn eine Folge von Punkten aus M , verschieden von a , existiert, die gegen a konvergiert. Die Menge aller Häufungspunkte von M wird mit M' bezeichnet.
- (iii) Eine Menge heißt *abgeschlossen*, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält, d.h. wenn $M' \subset M$ ist. Die Menge $\overline{M} := M \cup M'$ wird *Abschließung* von M genannt.

- (iv) Bezeichnen wir mit $CM := X \setminus M$ als *Komplement von M bezüglich X* , so heißt $\partial M := \overline{M} \cap \overline{CM}$ *Rand* der Menge M .
- (v) Ist N eine Untermenge von M , so kann man die vorherigen Begriffe auch *relativ zu M* verstehen, man spricht von *Relativtopologie*. So ist N eine *Relativumgebung* von z , wenn es eine Umgebung $U = U(z)$ gibt, so dass $N = M \cap U$. Die Menge N heißt *relativ abgeschlossen*, wenn $N = M \cap A$ mit einer abgeschlossenen Menge A .

Es sind noch weitere Definitionen erforderlich:

Definition 4.4 (Gebiet). Es sei X ein Vektorraum und $M \subset X$.

- (i) Eine Menge M heißt *offen*, wenn sie für jeden Punkt $z \in M$ eine ε -Umgebung von z enthält. Eine Menge $N \subset M$ heißt *relativ offen bezüglich M* , wenn sie zu jedem Punkt $z \in N$ eine Relativumgebung von z enthält.
- (ii) Eine Menge M heißt *zusammenhängend*, wenn sich keine offenen Mengen M_1 und M_2 finden lassen, so dass

$$M \subset M_1 \cup M_2, \quad M \cap M_i \neq \emptyset \quad (i = 1, 2), \quad M \cap M_1 \cap M_2 = \emptyset$$

gilt. Ist M offen, so vereinfacht sich die Definition wie folgt: Es gibt keine zwei nichtleeren offenen Mengen G_1 und G_2 mit $M = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

- (iii) Eine Menge M heißt *wegzusammenhängend*, wenn je zwei ihrer Punkte durch einen in M verlaufenden Polygonzug verbunden werden können.
- (iv) Eine offene und zusammenhängende Menge wird *Gebiet* genannt.

Wir werden im Allgemeinen Gebiete und deren Ränder bei unseren Betrachtungen zu Grunde legen. Aus der Topologie sind folgende einfache Aussagen bekannt, deren Beweise der reellen Analysis zu entnehmen sind:

- Lemma 4.5.** (i) *Falls die Menge M offen ist, so ist CM abgeschlossen; ist hingegen M abgeschlossen, so ist CM offen.*
- (ii) *Der Durchschnitt einer beliebigen Anzahl abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen; die Vereinigung einer beliebigen Anzahl offener Mengen ist offen.*
 - (iii) *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen; der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*

Das folgende Lemma wollen wir zur Übung beweisen, es ist für den Umgang mit Gebieten nützlich.

Lemma 4.6. *Für offene Mengen in einem Vektorraum sind Zusammenhang und Wegzusammenhang äquivalent.*

Beweis. Gäbe es in einer offenen Menge M zwei Punkte z_1 und z_2 , die man nicht durch einen Polygonzug verbinden kann, so zerlege man M in die zwei Teilmengen M_1 und $M_2 := M \setminus M_1$. Dabei enthalte M_1 alle Punkte aus M , die mit z_1 durch einen Polygonzug

verbunden werden können. Nach Voraussetzung sind M_1 und M_2 nichtleer und disjunkt. Sie sind aber auch offen: Denn für $z_0 \in M_1$ gibt es eine ε -Umgebung von z_0 in M , deren Punkte mit z_0 durch eine Strecke verbunden werden können, also auch durch einen Polygonzug mit z_1 . Damit gehört die ganze ε -Umgebung zu M_1 und M_1 ist offen. Ähnlich ist für M_2 zu argumentieren. Man hat also M in zwei offene, punktfremde und nichtleere Teilmengen zerlegt; das ist ein Widerspruch zur Definition des Zusammenhangs.

Wäre umgekehrt M wegzusammenhängend und nicht zusammenhängend, so gäbe es nach Definition eine Zerlegung von M in zwei disjunkte offene Mengen M_1 und M_2 . Man wähle $z_i \in M_i$, $i = 1, 2$. Diese beiden Punkte kann man dann nach Voraussetzung durch einen in M verlaufenden Polygonzug verbinden. Dieser werde durch die Strecken $\overline{P_1 P_2}, \dots, \overline{P_{n-1} P_n}$ gebildet. Zu den Punkten P_j ($j = 1, \dots, n-1$) gehören die Ortsvektoren a_j .

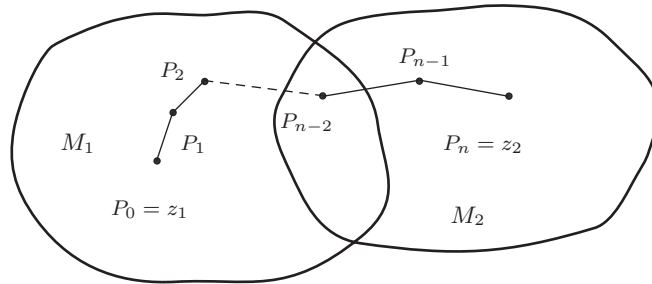


Abbildung 4.1

Dann gilt:

$$\overline{P_j P_{j+1}} : z(t) = (a_j - a_{j-1})(t - j + 1) + a_{j-1}, \quad j - 1 \leq t \leq j \quad (j = 1, \dots, n),$$

speziell ist $z(0) = a_0 = z_1$ und $z(n) = a_n = z_2$. Beim Durchlaufen von P läuft t in dem Intervall $[0, n]$. Sei nun $Q_i := P \cap M_i$, $i = 1, 2$; Q_1 enthält zumindest z_1 . Es sei

$$t^* := \sup\{t \in [0, n] : z(t) \in Q_1\}.$$

Läge $z(t^*)$ in Q_1 , so auch in M_1 . Damit läge auch eine Umgebung von $z(t^*)$ in M_1 und damit auch alle Punkte $z(t)$ mit $t^* - \delta < t < t^* + \delta$ für ein hinreichend kleines δ . Das widerspräche aber der Definition von t^* als Supremum. Also müsste $z(t^*)$ in Q_2 und somit in M_2 liegen. Da M_2 offen ist, gäbe es eine Umgebung von $z(t^*)$, die ganz in M_2 läge. Das aber widerspräche gleichfalls der Definition von t^* , nach der in beliebiger Nähe von $z(t^*)$ Punkte aus Q_1 und damit aus M_1 liegen müssen. Damit ist ein Widerspruch konstruiert und M muss zusammenhängend sein. $\square$

Unser einführender topologischer Exkurs endet mit dem Begriff der kompakten Menge.

Definition 4.7 (Kompaktheit). (i) Ein beliebiges System von offenen Mengen heißt *Überdeckung* einer Menge M , falls jeder Punkt aus M in mindestens einer dieser offenen Mengen liegt.

- (ii) Eine Menge K heißt *kompakt*, wenn aus einer beliebigen Überdeckung von K stets eine endliche Überdeckung von K ausgewählt werden kann.

Der Teil (i) des folgenden Satzes ist nach H. E. HEINE (1821–1881) und E. BOREL (1871–1956) benannt; er ist von Wichtigkeit für den Umgang mit kompakten Mengen. Der Beweis dieses Satzes findet sich zum Beispiel in [8], Band I, Kapitel III.3.

Satz 4.8. (i) *Eine Menge K ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

- (ii) *Eine Teilmenge K eines Vektorraumes hat genau dann einen kompakten Abschluss, wenn jede Folge aus K eine konvergente Teilfolge enthält.*

Wir wollen nun einige Begriffe definieren, die mit der Stetigkeit von Funktionen zusammenhängen. Es seien X und Y Vektorräume mit den Metriken d_X bzw. d_Y . Wir betrachten Funktionen $f : M \rightarrow N$ für Mengen $M \subset X$, $N \subset Y$. Die Variable im Definitionsbereich nennen wir z , die Variable im Bildbereich $w = f(z)$; dabei ist w das *Bild* von z und z ein *Urbild* von w . Ebenso bezeichnet $f^{-1}(w) := \{z \in M : f(z) = w\}$ die *Urbildmenge* des Bildpunktes w und $f(M) := \{w : \exists z \in M, f(z) = w\}$ die *Bildpunktmenge* einer Menge M .

Definition 4.9 (Stetigkeit). (i) Man sagt, die Funktion f habe in einem Punkt z_0 in $\overline{M}$ den *Grenzwert* w_0 , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$ existiert, so dass $d_Y(f(z), w_0) < \varepsilon$ für alle z mit $d_X(z, z_0) < \delta(\varepsilon)$ und $z \in M$, $z \neq z_0$.

- (ii) Eine Funktion f heißt *stetig* in $z_0 \in M$, wenn sie dort den Grenzwert $w_0 = f(z_0)$ hat. Eine Funktion heißt *stetig auf einer Menge M* , wenn sie in allen Punkten von M stetig ist. Die Funktion heißt *gleichmäßig stetig auf einer Menge M* , wenn die Zahl δ aus (i) unabhängig von den $z_0 \in M$ gewählt werden kann.
- (iii) Eine bijektive und in beiden Richtungen stetige Funktion heißt *Homöomorphismus*.
- (iv) Eine Folge (f_n) von auf M definierten Funktionen heißt *konvergent gegen eine Grenzfunktion f* , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes $z \in M$ ein $N(\varepsilon, z)$ existiert, so dass $d_Y(f_n(z), f(z)) < \varepsilon$ für $n > N(\varepsilon, z)$. Sie heißt *gleichmäßig konvergent*, wenn N von z unabhängig gewählt werden kann.

Auch für Abbildungen zwischen Vektorräumen gelten die bekannten Stetigkeitssätze:

Satz 4.10. (i) *Eine Funktion f ist genau dann stetig in $z_0 \in M$, wenn es zu jeder Umgebung V des Bildpunktes $w_0 = f(z_0)$ eine Relativumgebung U des Urbildpunktes z_0 mit $f(U \cap M) \subset V$ gibt.*

- (ii) *Die Funktion f ist genau dann stetig auf M , wenn die Urbilder offener Mengen relativ offen sind.*

- (iii) Die Funktion f ist genau dann stetig auf M , wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen relativ abgeschlossen sind.
- (iv) Ist f stetig auf M , so sind die Bilder kompakter Mengen aus M kompakt.
- (v) Ist f stetig auf M , so sind die Bilder zusammenhängender Mengen aus M zusammenhängend.
- (vi) Die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig.

Beweis. (i) Als Erstes soll auf die Stetigkeit geschlossen werden: Als Umgebung von w_0 enthält V eine ε -Umgebung V_ε von w_0 . Dazu existiert nach Voraussetzung eine Umgebung U_δ von z_0 mit $f(U_\delta \cap M) \subset V_\varepsilon$, was gerade unsere Definition der Stetigkeit erfüllt. Ist letztere gegeben, so gibt es zu einer Umgebung V_ε im Bild von f eine Umgebung U_δ , so dass $f(U_\delta \cap M) \subset V_\varepsilon$. Das ist die andere Richtung der Behauptung.

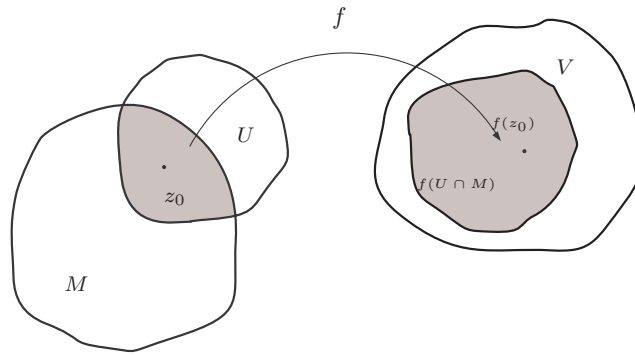


Abbildung 4.2

(ii) Es sei $f : M \rightarrow N$ stetig auf M und G eine relativ offene Menge in N , und sei $z \in f^{-1}(G)$. Dann liegt $w = f(z)$ in G , wobei G eine Umgebung von w ist. Daher gibt es gemäß (i) eine Umgebung U von z mit $f(U \cap M) \subset G$, $U \cap M \subset f^{-1}(G)$, und damit ist $f^{-1}(G)$ relativ offen. Ist umgekehrt das Urbild offener Mengen relativ offen, so gibt es zu jeder Umgebung eines Punktes $w \in N$ eine offene ε -Umgebung von w , deren Urbild relativ offen ist. Es enthält also eine relative δ -Umgebung jedes ihrer Punkte, das aber ist die Stetigkeit.

(iii) Der Beweis verläuft analog zu (ii).

Um (iv) zu beweisen nimmt man eine offene Überdeckung der Menge $f(K)$ mit Mengen G_α . Dann sind nach (ii) auch alle Mengen $f^{-1}(G_\alpha)$ relativ offen und bilden eine Überdeckung der kompakten Menge K . Nach Definition kann nun eine endliche Überdeckung ausgewählt werden, d.h.

$$K \subset f^{-1}(G_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(G_{\alpha_m}).$$

Wegen $f(f^{-1}(E)) = E$ für eine beliebige Teilmenge $E \subset f(X)$ folgt $f(K) \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_m}$, was zu beweisen war.

Für (v) werde angenommen, dass $f(M)$ nicht zusammenhängend ist. Dann existieren offene Mengen G_1 und G_2 in Y , die mit $f(M)$ einen nichtleeren Durchschnitt haben, diese Durchschnitte sind disjunkt und ihre Vereinigung enthält $f(M)$. Die Urbilder $f^{-1}(G_i)$ ($i = 1, 2$) sind dann auch relativ offen in M und punktfremd. Dabei wäre $M \subset f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)$, was dem Zusammenhang von M widerspräche.

Wir haben noch Eigenschaft (vi) zu beweisen. Für alle $n \geq N(\varepsilon/3)$ gilt unabhängig von $x \in M$ $d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3$; es werde nun $n \geq N(\varepsilon/3)$ fixiert. Für diese n und ε existiert ein $\delta(x) > 0$, so dass für $d_X(x, y) < \delta(x)$ stets $d_Y(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon/3$ ist. Also folgt

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(y)) + d_Y(f_n(y), f(y)) < \varepsilon. \quad \square$$

4.2 Reihen

Wir wollen nun Reihen in einem Vektorraum mit der euklidischen Metrik betrachten:

Definition 4.11 (Reihen). Ein Paar von Folgen $((a_n), (s_n))$ mit $s_n := \sum_{j=1}^n a_j$ wird *Reihe* genannt; man schreibt auch kurz $\sum a_n$. Die s_n heißen *Partialsummen* der Reihe. Die Reihe $\sum a_n$ heißt *konvergent gegen s* oder sie habe die *Summe s* , wenn $s_n \rightarrow s$. Dies wird durch

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

notiert. Die Reihe $\sum a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum |a_n|$ konvergiert.

Eine Reihe kann natürlich mit anderen Indizes beginnen, häufig mit 0. Es sei noch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass wir mit $\sum a_n$ die Reihe und mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Summe der Reihe bezeichnen, letzteres, falls die Summe existiert.

Wir wollen nun untersuchen, ob in unseren Algebren $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $C\ell(n)$ Besonderheiten bei der Reihenkonvergenz zu beachten sind. Aus der absoluten Konvergenz folgt der Dreiecksungleichung wegen immer die Konvergenz. Ebenso gilt das Cauchy Kriterium ohne Abänderungen, denn es ergibt sich einfach aus dem Cauchy Kriterium für Folgen. Auch das Majorantenkriterium bereitet keinerlei Probleme, da es gleichfalls auf der Dreiecksungleichung beruht. Nicht so klar ist die Sache beim Wurzel- und beim Quotientenkriterium, da hier vielleicht die Multiplikativität des Betrages eine Rolle spielt, die in $C\ell(n)$ nicht gegeben ist. Wir wenden uns zuerst dem Wurzelkriterium zu:

Lemma 4.12 (Wurzelkriterium). *Es sei $\sum a_k$ eine Reihe aus $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $C\ell(n)$, und es sei $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = R$. Dann gilt:*

- (i) *Ist $R < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.*
- (ii) *Ist $R > 1$, so divergiert die Reihe.*

Beweis. Zum Beweis von (i) sei r eine reelle Zahl mit $R < r < 1$. Dann gibt es eine natürliche Zahl N , so dass

$$\sqrt[k]{|a_k|} < r$$

für $k \geq N$ gilt. Die reelle geometrische Reihe $\sum r^k$ ist somit eine konvergente Majorante für $\sum |a_k|$, und letztere konvergiert absolut. Ist hingegen bezüglich (ii) $R > 1$, so müssen unendlich viele Zahlen k mit $\sqrt[k]{|a_k|} > 1$, also mit $|a_k| > 1$ existieren, was die Divergenz der Reihe nach sich zieht. $\square$

Das Wurzelkriterium wird mithin von den verschiedenen Algebren nicht beeinflusst. Schauen wir uns nun das Quotientenkriterium an:

Lemma 4.13 (Quotientenkriterium). *Es sei $\sum a_k$ eine Reihe aus $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $C\ell(n)$ und es sei*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = Q.$$

Dann gilt für das R aus dem Wurzelkriterium $R \leq Q$, und die Reihe konvergiert für $Q < 1$ absolut. Existiert sogar

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = Q$$

und ist $Q > 1$, so divergiert die Reihe.

Beweis. Für $Q < 1$ sei $Q < q < 1$, dann gilt für $k \geq N$ mit einem geeigneten natürlichen N

$$|a_k| \leq q|a_{k-1}| \leq q^2|a_{k-2}| \leq \dots \leq q^{k-N}|a_N|,$$

also

$$|a_k| \leq q^k \frac{|a_N|}{q^N} \quad \text{sowie} \quad \sqrt[k]{|a_k|} \leq q \sqrt[k]{\frac{|a_N|}{q^N}}.$$

Aus der zweiten Ungleichung folgt $R \leq Q$, und gemäß der zweiten ist bis auf einen Faktor $\sum q^k$ eine Majorante unserer Reihe, die damit konvergiert. Im zweiten Teil sei $Q > q > 1$, dann gilt für alle genügend großen k die Ungleichung $|a_{k+1}| \geq q|a_k| \geq |a_k|$. Die Beträge der Reihenglieder gehen damit nicht gegen Null und die Reihe divergiert. $\square$

In $C\ell(n)$ ist zu beachten, dass wir in dem Lemma die Quotienten der Beträge und nicht die Beträge der Quotienten betrachtet haben. Wegen der Abschätzung $|ab| \leq K|a||b|$ ist die folgende Bemerkung notwendig:

Bemerkung 4.14. Betrachtet man im vorstehenden Quotientenkriterium für $C\ell(n)$ statt $|a_{k+1}|/|a_k|$ den Quotienten $|a_{k+1}/a_k|$, so dürfen die a_k keine Nullteiler sein, da man dann eventuell den Quotienten gar nicht bilden kann. Ferner muss man mit dem K aus der Multiplikativitätsungleichung des Betrages in $C\ell(n)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |a_k| &= \left| \frac{a_k}{a_N} a_N \right| \leq K|a_N| \left| \frac{a_k}{a_N} \right| = K|a_N| \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \dots \frac{a_{N+1}}{a_N} \right| \\ &\leq K^{k-N}|a_N| \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \right| \dots \left| \frac{a_{N+1}}{a_N} \right| \leq (Kq)^k (Kq)^{-N} |a_N| \end{aligned}$$

berücksichtigen. Man erhält bis auf einen Faktor die Reihe $\sum (Kq)^k$ als Majorante, so dass man $Q < 1/K$ für die Konvergenz voraussetzen muss.

Die in der Bemerkung aufgezeigten Probleme in $C\ell(n)$ lassen sich auch an relativ einfachen Reihen erkennen:

Beispiel 4.15. Für die *geometrische Reihe* $\sum x^k$ haben wir natürlich stets

$$s_k = 1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1} = \frac{1 - x^k}{1 - x}.$$

Die bekannte Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$$

ergibt sich wie üblich, falls $x^k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. In $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ gilt dies wegen $|x^k| = |x|^k$ für $|x| < 1$, aber in $C\ell(n)$ können wir dies wegen $|x^k| \leq K^{k-1}|x|^k$ nur für $|x| < 1/K$ schließen. Allerdings folgt die Konvergenz für $|x| < 1$ auch in $C\ell(n)$, wenn wir uns auf Paravektoren beschränken.

Wir wollen noch einen Blick auf Funktionenreihen $\sum u_k(x)$ in unseren Algebren werfen:

Lemma 4.16 (Weierstraß). *Die Funktionen $u_k(x) : G \rightarrow C\ell(n)$ seien in einem Gebiet $G \subset C\ell(n)$ gegeben und dort durch*

$$|u_k(x)| \leq b_k$$

beschränkt. Konvergiert dann die reelle Reihe $\sum b_k$, so konvergiert die Funktionenreihe in G absolut und gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Beweis. Wegen der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=N}^M u_k(x) \right| \leq \sum_{k=N}^M |u_k(x)| \leq \sum_{k=N}^M b_k$$

und der Konvergenz der Reihe $\sum b_k$ ist das Cauchysche Konvergenzkriterium für die Funktionenreihe in jedem einzelnen Punkt und unabhängig vom einzelnen Punkt erfüllt. Die Funktionenreihe konvergiert also absolut und gleichmäßig in G . $\square$

Wegen Satz 4.10 (vi) ist für eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen die Grenzfunktion stetig. Als Beispiel wollen wir uns etwas mit Potenzreihen befassen; sie sind in der nachstehenden Form vor allem in $\mathbb{C}$ von Bedeutung.

Definition 4.17 (Potenzreihen). Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form $\sum a_k x^k$ mit Zahlen a_k aus der betrachteten Algebra für $k \geq 0$. Verwendet man Potenzen von $x - x_0$, so spricht man auch von einer *Entwicklung um den Punkt x_0* .

Der wichtige Satz lautet:

Satz 4.18. Eine Potenzreihe $\sum a_k x^k$ besitzt einen Konvergenzkreis $\{|x| < \rho/K\}$ in $\mathbb{C}$ bzw. eine Konvergenzkugel in $\mathbb{H}$ oder $\mathcal{Cl}(n)$, innerhalb dessen bzw. der sie absolut gegen eine stetige Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

konvergiert. Dabei ist K der Faktor in $|xy| \leq K|x||y|$, also insbesondere $K = 1$ in $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ oder für Paravektoren in $\mathcal{Cl}(n)$. In $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ divergiert die Reihe für $|x| > \rho$, auf $|x| = \rho$ ist die Konvergenz offen und kann punktweise verschieden sein. Die Größe $\rho \neq 0$ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe und berechnet sich durch:

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}.$$

Ist dieser Grenzwert gleich Null, so sagt man, dass der Konvergenzradius $\rho := \infty$ ist. Ist der Grenzwert unendlich, so wird für den Konvergenzradius $\rho := 0$ gesetzt. In jeder kleineren Kreisscheibe bzw. Kugel $\{|z| \leq \frac{\rho}{K} - \varepsilon\}$ konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig.

Beweis. Die Stetigkeit von f folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz. Nun zu dieser: Es sei zuerst $0 < \rho < \infty$, dann bedeutet der im Satz angegebene Wert von ρ , dass

$$\frac{1}{\rho - \varepsilon} > |a_k|^{1/k}$$

für alle $\varepsilon > 0$ und $k > N(\varepsilon)$. Für diese k gilt also

$$|a_k x^k| \leq K^k |a_k| |x|^k \leq \left(\frac{K|x|}{\rho - \varepsilon} \right)^k,$$

und die rechte Seite ergibt eine konvergente Majorante für $|x| \leq (\rho - 2\varepsilon)/K$. Das bedeutet die gleichmäßige Konvergenz der Reihe für $|x| \leq (\rho - 2\varepsilon)/K$. Wegen des beliebigen $\varepsilon > 0$ ist die Potenzreihe also für $|x| < \rho/K$ konvergent.

Um nun auch die Divergenz für $|x| > \rho$ in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ zu zeigen ist zu beachten, dass für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\rho + \varepsilon} \leq |a_k|^{1/k},$$

woraus

$$|a_k| |x|^k \geq \left(\frac{|x|}{\rho + \varepsilon} \right)^k$$

folgt. Da man für jedes $|x| > \rho$ ein ε finden kann, so dass $|x|/(\rho + \varepsilon) > 1$, muss die Potenzreihe für jedes x mit $|x| > \rho$ divergieren. In $\mathcal{Cl}(n)$ ist dies schwieriger zu untersuchen und soll daher hier nicht behandelt werden. Beschränkt man sich aber auf Paravektoren, so gilt die Aussage auch dann.

Für $\rho = 0$ tritt in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ der eben behandelte zweite Fall ein, die Reihe divergiert für alle $x \neq 0$. Schließlich ist für $\rho = \infty$ in allen drei Algebren

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} = 0,$$

also hat man für jedes $\varepsilon > 0$ und genügend große k sofort $|a_k x^k| \leq K^k |a_k| |x|^k \leq (\varepsilon K |x|)^k$. Rechts steht für $\varepsilon K |x| < 1$ eine konvergente Majorante, das kann man aber für jedes $|x|$ mit hinreichend kleinem ε erreichen. $\square$

Beispiel 4.19. a) Wir werden später auch Potenzreihen nach negativen Potenzen von x benötigen:

$$\sum a_{-k} x^{-k}.$$

Diese konvergieren in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ offenbar außerhalb einer Kreisscheibe $\{|x| > \rho\}$ mit

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_{-k}|^{1/k}.$$

b) Damit kann man in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ eine weitere Potenzreihe für $1/(1-x)$ gewinnen, nämlich

$$\frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\sum_{k=1}^{\infty} x^{-k};$$

diese Reihe konvergiert für $|x| > 1$ und ergänzt damit die geometrische Reihe außerhalb der Einheitskreisscheibe.

c) Falls der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

existiert, so ist er gleich dem Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum a_k x^k$. Der Leser beweise dies und berechne damit den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum x^k/k!$.

d) In $\mathbb{H}$ und $C\ell(n)$ könnte man eigentlich der Nichtkommutativität halber Reihen der Form

$$\sum a_{k0} x a_{k1} x a_{k2} \dots a_{k(k-1)} x a_{kk}$$

betrachten. Wegen der Abschätzung

$$|a_{k0} x a_{k1} x \dots x a_{kk}| \leq K^{2k} |a_{k0}| |a_{k1}| \dots |a_{kk}| |x|^k$$

kann das auf die vorherigen Betrachtungen zurückgeführt werden. Wir verzichten hier auf eine detaillierte Darstellung, da wir in Kürze andere und in gewissem Sinne besser geeignete Potenzreihen in $\mathbb{H}$ und $C\ell(n)$ kennenlernen werden.

4.3 Riemannsche Sphären

4.3.1 Komplexer Fall

BERNHARD RIEMANN hat eine Vervollständigung der komplexen Zahlen eingeführt, die die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ mit einem Punkt $z = \infty$ abschließt oder *kompaktifiziert*. Man spricht dabei auch von der *Einpunkt-Kompaktifizierung* der komplexen Ebene oder der *vervollständigten komplexen Ebene* und schreibt dafür $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Bezüglich des Begriffes *kompakt* sei auf Abschnitt 4.1 verwiesen. Der Punkt $z = \infty$ ist also erst einmal ein so genanntes ideales Element, dem kein Punkt der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ entspricht. Wir behandeln zuerst den komplexen Fall, da dort die Anschauung hilfreich ist; die Verallgemeinerungen auf $\mathbb{H}$ und $\mathcal{C}\ell(n)$ folgen.

Das ideale Element $z = \infty$ kann nun durch die *Riemann-Sphäre* wie folgt veranschaulicht werden: Wir legen eine Kugel vom Radius $1/2$ auf die komplexe Ebene, so dass sie diese im Nullpunkt berührt. Dieser Punkt heisst *Südpol* der Riemann-Sphäre, der diametrale Punkt heisst *Nordpol* N .

BERNHARD RIEMANN (1826–1866) war nach Studium in Berlin und Göttingen Privatdozent in Göttingen und folgte JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET nach dessen Tod auf dem Lehrstuhl von GAUSS. Bereits in seiner Dissertation widmete Riemann sich den Grundlagen der Funktionentheorie, die auch heute weitgehend Gültigkeit besitzen. Wir werden seinem Namen noch oft begegnen. In zahlreichen weiteren Gebieten der Mathematik hat RIEMANN Grundlegendes geleistet. Er starb 39-jährig bei einem Aufenthalt in Italien an Tuberkulose.



Bernhard Riemann

Wir führen im Raum ein Koordinatensystem (ξ, η, ζ) ein, wobei die ξ -Achse mit der x -Achse zusammenfallen soll, die η -Achse mit der y -Achse. Der Nordpol hat dann die Koordinaten $(0, 0, 1)$. Nun wird jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit N durch eine Gerade verbunden, deren Durchstosspunkt durch die Kugeloberfläche das Bild von z auf der Sphäre darstellt. Da die Abbildungsstrahlen alle von einem Punkt ausgehen, heisst diese Abbildung *stereographische Projektion*. Jeder Punkt auf $\mathbb{C}$ hat ein Bild auf der Sphäre, jeder Punkt auf der Sphäre ein Urbild, nur N nicht. Daher ordnen wir N den Punkt $z = \infty$ zu. Damit haben wir ein anschauliches Bild von $\hat{\mathbb{C}}$ gewonnen.

Bei dieser Abbildung wird die südliche Halb-Sphäre auf das Innere des Einheitskreises abgebildet, die nördliche auf das Äussere dieses Kreises. Die Riemann-Sphäre wird durch die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

beschrieben oder durch

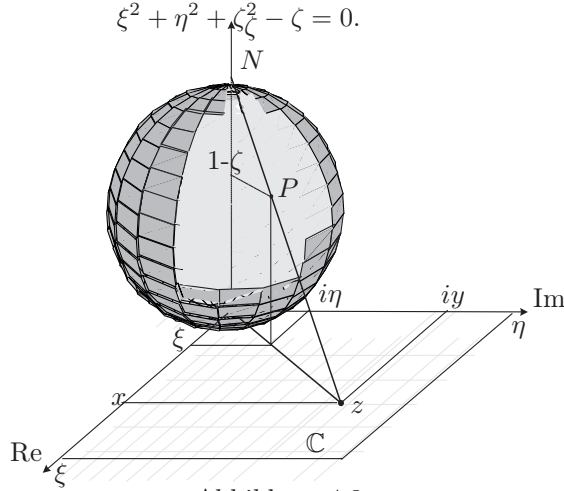


Abbildung 4.3

In der Abbildung 4.3 sieht man einen Blick in die Riemannsche Kugel, dabei sei r der Betrag von z und ρ der von $\xi + i\eta$.

Da die auftretenden Dreiecke ähnlich und die Argumente von z und $\xi + i\eta$ gleich sind, finden wir

$$\frac{r}{\rho} = \frac{1}{1-\zeta}, \quad x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}.$$

Mit Hilfe der obigen Gleichung der Sphäre folgt

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}, \quad z\bar{z} = \frac{\rho^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{\zeta}{1-\zeta}$$

und schließlich

$$\xi = \frac{x}{1+z\bar{z}}, \quad \eta = \frac{y}{1+z\bar{z}}, \quad \zeta = \frac{z\bar{z}}{1+z\bar{z}}.$$

Wir können jetzt den euklidischen Abstand im $\mathbb{R}^3$ auf der Riemann-Sphäre als neuen Abstand zweier komplexen Zahlen einführen, genannt *chordaler Abstand*. Mit einigen ermüdenden Rechnungen erhalten wir

$$d_{ch}(z_1, z_2) := \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2} = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

Das Besondere an diesem Abstand ist, dass er auch für $z = \infty$ verwendbar ist. Lassen wir nämlich $|z_2|$ nach ∞ konvergieren und setzen $z_1 = z$, so erhalten wir

$$d_{ch}(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Es sei darauf hingewiesen, dass $\mathbb{C}$ in der euklidischen Metrik nicht kompakt ist, während $\hat{\mathbb{C}}$ in der chordalen Metrik sehr wohl kompakt ist. So ist zum Beispiel in der euklidischen Metrik $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$, in der chordalen Metrik aber $\overline{\mathbb{C}} = \hat{\mathbb{C}}$.

Wir wollen noch überlegen, was bei dieser stereographischen Abbildung auf die Riemann-Sphäre mit Geraden und Kreislinien geschieht: Eine Gerade in $\mathbb{C}$ wird auf die Sphäre abgebildet durch die Geraden, die die Punkte der gegebenen Geraden mit N verbinden, diese spannen eine Ebene auf. Der Schnitt einer solchen Ebene mit der Sphäre ist eine Kreislinie, so dass die Geraden in $\mathbb{C}$ auf Kreislinien auf der Sphäre abgebildet werden, die durch N gehen. Wenn wir nun eine Kreislinie in $\mathbb{C}$ betrachten, etwa durch die Gleichung

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + z_0\bar{z}_0 = R^2$$

gegeben, und bilden sie durch die obigen Gleichungen auf die Riemann-Sphäre ab, so ergibt sich mit der Abkürzung $\tau := \xi + i\eta$

$$\tau\bar{\tau} - (\tau\bar{\tau}_0 + \bar{\tau}\tau_0)\frac{1-\zeta}{1-\zeta_0} + \zeta_0\frac{(1-\zeta)^2}{1-\zeta_0} = R^2(1-\zeta)^2.$$

Ersetzen wir hier $\tau\bar{\tau}$ mittels der Gleichung der Kugel, $\tau\bar{\tau} = -\zeta^2 + \zeta$, so können wir das Ergebnis durch $1-\zeta$ dividieren (N liegt nicht auf der Kreislinie) und erhalten eine lineare Gleichung in ξ, η, ζ ,

$$\zeta - (\tau\bar{\tau}_0 + \bar{\tau}\tau_0)\frac{1}{1-\zeta_0} + \frac{\zeta_0}{1-\zeta_0}(1-\zeta) = R^2(1-\zeta).$$

Das besagt, dass die Bilder unserer Kreislinie in $\mathbb{C}$ im Raum in einer Ebene liegen, diese Ebene schneidet die Riemann-Sphäre wieder in einer Kreislinie, und diese ist das Bild der Kreislinie in $\mathbb{C}$. Wir haben bewiesen (Abbildung 4.4):

Lemma 4.20. *Kreislinien und Geraden in $\mathbb{C}$ entsprechen Kreislinien auf der Riemann-Sphäre. Den Kreislinien in $\mathbb{C}$ entsprechen Kreislinien nicht durch N , den Geraden solche durch N .*

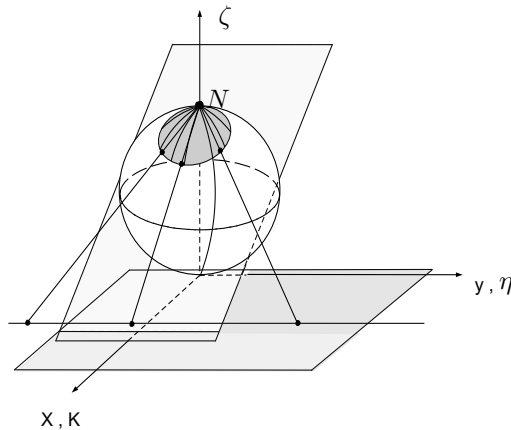


Abbildung 4.4

Man sieht dabei, dass die Breitenkreise auf der Sphäre den um den Nullpunkt konzentrischen Kreislinien in der Ebene entsprechen, die Längengrade den Geraden durch den Nullpunkt. Wir können uns auch sehr leicht überlegen, welche Kreislinien in der Ebene Großkreise auf der Sphäre entsprechen, also den kürzesten Linien auf der Sphäre. Wir haben schon festgestellt, dass dies für die Geraden durch den Nullpunkt gilt. Für Kreislinien muss die entsprechende Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, also durch $(0, 0, \frac{1}{2})$. Setzen wir dies in die obige Ebenengleichung ein, so folgt

$$1 + \frac{\zeta_0}{1 - \zeta_0} = R^2$$

oder

$$1 + |z_0|^2 = R^2.$$

Eine Kreislinie in der Ebene mit dem Mittelpunkt z_0 und dem eben berechneten Radius entspricht einem Großkreis auf der Riemann-Sphäre.

4.3.2 Höhere Dimensionen

Wir beginnen mit der Verallgemeinerung der Riemann-Sphäre auf den Fall reeller Quaternionen.

Es sei $\{e_0 = 1, \dots, e_4\}$ ein orthonormales Koordinatensystem im $\mathbb{R}^5$, dabei identifizieren wir $\mathbb{R}^5$ mit $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$. Ein Punkt im $\mathbb{R}^5$ sei $\xi = \sum_{j=0}^4 \xi_j e_j$, wir identifizieren

$\hat{\xi} = \sum_{j=0}^3 \xi_j e_j$ mit $x \in \mathbb{H}$. Als verallgemeinerte Riemann-Sphäre führen wir die Sphäre

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \left(\xi_4 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

oder

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4(\xi_4 - 1) = 0$$

ein. Der Punkt $N = (0, 0, 0, 0, 1)$ wird als *Nordpol* bezeichnet, der Südpol liegt im Nullpunkt. Jeder Punkt $x \in \mathbb{H}$ wird mit N durch eine Gerade verbunden, die die Sphäre im Bildpunkt ξ schneidet. Durch Hinzunahme eines idealen Punktes $x = \infty$ erhalten wir die *Einpunkt-Kompaktifizierung* $\hat{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ von $\mathbb{H}$, ganz entsprechend $\hat{\mathbb{C}}$. Dieser Punkt $x = \infty$ wird dem Nordpol zugeordnet, der sonst keinen Urbildpunkt in $\mathbb{H}$ hat. $\hat{\mathbb{H}}$ wird damit zu einer kompakten Menge, die wir mit einer chordalen Metrik gut erfassen können.

Die Beziehungen zwischen ξ auf der Sphäre und $x \in \mathbb{H}$ errechnen sich ähnlich wie im Komplexen. Aus dem Strahlensatz ergibt sich mit $\rho = |\hat{\xi}|$

$$\frac{x_0}{\xi_0} = \frac{x_1}{\xi_1} = \frac{x_2}{\xi_2} = \frac{x_3}{\xi_3} = \frac{|x|}{\rho} = \frac{1}{1 - \xi_4},$$

daher ist

$$x = \frac{\hat{\xi}}{1 - \xi_4} .$$

Die Umkehrung ist etwas schwieriger. Aus $\overline{x} = \overline{\hat{\xi}}/(1 - \xi_4)$ folgt mit der Gleichung der Sphäre

$$x\overline{x} = |x|^2 = \frac{|\hat{\xi}|^2}{(1 - \xi_4)^2} = \frac{(1 - \xi_4)\xi_4}{(1 - \xi_4)^2} = \frac{\xi_4}{1 - \xi_4}$$

oder

$$\xi_4 = \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \quad \text{und} \quad \hat{\xi} = \frac{x}{1 + |x|^2} .$$

Wie in $\mathbb{C}$ können wir nun die chordale Entfernung

$$d_{\text{ch}}(x, x') = |\xi - \xi'|$$

als den euklidischen Abstand auf der Riemann-Sphäre einführen. Nach einer zu $\mathbb{C}$ völlig analogen Rechnung (es ist nur iy durch $\mathbf{x}$ zu ersetzen) folgt

$$d_{\text{ch}}(x, x') = \frac{|x - x'|}{\sqrt{1 + |x|^2} \sqrt{1 + |x'|^2}} .$$

In dieser Metrik kann nun in $\mathbb{H}$ der Punkt $x = \infty$ einbezogen werden:

$$d_{\text{ch}}(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}} .$$

Die topologischen Eigenschaften stimmen natürlich in $\mathbb{H}$ und $\mathbb{C}$ überein.

Die Rechnungen in $\mathcal{C}\ell(n)$ brauchen nicht mehr ausgeführt zu werden. Man nehme eine entsprechende Kugel vom Durchmesser 1 im $\mathbb{R}^{n+2}$. Der Punkt $(0, \dots, 0, 1)$ ist der Nordpol und entspricht dem idealen Punkt, der dem $\mathbb{R}^{n+1}$ hinzugefügt wird. Es gelten die gleichen Formeln, wie soeben in $\mathbb{H}$ abgeleitet. Der entsprechende chordale Abstand kann wieder zur Einbeziehung der Punktes $x = \infty$ in die Topologie dienen.

4.4 Aufgaben

1. Sei (x_n) eine Folge von Zahlen aus $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ oder $\mathcal{C}\ell(n)$. Man beweise:

a) (x_n) konvergiert genau dann, wenn die reellen Folgen der Komponenten der x_n konvergieren.

b) Sind die x_n komplexe Zahlen, so konvergiert (x_n) genau dann, wenn die Folgen der Beträge und Argumente konvergieren. Gibt es dabei Ausnahmen?

2. Man beschreibe geometrisch die Mengen auf der Riemann-Sphäre, deren Urbild in der komplexen Ebene die Mengen a) $|z| < 1$, b) $\operatorname{Im} z \leq 0$ sind.
3. Stimmen die beiden Reihen $\sum -x^{-k}$ und $\sum x^k$ auf der Einheitskreislinie in $\mathbb{C}$ bzw der Einheitssphäre in $\mathbb{H}$ überein ?
4. Man finde Beispiele für konvergente Potenzreihen mit den Konvergenzradien $\rho = 0$ und $\rho = \infty$.
5. Man berechne den chordalen Abstand $d_{ch}(x, x')$ auf der Riemann-Sphäre in $\mathbb{H}$ und $C\ell(n)$.
6. Man untersuche die Bilder von Sphären in $\mathbb{H}$ bei stereographischer Projektion auf der 4-dimensionalen Riemann-Sphäre.

5 Holomorphe Funktionen

5.1 Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$

Wir betrachten nunmehr Funktionen

$$\begin{aligned} f(z) &= u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y), \\ u &= \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f, \end{aligned}$$

in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit Werten auch in $\mathbb{C}$. Aus der Analysis kennen wir den Begriff der partiellen Differenzierbarkeit der reellwertigen Funktionen u und v , die von den zwei Variablen x und y abhängen. Wir setzen voraus, dass u und v einmal stetig differenzierbar sind, um nicht zuviel Aufwand treiben zu müssen. Es gibt umfangreiche Untersuchungen über schwächere Voraussetzungen für die Holomorphie, die mit den Namen von H. LOOMAN und D. MENCHOV verbunden sind. Allgemein wird die Menge der reellen Funktionen, die k -mal stetig differenzierbar sind, mit $C^k(G)$ abgekürzt. Die Menge $C^0(G)$ enthält die in G stetigen Funktionen. Für komplexe Funktionen bedeutet $f \in C^k(G)$, dass die Komponenten von f in $C^k(G)$ liegen. Unter der Voraussetzung $f \in C^1(G)$ können wir nun mit Differentialen arbeiten (zu Differentialen s. Anhang 1):

$$df = du + idv = (u_x + iv_x)dx + (u_y + iv_y)dy.$$

Es bezeichnen ∂_x, ∂_y die partiellen Ableitungen nach x bzw. y . Ferner setzen wir:

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y).$$

Außerdem gilt

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}).$$

Zusätzlich seien noch die Bezeichnungen

$$\partial := 2\partial_z, \quad \bar{\partial} := 2\partial_{\bar{z}}$$

eingeführt, um schon auf höhere Dimensionen hinzuweisen. So können wir df wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{2}(u_x + v_y + i(v_x - u_y))dz + \frac{1}{2}(u_x - v_y + i(v_x + u_y))d\bar{z} \\ &= (\partial_z u + i\partial_z v)dz + (\partial_{\bar{z}} u + i\partial_{\bar{z}} v)d\bar{z} \end{aligned}$$

und schließlich

$$df = (\partial_z f)dz + (\partial_{\bar{z}} f)d\bar{z}.$$

Diese Umgruppierung bringt die Abhängigkeit der Funktion f von z und $\bar{z}$ formal deutlich zum Ausdruck, was wir sofort wesentlich verwenden werden. Übrigens benutzt man auch die Abkürzungen

$$f_z := \partial_z f, \quad f_{\bar{z}} := \partial_{\bar{z}} f.$$

Wir wollen nun den Begriff der *Holomorphie* einführen; das soll über die Approximation durch eine lineare Funktion geschehen, wie es auch aus dem Reellen bekannt ist und insbesondere in höheren Dimensionen und in Funktionenräumen mit Erfolg durchgeführt werden kann. Eine *lineare Funktion* oder *Linearform* in $\mathbb{C}$ hat das Aussehen

$$L(z) = ax + by$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$. Natürlich kann man dies auch in der Form

$$L(z) = Az + B\bar{z} \quad (A, B \in \mathbb{C})$$

schreiben. Das ist erst einmal eine $\mathbb{R}$ -lineare Funktion, für die bei reellen α, α' gilt

$$L(\alpha z + \alpha' z') = \alpha L(z) + \alpha' L(z').$$

Eine Heraushebung der komplexen Variablen z erfordert aber eine $\mathbb{C}$ -lineare Funktion L , für die also bei komplexen λ, λ' gilt

$$L(\lambda z + \lambda' z') = \lambda L(z) + \lambda' L(z').$$

Letzteres ist offenbar nur möglich, wenn $L(z)$ die Form

$$L(z) = Az, \quad A \in \mathbb{C},$$

hat, denn sonst muss $B\lambda z = \overline{B\lambda}z$ für alle z und λ sein, was sofort $B = 0$ nach sich zieht. Jetzt können wir definieren:

Definition 5.1 (Holomorphie). Eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbare Funktion heißt dort *holomorph*, wenn in jedem Punkt $z \in G$ eine komplexe Zahl $f'(z)$ existiert, so dass für $h \rightarrow 0$

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h).$$

Die Zahl $f'(z)$ heißt (*komplexer*) *Differentialquotient* oder (*komplexe*) *Ableitung* von f im Punkt z .

Die Differenz $f(z+h) - f(z)$ wird durch die komplexe Linearform $f'(z)h$ in h approximiert. In der Literatur wird statt des Begriffes *holomorph* häufig der Begriff *regulär* oder auch *monogen* gebraucht. Der Einheitlichkeit halber werden wir uns hier auf das Wort “*holomorph*” beschränken. Bezüglich des *Bachmann–Landau–Symbols* $o(h)$ vergleiche man mit Definition A.1.11 in Anhang 1.

Wir sind an einem wesentlichen Punkt angekommen: Die *Funktionentheorie* beschäftigt sich hauptsächlich mit holomorphen Funktionen. Als deren Definition haben wir die lineare Approximierbarkeit gewählt, da dies auch in höheren Dimensionen möglich ist. Im Folgenden werden wir noch weitere gleichwertige Eigenschaften holomorpher Funktionen kennen lernen, die gelegentlich zum Nachweis der Holomorphie angenehmer sind. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Holomorphie in einem Gebiet verlangt wird. Die Approximierbarkeit als solche ist eine punktweise Eigenschaft.

Bereits aus dem Reellen ist bekannt, dass die lineare Approximierbarkeit mit der Existenz des Grenzwertes des Differenzenquotienten gleichwertig ist, allerdings ist dies in höheren Dimensionen nicht mehr der Fall.

Definition 5.2 (Komplexe Differenzierbarkeit). Eine reell stetig differenzierbare Funktion in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt dort *komplex differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

mit $h \in \mathbb{C}$ für jedes $z \in G$ existiert. Im Falle seiner Existenz wird dieser Grenzwert *komplexe Ableitung* genannt und mit $f'(z)$ bezeichnet.

Selbstverständlich ist eine komplex differenzierbare Funktion auch stetig.

Lemma 5.3. *Eine komplexe Funktion f in einem Gebiet G ist dort genau dann komplex differenzierbar, wenn sie in G holomorph ist.*

Beweis. Die lineare Approximierbarkeit

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h)$$

lässt sich sofort in den Differenzenquotienten umrechnen:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) + o(1).$$

Für $h \rightarrow 0$ ist $f'(z)$ auch der Grenzwert des Differenzenquotienten. □

Die Differenzierbarkeit im Komplexen erweist sich als eine recht starke Forderung an die komplexen Funktionen, die nicht mit der reellen Differenzierbarkeit zu vergleichen ist. Dies liegt daran, dass das h aus allen Richtungen der Ebene gegen Null streben kann, während im Reellen nur die Konvergenz des Differenzenquotienten in den zwei Richtungen auf der x -Achse abgefragt wird. Darum haben wir in der Definition der Holomorphie auch die Approximierbarkeit durch eine komplex lineare Funktion verlangt. Wir wollen jetzt eine erste zur Holomorphie gleichwertige Eigenschaft komplexer Funktionen zeigen, nämlich die Erfüllung eines Systems partieller Differentialgleichungen. Das wird sich auch in höheren Dimensionen als möglich erweisen:

Satz 5.4 (Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen). Eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbare Funktion f ist dort genau dann holomorph, wenn

$$\bar{\partial}f = 2\partial_{\bar{z}}f = u_x - v_y + i(u_y + v_x) = 0.$$

gilt. Die Gleichungen

$$\bar{\partial}f = 2\partial_{\bar{z}}f = 0$$

oder

$$u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x = 0$$

heißen *Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen (CRD)*, $\partial_{\bar{z}}$ heißt auch *Cauchy–Riemann-Operator*.

Vor dem Beweis seien einige Bemerkungen zu CAUCHY angefügt, zu RIEMANN finden sie sich in Abschnitt 4.3.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) gehörte spätestens ab 1822 zu den herausragendsten Mathematikern seiner Zeit. Er war Professor an der Ecole Polytechnique in Paris und Mitglied der französischen Akademie der Wissenschaften. Seine Lehrbücher hatten für Jahrzehnte den Rang von Standardlehrbüchern in Mathematik in den verschiedensten Sprachen. Seine überragende Produktivität spiegelt sich in seinen umfangreichen Gesammelten Werken wider. Er legte in vielen Bereichen der Mathematik wichtige Grundlagen.



Augustin Louis Cauchy (1789–1867)

Beweis des Satzes. Aus der reellen stetigen Differenzierbarkeit der Funktionen u und v ergibt sich mit $h =: h_1 + ih_2$

$$\begin{aligned} u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) &= u_x(x, y)h_1 + u_y(x, y)h_2 + o(h) \\ v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y) &= v_x(x, y)h_1 + v_y(x, y)h_2 + o(h). \end{aligned}$$

Wir setzen $u(x, y) =: u(z)$ und $v(x, y) =: v(z)$. Die beiden Gleichungen für u und v kann man wegen $h_1 = (h + \bar{h})/2$ und $h_2 = (h - \bar{h})/2i$ zu

$$\begin{aligned} f(z + h) - f(z) &= (u_x(z) + iv_x(z))h_1 + (u_y(z) + iv_y(z))h_2 + o(h) \\ &= \frac{1}{2}(u_x(z) + v_y(z) + i(v_x(z) - u_y(z)))h + \\ &\quad + \frac{1}{2}(u_x(z) - v_y(z) + i(v_x(z) + u_y(z)))\bar{h} + o(h) \\ &= \partial_z f(z)h + \partial_{\bar{z}} f(z)\bar{h} + o(h) \quad (*) \end{aligned}$$

zusammenfassen. Wenn für f die CRD gelten, steht gerade die komplexe Approximierbarkeit von f da,

$$f(z+h) - f(z) = (\partial_z f)(z)h + o(h),$$

was $f'(z) = (\partial_z f)(z)$ bedeutet und eine Richtung unserer Behauptung ist. Ist umgekehrt f holomorph, so gilt

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + o(h),$$

was zusammen mit (*) zu

$$f'(z) = \partial_z f(z) + \partial_{\bar{z}} f(z) \frac{\bar{h}}{h} + o(1).$$

führt. Der letzte Term rechts verschwindet für $h = |h|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \rightarrow 0$, der mittlere hat den Faktor $(\cos \varphi - i \sin \varphi)^2$, der alle Werte auf der Einheitskreislinie annehmen kann. Da die anderen beiden Terme nicht von h abhängen, kann diese Gleichung nur gelten, wenn $(\partial_{\bar{z}} f)(z) = 0$, also die CRD erfüllt sind. $\square$

Lemma 5.5 (Differentiationsregeln). *Die Differentiationsregeln sind die gleichen wie im Reellen:*

$$\begin{aligned} (f+g)'(z) &= f'(z) + g'(z) \\ (fg)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z) &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \quad g(z) \neq 0, \\ (f(g))'(z) &= f'(g(z))g'(z) \quad (\text{Kettenregel}) \end{aligned}$$

Auch die Regel für die Umkehrfunktion gilt:

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}.$$

Allerdings ist hier einiges an Voraussetzungen zu berücksichtigen, so muss u.a. f' in einer Umgebung der betrachteten Stelle nullstellenfrei sein.

Beweis. Wir wollen nur zwei der Regeln beweisen, erstens die Produktregel:

$$\begin{aligned} f(z+h)g(z+h) &= (f(z) + f'(z)h + o(h))(g(z) + g'(z)h + o(h)) \\ &= f(z)g(z) + (f'(z)g(z) + f(z)g'(z))h + o(h), \end{aligned}$$

da das Produkt einer beschränkten Funktion mit einem $o(1)$ wieder ein $o(1)$ ergibt; und zweitens die Regel für zusammengesetzte Funktionen:

$$\begin{aligned} f(g(z+h)) &= f(g(z)) + f'(g(z))[g(z+h) - g(z)] + o(h) \\ &= f(g(z)) + f'(g(z))g'(z)h + o(h), \end{aligned}$$

denn die Summe der verschiedenen Restglieder geht mit h gegen 0. $\square$

Beispiel 5.6. a) Als Beispiel sei die Differentiation von $f(z) = z^n$ tatsächlich ausgeführt:

$$f(z+h) - f(z) = (z+h)^n - z^n = nz^{n-1}h + o(h)$$

für $h \rightarrow 0$, da in der binomischen Formel außer einem Summanden die anderen alle eine höhere Potenz von h enthalten. *Rationale Funktionen*, das sind Quotienten von Polynomen, erfordern die Anwendung der Quotientenregel. So hat man z.B.

$$\frac{dz^{-n}}{dz} = \frac{0 - nz^{n-1}}{z^{2n}} = -nz^{-n-1}, \quad z \neq 0,$$

so dass die Differentiationsregel für positive Exponenten analog auch hier gilt.

Dieser direkte Bezug auf bekannte Differentialquotienten macht den Weg über die Differenzierbarkeit manchmal einfacher als den über die CRD.

b) Als Beispiel für eine nichtholomorphe Funktion sei $f(z) = \bar{z}$ betrachtet:

$$f(z+h) - f(z) = \bar{z} + \bar{h} - \bar{z} = \frac{\bar{h}}{h}h,$$

und der Quotient $\bar{h}/h$ besitzt für $h \rightarrow 0$ keinen Grenzwert.

c) Eine nichtkonstante reelle Funktion $f(x, y)$ ist nicht komplex differenzierbar, denn für sie ist $f = u$, die CRD reduzieren sich also auf

$$f_x = 0, \quad f_y = 0,$$

f muss daher konstant sein.

d) Da man bei der Bildung des Differentialquotienten h rein reell wählen kann, erhält man für eine holomorphe Funktion

$$f'(z) = f_x(z),$$

ebenso bei rein imaginärem h

$$f'(z) = -if_y(z).$$

Bemerkung 5.7. Zu Beginn dieses Abschnittes hatten wir festgestellt, dass eine reell differenzierbare komplexe Funktion in der Form

$$f(z+h) = f(z) + (\partial_z f)(z)h + (\partial_{\bar{z}} f)(z)\bar{h} + o(h)$$

geschrieben werden kann. Lassen wir h auf einem kleinen Kreis um 0 variieren, so ergibt sich mit $h = |h|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$f(z+h) - f(z) = h[(\partial_z f)(z) + (\partial_{\bar{z}} f)(z)(\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi)] + o(|h|).$$

Ist f holomorph, so verhält sich $f(z+h) - f(z)$ bis auf einen Faktor wie h , wenn man von dem unerheblichen Restglied absieht. Man sagt auch, dass $w = f(z)$ *infinitesimale Kreise*

in infinitesimale Kreise abbildet. Die Streckung von $f(z+h) - f(z)$ um den Faktor $f'(z)$ ist in allen Richtungen dieselbe, daher hat man für dieses Verhalten die Bezeichnung *monogen* geprägt.

Ist dagegen $(\partial_z f)(z) = 0$ und $(\partial_{\bar{z}} f)(z) \neq 0$, so spricht man von einer *antiholomorphen Funktion*. Das infinitesimale Verhalten ist ähnlich dem im holomorphen Fall, allerdings werden die Bildkreise entgegengesetzt zu den Urbildkreisen durchlaufen. Beispiele sind die Funktionen, die von $\bar{z}$ abhängen, wie etwa $f(z) = \bar{z}$. Diese Funktion beschreibt die Spiegelung an der reellen Achse, denn für jedes z wird der Imaginärteil mit -1 multipliziert. Diese Spiegelung verursacht die Umkehrung des Umlaufsinnnes bei den infinitesimalen Kreisen.

Sind schließlich beide Ableitungen $\partial_z f(z) \neq 0$ und $\partial_{\bar{z}} f(z) \neq 0$, so läuft $f(z+h) - f(z)$ auf einer infinitesimalen Ellipse, wenn h auf einem infinitesimalen Kreis variiert. Hier wechselt die Streckung von $f(z+h) - f(z)$ beim Übergang von einer Richtung von h zur anderen. Solche Funktionen hat man daher *polygen* genannt. Auch unter diesen Funktionen gibt es noch interessante Klassen, deren Betrachtung hier aber zu weit führen würde. Übrigens kann man das Verhalten für jeden Punkt z einzeln untersuchen. Bei der Holomorphie gehen wir aber immer von demselben Verhalten in einem Gebiet G aus.

5.2 Differenzierbarkeit in $\mathbb{H}$

Wie in Abschnitt 2 gezeigt wurde, handelt es sich bei der Algebra der Quaternionen wie bei $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ um eine Divisionsalgebra. Es liegt deshalb der Gedanke nahe, völlig analog zur Definition der komplexen Differenzierbarkeit auch für $\mathbb{H}$ -wertige Funktionen $f = f(x)$, $x \in \mathbb{H}$, Differenzenquotienten der Form

$$[f(x+h) - f(x)]h^{-1} \quad \text{oder} \quad h^{-1}[f(x+h) - f(x)]$$

mit $h \in \mathbb{H}$ zu untersuchen und alle derartigen Funktionen, für die der entsprechende Grenzwert für $h \rightarrow 0$ existiert und beschränkt ist, als $\mathbb{H}$ -differenzierbar zu bezeichnen. Aber während für Grenzwerte in $\mathbb{R}$ der Zuwachs des Arguments von f im Punkt x lediglich von rechts oder links gegen Null streben kann, verursacht die größere Bewegungsfreiheit des zu Null strebenden Zuwachses in der komplexen Ebene bereits einschneidende Bedingungen, unter denen der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert: die in $\mathbb{C}$ differenzierbaren komplexwertigen Funktionen müssen den CRD genügen. Die Erhöhung der Dimension bringt eine noch größere Freiheit des Arguments mit sich, so dass für die Existenz obiger Grenzwerte die Erfüllung eines weitaus restriktiveren Systems von Differentialgleichungen zu erwarten ist.

Wir haben daher vorausschauend bereits in $\mathbb{C}$ die lineare komplexe Approximierbarkeit für die Definition der Holomorphie verwendet. Dies soll nun auch in $\mathbb{H}$ durchgeführt werden, wobei noch weitere Probleme überwunden werden müssen.

Allerdings muss man konstatieren, dass das Verständnis für solch eine Situation historisch gesehen erst sehr spät einsetzte und deshalb noch vor etwa zwei Jahrzehnten die Existenz eines sinnvollen Differenzierbarkeitsbegriffs im quaternionischen Sinne als unmöglich erachtet wurde.

Zuerst wollen wir zeigen, dass die Betrachtung der Differenzierbarkeit mittels des Differenzenquotienten tatsächlich nur zu trivialen Fällen führt.

5.2.1 Mejlikhzhons Resultat

Im Jahre 1947 konnten N.M. KRYLOV [86] und sein Schüler A.S. MEJLIKHZHON [106] ein Ergebnis erzielen, das die Definition der $\mathbb{H}$ -Holomorphie über die Existenz des Grenzwertes des Differenzenquotienten ausschließt.

Satz 5.8 (Krylov, Mejlikhzhon). *Im Gebiet $G \subset \mathbb{H}$ sei eine reell stetig differenzierbare Funktion f mit Werten in $\mathbb{H}$ gegeben. Falls überall in G der Grenzwert*

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}[f(x+h) - f(x)] =: {}'f(x) \quad (5.1)$$

existiert, so hat f in G die Form

$$f(x) = a + x b \quad (a, b \in \mathbb{H}).$$

Ein entsprechendes Resultat gilt, falls der rechtsseitige Differenzenquotient einen Grenzwert besitzt. Hier zeigt sich auch, dass die Approximation einer Funktion f durch $f(x_0) + xb$ bzw. durch $f(x_0) + ax$ eine zu starke Forderung an die Funktion f darstellt. Das haben wir bei der Definition der $\mathbb{H}$ -Holomorphie zu beachten.

Beweis. (In Anlehnung an [150].) Wir wählen für h die speziellen Zuwächse $h_0, h_1e_1, h_2e_2, h_3e_3$ und lassen diese gegen Null gehen. Mit $\partial_i = \partial/\partial x_i$ für $i = 0, 1, 2, 3$ erhalten wir im Punkt x die Identitäten

$${}'f = \partial_0 f = -e_1 \partial_1 f = -e_2 \partial_2 f = -e_3 \partial_3 f. \quad (*)$$

Wir identifizieren nun e_1 mit der komplexen Einheit i und zerlegen die Funktion f mit $F_1 := f_0 + if_1, F_2 := f_2 - if_3$ in der folgenden Weise:

$$f(x) = F_1(x) + e_2 F_2(x).$$

Dann geht $(*)$ über in

$$\partial_0(F_1 + e_2 F_2) = -i \partial_1(F_1 + e_2 F_2) = -e_2 \partial_2(F_1 + e_2 F_2) = -e_3 \partial_3(F_1 + e_2 F_2).$$

Da 1 und e_2 komplex linear unabhängig sind, sind die komplexen Anteile und die mit dem Faktor e_2 einzeln gleich, mithin

$$\begin{aligned} \partial_0 F_1 &= -i \partial_1 F_1 = \partial_2 F_2 = i \partial_3 F_2 \\ \partial_0 F_2 &= i \partial_1 F_2 = -\partial_2 F_1 = i \partial_3 F_1. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun durch geeignete Zusammenfassung

$$\begin{aligned}(\partial_0 + i\partial_1)F_1 &= (\partial_2 - i\partial_3)F_2 = 0 \\ (\partial_0 - i\partial_1)F_2 &= (\partial_2 + i\partial_3)F_1 = 0.\end{aligned}$$

Das bedeutet einmal, dass F_1 holomorph von den komplexen Variablen $z_1 := x_0 + ix_1$ und $z_2 := x_2 + ix_3$ abhängt, während dies für F_2 bezüglich der konjugiert komplexen Variablen $\bar{z}_1$ und $\bar{z}_2$ gilt. Damit sind die auftretenden Funktionen bezüglich der Variablen x_0 und x_1 bzw. x_2 und x_3 beliebig oft differenzierbar. Weiter ist ersichtlich

$$\begin{aligned}(\partial_0 - i\partial_1)F_1 &= -2i\partial_1F_1 = 2\partial_2F_2 = (\partial_2 + i\partial_3)F_2 \\ (\partial_2 - i\partial_3)F_1 &= -2i\partial_3F_1 = -2i\partial_1F_2 = -(\partial_0 + i\partial_1)F_2.\end{aligned}$$

Zusätzlich ist hier abzulesen, dass $(\partial_0 - i\partial_1)F_1$ gleichfalls holomorph bezüglich z_2 ist, so dass die gemischte Ableitung $\partial_{\bar{z}_2}\partial_{z_1}F_1$ auch existiert und stetig ist, so dass nach dem Satz von Schwarz die Reihenfolge der Differentiationen vertauscht werden kann. Das ergibt

$$\begin{aligned}(\partial_0 - i\partial_1)^2F_1 &= (\partial_0 - i\partial_1)(\partial_2 + i\partial_3)F_2 = (\partial_2 + i\partial_3)(\partial_0 - i\partial_1)F_2 = 0 \\ (\partial_2 - i\partial_3)^2F_1 &= -(\partial_2 - i\partial_3)(\partial_0 + i\partial_1)F_2 = -(\partial_0 + i\partial_1)(\partial_2 - i\partial_3)F_2 = 0.\end{aligned}$$

Die letzten beiden Gleichungen bedeuten aber, dass F_1 nur linear von den beiden komplexen Veränderlichen abhängt, denn auch die gemischte Ableitung verschwindet:

$$(\partial_0 - i\partial_1)(\partial_2 - i\partial_3)F_1 = -(\partial_0 - i\partial_1)(\partial_0 + i\partial_1)F_2 = -(\partial_0 + i\partial_1)(\partial_0 - i\partial_1)F_2 = 0$$

Völlig analog folgt dies für F_2 , und damit treten die Veränderlichen in f nur linear auf:

$$f(x) = a + \sum_{k=0}^3 b_k x_k$$

mit Quaternionen a und b_k . Die Gleichung (*) liefert nun noch

$$b_0 = -ib_1 = -e_2b_2 = -e_3b_3$$

oder

$$f(x) = a + \left(\sum_{k=0}^3 e_k x_k \right) b_0 = a + x b_0. \quad \square$$

5.2.2 $\mathbb{H}$ -Holomorphie

Analog zum komplexen Fall lässt sich auch im Falle einer reell stetig differenzierbaren quaternionenwertigen Funktion $f = f(x)$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{H}$ verfahren, doch gestaltet sich die Herleitung der quaternionischen Form des totalen Differentials in Abhängigkeit von x und $\bar{x}$ komplizierter. Die Differentiale dx_k sind mit Quaternionen vertauschbar, zu achten ist darauf, dass quaternionische Größen wie

df oder dx nicht mit Quaternionen vertauscht werden dürfen. Bezüglich der Differentiale sei auf Anhang 1 verwiesen. Wir definieren $\partial_k := \partial/\partial x_k$, dann haben wir

$$df = \partial_0 f dx_0 + \sum_{k=1}^3 \partial_k f dx_k = dx_0 \partial_0 f + \sum_{k=1}^3 dx_k \partial_k f.$$

Aus

$$dx = dx_0 + \sum_{k=1}^3 e_k dx_k \quad \text{und} \quad d\bar{x} = dx_0 - \sum_{k=1}^3 e_k dx_k$$

ergeben sich durch geeignete Anwendung der Multiplikation mit den e_j von links und rechts die einfachen Umrechnungsformeln

$$dx_0 = \frac{1}{2}(dx + d\bar{x}) \quad \text{sowie} \quad dx_j = \frac{1}{2}(e_j d\bar{x} - dx e_j), \quad j = 1, 2, 3,$$

und durch entsprechendes Einsetzen folgt

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{2} \partial_0 f (dx + d\bar{x}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \partial_k f (e_k d\bar{x} - dx e_k) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^3 \partial_k f e_k \right) d\bar{x} + \frac{1}{2} \left(\partial_0 f dx - \sum_{k=1}^3 \partial_k f dx e_k \right). \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der Formel für df in $\mathbb{C}$ zeigt, dass auch hier das Differential der konjugierten Variablen $d\bar{x}$ isoliert worden ist und sich davor als Faktor ein Differentialoperator der Form

$$\bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_3$$

ergibt. Wie unschwer zu erkennen ist, ist $\frac{1}{2}\bar{\partial}$ eine Verallgemeinerung des komplexen partiellen Differentialoperators

$$\partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y).$$

Es ist weiterhin zu sehen, dass der zu

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$$

korrespondierende Differentialoperator $\frac{1}{2}\partial$ mit

$$\partial := \frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial}{\partial x_1} e_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} e_2 - \frac{\partial}{\partial x_3} e_3$$

Wenn wir jetzt $f\bar{\partial} = 0$ bzw. $\bar{\partial}f = 0$ verlangen, so entspricht dies der linearen Approximation durch

$$\ell(x) = \sum_{k=1}^3 a_k z_k \quad \text{bzw.} \quad \ell(x) = \sum_{k=1}^3 z_k a_k.$$

Das führt, wie von Malonek [99] angegeben, auf die erfolgreiche

Definition 5.9 ($\mathbb{H}$ -Holomorphie). Die Funktion f sei im Gebiet $G \subset \mathbb{H}$ reell stetig differenzierbar und habe Werte in $\mathbb{H}$. Dann heißt f *rechts- $\mathbb{H}$ -holomorph* in G , wenn in jedem Punkt $x \in G$ für $h \rightarrow 0$ und für geeignete von x abhängige Quaternionen a_k gilt

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^3 a_k (h_k - h_0 e_k) + o(h),$$

bzw. *links- $\mathbb{H}$ -holomorph*, wenn

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^3 (h_k - h_0 e_k) a_k + o(h). \quad (5.2)$$

Dabei sind die h_k die Koordinaten von h .

Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, sprechen wir auch einfach von Holomorphie oder etwas genauer von Rechts- bzw. Links-Holomorphie. Wir haben ohne Probleme die Gleichwertigkeit mit einer Definition über Differentialgleichungen:

Satz 5.10 (CRD in $\mathbb{H}$). Eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{H}$ reell stetig differenzierbare Funktion f mit Werten in $\mathbb{H}$ ist dort genau dann rechts- bzw. links- $\mathbb{H}$ -holomorph, wenn

$$f\bar{\partial} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\partial}f = 0.$$

Diese Differentialgleichungen wollen wir Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen (CRD) (in $\mathbb{H}$) nennen.

Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen werden mitunter auch als *verallgemeinerte Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen* bzw. *Cauchy–Fueter-sche Differentialgleichungen* bezeichnet.

Beweis. Wir beschränken uns etwa auf links-holomorphe Funktionen. Nach Folgerung A.1.14 und dem Vorherigen gilt

$$f(x+h) - f(x) = df[h] + o(h) = (\bar{\partial}f)h_0 + \sum_{k=1}^3 (h_k - h_0 e_k)(\partial_k f) + o(h).$$

Ist $\bar{\partial}f = 0$, so steht die gewünschte lineare Approximation direkt da. Ist umgekehrt letztere gegeben, so muss zunächst $a_k = \partial_k f$ sein, denn für $h_0 = 0$ sind die h_k voneinander

unabhängige Variable, deren Koeffizienten eindeutig bestimmt sind. Dann folgt bei einem Vergleich mit (5.2)

$$0 = (\bar{\partial}f)h_0 + o(h),$$

und das geht nur für $\bar{\partial}f = 0$. □

5.2.3 Holomorphie und Differentialformen

Wir können die $\mathbb{H}$ -Holomorphie sehr kurz in Differentialformen ausdrücken, was uns später auf die Integralsätze überleiten wird.

Satz 5.11. *Eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{H}$ stetig differenzierbare Funktion f mit Werten in $\mathbb{H}$ ist genau dann links- $\mathbb{H}$ -holomorph, wenn dort*

$$d(dx^*f) = 0$$

gilt, ebenso ist sie genau dann rechts- $\mathbb{H}$ -holomorph, wenn gilt

$$d(fdx^*) = 0.$$

Beweis. Wir beweisen nur die Aussage für links-holomorphe Funktionen, der Beweis für rechts-holomorphe Funktionen verläuft völlig analog. Es ist mit $d\sigma := dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

$$\begin{aligned} d(dx^*f) &= dx^* \wedge df = \sum_{j,k=0}^3 e_j dx_j^* \wedge (\partial_k f) dx_k \\ &= \sum_{j=0}^3 e_j (\partial_j f) dx_j^* \wedge dx_j \\ &= - \sum_{j=0}^3 e_j (\partial_j f) d\sigma = -(\bar{\partial}f)d\sigma, \end{aligned}$$

denn das äußere Produkt verschwindet, wenn zwei dx_j , dx_k übereinstimmen. Damit ist $d(dx^*f) = 0$ genau dann, wenn $\bar{\partial}f = 0$, was zu beweisen war. □

Es sei bemerkt, dass dieser Satz auch in $\mathbb{C}$ gilt, denn dort ist $dx^* = dy$, $dy^* = -dx$, also $dz^* = dy - idx = -idz$ und mithin

$$d(dz^*f) = (dy - idx) \wedge (\partial_x f dx + \partial_y f dy) = -2(\partial_{\bar{z}}f)dx \wedge dy,$$

was mit der Formel in $\mathbb{H}$ übereinstimmt, aus der die Aussage über das gleichzeitige Verschwinden von $d(dz^*f)$ und $\partial_{\bar{z}}f$ folgt.

Wir können die $\mathbb{H}$ -Holomorphie auch noch in Differentialformen charakterisieren, die eine um 1 niedrigere Stufe haben, wie von A. SUDBERY angegeben [150].

Satz 5.12. *Eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{H}$ reell stetig differenzierbare Funktion f ist genau dann links- $\mathbb{H}$ -holomorph in G , wenn dort gilt*

$$\frac{1}{2}d(dx \wedge dx f) = dx^*(Df)$$

mit dem DIRAC-Operator

$$D = \sum_{k=1}^3 e_k \partial_k.$$

Entsprechend ist die Rechts- $\mathbb{H}$ -Holomorphie äquivalent zu

$$\frac{1}{2} d(f dx \wedge dx) = (f D) dx^*.$$

Der Dirac-Operator wirkt also nur auf die drei Variablen x_1, x_2, x_3 , er hat wichtige Anwendungen in der Physik und ist nach dem englischen Physiker PAUL A. M. DIRAC (1902–1984) benannt. Für unseren grundlegenden Operator $\bar{\partial}$ gilt offenbar

$$\bar{\partial} = \partial_0 + D.$$

Beweis. Wir wollen zuerst $dx \wedge dx$ umformen, um uns für die höheren Dimensionen fit zu machen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} dx \wedge dx &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^3 e_i e_j dx_i \wedge dx_j = \sum_{i < j; i,j=1}^3 e_i e_j dx_i \wedge dx_j \\ &= e_1 e_2 dx_1 \wedge dx_2 + e_1 e_3 dx_1 \wedge dx_3 + e_2 e_3 dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} e_i d\hat{x}_{0,i} =: d\tau. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten die zwei Indizes an $d\hat{x}$, dass die beiden entsprechenden Differentiale fortzulassen sind. Für dieses $d\tau$ gilt weiter ($x = x_0 + \mathbf{x}$)

$$dx_0 \wedge d\tau = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} e_i d\hat{x}_i = - \sum_{i=1}^3 e_i dx_i^* = -dx^* + dx_0^* = -d\mathbf{x}^*.$$

Damit folgt nun leicht unter Berücksichtigung von $\partial_0 = \bar{\partial} - D$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d(dx \wedge dx f) &= d(d\tau f) = (-1)^2 d\tau \wedge df \\ &= d\tau \wedge dx_0 \partial_0 f + \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} e_i d\hat{x}_{0,i} \wedge dx_i \partial_i f \\ &= (-dx^* + dx_0^*)(\bar{\partial} f - Df) + \sum_{i=1}^3 d\hat{x}_0 e_i \partial_i f \\ &= (-dx^* + dx_0^*)(\bar{\partial} f - Df) + dx_0^* Df \\ &= -d\mathbf{x}^* \bar{\partial} f + dx^* Df. \end{aligned}$$

Also ist $\bar{\partial} f = 0$ gleichbedeutend mit der Aussage des Satzes. $\square$

Wir wollen noch zwei andere Versuche, der quaternionischen Differenzierbarkeit näher zu kommen, zitieren, um zu zeigen, dass im Laufe der Jahre verschiedenste Untersuchungen in dieser Richtung unternommen worden sind.

Bemerkung 5.13. In den Anwendungen treten häufig Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ auf. Identifiziert man $\mathbb{R}^3$ mit $\text{Vec } \mathbb{H}$ und $\mathbb{R}^4$ mit $\mathbb{H}$ (als Vektorräume), so kann man eine Abbildung $f : \text{Vec } \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ als holomorph bezeichnen, falls $Df = 0$ ist. Damit ist

$$d(dx^* f) = -(Df)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Es sei darauf hingewiesen, dass es mitunter notwendig ist, den $\mathbb{R}^3$ mit dem Raum $\mathbb{R}\text{-span}\{e_0, e_1, e_2\}$ zu identifizieren, also den Paravektoren in $C\ell(2)$.

Bemerkung 5.14. Mit den Abkürzungen $(x)^l := -e_l x e_l$, $l = 1, 2, 3$, fand V. SOUČEK 1983 [141] eine andere Darstellung für das totale Differential df . Bei obigen Operationen $(x)^l$ handelt es sich um die in Definition 2.17 eingeführten Involutionen.

Man rechnet die Hilfsformeln

$$(x)^l (y)^l = (xy)^l, \quad \sum_{l=1}^3 (x)^l = 2x_0 + \bar{x} = 4x_0 - x$$

leicht nach. Dann ist nach Souček die Zerlegung

$$d\bar{x}\bar{\partial} + \sum_{l=1}^3 (d\bar{x}\bar{\partial})^l = 4(d\bar{x}\bar{\partial})_0 = 4d$$

mit dem totalen Differentialoperator d gegeben. Nennt man in dieser Zerlegung den ersten Summanden $\mathcal{D}$, so ist $\mathcal{D}f = 0$ gleichwertig mit $\bar{\partial}f = 0$, also mit der $\mathbb{H}$ -Holomorphie.

Souček nennt den zweiten Anteil in dieser Zerlegung $\tilde{\mathcal{D}}$ und zeigt, dass $\tilde{\mathcal{D}}f = 0$ gleichbedeutend ist mit der Existenz des Grenzwertes des Differenzenquotienten, allerdings mit $\bar{h}$ gebildet. $\tilde{\mathcal{D}}f = 0$ ist also letztlich äquivalent mit der Linearität von f :

Nach Definition ist $\tilde{\mathcal{D}} = 0$ gleichwertig mit $4df = d\bar{x}\bar{\partial}f$. Da $dx_j = \delta_{jk}$ gesetzt werden kann, ist dies äquivalent zu den vier Gleichungen

$$4\partial_0 = \bar{\partial}f, \quad 4\partial_1 f = -e_1 \bar{\partial}f, \quad 4\partial_2 f = -e_2 \bar{\partial}f, \quad 4\partial_3 f = -e_3 \bar{\partial}f$$

oder

$$\partial_0 f = e_1 \partial_1 f = e_2 \partial_2 f = e_3 \partial_3 f = \frac{1}{4} \bar{\partial}f.$$

Nach Satz 5.8 ist dies gleichwertig mit der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{h}^{-1} [f(x+h) - f(x)]$$

und damit mit $f(x) = a + \bar{x}b$. Damit ist interessanterweise df in einen Anteil zerlegt, der die Holomorphie bedingt, und in einen, der mit der klassischen Differenzierbarkeit zu tun hat.

Nun noch einige Worte zu einem ganz anderen Zugang.

Bemerkung 5.15. Von völlig verschiedener Struktur ist der von M.S. MARINOV eingeführte Begriff der *S-Differenzierbarkeit* [105]. Zunächst wird in $\mathbb{H}$ eine neue Multiplikation festgelegt

$$x * y = (z_1 + z_2 e_2) * (w_1 + w_2 e_2) := (z_1 w_1 - z_2 w_2) + (z_1 w_2 + z_2 w_1) e_2,$$

die von der üblichen Hamiltonschen Multiplikation

$$xy = (z_1 + z_2 e_2)(w_1 + w_2 e_2) := (z_1 w_1 - z_2 \overline{w_2}) + (z_1 w_2 + z_2 \overline{w_1}) e_2$$

formal nur leicht abweicht. Aber die so definierte Multiplikation ist offensichtlich kommutativ, so dass eine neue Algebra entsteht, die wegen des Satzes von Frobenius Nullteiler enthalten muss. Marinov setzt $h = h_1 + h_2 e_2$ und $h^* = \overline{h_1} - h_2 e_2$ und definiert

Es sei $G \subset \mathbb{H}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{H}$. Die Funktion f wird *S-differenzierbar* in $x \in G$ genannt, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^* * (f(x+h) - f(x))}{h_1^2 + h_2^2}, \quad h_1^2 + h_2^2 \neq 0$$

existiert.

Bemerkenswert ist für diese Version der Differenzierbarkeit, dass $f * g$ wieder *S-differenzierbar* wird und die klassische Leibniz-Regel gilt, was eine Folge der Kommutativität ist. Marinov kann zeigen, dass diese *S-Differenzierbarkeit* äquivalent zu den CRD der Form

$$\partial_* * f = 0, \quad \partial_* := \partial_{z_1} + \partial_{z_2} e_2$$

ist, was hier nicht näher ausgeführt werden soll.

Bemerkung 5.16. In [128] wurde der Begriff der ψ -hyperholomorphen Funktion eingeführt. Entsprechende Differential-Operatoren vom Cauchy-Riemann-Typ

$${}^\psi D u := \sum_{k=4-m}^3 \psi^k \partial_k u \quad (5.3)$$

$$D^\psi u := \sum_{k=4-m}^3 \partial_k \psi^k \quad (5.4)$$

wurden untersucht, wobei $\psi \in \mathbb{H}^m$ ist, $m = 1, \dots, 4$. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen formuliert, dass sich der m -dimensionale Laplace-Operator als Komposition zweier Operatoren vom Type ${}^\psi D$ bzw. D^ψ darstellen lässt. Tiefer gehende Aussagen sind in der oben zitierten Arbeit zu finden.

5.3 Differenzierbarkeit in $C\ell(n)$

Im n -dimensionalen Fall treten natürlich die gleichen Schwierigkeiten wie in den Quaternionen auf, so dass wir analog vorgehen können. Wir betrachten reell stetig differenzierbare Funktionen f in einem Gebiet des $\mathbb{R}^{n+1}$, die Variable x wird mit dem Paravektor $x = x_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ identifiziert. Die Werte der Funktion f sollen in $C\ell(n)$ liegen. Wieder haben wir die Nichtkommutativität von Größen in

der Clifford-Algebra zu beachten, wir erhalten von den Definitionen und Sätzen je eine Links- und eine Rechts-Version. Aus

$$df = \sum_{k=0}^n \partial_k f dx_k = \sum_{k=0}^n dx_k \partial_k f$$

ergibt sich mit

$$dx_0 = \frac{1}{2}(dx + d\bar{x}) \text{ sowie } dx_k = \frac{1}{2}(e_k d\bar{x} - dx e_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

wie bei den Quaternionen

$$df = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \partial_k f e_k \right) d\bar{x} + \frac{1}{2} \left(\partial_0 f dx - \sum_{k=1}^n \partial_k f dx e_k \right).$$

Das ist eine völlig analoge Formel zu denjenigen in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$. Wichtig und für die Theorie grundlegend ist wieder der Operator

$$\bar{\partial} := \sum_{k=0}^n \partial_k e_k.$$

Der formal konjugierte Operator

$$\partial := \partial_0 - \sum_{k=1}^n \partial_k e_k$$

kann wie in $\mathbb{H}$ nicht isoliert werden. Wir führen wieder Hilfsvariable ein, die Lösungen der Gleichung $\bar{\partial}f = 0$ sind:

$$z_k := -\frac{1}{2}(e_k x + x e_k) = x_k - x_0 e_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Setzen wir diese Variablen in die Formel für df ein, so folgt wegen $dx_k = dz_k + dx_0 e_k$, $k = 1, \dots, n$,

$$df = (f\bar{\partial})dx_0 + \sum_{k=1}^n (\partial_k f)dz_k = (\bar{\partial}f)dx_0 + \sum_{k=1}^n dz_k(\partial_k f).$$

Wenn wir jetzt $f\bar{\partial} = 0$ bzw. $\bar{\partial}f = 0$ verlangen, so entspricht das wie in $\mathbb{H}$ der linearen Approximation durch

$$\ell(x) = \sum_{k=1}^n a_k z_k \text{ bzw. } \ell(x) = \sum_{k=1}^n z_k a_k.$$

Wir folgen wieder Malonek und definieren:

Definition 5.17 (Clifford-Holomorphie). Die Funktion f sei im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ reell stetig differenzierbar mit Werten in $\mathcal{Cl}(n)$. Dann heißt f *rechts-Clifford-holomorph* in G , wenn in jedem Punkt $x \in G$ für $h \rightarrow 0$ und für geeignete von x abhängige Clifford-Zahlen a_k gilt:

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^n a_k(h_k - h_0 e_k) + o(h),$$

bzw. *links-Clifford-holomorph* gilt: wenn

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^n (h_k - h_0 e_k) a_k + o(h).$$

Dabei sind die h_k die Komponenten von h .

Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, sprechen wir auch hier nur von Holomorphie oder Rechts- bzw. Links-Holomorphie. Mit dem gleichen Beweis wie für Quaternionen folgt wieder die Gleichwertigkeit mit der entsprechenden Differentialgleichung:

Satz 5.18 (CRD in $\mathcal{Cl}(n)$). Eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ reell stetig differenzierbare Funktion mit Werten in $\mathcal{Cl}(n)$ ist dort genau dann rechts- bzw. links-holomorph, wenn

$$f\bar{\partial} = 0 \text{ bzw. } \bar{\partial}f = 0.$$

Diese Differentialgleichungen wollen wir wie vorher Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen (CRD) nennen.

Die Gleichwertigkeit mit den Definitionen unter Verwendung von Differentialformen ist wie in $\mathbb{H}$ gegeben:

Satz 5.19. Eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig differenzierbare Funktion f mit Werten in $\mathcal{Cl}(n)$ ist genau dann links-holomorph, wenn dort

$$d(dx^* f) = 0$$

gilt, ebenso ist sie genau dann rechts-holomorph, wenn gilt

$$d(f dx^*) = 0.$$

Beweis. Der Beweis verläuft mit $d\sigma = dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n$ völlig analog zu $\mathbb{H}$, es ist nur bei den Summen 3 durch n zu ersetzen. $\square$

Ebenso gilt auch hier die Gleichwertigkeit der Holomorphie mit einer Aussage über Differentialformen, die eine Stufe niedriger sind, wie 1999 in [53] angegeben worden ist.

Satz 5.20. *Eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ reell stetig differenzierbare Funktion f ist genau dann links-holomorph in G , wenn dort gilt*

$$d(d\tau f) = dx^*(Df)$$

mit dem DIRAC-Operator

$$D = \sum_{k=1}^n e_k \partial_k$$

und der Differentialform

$$d\tau = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} e_k d\hat{x}_{0,k}.$$

Entsprechend ist die Rechts-Holomorphie äquivalent zu

$$d(f d\tau) = (f D) dx^*.$$

Beweis. Dieser ist wieder völlig analog zu dem in $\mathbb{H}$, lediglich die Summation erstreckt sich von 1 bis n . $\square$

5.4 Aufgaben

1. Man überlege sich eine Produktregel für $\bar{\partial}(fg)$!
2. Man beweise in $\mathbb{C}$ die Differentiationsregel für die Umkehrfunktion

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}.$$

3. Man berechne in $C\ell(n)$ die Ausdrücke

$$\bar{\partial} x^m \quad \text{und} \quad \partial x^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

4. Man zeige die Identitäten

$$(x)^l (y)^l = (xy)^l, \quad \sum_{l=1}^3 (x)^l = 2x_0 + \bar{x} = 4x_0 - x.$$

6 Potenzen und Möbiustransformationen

6.1 Potenzfunktionen

6.1.1 Potenzfunktionen in $\mathbb{C}$

Wir haben bereits festgestellt, dass die Potenzfunktionen

$$w = z^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

in $\mathbb{C}$ holomorph sind. Es gilt in Polarkoordinaten nach der Formel von de Moivre

$$w = r^n (\cos n\varphi + \sin n\varphi),$$

damit sind

$$|w| = r^n, \quad \arg w = n \arg z.$$

Das Argument von w umläuft den Nullpunkt genau n -mal, wenn z den Nullpunkt einmal umläuft. Das ergibt eine interessante Betrachtung, um die Umkehrfunktion zu gewinnen:

Die komplexe Ebene wird in n Sektoren zerlegt, nämlich

$$S_k : \frac{2k\pi}{n} \leq \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Unter der Abbildung $w = z^n$ wird jeder dieser Sektoren auf ein vollständiges Exemplar W_k der w -Ebene abgebildet. Diese Ebenen W_k denken wir uns längs der positiven reellen Achse aufgeschnitten. Es entstehen obere und untere Schnitt-ränder, der obere Schnitttrand ist jeweils das Bild der den Sektor S_k begrenzenden Halbgeraden mit dem kleineren Argument. Beim Übergang von S_k zu S_{k+1} geht das w von der unteren Schnittkante in W_k zur oberen Schnittkante von W_{k+1} über. Wir "verkleben", daher die untere Schnittkante von W_k mit der oberen von W_{k+1} . Es entsteht eine "Wendeltreppe", die sich allerdings beim Übergang von S_{n-1} zu S_0 schließt, die untere Schnittkante von W_{n-1} ist mit der oberen Schnittkante von W_0 zu verkleben. Dieses so erhaltene geometrische Gebilde über der w -Ebene wird *Riemannsche Fläche* $\mathcal{F}(w^{1/n})$ von $w^{1/n}$ genannt. Auf ihr ist die Umkehrabbildung $z = w^{1/n}$ von $w = z^n$ eindeutig erklärt: Auf dem Blatt W_k wird $z = w^{1/n}$ erklärt durch

$$z = |w|^{1/n} \left(\cos \left(\frac{\arg w + 2k\pi}{n} \right) + i \left(\frac{\arg w + 2k\pi}{n} \right) \right),$$

dabei ist $0 \leq \arg w < 2\pi$ zu wählen. Die Exemplare W_k der w -Ebene heißen *Blätter* der Riemannschen Fläche. Die Punkte $z = 0$ und $w = 0$ sind einander ein-eindeutig zugeordnet, ebenso die Punkte $z = \infty$ und $w = \infty$, wenn wir das Ganze über Riemann-Sphären in z und w betrachten. Man nennt diese beiden Punkte *algebraische Singularitäten* oder *Windungspunkte* der Riemannschen Fläche.

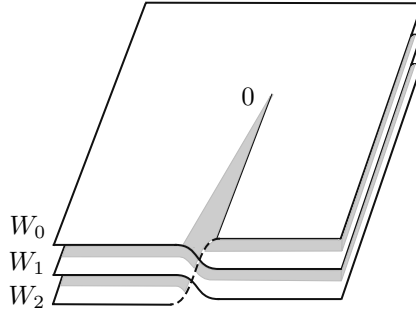


Abbildung 6.1

Da die Differentiation eine lokale Eigenschaft ist, kann man $z = w^{1/n}$ ohne weiteres differenzieren und erhält mit der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{n} w^{\frac{1}{n}-1},$$

natürlich mit Ausnahme des Punktes $w = 0$. Für den Fall $n = 2$ kann man sich mit der Riemannschen Fläche für $w^{1/2}$ den Zusammenhang zwischen der positiven und der negativen Wurzel im Reellen erklären, der Übergang von der einen Wurzel zur anderen entspricht einem Umlauf um den Nullpunkt auf der Riemannschen Fläche.

6.1.2 Potenzfunktionen in höheren Dimensionen

Die von uns zu betrachtenden Polynome sind entweder in $\mathbb{H}$ definiert mit Werten in $\mathbb{H}$ oder im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Werten in $C\ell(n)$. Eine formale Übertragung der holomorphen Polynome auf den Fall von Polynomen in $\mathbb{H}$ oder $C\ell(n)$ bereitet leider Schwierigkeiten, da $\bar{\partial}x = x\bar{\partial} = 1 - n \neq 0$, außerdem steht der Nichtkommutativität halber keine geeignete Produktregel der Differentiation zur Verfügung. Bei der Definition der Differenzierbarkeit konnten solche Probleme durch Einführung neuer Veränderlicher, nämlich der Fueter-Variablen

$$z_j = x_j - x_0 e_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

überwunden werden. Dafür gilt

$$\bar{\partial} z_j = z_j \bar{\partial} = 0 \quad (j = 1, \dots, n);$$

leider ist aber bereits

$$\bar{\partial}(z_j z_i) \neq 0 \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

wie man nachrechnen kann. Durch Symmetrisierung im Sinne des Anhangs A.1.3 fand RUDOLF FUETER in den dreißiger Jahren des vorigen Jahrhunderts einen Ausweg. Er konstruierte homogene holomorphe Polynome beliebigen Grades.

KARL RUDOLF FUETER wurde 1880 in Basel geboren, er studierte Mathematik in Basel und Göttingen, wo er 1903 bei D. HILBERT promovierte. Nach der Habilitation in Marburg wurde er Professor in Clausthal, Basel, Karlsruhe und ab 1916 an der Universität Zürich. In den 1930er Jahren entwickelte er zusammen mit seinen Schülern die Funktionentheorie in den Quaternionen. Er hat hier wesentliche Beiträge geliefert und die Theorie bekannt gemacht. In den 1940er Jahren begann seine Arbeitsgruppe auch mit dem Einstieg in die Funktionentheorie in den Clifford-Algebren. Rudolf Fueter starb 1950 in Brunnen (Schweiz).

Fueter führte die nach ihm benannten Polynome im Jahr 1936 ein [43]. Diese wurden von seinen Schülern und später vor allem von R. DELANGHE auch in $C\ell(n)$ betrachtet und deren links- und rechtsseitige Holomorphie gezeigt. Im Jahre 1987 bewies H. MALONEK [100], dass die Fueter-Polynome stets Werte in den Paravektoren haben. Die Fueter-Polynome können nun wie folgt definiert werden, dabei ist $n = 3$ für den Definitionsbereich $\mathbb{H}$ zu wählen, da die drei Variablen z_1, z_2, z_3 zu verwenden sind, die Polynome sind dann im $\mathbb{R}^4$ erklärt. Fasst man aber $\mathbb{H}$ als $C\ell(2)$ auf, so sind nur die zwei Variablen z_1, z_2 zu verwenden, also $n = 2$, die Polynome sind dann nur im $\mathbb{R}^3$ definiert.



Rudolf Fueter

Definition 6.1 (Fueter-Polynome). Es sei x in $\mathbb{H}$ oder $\mathbb{R}^{n+1}$.

- (i) Es heiße $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_n)$ mit ganzzahligen k_i *Multiindex*; für Multiindizes mit nichtnegativen Komponenten sei

$$k := |\mathbf{k}| := \sum_{i=1}^n k_i, \quad \mathbf{k}! := \prod_{i=1}^n k_i!,$$

und es werde $k = |\mathbf{k}|$ *Grad* des Multiindex $\mathbf{k}$ genannt.

- (ii) Für einen Multiindex $\mathbf{k}$ mit mindestens einer negativen Komponente setzen wir

$$\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) := 0.$$

Für den Grad $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ sei der Kürze halber für $\mathbf{k} = (0, \dots, 0)$ nur $\mathbf{0}$ geschrieben, wir setzen

$$\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(x) := 1.$$

- (iii) Zu einem $\mathbf{k}$ mit $k > 0$ wird nun das *Fueter-Polynom* $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x)$ in folgender Weise festgelegt: Zu $\mathbf{k}$ wird eine Indexfolge $j_1, \dots, j_k$ derart definiert, dass die ersten k_1 Indizes gleich 1 sind, die nächsten k_2 Indizes gleich 2 usw., schließlich seien die letzten k_n Indizes gleich n . Wir setzen

$$\mathbf{z}^{\mathbf{k}} := z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_k} = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n},$$

in diesem Produkt kommt z_1 genau k_1 -mal vor usw. Dann sei

$$\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \text{perm}(k)} \sigma(\mathbf{z}^{\mathbf{k}}) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \text{perm}(k)} z_{j_{\sigma(1)}} \dots z_{j_{\sigma(k)}}.$$

Dabei ist $\text{perm}(k)$ die Permutationsgruppe von k Elementen (vgl. Definition A.1.1).

Diese Symmetrisierung gleicht in einiger Hinsicht die Nichtkommutativität in $\mathbb{H}$ bzw. $C\ell(n)$ aus, für $n = 1$, also in $\mathbb{C}$, kommt natürlich nichts Neues heraus. Wir zeigen die wichtigsten Eigenschaften der Fueter-Polynome:

Satz 6.2. (i) Für Fueter-Polynome gilt die folgende Rekursionsformel, wobei $\varepsilon_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ mit der 1 an der i -ten Stelle ist:

$$k \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) = \sum_{i=1}^n k_i \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_i}(x) z_i = \sum_{i=1}^n k_i z_i \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_i}(x).$$

Damit gilt auch

$$\sum_{i=1}^n k_i \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_i}(x) e_i = \sum_{i=1}^n k_i e_i \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_i}(x).$$

- (ii) Für die Ableitungen mit $j = 1, \dots, n$ erhalten wir

$$\partial_j \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) = k_j \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_j}(x).$$

- (iii) Schließlich ist

$$\partial_0 \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) = - \sum_{j=1}^n k_j e_j \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_j}(x) = - \sum_{j=1}^n e_j \partial_j \mathcal{P}_{\mathbf{k}}$$

und

$$\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) \partial_0 = - \sum_{j=1}^n k_j \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_j}(x) e_j = - \sum_{j=1}^n \partial_j \mathcal{P}_{\mathbf{k}} e_j,$$

die $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ sind also rechts- und links-holomorph, denn die letzten beiden Gleichungen besagen

$$\bar{\partial} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) = \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) \bar{\partial} = 0.$$

Beweis. (i) Es wird nur die linke der beiden Formeln bewiesen, die rechte ist völlig analog zu zeigen. In jedem der Summanden von $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ steht eines der z_i als letzter Faktor, so dass wir bei Sortieren nach diesem letzten Faktor einen Ausdruck der Form

$$k\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) = \sum_{i=1}^n Q_{i,\mathbf{k}}(x)z_i$$

erhalten. In dem Ausdruck $Q_{i,\mathbf{k}}(x)$ läuft die Summe noch über alle Permutationen der verbliebenen z_j . Außerdem kommt der Faktor z_i einmal weniger vor, so dass wir bei der Permutation der z_i untereinander $(k_i - 1)!$ -mal dasselbe erhalten. Bei der Permutation aller z_i sind dies allerdings $k_i!$ gleiche Ausdrücke gewesen, so dass wir in $Q_{i,\mathbf{k}}$ k_i -mal denselben Ausdruck erhalten, mithin

$$Q_{i,\mathbf{k}}(x) := k_i \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_i}(x)$$

gewinnen. Da das k schon auf die linke Seite multipliziert worden ist, steht auch vor den Summen in $Q_{i,\mathbf{k}}(x)$ der richtige Faktor $1/(k-1)!$. Das ist bereits der Beweis. Die weitere Gleichung erhalten wir, indem wir $z_i = x_i - x_0 e_i$ einsetzen. Die reellen Faktoren x_i kann man durch die $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ hindurch ziehen, so dass diese Summanden sich weg heben. Ebenso kann man in der verbleibenden Gleichung

$$\sum_{i=1}^n k_i \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_i}(x) x_0 e_i = \sum_{i=1}^n k_i x_0 e_i \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_i}(x)$$

auch den Faktor x_0 kürzen, womit die Behauptung bewiesen ist.

(ii) Vollständige Induktion nach k : Für $k = 0$ enthält $\mathbf{k} - \varepsilon_j$ eine negative Komponente, also sind die $\mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_j} = 0$ und $0 = \partial_k \mathcal{P}_0$.

Für den Schluss von $k-1$ auf k wenden wir die Rekursionsformeln aus (i) an: Nach Induktionsvoraussetzung und (i) gilt

$$\begin{aligned} k \partial_j \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) &= \sum_{i=1}^n k_i \partial_j (\mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_i}(x) z_i) \\ &= \sum_{i=1}^n k_i k_j \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_i-\varepsilon_j}(x) z_i + \sum_{i=1}^n k_i \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_i}(x) \partial_j z_i \\ &= (k-1) k_j \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_j}(x) + k_j \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_j}(x) = k k_j \mathcal{P}_{\mathbf{k}-\varepsilon_j}(x). \end{aligned}$$

Nach Kürzen durch k steht die Behauptung da.

(iii) Auch hier wenden wir vollständige Induktion nach k an, beweisen aber gleichzeitig beide Formeln für die rechts- und linksseitige Differentiation. Für $k = 0$ sind alle $\mathcal{P}_{0-\varepsilon_j} = 0$, also ist $0 = \partial_0 \mathcal{P}_0(x)$ erfüllt. Beim Schluss von $k-1$ auf k wenden wir wieder die Rekursionsformel aus (i) an und die Induktionsvoraussetzung für die rechtsseitige Ableitung:

$$\begin{aligned}
k\partial_0\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) &= \sum_{i=1}^n k_i(\partial_0\mathcal{P}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i}(x))z_i - \sum_{i=1}^n k_i\mathcal{P}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i}(x)e_i \\
&= -\sum_{i,j=1}^n k_ik_je_j\mathcal{P}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i-\boldsymbol{\varepsilon}_j}(x)z_i - \sum_{i=1}^n k_i\mathcal{P}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i}(x)e_i \\
&= -(k-1)\sum_{j=1}^n k_je_j\mathcal{P}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_j}(x) - \sum_{i=1}^n k_ie_i\mathcal{P}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i}(x) \\
&= -k\sum_{i=1}^n k_i\mathcal{P}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i}(x)e_i.
\end{aligned}$$

Gemäß (ii) kann $k_i\mathcal{P}_{\mathbf{k}-\boldsymbol{\varepsilon}_i} = \partial_i\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ eingesetzt werden, das war zu beweisen. $\square$

Eine einfache Folgerung ist:

Folgerung 6.3. *Fueter-Polynome sind rechts- und links- $C\ell(n)$ -linear unabhängig.*

Beweis. Rechts- $C\ell(n)$ -lineare Unabhängigkeit der Polynome $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ bedeutet, dass aus

$$\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x)\lambda_{\mathbf{k}} = 0$$

mit $\lambda_{\mathbf{k}} \in C\ell(n)$ folgt, dass alle $\lambda_{\mathbf{k}} = 0$ sind. Dies ist sofort einzusehen, da jedes $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ zumindest eines der x_i in einer von den anderen $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ abweichenden Potenz enthält, so dass die lineare Unabhängigkeit mit reeller Differentiation nachgewiesen werden kann. $\square$

Bemerkung 6.4. Die Gesamtheit der Polynome $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}\left(\frac{x}{|x|}\right)$ bilden auf der Einheits-sphäre S^n gerade die so genannten *sphärischen Polynome vom Grad k* .

Folgerung 6.5. *Für die Fueter-Polynome gilt die Abschätzung*

$$|\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x)| \leq |z_1|^{k_1} \dots |z_n|^{k_n} = |\mathbf{z}|^{\mathbf{k}} \leq |x|^{|\mathbf{k}|}.$$

Den Beweis überlassen wir als Aufgabe dem Leser (vgl. Aufgabe 6.3.1).

Beispiel 6.6. a) Die Fueter-Polynome vom Grad 1 sind gerade die z_i , also

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}_i}(x) = z_i$$

b) Für den Grad 2 sind offenbar die einfachen Quadrate der z_i die Polynome der Form

$$\mathcal{P}_{2\boldsymbol{\varepsilon}_i}(x) = z_i^2.$$

Für gemischte Indizes ergibt sich ($i < j$)

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_j}(x) = \frac{1}{2}(z_iz_j + z_jz_i).$$

c) Für den Grad 3 werden die Ausdrücke schon erheblich länger, z.B. für $i < j$

$$\mathcal{P}_{3\boldsymbol{\varepsilon}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_j}(x) = \frac{1}{3}(z_i^2z_j + z_iz_jz_i + z_jz_i^2).$$

Es sei zum Schluss noch bemerkt, dass die $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ ihre Werte im $\mathbb{R}^{n+1}$ annehmen, was wir hier aber nicht beweisen wollen (vgl. Lemma 10.6).

Bemerkung 6.7. R. Delanghe führte 1970 [31] den Begriff der total analytischen Variablen ein. Er nennt die Variable $z \in \mathbb{H}$ *total analytisch*, falls zusammen mit z auch jede Potenz z^j $\mathbb{H}$ -holomorph ist. Er setzt dazu an

$$z = \sum_{i=0}^3 x_i a_i$$

mit geeigneten $a_i \in \mathbb{H}$ ($i = 0, 1, 2, 3$), die nicht notwendig $\mathbb{R}$ -linear unabhängig sein müssen. Für die totale Analytizität ist notwendig und hinreichend, dass $a_i a_j = a_j a_i$ gilt (vgl. hierzu [54]). Einfache Beispiele sind die oben verwendeten Variablen z_i .

Zwischen den Systemen $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ und der Euklidischen Basis $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ besteht der übliche Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Nun sei A' die aus A durch Streichung der ersten Spalte hervorgehende Matrix und $\text{rang } A' < 2$ sowie z eine total analytische Variable. Für $u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{H}^k$ werde dann die $\mathbb{H}$ -wertige Funktion

$$(L_k u)(x) = \sum_{l=1}^k \left\{ \prod_{j \neq l} \{ [z(x) - z(a_j)] [z(a_k) - z(a_j)]^{-1} u_l \} \right\}$$

definiert. Dabei seien die $a_j \in \mathbb{H}$ ($j = 1, \dots, k$) mit $z(a_k) \neq z(a_j)$ für $k \neq j$. Diese Funktion L_k nimmt dann an den Stellen a_j gerade die Werte u_j an:

- (i) $(L_k u)(a_j) = u_j \quad (j = 1, \dots, k)$
- (ii) $(L_k u)^p \in \ker \bar{\partial} \quad (p = 1, 2, \dots) (\text{Holomorphie})$

Ein Polynom mit diesen (Interpolations-) Eigenschaften heißt *Lagrange-Polynom*.

6.2 Möbiustransformationen

6.2.1 Möbiustransformationen in $\mathbb{C}$

Es soll jetzt das Verhalten einiger einfacher Abbildungen untersucht werden, aus denen sich eine interessante Klasse zusammensetzt: So verschiebt $w = z + b$ nur alle Punkte der Gaußebene um b , insbesondere bleiben dabei Kreise und Geraden erhalten, diese Abbildung heißt *Translation*.

Die Funktion $f(z) = az$ hat die Ableitung a ; aus

$$w = f(z) = az =: |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)z$$

ersieht man, dass eine *Drehstreckung* der Ebene vorliegt. Jeder Punkt wird um den Winkel α um den Nullpunkt gedreht und um den Faktor $|a|$ gestreckt.

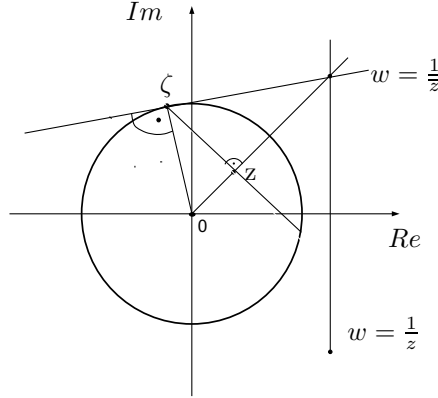


Abbildung 6.2

Die Funktion $f(z) = 1/z$ hat die Ableitung $f'(z) = -1/z^2$. Es werden die Punkte der offenen Einheitskreisscheibe in deren Äußeres abgebildet und umgekehrt. Speziell entspricht dem Nullpunkt der Punkt $z = \infty$. Betrachten wir die Gleichung für Kreislinien und Geraden,

$$Az\bar{z} + 2\operatorname{Re}(\bar{B}z) + C = 0,$$

die am Schluss von Abschnitt 1.3 angegeben worden ist (A, C reell; $AC < |B|^2$), so erhalten wir mit $z = 1/w$

$$A + 2\operatorname{Re}(\bar{B}w) + Cw\bar{w} = A + 2\operatorname{Re}(Bw) + Cw\bar{w} = 0.$$

Dies besagt, dass Kreislinien und Geraden in ebensolche übergehen. Genauer kann man sagen, dass Geraden durch Null in ebensolche übergehen ($A = C = 0$); Geraden nicht durch Null werden in Kreislinien durch Null abgebildet und umgekehrt ($A = 0, C \neq 0$ bzw. $A \neq 0, C = 0$). Schließlich gehen Kreislinien nicht durch Null in ebensolche über ($AC \neq 0$).

Definition 6.8 (Möbiustransformation). Eine Abbildung $w = f(z)$, gegeben durch

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $ad - bc \neq 0$, heißt *Möbiustransformation*. Dieser wird die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Wir bemerken hier nur, dass eine analoge Matrix in höheren Dimensionen *Vahlen-Matrix* genannt wird. Die Abbildung ist auf $\hat{\mathbb{C}}$ mit entsprechend stetiger Festlegung in der chordalen Metrik festzulegen.

Die Namensgebungen gehen auf AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790–1868) und KARL THEODOR VAHLEN (1869–1945) zurück.

Man nennt die Möbiustransformationen auch (*gebrochen*) *lineare Abbildungen*. Ihre Ableitung lautet

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

sie zeigt, dass die Möbiustransformation konstant ist, wenn die Determinante $ac - bd$ der Matrix gleich Null ist, aber dieser Fall ist ausgeschlossen worden.

Aus $w = f(z)$ errechnet sich die Umkehrfunktion zu

$$z = f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a},$$

welche eine Matrix mit der gleichen Determinante wie f hat und gleichfalls eine Möbiustransformation ist. Eine Möbiustransformation stellt also eine eindeutige Abbildung sogar von $\hat{\mathbb{C}}$ auf $\hat{\mathbb{C}}$ dar, für $c \neq 0$ wird $z = -d/c$ auf $w = \infty$ abgebildet und $z = \infty$ auf $w = a/c$. Für $c = 0$ stellt die Möbiustransformation $f(z) = (az + b)/d$ offenbar die Komposition einer Translation und einer Drehstreckung dar. Für $c \neq 0$ liegt die Zusammensetzung einer Translation, einer Drehstreckung und einer Abbildung $w = 1/z$ vor, denn dann kann f in der Form

$$f(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \frac{1}{z + d/c}$$

geschrieben werden. Alle diese Teilabbildungen führen Kreislinien und Geraden in ebensolche über. Wir haben bewiesen:

Lemma 6.9. *Eine Möbiustransformation bildet die Kreislinien und Geraden in der z -Ebene auf ebensolche in der w -Ebene ab.*

Man überlegt sich leicht, dass die Möbiustransformationen bzgl. Komposition eine Gruppe bilden. Die Abbildung $f : z \rightarrow z$ ist das Einselement dieser Gruppe, die Inversen haben wir oben schon ausgerechnet, die Komposition zweier Möbiustransformationen gibt wieder eine solche, wie man durch Einsetzen leicht nachrechnen kann:

$$\zeta = \frac{a'w + b'}{c'w + d'}, \quad w = \frac{az + b}{cz + d}$$

ergibt

$$\zeta = \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)}.$$

Die Matrix der zusammengesetzten Möbiustransformation ist gerade das Produkt der beiden einzelnen Matrizen. Wir halten fest:

Lemma 6.10. *Die Möbiustransformationen bilden bezüglich Komposition eine Gruppe: die so genannte Möbiusgruppe.*

Die Möbiustransformationen haben viele interessante geometrische Eigenschaften, von denen wir zwei beweisen wollen.

Definition 6.11. Das *Doppelverhältnis* von vier verschiedenen Punkten in $\mathbb{C}$ ist wie folgt definiert:

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}.$$

Ist einer der vier Punkte $z = \infty$, so muss ein entsprechender Grenzübergang durchgeführt werden.

Für dieses Doppelverhältnis können wir nun verschiedene Eigenschaften zeigen:

Lemma 6.12 (Doppelverhältnis). (i) *Möbiustransformationen lassen das Doppelverhältnis von vier Punkten invariant.*

(ii) *Sind z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 gegebene, paarweise verschiedene Punkte, so führt die Möbiustransformation, die implizit durch die Gleichung*

$$[w_1, w_2, w_3, w] = [z_1, z_2, z_3, z]$$

definiert ist, die Punkte z_1, z_2, z_3 in dieser Reihenfolge in die Punkte w_1, w_2, w_3 über.

(iii) *Das Doppelverhältnis der vier Punkte z_1, z_2, z_3, z_4 ist genau dann reell, wenn sie auf einer Geraden oder einer Kreislinie liegen.*

Beweis. (i) Wir haben oben gesehen, dass wir eine Möbiustransformation in eine Translation, eine Drehstreckung und eventuell in eine Abbildung $w = 1/z$ zerlegen können: Bei einer Translation $w = z + a$ fällt das a in den Differenzen heraus, so dass die Invarianz des Doppelverhältnisses unmittelbar einsichtig ist. Für eine Drehstreckung $w = az$ gilt das Gleiche, denn das a kürzt sich in den Brüchen heraus. Es bleibt noch die Abbildung $w = 1/z$, für die wir

$$[w_1, w_2, w_3, w_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \frac{z_2 z_3}{z_1 z_3} \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \frac{z_1 z_4}{z_2 z_4} = [z_1, z_2, z_3, z_4],$$

erhalten, da sich auch hier sowohl die zusätzlichen Brüche wie die Vorzeichen aufheben.

(ii) w bzw. z lassen sich aus dem Doppelverhältnis immer eindeutig ausrechnen, speziell liest man aus

$$[z_1, z_2, z_3, z] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{z - z_2}{z - z_1}$$

ab, dass

$$[z_1, z_2, z_3, z_1] = \infty, \quad [z_1, z_2, z_3, z_2] = 0, \quad [z_1, z_2, z_3, z_3] = 1.$$

Dies gilt auch auf der w -Seite, so dass bei der im Lemma angegebenen Abbildung tatsächlich z_1 in w_1 , z_2 in w_2 und z_3 in w_3 übergehen müssen.

(iii) Der Beweis werde dem Leser als Übung empfohlen (vgl. Aufgabe 6.3.4). $\square$

Beispiel 6.13. a) Wir wollen eine Transformation angeben, die die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = B_1(0)$ in die obere Halbebene abbildet. Nach unserem Lemma wählen wir die Punkte $-1, -i, 1$ auf dem Einheitskreis und bilden sie auf die Punkte $-1, 0, 1$ auf der reellen Achse ab, dabei liegen bei der gegebenen Durchlaufrihtung sowohl der Einheitskreis wie die obere Halbebene zur Linken. Es ergibt sich

$$\frac{1+i}{1} \frac{w}{w+1} = \frac{1+i}{1+i} \frac{z+i}{z+1}$$

oder

$$\frac{w}{w+1} = \frac{1}{1+i} \frac{z+i}{z+1}$$

und schließlich

$$w = \frac{z+i}{iz+1}.$$

Das ist die nach dem englischen Mathematiker ARTHUR CAYLEY (1821–1895) benannte Abbildung.

b) Die Gruppe der Möbiustransformationen hat viele interessante Untergruppen, so stellen auch die Möbiustransformationen der Form

$$w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad |z_0| < 1, \theta \in \mathbb{R},$$

eine Gruppe dar. Es handelt sich um die Transformationen, die das Innere der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ in sich überführen (vgl. Aufgabe 6.3.5).

6.2.2 Möbiustransformationen in höheren Dimensionen

Leider treten in $\mathbb{H}$ und $Cl(n)$ eine Reihe von Schwierigkeiten mit Möbiustransformationen auf, zum Teil sind sie durch die Nichtkommutativität bedingt. Erstmals hat Vahlen [154] in dieser Richtung Ergebnisse angegeben, danach Maaß [98], in den achtziger Jahren des letzten Jahrhunderts hat Ahlfors diese Idee in einer Reihe von Arbeiten [2]–[4] verfolgt, hingewiesen sei auch auf die Dissertation von Zöll [159].

Am Schluss von Abschnitt 1.3 haben wir für Kreislinien und Geraden in der Ebene eine einheitliche Gleichung angegeben, das wollen wir jetzt auch in höheren Dimensionen durchführen. Eine n -dimensionale Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ wird durch die Gleichung

$$x \cdot B = c$$

oder

$$x \overline{B} + \overline{x} B = 2c =: -C$$

mit reellem c und einem Paravektor B beschrieben. Eine Sphäre, also eine n -dimensionale Kugeloberfläche im $\mathbb{R}^{n+1}$, hat die Gleichung

$$(x + B)(\overline{x} + \overline{B}) = r^2$$

mit dem Mittelpunkt $-B$ und dem Radius r der Sphäre. Dies führt auf

$$x\bar{x} + x\bar{B} + \bar{x}B = r^2 - |B|^2 =: -C.$$

Wir können zusammenfassen:

Lemma 6.14. *Hyperebenen und Sphären der Dimension n im $\mathbb{R}^{n+1}$ werden durch die Gleichung*

$$Ax\bar{x} + x\bar{B} + \bar{x}B + C = 0$$

beschrieben, dabei sind A und C reell, B ein beliebiger Paravektor, und es muss

$$|B|^2 - AC > 0$$

gelten. Für $A = 0$ liegt eine Hyperebene vor, für $A \neq 0$ eine Sphäre.

Bei einer Translation

$$x' = x + a$$

mit $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ wird diese Gleichung in eine entsprechende Gleichung desselben Typs übergeführt, Hyperebenen und Sphären also in ebensolche. Das Gleiche gilt für Drehstreckungen der Form

$$x' = axb,$$

wobei bis auf eine reelle Konstante – eben die Streckung – durch diese Gleichung Drehungen beschrieben werden. In $\mathbb{H}$ wird durch den Satz von Cayley 2.27 keine weitere Bedingung gestellt, im $\mathbb{R}^{n+1}$ sind die Forderungen des Satzes 3.20 zu erfüllen, dann liegt x in $\mathbb{H}$ bzw. im $\mathbb{R}^{n+1}$. Die einfachen Rechnungen bleiben dem Leser vorbehalten. Schließlich betrachten wir wie in der Ebene Abbildungen der Form

$$x' = \frac{1}{x} = \frac{\bar{x}}{|x|^2},$$

Auch hier liegt x' in $\mathbb{H}$ bzw. im $\mathbb{R}^{n+1}$ und es lässt sich leicht nachrechnen, dass dabei Hyperebenen in Sphären übergehen und umgekehrt. Wir halten fest:

Lemma 6.15. *Translationen, Drehstreckungen und die Abbildung $x' = 1/x$ lassen die Menge der Hyperebenen und Sphären invariant (vgl. Aufgabe 6.3.6).*

Wir kommen nun zu den Möbiustransformationen. Der Übersichtlichkeit halber betrachten wir die beiden Fälle $\mathbb{H}$ und $\mathbb{R}^{n+1}$ getrennt, es treten doch einige Unterschiede auf:

Definition 6.16. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{H}$. Die Abbildung

$$f(x) = (ax + b)(cx + d)^{-1} \quad (f(x) = (xc + d)^{-1}(xa + b))$$

mit

$$\begin{aligned} & cac^{-1}d - cb \neq 0 \quad \text{für } c \neq 0 \quad \text{und} \quad ad \neq 0 \quad \text{für } c = 0 \\ & (dc^{-1}ac - bc \neq 0 \quad \text{für } c \neq 0 \quad \text{und} \quad da \neq 0 \quad \text{für } c = 0) \end{aligned}$$

heißt *Möbiustransformation in Linksdarstellung* (*Möbiustransformation in Rechtsdarstellung*). Die zugehörige Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

heißt *Vahlen-Matrix*. Möbiustransformationen sind auf $\hat{\mathbb{H}}$ in der chordalen Metrik stetig fortsetzbar.

H entspricht der Determinante im ebenen Fall, ist c mit a vertauschbar, so ist dies auch formal gegeben. Es gilt ein entsprechender Satz wie in der Ebene $\mathbb{C}$:

Satz 6.17. (i) *Möbiustransformationen lassen die Menge der Hyperebenen und Sphären invariant.*

(ii) *Die Linksdarstellung kann in eine Rechtsdarstellung umgerechnet werden und umgekehrt.*

(iii) *Die Möbiustransformationen bilden eine Gruppe.*

Wie in der Ebene gibt es für jede der Abbildungen eine ganze Klasse von Darstellungen.

Beweis. (i) Für $c \neq 0$ rechnet man wie folgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax + b)(cx + d)^{-1} = (a(x + c^{-1}d) + b - ac^{-1}d)(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1} \\ &= ac^{-1} - c^{-1}H(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1}, \end{aligned}$$

ganz entsprechend für die Rechtsdarstellung. Es ist ersichtlich, dass sich die Abbildung aus Translationen, Drehstreckungen und einer Abbildung $x' = 1/x$ zusammensetzt, so dass nach dem letzten Lemma die Menge der Hyperebenen und Sphären invariant bleibt. Für $c = 0$ hat man sofort

$$f(x) = (ax + b)d^{-1} \text{ bzw. } f(x) = d^{-1}(xa + b)$$

mit der gleichen Folgerung. Natürlich müssen hier a und d von Null verschieden sein, also $H \neq 0$. Übrigens sieht man, dass $H = 0$ der konstanten Abbildung entsprechen würde, das haben wir ausgeschlossen.

(ii) Wir gehen von der Linksdarstellung aus: für $c = 0$ ist notwendig $a \neq 0$, und wir erhalten mit

$$f(x) = axd^{-1} + bd^{-1} = (a^{-1})^{-1}(xd^{-1} + a^{-1}bd^{-1})$$

die gewünschte Rechtsdarstellung. Für $c \neq 0$ folgt unter Benutzung der Formel unter (i)

$$\begin{aligned} f(x) &= ac^{-1} - c^{-1}H(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1} = ac^{-1} - [(x + c^{-1}d)H^{-1}c]^{-1}c^{-1} \\ &= (xH^{-1}c + c^{-1}dH^{-1}c)^{-1}(xH^{-1}cac^{-1} + c^{-1}dH^{-1}cac^{-1} - c^{-1}). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die neuen Koeffizienten mit einem Index r , so lauten sie für $c \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_r &= H^{-1}cac^{-1}, \quad b_r = c^{-1}dH^{-1}cac^{-1} - c^{-1}, \\ c_r &= H^{-1}c, \quad d_r = c^{-1}dH^{-1}c. \end{aligned}$$

Für $c = 0$ gilt

$$a_r = d^{-1}, \quad b_r = a^{-1}bd^{-1}, \quad c_r = 0, \quad d_r = a^{-1}.$$

Die neue Determinante für die Rechtsdarstellung muss natürlich wieder ungleich Null sein. Die Rechnungen in umgekehrter Richtung verlaufen entsprechend.

(iii) Die Umkehrabbildung von $x' = (ax + b)(cx + d)^{-1}$ errechnet sich leicht zu

$$x = (x'c - a)^{-1}(-x'd + b)$$

in einer Rechtsdarstellung, die Determinante bleibt unverändert. Das Einselement der Gruppe ist natürlich die Identität. Die Verknüpfung mit einer zweiten Möbiustransformation $x'' = (a'x' + b')(c'x' + d')^{-1}$ ergibt sich wie in $\mathbb{C}$ zu

$$x'' = ((a'a + b'c)x + (a'b + b'd))((c'a + d'c)x + (c'b + d'd))^{-1},$$

das ist wieder eine Möbiustransformation mit einer Vahlen-Matrix, die das Produkt der beiden einzelnen Vahlen-Matrizen ist. Die Determinante muss von Null verschieden sein, da sonst eine der beiden einzelnen Abbildungen konstant sein müsste. Damit sind alle notwendigen Gruppeneigenschaften gegeben. $\square$

In $Cl(n)$ gilt nun Entsprechendes, wobei hier die zusätzliche Schwierigkeit auftritt, dass die Möbiustransformation auch tatsächlich in den $\mathbb{R}^{n+1}$ abbilden muss. Daneben muss wie in den Quaternionen ausgeschlossen werden, dass die Abbildung konstant ist.

Definition 6.18. Auch im $\mathbb{R}^{n+1}$ werden die Abbildungen

$$f(x) = (ax + b)(cx + d)^{-1} \text{ bzw. } f(x) = (xc + d)^{-1}(xa + b)$$

mit $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $a, b, c, d \in \Gamma'_{n+1} := \Gamma_{n+1} \cup \{0\}$ als *Möbiustransformation* bezeichnet, die erste Form heißt *Linksdarstellung*, die zweite *Rechtsdarstellung*.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

heißt wieder *Vahlen-Matrix*, Γ_{n+1} ist die Clifford-Gruppe gemäß Satz 3.20. Dabei wird für die Linksdarstellung vorausgesetzt, dass

$$H^* := a\hat{d} - b\hat{c} \in \mathbb{R}_0 := \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

wobei $\hat{d}$ die Reversion gemäß Definition 3.9 bezeichnet. Für $c \neq 0$ gelte zusätzlich

$$ac^{-1}, c^{-1}d \in \mathbb{R}^{n+1}$$

und für $c = 0$ nur $bd^{-1} \in \mathbb{R}^{n+1}$. In der Rechtsdarstellung lautet dies

$$H^* := \hat{d}a - \hat{c}b \in \mathbb{R}_0,$$

für $c \neq 0$ seien hier

$$c^{-1}a, dc^{-1} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

und schließlich für $c = 0$ sei $d^{-1}b \in \mathbb{R}^{n+1}$. Die Abbildung ist auf die Einpunkt-kompaktifizierung $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ mit der chordalen Metrik stetig fortzusetzen.

Dabei ist H^* der Determinante in $\mathbb{C}$ formal näher als die Determinante H im Quaternionenkalkül, aber wir werden auch hier H schreiben. Es gilt ein dem vorherigen entsprechender Satz:

Satz 6.19. (i) Möbiustransformationen bilden den $\hat{R}^{n+1}$ auf sich ab und lassen die Menge der Hyperebenen und Sphären invariant.

(ii) Die Linksdarstellung kann in eine Rechtsdarstellung umgerechnet werden und umgekehrt.

(iii) Die Möbiustransformationen bilden eine Gruppe.

Auch hier hat man für eine Abbildung die verschiedensten Darstellungsmöglichkeiten.

Beweis. (i) Wie in $\mathbb{H}$ ist für $c \neq 0$

$$f(x) = ac^{-1} + (b - ac^{-1}d)(x + c^{-1}d)^{-1}c^{-1}.$$

Da $ac^{-1}, c^{-1}d \in \mathbb{R}^{n+1}$ vorausgesetzt wurde, veranlassen diese beiden Summanden nur Translationen im $\mathbb{R}^{n+1}$. Ferner setzt sich $(x + c^{-1}d)^{-1}$ aus einer Translation und der Abbildung $x' = 1/x$ zusammen, die auch in den $\mathbb{R}^{n+1}$ führen. Zu untersuchen bleibt die Abbildung

$$x' = (b - ac^{-1}d)xc^{-1}.$$

Nun ist wegen $c^{-1}d \in \mathbb{R}^{n+1}$ noch $c^{-1}d = (c^{-1}d) = \hat{d}\hat{c}^{-1}$, daraus folgt

$$c^{-1}H = b - ac^{-1}d = b - a\hat{d}\hat{c}^{-1} = (b\hat{c} - a\hat{d})\hat{c}^{-1} = \lambda\hat{c}^{-1},$$

da die Klammer reell und von Null verschieden sein sollte. Damit wird

$$x' = \lambda\hat{c}^{-1}xc^{-1},$$

das ist gemäß Satz 3.20 eine Drehung für $\lambda = 1$, sonst eine Drehstreckung. Damit ist nach den Überlegungen zu Beginn dieses Unterabschnittes dieser Fall bewiesen.

Für $c = 0$ gilt $f(x) = axd^{-1} + bd^{-1}$. Wegen $bd^{-1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ liefert dieser Summand eine Translation. Aus $H^* = a\hat{d} \in \mathbb{R}$ folgt weiter mit einem reellen $\lambda \neq 0$

$$a = \lambda\hat{d}^{-1},$$

das ergibt wieder die gewünschte Drehstreckung im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Bezüglich (ii) und (iii) verlaufen die Beweise genau wie in $\mathbb{H}$ und brauchen nicht wiederholt zu werden. $\square$

Als Letztes sollen die Möbiustransformationen differenziert werden, es wird sich im Gegensatz zu $\mathbb{C}$ zeigen, dass sie in $\mathbb{H}$ und $C\ell(n)$ für $n \geq 2$ keine holomorphen Funktionen sind.

Lemma 6.20. Für $f(x) = (ax + b)(cx + d)^{-1}$ gilt mit $h \in \mathbb{H}$ bzw. $h \in \mathbb{R}^{n+1}$

(i) $f'(x)[h] = (xc_r + d_r)^{-1}h(cx + d)^{-1},$

(ii) $(\bar{\partial}f)(x) = -(n-1)(\overline{xc_r + d_r})^{-1}(cx + d)^{-1},$

$$(iii) \quad (f\bar{\partial})(x) = -(n-1)(xc_r + d_r)^{-1}(\overline{cx+d})^{-1}.$$

Daran ist wie angekündigt zu sehen, dass eine Möbiustransformation weder links- noch rechts-holomorph ist. Der Faktor $n-1$ lässt auch erkennen, warum in der Ebene die Ableitung Null ist, also eine holomorphe Funktion vorliegt. Trotzdem leisten uns diese Abbildungen noch nützliche Dienste bei den Variablentransformationen der Integration. Die Ableitung f' ist im Sinne einer Abbildung zwischen Vektorräumen zu verstehen, das h ist das dabei auftretende zusätzliche Argument. Die Ableitung lässt sich aber recht gut berechnen.

Beweis. (i) Erneut erst einmal für $c \neq 0$ berechnen wir

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= (ax+b)(cx+d)^{-1} - (yc_r + d_r)^{-1}(ya_r + b_r) \\ &= (yc_r + d_r)^{-1} [(yc_r + d_r)(ax+b) - (ya_r + b_r)(cx+d)] (cx+d)^{-1} \\ &= (yc_r + d_r)^{-1} [y(c_r a - a_r c)x + y(c_r b - a_r d) \\ &\quad + (d_r a - b_r c)x + (d_r b - b_r d)] (cx+d)^{-1}. \end{aligned}$$

Erstaunlicherweise vereinfacht sich dies mit den oben errechneten Ausdrücken für die Rechtskoeffizienten (Beweis von Satz 6.17 (ii)):

$$\begin{aligned} c_r a - a_r c &= 0, & d_r b - b_r d &= 0 \\ d_r a - b_r c &= 1, & c_r b - a_r d &= -1. \end{aligned}$$

Damit hat man wie gewünscht

$$f(x) - f(y) = (yc_r + d_r)^{-1}(x-y)(cx+d)^{-1},$$

für $c = c_r = 0$ rechnet man dies auch sehr leicht nach. Ersetzen wir jetzt x durch $x+h$ und y durch x , so ergibt sich

$$f(x+h) - f(x) = (xc_r + d_r)^{-1} h (c(x+h) + d)^{-1}.$$

Wenn wir die gleiche Formel auf $g(x) = (cx+d)^{-1}$ anwenden, erhalten wir

$$g(x+h) = (cx+d)^{-1} + |h|O(1),$$

was wiederum für unser $f(x)$ ergibt

$$f(x+h) = f(x) + (xc_r + d_r)^{-1} h (cx+d)^{-1} + |h|^2 O(1),$$

das ist die gewünschte Aussage für $f'(x)$.

(ii) Wegen $\partial_i f(x) = f'(x)[e_i] = (xc_r + d_r)^{-1} e_i (cx+d)^{-1}$ haben wir weiter

$$(\bar{\partial}f)(x) = \sum_{i=0}^n e_i (xc_r + d_r)^{-1} e_i (cx+d)^{-1} = -(n-1)(\overline{xc_r + d_r})^{-1} (cx+d)^{-1}.$$

Dabei ist die Formel aus Aufgabe 3.5.5 zu verwenden.

(iii) Der Beweis verläuft völlig analog zu (ii). □

6.3 Aufgaben

1. Man beweise die Abschätzung

$$|\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x)| \leq |z_1|^{k_1} \dots |z_n|^{k_n} = |\mathbf{z}|^{\mathbf{k}} \leq |x|^{|\mathbf{k}|}.$$

2. Man beweise die *Binomische Formel* für Fueter-Polynome: Für alle x und y im $\mathbb{R}^{n+1}$ gilt ($\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ Multiindizes)

$$\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x+y) = \sum_{\mathbf{i}+\mathbf{j}=\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}!}{\mathbf{i}!\mathbf{j}!} \mathcal{P}_{\mathbf{i}}(x) \mathcal{P}_{\mathbf{j}}(y).$$

Dazu wende man vollständige Induktion nach $|\mathbf{k}|$ an und weise beim Schluss von $|\mathbf{k}| - 1$ auf $|\mathbf{k}|$ die Behauptung durch Differentiation nach den x_i nach.

3. Man zeige, dass die Möbiustransformationen der Form

$$w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}, \quad |z_0| < 1, \theta \in \mathbb{R},$$

eine Gruppe bilden.

4. Man beweise, dass das Doppelverhältnis der Punkte z_1, z_2, z_3, z_4 genau dann reell ist, wenn die Punkte auf einer Geraden oder einer Kreislinie liegen. (Lemma 6.12 (iii)).
5. Man bestimme eine Möbiustransformation, die das Innere des Einheitskreises auf die rechte Halbebene abbildet.
6. Man beweise, dass

$$x' = \frac{r^2}{\overline{x}}$$

eine Spiegelung an der Kugel $\{|x| = r\}$ darstellt. Dazu müssen x und x' auf demselben Strahl vom Nullpunkt aus liegen und x' muss der polare Punkt zu x sein.

7. Man gebe die Möbiustransformation im $\mathbb{R}^{n+1}$ an, die das Innere der Sphäre S^n auf den Halbraum $\{x_0 \geq 0\}$ abbildet.
8. Man weise nach, dass Translationen, Drehstreckungen und die Abbildung $x' = 1/\overline{x}$ die Menge der Hyperebenen und Sphären im $\mathbb{R}^{n+1}$ invariant lassen.

7 Integralsätze und Integralformeln

7.1 Cauchyscher Integralsatz und dessen Umkehrung

Der Cauchysche Integralsatz gehört zu den zentralen Ergebnissen der Funktionentheorie und besagt in seiner klassischen komplexen Formulierung, dass für eine in einem Gebiet G holomorphe Funktion f das Integral entlang einer geschlossenen hinreichend glatten Kurve, die in G verläuft, stets den Wert Null hat.

Cauchy (s. Abschnitt 5.1) bewies seinen berühmten Satz 1825 (vgl. [23]). Er formulierte ihn für Rechteckränder und verwendete Methoden des Variationskalküls. EDOUARD GOURSAT (1858–1936) betrachtete 1883 Gebiete mit allgemeinerem Rand und verzichtete auf die Forderung nach der Stetigkeit der Ableitung f' . Es war schließlich ALFRED PRINGSHEIM (1850–1941), der den Cauchyschen Integralsatz vermöge eines Beweises, der auf einer Dreieckszerlegung beruht, auf die heute übliche Form brachte. Ein Fülle weiterer interessanter historischer Fakten kann der Leser in ([120], S. 153) finden.

Für uns ist der Cauchysche Integralsatz eine einfache Folgerung aus dem Satz von Gauß in $C\ell(n)$ A.2.22:

Satz 7.1 (Integralsatz von Cauchy in $C\ell(n)$). *Es seien $f, g \in C^1(\overline{G})$, G sei ein beschränktes Gebiet von endlichem Zusammenhang mit einem hinreichend glatten Rand ∂G , so dass stets die Flächennormale nach außen zeigt. In G sei f rechts-holomorph und g links-holomorph. Dann gilt*

$$\int_{\partial G} f(x) dx^* g(x) = 0.$$

Der klassische Beweis für den Integralsatz von Cauchy in der Ebene verwendet die Methode von Goursat. B. Wirthgen [103] hat dies auf höhere Dimensionen übertragen, so dass auch dieser Beweis möglich wäre. Der Aufwand ist aber erheblich, wir beschränken uns auf den angegebenen Zugang.

Für $n = 1$ ist $C\ell(n) = \mathbb{C}$. Dort können wir der Kommutativität halber mit einer holomorphen Funktion f arbeiten, es ergibt sich folgende Formulierung:

Satz 7.2 (Integralsatz von Cauchy in $\mathbb{C}$). *Es sei G ein beschränktes Gebiet, dessen Rand ∂G aus endlich vielen stückweise glatten Kurven besteht. Die Randkurven seien so orientiert, dass G zur Linken liegt. Die Funktion f sei in G holomorph und in $\overline{G}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 0.$$

Wir wollen jetzt mit dem Satz des italienischen Mathematikers GIACINTO MORERA (1856–1909) eine Art Umkehrung des Integralsatzes beweisen, die die Gleichwertigkeit des Satzes von Cauchy mit der Definition der Holomorphie zeigt.

Satz 7.3 (Satz von Morera in $C\ell(n)$). Im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei $f \in C^1(G)$. Wenn für alle Kugeln $B_r(x) \subset G$ gilt

$$\int_{\partial B_r(x)} dy^* f(y) = 0,$$

so ist notwendig $\bar{\partial}f = 0$ in G , f also eine links-holomorphe Funktion.

Beweis. Es sei $x \in G$ ein beliebiger Punkt, dann folgt aus dem Satz von Gauß in $C\ell(n)$

$$0 = \int_{\partial B_r(x)} dy^* f(y) = \int_{B_r(x)} \bar{\partial}f(y) d\sigma_y.$$

Wegen der Stetigkeit von $\bar{\partial}f$ einerseits und dem Satz von Lebesgue aus der Integralrechnung andererseits erhalten wir mit den Volumina V_r der Kugeln vom Radius r

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V_r} \int_{B_r(x)} \bar{\partial}f d\sigma = \bar{\partial}f(x) = 0,$$

also ist f eine links-holomorphe Funktion in G . □

In $\mathbb{C}$ wurde der Satz 1886 von Morera bewiesen, dort existiert eine Stammfunktion und der Satz kann anders und mit schwächeren Voraussetzungen formuliert werden:

Satz 7.4 (Satz von Morera in $\mathbb{C}$). Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig in G . Gilt dann

$$\int_{\Pi} f(z) dz = 0$$

für jeden geschlossenen Polygonzug Π in G , so ist f holomorph in G und besitzt dort eine Stammfunktion F mit $F'(z) = f(z)$ in G .

Beweis. Eine Schwierigkeit der Voraussetzungen des Satzes von Morera liegt in den eventuell vorhandenen “Löchern” im Gebiet, um die man in jeder Richtung herum integrieren können muss. Das ist nicht immer gegeben, wie man an dem Integral über $1/z$ längs der Einheitskreislinie sehen kann (vgl. Aufgabe 7.4.3).

Es sei z_0 ein beliebiger, aber fester Punkt in G . Wir definieren

$$F(z) := \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta,$$

wobei die Integration längs eines beliebigen Polygonzuges Π auszuführen ist, der z_0 und z in G verbindet. Wegen der Voraussetzung im Satz von Morera definiert dies eine eindeutig bestimmte Funktion F , denn das Integral über einen anderen Polygonzug Π_1 kann keinen anderen Wert haben, da das Integral über $\Pi + (-\Pi_1)$ den Wert Null ergibt. Wir untersuchen die Differenzierbarkeit von F :

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta.$$

Wenn $|h|$ klein genug ist, liegt $z + h$ in einem kleinen Kreis um z , der ganz zu G gehört, so dass wir hier über die Strecke von z nach $z + h$ integrieren können, wozu die Wegunabhängigkeit des Integrals gleichfalls vonnöten ist.

Da f stetig ist, haben wir $f(\zeta) = f(z) + o(1)$ für alle ζ auf der Strecke von z nach $z + h$, also

$$\frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{h} f(z)h + R(h)$$

mit dem Restglied

$$R(h) := \frac{1}{h} \int_z^{z+h} o(1) d\zeta.$$

Der Stetigkeit wegen ist $|o(1)| < \varepsilon$ für $|h| < \delta$, so dass auch $|R(h)| \leq \varepsilon$ folgt, also $R(h) = o(1)$, damit ist

$$F'(z) = f(z)$$

bewiesen. Mithin ist F eine holomorphe Funktion und, wie wir sehen werden, auch f . $\square$

Wenn das Gebiet *sternförmig* bezüglich eines Punktes z_0 ist, d.h. wenn es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt, so dass jeder Punkt $z \in G$ mit z_0 durch eine in G verlaufende Strecke verbunden werden kann, so genügt beim Satz von Morera die Voraussetzung, dass das Kurvenintegral über den Rand aller Dreiecke in G mit einer Ecke in z_0 verschwindet.

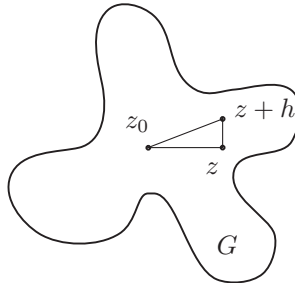


Abbildung 7.1

Wir bezeichnen eine Eigenschaft einer Funktion in einem Gebiet G als *lokal*, wenn es zu jedem Punkt $x \in G$ eine kleine Kugel (oder Kreisscheibe) um x gibt, die in G liegt und in der die fragliche Eigenschaft gegeben ist. Typische Eigenschaften dieser Art sind zum Beispiel die Holomorphie selbst und die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen. Letztere ist meist nur lokal gegeben, da die Konvergenz in der Nähe des Randes von G im allgemeinen schlechter wird.

Wir wollen eine Ergänzung des Satzes von Cauchy formulieren, die die Gleichwertigkeit mit der Holomorphie zeigt:

Satz 7.5. *Eine stetige Funktion f in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn dort lokal die Integrale über die Ränder von allen Dreiecken Null sind.*

Beweis. Wenn wir uns auf eine kleine Kreisscheibe in G beschränken, so folgt die Aussage sofort aus dem soeben bewiesenen Satz von Morera in $\mathbb{C}$. $\square$

7.2 Formeln von Borel–Pompeiu und Cauchy

7.2.1 Formel von Borel–Pompeiu

Dieser Abschnitt ist der Behandlung einer Integralformel gewidmet, die nach dem französischen Mathematiker ÉMILE BOREL (1871–1956) und dem Rumänen DIMITRIE POMPEIU (1873–1954) benannt ist. Die Anwendung auf holomorphe Funktionen ergibt dann die Cauchysche Integralformel, die den eigentlichen Einstieg in die klassische Funktionentheorie bedeutet. Natürlich geht die Formel von Cauchy der von Borel–Pompeiu zeitlich weit voran. Wir beweisen die Aussage in $\mathbb{C}$ nicht gesondert, sie ist in dem Satz in $C\ell(n)$ enthalten.

Für die Integralformeln benötigen wir den so genannten *Cauchy-Kern*, das ist in gewissem Sinne die schwächste isolierte Singularität, die eine holomorphe Funktion in einem Punkt haben kann:

Definition 7.6. Wir bezeichnen mit $E_n(x)$ die im $\mathbb{R}^{n+1}$ definierte Funktion, den *Cauchy-Kern*

$$E_n(x) = \frac{1}{\sigma_n} \frac{\bar{x}}{|x|^{n+1}} \quad (x \neq 0),$$

wobei σ_n die Oberfläche der Einheitskugel S^n im $\mathbb{R}^{n+1}$ sei. Gemäß Beispiel A.2.17 a haben wir mit der Gammafunktion aus Abschnitt 13.1

$$\sigma_n = 2 \frac{\Gamma^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

In $\mathbb{C}$ vereinfacht sich der Cauchy-Kern zu

$$E_1(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{z}.$$

Lemma 7.7. *Der Cauchy-Kern ist rechts- und links-holomorph.*

Beweis. Es ist

$$\bar{\partial} \frac{\bar{x}}{|x|^{n+1}} = (\bar{\partial} \bar{x}) \frac{1}{|x|^{n+1}} + \left(\bar{\partial} (|x|^2)^{-(n+1)/2} \right) \bar{x},$$

und mit

$$\bar{\partial} \bar{x} = \sum_{i=0}^n e_i \bar{e}_i = n + 1, \quad \bar{\partial} |x|^2 = 2 \sum_{i=0}^n x_i e_i = 2x$$

folgt wie gewünscht (analog für die Rechtsholomorphie)

$$\bar{\partial} \frac{\bar{x}}{|x|^{n+1}} = 0.$$

□

Satz 7.8 (Formel von Borel-Pompeiu in $C\ell(n)$). *Es sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein beschränktes Gebiet mit einem hinreichend glatten Rand und nach außen orientierter Normale. Dann gilt für jedes $f \in C^1(\overline{G})$*

$$\int_{\partial G} E_n(y-x) dy^* f(y) - \int_G E_n(y-x) (\bar{\partial} f)(y) d\sigma_y = \begin{cases} f(x), & x \in G, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{G}. \end{cases}$$

Beweis. Wir schneiden aus G die Kugel $B_\varepsilon(x)$ heraus. Es entsteht das Gebiet $G_\varepsilon := G \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$ mit dem Rand $\partial G_\varepsilon = \partial G \cup (-S_\varepsilon)$, wobei S_ε die Sphäre mit dem Radius ε um x ist. Mit dem Minuszeichen wird die Orientierung der Normale in das Innere der Kugel als dem Äußeren von G_ε berücksichtigt. Wir wenden nun den Satz von Gauß A.2.22 auf das Gebiet G_ε und die Funktionen $E_n(y-x)$ und $f(y)$ mit der Integrationsvariablen y an und erhalten der Holomorphie von $E_n(y-x)$ wegen

$$\int_{\partial G} E_n(y-x) dy^* f(y) - \int_{S_\varepsilon} E_n(y-x) dy^* f(y) = \int_{G_\varepsilon} E_n(y-x) (\bar{\partial} f)(y) d\sigma_y.$$

Für das zweite Integral folgt gemäß den Spezialfällen A.2.17 b) und c) mit $\tilde{y} = (y-x)/|y-x|$

$$\begin{aligned} \int_{S_\varepsilon} E_n(y-x) dy^* f(y) &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_\varepsilon} \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{n+1}} \frac{y-x}{|y-x|} f(y) \varepsilon^n |d\sigma_{\tilde{y}}| \\ &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_1} f(x + \varepsilon \tilde{y}) |d\sigma_{\tilde{y}}|. \end{aligned}$$

Der Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt infolge der Stetigkeit von f

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_1} f(x + \varepsilon \tilde{y}) |d\sigma_{\tilde{y}}| = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_1} |d\sigma_{\tilde{y}}| f(x) = f(x).$$

Das Gebietsintegral über G_ε macht für $\varepsilon \rightarrow 0$ keine Schwierigkeiten, obwohl $E_n(y-x)$ dann singularär wird. In Koordinaten $y-x = rt$ mit $|t| = 1$ gilt nach Spezialfall A.2.17 b)

$$E_n(y-x) = \frac{1}{\sigma_n} \frac{\bar{t}}{r^n}, \quad d\sigma_y = r^n dr |d\sigma_t|,$$

so dass sich die Singularität forthebt und das Gebietsintegral konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

Die Algebra $C\ell(n)$ geht für $n = 1$ in $\mathbb{C}$ über. Wir erhalten die Borel-Pompeiu-Formel der komplexen Analysis:

Satz 7.9 (Formel von Borel-Pompeiu in $\mathbb{C}$). *Sei G ein Gebiet endlichen Zusammenhangs mit stückweise glatten Randkurven, die so orientiert seien, dass beim Durchlaufen der Randkurve $\partial G = \Gamma$ das Gebiet G stets auf der linken Seite liegt. Die Funktion $f \in C^1(\overline{G})$ sei komplexwertig. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_G \frac{\partial_{\bar{\zeta}} f(\zeta)}{\zeta - z} d\sigma_\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in G, \\ 0, & z \notin \overline{G}. \end{cases}$$

Bezüglich des Begriffes *stückweise glatt* sei auf das Beispiel A.2.10 a) verwiesen, bezüglich des *endlichen Zusammenhanges* auf Definition A.2.19.

Aus der Formel von Borel–Pompeiu können wichtige Folgerungen gezogen werden, aber wir wollen hier nur einige Bezeichnungen anschließen, die heute üblich geworden sind und mit denen wir uns noch auseinander setzen werden.

Definition 7.10. Es sei $f \in C^1(\overline{G})$ und ∂G eine hinreichend glatte Mannigfaltigkeit. Der Operator $F_{\partial G}$, definiert durch

$$(F_{\partial G}f)(x) := \int_{\partial G} E_n(y-x) dy^* f(y),$$

heißt *Cauchy–Bitsadze-Operator* oder kürzer *Cauchy-Integral*. Der Operator T_G , definiert durch

$$(T_Gf)(x) = - \int_G E_n(y-x) f(y) d\sigma_y,$$

heißt *Teodorescu-Transformation*.

Bemerkung 7.11. In dieser neuen Bezeichnung erhält die Borel–Pompeiu-Formel die Darstellung

$$(F_{\partial G}f)(x) + (T_G(\partial f))(x) = \begin{cases} f(x), & x \in G, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}. \end{cases}$$

7.2.2 Formel von Cauchy

Wir können nun sehr einfach auf die Formel von Cauchy schließen, die den Einstieg in große Teile der Funktionentheorie darstellt. Im nächsten Abschnitt werden wir erste Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel ziehen. Zu deren Beweis setzen wir in die Formel von Borel–Pompeiu nur eine links-holomorphe Funktion ein, dann fällt das Gebietsintegral fort:

Satz 7.12 (Integralformel von Cauchy). *Es sei $G \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein beschränktes Gebiet mit einem hinreichend glatten Rand mit nach außen orientierter Normale. Ferner sei $f \in C^1(\overline{G})$ links-holomorph, dann gilt*

$$\int_{\partial G} E_n(y-x) dy^* f(y) = \begin{cases} f(x), & x \in G, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{G}. \end{cases}$$

Für eine rechts-holomorphe Funktion sind f und $E_n(y-x)$ zu vertauschen. Speziell gilt für $n = 1$:

Satz 7.13 (Integralformel von Cauchy in $\mathbb{C}$). *Sei G ein Gebiet endlichen Zusammenhanges mit stückweise glatten Randkurven, die so orientiert seien, dass beim*

Durchlaufen der Randkurve $\partial G = \Gamma$ das Gebiet G stets auf der linken Seite liegt. Die Funktion f sei holomorph in G und stetig in $\overline{G}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in G, \\ 0, & z \notin \overline{G}. \end{cases}$$

Die Cauchysche Integralformel zeigt, dass die Funktion f vollständig durch ihre Randwerte auf ∂G bestimmt ist. Dieser starke innere Zusammenhang einer holomorphen Funktion ist für viele interessante Eigenschaften verantwortlich. Zur Geschichte der Formeln von Cauchy und Borel–Pompeiu lese man den nachfolgenden Unterabschnitt 7.2.4.

Wir wollen hier noch eine Abwandlung der Cauchyschen Integralformel beweisen, die sich auf das so genannte *Außengebiet* bezieht. Dazu betrachten wir eine *Jordanfläche* Γ , das sei eine stückweise glatte und beschränkte Mannigfaltigkeit, deren Komplement bezüglich des $\mathbb{R}^{n+1}$ genau aus zwei Gebieten besteht. Der $\mathbb{R}^{n+1}$ wird also in Γ und zwei Gebiete zerlegt, deren eines den Punkt ∞ als Randpunkt enthält; dieses sei das *Außengebiet* G^- von Γ , entsprechend heißt $G^+ = \mathbb{R}^{n+1} \setminus (\Gamma \cup G^-)$ *Innengebiet* von Γ . Dann gilt:

Satz 7.14 (Integralformel von Cauchy im Außengebiet). *Es sei Γ eine Jordanfläche mit dem Außengebiet G^- und dem Innengebiet G^+ . Die Orientierung von Γ sei so gewählt, dass die Normale nach G^+ zeigt. Die Funktion f sei in G^- links-holomorph und in $G^- \cup \Gamma$ stetig differenzierbar und besitze ferner in $x = \infty$ den Grenzwert $f(\infty)$ im Sinne der chordalen Metrik. Dann gilt*

$$\int_{\Gamma} E_n(y-x) dy^* f(y) = \begin{cases} -f(x) + f(\infty), & x \in G^-, \\ f(\infty), & x \in G^+. \end{cases}$$

Beweis. Wir wählen eine Kugelfläche $\Gamma_\rho = \{|x| = \rho\}$ von genügend großem Radius, die Γ und G^+ im Inneren enthält, und betrachten das Gebiet $G_\rho := G^- \cap \{|x| < \rho\}$. Für dessen Rand ergibt sich $\partial G_\rho = \Gamma_\rho \cup (-\Gamma)$ unter Berücksichtigung der Orientierung von Γ . Dann liefert die Cauchysche Integralformel für $x \in G_\rho$

$$\begin{aligned} f(x) &= - \int_{\Gamma} E_n(y-x) dy^* f(y) + \int_{|y|=\rho} E_n(y-x) dy^* (f(y) - f(\infty)) \\ &\quad + f(\infty) \int_{|y|=\rho} E_n(y-x) dy^* \\ &= - \int_{\Gamma} E_n(y-x) dy^* f(y) + f(\infty) + R, \end{aligned}$$

wobei

$$R := \int_{|y|=\rho} E_n(y-x) dy^* (f(y) - f(\infty)).$$

Nach Voraussetzung ist $|f(y) - f(\infty)| < \varepsilon$ für hinreichend großes ρ . Setzen wir ferner $\rho > 2|x|$ voraus, dann ist wegen $|y - x| \geq |y| - |x| > \rho/2$

$$|E_n(y - x)| = \frac{1}{\sigma_n} \frac{1}{|y - x|^n} \leq \frac{1}{\sigma_n} \frac{2^n}{\rho^n}.$$

Mit 3.14 (ii) folgt schließlich

$$|R| \leq \int_{|y|=\rho} |E_n(y - x)| |dy^*| \varepsilon \leq \frac{\varepsilon 2^n}{\sigma_n} \int_{|t|=1} |do_t| = \varepsilon 2^n.$$

Da für $\rho \rightarrow \infty$ die Zahl ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Behauptung.

Im Innengebiet G^+ von Γ gilt die Behauptung auch, da dann bei den obigen Formeln auf der linken Seite statt $f(x)$ der Wert 0 steht. $\square$

7.2.3 Formeln von Plemelj–Sokhotzki

Wir haben im vorigen Abschnitt bewiesen, dass eine holomorphe Funktion vollständig durch ihre Randwerte bestimmt ist und mit Hilfe des Cauchy-Integrals beschrieben werden kann. Es ist leicht zu sehen, dass das Cauchy-Integral formal für beliebige integrierbare Funktionen auf Γ aufgeschrieben werden kann und ebenfalls eine holomorphe Funktion darstellt. Es stellt sich dann natürlich die Frage nach den Randwerten des Cauchy–Bitsadze-Integrals. Der folgende Satz und der Fragenkreis insgesamt wurden von dem slowenischen Mathematiker JOSEF PLEMELJ (1873–1967) und dem Russen YULIAN VASILIEVICH SOKHOTZKI (1842–1927) untersucht.

Als Erstes beweisen wir eine Hilfsformel:

Lemma 7.15. *Es sei G ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand Γ , d.h. $\Gamma \in C^2$, sowie $x \in \Gamma$ ein fester Punkt. Dann gilt*

$$\int_{\Gamma} E_n(y - x) dy^* = \begin{cases} 1, & x \in G, \\ \frac{1}{2}, & x \in \Gamma, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{G}. \end{cases}$$

Das Integral ist singulär. Der *Cauchysche Hauptwert* ist in folgender Weise zu bilden: Man schneide durch eine Kugel $B_\varepsilon(x)$ eine Umgebung $\Gamma_\varepsilon(x)$ aus Γ aus. Dann soll das Integral über $\Gamma' = \Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergieren.

Beweis. Für $x \in G$ ergibt sich die Aussage aus der Cauchyschen Integralformel 7.12 für die Funktion $f = 1$, für $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{G}$ aus der Integralformel im Außengebiet 7.14. Für $x \in \Gamma$ schneiden wir mit der Kugel $B_\varepsilon(x)$ die Umgebung $\Gamma_\varepsilon(x)$ aus Γ aus, es bleibt Γ' . Der Teil der Kugeloberfläche innerhalb von G ist $S_\varepsilon(x) \cap G$.

In dem von $\Gamma' \cup (S_\varepsilon(x) \cap G)$ berandeten Gebiet ist $E_n(y - x)$ bezüglich y holomorph, das Integral darüber also Null. Unter Berücksichtigung der Orientierung erhalten wir damit

$$\int_{\Gamma'} E_n(y - x) dy^* = - \int_{S_\varepsilon(x) \cap G} E_n(y - x) dy^*.$$

Auf $S_\varepsilon(x) \cap G$ ist wie üblich $dy^* = \nu |do|$ (s. Beispiel A.2.17 c)) mit dem Einheitsparavektor der äußeren Normalen $\nu = (y - x)/|y - x|$, also lautet der Integrand

$$\frac{\overline{y - x}}{|y - x|^{n+1}} \frac{y - x}{|y - x|} |do| = |do_1|$$

mit dem Oberflächenelement $|do_1|$ der Einheitskugel S^n . Für unser gesuchtes Integral über Γ' ergibt sich also der Inhalt von $S_\varepsilon(x) \cap G$ dividiert durch den Inhalt der ganzen Kugeloberfläche. Da der Differenzierbarkeit wegen $S_\varepsilon(x) \cap G$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen die Halbkugeloberfläche konvergiert, ergibt sich in der Grenze der Wert $1/2$. $\square$

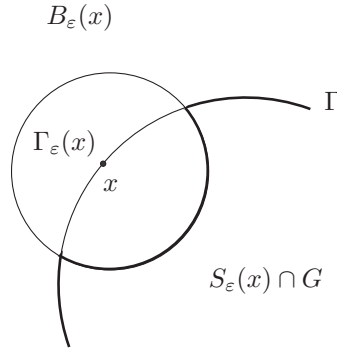


Abbildung 7.2

Bemerkung 7.16. Der Beweis bleibt auch gültig, wenn so genannte nicht reguläre Teilmengen auf Γ existieren (Kanten und Ecken). Es sei dann x kein regulärer Punkt von Γ , er liege auf einer Kante oder sei Eckpunkt (z.B. bei einem Quader). Misst man dann den Öffnungswinkel $\gamma(x)$ von Γ in x durch den Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$ des Anteils der in G verlaufenden Kugeloberfläche von $S_\varepsilon(x) \cap G$ zur ganzen Kugeloberfläche, so ergibt sich einfach für $x \in \Gamma$

$$\int_{\Gamma} E_n(y - x) dy^* = \gamma(x).$$

Das ist eine natürliche Verallgemeinerung des Wertes $\frac{1}{2}$ in einem regulären Punkt. Wir bemerken, dass Γ jedoch wenigstens die Kegeleigenschaft haben sollte, d.h. es existiere ein Kreiskegel mit der Spitze in x , der ansonsten zu G gehört. Das bedeutet unter anderem, dass Spitzen und Einschnitte nicht zugelassen sind.

Als wichtiges singuläres Integral ergibt sich aus dem Cauchy–Bitsadze-Integral

$$(F_{\Gamma}u)(x) = \int_{\Gamma} E_n(y - x) dy^* u(y), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Gamma$$

das Integral

$$(S_\Gamma u)(x) := 2 \int_\Gamma E_n(y-x) dy^* u(y), \quad x \in \Gamma.$$

Das soeben betrachtete Lemma bezog sich also auf $(F_\Gamma 1)(x)$ für $x \notin \Gamma$ und $\frac{1}{2}(S_\Gamma 1)$ für $x \in \Gamma$. Für hölderstetige Funktionen u ergibt sich sofort die Zerlegung

$$(S_\Gamma u)(x) = 2 \int_\Gamma E_n(y-x) dy^* [u(y) - u(x)] + u(x), \quad x \in \Gamma,$$

denn dieses Integral existiert der Hölderstetigkeit wegen als uneigentliches Integral. Für den Begriff der Hölderstetigkeit vergleiche man den Anhang 3, Abschnitt A.3.1.

Wir wenden uns jetzt den angekündigten Formeln von Plemelj–Sokhotzki zu:

Satz 7.17 (Plemelj–Sokhotzki-Formeln). *Es sei u hölderstetig auf der hinreichend glatten Oberfläche $\Gamma = \partial G$. Dann gilt in jedem regulären Punkt $x \in \Gamma$*

$$\text{n.t.-}\lim_{t \rightarrow x} (F_\Gamma u)(t) = \frac{1}{2} [\pm u(x) + (S_\Gamma u)(x)],$$

wobei $t \in G^\pm$ mit $G^+ = G$ und $G^- = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{G}$. Ferner bedeutet n.t.-lim, dass der Grenzwert nicht-tangential sein soll, d.h. t strebt gegen x innerhalb eines Kreiskegels, dessen Achse in Richtung der Normalen von Γ durch x verläuft. Diese Achse habe mit dem Kegelmantel einen Öffnungswinkel kleiner als $\pi/2$.

Beweis. Es sei x ein fester Punkt auf Γ . Lemma 7.15 liefert sofort für $t \in G$

$$(F_\Gamma u)(t) = \int_\Gamma E_n(y-t) dy^* [u(y) - u(x)] + u(x)$$

und für $t \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{G}$

$$(F_\Gamma u)(t) = \int_\Gamma E_n(y-t) dy^* [u(y) - u(x)].$$

Wir setzen

$$a(t) := \int_\Gamma E_n(y-t) dy^* [u(y) - u(x)]$$

und wollen

$$a(t) \rightarrow a(x) = \int_\Gamma E_n(y-x) dy^* [u(y) - u(x)] = \frac{1}{2}(S_\Gamma u)(x) - \frac{1}{2}u(x)$$

für die nicht-tangentiale Konvergenz $t \rightarrow x$ zeigen. Damit wäre die Behauptung

$$(F_\Gamma u)(t) \rightarrow \frac{1}{2}[\pm u(x) + (S_\Gamma u)(x)]$$

gegeben. In dem Integranden von $a(t) - a(x)$ kann der absolute Betrag an die Faktoren gezogen werden, da E_n und dy^* paravektorwertig sind. Also gilt

$$|a(t) - a(x)| \leq \int_{\Gamma} |E_n(y-t) - E_n(y-x)| |u(y) - u(x)| |dy^*|.$$

Der Hölderstetigkeit von u wegen haben wir $|u(y) - u(x)| \leq L|y-x|^\mu$. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir die Abschätzung (vgl. Aufgabe 7.4.1)

$$|E_n(y-t) - E_n(y-x)| \leq \frac{1}{\sigma_n} |x-t| \frac{2|y-x|^n + |y-x|^{n-1}|y-t| + \dots + |y-t|^n}{|y-x|^n |y-t|^{n+1}}.$$

Wir wählen nun ein $\varepsilon > 0$ so, dass Γ innerhalb von $B_\varepsilon(x)$ außerhalb eines Kreiskegels mit der Spitze in x und der Normalen als Achse verläuft, der einen etwas größeren Öffnungswinkel $< \pi/2$ hat als der, in dem t liegt. Es sei $|t-x| < \varepsilon/2$. Innerhalb von $B_\varepsilon(x)$ kommt der nicht-tangentiale Grenzwert ins Spiel.

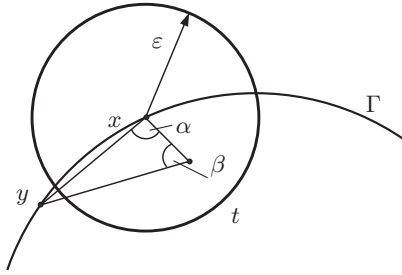


Abbildung 7.3

Wir wenden (vgl. Abb. 7.3 und 7.4) in dem Dreieck mit den Ecken x, t, y und den Winkeln α, β, γ den Sinussatz an:

$$\frac{|y-t|}{|y-x|} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \geq \sin \alpha \geq c > 0.$$

Ebenso ist

$$\frac{|x-t|}{|y-t|} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \leq \frac{1}{c}.$$

Damit kann im Zähler der obigen Abschätzung für die Differenz der E_n die Ungleichung $|y-x| \leq \frac{1}{c}|y-t|$ und dann im Nenner $|y-t| \geq c|y-x|$ verwendet werden. Mit einer geeigneten Konstanten K_1 ergibt sich für den Integranden von $a(t) - a(x)$ die obere Schranke

$$K_1 \frac{|x-t|^{1-\delta}}{|y-x|^{n+1-\mu-\delta}}.$$

Außerhalb von $B_\varepsilon(x)$ erhalten wir eine analoge Abschätzung aus $|y-x| \geq \varepsilon \geq 2|t-x|$, nämlich $|y-t| \geq |y-x| - |t-x| \geq \frac{1}{2}|y-x|$. Damit können wir wie vorher abschätzen mit einer geeigneten Konstanten K_2 . Mit $K = \max\{K_1, K_2\}$ folgt schließlich

$$|a(t) - a(y)| \leq \frac{K|t-x|^{1-\delta}}{\sigma_n} \int_{\Gamma} \frac{|dy^*|}{|y-x|^{n+1-\mu-\delta}}.$$

Für $\mu+\delta > 1$ existiert dies Integral als uneigentliches und $a(t)$ konvergiert gegen $a(x)$. $\square$

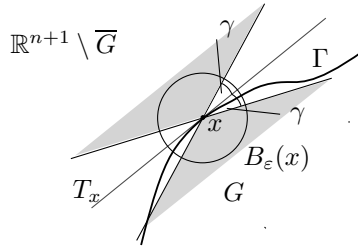


Abbildung 7.4

Bemerkung 7.18. Analog zu Bemerkung 7.16 gilt eine entsprechende Aussage für x auf Kanten oder in Ecken, wenn die nicht-tangentiale Konvergenz entsprechend festgelegt wird. Mit dem Öffnungswinkel $\gamma(x)$ ist wie in Bemerkung 7.16 zu arbeiten. Der Operator S_Γ ist dabei durch den Operator

$$S_\Gamma^\gamma = \frac{\sigma_n - 2\gamma(x)}{\sigma_n} u(x) + S_\Gamma u(x)$$

zu ersetzen.

Folgerung 7.19. *Es sei G ein Gebiet mit einem C^2 -Rand. Die Beziehung*

$$(S_\Gamma u)(x) = u(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma$$

ist notwendig und hinreichend dafür, dass u die Randwerte der holomorphen Funktion $(F_\Gamma u)$ in G darstellt. Andererseits ist die Bedingung

$$(S_\Gamma u)(x) = -u(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma$$

notwendig und hinreichend dafür, dass $(F_\Gamma u)$ die holomorphe Fortsetzung von u nach G^- beschreibt, die in $x = \infty$ verschwindet.

Beweis. Es sei zunächst U die holomorphe Fortsetzung der $C\ell(n)$ -wertigen Funktion $u(x)$ für $x \in \Gamma$ in das Gebiet G . Die Cauchysche Integralformel liefert dann $U(x) = (F_\Gamma u)(x)$. Die nicht-tangentialen Randwerte sind damit u , nach den Formeln von Plemelj–Sokhotski ist also $u = \frac{1}{2}[u + S_\Gamma u]$, woraus $S_\Gamma u(x) = u(x)$ folgt.

Gilt umgekehrt $S_\Gamma u(x) = u(x)$ für alle $x \in \Gamma$, so hat $(F_\Gamma u)(x)$ die Randwerte u , stellt also die gewünschte holomorphe Fortsetzung von u in G dar. Der Nachweis für das Außengebiet erfolgt analog. $\square$

Folgerung 7.20. *Es sei u hölderstetig auf Γ , dann gilt die algebraische Identität $S_\Gamma^2 u = Iu$, wobei I der identische Operator ist.*

Beweis. Wir setzen

$$\text{n.t.-} \lim_{t \rightarrow x, t \in G^+} (F_\Gamma u)(t) = F^+(x) \quad \text{und}$$

$$\text{n.t.-} \lim_{t \rightarrow x, t \in G^-} (F_\Gamma u)(t) = F^-(x)$$

Aus den Formeln von Plemelj-Sokhotzki und 7.19 folgt dann

$$(S_\Gamma u)(x) = F^+(x) + F^-(x).$$

Dabei stellt F^+ die Randwerte der in G holomorphen Funktion $F_\Gamma u$ dar, nach der letzten Folgerung gilt also $S_\gamma F^+ = F^+$, analog ist $S_\Gamma F^- = -F^-$ und damit

$$(S_\Gamma^2 u)(x) = (S_\Gamma F^+)(x) + (S_\Gamma F^-)(x) = F^+(x) - F^-(x) = u(x). \quad \square$$

Definition 7.21. Die Operatoren $P_\Gamma := \frac{1}{2}(I + S_\Gamma)$ und $Q_\Gamma := \frac{1}{2}(I - S_\Gamma)$ heißen *Plemelj-Projektionen*.

Folgerung 7.22. Der Projektor P_Γ stellt die Projektion auf den Raum aller auf Γ definierten und nach G^+ holomorph fortsetzbaren Funktionen dar. Der Projektor Q_Γ ist die Projektion auf den Raum aller holomorph ins Außengebiet G^- fortsetzbaren Funktionen, die im Unendlichen verschwinden. Es gelten die Eigenschaften:

$$P_\Gamma^2 = P_\Gamma, Q_\Gamma^2 = Q_\Gamma, P_\Gamma Q_\Gamma = Q_\Gamma P_\Gamma = 0.$$

Beweis. Das ist eine unmittelbare Folge aus der Definition sowie den Plemelj-Sokhotzki-Formeln mit ihren Folgerungen. #

7.2.4 Zur Geschichte der Formeln von Cauchy und Borel-Pompeiu

Cauchy bewies seine Integralformel 1831 während der Zeit seines Aufenthalts in Turin. Sie wurde auch innerhalb einer Abhandlung zur Himmelsmechanik veröffentlicht. In [24] wird sie in der heute unüblichen Schreibweise formuliert:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{x} f(\overline{x})}{\overline{x} - x} dp,$$

wobei die Integration über die Einheitskreislinie geht und x im Inneren der Einheitskreisscheibe liegt, dp wäre heute $d\varphi$.

D. Pompeiu erkannte 1905 in seiner Dissertation, dass die Menge der Punkte, in denen eine stetige Funktion f nicht holomorph ist, bereits durch die Werte

$$\int_{\Gamma} f(z) dz$$

charakterisiert werden kann, wobei Γ eine beliebige geschlossene, stückweise glatte Kurve im Definitionsgebiet von f ist. Im Jahre 1912 führte er die *areolare Ableitung* einer Funktion f als Maß ihrer Nicht-Holomorphie in einem gegebenen Punkt $z_0 \in G$ ein:

$$\frac{Df}{D\sigma}(z_0) := \lim_{G \rightarrow \{z_0\}} \frac{\int_{\partial G} f(z) dz}{2i \int_G d\sigma}.$$

D. Pompeiu (1873 - 1954) wurde in Broscauți in der rumänischen Provinz Moldova geboren. Er schloss 1893 eine Ausbildung an der "Școala Natională de Institutori" ab und bekleidete eine Stelle als Grundschullehrer in Ploesti. Im Jahre 1898 übersiedelte er nach Paris, wo er sich an der Sorbonne einschrieb. Dort beschäftigte er sich vor allem mit Funktionentheorie und Mechanik. Seine Dissertation *Sur la continuité des fonctions de deux variables complexes* [115] beendete er 1905. Sie wurde sehr skeptisch aufgenommen und L. Zoretti, ein Schüler von Émile Borel, versuchte diese zu widerlegen. Später war D. Pompeiu als Professor in Bukarest und Cluj tätig.



Dimitrie Pompeiu

Die Bezeichnung $G \rightarrow \{z_0\}$ bedeutet, dass sich G auf den Punkt z_0 für $\text{diam } G \rightarrow 0$ zusammenziehen lässt (vgl. Aufgabe 7.4.8).

In der Darstellung (vgl. Abschnitt 5.1)

$$f(z) = f(z_0) + \partial f(z_0)(z - z_0) + \bar{\partial} f(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|)$$

ergeben die ersten beiden Summanden bei Integration über eine den Punkt z_0 einschließende stückweise glatte Kurve Γ des Satzes von Cauchy wegen Null. Es bleibt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \bar{\partial} f(z_0) \int_{\Gamma} \bar{z} dz + \int_{\Gamma} o(|z - z_0|) dz.$$

Nach der Aufgabe A.2.3.8 ist das mittlere Integral gerade der Flächeninhalt $\sigma(G)$ des von Γ berandeten Gebietes G , so dass

$$\lim_{G \rightarrow \{z_0\}} \frac{\int_{\Gamma} f(z) dz}{\sigma(G)} = (\bar{\partial} f)(z_0)$$

und damit $(\bar{\partial} f)(z_0) = \frac{Df}{D\bar{\omega}}(z_0)$. Auf diese Weise erhält man eine koordinatenfreie Darstellung für die komplexe Ableitung $\bar{\partial}$, außerdem ermöglicht dies eine Definition von $\bar{\partial} f$ in einem schwachen Sinn [116].

Pompeiu bewies 1909, dass eine in der gesamten komplexen Ebene holomorphe Funktion, die im Unendlichen verschwindet, die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{Df}{D\sigma}(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} d\sigma_{\zeta}$$

besitzt. Dieses Ergebnis blieb zunächst unbeachtet und wurde erst durch ein analoges, aber viel spezielleres Resultat von É. Borel [13] bekannt, der darüber auf

dem Internationalen Mathematikerkongress 1912 in Cambridge (U.K.) berichtete. Schließlich konnte Pompeiu 1912 für stetige Funktionen f mit stetiger areolarer Ableitung in einer Umgebung von $\overline{G}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_G \frac{Df}{D\sigma}(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} d\sigma_\zeta \quad (z \in G)$$

zeigen, er empfand diese Formel als Analogon zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

In seiner Thèse [152] übertrug N. Teodorescu Ergebnisse von Pompeiu auf den Fall der Quaternionen. Er führte die *Volumen-Ableitung* für quaternionenwertige Funktionen f in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ ein. Diese ist durch

$$\frac{Df}{D\sigma}(x) := - \lim_{G \rightarrow \{x\}} \frac{\int_{\partial G} f d\sigma}{\int_G d\sigma} \quad (x \in G)$$

gegeben. Es kann gezeigt werden, dass die Volumen-Ableitung bei genügender Glattheit der Funktion f mit dem Hamilton-Operator ∇f übereinstimmt (s. Definition 7.24). Die erste räumlich verallgemeinerte Formel vom Borel–Pompeiu-Typ wurde dann 1930 von Gr. C. Moisil [109] für $x \in G$ angegeben:

$$f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^3} d\sigma_y f(y) + \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{Df}{D\sigma}(y) \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^3} d\sigma_y.$$

Diese Formel ist für in $\overline{G}$ stetige Funktionen f mit in G stetiger und beschränkter Volumen-Ableitung gültig. Weitergehende Aussagen findet der Leser zum Beispiel in dem Artikel [108].

A. GROTHENDIECK benutzte eine analoge Formel in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher. Weiter finden wir solche Formeln unter anderem 1961 in der Monographie von H. CARTAN [21] sowie 1973 im Buch von A. W. BITSADZE [11]. Auf der Basis von R. DELANGHES Ergebnissen in seiner Arbeit [31] wurde in reellen Clifford-Algebren eine Borel–Pompeiu-Formel gewonnen (vgl. [14]).

E. M. SAAK [125] untersuchte 1975 ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung, das wie folgt konstruiert wurde:

Man betrachtet eine Familie orthogonaler $n \times n$ -Matrizen $\{e_1, \dots, e_n\}$, deren Einträge nur die Zahlen $0, 1, -1$ sind und die die nachstehende Eigenschaft haben:

$$e_i^\top e_j + e_j^\top e_i = 0 \quad (i \neq j) \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Man stellt n -dimensionale Vektorfunktionen mit den e_i als Basis dar und definiert den zentralen Differentialoperator des Systems durch $\sum_{i=1}^n e_i \partial_i$. Für solche Systeme wurde 1978 ein n -dimensionales Matrix-Analogon zur Formel von Borel–Pompeiu entwickelt (vgl. [142]).

Ein weiteres interessantes Modell einer Borel–Pompeiu-Formel im $\mathbb{R}^3$ geht auf A. DZHURAEV zurück. Er betrachtet in der Arbeit [37] folgenden Matrix-Differential-Operator bei drei reellen Variablen x_1, x_2, x_3 in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$:

$$\overline{\partial}_x = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} & \partial_z \\ -\partial_{\overline{z}} & \partial_{x_1} \end{pmatrix}$$

und setzt $u = (u_1, u_2)$ mit komplexwertigen $u_1, u_2, z = x_2 + ix_3$. Er betrachtet die Differentialgleichung $\overline{\partial}_x u = f$ und setzt weiterhin

$$E(y - x) = -\frac{1}{|y - x|^3} \begin{pmatrix} y_1 - x_1 & -(\overline{\zeta} - \overline{z}) \\ \zeta - z & y_1 - x_1 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 - in_3 \\ -(n_2 + in_3) & n_1 \end{pmatrix}$$

mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor n auf ∂G . Dann beweist er eine Formel vom Borel–Pompeiu-Typ:

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_2} \int_{\partial G} E(y - x) n(y) f(y) |do_y| - \frac{1}{\sigma_2} \int_G E(y - x) (\overline{\partial}_y U)(y) d\sigma_y.$$

Formeln vom Borel–Pompeiu-Typ eröffnen neue Möglichkeiten zur Behandlung partieller Differentialgleichungen mit komplexen Methoden ([9]). Analoga zur Borel–Pompeiu-Formel existieren heute auch auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten [20], insbesondere auf der Sphäre (vgl. [155]) sowie in komplexen Clifford-Algebren [124] und für diverse Klassen von Differentialoperatoren [79]. Diskrete Borel–Pompeiu-Formeln sind auch angegeben worden.

7.3 Folgerungen aus der Integralformel von Cauchy

7.3.1 Höhere Ableitungen holomorpher Funktionen

Eine wichtige Folgerung zeigt uns nun eine entscheidende Eigenschaft holomorpher Funktionen, nämlich dass sie nicht nur einmal, sondern unendlich oft reell stetig differenzierbar sind. Damit sind alle Ableitungen einer holomorphen Funktion selbst wieder holomorph, denn die Ableitungen nach den x_i sind des Satzes von Schwarz wegen vertauschbar, wenn sie stetig sind. Damit bleibt $\overline{\partial} f = 0$ auch für alle Ableitungen von f gültig.

Wir formulieren den Satz erst einmal in $\mathbb{C}$, da er dort einfacher und genauer ist:

Folgerung 7.23 (Cauchysche Integralformel für Ableitungen in $\mathbb{C}$). *Es sei f holomorph in der Kreisscheibe $\{z : |z - z_0| < R\}$, dann ist f dort unendlich oft komplex differenzierbar und es gilt für jedes ρ und z mit $|z - z_0| < \rho < R$*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Ist ferner $|f(z)| \leq M$ auf der Kreislinie $|z - z_0| = \rho$, so gilt

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{\rho^n} M.$$

Der Radius ρ spielt wegen des Integralsatzes von Cauchy keine Rolle, f muss nur in der angegebenen Kreisscheibe holomorph sein. Man kann daher das ρ so groß wie nötig wählen, um möglichst dicht an den nächstgelegenen Punkt heran zu kommen, in dem f nicht holomorph ist.

Beweis. Die Funktion f ist für $|z - z_0| \leq \rho + \varepsilon < R$ holomorph, also können wir dort die Cauchysche Integralformel anwenden. Wir beweisen den ersten Teil des Satzes mit vollständiger Induktion, die Induktionsvoraussetzung für $n = 1$ ist die Cauchysche Integralformel selbst. Zum Schluss von n auf $n + 1$ sind nur noch Differentiation und Integration zu vertauschen (Differentiation von Parameterintegralen). Wir erhalten

$$\frac{d}{dz} f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{(n+1)f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta,$$

also gerade die Behauptung für $n + 1$.

Der zweite Teil des Satzes ergibt sich direkt aus der Formel für die Ableitungen:

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{M}{\rho^{n+1}} |d\zeta| = \frac{n!M}{\rho^n},$$

denn das Integral bringt noch einmal den Faktor $2\pi\rho$. □

Daraus folgt insbesondere die reelle Differenzierbarkeit sowie die Holomorphie sämtlicher partieller Ableitungen.

Um das Analogon im $\mathbb{R}^{n+1}$ zu beweisen brauchen wir eine gewisse Vorarbeit.

Definition 7.24 (Nabla und Delta). Mit

$$\nabla := (\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_n)$$

werde der unserem $\bar{\partial}$ entsprechende Vektoroperator, gelesen *Nabla*, bezeichnet. Mit dem Multiindex $\mathbf{k} = (k_0, \dots, k_n)$ werde dann das Symbol

$$\nabla^{\mathbf{k}} := \partial_0^{k_0} \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n}$$

erklärt. Ferner sei

$$\Delta := \nabla \cdot \nabla = \partial \bar{\partial} = \sum_{i=0}^n \partial_i^2$$

eingeführt. Eine Lösung der Gleichung $\Delta f = 0$ heißt *harmonische Funktion*.

Mit harmonischen Funktionen werden wir uns noch ausführlich beschäftigen, auch später in diesem Abschnitt. Wir können sofort festhalten

Lemma 7.25. *Die Koordinatenfunktionen einer holomorphen Funktion sind harmonisch.*

Beweis. Für eine holomorphe Funktion ist definitionsgemäß $\bar{\partial}f = 0$, der beliebigen reellen Differenzierbarkeit wegen (s. nächste Folgerung) gilt dann auch $\Delta f = \partial\bar{\partial}f = 0$. Da Δ ein reeller Operator ist, wirkt er auf jede Koordinate f_A von f einzeln, so dass $\Delta f_A = 0$: die f_A sind harmonische Funktionen. $\square$

Der Operator ∇ ist von Hamilton schon in den vierziger Jahren des 19. Jahrhunderts in die Analysis der Quaternionen eingeführt worden, zu Beginn auf der Seite liegend mit der Spitze nach rechts. CLERK MAXWELL empfahl 1870 den Namen *Atled*, an das auf dem Kopf stehende Delta erinnernd. ROBERTSON SMITH schlug bald danach den Namen *Nabla* vor, der dann von PETER G. TAIT in der zweiten Auflage seines Werkes [151] verwendet wurde. Der Grund für die Benennung war wohl die Ähnlichkeit mit der Gestalt eines assyrischen Saiteninstrumentes, damals gelangten gerade die ersten Stücke der mesopotamischen Ausgrabungen in das British Museum (vgl. C.G. KNOTT [69]). Der Name dürfte aus dem Griechischen entlehnt sein, wo er "Saiteninstrument" bedeutet.

Mit dem Operator ∇ definieren wir nun

Definition 7.26.

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x) := \frac{(-1)^{|\mathbf{k}|}}{\mathbf{k}!} \nabla^{\mathbf{k}} \sigma_n E_n(x) = (-1)^{|\mathbf{k}|} \nabla^{\mathbf{k}} \frac{\bar{x}}{|x|^{n+1}},$$

speziell

$$\mathcal{Q}_0(x) = \frac{\bar{x}}{|x|^{n+1}} = \sigma_n E_n(x).$$

Über diese Funktionen, die uns noch weiter begegnen werden, müssen wir uns einige Gedanken machen. Im Allgemeinen werden wir mit Multiindizes $\mathbf{k}$ arbeiten, bei denen $k_0 = 0$ ist, so dass nur nach $x_1, \dots, x_n$ differenziert wird.

Die $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$ ersetzen die negativen Potenzen von z in $\mathbb{C}$: für $n = 1$ ist $\mathcal{Q}_0 = 1/z$. Dabei gilt dann $\mathbf{k} = (0, k_1)$ und $z = x_0 + ix_1$, wegen $\partial_1 f = i f'$ folgt mit $k_1 =: k$

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(z) = \frac{(-1)^k}{k!} \partial_1^k \mathcal{Q}_0(z) = \frac{i^k}{z^{k+1}}.$$

Das sind die negativen Potenzen von z . Wir benötigen noch einige Eigenschaften der $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$:

Lemma 7.27. *Es gilt*

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x) = \frac{q_{\mathbf{k}}(x)}{|x|^{n+2|\mathbf{k}|+1}}$$

mit einem homogenen Polynom $q_{\mathbf{k}}$ vom Grad $|\mathbf{k}|+1$, das nur Werte im $\mathbb{R}^{n+1}$, also in den Paravektoren, annimmt. Weiter existieren Konstanten $C_{n,\mathbf{k}}$, so dass

$$|\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x)| \leq \frac{C_{n,\mathbf{k}}}{|x|^{n+|\mathbf{k}|}}.$$

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion nach $|\mathbf{k}|$, für $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ ist die Voraussetzung durch $\sigma_n E_n(x) = \mathcal{Q}_0(x)$ gegeben. Zum Schluss von $|\mathbf{k}|$ auf $|\mathbf{k}|+1$ ist der Ausdruck für $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$ einmal zu differenzieren:

$$\partial_i \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x) = \frac{|x|^2 \partial_i q_{\mathbf{k}}(x) - (n + |\mathbf{k}| + i) x_i q_{\mathbf{k}}}{|x|^{n+2|\mathbf{k}|+3}}$$

Die Differentiation eines homogenen Polynoms nach einer der Variablen gibt entweder Null oder sie erniedrigt den Grad um 1, so dass der erste Summand im Zähler den richtigen Grad $|\mathbf{k}|+2$ hat. Für den zweiten Summanden ist dies auch klar, und die Homogenität wird durch die Differentiation oder die Multiplikation mit x_i nicht verletzt. Ebenso bleibt bei solch einem Schritt der Zähler ein Paravektor.

Weiter kann ein homogenes Polynom $q_{\mathbf{k}}$ durch eine geeignete Konstante, eben $C_{n,\mathbf{k}}$, mit dem Faktor $|x|^{|\mathbf{k}|+1}$ abgeschätzt werden, was zu beweisen war. $\square$

Nun können wir auch den Satz für die höheren Ableitungen einer holomorphen Funktion in $\mathcal{Cl}(n)$ formulieren und beweisen:

Folgerung 7.28 (Cauchysche Integralformel für Ableitungen in $\mathcal{Cl}(n)$). *Es sei f holomorph in der Kugel $B_R(x_0)$. Dann ist f dort unendlich oft reell stetig differenzierbar und es gilt für jedes ρ mit $|x - x_0| < \rho < R$*

$$\nabla^{\mathbf{k}} f(x) = \frac{\mathbf{k}!}{\sigma_n} \int_{|y-x_0|=\rho} \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(y-x) dy^* f(y).$$

Ist ferner $|f(x)| \leq M$ für $|x - x_0| = \rho$, so gilt

$$|\nabla^{\mathbf{k}} f(x_0)| \leq \frac{M C_{n,\mathbf{k}} \mathbf{k}!}{\rho^{|\mathbf{k}|}}.$$

Beweis. Da $\mathcal{Q}_0(y-x)$ beliebig oft stetig differenzierbar nach den x_i ist, kann man unter dem Integralzeichen differenzieren und erhält das Integral für die Ableitungen von f wie angegeben. Wir ziehen den Betrag unter das Integral und weiter in das Produkt hinein, was möglich ist, da die Funktionen $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(y-x)$ und dy^* nur Werte im $\mathbb{R}^{n+1}$ annehmen. Die Integration liefert den Beitrag $\sigma_n \rho^n$, womit sich die gewünschte Abschätzung ergibt. $\square$

Damit wurde eine wichtige Eigenschaft holomorpher Funktionen erhalten.

Folgerung 7.29. *Eine holomorphe Funktion in $\mathcal{Cl}(n)$ ist beliebig oft stetig reell differenzierbar, alle Ableitungen sind gleichfalls holomorph.*

Eine weitere schnelle Folgerung ist die Gleichwertigkeit mit der Holomorphie:

Folgerung 7.30. Eine stetige Funktion f in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist dort genau dann holomorph, wenn lokal die Cauchysche Integralformel gilt.

Beweis. Wenn f in G holomorph ist, so gilt natürlich lokal die Cauchysche Integralformel. Gilt umgekehrt diese lokal, so kann differenziert werden. Dann ist f lokal holomorph und damit auch im ganzen Gebiet G . $\square$

7.3.2 Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip

Ein wichtige Gruppe von Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel soll uns nun beschäftigen, als erstes die *Mittelwerteigenschaft*, die im Fall $n = 2$ im Jahre 1823 von *Poisson* bewiesen wurde :

Folgerung 7.31 (Mittelwerteigenschaft). Eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ holomorphe Funktion f besitzt die Mittelwerteigenschaft: Für alle $x_0 \in G$ und alle Kugeln (Kreise) $\{x : |x - x_0| \leq \rho\} \subset G$ gilt:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{|y|=1} f(x_0 + \rho y) |do_y|,$$

d.h. der Wert von f im Mittelpunkt der Kugel ist gleich dem Integral über die Werte von f auf dem Rande der Kugel, daher auch die Bezeichnung *Mittelwerteigenschaft*.

In solch einem Satz drückt sich erneut der enge innere Zusammenhang der Werte einer holomorphen Funktion aus.

Beweis. Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$f(x_0) = \int_{|t-x_0|=\rho} E_n(t-x_0) dt^* f(t).$$

Einsetzen von $E_n(t-x_0)$ und Berücksichtigung der Spezialfälle A.2.17 b) und c) ergibt mit $t = x_0 + \rho y$ gerade

$$E_n(t-x_0) dt^* = \frac{1}{\sigma_n} |do_y|,$$

das ist bereits die Behauptung. $\square$

Eine besonders wichtige Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel ist der nachfolgende

Satz 7.32 (Maximumprinzip). Es sei f in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ holomorph und beschränkt, etwa $\sup_{x \in G} |f(x)| = M$. Nimmt dann $|f|$ in einem Punkt von G den Wert M an, so ist f in G konstant mit $|f(x)| = M$.

Auch dies zeigt den engen inneren Zusammenhang der Werte von f . Wenn f nicht konstant ist, muss $|f|$ dem Supremum M auf einer Punktfolge zustreben, die gegen den Rand des Gebietes konvergiert. Ist G beschränkt und f in $\overline{G}$ stetig, so muss $|f|$ den Wert M am Rande von G annehmen.

Ein entsprechendes *Minimumprinzip* in $\mathbb{C}$ lautet:

Es sei f holomorph in $G \subset \mathbb{C}$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Dann ist f konstant oder für alle $z \in G$ gilt

$$|f(z)| > \inf_{\zeta \in G} |f(\zeta)|$$

(vgl. Aufgabe 7.4.5).

Beweis. Wir wollen zeigen, dass im ganzen Gebiet G die Gleichung $|f(x)| = M$ gilt. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es einen Punkt x_1 mit $|f(x_1)| < M$ und nach Voraussetzung ein x_0 mit $|f(x_0)| = M$. Die Punkte x_0 und x_1 können durch einen Polygonzug verbunden werden. Durchlaufen wir diesen von x_1 nach x_0 , so sei x_2 der erste Punkt mit $|f(x_2)| = M$ ($x_2 = x_0$ ist nicht ausgeschlossen).

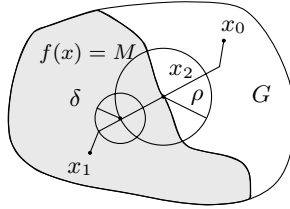


Abbildung 7.5

Dort muss $|f(x_2)| = M$ gelten, sonst wäre der Stetigkeit von f wegen die Supremumseigenschaft nicht gegeben. Nun betrachten wir eine hinreichend kleine Sphäre um x_2 und setzen dort die Mittelwerteigenschaft aus der letzten Folgerung ein:

$$M = |f(x_2)| \leq \frac{1}{\sigma_n} \int_{|y|=1} |f(x_2 + \rho y)| |do_y|.$$

Auf der Sphäre $|x - x_2| = \rho$ gibt es mindestens einen Punkt, in dem $|f(x)| < M$ gilt, nämlich dort, wo der Polygonzug in Richtung x_1 die Sphäre schneidet. Der Stetigkeit von f wegen muss dann aber auch auf einer kleinen Kappe der Sphäre etwa des Inhaltes δ gelten $|f(x)| \leq M - \varepsilon$ mit geeigneten ε und δ . Für das Mittelwertintegral bedeutet dies

$$M = |f(x_2)| \leq \frac{1}{\sigma_n} (M(\sigma_n - \delta) + (M - \varepsilon)\delta) < M,$$

und das ist ein Widerspruch. Damit wird $|f|$ in $|x - x_2| \leq \rho$ konstant. Von einem Randpunkt dieser Kugel ausgehend wird das Verfahren fortgesetzt und wir erhalten, dass $|f|$ in G konstant ist. Nun ist nur noch zu zeigen, dass auch f konstant ist. Mit $|f|^2 = \sum_A |f_A|^2 = \text{const}$ sind die Ableitungen nach den x_i Null, also

$$\sum_A f_A \partial_i f_A = 0.$$

Die erneute Differentiation nach x_i und nachfolgende Summation über i liefert

$$\sum_A \left(\sum_i (\partial_i f_A)^2 + f_A \Delta f_A \right) = 0.$$

Wegen Lemma 7.25 gilt: $\Delta f_A = 0$. Damit bleibt

$$\sum_A \sum_i (\partial_i f_A)^2 = 0,$$

und das bedeutet, dass alle Ableitungen der f_A verschwinden, so dass f selbst konstant sein muss. $\square$

7.3.3 Satz von Liouville

Als weitere Folgerung aus der Formel von Cauchy wollen wir einen von dem französischen Mathematiker JOSEPH LIOUVILLE (1809–1882) stammenden Satz (formuliert für komplexe Funktionen) anfügen, der ein einfaches und weitreichendes Hilfsmittel bei holomorphen Funktionen ist. Als Anwendung werden wir damit sofort den Fundamentalsatz der Algebra 1.12 beweisen. Der zweite Teil des nachstehenden Satzes ist eine Verschärfung des Satzes von Liouville.

Folgerung 7.33 (Satz von Liouville).

- (i) Eine im $\mathbb{R}^{n+1}$ holomorphe und beschränkte Funktion ist konstant.
- (ii) Ist f in $\mathbb{R}^{n+1}$ holomorph und gilt dort

$$|f(x)| \leq M |x|^m,$$

so ist f ein Polynom höchstens vom Grad m .

Beweis. (i) Sei etwa $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann verwenden wir die Formel aus Folgerung 7.28 für die ersten Ableitungen von f mit $\varepsilon_i = (\delta_{0i}, \dots, \delta_{ni})$:

$$|\partial_i f(x_0)| \leq \frac{MC_{n,\varepsilon_i}}{\rho}.$$

Da ρ beliebig war, können wir für $\rho \rightarrow \infty$ folgern, dass $|\partial_i f(x_0)| = 0$. Wegen der willkürlichen Auswahl von x_0 sind mithin alle $\partial_i f = 0$ und f ist konstant.

Der Beweis von (ii) ist als Lösung der Aufgabe 7.4.7 vorgesehen. $\square$

Jetzt sind wir in der Lage, ohne viel Mühe den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen:

Folgerung 7.34 (Fundamentalsatz der Algebra). (vgl. Satz 1.12). Ein Polynom vom Grad $n > 0$ in $\mathbb{C}$ hat genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$, wenn jede Nullstelle entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt wird.

Beweis. Hätte

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, so wäre $1/P(z)$ eine holomorphe Funktion in $\mathbb{C}$. Es gilt aber

$$|P(z)| \geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) \geq \frac{1}{2} |a_n| |z|^n$$

für hinreichend große $|z|$. Daraus würde folgen $1/|P(z)| \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$ und $P(z)$ wäre in $\mathbb{C}$ beschränkt. Nach dem Satz von Liouville wäre es mithin konstant, das kann aber wegen $P(0) = a_0$ und $P(z) \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow \infty$ nicht sein. Also muss P mindestens eine Nullstelle haben, nennen wir sie z_1 . Bei Division von P durch $(z - z_1)$ ergibt sich $P(z) = (z - z_1)P_1(z)$ mit einem Polynom P_1 vom Grad $n-1$. Mit n -facher Wiederholung des Schlusses erhält man die Behauptung. $\square$

Bemerkung 7.35. Im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist dieser Beweis leider nicht durchführbar, da der Kehrwert einer holomorphen Funktion im allgemeinen nicht holomorph ist. Dort ist auch die Frage nach den Nullstellen eines Polynoms komplizierter zu beantworten. Sie müssen nicht unbedingt isoliert sein, was zum jetzigen Zeitpunkt auch für $\mathbb{C}$ nicht klar ist !

7.3.4 Integralformeln von Schwarz und Poisson

Wie üblich sei $B_r(0) =: B_r$ die Kreisscheibe um den Nullpunkt vom Radius r in $\mathbb{C}$. H.A. SCHWARZ (s. Abschnitt 2.4) gelang es 1869 mit Hilfe der nach ihm benannten Integralformel folgendes Randwertproblem zu lösen:

Es soll eine in B_1 holomorphe und beschränkte Funktion gefunden werden, deren Realteil beim Übergang zum Rand ∂B_1 die Werte einer dort definierten stetigen Randfunktion u annimmt.

Die von ihm zu diesem Zweck entwickelte Integralformel lautet:

Satz 7.36 (Integralformel von Schwarz). *Es sei $f = u + iv$ eine in $B_r \subset \mathbb{C}$ holomorphe und in $\overline{B_r}$ stetige Funktion. Dann gilt für $z \in B_r$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + i \operatorname{Im} f(0).$$

Analog gilt auch eine Formel mit dem Imaginärteil von f

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_r} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} v(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \operatorname{Re} f(0).$$

Man kann diese Formeln natürlich ohne Probleme auf Kreise um einen anderen Mittelpunkt übertragen, es sind nur z und ζ durch $z - a$ bzw. $\zeta - a$ zu ersetzen.

Beweis. Nach Aufgabe 6.3.6 ist der an einer Kreislinie ∂B_r gespiegelte Punkt z^* eines Punktes z durch $z^*z = r^2$ gegeben. Mit der Parametrisierung $\zeta = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ der Kreislinie haben wir neben $\zeta\bar{\zeta} = r^2$ ferner

$$d\zeta = i\zeta d\varphi, \quad d\bar{\zeta} = -i\bar{\zeta} d\varphi = \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} d\zeta.$$

Wir wenden nun die Cauchysche Integralformel an, da z^* im Außengebiet des Kreises B_r liegt. Es ergibt sich

$$\int_{\partial B_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*} d\zeta = 0.$$

Bei Konjugation dieser Gleichung folgen weiter wegen

$$\frac{1}{\bar{\zeta} - \frac{r^2}{z}} = \frac{\zeta z}{r^2(z - \zeta)} = \frac{z}{\bar{\zeta}(z - \zeta)} = \frac{1}{\bar{\zeta}} + \frac{\zeta}{\bar{\zeta}(z - \zeta)}$$

die Ausdrücke

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial B_r} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \frac{r^2}{z}} d\bar{\zeta} = \int_{\partial B_r} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} + \int_{\partial B_r} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \frac{\zeta d\bar{\zeta}}{z - \zeta} \\ &= -2\pi i \overline{f(0)} + \int_{\partial B_r} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta} - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Damit hängt das Cauchy-Integral über die konjugiert komplexe Funktion $\bar{f}$ nicht vom variablen Punkt z ab. Wir erhalten

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta} - z} d\zeta = \overline{f(0)}$$

und weiter

$$f(z) + \overline{f(0)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\partial B_r} \frac{u(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Für den Realteil von f im Punkt 0 ergibt sich

$$u(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r} \frac{u(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

und somit

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\partial B_r} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r} \frac{u(\zeta)}{\zeta} d\zeta + i \operatorname{Im} f(0) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + i \operatorname{Im} f(0). \end{aligned}$$

Hieraus erhält man leicht durch Betrachtung von $-if(z)$ die Darstellung von f mit Hilfe des Imaginärteiles. $\square$

Durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt sich sofort die aus der Theorie der Randwertprobleme bekannte *Poissonsche Integralformel*:

Satz 7.37. *Es sei $u(z)$ eine harmonische Funktion, u sei überdies stetig in $\overline{B_\rho}$. Dann gilt mit $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ und $\zeta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)} u(\zeta) d\theta.$$

Beweis. Die Integralformel von Schwarz liefert zu gegebenem u eine holomorphe Funktion f mit $\operatorname{Re} f = u$, denn die Randwerte bestimmen u eindeutig, wie wir noch sehen werden. Dann bilde man einfach den Realteil der Integralformel von Schwarz. $\square$

Die Poissonsche Integralformel liefert ein probates Hilfsmittel zur harmonischen Fortsetzung stetiger Randfunktionen ins Innere einer Kugel.

7.4 Aufgaben

1. Man beweise die Abschätzung für Paravektoren a und b :

$$|a|b|^{n+1} - b|a|^{n+1}| \leq |b||a - b|[2|b|^n + |b|^{n-1}|a| + \dots + |a|^n].$$

2. Man beweise den Cauchyschen Integralsatz in der Ebene für Dreiecke. Wie kann man eine solche Aussage auf beliebige Gebiete mit hinreichend glattem Rand ausdehnen? (Hinweis: Man zerlege in immer feinere Dreiecke)
3. Man formuliere und beweise ein Analogon im $\mathbb{R}^{n+1}$ zu dem Satz 7.5 über eine lokale Bedingung für die Holomorphie.
4. Man berechne das Integral

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}$$

in $\mathbb{C}$. Warum ist es nicht gleich Null?

5. Man berechne in $C\ell(n)$ das Integral

$$\int_{|x|=1} \frac{\overline{x}}{|x|^{n+1}} dx^*.$$

6. Man beweise das Minimumprinzip in $\mathbb{C}$:

Sei f holomorph in $G \subset \mathbb{C}$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Dann ist f konstant oder für alle $z \in G$ gilt

$$|f(z)| > \inf_{\zeta \in G} |f(\zeta)|.$$

7. Man beweise den Teil (ii) des Satzes von Liouville: Ist f im $\mathbb{R}^{n+1}$ holomorph und gilt dort $|f(x)| \leq M|x|^m$, so ist f ein Polynom höchstens vom Grade m .
8. Gegeben sei eine Folge in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ definierter holomorpher Funktionen (f_k) , die in einem festen Punkt $z = a \in G$ gegen Null konvergiert und für die ferner die Folge ihrer Realteile gleichmäßig in G gegen Null konvergiert. Man zeige, dass die Folge (f_k) auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ gleichmäßig gegen Null strebt.
9. Man zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{G \rightarrow \{z_0\}} \frac{\int_{\partial G} f(z) dz}{2i \int_G d\sigma}$$

unabhängig von der Art und Weise der Kontraktion $G \rightarrow \{z_0\}$ ist.

8 Teodorescu-Transformation

Ein Umschreiben der Borel–Pompeiu-Formel im Gebiet G führt uns auf

$$(T_G(\bar{\partial}f))(x) = f(x) - (F_{\partial G}f)(x), \quad x \in G.$$

Das heißt, die Anwendung der Teodorescu-Transformation auf das Bild des Cauchy–Riemann-Operators reproduziert die Ausgangsfunktion bis auf ein Randintegral, das wir als Cauchysches Integral kennengelernt haben. Besitzt f Randwerte, die eine holomorphe Fortsetzung in das Außengebiet erlauben, dann verschwindet das Cauchy-Integral und T_G wirkt wie ein linksinverser Operator zu $\bar{\partial}$. Das wirft die Frage nach der Beschreibung von $\bar{\partial}T_G$ auf, der wir uns jetzt widmen wollen. Diese Betrachtung erfordert die Kenntnis einiger Funktionenräume, da $T_G f$ zumindest partiell differenzierbar sein sollte, um überhaupt $\bar{\partial}T_G f$ mit Sinn zu verstehen. Eine Einführung in diese Funktionenräume haben wir in Anhang 3 zusammengestellt.

8.1 Eigenschaften der Teodorescu-Transformation

Wir beschäftigen uns zuerst mit der in Definition 7.10 eingeführten *Teodorescu-Transformation*

$$(T_G u)(x) = (Tu)(x) = -\frac{1}{\sigma_n} \int_G \mathcal{Q}_0(y-x)u(y)d\sigma_y$$

und dem *Cauchy–Bitsadse-Operator*

$$(F_\Gamma u)(x) = (Fu)(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_\Gamma \mathcal{Q}_0(y-x)dy^*u(y).$$

Dabei sei G ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\sigma_n = 2\pi^{(n+1)/2}/\Gamma((n+1)/2)$ der Flächeninhalt der n -dimensionalen Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$. Ferner sei $\Gamma = \partial G$ eine hinreichend glatte (im Allgemeinen zweimal stetig differenzierbare) Fläche. Erinnerung sei an $\mathcal{Q}_0(x) := \bar{x}/|x|^{n+1}$.

Lemma 8.1. *Es sei $u \in L^p(G)$ für $p > n+1$.*

- (i) *Das Integral $(Tu)(x)$ existiert überall im $\mathbb{R}^{n+1}$ und strebt gegen Null für $|x| \rightarrow \infty$, außerdem ist $(T_G u)(x)$ holomorph in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{G}$. Ferner gilt für beschränktes G*

$$\|T_G u\|_p \leq C_1(G, p, n)\|u\|_p.$$

- (ii) *Für $x, z \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $x \neq z$ gilt*

$$|(T_G u)(x) - T_G u(z)| \leq C_2(G, p, n)\|u\|_p |x - z|^{\frac{p-n-1}{p}} \quad (x \neq z).$$

Die Konstanten können explizit abgeschätzt werden, allerdings sind die Ausdrücke wenig aufschlussreich.

Beweis. (i) Für $|x| \rightarrow \infty$ ist natürlich $x \neq y$. Dann kann man wie folgt abschätzen:

$$|T_G u(x)| \leq \frac{1}{\sigma_n} \int_G \frac{1}{|x-y|^n} |u(y)| d\sigma_y \leq \frac{1}{\sigma_n} \max_{z \in G} \frac{1}{|x-z|^n} \int_G |u(y)| d\sigma_y.$$

Damit ist $|T_G u(x)| \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$. Da $\mathcal{Q}_0$ außerhalb der Singularität holomorph ist, ist $T_G u(x)$ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \partial G$ gleichfalls holomorph. Die Abschätzung von $\|T_G u\|_p$ ergibt sich aus der Hölderschen Ungleichung zu

$$|(T_G u)(x)| \leq \frac{1}{\sigma_n} \int_G |\mathcal{Q}_0(y-x)u(y)| d\sigma_y \leq \frac{1}{\sigma_n} \|u\|_p \left(\int_G |\mathcal{Q}_0(y-x)|^q d\sigma_y \right)^{1/q}.$$

Das letzte Integral wird in Aufgabe 8.3.4 ausgewertet. Nochmalige Integration über G liefert die Aussage des Satzes.

(ii) Nun seien $x, z \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $x \neq z$. Wir beschränken uns auf das Integral $T'u$ über $G' =: G \setminus B_\varepsilon(x)$. Ferner sei $|z-x| < \frac{\varepsilon}{2}$, also $|y-z| \geq |y-x|/2$. Durch geeignete Ergänzung gilt weiter

$$\begin{aligned} \left| \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{n+1}} - \frac{\overline{y-z}}{|y-z|^{n+1}} \right| &= \left| \frac{\overline{z-x}}{|y-x|^{n+1}} + (\overline{y-z}) \frac{|y-z|^{n+1} - |y-x|^{n+1}}{|y-x|^{n+1}|y-z|^{n+1}} \right| \\ &\leq \frac{|z-x|}{|y-x|^{n+1}} + |y-z| \frac{|z-x|(|y-z|^n + |y-z|^{n-1}|y-x| + \dots)}{|y-x|^{n+1}|y-z|^{n+1}} \\ &\leq |z-x| \frac{2^{n+1}}{|y-x|^{n+1}}. \end{aligned}$$

Nun wenden wir die Höldersche Ungleichung an:

$$|(T'u)(z) - (T'u)(x)| \leq \frac{2^{n+1}|z-x|}{\sigma_n} \left(\int_{G'} |u(y)|^p d\sigma_y \right)^{1/p} \left(\int_{G'} \frac{d\sigma_y}{|y-x|^{(n+1)q}} \right)^{1/q}.$$

Das letzte Integral kann man in Polarkoordinaten durch

$$\sigma_n \int_{\varepsilon}^R r^{n-(n+1)q} dr$$

abschätzen, wenn G in einem Kreis vom Radius R um x liegt. Das liefert mit einer geeigneten Konstanten C

$$|(T'u)(z) - (T'u)(x)| \leq C \|u\|_p |z-x| \varepsilon^{(n+1)(1-q)\frac{1}{q}} \leq C_2(G, p, n) \|u\|_p |z-x|^{1-\frac{n+1}{p}}.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ führt auf das behauptete Resultat. $\square$

Für $u \in L^1(G)$ lässt sich zeigen, dass das Integral $T_G u(x)$ überall im $\mathbb{R}^{n+1}$ existiert. Dieser Beweis wird dem Leser als Aufgabe überlassen (Aufgabe 8.3.1). Als Nächstes folgt der Beweis einer sehr wichtigen Eigenschaft des Teodorescu-Operators, nämlich dass er die Umkehrung des $\bar{\partial}$ -Operators darstellt:

Satz 8.2. *Die Funktion u sei stetig differenzierbar in G . Dann ist Tu differenzierbar und es gilt für $x \in G$*

$$\partial_i(Tu)(x) = -\frac{1}{\sigma_n} \int_G \partial_{i,x} \mathcal{Q}_0(y-x) u(y) d\sigma_y + \bar{e}_i \frac{u(x)}{n+1}.$$

Speziell haben wir

$$\bar{\partial}(Tu)(x) = u(x).$$

Das Integral über G ist ein stark singuläres Integral, das im Allgemeinen nur als Cauchyscher Hauptwert existiert. Dazu schneide man aus G eine Kugel $B_\varepsilon(x)$ aus und untersuche dann den Grenzwert des Integrals über $G' = G \setminus B_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Beweis. Zuerst behandeln wir reellwertige u , zu algebrawertigen kann dann durch Summation übergegangen werden. Es sei $x \in G$, wir betrachten wie beim vorangehenden Beweis

$$(T_G u)(x) = (T_{G \setminus B_\varepsilon(x)} u)(x) + (T_{B_\varepsilon(x)} u)(x).$$

Dabei sei ε so klein, dass die Kugel $B_\varepsilon(x)$ einschließlich ihres Randes in G liegt. Das Integral $(T_{G \setminus B_\varepsilon(x)} u)(x)$ kann mit Hilfe des Gaußschen Satzes umgeformt werden, den wir in der Form (vgl. Aufgabe A.2.3.9)

$$\int_{\partial G'} f(y) d\bar{y}^* = \int_{G'} (\partial f)(y) d\sigma_y$$

verwenden, ferner wird

$$\begin{aligned} \partial_{i,y} \frac{1}{|y-x|^{n-1}} &= -(n-1) \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}} = -\partial_{i,x} \frac{1}{|y-x|^{n-1}}, \\ \partial_y \frac{1}{|y-x|^{n-1}} &= -(n-1) \mathcal{Q}_0(y-x) \end{aligned}$$

benötigt. Dann gilt

$$\begin{aligned} (T_{G \setminus B_\varepsilon(x)} u)(x) &= \frac{1}{(n-1)\sigma_n} \int_{G \setminus B_\varepsilon(x)} \left(\partial_y \frac{1}{|y-x|^{n-1}} \right) u(y) d\sigma_y \\ &= -\frac{1}{(n-1)\sigma_n} \int_{G \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{1}{|y-x|^{n-1}} \partial_y u(y) d\sigma_y \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)\sigma_n} \left(\int_{\partial G} - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \right) \frac{u(y)}{|y-x|^{n-1}} d\bar{y}^*. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ geht das Integral über $\partial B_\varepsilon(x)$ gegen Null, da $d\bar{y}^*$ den Faktor $|y-x|^n$ enthält. Damit erhalten wir für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(T_G u)(x) = -\frac{1}{(n-1)\sigma_n} \int_G \frac{1}{|y-x|^{n-1}} (\partial_y u)(y) d\sigma_y + \frac{1}{(n-1)\sigma_n} \int_{\partial G} \frac{u(y)}{|y-x|^{n-1}} d\bar{y}^*.$$

Gemäß Aufgabe 8.3.3 kann das erste Integral unter dem Integralzeichen differenziert werden. Das zweite Integral ist ein Parameterintegral ohne Singularitäten im Integranden, kann also auch problemlos differenziert werden:

$$\partial_{i,x}(T_G u)(x) = -\frac{1}{\sigma_n} \int_G \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}} (\partial_y u)(y) d\sigma_y + \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial G} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}} u(y) d\bar{y}^*.$$

Alle Integrale existieren als uneigentliche Integrale. Jetzt wollen wir das Integral über ∂G wieder mit dem Gaußschen Satz umformen:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\partial G} - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \right) \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}} u(y) d\bar{y}^* \\ &= \int_{G \setminus B_\varepsilon(x)} \left[\left(\partial_y \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}} \right) u(y) + \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}} (\partial u)(y) \right] d\sigma_y. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für unsere gesuchte Ableitung unter Verwendung von

$$\partial_y \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}} = \partial_y \partial_{i,x} \frac{1}{(n-1)|y-x|^{n-1}} = -\partial_{i,x} \mathcal{Q}_0(y-x)$$

schließlich

$$\begin{aligned} \partial_{i,x}(T_G u)(x) &= -\frac{1}{\sigma_n} \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}} (\partial u)(y) d\sigma_y \\ &\quad - \frac{1}{\sigma_n} \int_{G \setminus B_\varepsilon(x)} \partial_{i,x} \mathcal{Q}_0(y-x) u(y) d\sigma_y + \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}} u(y) d\bar{y}^*. \end{aligned}$$

Hierin hat das erste Integral in Koordinaten $y-x = rt$ das Aussehen

$$-\frac{1}{\sigma_n} \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}} (\partial u)(y) d\sigma_y = -\frac{1}{\sigma_n} \int_{r=0}^{\varepsilon} \int_{|t|=1} t_i (\partial u)(x+rt) dr |do_1|$$

und dies konvergiert gegen Null für $\varepsilon \rightarrow 0$. Das zweite Integral konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen das gewünschte Integral als Cauchyscher Hauptwert (vgl. Aufgabe 8.3.2). Für das dritte Integral gehen wir wie folgt vor: Wir zerlegen in der Form

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}} u(y) d\bar{y}^* &= \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}} [u(y) - u(x)] d\bar{y}^* \\ &\quad + u(x) \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}} d\bar{y}^*; \end{aligned}$$

wegen $d\bar{y}^* = \overline{(y-x)}|y-x|^{n-1}|do_1|$ auf $\partial B_\varepsilon(x)$ und $u(y) \rightarrow u(x)$ geht das erste Integral auf der rechten Seite gegen Null für $\varepsilon \rightarrow 0$. Für das zweite Integral rechts ergibt sich mit $y-x = \varepsilon t$

$$u(x) \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^{n+1}} d\bar{y}^* = u(x) \int_{|t|=1} t_i d\bar{t}^*$$

und nach dem Gaußschen Satz

$$= u(x) \int_{|t|<1} (\partial t_i) d\sigma_t = u(x) \bar{e}_i \sigma_n \int_0^1 r^n dr = \frac{\sigma_n}{n+1} u(x) \bar{e}_i.$$

Das ist die erste Behauptung des Satzes. Bilden wir nun noch $\bar{\partial}(Tu)$, so ist der Holomorphie von $\mathcal{Q}_0$ wegen das Integral über $\bar{\partial}\mathcal{Q}_0$ Null und es bleibt

$$\bar{\partial}(Tu)(x) = \sum_{i=0}^n e_i \partial_i(Tu)(x) = u(x). \quad \square$$

Der soeben bewiesene Satz bleibt richtig, wenn nur die Stetigkeit von u vorausgesetzt wird. Ausgehend vom obigen Resultat haben wir die stetige Funktion u durch stetig differenzierbare Funktionen zu approximieren und die gleichmäßige Beschränktheit von $T_G u$ zu beweisen. Die wesentlichen Teilschritte sind im Aufgabenteil formuliert.

Ferner sei bemerkt, dass die Differenzierbarkeit von ∂G keine Rolle spielt. Man kann eine feste Kugel K aus G herausnehmen und den obigen Beweis verwenden. Das Integral über $G \setminus K$ kann als nicht singuläres Parameterintegral ohne weiteres differenziert werden und zum Ergebnis in der Kugel addiert werden.

Wir können noch ein schärferes Resultat zeigen:

Satz 8.3. *Der Operator*

$$\partial_k T_G : L^p(G) \rightarrow L^p(G)$$

ist stetig und erfüllt im beschränkten Gebiet G die Abschätzung

$$\|\partial_k T_G u\|_p \leq C_3(G, p, n) \|u\|_p \quad (p > n+1)$$

mit einer geeigneten Konstanten $C_3(G, p, n)$.

Beweis. Das Lemma 8.2 liefert für $u \in C^1(G)$

$$\partial_k T_G u(x) = -\frac{1}{\sigma_n} \int_G \partial_{k,x} \mathcal{Q}_0(x-y) u(y) d\sigma_y + \bar{e}_k \frac{u(x)}{n+1},$$

Wir wenden jetzt den Satz von CALDERON-ZYGMUND ([107] XI, §3) an. Nach ihm gilt

$$\left\| \frac{1}{\sigma_n} \int_G \partial_{k,x} \mathcal{Q}_0(y-x) u(y) d\sigma_y \right\|_p \leq C \|f\|_{L^q(S^{n+1})} \|u\|_p,$$

wenn nur mit $\omega : (y - x)/|y - x|$

$$f(\omega) = \frac{1}{\sigma_n} |y - x|^{n+1} \partial_{k,x} \mathcal{Q}_0(y - x) = \frac{1}{\sigma_n} (-\bar{e}_k - (n+1)\omega_k \bar{\omega})$$

eine beschränkte q -Norm bezüglich ω auf der S^n hat. Das ist aber der Fall, denn

$$\int_{S^n} |f(\omega)|^q |do_y| \leq \int_{S^n} \left(\frac{n+2}{\sigma_n} \right)^q |do_y| = \sigma_n^{1-q} (n+2)^q,$$

also

$$\|f(\omega)\|_{L^q(S^n)} \leq (n+2)\sigma_n^{-1/p}.$$

Ein explizite Abschätzung für die Konstante C zu erhalten ist recht schwierig. Da $C^1(G)$ dicht in $L^p(G)$ ist, kann die Ungleichung auf $L^p(G)$ ausgedehnt werden, d.h. es gilt

$$\left\| \frac{1}{\sigma_n} \int_G \partial_{k,x} \mathcal{Q}_0(x - y) u(y) dy \right\|_p \leq C(n+2)\sigma_n^{-1/p} \|u\|_p.$$

Außerdem haben wir

$$\left\| \bar{e}_k \frac{u}{n+1} \right\|_p \leq \frac{1}{n+1} \|u\|_p.$$

Beide Ungleichungen addiert ergeben

$$\|\partial_k T_G u\|_p \leq C_3(G, p, n) \|u\|_p$$

mit $C_3(G, p, n) = C(n+2)\sigma_n^{-1/p} + \frac{1}{n+1}$. □

Schließlich folgt

Satz 8.4. *Es sei G ein beschränktes Gebiet. Dann ist*

$$T_G : L^p(G) \rightarrow W^{1,p}(G)$$

stetig.

Beweis. Es gilt

$$\|T_G u\|_{1,p} = \left(\|T_G u\|_p^p + \sum_{k=0}^n \|\partial_k T_G u\|_p^p \right)^{1/p} \leq \|T_G u\|_p + \sum_{k=0}^n \|\partial_k T_G u\|_p.$$

Nach Lemma 8.1 und dem vorangehenden Satz ergibt sich

$$\|T_G u\|_{1,p} \leq (C_1(G, p, n) + (n+1)C_3(G, p, n)) \|u\|_p.$$

Das ist die Behauptung. □

8.2 Hodge-Zerlegung des quaternionalen Hilbertraums

8.2.1 Hodge-Zerlegung

Wir beschränken uns hier auf den $\mathbb{R}^3 = \text{Vec } \mathbb{H}$, die Funktionen sollen Werte in $\mathbb{H}$ haben. Der Cauchy–Riemann-Operator $\bar{\partial}$ geht dann in den Dirac-Operator D gemäß Bemerkung 5.13 über. Ferner sei $X := \ker D \cap L^2(G)$ die Menge aller in $L^2(G)$ liegenden holomorphen Funktionen. Zunächst soll gezeigt werden, dass X ein abgeschlossener Teilraum in $L^2(G)$ ist.

Lemma 8.5. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand Γ . Dann ist $X = \ker D \cap L^2(G)$ ein rechtslinearer Teilraum in $L^2(G)$.*

Beweis. Es sei $(\phi_i)_{i=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge in X , wobei der Begriff der Cauchy-Folge analog zum Reellen definiert ist. Wegen der Vollständigkeit von $L^2(G)$ existiert eine Funktion $\phi \in L^2(G)$ mit $\phi_i \rightarrow \phi$ in $L^2(G)$. Der Mittelwertsatz 7.31 liefert für hinreichend kleines r

$$|\phi_i - \phi_j|(x) \leq \frac{1}{\sigma_3} \int_{|y|=1} |\phi_i - \phi_j|(x + ry) |do_y|,$$

woraus folgt

$$|\phi_i - \phi_j|(x) \leq C_r \|\phi_i - \phi_j\|_2$$

und

$$\sup_{x \in G(r)} |\phi_i - \phi_j|(x) \leq C_r \|\phi_i - \phi_j\|_2$$

mit $G(r) = \{x \in G : \text{dist}(x, \Gamma) > r\}$. Damit wissen wir, dass die Folge (ϕ_i) gleichmäßig auf kompakten Teilmengen konvergiert. Mit Folgerung 7.28 erhalten wir, dass auch sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung auf kompakten Teilmengen konvergieren, d.h. auch $D\phi_i$ konvergiert (gegen Null), woraus die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 8.6. Ein entsprechendes Resultat gilt auch in $L^p(G)$ ($1 < p < \infty$) (vgl. hierzu [55]).

Jetzt kommen wir zu dem für das Folgende notwendigen Satz:

Satz 8.7 (Hodge-Zerlegung). *Der $\mathbb{H}$ -wertige Hilbertraum $L^2(G)$ gestattet die orthogonale Zerlegung*

$$L^2(G) = (L^2(G) \cap \ker D) \oplus DW_0^{1,2}(G)$$

bezüglich des inneren Produktes in $L^2(G)$, das in Anhang A.3.3 definiert wird.

Beweis. Es sei $X = L^2(G) \cap \ker D$ und $Y = L^2(G) \ominus X$. Für $u \in Y$ haben wir nach Satz 8.4 $v = Tu \in W^{1,2}_0(G)$, nach Konstruktion gilt $u = Dv$ und außerdem muss für alle holomorphen $\phi \in L^2(G)$

$$\int_G \bar{u}\phi d\sigma = \int_G \overline{Dv}(y)\phi(y) d\sigma = 0$$

gelten. Es werden Punkte $x^{(l)}$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$ ausgewählt, denen die Singularitätenfunktionen

$$\phi_l(x) = \frac{1}{\sigma_2} \frac{x - x^{(l)}}{|x - x^{(l)}|^3},$$

zugeordnet werden. Diese sind $\mathbb{H}$ -holomorph in G , daher ist

$$\int_G (\overline{Dv})(y) \phi_l(y) d\sigma = 0.$$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes und wegen $\overline{\phi_l} = -\phi_l$ folgt die Darstellung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sigma_2} \overline{\int_G Dv(y) \phi_l(y) d\sigma} = \frac{1}{\sigma_2} \int_G \overline{\phi_l}(y) (Dv)(y) d\sigma = \frac{1}{\sigma_n} \int_G (\phi_l D)(y) v(y) d\sigma \\ &\quad - \frac{1}{\sigma_2} \int_\Gamma \phi_l(y) dy^* v(y) = -(F_\Gamma v)(x^{(l)}). \end{aligned}$$

Ist nun $\{x^{(l)}\}$ eine dichte Teilmenge in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$, so muss aus Stetigkeitsgründen $(F_\Gamma v)(x) = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$ sein. Also ist $\text{tr}_\Gamma v$ holomorph nach G fortsetzbar. Die Fortsetzung werde mit h bezeichnet. Damit ist $\text{tr}_\Gamma h = \text{tr}_\Gamma v$, wobei der „Spuroperator“ tr_Γ die Einschränkung auf Γ beschreibt. Wir setzen nunmehr $w := v - h$, w hat die Randwerte Null und wir erhalten $w \in DW_0^{1,2}(G)$. Offensichtlich ist

$$u = Dv = Dw,$$

was zu beweisen war. □

Bemerkung 8.8. Eine orthogonale Zerlegung erzeugt zwei Orthoprojektionen auf die beiden Teilräume X und Y , d.h. wir haben

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : L^2(G) &\rightarrow L^2(G) \cap \ker D, \\ \mathbf{Q} : L^2(G) &\rightarrow DW_0^{1,2}(G). \end{aligned}$$

Der Operator $\mathbf{P}$ stellt dabei eine Verallgemeinerung der klassischen *Bergman-Projektion* dar, er bildet die Funktionen aus $L^2(G)$ auf die holomorphen Funktionen in $L^2(G)$ ab.

Mit der Borel-Pompeiu-Formel hatten wir das Verhalten einer Funktion im Gebiet G über das Cauchysche Integral mit ihren Randwerten verknüpft. Interessanterweise hängen die Randwerte von $T_G f$ mit den im Gebiet wirkenden Orthoprojektoren zusammen. Das folgende Lemma gibt uns eine vollständige Charakterisierung des Bildes von $\mathbf{Q}$.

Lemma 8.9. *Es ist $u \in \text{im } \mathbf{Q}$ genau dann, wenn $\text{tr}_\Gamma Tu = 0$ ist. Dabei steht im $\mathbf{Q}$ für das Bild des Operators $\mathbf{Q}$, und $\text{tr}_\Gamma f$ sei wieder die Spur oder Restriktion von f auf Γ .*

Beweis. Zunächst sei $u \in \text{im } \mathbf{Q}$. Dann existiert eine Funktion $w \in W_0^{1,2}(G)$, so dass u die Darstellung

$$u = Dw \quad .$$

gestattet. Die Formel von Borel–Pompeiu 7.8 liefert dann

$$Tu = TDw = w - F_\Gamma w = w$$

und somit $\text{tr}_\Gamma Tu = \text{tr}_\Gamma w = 0$. Es werde nun umgekehrt angenommen, dass $\text{tr}_\Gamma Tu = 0$ ist und damit auch

$$\text{tr}_\Gamma T\mathbf{Q}u + \text{tr}_\Gamma T\mathbf{P}u = 0 \quad .$$

Offenbar gilt $\text{tr}_\Gamma T\mathbf{Q}u = 0$ nach dem oben Bewiesenen, denn natürlich ist $\mathbf{Q}u \in \text{im } \mathbf{Q}$.

Damit verbleibt $\text{tr}_\Gamma T\mathbf{P}u = 0$. Nach Satz 8.4 gehört $T\mathbf{P}u$ zum Raum $W^{1,2}(G)$, somit gilt $T\mathbf{P}u \in W_0^{1,2}(G)$. Dann ergibt sich $D(T\mathbf{P}u) \in \text{im } \mathbf{Q}$, gleichzeitig gilt aber auch $D(T\mathbf{P})u = \mathbf{P}u \in \text{im } \mathbf{P}$. Aus $\mathbf{P}u \in \text{im } \mathbf{P} \cap \text{im } \mathbf{Q}$ folgt weiter $\mathbf{P}u = 0$. Letzteres bedeutet nichts anderes als $u \in \text{im } \mathbf{Q}$, was die andere Richtung der Behauptung ist. $\square$

8.2.2 Darstellungssatz

Wir wissen bereits, dass holomorphe Funktionen in jeder Koordinate harmonisch sind. Im Folgenden suchen wir nach einer qualitativen Beschreibung harmonischer Funktionen durch Ausdrücke in holomorphen Funktionen. Dadurch klären wir auch das Verhältnis dieser beiden wichtigen Funktionenklassen zueinander.

Satz 8.10 (Darstellungssatz). *Es sei G ein Gebiet im $\mathbb{R}^3$ mit hinreichend glattem Rand Γ , $g \in W^{k+\frac{3}{2},2}(\Gamma)$ und $k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Jede Lösung $u \in W^{k+2,2}(G)$ des Dirichlet-Problems*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{in } G, \\ u &= g & \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \tag{8.1}$$

kann durch eindeutig definierte Funktionen $\phi_1 \in W^{k+2,2}(G)$ und $\phi_2 \in W^{k+1,1}(G)$ in der Form

$$u = \phi_1 + T \phi_2$$

dargestellt werden, wobei ϕ_1 dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} D\phi_1 &= 0 & \text{in } G, \\ \text{tr}_\Gamma \phi_1 &= P_\Gamma g & \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \tag{8.2}$$

und ϕ_2 dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} D\phi_2 &= 0 & \text{in } G, \\ \text{tr}_\Gamma T\phi_2 &= Q_\Gamma g & \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{8.3}$$

genügt.

Beweis. Es sei $u \in W^{k+2,2}(G)$ eine Lösung des Randwertproblems (8.1). Die Borel-Pompeiu-Formel liefert dann

$$u = F_{\Gamma} \operatorname{tr}_{\Gamma} u + T D u = F_{\Gamma} g + T D u.$$

Offenbar gilt $F_{\Gamma} g \in \ker D$ und $D u \in \ker D$. Wir setzen $\phi_1 := F_{\Gamma} g$ und $\phi_2 := D u$. Aus $u \in W^{k+2,2}(G)$ folgt sofort $\phi_2 \in W^{k+1,2}(G)$. Unter Benutzung der Abbildungseigenschaften der Teodorescu-Transformation ist $F_{\Gamma} g = u - T D u \in W^{k+2,2}(G)$, so dass die Regularitätsaussage des Satzes bewiesen ist.

Mit $\phi_1 = F_{\Gamma} g$ ist $\operatorname{tr}_{\Gamma} \phi_1 = \operatorname{tr}_{\Gamma} F_{\Gamma} g = P_{\Gamma} g$ und aus $\operatorname{tr}_{\Gamma} T \phi_2 = \operatorname{tr}_{\Gamma} (u - F_{\Gamma} g) = g - P_{\Gamma} g = Q_{\Gamma} g$ erhalten wir, dass ϕ_1 und ϕ_2 tatsächlich die Randwertaufgaben (8.2) und (8.3) lösen.

Es verbleibt der Nachweis der Eindeutigkeit, der wie üblich indirekt geführt wird. Die Annahme zweier Darstellungen $u = \phi_1 + T \phi_2 = \psi_1 + T \psi_2$ führt auf $0 = (\phi_1 - \psi_1) + T(\phi_2 - \psi_2)$. Anwendung von D liefert direkt $\phi_2 = \psi_2$; benutzen wir das, folgt $\phi_1 = \psi_1$. $\square$

8.3 Aufgaben

1. Man beweise, dass die Teodorescu-Transformation

$$T_G u(x) = -\frac{1}{\sigma_n} \int_G \mathcal{Q}_0(y-x) u(y) d\sigma_y$$

unter der Voraussetzung $u \in L^1(G)$ überall auf $\mathbb{R}^{n+1}$ existiert.

2. Man beweise, dass die bei der Differentiation der Teodorescu-Transformation in Satz 8.2 auftretenden Integrale

$$\int_{G \setminus B_{\varepsilon}(x)} \partial_{i,x} \mathcal{Q}_0(y-x) u(y) d\sigma_y \quad \text{und} \quad \int_{|y-x|=\varepsilon} \mathcal{Q}_0(y-x) dy_i^* u(y)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ lokal gleichmäßig in x konvergieren.

3. Es sei u eine in $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gegebene stetige Funktion. Man beweise, dass

$$\partial_{i,x} \int_G \frac{1}{|y-x|^{n-1}} u(y) d\sigma_y = \int_G \partial_{i,x} \left(\frac{1}{|y-x|^{n-1}} \right) u(y) d\sigma_y.$$

Lassen sich die Voraussetzungen an u abschwächen?

4. Man zeige, dass für $1 \leq q < (n+1)/n$ gilt:

$$\int_G |\mathcal{Q}_0(x-y)|^q d\sigma_y \leq \sigma_n \frac{(\operatorname{diam} G)^{n+1-qn}}{n+1-qn}.$$

9 Potenzreihen

9.1 Konvergenzsätze vom Weierstraß-Typ, Potenzreihen

9.1.1 Konvergenzsätze von Weierstraß



Karl Weierstraß

Wir wollen in diesem Abschnitt eine wichtige Gruppe von weiteren Folgerungen aus dem Integralsatz und der Integralformel von Cauchy ziehen, die sich insbesondere mit dem Konvergenzverhalten von Funktionenfolgen befassen.

Diese Sätze stammen von KARL WEIERSTRASS, der eine bedeutende Persönlichkeit bei der Entwicklung der komplexen Funktionentheorie war.

KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815–1897) brach sein Studium der Kameralistik in Bonn ab, um sich ganz der Mathematik zu widmen. Bereits ein Jahr später konnte er an der Theologischen und Philosophischen Akademie in Münster sein Lehrerexamen ablegen. Er war dann Lehrer in Deutsch-Krone in Westpreußen und von 1848–1855 am Gymnasium in Braunsberg in Ostpreußen. Für seine Abhandlung zur Theorie der abelschen Funktionen im Jahre 1854 erhielt er noch in demselben Jahr den Ehrendoktor der Universität Königsberg. Er wurde 1856 an das Gewerbeinstitut in Berlin berufen, einen Vorläufer der Technischen Hochschule, ab 1864 war er Professor an der Berliner Universität, 1867 wurde er Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften. Schon 1861 gründete er zusammen mit E.E. KUMMER das erste Forschungsseminar für Mathematik an einer deutschen Universität. Seine Vorlesungen lockten zahlreiche Studenten aus aller Welt an, sein Einfluss auf die Mathematikentwicklung innerhalb und außerhalb Deutschlands war bis zu seinem Tode groß. Er arbeitete auf dem Gebiet der Funktionentheorie und entwickelte in Konkurrenz zu B. RIEMANN ein geschlossenes Konzept für die Theorie der analytischen Funktionen im Komplexen.

Wir beginnen mit einem Lemma aus der reellen Analysis, das wir in Erinnerung rufen wollen, da es hier Beweisgrundlage ist:

Lemma 9.1. *Es sei (f_m) eine Folge stetiger Funktionen in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, die dort gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist die Grenzfunktion f stetig in G und es gilt überdies für eine stückweise glatte Mannigfaltigkeit*

$\Gamma \subset G$ der Dimension n und eine in G stetige Funktion g

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_m(x) dx^* g(x) = \int_{\Gamma} f(x) dx^* g(x).$$

Die Aussage bleibt richtig, wenn $f(x, s)$ von einem reellen oder paravektorwertigen Parameter s abhängt und für $s \rightarrow s_0$ gleichmäßig in x gilt

$$f(x, s) \rightarrow f(x).$$

Für den Beweis verweisen wir auf die reelle Analysis, wobei wir hier nur in Koordinaten zu zerlegen haben. Wir beweisen als erstes den folgenden Satz, der unter anderem die Differentiation unter dem Integralzeichen umfasst:

Satz 9.2. Die Funktionenfolge (f_m) differenzierbarer Funktionen konvergiere im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ punktweise gegen die Funktion f , die partiellen Ableitungen $\partial_i f_m$ der f_m mögen in G stetig sein und lokal gleichmäßig gegen die Funktionen g_i konvergieren. Dann ist f in G partiell differenzierbar und g_i ist die entsprechende Ableitung $\partial_i f$. Analoges gilt für eine Folge holomorpher Funktionen f_m .

Auch hier kann anstelle der Funktionenfolge eine von einem Parameter abhängige Funktionenmenge stehen, z.B. $f(x, s)$ mit Parameter s .

Beweis. Wir wenden das voranstehende Lemma an; etwa für eine Ableitung nach x_i in einem Punkt x gilt

$$f_m(\dots, x_i + h, \dots) - f_m(\dots, x_i, \dots) = \int_0^h \partial_i f_m(\dots, x_i + t, \dots) dt.$$

Dabei ist es hinreichend, nur kleine Umgebungen des Punktes x zu betrachten, da die Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist. Lässt man jetzt $m \rightarrow \infty$ gehen, so konvergieren die Folgen links nach Voraussetzung und rechts kann der Grenzwert wegen der gleichmäßigen Konvergenz unter das Integral gezogen werden, so dass folgt

$$f(\dots, x_i + h, \dots) - f(\dots, x_i, \dots) = \int_0^h g_i(\dots, x_i + t, \dots) dt.$$

Das heißt aber, dass f bezüglich x_i differenzierbar ist mit der Ableitung g_i .

Sind die f_m holomorph in $\mathbb{C}$, so betrachten wir lokal in einer kleinen Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt z_0

$$f_m(z) - f_m(z_0) = \int_{z_0}^z f'_m(\zeta) d\zeta.$$

Dieses Integral ist eindeutig definiert, da die f'_m gleichfalls holomorph sind. Außerdem sind die Integrale über Dreiecke mit der Spitze in z_0 nach dem Cauchyschen Integralsatz Null, das gilt auch nach dem Grenzübergang $m \rightarrow \infty$, den wir unter das Integral ziehen dürfen:

$$f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^z g(\zeta) d\zeta.$$

Wie beim Beweis des Satzes von Morera können wir differenzieren und erhalten wie gewünscht $f'(z) = g(z)$. $\square$

Wir wollen nun einen anderen Typ von Satz beweisen, bei dem nur die Funktionen gleichmäßig konvergieren sollen:

Satz 9.3. *Die Funktionen f_m , $m \in \mathbb{N}$, seien holomorph in dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, die Folge (f_m) konvergiere in G lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f . Dann ist f holomorph in G .*

Beweis. Es sei $x_0 \in G$ und die Kugel (Kreisscheibe) $\{|x - x_0| \leq \rho\}$ liege in G . Dann können wir die Cauchysche Integralformel anwenden, wobei wir das n am Cauchy-Kern nicht mitschreiben:

$$f_m(x) = \int_{|y-x_0|=\rho} E(y-x) dy^* f_m(y).$$

Wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz kann der Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ in das Integral gezogen werden und wir erhalten:

$$f(x) = \int_{|y-x_0|=\rho} E(y-x) dy^* f(y).$$

Also gilt lokal die Cauchysche Integralformel und nach Folgerung 7.30 ist f holomorph. $\square$

Wir haben damit gezeigt, dass die Menge der holomorphen Funktionen bezüglich der lokal-gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossen ist. Eine Verschärfung dieses Satzes gibt das folgende Korollar:

Folgerung 9.4. *Die Funktionen f_m seien holomorph im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und die Folge (f_m) konvergiere in G lokal gleichmäßig gegen f . Dann gilt auch für jeden Multiindex $\mathbf{k}$, dass die Folge der Ableitungen $\nabla^{\mathbf{k}} f_m$ lokal gleichmäßig gegen $\nabla^{\mathbf{k}} f$ konvergiert.*

Der Beweis wird als Aufgabe 9.4.1 gestellt.

9.1.2 Potenzreihen in $\mathbb{C}$

Potenzreihen stellen einen dritten Zugang zur Funktionentheorie dar, der vor allem von KARL WEIERSTRASS ausgebaut worden ist. Um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert wurden der Riemannsche und der Weierstraßsche Zugang zur Funktionentheorie als stark konkurrierend empfunden, man vertrat heftig seinen "richtigen" Weg. Glücklicherweise hat sich dieser Streit längst erledigt, beide Sichtweisen sind sinnvoll und unentbehrlich, die Frage nach der besseren stellt sich nicht. Wir behandeln zunächst nur den komplexen Fall, die wesentlichen Eigenschaften sind dabei deutlicher zu sehen.

Potenzreihen sind in Definition 4.17 eingeführt worden als Reihen der Form $\sum a_n z^n$. Dort ist gezeigt worden, dass Potenzreihen eine Konvergenzkreisscheibe $|z| < \rho$ besitzen, innerhalb derer sie absolut gegen eine stetige Grenzfunktion konvergieren. Dabei war

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

mit „ $\frac{1}{\infty} := 0$, $\frac{1}{0} := \infty$ “.

Im Innern ihres Konvergenzkreises ist man versucht, eine Potenzreihe *gliedweise* zu differenzieren:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \Rightarrow f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) a_{j+1} z^j ? \quad (9.1)$$

Dass dies tatsächlich erlaubt ist, wollen wir nun beweisen:

Satz 9.5. *Eine Potenzreihe kann im Inneren ihres Konvergenzkreises gliedweise komplex differenziert werden. Die gliedweise abgeleitete Reihe stellt die Ableitung der gegebenen Reihe dar und hat denselben Konvergenzradius. Potenzreihen sind daher im Inneren ihres Konvergenzkreises holomorph.*

Beweis. Wir wollen zuerst zeigen, dass die gliedweise abgeleitete Reihe denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe hat: Man multipliziert die mittlere Reihe aus (9.1) mit z , was auf die Konvergenz keinen Einfluss hat. Dann lauten die Koeffizienten $b_n := n a_n$ und daraus

$$|b_n|^{1/n} = n^{1/n} |a_n|^{1/n}.$$

Wegen $n^{1/n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{\rho}$$

mit dem ursprünglichen Konvergenzradius ρ . Nun muss gezeigt werden, dass das obige $f'(z)$ tatsächlich die Ableitung von $f(z)$ im Inneren des Konvergenzkreises ist. Wir wissen, dass die Partialsummen $s_n(z)$ von f selbst und die gliedweise abgeleiteten Partialsummen $s'_n(z)$ im Inneren des Konvergenzkreises lokal gleichmäßig konvergieren. Nach Satz 9.3 ist f holomorph im Inneren des Konvergenzkreises und die gliedweise differenzierte Reihe stellt die Ableitung von f dar:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k. \quad \square$$

Offensichtlich kann der Prozess der Differentiation sowohl wiederholt als auch umgekehrt werden, was wir in zwei Folgerungen fassen wollen. Die erste liefert uns zusätzlich die Verbindung von f zu den Koeffizienten der Potenzreihe.

Folgerung 9.6. *Eine Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ist innerhalb ihres Konvergenzkreises beliebig oft differenzierbar, und es gilt für alle $n \geq 0$

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Die a_n heißen die Taylorkoeffizienten von f an der Stelle z_0 .

Beweis. Die n -malige Differentiation führt (nach einer sehr einfachen vollständigen Induktion) zu

$$f^{(n)}(z) = n! \sum_{j=n}^{\infty} \binom{j}{n} a_j (z - z_0)^{j-n},$$

und das Einsetzen von $z = z_0$ liefert das Ergebnis. $\square$

Folgerung 9.7. *Eine Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

besitzt im Inneren ihres Konvergenzkreises eine holomorphe Stammfunktion, d.h. eine Funktion F mit $F' = f$, die bis auf eine Konstante bestimmt ist:

$$F(z) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (z - z_0)^{n+1} = c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} a_{k-1} (z - z_0)^k.$$

Der Beweis ist offensichtlich. Bevor wir Potenzreihen multiplizieren oder dividieren, wollen wir die Eindeutigkeit von Potenzreihenentwicklungen beweisen:

Folgerung 9.8. *Eine holomorphe Funktion f kann nur eine Potenzreihenentwicklung um einen Punkt besitzen.*

Beweis. Hätte eine Funktion f zwei verschiedene Potenzreihenentwicklungen, etwa um den Nullpunkt,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

so sei n_0 der kleinste Index mit $a_n \neq b_n$. Es folgt

$$0 = z^{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n - b_n) z^{n-n_0}.$$

Durch z^{n_0} kann man offenbar kürzen, danach liefert das Einsetzen von $z = 0$ den gewünschten Widerspruch $a_{n_0} = b_{n_0}$ zur soeben gemachten Annahme. $\square$

Aus der Produktformel für absolut konvergente Reihen können wir eine Produktformel für Potenzreihen ableiten:

Lemma 9.9 (Multiplikation von Potenzreihen). *Sind*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien ρ_f und ρ_g und ist etwa $0 < \rho_f \leq \rho_g$, so gilt für $|z| < \rho_f$

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

Beweis. Die Produktformel für absolut konvergente Reihen ist für $|z| < \rho_f$ anwendbar und liefert

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k z^k b_{n-k} z^{n-k},$$

und das ist schon das erwartete Ergebnis. $\square$

Etwas schwieriger gestaltet sich die Division von Potenzreihen:

Lemma 9.10 (Division von Potenzreihen). *Sind*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien ρ_f und ρ_g , und ist etwa $0 < \rho_f \leq \rho_g$ sowie $g(z) \neq 0$ für $|z| < \rho$, so gilt für $|z| < \min\{\rho_f, \rho\}$

$$\frac{f(z)}{g(z)} = h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

mit der Rekursionsformel

$$c_n = \frac{1}{b_0} \left(a_n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k b_{n-k} \right)$$

für die gesuchten Koeffizienten c_n .

Beweis. Aus dem vorigen Lemma folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z) = h(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n c_k b_{n-k} \right) z^n,$$

die Eindeutigkeit der Koeffizienten einer Potenzreihe lässt einen *Koeffizientenvergleich* zu:

$$a_n = \sum_{k=0}^n c_k b_{n-k},$$

woraus sich durch Auflösen nach c_n wegen $b_0 = g(0) \neq 0$ ergibt

$$c_n = \frac{1}{b_0} \left(a_n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k b_{n-k} \right), \quad n \geq 0.$$

Hieraus können die c_n rekursiv berechnet werden, wobei $c_0 = a_0/b_0$ der erste Wert ist. $\square$

9.1.3 Potenzreihen in $\mathcal{Cl}(n)$

In $\mathcal{Cl}(n)$ oder besser im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist schon der Begriff der Potenzreihe und ihrer Konvergenz schwieriger als in der Ebene. Man nennt übrigens Funktionen, die durch eine Potenzreihe dargestellt werden können (in der Ebene oder in höheren Dimensionen) *analytisch*. Dieser Begriff wird aber unter sehr verschiedenen Aspekten verwendet, so dass wir ihn hier möglichst vermeiden wollen.

Definition 9.11. In Verallgemeinerung von Definition 4.17 bezeichnen wir als *Potenzreihe* in $\mathcal{Cl}(n)$ mit Variablen im $\mathbb{R}^{n+1}$ eine Reihe der Form

$$\sum P_k(x)$$

mit homogenen Polynomen

$$P_k(x) = \sum_{|\mathbf{k}|=k} a_{\mathbf{k}} x^{\mathbf{k}}.$$

Dabei sei $\mathbf{k} = (k_0, \dots, k_n)$ ein Multiindex und $x^{\mathbf{k}} := x_0^{k_0} \cdots x_n^{k_n}$. Die Reihe wollen wir als *absolut konvergent* bezeichnen, wenn mit

$$\widetilde{P}_k(x) := \sum_{|\mathbf{k}|=k} |a_{\mathbf{k}}| |x^{\mathbf{k}}|$$

die Reihe

$$\sum \widetilde{P}_k(x)$$

konvergiert.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass man auch andere Zusammenfassungen der Glieder einer solchen *mehrfach unendlichen Reihe* vornehmen kann, was dann auch zu anderen Definitionen der Konvergenz führt. Der Bereich der Konvergenz bzw. der absoluten Konvergenz ist nur schwierig genau einzugrenzen. Da $|x_i| \leq |x|$, kann man jedenfalls eine Abschätzung der folgenden Art angeben:

$$\widetilde{P}_k(x) \leq |x|^k \left(\sum_{|\mathbf{k}|=k} |a_{\mathbf{k}}| \right) =: A_k |x|^k.$$

Für die Behandlung der Reihe $\sum_k A_k |x|^k$ können nun die Ergebnisse aus der Ebene herangezogen werden. Gegebenenfalls gewinnt man eine *Konvergenzkugel* $\{|x| < \rho\}$ mit

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |A_k|^{1/k}.$$

Wir können zeigen:

Satz 9.12. *Eine Potenzreihe kann im Inneren ihrer Konvergenzkugel gliedweise differenziert werden, und die abgeleitete Reihe stellt dort die Ableitung der gegebenen Reihe dar.*

Beweis. Bei der Differentiation eines homogenen Polynoms in x nach einem der x_i erniedrigt sich der Grad um 1 (oder die Differentiation ergibt Null). Dabei treten Faktoren $k_i \leq |\mathbf{k}| = k$ vor die Summanden, so dass man

$$\left| \widetilde{\partial_i P_k}(x) \right| \leq k|x|^{k-1} A_k$$

erhält. Wie in der Ebene folgt dann die Konvergenz für $|x| < \rho$.

Damit konvergieren aber sowohl die Partialsummen der ursprünglichen Reihe $s_m(x)$ wie die $\partial_i s_m(x)$ der gliedweise differenzierten Reihe gleichmäßig gegen die Funktionen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) \quad \text{bzw.} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \partial_i P_k(x).$$

Nach dem obigen Satz 9.2 ist daher wie gewünscht $g(x) = \partial_i f(x)$. $\square$

Beispiele für solche mehrfach unendlichen Reihen werden wir sehr bald kennen lernen.

Satz 9.13. *Eine Funktion f , die eine Potenzreihenentwicklung gestattet, bestimmt diese eindeutig.*

Beweis. Es seien P_k und Q_k die ersten homogenen Polynome, die sich bei zwei solcher Reihen für eine Funktion f unterscheiden. Da $f(0)$ die Werte P_0 und Q_0 bestimmt, muss $k > 0$ sein. Durch Differentiation nach geeigneten x_i kann man dann leicht zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt. $\square$

9.2 Taylor- und Laurentreihen in $\mathbb{C}$

9.2.1 Taylorreihen

Auch hier behandeln wir erst den komplexen Fall, da er sehr übersichtlich ist und wichtige Ergebnisse liefert. Es handelt sich wieder um Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel, womit dann die Gleichwertigkeit der Holomorphie mit der Entwickelbarkeit in eine Reihe gezeigt ist. Den Weg über die Reihenentwicklungen ist vorzugsweise KARL WEIERSTRASS gegangen.

Satz 9.14 (Taylorentwicklung). *Sei f in der Kreisscheibe $B_R(z_0) = \{|z - z_0| < R\}$ holomorph. Dann besitzt f dort eine konvergente Taylorreihe,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

wobei ρ beliebig ist mit $0 < \rho < R$.

Damit ist eine Funktion genau dann holomorph in einem Gebiet G , wenn sie zu jedem Punkt $z_0 \in G$ eine konvergente Potenzreihenentwicklung um diesen Punkt besitzt. Die Potenzreihen erfassen also alle holomorphen Funktionen. Aber je nach Fragestellung sind andere Darstellungen günstiger. Wie wir bei der geometrischen Reihe für $1/(1-z)$ gesehen haben, stellt die Reihe um $z_0 = 0$ diese Funktion nur im Einheitskreis dar, während die rationale Darstellung problemlos das Verhalten in $\hat{\mathbb{C}}$ beschreibt.

Beweis. Wir wenden die Cauchysche Integralformel in $B_{\rho+\varepsilon}$ mit $\rho < \rho + \varepsilon < R$ an,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho + \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

und entwickeln den Cauchykernel $1/(\zeta - z)$ in eine konvergente geometrische Reihe nach $(z - z_0)$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

In der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B}_\rho(z_0)$ konvergiert diese Reihe gleichmäßig. Daher kann sie gliedweise integriert werden. Das ergibt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho + \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Der Cauchysche Integralsatz liefert noch die Unabhängigkeit vom Radius des Integrationsweges, so dass wir dort auch $|\zeta - z_0| = \rho$ einsetzen können. Der Radius ρ kann beliebig nahe an R gewählt werden, weshalb die Darstellung tatsächlich in der ganzen Kreisscheibe $B_R(z_0)$ gilt. Die Berechnung der Koeffizienten durch die Ableitungen von f findet sich schon im vorigen Abschnitt 9.1. $\square$

Wir schließen einen wichtigen Satz für holomorphe Funktionen an, der zeigt, dass eine solche Funktion bereits durch die Werte auf einer Punktfolge eindeutig festgelegt wird.

Satz 9.15 (Identitätssatz). *Die Funktion f sei in einem Gebiet G holomorph, und es sei (z_n) eine Punktfolge aus G mit $z_n \rightarrow z_0 \in G$. Gilt $f(z_n) = 0$ für alle z_n , so ist $f = 0$.*

Dies kann man auch anders formulieren:

Eine holomorphe Funktion, die nicht die Nullfunktion ist, hat nur isolierte Nullstellen.

Oder in der Form:

Sind f und g in G holomorph und stimmen sie auf einer Punktfolge mit einem Häufungspunkt in G überein, so sind sie identisch.

Beweis. Nach Folgerung 9.8 hat eine holomorphe Funktion eine eindeutig bestimmte Potenzreihenentwicklung. Da f in G stetig ist, gilt $f(z_0) = 0$ und damit für die Potenzreihe um z_0 ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$a_0 = 0$. Dann definieren wir

$$f_1(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(z - z_0)^n.$$

Wegen $f(z_n) = f(z_0) = 0$ erfüllt diese Funktion gleichfalls die Voraussetzungen, daher folgt $a_1 = 0$. Eine vollständige Induktion nach n liefert dann die Behauptung im Konvergenzkreis der Potenzreihe. Gäbe es in G noch einen weiteren Punkt z^* mit $f(z^*) \neq 0$, so wende man das bereits mehrfach verwendete Beweisschema an: Man verbinde z_0 und z^* durch einen Polygonzug. Auf diesem suche man den "ersten" Punkt z^{**} zwischen z_0 und z^* , für den $f(z^{**}) = 0$ ist, für den es aber in beliebiger Nähe zu z^{**} Punkte z' mit $f(z') \neq 0$ gibt. Die Wiederholung des Schlusses bei z^{**} zeigt dann den Widerspruch. $\square$

Eine direkte Folgerung aus dem Identitätssatz ist die folgende Definition:

Definition 9.16 (Holomorphe Fortsetzung). Es seien G_1 und G_2 zwei Gebiete mit nichtleerem Durchschnitt, f sei in G_1 und g in G_2 holomorph. Gilt dann $f(z) = g(z)$ in $G_1 \cap G_2$ (oder in einer Punktfolge mit Häufungspunkt in $G_1 \cap G_2$), so heißt g *holomorphe Fortsetzung* von f nach G_2 (und f *holomorphe Fortsetzung* von g nach G_1).

Der Identitätssatz besagt gerade, dass es nur eine solche holomorphe Fortsetzung geben kann, weshalb der Begriff sinnvoll definiert ist. Als Beispiel sei an die geometrische Reihe im Einheitskreis erinnert, diese wird durch $1/(1-z)$ nach $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph fortgesetzt.

Man kann sich die holomorphe Fortsetzung so vorstellen, dass eine Funktion f in einer Kreisscheibe $B_{R_0}(z_0)$ gegeben ist und dass es gelingt, in dieser Kreisscheibe einen Punkt z_1 zu finden, bei dem der Konvergenzkreis der Taylorreihe um z_1 , etwa $B_{R_1}(z_1)$, über $B_{R_0}(z_0)$ hinausragt. Setzt man das Verfahren fort, so ergibt sich eine Kette von Kreisen, in die die ursprüngliche Funktion f durch das Verfahren fortgesetzt wird. Jede einzelne Kreisscheibe mit der darin definierten holomorphen Funktion heißt auch *Funktionselement*. Verbindet man die Mittelpunkte solch einer *Kreiskette* durch einen (in den Kreisscheiben verlaufenden) Polygonzug, so sagt man auch, dass f *längs des Polygonzuges* fortgesetzt worden sei.

Leider ist es keineswegs gesagt, dass man zur ursprünglichen Funktion zurückkommt, wenn man f längs eines geschlossenen Polygonzuges holomorph fortsetzt. Dazu soll wenigstens ein wichtiges Ergebnis angegeben werden (der einfache Zusammenhang ist in Definition A.2.19 erklärt):

Satz 9.17 (Holomorphe Fortsetzung bei einfachem Zusammenhang). *In einem einfach zusammenhängenden Gebiet G sei um einen Punkt $z_0 \in G$ ein holomorphes Funktionselement f in $B_{R_0}(z_0)$ gegeben. Kann dieses Funktionselement in G beliebig holomorph fortgesetzt werden, so wird auf diese Weise eine in G eindeutige und holomorphe Funktion definiert.*

An dem Beispiel $\sqrt{z}$ sehen wir, dass bei dessen Fortsetzung vom Punkt $z_0 = 1$ aus auf der Einheitskreislinie um den Nullpunkt herum nach einem Umlauf eine

andere Funktion entsteht, deren Wert sich um das Vorzeichen unterscheidet. Der einfache Zusammenhang ist also eine wesentliche Voraussetzung bei diesem Satz.

Beweis. Wir skizzieren die Beweisschritte nur, die genaue Durchführung überlege sich der Leser.

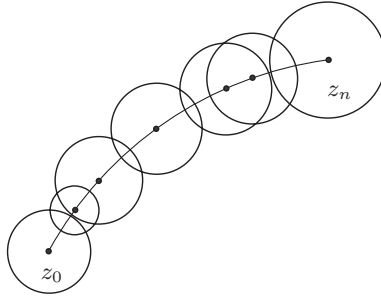


Abbildung 9.1

Wenn keine eindeutig definierte Funktion bei der holomorphen Fortsetzung entstehen würde, so hieße das, dass es einen geschlossenen Polygonzug gäbe, so dass nach Fortsetzung längs dieses Polygonzuges eine andere Funktion als die ursprüngliche erreicht würde. Wir können den Polygonzug als einfach geschlossen, also als Jordankurve annehmen, denn an einem Doppelpunkt könnte man den Polygonzug in zwei geschlossene Polygonzüge zerlegen. Von diesen müsste einer die Eigenschaft haben, dass die Fortsetzung um ihn herum nicht zur Ausgangsfunktion führt, anderenfalls wäre auch die Fortsetzung längs des Ausgangspolygonzuges eindeutig.

Überdeckt man die Ebene mit einem hinreichend feinen achsenparallelen Netz, so kann man aus Stetigkeitsgründen den ursprünglichen Polygonzug durch einen achsenparallelen Polygonzug ersetzen. Dabei sollen die kleinen Quadrate des Netzes, die an den Polygonzug angrenzen, stets in einem der Kreise der bei der Fortsetzung verwendeten Funktionselemente liegen. Das Innere dieses geschlossenen achsenparallelen Polygonzuges kann keine äußeren Punkte von G enthalten, denn entweder gibt es gar keine äußeren Punkte von G oder nur einen, der in $z = \infty$ angenommen werden kann, oder es gibt mehr äußere Punkte, von denen einer in $z = \infty$ angenommen werden kann. Im letzteren Fall kann aber keiner im Inneren des Polygonzuges liegen, da sonst dort auch Randpunkte ebenso wie im Äußeren liegen müssten, die durch die offenen Mengen des Inneren bzw. Äußeren des Polygonzuges überdeckt würden. Diese offenen Mengen wären aber disjunkt, also wäre der Rand nicht zusammenhängend und G wäre nicht einfach zusammenhängend.

Schließlich können wir die inneren Quadrate des Polygonzuges sukzessive abbauen, bis wir schließlich nur eines übrig haben. Da dieses Quadrat in einem der Kreise der Funktionselemente liegt, kann die Fortsetzung um seinen Rand nicht zu einer neuen Funktion führen. Also muss das auch für den ursprünglichen Polygonzug gelten, die holomorphe Fortsetzung eines Funktionselementes führt zu einer eindeutig bestimmten Funktion f in G . $\square$

Wir wollen noch eine letzte Folgerung aus der Taylorentwicklung ziehen:

Folgerung 9.18. *Hat eine holomorphe Funktion die Entwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit dem Konvergenzradius $\rho > 0$, so kann sie nicht in allen Punkten der Kreislinie $|z - z_0| = \rho$ holomorph sein.

Beweis. Wäre die Funktion f in allen Punkten ζ der Kreislinie $|z - z_0| = \rho$ holomorph, so nach Definition der Holomorphie auch jeweils in einer kleinen (offenen) Kreisscheibe um ζ . Die Kreislinie ist eine kompakte Menge und wird durch diese Kreisscheiben überdeckt, also könnte man endlich viele dieser Kreisscheiben finden, die die Kreislinie überdecken. Diese endlich vielen offenen Kreisscheiben überlappten einander und überdeckten einen kleinen Kreisring $\rho - \varepsilon \leq |z - z_0| \leq \rho + \varepsilon$. Daher könnte man die Cauchysche Integralformel auch in einer etwas größeren Kreisscheibe $B_{\rho+\varepsilon}(z_0)$ anwenden und erhielte dort die Konvergenz der Potenzreihe um z_0 . Das widerspräche aber der Voraussetzung des Satzes, so dass die Behauptung richtig ist. $\square$

9.2.2 Laurentreihen

Den Begriff der Taylorreihe kann man auf Funktionen ausdehnen, die nicht in einem ganzen Kreis holomorph sind, sondern nur in einem Kreisring. Über das Verhalten in der inneren Kreisscheibe wird nichts vorausgesetzt, wir werden diesen Sachverhalt nun näher untersuchen:

Satz 9.19 (Laurentreihe). *Die Funktion f sei in dem Kreisringgebiet $G = \{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ holomorph, dabei kann auch $R_1 = 0$ und/oder $R_2 = \infty$ sein. Dann kann f in diesem Kreisring durch eine Laurentreihe*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dargestellt werden. Die Koeffizienten werden durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

angegeben, wobei ρ beliebig mit $R_1 < \rho < R_2$ ist. Die Konvergenz der beidseitig unendlichen Reihe wird durch die Konvergenz der beiden Reihen mit positiven bzw. mit negativen Indizes definiert.

Die Reihe mit den negativen Potenzen

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

heißt Hauptteil der Funktion f in z_0 , die Reihe mit den positiven Potenzen Nebenteil.

Wenn die Funktion f im ganzen Kreis $|z - z_0| < R_2$ holomorph ist, treten keine Koeffizienten mit negativem Index auf, die Koeffizientenformel ist die gleiche wie bei der Taylorreihe. Insofern ist die Laurentreihe eine Erweiterung der Taylorreihe.

Beweis. In einem etwas eingeschränkten Kreisring $R_1 < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R_2$ ist f einschließlich des Randes holomorph, dort kann die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

angewendet werden. Um das Kreisringgebiet zur Linken zu haben, ist die innere Kreislinie in negativer Richtung zu durchlaufen, daher das Minuszeichen beim zweiten Integral. Wie beim Nachweis der Taylorreihe entwickeln wir jetzt $1/(\zeta - z)$ jeweils in eine geometrische Reihe: Für die äußere Kreislinie gilt

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

und für die innere

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Die Reihen konvergieren in einem nochmals etwas eingeschränkten Kreisring gleichmäßig, so dass bei Einsetzen in die obige Formel für $f(z)$ die Integration und die Summation vertauscht werden dürfen:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^{-(n+1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} f(\zeta) (\zeta - z_0)^n d\zeta. \end{aligned}$$

Die erste Summe stellt den „Tayloranteil“ der Laurentreihe dar, bei der zweiten Summe muss noch der Summationsindex durch $n =: -m - 1$ transformiert werden, um auf die gewünschte Form zu kommen:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Dabei ist des Cauchyschen Integralsatzes wegen schon ein beliebiger Integrationskreis zwischen R_1 und R_2 eingesetzt worden. Da der eingeschränkte Kreisring den ursprünglichen beliebig gut ausfüllen kann, gilt die Darstellung schließlich im ganzen Kreisringgebiet $R_1 < |z - z_0| < R_2$. $\square$

Beispiel 9.20. a) In Beispiel 4.19 b) haben wir bereits eine Reihe kennen gelernt, die sich jetzt als Laurentreihe in $1 < |z| < \infty$ erweist:

$$\frac{1}{1 - z} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}.$$

b) Auch

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

ist eine (allerdings sehr einfache) Laurentreihe im Kreisringgebiet $0 < |z| < \infty$.

c) Ist die Funktion f im Kreisringgebiet $1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$ holomorph, so besitzt sie dort die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Beschränken wir uns nur auf den Rand des Einheitskreises, so gilt dort $z = e^{i\varphi}$ und unsere Laurentreihe geht über in

$$f(e^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\varphi}$$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Das aber ist gerade die *Fourierreihe* der periodischen komplexen Funktion $f(e^{i\varphi})$, die man natürlich in Reihen mit Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegen kann.

Ähnlich wie bei der Taylorreihe kann die Funktion f auf den Rändern des Konvergenzringes nicht überall holomorph sein, sonst könnte man diesen Kreisring etwas vergrößern.

9.3 Taylor- und Laurentreihen in $C\ell(n)$

9.3.1 Taylorreihen

Wir wollen in diesem Abschnitt die Ergebnisse aus der Ebene in den höherdimensionalen Raum übertragen. Dabei verwenden wir als Ersatz für die Potenzen z^n der Ebene die in Abschnitt 6.2 eingeführten Fueter-Polynome, für die wir dort schon die notwendigen Eigenschaften kennen gelernt haben.

Wir erinnern zuerst an die *Eulersche Formel* für *homogene Funktionen*:

Ist die Funktion f im $\mathbb{R}^{n+1}$ homogen vom Grad k , so gilt

$$x \cdot \nabla f(x) = k f(x).$$

Der Beweis ergibt sich sofort bei Differentiation von $f(tx) = t^k f(x)$ nach t und Einsetzen von $t = 1$. Nun sind wir in der Lage, eine erste Aussage über die Darstellung durch Fueter-Polynome zu beweisen:

Lemma 9.21. *Jedes homogene holomorphe Polynom vom Grad k lässt sich als $Cl(n)$ -Linearkombination von Fueter-Polynomen schreiben:*

$$P(x) = \sum_{|\mathbf{k}|=k} \frac{1}{\mathbf{k}!} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) \nabla^{\mathbf{k}} P(0) \quad (\mathbf{k} = (0, k_1, \dots, k_n)).$$

Beweis. Es sei P ein links-holomorphes homogenes Polynom vom Grad k . Aus der Holomorphie folgt die Gleichung

$$\partial_0 P(x) + \sum_{i=1}^n e_i \partial_i P(x) = 0$$

und aus der Homogenität

$$x_0 \partial_0 P(x) + \sum_{i=1}^n x_i \partial_i P(x) = k P(x).$$

Daraus ergibt sich sofort

$$k P(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0 e_i) \partial_i P(x) = \sum_{i=1}^n z_i \partial_i P(x).$$

Dies ist übrigens auch eine Rechtfertigung für die Einführung der Variablen $z_i = x_i - x_0 e_i$ in Abschnitt 5.2 bei der Definition der Holomorphie. Nach Folgerung 7.29 ist mit P auch jede Ableitung $\partial_i P$ holomorph; wobei $\partial_i P$ ein homogenes Polynom vom Grad $k - 1$ ist. Nach k Schritten erhalten wir

$$k! P(x) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n z_{i_1} \dots z_{i_k} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} P(x).$$

Wir fassen jetzt alle Ableitungen zusammen, die zu einem Multiindex $\mathbf{k}$ gehören. Bei der Bildung der Ableitungen spielt die Reihenfolge keine Rolle, wohl aber bei den z_i . Allerdings tritt jede Verteilung der z_i über die k Stellen nur einmal auf, während bei den $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ auch diese noch untereinander zu permutieren sind. Das ergibt einen Faktor $\mathbf{k}!$ im Nenner, und wir erhalten

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{|\mathbf{k}|=k} \frac{1}{k! \mathbf{k}!} \sum_{\sigma \in \text{perm}(k)} z_{i_{\sigma(1)}} \dots z_{i_{\sigma(k)}} \nabla^{\mathbf{k}} P(x) \\ &= \sum_{|\mathbf{k}|=k} \frac{1}{\mathbf{k}!} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) \nabla^{\mathbf{k}} P(x) \quad (\mathbf{k} = (0, k_1, \dots, k_n)). \end{aligned}$$

Diese Beziehung kann als eine Rechtfertigung für die Einführung der Fueter-Polynome angesehen werden. Da die Ableitungen des Grades k eines Polynoms vom Grad k Konstanten sind, erhalten wir schließlich die gewünschte Darstellung:

$$P(x) = \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) a_{\mathbf{k}}, \quad a_{\mathbf{k}} = \frac{\nabla^{\mathbf{k}} P(0)}{\mathbf{k}!}.$$

□

Wir kommen nun zur *Taylorreihe* in $\mathcal{Cl}(n)$, die für links-holomorphe Funktionen die Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) a_{\mathbf{k}}$$

hat, für rechts-holomorphe Funktionen stehen die $a_{\mathbf{k}}$ links. Bei Differentiation einer solchen Reihe ergibt sich die Holomorphie, falls die Reihe absolut konvergent ist, was mit den Abschätzungen in Folgerung 6.5 der Fueter-Polynome untersucht werden kann.

Für die weiteren Betrachtungen benötigen wir einen anderen Typus von speziellen Polynomen.

Definition 9.22. Die Funktion

$$C_k^{\mu}(s) := \sum_{m=\lceil \frac{k}{2} \rceil}^k \binom{-\mu}{m} \binom{m}{2m-k} (-2s)^{2m-k}$$

heißt *Gegenbauer-Polynom* (nach LEOPOLD BERNHARD GEGENBAUER (1849–1903)).

Speziell ist $C_0^{\mu}(s) = 1$, $C_1^{\mu}(s) = \binom{-\mu}{1} \binom{1}{1} (-2s)^1 = 2\mu s$.

Lemma 9.23. (i) $C_k^{\mu}(s) = \sum_{j=0}^{\lceil \frac{k}{2} \rceil} \binom{-\mu}{k-j} \binom{k-j}{k-2j} (-2s)^{k-2j}$ enthält nur Potenzen von s der Ordnung $k, k-2, \dots$

(ii) Die Taylorreihe für $(1 - 2st + t^2)^{-\mu}$ nach der Variablen t konvergiert lokal gleichmäßig für $|t| < 1$ und $-1 \leq s \leq 1$.

Beweis. (i) Mit $k - m =: j$ folgt $0 \leq j \leq \frac{k}{2}$, es ergibt sich die Behauptung. Dabei ist $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $\frac{k}{2}$.

(ii) Für kleine t ist die binomische Reihe (vgl. Aufgabe 9.4.5) für $(1 - 2st + t^2)^{-\mu}$ lokal gleichmäßig konvergent. Für $0 < t < 1, 0 \leq s \leq 1$ folgt die strenge Ungleichung

$$1 \geq t(t - 2s) = (t - s)^2 - s^2 > -1,$$

also ist die Reihe für diese s und $0 < t < 1$ lokal gleichmäßig konvergent, nach Aufgabe 9.4.3 ist der Konvergenzradius 1. Ganz ähnlich überlegt man sich die Konvergenz für negative s mit negativen t , so dass die Reihe für alle s den Konvergenzradius 1 in t hat. $\square$

Satz 9.24 (Taylorreihe). Die Funktion f sei für $|x| < R$ im $\mathbb{R}^{n+1}$ links-holomorph. Dann kann sie dort in eine konvergente Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) a_{\mathbf{k}} \quad (\mathbf{k} = (0, k_1, \dots, k_n))$$

mit

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{\nabla^{\mathbf{k}} f(0)}{\mathbf{k}!} = \frac{1}{\sigma_n} \int_{|y|=\rho} \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(y) dy^* f(y)$$

entwickelt werden. Dabei ist ρ mit $0 < \rho < R$ beliebig, die $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$ sind gemäß Definition 7.26 als Ableitungen von $\mathcal{Q}_0(x) = \sigma_n E(x)$ definiert. Für rechts-holomorphe Funktionen sind $a_{\mathbf{k}}$ und $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ bzw. $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$ und f zu vertauschen.

Beweis. Als Ausgangspunkt dient uns wie in der Ebene die Cauchysche Integralformel für $|x| < \rho < R$

$$f(x) = \int_{|y|=\rho} E(y-x) dy^* f(y).$$

Der Cauchy-Kern $E(y-x)$ bzw. $\mathcal{Q}_0(y-x) = \sigma_n E(y-x)$ muss in eine Reihe entwickelt werden. Des Cauchyschen Integralsatzes halber ist das ρ beliebig mit $0 < \rho < R$, so dass die Entwicklung später in $|x| < R$ konvergiert. Als Erstes berechnen wir

$$\begin{aligned} \partial_x \frac{1}{|y-x|^{n-1}} &= -\frac{n-1}{2} \frac{1}{|y-x|^{n+1}} \partial_x |y-x|^2 \\ &= (n-1) \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{n+1}} = (n-1) \mathcal{Q}_0(y-x), \end{aligned}$$

und das ist bis auf einen Faktor der Cauchy-Kern. Damit können wir uns auf eine Reihenentwicklung von $|y-x|^{-(n-1)}$ beschränken. Mit $x =: \omega_x |x|$, $y =: \omega_y |y|$ ergibt sich

$$|y-x|^2 = |y|^2 \left(1 - \frac{\overline{y}x}{|y|^2}\right) \left(1 - \frac{\overline{x}y}{|y|^2}\right) = |y|^2 \left(1 - 2(\omega_x \cdot \omega_y) \frac{|x|}{|y|} + \frac{|x|^2}{|y|^2}\right).$$

Schließlich folgt mit

$$t := \frac{|x|}{|y|}, \quad s := \omega_x \cdot \omega_y$$

noch $0 \leq t < 1$, $-1 \leq s \leq 1$ und mit $\mu := (n-1)/2$

$$\frac{1}{|y-x|^{n-1}} = \frac{1}{|y|^{n-1}} \frac{1}{(1-2st+t^2)^\mu}.$$

Nach der binomischen Reihe ist

$$\frac{1}{(1-2st+t^2)^\mu} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-\mu}{m} (-2st+t^2)^m.$$

Diese Reihe ist absolut konvergent für $|-2st+t^2| < 1$, also konvergiert sie für hinreichend kleine t lokal gleichmäßig in s und t . Da $(-2st+t^2)^m$ nur endlich viele Summanden enthält, kann nach Potenzen von t umgeordnet werden:

$$\frac{1}{(1-2st+t^2)^\mu} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \binom{-\mu}{m} \binom{m}{j} (-2st)^j t^{2(m-j)}.$$

Die Umordnung bringt für t^k nur einen Beitrag, wenn $2m - j = k$ oder $2m \geq k \geq m$, also für die m mit $\left[\frac{k}{2}\right] \leq m \leq k$:

$$\frac{1}{(1 - 2st + t^2)^\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{m \geq \frac{k}{2}}^k \binom{-\mu}{m} \binom{m}{2m-k} (-2s)^{2m-k}.$$

Als lokal gleichmäßig konvergente Reihe können wir gliedweise differenzieren und erhalten wegen $\partial_x C_0^\mu(s) = 0$

$$\mathcal{Q}_0(y-x) = \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n-1} \partial_x C_k^\mu(\omega_x \cdot \omega_y) \frac{|x|^k}{|y|^{n-1+k}}.$$

Nennen wir die Summanden

$$\frac{1}{n-1} \partial_x C_{k+1}^\mu(\omega_x \cdot \omega_y) \frac{|x|^{k+1}}{|y|^{n+k}} =: P_k(x, y),$$

so gilt schließlich

$$\mathcal{Q}_0(y-x) = \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x, y).$$

$P_k(x, y)$ enthält des letzten Lemmas wegen in x nur Potenzen der Form

$$(\omega_x \cdot \omega_y)^{k+1-2j} |x|^{k+1},$$

daher ist es ein Polynom in x mit Summanden (vgl. Lemma 9.23)

$$\partial_x \left((x \cdot \omega_y)^{k+1-2j} |x|^{2j} \right).$$

Das sind homogene Polynome in x der Ordnung k . Da die Reihe für $\mathcal{Q}_0(y-x)$ beidseitig holomorph ist, muss das auch für die einzelnen Summanden gelten. Da diese jeweils homogene Polynome der Ordnung k sind, kann sich beim Differenzieren mit $\bar{\partial}_x$ nichts wegheben. Nach Lemma 9.21 können die $P_k(x, y)$ als Summe von Fueter-Polynomen $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ mit $|\mathbf{k}| = k$ dargestellt werden:

Definition 9.25. Die Funktionen $\tilde{Q}_{\mathbf{k}}(y)$ seien durch

$$\sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) \tilde{Q}_{\mathbf{k}}(y) = \sum_{|\mathbf{k}|=k} \tilde{Q}_{\mathbf{k}}(y) \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) = P_k(x, y)$$

definiert.

Es gilt

$$\tilde{Q}_{\mathbf{k}}(y) = \frac{1}{(n-1)\mathbf{k}!} \nabla_x^{\mathbf{k}} \partial_x \left[C_{k+1}^\mu(\omega_x \cdot \omega_y) \frac{|x|^{k+1}}{|y|^{n+k}} \right] \Big|_{x=0}.$$

Damit sind die $Q_{\mathbf{k}}$ homogen in y vom Grad $-(n+k)$. Auch in der Reihe für $\mathcal{Q}_0$ kann sich bei Differentiation der einzelnen Summanden $P_k(x, y)$ nach y nichts wegheben, so dass die $\tilde{Q}_{\mathbf{k}}$ gleichfalls beidseitig holomorph sind. Wir zeigen, dass sie mit den in Definition 7.26 eingeführten

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(y) = \frac{(-1)^{|\mathbf{k}|}}{\mathbf{k}!} \nabla^{\mathbf{k}} \mathcal{Q}_0(y)$$

übereinstimmen: Mit $\mathbf{j}$ beliebig folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mathbf{j}}(y-x) &= \frac{(-1)^{|\mathbf{j}|}}{\mathbf{j}!} \nabla_y^{\mathbf{j}} \mathcal{Q}_0(y-x) = \frac{1}{\mathbf{j}!} \nabla_x^{\mathbf{j}} \mathcal{Q}_0(y-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{j}!} \nabla_x^{\mathbf{j}} P_k(x, y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} \frac{1}{\mathbf{j}!} \nabla_x^{\mathbf{j}} P_{\mathbf{k}}(x) \tilde{Q}_{\mathbf{k}}(y). \end{aligned}$$

Setzt man hier $x = 0$, so ergibt sich wegen $\nabla^{\mathbf{j}} P_{\mathbf{k}}(0) = \mathbf{j}! \delta_{\mathbf{j}\mathbf{k}}$ (vgl. Aufgabe 9.4.6)

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{j}}(y) = \frac{1}{\mathbf{j}!} \nabla_x^{\mathbf{j}} P_{\mathbf{j}}(0) \tilde{Q}_{\mathbf{j}}(y) = \tilde{Q}_{\mathbf{j}}(y).$$

Damit haben wir wie gewünscht $\tilde{Q}_{\mathbf{k}} = \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$ erkannt und erhalten für $|x| < \rho < R$ die Reihe für f ,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{|y|=\rho} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} P_{\mathbf{k}}(x) \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(y) \right) dy^* f(y).$$

Wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz können wir gliedweise integrieren und erhalten schließlich wie gewünscht

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} P_{\mathbf{k}}(x) a_{\mathbf{k}}$$

mit

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{\nabla^{\mathbf{k}} f(0)}{\mathbf{k}!} = \frac{1}{\sigma_n} \int_{|y|=\rho} \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(y) dy^* f(y).$$

Das ist eine zur Entwicklung in $\mathbb{C}$ völlig analoge Formel; an die Stelle der negativen Potenzen von z treten die $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$. $\square$

Analog zu $\mathbb{C}$ wollen wir auch hier einen Identitätssatz zeigen. Allerdings kann dieser nicht so aussehen wie in $\mathbb{C}$, denn die Nullstellen einer holomorphen Funktion müssen im $\mathbb{R}^{n+1}$ nicht mehr isoliert sein. Das zeigt bereits das einfache Beispiel $f(x) = z_1$, bei dem die $(n-1)$ -dimensionale Ebene $x_0 = x_1 = 0$ gleich der Nullstellenmenge von $f(x)$ ist. Durch Kombination der z_i kann man sich auch jede niedriger dimensionale Ebene als Nullstellenmenge erzeugen. Wir beweisen als Erstes einen Hilfssatz, den wir beim Beweis des Identitätssatzes in $C\ell(n)$ verwenden werden:

Lemma 9.26. *Es sei f holomorph in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, und es gelte $f(x) = 0$ für alle x aus einer Kugel $\{|x - x_0| < \rho\} \subset G$. Dann ist $f = 0$ in G .*

Beweis. Man kann x_0 mit jedem $x^* \in G$ durch einen in G verlaufenden Polygonzug Π verbinden. Dieser hat als kompakte Menge einen Abstand $\delta > 0$ von ∂G . Die Taylorreihe um einen beliebigen Punkt aus Π konvergiert also mindestens in einer Kugel vom Radius δ . Wir wählen nun auf Π von x_0 ausgehend einen Punkt x_1 mit $\delta/2 < |x_1 - x_0| < \delta$. In einer kleinen Umgebung von x_1 ist $f(x) = 0$, so dass alle Koeffizienten der Taylorreihe um x_1 Null sind und für $|x - x_1| < \delta$ auch $f(x) = 0$ gilt. Die Wiederholung des Verfahrens führt nach endlich vielen Schritten bis x^* , so dass $f(x^*) = 0$ ist. Also ist $f = 0$ in G . $\square$

Ein möglicher Identitätssatz ist:

Satz 9.27. *Ist eine Funktion f in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ holomorph und ist sie auf einer n -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit $M \subset G$ Null, so ist $f = 0$ in G .*

Das vorher erwähnte Beispiel $f(x) = z_1$ zeigt, dass in diesem Satz die Dimension n nicht erniedrigt werden kann. Die Mannigfaltigkeit kann aus einem beliebig kleinen Stück bestehen, wichtig ist nur die Dimension n . Man kann dies noch mehr in Richtung Identitätssatz formulieren:

Wenn zwei in einem Gebiet G holomorphe Funktionen auf einer n -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit in G übereinstimmen, so sind sie identisch.

Natürlich gilt dieser Satz auch in $\mathbb{C}$, aber dort hat man die viel stärkere Isoliertheit der Nullstellen. Bezüglich des Begriffes einer Mannigfaltigkeit sei auf Anhang 2 verwiesen.

Beweis. Es sei x^* ein beliebiger Punkt in M , $x(t_1, \dots, t_n) =: x(t)$ sei eine Parameterdarstellung von M in einer Umgebung von x^* mit $x(0) = x^*$. Da $f(x(t)) = 0$ für alle t , gilt

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \partial_i f(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Das sind die Tangentialableitungen von f in Richtung der Mannigfaltigkeit. Dabei wird für die Mannigfaltigkeit selbstverständlich vorausgesetzt, dass die Matrix

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_j} \right)$$

den Rang n hat. Man kann also aus dem obigen Gleichungssystem etwa die $\partial_i f(x^*)$ durch $\partial_0 f(x^*)$ ausdrücken

$$\partial_i f(x^*) = a_i \partial_0 f(x^*), \quad i = 1, \dots, n,$$

mit geeigneten reellen a_i . Setzen wir dies in die Gleichung für die Holomorphie ein, so ergibt sich

$$\left(\sum_{i=1}^n e_i a_i + 1 \right) \partial_0 f(x^*) = 0.$$

Die Klammer ist offenbar von Null verschieden, daher muss $\partial_0 f(x^*) = 0$ sein. Damit sind aber alle $\partial_i f(x^*) = 0$, $i = 0, \dots, n$. Da diese Überlegung für alle $x^* \in M$ richtig ist, verschwinden auf M alle ersten Ableitungen von f . Diese $\partial_i f$ sind aber der Cauchyschen Integralformel wegen gleichfalls holomorphe Funktionen, so dass die Überlegung durch Induktion auf alle höheren Ableitungen von f ausgedehnt werden kann. Setzt man jetzt die Taylorreihe um x^* an, so sind ihre Koeffizienten Null, die Funktion f ist Null in der Konvergenzkugel der Taylorreihe. Das vorangehende Lemma zeigt, dass f in G identisch Null ist. $\square$

9.3.2 Laurentreihen

Nachdem wir die Taylorreihe für eine in einer Kugel holomorphe Funktionen gewonnen haben, wollen wir uns mit Funktionen beschäftigen, die nur in einer Kugelschale holomorph sind. Analog zum komplexen Fall wird eine entsprechende Laurententwicklung hergeleitet.

Satz 9.28 (Laurentreihe). *In einem Kugelschalengebiet $G = \{r < |x| < R\}$ mit $0 \leq r < R \leq \infty$ sei die Funktion f links-holomorph. Dann gestattet f in G die folgende Darstellung durch eine Laurentreihe*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) a_{\mathbf{k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x) b_{\mathbf{k}}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{|y|=\rho} \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(y) dy^* f(y) \\ b_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{|y|=\rho} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(y) dy^* f(y). \end{aligned}$$

Dabei ist ρ mit $r < \rho < R$ beliebig, die Reihen konvergieren in jeder abgeschlossenen Teilschale gleichmäßig. Ferner ist f_1 holomorph in $B_R(0)$, f_2 ist holomorph in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{B_r(0)}$ mit

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f_2(x) = 0.$$

Man bezeichnet f_1 als Nebenteil und f_2 als Hauptteil der Laurentreihe.

Beweis. Aus der Cauchyschen Integralformel folgt in der Kugelschale $r < r' < |x| < R' < R$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{|y|=R'} \mathcal{Q}_0(y-x) dy^* f(y) - \frac{1}{\sigma_n} \int_{|y|=r'} \mathcal{Q}_0(y-x) dy^* f(y).$$

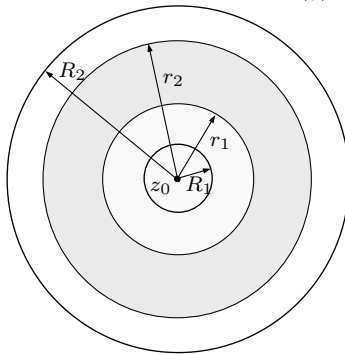


Abbildung 9.2

Dabei ist beim zweiten Integral die Orientierung bezüglich der Kugelschale berücksichtigt. Das erste Integral sei f_1 , dafür können wir direkt die vorher hergeleitete Taylorentwicklung verwenden, also

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) a_{\mathbf{k}}$$

mit

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sigma_n} \int_{|y|=R_1} \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(y) dy^* f(y).$$

Wegen des Integralsatzes von Cauchy kann hier als Integrationsbereich auch $|y| = \rho$ mit einem beliebigen ρ zwischen r und R genommen werden.

Nun wenden wir uns

$$f_2(x) = -\frac{1}{\sigma_n} \int_{|y|=r'} \mathcal{Q}_0(y-x) dy^* f(y)$$

zu. Hier muss wie bei der Taylorreihe

$$-\mathcal{Q}_0(y-x) = \partial_y \frac{1}{n-1} \frac{1}{|y-x|^{n-1}}$$

in eine Reihe entwickelt werden. Allerdings ist nunmehr $|x| > |y|$, so dass

$$\frac{1}{|y-x|^{n-1}} = \frac{1}{|x|^{n-1}} \frac{1}{(1-2st+t^2)^\mu}$$

angesetzt werden muss. Jetzt ist $t = |y|/|x|$ und wie vorher $s = (\omega_x \cdot \omega_y)$, $\omega_x = x/|x|$, $\omega_y = y/|y|$, $\mu = \frac{n-1}{2}$. Das ergibt

$$\mathcal{Q}_0(y-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n-1} \partial_y C_{k+1}^\mu(\omega_x \cdot \omega_y) \frac{|y|^{k+1}}{|x|^{n-1+k}},$$

und mit

$$R_k(x, y) := \frac{1}{n-1} \partial_y C_{k+1}^\mu(\omega_x \cdot \omega_y) \frac{|y|^{k+1}}{|x|^{n+k}}$$

folgt

$$\mathcal{Q}_0(y-x) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(x, y).$$

Hier gelten die Eigenschaften von den P_k aus dem Nachweis der Existenz der Taylorreihe auch für R_k , allerdings sind jetzt x und y zu vertauschen. Das heißt

$$R_k(x, y) = \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(y) \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x) = \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x) \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(y)$$

und damit

$$f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x) b_{\mathbf{k}}$$

mit

$$b_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sigma_n} \int_{|y|=\rho} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(y) dy^* f(y).$$

Es ist des Integralsatzes von Cauchy wegen wieder ρ beliebig mit $r < \rho < R$. Der Nachweis, dass $f_2(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$, wird als Aufgabe 9.4.8 gestellt. $\square$

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir noch auf eine Orthogonalitätseigenschaft der $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ und $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$ hinweisen, die analogen Eigenschaften der $z^{\pm k}$ in $\mathbb{C}$ entspricht:

Lemma 9.29. *Die Fueter-Polynome $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ und die $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$ erfüllen für beliebige positive ρ und beliebige $\mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ die folgenden Orthogonalitätsrelationen:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_n} \int_{|x|=\rho} \mathcal{P}_{\mathbf{j}}(x) dx^* \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x) &= \delta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \\ \frac{1}{\sigma_n} \int_{|x|=\rho} \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x) dx^* \mathcal{P}_{\mathbf{j}}(x) &= \delta_{\mathbf{j}\mathbf{k}} \\ \frac{1}{\sigma_n} \int_{|x|=\rho} \mathcal{P}_{\mathbf{j}}(x) dx^* \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) &= 0 \\ \frac{1}{\sigma_n} \int_{|x|=\rho} \mathcal{Q}_{\mathbf{j}}(x) dx^* \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Beweis. Die erste Zeile folgt aus der Taylorentwicklung eines Polynoms $\mathcal{P}_{\mathbf{j}}$, in der Taylorreihe für $\mathcal{P}_{\mathbf{j}}$ müssen alle Koeffizienten für $\mathbf{k} \neq \mathbf{j}$ Null sein und $a_{\mathbf{j}} = 1$. Die zweite Zeile ist die entsprechende Aussage für rechts-holomorphe Funktionen, dann tauschen in den Formeln die $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$ und f die Plätze. Die dritte Zeile gibt gerade die $b_{\mathbf{k}}$ in der Laurententwicklung von $\mathcal{P}_{\mathbf{j}}$ an, diese müssen alle verschwinden. Schließlich gibt die vierte Zeile die Koeffizienten $a_{\mathbf{k}}$ in der Laurententwicklung von $\mathcal{Q}_{\mathbf{j}}$ an. Diese müssen gleichfalls alle Null sein. $\square$

Die Fueter-Polynome sind anerkannt links- und rechts-holomorphe Verallgemeinerungen der positiven Potenzen z^k , dagegen ist die Frage nach der Konstruktion von räumlichen Verallgemeinerungen holomorpher negativer Potenzen schwieriger. Wir haben dafür oben die Ableitungen des Cauchy-Kernes gewählt, es gibt aber auch andere Versuche. So sind die von H. Malonek 1990 [100] gefundenen Potenzen x^{-n} nicht links-holomorph. In [14] werden mehrdimensionale links-holomorphe Potenzen mit negativen Exponenten vermöge der hier verwendeten Formel gewonnen. Darin wird auch gezeigt, dass die $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$ den Teilraum der Paravektoren nicht verlassen. In [72] wird eine Rekursionsformel nach komplizierter Rechnung hergeleitet. R. S. Kraußhar erhielt auch eine Abschätzung für die $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$ (vgl. dazu hier Lemma 7.27).

9.4 Aufgaben

1. Man beweise: Es sei (f_m) eine Folge holomorpher Funktionen in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, sie konvergiere in G lokal gleichmäßig gegen f . Dann gilt auch für jeden Multiindex $\mathbf{k}$, dass die Folge der Ableitungen $(\nabla^{\mathbf{k}} f_m)$ lokal gleichmäßig gegen $\nabla^{\mathbf{k}} f$ konvergiert (vgl. Folgerung 4.1.4).
2. Falls der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

existiert, so ist er gleich dem Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum a_n z^n$. Der Leser beweise dies und berechne damit den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum z^n/n!$.

3. Man zeige, dass eine Potenzreihe für $|z| < |z_0|$ absolut konvergiert, wenn sie für z_0 konvergiert. Man schließe daraus auf die Existenz des Konvergenzradius.
4. Man entwickle

$$f(z) = \frac{1}{z - 3i}$$

in die möglichen beiden Potenzreihen um den Nullpunkt.

5. Man zeige, dass

$$(1+z)^a = \sum_{j=1}^{\infty} \binom{a}{j} z^j \quad (a \in \mathbb{C})$$

eine Taylorreihe ist. Ferner gilt

$$(1+z)^a = \exp(a \log(1+z))$$

mit dem Zweig des Logarithmus, der für $z = 0$ Null ergibt (wir greifen nach Abschnitt 11.4 und Definition 11.8 vor). Wie groß ist der Konvergenzradius?

6. Man zeige für die Fueter-Polynome mit Multiindizes $\mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$:
a)

$$\nabla^{\mathbf{j}} \mathcal{P}_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}!}{(\mathbf{k} - \mathbf{j})!} \mathcal{P}_{\mathbf{k} - \mathbf{j}} \quad \text{für } \mathbf{j} \leq \mathbf{k},$$

- b)

$$\nabla^{\mathbf{j}} \mathcal{P}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}! \delta_{\mathbf{k}\mathbf{j}} \quad \text{für } |\mathbf{k}| = |\mathbf{j}|.$$

Dabei sei $\mathbf{j} \leq \mathbf{k}$, wenn die Ungleichung für alle Komponenten der beiden Multiindizes gilt.

7. Man beweise den folgenden Identitätssatz: Eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ holomorphe Funktion kann keine Nullstelle unendlicher Ordnung haben, wenn

sie nicht identisch Null ist in ihrem Holomorphiegebiet. Dabei hat f im Punkt x_0 eine Nullstelle unendlicher Ordnung, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{|x-x_0| \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^k} = 0.$$

Hinweis: Koeffizienten der Taylorreihe.

8. Man zeige, dass das in der Laurententwicklung auftretende $f_2(x)$ gegen Null strebt, falls $|x| \rightarrow \infty$.

10 Orthogonalentwicklungen in $\mathbb{H}$

Die Approximation beziehungsweise Darstellung von quadratisch integrierbaren Funktionen durch Fourierreihen erfordert Kenntnisse über vollständige oder abgeschlossene Funktionensysteme im Hilbert-Raum sowie über die allgemeine Darstellung von Funktionalen.

10.1 Vollständige $\mathbb{H}$ -holomorphe Funktionensysteme

Infolge der Nichtkommutativität der Quaternionenstruktur sind Abgeschlossenheit und Vollständigkeit neu zu formulieren. Zunächst wird folgende Version des Hahn-Banachschen Satzes bewiesen:

Satz 10.1. *Es sei X ein normierter Rechts-Vektorraum über $\mathbb{H}$ und $X_0 \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum. Ferner sei f ein beschränktes rechts-lineares $\mathbb{H}$ -wertiges Funktional auf X_0 . Dann existiert eine $\mathbb{H}$ -rechts-lineare Fortsetzung F von f , die auf X beschränkt ist.*

Dieser Satz wurde zuerst 1938 von G. A. Suchumlinov [149] bewiesen. Ein entsprechendes Theorem konnte 1982 in [14] für lokal-konvexe Räume mit Werten in einer reellen Clifford-Algebra gezeigt werden.

Beweis. Die Idee des Beweises beruht darauf, dass ein beliebiges $\mathbb{H}$ -rechts-lineares Funktional stets die Form

$$f(x) = f_0(x) - \sum_{i=1}^3 f_i(xe_i)e_i$$

hat. Man geht hierzu von der Darstellung

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x)e_1 + f_2(x)e_2 + f_3(x)e_3$$

aus. Wegen $f(xe_i) = f(x)e_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) folgen notwendigerweise die Relationen

$$f_1(x) = -f_0(xe_1), f_2(x) = -f_0(xe_2), f_3(x) = -f_0(xe_3).$$

Es sei nun $X_{0,\mathbb{R}} \subset X_0$ ein reeller Teilraum und f_0 die Einschränkung von f auf $X_{0,\mathbb{R}}$. Nach dem klassischen Hahn-Banach-Satz kann f_0 zu einem $\mathbb{R}$ -linearen beschränkten Funktional F_0 auf X fortgesetzt werden. Das gesuchte $\mathbb{H}$ -wertige Funktional F ist dann durch

$$F(x) := F_0(x) - F_0(xe_1)e_1 - F_0(xe_2)e_2 - F_0(xe_3)e_3$$

gegeben. Es verbleibt, die entsprechenden Eigenschaften nachzuweisen. Offenbar ist

$$|F(x)| \leq 4\|F_0\|\|x\|,$$

also F beschränkt. Die Additivität folgt aus der Additivität von F_0 . Der Nachweis der rechtsseitigen Homogenität muss komponentenweise erfolgen. Es werde nun die Norm

von F berechnet. Dazu wird ein Punkt $x^* \in X$ so gewählt, dass $\|x^*\| = 1$ und $\|F\| \leq |F(x^*)| + \varepsilon$ ist. Wegen $\|F\| \neq 0$ kann angenommen werden, dass $F(x^*) \neq 0$ ist. Wir setzen $\Theta := F(z^*)/|F(z^*)|$ und $z^{**} = z^*\bar{\Theta}$. Dann gilt

$$F(z^{**}) = F\left(z^* \frac{\overline{F(z^*)}}{|F(z^*)|}\right) = F(z^*) \frac{\overline{F(z^*)}}{|F(z^*)|} = |F(z^*)|.$$

Da $\text{Sc } F(z) = F_0(z)$ ist, folgt $F_0(z^{**}) = F(z^{**})$.

Somit ist

$$F_0(z^{**}) \leq \|F_0\| \|z^{**}\| = \|F_0\|$$

und auch

$$\|F\| \leq \|F_0\| + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, muss

$$\|F\| = \|F_0\|$$

sein. Nun ist nur noch zu beweisen, dass $\|F\| = \|f\|$ ist. Da $\|F_0\| = \|f_0\| = \|f\|$, ist auch das gegeben. Also ist F eine normerhaltende $\mathbb{H}$ -rechts-lineare Fortsetzung von f . $\square$

Definition 10.2. Es sei X ein normierter Rechts-Vektorraum über $\mathbb{H}$. Eine Menge $\{x^{(i)}\} \subset X$ von Elementen heißt $\mathbb{H}$ -vollständig genau dann, wenn für alle $x \in X$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$ eine endliche Rechts-Linearkombination $R_\varepsilon(x)$ der $\{x^{(i)}\}$ gefunden werden kann, so dass

$$\|x - R_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$$

gilt. Die Menge $\{x^{(i)}\}$ heißt $\mathbb{H}$ -abgeschlossen in X , wenn für jedes beschränkte $\mathbb{H}$ -rechts-lineare Funktional F auf X mit Werten in $\mathbb{H}$ aus $F(x^{(i)}) = 0$ ($i \in \mathbb{N}$) stets $F = 0$ folgt.

Analog zur reellen Analysis gilt, dass eine Menge $\mathbb{H}$ -abgeschlossen ist, genau dann wenn sie $\mathbb{H}$ -vollständig ist. Der Beweis dieser Aussage wird dem Leser überlassen, aber dringend empfohlen, um sich mit den Besonderheiten der rechts-linearen Struktur der betrachteten Räume vertraut zu machen (vgl. Aufgabe 10.4.2).

Satz 10.3. Es sei F ein $\mathbb{H}$ -rechts-lineares Funktional über $L^p(G)$. Dann gestattet es die Darstellung

$$F(u) = \int_G \overline{f(x)} u(x) d\sigma$$

mit $f \in L^q(G)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Für den Beweis für reelle Clifford-Algebren vgl. [14], er orientiert sich am klassischen Beweis für komplexwertige lineare Funktionale über $L^p(G)$. Für $p = 2$ schreiben wir einfach $F(u) := (f, u)$.

Ein erstes einfaches vollständiges System holomorpher Funktionen kann mit Hilfe „verschobener“ Fundamentallösungen des Dirac-Operators erhalten werden.

Satz 10.4. *Es seien G, G_ε beschränkte Gebiete im $\mathbb{R}^3$, deren Ränder Γ und Γ_1 wenigstens C^2 -Flächen sind. Weiter werde vorausgesetzt, dass $\overline{G} \subset G_\varepsilon$ ist und $\{x^{(i)}\}$ eine dichte Teilmenge auf Γ_1 ist. Dann ist das System $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ mit $\phi_i(x) = (x - x^{(i)})/|x - x^{(i)}|^3$ $\mathbb{H}$ -vollständig in $L^2(G) \cap \ker D$, wobei $D = \sum_{i=1}^3 e_i \partial_i$ der Dirac-Operator ist.*

Beweis. Der Beweis wird durch einen Widerspruch erbracht. Nehmen wir an, dass es eine von der Nullfunktion verschiedene Funktion $u \in L^2(G) \cap \ker D$ gibt, für die $(\phi_i, u) = 0$ ($i = 1, 2, \dots$) ist. Das heißt aber, dass die Teodorescu-Transformation

$$(T_G u)(x^{(i)}) = -\frac{1}{\sigma_3} \int_G \frac{x - x^{(i)}}{|x - x^{(i)}|^3} u(x) d\sigma_x = 0$$

auf der in Γ_1 dichten Menge $\{x^{(i)}\}$. Da $T_G f$ in $\mathbb{R}^3 \setminus G$ stetig ist, muss notwendig $\text{tr}_{\Gamma_1} T_G f = 0$ sein. Weiterhin ist $T_G f$ holomorph im $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$ und nach Lemma 8.1 folgt $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (T_G u)(x) =$

0. Nach Satz 7.14 gilt $T_G u(x) = 0$ außerhalb von Γ_1 . Als holomorphe Funktion in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$ muss $T_G u$ dann nach dem Identitätssatz 9.27 Null sein außerhalb von G . Aus Stetigkeitsgründen gilt also für die Randwerte auf dem Rand Γ von G

$$\text{tr}_{\Gamma} T_G u = 0.$$

Nach Lemma 8.9 folgt, dass $u \in \text{im } \mathbf{Q}$. Nach der Annahme war $u \in \ker D = \text{im } \mathbf{P}$. Wegen $\text{im } \mathbf{P} \cap \text{im } \mathbf{Q} = \emptyset$ muss $u = 0$ gelten. $\square$

Der soeben bewiesene Satz sichert, dass wir die Lösungen der Dirac-Gleichung durch spezielle einfache Lösungen in der L^2 -Norm beliebig genau approximieren können. Unsere Funktionensysteme sind beliebig oft differenzierbar, aber leider nicht orthogonal. Es ist leicht einzusehen, dass eine Orthogonalisierung die einfache Struktur zerstören würde, ganz abgesehen von den Schwierigkeiten, die aus der numerischen Instabilität erwachsen. Wir werden im folgenden Unterabschnitt versuchen, polynomiale Systeme zu konstruieren, die diese Nachteile nicht aufweisen.

10.1.1 Polynomiale Systeme

Ziel des folgenden Abschnittes soll es sein, orthogonale polynomiale Systeme für die Approximation bereitzustellen. Nach den Ergebnissen, die wir im Abschnitt 9.3 erhalten haben, können die verschobenen Fundamentallösungen $\mathcal{Q}_0(x - a)$ des verallgemeinerten Cauchy–Riemann-Operators in $C\ell(n)$ als Analoga der Funktionen $1/(z - a)$ in $\mathbb{C}$ angesehen werden. Unsere Approximations- und Vollständigkeitsaussagen stehen dann im Zusammenhang mit der rationalen Approximation im Komplexen und führen uns zu den Sätzen von Walsh und Runge.

Noch nicht vollständig geklärt haben wir die Frage nach den Analoga der positiven Potenzen von z in der komplexen Analysis. Erste Ansätze geben uns die Resultate zur Taylorentwicklung links-holomorpher Funktionen aus Abschnitt 9.3, Satz 9.24.

Wir hatten bewiesen, dass eine in der Einheitskugel $\mathbb{B}_{n+1} := B_1(0)$ im $\mathbb{R}^{n+1}$ links-holomorphe Funktion f in eine konvergente Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) a_{\mathbf{k}}$$

mit

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{\nabla^{\mathbf{k}} f(0)}{\mathbf{k}!} = \frac{1}{\sigma_n} \int_{|y|=\rho} \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(y) dy^* f(y)$$

entwickelt werden kann. Im Sinne der lokal gleichmäßigen Konvergenz kann aus dieser Entwicklung auf die lokale Approximierbarkeit von f geschlossen werden. Eine globale Vollständigkeitsaussage, etwa in $L^2(\mathbb{B}_{n+1})$ ergibt sich daraus jedoch nicht.

Betrachten wir zunächst den komplexen Fall. Wir nehmen an, eine holomorphe Funktion f gehöre zu $L^2(\mathbb{B}_2)$. Dann besitzt diese Funktion eine im Innern von $\mathbb{B}_2$ lokal gleichmäßig konvergente Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

Die Funktionen z^k bilden im Raum $L^2(\mathbb{B}_2)$ ein Orthogonalsystem und nach der Normalisierung als $\sqrt{\frac{k+1}{\pi}} z^k$ ein Orthonormalsystem. Bezüglich dieses Orthonormalsystems kann f in eine Fourierreihe

$$f(z) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (f, \sqrt{\frac{k+1}{\pi}} z^k) \sqrt{\frac{k+1}{\pi}} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (f, z^k) \frac{k+1}{\pi} z^k$$

entwickelt werden. Mit der üblichen Annahme, dass es eine Funktion $g \in L^2(\mathbb{B}_2)$ gibt, die zu allen z^k orthogonal ist, ergibt sich aus den vorangegangenen Überlegungen die Vollständigkeit des Systems $\left\{ \sqrt{\frac{k+1}{\pi}} z^k \right\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Ursache für dieses sehr bequeme Vorgehen ist die Tatsache, dass die Funktionen, die zur Grundlage der Taylorentwicklung genommen wurden, „freiwillig“ orthogonal sind, obwohl für die Taylorentwicklung allgemeine Winkelbeziehungen bzw. Orthogonalität gar keine Rolle gespielt haben. Es wurden einzig und allein Differenzierbarkeitseigenschaften benötigt. Wir wollen, bevor wir nach höherdimensionalen Verallgemeinerungen der Potenzen z^k suchen, zunächst die Eigenschaften der komplexen Potenzen als Funktionen der reellen Variablen x und y festhalten, um eine Orientierung zu haben.

- Die Funktionen $(x + iy)^n$ sind $\mathbb{R}$ -homogene (holomorphe) Polynome.
- $\mathbb{R}$ -homogene holomorphe Polynome verschiedenen Grades sind orthogonal.

- Es gilt $z^k \in \ker \partial_z^{k+1} \setminus \ker \partial_z^k$.
- Ferner ist $\partial_z z^k = k z^{k-1}$, $\int z^k = \frac{1}{k+1} z^{k+1}$, d.h. Differentiation und Integration von Basisfunktionen produzieren wieder Basisfunktionen. Diese Eigenschaften sichern, dass die Ableitung einer Potenzreihe direkt wieder als Potenzreihe und auch die Ableitung einer Fourierreihe formal wieder als Fourierreihe angesehen werden können.

Diese Eigenschaften sind im höherdimensionalen Fall durchaus nicht mehr selbstverständlich. Betrachten wir zum besseren Verständnis nur Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{H}$, so gibt es zum Grad k nun $k + 1$ linear unabhängige homogene $\mathbb{H}$ -holomorphe Polynome. Das entspricht zwar den Anforderungen, die für die Taylorformel zu erfüllen sind, da es ja auch $k + 1$ partielle Ableitungen

$$\partial_1^{k_1} \partial_2^{k_2}$$

der Ordnung k gibt. Den Anforderungen an die Fourierentwicklung entspricht das aber nicht, da die $k + 1$ Fueter-Polynome $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ aus Definition 6.1 nicht in jedem Fall orthogonal sind. Es lässt sich allerdings zeigen, dass homogene holomorphe Polynome verschiedenen Grades orthogonal sind, so dass wir „nur“ in den Teilräumen $\mathcal{H}_k^+$ der $\mathbb{H}$ -holomorphen homogenen Polynome vom Grad k orthogonalisieren müssen. Untersuchen wir außerdem die Ableitungen $\partial_i \mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ der Fueter-Polynome vom Grad $|\mathbf{k}| = k$, so erhalten wir gemäß Satz 6.2 (ii) wieder Fueter-Polynome,

$$\partial_i \mathcal{P}_{\mathbf{k}} = k_i \mathcal{P}_{\mathbf{k} - \varepsilon_i}$$

mit dem Vektor ε_i , der an der i -ten Stelle eine 1 hat und sonst Nullen.

Ein naheliegender Versuch ist es, anstelle der komplexen Veränderlichen z im $\mathbb{R}^3$ mit der Quaternionenvariablen $x = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2$ und im $\mathbb{R}^4$ mit $x = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ zu arbeiten. Leider sind beide Variablen nicht $\mathbb{H}$ -holomorph. Setzt man eine Symmetrie in den „imaginären“ Variablen x_1, x_2, x_3 voraus, so wären die nächsten Kandidaten die $\mathbb{H}$ -holomorphen Variablen $x = x_0 + \frac{1}{2}(x_1 e_1 + x_2 e_2)$ bzw. $x = x_0 + \frac{1}{3}(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3)$. Solche Variablen sind z.B. in [99] betrachtet worden (vgl. Aufgabe 10.4.4).

Angesichts dieser Probleme beginnen wir daher mit den Fueter-Variablen $z_i = x_i - x_0 e_i$. Diese Variablen gleichen der komplexen Variablen bis auf Isomorphie. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die positiven Potenzen z_i^k ebenfalls $\mathbb{H}$ -holomorph sind. Außerhalb der Nullstellen von z_i sind auch die negativen ganzen Potenzen wieder $\mathbb{H}$ -holomorph (vgl. Aufgabe 10.4.5). Solche Variablen sind von Delanghe in [31] *total analytisch* genannt worden. Wir haben sie in Bemerkung 6.7 betrachtet. Dort wurde darauf hingewiesen, dass die $\mathbb{H}$ -holomorphe Variable

$$z = \sum_{n=0}^3 a_n x_n, \quad a_k \in \mathbb{H},$$

total analytisch genau dann ist, wenn $a_i a_j = a_j a_i$, $i, j = 0, 1, 2, 3$. Betrachten wir nun Funktionen $u(x) = \sum_{i=0}^3 u_i(x) a_i$, so gilt auch die Produktregel für den Cauchy–Riemann-Operator $\bar{\partial}$ in der klassischen Form $\bar{\partial}(uv) = (\bar{\partial}u)v + u(\bar{\partial}v)$. Damit kann unter Einschränkung auf Funktionen mit dem Wertebereich $\text{span}\{a_i\}$ fast die gesamte komplexe Funktionentheorie übertragen werden. Zum besseren Verständnis dieser Tatsache weise man nach (vgl. Aufgabe 10.4.6), dass die Bedingung $a_i a_j = a_j a_i$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, bedeutet, dass der Wertebereich von $z(x)$ nur eine 2-dimensionale Ebene sein kann.

Dennoch hat diese einfache Konstruktion eine prinzipielle Bedeutung. Wir hatten in 6.7 das folgende Interpolationspolynom angegeben:

$$L_k u(x) := \sum_{j=1}^k \left(\prod_{i \neq j} [(z(x) - z(b_i))(z(b_j) - z(b_i))^{-1}] \right) u_j. \quad (10.1)$$

Dies Polynom verallgemeinert das klassische Lagrangesche Interpolationspolynom. Die Bedeutung liegt darin, dass nun gezeigt werden kann, dass für k beliebig vorgegebene verschiedene Punkte b_j und k in diesen Punkten vorgegebene Werte u_j stets eine holomorphe Funktion existiert, die in den gegebenen Punkten die gegebenen Werte annimmt. Für $\mathbb{H}$ -holomorphe Funktionen ist diese Aussage nicht von vornherein ersichtlich. Notwendig wäre es noch zu zeigen, dass stets eine total analytische Variable so definiert werden kann, dass für die gegebenen Punkte auch die Bedingung $z(b_i) \neq z(b_j)$ für $i \neq j$ erfüllt ist.

Zur Interpolation allgemeiner $\mathbb{H}$ -holomorpher Funktionen ist das obige Lagrange-polynom leider nicht geeignet, da auf Grund des eingeschränkten Wertebereiches von $z(x)$ kein vollständiges Polynomsystem erhalten wird.

10.1.2 Innere und äußere sphärische Funktionen

Bevor wir nach vollständigen $\mathbb{H}$ -Holomorphen Polynomsystemen suchen, die möglichst orthonormal sind, wollen wir noch einige Eigenschaften der Fueter-Polynome zusammenstellen, die wir schon kennen gelernt haben. Insbesondere stellt sich die Frage, ob die Orthogonalitätsrelationen gemäß Lemma 9.29 in unserem Zusammenhang nützlich sein können. Dazu erstmal eine Benennung:

- Definition 10.5.** (i) Es sei $\mathcal{H}_k^+$ der Raum der holomorphen, paravektorwertigen homogenen Polynome vom Grad k . Ein beliebiges Element P_k dieses Raumes heißt *inneres sphärisches Polynom* der Ordnung k .
- (ii) Es sei $\mathcal{H}_k^-$ der Raum der holomorphen paravektorwertigen homogenen Funktionen in $\mathbb{R}_0^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ vom Grad $-(k+n)$. Ein beliebiges Element Q_k dieses Raumes heißt *äußere sphärische Funktion* der Ordnung k .
- (iii) Es sei $\mathcal{H}_k = \mathcal{H}_k^+ \cup \mathcal{H}_k^-$ und die Vereinigung über alle k werde mit $\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-$ bzw. $\mathcal{H}$ bezeichnet.

Wir haben in Abschnitt 9.1.3 bereits gezeigt, dass diese P_k durch die Fueter-Polynome $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ aufgespannt werden. Die Q_k werden der Laurententwicklung wegen von den $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$ aufgespannt, für die $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$ hatten wir schon in Lemma 7.27 bewiesen, dass sie paravektorwertig sind. Wir haben noch die Paravektorwertigkeit der $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ nachzutragen und halten fest:

Lemma 10.6. *Die $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ sind paravektorwertig, sie spannen den Raum der inneren sphärischen Polynome auf. Die $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}$ sind gleichfalls paravektorwertig und spannen den Raum der äußeren sphärischen Funktionen auf.*

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, dass die Fueter-Polynome paravektorwertig sind. Das soll mit vollständiger Induktion nach dem Grad $k = |\mathbf{k}|$ geschehen. Für $k = 0$ oder 1 liegen nur die Funktionen 1 oder z_i vor, die paravektorwertig sind. Für den Schluss von $k - 1$ auf k verwenden wir die Aussage aus Satz 6.2 (ii)

$$\partial_j \mathcal{P}_{\mathbf{k}} = k_j \mathcal{P}_{\mathbf{k} - \boldsymbol{\varepsilon}_j}$$

mit dem k_j aus $\mathbf{k}$ und dem $\boldsymbol{\varepsilon}_j$, das an der j -ten Stelle eine 1 hat und sonst nur Nullen. Hätte nun $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ einen Summanden nicht aus dem $\mathbb{R}^{n+1}$, so würde dieser bei geeigneter Differentiation nicht Null werden, seinen Charakter aber nicht ändern. Das kann aber nach Induktionsvoraussetzung nicht sein. $\square$

Es bleibt noch zu prüfen, ob die Relationen aus Lemma 9.29 eine Orthogonalität etwa bezüglich $L^2(\mathbb{B}_{n+1})$ bedeuten. Dazu definieren wir eine Abbildung zwischen $\mathcal{H}^+$ und $\mathcal{H}^-$: Für $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $x \neq 0$ sowie holomorphes f in $\mathbb{R}_0^{n+1}$ sei

$$\mathbf{I}f(x) := \mathcal{Q}_0(x)f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Als Aufgabe (vgl. 10.4.7) wird gestellt zu beweisen, dass $\mathbf{I}f$ eine eindeutige Abbildung zwischen $\mathcal{H}^+$ und $\mathcal{H}^-$ ist. Damit können wir zeigen

Lemma 10.7. *Die Räume $\mathcal{H}^+$ und $\mathcal{H}^-$ sind orthogonal in $L^2(S^n)$.*

Beweis. Es seien P_j und Q_k beliebige Elemente aus den beiden Räumen. Es muss also ein P_k geben mit

$$Q_k(x) = \mathbf{I}P_k(x) = \mathcal{Q}_0(x)P_k\left(\frac{\bar{x}}{|x|^2}\right).$$

Wir interessieren uns für das Skalarprodukt in $L^2(S^n)$, dort ist $\mathcal{Q}_0(y) = \bar{y}$ und damit

$$\int_{S^n} \overline{Q_k(y)} P_j(y) |d\omega_1| = \int_{S^n} \overline{\bar{y} P_k(\bar{y})} P_j(y) |d\omega_1| = \int_{S^n} \overline{P_k(\bar{y})} dy^* P_j(y) = 0.$$

Die letzte Aussage folgt aus der Rechts-Holomorphie von $\overline{P_k(\bar{y})}$ und dem Integralsatz von Cauchy. Für die Fueter-Polynome ergibt sich sogar $\overline{P_{\mathbf{k}}(\bar{x})} = P_{\mathbf{k}}(x)$, da nur die Reihenfolge der Produkte der z_i umgedreht wird. Da aber über alle Reihenfolgen summiert wird, ändert das nichts. Die einzelnen z_i werden zweimal konjugiert, ändern sich also auch nicht. Dann aber ist das letzte Integral gerade das dritte der in Lemma 9.29 angegebenen. $\square$

Die bisher gewonnenen Aussagen über Fueter-Polynome sind also für das Problem der Orthogonalität nicht besonders hilfreich. Wir wenden uns daher weiteren Untersuchungen zu und beschränken uns jetzt endgültig auf holomorphe Funktionen in $C\ell(2)$, die also vom $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{H}$ abbilden. Wir haben dann nur die beiden Variablen z_1 und z_2 und können alle Formeln zum besseren Verständnis explizit aufschreiben. In dieser Stufe suchen wir nach geeigneten $\mathbb{H}$ -holomorphen Polynomen, die ein vollständiges Funktionensystem bilden. Malonek [99] und [100] hat dies mit symmetrischen Polynomen getan, die sich kaum von den Fueter-Polynomen unterscheiden.

Wir können als Beispiel die Fueter-Polynome der Ordnung 2 leicht angeben:

$$\mathcal{P}_{(2,0)}(x) = z_1^2, \quad \mathcal{P}_{(1,1)}(x) = \frac{1}{2}(z_1 z_2 + z_2 z_1), \quad \mathcal{P}_{(0,2)}(x) = z_2^2.$$

Dass die Fueter-Polynome eine Basis der holomorphen homogenen Polynome in $\mathcal{H}_k^+$ bilden, haben wir schon erwähnt. Um eine Aussage zur Vollständigkeit des Systems der Fueter-Polynome zu erhalten, benötigen wir ein Resultat zur Zerlegung des Raumes $L^2 \cap \ker \bar{\partial}$.

Satz 10.8. *Es gilt:*

$$L^2(\mathbb{B}_3) \cap \ker \bar{\partial} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k^+.$$

Beweis. Die Orthogonalität der verschiedenen Teilräume ergibt sich aus der Orthogonalität der homogenen harmonischen Polynome verschiedenen Grades, die noch zu zeigen ist. Nehmen wir nun an, dass die angegebene Zerlegung $L^2 \cap \ker \bar{\partial}$ nicht ausschöpft, so muss eine Funktion f existieren, die orthogonal zu allen Teilräumen ist. Diese Funktion lässt sich in einer Umgebung des Ursprungs in eine Taylorreihe entwickeln. In einer gewissen Kugel konvergiert diese Taylorreihe gleichmäßig und in einer etwas kleineren Kugel in der L^2 -Norm. Der Radius dieser Kugel sei $\varepsilon < 1$. Wir betrachten nun die Funktion $f^* = f(\frac{1}{2}\varepsilon x) \in L^2(B_{2/\varepsilon}(0)) \cap \ker \bar{\partial}$. Einerseits konvergiert die Taylorreihe von f^* in $L^2(\mathbb{B}_3)$, andererseits folgt aus

$$\int_{\mathbb{B}_3} \overline{f\left(\frac{\varepsilon x}{2}\right)} \mathcal{P}_k(x) d\sigma = c \int_{\mathbb{B}_3} \overline{f\left(\frac{\varepsilon x}{2}\right)} \mathcal{P}_k\left(\frac{\varepsilon x}{2}\right) d\sigma = 0,$$

dass mit einem geeigneten c die Funktion f^* auch orthogonal zu allen Teilräumen $\mathcal{H}_k^+$ ist. Aus beidem folgt $f^* = f = 0$. $\square$

Damit haben wir gleichzeitig den gewünschten Vollständigkeitssatz bewiesen.

Satz 10.9. *Die Fueter-Polynome sind vollständig in $L^2(\mathbb{B}_3) \cap \ker \bar{\partial}$.*

Fassen wir die bisher erhaltenen Resultate zusammen, so sind wir nun in der Lage, mit Hilfe der Fueter-Polynome Funktionen in eine Taylorreihe zu entwickeln, kennen aber nicht genau den Konvergenzradius der erhaltenen Potenzreihen. Im Sinne der besten Approximation kann jede in der Kugel quadratisch integrierbare

$\mathbb{H}$ -holomorphe Funktion in der ganzen Kugel mit beliebiger Genauigkeit approximiert werden. Leider ist das für praktische Zwecke nicht ausreichend, weil die beste Approximation mit beliebigen vollständigen Systemen numerisch instabil sein kann. Die oft für theoretische Zwecke verwendete Schmidtsche Orthogonalisierung ist für ein solches System selbst nicht numerisch stabil. Wir müssen uns also in der Folge mit der expliziten Konstruktion vollständiger Orthogonalsysteme auseinandersetzen. Das im Zusammenhang mit der Taylorentwicklung erhaltene und dort unersetzliche System der Fueter-Polynome ist als Ausgangspunkt für solche Konstruktionen nicht geeignet. Wir zitieren hier ohne den (umfangreichen) Beweis ein Resultat aus der Arbeit [18], der einige der folgenden Konstruktionen entnommen sind.

Satz 10.10. Für $|\nu| = |\mu| = n$ gilt

$$(\mathcal{P}_{(\nu_1, \nu_2)}, \mathcal{P}_{(\mu_1, \mu_2)})_{L^2(S^2)} = a,$$

wobei $a = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \in \mathbb{H}$ sowie

- (i) $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ und $a_3 \neq 0$, falls $|\nu_1 - \mu_1|$ und $|\nu_2 - \mu_2|$ ungerade,
- (ii) $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ und $a_0 \neq 0$, falls $|\nu_1 - \mu_1|$ und $|\nu_2 - \mu_2|$ gerade,
- (iii) $a \in \mathbb{R}^+$, falls $\nu_1 - \mu_1 = 0$.

Daraus können wir ablesen, dass die Fueter-Polynome im Allgemeinen nicht orthogonal sind. Arbeiten wir mit dem Realteil des Skalarproduktes, sind zumindest einige der Fueter-Polynome orthogonal:

Folgerung 10.11. [19] Wenn $|\nu_1 - \mu_1|$ und $|\nu_2 - \mu_2|$ ungerade sind, dann gilt

$$(\mathcal{P}_{(\nu_1, \nu_2)}, \mathcal{P}_{(\mu_1, \mu_2)})_{0, L^2(S^2)} = 0.$$

Dabei sei $(\cdot, \cdot)_0$ der Skalarteil des Skalarproduktes.

Wir wollen diese beiden Skalarprodukte hier kürzer mit

$$(f, g) = \int_{\mathbb{B}_3} \overline{f(x)} g(x) dx$$

und

$$(f, g)_0 = \text{Sc} \int_{\mathbb{B}_3} \overline{f(x)} g(x) dx \quad (10.2)$$

bezeichnen. Dabei sei ausdrücklich auf Aufgabe 10.4.8 verwiesen, nach der die Skalarprodukte bezüglich $\mathbb{B}_3$ und S^2 bis auf einen Faktor gleich sind. Für Approximationsaussagen waren beide Skalarprodukte gleichwertig, da sie ein und dieselbe Norm erzeugen und damit zu demselben Konvergenzbegriff führen. Betrachten wir die Struktur der Räume näher, so sind beide Skalarprodukte sehr unterschiedlich. $(f, g)_0$ prägt dem Raum eine feinere Struktur auf, es sind mehr Funktionen

orthogonal, wie wir schon am Beispiel der Fueter-Polynome gesehen haben. Vom konstruktiven Aspekt her erscheint es leichter, zunächst nach Orthonormalsystemen bezüglich des reellen Skalarproduktes zu suchen. Wir werden so vorgehen und später sehen, dass sich aus dem erhaltenen Ergebnis relativ einfach auch Orthonormalsysteme bezüglich des quaternionenwertigen Skalarproduktes konstruieren lassen.

Mit diesen orthogonalen Polynomen können wir in völliger Analogie zum komplexen System $\{\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n\}$ arbeiten, wenn wir sie konstruiert haben. Die notwendigen Rechnungen sind, der höheren Dimension geschuldet, natürlich viel aufwendiger, zur theoretischen Begründung aber unverzichtbar. Für die praktische Verwendung lohnt es sich, über eine Softwarelösung dieses formalen Problems nachzudenken. Die dem Buch beiliegende CD enthält ein Maple-Package QUATPACKAGE, das die Erzeugung der polynomialen Basis für den 3D-Fall löst.

10.1.3 Harmonische Kugelfunktionen

Die Idee der folgenden Konstruktion ist es, von harmonischen Kugelfunktionen auszugehen, für die relativ einfache explizite Formeln bereitstehen. Wenden wir auf diese Funktionen den Operator ∂ an, so erhalten wir auf Grund der Faktorisierung $\Delta = \bar{\partial}\partial$ des Laplace-Operators homogene holomorphe Polynome. Wir führen Kugelkoordinaten wie folgt ein:

$$\begin{aligned}x_0 &= r \cos \theta, \\x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi, \\x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi,\end{aligned}$$

wobei $0 < r < \infty$, $0 < \theta \leq \pi$, $0 < \varphi \leq 2\pi$. Jedes $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ besitzt die schon mehrfach verwendete Darstellung

$$x = r\omega, \quad |x| = r, \quad |\omega| = 1.$$

Transformieren wir auch den Cauchy–Riemann-Operator, so ergibt sich

$$\bar{\partial} = \frac{1}{r} L + \omega \partial_\omega$$

mit

$$L = \sum_{i=0}^2 e_i(r\partial_i - x_i\partial_\omega), \quad \partial_\omega = \sum_{i=0}^2 \omega_i\partial_i.$$

In den Aufgaben wird $\partial_\omega = \partial_r$ gezeigt (vgl. Aufgabe 10.4.9), der *adjungierte Cauchy–Riemann-Operator* $\bar{\partial}$ schreibt sich nun als

$$\bar{\partial} = \bar{\omega} \partial_r + \frac{1}{r} \bar{L},$$

wobei

$$\bar{L} = (-\sin \theta - e_1 \cos \theta \cos \varphi - e_2 \cos \theta \sin \varphi) \partial_\theta + \frac{1}{\sin \theta} (e_1 \sin \varphi - e_2 \cos \varphi) \partial_\varphi. \quad (10.3)$$

Jedes homogene harmonische Polynom P_n vom Grad n kann in Kugelkoordinaten in der Form

$$P_n(x) = r^n P_n(\omega), \quad \omega \in S^2, \quad (10.4)$$

dargestellt werden. Die Einschränkung $P_n(\omega)$ auf den Rand der Einheitskugel wird als *harmonische Kugelfunktion* bezeichnet. Entsprechend wollen wir $\mathbb{H}$ -holomorphe homogene Polynome mit $H_n(x)$ und die Einschränkungen $H_n(\omega)$ auf den Rand als *holomorphe Kugelfunktionen* oder als *innere sphärische Polynome* gemäß Definition 10.5 bezeichnen. $\mathcal{H}_n^+$ kennzeichnet den Teilraum $L^2(\mathbb{B}_3) \cap \ker \bar{\partial}$ der holomorphen homogenen Polynome vom Grad n . Dabei soll ein Index $\mathbb{H}$ bzw. $\mathbb{R}$ angeben, ob wir den Raum als reellen Vektorraum oder als rechts-linearen Raum über den Quaternionen auffassen.

Unser Ausgangspunkt ist das bekannte *vollständige Orthogonalsystem harmonischer Kugelfunktionen* ([126]),

$$U_{n+1}^0(\theta, \varphi) = P_{n+1}(\cos \theta) \quad (10.5)$$

$$U_{n+1}^m(\theta, \varphi) = P_{n+1}^m(\cos \theta) \cos m\varphi \quad (10.6)$$

$$V_{n+1}^m(\theta, \varphi) = P_{n+1}^m(\cos \theta) \sin m\varphi, \quad n = 0, \dots, \infty; \quad m = 1, \dots, n+1. \quad (10.7)$$

Dabei steht P_{n+1} für das *Legendre-Polynom* vom Grad $n+1$, gegeben durch

$$P_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} a_{n+1,k} t^{n+1-2k}, \quad P_0(t) = 1, \quad t \in [-1, 1],$$

mit

$$a_{n+1,k} = (-1)^k \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(2n+2-2k)!}{k! (n+1-k)! (n+1-2k)!}.$$

Wie üblich bezeichnet hier $[k]$ die größte ganze Zahl $\leq k$.

Die Funktionen P_{n+1}^m in (10.7) sind die *assoziierten Legendre-Funktionen*, definiert durch

$$P_{n+1}^m(t) := (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_{n+1}(t), \quad m = 1, \dots, n+1.$$

Für $m = 0$ stimmt die assoziierte Legendre-Funktion $P_{n+1}^0(t)$ mit dem entsprechenden Legendre-Polynom $P_{n+1}(t)$ überein. Für die nachfolgenden Berechnungen

von Ableitungen und Normen brauchen wir einige Eigenschaften der Legendre-Polynome und der assoziierten Legendre-Funktionen. Der Nachweis dieser Eigenschaften ist zum Teil sehr technisch, ist aber mit Grundkenntnissen der reellen Analysis zu bewältigen. Um den Fortgang unserer Überlegungen nicht durch diese technischen Details zu verdecken, stellen wir die notwendigen Resultate im Anhang zusammen. Es wird empfohlen, diese Eigenschaften als Übung zu beweisen (vgl. Aufgaben A.4.6.1, 2, 3, 4).

10.1.4 $\mathbb{H}$ -holomorphe Kugelfunktionen

Wir wollen wie folgt vorgehen. Die harmonischen Kugelfunktionen werden zu harmonischen homogenen Polynomen in der Einheitskugel fortgesetzt. Auf diese Polynome wird der Operator ∂ angewendet. Das entstehende holomorphe homogene Polynom wird wieder auf den Rand der Einheitskugel eingeschränkt und beschreibt unsere gesuchte holomorphe Kugelfunktion. Als Übung betrachte man die Konstruktion, den sphärischen adjungierten Cauchy–Riemann-Operator ∂ auf die harmonischen Kugelfunktionen direkt (ohne Fortsetzung und Einschränkung) anzuwenden und diskutiere die Unterschiede (vgl. Aufgabe 10.4.10).

Wir betrachten die Fortsetzungen der harmonischen Kugelfunktionen

$$\{r^{n+1} U_{n+1}^0, r^{n+1} U_{n+1}^m, r^{n+1} V_{n+1}^m, m = 1, \dots, n+1\}_{n \in \mathbb{N}_0}. \quad (10.8)$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ wenden wir den Operator ∂ in Kugelkoordinaten (10.3) auf (10.8) an und erhalten nach Einschränkung auf den Rand die holomorphen Kugelfunktionen

$$X_n^0, X_n^m, Y_n^m, m = 1, \dots, n+1,$$

als

$$\begin{aligned} X_n^0 &:= \partial(r^{n+1} U_{n+1}^0)|_{r=1} \\ &= A^{0,n} + B^{0,n} \cos \varphi e_1 + B^{0,n} \sin \varphi e_2, \end{aligned} \quad (10.9)$$

wobei

$$A^{0,n} := \frac{1}{2} \left(\sin^2 \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}(t)]_{t=\cos \theta} + (n+1) \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta) \right), \quad (10.10)$$

$$B^{0,n} := \frac{1}{2} \left(\sin \theta \cos \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}(t)]_{t=\cos \theta} - (n+1) \sin \theta P_{n+1}(\cos \theta) \right) \quad (10.11)$$

und

$$\begin{aligned} X_n^m &:= (\partial)(r^{n+1} U_{n+1}^m)|_{r=1} \\ &= A^{m,n} \cos m\varphi + \\ &\quad + (B^{m,n} \cos \varphi \cos m\varphi - C^{m,n} \sin \varphi \sin m\varphi) e_1 + \\ &\quad + (B^{m,n} \sin \varphi \cos m\varphi + C^{m,n} \cos \varphi \sin m\varphi) e_2, \end{aligned} \quad (10.12)$$

$$\begin{aligned}
Y_n^m &:= (\partial)(r^{n+1} V_{n+1}^m)|_{r=1} \\
&= A^{m,n} \sin m\varphi + \\
&\quad + (B^{m,n} \cos \varphi \sin m\varphi + C^{m,n} \sin \varphi \cos m\varphi) e_1 + \\
&\quad + (B^{m,n} \sin \varphi \sin m\varphi - C^{m,n} \cos \varphi \cos m\varphi) e_2, \quad (10.13)
\end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$A^{m,n} := \frac{1}{2} \left(\sin^2 \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}^m(t)]_{t=\cos \theta} + (n+1) \cos \theta P_{n+1}^m(\cos \theta) \right) \quad (10.14)$$

$$B^{m,n} := \frac{1}{2} \left(\sin \theta \cos \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}^m(t)]_{t=\cos \theta} - (n+1) \sin \theta P_{n+1}^m(\cos \theta) \right) \quad (10.15)$$

$$C^{m,n} := \frac{1}{2} m \frac{1}{\sin \theta} P_{n+1}^m(\cos \theta), \quad (10.16)$$

$m = 1, \dots, n+1$.

Um in späteren Rechnungen Sicherheit in den Indexrechnungen zu haben, formulieren wir eine einfache Beobachtung im folgenden Lemma.

Lemma 10.12. *Die holomorphen Kugelfunktionen X_n^j und Y_n^j verschwinden für $j \geq n+2$.*

Beweis. $A^{j,n}, B^{j,n}, C^{j,n} = 0$ für $j \geq n+2$, da für diese j und alle $t \in [-1, 1]$

$$P_{n+1}^j(t) = (1-t^2)^{j/2} P_{n+1}^{(j)}(t) = 0. \quad \square$$

Ein kleines Zahlenbeispiel möge der Motivierung der ausstehenden, zum Teil langwierigen Rechnungen dienen. Aus der bekannten Dimension $n+1$ von $\mathcal{H}_{n,\mathbb{H}}^+$ erwarten wir, dass der entsprechende reelle Raum die Dimension $4n+4$ hat. Das lässt sich einfach beweisen. Aus der Eigenschaft, dass die Fueter-Polynome $\mathcal{P}_{\nu_1, \nu_2}$, $\nu_1 + \nu_2 = n$, eine Basis in $\mathcal{H}_n^+$ bilden, erhalten wir sofort, dass jedes holomorphe homogene Polynom vom Grad n eindeutig als Linearkombination der Polynome $\mathcal{P}_{\nu_1, \nu_2}$, $\mathcal{P}_{\nu_1, \nu_2} e_1$, $\mathcal{P}_{\nu_1, \nu_2} e_2$ und $\mathcal{P}_{\nu_1, \nu_2} e_3$ mit reellen Koeffizienten dargestellt werden kann. Damit bilden diese Polynome eine Basis in $\mathcal{H}_{n,\mathbb{R}}^+$ und die reelle Dimension ist tatsächlich $4n+4$. Durch die oben erläuterte Konstruktion der Funktionen X_n^0, X_n^m, Y_n^m , $m = 1, \dots, n+1$, bekommen wir aber höchstens $2n+3$ holomorphe Polynome, die nicht unbedingt linear unabhängig sein müssen. Auf keinen Fall kann das konstruierte System vollständig sein, da keine der erhaltenen Funktionen eine von Null verschiedene e_3 -Koordinate besitzt. Die Idee ist nun einfach formuliert. Wir betrachten

$$\{\{X_n^j\} \cup \{X_n^j e_i\} : j = 1, \dots, 2n+3\}, \quad i = 1 \text{ oder } i = 2 \text{ oder } i = 3.$$

Diese Systeme sehen gleichwertig aus, sind es aber nicht. Eine numerische Beispielrechnung zeigt die Entwicklung der Konditionszahl der Gramschen Matrix:

Gruppe	Grad	Konditionszahl
$\{X_n^m\} \cup \{X_n^m e_1\}$	$n = 1$	13,93
	$n = 2$	69,99
	$n = 3$	292,02
	$n = 4$	1158,92
	$n = 7$	70718,72
$\{X_n^m\} \cup \{X_n^m e_3\}$	$n = 1$	3,00
	$n = 2$	5,00
	$n = 3$	7,00
	$n = 4$	9,00
	$n = 7$	15,00

Tabelle 1

Diese Systeme werden sich also bei einer Orthogonalisierung numerisch sehr unterschiedlich verhalten. Ausgehend von diesen numerischen Resultaten wollen wir das System

$$\{\{X_n^j\} \cup \{X_n^j e_3\} : j = 1, \dots, 2n+3\} .$$

weiter untersuchen. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} X_{n,0}^m &:= X_n^m, \quad X_{n,3}^m := X_n^m e_3, \quad m = 0, \dots, n+1, \\ Y_{n,0}^m &:= Y_n^m, \quad Y_{n,3}^m := Y_n^m e_3, \quad m = 1, \dots, n+1. \end{aligned}$$

In jedem Teilraum $\mathcal{H}_n^+$ sind mindestens zwei linear abhängige Funktionen enthalten, die wir entfernen wollen. Das sieht man ein, indem wir die jeweils letzten Elemente der einzelnen Gruppen analysieren. Es gilt

$$Y_{n,3}^{n+1} = X_{n,0}^{n+1} \quad \text{and} \quad X_{n,3}^{n+1} = -Y_{n,0}^{n+1}.$$

Das erhalten wir aus den expliziten Darstellungen

$$X_n^{n+1} = -C^{m+1,n} \cos n\varphi e_1 + C^{m+1,n} \sin n\varphi e_2$$

und

$$Y_n^{n+1} = -C^{m+1,n} \sin n\varphi e_1 - C^{m+1,n} \cos n\varphi e_2 .$$

Multiplikation mit e_3 führt auf

$$Y_{n,3}^{n+1} = -C^{n+1,n} \cos n\varphi e_1 + C^{n+1,n} \sin n\varphi e_2 = X_{n,0}^{n+1}$$

und

$$X_{n,3}^{n+1} = -Y_{n,0}^{n+1} .$$

Wir arbeiten also im Weiteren für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mit den $4n+4$ holomorphen Kugelfunktionen

$$\{X_{n,0}^0, X_{n,0}^m, Y_{n,0}^m, X_{n,3}^0, X_{n,3}^l, Y_{n,3}^l, \quad m = 1, \dots, n+1, l = 1, \dots, n\} . \quad (10.17)$$

Ausgehend von diesem System konstruieren wir unsere gesuchte Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_{n,\mathbb{R}}^+$, zunächst bezüglich des reellen Skalarproduktes $(\cdot, \cdot)_{0,L^2(\mathbb{B}_3)}$. Die Ausgangsposition beschreibt der folgende Satz.

Satz 10.13. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Teilsysteme holomorpher Kugelfunktionen $X_{n,0}^0$, $X_{n,0}^m$ bzw. $Y_{n,0}^m$ ($m = 1, \dots, n+1$) Orthogonalsysteme mit den Normen*

$$\|X_{n,0}^0\|_{0,L^2(S^2)} = \sqrt{\pi(n+1)} \quad (10.18)$$

und

$$\|X_{n,0}^m\|_{0,L^2(S^2)} = \|Y_{n,0}^m\|_{0,L^2(S^2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}(n+1)\frac{(n+1+m)!}{(n+1-m)!}}, \quad m = 1, \dots, n+1. \quad (10.19)$$

Die Berechnung der Normen ist technisch recht aufwendig. Dieser Aufwand lässt sich aber nicht vermeiden, da es unser Ziel ist, das System unserer Polynome explizit zu orthogonalisieren. Für das weitere Vorgehen ist es aber ausreichend, zu wissen, dass man diese Normen berechnen kann und das Resultat zu kennen. Im Interesse des zügigen Vorankommens ist der komplette Beweis des Satzes in den Anhang A.4.2 verschoben.

Ein analoges Resultat kann für das zweite Teilsystem bewiesen werden (vgl. Aufgabe 10.4.11):

Satz 10.14. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Systeme $X_{n,3}^0$, $X_{n,3}^l$ und $Y_{n,3}^l$ ($l = 1, \dots, n$) orthogonal bezüglich des inneren Produktes (10.2), und die Normen sind durch*

$$\|X_{n,3}^0\|_{0,L^2(S^2)} = \sqrt{\pi(n+1)}$$

und

$$\|X_{n,3}^l\|_{0,L^2(S^2)} = \|Y_{n,3}^l\|_{0,L^2(S^2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}(n+1)\frac{(n+1+l)!}{(n+1-l)!}}, \quad l = 1, \dots, n.$$

gegeben.

Das zweite fundamentale Problem ist es, die Beziehungen zwischen den bisher untersuchten Teilsystemen herauszufinden und nach Möglichkeit die inneren Produkte und damit den Winkel zwischen den Teilräumen explizit zu berechnen.

Satz 10.15. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $m = 1, \dots, n+1$; $l = 1, \dots, n$, gilt*

$$\begin{aligned} (X_{n,0}^0, X_{n,3}^0)_{0,L^2(S^2)} &= (X_{n,0}^0, X_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} = (X_{n,0}^0, Y_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} \\ &= (X_{n,0}^m, X_{n,3}^0)_{0,L^2(S^2)} = (X_{n,0}^m, X_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} = (Y_{n,0}^m, X_{n,3}^0)_{0,L^2(S^2)} \\ &= (Y_{n,0}^m, Y_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} = 0 \end{aligned}$$

und

$$(X_{n,0}^m, Y_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} = -(Y_{n,0}^m, X_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} = \begin{cases} 0, & m \neq l, \\ \frac{\pi}{2} m \frac{(n+m+1)!}{(n-m+1)!}, & m = l. \end{cases}$$

Der Beweis ist wieder in den Anhang verschoben, da er rein technischer Natur ist und keine neuen Ideen erfordert. Unter Benutzung der expliziten Darstellung der holomorphen Kugelfunktionen sind einfach alle notwendigen Integrale zu berechnen.

Wir beobachten, dass nur sehr wenige Funktionen aus den verschiedenen Systemen nicht orthogonal sind. Die Gramsche Matrix ist schwach besetzt und die Chance einer expliziten Orthogonalisierung bleibt erhalten.

Wir bezeichnen jetzt mit

$$\tilde{X}_{n,0}^0, \tilde{X}_{n,0}^m, \tilde{Y}_{n,0}^m, \tilde{X}_{n,3}^0, \tilde{X}_{n,3}^l, \tilde{Y}_{n,3}^l, \quad m = 1, \dots, n+1, \quad l = 1, \dots, n,$$

die aus (10.17) durch Normalisierung entstehenden Polynome. Aus den vorangegangenen Untersuchungen ist klar, dass die Systeme

$$\left\{ \tilde{X}_{n,0}^0, \tilde{X}_{n,0}^m, \tilde{Y}_{n,0}^m, \quad m = 1, \dots, n+1 \right\}_{n \in \mathbb{N}_0} \quad (10.20)$$

und

$$\left\{ \tilde{X}_{n,3}^0, \tilde{X}_{n,3}^l, \tilde{Y}_{n,3}^l, \quad l = 1, \dots, n \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}. \quad (10.21)$$

jeweils Orthonormalsysteme sind. Die Beziehungen zwischen diesen Teilsystemen erscheinen nach der Normalisierung einfacher. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sind alle Polynome der Systeme (10.20) und (10.21) orthogonal außer

$$\begin{aligned} (\tilde{X}_{n,0}^l, \tilde{Y}_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} &= -(\tilde{Y}_{n,0}^l, \tilde{X}_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} \\ &= \frac{l}{n+1}, \quad l = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass für wachsendes n der Winkel zwischen den von den Funktionen (10.20) und (10.21) aufgespannten Teilräumen gegen Null konvergiert. Damit werden die (Parallel-)Projektoren auf diese Teilräume nicht gleichmäßig beschränkt in L^2 sein und wir können nicht auf die Orthogonalisierung des Gesamtsystems verzichten. Als Ergebnis der Orthogonalisierung des Gesamtsystems erhalten wir:

$$X_{n,0}^{0,*} := \tilde{X}_{n,0}^0, \quad (10.22)$$

$$X_{n,0}^{m,*} := \tilde{X}_{n,0}^m, \quad (10.23)$$

$$Y_{n,0}^{m,*} := \tilde{Y}_{n,0}^m, \quad (10.24)$$

$$Y_{n,3}^{l,*} := \sqrt{s_{n,l}} \left((n+1) \tilde{Y}_{n,3}^l - l \tilde{X}_{n,0}^l \right), \quad (10.25)$$

$$X_{n,3}^{0,*} := \tilde{X}_{n,3}^0, \quad (10.26)$$

$$X_{n,3}^{l,*} := \sqrt{s_{n,l}} \left((n+1) \tilde{X}_{n,3}^l + l \tilde{Y}_{n,0}^l \right) \quad (10.27)$$

mit

$$s_{n,l} = \frac{1}{(n+1)^2 - l^2}, \quad (10.28)$$

$$m = 1, \dots, n+1, \quad l = 1, \dots, n.$$

Das ist leicht einzusehen. Die ersten $2n+3$ Funktionen in (10.22)–(10.24) sind bereits ein Orthonormalsystem. Für die nächsten $2n+3+l$ ($l = 1, \dots, n$) Funktionen rechnen wir schrittweise: Sei l fest und sei Y_{nl} die noch nicht normalisierte Funktion, die sich nach dem $(2n+3+l)$ -ten Schritt des Orthogonalisierungsverfahrens ergibt. Diese Funktion berechnet sich explizit wie folgt.

$$\begin{aligned} Y_{nl} &= \tilde{Y}_{n,3}^l - X_{n,0}^{0,*}(X_{n,0}^{0,*}, \tilde{Y}_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} \\ &\quad - \sum_{m=0}^{n+1} X_{n,0}^{m,*}(X_{n,0}^{m,*}, \tilde{Y}_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} - \sum_{m=0}^{n+1} Y_{n,0}^{m,*}(Y_{n,0}^{m,*}, \tilde{Y}_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} \\ &= \tilde{Y}_{n,3}^l - X_{n,0}^{l,*}(X_{n,0}^{l,*}, \tilde{Y}_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)}, \end{aligned}$$

Dabei haben wir den Satz 10.15 benutzt. Nach Konstruktion der Funktionen aus (10.23) ergibt sich

$$Y_{nl} = \tilde{Y}_{n,3}^l - \tilde{X}_{n,0}^l(\tilde{X}_{n,0}^l, \tilde{Y}_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)}$$

und das Einsetzen des bekannten Wertes für das Skalarprodukt liefert

$$Y_{nl} = \tilde{Y}_{n,3}^l - \frac{l}{n+1} X_{n,0}^{l,*}.$$

$Y_{n,3}^{l,*}$ ergibt sich nun durch Normalisierung von Y_{nl} . Der $(3n+4)$ -te Schritt ergibt sofort (10.26), und der Rest der Prozedur führt uns in Analogie zum soeben beschriebenen Vorgehen zu (10.27).

10.1.5 Vollständigkeit in $L^2(\mathbb{B}_3) \cap \ker \bar{\partial}$

Wir wollen nun untersuchen, ob das konstruierte Orthonormalsystem (ONS) vollständig in $L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}$ ist. Auf Grund von Satz 10.8 ist klar, dass sich jede Funktion in eine Orthogonalreihe mit Funktionen aus den Teilräumen $\mathcal{H}_n^+$ entwickeln lässt. Die im vorigen Abschnitt erhaltenen holomorphen Kugelfunktionen können mittels Beziehung (10.4) in ein Orthogonalsystem in $\mathcal{H}_{n,\mathbb{R}}^+$ fortgesetzt und wieder normiert werden. Wir erhalten das System

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+3} r^n X_{n,0}^{0,*}, \quad \frac{1}{2n+3} r^n X_{n,0}^{m,*}, \quad \frac{1}{2n+3} r^n Y_{n,0}^{m,*}, \\ \frac{1}{2n+3} r^n Y_{n,3}^{l,*}, \quad \frac{1}{2n+3} r^n X_{n,3}^{0,*}, \quad \frac{1}{2n+3} r^n X_{n,3}^{l,*}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Jedes Element aus $\mathcal{H}_{n,\mathbb{R}}^+$ lässt sich im ONS der $4n+4$ holomorphen homogenen Polynome (10.29) darstellen. Damit ist das gewünschte Resultat bewiesen und wir formulieren den entsprechenden Satz.

Satz 10.16. *Das System (10.29) ist vollständig in $L^2(\mathbb{B}_3)_\mathbb{R} \cap \ker \bar{\partial}$.*

Wir wollen nun weiter versuchen, aus dem ONS im reellen Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{B}_3)_\mathbb{R} \cap \ker \bar{\partial}$ ein ONS bezüglich des quaternionenwertigen Skalarproduktes in $L^2(\mathbb{B}_3)_\mathbb{H} \cap \ker \bar{\partial}$ zu konstruieren. Es wird sich zeigen, dass es genügt, geeignete Funktionen aus dem ONS in $L^2(\mathbb{B}_3)_\mathbb{R} \cap \ker \bar{\partial}$ auszuwählen.

Satz 10.17. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ bilden die $n+1$ holomorphen homogenen Polynome*

$$r^n X_{n,0}^{0,*}, r^n X_{n,0}^{2k_1,*}, r^n Y_{n,3}^{2k_2,*}, k_1 = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right], k_2 = 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] \quad (10.30)$$

eine Orthogonalbasis in $\mathcal{H}_{n,\mathbb{H}}^+$.

Dieses Resultat wirft sofort die Frage auf, ob sich nicht auch unter Benutzung ungerader Indizes für $\mathcal{H}_n^+$ ein ONS angeben lässt. Diese Frage beantwortet der folgende Satz.

Satz 10.18. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ bilden die $n+1$ holomorphen homogenen Polynome*

$$r^n X_{n,0}^{2k_1+1,*}, r^n Y_{n,3}^{2k_2-1,*}, k_1 = 0, \dots, \left[\frac{n}{2} \right], k_2 = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right],$$

eine Orthogonalbasis in $\mathcal{H}_{n,\mathbb{H}}^+$.

Im Anhang A.4.4 ist der erste dieser beiden Sätze bewiesen, der zweite Beweis verläuft völlig analog.

Folgerung 10.19. *Beide Systeme*

$$\left\{ \sqrt{2n+3} r^n X_{n,0}^{0,*}, \sqrt{2n+3} r^n X_{n,0}^{2k_1,*}, \sqrt{2n+3} r^n Y_{n,3}^{2k_2,*} : \right. \\ \left. k_1 = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right], k_2 = 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] \right\}_{n \in \mathbb{N}_0} \quad (10.31)$$

und

$$\left\{ \sqrt{2n+3} r^n X_{n,0}^{2k_1+1,*}, \sqrt{2n+3} r^n Y_{n,3}^{2k_2-1,*} : \right. \\ \left. k_1 = 0, \dots, \left[\frac{n}{2} \right], k_2 = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right] \right\}_{n \in \mathbb{N}_0} \quad (10.32)$$

sind vollständige Orthonormalsysteme in $L^2(\mathbb{B}_3)_\mathbb{H} \cap \ker \bar{\partial}$.

10.2 Fourierentwicklung in $\mathbb{H}$

Nach den umfangreichen Vorbereitungen ist die Fourierentwicklung einer quadratisch integrierbaren holomorphen Funktion nur noch eine Formsache. Wir formulieren hier das Resultat für $L^2(\mathbb{B}_3)_\mathbb{R} \cap \ker \bar{\partial}$ und überlassen den Fall $L^2(\mathbb{B}_3)_\mathbb{H} \cap \ker \bar{\partial}$ dem Leser.

Satz 10.20. *Es sei $f \in L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}$. Dann kann f in eine Fourierreihe nach dem ONS (10.22)–(10.27) entwickelt werden.*

$$\begin{aligned} f = & \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2n+3} r^n \left[X_{n,0}^{0,*} \alpha_n + X_{n,3}^{0,*} \beta_n \right. \\ & + \sum_{m=1}^n \left(X_{n,0}^{m,*} \gamma_{n,m} + Y_{n,0}^{m,*} \delta_{n,m} + X_{n,3}^{m,*} \varepsilon_{n,m} + Y_{n,3}^{m,*} \varphi_{n,m} \right) \\ & \left. + X_{n,0}^{n+1,*} \gamma_{n,n+1} + Y_{n,0}^{n+1,*} \delta_{n,n+1} \right]. \end{aligned}$$

Selbstverständlich lässt sich f mittels der Parsevalschen Gleichung auch über die Koeffizienten charakterisieren:

Satz 10.21. *$f \in L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}$ ist gleichwertig mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n^2 + \beta_n^2 + \sum_{m=1}^n (\gamma_{n,m}^2 + \delta_{n,m}^2 + \varepsilon_{n,m}^2 + \varphi_{n,m}^2) + \gamma_{n,n+1}^2 + \delta_{n,n+1}^2 \right] < \infty.$$

10.3 Anwendungen

10.3.1 Ableitungen $\mathbb{H}$ -holomorpher Polynome

In der Einleitung zu Abschnitt 10.1 wurde hervorgehoben, dass es ein Vorteil der komplexen Potenzen z^n ist, dass ihre Ableitungen wieder zum selben Funktionensystem gehören. Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich die holomorphen Funktionen unserer Orthonormalsysteme bei der Differentiation verhalten. Wir bezeichnen mit $\partial^i X_n^0$, $\partial^i X_n^m$ und $\partial^i Y_n^m$ die holomorphen Kugelfunktionen, die nach i -facher Ableitung von $r^n X_n^0$, $r^n X_n^m$ und $r^n Y_n^m$ mit dem Operator ∂ durch Einschränkung auf den Rand entstehen (dabei ist wohl zu unterscheiden zwischen ∂^i und der partiellen Ableitung ∂_i). Es genügt, zunächst die Ableitungen der Funktionen X_n^m und Y_n^m zu untersuchen. Daraus können wir dann leicht die Ableitungen der Funktionen des Orthogonalsystems erhalten.

Satz 10.22. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \partial X_n^m &= \partial(r^n X_n^m)|_{r=1} \\ &= A_{m,n}^{(1)} \cos m\varphi \\ &\quad + (B_{m,n}^{(1)} \cos \varphi \cos m\varphi - C_{m,n}^{(1)} \sin \varphi \sin m\varphi) e_1 \\ &\quad + (B_{m,n}^{(1)} \sin \varphi \cos m\varphi + C_{m,n}^{(1)} \cos \varphi \sin m\varphi) e_2 \end{aligned}$$

Beweis. Formale Differentiation von X_n^m führt auf den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \partial X_n^m &= \partial(r^n X_n^m)|_{r=1} \\
 &= A_{m,n}^{(1)} \cos m\varphi \\
 &\quad + (B_{m,n}^{(1)} \cos \varphi \cos m\varphi - C_{m,n}^{(1)} \sin \varphi \sin m\varphi) e_1 \\
 &\quad + (B_{m,n}^{(1)} \sin \varphi \cos m\varphi + C_{m,n}^{(1)} \cos \varphi \sin m\varphi) e_2 + \\
 &\quad + E_{m,n}^{(1)} \sin m\varphi e_3
 \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 A_{m,n}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(-\sin \theta \frac{d}{d\theta} A^{m,n} + \cos \theta \frac{d}{d\theta} B^{m,n} + \frac{1}{\sin \theta} B^{m,n} + m \frac{1}{\sin \theta} C^{m,n} \right. \\
 &\quad \left. + n \cos \theta A^{m,n} + n \sin \theta B^{m,n} \right) \quad (10.33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{m,n}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(-\sin \theta \frac{d}{d\theta} B^{m,n} - \cos \theta \frac{d}{d\theta} A^{m,n} + n \cos \theta B^{m,n} - n \sin \theta A^{m,n} \right) \quad (10.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{m,n}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(-\sin \theta \frac{d}{d\theta} C^{m,n} + m \frac{1}{\sin \theta} A^{m,n} + n \cos \theta C^{m,n} \right) \quad (10.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{m,n}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(-\cos \theta \frac{d}{d\theta} C^{m,n} - m \frac{1}{\sin \theta} B^{m,n} - \frac{1}{\sin \theta} C^{m,n} - n \sin \theta C^{m,n} \right),
 \end{aligned}$$

$m = 1, \dots, n+1$. Die Koeffizientenfunktionen $E_{m,n}^{(1)}$ ($m = 1, \dots, n+1$) können mit (10.14), (10.15) und (10.16) berechnet werden und verschwinden. $\square$

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass auch die Ableitungen der Funktionen X_n^m nur Werte in $\text{span}\{e_0, e_1, e_2\}$ annehmen, so wie die Funktionen selbst. Für die Funktionen Y_n^m gilt ein analoges Resultat. Durch genauere Analyse der Koeffizienten aus dem vorigen Satz lässt sich ein schärferes Ergebnis erhalten:

Satz 10.23. *Sei $n \geq 1$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
 \partial X_n^m &= (n+m+1)X_{n-1}^m, \quad m = 0, \dots, n, \\
 \partial Y_n^m &= (n+m+1)Y_{n-1}^m, \quad m = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Beweis. Auf Grund der analogen Gestalt der Polynome und ihrer Ableitungen reicht es aus zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad A_{m,n}^{(1)} &= (n+m+1)A^{m,n-1}, \quad m = 0, \dots, n, \\
 \text{(ii)} \quad B_{m,n}^{(1)} &= (n+m+1)B^{m,n-1}, \quad m = 0, \dots, n, \\
 \text{(iii)} \quad C_{m,n}^{(1)} &= (n+m+1)C^{m,n-1}, \quad m = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Diese Berechnung wird im Anhang ausführlich demonstriert. $\square$

Tatsächlich ergeben sich die Ableitungen der betrachteten Polynome als Vielfache von Polynomen niedrigeren Grades aus demselben System. Durch rekursive Anwendung dieses Resultates erhalten wir entsprechende Formeln für die Ableitungen höherer Ordnung.

Satz 10.24. *Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, 2, \dots$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\partial^i X_n^m &= \left(\prod_{h=1}^i (n+m+1-(h-1)) \right) X_{n-i}^m, \quad m = 0, \dots, n+1-i, \\ \partial^i Y_n^m &= \left(\prod_{h=1}^i (n+m+1-(h-1)) \right) Y_{n-i}^m, \quad m = 1, \dots, n+1-i.\end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis kann induktiv geführt werden. Der Fall $i = 1$ war die Aussage von Satz 10.23 (vgl. Aufgabe 10.4.12). $\square$

Im Unterschied zur Situation im komplexen Fall kann es vorkommen, dass die Ableitung eines Polynoms verschwindet, bevor die Ordnung der Ableitung den Grad des Polynoms übersteigt.

Folgerung 10.25. *Für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\partial^i X_n^m = \partial^i Y_n^m = 0, \quad i \geq n-m+2; \quad m = 1, \dots, n+1.$$

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus dem vorangegangenen Satz, der Darstellungsformel für die Ableitungen und Lemma 10.12 (vgl. Aufgabe 10.4.13). $\square$

Zum Abschluß müssen wir uns noch davon überzeugen, dass die Ableitungen eines Basispolynoms nicht eher verschwinden, als das in der vorangegangenen Folgerung beschrieben wurde.

Folgerung 10.26. *Für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\begin{aligned}r^n X_n^0 &\in (\ker \partial^{n+1} \setminus \ker \partial^n) \cap \ker \bar{\partial}, \\ r^n X_n^m, \quad r^n Y_n^m &\in (\ker \partial^{n-m+2} \setminus \ker \partial^{n-m+1}) \cap \ker \bar{\partial}, \quad m = 1, \dots, n+1,\end{aligned}$$

wobei ∂^0 mit der Identität identifiziert wird.

Der Beweis ist unter Verwendung der vorangegangenen Sätze nur eine Rechenaufgabe (vgl. Aufgabe 10.4.14).

Wir müssen nun noch die Ableitungen der Funktionen unseres Orthonormalsystems untersuchen. Da die Funktionen des Orthonormalsystems in relativ einfacher Weise durch die Funktionen X_n^m und Y_n^m beschrieben wurden, bereitet die Übertragung keine allzu großen Schwierigkeiten.

Satz 10.27. Die Ableitungen des ONS (10.22)–(10.27) können in demselben ONS wie folgt ausgedrückt werden.

$$\partial X_{n,0}^{0,*} = \sqrt{n(n+1)} X_{n-1,0}^{0,*} \quad (10.36)$$

$$\partial X_{n,0}^{m,*} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{1}{\sqrt{s_{n,m}}} X_{n-1,0}^{m,*} \quad (10.37)$$

$$\partial Y_{n,0}^{m,*} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{1}{\sqrt{s_{n,m}}} Y_{n-1,0}^{m,*} \quad (10.38)$$

$$\partial Y_{n,3}^{l,*} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{s_{n-1,l}}} Y_{n-1,3}^{l,*} + \frac{l}{n+1} X_{n-1,0}^{l,*} \right) \quad (10.39)$$

$$\partial X_{n,3}^{0,*} = \sqrt{n(n+1)} X_{n-1,3}^{0,*} \quad (10.40)$$

$$\partial X_{n,3}^{l,*} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{s_{n-1,l}}} X_{n-1,3}^{l,*} - \frac{l}{n+1} Y_{n-1,0}^{l,*} \right), \quad (10.41)$$

wobei $s_{n,m}$ durch (10.28) gegeben ist und $m = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, n-1$.

Beweis. Interessant ist nur der Fall $Y_{n,3}^{l,*}$ und analog $X_{n,3}^{l,*}$, der Rest ist formale Rechnung.

$$\begin{aligned} \partial Y_{n,3}^{l,*} &= \sqrt{s_{n,l}} \frac{1}{\|X_{n,0}^l\|_{0,L^2(S^2)}} \left((n+1) \partial(Y_n^l) e_3 - l (\partial) X_n^l \right) \\ &= \sqrt{s_{n,l}} \frac{\|X_{n-1,0}^l\|_{0,L^2(S^2)}}{\|X_{n,0}^l\|_{0,L^2(S^2)}} (n+l+1) \left((n+1) \tilde{Y}_{n-1,3}^l - l \tilde{X}_{n-1,0}^l \right) \\ &= \sqrt{\frac{n}{n+1}} \left((n+1) \tilde{Y}_{n-1,3}^l - l \tilde{X}_{n-1,0}^l \right). \end{aligned} \quad (10.42)$$

Nach Konstruktion ist

$$\tilde{X}_{n-1,0}^l = X_{n-1,0}^{l,*}$$

und

$$\tilde{Y}_{n-1,3}^l = \frac{1}{n \sqrt{s_{n-1,l}}} Y_{n-1,3}^{l,*} + \frac{l}{n} X_{n-1,0}^{l,*};$$

Substitution dieser Beziehungen in (10.42) ergibt (10.39). Der Bereich für die Indizes muß noch erklärt werden. Der Index m läuft von 1 bis n , weil

$$\partial X_{n,0}^{n+1,*} = \partial Y_{n,0}^{n+1,*} = 0.$$

Der Index l läuft von 1 bis $n-1$, weil die linear abhängigen Funktionen $\partial Y_{n,3}^{n,*}$ und $\partial X_{n,3}^{n,*}$

ausgeschlossen werden können. In der Tat erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \partial Y_{n,3}^{n,*} &= \frac{\sqrt{s_{n,n}}}{\|X_{n,0}^n\|_{0,L^2(S^2)}} [(n+1)(2n+1)Y_{n-1,3}^n - n(2n+1)X_{n-1,0}^n] \\
 &= \frac{\sqrt{s_{n,n}}}{\|X_{n,0}^n\|_{0,L^2(S^2)}} (2n+1) [(n+1)X_{n-1,0}^n - nX_{n-1,0}^n] \\
 &= \sqrt{2n+1} \frac{\|X_{n-1,0}^n\|_{0,L^2(S^2)}}{\|X_{n,0}^n\|_{0,L^2(S^2)}} X_{n-1,0}^{n,*} \\
 &= \sqrt{\frac{n}{n+1}} X_{n-1,0}^{n,*}.
 \end{aligned}$$

Benutzen wir das schon bewiesene Resultat (10.37), dann gilt

$$\partial Y_{n,3}^{n,*} = \sqrt{s_{n,n}} \partial X_{n,0}^{n,*} \quad (10.43)$$

und analog

$$\partial X_{n,3}^{n,*} = -\sqrt{s_{n,n}} \partial Y_{n,0}^{n,*}. \quad (10.44)$$

□

Als Übung (vgl. Aufgabe 10.4.15) weise man nach, dass die erhaltenen Ableitungen (10.36)–(10.41) eine Basis in $\mathcal{H}_{n-1,\mathbb{R}}^+$ bilden. Da die Anzahl $4n$ mit der Dimension übereinstimmt, reicht es aus, die lineare Unabhängigkeit zu zeigen.

10.3.2 Stammfunktionen $\mathbb{H}$ -holomorpher Funktionen

Unter Benutzung der konstruierten Orthonormalsysteme holomorpher Funktionen wollen wir uns nun der Konstruktion holomorpher Stammfunktionen holomorpher Funktionen zuwenden. In der komplexen Ebene können wir Stammfunktionen, wie wir gesehen haben, sehr einfach mit Hilfe von Kurvenintegralen beschreiben. Dieser Zugang versagt im höherdimensionalen Fall, weil die Kurvenintegrale auch lokal nicht wegunabhängig sind. Wir wollen den Weg beschreiten, die Integration als „Umkehrung“ der Ableitung aufzufassen. Genauer gesagt, suchen wir einen rechts-inversen Operator zur hyperkomplexen Ableitung ∂ , der holomorphe Funktionen wieder in holomorphe Funktionen abbildet.

Definition 10.28. Als *holomorphe Stammfunktion* einer holomorphen Funktion f bezeichnen wir jede holomorphe Funktion F mit der Eigenschaft

$$\partial F = f. \quad (10.45)$$

Falls für ein gegebenes $f \in \ker \bar{\partial}$ eine solche Funktion F existiert, so schreiben wir kurz $Pf := F$ (P steht für *Primitive*).

Die Idee wird sein, den Operator P auf den Funktionen unseres Orthonormalsystems zu erklären und dann stetig auf den ganzen Raum L^2 fortzusetzen. Es soll noch erwähnt werden, dass auch Erweiterungen dieser Definition eine Rolle spielen. Eine algebraische Primitive holomorpher Funktionen wird z.B. durch den

Teodorescu-Operator $\overline{T}$ definiert. Der Operator $\overline{T}$ ist auch rechtsinvers zu ∂ , bildet allerdings holomorphe Funktionen in harmonische Funktionen ab. Dieser Operator ist von einiger Bedeutung bei der Lösung elliptischer Randwertaufgaben. Diese Idee soll jetzt aber nicht weiter verfolgt werden.

Sudbery [150] bewies die Existenz holomorpher Stammfunktionen in der Klasse der holomorphen Polynome unter Benutzung vektoranalytischer Ansätze. Durch Ansätze in Fueter-Polynomen gelang in [53] die explizite Konstruktion von polynomialen holomorphen Stammfunktionen zu gegebenen $C\ell(n)$ -wertigen holomorphen Polynomen. Allerdings wurde nicht bewiesen, dass der so definierte Operator beschränkt ist. In [14] wurde gezeigt, dass in geeigneten Gebieten holomorphe Stammfunktionen holomorpher Funktionen existieren, allerdings war dieser Zugang nicht konstruktiv.

Wir bemerken noch, dass Stammfunktionen holomorpher Funktionen sich durch $\mathbb{H}$ -holomorphe Konstanten unterscheiden, d.h. durch Funktionen $f \in \ker \overline{\partial} \cap \ker \partial$ mit $f = f(x_1, x_2)$. Wie in der reellen und komplexen Analysis sprechen wir manchmal von der Stammfunktion und meinen damit, dass wir die Konstanten in der Beschreibung weglassen.

Wie bei der Berechnung der Ableitung homogener Polynome wollen wir so vorgehen, dass wir die Stammfunktion einer sphärischen holomorphen Funktion in der Weise bestimmen, dass wir diese in die Kugel fortsetzen, dort eine Stammfunktion berechnen und das Resultat gegebenenfalls wieder auf die Oberfläche der Kugel einschränken. Auf diese Weise können wir auch Stammfunktionen sphärischer holomorpher Funktionen berechnen.

Definition 10.29. Der Operator $P : \mathcal{H}_{n,\mathbb{R}}^+ \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1,\mathbb{R}}^+$ ist definiert durch

$$P(X_{n,0}^{0,*}) = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} X_{n+1,0}^{0,*} \quad (10.46)$$

$$P(X_{n,0}^{m,*}) = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{s_{n+1,m}} X_{n+1,0}^{m,*} \quad (10.47)$$

$$P(Y_{n,0}^{m,*}) = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{s_{n+1,m}} Y_{n+1,0}^{m,*} \quad (10.48)$$

$$P(X_{n,3}^{0,*}) = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} X_{n+1,3}^{0,*} \quad (10.49)$$

$$P(X_{n,3}^{l,*}) = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \sqrt{s_{n,l}} \left(X_{n+1,3}^{l,*} + \frac{l}{n+1} \sqrt{s_{n+1,l}} Y_{n+1,0}^{l,*} \right) \quad (10.50)$$

$$P(Y_{n,3}^{l,*}) = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \sqrt{s_{n,l}} \left(Y_{n+1,3}^{l,*} - \frac{l}{n+1} \sqrt{s_{n+1,l}} X_{n+1,0}^{l,*} \right) \quad (10.51)$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $m = 1, \dots, n+1$ und $l = 1, \dots, n$.

Eine analoge Definition kann für die Basis (10.30) von $\mathcal{H}_{n,\mathbb{H}}^+$ angegeben werden:

Definition 10.30. Der Operator $P : \mathcal{H}_{n,\mathbb{H}}^+ \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1,\mathbb{H}}^+$ ist erklärt durch

$$\begin{aligned} P(X_{n,0}^{0,*}) &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} X_{n+1,0}^{0,*} \\ P(X_{n,0}^{2k_1,*}) &= \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{s_{n+1,2k_1}} X_{n+1,0}^{2k_1,*} \\ P(Y_{n,3}^{2k_2,*}) &= \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \sqrt{s_{n,2k_2}} \left(Y_{n+1,3}^{2k_2,*} - \frac{2k_2}{n+1} \sqrt{s_{n+1,2k_2}} X_{n+1,0}^{2k_2,*} \right) \end{aligned}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $k_1 = 1, \dots, [\frac{n+1}{2}]$ und $k_2 = 1, \dots, [\frac{n}{2}]$.

Unsere Absicht ist, den Operator durch Stetigkeit auf den gesamten Raum fortzusetzen. Dazu benötigen wir die Normen der Stammfunktionen unserer Orthonormalbasis.

Lemma 10.31. *Die Normen der Stammfunktionen der holomorphen Kugelfunktionen berechnen sich aus den folgenden Formeln.*

$$\begin{aligned} \|P X_{n,0}^{0,*}\|_{0,L^2(S^2)} &= \|P X_{n,3}^{0,*}\|_{0,L^2(S^2)} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}, \\ \|X_{n+1,3}^{n+1,*} - \sqrt{s_{n+1,n+1}} Y_{n+1,0}^{n+1,*}\|_{0,L^2(S^2)} &= \|X_{n+1,3}^{n+1,*} + \sqrt{s_{n+1,n+1}} Y_{n+1,0}^{n+1,*}\|_{0,L^2(S^2)} \\ &= \sqrt{1 + s_{n+1,n+1}}, \\ \|X_{n+1,0}^{n+2,*}\|_{0,L^2(S^2)} &= \|Y_{n+1,0}^{n+2,*}\|_{0,L^2(S^2)} = 1, \\ \|P X_{n,0}^{m,*}\|_{0,L^2(S^2)} &= \|P Y_{n,0}^{m,*}\|_{0,L^2(S^2)} = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{s_{n+1,m}}, \quad m = 1, \dots, n+1, \\ \|P X_{n,3}^{l,*}\|_{0,L^2(S^2)} &= \|P Y_{n,3}^{l,*}\|_{0,L^2(S^2)} = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \sqrt{s_{n,l}} \sqrt{1 + \frac{l^2}{(n+1)^2} s_{n+1,l}}, \\ l &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Beweis. Die Berechnung kann auf die bekannten Normen der Erzeugenden des Orthogonalsystems zurückgeführt werden. $\square$

Satz 10.32. *Der lineare Operator*

$$P : L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial} \longrightarrow L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}$$

ist beschränkt.

Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}$. Wir betrachten die Fourierreihe bezüglich des ONS

(10.22)–(10.27) in $L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}$.

$$\begin{aligned}
 f &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2n+3} r^n [X_{n,0}^{0,*} \alpha_n + X_{n,3}^{0,*} \beta_n \\
 &\quad + \sum_{m=1}^n (X_{n,0}^{m,*} \gamma_{n,m} + Y_{n,0}^{m,*} \delta_{n,m} + X_{n,3}^{m,*} \varepsilon_{n,m} + Y_{n,3}^{m,*} \varphi_{n,m}) \\
 &\quad + X_{n,0}^{n+1,*} \gamma_{n,n+1} + Y_{n,0}^{n+1,*} \delta_{n,n+1}] , \tag{10.52}
 \end{aligned}$$

wobei $\alpha_n, \beta_n, \gamma_{n,m}, \delta_{n,m}, \varepsilon_{n,m}, \varphi_{n,m}, \gamma_{n,n+1}, \delta_{n,n+1} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m = 1, \dots, n$.
Die formale Anwendung des Operators P führt auf die Reihe

$$\begin{aligned}
 Pf &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2n+3}{2n+5}} \sqrt{2n+5} r^{n+1} \left\{ X_{n+1,0}^{0,*} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \alpha_n \right. \\
 &\quad + X_{n+1,3}^{0,*} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \beta_n + \sum_{m=1}^n \left[X_{n+1,0}^{m,*} \left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{s_{n+1,m}} \gamma_{n,m} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \sqrt{s_{n,m}} \frac{m}{n+1} \sqrt{s_{n+1,m}} \varphi_{n,m} \right) + Y_{n+1,0}^{m,*} \left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{s_{n+1,m}} \delta_{n,m} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \sqrt{s_{n,m}} \frac{m}{n+1} \sqrt{s_{n+1,m}} \varepsilon_{n,m} \right) + X_{n+1,3}^{m,*} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \sqrt{s_{n,m}} \varepsilon_{n,m} \right. \\
 &\quad \left. + Y_{n+1,3}^{m,*} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \sqrt{s_{n,m}} \varphi_{n,m} \right] + X_{n+1,0}^{n+1,*} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{s_{n+1,n+1}} \gamma_{n,n+1} \\
 &\quad \left. + Y_{n+1,0}^{n+1,*} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{s_{n+1,n+1}} \delta_{n,n+1} \right\} . \tag{10.53}
 \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite erkennen wir wieder eine Reihenentwicklung nach dem vollständigen Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}$. Um die Parsevalsche Gleichung anwenden zu können, müssen wir die Konvergenz der folgenden Reihen unter der Voraussetzung, dass die Reihenentwicklung für f konvergent ist, überprüfen:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{2n+5} \left\{ \frac{1}{(n+1)(n+2)} |\alpha_n|^2 + \frac{1}{(n+1)(n+2)} |\beta_n|^2 \right. \\
 &\quad + \sum_{m=1}^n \left[\left| \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{s_{n+1,m}} \gamma_{n,m} - \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \sqrt{s_{n,m}} \frac{m}{n+1} \sqrt{s_{n+1,m}} \varphi_{n,m} \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left| \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{s_{n+1,m}} \delta_{n,m} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \sqrt{s_{n,m}} \frac{m}{n+1} \sqrt{s_{n+1,m}} \varepsilon_{n,m} \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n+1}{n+2} s_{n,m} |\varepsilon_{n,m}|^2 + \frac{n+1}{n+2} s_{n,m} |\varphi_{n,m}|^2 \right] \\
 &\quad \left. + \frac{n+2}{n+1} s_{n+1,n+1} |\gamma_{n,n+1}|^2 + \frac{n+2}{n+1} s_{n+1,n+1} |\delta_{n,n+1}|^2 \right\} . \tag{10.54}
 \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung wird nun abgeschätzt: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{2n+3}{2n+5} \frac{1}{(n+1)(n+2)} |\alpha_n|^2 < |\alpha_n|^2 \quad (10.55)$$

und

$$\frac{2n+3}{2n+5} \frac{1}{(n+1)(n+2)} |\beta_n|^2 < |\beta_n|^2. \quad (10.56)$$

Die Einbeziehung von $s_{n+1,n+1}$ aus (10.28) vereinfacht die Koeffizienten mit $\gamma_{n,n+1}$ und $\delta_{n,n+1}$: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ haben wir

$$\begin{aligned} \frac{2n+3}{2n+5} \frac{n+2}{n+1} s_{n+1,n+1} |\gamma_{n,n+1}|^2 &= \frac{n+2}{(2n+5)(n+1)} |\gamma_{n,n+1}|^2 \\ &< |\gamma_{n,n+1}|^2, \end{aligned} \quad (10.57)$$

$$\frac{2n+3}{2n+5} \frac{n+2}{n+1} s_{n+1,n+1} |\delta_{n,n+1}|^2 < |\delta_{n,n+1}|^2. \quad (10.58)$$

Für alle anderen Terme schätzen wir $s_{n,m}$ grob ab: Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\max_{m=1,\dots,n} s_{n+1,m} = \frac{1}{4(n+1)}, \quad (10.59)$$

$$\max_{m=1,\dots,n} s_{n,m} = \frac{1}{2n+1}, \quad (10.60)$$

$$\max_{m=1,\dots,n} \frac{m}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \quad (10.61)$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} &\frac{2n+3}{2n+5} \sum_{m=1}^n \left| \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{s_{n+1,m}} \gamma_{n,m} - \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \sqrt{s_{n,m}} \frac{m}{n+1} \sqrt{s_{n+1,m}} \varphi_{n,m} \right|^2 \\ &\leq \sum_{m=1}^n \left(\frac{n+2}{n+1} s_{n+1,m} |\gamma_{n,m}|^2 + \frac{n+1}{n+2} s_{n,m} \frac{m^2}{(n+1)^2} s_{n+1,m} |\varphi_{n,m}|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 s_{n+1,m} \sqrt{s_{n,m}} \frac{m}{n+1} |\gamma_{n,m}| |\varphi_{n,m}| \right) \\ &\stackrel{(10.59)-(10.61)}{\leq} \frac{n+2}{4(n+1)^2} \sum_{m=1}^n |\gamma_{n,m}|^2 + \frac{n^2}{4(n+2)(2n+1)(n+1)^2} \sum_{m=1}^n |\varphi_{n,m}|^2 \\ &\quad + \frac{n}{4(n+1)^2 \sqrt{2n+1}} \sum_{m=1}^n |\gamma_{n,m}| |\varphi_{n,m}| \\ &\leq \sum_{m=1}^n |\gamma_{n,m}|^2 + \sum_{m=1}^n |\varphi_{n,m}|^2 + 2 \sum_{m=1}^n |\gamma_{n,m}| |\varphi_{n,m}| \quad (10.62) \\ &\leq \sum_{m=1}^n |\gamma_{n,m}|^2 + \sum_{m=1}^n |\varphi_{n,m}|^2 + 2 \left(\sum_{m=1}^n |\gamma_{n,m}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^n |\varphi_{n,m}|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Zur Auflösung der quadratischen Terme ist hier die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung angewendet worden. Wegen

$$2 \left(\sum_{m=1}^n |\gamma_{n,m}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^n |\varphi_{n,m}|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{m=1}^n |\gamma_{n,m}|^2 + \sum_{m=1}^n |\varphi_{n,m}|^2$$

erhalten wir aus (10.62)

$$\begin{aligned} & \frac{2n+3}{2n+5} \sum_{m=1}^n \left| \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{s_{n+1,m}} \gamma_{n,m} - \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \sqrt{s_{n,m}} \frac{m}{n+1} \sqrt{s_{n+1,m}} \varphi_{n,m} \right|^2 \\ & < 2 \sum_{m=1}^n |\gamma_{n,m}|^2 + 2 \sum_{m=1}^n |\varphi_{n,m}|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (10.63)$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{2n+3}{2n+5} \sum_{m=1}^n \left| \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \sqrt{s_{n+1,m}} \delta_{n,m} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \sqrt{s_{n,m}} \frac{m}{n+1} \sqrt{s_{n+1,m}} \varepsilon_{n,m} \right|^2 \\ & < 2 \sum_{m=1}^n |\delta_{n,m}|^2 + 2 \sum_{m=1}^n |\varepsilon_{n,m}|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (10.64)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{2n+3}{2n+5} \sum_{m=1}^n \frac{n+1}{n+2} s_{n,m} |\varepsilon_{n,m}|^2 & \stackrel{(10.60)}{\leq} \frac{(2n+3)(n+1)}{(2n+5)(2n+1)(n+2)} \sum_{m=1}^n |\varepsilon_{n,m}|^2 \\ & < \sum_{m=1}^n |\varepsilon_{n,m}|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (10.65)$$

sowie

$$\frac{2n+3}{2n+5} \sum_{m=1}^n \frac{n+1}{n+2} s_{n,m} |\varphi_{n,m}|^2 < \sum_{m=1}^n |\varphi_{n,m}|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (10.66)$$

Fassen wir nun (10.55)–(10.58) und (10.63)–(10.66) zusammen, so ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} & |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 + \sum_{m=1}^n (2|\gamma_{n,m}|^2 + 3|\varphi_{n,m}|^2 + 2|\delta_{n,m}|^2 + 3|\varepsilon_{n,m}|^2) \\ & + |\gamma_{n,n+1}|^2 + |\delta_{n,n+1}|^2 \\ & < 3 \left[|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 + \sum_{m=1}^n (|\gamma_{n,m}|^2 + |\varphi_{n,m}|^2 + |\delta_{n,m}|^2 + |\varepsilon_{n,m}|^2) \right. \\ & \left. + |\gamma_{n,n+1}|^2 + |\delta_{n,n+1}|^2 \right] \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Aus der Parsevalschen Gleichung für f wissen wir, dass

$$3 \sum_{n=0}^{\infty} \left[|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 + \sum_{m=1}^n (|\gamma_{n,m}|^2 + |\varphi_{n,m}|^2 + |\delta_{n,m}|^2 + |\varepsilon_{n,m}|^2) + |\gamma_{n,n+1}|^2 + |\delta_{n,n+1}|^2 \right] = 3 \|f\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}^2.$$

Damit ist die Reihe (10.54) konvergent und folglich $Pf \in L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}$. Außerdem haben wir bewiesen, dass

$$\|Pf\|_{L^2(\mathbb{B}_3)} \leq \sqrt{3} \|f\|_{L^2(\mathbb{B}_3)}, \quad f \in L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}, \quad (10.67)$$

und der Operator P ist tatsächlich beschränkt. $\square$

Die vorangegangenen Abschätzungen können leicht verschärft werden und führen dann zu besseren Abschätzungen der Norm von P . Klar geworden ist aber bereits bei der groben Abschätzung, wie wichtig das Orthogonalsystem für uns ist, erlaubt es doch die Anwendung der Parsevalschen Gleichung. Würden wir eine Definition auf der Grundlage der einfacher zu erhaltenden Fueter-Polynome und der Taylorreihe versuchen, müßten wir uns mit den Eigenwerten der Gramschen Matrix der Fueter-Polynome auseinandersetzen. Das ist eine sehr viel schwierigere Aufgabe.

10.3.3 Dekompositionssatz und Taylorentwicklung

Betrachten wir noch einmal die Taylorentwicklung einer holomorphen Funktion in $\mathbb{C}$. Diese Reihenentwicklung kann auch als eine Zerlegung des Raumes der quadratisch integrierbaren holomorphen Funktionen bezüglich der Kerne der Ableitungen $\partial^n / \partial z^n$ aufgefasst werden. Diese Zerlegung ist eine direkte Zerlegung, denn wir benutzen die Funktionen

$$z^n \in \ker \frac{\partial^{n+1}}{\partial z^{n+1}} \setminus \ker \frac{\partial^n}{\partial z^n}.$$

Außerdem ist diese Zerlegung orthogonal. Wir suchen nun nach einem Analogon dieses Zugangs für holomorphe Funktionen in $Cl(2)$. Mit den Folgerungen 10.25 und 10.26 haben wir das geeignete Werkzeug zur Hand.

Wir beginnen mit der Untersuchung in $L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}$. Aus Folgerung 10.25 wissen wir, dass

$$r^n X_{n,0}^{0,*}, r^n X_{n,3}^{0,*} \in \ker \partial^{n+1} \cap \ker \bar{\partial} \quad (10.68)$$

und

$$r^n X_{n,0}^{n+1,*}, r^n Y_{n,0}^{n+1,*} \in \ker \partial \cap \ker \bar{\partial}. \quad (10.69)$$

Außerdem gilt nach Folgerung 10.26

$$r^n X_{n,0}^{m,*}, r^n Y_{n,0}^{m,*}, r^n X_{n,3}^{m,*}, r^n Y_{n,3}^{m,*} \in \ker \partial^{n-m+2} \cap \ker \bar{\partial}, \quad (10.70)$$

$$n \geq 1, m = 1, \dots, n.$$

Für $n = 0$ gilt offenbar $r^n X_{0,0}^{0,*}$, $r^n X_{0,3}^{0,*} \in \ker \partial$. Dieser Fall ist in (10.68) enthalten. Mit diesen Vorbereitungen können wir den Dekompositionssatz formulieren:

Satz 10.33. *Der Raum $L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}$ erlaubt die folgende orthogonale Zerlegung:*

$$L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial} = \bigoplus_{n \geq 1} ((\ker \partial^n \ominus \ker \partial^{n-1}) \cap \ker \bar{\partial}) . \quad (10.71)$$

Beweis. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\ker \partial^k \cap \ker \bar{\partial}$ ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}$. Mit dem induzierten inneren Produkt des Hilbert-Raumes $L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}$ ist der Teilraum $\ker \partial^k \cap \ker \bar{\partial}$ auch ein Hilbert-Raum. Andererseits ist $\ker \partial^{k-1} \cap \ker \bar{\partial}$ gleichfalls ein abgeschlossener Teilraum von $\ker \partial^k \cap \ker \bar{\partial}$ und besitzt in diesem Raum ein orthogonales Komplement.

$$\ker \partial^k \cap \ker \bar{\partial} = (\ker \partial^{k-1} \cap \ker \bar{\partial}) \oplus ((\ker \partial^k \ominus \ker \partial^{k-1}) \cap \ker \bar{\partial}) , \quad (10.72)$$

wobei $(\ker \partial^k \ominus \ker \partial^{k-1}) \cap \ker \bar{\partial} = (\ker \partial^{k-1} \cap \ker \bar{\partial})^{\perp}$.

Die Gleichung (10.72) impliziert, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die endliche Zerlegung

$$\ker \partial^k \cap \ker \bar{\partial} = \bigoplus_{n=1}^k ((\ker \partial^n \ominus \ker \partial^{n-1}) \cap \ker \bar{\partial}) \quad (10.73)$$

aufgeschrieben werden kann. Betrachten wir nun eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}$, die orthogonal zum Teilraum $\bigoplus_{n \geq 1} ((\ker \partial^n \ominus \ker \partial^{n-1}) \cap \ker \bar{\partial})$ ist. Dann ist f orthogonal zu jedem Summanden $(\ker \partial^n \ominus \ker \partial^{n-1}) \cap \ker \bar{\partial}$ ($n \in \mathbb{N}$) und folglich auch zu jeder endlichen direkten Summe dieser Teilräume, d.h. für alle $k \in \mathbb{N}$ haben wir

$$f \perp \left(\bigoplus_{n=1}^k (\ker \partial^n \ominus \ker \partial^{n-1}) \cap \ker \bar{\partial} \right) .$$

Aus (10.73) ergibt sich wieder für alle $k \in \mathbb{N}$

$$f \perp \ker \partial^k \cap \ker \bar{\partial} . \quad (10.74)$$

Analysieren wir unser vollständiges Orthogonalsystem

$$\left\{ \sqrt{2n+3} r^n X_{n,0}^{0,*}, \sqrt{2n+3} r^n X_{n,3}^{0,*}, \sqrt{2n+3} r^n X_{n,0}^{m,*}, \sqrt{2n+3} r^n Y_{n,0}^{m,*}, \right. \\ \left. \sqrt{2n+3} r^n X_{n,3}^{l,*}, \sqrt{2n+3} r^n Y_{n,3}^{l,*} : m = 1, \dots, n+1, l = 1, \dots, n \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

in $L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker \bar{\partial}$, dann sehen wir mit (10.68)

$$\sqrt{2n+3} r^n X_{n,0}^{0,*}, \sqrt{2n+3} r^n X_{n,3}^{0,*} \in \ker \partial^{n+1} \cap \ker \bar{\partial} .$$

Die Anwendung von (10.74) bringt uns zur Beziehung

$$(f, \sqrt{2n+3} r^n X_{n,0}^{0,*})_{L_2(B)} = (f, \sqrt{2n+3} r^n X_{n,3}^{0,*})_{L_2(B)} = 0 .$$

Analog ergibt sich aus (10.69)–(10.71) und (10.74)

$$\begin{aligned} (f, \sqrt{2n+3} r^n X_{n,0}^{m,*})_{L_2(B)} &= (f, \sqrt{2n+3} r^n Y_{n,0}^{m,*})_{L_2(B)} \\ &= (f, \sqrt{2n+3} r^n X_{n,3}^{m,*})_{L_2(B)} = (f, \sqrt{2n+3} r^n Y_{n,3}^{m,*})_{L_2(B)} = 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten, dass f orthogonal zu allen Basiselementen von $L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{R}} \cap \ker D$ ist und folglich gilt $f = 0$.

Wir haben die Basis eines jeden Teilraumes $(\ker \partial^n \ominus \ker \partial^{n-1}) \cap \ker \bar{\partial}$ ($n \in \mathbb{N}$) mit Elementen des vollständigen Orthonormalsystems beschrieben. Damit ist klar, dass alle diese Teilräume paarweise orthogonal sind. $\square$

Das analoge Resultat für $L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{H}} \cap \ker \bar{\partial}$ soll hier nur formuliert werden. Der Beweis folgt derselben Idee.

Satz 10.34. *Der Raum $L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{H}} \cap \ker \bar{\partial}$ erlaubt die folgende orthogonale Zerlegung*

$$L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{H}} \cap \ker \bar{\partial} = \bigoplus_{n \geq 1} ((\ker \partial^n \ominus \ker \partial^{n-1}) \cap \ker \bar{\partial}). \quad (10.75)$$

Die aus diesem Satz erhaltenen Darstellungen von f sind offenbar Umordnungen der Fourier-Entwicklung und haben die eingangs formulierten Eigenschaften der komplexen Taylorentwicklung aufgenommen. Man beachte aber, dass die Teilräume $(\ker \partial^n \ominus \ker \partial^{n-1}) \cap \ker \bar{\partial}$ unendlichdimensional sind. Das liegt daran, dass auch Polynome beliebig hohen Grades die Eigenschaft haben können, dass ihre n -te Ableitung verschwindet. Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, dass er die gliedweise Differentiation von Fourierreihen wesentlich vereinfacht. Gedacht ist dabei z.B. an Reihenansätze zur Lösung partieller Differentialgleichungen.

10.4 Aufgaben

1. Man beweise das quaternionische Analogon des Satzes der Gebrüder Riesz: Es sei F ein $\mathbb{H}$ -rechts-lineares Funktional über dem $\mathbb{H}$ -wertigen Raum $L^2(G)$. Dann gestattet es die Darstellung

$$F(u) = \int_G \overline{f(x)} u(x) d\sigma$$

mit einer $\mathbb{H}$ -wertigen Funktion $f \in L^2(G)$.

2. Man beweise, dass ein Funktionensystem im rechts-linearen Banachraum genau dann abgeschlossen ist, wenn es vollständig ist.
3. Man zeige, dass das Funktionensystem $\{\phi_{i \in \mathbb{N}} = \mathcal{Q}_0(x - x^{(i)})\}$ in $L^2(G) \cap \ker D$ abgeschlossen ist.
4. Man untersuche die Potenzen der Variablen $z = x_0 e_0 + \frac{1}{2}(x_1 e_1 + x_2 e_2)$ und $z = x_0 + \frac{1}{3}(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3)$ auf Holomorphie.

5. Man zeige, dass die ganzzahligen Potenzen der Fueter-Variablen $z_i = x_i - e_i x_0$ holomorph sind, so dass es sich um total analytische Variable handelt.
6. Man weise nach, dass für die Variablen

$$z(x) = \sum_{k=0}^3 a_k x_k$$

die Bedingung $a_i a_j = a_j a_i$ für alle $i, j = 0, 1, 2, 3$ bedeutet, dass der Wertebereich von $z(x)$ höchstens eine zweidimensionale Ebene sein kann.

7. Man beweise, dass die Abbildung

$$\mathbf{I}f(x) = \mathcal{Q}_0(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$$

eine eindeutige Abbildung von $\mathcal{H}^+$ auf $\mathcal{H}^-$ ist. Für den Nachweis der Holomorphie von $\mathbf{I}f$ bei holomorphem f beweise und verwende man die Beziehung

$$\Delta(xf) = 2\bar{\partial}f + x\Delta f.$$

8. Man zeige für ein Orthonormalsystem homogener holomorpher Polynome H_n^ν , $n = 0, 1, \dots$; $\nu = 1, \dots, n+1$:

$$\begin{aligned} (H_n^\nu, H_k^\mu)_{L^2(\mathbb{B}_3)} &= \int_0^1 r^{n+k+2} \left(\int_{S^2} \overline{H_n^\nu} H_k^\mu |d\omega| \right) dr \\ &= \frac{1}{n+k+3} (H_n^\nu, H_k^\mu)_{L^2(S^2)}. \end{aligned}$$

9. Man zeige, dass mit den Kugelkoordinaten $x = r\omega$ mit $|x| = r$, $\omega = x/|x|$ gilt:

$$\begin{aligned} \partial_\omega &= \sum_{i=0}^2 \omega_i \partial_i = \partial_r, \\ L &= \sum_{i=0}^2 e_i (r \partial_i - x_i \partial_\omega) \\ &= (-\sin \theta - e_1 \cos \theta \cos \varphi - e_2 \cos \theta \sin \varphi) \partial_\theta \\ &\quad + \frac{1}{\sin \theta} (e_1 \sin \varphi - e_2 \cos \varphi) \partial_\varphi. \end{aligned}$$

10. Man diskutiere das Vorgehen, den sphärischen adjungierten Cauchy–Riemann-Operator ∂ direkt auf die harmonischen Kugelfunktionen anzuwenden und diskutiere die Unterschiede zu dem Vorgehen in Unterabschnitt 10.1.4.

11. Man beweise Satz 10.14: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Systeme $X_{n,3}^0$, $X_{n,3}^l$ und $Y_{n,3}^l$ ($l = 1, \dots, n$) orthogonal bezüglich des inneren Produktes (10.2) und die Normen sind durch

$$\|X_{n,3}^0\|_{0,L^2(S^2)} = \sqrt{\pi(n+1)}$$

und

$$\|X_{n,3}^l\|_{0,L^2(S^2)} = \|Y_{n,3}^l\|_{0,L^2(S^2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}(n+1) \frac{(n+1+l)!}{(n+1-l)!}}, \quad l = 1, \dots, n.$$

gegeben.

12. Man zeige den Satz 10.24: Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, 2, \dots$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial^i X_n^m &= \left(\prod_{h=1}^i (n+m+1-(h-1)) \right) X_{n-i}^m, \quad m = 0, \dots, n+1-i \\ \partial^i Y_n^m &= \left(\prod_{h=1}^i (n+m+1-(h-1)) \right) Y_{n-i}^m, \quad m = 1, \dots, n+1-i. \end{aligned}$$

13. Man beweise die Folgerung 10.25: Für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\partial^i X_n^m = \partial^i Y_n^m = 0, \quad i \geq n-m+2; m = 1, \dots, n+1.$$

14. Man beweise auch die Folgerung 10.26: Für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} r^n X_n^0 &\in (\ker \partial^{n+1} \setminus \ker \partial^n) \cap \ker \bar{\partial}, \\ r^n X_n^m, \quad r^n Y_n^m &\in (\ker \partial^{n-m+2} \setminus \ker \partial^{n-m+1}) \cap \ker \bar{\partial}, \quad m = 1, \dots, n+1, \end{aligned}$$

wobei ∂^0 mit der Identität identifiziert wird.

15. Man zeige, dass die Ableitungen (10.36)–(10.41) eine Basis in $\mathcal{H}_{n-1,\mathbb{R}}^+$ bilden.

11 Elementare Funktionen

11.1 Elementare Funktionen in $\mathbb{C}$

11.1.1 Exponentialfunktion

Die Funktionen, die uns in diesem Abschnitt beschäftigen werden, werden unter der Bezeichnung *elementare Funktionen* zusammengefasst, obwohl sie durchaus nicht elementar sind. Wir beginnen mit der aus der reellen Analysis bereits bekannten Exponentialfunktion. Sie ist fundamental, alle anderen elementaren Funktionen werden von ihr erzeugt. Natürlich spielt sie auch in den Anwendungen eine grundlegende Rolle.

Definition 11.1. Die *Exponentialfunktion* oder *e-Funktion* ist für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$e^z := \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Aus dem Quotientenkriterium lässt sich leicht der Konvergenzradius $\rho = \infty$ bestimmen (vgl. Beispiel 4.17 c), so dass e^z tatsächlich in der ganzen Ebene definiert ist.

Satz 11.2. Die *Exponentialfunktion*

(i) ist in $\mathbb{C}$ holomorph mit

$$\frac{de^z}{dz} = e^z$$

(ii) und genügt für alle $z, \zeta \in \mathbb{C}$ der Funktionalgleichung

$$e^z e^\zeta = e^{z+\zeta}.$$

(iii) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $e^x > 0$ mit $e^0 = 1$, und es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}, \quad |e^z| = e^x \leq e^{|z|} \quad \text{sowie} \quad |e^{ix}| = 1.$$

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $e^z \neq 0$.

(iv) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Beweis. (i) Nach Satz 9.5 gilt

$$\frac{de^z}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z,$$

wenn man den Summationsindex um 1 verschiebt.

(ii) Es sei für festes ζ

$$g(z) := e^{-z} e^{\zeta+z}$$

eine Funktion von z , deren Ableitung

$$g'(z) = -g(z) + g(z) = 0$$

ist. Also ist g konstant. Für $z = 0$ ergibt sich $g(0) = g(z) = e^{\zeta}$ und daher

$$e^{\zeta} = e^{-z} e^{\zeta+z}.$$

Für $\zeta = 0$ folgt erst einmal $e^z e^{-z} = 1$ und daraus sofort die gewünschte Funktionalgleichung.

(iii) Für $x \geq 0$ stehen in der Potenzreihe nur nichtnegative Summanden und mindestens ein positiver, also ist dort $e^x > 0$. Aus der Funktionalgleichung ergibt sich dann sofort auch $e^{-x} > 0$. Wäre $e^{z_0} = 0$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$, so entstände der Funktionalgleichung wegen der Widerspruch

$$1 = e^0 = e^{-z_0} e^{z_0} = 0.$$

Da die Koeffizienten der Potenzreihe reell sind, kann man die Konjugation in die Partialsummen und schließlich auch in die Reihe ziehen, das bedeutet

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}.$$

Auch den Beweis der restlichen Behauptungen kann man sich leicht überlegen.

(iv) Wegen $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$ kann man schreiben

$$e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} z^k.$$

Die Koeffizienten

$$\frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n}\right) > 0$$

sind positiv, woraus man

$$\left|e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}\right) |z|^k = e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n.$$

erhält. Aus dem Reellen übernehmen wir, dass der Ausdruck rechts für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, was zu beweisen war. $\square$

11.1.2 Trigonometrische Funktionen

Mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion können wir nun sehr einfach so genannte *trigonometrische Funktionen* definieren, allerdings ist die Analogie mit den aus dem Reellen bekannten Winkel- bzw. Kreisfunktionen nicht ganz so einsichtig.

Definition 11.3. Die Funktionen *Kosinus* und *Sinus* sind durch

$$\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),$$

definiert und gehören zu den oben genannten *trigonometrischen Funktionen*.

Bemerkung 11.4. Die im Reellen übliche Bezeichnung Kreisfunktion kann bei komplexem Argument zu Irritationen führen, da etwa $\sin ix = -\sinh x$ und $\cos ix = \cosh x$ gilt und damit plötzlich auch die hyperbolischen Funktionen zu den Kreisfunktionen zählen würden

Natürlich gelten die üblichen Eigenschaften:

Satz 11.5. (i) Für reelle $z = x$ gilt

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}, \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$$

und damit

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (\text{Eulersche Formel}),$$

sowie $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Man kann damit jede komplexe Zahl in der Exponentialform $z = re^{i\varphi}$ darstellen. Nochmals bemerkt sei, dass $|e^{ix}| = 1$ für alle reellen x gilt (Satz 11.2 (iii)).

(ii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ haben wir die Potenzreihenentwicklungen

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Überdies ist $\cos$ eine gerade Funktion, $\sin$ eine ungerade Funktion, das heißt

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

(iii) Es gelten die Additionstheoreme: Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \cos^2 z + \sin^2 z &= 1. \end{aligned}$$

(iv) $\cos$ und $\sin$ sind in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z.$$

(v) Es existiert eine kleinste positive reelle Nullstelle von $\cos x$, die nach der reellen Analysis gleich $\pi/2$ ist. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Man kann auch zeigen, dass die obigen Eigenschaften ausreichen, um $\sin x$ und $\cos x$ eindeutig festzulegen. Die Übereinstimmung mit den aus dem Reellen bekannten Funktionen ist im Satz enthalten.

Beweis. (i) Nach dem Teil (iii) des letzten Satzes gilt für reelle x

$$\overline{e^{ix}} = e^{\overline{ix}} = e^{-ix},$$

womit die Behauptung gezeigt ist. Die Werte von $\cos 0$ und $\sin 0$ ergeben sich aus $e^0 = 1$.

(ii) Wegen $i^{2n} = (-1)^n$ und $i^{2n+1} = i(-1)^n$ haben wir

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

und damit folgt aus der Definition die Behauptung.

(iii) Der Beweis wird als Aufgabe (vgl. 11.3.1) gestellt.

(iv) Die Kettenregel liefert

$$\frac{d}{dz} \cos z = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2} (ie^{iz} - ie^{-iz}) = -\sin z.$$

Entsprechendes gilt für $\sin z$.

(v) Es soll kurz die Existenz der kleinsten positiven Nullstelle des Kosinus bewiesen werden: Wir wissen bereits, dass $\cos 0 = 1$, aus der Potenzreihe schätzen wir $\cos 2$ ab:

$$\cos 2 = 1 - \left(2 - \frac{2}{3}\right) - \dots - \left(\frac{2^{2k}}{(2k)!} - \frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!}\right) - \dots,$$

wobei die Klammern positiv sind. In der Tat folgt für $k > 2$

$$\frac{2^{2k}}{(2k)!} - \frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{2^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{2^2}{(2k+1)(2k+2)}\right) > 0.$$

Mithin ist $\cos 2 < -1/3$. Nach dem Zwischenwertsatz muss $\cos$ zwischen 0 und 2 eine Nullstelle haben. Die kleinste sei gerade $\pi/2$. Der Stetigkeit halber muss es übrigens eine solche kleinste Nullstelle geben. Aus den Additionstheoremen folgt nun sofort $|\sin(\pi/2)| = 1$ und damit $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, schließlich $\cos(2\pi) = 1$, $\sin(2\pi) = 0$. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \cos(z + 2\pi) &= \cos z \cos(2\pi) - \sin z \sin(2\pi) = \cos z, \\ \sin(z + 2\pi) &= \sin z \cos(2\pi) + \cos z \sin(2\pi) = \sin z, \\ e^{z+2\pi i} &= e^x e^{i(y+2\pi)} = e^x (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = e^z. \end{aligned}$$

□

11.1.3 Hyperbolische Funktionen

Wie schon bemerkt, unterscheiden sich die hyperbolischen Funktionen von den trigonometrischen im Komplexen nur um eine Drehung um $\pi/2$.

Definition 11.6. Die Funktionen *Kosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* werden durch

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert.

Der Vollständigkeit halber sollen hier die üblichen Eigenschaften zusammengestellt werden:

- Satz 11.7.** (i) Für reelle $z = x$ sind die hyperbolischen Funktionen reell mit $\cosh 0 = 1$ und $\sinh 0 = 0$.
- (ii) Die hyperbolischen Funktionen besitzen für alle $z \in \mathbb{C}$ die Potenzreihenentwicklungen

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$\cosh$ ist eine gerade Funktion, $\sinh$ eine ungerade.

- (iii) Es gelten die Additionstheoreme: Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned} \cosh(z_1 + z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \\ \sinh(z_1 + z_2) &= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2, \\ \cosh^2 z - \sinh^2 z &= 1. \end{aligned}$$

- (iv) $\cosh$ und $\sinh$ sind in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit

$$\frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z, \quad \frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z.$$

- (v) $\cosh$ und $\sinh$ haben die Periode $2\pi i$. Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cosh z &= \cos iz, \quad \sinh z = -i \sin iz, \\ \cos z &= \cosh iz, \quad \sin z = -i \sinh iz, \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \\ \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \end{aligned}$$

wobei $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

- (vi) Die einzigen Nullstellen von $\cos z$ sind die reellen Zahlen $z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; ebenso hat $\sin z$ die einzigen Nullstellen $z_m = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Schließlich besitzt $\cosh z$ die Nullstellen iz_n und $\sinh z$ die Nullstellen iz_m .

$\cosh x$ ist auch als *Katenoide* oder *Kettenlinie* bekannt, da Seile und Ketten in Form des Graphen dieser Funktion durchhängen. Dies ergibt sich aus den Lösungen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Beweis. (i) und (ii) lassen sich direkt aus der Definition und der Potenzreihe von e^z ablesen.

(iii) und (iv): Die Additionstheoreme ergeben sich analog zu denen von $\sin$ und $\cos$. Die Ableitungen sind eine unmittelbare Folgerung aus der Definition der Exponentialfunktion.

(v) Der Beweis wird als Aufgabe (vgl. 11.3.2) gestellt.

(vi) Aus (v) folgt zum Beispiel

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y = \cos^2 x + \sinh^2 y,$$

und das ist nur Null für $\cos x = 0$, was die z_n ergibt, und $\sinh y = 0$, was nur für $y = 0$ der Fall ist, wie aus der Definition von $\sinh$ abgelesen werden kann. Für $\sin$ muss eine ähnliche Überlegung durchgeführt werden. Die Nullstellen von $\cosh$ und $\sinh$ ergeben sich aus der Drehung um $\pi/2$. $\square$

Zum Schluss sei noch darauf hingewiesen, dass die wohlbekannten Funktionen *Tangens* und *Kotangens* sowie *Tangens hyperbolicus* und *Kotangens hyperbolicus* wie im Reellen als Quotienten von $\sin$ und $\cos$ bzw. $\sinh$ und $\cosh$ definiert werden.

11.1.4 Logarithmus

Die Konstruktion komplexer Umkehrfunktionen zu den trigonometrischen Funktionen ist ein viel größeres Problem als im Reellen. Wir haben dies bereits bei der Bildung der Umkehrfunktionen zu den ganzzahligen Potenzen im Abschnitt 6.1 kennen gelernt. Nunmehr soll die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion untersucht werden. Die Formel $w = e^z = e^x e^{iy}$ zeigt, dass $|w| = e^x$ und $\arg w = y$, also beschreibt

$$x = \ln |w|, \quad y = \arg w$$

die Umkehrfunktion. Das Problem dabei ist die Mehrdeutigkeit des Argumentes, während der (natürliche) Logarithmus aus dem Reellen keine Schwierigkeiten bereitet. Als Erstes können wir festhalten:

Definition 11.8. Der *Hauptwert des Logarithmus* ist durch

$$\log z := \ln |z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z \leq \pi.$$

gegeben.

Diese Definition ist insofern unbefriedigend, als die Beschränkung des Argumentes willkürlich gewählt ist. Man könnte auch bei 0 unterbrechen oder jeder anderen Zahl. Wir konstruieren dabei wieder wie in Abschnitt 6.1 ein Beispiel einer *Riemannschen Fläche*.

Wir gehen wie folgt vor: Offenbar bildet der Hauptwert des Logarithmus die Ebene, die wir mit E_0 bezeichnen wollen, auf den Streifen

$$|\operatorname{Im} w| < \pi$$

ab. Entsprechend der Periodizität der Exponentialfunktion erreichen wir die Parallelstreifen der w -Ebene, wenn wir die z -Ebenen

$$E_n : \log z = \ln |z| + i \arg z, \quad -\pi + 2n\pi < \arg z < \pi + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

betrachten. Die Ebene E_n wird auf den Streifen

$$-\pi + 2n\pi < \operatorname{Im} w < \pi + 2n\pi$$

abgebildet. Alle diese Ebenen E_n sind längs der negativen reellen Achse aufgeschnitten und sind beim Übergang von einem n zum nächsten oder vorigen entsprechend zu verkleben: So ist die Oberkante von E_0 mit der Unterkante von E_1 zu verkleben usw., damit sich das Argument stetig fortsetzt. Dabei liegt E_1 über E_0 , so dass schließlich eine in beiden Richtungen unendlich ausgedehnte "Wendelfläche" entsteht.

Auf dieser Riemannschen Fläche des Logarithmus – nennen wir sie $\mathcal{F}_{\log}$ – ist nun die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion vernünftig definiert:

Definition 11.9. Der *Logarithmus* ist auf $\mathcal{F}_{\log}$ eindeutig erklärt durch

$$\log z := \ln |z| + i \arg z, \quad -\pi + 2n\pi < \arg z \leq \pi + 2n\pi, \quad z \in E_n.$$

Der Umgang mit solchen Definitionsbereichen oder Riemannschen Flächen ist natürlich ungewohnt, er stellt aber das geeignete Mittel dar, um Mehrdeutigkeiten wie die des Argumentes vernünftig in den Griff zu bekommen. Man kann jetzt feststellen:

Lemma 11.10. Der *Logarithmus* ist auf $\mathcal{F}_{\log}$ eine holomorphe Funktion mit

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}.$$

Der Beweis ergibt sich auf dem gleichen Wege wie im Reellen durch die Differentiation der Umkehrfunktion wegen $de^z/dz = e^z$:

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{e^{\log z}} = \frac{1}{z}.$$

Der Umgang mit der Fläche $\mathcal{F}_{\log}$ ist hier wie in Abschnitt 6.1 noch unvollkommen. Da aber jeder Punkt auf $\mathcal{F}_{\log}$ eine ganz normale ε -Umgebung auf einer der Gaußschen Ebenen hat – auch an den Klebekanten durch Zusammenfügen zweier Halbkreise zu einem Vollkreis –, kann man dort die Holomorphie definieren und die betrachtete Funktion differenzieren. Nur der Nullpunkt, der hier allen Ebenen gemeinsam ist, muss ausgenommen werden, man spricht bei solch einem Punkt von einer *logarithmischen Singularität* einer Riemannschen Fläche.

Zum Schluss wird der Logarithmus benutzt, um die allgemeine Potenz zu definieren:

Definition 11.11. Für $z, a \in \mathbb{C}$ sei die Potenz durch

$$z^a := \exp(a \log z).$$

definiert.

Das ist nur auf der Riemannschen Fläche des Logarithmus eindeutig definiert, in $\mathbb{C}$ muss man sich für einen Wert des Logarithmus entscheiden. Im Allgemeinen wird das der Hauptwert sein. Nur die ganzzahligen Exponenten führen zu einer in $\mathbb{C}$ eindeutig definierten Funktion, da die Exponentialfunktion periodisch ist. Aber auch rationale a liefern nichts Neues, so wiederholen sich die Werte von $z^{1/2}$ nach zwei Umläufen um den Nullpunkt der Periodizität der Exponentialfunktion halber, so dass man etwas großzügig von einer “zweiwertigen Funktion” sprechen kann.

11.2 Elementare Funktionen in $C\ell(n)$

11.2.1 Polare Zerlegung des Cauchy–Riemann-Operators

Die Definition geeigneter elementarer Funktionen im Raum der Paravektoren des $\mathbb{R}^{n+1}$ gestaltet sich wesentlich schwieriger als in $\mathbb{C}$. Viele Aspekte benötigen hier verschiedene Definitionen, die in $\mathbb{C}$ zusammen fallen. Daher werden in diesem Abschnitt Methoden vorgestellt, die die Definition brauchbarer Funktionen erlauben. Dafür ist es mitunter wichtig, auf eine geeignete Zerlegung des Cauchy–Riemann-Operators zurückgreifen zu können. Diese Zerlegung soll eine Komponente in radialer Richtung haben, die anderen Komponenten sind dann tangentielle Ableitungen auf der n -dimensionalen hyperbolischen Sphäre.

Definition 11.12. Mit den üblichen Bezeichnungen sei

$$L = \sum_{i=0}^n e_i L_i(x), \quad L_i(x) = |x| \partial_i - x_i \partial_\omega,$$

$$\partial_\omega = \sum_{i=0}^n \omega_i \partial_i = \omega \cdot \nabla, \quad \omega = \sum_{i=0}^n \omega_i e_i = \frac{x}{|x|}, \quad \omega_i = \frac{x_i}{|x|}.$$

L und ∂_ω sind die angestrebten Operatoren, die $\bar{\partial}$ radial zerlegen.

Daraus ist ohne Schwierigkeit die gewünschte Zerlegung von $\bar{\partial}$ zu errechnen. Zum besseren Verständnis einer solchen Darstellung ist es außerdem nützlich, die Wirkungsweise der Operatoren L und ∂_ω zu studieren.

Lemma 11.13. *Es gilt:*

- (i) $\bar{\partial} = \frac{1}{|x|}L + \omega\partial_\omega$ bzw. $L = |x|\bar{\partial} - x\partial_\omega$
- (ii) $\partial_i|x| = \frac{x_i}{|x|} = \omega_i$
- (iii) $\partial_\omega x = \omega$
- (iv) $|x|\partial_j\omega_k = \delta_{jk} - \omega_k\omega_j$
- (v) $\omega \cdot L = \sum_{i=0}^n \omega_i L_i = 0$.

(i) ist die gewünschte Zerlegung, (ii) ist nur eine Hilfsformel, an (iii)–(v) sieht man die Wirkung der neu definierten Operatoren.

Beweis. Die Beweise zu (i), (ii), (iii) werden als Aufgabe (vgl. Aufgabe 11.3.8) gestellt. Die Beziehung (iv) folgt aus der Quotientenregel, denn es gilt

$$\partial_j\omega_k = \partial_j \frac{x_k}{|x|} = \frac{\delta_{jk}}{|x|} - \frac{x_j x_k}{|x|^3} = \frac{\delta_{jk} - \omega_j \omega_k}{|x|},$$

also die Behauptung. Für (v) folgt wegen $\sum_{i=0}^n \omega_i^2 = 1$

$$\sum_{i=0}^n \omega_i L_i = \sum_{i=0}^n \omega_i (|x|\partial_i - x_i \partial_\omega) = \sum_{i=0}^n x_i \partial_i - \sum_{i=0}^n \omega_i^2 \sum_{j=1}^n x_j \partial_j = 0. \quad \square$$

Im nächsten Lemma beschäftigen wir uns mit der Wirkung unserer Operatoren auf nur von $r = |x|$ abhängige Funktionen, diese wollen wir *radial symmetrisch* nennen.

Lemma 11.14. *Die Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ hänge nur von $|x|$ ab und habe Werte in $C\ell(n)$, dann gilt*

$$(i) \quad Lf = 0 \quad \text{und} \quad (ii) \quad \partial_\omega f = \frac{d}{d|x|}f = f'.$$

Hier ist deutlich erkennbar, dass L in tangentialer Richtung an die Sphäre wirkt, ∂_ω dagegen die Ableitung in radialer Richtung darstellt.

Beweis. (i) Es sei $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ fest gewählt, dann ist

$$\begin{aligned} L_j f(|x|) &= |x|\partial_j f(|x|) - x_j \partial_\omega f(|x|) = |x|f'(|x|)\partial_j|x| - x_j \sum_{i=0}^n \omega_i \partial_i f(|x|) \\ &= f'(|x|) \left(x_j - x_j \sum_{i=0}^n \omega_i^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

(ii) Wir erhalten leicht

$$\partial_\omega f(|x|) = \sum_{i=0}^n \omega_i \partial_i f(|x|) = \sum_{i=0}^n \omega_i f'(|x|) \omega_i = f'(|x|). \quad \square$$

Lemma 11.15. *Es sei φ eine reellwertige Funktion, die auf der n -dimensionalen Einheitssphäre definiert ist. Dann gelten die folgenden Beziehungen:*

$$(i) \quad L\varphi = \text{grad}_\omega \varphi - \omega(\omega \cdot \text{grad}_\omega \varphi) \quad \text{und} \quad (ii) \quad \partial_\omega \varphi = 0.$$

Hier bezeichnet $\text{grad}_\omega \varphi := \sum_{i=0}^n e_i \partial_{\omega_i} \varphi$ den Gradienten bezüglich der Variablen ω .

Dies ist das Gegenstück zum vorigen Lemma, die Funktion φ hängt nicht von $|x|$ ab, daher liefert $\partial_\omega \varphi$ den Wert Null, während jetzt L zum Zuge kommt.

Beweis. Die Kettenregel liefert zusammen mit 11.13 (iv) einerseits

$$\begin{aligned} |x| \partial_i \varphi(\omega) &= |x| \sum_{j=1}^n \partial_i \omega_j \partial_{\omega_j} \varphi(\omega) = |x| \sum_{j=1}^n \frac{\delta_{ij} - \omega_i \omega_j}{|x|} \partial_{\omega_j} \varphi(\omega) \\ &= \partial_{\omega_i} \varphi(\omega) - \omega_i (\omega \cdot \text{grad}_\omega \varphi) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \partial_\omega \varphi(\omega) &= \sum_{j=1}^n \omega_j \partial_j \varphi(\omega) = \sum_{j,k=0}^n \omega_j \frac{\delta_{jk} - \omega_j \omega_k}{|x|} \partial_{\omega_k} \varphi(\omega) \\ &= \frac{1}{|x|} \sum_{k=0}^n (\omega_k - \omega_k) \partial_{\omega_k} \varphi(\omega) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist bereits (ii) erledigt und für den Beweis von (i) kommt kein weiterer Summand hinzu, so dass bleibt

$$L\varphi(\omega) = \sum_{i=0}^n [e_i \partial_{\omega_i} \varphi(\omega) - e_i \omega_i (\omega \cdot \text{grad}_\omega \varphi(\omega))],$$

das aber ist gerade die Behauptung. $\square$

Definition 11.16. Die Operatoren $E := |x| \partial_\omega$ und $\Gamma := \omega L$ werden üblicherweise als *Euler-Operator* bzw. *Dirac-Operator auf der Sphäre S^n* bezeichnet. Letzterer ist wie folgt gegeben :

$$\Gamma \varphi(\omega) := \omega [\text{grad}_\omega \varphi(\omega) - \omega(\omega \cdot \text{grad}_\omega \varphi(\omega))].$$

Nun zu einigen Eigenschaften dieser Operatoren:

Folgerung 11.17. (i) *Es sei $\varphi(\omega) = \omega \cdot v$, dabei gehöre ω zur Einheitssphäre S^n im Raum der Paravektoren und v zum $\mathbb{R}^{n+1}$, dann gilt die folgende oft benutzte Eigenschaft des sphärischen Dirac-Operators:*

$$\Gamma(\omega \cdot v) = \omega_0 v + \omega v_0 - 2\omega_0 \omega(\omega \cdot v) + \omega \wedge v,$$

bei Beschränkung auf den $\mathbb{R}^n$ ($v_0 = w_0 = 0$) bleibt sogar nur

$$\Gamma(\omega \cdot v) = \omega \wedge v.$$

(ii) Der sphärische Dirac-Operator hat die Struktur

$$\Gamma = \omega_0 L + \omega L_0 + \sum_{1 \leq j < k} e_j e_k (x_j \partial_k - x_k \partial_j).$$

Bei Beschränkung auf den $\mathbb{R}^n$ wie vorher verkürzt sich die Formel auf die Summe.

(iii) Wir haben folgende Anti-Kommutator-Eigenschaft:

$$(\omega L + L\omega)f = (2 - n - 2\omega_0\omega)f.$$

Speziell ist damit für $f(x) = \omega$: $(\omega L)\omega = (1 - n)\omega$.

Beweis. Als Vorlauf zu dem eigentlichen Beweis sei an einige einfache Formeln des Rechnens mit Paravektoren $a = a_0 + \mathbf{a}, b = b_0 + \mathbf{b}$ erinnert. Für Vektoren gilt bekanntlich

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}.$$

Leider ist die Rechnung für Paravektoren komplizierter:

$$\begin{aligned} ab &= a_0 b_0 + a_0 \mathbf{b} + b_0 \mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{b} \\ &= a_0 b + b_0 a - a \cdot b + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \\ &= a_0 b + b_0 a - a \cdot b + \sum_{1 \leq i < j} e_i e_j (a_i b_j - a_j b_i). \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$ab + ba = 2(a_0 b + b_0 a - a \cdot b).$$

Dies wenden wir nun in unserer Beweisführung an:

Wir setzen $a := \omega$ und $b := \text{grad}_\omega \varphi - \omega(\omega \cdot \text{grad}_\omega \varphi)$.

(i) Aus Formel (11.17) folgt

$$\Gamma\varphi(\omega) = \omega L\varphi(\omega) = \omega [\text{grad}_\omega \varphi(\omega) - \omega(\omega \cdot \text{grad}_\omega \varphi(\omega))].$$

Wir erhalten weiter

$$\begin{aligned} \Gamma\varphi(\omega) &= \omega_0 \text{grad}_\omega \varphi(\omega) + \omega \partial_{\omega_0} \varphi(\omega) \\ &\quad + \omega \wedge \text{grad}_\omega \varphi(\omega) - (1 + \omega^2)(\omega \cdot \text{grad}_\omega \varphi(\omega)). \end{aligned}$$

Mit $1 + \omega^2 = 2\omega_0\omega$ und $\varphi(\omega) = \omega \cdot v$ ergibt sich $\text{grad}_\omega(\omega \cdot v) = v$ und damit

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega \cdot v) &= \omega_0 v + \omega v_0 - \omega \cdot v + \omega \wedge v - 2\omega_0\omega(\omega \cdot v) \\ &= \omega_0 v + \omega v_0 + \omega \wedge v - 2\omega_0\omega(\omega \cdot v). \end{aligned}$$

Im $\mathbb{R}^n$ ($\omega_0 = v_0 = 0$) gilt dann das spezielle Resultat:

$$\Gamma(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}.$$

(ii) Nach dem Vorspann folgt

$$\Gamma = \omega L = \omega_0 L + \omega L_0 - \omega \cdot L + \sum_{1 \leq i < j} e_i e_j (\omega_i L_j - \omega_j L_i).$$

Darin rechnet man leicht

$$\omega_i L_j - \omega_j L_i = x_i \partial_j - x_j \partial_i$$

nach, das ist das angegebene Resultat, da wir $\omega \cdot L = 0$ schon nachgewiesen haben. Im $\mathbb{R}^n$ bleibt natürlich nur die Summe übrig.

(iii) Zunächst gilt

$$(L_i \omega_j) = (|x| \partial_i - x_i \partial_\omega) \omega_j = |x| \partial_i \omega_j - x_i \sum_{k=0}^n \omega_k \partial_k \omega_j.$$

Wegen $\partial_i \omega_j = (\delta_{ij} - \omega_i \omega_j)/|x|$ gemäß 11.13 (iv) folgt weiter

$$\begin{aligned} (L_i \omega_j) &= \delta_{ij} - \omega_i \omega_j - \frac{x_i}{|x|} \sum_{k=0}^n \omega_k (\delta_{kj} - \omega_k \omega_j) \\ &= \delta_{ij} - \omega_i \omega_j - \omega_i \sum_{k=0}^n \omega_k \delta_{kj} + \omega_i \sum_{k=0}^n \omega_k^2 \omega_j \\ &= \delta_{ij} - \omega_i \omega_j. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} L(\omega f) &= \sum_{i,j=0}^n e_i e_j L_i (\omega_j f) = \sum_{i,j=0}^n e_i e_j (L_i \omega_j) f + \sum_{i,j=0}^n e_i e_j \omega_j (L_i f) \\ &= \sum_{i,j=0}^n e_i e_j (L_i \omega_j) f - \sum_{i,j=0}^n e_j e_i \omega_j (L_i f) = \sum_{i,j=0}^n e_i e_j (L_i \omega_j) f - (\omega L) f. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} (L\omega + \omega L) f &= \sum_{i,j=0}^n e_i e_j (\delta_{ij} - \omega_i \omega_j) f \\ &= (1 - n) f - \omega^2 f = (2 - n - 2\omega_0 \omega) f. \end{aligned}$$

□

11.2.2 Elementare radiale Funktionen

Wir beginnen wieder mit der Definition einer Exponentialfunktion:

Definition 11.18. Für Paravektoren $x = x_0 + \mathbf{x} \in C\ell(n)$ sei

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Diese Reihe ist wie in $\mathbb{C}$ absolut konvergent für alle x , denn nach Abschnitt 3.2 gilt $|x^n| \leq |x|^n$, da die x Paravektoren sind. Damit ist

$$\exp(|x|)$$

eine konvergente Majorante, die soeben definierte Exponentialfunktion konvergiert für alle x . Ein erster Nachteil ergibt sich schon aus der Tatsache, dass die so definierte Funktion nicht holomorph ist, denn $f(x) = x$ ist keine holomorphe Funktion. Wir werden das am Schluss dieses Unterabschnitts umgehen.

Satz 11.19. (i) Für $xy = yx$ gilt die Funktionalgleichung

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

(ii) Die Exponentialfunktion gestattet mit $\omega(\mathbf{x}) := \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ die Darstellung

$$e^{\mathbf{x}} = e^{x_0} (\cos |\mathbf{x}| + \omega(\mathbf{x}) \sin |\mathbf{x}|)$$

e^x ist also paravektorwertig.

Die Abhängigkeit der Funktionen $\sin$ und $\cos$ von $|\mathbf{x}|$ rechtfertigt die Bezeichnung als radiale elementare Funktion.

Beweis. (i) Leider funktioniert der elegante Beweis in $\mathbb{C}$ gemäß Satz 11.2 (ii) hier nicht, wir müssen das Produkt zweier Potenzreihen heranziehen. Das Cauchyprodukt der beiden Reihen für e^x und e^y ergibt, falls x und y kommutieren,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \frac{x^\ell y^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\ell!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = e^x e^y. \end{aligned}$$

(ii) Damit ist $e^x = e^{x_0} e^{\mathbf{x}}$ und es bleibt $e^{\mathbf{x}}$ zu untersuchen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^k}{k!} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^{2\ell}}{(2\ell)!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{|\mathbf{x}|^{2\ell}}{(2\ell)!} + \omega(\mathbf{x}) \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{|\mathbf{x}|^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = \cos |\mathbf{x}| + \omega(\mathbf{x}) \sin |\mathbf{x}|. \end{aligned}$$

□

Beispiel 11.20. Aus $e^{x+y} = e^x e^y$ folgt umgekehrt nicht immer $xy = yx$. Das kann durch das folgende Gegenbeispiel in $\mathbb{H}$ belegt werden:

Es sei $x = 3\pi e_1$, $y = 4\pi e_2$, dann ist $xy = 12\pi^2 e_1 e_2 = -12\pi^2 e_2 e_1 = -yx$. Einerseits gilt

$$|x+y| = 5\pi, \quad |x| = 3\pi \quad \text{und} \quad |y| = 4\pi,$$

also ist

$$e^{x+y} = \cos 5\pi + \frac{3\pi e_1 + 4\pi e_2}{5\pi} \sin 5\pi = -1.$$

Andererseits erhalten wir jedoch

$$e^x = \cos 3\pi = -1 \quad \text{und} \quad e^y = \cos 4\pi = 1,$$

also $e^{x+y} = e^x e^y$.

Folgerung 11.21. (i) Für alle $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt $e^{-x}e^x = 1$, $e^x \neq 0$.

(ii) $e^{kx} = (e^x)^k$ ($k \in \mathbb{Z}$) (Formel von de Moivre).

(iii) $e^{\omega(\mathbf{x})\pi} = -1$.

(iv) $\bar{\partial}e^x = \frac{n-1}{r} \sin r$ mit $r = |x|$.

Der Beweis wird als Aufgabe gestellt (vgl. 11.3.10). Eher überraschend ist die nachstehende Aussage:

Folgerung 11.22. Es gilt die übliche Darstellung als Grenzwert

$$e^x = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m.$$

Beweis. Dieser verläuft wörtlich wie in der Ebene in 11.2 (iv), wobei $|z|$ durch $|x|$ zu ersetzen ist. $\square$

Mit Hilfe der Exponentialfunktion können nun auch trigonometrische und hyperbolische Funktionen eingeführt werden.

Definition 11.23. Für $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ sei

$$\begin{aligned} \cos x &:= \frac{e^{x\omega(\mathbf{x})} + e^{-x\omega(\mathbf{x})}}{2}, & \sin x &:= -\omega(\mathbf{x}) \frac{e^{x\omega(\mathbf{x})} - e^{-x\omega(\mathbf{x})}}{2}, \\ \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & \sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Wie in $\mathbb{C}$ sind $\cos$ und $\cosh$ gerade Funktionen, während $\sin$ und $\sinh$ ungerade sind. Die Additionstheoreme gelten für die hyperbolischen Funktionen, falls x und y vertauschbar sind, der Beweis ist wörtlich derselbe wie in Satz 11.7 (iii) bezüglich $\mathbb{C}$. Leider gelten die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen nicht, denn $\omega(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ ist in $\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{y}$ nicht linear.

Aus der Definition und Satz 11.19 (ii) ergibt sich

$$e^{\pm \mathbf{x}} = \cos |\mathbf{x}| \pm \omega(\mathbf{x}) \sin |\mathbf{x}|$$

und daraus

$$\cosh \mathbf{x} = \cos |\mathbf{x}|, \quad \sinh \mathbf{x} = \omega(\mathbf{x}) \sin |\mathbf{x}|.$$

Weiter folgt mit den Additionstheoremen

$$\begin{aligned} \cosh x &= \cosh x_0 \cos |\mathbf{x}| + \sinh x_0 \sinh \mathbf{x}, \\ \sinh x &= \sinh x_0 \cos |\mathbf{x}| + \cosh x_0 \sinh \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Entsprechende Formeln lassen sich auch für die trigonometrischen Funktionen ableiten, wenn man wegen

$$x\omega(\mathbf{x}) = x_0\omega(\mathbf{x}) + \mathbf{x}\omega(\mathbf{x}) = -|\mathbf{x}| + x_0\omega(\mathbf{x})$$

noch

$$\omega(x_0 \omega(\mathbf{x})) = \frac{x_0 \omega(\mathbf{x})}{|x_0|} = (\operatorname{sgn} x_0) \omega(\mathbf{x})$$

und

$$e^{x \omega(\mathbf{x})} = e^{-|\mathbf{x}|} e^{x_0 \omega(\mathbf{x})} = e^{-|\mathbf{x}|} (\cos x_0 + \omega(\mathbf{x}) \sin x_0)$$

berücksichtigt. Auf diese Weise ergeben sich die Darstellungen

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos x_0 \cos \mathbf{x} - \sin x_0 \sin \mathbf{x}, \\ \sin x &= \sin x_0 \cos \mathbf{x} + \cos x_0 \sin \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Sowohl die hyperbolischen wie die trigonometrischen Funktionen sind daher gleichfalls paravektoriellwertig. Daraus schließt man dann wegen $\overline{\omega(\mathbf{x})} = -\omega(\mathbf{x})$ auf

$$\begin{aligned} |\cos x|^2 &= \cos^2 x_0 + \sinh^2 |\mathbf{x}|, \\ |\sin x|^2 &= \sin^2 x_0 + \sinh^2 |\mathbf{x}|. \end{aligned}$$

Es sind also nur die aus dem Komplexen bekannten Nullstellen vorhanden.

Da e^x paravektoriellwertig ist, kann man auch über eine Umkehrfunktion nachdenken. Dazu sei die nachstehende Definition angegeben.

Definition 11.24. Der Logarithmus für Paravektoren in $\mathcal{C}\ell(n)$ wird für $k \in \mathbb{Z}$ durch

$$\log x := \begin{cases} \ln |x| + \omega(\mathbf{x})(\arccos \frac{x_0}{|x|} + 2k\pi), & |\mathbf{x}| \neq 0 \text{ oder } |\mathbf{x}| = 0, x_0 > 0 \\ \ln |x| + e_1\pi, & |\mathbf{x}| = 0, x_0 < 0 \end{cases}$$

definiert.

Genauer müsste man eigentlich $\log_k x$ schreiben. Für $n = 1$ geht dies in die oben in Definition 11.8 betrachtete Logarithmusfunktion über. Da man aber anstelle des $e_1\pi$ auch mittels $e_j\pi$ definieren könnte, ist dies nur eine der möglichen Definitionen. Aber immerhin leistet die so definierte Funktion die Umkehrung der Exponentialfunktion:

Folgerung 11.25. Die Funktion $\log x$ besitzt folgende Eigenschaften:

(i) Sie ist die Umkehrung der Exponentialfunktion:

$$e^{\log x} = x, \quad \log e^x = x.$$

(ii)

$$\log 1 = 0, \quad \log e_i = \frac{\pi}{2} e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

(iii) Falls $\log x$ und $\log y$ bzw. x und y kommutieren, gilt bei geeigneter Festlegung des k in der Definition die bekannte Funktionalgleichung

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

Beweis. (i) Es ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned} e^{\log x} &= e^{\ln |x|} e^{\omega(\mathbf{x}) \arccos \frac{x_0}{|x|}} e^{\omega(\mathbf{x}) 2\pi k} \\ &= |x| \left(\cos \arccos \frac{x_0}{|x|} + \omega(\mathbf{x}) \sin \arccos \frac{x_0}{|x|} \right) \\ &= |x| \left(\frac{x_0}{|x|} + \omega(\mathbf{x}) \frac{|\mathbf{x}|}{|x|} \right) = x. \end{aligned}$$

In der anderen Reihenfolge erhält man

$$\begin{aligned} \log e^x &= \log e^{x_0} (\cos |\mathbf{x}| + \omega(\mathbf{x}) \sin |\mathbf{x}|) \\ &= \ln e^{x_0} + \omega(\mathbf{x}) \arccos \left(\frac{e^{x_0} \cos |\mathbf{x}|}{e^{x_0}} \right) = x_0 + \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} |\mathbf{x}| = x. \end{aligned}$$

(ii) wird als Aufgabe (vgl. 11.3.11) gestellt.

(iii) Der Nachweis der Funktionalgleichung verläuft wie im reellen bzw. komplexen Fall. $\square$

Definition 11.26. Es sei α eine reelle Zahl. Die allgemeine Potenzfunktion kann nun durch die Formel

$$x^\alpha := e^{\alpha \log x}$$

definiert werden.

Mit einem Beispiel wollen wir die Betrachtungen zu elementaren radialen Funktionen beenden.

Beispiel 11.27. Es sei $x = \mathbf{x}$ und $\alpha = \frac{1}{3}$. Dann folgt für die Kubikwurzel aus einem Vektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{\frac{1}{3}} &= e^{\frac{1}{3} (\ln |\mathbf{x}| + \omega(\mathbf{x}) \arccos \frac{x_0}{|\mathbf{x}|} + \omega(\mathbf{x}) 2k\pi)} \\ &= \sqrt[3]{|\mathbf{x}|} \left[\cos \left(\frac{1}{3} \arccos 0 + \frac{2}{3} k\pi \right) + \omega(\mathbf{x}) \sin \left(\frac{1}{3} \arccos 0 + \frac{2}{3} k\pi \right) \right] \\ &= \sqrt[3]{|\mathbf{x}|} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} k\pi \right) + \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} k\pi \right) \right] \quad (k = 0, 1, 2). \end{aligned}$$

Es wäre wünschenswert, wenn die so eingeführten elementaren Funktionen auch holomorph wären. Wie bereits bemerkt, ist das leider nicht der Fall, so dass hier ein deutlicher Unterschied zu $\mathbb{C}$ besteht. Allerdings haben unsere Funktionen die spezielle Gestalt

$$f(x) = f_0(x_0, |\mathbf{x}|) + \omega(\mathbf{x}) f_1(x_0, |\mathbf{x}|)$$

mit reellwertigen Funktionen f_0, f_1 . Diese ermöglicht die Einführung eines Begriffes der *radialen Holomorphie*, dem wir uns nun zuwenden wollen.

Definition 11.28. Mit der Abkürzung $|\mathbf{x}| =: r$ nennen wir

$$\bar{\partial}_{rad} := \frac{1}{2}(\partial_0 + \omega(\mathbf{x})\partial_r), \quad \partial_{rad} = \frac{1}{2}(\partial_0 - \omega(\mathbf{x})\partial_r)$$

radiale Differentialoperatoren. Die Bezeichnung $\partial_{rad}f =: f'$ wird sich als gerechtfertigt erweisen.

Wir betrachten nun wie bei der Einführung der Holomorphie in $\mathbb{C}$ die Differenz $f(x+h) - f(x)$ für eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gegebene, differenzierbare Funktion der Gestalt

$$f(x) = f_0(x_0, |\mathbf{x}|) + \omega(\mathbf{x})f_1(x_0, |\mathbf{x}|).$$

Dabei nehmen wir h in der speziellen Gestalt

$$h := h_0 + \omega(\mathbf{x})h_r$$

mit reellen h_0, h_r an. Es wird also $\mathbf{x}$ wirklich nur in seiner radialen Richtung verändert. Dafür ist

$$\omega(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \frac{\mathbf{x} + \omega(\mathbf{x})h_r}{|\mathbf{x} + \omega(\mathbf{x})h_r|} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \frac{|\mathbf{x}| + h_r}{|\mathbf{x} + \omega(\mathbf{x})h_r|} = \omega(\mathbf{x}),$$

wenn nur $|h_r| < |\mathbf{x}|$ ist. Das muss aber sowieso der Fall sein, da sonst der Nenner Null sein könnte. Außerdem ist bezüglich der Variablen $|\mathbf{x}|$ noch

$$|\mathbf{x} + \mathbf{h}| = |\mathbf{x}| \left| 1 + \frac{h_r}{|\mathbf{x}|} \right| = |\mathbf{x}| + h_r.$$

Mit

$$\partial_0 = \bar{\partial}_{rad} + \partial_{rad}, \quad \omega(\mathbf{x})\partial_r = \bar{\partial}_{rad} - \partial_{rad}$$

und den üblichen Differentiationsregeln ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \partial_0 f_0(x)h_0 + \partial_r f_0(x)h_r + \omega(\mathbf{x})(\partial_0 f_1(x)h_0 + \partial_r f_1(x)h_r) + o(h) \\ &= (\partial_{rad}f(x))(h_0 + \omega(\mathbf{x})h_r) + (\bar{\partial}_{rad}f(x))(h_0 - \omega(\mathbf{x})h_r) + o(h). \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass $\omega(\mathbf{x})$ weder von x_0 noch von r abhängt, sich also gegenüber ∂_0 bzw. ∂_r wie eine Konstante verhält. Wir haben schließlich

$$f(x+h) - f(x) = (\partial_{rad}f(x))h + \bar{\partial}_{rad}f(x)\bar{h} + o(h).$$

Wie in $\mathbb{C}$ gelten dann die folgende Definition und das Lemma:

Definition 11.29. Eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gegebene stetig differenzierbare Funktion der Form

$$f(x) = f_0(x_0, |\mathbf{x}|) + \omega(\mathbf{x})f_1(x_0, |\mathbf{x}|)$$

heißt *radial holomorph* in G , wenn für alle $x \in G$ und $h = h_0 + \omega(\mathbf{x})h_r \rightarrow 0$ gilt

$$f(x+h) - f(x) = (\partial_{rad}f(x))h + o(h).$$

Gleichwertig damit ist die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) h^{-1} = \partial_{rad}f(x) =: f'(x).$$

Folgerung 11.30. *Die Funktion f ist genau dann radial holomorph, wenn*

$$\overline{\partial}_{rad}f = 0$$

gilt. Das wiederum stellt Gleichungen vom Cauchy–Riemann-Typ (CRD)

$$\partial_0 f_0 = \partial_r f_1, \quad \partial_0 f_1 = -\partial_r f_0.$$

dar.

Beweis. Dieser verläuft genau wie im Komplexen, wenn man berücksichtigt, dass auch hier $\overline{h}/h$ für $h \rightarrow 0$ keinen eindeutigen Grenzwert besitzt. $\square$

Die Bezeichnung $\partial_{rad}f = f'$ wird durch die folgenden Aussagen gerechtfertigt:

Folgerung 11.31. *Die gerade definierten elementaren Funktionen sind radial holomorph, überdies gilt:*

- (i) $(e^x)' = e^x$
- (ii) $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$
- (iii) $(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x$
- (iv) $(\log x)' = \frac{1}{x}$
- (v) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

Der Beweis wird als Aufgabe 11.3.12 gestellt.

11.2.3 Fueter–Sce Konstruktion holomorpher Funktionen

R. Fueter entwickelte 1935 [47] ein Prinzip, um aus in der oberen komplexen Halbebene holomorphen Funktionen holomorphe Quaternionenfunktionen zu erzeugen. M. Sce [127] und T. Qian [119] haben Fueters Prinzip auch auf höhere Dimensionen ausgeweitet. Dahinter steckt die folgende Idee:

Es sei wie üblich $x = x_0 + \mathbf{x} \in \mathcal{Cl}(n)$ ein Paravektor und $\omega(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Fueters Prinzip besteht darin, jeder in der oberen Halbebene von $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion f eine assoziierte paravektorwertige Funktion h zuzuordnen. Genauer gilt

Definition 11.32. (i) Zu einer in der oberen komplexen Halbebene $\mathbb{C}^+$ gegebenen holomorphen Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sei die Funktion

$$h(f)(x) := u(x_0, |\mathbf{x}|) + \omega(\mathbf{x})v(x_0, |\mathbf{x}|).$$

assoziert.

(ii) Darüber hinaus werde dem f noch die *Fueter-Transformierte*

$$\tau_n(f) := \kappa_n \Delta^{\frac{n-1}{2}} h(f)$$

zugeordnet. Dabei heißt f Stammfunktion von $\tau_n(f)$, κ_n ist eine geeignete Konstante.

Für gerades n ist dies nicht punktweise erklärt. Man muss dann die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren anwenden. Wir beschränken uns daher hier auf ungerades n . Der normierende Faktor κ_n ergibt sich zwanglos aus der Berechnung.

Satz 11.33 (Fueter, Sce, Qian). (i) $h(f) = u + \omega v$ ist eine radial holomorphe Funktion.

(ii) Es sei n ungerade, dann ist $\tau_n(f)$ eine rechts- und links-holomorphe Funktion in $Cl(n)$. Zur Abkürzung sei $|\mathbf{x}| =: r$ verwendet. Mit $k := \frac{n-1}{2}$ gilt

$$\frac{1}{2^k k!} \tau_n(f) = \frac{1}{2^k k!} \Delta^k h(f) = \left(\frac{1}{r} \partial_r \right)^k u + \omega(\mathbf{x}) \left(\partial_r \frac{1}{r} \right)^k v.$$

Unter (ii) hat man eine partielle Differentialgleichung für h . Diese Formel wird uns insbesondere für $n = 3$ noch nützlich sein.

Beweis. (i) Die radiale Holomorphie wird gemäß 11.30 durch Differentialgleichungen ausgedrückt, die genau den CRD in $\mathbb{C}$ entsprechen, eine Eigenschaft, die wechselseitig gegeben ist. Eine radial holomorphe Funktion führt umgekehrt zu einer holomorphen Funktion in $\mathbb{C}^+$.

(ii) Es ist $\Delta = \partial_0^2 + \sum_{i=1}^n \partial_i^2$, ∂_0 wirkt nur auf u und v , statt $\omega(\mathbf{x})$ schreiben wir nur ω :

$$\partial_0 h = \partial_0 u + \omega \partial_0 v, \quad \partial_0^2 h = \partial_0^2 u + \omega \partial_0 v.$$

Wir vermerken weiter für $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \partial_i u &= \frac{x_i}{r} \partial_r u, & \partial_i^2 u &= \frac{x_i^2}{r^2} \partial_r^2 u + \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} \partial_r u, \\ \partial_i \omega &= \frac{r^2 e_i - x_i \mathbf{x}}{r^3}, & \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{r} \partial_i \omega &= 0, & \sum_{i=1}^n e_i \partial_i \omega &= \frac{-n+1}{r}, \\ \partial_i^2 \omega &= \frac{-r^2 \mathbf{x} - 2r^2 x_i e_i + 3x_i^2 \mathbf{x}}{r^5}, & \sum_{i=1}^n \partial_i^2 \omega &= \frac{-n+1}{r^2} \omega. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\Delta h = \partial_0^2(u + \omega v) + \partial_r^2(u + \omega v) + (n-1) \left(\frac{1}{r} \partial_r u + \omega \partial_r \left(\frac{v}{r} \right) \right). \quad (*)$$

Um nun die Formel für $\Delta^k h$ zu beweisen, setzen wir zu Beginn $u_0 := u$, $v_0 := v$ und für $m = 1, 2, \dots$

$$u_m = \frac{2m}{r} \partial_r u_{m-1} = 2^m m! \left(\frac{1}{r} \partial_r \right)^m u_0, \quad v_m := 2m \partial_r \frac{v_{m-1}}{r} = 2^m m! \left(\partial_r \frac{1}{r} \right)^m v_0.$$

Als ein erstes Zwischenergebnis folgern wir mit vollständiger Induktion für $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\partial_0 u_m = \partial_r v_m + 2m \frac{v_m}{r}, \quad \partial_r u_m = -\partial_0 v_m.$$

Für $m = 0$ geht das in $\partial_0 u_0 = \partial_r v_0$, $\partial_r u_0 = -\partial_0 v_0$ über, das sind die Cauchy–Riemann-Gleichungen für radial holomorphe Funktionen. Für den Schluss von $m - 1$ auf m ist etwa wie folgt zu rechnen:

$$\partial_0 u_m = \frac{2m}{r} \partial_r \left(\partial_r v_{m-1} + 2(m-1) \frac{v_{m-1}}{r} \right) = \partial_r v_m + 2m \frac{v_m}{r}$$

und

$$\partial_r u_m = -\partial_r \left(\frac{2m}{r} \partial_0 v_{m-1} \right) = -\partial_0 v_m.$$

Als nächste Zwischenbehauptung zeigen wir gleichfalls mit Induktion

$$\Delta^m h = \frac{(n-1)(n-3) \cdots (n-2m+1)}{2^m m!} (u_m + \omega v_m) =: C_m(u_m + \omega v_m).$$

Für $m = 0$ ist der Faktor rechts 1, also $h = u_0 + \omega v_0$, für den Schluss von $m - 1$ auf m verwenden wir die obige Formel (*):

$$\begin{aligned} \Delta^m h &= C_{m-1} \Delta(u_{m-1} + \omega v_{m-1}) \\ &= C_{m-1} \left[\partial_0^2 (u_{m-1} + \omega v_{m-1}) + \partial_r^2 (u_{m-1} + \omega v_{m-1}) \right. \\ &\quad \left. + (n-1) \left(\frac{1}{r} \partial_r u_{m-1} + \omega \partial_r \left(\frac{v_{m-1}}{r} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Wegen

$$\partial_0^2 u_{m-1} = \partial_r \partial_0 v_{m-1} + \frac{2(m-1)}{r} \partial_0 v_{m-1} = -\partial_r^2 u_{m-1} - \frac{2(m-1)}{r} \partial_r u_{m-1}$$

und

$$\partial_0^2 v_{m-1} = -\partial_r^2 v_{m-1} - 2(m-1) \partial_r \left(\frac{v_{m-1}}{r} \right)$$

folgt

$$\Delta^m h = C_{m-1} \frac{n-2m+1}{2m} (u_m + \omega v_m) = C_m(u_m + \omega v_m).$$

Ersetzen wir hier die u_m, v_m durch u_0, v_0 , so ergibt sich schließlich

$$\Delta^m h = (n-1)(n-3) \cdots (n-2m+1) \left(\left(\frac{1}{r} \partial_r \right)^m u_0 + \omega \left(\partial_r \frac{1}{r} \right)^m v_0 \right)$$

und mit $m = k = \frac{n-1}{2}$

$$\Delta^k h = 2^k k! \left(\left(\frac{1}{r} \partial_r \right)^k u + \omega \left(\partial_r \frac{1}{r} \right)^k v \right).$$

Als Letztes bleibt die Holomorphie zu zeigen, also $\bar{\partial} \tau_n(f) = 0$, das sei als Aufgabe 11.3.13 gestellt. $\square$

An einigen Beispielen soll nun die Wirkung von $\tau_n(f)$ untersucht werden, wobei wir uns auf $n = 3$ beschränken:

Beispiel 11.34 (Exponentialfunktion). Gegeben sei $f(z) = e^z$, dann ist die Funktion

$$h(\exp)(x) = e^{x_0}(\cos r + \omega(\mathbf{x}) \sin r),$$

assoziiert. Das ist aber gerade die im vorigen Unterabschnitt in Definition 11.18 und Satz 11.19 eingeführte radial holomorphe Funktion e^x . Die Fueter-Transformierte ergibt sich dann mit dem letzten Lemma und einem geeigneten Normierungsfaktor zu

$$\text{EXP}_3(x) := -\frac{1}{2}\tau_3(\exp)(x) = e^{x_0} \left(\frac{\sin r}{r} - \omega(\mathbf{x}) \left(\frac{\sin r}{r} \right)_r \right).$$

Mit der Abkürzung

$$\text{sinc } r := \frac{\sin r}{r}$$

kann man das auch in der Form

$$\text{EXP}_3(x) = e^{x_0}(\text{sinc } r - \omega(\mathbf{x})(\text{sinc } r)')$$

schreiben. Die so definierte Exponentialfunktion hat ein völlig anderes Aussehen als die bisher betrachtete Verallgemeinerung e^x . Man gewinnt zwar die Holomorphie, aber manches andere geht verloren. Immerhin verbleiben einige Eigenschaften:

- (i) $\text{EXP}_3(x) \neq 0$ für alle x .
- (ii) $\lim_{r \rightarrow 0} \text{EXP}_3(x) = e^{x_0}$.
- (iii) Mit dem Operator ∂ gilt für reelles λ

$$\partial \text{EXP}_3(\lambda x) = 2\lambda \text{EXP}_3(\lambda x).$$

Der Faktor 2 in (iii) beruht auf der Verwendung von ∂ , was auch in der Ebene $\mathbb{C}$ gleich $2\partial_z$ ist.

Beweis. (i) Es gilt

$$|\text{EXP}_3(x)|^2 = e^{2x_0} \left(\frac{\sin^2 r}{r^2} + \frac{(r \cos r + \sin r)^2}{r^4} \right).$$

Das kann nur Null sein, wenn $\sin r = 0$ ist, dann aber ist in der inneren Klammer $\cos r \neq 0$, so dass $\text{EXP}_3(x) \neq 0$ für alle x .

(ii) Bekanntlich ist

$$\frac{\sin r}{r} = 1 - \frac{r^2}{3!} + \dots,$$

woraus

$$\frac{\sin r}{r} \rightarrow 1, \quad \left(\frac{\sin r}{r} \right)' \rightarrow 0$$

folgt für $r \rightarrow 0$.

(iii) Man überlegt sich zuerst, dass

$$\text{EXP}_3(\lambda x) = e^{\lambda x_0} \left(\frac{\sin \lambda r}{\lambda r} - \omega(\mathbf{x}) \left(\frac{\lambda r \cos \lambda r - \sin \lambda r}{\lambda^2 r^2} \right) \right),$$

da sich das Vorzeichen von λ trotz $|\lambda r| = |\lambda|r$ gegebenenfalls herauskürzt. Dann aber ist

$$\partial_0 \text{EXP}_3(\lambda x) = \lambda \text{EXP}_3(\lambda x),$$

und da $\text{EXP}_3(\lambda x)$ eine holomorphe Funktion ist, folgt mit $\bar{\partial} = \partial_0 + D$

$$D \text{EXP}_3(\lambda x) = -\partial_0 \text{EXP}_3(\lambda x) = -\lambda \text{EXP}_3(\lambda x),$$

wegen $\partial = \partial_0 - D$ schließlich

$$\partial \text{EXP}_3(\lambda x) = 2\lambda \text{EXP}_3(\lambda x).$$

□

Damit kann man zur Lösung des sogenannten ∂ -Problems beitragen:

Lemma 11.35. *Es sei $L_n = a_n \partial^n + \dots + a_1 \partial + a_0 = 0$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ eine partielle Differentialgleichung. Ist dann λ_k eine reelle Wurzel der algebraischen Gleichung*

$$a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

so ist

$$u_k = \text{EXP}_3 \left(\frac{\lambda_k}{2} x \right)$$

eine Lösung der Differentialgleichung $Lu = 0$. Mit den verschiedenen λ_k haben wir ein System linear unabhängiger Lösungen erhalten.

Der Beweis ist nach der obigen Eigenschaft (iii) ersichtlich.

Beispiel 11.36 (Trigonometrische Funktionen). Als weiteres Beispiel sollen die trigonometrischen Funktionen behandelt werden. Die hyperbolischen Funktionen werden in den Aufgaben betrachtet. Wir beginnen wieder mit den komplexen Funktionen

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \\ \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die assoziierten Funktionen

$$\begin{aligned} h(\cos)(x) &= \cos x_0 \cosh r - \omega(\mathbf{x}) \sin x_0 \sinh r, \\ h(\sin)(x) &= \sin x_0 \cosh r + \omega(\mathbf{x}) \cos x_0 \sinh r, \end{aligned}$$

das sind die gemäß Definition 11.23 radial holomorphen Formen von $\cos$ und $\sin$. Schließlich definieren wir nach Satz 11.33 (ii)

$$\begin{aligned}\text{COS}_3(x) &:= -\frac{1}{2}\tau_3(\cos)(x) = -\frac{1}{r}\cos x_0 \sinh r + \omega \sin x_0 \left(\frac{\sinh r}{r}\right)_r \\ \text{SIN}_3(x) &:= -\frac{1}{2}\tau_3(\sin)(x) = -\frac{1}{r}\sin x_0 \sinh r - \omega \cos x_0 \left(\frac{\sinh r}{r}\right)_r.\end{aligned}$$

Auch hier ist das Aussehen der Funktionen etwas ungewohnt, aber sie sind holomorph. Das wird leider damit bezahlt, dass viele vertraute Eigenschaften verloren gehen, so ist

$$\begin{aligned}\text{COS}_3^2(x) + \text{SIN}_3^2(x) &= \frac{1}{r^2} \sinh^2 r - \left(\frac{1}{r} \cosh r - \frac{1}{r^2} \sinh r\right)^2 \\ &= -\frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3} \cosh r \sinh r - \frac{1}{r^4} \sinh^2 r.\end{aligned}$$

Das ist leider weit von der erwarteten 1 entfernt. Auch geht die Verbindung zur Exponentialfunktion verloren. Erhalten bleiben die Differentiationseigenschaften, so sieht man sofort

$$\partial_0 \text{COS}_3(x) = -\text{SIN}_3(x), \quad \partial_0 \text{SIN}_3(x) = \text{COS}_3(x).$$

Der Holomorphie wegen gilt für diese Funktionen $(\partial_0 + D)f = 0$, also $\partial = \partial_0 - D = 2\partial_0$, und das heißt

$$\partial \text{COS}_3(x) = -2\text{SIN}_3(x), \quad \partial \text{SIN}_3(x) = 2\text{COS}_3(x).$$

Der Faktor 2 wird wieder durch die Verwendung von ∂ erzeugt, im Komplexen verwendet man $\partial_z = \frac{1}{2}\partial$.

Man kann diese Beispiele natürlich beliebig fortsetzen, so findet man bei Tao Qian [119] die Verallgemeinerung von Fueters Rechnungen für Quaternionen, mit denen die Fueter-Transformierte der Potenz z^k hergeleitet wird. Von F. Sommen [137] wird die Fueter-Transformierte der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

bestimmt, wobei die z^k in die von Qian bestimmten Fueter-Transformierten übergehen.

11.2.4 Cauchy–Kowalewski-Fortsetzung

In diesem Unterabschnitt wird ein ganz anderes Prinzip zur Gewinnung holomorpher Funktionen vorgestellt. Reell analytische Funktionen, die in einem Gebiet

$G \subset \mathbb{R}^n$ definiert sind, werden zu holomorphen Funktionen im $\mathbb{R}^{n+1}$ fortgesetzt. Solches Vorgehen ist auch unter der Bezeichnung *Cauchy-Problem* bekannt. Die russische Mathematikerin Sophie Kowalewski hat dazu Ende des 19. Jahrhunderts wichtige Beiträge geliefert.

SOFYA KOVALEVSKAYA, auch SOPHIE KOWALEWSKI, (1850–1891) studierte nach ihrer Heirat in Deutschland, in Russland war dies damals für eine Frau nicht möglich. Zuerst hörte sie Vorlesungen in Heidelberg, sie wurde dann eine der bekanntesten unter den Schülern von Weierstraß. 1874 promovierte sie in Göttingen in Abwesenheit mit einer Arbeit zur Theorie partieller Differentialgleichungen. Zehn Jahre später erhielt sie als erste Frau der Welt einen Lehrstuhl an der Universität in Stockholm. Durch einige preisgekrönte Arbeiten erlangte sie hohes Ansehen. Sie starb sehr jung an Lungenentzündung.

Definition 11.37. Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zu G definieren wir das Gebiet $G^* \subset \mathbb{R}^{n+1}$ auf die folgende Weise: G^* bestehe aus den Punkten der Form

$$\mathbf{x} + te_0, \quad (t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in G \subset \mathbb{R}^n).$$

Zu einer gegebenen reell analytischen Funktion $f(\mathbf{x})$ in $G \subset \mathbb{R}^n$ wird eine in $G^{**} \subset G^*$ mit $G \subset G^{**}$ holomorphe Funktion $f^*(x_0, \mathbf{x})$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \bar{\partial} f^*(x_0, \mathbf{x}) &= 0 \quad \text{in } G^{**}, \\ f^*(0, \mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), \quad (\text{Anfangsbedingung}). \end{aligned}$$

gesucht. Diese heißt dann *Cauchy-Kowalewski-Fortsetzung* (*CK-Fortsetzung*) der reellen Funktion f in das Gebiet G^{**} und wird mit $CK(f)$ bezeichnet.

Auf eine Lösungsidee kommt man durch die aus $\bar{\partial} CK(f) = 0$ sich ergebende Beziehung

$$\partial_0 CK(f) = -D CK(f).$$

Formal gilt

$$\partial_0 e^{-x_0 D} = -e^{-x_0 D} D,$$

so dass man zu folgender Lösung kommt:

Satz 11.38. $CK(f)(x_0, \mathbf{x}) := e^{-x_0 D} f(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x_0)^m}{m!} D^m f(\mathbf{x})$ ist die Lösung des Cauchy-Kowalewski-Problems in einem geeigneten Gebiet $G^{**} \subset G^*$ mit $G \subset G^{**}$.

Beweis. Da eine reell analytische Funktion alle partiellen Ableitungen besitzt, sind auch alle $D^m f(\mathbf{x})$ definiert. Nehmen wir nun die Konvergenz obiger Reihe an, so gilt bei gleichzeitiger Verschiebung des Summationsindex

$$\partial_0 CK(f)(x_0, \mathbf{x}) = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x_0)^m}{m!} D^{m+1} f(\mathbf{x}) = -D CK(f)(x_0, \mathbf{x}),$$

also wie gewünscht die Holomorphie der Reihe. Die Anfangsbedingung ist auch erfüllt, denn für $x_0 = 0$ bleibt nur der Summand mit $m = 0$, also $CK(f)(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

Für die Konvergenz ist wichtig, dass eine reell analytische Funktion um jeden Punkt $\mathbf{x}$ in eine absolut konvergente reelle Taylorreihe entwickelbar ist. Mit $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ und $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ ist daher

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=m} \frac{\mathbf{h}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} \nabla^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x})$$

für genügend kleine $|\mathbf{h}|$ absolut konvergent. Nehmen wir $\mathbf{h} = (h, \dots, h)$ mit einem reellen h an, so ist $\mathbf{h}^{\mathbf{k}} = h^m$ und

$$|h|^m \sum_{|\mathbf{k}|=m} \frac{1}{\mathbf{k}!} |\nabla^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x})| =: c_m,$$

mit einer konvergenten Reihe $\sum c_m$. Für uns ist von Interesse

$$D^m f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1, \dots, i_n}^n e_{i_1} \dots e_{i_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(\mathbf{x}) = m! \sum_{|\mathbf{k}|=m} \frac{1}{\mathbf{k}!} \nabla^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}).$$

Das ergibt die Abschätzung

$$|D^m f(\mathbf{x})| \leq \frac{m!}{|h|^m} c_m.$$

Mit unseren Lösungsansatz folgt schließlich

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x_0)^m}{m!} D^m f(\mathbf{x}) \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x_0|^m}{|h|^m} c_m.$$

Für $|x_0| \leq |h|$ konvergiert also die angesetzte Reihe, was das Existenzgebiet unserer Lösung $G^{**} \subset G^*$ festlegt. $\square$

Beispiel 11.39 (Fueter-Polynome). Es seien $P_{\varepsilon_i}(\mathbf{x}) =: x_i$ ($i = 1, \dots, n$) die speziellen Polynome mit dem Multiindex ε_i , der eine 1 an der i -ten Stelle hat und sonst Nullen. Dafür folgt wegen $D P_{\varepsilon_i} = e_i$

$$CK(x_i) = z_i = x_i - x_0 e_i.$$

Hier tauchen also wieder die von Fueter eingeführten Variablen z_i auf.

Es sei weiter $P_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ ein homogenes Polynom k -ten Grades mit $k = |\mathbf{k}|$, $a_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$,

$$P_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=|\mathbf{k}|} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}.$$

Die Cauchy–Kowalewski-Fortsetzung lautet dann

$$CK(P_{\mathbf{k}})(x_0, \mathbf{x}) = \sum_{m=0}^k \frac{(-x_0)^m}{m!} D^m P_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}).$$

Die Funktion $CK(P_{\mathbf{k}})$ ist nach Konstruktion holomorph, sie ist auch homogen vom Grad k , denn jedes D vermindert den Grad des Polynoms um 1. Das Polynom $D^m P_{\mathbf{k}}$ hat mithin den Grad $k - m$, das wird durch das x_0^m ausgeglichen. Überdies ist $D^{k+1} P_{\mathbf{k}} = 0$. Aus der Anfangsbedingung folgt

$$CK(P_{\mathbf{k}})(0, \mathbf{x}) = P_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}).$$

Speziell für die Polynome $\mathbf{x}^{\mathbf{k}}$ erhält man also

$$CK(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}) = \mathbf{k}! \mathcal{P}_{\mathbf{k}},$$

wobei $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ die im Abschnitt 6.1 eingeführten Fueter-Polynome sind. Der Beweis wird als Aufgabe 11.3.15 gestellt.

Beispiel 11.40 (Hermite-Polynome). Es bezeichne $\rho_0(\mathbf{x}) = e^{-|\mathbf{x}|^2/2}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) die Gaußsche Verteilungsfunktion. Wegen $|\mathbf{x}|^2 = -\mathbf{x}^2$ folgt $\rho_0(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{x}^2/2}$. Die Funktion ρ_0 ist natürlich reell analytisch. Die CK-Fortsetzung kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$CK(\rho_0)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x_0)^m}{m!} D^m(e^{\mathbf{x}^2/2}) = e^{\mathbf{x}^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_0^m}{m!} H_m(\mathbf{x}),$$

dabei wird also

$$H_m(\mathbf{x}) := (-1)^m e^{-\mathbf{x}^2/2} D^m(e^{\mathbf{x}^2/2})$$

gesetzt. Diese Funktionen haben den Namen *radiale Hermite-Polynome* nach dem französischen Mathematiker CHARLES HERMITE (1822–1901). Unsere Definition heißt bei einem anderen Zugang *Formel von Rodrigues*. Dass es sich wirklich um Polynome handelt, kann man sofort aus

$$H_0(\mathbf{x}) = 1$$

und der Rekursionsformel

$$H_{m+1}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - D)H_m(\mathbf{x})$$

ablesen. Letztere Formel beweist man so:

$$\begin{aligned} H_{m+1}(\mathbf{x}) &= (-1)^{m+1} e^{-\mathbf{x}^2/2} D^{m+1}(e^{\mathbf{x}^2/2}) \\ &= -DH_m(\mathbf{x}) - (-1)^{m+1} \left(De^{-\mathbf{x}^2/2} \right) D^m(e^{\mathbf{x}^2/2}), \end{aligned}$$

wegen

$$De^{-\mathbf{x}^2/2} = e^{-\mathbf{x}^2/2} \sum_{i=1}^n e_i(-x_i) = -\mathbf{x}e^{-\mathbf{x}^2/2}$$

folgt schließlich die Rekursionsformel. Radiale Hermite-Polynome werden zur Konstruktion höherdimensionaler Wavelet-Transformationen benutzt (vgl. [15]).

Es werde weiter die CK-Fortsetzung der Funktion

$$T(\mathbf{x}) := |\mathbf{x}|^k e^{\mathbf{x}^2/2} P_k(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})) \quad (\boldsymbol{\omega} \in S^{n-1}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

betrachtet. Dabei sei $P_k(\boldsymbol{\omega})$ gemäß Definition 10.5 ein (sog. inneres) sphärisches Polynom, das heißt eine Linearkombination der Fueter-Polynome $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ mit $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Der Homogenitätsgrad sei also $k = |\mathbf{k}|$. Die CK-Fortsetzung schreibt man ähnlich wie eben in der Form

$$CK(T)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x_0)^m}{m!} D^m(T(\mathbf{x})) = e^{\mathbf{x}^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_0^m}{m!} H_{mk}(\mathbf{x}) P_k(\mathbf{x}).$$

Offenbar wird dabei gesetzt

$$H_{mk}(\mathbf{x}) P_k(\mathbf{x}) = (-1)^m e^{-\mathbf{x}^2/2} D^m \left(e^{\mathbf{x}^2/2} P_k(\mathbf{x}) \right).$$

Letztere Formel heißt wiederum *Rodrigues-Formel*. Die Funktionen $H_{mk}(\mathbf{x})$ werden *verallgemeinerte radiale Hermite-Polynome* genannt. Für weitergehende Ausführungen verweisen wir auf [137].

Beispiel 11.41 (Ebene Wellen). Eine komplexwertige reell analytische Funktion h , die nur vom Skalarprodukt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ abhängt ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$), heißt *ebene Welle*. Diese Definition wurde 1955 von F. John in [66] angegeben. Es sei nun $\mathbf{y}$ fest und h eine vorgegebene ebene Welle. Die entsprechende CK-Fortsetzung in ein geeignetes (offenes) Gebiet des $\mathbb{R}^{n+1}$ lautet dann:

$$CK(h)(x) =: H(x_0, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x_0)^m}{m!} D^m h(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

Wegen des komplexen h muss man die CK-Fortsetzung eigentlich für die beiden Komponenten von h einzeln ansetzen. Nun ist

$$Dh(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n e_i h'(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \partial_i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = h'(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{y}$$

mit der Ableitung h' von h nach seiner einen Variablen. Hieraus folgt die Darstellung

$$H(x, \mathbf{y}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} h^{(m)}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) (x_0 \mathbf{y})^m,$$

wegen $\mathbf{y}^2 = -|\mathbf{y}|^2$ kann das noch zerlegt werden:

$$\begin{aligned} H(x, \mathbf{y}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x_0 |\mathbf{y}|)^{2k} h^{(2k)}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \\ &\quad - \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (x_0 |\mathbf{y}|)^{2k+1} h^{(2k+1)}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \\ &= H_1(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, x_0 |\mathbf{y}|) - \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} H_2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, x_0 |\mathbf{y}|). \end{aligned}$$

Bezüglich der neuen reellen Variablen $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ und $x_0|\mathbf{y}|$ sind H_1 und H_2 reell analytisch. Bei Fortsetzung der Variablen ins Komplexe sind sie komplex holomorph bezüglich jeder der Variablen. Holomorphe Funktionen, die auf diese Weise erhalten werden, heißen auch *holomorphe ebene Wellen*.

Wir beenden unsere Ausführungen mit einem interessanten Spezialfall ([32]). Für die komplexe Exponentialfunktion

$$h(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = e^{i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})}$$

definiert die CK-Fortsetzung $E_{CK}(x_0, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ wegen $h^{(k)} = i^k h$ folgende holomorphe Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} E_{CK}(x_0, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= e^{i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_0|\mathbf{y}|)^{2k}}{(2k)!} - i \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_0|\mathbf{y}|)^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \right) \\ &= e^{i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})} \left(\cosh(x_0|\mathbf{y}|) - i \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \sinh(x_0|\mathbf{y}|) \right). \end{aligned}$$

Das ist also die dritte Variante einer Exponentialfunktion in $\mathcal{C}\ell(n)$. Diese Funktion ist nach Konstruktion holomorph bezüglich der Variablen $x = x_0 + \mathbf{x}$.

11.2.5 Trennung der Variablen

Die bisher betrachteten holomorphen Exponentialfunktionen in $\mathcal{C}\ell(n)$ basierten alle auf der Idee einer Fortsetzung aus dem Komplexen oder aus dem $\mathbb{R}^n$ nach dem $\mathbb{R}^{n+1}$. Satz 11.2 zusammen mit der Möglichkeit, holomorphe Funktionen als Lösungen eines Differentialgleichungssystems zu erklären, führt zur Idee, die Eigenschaften

$$\frac{de^z}{dz} = e^z, \quad e^0 = 1$$

als Ausgangspunkt einer Verallgemeinerung zu benutzen. In Anlehnung an $\mathbb{C}$ kann $\frac{1}{2}\partial$ als Ableitung einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{C}\ell(n)$ aufgefasst werden. Wir untersuchen daher, ob es Funktionen f gibt, die mindestens die folgenden Eigenschaften besitzen:

Definition 11.42. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{C}\ell(n)$ mit den Eigenschaften:

1. $\bar{\partial} f = 0$,
2. $\frac{1}{2}\partial f = f$,
3. $f(0) = 1$,
4. $f(x_0, \mathbf{0}) = e^{x_0}$ für $x_0 \in \mathbb{R}$,
5. $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{H}$,
6. $|f(x_0, x_1, 0, 0)| = |f(x_0, 0, x_2, 0)| = |f(x_0, 0, 0, x_3)| = e^{x_0}$ für $x \in \mathbb{H}$,

die zusätzlich periodisch ist in den Variablen x_1, x_2, x_3 , heiße *Exponentialfunktion auf $\mathbb{H}$* . Die letzte Eigenschaft wird benötigt, um später eine Fouriertransformation definieren zu können.

Der Einfachheit halber haben wir uns auf den Fall $n = 3$ beschränkt, also auf $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f = f_0 e_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$. Vorbereitend studieren wir die Rolle von x_0 , $D = \sum_{i=1}^3 e_i \partial_i$ ist dabei der Dirac-Operator gemäß Satz 5.12.

Satz 11.43. *Gegeben sei eine Funktion $u(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}$, die die Differentialgleichung*

$$Du(\mathbf{x}) = -u(\mathbf{x})$$

erfüllt. Dann ist

$$f(x) = f(x_0, \mathbf{x}) = e^{x_0} u(\mathbf{x})$$

holomorph und löst die Differentialgleichungen

$$\bar{\partial} f(x) = 0, \quad \frac{1}{2} \partial f(x) = f(x).$$

Beweis. Mit $\partial/\partial x_0 = \partial_0$ ergibt sich $\partial_0 + D = \bar{\partial}$, $\partial_0 - D = 2\partial$ und

$$\frac{1}{2} (\partial_0 \pm D) f(x) = \frac{1}{2} \partial_0 e^{x_0} u(\mathbf{x}) \mp \frac{1}{2} (-D) e^{x_0} u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} f(x) \mp \frac{1}{2} f(x). \quad \square$$

Es sei dem Leser vorbehalten, zu überprüfen, ob jede holomorphe Lösung von $\frac{1}{2} \partial f = f$ von der Gestalt $f = e^{x_0} u(\mathbf{x})$ mit den genannten Eigenschaften von u sein muss (Aufgabe 11.3.16).

Unsere Aufgabe ist damit darauf reduziert, Lösungen der Differentialgleichung

$$Du(\mathbf{x}) = -u(\mathbf{x})$$

zu finden. Wenden wir in dieser Gleichung D nochmals an, so ergibt sich im $\mathbb{R}^3$

$$-\Delta u = -Du = u.$$

Der Laplace-Operator Δ im $\mathbb{R}^3$ wirkt als skalarer Operator nur in den Komponenten und wir erhalten sofort

$$\Delta u_i = -u_i, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

In klassischer Weise bearbeiten wir das Problem durch einen Produktansatz

$$u_i(\mathbf{x}) = r_i(x_1) s_i(x_2) t_i(x_3),$$

wenden Δ an und erhalten

$$\begin{aligned} \Delta u_i(\mathbf{x}) &= r_i''(x_1) s_i(x_2) t_i(x_3) + r_i(x_1) s_i''(x_2) t_i(x_3) + r_i(x_1) s_i(x_2) t_i''(x_3) \\ &= -r_i(x_1) s_i(x_2) t_i(x_3) = -u_i(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\frac{r_i''(x_1)}{r_i(x_1)} + \frac{s_i''(x_2)}{s_i(x_2)} + \frac{t_i''(x_3)}{t_i(x_3)} = -1.$$

Alle Quotienten müssen natürlich konstant sein. Setzen wir Symmetrie bezüglich x_1, x_2, x_3 voraus, so ergibt sich

$$\frac{r_i''(x_1)}{r_i(x_1)} = \frac{s_i''(x_2)}{s_i(x_2)} = \frac{t_i''(x_3)}{t_i(x_3)} = -\frac{1}{3}.$$

Benutzen wir die allgemeinen Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen für r_i, s_i, t_i ,

$$\begin{aligned} r_i(x_1) &= a_i \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} + b_i \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \\ s_i(x_2) &= c_i \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} + d_i \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \\ t_i(x_3) &= e_i \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} + f_i \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

so erhalten wir für u_i , $i = 0, 1, 2, 3$, nach Zusammenfassen einiger Konstanten

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) &= A_i \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} + B_i \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \\ &+ C_i \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} + D_i \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \\ &+ E_i \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} + F_i \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \\ &+ G_i \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} + H_i \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass die gesuchte Funktion periodisch sein wird und dass sich die Periode "automatisch" aus dem Ansatz ergibt. Auch das ist ein Argument für den symmetrischen Ansatz, da anderenfalls in verschiedenen Richtungen verschiedene Perioden entstehen würden.

Die Bedingung $f(0) = 1$ bedeutet $u_0(\mathbf{0}) = 1$, damit $A_0 = 1$, und $u_1(\mathbf{0}) = u_2(\mathbf{0}) = u_3(\mathbf{0}) = 0$ mit $A_i = 0$ für $i = 1, 2, 3$.

Nachdem nun die Struktur der gesuchten Funktion geklärt ist, gehen wir zurück zur Differentialgleichung $Du = -u$ und werten sie koordinatenweise aus. Berücksichtigen wir dabei, dass die Funktionen

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) &:= \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}}, & g_2(\mathbf{x}) &:= \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}}, \\ g_3(\mathbf{x}) &:= \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}}, & g_4(\mathbf{x}) &:= \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}}, \\ g_5(\mathbf{x}) &:= \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}}, & g_6(\mathbf{x}) &:= \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}}, \\ g_7(\mathbf{x}) &:= \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}}, & g_8(\mathbf{x}) &:= \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

linear unabhängig sind, ergeben sich durch Koeffizientenvergleich aus den Differentialgleichungen 32 lineare Gleichungen für die verbliebenen 28 freien Koeffizienten. Wir verzichten hier auf das Vorrechnen und stellen eine entsprechende Übungsaufgabe (vgl. 11.3.17). Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems liefert mit B_i, C_i und G_i als Parametern

$$\begin{aligned} E_0 &= B_2 - C_3, & E_1 &= \sqrt{3} - B_3 - C_2, \\ E_2 &= -B_0 + C_1, & E_3 &= B_1 + C_0, \\ D_0 &= -\sqrt{3}C_3 - G_2, & D_1 &= 1 - \sqrt{3}C_2 + G_3, \\ D_2 &= \sqrt{3}C_1 + G_0, & D_3 &= \sqrt{3}C_0 - G_1, \\ F_0 &= -\sqrt{3}B_1 - \sqrt{3}C_0 + G_1, & F_1 &= \sqrt{3}B_0 - \sqrt{3}C_1 - G_0, \\ F_2 &= 2 - \sqrt{3}B_3 - \sqrt{3}C_2 + G_3, & F_3 &= \sqrt{3}B_2 - \sqrt{3}C_3 - G_2, \\ H_0 &= -\sqrt{3} + B_3 + 2C_2 - \sqrt{3}G_3, & H_1 &= B_2 - 2C_3 - \sqrt{3}G_2, \\ H_2 &= -B_1 - 2C_0 + \sqrt{3}G_1, & H_3 &= -B_0 + 2C_1 + \sqrt{3}G_0. \end{aligned}$$

Es verbleibt die Bestimmung der letzten 12 Parameter $B_i, C_i, G_i, i = 0, 1, 2, 3$. Diese Freiheitsgrade wollen wir dazu benutzen, um die Eigenschaft $|e^{iy}| = 1$ der komplexen e -Funktion zu verallgemeinern. Wir fordern, dass

$$|u(x_1, 0, 0)| = |u(0, x_2, 0)| = |u(0, 0, x_3)| = 1$$

gilt. Aus dieser Forderung ergibt sich mit

$$u_i(x_1, 0, 0) = \delta_{0i} \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} + E_i \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}},$$

wobei δ_{0i} das Kroneckersymbol bezeichnet, sofort

$$1 = |u(x_1, 0, 0)|^2 = \cos^2 \frac{x_1}{\sqrt{3}} + (E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) \sin^2 \frac{x_1}{\sqrt{3}} + 2E_0 \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}}.$$

Damit muss $E_0 = 0$ sein und $E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 = 1$. Die gleichen Bedingungen ergeben sich für die B_i und die C_i aus den Gleichungen $|u(0, 0, x_3)| = 1$ und $|u(0, x_2, 0)| = 1$. Die Gleichgewichtung der drei Variablen erfordert

$$B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

erfreulicher Weise sind die Bedingungen für die E_i von selbst erfüllt. Also lauten die Koeffizienten

$$\begin{aligned} B_0 &= C_0 = E_0 = 0, & B_1 &= B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = E_1 = E_2 = E_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ D_0 &= -1 - G_2, & D_1 &= G_3, & D_2 &= 1 + G_0, & D_3 &= -G_1 \\ F_0 &= -1 + G_1, & F_1 &= -1 - G_0, & F_2 &= G_3, & F_3 &= -G_2, \\ H_0 &= -\sqrt{3}G_3, & H_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}G_2, & H_2 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}G_1, & H_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}G_0. \end{aligned}$$

Sollen die einzelnen Funktionen g_i , $i = 1, \dots, 8$, gleich gewichtet werden, so müssen D_0, F_0, H_0 gleich ± 1 sein, die restlichen D_i, F_i, H_i gleich $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Das erfordert

$$G_0 = -1, G_1 = G_2 = 0, G_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}},$$

wir wählen das Minuszeichen und erhalten

$$\begin{aligned} u_0 &= g_8 - g_5 - g_3 - g_2 + g_1, \\ u_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(g_7 + g_6 + g_4 - g_1 - g_5), \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(g_7 + g_6 + g_4 - g_1 - g_3), \\ u_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(g_7 + g_6 + g_4 - g_1 - g_2), \end{aligned}$$

mit den oben eingeführten Abkürzungen der Funktionen g_i . Erfreulicher Weise gilt

$$\begin{aligned} g_8(\mathbf{x}) - g_5(\mathbf{x}) - g_3(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x}) &= \cos \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}}, \\ g_7(\mathbf{x}) + g_6(\mathbf{x}) + g_4(\mathbf{x}) - g_1(\mathbf{x}) &= \sin \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

damit folgt abschließend für die gesuchte holomorphe Exponentialfunktion:

Definition 11.44. Wir bezeichnen die gefundene Exponentialfunktion mit $\mathcal{E}(x)$, es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= e^{x_0} \left[\left(\cos \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}} + \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \left((e_1 + e_2 + e_3) \sin \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}} - e_1 \cos \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right. \\ &\quad \left. \left. - e_2 \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_3}{\sqrt{3}} - e_3 \sin \frac{x_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x_3}{\sqrt{3}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Im Unterschied zu den vorher konstruierten Exponentialfunktionen ist $\mathcal{E}(x)$ periodisch in x_1, x_2, x_3 mit der Periode $2\pi\sqrt{3}$ und hat den Betrag e^{x_0} entlang den imaginären Achsen.

Wir wollen nun noch das Nullstellenverhalten der Funktion $\mathcal{E}(x)$ untersuchen und beweisen das

Lemma 11.45. Für alle $x \in \mathbb{H}$ gilt

$$\mathcal{E}(x) \neq 0.$$

Beweis. Schreiben wir vereinfachend

$$s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3}}, \quad y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{3}}, \quad y_2 = \frac{x_2}{\sqrt{3}}, \quad y_3 = \frac{x_3}{\sqrt{3}}$$

und berechnen $|\mathcal{E}(x)|^2$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}(x)|^2 = e^{2x_0} & \left\{ \cos^2 s + \sin^2 s + \frac{1}{3} (\sin^2 y_1 \sin^2 y_2 + \sin^2 y_1 \sin^2 y_3 + \sin^2 y_2 \sin^2 y_3 \right. \\ & + 6 \cos s \sin y_1 \sin y_2 \sin y_3 - 2 \sin s [\cos y_1 \sin y_2 \sin y_3 \\ & \left. + \sin y_1 \cos y_2 \sin y_3 + \sin y_1 \sin y_2 \cos y_3] \right\}. \end{aligned}$$

Durch Anwenden des Additionstheorems des Sinus erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}(x)|^2 = \frac{1}{3} e^{2x_0} & \left\{ 3 + \sin^2 y_1 \sin^2 y_2 + \sin^2 y_2 \sin^2 y_3 + \sin^2 y_3 \sin^2 y_1 \right. \\ & - 2 \sin(y_1 + y_2) \sin y_1 \sin y_2 - 2 \sin(y_2 + y_3) \sin y_2 \sin y_3 \\ & \left. - 2 \sin(y_3 + y_1) \sin y_3 \sin y_1 \right\}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite besteht hier aus drei Summanden der Form

$$g_{ij} := 1 + \sin^2 y_i \sin^2 y_j - 2 \sin(y_i + y_j) \sin y_i \sin y_j;$$

schätzen wir darin $\sin(y_i + y_j)$ durch 1 ab, so ergibt sich ein Ausdruck der Form

$$g_{ij} \geq 1 + a^2 b^2 - 2ab = (ab - 1)^2.$$

Das ist nur für $a = b = |\sin y_i| = |\sin y_j| = 1$ gleich 0, also wenn die $y = \pm\pi/2$ sind. Dann aber ist $y_i + y_j$ gleich 0 oder $\pm\pi$ und $\sin(y_i + y_j) = 0$. Daher kann nie Null als Minimum erreicht werden und der Betrag von $\mathcal{E}(x)$ kann nicht Null werden. $\square$

Wir wollen nun noch einige weitere Eigenschaften der $\mathcal{E}$ -Funktion studieren. Für den Nachweis verweisen wir auf die Übungsaufgaben, da nur Rechenfertigkeiten und Ausdauer vonnöten sind.

Lemma 11.46. *Die Funktion $\mathcal{E}(x)$ hat die in Definition 11.42 aufgeführten Eigenschaften, überdies gilt:*

- (i) $\mathcal{E}(x)$ ist auch rechts-holomorph, also bi-holomorph.
- (ii) $\bar{\partial}\mathcal{E}(x\lambda) = 0$ für reelles λ , für $\lambda \in \mathbb{H}$ ist dies im allgemeinen nicht richtig.
- (iii) Es gilt $\mathcal{E}(x\lambda)\bar{\partial} = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{H}$, überdies

$$\frac{1}{2}\partial\mathcal{E}(x\lambda) = \lambda\mathcal{E}(x\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{H}$.

- (iv) $\frac{1}{2}\partial\mathcal{E}(x\lambda)$ ist rechts-holomorph, $\lambda\mathcal{E}(x\lambda)$ ist auch links-holomorph.

Die Bi-Holomorphie ist überraschend, denn in die Konstruktion ist das nicht eingegangen und nicht jede links-holomorphe Funktion ist bi-holomorph. Interessant ist auch die Frage nach dem Verhalten von $\mathcal{E}(x\lambda)$ bzw. $\mathcal{E}(\lambda x)$ für $x, \lambda \in \mathbb{H}$. Diese Funktion benötigen wir für Lösungsansätze in Differentialgleichungen und für die Fourier-Transformation. Wir erinnern daran, dass die bisher betrachteten Verallgemeinerungen der komplexen e -Funktion nur λx mit reellem λ erlaubten. Die Ergebnisse sind keinesfalls selbstverständlich, denn unsere Absicht war es, eine links-holomorphe Exponentialfunktion zu konstruieren. Wir bemerkten, dass $\mathcal{E}(x)$ auch rechts-holomorph ist. Gerade diese Eigenschaft ist nun aber invariant unter der Transformation $x \mapsto x\lambda$. Daraus ergeben sich weitere interessante Konsequenzen. Damit gilt, dass $\mathcal{E}(x\lambda)$ nicht links-holomorph ist, aber $\lambda\mathcal{E}(x\lambda)$ ist bi-holomorph. Die $\mathcal{E}$ -Funktion leistet viel mehr, als ursprünglich gewünscht wurde. Im Nachhinein erscheinen diese Eigenschaften dann gar nicht mehr so sonderbar, wenn wir an Funktionale oder Transformationen der Art

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{E}(x\lambda) f(x) d\sigma_x$$

oder Ähnliches denken. Ableitungen, die wir aus f links herausziehen, können auf Grund der Nichtkommutativität nur von rechts in $\mathcal{E}(x\lambda)$ transportiert werden. Für den Augenblick sei der Leser zunächst auf die weiterführende Übungsaufgabe 11.3.18 zur $\mathcal{E}$ -Funktion verwiesen.

11.3 Aufgaben

1. Man beweise Satz 11.5 (iii): Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \cos^2 z + \sin^2 z &= 1.\end{aligned}$$

2. Man beweise Satz 11.7 (v): $\cosh$ und $\sinh$ haben die Periode $2\pi i$. Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}\cosh z &= \cos iz, & \sinh z &= -i \sin iz, \\ \cos z &= \cosh iz, & \sin z &= -i \sinh iz, \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \\ \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.\end{aligned}$$

Dabei sei $z = x + iy$.

3. Man berechne $|e^z|$ und beweise $|e^z| \leq e^{|z|}$.

4. Man berechne einen Ausdruck für $|\sin z|^2$ und bestimme daraus alle Nullstellen von $\sin z$.
5. Man berechne die ersten fünf Koeffizienten der Potenzreihe von

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

6. Man bestimme die Nullstellen und Singularitäten (= Nullstellen des Nenners) von

$$\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}.$$

7. Man bestimme die Taylorreihe des Hauptwertes des Logarithmus

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k.$$

8. Man beweise im $\mathbb{R}^{n+1}$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}\bar{\partial} &= \frac{1}{|x|} L + \omega \partial_{\omega}, \\ \partial_i |x| &= \frac{x_i}{|x|} = \omega_i, \quad \partial_{\omega} x = \omega\end{aligned}$$

9. Man beweise $L\omega_k = e_k - \omega\omega_k$ und $\partial_{\omega}(\omega_k) = 0$.
10. Man beweise für die radiale Exponentialfunktion Folgerung 11.21:
- $e^{-x}e^x = 1, \quad e^x \neq 0,$
 - $e^{kx} = (e^x)^k \quad (k \in \mathbb{Z}),$
 - $e^{\omega(\mathbf{x})\pi} = -1,$
 - $\bar{\partial} e^x = \frac{n-1}{r} \sin r.$

11. Man beweise die Aussagen in Lemma 11.25 (ii):

$$\log 1 = 0, \quad \log e_i = \frac{\pi}{2} e_i.$$

12. Man beweise Folgerung 11.31: Die elementaren Funktionen sind radial holomorph und es gilt

- $(e^x)' = e^x$
- $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$
- $(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x$

$$(iv) (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(v) (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \text{ wobei } \alpha \in \mathbb{R}.$$

13. Man beweise gemäß Satz 11.33 (ii) die Holomorphie von $\tau_n(f)$ für ungerades n :

$$\bar{\partial} \tau_n(f) = 0.$$

14. Man berechne die Fueter-Transformierte der hyperbolischen Funktionen, die mit $\text{COSH}_3(x)$ bzw. $\text{SINH}_3(x)$ zu bezeichnen wären.

15. Man beweise (vgl. Beispiel 11.39):

$$CK(\mathbf{x}^k) = \mathcal{P}_k(\mathbf{x}).$$

16. Man beweise: Jede Lösung von $\bar{\partial} f = 0$, $\partial f = 2f$ hat die Gestalt (vgl. Satz 11.43)

$$f(x) = e^{x_0} u(\mathbf{x}).$$

17. Man löse die bei der Berechnung der holomorphen Exponentialfunktion $\mathcal{E}(x)$ auftretenden 32 linearen Gleichungen für die Koeffizienten A_i, B_i, C_i, D_i , $i = 0, 1, 2, 3$, indem man die Ableitungen der Funktionen $g_1, \dots, g_8$ bestimmt und den Koeffizientenvergleich durchführt.

18. Man beweise gemäß Lemma 11.46:

a) $\mathcal{E}(x)$ ist auch rechts-holomorph, damit bi-holomorph.

b) $\bar{\partial} \mathcal{E}(x\lambda) = 0$ für reelles λ , für $\lambda \in \mathbb{H}$ ist dies im allgemeinen nicht richtig.

c) Es gilt $\mathcal{E}(x\lambda) \bar{\partial} = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{H}$, überdies

$$\frac{1}{2} \partial \mathcal{E}(x\lambda) = \lambda \mathcal{E}(x\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{H}$.

d) $\frac{1}{2} \partial \mathcal{E}(x\lambda)$ ist rechts-holomorph, $\lambda \mathcal{E}(x\lambda)$ ist auch links-holomorph.

12 Lokale Struktur holomorpher Funktionen

12.1 Nullstellenverhalten

12.1.1 Nullstellen in $\mathbb{C}$

In diesem Abschnitt wollen wir uns (im Wesentlichen) mit lokalen Eigenschaften holomorpher Funktionen befassen. In $\mathbb{C}$ greifen wir zuerst auf die Taylorreihe zurück. Diese ermöglicht es, den Begriff der *Nullstellenordnung*, der von Polynomen her bekannt ist, auf alle holomorphen komplexen Funktionen auszuweiten.

Definition 12.1. (*Nullstellenordnung*). Es sei f holomorph im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in G$. In der Umgebung von z_0 gelte

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit $a_k \neq 0$. Für $k > 0$ sagt man, f habe eine *Nullstelle der Ordnung k* in z_0 .

Wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Koeffizienten gemäß Folgerung 9.15 ist dies eine sinnvolle Festlegung. Man kann ablesen, dass für eine k -fache Nullstelle in z_0 der Quotient $f(z)/(z - z_0)^k$ für $z \rightarrow z_0$ einen endlichen Grenzwert hat, nämlich den Taylorkoeffizienten $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$. In einer Umgebung einer k -fachen Nullstelle z_0 von f gilt also

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

mit einer holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$. Aus der letzten Formel können wir direkt schließen:

Lemma 12.2. *Nullstellen einer holomorphen Funktion sind isoliert.*

Das ist letzten Endes die Aussage des früher bewiesenen Identitätssatzes 9.15 für holomorphe Funktionen, eine nicht-isolierte Nullstelle erzwingt, dass die Funktion identisch Null ist.

Beispiel 12.3. Man kann einer Potenzreihe aber nur die Nullstelle im Entwicklungspunkt ansehen. Bei

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

bemerkt man, dass in $z = 0$ eine einfache Nullstelle vorliegt. Der Periodizität wegen sind auch die anderen Nullstellen der Sinusfunktion alle einfach, was aus der Potenzreihe aber nicht abzulesen ist.

Die Nullstellen einer holomorphen Funktion sind ansonsten keinen Bedingungen unterworfen. Wir wollen dazu die *Weierstraßsche Produktentwicklung* einer *ganzen Funktion* behandeln, also einer Funktion, die in ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist. Dazu benötigen wir den Begriff des unendlichen Produktes

Definition 12.4 (Unendliches Produkt).

- (i) Für eine Folge komplexer Zahlen (a_n) mit $1 + a_n \neq 0$ heißt das Symbol

$$\prod (1 + a_n)$$

unendliches Produkt. Es heißt *konvergent*, wenn der Grenzwert der *Partialprodukte*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 + a_k) =: \prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$$

existiert und von 0 und ∞ verschieden ist. Das Produkt heißt *absolut konvergent*, wenn

$$\sum \log(1 + a_n),$$

jeweils mit dem Hauptwert des Logarithmus, absolut konvergiert.

- (ii) Ein Produkt mit endlich vielen Faktoren $1 + a_n = 0$, $n \leq n_0$, heißt *konvergent*, wenn

$$\prod (1 + a_{n+n_0})$$

im Sinne von (i) konvergiert, der Wert ist dann zu 0 festgelegt.

Ein Produkt ist also nur dann Null, wenn einer oder mehrere Faktoren Null sind. Wir benötigen einige Eigenschaften unendlicher Produkte:

Lemma 12.5.

- (i) *Notwendig für die Konvergenz des Produktes $\prod(1 + a_n)$ ist $a_n \rightarrow 0$.*
 (ii) *Das Produkt $\prod(1 + a_n)$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum \log(1 + a_n)$, jeweils mit dem Hauptwert des Logarithmus, konvergiert.*
 (iii) *Das Produkt $\prod(1 + a_n)$ konvergiert genau dann absolut, wenn die Reihe $\sum a_n$ absolut konvergiert.*

Beweis. (i) Wegen

$$1 + a_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k) / \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) \rightarrow 1$$

für $n \rightarrow \infty$ muss bei Konvergenz des Produktes $a_n \rightarrow 0$ gelten.

- (ii) Wegen

$$\prod_{k=1}^n (1 + a_k) = \exp \left(\sum_{k=1}^n \log(1 + a_k) \right),$$

jeweils mit dem Hauptwert des Logarithmus, und der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt aus der Konvergenz der Reihe die Konvergenz des Produktes. Die Umkehrung wird als Aufgabe 12.5.2 gestellt.

(iii) Bis auf endlich viele Faktoren können wir annehmen, dass alle $|a_n| \leq 1/2$ sind. Dann gilt mit der Taylorreihe des Logarithmus (Aufgabe 11.3.7) für $a_n \neq 0$

$$\left| \frac{1}{a_n} \log(1 + a_n) - 1 \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_n^{k-1}}{k} \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{1}{2}$$

und damit

$$\frac{1}{2} \leq \left| \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} \right| \leq \frac{3}{2}.$$

Da die Glieder mit $a_n = 0$ wegen $\log(1 + a_n) = 0$ keine Rolle spielen, konvergieren und divergieren $\sum |\log(1 + a_n)|$ und $\sum |a_n|$ gleichzeitig. $\square$

Nun können wir den angekündigten Satz beweisen:

Satz 12.6 (Produktsatz von Weierstraß). *Sei (z_k) eine Folge komplexer Zahlen mit $0 < |z_k| \leq |z_{k+1}|$, $k \in \mathbb{N}$, und $z_k \rightarrow \infty$. Dann existieren Zahlen $N_k \in \mathbb{N}$, so dass die Funktion*

$$h(z) := \prod_{k=1}^{\infty} E_k(z, z_k)$$

eine ganze Funktion mit genau den Nullstellen $z_1, z_2, \dots$ darstellt. Der Weierstraßfaktor $E_k(z, z_k)$ werde durch

$$E_k(z, z_k) := \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) \exp \left(\sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k} \right)^j \right)$$

definiert.

Mehrfache Nullstellen sind durch entsprechende Wiederholung der z_k zu erfassen. Die Faktoren mit der e -Funktion heißen *Konvergenz erzeugende Faktoren*, denn wenn bereits die Summe $\sum 1/|z_k|$ konvergiert, sind keine solchen Faktoren notwendig.

Es bestehen also keine Restriktionen bezüglich der Nullstellenverteilung zumindest einer ganzen Funktion. Damit kann jede ganze Funktion f in der Form

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E_k(z, z_k)$$

mit einer ganzen Funktion g und der Nullstellenordnung m von f im Nullpunkt dargestellt werden. Dazu muss nur der Satz 9.17 auf den Quotienten von f und $z^m \prod E_k(z, z_k)$ angewendet werden: dieser Quotient Q ist eine ganze Funktion ohne Nullstellen in $\mathbb{C}$, so dass nach Satz 9.17 $\log Q$ beliebig in $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann und eine ganze Funktion g darstellt, also $Q = e^g$. Doch nun zum Beweis des Satzes:

Beweis. Für natürliche Zahlen N_k und $|z| < |z_k|$ gilt

$$E_k(z, z_k) = \exp \left(\log \left(1 - \frac{z}{z_k} \right) + \sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k} \right)^j \right) = \exp \left(- \sum_{j=N_k+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{z_k} \right)^j \right).$$

Wir nehmen $|z| \leq R$ an, es folgt für die z_k mit $|z_k| \geq 2R$, also etwa für $k \geq k_0$,

$$|\log E_k(z, z_k)| \leq \left| \frac{z}{z_k} \right|^{N_k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq \left| \frac{z}{z_k} \right|^{N_k}.$$

Diese Abschätzung liefert

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |\log E_k(z, z_k)| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{R}{|z_k|} \right)^{N_k} \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{N_k},$$

etwa für $N_k = k$ ist das konvergent. In der Regel wird man mit kleineren N_k auskommen. Die Konvergenz ist für $|z| \leq R$ gleichmäßig, so dass der Grenzwert eine holomorphe Funktion darstellt. Da R beliebig war, stellt das Produkt eine ganze Funktion dar. $\square$

Beispiel 12.7. Die Funktion $\sin \pi z$ hat Nullstellen in $z = 0, \pm 1, \dots$. Das führt auf das Produkt

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right),$$

denn

$$\left(1 - \frac{z}{n} \right) \left(1 + \frac{z}{n} \right) = 1 - \frac{z^2}{n^2}.$$

Also hat

$$f(z) := z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$$

dieselben Nullstellen wie $\sin \pi z$. Dass es sich wirklich um die Funktion $\sin \pi z$ handelt, werden wir später beweisen.

12.1.2 Nullstellen in $\mathcal{C}\ell(n)$

Bei den holomorphen Funktionen in $\mathcal{C}\ell(n)$ sieht es mit den Nullstellen ganz anders aus als in der Ebene, es sind auch noch eine Reihe von Fragen offen. Wir haben schon in Abschnitt 9.3 bemerkt, dass die Nullstellen keineswegs isoliert sein müssen. Im Identitätssatz 9.27 haben wir gezeigt, dass die Nullstellenmannigfaltigkeit höchstens die Dimension $n - 1$ haben kann. Alle niedrigeren Dimensionen können aber auftreten, wie man sich leicht an Beispielen überlegen kann: Die Funktion

$$f(x) := z_1 e_1 + z_2 e_2 + \dots + z_k e_k = k x_0 + e_1 x_1 + \dots + e_k x_k \quad (1 \leq k \leq n)$$

ist beidseitig holomorph und hat ihre Nullstellen genau in den Punkten mit

$$x_0 = x_1 = \dots = x_k = 0,$$

also in einer $(n - k)$ -dimensionalen Ebene, für $k = n$ mithin in einem isolierten Punkt, dem Nullpunkt.

Die Mannigfaltigkeit, auf der eine holomorphe Funktion in einer Umgebung eines Punktes a mit $f(a) = 0$ Null ist, hängt unter anderem von dem Rang der Jakobischen Funktionalmatrix

$$J_f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

ab. Ist dieser Rang von J_f in einer Umgebung U des Nullpunktes konstant, etwa gleich m mit $n + 1 \geq m \geq 2$, so zeigt Hempfling [60] und für den Quaternionenfall Fueter [49], dass genau eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n + 1 - m$ durch den Nullpunkt existiert, auf der $f(x) = 0$ gilt. Der Fall $m = 1$ kann nicht auftreten, wie wir in dem schon erwähnten Identitätssatz gesehen haben. Wir wollen dies hier nicht beweisen, da dazu Sätze aus der Theorie der gewöhnlichen und der partiellen analytischen Differentialgleichungen notwendig sind. Hinzu kommt, dass die Beispiele von Zöll [159] zeigen, dass der Rang von J_f auch bei isolierten Nullstellen sehr variieren kann.

Immerhin können wir beim Rang $n + 1$ von $J_f(a)$ aus dem Satz über implizite Funktionen schließen, dass dieser Rang von J_f auch in einer Umgebung des Punktes a gegeben und f dort ein Diffeomorphismus ist. Die Nullstelle im Punkt a ist dann isoliert:

Lemma 12.8. *Ist die Funktion f in einer Umgebung U des Punktes a holomorph mit $f(a) = 0$ und ist $\det J_f(a) \neq 0$, so ist die Nullstelle von f in a isoliert.*

Aussagen über das Verhalten holomorpher Funktionen in der Nähe von Nullstellenmannigfaltigkeiten liegen nicht vor. Wir wollen uns daher auf isolierte Nullstellen in einem Punkt a beschränken. Hier ist bereits der in der Ebene problemlose Begriff der Ordnung der Nullstelle höchst problematisch. In der Ebene haben wir im vorigen Unterabschnitt gesehen, dass die Ordnung einer Nullstelle gleich dem Index des ersten nichtverschwindenden Summanden in der Taylorreihe ist. Wir können in $\mathbb{C}$ die folgenden drei Charakterisierungen der Ordnung k einer Nullstelle angeben:

1. Es ist k die kleinste natürliche Zahl mit $f^{(k)}(a) \neq 0$.
2. Es gilt

$$k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

wobei γ eine einfach geschlossene Kurve um a ist, innerhalb derer keine weiteren Nullstellen von f liegen. Obige Formel folgt sofort aus dem Cauchyschen Integralsatz, wenn man die Taylorreihen von f' und f einsetzt (s. Aufgabe 12.5.1).

3. Es ist

$$k = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\gamma)} \frac{dw}{w}.$$

Diese Formel folgt aus der vorigen, wenn man die Transformation $w = f(z)$ in dem Integral ausführt.

In $Cl(n)$ ist die erste Definition nicht gut zu verwenden, da Zöll [159] Beispiele angibt, deren Taylorreihen nicht zu befriedigenden Ergebnissen führen. Mangels einer vernünftigen Ableitung (zumindest in der bisherigen Literatur) kann auch die zweite Methode nicht angewendet werden. Aber die dritte Definition ist in $Cl(n)$ geeignet [60], [61]:

Definition 12.9. Es sei f im Gebiet G links-holomorph und a eine isolierte Nullstelle von f . Ferner sei $B_\varepsilon(a)$ eine hinreichend kleine Kugel vom Radius ε um a mit dem Rand $S_\varepsilon(a)$, so dass keine weiteren Nullstellen von f in $B_\varepsilon(a) \cup S_\varepsilon(a)$ liegen. Dann heißt

$$\text{ord}(f; a) := \frac{1}{\sigma_n} \int_{F(S_\varepsilon(a))} \mathcal{Q}_0(y) dy^*$$

Ordnung der Nullstelle von f im Punkt a . Dabei ist

$$F = \sum_{i=0}^n e_i f_i$$

die Einschränkung der Werte von f auf den $\mathbb{R}^{n+1}$.

Das „Abschneiden“ von f zu F ist eine Hilfsmaßnahme, die durchaus noch näher zu untersuchen wäre. Dabei ist $\mathcal{Q}_0$ die „einfachste“ singuläre holomorphe Funktion, die im Nullpunkt eine isolierte Singularität hat. Wir haben

$$\mathcal{Q}_0(y) = \frac{\bar{y}}{|y|^{n+1}}$$

in Definition 7.26 eingeführt, wo es als Kern der Cauchyschen Integralformel diente. In Lemma 12.49 wird gezeigt, dass die so definierte Ordnung ganzzahlig ist, nämlich gleich der dort zu definierenden Umlaufzahl der Fläche $F(S_\varepsilon(a))$ um den Punkt a . Das entspricht auch anschaulich dem Ordnungsbegriff für eine Nullstelle.

Da die Berechnung der Ordnung technisch schwierig sein kann, zudem die Mannigfaltigkeit eigentlich durch $S_\varepsilon(a)$ definiert ist, kann man versuchen, das Integral mit $y = F(x)$ in die Variable x zu transformieren. Das ist von Zöll durchgeführt worden: Mit

$$dy_j = \sum_{k=0}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_k} dx_k$$

folgt

$$\begin{aligned} dy_i^* &= (-1)^i \sum_{k_0, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_n=0}^n \frac{\partial F_0}{\partial x_{k_0}} \dots \frac{\widehat{\partial F_i}}{\partial x_{k_i}} \dots \frac{\partial F_n}{\partial x_{k_n}} dx_{k_0} \wedge \dots \wedge \hat{dx}_{k_i} \wedge \dots \wedge dx_{k_n} \\ &= (-1)^i \sum_{j=0}^n \frac{\partial(F_0, \dots, \hat{F}_i, \dots, F_n)}{\partial(x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)} d\hat{x}_j. \end{aligned}$$

Da

$$(-1)^{i+j} \frac{\partial(F_0, \dots, \hat{F}_i, \dots, F_n)}{\partial(x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)} =: A^{ij}$$

gerade die Adjunkten zu J_F sind, hat man schließlich wegen

$$J_F^{-1} = (A^{ij})^\top / \det J_F$$

die Darstellung

$$dy^* = \sum_{i,j=0}^n e_i A^{ij} dx_j^*$$

und für die Ordnung den Ausdruck:

Folgerung 12.10. *Unter den Voraussetzungen der Definition 12.9 gilt*

$$\text{ord}(f; a) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_\varepsilon(a)} \frac{\overline{F(x)}}{|F(x)|^{n+1}} \sum_{i,j=0}^n e_i A^{ij} dx_j^*.$$

Hier kann man zwar J_F^{-1} einführen, hat dann aber die zusätzliche Bedingung $\det J_F \neq 0$. Leider ist auch diese Formel nicht sehr vielversprechend, weil das Integral in praktischen Fällen nur schwer auszurechnen ist. Für weitere Forschung bleibt noch genügend Raum, hoffnungsvolle Ansätze werden derzeit von Kraußhar verfolgt. Wir wollen aber wenigstens in einem Fall die Ordnung einer isolierten Nullstelle berechnen:

Beispiel 12.11. Wir betrachten die zu Beginn dieses Unterabschnittes angegebene Funktion $f(x) = z_1 e_1 + \dots + z_n e_n = nx_0 + \mathbf{x}$ mit dem x zugeordneten Vektor $\mathbf{x}$. Da f paravektorewertig ist, erübrigt sich das Abschneiden zu F . Hier ist für $i, j = 1, \dots, n$:

$$f_0(x) = nx_0, \quad f_i(x) = x_i$$

und

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_0}(x) = n, \quad \frac{\partial f_0}{\partial x_i}(x) = 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_0}(x) = 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}.$$

Es entsteht die sehr einfache Funktionaldeterminante

$$J_f = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\det J_f = n$ und den Adjunkten $(i, j = 1, \dots, n)$

$$A^{00} = 1, \quad A^{0i} = 0, \quad A^{i0} = 0, \quad A^{ij} = n\delta_{ij}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{i,j=0}^n e_i A^{ij} dx_j^* = dx_0^* + n d\mathbf{x}^*$$

und

$$\text{ord}(f; 0) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{|x|=\varepsilon} \frac{nx_0 - \mathbf{x}}{|nx_0 + \mathbf{x}|^{n+1}} (dx_0^* + n d\mathbf{x}^*).$$

Wir verformen jetzt die Kugel $S_\varepsilon : |x| = \varepsilon$ stetig in das Ellipsoid $|nx_0 + \mathbf{x}| = \varepsilon$, so dass dabei keine Nullstellen von f überstrichen werden. Da die Ordnung ganzzahlig ist, kann sich bei diesem stetigen Übergang der Wert nicht ändern. Dann setzen wir

$$x_0(t) = \frac{\varepsilon}{n} y_0(t), \quad x_i(t) = \varepsilon y_i(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

mit der Parameterdarstellung der Einheitskugel $y = \sum_{i=0}^n y_i e_i$ gemäß Beispiel A.2.17 c. Dann ist weiter

$$|nx_0 + \mathbf{x}| = \varepsilon |y_0 + e_1 y_1 + \dots + e_n y_n| = \varepsilon, \quad nx_0 - \mathbf{x} = \varepsilon \bar{y}.$$

Da x_0 in den $dx_1^*, \dots, dx_n^*$ vorkommt, in dx_0^* aber nicht, folgt

$$dx_0^* + n d\mathbf{x}^* = \varepsilon^n dy^*.$$

Nach Beispiel A.2.17 c ist weiter $dy^* = y |do_1(y)|$ mit dem Einheitsvektor y als äußerer Normale der Einheitskugel S^n und dem Oberflächenelement $|do_1(y)|$ der Einheitskugel. Für die Ordnung ergibt das

$$\text{ord}(f; 0) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S^n} \bar{y} y |do_1(y)| = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S^n} |do_1(y)| = 1.$$

Dieser Wert war natürlich zu erwarten, der Berechnungsaufwand aber sehr groß. Für andere Funktionen ist er wahrscheinlich noch größer. Hier ist, wie schon bemerkt, weitere Forschung angebracht.

Ein Pendant zum Weierstraßschen Produktsatz kann es in $C\ell(n)$ leider nicht geben, da die Produkte holomorpher Funktionen im allgemeinen nicht holomorph sind. Auch hier sind neue Überlegungen vonnöten.

12.2 Isolierte Singularitäten holomorpher Funktionen

12.2.1 Isolierte Singularitäten in $\mathbb{C}$

Es soll nun untersucht werden, was in isolierten Punkten, in denen f nicht definiert oder nicht holomorph ist, passieren kann. Zuerst betrachten wir wieder den Fall der

komplexen Ebene. Der Einfachheit halber vereinbaren wir, dass $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$ für das Kreisringgebiet $\{z : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$ steht.

Definition 12.12 (Singularitäten). Wenn die Funktion f in der punktierten Kreisscheibe $0 < |z - z_0| < R$ holomorph ist, in z_0 aber nicht oder dort nicht definiert ist, so spricht man von einer *isolierten Singularität* der Funktion f in z_0 . Diese Singularitäten werden wie folgt klassifiziert:

- a) Die Singularität heißt *hebbbar*, wenn f in $0 < |z - z_0| \leq R/2$ beschränkt ist.
- b) Die Singularität heißt *Polstelle*, wenn sie nicht hebbbar ist und es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $(z - z_0)^n f(z)$ in $0 < |z - z_0| \leq R/2$ beschränkt ist.
- c) Sonst heißt die Singularität *wesentliche Singularität*.
- d) Wenn eine Funktion f in einem Gebiet G holomorph ist bis auf Polstellen, die sich in G nicht häufen, so nennt man f *meromorph* in G .
- e) Von einer wesentlichen Singularität spricht man auch, wenn die Funktion f in $0 < |z - z_0| < R$ meromorph ist und in z_0 weder eine hebbare Singularität noch eine Polstelle vorliegt.

Diese Singularitäten wollen wir nun untersuchen, als erstes die hebbaren Singularitäten. Wir zeigen:

Satz 12.13 (Riemannscher Hebbbarkeitssatz). Die Funktion f sei in $0 < |z - z_0| < R$ holomorph und habe in z_0 eine hebbare Singularität. Dann existiert ein Wert a_0 , so dass die erweiterte Funktion

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & 0 < |z - z_0| < R, \\ a_0, & z = z_0, \end{cases}$$

in $B_R(z_0)$ holomorph ist.

Es genügt sogar, für f neben der Holomorphie nur vorauszusetzen, dass der Grenzwert $\lim_{r \rightarrow 0} rM(r, f) = 0$ ist mit

$$M(r, f) := \max_{|z - z_0| = r} |f(z)|.$$

Bei einer hebbaren Singularität mangelt es also nur an einer geeigneten Definition des Funktionswertes in z_0 , die Funktion f ist *holomorph fortsetzbar nach z_0* . Die Aussage des Satzes zeigt, dass $M(r, f)$ gar nicht gegen ∞ konvergieren kann. Manchmal ist es in Anwendungen aber einfacher, nur die schwächere Voraussetzung zeigen zu müssen.

Beweis. Die Funktion f ist im Kreisringgebiet $0 < |z - z_0| < R$ holomorph. Dort besitzt sie dann die konvergente Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Wir betrachten die Koeffizienten mit negativem Index ($n > 0$):

$$\begin{aligned} |a_{-n}| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{M(\rho, f)}{\rho^{-n+1}} |d\zeta| \\ &\leq M(\rho, f) \rho^n. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung geht dieser Ausdruck für $\rho \rightarrow 0$ und alle $n \geq 1$ gegen Null, so dass jeder Koeffizient der Laurentreihe von f mit negativem Index Null ist. Damit ist f durch eine Taylorreihe darstellbar, der Wert in z_0 ist durch

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

zu definieren. □

Beispiel 12.14. Hebbare Singularitäten treten meist dort auf, wo ein Quotient zweier holomorpher Funktionen zu Ausdrücken der Form $0/0$ oder ∞/∞ führt, wie das zum Beispiel für

$$\frac{\sin z}{e^z - 1}$$

bei $z \rightarrow 0$ der Fall ist. Wenn man wie hier die Potenzreihen kennt, kann man leicht durch Ausklammern von z in Zähler und Nenner sehen, dass der Quotient für $z \rightarrow 0$ gegen 1 strebt. Als Quotient zweier in $z = 0$ von Null verschiedener Potenzreihen ist die Funktion offensichtlich in $z = 0$ holomorph. In unübersichtlicheren Fällen sichert der Riemannsche Hebbarkeitssatz, dass der Quotient in $z = 0$ tatsächlich eine holomorphe Funktion ist.

Als Nächstes wenden wir uns den Polstellen zu:

Satz 12.15 (Polstellen). *Hat die im Kreisringgebiet $0 < |z - z_0| < R$ holomorphe Funktion f in z_0 eine Polstelle, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

mit einer in $B_R(z_0)$ holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$. Die Zahl k heißt Ordnung der Polstelle. Die Laurentreihe von f um z_0 ist dann durch

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m-k} (z - z_0)^{m-k}, \quad a_{-k} \neq 0.$$

gegeben. Diese Reihe mit nur endlich vielen (aber mindestens einem) Summanden mit negativem Index charakterisiert die Polstelle einer Funktion. Der Teil der Laurentreihe mit negativen Indizes

$$\sum_{n=-k}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

heißt Hauptteil der Funktion f an der Polstelle z_0 .

In einer Polstelle ist das Verhalten der Funktion also sehr übersichtlich, im Sinne der chordalen Metrik hat f dort den Grenzwert ∞ , ist mithin stetig. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es sich immer um die Laurentreihe von f handelt, die im Kreisringgebiet $0 < |z - z_0| < R$ konvergiert, also bis an die Stelle z_0 "heran". Nach Definition sind Polstellen isoliert, bei Nullstellen hatten wir die Isoliertheit in 12.2 bewiesen. Der Satz zeigt nochmals die Isoliertheit der Polstellen.

Beweis. Da $(z - z_0)^n f(z)$ nach Voraussetzung für ein geeignetes n in der Nähe von z_0 beschränkt ist, hat diese Funktion dort eine hebbare Singularität. Wählen wir nun das kleinstmögliche n und nennen dieses k , so ist

$$(z - z_0)^k f(z) = g(z)$$

mit einer in $B_R(z_0)$ holomorphen Funktion g . Es muss $g(z_0) \neq 0$ sein, sonst könnte man g in der Form $(z - z_0)g_1(z)$ schreiben und das k wäre nicht minimal. Aus der Taylorreihe für g ergibt sich sofort

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} = \sum_{m=-k}^{\infty} a_{m+k} (z - z_0)^m,$$

also eine Laurentreihe mit nur endlich vielen Summanden mit negativen Indizes. Selbstverständlich muss es mindestens einen Summanden mit negativem Index geben, sonst wäre die Funktion holomorph in z_0 und es hätte eine hebbare Singularität vorgelegen. Umgekehrt hat eine Funktion, die durch solch eine Laurentreihe darstellbar ist, eine Polstelle (der Ordnung k , wenn $a_k \neq 0$ ist), denn $(z - z_0)^k f(z)$ ist dann durch eine Taylorreihe darstellbar, ist also in der Nähe von z_0 beschränkt. $\square$

Beispiel 12.16. a) Rationale Funktionen haben in den Nullstellen des Nenners Pole, so hat $1/z$ in $z = 0$ eine einfache Polstelle, $1/z^2$ eine doppelte usw.; rationale Funktionen sind in $\mathbb{C}$ meromorph.

b) Die Kotangensfunktion

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

hat in den Nullstellen der Sinusfunktion $z_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, Polstellen erster Ordnung, da die Nullstellen des Sinus einfach sind. Mithin ist $\cot z$ eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$.

Als Drittes wenden wir uns nun den wesentlichen Singularitäten zu. Es gibt eine umfangreiche Theorie über das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe einer wesentlichen Singularität. Wir zeigen nur einen Satz, der auf den italienischen Mathematiker FELICE CASORATI (1835–1890), auf KARL WEIERSTRASS und auf den russischen Mathematiker YULIAN V. SOKHOTSKI (1842–1927) zurückgeht.

Satz 12.17 (Satz von Casorati–Weierstraß–Sokhotski). (i) Eine Funktion f hat in z_0 genau dann eine isolierte wesentliche Singularität, wenn ihre Laurentreihe um z_0 unendlich viele Summanden mit negativem Index enthält.

- (ii) In der Umgebung einer wesentlichen Singularität z_0 kommt die Funktion f jedem Wert aus $\hat{\mathbb{C}}$ beliebig nahe, d.h. zu jedem $c \in \hat{\mathbb{C}}$ gibt es eine Folge (z_n) aus $0 < |z - z_0| < R$ mit $z_n \rightarrow z_0$, so dass $f(z_n) \rightarrow c$ für $n \rightarrow \infty$.

Das Verhalten in der Nähe einer wesentlichen Singularität ist also ziemlich wild und anschaulich nur schwer vorstellbar, daher gibt es die erwähnte umfangreiche Theorie, um diesem Phänomen auf die Spur zu kommen.

Beweis. (i) Die Aussage über die Laurentreihe ergibt sich sofort aus dem vorigen Satz: die Laurentreihen mit endlich vielen Summanden mit negativem Index charakterisieren Polstellen.

(ii) Nun zu dem schwierigeren Teil des Satzes: Gäbe es einen Wert $c \neq \infty$ und $\varepsilon > 0, \delta > 0$, so dass in $0 < |z - z_0| < \varepsilon$

$$|f(z) - c| \geq \delta > 0,$$

so wäre die Funktion

$$\frac{1}{f(z) - c}$$

durch $1/\delta$ beschränkt, hätte also in z_0 nur eine hebbare Singularität:

$$\frac{1}{f(z) - c} = g(z) \Rightarrow f(z) = c + \frac{1}{g(z)},$$

mit einem holomorphen g , so dass f allenfalls eine Polstelle oder eine hebbare Singularität in z_0 hätte, was ein Widerspruch wäre. Für $c = \infty$ wäre f beschränkt und hätte nur eine hebbare Singularität. Also muss f jedem Wert c beliebig nahe kommen. $\square$

Beispiel 12.18. Als Beispiel für eine wesentliche Singularität sei

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$$

im Punkt $z = 0$ angeführt, denn die angegebene Laurentreihe um $z = 0$ hat unendlich viele Summanden mit negativem Index.

Das letzte Beispiel weist noch auf eine Lücke in unseren Betrachtungen hin: Wie beurteilt man das Verhalten einer Funktion f im Punkt $z = \infty$? Das ist schnell mit der folgenden Definition geklärt:

Definition 12.19 (Verhalten im Unendlichen). Ist die Funktion f im Gebiet $|z| > R$ holomorph, so beschreibt man ihr Verhalten in $z = \infty$ durch das Verhalten von

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

in $\zeta = 0$: f ist in $z = \infty$ holomorph, hat dort eine Polstelle oder eine wesentliche Singularität, wenn dies für $f(1/\zeta)$ in $\zeta = 0$ der Fall ist.

Das letzte Beispiel zeigte schon, dass e^z in $z = \infty$ eine wesentliche Singularität hat. Bei den Nullstellen einer ganzen Funktion hatten wir in Satz 12.6 gezeigt, dass diese beliebig und mit beliebigen Ordnungen vorgegeben werden können, dies gilt auch für Polstellen. Der entsprechende Satz stammt von dem schwedischen Mathematiker MAGNUS GÖSTA MITTAG-LEFFLER (1846–1927), nach dem in Stockholm ein von ihm gegründetes Forschungsinstitut benannt worden ist. Der Satz ist für die Konstruktion von Funktionen wichtig.

Satz 12.20 (Mittag-Leffler). *Es seien eine Folge (a_n) komplexer Zahlen mit $|a_n| \leq |a_{n+1}|$ ($n = 1, 2, \dots$) sowie $a_n \rightarrow \infty$ und eine Folge von Hauptteilen in den a_n durch*

$$h_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{A_{nk}}{(z - a_n)^k}$$

gegeben. Dann kann eine Folge (P_n) von Polynomen so bestimmt werden, dass die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (h_n(z) - P_n(z)) \quad (*)$$

in jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$, die keinen der Punkte a_n enthält, gleichmäßig konvergiert. Die P_n heißen Konvergenz erzeugende Summanden. Die Funktion f ist also in $\mathbb{C}$ meromorph und hat genau in den Stellen a_n Pole mit den Hauptteilen h_n .

Beweis. Falls $a_1 = 0$ ist, setze man $P_1 = 0$, für $|a_n| > 0$ ist h_n in $|z| < |a_n|$ holomorph und besitzt dort eine Taylorreihe

$$h_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} z^k.$$

Dann kann man eine Partialsumme $P_n(z)$ dieser Taylorreihe so bestimmen, dass

$$|h_n(z) - P_n(z)| \leq \frac{1}{2^n}$$

in $|z| \leq |a_n|/2$ gilt. Das bedeutet aber die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $(*)$ in jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ nach Herausnahme der Punkte a_n . Denn schließt man die kompakte Menge in einen Kreis vom Radius R ein, so muss man nur die endlich vielen $|a_n| \leq 2R$ aus der Reihe heraus nehmen und hat eine gleichmäßig konvergente Reihe, die nach Satz 9.3 eine holomorphe Funktion darstellt. Die wieder hinzu addierten h_n liefern gerade die gewünschten Polstellen mit den vorgeschriebenen Hauptteilen. $\square$

Der Mittag-Lefflersche Satz lässt sich auch in einem beliebigen Gebiet G beweisen. Man kann also jede in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion durch eine Reihe der Form

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (h_n(z) - P_n(z))$$

darstellen, wobei $f_0(z)$ eine ganze Funktion ist.

Beispiel 12.21. Die Laurentreihen der Funktion

$$f(z) := \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$$

beginnen in den Nullstellen des Sinus mit $(z - n)^{-2}$. Bildet man also die (gleichmäßig konvergente) Reihe

$$g(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n)^2},$$

so ist die Differenz $h(z) := f(z) - g(z)$ eine ganze Funktion. Auf den Rändern der Quadrate

$$Q_N : |x| \leq N + \frac{1}{2}, \quad |y| \leq N + \frac{1}{2}$$

mit natürlichem N ist h gleichmäßig beschränkt, wie man sich überlegen kann. Auf den senkrechten Rändern der Quadrate hilft die Periodizität der Funktion h (Periode 1). Wegen des Maximumprinzips ist daher h in der ganzen Ebene beschränkt, nach dem Satz von Liouville 7.34 ist h eine Konstante. Dass diese Konstante Null ist, kann man z.B. an der Identität

$$h(z) = \frac{1}{4} \left\{ h\left(\frac{z}{2}\right) + h\left(\frac{z+1}{2}\right) \right\}$$

nachprüfen.

12.2.2 Isolierte Singularitäten in $C\ell(n)$

In $C\ell(n)$ holomorphe Funktionen verhalten sich in Singularitäten ebenso wie in den Nullstellen erheblich anders als in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Es sind gleichfalls noch eine Reihe von Fragen zu klären. Wir beschränken uns auf isolierte Singularitäten, die wir zumindest in den $\mathcal{Q}_k$ gemäß Definition 7.26 kennengelernt haben, und definieren ganz analog zu $\mathbb{C}$:

Definition 12.22. Wenn die Funktion f in der punktierten Kugel $0 < |x - a| < R$ (links- oder rechts-) holomorph ist, in a aber nicht oder dort nicht definiert ist, so spricht man von einer *isolierten Singularität* der Funktion f in a . Diese Singularitäten werden wie folgt klassifiziert:

- a) Die Singularität heißt *hebbar*, wenn f in $0 < |x - a| < R/2$ beschränkt ist.
- b) Die Singularität heißt *Polstelle*, wenn sie nicht hebbar ist und es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $m \geq n$, so dass $|x - a|^m f(x)$ in $0 < |x - a| < R/2$ beschränkt ist.
- c) Sonst heißt die Singularität *wesentliche Singularität*.
- d) Wenn eine Funktion f in einem Gebiet G bis auf Polstellen, die sich in G nicht häufen, (links- oder rechts-) holomorph ist, so nennt man f (links- oder rechts-) *meromorph* in G .

In seiner Arbeit [45] hat R. Fueter erstmals das komplexe Konzept meromorpher Funktionen in höhere Dimensionen überführt, auch die Laurentreihen in Kugelschalen-Gebieten entwickelt. Die Singularitäten wollen wir nun untersuchen, für hebbare Singularitäten gilt der gleiche Satz wie in $\mathbb{C}$:

Satz 12.23 (Riemann–Fueterscher Hebbbarkeitssatz). *Die Funktion f sei in $0 < |x - a| < R$ holomorph und habe in a eine hebbare Singularität. Dann existiert ein Wert a_0 , so dass die erweiterte Funktion*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < |x - a| < R, \\ a_0, & x = a, \end{cases}$$

in $B_R(a)$ holomorph ist.

Der Beweis wird dem Leser als Aufgabe 12.5.7 gestellt, er verläuft analog zum Komplexen. Ähnlich reicht es als Voraussetzung für den Hebbbarkeitssatz aus, $r^n f(x) \rightarrow 0$ für $r = |x - a| \rightarrow 0$ zu fordern, was manchmal einfacher nachzuweisen ist.

Die Polstellen lassen sich leider nicht so einfach beschreiben wie in $\mathbb{C}$, aber immerhin kann man folgendes beweisen:

Satz 12.24 (Polstellen in $\mathcal{Cl}(n)$). *Eine isolierte Singularität a einer in $0 < |x - a| < R$ (links-) holomorphen Funktion ist genau dann eine Polstelle, wenn die Laurentreihe in $0 < |x - a| < R$ nur endlich viele, aber mindestens einen Summanden mit den singulären Funktionen $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x - a)$ besitzt:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x - a) b_{\mathbf{k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x - a) a_{\mathbf{k}}.$$

Wenn in der linken Summe mindestens einer der Summanden mit $|\mathbf{k}| = m$ von Null verschieden ist, so wollen wir $m + n$ als Ordnung der Polstelle bezeichnen, die endliche Summe mit den $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x - a)$ heißt gemäß Satz 9.28 Hauptteil von f im Punkt a .

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass Polstellen mindestens die Ordnung n haben, da $\mathcal{Q}_0$ die schwächste Singularität für $\mathcal{Cl}(n)$ ist.

Beweis. Wir beschränken uns auf den links-holomorphen Fall, der rechts-holomorphe wird völlig analog bewiesen. Es sei zuerst die Beschränktheit von $|x - a|^m f(x)$ gegeben. Für die Koeffizienten der Laurentreihe gilt gemäß Satz 9.28

$$b_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sigma_n} \int_{|x-a|=\rho} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x - a) dx^* f(x).$$

Hier setzen wir die Abschätzung für $\mathcal{P}$ gemäß Folgerung 6.5 und die Voraussetzung für f ein, es folgt mit $k = |\mathbf{k}|$ und einer geeigneten Konstanten C

$$|b_{\mathbf{k}}| \leq \frac{1}{\sigma_n} \int_{|x-a|=\rho} C |x - a|^k |dx^*| |x - a|^{-m} \leq C \rho^{k+n-m}.$$

Für $k > m - n$ müssen die Koeffizienten b_k alle verschwinden, da das ρ beliebig klein gewählt werden kann.

Hat umgekehrt die Laurentreihe von f nur endlich viele Glieder mit den $\mathcal{Q}_k$, so sei m das größte der auftretenden $|k|$. Mit der Abschätzung

$$|\mathcal{Q}_k(x - a)| \leq \frac{C_k}{|x - a|^{n+k}}$$

gemäß Lemma 7.27 folgt dann die Aussage für f . $\square$

Bemerkung 12.25. Das Verhalten an Polstellen im $\mathbb{R}^{n+1}$ unterscheidet sich deutlich von dem in der Ebene: Natürlich strebt $\mathcal{Q}_0(x - a) = (x - a)/|x - a|^{n+1}$ gegen unendlich für $x \rightarrow a$, wie wir es von $\mathbb{C}$ gewöhnt sind. Dem ist aber leider nicht immer so, so dass eine meromorphe Funktion in einer Polstelle nicht im Sinne der chordalen Metrik stetig sein muss. Als Beispiel differenzieren wir $\mathcal{Q}_0$ (der Einfachheit halber sei $a = 0$):

$$\partial_i \mathcal{Q}_0(x) = \frac{|x|^2 \bar{e}_i - (n+1) \bar{x} x_i}{|x|^{n+3}}$$

hat einen nichtverschwindenden Zähler und strebt daher auch gegen ∞ für $x \rightarrow 0$. Das ändert sich aber bei der nächsthöheren Ableitung, in

$$\partial_i \partial_j \mathcal{Q}_0(x) = \frac{n+1}{|x|^{n+5}} \{ -(\bar{e}_j x_i + \bar{e}_i x_j) |x|^2 - \delta_{ij} \bar{x} |x|^2 + (n+3) \bar{x} x_i x_j \}$$

verschwindet die Klammer für $x_i = x_j = 0$, falls $i \neq j$. Diese zweite Ableitung von $\mathcal{Q}_0$ ist also sogar in einer $(n-1)$ -dimensionalen Ebene Null und strebt in dieser gegen 0 und nicht gegen ∞ .

Leider liegen bisher kaum Untersuchungen für wesentliche Singularitäten in $\mathcal{C}\ell(n)$ vor. Für meromorphe Funktionen im $\mathbb{R}^{n+1}$ lässt sich aber der Satz von Mittag-Leffler aus dem Komplexen übertragen:

Satz 12.26 (Mittag-Leffler). *Es seien eine Folge (a_k) von Zahlen aus dem $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $|a_k| \leq |a_{k+1}|$ sowie $a_k \rightarrow \infty$ und eine Folge von Hauptteilen in den a_k ,*

$$H_k(x) = \sum_{j=0}^{m_k} \sum_{|j|=j} \mathcal{Q}_j(x - a_k) b_{jk},$$

gegeben. Dann kann eine Folge (P_k) von holomorphen Polynomen so bestimmt werden, dass die Reihe

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} (H_k(x) - P_k(x))$$

in jeder kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$, die keinen der Punkte a_k enthält, gleichmäßig konvergiert. Die P_k heißen Konvergenz erzeugende Summanden. Die Funktion f ist also im $\mathbb{R}^{n+1}$ (links-) meromorph und hat genau an den Stellen a_k Pole mit den Hauptteilen H_k .

Der Beweis verläuft völlig analog zum komplexen Fall und wird dem Leser als Aufgabe 12.5.8 gestellt.

12.3 Residuensatz und Argumentprinzip

12.3.1 Residuensatz in $\mathbb{C}$

Die im vorigen Abschnitt gewonnenen Einsichten in die lokale Struktur einer holomorphen oder meromorphen Funktion gestatten es uns nun, den Cauchyschen Integralsatz und die Cauchysche Integralformel zu ergänzen. Dazu definieren wir als Erstes:

Definition 12.27. (*Residuum*). Die meromorphe Funktion f im Gebiet G habe in $z_0 \in G$ eine isolierte Singularität. Es sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die in $0 < |z - z_0| < R$ konvergente Laurentreihe von f . Dann heißt

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz =: \text{Res}(f, z_0)$$

Residuum von f in z_0 . Wegen der Gültigkeit des Cauchyschen Integralsatzes kann ρ beliebig im Intervall $(0, R)$ gewählt werden.

Das Residuum wurde von CAUCHY 1814 in seinem berühmten Werk “*Memoire sur les intégrales définies*” eingeführt, wobei Basisideen bereits bei EULER zu finden sind.

Vorsichtshalber sei darauf hingewiesen, dass der Begriff des Residuums nicht anwendbar ist, wenn man eine wesentliche Singularität betrachtet, die Häufungspunkt von Polstellen ist. Der nachstehende *Residuensatz* wurde von CAUCHY 1825 veröffentlicht. Er führt, grob gesagt, integrale Größen auf die differentielle Größe des Residuums zurück.

Satz 12.28 (Residuensatz). *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet von endlichem Zusammenhang mit stückweise glatten Randkurven. Die Funktion f sei in G bis auf endlich viele isolierte Singularitäten $a_1, \dots, a_n$ holomorph und stetig in $\overline{G} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Dann gilt*

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, a_k).$$

Der Residuensatz ist offenbar eine Erweiterung des Cauchyschen Integralsatzes, denn für eine in G holomorphe Funktion sind die Residuen Null, und der Residuensatz geht in den Cauchyschen Integralsatz über.

Beweis. Wir entfernen aus dem Gebiet G kleine Kreisscheiben $B_\varepsilon(a_k)$, $k = 1, \dots, n$, die weder sich noch die Randkurven von G schneiden und jeweils nur die Singularität a_k enthalten sollen, das Restgebiet nennen wir G_ε . Da nur endlich viele glatte Randkurven hinzugekommen sind, kann auf G_ε der Cauchysche Integralsatz angewendet werden: In G_ε ist f holomorph, also gilt

$$\int_{\partial G_\varepsilon} f(z) dz = 0 = \int_{\partial G} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{|z-a_k|=\varepsilon} f(z) dz.$$

Das ist bereits die Behauptung, denn die letzten Integrale sind, abgesehen vom Faktor $2\pi i$, die Residuen in den Punkten a_k . $\square$

Bevor wir uns mit der Berechnung von Residuen beschäftigen, wollen wir noch den Punkt $z = \infty$ einschließen.

Definition 12.29. Ist f für $|z| > R$ holomorph, so heiße

$$\text{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} f(z) dz$$

Residuum von f im Punkt $z = \infty$, dabei ist $\rho > R$ wieder beliebig wählbar.

Auch hier ist das Residuum gleich dem Koeffizienten a_{-1} der Laurentreihe von f , die für $|z| > R$ konvergiert.

Bemerkung 12.30. Es sei darauf hingewiesen, dass dies nicht mit dem Residuum übereinstimmt, das sich aus der Behandlung des Punktes $z = \infty$ in Definition 12.19 ergeben würde: Dort wäre als Residuum das von $f(1/\zeta)$ im Punkt $\zeta = 0$ zu wählen, also

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1/\rho} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} f(z) \frac{dz}{z^2}.$$

Das wäre gerade der Koeffizient a_1 der Laurentreihe um ∞ und auch insofern vertretbar, als $a_1 z$ der erste Summand ist, der die Singularität in ∞ erzeugt. Die obige Definition ist aber die praktischere, wie das nächste Lemma zeigt:

Lemma 12.31. *Es sei f in $\mathbb{C}$ mit Ausnahme von endlich vielen Punkten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^n \text{Res}(f, a_k) + \text{Res}(f, \infty) = 0.$$

Beweis. Es sei $|z| = \rho$ ein Kreis, der alle a_k , $k = 1, \dots, n$, in seinem Inneren enthält. Dann gilt

$$\int_{|z|=\rho} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, a_k) = -2\pi i \text{Res}(f, \infty),$$

was zu beweisen war. $\#$

$\square$

Um nun Integrale mit Hilfe des Residuensatzes tatsächlich ausrechnen zu können, ist es nützlich, eine Methode zu haben, mit deren Hilfe Residuen integralfrei berechnet werden können. Bei wesentlichen Singularitäten geht dies nur, wenn die entsprechende Laurentreihe bekannt ist. Dann kann einfach der Koeffizient a_{-1} genommen werden. Auch bei Polstellen schließt die Kenntnis der Laurentreihe die Kenntnis des Residuums ein. Aber bei letzteren gibt es noch andere Methoden zu dessen Berechnung:

Lemma 12.32 (Berechnung von Residuen an Polstellen). *Hat die Funktion f in z_0 eine Polstelle der Ordnung k , so gilt*

$$(k-1)! \operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_0)^k f(z)).$$

Diese Formel ist bei einfachen Polstellen besonders leicht zu handhaben, dort ist

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Beweis. Aus

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

folgt sofort

$$(z - z_0)^k f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m-k} (z - z_0)^m.$$

Der Koeffizient a_{-1} ist der mit dem Index $m = k - 1$, und die Behauptung des Lemmas ist einfach die Formel für die Koeffizienten einer Taylorreihe (Satz 9.14). $\square$

Beispiel 12.33. Ein erstes Beispiel sei die Berechnung von

$$I := \int_{|z-i|=5} \left(\frac{z+2}{z+3} + \frac{z-2}{z+i} \right) dz,$$

was mit den üblichen Methoden nur unter sehr großem Aufwand möglich wäre. Mit dem Residuensatz haben wir einfach die Polstellen des Integranden festzustellen, das sind hier $a_1 = -3$ und $a_2 = -i$. Offenbar liegen an beiden Stellen einfache Pole vor, beide Punkte sind auch innerhalb des Integrationskreises gelegen, denn $|-3-i| < 5$ und $|-2i| < 5$. Die Residuen an den beiden Stellen berechnen wir mit Hilfe obiger Formel:

$$\operatorname{Res}(f, -3) = \lim_{z \rightarrow -3} \left(z + 2 + (z + 3) \frac{z - 2}{z + i} \right) = -1,$$

und

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \left((z + i) \frac{z + 2}{z + 3} + z - 2 \right) = -2 - i.$$

Damit erhalten wir für das gesuchte Integral

$$I = 2\pi i(-1 - 2 - i) = 2\pi(1 - 3i).$$

12.3.2 Argumentprinzip in $\mathbb{C}$

In diesem Abschnitt soll eine weitere Verallgemeinerung des Residuensatzes behandelt werden, die häufig den Namen *Argumentprinzip* trägt. Der wichtige Hilfssatz ist der folgende:

Satz 12.34. *Im beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sei die Funktion f meromorph. Weiter sei $\Gamma \subset G$ eine stückweise glatte Kurve, die nicht durch Null- oder Polstellen von f geht, z_A sei der Anfangspunkt von Γ und z_E der Endpunkt. Dann gilt*

$$\exp \left(\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) = \frac{f(z_E)}{f(z_A)}.$$

Beweis. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ eine Parametrisierung von Γ . Zu jedem Punkt $\gamma(t) \in \Gamma$ gibt es eine kleine Kreisscheibe $D(t) := B_{\rho(t)}$, in der f keine Null- oder Polstelle hat, so dass dort f'/f holomorph ist und eine Stammfunktion besitzt, etwa mit $z_1 \in D(t) \cap \Gamma$

$$F(z) = \int_{z_1}^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta.$$

Ist nun z_2 ein beliebiger Punkt aus $D(t)$ und

$$g(z) := \frac{\exp(F(z) - F(z_2))}{f(z)},$$

so ist diese Funktion holomorph in $D(t)$ mit

$$g'(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)}g(z) + F'(z)g(z) = 0,$$

also ist g konstant. Für $z = z_2$ folgt

$$g(z) = \frac{1}{f(z_2)} \Rightarrow \exp(F(z) - F(z_2)) = \frac{f(z)}{f(z_2)}.$$

Die Spur von Γ ist eine kompakte Menge, die mit endlich vielen der soeben verwendeten Kreisscheiben $D(t)$ überdeckt werden kann. Diese Kreisscheiben müssen sich überlappen, so dass wir eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ finden können, für die das Kurvenstück zwischen $\gamma(t_{j-1})$ und $\gamma(t_j)$ innerhalb einer der kleinen Kreisscheiben liegt. Wir wählen dabei jeweils $z_1 = \gamma(t_{j-1})$, $z_2 = \gamma(t_j)$ und ein entsprechendes F_j , das ergibt

$$\exp \left(\int_{\Gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \right) = \prod_{j=1}^n \exp[F_j(\gamma(t_j)) - F_j(\gamma(t_{j-1}))] = \prod_{j=1}^n \frac{f(\gamma(t_j))}{f(\gamma(t_{j-1}))} = \frac{f(z_E)}{f(z_A)}. \quad \square$$

Folgerung 12.35. *Ist die Kurve Γ geschlossen, so gilt*

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dies ergibt sich sofort daraus, dass für eine geschlossene Kurve Γ im Satz 12.34 als Ergebnis der Wert 1 herauskommt, und das lässt im Argument der Exponentialfunktion nur ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ zu.

Eine erste wichtige Folgerung ergibt sich für den *Index* oder die *Umlaufzahl* einer Kurve.

Definition 12.36 (Index, Umlaufzahl). Es sei Γ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$ und es sei $z \notin \Gamma$. Dann heißt

$$I(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Index oder *Umlaufzahl* der Kurve Γ bezüglich z .

Unser vorheriger Satz ergibt damit die

Folgerung 12.37 (Ganzzahligkeit des Index). (i) *Der Index einer stückweise glatten, geschlossenen Kurve Γ bezüglich eines Punktes $z \notin \Gamma$ ist eine ganze Zahl.*

(ii) *Der Index ist in $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ lokal konstant, also ist er in den Teilgebieten von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ jeweils konstant.*

Beweis. (i) Das ergibt sich direkt aus Folgerung 12.35 mit der Funktion $f(\zeta) = \zeta - z$.

(ii) Da das Integral eine stetige Funktion von z ist und andererseits ganzzahlig, muss es lokal konstant sein. Da die Spur von Γ abgeschlossen ist, ist $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ offen, dieses Komplement zerfällt also in offene und zusammenhängende Teilmengen, eben in Teilgebiete. Als lokal konstante Funktion muss der Index in einem solchen Teilgebiet konstant sein. $\square$

Dies legt nun die folgende Definition nahe:

Definition 12.38 (Inneres und Äußeres einer geschlossenen Kurve). Es sei Γ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve. Als *Inneres* von Γ bezeichnet man die Menge

$$I(\Gamma) := \{z : z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, I(\Gamma, z) \neq 0\},$$

entsprechend als *Äußeres* von Γ die Menge

$$A(\Gamma) := \{z : z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, I(\Gamma, z) = 0\}.$$

Wir schließen eine Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel an:

Satz 12.39 (Erweiterte Cauchysche Integralformel). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $\Gamma \subset G$ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve. Die Funktion f sei holomorph in G . Dann gilt für alle $z \in G \setminus \Gamma$*

$$I(\Gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Die Erweiterung besteht darin, dass jetzt beliebige, stückweise glatte Kurven zugelassen sind, nicht nur die Ränder von Gebieten. Dabei kann es durchaus vorkommen, dass der Punkt z gar nicht oder mehrmals umlaufen wird. Die übliche Voraussetzung ist hier der einfache Zusammenhang von G , aber wir verwenden im Beweis unsere Form des Satzes von Morera 7.4, nach der in einem sternförmigen Gebiet jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion besitzt.

Beweis. Die Funktion

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z, \\ f'(z), & \zeta = z, \end{cases}$$

ist für $\zeta \in G$, $\zeta \neq z$, holomorph bezüglich ζ und für $\zeta \rightarrow z$ stetig. Dort hat sie eine hebbare Singularität, ist also in ganz G holomorph. Wie soeben erwähnt, besitzt sie dann im sternförmigen Gebiet eine Stammfunktion $F(\zeta)$, so dass das Integral von g über die geschlossene Kurve Γ Null ist, falls $z \in G \setminus \Gamma$:

$$\int_{\Gamma} g(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

oder

$$f(z) \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

was zu beweisen war, da der Faktor nach $f(z)$ gerade $2\pi i I(\Gamma, z)$ ist. $\square$

Als Letztes kommen wir in diesem Abschnitt zu dem angekündigten *Argumentprinzip*.

Satz 12.40 (Argumentprinzip). *Es sei G ein Gebiet von endlichem Zusammenhang mit stückweise glatten Randkurven. Die Funktion f sei bis auf endlich viele Pole in G holomorph und in $\overline{G}$ stetig. Auf ∂G sei $f(z)$ ungleich Null. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n(0, f) - n(\infty, f),$$

wobei $n(0, f)$ die Anzahl der Nullstellen von f in G ist (mit Vielfachheit gezählt) und $n(\infty, f)$ die Anzahl der Polstellen (entsprechend gezählt).

Das Argumentprinzip gibt also die Möglichkeit, die Zahl der Null- und Polstellen einer Funktion in einem Gebiet durch ein Integral auszudrücken, was für die Untersuchung von meromorphen Funktionen von einiger Wichtigkeit ist. Vom Argumentprinzip spricht man, da der Integrand die *logarithmische Ableitung* der Funktion f darstellt:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} dz = d(\log f(z)) = d(\ln |f(z)|) + i d(\arg f(z)).$$

Nun ist aber $\ln |f(z)|$ in $\overline{G}$ eindeutig definiert und das Integral längs des Randes ∂G über $d \ln |f(z)|$ ist Null, so dass nur das Argument von f Beiträge liefert. Man könnte daher die Aussage des Satzes auch in der Form schreiben:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} d \arg f(z) = n(0, f) - n(\infty, f).$$

Beweis. Die logarithmische Ableitung der Funktion f ist in G holomorph und stetig in $\overline{G}$ bis auf die endlich vielen Null- und Polstellen, etwa $a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_m$. Diese schließen wir wie üblich durch hinreichend kleine Kreisscheiben vom Radius ε aus. Auf das Restgebiet ist der Cauchysche Integralsatz anwendbar, wir erhalten

$$\int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n \int_{|z-a_j|=\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \sum_{k=1}^m \int_{|z-b_k|=\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Die Integrale über die kleinen Kreise sind jeweils die Residuen von f'/f in den entsprechenden Punkten, dort ergibt sich folgendes:

Wenn f eine p_j -fache Nullstelle in a_j hat, so ist dort mit einem holomorphen g mit $g(a_j) \neq 0$

$$f(z) = (z - a_j)^{p_j} g(z), \quad f'(z) = p_j(z - a_j)^{p_j-1} g(z) + (z - a_j)^{p_j} g'(z)$$

und damit

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p_j}{z - a_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Damit hat f'/f in a_j einen einfachen Pol mit dem Residuum p_j . Für eine Polstelle in b_k der Ordnung q_k ergibt sich analog das Residuum $-q_k$. Das ist aber gerade das gewünschte Ergebnis

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{k=1}^m q_k. \quad \square$$

Wir schließen den Fragenkreis ab mit einem Satz des französischen Mathematikers E. ROUCHÉ (1832–1910), der es gestattet, die Anzahl der Nullstellen zweier Funktionen zu vergleichen:

Satz 12.41 (Satz von Rouché). *Das Gebiet G sei von endlichem Zusammenhang und habe stückweise glatte Randkurven. Die Funktionen f und g seien in G holomorph und in $\overline{G}$ stetig, f sei auf ∂G von Null verschieden. Auf ∂G sei weiterhin*

$$|g(z)| < |f(z)|.$$

Dann haben die Funktionen f und $f + g$ die gleiche Anzahl Nullstellen in G .

Beweis. Für $|\lambda| \leq 1$ ist auf ∂G auch die Funktion $f + \lambda g$ von Null verschieden, daher gibt

$$n(0, f + \lambda g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z) + \lambda g'(z)}{f(z) + \lambda g(z)} dz$$

die Anzahl der Nullstellen von $f + \lambda g$ an. Das Integral hängt stetig von dem Parameter λ ab und hat nur ganzzahlige Werte, also muss es für $|\lambda| \leq 1$ konstant sein. Die Werte $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ liefern dann die Behauptung

$$n(0, f) = n(0, f + g). \quad \square$$

12.3.3 Residuensatz in $C\ell(n)$

Hier lässt sich manches parallel zu $\mathbb{C}$ durchführen, allerdings nur für isolierte Singularitäten. Für höherdimensionale Singularitäten muss die Theorie noch weiter entwickelt werden, vielleicht mit Hilfe der allgemeinen Aussagen von J. LERAY [88] und F. NORGUET [111].

Als Erstes definieren wir:

Definition 12.42 (Residuum). Die links-holomorphe Funktion f habe im Punkt a einen Pol oder eine wesentliche Singularität mit der Laurentreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x-a) a_{\mathbf{k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x-a) b_{\mathbf{k}}$$

in $0 < |x-a| < R$. Dann heißt der Koeffizient

$$b_0 = \frac{1}{\sigma_n} \int_{|x-a|=\rho} dx^* f(x) =: \text{Res}(f, a)$$

Residuum von f im Punkt a . Der Radius ρ ist beliebig zwischen 0 und R wählbar.

Für eine rechts-reguläre Funktion f ist das Residuum definiert durch

$$b_0 = \frac{1}{\sigma_n} \int_{|x-a|=\rho} f(x) dx^* =: \text{Res}(f, a).$$

Wir beschränken uns im Folgenden auf den links-holomorphen Fall, da der rechts-holomorphe keine ernsthaften Unterschiede aufweist. Wie in der Ebene gilt auch hier der

Satz 12.43 (Residuensatz). *Es sei G ein Gebiet im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit hinreichend glatten Randmannigfaltigkeiten. Die Funktion f sei stetig in $\overline{G}$ und links-holomorph in G bis auf endlich viele isolierte Singularitäten $a_1, \dots, a_m$ in G . Dann gilt*

$$\int_{\partial G} dx^* f(x) = \sigma_n \sum_{k=1}^m \text{Res}(f, a_k).$$

Der Beweis ist so analog dem in $\mathbb{C}$, dass wir ihn übergehen.

Gleichfalls wie in $\mathbb{C}$ können wir ein Residuum in $x = \infty$ definieren:

Definition 12.44. Ist f für $|x| > R$ links-holomorph, so heiße

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{\sigma_n} \int_{|x|=\rho} dx^* f(x)$$

Residuum von f im Punkt $x = \infty$, dabei ist $\rho > R$ beliebig wählbar.

Ganz entsprechend lautet dann das Lemma:

Lemma 12.45. *Es sei f in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Ausnahme von endlich vielen Punkten $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^{n+1}$ links-holomorph. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f, a_k) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

Der Beweis lautet wiederum wörtlich wie der in $\mathbb{C}$, so dass wir ihn fortlassen können. Interessanterweise gibt es auch eine Parallele zur Berechnung des Residuums an Polstellen gemäß Lemma 12.32:

Lemma 12.46 (Berechnung von Residuen an Polstellen). *Hat die links-holomorphe Funktion f in a eine Polstelle der Ordnung $m + n$, so gilt*

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{m!} \lim_{r \rightarrow 0} \partial_r^m r^{m+n} \omega f(x).$$

Dabei sei $r := |x - a|$ und $\omega := (x - a)/r$.

Beweis. Zur Vereinfachung der Schreibarbeit sei $a = 0$. Die Laurentreihe von f besteht aus Summanden der Form

$$\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) a_{\mathbf{k}} = r^k \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(\omega) a_{\mathbf{k}},$$

wenn $k := |\mathbf{k}|$, es ist $k \geq 0$. Da die nur von ω abhängigen Größen von der Differentiation nach r nicht berührt werden, folgt

$$\frac{1}{m!} \partial_r^m \omega \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{m!} \left(\partial_r^m r^{m+n+k} \right) \omega \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(\omega) a_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$$

für $r \rightarrow 0$, denn nach der Differentiation bleibt ein Faktor $r^{n+k} \rightarrow 0$.

Für den ersten singulären Summanden $\mathcal{Q}_0(x) b_0$ ergibt sich wegen $\omega \bar{\omega} = 1$

$$\omega \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x) b_0 = \frac{\omega \bar{\omega}}{r^n} b_0 = \frac{b_0}{r^n}$$

und damit wie gewünscht

$$\frac{1}{m!} \partial_r^m r^{m+n} \omega \mathcal{Q}_0(x) b_0 = \frac{1}{m!} \partial_r^m r^m b_0 = b_0.$$

Für die weiteren singulären Summanden $\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x) b_{\mathbf{k}}$ gilt nach Lemma 7.27

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x) = \frac{q_{\mathbf{k}}(x)}{r^{n+2k+1}} = \frac{q_{\mathbf{k}}(\omega)}{r^{n+k}}.$$

Das liefert unter dem Grenzwert den Ausdruck ($m \geq k \geq 1$)

$$\frac{1}{m!} \partial_r^m r^{m-k} \omega q_k(\omega) b_k.$$

Wegen $m - k < m$ ergibt die Differentiation hier Null; das gilt dann auch für den Grenzwert. $\square$

12.3.4 Argumentprinzip in $C\ell(n)$

Auch hier läuft manches parallel zu $\mathbb{C}$, aber viele Fragen bleiben offen. Insbesondere sei bemerkt, dass wir uns wie bei den Residuen nur mit der Dimension 0 bzw. n beschäftigen, obwohl es für die dazwischen liegenden Dimensionen auch schon Theorien gibt. Man muss sich dann mit Differentialformen entsprechender Stufe befassen. Das soll aber nicht näher betrachtet werden, wir verweisen auf [33] und [136]. Wir definieren als Erstes

Definition 12.47. (*Umlaufzahl, Index*). Es sei M eine hinreichend glatte n -dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n+1}$ und es sei $x \notin M$. Dann heißt

$$I(M, x) := \frac{1}{\sigma_n} \int_M dy^* \mathcal{Q}_0(y - x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_M \mathcal{Q}_0(y - x) dy^*$$

(Kronecker-) *Index* oder *Umlaufzahl* der Mannigfaltigkeit M bezüglich des Punktes x .

Zunächst formulieren wir folgendes Lemma:

Lemma 12.48. *Es gilt*

$$d\{g(dx_i \wedge dx)^* f\} = -\{(\partial_i g) dx^* f + g dx^* (\partial_i f)\} + \{(g \bar{\partial}) dx_i^* f + g dx_i^* (\bar{\partial} f)\}.$$

Der Beweis ist einfache Rechnung und wird als Aufgabe 12.5.9 gestellt. Weiterhin gilt:

Lemma 12.49 (Ganzzahligkeit des Index). (i) *Der Index einer hinreichend glatten, n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M bezüglich eines Punktes $x \notin M$ ist eine ganze Zahl.*

(ii) *Der Index ist lokal konstant, also in den Teilgebieten von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ jeweils eine Konstante.*

Zuerst einige Bemerkungen: In Beispiel A.2.17 c haben wir gezeigt, dass

$$dy^* = \nu |do|$$

mit dem Normaleneinheitsvektor ν ist. Da der Index sich als ganzzahlig, also reell, erweisen wird, folgt

$$I(M, x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_M \frac{\nu \cdot (y - x)}{|y - x|^{n+1}} |do|$$

mit dem Skalarprodukt der als Vektoren aufgefassten Größen ν und $y - x$. Daran ist zu sehen, dass dies der Kronecker-Index der Topologie ist, der die Zahl der Umläufe der Mannigfaltigkeit M um den Punkt x misst.

Beweis. (i) Die Übereinstimmung der beiden angegebenen Formen des Index ergibt sich sofort, wenn man wie in der vorstehenden Bemerkung zu einer Parameterdarstellung übergeht, denn das Skalarprodukt ist kommutativ.

Nun ist $I(M, x)$ eine rechts- und links-holomorphe Funktion, falls $x \notin M$, denn man kann unter dem Integralzeichen differenzieren. Wir wählen vorerst die rechts-holomorphe Form

$$I(M, x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_M dy^* \mathcal{Q}_0(y - x).$$

Diese kann für $|x| > R$ bei genügend großem R in die Laurentreihe

$$I(M, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} a_{\mathbf{k}} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mathbf{k}|=k} b_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(x)$$

mit

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sigma_n} \int_{|u|=\rho} I(M, u) du^* \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(u), \quad b_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sigma_n} \int_{|u|=\rho} I(M, u) du^* \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(u)$$

entwickelt werden. Gemäß Beispiel A.2.17 c ist $du^* = \rho^n \nu |do_1|$ mit dem äußeren Normaleinheitsvektor ν und dem Flächenelement der Einheitskugel $|do_1|$. Außerdem sei $u = \rho\omega$, so dass mit $k = |\mathbf{k}|$

$$\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(u) = \rho^k \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(\omega), \quad \mathcal{Q}_{\mathbf{k}}(u) = \frac{1}{\rho^{k+n}} q_{\mathbf{k}}(\omega).$$

Daraus folgt dann mit einer geeigneten Konstanten C

$$|a_{\mathbf{k}}| \leq \frac{C}{\rho^n} \rho^n \frac{1}{\rho^{k+n}} \rightarrow 0$$

für $\rho \rightarrow \infty$. Da die Koeffizienten nicht von ρ abhängen ergibt sich schließlich $a_{\mathbf{k}} = 0$ für alle $\mathbf{k}$.

Um auch das Verschwinden aller $b_{\mathbf{k}}$ nachzuweisen, folgt zuerst mit dem Satz von Fubini

$$b_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sigma_n^2} \int_M dy^* \int_{|u|=\rho} \mathcal{Q}_0(y - u) du^* \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(u),$$

und mit der Cauchyschen Integralformel

$$b_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{\sigma_n} \int_M dy^* \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(y).$$

Nach den Eigenschaften der Fueter-Polynome in Satz 6.2 (ii) ist weiter

$$\partial_n \mathcal{P}_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_n}(y) = (k_n + 1) \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(y)$$

mit dem Multiindex ϵ_n , der nur an der n -ten Stelle eine 1 hat, sonst Nullen. Auf die Formel

$$b_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{(k_n + 1)\sigma_n} \int_M dy^* \partial_n \mathcal{P}_{\mathbf{k}+\epsilon_n}(y)$$

wenden wir Lemma 12.48 und den Satz von Stokes an. In Lemma 12.48 ist zu diesem Zweck nur $g = 1$, $f = \mathcal{P}_{\mathbf{k}+\epsilon_n}$, $i = n$, zu setzen. Es folgt

$$0 = \int_{\partial M} (dy_n \wedge dy)^* f(y) = - \int_M dy^* \partial_n f(y) = b_{\mathbf{k}},$$

die Null ergibt sich aus $\partial M = \emptyset$. Damit verschwindet $I(M, x)$ im Äußeren von M . $I(M, x)$ ist auch in den anderen Komponenten von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ ganzzahlig, denn es ändert sich beim Überschreiten von M nur um ganze Zahlen.

Das ergibt sich so: Es sei K eine hinreichend kleine Kugel mit dem Mittelpunkt in einem regulären Punkt auf M , diese wird durch M in zwei Gebiete K_1 und K_2 zerlegt, deren Ränder etwa durch $\partial K_1 = \partial K_{01} + M_0$ und $\partial K_2 = \partial K_{02} - M_0$ gebildet werden, wenn M_0 das durch K aus M ausgeschnittene Stück ist und die Nummerierung entsprechend gewählt wird. Nach der Cauchyschen Integralformel in K_1 gilt für $x \in K_1$

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial K_1} dy^* \mathcal{Q}_0(y - x) = 1.$$

Wir erhalten

$$I(M, x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_M dy^* \mathcal{Q}_0(y - x) = 1 + \left(\int_{M \setminus M_0} - \int_{\partial K_{01}} \right) dy^* \mathcal{Q}_0(y - x).$$

Die rechte Seite ist aber in ganz K rechts-holomorph; wenn der Index in K_1 konstant ist, muss er das nach dem Identitätssatz 9.26 auch in ganz K sein. Beim Überschreiten von M ändert er sich um die soeben ausgerechnete Zahl 1, eventuell auch um andere ganze Zahlen, wenn M_0 mehrfach zu zählen ist.

(ii) Es ist soeben gezeigt worden, dass der Index ganzzahlig ist, dann muss er jeweils in den Teilgebieten des Komplementes von M konstant sein. $\square$

Mit diesem Begriff des Index kann man nun ähnlich wie in der Ebene das Innere und das Äußere einer Mannigfaltigkeit definieren, das soll hier aber unterbleiben. Ebenso kann mit diesem Index die n -te Homologiegruppe entwickelt werden, auch damit wollen wir uns nicht beschäftigen.

Für weitere Parallelen zur Ebene fehlen zum Teil noch die Beweise. Zu vermuten ist ein Satz der Form

Satz 12.50 (Erweiterte Cauchysche Integralsätze). *In einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei die Funktion f links-holomorph. Weiter sei $M \subset G$ eine hinreichend glatte geschlossene n -dimensionale Mannigfaltigkeit, d.h. sie habe keinen Rand. Dann gelten*

(i) *der Cauchysche Integralsatz*

$$\int_M dy^* f(y) = 0,$$

(ii) *die Cauchysche Integralformel* ($x \in G \setminus M$)

$$I(M, x) f(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_M \mathcal{Q}_0(y - x) dy^* f(y).$$

Ein echtes Argumentprinzip liegt in $C\ell(n)$ noch nicht vor. Ein Ansatz ist in der Definition der Nullstellenordnung mit der Formel in Folgerung 12.10 gegeben. Aber der Ausbau dieser Formel zu einem Argumentprinzip erfordert noch erhebliche Arbeit. Die Einbeziehung von Polstellen ist beim augenblicklichen Stand der Theorie schon deshalb nicht möglich, da keine Integralformel für die Ordnung einer Polstelle vorliegt.

12.4 Berechnung reeller Integrale

Mit Hilfe des Residuensatzes kann man häufig auch reelle Integrale der Form

$$\int_a^b f(x) dx$$

berechnen, dazu sollen jetzt einige Hinweise gegeben werden. Das Intervall $[a, b]$ kann endlich oder unendlich sein, zuerst nehmen wir an, dass es endlich ist. Dieses Intervall wird nun durch eine Jordankurve Γ' in der oberen Halbebene von $z = a$ nach $z = b$ ergänzt, so dass eine geschlossene Kurve $\Gamma = [a, b] + \Gamma'$ entsteht, die das Gebiet G beranden möge. Die Funktion f möge meromorph nach $G \cup \Gamma'$ fortsetzbar sein. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(x) dx + \int_{\Gamma'} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, a_k),$$

wobei die Summe die Residuen von f in G durchläuft. Die Grundlage aller folgenden Berechnung stellt das folgende Lemma dar, das nach dem französischen Mathematiker CAMILLE JORDAN (1838–1922) benannt ist.

Lemma 12.51 (Jordansches Lemma). *Es sei a fest, ferner sei (C_{R_n}) eine Folge von Kreislbögen $C_{R_n} := \{z : |z| = R_n, \text{Im } z > -a\}$ mit $R_n \rightarrow \infty$. Die Funktion f sei auf allen Kreislbögen C_{R_n} gegeben und strebe auf ihnen mit $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen Null. Dann gilt für beliebiges $\lambda > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{R_n}} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0.$$

Beweis. Es sei $M(R_n) := \max_{z \in C_{R_n}} |f(z)|$ und es werde zunächst $a > 0$ angenommen.

Aus der Abbildung 12.1 kann entnommen werden, dass $\alpha_n = \arcsin(a/R_n)$ gerade der Winkel zwischen der Verbindung des Nullpunktes mit A und der positiven reellen Achse ist. Wegen $(1/x) \arcsin x \rightarrow 1$ für $x \rightarrow 0$ gilt hier $R_n \alpha_n = a(R_n/a) \arcsin(a/R_n) \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$. Gemäß der Abbildung haben wir auf den Kreisbögen Γ_1 von A nach B und Γ_4 von D nach E die Abschätzung

$$|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda y} \leq e^{a\lambda}.$$

Daraus folgt

$$\left| \int_{\Gamma_j} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq M(R_n) e^{a\lambda} \alpha_n R_n, \quad j = 1, 4,$$

denn $\alpha_n R_n$ ist gerade die Länge der Teilbögen. Dieser Ausdruck konvergiert gegen Null, da nach Voraussetzung $M(R_n)$ gegen Null geht und $\alpha_n R_n$ beschränkt ist.

Auf dem Kreisbogen Γ_2 von B nach C verwenden wir die bekannte Ungleichung

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$$

und erhalten dort

$$|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda R_n \sin \varphi} \leq \exp\left(-\frac{2\lambda R_n}{\pi} \varphi\right).$$

Daraus ergibt sich

$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq M(R_n) R_n \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2\lambda R_n}{\pi} \varphi\right) d\varphi = M(R_n) \frac{\pi}{2\lambda} (1 - e^{-\lambda R_n}).$$

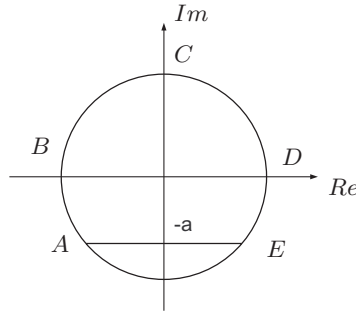


Abbildung 12.1

Wegen $M(R_n) \rightarrow 0$ konvergiert auch dieses Teilintegral gegen Null. Das Teilintegral über den Bogen Γ_3 von C nach D wird auf ganz ähnliche Weise behandelt. Somit ist das Lemma für positive a gezeigt. Für negatives a vereinfacht sich der Beweis sogar zu den Betrachtungen nur über Γ_2 und Γ_3 , so dass alles bewiesen ist. $\square$

Die Folge der Teilbögen C_{R_n} kann auch durch ein System von Bögen C_R mit einem reellen Parameter $R \rightarrow \infty$ ersetzt werden, wobei sich der Beweis nicht ändert. Dann gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0.$$

Es folgen nun eine Reihe von Beispielen:

Beispiel 12.52. Dieses Beispiel stammt von dem französischen Mathematiker PIERRE SIMON LAPLACE (1749–1827), dem wir noch des öfteren begegnen werden. Berechnet werden soll das Integral

$$I := \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + c^2} dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen dazu den Integranden durch

$$F(z) := \frac{e^{iz}}{z^2 + c^2}$$

ins Komplexe fort. Um das Jordansche Lemma anzuwenden, haben wir $\lambda = 1$ und $f(z) = 1/(z^2 + c^2)$ zu wählen. Dabei gilt auf $|z| = R$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{R^2 - c^2},$$

und dieser Ausdruck strebt unabhängig vom Argument von z gegen Null für $R \rightarrow \infty$. Wählen wir weiterhin im Jordanschen Lemma $a = 0$, so ist C_R der Halbkreisbogen um Null vom Radius R in der oberen Halbebene. Das Jordansche Lemma liefert somit

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{C_R} \frac{1}{z^2 + c^2} e^{iz} dz \rightarrow 0$$

für $R \rightarrow \infty$. Nun wenden wir den Residuensatz auf den oberen Halbkreis an:

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + c^2} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + c^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(F, ci) = 2\pi i \frac{e^{-c}}{2ci} = \frac{\pi}{c} e^{-c}.$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass offenbar die einzige Polstelle in der oberen Halbebene bei ic liegt und $z^2 + c^2 = (z - ic)(z + ic)$ ist. Für $R \rightarrow \infty$ ergibt sich schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + c^2} dx = \frac{\pi}{c} e^{-c}.$$

Durch Trennung von Real- und Imaginärteil erhalten wir noch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + c^2} dx = \frac{\pi}{c} e^{-c}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + c^2} dx = 0,$$

das letztere Integral ergibt sich auch aus der Tatsache, dass $\sin$ eine ungerade Funktion ist. Da $\cos$ gerade ist, kann man für das ursprünglich gesuchte Integral noch

$$I = \frac{\pi}{2c} e^{-c}$$

ablesen.

Beispiel 12.53. Dieses Beispiel stammt schon von EULER aus dem Jahre 1781. Es soll das Integral

$$I := \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

berechnet werden. Als Fortsetzung ins Komplexe wählen wir

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{z}.$$

Diese Funktion hat an der Stelle 0 einen einfachen Pol. Für die Anwendung des Jordanschen Lemmas ist $f(z) = 1/z$ zu wählen, $a = 0$ und $\lambda = 1$. Da der Pol auf unserem Integrationsweg liegt, umgehen wir ihn durch einen kleinen Halbkreis C_ε vom Radius ε in der oberen Halbebene:

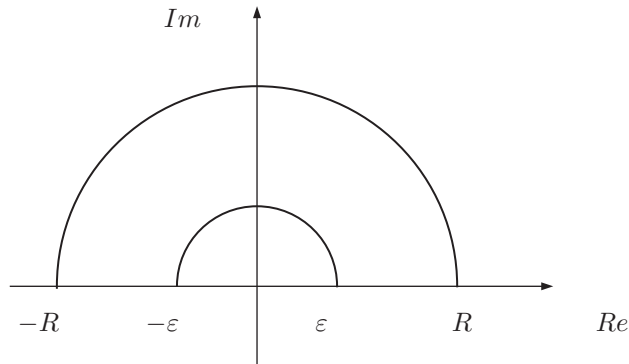


Abbildung 12.2

Wir wenden auf das in der Abbildung skizzierte Gebiet, begrenzt von den beiden Halbkreisbögen C_R und C_ε und den Strecken $[-R, -\varepsilon]$ und $[\varepsilon, R]$, den Integralsatz von Cauchy an,

$$\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} - \int_{C_\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R + \int_{C_R} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Wegen $|f(z)| = 1/R \rightarrow 0$ auf C_R liefert das Jordansche Lemma

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Es bleibt das Integral über den Kreisbogen C_ε abzuschätzen. In der Nähe des Nullpunktes gilt

$$f(z) = \frac{1}{z} + P(z), \quad P(z) = \frac{e^{iz} - 1}{z},$$

dabei ist $|P(z)| \leq K$ mit einer geeigneten Konstanten K . C_ε wird durch $z = \varepsilon e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, parametrisiert, so dass wir schließlich erhalten

$$\int_{C_\varepsilon} f(z) dz = \int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z} + \int_{C_\varepsilon} P(z) dz = -\pi i + O(\varepsilon)$$

oder

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i.$$

Transformieren wir in der letzten Zeile im ersten Integral noch die Variable durch $x' := -x$, so folgt

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = \pi i,$$

wobei das Integral wieder als eigentliches Integral existiert (allerdings konvergiert es nicht absolut), und daraus

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Beispiel 12.54. Wir wenden uns jetzt einer ganzen Klasse von reellen Integralen zu, die die Form

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$$

haben. Dabei sei $R(x, y)$ eine rationale Funktion von zwei Veränderlichen, also ein Quotient von zwei Polynomen in x und y , wobei weiter vorauszusetzen ist, dass $R(\cos t, \sin t)$ für alle in Frage kommenden t endlich ist. Wenn t das Intervall $[0, 2\pi]$ durchläuft, so bewegt sich $z = e^{it}$ auf der Einheitskreislinie. Wegen

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$$

ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right) \frac{dz}{z}.$$

Der Integrand ist jetzt eine rationale Funktion: $F(z)$ und der Residuensatz liefert schließlich

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi \sum_k \operatorname{Res}(F, a_k),$$

wobei die Summe über die Residuen von F in $|z| < 1$ läuft. Als Beispiel sei der Integrand

$$R(\cos t, \sin t) = \frac{1}{1 + 3 \sin^2 t}$$

betrachtet. Dafür ist

$$F(z) = \frac{1}{z} \left[\frac{1}{1 + \frac{-3}{4}(z - z^{-1})^2} \right] = \frac{-4z}{3(z^2 - 3)(z + \frac{1}{\sqrt{3}})(z - \frac{1}{\sqrt{3}})},$$

im Einheitskreis liegen nur die einfachen Pole $1/\sqrt{3}$ und $-1/\sqrt{3}$. Deren Residuen berechnen sich zu

$$\operatorname{Res}(F, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{4}, \quad \operatorname{Res}(F, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{4},$$

damit ergibt sich das gesuchte Integral zu

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + 3 \sin^2 t} = \pi.$$

12.5 Aufgaben

1. Man zeige, dass die Ordnung k einer Nullstelle einer holomorphen Funktion f in einem Punkt a gegeben wird durch die Formel

$$k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Dabei sei γ eine einfach geschlossene Kurve, innerhalb derer keine weitere Nullstelle von f liegt. Man kann für γ etwa einen Kreis um a von genügend kleinem Radius wählen.

2. Man zeige, dass aus der Konvergenz des unendlichen Produktes $\prod (1 + a_n)$ die Konvergenz der Reihe $\sum \log(1 + a_n)$ folgt. Dabei ist immer der Hauptwert des Logarithmus zu wählen.

3. Man zeige, dass

$$\prod \left(1 - \frac{z}{c+n} \right) e^{z/n}$$

für alle $c \in \mathbb{C}$ und $n = 0, 1, \dots$ konvergiert, wenn die Konstante c keine negative ganze Zahl ist.

4. Man bestimme die isolierten Singularitäten von

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

und berechne jeweils das Residuum. Man gebe die ersten fünf Koeffizienten der Laurentreihe um den Punkt $z = 0$ an.

5. Man beweise die fehlenden Schritte aus dem Beispiel 12.21, also die Gleichung

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

6. Man beweise die Gleichung

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - n^2}.$$

7. Man beweise den Riemann–Fueterschen Hebbarkeitssatz 12.23: *Die Funktion f sei in $0 < |x - x_0| < R$ im Sinne von $\mathcal{C}\ell(n)$ holomorph und habe in x_0 eine hebbare Singularität. Dann existiert ein Wert a_0 , so dass die durch $f(x_0) := a_0$ erweiterte Funktion in $B_R(x_0)$ holomorph ist.*
8. Man beweise den Satz von Mittag-Leffler 12.26 in $\mathcal{C}\ell(n)$: *Zu gegebenen a_k mit $|a_k| \leq |a_{k+1}| \rightarrow \infty$ und zu gegebenen Hauptteilen $H_k(x)$ in den a_k gibt es holomorphe Polynome $P_k(x)$, so dass die Reihe*

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} (H_k(x) - P_k(x))$$

eine im $\mathbb{R}^{n+1}$ meromorphe Funktion mit den Polstellen a_k und den Hauptteilen $H_k(x)$ darstellt.

9. Man beweise

$$d\{g(dx_i \wedge dx)^* f\} = -\{(\partial_i g) dx^* f + g dx^* (\partial_i f)\} + \{(g \bar{\partial}) dx_i^* f + g dx_i^* (\bar{\partial} f)\}$$

(vgl. Lemma 12.48).

10. Es sei $R(x)$ eine rationale Funktion auf der reellen Achse, die auf der reellen Achse keine Polstellen besitzt und für $x \rightarrow \infty$ mindestens von zweiter Ordnung verschwindet, d.h. $x^2|R(x)|$ sei beschränkt. Man bilde die Gaußsche Ebene durch

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

auf die w -Ebene ab. Man bestimme auch die Umkehrabbildung und das Integral, das aus

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$$

durch diese Abbildung hervorgeht. Durch welche Residuen kann das Integral dann ausgedrückt werden? Man betrachte das Beispiel

$$R(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

11. Man berechne das Integral

$$I = \int_{|z+2|=4} \frac{dz}{(z-1)(z+1)(z+i)}.$$

12. Man berechne

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

13. Man berechne die *Fresnelschen Integrale*:

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

13 Spezielle Funktionen

13.1 Eulersche Gammafunktion

13.1.1 Definition und Funktionalgleichungen

In diesem Abschnitt soll eine erste nicht elementare Funktion in $\mathbb{C}$ vorgestellt und untersucht werden, das ist die *Eulersche Gammafunktion*, die auch als *Eulersches Integral 2. Gattung* bezeichnet wird, Euler hat diese Funktion erstmals 1764 untersucht. Sein Ziel war es, eine Interpolation der Fakultät zu finden.

Definition 13.1 (Gammafunktion). Für $\operatorname{Re} z > 0$ heißt die durch das Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

gegebene Funktion *Gammafunktion*.

In diesem Integral ist die Potenz mit komplexem Exponenten wegen der reellen Basis leicht zu erklären durch

$$t^{z-1} := e^{(z-1) \ln t}.$$

Das ist eine eindeutig erklärte holomorphe Funktion in z . Diese Definition werden wir im Folgenden auch bei ähnlichen Integralen stets stillschweigend verwenden. Natürlich müssen wir noch ein Wort zur Konvergenz des Integrals sagen: Wegen $|t^{z-1}| = t^{x-1}$ und der e -Funktion e^{-t} ist die Konvergenz für $t \rightarrow \infty$ für alle x gesichert. Die größeren Schwierigkeiten bereitet die untere Grenze: Da dort $e^{-t} \rightarrow 1$ für $t \rightarrow 0$, kommt es allein auf t^{x-1} an, dessen Integral gerade für $x > 0$ konvergiert. Also ist die Definition für $x = \operatorname{Re} z > 0$ sinnvoll.

Wir wollen nun erste Eigenschaften von Γ beweisen:

Satz 13.2. (i) *Das Integral für $\Gamma(z)$ konvergiert für alle $0 < \rho \leq \operatorname{Re} z \leq R$ absolut und gleichmäßig, Γ ist also eine für $\operatorname{Re} z > 0$ holomorphe Funktion, die für $z = x > 0$ positiv ist.*

(ii) *Für $\operatorname{Re} z > 0$ gilt die Funktionalgleichung*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Allgemeiner hat man für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)\Gamma(z).$$

(iii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Wir haben in Γ eine holomorphe Funktion in der rechten Halbebene definiert, die Erklärung auch in der linken Halbebene folgt sogleich. Tatsächlich interpoliert die Funktion die Fakultäten, wie (iii) zeigt.

Beweis. (i) Für $\rho \leq \operatorname{Re} z \leq R$ gilt

$$\int_0^\infty |t^{z-1}| e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{\rho-1} dt + \int_1^\infty t^{R-1} e^{-t} dt,$$

und die beiden rechten Integrale konvergieren gleichmäßig in x , denn dieses kommt gar nicht mehr vor. Nach Abschnitt 9.1 kann dann unter dem Integral differenziert werden, und Γ ist eine für $\operatorname{Re} z > 0$ holomorphe Funktion. Da der Integrand für reelle $x > 0$ positiv ist, ist $\Gamma(x)$ dort positiv.

(ii) Für $\operatorname{Re} z > 0$ integrieren wir partiell,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -t^z e^{-t} \Big|_{t=0}^\beta + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).$$

Die allgemeinere Formel ergibt sich natürlich durch eine einfache Induktion nach n .

(iii) Das Ergebnis folgt sofort durch Induktion aus (ii), $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, wenn man noch

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -e^{-t} \Big|_0^\beta = 1$$

berücksichtigt. □

Wir können nun die Definition von Γ in die linke Halbebene ausdehnen:

Definition 13.3 (Gammafunktion). Für $0 \geq \operatorname{Re} z > -n$ sei $\Gamma(z)$ durch

$$\Gamma(z) := \frac{1}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)} \Gamma(z+n)$$

definiert. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt werden kann, erfasst diese Definition jeden Punkt in $\mathbb{C}$.

Gemäß Abschnitt 6 haben wir mit dieser Definition Γ holomorph mit Ausnahme der negativen ganzen Zahlen in die linke Halbebene fortgesetzt. Der Identitätssatz besagt, dass eine solche Fortsetzung eindeutig festgelegt ist, so dass die Formeln für verschiedene n stets zu derselben Definition führen.

Folgerung 13.4. Die Funktion Γ ist in der ganzen Ebene $\mathbb{C}$ meromorph, sie hat genau in den Punkten $z_n = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, einfache Pole mit den Residuen

$$\operatorname{Res}(\Gamma(z), z_n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Im Punkt $z = \infty$ hat Γ eine wesentliche Singularität.

Beweis. Da $\Gamma(z+n)$ für $x > -n$ holomorph ist, gilt dies auch für $\Gamma(z)$ bis auf die durch den Nenner in der Definition angegebenen Pole in $0, 1, 2, \dots, n-1$. Wegen des beliebigen n ist also $\Gamma(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ holomorph bis auf die Pole in den nichtpositiven ganzen

Zahlen. Wie die Definition weiter zeigt, sind die Pole einfach, das Residuum berechnet sich daher zu

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(\Gamma(z), -n) &= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -n} \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n-1)}\Gamma(z+n+1) = \frac{1}{(-1)^n n!}\Gamma(1). \end{aligned}$$

Da $z = \infty$ Häufungspunkt von Polstellen ist, liegt dort eine wesentliche Singularität vor. □

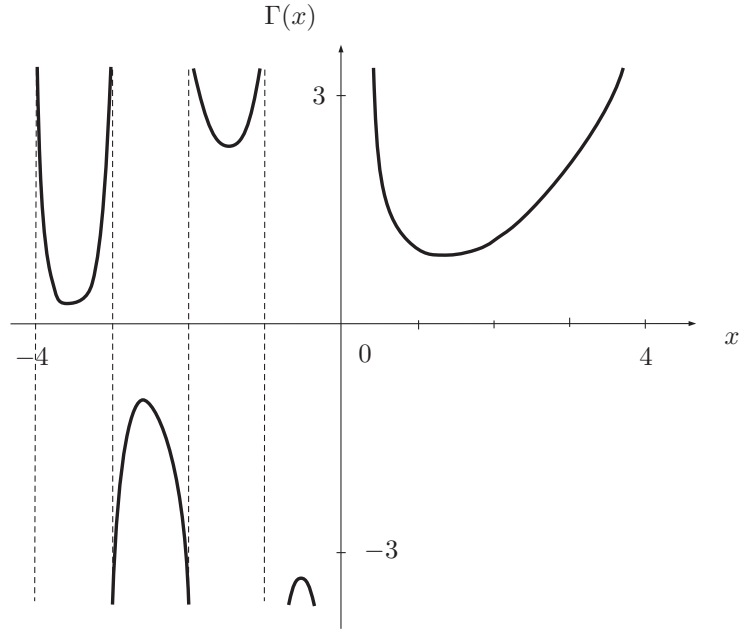


Abbildung 13.1

Wir wollen nun einige – zum Teil überraschende – Eigenschaften von Γ beweisen, eine ausführliche Darstellung findet sich in der “Bibel” der klassischen Analysis, dem WHITTAKER–WATSON [157], wir gehen hier weitgehend nach einem auch klassischen Buch von E. C. TITCHMARSH vor [153]. Bevor wir die weiteren Funktionalgleichungen beweisen, folgt ein

Lemma 13.5 (Betafunktion). Für $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} \zeta > 0$ gilt

$$B(z, \zeta) := \frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)} = \int_0^\infty \frac{u^{\zeta-1}}{(1+u)^{z+\zeta}} du = \int_0^1 \lambda^{z-1}(1-\lambda)^{\zeta-1} d\lambda.$$

Die Betafunktion $B(z, \zeta)$ heißt auch Eulersches Integral 1. Gattung.

Beweis. In dem Produkt

$$\Gamma(z)\Gamma(\zeta) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \int_0^\infty \tau^{\zeta-1} e^{-\tau} d\tau$$

können wir für $\operatorname{Re} z > 0$ und $\operatorname{Re} \zeta > 0$ wegen der absoluten und lokal gleichmäßigen Konvergenz die Integrationsreihenfolge beliebig vertauschen; wir führen zuerst die Variablensubstitution $\tau = tu$, $d\tau = tdu$ durch, danach $v = t(1+u)$, $dv = (1+u)dt$. Das ergibt

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\zeta) &= \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \int_0^\infty t^\zeta u^{\zeta-1} e^{-tu} du \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{\zeta-1}}{(1+u)^{z+\zeta}} du \int_0^\infty v^{z+\zeta-1} e^{-v} dv \\ &= \Gamma(z+\zeta) \int_0^\infty \frac{u^{\zeta-1}}{(1+u)^{z+\zeta}} du.\end{aligned}$$

Das zweite Integral im Lemma kann mit Hilfe der Substitution

$$\lambda = \frac{1}{1+u}, \quad u = \frac{1-\lambda}{\lambda}, \quad du = -\frac{d\lambda}{\lambda^2},$$

leicht umgerechnet werden. □

Satz 13.6 (Legendresche Verdoppelungsformel). (i) Es gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(ii) Für alle $z \in \mathbb{C}$ hat man

$$\Gamma(2z)\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}),$$

das ist die Legendresche Verdoppelungsformel.

Allein der Wert von $\Gamma(\frac{1}{2})$ ist schon erstaunlich, denn von π ist dem definierenden Integral nichts anzusehen. Die Formel ist von dem französischen Mathematiker ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1751–1833) angegeben worden.

Beweis. (i) Wir setzen im Lemma 13.5 $z = \zeta = \frac{1}{2}$ und erhalten

$$\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = \Gamma(1) \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}(1+u)} = 2 \arctan \sqrt{u} \Big|_0^\infty = \pi.$$

Das ist wegen $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$ die Behauptung.

(ii) Für $z = \zeta$ in Lemma 13.5 erhalten wir

$$\frac{\Gamma^2(z)}{\Gamma(2z)} = \int_0^1 \lambda^{z-1} (1-\lambda)^{z-1} d\lambda = 2 \int_0^{1/2} \lambda^{z-1} (1-\lambda)^{z-1} d\lambda,$$

letzteres wegen der Symmetrie um $\lambda = 1/2$. Substituiert man hier

$$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{t}, \quad \lambda(1-\lambda) = \frac{1}{4}(1-t), \quad d\lambda = -\frac{1}{4} \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

so ergibt sich wieder nach Lemma 13.5

$$\frac{\Gamma^2(z)}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z} \int_0^1 (1-t)^{z-1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2^{1-2z} \frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}.$$

Das war zu beweisen, wobei noch bemerkt sei, dass der Beweis nur für $\operatorname{Re} z > 0$ durchgeführt wurde. Wegen des Identitätssatzes gilt solch eine Funktionalgleichung dann aber für den ganzen Definitionsbereich der beteiligten Funktionen, also hier für $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. □

Eine weitere erstaunliche Funktionalgleichung schließt sich an, wobei der Beweis eine schöne Übung zum Residuensatz ist.

Satz 13.7. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Beweis. Wir wählen in Lemma 13.5 den Fall $\zeta = 1 - z$, also

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{u^{-z}}{1+u} du,$$

und beschränken uns zunächst auf reelle $z = x$ mit $0 < x < 1$. Dann betrachten wir das Integral in einer komplexen u -Ebene längs des folgenden Weges γ : Zunächst gehen wir längs der reellen Achse von $u = \rho$ bis $u = R$, $0 < \rho < 1 < R$, dann längs des positiv durchlaufenen Kreises $|u| = R$, dann zurück längs der reellen Achse von $u = R$ nach $u = \rho$, und schließlich auf dem negativ durchlaufenen Kreis $|u| = \rho$ zurück zum Ausgangspunkt. Das Problem ist das Argument des komplexen u : Beginnen wir auf der reellen Achse mit $\arg u = 0$, so erreichen wir nach dem Umlauf auf dem Kreis $|u| = R$ den Wert $\arg u = 2\pi$, was wir bei dem zweiten Integral längs der reellen Achse zu beachten haben. Das geschlossene Integral werten wir mit dem Residuensatz aus, so dass ein einfacher Pol bei $u = -1$ zu berücksichtigen ist, dessen Residuum gleich $(-1)^{-x} = e^{-i\pi x}$ ist:

$$\begin{aligned} 2\pi i e^{-i\pi x} &= \int_\gamma \frac{u^{-x} du}{1+u} \\ &= \int_\rho^R \frac{e^{-x \ln t} dt}{1+t} + \int_R^\rho \frac{e^{-x(\ln t + 2\pi i)} dt}{1+t} \\ &\quad + i \int_0^{2\pi} \frac{R^{1-x} e^{-i(x-1)\varphi} d\varphi}{1 + R e^{i\varphi}} + i \int_{2\pi}^0 \frac{\rho^{1-x} e^{-i(x-1)\varphi} d\varphi}{1 + \rho e^{i\varphi}} \\ &= (1 - e^{-2\pi i x}) \int_\rho^R \frac{t^{-x} dt}{1+t} + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

I_3 bezeichnet das Integral über den Kreis mit dem Radius R und I_4 das Integral über den Kreis mit dem Radius ρ . Beide Integrale streben für $R \rightarrow \infty$ bzw. $\rho \rightarrow 0$ gegen Null, denn

$$|I_3| \leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{1-x} d\varphi}{R-1} \leq 2\pi \frac{R^{1-x}}{R-1}.$$

Letzteres geht wegen $0 < x < 1$ mit $R \rightarrow \infty$ gegen Null. Eine sehr ähnliche Überlegung liefert dann auch $I_4 \rightarrow 0$ für $\rho \rightarrow 0$. Es bleibt

$$2\pi i e^{-i\pi x} = (1 - e^{-2\pi i x}) \int_0^\infty \frac{t^{-x} dt}{1+t} = (1 - e^{-2\pi i x}) \Gamma(x) \Gamma(1-x)$$

oder

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Diese Gleichung ist also auf der Strecke $0 < \operatorname{Re} z < 1$ bewiesen. Da auf beiden Seiten holomorphe Funktionen stehen (abgesehen von den Polen) und die Strecke eine Menge mit Häufungspunkt ist, gilt die Gleichung in der ganzen Ebene. $\square$

13.1.2 Stirlingsche Formel

Nun soll noch eine weitere wichtige Eigenschaft der Gammafunktion bewiesen werden, die das Verhalten für $\operatorname{Re} z \rightarrow \infty$ betrifft, sie stammt von dem schottischen Mathematiker JAMES STIRLING (1692–1770). Um den Beweis nicht zu lang werden zu lassen, umrahmen wir ihn mit einigen Lemmata, wobei das nächste die spätere Produktdarstellung der Gammafunktion umfasst:

Lemma 13.8. Für $\operatorname{Re} z > 0$ gilt die Formel

$$\log \Gamma(z) = -\gamma z - \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n} - \log \left(1 + \frac{z}{n} \right) \right),$$

dabei ist γ die so genannte Eulersche Konstante

$$\gamma := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} - \log N \right) = 0,5772157 \dots$$

Beweis. Wir wenden wieder Lemma 13.5 an, diesmal auf $z - h$ und h und setzen zuerst $\operatorname{Re} z > 1$ voraus. Es gilt

$$\frac{\Gamma(z-h)\Gamma(h)}{\Gamma(z)} = \int_0^1 t^{h-1} (1-t)^{z-h-1} dt.$$

Wir entwickeln beide Seiten nach h und vergleichen die Koeffizienten von $h^0 = 1$, wobei h reell mit $0 < h < x$ ist. Für die linke Seite gilt

$$\frac{1}{\Gamma(z)} (\Gamma(z) - h\Gamma'(z) + \dots) \left(\frac{1}{h} - a_0 + \dots \right) = \frac{1}{h} - \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - a_0 + \dots,$$

wobei $-a_0$ der entsprechende Koeffizient der Laurentreihe von $\Gamma(h)$ um $h = 0$ ist. Für die rechte Seite ergibt sich

$$\frac{t^h}{h} \Big|_{t=0}^1 + \int_0^1 t^{h-1} [(1-t)^{z-h-1} - 1] dt = \frac{1}{h} + \int_0^1 [(1-t)^{z-1} - 1] \frac{dt}{t} + o(1)$$

für $h \rightarrow 0$. Dabei ist die -1 in der eckigen Klammer ein Konvergenz erzeugender Summand bei $t = 0$, und das letzte Integral ist gerade der Wert des vorangehenden bei $h = 0$. Es folgt

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^1 [1 - (1-t)^{z-1}] \frac{dt}{t} - a_0,$$

hierin setzen wir

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{1 - (1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-t)^n$$

und integrieren gliedweise über das Intervall $[\varepsilon, 1]$. Danach betrachten wir den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ und erhalten

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right) - a_0.$$

Fasst man nun $1/(n+1)$ mit dem nächstfolgenden $1/(n+1+z)$ zusammen, so ergibt sich

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \right) - a_0.$$

Hier integrieren wir auf der Verbindungsstrecke von $c > 0$ nach z ,

$$\log \Gamma(z) - \log \Gamma(c) - \log c = -\log z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-c}{n} - \log \frac{n+z}{n+c} \right) - a_0(z-c),$$

wobei wir für die Logarithmen den Hauptwert des Argumentes wählen wollen. Wegen $\Gamma(c)c = \Gamma(c+1) \rightarrow 1$ für $c \rightarrow 0$ ergibt dies fast die Behauptung:

$$\log \Gamma(z) = -a_0 z - \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n} - \log \left(1 + \frac{z}{n} \right) \right).$$

Um den Wert von a_0 zu bestimmen, setzen wir $z = 1$ ein, das liefert

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N+1) \right) =: \gamma, \end{aligned}$$

wobei man wegen $\ln(N+1) - \ln N = \ln(1+1/N) \rightarrow 0$ statt $\ln(N+1)$ auch $\ln N$ setzen kann. $\square$

Nun kommen wir zu unserem angekündigten Satz:

Satz 13.9 (Stirlingsche Formel). Für $\operatorname{Re} z > 0$ und gleichmäßig für $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, $\delta > 0$, gilt

$$\log \Gamma(z) = (z - \tfrac{1}{2}) \log z - z + \tfrac{1}{2} \ln 2\pi + R(z)$$

mit dem Restglied

$$R(z) = \int_0^{\infty} \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t+z} dt = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

für $z \rightarrow \infty$, dabei sei $[t]$ die größte ganze Zahl $\leq t$.

Zur Strukturierung des doch umfangreichen Beweises seien noch zwei Zwischenbehauptungen als Lemma vorangestellt, wobei der erste Teil eine gewisse Interpolationsaussage macht, der zweite ist bereits die Stirlingsche Formel für ganzzahlige Werte von z , die wir aber im Beweis schon benötigen:

Lemma 13.10. (i) Für reelles $c > 0$ und reelles $z = x > 0$ gilt

$$\Gamma(x+c) = \Gamma(x) x^c \left(1 + O\left(\frac{1}{x^{c+1}}\right) \right).$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$\ln(n!) = \ln \Gamma(n+1) = (n + \tfrac{1}{2}) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Beweis. (i) Zuerst sei $c > 1$. Nach Lemma 13.5, das sehr zentral für die Gammafunktion ist, gilt

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(c)}{\Gamma(x+c)} = \int_0^1 \lambda^{x-1}(1-\lambda)^{c-1} d\lambda,$$

und mit $\lambda = e^{-t}$, $d\lambda = -e^{-t}dt$, folgt

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x)\Gamma(c)}{\Gamma(x+c)} &= \int_0^\infty e^{-tx}(1-e^{-t})^{c-1} dt \\ &= \int_0^\infty t^{c-1} e^{-tx} dt - \int_0^\infty \{t^{c-1} - (1-e^{-t})^{c-1}\} e^{-xt} dt \\ &= x^{-c} \Gamma(c) - R(c, x). \end{aligned}$$

Hierbei steht $R(c, x)$ für das letzte der beiden Integrale. Wegen $1 - e^{-t} < t$ für $t > 0$ ist das letzte Integral positiv, wegen $1 - e^{-t} > t - t^2/2$ für $0 < t < 1$ ist dies insgesamt durch

$$\begin{aligned} R(c, x) &\leq \int_0^1 \{1 - (1-t/2)^{c-1}\} t^{c-1} e^{-xt} dt + \int_1^\infty t^{c-1} e^{-xt} dt \\ &\leq K \int_0^1 t^c e^{-xt} dt + \int_1^\infty t^c e^{-xt} dt \leq \frac{K+1}{x^{c+1}} \Gamma(c+1) \end{aligned}$$

abzuschätzen, wobei $(1-t/2)^{c-1} \geq 1 - Kt$ für ein geeignetes K verwendet worden ist. Das ist nach geringer Umformung die Behauptung. Für die Werte $c \leq 1$ folgt die Behauptung aus der Funktionalgleichung 13.2 (ii).

(ii) Für die nachfolgenden Zeilen kann man entweder das Riemann-Stieltjes-Integral verwenden oder direkt nachrechnen, dass $([t]$ sei die größte ganze Zahl kleiner t)

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \sum_{k=1}^n \ln k = \int_{1-}^{n+} \ln t d[t] = [t] \ln t \Big|_{1-}^{n+} - \int_1^n \frac{[t]}{t} dt \\ &= (n + \tfrac{1}{2}) \ln n - n + 1 - \int_1^n \frac{[t] - t + \tfrac{1}{2}}{t} dt. \end{aligned}$$

Der Zähler im Restglied ist wegen der nachfolgenden Eigenschaften so speziell gewählt worden: Es sei

$$\Phi(t) := \int_1^t ([\tau] - \tau + \tfrac{1}{2}) d\tau;$$

wegen

$$\int_m^{m+1} ([\tau] - \tau + \tfrac{1}{2}) d\tau = 0$$

gilt $\Phi(n) = 0$ für alle n , also ist

$$\int_1^n \frac{\Phi'(t)}{t} dt = \frac{\Phi(t)}{t} \Big|_1^n + \int_1^n \frac{\Phi(t)}{t^2} dt = \int_1^n \frac{\Phi(t)}{t^2} dt$$

monoton fallend bezüglich n und beschränkt. Es konvergiert gegen eine Konstante $-C+1$, und wir haben

$$\ln(n!) = (n + \tfrac{1}{2}) \ln n - n + C + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Um die Konstante zu bestimmen, setzen wir in der Legendreschen Verdoppelungsformel $z = n$ ein:

$$\ln \Gamma(2n) + \ln \Gamma(\tfrac{1}{2}) = (2n-1) \ln 2 + \ln \Gamma(n) = \ln \Gamma(n + \tfrac{1}{2})$$

oder mit der soeben bewiesenen Formel für $\ln \Gamma(n+1) = \ln(n!)$

$$\begin{aligned} (2n-1 + \tfrac{1}{2}) \ln(2n-1) - (2n-1) + C + \ln \sqrt{\pi} \\ = (2n-1) \ln 2 + 2(n - \tfrac{1}{2}) \ln(n-1) - 2(n-1) + 2C + \ln \sqrt{n-1} + o(1). \end{aligned}$$

Vergleicht man hier die konstanten Glieder, so ergibt sich

$$-\frac{1}{2} \ln 2 + \ln \sqrt{\pi} + C = -\ln 2 + 2C$$

oder

$$C = \ln \sqrt{2\pi},$$

was zu beweisen war. □

Beweis der Stirlingschen Formel. Aus dem dem Satz vorangehenden Lemma entnehmen wir

$$\log \Gamma(z) = -\gamma z - \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n} - \log \left(1 + \frac{z}{n} \right) \right).$$

Hier ersetzen wir die Summe von 1 bis ∞ durch eine von 1 bis N und lassen $N \rightarrow \infty$ streben. Addieren und subtrahieren wir in der Summe dann $z \ln N$, so hebt sich ein Teil des Grenzwertes gegen γz weg und es verbleibt

$$\log \Gamma(z) = -\log z + \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ z \ln N - \sum_{n=1}^N \log \left(1 + \frac{z}{n} \right) \right\}.$$

Den Ausdruck unter dem Grenzwert kürzen wir mit S_N ab, also

$$S_N = z \ln N + \ln(N!) - \sum_{n=1}^N \log(n+z). \quad (*)$$

Wir führen jetzt das im Satz angegebene Restglied ein, zumindest zwischen den Grenzen 0 und N :

$$\begin{aligned} R_N : &= \int_0^N \frac{[t] - t + \frac{1}{2}}{t+z} dt = -N + \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{n+z+\frac{1}{2}}{t+z} dt \\ &= -N + \sum_{n=0}^{N-1} \left[(n+z+\tfrac{1}{2}) \log(n+1+z) - (n+z+\tfrac{1}{2}) \log(n+z) \right]. \end{aligned}$$

Durch Addition und Subtraktion einer 1 in der ersten Klammer in der Summe entsteht eine Teleskopsumme und wir erhalten

$$R_N = -N - (z + \tfrac{1}{2}) \log z + (N + z + \tfrac{1}{2}) \log(N+z) - \sum_{n=1}^N \log(n+z).$$

Über die letzte Summe setzen wir dies in S_N ein und verwenden das vorangehende Lemma 13.10 (ii) zur Elimination von $\ln(N!)$:

$$\begin{aligned} S_N &= z \ln N + \ln(N!) + N + \left(z + \frac{1}{2}\right) \log z - \left(N + z + \frac{1}{2}\right) \log(N + z) + R_N \\ &= \left(z + \frac{1}{2}\right) \log z - z \log \left(1 + \frac{z}{N}\right) - \left(N + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{z}{N}\right) + \ln \sqrt{2\pi} + R_N + o(1) \end{aligned}$$

für $N \rightarrow \infty$. Führen wir den Grenzwert $N \rightarrow \infty$ aus, so bleibt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \left(z + \frac{1}{2}\right) \log z - z + \ln \sqrt{2\pi} + R(z)$$

mit dem im Satz angegebenen Restglied. Zusammen mit der obigen Formel (*) ergibt sich die Behauptung bis auf die Abschätzung des Restgliedes: Im Beweis des letzten Lemmas haben wir schon

$$\Phi(t) = \int_0^t ([\tau] - \tau + \tfrac{1}{2}) d\tau$$

verwendet, eine Funktion, die auf den natürlichen Zahlen Null ist und zwischen 0 und $-1/8$ pendelt. Wir setzen

$$R(z) = \int_0^\infty \frac{\Phi'(t)}{t+z} dt = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{(t+z)^2} dt,$$

mit $z = re^{i\varphi}$ folgt weiter

$$\begin{aligned} |R(z)| &\leq \frac{1}{8} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + r^2 + 2rt \cos \varphi} \\ &\leq \frac{1}{8} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + r^2 - 2tr \cos \delta} \\ &= \frac{\pi}{8r \sin \delta}, \end{aligned}$$

letzteres nach einer entsprechenden Auswertung des Integrals. □

13.2 Riemannsche Zetafunktion

13.2.1 Dirichletreihen

Bevor wir in diesem Abschnitt eine weitere nichtelementare Funktion in $\mathbb{C}$, die *Riemannsche Zetafunktion*, kennen lernen, werden wir kurz die Funktionenklasse der *Dirichletreihen* vorstellen, der die Riemannsche Zetafunktion angehört. Diese Funktionenklasse enthält manche interessante Funktion. Benannt sind diese Funktionen nach

JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859), dessen wallonische Vorfahren aus der Gegend von Verviers stammten. Er studierte von 1822–1826 in Paris, erhielt 1827 von der Universität Bonn den Ehrendoktor und wurde, gefördert durch ALEXANDER VON HUMBOLDT, Privatdozent und Professor in Breslau. 1829 ging er nach Berlin, wo er 1839 Ordinarius wurde, 1855 folgte er einem Ruf nach Göttingen als Nachfolger von GAUSS. Nicht nur seine bahnbrechenden Arbeiten in der Mathematik und mathematischen Physik übten einen wesentlichen Einfluss in der Mathematik aus, auch seine vorbildlichen Vorlesungen hatten große Bedeutung. Zu seinen Schülern gehören solch bedeutende Mathematiker wie B. RIEMANN, E.E. KUMMER, L. KRONECKER, G. EISENSTEIN und R. DEDEKIND.

Definition 13.11 (Dirichletreihen). Eine Reihe der Form

$$\sum \frac{a_n}{n^z}$$

heißt *Dirichletreihe*, wobei $a_n, z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist.

Sehr häufig wird bei den Dirichletreihen als Variable $s = \sigma + it$ verwendet, aber wir wollen uns von z nicht trennen. Der etwas allgemeinere Typ von Reihen,

$$\sum a_n e^{-\lambda_n z}$$

wird auch gelegentlich untersucht, man spricht von *verallgemeinerten Dirichletreihen*. Natürlich müssen wir uns über das Konvergenzverhalten einer solchen Reihe Gedanken machen:

Satz 13.12 (Konvergenzabzisse). Wenn die Dirichletreihe für z_0 konvergiert, so ist sie in dem Winkelgebiet

$$|\arg(z - z_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$$

gleichmäßig konvergent, wobei δ beliebig mit $0 < \delta < \pi/2$ ist. Damit besitzt eine Dirichletreihe eine Konvergenzabzisse

$$x_k := \inf \{x : \sum a_n n^{-x} \text{ konvergent für ein } z = x + iy\},$$

so dass sie für $\operatorname{Re} z > x_k$ konvergiert und eine holomorphe Funktion darstellt.

Beweis. Durch die Transformation $a'_n := a_n n^{-z_0}$ und $z' := z - z_0$ können wir den Konvergenzpunkt ohne weiteres nach $z_0 = 0$ transformieren. Dann ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent; sei

$$R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Es gilt $R_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Wir haben für $x > 0$

$$\sum_{n=M}^N \frac{a_n}{n^z} = \sum_{n=M}^N \frac{R_{n-1} - R_n}{n^z} = \sum_{n=M}^N R_n \left(\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z} \right) + \frac{R_{M-1}}{M^z} - \frac{R_N}{(N+1)^z}.$$

Wegen

$$\left| \frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z} \right| = \left| z \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{z+1}} \right| \leq |z| \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{x+1}} = \frac{|z|}{x} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right)$$

folgt weiter, da $|R_n| \leq \varepsilon$ für $n > M - 1$ unabhängig ist von z ,

$$\left| \sum_{n=M}^N \frac{a_n}{n^z} \right| \leq \frac{\varepsilon|z|}{x} \sum_{n=M}^N \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \right) + \frac{\varepsilon}{M^x} + \frac{\varepsilon}{(N+1)^x} \leq \frac{\varepsilon|z|}{x} \frac{2}{M^x} \leq \frac{2\varepsilon|z|}{x}.$$

Schließlich ist noch

$$\frac{|z|}{x} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{1}{|\cos \varphi|} \leq \frac{1}{\sin \delta}$$

wegen $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$. Also haben wir

$$\left| \sum_{n=M}^N \frac{a_n}{n^z} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{\sin \delta},$$

was zu beweisen war.

Ist x_k die im Satz definierte Konvergenzabzisse, so gibt es Konvergenzpunkte z_0 der Reihe mit x_0 in beliebiger Nähe von x_k . Nach dem ersten Teil des Beweises stellt die Reihe in der Halbebene $x > x_0$ eine holomorphe Funktion dar (das δ konnte beliebig klein gewählt werden), damit dann auch in der Halbebene $x > x_k$. $\square$

Ganz ähnlich sieht es mit der absoluten Konvergenz aus, allerdings sind die Verhältnisse dabei viel einfacher.

Lemma 13.13 (Absolute Konvergenz). *Das Gebiet der absoluten Konvergenz einer Dirichletreihe ist gleichfalls eine Halbebene (die in eine Ebene oder die leere Menge entarten kann), gegeben durch*

$$x > x_a := \inf \{x : \sum |a_n| n^{-x} \text{ ist konvergent}\}.$$

Beweis. Da n^{-x} mit wachsendem x kleiner wird, folgt aus der Konvergenz für ein x_0 sofort die Konvergenz für alle $x > x_0$. Da x_a (ebenso wie x_k) $+\infty$ oder $-\infty$ sein kann, kann die Konvergenzhalbebene zur leeren Menge oder zur ganzen Ebene entarten. $\square$

Übrigens müssen x_a und x_k nicht gleich sein, wie das Beispiel der Reihe

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

zeigt. Aus der Analysis ist bekannt, dass diese Reihe für $x > 1$ absolut konvergiert, es ist also $x_a = 1$. Aber nach dem Konvergenzkriterium von Leibniz (die Summanden haben abwechselndes Vorzeichen und gehen dem Betrage nach monoton gegen Null) konvergiert die Reihe für $x > 0$, es gilt also $x_k = 0 < 1 = x_a$.

13.2.2 Riemannsche Zetafunktion

Die bekannteste Dirichletreihe ist nun die *Riemannsche Zetafunktion*:

Definition 13.14 (Riemannsche Zetafunktion). Die Reihe

$$\sum \frac{1}{n^z}$$

heißt *Riemannsche Zetafunktion* und wird mit $\zeta(z)$ bezeichnet, also:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Die Reihe hat die Konvergenzabzissen $x_k = x_a = 1$, denn für $x > 1$ konvergiert sie absolut und für $z = 1$ divergiert sie als *harmonische Reihe*. Um die Riemannsche Zetafunktion rankt sich eine umfangreiche Theorie, und es gibt viele Bücher zu diesem Thema. Wir können die Probleme hier nur anreißen, dazu einen ersten Satz:

Satz 13.15 (Euler). In der Halbebene $\operatorname{Re} z > 1$ gilt

$$\zeta(z) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1},$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen zu erstrecken ist.

Unendliche Produkte sind in 12.4 definiert und dort näher behandelt worden. Hier ist dementsprechend die Konvergenz durch die Existenz von

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$$

erklärt, wobei der Grenzwert nicht Null sein darf.

Beweis. Wir bilden für beliebiges natürliches $N > 0$ das Produkt

$$\prod_N := \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1} = \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \dots\right).$$

Bei Ausmultiplikation dieser endlich vielen Reihen erhält man

$$\prod_N = 1 + \sum' \frac{1}{n^z},$$

wobei die Summation über alle natürlichen Zahlen zu erstrecken ist, die sich als Produkt von Potenzen von Primzahlen $p \leq N$ darstellen lassen. Das sind aber auf jeden Fall alle natürlichen Zahlen $\leq N$, so dass wir haben

$$\left| \prod_N - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^z} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Für $N \rightarrow \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen 0 und die Summe in den Absolutstrichen gegen $\zeta(z)$, das beweist schließlich den Satz. $\square$

Dieser Satz zeigt die Verbindung von $\zeta(z)$ mit den Primzahlen. Leider können wir diese Beziehung nicht weiter verfolgen. Nur soviel sei gesagt, dass der Primzahlsatz, der die Anzahl der Primzahlen $\leq N$ beschreibt, mit Hilfe der Aussage bewiesen werden kann, dass $\zeta(z)$ für $\operatorname{Re} z \geq 1$ keine Nullstellen hat. Immerhin zeigt die Eulersche Produktdarstellung, dass $\zeta(z)$ keine Nullstellen in $x > 1$ hat. Eine wichtige Aussage bezüglich der Zetafunktion ist die nun folgende Funktionalgleichung, zugleich zeigen wir, dass sich $\zeta(z)$ in die ganze Ebene holomorph fortsetzen lässt, abgesehen von einem einfachen Pol bei $z = 1$.

Satz 13.16 (Funktionalgleichung). *Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(z)$ kann in die ganze Ebene meromorph fortgesetzt werden und hat einen einfachen Pol bei $z = 1$ mit dem Residuum 1. $\zeta(z)$ genügt der Funktionalgleichung*

$$\zeta(1-z) = 2^{1-z} \pi^{-z} \cos \frac{\pi z}{2} \Gamma(z) \zeta(z).$$

Beweis. Aus

$$\Gamma(z) \frac{1}{n^z} = \int_0^\infty \left(\frac{\tau}{n}\right)^{z-1} e^{-\tau} \frac{d\tau}{n} = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-nt} dt$$

folgt für $x = \operatorname{Re} z > 1$

$$\Gamma(z) \zeta(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nt} dt = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt. \quad (*)$$

Wir betrachten nun das Integral

$$J(z) := \int_C \frac{(-u)^{z-1}}{e^u - 1} du,$$

wobei C der Weg längs der reellen Achse von ∞ nach δ ist, $0 < \delta < 1$, dann der positiv durchlaufene Kreis vom Radius δ um 0 und wieder zurück längs der reellen Achse von δ nach ∞ . Dieses Integral konvergiert lokal gleichmäßig in der z -Ebene, da die Konvergenz bei ∞ durch die e -Funktion gesichert ist. Damit ist J eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

Die Mehrdeutigkeit von $(-u)^{z-1} = e^{(z-1) \log(-u)}$ beseitigen wir durch die Festlegung, dass $\log(-u)$ bei $u = -\delta$ reell sein soll. Wenn $u = te^{i\varphi}$, so ist das Argument in $\log(-u)$ auf dem einlaufenden reellen Integral $-\pi$ zu wählen, damit nach einem halben positiven Umlauf um den Nullpunkt in $u = -\delta$ das Argument 0 erreicht wird. Auf dem auslaufenden reellen Integral ist das Argument in $\log(-u)$ gleich π . Fassen wir die Integrale über die reelle Achse zusammen, so ergibt sich $(\sin \pi(z-1) = -\sin \pi z)$

$$\int_\delta^\infty \left(-e^{(z-1)(\ln t - i\pi)} + e^{(z-1)(\ln t + i\pi)} \right) \frac{dt}{e^t - 1} = -2i \sin \pi z \int_\delta^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

Auf dem Kreis vom Radius δ ist der Nenner von der Form $t(1 + O(t))$ ($\delta \rightarrow 0$), während

$$(-u)^{z-1} = \delta^{x-1} e^{y(\varphi-\pi)} = O(\delta^{x-1})$$

ist. Der Integrand in dem Integral über den kleinen Kreis ist also ein $O(\delta^{x-2})$ ($\delta \rightarrow 0$), das Integral konvergiert für $x > 2$ mit δ gegen Null. Zusammen mit $(*)$ haben wir bewiesen

$$-2i \sin \pi z \Gamma(z) \zeta(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} J(z).$$

Da der Integrand von $J(z)$ bei sich veränderndem δ in $0 < \delta < 1$ keine Pole überstreicht, ist das Integral $J(z)$ von δ unabhängig und wir können den Grenzwert weglassen: Das bedeutet erst einmal für $x > 2$

$$-2i \sin(\pi z) \Gamma(z) \zeta(z) = J(z).$$

Aber wir haben damit $\zeta(z)$ in die ganze Ebene fortgesetzt, denn die anderen Funktionen sind in $\mathbb{C}$ definiert. Die einfachen Pole von $\Gamma(z)$ in den Punkten $z = 0, -1, -2, \dots$ werden gerade durch die einfachen Nullstellen von $\sin(\pi z)$ in diesen Punkten ausgeglichen, so dass $\zeta(z)$ für $\operatorname{Re} z \leq 0$ holomorph ist. Nur bei $z = 1$ wird die Nullstelle von $\sin(\pi z)$ nicht ausgeglichen, so dass dort in der Tat ein einfacher Pol von $\zeta(z)$ vorliegt. Da wir $J(z)$ nicht näher kennen, können wir das Residuum bei $z = 1$ aus der Formel (*) gewinnen:

$$\Gamma(z) \zeta(z) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt + \frac{1}{z-1} + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

gilt für $x > 0$, die Integrale konvergieren gleichmäßig in der Nähe von $z = 1$, so dass wirklich $\operatorname{Res}(\zeta(z), 1) = 1$ ist.

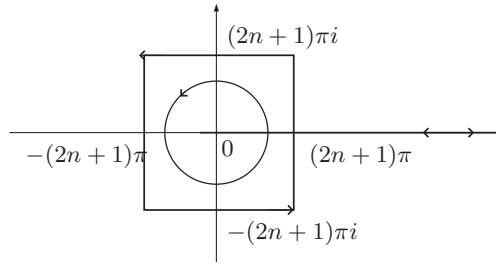


Abbildung 13.2

Nun wenden wir uns schließlich der Funktionalgleichung zu: Wir „blasen“ den Kreis C zu einem Quadrat mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt, der Seitenlänge $2(2n+1)\pi$ und den Seiten parallel zu den Achsen auf. Weiter addieren wir das Integral von ∞ nach $(2n+1)\pi$ längs der positiven reellen Achse und zurück nach ∞ . Diese neue Kurve heiße C_n . Wir überstreichen dabei die Pole von $(e^u - 1)^{-1}$ in den Punkten $\pm 2k\pi i$, $k = 1, \dots, n$. Das erfordert die Anwendung des Residuensatzes. Das Residuum des Integranden in $2k\pi i$ ist

$$\lim_{u \rightarrow 2k\pi i} (u - 2k\pi i) \frac{e^{(z-1)\log(-u)}}{e^u - 1} = e^{(z-1)(\log 2k\pi - i\pi/2)} = i(2k\pi)^{z-1} e^{-i\pi z/2},$$

denn das Argument im Logarithmus ist natürlich wie vorher zu wählen. Das Residuum des Integranden bei $-2k\pi i$ ist ganz ähnlich

$$\lim_{u \rightarrow -2k\pi i} (u + 2k\pi i) \frac{e^{(z-1)\log(-u)}}{e^u - 1} = e^{(z-1)(\log 2k\pi + i\pi/2)} = -i(2k\pi)^{z-1} e^{i\pi z/2}.$$

Die Summe der beiden Residuen ist

$$-2i^2 (2k\pi)^{z-1} \sin \frac{\pi z}{2},$$

und damit folgt

$$J(z) = \int_{C_n} \frac{(-u)^{z-1}}{e^u - 1} du - 4\pi i (2\pi)^{z-1} \sin \frac{\pi z}{2} \sum_{k=1}^n k^{z-1}.$$

Hier wollen wir natürlich $n \rightarrow \infty$ gehen lassen. Dabei gehen die Integrale über die Teile der reellen Achse selbstverständlich gegen Null. Auf dem Quadrat ist $|u| = O(n)$ und der Nenner $|e^u - 1| \geq A > 0$, letzteres, da auf den senkrechten Seiten sowieso e^u gegen ∞ oder 0 konvergiert, auf den waagrechten Seiten sind die Werte von e^u der Periodizität wegen für alle n gleich und nähern sich 1 nicht beliebig. Damit wird das Integral über das Quadrat ein $O(n^x)$, da auch die Seitenlänge des Quadrates ein $O(n)$ ist. Für $x < 0$ geht also das Integral gegen Null und wir haben dort

$$-2i \sin(\pi z) \Gamma(z) \zeta(z) = -2i (2\pi)^z \sin \frac{\pi z}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{z-1}.$$

Man sieht, dass wir auch für die Konvergenz der letzten Reihe $x < 0$ benötigen, diese Summe ist dann gerade $\zeta(1-z)$ und wir haben in der Tat bewiesen

$$\zeta(1-z) = (2\pi)^{-z} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{\sin \frac{\pi z}{2}} \Gamma(z) \zeta(z) = 2^{1-z} \pi^{-z} \cos \frac{\pi z}{2} \Gamma(z) \zeta(z).$$

Wegen des Identitätssatzes gilt dies dann für alle z , in denen die beiden Seiten holomorph sind, also mit Ausnahme der Pole in ganz $\mathbb{C}$. $\square$

Hier kann man noch ablesen: Da $\Gamma(z)$ der Stirlingschen Formel wegen für $x > 0$ keine Nullstellen hat, ebenso nicht $\zeta(z)$ für $x > 1$, wie wir oben festgestellt haben, hat $\zeta(1-z)$ dort nur die durch den $\cos(\pi z/2)$ bei $z = -2n + 1$ verursachten Nullstellen. Die Riemannsche Zetafunktion hat also bei $z = -2n$, $n = 1, 2, \dots$, Nullstellen, das sind die sogenannten trivialen Nullstellen der Zetafunktion. Bei $z = 0$ liegt keine Nullstelle vor, denn in der Funktionalgleichung wird der Pol von $\zeta(z)$ bei $z = 1$ durch die Nullstelle von $\cos(\pi z/2)$ kompensiert. Man kann zeigen, dass die Zetafunktion in dem Streifen $0 < x < 1$ unendlich viele Nullstellen hat, eben die wesentlichen. Riemann hat in seiner grundlegenden Arbeit die Vermutung ausgesprochen, dass alle wesentlichen Nullstellen auf der Geraden $x = \frac{1}{2}$ liegen, dies ist die berühmte *Riemannsche Vermutung*. Ihr Beweis ist immer noch offen. Natürlich hat man heute mit Computern nachgerechnet, dass bis zu sehr großen Werten von y tatsächlich alle wesentlichen Nullstellen auf der kritischen Geraden liegen. Aber von einem Beweis der Riemannschen Vermutung ist man immer noch sehr weit entfernt.

13.3 Automorphe Formen und Funktionen

13.3.1 Automorphe Funktionen und Formen in $\mathbb{C}$

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der Theorie der automorphen Funktionen und Formen behandelt. Sie spielen eine zentrale Rolle für viele Bereiche der

Mathematik und deren Rand- und Anwendungsgebiete. Seit Beginn des 20. Jahrhunderts ist die Theorie der holomorphen automorphen Formen zu einem Kernstück in der klassischen Funktionentheorie und in der analytischen Zahlentheorie herangewachsen.

Für die Definition der automorphen Funktionen benötigen wir als Erstes den Begriff der *diskreten Gruppe* von Möbiustransformationen:

Definition 13.17 (Diskrete Gruppe). Wir fassen die Möbiustransformationen als Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ auf, das sind die zweireihigen komplexen Matrizen mit der Determinante 1. Als Norm für ein Element

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

führen wir

$$\|T\| := (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)^{1/2}$$

ein. Dann heißt eine Untergruppe $H \subset SL(2, \mathbb{C})$ *diskret*, wenn für jedes reelle C nur endlich viele $T \in H$ existieren mit

$$\|T\| \leq C.$$

Die Gruppe $SL(2, \mathbb{Z})$ heißt speziell *Modulgruppe*.

Die Definition zeigt direkt, dass diskrete Gruppen abzählbar (oder endlich) sind. Wir geben zwei wichtige Beispiele an:

Beispiel 13.18. a) Die Gruppe $\mathbb{Z}$ ist solch eine diskrete Gruppe, zu ihr gehören die Translationen $z + m$ um eine ganze Zahl, also $a = d = 1$, $c = 0$ und $b = m \in \mathbb{Z}$.

b) Es seien ω_1, ω_2 zwei reell linear unabhängige komplexe Zahlen, also $\text{Im}(\overline{\omega}_1 \omega_2) \neq 0$. Diese spannen ein Parallelogramm in $\mathbb{C}$ auf. Die Menge $\Omega := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ist wieder eine diskrete Gruppe, ihre Elemente sind die Translationen $z + m\omega_1 + n\omega_2$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$. Dem entsprechen die Möbiustransformationen mit $a = d = 1$, $c = 0$ und $b = \omega := m\omega_1 + n\omega_2$. Die Gruppe Ω spannt also ein zweidimensionales Gitter in $\mathbb{C}$ auf. Das von ω_1, ω_2 aufgespannte Parallelogramm heißt auch *Periodenparallelogramm*.

Dies sind natürlich nur die einfachsten Beispiele diskreter Gruppen. Als Periodenparallelogramm kann man auch jedes andere Parallelogramm aus dem Gitter wählen.

Mit Hilfe der diskreten Gruppen erklären wir nun die automorphen Funktionen:

Definition 13.19. (i) Eine in einem Gebiet G holomorphe oder meromorphe Funktion f heißt dort bezüglich der diskreten Gruppe H *automorph*, wenn für alle $T \in H$ gilt

$$\text{a) } T(G) \subset G,$$

$$\text{b) } f(T(z)) = f(z).$$

- (ii) Funktionen, die in $\mathbb{C}$ bezüglich der Gruppe $\mathbb{Z}$ automorph sind, heißen *einfach periodische Funktionen*.
- (iii) Funktionen, die in $\mathbb{C}$ bezüglich der Gruppe Ω automorph sind, heißen *doppelt periodische Funktionen* oder *elliptische Funktionen*.

Die einfach periodischen Funktionen enthalten natürlich die elementaren trigonometrischen Funktionen, wir wollen uns aber nicht näher mit ihnen beschäftigen. Die elliptischen oder doppelt periodischen Funktionen wollen wir etwas genauer betrachten.

Beispiele von einfach oder doppelt periodischen Funktionen in einer komplexen Veränderlichen treten erstmals systematisch in einer Arbeit von G. EISENSTEIN (1823–1852) aus dem Jahre 1847 auf [38] sowie in Vorlesungen von K. WEIERSTRASS in 1863. Eisenstein führte die folgenden Funktionenreihen ein:

Definition 13.20 (Meromorphe translative Eisensteinreihen). Die Reihenentwicklungen

$$\epsilon_m^{(1)}(z; \mathbb{Z}) := \begin{cases} \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right), & m = 1 \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+k)^m}, & m \geq 2 \end{cases}$$

und

$$\epsilon_m^{(2)}(z; \Omega) := \begin{cases} \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), & m = 2 \\ \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z+\omega)^m}, & m \geq 3, \end{cases}$$

heißten *meromorphe translative Eisensteinreihen*. Hierbei sind Ω und $\mathbb{Z}$ die soeben beschriebenen diskreten Gruppen.

Diese Reihen stellen meromorphe Funktionen für die entsprechende Translationsgruppe dar. In den Punkten $z = k$ bzw. $z = \omega$ liegen Pole entsprechender Ordnung vor; es ist ähnlich wie beim Satz von Mittag-Leffler die gleichmäßige Konvergenz für $|z| \leq R$ bis auf Umgebungen der Pole zu zeigen. Wir verweisen dazu auf die Aufgaben 13.4.7 und 13.4.8. Wenn die gleichmäßige Konvergenz gezeigt ist, folgt sofort die einfache bzw. die Doppelperiodizität, denn der Übergang zu $z + 1$ bzw. $z + \omega_i, i = 1, 2$, bedeutet nur eine Umordnung der Reihen, die zulässig ist.

Mit den Reihen $\epsilon_m^{(1)}$ lassen sich die elementaren trigonometrischen Funktionen konstruieren, während mit dem zweiten Typ von Reihen die doppelt periodischen Weierstraßschen elliptischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen entstehen.

Die elliptischen Funktionen sind durch ihre spezielle Werteverteilung besonders ausgezeichnet. Diese Werteverteilung wird nämlich vollständig durch die folgenden drei Liouvilleschen Sätze beschrieben:

Satz 13.21 (1. Liouvillescher Satz). *Jede doppelt periodische Funktion f , die in ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, ist eine konstante Funktion.*

Beweis. Es sei f eine ganze elliptische Funktion und P ein beliebiges Periodenparallelogramm von f , P ist kompakt. Da f überall holomorph ist, ist es auf P beschränkt: Es existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in P$. Für einen beliebigen Punkt z in $\mathbb{C}$ existiert nun ein $\omega \in \Omega$, so dass $z + \omega$ in P liegt. Also ist f auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt. Nach dem Liouvilleschen Satz 7.33 ist f konstant. $\square$

Satz 13.22 (2. Liouvillescher Satz). *Die Summe der Residuen einer elliptischen Funktion f in einem Periodenparallelogramm ist Null.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass f keine Pole auf dem Rand des Periodenparallelogramms P hat. Andernfalls betrachte man in der folgenden Rechnung stattdessen ein um ein geeignetes kleines $\alpha \in \mathbb{C}$ verschobenes Periodenparallelogramm, das diese Eigenschaft besitzt. Ein solches existiert immer, weil die Polstellenmenge von f in P nur diskret und endlich sein kann. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{c \in P} \operatorname{Res}(f, c) &= \sum_{c \in P} \int_{|z-c|=\varepsilon} f(z) dz = \int_{\partial P} f(z) dz \\ &= \int_0^{\omega_1} f(z) dz + \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} f(z) dz + \int_{\omega_1+\omega_2}^{\omega_2} f(z) dz + \int_{\omega_2}^0 f(z) dz \\ &= \int_0^{\omega_1} f(z) dz + \int_0^{\omega_2} f(z+\omega_1) dz + \int_{\omega_1}^0 f(z+\omega_2) dz + \int_{\omega_2}^0 f(z) dz = 0, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Periodizität von f verwenden. $\square$

Satz 13.23 (3. Liouvillescher Satz). *Es sei P_0 das Innere des Periodenparallelogramms vereinigt mit den halboffenen Strecken $[0, \omega_1)$ und $[0, \omega_2)$, man nennt dies Zelle oder Fundamentalebereich. Eine elliptische Funktion ist durch ihre Werte in P_0 vollständig beschrieben. Dann ist die Summe der Ordnungen aller a -Stellen von f in P_0 von $a \in \hat{\mathbb{C}}$ unabhängig und wird als Ordnung von f bezeichnet:*

$$\sum_{c \in P_0} \operatorname{ord}(f - a; c) =: \operatorname{ord} f.$$

Beweis. Wir nehmen wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass f auf ∂P weder eine a -Stelle noch einen Pol hat, diese liegen dann alle im Innern von P_0 . Da f meromorph und doppelt periodisch ist, ist auch die Funktion $g(z) := f'(z)/(f(z) - a)$ doppelt periodisch und meromorph. Wenn wir auf g den vorigen Satz und das Argumentprinzip 12.40 anwenden, ergibt sich die Behauptung. $\square$

Beispiel 13.24. Die Funktionenreihen $\epsilon_m^{(2)}(z; \Omega)$ zeichnen sich nun unter den elliptischen Funktionen in der Weise aus, dass sich jede elliptische Funktion bis auf eine Konstante als *endliche* Summe aus eben diesen Reihen konstruieren lässt.

Hingewiesen sei auch darauf, dass die Funktion $\wp_2^{(2)}(z; \Omega)$ als *Weierstraßsche $\wp$ -Funktion* bezeichnet wird, das stilisierte $\wp$ wird als p gesprochen. Da der Übergang zu $-z$ nur ein Umsortieren der Reihenglieder bedeutet, ist $\wp(z)$ eine gerade Funktion,

$$\wp(-z) = \wp(z).$$

Ebenso ist die Ableitung

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z + \omega)^3}$$

ungerade. Als kleinen Einstieg in die umfangreiche Theorie der elliptischen Funktionen wollen wir noch die Differentialgleichung der $\wp$ -Funktion ableiten. Die Differenz $\wp(z) - z^{-2}$ ist in einer Umgebung des Nullpunktes holomorph und gestattet für genügend kleine $|z|$ eine Entwicklung der Form

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{20}g_2z^2 + \frac{1}{28}g_3z^4 + O(z^6).$$

Es ist nicht schwer zu sehen (vgl. Aufgabe 13.4.9), dass

$$g_2 = 60 \sum'_{\omega} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140 \sum'_{\omega} \frac{1}{\omega^6}$$

ist. Dabei bedeutet $\sum'$, dass nur über die $\omega \neq 0$ summiert wird. Nach Differentiation folgt

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + \frac{1}{10}g_2z + \frac{1}{7}g_3z^3 + O(z^5).$$

Bilden wir $\wp^3$ und $\wp'^2$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \wp^3(z) &= \frac{1}{z^6} + \frac{3}{20}g_2\frac{1}{z^2} + \frac{3}{28}g_3 + O(z^2), \\ \wp'^2(z) &= \frac{4}{z^6} - \frac{2}{5}g_2\frac{1}{z^2} - \frac{4}{7}g_3 + O(z^2) \end{aligned}$$

und damit

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3 = O(z^2).$$

Die Funktion auf der linken Seite ist holomorph in der Nähe des Nullpunktes, sie ist aber auch eine elliptische Funktion mit Polen höchstens in $\omega \in \Omega$. Sie kann daher gar keine Pole haben und nach Satz 13.21 ist sie konstant. Für $z \rightarrow 0$ liefert die rechte Seite der letzten Gleichung den Wert Null, also können wir festhalten:

Lemma 13.25. *Die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion genügt der Differentialgleichung*

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3.$$

Beispiel 13.26. Eine weitere Familie von klassischen Eisensteinreihen ist die folgende:

$$G_m(z) = \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}} (cz + d)^{-m}, \quad \text{Im } z > 0, \quad m \geq 4, \quad m \text{ gerade.}$$

Diese Reihen stellen holomorphe Funktionen in der oberen Halbebene

$$H^+(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$$

dar, sie haben offenbar in den rationalen Punkten der reellen Achse Singularitäten. Diese Funktionen $G_m(z)$ haben in jedem $z \in H^+(\mathbb{C})$ das Transformationsverhalten

$$f(T(z)) = (cz + d)^{-m} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right).$$

Dabei ist T die der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

zugeordnete Möbiustransformation. Bei solchem Transformationsverhalten nennt man f eine *automorphe Form vom Gewicht m* (hier) zur vollen Modulgruppe.

Sie sind in der Tat die klassischen Beispiele für *Modulformen* und spielen vor allem in der Zahlentheorie eine bedeutende Rolle. Dies ist darin begründet, dass in ihrer Fourierentwicklung Darstellungszahlen von Teilerpotenzsummen sowie die Riemannsche Zetafunktion auftreten:

Satz 13.27. *Es sei $m \geq 4$ eine gerade Zahl. Die Eisensteinreihen $G_m(z)$ haben auf der oberen Halbebene die folgende Fourierdarstellung:*

$$G_m(z) = 2\zeta(m) + 2 \frac{(2\pi i)^m}{(m-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{m-1}(n) e^{2\pi i n z},$$

wobei $\zeta(m)$ die Riemannsche Zetafunktion ist, und die τ_m Teilerpotenzsummen der Form

$$\tau_m(n) = \sum_{r \geq 1, r|n} r^m$$

darstellen.

Beweis. Zunächst einmal sehen wir, dass wir die Reihen $G_m(z)$ in die folgende Form umordnen können:

$$G_m(z) = 2\zeta(m) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_m^{(1)}(jz; \mathbb{Z}),$$

wobei die $\epsilon_m^{(1)}(z; \mathbb{Z})$ die in Definition 13.20 eingeführten Reihen sind. Als nächsten Schritt berechnen wir die Fourierreihendarstellung von $\epsilon_m^{(1)}$. Im Fall $m = 2$ erhält man gemäß Beispiel 12.21

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (z + n)^{-2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right)^2 = \left(\frac{2\pi i}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} \right)^2 = (2\pi i)^2 e^{2\pi i z} \left[\frac{1}{1 - e^{2\pi i z}} \right]^2$$

und für $\operatorname{Im} z > 0$

$$= (2\pi i)^2 e^{2\pi i z} \sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i z(r-1)} = (2\pi i)^2 \sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i r z},$$

wobei wir die Ableitung der geometrischen Reihe verwendet haben. Durch gliedweises Differenzieren erhält man nun mit Hilfe vollständiger Induktion für alle ganzen $m \geq 2$

$$\epsilon_m^{(1)}(z; \mathbb{Z}) = \frac{(2\pi i)^m}{(m-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{m-1} e^{2\pi i r z}.$$

Diese Darstellung setzen wir in die obige Formel für $G_m(z)$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} G_m(z) &= 2\zeta(m) + 2 \frac{(2\pi i)^m}{(m-1)!} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} r^{m-1} e^{2\pi i r j z} \\ &= 2\zeta(m) + 2 \frac{(2\pi i)^m}{(m-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{r \geq 1, r|n} r^{m-1} \right) e^{2\pi i n z}, \end{aligned}$$

was die Behauptung des Satzes ist. $\square$

Bemerkung 13.28. Eine weitere systematische Methode, um holomorphe Modulformen zur vollen Modulgruppe zu konstruieren, besteht darin, eine geeignete auf der oberen Halbebene beschränkte holomorphe Funktion $f: H^+(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ zu nehmen, die bereits zur Klasse der automorphen Formen vom Gewicht k zur Translationsgruppe $\mathbb{Z}$ gehört, und dann die Ausdrücke $f(T(z))$ über ein vollständiges Vertretersystem von Rechtsnebenklassen von $SL(2, \mathbb{Z})$ modulo der Translationsinvarianzgruppe $\mathbb{Z}$ zu summieren, d.h.

$$\sum_{T \in SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}} (cz + d)^{-m} f(T(z)).$$

Diese Reihenkonstruktion konvergiert für hinreichend grosse k und liefert dann Modulformen zur vollen Modulgruppe $SL(2, \mathbb{Z})$. Funktionenreihen dieses Typs werden oft als *Poincaréreihen* im weiteren Sinn bezeichnet. Die einfachsten nicht-trivialen Beispiele erhält man, indem man $f = 1$ setzt. Dann fallen (bis auf einen Normierungsfaktor) diese Poincaréreihen mit den klassischen Eisensteinreihen $G_m(z)$ zusammen. Andererseits lassen sich alle Modulformen von positivem geradem ganzzahligem Gewicht $k \geq 4$ zur vollen Modulgruppe $SL(2, \mathbb{Z})$ aus den klassischen Eisensteinreihen G_m konstruieren.

Die hier vorgestellte Methode hat allerdings den entscheidenden Vorteil, dass sie in einfacher Weise auch auf für viele andere diskrete Gruppen, wie etwa für wichtige zahlentheoretische Kongruenzgruppen, Beispiele von automorphen Formen liefert.

13.3.2 Automorphe Funktionen und Formen in $C\ell(n)$

Die systematische Entwicklung der allgemeinen Theorie holomorpher Modulformen in einer komplexen Veränderlichen wurde hauptsächlich von H. Poincaré, F. Klein und R. Fricke [114, 70] begründet.

O. Blumenthal (1904), C.L. Siegel (1930er Jahre) und deren Schüler begannen holomorphe Modulformen in mehreren komplexen Veränderlichen eingehend zu studieren.

H. Maaß [98] führte 1949 auch einen höherdimensionalen Typ von nicht-analytischen automorphen Formen (Maaßsche Wellenformen) ein, welche Eigenfunktionen des hyperbolischen Laplaceoperators darstellen. Diese beiden Arten von höherdimensionalen Verallgemeinerungen fanden ein sehr hohes Interesse und befinden sich weiterhin im Brennpunkt der aktuellen Forschung.

Varianten von holomorphen Siegelschen Modulformen zu quaternionischen symplektischen Gruppen und allgemeiner zu orthogonalen Gruppen genießen ein immer stärker werdendes Interesse. Wir verweisen den Leser hierzu auf die Arbeiten von A. Krieg [83] sowie von E. Freitag und C.F. Hermann [41].

Andererseits wurden von E. Kähler [67], J. Elstrodt, F. Grunewald und J. Menicke [39, 40] sowie von A. Krieg [84, 85], V. Gritsenko [51] und anderen Autoren komplexwertige Verallgemeinerungen der nicht-analytischen automorphen Formen zu diskreten Untergruppen der Vahlengruppe (Gruppe der Vahlenmatrizen gemäß Definitionen 6.16 und 6.18) in höherdimensionalen Halbräumen des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ betrachtet.

Neuerdings finden auch automorphe Formen auf m -fachen kartesischen Produkten von quaternionischen Halbräumen Interesse, wie etwa in Arbeiten von O. Richter und H. Skogman [121, 122].

Keine dieser aufgelisteten höherdimensionalen Versionen automorpher Formen stellen Lösungen der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen dar.

In Arbeiten von A.C. Dixon [36], R. Fueter [46, 48, 49, 50] und J. Ryan [123] findet man erste Beiträge zu holomorphen, Verallgemeinerungen der speziellen doppelperiodischen Weierstraßschen elliptischen Funktionen.

Eine systematische Theorie von holomorphen automorphen Formen für allgemeinere arithmetische Untergruppen der Vahlengruppe, einschliesslich Verallgemeinerungen der Modulgruppe und deren Kongruenzuntergruppen, ist in [80] entwickelt worden.

Wir folgen in diesem Abschnitt Ausführungen von R.S. Krausshar (vgl. [80]), der mit seiner Habilitation und Folgearbeiten die Grundlagen für derartige Verallgemeinerungen gelegt hat. Es soll nur ein kurzer Überblick über einige zentrale Aspekte dieser Theorie gegeben werden. Wir beginnen dabei zunächst mit der Behandlung der einfachsten Typen diskreter Untergruppen der Vahlengruppe im $\mathbb{R}^{n+1}$, und zwar mit Translationsgruppen, die auf $\mathbb{R}^{n+1}$ operieren. Für jede

beliebige Menge von p $\mathbb{R}$ -linear unabhängigen Vektoren $\omega_1, \dots, \omega_p$ in $\mathbb{R}^{n+1}$, wobei $p \in \{1, \dots, n+1\}$, stellt $\Omega_p = \mathbb{Z}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega_p$ ein p -dimensionales Gitter im $\mathbb{R}^{n+1}$ dar. Die zugehörige Translationsgruppe $\mathcal{T}(\Omega_p)$, die von den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & \omega_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird, operiert dann diskontinuierlich auf $\mathbb{R}^{n+1}$ vermöge ihrer zugehörigen Möbiustransformationen $T(x) = x + \omega_j$, $j = 1, \dots, p$. Dass diese Gruppe diskret ist, ergibt sich aus der auch hier gültigen Definition 13.17, denn es gibt nur endlich viele T mit beschränkter Norm. Grob gesprochen erhält man meromorphe automorphe Funktionen zu einer allgemeinen diskreten Translationsgruppe $\mathcal{T}(\Omega_p)$, indem man die Fundamentallösung des $\bar{\partial}$ -Operators $\mathcal{Q}_0(x) = \bar{x}/|x|^{n+1}$ bzw. auch deren Ableitungen $\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(x) = (-1)^{|\mathbf{m}|} \nabla^{\mathbf{m}}(\bar{x}/|x|^{n+1})$ gemäß Definition 7.26 an den Stellen $x + \omega_i$ über die gesamte Translationsgruppe aufsummiert. Die folgende Definition liefert eine genaue Beschreibung:

Definition 13.29 (Meromorphe Eisensteinreihen für Translationsuntergruppen). Es sei $p \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ und es seien $\omega_1, \dots, \omega_p$ $\mathbb{R}$ -linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^{n+1}$, $\Omega_p = \mathbb{Z}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega_p$ sei das zugehörige Gitter. Für Multiindizes $\mathbf{m}$ mit $|\mathbf{m}| \geq \max\{0, p-n+1\}$ seien dann die zugehörigen *meromorphen translativen Eisensteinreihen* durch

$$\epsilon_{\mathbf{m}}^{(p)}(x; \Omega_p) = \sum_{\omega \in \Omega_p} \mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(x + \omega)$$

definiert. Für $p = n$, $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ sowie für $p = n+1$, $|\mathbf{m}| = 1$ setzt man

$$\epsilon_{\mathbf{m}}^{(p)}(x; \Omega_p) = \mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(x) + \sum_{\omega \in \Omega_p \setminus \{0\}} [\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(x + \omega) - \mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(\omega)].$$

Auch für den verbleibenden Fall $p = n+1$ mit $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ können holomorphe Eisensteinreihen konstruiert werden [73], allerdings nur solche, die mindestens zwei verschiedene Singularitäten in jedem Periodenparallelotop haben.

Die Konvergenz dieser Reihen wird in ([80], Chapter 2), gezeigt. Es ist dazu unsere Abschätzung in Lemma 7.27,

$$|\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(x)| \leq \frac{C_{\mathbf{m}}}{|x|^{n+|\mathbf{m}|}},$$

und ein Lemma aus der Arbeit von Eisenstein [38] zu verwenden. Nach diesem konvergiert die Reihe

$$\sum_{(m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} |m_1\omega_1 + \dots + m_p\omega_p|^{-(p+\alpha)}$$

dann und nur dann, wenn $\alpha > 0$. Damit konvergieren die Reihen absolut bis auf die Polstellen. Die Grenzfunktion ist eine meromorphe Funktionen mit Polstellen genau in den Gitterpunkten. Die Funktionen sind p -fach periodisch, denn eine Verschiebung des Arguments um ω_i bedeutet nur eine Umnummerierung in der Reihe, was wegen der absoluten Konvergenz zulässig ist.

Die Reihen $\epsilon_{\mathbf{m}}^{(p)}$ mit $p < n$ verallgemeinern die Reihen gemäß Definition 13.20 in die Clifford-Analysis. Sie liefern elementare Grundbausteine für die Konstruktion meromorpher Verallgemeinerungen einer Anzahl klassischer trigonometrischer Funktionen, wie in ([80], Chapter 2) beschrieben ist. Die speziellen Reihen $\epsilon_{\mathbf{0}}^{(p)}$ stellen dabei p -fach periodische meromorphe Verallgemeinerungen der klassischen Kotangensfunktion dar, aus denen sich in additiver Weise p -fach periodische meromorphe Verallgemeinerungen der klassischen Tangens-, Kosekans- und Sekansfunktion sowie auch der quadrierten Kosekans- und Sekansfunktion konstruieren lassen:

Beispiel 13.30. Es bezeichne $\mathcal{V}_p(2)$ das kanonische Vertretersystem des Faktormoduls $\Omega_p/2\Omega_p$. Man erhält auf folgende Weise meromorphe Verallgemeinerungen des Tangens, Kosekans und Sekans:

$$\begin{aligned}\tan^{(p)}(x) &:= - \sum_{v \in \mathcal{V}_p \setminus \{0\}} \epsilon_{\mathbf{0}}^{(p)} \left(x + \frac{v}{2} \right) \\ \csc^{(p)}(z) &:= \frac{1}{2^{n-2}} \epsilon_{\mathbf{0}}^{(p)} \left(\frac{x}{2} \right) - \epsilon_{\mathbf{0}}^{(p)}(x) \\ \sec^{(p)}(z) &:= \sum_{v \in \mathcal{V}_p \setminus \{0\}} \csc^{(p)} \left(x + \frac{v}{2} \right).\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von $\csc^{(p)}$ und $\sec^{(p)}$ liefern uns dann noch meromorphe Verallgemeinerungen der quadrierten Kosekans- und Sekansfunktionen.

Als Folgerung aus dem Satz von Mittag-Leffler 12.26 lässt sich ferner zeigen, dass sich jede p -fach periodische meromorphe Funktion mit $p < n + 1$ als eine endliche Summe von p -fach periodischen Kotangensfunktionen $\epsilon_{\mathbf{0}}^{(p)}$ und (bzw. oder) deren partiellen Ableitungen bis auf eine ganze Funktion darstellen lässt.

Im speziellen Fall $p = n + 1$ stellen die Reihen $\epsilon_{\mathbf{m}}^{(n+1)}$ meromorphe Verallgemeinerungen der Weierstraßschen elliptischen Funktionen dar, speziell werden durch $\epsilon_{\mathbf{m}}^{(n+1)}$ mit $|\mathbf{m}| = 1$ *verallgemeinerte Weierstraßsche $\wp$ -Funktionen* definiert. Zu deren Studium haben A.C. Dixon, R. Fueter und J. Ryan erste Beiträge geliefert.

Jede $(n + 1)$ -fach periodische meromorphe Funktion im $\mathbb{R}^{n+1}$ kann bis auf eine Konstante aus endlich vielen Vertetern der Reihen $\epsilon_{\mathbf{m}}^{(n+1)}$ dargestellt werden. Das Studium der verallgemeinerten elliptischen Funktionen wurde in [80] ebenfalls weiter vorangetrieben, speziell unter zahlen- und funktionentheoretischen Gesichtspunkten einschließlich expliziter Anwendungen auf die Theorie von speziellen L^2 -Räumen.

Eine der fundamentalen Eigenschaften ist, dass alle Funktionen $\epsilon_{\mathbf{m}}^{(p)}$ durch spezielle Funktionalgleichungen, welche Verallgemeinerungen der bekannten Kotangensverdopplungsformel darstellen, charakterisiert werden können. Alle Funktionenreihen $\epsilon_{\mathbf{m}}^{(p)}$ erfüllen (ausser für die Reihe zum Index $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ im Falle $p = n+1$) die folgende Multiplikationsformel:

Satz 13.31. *Es sei Ω_p ein p -dimensionales Gitter im $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\mathbf{m}$ ein Multiindex. Für $p = n+1$ setze man zusätzlich voraus, dass $|\mathbf{m}| \geq 1$. In allen zu betrachtenden Fällen gilt*

$$r^{n+|\mathbf{m}|} \epsilon_{\mathbf{m}}^{(p)}(rx) = \sum_{v \in \mathcal{V}_p(r)} \epsilon_{\mathbf{m}}^{(p)}\left(x + \frac{v}{r}\right),$$

wobei $\mathcal{V}_p(r)$ für das kanonische Vertretersystem von $\Omega_p/r\Omega_p$ steht, $r \geq 2$ ist eine natürliche Zahl.

Es sei bemerkt, dass das kanonische Vertretersystem $\mathcal{V}_p(r)$ aus den Größen $m_1\omega_1 + \dots + m_p\omega_p$ besteht mit ganzen Zahlen m_i , $0 \leq m_i < r$. Damit hat $\mathcal{V}_p(r)$ genau r^p Elemente.

Beweisskizze. In den Fällen $|\mathbf{m}| \geq \max\{0, p - n + 1\}$ lässt sich die Formel durch direkte Umordnungsargumente herleiten. Im Fall $p = n$ und $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ benutzt man zum Beweis zunächst die folgende Identität über die nachstehende Gruppierung antipodaler Gitterpunkte:

$$\sum_{v \in \mathcal{V}_p(r) \setminus \{0\}} \sum_{\omega \in \Omega_p \setminus \{0\}} [\mathcal{Q}_0(r\omega + v) - \mathcal{Q}_0(r\omega)] = - \sum_{v \in \mathcal{V}_p(r) \setminus \{0\}} \mathcal{Q}_0(v).$$

Mit Hilfe dieser Formel und einigen etwas geschickteren Reihenumordnungsargumenten erhält man schließlich die Aussage des Satzes in diesem Fall.

Mit einem Integrationsargument kann man zunächst schließen, dass der Satz zumindest bis auf eine Paravektorkonstante $C \in \mathbb{R}^{n+1}$ auch für den verbleibenden Fall $p = n+1$, $|\mathbf{m}| = 1$ gelten muss. Mit Hilfe der sogenannten *Legendre-Relation* für verallgemeinerte elliptische Funktionen lässt sich dann ableiten, dass $C = 0$ sein muss. Damit ist der Satz für alle Fälle gezeigt. Für den ausführlichen Beweis sei der interessierte Leser auf ([80], Chapter 2.5) verwiesen. $\square$

Auch eine Umkehrung dieses Satzes lässt sich zeigen:

Satz 13.32. *Es sei Ω_p ein p -dimensionales Gitter im $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\mathbf{m}$ ein Multiindex, wobei für den Fall $p = n+1$ zusätzlich $|\mathbf{m}| \geq 1$ sei. Ferner sei $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \text{Cl}(n)$ eine meromorphe Funktion mit den Hauptteilen $\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(x - \omega)$ in jedem Gitterpunkt $\omega \in \Omega_p$. Erfüllt g die Funktionalgleichung*

$$r^{n+|\mathbf{m}|} g(rx) = \sum_{v \in \mathcal{V}_p(r)} g\left(x + \frac{v}{r}\right)$$

mit $2 \leq r \in \mathbb{N}$, so existiert eine Clifford-Zahl $C \in \text{Cl}(n)$ mit $g(x) = \epsilon_{\mathbf{m}}^{(p)}(x) + C$ für alle $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega_p$.

Beweis. Um die Behauptung zu zeigen, betrachtet man zunächst die Funktion $s(x) := g(x) - \epsilon_{\mathbf{m}}^{(p)}(x)$, welche im ganzen Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ holomorph ist. Aus dem vorherigen Satz folgt nun, dass

$$r^{n+|\mathbf{m}|} s(rx) = \sum_{v \in \mathcal{V}_p(r)} s\left(x + \frac{v}{r}\right), \quad s(0) = s_0, \quad (*)$$

gilt mit einem $s_0 \in C\ell(n)$. Wir nehmen an, dass s nicht konstant ist, und definieren ferner $\beta := |\omega_1| + \dots + |\omega_p|$. Nach dem Maximumprinzip 7.32 existiert dann ein Punkt $c \in \partial B_{r\beta}(0)$, so dass

$$|s(x)| < |s(c)|$$

gilt für alle $x \in B_{r\beta}(0)$. Ferner ist

$$\left| \frac{c+v}{r} \right| = \left| \frac{1}{r} \left(c + \sum_{i=1}^p \alpha_i \omega_i \right) \right| < \beta + \beta \leq r\beta$$

für alle $0 \leq \alpha_i < r$. Somit folgt aus (*) mit $rx = c$

$$r^{n+|\mathbf{m}|} |s(c)| = \left| \sum_{v \in \mathcal{V}_p(r)} s\left(\frac{c+v}{r}\right) \right| \leq \sum_{v \in \mathcal{V}_p(r)} \left| s\left(\frac{c+v}{r}\right) \right| < r^p |s(c)| \leq r^{n+|\mathbf{m}|} |s(c)|,$$

und wir haben einen Widerspruch. Die Annahme, dass s nicht konstant ist, ist mithin falsch, das ist die Behauptung des Satzes. $\square$

In gewisser Analogie zum komplexen Fall spielen auch die verallgemeinerten elliptischen Funktionen eine besondere Rolle in der Werteverteilung. Die folgenden beiden Sätze stellen direkte Verallgemeinerungen der ersten beiden Liouvilleschen Sätze dar.

Satz 13.33. *Jede ganze $(n+1)$ -fach periodische Funktion ist konstant.*

Beweis. Diese Aussage kann völlig analog zum komplexen Fall 13.21 bewiesen werden. Verwendet wird der höherdimensionale Liouvillesche Satz 7.33. $\square$

Satz 13.34. *Die Summe der Residuen einer $(n+1)$ -fach periodischen meromorphen Funktion f in einem Periodenparallelotop verschwindet identisch.*

Beweis. Wir geben den Beweis für den Spezialfall an, dass f nur isolierte Singularitäten hat. Der Satz gilt allerdings auch für den allgemeineren Fall, wo der Residuenbegriff im Sinne der Theorie von Leray–Norguet anzuwenden ist, was einen deutlich höheren technischen Aufwand erfordert. Nehmen wir hier also an, dass f nur isolierte Polstellen hat. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir in diesem Fall voraussetzen, dass das Fundamentalparallelotop P , das durch die Vektoren $\omega_1, \dots, \omega_{n+1}$ aufgespannt wird, keine Pole von f auf den Randflächen enthält. Ein $(n+1)$ -dimensionales Parallelotop besitzt genau $2(n+1)$ verschiedene n -dimensionale Randflächen B_j und B'_j , $j = 1, \dots, n+1$, wobei $B'_j = B_j + \omega_j$ diejenige Randfläche ist, die durch Translation um den Vektor ω_j aus B_j entsteht. Die Begrenzungsflächen seien so orientiert, dass die Normalenvektoren

nach außen gerichtet sind. Demzufolge haben B_j und B'_j entgegengesetzte Orientierung. Nach dem Residuensatz 12.43 gilt nun, etwa für eine links-holomorphe Funktion,

$$\begin{aligned}\sigma_n \sum_{c \in P} \operatorname{Res}(f, c) &= \int_{\partial P} dx^* f(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\int_{B_j} dx^* f(x) + \int_{B'_j} dx^* f(x) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \left(\int_{B_j} dx^* f(x) - \int_{B_j} dx^* f(x + \omega_j) \right) = 0.\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Periodizität von f und die gegensätzliche Orientierung von B_j und B'_j ausgenutzt. $\square$

Für einen Spezialfall konnte kürzlich auch eine Analogie zum dritten Liouvilleschen Satz 13.23 gezeigt werden [61]. Die Schwierigkeit der Übertragung in die höhere Dimension liegt dabei darin, dass man keine Quotienten meromorpher Funktionen bilden kann:

Satz 13.35. *Es sei f eine $(n+1)$ -fach periodische paravektorwertige meromorphe Funktion, die nur isolierte Polstellen besitzt. Ferner nehmen wir für ein festes $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ an, dass f nur isolierte a -Stellen besitzt. Es sei P ein Periodenparallelotop mit der Eigenschaft, dass es weder Pol- noch a -Stellen von f auf seinen Begrenzungsflächen gibt. Die Polstellen, die innerhalb von P liegen, seien mit $b_1, \dots, b_\nu$ bezeichnet. Sei $\delta > 0$ hinreichend klein gewählt, so dass die offenen punktierten Kugeln $B_\delta(b_i) \setminus \{b_i\}$ weder Pole noch a -Stellen enthalten. Dann gilt mit der Ordnung einer Nullstelle gemäß Definition 12.9*

$$\sum_{c \in P \setminus \{b_1, \dots, b_\nu\}} \operatorname{ord}(f - a; c) = - \sum_{i=1}^{\nu} p(f - a; b_i),$$

wobei

$$p(f - a; b_i) := \frac{1}{\sigma_n} \int_{F_i} \mathcal{Q}_0(y) dy^*,$$

und mit $F_i := (f - a)(S_\delta(b_i))$ das Bild von $S_j(b_i)$ unter $f - a$ gemeint ist.

Beweis. Im Gegensatz zum komplexen Fall kann man diese Aussage nicht direkt aus der vorherigen Aussage herleiten, da im $\mathbb{R}^{n+1}$ für $n > 1$ die Holomorphie bei Quotientenbildung verloren geht. Um den Satz zu beweisen, müssen wir die auftretenden Integrale explizit ausrechnen. Wir bemerken, dass es der Isoliertheit der a -Stellen halber nur endlich viele a -Stellen im Innern von P geben kann. Wir bezeichnen sie mit $t^1, \dots, t^\mu$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $j \in \{1, \dots, \mu\}$ die Kugeln $B_\varepsilon(t^j)$ paarweise disjunkt sind und überdies keine gemeinsamen Punkte mit ∂P und den $B_\delta(b_i)$ haben. In $P \setminus \bigcup_{j=1}^{\mu} B_\varepsilon(t^j)$ befinden sich dementsprechend keine a -Stellen mehr. Im Folgenden bezeichnen wir die Randflächen von P wieder wie im Beweis des vorherigen Satzes mit

$B_1, B'_1, \dots, B_n, B'_n$ und berechnen mit $H_j := (f - a)(S_\varepsilon(t^j))$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{c \in P \setminus \{b_1, \dots, b_\nu\}} \text{ord}(f - a; c) + \sum_{i=1}^{\nu} p(f - a; b_i) \\
 = & \frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{H_j} \mathcal{Q}_0(y) dy^* + \sum_{i=1}^{\nu} p(f - a; b_i) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{(f-a)(\partial P)} \mathcal{Q}_0(y) dy^* \\
 = & \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\int_{(f-a)(B_k)} \mathcal{Q}_0(y) dy^* + \int_{(f-a)(B'_k)} \mathcal{Q}_0(y) dy^* \right) \\
 = & \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^{n+1} \left(- \int_{(f-a)(B'_k)} \mathcal{Q}_0(y) dy^* + \int_{(f-a)(B'_k)} \mathcal{Q}_0(y) dy^* \right) = 0
 \end{aligned}$$

Zum Schluss ist benutzt worden, dass der Periodizität von f wegen $f(x) - a$ und $f(x - \omega_k) - a$ dasselbe Bild erzeugen, allerdings ist die Orientierung von B_k entgegengesetzt zu der von B'_k . $\square$

Die verallgemeinerten Weierstraßschen elliptischen Funktionen 13.30 dienen ferner als erzeugende Funktionen für höherdimensionale meromorphe Verallgemeinerungen der klassischen Eisensteinreihen G_m :

Definition 13.36. Für einen Multiindex $\mathbf{m}$ mit ungeradem $|\mathbf{m}| \geq 3$ seien die zur verallgemeinerten Weierstraßschen $\wp$ -Funktion gemäß 13.29 assoziierten meromorphen Eisensteinreihen definiert durch

$$G_{\mathbf{m}}(x) := \sum_{(\alpha, \omega) \in \mathbb{Z} \times \Omega_n \setminus \{(0,0)\}} \mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(\alpha x + \omega), \quad x \in H^+(\mathbb{R}^{n+1}) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_n > 0\},$$

wobei Ω_n für ein n -dimensionales Gitter in $\text{span}_{\mathbb{R}}\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ steht. Dieses Gitter soll nicht-entartet sein, d.h. die ω_i sollen $\mathbb{R}$ -linear unabhängig sein.

Um die Konvergenz zu zeigen, benutzen wir die Abschätzung 7.27 der partiellen Ableitungen von $\mathcal{Q}_0$

$$|\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(x)| \leq \frac{C_{\mathbf{m}}}{|x|^{n+|\mathbf{m}|}}.$$

Wir zerlegen x in $x = \mathbf{y} + x_n e_n$ mit $\mathbf{y} = x_0 + x_1 e_1 + \dots + x_{n-1} e_{n-1}$, dann ist für $x \in H^+(\mathbb{R}^{n+1})$ stets $x_n > 0$. Mit Hilfe eines klassischen Kompaktifizierungsargumentes kann man als nächsten Schritt zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein reelles $\rho > 0$ gibt, so dass für alle $(\alpha, \omega) \in \mathbb{Z} \times \Omega_n$

$$|\alpha x + \omega| \geq \rho |\alpha e_n + \omega|$$

gleichmäßig für alle x aus dem zugehörigen Vertikalstreifen

$$V_\varepsilon(H^+(\mathbb{R}^{n+1})) := \left\{ x = \mathbf{y} + x_n e_n \in H^+(\mathbb{R}^{n+1}) : |\mathbf{y}| \leq \frac{1}{\varepsilon}, x_n \geq \varepsilon \right\}$$

gilt. Schließlich erhalten wir die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} & \sum_{(\alpha, \omega) \in \mathbb{Z} \times \Omega_n \setminus \{(0,0)\}} |\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(\alpha x + \omega)| \\ & \leq \rho^{-(n+|\mathbf{m}|)} C_{\mathbf{m}} \sum_{(\alpha, \omega) \in \mathbb{Z} \times \Omega_n \setminus \{(0,0)\}} |\alpha e_n + \omega|^{-(|\mathbf{m}|+n)}. \end{aligned}$$

Die in der letzten Zeile auftretende Reihe ist eine *Epsteinsche Zetafunktion*, mit deren Hilfe sich die Konvergenz unserer Reihe für $|\mathbf{m}| \geq 2$ ergibt.

Für Multi-Indizes $\mathbf{m}$ mit geradem $|\mathbf{m}|$ verschwinden die Reihen identisch. Dies ist allerdings nicht der Fall für alle Indizes $\mathbf{m}$ von ungerader Länge ab $|\mathbf{m}| \geq 3$, wie wir im Folgenden sehen werden.

Wie im komplexen Fall besitzen diese Funktionenreihen eine vom zahlentheoretischen Standpunkt her interessante Fourierentwicklung, in der Darstellungszahlen von multiplen Teilerpotenzsummen und eine vektorwertige Verallgemeinerung der Riemannschen Zetafunktion auftreten.

Definition 13.37 (Verallgemeinerte Riemannsche Zetafunktion in $\mathcal{Cl}(n)$). Für ungerades $|\mathbf{m}|$ definieren wir die Reihe

$$\zeta_M^{\Omega_n}(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega_n \setminus \{0\}} \mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(\omega),$$

die *Riemannsche Zetafunktion in $\mathcal{Cl}(n)$* genannt werden soll. Der Index M soll an meromorph erinnern als Unterscheidung zu den mannigfachen anderen Zetafunktionen.

Näheres findet man in ([80], Chapter 2.4). Die oben definierte Zetafunktion ist paravektorwertig, wie wir Lemma 7.27 entnehmen können. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Variable $\mathbf{m}$ hier keine kontinuierlichen Werte annimmt, da die Ableitungen erstmal nur für Multiindizes $\mathbf{m}$ definiert sind. Hier ist noch Forschung zu leisten. Nun zu der Fourierentwicklung:

Satz 13.38 (Fourierentwicklung). Die zum orthonormalen Gitter gehörigen Eisensteinreihen $G_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{m} = (0, m_1, \dots, m_n, 0)$ mit ungeradem $|\mathbf{m}| \geq 3$ haben auf dem oberen Halbraum die Fourierentwicklung

$$G_{\mathbf{m}}(x) = 2\zeta_M^{\Omega_n}(\mathbf{m}) + \sigma_n(2\pi i)^{|\mathbf{m}|} \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \tau_{\mathbf{m}}(\mathbf{s}) \left(i e_n + \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} \right) e^{2\pi i \langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle} e^{-2\pi |\mathbf{s}| x_n}.$$

Hier steht wie üblich σ_n für die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n+1}$. Ferner ist

$$\tau_{\mathbf{m}}(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{r}|\mathbf{s}} \mathbf{r}^{\mathbf{m}},$$

wobei $\mathbf{r}|\mathbf{s}$ bedeutet, dass es eine natürliche Zahl a gibt mit $a\mathbf{r} = \mathbf{s}$.

An dieser Stelle sieht man eine schöne Korrespondenz zwischen der Form der Fourierentwicklung der klassischen Eisensteinreihen (13.20) und der Struktur der Fourierentwicklung der in (13.29) definierten höherdimensionalen Variante. Anstelle der gewöhnlichen Riemannschen Zetafunktion tritt die vektorwertige Riemannsche Zetafunktion (13.37) auf, welche ihrerseits abwärtskompatibel zur klassischen Riemannschen Zetafunktion ist: Schreibt man (13.37) für den zweidimensionalen Fall im Paravektorformalismus auf, so erhält man die klassische Funktion.

Ferner weist die hier auftretende Verallgemeinerung der Riemannschen Zetafunktion enge Zusammenhänge zur Epsteinschen Zetafunktion auf, was in [74] veranschaulicht wurde. In der sich daran anschliessenden Arbeit [27] wurde dann genauer herausgearbeitet, dass sich jede der Vektorkomponenten der verallgemeinerten Riemannschen Zetafunktion als endliche Summe von skalarwertigen Dirichletschen Reihen der Form

$$\delta(P(\cdot), s) = \sum_{\mathbf{g} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} P(\mathbf{g})(g_1^2 + \dots + g_n^2)^{-s}$$

darstellen lässt, wobei P für ein reellwertiges Polynom in $g_1, \dots, g_n$ steht, und s im allgemeinen eine komplexe Zahl ist, die der Bedingung $\operatorname{Re}(s) - \deg(P) > (n-1)/2$ genügt. Die Polynome P wurden in [27] explizit bestimmt.

Die in der Fourierreihe der komplexen Eisensteinreihen auftretenden Teilersummen gemäß Satz 13.27 werden durch die Ausdrücke der im Satz angegebenen Gestalt verallgemeinert, welche sich ihrerseits wieder durch Teilersummen ausdrücken lassen:

$$\sigma_{\mathbf{m}}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^{\mathbf{m}} \sigma_{-|\mathbf{m}|}(\operatorname{ggT}(s_1, \dots, s_n)).$$

Als Konsequenz aus der Holomorphie tritt die holomorphe ebene Wellenfunktion als natürliche Verallgemeinerung der klassischen Exponentialfunktion auf.

Man beobachtet ferner, dass unendlich viele Fourierkoeffizienten nicht verschwinden. Die Reihen $G_{\mathbf{m}}(z)$ stellen damit für alle Multiindizes, für die $|\mathbf{m}| \geq 3$ eine ungerade Zahl ist, nicht-triviale Funktionen dar.

Beweisskizze. Zur Herleitung dieser Darstellung, entwickelt man etwa erst die Teilreihen $\epsilon_{\mathbf{m}}^{(n)}(x; \Omega_n)$ ($|\mathbf{m}| \geq 2$) auf $H^+(\mathbb{R}^{n+1})$ in eine Fourierreihe der Form

$$\sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n} \alpha_f(\mathbf{r}, x_n) e^{2\pi i \langle \mathbf{r}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Eine direkte Rechnung führt zu

$$\alpha_f(\mathbf{0}, x_n) = \int_{[0,1]^n} \left(\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n} Q_{\mathbf{m}}(x + \mathbf{m}) \right) d\sigma = 0.$$

Für $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ wendet man sukzessive partielle Integration an; man integriert die Ausdrücke mit $Q_{\mathbf{m}}$ solange hoch, bis man $Q_{\mathbf{0}}$ erhält und differenziert dabei die Exponentialterme.

Nach endlich vielen Iterationsschritten führt dies zu folgendem Ergebnis:

$$\alpha_f(\mathbf{r}, x_n) = (2\pi i)^{|\mathbf{m}|} \mathbf{r}^{\mathbf{m}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{Q}_0(x) e^{-2\pi i \langle \mathbf{r}, \mathbf{x} \rangle} d\sigma.$$

Der Wert des verbleibenden Integrals ist bekannt (siehe zum Beispiel in [134, 91, 27]). Dieser kann mit dem Residuensatz ermittelt werden, und man erhält

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{Q}_0(z) e^{-2\pi i \langle \mathbf{r}, \mathbf{x} \rangle} d\sigma = \frac{\sigma_n}{2} \left(i e_n + \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) e^{-2\pi |\mathbf{r}| x_n}.$$

Nun folgt für $x_n > 0$ die Formel

$$\epsilon_{\mathbf{m}}^{(n)}(x; \Omega_n) = \frac{\sigma_n}{2} \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (2\pi i)^{|\mathbf{m}|} \mathbf{r}^{\mathbf{m}} \left(i e_n + \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) e^{-2\pi |\mathbf{r}| x_n} e^{2\pi i \langle \mathbf{r}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Schließlich kann man die Reihen $G_{\mathbf{m}}(x)$ in die folgende Form umordnen:

$$G_{\mathbf{m}}(x) = 2\zeta_M^{\Omega_n}(\mathbf{m}) + 2 \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_n} \epsilon_{\mathbf{m}}(a\mathbf{x}; \Omega_n),$$

wobei wir die oben eingeführte Notation verwenden. Einsetzen führt dann schließlich zu der Formel

$$G_{\mathbf{m}}(x) = 2\zeta_M^{\Omega_n}(\mathbf{m}) + 2(2\pi i)^{|\mathbf{m}|} \left(\frac{\sigma_n}{2} \right) \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{r}^{\mathbf{m}} \left(i e_n + \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) e^{2\pi i \langle a\mathbf{r}, \mathbf{x} \rangle} e^{-2\pi |a\mathbf{r}| x_n},$$

welche sich durch Umordnung auf die Form des Satzes bringen lässt. $\square$

Im nun folgenden Teil dieses Abschnitts werden wir überdies sehen, dass diese Reihen $G_{\mathbf{m}}$ elementare Grundbausteine für Familien von holomorphen Modulformen zu grösseren diskreten Gruppen liefern:

Definition 13.39. (i) Die $\mathcal{Cl}(n)$ -wertigen Modulgruppen Γ_p für $p < n+1$ werden von den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & e_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & e_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt.

(ii) Die *Hauptkongruenzgruppen* der Stufe N , $N \geq 1$, der Γ_p werden durch

$$\Gamma_p[N] := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_p, a-1, b, c, d-1 \in N\mathcal{O}_p \right\},$$

definiert, wobei

$$\mathcal{O}_p := \sum_A \mathbb{Z} e_A$$

die ganzzahlige additive Untergruppe in $\mathcal{Cl}(n)$ bezeichnet.

(iii) Es sei $\mathcal{T}_p$ die Gruppe, die von den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & e_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & e_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Ebenso sei $\mathcal{T}_p[N]$ die Gruppe der Matrizen, die von den Matrizen aus $\Gamma_p[N]$ erzeugt wird, bei denen $c = 0$ und $a = d = 1$ ist. Schließlich sei $\mathcal{R}_p[N]$ ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von $\mathcal{T}_p[N] \backslash \Gamma_p[N]$.

Im Gegensatz zum klassischen komplexen Fall stellen die Reihen $G_{\mathbf{m}}(x)$ allerdings noch keine Modulformen zur vollen Modulgruppe Γ_n dar. Die Spitzen (Singularitätenmenge) der $G_{\mathbf{m}}(x)$ sind die rationalen Punkte $\mathbb{Q}e_0 + \dots + \mathbb{Q}e_{n-1}$, diese sind immerhin invariant unter Γ_n .

Wir werden nun zwei Konstruktionssätze angeben, die den klassischen Poincaréschen Reihenansatz 13.28 auf die Clifford-Analysis verallgemeinern. Diese Sätze liefern dann systematisch Beispiele für nicht-triviale holomorphe automorphe Formen für die Gruppen $\Gamma_p[N]$ mit $N \geq 1$, dabei sei $\Gamma_p = \Gamma_p[1]$.

Wir schreiben im Folgenden abkürzend

$$(f|M)(x) := \overline{\mathcal{Q}_0(cx + d)} f(T(x))$$

mit $M \in \Gamma_p[N]$. Wir beginnen mit einem Konstruktionssatz, der uns Beispiele von holomorphen automorphen Formen für die Gruppen $\Gamma_p[N]$ mit $p < n$ und $N \geq 3$ liefert.

Satz 13.40. *Es sei $1 \leq p < n$ und $N \geq 3$ eine natürliche Zahl. Ferner sei $f : H^+(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \mathcal{Cl}(n)$ eine beschränkte holomorphe Funktion, die unter der Translationsgruppe $\mathcal{T}_p$ invariant ist. Dann ist*

$$g(x) := \sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} (f|M)(x), \quad x \in H^+(\mathbb{R}^{n+1})$$

eine $\mathcal{Cl}(n)$ -wertige holomorphe Funktion, die in jeder kompakten Teilmenge von $H^+(\mathbb{R}^{n+1})$ gleichmässig beschränkt ist und die dort das Transformationsverhalten $g(x) = (g|M)(x)$ für alle $M \in \Gamma_p[N]$ zeigt.

Beweisskizze. Um die absolute Konvergenz der Reihe zu zeigen, genügt es, sich im Hinblick auf die Beschränktheit von f klar zu machen, dass die Reihe

$$\sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} |\mathcal{Q}_0(cx + d)| \leq C \sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} |ce_n + d|^n$$

für $n > p + 1$ absolut auf $H^+(\mathbb{R}^{n+1})$ konvergiert. Mit einem klassischen Kompaktifizierungsargument lässt sich dann wieder zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $\rho > 0$ gibt mit

$$|cx + d| \geq \rho |ce_n + d| \text{ für alle } x \in V_\varepsilon(H^+(\mathbb{R}^{n+1})) \text{ und } \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_p[N].$$

Die Reihe

$$\sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} (|c| + |d|)^{-\alpha}$$

konvergiert genau für $\alpha > p + 1$.

Die Holomorphie der Grenzfunktion f auf dem Halbraum folgt aus dem Weierstraßschen Konvergenzsatz, da f eine holomorphe Funktion ist.

Um zu zeigen, dass g eine automorphe Form zu $\Gamma_p[N]$ ist, nimmt man eine beliebige Matrix $A \in \Gamma_p[N]$ und erhält für das zugeordnete $T \in SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ und wegen der Homogenität der Gewichtsfaktoren $\mathcal{Q}_0(ab) = \mathcal{Q}_0(b)\mathcal{Q}_0(a)$

$$\begin{aligned} g(T(x)) &= \sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} \overline{\mathcal{Q}_0(c_M T(x) + d_M)} f(T(x)) \\ &= \sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} \mathcal{Q}_0 \left(\frac{c_M(a_A x + b_A) \overline{(c_A x + d_A)} + d_M(c_A x + d_A) \overline{(c_A x + d_A)}}{|c_A x + d_A|^2} \right) f(T(x)) \\ &= \sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} \mathcal{Q}_0 \left(\frac{\overline{c_A x + d_A}}{|c_A x + d_A|^2} \right) \overline{\mathcal{Q}_0((c_M a_A + d_M c_A)x + c_M b_A + d_M d_A)} f(T(x)) \\ &= [\mathcal{Q}_0(c_A x + d_A)]^{-1} \sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} \overline{\mathcal{Q}_0(c_M a_A x + d_M a_A)} f(T(x)) \\ &= [\mathcal{Q}_0(c_A x + d_A)]^{-1} g(x), \end{aligned}$$

wobei $c_{MA} := c_M a_A + d_M c_A$ und $d_{MA} := c_M b_A + d_M d_A$ gesetzt ist. Der letzte Schritt folgt durch Umordnung, welche auf Grund der Invarianz von f unter $\mathcal{T}_p[N]$ zugelassen ist.

In den Fällen $N = 1, 2$ liefert diese Konstruktion nur die Nullfunktion. Die negative Einheitsmatrix $-I$ ist in diesen Fällen ein Element von $\Gamma_p[N]$. Da der Automorphiefaktor $\mathcal{Q}_0$ ungerade ist, folgt nämlich in genau diesen beiden Fällen $g(z) = (gI)(z) = -g(z)$ für alle $x \in H^+(\mathbb{R}^{n+1})$. $\square$

Beispiel 13.41. a) Die einfachsten nicht-trivialen Beispiele für holomorphe automorphe Formen zu $\Gamma_p[N]$ mit $p < k - 2$ und $N \geq 3$ liefern die folgenden $\Gamma_p[N]$ -Eisensteinreihen :

$$\mathcal{G}^{(p,N)}(x) = \sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} \overline{\mathcal{Q}_0(cx + d)}.$$

Die Konvergenz- und Regularitätseigenschaften folgen aus dem vorangehenden Satz 13.40, in dem man $f = 1$ setzt. Um zu beweisen, dass $\mathcal{G}^{(p,N)}$ für $N \geq 3$ auf dem oberen Halbraum nicht identisch verschwindet, betrachte man den folgenden Grenzwert mit $x = x_0 + \mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \mathcal{G}^{(p,N)}(x) &= \sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{Q}_0(cx + d)} \\ &= \sum_{M \in \mathcal{R}_p[N], c_M = 0} \overline{\mathcal{Q}_0(d)} = 1. \end{aligned}$$

b) Setzt man für f im Satz die holomorphen Eisensteinreihen $G_{\mathbf{m}}$ ein, die wir vorhin diskutiert haben, so erhalten wir weitere Beispiele nicht-trivialer $C\ell(n)$ -wertiger automorpher Formen zu den Gruppen $\Gamma_p[N]$ mit $p < n - 1$ und $N \geq 3$:

$$E_{\mathbf{m}}^p(x) = \sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} (\tilde{G}_{\mathbf{m}}|M)(x).$$

Hier ist $\tilde{G}_{\mathbf{m}}(x) := G_{\mathbf{m}}(\mathbf{y} + x_n e_n; N\mathbb{Z}^n)$. Mit einem ähnlichen Grenzwertargument wie vorher kann man zeigen, dass

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} E_{\mathbf{m}}^p(x) = 2\zeta_M^{\Omega_n}(\mathbf{m}).$$

Da die Ausdrücke $2\zeta_M^{\Omega_n}(\mathbf{m})$ genau die Laurentkoeffizienten der Reihen $\epsilon_{\mathbf{m}}^n(x)$ sind, muss es zwangsläufig Multiindizes $\mathbf{m}$ geben mit $2\zeta_M^{\Omega_n}(\mathbf{m}) \neq 0$; sonst hätten wir $\epsilon_{\mathbf{m}}^n(x) = \mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(x)$, was einen Widerspruch zur Periodizität von $\epsilon_{\mathbf{m}}^n(x)$ ergäbe.

Zum Abschluss geben wir in diesem Abschnitt noch einen zweiten Konstruktionssatz an, der dann auch für die Gruppen $\Gamma_p[N]$ mit $N = 1, 2$ und sogar für $p = n - 1$ Beispiele von nicht-trivialen holomorphen Modulformen liefert. Dieser Satz ist in [77] entwickelt worden. Die grundlegende Idee dafür ist, eine Konstruktion mit zwei Automorphiefaktoren und einer weiteren Hilfsvariablen zu machen. Wir beschränken uns hier auf den $\mathbb{R}^n$, also auf $x = \mathbf{x}$. Der folgende Satz liefert Funktionen mit dem Transformationsverhalten

$$f(x, y) = (f||M)(x, y) := \mathcal{Q}_0(\widetilde{cx + d})f(M\langle x \rangle, M\langle y \rangle)\mathcal{Q}_0(x\hat{c} + \hat{d}) \quad (13.1)$$

unter der Operation der gesamten Gruppe $\Gamma_p[N]$. Dabei ist $\hat{x}$ die Reversion gemäß Lemma 3.10 und $\tilde{x}$ die Hauptinvolution in $C\ell(n)$ gemäß Definition 3.5.

Um triviale Beispiele von vornherein auszuschließen, bezeichnen wir solch eine Funktion nur dann als eine *nicht-triviale holomorphe automorphe Form*, wenn überdies deren Einschränkung auf die Diagonale $x = y$ eine nicht-konstante automorphe C^∞ -Form zu $\Gamma_p[N]$ darstellt.

Satz 13.42. *Sei $p \in \{1, \dots, n-1\}$ und $N \geq 3$ eine natürliche Zahl. Ferner bezeichne $H_2^+(\mathbb{R}^n) := H^+(\mathbb{R}^n) \oplus H^+(\mathbb{R}^n)$. Ist $f : H_2^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow C\ell(n)$ eine beschränkte Funktion, die für alle $(x, y) \in H_2^+(\mathbb{R}^n)$ den Gleichungen $\bar{\partial}_x f(x, y) = f(x, y)\bar{\partial}_y = 0$ und ferner $f(T(x), T(y)) = f(x, y)$ für alle $T \in \mathcal{T}_p$ genügt. Dann ist*

$$g(x, y) := \sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} (f||M)(x, y)$$

eine in x links-holomorphe und in y rechts-holomorphe Funktion, die für alle $(x, y) \in H_2^+(\mathbb{R}^n)$ und alle $M \in \Gamma_p[N]$

$$g(x, y) = (g||M)(x, y)$$

erfüllt.

Der Beweis kann in ähnlicher Form wie im vorherigen Satz geführt werden. In jedem Vertikalstreifen der Form $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ bekommt man eine Abschätzung der Gestalt

$$\begin{aligned} & \sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} \left| \mathcal{Q}_0(\widetilde{cx + d}) f(M\langle x \rangle, M\langle y \rangle) \mathcal{Q}_0(y\hat{c} + \hat{d}) \right| \\ & \leq L \sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} \frac{1}{|ce_n + d|^{2n}} \end{aligned}$$

mit einer positiven reellen Konstanten L . Die Abszisse der absoluten Konvergenz der Reihe in der letzten Zeile ist $p < 2n - 3$. In Räumen der Dimension $n \geq 3$ haben wir somit die absolute Konvergenz für jedes $p \leq n - 1$. Aus dem Weierstraßschen Konvergenzsatz folgt dann die Biholomorphie von g . Die Automorphieeigenschaft unter simultanen Operationen von Γ_p bzw. $\Gamma_p[N]$ kann man unter Benutzung der Homogenität von $\mathcal{Q}_0$ ebenfalls mittels Umordnungsargumenten zeigen.

Beispiel 13.43. a) Die einfachsten nicht-trivialen Beispiele für holomorphe automorphe Formen zu $\Gamma_p[1]$ und $\Gamma_p[2]$ (für alle $p \leq n - 1$) sind die folgenden biholomorphen *Eisensteinreihen*, welche erstmalig in [77] eingeführt wurden:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, y) &= \sum_{M \in \mathcal{R}_p[N]} (1||M)(x, y) \\ &= \mathcal{Q}_0(\widetilde{c_M x + d_M}) \mathcal{Q}_0(y\hat{c}_M + \hat{d}_M), \quad (x, y) \in H_2^+(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Um nachzuweisen, dass diese Reihen tatsächlich auch für $N = 1, 2$ nicht-triviale Beispiele darstellen, bedient man sich wiederum des Grenzwertarguments. Für die Gruppen $\Gamma_p[1] = \Gamma_p$ mit $p \leq n$ erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(x_n, x_n) &= \sum_{M \in \mathcal{R}_p, c_M \neq 0} \underbrace{\lim_{x_n \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_0(\widetilde{cx_0 + d}) \mathcal{Q}_0(x_0\hat{c} + \hat{d})}_{=0} \\ &+ \sum_{M \in \mathcal{R}_p, c_M = 0} \widetilde{\mathcal{Q}_0(d)} \mathcal{Q}_0(\hat{d}) = 2 \sum_{A \subseteq \{1, \dots, p\}} e_A \overline{e_A} = 2^{p+1}. \end{aligned}$$

Die Einschränkung auf die Diagonale $\mathcal{F}(x, x)$ ist also tatsächlich eine nicht konstante Funktion. Ferner ist sie eine C^∞ -Funktion in der einzelnen Paravektorvariablen x und besitzt das Transformationsverhalten (13.1). Eine ähnliche Argumentation kann für den Fall $N = 2$ erbracht werden, für den sich dann als Grenzwert $2 \neq 0, \infty$ ergibt.

b) Weitere nicht-triviale Beispiele erhält man, wenn man für f das folgende Produkt holomorpher Eisensteinreihen

$$f(x, y) = G_{\mathbf{m}}(x; \mathbb{Z}^n) G_{\mathbf{m}}(y; \mathbb{Z}^n)$$

einsetzt. Dies kann ebenfalls durch Anwendung eines Grenzwertarguments gezeigt werden, was wir an dieser Stelle allerdings als Übungsaufgabe formulieren wollen (vgl. 13.4.10).

Abschliessende Bemerkung: Man erhält ähnliche Resultate auch für polyholomorphe Funktionen in allgemeinen reellen und komplexen Minkowski-Räumen, die bezüglich mehrerer Clifford-Variablen holomorph sind. Diese Funktionenklasse ermöglicht die Behandlung einer Reihe fundamentaler Probleme aus der analytischen Zahlentheorie, aus der Theorie der Bergman- und Hardy-Räume über hyperbolischen polyederförmigen Gebieten und aus der harmonischen Analysis über konform-flachen Spin-Mannigfaltigkeiten. Für eine vertiefende und umfangreiche Beschreibung dieser Themen verweisen wir den Leser auf das neue Buch [80] und auf die aktuellen Artikel [26, 25, 81, 82].

13.4 Aufgaben

1. Man zeige, dass

$$\int_0^\infty e^{-zt} dt = \frac{1}{z}$$

eine holomorphe Funktion in $\operatorname{Re} z > 0$ ist und zerlege sie in Real- und Imaginärteil.

2. Man zeige, dass für $\operatorname{Re} z > 0$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-zt^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{z}}.$$

3. Man zeige, dass in $\mathbb{C}$, abgesehen von den Polen,

$$\Gamma(z) = \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

4. Für $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und reelle x, y zeige man, dass

$$\int_x^y (x-t)^{\alpha-1} (t-y)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-y)^{\alpha+\beta-1}.$$

5. Man zeige, dass für $0 < \operatorname{Re} z < 1$ gilt

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

6. Man zeige, dass für $-1 < \operatorname{Re} z < 0$ gilt

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) dt.$$

7. Man zeige, dass die Reihen

$$\epsilon_m^{(1)}(z; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right), & m = 1 \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+k)^m}, & m \geq 2 \end{cases}$$

für $|z| \leq R$ (bei beliebigem R) – abgesehen von den Polen – gleichmäßig konvergieren, also in $\mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion darstellen.

8. Man zeige, dass auch die Eisensteinreihen

$$\epsilon_m^{(2)}(z; \Omega) = \begin{cases} \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), & m = 2 \\ \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z+\omega)^m}, & m \geq 3 \end{cases}$$

bis auf die Pole gleichmäßig konvergieren und in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen darstellen.

9. Man beweise, dass für die Taylorreihe

$$\wp(z) - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{20}g_2z^2 + \frac{1}{28}g_3z^4 + O(z^6)$$

in einer Umgebung des Nullpunktes gilt

$$g_2 = 60 \sum_{\omega} ' \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\omega} ' \frac{1}{\omega^6}.$$

10. Man zeige, dass das Produkt von Eisensteinreihen

$$f(x, y) = G_{\mathbf{m}}(x; \mathbb{Z}^n) G_{\mathbf{m}}(y; \mathbb{Z}^n)$$

eine holomorphe und automorphe Funktion darstellt (vgl. Beispiel 13.43 b).

Anhang

A.1 Differentialformen im $\mathbb{R}^n$

A.1.1 Alternierende Abbildungen

Da die Verwendung von Differentialformen für uns unerlässlich ist, soll hier eine kurze Einführung gegeben werden.

Definition A.1.1. Es seien V und W reelle Vektorräume.

- (i) Eine Abbildung $\Phi : V^q \rightarrow W$ heißt q -fach *multilinear*, wenn sie in jedem der q Argumente $\mathbb{R}$ -linear ist. Die Menge der q -fach linearen Abbildungen von V nach W bezeichnen wir mit $L^q(V, W)$. Solche multilinearen Abbildungen heißen auch *Multilinearformen*, falls $W = \mathbb{R}$.
- (ii) $\Phi \in L^q(V, W)$ heißt *alternierend* oder *schiefsymmetrisch*, wenn für jede Permutation $\sigma \in \text{perm}(q)$ gilt

$$\sigma\Phi(x_1, \dots, x_q) := \Phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(q)}) = (\text{sgn } \sigma)\Phi(x_1, \dots, x_q).$$

Dabei sei $\text{perm}(q)$ die Permutationsgruppe von q Elementen. Wir bezeichnen mit $A^q(V, W)$ die Menge der alternierenden Abbildungen aus $L^q(V, W)$.

- (iii) $\Phi \in L^q(V, W)$ heißt *symmetrisch*, wenn stets gilt $\sigma\Phi = \Phi$. Die Menge der symmetrischen Abbildungen bezeichnen wir mit $S^q(V, W)$.

Statt reeller Vektorräume können hier ohne Probleme komplexe Vektorräume verwendet werden, $\mathbb{R}$ ist dann durch $\mathbb{C}$ zu ersetzen. Skalarprodukte in $V = \mathbb{R}^n$ sind solche multilinearen Abbildungen mit Werten in $W = \mathbb{R}$. Der Beweis des folgenden Lemmas wird dem Leser zur eigenen Lösung empfohlen:

Lemma A.1.2. (i) Ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V , so wird eine q -fach multilineare Abbildung eindeutig durch die Werte auf den q -Tupeln der Basiselemente $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_q}\}$ festgelegt, diese Werte können in W beliebig vorgeschrieben werden.

- (ii) $L^q(V, W)$, $A^q(V, W)$ und $S^q(V, W)$ sind mit der Addition in W und der Multiplikation mit reellen Zahlen reelle Vektorräume.
- (iii) Zu jedem Paar von Normen, $|\cdot|_1$ in V und $|\cdot|_2$ in W ist

$$|\Phi|_{12} := \sup\{|\Phi(x_1, \dots, x_q)|_2 : |x_1|_1 \leq 1, \dots, |x_q|_1 \leq 1\}$$

endlich und stellt eine Vektorraumnorm auf $L^q(V, W)$ dar mit

$$|\Phi(x_1, \dots, x_q)|_2 \leq |\Phi|_{12} |x_1|_1 \cdots |x_q|_1.$$

- (iv) Sind q Vektoren $x_1, \dots, x_q$ genau dann linear abhängig, wenn $\Phi(x_1, \dots, x_q) = 0$ ist, so ist Φ alternierend.

- (v) Die Vektorräume A^q und S^q sind bezüglich der Normkonvergenz abgeschlossen.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass eine alternierende Abbildung bei Vertauschung zweier Argumente ein Vorzeichen aufnimmt. Daraus folgt das Verschwinden einer alternierenden Abbildung, falls zwei der Argumente gleich sind.

Wir wollen uns jetzt etwas näher mit den alternierenden Abbildungen befassen, dazu wieder eine

Definition A.1.3. (i) Es sei $\Phi \in L^q$, dann heißt $\alpha_q : L^q(V, W) \rightarrow A^q(V, W)$ mit

$$\alpha_q(\Phi) := \sum_{\sigma \in \text{perm}(q)} (\text{sgn } \sigma) \sigma \Phi$$

Antisymmetrisierung.

- (ii) Für $\Phi \in L^{p+q}(V, W)$ sei $(\alpha_p, \alpha_q) : L^{p+q}(V, W) \rightarrow A^{p,q}(V, W)$ erklärt durch

$$\begin{aligned} & (\alpha_p, \alpha_q)\Phi(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) \\ &:= \sum_{\sigma \in \text{perm}(p)} (\text{sgn } \sigma) \sum_{\tau \in \text{perm}(q)} (\text{sgn } \tau) \Phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}, x_{p+\tau(1)}, \dots, x_{p+\tau(q)}). \end{aligned}$$

- (iii) Die *Symmetrisierung* wird analog durch

$$\beta_q(\Phi) := \sum_{\sigma \in \text{perm}(q)} \sigma \Phi$$

definiert, (β_p, β_q) ist entsprechend festzulegen.

Diese Abbildungen sind natürlich linear. Die Abbildungen aus der Menge $A^{p,q}(V, W)$ sind bezüglich der ersten p und der letzten q Argumente gesondert alternierend. Übrigens kann man jedes $\Phi_q \in A^q$ als Bild eines $\Phi'_q \in L^q$ darstellen, denn zumindest ist $\alpha_q \Phi_q = \Phi_q$, falls Φ_q bereits alternierend ist (Beweis?). Nun folgt eine Abbildung, die für uns wichtig ist:

Lemma A.1.4. Die Abbildung $\alpha_{p,q} : A^{p,q} \rightarrow A^{p+q}$, definiert durch

$$\alpha_{p,q}((\alpha_p, \alpha_q)\Phi) := \alpha_{p+q}(\Phi),$$

ist wohldefiniert und linear. Analog wird für die Symmetrisierung ein $\beta_{p,q}$ definiert; es gilt eine entsprechende Aussage.

Den Beweis findet man zum Beispiel in [22] oder [64].

Von jetzt an nehmen wir W als eine Algebra $\mathcal{A}$ an, damit wir darin multiplizieren können. Für uns wird $\mathcal{A}$ im allgemeinen $\mathbb{R}$ sein, aber $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ oder die Clifford-Algebra $Cl(n)$ sind ebenso möglich. Damit können wir nun erklären:

Definition A.1.5. (i) Die direkte Summe der $L^q(V, \mathcal{A})$, also die Menge aller formalen endlichen Summen aus den $L^q(V, \mathcal{A})$, wird mit $L^\infty(V, \mathcal{A})$ bezeichnet:

$$L^\infty(V, \mathcal{A}) := \bigoplus_{q=0}^{\infty} L^q(V, \mathcal{A}).$$

(ii) $L^\infty(V, \mathcal{A})$ wird mit folgendem Tensorprodukt zu einer Algebra: Mit $\Phi_p \in L^p(V, \mathcal{A})$ und $\Phi_{p'} \in L^{p'}(V, \mathcal{A})$ ist $\Phi_p \otimes \Phi_{p'} \in L^{p+p'}(V, \mathcal{A})$, wobei

$$(\Phi_p \otimes \Phi_{p'})(x_1, \dots, x_{p+p'}) := \Phi_p(x_1, \dots, x_p) \Phi_{p'}(x_{p+1}, \dots, x_{p+p'}).$$

$\mathcal{A}$ ist eine Unteralgebra von $L^\infty(V, \mathcal{A})$ mit $a \otimes \Phi_p = a\Phi_p$.

(iii) Entsprechend werden $A^\infty(V, \mathcal{A})$ und $S^\infty(V, \mathcal{A})$ erklärt.

(iv) In A^∞ wird das folgende *äußere Produkt* oder *alternierende Produkt* erklärt:

$$\wedge : A^p(V, \mathcal{A}) \times A^q(V, \mathcal{A}) \rightarrow A^{p+q}(V, \mathcal{A})$$

mit

$$\Phi_p \wedge \Phi_q := \alpha_{p,q}(\Phi_p \otimes \Phi_q)$$

Damit wird A^∞ zu einer (graduerten) Algebra, der *äußeren Algebra* oder *Graßmann-Algebra*.

(v) Ganz analog wird das *symmetrische Produkt*

$$\vee : S^p(V, \mathcal{A}) \times S^q(V, \mathcal{A}) \rightarrow S^{p+q}(V, \mathcal{A})$$

mit Hilfe von $\beta_{p,q}$ erklärt.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass A^∞ und S^∞ keine Unteralgebren von L^∞ sind, sondern nur lineare Unterräume, da das äußere und das symmetrische Produkt nur in A^∞ bzw. S^∞ erklärt sind. Es gelten die folgenden Regeln:

Lemma A.1.6. (i) Die Multiplikationen $\wedge$ und $\vee$ sind distributiv und für assoziative Algebren $\mathcal{A}$ auch assoziativ.

(ii) Für kommutative $\mathcal{A}$ (speziell $\mathcal{A} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) gilt

$$\begin{aligned} \Phi_p \wedge \Phi_q &= (-1)^{pq} \Phi_q \wedge \Phi_p \\ \Phi_p \vee \Phi_q &= \Phi_q \vee \Phi_p. \end{aligned}$$

Für den Beweis sei auf die zitierten Bücher verwiesen, eine eigene Lösung als Aufgabe wird empfohlen (vgl. Aufgabe A.1.3.3). Die Distributivität folgt dabei sehr einfach aus der in L^∞ , bei der Assoziativität und der Vertauschungsregel muss man die Φ_p, Φ_q als Bilder von Elementen aus $L^\infty(V, \mathcal{A})$ darstellen und dann die dortigen Eigenschaften verwenden.

Beispiel A.1.7. a) Die $\Phi_0 \in L^0(V, \mathcal{A})$ sind die Elemente von $\mathcal{A}$. Da keine Variablen zu vertauschen sind, ist $A^0 = S^0 = L^0$, und α_0 sowie β_0 sind die Identität. Die äußere Multiplikation mit einem Φ_0 gestaltet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\Phi_0 \wedge \Phi_p &= \alpha_{0,p}(\alpha_0 \Phi_0 \otimes \alpha_p \tilde{\Phi}_p) \\ &= \alpha_{0+p} \Phi_0 \otimes \tilde{\Phi}_p = \Phi_0(\alpha_p \tilde{\Phi}_p) = \Phi_0 \Phi_p.\end{aligned}$$

b) Die Elemente aus L^1 bzw. A^1 oder S^1 sind Funktionen, es ist nur ein Argument vorhanden. Also kann man auch für die Elemente Φ_1 keine Argumente vertauschen, es gilt $L^1 = A^1 = S^1$ und $\alpha_1 = \beta_1 = id$. Für die äußeren Produkte von Elementen aus A^1 folgt

$$\Phi_1 \wedge \tilde{\Phi}_1 = \alpha_{1,1}(\alpha_1 \Phi_1 \otimes \alpha_1 \tilde{\Phi}_1) = \alpha_2(\Phi_1 \otimes \tilde{\Phi}_1).$$

Damit erhalten wir

$$(\Phi_1 \wedge \tilde{\Phi}_1)(x_1, x_2) = \Phi_1(x_1) \tilde{\Phi}_1(x_2) - \Phi_1(x_2) \tilde{\Phi}_1(x_1).$$

c) Das Produkt xy zweier Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$, aufgefasst als 1-Vektoren in der Clifford-Algebra $C\ell(n)$, ist eine 2-Form mit Werten in $\mathcal{A} = C\ell(n)$. In Abschnitt 3.2 haben wir schon das symmetrisierte Produkt $(xy + yx)/2$ als das übliche Skalarprodukt $x \cdot y$ erkannt, das antisymmetrisierte Produkt

$$\frac{xy - yx}{2} = x \wedge y$$

zeigt sich hier als das äußere Produkt, auch *Graßmannprodukt* genannt. Das Graßmannprodukt zweier 1-Vektoren ist ein 2-Vektor oder *Bivektor*. Es beschreibt den orientierten Flächeninhalt des durch die Vektoren x und y aufgespannten Parallelogramms, wie wir im Abschnitt 2.4 bezüglich des $\mathbb{R}^3$ gesehen haben.

Natürlich sind damit auch Produkte mit mehr Faktoren definiert, so liefern k Faktoren eine k -Form und das entsprechende äußere Produkt. Multipliziert man k 1-Vektoren, so ist das Ergebnis ein k -Vektor, die äußere Multiplikation eines k -Vektors mit einem ℓ -Vektor ergibt einen $(k + \ell)$ -Vektor. Die Vertauschbarkeitsregeln des letzten Lemmas gelten natürlich auch hier. Für diesen speziellen Fall werden die A^k auch mit $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet und A^∞ mit $\Lambda(\mathbb{R}^n)$.

Besonders in der physikalischen Literatur ist es üblich, das Skalar- und das Graßmannprodukt durch zwei Operatoren darzustellen. Das ist einerseits der *Annihilation-Operator* J_x der inneren Multiplikation und andererseits der *Creation-Operator* E_x der äußeren Multiplikation. Die beiden Operatoren werden durch die folgenden Rekursionen definiert: Es seien x ein 1-Vektor und $x^{(k)} = x^1 \wedge x^2 \wedge \cdots \wedge x^k$ mit 1-Vektoren $x^1, \dots, x^k$. Dann sei

$$J_x(1) := 0, \quad J_x(x^{(k)}) := \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (x \cdot x^i) x^1 \wedge \cdots \wedge x^{i-1} \wedge x^{i+1} \wedge \cdots \wedge x^k$$

und

$$E_x(1) := x, \quad E_x(x^{(k)}) := x \wedge x^{(k)}.$$

Beide Operatoren werden linear auf $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt. Unmittelbar aus der Definition ergibt sich:

Lemma A.1.8. (i) Für $y \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ ist $E_x(y) \in \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ und $J_x(y) \in \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^n)$.
Speziell für $y \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $J_x(y) = x \cdot y$.

(ii) Es seien $x \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ und $y, z \in \Lambda(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt die Beziehung

$$E_x(y) \cdot z = y \cdot J_x(z).$$

Das bedeutet, dass J_x der zu E_x konjugierte Operator bezüglich des inneren Produktes ist.

(iii) Auf $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ gilt stets $E_x^2 = J_x^2 = 0$.

Der Beweis sei als Aufgabe gestellt.

d) Betrachten wir alternierende Formen für $V = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, so gibt es nur alternierende Formen bis zur Stufe n . Denn ein Φ_p kann der Distributivität wegen in Ausdrücke der Form

$$\Phi_p(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$$

zerlegt werden, dabei sind die e_j die Basiselemente von V . Für $p > n$ müssen hier mindestens zwei Basiselemente übereinstimmen, daher ist die alternierende Form auf solchen p -Tupeln Null (bei Vertauschung dieser beiden gleichen Argumente ändert sich einerseits nichts, andererseits nimmt die Form ein Minuszeichen auf).

Neben $A^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ kann $A^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ leicht beschrieben werden: $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ enthält die $\Phi_1(x) = a \cdot x$ mit $a, x \in \mathbb{R}^n$. Auch die n -Formen können wir einfach berechnen: Mit

$$x_k = \sum_{j=1}^n x_{kj} e_j$$

folgt wegen $\Phi_n(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 0$, wenn zwei der e_{j_i} gleich sind,

$$\begin{aligned} \Phi_n(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n x_{1j_1} \cdots x_{nj_n} \Phi_n(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{perm}(n)} x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)} \Phi_n(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in \text{perm}(n)} (\text{sgn } \sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)} \right) \Phi_n(e_1, \dots, e_n) \\ &= \Phi_n(e_1, \dots, e_n) \det(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Es gibt also bis auf einen Faktor nur eine n -fach lineare Form im $\mathbb{R}^n$.

A.1.2 Differentialformen

Wir haben nun für unser eigentliches Ziel die notwendigen Begriffe bereit gestellt und können uns den Differentialformen zuwenden.

Definition A.1.9. Es sei G ein Gebiet in V .

- (i) Eine Abbildung $\omega_p : G \rightarrow A^p(V, \mathcal{A})$ heißt *Differentialform der Stufe p* (oder des Grades p) mit Werten in $\mathcal{A}$. Für $x \in G$ ist also $\omega(x) \in A^p(V, \mathcal{A})$. Falls Argumente aus V^p erforderlich sind, fügen wir diese in eckigen Klammern hinzu:

$$\omega(x)[h_1, \dots, h_p].$$

Ist ω_p im Sinne einer Abbildung zwischen Vektorräumen m -mal stetig differenzierbar, so schreiben wir

$$\omega_p \in C^m(G).$$

- (ii) Für jedes $x \in G$ und gemäß dem vorangehenden Abschnitt wird $\omega_p \wedge \omega_q$ vermöge

$$(\omega_p \wedge \omega_q)(x) := \omega_p(x) \wedge \omega_q(x)$$

festgelegt.

- (iii) Für $\omega_p \in C^1(G)$ heißt

$$d\omega_p := \alpha_{1,p}(\omega'_p) : G \rightarrow A^{p+1}(V, \mathcal{A})$$

äußeres Differential oder totales Differential von ω_p . Falls $d\omega_p = 0$, so heißt ω_p geschlossen oder exakt. Existiert ein ω_{p-1} mit $\omega_p = d\omega_{p-1}$, so heißt ω_p total. Der Operator d wird auch Cartan-Operator genannt.

Bemerkung A.1.10. a) Wegen $A^0(V, \mathcal{A}) = \mathcal{A}$ ist eine Differentialform nullter Stufe eine auf G erklärte Funktion mit Werten in $\mathcal{A}$. Nach den oben behandelten Beispielen gilt insbesondere

$$\omega_0 \wedge \omega_p = \omega_0 \omega_p, \quad \omega_p \wedge \omega_0 = \omega_p \omega_0$$

und

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \tilde{\omega}_1)(x)[h_1, h_2] &= \omega_1(x) \wedge \tilde{\omega}_1(x)[h_1, h_2] \\ &= \omega_1(x)[h_1] \tilde{\omega}_1(x)[h_2] - \omega_1(x)[h_2] \tilde{\omega}_1(x)[h_1]. \end{aligned}$$

Glücklicherweise muss man nur selten so weit in die Details gehen.

b) In der Definition (iii) wird eine Ableitung ω'_p verwendet. Dies sei stets im Sinne der Abbildung zwischen Vektorräumen definiert: Ist $f : G \rightarrow \mathcal{A}$ eine in einem

Gebiet G in V erklärte Funktion, so ist diese in einem Punkt $x_0 \in G$ genau dann differenzierbar, wenn ein $f'(x_0) \in L^1(V, \mathcal{A})$ existiert mit

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0] + |x - x_0|o(1).$$

Dabei haben wir eine Abkürzung für Funktionen verwendet, die Restgliedcharakter haben, sie stammt von den deutschen Mathematikern PAUL BACHMANN (1837–1920) und EDMUND LANDAU (1877–1938).

Definition A.1.11 (Bachmann–Landau-Symbole). Eine vektorwertige Funktion $g(h)$ einer Variablen h in einer Umgebung des Nullpunktes eines Vektorraumes V wird als $o(1)$ bezeichnet – gelesen ‘*Klein-o von 1*’ –, wenn sie für $h \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert.

Ist die Funktion g für $h \rightarrow 0$ beschränkt, so wird sie $O(1)$ genannt – gelesen ‘*Groß-O von 1*’ –.

Wenn das Produkt $ko(1)$ bzw. $kO(1)$ mit einer anderen Funktion k erklärt ist, wird einfach $o(k)$ bzw. $O(k)$ geschrieben.

Summe und Produkt solcher Funktionen ergeben wieder Funktionen desselben Typs, ebenso ändert die Multiplikation mit einer beschränkten Funktion den Typ nicht. Das ist der Vorteil dieser Schreibweise, die wir noch oft mit Nutzen verwenden werden.

Für die Differentiation unserer Differentialform $\omega_p : G \rightarrow A^p(V, \mathcal{A})$ bedeutet also die Differentiation die Existenz einer Gleichung

$$\omega_p(x) = \omega_p(x_0) + \omega'_p(x_0)[x - x_0] + |x - x_0|o(1),$$

dabei gilt $\omega'_p(x_0) \in L(V, A^p(V, \mathcal{A}))$.

Hier und bei höheren Ableitungen ist es wichtig, dass wir stets in kanonischer Weise

$$L(V, L^p(V, \mathcal{A})) \cong L^{p+1}(V, \mathcal{A})$$

setzen können, das geschieht wie folgt: $\Phi \in L(V, L^p(V, \mathcal{A}))$ ordnet einem $x_0 \in V$ ein $\Phi(x_0) \in L^p(V, \mathcal{A})$ zu, dieses ist bezüglich x_0 linear. Daher stellt

$$\Phi(x_0)[x_1, \dots, x_p]$$

eine bezüglich aller Argumente lineare Funktion dar, also eine Multilinearform der Stufe $p + 1$, und ist damit aus $L^{p+1}(V, \mathcal{A})$.

Speziell für die Differentiation unserer Differentialform ist mithin

$$\omega'_p(x_0)[x_1, \dots, x_p] \in L^{p+1}(V, \mathcal{A}),$$

wobei es bezüglich der letzten p Variablen bereits alternierend vorausgesetzt worden ist. Somit ist schließlich

$$\alpha_{1,p}\omega'_p$$

vernünftig definiert und alternierend von der Stufe $p + 1$.

c) Nach dem Satz von Schwarz sind zweite und damit auch höhere Ableitungen einer Funktion $f : G \rightarrow \mathcal{A}$ symmetrisch. Für $f'' \in L^2(V, \mathcal{A})$ gilt also

$$f''(x_0)[h, k] = f''(x_0)[k, h] \quad (h, k \in V).$$

Wir benötigen natürlich Rechenregeln für Differentialformen:

Lemma A.1.12. *Die Algebra $\mathcal{A}$ sei assoziativ. Dann gilt:*

- (i) *Das äußere Produkt $\wedge$ ist assoziativ.*
- (ii) *Das äußere Differential d ist additiv, d.h. $d(\omega + \tilde{\omega}) = d\omega + d\tilde{\omega}$.*
- (iii) *In einer kommutativen Algebra $\mathcal{A}$ haben wir*

$$\omega_p \wedge \omega_q = (-1)^{pq} \omega_q \wedge \omega_p.$$

(iv) *Aus $\omega_p = \alpha_p \Phi_p$ folgt $d\omega_p = \alpha_{p+1} \Phi'_p$.*

(v) *Für d ist folgende Leibnizregel erfüllt:*

$$d(\omega_p \wedge \omega_q) = (d\omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge (d\omega_q).$$

(vi) *Falls $\omega_p \in C^2(G)$ ist, so gilt $d(d\omega_p) = 0$: Das totale Differential einer Differentialform ist total.*

Beweis. (i), (ii) und (iii) folgen sofort aus den Rechenregeln A.1.6 für alternierende Formen.

(iv) Es gilt

$$\begin{aligned} \omega'_p &= (\alpha_p \Phi_p)' = \sum_{\sigma \in \text{perm}(p)} (\text{sgn } \sigma) (\sigma \Phi_p)' \\ &= \sum_{\sigma \in \text{perm}(p)} (\text{sgn } \sigma) \sigma \Phi'_p[\cdot, \dots] = (\alpha_1, \alpha_p) \Phi'_p = \alpha_{p+1} \Phi'_p. \end{aligned}$$

Dabei wirkt das σ in der zweiten Zeile nur auf die restlichen Argumente von Φ' , das aber ist gerade die Wirkung von (α_1, α_p) auf Φ'_p .

(v) Wieder mit $\omega_p = \alpha_p \Phi_p$ und $\omega_q = \alpha_q \Phi_q$ folgt

$$\begin{aligned} d(\omega_p \wedge \omega_q) &= d(\alpha_{p+q} \Phi_p \otimes \Phi_q) = \alpha_{p+q+1} (\Phi_p \otimes \Phi_q)' \\ &= \alpha_{p+q+1} (\Phi'_p \otimes \Phi_q + \Phi_p \otimes \Phi'_q) \\ &= \alpha_{p+1, q} (\alpha_{p+1}, \alpha_q) \Phi'_p \otimes \Phi_q + \alpha_{p+q+1} \Phi_p \otimes \Phi'_q. \end{aligned}$$

Im letzten Summanden muss die bei der Differentiation von Φ_q auftretende zusätzliche Variable nach vorn getauscht werden, da diese zusätzliche Variable nach Definition der

Ableitung vorn stehen muss. Bewerkstelligen wir das mit einer Permutation τ , so ist mit $p + q + 1 =: r$

$$\alpha_r \tau \Phi = \sum_{\sigma \in \text{perm}(r)} (\text{sgn } \sigma) \sigma \tau \Phi = (\text{sgn } \tau) \sum_{\sigma \in \text{perm}(r)} (\text{sgn } \sigma \tau) \sigma \tau \Phi = (\text{sgn } \tau) \alpha_r \Phi.$$

Wenden wir dies bei unserer Differentiationsformel an, so ergibt sich wegen $\text{sgn } \tau = (-1)^p$ (denn die zusätzliche Variable in Φ'_q muss über die p Variablen von Φ_p hinweg getauscht werden)

$$\begin{aligned} d(\omega_p \wedge \omega_q) &= \alpha_{p+1,q} \omega'_p \otimes \omega_q + (\text{sgn } \tau) \alpha_{p,q+1} (\alpha_p, \alpha_{q+1}) \Phi_p \otimes \Phi'_q \\ &= \omega'_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge \omega'_q, \end{aligned}$$

und das war zu beweisen.

(vi) Aus $\omega_p = \alpha_p \Phi_p$ ergibt sich $d\omega_p = \alpha_{p+1} \Phi'_p$ und weiter

$$d(d\omega_p) = \alpha_{p+2} \tilde{\Phi}''_p = \sum_{\sigma \in \text{perm}(p+2)} \sigma \tilde{\Phi}''_p.$$

Nun ist $\tilde{\Phi}''_p$ in den ersten beiden, durch die Differentiationen erzeugten Variablen nach dem Satz von Schwarz symmetrisch. Zerlegen wir daher σ in der Form (ρ, τ) , wobei sich ρ nur auf die ersten beiden Veränderlichen bezieht, so kommt zu jedem τ einmal ρ und einmal die entgegengesetzte Vertauschung ρ' in den ersten beiden Variablen vor. ρ und ρ' geben für σ gerade ein Vorzeichen, während $\tilde{\Phi}''_p$ davon wegen der Symmetrie der zweiten Ableitungen nichts merkt, also ist die Summe tatsächlich Null. $\square$

Wir benötigen noch eine Basisdarstellung der Differentialformen und eine weitere Operation mit ihnen, aber zuerst zur Basisdarstellung, in der die Differentialformen meist verwendet werden:

Satz A.1.13. (i) *Eine Differentialform $\omega_q : G \rightarrow A^q(V, \mathcal{A})$ besitzt die folgende kanonische, aber basisabhängige Darstellung (falls $\mathcal{A}$ mehrdimensional ist, gilt dies komponentenweise):*

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V , $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ und sei

$$dx_j : G \rightarrow A^1(V, \mathbb{R}) \text{ mit } dx_j[x] := x_j,$$

d.h. dx_j ist gleich der Projektion von x auf die j -te Koordinate. Die dx_j sind vom speziellen Punkt in G unabhängig, mithin konstante Differentialformen erster Stufe. Für ω_q gilt dann

$$\omega_q(x) = \sum_{j_1 < \dots < j_q} a_{j_1 \dots j_q}(x) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q},$$

dabei laufen die j_i von $1, \dots, n$ und die $a_{j_1 \dots j_q}(x)$ sind Funktionen, die genauso oft differenzierbar sind wie die Differentialform.

- (ii) Eine Differentialform 0. Stufe $\omega_0(x)$ ist eine Funktion $a(x)$, eine Differentialform 1. Stufe hat die Form

$$\omega_1(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_j, \quad a_j(x) = \omega_j(x)[e_j].$$

Ferner gilt $\omega_q(x) = 0$ für $q > n$ und $\omega_n(x) = a(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Beweis. (i) Die Differentialform $\omega_q(x)[h_1, \dots, h_q]$ wird durch die Werte auf den Basistupeln $e_{i_1}, \dots, e_{i_q}$ definiert, wobei sinnvollerweise $i_1 < \cdots < i_q$ vorausgesetzt wird. Auf diesen Tupeln hat $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$ den Wert 1, auf allen anderen geordneten Basistupeln den Wert 0. Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion nach q . Aus $dx_i[e_j] = \delta_{ij}$ und der Induktionsvoraussetzung $dx_i = \alpha_1(dx_i)$ folgt

$$\begin{aligned} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{q-1}} \wedge dx_{i_q} &= \alpha_{q-1}(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{q-1}}) \wedge dx_{i_q} \\ &= \alpha_{q,1}(\alpha_{q-1}, \alpha_1) dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_q} \\ &= \alpha_q(dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_q}). \end{aligned}$$

Setzt man hier die Argumente $e_{j_1}, \dots, e_{j_q}$ ein, so überlegt man sich die Gleichung

$$(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q})[e_{j_1}, \dots, e_{j_q}] = \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_q j_q}$$

(vgl. Aufgabe A.1.3.5). Damit ergibt sich

$$\omega_q(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_q} \omega_q(x)[e_{i_1}, \dots, e_{i_q}] dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q},$$

woraus die Basiseigenschaft und die Eindeutigkeit der Darstellung leicht abzulesen sind.

(ii) ist ohne Schwierigkeit aus den Beispielen A.1.7 a, b, d zu erhalten. $\square$

Folgerung A.1.14. (i) Für eine Funktion f gilt

$$df(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

(ii) Für das lokale Anwachsen einer Funktion f gilt

$$f(x+h) - f(x) = df[h] + |h|o(1).$$

Beweis. (i) Es ist $df = \alpha_1 f' = f'$ und damit $df[e_j] = f'[e_j] = \partial f / \partial x_j$, mithin

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

(ii) Nach der reellen Analysis gilt

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i + |h|o(1)$$

mit den Komponenten h_i von h . Also hat man wegen

$$df[h] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i[h] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$$

wie gewünscht

$$f(x+h) - f(x) = df[h] + |h|o(1).$$

□

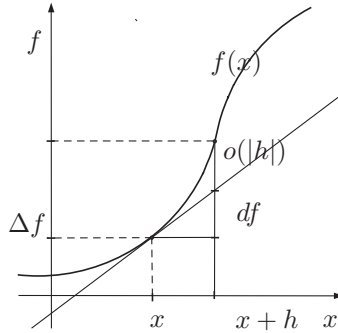


Abbildung A.1

Am Ende dieses Anhangs wollen wir noch eine nützliche Operation mit Differentialformen definieren, ohne allerdings auf die Hintergründe näher einzugehen. Der Begriff ist bei der Definition holomorpher Funktionen und bei der Integration hilfreich.

Definition A.1.15 (Hodge-Sternoperator). Für $\omega_q(x) := \sum_{i_1 < \dots < i_q} a_{i_1 \dots i_q}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}$ sei der *Hodge-Sternoperator* wie folgt erklärt:

$$\omega_q^*(x) := \sum_{i_1 < \dots < i_q} a_{i_1 \dots i_q}(x) (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q})^*$$

und

$$(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q})^* := (\text{sgn } \sigma) dx_{i_{q+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_n},$$

wenn σ die Permutation mit $\sigma(j) = i_j$ ist.

Bemerkung A.1.16. a) Speziell ist

$$\omega_0^* = f^* = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Dabei wird später $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ mit dem Volumenelement $d\sigma$ der Integration identifiziert.

b) Offenbar ist $\omega_q^{**} = \omega_q$.

c) Interessant ist für uns insbesondere die Form dx^* , erst einmal gilt

$$dx_i^* = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n =: (-1)^{i-1} d\hat{x}_i;$$

das Vorzeichen ergibt sich aus der Vertauschung von i nach vorn, die Abkürzung $d\hat{x}_i$ erspart offenbar viel Schreibarbeit; dx^* ist also eine Differentialform $(n-1)$ -ter Stufe, deren Auswertung ergibt:

$$\begin{aligned} dx^*[h_1, \dots, h_{n-1}] &= \sum_{i=1}^n e_i dx_i^*[h_1, \dots, h_{n-1}] \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} e_i \alpha_{n-1}(dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_{i-1} \otimes dx_{i+1} \otimes \cdots \otimes dx_n)[h_1, \dots, h_{n-1}] \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} e_i \cdot \\ &\quad \sum_{\sigma \in \text{perm}(n-1)} (\text{sgn } \sigma) dx_1[h_{\sigma(1)}] \cdots dx_{i-1}[h_{\sigma(i-1)}] dx_{i+1}[h_{\sigma(i)}] \cdots dx_n[h_{\sigma(n-1)}] \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} e_i \sum_{\sigma \in \text{perm}(n-1)} (\text{sgn } \sigma) h_{\sigma(1),1} \cdots h_{\sigma(i-1),i-1} h_{\sigma(i),i+1} \cdots h_{\sigma(n-1),n} \\ &= \det \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-1,1} & \cdots & h_{n-1,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hierbei ist die Determinante formal nach der ersten Zeile zu entwickeln, wie wir es vom Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ kennen, ferner ist $h_i = (h_{i,1}, \dots, h_{i,n})$ gesetzt. Man kann dies als *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen:

$$dx^*[h_1, \dots, h_{n-1}] =: \bigwedge_{i=1}^{n-1} h_i.$$

Dieser Vektor steht offensichtlich senkrecht auf allen $h_1, \dots, h_{n-1}$, denn das Skalarprodukt mit einem weiteren Vektor a ergibt die Determinante, in der die erste Zeile durch die Komponenten von a ersetzt worden ist:

$$a \cdot \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} h_i \right) = \det \begin{pmatrix} a \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Wir werden dies bei der Integration über Flächen mit Nutzen verwenden, letztlich ist dies das Spatprodukt der n Vektoren $a, h_1, \dots, h_{n-1}$. Es handelt sich hier um

eine n -stellige Operation, also keine Multiplikation im eigentlichen Sinne. Da die Determinante antisymmetrisch in den h_i ist, kann man nach den Beziehungen zu $h_1 \wedge \cdots \wedge h_{n-1}$ fragen, einem ebenfalls antisymmetrischen Produkt. Dazu definieren wir

$$e_j^* := (-1)^{j-1} e_1 \wedge \cdots \wedge e_{j-1} \wedge e_{j+1} \wedge \cdots \wedge e_n,$$

und erhalten mit ganz ähnlichen Rechnungen wie in Beispiel A.1.7 d

$$h_1 \wedge \cdots \wedge h_{n-1} = \det \begin{pmatrix} e_1^* & \cdots & e_n^* \\ h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-1,1} & \cdots & h_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

(vgl. Aufgabe A.1.3.4). Die Abbildungen $e_j \leftrightarrow e_j^*$ definieren einen Isomorphismus zwischen den Vektorräumen $C\ell(n)^1$ und $C\ell(n)^{n-1}$, der bei Fortsetzung auf die weiteren Stufen eine Dualität in $C\ell(n)$ ergibt. Damit sind die Ausdrücke $dx^*[h_1, \dots, h_{n-1}]$ und $h_1 \wedge \cdots \wedge h_{n-1}$ dual zueinander.

A.1.3 Aufgaben

1. Man beweise Lemma A.1.2.
2. Man beweise, dass die Abbildung $\alpha_{p,q} : A^{p,q} \rightarrow A^{p+q}$, die durch

$$\alpha_{p,q}((\alpha_p, \alpha_q)\Phi) := \alpha_{p+q}(\Phi)$$

definiert wird, wohldefiniert und linear ist.

3. Man beweise für kommutative Algebren $\mathcal{A}$ die Regel

$$\Phi_p \wedge \Phi_q = (-1)^{pq} \Phi_q \wedge \Phi_p.$$

4. Man beweise mit den Definitionen in Bemerkung A.1.16 c)

$$e_j \wedge e_j^* = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

und für Vektoren $h_1, \dots, h_{n-1}$

$$h_1 \wedge \cdots \wedge h_{n-1} = \det \begin{pmatrix} e_1^* & \cdots & e_n^* \\ h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n-1,1} & \cdots & h_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

5. Man beweise

$$(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q})[e_{j_1}, \dots, e_{j_q}] = \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_q j_q}.$$

A.2 Integration und Mannigfaltigkeiten

A.2.1 Integralbegriffe

A.2.1.1 Integration im $\mathbb{R}^{n+1}$

Die im Abschnitt 7 behandelten Integralsätze sind grundlegend und ein ganz wesentliches Handwerkszeug in der Funktionentheorie in Ebene und Raum. Dafür sollen in diesem Anhang die notwendigen Integrationsbegriffe und Sätze bereit gestellt werden. Wir werden als Integranden Differentialformen verwenden und als Integrationsbereiche Mannigfaltigkeiten. Dabei muss die Dimension der Mannigfaltigkeit mit der Stufe der Differentialform übereinstimmen.

Die einfachsten Mannigfaltigkeiten, für die der Begriff eigentlich gar nicht zutrifft, sind die Gebiete im $\mathbb{R}^{n+1}$ oder in $\mathbb{H}$, in denen unsere Funktionen definiert sind. Dabei sei daran erinnert, dass wir in $\mathbb{H}$ als Definitionsbereich den $\mathbb{R}^3$ haben, wenn wir $\mathbb{H}$ als $C\ell(2)$ auffassen, sonst aber betrachten wir Abbildungen von $\mathbb{H}$ in $\mathbb{H}$, die mithin im $\mathbb{R}^4$ definiert sind, wobei also $n = 3$ zu wählen ist.

Wir haben in Anhang 1 gezeigt, dass es in der höchsten Stufe $n + 1$ im $\mathbb{R}^{n+1}$ im wesentlichen nur eine Differentialform gibt, nämlich

$$f(x)dx_0 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n =: f(x)d\sigma.$$

Wir identifizieren nunmehr $dx_0 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ mit dem Volumenelement $d\sigma$ der Integration im Sinne von Riemann oder Lebesgue und verwenden den üblichen Integralbegriff aus dem Reellen:

Definition A.2.1 (Gebietsintegrale). Wenn in einem Gebiet oder einer offenen Menge G des $\mathbb{R}^{n+1}$ eine Funktion $f = \sum_A f_A e_A$ mit Werten in $\mathbb{H}$ oder $C\ell(n)$ gegeben ist, so sei das Integral über f komponentenweise erklärt:

$$\int_G f(x)d\sigma := \sum_A e_A \int_G f_A(x)d\sigma.$$

Falls notwendig, wird die Integrationsvariable als Index an $d\sigma$ angefügt: $d\sigma_x$.

Wir formulieren einige Rechenregeln:

Lemma A.2.2. (i) Wenn zwei Gebiete oder offene Mengen G_1 und G_2 disjunkt sind, so ist

$$\int_{G_1 \cup G_2} f(x)d\sigma = \int_{G_1} f(x)d\sigma + \int_{G_2} f(x)d\sigma.$$

(ii) In $C\ell(n)$ haben wir

$$\left| \int_G f(x)d\sigma \right| \leq \int_G |f(x)|d\sigma.$$

(iii) *Es gilt stets*

$$\overline{\int_G f(x) d\sigma} = \int_G \overline{f(x)} d\sigma.$$

Hier sind natürlich auch uneigentliche Integrale etwa bei nichtbeschränktem Integrationsgebiet eingeschlossen.

Beweis. (i) ist einfach die Additivität des Integrals bezüglich des Integrationsbereiches.

(ii) Wenn J das abzuschätzende Integral ist, ist für $J = 0$ nichts zu beweisen. Da die algebraische Struktur bei dieser Abschätzung keine Rolle spielt, fassen wir f als paravektorwertige Funktion in $C\ell(2^n)$ auf, dort besitzt dann J als Paravektor ein Inverses, und es gilt mit $a := J/|J|$ offenbar $|a| = 1$ und

$$\begin{aligned} |J| &= a^{-1}J = \int_G a^{-1}f(x) d\sigma = \int_G \text{Sc}(a^{-1}f(x)) d\sigma \\ &\leq \int_G |a^{-1}f(x)| d\sigma = \int_G |f(x)| d\sigma. \end{aligned}$$

Dabei steht Sc auch für den Realteil in $\mathbb{C}$.

(iii) folgt aus der Definition. □

A.2.1.2 Koordinatenwechsel in Differentialformen

Bei der Integration über Mannigfaltigkeiten spielen Koordinatenwechsel eine große Rolle, daher muss das Verhalten von Differentialformen bei solchen Koordinatenwechseln untersucht werden.

Definition A.2.3. Es seien $G \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $H \in \mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq n$) Gebiete, und es sei $\varphi : H \rightarrow G$ mit $x = \varphi(t)$ eine injektive Abbildung von H in G mit $\varphi \in C^{m+1}(H)$, die Ableitung φ' habe überall den Rang p . Sei $\omega_p \in C^m(G)$ eine Differentialform p -ter Stufe in G , dann sei die Differentialform $\omega_p \circ \varphi$ in H erklärt durch ($h_i \in \mathbb{R}^p$)

$$(\omega_p \circ \varphi)(t)[h_1, \dots, h_p] := \omega_p(\varphi(t))[\varphi'(t)[h_1], \dots, \varphi'(t)[h_p]].$$

Es sei darauf hingewiesen, dass φ' eine $(n \times p)$ -Matrix, also nicht unbedingt eine quadratische Matrix ist.

Lemma A.2.4. *Es ist $\omega_p \circ \varphi$ eine Differentialform der Stufe p in H , die m -mal stetig differenzierbar ist.*

Beweis. Die Linearität und die Antisymmetrie ergeben sich aus der von ω_p und der Linearität von φ' , die Differenzierbarkeit folgt aus der Kettenregel. Bei letzterer wird $\varphi \in C^{m+1}(H)$ benötigt, um auf $\varphi' \in C^m(H)$ zu schließen. □

Zwei Differentialformen ω_p und ω_q genügen den Regeln:

Lemma A.2.5 (Rechenregeln).

- a) $(\omega_p \wedge \omega_q) \circ \varphi = (\omega_p \circ \varphi) \wedge (\omega_q \circ \varphi),$
- b) $(d\omega_p) \circ \varphi = d(\omega_p \circ \varphi),$
- c) $(\omega_p \circ \varphi) \circ \psi = \omega_p \circ (\psi \circ \varphi).$

Beweis. Es sei nur eine Beweisskizze angegeben (vgl. Aufgabe A.2.3.1). Wir verwenden die Darstellung $\omega_p = \alpha_p \Phi$ mit der Antisymmetrisierung α_p und einer multilinearen Abbildung Φ gemäß Anhang 1. Dann ist φ mit α_p vertauschbar, da nur in das Argument von Summen einzusetzen ist. Zusammen mit der Definition des äußeren Produktes folgt die Behauptung von a). Für b) ergibt sich die Behauptung aus der Definition der äußeren Ableitung und der Symmetrie von φ'' gemäß dem Satz von Schwarz. Schließlich folgt die Behauptung von c) mit den gleichen Überlegungen aus der Kettenregel für $\psi \circ \varphi$. $\square$

Wichtig ist auch das Verhalten der kanonischen Darstellung bei einer Koordinatentransformation:

Lemma A.2.6. *In kanonischer Darstellung sei*

$$\omega_p(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

gegeben. Dann ergibt sich bei Koordinatenwechsel $x = \varphi(t)$

$$(\omega_p \circ \varphi)(t) = \left(\sum_{i_1 < \dots < i_p} (a_{i_1 \dots i_p} \circ \varphi)(t) \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_p})}{\partial(t_1, \dots, t_p)} \right) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p.$$

Beweis. Auch hier sei der Beweis nur angedeutet. Ähnlich wie in Bemerkung A.1.16 c liefert das Einsetzen von $\varphi'(t)[h_1], \dots, \varphi'(t)[h_p]$ in $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ die in der Behauptung auftretenden Funktionaldeterminanten und den Ausdruck für $dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p[h_1, \dots, h_p]$. $\square$

Bemerkung A.2.7. a) Interessant ist für uns z.B. der Fall $p = n + 1$, wie wir ihn im vorigen Unterabschnitt behandelt haben. Führen wir für $f(x)dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n$ eine Koordinatentransformation durch, so ergibt sich nach dem letzten Lemma, dass diese Differentialform in

$$f(\varphi(t)) \frac{\partial(\varphi_0, \dots, \varphi_n)}{\partial(y_0, \dots, y_n)} dt_0 \wedge \dots \wedge dt_n = f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt_0 \wedge \dots \wedge dt_n.$$

übergeht. Das ist aber genau die aus dem Reellen bekannte Transformationsformel für Integrale mit der *Jakobi-Matrix* $J(\varphi) = \varphi'$. Damit wird die Auffassung von $dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n$ als Volumenelement $d\sigma$ gerechtfertigt.

b) An dieser Stelle wollen wir das Lemma von Poincaré formulieren:

Lemma A.2.8 (Lemma von Poincaré). *Es sei G ein sternförmiges Gebiet bezüglich $x_0 \in G$, es soll also für alle $x \in G$ die Strecke von x_0 nach x ganz in G liegen. Gilt dann für eine Differentialform $\omega_p \in C^1(G)$ die Aussage $d\omega_p = 0$ in G , so ist für $p = 0$ die Form ω_p konstant, und für $p > 0$ existiert eine Differentialform ω_{p-1} mit*

$$\omega_p = d\omega_{p-1}.$$

Für den Beweis macht man den Ansatz

$$\omega_{p-1}(x)[h_1, \dots, h_{p-1}] := \int_0^1 t^{p-1} \omega_p(tx)[x, h_1, \dots, h_{p-1}] dt.$$

Die Ausführung sei dem Leser überlassen (vgl. unten Aufgabe A.2.3.2).

A.2.1.3 Mannigfaltigkeiten und Integration

Wir kommen nun zu den niederdimensionalen Integrationsbereichen im $\mathbb{R}^{n+1}$, dazu als Erstes die Definition:

Definition A.2.9. (i) Eine p -dimensionale Mannigfaltigkeit M_p im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:

Zu jedem $x_0 \in M_p$ gibt es eine relativ offene Umgebung $U(x_0)$ und eine Homöomorphie, d.h. eine bijektive und in beiden Richtungen stetige, Abbildung $\varphi : H \rightarrow U(x_0)$ eines Gebietes $H \subset \mathbb{R}^p$ auf $U(x_0)$. (U, ψ) mit $\psi = \varphi^{-1}$ heißt *Karte*, die Menge der Karten heißt *Atlas*.

- (ii) Die Mannigfaltigkeit M_p heißt k -mal stetig differenzierbar ($: \in C^k$), wenn für je zwei Karten (U_1, ψ_1) und (U_2, ψ_2) mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ die Abbildung

$$\chi = \psi_2 \circ \varphi_1 : \psi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \psi_2(U_1 \cap U_2)$$

k -mal stetig differenzierbar ist. Außerdem seien die $\varphi_i \in C^k$ mit $\text{rang } \varphi'_i = p$ überall in H . Bei einer Mannigfaltigkeit, die mindestens aus C^1 ist, spricht man von einer *glatten Mannigfaltigkeit* (manchmal wird hierfür auch C^∞ vorausgesetzt).

- (iii) Überdies heißt M_p *orientierbar*, wenn stets $\det \chi' > 0$.
 (iv) Die Mannigfaltigkeit M_p ist *berandet*, wenn es Karten gibt, die auf Halbkugeln abbilden, deren ebener Rand einem Randteil von M_p entspricht.

Wir gehen mit glatten Mannigfaltigkeiten um, höchstens mit Gebilden, die sich aus endlich vielen glatten Mannigfaltigkeiten zusammensetzen, dann sprechen wir von *stückweise glatten Mannigfaltigkeiten*. Es sei darauf hingewiesen, dass

$$\varphi'(t)[e_i] = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_i}$$

ist, diese Größen spannen den *Tangentialraum* $T_x(M_p)$ im Punkt $x = \varphi(t)$ auf. Der Tangentialraum ist unabhängig von der Karte, da bei einem Übergang zu einer anderen Karte nur die Basis dieses Raumes verändert wird.

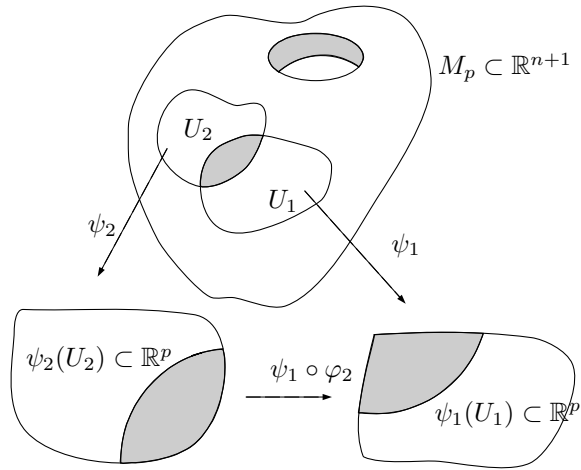


Abbildung A.2

In höheren Dimensionen versagt leider unsere Anschauung, wir können dann nur von Analogien in den Dimensionen 2 und 3 ausgehen, dafür nun einige Beispiele.

Beispiel A.2.10. a) Kurven. In jeder Dimension treten als 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten die *Kurven* auf, bei der zugehörigen Abbildung φ spricht man von einer *Parameterdarstellung* der Kurve. Im Allgemeinen kommt man bei Kurven mit einer Abbildung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ aus. Der Punkt $\varphi(a)$ heißt *Anfangspunkt* der Kurve, $\varphi(b)$ *Endpunkt*. Stimmen Anfangs- und Endpunkt überein, so spricht man von einer *geschlossenen Kurve*. Wenn φ *doppelpunktfrei* bzw. injektiv ist, also $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ für $t_1 \neq t_2$ gilt (mit Ausnahme eventuell von Anfangs- und Endpunkt), so heißt die Kurve *Jordankurve*.

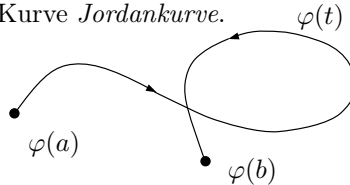


Abbildung A.3

Eine streng monotone und surjektive Abbildung $\tau : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$, die stetig differenzierbar ist und einschließlich der Ränder eine positive Ableitung besitzt, heißt *zulässige Parametertransformation*.

Man nennt eine Kurve *glatt*, wenn überall $\varphi'(t) \neq 0$ ist, *stückweise glatt*, wenn sie in endlich viele glatte Teile zerlegt werden kann.

Ist Γ eine durch $\varphi(t)$ mit $t \in [a, b]$ beschriebene Kurve, so bezeichnet man mit $-\Gamma$ die in Gegenrichtung durchlaufene Kurve. Eine mögliche Parametrisierung ist $\tilde{\varphi}(\tau) := \varphi(-\tau)$ mit $\tau \in [-b, -a]$.

Sind Γ_1 und Γ_2 zwei glatte oder stückweise glatte Kurven, bei denen der Endpunkt von Γ_1 mit dem Anfangspunkt von Γ_2 übereinstimmt, so kann man durch “Aneinanderhängen” der beiden Parameterdarstellungen die stückweise glatte Summe $\Gamma_1 + \Gamma_2$ bilden. Wir lassen aber auch formale Summen von endlich vielen Kurven zu, die z.B. als Ränder von ebenen Gebieten vorkommen können.

b) Kurven können als Ränder zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten auftreten. Am einfachsten kann man sich das in der Ebene vorstellen: So ist eine Kreislinie der Rand einer Kreisscheibe. Wenn wir dafür die Parameterdarstellung

$$\varphi(t) = z_0 + R(\cos t + i \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

wählen, so ist für die Auffassung als Mannigfaltigkeit die Sonderstellung des Punktes $z_1 := z_0 + R$ aufzuheben. Das zugehörige $\psi = \varphi^{-1}$ bildet zusammen mit der Kreislinie ohne z_1 eine Karte, eine zweite hätte den Punkt z_1 einzuschließen, etwa durch $t \in [-\pi, \pi]$. Diese zwei Karten wären dann ein Atlas der Kreislinie.

c) Ein Rechteck in der Ebene hat vier Geradenstücke als Rand, der ganze Rand ist eine stückweise glatte Kurve, aber keine Mannigfaltigkeit, wir bezeichnen ihn als stückweise glatte Mannigfaltigkeit.

d) Im $\mathbb{R}^3$ gibt es neben den Kurven zweidimensionale Mannigfaltigkeiten, so z.B. die Kugel um den Nullpunkt, die man in Kugelkoordinaten beschreiben kann. Für $-\pi < t_1 < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < t_2 < \frac{\pi}{2}$ folgt

$$x_0 = R \cos t_1 \cos t_2, \quad x_1 = R \sin t_1 \cos t_2, \quad x_2 = R \sin t_2$$

(vgl. unten Beispiel A.2.17 a). Ähnlich der Kreislinie in der Ebene beschreibt dies eine Karte der Kugel, für einen Atlas für die vollständige Kugel muss noch mindestens eine weitere Karte hinzu genommen werden.

e) Ähnlich dem Rechteck besteht der Rand eines Quaders im $\mathbb{R}^3$ aus sechs Rechtecken, er bildet also keine glatte Mannigfaltigkeit, sondern setzt sich aus endlich vielen glatten Mannigfaltigkeiten zusammen. Damit ist er eine stückweise glatte Mannigfaltigkeit. Die Kanten des Quaders sind als singuläre Mengen auf dem Rand anzusehen.

f) Ein anderes Beispiel ist der *Torus*, also eine Ringfläche, die einen geschlossenen Ring umschließt. Die “Seele” des Ringes wird etwa durch einen Kreis vom Radius R in der Ebene $x_0 = 0$ beschrieben, der Torus dann durch Kreise vom Radius r um die Punkte der Seele:

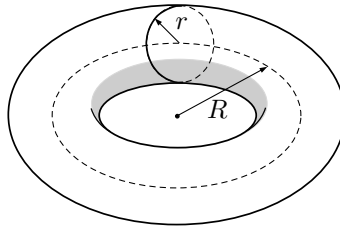


Abbildung A.4

Für $0 < t_1, t_2 < 2\pi$ ergibt sich

$$\begin{aligned}x_0 &= r \sin t_1, \\x_1 &= (R + r \cos t_1) \cos t_2, \\x_2 &= (R + r \sin t_1) \sin t_2.\end{aligned}$$

Einer der kleinen Kreise wird nicht erfasst, so dass man zur vollständigen Beschreibung des Torus noch eine zweite Karte mit geeigneten Festlegungen von t_1 und t_2 notwendig hat.

g) Weitere Beispiele sind die projektive Ebene oder das Möbiusband. Letzteres entsteht durch verdrehtes Zusammenkleben eines Papierstreifens (was man natürlich auch mathematisch beschreiben kann) und stellt ein Beispiel für eine nicht orientierbare Mannigfaltigkeit dar.

Bemerkung A.2.11. Die *Orientierung von Mannigfaltigkeiten* M_p wählen wir in der Regel so, dass für eine Karte (U, ψ) mit $\psi^{-1} = \varphi : H \rightarrow U$ in H die übliche Orientierung des $\mathbb{R}^p$ gegeben ist.

Für die *Orientierung des Randes* ∂M_p gehen wir folgendermaßen vor: Es sei (U, ψ) eine Karte, die ein Stück des Randes in eine (Hyper-)Ebene abbildet. Wir wählen diese Ebene zu $t_1 = 0$ und so, dass das Bild von U in $\{t_1 < 0\}$ liegt. Dann wählen wir in den Punkten t des Randes ein Koordinatensystem $e_1, \dots, e_p$, das natürlich entsprechend dem $\mathbb{R}^p$ orientiert ist und für das e_1 in die positive t_1 -Richtung weist. Die anderen $e_2, \dots, e_p$ entsprechen Tangentialvektoren an den Rand von M_p , die den Tangentialraum an ∂M_p aufspannen. Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Karte, da beim Übergang zu einer anderen Karte die Funktionaldeterminante (vgl. A.2.8 (iii)) positiv ist, so dass die Orientierung nicht beeinflusst wird. Für die andere Orientierung wird dann die Bezeichnung $-\partial M_p$ verwendet.

Über solche Mannigfaltigkeiten wollen wir nun integrieren:

Definition A.2.12. Es sei eine orientierbare Mannigfaltigkeit $M_p \in C^1$ der Dimension p und eine ihrer Karten (U, ψ) mit $\psi^{-1} = \varphi : H \rightarrow U$ gegeben, ω_p sei eine Differentialform der Stufe p in einem Gebiet $G \supset M_p$. Dann sei

$$\int_U \omega_p := \int_H \omega_p \circ \varphi := \int_H \omega_p(\varphi(t))[\varphi'(t)[e_1], \dots, \varphi'(t)[e_p]] d\sigma_t$$

mit der kanonischen Basis $e_1, \dots, e_p$ des $\mathbb{R}^p \supset H \ni t$.

Wir müssen uns zuerst überlegen, ob diese Definition sinnvoll ist, das heißt, ob sie auch für eine andere Wahl der Karten zu demselben Ergebnis führt:

Es gehöre $\tilde{\psi}$ zu einer anderen Karte $(\tilde{U}, \tilde{\psi})$, wobei wir der Einfachheit halber annehmen wollen, dass die Mengen U und $\tilde{U}$ auf M_p übereinstimmen. Dann sei

ferner $t = \chi(\tilde{t}) = \psi \circ \tilde{\varphi}(\tilde{t})$ die Abbildung von $\tilde{H}$ nach H mit $\det \chi' > 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} & \int_H \omega_p(\varphi(t))[\varphi'(t)[e_1], \dots, \varphi'(t)[e_p]] d\sigma_t \\ &= \int_{\tilde{H}} \omega_p(\varphi(\chi(\tilde{t})))[\varphi'(\chi(\tilde{t}))[e_1], \dots, \varphi'(\chi(\tilde{t}))[e_p]] \det \chi'(\tilde{t}) d\sigma_{\tilde{t}} \\ &= \int_{\tilde{H}} \omega_p(\tilde{\varphi}(\tilde{t}))[\tilde{\varphi}' \circ \chi'^{-1}(\chi(\tilde{t}))[e_1], \dots, \tilde{\varphi}' \circ \chi'^{-1}(\chi(\tilde{t}))[e_p]] \det \chi'(\tilde{t}) d\sigma_{\tilde{t}}. \end{aligned}$$

Mit $\chi'^{-1}[e_j] =: h_j =: \sum_{i=1}^p \alpha_{ij} \tilde{e}_i$ und $\omega_p(\tilde{\varphi}(\tilde{t})) =: \Phi(\tilde{t})$ ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \Phi[\tilde{\varphi}'[h_1], \dots, \tilde{\varphi}'[h_p]] &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^p \Phi[\tilde{\varphi}'[\tilde{e}_{i_1}], \dots, \tilde{\varphi}'[\tilde{e}_{i_p}]] \alpha_{i_1 1} \cdots \alpha_{i_p p} \\ &= \sum_{\sigma \in \text{perm}(p)} \Phi[\tilde{\varphi}'[\tilde{e}_1], \dots, \tilde{\varphi}'[\tilde{e}_p]] (\text{sgn } \sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{p\sigma(p)} \\ &= \Phi[\tilde{\varphi}'[\tilde{e}_1], \dots, \tilde{\varphi}'[\tilde{e}_p]] \det(\alpha_{ij}) \end{aligned}$$

Nun ist aber $h_j = \chi'^{-1}[e_j] = \partial\chi^{-1}/\partial\tilde{t}_j$, also $\alpha_{ij} = \partial\chi_i^{-1}/\partial\tilde{t}_j$ und

$$\det(\alpha_{ij}) = \det\left(\frac{\partial\chi_i^{-1}}{\partial\tilde{t}_j}\right) = \det \chi'^{-1} = \frac{1}{\det \chi'}.$$

Das liefert schließlich wie gewünscht

$$\int_H \omega_p(\varphi(t))[\varphi'(t)[e_1], \dots, \varphi'(t)[e_p]] d\sigma_t = \int_{\tilde{H}} \omega_p(\tilde{\varphi}(\tilde{t}))[\tilde{\varphi}'[\tilde{e}_1], \dots, \tilde{\varphi}'[\tilde{e}_p]] d\sigma_{\tilde{t}}.$$

Damit ist $\int_U \omega_p$ tatsächlich sinnvoll erklärt. Wir müssen aber noch das Integral über die ganze Mannigfaltigkeit definieren. Dazu ein wichtiger Satz:

Satz A.2.13 (Zerlegung der Eins). *Es sei $K \subset \mathbb{R}^p$ kompakt und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K . Dann existieren Funktionen $f_i : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$ mit $f_i \in C^\infty$, $i \in I$, so dass für*

$$\text{supp } f_i := \overline{\{x : x \in \mathbb{R}^p, f_i(x) \neq 0\}}$$

gilt

- a) $\text{supp } f_i \subset U_i$,
- b) $\sum_i f_i(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^p$,
- c) $\sum_i f_i(x) = 1$ für alle $x \in K$.

Dabei heißt $\text{supp } f$ Träger der Funktion f . Für den Beweis sei z.B. auf [22] verwiesen. Das wesentliche Hilfsmittel dabei sind Funktionen der Form

$$f(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - r^2}\right), & |x| < r, \\ 0, & |x| \geq r. \end{cases}$$

Jetzt können wir definieren:

Definition A.2.14. Es sei $M_p \in C^1$ eine orientierbare Mannigfaltigkeit und ω_p eine Differentialform in einer Umgebung von M_p . Entweder habe ω_p kompakten Träger oder M_p sei in einer kompakten Menge enthalten. Dann zerlege man die Eins so, dass $\omega_p = \sum_i f_i \omega_p$ und $f_i \omega_p$ den Träger in der Karte U_i eines Atlas von M_p hat. Dann sei

$$\int_{M_p} \omega_p := \sum_i \int_{U_i} f_i \omega_p.$$

Die Unabhängigkeit von dem gewählten Atlas bzw. der gewählten Überdeckung folgt durch Betrachtung der Durchschnitte $U_i \cap V_j$, wenn die zweite Zerlegung die Karten $(V_j, \tilde{\psi}_j)$ hat.

Wir wollen uns als Beispiele einige Spezialfälle ansehen, insbesondere interessieren uns die Fälle $p = 1$ und $p = n$.

Beispiel A.2.15. a) Spezialfall $p = 1$: Wir haben es mit einer Kurve als Mannigfaltigkeit zu tun, also $M_p = \Gamma$, gegeben durch $x = \varphi(t)$, $t \in [a, b]$. Eine Differentialform 1. Stufe hat das Aussehen

$$\omega_1(x) = \sum_{i=0}^n a_i dx_i$$

mit Elementen a_i aus der jeweiligen Algebra. Für das Integral ergibt sich wegen

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = (x'_0(t), \dots, x'_n(t))$$

der Ausdruck

$$\int_{\gamma} \omega_1 = \int_a^b \sum_{i=0}^n a_i(\varphi(t)) x'_i(t) dt.$$

Mit $\omega_1 = f(x) dx g(x)$ vereinfacht sich das Integral zu

$$\int_{\gamma} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) g(\varphi(t)) dt.$$

Diese Kurvenintegrale genügen den Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma} f(x) dx &= - \int_{\gamma} f(x) dx && (\text{Orientierung}), \\ \int_{\gamma_1} f(x) dx + \int_{\gamma_2} f(x) dx &= \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(x) dx && (\text{Additivität}), \\ \int_{\gamma} (af(x) + bg(x)) dx &= a \int_{\gamma} f(x) dx + b \int_{\gamma} g(x) dx && (\text{Linearität}), \\ \left| \int_{\gamma} f(x) dx \right| &\leq \int_{\gamma} |f(x) x'(t)| dt && (\text{Absoluter Betrag}). \end{aligned}$$

Für den Beweis sei auf Aufgabe A.2.3.3 verwiesen. Analoge Formeln ergeben sich für Integranden der Form $f(x)dxg(x)$, die bei Nichtkommutativität auftreten können.

b) Spezialfall $n = 2$ und $p = 1$: In der Ebene ist $n = 2$ und die Kurvenintegrale haben dann mit $x_0 =: x$ und $x_1 =: y$ die Form

$$\int_{\gamma} adx + bdy = \int_a^b (a(\varphi(t))x'(t) + b(\varphi(t))y'(t))dt.$$

Man kann $adx + bdy$ als Skalarprodukt auffassen, also $(a, b) \cdot (x', y')dt$, dabei ist (x', y') ein Tangentialvektor an die Kurve, das Integral summiert mithin über die Anteile des Vektorfeldes (a, b) in tangentialer Richtung. Fasst man den Integranden als Produkt $(-b, a) \cdot (-y', x')$ auf, so wird die Komponente von $(-b, a)$ in Richtung der Normale summiert, das ist z.B. ein Maß für den Durchfluss einer Strömung durch die Kurve. Für die Kurventheorie ist noch wichtig, dass man als Parameter die *Bogenlänge*

$$s(t) = \int_a^t |(x'(\tau), y'(\tau))|d\tau$$

eingeführen kann. Die Zahl $s(b)$ ist dann die *Länge* der Kurve. Dieser Parameter vereinfacht manches, aber wir wollen nicht näher darauf eingehen.

c) Spezialfall $p = n$: Für $p = n$ haben wir über n -dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ zu integrieren, dabei ist vor allem eine Differentialform der Gestalt $\omega_n = f(x)dx^*g(x)$ von Interesse. In Bemerkung A.1.16 c ist diese Form schon betrachtet worden, dort ergab sich

$$dx^*[h_1, \dots, h_n] = \bigwedge_{i=1}^n h_i,$$

das ist ein Vektorprodukt der n Vektoren h_i . Beim Integrieren ist hier

$$h_i = \varphi'(t)[e_i] = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_i}$$

zu verwenden, also

$$\int_{M_n} f(x)dx^*g(x) = \int_H f(\varphi(t)) \left(\bigwedge_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_i} \right) g(\varphi(t))d\sigma_t.$$

Dabei ist zur Vereinfachung angenommen worden, dass wir mit einer einzigen Karte auskommen, sonst ist entsprechend zu modifizieren. Dem Vektorprodukt kann man noch eine Bedeutung beilegen: Es werden die n Tangentialvektoren multipliziert, das Kreuzprodukt steht auf allen senkrecht, stellt also gerade die Normale auf die betrachtete Mannigfaltigkeit oder Fläche dar. Daher ist dx^* das

orientierte Flächenelement in der jeweiligen Algebra bei der Integration über die Mannigfaltigkeit, dafür verwendet man auch die Bezeichnung do oder do_x :

$$dx^* = \left(\bigtimes_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_i} \right) d\sigma_t =: do.$$

Zu prüfen ist natürlich die richtige Orientierung.

Ähnlich den Kurven gibt das Integral

$$\int_{M_n} |dx^*| = \int_H \left| \bigtimes_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right| d\sigma_t = \int_H |do|$$

den Rauminhalt der betrachteten Mannigfaltigkeit an, bei einer zweidimensionalen Fläche im $\mathbb{R}^3$ also den Flächeninhalt.

Für das nächste Beispiel benötigen wir ein Lemma, das wir in den Quaternionen schon kennen gelernt haben (Lemma 2.41):

Lemma A.2.16 (Lagrange-Identität). *Es seien h_i , $i = 1, \dots, n$, Paravektoren im $\mathbb{R}^{n+1}$ und es sei*

$$h := \bigtimes_{i=1}^n h_i.$$

Dann gilt die Lagrange-Identität

$$|h|^2 = \det (h_i \cdot h_j)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Beweis. Nach Bemerkung A.1.16 c gilt für einen beliebigen Paravektor a

$$a \cdot h = \det \begin{pmatrix} a \\ h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

also

$$(h \cdot h)^2 = \det \begin{pmatrix} h \\ h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \det (h \cdot h_1 \dots h_n) = \det \begin{pmatrix} h \cdot h & h \cdot h_1 & \dots & h \cdot h_n \\ h_1 \cdot h & h_1 \cdot h_1 & \dots & h_1 \cdot h_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_n \cdot h & h_n \cdot h_1 & \dots & h_n \cdot h_n \end{pmatrix}.$$

Wegen $h \cdot h_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, folgt schließlich bei Entwicklung nach der ersten Zeile

$$|h|^4 = (h \cdot h)^2 = |h|^2 \det (h_i \cdot h_j),$$

was zu beweisen war. □

Beispiel A.2.17. a) Als ein Integrationsbeispiel soll nun der Flächeninhalt der Oberfläche der Einheitskugel $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ berechnet werden, zumal wir ihn bei unseren Integralsätzen benötigen. Auf der Einheitskugel

$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

läuft x_n maximal zwischen -1 und 1 , daher ist durch

$$x_n = \sin t_n$$

das t_n im Intervall $I := [-\pi/2, \pi/2]$ eindeutig festgelegt. Aus $x_0^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 1 - x_n^2 = \cos^2 t_n$ ergibt sich dann, dass x_{n-1} zwischen $-\cos t_n$ und $\cos t_n$ variiert, also ist ein t_{n-1} durch

$$x_{n-1} = \cos t_n \sin t_{n-1}$$

eindeutig in I bestimmt. Das Verfahren setzt sich fort bis zu

$$\begin{aligned} x_2 &= \cos t_n \cdots \cos t_3 \sin t_2 \\ x_0^2 + x_1^2 &= \cos^2 t_n \cdots \cos^2 t_2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos t_n \cdots \cos t_2 \cos t_1 \\ x_1 &= \cos t_n \cdots \cos t_2 \sin t_1 \end{aligned}$$

zu setzen mit $t_1 \in [-\pi, \pi]$, wie von der Ebene her bekannt. Das kann zu

$$x_i = \cos t_n \cdots \cos t_{i+1} \sin t_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad t_0 := \frac{\pi}{2},$$

zusammengefasst werden. Es ergibt sich weiter

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = \begin{cases} 0 & \text{für } j < i, \\ \cos t_n \cdots \cos t_i & \text{für } j = i, \\ -\cos t_n \cdots \cos t_{j+1} \sin t_j \cos t_{j-1} \cdots \cos t_{i+1} \sin t_i & \text{für } j > i. \end{cases}$$

Dem Leser sei als Aufgabe A.2.3.6 überlassen zu beweisen, dass

$$\frac{\partial x}{\partial t_j} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_j} = \prod_{k=j+1}^n \cos^2 t_k$$

gilt sowie für $i \neq j$

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_j} = 0.$$

Gemäß der Lagrange-Identität aus dem vorangehenden Beispiel folgt nun für das Flächenelement der Kugel

$$|do| = \left(\det \left(\frac{\partial x}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_j} \right) \right)^{1/2} d\sigma_t$$

und nach einfacher Rechnung

$$\begin{aligned} |do| &= \prod_{i=2}^n (\cos t_n \cdots \cos t_{i+1}) d\sigma_t \\ &= \cos t_2 \cos^2 t_3 \cdots \cos^{n-1} t_n d\sigma_t. \end{aligned}$$

Damit folgt für die Oberfläche σ_n der S^n

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \int_{t_1=-\pi}^{\pi} \int_{t_2=-\pi/2}^{\pi/2} \cdots \int_{t_n=-\pi/2}^{\pi/2} \cos t_2 \cdots \cos^{n-1} t_n dt_n \cdots dt_1 \\ &= 2\pi \prod_{k=1}^{n-1} \int_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^k t dt =: 2\pi \prod_{k=1}^{n-1} I_k. \end{aligned}$$

Für die I_k mit $k > 1$ erhalten wir eine Rekursionsformel mit partieller Integration

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^k t dt = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos^{k-2} t - \cos^{k-2} t \sin^2 t) dt = I_{k-2} - \frac{1}{k-1} I_k$$

oder

$$I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}.$$

Daraus errechnen sich mit $I_0 = \pi$, $I_1 = 2$

$$I_{2k} = \frac{(2k)! \pi}{2^{2k} (k!)^2}, \quad I_{2k+1} = \frac{2^{2k+1} (k!)^2}{(2k+1)!}.$$

In Abschnitt 13.1 ist zu sehen, dass die Ausdrücke mit der dort behandelten Gammafunktion als

$$I_k = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

geschrieben werden können. Aus $\sigma_n = I_{n-1} \sigma_{n-1}$ und $\sigma_0 = 2$ bzw. $\sigma_1 = 2\pi$ folgt schließlich

$$\sigma_n = 2 \frac{\Gamma^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Das sieht zwar recht symmetrisch aus, der Aufwand zur Berechnung ist aber erheblich. Um die uns bekannte Aussage für σ_1 ablesen zu können, sei auf $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(1) = 1$ hingewiesen (Sätze 13.2 (iii) und 13.6 (i)).

b) Die letzten Rechnungen sollen zur Behandlung des Überganges zu Kugelkoordinaten für die Vollkugel Verwendung finden. Dort seien die Koordinaten durch

$$y = rx$$

mit dem x aus dem vorigen Beispiel gegeben. Wenn wir zu den Koordinaten $r, t_1, \dots, t_n$ übergehen wollen, interessiert uns die Funktionaldeterminante

$$J := \det \frac{\partial(y_0, y_1, \dots, y_n)}{\partial(r, t_1, \dots, t_n)}.$$

Dafür haben wir

$$\frac{\partial y}{\partial r} = x, \quad \frac{\partial y}{\partial t_i} = r \frac{\partial x}{\partial t_i}$$

mit den Ableitungen aus dem letzten Beispiel. Wegen $x \cdot x = 1$ gilt aber

$$x \cdot \frac{\partial x}{\partial t_i} = 0,$$

so dass wir für die Funktionaldeterminante mit $h_i := \partial x / \partial t_i$ erhalten

$$J^2 = r^{2n} \det \begin{pmatrix} x \\ h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \det(x \ h_1 \ \dots \ h_n) = r^{2n} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 \cdot h_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_n \cdot h_n \end{pmatrix}.$$

Um noch das Vorzeichen von J zu bestimmen, kann man etwa die Werte $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$ einsetzen. Man erhält dann gerade die Einheitsmatrix, also ist J positiv und

$$d\sigma_y = r^n dr |do_x|.$$

Damit ergibt sich für ein Integral über eine Kugel $B_R(0)$ vom Radius R um den Nullpunkt

$$\int_{B_R(0)} f(y) d\sigma_y = \int_0^R r^n dr \int_{\partial B_1(0)} f(rx) |do_x| = \frac{\sigma_n}{n+1} R^{n+1}.$$

Das ist natürlich eine Formel, die uns aus der Ebene gut bekannt ist.

c) Aus den Überlegungen im letzten Beispiel ist noch heraus zu lesen, dass $x, h_1, \dots, h_n$ eine positive Determinante hat, es sich also um ein System handelt, wie es bei der Orientierung einer Randmannigfaltigkeit verlangt worden ist. Der Paravektor x ist die äußere Normale der Kugel (vom Radius R um den Nullpunkt), da dieser gleich dem äußeren Produkt der Tangentialvektoren $h_1, \dots, h_n$ ist. Damit haben wir für eine solche Kugel

$$dy^* = do_y = x |do_y| = R^n x |do_x|.$$

A.2.2 Sätze von Stokes, Gauß und Green

A.2.2.1 Satz von Stokes

Wir kommen nun zu einem zentralen Satz der Analysis, der auch für uns ein wesentliches Hilfsmittel ist. Er verallgemeinert den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in $\mathbb{R}$,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx,$$

auf Mannigfaltigkeiten und Differentialformen. Im Hauptsatz wird die Funktion f am Rande eines Intervalls ausgewertet, das Ergebnis ist gleich dem Integral über die Ableitung $f'(x)$ über das ganze Intervall. Ganz ähnlich lautet nun der Satz des irischen Mathematikers GEORG GABRIEL STOKES (1819–1903):

Satz A.2.18 (Satz von Stokes). *Sei $M_{p+1} \in C^1$ eine orientierbare, beschränkte und glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $p+1$ mit hinreichend glattem Rand ∂M_{p+1} , der gemäß Bemerkung A.2.11 orientiert sei. Es sei ω_p eine Differentialform der Stufe p , stetig differenzierbar in einer Umgebung von M_{p+1} . Dann gilt*

$$\int_{\partial M_{p+1}} \omega_p = \int_{M_{p+1}} d\omega_p.$$

Das entspricht genau dem obigen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, das Integral der Differentialform über den Rand der Mannigfaltigkeit ist gleich dem Integral über die Ableitung der Differentialform über die Mannigfaltigkeit selbst. Wir können hier nicht in den tiefliegenden Beweis einsteigen, sondern müssen auf die Analysis verweisen, so z.B. auf das Buch von Amann und Escher [8].

Eine der Schwierigkeiten dieses Satzes ist die Formulierung der Voraussetzungen an den Rand der Mannigfaltigkeit. Er muss aus endlich vielen glatten Mannigfaltigkeiten bestehen, deren Ränder wiederum das p -dimensionale Maß Null haben müssen. Wir verzichten auf die genaue Formulierung, denn für die im Rahmen dieses Buches auftretenden Gebiete und Ränder ist das geforderte “hinreichend” immer erfüllt, wir gehen mit Kreisen, Kugeln, Rechtecken oder Quadern um, selten mit komplizierteren Bereichen. Der Quader ist ein gutes Beispiel dafür, dass der Rand eines Gebietes durchaus Kanten und Ecken haben darf, aber eben nicht zu viele.

A.2.2.2 Satz von Gauß

Wir wollen uns den Satz von Stokes in der Ebene ansehen, dort läuft er meist unter dem Namen von Gauß und dem des russischen Mathematikers MIKHAIL VASILEVICH OSTROGRADSKI (1801–1862). Hier können wir etwas mehr über die Voraussetzungen des Satzes von Stokes sagen. Dazu zuerst eine Definition:

- Definition A.2.19 (Zusammenhang eines Gebietes).** (i) Eine kompakte zusammenhängende Menge heißt ein *Kontinuum*.
- (ii) Ein Gebiet G heißt *n -fach zusammenhängend*, wenn sein Rand ∂G aus genau n punktfremden Kontinen besteht. Beim *1-fachen* oder *einfachen Zusammenhang* kann auch $\partial G = \emptyset$ sein. Wenn n nicht spezifiziert wird, spricht man von *endlichem Zusammenhang*.
- (iii) Gibt es kein n , wie unter (ii) verlangt, so nennt man das Gebiet von *unendlichem Zusammenhang*.

Diese Definition gilt erstmal unabhängig von der Dimension, in der Ebene können wir aber über den Rand einfache Voraussetzungen formulieren, wenn das Gebiet von endlichem Zusammenhang ist.

Satz A.2.20 (Satz von Gauß–Ostrogradski). *Es sei G ein ebenes Gebiet von endlichem Zusammenhang, der Rand ∂G bestehe aus endlich vielen, stückweise glatten Kurven, die so orientiert sind, dass G zu ihrer Linken liegt. Die Funktionen u und v seien aus $C^1(\overline{G})$, dann gilt*

$$\int_{\partial G} u(x, y)dx + v(x, y)dy = \int_G (v_x(x, y) - u_y(x, y))d\sigma_{(x, y)}.$$

Beweis. Der Beweis ist denkbar einfach: Die Mannigfaltigkeit M_2 ist hier das Gebiet G , die Differentialform $\omega_1 = udx + vdy$. Dann folgt die Aussage sofort aus dem Satz von Stokes, wenn man

$$d\omega_1 = du \wedge dx + dv \wedge dy = (-u_y + v_x)dx \wedge dy$$

bedenkt. □

Wir wollen den Satz in der für uns günstigeren komplexen Form aufschreiben:

Satz A.2.21 (Satz von Gauß in $\mathbb{C}$). *Unter denselben Voraussetzungen an das Gebiet wie im letzten Satz sei $f \in C^1(\overline{G})$, dann gilt*

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 2i \int_G \partial_{\overline{z}} f(z)d\sigma.$$

Wegen $dz^* = dy - idx = idz$ können wir die Aussage des Satzes auch in der Form

$$\int_{\partial G} f(z)dz^* = \int_G \overline{\partial} f(z)d\sigma$$

formulieren, wie wir es gleich in den höheren Dimensionen tun werden. Dabei haben wir wie in Abschnitt 5.1 die Bezeichnung $\overline{\partial} = 2\partial_{\overline{z}}$ verwendet. Der Beweis ist wieder eine einfache Folgerung aus dem Satz von Stokes (natürlich auch aus dem zuvor formulierten Satz von Gauß–Ostrogradski):

$$d(fdz) = df \wedge dz = (\partial_{\overline{z}} f)d\overline{z} \wedge dz$$

und

$$d\bar{z} \wedge dz = (dx - idy) \wedge (dx + idy) = 2idx \wedge dy = 2id\sigma.$$

In höheren Dimensionen geben wir den Satz von Gauß gleich in der uns angenehmeren Form in der Algebra an:

Satz A.2.22 (Satz von Gauß in $Cl(n)$). *Es sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet von endlichem Zusammenhang mit hinreichend glattem Rand ∂G , letzterer sei gemäß Bemerkung A.2.11 orientiert, also mit der Normale nach außen. Es seien $f, g \in C^1(\overline{G})$. Dann gilt*

$$\int_{\partial G} f dx^* g = \int_G ((f\bar{\partial})g + f\bar{\partial}g) d\sigma.$$

Beweis. Nach der Produktregel für das totale Differential in A.1.11 (v) haben wir

$$d(f dx^* g) = df \wedge dx^* g + (-1)^n f dx^* \wedge dg,$$

und ähnlich wie im Beweis von Satz 5.2.12

$$df \wedge dx^* = \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i dx_i \wedge dx_i^*$$

analog für $dx^* \wedge dg$. Schließlich folgt aus

$$dx_i \wedge dx_i^* = d\sigma \quad \text{bzw.} \quad dx_i^* \wedge dx_i = (-1)^n d\sigma$$

die Behauptung. □

Bemerkung A.2.23. Für $G \subset \mathbb{R}^n$ gilt mit analogen Voraussetzungen und dem Dirac-Operator D gemäß 5.2.12 bzw. 5.2.19

$$\int_{\partial G} f d\mathbf{x}^* g = \int_G ((fD)g + fDg) d\sigma.$$

A.2.2.3 Satz von Green

Leider gehen die Benennungen für die voranstehenden Sätze wie für die jetzt folgenden leicht durcheinander. Den nächsten Satz benennen wir nach dem englischen Mathematiker GEORGE GREEN (1793–1841), obwohl dieser aus dem Satz von Gauß durch die Wahl $g = 1$ und die Ersetzung von f durch $f\bar{\partial}$ hervorgeht.

Satz A.2.24 (Formel von Green). *Es sei G ein Gebiet im $\mathbb{R}^{n+1}$ von endlichem Zusammenhang mit hinreichend glattem und geeignet orientiertem Rand ∂G . Es sei $f \in C^2(\overline{G})$, dann gilt*

$$\int_{\partial G} (f\bar{\partial}) dx^* = \int_G \Delta f d\sigma.$$

Dabei ist

$$\Delta = \partial \bar{\partial} = \bar{\partial} \partial = \sum_{i=0}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

der Laplace-Operator.

Als letzte Aussage in diesem Anhang wollen wir einen Satz von Green im $\mathbb{R}^n$ formulieren, dort ist $\bar{\partial} = D$, dem Dirac-Operator gemäß 5.2.12 bzw. 5.2.19. Für diesen gilt $\bar{D} = -D$ und $D^2 = -\Delta_n$, wobei wir zur Verdeutlichung an Δ die Dimension angehängt haben.

Satz A.2.25 (Satz von Green). *Es sei G ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$ von endlichem Zusammenhang mit hinreichend glattem und geeignet orientiertem Rand ∂G , f und g seien in $C^2(\bar{G})$. Dann gilt*

$$\int_{\partial G} ((fD)d\mathbf{x}^*g - fd\mathbf{x}^*Dg) = \int_G (f\Delta_n g - (\Delta_n f)g)d\sigma.$$

Beweis. Wir setzen den Satz von Gauß im $\mathbb{R}^n$ einmal mit fD und einmal mit Dg an:

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} (fD)d\mathbf{x}^*g &= \int_G ((fD)(Dg) - (\Delta_n f)g)d\sigma \\ \int_{\partial G} fd\mathbf{x}^*(Dg) &= \int_G (-f\Delta_n g + (fD)(Dg))d\sigma. \end{aligned}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt die Behauptung. $\square$

A.2.3 Aufgaben

1. Man beweise die Rechenregeln A.2.5:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (\omega_p \wedge \omega_q) \circ \varphi &= (\omega_p \circ \varphi) \wedge (\omega_q \circ \varphi), \\ \text{b)} \quad (d\omega_p) \circ \varphi &= d(\omega_p \circ \varphi), \\ \text{c)} \quad (\omega_p \circ \varphi) \circ \psi &= \omega_p \circ (\psi \circ \varphi). \end{aligned}$$

2. Man beweise das Lemma von Poincaré gemäß A.2.8:

Sei G ein sternförmiges Gebiet bezüglich $x_0 \in G$, es soll also für alle $x \in G$ die Strecke von x_0 nach x ganz in G liegen. Gilt dann für eine Differentialform $\omega_p \in C^1(G)$ die Aussage $d\omega_p = 0$ in G , so ist für $p = 0$ die Form ω_p konstant, und für $p > 0$ existiert eine Differentialform ω_{p-1} mit

$$\omega_p = d\omega_{p-1}.$$

3. Man beweise die Rechenregeln für Kurvenintegrale gemäß A.2.15 a:

$$\begin{aligned}\int_{-\gamma} f(x) dx &= -\int_{\gamma} f(x) dx, \\ \int_{\gamma_1} f(x) dx + \int_{\gamma_2} f(x) dx &= \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(x) dx, \\ \int_{\gamma} (af(x) + bg(x)) dx &= a \int_{\gamma} f(x) dx + b \int_{\gamma} g(x) dx, \\ \left| \int_{\gamma} f(x) dx \right| &\leq \int_{\gamma} |f(x)x'(t)| dt.\end{aligned}$$

Bezüglich der letzten Regel sei auf A.2.2 (ii) verwiesen.

4. Es sei γ eine glatte Kurve mit der Parametrisierung $x(t)$, $t \in [a, b]$, $f(x)$ sei stetig auf γ . Dann sei definiert

$$\int_{\gamma} f(x) \overline{dx} g(x) := \int_a^b f(x(t)) \overline{x'(t)} g(x(t)) dt.$$

Man zeige

$$\overline{\int_{\gamma} f(x) dx g(x)} = \int_{\gamma} \overline{g(x)} \overline{dx} \overline{f(x)}$$

und mit dem K gemäß Satz 3.14

$$\left| \int_{\gamma} f(x) \overline{dx} g(x) \right| \leq K \int_{\gamma} |f(x) \overline{x'(t)} g(x)| dt.$$

5. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet in der Ebene und $g, h : G \rightarrow \mathbb{C}$ seien stetig. γ sei eine stückweise glatte Kurve in G mit dem Anfangspunkt z_A und dem Endpunkt z_E . Ferner sei definiert

$$\int_{\gamma} [g(z) dz + h(z) d\bar{z}] := \int_{\gamma} g(z) dz + \int_{\gamma} h(z) d\bar{z}.$$

Man zeige: Wenn es eine reell differenzierbare Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $\partial_z f = g$ und $\partial_{\bar{z}} f = h$, so gilt

$$\int_{\gamma} [g(z) dz + h(z) d\bar{z}] = f(z_E) - f(z_A).$$

Was heißt das im Fall $h = 0$?

6. Man beweise die Orthogonalität der Tangentialvektoren an die S^n in Beispiel A.2.16 a und die Beziehungen

$$\frac{\partial x}{\partial t_j} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_j} = \prod_{k=j+1}^n \cos^2 t_k.$$

7. Man berechne das Integral

$$\int_{|x|<1} \frac{d\sigma}{|x|}.$$

8. Es sei g ein Gebiet endlichen Zusammenhangs mit stückweise glatten Randkurven. Man beweise

$$\int_{\partial G} \bar{z} dz = \sigma(G),$$

wobei $\sigma(G)$ der Flächeninhalt von G sei.

9. Man beweise den Satz von Gauß in der Form

$$\int_{\partial G} f(x) d\bar{x}^* = \int_G (\partial f)(x) d\sigma_x.$$

A.3 Einige Funktionenräume

Wir benötigen insbesondere für die Betrachtung der Teodorescu-Transformation einige Funktionenräume, die in diesem Anhang kurz vorgestellt werden sollen. Wir betrachten stets Funktionen $f : E \rightarrow Y$, $E \subset X$, wobei

$$X \text{ gleich } \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H} \text{ oder } \mathbb{R}^{n+1} \text{ und } Y \text{ gleich } \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{R}^{n+1} \text{ oder } C\ell(n)$$

sein kann, jeweils mit der üblichen euklidischen Metrik versehen.

A.3.1 Räume hölderstetiger Funktionen

LUDWIG OTTO HÖLDER (1859–1937) führte nachstehende Bedingung ein:

Definition A.3.1. Es sei $0 < \mu \leq 1$. Man nennt eine auf einer Menge $E \subset X$ definierte Funktion $f : E \rightarrow Y$ *hölderstetig auf E* mit dem *Hölderexponenten* μ , wenn die Größe

$$|f|_{\mu, E} := \sup_{x, y \in E; x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\mu}$$

endlich ist, d.h. es existiert eine Konstante $A > 0$, so dass für $x, y \in E$ stets

$$|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\mu$$

gilt. Die Konstante A wird *Hölder-Konstante* genannt. Ist der Exponent $\mu = 1$, so spricht man auch von *Lipschitz-Stetigkeit*. Man sagt auch, dass f einer *Hölder-Bedingung* oder einer *Lipschitz-Bedingung* genüge.

Nachstehend sind einige Eigenschaften solcher Funktionen aufgelistet:

Lemma A.3.2. Gegeben sei $f : E \rightarrow Y$, $E \subset X$. Dann gilt

- (i) *Hölderstetige Funktionen sind stetig.*
- (ii) *Wenn E kompakt ist und $|f(x) - f(y)| \leq Ar^\mu$ für alle $r = |x - y| < \delta$, $\delta > 0$, so erfüllt f auf ganz E eine Hölder-Bedingung.*
- (iii) *Wenn die reellen Komponenten von f in einem konvexen Kompaktum E partiell differenzierbar sind und dort beschränkte Ableitungen besitzen, so genügt f auf E einer Lipschitz-Bedingung.*
- (iv) *Wenn f in einem konvexen Kompaktum E einer Hölder-Bedingung mit $\mu > 1$ genügt, so ist f konstant.*
- (v) *Nicht jede stetige Funktion ist hölderstetig.*

Beweis. (i) ist in der Definition enthalten.

(ii) Es sei $r > \delta$. Wegen (i) und der Kompaktheit von E ist $|f(x)| \leq M$ in E , daher folgt für $r \geq \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{2M}{\delta^\mu} \delta^\mu \leq \frac{2M}{\delta^\mu} r^\mu.$$

Für beliebige $x, y \in E$ ist somit $|f(x) - f(y)| \leq A'|x - y|^\mu$, wenn nur $A' = \max\{A, 2M/\delta^\mu\}$ ist.

(iii) Für die reellen Komponenten f_i von f kann auf der Strecke von x nach y der Mittelwertsatz der Differentialrechnung angewendet werden. Da die partiellen Ableitungen der Komponenten beschränkt sein sollen, etwa durch M , so ergibt sich sofort eine Abschätzung der Form

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq M_i|x - y|.$$

Diese Abschätzung kann zu einer entsprechenden Abschätzung von $|f(x) - f(y)|$ zusammengesetzt werden, wobei die größte der auftretenden Konstanten M_i maßgebend ist, multipliziert mit der Anzahl der Komponenten von f .

(iv) Die Hölder-Bedingung gilt natürlich auch für die Komponenten f_i von f . Wegen $\mu > 1$ folgt für alle $x, x_0 \in E$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f_i(x) - f_i(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \lim_{x \rightarrow x_0} A|x - x_0|^{\mu-1} = 0,$$

woraus sich das Verschwinden der (partiellen) Ableitungen von f_i ergibt, also ist f konstant.

Um (v) zu zeigen genügt es, eine spezielle Funktion anzugeben. Man kann zum Beispiel $f: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ wählen und

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\ln t} & (0 < t \leq \frac{1}{2}) \\ 0 & (t = 0). \end{cases}$$

f ist für $t = 0$ offenbar stetig, aber nicht hölderstetig, denn

$$|f(t) - f(0)| = \frac{1}{|\ln t|} \leq At^\mu$$

kann wegen $|\ln t|t^\mu \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$ (und alle $\mu > 0$) für kein A gelten. $\square$

Definition A.3.3. Die Menge aller Funktionen, die auf kompaktem E einer Hölder-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen, wird mit $H^\mu(E)$ bezeichnet.

Durch Einführung der Metrik

$$\|f\|_{\mu, E} = \max_{z \in E} |f(z)| + \sup_{x, y \in E} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\mu}$$

kann gezeigt werden, dass $H^\mu(E)$ ein *Banachraum* wird.

A.3.2 Räume differenzierbarer Funktionen

Es sei $G \subset X$ ein Gebiet und m eine nicht-negative ganze Zahl. Mit $C^m(G)$ soll der Raum aller auf G m -mal reell stetig differenzierbaren Funktionen $f: G \rightarrow Y$ bezeichnet werden, bei mehrdimensionalem Y sollen die Komponenten f_i von f diese

Bedingung erfüllen. Dieser Raum sei mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen f und deren Ableitungen $\nabla^\alpha f$ für alle $|\alpha| \leq m$ auf allen kompakten Teilmengen $K \subset G$ ausgestattet. Dabei sei $\nabla = (\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_n)$ der vektorielle Differentiationsoperator gemäß Definition 7.24 und $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Multiindex, es sei

$$\nabla^\alpha f = \partial_0^{\alpha_0} \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f.$$

Der Teilraum $B^m(G)$ bezeichne alle auf G definierten Funktionen f aus $C^m(G)$, die zusammen mit all ihren Ableitungen $\nabla^\alpha f$ für $|\alpha| \leq m$ auf G gleichmäßig beschränkt sind. Auf $B^m(G)$ wird mit den reellen Komponenten f_i von f die Norm

$$\|f\|_{m,G} := \max_i \max_{0 \leq j \leq m} \max_{|\alpha|=j} \sup_{x \in G} |\nabla^\alpha f_i(x)|$$

eingeführt, es entsteht ein Banach-Raum. Speziell gilt

$$\|f\|_{0,G} := \max_i \sup_{x \in G} |f_i(x)|.$$

Mit $C^\infty(G)$ bezeichnet man den Raum aller Funktionen $f : G \rightarrow Y$, die alle Ableitungen ∇^α beliebig hoher Ordnung besitzen, während $C_0^\infty(G)$ der Teilraum aller Funktionen f aus $C^\infty(G)$ sei, die einen kompakten Träger $\text{supp}(f)$ haben. Dabei ist bekanntlich

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in G : f(x) \neq 0\}}.$$

Zum Raum $C_0^\infty(B_r(a))$ gehört zum Beispiel die wichtige Funktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x-a|^2 - r^2}\right), & \text{wenn } |x-a| < r, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei $s = m + \mu$, dann bezeichnet $B^s(G) \subset B^m(G)$ den Raum der Funktionen, deren m -te Ableitungen auf G hölderstetig mit dem Hölderexponenten μ sind. Wir führen in $B^s(G)$ die Norm

$$\|f\|_{s,G} = \max_i \max_{0 \leq j \leq m} \max_{|\alpha|=j} \sup_{x \in G} |\nabla^\alpha f_i(x)| + \max_i \max_{|\alpha|=m} \|\nabla^\alpha f_i\|_{\mu,G}$$

ein und erhalten einen Banach-Raum. Auch die Bezeichnung $C^{m,\mu}(G)$ ist üblich.

A.3.3 Räume integrierbarer Funktionen

Es sei $G \subset X$ ein Gebiet und p eine positive reelle Zahl. Dann bezeichnet $L^p(G)$ den Raum der Äquivalenzklassen aller Lebesgue-messbaren Funktionen $f : G \rightarrow Y$, für die $|f|^p$ integrierbar über G ist. Mit der Norm

$$\|f\|_{p,G} := \left(\int_G |f(x)|^p d\sigma \right)^{1/p}$$

wird $L^p(G)$ für $p \geq 1$ zu einem Banachraum. Für $p = 2$ haben wir sogar einen Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_2 := (f, g)_{2,G} := \int_G \overline{f(x)} g(x) d\sigma.$$

Dabei müssen wir allerdings Y auf $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{R}^{n+1} \subset C\ell(n)$ beschränken. Der Raum aller Lebesgue messbaren Funktionen $f : G \rightarrow Y$ mit

$$\text{vrai max}_G |f(x)| < \infty$$

wird mit $L^\infty(G)$ bezeichnet; dabei sei vrai max das *wesentliche Maximum*, bei dem eine Menge vom Maß Null außer Acht bleibt. Mit der Norm $\|f\|_{\infty, G} := \text{vrai max}_G |f(x)|$ wird er zu einem Banach-Raum.

Der Raum L^1_{loc} ist die Menge aller Funktionen f , die fast überall auf G definiert und lokal integrierbar sind, d.h. auf jeder messbaren kompakten Menge K gilt $f \in L^1(K)$.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass der Hilbertraum $L^2(G)$ mit dem soeben angegebenen inneren Produkt die Norm

$$\|f\|_2 := (f, f)^{1/2}$$

besitzt, die mit der üblichen Norm vektorwertiger Funktionen übereinstimmt. Es gelten die Eigenschaften:

- (i) Für alle $f \in L^2(G)$ gilt $(f, f)_2 > 0$. Ferner folgt $(f, f)_2 = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
- (ii) Für $f, g \in L^2(G)$ ist $(f, g)_2 = \overline{(g, f)_2}$, wobei der Querstrich die Konjugation in $Y = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet.
- (iii) Für $f, g, h \in L^2(G)$ haben wir die distributive Beziehung $(f + g, h)_2 = (f, h)_2 + (g, h)_2$.
- (iv) Es sei $\lambda \in X = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{R}^{n+1}$, dann ist $\lambda(f, g)_2 = (\overline{\lambda}f, g)_2$ und $(f, g)_2\lambda = (f, g\lambda)_2$.

Der Beweis sei dem Leser als Übung empfohlen.

A.3.4 Distributionen

Man sagt die Folge $(\varphi_m) \subset C_0^\infty(G)$ konvergiere im Sinne des Raumes $\mathcal{D}(G)$ gegen eine Funktion φ , wenn

- (i) es eine kompakte Menge $K \subset G$ gibt, so dass $\text{supp}(\varphi_m) \subset K$ für alle m gilt und
- (ii) für alle Indizes α $\nabla^\alpha \varphi_m \rightarrow \nabla^\alpha \varphi$ gleichmäßig auf K konvergiert.

Der Raum $C_0^\infty(G)$ ausgestattet mit dieser Topologie wird fortan mit $\mathcal{D}(G)$ bezeichnet. Sein dualer Raum $\mathcal{D}'(G)$ bezüglich $Z := \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ heißt *Raum der Schwartzschen Distributionen*. Der Raum $\mathcal{D}'(G)$ ist damit der Vektorraum aller stetigen linearen Funktionale $T : \mathcal{D}(G) \rightarrow Z$ mit folgenden Eigenschaften:

Es seien $T, S \in \mathcal{D}'(G)$ und $\lambda \in Z$, dann gilt

$$\begin{aligned}(T + S)(\varphi) &= T(\varphi) + S(\varphi) \\ (\lambda T)(\varphi) &= \lambda(T(\varphi)) \\ T(\varphi + \lambda\psi) &= T(\varphi) + \lambda T(\psi)\end{aligned}$$

für $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(G)$. Für $Z = \mathbb{H}$ ist die Nichtkommutativität zu beachten. In $\mathcal{D}'(G)$ wird die Topologie durch folgendes Konvergenzkriterium definiert:

$T_m \rightarrow T$ konvergiert in $\mathcal{D}'(G)$ genau dann, wenn $T_m(\varphi) \rightarrow T(\varphi)$ in Z für alle $\varphi \in \mathcal{D}(G)$.

Man sagt, dass eine gegebene Distribution $T \in \mathcal{D}'(G)$ im Distributionensinn die Ableitung $S = \nabla^\alpha T \in \mathcal{D}'(G)$ besitzt, wenn

$$S(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\nabla^\alpha \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

Wir vermerken, dass der partielle Differentialoperator $\nabla^\alpha : \mathcal{D}'(G) \rightarrow \mathcal{D}'(G)$ immer stetig ist, d.h. aus $T_m \rightarrow T$ in $\mathcal{D}'(G)$ folgt notwendig $\nabla^\alpha T_m \rightarrow \nabla^\alpha T$ in $\mathcal{D}'(G)$.

A.3.5 Hardy-Räume

Es sei $0 < p < \infty$. Man sagt, dass eine holomorphe Funktion f in $B_1(0) \subset \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{R}^{n+1}$ zum *Hardy-Raum* $H^p(B_1(0))$ gehört, falls die Bedingung

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{|x|=1} |f(rx)|^p d\sigma_1(x) < \infty$$

erfüllt ist. Analog definiert man für eine harmonische Funktion u den *harmonischen Hardy-Raum* $h^p(B_1(0))$: Eine harmonische Funktion u gehört zu $h^p(B_1(0))$, falls diese der Bedingung

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{|x|=1} |u(rx)|^p d\sigma_1(x) < \infty$$

genügt.

A.3.6 Sobolev-Räume

Es sei $G \subset X$ ein Gebiet und m eine nichtnegative ganze Zahl. Der mit $W^{m,p}(G)$ bezeichnete Raum aller Äquivalenzklassen von Funktionen $f \in L^p(G)$, deren Ableitungen (im Distributionensinn) $\nabla^\alpha f$ für $|\alpha| \leq m$ zu $L^p(G)$ gehören, heißt *Sobolev-Raum*.

Mit den Normen

$$\|f\|_{m,p,G} := \int_G \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |\nabla^\alpha f(x)|^p d\sigma \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$\|f\|_{m,\infty,G} := \max_{|\alpha| \leq m} \operatorname{vraimax}_{x \in G} |\nabla^\alpha f(x)| \quad (p = \infty)$$

wird der Sobolev-Raum zum Banach-Raum. Für $m = 0$ ist dann

$$W^{0,p}(G) = L^p(G).$$

Der Raum $W_0^{m,p}(G)$ ist gerade die Abschließung von $\mathcal{D}(G)$ in der Topologie des Raumes $W^{m,p}(G)$.

Weiter sei Γ der hinreichend glatte Rand des Gebietes G und $B^{m-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ der Raum der Randwerte g aller Funktionen $f \in W^{m,p}(G)$. Eine Norm ist in $B^{m-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ durch

$$\|g\|_{m-\frac{1}{p},p} = \inf \|f\|_{m,p}$$

gegeben, wobei das Infimum über alle Funktionen aus $W^{m,p}(G)$ genommen wird, die auf Γ die gleiche Spur g erzeugen. Derartige Räume heißen auch *Räume vom Besov-Typ*.

A.4 Eigenschaften holomorpher Kugelfunktionen

In diesem Anhang wollen wir einige Berechnungen und Beweisführungen ausführlich vorstellen, die im Kapitel 10 übergangen wurden, um das Verständnis nicht zu erschweren. Im Prinzip ist klar, was zu tun ist, um Normen bzw. Winkel zu berechnen. Der Korrektheit wegen und zur Sicherung der Nachvollziehbarkeit unserer Konstruktionen müssen die verwendeten Werte berechnet werden. Wir benötigen nur Hilfsmittel aus der reellen Analysis.

A.4.1 Eigenschaften der Legendre-Polynome

Die Legendre-Polynome und die Legendre-Funktionen sind Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(1-t^2)(P_{n+1}^m(t))'' - 2t(P_{n+1}^m(t))' + \left((n+1)(n+2) - m^2 \frac{1}{1-t^2} \right) P_{n+1}^m(t) = 0,$$

$$m = 0, \dots, n+1. \quad (\text{A.4.1})$$

Sie erfüllen auch die Rekursionsformeln

$$(1-t^2)(P_{n+1}^m(t))' = (n+m+1)P_n^m(t) - (n+1)tP_{n+1}^m(t), \quad (\text{A.4.2})$$

$$(1-t^2)^{1/2}(P_{n+1}^m(t))' = P_{n+1}^{m+1}(t) - m(1-t^2)^{-1/2}tP_{n+1}^m(t), \quad (\text{A.4.3})$$

$$(1-t^2)^{1/2}P_{n+1}^m(t) = \frac{1}{2n+3} (P_{n+2}^{m+1}(t) - P_n^{m+1}(t)), \quad (\text{A.4.4})$$

und die Zweischrittformeln

$$(n+1-m)P_{n+1}^m(t) - (2n+1)tP_n^m(t) + (n+m)P_{n-1}^m(t) = 0, \quad (\text{A.4.5})$$

$m = 0, \dots, n+1$. Für $m = n \geq 1$ gilt

$$P_n^m(t) = (2m-1)!! (1-t^2)^{m/2}.$$

Diese Funktionen sind paarweise orthogonal in $L_2([-1, 1])$,

$$\int_{-1}^1 P_{n+1}^m(t) P_{n+1}^l(t) dt = 0, \quad m \neq l,$$

und die Normen berechnen sich zu

$$\int_{-1}^1 (P_{n+1}^m(t))^2 dt = \frac{2}{2n+3} \frac{(n+1+m)!}{(n+1-m)!}, \quad m = 0, \dots, n+1. \quad (\text{A.4.6})$$

Die Legendre-Funktionen (nicht die Legendre-Polynome) sind auch orthogonal im gewichteten L^2 -Raum:

$$\int_{-1}^1 P_{n+1}^m(t) P_{n+1}^k(t) (1-t^2)^{-1} dt = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ \frac{(n+1+m)!}{m(n+1-m)!}, & m = k, \end{cases} \quad (\text{A.4.7})$$

$m, k = 1, \dots, n+1$.

Der an weiteren Einzelheiten über Legendre-Polynome und -funktionen interessierte Leser sei auf [7] und [126] verwiesen.

A.4.2 Norm der holomorphen Kugelfunktionen

Satz 10.13. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Teilsysteme holomorpher Kugelfunktionen $X_{n,0}^0, X_{n,0}^m$ bzw. $Y_{n,0}^m$ ($m = 1, \dots, n+1$) Orthogonalsysteme mit den Normen

$$\|X_{n,0}^0\|_{0,L^2(S^2)} = \sqrt{\pi(n+1)} \quad (\text{A.4.8})$$

und

$$\|X_{n,0}^m\|_{0,L^2(S^2)} = \|Y_{n,0}^m\|_{0,L^2(S^2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}(n+1) \frac{(n+1+m)!}{(n+1-m)!}} \quad m = 1, \dots, n+1.$$

Beweis. Eine einfache Berechnung zeigt die Orthogonalität

$$\begin{aligned} (X_{n,0}^0, X_{n,0}^m)_{0,L^2(S^2)} &= \int_0^\pi (A^{0,n} A^{m,n} + B^{0,n} B^{m,n}) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos m\varphi d\varphi \\ &= 0, \quad m = 1, \dots, n+1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (X_{n,0}^0, Y_{n,0}^m)_{0,L^2(S^2)} &= \int_0^\pi (A^{0,n} A^{m,n} + B^{0,n} B^{m,n}) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin m\varphi d\varphi \\ &= 0, \quad m = 1, \dots, n+1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (X_{n,0}^{m_1}, Y_{n,0}^{m_2})_{0,L^2(S^2)} &= \int_0^\pi (A^{m_1,n} A^{m_2,n} + B^{m_1,n} B^{m_2,n}) \sin \theta d\theta \\ &\cdot \int_0^{2\pi} \cos m_1\varphi \sin m_2\varphi d\varphi - \int_0^\pi C^{m_1,n} C^{m_2,n} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin m_1\varphi \cos m_2\varphi d\varphi \\ &= 0, \quad m_1, m_2 = 1, \dots, n+1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (X_{n,0}^{m_1}, X_{n,0}^{m_2})_{0,L^2(S^2)} &= \int_0^\pi (A^{m_1,n} A^{m_2,n} + B^{m_1,n} B^{m_2,n}) \sin \theta d\theta \\ &\cdot \int_0^{2\pi} \cos m_1\varphi \cos m_2\varphi d\varphi + \int_0^\pi C^{m_1,n} C^{m_2,n} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin m_1\varphi \sin m_2\varphi d\varphi \\ &= 0, \quad m_1 \neq m_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Y_{n,0}^{m_1}, Y_{n,0}^{m_2})_{0,L^2(S^2)} &= \int_0^\pi (A^{m_1,n} A^{m_2,n} + B^{m_1,n} B^{m_2,n}) \sin \theta d\theta \\
&\cdot \int_0^{2\pi} \sin m_1 \varphi \sin m_2 \varphi d\varphi + \int_0^\pi C^{m_1,n} C^{m_2,n} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos m_1 \varphi \cos m_2 \varphi d\varphi \\
&= 0, \quad m_1 \neq m_2.
\end{aligned}$$

Für die Berechnung der Normen (A.4.8) und (A.4.9) benutzen wir die Formeln (A.4.6)–(A.4.7) und definieren

$$N_{n+1}^m := \int_{-1}^1 (P_{n+1}^m(t))^2 dt = \frac{2}{2n+3} \frac{(n+1+m)!}{(n+1-m)!}, \quad (\text{A.4.9})$$

$$M_{n+1}^m := \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1} (P_{n+1}^m(t))^2 dt = \frac{(n+1+m)!}{m(n+1-m)!}. \quad (\text{A.4.10})$$

Aus (10.9)–(10.11) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|X_{n,0}^0\|_{0,L^2(S^2)}^2 &= \int_{S^2} \overline{X_{n,0}^0} X_{n,0}^m |do| = 2\pi \int_0^\pi [(A^{0,n})^2 + (B^{0,n})^2] \sin \theta d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \left[\sin^2 \theta \left[\frac{d}{dt} [P_{n+1}(t)]_{t=\cos \theta} \right]^2 d\theta + (n+1)^2 (P_{n+1}(\cos \theta))^2 \right] \sin \theta d\theta.
\end{aligned}$$

Wir transformieren mit $t = \cos \theta$, benutzen die Definition der assoziierten Legendrefunktionen und erhalten

$$\begin{aligned}
\|X_{n,0}^0\|_{0,L^2(S^2)}^2 &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \left[(1-t^2) ((P_{n+1}(t))')^2 + (n+1)^2 (P_{n+1}(t))^2 \right] dt. \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 (P_{n+1}^1(t))^2 dt + \frac{\pi}{2} (n+1)^2 \int_{-1}^1 (P_{n+1}(t))^2 dt \\
&= \frac{\pi}{2} N_{n+1}^1 + \frac{\pi}{2} (n+1)^2 N_{n+1}^0 \\
&= \pi (n+1).
\end{aligned}$$

Zum Beweis von (A.4.9) wollen wir nur die Funktionen $X_{n,0}^m$ ($m = 1, \dots, n+1$) betrachten. Für $m = 1, \dots, n+1$ führt die Gleichung (10.12) auf

$$\begin{aligned}
\|X_{n,0}^m\|_{0,L^2(S^2)}^2 &= \int_{S^2} \overline{X_{n,0}^m} X_{n,0}^m |do| \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [((A^{m,n})^2 + (B^{m,n})^2) \cos^2 m\varphi + (C^{m,n})^2 \sin^2 m\varphi] \sin \theta d\varphi d\theta \\
&= \pi \left[\int_0^\pi ((A^{m,n})^2 + (B^{m,n})^2) \sin \theta d\theta + \int_0^\pi (C^{m,n})^2 \sin \theta d\theta \right]. \quad (\text{A.4.11})
\end{aligned}$$

Wir berechnen die einzelnen Integrale. Mit (10.14) und (10.15) ergibt sich

$$(A^{m,n})^2 + (B^{m,n})^2 = \frac{1}{4} \left\{ \sin^2 \theta \left[\frac{d}{dt} [P_{n+1}^m(t)]_{t=\cos \theta} \right]^2 + (n+1)^2 (P_{n+1}^m(\cos \theta))^2 \right\}$$

und nach der Transformation der Variablen $t = \cos \theta$ folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\pi ((A^{m,n})^2 + (B^{m,n})^2) \sin \theta d\theta &= \int_{-1}^1 ((A^{m,n})^2 + (B^{m,n})^2) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1-t^2) [(P_{n+1}^m(t))']^2 dt + \frac{1}{4} (n+1)^2 N_{n+1}^m. \end{aligned} \quad (\text{A.4.12})$$

Zur Berechnung der rechten Seite von (A.4.12) benutzen wir die Rekursionsformeln (A.4.3) und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2) [(P_{n+1}^m(t))']^2 dt &= N_{n+1}^{m+1} + m^2 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1} t^2 (P_{n+1}^m(t))^2 dt \\ &\quad - 2m \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} t P_{n+1}^m(t) P_{n+1}^{m+1}(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{A.4.13})$$

Das erste Integral auf der rechten Seite kann nun abschliessend berechnet werden

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1} t^2 (P_{n+1}^m(t))^2 dt &= - \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1} (1-t^2-1) (P_{n+1}^m(t))^2 dt \\ &= - \int_{-1}^1 (P_{n+1}^m(t))^2 dt + \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1} (P_{n+1}^m(t))^2 dt \\ &= -N_{n+1}^m + M_{n+1}^m. \end{aligned} \quad (\text{A.4.14})$$

Damit lautet (A.4.13) jetzt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2) [(P_{n+1}^m(t))']^2 dt &= N_{n+1}^{m+1} - m^2 N_{n+1}^m + m^2 M_{n+1}^m \\ &\quad - 2m \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} t P_{n+1}^m(t) P_{n+1}^{m+1}(t) dt, \end{aligned} \quad (\text{A.4.15})$$

und wir haben noch das Integral auf der rechten Seite von (A.4.15) auszuwerten. Dazu benutzen wir wieder die Rekursionsformel (A.4.4),

$$(1-t^2)^{-1/2} P_{n+1}^m(t) = \frac{1}{2n+3} [(1-t^2)^{-1} P_{n+2}^{m+1}(t) - (1-t^2)^{-1} P_n^{m+1}(t)]. \quad (\text{A.4.16})$$

und die Zweischrittformel (A.4.5),

$$t P_{n+1}^{m+1}(t) = \frac{1}{2n+3} [(n+1-m) P_{n+2}^{m+1}(t) + (n+m+2) P_n^{m+1}(t)]. \quad (\text{A.4.17})$$

Die Multiplikation von (A.4.16) mit (A.4.17) liefert

$$\begin{aligned} (1-t^2)^{-1/2} t P_{n+1}^m(t) P_{n+1}^{m+1}(t) &= \frac{1}{(2n+3)^2} [(n+1-m) (1-t^2)^{-1} (P_{n+2}^{m+1}(t))^2 \\ &\quad - (n+m+2) (1-t^2)^{-1} (P_n^{m+1}(t))^2 + (2m+1) (1-t^2)^{-1} P_{n+2}^{m+1}(t) P_n^{m+1}(t)] \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} t P_{n+1}^m(t) P_{n+1}^{m+1}(t) dt &= \frac{n+1-m}{(2n+3)^2} M_{n+2}^{m+1} - \frac{n+m+2}{(2n+3)^2} M_n^{m+1} \\ &+ \frac{2m+1}{(2n+3)^2} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1} P_{n+2}^{m+1}(t) P_n^{m+1}(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{A.4.18})$$

(A.4.15) bedeutet jetzt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2) [(P_{n+1}^m(t))']^2 dt &= N_{n+1}^{m+1} - m^2 N_{n+1}^m + m^2 M_{n+1}^m \\ &- \frac{2m(n+1-m)}{(2n+3)^2} M_{n+2}^{m+1} + \frac{2m(n+m+2)}{(2n+3)^2} M_n^{m+1} \\ &- \frac{2m(2m+1)}{(2n+3)^2} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1} P_{n+2}^{m+1}(t) P_n^{m+1}(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{A.4.19})$$

Aus der Rekursionsformel (A.4.4) folgt

$$P_{n+1}^m(t) = \frac{1}{2n+3} \left[(1-t^2)^{-1/2} P_{n+2}^{m+1}(t) - (1-t^2)^{-1/2} P_n^{m+1}(t) \right]$$

und nach Quadrieren

$$\begin{aligned} (P_{n+1}^m(t))^2 &= \frac{1}{(2n+3)^2} \left[(1-t^2)^{-1} (P_{n+2}^{m+1}(t))^2 + (1-t^2)^{-1} (P_n^{m+1}(t))^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(1-t^2)^{-1} P_{n+2}^{m+1}(t) P_n^{m+1}(t) \right]. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1} P_{n+2}^{m+1}(t) P_n^{m+1}(t) dt = -\frac{(2n+3)^2}{2} N_{n+1}^m + \frac{1}{2} M_{n+2}^{m+1} + \frac{1}{2} M_n^{m+1}. \quad (\text{A.4.20})$$

Wir setzen dieses Resultat in (A.4.19) ein,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2) [(P_{n+1}^m(t))']^2 dt &= N_{n+1}^{m+1} - m^2 N_{n+1}^m + m(2m+1) N_{n+1}^m + \\ &+ m^2 M_{n+1}^m - \frac{m}{2n+3} M_{n+2}^{m+1} + \frac{m}{2n+3} M_n^{m+1}, \end{aligned}$$

substituieren in (A.4.12) und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^\pi ((A^{m,n})^2 + (B^{m,n})^2) \sin \theta d\theta &= \frac{1}{4} N_{n+1}^{m+1} + \frac{1}{4} [(n+1)^2 - m^2] N_{n+1}^m \\ &+ \frac{1}{4} m(2m+1) N_{n+1}^m + \frac{1}{4} m^2 M_{n+1}^m - \frac{1}{4} \frac{m}{2n+3} M_{n+2}^{m+1} + \frac{1}{4} \frac{m}{2n+3} M_n^{m+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.4.21})$$

Benutzen wir nun (A.4.9) und (A.4.10), haben wir die folgenden Beziehungen bewiesen:

$$\begin{aligned} N_{n+1}^{m+1} &= (n+m+2)(n+1-m) N_{n+1}^m, \\ M_{n+1}^m &= \frac{2n+3}{2m} N_{n+1}^m, \end{aligned} \quad (\text{A.4.22})$$

$$M_{n+2}^{m+1} = \frac{2n+3}{2(m+1)} (n+m+3)(n+m+2) N_{n+1}^m \quad (\text{A.4.23})$$

und

$$M_n^{m+1} = \frac{2n+3}{2(m+1)} (n+1-m)(n-m) N_{n+1}^m. \quad (\text{A.4.24})$$

Mit (A.4.21) haben wir nun

$$\int_0^\pi ((A^{m,n})^2 + (B^{m,n})^2) \sin \theta d\theta = \frac{1}{4} \left[(n+1)(2n+3) - \frac{m}{2}(2n+3) \right] N_{n+1}^m. \quad (\text{A.4.25})$$

Das noch verbleibende Integral in (A.4.11) ist einfach zu berechnen.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (C^{m,n})^2 \sin \theta d\theta &= \int_{-1}^1 (C^{m,n})^2 dt \\ &= \frac{1}{4} m^2 \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1} (P_{n+1}^m(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{4} m^2 M_{n+1}^m \\ &= \frac{1}{8} m (2n+3) N_{n+1}^m. \end{aligned} \quad (\text{A.4.26})$$

Durch Einsetzen von (A.4.25) und (A.4.26) in (A.4.11) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \|X_{n,0}^m\|_{0,L^2(S^2)}^2 &= \frac{\pi}{4} (n+1)(2n+3) N_{n+1}^m \\ &= \frac{\pi}{2} (n+1) \frac{(n+m+1)!}{(n+1-m)!} \end{aligned}$$

und das ist das gewünschte Resultat. $\square$

A.4.3 Skalarprodukte holomorpher Kugelfunktionen

Satz 10.15. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $m = 1, \dots, n+1$; $l = 1, \dots, n$, gilt

$$\begin{aligned} (X_{n,0}^0, X_{n,3}^0)_{0,L^2(S^2)} &= (X_{n,0}^0, X_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} = (X_{n,0}^0, Y_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} \\ &= (X_{n,0}^m, X_{n,3}^0)_{0,L^2(S^2)} = (X_{n,0}^m, X_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} = (Y_{n,0}^m, X_{n,3}^0)_{0,L^2(S^2)} \\ &= (Y_{n,0}^m, Y_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} = 0 \end{aligned}$$

und

$$(X_{n,0}^m, Y_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} = -(Y_{n,0}^m, X_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} = \begin{cases} 0, & m \neq l, \\ \frac{\pi}{2} m \frac{(n+m+1)!}{(n-m+1)!}, & m = l. \end{cases}$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m = 1, \dots, n+1$, $l = 1, \dots, n$, benutzen wir (10.12), (10.13) sowie die Definition von $Y_{n,3}^l$ und erhalten

$$\begin{aligned} (X_{n,0}^m, Y_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} &= - \int_{S^2} C^{m,n} B^{l,n} \sin m\varphi \sin l\varphi |d\varphi| \\ &\quad - \int_{S^2} B^{m,n} C^{l,n} \cos m\varphi \cos l\varphi |d\varphi|. \end{aligned} \quad (\text{A.4.27})$$

Wegen

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin l\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos l\varphi d\varphi = 0, \quad m \neq l,$$

ergibt sich aus (A.4.27)

$$(X_{n,0}^m, Y_{n,3}^l)_{0,L^2(S^2)} = 0, \quad m \neq l.$$

Für $m = l$ erhalten wir aus (10.15), (10.16) unter Benutzung der Bezeichnungsweise von (A.4.9)

$$\begin{aligned} (X_{n,0}^m, Y_{n,3}^m)_{0,L^2(S^2)} &= - \int_{S^2} B^{m,n} C^{m,n} |d\sigma| \\ &= -2\pi \int_0^\pi B^{m,n} C^{m,n} \sin \theta d\theta \\ &= -2\pi \int_{-1}^1 B^{m,n} C^{m,n} dt \\ &= -\frac{\pi}{2} m \int_{-1}^1 t (P_{n+1}^m(t))' P_{n+1}^m(t) dt + \frac{\pi}{2} m(n+1) N_{n+1}^m. \end{aligned} \quad (\text{A.4.28})$$

Zur Berechnung des Integrals auf der rechten Seite von (A.4.28) benutzen wir wieder die Rekursionsformel, (A.4.3).

$$(P_{n+1}^m(t))' = (1-t^2)^{-1/2} P_{n+1}^{m+1}(t) - m(1-t^2)^{-1} t P_{n+1}^m(t).$$

Multiplikation dieses Ausdruckes mit $t P_{n+1}^m(t)$ führt auf

$$t (P_{n+1}^m(t))' P_{n+1}^m(t) = (1-t^2)^{-1/2} t P_{n+1}^{m+1}(t) P_{n+1}^m(t) - m(1-t^2)^{-1} t^2 (P_{n+1}^m(t))^2$$

und mit (A.4.14) folgt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 t (P_{n+1}^m(t))' P_{n+1}^m(t) dt &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} t P_{n+1}^{m+1}(t) P_{n+1}^m(t) dt \\ &\quad - m \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1} t^2 (P_{n+1}^m(t))^2 dt \\ &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} t P_{n+1}^{m+1}(t) P_{n+1}^m(t) dt \\ &\quad + m N_{n+1}^m - m M_{n+1}^m. \end{aligned} \quad (\text{A.4.29})$$

Aus (A.4.18) und (A.4.20) berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} t P_{n+1}^m(t) P_{n+1}^{m+1}(t) dt &= \frac{1}{2(2n+3)} M_{n+2}^{m+1} - \frac{1}{2(2n+3)} M_n^{m+1} \\ &\quad - \frac{2m+1}{2} N_{n+1}^m. \end{aligned}$$

Der erhaltene Ausdruck wird in (A.4.29) substituiert und unter Benutzung der Gleichungen (A.4.23) und (A.4.24) folgt schließlich

$$\int_{-1}^1 t (P_{n+1}^m(t))' P_{n+1}^m(t) dt = -\frac{1}{2} N_{n+1}^m.$$

Nun setzen wir noch (A.4.30) in (A.4.28) ein und verwenden wieder (A.4.9):

$$\begin{aligned} (X_{n,0}^m, Y_{n,3}^m)_{0,L^2(S^2)} &= \frac{\pi}{4} m (2n+3) N_{n+1}^m \\ &= \frac{\pi}{2} m \frac{(n+m+1)!}{(n+1-m)!}, \end{aligned}$$

und das ist die Behauptung. $\square$

A.4.4 Vollständige Orthonormalsysteme in $\mathcal{H}_{n,\mathbb{H}}^+$

Satz 10.17. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ bilden die $n+1$ holomorphen homogenen Polynome

$$r^n X_{n,0}^{0,*}, r^n X_{n,0}^{2k_1,*}, r^n Y_{n,3}^{2k_2,*}, k_1 = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right], k_2 = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] \quad (\text{A.4.30})$$

eine Orthogonalbasis in $\mathcal{H}_{n,\mathbb{H}}^+$.

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ besteht die Menge (A.4.30) aus $n+1$ Funktionen. Es reicht also aus, deren Orthogonalität nachzuweisen. Wir schreiben das innere Produkt zweier Funktionen $f, g \in L^2(S^2)_{\mathbb{H}}$ ausführlich auf.

$$(f, g)_{L^2(S^2)} = \int_{S^2} [\bar{f}g]_0 |do| + \int_{S^2} [\bar{f}g]_1 |do| e_1 \quad (\text{A.4.31})$$

$$+ \int_{S^2} [\bar{f}g]_2 |do| e_2 + \int_{S^2} [\bar{f}g]_3 |do| e_3. \quad (\text{A.4.32})$$

Der Skalarteil von (A.4.31) stimmt mit dem reellen inneren Produkt (10.2) überein, und da die $\mathbb{H}$ -holomorphen Kugelfunktionen $X_{n,0}^{0,*}, X_{n,0}^{2k_1,*}, Y_{n,3}^{2k_2,*}$ ($k_1 = 1, \dots, [\frac{n+1}{2}]$, $k_2 = 1, \dots, [\frac{n}{2}]$) bezüglich des reellen Skalarproduktes orthogonal sind, haben wir sofort

$$\begin{aligned} \int_{S^2} [\overline{X_{n,0}^{2k_1,*}} X_{n,0}^{2k'_1,*}]_0 |do| &= 0, \quad k_1 \neq k'_1, \\ \int_{S^2} [\overline{Y_{n,3}^{2k_2,*}} Y_{n,3}^{2k'_2,*}]_0 |do| &= 0, \quad k_2 \neq k'_2, \\ \int_{S^2} [\overline{X_{n,0}^{0,*}} X_{n,0}^{2k_1,*}]_0 |do| &= \int_{S^2} [\overline{X_{n,0}^{0,*}} Y_{n,3}^{2k_2,*}]_0 |do| \\ &= \int_{S^2} [\overline{X_{n,0}^{2k_1,*}} Y_{n,3}^{2k_2,*}]_0 |do| = 0, \end{aligned}$$

wobei $k_1, k'_1 = 1, \dots, [\frac{n+1}{2}]$, and $k_2, k'_2 = 1, \dots, [\frac{n}{2}]$.

Es verbleibt der Nachweis, dass die anderen Komponenten von (A.4.31) ebenfalls verschwinden. Nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned} X_{n,0}^{0,*} &= \frac{1}{\|X_n^0\|_{L^2(S^2)}} X_n^0, \\ X_{n,0}^{m,*} &= \frac{1}{\|X_n^m\|_{L^2(S^2)}} X_n^m, \quad m = 2k_1, \quad k_1 = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right], \\ Y_{n,3}^{l,*} &= \frac{\sqrt{s_{n,l}}}{\|X_n^l\|_{L^2(S^2)}} [(n+1)Y_n^l e_3 - l X_n^l], \quad l = 2k_2, \quad k_2 = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]. \end{aligned}$$

Wir arbeiten zum Nachweis der Orthogonalität nur mit den nicht-normierten Polynomen X_n^0 , X_n^m , gegeben durch (10.9) bzw. (10.12), und bezeichnen mit Z_n^l die Funktionen $(n+1)Y_n^l e_3 - l X_n^l$. Benutzen wir die Ausdrücke für X_n^m und Y_n^m gemäß (10.12) bzw. (10.13), so haben die Funktionen Z_n^l die Gestalt

$$\begin{aligned} Z_n^l &:= (n+1)Y_n^l e_3 - l X_n^l \\ &= -l A^{l,n} \cos l\varphi \\ &\quad + \left(F^{l,n} \sin \varphi \sin l\varphi - G^{l,n} \cos \varphi \cos l\varphi \right) e_1 \\ &\quad - \left(F^{l,n} \cos \varphi \sin l\varphi + G^{l,n} \sin \varphi \cos l\varphi \right) e_2 \\ &\quad + (n+1)A^{l,n} \sin l\varphi e_3, \end{aligned}$$

wobei

$$F^{l,n} := (n+1)B^{l,n} + l C^{l,n} \quad \text{und} \quad G^{l,n} := (n+1)C^{l,n} + l B^{l,n}$$

mit $l = 2k_2, k_2 = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$. Wir beginnen mit der Berechnung der e_1 -Koordinate von (A.4.31) für die Funktionen X_n^0 , X_n^m und Z_n^l für jedes m und jedes l . Dabei erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int_{S^2} [\overline{X_n^0} X_n^m]_1 |d\omega| \\ &= \int_{S^2} [(A^{0,n} B^{m,n} - B^{0,n} A^{m,n}) \cos \varphi \cos m\varphi - A^{0,n} C^{m,n} \sin \varphi \sin m\varphi] |d\omega| \\ &= \int_0^\pi (A^{0,n} B^{m,n} - B^{0,n} A^{m,n}) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos m\varphi d\varphi \\ &\quad - \int_0^\pi A^{0,n} C^{m,n} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \varphi \sin m\varphi d\varphi, \end{aligned}$$

und weil

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos m\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi \sin m\varphi d\varphi = 0, \quad m = 2, 3, \dots, \quad (\text{A.4.33})$$

ergibt sich

$$\int_{S^2} [\overline{X_n^0} X_n^m]_1 |d\omega| = 0, \quad m = 2k_1, k_1 = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Ebenfalls aus (A.4.33) finden wir

$$\begin{aligned} \int_{S^2} [\overline{X_n^0} Z_n^l]_1 |d\omega| &= \int_{S^2} (B^{0,n} A^{l,n} - A^{0,n} G^{l,n}) \cos \varphi \cos l\varphi |d\omega| \\ &\quad + \int_{S^2} A^{0,n} F^{l,n} \sin \varphi \sin l\varphi |d\omega| \\ &= 0, \quad l = 2k_2, k_2 = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]. \end{aligned}$$

In der Familie der Funktionen X_n^m ergeben sich die e_1 -Koordinaten auf der rechten Seite von (A.4.31) aus

$$\begin{aligned} \int_{S^2} [\overline{X_n^{m_1}} X_n^{m_2}]_1 |d\omega| &= \int_{S^2} [(A^{m_1,n} B^{m_2,n} - B^{m_1,n} A^{m_2,n}) \cos \varphi \cos m_1\varphi \cos m_2\varphi \\ &\quad - A^{m_1,n} C^{m_2,n} \sin \varphi \cos m_1\varphi \sin m_2\varphi \\ &\quad + C^{m_1,n} A^{m_2,n} \sin \varphi \sin m_1\varphi \cos m_2\varphi] |d\omega|, \end{aligned}$$

und weil

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos m\varphi \cos l\varphi d\varphi &= \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos m\varphi \sin l\varphi d\varphi, \\ &= 0, \\ m, l = 1, 2, \dots, \quad m &\neq l+1, m \neq l-1 \end{aligned}$$

gilt, erhalten wir

$$\int_{S^2} [\overline{X_n^{m_1}} X_n^{m_2}]_1 |do| = 0, \quad m_1 = 2k_1, m_2 = 2k'_1, k_1, k'_1 = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right].$$

Für X_n^m und Z_n^l ergibt sich in (A.4.31) für die e_1 -Koordinate

$$\begin{aligned} \int_{S^2} [\overline{X_n^m} Z_n^l]_1 |do| &= \int_{S^2} \left[\left(A^{m,n} F^{l,n} - (n+1) B^{m,n} A^{l,n} \right) \sin \varphi \cos m\varphi \sin l\varphi \right. \\ &\quad + \left(-A^{m,n} G^{l,n} + l B^{m,n} A^{l,n} \right) \cos \varphi \cos m\varphi \cos l\varphi \\ &\quad - l C^{m,n} A^{l,n} \sin \varphi \sin m\varphi \cos l\varphi \\ &\quad \left. - (n+1) C^{m,n} A^{l,n} \cos \varphi \sin m\varphi \sin l\varphi \right] |do|, \end{aligned}$$

und zusammen mit

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin m\varphi \sin l\varphi d\varphi = 0, \quad m, l = 1, 2, \dots, \quad m \neq l+1, m \neq l-1,$$

folgt

$$\int_{S^2} [\overline{X_n^m} Z_n^l]_1 |do| = 0, \quad m = 2k_1, l = 2k_2, k_1 = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right], k_2 = 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right].$$

Schließlich erhalten wir durch Betrachtung von (A.4.31) mit den Funktionen Z_n^l für die e_1 -Koordinate

$$\begin{aligned} \int_{S^2} [\overline{Z_n^{l_1}} Z_n^{l_2}]_1 |do| &= \int_{S^2} \left[- \left(l_1 A^{l_1,n} F^{l_2,n} + (n+1) G^{l_1,n} A^{l_2,n} \right) \sin \varphi \cos l_1 \varphi \sin l_2 \varphi \right. \\ &\quad + \left(l_1 A^{l_1,n} G^{l_2,n} - l_2 G^{l_1,n} A^{l_2,n} \right) \cos \varphi \cos l_1 \varphi \cos l_2 \varphi \\ &\quad + \left(l_2 F^{l_1,n} A^{l_2,n} - (n+1) A^{l_1,n} G^{l_2,n} \right) \sin \varphi \sin l_1 \varphi \cos l_2 \varphi \\ &\quad \left. - (n+1) \left(A^{l_1,n} F^{l_2,n} + F^{l_1,n} A^{l_2,n} \right) \cos \varphi \sin l_1 \varphi \sin l_2 \varphi \right] |do| \\ &= 0, \quad l_1 = 2k_2, l_2 = 2k'_2, k_2, k'_2 = 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]. \end{aligned}$$

Eine analoge Betrachtung führt für die e_2 -Koordinaten zum Ziel. Für die e_3 -Koordinate haben wir zunächst

$$\begin{aligned} \int_{S^2} [\overline{X_n^0} X_n^m]_3 |do| &= - \int_{S^2} B^{0,n} C^{m,n} \sin m\varphi |do| \\ &= 0, \quad m = 2k_1, k_1 = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right], \end{aligned}$$

wegen

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi d\varphi = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{S^2} [\overline{X_n^0} Z_n^l]_3 |do| &= \int_{S^2} \left[(n+1) A^{0,n} A^{l,n} + B^{0,n} F^{l,n} \right] \sin l\varphi |do| = 0, \\ l &= 2k_2, \quad k_2 = 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]. \end{aligned}$$

Im Falle der Funktionen X_n^m sind die e_3 -Koordinaten in (A.4.31) gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_{S^2} [\overline{X_n^{m_1}} X_n^{m_2}]_3 |do| &= \int_{S^2} (-B^{m_1,n} C^{m_2,n} \cos m_1\varphi \sin m_2\varphi \\ &\quad + C^{m_1,n} B^{m_2,n} \sin m_1\varphi \cos m_2\varphi) |do| \end{aligned}$$

und wegen

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cos l\varphi d\varphi = 0, \quad m, l = 1, 2, \dots \quad (\text{A.4.34})$$

können wir folgern, dass

$$\int_{S^2} [\overline{X_n^{m_1}} X_n^{m_2}]_3 |do| = 0, \quad m_1 = 2k_1, \quad m_2 = 2k'_1, \quad k_1, k'_1 = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right].$$

Für Z_n^l ergibt sich die e_3 -Koordinate in (A.4.31) zu

$$\begin{aligned} \int_{S^2} [\overline{Z_n^{l_1}} Z_n^{l_2}]_3 |do| &= \int_{S^2} \left\{ \left[-l_1(n+1) A^{l_1,n} A^{l_2,n} - G^{l_1,n} F^{l_2,n} \right] \cos l_1\varphi \sin l_2\varphi \right. \\ &\quad \left. + \left[l_2(n+1) A^{l_1,n} A^{l_2,n} + F^{l_1,n} G^{l_2,n} \right] \sin l_1\varphi \cos l_2\varphi \right\} |do| \stackrel{(\text{A.4.34})}{=} 0, \\ l_1 &= 2k_2, \quad l_2 = 2k'_2, \quad k_2, k'_2 = 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]. \end{aligned}$$

Schließlich benötigen wir noch die e_3 -Koordinate in (A.4.31) für den Fall X_n^m und Z_n^l .

$$\begin{aligned} \int_{S^2} [\overline{X_n^m} Z_n^l]_3 |do| &= \int_{S^2} \left\{ \left[(n+1) A^{m,n} A^{l,n} + B^{m,n} F^{l,n} \right] \cos m\varphi \sin l\varphi \right. \\ &\quad \left. - C^{m,n} G^{l,n} \sin m\varphi \cos l\varphi \right\} |do| \stackrel{(\text{A.4.34})}{=} 0, \\ m &= 2k_1, \quad l = 2k_2, \quad k_1 = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right], \quad k_2 = 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]. \end{aligned}$$

Fassen wir die erhaltenen Teilergebnisse zusammen, so können wir folgern, dass

$$\begin{aligned} (X_{n,0}^{0,*}, X_{n,0}^{m,*})_{L^2(S^2)} &= (X_{n,0}^{0,*}, Y_{n,0}^{l,*})_{L^2(S^2)} \\ &= (X_{n,0}^{m_1,*}, Y_{n,3}^{m_2,*})_{L^2(S^2)} = 0, \end{aligned}$$

$$m = 2k_1, \quad l = 2k_2, \quad k_1 = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right], \quad k_2 = 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right],$$

und

$$(X_{n,0}^{m_1,*}, X_{n,0}^{m_2,*})_{L^2(S^2)} = (Y_{n,3}^{m_1,*}, Y_{n,3}^{m_2,*})_{L^2(S^2)} = 0, \\ m_1 \neq m_2, \quad m_1 - m_2 \text{ gerade}.$$

Damit ist gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die $n+1$ Polynome (A.4.30) orthogonal bezüglich des Skalarproduktes in $L^2(\mathbb{B}_3)_{\mathbb{H}}$ sind, folglich bilden sie eine Basis in $\mathcal{H}_{n,\mathbb{H}}^+$. $\square$

A.4.5 Ableitungen holomorpher Kugelfunktionen

Satz 10.23. *Sei $n \geq 1$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \partial X_n^m &= (n+m+1)X_{n-1}^m, \quad m = 0, \dots, n, \\ \partial Y_n^m &= (n+m+1)Y_{n-1}^m, \quad m = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Beweis. Auf Grund der analogen Gestalt der Polynome und ihrer Ableitungen reicht es aus zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad A_{m,n}^{(1)} &= (n+m+1)A^{m,n-1}, \quad m = 0, \dots, n, \\ \text{(ii)} \quad B_{m,n}^{(1)} &= (n+m+1)B^{m,n-1}, \quad m = 0, \dots, n, \\ \text{(iii)} \quad C_{m,n}^{(1)} &= (n+m+1)C^{m,n-1}, \quad m = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Benutzen wir (10.33), (10.34), (10.35) und die Legendresche Differentialgleichung (A.4.1), so können wir mit Hilfe der üblichen Substitution $t = \cos \theta$ die Koeffizienten $A_{m,n}^{(1)}$, $B_{m,n}^{(1)}$ und $C_{m,n}^{(1)}$ explizit beschreiben:

$$\begin{aligned} A_{m,n}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left[(2n+1) \sin^2 \theta \cos \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}^m(t)]_{t=\cos \theta} + (n+1)(2n+1) \cos^2 \theta P_{n+1}^m(\cos \theta) \right. \\ &\quad \left. - ((n+1)^2 - m^2) P_{n+1}^m(\cos \theta) \right], \\ B_{m,n}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left[(2n+1) \sin \theta \cos^2 \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}^m(t)]_{t=\cos \theta} - n \sin \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}^m(t)]_{t=\cos \theta} \right. \\ &\quad \left. - (n+1)(2n+1) \sin \theta \cos \theta P_{n+1}^m(\cos \theta) + m^2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_{n+1}^m(\cos \theta) \right], \\ C_{m,n}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left[m(n+1) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_{n+1}^m(\cos \theta) + m \sin \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}^m(t)]_{t=\cos \theta} \right]. \end{aligned}$$

Wir überprüfen zuerst (i). Wenden wir die Rekursionsformel (A.4.2) in $A_{m,n}^{(1)}$ mit $t = \cos \theta$ an, so erhalten wir

$$A_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{2} (n+m+1) [(2n+1) \cos \theta P_n^m(\cos \theta) - (n-m+1) P_{n+1}^m(\cos \theta)].$$

Mit Hilfe der Zweischrittformel (A.4.5) ergibt sich

$$A^{(1)m,n} = \frac{1}{2}(n+m+1)(n+m)P_{n-1}^m(\cos \theta).$$

Andererseits gilt mit der Rekursionsformel (A.4.2) auch

$$A^{m,n-1} = \frac{1}{2} \left[\sin^2 \theta \frac{d}{dt} [P_n^m(t)]_{t=\cos \theta} + n \cos \theta P_n^m(\cos \theta) \right] = \frac{1}{2}(n+m)P_{n-1}^m(\cos \theta). \quad (\text{A.4.35})$$

Wir erhalten

$$A^{(1)m,n} = (n+m+1)A^{m,n-1}.$$

Um (ii) zu beweisen, benutzen wir

$$2 \cos \theta A^{m,n-1} - 2 \sin \theta B^{m,n-1} = n P_n^m(\cos \theta) \quad (\text{A.4.36})$$

und

$$2 \cos \theta A^{(1)m,n} - 2 \sin \theta B^{(1)m,n} = n \left[(n+1) \cos \theta P_{n+1}^m(\cos \theta) + \sin^2 \theta \frac{d}{dt} [P_{n+1}^m(t)]_{t=\cos \theta} \right].$$

Die Anwendung der Rekursionsformel (A.4.2) mit der Substitution $t = \cos \theta$ führt zu

$$2 \cos \theta A^{(1)m,n} - 2 \sin \theta B^{(1)m,n} = n(n+m+1)P_n^m(\cos \theta).$$

Ersetzen wir $n P_n^m(\cos \theta)$ in der rechten Seite durch die linke Seite von (A.4.36), dann folgt

$$2 \cos \theta A^{(1)m,n} - 2 \sin \theta B^{(1)m,n} = (n+m+1) (2 \cos \theta A^{m,n-1} - 2 \sin \theta B^{m,n-1}),$$

und unter Benutzung der schon bewiesenen Eigenschaft (i) erhalten wir

$$B^{(1)m,n} = (n+m+1) B^{m,n-1}.$$

Schließlich bleibt der Nachweis von (iii). Wir wenden (A.4.2) in $C^{(1)m}$ mit $t = \cos \theta$ an und erhalten direkt

$$C^{(1)m,n} = (n+m+1)C^{m,n-1}. \quad \square$$

A.4.6 Aufgaben

1. Man zeige, dass die Legendre-Polynome und die Legendre-Funktionen Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind, dabei ist $m = 0, \dots, n+1$:

$$(1-t^2)(P_{n+1}^m(t))'' - 2t(P_{n+1}^m(t))' + \left((n+1)(n+2) - m^2 \frac{1}{1-t^2} \right) P_{n+1}^m(t) = 0.$$

2. Man zeige, dass die Legendrepolynome die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned}(1-t^2)(P_{n+1}^m(t))' &= (n+m+1)P_n^m(t) - (n+1)tP_{n+1}^m(t), \\ (1-t^2)^{1/2}(P_{n+1}^m(t))' &= P_{n+1}^{m+1}(t) - m(1-t^2)^{-1/2}tP_{n+1}^m(t), \\ (1-t^2)^{1/2}P_{n+1}^m(t) &= \frac{1}{2n+3}(P_{n+2}^{m+1}(t) - P_n^{m+1}(t)),\end{aligned}$$

und die Zweischrittformeln für $m = 0, \dots, n+1$,

$$(n+1-m)P_{n+1}^m(t) - (2n+1)tP_n^m(t) + (n+m)P_{n-1}^m(t) = 0,$$

erfüllen. Für $m = n \geq 1$ gilt

$$P_m^m(t) = (2m-1)!!(1-t^2)^{m/2}.$$

3. Man zeige, dass die Legendre-Polynome und -Funktionen paarweise orthogonal sind in $L^2([-1, 1])$,

$$\int_{-1}^1 P_{n+1}^m(t)P_{n+1}^l(t)dt = 0, \quad m \neq l,$$

und dass die Normen sich zu

$$\int_{-1}^1 (P_{n+1}^m(t))^2 dt = \frac{2}{2n+3} \frac{(n+1+m)!}{(n+1-m)!}, \quad m = 0, \dots, n+1,$$

berechnen.

4. Man zeige, dass die Legendre-Funktionen (nicht die Legendre-Polynome) auch orthogonal sind im gewichteten L^2 -Raum:

$$\int_{-1}^1 P_{n+1}^m(t)P_{n+1}^k(t)(1-t^2)^{-1}dt = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ \frac{(n+1+m)!}{m(n+1-m)!}, & m = k, \end{cases}$$

$m, k = 1, \dots, n+1$.

5. Man zeige mit den letzten Aussagen, dass holomorphe Polynome verschiedenen Grades auf S^2 orthogonal sind.

Literaturverzeichnis

- [1] Ahlfors, L.V. (1966) *Lectures on quasiconformal mappings*. Van Nostrand: Princeton.
- [2] Ahlfors, L.V. (1984) Old and new in Möbius groups. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A 1, Math.* 9: 93–105.
- [3] Ahlfors, L.V. (1985) Möbius transformations and Clifford numbers. In: Chavel, I.; Farkas, H.M. (eds.): *Differential geometry and complex analysis*. H.E. Rauch Memorial Volume, Springer: Berlin etc.
- [4] Ahlfors, L.V. (1986) Möbius transformations in $\mathbb{R}^n$ expressed through 2×2 matrices of Clifford numbers. *Complex Variables* 5: 215–224.
- [5] Ahlfors, L.V.; Lounesto, P. (1989) Some remarks on Clifford algebras. *Complex Variables* 12: 201–209.
- [6] Altmann, S.L. (1986) *Rotations, quaternions and double groups*. Clarendon Press: Oxford.
- [7] Andrews, L.C. (1992) *Special functions of mathematics for engineers*. SPIE Optical Engineering Press: Bellingham; Oxford University Press: Oxford, 2nd ed., reprint 1998.
- [8] Amann, H.; Escher, J. (1998 ff.) *Analysis I, II, III*. Grundstudium Mathematik. Birkhäuser: Basel.
- [9] Begehr, H.; Jeffrey, A. (eds.) (1992) *Partial differential equations with complex analysis*. Pitman Research Notes Math. Ser. 262. John Wiley: New York.
- [10] Begehr, H.; Xu, Z. (1992) Non-linear half-Dirichlet problems for first order elliptic equations in the unit ball of $\mathbb{R}^n$. *Applicable Anal.* 45: 3–18.
- [11] Bitsadze, A.W. (1963) *Grundlagen der Theorie analytischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (Russisch). Nauka: Moskau; Deutsch 1973, Akademie Verlag: Berlin.
- [12] Blaschke, W. (1958) Anwendung dualer Quaternionen auf Kinematik. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A 1, Math.* 250/3, 13 p.
- [13] Borel, É. (1913) Définition et domaine d'existence des fonctions monogènes uniformes. *Proc. Fifth Internat. Congress Mathematicians, Cambridge* 1: 133–144.
- [14] Brackx, F.; Delanghe, R.; Sommen, F. (1982) *Clifford analysis*. Pitman Research Notes Math. Ser. 76. Pitman: London etc.
- [15] Brackx, F.; Sommen, F. (2000): Clifford-Hermite wavelets in Euclidean space. *J. Fourier Anal. Appl.* 6: 299–310.
- [16] Buff, J.J. (1973) Characterization of analytic functions of a quaternion variable. *Pi Mu Epsilon J.* 5: 387–392.

- [17] Bühler, F. (2000) *Die symplektische Struktur für orthogonale Gruppen und Theorien als Modulformen*. Dissertation, RWTH Aachen.
- [18] Cação, I. (2004) *Constructive approximation by monogenic polynomials*. Dissertation, Universidade de Aveiro/Portugal.
- [19] Cação, I.; Gürlebeck, K.; Malonek, H. (2001) Special monogenic polynomials and L_2 -approximation. *Adv. Appl. Clifford Alg.* 11 (S2): 47–60.
- [20] Calderbank, D. (1996) A function theoretic approach to the analysis of Dirac operators on manifolds with boundary. In: Sprößig, W.; Gürlebeck, K. (eds.): *Proc. of the Symposium "Analytical and numerical methods in quaternionic and Clifford analysis"*, June 1996 Seiffen/Germany. TU Freiberg: 15–25.
- [21] Cartan, H. (1961) *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann: Paris.
- [22] Cartan, H. (1974) *Differentialformen*. B.I.-Wissenschaftsverlag: Mannheim etc.
- [23] Cauchy, A. L. (1825) Sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. *Bull. Sci. Math. Astr. Phys. Chim. (Bull. Férussac)* 3: 214–221 = *Œuvres, Ser. 2*, 2: 57–65.
- [24] Cauchy, A. L. (1841) Exercices d'analyse et de physique mathématique. *Œuvres, Ser. 2*, 12: 58–112.
- [25] Constaes, D.; Kraußhar, R.S. (2002) Szegő and polymonogenic Bergman kernels for half-space and strip domains, and single-periodic functions in Clifford analysis. *Complex Variables* 47: 349–360.
- [26] Constaes, D.; Kraußhar, R.S. (2002) Bergman kernels for rectangular domains and multiperiodic functions in Clifford analysis. *Math. Meth. Appl. Sci.* 25: 1509–1526.
- [27] Constaes, D.; Kraußhar, R.S. (2002) Representation formulas for the general derivatives of the fundamental solution of the Cauchy-Riemann operator in Clifford analysis and applications. *Z. Anal. Anwend.* 21: 579–597.
- [28] Constaes, D.; Kraußhar, R.S. (2003) Closed formulas for singly-periodic monogenic cotangent, cosecant and cosecant-squared functions in Clifford analysis. *J. London Math. Soc.* 67: 401–416.
- [29] Crowe, M.C. (1967) *A history of vector analysis*. Dover Public.: New York, 3. Aufl.
- [30] Davenport, C.M. (1991) *A commutative hypercomplex calculus with applications to special relativity*. Privately Published, Knoxville (Tennessee).
- [31] Delanghe, R. (1970) On regular-analytic functions with values in a Clifford algebra. *Math. Ann.* 185: 91–111.
- [32] Delanghe, R. (2001) Clifford analysis: History and perspective. *Computat. Meth. Funct. Theory* 1: 107–153.
- [33] Delanghe, R.; Sommen, F.; Souček, V. (1992) *Clifford algebra and spinor-valued functions*. Kluwer: Dordrecht.
- [34] Delanghe, R.; Sommen, F.; Souček, V. (1992) Residues in Clifford analysis. In: Begehr, H.; Jeffrey, A. (eds): *Partial differential equations with complex analysis*. Pitman Res. Notes Math. Ser. 262: 61–92.
- [35] Delanghe, R.; Souček, V. (1992) On the structure of spinor-valued differential forms. *Complex Variables* 18: 223–236.
- [36] Dixon, A.C. (1904) On the Newtonian potential. *Quart. J. Math.* 35: 283–296.
- [37] Dzhuraev, A.D. (1982) On the Moisil-Teodorescu system. In: Begehr, H.; Jeffrey, A. (eds): *Partial differential equations with complex analysis*. Pitman Res. Notes Math. Ser. 262: 186–203.

- [38] Eisenstein, G. (1847) Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhängenden Doppelreihen (als eine neue Begründung der Theorie der elliptischen Functionen, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Analogie zu den Kreisfunctionen). *J. Reine Angew. Math. (Crelles J.)* 35: 153-274.
- [39] Elstrodt, J.; Grunewald, F.; Mennicke, J. (1985) Eisenstein series on three-dimensional hyperbolic space and imaginary quadratic number fields. *J. Reine Angew. Math.* 360 : 160-213.
- [40] Elstrodt, J.; Grunewald, F.; Mennicke, J. (1990) Kloosterman sums for Clifford algebras and a lower bound for the positive eigenvalues of the Laplacian for congruence subgroups acting on hyperbolic spaces. *Invent. Math.* 101: 641-668.
- [41] Freitag, E.; Hermann, C.F. (2000) Some modular varieties of low dimension. *Adv. Math.* 152: 203-287.
- [42] Fueter, R. (1932) Analytische Theorie einer Quaternionenvariablen. *Comment. Math. Helv.* 4: 9-20.
- [43] Fueter, R. (1935) Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta \Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen. *Comment. Math. Helv.* 7: 307-330.
- [44] Fueter, R. (1935-1936) Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Comment. Math. Helv.* 8: 371-378.
- [45] Fueter, R. (1936-37) Die Singularitäten der eindeutigen regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. *Comment. Math. Helv.* 9: 320-334.
- [46] Fueter, R. (1939) Über vierfachperiodische Funktionen. *Monatsh. Math. Phys.* 48: 161-169.
- [47] Fueter, R. (1940) *Reguläre Funktionen einer Quaternionenvariablen*. Vorlesungsausarbeitung Math. Inst. Univ. Zürich.
- [48] Fueter, R. (1945) Über die Quaternionenmultiplikation der vierfachperiodischen regulären Funktionen. *Experientia* 1: 57.
- [49] Fueter, R. (1949) *Funktionentheorie im Hyperkomplexen*. Lecture notes written and supplemented by E. Bareiss, Math. Inst. Univ. Zürich, Herbstsemester 1948/49.
- [50] Fueter, R. (1949) Über Abelsche Funktionen von zwei komplexen Variablen. *Ann. Mat. Pura Appl., Ser. IV*, 28: 211-215.
- [51] Gritsenko, V. (1987) Arithmetic of quaternions and Eisenstein series. *J. Sov. Math.* 52: 3056-3063 (1990); translation from *Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova* 160: 82-90.
- [52] Gürlebeck, K. (1984) *Über die optimale Interpolation verallgemeinert analytischer quaternionenwertiger Funktionen und ihre Anwendung zur näherungsweise Lösung wichtiger räumlicher Randwertaufgaben der mathematischen Physik*. Dissertation TH Karl-Marx-Stadt.
- [53] Gürlebeck, K.; Malonek, H. (1999) A hypercomplex derivative of monogenic functions in $\mathbb{R}^{n+1}$ and its applications. *Complex Variables* 39: 199-228.
- [54] Gürlebeck, K.; Sprößig, W. (1990) *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems*. Birkhäuser: Basel.
- [55] Gürlebeck, K.; Sprößig, W. (1997) *Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers*. Mathematical Methods in Practice. Wiley: Chichester.
- [56] Habetha, K. (1976) Eine Bemerkung zur Funktionentheorie in Algebren. In: Meister, E.; Weck, N.; Wendland, W. (eds.): *Function theoretic methods of partial differential equations*. Proc. Internat. Sympos. Darmstadt 1976. Lect. Notes Math. 561. Springer: Berlin etc.: 502-509.

- [57] Habetha, K. (1986) Eine Definition des Kroneckerindex in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Hilfe der Cliffordanalysis. *Z. Anal. Anwend.* 5: 133-137.
- [58] Haefeli, H.G. (1947) Hyperkomplexe Differentiale. *Comment. Math. Helv.* 20: 382-420.
- [59] Hamilton, W.R. (1866) *Elements of Quaternions*. Longmans Green: London, reprinted by Chelsea: New York 1969.
- [60] Hempfling, T. (1996) Aspects of modified Clifford analysis. In: Sprössig, W.; Gürlebeck, K. (eds): *Analytical and Numerical Methods in Quaternionic and Clifford Analysis*. Proc. Conf. Seiffen/Germany 1996. TU Freiberg : 49-59.
- [61] Hempfling, T.; Kraußhar, R.S. (2003) Order theory for isolated points of monogenic functions. *Archiv d. Math.* 80: 406-423.
- [62] Hestenes, D. (1968) Multivector calculus. *J. Math. Anal. Appl.* 24: 313-325.
- [63] Hodge, W.V.D.; Pedoe D. (1952) *Methods of algebraic geometry*. Cambridge Univ. Press: Cambridge/UK.
- [64] Holmann, H.; Rummler, H. (1972) *Alternierende Differentialformen*. B.I.-Wissenschaftsverlag: Mannheim etc.
- [65] Hurwitz, A. (1922) Über die Komposition der quadratischen Formen. *Math. Ann.* 88: 1-25.
- [66] John, F. (1955) *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*. Interscience Publ.: New York; Nachdruck, Springer: Berlin etc. 1981.
- [67] Kähler, E. (1985) Die Poincaré-Gruppe. *Mathematica, Festschrift Ernst Mohr*, TU Berlin: Berlin, 117-144.
- [68] Klotzek, B. (1971) *Geometrie*. Deutscher Verlag Wiss.: Berlin.
- [69] Knott, C.G. (1911) *Life and scientific work of Peter Guthrie Tait*. Cambridge.
- [70] Klein, F.; Fricke, R. (1890-1892) *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen I, II*. Teubner: Leipzig.
- [71] Kochendörffer, R. (1974) *Einführung in die Algebra*. Hochschulbücher Math. 18. Deutscher Verlag Wiss.: Berlin, 4. Aufl.
- [72] Kraußhar, R.S. (2000) *Eisenstein series in Clifford analysis*. Dissertation RWTH Aachen. Aachener Beiträge zur Mathematik 28. Wissenschaftsverlag Mainz: Aachen.
- [73] Kraußhar, R.S. (2001) Monogenic multiperiodic functions in Clifford analysis. *Complex Variables* 46: 337-368.
- [74] Kraußhar, R.S. (2001) On a new type of Eisenstein series in Clifford analysis. *Z. Anal. Anwend.* 20: 1007-1029.
- [75] Kraußhar, R.S. (2002) Automorphic forms in Clifford analysis. *Complex Variables* 47: 417-440.
- [76] Kraußhar, R.S. (2002) Eisenstein series in complexified Clifford analysis. *Computat. Meth. Funct. Theory* 2: 29-65.
- [77] Kraußhar, R.S. (2002) Monogenic modular forms in two and several real and complex vector variables. *Computat. Meth. Funct. Theory* 2: 299-318.
- [78] Kraußhar, R.S. (2003) The multiplication of the Clifford-analytic Eisenstein series. *J. Number Theory* 102: 353-382.
- [79] Kraußhar, R.S. (2004) A theory of modular forms in Clifford analysis, their applications and perspectives. In: Qian, T., et al. (eds.): *Advances in analysis and geometry. New developments using Clifford algebras*. Trends in Math., Birkhäuser: Basel: 311-343.

- [80] Kraußhar, R.S. (2004) *Automorphic forms and functions in Clifford analysis and their applications*, Frontiers in Mathematics. Birkhäuser: Basel.
- [81] Kraußhar, R.S.; Ryan, J. (2005) Clifford and harmonic analysis on cylinders and tori. *Rev. Mat. Iberoamericana* (to appear).
- [82] Kraußhar, R.S.; Ryan, J. (2005) Some conformally flat spin manifolds, Dirac operators and automorphic forms. *Preprint*.
- [83] Krieg, A. (1985) *Modular forms on half-spaces of quaternions*. Springer: Berlin-Heidelberg,.
- [84] Krieg, A. (1988) Eisenstein series on real, complex and quaternionic half-spaces. *Pac. J. Math.* 133: 315-354.
- [85] Krieg, A. (1988) Eisenstein-series on the four-dimensional hyperbolic space. *J. Number Theory* 30: 177-197.
- [86] Kryloff, N.M. (1947) Sur les quaternions de W.R. Hamilton et la notion de la monogenéité. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 55: 787-788.
- [87] Lawrentjew, M.A.; Schabat, B.W. (1967) *Methoden der komplexen Funktionentheorie*. Deutscher Verlag Wiss.: Berlin.
- [88] Leray, J. (1959) Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy III). *Bull. Soc. Math. France* 87: 81-180.
- [89] Leutwiler, H. (2001) Quaternionic analysis in $\mathbb{R}^3$ versus its hyperbolic modification. In: Brackx, F. et al. (eds.): *Clifford Analysis and Its Applications*. Kluwer: Dordrecht, 193-211.
- [90] Leutwiler H. (1996) Rudiments of a function theory in $\mathbb{R}^3$. *Exposit. Math.* 14: 97-123.
- [91] Li, C.; McIntosh, A.; Qian, T. (1994) Clifford algebras, Fourier transforms and singular convolution operators on Lipschitz surfaces. *Rev. Mat. Iberoamericana* 10: 665-721.
- [92] Lipschitz, R. (1886) *Untersuchungen über die Summe von Quadraten*. Max Cohen und Sohn: Bonn.
- [93] Lounesto, P. (1995) Möbius transformations. Vahlen matrices and their factorization. In: Ryan J. (ed.). *Clifford algebras in analysis and related topics*. CRC Press: Boca Raton etc., 355-359.
- [94] Lounesto, P. (2002) Introduction to Clifford algebras. In: Ablamovicz R.; Sobczyk, G. (eds.): *Lectures on Clifford geometric algebras*. TTU Press: Cookeville, TN/USA, 1-32.
- [95] Lounesto, P.; Bergh, P. (1983) Axially symmetric vector fields and their complex potentials. *Complex Variables* 2: 139-150.
- [96] Lugoian, S.(1991) Quaternionic derivability. *An. Univ. Timisoara, Seria Stiinte Mat.* 29, No. 2-3: 175-190.
- [97] Lugoian S. (1992) Quaternionic derivability. *Semin. Geom. Sitopol/Univ. Timisoara* No. 105: 1-22, und in: G. Gentili et al. (eds.): *Quaternionic structures in mathematics and physics*. Proc. Meeting Trieste/Italy, Sept. 1994. SISSA: Trieste 1994.
- [98] Maaß H. (1949) Automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und Dirichletsche Reihen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 16: 72-100.
- [99] Malonek, H.R. (1987) *Zum Holomorphiebegriff in höheren Dimensionen*. Habilitationsschrift. Pädagogische Hochschule Halle.

- [100] Malonek, H.R. (1990) A new hypercomplex structure of the Euclidean space $\mathbb{R}^{m+1}$ and a concept of hypercomplex differentiability. *Complex Variables* 14: 25-33.
- [101] Malonek, H.R. (1993) Hypercomplex differentiability and its applications. In: Brackx, F., et al. (eds.) *Clifford algebras and applications in mathematical physics*. Kluwer: Dordrecht, 141-150.
- [102] Malonek, H.R.; Müller, B. (1992) Definition and properties of a hypercomplex singular integral operator. *Results Math.* 22: 713-724.
- [103] Malonek, H.R.; Wirthgen, B. (1990) Zur Übertragung des Goursatschen Beweises des Cauchyschen Integralsatzes auf hyperkomplex differenzierbare Funktionen im $\mathbb{R}^{m+1}$. *Wiss. Z. Pädagogische Hochschule Halle-Köthen* 28: 34-38.
- [104] Marinov, M.S. (1966) Meilikhson type theorems I. *An. Univ. Timisoara, Ser. Mat. Inform.* 34, No. 1: 95-110.
- [105] Marinov, M.S. (1995) On the S -regular functions. *J. Natural Geom.* 7: 21-44.
- [106] Mejlkhzhon, A.S. (1948) On the notion of monogeneous quaternions (Russisch). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 59: 431-434.
- [107] Michlin, S.G.; Prökdorf, S. (1986) *Singular integral operators*. Akademie-Verlag: Berlin.
- [108] Mitrea, M.; Sabac, F. (1998) Pompeiu's integral representation formula. History and mathematics. *Revue Roumaine Math. Pures Appl.* 43: 211-226.
- [109] Moisl, Gr.C. (1930) Sur les systèmes d'équations de M. Dirac, du type elliptique. *C. R. Acad. Sci. Paris* 191: 1292-1293.
- [110] Nöbeling, G. (1978) *Integralsätze der Analysis*. De Gruyter Lehrbuch. Walter de Gruyter: Berlin etc.
- [111] Norguet, F. (1959) Sur la théorie des résidues. *C. R. Acad. Sci. Paris* 248: 2057-2059.
- [112] Peirce, B. (1881) Linear associative algebras. *Amer. J. Math.* 4: 97-215.
- [113] Plemelj, J. (1908) Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen. Randwerte betreffend. *Monatsh. Math. Phys.* 76: 205-210.
- [114] Poincaré, H. (1954) *Oeuvres II*. Gauthier-Villars: Paris 1916/1954.
- [115] Pompeiu, D. (1906) Sur la continuité des fonctions de deux variables complexes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse* 7: 264-315.
- [116] Pompeiu, D. (1909) Sur la représentation des fonctions analytiques par des intégrales définies. *C. R. Acad. Sci. Paris* 149: 1355-1357.
- [117] Porteous I. (1969) *Topological geometry*. Van Nostrand-Reinhold: London.
- [118] Qian, T. (1996) *Singular integrals on star-shaped Lipschitz surfaces in the quaternionic space*. Research and Technical Reports, The University of New-England, No. 120, 1-30.
- [119] Qian, T. (1997) Generalization of Fueter's result to $\mathbb{R}^{n+1}$. *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., Cl. Fis. Mat. Nat., Ser. 8*, 9: 111-117.
- [120] Remmert, R. (1991) *Funktionentheorie 1*. Springer Lehrbuch, Ser. Grundwissen Math., Springer: Berlin etc. 4. Aufl.
- [121] Richter, O. (2002) Theta functions with harmonic coefficients over number fields. *J. Number Theory* 95: 101-121.
- [122] Richter, O.; Skogman, H. (2004) Jacobi theta functions over number fields. *Monatsh. Math.* 141: 219-235.
- [123] Ryan, J. (1982) Clifford analysis with generalized elliptic and quasi elliptic functions. *Applicable Anal.* 13: 151-171.

- [124] Ryan, J. (1982) Complexified Clifford analysis. *Complex Variables* 1: 119-149.
- [125] Saak, E.M. (1975) On the theory of multidimensional elliptic systems of first order. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 222: 47-51 = *Sov. Math., Dokl.* 16: 591-595.
- [126] Sansone, G. (1959) *Orthogonal Functions*. Pure and Applied Mathematics 9. Interscience Publishers: New York.
- [127] Sce, M. (1957) Osservazioni sulle serie di potenze nei moduli quadratici. *Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend., Cl. Fis. Mat. Nat., Ser. 8*, 23: 220-225.
- [128] Shapiro M.V. und N.I. Vasilevski, (1995) Quaternionic ψ -hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems. I. ψ -hyperholomorphic function theory, *Complex Variables* 27: 17-46.
- [129] Siegel, C.L. (1988) *Topics in complex function theory, Vol. III*. Wiley: New York-Chichester.
- [130] Smirnov, W.I. (1967) *Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil 5*. Deutscher Verlag Wiss.: Berlin.
- [131] Snyder, H.H. (1982) An introduction to theories of regular functions on linear associative algebras. In: Draper, R.N. (ed.): *Commutative algebra: analytic methods*. Lect. Notes Pure Appl. Math. 68: 75-93.
- [132] Sokhotski, J.W. (1873) *Über bestimmte Integrale und Funktionen. die für Reihenentwicklung benötigt werden* (Russisch). St. Petersburg.
- [133] Sommen, F. (1981) A product and an exponential function in hypercomplex function theory. *Applicable Anal.* 12: 13-26.
- [134] Sommen, F. (1982) Some connections between Clifford and complex analysis. *Complex Variables* 1: 97-118.
- [135] Sommen, F. (1982) Spherical monogenic functions. *Tokyo J. Math.* 4: 427-456.
- [136] Sommen, F. (1984) Monogenic differential forms and homology theory. *Proc. Royal Irish Acad., Sect A*, 84: 87-109.
- [137] Sommen, F. (1988) Special functions in Clifford analysis and axial symmetry. *J. Math. Anal. Appl.* 130: 100-133.
- [138] Sommen, F.; Souček, V. (1992) Monogenic differential forms. *Complex Variables* 19: 81-90.
- [139] Sommen, F.; Xu Z. (1992) Fundamental solutions for operators which are polynomials in the Dirac operator. In: Micali, A.; Boudet, R.; Helmstetter, J. (eds.): *Clifford algebras and their applications in mathematical physics*. Kluwer: Dordrecht, 313-326.
- [140] Souček, V. (1980) *Regulární funkce quaternionové proměnné*. Thesis Charles University Prague.
- [141] Souček, V. (1983) Quaternion valued differential forms in $\mathbb{R}^4$. *Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. 2*, 33: 293-300.
- [142] Sprössig, W. (1978) Analoga zu funktionentheoretischen Sätzen im $\mathbb{R}^n$. *Beiträge zur Analysis* 12: 113-126.
- [143] Stein, E.M.; Weiss, G. (1968) Generalization of the Cauchy–Riemann equations and representations of the rotation group. *Amer. J. Math.* 90: 163-196.
- [144] Stern, I. (1989) *Randwertaufgaben für verallgemeinerte Cauchy–Riemann-Systeme im Raum*. Dissertation A, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.
- [145] Stern, I. (1991) Boundary value problems for generalized Cauchy–Riemann systems in the space. In: Kühnau R.; Tutschke, W. (eds.): *Boundary value and initial value problems in complex analysis*. Pitman Res. Notes Math. 256: 159-183.

- [146] Stern, I. (1993) Direct methods for generalized Cauchy–Riemann systems in the space. *Complex Variables* 23: 73-100.
- [147] Study, E. (1889) Über Systeme von complexen Zahlen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* 1889: 237-268.
- [148] Stummel, F. (1967) Elliptische Differenzenoperatoren unter Dirichletrandbedingungen. *Math. Z.* 97: 169-211.
- [149] Suchomlinov, G.A. (1938) On the extension of linear functionals in linear normed spaces and linear quaternionic spaces (Russisch). *Mat.Sbornik, Ser. 2:* 353-358.
- [150] Sudbery, A. (1979) Quaternionic analysis. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 85: 199-225.
- [151] Tait, P.G. (1867) *An elementary treatise on quaternions*. Clarendon Press: Oxford; enlarged editions, Cambridge University Press: Cambridge 1873, 1890.
- [152] Théodoresco, N. (1936) *La dérivée aréolaire*. Ann. Roum. Math., Cahier 3, Bucharest.
- [153] Titchmarsh, E.C. (1939) *The theory of functions*. Oxford University Press: London, 2nd ed.
- [154] Vahlen, K.Th. (1902) Über Bewegungen und komplexe Zahlen. *Math. Ann.* 55: 585-593.
- [155] van Lancker, P. (1996) *Clifford analysis on the unit sphere*. Thesis, University of Gent.
- [156] Vekua, I.N. (1959) *Verallgemeinerte analytische Funktionen* (Russisch). Nauka: Moskau; Deutsch 1963, Deutscher Verlag Wiss.: Berlin; Englisch 1967, Wiley: New York.
- [157] Whittaker, E.T.; Watson, G.N. (1958) *A course of modern analysis*. Cambridge University Press: London, 4th ed.
- [158] Wloka, J. (1982) *Partielle Differentialgleichungen*. Teubner: Stuttgart.
- [159] Zöll, G. (1987) *Ein Residuenkalkül in der Clifford-Analyse und die Möbiustransformationen der Euklidischen Räume*. Dissertation RWTH Aachen.

Index

- abgeschlossen, 76
- Ableitung
 - areolare, 142
 - holomorpher Kugelfunktionen, 388
 - holomorpher Polynome, 211
 - komplexe, 93, 94
- Abschließung, 76
- absolut konvergent
 - Reihe, 81
 - Produkt, 263
- Abstand
 - euklidischer, 76
 - chordaler, 87, 90
- Addition
 - komplexer Zahlen, 4
 - von Clifford-Zahlen, 54
 - von Quaternionen, 16
- Additionstheorem, 228, 230, 239
- adjungierter Cauchy–Riemann-Operator, 202
- Algebra, 21
 - Clifford-, 54
 - der dualen Zahlen, 56
 - der komplexen Quaternionen, 56
 - geometrische, 53
 - Raum-Zeit-, 56
- algebraische Singularität, 111
- alternierendes Produkt, 340
- analytische Funktion, 174
- Annihilation-Operator, 341
- Antiautomorphismus, 24
- Antikommutator, 69
- Antisymmetrisierung, 339
- Appolonius, 2
- Appolonius-Identität, 14
- Archimedes, 2
- Argand, J.R., 7, 10
- Argandsche Zahlenebene, 6
- Argument, 7
- Argumentprinzip, 282, 287
- Aryabhata d. Ä., 2
- assozierte Legendre-Funktionen, 203
- Atlas, 354
- Außengebiet, 136
- äußere Algebra, 340
- äußere sphärische Funktion, 198
- äußeres Differential, 343
- Äußeres einer Kurve, 282
- äußeres Produkt, 60, 340
- Austauscheigenschaft, 71
- automorphe
 - Form, 318, 320, 331, 333
 - Funktion, 314, 320
- Automorphismus, 24
- Bachmann, P., 344
- Bachmann–Landau-Symbole, 93, 344
- Basiselemente, 55
- Basismorphismen, 25
- berandete Mannigfaltigkeit, 354
- Berechnung reeller Integrale, 290
- Bergman-Projektion, 163
- Besovraum, 376
- Betafunktion, 300
- Betrag,
 - komplexer Zahlen, 5, 6
 - von Clifford-Zahlen, 60, 61
 - von Quaternionen, 19, 20
- bi-holomorphe Funktion, 258
- Bild, 79
- Bildpunktmenge, 79
- binomische Formel für Fueterpolynome, 127
- Bitsadze, A.W., 144
- Bivektor, 56, 341
- Blaschke, W., 15
- Blumenthal, O., 320
- Bogenlänge, 360
- Borel, É., 133, 143
- Borel–Pompeiu-Formel, 134, 163
- Bottssches Periodizitätsgesetz, 73
- Calderon–Zygmund, Satz von, 160
- Cardano, G., 2
- Cartan, E., 54
- Cartan, H., 144
- Cartan-Matrix, 13
- Cartan-Operator, 343
- Casorati, F., 272
- Cauchy, A.-L., 95, 130, 142, 278

- Cauchy–Bitsadze-Operator, 135, 156
- Cauchy-Folge, 76
- Cauchy–Fueter-Differentialgleichungen, 103
- Cauchy-Integral, 135
- Cauchy-Kern, 133
- Cauchy–Kowalewski-Fortsetzung, 249
- Cauchy-Kriterium, 76, 81
- Cauchy-Problem, 249
- Cauchy–Riemann Differentialgleichungen
 - in $\mathbb{C}$, 95
 - in $C\ell(n)$, 109
 - in $\mathbb{H}$, 103
 - verallgemeinerte, 103
- Cauchy–Riemann-Operator, 95, 195, 233
 - adjungierter, 202
- Cauchysche Integralformel, 135
 - erweiterte, 282
 - für Ableitungen, 146, 148
 - im Außengebiet, 136
- Cauchyscher Hauptwert, 137
- Cauchyscher Integralsatz, 130
 - erweiterter, 289
- Cayley, A., 18
- Cayley, Satz von, 31
- Cayley-Tafel, 18
- Ceva, Satz von, 38
- Chisholm, M., 54
- chordale Metrik, 87
- chordaler Abstand, 87
- Clifford, W.K., 53
- Clifford-Algebra, 54
- Clifford-Gruppe, 68
- Clifford-Zahl, 55
- Cotes, R., 3
- CRD, 95
- Creation-Operator, 341
- d’Alembert, J.-B., 10
- Darstellung, 10, 32, 69
- Darstellungssatz harmonischer Funktionen, 164
- Davenport, C., 34
- Davenport-Zahlen, 34
- de Moivre, A., 7
- de Moivre, Formel von, 8, 24
- de Valera, E., 18
- Dekompositionssatz, 222
- Delanghe, R., 117, 144
- Delta-Operator, 146
- Descartes, R., 3
- Differential, 92
 - äußeres, 143
 - geschlossenes, 143
 - totales, 143
- Differentialform, 104, 109, 343, 352
- Differentialgleichung der $\wp$ -Funktion, 317
- Differentialoperator, radialer, 242
- Differentialquotient, komplexer, 93
- Differentiationsregeln, 96
- differenzierbar
 - in $\mathbb{H}$, 99
 - komplex, 94
 - e Mannigfaltigkeit, 354
- Diophantus von Alexandria, 2
- Dirac, P., 105
- Dirac-Gleichung, 195
- Dirac-Operator, 105, 110, 194
 - auf der Sphäre, 235
- Dirichlet, G., 86, 308
- Dirichlet-Problem, 164
- Dirichletreihe, 308
 - verallgemeinerte, 308
- diskrete Gruppe, 314
- Distribution, 375
- Division von Potenzreihen, 173
- Divisionsalgebra, 21
- Dixon, A.C., 320
- doppelpunktfrei, 355
- doppelt periodische Funktion, 315
- Doppelverhältnis, 120
- D -Raumalgebra, 34
- Drehstreckung, 118
- Drehung, 11, 27, 29, 31, 63, 68
- Dreiecksungleichung, 6, 20
- Dualzahlen, 56
- Dzhuraev, A., 145
- ebene Welle, 252
 - holomorphe, 253
- Ebenengleichung, 40
- e -Funktion, 226
- Eindeutigkeit einer Potenzreihe, 172, 175
- einfach periodische Funktion, 315
- Einheitskreislinie, 9, 11
- Einheitskreisscheibe, 11
- Einheitssphäre, 24, 27
- Einpunkt-Kompaktifizierung, 86, 89
- Eisenstein, G., 315
- Eisensteinreihe, 315, 318, 321, 326, 331, 333
- elementare Funktionen, 226, 237
- elliptische Funktion, 315
- Entwicklungsformel, 46
- Epsteinsche Zetafunktion, 327
- erweiterte Cauchysche Integralformel, 282
- erweiterter Cauchyscher Integralsatz, 289
- Euklid, 2
- euklidischer Abstand, 6, 20
- Euler, L., 3, 10, 15, 28, 293
- Euler-Operator auf der Sphäre, 235
- Euler-Rodrigues, Formel von, 28

- Eulersche
 - Formel, 181, 228
 - Gammafunktion, 298
 - Konstante, 303
 - s Integral 1. Gattung, 300
- exakte Differentialform, 343
- Exponentialfunktion, 226, 237, 246, 253, 257
- Flächenelement, orientiertes, 361
- Flächeninhalt der Einheitssphäre, 363
- Folge, 76
- Fontana, N., 3
- Formel
 - Borel–Pompeiu, 134, 163
 - de Moivre, 8, 24
 - Euler, 181, 228
 - Euler–Rodrigues, 28
 - Green, 367
 - Plemelj–Sokhotzki, 139
 - Rodrigues, 251, 252
 - Stirling, 304
- Fourierentwicklung, 210, 327
- Fourierreihe, 181, 211, 318, 327
- Fricke, R., 320
- Frobenius, Satz von, 22
- Fueter, R., 103, 113, 243, 276, 320
- Fueter-
 - Polynome, 113, 182, 191, 197, 250
 - Orthogonalitätsrelationen, 190
 - Transformierte, 244
 - Variablen, 9, 112, 151
- Fueter–Sce-Konstruktion, 243
- Fundamentalsatz der Algebra, 9, 151
- Funktion
 - äußere sphärische, 198
 - automorphe, 314
 - bi-holomorphe, 258
 - doppelt periodische, 315
 - einfach periodische, 315
 - elementare, 226
 - elliptische, 315
 - Exponential-, 246, 253, 257
 - ganze, 262
 - gerade, 228
 - gleichmäßig stetige, 79
 - harmonische, 146
 - holomorphe, 93
 - homogene, 181
 - hyperbolische, 230
 - hyperholomorphe, 107
 - lineare, 93
 - links-Clifford-holomorphe, 109
 - links- $\mathbb{H}$ -holomorphe, 103
 - links-meromorphe, 275
 - meromorphe, 270
 - monogene, 93
 - polygene, 98
 - polyholomorphe, 334
 - Potenz-, 111, 233, 241
 - radial holomorphe, 243
 - radial symmetrische, 234
 - radiale elementare, 238
 - rationale, 97
 - rechts-Clifford-holomorphe, 109
 - rechts- $\mathbb{H}$ -holomorphe, 103
 - rechts-meromorphe, 275
 - reguläre, 93
 - stetige, 79
 - trigonometrische, 227, 247
 - ungerade, 228
- Funktionalgleichung
 - der Eisensteinreihen, 323
 - der Gammafunktion, 293, 302
 - der Zetafunktion, 311
- Funktionenfolge, 169
- Funktionenreihe, 83
- Funktionselement, 177
- Gammafunktion, 298, 299
- ganze Funktion, 262
- Gauß, C.F., 7, 10, 15, 365
- Gauß'sche Zahlenebene, 6
- Gebiet, 77
- Gebietsintegral, 351
 - Rechenregeln, 351
- gebrochen lineare Abbildung, 119
- Gegenbauer, L.B., 183
- Gegenbauer-Polynom, 183
- geometrische Algebra, 53
- geometrische Reihe, 83
- Geradengleichung, 12
 - Plücker'sche, 42
- geschlossene Differentialform, 343
- Gibbs, J.W., 35
- Girard, A., 3, 10
- glatte Kurve, 355
- glatte Mannigfaltigkeit, 354
- gleichmäßig konvergent, 79
- gleichmäßig stetige Funktion, 79
- gliedweise Differentiation, 171, 175
- Goldbach, C., 15
- Goursat, E., 130
- Grad eines Multiindex, 113
- Graßmann, H., 52, 53
- Graßmann-Algebra, 53, 340
- Graßmann-Produkt, 60, 341
- Green, G., 367
- Greensche Formel, 367
- Grenzwert, 76
- Grothendieck, A., 144

- $\mathbb{H}$ -abgeschlossen, 194
- Häufungspunkt, 76
- Hagmark, P.E., 54
- Hahn–Banachscher Satz, 193
- Hamilton, W.R., 3, 15, 19, 34
- Hankel, H., 52
- Hardy-Raum, 375
- harmonische Funktion, 146
- harmonische Kugelfunktion, 203
- harmonischer Hardy-Raum, 375
- Hauptinvolution, 25, 57
- Hauptkongruenzgruppe, 329
- Hauptteil, 179, 188, 271, 276
- Hauptwert
 - des Arguments, 7
 - des Logarithmus, 231
- Heaviside, O., 35
- hebbare Singularität, 270, 275
- Hebbarkeitssatz
 - Riemannscher, 270
 - Riemann–Fueterscher, 276
- Heine–Borel, Satz von, 79
- Hermite, C., 251
- Hermite-Polynome
 - radiale, 251
 - verallgemeinerte, 252
- Heron von Alexandria, 2
- Hilbert, D., 113
- Hodge-Sternoperator, 348
- Hodge-Zerlegung, 162
- Hölder, L.O., 371
- Hölder-Bedingung, 371
- Hölder-Konstante, 371
- Hölderexponent, 371
- hölderstetig, 371
- holomorphe ebene Welle, 253
- holomorphe Fortsetzung, 177, 270
 - bei einfachem Zusammenhang, 177
- holomorphe Funktion
 - in $\mathbb{C}$, 93
 - in $C\ell(n)$, 109
 - in $\mathbb{H}$, 103
- holomorphe Kugelfunktion, 203, 378
- holomorphe Stammfunktion, 215
- homogene
 - Funktion, 181
 - holomorphe Funktion, 198
 - s holomorphes Polynom, 182, 198
- Homöomorphismus, 79
- $\mathbb{H}$ -vollständig, 194
- hyperbolische Funktionen, 230
- hyperholomorphe Funktion, 107
- Identitätssatz, 176, 187
- imaginäre Einheit, 18
- Imaginärteil, 5
- Index, 282, 287
- Innengebiet, 136
- Inneres einer Kurve, 282
- inneres sphärisches Polynom, 198, 203
- Integral über eine
 - Kugel, 364
 - Mannigfaltigkeit, 357, 359
- Integralformel von Cauchy, 135
 - für Ableitungen, 146, 148
 - im Außengebiet, 136
- Integralformel von Poisson, 154
- Integralformel von Schwarz, 152
- Integralsatz von Cauchy, 130
- Interpolationspolynom, 198
- Inversion, 57
- Involute, 25
- Involution, 5, 25
- isolierte Singularität, 270, 275
- Isoliertheit der Nullstellen, 262, 266
- Jakobi-Matrix, 353
- Jordanfläche, 136
- Jordankurve, 355
- Jordansches Lemma, 290
- kanonisches Vertretersystem, 323
- Karte, 354
- Katenoide, 230
- Kegeleigenschaft, 138
- Kettenlinie, 230
- Klein, F., 320
- Kneser, H., 10
- kollinear, 37, 43
- kompakt, 78
- Kompaktifizierung, 86
- komplanar, 37
- Komplement, 77
- komplex differenzierbar, 94
- komplexe Ableitung, 93, 94
- komplexe Quaternionen, 56
- komplexe Zahl, 4
 - Argument, 7
 - Betrag, 5
 - Imaginärteil, 5
 - Matrixdarstellung, 10
 - Orthogonalität, 12
 - Polarform, 7
 - Realteil, 5
 - trigonometrische Form, 7
- Konjugation, 5, 19, 25, 58
- konjugiert komplexe Zahl, 5
- konjugierte Quaternion, 19, 25
- Kontinuum, 366

- konvergent, 79
 - absolut, 81
 - gleichmäßig, 79
 - Produkt, 263
- Konvergenz erzeugende Faktoren, 264
- Konvergenz erzeugende Summanden, 274, 277
- Konvergenzabszisse, 308
- Konvergenzkreis, 84
- Konvergenzkugel, 84, 174
- Konvergenzradius, 84
- Koordinaten, 4, 16
 - wechsel, 352
- Körper der komplexen Zahlen, 4
- Kosinusfunktion, 228
- Kosinussatz, 39
- Kotangensfunktion, 231
- Kowalewski, S., 249
- Kraußhar, R.S., 190, 320
- Kreisgleichung, 13
- Kreiskette, 177
- Kreisringgebiet, 179
- Kreisteilungsproblem, 9
- Kreuzprodukt, 12, 21, 349
- Kroneckerindex, 287
- Kroneckersymbol, 17
- Krüger, H., 65
- Krylov, N.M., 99
- Kugeloberfläche, 41
- Kummer, E.E., 168
- Kurve, 355
 - glatte, 355
 - stückweise glatte, 355
- Kurvenintegral, 359
- k -Vektor, 57, 341
- Lagrange, J.L., 41
- Lagrange-Identität, 41, 47, 361
- Lagrange-Polynom, 117, 198
- Landau, E., 344
- Laplace, P.S., 10, 292
- Laplace-Operator, 202, 368
- Laurent-Reihe, 179, 188, 271, 276, 279
- Lebesgue messbar, 374
- Legendre, A.-M., 301
- Legendre-
 - Funktion, 203, 377
 - Polynom, 203, 377
- Legendresche Verdoppelungsformel, 301
- Leibniz, G.W., 3
- Leibnizregel, 345
- Lemma von Poincaré, 354
- Leray, J., 285
- linear (un-) abhängig, 37
- lineare Funktion, 93
- Linearform, 93
- Linienvektor, 35
- links-Clifford-holomorphe Funktion, 109
- Links-Darstellung, 33
- links- $\mathbb{H}$ -holomorphe Funktion, 103, 104
- links-meromorphe Funktion, 275
- Liouvillesche Sätze, 316, 324, 325
- Liouvillescher Satz, 151
- Lipschitz, R., 54
- Lipschitz-Bedingung, 371
- lipschitzstetig, 371
- logarithmische
 - Ableitung, 283
 - Fläche, 232
 - Singularität, 232
- Logarithmus, 231, 240
- lokale Eigenschaft, 132
- Looman, H., 92
- Lounesto, E., 54
- Maaß, H., 320
- Majorantenkriterium, 81
- Malonek, H., 103, 108, 113, 190
- Mannigfaltigkeit, 354
 - berandete, 354
 - differenzierbare, 354
 - glatte, 354
 - orientierbare, 354
- Marinov, M.S., 107
- Matrixdarstellung, 10
- Matrizenring, 32
- Maximumprinzip, 149
- Maxwell, C., 147
- Mejlikhzon, A.S., 99
- Menchov, D., 92
- meromorphe Funktion, 270, 275
- Metrik, 76
 - chordale, 87
- Minimumprinzip, 150
- Minkowski-Raum, 56
- Mittag-Leffler, M.G., 274
- Mittelwerteigenschaft, 149
- Möbius, A., 119
- Möbiusband, 357
- Möbiusgruppe, 120
- Möbiustransformation, 118, 122, 124
- Modulform, 318
- Modulgruppe, 314, 329
- Moisil, G.C., 144
- monogene Funktion, 93, 98
- Morera, G., 130
- Multiindex, 113
- multilineare Abbildung, 338
 - alternierende, 338
 - symmetrische, 338

- Multilinearform, 338
- Multiplikation
 - komplexer Zahlen, 4, 7
 - von Clifford-Zahlen, 57
 - von Potenzreihen, 172
 - von Quaternionen, 17
- Nabla-Operator, 146
- Nebenteil, 179, 188
- nicht-tangentiale Konvergenz, 139
- Norguet, F., 285
- Nullstellenordnung, 262, 267
- offen, 77
- orientierbar, 354
- Orientierung, 357
- orthogonal, 21, 44
- orthogonale Matrizen, 64
- orthogonale Zerlegung, 223
- Orthogonalität, 12
- Orthogonalitätsrelationen der Fueter-
 - Polynome, 190, 199
- Orthogonalsystem, 196, 207
- Orthonormalsystem, vollständiges, 210
- Ortsvektor, 35
- Ostrogradski, M.V., 365
- Parameterdarstellung, 355
 - einer Ebene, 41
 - einer Geraden, 12
 - eines Kreises, 13
 - einer Kurve, 355
- Paravektor, 60
 - wertigkeit, 147, 199
- Partialprodukt, 263
- Partialsomme, 81
- Pauli-Matrizen, 33, 69
- Peirce, B., 24
- Perioden-
 - parallelogramm, 314
 - parallelotop, 321
- Periodizitätsgesetz, 73
- Permutationsgruppe, 114, 338
- $\wp$ -Funktion, 317
- Plemelj, J., 137
- Plemelj-Projektionen, 142
- Plemelj-Sokhotzki-Formeln, 139
- Plücker, J., 43
- Plückersche Geradengleichung, 42
- Poincaré, H., 320
- Poincaré-Reihe, 319, 330
- Poincarésches Lemma, 354
- Poissonsche Integralformel, 154
- polare Zerlegung von ∂ , 233
- Polarform, 7
- Polarkoordinaten, 6
- Polstelle, 270, 271, 275, 276
- Polstellenordnung, 271, 276
- polygene Funktion, 98
- Pompeiu, D., 133, 142
- Porteous, Satz von, 30
- Potenzfunktion, 111, 233, 241
- Potenzreihe, 83, 170, 174
- Potenzreihenentwicklung, 172, 175
- Pringsheim, A., 130
- Produkt
 - alternierendes, 340
 - äußeres, 52, 340
 - inneres, 52
 - symmetrisches, 340
- Produktsatz von Weierstraß, 264
- Pseudoskalar, 56
- Qian, T., 243
- Quader, 356
- Quaternion, 16
 - Betrag, 19
 - komplexe, 56
 - konjugierte, 19, 25
 - Links-Darstellung, 33
 - Multiplikationsregel, 17
 - Rechts-Darstellung, 33
 - reelle, 17
 - Skalarteil, 19
 - trigonometrische Darstellung, 24
 - Vektorteil, 19
- Quotientenkriterium, 82
- radial holomorphe Funktion, 243
- radial symmetrische Funktion, 234
- radiale elementare Funktion, 238
- radiale Hermite-Polynome, 251
- radialer Differentialoperator, 242
- Rand, 77
- Randwertproblem, 152
- rationale Funktion, 97
- Raum
 - differenzierbarer Funktionen, 373
 - integrierbarer Funktionen, 374
- Rauminhalt, 361
- Raum-Zeit-Algebra, 56
- Realteil, 5
- Rechteck, 356
- Rechte-Hand-Regel, 42
- rechts- $\mathbb{H}$ -holomorphe Funktion, 103
- rechts-Clifford-holomorphe Funktion, 109
- Rechts-Darstellung, 33
- rechts-meromorphe Funktion, 275
- rechtwinklige Koordinaten, 6
- Regel des doppelten Faktors, 47

- reguläre Funktion, 93
- regulärer Punkt, 138
- Reihe, 81
 - Funktionen-, 83
 - geometrische, 83
 - Potenz-, 83
- relativ abgeschlossen, 77
- relativ offen, 77
- Relativtopologie, 77
- Relativumgebung, 77
- Residuensatz, 278, 285
- Residuum, 278, 279, 285, 286
 - Berechnung, 280, 286
- Reverse, 25
- Reversion, 25, 58
- Riemann, B., 86, 168
- Riemann–Füeterscher Hebbarkeitssatz, 276
- Riemann-Sphäre, 86
 - verallgemeinerte, 89
- Riemannsche Fläche, 111, 232
- Riemannsche Zetafunktion, 310
 - Produktdarstellung, 310
 - verallgemeinerte, 327
- Rodrigues, O., 15, 28
- Rouché, E., 284
- Ryan, J., 320
- Saak, E.M., 144
- Satz
 - Calderon–Zygmund, 160
 - Casorati–Weierstraß–Sokhotski, 272
 - Cayley, 31
 - Ceva, 38
 - Euler, 310
 - Frobenius, 22
 - Gauß, 366
 - Gauß–Ostrogradski, 366
 - Green, 368
 - Hahn–Banach, 193
 - Heine–Borel, 79
 - Liouville, 151, 316, 324, 325
 - Mittag-Leffler, 274, 277
 - Morera, 131
 - Porteous, 30
 - Porteous–Rodrigues, 25
 - Riesz, 223
 - Rouché, 284
 - Stokes, 365
 - Weierstraß, 83
- Sce, M., 243
- Schiefkörper, 18
- schiefsymmetrisch, 338
- Schwarz, H.A., 40, 152
- Schwarzsche Integralformel, 152
- Schwerpunkt, 37
- Scipione dal Ferro, 3
- S-Differenzierbarkeit, 107
- Siegel, C.L., 320
- Singularität
 - hebbare, 270, 275
 - isolierte, 275
 - wesentliche, 270, 275
- Sinusfunktion, 228
- skalares Dreifachprodukt, 21
- Skalarprodukt, 12, 21, 38, 59
 - holomorpher Kugelfunktionen, 382
 - im Hilbertraum, 374
- Skalarteil, 19, 34, 60
- Smith, R., 147
- Sobolev-Raum, 375
- Sokhotski, Y.V., 137, 272
- Sommen, F., 55, 71
- Souček, V., 106
- Spatprodukt, 44
- spezielle orthogonale Gruppe, 10, 27, 30, 64
- sphärische Polynome, 116
 - innere, 198, 203
- sphärischer
 - adjungierter Cauchy–Riemann operator, 204
 - Dirac-Operator, 235
 - Kosinussatz, 50
 - Sinus-Kosinus-Satz, 50
 - Sinussatz, 50
- sphärisches Dreieck, 49
- Spiegelung, 11,
 - am Einheitskreis, 14
 - an der Kugel, 127
- Spin-Gruppe, 65
- Spuroperator, 163
- Stammfunktion, 172, 215
- stereographische Projektion, 86
- sternförmiges Gebiet, 132
- stetige Funktion, 79
- Stirling, J., 303
- Stirlingsche Formel, 304
- Stokes, G.G., 365
- Study, E., 34
- Suchumlinov, G.A., 193
- Sudbery, A., 104
- Summe einer Reihe, 81
- Summenidentität des doppelten Vektorprodukts, 46
- symmetrisch, 338
- Symmetrisierung, 339
- Tait, P.G., 147
- Tangensfunktion, 231
 - verallgemeinerte, 322
- Tangente, 13

- Tangententialraum, 35, 354
- Tartaglia, 3
- Taylorentwicklung, 175
- Taylorkoeffizienten, 171
- Taylorreihe, 175, 183
- Tensorprodukt, 340
- Teodorescu, N., 144
- Teodorescu-Transformation, 135, 156
- total analytisch, 117, 197
- totale Differentialform, 343
- totales Differential, 343
- Träger einer Funktion, 359
- trigonometrische Darstellung, 24
- trigonometrische Form, 7
- trigonometrische Funktionen, 227, 239, 247
- Triplet, 15

- Überdeckung, 78
- Umgebung, 76
- Umkehrung der Potenzfunktion in $\mathbb{C}$, 111
- Umlaufzahl, 282, 287
- unendliches Produkt, 263
- Urbild, 79
- Urbildmenge, 79

- Vahlen, K.T., 54, 119
- Vahlen-Matrix, 118, 123, 124
- Vektor, 15, 17, 19, 34
 - entgegengesetzter, 36
 - freier, 36
 - Linien-, 35
 - lokal gebundener, 35
 - Orts-, 35
- Vektorfeld, 35
- Vektorprodukt, 12, 21, 38, 349
- Vektorraum, 17
- Vektorteil, 19
- verallgemeinerte Dirichletreihe, 308
- verallgemeinerte Riemann-Sphäre, 89
- verallgemeinerte Riemannsche Zetafunktion, 327
- Verhalten im Unendlichen, 273
- vervollständigte komplexe Ebene, 86
- Vier-Quadrate-Satz, 20
- vollständige Orthonormalsysteme, 210, 384
- Vollständigkeit im Hilbertraum, 209
- Vollständigkeitssatz, 200
- Volumen, orientiertes, 45
- vrai max, 374

- Wallis, J., 3
- wegzusammenhängend, 77
- Weierstraßfaktor, 264
- Weierstraß, K., 168, 272, 315
- Weierstraß, Produktsatz, 264
- Weierstraß, Satz von, 83
- Weierstraß'sche $\wp$ -Funktion, 317
 - verallgemeinerte, 322
- wesentliche Singularität, 270, 272, 275
- wesentliches Maximum, 374
- Wessel, C., 7
- Windungspunkt, 111
- Wurzelkriterium, 81
- Wurzelziehen, 8

- Zahl, komplexe, 4
- Zentrum, 57
- Zerlegung der Eins, 358
- Zöll, G., 267
- zulässige Parametertransformation, 355
- zusammenhängend, 77
- Zusammenhang, 366
- Zwei-Quadrate-Satz, 5