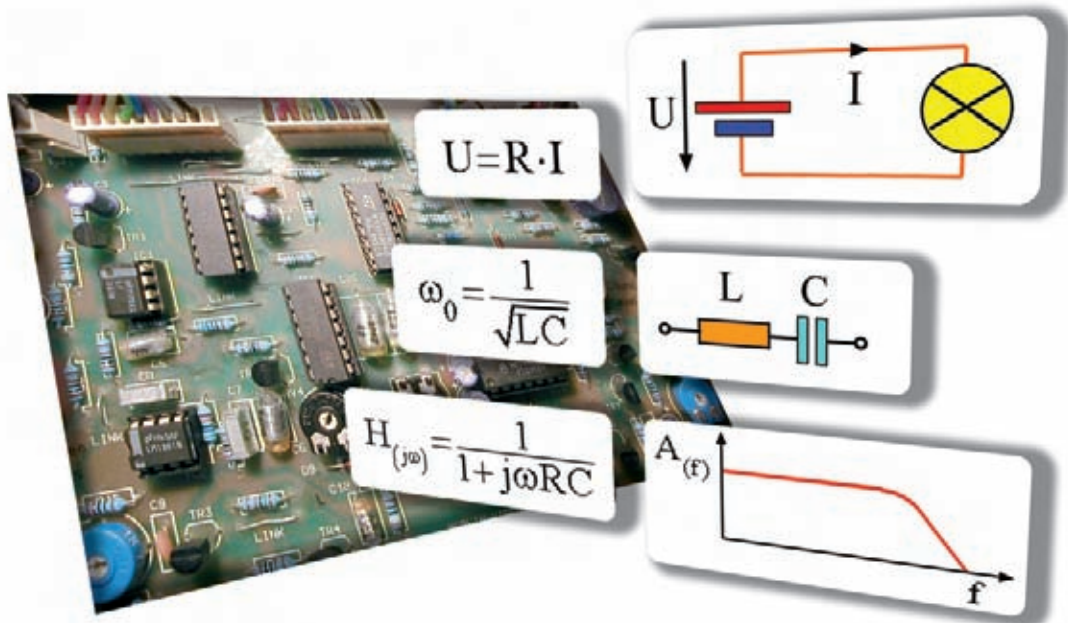


Leonhard Stiny



Grundwissen Elektrotechnik

5. Auflage

- Elektrische Größen, Schaltbilder, Quellen
- Wirkungsweise und Verwendungszweck von Bauelementen
- Gleich- und Wechselstromtechnik
- Einschwingvorgänge • Analyse von Netzwerken
- Komplexe Wechselstromrechnung
- Fourier-Analyse, Übertragungsfunktion, Bodediagramm
- Filter • Transformatoren, Übertrager • Schwingkreise • u.v.m.

Leonhard Stiny

Grundwissen Elektrotechnik

Elektrotechnik

Leonhard Stiny

Grundwissen Elektrotechnik

3., überarbeitete Auflage

Mit 430 Abbildungen

FRANZIS

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar

© 2005 Franzis Verlag GmbH, 85586 Poing

Alle Rechte vorbehalten, auch die der fotomechanischen Wiedergabe und der Speicherung in elektronischen Medien. Das Erstellen und Verbreiten von Kopien auf Papier, auf Datenträger oder im Internet, insbesondere als .pdf, ist nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlages gestattet und wird widrigenfalls strafrechtlich verfolgt.

Die meisten Produktbezeichnungen von Hard- und Software sowie Firmennamen und Firmenlogos, die in diesem Werk genannt werden, sind in der Regel gleichzeitig auch eingetragene Warenzeichen und sollten als solche betrachtet werden. Der Verlag folgt bei den Produktbezeichnungen im wesentlichen den Schreibweisen der Hersteller.

Alle in diesem Buch vorgestellten Schaltungen und Programme wurden mit der größtmöglichen Sorgfalt entwickelt und getestet. Trotzdem können Fehler im Buch und in der Software nicht vollständig ausgeschlossen werden. Verlag und Autor übernehmen für fehlerhafte Angaben und deren Folgen keine Haftung.

Die veröffentlichte Software darf ausschließlich für private Zwecke verwendet werden, jegliche gewerbliche Nutzung ist nicht gestattet.

Satz: Fotosatz Pfeifer, 82166 Gräfelfing

art & design: www.ideehoch2.de

Druck: Bercker, 47623 Kevelaer

Printed in Germany

ISBN 3-7723-4928-5

Vorwort

Dieses Buch ist für alle gedacht, die sich mit den Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik in Theorie und Praxis näher beschäftigen wollen oder müssen. Als Leitgedanke beim Schreiben des Buches stand im Vordergrund, die Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik in Theorie und Praxis einfach und leicht verständlich zu erläutern, um sich diese im Selbststudium aneignen zu können. Auszubildende elektrotechnischer Berufe, Schüler weiterführender Schulen, Berufserfahrene zur Auffrischung des Wissens, Hobbyelektroniker und auch manche Studenten der Elektrotechnik oder verwandter Gebiete sollen gleichermaßen angesprochen werden.

Zahlreiche Abbildungen, Beispiele und Aufgaben mit ausführlichen Lösungen sowie Schritt- für Schritt-Anleitungen sollen helfen, den Stoff anschaulich darzustellen, zu vertiefen und das erworbene Wissen anzuwenden. Zusammenfassungen am Ende der einzelnen Kapitel geben einen schnellen Überblick und heben das Wesentliche hervor.

Modellvorstellungen

Viele physikalische Vorgänge können nur mit Hilfe der Mathematik exakt beschrieben werden. Mathematische Formeln und Gleichungen sind oft abstrakt, die durch sie ausgedrückten physikalischen Prozesse sind nur schwer anschaulich vorstellbar.

Dem menschlichen Bedürfnis nach Anschaulichkeit kommen Modellvorstellungen entgegen, die häufig in das Gebiet der Mechanik gehören. Jeder von uns kennt fließendes Wasser, kann sich bewegte Körper oder eine Ansammlung von kleinen Kügelchen vorstellen. Vereinfachende Modelle dieser Art werden in diesem Buch ab und zu benutzt, um grundlegende elektrische Vorgänge auch dem Interessierten mit wenigen mathematischen Kenntnissen anschaulich näher zu bringen. Bei der Verwendung einfacher, mechanischer Modelle zur Beschreibung elektro- oder atomphysikalischer Objekte muß man sich jedoch bewußt sein, daß im allgemeinen die Exaktheit der Darstellung mit steigender Anschaulichkeit abnimmt. Je einfacher und damit anschaulicher ein Modell ist, um so ungenauer ist es. Dennoch reichen einfache Modelle häufig aus, um die wichtigsten Grundbegriffe der Elektrotechnik mit für die Praxis ausreichender Genauigkeit der menschlichen Vorstellung zugänglich zu machen und an die Erfahrungswelt anzuknüpfen.

Theorie und Vorbildung

Ein Mindestmaß an mathematischen Kenntnissen muß vorausgesetzt werden. Nur mit Hilfe der Mathematik können die gegenseitigen Abhängigkeiten physikalischer Größen beschrieben werden. Der Leser sollte daher mindestens über die mathematischen und physikalischen Kenntnisse verfügen, die ein mittlerer Schulabschluß vermittelt. Aus dem Gebiet der Algebra werden z.B. als bekannt angenommen: Zehnerpotenzen, Wurzeln, die Kennzeichnung einer Größe durch einen Index, das Umstellen und Auflösen einfacher Formeln, das Rechnen mit Potenzen, die Funktion

einer Variablen und ihre graphische Darstellung, trigonometrische Funktionen (Sinus, Cosinus), Gleichungen mit zwei Unbekannten, Lösung einer quadratischen Gleichung.

Weitergehende mathematische Kenntnisse (etwa dem Abitur entsprechend) sind nur in wenigen, mit einem hochgestellten »M« gekennzeichneten Abschnitten erforderlich.

Praxis

Theoretische Grundkenntnisse sind unerlässlich für das Verständnis elektrischer Vorgänge. Durch Beispiele aus der Praxis wird ein Bezug zu realen Anwendungen hergestellt und das Verstehen der Theorie unterstützt. Es wird nicht nur erläutert, für welchen Zweck ein Bauteil eingesetzt wird, sondern auch an praktischen Beispielen gezeigt, wie theoretische Grundlagen und Formeln in der Praxis anzuwenden sind. Da sich die technische Realisierung von Bauteilen rasch ändert, werden deren Ausführungsformen nur kurz beschrieben. In der Praxis kann unabhängig von der Bauform der Bauteile aus mehreren Widerständen ein Ersatzwiderstand gebildet werden. Praxis ist in diesem Buch im Sinne dieses einfachen Beispiels zu verstehen, weitgehend unabhängig vom technologischen Wandel und als Anwendung grundlegender Theorie.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich meiner Frau Anneliese für ihr Verständnis und ihre Geduld während der Erstellungszeit dieses Buches danken. Meiner Tochter Tanja, durch die ich zu diesem Werk angeregt wurde, gebührt mein Dank für zahlreiche Vorschläge und die teilweise Durchsicht des Manuskriptes.

Für Hinweise auf Fehler und für Verbesserungs- oder Ergänzungsvorschläge bin ich dankbar.

Haag, im November 1999

Leonhard Stiny

Inhalt

1	Elektrischer Strom	17
1.1	Der Aufbau der Materie	17
1.1.1	Stoffe	17
1.1.1.1	Stoffgemische	18
1.1.1.2	Reinstoffe	18
1.1.1.3	Verbindung	18
1.1.1.4	Molekül	18
1.1.1.5	Element	18
1.1.1.6	Atom	18
1.1.2	Zusammenfassung: Stoffe	19
1.1.3	Beispiel zur Zerlegung der Materie	19
1.1.4	Denkmodell für Atom und Molekül	20
1.1.5	Der Atombau	21
1.1.5.1	Das Bohrsche Atommodell	21
1.1.5.2	Beispiele für Atome	23
1.1.6	Zusammenfassung: Der Atombau	24
1.2	Der elektrische Strom	24
1.2.1	Elektrische Ladung	24
1.2.2	Elektrischer Strom	25
1.2.3	Nichtleiter, Leiter und Halbleiter	27
1.2.4	Widerstand und Leitfähigkeit	27
1.2.5	Elektrische Spannung	28
1.2.6	Zusammenfassung: Der elektrische Strom	30
1.2.7	Halbleiter	30
1.2.7.1	Elektrizitätsleitung in festen Stoffen (Wiederholung)	30
1.2.7.2	Elektrizitätsleitung in reinen Halbleitern (Eigenleitung)	31
1.2.7.3	Elektrizitätsleitung in dotierten Halbleitern (Störstellenleitung)	34
1.2.8	Zusammenfassung: Halbleiter	35
2	Der unverzweigte Gleichstromkreis	37
2.1	Größen im Gleichstromkreis	37
2.1.1	Allgemeines zu physikalischen Größen und Einheiten	37
2.1.2	Die Größe für den elektrischen Strom	39
2.1.3	Die Größe für die elektrische Spannung	40
2.1.4	Die Größe für den elektrischen Widerstand	41
2.1.5	Zusammenfassung: Größen im Gleichstromkreis	42
2.2	Das OHMsche Gesetz	42
2.2.1	Aussage des Ohmschen Gesetzes	42
2.2.2	Rechnen mit dem Ohmschen Gesetz	44
2.2.3	Grafische Darstellung des Ohmschen Gesetzes	45
2.2.4	Zusammenfassung: Das OHMsche Gesetz	45

2.3	Definitionen	46
2.3.1	Gleichstrom, Gleichspannung, Wechselstrom, Wechselspannung.....	46
2.3.2	Verbraucher	47
2.3.3	Reihenschaltung.....	47
2.3.4	Parallelschaltung	47
2.3.5	Unverzweigter und verzweigter Stromkreis	47
2.3.6	Schaltzeichen und Schaltbild.....	48
2.3.7	Werte von Strömen und Spannungen in Schaltbildern	50
2.3.7.1	Angabe der Spannungen unter Bezug auf Masse (als Potential).....	50
2.3.7.2	Angabe der Spannungen mit Zählpfeilen	51
2.3.7.3	Angabe von Strömen in Schaltbildern	52
2.3.7.4	Erzeuger- und Verbraucher- Zählpfeilsystem.....	52
2.3.8	Kurzschluß	53
2.3.9	Passive Bauelemente	54
2.3.10	Aktive Elemente	54
2.3.11	Zusammenfassung: Definitionen	54
2.4	Arbeit und Leistung.....	55
2.4.1	Elektrische Arbeit.....	55
2.4.2	Elektrische Leistung	55
2.5	Wirkungsgrad	57
3	Lineare Bauelemente im Gleichstromkreis	59
3.1	Definition des Begriffes »linear«.....	59
3.2	Der ohmsche Widerstand.....	60
3.2.1	Wirkungsweise des Widerstandes	60
3.2.2	Spezifischer Widerstand	61
3.2.3	Verwendungszweck von Widerständen	65
3.2.3.1	Strombegrenzung durch einen Vorwiderstand	65
3.2.3.2	Aufteilung einer Spannung.....	66
3.2.3.3	Aufteilung des Stromes	66
3.2.4	Widerstand als Bauelement	66
3.2.4.1	Festwiderstände	67
3.2.4.2	Veränderbare Widerstände	72
3.2.4.3	Spezielle Widerstände	74
3.2.5	Zusammenfassung: Der ohmsche Widerstand	75
3.3	Der Kondensator.....	75
3.3.1	Wirkungsweise des Kondensators	75
3.3.2	Größe für die Kapazität	76
3.3.3	Plattenkondensator	77
3.3.4	Dielektrikum	79
3.3.5	Verwendungszweck von Kondensatoren	82
3.3.5.1	Stützen von Spannungen.....	82
3.3.5.2	Glättung von Spannungen	84
3.3.5.3	Trennen von Gleich- und Wechselspannung	84
3.3.5.4	Entstörung mittels Kondensatoren	85
3.3.6	Kondensator als Bauelement	85
3.3.6.1	Festkondensatoren	85

3.3.6.2	Veränderbare Kondensatoren	87
3.3.7	Kenngrößen von Kondensatoren	87
3.3.7.1	Nennspannung	87
3.3.7.2	Kapazitätstoleranz	87
3.3.7.3	Kapazitätsänderung	88
3.3.7.4	Ersatzschaltbild	88
3.3.8	Zusammenfassung: Der Kondensator	88
3.4	Die Spule	88
3.4.1	Grundlagen des Magnetismus	88
3.4.2	Zusammenfassung: Grundlagen des Magnetismus	91
3.4.3	Elektromagnetismus	91
3.4.4	Wirkungsweise der Spule	92
3.4.4.1	Magnetwirkung des Stromes	92
3.4.4.2	Induktion	96
3.4.4.3	Kraft auf stromdurchflossene Leiter	99
3.4.4.4	Selbstinduktion	99
3.4.4.5	Induktivität	100
3.4.4.6	Induktive Kopplung	100
3.4.4.7	Induktiver Widerstand	102
3.4.5	Aufbau der Spule	102
3.4.5.1	Luftspule	102
3.4.5.2	Spule mit Kern	103
3.4.6	Verwendungszweck von Spulen	104
3.4.6.1	Verwendung von Spulen im Gleichstromkreis	104
3.4.6.2	Verwendung von Spulen im Wechselstromkreis	104
3.4.7	Spule als Bauelement	104
3.4.7.1	Feste Induktivität	104
3.4.7.2	Veränderliche Induktivität	105
3.4.8	Kenngrößen von Spulen	105
3.5	Zusammenfassung: Die Spule	105
4	Gleichspannungsquellen	107
4.1	Primärelemente (galvanische Elemente, Batterien)	107
4.1.1	Wirkungsweise des galvanischen Elements	107
4.1.2	Batterien	108
4.2	Sekundärelemente (Akkumulatoren)	109
4.2.1	Der Bleiakкумуляtor	109
4.2.2	Nickel-Cadmium-Akkumulatoren	110
4.2.3	Nickel-Metallhydrid-Akkumulatoren	110
4.2.4	Technische Eigenschaften von Akkumulatoren	110
4.3	Netzgeräte	111
4.4	Störungsfreie Versorgung mit Gleichspannung	112
4.5	Die belastete Gleichspannungsquelle	113
4.5.1	Ersatzspannungsquelle	113
4.5.2	Ermittlung des Innenwiderstandes	115
4.5.3	Kurzschlußstrom	115
4.5.4	Leerlauf	116

4.5.5	Anpassungen	116
4.5.5.1	Spannungsanpassung	116
4.5.5.2	Stromanpassung	117
4.5.5.3	Leistungsanpassung	117
4.6	Ersatzstromquelle	117
4.7	Zusammenfassung: Gleichspannungsquellen	118
5	Berechnungen im unverzweigten Gleichstromkreis	121
5.1	Reihen- und Parallelschaltung von Zweipolen	121
5.2	Reihenschaltung von ohmschen Widerständen	122
5.3	Reihenschaltung von Kondensatoren	126
5.4	Reihenschaltung von Spulen	127
5.5	Reihenschaltung von Gleichspannungsquellen	128
5.6	Reihenschaltung von Widerständen, Kondensatoren und Spulen	128
5.6.1	Zusammenfassung von Bauelementen	128
5.6.2	Reihenschaltung von Kondensator und R oder L	129
5.6.3	Reihenschaltung einer Spule mit R oder C	129
5.7	Reihenschaltung in der Praxis	129
5.7.1	Ersatz von Bauteilen	129
5.7.2	Vorwiderstand	130
5.7.3	Spannungsabfall an Leitungen	131
5.7.4	Spannungsteiler	131
5.8	Zusammenfassung: Berechnungen im unverzweigten Gleichstromkreis	131
6	Messung von Spannung und Strom	133
6.1	Voltmeter und Amperemeter	133
6.2	Erweiterung des Meßbereiches eines Voltmeters	136
6.3	Indirekte Messung von Widerstand und Leistung	137
7	Schaltvorgänge im unverzweigten Gleichstromkreis	139
7.1	Schaltvorgang beim ohmschen Widerstand	139
7.1.1	Widerstand einschalten	139
7.1.2	Widerstand ausschalten	139
7.2	Schaltvorgang beim Kondensator	140
7.2.1	Kondensator laden (einschalten)	140
7.2.2	Kondensator ausschalten	142
7.2.3	Kondensator entladen	142
7.2.4	Exponentialfunktion von Spannung und Strom	143
7.3	Schaltvorgang bei der Spule	147
7.3.1	Spule einschalten	147
7.3.2	Spule ausschalten (mit Abschalt-Induktionsstromkreis)	148
7.3.3	Spule ausschalten (ohne Abschalt-Induktionsstromkreis)	149
7.3.4	Zeitverlauf von Spannung und Strom	151
7.4	Zusammenfassung: Schaltvorgänge im unverzweigten Gleichstromkreis	152
8	Der verzweigte Gleichstromkreis	153
8.1	Die Kirchhoffschen Gesetze	153
8.1.1	Die Knotenregel (1. Kirchhoffsches Gesetz)	153
8.1.2	Die Maschenregel (2. Kirchhoffsches Gesetz)	154

8.2	Berechnung von Parallelschaltungen	155
8.2.1	Parallelschaltung von ohmschen Widerständen	155
8.2.2	Parallelschaltung von Kondensatoren	157
8.2.3	Parallelschaltung von Spulen	157
8.2.4	Parallelschaltung von Gleichspannungsquellen	158
8.3	Parallelschaltung in der Praxis	159
8.3.1	Ersatz von Bauteilen	159
8.3.2	Erweiterung des Meßbereiches eines Amperemeters	159
8.3.3	Der belastete Spannungsteiler	161
8.3.3.1	Berechnung des belasteten Spannungsteilers	161
8.4	Gemischte Schaltungen	163
8.5	Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung	164
8.6	Umwandlung von Quellen	167
8.7	Analyse von Netzwerken	168
8.7.1	Die Maschenanalyse	169
8.7.2	Die Knotenanalyse	174
8.7.3	Der Überlagerungssatz	177
8.7.4	Der Satz von der Ersatzspannungsquelle	179
8.8	Vierpole	184
8.9	Zusammenfassung: Der verzweigte Gleichstromkreis	185
9	Wechselspannung und Wechselstrom	187
9.1	Grundlegende Betrachtungen	187
9.2	Entstehung der Sinuskurve	190
9.3	Kennwerte von Wechselgrößen	191
9.3.1	Periodendauer	191
9.3.2	Frequenz	191
9.3.3	Kreisfrequenz	192
9.3.4	Wellenlänge	192
9.3.5	Amplitude	193
9.3.6	Spitze-Spitze-Wert	193
9.3.7	Effektivwert	193
9.3.8	Gleichrichtwert ^(M)	196
9.3.9	Phase	198
9.4	Zusammenfassung: Kennwerte von Wechselgrößen	199
9.5	Zeigerdarstellung von Sinusgrößen	200
9.6	Zusammensetzung von Wechselspannungen	202
9.7	Oberschwingungen	204
9.7.1	Fourierreihen ^(M)	205
9.7.2	Beispiel zur Fourier-Analyse ^(M)	207
9.7.3	Bedeutung der Fourier-Analyse	210
9.7.3.1	Störungen	210
9.7.3.2	Nichtsinusförmige Vorgänge in linearen Schaltungen	211
9.7.4	Klirrfaktor	211

10	Komplexe Darstellung von Sinusgrößen	213
10.1	Grundbegriffe der komplexen Rechnung	213
10.1.1	Rechenregeln für imaginäre Zahlen	214
10.1.2	Rechenregeln für komplexe Zahlen	215
10.1.3	Vorteil komplexer Zahlen	217
10.1.4	Sinusförmige Wechselspannung in komplexer Darstellung	220
10.1.5	Der komplexe Widerstand	221
10.2	Zusammenfassung: Komplexe Darstellung von Sinusgrößen	221
11	Einfache Wechselstromkreise	223
11.1	Ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis	223
11.2	Spule im Wechselstromkreis	225
11.3	Kondensator im Wechselstromkreis	227
11.4	Reihenschaltung aus ohmschem Widerstand und Spule	230
11.4.1	Komplexe Frequenz »s«	230
11.4.2	Anwendung von s bei der RL-Reihenschaltung	231
11.5	Reihenschaltung aus ohmschem Widerstand und Kondensator	236
11.6	RC-Reihenschaltung in der Praxis	238
11.6.1	Die Übertragungsfunktion	238
11.6.2	Pegel	242
11.6.3	Bodediagramm	243
11.6.4	Dämpfung	244
11.6.5	Grenzfrequenz	244
11.6.6	Normierte Übertragungsfunktion	244
11.6.7	Der RC-Tiefpaß	245
11.6.8	Bodediagramme mit Mathcad	249
11.6.9	Filterung eines gestörten Sinussignals	252
11.6.10	Der RC-Hochpaß	253
11.7	Reihenschaltung aus Spule, Widerstand und Kondensator	255
11.8	Parallelschaltung aus Widerstand und Spule	256
11.9	Parallelschaltung aus Widerstand und Kondensator	257
11.10	Zusammenfassung: Einfache Wechselstromkreise	258
12	Ersatzschaltungen für Bauelemente	259
12.1	Die elektrische Leitung	259
12.2	Widerstand mit Eigenkapazität und Eigeninduktivität	260
12.3	Verluste in Spulen	261
12.3.1	Wicklungsverluste	261
12.3.2	Verluste durch den Skineffekt	262
12.3.3	Hystereseverluste	263
12.3.4	Wirbelstromverluste	263
12.4	Verluste im Kondensator	263
12.5	Zusammenfassung: Ersatzschaltungen für Bauelemente	264
13	Leistung im Wechselstromkreis	265
13.1	Reine Wirkleistung	265
13.2	Reine Blindleistung	266
13.3	Wirk- und Blindleistung	267

13.4	Scheinleistung.....	268
13.5	Blindleistungskompensation.....	269
13.6	Zusammenfassung: Leistung im Wechselstromkreis.....	271
14	Transformatoren (Übertrager).....	273
14.1	Grundprinzip	273
14.2	Transformator mit Eisenkern	274
14.3	Der verlustlose streufreie Transformator	275
14.3.1	Transformation der Spannungen.....	276
14.3.2	Transformation der Stromstärken	276
14.3.3	Transformation des Widerstandes.....	277
14.4	Der verlustlose Übertrager mit Streuung	278
14.5	Der reale Transformator	280
14.6	Übertrager zwischen ohmschen Widerständen.....	281
14.7	Spezielle Ausführungen von Transformatoren.....	285
14.8	Zusammenfassung: Transformatoren (Übertrager)	285
15	Schwingkreise.....	287
15.1	Reihenschwingkreis ohne Verluste.....	287
15.2	Reihenschwingkreis mit Verlusten.....	289
15.3	Parallelschwingkreis ohne Verluste	299
15.4	Parallelschwingkreis mit Verlusten	301
15.5	Zeitverhalten elektrischer Schwingkreise	308
15.6	Grundsätzliche Kopplungsarten	309
15.6.1	Galvanische Kopplung	309
15.6.2	Induktive Kopplung	309
15.6.3	Kapazitive Kopplung	310
15.6.4	Fußpunktkopplung	310
15.7	Bandfilter	310
15.8	Kopplungsarten bei Bandfiltern	312
15.8.1	Transformatorische Kopplung	312
15.8.2	Induktive Kopplung mit Koppelspule	312
15.8.3	Kapazitive Kopfpunktkopplung	313
15.8.4	Kapazitive Fußpunktkopplung.....	314
15.9	Zusammenschaltung von Schwingkreisen	314
15.9.1	LC-Bandpaß.....	314
15.9.2	LC-Bandsperre	315
15.10	Zusammenfassung: Schwingkreise	316
16	Mehrphasensysteme.....	317
16.1	Erzeugung von Drehstrom	317
16.1.1	Sternschaltung des Generators.....	318
16.1.2	Dreieckschaltung des Generators	319
16.2	Verbraucher im Drehstromsystem	320
16.2.1	Sternschaltung des Verbrauchers mit Mittelleiter.....	320
16.2.2	Sternschaltung des Verbrauchers ohne Mittelleiter	321
16.2.3	Dreieckschaltung des Verbrauchers	324

16.3	Leistung bei Drehstrom	326
16.4	Zusammenfassung: Mehrphasensysteme	327
17	Analyse allgemeiner Wechselstromnetze	329
18	Halbleiterdioden	341
18.1	Der PN-Übergang ohne äußere Spannung	341
18.2	Der PN-Übergang mit äußerer Spannung	343
18.2.1	Äußere Spannung in Durchlaßrichtung	343
18.2.2	Äußere Spannung in Sperrrichtung	344
18.2.3	Vollständige Kennlinie eines PN-Überganges	347
18.3	Eigenschaften von Dioden	348
18.3.1	Die ideale Diode	348
18.3.2	Die reale Diode	348
18.3.2.1	Ersatzschaltungen der Diode	348
18.3.2.2	Kennwerte von Dioden	350
18.3.2.3	Temperaturabhängigkeit der Diodenkennlinie	353
18.4	Diode und Verlustleistung	355
18.5	Arten von Dioden	359
18.5.1	Universaldioden	359
18.5.2	Spezialdioden	360
18.5.2.1	Schottkydiode (hot carrier-Diode)	360
18.5.2.2	Gunndiode	360
18.5.2.3	PIN-Diode	360
18.5.2.4	Kapazitätsvariationsdiode	360
18.5.2.5	Tunneldiode	362
18.5.2.6	Photodiode	363
18.5.2.7	Lumineszenzdiode	363
18.5.2.8	Z-Diode (Zener-Diode)	364
18.5.2.9	Suppressor-Dioden	370
18.6	Arbeitspunkt und Widerstandsgerade	370
18.7	Anwendungen von Dioden	376
18.7.1	Gleichrichtung von Wechselspannungen	376
18.7.2	Schutzdiode	379
18.7.3	Eingangsschutzschaltung	380
18.7.4	Dioden in der Digitaltechnik	381
18.7.5	Begrenzung einer Wechselspannung	383
18.7.6	Stabilisierung kleiner Gleichspannungen	384
18.8	Zusammenfassung: Halbleiterdioden	385
19	Bipolare Transistoren	387
19.1	Definition und Klassifizierung von Transistoren	387
19.2	Aufbau des Transistors	388
19.3	Richtung von Strömen und Spannungen beim Transistor	389
19.4	Wirkungsweise	390
19.5	Die drei Grundschaltungen des Transistors	394
19.6	Betriebsarten	395
19.7	Kennlinien des Transistors	398

19.7.1	Eingangskennlinie	398
19.7.2	Ausgangskennlinie	399
19.7.3	Steuerkennlinie	400
19.7.4	Vierquadranten-Kennlinienfeld, Arbeitspunkt, Lastgerade	403
19.8	Die Stromverstärkung α , β und γ	405
19.9	Abhängigkeiten der Stromverstärkung	406
19.10	Wahl des Arbeitspunktes	408
19.11	Die Grundsaltungen im Detail	411
19.11.1	Die Emitterschaltung	411
19.11.1.1	Eingangsimpedanz	411
19.11.1.2	Ausgangsimpedanz	412
19.11.1.3	Wechselspannungsverstärkung	412
19.11.1.4	Leistungsverstärkung	413
19.11.1.5	Verhalten bei hohen Frequenzen	415
19.11.2	Die Basisschaltung	416
19.11.2.1	Eingangsimpedanz	416
19.11.2.2	Ausgangsimpedanz	416
19.11.2.3	Wechselspannungsverstärkung	416
19.11.2.4	Leistungsverstärkung	417
19.11.2.5	Verhalten bei hohen Frequenzen	417
19.11.3	Die Kollektorschaltung	417
19.11.3.1	Eingangsimpedanz	417
19.11.3.2	Ausgangsimpedanz	418
19.11.3.3	Wechselspannungsverstärkung	419
19.11.3.4	Leistungsverstärkung	419
19.11.3.5	Verhalten bei hohen Frequenzen	419
19.12	Rückkopplung	420
19.13	Emitterstufe mit Gegenkopplung	425
19.14	Ersatzschaltungen des Transistors	427
19.14.1	Die formale Ersatzschaltung	428
19.14.2	Die physikalische Ersatzschaltung	431
19.15	Spezielle Schaltungen mit Bipolartransistoren	437
19.15.1	Darlington-Schaltung	437
19.15.2	Bootstrap-Schaltung	437
19.15.3	Kaskodeschaltung	438
19.15.4	Konstantstromquelle	439
19.15.5	Differenzverstärker	440
19.15.6	Selektivverstärker	443
19.15.7	Oszillatoren	443
19.16	Der Transistor als Schalter	444
19.16.1	Schalttransistor im Sperrzustand	445
19.16.2	Schalttransistor im Durchlaßzustand	446
19.16.3	Dynamisches Schaltverhalten	446
19.16.4	Verkürzung der Schaltzeiten	447
19.16.5	Beispiele für die Anwendung von Schalttransistoren	448
19.16.5.1	Schalten einer Last	448

19.16.5.2	Astable Kippschaltung (Multivibrator)	450
19.16.5.3	Monostabile Kippschaltung (Univibrator, Monoflop)	451
19.16.5.4	Bistabile Kippschaltung (Flipflop)	452
19.16.5.5	Schmitt-Trigger	453
19.17	Transistoren in der Digitaltechnik	454
19.17.1	Kodes, Logische Funktionen, Schaltalgebra	454
19.17.2	Schaltungstechnische Realisierung der logischen Grundfunktionen	459
19.18	Zusammenfassung: Bipolare Transistoren	465
20	Feldeffekt-Transistoren	469
20.1	Bezeichnungen und Klassifizierung	469
20.2	Sperrschicht-FET mit N-Kanal	472
20.2.1	Aufbau und Arbeitsweise	472
20.2.2	Kennlinien und Arbeitsbereiche	473
20.3	Schaltungstechnik mit FETs (Beispiele)	475
20.3.1	Verstärkerbetrieb	476
20.3.1.1	Sourceschaltung	476
20.3.1.2	Gateschaltung	476
20.3.1.3	Drainschaltung	476
20.3.1.4	Verstärkung mit Gegenkopplung	477
20.3.2	Betrieb als steuerbarer Widerstand	477
20.3.3	Konstantstromquelle mit FET	478
20.3.4	Der FET als Schalter	478
20.4	Zusammenfassung: Feldeffekt-Transistoren	481
21	Operationsverstärker	483
21.1	Interner Aufbau von Operationsverstärkern	483
21.2	Eigenschaften des Operationsverstärkers	484
21.2.1	Leerlaufverstärkung	484
21.2.2	Übertragungskennlinie	485
21.2.3	Gleichtaktaussteuerung	486
21.2.4	Offsetspannung	486
21.2.5	Frequenzverhalten	487
21.2.6	Sprungverhalten	487
21.3	Betriebsarten	488
21.4	Grundsaltungen, Anwendungsbeispiele	489
21.4.1	Nichtinvertierender Verstärker	489
21.4.2	Invertierender Verstärker	490
21.4.3	Impedanzwandler (Spannungsfolger)	491
21.4.4	Differenzverstärker (Subtrahierer)	491
21.4.5	Addierer (Summierer)	492
21.4.6	Aktive Filter	492
21.5	Zusammenfassung: Operationsverstärker	493
22	Literaturverzeichnis	495
	Anhang	497
	Sachverzeichnis	513

1 Elektrischer Strom

Das Wesen der Elektrizität

Der Mensch kann mit seinen Sinnesorganen Elektrizität nicht erkennen. Man fühlt zwar die durch Elektrizität erzeugte Wärme oder sieht das Licht einer Glühlampe. In der Umgangssprache heißt es: »Es fließt Strom, deshalb leuchtet (oder brennt) die Lampe.« In den Leitungen zur Lampe oder in der Glühlampe selbst sieht man jedoch nichts fließen oder strömen. Wir erkennen die Elektrizität nur an den Wirkungen, die sie ausübt und die für unsere Sinnesorgane wahrnehmbar sind. Die eigentliche Ursache der Wahrnehmungen bleibt aber unseren Sinnen verschlossen.

Die Elektrizitätslehre ist ein Teilgebiet der Physik. Um das Wesen der Elektrizität verstehen zu können, sind Kenntnisse über den Aufbau der uns umgebenden Stoffe (der **Materie**) notwendig. Materie setzt sich aus winzigen Teilchen zusammen. Diese Teilchen sind viel zu klein, um sie mit den Augen wahrzunehmen, sie sind wiederum mit den menschlichen Sinnen nicht erkennbar.

Den einzigen Ausweg, die begrenzten Möglichkeiten der menschlichen Sinne zu überwinden, bietet unsere Fähigkeit, zu denken. Durch sprachliche Begriffe, die aus unserer Erfahrungswelt stammen, wie z.B. Kern, Bahn oder Hülle, schaffen Physiker **Denkmodelle**. Anhand dieser leicht vorstellbaren Modelle können der Aufbau und die Eigenschaften unterschiedlicher Stoffe erklärt und beschrieben werden. Als Folge davon ist dann auch beschreibbar und vorstellbar, was Elektrizität ist.

Der Aufbau der Materie soll hier nur mit sehr einfachen Modellen erklärt werden. Nicht die Atomphysik steht im Vordergrund, sondern das Verstehen der Elektrizität.

1.1 Der Aufbau der Materie

1.1.1 Stoffe

Gegenstände unserer Umwelt werden nach ihrer Form und nach dem **Material** oder **Stoff**, aus dem sie bestehen, beurteilt.

Stoff ist alles, was uns umgibt, einen Raum einnimmt und ein Gewicht (besser: eine Masse) hat. Auch Flüssigkeiten und Gase sind Stoffe.

Die meisten Stoffe können in drei Zuständen oder Phasen (**Aggregatzuständen**) auftreten: fest, flüssig und gasförmig.

Stoffe werden durch ihre wesentlichen Merkmale und Eigenschaften erkannt und unterschieden. Zu den charakteristischen Stoffeigenschaften gehören z.B. Zustand (fest, flüssig, gasförmig), Härte, Farbe, Glanz, Geruch, Geschmack, Kristallform, Schmelztemperatur, Siedetemperatur, Dichte, Löslichkeit in Wasser, Brennbarkeit.

1.1.1.1 Stoffgemische

Stoffe können wiederum als Stoffgemische oder Reinstoffe vorliegen.

Stoffgemische sind einteilbar in uneinheitliche (**heterogene**) und einheitliche (**homogene**) Gemische.

Heterogene Stoffgemische bestehen aus Teilchen mit verschiedenen Eigenschaften. Ein Beispiel hierfür ist Granit mit den Hauptbestandteilen Feldspat, Quarz und Glimmer. Diese Teilchen des Stoffgemisches kann man bereits mit dem bloßen Auge erkennen.

Homogene Stoffgemische haben durch und durch die selben Eigenschaften. So sind z.B. beim Messing (aus Kupfer und Zink) oder beim Zuckerwasser die einzelnen Bestandteile nicht mehr leicht erkennbar.

Stoffgemische können durch physikalische Verfahren (z.B. Filtrieren, Zentrifugieren, Destillieren) in weitere stoffliche Anteile (**Komponenten**) getrennt werden.

1.1.1.2 Reinstoffe

Reinstoffe können durch physikalische Operationen nicht mehr in verschiedenartige Anteile zerlegt werden. Reinstoffe sind z.B. Wasser, Schwefel, Eisen (natürlich nur, wenn sie nicht durch andere Stoffe verunreinigt sind).

1.1.1.3 Verbindung

Viele reine Stoffe lassen sich zwar nicht durch physikalische, aber durch chemische Vorgänge in weitere Stoffe trennen. Diese Reinstoffe nennt man **chemische Verbindungen**.

So läßt sich z.B. Wasser durch Zuführung großer Hitze oder durch elektrischen Strom in seine Bestandteile Wasserstoff und Sauerstoff trennen.

1.1.1.4 Molekül

Das kleinste Masseteilchen einer Verbindung mit den chemischen Eigenschaften der Verbindung heißt **Molekül**. Ein Molekül besteht aus mehreren (mindestens zwei), fest zusammengefügt Atomen.

1.1.1.5 Element

Reinstoffe, welche sich durch einen chemischen Vorgang nicht mehr in andere Stoffe zerlegen lassen, nennt man Grundstoffe oder **Elemente**.

1.1.1.6 Atom

Die kleinsten Masseteilchen eines Elements, welche auf chemischem Weg nicht weiter zerlegbar sind, nennt man **Atome**. Alle Atome eines Elements haben die gleichen chemischen Eigenschaften.

Noch einmal allgemein:

Die uns umgebende Materie setzt sich aus Grundstoffen zusammen. Diese Grundstoffe werden chemische Elemente genannt. Viele chemische Elemente sind allgemein bekannt, wie z.B. Sauer-

stoff, Eisen, Wasserstoff oder Schwefel. Chemische Elemente können sich zu Verbindungen zusammenschließen, die ganz andere Eigenschaften haben als die einzelnen Elemente selbst. Wasserstoff und Sauerstoff sind Gase. Verbinden sich Wasserstoff und Sauerstoff, so entsteht Wasser, welches flüssig ist.

Zerkleinert man solche zusammengesetzten Stoffe (chemische Verbindungen) durch geeignete Methoden in immer kleinere Teile, so wird beim Zerkleinern eine Grenze erreicht. Das kleinste, nicht mehr teilbare Gebilde, ohne daß die Eigenschaft der Verbindung verloren geht, nennt man Molekül. Moleküle bestehen aus Teilen von Elementen. Diese Teile der Elemente werden Atome genannt. Atome können durch keine chemischen oder normalen physikalischen Verfahren in kleinere Teile zerlegt werden.

(Wir wissen allerdings, daß dies doch möglich ist: Durch den natürlichen Zerfall von Atomkernen oder die künstliche Kernspaltung entsteht radioaktive Strahlung.)

1.1.2 Zusammenfassung: Stoffe

1. Stoffgemische setzen sich aus verschiedenen Reinstoffen zusammen.
2. Verbindungen sind Reinstoffe, die durch chemische Verfahren in Elemente zersetzt werden können.
3. Ein Molekül ist das kleinste Masseteilchen einer Verbindung, das noch die chemischen Eigenschaften der Verbindung besitzt.
4. Ein Molekül ist ein fester Verbund mehrerer Atome von Elementen.
5. Elemente sind Reinstoffe, die nicht mehr in andere Stoffe zerlegbar sind.
6. Ein Atom ist das kleinste Masseteilchen eines Elements.
7. Ein Atom ist auf chemischem Weg nicht mehr weiter zerlegbar.

1.1.3 Beispiel zur Zerlegung der Materie

Folgende Arbeitsschritte sollen den Aufbau und die Zerlegung der Materie an einem Beispiel veranschaulichen.

In diesem Beispiel wird aus einem heterogenen Stoffgemisch (Wasser mit Sägespänen) der Reinstoff Wasser gewonnen. Das Wasser wird weiter zerlegt in die Moleküle der Elemente Wasserstoff und Sauerstoff.



Abb. 1: Wasser mit Sägespänen wird gefiltert

Erster Schritt:

Das heterogene Stoffgemisch aus Wasser und Sägespänen wird gefiltert. Die Sägespäne bleiben im Filter zurück. Im Auffangbecher erhält man reines Wasser. Das Wasser ist ein Reinstoff, eine chemische Verbindung aus Wasserstoff und Sauerstoff.

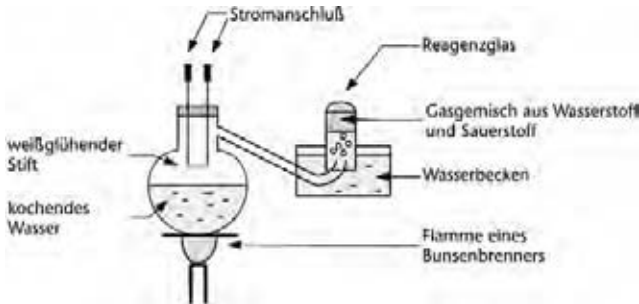


Abb. 2: Zerlegung von reinem Wasser in die Elemente Wasserstoff und Sauerstoff

Zweiter Schritt:

Das Wasser wird durch große Hitze in die Elemente Wasserstoff und Sauerstoff zerlegt. Das Gasgemisch aus Wasserstoff und Sauerstoff besteht aus zweiatomigen Wasserstoffmolekülen und zweiatomigen Sauerstoffmolekülen¹.

1.1.4 Denkmodell für Atom und Molekül

Wie kann man sich Atome und Moleküle vorstellen? Ein Atom ist das kleinste Masseteilchen und (mit normalen Mitteln) nicht mehr in kleinere Teilchen zerlegbar.

Somit kann man sich ein Atom einfach als Kügelchen vorstellen.



Abb. 3: Das Atom als Kügelchen zur einfachen Vorstellung

Warum unterschiedliche Atome verschieden groß sind, wird bei der Erklärung des Atomaufbaues erläutert. Ein Molekül besteht aus mehreren Atomen.

Je nach Art des Atoms (Elements) ist das Kügelchen verschieden groß.



Abb. 4: Wasserstoffatom (links, klein) und Kupferatom (rechts, groß)²

Ein Molekül kann man sich als Verbund mehrerer Kügelchen vorstellen.

¹ Anmerkung: Warum die Gasmoleküle des Wasserstoffs und Sauerstoffs zweiatomig sind, soll hier nicht näher erklärt werden.

² Anmerkung: Die Größe der Kügelchen in Abb. 4 soll nicht maßstabsgetreu sein.

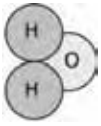


Abb. 5: Ein Wassermolekül

Das Wassermolekül in Abb. 5 besteht aus zwei Wasserstoffatomen und einem Sauerstoffatom.

Das chemische Zeichen für Wasserstoff ist »H«, für Sauerstoff »O«.

Durch die Anzahl der jeweiligen Atome erklärt sich auch der allgemein bekannte Ausdruck für Wasser: H_2O .

Bei der Zerlegung von Wasser in Abb. 2, Seite 20, wurden Wassermoleküle in Wasserstoffatome und Sauerstoffatome zerlegt. (Genauer gesagt, in Moleküle aus zwei Wasserstoffatomen und zwei Sauerstoffatomen, da sich einzelne Wasserstoff- bzw. Sauerstoffatome aus speziellen Gründen sofort wieder zu einem zweiatomigen Molekül verbinden.)

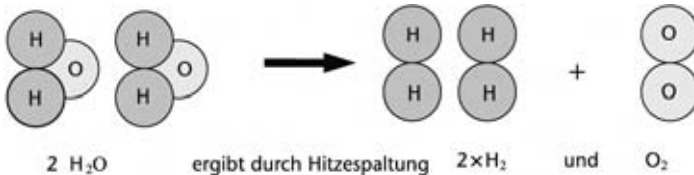


Abb. 6: Vorgang bei der Zerlegung von Wasser

1.1.5 Der Atombau

Bisher wurde der Aufbau der Materie bis zu den kleinsten Teilchen, den Atomen, erläutert.

Woraus bestehen aber Atome?

Durch die Erforschung der Radioaktivität und die Entdeckung der Elementarteilchen wurde bekannt, daß auch Atome aus mehreren Teilen aufgebaut sind.

Sämtliche Atome setzen sich aus folgenden Bausteinen zusammen:

1. Protonen
2. Neutronen
3. Elektronen.

1.1.5.1 Das Bohrsche Atommodell

Ein gut vorstellbares Atommodell wurde durch RUTHERFORD³ und BOHR⁴ erdacht. Es ist dem Sonnensystem mit den Planeten ähnlich, welche die Sonne umkreisen. Im Sonnensystem werden die Planeten durch die Massenanziehung auf ihren Bahnen gehalten (Gravitationsgesetz), welche

³ Ernest RUTHERFORD (1871 - 1937), englischer Physiker

⁴ Niels BOHR (1885 - 1962), dänischer Physiker

der Fliehkraft der Bahnbewegung entgegenwirkt. Im Bohrschen Atommodell werden die Kräfte der Massenanziehung durch elektrische Kräfte ersetzt.

Nach dem Bohrschen Atommodell besteht ein Atom aus einem **Atomkern** und einer **Atomhülle**.

Der **Atomkern** ist **elektrisch positiv** geladen. Er wird umkreist von einem oder mehreren elektrisch **negativ** geladenen **Elektronen**. Die Elektronen können sich nur auf ganz bestimmten Bahnen aufhalten und bilden auf diesen Bahnen die **Atomhülle**. Süd- und Nordpol eines Magneten ziehen sich an, genauso ziehen sich elektrisch positiv und negativ geladene Teilchen an. Auf ihren Bahnen müssen deshalb die Elektronen in ständiger Bewegung bleiben, da sie sonst wegen der fehlenden Fliehkraft in den Kern stürzen würden.

Elektronen mit nahezu gleichem Abstand vom Kern werden zu einer Gruppe zusammengefaßt. Sie werden jeweils als **Elektronenschale** bezeichnet. Jede Elektronenschale kann nur eine ganz bestimmte Anzahl von Elektronen enthalten. Die inneren Schalen sind immer voll besetzt, d.h. sie enthalten immer die maximal mögliche Anzahl von Elektronen. Die äußerste Schale ist in der Regel nicht vollständig mit Elektronen besetzt. Die Elektronen auf der äußersten Schale eines Atoms nennt man **Valenzelektronen**. Die äußerste Schale der Atome ist maßgeblich für alle chemischen und elektrischen Vorgänge in der Natur.

Der Atomkern besteht wiederum aus Protonen und Neutronen.

Protonen sind **elektrisch positiv** geladen, **Neutronen** sind **neutrale** (nicht elektrische) Teilchen. Gleiche Pole eines Magneten stoßen sich ab. Genauso stoßen sich elektrisch gleich geladene Teilchen ab. Würde der Atomkern nur aus positiv geladenen Protonen bestehen, so würde er durch deren Abstoßungskräfte sozusagen auseinanderfliegen. Die Neutronen verhindern dies durch ihre Einlagerung im Atomkern »zwischen« den Protonen.

Ein Proton besitzt die positive **Elementarladung** »+e«. Als Elementarladung wird die kleinste elektrische Ladung bezeichnet. Ein Elektron hat die negative Elementarladung »-e«. Jedes Atom ist nach außen elektrisch neutral, also ungeladen. Somit muß die gesamte positive Ladung des Kerns durch die gesamte negative Ladung der Elektronen in der Hülle ausgeglichen werden. Im Atomkern befinden sich darum immer genauso viele Protonen, wie sich Elektronen in der Hülle befinden.

Durch die elektrischen Anziehungskräfte zwischen Kern und Elektronen werden die Elektronen auf ihren Bahnen um den Kern gehalten. Die Elektronen würden sonst durch die Fliehkraft »davonfliegen«. Das Elektron wird durch die positive Ladung des Kerns angezogen. Durch die Kreisbewegung des Elektrons entsteht eine entgegengesetzt gerichtete Fliehkraft (Zentrifugalkraft), welche das Elektron vom Kern weg treiben will. Sind Anziehungskraft und Fliehkraft gleich groß, so bewegt sich das Elektron in einer stabilen Umlaufbahn, da sich beide Kräfte im Gleichgewicht befinden.

Jedes Atom eines Elements besitzt die gleiche Anzahl Protonen im Kern. Die Atome der verschiedenen Elemente unterscheiden sich nur durch die Masse (Gewicht) und durch die Anzahl der Protonen im Kern.

Im Atomkern ist fast die ganze Masse des Atoms vereinigt. Die Elektronen sind nahezu masselos, gegen den Kern verschwindend klein und umkreisen den Kern in sehr großem Abstand.

1.1.5.2 Beispiele für Atome

Die Bausteine des Atoms kann man sich wieder als kleine Kügelchen vorstellen.

Abb. 7 zeigt das einfachste Atom, ein Wasserstoffatom mit einem Proton des Atomkerns und einem Elektron in der Atomhülle.

Anmerkung: Die Größenverhältnisse sind nicht maßstabsgerecht

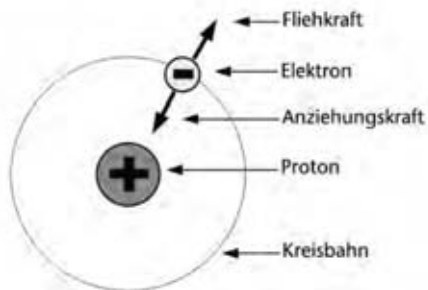
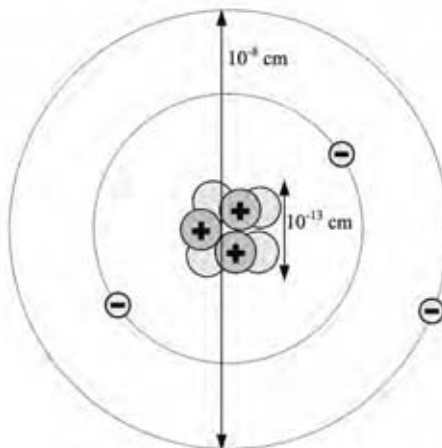


Abb. 7: Das Modell eines Wasserstoffatoms

Anmerkung: Die Größenverhältnisse sind nicht maßstabsgerecht



Die Elektronenhülle hat einen ca. 10 000 bis 100 000 mal so großen Durchmesser wie der Atomkern. Hätte der Atomkern einen Durchmesser von 1 cm, so wäre der Atomdurchmesser 1 km.

Abb. 8: Modell eines Lithiumatoms mit drei Protonen, vier Neutronen und drei Elektronen

1.1.6 Zusammenfassung: Der Atombau

1. Ein Atom besteht aus dem elektrisch positiv geladenen Atomkern und der Atomhülle.
2. Der Atomkern besteht aus den elektrisch positiv geladenen Protonen und den elektrisch neutralen Neutronen (ohne elektrische Ladung). Im Atomkern ist fast die gesamte Masse des Atoms vereinigt.
3. Ein Proton besitzt die positive elektrische Elementarladung $\gg +e \ll$.
4. Die Atomhülle besteht aus Elektronen, welche den Atomkern umkreisen.
5. Ein Elektron besitzt die negative elektrische Elementarladung $\gg -e \ll$. Elektrizitätsmengen treten nur als ganzzahlige Vielfache der Elementarladung auf.
6. Jede Atomart hat eine bestimmte Anzahl von Elektronen in der Hülle.
7. Die Anzahl der Elektronen in der Hülle entspricht der Anzahl der Protonen im Atomkern.
8. Elektronen mit gleichem Abstand vom Atomkern faßt man zu einer Schale zusammen.
9. Die Elektronen der äußersten Schale nennt man Valenzelektronen.
10. Die äußerste Schale ist nicht immer vollständig mit Elektronen besetzt. Sie kann Elektronen abgeben oder aufnehmen.
11. Elektrisch gleich geladene Teilchen stoßen sich ab, elektrisch ungleich geladene Teilchen ziehen sich an.

1.2 Der elektrische Strom

Wir kennen nun den Aufbau der Materie einschließlich des Aufbaus deren kleinster Teilchen, der Atome. Dieses Wissen ist notwendig, um die Frage nach dem Wesen der Elektrizität zu beantworten.

Die elektrische Ladung und der elektrische Strom

1.2.1 Elektrische Ladung

Elektrische Ladung ist ein Überschuß oder Mangel **ruhender**, elektrischer Ladungsträger.

Elektronen, die weit vom Atomkern entfernt sind, können durch äußere mechanische oder elektrische Kräfte das Atom verlassen.

Wird z.B. ein Glasstab mit Seide gerieben, so gehen Elektronen von der Oberfläche des Glasstabes auf die Seide über. Der Glasstab wird positiv, die Seide negativ geladen. Man spricht in diesem Fall von Ladung, da ein Mangel (auf dem Glasstab) bzw. ein Überschuß (auf der Seide) von Elektronen vorliegt. Die Ladungsträger (Elektronen) befinden sich jedoch nach dem Übergang vom Glasstab auf die Seide in Ruhe, sie »fließen« nicht.

Die Atome auf der Oberfläche des Glasstabes haben Elektronen abgegeben. Sie sind nun nicht mehr elektrisch neutral, sondern positiv geladen. Auch diese Atome bewegen sich nicht; es liegt eine (ruhende) positive Ladung vor.

Bei ruhender Ladung spricht man von **statischer** Elektrizität oder statischer Aufladung. Sie ist meist unerwünscht und kann durch Ladungsausgleich zur Beschädigung elektronischer Geräte oder Bauteile führen, z.B. wenn ein mit statischer Elektrizität aufgeladener Mensch bei der Reparatur eines Computers die Bauteile berührt. Im alltäglichen Leben ist uns die statische Aufladung bekannt als »elektrischer Schlag« beim Berühren einer Türklinke aus Metall, oder wenn sich zwei Menschen die Hand geben.

Als weiteres Beispiel für elektrische Ladung soll Abb. 9 dienen.

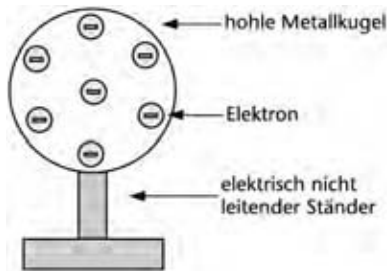


Abb. 9: Elektrische Ladung auf einer hohlen Metallkugel

Zu Abb. 9: Ein Hartgummistab wird mit Wollstoff gerieben und dadurch negativ aufgeladen. Anschließend berührt man mit dem Hartgummistab eine hohle Metallkugel. Elektronen gehen dabei auf die Metallkugel über. Die Elektronen verteilen sich gleichmäßig auf der Kugeloberfläche, da sie sich gegenseitig abstoßen. Die Metallkugel besitzt eine (ruhende) negative Ladung. Sie ist negativ aufgeladen.

1.2.2 Elektrischer Strom

Elektrischer Strom ist eine **fließende** (bewegte, strömende) elektrische Ladung.

Bei Metallen sind die Elektronen der äußersten Schale relativ locker an das Atom gebunden. Die Valenzelektronen können sich leicht vom Atom lösen und frei im Stoff bewegen. Sie sind die Ursache für die gute elektrische Leitfähigkeit der Metalle und werden deshalb **freie Elektronen** oder **Leitungselektronen** genannt (wenn sie sich vom Atom gelöst haben). Kupfer z.B. hat sehr viele freie Elektronen und ist deshalb ein sehr guter Leiter.

Das Restatom ohne die freien Elektronen nennt man **Atomrumpf**.

Durch eine elektrische Spannungsquelle, die man sich zunächst wie eine Pumpe für Elektronen vorstellen kann, werden die freien Elektronen in einem metallischen Leiter (z.B. in einem Draht) zum fließen gebracht. Es fließt elektrischer Strom.

Eine elektrische Spannungsquelle, z.B. eine Batterie, hat zwei Pole, einen Minuspol und einen Pluspol. Durch den inneren Aufbau der Batterie herrscht am Minuspol ein Überschuss von Elektronen und am Pluspol ein Elektronenmangel. Schließt man an die beiden Pole einen Draht an, so versuchen die Elektronen, ihre ungleiche Verteilung auszugleichen. Sie strömen vom Minuspol der Batterie solange durch den Draht zum Pluspol, bis kein Ladungsunterschied mehr vorliegt. Die Batterie ist dann »leer«.

Die Wirkungsweise einer Spannungsquelle kann man sich folgendermaßen vorstellen:

Am Minuspol der Spannungsquelle drängen sich die Elektronen zusammen, es herrscht Elektronenüberschuß. Da sich gleichnamige Ladungen gegenseitig abstoßen, wirken Kräfte, welche die dichtgedrängten Elektronen auseinanderreiben wollen. Ein »Entkommen« der Elektronen ist aber nur über einen metallischen Leiter, der mit dem Pluspol der Spannungsquelle verbunden ist, möglich. Am Pluspol sind ja zuwenig Elektronen vorhanden, es herrscht Elektronenmangel. Freie Elektronen möchten sich wegen der zwischen ihnen wirkenden abstoßenden Kräfte möglichst weit und gleichmäßig voneinander verteilen. Der metallische Leiter ermöglicht diese Verteilung vom Minuspol zum Pluspol der Spannungsquelle.

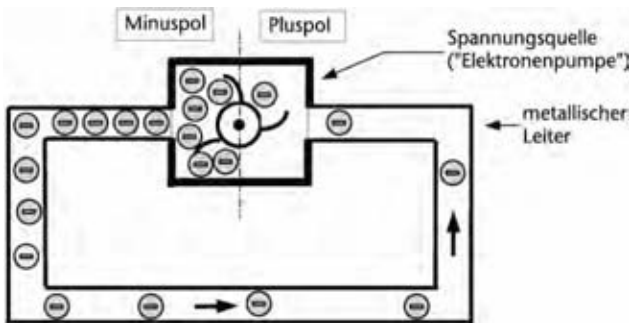


Abb. 10: Sinnbildliche Darstellung des elektrischen Stromes

Die »Elektronenpumpe« (Spannungsquelle) in Abb. 10 hat am Minuspol einen Überschuß an Elektronen. Die Elektronen werden links in den metallischen Leiter »gedrückt«. Durch den metallischen Leiter fließen die Elektronen zum Pluspol, wo Mangel an Elektronen herrscht. Es fließt elektrischer Strom.

In Abb. 10 fällt der Vergleich mit dem Strömen von Wasser auf. Viele elektrische Vorgänge lassen sich durch den Vergleich mit Wasser einfach und anschaulich erläutern. Auf solche Vergleiche wird noch öfter zurückgegriffen werden.

Es sei hier erwähnt, daß elektrischer Strom nicht nur durch fließende Elektronen hervorgerufen werden kann. Gibt ein neutrales Atom ein Elektron ab, so bleibt ein positiv geladener Atomrest übrig. Er wird positives **Ion** genannt. Nimmt ein neutrales Atom ein Elektron auf, so entsteht ein negatives Ion. Diese elektrisch geladenen Atome können auch Teile eines Moleküls sein.

In Flüssigkeiten können durch eine Spannungsquelle die Ionen von einem Pol der Spannungsquelle zum anderen wandern und dadurch einen Ladungstransport, also einen Strom darstellen.

Ionen sind elektrisch geladene Masseteilchen. Im Atomkern ist fast die gesamte Masse des Atoms vereinigt. Im Gegensatz zum Stromfluß durch Elektronen ist daher mit einem **Stromfluß durch Ionen** stets ein **Transport von Stoff** verbunden. In der Technik wird dies beim **Galvanisieren** ausgenutzt. Ein Metall kann durch Galvanisieren mit einer dünnen Schutzschicht eines edlen Metalles (z.B. Gold) überzogen werden.

Ladungstransport, und damit elektrischer Strom, kann auch durch sogenannte »**Löcher**«, **Defekt-elektronen** genannt, hervorgerufen werden. In der Halbleitertechnik spielt diese Art von Ladungstransport eine wichtige Rolle (siehe 1.2.7, Seite 30, Halbleiter).

1.2.3 Nichtleiter, Leiter und Halbleiter

Stoffe, welche den elektrischen Strom nicht fortleiten, heißen Nichtleiter oder **Isolatoren**. In Nichtleitern sind nur sehr wenige freie Elektronen vorhanden. Glas, Porzellan, Glimmer, Gummi und viele Kunststoffe sind Isolatoren. Luft ist (in gewissen Grenzen) ebenfalls ein Isolator. In der Halbleitertechnik ist Siliziumdioxid (SiO_2) ein wichtiger Isolator.

Sehr gut leiten den elektrischen Strom vor allem Metalle, aber auch Kohlenstoff und wässrige Lösungen von Salzen, Säuren und Laugen. Silber und Kupfer sind sehr gute Leiter.

Unter **Halbleitern** versteht man Stoffe, die in ihrer Leitfähigkeit zwischen den Nichtleitern und den Leitern liegen. Hierzu gehören z.B. die Elemente Germanium und Silizium.

Halbleiterbauelemente sind in der Elektronik von großer Bedeutung.

1.2.4 Widerstand und Leitfähigkeit

In Metallen schwingen die Atome (bzw. Atomrümpfe) um eine Ruhelage. Die freien Elektronen führen zwischen den Atomrümpfen eine ungeordnete Schwirrbewegung nach allen Richtungen aus.

Wird an das Metall eine elektrische Spannung angelegt, so überlagert sich dieser ungeordneten **Wärmebewegung** der Elektronen eine Bewegung (»Drift«) in Stromrichtung zum Pluspol der Spannungsquelle. Es fließt ein Strom.

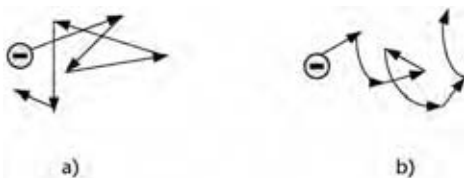


Abb. 11: Thermische Bewegung der Elektronen:
a) ohne und b) mit elektrischer Spannung

Die Driftgeschwindigkeit der Elektronen ist allerdings sehr klein gegenüber der mittleren Geschwindigkeit der Elektronen durch die Wärmebewegung. In einem Kupferdraht ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen kleiner als ein Millimeter in der Sekunde. Die aus der Spannungsquelle fließenden Elektronen geben ihre Bewegung sofort an die Leitungselektronen im Draht weiter. Diese Ursache für die Bewegung der Elektronen breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus (ca. 300 000 km in der Sekunde). Dadurch beginnen die Elektronen, beim Anlegen der Spannung praktisch gleichzeitig in allen Teilen des Leiters zu fließen. Deshalb sagt man, daß sich Strom mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegt, was jedoch nur auf die Ursache, aber nicht auf die Ladungsträger selbst (die Elektronen) zutrifft.

Die von der Spannungsquelle den Elektronen zugeführte Energie geben sie bei Zusammenstößen mit den Atomrümpfen an diese ab. Dadurch werden die Wärmeschwingungen der Atomrümpfe verstärkt, das Metall erwärmt sich. Dies ist die **JOULEsche**⁵ Wärme. Sie tritt bei allen stromdurchflossenen Leitern auf.

Erhöht sich die Temperatur des Metalles entweder durch die JOULEsche Wärme, oder durch Wärmezufuhr von außen, so stoßen die freien Elektronen noch häufiger mit den stärker

⁵ James Prescott JOULE (1818 - 1889), englischer Physiker

schwingenden Atomrümpfen zusammen. Dadurch wird die Flußbewegung der Elektronen stärker gehemmt, ihrer Bewegung wird ein Widerstand entgegengesetzt. Man sagt: Der Widerstand des Leiters erhöht sich.

Erhöht sich der Widerstand, so sinkt die Leitfähigkeit und umgekehrt. Widerstand und Leitfähigkeit sind umgekehrt proportional.

Gl. 1: Zusammenhang zwischen Widerstand und Leitfähigkeit

$\text{Widerstand} = \frac{1}{\text{Leitfähigkeit}}$
--

Der Widerstand eines metallischen Leiters ist nicht nur von der Temperatur abhängig, sondern auch von dem Stoff des Metalles. Je nach Art des Metalles befinden sich viele oder weniger freie Elektronen im Metall. Auch Verunreinigungen im Metall erhöhen dessen Widerstand.

1.2.5 Elektrische Spannung

Unter elektrischer Spannung versteht man den »Druck«, durch den die Elektronen vom Minuspol einer Spannungsquelle über einen Leiter zum Pluspol fließen wollen. Sind z.B. in einer Batterie am Minuspol durch entsprechende Vorkehrungen viele Elektronen eng versammelt, so sind die gegenseitigen Kräfte der Abstoßung sehr groß. Wird der Minuspol über einen Leiter mit dem Pluspol verbunden, so fließen viele Elektronen über den Leiter zum Pluspol. Es fließt ein großer (hoher) Strom.

Eine elektrische Spannung ist immer eine Spannungsdifferenz (ein Spannungsunterschied).

Anfangs- und Endwert dieser Differenz nennt man **Potentiale**. Eine Spannungsdifferenz ist somit eine Potentialdifferenz. Ein elektrisches Potential (Vermögen, Strom fließen zu lassen) kann man sich als die Menge von elektrischer Ladung an einem Punkt im Unterschied zu einem anderen Punkt vorstellen, wobei diese zwei Punkte nicht miteinander verbunden sind. Wegen der gegenseitigen Abstoßung wollen sich die an einem Punkt versammelten Elektronen voneinander entfernen. Da dies wegen der fehlenden elektrischen Verbindung nicht möglich ist, besteht zwischen beiden Punkten eine Spannung. Der eine Punkt hat gegenüber dem anderen Punkt entweder ein höheres oder ein niedrigeres Potential.

Der Minuspol einer Batterie hat z.B. ein negatives Potential gegenüber dem Pluspol.

Minuspol oder Pluspol **alleine** haben aber keine Spannung, sondern nur ein unterschiedliches Potential zueinander.

Eine **Spannung** herrscht nur **zwischen** Minuspol und Pluspol der Batterie.

Der **Bezugspunkt**, das sogenannte **Nullpotential**, kann beliebig gewählt werden. Häufig ist das Nullpotential das Potential der Erde. Das Potential der Erdoberfläche gleich Null zu setzen ist eine praktisch sinnvolle Festlegung, da viele Punkte durch die Erde miteinander verbunden sind (z.B. Wasserleitung, Schutzkontakt der Steckdose).

In elektrischen und elektronischen Schaltungen wird das gemeinsame Potential, auf das sich alle Spannungen anderer Punkte in der Schaltung beziehen, als **Masse** bezeichnet (Bezugspunkt).

Spannung und Strom sind zwei unterschiedliche Größen und dürfen nicht verwechselt werden.

Strom ist Ladungstransport (bewegte elektrische Ladung).

Spannung ist der »Drang«, Potentialunterschiede auszugleichen.

Spannung und Strom haben auch unterschiedliche Benennungen, wie in 2.1.2 und 2.1.3 zu sehen ist.

Im Vergleich mit Wasser würde dem elektrischen Strom das Wasser, welches durch ein Rohr fließt, entsprechen. Der elektrischen Spannung würde dagegen der Druck entsprechen, mit welchem das Wasser in das Rohr gepreßt wird.

Oft werden in der Alltagssprache die Begriffe »Spannungsquelle« und »Stromquelle« als gleiche Begriffe verwendet, als ob beide das Gleiche wären. Vor allem wird »Stromquelle« im Sinne von »Spannungsquelle« verwendet. Eigentlich ist dies falsch.

Eine (ideale) Spannungsquelle liefert eine konstante Spannung, unabhängig davon, wieviel Strom beim Schließen des Stromkreises fließt.

Eine (ideale) Stromquelle liefert einen konstanten Strom, unabhängig davon, welchen Widerstand der Leiter besitzt, der den Stromkreis schließt.

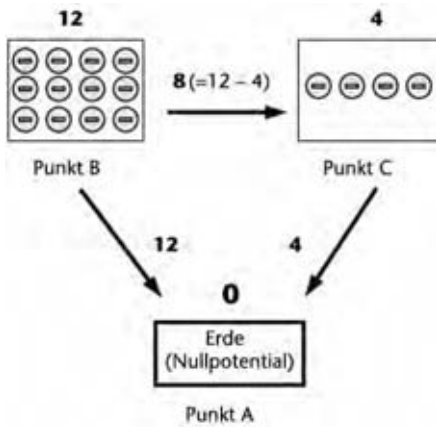


Abb. 12: Sinnbildliche Darstellung der elektrischen Spannung

In Abb. 12 soll die Anzahl der Elektronen in jedem Punkt dem Potential der einzelnen Punkte entsprechen. Damit ergibt sich als Potentialdifferenzen:

- Punkt A hat das Potential 0.
- Punkt B hat gegenüber Punkt A das Potential 12.
- Punkt C hat gegenüber Punkt A das Potential 4.
- Punkt B hat gegenüber Punkt C das Potential 8.

Die größte **Potentialdifferenz** und damit **Spannung** besteht zwischen Punkt B und Punkt A. Das Streben der Elektronen in Punkt B, nach Punkt A zu fließen, ist am stärksten.

Der Zusammenhang zwischen Potentialdifferenz und Spannung wird auch durch die Formel $U = \varphi_1 - \varphi_2$ deutlich, wobei U = elektrische Spannung, φ_1 = Potential des Punktes 1 und φ_2 = Potential des Punktes 2 ist.

1.2.6 Zusammenfassung: Der elektrische Strom

1. Elektrische Ladung ist Überschuß oder Mangel ruhender, elektrischer Ladungsträger.
2. Elektrische Ladung geht nicht verloren, sie kann nur transportiert werden.
3. Es gibt zwei verschiedene Arten der Elektrizität: positive und negative Ladungen.
4. Positive Ladung ist Elektronenmangel, negative Ladung ist Elektronenüberschuß.
5. Elektronen sind Träger negativer Ladung.
6. Gleichnamige Ladungen (mit gleichem Vorzeichen) stoßen sich ab, ungleichnamige Ladungen ziehen sich an (COULOMBsches Gesetz)⁶.
7. Strom ist Ladungstransport, d.h. strömende Ladung (bewegte elektrische Ladung).
8. Damit Strom fließen kann, muß der Stromkreis geschlossen werden. Die Elektronen fließen vom negativen Pol der Spannungsquelle zu deren positivem Pol.
9. Eine Spannungsquelle wirkt im geschlossenen Stromkreis wie eine Pumpe für Elektronen.
10. Es gibt Leiter, Halbleiter und Nichtleiter (Isolierstoffe oder Isolatoren).
11. Ein Potential ist die Spannung eines Punktes gegenüber einem Bezugspunkt.
12. Eine Spannung ist eine Potentialdifferenz.
13. Widerstand ist das Unvermögen eines Leiters, elektrischen Strom fließen zu lassen.
14. Leitfähigkeit ist das Vermögen eines Leiters, elektrischen Strom fließen zu lassen.
15. Je größer der Widerstand ist, um so kleiner ist die Leitfähigkeit und umgekehrt.
16. Ein stromdurchflossener Leiter erwärmt sich.
17. Der Widerstand eines Leiters ist abhängig von dem Material und von der Temperatur des Leiters.

1.2.7 Halbleiter

Halbleiter haben große Bedeutung in der Elektronik. Aufbau und Eigenschaften von Halbleitern werden deshalb näher beschrieben.

1.2.7.1 Elektrizitätsleitung in festen Stoffen (Wiederholung)

Elektrizität wird von manchen festen Stoffen (Leitern) sehr gut, von anderen (Isolierstoffen) dagegen fast gar nicht geleitet. Zu den Leitern gehören vor allem die Metalle. Zu den Isolierstoffen gehören z.B. Glas, Porzellan, Glimmer.

⁶ Charles Augustin de COULOMB (1736 - 1806), französischer Physiker

In Leitern ist eine sehr große Zahl von leicht beweglichen, sogenannten »freien« Elektronen vorhanden. Es sind die Valenzelektronen der äußersten Schale der Metallatome, die sich vom Atom abgelöst haben. Bei Isolierstoffen sind nur sehr wenige bewegliche Elektronen vorhanden.

In Metallen ist die Anzahl der freien Elektronen weitgehend unabhängig von der Temperatur. Die freien Elektronen führen im Metall eine ungeordnete Schwirrbewegung zwischen den Metallatomen aus. Die Metallatome selbst schwingen um eine Ruhelage. Legt man an ein Metallstück eine elektrische Spannung, so strömen die Elektronen vom Minuspol zum Pluspol. Dies ist der elektrische Strom.

Erhöht man die Temperatur des Metalles, so nimmt die Schwingung der Metallatome und der Elektronen zu (»Wärmebewegung«). Durch häufigere Zusammenstöße mit den Atomrümpfen wird die Strömung der freien Elektronen mehr behindert, der Widerstand des Metalles nimmt zu.

Zwischen Leitern und Isolierstoffen liegen hinsichtlich ihrer elektrischen Leitfähigkeit die Halbleiter. In ihnen sind deutlich mehr freie Elektronen vorhanden als bei den Isolierstoffen, aber wesentlich weniger als bei den Leitern.

Die Leitfähigkeit der Halbleiter wird durch Verunreinigungen sehr stark beeinflusst. Durch Wärmezufuhr oder den Einbau von Fremdatomen nimmt die Leitfähigkeit zu.

Zu den wichtigsten Elektronenhalbleitern, kurz Halbleitern genannt, gehören Germanium und Silizium.

1.2.7.2 Elektrizitätsleitung in reinen Halbleitern (Eigenleitung)

Bei einem Germanium- und Siliziumatom befinden sich auf der äußersten Elektronenbahn vier Elektronen. Germanium (Kurzzeichen »Ge«) und Silizium (»Si«) sind bezüglich ihres Bindungsvermögens vierwertig. Die Elektronen der äußersten Bahn sind beteiligt an der Verbindung gleicher oder verschiedenartiger Atome, man bezeichnet sie als Wertigkeits- oder Valenzelektronen.

Die vier Valenzelektronen von Germanium oder Silizium haben das Bestreben, sich mit je einem Elektron eines anderen Atoms zu »paaren« und jeweils den eigenen Kern **und** den Kern des anderen Atoms als Paar zu umkreisen. Durch diese Elektronenpaarbindung (**Atombindung**, auch **kovalente** Bindung genannt) ergibt sich eine regelmäßige räumliche Anordnung der Atome (kristalliner Aufbau).

Jedes Elektronenpaar umkreist zwei Kerne, jeder Kern wird von vier Elektronenpaaren umkreist. Im Kristallgitter ist jedes Atom von vier Nachbaratomen umgeben.

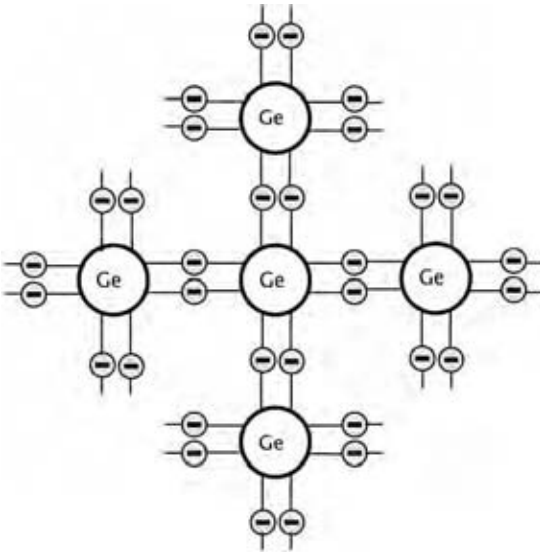


Abb. 13: Teil eines Kristallgitters von Germanium in flächenhafter Darstellung

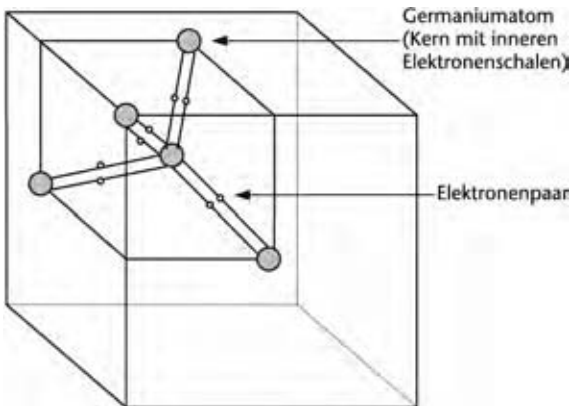


Abb. 14: Teil eines Kristallgitters von Germanium in räumlicher Darstellung

Die Elektronenpaarbindung ist bei reinen halbleitenden Materialien (ohne Fremdatome) sehr fest. Die Elektronen können sich nur sehr schwer aus den Bindungen lösen, um zu freien Elektronen zu werden. Reines Silizium ist daher bei tiefen Temperaturen ein sehr schlechter Leiter.

Wird der Halbleiter erwärmt, so schwingen die Atome stärker um ihre Ruhelage, und zwar um so stärker, je höher die Temperatur des Halbleiters ist. Durch diese Schwingungen können Elektronenpaarbindungen aufbrechen, wodurch einzelne Elektronen frei werden. Das Entstehen freier Elektronen durch das Aufbrechen von Elektronenpaarbindungen bezeichnet man als **Generation**.

Dort, wo durch Generation ein Elektron frei geworden ist, ergibt sich ein Elektronenfehlplatz, den man als **Defektelektron** oder **Loch** bezeichnet. Füllt ein freies Elektron den Platz eines Loches aus, so spricht man von **Rekombination**.

Das Elektron ist ein Ladungsträger mit der negativen (Elementar-) Ladung »-e«. Das Loch stellt ebenfalls einen Ladungsträger mit der positiven (Elementar-) Ladung »+e« dar. Legt man an einen reinen Halbleiter eine elektrische Spannung an, so wandern die Elektronen vom negativen zum positiven Pol (Elektronenstrom) und die Löcher vom positiven zum negativen Pol (Löcherstrom). Es gibt infolgedessen zwei verschiedene (**bipolare**) Leitungsmechanismen, die einander entgegengesetzt sind. Dieser Vorgang wird bei reinen Halbleitern als **Eigenleitung** bezeichnet.

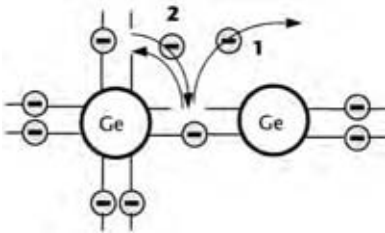


Abb. 15: Elektronen- und Löcherleitung in einem Halbleiter

Zu Abb. 15: Durch eine aufgebrochene Elektronenpaarbindung wird Elektron »1« zum freien Elektron. An der Stelle, wo Elektron »1« war entsteht ein Loch. Elektron »2« wird danach ebenfalls zum freien Elektron und nimmt den Platz von Elektron »1« ein. Dadurch wandert das Loch, welches sich auf dem Platz von Elektron »1« befand, auf den früheren Platz von Elektron »2«.

Bei Raumtemperatur (ca. 25 °C) existieren in einem Halbleiter genügend freie Elektronen und Löcher, damit er in seiner elektrischen Leitfähigkeit zwischen Isolierstoff und Leiter liegt. Eine wesentliche Eigenschaft von reinen Halbleitern ist der abnehmende Widerstand mit steigender Temperatur.

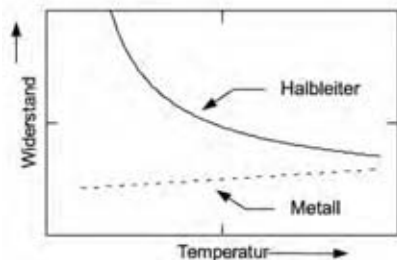


Abb. 16: Abhängigkeit des Widerstandes eines Halbleiters und eines metallischen Leiters von der Temperatur (schematisch)

Bei einem Metall nimmt der Widerstand mit steigender Temperatur des Metalles zu. Je höher die Temperatur ist, um so stärker schwingen die Atomrümpfe um ihre Ruhelage. Freie Elektronen, die sich zum Pluspol einer an den Leiter angelegten Spannungsquelle bewegen, stoßen dabei um so häufiger mit den Atomrümpfen zusammen. Der »Fluß« der freien Elektronen wird gebremst, ihrer Bewegung wird ein Widerstand entgegengesetzt.

Bei Halbleitern erhöht sich die Anzahl freier Elektronen mit steigender Temperatur des Halbleiters. Der Widerstand eines Halbleiters nimmt deshalb mit steigender Temperatur stark ab.

1.2.7.3 Elektrizitätsleitung in dotierten Halbleitern (Störstellenleitung)

Die geringe elektrische Leitfähigkeit von Halbleitern nimmt erheblich zu, wenn in den Halbleiterkristall Fremdatome eingebaut werden, die Ladungsträger freisetzen. Den planmäßigen Einbau von Fremdatomen bezeichnet man als **Dotierung**.

Die Fremdatome werden in den Halbleiter eingebaut, indem man die Fremdschubstanz entweder bei hohen Temperaturen in den Halbleiter **einlegt** (einschmilzt) oder in Gasform im Vakuumofen in dünne Halbleiterplättchen **eindiffundieren** (eindringen) läßt.

Die Fremdatome bilden im Kristallgitter Störstellen. Man bezeichnet diese Art der Leitfähigkeit daher mit **Störstellenleitung**. Zum Dotieren eignen sich drei- und fünfwertige Fremdatome.

Zur Dotierung von Germanium und Silizium mit dreiwertigen Fremdatomen verwendet man vorzugsweise Bor, Indium oder Gallium. Das Atom eines dreiwertigen Elementes hat auf der äußeren Schale drei Valenzelektronen. Damit es eingebaut werden kann, muß ein benachbartes Siliziumatom ein Elektron »spenden«. Das Fremdatom »empfängt« ein Elektron und wird deshalb **Akzeptor** genannt. Das Fremdatom wird zum fest gebundenen negativen Ion. Das gespendete Elektron hinterläßt im Siliziumatom ein frei bewegliches Loch. Auch nach dem Einbau von Akzeptoren bleibt der Halbleiter insgesamt elektrisch neutral (jeweils ein Ion und ein Loch).

Durch den Einbau dreiwertiger Fremdatome wird die Konzentration (Menge) der positiven Löcher gegenüber dem reinen Halbleiter erhöht. Man bezeichnet einen mit Akzeptoren dotierten Halbleiter daher als **P-Halbleiter** (»P« wie Positiv).

Als fünfwertige Fremdatome werden hauptsächlich Arsen (As), Antimon (Sb) oder Phosphor (P) verwendet. Vier der insgesamt fünf Valenzelektronen des Arsenatoms verbinden sich mit den vier benachbarten Siliziumatomen durch Elektronenpaarbindungen. Das fünfte Valenzelektron des Arsenatoms bleibt ungepaart und wird zu einem freien Elektron. Das Fremdatom »spendet« ein Elektron und wird deshalb **Donator** genannt. Es wird zum fest gebundenen positiven Ion.

Werden fünfwertige Fremdatome in den Halbleiter eingebaut, so erhöht sich die Konzentration der freien Elektronen stark gegenüber dem reinen Halbleiter. Er wird dann als **N-Halbleiter** bezeichnet (»N« wie Negativ).

Die in dotierten Halbleitern überwiegende Art der beweglichen Ladungsträger bezeichnet man als **Majoritätsträger**, die in der Minderheit vorhandene Art als **Minoritätsträger**.

Tabelle 1: Majoritäts- und Minoritätsträger im P- und N-Gebiet

	im P-Gebiet	im N-Gebiet
Majoritätsträger	Löcher	Elektronen
Minoritätsträger	Elektronen	Löcher

Aus dotierten Halbleitern lassen sich unter anderem Dioden, Transistoren und integrierte Schaltungen herstellen. Diese Bauelemente der Elektronik bestehen aus aneinandergrenzenden P- und N-Gebieten.

1.2.8 Zusammenfassung: Halbleiter

1. Der Widerstand von Metallen nimmt mit steigender Temperatur zu.
2. Der Widerstand eines Halbleiters nimmt mit steigender Temperatur ab.
3. Ein Elektronenfehlplatz wird als Defektelektron oder **Loch** bezeichnet.
4. Ein Loch ist Träger der positiven Elementarladung »+e«.
5. Bei dotierten Halbleitern unterscheidet man zwischen P- und N-Halbleitern.
6. Die wichtigsten Halbleiter sind Silizium und Germanium.

2 Der unverzweigte Gleichstromkreis

2.1 Größen im Gleichstromkreis

2.1.1 Allgemeines zu physikalischen Größen und Einheiten

Physikalische **Größen** dienen zur Beschreibung von Vorgängen in der Natur. Bekannte physikalische Größen sind z.B. Zeit, Länge und Temperatur. Um physikalische Größen in einzelne »Stücke« zerlegen und damit messen zu können, benötigt man **Einheiten**. Die Einheit für die Länge ist z.B. Meter oder Zentimeter, für die Zeit ist die Einheit die Sekunde oder die Stunde.

Für physikalische Größen und deren Einheiten werden zur einfacheren Schreibweise Abkürzungen verwendet.

Abkürzungen für physikalische Größen sind z.B. »t« für Zeit und »v« für Geschwindigkeit.

Abkürzungen für Einheiten sind z.B.: »m« für Meter und »s« für Sekunde. Diese Abkürzungen für Einheiten nennt man **Einheitenzeichen**. Eine physikalische Größe wird durch das Produkt aus Zahlenwert und Einheit dargestellt.

Beispiel: $t = 20 \text{ s}$

In diesem Beispiel ist die physikalische Größe »Zeit« (abgekürzt als »t«) das Zwanzigfache der Einheit »Sekunde« (abgekürzt als »s«).

Gleichungen oder **Formeln** beschreiben die Zusammenhänge der einzelnen physikalischen Größen. So ist z.B. der in einer bestimmten Zeit »t« zurückgelegte Weg »s« eines Körpers, der sich mit der Geschwindigkeit »v« fortbewegt: $s = v \cdot t$

Setzt man für v die Einheit $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (Meter pro Sekunde) und für t die Einheit »s« (Sekunde) ein, so erhält man für den zurückgelegten Weg s die Einheit »m« (Meter).

(Es ist: $\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s} = \text{m}$)

Aus obigem Beispiel ist zu ersehen:

1. Gleichungen setzen sich aus Formelzeichen zusammen.
2. Einheitenzeichen und Formelzeichen können gleich sein, haben aber ganz unterschiedliche Bedeutung!
3. Mit gleichen Einheitenzeichen kann man (getrennt von der Formel) rechnen.

Es soll noch einmal die Formel $s = v \cdot t$ betrachtet werden.

Zu 2.:

»s« ist das Einheitenzeichen für »Sekunde«, aber auch das Formelzeichen für einen Weg (eine zurückgelegte Wegstrecke).

Zu 3.:

Durch eine (extra) Rechnung mit den Einheitenzeichen kann man überprüfen, ob die Gleichung oder Formel richtig angesetzt wurde.

In der Rechnung $\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s} = \text{m}$ muß eine Einheit für den Weg, in diesem Fall »m« für Meter, das Ergebnis sein. Ungleiche Einheiten müssen zuerst in gleiche Einheiten umgerechnet werden, ehe man mit ihnen Rechnungen durchführt.

Wäre in obigem Beispiel die Geschwindigkeit »v« in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (Kilometer pro Stunde) gegeben gewesen, so hätte man sie zuerst in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (Meter pro Sekunde) umrechnen müssen, damit man die

Zeit »t« in Sekunden einsetzen darf. Z.B. ist $1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}}$

Eine eckige Klammer um ein Formelzeichen bedeutet »Einheit von...«; z.B. wird $[t] = \text{s}$ gelesen als: Einheit der Zeit gleich Sekunde.

Tabelle 2: Dezimale Vielfache und Teile von Einheiten

Bezeichnung	Abkürzungszeichen	Vielfaches oder Teil
Tera	T	$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$
Giga	G	$10^9 = 1\,000\,000\,000$
Mega	M	$10^6 = 1\,000\,000$
Kilo	k	$10^3 = 1000$
Hekto	h	$10^2 = 100$
Deka	da	$10^1 = 10$
Dezi	d	$10^{-1} = 0,1$
Zenti	c	$10^{-2} = 0,01$
Milli	m	$10^{-3} = 0,001$
Mikro	μ	$10^{-6} = 0,000\,001$
Nano	n	$10^{-9} = 0,000\,000\,001$
Piko	p	$10^{-12} = 0,000\,000\,000\,001$
Femto	f	$10^{-15} = 0,000\,000\,000\,000\,001$

Eine eckige Klammer um eine Einheit ist falsch, jedoch immer noch weit verbreitet. Zwischen Zahlenwert und Einheit einer physikalischen Größe ist beim Schreiben ein Abstand zu lassen, richtig ist 5 m, falsch ist 5m.

Dezimale Vielfache und Teile von Einheiten

Einheiten haben in dezimaler Schreibweise oft eine umständlich zu schreibende Größenordnung. So ist z.B. der millionste Teil eines Meters: 0,000001 m.

Für eine verkürzte Schreibweise benutzt man vor der Einheit eine Bezeichnung, welche das Vielfache oder den Bruchteil der Einheit angibt. Diese Bezeichnung wird wiederum durch ein Zeichen abgekürzt.

Beispiele:

1000 m = 1 km 1000 g = 1 kg 0,001 m = 1 mm 0,000001 m = 1 µm

2.1.2 Die Größe für den elektrischen Strom

Vorausgesetzt wird hier, daß durch den Querschnitt eines Leiters in gleichen Zeitabschnitten Δt die gleiche Ladungsmenge ΔQ in der gleichen Richtung fließt. Man spricht dann von einem konstanten Gleichstrom.

Die Größe oder Stärke des elektrischen Stromes nennt man **Stromstärke** oder kurz **Strom**. Die Einheit für die elektrische Stromstärke ist das **Ampere**⁷.

Das Einheitenzeichen für Ampere (Stromstärke) ist »A«, das Formelzeichen ist »I«.

Der elektrische Strom soll wieder mit fließendem Wasser verglichen werden. Die Stärke einer Wasserquelle kann durch die Wassermenge beschrieben werden, welche die Wasserquelle in einer Sekunde liefert. Die Stromstärke »I« kann ähnlich hierzu durch die Menge an elektrischer Ladung beschrieben werden, welche in einer Sekunde durch den Querschnitt eines Leiters fließt.

Das Einheitenzeichen für die Ladungsmenge ist »C« (Coulomb), das Formelzeichen ist »Q«.

Die Stromstärke ist der Quotient aus der Ladung »Q« und der Zeit »t«.

Gl. 2: Stromstärke ist (fließende) Ladung pro Zeiteinheit.

$$I = \frac{Q}{t}$$

Da die Rechnung mit den Einheitenzeichen in Gl. 2 für die Stromstärke »I« die Einheit »A« ergeben muß, folgt für die Einheit der Ladung »Q«: 1 C = 1 As (1 Coulomb = 1 Ampere · 1 Sekunde).

⁷ André - Marie Ampère (1775 - 1836), französischer Physiker

Ein Ampere ist somit definiert als: $1\text{ A} = \frac{1\text{ C}}{1\text{ s}}$

Tabelle 3: Zum Vergleich zwischen Wasser und Elektrizität

	Menge	Stärke
Wasser	Liter	$\frac{\text{Liter}}{\text{s}}$
Elektrizität	C	$\text{A} = \frac{\text{C}}{\text{s}}$

Anmerkung:

Ein Elektron ist Träger der kleinsten negativen elektrischen Ladung »-e« (Elementarladung).

Der Betrag der Elementarladung ist: $|-e| = e = 1,602\,177\,33 \cdot 10^{-19}\text{ C}$.

Eine Ladung kann nur als ganzzahliges Vielfaches von »e« auftreten.

Ungefähr $6,24 \cdot 10^{18}$ Elektronen sind 1 Coulomb.

Anmerkung:

Die dezimalen Vielfachen und Teile der Einheiten von Tabelle 2 gelten auch für die elektrischen Einheiten.

Beispiele: $1\text{ mA (Milliampere)} = 0,001\text{ A} = 10^{-3}\text{ A}$

$1\text{ }\mu\text{A (Mikroampere)} = 0,000001\text{ A} = 10^{-6}\text{ A}$

2.1.3 Die Größe für die elektrische Spannung

Die elektrische Größe, welche das Fließen eines Stromes verursacht, nennt man **Spannung**. Die Einheit für die elektrische Spannung ist **Volt**⁸.

Das Einheitenzeichen für Volt (Spannung) ist »V«, das Formelzeichen ist »U«.

Eine elektrische Spannung besteht immer nur zwischen zwei Punkten. Am Minuspol einer Spannungsquelle herrscht ein Überschuß von Elektronen, am Pluspol herrscht Elektronenmangel. Im Inneren der Spannungsquelle liegt somit eine Trennung (Verschiebung) von Ladungen vor. Zwischen den Polen der Spannungsquelle besteht eine Spannung, auch wenn der Stromkreis nicht geschlossen ist.

Die elektrische Spannung ist ein Ausdruck für die Kräfte, welche auf die ungleich verteilten Ladungsträger (Elektronen) in einer Spannungsquelle wirken und eine möglichst gleichmäßige Verteilung der Elektronen bewirken wollen (siehe 1.2.2 Elektrischer Strom, Seite 25). Diese Verteilung der Elektronen erfolgt beim Schließen des Stromkreises durch das Fließen des elektrischen Stromes (das Fließen von Elektronen).

Um im Inneren der Spannungsquelle eine Ladungstrennung zu erhalten, ist der Aufwand von Arbeit notwendig. In einer Batterie ist dies z.B. chemische Energie.

⁸ Alessandro VOLTA (1745 - 1827), italienischer Physiker

Wird der Stromkreis geschlossen, so erfolgt durch Energieaufwand das Fließen des Stromes. Die zur Ladungstrennung aufgewandte Arbeit wird wieder frei. Der stromdurchflossene Leiter erwärmt sich (siehe 1.2.4 Widerstand und Leitfähigkeit, Seite 27).

Um eine Ladungsmenge »Q« durch einen Leiter fließen zu lassen, ist ein bestimmter Aufwand an Arbeit »W« nötig. Das Verhältnis in Gl. 3 beschreibt die »innere Stärke« einer Spannungsquelle, um Strom fließen zu lassen. Je höher die Spannung ist, um so höher ist die Arbeitsfähigkeit (Energie) der elektrischen Ladung.

Gl. 3: Definition der elektrischen Spannung

$$U = \frac{W}{Q}$$

Die Einheit der Arbeit »W« ist »J« (Joule), »Nm« (Newton · Meter) oder $\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$.

Die Einheit der Ladung »Q« ist »C« (Coulomb) oder »As« (Ampere · Sekunde).

Setzt man diese Einheiten in Gl. 3 ein, so ergibt sich für die Einheit der Spannung »U«:

$$\frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{Nm}}{\text{As}} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{As}^3} = \text{V}, \text{ abgekürzt als »V« (Volt).}$$

Ein Volt ist somit definiert als: $1\text{V} = \frac{1\text{J}}{1\text{C}}$

2.1.4 Die Größe für den elektrischen Widerstand

Wie in 1.2.4 Widerstand und Leitfähigkeit, Seite 27, kennengelernt, wird in einem geschlossenen Stromkreis dem Fließen des Stromes in einem metallischen Leiter ein Widerstand entgegengesetzt.

Die elektrische Größe dieses Widerstandes nennt man ebenfalls **Widerstand**. Die Einheit für den elektrischen Widerstand ist **Ohm**⁹.

Das Einheitenzeichen für Ohm (Widerstand) ist »Ω«, das Formelzeichen ist »R«.

Anmerkung: Der Begriff Widerstand wird nicht nur für die elektrische Größe des Widerstandes eines Leiters verwendet, sondern auch für den Leiter selbst, also für den Gegenstand oder das Bauelement.

Der deutsche Physiker Georg Simon OHM fand das OHMsche Gesetz:

Gl. 4: OHMsches Gesetz

$$R = \frac{U}{I}$$

Die Einheit der Spannung »U« ist »V« (Volt), die Einheit der Stromstärke »I« ist »A« (Ampere).

⁹Georg Simon OHM (1789 - 1854), deutscher Physiker

Damit folgt aus Gl. 4 für die Einheit des elektrischen Widerstandes:

$$\frac{V}{A} = \text{Ohm}, \text{ abgekürzt als } \Omega$$

Ein Ohm ist definiert als: $1 \Omega = \frac{1V}{1A}$

Manchmal wird statt des elektrischen Widerstandes dessen Kehrwert benutzt. Den Kehrwert des elektrischen Widerstandes nennt man **Leitwert**. Die Einheit für den elektrischen Leitwert ist **Siemens**.

Das Einheitenzeichen für Siemens (Leitwert) ist »S«, das Formelzeichen ist »G«.

Gl. 5: Definition des elektrischen Leitwertes

$$G = \frac{1}{R}$$

Die Einheit des elektrischen Widerstandes »R« ist » Ω « oder $\frac{V}{A}$

Damit folgt aus Gl. 5 für die Einheit des elektrischen Leitwertes: $\frac{A}{V} = \frac{1}{\Omega} = S$ (Siemens)

Ein Siemens ist definiert als: $1S = \frac{1A}{1V}$ (Siehe auch 1.2.4 Widerstand und Leitfähigkeit, Seite 27 und Gl. 1, Seite 28.)

2.1.5 Zusammenfassung: Größen im Gleichstromkreis

1. Das Einheitenzeichen für Ampere (Stromstärke) ist »A«, das Formelzeichen ist »I«.
2. Das Einheitenzeichen für Volt (Spannung) ist »V«, das Formelzeichen ist »U«.
3. Das Einheitenzeichen für Ohm (Widerstand) ist » Ω «, das Formelzeichen ist »R«.

4. Das OHMsche Gesetz lautet:

$$R = \frac{U}{I}$$

5. Das Einheitenzeichen für die Ladungsmenge ist »C«, das Formelzeichen ist »Q«.
6. Das Einheitenzeichen für die Arbeit ist »J«, das Formelzeichen ist »W«.

2.2 Das OHMsche Gesetz

2.2.1 Aussage des Ohmschen Gesetzes

Das Ohmsche Gesetz drückt folgendes aus:

Der Widerstand eines metallischen Leiters aus einem bestimmten Material ist (bei gleichbleibender Temperatur) konstant.

Die Stromstärke im Leiter eines geschlossenen Stromkreises ist

- direkt proportional zur Spannung der Spannungsquelle und
- umgekehrt proportional zum Widerstand des Leiters.

Anders ausgedrückt:

Die Stromstärke ist um so größer, je größer die Spannung und je kleiner der Widerstand ist.

Dieser Sachverhalt soll wieder durch einen Vergleich mit Wasser erläutert werden.

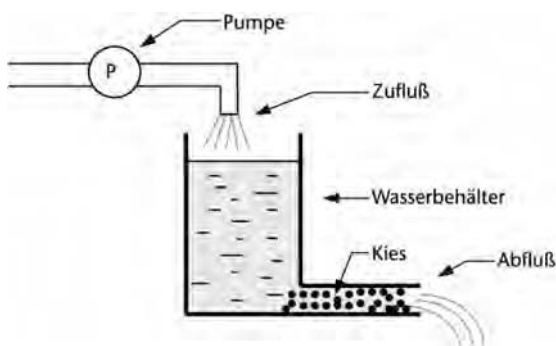


Abb. 17: Wasserstrom als Vergleich mit elektrischem Strom

In Abb. 17 wird der Füllstand des Wassers im Wasserbehälter durch einen Zufluß mit Pumpe auf konstanter Höhe gehalten. Das Abflußrohr ist mit Kies gefüllt.

Die Menge des abfließenden Wassers hängt ab von:

1. Der Höhe des Füllstandes. Je höher der Wasserstand ist, um so größer ist der Druck, und um so mehr Wasser wird durch das Abflußrohr gepreßt.
2. Der Durchlässigkeit des Abflußrohres. Je gröber der Kies ist, um so mehr Wasser wird durchgelassen.

Nehmen wir an, normalerweise fließt in einer Sekunde ein Liter Wasser aus dem Abflußrohr.

Wird der Wasserstand auf das doppelte erhöht, der Wasserdruck somit verdoppelt, so fließt in einer Sekunde die doppelte Menge an Wasser (zwei Liter) aus.

Wird jedoch z.B. durch feinkörnigen Sand die Durchlässigkeit des Abflußrohres halbiert (der Wasserwiderstand verdoppelt), so fließt in einer Sekunde nur noch die halbe Menge an Wasser (1/2 Liter) aus.

Im Vergleich mit dem elektrischen Strom gilt:

1. Der Wasserdruck entspricht der elektrischen Spannung.
2. Dem Wasserwiderstand entspricht der elektrische Widerstand des Leiters.
3. Der abfließenden Wassermenge entspricht die Stromstärke im Leiter.

Wird z.B. die Spannung verdoppelt, so verdoppelt sich auch die Stromstärke. Wird jedoch der Widerstand verdoppelt, so halbiert sich die Stromstärke.

Durch Auflösen des Ohmschen Gesetzes in der Form $R = \frac{U}{I}$ nach I erhält man: $I = \frac{U}{R}$

Aus dieser Form ist ersichtlich:

1. Die Stromstärke ist um so größer, je größer die Spannung ist (ein Bruch ist um so größer, je größer der Zähler ist).
2. Die Stromstärke ist um so kleiner, je größer der Widerstand ist (ein Bruch ist um so kleiner, je größer der Nenner ist).

2.2.2 Rechnen mit dem Ohmschen Gesetz

Das Ohmsche Gesetz läßt sich in drei verschiedenen Formen darstellen. Sind zwei der drei Größen bekannt, so kann die dritte Größe berechnet werden.

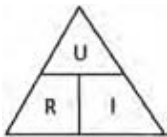
$$R = \frac{U}{I}$$

$$I = \frac{U}{R}$$

$$U = R \cdot I$$

Zur mathematischen Umstellung des Ohmschen Gesetzes sei ein kleiner Trick zum besseren Merken angeführt.

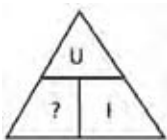
Man kann sich das Ohmsche Gesetz in folgender Form merken:



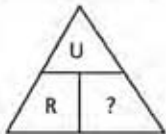
Man merkt sich den Wortlaut des Dreiecks: URI.

Der waagrechte Strich im Dreieck entspricht einem Bruchstrich, der senkrechte Strich einer Multiplikation. Die gesuchte Größe wird gefunden, indem sie abgedeckt wird.

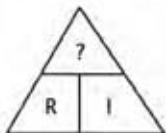
Beispiele:



$$R = \frac{U}{I}$$



$$I = \frac{U}{R}$$



$$U = R \cdot I$$

Aufgabe 1:

Eine Taschenlampenbatterie hat eine Spannung von 4,5 Volt. Welchen Widerstand hat ein Glühlämpchen, wenn im geschlossenen Stromkreis ein Strom von 0,1 A fließt?

Lösung:

Die Rechnung ergibt: $R = \frac{U}{I} = \frac{4,5 \text{ V}}{0,1 \text{ A}} = 45 \Omega$

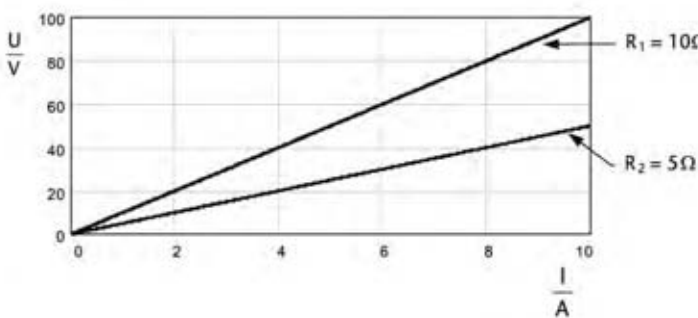
2.2.3 Grafische Darstellung des Ohmschen Gesetzes

Abb. 18: Die Spannung als Funktion des Stromes (zwei Widerstandskennlinien)

Die Funktion $U = f_{(I)} = R \cdot I$ stellt bei konstantem Widerstand R eine Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems dar. (Man vergleiche die Geradengleichung $y = m \cdot x$ mit der Steigung m)

Man kann aus Abb. 18 ablesen: $\frac{100 \text{ V}}{10 \text{ A}} = \frac{60 \text{ V}}{6 \text{ A}} = \frac{40 \text{ V}}{4 \text{ A}} = 10 \Omega = R_1$

Oder: $\frac{50 \text{ V}}{10 \text{ A}} = \frac{20 \text{ V}}{4 \text{ A}} = 5 \Omega = R_2$

Die Abhängigkeit der Spannung U vom Strom I ist linear, in Abb. 18 als Gerade eingezeichnet.

Bauteile (z.B. ein aufgewickelter Draht als Widerstand), für die dieses Gesetz gilt, werden **lineare Bauteile** genannt. Ein Stromkreis, der aus linearen Bauteilen besteht, wird **linearer Stromkreis** genannt.

2.2.4 Zusammenfassung: Das OHMsche Gesetz

1. Die Stromstärke im Leiter eines geschlossenen Stromkreises ist
 - **direkt proportional zur Spannung** ($I \sim U$) der Spannungsquelle und
 - **umgekehrt proportional zum Widerstand** ($I \sim \frac{1}{R}$) des Leiters.
2. Sind zwei Größen des Ohmschen Gesetzes bekannt, so kann die dritte berechnet werden.

2.3 Definitionen

2.3.1 Gleichstrom, Gleichspannung, Wechselstrom, Wechselspannung

Elektrischer Strom ist das Fließen von Elektronen. Bewegen sich die Elektronen immer in die gleiche Richtung, so spricht man von **Gleichstrom**. Gleichstrom ist ein **zeitlich konstanter** Strom. Er wird durch eine **Gleichspannung** bewirkt.

Wechseln die Elektronen regelmäßig ihre Richtung der Fortbewegung, so spricht man von **Wechselstrom**. Bei Wechselstrom ist der **Strom eine Funktion der Zeit**. Wechselstrom wird durch eine **Wechselspannung** bewirkt.

Ein Beispiel für eine Gleichspannungsquelle ist die Taschenlampenbatterie. Die Steckdose im Haushalt stellt eine Wechselspannungsquelle dar.

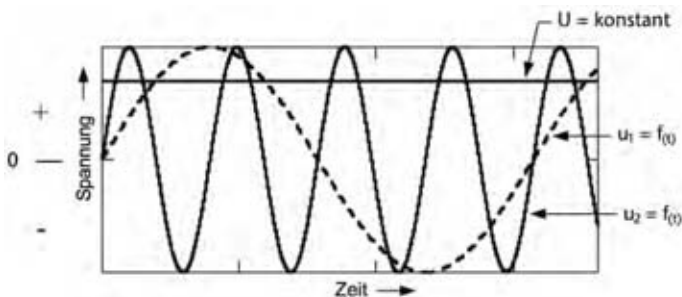


Abb. 19: Gleichspannung und Wechselspannung als Funktion der Zeit

In Abb. 19 ist die Spannung $U = \text{konstant}$ in ihrer Größe unabhängig von der Zeit, in diesem Beispiel immer positiv. U ist eine Gleichspannung.

Die Spannungen $u_1 = f(t)$ und $u_2 = f(t)$ sind in ihrer Größe von der Zeit abhängig, sie sind eine Funktion der Zeit. Die Spannungen u_1 und u_2 sind Wechselspannungen.

Bei periodisch wechselnden Größen wird die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde als **Frequenz** bezeichnet. Die Wechselspannung u_1 hat eine kleinere Frequenz als u_2 .

Die Ordinate (y-Achse) könnte statt der Bezeichnung »Spannung« auch die Bezeichnung »Strom« haben, da eine Gleichspannung einen Gleichstrom und eine Wechselspannung einen Wechselstrom bewirkt.

Anmerkung: Als Beispiel wurde für $u_1 = f(t)$ und $u_2 = f(t)$ die Sinusfunktion mit unterschiedlicher Frequenz gewählt.

Für die Schreibweise von zeitlich unabhängigen und zeitlich abhängigen Größen gilt die Vereinbarung:

Zeitlich unabhängige (konstante) Größen werden groß geschrieben, z.B. »U« oder »I«.

Zeitlich abhängige Größen werden klein geschrieben, z.B. $u_{(t)}$ oder $i_{(t)}$ oder nur i .

2.3.2 Verbraucher

Unter **Verbraucher**, oft auch »Last« genannt, versteht man einen Gegenstand, dem über Anschlußleitungen (Drähte) von einer Spannungsquelle elektrische Energie zugeführt wird. Je nach dem Widerstand des Verbrauchers fließt im geschlossenen Stromkreis ein kleinerer oder größerer Strom. Beispiele für Verbraucher sind: Glühlampe, Bügeleisen, Lämpchen in einer Taschenlampe, Elektromotor oder der Widerstand als elektronisches Bauelement.

2.3.3 Reihenschaltung

Statt Reihenschaltung wird auch der Ausdruck »**Serienschaltung**« oder »Hintereinanderschaltung« benutzt. Bei der Reihenschaltung von zweipoligen Schaltungselementen wird ein Anschluß des vorhergehenden Elementes mit einem Anschluß des nachfolgenden Elementes verbunden.



Abb. 20: Einzelne zweipolige Schaltungselemente



Abb. 21: Reihenschaltung von zweipoligen Schaltungselementen

2.3.4 Parallelschaltung

Bei der Parallelschaltung von zweipoligen Schaltungselementen werden alle Anschlüsse der einen Seite der Elemente, und alle Anschlüsse der anderen Seite miteinander verbunden.

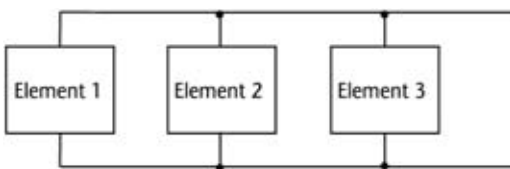


Abb. 22: Parallelschaltung von zweipoligen Schaltungselementen

2.3.5 Unverzweigter und verzweigter Stromkreis

Unter »unverzweigtem« Stromkreis wird folgende Anordnung verstanden: Der eine Pol einer Spannungsquelle ist über einen Leiter mit dem einen Anschluß eines Verbrauchers verbunden. Der andere Pol der Spannungsquelle ist mit dem anderen Anschluß des Verbrauchers verbunden.

Der Strom kann somit nur in **einem** geschlossenen Kreis fließen und nicht gleichzeitig durch einen zweiten Verbraucher, welcher parallel zum ersten Verbraucher an die Spannungsquelle angeschlossen ist.

Ein Beispiel für einen unverzweigten Stromkreis ist ein Glühlämpchen, welches mit zwei Drähten mit den Polen einer Taschenlampenbatterie verbunden ist (man sagt: angeschlossen ist).

Wird mit zwei weiteren Drähten an dieselbe Batterie ein zweites Lämpchen angeschlossen, so liegt ein verzweigter Stromkreis (auch **Netzwerk** genannt) vor.

2.3.6 Schaltzeichen und Schaltbild

Das naturgetreue Zeichnen der Gegenstände eines Stromkreises wäre viel zu aufwendig.

Um die Verbindung von Verbrauchern mit Spannungsquellen in Zeichnungen schematisch darstellen zu können, benutzt man **Symbole**, sogenannte **Schaltzeichen**. Die gesamte Zeichnung des Stromkreises bildet das **Schaltbild**, oft **Schaltplan** oder **Stromlaufplan** genannt.

Der Verlauf von elektrischen Verbindungen (Drähten) kann in Schaltbildern beliebig eckig gezeichnet werden, sollte jedoch übersichtlich sein. Eingänge von Schaltungen oder (Spannungs-) Quellen werden üblicherweise links gezeichnet, Ausgänge rechts. Somit ergibt sich eine Verfolgbarkeit elektrischer Signale im Schaltbild von links nach rechts.

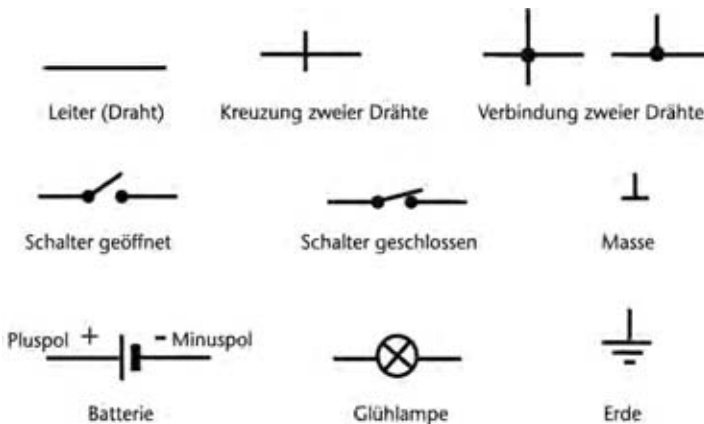


Abb. 23: Beispiele verschiedener Schaltzeichen¹⁰

Mittels der Schaltzeichen kann jetzt der unverzweigte und der verzweigte Stromkreis in Form eines Schaltbildes dargestellt werden.

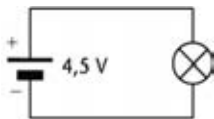


Abb. 24: Schaltplan eines unverzweigten Stromkreises

Abb. 24 zeigt eine Batterie mit angeschlossener Glühlampe.

¹⁰ Anmerkung: Weitere Schaltzeichen werden bei Bedarf in Schaltbildern eingeführt.

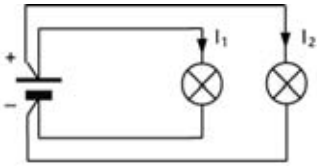


Abb. 25: Schaltplan eines verzweigten Stromkreises

Abb. 25 zeigt eine Batterie mit zwei parallel angeschlossenen Glühlampen. Man erkennt zwei Stromkreise. Der aus den Polen der Batterie herausfließende Strom verzweigt sich.

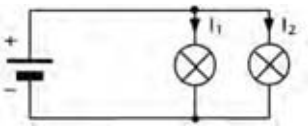


Abb. 26: Der verzweigte Stromkreis von Abb. 25 anders gezeichnet

Besonders wichtig sind folgende Schaltzeichen eines Widerstandes und einer Gleichspannungsquelle.

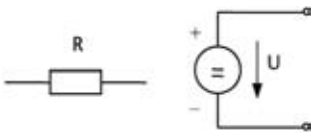


Abb. 27: Schaltsymbol von Widerstand (links) und Gleichspannungsquelle (rechts)

Man beachte, daß der **Richtungspfeil** beim Symbol der Spannungsquelle vom **Pluspol zum Minuspol** zeigt. Meistens werden bei Angabe des Richtungspfeiles die Zeichen »+« und »-« nicht gezeichnet.

Falls klar ist, daß es sich um eine Gleichspannungsquelle handelt, kann auch das Zeichen »=« im Kreis entfallen.

Das Schaltbild aus Abb. 24 läßt sich jetzt folgendermaßen zeichnen:

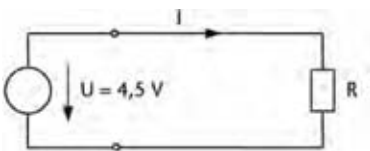


Abb. 28: Ein Stromkreis aus Spannungsquelle und Widerstand

Die Spannungsquelle entspricht der Batterie, der Widerstand R entspricht dem Widerstand der Glühwendel in der Lampe. Eingezeichnet ist auch der Strom »I«.

Wichtig: Die **Richtung des Strompfeiles** zeigt die **positive Richtung des Stromes** außerhalb der Spannungsquelle (vom Pluspol zum Minuspol) an. Diese Richtung wird auch **technische Stromrichtung** genannt.

Die **Elektronen** fließen entgegen der technischen Stromrichtung vom **Minuspol zum Pluspol** der Spannungsquelle.

Wichtige Anmerkung:

Der gemeinsame Bezugspunkt (das Bezugspotential für Spannungen) wird in Schaltbildern mit dem Symbol für Masse oder Erde gezeichnet.

Die in den Schaltbildern als Striche dargestellten elektrischen **Verbindungsleitungen** (Drähte) werden als **widerstandslos** bzw. deren Widerstand als vernachlässigbar klein angenommen. Sollte der Leitungswiderstand einer Verbindungsleitung nicht vernachlässigbar klein sein, so wird er im Schaltbild durch das Symbol eines Widerstandes dargestellt. Die verbleibenden Verbindungsleitungen sind dann wiederum widerstandslos.

Es ist somit ohne Bedeutung, an welchem Punkt einer Verbindungsleitung man eine andere Verbindung anbringt. Folgende Darstellungen sind unterschiedlich gezeichnet, aber elektrisch einander gleichwertig:

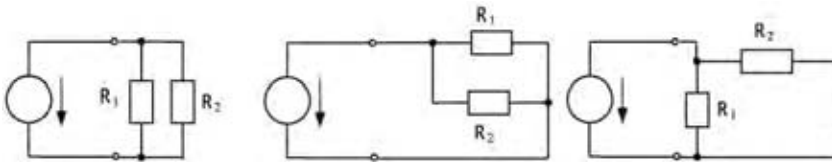


Abb. 29: Unterschiedlich gezeichnete Schaltbilder mit gleicher Funktion

Ebenso sind nachfolgende Schaltbilder von der Funktion her gleich:

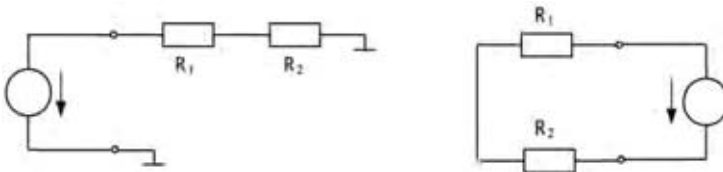


Abb. 30: Ein weiteres Beispiel funktional identischer Schaltbilder

2.3.7 Werte von Strömen und Spannungen in Schaltbildern

Um in Schaltbildern die Werte von Strömen und Spannungen anzugeben, können zwei unterschiedliche Verfahren angewendet werden.

2.3.7.1 Angabe der Spannungen unter Bezug auf Masse (als Potential)

Spannungen können in ein Schaltbild an »spannungsführende« Punkte einer Schaltung als Zahlenwert (als Potential) eingetragen werden. Diese Punkte sagen nur in Bezug auf einen anderen Punkt etwas über die Spannungshöhe aus. Der Spannungswert bezieht sich dann auf einen gemeinsamen Bezugspunkt der Schaltung, mit dem andere Bauelemente verbunden sind. Oft wird der Minuspol der Gleichspannungsquelle, welche die Schaltung speist, als Bezugspunkt festgelegt. Der Minuspol der Spannungsquelle ist bei vielen Geräten mit dem Metallgestell (dem »Chassis«) des Gerätes verbunden, welches kurz als »Masse« bezeichnet wird. Von dieser Bezeichnung stammt der Ausdruck »Bezug auf (oder gegen) Masse«.

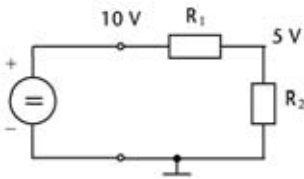


Abb. 31: Spannungsangaben in einem Schaltbild unter Bezug auf Masse

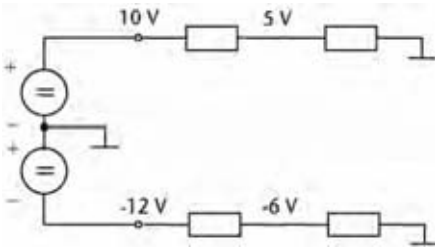


Abb. 32: Ein weiteres Beispiel mit der Angabe negativer Spannungen gegen Masse

2.3.7.2 Angabe der Spannungen mit Zählpfeilen

Die Wertangabe von Spannungen kann in Schaltbildern auch auf eine andere Art erfolgen. Es werden Zählpfeile (Bezugspfeile) benutzt. Der Zählpfeil einer Spannung wird vom Pluspol zum Minuspol gezeichnet. Der Wert der Spannung ist positiv, wenn die Richtung der Spannung mit dieser Bezugsrichtung übereinstimmt, ansonsten negativ. Der Wert der Spannung wird mit seinem Vorzeichen an den Zählpfeil geschrieben (das Pluszeichen wird meist weggelassen).

Die Länge eines Zählpfeiles ist **kein** Maß für die Größe der Spannung. Ein Zählpfeil für Spannungen beginnt definitionsgemäß an einem Punkt mit positivem Potential und endet mit seiner Spitze an einem Punkt mit negativem Potential gegenüber dem Ausgangspunkt. Hat die Spannung zwischen beiden Punkten umgekehrte Polarität, so wird der Wert der Spannung mit einem Minuszeichen geschrieben.

Zählpfeile für Spannungen zeigen immer von Plus nach Minus!

Bezugspfeile für Spannungen können mit geraden oder gebogenen Pfeilen gezeichnet werden.

Durch den Bezugspfeil muß jedoch immer der Anfangspunkt und der Endpunkt erkennbar sein, zwischen denen die Spannung besteht.

Sind in einem Schaltbild Anschlußpunkte durch Buchstaben gekennzeichnet, so können diese Buchstaben als Indizes zur Angabe der Spannungsrichtung verwendet werden. Die Richtung des Bezugspfeiles liegt dann fest. Der Zählpfeil zeigt in diesem Fall vom Anschluß mit dem ersten Indexbuchstaben zum Anschluß mit dem zweiten Indexbuchstaben. Der Wert der Spannung ist vorzeichenrichtig einzutragen.

Ein Nachteil von Zählpfeilen ist der größere Platzbedarf in Schaltbildern. Vorteile sind die erläuternde Wirkung bezüglich Anfangs- und Endpunkt sowie die Möglichkeit, unterschiedliche Bezugspunkte zu wählen (die Potentiale der Anfangspunkte können unterschiedlich sein).

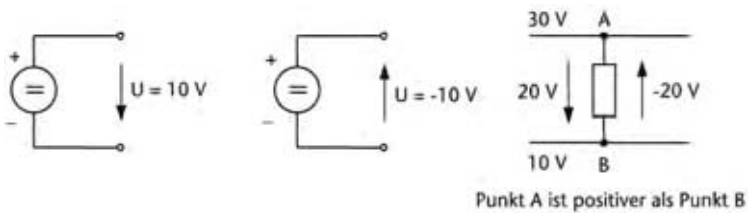


Abb. 33: Zählpfeile für Spannungen in Schaltbildern

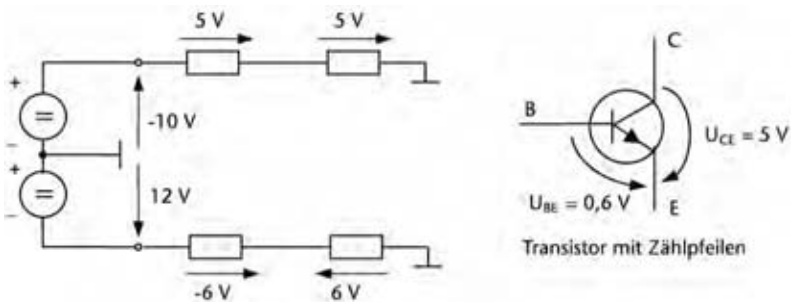


Abb. 34: Weitere Beispiele für Schaltbilder mit Zählpfeilen für Spannungen

2.3.7.3 Angabe von Strömen in Schaltbildern

Sollen in einem Schaltbild auch Ströme mit einem Pfeil gekennzeichnet werden, so wird der Pfeil in die Leitung eingezeichnet. Der Pfeil weist üblicherweise in die technische Stromrichtung von Plus nach Minus. Haben Zählpfeil und Strom unterschiedliche Richtung, so wird der Wert des Stromes mit negativem Vorzeichen an den Pfeil geschrieben.

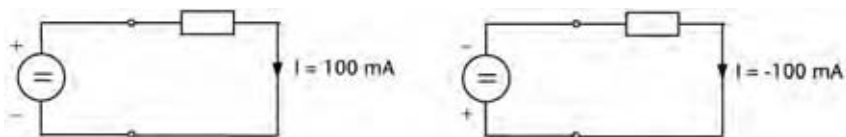


Abb. 35: Zählpfeile für Ströme in Schaltbildern

2.3.7.4 Erzeuger- und Verbraucher- Zählpfeilsystem

Ein geschlossener elektrischer Stromkreis besteht aus mindestens einem Erzeuger (einer Quelle) und einem Verbraucher. Im Verbraucher haben die Zählpfeile für Spannung und Strom die gleiche Richtung, im Erzeuger sind sie entgegengesetzt gerichtet.

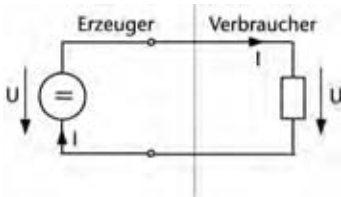


Abb. 36: Schaltbild zu Erzeuger- und Verbraucher-Zählfeilsystem

Die Richtungen der Zählpfeile für Spannung und Strom können für ein Schaltungselement grundsätzlich beliebig gewählt werden. Meistens wird die Pfeilrichtung eines Verbraucher-Zählfeilsystems gewählt.

2.3.8 Kurzschluß

Unter einem Kurzschluß wird das direkte Verbinden zweier Punkte mit einem sehr niederohmigen Leiter verstanden. Da der Strom den Weg des geringsten Widerstandes nimmt, fließt er nicht durch einen Verbraucher, welcher der kurzschließenden Verbindung parallel geschaltet ist. Durch die kurzschließende Verbindung kann ein sehr hoher Strom fließen.

Nach dem Ohmschen Gesetz würde der Strom theoretisch unendlich groß werden. Ein konstanter Wert dividiert durch Null ergibt einen unendlich großen Wert. Mathematisch wird dies ausgedrückt durch:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{U}{R} = \infty \quad (\text{Für } R \text{ gegen } 0 \text{ ist der Grenzwert von »} U \text{ dividiert durch } R \text{« gleich unendlich}).$$

Bei konstanter Spannung U ist die Funktion $I = f(R) = U \cdot \frac{1}{R}$ eine Hyperbel.

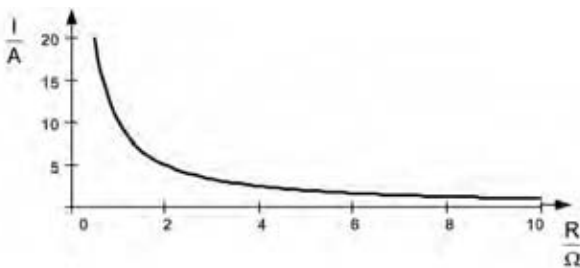


Abb. 37: Der Strom als Funktion des Widerstandes bei konstanter Spannung $U = 10 \text{ Volt}$

In Wirklichkeit wird der Strom nicht unendlich groß, da ein Leiter immer einen Widerstand größer Null Ohm hat, auch wenn der Widerstand nur sehr klein ist.

In der Praxis hat ein Kurzschluß folgende Bedeutung:

Durch einen Verbraucher parallel zum Kurzschluß fließt (fast) kein Strom.

Zwischen den kurzgeschlossenen Punkten ist die Spannung Null Volt (oder sehr klein).

Durch den hohen Kurzschlußstrom kann sich eine Leitung im Stromkreis des Kurzschlusses so stark erhitzen, daß sie glühend wird und schmilzt. Durch eine Sicherung wird dies verhindert.

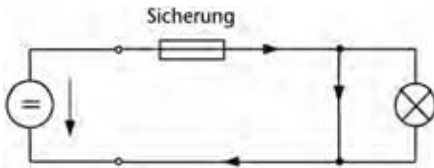


Abb. 38: Stromkreis mit einer Kurzschlußverbindung

Der Stromkreis in Abb. 38 enthält eine Kurzschlußverbindung parallel zur Glühlampe. Die Glühlampe leuchtet nicht, da der Strom den durch Pfeile gekennzeichneten »kurzen« Weg des geringsten Widerstandes nimmt. Ist der Strom groß genug, so brennt die Sicherung durch.

2.3.9 Passive Bauelemente

Ein passives Bauteil ist ein elektrischer Verbraucher. Es nimmt durch zugeführte elektrische Energie eine Leistung auf und wandelt diese z.B. in Wärme um.

Beispiele passiver Bauteile sind die Glühlampe und der elektrische Widerstand als Bauteil (z.B. ein aufgewickelter Draht aus schlecht leitendem Material).

2.3.10 Aktive Elemente

Außer den passiven Bauelementen gibt es aktive Elemente einer Schaltung.

Ein aktives Element kann eine Quelle elektrischer Energie sein, z.B. eine Batterie als Spannungsquelle (Batterie = unabhängige Quelle).

Ein aktives Bauelement kann ein elektrisches Signal, z.B. eine Wechselspannung, verstärken, wenn es gemeinsam mit einer energieliefernden Quelle geeignet zusammengeschaltet wird. Ein Transistor kann als aktives Bauelement eine kleine Wechselspannung in eine Wechselspannung mit größerem »Ausschlag« (Amplitude) umwandeln (verstärken, Transistor = gesteuerte Quelle).

2.3.11 Zusammenfassung: Definitionen

1. Gleichspannung und Gleichstrom sind in ihrer Größe von der Zeit **unabhängig**. Ihre Formelzeichen werden groß geschrieben.
2. Wechselspannung und Wechselstrom sind in ihrer Größe von der Zeit **abhängig**. Ihre Formelzeichen werden klein geschrieben.
3. Einem Verbraucher (einer Last) wird elektrische Energie zugeführt. Verbraucher können passive Bauelemente sein.
4. Zweipolige Schaltungselemente können in Serie oder parallel geschaltet werden.
5. In einem unverzweigten Stromkreis fließt Strom nur in **einem** geschlossenen Stromkreis.
6. Mit Schaltzeichen wird der Stromkreis in Form eines Schaltbildes gezeichnet.
7. Wird eine Spannungsquelle kurzgeschlossen, so fließt ein sehr hoher Strom.
8. Passive Bauelemente nehmen elektrische Energie auf und wandeln sie in Leistung um.

9. Aktive Elemente geben Energie ab (z.B. Spannungsquelle) oder verstärken ein elektrisches Signal (z.B. Transistor).

2.4 Arbeit und Leistung

Arbeit und Energie haben die gleiche Einheit ($J = \text{Joule}$). »Arbeit« beschreibt einen **Vorgang**, bei dem Energie umgewandelt wird. Energie ist die **Fähigkeit**, Arbeit zu verrichten. Als Formelzeichen wird für die Arbeit »W« und für die Energie meist »E« oder ebenfalls »W« verwendet.

2.4.1 Elektrische Arbeit

Liegt an einem Widerstand die Spannung »U«, so wird ihm nach Gl. 3 die Arbeit oder Energie $W = U \cdot Q$ zugeführt. »Q« ist dabei die durch den Widerstand fließende Ladung.

Mit $Q = I \cdot t$ aus Gl. 2 folgt:

Gl. 6: Elektrische Arbeit

$$W = U \cdot I \cdot t$$

Je größer Spannung und Strom sind, und je länger der Strom fließt, um so größer ist die Energie, die dem Widerstand zugeführt und von ihm »verbraucht« (in Wärme umgesetzt) wird.

Die Einheit der Energie ist: $1J = 1Ws = 1VAs = 1Nm = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$

Gebräuchliche Einheiten der elektrischen Arbeit sind: Kilowattstunde (kWh), Wattstunde (Wh), Wattsekunde (Ws).

Es gilt: $1 \text{ kWh} = 1\,000 \text{ Wh} = 3\,600\,000 \text{ Ws}$

Aufgabe 2:

Unter dem Arbeitspreis werden die Kosten pro Kilowattstunde verstanden, die der Abnehmer elektrischer Energie dem Stromlieferanten zahlen muß.

Der Arbeitspreis für eine Kilowattstunde betrage 0,25 DM. Wieviel kostet es, wenn eine Glühlampe mit der Leistung 100 Watt 20 Stunden lang eingeschaltet ist?

Lösung:

$$0,25 \frac{\text{DM}}{\text{kWh}} \cdot 0,1 \text{ kW} \cdot 20 \text{ h} = \mathbf{0,50 \text{ DM}}$$

2.4.2 Elektrische Leistung

Die einem Verbraucher in einer Zeiteinheit zugeführte Energie wird als **Leistung** bezeichnet.

Die Einheit für die elektrische Leistung ist **Watt**¹¹.

¹¹ James WATT (1736 - 1819), englischer Ingenieur, Erfinder der Dampfmaschine

Das Einheitenzeichen für die Leistung ist »W«, das Formelzeichen ist »P«.

Leistung ist definiert als Arbeit pro Zeiteinheit.

Aus $W = U \cdot I \cdot t$ (siehe 2.4.1) folgt für die Leistung »P«, die dem Widerstand zugeführt wird:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{U \cdot I \cdot t}{t} = U \cdot I$$

Ein Watt ist somit definiert als: $1W = 1VA = 1 \frac{J}{s} = 1 \frac{Nm}{s} = 1 \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$

Gl. 7: Leistung in Abhängigkeit von Spannung und Strom

$$P = U \cdot I$$

Durch Einsetzen von $U = R \cdot I$ bzw. $I = \frac{U}{R}$ aus dem Ohmschen Gesetz erhält man die wichtigen Umformungen:

Gl. 8: Leistung in Abhängigkeit von Strom und Widerstand

$$P = I^2 \cdot R$$

Gl. 9: Leistung in Abhängigkeit von Spannung und Widerstand

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Aus Gl. 8 und Gl. 9 ist ersichtlich: Bei konstantem Widerstand nimmt die Leistung **quadratisch** mit der Stromstärke bzw. der Spannung zu.

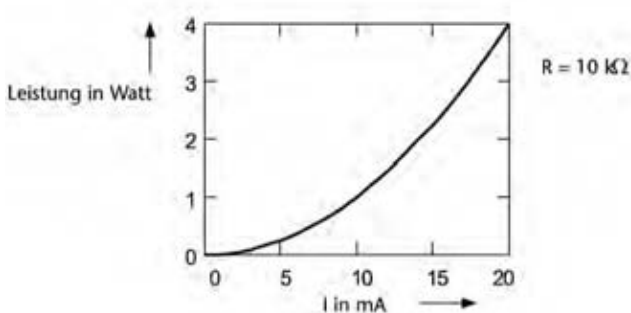


Abb. 39: Die Leistung ist von der Stromstärke quadratisch abhängig

Die einem Widerstand zugeführte elektrische Energie wird in Wärmeenergie umgewandelt (JOULEsche Wärme).

Anmerkung: Der Trick zum Umstellen des OHMschen Gesetzes mittels der Dreieckform (2.2.2, Seite 44) kann auch auf Gl. 7, Gl. 8, Gl. 9 und alle gleich aufgebauten Formeln angewandt werden.

Aufgabe 3:

Ein elektrischer Bohrhammer hat auf dem Typschild stehen: $P_{\max} = 3 \text{ kW}$. Kann die Maschine an einer Steckdose, die durch eine Sicherung mit 10 A abgesichert ist, betrieben werden?

Lösung:

Nimmt man die Netzspannung zu 230 V an, so ergibt sich:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{3000 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 13 \text{ A}$$

Der Stromkreis würde beim Einschalten der Maschine durch die Sicherung unterbrochen werden.

Die Maschine muß zum Betrieb an eine Steckdose angeschlossen werden, die mindestens mit einer Sicherung (Überstrom-Schutzeinrichtung) mit dem nächsthöheren, genormten Nennwert von 16 A abgesichert ist.

Aufgabe 4:

Die maximale Belastbarkeit eines Widerstandes mit dem Wert $1 \text{ k}\Omega$ sei im Datenblatt mit $\frac{1}{4}$ Watt angegeben. Welche Spannung darf an den Anschlüssen des Widerstandes höchstens liegen?

Lösung:

$$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow U^2 = P \cdot R \Rightarrow U = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{0,25 \text{ W} \cdot 1000 \Omega} = 15,8 \text{ V}$$

Legt man für längere Zeit eine höhere Spannung an den Widerstand, so erwärmt er sich stark und wird beschädigt.

2.5 Wirkungsgrad

In der Technik ist der Begriff **Wirkungsgrad** wichtig. Er kennzeichnet als **Zahl**, wie effektiv (wirksam) Energie von einer Form in eine andere Form umgewandelt wird, z.B. elektrische in mechanische Energie beim Elektromotor.

Gl. 10: Definition des Wirkungsgrades

$$\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}}$$

P_{ab} ist die abgegebene Leistung, P_{zu} ist die zugeführte Leistung.

Beispiel:

Wird einer stromerzeugenden Maschine im Wasserkraftwerk (Generator) eine mechanische Leistung P_{zu} zugeführt, so ist die vom Generator abgegebene elektrische Leistung P_{ab} kleiner ($P_{ab} < P_{zu}$). Die Differenz $P_{zu} - P_{ab}$ heißt **Verlustleistung** und wird nicht in elektrische Energie, sondern in Wärme umgewandelt. Verluste entstehen z.B. durch Lagerreibung der Antriebswellen oder Erwärmung der Drähte durch den Strom.

Den Wirkungsgrad η kann man als Dezimalzahl oder in Prozent angeben. Da P_{ab} immer kleiner als P_{zu} ist, gilt **stets**:

Gl. 11: Untere und obere Grenze des Wirkungsgrades

$$0 < \eta < 1 \text{ oder } 0 < \eta < 100 \%$$

(P_{ab} ist immer kleiner als P_{zu} , da man sonst Energie aus »dem Nichts« erschaffen könnte.)

Energie kann nicht erzeugt oder verbraucht, sondern nur umgewandelt werden.

Werden energieumwandelnde Systeme in Serie geschaltet, so multiplizieren sich die Wirkungsgrade der einzelnen Systeme.

Gl. 12: Gesamtwirkungsgrad eines Systems von n in Serie liegenden Systemen

$$\eta_{ges} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_n$$

Aufgabe 5:

1000 m³ Wasser durchfallen in Röhren eine Höhe von 50 m und treiben durch eine Turbine einen elektrischen Generator an. Durch Reibungs- und Wärmeverluste gehen im Generator 2 % der zugeführten Energie verloren. Die elektrische Energie des Generators wird mit einem Wirkungsgrad von $\eta = 0,95$ über eine Fernleitung übertragen. Welche Energie steht am Ende der Fernleitung zur Verfügung?

Lösung:

Die potentielle Energie des Wassers ist: $E_{pot} = m \cdot g \cdot \Delta h = 10^6 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 50 \text{ m} = 4,905 \cdot 10^8 \text{ J}$

$$\eta_{ges} = \eta_1 \cdot \eta_2 = 0,98 \cdot 0,95 = 0,931$$

$$P_{ab} = \eta_{ges} \cdot P_{zu} = 0,931 \cdot 4,905 \cdot 10^8 \text{ J} \approx 4,56 \cdot 10^8 \text{ J} (\approx 127 \text{ kWh})$$

3 Lineare Bauelemente im Gleichstromkreis

3.1 Definition des Begriffes »linear«

Unter Abschnitt 2.2.3 wurde bereits der Begriff »linear« angesprochen und soll hier genauer definiert werden. Ein Bauelement nennt man linear, wenn gilt:

1. $\text{Wirkung}(n \cdot \text{Ursache}) = n \cdot \text{Wirkung}(\text{Ursache})$
2. $\text{Wirkung}(\text{Ursache1}) + \text{Wirkung}(\text{Ursache2}) = \text{Wirkung}(\text{Ursache1} + \text{Ursache2})$

In Worten:

1. Die Wirkung der n-fachen Ursache ist gleich der n-fachen Wirkung der einfachen Ursache.
2. Die Summe der Wirkungen von Ursache 1 und Ursache 2 ist gleich der Wirkung aus der Summe beider Ursachen.

Dieser Zusammenhang wird als sogenanntes **Überlagerungsprinzip (Superpositionsprinzip)** bezeichnet.

Beispiel: Durch einen ohmschen Widerstand mit konstantem Wert fließt bei n-facher Spannung auch ein n-facher Strom.

Es gilt: $I = \frac{U}{R}$ bzw. $n \cdot I = \frac{n \cdot U}{R}$ und $I_1 = \frac{U_1}{R}; I_2 = \frac{U_2}{R}; I_3 = I_1 + I_2 = \frac{U_1 + U_2}{R}$



Abb. 40: Durch einen Widerstand fließt bei n-facher Spannung ein n-facher Strom

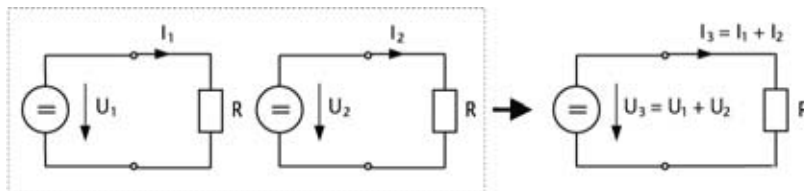


Abb. 41: Die Summe der Ursachen ergibt die Summe der Wirkungen

Für ein lineares Bauteil gilt folgendes Kennzeichen:

- Der Strom durch das Bauteil ist unabhängig von Höhe und Richtung des Stromes.
- Der Widerstand des Bauteiles ist somit konstant und unabhängig vom Strom.

Lineare Bauelemente und Schaltungen aus linearen Bauelementen (lineare Netzwerke, auch lineare Systeme genannt) lassen sich mit einfachen Methoden berechnen.

Anmerkung: Das lineare Verhalten von Bauelementen ist eine Idealisierung, die in der Realität nur für begrenzte Bereiche der Spannungen und Ströme (und auch dann nur näherungsweise) zutrifft.

3.2 Der ohmsche Widerstand

Der ohmsche Widerstand, kurz Widerstand, begrenzt den Strom nach dem Ohmschen Gesetz. Die Wirkungsweise, der Verwendungszweck und die Ausführungsformen von Widerständen werden erklärt.

3.2.1 Wirkungsweise des Widerstandes

Die im Aufbau der Stoffe liegende Ursache für die Wirkung eines Widerstandes wurde bereits in 1.2.4, Seite 27, und 1.2.7.1, Seite 30 beschrieben.

Durch den Vergleich des elektrischen Stromes mit Wasser sei hier noch einmal ein Denkmodell für die Wirkungsweise eines Widerstandes angeführt.

Ein Widerstand behindert das Fließen der Elektronen und vermindert somit den elektrischen Strom. Im Vergleich mit Wasser kann man sich das Bauteil »Widerstand« in seiner Wirkung wie eine Verengung in einer Wasserleitung vorstellen.

Wird in einem geschlossenen Wasserkreislauf durch ein dickes Wasserleitungsrohr mit konstantem Druck Wasser hindurchgepumpt, so fließt durch den Querschnitt des Rohres eine bestimmte Menge Wasser pro Zeiteinheit (z.B. 1 Liter pro Sekunde). Eine Verengung in dem Wasserleitungsrohr würde dem Fließen des Wassers einen Widerstand entgegensetzen. Durch den dünnen Teil des Rohres würde z.B. nur noch $\frac{1}{2}$ Liter Wasser pro Sekunde fließen. Da der dünne Teil des Rohres ein Bestandteil des geschlossenen Wasserkreislaufes ist, würde an jeder Stelle des Rohres, also auch im dicken Teil, nur noch diese geringere Wassermenge fließen. An der Stelle, an der sich das Rohr verengt, staut sich das Wasser und der Wasserdruck erhöht sich somit. Wird der Wasserdruck im Kreislauf sehr stark erhöht, so kann der dünne Teil des Rohres platzen.

In einem geschlossenen Stromkreis mit konstanter Spannung fließen bei einem dicken Draht pro Zeiteinheit mehr Elektronen durch den Leiterquerschnitt als bei einem dünnen Draht. Der Strom (die Stromstärke in Ampere) ist beim dicken Draht höher. Verengt sich ein dicker Draht, so stellt die Verengung einen Widerstand für das Fließen der Elektronen dar, die Stromstärke im gesamten Stromkreis ist kleiner.

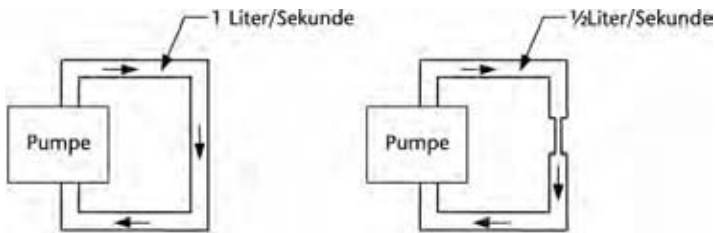


Abb. 42: Wasserkreislauf ohne (links) und mit (rechts) Verengung des Rohres

Am Übergang vom dicken zum dünnen Draht »stauen« sich die Elektronen. Am Beginn der dünnen Drahtstelle herrscht somit Elektronenüberschuß, am Ende der dünnen Drahtstelle Elektronenmangel. Dies ist eine Potentialdifferenz, und somit eine elektrische Spannung. Man sagt, am **Widerstand fällt eine Spannung ab**, oder man spricht von einem **Spannungsabfall am Widerstand**.

Der Widerstand (das dünne Drahtteil) wird durch die JOULEsche Wärme erwärmt. Wird die Spannung der Spannungsquelle im Stromkreis sehr stark erhöht, so drängen sich, bildlich gesprochen, viel mehr Elektronen durch das dünne Drahtteil. Der dünne Draht erhitzt sich stark und kann schließlich schmelzen.

Anmerkung: Dies ist das Prinzip der Schmelzsicherung. Darf in einem Stromkreis nur ein bestimmter, maximaler Strom fließen und wird dieser überschritten, so schmilzt der Sicherungsdraht und unterbricht den Stromkreis. Somit wird verhindert, daß die Leitungen des Stromkreises zu glühen beginnen und einen Brand verursachen.

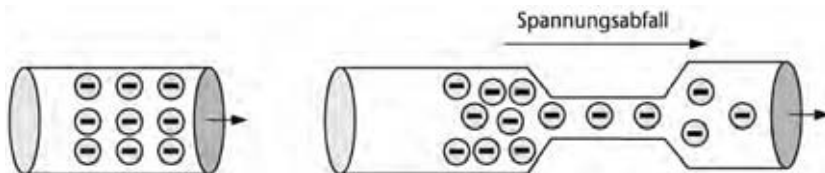


Abb. 43: Wirkung eines Widerstandes, symbolisch dargestellt

3.2.2 Spezifischer Widerstand

Das Fließen des elektrischen Stromes in einem Leiter soll zunächst wieder mit dem Fließen von Wasser in einem Rohr verglichen werden.



Abb. 44: Wasser fließt durch ein mit grobem Kies gefülltes Rohr

Der Widerstand, der dem Fließen des Wassers in Abb. 44 entgegengesetzt wird, ist um so größer, je länger und je enger das Rohr ist. Außerdem ist der Widerstand von der Beschaffenheit der

Kiesfüllung abhängig. Grober Kies läßt das Wasser leichter durch und ergibt somit einen kleineren Widerstand für den Wasserfluß als feiner Kies.

Für den Fluß des elektrischen Stromes in einem Leiter ist die Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Leitungslänge und Leitungsquerschnitt sinngemäß übertragbar.

Der **Widerstand** eines Leiters ist um so **größer**, je **länger der Leiter** ist, und um so **kleiner**, je **größer der Querschnitt** des Leiters ist. Der Widerstand eines Leiters ist somit direkt proportional zur Länge und umgekehrt proportional zum Querschnitt eines Leiters. Außerdem ist der Widerstand abhängig von der Art des leitenden Stoffes, dem **spezifischen Widerstand** (Formelzeichen ρ).

Gl. 13: Der Widerstand eines Leiters

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

R = Widerstandswert

l = Länge des Leiters

A = Querschnittsfläche des Leiters

ρ = spezifischer Widerstand

Der spezifische Widerstand ist eine Materialkonstante und wird meist in $\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ angegeben.

Tabelle 4: Der spezifische Widerstand einiger Materialien

Material	ρ in $\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$
Silber	0,0165
Kupfer	0,0176
Eisen	0,1
Konstantan	0,5

Aufgabe 6:

Welchen Widerstand hat ein runder Kupferdraht mit einem Durchmesser $d = 1 \text{ mm}$ und einer Länge $l = 200 \text{ m}$? (ρ für Kupfer siehe Tabelle 4)

Lösung:

Der Querschnitt des Drahtes ist eine Kreisfläche. $A_{\text{Kreis}} = r^2 \pi = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi$

Die Querschnittsfläche A des Drahtes ist: $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{1 \text{ mm}^2 \cdot \pi}{4} = 0,785 \text{ mm}^2$

Somit ist $R = 0,0176 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{200 \text{ m}}{0,785 \text{ mm}^2} = 4,48 \Omega$

Aufgabe 7:

Ein Elektromotor wird an einer Gleichspannungsquelle U_G mit 220 Volt betrieben, die 100 Meter vom Motor entfernt ist. Für die Leitungen wird runder Kupferdraht mit 2 Millimeter Durchmesser verwendet. Der Wicklungswiderstand des Motors beträgt $R_M = 10 \text{ Ohm}$.

- Wie groß ist die nutzbare Motorleistung?
- Wie groß ist der Wirkungsgrad der Energieübertragung?

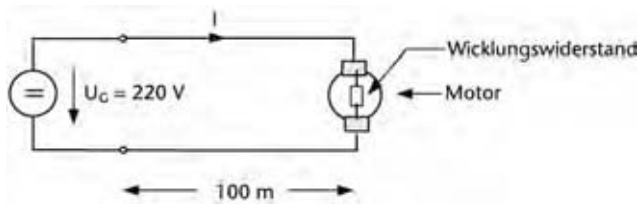
Lösung:

Abb. 45: Schaltbild zu Aufgabe 7

- Die gesamte Länge der Leitung ist: $2 \cdot 100 \text{ m} = 200 \text{ m}$. Der Widerstand R_L der Leitung ist:

$$R_L = \rho \cdot \frac{l}{A} = 0,0176 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{200 \text{ m}}{3,14 \text{ mm}^2} = \mathbf{1,121 \Omega}$$

Die Widerstände aus Zuleitung und Motorwicklung addieren sich: $R_G = R_L + R_M$. Der Gesamtwiderstand im Stromkreis ist somit $R_G = 1,121 \Omega + 10 \Omega = 11,121 \Omega$. Im Stromkreis fließt der Strom:

$$I = \frac{U_G}{R_G} = \frac{220 \text{ V}}{11,121 \Omega} = 19,78 \text{ A}$$

An den Zuleitungen fällt die Spannung $U_L = I \cdot R_L = 19,78 \text{ A} \cdot 1,121 \Omega = 22,17 \text{ V}$ ab.

Am Motor stehen nur $U_M = U_G - U_L = 220 \text{ V} - 22,17 \text{ V} = 197,83 \text{ V}$ zur Verfügung.

Die nutzbare Motorleistung ist: $P_M = U_M \cdot I = 197,83 \text{ V} \cdot 19,78 \text{ A} = \mathbf{3913 \text{ Watt}}$.

Die nutzbare Motorleistung könnte auch anders berechnet werden:

$$P_M = I^2 \cdot R_M = \left(\frac{220 \text{ V}}{11,121 \Omega} \right)^2 \cdot 10 \Omega = 3913 \text{ W}$$

- Der Leitungsverlust beträgt: $P_L = U_L \cdot I = 22,17 \text{ V} \cdot 19,78 \text{ A} = 438 \text{ Watt}$

Oder anders berechnet: $P_L = I^2 \cdot R_L = (19,78 \text{ A})^2 \cdot 1,121 \Omega = 438 \text{ Watt}$

Der Leitungsverlust beträgt also ca. 11 % der nutzbaren Leistung P_M . Der Wirkungsgrad der Energieübertragung ist somit $\eta = \mathbf{0,89}$.

Der Wirkungsgrad könnte auch anders berechnet werden:

Die Spannungsquelle gibt die Gesamtleistung $P_G = P_L + P_M = 438 \text{ W} + 3913 \text{ W} = 4351 \text{ W}$ ab.

Es gilt: $\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$ Mit $P_{ab} = P_M = 3913 \text{ W}$ und $P_{zu} = P_G = 4351 \text{ W}$ folgt $\eta = 0,89$.

Anmerkung: Dieses Beispiel zeigt, daß bereits bei einer relativ kleinen Leitungslänge von (einfach) 100 Meter mehr als 10 % der übertragenen Energie als Leitungsverlust verloren gehen. In der Leitung mit dem Widerstand R_L wird die Leistung $P_L = I^2 \cdot R_L$ in Wärme umgewandelt.

Die Spannung am Verbraucher ist die Spannung der Spannungsquelle abzüglich der an der Leitung durch deren Widerstand abfallenden Spannung. Dies soll näher erklärt werden.

Abb. 45 kann folgendermaßen umgezeichnet werden:

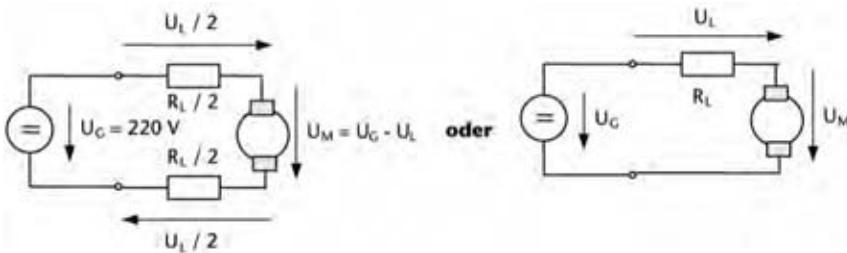


Abb. 46: Das Schaltbild zu Aufgabe 7 mit eingezeichneten Leitungswiderständen

Links ist der Widerstand jeder Leitung als Schaltsymbol eingezeichnet. Rechts ist der Widerstand **beider** Leitungen in **einem** Widerstand zusammengefaßt. Die restlichen Striche symbolisieren jeweils widerstandslose Verbindungen. Die Summe aller Spannungen in dem geschlossenen Stromkreis (rechts) ist Null, da sich die Spannung U_G in die Spannungen U_L und U_M aufteilt. Entgegen der Spitze eines Zählpfeiles ist eine Spannung negativ zu zählen. Beginnt man mit U_G und zählt alle Spannungen zusammen, so erhält man $U_G - U_M - U_L = 0$ oder $U_M = U_G - U_L$.

Die vom Verbraucher abgegebene Leistung ist somit: $P_{ab} = U_M \cdot I = (U_G - U_L) \cdot I$

Die dem gesamten Stromkreis zugeführte Leistung ist: $P_{zu} = U_G \cdot I$

Für den Wirkungsgrad η folgt: $\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{(U_G - U_L) \cdot I}{U_G \cdot I} = \frac{U_G - U_L}{U_G} = 1 - \frac{U_L}{U_G} = 1 - \frac{R_L \cdot I}{U_G}$

Aus der Formel $\eta = 1 - \frac{R_L \cdot I}{U_G}$ ist ersichtlich:

Der Wirkungsgrad würde den (nur theoretisch möglichen) Wert »1« annehmen, wenn entweder der Leitungswiderstand 0Ω oder die Spannung U_G unendlich groß würde. Den Leitungswiderstand kann man nicht beliebig klein machen. Gute Leiter sind teuer, und ein großer Querschnitt der Leitung bedeutet hohes Leitungsgewicht. Um niedrige Leitungsverluste bzw. einen hohen Wirkungsgrad zu erhalten, muß daher U_G möglichst groß sein.

Gleichspannung kann mit einem Transformator nicht auf einen höheren Spannungswert umgewandelt werden, Wechselspannung dagegen schon. Dies ist der Grund, warum die Verteilung elektrischer Energie vom Kraftwerk ausschließlich mit hoher Wechselspannung (z.B. 380 000 Volt) erfolgt.

3.2.3 Verwendungszweck von Widerständen

3.2.3.1 Strombegrenzung durch einen Vorwiderstand

Widerstände können zur Begrenzung des Stromflusses in einem geschlossenen Stromkreis dienen. Wird ein Widerstand in Serie mit einem Verbraucher geschaltet, so wird er als **Vorwiderstand** (oder Schutzwiderstand) bezeichnet. Da sich die Widerstandswerte des Vorwiderstandes und des Verbrauchers addieren, wird nach dem ohmschen Gesetz der Strom verringert.

Aufgabe 8:

Eine Glühlampe mit den Daten 12 V, 5 W soll an eine Spannungsquelle von 24 Volt angeschlossen werden. Welcher Vorwiderstand (Wert in Ohm, Leistung in Watt) ist zu verwenden, damit der Glühfaden nicht durchbrennt?

Lösung:

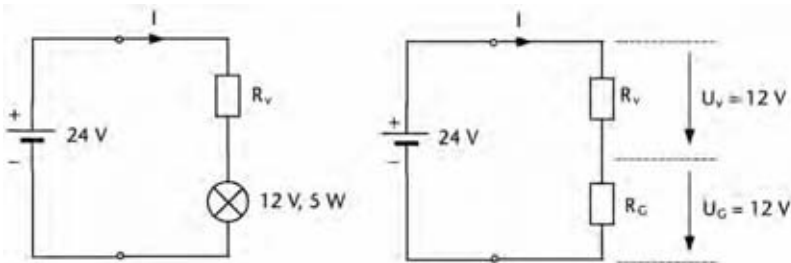


Abb. 47: Schaltbild zu Aufgabe 8 (links) und Ersatzschaltbild (rechts)

Der Vorwiderstand R_V dient zur Strombegrenzung. Der maximal erlaubte Strom im Stromkreis ergibt sich aus den Daten der Lampe zu $I = \frac{P}{U} = \frac{5\text{ W}}{12\text{ V}} = 0,416\text{ A}$

Damit am Widerstand R_G der Glühlampe die Spannung $U_G = 12\text{ V}$ liegt, muß am Vorwiderstand R_V eine Spannung von $U_V = 24\text{ V} - 12\text{ V} = 12\text{ V}$ abfallen.

Demnach muß $R_V = \frac{U_V}{I} = \frac{12\text{ V}}{0,416\text{ A}} = 28,8\ \Omega$ sein.

Die minimal notwendige Belastbarkeit des Vorwiderstandes R_V ergibt sich aus $P_V = I^2 \cdot R$ oder

$$P_V = \frac{U^2}{R} \Rightarrow P_V = 5\text{ W} \text{ (Verlustleistung an } R_V \text{ in Form von Wärme)}$$

Statt des Vorwiderstandes könnte man eine zweite Glühlampe mit den selben Daten verwenden.

$$\text{Der Widerstand der Lampe ist } R_G = \frac{U^2}{P} = \frac{(12\text{ V})^2}{5\text{ W}} = 28,8\ \Omega$$

Ergebnis:

Mit einem Vorwiderstand kann ein Verbraucher an eine höhere Spannung als seine maximal erlaubte Nennspannung angeschlossen werden. Durch den Spannungsabfall am Vorwiderstand wird die am Verbraucher anliegende Spannung verringert. Der Vorwiderstand muß allerdings entsprechend belastbar sein, in ihm wird Verlustleistung in Form von Wärme erzeugt.

3.2.3.2 Aufteilung einer Spannung

Mit einer Reihenschaltung von Widerständen kann eine Spannung aufgeteilt werden. Eine solche Anordnung wird als **Spannungsteiler** bezeichnet. An jedem der Widerstände fällt eine bestimmte Teilspannung ab.

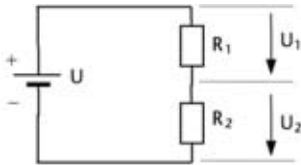


Abb. 48: Widerstände als Spannungsteiler

Aus einer hohen Spannung U können kleinere (Teil-)Spannungen U_1 und U_2 erzeugt und abgegriffen werden.

Anmerkung: Eine eventuelle Belastung (Stromentnahme) der Teilspannungen darf allerdings nur gering sein, damit sie nicht kleiner als im unbelasteten Zustand werden.

3.2.3.3 Aufteilung des Stromes

Durch eine Parallelschaltung von Widerständen kann der Stromfluß aufgeteilt (verzweigt) werden. Somit kann z.B. die Belastung auf zwei parallel geschaltete Widerstände (mit entsprechend anderen Widerstandswerten) verteilt werden.

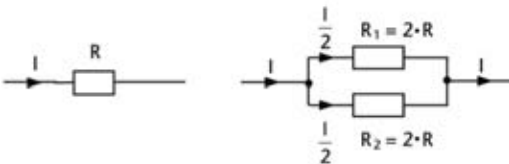


Abb. 49: Stromverzweigung bei zwei parallel geschalteten Widerständen

In Abb. 49 links fließt der Strom I durch den Widerstand R . Am Widerstand wird die Leistung $P = I^2 \cdot R$ in Wärme umgesetzt. Rechts ist der Widerstand R durch zwei parallel geschaltete, doppelt so große Widerstände ersetzt. Damit ergibt sich als Gesamtwiderstand wiederum R , der Strom I bleibt in seinem Wert unverändert. Er teilt sich auf in 2 mal $I/2$.

Somit wird sowohl an R_1 als auch an R_2 die Leistung $P = \left(\frac{I}{2}\right)^2 \cdot 2R = \frac{I^2 \cdot R}{2}$ in Wärme umgesetzt.

R_1 und R_2 werden also halb so stark belastet wie der Widerstand R .

3.2.4 Widerstand als Bauelement

Als Bauelemente werden Widerstände in Geräten in verschiedensten Ausführungsformen verwendet. Eine mögliche Unterscheidung ist die Einteilung in Festwiderstände und veränderbare Widerstände.

3.2.4.1 Festwiderstände

Festwiderstände können je nach dem Widerstandsmaterial z.B. in Schichtwiderstände (Kohleschicht, Metallschicht), Metalloxidwiderstände oder Drahtwiderstände eingeteilt werden. Je nach Aufbau und verwendetem Material ist der Widerstandswert sehr genau (die Toleranz des Widerstandswertes in Prozent ist klein) und / oder die Belastbarkeit ist hoch.

Bei Schichtwiderständen wird auf einen zylindrischen Körper aus Keramik eine Widerstandsschicht aus kristalliner Kohle oder ein aufgedampfter Metallfilm angebracht. Aufgepresste Metallkappen mit Drähten bilden die beiden Anschlüsse. Ein Lacküberzug schützt den Widerstand vor äußeren Einflüssen wie Feuchtigkeit.

Drahtwiderstände bestehen meist aus einem zylindrischen Körper aus Keramik, auf den eine Lage Widerstandsdraht gewickelt ist. Der Schutzüberzug besteht, je nach Belastbarkeit, z.B. aus Lack, Zement oder Glasur. Drahtwiderstände sind bei gleichen Abmessungen wesentlich höher belastbar als Schichtwiderstände (die zulässige Temperatur ist höher).

Anmerkung: Für hohe Frequenzen sind Drahtwiderstände nicht geeignet.

Die wichtigsten **Kennzeichen eines Widerstandes** sind sein **Wert in Ohm** und seine **Belastbarkeit in Watt**.

Die Widerstandswerte sind in Abstufungen von Normreihen erhältlich. Die Normreihen werden als E6, E12 und E24 bezeichnet. Die Anzahl der Werte pro Dekade (Zehnerteilung) in einer Normreihe hängt von der **Toleranz** ab, mit der die Widerstandswerte gefertigt werden. Die Anzahl der Werte ist gerade so groß, daß sich die Toleranzgrenzen der einzelnen Widerstandswerte leicht überlappen.

Tabelle 5: Normreihen der Widerstandswerte

E6	1,0		1,5		2,2		3,3		4,7		6,8													
E12	1,0	1,2	1,5	1,8	2,2	2,7	3,3	3,9	4,7	5,6	6,8	8,2												
E24	1,0	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,7	3,0	3,3	3,6	3,9	4,3	4,7	5,1	5,6	6,2	6,8	7,5	8,2	9,1

Anmerkung: Die einzelnen Stufenschritte der Normreihen ergeben sich aus der 6., 12. oder 24. Wurzel aus 10.

Je nach Baureihe kann der tatsächliche Widerstandswert vom Nennwert (Sollwert) herstellungsbedingt nach unten oder oben um einen maximalen Betrag abweichen. Dieser Betrag wird als Toleranz in Prozent vom Nennwert angegeben.

Tabelle 6: Toleranz von Widerständen je nach Baureihe

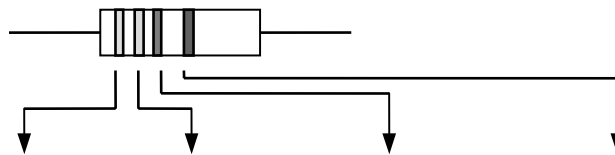
Baureihe	Toleranz
E6	20 %
E12	10 %
E24	5 %

Es gibt somit einen Widerstand mit 4,7 k Ω und 5 % oder 10 % oder 20 % Genauigkeit. Ein Widerstand mit 5,1 k Ω ist aber nur mit einer Genauigkeit von mindestens 5 % erhältlich.

Präzisionswiderstände werden bis zu einer Toleranz von 0,1 % und genauer hergestellt.

Die Kennzeichnung der Widerstände mit ihrem Wert erfolgt in Klarschrift oder durch einen Farbcode in Form von Farbringen auf dem Widerstandskörper. Drei Farbringe geben den Widerstandswert an, der vierte Ring die Toleranz. Zum Ablesen der Farben ist der Widerstand so zu halten, daß die Ringe, welche dem Ende des Widerstandskörpers am nächsten sind, links liegen.

Tabelle 7: Farbcode von Festwiderständen



Widerstandswert in Ohm				
Kennfarbe	1. Kennziffer	2. Kennziffer	Multiplikator	Toleranz in %
keine				± 20
silber			x 0,01	± 10
gold			x 0,1	± 5
schwarz		0	x 1	
braun	1	1	x 10	± 1
rot	2	2	x 100	± 2
orange	3	3	x 1000	
gelb	4	4	x 10 000	
grün	5	5	x 100 000	$\pm 0,5$
blau	6	6	x 1 000 000	
violett	7	7	x 10 000 000	
grau	8	8	x 100 000 000	
weiß	9	9	x 1 000 000 000	

Beispiel:

Erster Ring gelb = 4, zweiter Ring violett = 7, dritter Ring rot = 00 , vierter Ring rot.

Ergebnis: 4700 Ω = 4,7 k Ω , ± 2 %

Widerstände sind mit Werten von unter 1 m Ω bis über 100 M Ω erhältlich. Die Belastbarkeit reicht von kleiner 0,1 Watt bis einige 100 Watt.

Leistungshyperbel

Damit die durch den Stromfluß erzeugte Wärme ein Bauteil nicht schädigt oder zerstört, darf die vom Bauteil aufgenommene Leistung eine Höchstgrenze nicht überschreiten. Je nach Bauform und Kühlung darf die Leistung $P = U \cdot I$ nur einen maximal erlaubten Wert annehmen. Da $I = P \cdot \frac{1}{U}$ gilt, ist der Graph für die höchstzulässige Stromstärke als Funktion der Spannung eine Hyperbel. Sie wird als Leistungshyperbel bezeichnet. Liegt der Schnittpunkt von Strom und Spannung unterhalb oder auf der Leistungshyperbel, so ist der Betrieb des Bauteils mit diesen Werten zulässig, ohne daß die höchstzulässige Bauteilerwärmung überschritten wird.

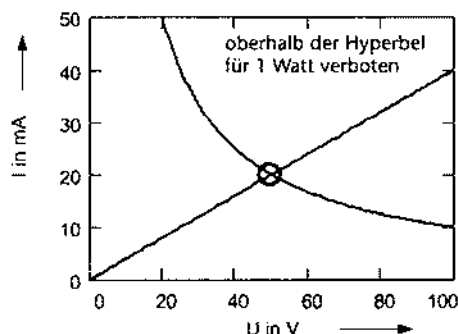


Abb. 50: Leistungshyperbel (1 Watt) und Kennlinie eines Widerstandes (2500 Ohm)

Aufgabe 9 (zu Abb. 50):

Ein Widerstand mit 2500Ω hat eine maximale Belastbarkeit von 1 Watt. Welche maximale Spannung darf an dem Widerstand anliegen und welcher Strom fließt dann durch den Widerstand?

Lösung:

Aus Abb. 50: Bei 100 V fließen 40 mA durch den Widerstand, bei 0 V fließen 0 mA. Durch diese zwei Punkte verläuft die Widerstandskennlinie. Sie schneidet die Leistungshyperbel für 1 Watt bei 50 V, 20 mA. Am Widerstand dürfen maximal 50 V anliegen, durch den Widerstand fließt dann ein Strom von 20 mA.

$$\text{Rechenweg (schneller): } U = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{1 \text{ W} \cdot 2500 \Omega} = 50 \text{ V} \quad ; \quad I = \frac{U}{R} = \frac{50 \text{ V}}{2500 \Omega} = 20 \text{ mA}$$

Temperaturabhängigkeit des Widerstandes

Vorbemerkung zur Temperaturskala in Kelvin:

Legt man den Nullpunkt der Temperaturskala auf $-273,15^\circ \text{C}$ (absoluter Nullpunkt, tiefere Temperaturen sind nicht möglich), so erhält man die absolute Temperatur »T« in Kelvin¹² (K). Zwischen der absoluten Temperatur »T« und der Temperatur in Grad Celsius »t« besteht der Zusammenhang:

¹² W. THOMSON (1824 - 1907), engl. Physiker, im Adelsstand Lord Kelvin

Gl. 14: Zusammenhang zwischen der Temperatur T in K und t in $^{\circ}\text{C}$

$$T = 273,15 \text{ K} + t$$

Beispiel: Die Zimmertemperatur $t = 20^{\circ}\text{C}$ entspricht $T = 293 \text{ K}$.

Für Temperaturdifferenzen ist es gleichgültig, ob man sie in K oder $^{\circ}\text{C}$ angibt, da die Einheiten gleich groß sind.

Der Widerstand eines Leiters, und somit auch der ohmsche Wert eines Widerstandes ändert sich mit der Temperatur (siehe 1.2.7.1 und Abb. 16). Dieses Verhalten wird durch den Temperaturkoeffizienten (TK) beschrieben, welcher je nach Widerstandsmaterial negativ oder positiv sein kann und in den Datenblättern der Hersteller von Widerständen angegeben wird. Nimmt der Widerstand eines Leiters mit steigender Temperatur ab, so hat er einen negativen Temperaturkoeffizienten. Nimmt der Widerstand mit steigender Temperatur zu, so ist der Temperaturkoeffizient positiv. Die Widerstandsänderung durch eine von 20°C abweichende Umgebungstemperatur kann mittels des TK berechnet werden.

Gl. 15: Widerstandsänderung in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz

$$\Delta R = \alpha_{20} \cdot R_{20} \cdot \Delta \vartheta$$

ΔR = Widerstandsänderung

α_{20} = Temperaturkoeffizient für 20°C

R_{20} = Widerstandswert bei 20°C

$\vartheta - \vartheta_{20} = \Delta \vartheta$ = Temperaturdifferenz zu 20°C

Der Temperaturkoeffizient für 20°C ist eine vom Material des Leiters abhängige Konstante mit der Einheit $\frac{1}{\text{K}}$. Für Kupfer ist $\alpha_{20} = 0,0039 \text{ K}^{-1}$.

Aufgabe 10:

Ein Kupferdraht mit dem Widerstand 2Ω wird von 20°C auf 100°C erwärmt. Um wieviel Prozent nimmt der Widerstand der Leitung zu?

Lösung:

Die Widerstandsänderung ist $\Delta R = \alpha_{20} \cdot R_{20} \cdot \Delta \vartheta = 0,0039 \text{ K}^{-1} \cdot 2 \Omega \cdot 80 \text{ K} = 0,624 \Omega$.

Dies entspricht einer Zunahme des Widerstandes um 31,2 %. Bei 100°C hat der Kupferdraht einen Widerstand von $2,624 \Omega$.

Aufgabe 11:

Ein Elektromotor hat eine Wicklung aus Kupferdraht. Bei 20°C ist der Widerstand der Wicklung $R = 2 \Omega$. Nach längerem Betrieb des Motors wird der Wicklungswiderstand zu $R = 2,624 \Omega$ gemessen. Wie hoch ist die Temperatur der Wicklung?

Lösung:

Die Widerstandsänderung ist $\Delta R = 2,624 \Omega - 2 \Omega = 0,624 \Omega$. Nach Gl. 15 ist: $\Delta \vartheta = \frac{\Delta R}{\alpha_{20} \cdot R_{20}}$

Es folgt $\Delta \vartheta = 80 \text{ K}$. Die Temperatur der Wicklung beträgt somit $20^{\circ}\text{C} + 80^{\circ}\text{C} = 100^{\circ}\text{C}$.

Aufgabe 12:

Das Datenblatt eines Präzisions-Metallfolienwiderstandes mit $10\ \Omega$ gibt an: $TK = 30\ \text{ppm/K}$. Wie groß ist der Widerstandswert bei einer Temperatur des Widerstandes von $125\ ^\circ\text{C}$?

Lösung:

ppm ist die Abkürzung für »parts per million«. Ein ppm entspricht 10^{-6} .

Somit sind $30\ \text{ppm} = 3 \cdot 10^{-5}$.

Pro K Temperaturerhöhung nimmt der Widerstandswert von $10\ \Omega$ um $10 \cdot 3 \cdot 10^{-5}\ \Omega$ zu. Die Temperaturerhöhung (Übertemperatur) beträgt $125\ ^\circ\text{C} - 20\ ^\circ\text{C} = 105\ ^\circ\text{C}$.

Die Widerstandsänderung ist: $10\ \Omega \cdot 3 \cdot 10^{-5}\ \text{K}^{-1} \cdot 105\ \text{K} = 0,0315\ \Omega$.

Der Widerstandswert bei $125\ ^\circ\text{C}$ ist $10,0315\ \Omega$.

Aufgabe 13:

Warum brennt der Glühfaden einer Glühlampe vorzugsweise beim Einschalten nach kurzem Aufleuchten durch?

Lösung:

Der Glühfaden besteht aus dem Metall Wolfram mit einer Schmelztemperatur von ca. $3400\ ^\circ\text{C}$. Ist die Lampe eingeschaltet, so dampfen Wolframmoleküle vom Draht ab. An geringen Verengungen des Querschnitts, welche der Glühfaden herstellungsbedingt aufweist, wird dadurch der Querschnitt weiter verkleinert. Da der Widerstand eines Leiters umgekehrt proportional zu seiner Querschnittsfläche ist, ist der Widerstand an den Stellen mit kleinerem Querschnitt größer. Das Metall wird an diesen Stellen stärker erhitzt, es verdampft noch stärker, und der Querschnitt wird weiterhin verkleinert.

Der Widerstand eines Metalles ist bei niedriger Temperatur geringer als bei hoher Temperatur. Beim Einschalten hat der Glühfaden für kurze Zeit einen geringeren Widerstand als beim Glühen, es fließt ein ca. 15-fach höherer Strom. Dieser Einschaltstrom erhitzt die dünnen Stellen des Glühfadens so stark, daß die dünnste Stelle durchschmilzt.

Lastminderungskurve

Die Leistung $P = U \cdot I$ wird im ohmschen Widerstand in Wärme umgesetzt. Dadurch nimmt die Temperatur des Bauteils solange zu, bis die durch Wärmestrahlung oder Kühlung abgeführte Leistung der elektrischen Leistung gleich ist. Die Wärmeabfuhr hängt von der Umgebungstemperatur ab. Da das Bauteil nicht beliebig stark erhitzt werden darf, muß der Anwender die höchste zulässige Last beachten. Die Hersteller von Widerständen geben Kurven an, welche das Verhältnis von erlaubter Betriebslast »P« zur Nennlast »P_n« in Abhängigkeit von der Umgebungstemperatur angeben. Diese Kurve wird Lastminderungs- oder Deratingkurve genannt.

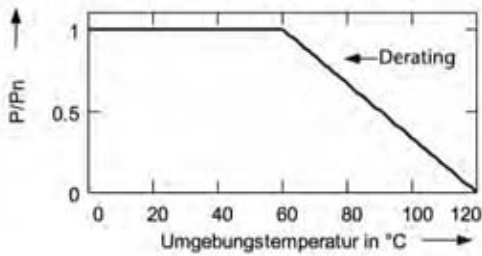


Abb. 51: Deratingkurve eines Widerstandes

Technische Ausführung von Festwiderständen

Allgemein gilt: Je größer ein Widerstand von seiner Bauform her ist, um so größer ist seine Belastbarkeit (in Watt). Dagegen ist der Widerstandswert (in Ohm) von der Baugröße kaum abhängig.

Widerstände gibt es in bedrahteter Ausführung und in SMD-Ausführung. »SMD« steht für »Surface Mounted Device«. Bei bedrahteten Bauteilen werden die (meist umgebogenen) Anschlußdrähte in »Löcher« eines Bauteilträgers (Leiterplatte) festgelötet. SMD-Bauteile besitzen keine Anschlußdrähte, sondern an beiden Enden Metallkappen und werden mit diesen direkt auf die Oberfläche einer Leiterplatte gelötet. Hierdurch ist eine Platzersparnis auf der Leiterplatte (Minia-turisierung) und ein höherer Grad an Automatisierung in der Fertigung von elektronischen Geräten möglich.

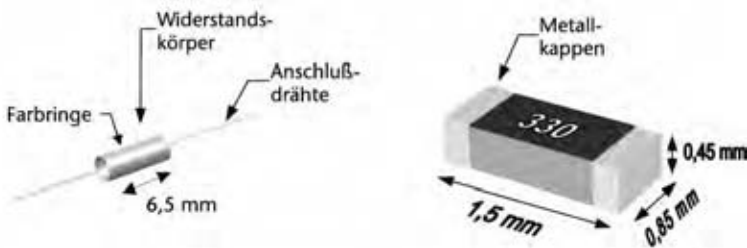


Abb. 52: Bedrahteter Widerstand (links) und SMD-Widerstand (rechts)

3.2.4.2 Veränderbare Widerstände

Veränderbare Widerstände sind einstellbar und haben meistens drei Anschlüsse. Sie werden als **Potentiometer** (kurz »Poti«) bezeichnet. Das Einstellen des Widerstandswertes kann durch Drehen an einer Achse (Drehpotentiometer) wie beim Lautstärkeregler am Radio erfolgen oder durch Verschieben eines Abgriffes (Schiebepotentiometer). Beim Drehpotentiometer ist die Widerstandsbahn kreisförmig ausgebildet. In beiden Fällen wird beim Verstellen über die Widerstandsschicht, die zwischen zwei festen Anschlüssen liegt, ein federnder Abgriff (auch »Schleifer« genannt) entlanggeführt. Dadurch verändert sich der Widerstandswert zwischen den festen Anschlüssen und dem »Mittelanschluß«.

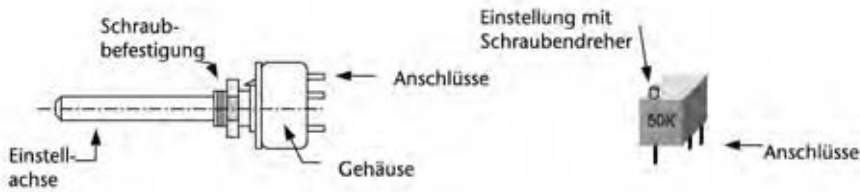


Abb. 53: Potentiometer (links) und Trimmer (rechts)

Als **Trimm-Potentiometer** (kurz »**Trimmer**«) bezeichnet man kleine Potentiometer zum einmaligen, exakten Einstellen eines festen Widerstandswertes. Das Verstellen erfolgt meist mit einem Schraubendreher. Trimmer werden für den Abgleich von elektrischen Werten verwendet, die nur durch das Einstellen eines genauen Widerstandswertes erreicht werden können.

Der Begriff »**Wendelpotentiometer**« bezieht sich auf eine Ausführung, bei der mehrere Umdrehungen der Einstellachse notwendig sind, um den gesamten Einstellbereich zu überstreichen. Somit ist die sehr genaue Einstellung eines Widerstandswertes innerhalb eines Gesamtbereiches möglich.

Bei einem **Tandempotentiometer** erfolgt die Verstellung zweier mechanisch gekoppelter Potentiometer gleichzeitig durch eine gemeinsame Achse oder getrennt durch zwei konzentrische Achsen.

Bei Potentiometern unterscheidet man u.a. zwischen linearer und logarithmischer **Kennlinie**. Je nach Kennlinie ist der eingestellte Widerstandswert linear oder logarithmisch vom zurückgelegten Weg des Abgriffes abhängig. Für die Einstellung der Lautstärke eines Radios wird ein Potentiometer mit logarithmischer Kennlinie benutzt, da das menschliche Ohr die selbe Kennlinie besitzt. Würde ein Poti mit linearer Kennlinie verwendet werden, so würde man beim Drehen am Poti lange Zeit keine Veränderung der Lautstärke wahrnehmen, und der Bereich zur Einstellung der Lautstärke würde sich auf einen sehr kleinen Drehwinkel beschränken.

Nach den Bauformen kann man Potentiometer unterscheiden in:

- groß und hochbelastbar, mit Widerstandsdraht bewickelt
- klein, mit Kohlebahn (z.B. zur Lautstärke- oder Klangeinstellung)
- Miniaturausführung (Trimmer).

Potentiometer mit Drehachse werden im Gerät festgeschraubt, die Bedienachse mit aufgebrachtem Drehknopf ist von außen zugänglich.

Trimmer werden normalerweise in die Schaltung eingelötet. Die Bedienung ist nur beim Abgleichvorgang (evtl. bei geöffnetem Gehäuse) notwendig.

In der Praxis ist bei Potentiometern zu beachten, daß in der Nähe der beiden Endstellungen des Schleifers der Widerstandswert zwischen festem Anschluß und Abgriff sehr klein wird. In der Endstellung sind fester Anschluß und Abgriff kurzgeschlossen. Bei kleinen Widerstandswerten können große Ströme fließen und das Potentiometer beschädigen, wenn die Spannung zwischen beiden Anschlüssen zu groß ist.

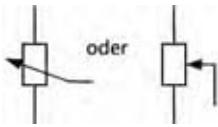


Abb. 54: Schaltzeichen für Potentiometer (links) und Trimmer (rechts)

Ein Potentiometer kann als stufenlos verstellbarer Spannungsteiler geschaltet werden. Liegt an den festen Anschlüssen die Spannung U , so kann am Schleifer gegen einen festen Anschluß eine einstellbare Teilspannung U_1 von 0 Volt bis zur Gesamtspannung U abgegriffen werden.

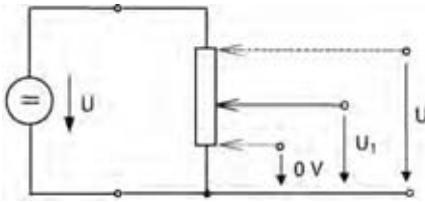


Abb. 55: Potentiometer in Spannungsteilerschaltung

3.2.4.3 Spezielle Widerstände

Außer Festwiderständen und Potentiometern gibt es noch andere Widerstände mit speziellen Eigenschaften für besondere Anwendungszwecke.

Heißleiterwiderstände

Sie werden auch NTC-Widerstände genannt (NTC = Negative Temperature Coefficient = negativer Temperaturkoeffizient). Heißleiter leiten um so besser, je höher die Temperatur ist, der Widerstand nimmt mit steigender Temperatur stark ab. Da sich die Stromstärke durch einen Heißleiter in Abhängigkeit von der Umgebungstemperatur ändert, kann er z.B. zur Temperaturmessung verwendet werden. Eine andere Anwendung ist die Unterdrückung von Stromspitzen beim Einschalten eines Verbrauchers. Der Widerstand sinkt erst allmählich, wenn sich das Bauteil durch den Stromfluß erwärmt.

Kaltleiterwiderstände

Sie werden auch PTC-Widerstände genannt (PTC = Positive Temperature Coefficient = positiver Temperaturkoeffizient). Der Widerstand von Kaltleitern nimmt mit steigender Temperatur zu. Dieses Verhalten ist gerade umgekehrt zu Heißleitern.

Spannungsabhängige Widerstände

Sie werden auch VDR-Widerstände genannt (VDR = Voltage Dependant Resistor). Gebräuchlich ist die Bezeichnung **Varistor**. Bei diesen Bauteilen nimmt der Widerstandswert mit wachsender Spannung stark ab. Sie werden parallel zu anderen Bauteilen geschaltet und schützen diese vor zu hohen Spannungen (Überspannungen) bzw. Spannungsspitzen.

Fotowiderstände

Sie werden auch LDR-Widerstände genannt (LDR = Light Dependant Resistor). Der Widerstandswert ändert sich bei Beleuchtung mit Licht oder Infrarotstrahlung. Es kann ein Schaltvorgang in Abhängigkeit der Lichtstärke realisiert werden (z.B. ein »Dämmerungsschalter«, welcher bei Einbruch der Nacht eine Beleuchtung einschaltet).

Dehnungsmeßstreifen

Der Widerstand eines Drahtes wird größer, wenn er durch Dehnung verlängert, und gleichzeitig sein Querschnitt verringert wird. Auf diesem Prinzip beruht die Wirkungsweise von Dehnungsmeßstreifen. Sie werden zur Messung von mechanischen Dehnungen (Verformungen) und Kräften verwendet.

3.2.5 Zusammenfassung: Der ohmsche Widerstand

1. Jeder elektrische Leiter hat einen bestimmten Widerstandswert.
2. Der Widerstandswert ist abhängig von der Temperatur.
3. Ein Widerstand begrenzt die Stromstärke in einem Stromkreis nach dem Ohmschen Gesetz.
4. Fließt durch einen Widerstand Strom, so fällt am Widerstand eine Spannung ab.
5. Den Widerstand als Bauteil kann man in feste und veränderbare Widerstände (Potentiometer, Trimmer) einteilen.
6. Festwiderstände werden nur in Normwerten hergestellt. Die Kennzeichnung des Widerstandes mit seinem Wert in Ohm erfolgt häufig durch einen Farbcode. Bei Festwiderständen unterscheidet man bedrahtete und SMD - Bauteile.
7. Ein Widerstand (Bauteil) darf höchstens mit seiner Nennbelastbarkeit betrieben werden. Die Belastbarkeit verringert sich mit steigender Temperatur (Derating).

3.3 Der Kondensator

3.3.1 Wirkungsweise des Kondensators

Wie bereits in Abschnitt 1.2.1 am Beispiel einer hohlen Metallkugel gezeigt, kann ein isolierter Leiter eine elektrische Ladung aufnehmen. Ein Bauelement mit der Fähigkeit elektrische Ladung zu speichern heißt **Kondensator**. Ein Kondensator ist ein **Ladungsspeicher**. Indem ein Kondensator elektrische Ladungen getrennt hält, speichert er elektrische Energie.

Das Fassungsvermögen für die Größe der gespeicherten Ladung wird als **Kapazität** bezeichnet.

Folgende schematische Darstellungen sollen die grundlegende Wirkungsweise eines Kondensators verdeutlichen.

Anmerkung: Gezeichnet sind nur die negativen Ladungsträger.

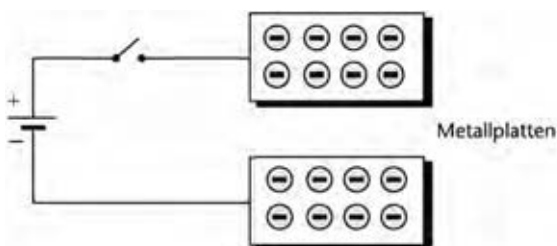


Abb. 56: Ungeladene Platten eines Kondensators

In Abb. 56 sind zwei Metallplatten, eine Batterie und ein Schalter dargestellt. Zwischen den Metallplatten befindet sich Luft als Isolator. Der Schalter ist geöffnet, die Batterie ist somit nicht an beide Metallplatten angeschlossen. Da nur ein Pol der Spannungsquelle an eine Metallplatte angeschlossen ist, können keine Elektronen von der Spannungsquelle abfließen. Auf beiden Platten sind die Elektronen gleichmäßig verteilt, die Platten sind elektrisch neutral.

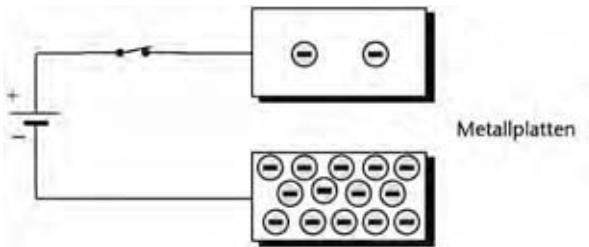


Abb. 57: Geladene Kondensatorplatten

Wird der Schalter geschlossen (Abb. 57), so fließen Elektronen vom Minuspol der Spannungsquelle auf die mit diesem Pol verbundene Metallplatte. Da diese Platte mit Luft als Isolator umgeben ist und kein geschlossener Stromkreis existiert, sammeln sich die Elektronen auf ihr an. Von der mit dem Pluspol der Spannungsquelle verbundenen Platte werden Elektronen »abgesaugt« und durch die »Elektronenpumpe« (Batterie) ebenfalls auf die mit dem Minuspol verbundene Platte transportiert. Durch die unterschiedliche Ladung beider Platten entsteht zwischen ihnen ein Spannungsunterschied. Die **Ladungstrennung** läuft solange ab, bis die Spannung zwischen beiden Platten der Spannung der Spannungsquelle gleich ist. Der durch die beiden Platten gebildete Kondensator ist dann vollständig aufgeladen. Der während des Ladevorganges fließende Strom wird **Ladestrom** genannt.

Der Ladungsunterschied beider Platten bleibt auch dann bestehen, wenn der Schalter bei geladenem Kondensator geöffnet und damit die Spannungsquelle ausgeschaltet wird. Zwischen beiden (isolierten) Platten kann kein Ladungsausgleich stattfinden.

Ein Kondensator kann durch Anlegen einer Gleichspannung geladen werden und Elektrizität speichern.

Werden die beiden Platten des geladenen Kondensators mit einem Draht oder einem Widerstand verbunden, so fließen solange Elektronen von der negativ geladenen Platte zur positiven Platte, bis der elektrisch neutrale Anfangszustand beider Platten erreicht ist. Der Kondensator ist durch diesen Ladungsausgleich dann vollständig entladen. Während des Entladevorgangs fließt ein Strom, der **Entladestrom** genannt wird.

Ein Kondensator ist

- während des Ladens ein Verbraucher
- geladen oder während des Entladens eine Spannungsquelle.

3.3.2 Größe für die Kapazität

Je stärker beim Laden eines Kondensators die »Elektronenpumpe« wirkt (d.h. je höher die Spannung der ladenden Spannungsquelle ist), um so mehr Ladung wird getrennt. Die Ladungs-

menge, welche in einem Kondensator gespeichert werden kann, ist also proportional zur Höhe der angelegten Gleichspannung. Es gilt: $Q \sim U$

Die in einem Kondensator speicherbare Ladungsmenge ist außerdem vom Aufbau des Kondensators abhängig, welcher das »Fassungsvermögen« für die zu speichernde Ladung bestimmt. Dieses »Fassungsvermögen« wird als Kapazität »C« des Kondensators bezeichnet.

Mit der Proportionalitätskonstanten »C« ergibt sich somit die Ladung eines Kondensators:

$$Q = C \cdot U$$

Die Kapazität eines Kondensators folgt daraus aus:

Gl. 16: Kapazität als Quotient von Ladung und Spannung

$$C = \frac{Q}{U}$$

Die Einheit der Kapazität ist das Farad¹³ (F).

Das Einheitenzeichen für die Kapazität ist »F« (Farad), das Formelzeichen ist »C«.

Ein Farad ist definiert als: $1\text{F} = \frac{1\text{C (Coulomb!)}}{1\text{V}} = \frac{1\text{As}}{1\text{V}}$ (Man beachte: $\frac{\text{As}}{\text{V}} = \frac{\text{s}}{\Omega}$)

Anmerkung: Es sei erwähnt, daß der Begriff Kapazität oft für das Bauteil Kondensator verwendet wird.

Wichtige Anmerkung:

Eine Kapazität kann nicht nur wie bei einem Kondensator absichtlich, sondern auch unabsichtlich gebildet werden. So stellt jede elektrische Leitung eine unbeabsichtigte Kapazität dar, die in technischen Aufbauten im allgemeinen unerwünscht ist und störend sein kann. Reale Bauelemente sind mit sogenannten **parasitären Kapazitäten** behaftet. Bei einem Widerstand kann dies z.B. durch ein Ersatzschaltbild aus Parallelschaltung eines reinen Ohmwiderstandes mit seiner **Eigenkapazität** berücksichtigt werden.

Schaltzeichen des Kondensators: Abb. 65, S.82



Abb. 58: Idealer Ohmwiderstand (links) und mit Eigenkapazität (rechts)

3.3.3 Plattenkondensator

Die in 3.3.1 gezeigte Anordnung diente zur prinzipiellen Erläuterung der Wirkungsweise eines Kondensators. Nun wird der Plattenkondensator als Beispiel eines realen Kondensators behandelt.

Ein Kondensator besteht grundsätzlich aus zwei leitenden Flächen (den Belägen oder **Elektroden**), die durch eine isolierende Zwischenschicht, dem **Dielektrikum**, elektrisch voneinander getrennt sind.

¹³ Michael FARADAY (1791 - 1867), englischer Physiker

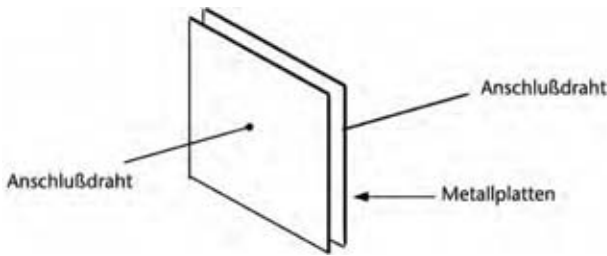


Abb. 59: Der Plattenkondensator

Stellt man zwei Metallplatten in geringem Abstand gegenüber, so erhält man ein einfaches Beispiel eines Kondensators (Abb. 59). Zur Isolierung zwischen beiden Platten dient (als Dielektrikum) Luft.

Die Kapazität des Plattenkondensators (bzw. die Ladungsmenge, welche gespeichert werden kann) ist abhängig von der Größe der Platten und von deren Abstand.

Je größer die Platten sind, desto mehr Ladungsträger können auf einer Platte angesammelt werden. Ist »A« die Fläche einer Platte, so gilt: $C \sim A$

Je kleiner der Abstand der Platten ist, desto größer ist die Kapazität des Plattenkondensators. Die Ladungen mit gleichem Vorzeichen auf einer Platte stoßen sich ab. Diese Abstoßungskräfte werden um so mehr aufgehoben, je näher Ladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen und damit anziehender Wirkung auf der anderen Platte sind.

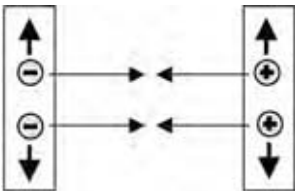


Abb. 60: Bei großem Plattenabstand stoßen sich die gleichnamigen Ladungen auf den Platten stark ab, da diese Abstoßungskräfte nur schwach von den Anziehungskräften der ungleichnamigen Ladungen kompensiert werden.

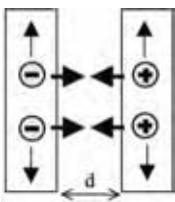


Abb. 61: Bei kleinem Plattenabstand sind die Abstoßungskräfte der gleichnamigen Ladungen auf den Platten schwächer, da sie durch die Anziehungskräfte der ungleichnamigen Ladungen stark kompensiert werden.

Je kleiner der Plattenabstand ist, desto weniger stoßen sich die gleichnamigen Ladungen auf einer Platte ab, und desto mehr Ladung kann auf den Platten gespeichert werden (desto größer ist die Kapazität des Kondensators).

Ist »d« der Plattenabstand, so gilt: $C \sim \frac{1}{d}$ und mit der Fläche »A« einer Platte: $C \sim \frac{A}{d}$

Führt man die Proportionalitätskonstante ϵ ein, so erhält man die Formel für die Kapazität eines Plattenkondensators:

Gl. 17: Kapazität des Plattenkondensators

$$C = \epsilon \cdot \frac{A}{d}$$

C = Kapazität
 A = Fläche **einer** Platte
 d = Plattenabstand
 ϵ = Konstante

Die Bedeutung der Konstanten ϵ soll im folgenden untersucht werden.

3.3.4 Dielektrikum

Befindet sich ein Isolierstoff zwischen zwei ungleichnamigen, getrennten Ladungen (z.B. zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten), so wird er als Dielektrikum bezeichnet. Die Ladungsträger können sich in einem Isolierstoff nicht frei bewegen; somit ist kein Stromfluß möglich. Durch die elektrischen Anziehungskräfte der äußeren Ladungen auf den Kondensatorplatten werden jedoch die Ladungsträger innerhalb der Atome bzw. Moleküle des Isolierstoffes elastisch verschoben. Die Atome bzw. Moleküle werden verformt. Im Isolierstoff entstehen dadurch **Dipole**. Ein Dipol besteht aus zwei betragsmäßig gleichen Ladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen in einem bestimmten Abstand voneinander.

Die verschiedenen Dielektrika können in unpolare und polare Stoffe eingeteilt werden.

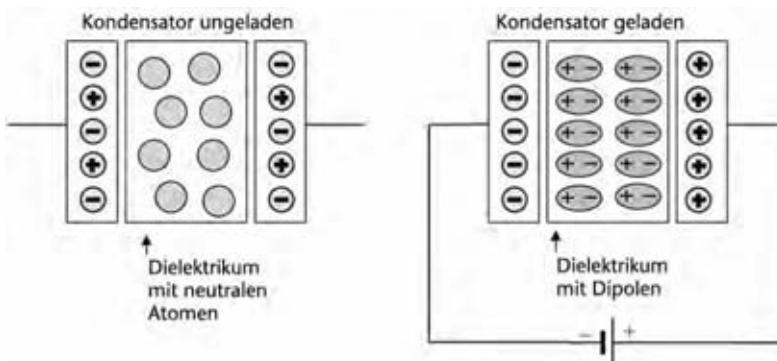


Abb. 62: Bildung und Ausrichtung von Dipolen bei unpolaren Stoffen

Bei den **unpolaren Stoffen** sind die Atome ohne die Einwirkung äußerer, elektrischer Anziehungskräfte keine Dipole. Erst zwischen getrennten Ladungen werden die Atomkerne und die Elektronenschalen in entgegengesetzter Richtung verschoben. Es entstehen Dipole durch deformierte Atome, welche sich entsprechend der Anziehungskräfte ausrichten.

Bei den **polaren Stoffen** (z.B. Wasser) liegen die Atome oder Moleküle von Natur aus als Dipole vor, sie haben ein positives und ein negatives Ende. Ohne äußere Kräfte ist die Polarität dieser Dipole regellos orientiert. Zwischen getrennten Ladungen richten sich die Dipole entsprechend der Anziehungskräfte aus und werden wie bei den unpolaren Stoffen zusätzlich deformiert.

Die Bildung von Dipolen in einem Dielektrikum wird als **dielektrische Polarisation** bezeichnet. Verschwindet der Grund für die Polarisation (z.B. durch Entladen des Kondensators), so verschwindet auch die Polarisation. Natürliche Dipole bleiben dann selbstverständlich erhalten, nur ihre zusätzliche Deformation und Ausrichtung verschwindet.

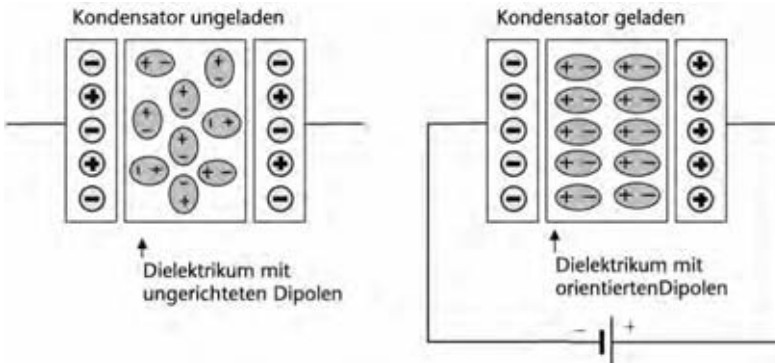


Abb. 63: Ausrichtung von Dipolen bei polaren Stoffen

Betrachten wir zunächst nur die negativ geladene Kondensatorplatte, in Abb. 63 rechts. Die negativen Ladungen der Kondensatorplatte und die positiven Ladungen der Dipole im Dielektrikum ziehen sich an. Dadurch stoßen sich die negativen Ladungen auf der Kondensatorplatte gegenseitig weniger ab. Obwohl die Ladespannung des Kondensators gleich bleibt, können sich jetzt mehr negative Ladungsträger auf der Kondensatorplatte ansammeln, die Kapazität des Kondensators wird erhöht. In gleicher Weise, nur mit umgekehrten Polaritäten, ist die positiv geladene Kondensatorplatte zu betrachten.

Ein Dielektrikum zwischen den Platten eines Kondensators erhöht die Kapazität des Kondensators.

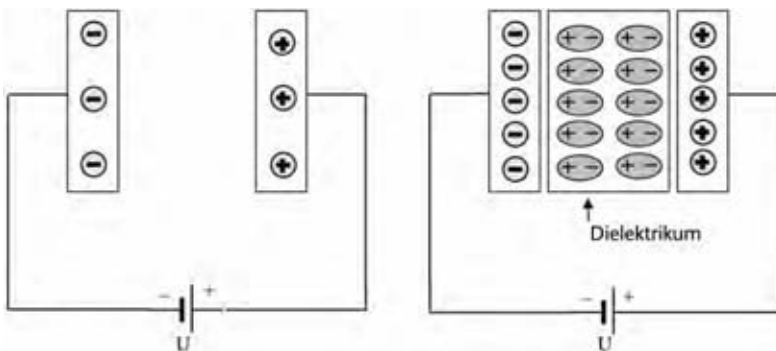


Abb. 64: Erhöhung der Kapazität eines Kondensators durch ein Dielektrikum

Die Kapazität des Kondensators wird größer, je stärker die Dipolbildung (Polarisation) im Dielektrikum ist. Ein Maß für die Polarisation ist die Dielektrizitätskonstante ϵ . Da die Stärke

der Polarisierung im Dielektrikum je nach Stoffart unterschiedlich ist, hängt der Zahlenwert von ϵ hauptsächlich von der Art des Materials ab, welches das Dielektrikum bildet.

Anmerkung: Bei manchen Stoffen ist ϵ und somit die Kapazität von der Spannung abhängig.

Bildet ein Vakuum das Dielektrikum, so kann keine Polarisierung auftreten, da kein Stoff zwischen den Kondensatorplatten vorhanden ist. Die für ein Vakuum gültige Dielektrizitätskonstante wird mit ϵ_0 bezeichnet und heißt **absolute Dielektrizitätskonstante, Dielektrizitätskonstante des Vakuums** oder **elektrische Feldkonstante**.

Auf theoretischem Wege kann der Zahlenwert von ϵ_0 nicht ermittelt werden, sondern muß in einem Versuch gemessen werden.

Genaue Messungen ergeben für ϵ_0 den Wert:

Gl. 18: Wert der elektrischen Feldkonstanten ϵ_0

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

Für irgendeinen Stoff läßt sich die Dielektrizitätskonstante jetzt in folgender Form darstellen:

Gl. 19: Dielektrizitätskonstante eines beliebigen Stoffes

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$$

Der einheitenlose Faktor ϵ_r in Gl. 19 heißt **relative Dielektrizitätskonstante** oder **Dielektrizitätszahl**. Der Wert von ϵ_r ist je nach Polarisierungseigenschaft des verwendeten Dielektrikums unterschiedlich.

Tabelle 8 gibt die Dielektrizitätszahlen einiger Stoffe bei 20 °C an (Schichtdicke 1 mm, Folien- dicke 0,04 mm).

Tabelle 8: Dielektrizitätszahlen verschiedener Stoffe

Stoff	Dielektrizitätszahl ϵ_r
Vakuum	1,000
Luft	1,006
Glimmer	5 9
Wasser, destilliert	81
Bariumtitanat	1000 2000
Keramikmassen	< 4000

Mit Gl. 19 läßt sich die Formel $C = \epsilon \cdot \frac{A}{d}$ für die Kapazität eines Plattenkondensators jetzt anders darstellen.

Gl. 20: Formel für die Kapazität eines Plattenkondensators mit elektrischer Feldkonstante und Dielektrizitätszahl

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}$$

Aus Gl. 20 sind für den Bau von technisch verwendeten Kondensatoren wichtige Punkte ersichtlich. Um bei kleiner Bauform eine möglichst hohe Kapazität zu erhalten, muß

- die Plattenfläche möglichst groß sein,
- der Plattenabstand möglichst klein sein,
- ein Dielektrikum mit möglichst großer Dielektrizitätszahl ϵ_r verwendet werden.

Der Plattenkondensator hat in der Technik praktisch keine Bedeutung. Er wurde hier zur Erläuterung der Wirkungsweise eines Kondensators herangezogen. Das Schaltzeichen eines Kondensators leitet sich vom Plattenkondensator ab.



Abb. 65: Schaltzeichen eines Kondensators (fester Kapazitätswert)

3.3.5 Verwendungszweck von Kondensatoren

3.3.5.1 Stützen von Spannungen

Ein Kondensator kann elektrische Ladung speichern. Wird er parallel zu einem Verbraucher geschaltet, der aus einer Spannungsquelle kurzzeitige, sprungartige (**impulsförmige**) Ströme entnimmt, so kann der Kondensator die Spannungsquelle beim Aufrechterhalten der Spannung unterstützen. Der Kondensator wird dann nach seinem Einsatzzweck **Stützkondensator**, **Entkopplungskondensator** oder **Abblock-Kondensator** genannt.

In der Praxis ist dies vor allem in der Digitaltechnik (z.B. in Computerschaltungen) von Bedeutung. Dort werden Spannungen sehr schnell ein- und ausgeschaltet. Diese schnellen Umschaltvorgänge im Nanosekunden-Bereich bilden die »Ja«/»Nein«- Entscheidungen, auf deren Basis jeder Computer arbeitet. **Während** des Umschaltens fließt durch die elektronischen Schaltglieder technologisch bedingt ein relativ hoher Strom. Damit die Spannung an den Schaltgliedern bei den Stromspitzen der Umschaltvorgänge nicht zu sehr »einbricht« (unzulässig klein wird), werden den elektronischen Bausteinen in ihrer unmittelbaren Nähe Stützkondensatoren zu ihrer Spannungsversorgung parallel geschaltet. Die Stützkondensatoren bilden einen »Puffer« für den kurzzeitig hohen Strombedarf der Schaltelemente.

Folgendes Schaltbild soll den Einsatz eines Abblockkondensators erläutern.



Abb. 66: Elektronischer Schalter für Spannung (ein / aus) mit Spannungsversorgung und Abblockkondensator »C«

Der in Abb. 66 als Kasten gezeichnete elektronische Schalter ist in Wirklichkeit ein elektronischer Baustein, dessen Aufbau im Moment nicht von Bedeutung ist. Versorgt wird der elektronische Schalter von einer Spannung U mit 5 V. In unmittelbarer Nähe des elektronischen Schalters ist der Abblockkondensator »C« gezeichnet.

An seinem Ausgang wird eine umgeschaltete Spannung zwischen 0 V (aus) und ca. 5 V (ein) ausgegeben. Ein solches Signal wird **Rechteckspannung** genannt.

Die am Versorgungseingang des elektronischen Schalters anliegende Spannung U_{speise} wird in Abb. 67 gezeigt, falls der Abblockkondensator fehlt, und in Abb. 68, falls der Abblockkondensator vorhanden ist.

Da die Speisespannung des elektronischen Schalters einen bestimmten Wert (z.B. 4,75 V) nicht unterschreiten darf, können Einbrüche von U_{speise} zu einem Fehlverhalten (Störung der Rechteckspannung) führen. Dies wird durch den Abblockkondensator verhindert.

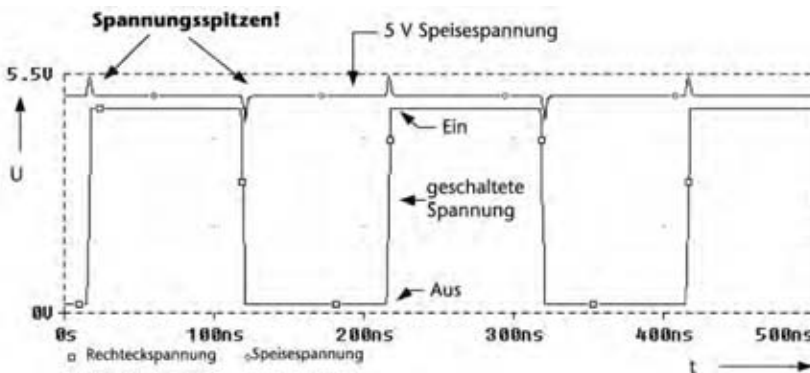


Abb. 67: Ohne Abblockkondensator hat die Speisespannung Spitzen an den Flanken der umgeschalteten Spannung

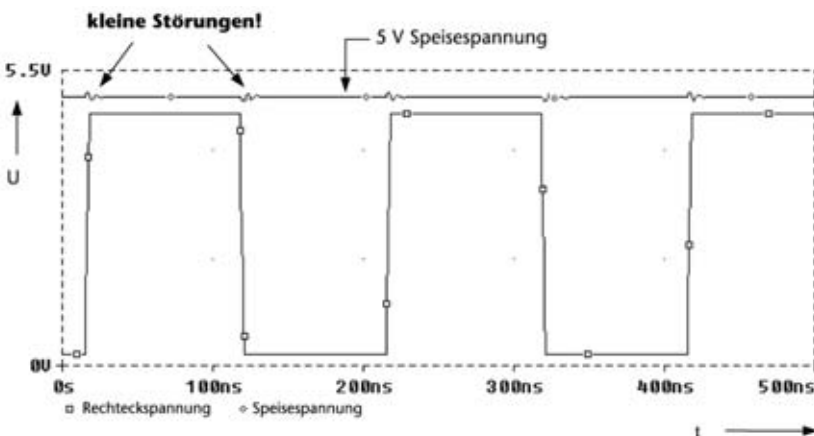


Abb. 68: Mit Abblockkondensator sind die Störungen der Speisespannung viel kleiner

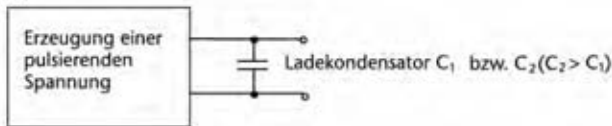
3.3.5.2 Glättung von Spannungen

Wie in 3.3.5.1 dargestellt, kann eine Spannungsquelle durch eine hohe Stromentnahme in ihrem Wert einbrechen (bei Kurzschluß wäre die Spannung 0 Volt). Ein Stützkondensator kann diese kurzzeitigen Spannungseinbrüche verkleinern.

Eine Gleichspannung kann aber auch aus anderen Gründen mit Störungen behaftet, also nicht konstant, sein.

Bei der Herstellung von Gleichspannung aus Wechselspannung entsteht eine sogenannte pulsierende Gleichspannung. Wie diese erzeugt wird, ist im Moment nicht von Interesse. Ein Kondensator wird durch die pulsierende Gleichspannung aufgeladen und versucht, deren Spannungsschwankungen auszugleichen. Dies gelingt **besser, je höher die Kapazität** des Kondensators ist, und **je kleiner die Stromentnahme** durch eine angeschlossene Last ist. Der Kondensator wird nach seinem Verwendungszweck als **Ladekondensator** bezeichnet.

Schaltbild:



Ergebnis:

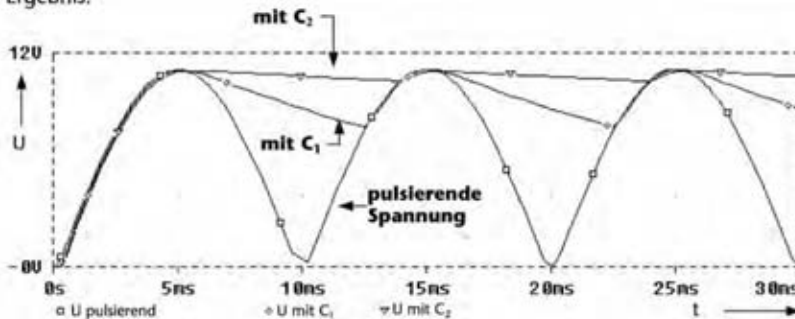


Abb. 69: Eine pulsierende Spannung wird durch einen Ladekondensator geglättet (C_2 ist größer als C_1)

3.3.5.3 Trennen von Gleich- und Wechselspannung

Liegt an einem Kondensator eine Gleichspannung, so fließt im Stromkreis kein Strom, wenn der Kondensator aufgeladen ist. Für eine am Kondensator liegende Wechselspannung gilt dies nicht.

Ein Kondensator läßt Wechselspannung durch, im Stromkreis fließt ein Wechselstrom.

Die Eigenschaft eines Kondensators, Gleichspannung zu sperren und Wechselspannung durchzulassen, soll hier für die technische Anwendung zur Trennung von Gleich- und Wechselspannung betrachtet werden.

Eine Wechselspannung, welche einer Gleichspannung überlagert (sozusagen »aufgesetzt«) ist, wird Wechselspannung mit **Offset** (= Versatz) genannt. Der Offset entspricht der Höhe der Gleichspannung.

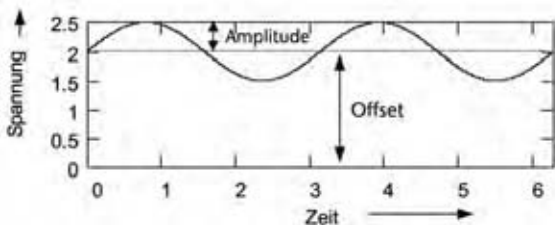


Abb. 70: Wechselspannung mit Offset

In Abb. 70 ist eine Wechselspannung mit einer Amplitude von 0,5 V und einer Offsetspannung von 2 V gezeigt. (Die Höhe einer halben Schwingung einer Wechselspannung wird als Amplitude bezeichnet.)

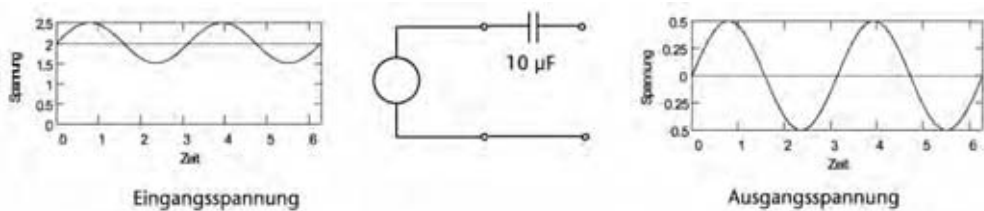


Abb. 71: Nach dem Kondensator steht reine Wechselspannung (ohne Gleichspannungsanteil) zur Verfügung

Soll die Wechselspannung von der Gleichspannung getrennt werden, so wird der Wechselspannung mit Offset ein Kondensator in Serie geschaltet.

3.3.5.4 Entstörung mittels Kondensatoren

Kondensatoren werden zur Funkentstörung eingesetzt. Sie schließen die sich über das Stromversorgungsnetz ausbreitenden, hochfrequenten Störungen von elektrischen Maschinen kurz. In einer Bohrmaschine ist z.B. ein Entstörkondensator eingebaut. Ohne diesen könnte die Bohrmaschine bei Betrieb den Rundfunk- oder Fernsehempfang eines Nachbarn stören.

3.3.6 Kondensator als Bauelement

3.3.6.1 Festkondensatoren

Kondensatoren gibt es mit Kapazitätswerten von ca. 1 pF bis zu einigen Farad. Die Beläge und das Dielektrikum von Kondensatoren ist entsprechend unterschiedlich ausgeführt.

Die Kapazität eines Kondensators ist abhängig von der Größe der sich gegenüberstehenden metallischen Flächen und von deren Abstand. Kondensatoren mit großen Kapazitätswerten würden in dieser Bauweise als Plattenkondensator viel Raum beanspruchen.

In der Praxis sind Kondensatoren deshalb z.B. als **Folienkondensatoren** (Wickelkondensatoren) aufgebaut. Zwischen zwei langen Streifen dünner Metallfolien liegt ein isolierender Streifen paraffinierten Papiers oder eine Kunststoff-Folie. Mit einem weiteren Isolierstreifen unter diesen Lagen wird das Ganze zu einem Wickel zusammengerollt. Der Wickel wird mit Vergußmasse oder mit einer Kunststoffschicht umpreßt. Die beiden leitenden Metallflächen können auch durch aufgedampftes Aluminium auf die Isolierfolien gebildet werden. Die Anschlüsse der Beläge werden als Drähte axial oder radial herausgeführt.

Als Kunststoffe werden am häufigsten Polystyrol, Polyester und Polykarbonat verwendet.

Kunststoff-Folienkondensatoren werden mit Kapazitätswerten von ca. 10 pF bis 10 μ F hergestellt.



Abb. 72: Aufbau eines Kunststoff-Folienkondensators

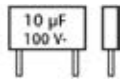
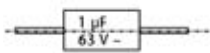


Abb. 73: Kunststoff-Kondensatoren mit axialen Anschlußdrähten (links) und radialen Anschlußdrähten (rechts)

Für Hochfrequenzanwendungen haben gewickelte Kondensatoren einige Nachteile, die in der Bauweise begründet sind. Man verwendet dann **Keramikkondensatoren**. Das Dielektrikum dieser Kondensatoren besteht aus Keramik, worauf Silber als Beläge aufgebracht ist. Die Kapazitätswerte sind sehr konstant und liegen zwischen ca. 1 pF und 50 nF. Keramikkondensatoren gibt es als flache, rechteckige oder runde Scheibenkondensatoren.

Die bisher beschriebenen Kondensatoren sind ungepolte Kondensatoren und können an Wechselspannung oder Gleichspannung betrieben werden.

Elektrolytkondensatoren besitzen große Kapazität bei kleiner Baugröße. Sie werden kurz als **Elko** bezeichnet. Es sind gepolte Kondensatoren. Sie enthalten einen Elektrolyten, z.B. eine elektrisch leitende Flüssigkeit. Ein Aluminium-Elektrolytkondensator enthält einen Wickel aus zwei Aluminiumfolien und zwei mit einem Elektrolyten getränkten Papierstreifen. Eine der beiden Aluminiumfolien ist oxidiert, die dünne, nichtleitende Oxidschicht bildet das Dielektrikum. Das Aluminium der oxidierten Aluminiumfolie bildet den einen Belag, der andere wird vom Elektrolyten gebildet. Die nichtoxidierte Aluminiumfolie dient als Zuleitung zum Elektrolyten.

Ein Elektrolytkondensator muß so angeschlossen werden, daß an der oxidierten Folie der Pluspol anliegt. Würde sie am Minuspol angeschlossen, so würden die schwachen Ströme durch das Dielektrikum die Oxidschicht zerstören.

Elektrolytkondensatoren können nur an Gleichspannung oder an Wechselspannung mit überwiegendem Gleichspannungsanteil (Offset) betrieben werden. Beim Anschluß von Elektrolytkondensatoren ist auf richtige Polung zu achten. Die Polung ist meist auf dem Gehäuse angegeben.

Bei Tantal-Elektrolytkondensatoren ist der Elektrolyt Mangandioxid. Da der Elektrolyt nicht naß, sondern fest ist, zeichnen sich diese Kondensatoren durch sehr hohe Lebensdauer, kleinste Abmessungen bei großer Kapazität und niedrigen Serienwiderstand aus.

Der Kapazitätswert, die maximal erlaubten Spannungswerte und, bei Elkos, die Polarität sind oft auf das Gehäuse des Kondensators aufgedruckt oder durch einen Farbcode angegeben.



Abb. 74: Schaltzeichen für einen Elektrolytkondensator

3.3.6.2 Veränderbare Kondensatoren

Veränderbare Kondensatoren werden als Drehkondensatoren und als Trimmkondensatoren gebaut. Sie bestehen aus zwei halbkreisförmigen Plattenpaketen mit Luft oder Kunststoff-Folie als Dielektrikum. Ein bewegliches Plattenpaket kann durch Drehen an einer Achse (beim Drehkondensator) oder an einer Einstellschraube (beim Trimmer) vollkommen in das feststehende Plattenpaket hinein- oder herausgedreht werden. Der Drehwinkel beträgt 180° . Die dabei erreichbare Kapazitätsänderung beträgt maximal einige zehn pF (Picofarad).

Drehkondensatoren werden in der Rundfunktechnik zur Senderabstimmung benutzt. Trimmkondensatoren werden zur Einstellung oder zum Ausgleich von Kapazitäten in Schaltungen benötigt.



Abb. 75: Schaltzeichen für Drehkondensator (links) und Trimmkondensator (rechts)

3.3.7 Kenngrößen von Kondensatoren

3.3.7.1 Nennspannung

Neben der Kapazität ist die **maximale Betriebsspannung** eine wichtige charakteristische Größe eines Kondensators. Die Nenngleichspannung U_N ist die maximale Spannung, welche dauernd an einem Kondensator anliegen darf.

Jedes Dielektrikum hat nur eine begrenzte Isolationsfähigkeit, der Isolationswiderstand ist nicht unendlich groß (bei Bauelementen im Bereich von einigen Gigaohm). Wird z.B. bei einem Plattenkondensator mit Luft als Dielektrikum die Spannung zu groß, so erfolgt ein Funkenüberschlag zwischen den Platten. Bei festem Dielektrikum würde ein Spannungsdurchschlag erfolgen, der den Kondensator zerstören kann.

Die Nennspannung von Kondensatoren reicht von wenigen Volt bis zu über 1000 Volt.

3.3.7.2 Kapazitätstoleranz

Herstellungsbedingt kann die Kapazität eines Kondensators je nach Kondensatortyp von seinem Nennwert um $\pm 1\%$ bis $\pm 20\%$ (und mehr) abweichen.

3.3.7.3 Kapazitätsänderung

Die Kapazität eines Kondensators hängt von dessen Arbeitstemperatur ab. Je nach Aufbau und Technologie des Kondensators ändert sich seine Kapazität im Bereich von -40 °C bis $+100\text{ °C}$ um ca. $\pm 1\text{ %}$ bis 5 % .

3.3.7.4 Ersatzschaltbild

Der endliche Isolationswiderstand des Dielektrikums wird durch einen ohmschen Widerstand R_i parallel zum idealen Kondensator berücksichtigt. R_i ist so groß, daß er meist vernachlässigt werden kann. Zuleitungs- und Kontaktierungswiderstände bilden den Serienwiderstand R_s .

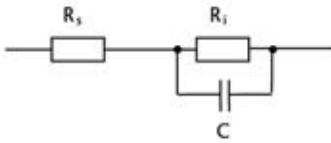


Abb. 76: Ersatzschaltbild eines realen Kondensators mit Serien- und Isolationswiderstand

3.3.8 Zusammenfassung: Der Kondensator

1. Ein Kondensator besteht aus zwei sich gegenüberstehenden, leitenden Flächen.
2. Ein Kondensator speichert elektrische Ladung. Er wird durch Gleichspannung geladen.
3. Die Kapazität eines Kondensators wird in Farad (F) angegeben.
4. Ein Dielektrikum erhöht die Kapazität eines Kondensators.
5. Ein Kondensator sperrt Gleichspannung (nach dem Aufladen).
6. Ein Kondensator läßt Wechselspannung um so besser durch, je höher die Frequenz ist.
7. Kondensatoren werden zum Stützen und Glätten von Gleichspannungen, zur Trennung von Gleich- und Wechselspannung und zur Entstörung benutzt.
8. Den Kondensator als Bauteil kann man in feste und veränderbare Kondensatoren einteilen.
9. Es gibt ungepolte und gepolte Kondensatoren. Elektrolytkondensatoren (Elkos) sind gepolte Kondensatoren (bei Anschluß an eine Gleichspannung auf richtige Polung achten).

3.4 Die Spule

Um die Wirkungsweise einer Spule zu verstehen, sind Grundkenntnisse des Magnetismus und des magnetischen Feldes erforderlich.

3.4.1 Grundlagen des Magnetismus

Ein **Magnet** ist ein Stahlstück, welches Eisen und Stahl anzieht. Die Anziehungskraft heißt **Magnetismus**. Die zu den Metallen gehörenden Elemente Eisen, Nickel und Kobalt zeigen deutliche magnetische Eigenschaften. Der Magnetismus dieser Stoffe wird daher Ferromagnetismus

(von lat. ferrum = Eisen) genannt, die Stoffe sind ferromagnetisch. Im Gegensatz hierzu sind z.B. Kupfer und Aluminium keine magnetischen Stoffe.

Außer natürlichen Magneten (Eisenerzstücke) gibt es künstliche Magnete aus Stahl oder bestimmten Legierungen in Form von z.B. Stabmagneten, Hufeisenmagneten oder Magnetnadeln.

Magnete üben aufeinander anziehende und abstoßende Kräfte aus. Ähnlich wie bei der elektrischen Ladung gibt es zwei Pole. Die **Pole** eines Magneten sind die Gebiete der stärksten Anziehung bzw. Abstoßung an den beiden Enden des Magneten.

Da die Erde selbst ein Magnet ist, richtet sich ein drehbar gelagerter Magnet (z.B. eine Magnetnadel auf einer Spitze ruhend) in geographische Nord- Südrichtung aus. Denjenigen Pol des Magneten, der nach Norden zeigt, nennt man **Nordpol**, den anderen **Südpol**.

Nähert man einander gleichnamige Pole (Nordpol, Nordpol oder Südpol, Südpol) zweier Magneten, so stellt man abstoßende Kräfte fest. Werden ungleichnamige Pole zweier Magneten einander genähert (Nord- und Südpol) , so erhält man anziehende Kräfte. Die Kräfte der Anziehung bzw. Abstoßung werden größer, je kleiner der Abstand zwischen den Polen ist.

Nähert man einem Magneten ein Eisenstück, so wird dieses selbst zu einem Magneten. Dies wird als **magnetische Influenz** bezeichnet.

Erreicht der Magnetismus eines Magneten eine bestimmte Stärke, so kann er durch weiteres Magnetisieren nur noch wenig oder gar nicht mehr verstärkt werden. Der Magnet ist dann gesättigt.

Die Ursache der magnetischen Wirkung eines Stoffes liegt in dessen speziellen Aufbau. Liegen mehrere Atome so zueinander, daß sich die Elektronen auf gleichgerichteten Bahnen bewegen, so bilden sie einen **Elementarmagneten**. Der Kreisstrom der Elektronen erzeugt ein magnetisches Kraftfeld. In den »**Weißschen Bezirken**« sind tausende von Elementarmagneten durch gegenseitige magnetische Beeinflussung gleich ausgerichtet. Wird Eisen magnetisiert, so richten sich auch die Weißschen Bezirke in gleiche Richtung aus und ergeben einen starken Magnetismus. Aus einer vollständigen Ausrichtung aller Weißschen Bezirke ist auch die Sättigung eines Magneten erklärlich.

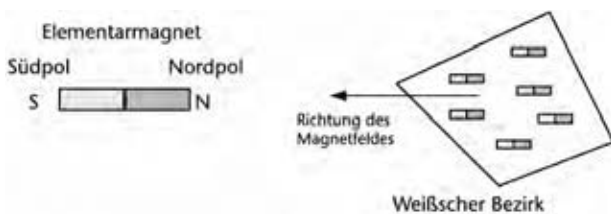


Abb. 77: Elementarmagnet (links, schematisch) und Weißscher Bezirk (rechts) eines ferromagnetischen Materials mit in gleiche Richtung ausgerichteten Elementarmagneten

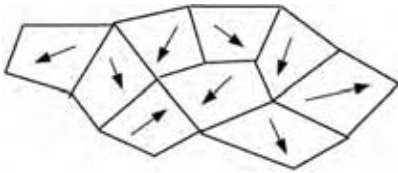


Abb. 78: Weißsche Bezirke eines nicht magnetisierten, ferromagnetischen Materials. Die Pfeile deuten die gleiche Ausrichtung der Elementarmagnete in einem Weißschen Bezirk an.

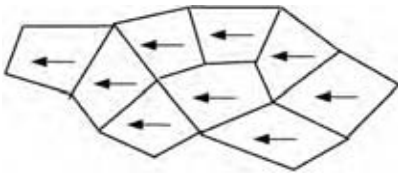
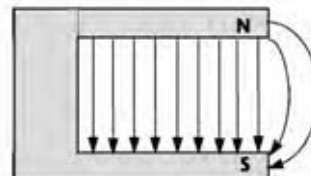
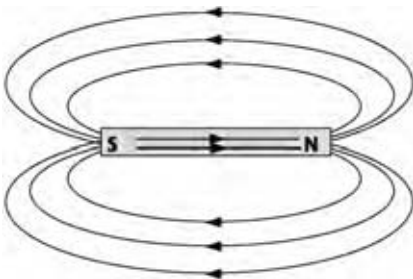


Abb. 79: Weißsche Bezirke nach der Magnetisierung des Materials

Aus dem stofflichen Aufbau als Ursache der magnetischen Wirkung ist auch folgende Aussage verständlich: Es gibt keine magnetischen Einzelpole, sondern nur vollständige Magnete mit Nord- und Südpol (magnetische Dipole). Die kleinsten Dipole eines Magneten nennt man Elementarmagnete.

Während ein elektrischer Dipol in zwei freie, ungleichnamige elektrische Ladungen zerlegt werden kann, ist es unmöglich, einen magnetischen Dipol in freie Pole aufzuspalten. Beim Magnetismus gibt es auch keinen Leitungsvorgang, der mit dem Transport von Ladung, wie beim elektrischen Strom, verglichen werden könnte. Die magnetische Wirkung beruht auf der kreisförmigen Bewegung der Elektronen, den »Elementarströmen«. Auch in der Umgebung eines stromdurchflossenen Leiters ist stets eine magnetische Kraftwirkung feststellbar.

Der Raum, in dem magnetische Kräfte wirksam sind, heißt **magnetisches Feld** oder Magnetfeld. Zur Veranschaulichung eines Magnetfeldes benutzt man den Begriff der **magnetischen Feldlinie**. Dies sind **gedachte** Linien, entlang derer magnetische Kräfte wirken (Kraftlinien). Richtung und Dichte der Magnetfeldlinien treffen eine Aussage über magnetische Kräfte. Je dichter die Feldlinien sind, desto größer ist die magnetische Kraft, welche in Richtung einer Feldlinie wirkt. Willkürlich festgelegt wurde: Die Feldlinien verlaufen **außerhalb** eines Magneten vom Nordpol (Austritt) zum Südpol (Eintritt, Südpol wie Senke). Im inneren eines Magneten ist die Richtung der Feldlinien vom Süd- zum Nordpol. Magnetische Feldlinien sind stets in sich geschlossene Linien.



homogenes (gleichmäßiges) Feld zwischen den Schenkeln (parallele Feldlinien)

Abb. 80: Feldlinienbilder eines Stabmagneten (links) und eines Hufeisenmagneten (rechts)

3.4.2 Zusammenfassung: Grundlagen des Magnetismus

1. Ferromagnetische Stoffe zeigen deutliche magnetische Eigenschaften.
2. Es gibt zwei Arten magnetischer Pole, den Nordpol und den Südpol.
3. Gleichnamige magnetische Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an (Kraftwirkung des Magnetismus).
4. Je kleiner der Abstand der magnetischen Pole ist, um so größer sind die magnetischen Kräfte.
5. Einzelne magnetische Pole gibt es nicht.
6. Die Kreisströme der Elektronen bilden Elementarmagnete. In den Weißschen Bezirken sind die Elementarmagnete in gleiche Richtung ausgerichtet.
7. Beim Magnetisieren werden die Weißschen Bezirke in gleicher Richtung ausgerichtet.
8. Das Magnetisieren eines ferromagnetischen Stoffes durch einen anderen Magneten nennt man magnetische Influenz.
9. Ein Magnetfeld ist ein Raum, in dem magnetische Kräfte wirksam sind. Die Kräfte werden durch gerichtete Feldlinien veranschaulicht.
10. Außerhalb eines Magneten verlaufen die Feldlinien vom Nord- zum Südpol, innerhalb eines Magneten vom Süd- zum Nordpol.
11. Magnetische Feldlinien sind stets in sich geschlossen.

3.4.3 Elektromagnetismus

Bewegte elektrische Ladung ruft stets ein Magnetfeld hervor. Ein gerader, stromdurchflossener Leiter ist von einem ringförmigen Magnetfeld umgeben. Die Richtung des Magnetfeldes ist von der Stromrichtung abhängig. Wenn der abgespreizte Daumen der rechten Hand in die technische Stromrichtung (von Plus nach Minus) zeigt, so zeigen die gekrümmten Finger, die den Leiter umschließen, in Richtung des Magnetfeldes. Dies ist die **Rechte-Hand-Regel**.

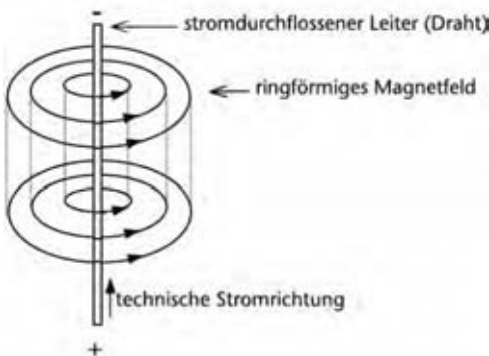


Abb. 81: Magnetfeld eines geraden stromdurchflossenen Leiters

Der Leiter steht senkrecht zu der Ebene der konzentrischen, kreisförmigen Feldlinien. Die Richtung der Feldlinien kann man sich auch mit der Schraubenregel merken. Dreht man eine

Schraube mit Rechtsgewinde (oder einen Korkenzieher) in Richtung des Stromes, so gibt die Drehrichtung die Richtung der Feldlinien an.

Das Magnetfeld ist in der Nähe des Leiters am stärksten und wird nach außen immer schwächer.

Die einzelnen Ringe in Abb. 81 stellen nur einen Ausschnitt des Magnetfeldes dar, welches den stromdurchflossenen Leiter umgibt. Eigentlich müßte man sich das Magnetfeld als unendlich viele konzentrische Zylinder vorstellen, welche den Leiter in seiner gesamten Länge umschließen. Je weiter man sich vom Leiter entfernt, um so schwächer ist die magnetische Kraftwirkung auf der Oberfläche eines dieser Zylinder.

Bei einer zylinderförmigen Drahtspule heben sich die Magnetfelder der einzelnen Drahtwindungen auf. Dadurch entsteht im Inneren der Spule ein homogenes Magnetfeld mit parallelen Feldlinien (vorausgesetzt die Spule ist lang genug). Das Magnetfeld ist dem eines Stabmagneten ähnlich.

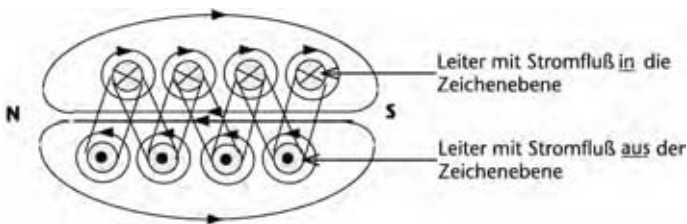


Abb. 82: Schnitt durch eine stromdurchflossene Spule mit Magnetfeld

Die Darstellung des Stromflusses kann man sich mit folgender Hilfe merken:

Der Richtung des Stromflusses wird ein Pfeil zugeordnet. Fließt der Strom aus der Zeichenebene heraus, so sieht man im Drahtquerschnitt die Pfeilspitze als Punkt (auf sich zukommen):



Fließt der Strom in die Zeichenebene hinein, so sieht man den Pfeil von hinten:



3.4.4 Wirkungsweise der Spule

3.4.4.1 Magnetwirkung des Stromes

Eine Spule besteht aus mehreren Schleifen eines Leiters. Wird eine Spule von Gleichstrom durchflossen, so wird ein in der Nähe befindliches Eisenstück angezogen. Den Raum, in dem die magnetische Kraft wirkt, nennt man magnetisches Kraftfeld oder kurz **magnetisches Feld**.

Eine von Gleichstrom durchflossene Spule bildet einen Elektromagneten.

Allgemein gilt: Bei jedem stromdurchflossenen Leiter kann in seiner Umgebung eine magnetische Wirkung beobachtet werden. Magnetismus ist stets eine Begleiterscheinung elektrischen Stromes.

Durchflutung

Die magnetische Wirkung einer Spule wird größer, je größer die Stromstärke ist und je mehr Windungen die Spule hat. Stromstärke mal Windungszahl nennt man **Durchflutung**.

Gl. 21: Durchflutung als Produkt aus Strom und Windungszahl

$$\Theta = I \cdot N$$

Θ = Durchflutung in A

I = Stromstärke in A

N = Windungszahl

Man beachte: Obwohl die Einheit der Durchflutung die Einheit der Stromstärke ist, sind Durchflutung und Stromstärke verschiedene physikalische Größen.

Magnetische Feldstärke

Für die Stärke des Magnetfeldes ist nicht nur die Durchflutung, sondern auch die Länge des Feldes im Inneren der Spule maßgebend. Je länger die Spule ist, desto weiter liegen Nord- und Südpol voneinander entfernt und desto schwächer ist das Feld zwischen beiden Magnetpolen. Je kürzer das magnetische Feld und je größer die Durchflutung ist, desto größer ist die **magnetische Feldstärke**.

Gl. 22: Die magnetische Feldstärke

$$H = \frac{\Theta}{l}$$

H = magnetische Feldstärke in $\frac{A}{m}$

Θ = Durchflutung in A

l = Länge der Spule in m

Magnetische Flußdichte

Für Spulen ist die **magnetische Flußdichte** eine wichtige Größe.

Gl. 23: Die magnetische Flußdichte bei der Luftspule

$$B = \mu_0 \cdot H$$

B = magnetische Flußdichte in $T = \frac{Vs}{m^2}$

μ_0 = magnetische Feldkonstante

H = magnetische Feldstärke in $\frac{A}{m}$

Die **magnetische Flußdichte** gibt die **Wirkung eines Magnetfeldes** an. Gl. 23 gilt nur für »lange« Spulen (Durchmesser : Länge $\leq 1 : 10$) ohne ferromagnetischen Kern (Luftspulen). Die Konstante μ_0 wird als **magnetische Feldkonstante des leeren Raumes**, als **absolute Permeabilität des leeren Raumes** oder als **Induktionskonstante** bezeichnet.

Ihr Zahlenwert $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 4\pi 10^{-7} \text{ Vs/Am} \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$ ist durch die Definition des Ampere exakt festgelegt (die Herleitung dieses Wertes erfolgt hier nicht).

Gl. 24: Wert der Induktionskonstanten μ_0

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

Die Einheit für die magnetische Flußdichte ist Tesla¹⁴ (T).

Das Einheitenzeichen für die magnetische Flußdichte ist »T«, das Formelzeichen ist »B«.

Ein Tesla ist definiert als: $1\text{T} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$

Bei Spulen mit ferromagnetischem Kern wird das Magnetfeld durch das Kernmaterial besser geleitet als durch Luft. Für die magnetische Flußdichte ergibt sich:

Gl. 25: Die magnetische Flußdichte einer Spule mit Kern

$$B = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot H$$

B = magnetische Flußdichte in T

μ_r = Permeabilitätszahl

μ_0 = magnetische Feldkonstante

H = magnetische Feldstärke in $\frac{\text{A}}{\text{m}}$

Die Permeabilität gibt an, wie gut ein Material das Magnetfeld leitet. Die relative magnetische Permeabilität oder **Permeabilitätszahl** μ_r ist der Faktor, um den die magnetische Flußdichte durch das Kernmaterial (bei gleicher magnetischer Feldstärke) gegenüber Luft erhöht wird. Die Permeabilitätszahl μ_r ist einheitenlos. Für Luft gilt: $\mu_r = 1$

Bei Spulen **mit** Kern ist der Zusammenhang zwischen der Flußdichte und der Feldstärke **nicht** linear, da die Permeabilitätszahl von der Feldstärke abhängt. Die Permeabilitätszahl ist also nur so lange eine Materialkonstante, solange zwischen Flußdichte und Feldstärke ein linearer Zusammenhang besteht.

Dies soll durch die Magnetisierungskurve (Hystereseschleife) von Eisen erklärt werden.

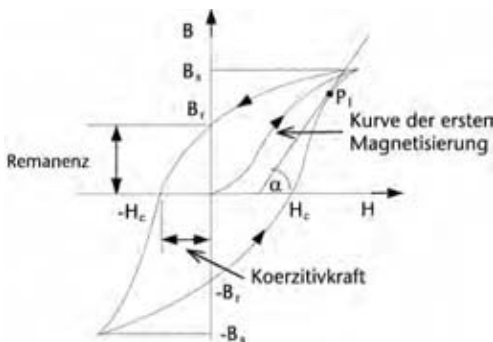


Abb. 83: Hystereseschleife eines ferromagnetischen Stoffes

¹⁴ Nicola TESLA (1856 - 1943), kroatischer Physiker

Wird Eisen zum ersten Mal magnetisiert, so durchläuft die Funktion $B_{(H)}$ die Kurve der ersten Magnetisierung bis zur Sättigung (bis praktisch alle Weißschen Bezirke ausgerichtet sind). Dies ist bei der Flußdichte B_s der Fall. Wird anschließend die Feldstärke H auf Null reduziert, so bleibt im Eisen eine bestimmte magnetische Flußdichte B_r erhalten, die **Remanenz** genannt wird. Das Eisen bleibt somit zu einem Teil magnetisch. Um die Remanenz zu beseitigen, muß eine Feldstärke mit umgekehrtem Vorzeichen $-H_c$ (durch einen Strom in die umgekehrte Flußrichtung) erzeugt werden. Diese, zur vollständigen Entmagnetisierung erforderliche Feldstärke, nennt man **Koerzitivkraft** (des Eisens). Magnetisiert man in diese Richtung weiter, so erhält man bei $-B_s$ wieder die Sättigung, und über $-B_r$ wiederholt sich der Vorgang.

Der Tangens des Winkels α , den die Tangente an der Hystereseschleife in einem Punkt P_1 mit der Abszisse (H-Linie) bildet, ergibt die Permeabilität:

$$\mu = \tan(\alpha) = \frac{\Delta B}{\Delta H}$$

Durch das »Umdrehen« der Elementarmagnete entsteht Wärme (Ummagnetisierungsverluste). Die von der Hystereseschleife umschlossene Fläche ist ein Maß für die Höhe der Ummagnetisierungsverluste.

Bei Wechselstrom ändert sich Größe und Richtung periodisch, die Hystereseschleife wird bei Wechselstrom ständig durchlaufen.

In Metallteilen werden durch Magnetfeldänderungen Spannungen induziert, die durch den niedrigen Widerstand der Metallteile Kurzschlußströme bilden. Die Stromwege liegen dabei nicht genau fest, deshalb spricht man von **Wirbelströmen**. Um die Wärmeverluste durch Wirbelströme möglichst klein zu halten, werden bei Spulen und Transformatoren die Eisenkerne in gegenseitig isolierte Bleche unterteilt. Da Ferritkerne zwar magnetische Eigenschaften aufweisen, aber gleichzeitig Isolatoren darstellen, sind bei ihnen die Wirbelstromverluste sehr gering.

In einem Blech aus Kupfer oder Aluminium entstehen durch ein Magnetfeld Wirbelströme, die ein entgegengesetztes Magnetfeld erzeugen und das erste Magnetfeld aufheben. Dies wird zur **Abschirmung von Magnetfeldern** genutzt, um eine Spule vor unerwünschten Einflüssen eines Magnetfeldes zu schützen oder zu verhindern, daß das Magnetfeld einer Spule auf seine Umgebung einwirkt.

Magnetischer Fluß

Der magnetische Fluß ist ein Maß dafür, wie stark ein Magnetfeld eine Fläche mit einem bestimmten Querschnitt durchsetzt. Denkt man sich das Magnetfeld in einzelne magnetische Feldlinien aufgeteilt, so gibt die magnetische Flußdichte an, wieviele Feldlinien durch eine bestimmte Fläche hindurchtreten.

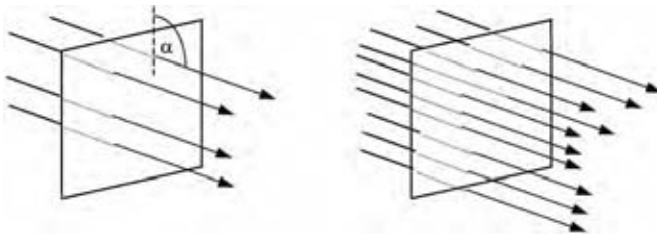


Abb. 84: Modellhafte Vorstellung des magnetischen Flusses (links klein, rechts groß)

Der magnetische Fluß ist das Produkt aus der magnetischen Flußdichte B und der Fläche A .

Ist A die Fläche der Spulenöffnung, B die magnetische Flußdichte eines homogenen Magnetfeldes und N die Anzahl der Windungen der Spule, so ist der von der Spule umfaßte magnetische Fluß Φ :

Gl. 26: Magnetischer Fluß durch eine Spule

$$\Phi = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \alpha$$

Φ = Magnetischer Fluß in Vs = Wb

N = Anzahl der Windungen der Spule

B = magnetische Flußdichte

A = Spulenquerschnittsfläche

α = Winkel zwischen Senkrechter zur Fläche und Feldlinien

Die Einheit für den magnetischen Fluß ist das Weber¹⁵ (Wb).

Ein Weber ist definiert als : 1 Wb = 1 Vs

Ist der Winkel α zwischen der Normalen (Senkrechten) der Fläche und den Feldlinien Null Grad, so ist der magnetische Fluß durch die Fläche maximal ($\cos 0 = 1$).

3.4.4.2 Induktion

Wird ein Leiter quer zu einem Magnetfeld bewegt, so treten auf die Ladungsträger (Elektronen) des Leiters Kräfte auf, welche die Ladungsträger im Leiter verschieben. Die Kraft wird Lorentzkraft¹⁶ genannt. Durch die Ladungstrennung entsteht eine Potentialdifferenz (Spannung) zwischen den Enden des Leiters. Die Spannung heißt **induzierte Spannung** oder **Induktionsspannung**. Der Vorgang wird als **Induktion** bezeichnet.

¹⁵ Wilhelm Eduard WEBER (1804 - 1891), deutscher Physiker

¹⁶ Hendrik Antoon LORENTZ (1853 - 1928), niederländischer Physiker

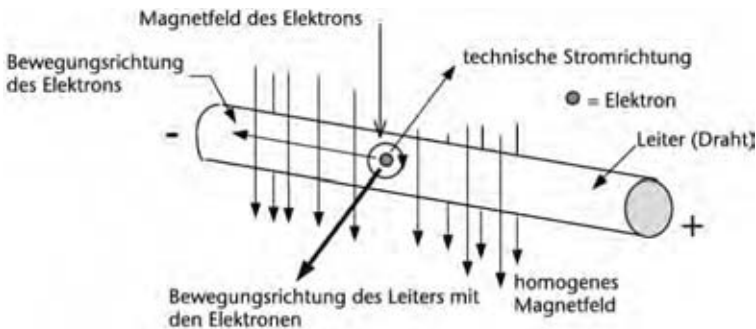


Abb. 85: Ein Leiter wird senkrecht zum Magnetfeld bewegt. Durch Lorentzkräfte wird Spannung induziert.

Elektronen werden mit dem Leiter von hinten nach vorne quer zum Magnetfeld bewegt. Die technische Stromrichtung zeigt in die Zeichenebene hinein (sie ist entgegen der Bewegungsrichtung der Elektronen). Durch das Zusammenwirken der kreisförmigen Magnetfelder der Elektronen mit dem äußeren Magnetfeld werden die Elektronen nach links gedrückt.

Zwischen den beiden Enden des Leiters entsteht eine Induktionsspannung mit dem Minuspol links und dem Pluspol rechts.

Die im Leiter induzierte Spannung kann nach folgender Formel berechnet werden:

Gl. 27: Induzierte Spannung in einem quer zum Magnetfeld bewegten Leiter

$$u_{\text{ind}} = l \cdot v \cdot B$$

u_{ind} = induzierte Spannung

l = wirksame Leiterlänge

v = konstante Geschwindigkeit des Leiters quer zum Magnetfeld

B = magnetische Flußdichte

Wird eine Leiterschleife mit N Windungen, die quer zu einem Magnetfeld liegt, mit konstanter Geschwindigkeit aus diesem herausgezogen, so ergibt sich die induzierte Spannung:

Gl. 28: Induzierte Spannung bei Änderung der wirksamen, in das Magnetfeld eintauchenden Spulenfläche

$$u_{\text{ind}} = N \cdot B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

u_{ind} = induzierte Spannung

N = Anzahl der Windungen

B = magnetische Flußdichte

ΔA = Änderung der wirksamen Fläche während Δt

Δt = Zeiteinheit

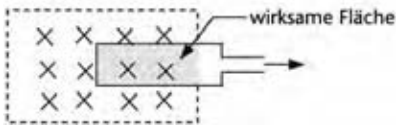


Abb. 86: Eine Leiterschleife wird aus einem Magnetfeld herausgezogen

Wichtig: Die Erzeugung einer Induktionsspannung ist auch ohne Bewegung eines Leiters möglich.

Ändert sich der magnetische Fluß durch eine ruhende Leiterschleife, so wird in dieser eine Spannung induziert.

Gl. 29: Induzierte Spannung bei Änderung der magnetischen Flußdichte

$$u_{\text{ind}} = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

u_{ind} = induzierte Spannung

N = Anzahl der Windungen der Leiterschleife

$\Delta\Phi$ = Änderung der Flußdichte während Δt

Δt = Zeiteinheit

Anders ausgedrückt: In einem zu einem Stromkreis geschlossenen Leiter entsteht ein Induktionsstrom, wenn sich die Zahl der von ihm umschlossenen Magnetlinien ändert.

Der Induktionsstrom ist stets so gerichtet, daß sein Magnetfeld der induzierenden Feldänderung entgegenwirkt (Gesetz von Lenz)¹⁷.

Dies drückt das Minuszeichen der Induktionsspannung in Gl. 29 aus, welches sich auf eine andere im Stromkreis bestehende Spannung bezieht. Die Regel von Lenz ist ein spezieller Fall eines allgemeinen Naturgesetzes, das gewöhnlich so ausgedrückt wird: Druck erzeugt Gegendruck. Bläst man einen Luftballon auf, so erzeugt die verdichtete Luft im Inneren des Luftballons einen Gegendruck, der das Aufblasen hemmt. Wird in eine zum Stromkreis geschlossene Spule ein Stabmagnet eingeführt, so entsteht durch den Induktionsstrom ein Magnetfeld, das dem Feld des Stabmagneten entgegengerichtet ist. Je schneller der Stabmagnet eingeführt wird (je größer $\Delta\Phi$ ist), um so höher ist der Induktionsstrom. Wird der Stabmagnet aus der Spule wieder herausgezogen, so dreht sich die Richtung des Induktionsstromes (und damit die Richtung des induzierten Magnetfeldes) um. Die Spule will ihr Magnetfeld aufrechterhalten.

Das Verhalten einer Spule im sich ändernden Magnetfeld kann man sich folgendermaßen merken:

Eine Spule will ihr bestehendes (oder nicht vorhandenes) Magnetfeld aufrechterhalten.

Oder: Eine Spule wirkt einer Änderung ihres Magnetfeldes entgegen.

Wird der magnetische Fluß durch eine Spule größer, so wird eine Spannung induziert. Wird der magnetische Fluß durch die Spule kleiner, so dreht sich die Polung der induzierten Spannung um. Sind beide Anschlüsse der Spule zu einem Stromkreis verbunden, so fließt jeweils ein Induktionsstrom und baut ein Magnetfeld auf, welches der induzierenden Magnetfeldänderung entgegenwirkt

¹⁷ Heinrich LENZ (1804 - 1865), deutscher Physiker

Anmerkung: Technisch genutzt wird die Induktion bei bewegten Leitern z.B. in Generatoren zur Spannungserzeugung, bei denen sich Leiter in einem Magnetfeld drehen. Die Spannungsinduktion durch Änderung des Magnetfeldes wird z.B. bei Transformatoren genutzt.

3.4.4.3 Kraft auf stromdurchflossene Leiter

Auf die Elektronen eines quer zu einem Magnetfeld bewegten Leiters werden Kräfte ausgeübt und somit im Leiter eine Spannung induziert. Andererseits wird auf einen stromdurchflossenen Leiter, der quer zu einem Magnetfeld liegt, eine Kraft ausgeübt. Die Kraft auf N in gleicher Stromrichtung durchflossene Leiter ist:

Gl. 30: Kraft auf N stromdurchflossene Leiter in einem Magnetfeld

$$F = N \cdot I \cdot l \cdot B \cdot \sin \alpha$$

F = Kraft

N = Anzahl der Leiter

I = Stromstärke

l = wirksame Länge der Leiter

B = magnetische Flußdichte

α = Winkel zwischen Stromrichtung (Leiter) und Richtung des Magnetfeldes

Ist der Winkel $\alpha = 90^\circ$ (die Leiter stehen senkrecht zu den Feldlinien), so ist die Kraft auf die Leiter maximal ($\sin 90^\circ = 1$).

Das Zustandekommen der Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter kann man sich sinnbildlich so vorstellen, daß auf die bewegten Ladungen (Elektronen) durch das Magnetfeld eine Kraft ausgeübt wird, welche diese von ihrer geraden Bahn zum Rand des Leiters hin drängen und die »Leiterwand« in Kraftrichtung »anschieben«.

Die Richtung der Kraft, welche auf die Elektronen wirkt, kann mit der **Linke-Hand-Regel** bestimmt werden. Hält man die offene linke Hand so, daß die Magnetlinien in den Handteller eintreten und die vier ausgestreckten Finger in die technische Stromrichtung (von Plus nach Minus) zeigen, so zeigt der abgespreizte Daumen in Richtung der Kraft (in die Bewegungsrichtung des Leiters).

Die gleichwertige **UVW-Regel** der rechten Hand ist bekannter als die Linke-Hand-Regel. Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der **rechten** Hand werden im rechten Winkel zueinander abgespreizt. Zeigt der Daumen der rechten Hand in die technische Stromrichtung (U = Ursache), der Zeigefinger in Richtung der Magnetlinien (V = Vermittlung), so gibt der Mittelfinger die Bewegungsrichtung (W = Wirkung) des Leiters an.

Anmerkung: Die Kraft auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld wird bei Elektromotoren technisch genutzt.

3.4.4.4 Selbstinduktion

Ändert sich der Strom durch eine Spule, so ändert sich auch der magnetische Fluß durch die Spule. Folglich wird in der Spule eine Spannung induziert. Dieser Vorgang heißt **Selbstinduktion**.

Wird der Strom durch eine Spule abgeschaltet ($\Delta\Phi$ ist sehr groß), so wird eine hohe Spannung induziert, welche so gerichtet ist, daß sie das Magnetfeld aufrecht erhalten will.

3.4.4.5 Induktivität

In einer Spule kann eine Induktion stattfinden. Man nennt sie deshalb auch Induktivität. Das Wort Induktivität wird aber auch für die Eigenschaft einer Spule benutzt, eine Induktionsspannung bestimmter Größe zu erzeugen.

Als physikalische Größe drückt die Induktivität aus, wie groß die Fähigkeit einer Spule ist, eine Induktionsspannung zu erzeugen.

Gl. 31: Induzierte Spannung bei Änderung des Stromes durch eine Spule mit der Induktivität »L«

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Das Einheitenzeichen für die Induktivität ist »H« (Henry¹⁸), das Formelzeichen ist »L«.

Ein Henry ist definiert als: $1\text{H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$ (Man beachte: $\frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \Omega\text{s}$)

Für eine langgestreckte, leere Spule gilt:

Gl. 32: Induktivität einer leeren, langen Spule

$$L = \mu_0 \cdot A \cdot \frac{N^2}{l}$$

L = Induktivität der Spule in H = $\frac{\text{Vs}}{\text{A}}$

μ_0 = magnetische Feldkonstante

A = Querschnittsfläche der Spule

N = Windungszahl der Spule

l = Länge der Spule

3.4.4.6 Induktive Kopplung

Eine induktive Kopplung zweier Spulen liegt dann vor, wenn das sich ändernde Magnetfeld der einen Spule in der anderen Spule eine Induktion hervorruft (Spannung induziert).

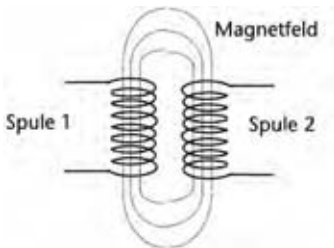


Abb. 87: Induktive Kopplung zweier Spulen (Luftkopplung)

¹⁸ Joseph HENRY (1797 - 1878), amerikanischer Physiker

Sind beide Spulen von Abb. 87 auf einen Eisenkern gewickelt, so ist die induktive Kopplung stärker.

Die Funktion des Transformators beruht auf dem Prinzip der induktiven Kopplung. Fließt durch Spule 1 ein Wechselstrom, so ändert der fließende Strom periodisch seine Richtung und das von ihm erzeugte Magnetfeld wird ebenfalls im gleichen Rhythmus umgepolt. Durch diese Änderung des Magnetfeldes wird in Spule 2 ständig eine Wechselspannung induziert.

Wichtige Anmerkung: Eine Induktivität kann nicht nur wie bei einer Spule absichtlich, sondern auch unabsichtlich gebildet werden. So stellt jede elektrische Leitung eine unbeabsichtigte Induktivität dar, die in technischen Aufbauten im allgemeinen unerwünscht ist und besonders bei Anwendungen im Hochfrequenzbereich störend sein kann.

Verlaufen Leitungen parallel und ändert sich der Strom durch eine der Leitungen sprunghaft, so können durch die induktive Kopplung der Leitungen unerwünschte Spannungsspitzen in die andere Leitung induziert werden.

Für eine Spule wird folgendes Schaltzeichen verwendet:



Abb. 88: Schaltzeichen einer Induktivität

Aufgabe 14:

Eine leere, zylinderförmige Spule ist 10 cm lang und hat einen Durchmesser von 6 mm. Ihre Induktivität beträgt $L = 10$ mH. Wieviele Windungen hat die Spule?

Lösung:

Die kreisförmige Querschnittsfläche der Spule ist $A = r^2 \cdot \pi = (3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \pi \text{ m}^2$

$$N = \sqrt{\frac{L \cdot l}{\mu_0 \cdot A}} = \sqrt{\frac{10^{-2} \cdot 10^{-1}}{4\pi 10^{-7} \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{10^{-3}}{4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{-13}}} = \sqrt{\frac{10^{10}}{36\pi^2}} = \frac{1}{6\pi} \cdot 10^4 = 5305$$

Die Spule hat 5305 Windungen.

Einheitenkontrolle: $\sqrt{\frac{\frac{Vs}{A} \cdot m}{\frac{Vs}{Am} \cdot m^2}} = 1 \Rightarrow$ Stimmt, die Windungszahl ist ohne Einheit.

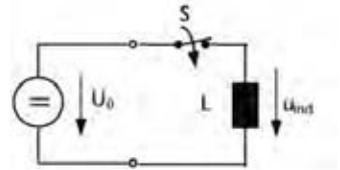
Aufgabe 15:

Eine langgestreckte, zylinderförmige Spule ohne Kern hat die Induktivität $L = 11$ mH.

Durch das Einschalten einer Gleichspannung U_0 steigt der Strom durch die Spule in 0,01 Sekunden von $I = 0$ A auf $I = 1,5$ A an. Wie groß ist die Selbstinduktionsspannung? Geben Sie eine Skizze der Schaltung an.

Lösung:

$$u_{\text{ind}} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -11 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1,5 - 0}{10^{-2}} \left(\frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot \frac{\text{A}}{\text{s}} \right) = -1,65 \text{ V}$$



Die Selbstinduktionsspannung u_{ind} wirkt der Spannung U_0 entgegen.

Anmerkung: Das Verhalten der Spule bei Schaltvorgängen im Gleichstromkreis wird in Abschnitt 7.3 ausführlich erklärt.

3.4.4.7 Induktiver Widerstand

Fließt durch eine Spule ein Gleichstrom, so ist als Widerstand nur der rein ohmsche Widerstand des Drahtes wirksam. Da sich bei Gleichstrom das Magnetfeld der Spule nicht ändert (es findet keine **Änderung** des Stromes statt), tritt somit auch keine Selbstinduktion auf, und es fließt kein Selbstinduktionsstrom, welcher der Stromänderung entgegenwirkt.

Für Gleichstrom stellt eine Spule einen rein ohmschen Widerstand dar.

Fließt Wechselstrom durch eine Spule, so ändert das Magnetfeld im Takt der Wechselspannung seine Polung. Durch die Selbstinduktion wird der Strom am Erreichen seines Höchstwertes gehindert. Je schneller dies geschieht (je höher die Frequenz des Wechselstromes ist), desto weniger Zeit bleibt dem Wechselstrom, seinen Höchstwert zu erreichen. Dies bedeutet:

Für Wechselstrom ist der Widerstand einer Spule frequenzabhängig.

Der Widerstand wird größer, je höher die Frequenz und je größer die Induktivität der Spule ist.

Vereinfacht gesagt: Eine Spule läßt Gleichstrom durch und sperrt Wechselstrom.

Die Spule hat somit umgekehrtes Verhalten wie der Kondensator, der Gleichstrom sperrt und Wechselstrom durchläßt.

3.4.5 Aufbau der Spule

Eine Spule besteht meist aus mehreren Lagen von Drahtwindungen, welche allgemein als Wicklung der Spule bezeichnet werden.

3.4.5.1 Luftspule

Eine Luftspule besteht aus Windungen bzw. Wicklungen eines Drahtes. Entweder ermöglicht die Steifheit des Volldrahtes eine freitragende Wicklungsform oder der Draht ist auf einen nicht magnetisierbaren Isolierkörper (z.B. aus Keramik oder Kunststoff) aufgewickelt. Eine Luftspule hat **keinen Eisenkern** (bzw. keinen ferromagnetischen Kern, der dem Eisen ähnliche magnetische Eigenschaften besitzt).

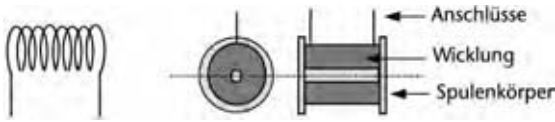


Abb. 89: Freitragende Luftspule (links) und auf einen Körper gewickelt (rechts, im Schnitt)

3.4.5.2 Spule mit Kern

Der Kern einer Spule dient zur Erhöhung der Spuleninduktivität oder bei beweglichem Kern zur Veränderung (Abgleich) der Induktivität.

Für den Kern einer Spule benutzt man je nach Anwendungszweck unterschiedliche Werkstoffe.

Ein Eisenkern aus Vollmaterial wird praktisch nur bei reinem Gleichstrombetrieb verwendet (z.B. beim Elektromagnet).

Bei Betrieb der Spule im Nieder- oder Mittelfrequenzbereich (also bei Wechselstrom) besteht der Kern aus einem Paket dünner, durch Papier oder Kunststoff voneinander isolierter Eisenbleche (**Eisenblechkern**). Auf diese Weise sind Netztransformatoren aufgebaut, mit deren Hilfe man aus den 230 Volt Netzwechselspannung im Haushalt eine niedrigere (ungefährliche) Spannung erzeugen kann. Ein Beispiel hierfür ist der Klingeltransformator.

Spulen für den Einsatz im Hochfrequenzbereich sind mit sog. **Ferritkernen** ausgestattet. Ferrite sind nichtmetallische, ferromagnetische Werkstoffe die auf keramischem Wege hergestellt werden. Ferritkerne werden aus ferromagnetischen Oxiden gepreßt und anschließend **gesintert** (die pulverförmige Substanz wird bei hoher Temperatur zu einem festen, homogenen Körper verbacken, wobei die einzelnen Körnchen miteinander verschweißen). Ferritkerne können z.B. in Stabform vorliegen oder als Schalenkern ausgebildet sein.

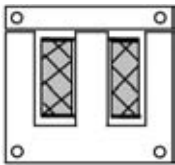


Abb. 90: Schnitt durch eine Spule mit Blechkern

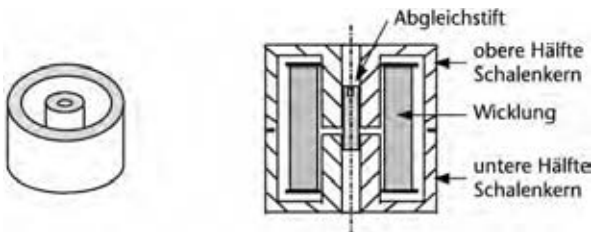


Abb. 91: Hälfte eines Schalenkerns (links) und Schnitt durch eine Spule mit Schalenkern (rechts)

3.4.6 Verwendungszweck von Spulen

3.4.6.1 Verwendung von Spulen im Gleichstromkreis

In einem Gleichstromkreis ist eine Spule nur als Elektromagnet von Bedeutung. Wenn sich der Strom durch die Spule nicht ändert, kann keine Induktion stattfinden und es bleibt nur das stationäre (gleichbleibende) Magnetfeld mit seiner magnetischen Wirkung.

Bei einem **Relais** wird durch Magnetwirkung ein beweglich gelagertes Eisenstück (der Anker) angezogen. Dadurch werden ein oder mehrere mechanische Kontakte geschlossen oder geöffnet. So lassen sich durch einen relativ kleinen Strom hohe Ströme in einiger Entfernung ein- und ausschalten.

3.4.6.2 Verwendung von Spulen im Wechselstromkreis

Der Transformator ist die wohl bekannteste Anwendung von Spulen. Beim Transformator sind zwei Spulen durch einen gemeinsamen Eisenkern induktiv stark gekoppelt. Mit ihm können hohe Wechselspannungen auf niedrige umgesetzt werden oder umgekehrt niedrige auf hohe Wechselspannungen.

Da der Widerstand einer Spule frequenzabhängig ist, kann eine Spule zur Trennung von Signalen mit unterschiedlichen Frequenzen verwendet werden (als »Frequenzweiche«). Ist eine Gleichspannung durch eine überlagerte Wechselspannung »verschmutzt«, so läßt die Spule die Gleichspannung durch, während sie die Wechselspannung sperrt. Eine Gleichspannung kann so von einer überlagerten Wechselspannung »gereinigt« (gefiltert, gesiebt) werden. Bei einem solchen Einsatz wird die Spule als **Drossel** bezeichnet.

Ein Schwingkreis ist eine Reihen- oder Parallelschaltung aus einem Kondensator und einer Spule. Mit einem Schwingkreis können bestimmte Frequenzen aus einer Vielzahl von Frequenzen hervorgehoben oder unterdrückt werden. Allgemein bekannt ist dies als Senderabstimmung beim Rundfunkgerät.

3.4.7 Spule als Bauelement

3.4.7.1 Feste Induktivität

Je nach Anwendung unterscheiden sich die Spulen in ihrem Aufbau.

Die Wicklung kann aus Volldraht mit oder ohne Lackisolation sein. Ist der Draht nicht isoliert, so dürfen sich die einzelnen Windungen natürlich nicht berühren. Solche Spulen werden für sehr hohe Frequenzbereiche verwendet. Der Draht kann auch aus sogenannter »Litze« bestehen. Eine Litze besteht aus vielen einzelnen, gegenseitig isolierten, sehr dünnen Drähten und hat die Eigenschaft, Wechselstrom höherer Frequenz besser zu leiten als ein einzelner voller Draht, mag er auch noch so dick sein. (Beim Wechselstrom leitet mit zunehmender Frequenz eine immer dünnere Schicht an der Oberfläche eines Leiters, und nicht der gesamte Leiterquerschnitt. Dies wird Haut- oder Skineneffekt genannt.)

Der Kern besteht beim Elektromagneten aus massivem Eisen, beim Transformator aus gegenseitig isolierten Blechen. Für Anwendungen im Bereich mittlerer Frequenzen (einige 100 Kilohertz) werden für den Kern Stifte oder Schalen aus Ferriten verwendet.

3.4.7.2 Veränderliche Induktivität

Um die Induktivität einer Spule auf einen bestimmten Wert einzustellen (abzugleichen), werden Spulen mit einschraubbarem Kern hergestellt (siehe Abb. 91). Die Induktivität wird mit wachsender Eintauchtiefe des Kerns größer.

3.4.8 Kenngrößen von Spulen

Induktivität

Die Induktivität ist die wichtigste Kenngröße einer Spule. Häufig ist sie auf dem Spulenkörper nicht aufgedruckt und kann nur mit einem speziellen Meßgerät gemessen werden.

Induktivitätstoleranz

Sie ist von geringer Bedeutung. Soll die Induktivität sehr genau sein, so muß sie abgeglichen werden.

Beim Einsatz als Drossel ist der genaue Wert der Induktivität unkritisch.

Stabilität

Die Stabilität gibt die Änderung der Induktivität über längere Zeit an. Beim Einsatz in Schwingkreisen darf sich die Induktivität im Laufe der Zeit nicht ändern. (Ein eingestellter Sender im Radio würde sonst »weglaufen«.)

Belastbarkeit

Eine Spule darf durch den Stromfluß nicht zu stark belastet werden. Die Dimensionierung (Wicklungswiderstand, Kühlung) muß entsprechend der Verlustleistung ($I^2 \cdot R$) erfolgen.

Güte

Die Spulengüte wird größer, je kleiner der ohmsche Wicklungswiderstand ist.

Ersatzschaltbild

Das Ersatzschaltbild einer Spule ist eine Reihenschaltung des ohmschen Widerstandes R_s der Wicklung und einer idealen Spule (ohne ohmschen Widerstand) mit der Induktivität L .



Abb. 92: Ersatzschaltbild einer Spule

3.5 Zusammenfassung: Die Spule

1. Eine Spule besteht aus Drahtwindungen.
2. Ein Magnetfeld wird durch magnetische Feldlinien dargestellt.
3. Ein stromdurchflossener Leiter ist stets von einem Magnetfeld umgeben. Die Stärke des Magnetfeldes ist proportional zur Stromstärke und der Windungszahl der Spule.
4. Ändert sich das Magnetfeld durch eine Spule, so wird in der Spule eine Spannung induziert. Die Spannung wird größer, je schneller und je stärker die Feldänderung ist.

5. Die Änderung eines Magnetfeldes kann durch **Bewegung** oder **Stromänderung** verursacht werden.
6. Wird eine Spule von einem sich ändernden Strom durchflossen, so wird in der Spule eine Spannung induziert (Selbstinduktion). Die Spannung wirkt der Stromänderung, durch die sie entsteht, entgegen.
7. Die Induktivität einer Spule wird in Henry (H) angegeben.
8. Ein ferromagnetischer Kern erhöht die Induktivität einer Spule.
9. Eine Spule sperrt Wechselspannung stärker, je höher die Frequenz ist.
10. Eine Spule läßt Gleichspannung durch.
11. Spulen werden beim Transformator, zur Trennung von Frequenzen und in Schwingkreisen benutzt.
12. Im stationären Gleichstromkreis (die Ströme ändern sich nicht mehr) wirkt nur der ohmsche Widerstand der Spulenwicklung.

4 Gleichspannungsquellen

Gleichspannungsquellen werden zur Stromversorgung elektronischer Schaltungen benötigt, sie liefern die elektrische Energie für den Betrieb der Schaltung.

Stromversorgungen können in netzabhängige und netzunabhängige Versorgungen eingeteilt werden. Batterien und Akkumulatoren sind vom Stromnetz unabhängig und eignen sich zur Versorgung transportabler Geräte. Sogenannte Netzteile oder Netzgeräte sind im Betrieb am Netz angeschlossen und liefern eine konstante oder (z.B. im Labor) einstellbare Gleichspannung.

Leistungsmäßig stark belastbare Gleichspannungsquellen zur Stromversorgung muß man von Referenzspannungen unterscheiden. Auf die Größe einer Referenzspannung bezieht sich die Arbeitsweise eines Schaltungsteils. Einer Referenzspannungsquelle darf nur ein sehr kleiner Strom entnommen werden, die Höhe der Spannung muß sehr stabil sein (auch über lange Zeit und möglichst unabhängig von der Umgebungstemperatur).

4.1 Primärelemente (galvanische Elemente, Batterien)

4.1.1 Wirkungsweise des galvanischen Elements

Durch chemische Vorgänge können Ladungen getrennt, und somit elektrische Spannung erzeugt werden. Taucht man eine Platte aus Zink in eine Säure- oder Salzlösung, so werden Moleküle auf der Oberfläche der Zinkplatte aufgespalten. Die Platte aus Zink wird **Elektrode** genannt, die Lösung heißt **Elektrolyt**. Die Zinkmoleküle verlieren durch die chemische Aufspaltung ihre Valenzelektronen, welche auf der Elektrode zurückbleiben und diese negativ aufladen. Die negative Elektrode heißt **Katode**. Die positiv geladenen Zink-Ionen lösen sich von der Elektrodenoberfläche ab und schwimmen im flüssigen Elektrolyten. Die Zink-Ionen werden auch Kationen genannt. Verwendet man als Elektrode eine Platte aus Kupfer statt aus Zink, so wird die Elektrode positiv geladen. Eine positive Elektrode heißt **Anode**.

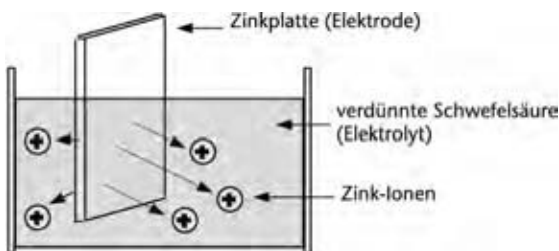


Abb. 93: Lösungsbestreben eines Metalles in einem Elektrolyten

Die Bereitschaft eines Metalles, in einem Elektrolyten (stromleitende Flüssigkeit) Ionen abzuspalten, wird als elektrolytischer Lösungsdruck bezeichnet. Durch den elektrolytischen Lösungsdruck der Metalle entsteht eine ladungstrennende chemische Reaktion. Der Lösungsdruck von Metallen ist je nach Art des Metalles unterschiedlich und wird durch die elektrolytische (oder elektrochemische) Spannungsreihe der Metalle wiedergegeben. Die elektrische Spannung, die ein Metall aufgrund seines Lösungsdruckes in einem Elektrolyten annimmt, wird dabei auf eine mit Wasserstoffgas umgebene Platin-Elektrode bezogen. Zwischen dieser »Normal-Wasserstoff-Elektrode« (oder Standard-Wasserstoff-Elektrode) und dem Metall ergibt sich eine Spannungsdifferenz, die mit »Normalpotential« bezeichnet wird. Die Größe des Normalpotentials bestimmt die Lage des Metalles innerhalb der elektrochemischen Spannungsreihe. Je größer der Abstand zweier Metalle in der Spannungsreihe ist, desto größer ist die Spannung. Metalle mit **hohem Lösungsdruck** werden als **unedel**, Metalle mit **niedrigem Lösungsdruck** als **edel** bezeichnet. Unedle Metalle haben in der Spannungsreihe eine negative, edle Metalle eine positive Spannung.

Tabelle 9: Beispiele von Metallen in der elektrochemischen Spannungsreihe

Metall	Volt
Lithium	- 2,96
Natrium	- 2,71
Aluminium	- 1,28
Eisen	- 0,44
Zinn	- 0,14
Wasserstoff	± 0
Kupfer	+ 0,345
Quecksilber	+ 0,775
Silber	+ 0,7987
Gold	+ 1,38

Werden zwei verschiedene Metalle, z.B. Zink und Kupfer, in verdünnte Schwefelsäure gestellt, so entsteht durch die oben beschriebenen chemischen Vorgänge zwischen den Elektroden eine elektrische Spannung. Das Kupfer wird zum positiven, das Zink zum negativen Pol der Spannungsquelle. Man erhält ein »galvanisches Element«, benannt nach GALVANI.¹⁹

Bei einem galvanischen Element entsteht die Spannung durch primäre (zuerst ablaufende) chemische Vorgänge, es wird deshalb auch **Primärelement** genannt.

4.1.2 Batterien

Batterien sind Primärelemente und nach Ablauf der gesamten chemischen Reaktion verbraucht. Sie liefern dann keine Spannung mehr, da eine Elektrode chemisch zersetzt wird. Die Batterie ist »leer«.

¹⁹ Luigi GALVANI (1737 - 1798), italienischer Arzt und Naturforscher

In der Praxis sind galvanische Elemente nur in Form von Trockenbatterien von Bedeutung, die z.B. als Taschenlampenbatterien bekannt sind. Bei einer Trockenbatterie wird als Elektrolyt z.B. die eingedickte Paste einer Salzlösung verwendet.

Als Standardbatterie ist die Zink/Kohle-Batterie weit verbreitet. Die verbesserten Alkali/Mangan-Batterien besitzen eine höhere Energiedichte ($\text{Wh/kg} = \text{Wattstunden pro Kilogramm}$).

Lithium-Batterien (Knopfzellen) werden in sehr kleiner Bauform, z.B. in elektronischen Armbanduhren, Film- und Fotogeräten usw., eingesetzt.

Im Gegensatz zu Akkumulatoren können Batterien nicht aufgeladen werden. Fließt bei einer Batterie entgegen der Stromentnahme (also in den Pluspol der Batterie hinein) ein unzulässig hoher Strom (mehr als $10 \mu\text{A}$), so führt dies zu einer inneren Gasung der Batterie und zu einem Druckanstieg in den Zellen. Es besteht die Gefahr, daß die Batterie explodiert. Der Kurzschluß einer Batterie ist im allgemeinen ungefährlich, verringert jedoch ihre Lebensdauer.

Batterien (Primärzellen) haben meistens eine Nennspannung von ca. 1,5 V pro Zelle und eine Kapazität (siehe 4.2.4) von ca. 100 mAh bis einigen Ah.

4.2 Sekundärelemente (Akkumulatoren)

Einem Akkumulator (kurz Akku) muß zuerst elektrische Energie zugeführt werden (Laden), ehe ein chemischer Vorgang einsetzt und elektrische Energie wieder entnommen werden kann (Entladen). Der Akkumulator wird deshalb auch **Sekundärelement** genannt.

Das Laden und Entladen eines Akkumulators kann während seiner Lebensdauer im allgemeinen einige hundert mal erfolgen. Beim Laden müssen gleiche Pole von Akkumulator und Ladegerät miteinander verbunden werden (Pluspol auf Pluspol und Minuspol auf Minuspol). Die maximale Ladestromstärke darf nicht überschritten werden.

4.2.1 Der Bleiakkumulator

Der wohl bekannteste Akkumulator ist die Auto»batterie«. Bei diesem Akku handelt es sich um einen Bleiakkumulator. Er enthält als Elektroden eine Anzahl von Platten aus Bleiverbindungen (Blei/Bleioxid) und als Elektrolyt mit destilliertem Wasser verdünnte reine Schwefelsäure. Platten gleicher Polarität sind untereinander verbunden. Die Größe und Anzahl der Platten richtet sich nach der geforderten Leistung, die im geladenen Zustand entnehmbar sein soll.

Die Spannung eines Bleiakkumulators ist wegen des kleinen inneren Widerstandes (siehe 4.5.1) nur sehr wenig von der Belastung (vom entnommenen Strom) abhängig. Dies bedeutet aber, daß im Falle eines Kurzschlusses sehr hohe Ströme fließen können. In einem Kraftfahrzeug kann ein Kurzschluß zum Durchschmoren der Verkabelung oder zu einem Kabelbrand führen, falls der Stromkreis nicht durch eine Sicherung geschützt ist.

Wird eine Autobatterie kurzgeschlossen, so fließt ein sehr hoher Strom!

Zum Nachfüllen einer Autobatterie darf nur destilliertes Wasser verwendet werden. Leitungswasser enthält Stoffe, welche die Autobatterie zerstören.

4.2.2 Nickel-Cadmium-Akkumulatoren

Nickel-Cadmium-Akkumulatoren (Ni/Cd-Akkumulatoren) sind gasdicht und werden je nach entnehmbarer Leistung in verschiedenen Größen hergestellt. Sie werden zur Spannungsversorgung in tragbaren Geräten eingesetzt oder als »Puffer« zur Spannungsversorgung eines Gerätes bei einem Ausfall der normalen Spannungsversorgung (z.B. Netzausfall im Haushalt). Beim Laden von Ni/Cd-Akkumulatoren sind die vom Hersteller angegebenen Daten, vor allem der maximale Strom bei Dauerladung, sorgfältig zu beachten, sonst wird der Akkumulator zerstört.

4.2.3 Nickel-Metallhydrid-Akkumulatoren

Bei Nickel-Metallhydrid-Akkumulatoren (Ni/MH-Akkumulatoren) wird im Unterschied zur Ni/Cd-Zelle das Cadmium durch eine Wasserstoff speichernde Metallegierung in der negativen Elektrode ersetzt. Es wird eine hohe Entladekapazität und lange Lebensdauer der Zelle erreicht.

4.2.4 Technische Eigenschaften von Akkumulatoren

Die **Kapazität** eines Primär- oder Sekundärelementes ist definiert als $C = I_E \cdot t$, wobei I_E der konstante Entladenennstrom, und t die Zeit vom Beginn des Entladens bis zum Erreichen der Entladeschlußspannung ist.

Die Kapazität eines Akkumulators oder einer Batterie wird in Ampèrestunden (abgekürzt Ah) gemessen.

Beispiel:

Eine Kapazität von 10 Ah bedeutet, daß der Akkumulator 10 Stunden lang 1 A liefern kann oder auch 5 Stunden lang 2 A.

Lade- und Entladeströme werden in Ampère als Vielfaches der Nennkapazität (C) mit der Abkürzung CA angegeben. Beispiel: $C = 4 \text{ Ah} \Rightarrow 1 \text{ CA} = 4 \text{ A}$ oder $0,1 \text{ CA} = 400 \text{ mA}$

Bei Ni/Cd- Akkumulatoren ist

- die Nennspannung einer Zelle ca. 1,1 bis 1,5 Volt
- der maximal zulässige Dauerladestrom ca. 0,03 bis 0,05 CA,
- der Ladenennstrom 0,1 CA (Volladung einer Zelle in 14 bis 16 Stunden),
- der Entladenennstrom 0,2 CA (Entnehmen der Nennkapazität einer Zelle in 5 Stunden).

Bei Bleiakkumulatoren ist

- die Nennspannung einer Zelle ca. 2 Volt
- der Richtwert für den Ladestrom $I_L = 0,1 \cdot K$ (K = Kapazität in Ah)
- der Innenwiderstand $R_i \approx \frac{0,2}{K}$ pro Zelle (R_i in Ω , K in Ah).
- Bei n Zellen ist der gesamte Innenwiderstand $n \cdot R_i$.

Beispiel: Bei einem Bleiakkumulator mit einer Kapazität $K = 55 \text{ Ah}$ ist $R_i = 3,6 \text{ m}\Omega$.

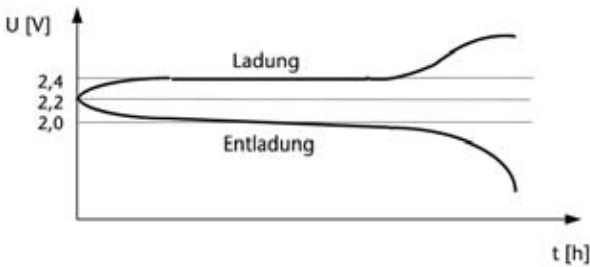


Abb. 94: Typischer Verlauf von Lade- und Entladespannung eines Bleiakkumulators

4.3 Netzgeräte

Vom Stromversorgungsnetz abhängige Gleichspannungsquellen können in Netzteile für feste Spannungen und in Netzgeräte mit einstellbarer Ausgangsspannung eingeteilt werden.

In beiden Arten von Spannungsquellen wird die Netzwechselspannung (220 Volt) fast immer mit einem Transformator auf eine kleinere Wechselspannung (z.B. 8 Volt) umgesetzt. Diese wird dann durch bestimmte Bauteile in Gleichspannung umgewandelt (»gleichgerichtet«). Geeignete Bauteile (z.B. Kondensatoren) befreien die so gewonnene Gleichspannung von einer überlagerten Welligkeit, die von der Wechselspannung stammt. Vergleiche auch 3.3.5.2, S.84, »Glättung von Spannungen«.

Für die Versorgung elektronischer Schaltungen sind bestimmte Gleichspannungswerte üblich, z.B. 5 Volt oder ± 12 Volt. Für solche Spannungen sind fertige Netzteile in offener Bauform oder im Gehäuse erhältlich.

Im Labor wird für Experimente häufig ein Netzgerät benötigt, bei dem die Ausgangsspannung in einem bestimmten Bereich stufenlos einstellbar ist.

Diese Netzgeräte können folgende Eigenschaften besitzen:

- Eine (oder mehrere) Ausgangsspannung(en) sind stufenlos einstellbar.
- Die Ausgangsspannung ist elektronisch stabilisiert (weitgehend unabhängig von Netzschwankungen und von Änderungen des entnommenen Stromes, also der Last). Die Spannung ändert sich bei einer Laständerung von 0 auf 100 % z.B. nur um 10 mV.
- Die Restwelligkeit der Gleichspannung beträgt wenige mV.
- Hoher Wirkungsgrad bzw. geringe Verlustleistung
- Die Ausgänge sind kurzschlußfest.
- Strom und Spannung werden von eingebauten Meßgeräten angezeigt.
- Der maximal entnehmbare Strom ist stufenlos einstellbar (einstellbare Strombegrenzung).

Eine einstellbare Strombegrenzung dient als elektronische Sicherung, falls eine Schaltung nur einen bestimmten maximalen Strom aufnehmen darf. Es sei hier angemerkt, daß diese Eigenschaft eines Netzgerätes in der Praxis bei Unachtsamkeit auch zu Fehlfunktionen einer Schaltung führen kann. Falls der maximal entnehmbare Strom auf einen kleineren Wert als der von der

Schaltung benötigte Strom eingestellt ist, verringert sich die Ausgangsspannung des Netzgerätes auf einen Wert, welcher dem eingestellten Maximalstrom entspricht. Die Spannung kann dadurch so stark »zusammenbrechen«, daß die Schaltung überhaupt nicht mehr oder nicht mehr richtig funktioniert. Ein Indiz für solch einen Betriebsfall ist eine Veränderung der Spannungsanzeige (Voltmeter des Netzgerätes) bei Anlegen der Spannung an eine Schaltung. Selbst erfahrene Ingenieure haben sich durch einstellbare Strombegrenzungen schon in die Irre führen lassen.

4.4 Störungsfreie Versorgung mit Gleichspannung

Um eine Schaltung mit einer einwandfreien Gleichspannung zu versorgen, muß nicht nur die Art der Spannungsversorgung betrachtet werden. Auch wenn das Versorgungsteil selbst alle Anforderungen bezüglich Spannungswert, Stabilität der Spannung, Freiheit von Störspannungen usw. erfüllt, kann die Spannung direkt am Verbraucher gestört sein, obwohl sie am Netzteil selbst »sauber« ist.

Durch die Widerstände der Zuleitungen kann ein zu hoher Spannungsabfall entstehen. Die Spannung am Netzteil selbst hat zwar unmittelbar an dessen Anschlußklemmen die richtige Höhe, die Schaltung wird aber mit einer zu kleinen Spannung versorgt.

Durch induktive Kopplung der Stromversorgungs-Zuleitungen mit benachbarten Leitungen, welche schnelle Stromänderungen aufweisen, können auf der Versorgungsspannung eines Bauteils störende Spannungsspitzen induziert werden. Vergleiche auch 3.3.5.1, S.82, »Stützen von Spannungen«.

Auf folgende Punkte sollte bei der Versorgung mit Gleichspannung einer elektronischen Schaltung geachtet werden:

- Die Spannung muß die nötige »Glätte« aufweisen (keine überlagerten Störungen).
- Der benötigte Strom muß geliefert werden können (auch bei Lastschwankungen ohne unzulässige Änderung der Spannung).
- Die Zuleitungen sind so kurz als möglich auszuführen.
- Der Querschnitt der Zuleitungen muß ausreichend groß sein.
- Auf geeignete Leitungsführung achten (keine Leitungen mit steilen Signalfanken parallel führen).
- Die Versorgung direkt am Verbraucher durch Kondensatoren »abblocken«. Störungen können einen weiten Frequenzbereich haben. Kondensatoren schließen je nach Bauart Spannungen mit unterschiedlichen Frequenzen verschieden gut kurz. Zum Abblocken deshalb eine Parallelschaltung eines Elkos und eines Keramik Kondensators verwenden.
- Auf richtige, evtl. getrennte Verlegung von Masseleitungen und Massebahnen von gedruckten Schaltungen achten. Auf der Masseleitung sind oft kleine Signale und zusätzlich ein großer Laststrom zu übertragen. Eine vom Netzteil sternförmig ausgehende Verdrahtung der Masseleitung kann günstig sein. Ungünstig ist es, die Masseleitung vom Netzteil zu einer Schaltungseinheit zu führen, und von dort zur nächsten Schaltungseinheit.

- Die Schaltung vor Überlast oder Kurzschluß der Ausgänge schützen (durch Schmelzsicherung oder schaltungstechnische Maßnahmen).

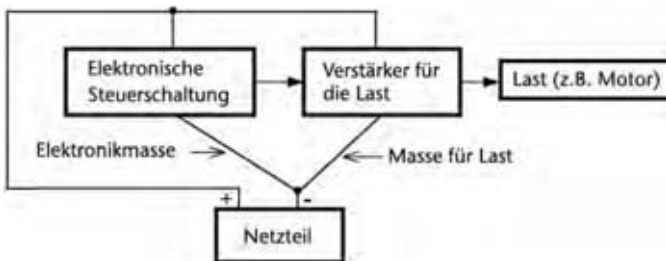


Abb. 95: Schema für die sternförmige Verdrahtung der Masse zu Elektronik und Last

4.5 Die belastete Gleichspannungsquelle

4.5.1 Ersatzspannungsquelle

Wird eine Last an eine Spannungsquelle angeschlossen, so wird die an den Klemmen der Spannungsquelle meßbare Spannung kleiner. Dies gilt für alle Spannungsquellen, auch Wechselspannungsquellen. Der Grund hierfür ist der innere Widerstand oder **Innenwiderstand** R_i , den jede Spannungsquelle besitzt.

Greifen wir noch einmal auf den Vergleich eines Stromkreises mit einem Wasserkreislauf zurück. Beim Wasserkreislauf entsteht nicht nur im Rohr eine Reibung zwischen der Flüssigkeit und den Rohrwänden, sondern auch in der Pumpe. Beim elektrischen Stromkreis wird das Fließen der Elektronen in den Leitungsdrähten durch Zusammenstöße mit den Atomrümpfen behindert. Der Spannungserzeuger selbst besteht aber auch aus Materie, welche den Elektronenfluß im Stromkreislauf behindert. Bei einem Generator im Kraftwerk oder einem Fahrraddynamo stellt die Wicklung aus Kupferdraht einen Widerstand dar, der den Fluß der Elektronen hemmt, bei einem Akkumulator ist es der Elektrolyt.

Bei jeder Spannungsquelle in einem geschlossenen Stromkreis muß der Strom durch einen Widerstand fließen, der durch den Aufbau der Spannungsquelle bedingt und nicht vermeidbar ist. Dieser Widerstand wird Innenwiderstand der Spannungsquelle genannt.

Der Innenwiderstand einer Spannungsquelle und der Widerstand eines angeschlossenen Verbrauchers bilden eine Reihenschaltung. Da nach dem Ohmschen Gesetz auch am Innenwiderstand eine Spannung abfällt, mißt man am Verbraucher eine um so kleinere Spannung, je größer der Innenwiderstand ist.

Eine reale Spannungsquelle kann in einem Ersatzschaltbild durch die Reihenschaltung aus einer idealen Spannungsquelle und einem Widerstand dargestellt werden. Die Ersatzschaltung wird als **Ersatzspannungsquelle** bezeichnet. Die Spannung der idealen Spannungsquelle nennt man **Leerlaufspannung**, **Quellenspannung** oder **Urspannung** (Elektromotorische Kraft EMK).

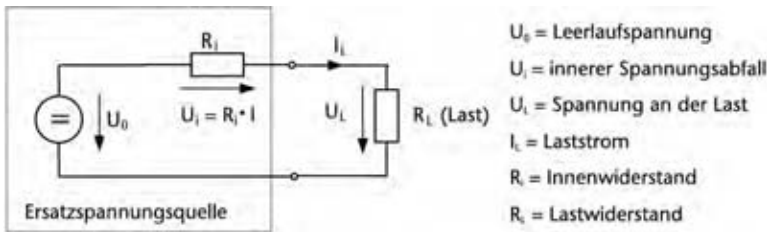


Abb. 96: Reale Spannungsquelle mit Innenwiderstand

Bei einer idealen Spannungsquelle wäre die Spannung an ihren Klemmen vom Strom durch die Last unabhängig, sie hätte den Innenwiderstand $R_i = 0 \Omega$. In der Realität ist eine solche Spannungsquelle nicht herstellbar (von der elektronischen Schaltung einer Konstantspannungsquelle sei hier abgesehen). Bei einer realen Spannungsquelle nimmt die Klemmenspannung stärker ab, je größer der Strom durch die Last wird.

Sind die Größen U_0 und R_i von der Höhe des Laststromes nahezu unabhängig, so spricht man von einer **linearen Quelle**.

Die Reihenschaltung von R_i und R_L ist ein Spannungsteiler. Mit der Ersatzspannungsquelle kann die **Klemmenspannung** (= Spannung an der Last) in Abhängigkeit von der Laststromstärke berechnet werden, wenn der Innenwiderstand der Spannungsquelle und die Leerlaufspannung bekannt sind.

Gl. 33: Klemmenspannung in Abhängigkeit des Laststromes

$$U_L = U_0 - R_i \cdot I_L$$

Für $I_L = 0 \text{ A}$ hat die Klemmenspannung ihren Maximalwert $U_L = U_0$ und nimmt mit steigendem Laststrom linear ab.

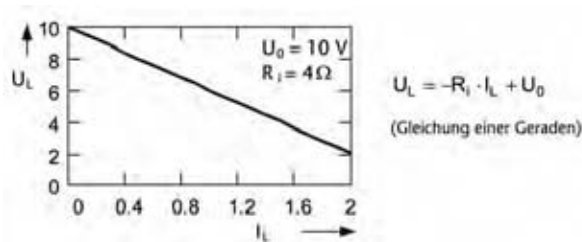


Abb. 97: Beispiel zum Verlauf der Klemmenspannung als Funktion des Laststromes

Das Verkleinern der Klemmenspannung beim Anschließen einer Last an eine Spannungsquelle bezeichnet man als »Zusammenbrechen« der Spannung. Man sagt: »Die Spannung bricht zusammen«.

4.5.2 Ermittlung des Innenwiderstandes

Da die Klemmenspannung mit dem Laststrom linear abnimmt, kann der Innenwiderstand als Verhältnis einer Spannungsdifferenz zur zugehörigen Stromdifferenz berechnet werden.

Die Leerlaufspannung kann mit einem hochohmigen Voltmeter an den Anschlüssen der Spannungsquelle gemessen werden, wenn kein Verbraucher angeschlossen ist.

Wird die Spannung U_L beim Laststrom I_L gemessen, so ergibt sich der Innenwiderstand als:

Gl. 34: Berechnung des Innenwiderstandes einer Spannungsquelle

$$R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_0 - U_L}{I_L}$$

In Abb. 97 ist $U_L = 2 \text{ V}$ bei $I_L = 2 \text{ A}$. Daraus folgt: $R_i = \frac{10 \text{ V} - 2 \text{ V}}{2 \text{ A}} = 4 \Omega$

Der Innenwiderstand kann also durch die Messung der Spannungen und Ströme von zwei beliebigen Lastfällen bestimmt werden. Zur Vereinfachung kann für einen Fall eine fehlende Last angenommen und die Leerlaufspannung U_0 durch Messung ermittelt werden.

Aufgabe 16:

An eine Batterie ist ein Widerstand R_1 angeschlossen. Durch den Widerstand fließt ein Strom $I_1 = 200 \text{ mA}$, an ihm liegt die Spannung $U_1 = 5,8 \text{ V}$. Wird der Widerstand durch R_2 ersetzt, so beträgt $I_2 = 100 \text{ mA}$ und $U_2 = 6,0 \text{ V}$. Wie groß ist der Innenwiderstand der Batterie?

Lösung:

$$R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{5,8 \text{ V} - 6,0 \text{ V}}{100 \text{ mA} - 200 \text{ mA}} = 2 \Omega$$

4.5.3 Kurzschlußstrom

Bei einem Kurzschluß ist $R_L = 0 \Omega$ (bzw. sehr klein). Es fließt der Kurzschlußstrom, der nur von der Spannung und dem Innenwiderstand der Quelle abhängt.

Gl. 35: Strom bei Kurzschluß

$$I_K = \frac{U_0}{R_i}$$

I_K = Kurzschlußstrom

U_0 = Leerlaufspannung

R_i = Innenwiderstand

Wird eine Spannungsquelle (z.B. mit einem dicken Draht) kurzgeschlossen, so ist ihre Klemmenspannung 0 Volt. Die gesamte Quellenspannung fällt am Innenwiderstand ab und wird dort in Verlustleistung

$$P_i = \frac{U_0^2}{R_i} \text{ umgesetzt.}$$

Der Kurzschlußstrom wird größer, je kleiner der Innenwiderstand ist. Eine Autobatterie besitzt einen sehr kleinen Innenwiderstand und der Kurzschlußstrom kann einige hundert Ampere betragen.

Die Aussage, daß zwischen zwei Punkten keine Spannung (0 V) liegt, wenn beide Punkte kurzgeschlossen sind, ist vor allem in der elektronischen Schaltungstechnik wichtig. Ein offener (nicht mit Masse verbundener) Eingang einer Schaltung bedeutet **nicht**, daß an ihm keine Spannung liegt. So kann am Ausgang eines Verstärkers durchaus eine Spannung gemessen werden, obwohl sein Eingang offen ist, an ihm also keine Eingangsspannung angelegt ist. Ist der Verstärkereingang sehr hochohmig und die Verstärkung groß, so können bei offenem Eingang geringste Spannungen (bedingt durch »Einstreuungen« oder die Art der Schaltung) zu einer Ausgangsspannung führen. Die Spannung am Ausgang wird erst dann 0 V, wenn der Eingang kurzgeschlossen wird.

4.5.4 Leerlauf

Ist an eine Spannungsquelle keine Last angeschlossen, so ist der Stromkreis nicht geschlossen und die Leistung Null. Dies wird als »Leerlauf« bezeichnet. Die Klemmenspannung ist in diesem Fall gleich der Leerlaufspannung.

4.5.5 Anpassungen

Ist an eine Spannungsquelle ein Lastwiderstand angeschlossen, so liegt an diesem eine Spannung an, und durch ihn fließt ein Strom. Der Erzeuger gibt an die Last eine Leistung ab. Das Verhältnis von Lastwiderstand zu Innenwiderstand bestimmt, ob an der Last die Spannung, die Stromstärke oder die Leistung möglichst groß ist. Nach diesen Fällen werden die Anpassungsarten unterschieden.

4.5.5.1 Spannungsanpassung

Bei Spannungsanpassung liegt am **Lastwiderstand eine möglichst hohe Spannung**. Für die Spannungsanpassung muß der Lastwiderstand sehr viel größer sein als der Innenwiderstand. Dadurch fließt ein kleiner Strom, der **Spannungsabfall am Innenwiderstand ist klein** und fast die gesamte Quellenspannung liegt an der Last. Bei Spannungsanpassung arbeitet die Schaltung im Leerlaufbereich der Spannungsquelle. Spannungsanpassung nennt man auch Überanpassung, da der Wert des Lastwiderstandes erheblich über dem Wert des Innenwiderstandes liegt.

In der Praxis wird Spannungsanpassung verwendet, wenn die Spannung an der Last unabhängig vom Laststrom sein soll. Dies ist z.B. bei einem Spannungsmesser (Voltmeter) gewünscht. Der Innenwiderstand eines Voltmeters soll möglichst hoch sein, um eine Spannung unverfälscht messen zu können (die Spannungsquelle soll durch das Voltmeter möglichst wenig belastet werden, und die zu messende Spannung nicht zusammenbrechen). Auch die Spannungsversorgung einer elektronischen Schaltung (Netzteil) soll im Bereich der Spannungsanpassung arbeiten, da sonst in den Zuleitungen zur Schaltung eine hohe Verlustleistung auftritt bzw. bei Lastschwankungen (z.B. durch Schaltvorgänge) die Versorgungsspannung unerlaubt klein werden kann.

4.5.5.2 Stromanpassung

Die Stromanpassung (Unteranpassung) führt zu einem **möglichst hohen Strom** durch die Last, der Lastwiderstand muß sehr viel kleiner sein als der Innenwiderstand. Bei Stromanpassung arbeitet die Schaltung im Kurzschlußbereich der Spannungsquelle. Bei Stromanpassung erhält man einen »eingepprägten« Strom durch die Last, der unabhängig vom Lastwiderstand ist.

Ein Strommesser (Amperemeter) wird mit Stromanpassung betrieben. Der Innenwiderstand eines Amperemeters soll möglichst klein sein, damit der zu messende Strom im Stromkreis durch das Meßgerät nicht verfälscht (verkleinert) wird. Auch das Laden von Akkumulatoren erfolgt mit Stromanpassung.

4.5.5.3 Leistungsanpassung

Soll von der Last eine möglichst große Leistung aufgenommen werden, so verwendet man die Leistungsanpassung. Die von der Spannungsquelle an den Verbraucher gelieferte Leistung wird maximal wenn gilt:

$$R_i = R_L \text{ und beträgt } P_{L\max} = \frac{U_0^2}{4 \cdot R_i}$$

Herleitung: Die von der Last aufgenommene Leistung ist $P_L = I^2 \cdot R_L$

$$\text{Der Strom ist } I = \frac{U_0}{R_i + R_L}$$

Damit bei konstantem R_L die Leistung P_L möglichst groß ist, muß I möglichst groß sein. Da U_0 konstant ist, muß der Nenner $R_i + R_L$ möglichst klein sein. Er ist am kleinsten für $R_i = R_L$

Bei der Leistungsanpassung ist die Spannung an der Last halb so groß wie die Leerlaufspannung und der Strom halb so groß wie der Kurzschlußstrom. Der Wirkungsgrad beträgt nur 50 %, da die im Innenwiderstand entstehende Verlustleistung genauso groß ist wie die an den Verbraucher abgegebene Leistung

Die Leistungsanpassung wird immer dann verwendet, wenn man von einem Gerät die maximale Leistung erhalten will. Eine Antenne wird unter Leistungsanpassung an den Eingang eines Empfängers angeschlossen, um möglichst wenig der empfangenen Leistung zu verlieren. Ein Lautsprecher soll eine möglichst große Leistung abgeben und wird ebenfalls unter Leistungsanpassung an den Verstärker angeschlossen. In der Starkstromtechnik findet die Leistungsanpassung wegen dem niedrigen Wirkungsgrad und wegen der starken Spannungsschwankungen am Verbraucher bei Laständerungen keine Verwendung.

4.6 Ersatzstromquelle

In der Kommunikationselektronik (kaum jedoch in der Energieelektronik) wird statt der Spannungsquelle oft der Begriff der Stromquelle benutzt. Eine Stromquelle ist definiert als ein Erzeuger, der dauernd einen konstanten Strom durch einen Verbraucher liefert, unabhängig davon, wie groß dieser Strom ist und somit auch unabhängig davon, wie groß der Lastwiderstand ist. Eine Stromquelle liefert einen festen (»eingepprägten«) Strom und wird auch als **Konstantstromquelle** bezeichnet. Der Innenwiderstand einer idealen Stromquelle ist unendlich groß. Im Ersatzschaltbild einer realen Stromquelle, welche z.B. durch eine elektronische Schaltung reali-

siert werden kann, liegt der Innenwiderstand parallel zur idealen Stromquelle. Eine Stromquelle wird durch ein anderes Symbol als eine Spannungsquelle dargestellt.

Sehr häufig wird eine Spannungsquelle als Stromquelle bezeichnet, da sie in einer angeschlossenen Last einen Strom hervorruft. Man sollte sich jedoch gegebenenfalls über die unterschiedliche Bedeutung beider Begriffe bewußt sein.

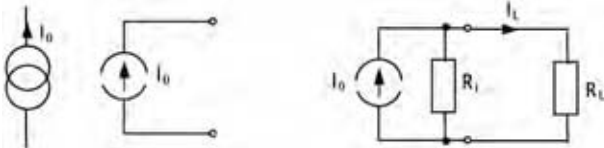


Abb. 98: Gebräuchliche Symbole einer Stromquelle (links) und Schaltbild einer Stromquelle mit Innenwiderstand und Last (rechts)

Am einfachsten kann eine Konstantstromquelle realisiert werden, wenn mit einer Spannungsquelle ein sehr großer ohmscher Widerstand in Reihe geschaltet wird.

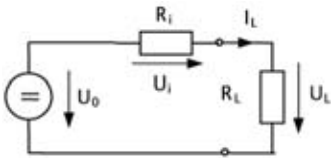


Abb. 99: Konstantstromquelle realisiert durch eine Spannungsquelle (R_i sehr groß)

Am Widerstand R_i fällt die Spannung $U_i = U_0 - U_L = R_i \cdot I_L$ ab. Daraus folgt:

$$I_L = \frac{U_0 - U_L}{R_i} = \frac{U_0}{R_i} - \frac{U_L}{R_i} = I_0 - \frac{U_L}{R_i} \quad \text{mit } I_0 = \frac{U_0}{R_i} \text{ als Kurzschlußstrom der Spannungsquelle.}$$

Wird R_i unendlich groß, so ist $I_L = I_0$, und der Ausgangsstrom hängt nicht mehr von der Ausgangsspannung U_L ab. Je größer R_i ist desto weniger hängt der Strom durch die Last von der Spannung an der Last ab.

4.7 Zusammenfassung: Gleichspannungsquellen

1. Gleichspannungsquellen werden als Hilfsenergie zur Stromversorgung elektronischer Schaltungen benötigt.
2. Netzunabhängige Gleichspannungsquellen kann man in Primärelemente (Batterien) und Sekundärelemente (Akkumulatoren) einteilen.
3. Batterien sind für den einmaligen Gebrauch bis zur Entladung bestimmt und können nicht aufgeladen werden.
4. Ein Akkumulator kann nach seiner Entladung wieder aufgeladen werden. Zu beachten ist die Betriebsanweisung für das Laden.
5. Die Kapazität einer Batterie oder eines Akkumulators wird in Ampèrestunden (Ah) angegeben.

6. Netzgeräte (Netzteile) sind vom Stromversorgungsnetz abhängige Gleichspannungsquellen.
7. Für eine störungsfreie Versorgung einer elektronischen Schaltung mit Gleichspannung sind bestimmte Regeln zu beachten.
8. Eine reale Spannungsquelle kann durch eine Ersatzspannungsquelle (mit Innenwiderstand) dargestellt werden.
9. Die Klemmenspannung einer Spannungsquelle bricht stärker zusammen, je größer ihr Innenwiderstand und je größer der Laststrom ist.
10. Man unterscheidet zwischen Spannungs-, Strom- und Leistungsanpassung.
11. Eine Konstantstromquelle liefert einen vom Lastwiderstand unabhängigen Strom.

5 Berechnungen im unverzweigten Gleichstromkreis

5.1 Reihen- und Parallelschaltung von Zweipolen

Zweipolige, elektronische Bauteile (Bauteile mit zwei Anschlüssen, auch Zweipole genannt) können grundsätzlich auf zweierlei Arten zusammengeschaltet werden: durch die Reihenschaltung oder die Parallelschaltung.

Vergleiche auch 2.3.3, S. 47, »Reihenschaltung« und 2.3.4, S. 47, »Parallelschaltung«.

Bei der Reihenschaltung handelt es sich um einen unverzweigten Stromkreis. Der Strom fließt nur in einem einzigen Stromkreis und teilt sich nicht auf.

Bei der Parallelschaltung liegt ein verzweigter Stromkreis vor. Der aus der Spannungsversorgung herausfließende Strom verzweigt sich und teilt sich auf zwei oder mehrere Stromkreise auf.

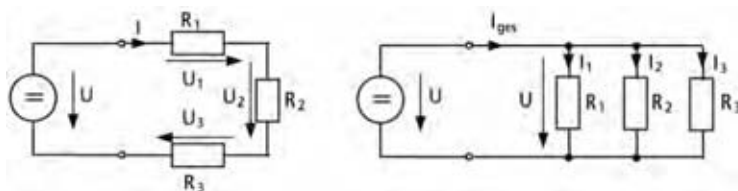


Abb. 100: Reihenschaltung (links) und Parallelschaltung (rechts) von Widerständen

Wie in Abb. 100 zu sehen ist, verzweigt sich der Strom bei der Reihenschaltung nicht. Es existiert nur ein einziger Stromkreis in dem der Strom » I « fließt. Bei der Parallelschaltung teilt sich der gesamte von der Spannungsquelle gelieferte Strom I_{ges} in die Ströme I_1 , I_2 und I_3 auf.

Es ist auch zu erkennen, daß bei der Reihenschaltung der Strom » I « im Stromkreis überall gleich groß ist. Durch alle drei Widerstände fließt der gleiche Strom, er kann sich ja nirgendwo verzweigen und sich damit in unterschiedliche Größen aufteilen. Die Spannungen an den Widerständen sind jedoch je nach Widerstandswert unterschiedlich groß (Ohmsches Gesetz).

Bei der Parallelschaltung dagegen liegt an allen drei Widerständen die gleiche Spannung an. Der Strom I_{ges} teilt sich jedoch in drei unterschiedlich große Teilströme auf.

Bei der Reihenschaltung teilt sich die Spannung auf.

Bei der Parallelschaltung teilt sich der Strom auf.

Im folgenden werden Berechnungen im unverzweigten Gleichstromkreis bei der Reihenschaltung von zweipoligen Bauelementen besprochen.

Zweipolige (passive = Verbraucher) Bauelemente sind ohmsche Widerstände, Kondensatoren und Spulen. Gleichspannungsquellen sind ebenfalls (aktive = Erzeuger) Zweipole.

5.2 Reihenschaltung von ohmschen Widerständen

Bei der Reihenschaltung von Widerständen addieren sich die Widerstandswerte der einzelnen Widerstände zu einem Gesamtwiderstand. Die Reihenschaltung der einzelnen Widerstände kann durch einen einzigen Widerstand, den **Ersatzwiderstand**, mit dem Wert des Gesamtwiderstandes ersetzt werden.

Der Ersatzwiderstand der Reihenschaltung ist stets größer als der größte der Teilwiderstände.

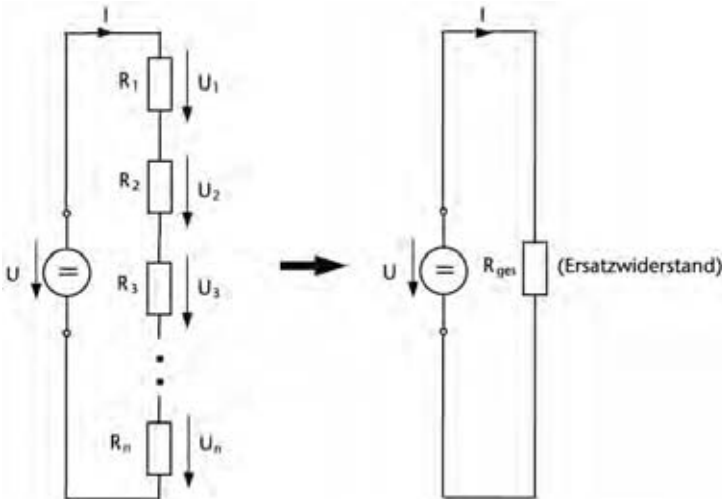


Abb. 101: Reihenschaltung von Widerständen (links) und Ersatzschaltbild (rechts)

Bei der Reihenschaltung von Widerständen gelten folgende Gesetze:

Der Gesamtwiderstand (Ersatzwiderstand) ist gleich der Summe der Teilwiderstände.

Die Gesamtspannung ist gleich der Summe der Teilspannungen.

Die Stromstärke ist an jeder Stelle des Stromkreises gleich groß.

Gl. 36: Gesamtwiderstand von n in Reihe geschalteten Widerständen

$$\boxed{R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n} \quad \text{oder} \quad R_{\text{ges}} = \sum_{v=1}^{v=n} R_v$$

Gl. 37: Gesamtspannung bei n in Reihe geschalteten Widerständen

$$\boxed{U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n} \quad \text{oder} \quad U_{\text{ges}} = \sum_{v=1}^{v=n} U_v$$

Eine Teilspannung an einem Widerstand wird **Spannungsabfall** genannt.

Es gilt $U = R \cdot I$. Da der Strom I im Stromkreis überall gleich groß ist, fällt am größten Widerstand die größte (Teil-)Spannung ab, am kleinsten Widerstand die kleinste.

Wegen $P = U \cdot I$ wird der **Widerstand mit dem größten Wert (und somit dem größten Spannungsabfall) am stärksten belastet**.

Da sich die Teilspannungen an den einzelnen Widerständen entsprechend deren Größe aufteilen, spricht man auch von einer **Spannungsteilung**.

Falls einer der in Reihe geschalteten Zweipole ausfällt, so ist der gesamte Stromkreis unterbrochen und damit stromlos.

Sind in einer Reihenschaltung bestimmte Größen bekannt, so können unbekannte Größen berechnet werden. Es folgen einige für die Praxis wichtige Formeln.

Gegeben: Gesamtspannung U und Größe aller Teilwiderstände R_1 bis R_n

Gesucht: Teilspannung U_x am Teilwiderstand R_x

Formel: $U_x = U \cdot \frac{R_x}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} = U \cdot \frac{R_x}{R_{\text{ges}}}$ (Dies ist die **Spannungsteiler-Formel**)

Gegeben: Strom I und Teilwiderstand R_x

Gesucht: Leistung (Verlustleistung) P_x in R_x

Formel: $P_x = I^2 \cdot R_x$ **Bei der Reihenschaltung wird der Widerstand mit dem größten Wert am stärksten belastet!**

Gegeben: Teilspannung U_x am Teilwiderstand R_x , Größe von R_x

Gesucht: Leistung (Verlustleistung) P_x in R_x

Formel: $P_x = \frac{U_x^2}{R_x}$

Gegeben: Strom I und Teilspannung U_x am Teilwiderstand R_x

Gesucht: Leistung (Verlustleistung) P_x in R_x

Formel: $P_x = U_x \cdot I$

Gegeben: Teilspannungen U_1 bis U_n und Teilwiderstände R_1 bis R_n

Gesucht: Gesamte Leistung P_{ges}

Formel: $P_{\text{ges}} = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \frac{U_1^2}{R_1} + \frac{U_2^2}{R_2} + \dots + \frac{U_n^2}{R_n}$

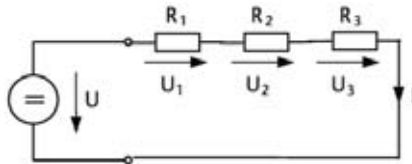
Aufgabe 17:

Gegeben sind drei in Reihe geschaltete Widerstände $R_1 = 100 \, \Omega$, $R_2 = 150 \, \Omega$ und $R_3 = 220 \, \Omega$. Die Widerstände haben eine Toleranz von 10 %. Die Reihenschaltung wird von einer Gleichspannungsquelle mit $U = 100 \, \text{V}$ gespeist.

- Zeichnen Sie das Schaltbild.
- Wie groß ist der minimale und der maximale Ersatzwiderstand?
- Wie groß ist der minimale und der maximale Strom im Stromkreis?
- Berechnen Sie die minimalen und maximalen Teilspannungen U_1 , U_2 , U_3 an den Widerständen.
- Welche Belastbarkeit in Watt muß der Widerstand R_1 mindestens haben?
- Welche Leistung in Watt muß die Gleichspannungsquelle im schlechtesten (größte Leistung) und im besten (kleinste Leistung) Fall aufbringen?

Lösung:

- Schaltbild:



$$b) (R_1)_{\min} = R_1 - 0,1 \cdot R_1 = 90 \, \Omega; \quad (R_2)_{\min} = R_2 - 0,1 \cdot R_2 = 135 \, \Omega; \quad (R_3)_{\min} = R_3 - 0,1 \cdot R_3 = 198 \, \Omega$$

$$(R_1)_{\max} = R_1 + 0,1 \cdot R_1 = 110 \, \Omega; \quad (R_2)_{\max} = R_2 + 0,1 \cdot R_2 = 165 \, \Omega; \quad (R_3)_{\max} = R_3 + 0,1 \cdot R_3 = 242 \, \Omega$$

$$\text{Minimaler Gesamtwiderstand: } (R_{\text{ges}})_{\min} = (R_1)_{\min} + (R_2)_{\min} + (R_3)_{\min} = 90 \, \Omega + 135 \, \Omega + 198 \, \Omega$$

$$(R_{\text{ges}})_{\min} = 423 \, \Omega$$

$$\text{Maximaler Gesamtwiderstand: } (R_{\text{ges}})_{\max} = (R_1)_{\max} + (R_2)_{\max} + (R_3)_{\max} = 110 \, \Omega + 165 \, \Omega + 242 \, \Omega$$

$$(R_{\text{ges}})_{\max} = 517 \, \Omega$$

Durch die Toleranz der Einzelwiderstände kann der Gesamtwiderstand den Minimalwert $423 \, \Omega$ und den Maximalwert $517 \, \Omega$ annehmen. Der tatsächliche Wert des Gesamtwiderstandes liegt zwischen diesen beiden Grenzen, da die Einzelwiderstände mit großer Wahrscheinlichkeit nicht alle zusammen an ihrer unteren bzw. oberen Toleranzgrenze liegen. Der Nennwert wäre $R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 = 470 \, \Omega$.

$$c) \text{ Minimaler Strom: } I_{\min} = \frac{U}{(R_{\text{ges}})_{\max}} = \frac{100 \, \text{V}}{517 \, \Omega} = 193,4 \, \text{mA}$$

$$\text{Maximaler Strom: } I_{\max} = \frac{U}{(R_{\text{ges}})_{\min}} = \frac{100 \, \text{V}}{423 \, \Omega} = 236,4 \, \text{mA}$$

$$d) (U_1)_{\min} = (R_1)_{\min} \cdot I_{\max} = 90 \, \Omega \cdot 236,4 \, \text{mA} = 21,28 \, \text{V}$$

$$(U_2)_{\min} = (R_2)_{\min} \cdot I_{\max} = 135 \, \Omega \cdot 236,4 \, \text{mA} = 31,91 \, \text{V}$$

$$(U_3)_{\min} = (R_3)_{\min} \cdot I_{\max} = 198 \, \Omega \cdot 236,4 \, \text{mA} = 46,80 \, \text{V}$$

Die Summe der Teilspannungen ergibt $99,99 \, \text{V}$. Die Differenz zu $100,00 \, \text{V}$ entstand durch Rundung der Rechenergebnisse.

$$(U_1)_{\max} = (R_1)_{\max} \cdot I_{\min} = 110 \, \Omega \cdot 193,4 \, \text{mA} = 21,27 \, \text{V}$$

$$(U_2)_{\max} = (R_2)_{\max} \cdot I_{\min} = 165 \, \Omega \cdot 193,4 \, \text{mA} = 31,91 \, \text{V}$$

$$(U_3)_{\max} = (R_3)_{\max} \cdot I_{\min} = 242 \, \Omega \cdot 193,4 \, \text{mA} = 46,80 \, \text{V}$$

Man sieht, daß die minimalen und maximalen Spannungen gleich groß sind. Werden die Widerstandswerte aufgrund ihrer Toleranzen minimal, so steigt der Strom und ergibt die gleichen Spannungsabfälle wie bei größeren Widerstandswerten und kleinerem Strom.

Um die Spannungsabfälle an den Teilwiderständen zu berechnen, hätte man auch gleich mit den Widerstands-Nennwerten rechnen können, z.B.:

$$U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_{\text{ges}}} = 100 \, \text{V} \cdot \frac{100 \, \Omega}{470 \, \Omega} = 21,27 \, \text{V}$$

- e) Die Belastung des Widerstandes R_1 ist am größten, wenn bei gegebenen Spannungsabfall sein Wert am kleinsten ist:

$$P = \frac{U_1^2}{(R_1)_{\min}} = \frac{(21,27 \, \text{V})^2}{90 \, \Omega} = 5 \, \text{W}$$

R_1 muß mindestens 5 Watt haben. In ihm werden 5 Watt Verlustleistung in Wärme umgesetzt, falls sein Wert an der unteren Toleranzgrenze liegt.

- f) Die Gleichspannungsquelle wird am stärksten belastet, wenn der Gesamtwiderstand minimal ist.

$$P_{\max} = \frac{U^2}{(R_{\text{ges}})_{\min}} = \frac{(100 \, \text{V})^2}{423 \, \Omega} = 23,64 \, \text{Watt} \quad (\text{schlechtester Fall})$$

$$P_{\min} = \frac{U^2}{(R_{\text{ges}})_{\max}} = \frac{(100 \, \text{V})^2}{517 \, \Omega} = 19,34 \, \text{Watt} \quad (\text{bester Fall})$$

Hinweis: Zur Reihenschaltung von Widerständen siehe auch Aufgabe 7, S. 63 und Aufgabe 8, S. 65.

Hinweis für die Praxis: Ist kein Widerstand mit dem benötigten Wert vorhanden, so kann er durch eine Reihenschaltung mehrerer Widerstände ersetzt werden. Die Toleranz und die Belastbarkeit der Teilwiderstände ist dabei zu berücksichtigen.

Beispiel: Benötigt wird ein Widerstand R mit $3,3 \, \text{k}\Omega$, $1 \, \text{W}$, $5 \, \%$ (Baureihe E24). Er kann durch die Reihenschaltung der Widerstände $R_1 = 2,0 \, \text{k}\Omega$, $1 \, \text{W}$, $5 \, \%$ und $R_2 = 1,3 \, \text{k}\Omega$, $1 \, \text{W}$, $5 \, \%$ ersetzt werden.

Die Toleranzgrenzen von R sind:

$$R_{\min} = 3,3 \, \text{k}\Omega - 0,05 \cdot 3,3 \, \text{k}\Omega = 3,135 \, \text{k}\Omega \quad \text{und} \quad R_{\max} = 3,3 \, \text{k}\Omega + 0,05 \cdot 3,3 \, \text{k}\Omega = 3,465 \, \text{k}\Omega$$

Hätte R_1 eine Toleranz von $10 \, \%$ statt $5 \, \%$, so hätte der Ersatzwiderstand aus R_1 und R_2 nicht die gewünschte Toleranz. Es wäre $(R_1)_{\min} = 1,8 \, \text{k}\Omega$ und $(R_2)_{\min} = 1,235 \, \text{k}\Omega$.

Somit wäre $(R_{\text{ges}})_{\min} = 3,035 \, \text{k}\Omega$, und damit kleiner als $R_{\min} = 3,135 \, \text{k}\Omega$.

5.3 Reihenschaltung von Kondensatoren

Schaltet man mehrere Kondensatoren in Reihe, so nimmt beim Anlegen einer Gleichspannung jeder Kondensator dieselbe Ladung auf, da im unverzweigten Stromkreis die Stromstärke überall gleich groß ist. Die Kondensatoren $C_1, C_2, \dots, C_n$ haben die Ladung $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$. Bei der Reihenschaltung von Zweipolen ist die Summe der Teilspannungen gleich der Gesamtspannung.

An $C_1, C_2, \dots, C_n$ liegen die Spannungen $U_1, U_2, \dots, U_n$.

Die Gesamtspannung ist $U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$. Es gilt $U = \frac{Q_{\text{ges}}}{C_{\text{ges}}}$

Somit ist $\frac{Q_{\text{ges}}}{C_{\text{ges}}} = \frac{Q_{\text{ges}}}{C_1} + \frac{Q_{\text{ges}}}{C_2} + \dots + \frac{Q_{\text{ges}}}{C_n}$

Teilt man obige Gleichung durch Q_{ges} , so erhält man: $\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$

Daraus folgt:

Gl. 38: Ersatzkapazität für n in Reihe geschaltete Kapazitäten

$$C_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}} \quad \text{oder} \quad C_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum_{v=1}^n \frac{1}{C_v}}$$

Bei der Reihenschaltung von Kondensatoren ist die Gesamtkapazität stets kleiner als die kleinste Kapazität der einzelnen Kondensatoren.

Da jeder Teilkondensator die gleiche Ladung hat, muß das Produkt aus $Q = C \cdot U$ für jeden Teilkondensator gleich sein. Ist C klein, so muß U groß sein und umgekehrt.

Bei der Reihenschaltung von Kondensatoren liegt an kleinen Kapazitäten eine große Spannung und umgekehrt.

Die Teilspannung U_x am Teilkondensator C_x von n in Reihe geschalteten Kondensatoren ist:

Gl. 39: Spannung an einem in Reihe geschalteten Kondensator

$$U_x = U \cdot \frac{C_{\text{ges}}}{C_x}$$

U_x = Spannung am Kondensator C_x

U = Gesamtspannung

C_{ges} = Ersatzkapazität

C_x = Teilkapazität

In der Praxis werden meist nur zwei Kondensatoren in Reihe geschaltet. Obige Formeln vereinfachen sich dann zu:

Gl. 40: Gesamtkapazität und Teilspannung bei zwei in Reihe geschalteten Kondensatoren

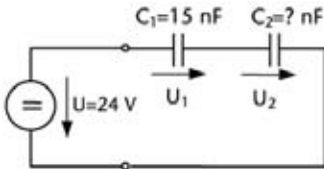
$$C_{\text{ges}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \quad \text{und} \quad U_2 = U \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

Anmerkung: In der Praxis ist die Spannungsverteilung an den einzelnen, in Reihe geschalteten Kondensatoren ausschließlich durch die Isolationswiderstände der Kondensatoren bestimmt.

Aufgabe 18:

Welche Kapazität muß mit $C_1 = 15 \text{ nF}$ in Reihe geschaltet werden, um eine Gesamtkapazität von $4,7 \text{ nF}$ zu erhalten? An die Reihenschaltung wird eine Gleichspannung von 24 Volt angeschlossen. Wie groß sind die Teilspannungen an den Kondensatoren? Zeichnen Sie ein Schaltbild.

Lösung:



Aus $C_{\text{ges}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ erhält man durch Auflösen nach C_2 : $C_2 = \frac{C_{\text{ges}} \cdot C_1}{C_1 - C_{\text{ges}}}$

Die Zahlenwerte eingesetzt ergibt $C_2 = 6,8 \text{ nF}$.

$$U_1 = U \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} = 24 \text{ V} \cdot \frac{6,8 \text{ nF}}{21,8 \text{ nF}} = 7,49 \text{ V} \quad U_2 = U \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 24 \text{ V} \cdot \frac{15 \text{ nF}}{21,8 \text{ nF}} = 16,51 \text{ V}$$

5.4 Reihenschaltung von Spulen

Falls sich Spulen durch ihre Magnetfelder gegenseitig beeinflussen, nennt man sie magnetisch gekoppelt. Bei der Reihenschaltung von n magnetisch **nicht** gekoppelten Spulen gilt für die Gesamtinduktivität:

Gl. 41: Gesamtinduktivität nicht gekoppelter Spulen bei Reihenschaltung

$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

Die Gesamtinduktivität von in Reihe geschalteten und magnetisch gekoppelten Spulen anzugeben ist schwierig und soll hier nur nach der Größenordnung angegeben werden.

Sind zwei Spulen magnetisch gekoppelt und haben sie gleichen Wicklungssinn, so verlaufen die gemeinsamen Feldlinien in gleicher Richtung. Bei Reihenschaltung der Spulen ist $L_{\text{ges}} > L_1 + L_2$.

Ist der Wicklungssinn beider Spulen entgegengesetzt, so ist $L_{\text{ges}} < L_1 + L_2$.

5.5 Reihenschaltung von Gleichspannungsquellen

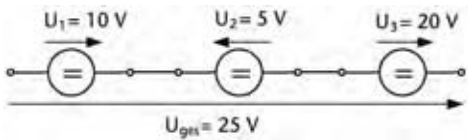
Gleichspannungsquellen haben einen Pluspol und einen Minuspol. Bei der Reihenschaltung von Gleichspannungsquellen muß daher auf ihre Polung geachtet werden. Wird der Minuspol (Austritt der Elektronen) der vorhergehenden Spannungsquelle mit dem Pluspol (Eintritt der Elektronen) der nachfolgenden Spannungsquelle verbunden, so addieren sich die Einzelspannungen. Hat eine Spannungsquelle in der Reihenschaltung entgegengesetzte Polarität, so vermindert sich die Gesamtspannung um den Betrag ihrer Spannung.

Wechseln sich bei der Reihenschaltung von n Gleichspannungsquellen Pluspol und Minuspol immer ab, so gilt:

Gl. 42: Gesamtspannung von gleichsinnig in Reihe geschalteten Gleichspannungen

$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

Beispiel:



Die **Innenwiderstände** der in Reihe geschalteten Spannungsquellen **addieren** sich.

Wird an eine Reihenschaltung von Gleichspannungsquellen ein Verbraucher angeschlossen, so ist der Strom durch jede Spannungsquelle gleich groß (unverzweigter Stromkreis). Die Leistung, die jede Spannungsquelle aufbringt, entspricht ihrer Spannung multipliziert mit dem Strom ($P = U \cdot I$).

5.6 Reihenschaltung von Widerständen, Kondensatoren und Spulen

5.6.1 Zusammenfassung von Bauelementen

Sind in einem unverzweigten Gleichstromkreis mehrere ohmsche Widerstände, Kondensatoren und Spulen in Reihe geschaltet, so können gleichartige Bauelemente nach den Gesetzen ihrer Reihenschaltung zu einem Ersatzbauelement zusammengefaßt werden.

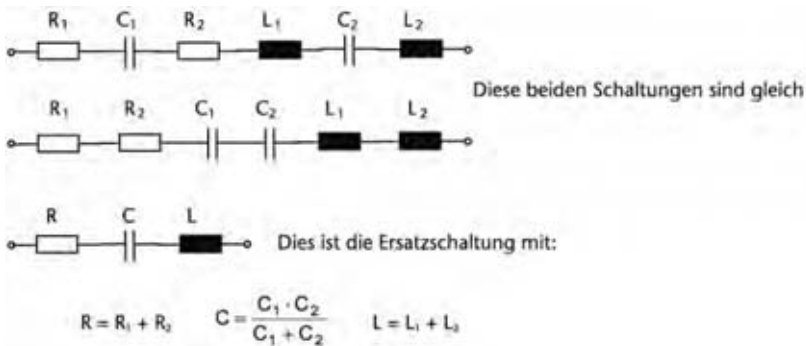


Abb. 102: In der Reihenschaltung ist die Reihenfolge von Bauelementen vertauschbar. Bauelemente können zusammengefaßt werden.

5.6.2 Reihenschaltung von Kondensator und R oder L

Da ein Kondensator Gleichstrom nicht durchläßt, bildet ein **Kondensator** in einer **Reihenschaltung im Gleichstromkreis eine »Sperr«**. Nachdem der Kondensator aufgeladen ist (man sagt »im eingeschwungenen Zustand«) fließt im Stromkreis kein Strom mehr. Dies gilt für die Reihenschaltung eines Kondensators mit einem ohmschen Widerstand und / oder einer Spule.

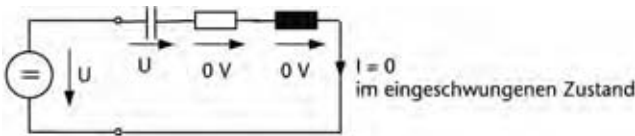


Abb. 103: Ein Kondensator sperrt Gleichstrom, nachdem er aufgeladen ist

5.6.3 Reihenschaltung einer Spule mit R oder C

Im Gleichstromkreis bildet die **Spule** mit dem Widerstand ihrer Wicklung einen **ohmschen Widerstand**. Ist der Wicklungswiderstand einer Spule nicht so klein, daß er vernachlässigt werden kann, so ist er als ohmscher Widerstand zu berücksichtigen.

5.7 Reihenschaltung in der Praxis

5.7.1 Ersatz von Bauteilen

Ist ein Bauteil mit einem bestimmten Wert im Labor nicht vorrätig, so kann es durch eine Reihenschaltung aus zwei oder mehreren Bauteilen ersetzt werden. So kann z.B. ein Widerstand mit 20 kΩ durch die Reihenschaltung von zwei Widerständen mit 10 kΩ ersetzt werden.

Dabei ist stets zu beachten, welche Toleranz sich für die Ersatzschaltung durch die Zusammenschaltung der einzelnen Bauteile ergibt, und ob diese Toleranz den Anforderungen entspricht.

Wird z.B. ein Widerstand mit 1,1 k Ω benötigt, so ist es sinnlos, einen Widerstand mit 1 k Ω / 20 % und einen Widerstand mit 100 Ω in Reihe zu schalten.

Die Belastung der einzelnen Bauteile der Ersatzschaltung muß ebenfalls berücksichtigt werden.

Die Leistung $P = U \cdot I = \frac{U^2}{R}$, welche in einem Bauteil in Wärme umgesetzt wird, darf die Nennleistung dieses Bauteiles nicht überschreiten.

Anmerkung: Für die Laborpraxis und für Versuche ist dies ein mögliches Verfahren, um benötigte Bauteilwerte darzustellen. Bei der Auslegung einer Schaltung für die Massenproduktion gilt allerdings aus Kostengründen: so wenig Bauteile und so wenig verschiedene Bauteilwerte wie möglich.

5.7.2 Vorwiderstand

Soll ein Verbraucher mit einer bestimmten Nennspannung an eine höhere Spannung angeschlossen werden, so muß in den Stromkreis ein Vorwiderstand geschaltet werden. Der Spannungsabfall am Vorwiderstand muß gleich der Differenz aus Anschlußspannung und Nennspannung des Verbrauchers sein.

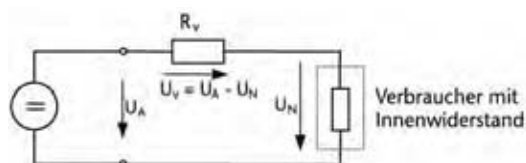


Abb. 104: Schaltung eines Verbrauchers mit Vorwiderstand

Ein Vorwiderstand nimmt elektrische Leistung auf und wandelt diese in Wärme um. Entsprechend dieser Verlustleistung muß die Belastbarkeit des Vorwiderstandes (in Watt) sein.

Damit der Wert des Vorwiderstandes berechnet werden kann, müssen die Anschlußspannung sowie die Nennspannung des Verbrauchers bekannt sein und zusätzlich die Stromstärke, der Widerstand oder die Leistung des Verbrauchers.

Gegeben sei jeweils die Anschlußspannung U_A und die Nennspannung U_N des Verbrauchers.

Vom Verbraucher ist I oder R oder P bekannt. Der gesuchte Vorwiderstand R_V kann nach einer der Formeln in nachfolgender Tabelle berechnet werden.

Tabelle 10: Formeln für die Berechnung eines Vorwiderstandes

Stromstärke I	Widerstand R	Leistung P
$R_V = \frac{U_A - U_N}{I}$	$R_V = \frac{(U_A - U_N) \cdot R}{U_N}$	$R_V = \frac{(U_A - U_N) \cdot U_N}{P}$

Gegeben:

U_A = Anschlußspannung

U_N = Nennspannung des Verbrauchers

I oder R oder P des Verbrauchers

Gesucht: R_V

5.7.3 Spannungsabfall an Leitungen

In Schaltbildern werden die Verbindungen einzelner Bauelemente als widerstandslos angenommen. In einem Gerät sind die Verbindungen verhältnismäßig kurz, so daß diese vereinfachende Annahme für die Praxis meistens erlaubt ist.

Werden die Leitungen jedoch sehr lang oder fließt ein hoher Strom durch die Leitung, so kann der Widerstand der Verbindungsdrähte nicht mehr vernachlässigt werden. Der Leitungswiderstand wirkt dann wie ein Vorwiderstand, an der Leitung tritt ein Spannungsabfall entsprechend $U = R \cdot I$ auf und im Leiter wird die Verlustleistung $P = R \cdot I^2$ in Wärme umgesetzt.

Bei der Stromversorgung durch Elektrizitätswerke über Kabel oder Freileitungen müssen Leitungsverluste durch entsprechend große Leitungsquerschnitte möglichst klein gehalten werden.

Auch bei Geräten mit Leistungsendstufen muß auf den Leitungsquerschnitt der Spannungsversorgung, vor allem der Masseverbindung, geachtet werden. Auf Leiterplatten sind entsprechend breite Kupferbahnen vorzusehen. Werden hohe Ströme über Steckerkontakte geführt, sollten diese einen niedrigen Kontaktübergangswiderstand haben.

5.7.4 Spannungsteiler

Werden Widerstände in Reihe geschaltet, so kann an einem der Widerstände eine kleinere Teilspannung abgegriffen werden. Zu beachten ist, daß die Stromentnahme aus der Teilspannung gering genug ist, damit die Teilspannung durch die Belastung nicht unzulässig verkleinert wird («zusammenbricht»). Ist die Stromentnahme aus der Teilspannung nur sehr gering, so spricht man von einem unbelasteten Spannungsteiler. Vergleiche auch 3.2.3.2, S. 66.

Ein Potentiometer kann als stufenlos einstellbarer Spannungsteiler geschaltet werden (Abb. 55, S.74).

5.8 Zusammenfassung: Berechnungen im unverzweigten Gleichstromkreis

1. Bei einer Reihenschaltung von Zweipolen ist die Stromstärke an jeder Stelle des Stromkreises gleich groß. Die Reihenfolge von Bauelementen ist vertauschbar.
2. Bei einer Reihenschaltung von Zweipolen addieren sich die Teilspannungen an den Zweipolen zur Gesamtspannung, die an der Reihenschaltung liegt.

3. Der Ersatzwiderstand einer Reihenschaltung von ohmschen Widerständen ist:

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

R_{ges} ist stets größer als der größte Wert der einzelnen Widerstände. Am Widerstand mit dem größten Wert ist der größte Spannungsabfall, und er wird am stärksten belastet.

4. Die Ersatzkapazität einer Reihenschaltung von Kondensatoren ist:

$$C_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

C_{ges} ist stets kleiner als der kleinste Kapazitätswert der Reihenschaltung. An kleinen Kapazitäten liegen hohe Spannungen an und umgekehrt.

5. Die Gesamtinduktivität magnetisch nicht gekoppelter Spulen ist: $L_{\text{ges}} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$
6. Die Gesamtspannung von gleichsinnig (Pluspol und Minuspol wechseln sich ab) in Reihe geschalteten Gleichspannungen ist: $U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 + \dots + U_n$
7. Ein nicht vorhandenes Bauteil kann durch eine Reihenschaltung von Bauteilen ersetzt werden. Zu beachten sind Toleranzen und Belastbarkeit der einzelnen Bauteile.
8. Mit einem Vorwiderstand kann ein Verbraucher an eine höhere Spannung als seine Nennspannung angeschlossen werden. Im Vorwiderstand entsteht Verlustleistung.

6 Messung von Spannung und Strom

6.1 Voltmeter und Amperemeter

Zunächst werden Aufbau und Wirkungsweise eines Meßinstruments zur Spannungs- und Strommessung erläutert.

Der aktive, oft drehbar gelagerte Teil eines Meßinstruments wird **Meßwerk** genannt.

Das **Meßinstrument** besteht aus einem Gehäuse mit Skala, dem am Meßwerk befestigten Zeiger und evtl. einem eingebauten Widerstand.

Als **Meßgerät** wird das gesamte Betriebsmittel aus Meßinstrument und zusätzlicher Beschaltung, z.B. Widerstände und Schalter, bezeichnet.

Das **Drehspulmeßwerk** nutzt die Kraftwirkung aus, die ein stromdurchflossener Leiter in einem Magnetfeld erfährt. Im Feld eines Dauermagneten ist ein Rähmchen drehbar angeordnet, auf welches der Leiter in Form einer Spule aufgewickelt ist. Das Rähmchen kann zur Verringerung der Reibung in Spitzen gelagert sein. Zur Stromzuführung dienen zwei Spiralfedern, welche auch das notwendige Gegendrehmoment (Rückstellmoment) erzeugen. Ist das Rähmchen an Spannbändern aufgehängt (wie beim **Galvanometer**), so liefern diese bei Torsion (Verdrehung) die Rückstellkraft und übernehmen zugleich die Stromzuführung zur Spule.

Fließt Strom durch die Spule, so bildet sie einen Elektromagneten, dessen Pole von den gleichnamigen Polen des Dauermagneten abgestoßen werden. Die Drehspule und der mit ihr verbundene Zeiger drehen sich dadurch, bis die **magnetische Kraft** und die **Rückstellkraft gleich groß** sind.

Spannungsmesser (**Voltmeter**) und Strommesser (**Amperemeter**) für **Gleichspannung** bzw. **Gleichstrom** können mit Drehspulmeßwerken ausgerüstet sein. Für Wechselspannung bzw. Wechselstrom eignen sich Drehspulmeßwerke ohne Gleichrichter nicht.

Beim **Dreheisenmeßwerk** befindet sich innerhalb einer feststehenden Rundspule ein feststehendes und ein drehbar gelagertes Eisen mit Zeiger. Fließt Strom durch die Spule, so werden beide Eisenbleche gleichpolig magnetisiert und erzeugen durch ihre gegenseitige Abstoßung ein Drehmoment. Das Dreheisenmeßwerk zeigt unabhängig von der Kurvenform des Stromes den Effektivwert (der die gleiche Wärmeleistung wie Gleichstrom hat) an und ist zur Messung von **Gleich- und Wechselspannung** bzw. -strom gleichermaßen geeignet. Das Dreheisenmeßwerk hat keine Stromzufuhr zu beweglichen Teilen, ist mechanisch und elektrisch besonders robust, hat jedoch einen wesentlich höheren Eigenverbrauch (höheren Strom durch das Meßwerk) als ein Drehspulmeßwerk.

Die Wirkung eines Voltmeters beruht also genauso wie die Wirkung eines Amperemeters auf einem Stromfluß. Der Stromfluß ist vom Widerstand des Meßinstruments (Innenwiderstand)

und von der angelegten Spannung abhängig. Der Drehwinkel (Ausschlag) des Zeigers ist proportional zum Stromfluß bzw. zur angelegten Spannung.

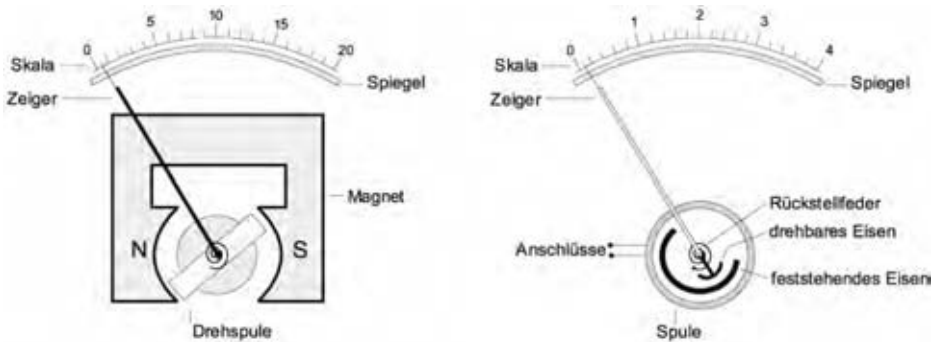


Abb. 105: Prinzip eines Drehspul-Meßinstruments (links) und eines Dreheisen-Meßinstruments (rechts)

Meßinstrumente mit Strichskala und Zeiger sind **Analoginstrumente**. **Digitale Meßgeräte** besitzen zum Ablesen des Meßwertes Ziffernanzeigen.

Ein **Voltmeter** wird mit zwei Leitungen an den beiden Punkten angeschlossen, zwischen denen die zu messende Spannung liegt. Bei einer Spannungsmessung wird ein Stromkreis nicht aufgetrennt.

Der Strom durch das Voltmeter soll die zu messende Spannung möglichst wenig belasten, damit diese nicht zusammenbricht und somit rückwirkungsfrei (nicht verfälscht) gemessen werden kann. Daraus folgt:

Der Innenwiderstand eines Voltmeters soll möglichst hoch sein.

Ein ideales Voltmeter hat einen unendlich hohen Eingangswiderstand.

Bei Drehspul-Vielfachmeßgeräten mit umschaltbarem Meßbereich (**Multimeter**) hängt der Eingangswiderstand oft vom Meßbereich ab und wird in $k\Omega$ pro Volt für den jeweiligen Meßbereich angegeben.

Der Eingangswiderstand kann zwischen einigen zehn Kiloohm und einigen Megaohm liegen.

Durch einen dem Drehspulinstrument vorgeschalteten Meßverstärker kann ein sehr hochohmiger Eingang von $10 M\Omega$ und mehr erreicht werden.

Digitale Multimeter haben immer einen eingebauten Meßverstärker, der Eingangswiderstand liegt unabhängig vom Meßbereich z.B. bei $10 M\Omega$.

Ein **Amperemeter** wird in den Stromweg geschaltet. Bei einer Strommessung muß der Stromkreis grundsätzlich aufgetrennt und durch den Strommesser wieder geschlossen werden.

Ein **Amperemeter** wird mit zwei Leitungen in den Stromkreis eingeschleift, in dem die Stromstärke gemessen werden soll. Bei einer Strommessung wird ein Stromkreis aufgetrennt.

Der Strom durch das Amperemeter soll den zu messenden Strom am Fließen möglichst wenig behindern. Daraus folgt:

Der Innenwiderstand eines Amperemeters soll möglichst klein sein.

Ein ideales Amperemeter hat einen unendlich kleinen Innenwiderstand (Null Ohm).



Abb. 106: Schaltzeichen für ein Voltmeter (links) und ein Amperemeter (rechts)

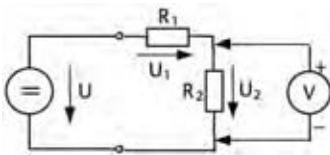


Abb. 107: So wird ein Voltmeter zur Spannungsmessung angeschlossen

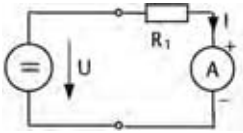


Abb. 108: Bei einer Strommessung wird das Amperemeter in den Stromkreis eingeschleift

Bei der Messung mit einem Zeigerinstrument sollte bei einer Spannungsmessung die Polarität der Spannung bekannt sein und das Voltmeter mit seinen mit »+« und »-« gekennzeichneten Polen entsprechend angeschlossen werden (Plus auf Plus und Minus auf Minus). Bei umgekehrter Polarität schlägt der Zeiger nach hinten aus und kann sich bei zu klein gewähltem Meßbereich sogar verbiegen. Ein Amperemeter hat ebenfalls gekennzeichnete Anschlüsse und ist entsprechend dem Stromfluß (technische Stromrichtung von Plus nach Minus) in den Stromkreis zu schalten.

Die Genauigkeit einer Messung ist um so höher, je näher der Meßwert am Nennwert des Meßbereiches liegt. Bei Multimetern sollte der **Meßbereich** so gewählt werden, daß der **Meßwert im letzten Drittel** des Bereiches liegt.

Bei Meßinstrumenten wird der durch das Instrument bedingte Meßfehler oft als relativer Fehler in Prozent des Meßbereich-Endwerts (Nennwert) angegeben.

Aufgabe 19:

Mit einem Meßinstrument der Klasse 1,5 ($\pm 1,5 \%$ Fehler bezogen auf den Meßbereich-Endwert) und einem Meßbereich-Endwert von 100 V wird eine Spannung von 20 V und eine Spannung von 80 V gemessen. Wie groß ist jeweils der relative Fehler in Prozent und der absolute Fehler in Volt?

Lösung:

Fehler bei 20 V: $\pm 1,5 \% \cdot \frac{100 \text{ V}}{20 \text{ V}} = \pm 7,5 \%$ (relativer Fehler), entspricht $\pm 1,5 \text{ V}$ (absoluter Fehler)

Der wahre Meßwert liegt zwischen 18,5 V und 21,5 V.

Fehler bei 80 V: $\pm 1,5 \% \cdot \frac{100 \text{ V}}{80 \text{ V}} = \pm 1,875 \%$ (relativer Fehler), entspricht $\pm 1,5 \text{ V}$ (absoluter Fehler)

Der wahre Meßwert liegt zwischen 78,5 V und 81,5 V.

6.2 Erweiterung des Meßbereiches eines Voltmeters

Bei Meßinstrumenten mit einem Drehspulmeßwerk kann der Meßbereich durch Widerstände erweitert werden. Bei einem **Voltmeter** (Spannungsmesser) erfolgt dies durch einen Vorwiderstand.

Soll mit einem Voltmeter eine größere Spannung gemessen werden als diejenige, welche dem Vollausschlag des Meßinstruments entspricht, so kann ein Vorwiderstand die Spannung an den Klemmen des Meßinstruments auf den Wert des Vollausschlags herabsetzen. Der Innenwiderstand des Voltmeters und der Vorwiderstand bilden einen Spannungsteiler.

Zur Berechnung des Vorwiderstandes für den erweiterten Meßbereich U_{mess} muß der Meßbereich U_M des Voltmeters und sein Innenwiderstand R_i bekannt sein.

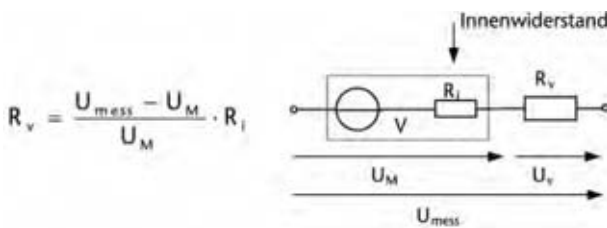


Abb. 109: Voltmeter mit Vorwiderstand zur Erweiterung des Meßbereiches

Bei Vielfachmeßgeräten werden zur **Wahl des Meßbereiches** die eingebauten Vorwiderstände mit einem (Dreh-)Schalter umgeschaltet.

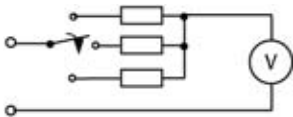


Abb. 110: Voltmeter mit umschaltbaren Meßbereichen

Damit das Meßergebnis nicht verfälscht wird, sollte die Genauigkeit eines Vorwiderstandes um den Faktor 10 höher sein als die des Meßinstruments.

Aufgabe 20:

Ein Voltmeter mit einem Meßbereich von 100 V und einem Innenwiderstand von 100 kΩ soll auf einen Meßbereich von 500 V erweitert werden.

Welchen Wert muß der Vorwiderstand haben, und wie groß muß seine Belastbarkeit sein?

Lösung:

$$R_v = \frac{500 \text{ V} - 100 \text{ V}}{100 \text{ V}} \cdot 10^5 \Omega = 400 \text{ k}\Omega \quad P_v = \frac{(400 \text{ V})^2}{400 \text{ k}\Omega} = 0,4 \text{ W}$$

6.3 Indirekte Messung von Widerstand und Leistung

Durch die Messung von Spannung und Strom kann der Widerstand und die Leistung eines Verbrauchers indirekt (rechnerisch) bestimmt werden. Es sind zwei Schaltungen möglich: die **Spannungsfehlerschaltung** und die **Stromfehlerschaltung**.

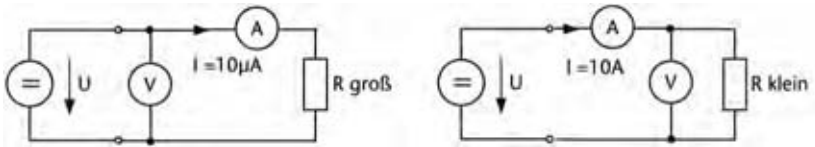


Abb. 111: Spannungsfehlerschaltung (links) und Stromfehlerschaltung (rechts)

Die **Spannungsfehlerschaltung** wird angewandt, wenn der **Widerstand des Verbrauchers groß** ist. Durch den kleinen Strom entsteht am Innenwiderstand des Amperemeters ein kleiner, zu vernachlässigender Spannungsabfall. Der kleine Innenwiderstand des Amperemeters ist gegen den großen Widerstand des Verbrauchers in der Reihenschaltung von beiden vernachlässigbar.

Die **Stromfehlerschaltung** wird angewandt, wenn der **Widerstand des Verbrauchers klein** ist, und der durch den hohen Strom bedingte Spannungsabfall am Amperemeter das Meßergebnis der Spannungsmessung am Verbraucher verfälschen würde.

Der Widerstand des Verbrauchers ergibt sich rechnerisch nach dem Ohmschen Gesetz: $R = \frac{U}{I}$

Die Leistung im Verbraucher ergibt sich nach $P = U \cdot I$.

7 Schaltvorgänge im unverzweigten Gleichstromkreis

Bisher wurde der Gleichstromkreis nur im **stationären** (eingeschwungenen) Zustand betrachtet, d.h. **lange Zeit nach dem Anlegen der Spannung an den Stromkreis**.

Gleich nach dem **Ein- oder Ausschalten** eines Stromkreises sind die Spannungen und Ströme unterschiedlich zu ihren Werten, die sie einige Zeit nach dem Schaltvorgang annehmen. Unmittelbar nach einem Schaltvorgang findet im Stromkreis ein **Ausgleichsvorgang** statt, bei dem sich Spannungen und Ströme zeitlich ändern (deshalb auch klein geschrieben werden) und in den stationären Zustand übergehen. Im Gleichstromkreis sind Spannungen und Ströme im stationären Zustand zeitlich konstant und im Wechselstromkreis verlaufen sie zeitlich periodisch.

Im folgenden wird der Verlauf von Spannung und Strom in Abhängigkeit der Zeit bei Schaltvorgängen an den Bauelementen Widerstand, Kondensator und Spule näher erläutert.

7.1 Schaltvorgang beim ohmschen Widerstand

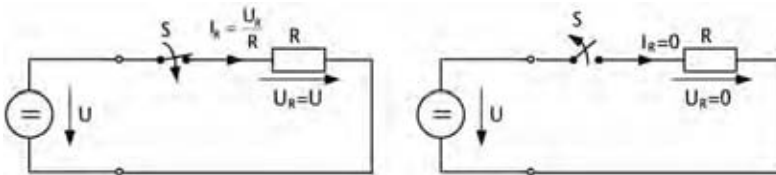


Abb. 112: Einschalten (links) und Ausschalten (rechts) der Spannung am ohmschen Widerstand

7.1.1 Widerstand einschalten

Wird der Schalter S geschlossen, so liegt am Widerstand sofort die Spannung $U_R = U$ an und es fließt sofort der Strom I_R , dessen Größe sich nach dem Ohmschen Gesetz ergibt. Zwischen dem Anlegen der Spannung U_R und dem Fließen des Stromes I_R besteht keine Zeitverzögerung.

7.1.2 Widerstand ausschalten

Wird der Schalter S anschließend geöffnet, so sind die Spannung U_R und der Strom I_R sofort und zum gleichen Zeitpunkt Null.

Bei einem Schaltvorgang besteht beim ohmschen Widerstand zwischen Spannung und Strom keine Zeitverzögerung und kein Unterschied zu den stationären Werten. Es existiert kein Ausgleichsvorgang, weil ein Widerstand keine speichernde Eigenschaft, wie z.B. ein Kondensator, besitzt.

Folgende Diagramme zeigen den Verlauf von Spannung und Strom am Widerstand für das Beispiel $U = 6 \text{ V}$ und $R = 2 \Omega$ (Einschalten bei $t = 0 \text{ s}$ und Ausschalten bei $t = 1,0 \text{ s}$).

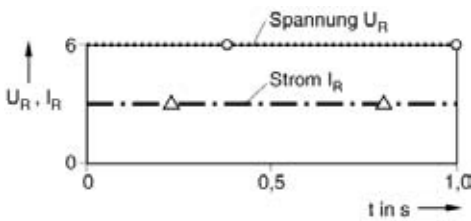


Abb. 113: Einschaltvorgang am Widerstand

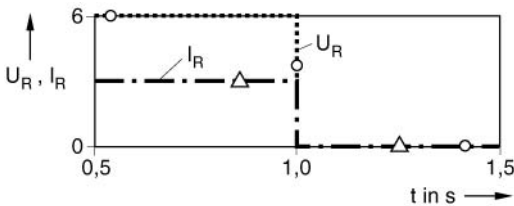


Abb. 114: Ausschaltvorgang am Widerstand

7.2 Schaltvorgang beim Kondensator

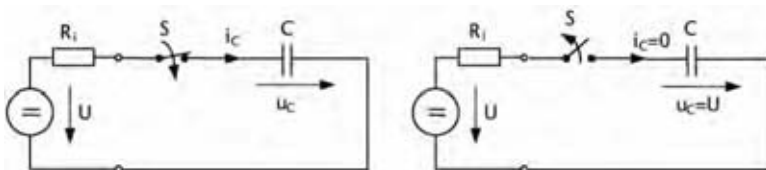


Abb. 115: Ein- und Ausschalten der Spannung am Kondensator

7.2.1 Kondensator laden (einschalten)

Wird an einen Kondensator eine Gleichspannung geschaltet, so wird er aufgeladen.

Hat die Spannungsquelle U den Innenwiderstand R_i , so ergibt sich der Ladestrom zu $i_C = \frac{U - u_C}{R_i}$.

Der Ladestrom ist zum Zeitpunkt des Einschaltens um so größer, je kleiner R_i ist. Bei der idealen Spannungsquelle mit $R_i = 0 \Omega$ würde sich im Augenblick des Einschaltens ($t = 0$) theoretisch ein unendlich hoher Einschaltstrom ergeben und der Kondensator wäre in unendlich kurzer Zeit

geladen, in unendlich kurzer Zeit wäre $u_c = U$. Ein ungeladener Kondensator stellt also im Augenblick des Einschaltens einen unendlich kleinen Widerstand dar.

Bei einer realen Spannungsquelle wird der Ladestrom durch R_i begrenzt, die Spannung u_c am Kondensator steigt während des Ladevorgangs ständig an, und der Ladestrom nimmt entsprechend ab.

Beim Einschalten besteht beim Kondensator zwischen Strom und Spannung eine Zeitverzögerung. Es findet ein Ausgleichsvorgang statt. Der Ladestrom ist am Anfang am größten und die Spannung am Kondensator am kleinsten. Der Ladestrom nimmt während der Ladezeit ab und die Spannung am Kondensator nimmt zu.

Als Merksatz kann dienen: »Am Kondensator eilt der Strom vor.«

Theoretisch ist der Kondensator erst nach unendlich langer Zeit voll geladen. (Je mehr Elektronen sich auf dem Belag des Kondensators ansammeln, der mit dem negativen Pol der Spannungsquelle verbunden ist, um so weniger Elektronen fließen wegen der gegenseitigen Abstoßung auf diesen Belag.)

Je kleiner die Spannungsdifferenz $U - u_c$ wird, um so kleiner wird der Strom. Ist der Kondensator vollständig geladen so gilt $U = u_c$ und $i_c = 0$, d.h. der Kondensator sperrt jetzt den Gleichstrom.

Anmerkung: Im Idealfall würde der Kondensator für Gleichstrom im geladenen Zustand einen unendlich großen Widerstand darstellen. Wegen des nicht unendlich hohen Isolationswiderstandes gilt dies nur theoretisch.

Die Zeit, bis der Kondensator zu einem bestimmten Teil geladen ist, hängt nur von der Kapazität C des Kondensators und dem Widerstand R_i ab, welcher den Ladevorgang verzögert. Je größer C ist, desto mehr Ladung muß transportiert werden, und desto länger dauert das Laden. Je größer R_i ist, desto kleiner ist der Ladestrom, und desto länger ist die Ladezeit.

Nach Gl. 2 ist $Q = I \cdot t$ und nach Gl. 16 ist $Q = C \cdot U$, also $I \cdot t = C \cdot U$. Mit $U = R \cdot I$ folgt: $t = R \cdot C$.

Statt »t« wird der griechische Kleinbuchstabe »τ« (Tau) verwendet und als **Zeitkonstante** bezeichnet. Die Einheit von τ ist die Sekunde ($[R] \cdot [C] = \Omega \cdot \frac{As}{V} = \frac{V}{A} \cdot \frac{As}{V} = s$).

Gl. 43: Zeitkonstante eines Kondensators

$$\tau = R \cdot C$$

τ = Zeitkonstante in Sekunden

R = Widerstand in Ohm

C = Kapazität in Farad

Die Zeitkonstante ist ein Maß dafür, wie schnell die Spannung am Kondensator ansteigt, bzw. der Strom abfällt. Die Zeitkonstante gibt an, nach welcher Zeit das Ansteigen der Spannung bzw. das Abfallen der Stromstärke beendet wäre, wenn der Vorgang mit gleicher Geschwindigkeit wie zu Beginn weiterlaufen würde.

Ist die Zeit der Zeitkonstanten abgelaufen, so ist die Spannung am Kondensator auf 63 % der Ladespannung angestiegen, und der Strom auf 37 % des Anfangswertes abgefallen. Ist danach wieder die Zeit τ vergangen, so ist die Spannung von den restlichen 37 % wiederum auf 63 % angestiegen (somit insgesamt auf $63 \% + 37 \% \cdot 0,63 = 86,3 \%$), und der Strom ist auf 37 % -37

$\% \cdot 0,63 = 13,7\%$ gefallen. Nach einer Zeit, die fünf Zeitkonstanten entspricht, ist der Kondensator praktisch voll aufgeladen (zu 99,3 %).

Beispiel: Folgendes Beispiel zeigt den Ladevorgang eines Kondensators. Man beachte den sehr hohen Stromstoß beim Einschalten (R_i ist mit $0,1\ \Omega$ sehr klein).

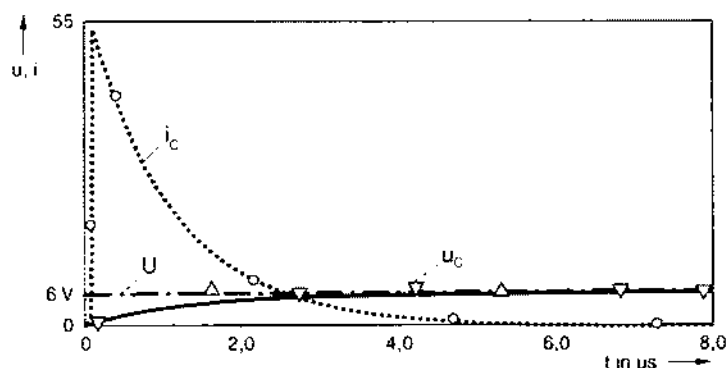


Abb. 116: Ladevorgang eines Kondensators (Beispiel für $U = 6\text{ V}$, $R_i = 0,1\ \Omega$, $C = 10\ \mu\text{F}$)

7.2.2 Kondensator ausschalten

Ist ein Kondensator voll aufgeladen und wird er von der Spannungsquelle getrennt, so beträgt seine Spannung $u_c = U$ (mit $U = \text{Ladespannung}$). Durch das Unterbrechen des Stromkreises wird der Strom $i_c = 0$. Die im Kondensator gespeicherte Ladung bleibt getrennt, und somit bleibt die Kondensatorspannung erhalten.

Anmerkung: Tatsächlich findet jedoch wegen des endlich großen Isolationswiderstandes ein Ladungsausgleich zwischen den Kondensatorbelägen statt und die Spannung wird während einer relativ langen Zeit durch diese Selbstentladung stetig kleiner.

Ist ein Kondensator der Kapazität »C« auf die Spannung »U« aufgeladen, so ist in ihm die elektrische Energie »W« gespeichert. Es gilt folgende Formel für die gespeicherte Energie (auf eine Herleitung wird verzichtet):

Gl. 44: Gespeicherte Energie in einem geladenen Kondensator

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \quad W \text{ in Ws} = \text{VAs}$$

7.2.3 Kondensator entladen

Steht der Schalter »S« in Abb. 117 in Stellung »Ein«, so wird der Kondensator über den Vorwiderstand R geladen. Der Widerstand R sei groß gegenüber dem Innenwiderstand R_i der Span-

nungsquelle, so daß R_i vernachlässigt werden kann. Wird nach dem Laden der Schalter in Stellung »Aus« gebracht, so wird der Kondensator über den Widerstand entladen.

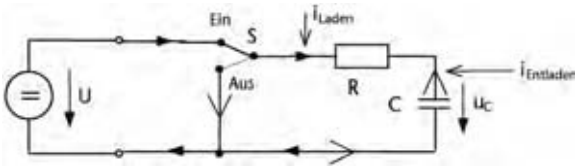


Abb. 117: Schaltung zum Laden und Entladen eines Kondensators

Beim Entladen ist die Stromrichtung gegenüber dem Ladevorgang umgekehrt. Im ersten Augenblick hat der Strom seinen höchsten Wert und sinkt dann mit kleiner werdender Kondensatorspannung ab. Auch beim Entladen spielt die Zeitkonstante τ eine Rolle, der Entladevorgang ist nach der Zeit $5 \cdot \tau$ zu 99,3 % abgeschlossen.

Ist der Widerstand R sehr klein, so ist die Entladezeit sehr klein und es fließt ein hoher Entladestrom (der geladene Kondensator wird kurzgeschlossen). In der Praxis sollten Kondensatoren mit großen Kapazitätswerten, die auf eine hohe Spannung aufgeladen sind, mit Hilfe eines Widerstandes langsam entladen werden.

Das folgende Beispiel zeigt den Lade- und Entladevorgang für eine Ladespannung von $U = 5$ Volt, eine Kapazität mit $C = 1 \mu\text{F}$ und einen Widerstand $R = 10 \text{ k}\Omega$.

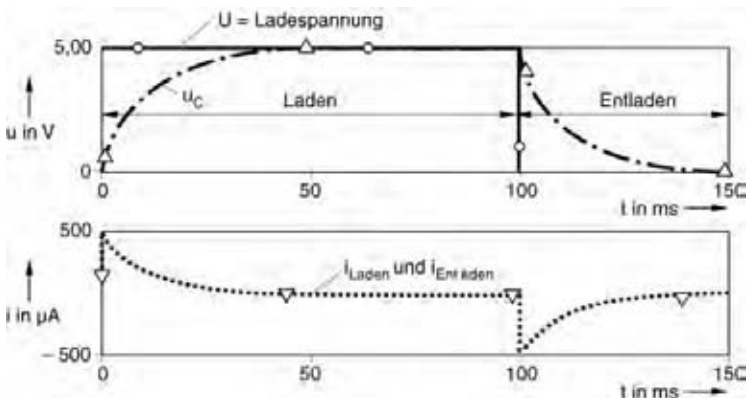


Abb. 118: Verlauf von Spannung und Strom beim Laden und Entladen eines Kondensators

7.2.4 Exponentialfunktion von Spannung und Strom

Anmerkung: Für diesen schwierigen Abschnitt ist mathematisches Verständnis notwendig.

Beim Laden und Entladen eines Kondensators folgen die Momentanwerte von Spannung $u_C(t)$ und Strom $i_C(t)$ der sogenannten **Exponentialfunktion**.

Eine Exponentialfunktion (e-Funktion oder exp-Funktion) ist $f(x) = e^x$.

Die Eulersche²⁰ Zahl $e = 2,71828....$ ist ein unendlicher nicht periodischer Dezimalbruch (wie die Kreiszahl π) und bildet die Basis des natürlichen Logarithmus.

Andere Formen der Exponentialfunktion sind $f_1(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ und $f_2(x) = 1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x}$

Mit $x = 0$ und $e^0 = 1$ erhält man die Funktionswerte $f_1(0) = 1$ und $f_2(0) = 0$

Die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ entsprechen den Lade- und Entladekurven eines Kondensators.

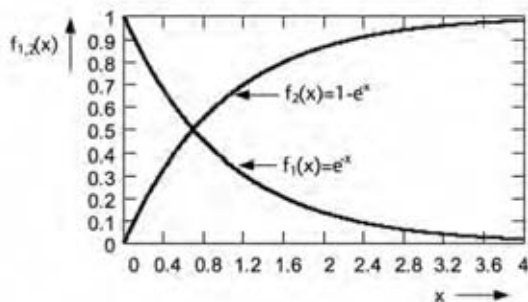


Abb. 119: Graphische Darstellung der e-Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$

Die Momentanwerte von Spannung und Strom beim Laden und Entladen eines Kondensators können mit Hilfe der e-Funktionen berechnet werden. Die Formeln werden in nachfolgender Tabelle (ohne Herleitung) angegeben.

Tabelle 11: Formeln zur Berechnung der Augenblickswerte von Spannung und Strom bei Ladung und Entladung eines Kondensators

Aufladung		Entladung	
Kondensatorspannung	$u_c(t) = U \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \right)$	Kondensatorspannung	$u_c(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$
Kurvenform entspricht $f_2(x)$		Kurvenform entspricht $f_1(x)$	
Kondensatorstrom	$i_c(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$	Kondensatorstrom	$i_c(t) = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$
Kurvenform entspricht $f_1(x)$		Kurvenform entspricht $-f_1(x)$	

In Tabelle 11 bedeuten:

$u_c(t)$ = Kondensatorspannung als Funktion der Zeit. Wird für »t« ein bestimmter Wert »T« eingesetzt, so erhält man den Momentanwert $u_c(T)$ zum Zeitpunkt »T«.

²⁰ Leonhard EULER (1707 - 1783), Schweizer Mathematiker

$i_c(t)$ = Kondensatorstrom als Funktion der Zeit. Für den Momentanwert gilt das gleiche wie bei $u_c(t)$.

t = Zeit in Sekunden

C = Kapazität des Kondensators in Farad

e = Eulersche Zahl $\approx 2,71828$

Beim Laden:

U = Ladespannung in Volt.

Ist der Kondensator vor dem Einschalten bereits auf die Spannung U_c geladen, so muß U_c zu U (mit richtigem Vorzeichen nach dem Gesetz der Reihenschaltung von Spannungsquellen!!) addiert werden

R = Wert des Vorwiderstandes in Ohm. Ist der Innenwiderstand der ladenden Spannungsquelle gegenüber R nicht vernachlässigbar (nicht sehr viel kleiner), so muß er zu R addiert werden.

Beim Entladen:

U = Anfangswert der Kondensatorspannung zum Zeitpunkt $t = 0$ in Volt

R = Wert des Entladewiderstandes in Ohm

Statt $R \cdot C$ kann in die Formeln die Zeitkonstante τ eingesetzt werden.

Aufgabe 21:

Ein entladener Kondensator mit $100 \mu\text{F}$ wird über einen Vorwiderstand von $100 \text{ k}\Omega$ an eine Gleichspannung $U = 10 \text{ Volt}$ angeschlossen. Nach wievielen Sekunden ist der Kondensator nahezu (mehr als 99 %) auf 10 V aufgeladen?

Lösung:

Die Zeitkonstante ist $\tau = R \cdot C = 10^5 \Omega \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 10 \text{ s}$

Nach fünf Zeitkonstanten, also 50 Sekunden ist der Kondensator fast vollständig geladen.

Aufgabe 22:

Ein entladener Kondensator mit $47 \mu\text{F}$ ist mit einem Widerstand von $10 \text{ k}\Omega$ in Reihe geschaltet. Über einen offenen Schalter ist die Reihenschaltung an die zwei Pole einer Gleichspannungsquelle mit $U = 12 \text{ V}$ angeschlossen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen.

Wie groß ist $0,5 \text{ s}$ nach dem Einschalten die Spannung am Kondensator, und wie groß ist zu diesem Zeitpunkt der Strom im Stromkreis?

Lösung:

$$u_{c(t=0,5)} = 12 \cdot \left(1 - e^{-\frac{0,5}{10^4 \cdot 47 \cdot 10^{-6}}} \right) = 7,858 \quad \text{Spannung: } 7,858 \text{ V}$$

$$i_{c(t=0,5)} = \frac{12}{10^4} \cdot e^{-\frac{0,5}{10^4 \cdot 47 \cdot 10^{-6}}} = 0,000414$$

Strom: $414 \mu\text{A}$

Aufgabe 23:

Die Reihenschaltung eines entladenen Kondensators mit $47 \mu\text{F}$ und eines Widerstandes mit $10 \text{ k}\Omega$ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ an eine Gleichspannungsquelle mit 12 V angeschlossen. Nach wievielen Sekunden ist der Kondensator auf $7,858 \text{ V}$ aufgeladen?

Lösung:

$$u_c = U \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right) \quad \text{wird nach der Variablen } t \text{ aufgelöst. } u_c = U - U \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

$$\Rightarrow u_c - U = -U \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \Rightarrow \frac{u_c - U}{-U} = e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad \text{Beide Seiten der Gleichung logarithmieren ergibt:}$$

$$\ln\left(\frac{u_c - U}{-U}\right) = -\frac{t}{R \cdot C} \cdot \ln(e) \quad \text{Mit } \ln(e) = 1 \text{ und beide Seiten multipliziert mit } -R \cdot C \text{ folgt:}$$

$$t = -R \cdot C \cdot \ln\left(\frac{u_c - U}{-U}\right) \quad \text{oder} \quad t = -R \cdot C \cdot \ln\left(1 - \frac{u_c}{U}\right)$$

Mit $U = 12 \text{ V}$, $u_c = 7,858 \text{ V}$, $R = 10^4 \Omega$, $C = 47 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ folgt: $t = 0,5 \text{ s}$

Aufgabe 24:

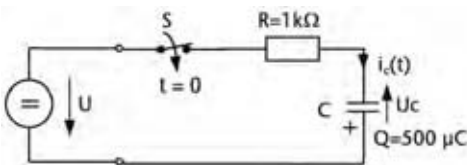
Ein Kondensator mit $20 \mu\text{F}$ ist mit $500 \mu\text{C}$ geladen. Der positive Anschluß des Kondensators wird mit dem negativen Pol einer Gleichspannungsquelle $U = 50 \text{ V}$ verbunden. Der andere Anschluß des Kondensators wird über einen Vorwiderstand $R = 1 \text{ k}\Omega$ und über einen Schalter mit dem Pluspol der Gleichspannungsquelle verbunden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen.

a) Zeichnen Sie ein Schaltbild.

b) Geben Sie die Gleichung für $i_c(t)$ mit eingesetzten Zahlenwerten an. Wie groß ist $i_c(t=0)$?

Lösung:

a)



b) Der Kondensator hat eine Anfangsladung und damit eine Anfangsspannung von:

$$U_c = \frac{Q}{C} = \frac{500 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}} = 25 \text{ V}$$

Die Spannung U_c ist mit der Ladespannung U gleichsinnig in Reihe geschaltet und wird zu dieser addiert.

$$i_c(t) = \frac{U + U_c}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = \frac{50 + 25}{10^3} \cdot e^{-\frac{t}{10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}} = 0,075 \cdot e^{-50t} \quad i_c(t=0) = 0,075 \text{ A}$$

7.3 Schaltvorgang bei der Spule

7.3.1 Spule einschalten

Schaltet man an eine Spule eine Gleichspannung, so beginnt durch die Spule ein Strom zu fließen, und das magnetische Feld der Spule **ändert** sich. Dadurch wird in der Spule eine Spannung induziert, die der erregenden Spannung (Betriebsspannung) entgegengerichtet ist (Lenzsche Regel) und diese verkleinert. Die durch Selbstinduktion entstehende Spannung versucht den beginnenden Stromfluß zu hindern. Der Strom durch die Spule erreicht erst nach einiger Zeit seinen Endwert.

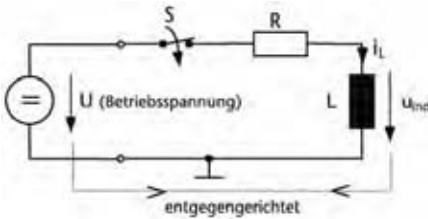


Abb. 120: Einschalten der Spannung an einer Spule

Wird die Spannung U an die Spule geschaltet, so ist die Spannung an der Spule $U = u_{\text{ind}}$. Der ohmsche Widerstand im Stromkreis sei R (einschließlich des Innenwiderstandes R_i der Spannungsquelle und des Wicklungswiderstandes der Spule). Der Strom durch die Spule ist dann:

$$i_L = \frac{U - u_{\text{ind}}}{R}.$$

Im Augenblick des Einschaltens ist $u_{\text{ind}} = U$ und somit $i_L = 0$. Die induzierte Spannung u_{ind} wird dann immer kleiner, und der Strom durch die Spule strebt gegen seinen Endwert

$$i_L = \frac{U}{R}.$$

Beim Einschalten besteht bei der Spule zwischen Spannung und Strom eine Zeitverzögerung. Der Strom durch die Spule ist am Anfang am kleinsten, und die induzierte Spannung an der Spule am größten. Der Strom nimmt zu und die induzierte Spannung nimmt ab.

Als Merksatz kann dienen: »Bei der Induktivität kommt der Strom zu spät.«

Der Strom durch die Spule steigt um so langsamer an, je größer die Induktivität und je kleiner der ohmsche Widerstand R ist. Je größer die Induktivität ist, um so größer ist die induzierte Spannung, die den Stromanstieg hemmt. Je kleiner R ist, desto größer ist die Stromänderung pro Zeiteinheit, und damit ist wiederum die induzierte Spannung um so größer. Zur Erinnerung:

$$u_{\text{ind}} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Das Verhältnis von L zu R ergibt die Zeitkonstante τ .

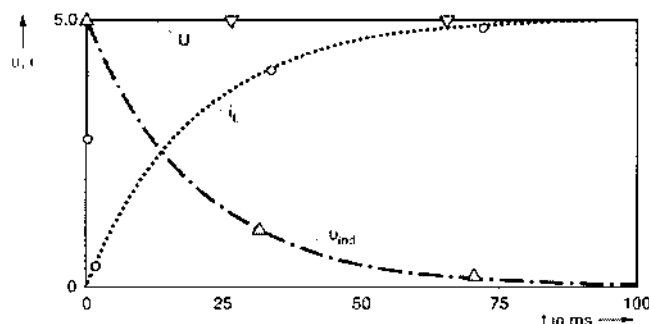
Gl. 45: Zeitkonstante einer Induktivität

$$\tau = \frac{L}{R}$$

 τ = Zeitkonstante in Sekunden

L = Induktivität in Henry

R = Widerstand in Ohm



Beispiel für:

U = 5 V

R = 1 Ω

L = 20 mH

Abb. 121: Verlauf von Spulenstrom und induzierter Spannung beim Einschalten einer Spule

7.3.2 Spule ausschalten (mit Abschalt-Induktionsstromkreis)

Im magnetischen Feld einer Spule ist Energie gespeichert. Wird die Spannung, die das Magnetfeld hervorruft, ausgeschaltet, so wird diese Energie wieder frei.

Gl. 46: Im Magnetfeld einer Spule gespeicherte Energie

$$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$

Beim Ausschalten entsteht an der Spule nach der Lenzschen Regel eine Induktionsspannung, die mit der Betriebsspannung gleichsinnig gerichtet ist. Sie will den Stromfluß, und damit das Magnetfeld, aufrechterhalten. Nach dem Ausschalten der Spannung wirkt die Spule wie ein Erzeuger.

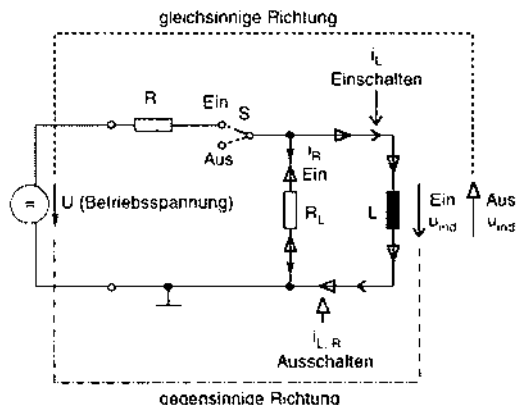


Abb. 122: Induzierte Spannungen beim Ein- und Ausschalten einer Spule

Kann nach dem Ausschalten der Betriebsspannung weiterhin ein Strom durch die Spule fließen, weil ein Verbraucher parallel zu ihr geschaltet ist, so fließt wegen der Induktionsspannung der Strom durch die Spule in gleicher Richtung noch einige Zeit weiter (im geschlossenen L - R_L -Stromkreis). Die Stromänderung durch die Spule erfolgt dadurch langsamer (der Strom ist nicht plötzlich Null), und die induzierte Spannung ist kleiner als ohne einen parallel geschalteten Verbraucher.

Wird der Schalter S eingeschaltet, so folgt der Spulenstrom i_L der Spannung U nur verzögert. (Der Strom I_R durch den Widerstand R_L ist gegenüber U nicht verzögert.)

Wird S ausgeschaltet, so geht der Spulenstrom nicht sprunghaft auf Null. Die Induktionsspannung läßt im L - R_L -Stromkreis (Abschalt-Induktionsstromkreis) einen Strom fließen, der gegenüber U verzögert auf Null absinkt.

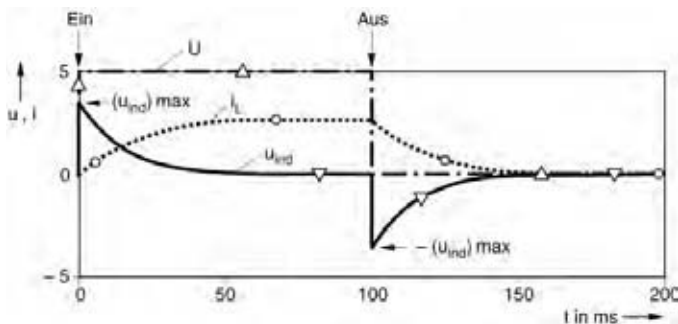


Abb. 123: Spulenstrom und induzierte Spannung beim Ein- und Ausschalten einer Spule (mit Abschalt-Induktionsstromkreis) (Beispiel für $U = 5\text{ V}$, $R = 2\ \Omega$, $R_L = 5\ \Omega$, $L = 20\text{ mH}$)

Der Betrag von $(u_{\text{ind}})_{\text{max}}$ ergibt sich nach der Spannungsteilung an R und R_L , nämlich:

$$(u_{\text{ind}})_{\text{max}} = U \cdot \frac{R_L}{R + R_L}$$

7.3.3 Spule ausschalten (ohne Abschalt-Induktionsstromkreis)

Ändert sich der Strom durch die Spule beim Ausschalten der Betriebsspannung sprunghaft, weil kein Abschalt-Induktionsstromkreis vorhanden ist, so wird die in der Spule induzierte Spannung sehr groß.

Theoretisch würde sie nach $u_{\text{ind}} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$

unendlich groß werden, wenn die Betriebsspannung, und damit der Spulenstrom, in unendlich kurzer Zeit $\Delta t = 0$ auf Null zurückgehen würde. Dies ist in der Praxis natürlich nicht der Fall, eine Spannung braucht eine bestimmte, wenn auch u.U. nur sehr kurze Zeit, um auf Null abzufallen. In der Praxis ergeben sich beim Öffnen des Stromkreises durch die Induktionsspannung hohe Spannungsspitzen.

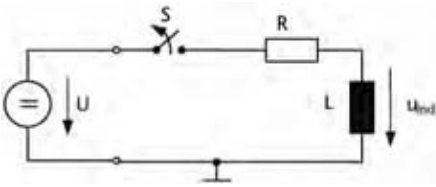


Abb. 124: Ausschalten einer Spule ohne Abschalt-Induktionsstromkreis

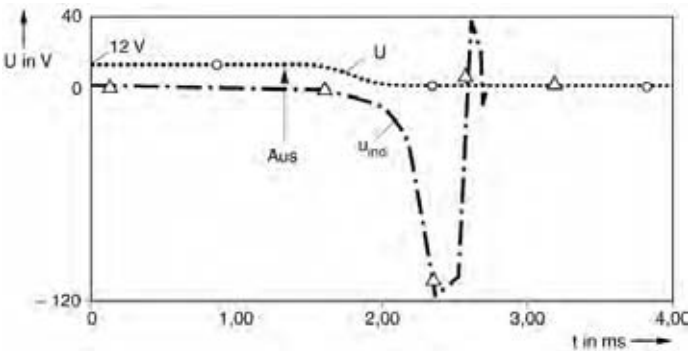


Abb. 125: Hohe Spannungsspitzen beim Ausschalten einer Spule

Die hohe Abschalt-Induktionsspannung ist oft unerwünscht, da sie z.B. einen Lichtbogen zwischen den Schalterkontakten zünden und die Kontakte zerstören kann. Wird ein Relais ausgeschaltet, so kann sich die hohe Spannung über die Spannungsversorgung in der Schaltung ausbreiten und Bauteile (vor allem empfindliche Halbleiter-Bauelemente) zerstören.

Zur Begrenzung der hohen Spannung wird in der Praxis hauptsächlich eine Halbleiterdiode eingesetzt. Eine Diode läßt Gleichstrom in der Durchlaßrichtung durch und sperrt ihn in der Sperrichtung. Wird eine Diode parallel zur Spule geschaltet und ist für den Abschalt-Induktionsstrom in Durchlaßrichtung gepolt, so wird ein Abschalt-Induktionsstromkreis erzeugt. Die an der Spule induzierte Spannung wird dadurch verkleinert. Eine Diode, die für diesen Zweck eingesetzt wird, nennt man **Freilaufdiode**.

Statt einer Diode kann parallel zur Spule auch ein spannungsabhängiger Widerstand oder ein Kondensator geschaltet werden, um die Abschalt-Induktionsspannung herabzusetzen.

Erwähnt sei, daß die hohe Abschalt-Induktionsspannung auch technische Anwendungen hat (Zünden einer Neonröhre, Zündspule).

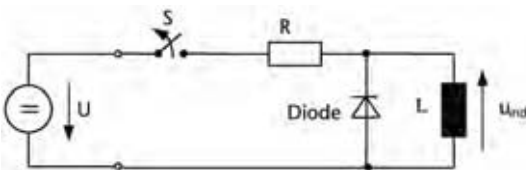


Abb. 126: Spule mit Freilaufdiode. Für U ist die Diode in Sperrichtung, für u_{ind} in Durchlaßrichtung gepolt

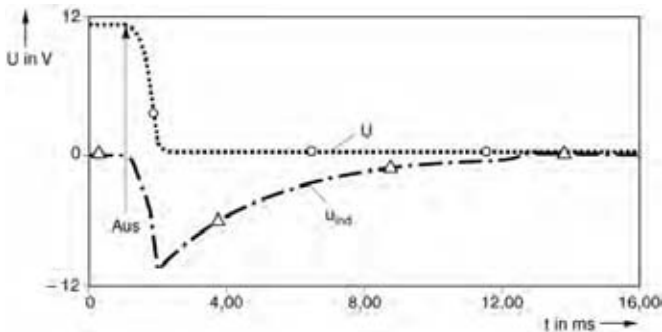


Abb. 127: Verkleinern der Abschalt-Induktionsspannung durch eine Freilaufdiode
(Beispiel für $U = 12\text{ V}$, $R = 30\ \Omega$, $L = 100\text{ mH}$)

7.3.4 Zeitverlauf von Spannung und Strom

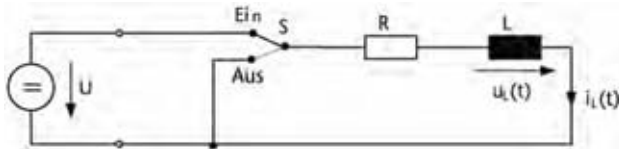
Wie aus den vorangegangenen Beispielen zum Ein- und Ausschalten einer Spule zu sehen ist, folgen auch bei der Spule (ähnlich wie beim Schalten eines Kondensators) Spannung und Strom einer Exponentialfunktion.

Beim Kondensator folgt die Spannung zeitlich verzögert dem Strom, bei der Spule folgt der Strom zeitlich verzögert der Spannung. Beim Kondensator kann beim Einschalten ein Ladestromstoß entstehen, bei der Spule können beim Abschalten hohe Spannungsspitzen auftreten.

Spule und Kondensator verhalten sich entgegengesetzt, sie sind **duale** Bauelemente.

Die Berechnung der Momentanwerte von Spannung und Strom der Spule beim Ein- und Ausschalten (mit Abschalt-Induktionsstromkreis) einer Reihenschaltung aus einem Widerstand und einer Spule kann nach den Formeln aus nachfolgender Tabelle erfolgen.

Tabelle 12: Formeln zur Berechnung der Augenblickwerte von Spannung und Strom beim Ein- und Ausschalten einer Spule



Einschalten		Ausschalten	
Spulenspannung	$u_L(t) = U \cdot e^{-\frac{t \cdot R}{L}}$	Spulenspannung	$u_L(t) = -U \cdot e^{-\frac{t \cdot R}{L}}$
Spulenstrom	$i_L(t) = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t \cdot R}{L}}\right)$	Spulenstrom	$i_L(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t \cdot R}{L}}$

Aufgabe 25:

Eine Spule mit einer Induktivität von $L = 150 \text{ mH}$ ist mit einem Vorwiderstand $R = 100 \Omega$ an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen. Die Spannungsquelle wird eingeschaltet, ihre Spannung steigt innerhalb von $0,2 \text{ ms}$ von 0 V auf 15 V und bleibt dann konstant. Wie groß ist die in der Spule induzierte Spannung nach 500 ms ?

Lösung:

Die Zeitkonstante ist $\tau = \frac{L}{R} = \frac{0,15}{100} = 1,5 \text{ ms}$. Nach $5 \cdot \tau = 7,5 \text{ ms}$ ist der Einschaltvorgang praktisch beendet. Die induzierte Spannung nach 500 ms ist 0 V .

Aufgabe 26:

Durch eine Spule mit $L = 25 \text{ mH}$ fließt ein konstanter Gleichstrom mit $I = 0,2 \text{ A}$. Wie groß ist die induzierte Spannung an der Spule?

Lösung:

Die induzierte Spannung ist Null Volt, da sich der Strom durch die Spule nicht ändert.

7.4 Zusammenfassung: Schaltvorgänge im unverzweigten Gleichstromkreis

1. Ohmscher Widerstand: Es besteht keine Zeitverzögerung zwischen Spannung und Strom.
2. Die Zeitverzögerung von Spannung und Strom bei Kondensator und Spule entsprechen einer Exponentialfunktion.
3. Kondensator mit Vorwiderstand einschalten: Die Spannung steigt verzögert auf den Wert der Ladespannung an. Der Strom springt auf einen Maximalwert und fällt verzögert auf Null ab.
4. Kondensator ausschalten: Der Kondensator bleibt geladen.
5. Kondensator über einen Widerstand entladen: Die Spannung fällt verzögert auf Null ab. Der Strom springt auf einen negativen Maximalwert und fällt verzögert auf Null ab.
6. Die Zeitkonstante eines Kondensators ist $\tau = R \cdot C$
7. Spule einschalten: Der Strom steigt verzögert auf einen Maximalwert an. Die Spannung springt auf einen Maximalwert und fällt verzögert auf Null ab.
8. Spule mit Abschalt-Induktionsstromkreis ausschalten: Der Strom fällt verzögert auf Null ab. Die Spannung springt auf einen negativen Maximalwert und fällt verzögert auf Null ab.
9. Spule ohne Abschalt-Induktionsstromkreis ausschalten: An der Spule entstehen hohe Spannungsspitzen. Durch eine Freilaufdiode können diese verkleinert werden.
10. Die Zeitkonstante einer Spule ist $\tau = \frac{L}{R}$

8 Der verzweigte Gleichstromkreis

In einem verzweigten Stromkreis liegt an mindestens zwei Bauelementen (Zweipolen) die gleiche Spannung, d.h. mindestens zwei Zweipole sind parallel geschaltet und es tritt mindestens eine »Stromverzweigung« oder »Stromteilung« auf. Sollen Verbraucher mit derselben Nennspannung an eine einzige Spannungsquelle angeschlossen werden, so werden sie parallel geschaltet, und der Strom verzweigt sich in den einzelnen Strompfaden. Ein Beispiel hierfür ist das parallele Anschließen von zwei Glühlampen an eine Batterie. Auch die Steckdosen eines Raumes in einem Haus sind meist parallel geschaltet, an jedem Verbraucher liegt die gleiche Spannung.

8.1 Die Kirchhoffschen Gesetze

Für die Analyse (Berechnung von Spannungen und Strömen) von verzweigten Stromkreisen sind die KIRCHHOFFSchen²¹ Gesetze von fundamentaler Bedeutung. Mit den Kirchhoffschen Gesetzen und den Gleichungen der Bauelemente (z.B. dem Ohmschen Gesetz) lassen sich Spannungen und Ströme an jeder Stelle einer verzweigten elektronischen Schaltung berechnen.

8.1.1 Die Knotenregel (1. Kirchhoffsches Gesetz)

Als »Knoten« (oder Knotenpunkt) ist ein Schaltungspunkt definiert, an dem mehrere Bauelemente angeschlossen sind und eine Stromverzweigung auftritt. Da in einem Knotenpunkt keine Ladung gespeichert werden kann, gilt stets:

In einem Knoten ist die Summe aller zufließenden Ströme gleich der Summe aller abfließenden Ströme.

Oder:

In einem Knoten ist die Summe aller Ströme gleich Null.

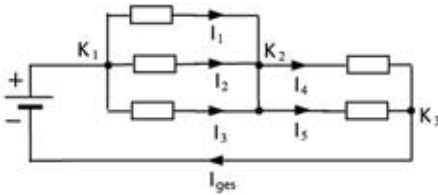
Haben in einen Knoten hineinfließende Ströme positives Vorzeichen, und von einem Knoten wegfließende Ströme negatives Vorzeichen, so läßt sich das 1. Kirchhoffsche Gesetz durch folgende Gleichung ausdrücken:

²¹ G. R. KIRCHHOFF (1824 - 1887), deutscher Physiker

Gl. 47: Erstes Kirchhoffsches Gesetz

$$\boxed{I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0} \quad \text{oder} \quad \sum_{v=1}^{v=n} I_v = 0$$

Beispiel zur Knotenregel:



$$\begin{array}{ll} \text{Knoten } K_1: I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 + I_3 & \text{oder} \quad I_{\text{ges}} - I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ \text{Knoten } K_2: I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5 & \text{oder} \quad I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0 \\ \text{Knoten } K_3: I_{\text{ges}} = I_4 + I_5 & \text{oder} \quad I_{\text{ges}} - I_4 - I_5 = 0 \end{array}$$

8.1.2 Die Maschenregel (2. Kirchhoffsches Gesetz)

Als »Maschen« werden geschlossene Schleifen in Schaltungen bezeichnet. Maschen sind die unterschiedlichen, stromdurchflossenen Wege einer Schaltung.

Durchläuft man von einem Knoten ausgehend auf beliebigem Weg eine Masche und kehrt zum Ausgangsknoten zurück, so durchfährt man eine Anzahl von Spannungen. Eine Spannung wird dabei als positiv angesehen, wenn die Umlaufrichtung und der Bezugspfeil der Spannung gleichgerichtet sind, andernfalls negativ. Man beachte, daß die **Umlaufrichtungen der Maschen willkürlich** gewählt werden können.

Werden diese Spannungsrichtungen berücksichtigt, so gilt die Maschenregel:

Fährt man von einem Knoten auf beliebigem Weg zu ihm selbst zurück, so ist die Summe aller Spannungen gleich Null.

Oder:

In einer Masche ist die Summe aller Spannungen gleich Null.

Gl. 48: Zweites Kirchhoffsches Gesetz

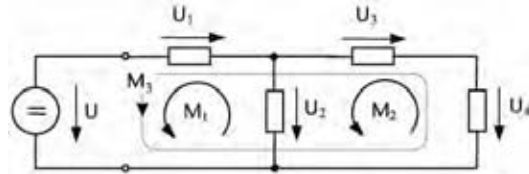
$$\boxed{U_1 + U_2 + \dots + U_n = 0} \quad \text{oder} \quad \sum_{v=1}^{v=n} U_v = 0$$

Beispiel zur Maschenregel:

$$\text{Masche } M_1: U - U_2 - U_1 = 0$$

$$\text{Masche } M_2: U_2 - U_4 - U_3 = 0$$

$$\text{Masche } M_3: U - U_4 - U_3 - U_1 = 0$$



Zur Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze müssen **alle** auftretenden **Spannungen und Ströme** mit **Richtungspfeilen** versehen werden. Ergeben sich die Richtungen nicht aus der Schaltung, so können sie auch willkürlich gewählt werden. Ergibt sich nach Lösung einer Aufgabe, z.B. für eine Spannung, ein Ergebnis mit positivem Vorzeichen, so stimmt die tatsächliche Polarität der Spannung mit der willkürlich gewählten Bezugsrichtung überein. Hat das Ergebnis ein negatives Vorzeichen, so hat die Spannung umgekehrte Polarität gegenüber dem Bezugspfeil. Dasselbe gilt für die Flußrichtung von Strömen.

8.2 Berechnung von Parallelschaltungen

8.2.1 Parallelschaltung von ohmschen Widerständen

Bei der Parallelschaltung von Widerständen können die Widerstandswerte der einzelnen Widerstände durch einen einzigen Widerstand, den Ersatzwiderstand, ersetzt werden.

Der Ersatzwiderstand der Parallelschaltung ist stets kleiner als der kleinste der Teilwiderstände.

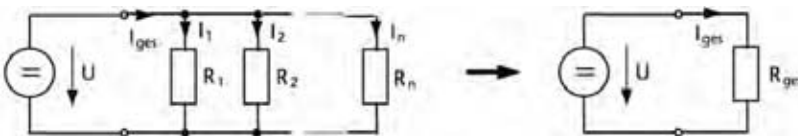


Abb. 128: Parallelschaltung von Widerständen (links) und Ersatzschaltbild (rechts)

An allen parallelgeschalteten Widerständen liegt die selbe Spannung. Für die Teilströme ergibt sich nach dem Ohmschen Gesetz:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} ; \quad I_2 = \frac{U}{R_2} ; \quad I_n = \frac{U}{R_n}$$

Alle Elektronen, die durch die parallel geschalteten Teilwiderstände fließen, bewegen sich auch durch die Spannungsquelle. Für den Gesamtstrom ergibt sich somit:

Gl. 49: Gesamtstrom bei n parallel geschalteten Widerständen

$$\boxed{I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 + \dots + I_n} \quad \text{oder} \quad I_{\text{ges}} = \sum_{v=1}^{v=n} I_v$$

Es gilt: $I_{\text{ges}} = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n}$

Die gemeinsame Größe U lässt sich kürzen.

Gl. 50: Gesamtwiderstand von n parallel geschalteten Widerständen

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}} \quad \text{oder} \quad R_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum_{v=1}^n \frac{1}{R_v}}$$

Die Formel für die Parallelschaltung von Widerständen ist der Formel für die Reihenschaltung von Kondensatoren ähnlich.

In der Praxis werden meist zwei Widerstände parallel geschaltet. Durch Anwendung des Hauptnenners gilt dann folgende Formel:

Gl. 51: Gesamtwiderstand von zwei parallel geschalteten Widerständen

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Sind die Werte der parallel geschalteten Widerstände sehr verschieden, so beeinflusst der große Widerstand den Wert des Gesamtwiderstandes kaum.

Ist der Gesamtwiderstand und ein Teilwiderstand (er sei R_1) bekannt, und es soll der parallelzuschaltende zweite Widerstand berechnet werden, so lässt sich obige Formel umstellen:

Gl. 52: Berechnung eines Teilwiderstandes bei der Parallelschaltung zweier Widerstände

$$R_2 = \frac{R_1 \cdot R_{\text{ges}}}{R_1 - R_{\text{ges}}}$$

Bei der Parallelschaltung fließt durch den kleinsten Teilwiderstand der größte Strom und durch den größten Teilwiderstand der kleinste Strom. Die (Teil-)Stromstärken stehen in umgekehrten Verhältnis zueinander wie die Widerstände, z.B.:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Aufgabe 27:

Zwei gleich große Widerstände $R_1=R_2$ werden parallel geschaltet. Wie groß ist R_{ges} ? Wie groß ist bei einem Gesamtstrom I_{ges} die Leistung in jedem Widerstand? Wie groß ist die gesamte Verlustleistung?

Lösung:

Der Wert von R_{ges} entspricht der Hälfte des Widerstandswertes einer der beiden Widerstände.

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_1}{R_1 + R_1} = \frac{R_1}{2}$$

Der Strom durch beide Widerstände ist gleich groß und entspricht jeweils der Hälfte des Gesamtstromes.

$$\text{Die Leistung in jedem Widerstand ist } P_{1,2} = \left(\frac{I_{\text{ges}}}{2} \right)^2 \cdot R_{1,2}$$

Die gesamte Verlustleistung in beiden Widerständen beträgt

$$P_{\text{ges}} = P_1 + P_2 = 2 \cdot \left(\frac{I_{\text{ges}}}{2} \right)^2 \cdot R_1 = \frac{I_{\text{ges}}^2}{2} \cdot R_1$$

$$\text{bzw. entsprechend dem Gesamtwiderstand } P_{\text{ges}} = I_{\text{ges}}^2 \cdot \frac{R_1}{2}$$

Aufgabe 28:

Welcher Widerstand muß zu einem Widerstand mit $150 \, \Omega$ parallel geschaltet werden, damit der Gesamtwiderstand $60 \, \Omega$ beträgt?

Lösung:

$$R_2 = \frac{R_1 \cdot R_{\text{ges}}}{R_1 - R_{\text{ges}}} = \frac{150 \, \Omega \cdot 60 \, \Omega}{150 \, \Omega - 60 \, \Omega} = 100 \, \Omega$$

8.2.2 Parallelschaltung von Kondensatoren

Werden Kondensatoren parallel geschaltet, so liegt an jedem Kondensator die gleiche Spannung. Wegen $Q = C \cdot U$ ist die elektrische Ladung jedes Kondensators proportional zu seiner Kapazität. Die gesamte Ladung der Parallelschaltung entspricht somit der Summe der einzelnen Ladungen der Kondensatoren.

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = C_{\text{ges}} \cdot U = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U + \dots + C_n \cdot U$$

Durch Kürzen von U erhält man:

Gl. 53: Gesamtkapazität von n parallel geschalteten Kondensatoren

$$\boxed{C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n} \quad \text{oder} \quad C_{\text{ges}} = \sum_{v=1}^{v=n} C_v$$

Die Formel für die Parallelschaltung von Kondensatoren ist der Formel für die Reihenschaltung von Widerständen ähnlich.

8.2.3 Parallelschaltung von Spulen

Bei der Parallelschaltung von n magnetisch **nicht** gekoppelten Spulen gilt für die Gesamtinduktivität:

Gl. 54: Gesamtinduktivität von n parallel geschalteten Spulen (magnetisch nicht gekoppelt)

$$L_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}} \quad \text{oder} \quad L_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum_{v=1}^{v=n} \frac{1}{L_v}}$$

Die Ersatzinduktivität ist durch die Parallelschaltung kleiner als die kleinste der Einzelinduktivitäten.

Für zwei parallel geschaltete Spulen gilt:

Gl. 55: Gesamtinduktivität von zwei parallel geschalteten Spulen

$$L_{\text{ges}} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$$

Die Formel für die Parallelschaltung magnetisch nicht gekoppelter Spulen ist der Formel für die Parallelschaltung von Widerständen bzw. der Formel für die Reihenschaltung von Kondensatoren ähnlich.

8.2.4 Parallelschaltung von Gleichspannungsquellen

Werden Gleichspannungsquellen in Reihe geschaltet, so addieren sich die Teilspannungen (nach ihrer Polarität) zur Gesamtspannung, die meist höher ist als die Teilspannungen (Absicht der Spannungserhöhung). Auch die Innenwiderstände der in Reihe geschalteten Spannungsquellen addieren sich. Der gesamte Innenwiderstand wird größer.

Bei der Parallelschaltung von Gleichspannungsquellen sind die Innenwiderstände der einzelnen Spannungsquellen parallel geschaltet. Der **gesamte Innenwiderstand verkleinert** sich entsprechend.

Je kleiner der Innenwiderstand einer Spannungsquelle ist, desto größer ist der Strom, der ihr entnommen werden kann. Durch die Parallelschaltung von Spannungsquellen kann also der entnehmbare Strom vergrößert werden.

Trotz gleicher Spannung fließt aus der Spannungsquelle mit dem kleinsten Innenwiderstand der größte Teilstrom.

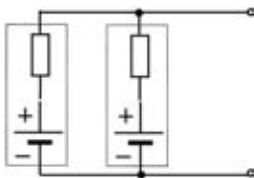


Abb. 129: Parallelschaltung von zwei Gleichspannungsquellen (mit Innenwiderständen)

Bei der Parallelschaltung von Spannungsquellen müssen sämtliche Pluspole und sämtliche Minuspole miteinander verbunden werden.

Auch ohne Lastwiderstand entsteht bei der Parallelschaltung von Spannungsquellen ein geschlossener Stromkreis. Damit kein Strom fließen kann, müssen im unbelasteten Zustand die parallel zu schaltenden Spannungsquellen gleich große Leerlaufspannungen haben. Wäre eine Spannung größer, so würde die Differenzspannung einen Strom durch die Spannungsquelle mit der kleineren Spannung hervorrufen. Die Stromstärke und die erzeugte Verlustleistung wäre vom Innenwiderstand der Spannungsquellen abhängig.

Das Problem der »Rückspeisung« muß besonders bei der Parallelschaltung von Netzteilen mit nicht exakt gleichen Leerlaufspannungen beachtet werden (Gefahr der Zerstörung eines Netztes). In der Praxis kommt jedoch eine Parallelschaltung von Gleichspannungsquellen selten vor. Sie wird durch die Auslegung der Spannungsquelle auf den benötigten Nennstrom vermieden. Eine Reihenschaltung von Gleichspannungsquellen kommt dagegen häufig bei Geräten vor, die mit Batterien betrieben werden.

8.3 Parallelschaltung in der Praxis

8.3.1 Ersatz von Bauteilen

Wie durch die Reihenschaltung von Bauelementen kann auch durch deren Parallelschaltung ein bestimmter Ersatzwert gewonnen werden. Durch die Parallelschaltung von zwei Widerständen mit je $10\text{ k}\Omega$ erhält man z.B. einen (Ersatz-)Widerstand mit $5\text{ k}\Omega$.

Zu beachten ist, welche Toleranz sich für die Ersatzschaltung durch die Zusammenschaltung der einzelnen Bauteile ergibt, und ob diese Toleranz den Anforderungen entspricht.

Aufgabe 29:

Zwei Widerstände $R_1 = 330\ \Omega, \pm 20\%$ und $R_2 = 100\ \Omega, \pm 10\%$ werden parallel geschaltet. Welchen Nennwert erhält man für den Ersatzwiderstand? Wie groß ist unter Berücksichtigung der Toleranzen der kleinste und der größte Widerstandswert der Parallelschaltung?

Lösung:

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 76,7\ \Omega \quad (R_1)_{\text{min}} = 330\ \Omega - 66\ \Omega = 264\ \Omega \quad (R_2)_{\text{min}} = 100\ \Omega - 10\ \Omega = 90\ \Omega$$

$$(R_{\text{ges}})_{\text{min}} = \frac{(R_1)_{\text{min}} \cdot (R_2)_{\text{min}}}{(R_1)_{\text{min}} + (R_2)_{\text{min}}} = 67,1\ \Omega$$

$$(R_1)_{\text{max}} = 330\ \Omega + 66\ \Omega = 396\ \Omega \quad (R_2)_{\text{max}} = 100\ \Omega + 10\ \Omega = 110\ \Omega$$

$$(R_{\text{ges}})_{\text{max}} = \frac{(R_1)_{\text{max}} \cdot (R_2)_{\text{max}}}{(R_1)_{\text{max}} + (R_2)_{\text{max}}} = 86,1\ \Omega$$

Der Nennwert des Ersatzwiderstandes ist $76,7\ \Omega$. Auf Grund der Toleranzen kann der Widerstandswert zwischen $67,1\ \Omega$ und $86,1\ \Omega$ liegen.

8.3.2 Erweiterung des Meßbereiches eines Amperemeters

Bei einer Strommessung wird das Amperemeter in den Stromkreis eingeschleift. Soll mit einem Amperemeter ein größerer Strom gemessen werden als derjenige, welcher dem Vollausschlag des

Meßinstruments entspricht, so muß ein Teil des Stromes am Amperemeter vorbeigeleitet werden. Dies geschieht durch einen Parallel- oder Nebenwiderstand, der auch **Shunt** genannt wird.

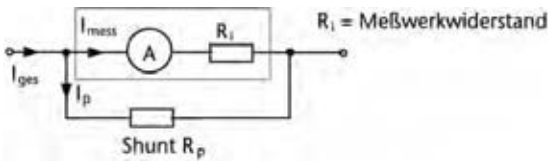


Abb. 130: Amperemeter mit Shunt zur Erweiterung des Meßbereiches

Da der Innenwiderstand eines Amperemeters möglichst klein sein soll, muß auch der Widerstandswert eines Shunts sehr klein sein. Besonders bei starker Erweiterung des Meßbereiches ergeben sich sehr kleine Widerstandswerte für den Parallelwiderstand.

Am Shunt liegt der gleiche Spannungsabfall wie am Amperemeter. Soll für eine gewünschte Erweiterung des Meßbereiches I_{ges} der Wert des Shunts berechnet werden, so muß vom Amperemeter der Spannungsabfall U_{voll} bekannt sein, der den Vollausschlag hervorruft, **oder** der Innenwiderstand R_i des Meßinstruments und der zum Vollausschlag zugehörige Strom I_{voll} (aus beiden läßt sich wieder der Spannungsabfall berechnen). Der Wert des Shunts errechnet sich nach dem Ohmschen Gesetz aus dem Spannungsabfall des Instruments und dem durch den Shunt fließenden Strom.

$$R_p = \frac{R_i \cdot I_{voll}}{I_{ges} - I_{voll}} = \frac{U_{voll}}{I_{ges} - I_{voll}}$$

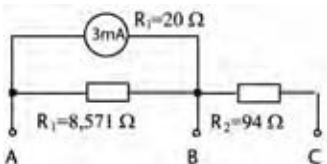
Aufgabe 30:

Ein Amperemeter mit einem Vollausschlag von 0,5 A und einem Meßwerkwiderstand $R_i = 0,9 \Omega$ soll auf einen Meßbereich von 5 A erweitert werden. Welchen Wert muß der Shunt haben?

Lösung:

$$R_p = \frac{0,9 \Omega \cdot 0,5 \text{ A}}{5 \text{ A} - 0,5 \text{ A}} = 0,1 \Omega$$

Aufgabe 31:



Ein Meßinstrument hat einen Innenwiderstand von 20Ω und einen Vollausschlag von 3 mA. Es ist nach obiger Zeichnung mit einem Parallel- und einem Vorwiderstand beschaltet. Welcher Strommeßbereich ergibt sich bei Anschluß an den Klemmen A-B, und welcher Spannungsmessbereich bei Anschluß an den Klemmen A-C?

Lösung:

Das Instrument hat seinen Vollausschlag bei $U_{\text{voll}} = 20 \Omega \cdot 3 \text{ mA} = 60 \text{ mV}$

$$I_{\text{ges}} = \frac{U_{\text{voll}}}{R_p} + I_{\text{voll}} = \frac{0,06 \text{ V}}{8,571 \Omega} + 0,003 \text{ A} = 0,01 \text{ A} = 10 \text{ mA}$$

Bei Anschluß an den Klemmen A-B ergibt sich ein Strommeßbereich von 10 mA.

Fließt durch die Klemmen A-C ein Strom von 10 mA, so fällt am Widerstand R_s eine Spannung von 0,94 V ab, und am Instrument liegt ein Spannungsabfall von 0,06 V (Vollausschlag). Der Spannungsmeßbereich ist somit 1,0 V.

8.3.3 Der belastete Spannungsteiler

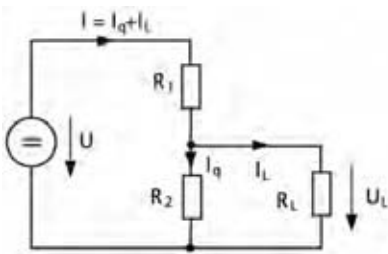


Abb. 131: Belasteter Spannungsteiler

Wird an die Ausgangsanschlüsse eines Spannungsteilers ein Lastwiderstand R_L angeschlossen, so tritt eine Stromverzweigung auf und es fließt ein Laststrom I_L . Der durch R_2 fließende Strom I_q wird **Querstrom** genannt, weil er quer zum Laststrom fließt.

Ist R_L unendlich groß (keine Last), so gilt die Spannungsteiler-Formel: $U_L = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Da R_2 und R_L parallel geschaltet sind, wird der Ersatzwiderstand um so kleiner, je kleiner R_L ist. Dadurch wird auch R_2 in der Spannungsteiler-Formel, und somit auch U_L kleiner.

Die Spannung U_L an der Last ist um so kleiner, je kleiner R_L bzw. je größer der Laststrom ist.

Soll U_L möglichst unabhängig von der Last sein, so muß der Querstrom I_q groß gegenüber dem Laststrom I_L sein (R_2 muß klein gegenüber R_L sein). Da der Querstrom ein Verluststrom ist, sollte dieser andererseits möglichst klein (R_2 möglichst groß) gehalten werden.

In der Praxis legt man den **Querstrom mindestens doppelt so groß** aus wie den mittleren Laststrom (R_L doppelt so groß wie R_2). Bei veränderlicher Last ändert sich dann die Lastspannung nur wenig.

8.3.3.1 Berechnung des belasteten Spannungsteilers

Berechnung mit dem Querstromverhältnis

Bei der Berechnung des belasteten Spannungsteilers kann man von einem Verhältnis Querstrom zu Laststrom von 2 bis 4 ausgehen. Mit dem Ohmschen Gesetz erfolgt dann die Berechnung von R_1 und von R_2 .

Gl. 56: Berechnung von R_1 und R_2 des belasteten Spannungsteilers mit dem Querstromverhältnis

$$\frac{I_q}{I_L} = q$$

$$R_1 = \frac{U - U_L}{I_q + I_L}$$

$$R_2 = \frac{U_L}{I_q}$$

Aufgabe 32:

Ein Spannungsteiler mit den Widerständen R_1 , R_2 liegt an einer Spannung $U = 12 \text{ V}$. Der Laststrom beträgt $I_L = 10 \text{ mA}$. Das Querstromverhältnis wird zu $q = 3$ festgesetzt. Die Lastspannung soll $U_L = 2,0 \text{ V}$ betragen. Wie sind die Werte von R_1 und R_2 zu wählen? Welche Belastbarkeit müssen die Widerstände mindestens haben?

Lösung:

$$I_q = I_L \cdot q = 10 \text{ mA} \cdot 3 = 30 \text{ mA}$$

$$R_2 = \frac{U_L}{I_q} = \frac{2,0 \text{ V}}{30 \text{ mA}} = 66,66 \Omega \approx 68 \Omega \quad \text{Als Wert der Normreihe wird } R_2 = 68 \Omega \text{ gewählt.}$$

$$R_1 = \frac{U - U_L}{I_q + I_L} = \frac{12 \text{ V} - 2 \text{ V}}{40 \text{ mA}} = 250 \Omega \approx 240 \Omega \quad (\text{Wert der Normreihe})$$

$$\text{Minimale Belastbarkeit von } R_1: 10 \text{ V} \cdot 40 \text{ mA} = 0,4 \text{ W}$$

$$\text{Minimale Belastbarkeit von } R_2: 2,0 \text{ V} \cdot 30 \text{ mA} = 0,06 \text{ W}$$

Berechnung mit der Ersatzspannungsquelle

$$\text{In Abb. 131 gilt: } I = I_q + I_L = \frac{U_L}{R_2} + I_L \quad \text{und} \quad I = \frac{U - U_L}{R_1}$$

$$\text{Durch Gleichsetzen und Auflösen nach } U_L \text{ erhält man: } U_L = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_L$$

Der Term $U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ stellt die Ausgangsspannung U_{10} eines unbelasteten Spannungsteilers dar.

Die Spannung U_L lässt sich somit darstellen als:

Gl. 57: Die Ausgangsspannung eines belasteten Spannungsteilers entspricht seiner Leerlaufspannung abzüglich dem Spannungsabfall durch den Laststrom in der Parallelschaltung von R_1 und R_2

$$U_L = U_{L0} - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_L$$

Gl. 57 entspricht der Formel $U_L = U_0 - R_i \cdot I_L$ für die Klemmenspannung einer Ersatzspannungsquelle in Abhängigkeit des Laststromes. Der belastete Spannungsteiler kann durch eine Ersatzspannungsquelle dargestellt werden.

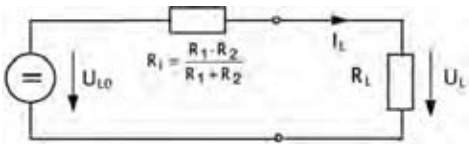


Abb. 132: Ersatzschaltung eines belasteten Spannungsteilers

Aufgabe 33:

Ein Spannungsteiler mit den Widerständen $R_1 = 240 \, \Omega$ und $R_2 = 68 \, \Omega$ ist an eine Spannung $U = 12 \, \text{V}$ angeschlossen.

- Wie groß ist die Leerlaufspannung?
- Welche Spannung liegt an der Last, wenn der Laststrom $I_L = 10 \, \text{mA}$ beträgt?

Lösung:

$$\text{a) } U_{L0} = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 12 \, \text{V} \cdot \frac{68 \, \Omega}{240 \, \Omega + 68 \, \Omega} = 2,65 \, \text{V}$$

$$\text{b) } U_L = U_{L0} - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_L = 2,65 \, \text{V} - \frac{240 \, \Omega \cdot 68 \, \Omega}{240 \, \Omega + 68 \, \Omega} \cdot 10 \, \text{mA} = 2,65 \, \text{V} - 0,53 \, \text{V} = 2,12 \, \text{V}$$

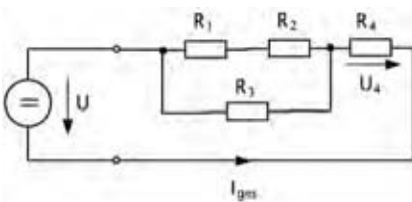
Man erkennt die Spannungsdifferenz $\Delta U_L = 0,12 \, \text{V}$ gegenüber Aufgabe 32. Sie ergibt sich durch Rundung der dort berechneten Widerstandswerte auf erhältliche Normwerte.

8.4 Gemischte Schaltungen

Gemischte Schaltungen enthalten Reihenschaltungen und Parallelschaltungen. Der belastete Spannungsteiler ist z.B. eine gemischte Schaltung. Um Teilwiderstände oder den Gesamtwiderstand einer gemischten Schaltung zu berechnen, wandelt man die Reihen- und Parallelschaltungen schrittweise in ihre Ersatzschaltung um und faßt dabei Bauelemente zusammen. Dadurch lassen sich auch in der Schaltung verteilte Spannungen und Ströme bestimmen.

Aufgabe 34:

Wie groß ist der Strom I_{ges} und die Spannung U_4 in folgender Schaltung:



Lösung:

R_1 und R_2 liegen in Reihe und werden zusammengefaßt zu $R_{12} = R_1 + R_2$

R_{12} und R_3 sind parallel geschaltet und werden zusammengefaßt zu $R_{123} = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3}$

R_{123} und R_4 sind wieder in Reihe geschaltet und werden zusammengefaßt zu $R_{1234} = R_{123} + R_4$

R_{1234} ist der Gesamtwiderstand der Widerstandsanordnung.

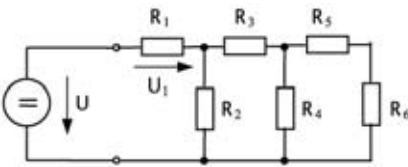
Da der Strom mit seinem Bezugspfeil entgegen der technischen Stromrichtung eingezeichnet ist,

$$\text{hat er ein negatives Vorzeichen. } -I_{\text{ges}} = \frac{U}{R_{1234}}; \quad I_{\text{ges}} = \frac{-U}{R_{1234}} = \frac{-U}{\frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4}$$

$$R_{123} \text{ und } R_4 \text{ bilden einen Spannungsteiler. } U_4 = U \cdot \frac{R_4}{R_{1234}} = U \cdot \frac{R_4}{\frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4}$$

Aufgabe 35:

Die folgende Schaltung wird »Abzweigschaltung« genannt:



Wie groß ist die Spannung U_1 ?

Lösung:

$$R_{56} = R_5 + R_6; \quad R_{456} = \frac{R_4 \cdot (R_5 + R_6)}{R_4 + R_5 + R_6}$$

$$R_{3456} = R_3 + R_{456} = R_3 + \frac{R_4 \cdot (R_5 + R_6)}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{R_3 \cdot (R_4 + R_5 + R_6) + R_4 \cdot (R_5 + R_6)}{R_4 + R_5 + R_6}$$

$$R_{23456} = \frac{R_2 \cdot \frac{R_3 \cdot (R_4 + R_5 + R_6) + R_4 \cdot (R_5 + R_6)}{R_4 + R_5 + R_6}}{R_2 + \frac{R_3 \cdot (R_4 + R_5 + R_6) + R_4 \cdot (R_5 + R_6)}{R_4 + R_5 + R_6}}$$

$$R_{23456} = \frac{R_2 \cdot [R_3 \cdot (R_4 + R_5 + R_6) + R_4 \cdot (R_5 + R_6)]}{R_2 \cdot (R_4 + R_5 + R_6) + R_3 \cdot (R_4 + R_5 + R_6) + R_4 \cdot (R_5 + R_6)}$$

$R_{123456} = R_1 + R_{23456}$ Zur einfacheren Schreibweise wird ab jetzt kein Hauptnenner mehr verwendet.

$$U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_{123456}}$$

8.5 Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung

Es gibt auch Schaltungen, bei denen eine Zusammenfassung der Bauelemente durch Berücksichtigung ihrer Reihen- und Parallelschaltungen nicht möglich ist:

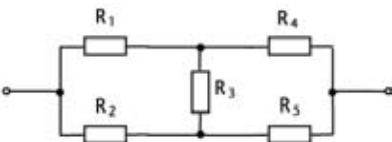


Abb. 133: Keine direkte Zusammenfassung der Widerstände möglich

Durch eine Stern-Dreieck- oder Dreieck-Stern-Umwandlung erhält man jedoch wieder eine Anordnung der Bauelemente, bei welcher Reihen- und Parallelschaltungen zusammengefaßt werden können.

Als Dreieck- bzw. Sternschaltung wird folgende Anordnung bezeichnet:

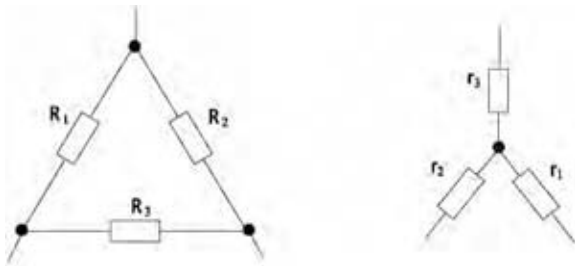


Abb. 134: Dreieckschaltung (links) und Sternschaltung (rechts)

Die Dreieckschaltung kann in eine Sternschaltung und die Sternschaltung in eine Dreieckschaltung umgewandelt werden.

(Auf eine Herleitung der Formeln wird hier verzichtet.)

Gl. 58: Formeln zur Dreieck-Stern-Umwandlung

$$r_1 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_2 = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_3 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Merkregel: Jeder der drei Sternwiderstände ergibt sich aus dem Produkt der beiden jeweils anliegenden Dreieck-Seitenwiderstände, dividiert durch den Umfangswiderstand des Dreiecks.

Gl. 59: Formeln zur Stern-Dreieck-Umwandlung

$$R_1 = r_2 + r_3 + \frac{r_2 \cdot r_3}{r_1}$$

$$R_2 = r_1 + r_3 + \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2}$$

$$R_3 = r_1 + r_2 + \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3}$$

Man beachte, daß man die Dreieck- und Sternschaltung auch anders zeichnen kann. Es bedarf einiger Übung, um die jeweilige Schaltung in einem Schaltbild zu erkennen, da die Schaltbilder beliebig gedreht oder umgeklappt werden können.

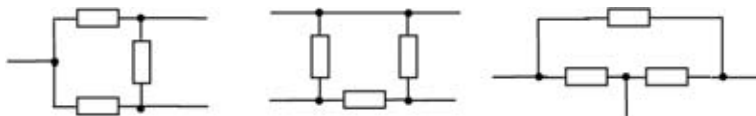


Abb. 135: Dreieckschaltungen unterschiedlich gezeichnet

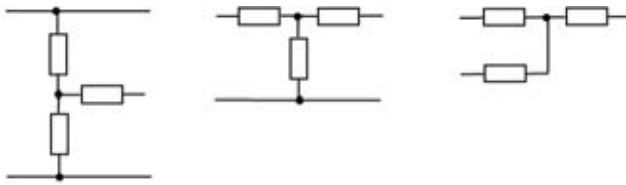
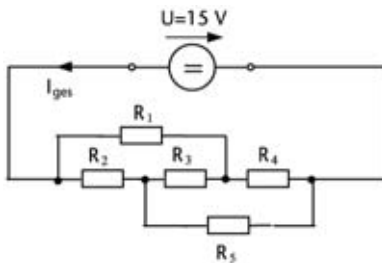


Abb. 136: Sternschaltungen unterschiedlich gezeichnet

Aufgabe 36:

Gegeben ist folgende Schaltung:



$$R_1 = R_2 = 10 \, \Omega$$

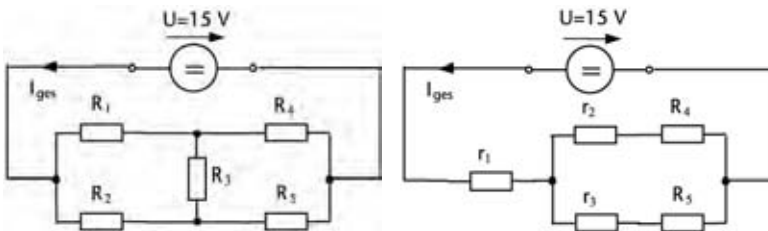
$$R_3 = 30 \, \Omega$$

$$R_4 = R_5 = 20 \, \Omega$$

Wie groß ist der Strom I_{ges} ?

Lösung:

Die Schaltung wird umgezeichnet, man erhält die Anordnung der Widerstände nach Abb. 133.



Die Dreieckschaltung aus R_1 , R_2 , R_3 wird in eine Sternschaltung umgewandelt.

$$R_{123} = R_1 + R_2 + R_3 = 10 \, \Omega + 10 \, \Omega + 30 \, \Omega = 50 \, \Omega ; \quad r_1 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_{123}} \quad r_2 = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_{123}} \quad r_3 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_{123}}$$

$$R_1 \cdot R_2 = 100 \, \Omega ; \quad R_1 \cdot R_3 = 300 \, \Omega ; \quad R_2 \cdot R_3 = 300 \, \Omega \Rightarrow r_1 = 2 \, \Omega ; \quad r_2 = 6 \, \Omega ; \quad r_3 = 6 \, \Omega$$

Die Reihen- und Parallelschaltungen der Widerstände können jetzt zusammengefaßt werden.

$$R_{24} = r_2 + R_4 = 26 \, \Omega ; \quad R_{35} = r_3 + R_5 = 26 \, \Omega$$

Die Ersatzwiderstände R_{24} und R_{35} liegen parallel und sind gleich groß. Als Ersatzwiderstand ergibt sich $R_{2435} = 13 \, \Omega$.

Der Gesamtwiderstand der Widerstandsanordnung ist $r_1 + R_{2435} = 2 \, \Omega + 13 \, \Omega = 15 \, \Omega$.

Den Strom I_{ges} erhält man nach dem Ohmschen Gesetz: $I_{ges} = 1 \, A$.

8.6 Umwandlung von Quellen

Obwohl die Ersatzstromquelle bisher nur kurz erwähnt wurde, soll die Transformation von Spannungsquellen in Stromquellen und umgekehrt besprochen werden, da Stromquellen bei der Analyse von Netzwerken mit verstärkenden Elementen (z.B. Transistoren) in deren Ersatzschaltbildern vorkommen.

Die Berechnung einer komplizierten Schaltung ist leichter, wenn nur Spannungsquellen oder nur Stromquellen in der Schaltung vorkommen.

Die Umwandlung der Quellen kann nach folgendem Schema erfolgen.

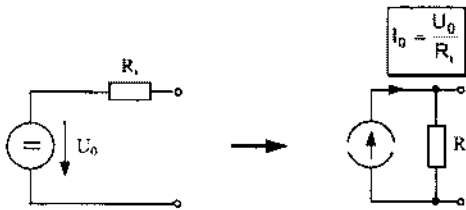


Abb. 137: Umwandlung einer Spannungsquelle in eine Stromquelle

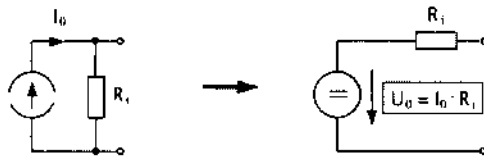


Abb. 138: Umwandlung einer Stromquelle in eine Spannungsquelle

Ersatzspannungsquelle und Ersatzstromquelle beschreiben gleichwertig den aktiven Zweipol. Bei der Ersatzspannungsquelle ist $U_{ii} = 0$ für einen Kurzschluß der Klemmen; bei der Ersatzstromquelle ist $I_0 = 0$ für einen Leerlauf der Klemmen (keine Last angeschlossen).

Eine direkte Umwandlung der Quellen ist nur dann möglich, wenn in Reihe zur Spannungsquelle oder parallel zur Stromquelle ein Bauelement liegt, das man bei der Umwandlung als Innenwiderstand der Quelle betrachten kann. Bei der idealen Spannungsquelle ist $R_i = 0$, und die Ersatzgröße I_0 der transformierten Stromquelle würde unendlich groß. Bei der idealen Stromquelle ist R_i unendlich groß, und die Ersatzgröße U_{ii} der transformierten Spannungsquelle würde unendlich groß.

Liegen ideale Quellen für sich alleine in einem Zweig einer Schaltung, so müssen sie erst verlegt werden, ehe eine Umwandlung möglich ist. Dies ist in den folgenden Bildern gezeigt.

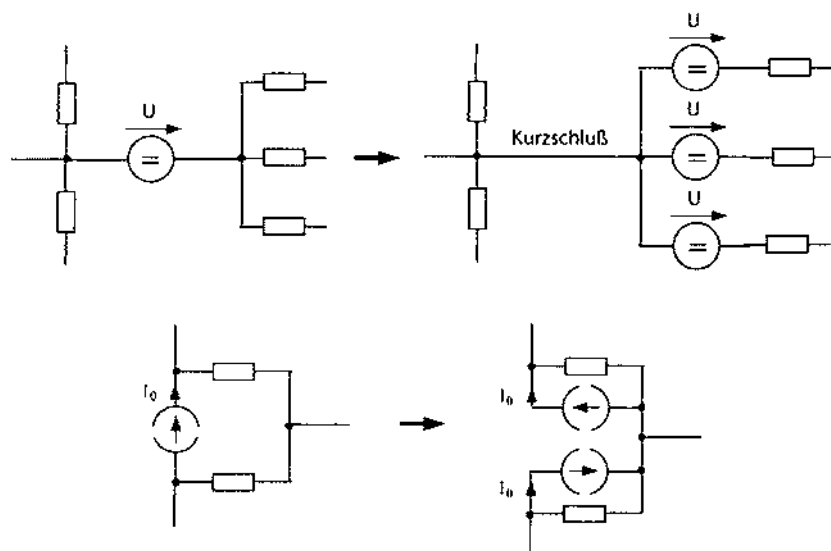


Abb. 139: Verlegen idealer Spannungs- und Stromquellen

Da zu den verlegten Spannungs- bzw. Stromquellen ein Bauelement in Reihe bzw. parallel liegt, können sie umgewandelt werden.

8.7 Analyse von Netzwerken

Die Analyse von Netzwerken beinhaltet die Berechnung von Strömen und Spannungen (oder anderer Größen wie Widerständen, Leistungen) in einer beliebigen elektrischen Schaltung, in der nicht nur eine, sondern auch mehrere Spannungsquellen vorkommen können. Durch Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze lassen sich beliebige Netzwerke berechnen.

Netzwerke bestehen aus der Zusammenschaltung von Bauelementen zu beliebig komplizierten Schaltungen. In Netzwerken unterscheidet man Zweige, Knoten und Maschen. Ein **Zweig** ist der direkte Strompfad zwischen zwei Punkten, in ihm fließt ein **Zweigstrom**. Die positive Stromrichtung eines Zweiges wird durch einen entsprechenden Bezugspfeil festgelegt. Die Spannung zwischen zwei Endpunkten eines Zweiges wird als **Zweigspannung** bezeichnet. Ein **Knoten** ist eine Stromverzweigung, also ein Punkt im Netzwerk, in dem mindestens zwei Zweige zusammenstoßen. Als **Knotenpunktspannung** ist die Spannung eines Knotens gegenüber einem beliebigen Bezugspunkt definiert. Eine **Masche** ist ein über mehrere Zweige geschlossener Umlauf, in ihr fließt ein **Maschenstrom**. Als (vollständigen) **Baum** bezeichnet man die Verbindung aller Knoten auf einem nicht geschlossenen Weg. Die übrigen (entfernten) Zweige werden **Verbindungszweige** (oder **Glieder**) genannt. Zu einem Netzwerk gibt es i.a. viele mögliche Bäume. In einem Netzwerk mit k Knoten besitzt der Baum $k - 1$ Zweige.

Werden in der zeichnerischen Darstellung die Elemente eines Netzwerkes durch einfache Linien ersetzt, so erhält man den **Graphen** des Netzwerkes. Er stellt ein Skelett des Netzwerkes dar. Der Graph eines Netzwerkes kann zeichnerisch unterschiedlich dargestellt werden.

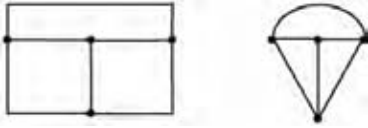
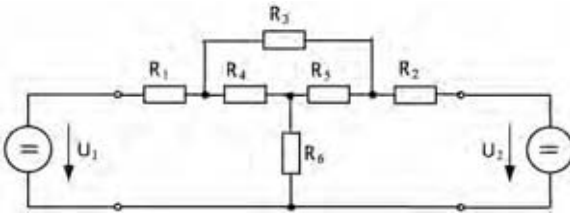


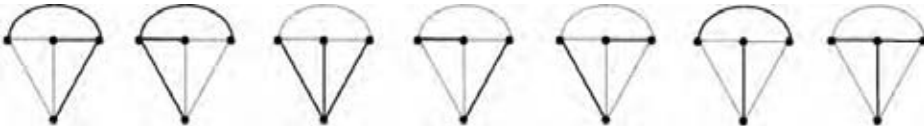
Abb. 140: Unterschiedliche Darstellung identischer Graphen

Beispiel eines Netzwerkes:

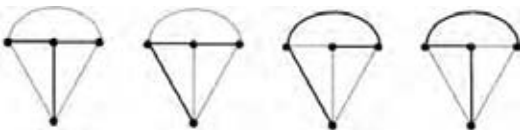


Das Netzwerk besitzt $z = 6$ Zweige und $k = 4$ Knoten.

Der Graph des Netzwerkes mit den sieben möglichen, verschiedenen Maschen (dünn gestrichelt):



Beispiele möglicher Bäume (die Verbindungs Zweige sind dünn gestrichelt gezeichnet):



8.7.1 Die Maschenanalyse

Voraussetzung für die Maschenanalyse ist, daß im Netzwerk nur Spannungsquellen vorkommen. Vorhandene Stromquellen werden zuerst in Spannungsquellen umgewandelt.

Die Größen der Spannungsquellen und der Widerstände im Netzwerk werden als bekannt vorausgesetzt.

Gesucht sind die Zweigströme und die Zweigspannungen.

Erster Schritt:

Man zeichnet den Graphen des Netzwerkes und wählt einen (beliebigen) Baum aus.

Zweiter Schritt:

In die gegebene Schaltung werden für alle Spannungen und Ströme Richtungspfeile eingetragen. Die Richtungspfeile der Spannungsquellen werden vom Plus- zum Minuspol weisend eingetragen. Die Richtungen von Zählpfeilen für Ströme können willkürlich gewählt werden. Den Richtungspfeilen der Spannungsabfälle an den Widerständen wird üblicherweise die gleiche Orientierung gegeben wie den zugehörigen Strompfeilen (nach dem Verbraucher-Zählpfeilsystem). Die Spannungspfeile an den Widerständen erhalten also die gleiche Richtung wie die zugeordneten Strompfeile.

Dritter Schritt:

Alle Maschen mit nur **einem Verbindungszweig** werden durch einen Umlaufpfeil gekennzeichnet, der die Richtung des Umlaufens der Masche festlegt. (Wählt man eine Masche mit mehreren Verbindungszweigen, so sind die Gleichungen in Schritt vier nicht unabhängig, und das Gleichungssystem ist nicht lösbar.)

Vierter Schritt:

Für jede so festgelegte Masche des Netzwerkes wird entsprechend dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz eine Gleichung aufgestellt. Jede Maschengleichung wird niedergeschrieben, indem alle Spannungen der Masche vorzeichenrichtig aufsummiert und gleich Null gesetzt werden.

Für ein Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten erhält man durch dieses Vorgehen ein Gleichungssystem mit $m = z - k + 1$ Maschengleichungen.

Fünfter Schritt:

Die Spannungsabfälle an den Widerständen werden nach dem Ohmschen Gesetz durch die zugehörigen Ströme ausgedrückt. Bei einiger Übung kann dies auch sofort in Schritt vier erfolgen.

Sechster Schritt:

Die Ströme in den Zweigen des Baumes werden entsprechend dem ersten Kirchhoffschen Gesetz durch die Ströme der Verbindungszweige ausgedrückt, und in das oben gewonnene Gleichungssystem eingesetzt. Für ein Netzwerk mit k Knoten sind dazu $k - 1$ Knotengleichungen aufzustellen.

Siebter Schritt:

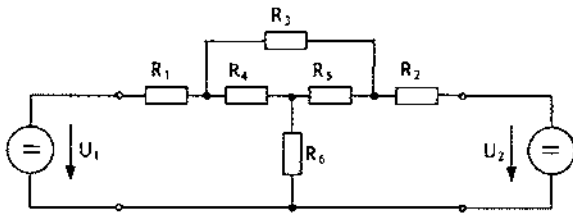
Das Gleichungssystem mit m Gleichungen und m Unbekannten (den gesuchten Strömen in den Verbindungszweigen) wird gelöst.

Auf diese Weise werden die unbekannten Ströme in den Verbindungszweigen bestimmt. Ist die Spannung eines Verbindungszweiges gesucht, so kann diese anschließend einfach nach dem Ohmschen Gesetz berechnet werden.

Die Ströme in den Zweigen des Baumes wurden bereits in Schritt sechs durch die Ströme in den Verbindungszweigen ausgedrückt und lassen sich, nachdem diese bekannt sind, leicht berechnen. Ebenso können anschließend die Spannungen der Zweige des Baumes nach dem Ohmschen Gesetz leicht berechnet werden.

Beispiel zur Maschenanalyse

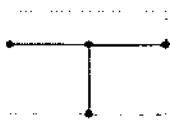
Gegeben sei folgendes Netzwerk:



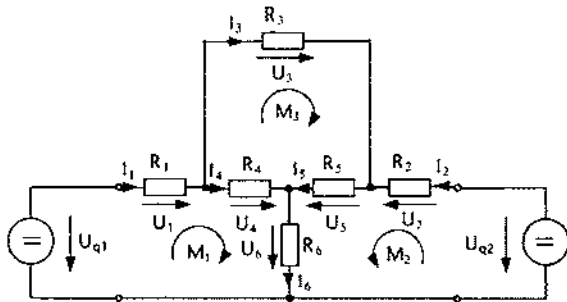
Gesucht sind die Ströme durch die Widerstände R_1 bis R_6 , und die Spannungsabfälle an diesen Widerständen.

Erster Schritt:

Zeichnen des Graphen und Wahl des Baumes (die Verbindungszweige sind dünn gestrichelt)



Zweiter und dritter Schritt: (Willkürliche) Orientierung der Spannungen, Ströme und Maschen



Vierter Schritt: Aufstellen der Maschengleichungen

$$M_1: U_1 + U_4 + U_6 - U_{q1} = 0$$

$$M_2: U_2 + U_5 + U_6 - U_{q2} = 0$$

$$M_3: U_3 + U_5 - U_4 = 0$$

Fünfter Schritt: Einsetzen der Spannungsabfälle an den Widerständen

$$M_1: R_1 \cdot I_1 + R_4 \cdot I_4 + R_6 \cdot I_6 - U_{q1} = 0$$

$$M_2: R_2 \cdot I_2 + R_5 \cdot I_5 + R_6 \cdot I_6 - U_{q2} = 0$$

$$M_3: R_3 \cdot I_3 + R_5 \cdot I_5 - R_4 \cdot I_4 = 0$$

Sechster Schritt: Ausdrücken der Ströme in den Zweigen des Baumes durch die Ströme in den Verbindungszweigen

$$I_4 = I_1 - I_3 \quad I_5 = I_2 + I_3 \quad I_6 = I_1 + I_2$$

und Einsetzen in die Maschengleichungen

$$M_1: R_1 \cdot I_1 + R_4 \cdot (I_1 - I_3) + R_6 \cdot (I_1 + I_2) - U_{q1} = 0$$

$$M_2: R_2 \cdot I_2 + R_5 \cdot (I_2 + I_3) + R_6 \cdot (I_1 + I_2) - U_{q2} = 0$$

$$M_3: R_3 \cdot I_3 + R_5 \cdot (I_2 + I_3) - R_4 \cdot (I_1 - I_3) = 0$$

Siebter Schritt: Vereinfachen und Lösen des Gleichungssystems

$$M_1: I_1 \cdot (R_1 + R_4 + R_6) + I_2 \cdot R_6 - I_3 \cdot R_4 - U_{q1} = 0$$

$$M_2: I_1 \cdot R_6 + I_2 \cdot (R_2 + R_5 + R_6) + I_3 \cdot R_5 - U_{q2} = 0$$

$$M_3: -I_1 \cdot R_4 + I_2 \cdot R_5 + I_3 \cdot (R_3 + R_4 + R_5) = 0$$

Dies sind drei Gleichungen mit den drei Unbekannten I_1, I_2, I_3 .

Wird dieses Gleichungssystem von Hand allgemein gelöst (ohne eingesetzte Zahlenwerte für die Widerstände und Spannungsquellen), so ist dies mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden. Es ergeben sich Ausdrücke für die Ströme mit einer Länge von ca. zwei Seiten DIN A4 Querformat; die Wahrscheinlichkeit eines Rechenfehlers ist entsprechend groß.

Für das Beispiel werden deshalb folgende Zahlenwerte gewählt:

$$R_1 = 100 \, \Omega; R_2 = 330 \, \Omega; R_3 = 470 \, \Omega; R_4 = 1 \, \text{k}\Omega; R_5 = 2,2 \, \text{k}\Omega; R_6 = 220 \, \Omega; U_{q1} = 5 \, \text{V}; U_{q2} = 10 \, \text{V}$$

$$\text{Daraus folgt: } R_1 + R_4 + R_6 = 1320 \, \Omega; R_2 + R_5 + R_6 = 2750 \, \Omega; R_3 + R_4 + R_5 = 3670 \, \Omega$$

Die Maschengleichungen lauten jetzt (ohne Einheiten)

$$M_1: 1320 \cdot I_1 + 220 \cdot I_2 - 1000 \cdot I_3 - 5 = 0$$

$$M_2: 220 \cdot I_1 + 2750 \cdot I_2 + 2200 \cdot I_3 - 10 = 0$$

$$M_3: -1000 \cdot I_1 + 2200 \cdot I_2 + 3670 \cdot I_3 = 0$$

$$\text{Auflösen von } M_1 \text{ nach } I_1 \text{ ergibt: } I_1 = \frac{-1}{6} \cdot I_2 + \frac{25}{33} \cdot I_3 + \frac{1}{264}$$

$$\text{Einsetzen von } I_1 \text{ in } M_2: 220 \cdot \left(\frac{-1}{6} \cdot I_2 + \frac{25}{33} \cdot I_3 + \frac{1}{264} \right) + 2750 \cdot I_2 + 2200 \cdot I_3 - 10 = 0$$

$$\text{Vereinfachen: } \frac{8140}{3} \cdot I_2 + \frac{7100}{3} \cdot I_3 - \frac{55}{6} = 0$$

$$\text{Auflösen nach } I_2: I_2 = \frac{-355}{407} \cdot I_3 + \frac{1}{296}$$

$$\text{Einsetzen von } I_1 \text{ in } M_3: -1000 \cdot \left(\frac{-1}{6} \cdot I_2 + \frac{25}{33} \cdot I_3 + \frac{1}{264} \right) + 2200 \cdot I_2 + 3670 \cdot I_3 = 0$$

Einsetzen von I_2 (dann ist nur noch I_3 als Unbekannte in der Gleichung):

$$-1000 \cdot \left[\frac{-1}{6} \cdot \left(\frac{-355}{407} \cdot I_3 + \frac{1}{296} \right) + \frac{25}{33} \cdot I_3 + \frac{1}{264} \right] + 2200 \cdot \left(\frac{-355}{407} \cdot I_3 + \frac{1}{296} \right) + 3670 \cdot I_3 = 0$$

$$\text{Auflösen nach } I_3: I_3 = \frac{-685}{138076}$$

$$I_3 = -4,961 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$I_3 \text{ einsetzen in } I_2: I_2 = \frac{-355}{407} \cdot I_3 + \frac{1}{296} = \frac{23407}{3037672}$$

$$I_2 = 7,706 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

I_2 und I_3 einsetzen in I_1 :

$$I_1 = \frac{-1}{6} \cdot (7,706 \cdot 10^{-3}) + \frac{25}{33} \cdot (-4,961 \cdot 10^{-3}) + \frac{1}{264}$$

$$I_1 = -1,255 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

Die Richtung der Ströme wurde beim Einzeichnen in das Schaltbild willkürlich gewählt.

Aus den negativen Vorzeichen von I_1 und I_3 ist ersichtlich, daß diese Ströme in Wirklichkeit entgegen der in das Schaltbild eingezeichneten Richtung fließen.

Die restlichen Ströme I_4 , I_5 , I_6 sind jetzt leicht zu berechnen.

$$\text{In Schritt sechs war: } I_4 = I_1 - I_3 \quad I_5 = I_2 + I_3 \quad I_6 = I_1 + I_2$$

$$\text{Daraus folgt unmittelbar: } I_4 = 3,706 \cdot 10^{-3} \text{ A} \quad I_5 = 2,745 \cdot 10^{-3} \text{ A} \quad I_6 = 6,451 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

Nachdem jetzt alle Zweigströme bekannt sind, lassen sich auch die Zweigspannungen nach dem Ohmschen Gesetz leicht berechnen.

$$\text{Es ist z.B.: } U_1 = R_1 \cdot I_1 = 100 \, \Omega \cdot (-1,255 \text{ mA}) = -0,1255 \text{ V} = -125,5 \text{ mV}$$

Die Spannung U_1 ist in Wirklichkeit der Richtung im Schaltbild entgegengesetzt, welche willkürlich eingetragen wurde.

Entsprechend lassen sich die restlichen Zweigspannungen berechnen.

Wie man beim Lösen des Systems der Maschengleichungen gesehen hat, ist die Rechenarbeit von Hand sehr mühevoll, selbst wenn Zahlenwerte eingesetzt werden. Sind für ein kompliziertes Netzwerk viele unbekannte Ströme und Spannungen zu bestimmen, so ist dies von Hand schwer zu bewältigen.

Mit einem PC kann man sich unter Anwendung geeigneter Programme die Rechenarbeit wesentlich erleichtern. Eine Möglichkeit hierzu bietet das Programm »Mathcad®«²².

Sind die Maschengleichungen (siebter Schritt) aufgestellt, so können die unbekannten Größen mit Mathcad in wenigen Sekunden berechnet werden. Mit Mathcad ist es sogar möglich, die Maschengleichungen nach den gesuchten Strömen allgemein aufzulösen (ohne eingesetzte Zahlenwerte). Bei dem Netzwerk aus unserem Beispiel dauert auch dies am PC nur wenige Sekunden.

Eine andere Möglichkeit zur Netzwerkanalyse bieten spezielle Simulationsprogramme. Mit ihnen kann das Schaltbild eines elektrischen Netzwerkes am PC gezeichnet, und das Netzwerk simuliert werden. Für die Simulation müssen keine Maschengleichungen aufgestellt werden. Als Ergebnis der Simulation erhält man die unbekannten Größen. Sind die speisenden Quellen keine Gleichspannungen, sondern zeitabhängig, so erhält man als Ergebnis am Bildschirm auch den zeitlichen Verlauf der Ausgangsgrößen. Wird ein Bauteilwert geändert, so kann nach einer erneuten Simulation, die meist nur wenige Sekunden dauert, der Einfluß auf die Ausgangsgrößen sofort beurteilt werden.

²² Eingetragenes Warenzeichen der MATHSOFT, INC.

Mit einer Testversion des Programmes MicroSim™ PSPICE®²³ wurde obiges Beispiel zur Maschenanalyse simuliert. Als Ergebnis erhält man das folgende Schaltbild.

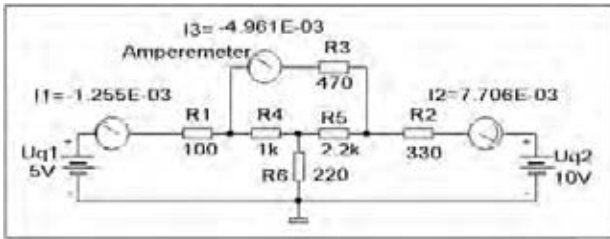


Abb. 141: Simulation eines Netzwerkes mit PSPICE (»E« bedeutet Exponent, k = kΩ)

Nach der Simulation können die gesuchten Ströme sofort an den in das Schaltbild eingefügten Amperemetern abgelesen werden. Die Amperemeter können beim Zeichnen des Netzwerkes in einen beliebigen Zweig gelegt werden. Auch Voltmeter lassen sich an beliebigen Knoten anschließen. Die Höhe der Spannungen (sowie deren zeitlicher Verlauf) wird nach der Simulation am Bildschirm angezeigt. PSPICE bietet noch wesentlich mehr Möglichkeiten zur Analyse eines Netzwerkes, auf die hier nicht eingegangen wird.

8.7.2 Die Knotenanalyse

Die Knotenanalyse wird auch Knotenpotential-Verfahren genannt.

In einem Netzwerk kann jedem Knotenpunkt ein **elektrisches Potential** zugeordnet werden. Unter dem Potential eines Knotenpunktes versteht man diejenige elektrische Spannung, die der betreffende Knotenpunkt gegenüber einem beliebig wählbaren Bezugspunkt hat. Als **Bezugspunkt** oder Bezugsknoten wird häufig die Masse oder ein mit der Erde verbundener Punkt gewählt. Sein **Potential ist Null** und gegen ihn werden alle Spannungen der übrigen Knoten, die Knotenspannungen, gemessen.

Sind alle Knotenspannungen eines Netzwerkes bekannt, so ist die gesamte Strom- bzw. Spannungsverteilung des Netzwerkes festgelegt (es können alle übrigen Werte berechnet werden). Würde man nämlich alle Knoten mit dem Bezugsknoten kurzschließen, also alle Knotenspannungen zu Null machen, so wäre das Netzwerk spannungsfrei. Somit können keine Spannungen im Netzwerk vorhanden sein, die von den Spannungen der Knotenpunkte gegenüber dem Bezugsknoten unabhängig sind.

Die Anwendung der Knotenanalyse ist besonders dann zweckmäßig, wenn das Netzwerk aus Stromquellen gespeist wird. In den Ersatzschaltbildern von verstärkenden Elementen (z.B. Transistoren) werden in der Regel (gesteuerte) Stromquellen angegeben. Die Knotenanalyse ist daher für die Analyse von Verstärkerschaltungen von Bedeutung.

Entgegen der Maschenanalyse ist bei der Knotenanalyse das Zeichnen des Graphen des Netzwerkes und die Wahl eines Baumes nicht erforderlich.

Gegeben sei ein aus Strom- oder Spannungsquellen gespeistes Netzwerk mit k Knoten.

²³ MicroSim Corporation

Die Größen der Quellen und Widerstände im Netzwerk werden als bekannt vorausgesetzt.

Gesucht sind die gegenüber einem willkürlich gewählten Bezugsknoten positiv orientierten Knotenpunktspannungen und die Zweigströme.

Erster Schritt:

Man wählt einen beliebigen Bezugsknoten.

Der Massepunkt, dem gegenüber alle Spannungen in der Schaltung gemessen werden, bietet sich als Bezugsknoten an.

Zweiter Schritt:

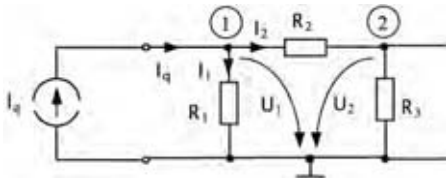
Von jedem der übrigen Knoten wird gegenüber dem Bezugsknoten eine Knotenspannung eingeführt. Im Schaltbild wird somit jeder übrige Knoten mit einer Spannung U_i ($i = 1 \dots k-1$) bezeichnet.

Dritter Schritt:

Für ein Netzwerk mit k Knoten sind $k-1$ Gleichungen aufzustellen.

Dazu werden für jeden Knoten die Knotenpunktgleichungen niedergeschrieben (Knotenregel). Die hierzu benötigten Ströme werden durch die Knotenspannungen ausgedrückt.

Beispiel:



Für Knoten ① ergibt sich die Gleichung: $I_q - I_1 - I_2 = 0$ oder $I_1 + I_2 - I_q = 0$

Mit $I_1 = \frac{U_1}{R_1}$ und $I_2 = \frac{U_1 - U_2}{R_2}$ folgt für Knoten ①: $U_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - U_2 \cdot \frac{1}{R_2} - I_q = 0$

Werden zur kürzeren Schreibweise die Widerstände durch ihre Leitwerte ausgedrückt, so ergibt sich für Knoten ①: $U_1 \cdot (G_1 + G_2) - U_2 \cdot G_2 - I_q = 0$

Vierter Schritt:

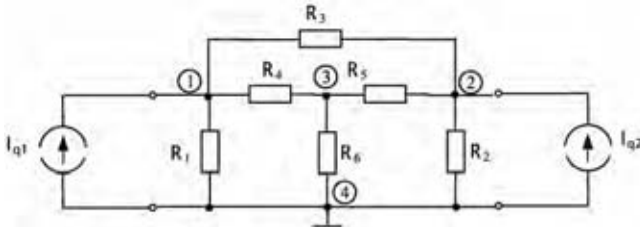
Die gesuchten Knotenspannungen in den Gleichungen werden isoliert. Sie treten dann in den Gleichungen als Faktoren auf.

Das Gleichungssystem mit $k-1$ Gleichungen und $k-1$ Unbekannten (den gesuchten Knotenspannungen) wird gelöst.

Auf diese Weise werden die unbekannten Spannungen der Knoten bestimmt. Ist der Strom durch einen Verbindungszweig gesucht, so kann dieser anschließend einfach nach dem Ohmschen Gesetz berechnet werden. Vorher ist die Spannung zwischen den Knoten des Zweiges durch Subtraktion der Knotenspannungen zu bestimmen.

Beispiel zur Knotenanalyse

Gegeben sei das bereits aus der Maschenanalyse bekannte Netzwerk. Die Spannungsquellen wurden in Stromquellen umgewandelt.



Gesucht sind die Knotenspannungen gegen einen zu wählenden Bezugspunkt.

Erster Schritt: Als Bezugsknoten wird Knoten ④ gewählt (in obiges Schaltbild eingezeichnet).

Zweiter Schritt: Den übrigen Knoten wird eine Knotenspannung zugeordnet. Im Schaltbild ist dies durch ① ② ③, also durch einfaches Durchnummerieren der Knoten in beliebiger Reihenfolge symbolisiert.

Dritter Schritt: Aufstellen der Knotengleichungen

$$\text{Knoten ①: } U_1 \cdot G_1 + (U_1 - U_3) \cdot G_4 + (U_1 - U_2) \cdot G_3 - I_{q1} = 0$$

$$\text{Knoten ②: } U_2 \cdot G_2 + (U_2 - U_3) \cdot G_5 + (U_2 - U_1) \cdot G_3 - I_{q2} = 0$$

$$\text{Knoten ③: } (U_1 - U_3) \cdot G_4 + (U_2 - U_3) \cdot G_5 + U_3 \cdot G_6 = 0$$

Vierter Schritt: Isolieren der Knotenspannungen und Lösen des Gleichungssystems

$$\text{Knoten ①: } U_1 \cdot (G_1 + G_3 + G_4) - U_2 \cdot G_3 - U_3 \cdot G_4 - I_{q1} = 0$$

$$\text{Knoten ②: } -U_1 \cdot G_3 + U_2 \cdot (G_2 + G_3 + G_5) - U_3 \cdot G_5 - I_{q2} = 0$$

$$\text{Knoten ③: } U_1 \cdot G_4 + U_2 \cdot G_5 - U_3 \cdot (G_4 + G_5 + G_6) = 0$$

Dies sind drei Gleichungen mit den drei Unbekannten U_1, U_2, U_3 .

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ohne eingesetzte Zahlenwerte ergibt sehr lange Ausdrücke für die gesuchten Knotenspannungen.

Für das Beispiel werden deshalb wieder die Zahlenwerte wie bei der Maschenanalyse gewählt:

$$R_1 = 100 \, \Omega; R_2 = 330 \, \Omega; R_3 = 470 \, \Omega; R_4 = 1 \, \text{k}\Omega; R_5 = 2,2 \, \text{k}\Omega; R_6 = 220 \, \Omega$$

$$\text{Bei der Maschenanalyse war: } U_{q1} = 5 \, \text{V}; U_{q2} = 10 \, \text{V}$$

$$\text{Für } I_{q1} \text{ ergibt sich } I_{q1} = \frac{U_{q1}}{R_1} = 50 \, \text{mA} \quad \text{und für } I_{q2} \text{ erhält man } I_{q2} = \frac{U_{q2}}{R_2} = 30,303 \, \text{mA}$$

Wird das Gleichungssystem mit den Zahlenwerten gelöst, so erhält man:

$$U_1 = 5,12547 \, \text{V}, U_2 = 7,45716 \, \text{V}, U_3 = 1,41918 \, \text{V}$$

Die Knotenspannungen sind jetzt berechnet und es können alle anderen Zweigspannungen und Zweigströme bestimmt werden.

Für den Strom durch R_3 ergibt sich z.B.:

$$I_3 = \frac{U_2 - U_1}{R_3} = 4,961 \text{ mA (gleicher Wert wie bei der Maschenanalyse)}.$$

Ob zur Analyse eines Netzwerkes die Maschen- oder die Knotenanalyse verwendet wird, kann willkürlich entschieden werden. Zweckmäßig ist jedoch die **Knotenanalyse**, wenn das Netzwerk relativ **wenig Knoten** bei **vergleichsweise vielen Maschen** hat. Für die Analyse benötigt man dann nur eine geringe Anzahl von Gleichungen und der Rechenaufwand kann klein gehalten werden.

8.7.3 Der Überlagerungssatz

In einem Netzwerk mit mehreren Quellen können Zweigströme oder Zweigspannungen bestimmt werden, indem nacheinander **alle Quellen außer einer zu Null** gesetzt werden.

Wird eine ideale Spannungsquelle zu Null gesetzt, so ist sie durch einen Kurzschluß zu ersetzen.

Wird eine ideale Stromquelle zu Null gesetzt, so ist sie durch einen Leerlauf zu ersetzen (aus dem Netzwerk zu entfernen).

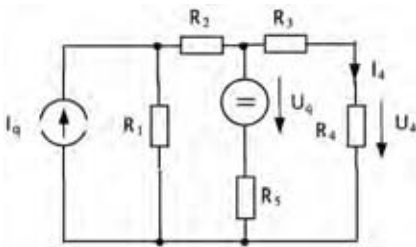
Es dürfen nur ideale Quellen zu Null gesetzt werden. Die zu realen Quellen gehörenden Innenwiderstände bleiben im passiven Netzwerk bei Anwendung des Überlagerungssatzes unverändert bestehen.

Nach der Berechnung jedes Wirkanteils einer Quelle werden die **Anteile summiert**, und man erhält die gesamte Zweigspannung oder den gesamten Zweigstrom, wenn alle Quellen wirken.

Nach diesem Superpositionsprinzip kann man sich häufig das Anschreiben der Kirchhoffschen Gleichungen sparen und erhält das Ergebnis durch einfache Addition. Der Rechenaufwand wird allerdings größer, je mehr Quellen im Netzwerk vorhanden sind.

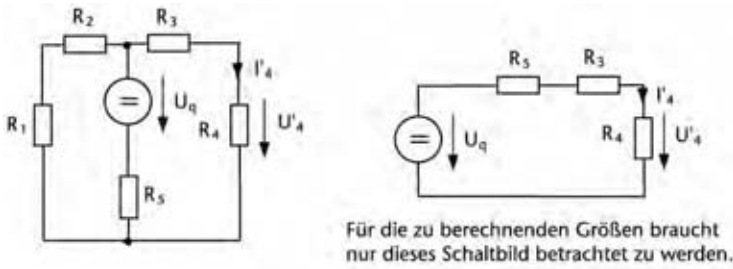
Beispiel zum Überlagerungssatz

Gegeben sei folgendes Netzwerk:



Gesucht sind die Spannung U_4 und der Strom I_4 .

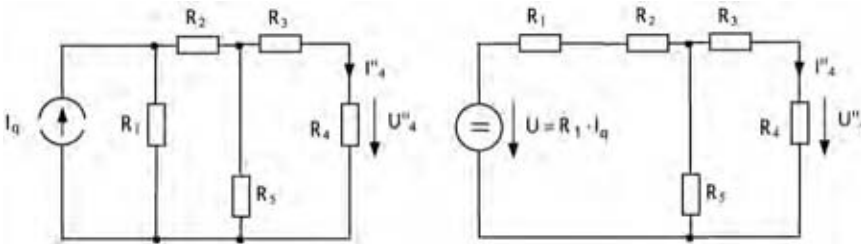
Der Widerstand R_1 kann als Innenwiderstand der Stromquelle und der Widerstand R_5 als Innenwiderstand der Spannungsquelle angesehen werden.



Zuerst wird die Stromquelle I_q zu Null gesetzt und die Wirkung der Spannungsquelle U_q berechnet.

Nach der Spannungsteiler-Formel erhält man $U'_4 = U_q \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4 + R_5}$; $I'_4 = \frac{U'_4}{R_4} = U_q \cdot \frac{1}{R_3 + R_4 + R_5}$

Jetzt wird die Spannungsquelle zu Null gesetzt und die Wirkung der Stromquelle berechnet.



Die Stromquelle wurde in eine Spannungsquelle umgewandelt.

Nach der Spannungsteiler-Formel ist die Spannung an R_5 : $U_5 = R_1 \cdot I_q \cdot \frac{\frac{(R_3 + R_4) \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5}}{R_1 + R_2 + \frac{(R_3 + R_4) \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5}}$

$$U_5 = R_1 \cdot I_q \cdot \frac{(R_3 + R_4) \cdot R_5}{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4 + R_5) + (R_3 + R_4) \cdot R_5}$$

Die Spannung U_5 liegt auch an der Reihenschaltung von R_3 , R_4 .

$$U''_4 = R_1 \cdot I_q \cdot \frac{(R_3 + R_4) \cdot R_5}{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4 + R_5) + (R_3 + R_4) \cdot R_5} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$I''_4 = \frac{U''_4}{R_4} = R_1 \cdot I_q \cdot \frac{(R_3 + R_4) \cdot R_5}{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4 + R_5) + (R_3 + R_4) \cdot R_5} \cdot \frac{1}{R_3 + R_4}$$

Die Teilergebnisse werden jetzt addiert.

$$U_4 = U'_4 + U''_4 = U_q \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4 + R_5} + R_1 \cdot I_q \cdot \frac{(R_3 + R_4) \cdot R_5}{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4 + R_5) + (R_3 + R_4) \cdot R_5} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$I_4 = I'_4 + I''_4 = U_q \cdot \frac{1}{R_3 + R_4 + R_5} + R_1 \cdot I_q \cdot \frac{(R_3 + R_4) \cdot R_5}{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4 + R_5) + (R_3 + R_4) \cdot R_5} \cdot \frac{1}{R_3 + R_4}$$

Für ein Zahlenbeispiel mit $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 100 \text{ }\Omega$, $R_3 = 330 \text{ }\Omega$, $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 10 \text{ }\Omega$, $U_q = 10 \text{ V}$, $I_q = 100 \text{ mA}$ ergibt sich: $U_4 = 8,2 \text{ V}$ und $I_4 = 8,2 \text{ mA}$.

8.7.4 Der Satz von der Ersatzspannungsquelle

Soll ausschließlich der Strom in **einem** bestimmten Zweig eines Netzwerkes berechnet werden, so kann dies mit einer Ersatzspannungsquelle erfolgen. Man kann sich das gesamte übrige Netzwerk, das diesen Zweig umgibt, ersetzt denken durch eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand.

Der **Widerstand**, durch den der zu **bestimmende Strom** fließt, wird als Lastwiderstand angesehen und zunächst **entfernt** (der Zweig wird aufgetrennt). Die **Leerlaufspannung der Ersatzspannungsquelle** ergibt sich als zu **berechnende Spannung** zwischen den **Anschlußpunkten des aufgetrennten Zweiges**. Das restliche Netzwerk wird anschließend auf einen einzigen Ersatzwiderstand reduziert. Dazu werden ideale Spannungsquellen im Netzwerk, die ja den Innenwiderstand Null haben, durch einen Kurzschluß ersetzt und der Widerstand zwischen den Anschlußpunkten des aufgetrennten Zweiges bestimmt. Der Ersatzwiderstand ist dann der Innenwiderstand der Ersatzspannungsquelle. An die so ermittelte Spannungsquelle mit Innenwiderstand wird der Lastwiderstand angeschlossen. Der Strom kann jetzt leicht aus der Spannung, und der Reihenschaltung aus Innenwiderstand und Lastwiderstand berechnet werden.

Erster Schritt:

Der Zweig mit dem zu bestimmenden Strom wird aufgetrennt.

Zweiter Schritt:

Die Spannung zwischen den aufgetrennten Knotenpunkten wird berechnet. Sie wird einer idealen Spannungsquelle zugeordnet.

Dritter Schritt:

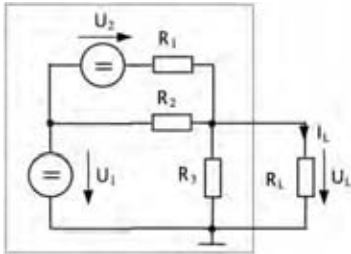
Ideale Spannungsquellen des Netzwerkes werden kurzgeschlossen. Der Widerstand zwischen den aufgetrennten Knotenpunkten wird berechnet. Er wird als Innenwiderstand der in Schritt zwei ermittelten Spannungsquelle zugeordnet.

Vierter Schritt:

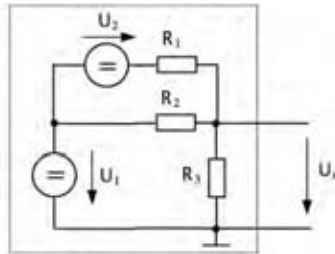
An die in Schritt drei ermittelte Ersatzspannungsquelle wird der Widerstand des aufgetrennten Zweiges angeschlossen. Der Strom in dem unverzweigten Stromkreis wird berechnet.

Anmerkung: Sowohl der Satz von der Ersatzspannungsquelle, als auch der Überlagerungssatz gelten nur bei einem linearen Netz, bei dem sämtliche Widerstände und Quellenspannungen von den Stromstärken unabhängig sind.

Beispiel zur Ersatzspannungsquelle



Gesucht sind I_L und U_L



Erster Schritt: Zweig wird aufgetrennt

Zweiter Schritt:

Die Spannung U_x an den aufgetrennten Klemmen wird bestimmt.

Es wird der Überlagerungssatz angewandt.

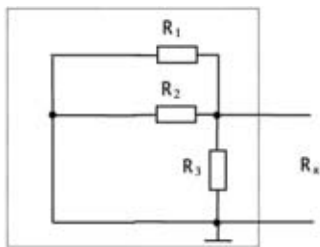
Bei Kurzschluß von U_2 erhält man: $U_{1x} = U_1 \cdot \frac{R_3}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3}$

Bei Kurzschluß von U_1 erhält man: $U_{2x} = -U_2 \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = -U_2 \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot (R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3}$

$U_x = U_{1x} + U_{2x} = U_1 \cdot \frac{R_3}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3} - U_2 \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot (R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3}$

Dritter Schritt:

Kurzschließen der Spannungsquellen, Ermittlung des Widerstandes zwischen den Punkten des aufgetrennten Zweiges.

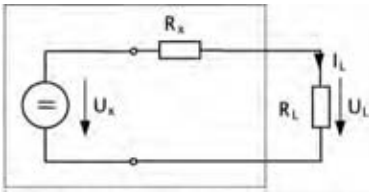


$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow R_x = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2}$$

R_x ist der Innenwiderstand der Ersatzspannungsquelle.

Vierter Schritt:

An die Ersatzspannungsquelle wird der Widerstand des aufgetrennten Zweiges angeschlossen und der Strom berechnet.



$$I_L = \frac{U_x}{R_x + R_L} = \frac{U_1 \cdot \frac{R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_3} - U_2 \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot (R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3}}{\frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2} + R_L}$$

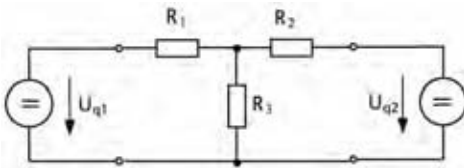
$$I_L = \frac{U_1 \cdot R_3 \cdot (R_1 + R_2) - U_2 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 + R_L \cdot (R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2)}$$

$$U_L = R_L \cdot I_L$$

Für ein Zahlenbeispiel mit $R_1 = 10 \, \Omega$, $R_2 = 22 \, \Omega$, $R_3 = 330 \, \Omega$, $R_L = 470 \, \Omega$, $U_1 = 10 \, \text{V}$, $U_2 = 5 \, \text{V}$ erhält man: $I_L = 13,48 \, \text{mA}$ und $U_L = 6,33 \, \text{V}$.

Aufgabe 37:

Gegeben ist folgendes Netzwerk mit zwei Spannungsquellen:



$$U_{q1} = 12 \, \text{V}, U_{q2} = 24 \, \text{V}, R_1 = 100 \, \Omega, R_2 = 47 \, \Omega, R_3 = 22 \, \Omega$$

Gesucht sind die Ströme durch die Widerstände und die Spannungsabfälle an den Widerständen.

Die Berechnung ist jeweils mittels Maschenanalyse, Knotenanalyse, Überlagerungssatz und dem Satz von der Ersatzspannungsquelle durchzuführen.

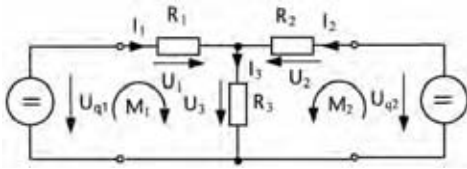
Lösung:

a) Maschenanalyse

Graph mit Baum:



Orientierung der Spannungen, Ströme und Maschen:



Maschengleichungen:

$$M_1: U_1 + U_3 - U_{q1} = 0 \Rightarrow I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3 - U_{q1} = 0$$

$$M_2: U_2 + U_3 - U_{q2} = 0 \Rightarrow I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 - U_{q2} = 0$$

Mit $I_3 = I_1 + I_2$ folgt:

$$M_1: I_1 \cdot R_1 + (I_1 + I_2) \cdot R_3 - U_{q1} = 0 \Rightarrow I_1 \cdot (R_1 + R_3) + I_2 \cdot R_3 - U_{q1} = 0$$

$$M_2: I_2 \cdot R_2 + (I_1 + I_2) \cdot R_3 - U_{q2} = 0 \Rightarrow I_1 \cdot R_3 + I_2 \cdot (R_2 + R_3) - U_{q2} = 0$$

Dies sind zwei Gleichungen mit den zwei unbekannten Strömen I_1 und I_2 . Einsetzen der Zahlenwerte:

$$M_1: I_1 \cdot 122 \Omega + I_2 \cdot 22 \Omega - 12 \text{ V} = 0$$

$$M_2: I_1 \cdot 22 \Omega + I_2 \cdot 69 \Omega - 24 \text{ V} = 0$$

I_1 wird nach I_1 aufgelöst, das Ergebnis in M_2 eingesetzt.

$$I_1 = \frac{12 \text{ V} - I_2 \cdot 22 \Omega}{122 \Omega} \quad \text{in } M_2: \frac{12 \text{ V} - I_2 \cdot 22 \Omega}{122 \Omega} \cdot 22 \Omega + I_2 \cdot 69 \Omega - 24 \text{ V} = 0$$

In der Gleichung kommt nur noch die Unbekannte I_2 vor, nach ihr wird aufgelöst.

$$-I_2 \cdot 22 \Omega \cdot 22 \Omega + I_2 \cdot 69 \Omega \cdot 122 \Omega = 24 \text{ V} \cdot 122 \Omega - 12 \text{ V} \cdot 22 \Omega$$

$$I_2 \cdot 7934 \Omega^2 = 2664 \text{ V} \Omega \quad I_2 = 0,335 \text{ A}$$

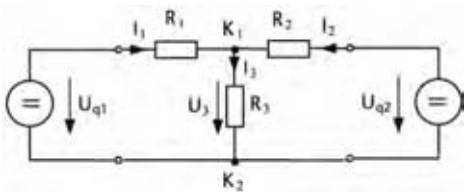
$$I_2 \text{ wird in } I_1 \text{ eingesetzt: } I_1 = \frac{12 \text{ V} - 0,335 \text{ A} \cdot 22 \Omega}{122 \Omega} \quad I_1 = 0,038 \text{ A}$$

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad I_3 = 0,373 \text{ A}$$

Die Spannungen U_1 , U_2 , U_3 ergeben sich nach dem Ohmschen Gesetz.

$$U_1 = R_1 \cdot I_1 = 3,8 \text{ V} \quad U_2 = R_2 \cdot I_2 = 15,7 \text{ V} \quad U_3 = R_3 \cdot I_3 = 8,2 \text{ V}$$

b) Knotenanalyse



Die Ströme werden eingezeichnet und die Knoten durchnummeriert. Als Bezugsknoten wird K_2 gewählt. Zu berechnen ist die Spannung U_3 des Knoten K_1 .

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = 10^{-2} \text{ S} \quad G_2 = \frac{1}{R_2} = 2,12766 \cdot 10^{-2} \text{ S} \quad G_3 = \frac{1}{R_3} = 4,54545 \cdot 10^{-2} \text{ S}$$

Knoten K_1 : $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

$$I_1 = \frac{U_{q1} - U_3}{R_1} = G_1 \cdot (U_{q1} - U_3) \quad I_2 = \frac{U_{q2} - U_3}{R_2} = G_2 \cdot (U_{q2} - U_3) \quad I_3 = \frac{U_3}{R_3} = G_3 \cdot U_3$$

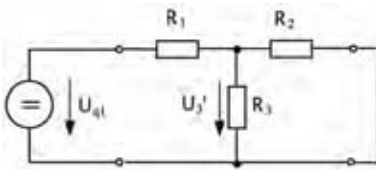
Eingesetzt in Knoten K_1 :

$$G_1 \cdot (U_{q1} - U_3) + G_2 \cdot (U_{q2} - U_3) - G_3 \cdot U_3 = 0 \Rightarrow U_3 = \frac{G_1 \cdot U_{q1} + G_2 \cdot U_{q2}}{G_1 + G_2 + G_3}$$

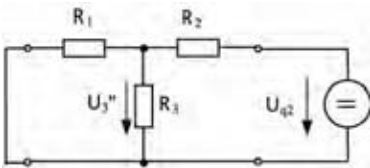
Mit eingesetzten Zahlenwerten ergibt sich: $U_3 = 8,2 \text{ V}$

Mit der Spannung U_3 können jetzt I_1 , I_2 , I_3 und die Spannungsabfälle an R_1 und R_2 berechnet werden, worauf hier verzichtet wird.

c) Überlagerungssatz



$$\text{An } U_3 \text{ hat } U_{q1} \text{ folgenden Anteil: } U_3' = U_{q1} \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = 1,56 \text{ V}$$

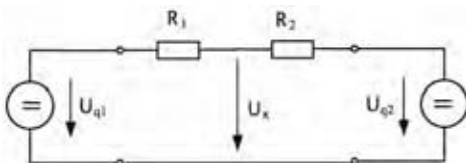


$$U_{q2} \text{ hat an } U_3 \text{ den Anteil: } U_3'' = U_{q2} \cdot \frac{\frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}}{R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}} = 6,65 \text{ V}$$

$$U_3 = U_3' + U_3'' \quad U_3 = 8,2 \text{ V}$$

Mit U_3 können alle anderen Spannungen und Ströme berechnet werden (worauf hier wieder verzichtet wird).

d) Satz von der Ersatzspannungsquelle



Der Zweig mit R_3 wird aufgetrennt und die Spannung U_x zwischen den aufgetrennten Punkten bestimmt. Es wird der Überlagerungssatz angewandt.

$$U_{x'} = U_{q1} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 3,8367 \text{ V}$$

$$U_{x''} = U_{q2} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 16,3265 \text{ V}$$

$$U_x = U_{x'} + U_{x''} = 20,1632 \text{ V}$$

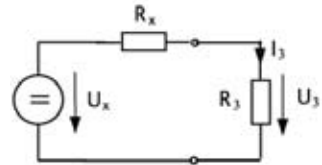
Der Widerstand R_x zwischen den aufgetrennten Punkten ist die Parallelschaltung von R_1 und R_2 und entspricht dem Innenwiderstand der Ersatzspannungsquelle.

$$R_x = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 31,9727 \Omega$$

R_3 wird an die Ersatzspannungsquelle angeschlossen.

$$I_3 = \frac{U_x}{R_x + R_3} \quad I_3 = 0,373 \text{ A} \quad U_3 = I_3 \cdot R_3 \quad U_3 = 8,2 \text{ V}$$

Mit U_3 können alle anderen Spannungen und Ströme berechnet werden.



8.8 Vierpole

Die folgende Schaltung wird als **Brückenschaltung** bezeichnet:

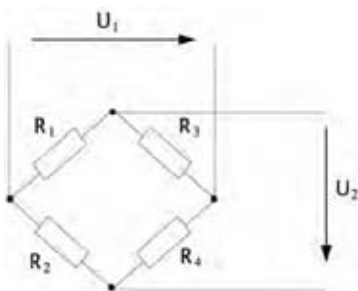


Abb. 142: Brückenschaltung aus vier Widerständen

Die Brückenschaltung hat zwei Klemmenpaare oder zwei »Tore«. Eine solche Schaltung nennt man allgemein auch **Zweitor** oder **Vierpol**. Die Brückenschaltung ist ein Beispiel für einen einfachen Vierpol.

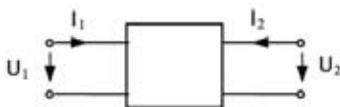


Abb. 143: Allgemeine Darstellung eines Vierpols

Bei einer Brückenschaltung wird an zwei gegenüberliegenden Eckpunkten eine Spannung eingespeist und an den beiden anderen Eckpunkten eine Spannung abgenommen oder gemessen.

Die Brückenschaltung wird hauptsächlich als **Meßbrücke** zur Messung von Widerständen verwendet.

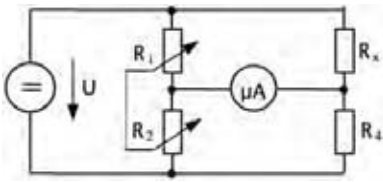


Abb. 144: Schaltung einer Meßbrücke zur Messung von Widerständen

Obige Meßbrücke wird als Wheatstonesche²⁴ Brücke bezeichnet. R_1 und R_2 bilden einen Spannungsteiler, ebenso R_x und R_4 . Ist die Ausgangsspannung beider Spannungsteiler gleich, so liegt zwischen ihren Mittelpunkten (an den Anschlüssen des Mikroamperemeters) keine Spannung. Man sagt, die Brücke ist **abgeglichen**, da im Nullzweig kein Strom fließt. Für den abgeglichenen Zustand der Brücke gilt

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_4}$$

Der zu messende Widerstand wird über Schraubklemmen mit der Meßbrücke verbunden. R_1 , R_2 werden solange verändert, bis die Brücke abgeglichen ist und das Mikroamperemeter (ein Instrument mit Nullstellung in der Mitte der Skala) Null anzeigt. Wird R_4 umschaltbar ausgeführt, so kann der Meßbereich umgeschaltet werden. R_x kann bei entsprechender Ausführung der Anordnung direkt auf einer Skala abgelesen werden.

8.9 Zusammenfassung: Der verzweigte Gleichstromkreis

1. Erstes Kirchhoffsches Gesetz (Knotenregel): Die Summe aller Ströme in einem Knoten ist Null.
2. Zweites Kirchhoffsches Gesetz (Maschenregel): Die Summe aller Spannungen in einer Masche ist Null.
3. Für die Parallelschaltung von zwei Widerständen gilt: $R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$
4. Für die Parallelschaltung von Kondensatoren gilt: $C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$
5. Für die Parallelschaltung von zwei Spulen gilt: $L_{\text{ges}} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$
6. Werden Gleichspannungsquellen parallel geschaltet, so erhöht sich der entnehmbare Strom.
7. Durch die Parallelschaltung von Bauelementen können Ersatzwerte gewonnen werden.
8. Der Meßbereich eines Amperemeters kann durch einen Shunt erweitert werden.
9. Vom unbelasteten Spannungsteiler ist der belastete Spannungsteiler zu unterscheiden.
10. Gemischte Schaltungen können durch Zusammenfassung von Bauelementen berechnet werden.
11. Eine Sternschaltung kann in eine Dreieckschaltung umgewandelt werden und umgekehrt.
12. Eine Spannungsquelle kann in eine Stromquelle umgewandelt werden und umgekehrt.

²⁴ Wheatstone (1802 - 1875), engl. Physiker,

13. Bei einem Netzwerk gibt es einen Baum, Maschen, Zweige und Knoten. Ein Netzwerk kann durch einen Graphen dargestellt werden.
14. Ein Netzwerk kann mit der Maschenanalyse, der Knotenanalyse, durch den Überlagerungssatz oder mit dem Satz von der Ersatzspannungsquelle berechnet werden.

9 Wechselspannung und Wechselstrom

9.1 Grundlegende Betrachtungen

In den Begriffen Gleichspannung und Gleichstrom bedeutet die Silbe »Gleich-«, daß sich die Höhe von Spannung bzw. Strom im Verlauf der Zeit nicht ändert, sie stets gleich groß, also konstant bleibt.

Eine Gleichspannung hat eine gleichbleibende Höhe in Volt und ist somit als Funktion der Zeit konstant. Die Gleichspannung ist durch ihr positives oder negatives Vorzeichen gegenüber einem Bezugspunkt und durch ihren Spannungswert in Volt eindeutig definiert. Eine Gleichspannung bewirkt im geschlossenen Stromkreis einen (konstanten) Gleichstrom. Dieser fließt im äußeren Stromkreis nur in einer Richtung, definitionsgemäß vom Plus- zum Minuspol der Spannungsquelle (dies ist die technische Stromrichtung, die Bewegung der Elektronen erfolgt in entgegengesetzter Richtung).

Bildlich in einem Spannungs-Zeitdiagramm dargestellt ergibt die Gleichspannung eine gerade Linie im positiven oder negativen Bereich der Spannung.

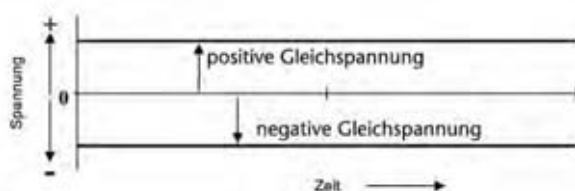


Abb. 145: Graphische Darstellung einer positiven und einer negativen Gleichspannung

Ändert eine Spannung in bestimmten Zeitabständen ihre Richtung, so spricht man von Wechselspannung. Eine Wechselspannung wechselt immer wieder ihre Polarität, sie verläuft vom positiven in den negativen und wieder zurück in den positiven Spannungsbereich usw.; sie pendelt um die Null-Linie zwischen Plus und Minus hin und her. Die Höhe einer Wechselspannung ist von der Zeit abhängig. Eine Wechselspannung ist eine Funktion der Zeit und kann nicht nur durch Vorzeichen und Spannungshöhe definiert werden. Sie bewirkt im geschlossenen Stromkreis einen Wechselstrom, für dessen zeitlichen Verlauf sinngemäß dasselbe wie für die Wechselspannung gilt.

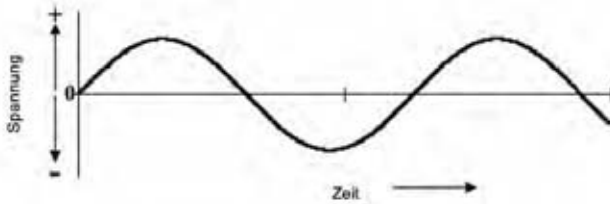


Abb. 146: Graphische Darstellung einer Wechselspannung (Sinusfunktion als Beispiel)

Bei Gleichstrom findet ein ständiger Elektronenfluß in nur einer Richtung statt. Bei Wechselstrom ändern die Elektronen entsprechend dem »wechselnden Druck« der Wechselspannungsquelle immer wieder ihre Bewegungsrichtung, sie pendeln in der Leitung hin und her. Daß mit Gleichstrom durch den Elektronenfluß in eine Richtung auch eine Weiterleitung von Energie verbunden ist, kann man sich noch vorstellen. Wie ist dies aber bei Wechselstrom, bei dem die Elektronen gar nicht richtig durch die Leitung fließen, sondern sich immer um einen Punkt in der Leitung hin und her bewegen?

Der Transport von Energie bei Wechselstrom kann durch den zentralen elastischen Stoß von Stahlkugeln veranschaulicht werden. Als Mobile gibt es eine Anordnung, bei der mehrere Stahlkugeln in einer Reihe und in gleicher Höhe an Fäden aufgehängt sind. Hebt man eine der äußeren Kugeln an und läßt sie los, so prallt sie auf die anderen und steht sofort still. Die entgegengesetzte äußere Kugel löst sich von der Reihe und bewegt sich allein ein Stück weiter, bis sie umkehrt und ihrerseits auf die Kugelreihe prallt. Jetzt läuft der gleiche Vorgang in anderer Richtung ab. Obwohl sich die inneren Kugeln der Reihe nicht bewegen, geben sie die Energie der äußeren aufprallenden Kugeln weiter. Ähnlich kann man sich das Hin- und Herpendeln der Elektronen und den damit verbundenen Energietransport in einer Leitung vorstellen, die von Wechselstrom durchflossen ist.

Nun noch einige allgemeine Worte zu Wechselgrößen. Bisher wurde in den Beispielen für Wechselspannung bzw. Wechselstrom eine sinusförmig verlaufende Funktion gezeigt. Die Sinusfunktion ist eine **periodische** Funktion. Bei einer periodischen Funktion tritt der in einem bestimmten Zeitpunkt vorhandene Funktionswert nach Ablauf einer bestimmten Zeit immer wieder auf. Der Funktionswert in einem bestimmten Zeitpunkt wird **Augenblickswert** oder **Momentanwert** genannt. Tritt nach Ablauf der **Periodendauer** »T« immer wieder der gleiche Momentanwert auf, so liegt eine periodisch zeitabhängige Funktion vor. Für sie gilt $f(t+T) = f(t)$. Eine periodisch zeitabhängige Funktion kann auch einen nichtsinusförmigen Verlauf haben.

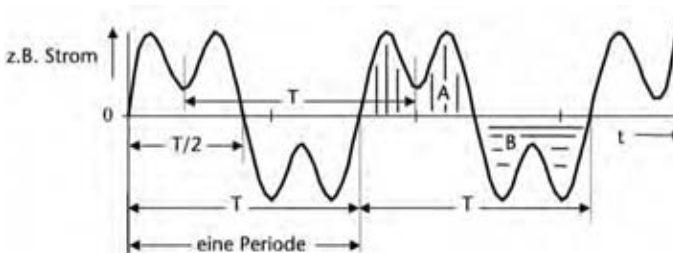


Abb. 147: Beispiel für einen nichtsinusförmigen, periodisch zeitabhängigen Verlauf

Man kann eine Periode in obiger Abbildung in eine Fläche A oberhalb und in eine Fläche B unterhalb der Zeitachse unterteilen. Sind beide Flächen gleich groß, so ist die dargestellte Größe eine Wechselgröße. Sind die Flächen nicht gleich groß, so kann die dargestellte Größe als Summe (als Überlagerung) eines Gleichanteils und eines Wechselanteils aufgefaßt werden (Wechselgröße mit einem Offset).

Eine Einteilung von Spannungen bzw. Strömen nach ihrem zeitlichen Verlauf ist nach folgendem Schema möglich:

1. Gleichspannung, Gleichstrom

Symbol: »=«

Die Kennzeichnung erfolgt üblicherweise durch große Buchstaben: U bedeutet Gleichspannung.

2. Sinusförmige Wechselspannungen und -ströme

Symbol: »~« (technische Frequenz), »≈« (Tonfrequenz)

Drei übereinander liegende Wellenlinien symbolisieren Hochfrequenz.

Die Kennzeichnung des Momentanwertes erfolgt durch kleine Buchstaben:

$u(t)$ oder $u_{(t)}$ oder u = Wechselspannung, $i(t)$ oder $i_{(t)}$ oder i = Wechselstrom

3. Nichtsinusförmige Spannungen und Ströme

3.1 Periodische nichtsinusförmige Spannungen und Ströme

Hierzu gehört z.B. eine Rechteckspannung oder eine Sägezahnspannung.

Als Symbol kann das jeweilige Zeichen des zeitlichen Verlaufs dienen.

Rechteckspannung: 

Sägezahnspannung: 

3.2 Unperiodische nichtsinusförmige Spannungen und Ströme

Zu diesen Zeitfunktionen gehört z.B. ein Einzelimpuls und die sogenannte Sprungfunktion. Sie kann als Testfunktion auf den Eingang eines Netzwerkes (eines Vierpols) gegeben werden. Aus der Sprungantwort am Ausgang des Netzwerkes wird auf die Eigenschaften des Netzwerkes geschlossen. In der Praxis entspricht die Sprungfunktion dem Einschalten einer Gleichspannung U zum Zeitpunkt $t = 0$.

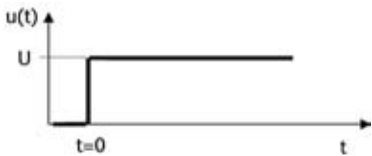


Abb. 148: Sprungfunktion, $u(t) = 0$ für $t < 0$ und $u(t) = U$ für $t > 0$

4. Zufälliger Zeitverlauf

Der zeitliche Verlauf eines Signals (einer Spannung oder eines Stromes) kann auch zufällig sein. Störungen oder **Rauschen** sind zufällige Signale. Durch das Rauschen wird einem Signal eine Spannung überlagert, deren Höhe und Frequenz sich dauernd zufällig ändert. Eine Rauschspannung entsteht z.B. an den Klemmen eines stromdurchflossenen Widerstandes durch die unbestimmten thermischen Bewegungen der freibeweglichen Elektronen im Widerstandsmaterial.

Eine Rauschspannung ist eine unerwünschte Störspannung. Bei Widerständen ist ihre Höhe proportional zur absoluten Temperatur, wird also größer, je höher die Temperatur des Widerstandes ist.

Es sei hier kurz erwähnt, warum die sinusförmigen Signale eine sehr wichtige Rolle spielen. Es läßt sich mathematisch (durch die sogenannte Fourier-Analyse) zeigen, daß sich jedes nicht-sinusförmige, aber periodische Signal durch eine Summe verschiedener Sinuskurven darstellen läßt. Für viele Überlegungen und Berechnungen kann deshalb der Einfachheit wegen die Sinuskurve zugrunde gelegt werden.

Es folgen einige Beispiele für periodische, nichtsinusförmige Signale, die in der Praxis von Bedeutung sind.

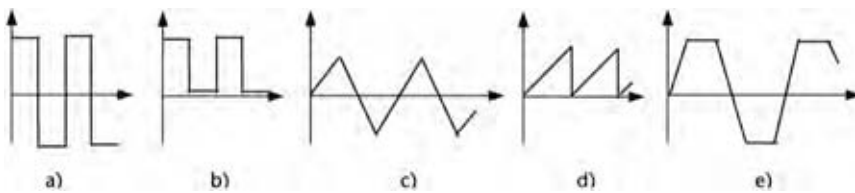


Abb. 149: a) Rechtecksignal symmetrisch zu Null b) Rechtecksignal c) Dreiecksignal d) Sägezahnsignal e) Trapezsignal symmetrisch zu Null

Computer arbeiten mit Rechtecksignalen. Sägezahnspannungen werden z.B. in Fernsehgeräten zur Ablenkung des Elektronenstrahls eingesetzt.

Oft wird auch zwischen **analogen** und **digitalen** Signalen unterschieden. Ein analoges Signal kann innerhalb eines bestimmten Bereiches jeden beliebigen Wert annehmen. Eine sinusförmige Spannung ist z.B. ein analoges Signal. Ein digitales Signal ist dagegen **quantisiert**, d.h. es bleibt in einem bestimmten Zeitbereich konstant. Eine Rechteckspannung ist z.B. ein digitales Signal.

9.2 Entstehung der Sinuskurve

Die Winkelfunktion »Sinus« gibt im rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis der Länge der Kathete, die dem Winkel gegenüberliegt, zur Hypotenuse an. Die Entstehung einer Sinuskurve kann man sich mit einem Zeiger veranschaulichen, der sich mit konstanter Geschwindigkeit um den Mittelpunkt eines Kreises dreht. Zeichnet man in einem Kreis rechtwinklige Dreiecke, bei denen die Hypotenuse h (der Zeiger) immer gleich dem Kreisradius ($r = 1$) ist, dann entspricht die Länge der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete k jeweils den zum Winkel gehörenden Sinuswert. Mit anderen Worten: Das Lot eines Zeigerpunktes auf die x -Achse ergibt den jeweiligen Augenblickswert der Sinuskurve. Je mehr Punkte man auf dem Kreisumfang aufträgt und nach rechts in die Sinuskurve überträgt, um so genauer wird diese.

Die x -Achse der Sinuskurve kann mit dem Drehwinkel α des Zeigers oder mit der Zeit t beschriftet werden, da eine Zeigerumdrehung je nach Geschwindigkeit der Drehbewegung eine bestimmte Zeit benötigt.

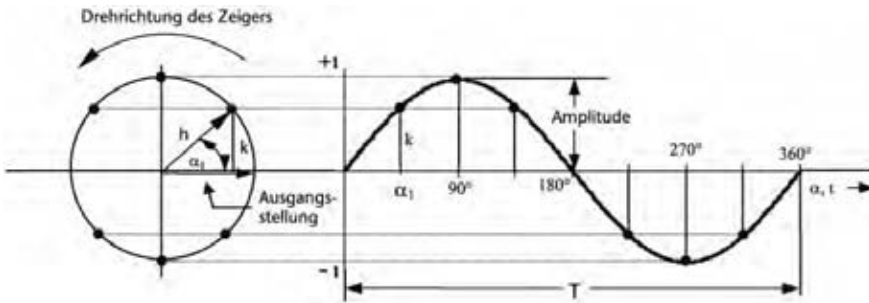


Abb. 150: Entstehung einer Sinuskurve durch einen umlaufenden Zeiger

Zur Erzeugung einer sinusförmigen Wechselspannung durch elektromagnetische Induktion eignet sich z.B. eine rechteckförmige Spule, die sich in einem homogenen Magnetfeld mit konstanter Geschwindigkeit um ihre Längsachse dreht (Prinzip eines Generators).

9.3 Kennwerte von Wechselgrößen

9.3.1 Periodendauer

Als Periodendauer »T« wird die Zeit für den Ablauf einer vollständigen, sich wiederholenden Schwingung bezeichnet.

9.3.2 Frequenz

Die Anzahl der vollen Schwingungen pro Sekunde nennt man Frequenz. Die Frequenz einer Spannung gibt an, wieoft in einer Sekunde eine Periode bzw. eine volle Schwingung ausgeführt wird. Die Einheit für die Frequenz ist das **Hertz**²⁵.

Das Einheitenzeichen für die Frequenz ist »Hz«, das Formelzeichen ist »f«.

Es gilt: $\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$

Zwischen der Frequenz f und der Periodendauer T besteht die Beziehung:

Gl. 60: Beziehung zwischen Frequenz und Periodendauer

$$f = \frac{1}{T}$$

Die sinusförmige Spannung des Versorgungsnetzes im Haushalt hat eine Frequenz von 50 Hz.

²⁵ Heinrich HERTZ (1857 - 1894), deutscher Physiker

Während die Netzfrequenz des technischen Wechselstroms von $16\frac{2}{3}$ bis 60 Hz reicht, liegt der sogenannte **Tonfrequenzbereich** (Sprache, Musik) zwischen ca. 16 Hz und ca. 20000 Hz. In der Kommunikationstechnik werden von Rundfunk- und Fernsehsendern viel höhere Frequenzen verwendet.

Rundfunk-Mittelwellensender arbeiten mit Frequenzen von ca. 526 kHz bis ca. 1,6 MHz, Rundfunk-UKW-Sender liegen zwischen ca. 88 bis 108 MHz. Fernsehsender arbeiten mit Frequenzen bis zu einigen hundert MHz, Funkdienste (z.B. über Satelliten, Radioastronomie) benutzen Frequenzen bis zu 275 GHz.

Frequenzen zwischen ca. 15 Hz und 30 kHz nennt man **Niederfrequenz** (Abkürzung: NF), Frequenzen darüber werden als **Hochfrequenz** bezeichnet (Abkürzung: HF). Diese Grenzen sind willkürlich gelegt und können auch bei anderen Frequenzen gezogen werden.

9.3.3 Kreisfrequenz

Beim Sinussignal versteht man unter **Winkelgeschwindigkeit** oder **Kreisfrequenz** die Geschwindigkeit des sich drehenden Winkels. Durch diese Geschwindigkeitsangabe wird man vom Radius des Kreises unabhängig. Der Umfang eines Kreises (der vom Zeiger zurückgelegte Weg bei einer vollen Umdrehung) ist $2 \cdot \pi \cdot r$. Für einen Kreis mit dem Radius $r = 1$ ergibt sich somit:

$$\omega = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \text{Mit } T = \frac{1}{f} \text{ folgt:}$$

Gl. 61: Definition der Kreisfrequenz

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Diese Frequenzbezeichnung ist äußerst wichtig, darf aber nur für sinusförmige Spannungen und Ströme angewendet werden. Die Einheit für die Kreisfrequenz ist 1/s.

Aus der Definition der Kreisfrequenz folgen zwei Möglichkeiten zur Beschriftung der x-Achse einer Wechselgröße.

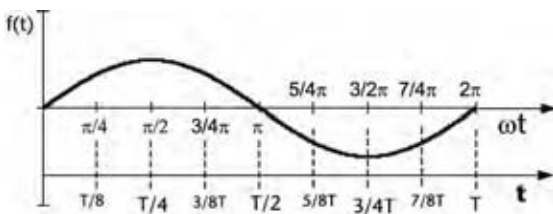


Abb. 151: Beschriftung der x-Achse einer Wechselgröße

9.3.4 Wellenlänge

Statt der Frequenz wird oft die **Wellenlänge** λ angegeben. Hochfrequente Wellen (z.B. eines Radiosenders) breiten sich annähernd mit Lichtgeschwindigkeit (ca. 300 000 km/s) aus.

Für die Umrechnung zwischen der Wellenlänge in Meter und der Frequenz in Hertz gilt:

λ in m

c = Ausbreitungsgeschwindigkeit in m/s

f in Hz

Gl. 62: Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Frequenz

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{f}$$

9.3.5 Amplitude

Als **Amplitude**, **Scheitelwert**, **Maximalwert** oder **Spitzenwert** wird der Höchstwert einer halben Schwingung (des positiven oder negativen Ausschlags) eines zu Null symmetrischen Signals bezeichnet. Der Scheitelwert wird oft mit einem Dach über dem Formelzeichen gekennzeichnet, z.B. $\hat{U}$ oder mit dem Index »max« versehen. Man beachte, daß der Scheitelwert im Gegensatz zum zeitabhängigen Momentanwert oft (aber nicht einheitlich) mit einem Großbuchstaben bezeichnet wird.

Beispiel: $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$ oder $u(t) = U_{\max} \cdot \sin(\omega t)$ oder nur $u(t) = U \cdot \sin(\omega t)$

In der Literatur findet man auch $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$

Da der Scheitelwert für eine Sinusschwingung mit konstanter Amplitude eine bestimmte feste Größe darstellt und nicht zeitabhängig ist, werden für Scheitelwerte hier nur Großbuchstaben verwendet.

Anmerkung: Bei Signalen wie z.B. einer gedämpften Sinusschwingung, bei der die Amplitude zeitabhängig ist (im Laufe der Zeit abnimmt), wäre es sinnvoll, den Scheitelwert mit einem Kleinbuchstaben zu schreiben.

9.3.6 Spitze-Spitze-Wert

Als **Spitze-Spitze-Wert** bezeichnet man den Wert zwischen größtem positiven und größtem negativen Ausschlag eines Signals. Er wird mit dem Index »ss« versehen, z.B. U_{ss} .

Bei einer sinusförmigen Spannung gilt: $U_{ss} = 2 \cdot \hat{U}$

Der Spitze-Spitze-Wert eines Signals wird hauptsächlich mit einem Oszilloskop oder einem speziell hierfür geeigneten Meßgerät gemessen. Von Bedeutung ist der Spitze-Spitze-Wert eines Signals in der Praxis z.B. in der Fernseh- oder Impulstechnik bei der Messung von Rechtecksignalen, die unsymmetrisch zu Null sind.

9.3.7 Effektivwert

Eine Gleichspannung ist durch eine einzige Zahl, die Höhe der Spannung, festgelegt.

Wie kann der Wert einer Wechselgröße durch eine einzige Zahl angegeben werden, wenn sich ihr Augenblickswert dauernd ändert? Durch die Angabe des Scheitelwertes würde der übrige zeitliche Verlauf der Wechselgröße (Kurvenform, Frequenz) nicht berücksichtigt werden.

Durch die mittlere Wirkung einer Spannung oder eines Stromes kann die Wechselgröße durch eine einzige Zahl charakterisiert werden. Der **Effektivwert** gibt den zeitlichen Mittelwert der Wirkung einer Spannung oder eines Stromes in einem Zeitintervall (Zeitabschnitt) an. Durch ihren Effektivwert wird jede Wechselgröße (Spannung, Strom) mit Gleichspannung bzw. -strom vergleichbar. Dies soll näher erläutert werden.

Da die Elektronen im Wechselstromkreis nur hin und her pendeln, fließen durch den Leiter im zeitlichen Mittel keine Elektronen. Schaltet man ein Gleichstrom-Amperemeter (Drehspulinstrument) mit Nullpunkt in der Mitte der Skala in einen Wechselstromkreis, durch den ein sinusförmiger Strom mit nur einigen Hertz fließt, so pendelt der Zeiger um den Nullpunkt. Erhöht man die Frequenz, so pendelt der Zeiger immer schneller um den Nullpunkt und bleibt wegen der mechanischen Trägheit des Meßwerkes schließlich im Nullpunkt stehen.

Die Elektronen erzeugen aber in einem Wechselstromkreis beim Hin- und Herpendeln ebenso Wärme wie ein Gleichstrom, bei dem die Elektronen nur in eine Richtung fließen. Die **Wärmeleistung** (Wärmeleistung) des Wechselstromes kann somit zu seiner Kennzeichnung der Wirksamkeit bzw. Größe herangezogen werden.

Der Effektivwert eines Wechselstromes entspricht dem Wert eines Gleichstromes, der in einem ohmschen Widerstand die gleiche Wärmewirkung hat wie der Wechselstrom.

Die Wärmeleistung (Augenblicksleistung) eines Wechselstromes in einem Widerstand R erhält man nach: $p = i^2 \cdot R$

Hat der Strom i z.B. die Kurvenform $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t)$ mit $\hat{I} = 2$, so ergibt sich für die Augenblicksleistung der in nachfolgender Abbildung angegebene Verlauf.

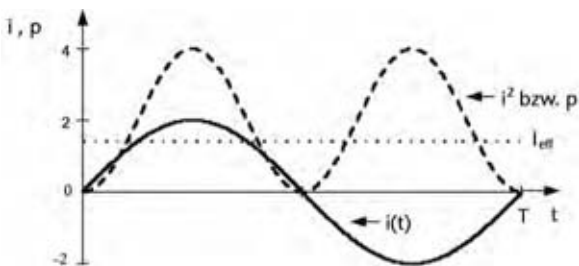


Abb. 152: Das Quadrat eines sinusförmigen Wechselstromes und sein Effektivwert

Zur weiteren allgemeinen Berechnung des Effektivwertes gilt:

Die Fläche unter der Kurve i^2 von $t = 0$ bis $t = T$ entspricht der im Widerstand R erzeugten Wärmeleistung während einer Periode des Stromes und wird durch ein Integral berechnet.

In einer Periode der Periodendauer T beträgt die erzeugte Wärmeenergie:

$$W = \int_0^T p dt = R \cdot \int_0^T i^2 dt$$

Die mittlere erzeugte Wärmeleistung während der Zeit T ist: $P = \frac{W}{T} = \frac{R}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt$

P ist der zeitliche Mittelwert der Augenblicks-Wärmeleistung p .

Im gleichen Widerstand R erzeugt ein Gleichstrom die Wärmeleistung $P = I^2 \cdot R$

Werden beide Leistungen gleichgesetzt, so erhält man: $I^2 \cdot R = \frac{R}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt$ oder $I^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt$

Daraus folgt der Effektivwert des Wechselstromes:

Gl. 63: Formel zur Berechnung des Effektivwertes eines Wechselstromes

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

Die Formel gilt entsprechend auch für den Effektivwert einer Wechselspannung. Sie gilt für beliebige Kurvenformen und erlaubt, bei gegebenem zeitlichen Verlauf von Wechselspannung oder -strom, die Berechnung des Effektivwertes.

Da die Wärmewirkung mit dem Quadrat des Stromes zunimmt, wird zur Berechnung des Effektivwertes das Quadrat der Augenblickswerte und daraus der zeitliche Mittelwert (quadratische Mittelwert) gebildet; aus dem Ergebnis wird die Wurzel gezogen.

Setzt man einen sinusförmigen Strom $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t)$ in Gl. 63 ein und wertet diese aus (worauf hier verzichtet wird), so erhält man eine wichtige Beziehung zwischen Effektivwert und Scheitelwert.

Gl. 64: Beziehung zwischen Effektivwert und Scheitelwert eines sinusförmigen Stromes

$$I_{\text{eff}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$$

Für sinusförmige Spannungen gilt entsprechend $U_{\text{eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$

Man beachte, daß der Wert $\sqrt{2}$ nur für sinusförmige Wechselgrößen gilt.

Mit den Ergebnissen einer Fourier-Analyse (Abschnitt 9.7) läßt sich der Effektivwert einer nicht-sinusförmigen Wechselgröße auch aus den Effektivwerten der einzelnen Harmonischen bestimmen.

Die Berechnung des Effektivwertes ist jedoch nur näherungsweise möglich, da es unendlich viele Harmonische gibt. Die Effektivwerte der Oberschwingungen müssen ab einer zu wählenden Ordnungszahl als vernachlässigbar klein angesehen werden.

Für eine Spannung ergibt sich z.B.:

Gl. 65: Berechnung des Effektivwertes aus den Harmonischen

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{U_0^2 + \frac{\hat{U}_1^2}{2} + \frac{\hat{U}_2^2}{2} + \dots} = \sqrt{U_0^2 + U_{1\text{eff}}^2 + U_{2\text{eff}}^2 + \dots}$$

U_0 = Gleichspannungskomponente

$U_{1\text{eff}}, U_{2\text{eff}}, \dots$ = Effektivwerte der einzelnen Harmonischen

Der Effektivwert von Wechselgrößen wird mit Großbuchstaben, bei Bedarf mit dem Index »eff« angegeben.

Der Zahlenwert einer Wechselgröße ohne besonderen Zusatz drückt den Effektivwert aus.

Die allgemein bekannten 220 V der Steckdose im Haushalt sind der Effektivwert der Wechselspannung. Der Scheitelwert beträgt $\hat{U} = 220 \text{ V} \cdot 1,414 = 311 \text{ V}$.

Wichtig für die Praxis:

Übliche Meßinstrumente zeigen bei sinusförmigen Wechselgrößen den Effektivwert an.

Bei anderen Kurvenformen erhält man eine vom Effektivwert abweichende Anzeige, falls das Meßprinzip nicht auf der Bildung des quadratischen Mittelwertes beruht. Meßinstrumente mit einem Dreheisenmeßwerk zeigen unabhängig von der Kurvenform den Effektivwert an.

9.3.8 Gleichrichtwert ^(M)

Eine Wechselgröße wird gleichgerichtet, indem die negativen Halbschwingungen ins Positive geklappt werden (Betragsbildung). Der zeitliche Mittelwert des Betrages einer Wechselgröße wird als **Gleichrichtwert** bezeichnet. Durch den Gleichrichtwert ist eine Wechselgröße ebenfalls (wie durch den Effektivwert) durch eine einzige Zahl gekennzeichnet.

Allgemein ist der Gleichrichtwert einer Wechselspannung bzw. eines Wechselstromes:

Gl. 66: Gleichrichtwert einer Wechselspannung, eines Wechselstromes

$$\overline{|u(t)|} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt \quad \overline{|i(t)|} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt$$

Nimmt man für $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$ mit $\hat{U} = 1$ an, so ergibt sich für den Gleichrichtwert das folgende Bild.

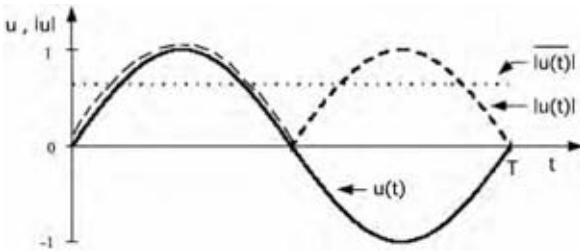


Abb. 153: Der Betrag einer sinusförmigen Wechselspannung und ihr Gleichrichtwert

Durch Auswertung von Gl. 66 für eine sinusförmige Spannung erhält man:

Gl. 67: Gleichrichtwert einer sinusförmigen Spannung

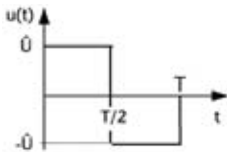
$$\overline{|u(t)|} = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{U}$$

In der Praxis ist der Gleichrichtwert z.B. beim Betrieb von Gleichrichterschaltungen von Bedeutung. Beim Laden eines Akkumulators ist die ihm zugeführte elektrische Ladung eine wichtige Größe. Die von einer Gleichrichterschaltung gelieferte Ladung ist von $|\overline{i(t)}|$ abhängig.

Aufgabe 38:

Eine periodisch zeitabhängige Spannung hat den im folgenden Bild dargestellten Verlauf (Rechteckspannung symmetrisch zu Null). Die Periodendauer ist T , der Scheitelwert beträgt $\hat{U} = 10 \text{ V}$.

Wie groß sind a) der Effektivwert und b) der Gleichrichtwert?



Lösung:

a) Für den Effektivwert gilt $U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}$

Das Integral von $u^2(t)$ über t in den Grenzen $t = 0$ und $t = T$ entspricht der Fläche, die zwischen der Funktion $u^2(t)$ und der Abszissenachse in diesen Grenzen liegt.

Diese Fläche entspricht einem Rechteck der Höhe $\hat{U}^2$ und der Breite T , und ist $\hat{U}^2 \cdot T$.

$$\Rightarrow U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \hat{U}^2 \cdot T} = \hat{U} = 10 \text{ V}$$

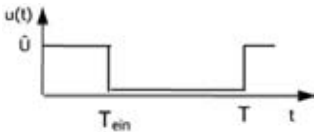
b) Für den Gleichrichtwert gilt: $\overline{|u(t)|} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$

Das Integral des Betrages der Spannung über die Zeit t in den Grenzen $t = 0$ und $t = T$ entspricht der Fläche, die zwischen der Funktion $|u(t)|$ und der Abszisse in den genannten Grenzen liegt. Die Funktion $|u(t)|$ erhält man, indem man den negativen Teil der Rechteckschwingung nach oben klappt.

Jetzt hat man ein Rechteck der Fläche $\hat{U} \cdot T \Rightarrow \overline{|u(t)|} = \frac{\hat{U} \cdot T}{T} = \hat{U} = 10 \text{ V}$

Aufgabe 39:

Gegeben sei folgende periodische Rechteckspannung mit $\hat{U} = 10 \text{ V}$ (eine Impulsfolge).



Nach Ablauf der Zeit T_{ein} fällt die Spannung auf Null Volt ab und springt bei T wieder auf den Wert $\hat{U}$.

Das Verhältnis $\frac{T}{T_{\text{ein}}}$ nennt man **Tastverhältnis**. Hier sei $T_{\text{ein}} = \frac{1}{3} \cdot T$

Wie groß ist der Effektivwert von $u(t)$?

Lösung:

Für den Effektivwert gilt $U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}$.

Das Integral von $t = 0$ bis $t = T$ über $u^2(t)$ entspricht der Fläche

$$\frac{1}{3} \cdot \hat{U}^2 \cdot T \Rightarrow U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{3} \cdot \hat{U}^2 \cdot T} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{3}} = 5,77 \text{ V}$$

9.3.9 Phase

Treten in einem elektronischen Gerät zwei Wechselgrößen (z.B. Spannung und Strom) an einem Punkt der Schaltung zusammen auf, so können beide Größen zeitlich gegeneinander verschoben sein. Diese Verschiebung wird als **Phasenverschiebung** bezeichnet.

Treten bei zwei periodischen Vorgängen z.B. beide positiven Höchstwerte im gleichen Zeitpunkt auf, so sagt man »sie sind in Phase« oder »phasengleich«. Werden dagegen bei beiden Vorgängen die Höchstwerte zu verschiedenen Zeitpunkten erreicht, so liegt eine »Phasenverschiebung« vor.

Eine Phasenverschiebung kann durch den Zeitunterschied (z.B. $\frac{1}{4}$ Periode) oder den entsprechenden Winkel in Winkelgraden (z.B. 90°) bzw. im Bogenmaß (z.B. $\frac{\pi}{2}$) angegeben werden.

Verläuft eine Sinuskurve nicht durch den Ursprung des Koordinatensystems, so kann ihre zeitliche Verschiebung durch den Nullphasenwinkel (kurz **Phasenwinkel**) gekennzeichnet werden.

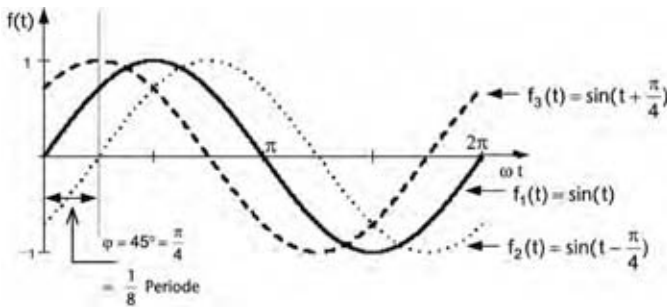


Abb. 154: Zur Erläuterung von Phasenwinkel und Phasenverschiebung

In obiger Abbildung hat die Kurve $f_2(t)$ einen Phasenwinkel von -45° und die Kurve $f_3(t)$ von 45° . Da der Maximalwert von $f_3(t)$ vor dem Maximalwert der Kurve $f_1(t)$ erreicht wird, sagt man, $f_3(t)$ eilt $f_1(t)$ voraus (um 45°). Die Phasenverschiebung zwischen $f_1(t)$ und $f_3(t)$ beträgt 45° . Der Maximalwert von $f_2(t)$ wird nach dem Maximalwert von $f_1(t)$ erreicht. $f_2(t)$ eilt $f_1(t)$ nach (um 45°). Die Phasenverschiebung zwischen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ beträgt 45° . Entsprechend eilt $f_3(t)$ der Kurve $f_2(t)$ um 90° voraus, $f_3(t)$ und $f_2(t)$ haben eine Phasenverschiebung von 90° .

Eine auf der Zeitachse nach links verschobene Kurve eilt voraus und hat einen positiven Phasenwinkel, eine nach rechts verschobene Kurve eilt nach und hat einen negativen Phasenwinkel.

Der Begriff der Phasenverschiebung kann nicht nur auf sinusförmige Kurvenverläufe angewandt werden.

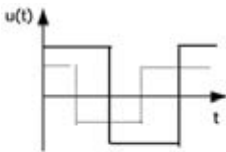


Abb. 155: Zwei Rechteckspannungen mit einer Phasenverschiebung von 90°

9.4 Zusammenfassung: Kennwerte von Wechselgrößen

1. Kennwerte einer periodischen Wechselgröße sind: Periodendauer, Frequenz, Kreisfrequenz, Wellenlänge, Amplitude, Spitze-Spitze-Wert, Effektivwert, Gleichrichtwert und Phasenwinkel.

2. Wichtige Formeln für sinusförmige Größen: $f = \frac{1}{T}$ $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ $U_{\text{eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$

3. Die zeitliche Verschiebung zweier Wechselgrößen heißt Phasenverschiebung.

9.5 Zeigerdarstellung von Sinusgrößen

Werden sinusförmige Spannungen und Ströme durch Kurvendigramme wie in Abb. 150 rechts oder durch Gleichungen wie $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t \pm \varphi)$ dargestellt, so ist dies relativ aufwendig. Zur Wiedergabe von sinusförmigen Wechselgrößen wird daher die Zeigerdarstellung bevorzugt.

Bei der Konstruktion der Sinuskurve wurde ein Zeiger benutzt, der sich entgegen dem Uhrzeigersinn (im mathematisch positiven Drehsinn) um seinen Anfangspunkt dreht, wobei sich die Pfeilspitze auf einem Kreis bewegt. Je nach Stellung des Zeigers ergaben sich unterschiedliche Augenblickswerte zur Erstellung der Sinuskurve. Somit liefern aber die Länge und die jeweilige Position des Zeigers alleine eine ausreichende Information über die Kurve.

Bei einer Wechselspannung gibt z.B. die Länge des Zeigers die Größe (die Amplitude) der Spannung an. Die Richtung des Zeigers (also sein »Zeitpunkt« auf der Sinuskurve) legt die jeweilige Phase fest. Die Drehzahl des Zeigers entspricht der Frequenz. Eine Zeigerumdrehung entspricht einer Periode.

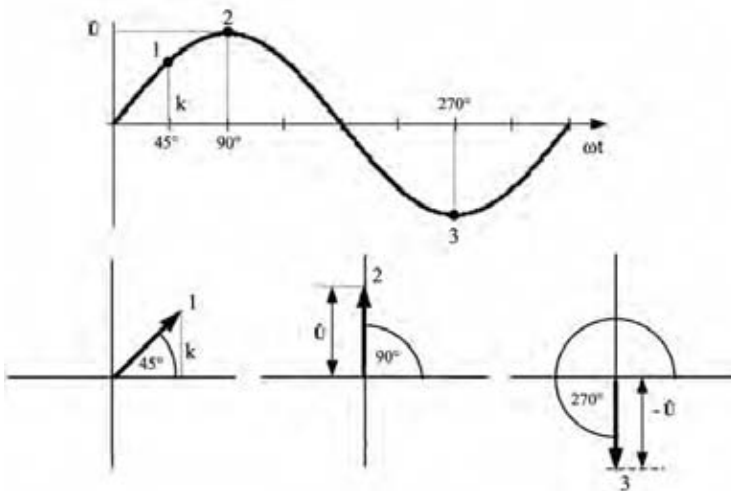


Abb. 156: Sinuskurve mit Zeigerdarstellung einiger Augenblickswerte

In obiger Abbildung sind die auf der Sinuskurve gekennzeichneten Punkte mit der gleichbedeutenden Darstellung durch einen Zeiger angegeben. Statt der anschaulichen Kurvendarstellung kann die einfacher zu zeichnende Zeigerdarstellung verwendet werden. Ein Zeiger stellt jeweils eine »Momentaufnahme« aus dem dynamischen Ablauf der Sinuskurve dar.

Bei der Darstellung von mehreren Zeigern in einem Bild spricht man von einem Zeigerbild oder Zeigerdiagramm.

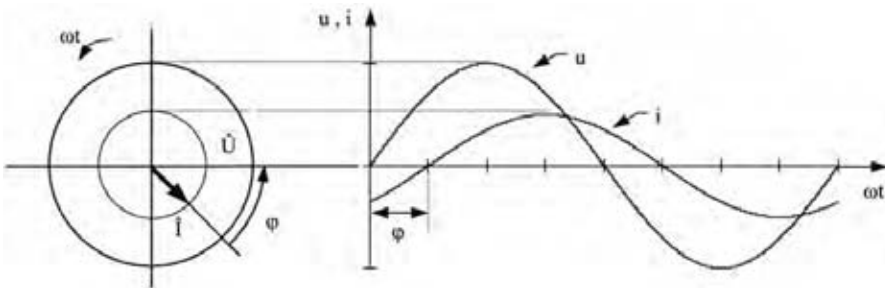


Abb. 157: Spannung und Strom mit einer Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{4}$

In Abb. 157 eilt der Strom der Spannung um 45° nach. Das zugehörige Zeigerdiagramm zeigt die folgende Abbildung.

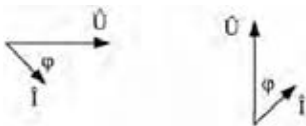


Abb. 158: Zeigerbild von Spannung und Strom mit einer Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{4}$

Links: Ohne Achsenkreuz

Mitte: Diagramm verdreht

Rechts: Zeiger parallel verschoben

Da die Augenblickswerte von Wechselgrößen meist nicht benötigt werden, kann man sich von der Vorstellung der zugehörigen Sinuskurven lösen. Im Zeigerdiagramm kann das Achsenkreuz weggelassen werden. Das Zeigerdiagramm kann auch um einen beliebigen Winkel gedreht werden. Einzelne Zeiger können parallel verschoben werden.

Wird eine Wechselgröße durch ihren Effektivwert angegeben, so ist ihr Zeiger mit einer um den Faktor $\sqrt{2}$ kleineren Länge zu zeichnen, da der Effektivwert entsprechend kleiner als der Scheitelwert ist.

Der Vorteil der Zeigerdarstellung zeigt sich besonders bei der Addition von phasenverschobenen Wechselgrößen gleicher Frequenz. Bei der analytischen Lösung einer solchen Addition ist ein hoher Rechenaufwand erforderlich. Eine zeichnerische Lösung ist leicht durch die Konstruktion eines Parallelogramms durchführbar.

Anmerkung: Da für Zeiger von Wechselgrößen die geometrischen Additionsgesetze von Vektoren gelten, werden Zeiger häufig als Vektoren bezeichnet. Die Bezeichnung »Vektor« sollte jedoch für Raumvektoren vorbehalten bleiben.

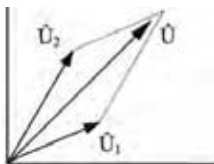


Abb. 159: Addition zweier phasenverschobener Wechselspannungen

$\hat{U}$ ist der Scheitelwert der Wechselspannung, die sich durch Addition der phasenverschobenen Wechselspannungen mit den Scheitelwerten $\hat{U}_1$ und $\hat{U}_2$ ergibt.

Man beachte:

Eine Addition der Zeiger ist nur bei Wechselgrößen mit gleicher Frequenz möglich.

Bei unterschiedlichen Frequenzen hätten die Zeiger verschiedene Drehzahlen.

9.6 Zusammensetzung von Wechselspannungen

In elektronischen Schaltungen sind häufig an einem Widerstand zugleich zwei Wechselspannungen oder Wechselströme wirksam. Dies entspricht der Speisung eines Widerstandes aus der Reihenschaltung zweier Wechselspannungsquellen u_1 und u_2 . Die Spannungen u_1 und u_2 setzen sich dabei zu einer resultierenden Spannung u zusammen. Um die resultierende Spannung zu erhalten, müssen die Werte der Einzelspannungen in jedem Augenblick addiert werden. Die durch Frequenz und Phase verschiedenen möglichen Fälle sollen im Folgenden untersucht werden.

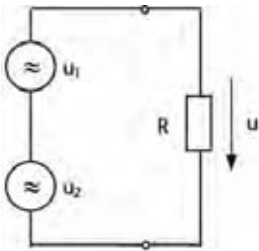


Abb. 160: Reihenschaltung von Wechselspannungen

Anmerkung: Wie bei Gleichspannung kann auch bei Wechselspannung ein Pfeil zur Kennzeichnung der beiden Punkte benutzt werden, zwischen denen die Wechselspannung liegt. Natürlich gibt bei Wechselspannung der Pfeil keine Polarität der Spannung an.

1. Fall:

Frequenz und Phase beider Spannungen sind gleich.

In diesem Fall kann man die Effektiv- bzw. Maximalwerte normal addieren.

2. Fall:

Die Frequenz beider Spannungen ist gleich. Die Phasenverschiebung beträgt 180° .

Die Momentanwerte der Spannungen werden unter Beachtung des Vorzeichens addiert. Sind die Scheitelwerte der Spannungen gleich groß, so heben sich die Spannungen auf (die resultierende Spannung ist in jedem Augenblick Null Volt).

3. Fall:

Die Frequenz beider Spannungen ist gleich. Die Phasenverschiebung ist irgendein Wert.

Die resultierende Spannung wird entweder durch punktweise Addition der Kurven u_1 und u_2 oder durch geometrische Addition der Zeiger gewonnen. Bei der Zeigeraddition ergeben sich außer dem Betrag der resultierenden Spannung auch noch die Phasenwinkel gegen die einzelnen Spannungen.

4. Fall:

Die Frequenzen beider Spannungen sind nicht gleich.

In diesem Fall ist die Phase unbedeutend und für die resultierende Spannung ergibt sich eine neue Frequenz. Dieser Fall ist bei der Nachrichtenübertragung (Modulation und Mischung) von Bedeutung.

Für die vier Fälle werden in der folgenden Abbildung jeweils die Kurvendarstellung und die zugehörigen Zeigerdiagramme gezeigt.

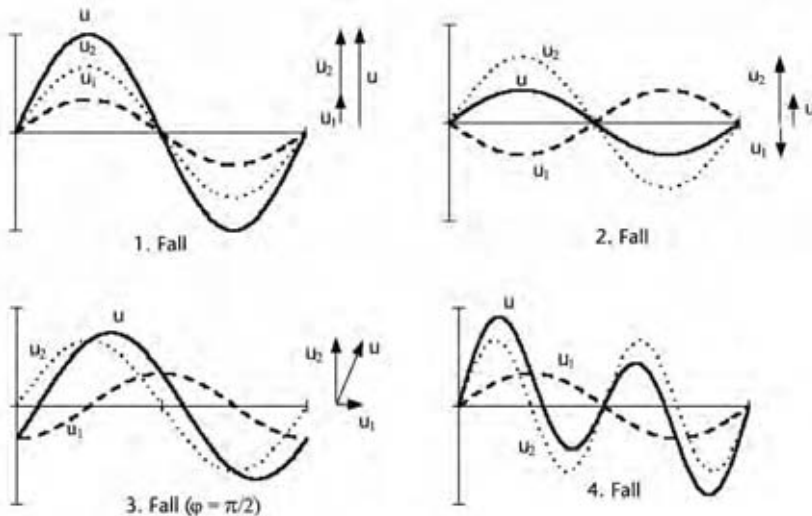


Abb. 161: Addition von Wechselspannungen

Aufgabe 40:

Zwei sinusförmige Ströme sind phasengleich und haben die Effektivwerte $I_1 = 30 \text{ mA}$ und $I_2 = 50 \text{ mA}$. Wie groß ist die Summe der beiden Ströme?

Lösung:

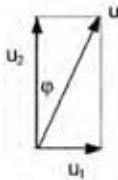
Da die Ströme in Phase sind, können ihre Effektivwerte unmittelbar addiert werden. $I_{\text{ges}} = 80 \text{ mA}$.

Aufgabe 41:

Zwei sinusförmige Spannungen u_1 und u_2 gleicher Frequenz haben die Amplituden $\hat{U}_1 = 5 \text{ V}$ und $\hat{U}_2 = 10 \text{ V}$. Die Phasenverschiebung zwischen beiden Spannungen beträgt 90° , u_2 eilt u_1 voraus. Wie groß ist die Amplitude $\hat{U}$ der Summenspannung u ? Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen der Summenspannung u und der Spannung u_2 ?

Lösung:

Zeigerdiagramm



Die Summenspannung bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks.

Nach Pythagoras gilt: $u^2 = u_1^2 + u_2^2$ oder $u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \Rightarrow \hat{U} = 11,18 \text{ V}$

Der Winkel zwischen u und u_2 ist: $\sin(\varphi) = \frac{u_1}{u} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{u_1}{u}\right) \Rightarrow \varphi = 26,5^\circ$

Die Spannung u eilt der Spannung u_2 um $26,5^\circ$ nach.

9.7 Oberschwingungen

In der Elektronik werden außer sinusförmigen Spannungen häufig nichtsinusförmige Signale (z.B. rechteckförmige, dreieckförmige, sägezahnförmige Spannungen) verwendet. Außerdem können in der Praxis nichtlineare Widerstände (z.B. Eisenkernspulen oder Halbleiterbauelemente) zu einer Veränderung der Sinusform von Spannungen und Strömen führen. Der Zusammenhang zwischen sinusförmigen und periodischen, **nichtsinusförmigen** Wechselgrößen wird im Folgenden untersucht.

Bei einer periodischen Spannung gilt $u(t) = u(t+T)$, wobei T die Periodendauer ist.

Eine **periodische, nichtsinusförmige Spannung** kann durch Überlagerung unendlich vieler, **sinusförmiger Spannungen** dargestellt werden.

Die Überlagerung entspricht einer Summe bzw. einer punktweisen Addition der einzelnen Spannungen.

Jede periodische, nichtsinusförmige Funktion läßt sich nach FOURIER²⁶ durch eine unendliche Summe verschiedener Sinuskurven mit unterschiedlichen Amplituden, Frequenzen und Nullphasenwinkeln darstellen.

Die einzelnen, sinusförmigen Spannungen bilden das **Spektrum** der periodischen, nichtsinusförmigen Spannung. Die unterschiedlichen Amplituden der einzelnen Sinusspannungen stellen das **Amplitudenspektrum**, die unterschiedlichen Nullphasenwinkel das **Phasenspektrum** dar. Die Frequenzen der einzelnen Sinusspannungen sind **ganzzahlige Vielfache (Harmonische)** der kleinsten vorkommenden Frequenz (der **Grundfrequenz**)

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi}$$

und bilden das **Frequenzspektrum**.

²⁶ Joseph FOURIER, französischer Mathematiker (1768 - 1830)

Die sinusförmige Teilschwingung mit der kleinsten vorkommenden Frequenz, der Grundfrequenz, wird als **Grundschwingung** oder als **1. Harmonische** bezeichnet. Die übrigen Schwingungen heißen Oberschwingungen oder höhere Harmonische und werden oft **Oberwellen** genannt. Man spricht von der 1. (oder 2., 3. usw.) Oberschwingung oder Oberwelle bzw. der 2. (oder 3., 4. usw.) Harmonischen. Die 2. Harmonische entspricht der 1. Oberschwingung.

Die Grundfrequenz der 1. Harmonischen (der sinusförmigen Grundschwingung) entspricht der Frequenz der nichtsinusförmigen Spannung.

Der Zählindex ($n = 1, 2, 3, \dots$) für das ganzzahlige Vielfache der kleinsten vorkommenden Frequenz heißt **Ordnungszahl** der betreffenden Oberschwingung. Die Ordnungszahl einer Harmonischen erhält man, wenn man ihre Frequenz durch die Frequenz der Grundschwingung teilt.

9.7.1 Fourierreihen ^(M)

Mathematisch läßt sich eine periodische, nichtsinusförmige Spannung durch eine FOURIER-Reihe darstellen.

Gl. 68: FOURIER-Reihe (Darstellung durch sinusförmige Teilschwingungen)

$$u(t) = U + \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + \hat{U}_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 t + \varphi_2) + \dots + \hat{U}_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 t + \varphi_n) \quad ; (n = 1, 2, 3, \dots \infty)$$

oder kürzer geschrieben

$$u(t) = U + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 t + \varphi_n)$$

Hierin sind:

- $u(t)$ Momentanwert der Spannung zum Zeitpunkt t
- U Gleichspannungskomponente (zeitlicher Mittelwert, Gleichanteil)
- $\hat{U}_n$ Scheitelwert (Scheitelspannung) der n -ten Harmonischen
- φ_n Nullphasenwinkel der n -ten Harmonischen
- n ganzzahliger Zählindex (Ordnungszahl)
- $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = 2\pi / T_0$ mit f_0 = Grundfrequenz
 T_0 = Periodendauer der nichtsinusförmigen Spannung

Obige Fourier-Reihe stellt eine Zerlegung einer nichtsinusförmigen periodischen Funktion in eine Konstante (U) und in sinusförmige Teilschwingungen dar. Obwohl die Reihe aus unendlich vielen Gliedern besteht, kann sie mit genügender Genauigkeit meistens nach einigen Gliedern abgebrochen werden. Die nichtsinusförmige periodische Funktion wird meistens durch einige Glieder der Reihe ausreichend genau beschrieben.

Die Fourier-Reihe nach Gl. 68 kann durch Zerlegung in Sinus- und Kosinusglieder in anderer Form geschrieben werden.

Gl. 69: FOURIER-Reihe (Darstellung mit Sinus- und Kosinusgliedern)

$$u(t) = U + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 t)$$

In dieser Darstellung treten keine Nullphasenwinkel auf. Die Konstanten a_n und b_n werden als **Fourierkoeffizienten** bezeichnet.

Mit der Periodendauer $T_0 = 2\pi/\omega_0$ berechnen sich die Fourierkoeffizienten a_n und b_n und die Gleichspannungskomponente U :

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \quad U = \frac{1}{T} \int_0^{T_0} u(t) dt \quad (\text{Eulersche Formeln})$$

Die Lage des Integrationsintervalls ist gleichgültig und kann ebenso von $-T_0/2$ bis $+T_0/2$ erstreckt werden.

Speziell für die Periodendauer $T_0 = 2\pi$ ($\Rightarrow \omega_0 = 1$) gilt:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \cdot \sin(nt) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \cdot \cos(nt) dt$$

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) dt$$

Zwischen den beiden Darstellungsformen einer Fourierreihe (Gl. 68 und Gl. 69) gelten folgende

Beziehungen:

$$\dot{U}_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Für die Gesamtheit aller n stellt $\dot{U}_n$ das **Amplitudenspektrum** und φ_n das **Phasenspektrum** dar. Beide Spektren sind **Linienpektren**, sie werden als Linien in Abhängigkeit der Ordnungszahl gezeichnet.

Man beachte, daß jeder Ordnungszahl eine Frequenz entspricht. Die x-Achse eines Spektrums kann somit auch mit der Frequenz f bezeichnet werden.

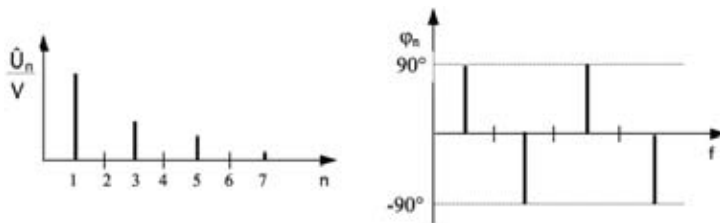


Abb. 162: Beispiel eines Amplitudenspektrums (links) und eines Phasenspektrums (rechts)

Als **Fourier-Analyse** bezeichnet man die Zerlegung einer nichtsinusförmigen periodischen Funktion in einzelne sinusförmige Teilschwingungen. Es wird vorausgesetzt, daß eine nichtsinusförmige Funktion $f(\omega t)$ in mathematischer Form als Gleichung vorliegt. Zur Ermittlung der sinusförmigen Teilschwingungen sind die Fourierkoeffizienten zu bestimmen.

Allgemein gilt: Je größer die Frequenz der sinusförmigen Teilschwingung wird, desto kleiner wird deren Amplitude!

Wichtig: In den nachfolgend beschriebenen Sonderfällen darf nur der Wechselanteil der Funktion betrachtet werden. Ein in der Funktion enthaltener Gleichanteil muß vor der Betrachtung des Sonderfalles von der Funktion abgezogen werden.

In folgenden **Sonderfällen** vereinfacht sich die Bestimmung der Fourierkoeffizienten:

1. Fall: Es liegt eine reine Wechselgröße vor, die positiven und negativen Halbschwingungen schließen gleich große Flächen ein. Der arithmetische Mittelwert einer solchen Funktion ist Null.

⇒ **Der Gleichanteil ist Null.** Es tritt z.B. keine Gleichspannungskomponente U auf.

2. Fall: Es gilt die Bedingung $f(\omega t) = f(-\omega t)$. Die Funktion ist gerade und symmetrisch zur y -Achse.

⇒ **Die Reihe enthält nur Cosinus-Glieder** ($a_n = 0$).

3. Fall: Es gilt die Bedingung $f(\omega t) = -f(-\omega t)$. Die Funktion ist ungerade und punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

⇒ **Die Reihe enthält nur Sinus-Glieder** ($b_n = 0$).

4. Fall: Es gilt die Bedingung $f(\omega t) = f(\omega t + \pi)$. Die Halbperioden haben gleiche Form und gleiche Lage zur x -Achse.

⇒ **Die Reihe enthält nur Sinus- und Kosinus-Glieder mit gerader Ordnungszahl**

($a_{2n+1} = 0, b_{2n+1} = 0$)

5. Fall: Es gilt die Bedingung $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$. Die Funktion ist alternierend, die Halbperioden haben gleiche Form, aber verschiedene Lage zur x -Achse.

⇒ **Die Reihe enthält nur Sinus- und Kosinus-Glieder mit ungerader Ordnungszahl**

($a_{2n} = 0, b_{2n} = 0$)

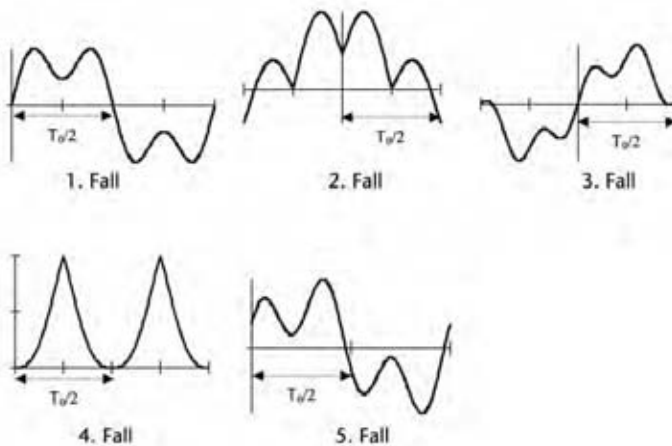
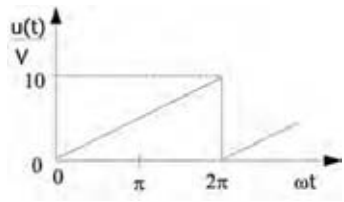


Abb. 163: Sonderfälle von periodischen Funktionen

9.7.2 Beispiel zur Fourier-Analyse ^(M)

Eine sägezahnförmige Spannung hat folgenden Verlauf:

Es ist die Fourier-Reihe bis zur Ordnungszahl $n = 5$ zu ermitteln und das zugehörige Amplitudenspektrum zu zeichnen.



Lösung:

Die Spannung hat den Scheitelwert $\hat{U} = 10 \text{ V}$ und die Periodendauer $T_0 = 2\pi$. Für die Bestimmung der Fourierkoeffizienten wird die Gleichung der Funktion benötigt.

Der Kurvenverlauf stellt eine Gerade durch den Koordinatenursprung mit der Steigung $\frac{\hat{U}}{2\pi}$ dar.

Die Gleichung der Funktion ist $f(t) = \frac{\hat{U}}{2\pi} t$. (Man könnte auch: $f(\omega t) = \frac{\hat{U}}{2\pi} \omega t$ schreiben.)

Um Rechenarbeit von Hand und vor allem die Berechnung von Integralen zu vermeiden, erfolgt die weitere Lösung mit Mathcad.

$$\hat{U} := 10 \cdot \text{V} ; \quad u(t) := \frac{\hat{U}}{2 \cdot \pi} \cdot t$$

Der Gleichspannungsanteil ist:

$$U := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} u(t) dt \Rightarrow U = 5 \cdot \text{V}$$

$$\text{Zähindex: } n := 1..5 \quad \text{Fourierkoeffizienten: } n_a := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} u(t) \cdot \sin(n \cdot t) dt$$

$$\Rightarrow a_1 = -3.18 \cdot \text{V}; \quad a_2 = -1.59 \cdot \text{V}; \quad a_3 = -1.06 \cdot \text{V}; \quad a_4 = -0.8 \cdot \text{V}; \quad a_5 = -0.64 \cdot \text{V}$$

a_1 bis a_5 sind die Amplituden der ersten fünf Harmonischen.

Zieht man von dem gegebenen Spannungsverlauf den Gleichspannungsanteil ab, so erhält man den Wechselspannungsanteil. Dessen zeitlicher Verlauf stellt eine ungerade Funktion dar mit der Bedingung $f(t) = -f(-t)$.

Es treten daher **nur Sinusglieder** auf. Dies wird nachgeprüft.

$$b_n := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} u(t) \cdot \cos(n \cdot t) dt \Rightarrow b_1 = 0 \cdot \text{V}; \quad b_2 = 0 \cdot \text{V} \dots b_n = 0 \text{ V}$$

Die Fourierreihe bis zum 5. Glied ist eine näherungsweise Darstellung (Approximation) der gegebenen Spannung und ergibt sich zu:

$$u_F(t) := U + \sum_{n=1}^5 a_n \cdot \sin(n \cdot t)$$

oder

$$u_F(t) := a_1 \cdot \sin(t) + a_2 \cdot \sin(2 \cdot t) + a_3 \cdot \sin(3 \cdot t) + a_4 \cdot \sin(4 \cdot t) + a_5 \cdot \sin(5 \cdot t) + U$$

Die einzelnen Harmonischen sind: $u_1(t) := a_1 \cdot \sin(t)$; $u_2(t) := a_2 \cdot \sin(2 \cdot t)$;

$$u_3(t) := a_3 \cdot \sin(3 \cdot t)$$
; $u_4(t) := a_4 \cdot \sin(4 \cdot t)$; $u_5(t) := a_5 \cdot \sin(5 \cdot t)$

Die gegebene Spannung kann näherungsweise durch folgende Fourierreihe dargestellt werden:

$$u(t) = 5 \text{ V} - 3,18 \text{ V} \cdot \sin(\omega t) - 1,59 \text{ V} \cdot \sin(2\omega t) - 1,06 \text{ V} \cdot \sin(3\omega t) - 0,80 \text{ V} \cdot \sin(4\omega t) - 0,64 \text{ V} \cdot \sin(5\omega t)$$

Festlegen der Schrittweite und des Bereiches für die graphische Darstellung:

$$\Delta\phi := 1 \cdot \text{Grad}; \quad \phi := 720 \cdot \text{Grad}; \quad t := 0, \Delta\phi \dots \phi$$

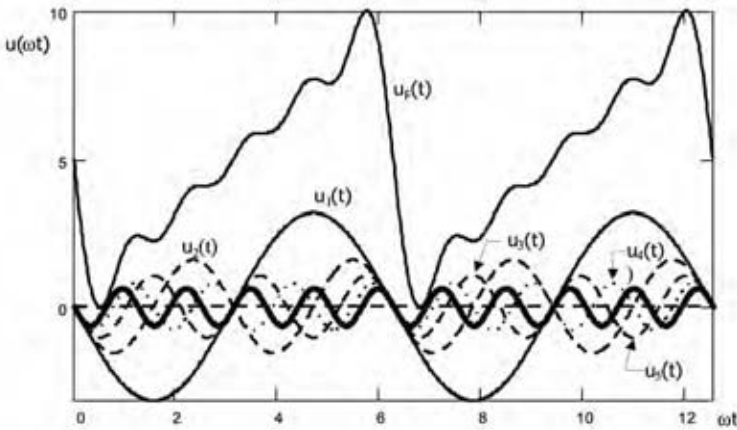


Abb. 164: Angenäherte Sägezahnspannung mit den ersten fünf Harmonischen

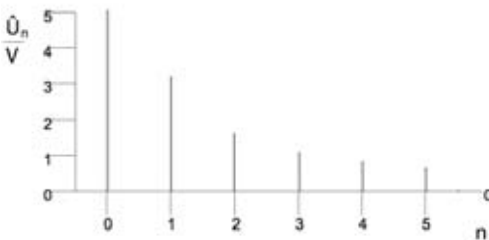


Abb. 165: Amplitudenspektrum der Sägezahnspannung

9.7.3 Bedeutung der Fourier-Analyse

9.7.3.1 Störungen

Haben die periodischen nichtsinusförmigen Signale mit unterschiedlicher Form gleiche Scheitelwerte, so können ihre Amplitudenspektren (die Höhe von Spektrallinien mit gleicher Ordnungszahl) miteinander verglichen werden.

Bei einem solchen Vergleich erkennt man, daß die Amplitudenspektren unterschiedlich schnell abnehmen.

Je steiler die Flanken der Signale sind, desto größer sind die Amplituden der Oberwellen.

Bei rechteck- und sägezahnförmigen Signalen sind die Amplituden der Oberwellen viel größer als z.B. bei dreieckförmigen oder abgerundeten Signalen.

In der Praxis sind Oberwellen mögliche Ursache für Störungen.

Entstehen Oberwellen in elektrischen Geräten, so können sie sich über Anschlußleitungen oder als Hochfrequenzenergie (Strahlung) ausbreiten. Sie bilden dann **Störquellen** für andere elektronische Geräte und können bei diesen ein Fehlverhalten hervorrufen bzw. bis zu deren Funktionsausfall führen.

Durch Maßnahmen zur **elektromagnetischen Verträglichkeit (EMV)** wird die gegenseitige elektromagnetische Beeinflussung von elektrischen Geräten herabgesetzt.

EMV-Maßnahmen können zur Vermeidung der Entstehung von Störungen dienen. So können z.B. die Rechtecksignale eines Mikroprozessors »verschliffen« (abgerundet) ausgebildet werden, so daß die Amplituden der Oberwellen und damit deren Strahlungsenergie kleiner wird. Ein Metallgehäuse schirmt elektromagnetische Störungen ab und verringert die Wirkung einer Baugruppe als Störquelle. Zuleitungen können mit speziellen Schaltungen (Filter) versehen werden, so daß keine leitungsgebundenen Störungen nach außen dringen.

EMV-Maßnahmen können auch zur Abschwächung aufgenommener Störungen bzw. zur Erhöhung der Störfestigkeit eines Gerätes dienen. Eine Störsenke (ein Gerät, das elektromagnetische Störungen aufnimmt) kann durch ein Metallgehäuse abgeschirmt werden. Mit Leitungen verbundene Eingänge können durch Entstörfilter (z.B. Schaltungen mit Kondensatoren und Drosseln) vor Störungen geschützt werden.

Anmerkung: Eine Zeitfunktion läßt sich grundsätzlich auf zwei gleichwertige Arten darstellen: Als Zeitfunktion im Zeitbereich und als Spektrum (spektrale Darstellung) im Frequenzbereich. Durch Fourierreihen ergeben sich bei periodischen nichtsinusförmigen Spannungen diskrete Linienspektren. Durch die Fourier- bzw. Laplace-Transformation lassen sich beliebige, auch nichtperiodische Zeitsignale im Frequenzbereich beschreiben, wobei sich bei nichtperiodischen Zeitsignalen kontinuierliche Spektren ergeben.

Das Amplitudenspektrum eines periodischen nichtsinusförmigen Signals ist ein Linienspektrum. Störungen können durch solche Signale nur bei einzelnen Frequenzen auftreten. Unperiodische Signale (z.B. ein Einzelimpuls) weisen ein kontinuierliches Amplitudenspektrum auf. Störungen durch diese Signale können breitbandig, d.h. bei jeder Frequenz auftreten.

9.7.3.2 Nichtsinusförmige Vorgänge in linearen Schaltungen

Von Bedeutung ist die Fourier-Analyse in der Praxis auch für die Betrachtung von nichtsinusförmigen Vorgängen in linearen Schaltungen. Werden nichtsinusförmige Wechselgrößen in sinusförmige Teilschwingungen zerlegt, so können Netzwerke mit den gleichen Lösungsverfahren berechnet werden, die für sinusförmige Vorgänge gelten.

Z.B. kann man sich eine Spannungsquelle, die eine nichtsinusförmige Spannung liefert, ersetzt denken durch mehrere in Reihe geschaltete Spannungsquellen, die jeweils sinusförmige Spannungen liefern. Die Gesamtwirkung (den fließenden Strom oder eine Teilspannung) erhält man durch Überlagerung der durch die einzelnen Spannungsquellen hervorgerufenen Teilwirkungen. Voraussetzung für dieses Verfahren ist allerdings, daß im Netzwerk keine nichtlinearen Widerstände (z.B. Dioden) vorhanden sind. (Vgl. auch Abschnitt 9.6)

9.7.4 Klirrfaktor

Von einer **Verzerrung** spricht man, wenn die Kurvenform einer Wechselgröße von der Sinusform abweicht. Der Grad der Verzerrung wird durch den Klirrfaktor ausgedrückt. Ist keine Gleichspannungskomponente vorhanden, so versteht man unter dem Klirrfaktor das Verhältnis des Effektivwertes aller Oberschwingungen zu dem Effektivwert der Gesamtschwingung.

Gl. 70: Definition des Klirrfaktors

$$k = \frac{\sqrt{U_{2\text{eff}}^2 + U_{3\text{eff}}^2 + \dots}}{\sqrt{U_{1\text{eff}}^2 + U_{2\text{eff}}^2 + \dots}} \quad U_{1\text{eff}}, U_{2\text{eff}}, \dots = \text{Effektivwerte der einzelnen Harmonischen}$$

10 Komplexe Darstellung von Sinusgrößen

Mit Zeigern lassen sich sinusförmige Wechselgrößen einfach darstellen. Die notwendige graphische Darstellung ist jedoch oft umständlich und ungenau. Mit Hilfe der komplexen Rechnung kann man ein Zeigerdiagramm mathematisch beschreiben.

10.1 Grundbegriffe der komplexen Rechnung

Wird als Koordinatenkreuz des Zeigerbildes die sogenannte **reelle und imaginäre Achse** genommen, so läßt sich die gegenseitige Lage von gerichteten elektrischen Größen verhältnismäßig einfach bestimmen. Die Ebene dieses Achsenkreuzes heißt Gaußsche²⁷ Zahlenebene. Auf der waagrechten Achse (Abszisse) werden die reellen Zahlen (0, 1, 2 usw.) aufgetragen. Auf der senkrechten Achse (Ordinate) werden die **imaginären Zahlen** (j , $2j$, usw.) aufgetragen.

Gl. 71: Imaginäre Einheit

Die Einheit der imaginären Zahlen ist: $j = \sqrt{-1}$

Die imaginäre Einheit gibt es in Wirklichkeit nicht, sie ist keine reelle (reale) Größe, da sich die Quadratwurzel aus -1 nicht ziehen läßt. Aufgrund ihres mathematischen Verhaltens sind imaginäre Zahlen für Berechnungen in der Wechselstromlehre sehr geeignet.

Die Summe aus einer reellen Zahl und einer imaginären Zahl heißt **komplexe Zahl**.

Eine komplexe Zahl kann in der Gaußschen Zahlenebene durch einen Punkt graphisch dargestellt werden. Zur Kennzeichnung verläuft ein Zeiger vom Ursprung zum betreffenden Punkt.

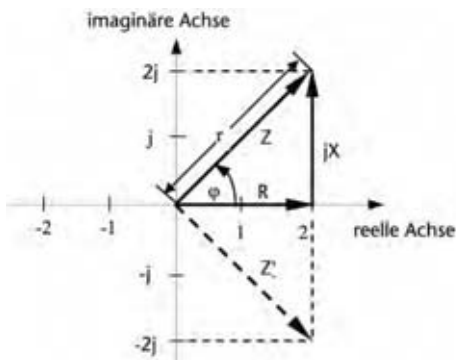


Abb. 166: Darstellung einer komplexen Zahl $Z = 2 + 2j$ und der konjugiert komplexen Zahl $Z' = 2 - 2j$ in der Gaußschen Zahlenebene

²⁷ Carl Friedrich Gauß, deutscher Mathematiker (1777 - 1855)

Die komplexe Zahl Z kann nach den Regeln der Addition von Zeigern als Summe von zwei Komponenten wiedergegeben werden. Es ist $Z = R + j \cdot X$ mit $R = \text{Realteil}$ von Z und $X = \text{Imaginärteil}$ von Z . Diese Darstellung einer komplexen Zahl heißt **Komponentenform** oder algebraische Form.

$\text{Re}\{Z\}$ und $\text{Im}\{Z\}$ sind abgekürzte Schreibweisen für Real- und Imaginärteil von Z .

Achtung: In der Darstellung $Z = R + j \cdot X$ ist »R« kein Widerstand sondern der Realteil der komplexen Zahl Z .

Eine gleichwertige andere Darstellung einer komplexen Zahl ist die **Exponentialform** $Z = r \cdot e^{j\varphi}$

Hierin sind $r = |Z|$ = Betrag der komplexen Zahl (Länge des Zeigers) und φ = Richtungswinkel von Z .

Herleitung der Exponentialform^(M):

$$|Z| = Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \varphi = \arctan \frac{X}{R}; \quad R = Z \cdot \cos \varphi; \quad X = Z \cdot \sin \varphi$$

Mit $Z = R + j \cdot X$ folgt $Z = Z \cdot [\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)]$ Mit dem Eulerschen²⁸ Satz $\cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j\varphi}$ ergibt sich $Z = Z \cdot e^{j\varphi}$.

Die **trigonometrische Form** ist eine dritte, gleichwertige Darstellung einer komplexen Zahl.

$$Z = r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) \text{ mit } \text{Re}\{Z\} = r \cdot \cos \varphi \text{ und } \text{Im}\{Z\} = r \cdot \sin \varphi \text{ sowie } \tan \varphi = \frac{\text{Im}\{Z\}}{\text{Re}\{Z\}} \quad (r = |Z|)$$

Zu jeder komplexen Zahl Z gibt es eine **konjugiert komplexe Zahl** Z' . Beide unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils.

Beispiel: Die konjugiert komplexe Zahl zu $Z = R + j \cdot X = Z \cdot e^{j\varphi}$ ist $Z' = R - j \cdot X = Z \cdot e^{-j\varphi}$ und umgekehrt.

Zur Unterscheidung von einer reellen Größe kann eine komplexe Größe mit einem Stern (*) versehen werden, z.B. ist U eine reelle Spannung, U^* ist eine komplexe Spannung (Spannung in komplexer Darstellung). Z ist der Betrag der komplexen Zahl Z^* .

10.1.1 Rechenregeln für imaginäre Zahlen

Unter Berücksichtigung der Regeln für die Potenzrechnung gilt:

$$\boxed{j^2 = -1} \quad (\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1) \quad \boxed{j^3 = -j} \quad (j^2 \cdot j = -1 \cdot j = -j) \quad \boxed{j^4 = +1} \quad (j^2 \cdot j^2 = -1 \cdot -1 = +1)$$

$$j^3 \text{ kann auch geschrieben werden als } \boxed{j^3 = \frac{1}{j} = -j} \quad (j^3 = \frac{j^4}{j} = \frac{1}{j})$$

$$\text{Addition: } ja + jb = j(a+b)$$

$$\text{Subtraktion: } ja - jb = j(a-b)$$

$$\text{Multiplikation: } ja \cdot jb = -a \cdot b$$

$$\text{Division: } ja : jb = a : b$$

$$\text{Betrag (Länge des Zeigers): } |\pm ja| = a$$

Aus der graphischen Darstellung einer imaginären Zahl kann abgeleitet werden:

²⁸ Leonhard EULER (1707 - 1783), schweizer Mathematiker

Die Multiplikation einer reellen Größe mit j bedeutet eine Drehung des Zeigers dieser Größe um 90° im mathematisch positiven Sinn (entgegen dem Uhrzeigersinn).

Die Multiplikation einer reellen Größe mit j^2 bedeutet eine Drehung des Zeigers dieser Größe um 180° im mathematisch positiven Sinn.

Die Multiplikation einer reellen Größe mit $j^3 = -j = 1/j$ bedeutet eine Drehung des Zeigers dieser Größe um 270° im mathematisch positiven Sinn oder eine Drehung um -90° .

Anders ausgedrückt: $+j$ gibt an, daß der Imaginärwert dem Realwert um 90° vorauselt (positive Phasenverschiebung). $-j$ gibt an, daß der Imaginärwert dem Realwert um 90° nacheilt (negative Phasenverschiebung).

10.1.2 Rechenregeln für komplexe Zahlen

Hier werden nur die wichtigsten Rechenregeln für komplexe Zahlen betrachtet.

Für Addition und Subtraktion eignet sich die Komponentenform gut.

Addition: $Z_1^* + Z_2^* = (R_1 + jX_1) + (R_2 + jX_2) = R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2)$

$$Z_1^* + Z_1'^* = (R_1 + jX_1) + (R_1 - jX_1) = 2R_1$$

Subtraktion: $Z_1^* - Z_2^* = (R_1 + jX_1) - (R_2 + jX_2) = R_1 - R_2 + j(X_1 - X_2)$

$$Z_1^* - Z_1'^* = (R_1 + jX_1) - (R_1 - jX_1) = j2X_1$$

Die reellen und die imaginären Komponenten werden für sich addiert bzw. subtrahiert.

Für die Multiplikation und Division eignet sich am besten die Exponentialform.

Multiplikation: Ist $Z_1^* = Z_1 \cdot e^{j\varphi_1}$ und $Z_2^* = Z_2 \cdot e^{j\varphi_2}$ so ist $Z_1^* \cdot Z_2^* = Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Die Beträge werden multipliziert und die Richtungswinkel addiert.

Man beachte die Zusammenhänge: $Z_1 = |Z_1^*| = \sqrt{R_1^2 + X_1^2}$ und $\varphi_1 = \arctan\left(\frac{X_1}{R_1}\right)$

Division: $\frac{Z_1^*}{Z_2^*} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Die Beträge werden dividiert und die Richtungswinkel subtrahiert.

Multiplikation in der Komponentenform:

$$Z_1^* \cdot Z_2^* = (R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2) = R_1R_2 - X_1X_2 + j \cdot (R_1X_2 + R_2X_1)$$

$$Z_1^* \cdot Z_2^* = (R_1 - jX_1)(R_2 - jX_2) = R_1R_2 - X_1X_2 - j \cdot (R_1X_2 + R_2X_1)$$

$$Z_1^* \cdot Z_2^* = (R_1 - jX_1)(R_2 + jX_2) = R_1R_2 + X_1X_2 + j \cdot (R_1X_2 - R_2X_1)$$

$$Z_1^* \cdot Z_1'^* = (R_1 + jX_1)(R_1 - jX_1) = R_1^2 + X_1^2$$

Multiplikation in trigonometrischer Form:

$$Z^* = Z \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) \quad Z = |Z^*|$$

$$Z_1^* \cdot Z_2^* = Z_1Z_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Division in der Komponentenform:

Ein Ausdruck der Form

$$Z^* = \frac{R_1 + jX_1}{R_2 + jX_2}$$

kann in eine reelle und in eine imaginäre Komponente zerlegt werden, indem der Zähler und der Nenner mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners multipliziert werden. Unter Berücksichtigung von $j^2 = -1$ ist:

$$Z^* = \frac{R_1 + jX_1}{R_2 + jX_2} \cdot \frac{R_2 - jX_2}{R_2 - jX_2} = \frac{R_1R_2 - jR_1X_2 + jR_2X_1 + X_1X_2}{R_2^2 - jR_2X_2 + jR_2X_2 + X_2^2} = \frac{R_1R_2 + X_1X_2}{R_2^2 + X_2^2} + j \cdot \frac{R_2X_1 - R_1X_2}{R_2^2 + X_2^2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
Realteil

$\underbrace{\hspace{10em}}$
Imaginärteil

Division in trigonometrischer Form:

$$Z^* = Z \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) \quad Z = |Z^*|$$

$$\frac{Z_1^*}{Z_2^*} = \frac{Z_1}{Z_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Reziproker Wert (Kehrwert):

$$\frac{1}{Z^*} = \frac{1}{Z \cdot e^{j\varphi}} = \frac{1}{Z} \cdot e^{-j\varphi} \quad \frac{1}{Z^*} = \frac{1}{R + jX} = \frac{1}{R + jX} \cdot \frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$\frac{1}{Z^*} = \frac{1}{R - jX} = \frac{1}{R - jX} \cdot \frac{R + jX}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Potenzieren in trigonometrischer Form:

$$Z^* = Z \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) \quad Z = |Z^*|$$

$$(Z^*)^n = Z^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi)]$$

Potenzieren in Exponentialform:

$$Z^* = Z \cdot e^{j\varphi} \quad Z = |Z|$$

$$(Z^*)^n = Z^n \cdot e^{jn\varphi}$$

EULERSche Formel:

$$\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi = e^{j\varphi} \Rightarrow e^{j2\pi} = 1$$

Umwandlungen zwischen Komponenten- und Exponentialform

Beispiel 1:

$Z^* = 15 \cdot e^{j35^\circ}$ soll in die Komponentenform umgewandelt werden. (φ ist in Grad angegeben!)

$$Z^* = Z \cdot (\cos\varphi + j \sin\varphi) = 15 \cdot (0,82 + j 0,57) = 12,3 + j 8,55$$

Beispiel 2:

$Z^* = 12,3 + j 8,55$ soll in die Exponentialform umgewandelt werden.

$$Z = \sqrt{12,3^2 + 8,55^2} = 14,98 \quad \varphi = \arctan\left(\frac{8,55}{12,3}\right) = 0,61$$

$$Z^* = 14,98 \cdot e^{j0,61} = 14,98 \cdot e^{j34,95^\circ} \quad (\varphi \text{ in rad bzw. Grad})$$

Anmerkung: Die Unterschiede von Betrag und Phase zwischen Beispiel 1 und Beispiel 2 ergeben sich durch Rundungen.

10.1.3 Vorteil komplexer Zahlen

Worin liegt der Vorteil, Zeiger als komplexe Zahlen darzustellen?

1. Vorteil:

Aus der komplexen Zahlendarstellung ist auch ohne Zeigerbild sofort die Phasenverschiebung (speziell um plus oder minus 90°) zwischen Spannung und Strom ersichtlich.

2. Vorteil:

Durch die Rechnung mit komplexen Zahlen können Zeiger ohne graphische Darstellung miteinander verknüpft (z.B. addiert) werden.

Zu Vorteil 1:

Betrachten wir einen Zeiger für Spannung und einen Zeiger für Strom. Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom soll 90° betragen. Der Widerstand R soll abhängig von der Frequenz sein und mit $R(\omega)$ bezeichnet werden.

Eilt die Spannung dem Strom voraus, so kann die Spannung auf der positiven imaginären Achse angetragen werden und der Strom auf der positiven reellen Achse. Aus dem Ohmschen Gesetz für Gleichstrom $U = I \cdot R$ wird $U^* = I^* \cdot j \cdot R(\omega)$. Aus der reellen Spannung U ist die komplexe Spannung U^* geworden und aus dem reellen Strom I der komplexe Strom I^* . Aus dem reellen Widerstand R ist der komplexe Widerstand $j \cdot R(\omega)$ geworden.

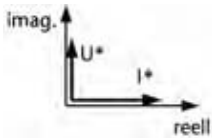


Abb. 167: Zeigerdiagramm von Spannung und Strom in der komplexen Zahlenebene, die Spannung eilt dem Strom um 90° voraus

Eilt der Strom der Spannung voraus, so kann der Strom auf der positiven reellen Achse angetragen werden, und die Spannung auf der negativen imaginären Achse. Aus dem Ohmschen Gesetz für Gleichstrom $U = I \cdot R$ wird $U^* = I^* \cdot -j \cdot R(\omega)$ oder $U^* = I^* \cdot 1/j \cdot R(\omega)$

Das Zeigerbild kann auch um 90° gedreht werden, da $I^* = U^* / -j \cdot R(\omega)$ oder $I^* = j \cdot U^* / R(\omega)$

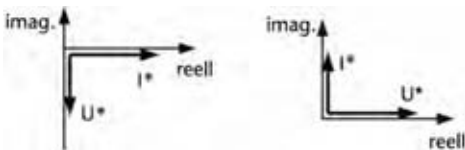


Abb. 168: Die Spannung eilt dem Strom um 90° nach

Aus dem Vorzeichen von j erkennt man sofort, ob eine Größe auf der linken Seite der Gleichung einer anderen Größe auf der rechten Seite der Gleichung um 90° vorausschleift oder nachschleift.

$+j$ bedeutet: Die Größe eilt um 90° voraus.

$-j$ oder $1/j$ bedeutet: Die Größe eilt um 90° nach.

Ob die x-Achse die Spannung oder den Strom angibt, ist gleichgültig. Es muß nur die positive oder negative Phasenverschiebung um 90° zwischen Spannung und Strom durch das Vorzeichen von j entsprechend berücksichtigt werden.

Zu Vorteil 2:

Ein Bauteil A hat bei der Frequenz f_0 den Widerstand $R(\omega_0)$, die Spannung eilt dem Strom um 90° **voraus**. Ein anderes Bauteil B hat bei der Frequenz f_0 den doppelten Widerstand $2 \cdot R(\omega_0)$, die Spannung eilt dem Strom um 90° **nach**.

Für Bauteil A gilt: $U^* = I^* \cdot j \cdot R(\omega_0)$ mit dem komplexen Widerstand $j \cdot R(\omega_0)$.

Für Bauteil B gilt: $U^* = -I^* \cdot j \cdot 2 \cdot R(\omega_0)$ (negatives Vorzeichen von j , da die Spannung dem Strom nacheilt) mit dem komplexen Widerstand $-2 \cdot j \cdot R(\omega_0)$.

Beide Bauteile werden jetzt in Reihe geschaltet.

Der komplexe Widerstand der Reihenschaltung beider Bauteile ergibt sich durch Addition der einzelnen Widerstände zu: $j \cdot R(\omega_0) - 2 \cdot j \cdot R(\omega_0) = -j \cdot R(\omega_0)$

Für die Reihenschaltung gilt somit: $U^* = I^* \cdot -j \cdot R(\omega_0)$. Daraus ist ersichtlich: Bei der Reihenschaltung beider Bauteile eilt die Spannung dem Strom um 90° nach.

Liegt an der Reihenschaltung beider Bauteile eine Spannung mit dem Scheitelwert $\hat{U}_q$, so fließt im Stromkreis der Strom $\hat{I}$.

Es gilt: $\hat{U}_q = \hat{I} \cdot |-j \cdot R(\omega_0)|$

Ist z.B. $R(\omega_0) = 4 \Omega$ und $\hat{U}_q = 8 \text{ V}$, so ist $\hat{I} = \frac{\hat{U}_q}{|-j \cdot R(\omega_0)|} = \frac{8 \text{ V}}{4 \Omega} = 2 \text{ A}$

Wie man sieht, kann man für die Rechnung mit Zahlenwerten die imaginäre Einheit j mit ihrem Vorzeichen einfach weglassen, falls die Phasenverschiebung nicht interessiert.

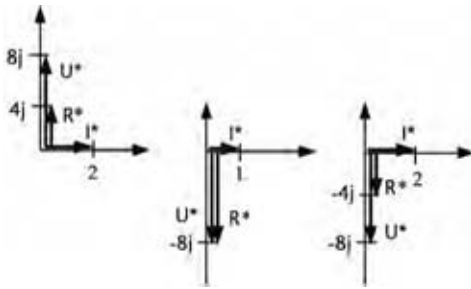


Abb. 169: Zeigerbild für Bauteil A (links), Bauteil B (Mitte) und deren Reihenschaltung (rechts)

Die komplexe Rechnung ist eine Weiterentwicklung des Zeigerdiagramms. Jede Zeigerspitze kann durch eine komplexe Zahl in der Form $Z = R + jX$ dargestellt werden.

Sind zwei Zeiger vorhanden, so sei $Z_1 = R_1 + jX_1$ und $Z_2 = R_2 + jX_2$

Die Summe der beiden komplexen Zahlen $Z = Z_1 + Z_2 = R_1 + jX_1 + R_2 + jX_2 = R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2)$ ergibt die Darstellung der geometrischen Summe der beiden Zeiger.

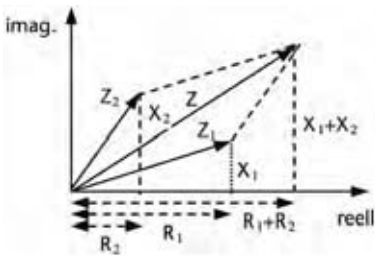


Abb. 170: Addition zweier Zeiger durch Addition komplexer Größen

Um zwei Wechselstromzeiger zusammenzusetzen, hat man also nur die komplexen Größen zu addieren. Das Entsprechende gilt für die Subtraktion.

Für die Darstellung $Z = r \cdot e^{j\varphi}$ einer komplexen Größe gilt $|Z| = r = \sqrt{R^2 + X^2}$ mit $R = \text{Realteil}$, $X = \text{Imaginärteil}$.

$|Z|$ bzw. r ist der Betrag oder die Länge des Zeigers, φ ist der Winkel des Zeigers mit der reellen Achse.

Somit ist $\tan \varphi = \frac{X}{R}$ bzw. $\varphi = \arctan \frac{X}{R}$

Die Multiplikation zweier Zeiger $Z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$ und $Z_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$ ergibt $Z = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Es ergibt sich ein Zeiger, dessen Betrag gleich dem Produkt der beiden Beträge und dessen Winkel mit der reellen Achse gleich der Summe der beiden Winkel ist. Der Zeiger Z_1 wird um den Betrag von Z_2 gestreckt und um den Winkel von Z_2 links herum gedreht.

Aus der Rechnung mit komplexen Größen ist ersichtlich:

Eine Gleichung mit komplexen Größen enthält alle Aussagen des Zeigerdiagramms.

Z.B. sagt die Gleichung $U^* = I^* \cdot jR$ aus (R ist ein Widerstand):

Der Betrag von U^* geht aus dem Betrag von I^* dadurch hervor, daß man den Betrag von I^* mit R multipliziert.

Die Spannung eilt dem Strom um 90° voraus.

Setzt man $Z = jR$, so wird Z als komplexer Widerstand oder **Impedanz** bezeichnet.

Mit den komplexen Wechselstromgrößen kann man genauso rechnen wie bei Gleichstrom. An die Stelle der reellen Größen bei Gleichstrom treten beim Wechselstrom die komplexen Größen. Wie beim Gleichstrom gilt das Ohmsche Gesetz in der Form

Gl. 72: Ohmsches Gesetz mit komplexen Größen

$$U^* = I^* \cdot Z$$

Die Länge eines Zeigers entspricht dem Effektivwert und ergibt sich in der komplexen Darstellung, wenn man den absoluten Betrag der komplexen Zahl bildet.

Es ist $I_{\text{eff}} = |I^*|$ und $U_{\text{eff}} = |U^*|$

10.1.4 Sinusförmige Wechselspannung in komplexer Darstellung

Sinusförmige Wechselgrößen lassen sich durch Zeiger darstellen. Werden Zeiger in die komplexe Ebene eingetragen, so kann man sie durch komplexe Ausdrücke beschreiben. Mit Hilfe der komplexen Rechnung können Verknüpfungen (z.B. eine Addition) dann rechnerisch statt graphisch vorgenommen werden.

Gegeben sei die sinusförmige Wechselspannung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Sie läßt sich durch einen mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Zeiger wiedergeben, der in die komplexe Ebene eingetragen wird. Die Länge des Zeigers entspricht dem Effektivwert U der Spannung. Im Zeitpunkt $t = 0$ schließt der Zeiger mit der positiv reellen Achse den Winkel φ ein. Im Zeitpunkt t hat der Zeiger den Winkel ωt zurückgelegt.

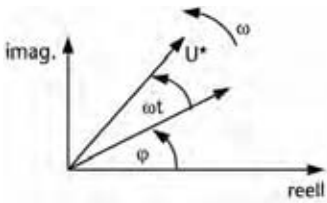


Abb. 171: Ein Spannungszeiger in der komplexen Ebene

Der rotierende Zeiger kann im Zeitpunkt t durch einen komplexen Ausdruck in Exponentialform beschrieben werden.

Gl. 73: Sinusförmige Spannung in komplexer Darstellung

$$U^* = U \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

U^* wird kurz als komplexe Spannung bezeichnet.

In der Komponentenform erhält man $U^* = U \cdot \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot U \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

Vergleicht man diese Form mit $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, so ergibt sich der zeitliche Verlauf der Spannung zu $u(t) = \sqrt{2} \cdot \text{Im}\{U^*\} = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ (Faktor $\sqrt{2}$ siehe Gl. 64)

Der Augenblickswert der Spannung ergibt sich, indem der Imaginärteil des Zeigers U^* mit dem Faktor $\sqrt{2}$ multipliziert wird.

Auf die Verwendung von rotierenden Zeigern kann verzichtet werden, wenn die Augenblickswerte von Wechselgrößen nicht interessieren (dies ist häufig der Fall). Wird für eine Momentaufnahme des rotierenden Zeigerdiagramms der Zeitpunkt $t = 0$ gewählt, so schließt der Zeiger U^* mit der positiven reellen Achse den Winkel φ ein und wird durch $U^* = U \cdot e^{j\varphi}$ dargestellt. Aus dem Drehzeiger ist ein Festzeiger geworden, da der Drehfaktor $e^{j\omega t}$ entfallen ist.

Für die komplexe Darstellung sinusförmiger Wechselströme gilt sinngemäß dasselbe wie für sinusförmige Wechselspannungen.

10.1.5 Der komplexe Widerstand

Als Widerstand (Zweipol) zwischen zwei beliebigen Punkten eines Netzwerkes ergibt sich allgemein ein komplexer Widerstand mit einer reellen und einer imaginären Komponente.

Der komplexe Widerstand wird als $Z = R + jX$ dargestellt. R und X sind reelle Widerstandswerte.

Der komplexe Widerstand $Z = R + jX$ wird auch **Impedanz** genannt. Darin sind:

R = Wirkwiderstand

X = Blindwiderstand oder Reaktanz

In einem Wirkwiderstand wird durch die Elektronenbewegung Wärme erzeugt.

In einem Blindwiderstand wird keine Wärme erzeugt.

Als Scheinwiderstand des Zweipols wird $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ bezeichnet.

Der Kehrwert des komplexen Widerstandes ist der **komplexe Leitwert** oder die **Admittanz** $Y = \frac{1}{Z}$.

Durch Zerlegung von Y in den reellen und imaginären Teil erhält man $Y = G + jB$. Darin sind:

G = Wirkleitwert

B = Blindleitwert

Durch Einsetzen von $Z = R + jX$ in $Y = \frac{1}{Z}$ und umformen erhält man:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

Der Scheinleitwert des Zweipols ist $|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}$

10.2 Zusammenfassung: Komplexe Darstellung von Sinusgrößen

1. Durch die komplexe Rechnung lassen sich Zeigerdiagramme mathematisch beschreiben.
2. Die imaginäre Einheit ist $j = \sqrt{-1}$
3. Eine komplexe Zahl $Z^* = R + jX$ hat einen Realteil R und einen Imaginärteil X .
4. Für komplexe Zahlen gibt es Rechenregeln.
5. Durch die Rechnung mit komplexen Zahlen ist die graphische Darstellung von Zeigern nicht notwendig. Aufwendige Berechnungen im Zeitbereich werden durch einfachere Berechnungen ersetzt.
6. Mit komplexen Wechselstromgrößen kann man genau so rechnen wie bei Gleichstrom.
7. Eine sinusförmige Wechspannung wird im Zeitbereich durch $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ beschrieben, in komplexer Darstellung durch $\mathbf{U}^* = \mathbf{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$.
8. Ein komplexer Widerstand $Z = R + jX$ wird Impedanz genannt. R ist der Wirkwiderstand, X ist der Blindwiderstand (Reaktanz).

9. In einem Wirkwiderstand wird Wärme erzeugt, in einem Blindwiderstand nicht.
10. Der komplexe Leitwert heißt Admittanz.
11. Als Scheinwiderstand wird der Betrag $|\mathbf{Z}| = \sqrt{\mathbf{R}^2 + \mathbf{X}^2}$ des komplexen Widerstandes bezeichnet.

11 Einfache Wechselstromkreise

An eine Wechselspannungsquelle mit sinusförmiger Ausgangsspannung werden verschiedene Anordnungen aus Widerständen, Spulen und Kondensatoren angeschlossen. Die zwischen Strom und Spannung bestehende Abhängigkeit wird ermittelt. Dies erfolgt zunächst sowohl im reellen Zeitbereich, als auch mit Hilfe der komplexen Rechnung, um einen Vergleich der beiden Verfahren zu ermöglichen. Bei der Darstellung im reellen Zeitbereich sind die physikalischen Vorgänge besser vorstellbar. Betrachtet man jedoch nicht nur sehr einfache Schaltungen, so ist das Verfahren gegenüber der komplexen Darstellung sehr aufwendig. Im weiteren Verlauf wird daher nur noch die komplexe Rechnung angewandt.

Bei der Phasenverschiebung, die zwischen Spannung und Strom besteht, wird der Strom als Bezugsgröße gewählt. Das heißt: Eilt die Spannung dem Strom voraus, so ist ϕ positiv, eilt die Spannung dem Strom nach, so ist ϕ negativ.

11.1 Ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis

An eine sinusförmige Wechselspannungsquelle $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$ ist ein ohmscher Widerstand angeschlossen. Für den zeitlichen Verlauf des im Stromkreis fließenden Stromes ergibt sich $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t)$.

Der **Strom** hat also den **gleichen Kurvenverlauf** und die **gleiche Phasenlage wie die Spannung!** Man sagt: Strom und Spannung sind in Phase.

Der Quotient der Scheitelwerte $\frac{\hat{U}}{\hat{I}}$ entspricht dem Widerstandswert R . Es ist: $\frac{u(t)}{i(t)} = R = \text{konstant}$.

D.h. das Ohmsche Gesetz ist auch im Wechselstromkreis gültig. Für den Strom gilt $i(t) = \frac{\hat{U}}{R} \cdot \sin(\omega t)$.

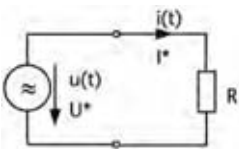


Abb. 172: Ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis. Eingetragen sind sowohl die zeitlichen, als auch die komplexen Größen von Strom und Spannung

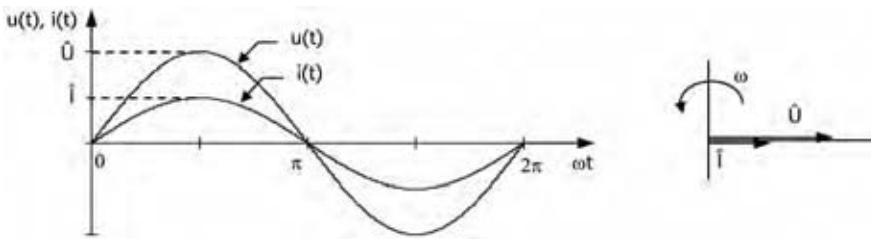


Abb. 173: Ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis. Zeitlicher Verlauf von Spannung und Strom (links) und zugehöriges Zeigerdiagramm (rechts)

Bei $\omega t = \frac{\pi}{2}$ erreicht der Strom seinen Scheitelwert $\hat{I} = \frac{\hat{U}}{R}$. Dividiert man beide Seiten durch $\sqrt{2}$, so erhält man die Beziehung zwischen den Effektivwerten von Spannung und Strom $I = \frac{U}{R}$. Zur Unterscheidung von anderen Widerständen, die noch erläutert werden, wird der Widerstand R als ohmscher Widerstand oder als **Wirkwiderstand** bezeichnet. Der Kehrwert $G = \frac{1}{R}$ heißt **Wirkleitwert**.

Der **Wirkwiderstand** ist **frequenzunabhängig**, d.h. der Wert des ohmschen Widerstandes ist unabhängig von der Frequenz der angeschlossenen Wechselspannungsquelle konstant.

Der Strom in der Schaltung nach Abb. 172 soll nun in komplexer Darstellungsweise ermittelt werden. Die sinusförmige Wechselspannung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$ wird in komplexer Form durch $U^* = U \cdot e^{j\omega t}$ wiedergegeben. Das Ohmsche Gesetz liefert den Strom

$$I^* = \frac{U^*}{R} = \frac{U}{R} e^{j\omega t}.$$

Zwischen den Beträgen und somit zwischen den Effektivwerten von Spannung und Strom besteht die Beziehung $I = \frac{U}{R}$.

(Zur Erinnerung: $|I^*| = I$). Die rotierenden Zeiger von U^* und I^* haben in jedem Zeitpunkt die gleiche Richtung, in beiden Gleichungen für diese Größen ist der gleiche Faktor $e^{j\omega t}$ enthalten. Spannung und Strom sind also in Phase.

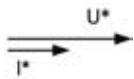


Abb. 174: Ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis. Zeigerdiagramm mit komplexen Zeigern.

Somit liefert die komplexe Rechnung das gleiche Ergebnis wie die Rechnung im Zeitbereich

1. für die Beziehung zwischen den Effektivwerten von Spannung und Strom
2. für die Phase zwischen Spannung und Strom.

Anmerkung: Ein ohmscher Widerstand kann als ein komplexer Widerstand angesehen werden, der nur eine reelle, aber keine imaginäre Komponente hat.

11.2 Spule im Wechselstromkreis

Fließt ein Gleichstrom durch eine Spule, so wirkt als Widerstand nur der rein ohmsche Widerstand des Drahtes. Da dieser im allgemeinen vernachlässigbar klein ist, sind Spulen für Gleichstrom kein Hindernis, Spulen lassen Gleichstrom durch. Ist der ohmsche Widerstand einer Spule im (nur theoretisch möglichen) Idealfall $R = 0 \Omega$, so spricht man von einer **idealen Spule**.

Fließt ein Wechselstrom durch eine Spule, so wird an ihr eine Selbstinduktionsspannung erzeugt, die nach der Lenzschen Regel der anliegenden Wechselspannung entgegengerichtet ist. Die Selbstinduktionsspannung wirkt einer **Stromänderung** durch die Spule entgegen, die Stromstärke kann deshalb ihren Höchstwert nicht erreichen. Je höher die Frequenz ist (je schneller die Wechselstromänderungen erfolgen), desto weniger Zeit hat der Strom, um seinen Maximalwert zu erreichen. Die Selbstinduktionsspannung wird größer, je größer die Induktivität der Spule ist. **Eine Spule läßt Wechselstrom schlechter durch, je höher die Frequenz des Wechselstromes und je größer die Induktivität der Spule ist.**

Die Höhe der Selbstinduktionsspannung ist proportional zur Größe der Stromänderung. Bei einem sinusförmigen Strom durch die Spule ist die Stromänderung beim Maximum der Sinuskurve am kleinsten (Null) und bei den Nulldurchgängen der Sinuskurve am größten.

Bei einer idealen Spule eilt der Strom der Spannung um $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ (1/4 Periode) nach.

Da die Selbstinduktionsspannung den Strom durch die Spule verkleinert, ist ihre Wirkung wie die eines Widerstandes im Stromkreis. Dieser durch die Induktion hervorgerufene Widerstand wird **induktiver Widerstand** X_L genannt. Je größer die Frequenz wird und je größer die Induktivität der Spule ist, desto größer ist X_L .

Gl. 74: Induktiver Widerstand einer Spule

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$$

X_L in Ohm

f in Hertz

L in Henry

In einem stromdurchflossenen ohmschen Widerstand entsteht durch »Elektronenreibung« stets Wärme, er ist ein Wirkwiderstand. Der induktive Widerstand X_L ist nur scheinbar durch eine Behinderung des Stromanstiegs vorhanden, in ihm kann keine Wärme entstehen. Man spricht deshalb von einem **Blindwiderstand**.

Dieser allgemeinen Betrachtung einer idealen Spule im Wechselstromkreis soll nun eine analytische Untersuchung im Zeitbereich folgen.

Für die Augenblickswerte von Spannung und Strom einer Spule gilt $u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ oder $\frac{di(t)}{dt} = \frac{u(t)}{L}$.

Mit $u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega t$ folgt $\frac{di(t)}{dt} = \frac{\hat{U}}{L} \cdot \sin \omega t$.

Durch Integration ergibt sich $i(t) = \frac{\hat{U}}{L} \int \sin \omega t \, dt = -\frac{\hat{U}}{L \cdot \omega} \cos \omega t + C$.

Die Integrationskonstante C würde die additive Überlagerung eines Gleichstromes bedeuten. Dies ist nicht der Fall, die speisende Spannung ist eine reine Sinusspannung ohne Offset. Deshalb ist die Konstante C gleich Null.

Somit folgt: $i(t) = -\frac{\hat{U}}{L \cdot \omega} \cos \omega t$.

Der Strom eilt der Spannung um 90° nach. Der Scheitelwert des Stromes ergibt sich für $t = 0$ als

$$\hat{I} = -\frac{\hat{U}}{L \cdot \omega}.$$

Werden beide Seiten durch $\sqrt{2}$ dividiert, so erhält man die Beziehung zwischen den Effektivwerten von Spannung und Strom $I = \frac{U}{\omega \cdot L}$.

Der Ausdruck $X_L = \omega \cdot L$ entspricht formal dem eines Widerstandes im Ohmschen Gesetz und wird als induktiver Blindwiderstand bezeichnet. Als Einheit wird ebenso wie beim Wirkwiderstand Ohm (Ω) verwendet.

In komplexer Form gilt für die Beziehung zwischen Spannung und Strom einer Spule $U^* = L \cdot \frac{dI^*}{dt}$

Mit dem sinusförmigen Strom durch die Spule $I^* = I \cdot e^{j\omega t}$ ergibt sich durch differenzieren $U^* = j\omega L I \cdot e^{j\omega t} = j\omega L \cdot I^*$. Die komplexe Spannung eilt also dem komplexen Strom um 90° voraus, zwischen den Beträgen (Effektivwerten) von Spannung und Strom besteht die Beziehung $I = \frac{U}{\omega \cdot L}$.

$j \cdot X_L = j\omega L$ ist der komplexe Blindwiderstand der Spule.

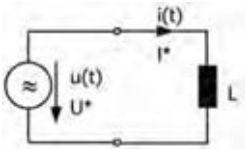


Abb. 175: Ideale Spule im Wechselstromkreis

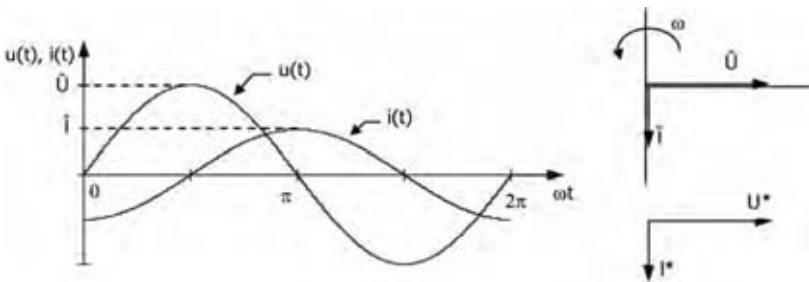


Abb. 176: Ideale Spule im Wechselstromkreis. Zeitlicher Verlauf von Spannung und Strom (links) und zugehörige Zeigerdiagramme (rechts)

Aufgabe 42:

Wie groß ist der induktive Blindwiderstand einer idealen Spule mit $L = 2 \text{ mH}$ bei der Frequenz $f = 2 \text{ MHz}$?

Lösung: $X_L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ Hz} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ H} = 25132 \Omega$

Aufgabe 43:

Wie groß ist die Induktivität einer idealen Spule, die bei der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$ einen induktiven Widerstand von 6Ω aufweist?

Lösung:

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{6 \Omega}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \text{ Hz}} = 19 \text{ mH}$$

Aufgabe 44:

Zwei ideale Spulen mit der Induktivität $L_1 = 100 \text{ mH}$ und $L_2 = 75 \text{ mH}$ sind in Reihe geschaltet. Wie groß ist der Wechselstromwiderstand dieser Schaltung bei der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$?

$$\text{Lösung: } X_L = X_{L1} + X_{L2} = 2\pi f(L_1 + L_2) = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 0,175 \text{ H} = 55 \Omega$$

Aufgabe 45:

Eine ideale Spule mit der Induktivität $L = 10 \text{ mH}$ liegt an einer sinusförmigen Spannung der Frequenz $f = 1 \text{ kHz}$. Der im Stromkreis fließende Strom hat den Effektivwert $I = 100 \text{ mA}$. Wie groß ist der Effektivwert der anliegenden Spannung?

Lösung:

$$U = \omega L \cdot I = 2\pi \cdot 10^{-2} \text{ H} \cdot 10^3 \text{ Hz} \cdot 0,1 \text{ A} = 6,3 \text{ V}$$

11.3 Kondensator im Wechselstromkreis

Im Folgenden wird eine idealer Kondensator angenommen, d.h. ein Kondensator mit unendlich großem Isolationswiderstand (Widerstand zwischen den Elektroden des Kondensators) und vernachlässigbar kleinem Serienwiderstand (Widerstand der Zuleitungen und Kontaktierungen).

Wird an einen Kondensator eine Gleichspannung gelegt, so fließt nach dem Aufladevorgang kein Strom. Der Kondensator hat für Gleichstrom einen unendlich großen Widerstand.

Liegt an einem Kondensator Wechselspannung an, so findet an den Kondensatorelektroden ständig eine Polaritätsänderung statt. Es erfolgt fortwährend eine Umladung des Kondensators. Der Elektronenüberschuß entsteht abwechselnd auf der einen und auf der anderen Elektrode. Als Folge dieser Umladungen ergibt sich in den Anschlußleitungen des Kondensators ein Strom, der immer seine Richtung wechselt, wobei die Elektronen über die Anschlußleitungen zwischen beiden Elektroden hin- und herfließen. **Im Stromkreis fließt also ein Wechselstrom, der Kondensator läßt Wechselstrom (scheinbar) hindurch.** Scheinbar deshalb, weil keine Elektronen durch das Dielektrikum des Kondensators direkt von Elektrode zu Elektrode fließen. Der in den Zuleitungen auftretende Wechselstrom beruht auf der wechselnden Verschiebung der Elektronen von Elektrode zu Elektrode.

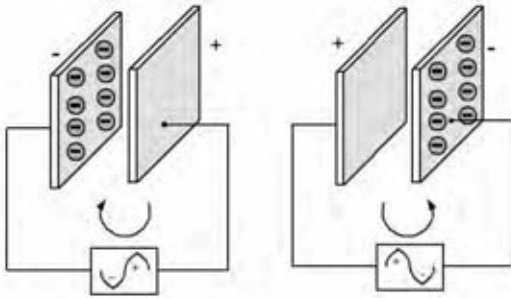


Abb. 177: Schematische Darstellung des Elektronenflusses bei einem Kondensator an Wechselspannung. Entsprechend der Polarität der Wechselspannung entsteht fortwährend eine Umpolung der Kondensatorelektroden mit wechselnder Elektronenbesetzung.

Der Wechselstrom durch die Umladevorgänge des Kondensators wird größer, je größer die Kapazität des Kondensators ist und je mehr Elektronen pro Zeiteinheit hin- und herfließen, d.h. je höher die Frequenz der Wechselspannung ist. Der Widerstand eines Kondensators ist somit umgekehrt proportional zu seiner Kapazität und zur Frequenz der Wechselspannung.

Ein Kondensator läßt Wechselstrom besser durch, je höher die Frequenz des Wechselstromes und je größer die Kapazität des Kondensators ist.

Gl. 75: Kapazitiver Widerstand eines Kondensators

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

X_C in Ohm
 f in Hertz
 C in Farad

Da der kapazitive Widerstand nur ein scheinbarer Widerstand ist, erzeugt der durch ihn fließende Strom keine Wärme. Der kapazitive Widerstand X_C eines Kondensators ist ein **Blindwiderstand** (wie der induktive Widerstand X_L einer Spule).

Wird ein Kondensator mit Gleichspannung geladen, so ist der Ladestrom am Anfang am größten, während die Spannung am Kondensator am kleinsten ist. Nach einer Exponentialkurve nimmt der Ladestrom dann ab und die Spannung am Kondensator zu. Dies gilt prinzipiell auch für die Umladungen durch Wechselspannung mit dem Unterschied, daß die Lade- und Entladevorgänge ständig im Rhythmus der wechselnden Polaritäten der Kondensatorelektroden ablaufen. Zuerst muß ein Strom fließen, bevor am Kondensator eine Spannung liegt. Bei einer sinusförmigen Spannung am Kondensator ist bei den Nulldurchgängen der Sinuskurve der Strom am größten. Da der Strom dem sinusförmigen Verlauf der Spannung folgt, erhält man für den Strom eine um 90° nach links verschobene Sinuskurve und damit eine Cosinuskurve.

Bei einem idealen Kondensator eilt der Strom der Spannung um $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ (1/4 Periode) voraus.

Dieser allgemeinen Betrachtung eines idealen Kondensators im Wechselstromkreis soll nun eine analytische Untersuchung im Zeitbereich und anschließend in komplexer Form folgen. ^(M)

Für die Ladung eines Kondensators mit Gleichstrom gilt im eingeschwungenen Zustand: $Q = C \cdot U$. Bei Wechselspannung besteht für die Augenblickswerte von Ladung und Spannung die Beziehung $q(t) = C \cdot u(t)$. Wird die Spannung um Δu erhöht, so erhöht sich auch die im Kondensator gespeicherte Ladung um Δq . Daraus folgt $\Delta q = C \cdot \Delta u$ oder durch Übergang zu infinitesimalen (sehr kleinen) Größen $dq = C \cdot du$. Diese Ladungsänderung kann auch durch $dq = i \cdot dt$ dargestellt werden (allgemein gilt: $Q = I \cdot t$).

Werden jetzt $dq = C \cdot du$ und $dq = i \cdot dt$ gleichgesetzt und nach i aufgelöst, so erhält man $i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$.

Dies ist die Beziehung zwischen den Augenblickswerten von Strom und Spannung am Kondensator.

Mit $u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega t$ der Spannungsquelle folgt: $i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} = C \cdot \frac{d(\hat{U} \cdot \sin \omega t)}{dt} = \omega C \hat{U} \cdot \cos \omega t$

Die Kurvenform des Stromes stimmt also mit derjenigen der Spannung überein, jedoch eilt der Strom der Spannung um 90° vor. Geht man bei der Angabe des Phasenwinkels (wie üblich) vom Strom aus, so beträgt die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom $\varphi = -90^\circ$, d.h. die Spannung ist gegenüber dem Strom um 90° nacheilend phasenverschoben.

Für $t = 0$ ergibt sich aus $i(t) = \omega C \hat{U} \cdot \cos \omega t$ der Scheitelwert des Stromes zu $\hat{I} = \omega C \hat{U}$.

Werden beide Seiten durch $\sqrt{2}$ dividiert, so erhält man die Beziehung zwischen den Effektivwerten von Spannung und Strom $I = \omega C U$.

Der Ausdruck $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$ entspricht formal dem eines Widerstandes im Ohmschen Gesetz und wird als kapazitiver Blindwiderstand oder kurz kapazitiver Widerstand bezeichnet. Als Einheit wird ebenso wie beim Wirkwiderstand Ohm (Ω) verwendet.

Der kapazitive Widerstand ist ebenso wie der induktive Widerstand frequenzabhängig. Der induktive Widerstand wird jedoch mit wachsender Frequenz größer, der kapazitive Widerstand dagegen kleiner.

In komplexer Darstellung gilt für die Beziehung zwischen Strom und Spannung eines Kondensators $I^* = C \cdot \frac{dU^*}{dt}$.

Mit der sinusförmigen Spannung am Kondensator $U^* = U \cdot e^{j\omega t}$ folgt durch differenzieren $I^* = j\omega C U \cdot e^{j\omega t}$ oder $I^* = j\omega C \cdot U^*$.

Dieses Ergebnis bedeutet, daß zwischen den Effektivwerten von Spannung und Strom die Beziehung $I = \omega C U$ besteht, und der Strom um 90° der Spannung vorauseilt.

$-jX_C = \frac{1}{j\omega C}$ ist der komplexe Blindwiderstand des Kondensators.

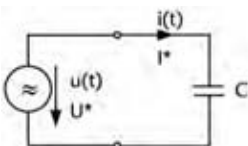


Abb. 178: Idealer Kondensator im Wechselstromkreis

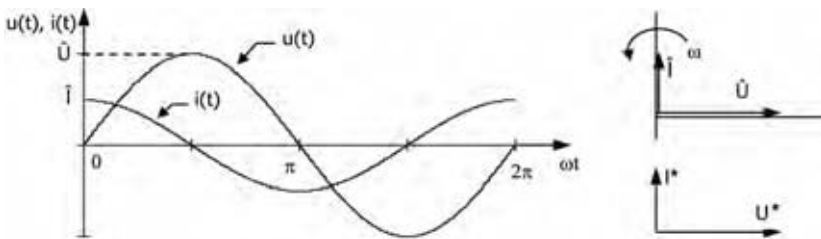


Abb. 179: Idealer Kondensator im Wechselstromkreis. Zeitlicher Verlauf von Spannung und Strom (links) und zugehörige Zeigerdiagramme (rechts)

Aufgabe 46:

Welchen Wechselstromwiderstand (kapazitiven Blindwiderstand) hat ein Kondensator mit der Kapazität $C = 1 \mu\text{F}$ bei der Frequenz $f = 1 \text{ kHz}$? Wie hoch ist der Effektivwert des Stromes, wenn an den Kondensator die Spannung $u(t) = 10 \text{ V} \cdot \sin(\omega t)$ mit der Frequenz $f = 1 \text{ kHz}$ angelegt wird?

Lösung:

Der kapazitive Blindwiderstand ist $X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{6,28 \cdot 10^3 \text{ Hz} \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 159,2 \Omega$

Der Effektivwert der Sinusspannung ist $U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = \frac{10 \text{ V}}{1,41} = 7,1 \text{ V}$

Der Effektivwert des Stromes ergibt sich zu $I = \omega C U = 2\pi f C U = 6,28 \cdot 10^3 \text{ Hz} \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 7,1 \text{ V} = 45 \text{ mA}$

11.4 Reihenschaltung aus ohmschem Widerstand und Spule

11.4.1 Komplexe Frequenz »s«

In den letzten beiden Abschnitten wurde deutlich, daß die Berechnung von Wechselstromkreisen im reellen Zeitbereich wesentlich aufwendiger ist (und z. B. Kenntnisse der Differential- und Integralrechnung erfordert) als die komplexe Darstellung.

Ab hier wird wegen der einfacheren Darstellung nur noch die komplexe Rechnung angewandt.

Falls es sich eindeutig um komplexe Größen handelt, werden diese nicht mehr extra (mit einem »*«) gekennzeichnet!

Für eine abgekürzte Schreibweise von $j\omega$ wird jetzt der Parameter »s« eingeführt.

Gl. 76: Komplexer Frequenzparameter »s« (komplexe Frequenz)

$$s = j \cdot \omega$$

Der Parameter s ist eine unabhängige Variable im Frequenzbereich und wird kurz als **komplexe Frequenz** bezeichnet. Die von s abhängigen Variablen sind **komplexe Amplituden** (Funktionen von s).

Beispiele für die Anwendung:

Für eine ideale Spule im Wechselstromkreis gilt: $U^* = j\omega L \cdot I^*$ oder ohne spezielle Kennzeichnung der komplexen Größen $U = j\omega L \cdot I$. Mit $s = j\omega$ erhält man: $U = sL \cdot I$ oder $U(s) = Z_L(s) \cdot I$.

Hierin ist $Z_L(s) = sL = j\omega L$ der komplexe Blindwiderstand der Spule und $U = U(s)$ die komplexe Amplitude der Spannung an der Induktivität. Sowohl $Z_L(s)$ als auch $U(s)$ sind Funktionen von s und damit abhängig von der Frequenz. Dies stimmt damit überein, daß auch im reellen Zeitbereich der Widerstand der Spule und die Spannung an der Spule von der Frequenz der angelegten Quellspannung abhängig sind.

Aus der Kurzschreibweise $U = Z_L \cdot I$ erkennt man das Ohmsche Gesetz. Der (komplexe) Widerstand einer (idealen) Spule ist: $Z_L = sL$. Er wird größer, je größer die Frequenz wird.

Für einen idealen Kondensator gilt entsprechend: $U^* = \frac{1}{j\omega C} \cdot I^*$ oder $U = \frac{1}{sC} \cdot I$ oder $U = Z_C \cdot I$

Hierin ist $Z_C = \frac{1}{sC}$ der komplexe Blindwiderstand des Kondensators. Er wird kleiner, je größer die Frequenz wird.

Für die komplexen Widerstände von Spule und Kondensator gilt:

Gl. 77: Widerstand der Spule

$$Z_L = sL$$

Gl. 78: Widerstand des Kondensators

$$Z_C = \frac{1}{sC}$$

Der Vorteil, s anstatt $j\omega$ zu benutzen, wird bei der Berechnung von Netzwerken mit mehreren Kondensatoren und Spulen deutlich. Man sollte sich bereits hier an diese Schreibweise gewöhnen.

11.4.2 Anwendung von s bei der RL-Reihenschaltung

An eine Wechselspannungsquelle sei eine Reihenschaltung aus einer idealen Spule und einem ohmschen Widerstand angeschlossen.

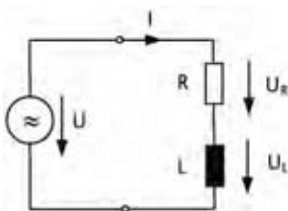


Abb. 180: Wechselstromkreis mit Induktivität und Reihewiderstand

Der (komplexe Blind-) Widerstand der Spule ist $Z_L = sL$. Der (komplexe Schein-) Widerstand der Reihenschaltung von R und L ist $Z = R + Z_L = R + sL$.

Damit ist nach dem Ohmschen Gesetz $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R + sL}$ oder $U = (R + sL) \cdot I$

Die Spannungen U_R und U_L ergeben sich zu $U_R = R \cdot I$ und $U_L = sL \cdot I$. Aus $U = U_R + U_L$ erhält man durch Einsetzen wieder $U = R \cdot I + sL \cdot I = (R + sL) \cdot I$.

Der **komplexe** Scheinwiderstand (Impedanz) der Reihenschaltung von R und L ist $Z = R + sL$.

Z wird kurz als komplexer Widerstand oder nur als Widerstand bezeichnet (es ist klar, daß Z komplex ist).

Der **Scheinwiderstand** (Gesamtwiderstand) der Reihenschaltung von R und L ist $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.

(Der Betrag einer komplexen Zahl Z , also die Länge des Zeigers, ist $\sqrt{\operatorname{Re}\{Z\}^2 + \operatorname{Im}\{Z\}^2}$.)

Man beachte: Der Scheinwiderstand ist der Absolutwert des komplexen Scheinwiderstandes.

Der Scheinwiderstand hat die Einheit Ohm. Er ist derjenige Widerstand, mit welchem ein Zweipol als Zusammenschaltung von Wirk- und Blindwiderständen bei einer bestimmten Frequenz wirkt.

Der Wert des Scheinwiderstandes ergibt sich durch geometrische (vektorielle) Addition von Wirkwiderstand und Blindwiderstand, und **nicht** durch einfache (arithmetische) Addition der Einzelwiderstände.

Für die weitere Betrachtung sollen nun die Größen I , U , U_R und U_L in einem komplexen Zeigerdiagramm dargestellt werden. In der komplexen Ebene wird die reelle Achse mit dem Strom I bezeichnet. Dies bietet sich an, da es im Stromkreis nur einen Strom I gibt. Die reelle Achse bildet die Bezugsachse. Die Teilspannung $U_R = R \cdot I$ am Wirkwiderstand ist mit dem Strom I in Phase und wird daher auf der reellen Achse in positiver Richtung (gleiche Richtung wie der Strom) eingetragen. Die Teilspannung $U_L = sL \cdot I = j\omega L \cdot I$ eilt dem Strom I um 90° voraus (+j bedeutet Vorseilung um 90°).

U_L wird daher senkrecht nach oben eingetragen, beginnend an der Spitze von U_R , da sich beide Teilspannungen zur Gesamtspannung U addieren. Die Gesamtspannung $U = Z \cdot I$ ergibt sich als geometrische Summe der Teilspannungen U_R und U_L und bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Der Winkel φ zwischen der Stromachse und der Gesamtspannung U ist der Phasenwinkel, um den die Spannung U gegenüber dem Strom I vorseilt.

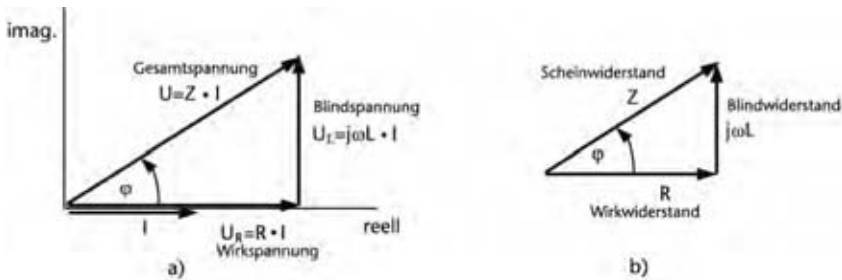


Abb. 181: Zeigerdiagramm des Stromes und der Spannungen (a) und Widerstands-dreieck (b) bei der Reihenschaltung von Wirkwiderstand und Spule

Man beachte, daß sich die Spannungen geometrisch addieren. Es gilt: $U^2 = U_R^2 + U_L^2$

Teilt man im Zeigerdiagramm a) alle Spannungen durch den Strom I , so erhält man das in b) dargestellte **Widerstands-dreieck**. Spannungsdreieck und Widerstands-dreieck sind sich ähnlich, ihre Winkel stimmen überein.

Aus dem Widerstands-dreieck sieht man, daß nach Pythagoras gilt: $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$

Somit folgt für die Effektivwerte von Strom und Spannung: $U = |Z| \cdot I = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot I$

(U ist hier die Länge des komplexen Zeigers der Gesamtspannung U im Spannungsdreieck)

Für die Scheitelwerte von Strom und Spannung gilt entsprechend: $\hat{U} = |Z| \cdot \hat{I}$

Aus Abb. 181 kann man ablesen: $\tan \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{U_L}{U_R}$ $\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$

Mit der Formel für φ läßt sich aus den Zahlenwerten der Frequenz, der Induktivität und des ohmschen Widerstandes der Phasenwinkel zwischen Strom I und Gesamtspannung U berechnen.

Damit ist bei sinusförmiger Spannungsquelle durch den Phasenwinkel und die Scheitelwerte von Strom und Spannung auch der zeitliche Verlauf von Strom und Spannung bekannt.

Ist die Spannungsquelle z.B. $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$, so ergibt sich der Strom zu $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ mit

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{|Z|} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan \frac{\omega L}{R} \quad (\text{f, L und R sind bestimmte, konstante Werte}).$$

In der Praxis ist eine Reihenschaltung aus Wirkwiderstand und idealer Spule bei der Beschreibung der Ersatzschaltung einer realen Spule, sowie beim RL-Tiefpaß und RL-Hochpaß von Bedeutung.

Aufgabe 47:

Eine ideale Spule mit der Induktivität $L = 100 \text{ mH}$ ist mit einem ohmschen Widerstand $R = 100 \Omega$ in Reihe geschaltet. Die Schaltung wird aus der Netzwechselspannung mit $U = 220 \text{ V}$, 50 Hz gespeist.

- Wie groß ist der Effektivwert und der Scheitelwert des Stromes in der Schaltung?
- Um welchen Phasenwinkel ist der Strom gegenüber der Spannung verschoben?

- c) Welche Teilspannungen U_R und U_L treten am Widerstand R und an der Induktivität L auf?
- d) Skizzieren Sie das Zeigerdiagramm für I , U , U_R und U_L .
- e) Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf von Gesamtspannung und Strom für eine Periodendauer des Stromes. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Nulldurchgang des Stromes.
- f) Die Funktion $\varphi(f)$ wird **Frequenzgang** von φ genannt. Skizzieren Sie die Funktion im Bereich $f = 0$ bis $f = 2000$ Hz. Erstellen Sie hierzu eine Wertetabelle in Schritten von $\Delta f = 250$ Hz. Erläutern Sie den Verlauf der Funktion $\varphi(f)$.
- g) Skizzieren Sie den Frequenzgang $|Z(f)|$ des Scheinwiderstandes im Bereich $f = 0$ bis $f = 1000$ Hz. Tragen Sie in die Zeichnung die Konstante des Widerstandes R ein und die Gerade $y = \omega \cdot L$. Erläutern Sie den Verlauf der Funktion $|Z(f)|$.

Lösung:

- a) Der komplexe Scheinwiderstand (die Impedanz) der Reihenschaltung ist $Z = R + sL$.

$$\text{Der Scheinwiderstand ist } |Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{100^2 + (2\pi 50 \cdot 0,1)^2} = \sqrt{10^4 + 31,4^2} = 105 \, \Omega$$

Bei der Frequenz $f = 50$ Hz und den gegebenen Bauteilwerten ist im Stromkreis ein Widerstand von $105 \, \Omega$ wirksam.

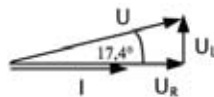
$$\text{Der Effektivwert des Stromes ist } I = \frac{U}{|Z|} = \frac{220 \, \text{V}}{105 \, \Omega} \quad I = 2,1 \, \text{A} \Rightarrow \hat{I} = 2,1 \, \text{A} \cdot \sqrt{2} \quad \hat{I} = 3 \, \text{A}$$

$$\text{b) } \varphi = \arctan \frac{\omega L}{R} \quad \varphi = \arctan \frac{31,4 \, \Omega}{100 \, \Omega} \quad \varphi = 17,4^\circ \quad \text{Der Strom eilt der Spannung um } 17,4^\circ \text{ nach.}$$

$$\text{c) } U_R = R \cdot I = 100 \, \Omega \cdot 2,1 \, \text{A} \quad U_R = 210 \, \text{V} \quad U_L = \omega L \cdot I = 31,4 \, \Omega \cdot 2,1 \, \text{A} \quad U_L = 66 \, \text{V}$$

$$\text{Probe: Die Gesamtspannung } U \text{ ergibt sich zu } U = \sqrt{(210 \, \text{V})^2 + (66 \, \text{V})^2} = 220 \, \text{V}$$

- d) Zeigerdiagramm (Skizze)



- e) Zeitlicher Verlauf von Gesamtspannung und Strom

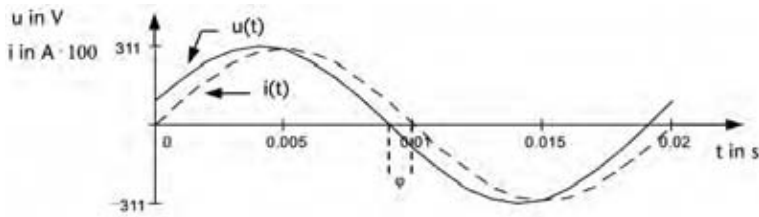
$$\text{Periodendauer des Stromes: } T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50 \, \text{s}^{-1}} = 20 \, \text{ms}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll der Strom Null sein. Der Strom wird deshalb ohne Nullphasenwinkel angesetzt: $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t) = 3 \, \text{A} \cdot \sin(314t)$

Die Spannung eilt dem Strom voraus. Die Spannungskurve hat einen positiven Phasenwinkel und wird auf der Zeitachse gegenüber der Stromkurve nach links verschoben sein.

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = 220 \, \text{V} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314t + \varphi) = 311 \, \text{V} \cdot \sin(314t + 17,4^\circ)$$

Der Strom erreicht als Zahlenwert gesehen einen viel kleineren Scheitelwert als die Spannung und wird mit dem Faktor 100 skaliert (multipliziert), damit er in das gleiche Achsenkreuz eingetragen werden kann.

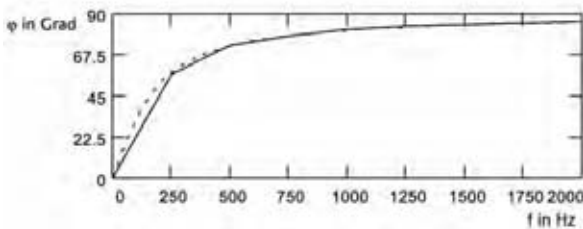


f) Frequenzgang von φ

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\pi L}{R} \cdot f\right) \quad \text{Mit der Konstanten } c = \frac{2\pi L}{R} = 6,28 \cdot 10^{-3} \quad \text{folgt } \varphi = \arctan(c \cdot f)$$

Wertetabelle:

f in Hz	0	250	500	750	1000	1250	1500	1750	2000
φ in Grad	0	57,5	72,3	78	81	82,7	83,9	84,8	85,5



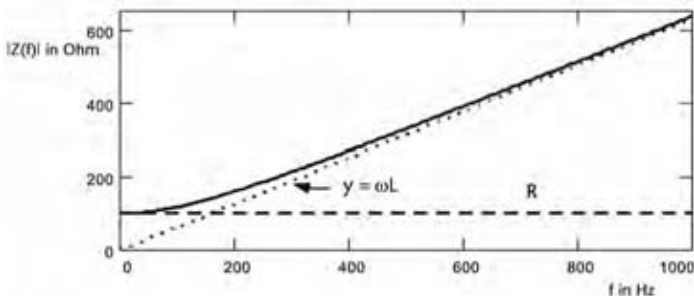
Die punktierte Linie stellt den genauen Verlauf der Kurve dar (Schrittweite von $f=5$ Hz statt 250 Hz).

Erläuterung der Kurve: Bei $f = 0$ bewirkt die Induktivität keine Phasenverschiebung. Je größer die Frequenz wird, desto mehr nähert sich die Kurve der maximalen Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom von 90° .

g) Frequenzgang von $|Z(f)|$

$$|Z(f)| = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 L^2 f^2}$$

Die Funktion kann mittels einer Wertetabelle oder z.B. mit Mathcad gezeichnet werden.



Für $f = 0$ ist im Stromkreis nur der ohmsche Widerstand $R = 100 \, \Omega$ wirksam. Je größer die Frequenz der speisenden Spannungsquelle wird, desto mehr nähert sich der wirksame Widerstand im Stromkreis dem Blindwiderstand ωL der Spule. Wird die Frequenz unendlich groß, so wird auch der wirksame Widerstand unendlich groß.

11.5 Reihenschaltung aus ohmschem Widerstand und Kondensator

An eine Wechselspannungsquelle sei eine Reihenschaltung aus einem idealen Kondensator und einem ohmschen Widerstand angeschlossen.

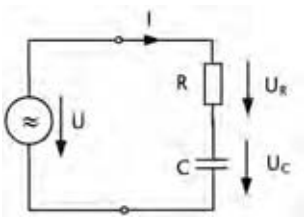


Abb. 182: Wechselstromkreis mit Kondensator und Reihewiderstand

Der (komplexe Blind-) Widerstand des Kondensators ist $Z_C = \frac{1}{sC}$.

Der (komplexe Schein-) Widerstand der Reihenschaltung von R und C ist:

$$Z = R + Z_C = R + \frac{1}{sC} = R + \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{j}{j} = R - j \frac{1}{\omega C}. \text{ Der Betrag des Widerstandes ist } |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Damit gilt nach dem Ohmschen Gesetz für den Betrag (Effektivwert) des Stromes:

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Für die Scheitelwerte gilt entsprechend: $\hat{I} = \frac{\hat{U}}{|Z|}$

Für die Teilspannungen U_R und U_C gilt: $U_R = R \cdot I$ und $U_C = \frac{1}{sC} \cdot I = \frac{1}{j\omega C} \cdot I = -j \frac{1}{\omega C} \cdot I$

Nun wird das komplexe Zeigerdiagramm konstruiert. Der Strom I wird als Bezugsgröße gewählt und waagrecht angetragen. Die Teilspannung U_R ist mit I in Phase. Bei der Teilspannung U_C steht j im Nenner (bzw. $-j$ im Zähler), sie eilt dem Strom um 90° nach und wird senkrecht nach unten aufgetragen. Der Pfeil von U_C beginnt an der Spitze des Pfeiles von U_R , da sich beide Spannungen zur Gesamtspannung U addieren. Aus der geometrischen Addition von U_R und U_C ergibt sich die Gesamtspannung U . Werden alle Spannungen durch den Strom I geteilt, so erhält man das Widerstandsdreieck. *Anmerkung:* Das Achsenkreuz in der komplexen Ebene wurde weggelassen.

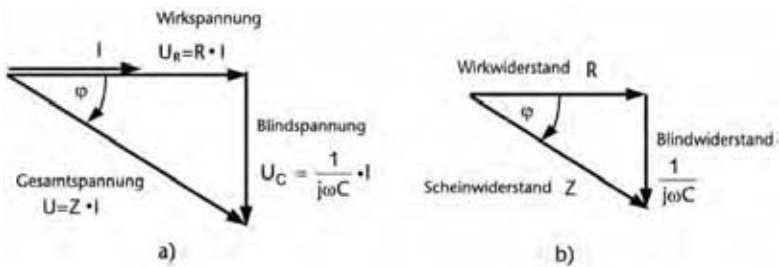


Abb. 183: Zeigerdiagramm des Stromes und der Spannungen (a) und Widerstandsdiagramm (b) bei der Reihenschaltung von Wirkwiderstand und Kondensator

Aus dem Spannungsdiagramm ist ersichtlich, daß die Spannung U_C negativ wird.

Die Spannung am Kondensator ist der Spannung am Wirkwiderstand entgegengerichtet.

Da sich die Spannungen im rechtwinkligen Dreieck geometrisch addieren, ist: $U^2 = U_R^2 + U_C^2$

Für den Phasenwinkel zwischen Gesamtspannung und Strom gilt:

$$\varphi = \arctan \frac{U_C}{U_R} ; \text{ Mit negativer Spannung } U_C \text{ und } \arctan(-x) =$$

$$- \arctan(x) \text{ folgt: } \boxed{\varphi = - \arctan \frac{1}{\omega RC}}$$

Das negative Vorzeichen von φ bedeutet, daß die Spannung dem Strom nacheilt.

Aufgabe 48:

Eine Glühlampe mit den Nenndaten 220 V, 60 W soll über Reihe mit einem Kondensator geschaltet an einer Spannung von 380 V, 50 Hz betrieben werden. Wie groß muß die Kapazität des Kondensators sein, damit an der Glühlampe 220 V liegen?

Lösung:

Die Glühlampe entspricht einem ohmschen Widerstand. Die Anordnung bildet eine Reihenschaltung aus ohmschen Widerstand und Kondensator. Aus den Daten der Glühlampe erhält man deren ohmschen Widerstand

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{(220 \text{ V})^2}{60 \text{ W}} = 806 \Omega \text{ und deren Nennstrom } I = \frac{P}{U} = \frac{60 \text{ W}}{220 \text{ V}} = 0,27 \text{ A} .$$

$$\text{Der Widerstand der Reihenschaltung ist: } Z = R + \frac{1}{sC}$$

$$\text{Der Betrag dieses Widerstandes für } s = j\omega \text{ ist } |Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

$$\text{Die Gleichung wird nach } C \text{ aufgelöst. Quadrieren beider Seiten ergibt: } |Z|^2 = R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}$$

$$\omega^2 C^2 = \frac{1}{|Z|^2 - R^2} ; C = \frac{1}{\omega \cdot \sqrt{|Z|^2 - R^2}}$$

Damit im Stromkreis der Strom $I = 0,27 \text{ A}$ fließt, muß nach dem Ohmschen Gesetz gelten:

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{380 \text{ V}}{0,27 \text{ A}} = 1407 \Omega. \text{ Somit ist } C = \frac{1}{2\pi 50 \text{ s}^{-1} \sqrt{(1407 \Omega)^2 - (806 \Omega)^2}} \quad C = 2,8 \mu\text{F}$$

Alternative Lösung:

Für die Spannungen gilt $U^2 = U_R^2 + U_C^2$

Am Kondensator muß die Spannung $U_C = \sqrt{U^2 - U_R^2} = \sqrt{380^2 - 220^2} \text{ V} = 310 \text{ V}$ abfallen.

Aus $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ folgt $|Z_C| = \frac{1}{\omega C}$. Nach dem Ohmschen Gesetz ist $|Z_C| = \frac{U_C}{I_C}$.

Durch die Glühlampe fließt der Strom $I = \frac{P}{U} = \frac{60 \text{ W}}{220 \text{ V}} = 0,27 \text{ A}$. Dieser Strom fließt auch durch

den Kondensator, $I_C = 0,27 \text{ A}$. Aus $\frac{1}{\omega C} = \frac{U_C}{I_C}$ folgt $C = \frac{I_C}{\omega \cdot U_C} = \frac{0,27 \text{ A}}{2\pi 50 \frac{1}{\text{s}} \cdot 310 \text{ V}} \quad C = 2,8 \mu\text{F}$

11.6 RC-Reihenschaltung in der Praxis

Ehe auf die praktische Anwendung von RC- bzw. RL-Reihenschaltungen eingegangen wird, sollen noch einige wichtige Definitionen besprochen werden, die es erleichtern, die Eigenschaften dieser Reihenschaltungen zu analysieren und sie graphisch darzustellen.

11.6.1 Die Übertragungsfunktion

Vorbemerkung: Hier werden nur die grundlegenden Eigenschaften der Übertragungsfunktion behandelt. Der Begriff der Übertragungsfunktion spielt eine zentrale Rolle in der Analyse und Theorie von Netzwerken.

Ein Vierpol ist eine Schaltung mit zwei Eingangsklemmen und zwei Ausgangsklemmen. Die Übertragung eines Eingangssignals zum Ausgang wird durch die Übertragungsfunktion beschrieben.

Die Übertragungsfunktion (auch **Systemfunktion** oder komplexer Frequenzgang genannt) gestattet die Berechnung des Ausgangssignals als Funktion des Eingangssignals. Sie stellt einen mathematischen Ausdruck dar, in dem Art und Größe der Bauelemente und ihre Zusammenschaltung im Vierpol berücksichtigt sind. Die Übertragungsfunktion ist eine Funktion der komplexen Frequenz s .

Die Übertragungsfunktion soll hier allgemein als $H(s)$ bezeichnet werden.

Ist das Eingangssignal U_E und das Ausgangssignal U_A , so ist $H(s)$ definiert als

Gl. 79: Definition der Übertragungsfunktion

$H(s) = \frac{U_A}{U_E} = \frac{\text{Wirkung}}{\text{Ursache}}$
--

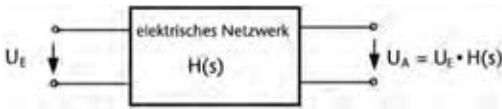


Abb. 184: Vierpol mit Eingangssignal, Übertragungsfunktion und Ausgangssignal

Wird in $H(s)$ für s der Ausdruck $j\omega$ eingesetzt und die Funktion so umgeformt, daß Realteil (Re) und Imaginärteil (Im) getrennt vorliegen, so ergibt sich der Betrag von $H(j\omega)$ zu

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}.$$

Jetzt kann der Betrag des Ausgangssignals als Funktion des Eingangssignals berechnet werden.

Gl. 80: Berechnung der Ausgangsamplitude aus der Eingangsamplitude und dem Betrag der Übertragungsfunktion.

$$|U_A(\omega)| = |U_E(\omega)| \cdot |H(j\omega)|$$

$|H(j\omega)|$ gibt das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung an und wird als **Amplitudengang** (oft kurz als »Betrag«) bezeichnet. $|H(j\omega)|$ ist eine Funktion der Frequenz f .

Wird in $|H(j\omega)|$ eine bestimmte, **konstante** Frequenz f_0 eingesetzt, so erhält man die Größe (Amplitude) der Ausgangsspannung U_A bei der Frequenz f_0 durch Multiplikation der Eingangsamplitude mit $|H(j\omega)|$.

Die Phasenverschiebung zwischen Ausgangs- und Eingangssignal kann ebenfalls aus $H(s)$ berechnet werden. Der Phasenwinkel des Ausgangssignals gegen das Eingangssignal ist definiert als der Winkel von $H(s)$.

Gl. 81: Definition des Phasengangs

$$\varphi(\omega) = \angle H(s)$$

Die Funktion $\varphi(\omega)$ wird als **Phasengang** (oft kurz als »Phase«) bezeichnet.

In $H(s)$ wird für s der Ausdruck $j\omega$ eingesetzt und die Funktion so umgeformt, daß Realteil und Imaginärteil getrennt vorliegen. Dann ergibt sich $\varphi(\omega)$ als

Gl. 82: Berechnung des Phasengangs aus der Übertragungsfunktion für $s = j\omega$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}\{H(j\omega)\}}{\text{Re}\{H(j\omega)\}} \quad \text{Im} = \text{Imaginärteil, Re} = \text{Realteil}$$

Somit erhält man φ als Funktion von ω bzw. f .

Wird in $\varphi(\omega)$ eine bestimmte, **konstante** Frequenz f_0 eingesetzt, so erhält man die Phasenverschiebung des Ausgangssignals gegen das Eingangssignal bei der Frequenz f_0 .

Achtung: Den Winkel der Phasenverschiebung erhält man nach Gl. 82 in Radiant im Bogenmaß.

Zur Umrechnung in Grad muß mit $\frac{180^\circ}{\pi}$ multipliziert werden!

Die Phasenverschiebung beträgt maximal 180° . $\varphi(\omega)$ kann z.B. in den Bereichen $+90^\circ$ bis -90° , $+90^\circ$ bis 0 , 0 bis -90° oder 0 bis -180° als kontinuierliche Kurve verlaufen. Bei einer bestimmten Frequenz kann je nach Netzwerk auch ein sprunghafter Wechsel von $+90^\circ$ auf -90° oder umgekehrt, oder von -180° auf $+180^\circ$ oder umgekehrt stattfinden (»springen« der Phase oder »Phasensprung«).

Anmerkung: Obige Vorgehensweise zur Bestimmung des Frequenzgangs von Amplitude und Phase ist nur für periodische Eingangssignale und für den eingeschwungenen Zustand des Systems (energieloser Anfangszustand) erlaubt.

Da sich die Phase aus Teilen der Übertragungsfunktion berechnet, können für ein System Amplitudengang und Phasengang nicht gleichzeitig willkürlich vorgeschrieben werden. In der Praxis müssen diesbezüglich oft Kompromisse eingegangen werden.

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ kann aus einer Netzwerkanalyse gewonnen werden.

Wichtig: Sämtliche Verfahren, welche zur Analyse von Gleichstromkreisen verwendet wurden, wie Spannungsteilerformel, Maschenanalyse, Knotenanalyse usw., können auch zur Ermittlung von $H(s)$ verwendet werden. Dabei sind für Kondensatoren und Spulen deren komplexe Widerstände zu verwenden.

Der Vorteil der Rechnung mit komplexen Größen wird dabei noch einmal ersichtlich. Zur Analyse des Netzwerks durch Aufstellung von $H(s)$ werden nur algebraische Gleichungen benötigt und keine Differentialgleichungen, die bei der Analyse von Netzwerken mit speichernden Elementen (Kondensatoren, Spulen) im reellen Zeitbereich notwendig wären.

Eigenschaften von $H(s)$ ^(M)

$H(s)$ ist i.a. eine gebrochene rationale Funktion.

Allgemein kann $H(s)$ in der Form $H(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}$ als Quotient

zweier Polynome $Z(s)$ und $N(s)$ geschrieben werden.

Die Koeffizienten a und b der Polynome sind durch die Bauelemente des Netzwerkes gegeben und stets reell.

Nullstellen und **Pole** sind die wesentlichen Merkmale einer gebrochenen rationalen Funktion. Die Nullstellen erhält man als Lösungen (auch Wurzeln genannt) des Zählerpolynoms $Z(s) = 0$ und die Pole als Lösungen des Nennerpolynoms $N(s) = 0$. Die Anzahl der Nullstellen bzw. Pole entspricht dem Grad (der höchsten Potenz) des betreffenden Polynoms. Sowohl die Nullstellen, als auch die Pole sind entweder reell oder paarweise konjugiert komplex. *Anmerkung:* Es können auch vielfache Nullstellen und Pole der Art $(s - s_0)^n$ bzw. $(s - s_\infty)^n$ auftreten.

Wurden die Wurzeln von Zählerpolynom s_{01} , s_{02} usw. und Nennerpolynom $s_{\infty 1}$, $s_{\infty 2}$ usw. berechnet, so läßt sich $H(s)$ in Form von Linearfaktoren schreiben

$$H(s) = K \cdot \frac{(s - s_{01})(s - s_{02})(s - s_{03}) \dots}{(s - s_{\infty 1})(s - s_{\infty 2})(s - s_{\infty 3}) \dots}$$

Aus dieser Form ist sofort ersichtlich, daß $H(s)$ verschwindet (der Zähler wird zu Null), wenn s einen der Werte der Nullstellen annimmt. Nimmt s einen der Werte der Pole an, so wird der Nenner zu Null und damit $H(s)$ unendlich groß. Die Pole nennt man auch **Eigenfrequenzen** des Systems.

Wird ein Netzwerk mit einer Eingangsspannung gespeist, deren Frequenz gleich der Frequenz einer Nullstelle ist, so wird die Ausgangsspannung zu Null. Ist die Frequenz der Eingangsspannung gleich der Frequenz eines Poles, so wird die Ausgangsspannung unendlich groß (nur theoretisch, da jedes reale System eine durch Verluste bedingte Dämpfung besitzt).

Die Eigenfrequenz wird auch **Resonanzfrequenz** genannt.

Anmerkung: Beide sind nur im dämpfungsfreien Fall gleich groß.

Anmerkung: Der Fall der Resonanz hat in der Technik große Bedeutung. Viele mechanische Gebilde sind schwingungsfähig und können sich durch äußere periodische Kräfte, welche mit der Eigenfrequenz einwirken, »aufschaukeln«. Der unbeabsichtigte Resonanzfall (Erregerfrequenz = Eigenfrequenz des Systems) kann bis zur mechanischen Zerstörung führen. Beim elektrischen Schwingkreis dient der beabsichtigte Resonanzfall dazu, bei einer bestimmten (Resonanz-) Frequenz eine möglichst große Spannung zu erhalten und sie somit aus Spannungen unterschiedlicher Frequenz hervorzuheben, herauszufiltern.

Das Berechnen der Wurzeln von Zähler- und Nennerpolynom von $H(s)$ ist dann einfach, wenn die Polynome quadratische Gleichungen sind. Das Aufspalten von Polynomen höheren Grades ist z.B. nach dem Horner Schema ebenfalls möglich. Dies soll hier jedoch nicht besprochen werden, da die Behandlung komplizierter Übertragungsfunktionen mit einem PC wesentlich sinnvoller und schneller ist.

Für die Berechnung von $|H(j\omega)|$ und $\varphi(\omega)$ beachte man folgende wichtige Regeln:

Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 sind komplexe Zahlen.

Zur Berechnung von $|H(j\omega)|$:

Soll der Betrag des Bruches $|H(j\omega)| = \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|$ gebildet werden, so gilt: $|H(j\omega)| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

Indem man die Beträge von Zähler und Nenner einzeln bildet und die Ergebnisse dividiert, kann man sich evtl. viel Rechenarbeit zur Umformung des Bruches in einen Real- und einen Imaginärteil sparen.

Soll der Betrag des Bruches $|H(j\omega)| = \left| \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3 \cdot Z_4} \right|$ gebildet werden, so gilt: $|H(j\omega)| = \frac{|Z_1| \cdot |Z_2|}{|Z_3| \cdot |Z_4|}$

Die Beträge der komplexen Zahlen in Zähler und Nenner können also einzeln gebildet werden.

Dabei können in Zähler und Nenner beliebig viele Faktoren stehen.

Zur Berechnung von $\varphi(\omega)$:

Für den Winkel ($\angle$) eines Bruches zweier komplexer Zahlen gilt: $\angle \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) = \angle Z_1 - \angle Z_2$

Anstatt $H(j\omega)$ so umzuformen, daß Realteil und Imaginärteil getrennt vorliegen, um daraus den Winkel zu bestimmen, kann man verwenden: **Winkel des Zählers minus Winkel des Nenners.**

Der Winkel eines Produktes zweier komplexer Zahlen ist: $\angle (Z_1 \cdot Z_2) = \angle Z_1 + \angle Z_2$

Ist $H(j\omega) = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3 \cdot Z_4}$ so ist $\varphi(\omega) = \angle H(j\omega) = \angle Z_1 + \angle Z_2 - \angle Z_3 - \angle Z_4$

In Zähler und Nenner können beliebig viele Faktoren stehen.

Die Berechnung von $|H(j\omega)|$ und $\varphi(\omega)$ ist also dann besonders einfach, wenn $H(j\omega)$ in Form von Linearfaktoren vorliegt.

11.6.2 Pegel

Interessieren sowohl sehr kleine, als auch sehr große Werte auf einer Koordinatenachse, so wird ein logarithmischer Maßstab verwendet. Dieser beginnt nicht bei Null sondern bei einem von Null verschiedenen positiven Wert. Durch diesen Maßstab können mehrere Zehnerpotenzen auf einer Achse dargestellt werden. Sind beide Achsen logarithmisch unterteilt, so spricht man von einer doppelt logarithmischen Skala.

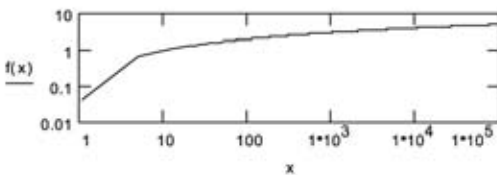


Abb. 185: Graph der Funktion $f(x) = \log(x)$ im Bereich $x = 1,1$ bis $x = 100\,000$ als Beispiel für eine Darstellung mit doppelt logarithmischem Maßstab

Verhältnisse von Spannungen, Strömen oder Leistungen werden oft durch ein logarithmisches Maß ausgedrückt. Logarithmierte Größenverhältnisse werden als **Pegel** bezeichnet (der Begriff Pegel stammt aus der Wasserbautechnik). Bei der Bestimmung des relativen Pegels eines Übertragungsweges wird die Eingangsgröße als Bezugswert genommen. Die Ausgangsgröße wird durch die Eingangsgröße dividiert und dieser Wert logarithmiert. Ist z.B. die Ausgangsgröße die Spannung U_A , die Eingangsgröße die Spannung U_E , so ist die Übertragung gekennzeichnet durch den relativen Spannungspegel.

Gl. 83: Definition des relativen Spannungspegels

$$a = 20 \cdot \log \frac{U_A}{U_E} \quad a \text{ in } \mathbf{\text{Dezibel (dB)}}.$$

Ist U_A und der Spannungspegel a gegeben, so berechnet sich U_E zu

$$U_E = 10^{\log(U_A) - \frac{a}{20}}$$

Ist U_E und der Spannungspegel a gegeben, so berechnet sich U_A zu
Pegel a mit Vorzeichen einsetzen!

$$U_A = 10^{\log(U_E) + \frac{a}{20}}$$

Anmerkung: Der relative **Leistungspegel** ist wegen des quadratischen Zusammenhanges zwischen Spannung bzw. Strom und Leistung definiert als $a_L = 10 \cdot \log \frac{P_A}{P_E}$ (a_L in dB)

Anmerkung: Gebräuchlich ist auch die Angabe des Pegels in **Neper**.

Definition: $a = \ln \frac{U_A}{U_E}$ (1Np = 8,686 dB; 1dB = 0,115Np)

Werden mehrere sich nicht gegenseitig belastende, Übertragungswege in Reihe geschaltet, so **addieren** sich die einzelnen Pegel (die einzelnen Übertragungsfunktionen multiplizieren sich).

Ist das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung größer 1, so spricht man von **Verstärkung**, der dB-Wert wird positiv. Ist das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung kleiner 1, so spricht man von **Dämpfung**, der dB-Wert wird negativ.

Beispiel für die Umrechnung von U_A / U_E in dB:

$U_A = 5 \text{ V}$, $U_E = 2 \text{ V}$ $5/2 = 2,5 \Rightarrow$ größer 1 $\Rightarrow$ Verstärkung. Der dB-Wert ist $20 \cdot \log(2,5) = +7,95 \text{ dB}$.

$U_A = 2 \text{ V}$, $U_E = 5 \text{ V}$ $2/5 = 0,4 \Rightarrow$ kleiner 1 $\Rightarrow$ Dämpfung. Der dB-Wert ist $20 \cdot \log(0,4) = -7,95 \text{ dB}$.

Beispiel für die Berechnung von U_A , wenn U_E und der Übertragungspegel gegeben sind:

$$U_E = 5 \text{ V}, a = -7,95 \text{ dB}; \Rightarrow U_A = 10^{\frac{\log(5) - \frac{7,95}{20}}{1}} U_A = 2 \text{ V}$$

Tabelle 13: Angabe einiger dB-Werte

U_A / U_E	1:1	2:1	10:1	100:1	1000:1	10000:1	$1: \sqrt{2}$	1:2	1:10	1:100	1:1000
dB	0	6	20	40	60	80	- 3	- 6	- 20	- 40	- 60

11.6.3 Bodediagramm

Die graphische Darstellung des Amplituden- oder Phasengangs mit logarithmischer Bewertung wird als **Bodediagramm** bezeichnet.

Die graphische Darstellung von $|H(j\omega)|$ erfolgt in einem Achsenkreuz mit doppelt logarithmischen Maßstab. Dies bedeutet, daß die x-Achse, auf der ω aufgetragen wird, einen logarithmischen Maßstab hat, und ebenso die y-Achse, auf der $|H(j\omega)|$ (die Amplitude) aufgetragen wird. Eine Dekade (Zehnerschritt) der Amplitude entspricht einer Dekade der Frequenz.

$|H(j\omega)|$ wird dann als logarithmisches Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung in der Einheit **Dezibel** (abgekürzt »dB«) als relativer Pegel angegeben.

Das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung mit der Größe Dezibel ist definiert als:

Gl. 84: Amplitudengang in Dezibel

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log \frac{|U_A(\omega)|}{|U_E(\omega)|} = 20 \cdot \log |H(j\omega)|$$

Liegt am Eingang eines Systems eine sinusförmige Spannung mit konstanter Amplitude, so läßt sich aus der graphischen Darstellung des Amplitudengangs als Bodediagramm ablesen, wie sich die Amplitude der Ausgangsspannung ändert, wenn die Frequenz der Eingangsspannung geändert wird.

Die graphische Darstellung des Phasengangs zeigt die Phasenverschiebung der Ausgangsspannung gegen die Eingangsspannung in Abhängigkeit der Frequenz der Eingangsspannung.

Zur Konstruktion des Bodediagramms könnten noch allgemeine Regeln angegeben werden, z.B. die Beiträge der Nullstellen und Pole zur Dämpfung, der Dämpfungsanstieg pro Dekade usw. Da die Erstellung eines Bodediagramms einer komplizierten Übertragungsfunktion am schnellsten

mit Hilfe eines PC erfolgt, werden hier keine Konstruktionsregeln für ein Bodediagramm angegeben, sondern in einem anderen Abschnitt das entsprechende Vorgehen unter Verwendung von Mathcad erläutert.

11.6.4 Dämpfung

Statt des Amplitudengangs in Form eines Bodediagramms wird oft der Verlauf der **Dämpfung** $a(\omega)$ angegeben.

Die Dämpfung ist definiert als $a(\omega) = 20 \cdot \log \frac{|U_E(\omega)|}{|U_A(\omega)|} = 20 \cdot \log \frac{1}{|H(j\omega)|}$ $a(\omega)$ in dB

Je kleiner die Ausgangsspannung wird, wenn die Eingangsspannung konstant ist und ihre Frequenz wächst, desto größer wird die Dämpfung.

11.6.5 Grenzfrequenz

Die Frequenz, bei der gilt $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ wird als Grenzfrequenz oder Eckfrequenz bezeichnet.

Bei der Grenzfrequenz ist die Ausgangsspannung auf das 0,7-fache (dies entspricht - 3 dB) der Eingangsspannung abgefallen. Also: **Grenzfrequenz f_g = - 3 dB-Frequenz.**

11.6.6 Normierte Übertragungsfunktion

Da die Grenzfrequenz ω_g je nach Bauteilwerten jeden beliebigen Wert annehmen kann, ist es für allgemeine Darstellungen zweckmäßig, die **normierte Frequenz** $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ bzw. $s_n = \frac{s}{\omega_n}$

einzuführen. Trotz unterschiedlicher Dimensionierung können damit Netzwerke vom gleichen Typ durch eine einzige Übertragungsfunktion beschrieben werden, und die Systemeigenschaften sind in normierter Form leichter und übersichtlicher zu ermitteln. Die **normierende** Frequenz ω_n kann beliebig so gewählt werden, daß die Übertragungsfunktion die gewünschte einfache Gestalt annimmt und einheitenlos wird (Ω bzw. s_n sind reine einheitenlose Zahlen). Die Normierung erfolgt durch Substitution, für ω wird $\Omega \cdot \omega_n$ bzw. für s wird $s_n \cdot \omega_n$ in die Übertragungsfunktion eingesetzt.

Beispiel zur Normierung:

Gegeben sei $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$

Ein Pol ist bei $1 + j\omega RC = 0$, also bei $j\omega = -\frac{1}{RC}$.

Bei welcher Frequenz ω der Pol liegt, ist abhängig von der Dimensionierung des Widerstandes R und des Kondensators C .

Der Betrag der Übertragungsfunktion ist $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$.

Die Grenzfrequenz, bei der $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, berechnet sich durch Vergleich der Nenner mit $\omega^2 R^2 C^2 = 1$ zu $\omega_g = \frac{1}{RC}$. Die Grenzfrequenz ist abhängig von der Bauteildimensionierung.

Anmerkung: Wie schon öfter wird ω statt mit Kreisfrequenz kurz mit Frequenz bezeichnet.

Wählt man als normierende Frequenz $\omega_n = \frac{1}{RC}$, so erhält man mit $\omega = \Omega \cdot \omega_n = \Omega \cdot \frac{1}{RC}$ die normierte Form der Übertragungsfunktion $H(j\Omega) = \frac{1}{1+j\Omega}$. Unabhängig von der Dimensio-

nierung liegt jetzt der Pol stets bei $j\Omega = -1$. Die Grenzfrequenz, bei der $|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, liegt unabhängig von der Bauteildimensionierung bei $\Omega_g = 1$.

Aus diesem Beispiel kann man sehen, daß die Normierung einer Übertragungsfunktion sehr einfach und schnell erfolgen kann, wenn in $H(s)$ für $R = 1 \Omega$, $C = 1 F$, $L = 1 H$ eingesetzt wird.

Bei Anwendung auf unser Beispiel erhalten wir aus $H(s) = \frac{1}{1+sRC}$ sofort die normierte Form

$$H(s) = \frac{1}{1+s}.$$

Regel zur Normierung einer Übertragungsfunktion:

In $H(s)$ wird für $R = 1 \Omega$, $C = 1 F$, $L = 1 H$ eingesetzt.

11.6.7 Der RC-Tiefpaß

Die in den letzten drei Abschnitten gewonnenen Kenntnisse sollen nun zur Analyse und Veranschaulichung der praktischen Eigenschaften einer RC-Reihenschaltung als Filter dienen.

Mit Filtern lassen sich Signale unterschiedlicher Frequenzen voneinander trennen. Signale, die in einem bestimmten Frequenzbereich liegen, werden übertragen, und unerwünschte Signale, die außerhalb dieses Frequenzbereiches liegen, werden unterdrückt. Ein Signal kann mit einem Filter z.B. von Störanteilen befreit, und so das eigentliche Nutzsignal in sauberer, aufbereiteter Form gewonnen werden.

Der RC-Tiefpaß ist ein Filter, das niedrige (tiefe) Frequenzen unverändert überträgt und hohe Frequenzen unterdrückt. Tiefe Frequenzen können das Filter »passieren«. Spannungen am Eingang mit hohen Frequenzen sind am Ausgang in ihrer Amplitude abgeschwächt und zusätzlich ist die Ausgangsspannung gegen die Eingangsspannung phasenverschoben.

Ein idealer Tiefpaß läßt Spannungen mit Frequenzen bis zu einem bestimmten maximalen Wert ohne Abschwächung der Amplitude und ohne Phasenverschiebung der Ausgangs- gegen die Eingangsspannung durch (Durchlaßbereich) und sperrt Spannungen mit Frequenzen oberhalb dieser Frequenzgrenze völlig (Sperrbereich). In der Praxis ist dies nur annähernd zu erreichen, der Übergang von Durchlaß- zu Sperrbereich erfolgt nicht sprunghaft.

Je steiler der Übergang von Durchlaß- zu Sperrbereich ist, desto größer ist der Aufwand zur Realisierung des Filters.

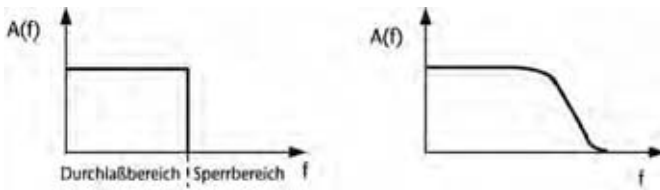


Abb. 186: Amplitudengang eines idealen (links) und realen (rechts) Tiefpasses

Im einfachsten Fall besteht ein RC-Tiefpaß aus einem Widerstand und einem Kondensator.

Eine RC-Reihenschaltung wird so umgezeichnet, daß die an ihr liegende Spannung zur Eingangsspannung eines Vierpols, und die Spannung am Kondensator zur Ausgangsspannung eines Vierpols wird.

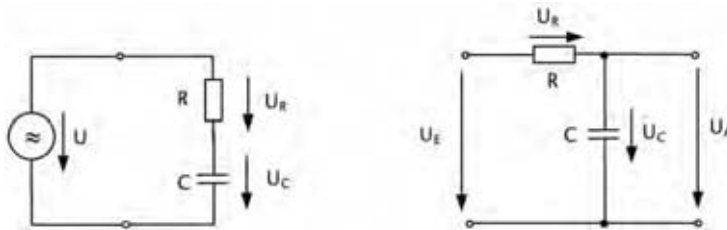


Abb. 187: RC-Reihenschaltung mit speisender Spannung (links) und umgezeichnet als Vierpol, mit Eingangs- und Ausgangsspannung (rechts)

Das Verhalten der Ausgangsspannung U_A soll nun in Abhängigkeit der Frequenz der Eingangsspannung U_E betrachtet werden.

Für eine erste qualitative Untersuchung ist es sinnvoll, U_A bei sehr tiefen (bzw. bei Gleichspannung) und bei sehr hohen (bzw. unendlich hohen) Frequenzen der Eingangsspannung zu ermitteln.

Ist U_E eine Gleichspannung, so sperrt der Kondensator C und es ist $U_A = U_E$. (Man beachte, daß hier keine Einschwingvorgänge betrachtet werden.) Je höher die Frequenz von U_E wird, desto besser läßt der Kondensator die an ihm liegende Wechsellspannung durch, und desto kleiner wird die Ausgangsspannung U_A . Bei unendlich hoher Frequenz von U_E leitet C unendlich gut, und U_A wird Null.

Die Schaltung soll nun mit der komplexen Rechnung analysiert werden.

1. Schritt: Netzwerkanalyse (Ermitteln der Übertragungsfunktion)

Nach der Spannungsteilerformel ist $U_A = U_E \cdot \frac{Z_C}{R + Z_C}$ mit $Z_C = \frac{1}{sC}$ als komplexer Widerstand des Kondensators. Das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung ist:

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} \quad \text{Die Übertragungsfunktion ist also } H(s) = \frac{U_A}{U_E} = \frac{1}{1 + sRC}$$

Der betrachtete RC-Tiefpaß wird als Tiefpaß 1. Ordnung bezeichnet, da s in der Übertragungsfunktion mit der höchsten Potenz »1« vorkommt.

2. Schritt: Bestimmung des Amplitudengangs durch Betragsbildung von $H(j\omega)$

In $H(s)$ wird $s = j\omega$ eingesetzt und $|H(j\omega)|$ gebildet.

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + j\omega RC} \right| = \frac{|1|}{|1 + j\omega RC|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad \text{Daraus ist ersichtlich:}$$

Ist $\omega = 0$ (Gleichspannung am Eingang), so ist $|H(j\omega)| = 1$ und somit $U_A = U_E$.

(Nach Gl. 80 ist $U_A = U_E \cdot |H(j\omega)|$). Der Tiefpaß läßt Gleichspannung ungehindert durch.

Wird ω unendlich groß, so wird der Nenner von $|H(j\omega)|$ unendlich groß und $|H(j\omega)| = 0$. Damit wird $U_A = 0$.

Spannungen mit sehr hohen Frequenzen erscheinen nicht mehr am Ausgang.

Werte von $|H(j\omega)|$ zwischen den Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ müssen mit eingesetzten Werten für R und C berechnet werden. Setzt man zur Normierung $R = C = 1$, so erhält man den folgenden Betragsverlauf (Amplitudengang).

Bei der normierten Frequenz $\omega_g = 1$ ist der Betrag auf $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ abgefallen. Dies ist die Grenzfrequenz.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$$

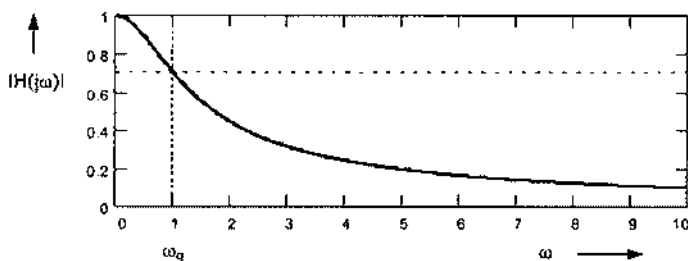


Abb. 188: Betrag der normierten Übertragungsfunktion (Verhältnis von U_A zu U_E) im linearen Maßstab

Wie wichtig es ist, die Regeln des Rechnens mit komplexen Zahlen zu beherrschen, soll folgende umständliche Bestimmung von $|H(j\omega)|$ durch Zerlegung von $H(j\omega)$ in Real- und Imaginärteil zeigen.

$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j\omega RC} \cdot \frac{1-j\omega RC}{1-j\omega RC} = \frac{1-j\omega RC}{1+(\omega RC)^2} = \frac{1}{1+(\omega RC)^2} - j \frac{\omega RC}{1+(\omega RC)^2}$ $H(j\omega)$ wurde so umgeformt, daß Real- und Imaginärteil getrennt vorliegen. Der Betrag ist:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{1+(\omega RC)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega RC}{1+(\omega RC)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+(\omega RC)^2}{(1+(\omega RC)^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+\omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$$

3. Schritt: Berechnung des Phasengangs $\varphi(\omega)$

Der Winkel des Zählers von $H(j\omega)$ ist Null, da der Zähler eine reelle Zahl ist. Der Winkel des Nenners von $H(j\omega)$ ist $\varphi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \arctan \frac{\omega RC}{1} = \arctan \omega RC$

Der Winkel von $H(j\omega)$ ist $\angle \text{Zähler} - \angle \text{Nenner}$. $\varphi(\omega) = 0 - \arctan \omega RC$; $\varphi(\omega) = -\arctan \omega RC$

Einsetzen der Grenzwerte $\omega = 0$ und $\omega = \infty$: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = -\pi/2$

Für Gleichspannung am Eingang ist die Phasenverschiebung der Ausgangsspannung U_A gegen die Eingangsspannung U_E gleich Null, für sehr hohe Frequenzen nähert sie sich $-\pi/2$ (-90°).

Werte von $\varphi(\omega)$ zwischen den Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ müssen mit eingesetzten Werten für R und C berechnet werden. Setzt man $R = C = 1$ (Normierung), so erhält man den folgenden Phasenverlauf.

Bei der normierten Frequenz $\omega_g = 1$ (Grenzfrequenz) beträgt die Phasenverschiebung -45° .

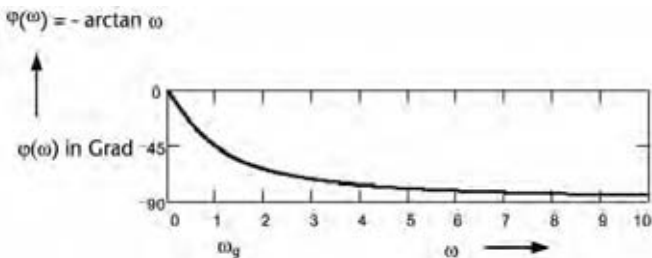


Abb. 189: Normierte Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$ von U_A gegen U_E als Funktion der Frequenz

4. Schritt: Zeichnen von Amplituden- und Phasengang als Bodediagramm

Die graphische Darstellung von Amplituden- und Phasengang gibt einen guten Überblick der Systemeigenschaften, ist jedoch von Hand sowohl im linearen als auch logarithmischen Maßstab mühevoll. Mit dem Taschenrechner müssen für unterschiedliche ω die Funktionswerte berechnet und in eine Graphik eingetragen werden.

Aus Abb. 188 und Abb. 189 ist ersichtlich, daß die Graphen nur in einem relativ kleinen Bereich von ω dargestellt sind. Soll der Funktionsgraph über mehrere Dekaden von ω dargestellt werden, weil Funktionswerte sowohl für kleine als auch sehr große Werte von ω interessieren, so verwendet man ein Bodediagramm.

Die Erstellung von Bodediagrammen geht mit Hilfe eines PC und Mathcad wesentlich schneller als von Hand. Hier wird ein »Programm« für Mathcad vorgestellt, welches es ermöglicht, für beliebige Übertragungsfunktionen $H(s)$ den Amplituden- und Phasengang von $H(j\omega)$, sowie die Dämpfung $a(\omega)$ als Bodediagramm auszugeben.

11.6.8 Bodediagramme mit Mathcad

Es wurde »Mathcad 6.0 für Studenten« verwendet.

- 1) **Niedrigste Frequenz (in Hz):** $\omega_{\min} := .01$
- 2) **Höchste Frequenz (in Hz):** $\omega_{\max} := 100$
- 3) **Anzahl der Punkte:** $N := 100$
- 4) **Bereich für Graphen:** $i := 0..N$
- 5) **Schrittweite:** $n := \log \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega_{\max}} \right) \cdot \frac{1}{N}$
- 6) **Bereichsvariable:** $\omega_i := \omega_{\max} \cdot 10^{i \cdot n} \quad s_i := j \cdot \omega_i$
- 7) **Übertragungsfunktion:** $H(s) := \frac{1}{1 + s}$
- 8) **Betrag in dB:** $V_i := 20 \cdot \log(|H(j \cdot \omega_i)|) \quad (V \text{ ist } U_A / U_E)$
Obere Achsengrenze: $B := \max(V) \quad \text{Untere Achsengrenze: } D := \min(V)$
- 9) **Zur Umrechnung der Phasenverschiebung $\phi(\omega)$ von Radiant in Grad:** $G := \frac{180}{\pi}$
- 10) **Berechnung des Winkels:** $\phi_i := G \cdot \arg(H(j \cdot \omega_i))$
Obere Achsengrenze: $a := \max(\phi) \quad \text{Untere Achsengrenze: } b := \min(\phi)$
- 11) **Dämpfung:** $a(\omega) := 20 \cdot \log \left(\frac{1}{|H(j \cdot \omega_i)|} \right)$

Erläuterungen zur Anwendung

Eingabe von veränderlichen Größen:

Bei Punkt 1. wird die niedrigste Frequenz eingegeben.

Bei Punkt 2. wird die höchste Frequenz eingegeben.

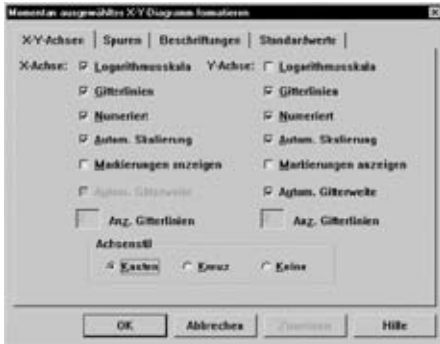
Bei Punkt 7. ist die jeweilige Übertragungsfunktion einzutragen.

Die fett geschriebenen Teile sind erklärende Textbereiche in Mathcad.

Unter 3) wird festgelegt, wieviele Punkte der Kurve berechnet werden.

Die y-Achsen werden auf die maximal benötigten Bereiche skaliert.

Für das Diagramm des Amplitudengangs sind die Einstellungen für das Bildformat:



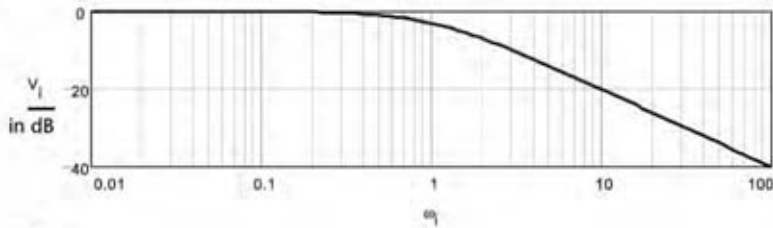
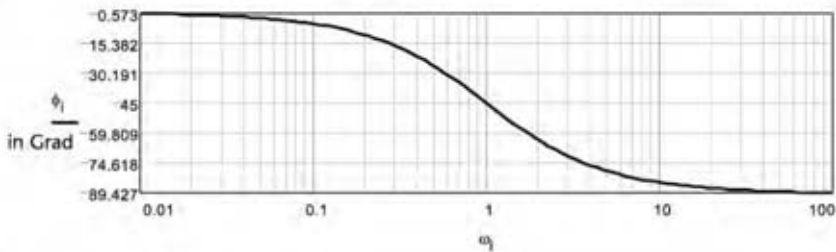
Für das Diagramm des Phasengangs gelten die Einstellungen:



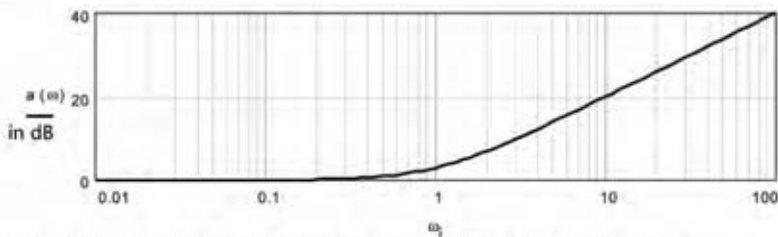
Hinweise für die Eingabe in Mathcad:

- Diagramm für den Amplitudengang: Obere Achsengrenze auf B und untere Achsengrenze auf D setzen.
- Diagramm für den Phasengang: Obere Achsengrenze auf a und untere Achsengrenze auf b setzen.
- Diagramm für die Dämpfung: Obere Achsengrenze auf -D und untere Achsengrenze auf -B setzen.
- Die Literalindizes »min« und »max« werden mit der Punkt-Taste eingegeben (z.B. $\omega_{\min}$).
- Der Matrixindex »i« (z.B. bei ω_i) wird mit der Taste für die eckige Klammer [eingegeben (natürlich nicht bei Punkt 4) und bei $10^{i \cdot n}$. Beispiel: $\omega[i$

Als Ausgabe erhält man folgende Bodediagramme für Amplituden- und Phasengang:

Amplitudengang**Phasengang**

Für den Verlauf der **Dämpfung** erhält man:



Wie man sieht, ist die Dämpfung der an der x-Achse gespiegelte Verlauf des Amplitudengangs.

Abb. 190: Bodediagramme eines RC-Tiefpasses 1. Ordnung

In obigem Beispiel wurde die normierte Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{1}{1+s}$ des RC-Tiefpasses aus Abschnitt 11.6.7 verwendet.

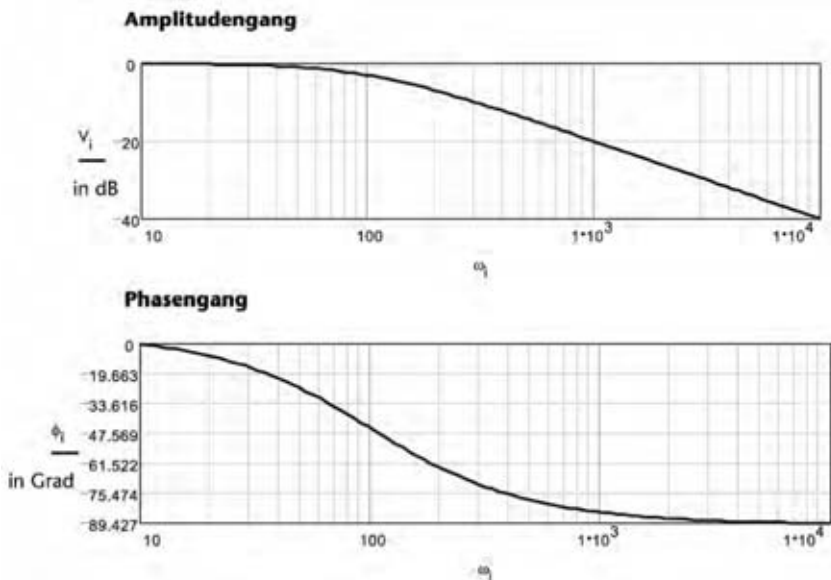
Soll für bestimmte Werte von Widerstand R und Kondensator C die Amplitude der Ausgangsspannung oder deren Phasenverschiebung gegen die Eingangsspannung bestimmt werden, so können die Werte für R und C in $H(s)$ unter Punkt 7) in Mathcad eingesetzt werden.

Beispiel: Die nicht normierte Übertragungsfunktion des RC-Tiefpasses ist $H(s) = \frac{1}{1+sRC}$.

Es sei $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F} \Rightarrow RC = 10^{-2}$

Änderungen in Mathcad: $H(s) = \frac{1}{1+s \cdot 10^{-2}}$ $\omega_{\min} = 10$ $\omega_{\max} = 10000$

Mathcad berechnet sofort nach den Änderungen alle Werte neu, und man erhält die folgenden Bodediagramme.



Aus dem Amplitudengang kann z.B. entnommen werden, daß für die gewählte Bauteildimensionierung bei der Kreisfrequenz $\omega = 1000$ Hz die Amplitude der Ausgangsspannung nur noch $1/10$ der Amplitude der Eingangsspannung beträgt (-20 dB). Die Phasenverschiebung der Ausgangs- gegen die Eingangsspannung ist bei dieser Frequenz ca. -85° .

11.6.9 Filterung eines gestörten Sinussignals

In der folgenden Abbildung ist die Anwendung eines RC-Tiefpasses zur Filterung eines Sinussignals dargestellt. Der sinusförmigen Eingangsspannung mit 5 V Amplitude und einer Frequenz von 10 Hz (Nutzsignal) ist eine ebenfalls sinusförmige Spannung mit 1 V Amplitude und einer Frequenz von 200 Hz (Störsignal) überlagert. Am Ausgang des Filters erhält man die »gesäuberte« Eingangsspannung. Die Amplitude des Ausgangssignals ist kleiner als 5 V, da auch die Spannung mit 10 Hz gedämpft wird. Die Spannung mit der höheren Frequenz von 200 Hz wird fast vollständig unterdrückt. Zu sehen ist auch die Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal.

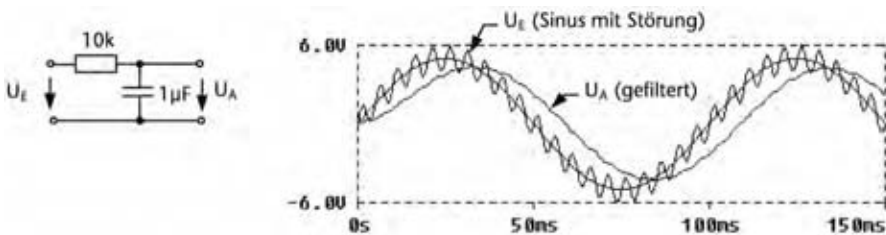


Abb. 191: Filterung eines Signals mit einem RC-Tiefpaß

11.6.10 Der RC-Hochpaß

Der RC-Hochpaß ist ein Filter, das hohe Frequenzen unverändert überträgt und tiefe Frequenzen unterdrückt. Hohe Frequenzen können das Filter »passieren«. Spannungen am Eingang mit tiefen Frequenzen sind am Ausgang in ihrer Amplitude abgeschwächt, und zusätzlich ist die Ausgangsspannung gegen die Eingangsspannung phasenverschoben.

Ein idealer Hochpaß läßt Spannungen mit Frequenzen ab einem bestimmten minimalen Wert ohne Abschwächung der Amplitude und ohne Phasenverschiebung der Ausgangs- gegen die Eingangsspannung durch (Durchlaßbereich) und sperrt Spannungen mit Frequenzen unterhalb dieser Frequenzgrenze völlig (Sperrbereich). In der Praxis ist dies nur annähernd zu erreichen, der Übergang von Sperr- zu Durchlaßbereich erfolgt nicht sprunghaft. Je steiler der Übergang von Sperr- zu Durchlaßbereich ist, desto größer ist der Aufwand zur Realisierung des Filters.

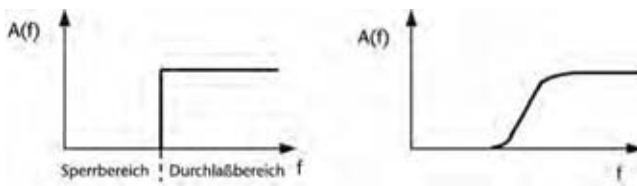


Abb. 192: Amplitudengang eines idealen (links) und realen (rechts) Hochpasses

Im einfachsten Fall besteht ein RC-Hochpaß aus einem Widerstand und einem Kondensator.

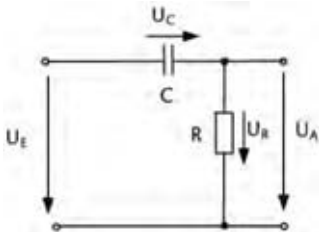


Abb. 193: Einfachster Hochpaß

Das Verhalten der Ausgangsspannung U_A soll nun wieder wie beim Tiefpaß in Abhängigkeit der Frequenz der Eingangsspannung U_E betrachtet werden.

Für eine erste qualitative Untersuchung ist es sinnvoll, U_A bei sehr tiefen Frequenzen (bzw. bei Gleichspannung) und bei sehr hohen (bzw. unendlich hohen) Frequenzen der Eingangsspannung zu ermitteln.

Ist U_E eine Gleichspannung, so sperrt der Kondensator C und es ist $U_A = 0$ V. Je höher die Frequenz von U_E wird, desto besser läßt der Kondensator die Eingangs-Wechselspannung durch, und desto größer wird die Amplitude der Ausgangsspannung U_A . Bei unendlich hoher Frequenz von U_E wird $U_A = U_E$. Die Schaltung soll nun mit der komplexen Rechnung analysiert werden.

Berechnung des Amplitudengangs $|H(j\omega)|$:

Nach der Spannungsteilerformel ist das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung bzw. die Übertragungsfunktion:

$$H(s) = \frac{U_A}{U_E} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} \quad \text{Mit } s = j\omega \text{ erhält man den Amplitudengang: } |H(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

Für $\omega = 0$ wird $\frac{1}{\omega^2 C^2}$ unendlich und somit $|H(j\omega)| = 0$. Für Gleichspannung am Eingang ist $U_A = 0$.

Für $\omega \rightarrow \infty$ (ω gegen Unendlich) wird $\frac{1}{\omega^2 C^2}$ Null und somit $|H(j\omega)| = 1$, d.h. $U_A = U_E$.

Berechnung des Phasengangs $\varphi(\omega) = \angle H(j\omega)$:

Durch Umformung von $H(s)$ und mit $s = j\omega$ erhält man: $H(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$

Der Winkel des Zählers von $H(j\omega)$ ist $\varphi_Z = \arctan\left(\frac{\omega RC}{0}\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$

Der Winkel des Nenners von $H(j\omega)$ ist $\varphi_N = \arctan\left(\frac{\omega RC}{1}\right) = \arctan(\omega RC)$

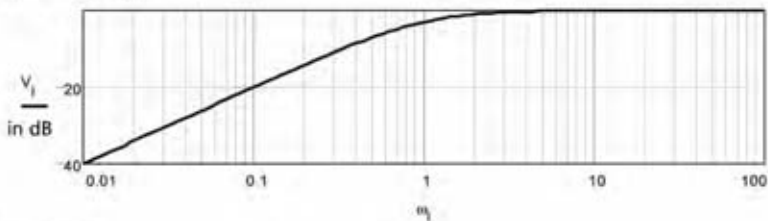
Da gilt $\angle H(j\omega) = \varphi_Z - \varphi_N$ folgt: $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega RC)$

Für $\omega = 0$ ist $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$. Für sehr kleine Frequenzen von U_E beträgt die Phasenverschiebung der Ausgangs- gegen die Eingangsspannung nahezu 90° .

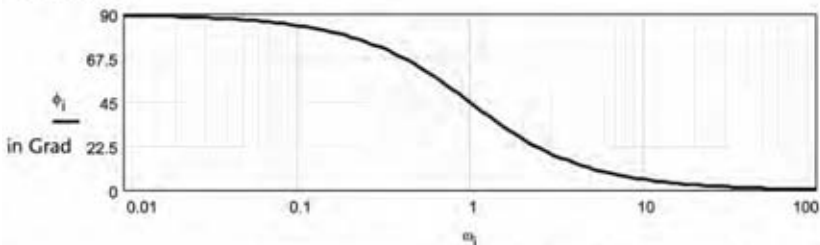
Da $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$ folgt $\varphi(\infty) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$. Für sehr hohe Frequenzen von U_E ist die Phasenverschiebung der Ausgangs- gegen die Eingangsspannung fast 0° .

Mit $R = C = 1$ zur Normierung erhält man als Bodediagramme für Amplituden- und Phasengang:

Amplitudengang:



Phasengang:



Anmerkung: Zum besseren Erkennen der Grenzwerte wurden beim Phasengang die obere und untere Grenze auf 90 bzw. 0 gesetzt. Bei $\omega = 0.01$ wäre die Phasenverschiebung kleiner 90° und bei $\omega = 100$ größer 0° .

Anmerkung: Ein Tief- bzw. Hochpaß kann nicht nur mit einem RC-Glied sondern auch mit einer Reihenschaltung aus Spule und Widerstand realisiert werden.

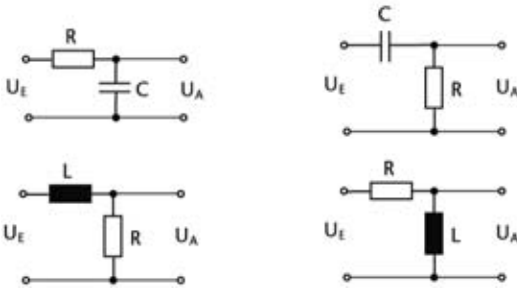


Abb. 194: RC- und RL-Tiefpaß (links) und Hochpaß (rechts)

11.7 Reihenschaltung aus Spule, Widerstand und Kondensator

Anmerkung: Der Reihenschwingkreis ist auch eine Reihenschaltung aus Spule, Widerstand und Kondensator, wird jedoch in einem extra Kapitel behandelt.

Ein Tiefpaß kann auch aus einer Reihenschaltung einer Spule, eines Widerstands und eines Kondensators aufgebaut werden.

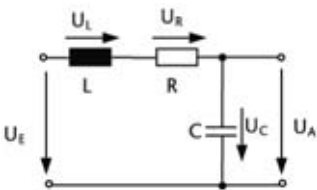


Abb. 195: Einfacher LRC-Tiefpaß

Nach der Spannungsteilerformel ergibt sich die Übertragungsfunktion:

$$H(s) = \frac{U_A}{U_E} = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2LC + j\omega RC + 1} = \frac{1}{1 - \omega^2LC + j\omega RC}$$

$$\Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2LC)^2 + \omega^2R^2C^2}}$$

Es gilt: $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = 1$ und $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(j\omega)| = 0$, d.h. für ω gegen 0 wird $|H(j\omega)|$ gleich 1 und für ω gegen Unendlich wird $|H(j\omega)|$ gleich 0. Ist U_E eine Gleichspannung ($\omega = 0$), so ist $U_A = U_E$. Ist U_E eine Wechsellspannung sehr (unendlich) hoher Frequenz ($\omega = \infty$), so ist $U_A = 0$.

Nach der Normierung $L = R = C = 1$ erhält man folgendes Bodediagramm:

Amplitudengang:

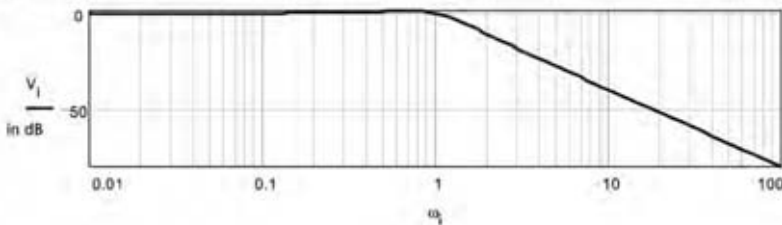


Abb. 196: Amplitudengang eines LRC-Tiefpasses

Man beachte, daß die Amplitude des Ausgangssignals bei der normierten Kreisfrequenz $\omega = 10$ bereits um 40 dB abgefallen ist. Bei einem einfachen RC-Tiefpaß waren es nur 20 dB. Vergleichen Sie hierzu den Amplitudengang in Abb. 190.

Der Grund für die größere Dämpfung bei diesem LRC-Tiefpaß ist, daß zwei energiespeichernde Bauelemente eingesetzt werden. Es handelt sich um einen **Tiefpaß 2. Ordnung**. Dies ist auch aus dem Grad des Nennerpolynoms von $H(s)$ ersichtlich; die höchste Potenz von s ist 2.

Allgemein entspricht die Ordnung des Filters (und die höchste Potenz von s in der Übertragungsfunktion) der Anzahl der energiespeichernden Bauelemente (Kondensatoren, Spulen). Je höher die Ordnung eines Tiefpasses ist, desto stärker werden hohe Frequenzen gedämpft. Ist »n« die Ordnung des Tiefpasses, so nimmt das Ausgangssignal mit $n \cdot 20$ dB pro Frequenzdekade ab.

Im folgenden wird eine praktische Anwendung eines LRC-Tiefpasses gezeigt. Eine Gleichspannung von 5 V ist von einem sinusförmigen Störsignal der Amplitude 1 V und der Frequenz 500 Hz überlagert (U_E). Die Daten des LRC-Tiefpasses nach Abb. 195 sind: $L = 10$ mH, $R = 10 \Omega$, $C = 1000 \mu\text{F}$.

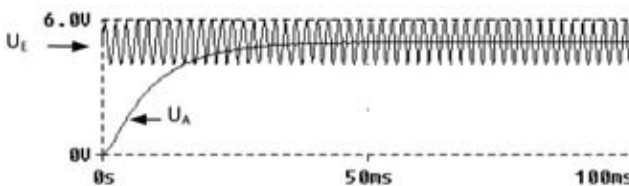


Abb. 197: Filterung mit LRC-Tiefpaß

Die Ausgangsspannung U_A steigt durch den Ladevorgang des Kondensators langsam auf ihren Endwert von 5 V an. U_A ist von dem »Ripple« (von der Störspannung) des Eingangssignals befreit.

11.8 Parallelschaltung aus Widerstand und Spule

Der Widerstand der Parallelschaltung ist: $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} \Rightarrow Z = \frac{sRL}{R + sL}$; für $s = j\omega$: $|Z| = \frac{\omega RL}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$

Der Betrag (Effektivwert) des Gesamtstromes ist $I = \frac{U}{Z} = U \cdot \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\omega RL}$

Durch den ohmschen Widerstand fließt der Teilstrom $I_R = \frac{U}{R}$. Er ist mit U in Phase.

Durch die Spule fließt der Teilstrom $I_L = \frac{U}{j\omega L}$. Er eilt U um 90° nach (j ist im Nenner).

Aus der geometrischen Addition der Teilströme ergibt sich der Gesamtstrom $I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$.

Der Phasenwinkel zwischen Spannung und Strom ist $\varphi = \arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right)$

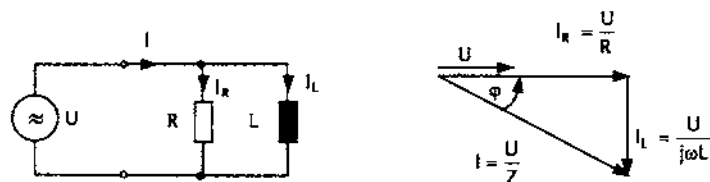


Abb. 198: Parallelschaltung aus R und L mit Zeigerdiagramm

11.9 Parallelschaltung aus Widerstand und Kondensator

Der Widerstand der Parallelschaltung ist: $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + sC \Rightarrow Z = \frac{R}{1 + sRC}$; für $s = j\omega$: $|Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$

Der Betrag (Effektivwert) des Gesamtstromes ist $I = \frac{U}{Z} = U \cdot \frac{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}{R}$

Durch den ohmschen Widerstand fließt der Teilstrom $I_R = \frac{U}{R}$. Er ist mit U in Phase.

Durch den Kondensator fließt der Teilstrom $I_C = \frac{U}{\frac{1}{j\omega C}} = U \cdot j\omega C$. Er eilt U um 90° voraus.

Aus der geometrischen Addition der Teilströme ergibt sich der Gesamtstrom $I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$.

Der Phasenwinkel zwischen Spannung und Strom ist $\varphi = -\arctan(\omega RC)$.

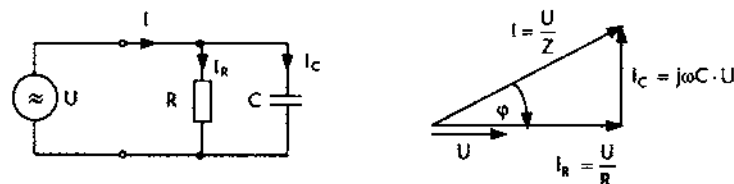


Abb. 199: Parallelschaltung aus R und C mit Zeigerdiagramm

11.10 Zusammenfassung: Einfache Wechselstromkreise

1. Ein ohmscher Widerstand ist ein Wirkwiderstand, in ihm entsteht Wärme.
2. Beim ohmschen Widerstand sind Strom und Spannung in Phase.
3. Eine Spule läßt Wechselstrom schlechter durch, je höher die Frequenz des Wechselstromes und je größer die Induktivität der Spule ist.
4. Bei einer idealen Spule eilt der Strom der Spannung um $\pi/2 = 90^\circ$ nach.
5. Der induktive Blindwiderstand einer idealen Spule ist $X_L = \omega \cdot L$.
6. Ein Kondensator läßt Wechselstrom besser durch, je höher die Frequenz des Wechselstromes und je größer die Kapazität des Kondensators ist.
7. Bei einem idealen Kondensator eilt der Strom der Spannung um $\pi/2 = 90^\circ$ voraus.
8. Der kapazitive Blindwiderstand eines idealen Kondensators ist $X_C = \frac{1}{\omega C}$
9. Der komplexe Blindwiderstand einer Spule ist: $Z_L = sL$
10. Der komplexe Blindwiderstand eines Kondensators ist: $Z_C = \frac{1}{sC}$
11. Ein komplexer Scheinwiderstand ist die Zusammenschaltung eines Wirkwiderstandes und eines komplexen Blindwiderstandes.
12. Ein Scheinwiderstand (Einheit Ohm) ist der Absolutwert eines komplexen Scheinwiderstandes.
13. Definition einer Übertragungsfunktion: $H(s) = \frac{U_A}{U_E} = \frac{\text{Wirkung}}{\text{Ursache}}$
14. $|H(j\omega)|$ wird als Amplitudengang bezeichnet.
15. Die Phasenverschiebung zwischen Ausgangs- und Eingangssignal ist: $\varphi(\omega) = \angle H(s)$
16. Der relative Spannungspegel in dB ist definiert als $a = 20 \cdot \log \frac{U_A}{U_E}$
17. Ein Bodediagramm ist die graphische Darstellung des Amplituden- oder Phasengangs im doppelt logarithmischen Maßstab.
18. Als Grenzfrequenz wird die -3dB -Frequenz bezeichnet.
19. Zur Normierung einer Übertragungsfunktion setzt man $R = C = L = 1$.
20. Ein Tiefpaß und ein Hochpaß sind Filter.

12 Ersatzschaltungen für Bauelemente

In Schaltplänen elektrischer Schaltungen werden für die Bauteile Symbole benutzt, welche nicht reale, sondern ideale Bauelemente darstellen. Das Symbol für einen ohmschen Widerstand drückt aus, daß zwischen zwei Schaltungspunkten ein reiner Wirkwiderstand liegt. Der Strich als Symbol einer elektrischen Verbindung gibt an, daß zwei Schaltungspunkte mit unendlich kleinem Widerstand miteinander verbunden sind, z.B. durch einen unendlich gut leitenden Draht.

Ohmsche Widerstände, Spulen und Kondensatoren sind als ideale Bauelemente nicht zu verwirklichen. Eine Spule hat z.B. außer ihrer Induktivität stets auch einen ohmschen Widerstand, der durch den Widerstand des Drahtes gebildet wird. Zusätzlich bestehen zwischen den Windungen der Spule Kapazitäten. Bei gewickelten Drahtwiderständen bilden die Kapazitäten zwischen den Drahtwindungen eine Kapazität, welche dem idealen ohmschen Widerstand parallel liegt.

Diejenigen unerwünschten Größen, die ein reales Bauteil neben seiner erwünschten Haupteigenschaft besitzt, werden als **parasitäre** Größen bezeichnet. Ein ohmscher Widerstand hat parasitäre Kapazitäten und Induktivitäten. Eine Spule hat außer ihrer Haupteigenschaft der Induktivität auch einen parasitären ohmschen Widerstand und parasitäre Windungskapazitäten. Ein Kondensator hat wegen des nicht unendlich hohen Widerstandes des Dielektrikums einen parasitären Wirkwiderstand parallel zur idealen Kapazität liegen.

Häufig (besonders bei hohen Frequenzen) müssen parasitäre Größen von Bauteilen elektrischer Schaltungen berücksichtigt werden. Erfolgt dies nicht, so können reale Eigenschaften und Messungen aufgebauter Schaltungen erheblich von deren theoretischen Eigenschaften und Berechnungen abweichen.

Die Berücksichtigung parasitärer Größen bei realen Bauelementen erfolgt durch elektrische Schaltungen, die als **Ersatzschaltungen** bezeichnet werden. Diese Ersatzschaltungen sind in solcher Weise aus idealen Bauelementen zusammengesetzt, daß die Eigenschaften des betrachteten realen Bauteils genügend genau beachtet werden.

12.1 Die elektrische Leitung

Jede elektrische Leitung, z.B. eine Drahtleitung, hat einen Widerstand größer Null Ohm. Kann der Widerstand einer Leitung etwa wegen der großen Leitungslänge, des geringen Leiterquerschnitts oder des hohen spezifischen Widerstandes des Leitermaterials nicht vernachlässigt werden, so ist dies im Schaltbild durch einen ohmschen Widerstand zu berücksichtigen.

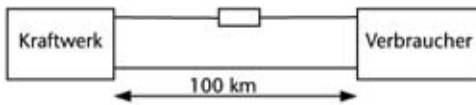


Abb. 200: Berücksichtigung des Leiterwiderstandes zwischen Kraftwerk und Verbraucher im Schaltbild

In obigem Beispiel wurde der Leitungswiderstand zwischen Stromquelle (Kraftwerk) und Verbraucher von Hin- und Rückleiter durch einen einzigen Widerstand berücksichtigt.

Jeder Draht hat eine gewisse Oberfläche, die als Elektrode eines Kondensators aufgefaßt werden kann. Zugleich besitzt ein Draht, auch wenn er nicht zu einer Spule aufgewickelt ist, eine bestimmte Induktivität. Eine Doppeldrahtleitung aus zwei parallel verlegten Drähten kann deshalb durch folgende Ersatzschaltung dargestellt werden.

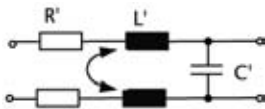


Abb. 201: Ersatzschaltung einer Doppeldrahtleitung

Anmerkung: Der Ableitungsbelag parallel zum Kapazitätsbelag wurde vernachlässigt.

Die auf eine Längeneinheit bezogenen Größen R' , L' und C' werden als **Leitungsbeläge** bezeichnet. Beispiel: $R' = 100 \text{ m}\Omega/\text{m}$, $L' = 600 \text{ nH}/\text{m}$, $C' = 50 \text{ pF}/\text{m}$. Durch die **induktive Kopplung** der Induktivitätsbeläge und die **kapazitive Kopplung** des Kapazitätsbelags kommt es bei parallel liegenden Signalleitungen zum sogenannten **Übersprechen**. Dabei werden die Signale der einen Leitung auf die andere Leitung übertragen und erscheinen dort als Störsignale. Um die Verkopplungen durch die Leitungsbeläge gering zu halten, verwendet man in der Praxis häufig verdrehte Leitungen.

12.2 Widerstand mit Eigenkapazität und Eigeninduktivität

Wird ein Draht mit hohem spezifischen Widerstand auf einen Keramikzylinder aufgewickelt, so erhält man einen Drahtwiderstand. Zwischen den einzelnen Drahtwindungen bestehen (unerwünschte) parasitäre Kapazitäten und Induktivitäten. Diese wirken zwischen den verschiedensten Stellen des Widerstandes und können zusammengefaßt werden. Näherungsweise kann dann ein Widerstand durch folgendes Ersatzschaltbild wiedergegeben werden.

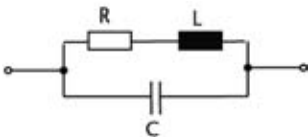


Abb. 202: Ersatzschaltung eines Widerstandes mit Eigeninduktivität L und Eigenkapazität C

Jeder ohmsche Widerstand enthält parasitäre Kapazitäten und Induktivitäten. Die Größen der Eigeninduktivität L und der Eigenkapazität C sind von der technischen Ausführung (Aufbau und Material) des jeweiligen Widerstandes abhängig. Gewinkelte Drahtwiderstände haben besonders hohe Eigeninduktivitäten und sind daher bei hohen Frequenzen ungeeignet.

Der Absolutwert des Scheinwiderstandes der Reihenschaltung aus R und L ist $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ und somit frequenzabhängig.

Schichtwiderstände in einer Ausführung als Rohrzylinder mit aufgebrachtter Widerstandsschicht sind sehr induktivitätsarm und verhalten sich auch hinsichtlich ihrer parasitären Kapazitäten günstig. Diese Gruppe von Widerständen ist deshalb auch für hohe Frequenzen besonders gut geeignet.

12.3 Verluste in Spulen

12.3.1 Wicklungsverluste

Verluste treten in einer Spule auf, wenn elektrische Energie in Wärme umgeformt wird. Durch den ohmschen Widerstand des Spulendrahtes enthält jede Spule neben ihrer Induktivität auch einen ohmschen Wirkwiderstand. Die bei Spulen verwendeten Frequenzen sind meistens nicht so hoch, daß die Windungskapazitäten für das elektrische Verhalten der Spule berücksichtigt werden müssen. Somit ergibt sich eine einfache Ersatzschaltung einer realen Spule für niedrige und mittlere Frequenzen.



Abb. 203: Ersatzschaltung einer Spule mit Wicklungswiderstand R und zugehöriges Widerstandsdreieck

Der Phasenwinkel φ der realen Spule weicht infolge des vorhandenen Wirkwiderstandes von 90° ab, der Strom eilt also der Spannung um weniger als 90° nach.

Der Winkel $\delta = 90^\circ - \varphi$ wird als **Verlustwinkel** bezeichnet. In der Praxis wird eine Spule durch ihren **Verlustfaktor** » $\tan(\delta)$ « bzw. durch ihre **Güte** » Q « charakterisiert.

Anmerkung: Allgemein ist der Verlustfaktor zur Beschreibung der Verluste in einem Zweipol definiert als

$$\tan(\delta) = \frac{\text{im Zweipol verbrauchte Wirkleistung}}{\text{vom Zweipol aufgenommene Blindleistung}} = \frac{\text{Wirkanteil des Scheinwiderstandes}}{\text{Blindanteil des Scheinwiderstandes}}$$

Gl. 85: Verlustfaktor einer Spule

$$\tan(\delta) = \frac{R}{\omega L} = \frac{1}{Q}$$

Gl. 86: Güte einer Spule

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\tan(\delta)}$$

Bei Gleichstrom werden die Verluste ausschließlich durch den ohmschen Widerstand R des Spulendrahtes verursacht. Bei Wechselstrom werden die Spulenverluste im wesentlichen durch drei Effekte zusätzlich erhöht.

12.3.2 Verluste durch den Skineffekt

Der erste Effekt ist der **Skineffekt**, der den ohmschen Widerstand des Drahtes vergrößert. Fließt durch einen Leiter Gleichstrom, so ist die Stromdichte, d.h. die Stromstärke pro mm^2 Leiterquerschnitt, über den ganzen Leiterquerschnitt gleich. Der Skineffekt (Hauteffekt) besagt, daß bei sehr hohen Frequenzen der Strom fast nur noch in einer dünnen Schicht an der Leiteroberfläche fließt, während tiefer im Inneren des Leiters fast kein Strom mehr fließt. Der Grund hierfür ist, daß vor allem in der Leitermitte durch Induktion eine Gegenspannung erzeugt wird, deren Größe zur Leiteroberfläche hin exponentiell abnimmt. Als Folge fließen im Inneren des Leiters keine Elektronen und die Stromdichte nimmt in Richtung zur Leiteroberfläche hin zu. **Der Skineffekt erhöht also den ohmschen Widerstand eines Leiters**, da das Innere des Leiters weitgehend stromlos ist und somit der wirksame Leiterquerschnitt verringert wird. Die ungleichmäßige Verteilung des Stromes über den Leiterquerschnitt wird als **Stromverdrängung** bezeichnet.

Der Skineffekt nimmt mit steigender Frequenz zu. Bei Hochfrequenz fließt der gesamte Strom nur auf der Leiteroberfläche.

Bei 0,5 MHz beträgt die Eindringtiefe bei einem Kupferdraht 0,1 mm, bei 50 MHz nur noch 10 μm .

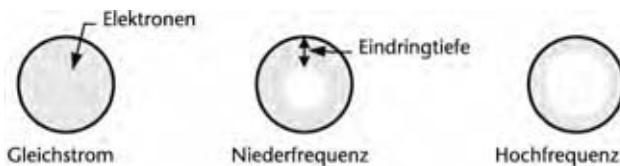


Abb. 204: Schematische Darstellung der Stromverdrängung bei verschiedenen Frequenzen (Querschnitt durch einen Draht)

Eine gute Ausnützung des Leiterquerschnitts erhält man, wenn der Radius des Leiters etwa so groß wie die Eindringtiefe gewählt wird. Spulen aus so dünnem Draht hätten einen hohen ohmschen Widerstand. Deshalb schaltet man eine Anzahl sehr dünner isolierter Einzeldrähte parallel. Die Adern (Einzeldrähte) sind so miteinander verdreht, daß jede einzelne Ader einmal in der Mitte und dann wieder außen liegt. Man erhält so eine Hochfrequenzlitze (**HF-Litze**) mit gleichmäßiger Stromverteilung und geringem Widerstand für Wechselstrom. Der Anwendungsbereich von HF-Litze liegt in einem Frequenzbereich von ca. 100 kHz bis 4 MHz. In der Praxis ist darauf zu achten, daß alle Drähtchen der Spulenanschlüsse sauber von der Isolation befreit und beim Verlöten angeschlossen werden.

Die Auswirkung der Stromverdrängung bei hohen Frequenzen läßt sich auch verringern, indem man den Durchmesser, und damit die Oberfläche des Leiters vergrößert, und außerdem die Oberfläche des Leiters versilbert. Dies führt zu oberflächenversilberten Luftspulen mit hoher Güte.

12.3.3 Hystereseverluste

Der zweite Effekt wird bei Spulen mit ferromagnetischem Kern (zur Erhöhung der Induktivität ohne Mehrwindungen) durch die sogenannten **Hystereseverluste** (Ummagnetisierungsverluste) hervorgerufen. Fließt durch eine Spule mit Eisenkern ein Wechselstrom, so wird in jeder Stromperiode die Hystereseschleife durchlaufen. Die von der Hysteresekurve eingeschlossene Fläche entspricht einer Energie, die während jeder Periode aufgebracht werden muß und in Wärme umgewandelt wird. Der Spulenkern erwärmt sich. Da die Weißschen Bezirke durch das magnetische Wechselfeld ständig umklappen, steigen die Hystereseverluste mit zunehmender Frequenz. Die Hystereseverluste werden klein, wenn das ferromagnetische Kernmaterial eine schmale Hystereseschleife mit geringer Remanenz und geringer Koerzitivkraft besitzt.

12.3.4 Wirbelstromverluste

Ein dritter Effekt, der bei Wechselstrom die Verluste von Spulen mit Kern erhöht, sind die **Wirbelstromverluste**. Durchdringt ein sich änderndes Magnetfeld ein elektrisch leitendes Material (z.B. ein Metallteil), so werden in diesem durch Induktion Spannungen erzeugt. Das Metallteil stellt einen in sich geschlossenen Stromkreis dar. Auf Grund des Induktionsgesetzes und der Lenzschen Regel fließen im Metallteil Ströme in solcher Richtung, daß das magnetische Feld im Metallteil geschwächt wird. Da die Wege dieser Ströme nicht exakt festliegen, spricht man von **Wirbelströmen**.

Wirbelströme im Spulenkern verkleinern die Induktivität der Spule, erwärmen den Kern und stellen somit Verluste dar. Wirbelstromverluste steigen proportional mit dem Quadrat der Frequenz an. Wirbelströme werden vermieden bzw. klein gehalten, wenn als Kernmaterial elektrisch nichtleitendes oder schlechtleitendes Material (mit trotzdem hoher Permeabilität) verwendet wird. Bei Eisenkernen und niedrigen Frequenzen werden Wirbelströme weitgehend vermieden, wenn der Kern aus einem Stapel dünner, voneinander isolierter Bleche besteht (Beispiel: Transformator). Bei höheren Frequenzen müssen die Kerne feiner unterteilt werden. **Ferritkerne** bestehen aus Eisenoxydverbindungen und haben magnetische Eigenschaften. Sie sind aber gleichzeitig Isolierstoffe, in ihnen können fast keine Wirbelströme entstehen, die Wirbelstromverluste sind sehr gering.

12.4 Verluste im Kondensator

Das Dielektrikum eines Kondensators besitzt stets eine gewisse Leitfähigkeit, auch wenn diese noch so gering ist. Wird ein Kondensator an Gleichspannung betrieben, so ergibt sich durch den endlichen Isolationswiderstand ein sehr kleiner Leckstrom. Der Isolationswiderstand ist jedoch im allgemeinen so groß, daß er vernachlässigt werden kann. Ebenso kann in der Regel der sehr kleine Zuleitungswiderstand vernachlässigt werden. Ist bei Betrieb mit Wechselspannung die Frequenz nicht sehr hoch, so kann auch die Eigeninduktivität des Kondensators vernachlässigt werden.

Wesentlich wichtiger ist bei Betrieb des Kondensators mit Wechselspannung, daß die Dipole im Dielektrikum durch die Wechselspannung ständig umorientiert werden. Hierdurch wird im Dielektrikum Wärme erzeugt. Dieser Verlust könnte mit dem Ummagnetisierungsverlust im Eisen verglichen werden. Der Verlust ist hauptsächlich von der Beschaffenheit des Dielektrikums abhängig und steigt mit zunehmender Frequenz. In der Ersatzschaltung des realen Kondensators ergibt sich ein Wirkwiderstand (Verlustwiderstand) parallel zum idealen Kondensator.

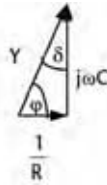
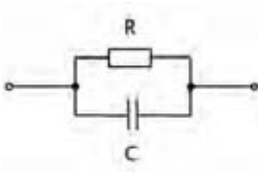


Abb. 205: Ersatzschaltung eines Kondensators mit Verlustwiderstand R und zugehöriges Leitwertdreieck

Der Phasenwinkel φ des realen Kondensators weicht infolge des vorhandenen Wirkwiderstandes von 90° ab, der Strom eilt also der Spannung um weniger als 90° voraus. Der Winkel δ ist der Verlustwinkel. Der Verlustfaktor eines Kondensators ist definiert als der Tangens des Winkels δ .

Gl. 87: Verlustfaktor eines Kondensators

$$\tan(\delta) = \frac{1}{\omega RC}$$

In den Datenblättern der Hersteller wird die Abhängigkeit des Verlustfaktors $\tan(\delta)$ von der Frequenz angegeben.

Aufgabe 49:

Für die Frequenz $f = 5 \text{ kHz}$ ist die Ersatzschaltung eines Kondensators durch die Parallelschaltung einer Kapazität $C = 100 \text{ nF}$ und des Verlustwiderstandes $R = 5 \text{ M}\Omega$ gegeben. Wie groß sind der Verlustfaktor $\tan(\delta)$ und der Verlustwinkel δ ?

Lösung:

$$\tan(\delta) = \frac{1}{\omega RC} = \frac{1}{5 \cdot 10^6 \Omega \cdot 2\pi \cdot 5000 \text{ Hz} \cdot 10^{-7} \text{ F}} = 6,4 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \delta = 0,0036^\circ$$

12.5 Zusammenfassung: Ersatzschaltungen für Bauelemente

1. Ideale Bauelemente sind nicht realisierbar, reale Bauelemente besitzen parasitäre Größen.
2. Reale Bauelemente werden durch Ersatzschaltungen, die aus idealen Bauelementen zusammengesetzt sind, beschrieben.
3. Durch induktive oder kapazitive Kopplung erfolgt ein Übersprechen zwischen Leitungen (Einkopplung von Störungen).
4. Ein ohmscher Widerstand hat eine Eigeninduktivität und eine Eigenkapazität.
5. Der Verlustfaktor einer Spule ist $\tan(\delta) = \frac{R}{\omega L} = \frac{1}{Q}$ R = Wicklungswiderstand, Q = Güte
6. Bei Wechselstrom erhöht der Skineneffekt den Wirkwiderstand eines Leiters.
7. Bei Spulen mit Kern entstehen Hystereseverluste (Ummagnetisierungsverluste) und Wirbelstromverluste.
8. Der Verlustfaktor eines Kondensators ist $\tan(\delta) = \frac{1}{\omega RC}$ R = Verlustwiderstand

13 Leistung im Wechselstromkreis

13.1 Reine Wirkleistung

Liegt ein ohmscher Widerstand an einer Wechselspannungsquelle, so sind Strom und Spannung in Phase. Die vom Generator an den Widerstand abgegebene Leistung errechnet sich aus $p = u \cdot i$. Die Leistung p wird im Widerstand vollständig in Wärme umgesetzt. Da der Strom im ohmschen Widerstand eine Wärme erzeugt, also eine Wirkung hervorruft, wird der Widerstand **Wirkwiderstand** und die Leistung **Wirkleistung** genannt.

Ist die an R liegende Spannung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$, so ist der im Kreis fließende Strom $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t)$. Somit ist $p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin^2(\omega t)$. Die Leistung p wird als **Augenblicksleistung** bezeichnet.

Im allgemeinen ist der Augenblickswert einer Leistung nicht von Interesse. Es interessiert vielmehr die mittlere Leistung (der zeitliche oder arithmetische Mittelwert der Leistung), welche dem Verbraucher zugeführt wird. Die **mittlere Leistung** ist als **Wirkleistung** definiert.

Die mittlere Leistung erhält man, indem über eine Periodendauer integriert, und durch die Periodendauer T dividiert wird.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U} \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega t) dt = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \quad \text{Mit den Effektivwerten } U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \text{ und } I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \text{ erhält man}$$

durch Einsetzen von $\hat{U} = U\sqrt{2}$ und $\hat{I} = I\sqrt{2}$ in die Wirkleistung $P = U \cdot I$. Sie hat wie die Leistung im Gleichstromkreis die Einheit Watt.

Gl. 88: Wirkleistung am ohmschen Widerstand

$$P = U \cdot I$$

P = Wirkleistung in Watt
 U = Effektivwert der Spannung
 I = Effektivwert des Stromes

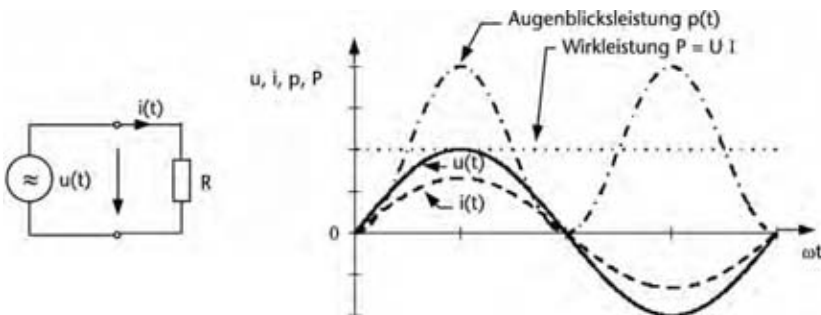


Abb. 206: Zeitlicher Verlauf von Spannung, Strom, Augenblicksleistung und Wirkleistung am ohmschen Widerstand

Man beachte, daß die Werte der Augenblicksleistung am ohmschen Widerstand stets positiv sind.

13.2 Reine Blindleistung

Wird ein Kondensator an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen, so eilt der Strom der Spannung um 90° voraus. Die am Kondensator liegende Spannung ist $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$, der Strom ist $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$.

Die Leistung errechnet sich aus $p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)$.

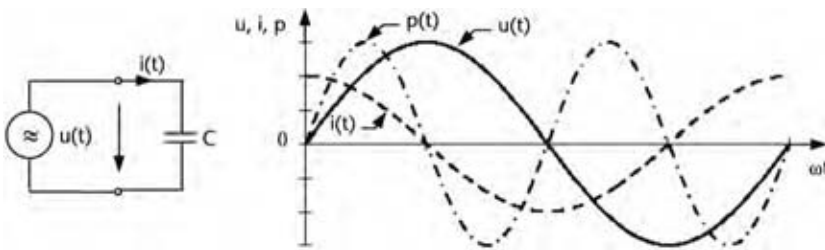


Abb. 207: Zeitlicher Verlauf von Spannung, Strom und Augenblicksleistung am Kondensator

Wie aus obiger Abbildung zu sehen ist, ergeben sich für die Augenblicksleistung abwechselnd positive und negative Werte. Über eine Periode gesehen ist der Mittelwert Null. Dies bedeutet:

Ein idealer Kondensator nimmt keine Wirkleistung auf.

Die Wirkleistung ist zwar Null, die Augenblicksleistung nimmt jedoch von Null aus verschiedene Werte an. In der ersten Viertelperiode der Spannung ist die Augenblicksleistung positiv. Der Kondensator wird aufgeladen, aus der Spannungsquelle fließt Energie in den Kondensator hinein. In der zweiten Viertelperiode der Spannung ist die Augenblicksleistung negativ. Der Kondensator entlädt sich, wobei die im Kondensator gespeicherte Energie in die Spannungsquelle zurückfließt. In der anschließenden negativen Halbschwingung der Spannung wiederholt sich dieser Vorgang entsprechend. Zwischen Spannungsquelle und Kondensator fließt also dauernd Energie hin und her. Die dabei auftretende Leistung ändert periodisch ihre Richtung, ihr Mittelwert ist Null.

Diese Leistung ruft keine Wärmewirkung hervor, sie wird als **Blindleistung** bezeichnet.

Wird der Kondensator in Abb. 207 durch eine Spule ersetzt, so laufen die Vorgänge analog ab. Die in einer Viertelperiode von der Spannungsquelle gelieferte Energie wird im Magnetfeld der Spule gespeichert und fließt in der nächsten Viertelperiode in die Spannungsquelle zurück.

Eine ideale Spule nimmt keine Wirkleistung auf.

Zur quantitativen Angabe der Blindleistung wurde für einen Verbraucher, der aus einem reinen Blindwiderstand besteht, folgendes festgelegt:

Der Betrag der Blindleistung ist das Produkt der Effektivwerte von Spannung und Strom.

Das Formelzeichen für die Blindleistung ist »Q«.

Zur Unterscheidung von der Wirkleistung wird für die Blindleistung als Einheit nicht »Watt« verwendet, sondern »var«.

Das Einheitenzeichen für die Blindleistung ist »var«. (var = Voltampère réactif)

Ist der Verbraucher induktiv, so ist der Strom durch die Spule $I = \frac{U}{\omega L}$. Daraus folgt:

Gl. 89: Induktive Blindleistung einer Spule

$$Q_L = U \cdot I = I^2 \cdot \omega L = \frac{U^2}{\omega L}$$

Ist der Verbraucher kapazitiv, so ist der Strom durch den Kondensator $I = U \cdot \omega C$. Daraus folgt:

Gl. 90: Kapazitive Blindleistung eines Kondensators

$$Q_C = U \cdot I = U^2 \cdot \omega C = \frac{U^2}{\omega C}$$

13.3 Wirk- und Blindleistung

In den beiden vorhergehenden Abschnitten bestand der Verbraucher entweder aus einem reinen Wirkwiderstand oder aus einem reinen Blindwiderstand. Besteht der Verbraucher aus einem Scheinwiderstand (Widerstand mit Wirk- und Blindanteil), so kann er stets als Reihenschaltung eines Wirkwiderstandes und eines Blindwiderstandes dargestellt werden (eine Parallelschaltung kann stets in eine Reihenschaltung umgewandelt werden). Im Scheinwiderstand wird eine dem Wirkanteil entsprechende Wirkleistung und eine dem Blindanteil entsprechende Blindleistung erzeugt. Wirkleistung und Blindleistung sind vom Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung abhängig. Dieser Sachverhalt sei an einer Reihenschaltung aus ohmschen Widerstand und Spule erläutert.

In der folgenden Abbildung ist noch einmal das Zeigerdiagramm der RL-Reihenschaltung gezeigt. Sind U und I die Effektivwerte der Spannung und des Stromes, so ist die Teilspannung am Widerstand $U_R = R \cdot I$ und die Teilspannung an der Spule $U_L = \omega L \cdot I$. Mit den Winkelbeziehungen des rechtwinkligen Dreiecks lassen sich die Teilspannungen auch ausdrücken als

$$U_R = U \cdot \cos(\varphi) \text{ und } U_L = U \cdot \sin(\varphi).$$

Die Wirkleistung, welche dem ohmschen Widerstand zugeführt wird, läßt sich somit wiedergeben als $P = U_R \cdot I = U \cdot I \cdot \cos(\varphi)$. Die Blindleistung, die der Spule zugeführt wird, ist $Q = U_L \cdot I = U \cdot I \cdot \sin(\varphi)$. Die gleichen Beziehungen erhält man, wenn die Spule durch einen Kondensator ersetzt wird.

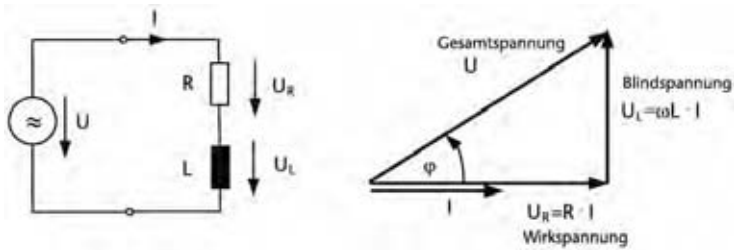


Abb. 208: RL-Reihenschaltung an sinusförmiger Wechselspannung mit Zeigerbild

Gl. 91: Wirkleistung am Scheinwiderstand

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi)$$

 U, I = Effektivwerte φ = Phasenwinkel

Gl. 92: Blindleistung am Scheinwiderstand

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi)$$

13.4 Scheinleistung

Bei einem beliebigen Verbraucher ist die Scheinleistung des Wechselstroms das Produkt aus Effektivspannung und Effektivstrom.

Gl. 93: Definition der Scheinleistung

$$S = U \cdot I$$

 U, I = Effektivwerte

Das Formelzeichen für die Scheinleistung ist »S«.

Zur Unterscheidung von Wirk- und Blindleistung wird die Einheit der Scheinleistung in »Volt Ampere« (Abkürzung: VA) angegeben.

Das Einheitenzeichen für die Scheinleistung ist »VA«.

Aus Gl. 91, Gl. 92 und Gl. 93 ergeben sich:

Gl. 94: Beziehung zwischen Wirk- und Scheinleistung

$$P = S \cdot \cos(\varphi)$$

Gl. 95: Beziehung zwischen Blind- und Scheinleistung

$$Q = S \cdot \sin(\varphi)$$

Die Leistungsgrößen S , P und Q lassen sich in Form eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen, welches als **Leistungsdreieck** bezeichnet wird und die Beziehung zwischen Schein-, Wirk- und Blindleistung wiedergibt.

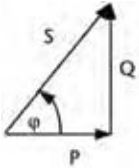


Abb. 209: Leistungsdreieck

Gl. 96: Beziehung zwischen Schein-, Wirk- und Blindleistung

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

Die Scheinleistung ist die geometrische Summe aus Wirk- und Blindleistung.

Die Wirkleistung ist stets kleiner oder höchstens gleich der Scheinleistung.

Das Verhältnis von Wirkleistung zu Scheinleistung nennt man **Leistungsfaktor**.

Gl. 97: Definition des Leistungsfaktors

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$$

Bei der Leistung im Wechselstromkreis sind folgende Fälle zu unterscheiden:

- Im Stromkreis befindet sich nur ein ohmscher Widerstand. Es besteht keine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom, daher ist $\cos(\varphi) = 1$. In diesem Fall ist die Wirkleistung gleich der Scheinleistung.
- Im Stromkreis befindet sich entweder nur ein induktiver, oder nur ein kapazitiver Blindwiderstand. Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom ist dann $\pm 90^\circ$, also $\cos(\varphi) = 0$. In diesem Fall ist die Wirkleistung gleich Null, obwohl im Stromkreis ein Wechselstrom fließt (»wattloser Strom«). Die Scheinleistung ist gleich der Blindleistung.
- Im Stromkreis sind Widerstände verschiedener Art vorhanden (Wirk- und Blindwiderstand). Je größer die Phasenverschiebung ist, um so höher muß die Stromstärke des Wechselstroms sein, damit eine bestimmte Leistung an den Verbraucher abgegeben wird. Der Anteil der Blindleistung pendelt zwischen Verbraucher und Spannungsquelle nutzlos hin und her und belastet zusätzlich die Leitungen der Stromversorgung. Der Phasenwinkel φ muß deshalb möglichst klein gehalten werden.

13.5 Blindleistungskompensation

Die unerwünschte Blindleistung wird kleiner, je kleiner der Phasenwinkel φ ist. Bei Verbrauchern mit überwiegend induktivem Widerstand (z.B. Transformatoren, Motorwicklungen) erreicht man eine Verkleinerung des Phasenwinkels durch zusätzliches Parallelschalten eines Kondensators zum Verbraucher. Der parallel geschaltete Kondensator wird als **Phasenschieber**-

kondensator bezeichnet. Die Wirkungsweise dieses Kondensators sei durch die folgende Schaltung erläutert.

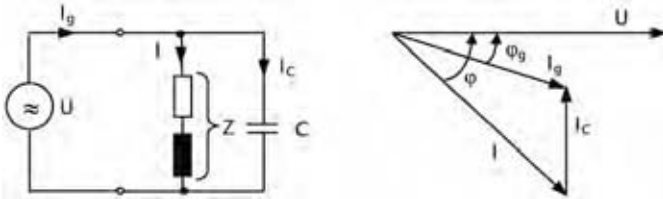


Abb. 210: Ohmsch-induktiver Verbraucher mit Phasenschieberkondensator zur Blindleistungskompensation, Schaltung (links) und Zeigerdiagramm (rechts)

Der Strom I durch den ohmsch-induktiven Verbraucher eilt der Spannung U um den Phasenwinkel φ nach. Der Strom I_C durch den Kondensator eilt der Spannung U um 90° voraus. Werden die Ströme I und I_C geometrisch addiert, so ergibt sich der von der Spannungsquelle gelieferte Gesamtstrom I_g , welcher der Spannung U nur noch um den kleineren Phasenwinkel φ_g nachhinkt. Durch den parallel geschalteten Kondensator nimmt der Strom I auf I_g ab. Sowohl die Spannungsquelle als auch die Leitungen zum Verbraucher werden dadurch entlastet.

Der vom ohmsch-induktiven Verbraucher aufgenommene induktive Blindstrom wird durch den entgegengesetzt gerichteten kapazitiven Blindstrom ganz oder teilweise (je nach Größe der Kapazität C) kompensiert. Man spricht von einer Blindstrom- oder Blindleistungskompensation.

Die Kapazität C kann so gewählt werden, daß der Gesamtleistungsfaktor $\cos(\varphi_g) = 1$ wird. In der Praxis erfolgt nur eine Kompensation auf ca. $\cos(\varphi_g) = 0,9$. Eine größere Kompensation würde den Gesamtstrom nur wenig verringern. Es gelten folgende Formeln:

Gl. 98: Berechnung der kompensierten Blindleistung ΔQ

$$\Delta Q = P \cdot \left(\tan(\varphi) - \tan(\varphi_g) \right)$$

φ = Phasenwinkel ohne Kondensator

φ_g = Phasenwinkel mit Kondensator

P = Wirkleistung

U = effektive Spannung

Gl. 99: Berechnung der nötigen Kapazität

$$C = \frac{P}{U^2 \cdot \omega} \left(\tan(\varphi) - \tan(\varphi_g) \right)$$

Aufgabe 50:

Ein Verbraucher liegt an der Netzwechselspannung mit $U = 220 \text{ V}$ und nimmt den Strom $I = 3 \text{ A}$ auf. Die Spannung eilt dem Strom um $\varphi = 35^\circ$ voraus.

Wie groß sind Wirkleistung, Blindleistung, Scheinleistung und der Leistungsfaktor des Verbrauchers?

Lösung:

Zuerst wird die Scheinleistung berechnet. $S = U \cdot I = 220 \text{ V} \cdot 3 \text{ A} = 660 \text{ VA}$.

Die Blindleistung ist $Q = S \cdot \sin(\varphi) = 660 \text{ VA} \cdot \sin(35^\circ) = 379 \text{ var}$

Die Wirkleistung ist $P = S \cdot \cos(\varphi) = 541 \text{ W}$

Der Leistungsfaktor ist $\cos(\varphi) = \cos(35^\circ) = 0,819$.

Aufgabe 51:

Eine Bohrmaschine mit dem Leistungsfaktor $\cos(\varphi) = 0,9$ wird an der Netzsteckdose ($U = 220 \text{ V}$) betrieben und nimmt die Wirkleistung $P = 1 \text{ kW}$ auf. Wie groß ist der Strom I ?

Lösung:

$$I = \frac{P}{U \cdot \cos(\varphi)} = \frac{1000 \text{ W}}{220 \text{ V} \cdot 0,9} = 5,05 \text{ A}$$

Aufgabe 52:

Ein Elektromotor hat einen Leistungsfaktor $\cos(\varphi) = 0,5$. Er wird mit der Netzwechselspannung $U = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$ betrieben, wobei er die Wirkleistung $P = 700 \text{ W}$ aufnimmt. Durch Parallelschalten eines Kondensators soll der Leistungsfaktor auf $\cos(\varphi) = 0,9$ erhöht werden.

- Welchen Strom I nimmt der Motor ohne Kondensator auf?
- Wie groß muß die Kapazität des Kondensators sein?
- Wie groß ist der Strom bei einem parallelgeschalteten Kondensator?
- Wie groß ist die kompensierte Blindleistung?

Lösung:

$$\text{a) } I = \frac{P}{U \cdot \cos(\varphi)} = \frac{700 \text{ W}}{220 \text{ V} \cdot 0,5} = 6,36 \text{ A}$$

b) Aus $\cos(\varphi) = 0,5$ folgt der Phasenwinkel $\varphi = \arccos(0,5) = 60^\circ$ ohne Kondensator.

Aus $\cos(\varphi) = 0,9$ folgt der Phasenwinkel $\varphi = \arccos(0,9) = 25,8^\circ$ mit Kondensator.

$$\text{Aus } C = \frac{P}{U^2 \cdot \omega} (\tan(\varphi) - \tan(\varphi_g)) \text{ folgt } C = \frac{700 \text{ W}}{(220 \text{ V})^2 \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz}} (\tan(60^\circ) - \tan(25,8^\circ)) = 57,5 \mu\text{F}$$

$$\text{c) } I = \frac{P}{U \cdot \cos(\varphi)} = \frac{700 \text{ W}}{220 \text{ V} \cdot 0,9} = 3,54 \text{ A}$$

$$\text{d) } \Delta Q = P \cdot (\tan(\varphi) - \tan(\varphi_g)) = 700 \text{ W} \cdot (\tan(60^\circ) - \tan(25,8^\circ)) = 874 \text{ var}$$

13.6 Zusammenfassung: Leistung im Wechselstromkreis

- Ein ohmscher Widerstand ist ein Wirkwiderstand (Wärmewirkung, Wirkleistung).
- Die Wirkleistung am ohmschen Widerstand ist $P = U \cdot I$.
- Als Wirkleistung ist der zeitliche Mittelwert der Augenblicksleistung definiert.

4. Ein idealer Kondensator und eine ideale Spule nehmen keine Wirkleistung, sondern nur eine Blindleistung auf.
5. Formelzeichen Wirkleistung: P , Einheit: W (Watt)
6. Formelzeichen Blindleistung: Q , Einheit: var
7. Formelzeichen Scheinleistung: S , Einheit: VA (Volt · Ampere)
8. Wirkleistung P und Blindleistung Q am Scheinwiderstand:

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi)$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi)$$

9. Definition der Scheinleistung: $S = U \cdot I$ U, I = Effektivwerte
10. Beziehungen zwischen Wirk-, Blind- und Scheinleistung:

$$P = S \cdot \cos(\varphi)$$

$$Q = S \cdot \sin(\varphi)$$

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

11. Definition des Leistungsfaktors: $\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$

12. Mit einem Phasenschieberkondensator kann an einem ohmsch-induktiven Verbraucher eine Blindleistungskompensation erfolgen.

14 Transformatoren (Übertrager)

14.1 Grundprinzip

Die magnetischen Feldlinien einer stromdurchflossenen Spule verlaufen zum Teil auch durch eine zweite Spule, die sich in der Nähe befindet. Man sagt: Die Spulen sind **magnetisch gekoppelt**. Bei einem Transformator wird die aus einer Spannungsquelle gespeiste Primärspule als **Primärwicklung (P)**, und die magnetisch gekoppelte Sekundärspule als **Sekundärwicklung (S)** bezeichnet. Man spricht von der Primärseite (Eingangsseite) und Sekundärseite (Ausgangsseite) des Transformators.

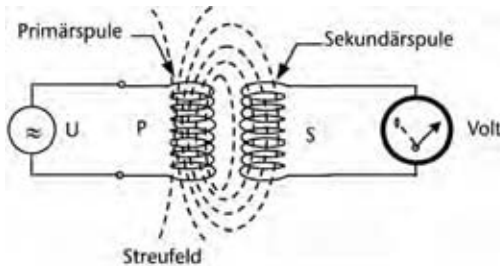


Abb. 211: Prinzip des Transformators, magnetisch gekoppelte Spulen

Durchdringen **alle** Feldlinien, die in der Primärspule erzeugt werden, auch die Sekundärspule, so ist die Kopplung **fest** (100 %-ige Kopplung, **Kopplungsfaktor** $k = 1$), ansonsten wird die Kopplung als **lose** bezeichnet ($k < 1$).

Eine 100 %-ige Kopplung ist nur theoretisch möglich und nur annähernd (z.B. $k = 0,98$) mit einem geschlossenen Kern aus ferromagnetischem Material (Eisenkern) realisierbar. Als **Streu-feld** wird derjenige Teil des magnetischen Feldes bezeichnet, der die Sekundärspule nicht durchdringt.

Ein Transformator besteht normalerweise aus zwei Spulen. Beide Spulen werden von einem wechselnden Magnetfeld durchdrungen, welches in der Primärspule durch Anlegen einer Wechselspannung beliebiger Frequenz erzeugt wird. In der Sekundärspule erzeugt das wechselnde Magnetfeld durch Induktion eine Wechselspannung gleicher Frequenz.

In der Praxis spricht man von einem Transformator (kurz Trafo), wenn ein Einsatz zur Energieübertragung erfolgt (übertragene Leistung $> \text{ca. } 1 \text{ Watt}$). Netztransformatoren dienen meistens zur Erniedrigung, aber auch zur Erhöhung der Netzspannung, werden also nur bei einer festen Frequenz (z.B. 50 Hz) betrieben. Dient ein Transformator weniger der Energieübertragung, sondern wird in der Nachrichtentechnik eingesetzt, so wird er gewöhnlich als **Übertrager** bezeichnet. Übertrager müssen im allgemeinen ein breites Frequenzband übertragen. Dies erfordert geringe Streuinduktivitäten und geringe Wicklungskapazitäten.

Praktische Anwendungsbeispiele eines Übertragers sind:

- Transformation eines Widerstandes auf einen gewünschten Wert, z.B. Anpassung eines Verbrauchers an den Innenwiderstand einer Quelle
- Potentialtrennung (galvanische Trennung), z.B. Abtrennen einer Gleichspannung.

14.2 Transformator mit Eisenkern

Damit möglichst alle in der Primärspule erzeugten Magnetfeldlinien die Sekundärspule durchsetzen, verwendet man einen geschlossenen Eisenkern aus Blechen, auf den sowohl Primär- als auch Sekundärwicklung aufgebracht sind.

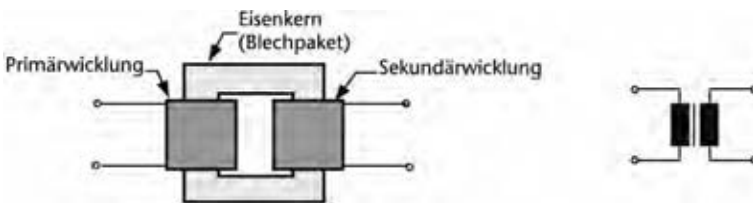


Abb. 212: Transformator mit Eisenkern, Prinzip (links) und Schaltzeichen (rechts)

Kleintransformatoren für die Netzfrequenz und den Niederfrequenzbereich sind auf diese Weise aufgebaut. Der Blechkern wird in genormten Größen hergestellt und besteht aus Blechen mit einer Dicke von ca. 0,05 mm bis 1 mm. Die Bleche sind gegenseitig durch eine dünne Oxydschicht oder Papier isoliert. Durch die Aufteilung des Kerns in einzelne Lamellen wird die Bildung starker Wirbelströme verhindert, und die Wirbelstromverluste werden reduziert.

Je nach Form der Bleche unterscheidet man z.B. zwischen M-Schnitt und EI-Schnitt. Beim M-Schnitt läßt sich die einseitig losgestanzte Mittelzunge in den Spulenkörper einführen. Ist ein Luftspalt notwendig, so wird dieser durch eine Verkürzung der Mittelzunge realisiert. Die Bleche werden dann einseitig geschichtet, d.h. immer von der gleichen Seite in den Spulenkörper eingeführt. Ist ein Luftspalt unerwünscht, so schichtet man die Bleche wechselseitig, die Mittelzunge wird einmal von der einen Seite und dann von der anderen Seite in den Spulenkörper eingeführt. Die einzelnen Bleche werden über Schrauben zusammengehalten. Die Außenfläche des Eisenkerns ist mit Lack gegen Korrosion geschützt. Mit angeschraubten Winkeln läßt sich der Transformator auf einem Chassis befestigen. Der Spulenkörper besteht häufig aus einem Stück Kunststoff oder Hartpapier, welches auf der Mittelzunge sitzt, und auf dem Primär- und Sekundärwicklung übereinander gewickelt sind. Prinzipiell können Primär- und Sekundärwicklung übereinander, nebeneinander oder auch getrennt auf zwei Schenkeln des Eisenkerns angebracht werden. In den Spulenkörper können auch Lötflächen als elektrische Anschlüsse eingepresst sein. Es sei erwähnt, daß derart aufgebaute Netztransformatoren häufig Brummgeräusche durch die Transformatorbleche verursachen.

Bei den teureren, sogenannten Schnittbandkernen hält ein Spannband den Transformator zusammen und vermeidet Brummgeräusche. Zusätzlich sind bei Schnittbandkernen die Bleche dünner. Durch spezielle Zusammensetzung und Behandlung der Bleche ergeben sich geringe

Ummagnetisierungsverluste und eine geringe magnetische Streuung, die Verlustleistung ist besonders klein.

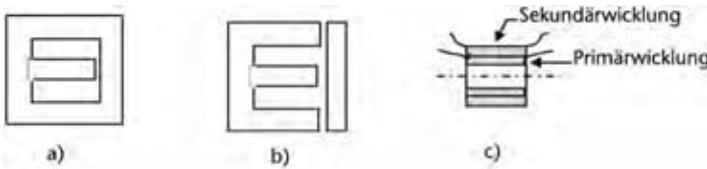


Abb. 213: Kernblech mit M-Schnitt (a), EI-Schnitt (b) und Spulenkörper mit Wicklungen (c)

14.3 Der verlustlose streufreie Transformator

Um die Wirkungsweise des Transformators näher zu erläutern, sei die Anordnung in der nachfolgenden Abbildung betrachtet.

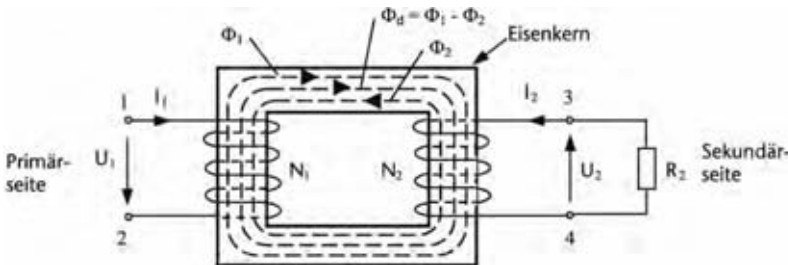


Abb. 214: Zur Wirkungsweise des Transformators

An die Primärwicklung mit N_1 Windungen ist zwischen den Klemmen 1 und 2 eine ideale, sinusförmige Spannungsquelle U_1 angeschlossen. Der Strom I_1 ruft einen magnetischen Fluß Φ_1 hervor, der auch die Sekundärwicklung mit N_2 Windungen durchsetzt. Die Richtung von Φ_1 ergibt sich aus der Schraubenregel (= Korkenzieherregel). Da der Transformator als streufrei angenommen wird, durchsetzt Φ_1 die Sekundärwicklung vollständig (zu 100 %). Nach dem Induktionsgesetz wird durch Φ_1 in der Sekundärwicklung eine Spannung U_2 induziert. Da an der Ausgangsseite ein Verbraucher R angeschlossen ist, fließt im Sekundärkreis ein Strom I_2 , der einen magnetischen Fluß Φ_2 erzeugt. Nach der Regel von Lenz ist I_2 so gerichtet, daß das durch ihn erzeugte Magnetfeld (bzw. der Fluß Φ_2) dem induzierenden Fluß Φ_1 entgegengerichtet ist. Der Windungssinn der Sekundärwicklung ist linksgängig: Blickt man von Klemme 3 oder 4 ausgehend in Richtung der Längsachse der Sekundärwicklung, so ist diese links herum aufgewickelt. Aus der Regel von Lenz, dem Windungssinn der Sekundärwicklung und der Schraubenregel läßt sich die Richtung von I_2 feststellen. Der Strom I_2 muß in Klemme 3 hinein- und aus Klemme 4 herausfließen, nur dann sind Φ_1 und Φ_2 entgegengerichtet. Für eine positive Zählpfeilrichtung ist bei diesen Verhältnissen die Richtung des Zählpfeils der Spannung U_2 von Klemme 4 zur Klemme 3.

Wäre der Windungssinn der Sekundärwicklung rechtsgängig, so würden sich die Richtungen von I_2 und U_2 umdrehen.

Die Polarität der Ausgangsspannung ist vom Windungssinn der Primär- und Sekundärwicklung abhängig. Die Phasenverschiebung der Ausgangsspannung gegen die Eingangsspannung ist 0° oder 180° . Dies wird im Schaltbild des Übertragers oft durch einen Punkt an einer der Anschlußklemmen der Primär- und Sekundärseite gekennzeichnet.



Abb. 215: Schaltsymbol des Übertragers mit Kennzeichnung der Polarität

14.3.1 Transformation der Spannungen

Primär- und Sekundärwicklung werden von der Differenz Φ_d der magnetischen Flüsse Φ_1 und Φ_2 durchsetzt ($\Phi_d = \Phi_1 - \Phi_2$). In der Primärwicklung wird durch Φ_d die Spannung $U_1 = N_1 \cdot \frac{d\Phi_d}{dt}$

und in der Sekundärwicklung die Spannung $U_2 = N_2 \cdot \frac{d\Phi_d}{dt}$ induziert. Durch Division folgt hier-

$$\text{aus: } \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Für die Transformation der Spannungen gilt somit:

Gl. 100: Verhältnis von Primär- zu Sekundärspannung in Abhängigkeit der Windungszahlen (a) und Induktivitäten (b) von Primär- und Sekundärwicklung

$$(a) \quad \boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u}} \quad \text{und (ohne Herleitung): (b) } \boxed{\frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \ddot{u}}$$

Die Spannungen verhalten sich direkt wie die Windungszahlen.

Das Verhältnis der Windungszahlen wird auch als Übersetzungsverhältnis » $\ddot{u}$ « bezeichnet.

14.3.2 Transformation der Stromstärken

Unter der Voraussetzung, daß keine Verluste auftreten, ist die an der Sekundärseite abgegebene Leistung gleich der an der Primärseite aufgenommenen Leistung: $P = U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2$. Daraus folgt:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} \quad \text{und mit Gl. 100 erhält man } \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Für die Transformation der Stromstärken gilt somit:

Gl. 101: Verhältnis von Primär- zu Sekundärstrom in Abhängigkeit der Windungszahlen von Primär- und Sekundärwicklung

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\ddot{u}}$$

Die Ströme verhalten sich umgekehrt wie die Windungszahlen bzw. Spannungen.

Gelten für einen Übertrager sowohl Gl. 100 als auch Gl. 101, so spricht man von einem **idealen Übertrager**. Physikalisch gesehen wäre hierzu ein Kern mit unendlich großer Permeabilität notwendig.

Für die Sekundärseite bedeutet Gl. 101:

Hohe Spannung $\rightarrow$ kleiner Strom, kleine Spannung $\rightarrow$ hoher Strom.

Durch Heruntertransformieren einer Wechselspannung kann man sehr hohe Stromstärken erhalten. In der Praxis macht man von diesem Prinzip bei elektrischen Schmelzöfen Gebrauch.

Ist die Sekundärseite eines Transformators nicht ausschließlich mit einem ohmschen, sondern mit einem kapazitiven oder induktiven (oder einem beliebigen komplexen) Widerstand abgeschlossen, so tritt im Sekundärkreis eine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom auf. Auch bei einer Phasenverschiebung auf Primär- und Sekundärseite gilt beim idealen Transformator nach dem Energieerhaltungssatz: Die vom Primärkreis aufgenommene Leistung ist gleich der im Sekundärkreis verbrauchten Leistung.

Gl. 102: Leistung auf Primär- und Sekundärseite bei Phasenverschiebung

$$U_{1\text{eff}} \cdot I_{1\text{eff}} \cdot \cos(\varphi_1) = U_{2\text{eff}} \cdot I_{2\text{eff}} \cdot \cos(\varphi_2)$$

Ist der Transformator unbelastet (Sekundärseite offen), so wird in der Sekundärspule zwar eine Spannung induziert, aber es entsteht kein Strom und damit keine Rückwirkung der Sekundärspule auf die Primärspule. Unter der Voraussetzung, daß der induktive Widerstand der Primärspule wesentlich größer ist als ihr ohmscher Wicklungswiderstand ($\omega L_1 \gg R_{w1}$), hat der Primärstrom gegenüber der Primärspannung eine Phasenverschiebung von 90° . Auf der Primärseite fließt dann ein wattloser Strom (Leerlaufstrom).

14.3.3 Transformation des Widerstandes

Der Widerstand auf der Primärseite des Transformators ist $R_1 = \frac{U_1}{I_1}$ (siehe Abb. 214).

Mit $U_1 = \ddot{u} \cdot U_2$ und $I_1 = \frac{1}{\ddot{u}} \cdot I_2$ folgt $R_1 = \frac{\ddot{u} \cdot U_2}{\frac{1}{\ddot{u}} \cdot I_2} = \ddot{u}^2 \cdot \frac{U_2}{I_2}$. Der Quotient $\frac{U_2}{I_2}$ ist aber der Wider-

stand R_2 auf der Sekundärseite des Transformators. Somit folgt:

Gl. 103: Transformation des Widerstandes

$$R_1 = \ddot{u}^2 \cdot R_2 = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \cdot R_2 \quad \text{oder} \quad \ddot{u} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$$

Der Abschlußwiderstand wird mit dem Quadrat des Windungszahlverhältnisses (bzw. des Übersetzungsverhältnisses) auf die Primärseite transformiert.

Für die Transformation des Widerstandes gilt somit:

Gl. 104: Verhältnis von Eingangs- zu Ausgangswiderstand

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = \frac{U_1 \cdot I_2}{U_2 \cdot I_1} = \ddot{u}^2$$

Dies bedeutet, daß beim idealen Übertrager der Eingangswiderstand R_e an den beiden Klemmen der Primärseite gleich dem mit $\ddot{u}^2$ multiplizierten Abschlußwiderstand R_a an den beiden Klemmen der Sekundärseite ist.

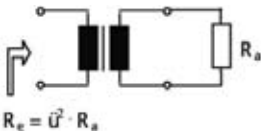


Abb. 216: Eingangswiderstand des idealen Übertragers

In der Praxis ist die Widerstandstransformation von Bedeutung, wenn Widerstände an Wechselspannungsquellen angepaßt werden müssen. Zwei Verstärkerstufen lassen sich durch einen Übertrager koppeln. Durch die Wahl des Übersetzungsverhältnisses kann z.B. eine Leistungsanpassung beider Stufen erreicht werden, indem die Übersetzung so gewählt wird, daß der übersetzte Widerstand auf der Sekundärseite gleich dem Innenwiderstand der Quelle auf der Primärseite ist. Mit einem Ausgangstransformator kann bei einem Audioverstärker eine Leistungsanpassung des Lautsprechers (= Verbraucher) an die letzte Verstärkerstufe (= Erzeuger, Quelle) erreicht werden.

14.4 Der verlustlose Übertrager mit Streuung

Ein vollkommen streufreier Übertrager kann nicht hergestellt werden. Der von der Primärwicklung erzeugte Fluß Φ_1 durchsetzt die Sekundärwicklung nur zu einem Teil, entsprechendes gilt für den Fluß Φ_2 . Die Verkopplung von Primär- und Sekundärwicklung kann durch ein Vierpol-Ersatzschaltbild dargestellt werden.

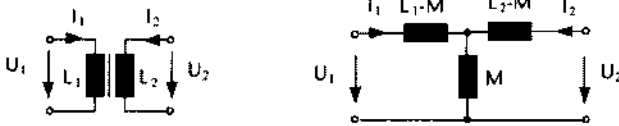


Abb. 217: Ersatzschaltbild des verlustlosen Übertragers mit Streuung (rechts)

Die Größe »M« wird als **Gegeninduktivität** bezeichnet und ist ein Maß für die Verkopplung der Magnetflüsse. Das Ersatzschaltbild stellt zwei über die Gegeninduktivität M gekoppelte Spulen dar.

Die Beziehungen zwischen den Größen des Ersatzschaltbildes werden ohne Herleitung angegeben.

Gl. 105: Gleichungen für den Übertrager mit Streuung

$$\begin{cases} U_1 = s \cdot L_1 \cdot I_1 + s \cdot M \cdot I_2 \\ U_2 = s \cdot M \cdot I_1 + s \cdot L_2 \cdot I_2 \end{cases} \quad s = j\omega$$

Obige Gleichungen stellen eine Beziehung der komplexen Amplituden der Spannungen und Ströme her.

Der **Kopplungsfaktor** k ist definiert als Nutzfluß dividiert durch den gesamten erzeugten Fluß (jeweils für Primär- und Sekundärseite).

Für den Kopplungsfaktor der Primärseite mit der Sekundärseite gilt:

$$k_{12} = (\text{gesamter primärer Fluß} - \text{primärer Streufluß}) : (\text{gesamter primärer Fluß}).$$

Der Kopplungsfaktor der Sekundär- mit der Primärseite ist:

$$k_{21} = (\text{gesamter sekundärer Fluß} - \text{sekundärer Streufluß}) : (\text{gesamter sekundärer Fluß}).$$

Bei symmetrisch aufgebauten Übertragerkernen ist $k_{12} = k_{21} = k$.

Für den streubehafteten Übertrager gilt stets $k < 1$. In der Praxis werden Werte von $k = 0,99$ erreicht.

Zwischen der Gegeninduktivität und dem Kopplungsfaktor besteht die Beziehung:

Gl. 106: Beziehung zwischen Gegeninduktivität und Kopplungsfaktor

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

Für den streufreien Übertrager ist $k = 1$ und $M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$.

Der Kopplungsfaktor kann bei bekannten oder gemessenen Induktivitäten von Primär- und Sekundärspule aus der Leerlaufspannung der Sekundärseite ermittelt werden.

$$k = \frac{U_2}{U_1} \cdot \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

Beispiel: $U_1 = 100 \text{ mV}$, $U_2 = 50 \text{ mV}$, $L_1 = 60 \text{ } \mu\text{H}$, $L_2 = 20 \text{ } \mu\text{H} \Rightarrow k = 0,86$;
 $M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = 30 \text{ } \mu\text{H}$

Statt des Kopplungsfaktors wird häufig der Streufaktor σ verwendet.

Gl. 107: Definition des Streufaktors

$$\sigma = 1 - k^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2}$$

Das Ersatzschaltbild nach Abb. 217 weist für praktische Zwecke den Nachteil auf, daß es im allgemeinen ein negatives Element enthält (für $M < 0$ oder L_1 bzw. $L_2 < M$), insbesondere dann, wenn sich L_1 und L_2 stark unterscheiden. In vielen Fällen wird deshalb das nachfolgende Ersatznetzwerk bevorzugt, bei dem auch gleich Verluste im Eisenkern sowie Wicklungswiderstände und -kapazitäten berücksichtigt sind, und das somit das Ersatzschaltbild des realen Transformators ergibt.

14.5 Der reale Transformator

Die Kondensatoren C_1 und C_2 stellen die Kapazitäten der Wicklungen dar. Kondensator C_3 berücksichtigt die Kapazität zwischen den Wicklungen. Die Widerstände R_1 und R_2 kennzeichnen den ohmschen Widerstand der Wicklungen. Die Verluste im Eisenkern (Wirbelstrom- und Hystereseverluste) werden durch R_{Fe} repräsentiert. Primäres und sekundäres Streufeld werden durch Streuinduktivitäten L_s dargestellt. Hat die Eingangsspannung U_1 eine sehr niedrige Frequenz, so fließt auch ohne Last an der Ausgangsseite ein Strom durch die Primärwicklung des Transformators (bei Gleichspannung wirkt nur der ohmsche Wicklungswiderstand). Dies wird durch die sogenannte Hauptinduktivität L_h berücksichtigt. Ein idealer Transformator bildet den Abschluß des Ersatzschaltbildes.

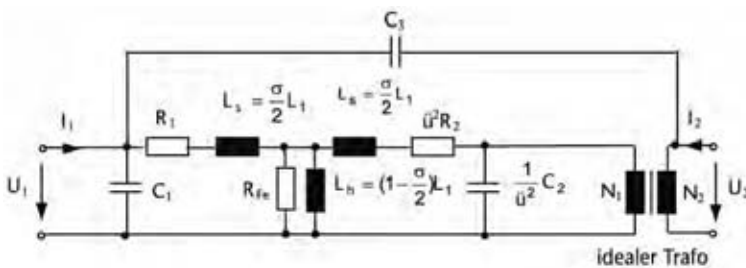


Abb. 218: Ersatzschaltbild des realen Transformators für $\sigma \ll 1$

Wird die Primärseite des Transformators aus einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand gespeist, so wirkt die Hauptinduktivität als Hochpaß. Niedrige Frequenzen werden gedämpft, für Gleichspannung stellt L_h (bis auf ihren Wicklungswiderstand) einen Kurzschluß dar. Für den Einsatz des Transformators bestimmt also L_h die untere Frequenzgrenze. Je größer L_h ist, desto niedrigere Frequenzen können übertragen werden. Bei hohen Frequenzen der Primärspannung wirken sich verstärkt die Streuinduktivitäten und die Wicklungskapazitäten dämpfend aus. Eine

hohe Hauptinduktivität ist nur mit vielen Windungen realisierbar, welche gleichzeitig die Streuinduktivitäten und die Wicklungskapazitäten vergrößern. Aus diesem Grund ist es schwierig, einen Übertrager zu realisieren, der Frequenzen in einem weiten Bereich ungedämpft überträgt. Die Grunddämpfung a_G des Übertragers ist die Folge von R_1 , R_2 und R_{Fe} .

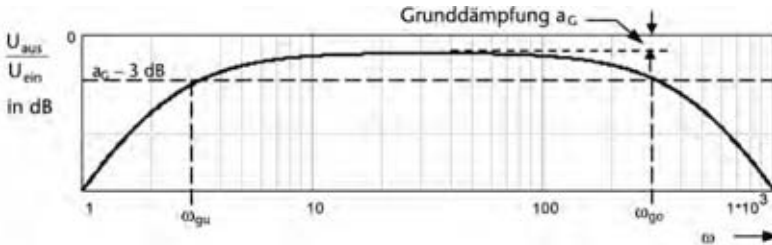


Abb. 219: Amplitudengang des Übertragers (schematisches Beispiel)

Ein Übertrager bildet einen **Bandpaß**, tiefe und hohe Frequenzen werden gedämpft, während mittlere Frequenzen (bis auf die Grunddämpfung) ungedämpft übertragen werden. Die untere Grenzfrequenz ist ω_{gu} , die obere ω_{go} .

14.6 Übertrager zwischen ohmschen Widerständen

Für zwei Spezialfälle soll nun das Verhalten des Übertragers untersucht werden, wenn Primär- und Sekundärseite mit einem reellen (einem ohmschen) Widerstand abgeschlossen sind. Die Primärseite sei aus einer Spannungsquelle U_1 mit dem Innenwiderstand R_1 gespeist. Auf der Sekundärseite ist ein Verbraucher mit dem reellen Widerstand R_a angeschlossen. Gesucht sei jeweils die Ausgangsspannung U_2 des Übertragers als Funktion der Quellspannung U_1 und des Übersetzungsverhältnisses $\ddot{u}$.

a) Idealer Übertrager unter Vernachlässigung der Wicklungswiderstände

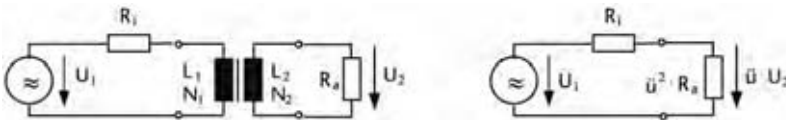


Abb. 220: Idealer Übertrager zwischen reellen Widerständen (links) und Ersatznetzwerk (rechts)

Der Abschlußwiderstand erscheint transformiert als $\ddot{u}^2 \cdot R_a$ auf der Eingangsseite und kann dort statt des Übertragers direkt eingezeichnet werden. Für den idealen Übertrager ist $U_1 = \ddot{u} \cdot U_2$. Die Spannung U_2 ergibt sich aus der Spannungsteilerformel.

Gl. 108: Ausgangsspannung des Übertragers nach Abb. 220

$$U_2 = \frac{U_1}{\ddot{u}} \cdot \frac{\ddot{u}^2 \cdot R_a}{R_1 + \ddot{u}^2 \cdot R_a}$$

b) Idealer Übertrager mit Wicklungswiderständen

R_1 und R_2 seien die ohmschen Widerstände der Primär- und Sekundärwicklung. Man erhält nachfolgendes Ersatznetzwerk.

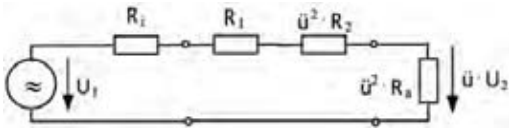


Abb. 221: Ersatznetzwerk des idealen Übertragers beim Betrieb zwischen reellen Widerständen unter Berücksichtigung der Wicklungswiderstände

Da der sekundäre Wicklungswiderstand mit R_a in Reihe liegt, erscheint er mit $\ddot{u}^2$ transformiert ebenfalls (wie R_a) auf der Eingangsseite. Die Spannung U_2 errechnet sich wieder aus der Spannungsteilerformel.

Gl. 109: Ausgangsspannung des Übertragers nach Abb. 221

$$U_2 = \frac{U_1 \cdot \ddot{u}^2 \cdot R_a}{\ddot{u} \cdot R_1 + R_1 + \ddot{u}^2 \cdot (R_2 + R_a)}$$

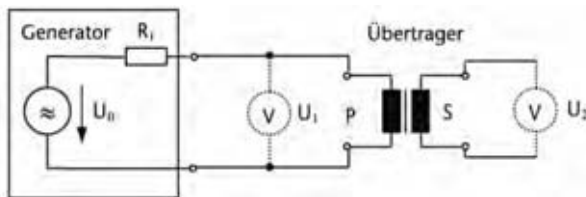
Bei Leistungsanpassung ist der Lastwiderstand gleich dem Innenwiderstand der Quelle. An den Verbraucherwiderstand wird dann soviel Leistung wie möglich abgegeben. In obigen Fall ist Leistungsanpassung gegeben, wenn gilt: $\ddot{u}^2 \cdot R_a = R_1 + R_1 + \ddot{u}^2 \cdot R_2$.

Aufgabe 53:

Zur Verfügung stehen ein Sinusgenerator mit einstellbarer Frequenz und einem Innenwiderstand von $R_1 = 50 \, \Omega$ sowie ein für den Frequenzbereich geeignetes Voltmeter für Wechselspannung. Beschreiben Sie, wie mit diesen Geräten das Übersetzungsverhältnis $\ddot{u}$ eines Übertragers gemessen werden kann. Geben Sie eine Schaltskizze für die Messung an.

Lösung:

Schaltskizze



Beschreibung der Messung

Die Frequenz des Generators wird auf z.B. 100 Hz eingestellt. Bei sekundärem Leerlauf wird mit dem Voltmeter die Spannung U_1 an der Primärwicklung des Übertragers gemessen. Anschließend wird mit dem Voltmeter die Spannung U_2 an der Sekundärwicklung gemessen.

Das Übersetzungsverhältnis ergibt sich zu $\ddot{u} = \frac{U_1}{U_2}$. (Die Angabe des Generatorinnenwiderstandes wird nicht benötigt.)

Ergibt sich bei der eingestellten Frequenz ein zu kleiner (schlecht ablesbarer, ungenauer) Wert von U_2 , so wurde die Frequenz entweder zu klein ($f \ll \omega_{\text{gu}}$) oder zu hoch ($f \gg \omega_{\text{go}}$) gewählt; U_2 ist zu stark gedämpft. Die Frequenz wird am besten solange verändert, bis sich für U_2 ein Maximum ergibt. Anschließend wird U_1 gemessen.

Aufgabe 54:

Eine sinusförmige Spannungsquelle mit den Daten $U = 10 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $R_i = 100 \Omega$ speist die Primärseite mit $N_1 = 270$ Windungen eines idealen Übertragers. Die Sekundärseite des Übertragers mit $N_2 = 90$ Windungen ist mit einem ohmschen Widerstand $R_a = 100 \Omega$ abgeschlossen.

- Wie groß ist die Ausgangsspannung U_2 des Übertragers?
- Wie groß ist der Sekundärstrom I_a durch R_a ?
- Wie groß ist der Primärstrom I_1 ?
- Wie groß müßte R_a sein, damit Leistungsanpassung vorliegt?
- Um wieviel Prozent ist die in $R_a = 100 \Omega$ verbrauchte Leistung geringer als sie maximal sein könnte?

Lösung:

a) U_2 berechnet sich nach Gl. 108 zu $U_2 = \frac{U_1}{\ddot{u}} \cdot \frac{\ddot{u}^2 \cdot R_a}{R_i + \ddot{u}^2 \cdot R_a}$.

Mit $\ddot{u} = \frac{270}{90} = 3$ folgt $U_2 = \frac{10 \text{ V}}{3} \cdot \frac{3^2 \cdot 100 \Omega}{100 \Omega + 3^2 \cdot 100 \Omega} = 3,0 \text{ V}$

b) $I_a = \frac{U_2}{R_a} = \frac{3 \text{ V}}{100 \Omega} = 30,0 \text{ mA}$

c) $I_1 = \frac{I_a}{\ddot{u}} = \frac{30 \text{ mA}}{3} = 10,0 \text{ mA}$ oder $I_1 = \frac{U_1}{R_i + \ddot{u}^2 \cdot R_a} = \frac{10 \text{ V}}{100 \Omega + 9 \cdot 100 \Omega} = 10,0 \text{ mA}$

d) Für Leistungsanpassung muß der Lastwiderstand gleich dem Innenwiderstand der Quelle sein. Als Lastwiderstand erscheint der Abschlußwiderstand R_a mit $\ddot{u}^2$ transformiert auf der Primärseite. Es muß gelten:

$$\ddot{u}^2 \cdot R_a = R_i \Rightarrow R_a = \frac{R_i}{\ddot{u}^2} = \frac{100 \Omega}{9} = 11,1 \Omega \quad \text{Für } R_a = 11,1 \Omega \text{ liegt Leistungsanpassung vor.}$$

e) Für $R_a = 100 \Omega$ ergibt sich die in R_a verbrauchte Leistung $P_a = U_2 \cdot I_a = 3,0 \text{ V} \cdot 30,0 \text{ mA} = 90 \text{ mW}$.

Für $R_a = 11,1 \Omega$ errechnet sich $U_2 = 1,66 \text{ V}$ und $I_a = 150 \text{ mA}$. $(P_a)_{\text{max}} = 1,66 \text{ V} \cdot 0,15 \text{ A} = 0,25 \text{ W}$.

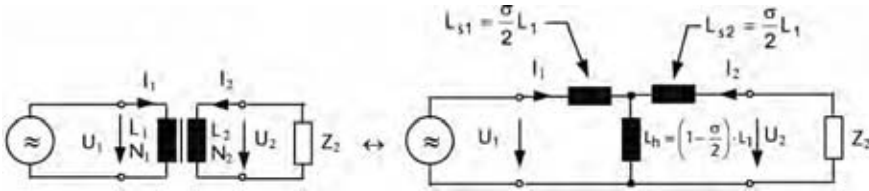
Ohne U_2 und I_a erneut für den Fall $R_a = 11,1 \Omega$ berechnen zu müssen, hätte man sofort nach der

Formel $(P_a)_{\text{max}} = \frac{U_1^2}{4 \cdot R_i} = \frac{100 \text{ V}^2}{400 \Omega} = 0,25 \text{ W}$ rechnen können.

$\frac{(P_a)_{\max} - P_a}{(P_a)_{\max}} = \frac{250 \text{ mW} - 90 \text{ mW}}{250 \text{ mW}} = 0,64$ Für $R_s = 100 \, \Omega$ ist die in R_s verbrauchte Leistung um 64 % niedriger als bei Leistungsanpassung.

Aufgabe 55: (schwierig!)

Ein Transformator im Starkstromnetz sei durch folgende Ersatzschaltung ohne Verluste hinreichend gut angenähert.



Z_2 ist ein komplexer Widerstand. $u_1(t) = 10 \cdot \sqrt{2} \text{ kV} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ mit $\omega_0 = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz}$. $\frac{N_1}{N_2} = 40$

Bei $f_0 = 50 \text{ Hz}$ ist $\omega_0 \cdot L_{s1} = 5 \, \Omega$. Bei sekundärem Leerlauf ($|Z_2| \rightarrow \infty$) ist der Primärstrom $|I_1| = \sqrt{2} \text{ A}$. Bestimmen Sie die Werte der Hauptinduktivität L_h und des Streufaktors σ .

Lösung:

Bei sekundärem Leerlauf ist $I_2 = 0$ und L_h wird nur von I_1 durchflossen. Der komplexe Widerstand von L_{s1} ist $s \cdot L_{s1}$ und der von L_h ist $s \cdot L_h$.

Nach der Maschenregel ist $I_1 \cdot s \cdot L_{s1} + I_1 \cdot s \cdot L_h - U_1 = 0 \Rightarrow \frac{U_1}{I_1} = s \cdot L_{s1} + s \cdot L_h$.

Für $s = j\omega$: $j\omega_0 \cdot L_{s1} = j \cdot 5 \, \Omega$ und $j\omega_0 \cdot L_h = j \cdot 100 \text{ Hz} \cdot \pi \cdot L_h$.

Die Einheit der Induktivität ist $s \cdot \Omega$ (Sekunde mal Ohm), $\text{Hz} = 1/s$.

Somit ist $\frac{U_1}{I_1} = j \cdot 5 \, \Omega + j \cdot 100 \cdot \pi \cdot L_h \, \Omega = j \cdot (5 + 100 \cdot \pi \cdot L_h) \, \Omega$

Für die Beträge gilt $\frac{|U_1|}{|I_1|} = \sqrt{(5 + 100 \cdot \pi \cdot L_h)^2 \, \Omega^2} = 5 + 100\pi L_h \, \Omega$

Mit $|U_1| = 10^4 \cdot \sqrt{2} \text{ V}$ und $|I_1| = \sqrt{2} \text{ A}$ folgt: $\frac{10^4 \sqrt{2} \text{ V}}{\sqrt{2} \text{ A}} = 5 + 100\pi L_h \, \Omega$ oder $10^4 = 5 + 100\pi L_h$.

$L_h = \frac{10^4 - 5}{100\pi} = \frac{10^2}{\pi} - \frac{1}{20\pi}$; $L_h = 31,8 \text{ H}$

Aus $\omega_0 \cdot L_{s1} = 5 \, \Omega$ folgt $L_{s1} = \frac{5 \, \Omega}{100 \pi \text{ Hz}} = \frac{1}{20\pi} \text{ H}$

Gleichung 1: $L_1 = \frac{2 \cdot L_{s1}}{\sigma}$; Gleichung 2: $L_1 = \frac{L_h}{1 - \frac{\sigma}{2}} \Rightarrow$

Gleichsetzen und über Kreuz multiplizieren: $2 \cdot L_{s1} \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) = \sigma \cdot L_h$; Nach σ aufgelöst:

$$\sigma = \frac{2 \cdot L_{s1}}{L_{s1} + L_h}; \quad \sigma = \frac{\frac{1}{10\pi}}{\frac{1}{20\pi} + \frac{10^2}{\pi} - \frac{1}{20\pi}}; \quad \sigma = \frac{1}{10^3}$$

14.7 Spezielle Ausführungen von Transformatoren

Oft soll ein Transformator für unterschiedliche Spannungen des öffentlichen Stromversorgungsnetzes (z.B. 110 V und 220 V) einsetzbar sein. Dies wird durch eine Anschlußmöglichkeit bei verschiedenen Windungszahlen der Primärwicklung erreicht.

Um bei einem Transformator auf der Sekundärseite mehrere Spannungen unterschiedlicher Größe zu erhalten, kann die Sekundärwicklung mehrere »Anzapfungen« enthalten. Dabei wird jeweils bei einer der gewünschten Spannung entsprechenden Windungszahl ein Anschluß der Sekundärwicklung an die Anschlußleiste des Transformators herausgeführt. Natürlich können unterschiedliche Sekundärspannungen auch durch mehrere Sekundärwicklungen gewonnen werden.

Beim sogenannten **Spartransformator** wird die Sekundärwicklung durch einen Teil der Primärwicklung gebildet. Ein großer Nachteil des Spartransformators ist, daß die beiden Wicklungen galvanisch nicht getrennt, sondern leitend miteinander verbunden sind (Gefahr der Berührung der Netzspannung!).

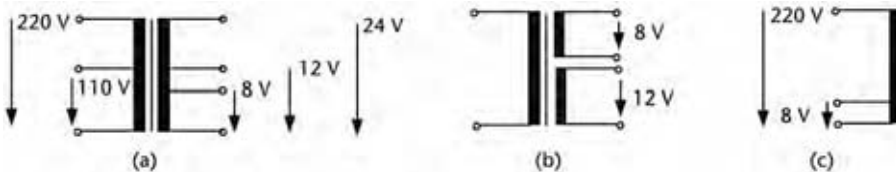


Abb. 222: (a) Trafo für zwei Netzspannungen und drei Sekundärspannungen durch Anzapfungen,
(b) Trafo mit zwei Sekundärspannungen durch getrennte Sekundärwicklungen
(c) Spartransformator

14.8 Zusammenfassung: Transformatoren (Übertrager)

1. Ein Transformator beruht auf dem Prinzip magnetisch gekoppelter Spulen. Er besteht aus Primär- und Sekundärwicklung, welche fest (Eisenkern) oder lose gekoppelt sind.
2. Je nach Einsatz spricht man vom Transformator (Energieübertragung) oder Übertrager (Nachrichtentechnik).
3. Die Polarität der Ausgangsspannung ist vom Windungssinn der Primär- und Sekundärwicklung abhängig.
4. Für den idealen Übertrager gelten folgende Formeln:

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u}} \quad \boxed{\frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \ddot{u}} \quad \boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\ddot{u}}} \quad \boxed{R_1 = \ddot{u}^2 \cdot R_2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \cdot R_2} \quad \boxed{\ddot{u} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}}$$

5. Beim Übertrager mit Streuung besteht zwischen der Gegeninduktivität und dem Kopp-
lungsfaktor die Beziehung: $\boxed{M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}}$

6. Definition des Streufaktors: $\boxed{\sigma = 1 - k^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2}}$

7. Ein realer Übertrager bildet einen Bandpaß, tiefe und hohe Frequenzen werden gedämpft, während mittlere Frequenzen fast ungedämpft übertragen werden.

15 Schwingkreise

Eine elektrische Schaltung, die mindestens eine Kapazität und mindestens eine Induktivität enthält, nennt man auch Schwingkreis oder Resonanzkreis. Beim Reihenschwingkreis liegen Kapazität und Induktivität in Reihe, beim Parallelschwingkreis sind sie parallel geschaltet. Nachfolgend wird das Widerstandsverhalten und der Frequenzgang beider Formen von Schwingkreisen betrachtet. Dabei wird vorwiegend vorausgesetzt, daß die Frequenz der am Schwingkreis anliegenden Wechselspannung verändert wird, ihre Höhe jedoch konstant bleibt.

15.1 Reihenschwingkreis ohne Verluste

Der verlustfreie Reihenschwingkreis besteht aus einer idealen Spule und einem idealen Kondensator (und ist somit nicht herstellbar). Er enthält keinen dämpfenden ohmschen Widerstand.

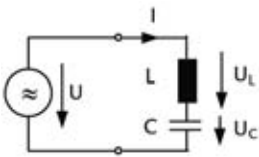


Abb. 223: Verlustfreier Reihenschwingkreis

Legt man an einen Schwingkreis eine Wechselspannung, so wird er zu erzwungenen elektromagnetischen Schwingungen angeregt. Der Kondensator des Schwingkreises wird durch die anliegende Wechselspannung abwechselnd aufgeladen, entladen und mit umgekehrter Polarität wieder aufgeladen. Ist der Kondensator vollständig aufgeladen, so liegt ein Maximum der in ihm gespeicherten Energie E_E vor. Ist er vollständig entladen, so ist die gespeicherte Energie minimal. Ebenso periodisch ändert sich das Magnetfeld der Spule und die im Magnetfeld gespeicherte Energie E_M .

Der Strom I eilt der Spannung U_L an der Spule um 90° nach und der Spannung U_C am Kondensator um 90° voraus. Dies bedeutet: Ist die im Magnetfeld der Spule gespeicherte Energie maximal, so ist die im Kondensator gespeicherte Energie minimal und umgekehrt.

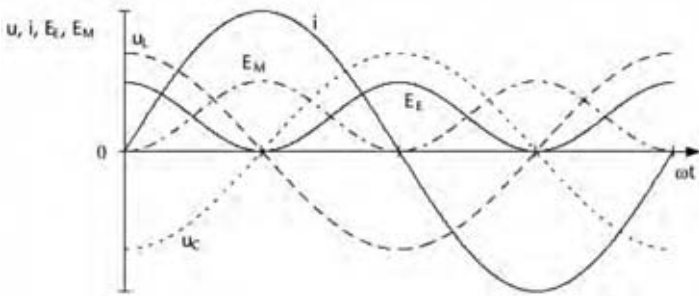


Abb. 224: Verlauf des Stromes, der Spannungen und Energien beim verlustfreien Reihenschwingkreis

Die im Magnetfeld der Spule gespeicherte Energie ist $E_L = \frac{1}{2} L \cdot I^2$, und die im Kondensator gespeicherte Energie ist $E_C = \frac{1}{2} C \cdot U^2$.

Trägt man den sinusförmigen Strom I , die Spannung U_L und U_C , sowie E_L und E_C entlang der Zeitachse auf, so erhält man die obige Graphik. Man erkennt, daß die gespeicherte Energie zwischen Kondensator und Spule hin- und herpendelt. Die Summe der elektrischen und magnetischen Energie ist in jedem Augenblick gleich groß. Beim Maximum von E_L ist E_C minimal und umgekehrt. Diese periodische Umwandlung von elektrischer und magnetischer Feldenergie kennzeichnet eine elektromagnetische Schwingung.

Der Blindwiderstand der Reihenschaltung aus Spule und Kondensator ist:

$$Z = X_L + X_C = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \text{ mit dem Betrag } |Z| = \left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right|.$$

$|Z|$ stellt die Differenz einer Geraden $X_L(\omega) = L \cdot \omega$ und einer Hyperbel $X_C(\omega) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{C}$ dar.

Der Betrag des Stromes I ist: $I = \frac{U}{|Z|}$.

Mit $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$, $U = 1 \text{ V}$ ergibt sich folgender Verlauf der Funktionen.

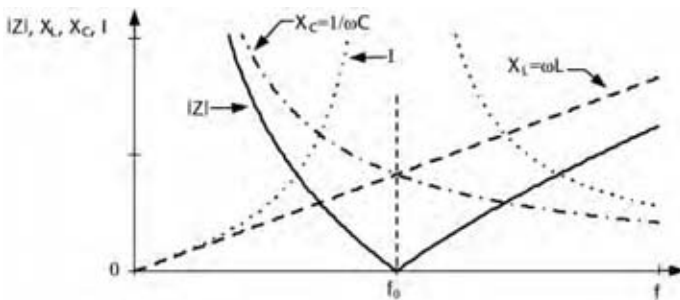


Abb. 225: Frequenzgang der Widerstände und des Stromes beim verlustfreien Reihenschwingkreis

Bei einer Änderung der Frequenz von $f = 0$ Hz (Gleichspannung) ausgehend soll nun die Auswirkung auf $|Z|$ betrachtet werden (C und L haben feste Werte). Bei Gleichspannung sperrt der Kondensator und $|Z|$ ist ∞ . Mit steigender Frequenz nimmt X_C ab und X_L zu. Da X_C bis zur Frequenz f_0 überwiegt, stellt der Kreis einen kapazitiven Widerstand dar. Der Strom I eilt der Spannung U vor.

Bei einer bestimmten Frequenz werden X_C und X_L gleich groß (Schnittpunkt beider Kurven), und $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Die beiden Widerstände heben sich auf und der Gesamtwiderstand ist 0Ω .

Die Frequenz f_0 , bei der dieser Zustand auftritt, wird **Resonanzfrequenz** genannt.

Wird die Frequenz weiter erhöht, so überwiegt X_L . Die Schaltung wirkt ab f_0 mit zunehmender Frequenz wie ein induktiver Widerstand. Der Strom I eilt der Spannung U nach.

Wird die Frequenz unendlich groß, so wird auch der Widerstand unendlich ($|Z| = \infty$).

Es sei erwähnt, daß der Zustand der Resonanz nicht nur durch Veränderung der Frequenz, sondern natürlich auch durch Änderung der Werte von L oder C erreicht werden kann.

Zur Berechnung der Resonanzfrequenz braucht man nur die Resonanzbedingung $X_L = X_C$ oder $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ betrachten. Es folgt: $\omega^2 = \frac{1}{LC}$; $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Mit $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ erhält man die Resonanzfrequenz.

ω_0 ist die Resonanzkreisfrequenz.

Gl. 110: Thomson²⁹-Gleichung zur Berechnung der Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

f_0, ω_0 in Hz
 L in H
 C in F

Mit der Thomsonschen Gleichung kann die Resonanzfrequenz oder mit $T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ die

Schwingungsdauer der ungedämpften elektrischen Schwingung berechnet werden.

Da der Widerstand des verlustfreien Reihenschwingkreises im Resonanzfall Null Ohm ist, würde bei ungedämpfter Reihenresonanz der Strom unendlich groß werden (siehe Abb. 225).

15.2 Reihenschwingkreis mit Verlusten

Ein verlustfreier (idealer) Schwingkreis läßt sich nicht herstellen, da stets ein Verlustwiderstand vorhanden ist. Die Verluste in Spule und Kondensator lassen sich durch einen ohmschen Widerstand in Reihe zum Schwingkreis berücksichtigen. Der Wirkwiderstand R stellt die Summe aller reellen Widerstände dar, z.B. ohmsche Leitungswiderstände, dielektrische, Skineneffekt-, Wirbelstrom- und Ummagnetisierungsverluste.

²⁹ W. THOMSON (1824 – 1907), engl. Physiker, im Adelsstand Lord Kelvin

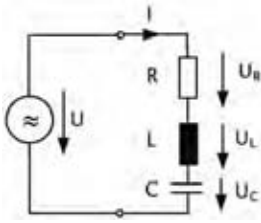


Abb. 226: Reihenschwingkreis mit Verlusten

Der Scheinwiderstand der Reihenschaltung aus R , L , C ist $Z = R + j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$ mit dem Betrag

$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$. Im Resonanzfall ergeben die Blindwiderstände zusammen Null Ohm, es

bleibt nur noch der ohmsche Widerstand übrig, der als **Resonanzwiderstand** bezeichnet wird. Der Scheinwiderstand ist dann reell, so daß **Strom und Spannung in Phase** sind, dies ist **das Kennzeichen der Resonanz**.

Auch beim Reihenschwingkreis mit Verlusten ergibt sich aus der Resonanzbedingung $X_L = X_C$ oder $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ die Thomson-Gleichung zur Berechnung der Resonanzfrequenz.

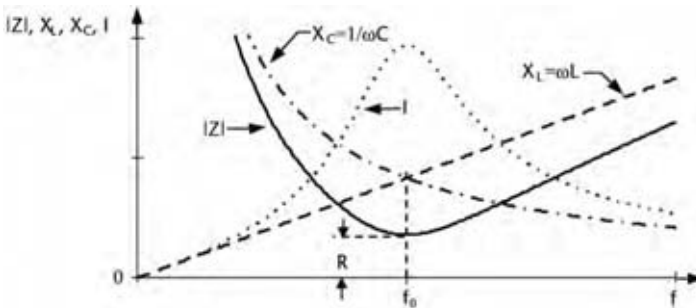


Abb. 227: Frequenzgang der Widerstände und des Stromes beim Reihenschwingkreis mit Verlusten

In der Praxis ist der Resonanzwiderstand R sehr klein und erreicht Werte bis zu einigen Ohm.

Da sich im Resonanzfall die beiden Blindwiderstände aufheben, ist der Strom I bei der Resonanzfrequenz f_0 am größten. Dadurch können bei Resonanz die an den Blindwiderständen X_L und X_C auftretenden Spannungen U_L und U_C erheblich größer werden (z.B. bis zu 100 oder 150fach) als die Versorgungsspannung U .

Man spricht deshalb beim Reihenschwingkreis auch von **Spannungsresonanz**.

Bei Resonanz sind die beiden Spannungsabfälle U_L und U_C gleich groß und um 180° phasenverschoben.

Die Größe der Spannungsüberhöhung wird durch das Verhältnis von Spannungsabfall am Blindwiderstand zu Versorgungsspannung gekennzeichnet und wird **Gütefaktor Q** genannt.

Mit $U_L = I \cdot \omega_0 L$, $U_C = I \cdot \frac{1}{\omega_0 C}$, $U = I \cdot R$ und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ folgt Gl. 111.

Nebenrechnung: $\frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{L}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L^2}{LC}} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$

Gl. 111: Gütefaktor des Reihenschwingkreises

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 R C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Der Kehrwert des Gütefaktors heißt **Dämpfung d**.

Gl. 112: Dämpfung des Reihenschwingkreises

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 R C = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Mit der Resonanzkreisfrequenz ω_0 ist der Betrag der Blindwiderstände $X_0 = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$

X_0 wird als **Kennwiderstand** des Schwingkreises bezeichnet.

Mit der Resonanzbedingung $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ bzw. $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ gilt auch $X_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Gl. 113: Kennwiderstand des Schwingkreises

$$X_0 = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Die Zeigerdiagramme für den verlustbehafteten Reihenschwingkreis zeigt folgende Darstellung.

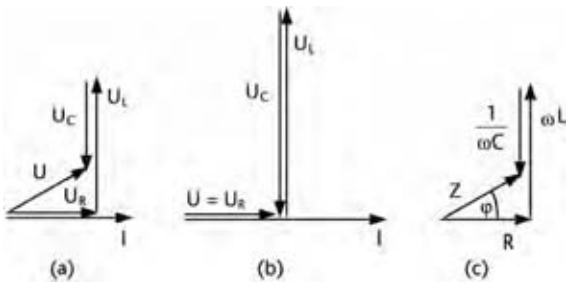


Abb. 228: Zeigerdiagramme für den verlustbehafteten Reihenschwingkreis.
(a) Spannungen (allgemein),
(b) Spannungen bei Resonanz
(c) Widerstände (allgemein)

Den Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung erhält man aus $\tan(\varphi) = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$.

Gl. 114: Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung beim verlustbehafteten Reihenschwingkreis

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$

Bei der Resonanzfrequenz f_0 ist $\varphi = 0$.

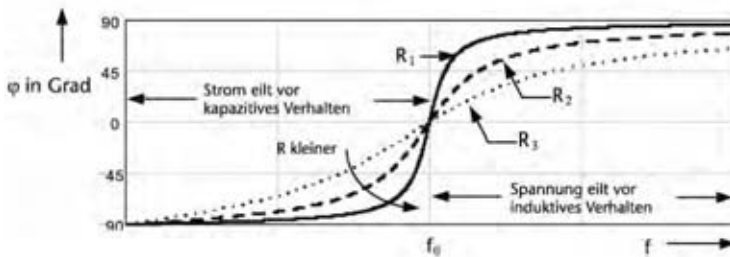


Abb. 229: Verlauf des Phasenwinkels beim verlustbehafteten Reihenschwingkreis für drei verschiedene Werte des Wirkwiderstandes R ($R_1 < R_2 < R_3$)

Je kleiner der Wirkwiderstand R ist, um so sprunghafter erfolgt die Änderung des Phasenwinkels in der Umgebung der Resonanzfrequenz f_0 .

Würde man in Abb. 226 zum Kondensator einen Wirkwiderstand parallel schalten und dann die Resonanzfrequenz bestimmen, so würde man ein Ergebnis erhalten, das von dem in Gl 110 (Thomson-Gleichung) abweicht.

Die Bedingung für Resonanz ist, daß die Blindwiderstände verschwinden und somit Strom und Spannung in Phase sind. Um dies zu erreichen, kann man folgendermaßen vorgehen:

Allgemeine Ermittlung der Resonanzfrequenz einer Schaltung:

1. Berechnung des komplexen Scheinwiderstandes der Schaltung.
2. Imaginärteil gleich Null setzen und nach der (Kreis-) Frequenz auflösen.

Für die Beträge der in Abb. 226 eingezeichneten Größen ergeben sich die Werte:

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; U_R = I \cdot R; U_L = I \cdot \omega L; U_C = I \cdot \frac{1}{\omega C}$$

Die folgende Abbildung zeigt den Amplitudengang der an den Blindwiderständen und am Wirkwiderstand auftretenden Teilspannungen U_L , U_C und U_R jeweils bei zwei unterschiedlichen Dämpfungen (bei zwei unterschiedlichen Werten des Wirkwiderstandes R , wobei $R_1 < R_2$ ist). Die Versorgungsspannung U ist konstant.

Diese Kurven werden auch **Resonanzkurven** genannt.

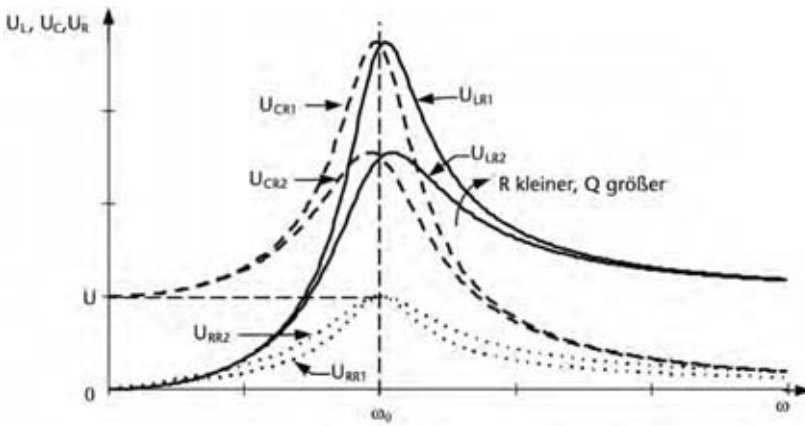


Abb. 230: Resonanzkurven der Teilspannungen U_L , U_C , U_R eines Reihenschwingkreises

Je kleiner der Wirkwiderstand R wird, um so größer werden die Maximalwerte von U_L und U_C bei der Resonanzkreisfrequenz ω_0 . Mit kleiner werdendem R nimmt die Dämpfung ab und der Gütefaktor Q zu.

U_L und U_C können größer als die erregende Spannung U werden. Dies wird als **Resonanzüberhöhung** bezeichnet. Im Resonanzfall liegt am Wirkwiderstand R die speisende Spannung U .

Die Maximalwerte der Spannungen U_L und U_C liegen bei einer von ω_0 abweichenden Kreisfrequenz. Diese Abweichung ist jedoch in der Regel sehr gering und meistens bedeutungslos. Für $Q \gg 1$ liegen die Maximalwerte von U_L und U_C praktisch bei ω_0 .

Nach den Resonanzkurven der Teilspannungen wird nun die Resonanzkurve des Stromes betrachtet.

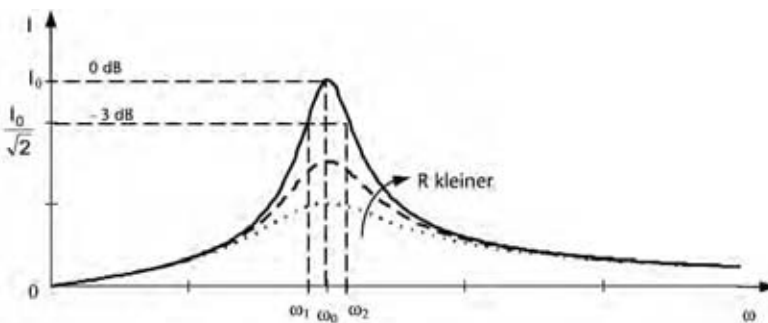


Abb. 231: Amplitudengang (Resonanzkurve) des Stromes bei einem Reihenschwingkreis

Der Strom ist bei der Resonanzkreisfrequenz ω_0 am größten. Je kleiner R wird, um so größer ist das Strommaximum.

Wird der bei der Resonanzkreisfrequenz auftretende Strom I_0 durch $\sqrt{2}$ geteilt, so ergeben sich die Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 . Die so definierte Frequenz $b = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$ wird als **Bandbreite** des Schwingkreises bezeichnet. Die zu ω_1 und ω_2 gehörenden Frequenzen f_1 und f_2 heißen untere bzw. obere **Grenzfrequenz**. Bei ihnen ist der Strom gegenüber I_0 um -3 dB kleiner, der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung beträgt $\pm 45^\circ$. Bei den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 ist der Scheinwiderstand des Reihenschwingkreises um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als der Scheinwiderstand $Z = R$ im Resonanzfall. Somit gilt für die Beträge der Widerstände:

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot R. \text{ Daraus folgt durch Quadrieren:}$$

$$R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2 = R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2 = 2 \cdot R^2$$

Damit muß die Klammer zum Quadrat gleich R^2 sein ($R^2 + R^2 = 2 \cdot R^2$).

$$\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2 = \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2 = R^2 \text{ oder } \left|\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right| = \left|\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right| = R$$

Weil $\omega_1 < \omega_2$ ist, ergibt sich $\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -R$ und $\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R$. Es folgt:

$$LC\omega_1^2 + RC\omega_1 - 1 = 0 \text{ und } LC\omega_2^2 - RC\omega_2 - 1 = 0$$

Auflösen der quadratischen Gleichungen nach ω_1 und ω_2 ergibt die Lösungen:

$$\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} \quad \omega_2 = \frac{RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} \quad \text{Einsetzen dieser Ergebnisse in}$$

$$b = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \text{ ergibt } b = \frac{1}{2\pi} \frac{RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC} + RC - \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} = \frac{1}{2\pi} \frac{2RC}{2LC} = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L}$$

Gl. 115: Bandbreite des Reihenschwingkreises

$$b = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{R}{L}$$

Die Bandbreite kann auch anders dargestellt werden. Aus der Dämpfung $d = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{R}{L}$ folgt

$$\frac{R}{L} = d \cdot \omega_0$$

In Gl. 115 eingesetzt erhält man:

Gl. 116: Andere Darstellung für die Bandbreite

$$b = \frac{1}{2\pi} \cdot d \cdot \omega_0 = d \cdot f_0 = \frac{f_0}{Q}$$

Der Wirkwiderstand R beeinflusst die Breite der Resonanzkurve. Je kleiner R ist, desto steiler ist die Resonanzkurve rechts und links von der Resonanzfrequenz f_0 .

Die Bandbreite ist in der Praxis eine wichtige Kenngröße eines Schwingkreises. Besteht die speisende Spannung U aus einer Überlagerung mehrerer Teilspannungen mit unterschiedlichen Frequenzen, so wird durch diejenige Teilspannung der größte Strom erzeugt, deren Frequenz mit der Resonanzfrequenz des Reihenschwingkreises übereinstimmt. Mit einem Reihenschwingkreis kann daher eine Frequenz aus einem Frequenzgemisch »herausgesiebt«, d.h. unterdrückt werden. Damit dieses »Sieben« möglichst ohne die Mitnahme von benachbarten Frequenzen erfolgt, muß die Resonanzkurve auf beiden Seiten der Resonanzfrequenz möglichst steil abfallen. Je kleiner die Bandbreite eines Reihenschwingkreises ist, um so besser ist seine Wirkung als Siebglied und um so höher ist die Trennschärfe des Kreises als **Bandsperr**e. Eine Bandsperr dient zur **Unterdrückung** einer bestimmten Frequenz und läßt nur Frequenzen unterhalb der unteren Grenzfrequenz f_1 und oberhalb der oberen Grenzfrequenz f_2 durch. Frequenzen um die Resonanzfrequenz f_0 werden stark gedämpft, da Spannungen mit dieser Frequenz durch den kleinen Resonanzwiderstand des Reihenschwingkreises fast kurzgeschlossen werden.

Bei Einsatz eines Reihenschwingkreises als Bandsperr wird die Spannung über der Serienschaltung von Spule und Kondensator abgegriffen.

Der Reihenschwingkreis kann auch als **Bandpaßfilter** zur **Hervorhebung** einer bestimmten Frequenz (der Resonanzfrequenz) verwendet werden. Die Spannungen an Spule und Kondensator sind bei der Resonanzfrequenz wegen der Spannungsresonanz wesentlich größer als die speisende Spannung (Generatorspannung).

Bei Einsatz eines Reihenschwingkreises als Bandpaßfilter wird die Spannung entweder an der Spule oder am Kondensator abgegriffen.

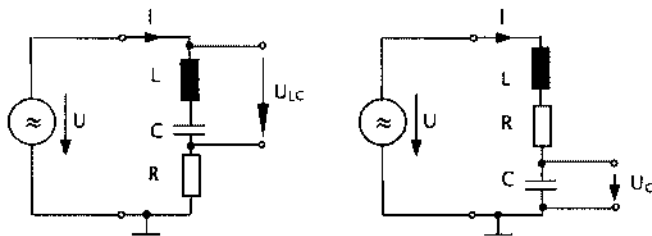


Abb. 232: Abgriff der Spannungen beim Reihenschwingkreis, Siebglied zur Unterdrückung einer Frequenz (links), Bandpaßfilter zum Hervorheben einer Frequenz (rechts)

Am häufigsten wird ein Reihenschwingkreis als Siebglied zur Unterdrückung unerwünschter Frequenzen eingesetzt.

Je schmaler und spitzer die Resonanzkurve eines Reihenschwingkreises, d.h. je kleiner seine Bandbreite ist, desto stärker werden Spannungen mit Frequenzen in unmittelbarer Nähe der Resonanzfrequenz unterdrückt bzw. hervorgehoben.

Die Bandbreite eines Reihenschwingkreises wird kleiner, je

- kleiner der Wirkwiderstand R ,
- größer die Induktivität L ,
- kleiner die Kapazität C ist.

Zum Schluß der Behandlung des Reihenschwingkreises werden noch spezielle Details und Definitionen angegeben. Betrachtet man die Resonanzkurve aus Abb. 231 genauer, so erkennt man, daß die Kurve nicht symmetrisch zur Resonanzfrequenz f_0 ist.

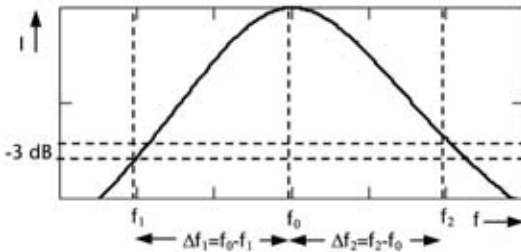


Abb. 233: Zur Asymmetrie der Resonanzkurve

Durch die Asymmetrie ergibt sich $f_2 - f_0 > f_0 - f_1$. Die Resonanzfrequenz ist nicht die arithmetische Mitte, sondern wird als geometrische Mitte erfaßt.

Gl. 117: Resonanzfrequenz unter Berücksichtigung der Asymmetrie der Resonanzkurve

$$f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2} \quad f_1 = \text{untere}, f_2 = \text{obere Grenzfrequenz}$$

Als **absolute Verstimmung** Δf wird $\Delta f_1 = f_0 - f_1$ und $\Delta f_2 = f_2 - f_0$ bezeichnet.

Für Verstimnungen $\Delta f \leq 0,05 \cdot f_0$ kann mit $\Delta f_1 = \Delta f_2 = \Delta f = f_0 - f_1 = f_2 - f_0$ gerechnet werden, und die Bandbreite ist näherungsweise $b \approx 2 \cdot \Delta f$.

Die **relative Verstimmung** x ergibt sich aus der absoluten Verstimmung geteilt durch f_0 .

$$\text{Es ist } x_1 = \frac{\Delta f_1}{f_0} = \frac{f_0 - f_1}{f_0} \text{ und } x_2 = \frac{\Delta f_2}{f_0} = \frac{f_2 - f_0}{f_0}. \text{ Für kleine Verstimnungen gilt } x = x_1 \approx x_2.$$

Die **Doppelverstimmung** y ist definiert als

Gl. 118: Doppelverstimmung y

$$y = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}$$

Die **Selektion** s als Kenngröße für die Trennschärfe ist definiert als $s = Q \cdot y$.

Die Selektion ist das Verhältnis des Scheinwiderstandes Z bei der betrachteten Frequenz zu der Größe des Resonanzwiderstandes R_0 .

Ist u_0 die Spannung am Wirkwiderstand R_0 bei Resonanz, und f die betrachtete Frequenz, so gilt:

$$s = \frac{Z}{R_0} = \frac{u_0}{u_f}.$$

Gl. 119: Selektion s

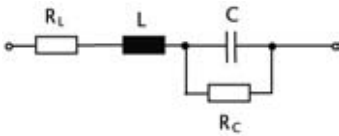
$$s = \frac{Z}{R_0} = \frac{u_0}{u_f} = Q \cdot y$$

Damit kann die Spannung u_f am Wirkwiderstand R_0 für eine Frequenz berechnet werden, die bei einer beliebigen Frequenz f statt bei der Resonanzfrequenz f_0 liegt.

Aufgabe 56:

Bei einem Reihenschwingkreis sei der Wicklungswiderstand der Spule nicht vernachlässigbar und der Kondensator verlustbehaftet. Zeichnen Sie das Schaltbild und bestimmen Sie die Resonanzkreisfrequenz der Schaltung in allgemeiner Form.

Lösung:



Der Leitwert der Parallelschaltung des Kondensators C und seines Verlustwiderstandes R_C ist $\frac{1}{R_C} + j\omega C$.

Der komplexe Scheinwiderstand der Schaltung ist somit $Z = R_L + j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R_C} + j\omega C}$.

Zur Trennung in Real- und Imaginärteil werden Zähler und Nenner des letzten Summanden mit dem konjugierten komplexen Wert des Nenners multipliziert.

$$Z = R_L + j\omega L + \frac{\frac{1}{R_C} - j\omega C}{\left(\frac{1}{R_C}\right)^2 + (\omega C)^2} = R_L + \frac{\frac{1}{R_C}}{\left(\frac{1}{R_C}\right)^2 + (\omega C)^2} + j\omega L - j \frac{\omega C}{\left(\frac{1}{R_C}\right)^2 + (\omega C)^2}$$

Der Imaginärteil wird Null gesetzt (Resonanzbedingung) und nach ω aufgelöst.

$$\omega L - \frac{\omega C}{\left(\frac{1}{R_C}\right)^2 + (\omega C)^2} = 0; \quad \omega \cdot \left(\omega^2 L C^2 + \frac{L}{R_C^2} - C \right) = 0 \quad (\text{Quadratische Gleichung für } \omega)$$

Die Lösung $\omega = 0$ ist trivial und physikalisch sinnlos.

Die quadratische Gleichung für ω hat die (positive) Lösung:

$$\omega = \frac{\sqrt{-4LC^2 \cdot \left(\frac{L}{R_C^2} - C\right)}}{2LC^2} = \frac{\sqrt{4LC^3 - \frac{4L^2C^2}{R_C^2}}}{2LC^2} = \frac{\sqrt{\frac{4LC^3R_C^2 - 4L^2C^2}{R_C^2}}}{2LC^2} = \frac{\sqrt{4C^2 \cdot (LCR_C^2 - L^2)}}{2LC^2}$$

Durch Wurzelziehen und Kürzen folgt mit $\omega = \omega_0$:

$$\omega_0 = \frac{1}{R_C LC} \sqrt{LCR_C^2 - L^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R_C^2 C^2}}$$

Die Resonanzkreisfrequenz sinkt gegenüber dem Wert $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ bei $R_C = \infty$.

Je kleiner der Wert von R_C wird, desto niedriger wird die Resonanzkreisfrequenz.

Aufgabe 57:



Der dargestellte Reihenschwingkreis mit der Induktivität $L = 20 \text{ mH}$ soll eine Resonanzfrequenz $f_0 = 10 \text{ kHz}$ und eine Bandbreite $b = 500 \text{ Hz}$ haben. Welche Werte müssen die Kapazität C und der Wirkwiderstand R besitzen?

Lösung:

Die Formel $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ wird nach C aufgelöst: $C = \frac{1}{f_0^2 4\pi^2 L} = \frac{1}{(10^4 \text{ s}^{-1})^2 4\pi^2 \cdot 0,02 \text{ H}} = \mathbf{12,6 \text{ nF}}$

Aus der Formel für die Dämpfung $d = \frac{R}{\omega_0 L}$ folgt $R = d\omega_0 L$ und mit $d = \frac{b}{f_0}$ ist

$$R = b \cdot 2\pi \cdot L = \mathbf{62,8 \Omega}$$

Aufgabe 58:

Ein Reihenschwingkreis mit $R = 15 \Omega$, $C = 330 \text{ pF}$, $L = 250 \mu\text{H}$ liegt an einer Wechselspannung $u(t) = 0,1 \text{ V} \cdot \sin(\omega t)$.

1. Fall: Der Innenwiderstand der Spannungsquelle sei vernachlässigbar klein ($R_i = 0 \Omega$).

2. Fall: Der Innenwiderstand der Spannungsquelle beträgt $R_i = 120 \Omega$.

Gesucht ist für beide Fälle die Resonanzfrequenz f_0 , und bei Erregung des Schwingkreises mit f_0 die Güte Q , der im Stromkreis fließende Strom i , der Spannungsabfall U_L und U_C an Spule und Kondensator.

Lösung:

1. Fall:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{2,5 \cdot 10^{-4} \text{ H} \cdot 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ F}}} = \mathbf{554,1 \text{ kHz}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{15 \Omega} \cdot \sqrt{\frac{2,5 \cdot 10^{-4} \text{ H}}{3,3 \cdot 10^{-10} \text{ F}}} = \mathbf{58}$$

$$i = \frac{0,1 \text{ V}}{15 \Omega} = \mathbf{6,7 \text{ mA}} \quad U_L = U_C = Q \cdot 0,1 \text{ V} = \mathbf{5,8 \text{ V}}$$

2. Fall:

Die Resonanzfrequenz bleibt unverändert $f_0 = 554,1 \text{ kHz}$.

Der Innenwiderstand der Spannungsquelle liegt mit $R = 15 \Omega$ in Reihe.

$$Q = \frac{1}{120 \Omega + 15 \Omega} \cdot \sqrt{\frac{2,5 \cdot 10^{-4} \text{ H}}{3,3 \cdot 10^{-10} \text{ F}}} = \mathbf{6,45}$$

$$i = \frac{0,1 \text{ V}}{120 \Omega + 15 \Omega} = \mathbf{741 \mu A} \quad U_L = U_C = Q \cdot 0,1 \text{ V} = \mathbf{645 \text{ mV}}$$

Aufgabe 59:

Ein Reihenschwingkreis hat die Resonanzfrequenz $f_0 = 5,5 \text{ MHz}$ und die Güte $Q = 80$. Er wird aus einer sinusförmigen Wechselspannung der Frequenz $f = 5,7 \text{ MHz}$ gespeist. Um wieviel dB (Dezibel) wird die Spannung am Wirkwiderstand R gegenüber dem Resonanzfall gedämpft?

Lösung:

Die Doppelverstimmung y ist $y = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = \frac{5,7}{5,5} - \frac{5,5}{5,7} = 0,07145$.

Die Selektion ist $s = Q \cdot y = 5,716$. Damit ist $u_f = \frac{u_0}{s} = \frac{1}{5,716} \cdot u_0 = 0,1749 \cdot u_0$. Die Spannung am Wirkwiderstand R ist bei der Frequenz $5,7 \text{ MHz}$ um den Faktor $0,1749$ kleiner als bei der Resonanzfrequenz $5,5 \text{ MHz}$. Dies entspricht einem Wert von -15 dB . $(20 \cdot \log\left(\frac{1}{5,716}\right) = -15,14)$.

15.3 Parallelschwingkreis ohne Verluste

Beim verlustfreien Parallelschwingkreis sind eine ideale Spule und ein idealer Kondensator parallel geschaltet.

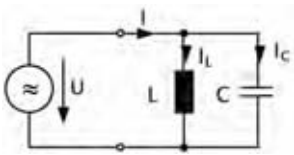


Abb. 234: Verlustfreier Parallelschwingkreis

Der Blindwiderstand der Parallelschaltung aus Spule und Kondensator ist:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = j \cdot \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} = j \cdot \frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C} \quad \text{mit dem Betrag } |Z| = \frac{1}{\left| \frac{1}{\omega L} - \omega C \right|}.$$

Der Betrag des Stromes I ist: $I = \frac{U}{|Z|}$. Der Teilstrom I_L hat den Betrag $I_L = \frac{U}{\omega L}$.

I_L als Funktion von ω stellt eine Hyperbel dar: $I_L(\omega) = \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{\omega}$.

I_L eilt der Spannung U um 90° nach.

Der Teilstrom I_C hat den Betrag $I_C = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = UC\omega$ (Gleichung einer Geraden $I_C(\omega) = UC \cdot \omega$).

I_C eilt der Spannung U um 90° voraus.

Zwischen I_L und I_C besteht also eine Phasenverschiebung von 180° .

Mit $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$, $U = 1 \text{ V}$ ergibt sich für den Verlauf von $|Z|$, I_L , I_C und I die folgende Graphik.

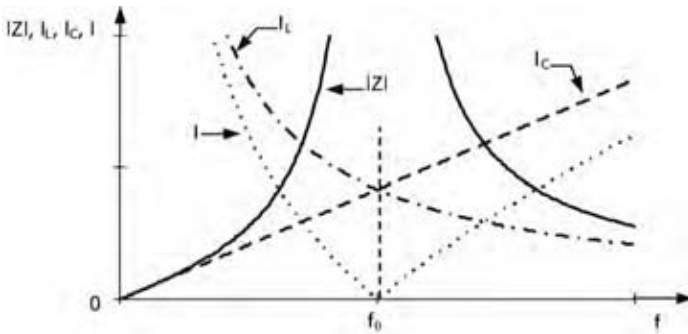


Abb. 235: Frequenzgang der Ströme und des Widerstandes beim verlustfreien Parallelschwingkreis

Für $f = 0 \text{ Hz}$ (Gleichspannung) sperrt der Kondensator, und die ideale Spule leitet unendlich gut. Es ist $|Z| = 0 \Omega$, der Strom I würde unendlich groß werden. Mit steigender Frequenz nimmt der Widerstand des Kondensators ab (I_C nimmt zu), und der Widerstand der Spule nimmt zu (I_L nimmt ab). Da der Widerstand der Spule bis zur Frequenz f_0 kleiner als der des Kondensators ist, stellt der Kreis einen **induktiven** Widerstand dar (bei der Parallelschaltung bestimmt bekanntlich der kleinste Widerstand den Gesamtwiderstand). Der Strom I eilt der Spannung U nach.

Bei einer bestimmten Frequenz werden die Widerstände von Spule und Kondensator gleich groß (Schnittpunkt der Kurven I_L und I_C). Die Ströme I_L und I_C sind gleich groß und heben sich auf, da sie um 180° phasenverschoben sind. Der Gesamtstrom I wird dadurch Null, und für den Widerstand des Kreises gilt $|Z| = \infty$. Die Frequenz f_0 , bei der dieser Zustand auftritt, wird wie beim Reihenschwingkreis Resonanzfrequenz genannt.

Wird die Frequenz größer als die Resonanzfrequenz, so wird der Widerstand des Kondensators kleiner als der Widerstand der Spule. Die Schaltung wirkt ab f_0 mit **zunehmender Frequenz** wie ein **kapazitiver** Widerstand. Der Strom I eilt der Spannung U vor.

Wird die Frequenz unendlich groß, so wird der Widerstand $|Z| = 0 \Omega$.

Man beachte, daß im Resonanzfall zwar in der Zuleitung kein Strom I fließt, **im** Kreis die Ströme I_L und I_C aber vorhanden sind.

Im Resonanzfall sind die Blindwiderstände von Spule und Kondensator gleich groß. Die Resonanzbedingung lautet daher beim Parallelschwingkreis genauso wie beim Reihenschwingkreis.

Gl. 120: Resonanzbedingung beim Parallel- und Reihenschwingkreis

$$X_L = X_C$$

Aus der Resonanzbedingung folgt wie beim Reihenschwingkreis die Thomson-Gleichung zur Berechnung der Resonanzfrequenz (vgl. Gl 110).

15.4 Parallelschwingkreis mit Verlusten

Die stets vorhandenen Verluste lassen sich durch einen ohmschen Widerstand parallel zu Spule und Kondensator berücksichtigen.

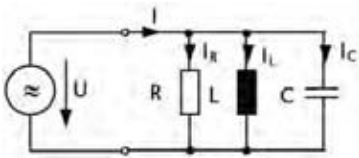


Abb. 236: Parallelschwingkreis mit Verlusten

Die Schaltung hat den Scheinwiderstand

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} + j\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)}$$

mit dem Betrag $|Z| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}$ Im Resonanzfall gilt $\frac{1}{\omega L} = \omega C$ und somit $|Z| = R$.

Im Resonanzfall ist der Resonanzwiderstand gleich dem Wirkwiderstand R und nicht mehr unendlich groß. Strom und Spannung sind dann in Phase (Kennzeichen der Resonanz).

Wegen der Resonanzbedingung $X_L = X_C$ gilt auch beim Parallelschwingkreis mit Verlusten die Thomson-Gleichung zur Berechnung der Resonanzfrequenz.

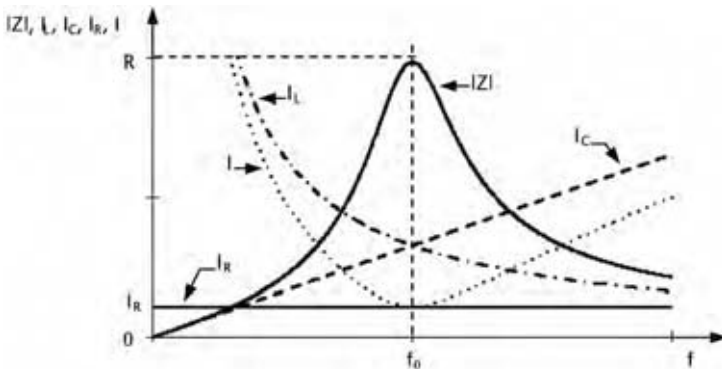


Abb. 237: Frequenzgang des Widerstandes und der Ströme beim Parallelschwingkreis mit Verlusten

In der Praxis erreicht der Resonanzwiderstand Werte bis zu einigen zehn Kiloohm.

Die in den Blindwiderständen fließenden Teilströme I_L und I_C können bei Resonanz erheblich größer werden als der Gesamtstrom I .

Man spricht deshalb beim Parallelschwingkreis auch von **Stromresonanz**.

Bei Resonanz sind die beiden Teilströme I_L und I_C gleich groß und um 180° phasenverschoben.

Die Größe der Stromüberhöhung wird durch das Verhältnis von Blindstrom zu Gesamtstrom gekennzeichnet und wird Gütefaktor Q genannt.

Mit $I_L = \frac{U}{\omega_0 L}$, $I_C = U\omega_0 C$, $I = \frac{U}{R}$ und $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ folgt:

Gl. 121: Gütefaktor des Parallelschwingkreises

$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Der Kehrwert des Gütefaktors heißt, ebenso wie beim Reihenschwingkreis, Dämpfung d .

Gl. 122: Dämpfung des Parallelschwingkreises

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Ein Vergleich der Gleichungen Gl. 111 und Gl. 122 sowie der Gleichungen Gl. 112 und Gl. 121 zeigt, daß die Güte des Reihenschwingkreises formell der Dämpfung des Parallelschwingkreises und die Dämpfung des Reihenschwingkreises formell der Güte des Parallelschwingkreises entspricht.

Es folgen die Zeigerdiagramme für den verlustbehafteten Parallelschwingkreis.

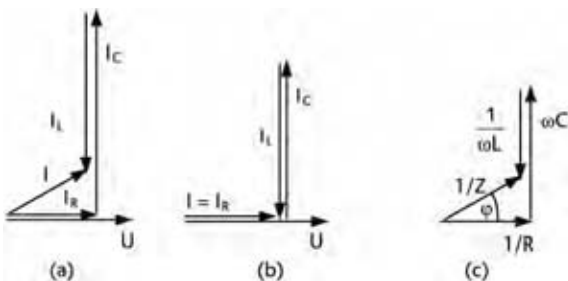


Abb. 238: Zeigerdiagramme des verlustbehafteten Parallelschwingkreises.

(a) Ströme (allgemein), (b) Ströme bei Resonanz, (c) Widerstände (allgemein)

Den Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung erhält man aus $\tan(\varphi) = \frac{I_C - I_L}{I_R} = R \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$.

Gl. 123: Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung beim verlustbehafteten Parallelschwingkreis

$$\varphi = \arctan \left[R \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]$$

Bei der Resonanzfrequenz f_0 ist $\varphi = 0$.

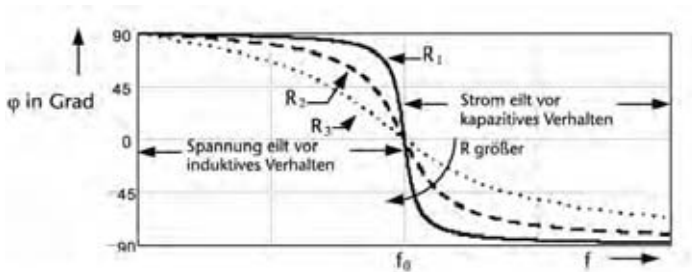


Abb. 239: Verlauf des Phasenwinkels beim verlustbehafteten Parallelschwingkreis für drei verschiedene Werte des Wirkwiderstandes R ($R_1 > R_2 > R_3$)

Je größer der Wirkwiderstand R ist, um so sprunghafter erfolgt die Änderung des Phasenwinkels in der Umgebung der Resonanzfrequenz f_0 .

Die Resonanzkurven des Widerstandes eines Parallelschwingkreises für drei verschiedene Werte des Wirkwiderstandes R ($R_1 > R_2 > R_3$) zeigt die folgende Abbildung.

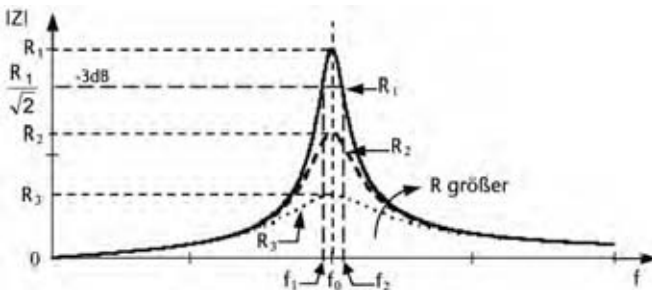


Abb. 240: Verlauf des Widerstandes beim Parallelschwingkreis für drei verschiedene Dämpfungen

Je größer der Wirkwiderstand R wird, um so größer werden die Maximalwerte von $|Z|$ bei der Resonanzfrequenz f_0 . Mit größer werdendem R nimmt die Dämpfung ab und der Gütefaktor Q zu.

Bei der Resonanzfrequenz f_0 ist der Widerstand des Parallelschwingkreises am größten, und der von der Schaltung aufgenommene Gesamtstrom am kleinsten. Der Parallelschwingkreis kann in der Praxis daher als »Sperrkreis« zur Unterdrückung einer unerwünschten Frequenz eingesetzt werden. Besteht die speisende Spannung U aus einer Überlagerung mehrerer Teilspannungen mit unterschiedlichen Frequenzen, so wird derjenige Teilstrom, dessen Frequenz gleich der

Resonanzfrequenz ist, durch den hohen Widerstand des Schwingkreises nahezu »gesperrt«. Beim Einsatz als Sperrkreis wird die weiter zu verarbeitende Spannung an einem Widerstand in Reihe zum Parallelschwingkreis abgegriffen.

Bei Resonanz ruft diejenige Teilspannung, deren Frequenz der Resonanzfrequenz entspricht, am Parallelschwingkreis den größten Spannungsabfall hervor. Der Parallelschwingkreis kann deshalb auch als Bandpaßfilter (als »Abstimmkreis«, siehe unten) verwendet werden. Beim Einsatz als Abstimmkreis wird die weiter zu verarbeitende Spannung direkt am Parallelschwingkreis abgegriffen. Damit Spannungen mit Frequenzen, die nicht bei der Resonanzfrequenz liegen, durch den kleinen Widerstand des Parallelschwingkreises zusammenbrechen, muß der Innenwiderstand der speisenden Spannungsquelle hoch sein oder durch einen Widerstand in Reihe zum Parallelschwingkreis künstlich vergrößert werden. Da dieser Widerstand parallel zum Schwingkreis liegt (eine ideale Spannungsquelle hat den Innenwiderstand $0\ \Omega$), wird die Güte des Schwingkreises höher, je größer dieser Widerstand ist.

In der Hochfrequenztechnik sind die meisten Schwingkreise sogenannte Abstimmkreise. Sie dienen z.B. beim Radioempfänger dazu, eine bestimmte Frequenz eines Senders aus den verschiedenen Frequenzen der Sender hervorzuheben. Je näher die Frequenzen zweier Sender nebeneinander liegen, um so schwieriger sind die Sender zu trennen, und um so höher muß die Güte des Schwingkreises sein. Derjenige Sender, dessen Frequenz der Resonanzfrequenz des Parallelschwingkreises entspricht, ruft an diesem die größte Spannung hervor, welche verstärkt und weiter verarbeitet werden kann. Als Abstimmkreis wird fast ausschließlich der Parallelschwingkreis verwendet.

Soll ein Schwingkreis auf verschiedene Resonanzfrequenzen einstellbar sein, so kann dies entweder durch eine Veränderung von L oder, wie in der Praxis meist üblich, von C geschehen. Zur Veränderung der Kapazität C werden häufig Drehkondensatoren eingesetzt. Liegen Sender sehr nahe nebeneinander (wie z.B. im Kurzwellenbereich), so werden bereits durch geringe Drehbewegungen am Drehkondensator mehrere Sender überstrichen. Da ein Drehko häufig ein großes Variationsverhältnis hat, ist er ohne zusätzliche Hilfsmittel oft nicht für eine Feinabstimmung geeignet.

Durch eine **Bandspreizung** wird eine Bereichseinengung des Abstimmungsbereiches erzielt. Von den in der Praxis benutzten Schaltungen zur Bandspreizung sollen hier nur zwei Beispiele angegeben werden. Erwähnt sei, daß eine Abstimmung und Bandspreizung auch mit Kapazitätsdioden erfolgen kann.

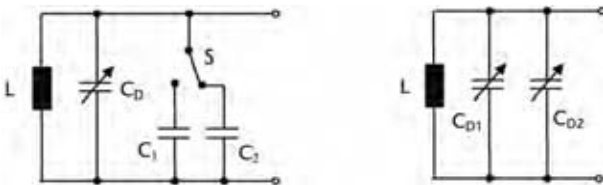


Abb. 241: Umschaltbare Bandspreizung mit Parallelkapazität (links) und »Kurzwellenlupe« mit zusätzlichem Drehkondensator C_{D2} (rechts)

Wird der bei der Resonanzfrequenz auftretende Widerstand durch $\sqrt{2}$ geteilt, so ergeben sich die in Abb. 240 eingetragenen Frequenzen f_1 und f_2 . Sie werden, wie beim Reihenschwingkreis, als untere Grenzfrequenz f_1 und obere Grenzfrequenz f_2 bezeichnet. Bei den Grenzfrequenzen ist der Widerstand gegenüber seinem Maximum bei f_0 um $-3\ \text{dB}$ kleiner (der Gesamtstrom I ist um

den Faktor $\sqrt{2}$, d.h. +3 dB größer) und der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung beträgt $\pm 45^\circ$. Die Frequenz $b = f_2 - f_1$ ist die Bandbreite des Schwingkreises.

Wie beim Reihenschwingkreis kann die Bandbreite auch durch $b = d \cdot f_0$ dargestellt werden. Dabei ist f_0 die Resonanzfrequenz des Schwingkreises und d die in Gl. 122 angegebene Dämpfung.

Die beim Reihenschwingkreis besprochenen Punkte bezüglich Asymmetrie der Resonanzkurve, absoluter und relativer Verstimmung, Doppelverstimmung sowie Selektion gelten analog auch beim Parallelschwingkreis. Es folgen Beispiele für die Anwendung eines Parallelschwingkreises als Abstimm- und als Sperrkreis.

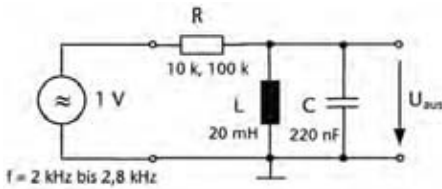


Abb. 242: Parallelschwingkreis als Abstimmkreis. Der Innenwiderstand der idealen Spannungsquelle wird durch den Reihenwiderstand R vergrößert.

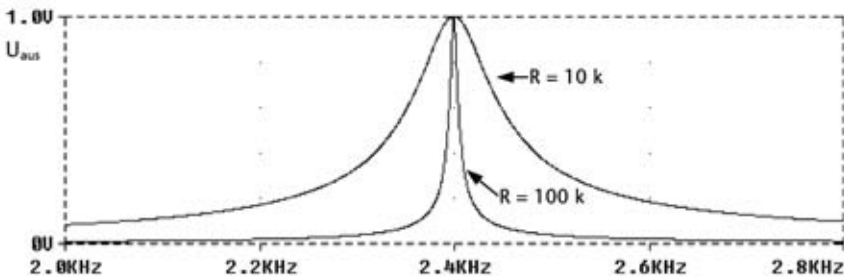


Abb. 243: Resonanzkurven der Ausgangsspannung bei zwei verschiedenen Güten des Abstimmkreises von Abb. 242

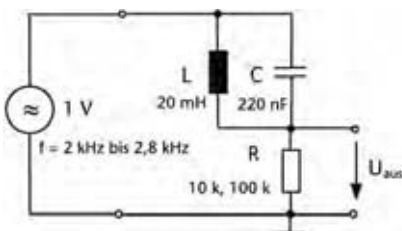


Abb. 244: Parallelschwingkreis als Sperrkreis

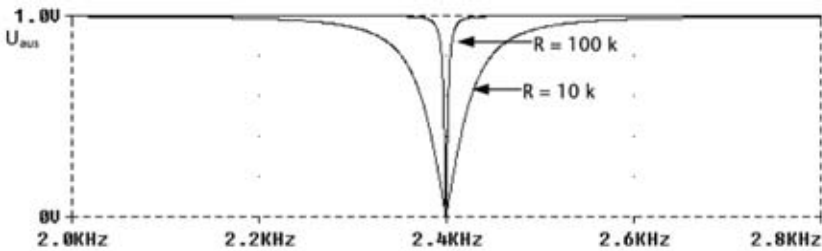


Abb. 245: Resonanzkurven der Ausgangsspannung bei zwei verschiedenen Güten des Sperrkreises von Abb. 244

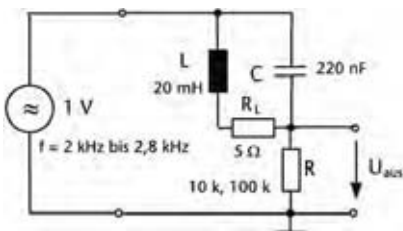


Abb. 246: Sperrkreis mit Berücksichtigung des Wicklungswiderstandes R_L der Spule

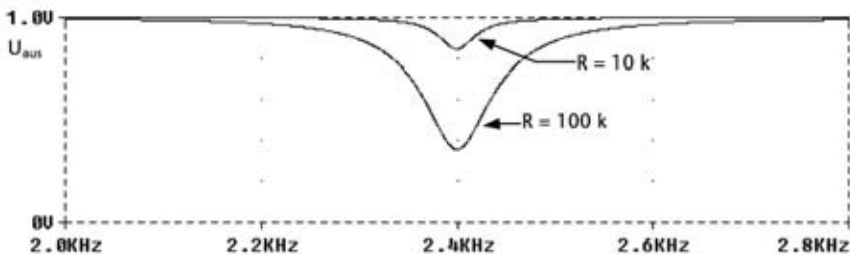


Abb. 247: Resonanzkurven der Ausgangsspannung (zu Abb. 246)

Aufgabe 60:

Die Kapazitäten zweier Schwingkreise verhalten sich wie 9 zu 4. In welchem Verhältnis stehen die Resonanzfrequenzen der beiden Schwingkreise?

Lösung:

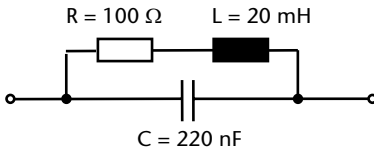
Die Resonanzfrequenzen der beiden Schwingkreise sind $f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}}$ und $f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C_2}}$.

Das Verhältnis der Resonanzfrequenzen ist $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\sqrt{L_2C_2}}{\sqrt{L_1C_1}}$. Aus $\frac{C_1}{C_2} = \frac{9}{4}$ folgt $C_1 = \frac{9}{4}C_2$.

Damit ist $\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{4 \cdot L_2C_2}{9 \cdot L_1C_2}}$; $\frac{f_1}{f_2} = \frac{2\sqrt{L_2}}{3\sqrt{L_1}}$

Aufgabe 61:

Wie groß ist die Resonanzfrequenz der im folgenden dargestellten Schaltung?

**Lösung:**

Der komplexe Scheinleitwert der Schaltung ist

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = j\omega C + \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$Y = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \cdot \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right)$$

Die Blindleitwerte (und damit die Blindwiderstände) verschwinden, wenn der Imaginärteil zu Null gesetzt wird.

$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0; \quad \omega C \cdot (R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L = 0; \quad \omega \cdot (L^2 C \omega^2 + R^2 C - L) = 0$$

Die Lösung $\omega = 0$ ist trivial und physikalisch sinnlos.

$$\begin{aligned} \text{Die quadratische Gleichung für } \omega \text{ hat die (positive) Lösung } \omega &= \frac{\sqrt{-4L^2C(R^2C - L)}}{2L^2C} = \frac{\sqrt{LC - R^2C^2}}{LC} = \\ &= \sqrt{\frac{LC - R^2C^2}{L^2C^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $f = \frac{\omega}{2\pi}$ und $f = f_0$ ergibt sich mit den gegebenen Zahlenwerten der

$$\text{Bauelemente: } f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 2,2 \cdot 10^{-7}} - \left(\frac{10^2}{2 \cdot 10^{-2}}\right)^2}; \quad f_0 = 2,26 \, \text{kHz}$$

Durch die Berücksichtigung des Wicklungswiderstandes R der Spule sinkt die Resonanzfrequenz gegenüber dem Wert $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 2,4 \, \text{kHz}$ bei $R = 0 \, \Omega$.

Je größer der Wert von R wird, um so niedriger wird die Resonanzfrequenz.

Aufgabe 62:

Ein Parallelschwingkreis wird als Abstimmkreis eingesetzt und hat die Resonanzfrequenz $f_0 = 550 \, \text{kHz}$ und die Güte $Q = 70$. Er wird aus einer sinusförmigen Wechselspannung der Frequenz $f = 570 \, \text{kHz}$ gespeist. Um wieviel dB wird die am Parallelschwingkreis abgegriffene Spannung gegenüber dem Resonanzfall gedämpft?

Lösung:

Die Doppelverstimmung y ist $y = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = \frac{570 \text{ kHz}}{550 \text{ kHz}} - \frac{550 \text{ kHz}}{570 \text{ kHz}} = 0,07145$

Die Selektion ist $s = Q \cdot y = 5,00$.

Damit ist $u_{\Delta f} = \frac{u_0}{s} = 0,2 \cdot u_0$. Dies entspricht einem Wert von $-13,9 \text{ dB}$. ($20 \cdot \log(0,2) = -13,9$).

Aufgabe 63:

Ein Parallelschwingkreis hat die Resonanzfrequenz $f_0 = 4 \text{ MHz}$ und die Güte $Q = 100$. Der Wert des Kondensators ist $C = 75 \text{ pF}$. Wie groß ist der Widerstand R_{op} des Parallelschwingkreises bei Resonanz? Wie groß ist der Resonanzwiderstand R_{or} eines Reihenschwingkreises, der aus denselben Bauteilen besteht?

Lösung:

Bei Resonanz ist $X_L = X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^6 \text{ Hz} \cdot 75 \cdot 10^{-12} \text{ F}} = 530 \Omega$

Beim Parallelschwingkreis ist der Resonanzwiderstand Q mal größer als einer der beiden Blindwiderstände. Somit ist $R_{op} = 530 \Omega \cdot 100$; $R_{op} = 53 \text{ k}\Omega$.

Beim Reihenschwingkreis ist der Resonanzwiderstand Q mal kleiner als einer der beiden Blindwiderstände. $R_{or} = 530 \Omega : 100$; $R_{or} = 5,3 \Omega$.

15.5 Zeitverhalten elektrischer Schwingkreise

Ein idealer (verlustloser) Schwingkreis würde nach einer einmaligen Energiezufuhr ungedämpft weiterschwingen, die Amplitude der Schwingung würde gleich groß bleiben. Jeder reale elektrische Schwingkreis enthält aber einen unvermeidlichen Wirkwiderstand, durch den Energie in Wärme umgewandelt wird. Wird dem realen Schwingkreis ständig im richtigen Rhythmus Energie zugeführt, so entsteht ebenfalls eine **ungedämpfte** Schwingung mit gleichbleibender Amplitude.

Wird an einen Schwingkreis eine Wechselspannung gelegt, deren Frequenz in der Nähe der Resonanzfrequenz des Schwingkreises liegt, so wird der Schwingkreis einschwingen. Der Einschwingvorgang ist dadurch gekennzeichnet, daß die Amplitude im Laufe der Zeit zunimmt, bis sie schließlich die gleichbleibende Größe der ungedämpften Schwingung erreicht hat.

Reißt die Energiezufuhr ab oder ist die zugeführte Energie kleiner als die durch Verluste in Wärme umgewandelte Energie, so entsteht eine **gedämpfte** Schwingung. Bei einer gedämpften Schwingung nimmt die Amplitude im Laufe der Zeit ab und geht gegen Null (Ausschwingvorgang). Eine gedämpfte Schwingung entsteht auch, wenn parallel zu einem geladenen Kondensator eine Spule angeschlossen wird.

Das Zu- bzw. Abnehmen der Amplitude erfolgt nach einer Exponentialkurve.

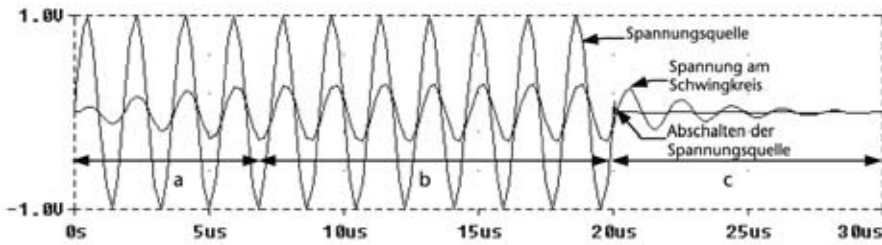


Abb. 248: Abstimmkreis mit (a) Einschwingvorgang (b) ungedämpfter Schwingung (c) Ausschwingvorgang bzw. gedämpfter Schwingung

15.6 Grundsätzliche Kopplungsarten

Soll einem Schwingkreis Energie zugeführt oder entnommen werden, so muß dem Kreis entweder ein Generator oder ein Belastungswiderstand R angekoppelt werden. Statt eines ohmschen Belastungswiderstandes kann auch ein zweiter Schwingkreis angekoppelt werden.

Zu beachten ist in jedem Fall, daß der Anteil des ohmschen Widerstandes, der angekoppelt ist (z.B. der Innenwiderstand des Generators, der Verlustwiderstand des zweiten Kreises usw.) den Schwingkreis zusätzlich dämpft.

Man unterscheidet folgende grundsätzliche Arten der Kopplung.

15.6.1 Galvanische Kopplung

Bei der galvanischen Kopplung wird der Generator (die Spannungsquelle) oder der Belastungswiderstand R direkt an den Kreis angeschlossen. Von Nachteil ist dabei sehr häufig die leitende, gleichstrommäßige Verbindung. Der Belastungswiderstand R kann z.B. der Eingangswiderstand einer angeschalteten Verstärkerstufe sein.

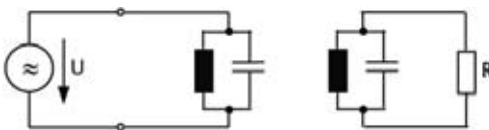


Abb. 249: Galvanische Kopplung zur Energiezuführung (links) und zur Energieentnahme (rechts)

15.6.2 Induktive Kopplung

Bei der induktiven Kopplung wird die Energie mit Hilfe des magnetischen Feldes übertragen (wie bei einem Transformator). Die für den Transformator gültigen Gesetze bezüglich Übersetzungsverhältnis und Kopplungsfaktor gelten hier ebenfalls. Von Vorteil ist die galvanische Trennung des Generators bzw. des Lastwiderstands R vom Schwingkreis.

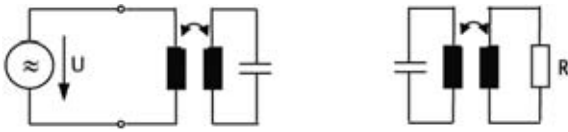


Abb. 250: Induktive Kopplung zur Energiezuführung (links) und zur Energieentnahme (rechts)

15.6.3 Kapazitive Kopplung

Bei der kapazitiven Kopplung erfolgt die Verbindung durch einen oder zwei Kondensatoren C_k . Der Kopplungsgrad wird durch die Größe der Kopplungskondensatoren bestimmt.

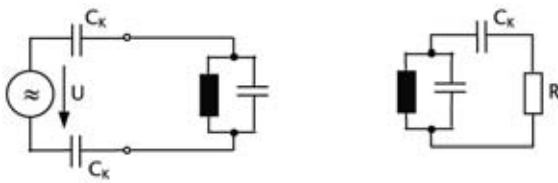


Abb. 251: Kapazitive Kopplung zur Energiezuführung (links) und zur Energieentnahme (rechts)

15.6.4 Fußpunktkopplung

Bei der Fußpunktkopplung wird die Spule oder der Kondensator eines Schwingkreises durch eine Reihenschaltung in zwei Teile zerlegt. Die Ankopplung erfolgt nur an einem Teil des Blindwiderstandes. Der Kopplungsgrad ist durch das Verhältnis des zur Kopplung verwendeten Teiles X_k zum gesamten Blindwiderstand bestimmt.

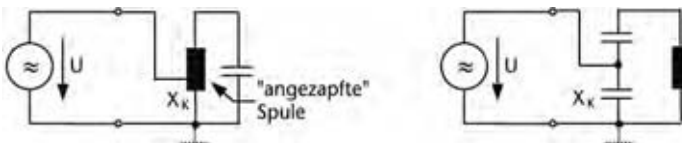


Abb. 252: Fußpunktkopplungen

15.7 Bandfilter

Eine besondere Anwendung von Schwingkreisen sind Bandfilter. Ein Schwingkreis kann zur Hervorhebung oder Unterdrückung **einer** Frequenz verwendet werden. Je größer die Güte des Schwingkreises ist, desto stärker wird die Spannung mit der Resonanzfrequenz hervorgehoben oder unterdrückt.

Soll nicht nur eine Frequenz sondern ein ganzes Frequenzband (ein bestimmter Frequenzbereich) übertragen und z.B. anschließend verstärkt werden, so müßte man als Resonanzkurve eine Rechteckkurve fordern. Bei der Übertragung von Musik ist ein Frequenzband mit einer Breite von ca. 20 Hz bis 15 kHz zu übertragen. Innerhalb dieses Frequenzbandes (Durchlaßbereich) sollen alle Frequenzen gleich stark hervorgehoben werden. Unterhalb und oberhalb der Fre-

quenzgrenzen (Sperrbereiche) sollen alle Frequenzen möglichst stark unterdrückt (gedämpft) werden. Dieser Sachverhalt führt zur geforderten Rechteckform der Resonanzkurve. Mit einem Bandfilter ist diese Forderung annähernd realisierbar.

Ein Bandfilter besteht häufig aus zwei oder mehreren gekoppelten Schwingkreisen. Bei einem zweikreisigen Bandfilter sind zwei Schwingkreise je nach Schaltung induktiv oder kapazitiv gekoppelt. Mit einem **Bandfilter** wird eine **größere Bandbreite** erzielt als mit einem einzelnen Schwingkreis.

Bei einem einfachen Resonanzkreis sind Bandbreite und Flankensteilheit starr miteinander verknüpft, beim Bandfilter sind diese beiden Größen zu einem gewissen Grad voneinander unabhängig.

Die Bandbreite eines Bandfilters wird hauptsächlich vom Kopplungsgrad bestimmt, die Flankensteilheit ist vor allem von der Güte der Schwingkreise abhängig.

Je nach Kopplungsgrad unterscheidet man **unterkritische** (sehr lose), **kritische** und **überkritische** (sehr feste) Kopplung. Bei der unterkritischen Kopplung ist $k < d$, bei der kritischen Kopplung ist $k = d$ und bei der überkritischen Kopplung ist $k > d$ (k = Kopplungsgrad, d = Dämpfung).

Sind zwei Schwingkreise sehr lose gekoppelt (unterkritisch), so ist die Gesamtkurve der normalen Resonanzkurve eines einzelnen Schwingkreises ähnlich. Wird die Kopplung erhöht, so wird die Gesamtkurve breiter und die Flanken werden steiler. Bei weiterer Vergrößerung der Kopplung beginnt bei der kritischen Kopplung in der Mitte der Kurve eine **Einsattelung** zu entstehen. Bei überkritischer Kopplung zeigt die Kurve in der Mitte eine deutliche Einsattelung zwischen zwei **Höckern**, wobei sich Bandbreite und Flankensteilheit noch vergrößern.

Beim Bandfilter sind die beiden Einzelkreise auf dieselbe Frequenz abgestimmt. Die Kreise beeinflussen sich jedoch und verstimmen sich gegenseitig so, daß die oben beschriebenen Kurven entstehen. Zu beachten ist, daß der Kopplungsgrad im allgemeinen sehr gering ist und auch sehr genau stimmen muß. Bei Kreisen der Güte $Q = 200$ tritt die kritische Kopplung bereits bei $k = 0,005 = 0,5 \%$ auf.

Die Frequenzen der Höckermaxima f_1 links und f_2 rechts von der Resonanzfrequenz f_0 lassen sich mit nachfolgenden Formeln berechnen.

Gl. 124: Frequenzen der Höckermaxima beim Bandfilter

$$f_1 = \frac{2\pi f_0}{\sqrt{1 + \sqrt{k^2 - d^2}}} \quad f_2 = \frac{2\pi f_0}{\sqrt{1 - \sqrt{k^2 - d^2}}}$$

Bei ungleichen Dämpfungen der Kreise definiert man statt der kritischen Kopplung auch die **transitionale Kopplung** k_{tr} , bei der die Resonanzkurve am flachsten verläuft. $k_{tr} = \sqrt{\frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2)}$

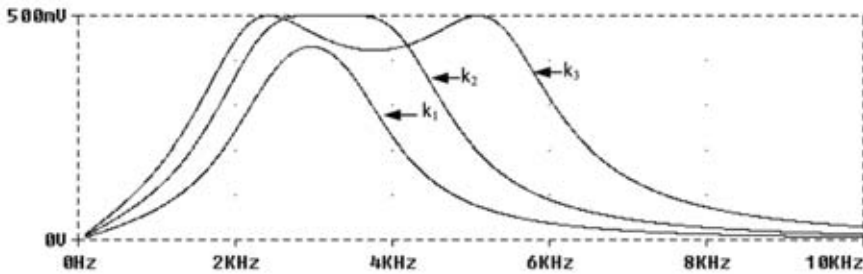


Abb. 253: Resonanzkurven eines Bandfilters bei verschiedenen Kopplungsgraden ($k_1 < k_2 < k_3$)

Beim Bandfilter ändert sich die Bandbreite durch Veränderung des Kopplungsgrades.

Durch die Dämpfung der Kreise bzw. durch zusätzliche Dämpfungswiderstände läßt sich die Kurvenform noch etwas der idealen Rechteckform annähern.

15.8 Kopplungsarten bei Bandfiltern

Die Kopplung zwischen den Einzelkreisen kann auf unterschiedliche Weise erfolgen. Vorwiegend wird die induktive Kopplung durch einen Übertrager oder einen gemeinsamen Spulenteil (Koppelspule) angewandt. Verwendung findet auch die kapazitive Kopplung, wobei zwischen Kopfpunkt- und Fußpunkt kopplung unterschieden wird.

15.8.1 Transformatorische Kopplung

Die transformatorische Kopplung ist eine induktive Kopplung unter Verwendung eines Übertragers. Bilden Primär- und Sekundärspule eines Übertragers die Induktivitäten zweier Schwingkreise, so spricht man von transformatorischer Kopplung. Die Kopplung erfolgt durch das Magnetfeld.

Der Kopplungsgrad ist durch die Beziehung $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$ festgelegt (k = Kopplungsfaktor, M =

Gegeninduktivität des Übertragers, L_1 = Induktivität der Primärspule, L_2 = Induktivität der Sekundärspule).

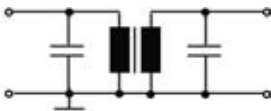


Abb. 254: Transformatorische Kopplung eines Bandpaßfilters

15.8.2 Induktive Kopplung mit Koppelspule

Eine weitere Möglichkeit der induktiven Kopplung der Schwingkreise eines Bandfilters ist die Verwendung einer Koppelspule.

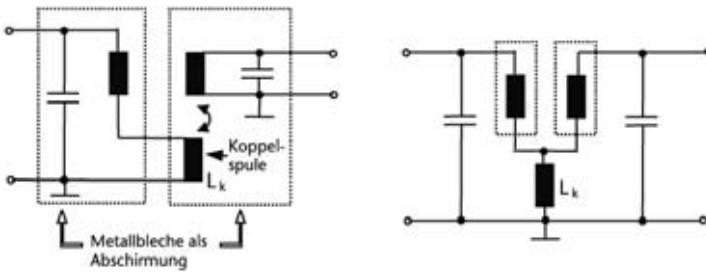


Abb. 255: Zwei Arten der induktiven Kopplung mit Koppelspule bei einem Bandfilter

Sind beide Schwingkreise durch Metallbleche (Gehäuse z.B. aus Kupfer oder Aluminium) umgeben, so sind sie durch diese **Abschirmung** magnetisch entkoppelt. Im Blech entstehen Wirbelströme, welche selbst ein hochfrequentes Magnetfeld erzeugen, das aber dem primären Feld entgegengesetzt ist. Dieses Gegenfeld hebt die magnetische Wirkung der Spule nach außen auf. Es sei darauf hingewiesen, daß eine Erdung (bzw. Verbindung mit Masse) der Abschirmung nicht notwendig ist. Befindet sich ein Teil der Primärspule (die Koppelspule L_k) in der Nähe der Sekundärspule, so hängt der Kopplungsgrad nur von der geometrischen Anordnung beider Spulen ab (Abstand, Kernmaterial, Windungszahlen).

Beide Spulen der Schwingkreise können auch in zwei Teile aufgeteilt werden. Die beiden unteren Teile werden in einer gemeinsamen Koppelspule vereinigt, welche mit der Masse des Filters verbunden ist. Sofern die beiden anderen Spulen durch eine Abschirmung entkoppelt sind, ist der Kopplungsgrad nur von der Induktivität (Windungszahl) der Koppelspule abhängig.

15.8.3 Kapazitive Kopfpunktkopplung

Die kapazitive Kopfpunktkopplung wird auch als kapazitive Spannungskopplung bezeichnet. Bei ihr werden zwei identische Schwingkreise über einen kleinen Koppelkondensator C_k verbunden. Sind die Spulen abgeschirmt, so ist der Kopplungsgrad von der Kapazität des Koppelkondensators abhängig und nimmt mit steigender Kapazität von C_k zu. Ist C_k gegenüber C_1 und C_2 klein, so kann der Kopplungsgrad angenähert nach folgender Formel berechnet werden.

Gl. 125: Kopplungsgrad eines Bandfilters mit kapazitiver Kopfpunktkopplung

$$k \approx \frac{C_k}{\sqrt{C_1 \cdot C_2}}$$

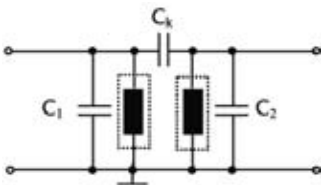


Abb. 256: Kapazitive Kopfpunktkopplung bei einem Bandfilter

15.8.4 Kapazitive Fußpunktkopplung

Die kapazitive Fußpunktkopplung wird auch als kapazitive Stromkopplung bezeichnet. Bei ihr wird ein gemeinsamer Kondensator C_f verwendet, der mit der Masse des Filters verbunden ist. Sofern sich die übrigen Bauteile nicht gegenseitig beeinflussen, erfolgt die Kopplung durch den Kondensator C_f . Der Kopplungsgrad wird größer, je kleiner C_f wird. Der Kopplungsgrad läßt sich angenähert nach folgender Formel berechnen.

Gl. 126: Kopplungsgrad eines Bandfilters mit kapazitiver Fußpunktkopplung

$$k \approx \frac{\sqrt{C_1 \cdot C_2}}{C_f}$$

Es sei noch angemerkt, daß der Kopfpunkt auch als »heißes Ende«, und der Fußpunkt als »kaltes Ende« bezeichnet wird.

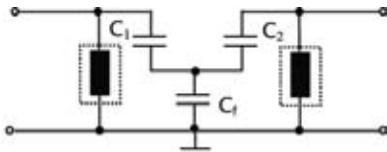


Abb. 257: Kapazitive Fußpunktkopplung bei einem Bandfilter

15.9 Zusammenschaltung von Schwingkreisen

Selektive Filter wie Bandpaß und Bandsperre können auch durch Zusammenschalten von Schwingkreisen realisiert werden.

15.9.1 LC-Bandpaß

Als Bandpaß kann grundsätzlich ein Reihenschwingkreis eingesetzt werden, wobei die Resonanzfrequenz f_0 am besten durchgelassen wird. Die Bandbreite läßt sich vergrößern, wenn mit einem auf die gleiche Resonanzfrequenz abgestimmten Parallelschwingkreis die zu sperrenden Frequenzen kurzgeschlossen werden. Je nach Kopplungsgrad (verschiedene Werte von R_1 in der folgenden Schaltung) ergeben sich auch hier die Höcker eines überkritisch gekoppelten Bandfilters.

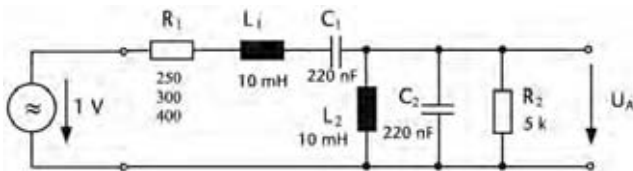


Abb. 258: LC-Bandpaß (Beispiel)

R_1 kann der Innenwiderstand der Spannungsquelle, R_2 kann der Eingangswiderstand einer nachfolgenden Verstärkerschaltung sein.

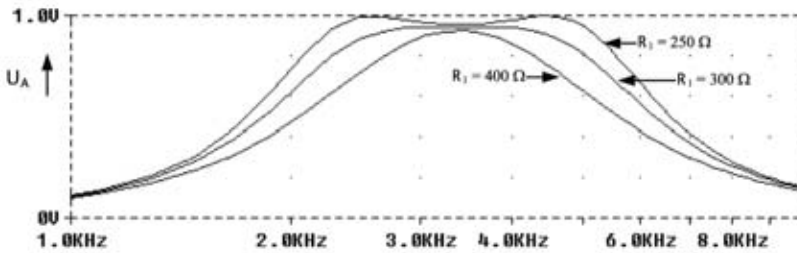


Abb. 259: Amplitudengang des LC-Bandpasses nach Abb. 258

15.9.2 LC-Bandsperre

Als Bandsperre kann grundsätzlich ein Parallelschwingkreis eingesetzt werden, wobei die Resonanzfrequenz f_0 am stärksten gesperrt wird. Die Bandbreite lässt sich vergrößern, wenn mit einem auf die gleiche Resonanzfrequenz abgestimmten Reihenschwingkreis die zu sperrenden Frequenzen zusätzlich kurzgeschlossen werden.

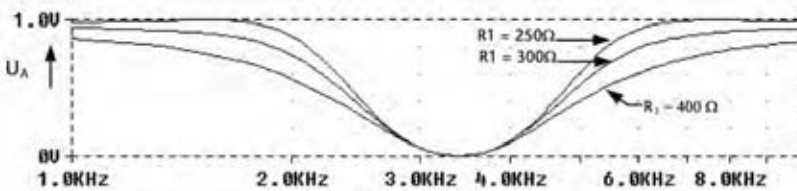
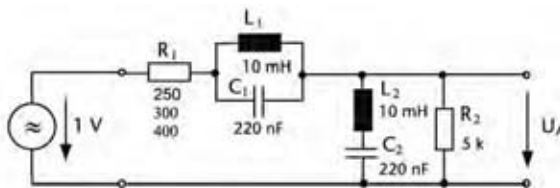


Abb. 260: LC-Bandsperre mit Amplitudengang (Beispiel)

Anmerkung: Bei den bisher betrachteten Schwingkreisen handelt es sich um **geschlossene** Schwingkreise. Eine Sendeantenne (z.B. ein elektrischer Dipol in Form eines ausgestreckten Drahtes) stellt einen **offenen** Schwingkreis dar, bei dem sich das elektromagnetische Feld im freien Raum ausbildet. Strom- und Spannungswerte sind längs des Dipols räumlich verteilt. An den Enden des Dipols ist die Spannung stets maximal und der Strom Null, während in der Mitte die Spannung Null und der Strom maximal ist. Beim schwingenden Dipol bildet der Leitungsstrom eine stehende Welle. Anschaulich kann ein elektrischer Dipol mit einer schwingenden Saite verglichen werden.

15.10 Zusammenfassung: Schwingkreise

1. Bei einem Schwingkreis wird periodisch eine Energieform in eine andere Energieform umgewandelt.
2. Ein elektrischer Schwingkreis besteht aus mindestens einer Induktivität und einer Kapazität.
3. Bei Resonanz gilt bei jedem Schwingkreis:
Induktiver und kapazitiver Widerstand sind gleich groß.
Strom und Spannung sind in Phase.
Der Resonanzwiderstand ist ein ohmscher Widerstand (Wirkwiderstand).
4. Thomson-Gleichung zur Berechnung der Resonanzkreisfrequenz: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$
5. Allgemeine Ermittlung der Resonanzfrequenz einer Schaltung: Komplexen Widerstand (oder Leitwert) berechnen, Imaginärteil Null setzen und nach der Frequenz auflösen.
6. Reihenschwingkreis bei Resonanz (Spannungsresonanz):
Der Widerstand des Kreises ist am kleinsten und der Strom am größten.
Resonanzwiderstand = Reihen-Verlustwiderstand
Die Teilspannungen an L und C sind Q-mal größer als die angelegte Spannung.
7. Parallelschwingkreis bei Resonanz (Stromresonanz):
Der Widerstand ist von außen her betrachtet am größten, und der zugeführte Strom am kleinsten.
Resonanzwiderstand = Parallel-Verlustwiderstand
Im Kreis ist der Strom Q-mal größer als in der Zuleitung.
8. Die Resonanzwirkung wird besser, je höher die Güte des Kreises ist (je kleiner die Verluste sind).
9. Die Bandbreite wird kleiner, je größer die Güte des Kreises ist.
10. Außerhalb des Resonanzzustandes ist der Widerstand jedes Schwingkreises entweder induktiv oder kapazitiv.
11. Schwingkreise können als Filter verwendet werden.
12. Ein Bandfilter besteht aus gekoppelten Schwingkreisen derselben Resonanzfrequenz.
13. Beim Bandfilter hängt die Form der Resonanzkurve vom Kopplungsgrad und vom Verlustwiderstand der Kreise ab.

16 Mehrphasensysteme

16.1 Erzeugung von Drehstrom

Zunächst wird das Prinzip des Wechselstromgenerators erläutert. Rotiert eine rechteckige Spule mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem homogenen Magnetfeld B , so wird in ihr eine sinusförmige Spannung induziert. Für den magnetischen Fluß durch eine Spule gilt $\Phi = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \alpha$ (Abschnitt 3.4.4.1 Magnetischer Fluß). Wegen der Rotation der Spule ändert sich der magnetische Fluß durch die Spule in Abhängigkeit des Drehwinkels α . Mit dem Induktionsgesetz erhält man durch Differenzieren die in der Spule induzierte Spannung.

$$u_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(NBA \cos \alpha)}{dt} = - \frac{d(NBA \cos \omega t)}{dt} = NBA\omega \sin \omega t$$

Die Konstante $\hat{U} = NBA\omega$ ist der Scheitelwert der Sinusspannung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$.

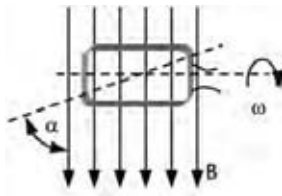


Abb. 261: Rotierende Spule in einem Magnetfeld zur Erzeugung einer sinusförmigen Spannung

Werden auf der Drehachse mehrere, um bestimmte Winkel gegeneinander versetzte Spulen angeordnet, so werden in ihnen Spannungen induziert, die um diese Winkel zueinander phasenverschoben sind. Falls alle Spannungen den gleichen Scheitelwert haben und um den gleichen Winkel gegeneinander verschoben sind, handelt es sich um ein symmetrisches Mehrphasensystem.

Das symmetrische Dreiphasensystem oder Drehstromsystem ist in der Energietechnik von besonderer Bedeutung. Zur Erzeugung von **Drehstrom** sind beim Drehstromgenerator drei gleiche, um je 120° versetzte Spulen angebracht. Die Spulen werden auch als »Strang« oder »Phase« bezeichnet. In den Spulen werden drei gleich große Wechselspannungen induziert, die gegenseitig jeweils um 120° phasenverschoben sind.

Die Spannungen lassen sich durch folgende Gleichungen darstellen.

$$u_1(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t), \quad u_2(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t - 120^\circ), \quad u_3(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t - 240^\circ)$$

$$\text{oder in komplexer Polarform } U_1 = U, \quad U_2 = U \cdot e^{-j120^\circ}, \quad U_3 = U \cdot e^{-j240^\circ} = U \cdot e^{j120^\circ}$$

Aus $\hat{U} \cdot [\sin(\omega t) + \sin(\omega t + 120^\circ) + \sin(\omega t - 120^\circ)] = 0$ folgt:

Addiert man die drei Kurven punktweise, so zeigt sich, daß die Summe der drei Spannungen bzw. Ströme in jedem Augenblick gleich Null ist.

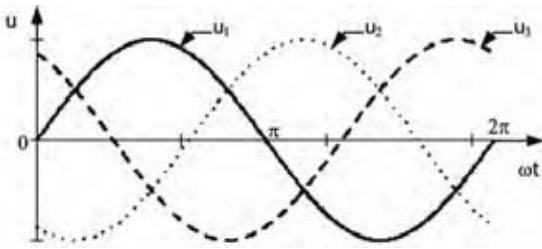


Abb. 262: Die drei Strangspannungen des Drehstroms

Um an den Drehstromgenerator einen Verbraucher anzuschließen, könnte man für jeden Strang zwei Leitungen vom Generator zum Verbraucher führen, insgesamt also sechs Leitungen. Die drei Stränge können jedoch untereinander in besonderer Weise verkettet werden, so daß weniger als sechs Leitungen notwendig sind. Es gibt zwei Arten der Verkettung, die Sternschaltung und die Dreieckschaltung.

16.1.1 Sternschaltung des Generators

Die Anfangspunkte der drei Generatorstränge sind in einem Punkt N, dem **Sternpunkt** oder **Mittelpunkt**, zusammengeschaltet. Dieser wird geerdet und als vierter, sogenannter **Mittelleiter** (oder Mittelpunktsleiter, früher auch als Null-Leiter bezeichnet) zum Verbraucher geführt. Die Leitungen der drei übrigen Wicklungsanschlüsse werden als **Außenleiter** und nach Norm mit R, S und T bezeichnet. Somit liegt ein Vierleitersystem vor. Auf die Herausführung des Mittelpunktes kann man verzichten, man spricht dann von einem Dreileitersystem.

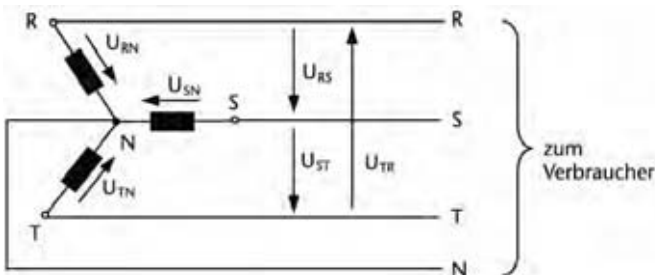


Abb. 263: Drehstromgenerator in Sternschaltung

Die an jeder Wicklung liegende Spannung $U_{RN} = U_{SN} = U_{TN}$ wird als **Strangspannung**, **Phasen-spannung** oder **Sternspannung** bezeichnet.

Die zwischen zwei Außenleitern liegende Spannung $U_{RS} = U_{ST} = U_{TR}$ wird **Außenleiterspannung** oder **Leiterspannung** genannt.

Für die Spannungen gilt: $U_{RS} = U_{RN} - U_{SN}$; $U_{ST} = U_{SN} - U_{TN}$; $U_{TR} = U_{TN} - U_{RN}$.

Unter Berücksichtigung der Phasenverschiebung der Strangspannungen von 120° ergibt sich damit nachfolgendes Zeigerdiagramm.

Die spitzen Winkel von 30° folgen daraus, daß das Dreieck gleichschenkelig und die Summe der Innenwinkel 180° ist.

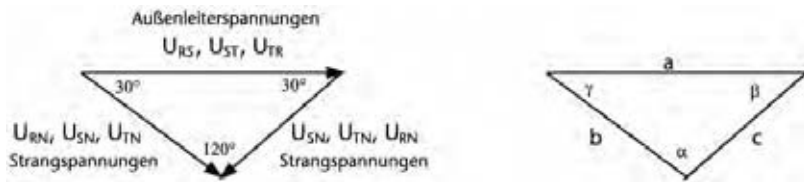


Abb. 264: Zeigerdiagramm der Spannungen von Abb. 263 (links) und Hilfsdreieck (rechts)

Aus dem Cosinussatz der ebenen Trigonometrie $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$ ergibt sich mit $b = c$ aus dem Hilfsdreieck $a^2 = 2ab \cdot \cos \gamma$ oder $a = 2b \cdot \cos \gamma$.

Für die Beträge der Außenleiterspannungen folgt somit aus den Beträgen der Strangspannungen:

$$|U_{RS}| = 2 \cdot |U_{RN}| \cdot \cos(30^\circ) = 2 \cdot |U_{RN}| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot |U_{RN}|$$

$$|U_{RS}| = \sqrt{3} \cdot |U_{RN}|; \quad |U_{ST}| = \sqrt{3} \cdot |U_{SN}|; \quad |U_{TR}| = \sqrt{3} \cdot |U_{TN}|$$

Außenleiterspannung = $\sqrt{3} \cdot$ Strangspannung

Bei einem Drehstromgenerator in Sternschaltung ist die Außenleiterspannung um den Faktor $\sqrt{3}$ größer als die Strangspannung.

Im öffentlichen Stromversorgungsnetz beträgt die Strangspannung 220 V und die Außenleiterspannung $\sqrt{3} \cdot 220 \text{ V} = 380 \text{ V}$.

$$|U_{RN}| = |U_{SN}| = |U_{TN}| = U_{\text{eff}}(\text{Strang}) = 220 \text{ V} \quad |U_{RS}| = |U_{ST}| = |U_{TR}| = U_{\text{eff}}(\text{Leiter}) = 380 \text{ V}$$

16.1.2 Dreieckschaltung des Generators

Die drei Wicklungsstränge sind hintereinander zu einem geschlossenen Stromkreis geschaltet. Die drei entstehenden Punkte R, S und T werden zum Verbraucher geführt und bilden die Außenleiter. Es gibt keinen Mittelleiter. Die Außenleiterspannungen sind gleich den Strangspannungen, dem Betrage nach gleich groß und gegeneinander um 120° phasenverschoben.

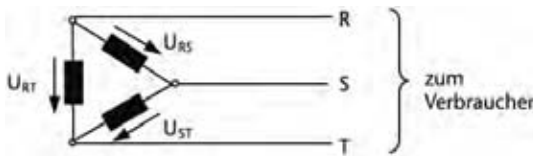


Abb. 265: Drehstromgenerator in Dreieckschaltung

16.2 Verbraucher im Drehstromsystem

Ein Drehstromverbraucher besteht meist aus drei einzelnen, entweder in Stern oder in Dreieck geschalteten Widerständen. Bei der Sternschaltung des Verbrauchers sind Schaltungen mit und ohne angeschlossenen Mittelleiter möglich.

16.2.1 Sternschaltung des Verbrauchers mit Mittelleiter

Die drei Verbraucherwiderstände können verschiedene Werte haben und komplex sein. Sie sind deshalb mit Z_1 , Z_2 , Z_3 bezeichnet.

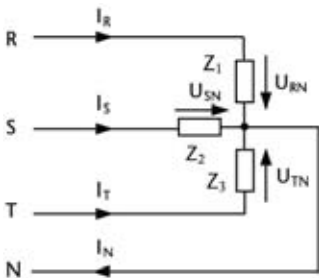


Abb. 266: Drehstromverbraucher in Sternschaltung mit Mittelleiter

Setzt man $U_{RN} = U_{SN} = U_{TN} = U_{\text{Strang}}$ so gilt für die komplexen Spannungen an den Verbraucherwiderständen bei jeweils 120° Phasenverschiebung der Spannungen:

Gl. 127: Spannungen an den Widerständen eines Drehstromverbrauchers in Sternschaltung mit Mittelleiter

$$U_{RN} = U_{\text{Strang}}$$

$$U_{SN} = U_{\text{Strang}} \cdot e^{-j120^\circ}$$

$$U_{TN} = U_{\text{Strang}} \cdot e^{-j240^\circ} = U_{\text{Strang}} \cdot e^{j120^\circ}$$

Für die komplexen Außenleiterströme gilt dann:

Gl. 128: Außenleiterströme eines Drehstromverbrauchers in Sternschaltung mit Mittelleiter

$$I_R = \frac{U_{RN}}{Z_1}$$

$$I_S = \frac{U_{SN}}{Z_2}$$

$$I_T = \frac{U_{TN}}{Z_3}$$

Aus der Knotenregel läßt sich der komplexe Mittelleiterstrom berechnen.

Gl. 129: Mittelleiterstrom eines Drehstromverbrauchers in Sternschaltung

$$I_N = I_R + I_S + I_T$$

16.2.2 Sternschaltung des Verbrauchers ohne Mittelleiter

Der Verbrauchersternpunkt N^* ist nicht mit dem Mittelleiter N des Drehstromnetzes verbunden. Zwischen N^* und N besteht eine Spannung $U_N \neq 0$ V, wenn die Verbraucherwiderstände Z_1 , Z_2 und Z_3 verschiedene Werte haben (unsymmetrische Belastung).

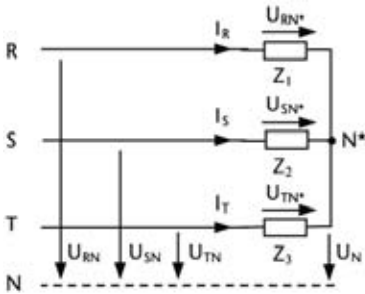


Abb. 267: Drehstromverbraucher in Sternschaltung ohne Mittelleiter

Für die Ströme I_R , I_S und I_T gilt dann mit den Leitwerten $Y_1 = \frac{1}{Z_1}$, $Y_2 = \frac{1}{Z_2}$, $Y_3 = \frac{1}{Z_3}$:

$$I_R = U_{RN^*} \cdot Y_1 = (U_{RN} - U_N) \cdot Y_1; \quad I_S = U_{SN^*} \cdot Y_2 = (U_{SN} - U_N) \cdot Y_2; \quad I_T = U_{TN^*} \cdot Y_3 = (U_{TN} - U_N) \cdot Y_3$$

Gl. 130: Außenleiterströme eines Drehstromverbrauchers in Sternschaltung ohne Mittelleiter

$$I_R = (U_{RN} - U_N) \cdot Y_1$$

$$I_S = (U_{SN} - U_N) \cdot Y_2$$

$$I_T = (U_{TN} - U_N) \cdot Y_3$$

Nach der Knotenregel muß die Summe der Ströme gleich Null sein.

$$(U_{RN} - U_N) \cdot Y_1 + (U_{SN} - U_N) \cdot Y_2 + (U_{TN} - U_N) \cdot Y_3 = 0$$

Nach U_N aufgelöst ergibt sich:

Gl. 131: Spannung des Drehstromverbraucher-Sternpunktes ohne angeschlossenen Mittelleiter

$$U_N = \frac{U_{RN} \cdot Y_1 + U_{SN} \cdot Y_2 + U_{TN} \cdot Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

Für die Spannungen U_{RN} , U_{SN} und U_{TN} in Gl. 131 können die in Gl. 127 angegebenen Ausdrücke eingesetzt werden. Nach Berechnung von U_N können die Außenleiterströme nach Gl. 130 bestimmt werden.

Man bezeichnet die **Belastung** als **symmetrisch**, wenn die drei Verbraucherwiderstände gleich sind ($Z_1 = Z_2 = Z_3$). Die drei Außenleiterströme I_1 , I_2 , I_3 sind dann dem Betrage nach gleich groß. Da sie um jeweils 120° gegeneinander phasenverschoben sind, ist ihre geometrische Summe gleich Null. Damit wird auch der Mittelleiterstrom $I_N = 0$, und der **Mittelleiter kann entfallen**.

Bei symmetrischer Belastung liegt jeder Verbraucherwiderstand an der Strangspannung. Für den in jedem Außenleiter fließenden Strom ergibt sich:

Gl. 132: Außenleiterströme bei symmetrischer Belastung (Drehstromverbraucher in Sternschaltung)

$$I = \frac{U_{\text{Strang}}}{Z} = \frac{U_{\text{Leiter}}}{\sqrt{3} \cdot Z}$$

Aufgabe 64:

Ein Drehstromnetz mit Mittelleiter hat die Außenleiterspannung $U = 380 \text{ V}$ und die Frequenz 50 Hz . An ihm sind Verbraucherwiderstände nach Abb. 268 angeschlossen.

Bestimmen Sie die Ströme I_R , I_S , I_T und I_N .

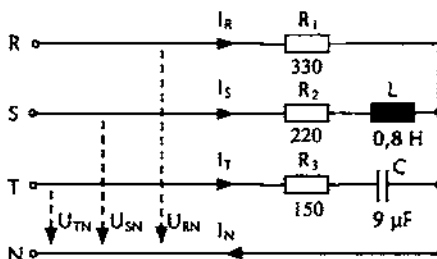


Abb. 268: Unsymmetrischer Drehstromverbraucher in Sternschaltung mit angeschlossenem Mittelleiter (Schaltungsbeispiel)

Lösung:

Die Strangspannung des Drehstromnetzes beträgt $U_{\text{Strang}} = \frac{U_{\text{Leiter}}}{\sqrt{3}} = \frac{380 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}$.

Die an den komplexen Widerständen liegenden komplexen Spannungen sind:

$$U_{RN} = 220 \text{ V} \quad U_{SN} = 220 \text{ V} \cdot e^{-j120^\circ} \quad U_{TN} = 220 \text{ V} \cdot e^{-j240^\circ} = 220 \text{ V} \cdot e^{j120^\circ}$$

Die komplexen Widerstände sind:

$$Z_1 = R_1 = 330 \Omega$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L = (220 + j \cdot 251) \Omega = \sqrt{220^2 + 251^2} \Omega \cdot e^{j \cdot \arctan\left(\frac{251}{220}\right)} = 333,8 \Omega \cdot e^{j48,8^\circ}$$

$$Z_3 = R_3 + \frac{1}{j\omega C} = (150 - j \cdot 353,7) \Omega = \sqrt{150^2 + 353,7^2} \Omega \cdot e^{j \cdot \arctan\left(\frac{353,7}{150}\right)} = 384,2 \Omega \cdot e^{-j67^\circ}$$

Die Außenleiterströme ergeben sich zu:

$$I_R = \frac{U_{RN}}{Z_1} = \frac{220 \text{ V}}{330 \Omega} = 666 \text{ mA} ; |I_R| = 666 \text{ mA}$$

$$I_S = \frac{U_{SN}}{Z_2} = \frac{220 \text{ V} \cdot e^{-j120^\circ}}{333,8 \Omega \cdot e^{j48,8^\circ}} = 659 \text{ mA} \cdot e^{-j168,8^\circ} = 659 \text{ mA} \cdot [\cos(168,8^\circ) - j \cdot \sin(168,8^\circ)]$$

$$I_S = (-646,5 - j \cdot 128) \text{ mA} ; |I_S| = \sqrt{646,5^2 + 128^2} \text{ mA} ; |I_S| = 659 \text{ mA}$$

$$I_T = \frac{U_{TN}}{Z_3} = \frac{220 \text{ V} \cdot e^{j120^\circ}}{384,2 \Omega \cdot e^{-j67^\circ}} = 572,6 \text{ mA} \cdot e^{j187^\circ} = 572,6 \text{ mA} \cdot [\cos(187^\circ) + j \cdot \sin(187^\circ)]$$

$$I_T = (-568,3 - j \cdot 69,8) \text{ mA} ; |I_S| = \sqrt{568,3^2 + 69,8^2} \text{ mA} ; |I_T| = 572,6 \text{ mA}$$

Der Mittelleiterstrom ist $I_N = I_R + I_S + I_T$.

$$I_N = 666 \text{ mA} + (-646,5 - j128) \text{ mA} + (-568,3 - j69,8) \text{ mA} = (-548,8 - j197,8) \text{ mA}$$

$$|I_N| = \sqrt{548,8^2 + 197,8^2} \text{ mA} ; |I_N| = 583,4 \text{ mA}$$

Aufgabe 65:

Ein Drehstromnetz **ohne** Mittelleiter hat die Außenleiterspannung $U = 380 \text{ V}$. An ihm sind Verbraucherwiderstände nach Abb. 269 angeschlossen. Zu bestimmen sind die Außenleiterströme I_R , I_S und I_T .

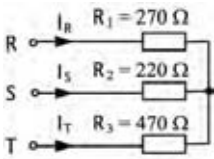


Abb. 269: Unsymmetrischer Drehstromverbraucher in Sternschaltung ohne angeschlossenen Mittelleiter (Schaltungsbeispiel)

Lösung:

Die Verbraucherwiderstände haben die Leitwerte

$$Y_1 = \frac{1}{R_1} = 3,7 \text{ mS} , Y_2 = \frac{1}{R_2} = 4,5 \text{ mS} , Y_3 = \frac{1}{R_3} = 2,1 \text{ mS} .$$

Die Strangspannung des Drehstromnetzes hat den Betrag $U_{\text{Strang}} = \frac{U_{\text{Leiter}}}{\sqrt{3}} = \frac{380 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V} .$

$$U_N = \frac{U_{RN} \cdot Y_1 + U_{SN} \cdot Y_2 + U_{TN} \cdot Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad \text{mit } U_{RN} = U_{\text{Strang}} ; U_{SN} = U_{\text{Strang}} \cdot e^{-j120^\circ} ;$$

$$U_{TN} = U_{\text{Strang}} \cdot e^{j120^\circ}$$

Für die Addition werden die Spannungen in die Komponentenform (algebraische Form) umgerechnet.

$$U_{RN} = 220 \text{ V}$$

$$U_{SN} = 220 \text{ V} \cdot [\cos(-120^\circ) + j \cdot \sin(-120^\circ)] = 220 \text{ V} \cdot (-0,5 - j \cdot 0,866) = (-110 - j \cdot 190,5) \text{ V}$$

$$U_{TN} = 220 \text{ V} \cdot [\cos(120^\circ) + j \cdot \sin(120^\circ)] = 220 \text{ V} \cdot (-0,5 + j \cdot 0,866) = (-110 + j \cdot 190,5) \text{ V}$$

$$U_N = \frac{220 \text{ V} \cdot 3,7 \text{ mS} + (-110 - j190,5) \text{ V} \cdot 4,5 \text{ mS} + (-110 + j190,5) \text{ V} \cdot 2,1 \text{ mS}}{10,3 \text{ mS}}$$

$$U_N = \frac{(0,814 - 0,495 - j0,857 - 0,231 + j0,400) \text{ V mS}}{10,3 \text{ mS}} = (8,5 - j44,4) \text{ V}$$

Die Außenleiterströme sind $I_R = (U_{RN} - U_N) \cdot Y_1$; $I_S = (U_{SN} - U_N) \cdot Y_2$; $I_T = (U_{TN} - U_N) \cdot Y_3$

$$I_R = (220 - 8,5 + j44,4) \text{ V} \cdot 3,7 \text{ mS} = (0,78 + j0,16) \text{ A}$$

$$I_S = [-110 - j190,5 - (8,5 - j44,4)] \text{ V} \cdot 4,5 \text{ mS} = (-0,53 - j0,66) \text{ A}$$

$$I_T = [-110 + j \cdot 190,5] - (8,5 - j \cdot 44,4) \text{ V} \cdot 2,1 \text{ mS} = (-0,25 - j \cdot 0,49) \text{ A}$$

Die Beträge sind:

$$|I_R| = \sqrt{0,78^2 + 0,16^2} \text{ A}; |I_R| = 0,8 \text{ A}$$

$$|I_S| = \sqrt{0,53^2 + 0,66^2} \text{ A}; |I_S| = 0,85 \text{ A}$$

$$|I_T| = \sqrt{0,25^2 + 0,49^2} \text{ A}; |I_T| = 0,55 \text{ A}$$

Aufgabe 66:

Ein Drehstromnetz ohne Mittelleiter hat die Außenleiterspannung $U = 380 \text{ V}$ und die Frequenz 50 Hz . An ihm sind Verbraucherwiderstände nach Abb. 270 angeschlossen. $R = 60 \Omega$, $L = 0,25 \text{ H}$.

Bestimmen Sie den Strom I in jedem Außenleiter.

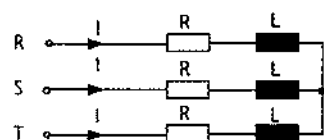


Abb. 270: Symmetrischer Drehstromverbraucher in Sternschaltung ohne angeschlossenen Mittelleiter (Schaltungsbeispiel)

Lösung:

Jeder komplexe Widerstand ist $Z = R + j\omega L = (60 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0,25) \Omega = (60 + j \cdot 78,5) \Omega$ mit dem

Betrag $|Z| = \sqrt{60^2 + 78,5^2} \Omega = 98,8 \Omega$.

Jeder Widerstand liegt an der Strangspannung $U_{\text{Strang}} = \frac{U_{\text{Leiter}}}{\sqrt{3}} = \frac{380 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}$.

In jedem Außenleiter fließt der Strom $I = \frac{U_{\text{Strang}}}{Z} = \frac{220 \text{ V}}{98,8 \Omega} = 2,2 \text{ A}$.

16.2.3 Dreieckschaltung des Verbrauchers

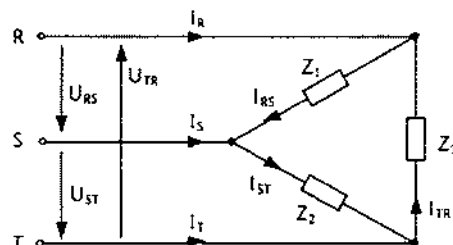


Abb. 271: Drehstromverbraucher in Dreieckschaltung

Die drei Außenleiterspannungen U_{RS} , U_{ST} und U_{TR} haben den gleichen Betrag U und sind gegeneinander um 120° phasenverschoben. $U_{RS} = U$; $U_{ST} = U \cdot e^{-j120^\circ}$; $U_{TR} = U \cdot e^{j120^\circ}$

Für die Ströme in den Verbrauchersträngen gilt somit:

Gl. 133: Strangströme eines Drehstromverbrauchers in Dreieckschaltung

$$I_{RS} = \frac{U_{RS}}{Z_1} \quad I_{ST} = \frac{U_{ST}}{Z_2} \quad I_{TR} = \frac{U_{TR}}{Z_3}$$

Nach dem ersten Kirchhoffschen Gesetz ergeben sich die Außenleiterströme.

Gl. 134: Außenleiterströme eines Drehstromverbrauchers in Dreieckschaltung

$$I_R = I_{RS} - I_{TR} \quad I_S = I_{ST} - I_{RS} \quad I_T = I_{TR} - I_{ST}$$

Bei symmetrischer Belastung ($Z_1 = Z_2 = Z_3$) haben die Strangströme den gleichen Betrag und sind um jeweils 120° gegeneinander phasenverschoben. Es gilt: $I_{RS} = I_{ST} = I_{TR} = I_{\text{Strang}}$. Die Außenleiterströme sind ebenfalls gleich groß ($I_R = I_S = I_T = I_{\text{Leiter}}$) und um den Faktor $\sqrt{3}$ größer als der Strangstrom.

Gl. 135: Außenleiterströme bei symmetrischer Belastung (Drehstromverbraucher in Dreieckschaltung)

$$I_{\text{Leiter}} = \sqrt{3} \cdot I_{\text{Strang}}$$

Aufgabe 67:

Ein Drehstromnetz hat die Außenleiterspannung $U = 380 \text{ V}$ und die Frequenz 50 Hz . An ihm sind Verbraucherwiderstände nach Abb. 272 angeschlossen. $R = 160 \Omega$, $L = 0,4 \text{ H}$.

Bestimmen Sie die Ströme I_R , I_S und I_T in den Außenleitern.

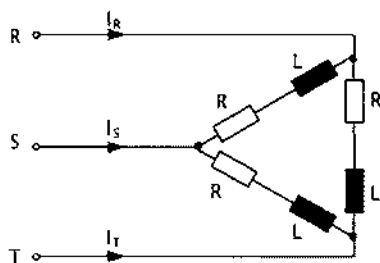


Abb. 272: Symmetrischer Drehstromverbraucher in Dreieckschaltung (Schaltungsbeispiel)

Lösung:

Jeder Strang hat den komplexen Widerstand $Z = R + j\omega L = (160 + j 2\pi 50 \cdot 0,4) \Omega = (160 + j 125,7) \Omega$.

Der Betrag jedes Strangwiderstandes ist $|Z| = \sqrt{160^2 + 125,7^2} = 203,5 \Omega$.

In jedem Strang fließt der Strom $I_{\text{Strang}} = \frac{380 \text{ V}}{203,5 \Omega} = 1,9 \text{ A}$.

Da die Belastung symmetrisch ist, gilt: $I_{\text{Leiter}} = \sqrt{3} \cdot I_{\text{Strang}}$ mit $I_{\text{Leiter}} = I_R = I_S = I_T$; $I_{\text{Leiter}} = 3,3 \text{ A}$

16.3 Leistung bei Drehstrom

Die gesamte vom Drehstromgenerator abgegebene Augenblicksleistung ist gleich der Summe der Augenblicksleistungen der einzelnen Stränge. Dies gilt unabhängig davon, ob der Verbraucher in Stern oder in Dreieck geschaltet ist. Zu unterscheiden ist zwischen symmetrischer und unsymmetrischer Belastung.

Die folgenden Formeln werden ohne Herleitung angegeben.

Gl. 136: Wirk-, Schein- und Blindleistung im Drehstromsystem bei symmetrischer Belastung

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

U = Effektivwert der Außenleiterspannung

I = Effektivwert des Außenleiterstromes

φ = Phasenwinkel zwischen Strangspannung und Strangstrom (!)

Gl. 137: Wirkleistung im Drehstromsystem bei unsymmetrischer Belastung

$$P = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 + U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 + U_3 \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_3$$

U_1, U_2, U_3 = Effektivwerte der Generator-Strangspannungen

I_1, I_2, I_3 = Effektivwerte der Außenleiterströme

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ = Phasenwinkel zwischen Generator-Strangspannungen und Außenleiterströmen

Aufgabe 68:

Ein Drehstromnetz mit der Außenleiterspannung $U = 380 \text{ V}$ speist einen symmetrischen Verbraucher. In den drei Anschlußleitungen fließt jeweils der Strom $I = 3 \text{ A}$. Der Leistungsfaktor des Verbrauchers ist $\cos \varphi = 0,7$.

Wie groß sind die vom Verbraucher aufgenommene Wirk-, Blind- und Scheinleistung?

Lösung:

Wirkleistung: $P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \text{ V} \cdot 3 \text{ A} \cdot 0,7 = 1382 \text{ W}$

Blindleistung: $\varphi = \arccos 0,7 = 45,6^\circ$; $Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \text{ V} \cdot 3 \text{ A} \cdot \sin 45,6^\circ = 1411 \text{ var}$

Scheinleistung: $S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{3} \cdot 380 \text{ V} \cdot 3 \text{ A} = 1975 \text{ VA}$

Anmerkung: Werden drei Spulen von einem Drehstromgenerator gespeist, so entstehen drei getrennte magnetische Felder, die den drei Spannungen entsprechen. Versetzt man die drei Spulen um 120° , so entsteht ein gemeinsames magnetisches **Drehfeld**, weil der Strom in den einzelnen Wicklungen nacheinander sein Maximum erreicht. Bei einer Netzfrequenz von 50 Hz läuft das Drehfeld 50mal in der Sekunde um. Dieses Drehfeld findet bei Drehstrommotoren Verwendung und gibt dem Drehstrom seinen Namen.

Anmerkung: Erwähnt sei, daß bei der Übertragung von Drehstrom gegenüber der Übertragung von Wechselstrom 13 % weniger Stromwärmeverluste in den Leitungen entstehen.

16.4 Zusammenfassung: Mehrphasensysteme

1. Beim Drehstromsystem sind die drei Spannungen um je 120° gegeneinander phasenverschoben.
2. Ein Drehstromgenerator kann in Stern oder in Dreieck geschaltet werden.
3. Man unterscheidet zwischen den Außenleitern (Phasen) und den Strängen.
4. Drehstromgenerator in Sternschaltung: Außenleiterspannung = $\sqrt{3} \cdot$ Strangspannung.
5. Drehstromgenerator in Dreieckschaltung: Außenleiterspannung = Strangspannung.
6. Ein Drehstromverbraucher kann in Stern (mit oder ohne Mittelleiter) oder in Dreieck geschaltet werden.
7. Verbraucher in Sternschaltung mit Mittelleiter:

Spannungen an den Verbraucherwiderständen:

$$U_{RN} = U_{\text{Strang}}$$

$$U_{SN} = U_{\text{Strang}} \cdot e^{-j120^\circ}$$

$$U_{TN} = U_{\text{Strang}} \cdot e^{j120^\circ}$$

Außenleiterströme: $I_R = \frac{U_{RN}}{Z_1}$

$$I_S = \frac{U_{SN}}{Z_2}$$

$$I_T = \frac{U_{TN}}{Z_3}$$

Mittelleiterstrom: $I_N = I_R + I_S + I_T$

8. Verbraucher in Sternschaltung ohne Mittelleiter:

Außenleiterströme: $I_R = (U_{RN} - U_N) \cdot Y_1$

$$I_S = (U_{SN} - U_N) \cdot Y_2$$

$$I_T = (U_{TN} - U_N) \cdot Y_3$$

Spannung des Drehstromverbraucher-Sternpunktes: $U_N = \frac{U_{RN} \cdot Y_1 + U_{SN} \cdot Y_2 + U_{TN} \cdot Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$

Strom in jedem Außenleiter bei symmetrischer Belastung: $I = \frac{U_{\text{Strang}}}{Z} = \frac{U_{\text{Leiter}}}{\sqrt{3} \cdot Z}$

9. Verbraucher in Dreieckschaltung:

Strangströme: $I_{RS} = \frac{U_{RS}}{Z_1}$

$$I_{ST} = \frac{U_{ST}}{Z_2}$$

$$I_{TR} = \frac{U_{TR}}{Z_3}$$

Außenleiterströme: $I_R = I_{RS} - I_{TR}$

$$I_S = I_{ST} - I_{RS}$$

$$I_T = I_{TR} - I_{ST}$$

Außenleiterströme bei symmetrischer Belastung: $I_{\text{Leiter}} = \sqrt{3} \cdot I_{\text{Strang}}$

10. Leistung bei symmetrischer Belastung:

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

U = Effektivwert der Außenleiterspannung

I = Effektivwert des Außenleiterstromes

φ = Phasenwinkel zwischen **Strangspannung** und **Strangstrom** (!)

17 Analyse allgemeiner Wechselstromnetze

Als Erweiterung einfacher Stromkreise sind elektrische Netze (Netzwerke) Schaltungen mit mindestens einer Stromverzweigung. Bei der Analyse eines Netzes werden die Ströme und Spannungen in den Zweigen des Netzes ermittelt oder andere Größen, z.B. Leistungen oder Widerstände, berechnet. Die Anwendung der komplexen Rechnung ist meist eine Voraussetzung für die Berechnung von Wechselstromnetzen. Durch die komplexe Rechnung bleiben die notwendigen mathematischen Kenntnisse auf die »normale« Algebra beschränkt, und das Lösen von Differential- bzw. Integralgleichungen ist nicht erforderlich. Alle Betrachtungen beziehen sich ausschließlich auf den eingeschwungenen Zustand der Netzwerke.

In der Gleichstromtechnik gilt bekanntlich das Ohmsche Gesetz. Liegt an einer Spannung U ein ohmscher Widerstand R (mit dem Leitwert $G = \frac{1}{R}$), so kann der fließende Strom nach

$I = \frac{U}{R} = U \cdot G$ berechnet werden. Durch die Anwendung komplexer Größen wird das Ohmsche

Gesetz auf Wechselstromkreise erweitert und ist dort genauso gültig wie bei Gleichstromkreisen. Die Spannung U und der Strom I werden bei Wechselstromkreisen hier nicht extra als komplex gekennzeichnet (z.B. durch einen hochgestellten Stern als U^* oder wie üblich durch Unterstreichen), da dies zu einer zeitraubenden Schreibweise führt und auch nicht nötig ist, falls klar ist, daß es sich um komplexe Größen handelt. Ein komplexer Widerstand wird mit Z (Leitwert $Y = \frac{1}{Z}$) bezeichnet. Liegt an einer sinusförmigen Spannung U ein Verbraucher mit dem komple-

xen Widerstand Z , so gilt für den fließenden Strom $I = \frac{U}{Z} = U \cdot Y$.

Bei der Analyse von Gleichstromnetzen waren neben dem Ohmschen Gesetz die Kirchhoffschen Gesetze die Grundlage aller Methoden zur Netzwerkberechnung. Auch bei der Berechnung von Wechselstromnetzen behalten die Kirchhoffschen Gesetze ihre Gültigkeit. Durch Anwendung der komplexen Rechnung erhält man somit bei der Analyse von Wechselstromnetzen Gleichungen, die genauso aufgebaut sind wie die Gleichungen bei der Analyse von Gleichstromnetzen. Daher gilt:

Alle Methoden zur Berechnung von Gleichstromnetzen wie Maschenanalyse, Knotenanalyse, Satz von der Ersatzspannungsquelle, Überlagerungssatz können auch zur Berechnung von Wechselstromnetzen angewendet werden.

Da die Verfahren zur Analyse von Gleichstromnetzen bereits ausführlich behandelt wurden, soll ihre Anwendung bei der Analyse von Wechselstromnetzen an Hand einiger Beispiele erläutert und geübt werden.

Aufgabe 69:

Zunächst noch einige Beispiele zum Rechnen mit komplexen Zahlen.

Von den folgenden komplexen Zahlen $z = a + jb$ sind jeweils der Betrag $|z|$ und die Phase φ in Grad zu bestimmen. (Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die Lage der komplexen Zahlen in der Gaußschen Ebene und achten Sie dadurch auf den richtigen Quadranten bei der Ermittlung von φ .)

Geben Sie jeweils auch die exponentielle Form (Polarform) $z = |z| \cdot e^{j\varphi}$ der komplexen Zahlen an.

- 1.) $z = j$ 2.) $z = -j$ 3.) $z = -1$ 4.) $z = 11 + j$ 5.) $z = -6 + 2j$
 6.) $z = -6 - 5j$ 7.) $z = 6 - 2j$

Lösung:

- 1.) $|z| = 1$; $\varphi = 90^\circ$; $z = e^{j90^\circ}$
 2.) $|z| = 1$; $\varphi = 270^\circ$; $z = e^{j270^\circ}$
 3.) $|z| = 1$; $\varphi = 180^\circ$; $z = e^{j180^\circ}$
 4.) $|z| = \sqrt{11^2 + 1^2} = 11,05$; 1. Quadrant: $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{11}\right) = 5,2^\circ$; $z = 11,05 \cdot e^{j5,2^\circ}$
 5.) $|z| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 6,3$; 2. Quadrant: $\varphi = 180^\circ - \arctan\left(\frac{2}{6}\right) = 161,6^\circ$; $z = 6,3 \cdot e^{j161,6^\circ}$
 6.) $|z| = \sqrt{6^2 + 5^2} = 7,8$; 3. Quadrant: $\varphi = 180^\circ + \arctan\left(\frac{5}{6}\right) = 219,8^\circ$; $z = 7,8 \cdot e^{j219,8^\circ}$
 7.) $|z| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 6,3$; 4. Quadrant: $\varphi = 360^\circ - \arctan\left(\frac{2}{6}\right) = 341,6^\circ$; $z = 6,3 \cdot e^{j341,6^\circ}$

Aufgabe 70:

Vereinfachen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

- 1.) $z_1 = (2 + 5j) + (3 + 8j)$ 2.) $z_2 = (3 + 2j) - (4 - 5j)$ 3.) $z_3 = (2 + 3j) \cdot (4 - 2j)$ 4.) $z_4 = \frac{2 + 4j}{3 - 6j}$

Lösung:

- 1.) $z_1 = 2 + 3 + 5j + 8j = 5 + 13j$ 2.) $z_2 = 3 - 4 + 2j + 5j = -1 + 7j$

3.) Zur Multiplikation wird am besten die Polarform angewandt.

$$2 + 3j = 3,6 \cdot e^{j56,3^\circ}; 4 - 2j = 4,5 \cdot e^{j333,4^\circ}; z_3 = 3,6 \cdot 4,5 \cdot e^{j(56,3^\circ + 333,4^\circ)} = 16,2 \cdot e^{j389,7^\circ} = 16,2 \cdot e^{j29,7^\circ}$$

Bei Bedarf wird in die arithmetische Form (Komponentenform) umgewandelt.

$$z_3 = 16,2 \cdot (\cos 29,7^\circ + j \sin 29,7^\circ) = 14 + 8j$$

4.) Auch für die Division wird die Polarform verwendet.

$$2 + 4j = 4,5 \cdot e^{j63,4^\circ}; 3 - 6j = 6,7 \cdot e^{j296,6^\circ}; z_4 = 4,5 : 6,7 \cdot e^{j(63,4^\circ - 296,6^\circ)} = 0,67 \cdot e^{-j233,2^\circ} = 0,67 \cdot e^{j126,8^\circ}$$

Umwandlung in die arithmetische Form ergibt: $z_4 = 0,67 \cdot [\cos(-126,8^\circ) + j \sin(-126,8^\circ)] = -0,4 + 0,54j$

Aufgabe 71:

Zur Analyse von Wechselstromnetzen muß häufig der komplexe Widerstand einer Schaltung berechnet werden.

Geben Sie den Eingangswiderstand $Z(j\omega)$ sowie dessen Betrag $|Z(j\omega)|$ und Phase $\varphi(\omega)$ der folgenden Schaltungen an. ($\varphi(\omega)$ entspricht dem Winkel der Phasenverschiebung zwischen einer am Zweipol angelegten Spannung und dem Strom durch den Zweipol.)

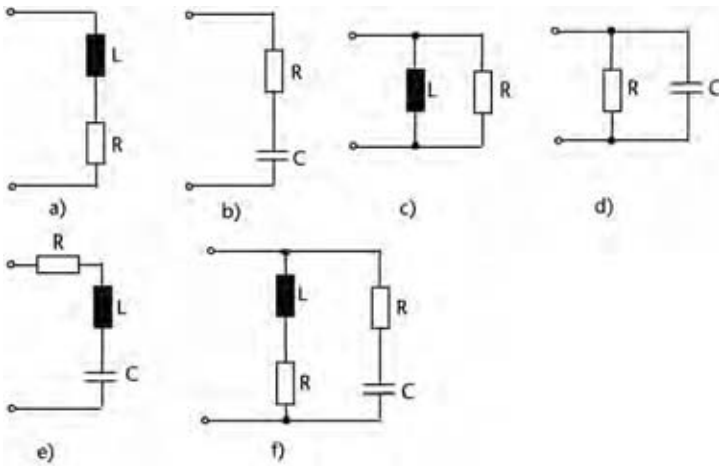


Abb. 273: Beispiele zur Berechnung komplexer Widerstände

Lösung:

a) $Z(j\omega) = R + j\omega L$; $Z(j\omega)$ liegt im 1. Quadranten, die Spannung eilt dem Strom voraus.

$$|Z(j\omega)| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right); \quad \text{Winkel positiv, Spannung eilt vor}$$

b) $Z(j\omega) = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j \cdot \frac{1}{\omega C}$; $Z(j\omega)$ liegt im 4. Quadranten, die Spannung eilt dem Strom nach.

$$|Z(j\omega)| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Winkel negativ, Spannung eilt nach

$$c) \quad Z(j\omega) = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega RL \cdot (R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} = \frac{\omega^2 RL^2 + j\omega R^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\omega^2 RL^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{\omega R^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$Z(j\omega)$ liegt im 1. Quadranten, die Spannung eilt dem Strom voraus.

$$|Z(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{\omega^2 RL^2}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega R^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\omega^4 R^2 L^4 + \omega^2 R^4 L^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2}} = \sqrt{\frac{(R^2 + \omega^2 L^2) \cdot \omega^2 R^2 L^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2}}$$

$$|Z(j\omega)| = \frac{\omega RL}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\frac{\omega R^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2}}{\frac{\omega^2 RL^2}{R^2 + \omega^2 L^2}}\right) = \arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right); \text{ Winkel positiv, Spannung eilt vor}$$

Einfachere Rechnung:

$$Z(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{1}{\frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}}; \quad |Z(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{\omega RL}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Man erinnere sich: $\angle\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \angle Z_1 - \angle Z_2$

Der Zähler von $Z(j\omega)$ ist eine positive reelle Zahl, der Winkel ist 0.

$$\varphi(\omega) = 0 - \arctan\left(\frac{-\frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}}\right) = -\arctan\left(-\frac{R}{\omega L}\right) = \arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right)$$

$$\text{d) } Z(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}; \quad |Z(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega C}{\frac{1}{R}}\right) = -\arctan(\omega RC); \text{ Winkel negativ, Spannung eilt nach}$$

$$\text{e) } Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right); \quad |Z(j\omega)| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right); \text{ Siehe »Reihenschwingkreis«: Für Resonanz ist } \varphi = 0, \text{ wenn } \omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

Für $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ ist $\varphi(\omega)$ negativ, Spannung eilt nach, kapazitives Verhalten.

Für $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ ist $\varphi(\omega)$ positiv, Spannung eilt vor, induktives Verhalten.

$$\text{f) } Z(j\omega) = \frac{(R + j\omega L) \cdot \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}{(R + j\omega L) + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} = \frac{(R + j\omega L) \cdot \left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)}{2R + j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}; \text{ Auf eine weitere Umformung wird verzichtet.}$$

$$\text{Da gilt } \left|\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3}\right| = \frac{|Z_1| \cdot |Z_2|}{|Z_3|} \text{ folgt } |Z(j\omega)| = \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}{\sqrt{4R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Auf eine weitere Umformung wird verzichtet, Zahlenwerte könnten direkt eingesetzt werden.

Da gilt $\angle \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3} = \angle Z_1 + \angle Z_2 - \angle Z_3$ folgt $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right) - \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{2R}\right)$

Aus diesem Beispiel wird ersichtlich, daß bereits bei relativ einfachen Schaltungen die Bestimmung des komplexen Widerstandes bzw. des Phasenwinkels zu großem Rechenaufwand führen kann.

Aufgabe 72:

Welchen Strom I liefert die Spannungsquelle in der folgenden Schaltung und wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom?

Der zeitliche Verlauf der Spannung ist $u(t) = U_{\text{eff}} \cdot \sin(\omega t)$

$U_{\text{eff}} = 10 \text{ V}$, $f = 500 \text{ Hz}$, $R = 30 \Omega$, $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2,2 \mu\text{F}$

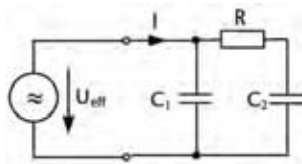


Abb. 274: Einfaches Beispiel zur Berechnung eines Wechselstrom-Netzwerkes

Lösung:

Der Eingangswiderstand der Schaltung ist $Z(j\omega)$.

Der Widerstand der Reihenschaltung aus R und C_2 ist $Z'(j\omega) = R + \frac{1}{j\omega C_2}$.

$$\text{Damit ist } Z(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot \left(R + \frac{1}{j\omega C_2}\right)}{\frac{1}{j\omega C_1} + R + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{-\frac{1}{\omega^2 C_1 C_2} + \frac{R}{j\omega C_1}}{R + \frac{C_1 + C_2}{j\omega C_1 C_2}} = \frac{-\frac{1}{\omega^2 C_1 C_2} - j\frac{R}{\omega C_1}}{R - j\frac{C_1 + C_2}{\omega C_1 C_2}}$$

$$|Z(j\omega)| = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}\right)^2 + \left(\frac{R}{\omega C_1}\right)^2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{C_1 + C_2}{\omega C_1 C_2}\right)^2}}$$

Mit eingesetzten Zahlenwerten ergibt sich:

$$|Z(j\omega)| = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{4\pi^2 \cdot 500^2 \cdot 10^{-6} \cdot 2,2 \cdot 10^{-6}}\right)^2 + \left(\frac{30}{2\pi \cdot 500 \cdot 10^{-6}}\right)^2}}{\sqrt{30^2 + \left(\frac{10^{-6} + 2,2 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 500 \cdot 10^{-6} \cdot 2,2 \cdot 10^{-6}}\right)^2}}; |Z(j\omega)| = 101 \Omega$$

Mit $U_{\text{eff}} = 10 \text{ V}$ hat der gesuchte Strom den Betrag (Effektivwert) $I = \frac{10 \text{ V}}{101 \Omega} = 99 \text{ mA}$.

Die Phase von $Z(j\omega)$ ist $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\frac{R}{\omega C_1}}{-\frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}}\right) - \arctan\left(-\frac{C_1 + C_2}{\frac{\omega C_1 C_2}{R}}\right)$

$\varphi(\omega) = \arctan(\omega R C_2) + \arctan\left(\frac{C_1 + C_2}{\omega R C_1 C_2}\right)$; Nach Einsetzen der Zahlenwerte erhält man $\varphi = 98^\circ$.

Die Spannung eilt dem Strom um 98° voraus.

Hinweis: Sind wie in diesem Beispiel die Größen der Bauelemente zahlenmäßig gegeben, so kann und sollte das Rechnen mit den allgemeinen Bauteilbezeichnungen vermieden werden. Man umgeht dadurch große allgemeine Ausdrücke, bei denen man schnell Rechenfehler macht.

Deshalb wird die alternative Lösung mit sofort eingesetzten Zahlenwerten gezeigt.

Der Widerstand der Reihenschaltung aus R und C_2 ist $Z'(j\omega) = 30 \Omega + \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 500 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6}} \Omega$;

$Z'(j\omega) = (30 - j \cdot 144,7) \Omega$

Der Widerstand von C_1 ist $\frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 500 \cdot 10^{-6}} \Omega = -j318,3 \Omega$

Damit ist $Z(j\omega) = \frac{-j318,3 \cdot (30 - j144,7)}{-j318,3 + 30 - j144,7} = \frac{-46058 - j9549}{30 - j463}$

$|Z(j\omega)| = \frac{\sqrt{46058^2 + 9549^2}}{\sqrt{30^2 + 463^2}}$; $|Z(j\omega)| = 101 \Omega$; $I = \frac{10 \text{ V}}{101 \Omega} = 99 \text{ mA}$

Die Phase von $Z(j\omega)$ ist $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-9549}{-46058}\right) - \arctan\left(\frac{-463}{30}\right) = 11,7^\circ - (-86,3^\circ)$; $\varphi(\omega) = 98^\circ$

Die Spannung eilt dem Strom um 98° voraus.

Aufgabe 73:

Bestimmen Sie mittels einer Maschenanalyse die Spannungs-Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{U_A}{U_1}$ der

folgenden Schaltung. Überprüfen Sie das Ergebnis durch die Grenzbetrachtungen $s = 0$ und $s = \infty$.

Die Spannungsquelle habe den zeitlichen Verlauf $u_1(t) = \tilde{U} \cdot \cos(\omega t)$ mit $\tilde{U} = 100 \text{ V}$, $\omega = 1000 \text{ Hz}$.

Ermitteln Sie die Größen $\tilde{U}_A$ und φ_A der Ausgangsspannung $u_A(t) = \tilde{U}_A \cdot \cos(\omega t + \varphi_A)$.

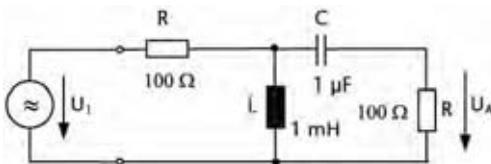


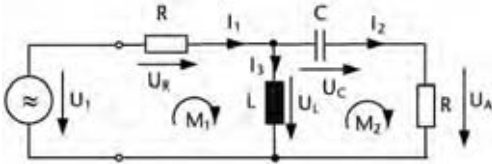
Abb. 275: Beispiel zur Maschenanalyse eines Wechselstromnetzes

Lösung:

1. Schritt: Zeichnen des Graphen und Wahl des Baumes (die Verbindungszweige sind gestrichelt).



2. und 3. Schritt: Willkürliche Orientierung der Spannungen, Ströme und Maschen.



4. Schritt: Aufstellen der Maschengleichungen.

$$M_1: U_R + U_L - U_1 = 0$$

$$M_2: U_C + U_A - U_L = 0$$

5. Schritt: Einsetzen der Spannungsabfälle an den Widerständen.

$$M_1: R \cdot I_1 + sL \cdot I_3 - U_1 = 0$$

$$M_2: \frac{1}{sC} \cdot I_2 + U_A - sL \cdot I_3 = 0$$

6. Schritt: Ausdrücken der Ströme in den Zweigen des Baumes durch die Ströme in den Verbindungszweigen

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0; I_3 = I_1 - I_2$$

Einsetzen in die Maschengleichungen

$$M_1: R \cdot I_1 + sL \cdot (I_1 - I_2) - U_1 = 0; \quad I_1 \cdot (R + sL) - I_2 \cdot sL - U_1 = 0$$

$$M_2: \frac{1}{sC} \cdot I_2 + U_A - sL \cdot (I_1 - I_2) = 0; \quad -I_1 \cdot sL + I_2 \cdot \left(\frac{1}{sC} + sL \right) + U_A = 0$$

7. Schritt: Lösen des Gleichungssystems mit den zwei Unbekannten I_1 und I_2

$$\text{Auflösen von } M_1 \text{ nach } I_1 \text{ ergibt: } I_1 = \frac{U_1 + I_2 \cdot sL}{R + sL}$$

$$\text{Mit } I_2 = \frac{U_A}{R} \text{ und Einsetzen von } I_1 \text{ in } M_2 \text{ folgt: } -\frac{U_1 + \frac{U_A}{R} \cdot sL}{R + sL} \cdot sL + \frac{U_A}{R} \cdot \left(\frac{1}{sC} + sL \right) + U_A = 0$$

$$\text{Durch Auflösen nach } U_1 \text{ erhält man: } U_1 = U_A \frac{s^2 2LRC + s(R^2 C + L) + R}{s^2 LRC}$$

$$\text{Damit ist } H(s) = \frac{U_A}{U_1} = \frac{s^2 LRC}{s^2 2LRC + s(R^2 C + L) + R}$$

Überprüfung:

$$H_{(s=0)} = 0 \text{ und damit } U_A = 0$$

Für $s = 0$ (Gleichspannung) sperrt der Kondensator und es ist $U_A = 0$.

$$H(s=\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{LRC}}{2\text{LRC} + \frac{R^2 C + L}{s} + \frac{R}{s^2}} = \frac{1}{2}$$

Für $s = \infty$ (die Frequenz ist unendlich groß) sperrt die Spule und der Kondensator bildet einen Kurzschluß, er leitet unendlich gut. Die Schaltung bildet dann einen Spannungsteiler aus zwei gleichen Widerständen.

Die Ausgangsspannung ist $U_A = U_1 \cdot \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} U_1$.

Mit $s = j\omega$ bzw. $s^2 = -\omega^2$ und eingesetzten Zahlenwerten folgt:

$$U_A = 10^2 \frac{-(10^3)^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}}{-(10^3)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \cdot 10^{-6} + j10^3(100^2 \cdot 10^{-6} + 10^{-3}) + 100} = \frac{-10}{99,8 + j11}$$

$$|U_A| = \frac{|-10|}{\sqrt{99,8^2 + 11^2}} = 99,6 \text{ mV}; \hat{U}_A = 99,6 \text{ mV} \approx 0,1 \text{ V}$$

$$\varphi = \angle U_A = 180^\circ - \arctan\left(\frac{11}{99,8}\right); \varphi = 173,7^\circ; \text{arc } \varphi = 3,032 \text{ rad (Winkel im Bogenmaß)}$$

Die Ausgangsspannung ist $u_A(t) = 0,1 \text{ V} \cdot \cos(1000 \text{ s}^{-1} \cdot t + 173,7^\circ) = 0,1 \text{ V} \cdot \cos(1000 \text{ s}^{-1} \cdot t + 3)$

Anmerkung: Bereits bei diesem einfachen Netzwerk sieht man, daß es sinnvoll ist, mit der Abkürzung $s = j\omega$ zu rechnen.

Mit unserem Mathcad-Programm können wir noch den Amplituden- und Phasengang des Netzwerkes plotten.

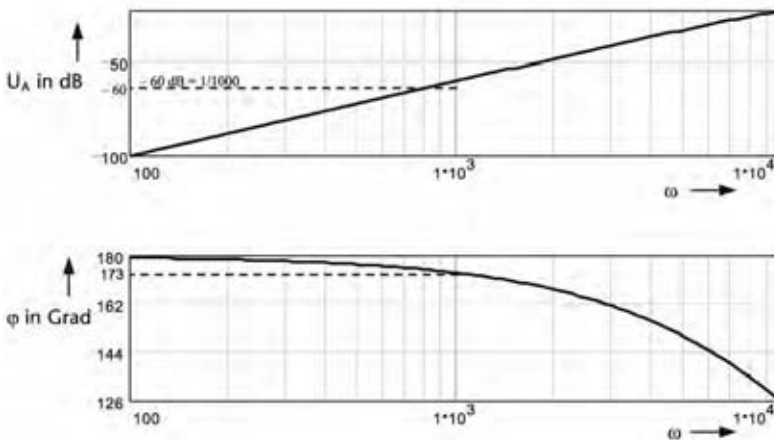
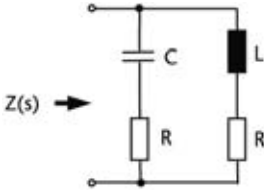


Abb. 276: Amplituden- und Phasengang der Ausgangsspannung nach Abb. 275

Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß in der Praxis der Einsatz von PC-Simulationsprogrammen zur Netzwerkanalyse sehr schnell zum Ziel führt und dadurch das Aufstellen von Gleichungen sowie deren mathematische Umformungen nicht nötig sind.

Aufgabe 74:

Bestimmen Sie den Eingangswiderstand $Z(s)$ der angegebenen Schaltung. Für welchen Wert von C wird $Z(s)$ frequenzunabhängig?


Lösung:

$$\begin{aligned} \text{Nach Aufgabe 71 f) ist } Z(s) &= \frac{(R + sL) \cdot \left(R + \frac{1}{sC}\right)}{R + sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{R^2 + \frac{R}{sC} + sRL + \frac{L}{C}}{2R + sL + \frac{1}{sC}} \\ &= \frac{sR^2C + R + s^2RLC + sL}{s2RC + s^2LC + 1} = \frac{R(s2RC + s^2LC + 1) + sL - sR^2C}{s2RC + s^2LC + 1} = R + \frac{s(L - R^2C)}{s2RC + s^2LC + 1} \end{aligned}$$

Für $L - R^2C = 0$ bzw. $C = \frac{L}{R^2}$ ist $Z(s) = R$ und damit frequenzunabhängig.

Aufgabe 75:

Wechselstrommeßbrücken werden zur Messung komplexer Widerstände verwendet. Wird als Speisespannung der Brücke eine sinusförmige Wechselspannung verwendet, so gilt wie bei der Wheatstoneschen Brücke auch für komplexe Widerstände der Brückenarme die Abgleichbedingung (im Nullzweig fließt kein Strom):

Das Produkt diagonal gegenüberliegender Brückenarme ist gleich.

Die Maxwell-Wien-Brücke dient zur Messung von verlustbehafteten Induktivitäten

Für welche Werte der Elemente G_N und C_N ist die gezeichnete Maxwell-Wien-Brücke abgeglichen?

Es sei $\omega = 10^5 \text{ s}^{-1}$, $R = 500 \, \Omega$, $R_x = 800 \, \Omega$, $L_x = 10 \text{ mH}$.

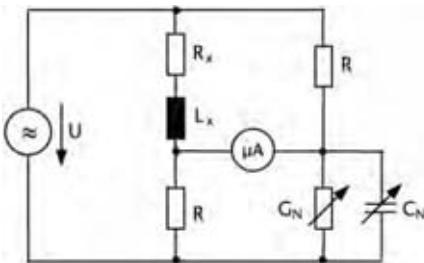


Abb. 277: Maxwell-Wien-Brücke zur Messung verlustbehafteter Induktivitäten

Lösung:

Die Brücke ist abgeglichen, wenn gilt: $R^2 = (R_x + sL_x) \cdot \frac{1}{G_N + sC_N}$; $R_x + sL_x = R^2 \cdot G_N + sR^2C_N$

Damit die Gleichung gilt, müssen Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen.

Die Realteile werden gleichgesetzt: $R_x = R^2 \cdot G_N$; $G_N = \frac{R_x}{R^2}$; $G_N = 3,2 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1}$; $R_N = 312,5 \Omega$

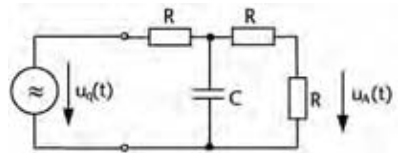
Die Imaginärteile werden gleichgesetzt: $sL_x = sR^2 C_N$; $C_N = \frac{L_x}{R^2}$; $C_N = 4 \cdot 10^{-8} \text{ F}$; $C_N = 40 \text{ nF}$

Wie man sieht, hängt der Brückenabgleich nicht von der Frequenz der Speisespannung ab.

Aufgabe 76:

Gegeben sei die folgende Schaltung.

$$u_q(t) = (0,6 + \sin^3 \omega_0 t) \text{ V}$$



Wie lautet die Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{U_A(s)}{U_q(s)}$? Berechnen Sie $u_A(t)$ mit Hilfe von $H(s)$.

$$\text{Es sei } \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

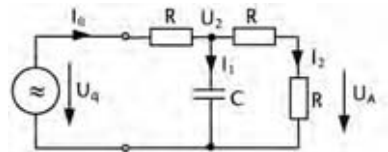
Lösung:

$$I_2 = \frac{U_A}{R}; U_2 = 2RI_2 = 2U_A; I_1 = U_2 \cdot sC = 2U_A \cdot sC;$$

$$I_0 = I_1 + I_2 = 2U_A \cdot sC + \frac{U_A}{R} = U_A \cdot \left(s2C + \frac{1}{R} \right)$$

$$U_q = I_0 R + U_2 = U_A \cdot (s2RC + 1) + 2U_A; U_q = U_A \cdot (s2RC + 3)$$

$$H(s) = \frac{U_A}{U_q} = \frac{1}{s2RC + 3}$$

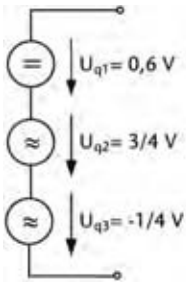


$$u_q(t) = (0,6 + \sin^3 \omega_0 t) \text{ V}$$

Aus einer mathematischen Formelsammlung wird entnommen: $\sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin(3\alpha)$

Somit ist $u_q(t) = 0,6 + \frac{3}{4} \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega_0 t) \text{ V}$.

Die Spannungsquelle $u_q(t)$ kann durch eine Reihenschaltung von drei Spannungsquellen dargestellt werden.



Nach dem Überlagerungssatz addieren sich die Wirkanteile jeder Quelle.

$$\text{Wirkanteil von } U_{q1}: s = 0; \quad U_{A1} = H(0) \cdot U_{q1} = 1/3 \cdot 0,6 \text{ V} = 0,2 \text{ V}$$

$$\text{Wirkanteil von } U_{q2}: s = j\omega_0; \quad U_{A2} = H(j\omega_0) \cdot U_{q2} = \frac{1}{2j+3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{12+8j} \text{ V}$$

$$\text{Wirkanteil von } U_{q3}: s = 3j\omega_0; \quad U_{A3} = H(3j\omega_0) \cdot U_{q3} = \frac{1}{6j+3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{-1}{12+24j} \text{ V}$$

Die Beträge der Wirkanteile sind:

$$|U_{A1}| = 0,2 \text{ V}; \quad |U_{A2}| = \frac{3}{\sqrt{12^2 + 8^2}} = 0,2 \text{ V}; \quad |U_{A3}| = \frac{|-1|}{\sqrt{12^2 + 24^2}} = 0,037 \text{ V}$$

Die Phasenwinkel der Wirkanteile sind:

$$\varphi_1 = \angle U_{A1} = 0^\circ$$

$$\varphi_2 = \angle U_{A2} = 0^\circ - \arctan(8/12) = -33,7^\circ = 326,3^\circ$$

$$\varphi_3 = \angle U_{A3} = 180^\circ - \arctan(24/12) = 116,6^\circ$$

Als Zeitfunktionen sind die einzelnen Wirkanteile:

$$u_{A1}(t) = 0,2 \text{ V}; \quad u_{A2}(t) = 0,2 \text{ V} \cdot \sin(\omega_0 t + 326,3^\circ); \quad u_{A3}(t) = -0,037 \text{ V} \cdot \sin(3\omega_0 t + 116,6^\circ)$$

Die Ausgangsspannung $u_A(t)$ ergibt sich durch Addition der einzelnen Wirkanteile.

$$u_A(t) = u_{A1}(t) + u_{A2}(t) + u_{A3}(t)$$

$$u_A(t) = 0,2 \text{ V} + 0,2 \text{ V} \cdot \sin(\omega_0 t + 326,3^\circ) - 0,037 \text{ V} \cdot \sin(3\omega_0 t + 116,6^\circ)$$

18 Halbleiterdioden

18.1 Der PN-Übergang ohne äußere Spannung

Anmerkung: Die grundlegenden Eigenschaften von Halbleitern und der Elektrizitätsleitung in ihnen wurden bereits in Abschnitt 1.2.7 besprochen.

In einem N-Halbleiter ist die Konzentration (Menge) der Elektronen viel größer als die Konzentration der Löcher. In einem P-Halbleiter ist dagegen die Konzentration der Löcher viel größer als die Konzentration der Elektronen. Somit ist die Elektronenkonzentration in einem N-Halbleiter viel größer als in einem P-Halbleiter.

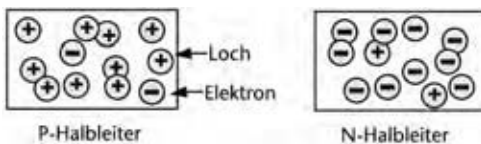


Abb. 278: Konzentration von Elektronen und Löchern beim P- und N-Halbleiter

Erzeugt man in einem Halbleiterblock aus Germanium oder Silizium durch entsprechende Dotierungen ein P-Gebiet und unmittelbar daran flächig angrenzend ein N-Gebiet, so bezeichnet man die Zone der aneinandergrenzenden Bereiche als **PN-Übergang**. Den physikalischen Eigenschaften des PN-Überganges liegt die Funktion von Halbleiterdioden und Transistoren zu Grunde.

Beide Hälften des Halbleiterblocks sind für sich elektrisch neutral. In der P-Hälfte sind positive Ladungsträger (Löcher) und in der N-Hälfte sind negative Ladungsträger (Elektronen) frei beweglich. Durch den Konzentrationsunterschied und infolge der thermischen Eigenbewegung dringen Löcher aus der P-Hälfte in die N-Hälfte, und Elektronen aus der N-Hälfte in die P-Hälfte ein. Dieser selbsttätige Vorgang der Ladungsträgerwanderung als Folge thermischer Bewegung und bedingt durch ein räumliches Konzentrationsgefälle wird **Diffusion** genannt. Man könnte jetzt annehmen, daß innerhalb des gesamten Halbleiterblocks die Elektronen und Löcher aufeinander zuwandern und rekombinieren (sich vereinigen). Es müßte dann nach einiger Zeit ein Konzentrationsausgleich innerhalb des ganzen Halbleiterblocks stattgefunden haben. Tatsächlich führt die Diffusion jedoch nicht zu einem nennenswerten Konzentrationsausgleich, da sie durch elektrische Gegenkräfte begrenzt wird und die Wanderbewegung der Ladungsträger nach kurzer Zeit zum Stillstand kommt.

Beim Diffundieren (Eindringen, Einwandern) der Ladungsträger in das gegenüberliegende Gebiet verschwinden durch Rekombination die meisten beweglichen positiven und negativen Ladungsträger links und rechts der Grenzlinie. So entsteht eine schmale Übergangsgebiet, welches als **Grenzschicht** bezeichnet wird, in dem sich nur noch sehr wenige bewegliche Ladungsträger befinden.

Die Grenzschicht ist an beweglichen Ladungsträgern verarmt und wird auch **Verarmungszone** genannt. In der Grenzschicht verbleiben nur die ortsfesten, unbeweglichen Ladungen der fest in das Halbleitergitter eingebauten ionisierten Fremdatome (Akzeptoren und Donatoren). Auf der P-Seite der Grenzschicht befinden sich die negativen Ionen der Akzeptoren, auf der N-Seite die positiven Ionen der Donatoren. Dadurch ist die Grenzschicht auf der P-Seite negativ und auf der N-Seite positiv geladen, als Folge der Diffusion entsteht auf der P-Seite der Grenzschicht eine negative und auf der N-Seite eine positive Ladung. Die Ladungen sind nicht wie beim Plattenkondensator flächenhaft, sondern räumlich verteilt; man spricht von einer Raumladung. Außerhalb der schmalen Grenzschicht bleiben P- und N-Gebiet elektrisch neutral. Die ortsfesten Ladungen in der Grenzschicht wirken einer weiteren Diffusion entgegen. Die aus dem N-Material kommenden Elektronen werden von der negativen Ladung auf der P-Seite der Grenzschicht zurückgestoßen. Die aus dem P-Material kommenden Löcher werden von der positiven Ladung auf der N-Seite der Grenzschicht zurückgestoßen. Die Diffusion begrenzt sich somit selbst, der PN-Halbleiter blockiert den Diffusionsstrom selbst an seiner Übergangsstelle. In der Grenzschicht befinden sich fast keine beweglichen Ladungsträger und es ergibt sich in ihr ein Zustand, der weitgehend dem eines Isolators entspricht. Die Grenzschicht hat einen sehr hohen Widerstand und wird deshalb auch als **Sperrschicht** (engl.: junction) bezeichnet.

Ein weiterer Fluß von Ladungsträgern über die Sperrschicht hinweg kommt erst wieder durch äußere Einflüsse zustande, wie das Anlegen einer Spannung an den Halbleiterblock, dessen Erwärmung oder Bestrahlung mit Licht.

Die ortsfesten Ladungen in der Grenzschicht entsprechen durch den Potentialunterschied einer elektrischen Spannung, die **Diffusionsspannung** U_{diff} genannt wird. Sie bildet eine »Spannungsbarriere« an der Sperrschicht, die einen weiteren Konzentrationsausgleich der beweglichen Ladungsträger durch Diffusion verhindert. Die Diffusionsspannung wird höher, je höher die Konzentrationsunterschiede der Ladungsträger sind und je höher die Temperatur des Halbleiters ist. Sie liegt meist zwischen 0,1 V und 1 V.

Die Breite der Grenzschicht (Sperrschichtweite d) beträgt ca. 1 μm .

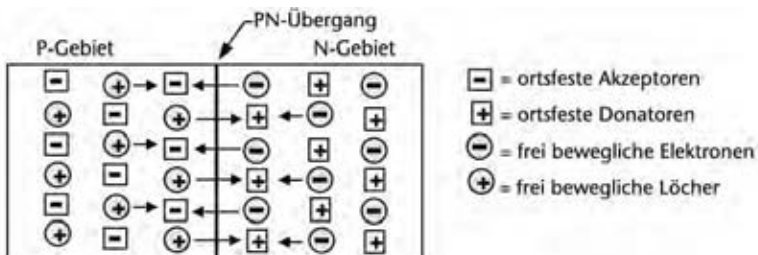


Abb. 279: Diffusion an einem PN-Übergang. Die beweglichen Elektronen und Löcher wandern zunächst aufeinander zu und rekombinieren.

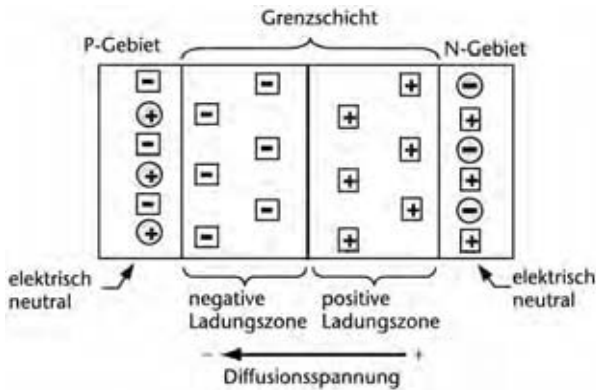


Abb. 280: Grenzschicht nach der Rekombination von Ladungsträgern. In ihr bleiben nur die ortsfesten Akzeptoren und Donatoren.

18.2 Der PN-Übergang mit äußerer Spannung

18.2.1 Äußere Spannung in Durchlaßrichtung

Ein PN-Übergang wird mit Anschlußelektroden versehen. Eine äußere Gleichspannung U_F wird so angelegt, daß ihr Pluspol am P-Gebiet und ihr Minuspol am N-Gebiet liegt. Durch diese Polung wirkt die äußere Spannung U_F der inneren Diffusionsspannung U_{diff} entgegen. Die an der Grenzschicht wirkende Spannung U_{diff} wird verkleinert oder aufgehoben. Dadurch wird die Sperrschicht dünner und für bewegliche Ladungsträger durchlässig. Von der äußeren Spannungsquelle werden die Elektronen im N-Gebiet und die Löcher im P-Gebiet in Richtung Sperrschicht und darüber hinaus getrieben, wo sie rekombinieren. Da die äußere Spannungsquelle ständig Ladungsträger nachliefert, fließt ein Strom durch den PN-Halbleiterkristall. Im P-Gebiet besteht dieser Strom aus einer Löcherströmung von $+U_F$ nach $-U_F$ und im N-Gebiet aus einer Elektronenströmung von $-U_F$ nach $+U_F$.

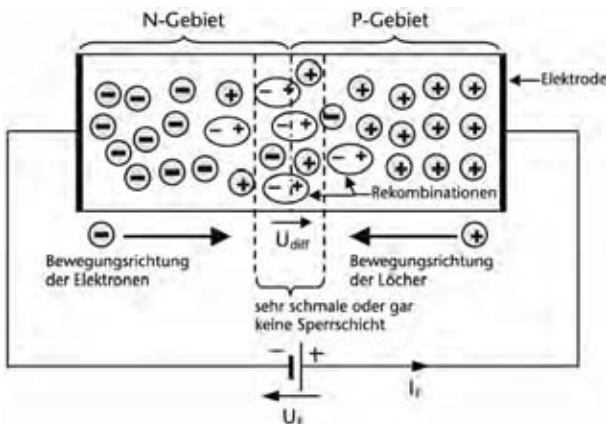


Abb. 281: PN-Übergang mit äußerer Spannung in Durchlaßrichtung (ohne ortsfeste Ladungen)

Da ein Strom durch den Halbleiter fließt, sagt man, der PN-Übergang ist in **Durchlaßrichtung** oder in **Flußrichtung** geschaltet. Die dazu erforderliche äußere Spannung bezeichnet man als Durchlaßspannung U_F (engl.: forward = vorwärts), den entstehenden Strom als Durchlaßstrom I_F . Vergrößert man U_F von $U_F = 0$ V ausgehend, so nimmt I_F stark zu. Die Zunahme von I_F erfolgt zunächst nach einer Exponentialfunktion und bei größeren Spannungen nimmt I_F annähernd linear mit der Spannung zu. Mit einer Strom-Spannungs-Messung kann in der Praxis die Durchlaßkennlinie eines PN-Überganges punktweise aufgenommen werden. R_{Sch} ist ein Schutzwiderstand, damit der maximal erlaubte Durchlaßstrom I_{Fmax} nicht überschritten werden kann:

$$R_{Sch} \geq \frac{U_{Bmax}}{I_{Fmax}}.$$

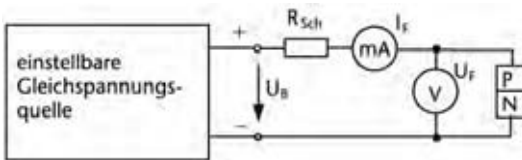


Abb. 282: Meßschaltung zur punktweisen Aufnahme der Durchlaßkennlinie eines PN-Überganges

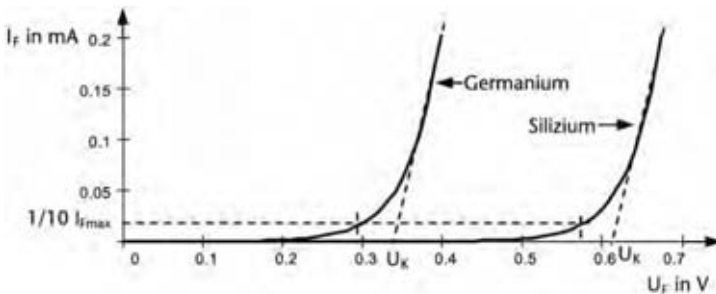


Abb. 283: Prinzipielle Durchlaßkennlinie eines Ge- und Si- PN-Überganges

Der Durchlaßstrom darf einen bestimmten Maximalwert I_{Fmax} nicht überschreiten, sonst wird der PN-Übergang thermisch zerstört. Je nach dem Material des PN-Überganges, Germanium oder Silizium, ergibt sich eine entlang der Abszisse parallel verschobene Kurve. Wird der gerade Teil der Durchlaßkurve nach unten verlängert, so ergibt der Schnittpunkt mit der Abszisse die **Schleusen-, Durchlaß- oder Kniespannung** U_K . Erst ab einem bestimmten Wert der Durchlaßspannung $U_F > U_K$ ergibt sich grob gesehen ein nennenswerter Durchlaßstrom. Der Kennwert U_K liegt bei Germanium im Bereich von 0,2 bis 0,4 V, bei Silizium zwischen 0,5 und 0,8 V.

Die Durchlaßspannung kann auch als Spannungswert definiert werden, bei dem ca. ein Zehntel des maximal zulässigen Durchlaßstromes fließt.

18.2.2 Äußere Spannung in Sperrichtung

Eine äußere Gleichspannung U_R wird jetzt so angelegt, daß ihr Pluspol am N-Gebiet und ihr Minuspol am P-Gebiet liegt. Die äußere Spannung U_R erhöht die innere Diffusionsspannung U_{diff} . Freie Elektronen im N-Gebiet wandern in Richtung Pluspol von U_R und die Löcher im P-

Gebiet wandern in Richtung Minuspol von U_R . Die Grenzschicht verarmt dadurch noch stärker an beweglichen Ladungsträgern. Die ursprüngliche Sperrschicht wird erheblich breiter und deren Widerstand noch erhöht; es fließt kein Strom durch den PN-Halbleiter. Die ortsfesten positiven Ladungen im N-Gebiet und die ortsfesten negativen Ladungen im P-Gebiet begrenzen die Verbreiterung der Sperrschicht, so daß sich diese nicht beliebig weit ausdehnen kann. Es stellt sich ein Gleichgewichtszustand zwischen der Wirkung der angelegten äußeren Spannung und der Raumladung der ortsfesten Ionen ein.

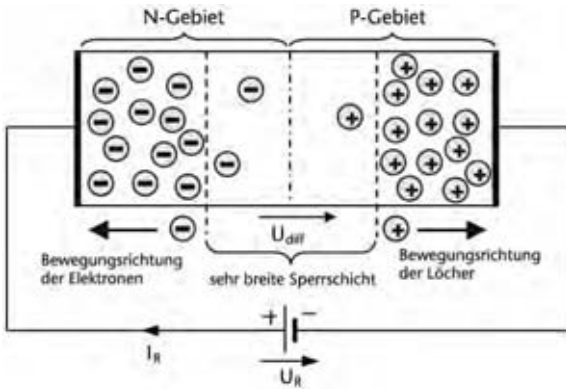


Abb. 284: PN-Übergang mit äußerer Spannung in Sperrrichtung

Da bei dieser Beschaltung kein Strom fließt, ist der Halbleiter in **Sperrrichtung** geschaltet.

In Wirklichkeit fließt jedoch auch bei der Beschaltung des PN-Überganges in Sperrrichtung ein sehr kleiner Strom. Die Ursache hierfür ist, daß bereits bei normaler Raumtemperatur in der Grenzschicht Elektronenpaarbindungen thermisch aufgebrochen und dadurch paarweise bewegliche Ladungsträger (Elektronen und Löcher) erzeugt werden. Die Anzahl dieser Ladungsträgerpaare ist gering und bei fester Temperatur konstant. Die Löcher wandern zum Minuspol von U_R und die Elektronen wandern zum Pluspol von U_R . Es fließt ein kleiner konstanter Sperrstrom I_R (engl.: reverse current = Rückwärtsstrom). Der Sperrstrom wird bei konstanter Halbleitertemperatur durch die Größe der Sperrspannung fast nicht beeinflußt, da er durch die Anzahl der in einer Zeiteinheit thermisch erzeugten Ladungsträger bestimmt wird.

Die Sperrspannung U_R könnte auch mit $-U_F$, und der Sperrstrom I_R mit $-I_F$ bezeichnet werden.

Der Sperrstrom wird auch Sättigungsstrom genannt (da er einen konstanten, gesättigten Wert hat).

Da die Anzahl der thermisch erzeugten Ladungsträgerpaare mit steigender Temperatur stark zunimmt, steigt auch der Sperrstrom bei Erhöhung der Halbleitertemperatur stark an.

Der Sperrstrom ist stark von der Temperatur abhängig.

Der Wert des Sperrstroms ist vom Halbleitermaterial abhängig. Bei Germanium liegt der Sperrstrom im μA -Bereich. Bei Silizium ist er wesentlich kleiner und liegt im nA oder pA-Bereich.

Erhöht man die Sperrspannung immer mehr, so steigt ab einem bestimmten Wert der Sperrspannung der Sperrstrom plötzlich stark an. Der PN-Übergang verliert seine Sperrfähigkeit. Wird jetzt die Sperrspannung nur geringfügig vergrößert, so nimmt der Sperrstrom stark zu.

Man sagt, es erfolgt ein Durchbruch, der PN-Übergang befindet sich im Durchbruchbereich (auch Zenerbereich genannt). Der Durchbruch kann auf zwei Arten erfolgen.

Zenerdurchbruch

Die elektrischen Kräfte in der Sperrschicht werden so groß, daß Valenzelektronen aus ihren Bindungen gerissen werden. In der Grenzschicht entstehen plötzlich zahlreiche bewegliche Ladungsträgerpaare und es kommt ein großer Strom zustande.

Diese Erscheinung nennt man Zenereffekt (entdeckt 1934 durch den engl. Physiker C. Zener).

Lawinendurchbruch

Die durch thermische Generation oder durch den Zenereffekt in der Grenzschicht erzeugten beweglichen Elektronen werden durch die angelegte Spannung zu so hohen Geschwindigkeiten beschleunigt, daß sie durch ihre kinetische Energie andere Valenzelektronen durch Stöße aus ihren Bindungen schlagen. Diese neuen freien Elektronen werden wieder beschleunigt und führen ebenfalls zu einer Stoßionisation. Die Anzahl der beweglichen Ladungsträger in der Grenzschicht nimmt dadurch lawinenartig zu. Man nennt deshalb diese Erscheinung Lawineneffekt (auch **Avalanche**-Effekt).

Welcher der beiden Effekte vorliegt und bei welcher Größe der Sperrspannung er auftritt, hängt von der Dotierung des Halbleitermaterials ab.

Der Sperrstrom im Durchbruchbereich darf natürlich einen bestimmten Maximalwert nicht überschreiten. Wird durch einen vorgeschalteten Widerstand der Strom begrenzt, der durch den Zener- oder Lawinendurchbruch entsteht, so wird der PN-Übergang nicht zerstört. Erfolgt keine Strombegrenzung, so geht der Durchbruch in einen **Wärmedurchbruch** über. Durch die Stromwärme steigt die Temperatur des Halbleiters und damit seine Eigenleitfähigkeit. Dieser Vorgang wird durch den steigenden Strom bis zur Zerstörung des Kristalls fortgesetzt. Durch den Wärmedurchbruch wird der PN-Übergang zerstört.

Die Sperrkennlinie kann wieder mit einer Strom-Spannungs-Messung punktweise aufgenommen werden.

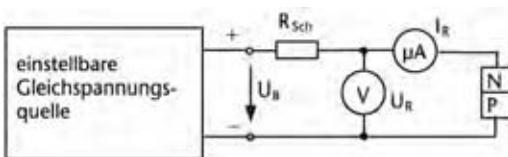


Abb. 285: Meßschaltung zur punktweisen Aufnahme der Sperrkennlinie eines PN-Überganges

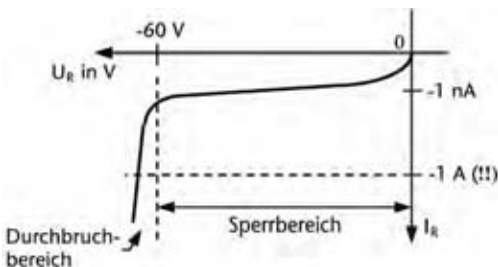


Abb. 286: Prinzipdarstellung der Sperrkennlinie eines PN-Überganges (eingetragene Zahlenwerte als Beispiel)

18.2.3 Vollständige Kennlinie eines PN-Überganges

Die folgende Kennlinie zeigt den Durchbruch-, Sperr- und Durchlaßbereich eines PN-Überganges.

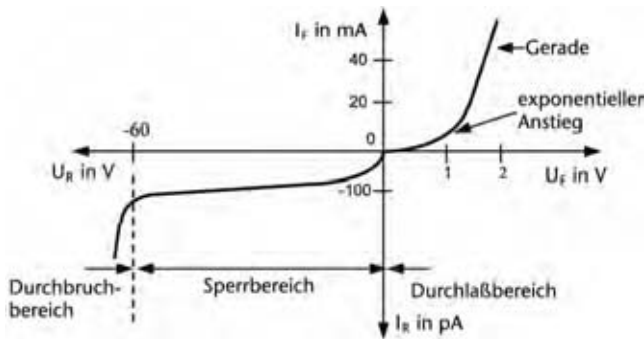


Abb. 287: Vollständige Kennlinie eines PN-Überganges (Prinzip)
(eingetragene Zahlenwerte als Beispiel)

Der Strom in Sperrichtung ist (abgesehen vom Durchbruchbereich) sehr viel kleiner als in Durchlaßrichtung. Für den Sperrstrom wurde deshalb ein anderer Maßstab gewählt als für den Durchlaßstrom. Dadurch entsteht der Knickpunkt der Kennlinie im Nullpunkt.

Wird eine äußere Spannung U_F in Durchlaßrichtung an den PN-Übergang angelegt, so fließt schon bei kleiner Spannung ein erheblicher Strom, der bei Erhöhung der Spannung stark zunimmt. Bei umgekehrter Polarität der Spannung (in Sperrichtung) fließt nur ein sehr kleiner Sperrstrom, wenn die Spannung nicht bis in den Durchbruchbereich hinein erhöht wird.

Die technische Ausführung eines Halbleiters mit den beschriebenen Eigenschaften des PN-Überganges wird als Halbleiterdiode (kurz: **Diode**) bezeichnet.

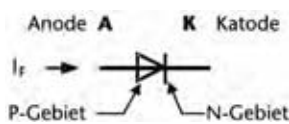


Abb. 288: Schaltzeichen einer idealen Diode

Die beiden Anschlüsse einer Diode heißen Anode A und Katode K. Die Pfeilspitze des Schaltzeichens gibt die Richtung des Durchlaßstromes I_F an.

Die Kennlinie einer Diode kann im Sperr- und Durchlaßbereich durch folgende Gleichung beschrieben werden.

Gl. 138: Gleichung zur Beschreibung der Kennlinie einer Diode

$$I = I_R \cdot \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right) \quad \text{mit} \quad U_T = \frac{k \cdot T}{e}$$

I = Strom durch die Diode, I_R = Sperrstrom, U = an die Diode angelegte Spannung

U_T = Temperaturspannung, k = Boltzmannkonstante = $1,380\,658 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

T = absolute Temperatur in Kelvin (K), $T = t + T_0$, t = Temperatur in °C, $T_0 = 273,15 \text{ K}$

e = Betrag der Elementarladung = $1,602\,177\,33 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Im Durchlaßbereich ist in die Gleichung U positiv, im Sperrbereich negativ einzusetzen. Die Gleichung gilt nicht im Durchbruchbereich, da bei ihrer Herleitung die elektrischen Erscheinungen beim Durchbruch nicht berücksichtigt werden. Die Gleichung berücksichtigt auch nur die Vorgänge in der Grenzschicht und nicht den elektrischen Widerstand der sich an die Grenzschicht anschließenden P- und N-Gebiete, der als **Bahnwiderstand** bezeichnet wird. Die Durchlaßkennlinie geht nach einem exponentiellen Anstieg mit zunehmender Durchlaßstromstärke durch den Spannungsabfall am Bahnwiderstand in eine Gerade über.

18.3 Eigenschaften von Dioden

18.3.1 Die ideale Diode

Die ideale Diode läßt Strom nur in einer Richtung fließen. In Durchlaßrichtung verhält sich die ideale Diode wie ein Kurzschluß. In Sperrichtung wird der Strom vollkommen gesperrt, die ideale Diode verhält sich wie ein Leerlauf.

Aus der Kennlinie der idealen Diode ist ersichtlich, daß eine Diode ein **nichtlineares** Bauteil ist. Die Abhängigkeit des Stromes I von der Spannung U ist nicht linear (die Kennlinie ist keine durchgehende Gerade). Bei der gekrümmten Kennlinie einer realen Diode ist diese Nichtlinearität noch besser zu erkennen.

Eine Diode ist ein nichtlineares Bauteil. Der Strom als Funktion der Spannung hat einen nicht-linearen Verlauf. Das Ohmsche Gesetz ist nicht für den gesamten Bereich der Kennlinie anwendbar.

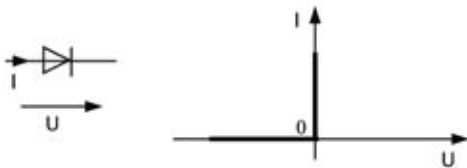


Abb. 289: Kennlinie einer idealen Diode

18.3.2 Die reale Diode

18.3.2.1 Ersatzschaltungen der Diode

Bei der Herleitung von Gl. 138 wird angenommen, daß die ganze Spannung U an der Sperrschicht abfällt, bzw. daß der Widerstand der Sperrschicht groß gegenüber dem Widerstand des übrigen P- und N-Gebietes ist. Bei großen Strömen ist diese Annahme nicht mehr zulässig. Der Bahnwiderstand kann im Ersatzschaltbild der Diode durch die Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes mit der idealen Diode berücksichtigt werden. Der Bahnwiderstand R_B bewirkt eine

Linearisierung der Kennlinie für große Ströme. Der exponentielle Stromanstieg geht mit zunehmender Durchlaßstromstärke in eine Gerade über, da sich ein linearer Ast zum exponentiellen Stromanstieg in horizontaler Richtung addiert. Außerdem bewirkt der Spannungsabfall über den Bahngebiets, daß der Durchlaßstrom erst ab der Kniespannung U_K einen nennenswerten Wert erreicht. Der Bahnwiderstand kann in der Größenordnung von $< 0,2 \Omega$ liegen.

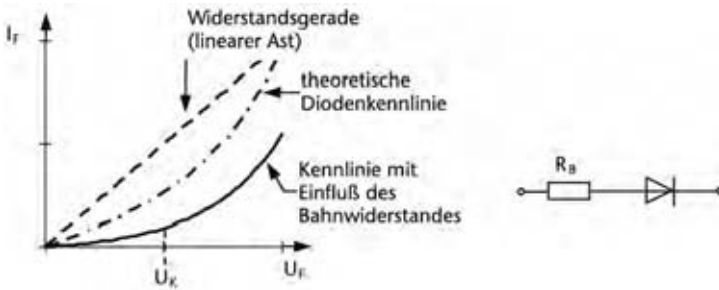


Abb. 290: Einfluß des Bahnwiderstandes auf die Durchlaßkennlinie (links) und Ersatzschaltbild einer Diode mit Bahnwiderstand (rechts)

Nach Gl. 138 müßte im Sperrbereich (für U ca. < 100 mV) näherungsweise der konstante Strom $-I_R$ fließen. Durch Kriechströme (z.B. über die Isolation zwischen den Elektrodenanschlüssen) erhält man einen Sperrstrom, der nahezu linear mit dem Betrag der Spannung ansteigt. Der Leckstrom kann im Ersatzschaltbild der Diode durch die Parallelschaltung eines ohmschen Widerstandes R_L mit der idealen Diode berücksichtigt werden. Der Leckwiderstand liegt in der Größenordnung von einigen (zehn) Megaohm.



Abb. 291: Einfluß des Leckwiderstandes auf die Sperrkennlinie (links) und Ersatzschaltbild einer Diode mit Leckwiderstand (rechts)

Oft ist es sinnvoll, die Kniespannung einer Diode in deren Ersatzschaltbild als eigene Spannungsquelle (Ersatzspannungsquelle) anzugeben. Somit wird in einem Schaltbild sofort der Spannungsabfall über der Diode ersichtlich. Die Kennlinie der idealen Diode verschiebt sich dadurch nach rechts bis zur Kniespannung. Die Diode selbst ist dann natürlich als ideale Diode nach Abb. 289 anzusehen und wird hier zur Kennzeichnung eingekreist.

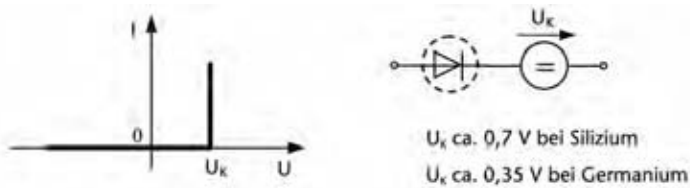


Abb. 292: Kennlinie und Ersatzschaltbild einer Diode mit Kniespannung

Wird jetzt noch der Durchlaßwiderstand berücksichtigt (der, wie anschließend erläutert wird, vom Arbeitspunkt auf der Kennlinie abhängig ist und bei großen Strömen ungefähr gleich dem Bahnwiderstand ist), so erhält man eine genauere Annäherung der Diodenkennlinie durch gebrochene Geraden (stückweise lineare Approximation).

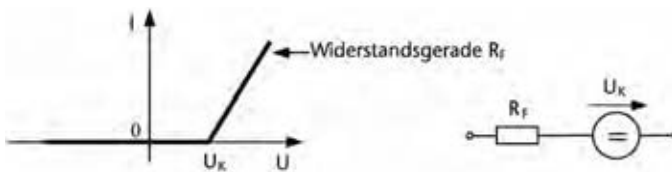


Abb. 293: Stückweise lineare Kennlinie und Ersatzschaltbild mit Durchlaßwiderstand und Kniespannung einer Diode

Das Ersatzschaltbild einer Diode ist eine Ersatzspannungsquelle mit dem Wert der Kniespannung und einem Innenwiderstand mit dem Wert des Durchlaßwiderstandes.

18.3.2.2 Kennwerte von Dioden

In den Datenblättern der Hersteller von Dioden werden Kennwerte angegeben, die zur Charakterisierung der Diodeneigenschaften dienen. Hierbei wird zwischen statischen und dynamischen Kennwerten unterschieden.

Statische Kennwerte für den Betrieb mit Gleichstrom sind z.B.: Durchlaßspannung, Durchlaßstrom, Durchlaßwiderstand, Sperrspannung, Sperrstrom, Sperrwiderstand, Durchbruchspannung, Durchlaßleistung (Verlustleistung).

Die statischen Kennwerte lassen sich aus der Strom-Spannungs-Kennlinie der Diode für einen gegebenen Arbeitspunkt entnehmen und sind für charakteristische Kennlinienpunkte als Zahlenwerte in den Datenblättern zu finden.

Dynamische Kennwerte kennzeichnen das Wechselstromverhalten einer Diode und sind z.B.: Differentieller Widerstand im Durchlaß- oder Sperrbereich, Sperr-/ Durchlaßverzögerungszeit.

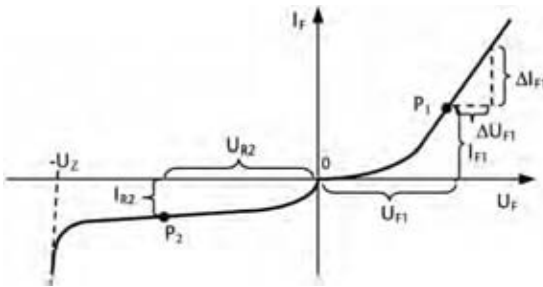


Abb. 294: Diodenkennlinie mit eingetragenen Kennwerten

Für den eingezeichneten Kennlinienpunkt P_1 ist der Durchlaßwiderstand gleich Durchlaßspannung geteilt durch Durchlaßstrom: $R_{F1} = \frac{U_{F1}}{I_{F1}}$. Für den Kennlinienpunkt P_2 ist der Sperrwiderstand gleich Sperrspannung geteilt durch Sperrstrom: $R_{R2} = \frac{U_{R2}}{I_{R2}}$. Infolge der Kennlinienkrümmung sind diese Gleichstromwiderstände von der Lage des Arbeitspunktes auf der Kennlinie abhängig.

Die Durchbruchspannung ist $-U_Z$.

Für die Kennwerte sind in den Datenblättern oft Grenzwerte für bestimmte Umgebungstemperaturen angegeben, die im Betrieb nicht überschritten werden dürfen, damit das Bauteil nicht zerstört wird. Hierzu gehören z.B. maximale Sperrspannung, maximaler Durchlaßstrom oder maximale Verlustleistung.

Bei kleinen Spannungs- bzw. Stromänderungen ist der differentielle Widerstand r_f für den Arbeitspunkt P_1 im Durchlaßbereich $r_{f1} = \frac{\Delta U_{F1}}{\Delta I_{F1}}$.

Auch der differentielle Widerstand ist durch die Krümmung der Kennlinie von der Lage des Arbeitspunktes abhängig. Im Durchlaßbereich ist r_f klein, eine kleine Spannungsänderung hat eine große Stromänderung zur Folge. Im Sperrgebiet ist der differentielle Widerstand r_f sehr groß, bei Änderung der Sperrspannung ändert sich der Sperrstrom fast nicht.

Im Zenergebiet ist der differentielle Widerstand **sehr** klein, eine kleine Spannungsänderung hat eine sehr große Stromänderung zur Folge. Der differentielle Widerstand wird auch **dynamischer** Widerstand genannt.

Die Sperrverzögerungszeit (Übergangszeit, Erholungszeit, Speicherzeit, engl.: recovery time) kennzeichnet das Ausschaltverhalten einer Diode. Sie ist die Zeitspanne, innerhalb welcher der Sperrstrom nach einem plötzlichen Umschalten der Spannung an der Diode von Durchlaß- in Sperrrichtung auf einen bestimmten Bruchteil seines größten Wertes abgesunken ist.

Schaltet man die Spannung an einer Diode plötzlich von Fluß- in Sperrrichtung um (Diode aus), so müssen die Ladungsträger in der Sperrschicht erst abfließen, bis sich der Sättigungsstrom einstellen kann. Im Augenblick des Umschaltens der Spannung in Sperrrichtung fließt daher in Sperrrichtung ein relativ großer Strom, der nach der Sperrverzögerungszeit auf den normalen Sperrstrom zurückgeht.

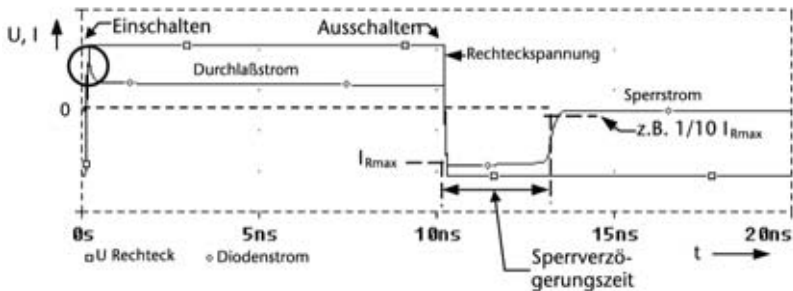


Abb. 295: Schaltverhalten einer Diode (Typ: 1N4148)

Beim Einschalten wird die Diode vom Sperrzustand in den Durchlaßzustand gebracht. Dabei entsteht fast keine Verzögerung (eingekreiste Umladestromspitze in Abb. 295). Die Durchlaßverzögerungszeit ist wesentlich kleiner als die Sperrverzögerungszeit, da beim Umschalten in den Durchlaßzustand nur die kleine Sperrschichtkapazität wirkt.

Es ist ersichtlich, daß bei Schaltvorgängen (und natürlich auch beim Betrieb mit sinusförmiger Wechselspannung) durch den PN-Übergang bedingte kapazitive Effekte auftreten. Es wurde bereits beschrieben, wie sich eine Spannungsänderung auf die Dicke der Sperrschicht auswirkt, und welche Änderung der in der Sperrschicht vorhandenen Ladungsträger damit verbunden ist. Wird die Sperrspannung um einen bestimmten Betrag erhöht, so dehnt sich die Sperrschicht weiter aus, und damit wird auch die gesamte in der Sperrschicht enthaltene Ladung der ortsfesten Ladungsträger größer.

Dies bedeutet: Die Sperrschicht wirkt prinzipiell wie ein Kondensator.

Dieser Sachverhalt wird durch die **Sperrschichtkapazität** c_s beschrieben. Die Sperrschichtkapazität wird mit zunehmender Sperrspannung **kleiner**. Dies kann man sich durch einen Vergleich mit einem Plattenkondensator veranschaulichen, dessen Kapazität mit größer werdendem Plattenabstand kleiner wird (mit größer werdender Sperrspannung wird die Sperrschicht breiter).

Ohne Herleitung sei die Abhängigkeit der Sperrschichtkapazität von der Sperrspannung angegeben:

$$c_s \sim \frac{1}{\sqrt{U_D + |U_R|}} \quad (U_D = \text{Diffusionsspannung}, U_R = \text{Sperrspannung})$$

Der Wert der Sperrschichtkapazität liegt in der Größenordnung: $c_s \approx$ ein pF bis einige pF.

Wird ein PN-Übergang in Durchlaßrichtung betrieben, so tritt neben der Sperrschichtkapazität ein weiterer Speichermechanismus auf. Wird die Durchlaßspannung um einen bestimmten Betrag erhöht, so wird auch die Anzahl der Minoritätsladungsträger im Bahngebiet vergrößert. Dies entspricht einer Ladungsspeicherung und damit einem kapazitiven Verhalten, welches durch die **Diffusionskapazität** c_d gekennzeichnet wird. Man kann herleiten, daß die Diffusionskapazität exponentiell mit der Durchlaßspannung **zunimmt**, also in weit stärkerem Maße spannungsabhängig ist als die Sperrschichtkapazität.

Der Wert der Diffusionskapazität liegt in der Größenordnung: $c_d \approx$ einige hundert pF bis einige nF.

Da die Diffusionskapazität wesentlich größer ist als die Sperrschichtkapazität, ist auch die Sperrverzögerungszeit wesentlich größer als die Durchlaßverzögerungszeit.

Unter Berücksichtigung der Widerstände und der Kapazitäten läßt sich jetzt ein Wechselstrom-Ersatzschaltbild einer Diode angeben.

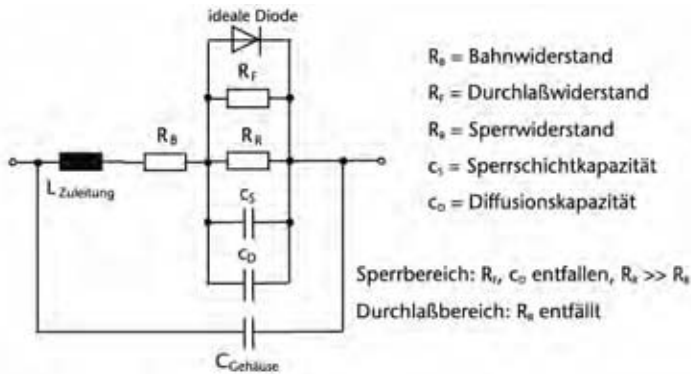


Abb. 296: Wechselstrom-Ersatzschaltbild einer Diode

18.3.2.3 Temperaturabhängigkeit der Diodenkennlinie

In der Praxis ist besonders die Temperaturabhängigkeit der Diodenkennlinie zu beachten.

Anmerkung: Für die folgenden Diagramme wurde ein Arbeitspunkt willkürlich gewählt.

Im Durchlaßbereich verschiebt sich die Strom-Spannungskennlinie mit steigender Temperatur zu kleinerer Durchlaßspannung und die Kennlinie wird steiler. Die Änderung der Durchlaßspannung beträgt ca. $-2 \text{ mV/}^\circ\text{C}$.

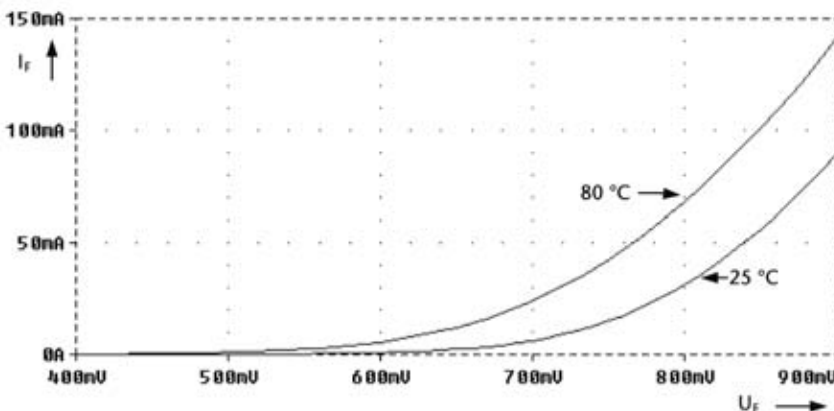


Abb. 297: Durchlaßkennlinie einer Diode bei zwei verschiedenen Temperaturen

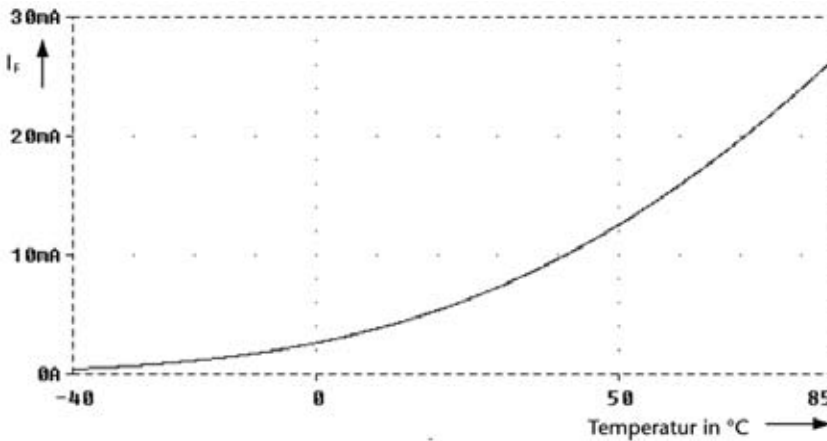


Abb. 298: Diodendurchlaßstrom in Abhängigkeit von der Temperatur («Temperaturdrift»)

Der Sperrstrom einer Diode steigt **exponentiell** mit der Temperatur an. Er ist somit stark von der Temperatur abhängig und verdoppelt sich bei ca. 10°C Temperaturerhöhung.

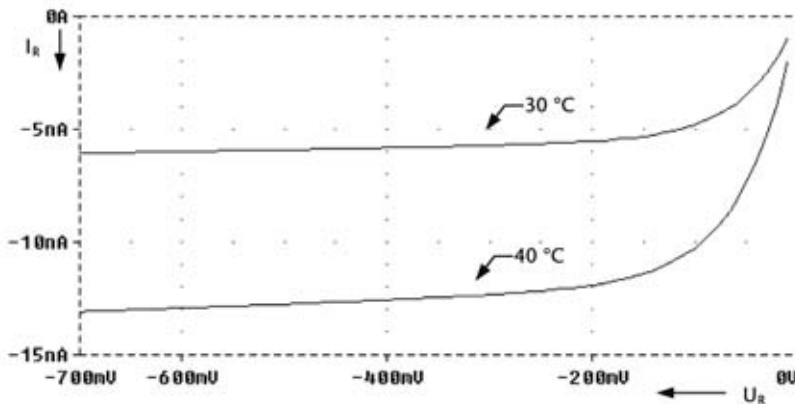


Abb. 299: Sperrkennlinie einer Diode bei zwei verschiedenen Temperaturen

Auch der Zener- und Lawinendurchbruch sind temperaturabhängig. Mit wachsender Temperatur können die Valenzelektronen leichter aus ihren Bindungen gerissen werden. Der Zenereffekt tritt daher schon bei kleinerer äußerer Spannung auf. Mit wachsender Temperatur nimmt aber auch die Beweglichkeit der Ladungsträger wegen der stärkeren Gitterschwingungen ab. Der Lawinendurchbruch tritt daher erst bei größerer äußerer Spannung auf.

18.4 Diode und Verlustleistung

Fließt Strom durch eine Diode, so muß die speisende Spannungsquelle Arbeit aufwenden. Sie berechnet sich zu $W = U \cdot I \cdot t$. Diese von der Spannungsquelle gelieferte elektrische Arbeit wird im Halbleiter in Wärme umgewandelt und ist die elektrische Verlustleistung $P_V = \frac{W}{t} = U \cdot I$.

Durch die Verlustleistung erhöht sich die Temperatur des Halbleiters gegenüber der Umgebung. Die Temperatur des Halbleiters steigt an, bis im Gleichgewicht die vom Halbleiter an die Umgebung abgeleitete Wärmeleistung P_{th} genauso groß ist wie die elektrische Verlustleistung im Halbleiter.

Mit dem Begriff des **Wärmewiderstandes** R_{th} erhält man einen einfachen Zusammenhang zwischen der Verlustleistung und der sich ergebenden Temperaturerhöhung des Halbleiters. Die Begriffe Strom, Spannung und Widerstand aus der Elektrotechnik werden auf die Wärmeleitung übertragen.

Sind zwei Körper A und B wärmeleitend miteinander verbunden, so ergibt sich eine Wärmeströmung von A nach B, wenn die Temperatur T_A des Körpers A höher als die Temperatur T_B des Körpers B ist.

Das Verhältnis der in der Zeit t strömenden Wärmemenge Q zur Zeit t ist der Wärmestrom $P_{th} = \frac{Q}{t}$. Die **Einheit** des Wärmestromes P_{th} ist **Watt**. Der Wärmestrom P_{th} ist proportional zum Temperaturunterschied $T_A - T_B$ und umgekehrt proportional zum Wärmewiderstand R_{th} zwischen A und B:

Gl. 139: Ohmsches Gesetz der Wärmelehre

$$P_{th} = \frac{T_A - T_B}{R_{th}} = \frac{\Delta T}{R_{th}}$$

Man beachte, daß ΔT in K (Kelvin) oder °C (Grad Celsius) eingesetzt werden kann. Da es sich um Temperaturdifferenzen handelt, ist eine Umrechnung nicht nötig.

Aus Gl. 139 folgt: $R_{th} = \frac{T_A - T_B}{P_{th}} = \frac{\Delta T}{P_{th}}$ (R_{th} in K/W = °C/W).

Der Wärmewiderstand ist das Verhältnis des Temperaturunterschiedes zum erzeugten Wärmestrom.

R_{th} kennzeichnet die Fähigkeit einer thermischen Verbindung, Wärme zu leiten. Wie man sieht, bestehen in der Formel für R_{th} folgende Analogien zu den elektrischen Größen: $R_{th} \leftrightarrow R$, $T \leftrightarrow U$, $P \leftrightarrow I$.

Der Wärmewiderstand kann sich aus mehreren Einzelwiderständen (thermischen Verbindungen) in Parallel- oder Reihenschaltung zusammensetzen. Die Berechnung des Gesamtwiderstandes erfolgt nach den für elektrische Widerstände geltenden Gleichungen.



Abb. 300: Zur Erläuterung des Wärmewiderstandes R_{th}

Bei Halbleiterdioden ist die Temperaturerhöhung der Sperrschicht gegenüber der Umgebung von Interesse. Für den Wärmewiderstand R_{thJU} zwischen Sperrschicht (junction) und Umgebung gilt:

$$R_{thJU} = \frac{T_J - T_U}{P_{th}} \quad (T_J = \text{Sperrschichttemperatur, } T_U = \text{Temperatur der Umgebungsluft}).$$

Im Gleichgewicht ist der Wärmestrom P_{th} gleich der elektrischen Verlustleistung P_V .

$$R_{thJU} = \frac{T_J - T_U}{P_V}$$

Durch Umstellen der Gleichung läßt sich die Temperatur der Sperrschicht bestimmen.

Gl. 140: Berechnung der Sperrschichttemperatur

$$T_J = R_{thJU} \cdot P_V + T_U$$

Die Temperatur der Sperrschicht eines Halbleiterbauelementes darf einen bestimmten Maximalwert nicht überschreiten, da das Bauteil sonst zerstört oder seine Lebensdauer erheblich reduziert würde. Typische Maximalwerte der Sperrschichttemperatur sind 90 °C für Germanium und 175 °C für Silizium. Sollen Geräte eine hohe Lebensdauer haben, so muß die Sperrschichttemperatur bei Betrieb wesentlich unter den Maximalwerten liegen, z.B. bei 130 °C. Als grobe Regel kann dienen: Eine Erhöhung der Sperrschichttemperatur um 10 °C kann die Lebensdauer eines Bauteils halbieren.

Um eine unzulässig hohe Temperatur der Sperrschicht zu vermeiden, muß in der Praxis für eine gute Ableitung der Wärme vom Halbleiterbauteil gesorgt werden. Je höher die Verlustleistung im Halbleiterbauelement ist, desto niedriger muß der Wärmewiderstand R_{thJU} gemacht werden. Bei Halbleiterbauelementen kleiner Leistung wird die Wärme vom Gehäuse unmittelbar an die Umgebungsluft abgegeben. Hier könnte R_{thJU} z.B. durch künstliche Belüftung (Ventilator) verkleinert werden. Leistungshalbleiter haben meist ein Metallgehäuse, welches gut wärmeleitend mit einem metallischen Kühlkörper verbunden wird. In diesem Fall wird der Wärmewiderstand zwischen Gehäuse und Umgebung durch den Kühlkörper herabgesetzt. Die Kühlung erfolgt meist durch **Konvektion**, d.h. durch selbsttätigen Austausch von warmer und kalter Luft in senkrechter Richtung. Der Wärmewiderstand eines Kühlkörpers wird kleiner, je größer seine Oberfläche ist. Diese kann durch Kühlrippen vergrößert werden, die jedoch senkrecht stehen sollten, damit warme Luft senkrecht aufsteigen kann.

Setzt sich die Strecke für den Wärmestrom aus mehreren Wärmewiderständen zusammen, so werden diese addiert, um den gesamten Wärmewiderstand zu erhalten.

Beispiel: Werden folgende Abkürzungen definiert

R_{thJG} = Wärmewiderstand Sperrschicht zu Gehäuse = innerer Wärmewiderstand

(festgelegt durch den inneren Aufbau des Bauteils)

R_{thGK} = Wärmewiderstand Gehäuse zu Kühlkörper

(gegeben durch die mechanische Verbindung zwischen Gehäuse und Kühlkörper)

R_{thKU} = Wärmewiderstand Kühlkörper zur Umgebung

(bestimmt durch Material, Geometrie des Kühlkörpers)

R_{thJU} = gesamter Wärmewiderstand zwischen Sperrschicht und Umgebung

so gilt $R_{thJU} = R_{thJG} + R_{thGK} + R_{thKU}$.

Erläuterung zur Entstehung von R_{thGK} :

Da bei Leistungshalbleitern ein spannungsführender Teil des Halbleiterkristalls oft mit dem Metallgehäuse verbunden ist, wird unter Umständen eine Isolation erforderlich. Hierzu wird häufig eine Glimmerscheibe oder besser eine spezielle, gut wärmeleitende Kunststoffolie verwendet. Das Isoliermaterial stellt einen thermischen Übergangswiderstand zwischen Gehäuse und Kühlkörper dar.

Die maximale Temperatur T_U der Umgebungsluft ist für den Betrieb eines Gerätes und damit für ein Halbleiterbauelement meist durch den Einsatz des Gerätes gegeben, z.B. 55 °C für Geräte im Haushalt, oder 85 °C und mehr für Anwendungen in einem Kraftfahrzeug.

In den Datenblättern von Halbleiterbauelementen ist häufig die maximale Verlustleistung bei einer bestimmten Gehäusetemperatur (meist 25 °C) angegeben, die im Dauerbetrieb nicht überschritten werden darf. Ist die maximale Umgebungstemperatur T_U , die maximale Sperrschichttemperatur T_J sowie der gesamte Wärmewiderstand R_{thJU} gegeben, so kann nachgeprüft werden, ob das Bauelement durch eine im Betrieb auftretende elektrische Verlustleistung P_V überlastet ist.

Durch Umstellen folgt aus Gl. 140: Es muß $P_V \leq \frac{T_J - T_U}{R_{thJU}}$ sein, damit die maximal zulässige Sperr-

schichttemperatur nicht überschritten und das Bauteil zerstört wird.

Ist in einem Datenblatt die maximal zulässige Verlustleistung in Abhängigkeit von der Gehäusetemperatur in Form einer Kurve gegeben, so kann sofort abgelesen werden, ob die im Betrieb auftretende elektrische Verlustleistung P_V bei gegebener Umgebungstemperatur T_U zulässig oder zu hoch ist.

Anmerkung: Die Temperaturempfindlichkeit von Halbleiterbauelementen ist auch beim Einlöten zu berücksichtigen.

Aufgabe 77:

Durch eine Silizium-Halbleiterdiode fließt ein Gleichstrom $I = 0,9$ A. Der Spannungsabfall an der Diode beträgt $U = 0,7$ V. Die Umgebungstemperatur ist $T_U = 70$ °C. Der gesamte Wärmewiderstand zwischen Sperrschicht und Umgebung beträgt $R_{thJU} = 90$ °C/W. Wie hoch ist die Sperrschichttemperatur? Ist die Diode überlastet?

Lösung:

$$T_J = R_{thJU} \cdot P_V + T_U; \quad T_J = 90 \text{ °C/W} \cdot 0,9 \text{ A} \cdot 0,7 \text{ V} + 70 \text{ °C}; \quad T_J = 126,7 \text{ °C}$$

Da die maximal erlaubte Sperrschichttemperatur einer Siliziumdiode ca. 175 °C beträgt, ist die Diode nicht überlastet.

Aufgabe 78:

Bei einer Umgebungstemperatur von $T_U = 50 \text{ °C}$ soll die maximale Sperrschichttemperatur eines Halbleiterbauelementes 150 °C nicht übersteigen. Aus dem Datenblatt des Bauteils wird entnommen: » $R_{th\ j\text{-case}}$ Thermal resistance junction-case = max 3 °C/W« und » $R_{th\ j\text{-amb}}$ Thermal resistance junction-ambient = max 50 °C/W«. Das Bauteil ist über eine elektrisch isolierende Wärmeleitfolie mit dem Wärmewiderstand 0,5 °C/W mechanisch mit einem Kühlkörper verbunden. Im Bauteil entsteht eine Verlustleistung von 10 W. Welchen Wärmewiderstand darf der Kühlkörper höchstens haben? Wie groß dürfte die Verlustleistung ohne Kühlkörper maximal sein?

Lösung:

Der Wärmewiderstand Sperrschicht zu Gehäuse ist $R_{thjG} = 3 \text{ °C/W}$. Der Wärmewiderstand Gehäuse zu Kühlkörper ist $R_{thGK} = 0,5 \text{ °C/W}$. Für den gesamten Wärmewiderstand zwischen Sperrschicht und Umgebung gilt somit $R_{thJU} = R_{thjG} + R_{thGK} + R_{thKU} = 3,5 \text{ °C/W} + R_{thKU}$. Es ist $P_V = 10 \text{ W}$, $T_J = 150 \text{ °C}$.

$$T_J = R_{thJU} \cdot P_V + T_U; \quad 150 \text{ °C} - 50 \text{ °C} = 3,5 \text{ °C/W} \cdot 10 \text{ W} + R_{thKU} \cdot 10 \text{ W};$$

$$(100 \text{ °C} - 35 \text{ °C}) : 10 \text{ W} = R_{thKU}; \quad R_{thKU} = 6,5 \text{ °C/W}$$

Der Kühlkörper darf höchstens einen Wärmewiderstand von 6,5 K/W haben.

Ist der Wärmewiderstand zwischen Sperrschicht und Umgebung $R_{thJU} = 50 \text{ °C/W}$, so beträgt die maximal erlaubte Verlustleistung $P_V = \frac{T_J - T_U}{R_{thJU}}$. $P_V = \frac{150 \text{ °C} - 50 \text{ °C}}{50 \text{ °C/W}}$; $P_V = 2 \text{ W}$

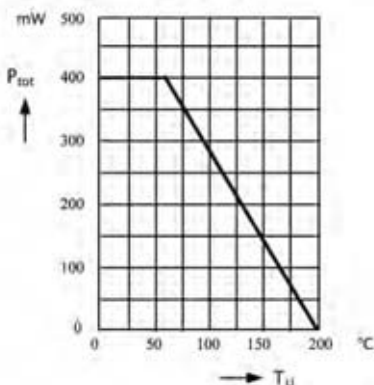
Aufgabe 79:

Das Datenblatt einer Diode enthält folgendes Diagramm.

Was sagt das Diagramm aus?

Temperaturabhängigkeit der zulässigen

Gesamtverlustleistung $P_{tot} = f(T_U)$



Lösung:

Das Diagramm ist eine Grenzkurve für die Verlustleistung als Funktion der Umgebungstemperatur (Lastminderungskurve).

Ist I der Gleichstrom durch die Diode und U der Spannungsabfall an der Diode, so ergibt sich die Verlustleistung zu $P_V = U \cdot I$. Für eine bestimmte Umgebungstemperatur T_U muß P_V unterhalb der Kurve liegen oder höchstens auf ihr.

18.5 Arten von Dioden

18.5.1 Universaldioden

Dioden können nach folgenden Kriterien unterschieden werden:

- Grundmaterial (z.B. Germanium oder Silizium)
- Funktionsprinzip (z.B. Zenerdiode, Tunnel diode, Kapazitätsdiode)
- Anwendung (z.B. Universal-, Schalter-, Abstimm-, Mikrowellendiode)

Germaniumdioden werden häufig in der HF-Technik eingesetzt. Ihre Durchlaßspannung ist ca. 0,3 V. Sie sollen keiner Temperatur über 100 °C ausgesetzt werden. Aus den Siliziumdioden (Durchlaßspannung ca. 0,7 V) leiten sich alle noch zu erläuternden Spezialdioden ab. Siliziumdioden können bis zu Temperaturen von 200 °C universell eingesetzt werden.

Dioden großer Leistung haben ein Metallgehäuse zur Wärmeableitung. Signaldioden haben meist ein kleines Glas- oder Plastikgehäuse.

Spitzen- oder Punktkontaktdioden stellen eine veraltete Bauform dar. Die guten HF-Eigenschaften dieser Germaniumdioden (bedingt durch kleine Kapazitäten) werden heute auch von Siliziumplanardioden (Flächendioden) erreicht, bei denen die Sperrschicht flächenhaft ausgebildet ist.

Wichtig für die Praxis:

Bei Kleindioden wird die Katode durch einen Ring auf dem Gehäuse gekennzeichnet!

Merkregel: Der Ring entspricht dem Strich im Schaltzeichen.

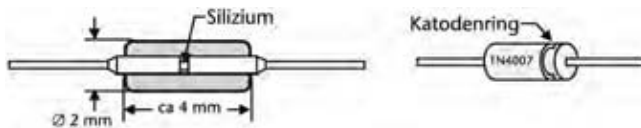


Abb. 301: Miniaturdiode

18.5.2 Spezialdioden

18.5.2.1 Schottkydiode³⁰ (hot carrier-Diode)

Bei der Schottkydiode ist eine Metallfläche direkt mit einem N-Halbleitermaterial (Si) verbunden. Bereits bei einer Durchlaßspannung von ca. 0,35 V erfolgt ein steiler Stromanstieg. Je nach Typ sind die Sperrspannungen sehr klein (z.B. $U_R < 2 \text{ V}$).

Eine Schottkydiode ist eine Metall-Halbleiter-Diode. Die gespeicherte Ladung bleibt äußerst klein, da die Elektronen im Metall sehr leicht beweglich sind. Die Speicherzeit und damit die Schaltzeit ist deshalb extrem klein. Wegen der guten HF-Eigenschaften von hot carrier-Dioden durch die extrem kurze Umladungszeit der Ladungsspeicherung werden sie im Bereich hoher und höchster Frequenzen ($> 15 \text{ GHz}$) sowie als sehr schnelle Schalter (Schaltzeit bis zu $t < 1 \text{ ns}$ bzw. $t \approx 100 \text{ ps}$) in logischen Schaltungen eingesetzt.

18.5.2.2 Gunndiode

Gunn-Dioden bestehen aus einem Kristall aus Gallium-Arsenid (GaAs). Es ist keine Sperrschicht vorhanden. Legt man an die Elektroden eine ausreichend hohe Gleichspannung an, so entsteht an der Katode eine Zone mit negativem Widerstand, die als Elektronenanhäufung mit sehr großer Geschwindigkeit durch den Kristall zur Anode wandert. Die Wanderzone gibt ihre Ladung an der Anode ab, dann entsteht an der Katode eine neue Zone mit negativem Widerstand. Im Stromkreis entsteht dadurch eine elektrische Schwingung.

Gunndioden werden als Oszillatoren zur Schwingungserzeugung für sehr hohe Frequenzen im GHz-Bereich (1 bis 100 GHz) benutzt (z.B. in Kleinradarsendern, Leistung $< 1 \text{ W}$ im Dauerbetrieb).

18.5.2.3 PIN-Diode

Bei der PIN-Diode befindet sich zwischen dem P- und N-leitenden Silizium eine schmale Zone von fast eigenleitendem (sehr schwach dotiertem und damit hochohmigen) Silizium. Der PN-Übergang ist durch die I-Schicht (I = intrinsic) getrennt. Unterhalb einer bestimmten Frequenz verhält sich die PIN-Diode wie eine normale Diode. Ab etwa 10 MHz verhält sich die PIN-Diode wie ein ohmscher Widerstand, dessen Größe von dem fließenden Diodenstrom abhängt. Durch eine variable Gleichspannung läßt sich der Diodenwiderstand um einige Zehnerpotenzen von wenigen Ohm bis zu mehreren Kiloohm verändern.

PIN-Dioden werden u.a. als regelbarer HF-Widerstand ab einer bestimmten Frequenz eingesetzt.

18.5.2.4 Kapazitätsvariationsdiode

Kapazitätsdioden werden auch als »Varikaps« oder »Varaktoren« bezeichnet. Bei Beanspruchung einer Diode in Durchlaßrichtung liegt parallel zum sehr niedrigen Durchlaßwiderstand r_F die Diffusionskapazität c_D , die von der Durchlaßspannung abhängig ist. Dies entspricht einem Kondensator mit sehr hohem Verlustfaktor. Eine technische Anwendung als Kapazität, deren Größe durch eine Spannung verändert werden kann, ist daher im Durchlaßbereich nicht möglich. Bei Betrieb einer Diode in Sperrichtung liegt parallel zum sehr hohen Sperrwiderstand r_R die Sperr-

³⁰ Walter SCHOTTKY (1886 - 1956), deutscher Physiker

schichtkapazität c_s . Die Diode wirkt jetzt wie ein verlustarmer Kondensator. Da die Sperrschichtkapazität bei Erhöhung der Sperrspannung kleiner wird, läßt sich eine in Sperrichtung betriebene Diode technisch als Kondensator verwenden, dessen Kapazität mit der Sperrspannung geändert werden kann.

Mit einer Kapazitätsdiode kann die Resonanzfrequenz eines Schwingkreises mit einer Spannung gesteuert werden.

Kapazitätsdioden werden hauptsächlich zum Abstimmen von Schwingkreisen benutzt (z.B. automatische Scharfabstimmung in Empfängern).

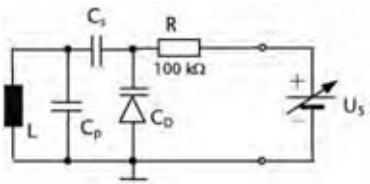


Abb. 302: Beispiel einer Schwingkreisabstimmung mit Kapazitätsdiode (man beachte das Schaltzeichen der Kapazitätsdiode)

Durch eine veränderliche Gleichspannung kann die Resonanzfrequenz des Schwingkreises verändert werden. Der Widerstand R hält die HF-Wechselspannung des Schwingkreises von der Steuerspannungsquelle U_s fern. Die HF-Spannung wird so von der Steuerspannung U_s entkoppelt. C_s verbindet den Wechselstromweg zwischen Schwingkreis und Kapazitätsdiode und verhindert gleichzeitig, daß die Steuergleichspannung U_s am Schwingkreis anliegt.

Kapazitätsdioden können auch zur **Amplitudenmodulation** und **Frequenzmodulation** einer HF-Spannung eingesetzt werden.

Durch eine Modulation wird einer hochfrequenten Sinusspannung (Trägerspannung) mit einer Fremdspeisung (Modulationsspannung) eine niederfrequente Information (z.B. Sprache, Musik) aufgeprägt. Durch die Amplitudenmodulation (AM) schwankt die Amplitude der Trägerspannung im Rhythmus der Information. Die **Amplitude des Trägers ändert sich** je nach dem Augenblickswert des modulierenden Signals.

Bei der Frequenzmodulation (FM) ändert sich die Momentanfrequenz der Trägerspannung entsprechend der aufgeprägten Information. Die **Momentanfrequenz des Trägers ändert sich** je nach dem augenblicklichen Amplitudenwert des modulierenden Signals.

Die modulierte Hochfrequenz wird von einem Sender ausgestrahlt, und die niederfrequente Nachricht muß in einem Empfänger vom Träger abgelöst werden, ehe sie weiterverarbeitet (z.B. verstärkt) werden kann. Das Trennen der Nachricht vom Träger wird **Demodulation** genannt. Für AM kann im einfachsten Fall als Demodulator eine Diode dienen, die jeweils nur die in Durchlaßrichtung gepolte Halbwelle durchläßt (HF-Gleichrichtung). Die niederfrequente Nachricht (sie ist in der Hüllkurve enthalten) wird dann durch Siebung von der Hochfrequenz getrennt und kann verstärkt werden.

Die Amplitudenmodulation wird beim Mittelwellen-Rundfunk, und die Frequenzmodulation beim UKW-Rundfunk verwendet.

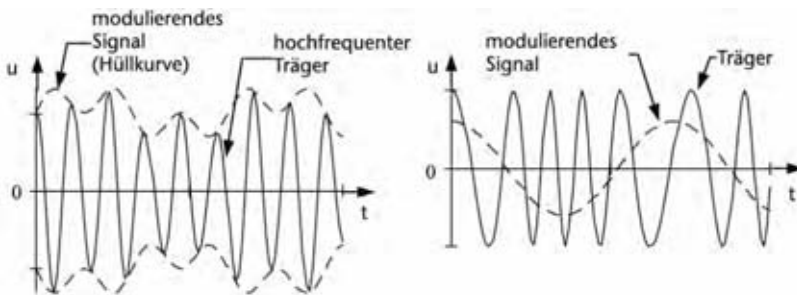


Abb. 303: Amplitudenmodulation (links) und Frequenzmodulation (rechts)

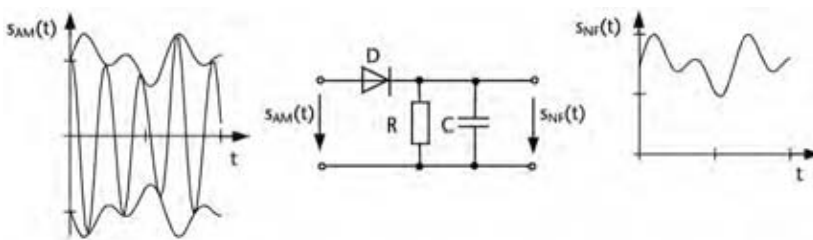


Abb. 304: Prinzip der Hüllkurvendemodulation eines AM-Signals mit einer Diode

18.5.2.5 Tunneldiode

Tunneldioden werden nach ihrem Entdecker auch ESAKI-Dioden genannt. Durch sehr starke Dotierung des Halbleitermaterials ergibt sich eine extrem schmale Sperrschicht. Bereits bei einer bestimmten kleinen Durchlaßspannung kann die dünne Sperrschicht von zahlreichen Ladungsträgern durchstoßen (durchtunnelt) werden. Dieser Tunneleffekt ist nicht temperaturabhängig.

Die Durchlaßkurve einer Tunneldiode steigt im Gebiet der Durchlaßspannung bis ca. 0,1 V steil bis zu einem Höckerwert von ca. 5 mA an. Bei Einsetzen des Tunneleffektes nimmt mit einer Vergrößerung der Durchlaßspannung der Durchlaßstrom **ab** (!). Der Abfall erfolgt extrem schnell bis zu einem Talpunkt. Im Bereich zwischen Höcker und Talpunkt ist die Kennlinie fallend, es ist ein **negativer Widerstandsbereich**, der eine Verstärkung bedeutet. Wird die Durchlaßspannung über den Wert des Talpunktes hinaus vergrößert, so nimmt der Durchlaßstrom wieder zu und die Kennlinie geht in die Form der normalen Dioden-Durchlaßkennlinie über.

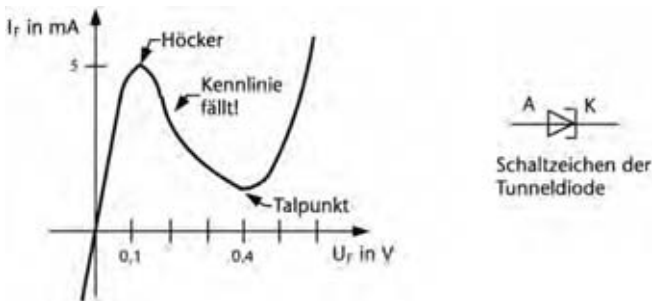


Abb. 305: Kennlinie einer Tunnel diode (links) und Schaltzeichen (rechts)

Im Sperrbereich fließt bei einer Tunnel diode bereits bei kleiner Spannung ein erheblicher Strom, da infolge der sehr hohen Dotierungen bereits bei kleinen Spannungen ein Durchbrucheffect einsetzt.

Die Tunnel diode besitzt also keine Sperrwirkung.

Für technische Anwendungen ist der fallende Kennlinienteil der Tunnel diode interessant. Der negative Widerstand kann (als Oszillator) zur Erzeugung von Schwingungen bis in den GHz-Bereich benutzt werden. Tunnel dioden werden auch als sehr schnelle Schalter (bis ca. 20 ps) in logischen Schaltungen eingesetzt.

18.5.2.6 Photodiode

Bei einem PN-Übergang wird der Sperrstrom von Ladungsträgern gebildet, die durch das thermische Aufbrechen von Elektronenpaarbindungen entstehen. Auftreffendes Licht (Photonen, Lichtquanten) kann durch seine Energie ebenfalls Elektronenpaarbindungen aufbrechen. Dies wird bei Photodioden ausgenutzt. Die Sperrschicht einer Photodiode wird an der »Oberfläche« des Halbleiters im Bereich der Eindringtiefe der Strahlung angeordnet. Der Sperrstrom einer in Sperrrichtung betriebenen Photodiode steigt mit der Beleuchtungsstärke an (Anwendung: z.B. in einem Belichtungsmesser).

18.5.2.7 Lumineszenzdiode

Lumineszenz dioden werden auf der Basis von Gallium-Arsenid-Phosphid-Verbindungen (GaAsP) hergestellt. Die Lumineszenz diode wird auch Leuchtdiode oder kurz LED (light emitting diode) genannt. Eine LED sendet bei Betrieb in Durchlaßrichtung Strahlung aus. Meist liegt die Wellenlänge der Strahlung im Bereich des sichtbaren Lichts mit den Farben Rot, Grün oder Gelb (auch Blau ist möglich), es können aber auch unsichtbare Infrarotstrahlen emittiert werden. Es gibt spezielle Ausführungen blinkender oder (je nach Polung der Anschlußspannung) zweifarbig leuchtender LEDs. Die Sperrspannung von LEDs ist je nach Typ mit 3 V bis 6 V sehr niedrig. Der typische Durchlaßstrom im Betrieb liegt bei ca. 20 mA.

In fast allen Fällen muß daher in Reihe mit der LED ein ohmscher Vorwiderstand R_V zur Strombegrenzung geschaltet werden.

Er berechnet sich zu $R_V = \frac{U_B - U_D}{I_D}$.

(U_B = Speisespannung, U_D = Durchlaßspannung, I_D = Durchlaßstrom)



Abb. 306: Schaltzeichen einer Photodiode (links) und einer Leuchtdiode (rechts)

Wird eine LED an Wechselspannung betrieben, so muß durch eine zur LED antiparallel geschaltete Diode die Sperrspannung der LED auf 0,6 V begrenzt werden. LEDs werden als optische Anzeigeelemente mit kleinen Abmessungen und kleiner Leistung eingesetzt. Sie besitzen eine sehr hohe Lebensdauer.

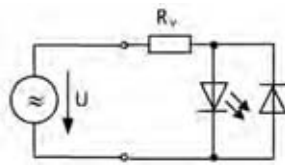
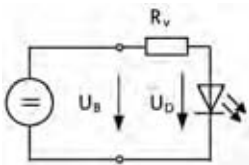


Abb. 307: Betrieb einer LED an Gleichspannung (links) und Wechselspannung (rechts)

18.5.2.8 Z-Diode (Zener-Diode)

Z-Dioden werden ausschließlich aus Silizium hergestellt. In Durchlaßrichtung ist die Kennlinie identisch mit der Kennlinie einer normalen Siliziumdiode. In Sperrrichtung hat die Kennlinie einer Z-Diode jedoch einen ganz scharfen Knick an der Stelle, wo der Durchbruch einsetzt. Die Kennlinie verläuft im Durchbruchbereich sehr steil. Dadurch ist in diesem Bereich der dynamische Innenwiderstand sehr niedrig. Dies kann zur **Stabilisierung** (Konstanthaltung) einer Gleichspannung oder Glättung einer Wechselspannung ausgenutzt werden.

Im Gegensatz zu einer normalen Diode teilt sich bei einer Z-Diode der Sperrstrom gleichmäßig auf den Halbleiter auf. Zener- und Lawinendurchbruch führen deshalb nicht zu einer Zerstörung, solange (durch einen Vorwiderstand) für eine Strombegrenzung gesorgt, und die maximal zulässige Verlustleistung ($U_Z \cdot I_Z$) nicht überschritten wird.

Liegt der Arbeitspunkt bei einer Z-Diode auf der Durchbruchkennlinie, so bewirkt eine große Stromänderung ΔI_Z nur eine kleine Spannungsänderung ΔU_Z . Somit ergibt sich eine stabilisierende Wirkung für die (Gleich-)Spannung U_Z . Sie ist nur wenig von Laständerungen abhängig und bleibt fast konstant.

Die Stabilisierung wird besser, je steiler die Kennlinie verläuft, je kleiner also der dynamische Innenwiderstand $r_Z = \frac{\Delta U_Z}{\Delta I_Z}$ ist.

Eine Z-Diode wird im Durchbruchbereich betrieben.

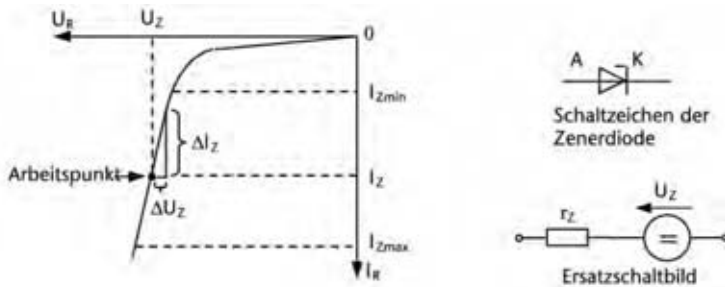


Abb. 308: Dynamischer Innenwiderstand bei der Z-Diode (links), Schaltzeichen und Ersatzschaltbild (rechts)

Im Datenblatt einer Z-Diode wird vom Hersteller ein Arbeitspunkt angegeben, in dem die Z-Diode betrieben werden soll. Der Arbeitspunkt wird durch I_Z (oder I_{ZT} mit »T« wie Test) und U_Z (oder U_{ZT}) festgelegt, wobei U_Z die Zenerspannung (Z-Spannung) ist.

In der Praxis der Schaltungstechnik hat die Spannungsstabilisierung mit Z-Dioden große Bedeutung. Die Versorgungsspannung einer elektronischen Schaltung kann, unabhängig von Schwankungen der speisenden Eingangs-Gleichspannung, konstant gehalten werden und bleibt auch bei Schwankungen des in die Schaltung hineinfließenden Stromes konstant. Die Ausgangsspannung einer Schaltung zur Spannungsstabilisierung mit einer Z-Diode ist also nicht nur gegen Schwankungen der Betriebsspannung, sondern auch gegen Belastungsschwankungen stabilisiert.

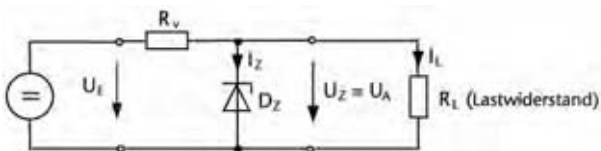


Abb. 309: Spannungsstabilisierung mit Z-Diode

Man beachte, daß die Z-Diode in obiger Schaltung mit ihrer Kathode am Pluspol der Eingangsspannung liegt (Betrieb im Durchbruchbereich).

Für die Dimensionierung der Schaltung in Abb. 309 sind folgende Forderungen zu erfüllen:

1. R_V muß so klein sein, daß auch bei der niedrigsten vorkommenden Eingangsspannung U_{Emin} und bei größtem vorkommenden Laststrom I_{Lmax} die Diode noch im Zenerbereich arbeitet, d.h. daß $I_Z \geq I_{Zmin}$ ist.
2. Die im Datenblatt angegebene maximal zulässige Verlustleistung P_{Zmax} der Z-Diode darf nicht überschritten werden.

Zu Forderung 1:

Für die Spannungen in Abb. 309 erhält man mit einer Maschengleichung den Zusammenhang:

$$U_E = (I_Z + I_L) \cdot R_V + U_Z. \text{ Nach } I_Z \text{ aufgelöst: } I_Z = \frac{U_E - U_Z - I_L \cdot R_V}{R_V}$$

Der kleinste Z-Strom I_Z tritt auf, wenn U_E minimal ist, und U_Z und I_L maximal sind.

Wird jetzt nach dem maximalen Wert von R_V aufgelöst, so erhält man $R_V \leq \frac{U_{Emin} - U_{Zmax}}{I_{Zmin} + I_{Lmax}}$. Setzt man die im Datenblatt angegebenen Werte des Arbeitspunktes ein ($U_{Zmax} = U_Z$ und $I_{Zmin} = I_Z$), so erhält man:

Gl. 141: Zur Dimensionierung des Widerstandswertes von R_V in Abb. 309

$$R_V = \frac{U_{Emin} - U_Z}{I_Z + I_{Lmax}}$$

Die maximale Verlustleistung an R_V , für die dieser Widerstand ausgelegt werden muß, ergibt sich aus:

Gl. 142: Zur Dimensionierung der Leistung von R_V in Abb. 309

$$P_{R_V} = \frac{(U_{Emax} - U_Z)^2}{R_V}$$

Zu Forderung 2:

Die höchstzulässige Verlustleistung kann als Hyperbel in das Kennlinienfeld von Z-Dioden mit verschiedenen Z-Spannungen eingetragen werden. Daraus ergeben sich Arbeitspunkte auf den Kennlinien, die nur im Arbeitsbereich oder maximal auf der Hyperbel liegen dürfen. Es dürfen nur Spannungen und Ströme bis zu dieser Kurve benutzt werden.

Die Verlustleistungshyperbel ergibt sich nach $I_Z = \frac{P_{Zmax}}{U_Z}$.

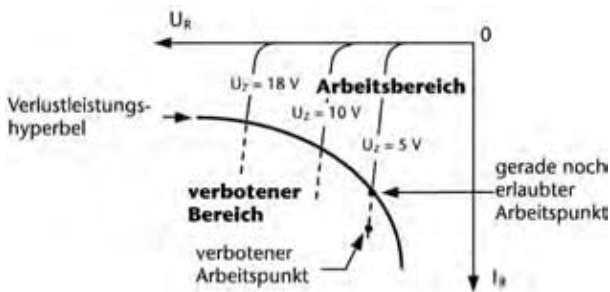


Abb. 310: Verlustleistungshyperbel bei Z-Dioden

Für die Z-Diode muß gelten: $P_{Zmax} \geq U_{Zmax} \cdot I_{Zmax}$. Der größte Z-Strom I_Z tritt auf, wenn der Laststrom I_L klein (oder Null) ist, und die Spannung über R_V groß ist (und damit U_E groß und U_Z klein sind).

Somit erhält man $P_{Zmax} \geq U_{Zmax} \cdot \left(\frac{U_{Emax} - U_{Zmin}}{R_V} - I_{Lmin} \right)$.

Werden wieder die Werte des Arbeitspunktes aus dem Datenblatt eingesetzt, so ergibt sich:

Gl. 143: Zur Dimensionierung der Leistung der Z-Diode in Abb. 309

$$P_{Z\max} \geq U_Z \cdot \left(\frac{U_{E\max} - U_Z}{R_V} - I_{L\min} \right)$$

Die eingesetzte Z-Diode muß eine Leistung nach Datenblatt von mindestens $P_{Z\max}$ haben.

Das Verhältnis einer Änderung der Eingangsspannung zu der dadurch entstehenden Änderung der Ausgangsspannung wird für Wechselspannungen als **Glättungsfaktor G** und für Gleichspannungen als **absoluter Stabilisierungsfaktor** bezeichnet.

Der dynamische Innenwiderstand r_Z und der Lastwiderstand R_L liegen parallel. Nach der Span-

$$\text{nungsteilerformel ist } U_A = U_E \cdot \frac{\frac{1}{r_Z} + \frac{1}{R_L}}{R_V + \frac{1}{\frac{1}{r_Z} + \frac{1}{R_L}}} \Rightarrow \frac{U_E}{U_A} = 1 + R_V \cdot \left(\frac{1}{r_Z} + \frac{1}{R_L} \right)$$

Gl. 144: Absoluter Stabilisierungsfaktor (R_L konstant)

$$G = \frac{\Delta U_E}{\Delta U_A} = 1 + R_V \cdot \left(\frac{1}{r_Z} + \frac{1}{R_L} \right) \quad \text{mit } \Delta U_E = U_{E\max} - U_{E\min}$$

Für $R_V \gg r_Z$ und $R_L \gg r_Z$ wird $G \approx \frac{R_V}{r_Z}$.

Der absolute Stabilisierungsfaktor steigt linear mit U_E und R_V an. Soll er möglichst groß sein (gute Stabilisierung), so wird man für R_V den höchsten zulässigen Wert und U_E möglichst hoch wählen. Für eine hohe Eingangsspannung U_E wird allerdings wegen des großen Spannungsabfalls an R_V die Verlustleistung an R_V groß. Einen guten Kompromiß erreicht man mit $U_E = \text{ca. } 2 \text{ bis } 4 \text{ mal } U_A$.

Werden die auf die Nennwerte bezogenen Spannungsänderungen ins Verhältnis gesetzt, so erhält man den **relativen Stabilisierungsfaktor S**.

Gl. 145: Relativer Stabilisierungsfaktor

$$S = \frac{\frac{\Delta U_E}{U_E}}{\frac{\Delta U_A}{U_A}} = \frac{\Delta U_E \cdot U_A}{\Delta U_A \cdot U_E} \quad \boxed{S = G \cdot \frac{U_A}{U_E}}$$

Dabei ist für U_E zu wählen: $U_E = U_{E\min} + \frac{\Delta U_E}{2}$.

Da Lawinen- und Zenerdurchbruch temperaturabhängig sind, ist auch die Zenerspannung U_Z (Durchbruchspannung) abhängig von der Temperatur. Im Bereich $U_Z < \text{ca. } 5,5 \text{ V}$ überwiegt der Zenereffekt, welcher mit steigender Temperatur zunimmt. Bei Z-Dioden mit $U_Z < 5,5 \text{ V}$ wird daher die Z-Spannung mit zunehmender Temperatur kleiner. Im Bereich $U_Z > \text{ca. } 6,5 \text{ V}$ überwiegt der Lawineneffekt, der mit steigender Temperatur abnimmt. Bei Z-Dioden mit $U_Z > 6,5 \text{ V}$

wird daher die Z-Spannung mit zunehmender Temperatur größer. In einem Bereich zwischen 5 V und 6 V ist die Z-Spannung unabhängig von der Temperatur, da Zener- und Lawineneffekt gleich stark auftreten und sich ihre gegenläufigen Temperaturabhängigkeiten kompensieren.

Der **Temperaturkoeffizient** T_k einer Z-Diode wird in ihrem Datenblatt angegeben und beschreibt die Abhängigkeit der Z-Spannung von der Temperatur. Der T_k ist unterhalb von ca. 6 V negativ und oberhalb von ca. 6 V positiv, bei ca. 6 V ist der T_k Null.

Der T_k der Z-Spannung ist $T_k = \frac{\Delta U_Z}{U_Z \cdot \Delta T}$ (T_k = Temperaturkoeffizient in $\frac{1}{K}$)

Ändert sich die Halbleiter- bzw. Umgebungstemperatur um den Betrag ΔT , so ändert sich die Z-Spannung um den Betrag:

Gl. 146: Änderung der Z-Spannung mit der Temperatur

$$\Delta U_Z = U_Z \cdot \Delta T \cdot T_k \quad U_Z = \text{Z-Spannung bei } 25^\circ\text{C}$$

Die Z-Spannung einer Z-Diode mit $U_Z = \text{ca. } 6 \text{ V}$ ist von der Temperatur kaum abhängig. Bei höheren Z-Spannungen können für eine geringe Temperaturabhängigkeit von U_Z entweder Z-Dioden mit 6 V-Spannungen in Reihe geschaltet werden, oder es wird mit der Z-Diode eine Siliziumdiode in Durchlaßrichtung in Reihe geschaltet. Weiterhin können Z-Dioden mit positivem und negativen T_k in Reihe geschaltet werden.

Z-Dioden, deren Z-Spannung sich kaum mit der Zeit und der Temperatur ändern, sind als temperaturkompensierte Referenzdioden (TK-Z-Dioden) erhältlich. Sie dienen zur Erzeugung einer sehr konstanten Referenzspannung, die in einer elektronischen Schaltung z.B. eine Bezugs- oder Vergleichsgröße ist.

Ändert man den durch eine Z-Diode fließenden Strom, so ändert sich auch die Verlustleistung, und damit die Sperrschichttemperatur. Die Z-Spannung U_Z ändert sich somit nicht nur mit der Temperatur, sondern bei langsamen Laständerungen auch mit dem Strom I_Z durch die Z-Diode.

Z-Dioden werden für Z-Spannungen von ca. 1,8 V bis 400 V mit verschiedenen Toleranzen der Z-Spannung und mit unterschiedlichen Leistungen (Belastbarkeiten) hergestellt.

Noch ein Hinweis für die Praxis: Ein Elektrolytkondensator parallel zur Z-Diode zur Erhöhung der Glättung ist meist nicht sinnvoll, da er nur wirksam ist, wenn sein Wechselstromwiderstand kleiner als r_z ist.

Aufgabe 80:

Aus dem Datenblatt einer Z-Diode wird entnommen $U_Z = 13 \text{ V}$ bei 25°C , $T_k = 5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Die Umgebungstemperatur ist $T_u = 55^\circ\text{C}$. Um welchen Betrag ändert sich die Z-Spannung, welchen Wert nimmt sie an?

Lösung:

$$\Delta U_Z = 13 \text{ V} \cdot (55^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C}) \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 0,195 \text{ V}; U_Z = 13,195 \text{ V bei } 55^\circ\text{C}$$

Aufgabe 81:

Eine Schaltung benötigt zur Spannungsversorgung eine Gleichspannung von 10 V. Damit die Schaltung richtig arbeitet, darf die Speisespannung von 10 V um maximal $\pm 100 \text{ mV}$ schwanken.

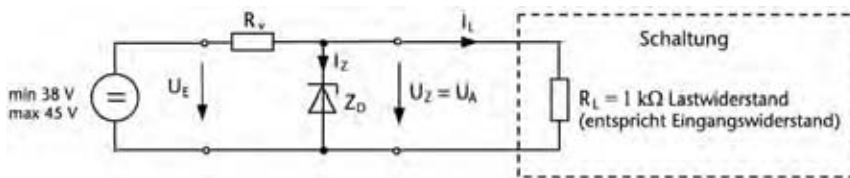
Die Schaltung hat an den beiden Klemmen für die Speisespannung den konstanten Eingangswiderstand $1\text{ k}\Omega$. Zur Verfügung steht eine Gleichspannungsquelle, deren Spannung zwischen 38 V und 45 V schwanken kann. Mit einer Z-Diode soll diese Spannung auf 10 V stabilisiert werden.

Im Datenblatt der Z-Diode steht: $U_Z = 10\text{ V}$, $P_{\text{tot}} = 0,4\text{ W}$, $r_z = 8,5\text{ }\Omega$, $I_Z = 12,5\text{ mA}$.

- Zeichnen Sie das Schaltbild für die Spannungsstabilisierung.
- Welchen Wert muß der Vorwiderstand R_V haben?
- Wie groß ist die maximale Verlustleistung an R_V ?
- Welche maximale Verlustleistung entsteht an der Z-Diode?
- Wie groß ist der absolute und der relative Stabilisierungsfaktor?
- Um welchen Betrag ändert sich maximal die Spannung am Lastwiderstand? Ist die Spannung stabil genug?

Lösung:

- a) Schaltbild



- b) An der Z-Diode stellt sich die Spannung $U_Z = U_A = 10\text{ V}$ ein, welche am Lastwiderstand anliegt. Der Laststrom I_L berechnet sich aus $I_L = \frac{U_Z}{R_L} = \frac{10\text{ V}}{1\text{ k}\Omega} = 10\text{ mA}$.

Da der Lastwiderstand konstant ist, gilt $I_L = I_{L\text{min}} = I_{L\text{max}}$.

Aus $R_V = \frac{U_{E\text{min}} - U_Z}{I_Z + I_{L\text{max}}}$ erhält man $R_V = \frac{38\text{ V} - 10\text{ V}}{12,5\text{ mA} + 10\text{ mA}}$; $R_V = 1244\text{ }\Omega$

Es wird gewählt: $R_V = 1200\text{ }\Omega$.

- c) Die Verlustleistung an R_V ist $P_{R_V} = \frac{(U_{E\text{max}} - U_Z)^2}{R_V}$; $P_{R_V} = \frac{(45\text{ V} - 10\text{ V})^2}{1200\text{ }\Omega}$; $P_{R_V} = 1,02\text{ W}$

Es wird ein Widerstand mit einer Belastbarkeit von $1,5\text{ W}$ gewählt.

- d) An der Z-Diode entsteht maximal die Verlustleistung $P_{Z\text{max}} = U_Z \cdot \left(\frac{U_{E\text{max}} - U_Z}{R_V} - I_{L\text{min}} \right)$

$$P_{Z\text{max}} = 10\text{ V} \cdot \left(\frac{45\text{ V} - 10\text{ V}}{1200\text{ }\Omega} - 0,01\text{ A} \right); P_{Z\text{max}} = 0,19\text{ W}$$

Die Z-Diode ist nicht überlastet, da $P_{Z\text{max}} = 0,19\text{ W}$ deutlich kleiner als $P_{\text{tot}} = 0,4\text{ W}$ ist.

e) Der absolute Stabilisierungsfaktor ist $G = 1 + R_V \cdot \left(\frac{1}{r_Z} + \frac{1}{R_L} \right)$; $G = 1 + 1200 \Omega \cdot \left(\frac{1}{8,5 \Omega} + \frac{1}{1000 \Omega} \right)$

$G = 143$; der relative Stabilisierungsfaktor ist $S = G \cdot \frac{U_A}{U_E}$ mit $U_E = U_{Emin} + \frac{\Delta U_E}{2}$

$$S = 143 \cdot \frac{10 \text{ V}}{38 \text{ V} + \frac{45 \text{ V} - 38 \text{ V}}{2}}; S = 34,5$$

f) Aus $G = \frac{\Delta U_E}{\Delta U_A}$ folgt $\Delta U_A = \frac{\Delta U_E}{G}$; $\Delta U_A = \frac{45 \text{ V} - 38 \text{ V}}{143}$;

Die stabilisierte Ausgangsspannung ändert sich maximal um $\Delta U_A = 50 \text{ mV}$. Sie ist stabil genug, da die Speisespannung der Schaltung um maximal $\pm 100 \text{ mV}$ schwanken darf.

18.5.2.9 Suppressor-Dioden

Suppressor-Dioden (TAZ-Dioden = Transient Absorbtion Zener) dienen zum Schutz von Geräten und Baugruppen vor energiehaltigen und evtl. zerstörend wirkenden Spannungsspitzen und Impulsen. Sie können innerhalb von Picosekunden Impulsleistungen bis zu über 1000 W bei einer Impulsdauer von ca. 1 ms absorbieren.

18.6 Arbeitspunkt und Widerstandsgerade

Die Berechnung von Netzwerken, die aus linearen Zweipolen zusammengesetzt sind, ist relativ einfach, weil alle Spannungen und Ströme in einem linearen Zusammenhang stehen. Durch das Lösen von linearen Gleichungen können alle Spannungen und Ströme explizit angegeben werden. Enthält eine Schaltung auch **nichtlineare Zweipole** (Bauteile mit einer nichtlinearen I-U-Kennlinie), so ist das **Ohmsche Gesetz nicht anwendbar** und die Schaltung kann im allgemeinen nicht direkt berechnet werden. In diesem Fall ist jedoch eine **graphische Lösung** zur Bestimmung der Strom- und Spannungsverhältnisse der Schaltung möglich, falls die I-U-Kennlinie des nicht-linearen Bauteils aus dem Datenblatt oder einer Messung bekannt ist.

Als einfaches Beispiel wird ein Stromkreis mit einer Diode betrachtet.

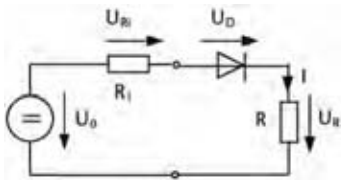


Abb. 311: Stromkreis mit nichtlinearem Bauteil (Diode)

Gegeben sei die Spannung U_0 , gesucht werden die Spannungen U_{Ri} , U_D und U_R sowie der Strom I .

Nach der Maschenregel ergibt sich $-U_0 + U_{Ri} + U_D + U_R = 0$. Für die Spannungen an den Widerständen gilt nach dem Ohmschen Gesetz $U_{Ri} = R_i \cdot I$ und $U_R = R \cdot I$. Nach Gl. 138 gilt für den

Strom durch die Diode $I = I_R \cdot \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right)$. Es wird nach U aufgelöst. $\ln \left(\frac{I}{I_R} + 1 \right) = \frac{U}{U_T} \ln(e)$.

Mit $\ln(e) = 1$ folgt $U = U_T \cdot \ln\left(\frac{I}{I_R} + 1\right)$. Werden jetzt die einzelnen Spannungen in die Maschengleichung eingesetzt, erhalten wir für den Strom I als Gleichung $U_0 = (R_i + R) \cdot I + U_T \cdot \ln\left(\frac{I}{I_R} + 1\right)$.

Diese Gleichung ist nichtlinear, der Strom I kann nicht explizit angegeben werden.

Die Lösung wird deshalb auf zeichnerischem Weg bestimmt. In die Kennlinie der Diode wird eine **Widerstandsgerade** (auch als Arbeitsgerade bezeichnet) eingetragen. Die Gleichung der Widerstandsgeraden erhält man, indem in die Maschengleichung $-U_0 + U_{R_i} + U_D + U_R = 0$ für $U_{R_i} = R_i \cdot I$ und für $U_R = R \cdot I$ eingesetzt wird. Es folgt:

$I \cdot (R_i + R) = U_0 - U_D$ oder $I = \frac{U_0 - U_D}{R_i + R} = -\frac{1}{R_i + R} \cdot U_D + \frac{U_0}{R_i + R}$. Dies ist die Gleichung einer Geraden mit negativer Steigung ($y = -a \cdot x + b$). Den Schnittpunkt der Geraden mit der Ordinate erhält man mit $U_D = 0$ zu $I = \frac{U_0}{R_i + R}$. Für $I = 0$ ergibt sich der Schnittpunkt der Geraden mit der

Abszisse zu $U_D = U_0$.

Die Gleichung der Geraden wurde ermittelt, indem nur die Ausdrücke für die Spannungen der linearen Widerstände in die Maschengleichung eingesetzt und diese nach dem Strom I aufgelöst wurde.

Als Zahlenwerte werden jetzt für das Beispiel in Abb. 311 gewählt: $U_0 = 1 \text{ V}$, $R_i = 0,4 \Omega$, $R = 5 \Omega$. Der Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der Ordinate ergibt sich damit zu

$I = \frac{1 \text{ V}}{0,4 \Omega + 5 \Omega} = 0,18 \text{ A}$ und mit der Abszisse zu $U_D = U_0 = 1 \text{ V}$. Eine Gerade ist durch zwei Punkte

eindeutig festgelegt. Die Widerstandsgerade kann jetzt in das Achsenkreuz der gegebenen Diodenkennlinie eingezeichnet werden.

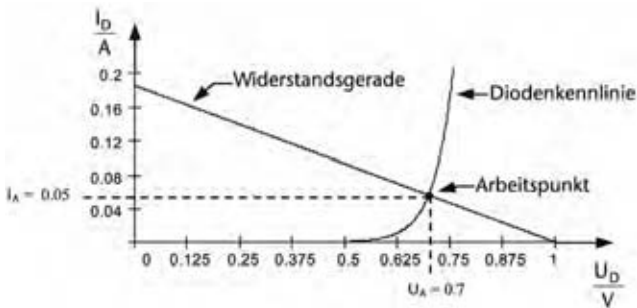


Abb. 312: Graphische Bestimmung des Stromes und der Spannung im Arbeitspunkt

Der Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der Diodenkennlinie ist der **Arbeitspunkt** der Schaltung. Im Arbeitspunkt ist sowohl die Maschengleichung als auch die Beziehung zwischen Spannung und Strom am nichtlinearen Bauelement erfüllt. Der im Stromkreis fließende Strom kann direkt abgelesen werden: $I = I_A = 0,05 \text{ A}$. Ebenso kann die Spannung an der Diode für den gewählten Arbeitspunkt unmittelbar zu $U_D = U_A = 0,7 \text{ V}$ aus der Zeichnung entnommen werden. Die abgelesenen Werte sind natürlich mit einer Ungenauigkeit der Zeichnung und des Ablesens behaftet.

Die weiterhin gesuchten Größen U_{R_i} und U_R werden mit dem abgelesenen Wert des Stromes I berechnet. $U_{R_i} = R_i \cdot I = 0,4 \, \Omega \cdot 0,05 \, \text{A} = 20 \, \text{mV}$; $U_R = R \cdot I = 5 \, \Omega \cdot 0,05 \, \text{A} = 250 \, \text{mV}$.

Die Summe $U_{R_i} + U_D + U_R$ ergibt $0,97 \, \text{V}$ und nicht $1 \, \text{V}$, wie es nach der Maschengleichung der Fall sein müßte. Dies ist durch die Ungenauigkeit der Zeichnung und des Ablesens der Werte aus der Zeichnung bedingt.

Hinweis zur Bestimmung der Widerstandsgeraden:

Zur Bestimmung der Widerstandsgeraden wurden die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen gewählt, weil die Gerade genauer zu zeichnen ist, je weiter die Punkte voneinander entfernt liegen, welche die Gerade festlegen, und weil sich die Berechnung des Stromwertes für $U_D = 0$ vereinfacht.

Ist die Widerstandsgerade sehr steil oder sehr flach, so sind die Schnittpunkte der Widerstandsgeraden mit den Koordinatenachsen nicht immer so bestimmbar, daß sie innerhalb des Zeichnungsbereiches der Diodenkennlinie liegen.

Liegt **ein** Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit einer Koordinatenachse im Zeichnungsbereich, so setzt man in die Gleichung der Widerstandsgeraden einen von diesem Schnittpunkt möglichst weit entfernten Wert der Diodenspannung U_D ein und berechnet den zugehörigen Stromwert I_D . Somit hat man wieder zwei Punkte, durch welche die Gerade festgelegt ist. Liegt **kein** Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit den Koordinatenachsen im Zeichnungsbereich, so setzt man in die Gleichung der Widerstandsgeraden zwei möglichst weit entfernte Werte der Diodenspannung U_D ein und berechnet die zugehörigen Stromwert I_D , um zwei Geradenpunkte zu erhalten.

Für das Beispiel in Abb. 311 werden folgende Zahlenwerte gewählt: $U_0 = 1,75 \, \text{V}$, $R_i = 1 \, \Omega$, $R = 10 \, \Omega$.

Als Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der Ordinate erhält man $I = \frac{1,75 \, \text{V}}{1 \, \Omega + 10 \, \Omega} = 0,16 \, \text{A}$.

Der Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der Abszisse liegt bei $U_D = U_0 = 1,75 \, \text{V}$, und damit außerhalb des Zeichnungsbereiches (wir nehmen an, dieser soll nicht vergrößert werden). Wird in die Gleichung der Widerstandsgeraden $U_D = 1 \, \text{V}$ eingesetzt, so folgt $I = 0,07 \, \text{A}$.

Durch die zwei Punkte $U_D = 0 \, \text{V}$, $I_D = 0,16 \, \text{A}$ und $U_D = 1 \, \text{V}$, $I_D = 0,07 \, \text{A}$ ist die Widerstandsgerade festgelegt.

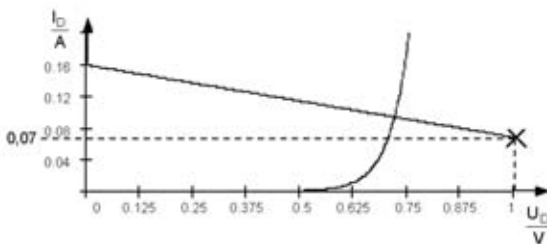
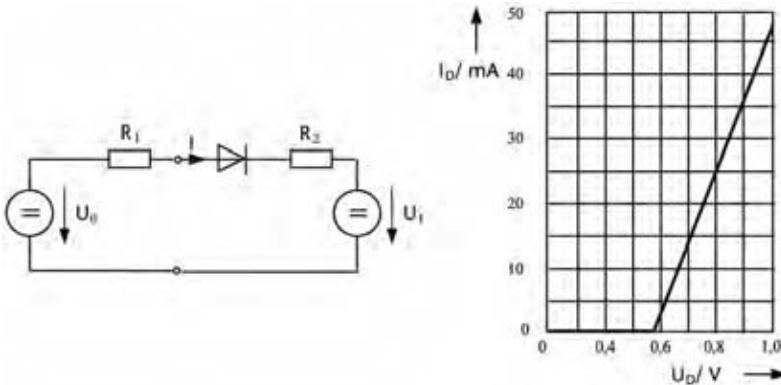


Abb. 313: Festlegung einer flachen Widerstandsgeraden

Aufgabe 82:

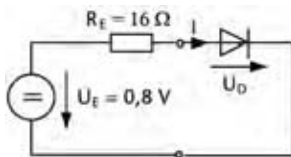
Gegeben ist die folgende Schaltung und die zur Diode gehörige, stückweise linearisierte Kennlinie.

Der Strom I ist zeichnerisch zu bestimmen. Es ist: $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 15\ \Omega$, $U_0 = 2\ \text{V}$, $U_1 = 1,2\ \text{V}$.



Lösung:

Die beiden Spannungsquellen können zu einer Ersatzspannungsquelle mit dem Wert $U_E = U_0 - U_1$, also $U_E = 0,8\ \text{V}$ zusammengefaßt werden. Ebenso können die beiden Widerstände zu einem Ersatzwiderstand mit dem Wert $R_E = R_1 + R_2 = 16\ \Omega$ zusammengefaßt werden. Damit erhält man die folgende Schaltung.



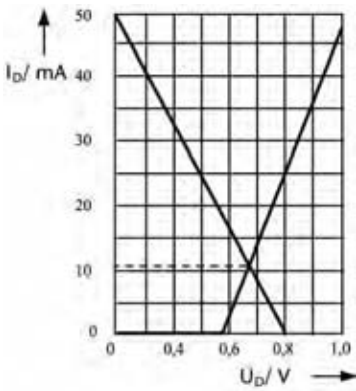
Die Maschengleichung ergibt $-U_E + R_E \cdot I + U_D = 0$.

Sie wird nach dem Strom I aufgelöst.

Die Gleichung für die Widerstandsgerade ist: $I = -\frac{1}{R_E} \cdot U_D + \frac{U_E}{R_E}$.

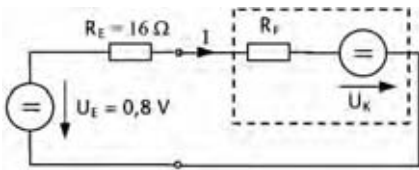
Festlegung von zwei Punkten der Widerstandsgeraden:

Für $U_D = 0$ erhält man $I = 50\ \text{mA}$. Für $I = 0$ ergibt sich $U_D = U_E = 0,8\ \text{V}$. Die zwei Punkte werden in die Diodenkennlinie eingezeichnet und zur Widerstandsgeraden verbunden.



Der Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der Diodenkennlinie ergibt den Arbeitspunkt der Schaltung. Aus dem Diagramm wird abgelesen: $I \approx 11 \text{ mA}$.

Anmerkung: Die Aufgabe kann auch rechnerisch gelöst werden, wenn die Diode durch ihr Ersatzschaltbild dargestellt wird. Man erhält das Schaltbild:



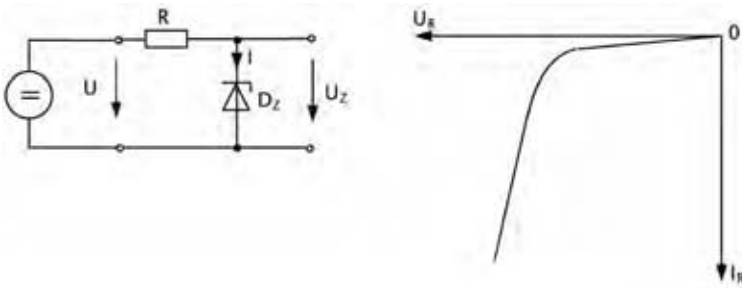
Das Ersatzschaltbild der Diode entspricht einer Ersatzspannungsquelle mit einem Innenwiderstand R_F , dessen Wert aus der Diodenkennlinie bestimmt werden kann. Aus der Kennlinie wird entnommen: $U_K = 0,58 \text{ V}$ mit $I_K = 0$. Bei (willkürlich gewählt) $U_D = 0,9 \text{ V}$ ist $I_D = 37 \text{ mA}$.

Der Wert von R_F errechnet sich zu $R_F = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{0,9 \text{ V} - 0,58 \text{ V}}{37 \text{ mA} - 0 \text{ mA}} = 8,6 \Omega$. Der Strom I ist $I = \frac{0,8 \text{ V} - 0,58 \text{ V}}{16 \Omega + 8,6 \Omega} \cdot I \approx 9 \text{ mA}$.

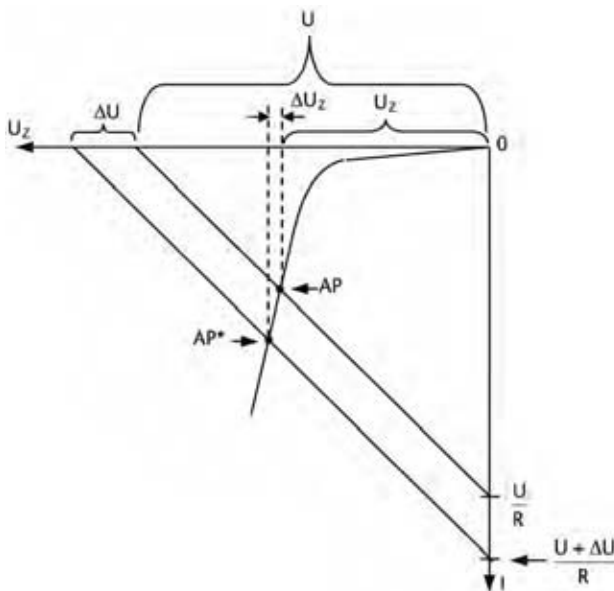
Der Unterschied der Ergebnisse ergibt sich durch Ungenauigkeiten beim Ablesen graphischer Werte bei beiden Verfahren.

Aufgabe 83:

Mit einer Z-Diode mit Vorwiderstand wird eine Referenzspannung erzeugt. Bestimmen Sie graphisch mit der gegebenen Kennlinie der Z-Diode und mit einer Widerstandsgeraden allgemein die Änderung der Z-Spannung U_Z , wenn sich die Eingangsspannung U um ΔU ändert.



Lösung:



Die Maschengleichung ergibt $U - U_z - R \cdot I = 0$. Nach I aufgelöst erhält man die Gleichung für die Widerstandsgerade $I = -\frac{1}{R} \cdot U_z + \frac{U}{R}$. Für $I = 0$ ist der Schnittpunkt mit der Abszisse $U_z = U$.

Für $U_z = 0$ ist der Schnittpunkt mit der Ordinate $I = \frac{U}{R}$. Der Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der Diodenkennlinie ergibt den Arbeitspunkt AP. Ändert sich die Eingangsspannung U um ΔU , so ergibt sich eine neue Widerstandsgerade und ein neuer Arbeitspunkt AP*. Aus dem Abszissenwert von AP* läßt sich die Referenzspannungsänderung ΔU_z ablesen.

18.7 Anwendungen von Dioden

Die Anwendung von Spezialdioden wurde bereits bei deren Erläuterung genannt. Eine in der Praxis sehr wichtige Anwendung von Dioden ist die Gleichrichtung von Wechselspannung. Zusätzlich werden einige weitere Anwendungen von Dioden beschrieben.

18.7.1 Gleichrichtung von Wechselspannungen

Fast jedes elektronische Gerät benötigt eine Stromversorgung, welche eine oder mehrere Gleichspannungen liefert. Bei höheren Leistungen ist der Betrieb aus Batterien unwirtschaftlich. Man erzeugt dann die Gleichspannung durch Transformieren und Gleichrichten der Netzwechselspannung (»Netzgerät«). Da eine Diode den Strom nur in einer Richtung fließen läßt, eignet sie sich durch diese »Ventilwirkung« zur Gleichrichtung (Erzeugung von Gleichspannung aus Wechselspannung).

Trägt man in die Kennlinie einer Diode eine Wechselspannung ein, so erkennt man die Gleichrichterfunktion der Diode. Nur die positiven Halbwellen der Wechselspannung im Durchlaßbereich der Diode rufen einen Stromfluß hervor. Die negativen Halbwellen der Wechselspannung im Sperrbereich der Diode verursachen wegen der sehr geringen Sperrströme nur sehr kleine Stromänderungen.

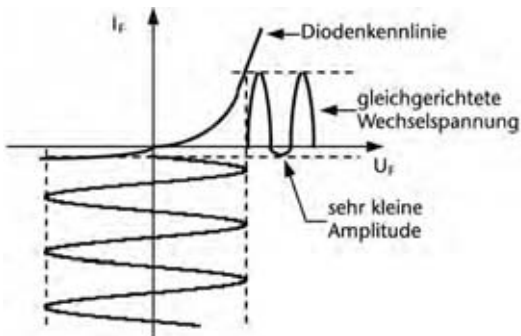


Abb. 314: Schematische Darstellung der Gleichrichtereigenschaft einer Diode

Die in Abb. 314 dargestellten Verhältnisse gelten für die **Einweg-Gleichrichterschaltung** ohne Ladekondensator C_L .

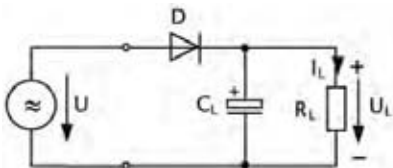


Abb. 315: Einweggleichrichtung von Wechselspannung

Nur während der positiven Halbwellen der Wechselspannung U kann der Strom I_L durch den Lastwiderstand R_L fließen. Die negativen Halbwellen werden durch die Gleichrichterdiode gesperrt. Am Lastwiderstand entsteht eine stark **pulsierende Gleichspannung** U_L (eine Sinushalbwellen pro Periode).

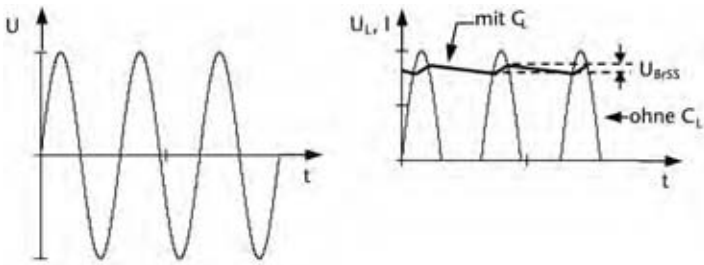


Abb. 316: Wechselspannung (links) und pulsierende Gleichspannung (rechts)

Die pulsierende Gleichspannung kann durch einen zum Lastwiderstand parallel geschalteten Kondensator C_L (Ladekondensator) geglättet werden. Zur Glättung der Spannung wird meist ein Elektrolytkondensator mit einigen hundert bis einigen tausend μF verwendet. Solange die Diode sperrt, entlädt der Lastwiderstand R_L den Kondensator C_L . Wird die Eingangsspannung größer als die Ausgangsspannung, so wird der Kondensator C_L wieder aufgeladen.

Die nach der Glättung verbleibende Spannungsschwankung (Restwelligkeit) wird **Brummspannung** genannt. Die Höhe der Brummspannung ist zum Verbraucherstrom direkt, und zur Größe des Ladekondensators umgekehrt proportional.

Für den Spitze-Spitze-Wert der Restwelligkeit gilt näherungsweise:

Gl. 147: Wert der Brummspannung bei Einweggleichrichtung

$$U_{BrSS} \approx \frac{I_L}{C_L \cdot f_{Br}} \quad (f_{Br} = \text{Brummfrequenz} = \text{Frequenz der Wechselspannung})$$

Die Ausgangsspannung des Einweggleichrichters beträgt ohne Last ($R_L = \infty$): $U_L = \hat{U} - U_D$.

Hier ist $\hat{U}$ der Scheitelwert der Eingangswechselspannung, und U_D der Spannungsabfall an der Diode. Die Höhe der Gleichspannung erreicht fast den Scheitelwert der Wechselspannung. Mit $U_D \approx 0,7 \text{ V}$ folgt:

Gl. 148: Höhe der Gleichspannung bei Einweggleichrichtung

$$U_L \approx \hat{U} \approx \sqrt{2} \cdot U_{eff}$$

Wie hoch die Gleichspannung mit angeschlossener Last ist, hängt vom Innenwiderstand der Wechselspannungsquelle (sie ist häufig die Sekundärwicklung eines Transformators) und von der Höhe der Belastung (vom Wert R_L) ab.

An der Diode tritt die maximale Sperrspannung auf, wenn die Wechselspannung ihren negativen Scheitelwert erreicht. Die an der Diode liegende Sperrspannung setzt sich dann aus der Spannung U_L und dem negativen Spitzenwert der Wechselspannung zusammen. Die Diode muß daher für eine Sperrspannung von mindestens $U_R = 2 \cdot \hat{U}$ ausgelegt sein.

Wegen des relativ niedrigen Innenwiderstandes der Ausgangsseite wird dem Einweggleichrichter häufig eine Schaltung zur Spannungsstabilisierung (z.B. mit einer Z-Diode) nachgeschaltet, welche auch die Restwelligkeit stark reduziert.

Einweggleichrichter sind zwar einfach aufgebaut, haben aber eine höhere Welligkeit der Ausgangsspannung und einen schlechteren Wirkungsgrad als Vollweggleichrichter.

Beim Einweggleichrichter wird der Ladekondensator nur während der positiven Halbwelle der Eingangsschwingung aufgeladen. Beim **Vollweggleichrichter** wird der Ladekondensator während jeder Halbwelle aufgeladen. Die Entladezeit des Ladekondensators, und damit die Höhe der Brummspannung werden halbiert. Die Brummfrequenz wird verdoppelt.

Eine Vollweggleichrichterschaltung ist die **Mittelpunktschaltung**.

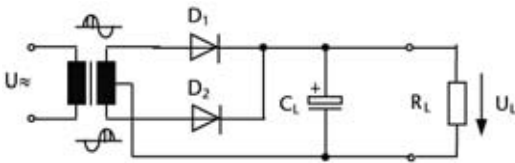


Abb. 317: Vollweggleichrichtung mit Mittelpunktschaltung

Für die Mittelpunktschaltung wird ein Transformator mit Mittelanzapfung der Sekundärwicklung benötigt. An seinen äußeren Anschlüssen der Sekundärwicklung muß der Transformator die doppelte Spannung liefern wie der Transformator bei Einweggleichrichtung. Die Dioden D_1 und D_2 bilden jeweils eine Einweggleichrichterschaltung. Während der positiven Halbwelle lädt D_1 den Kondensator C_L auf, D_2 sperrt. Während der negativen Halbwelle sperrt D_1 , jetzt leitet D_2 und lädt C_L auf.

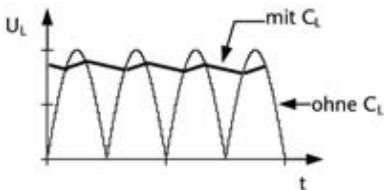


Abb. 318: Verlauf der Ausgangsspannung beim Vollweggleichrichter

Eine andere Vollweggleichrichterschaltung ist die **Brückenschaltung**.

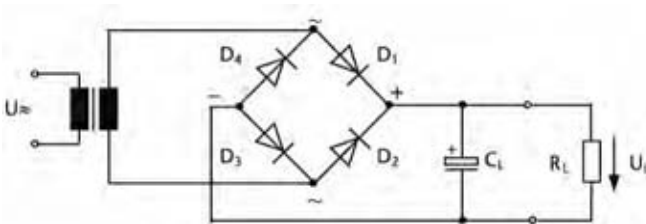


Abb. 319: Vollweggleichrichtung mit Brückenschaltung

Der Ladekondensator wird wieder während jeder Halbwelle der Eingangsschwingung aufgeladen. Die Ausgangsspannung entspricht Abb. 318.

Ein Vorteil bei der Brückenschaltung ist, daß nur die halbe Transformatorspannung wie bei der Mittelpunktschaltung, und keine Trafoanzapfung benötigt wird. Außerdem müssen die Dioden nur für die halbe Sperrspannung wie bei der Einweg- oder Mittelpunktschaltung, also nur für

mindestens $U_R = \hat{U}$ ausgelegt sein. Während der positiven Halbwelle leiten D_1 und D_3 , während der negativen Halbwelle leiten D_4 und D_2 . Bei jeder Halbwelle leiten somit zwei in Reihe geschaltete Dioden. Damit entsteht ein Spannungsverlust von $2 \cdot U_D \approx 2 \cdot 0,7 \text{ V}$.

Die Ausgangsspannung des Brückengleichrichters ohne Last ($R_L = \infty$) beträgt: $U_L = \hat{U} - 2 \cdot U_D$.

Die Höhe der Gleichspannung mit angeschlossener Last hängt vom Innenwiderstand R_i der Wechselspannungsquelle (Widerstand der Trafowicklung) und von der Belastung (dem entnommenen Strom) ab. Die Leerlaufgleichspannung U_L wird noch um den Spannungsabfall an R_i verringert. Der Spannungsabfall U_D an den Dioden ist natürlich ebenfalls entsprechend der Diodenkennlinie nichtlinear vom Laststrom abhängig. Wegen der Nichtlinearität ist für die Dimensionierung einer Gleichrichterschaltung eine Simulation sehr hilfreich.

Silizium-Brückengleichrichter sind als Bauteil in SMD-Technik oder mit Steck-Lötkontakten erhältlich.

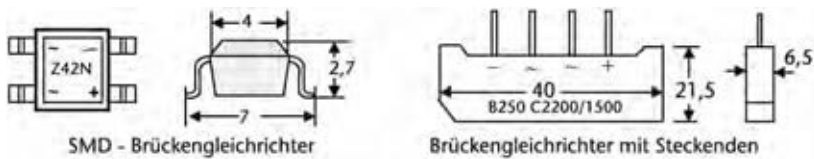


Abb. 320: Bauformen von Brückengleichrichtern

18.7.2 Schutzdiode

Die Wirkungsweise einer Freilaufdiode wurde bereits in Abschnitt 7.3.3 erläutert. Wird der Strom durch eine Induktivität (z.B. die Wicklung eines Relais) abgeschaltet, so wird durch die starke Änderung des Magnetfeldes eine hohe Spannung induziert, die den schaltenden Transistor zerstören kann. Durch eine zur Spule parallel geschaltete Diode wird die induzierte Spannung auf die Flußspannung der Diode (ca. 0,7 V bis 1,2 V) begrenzt.

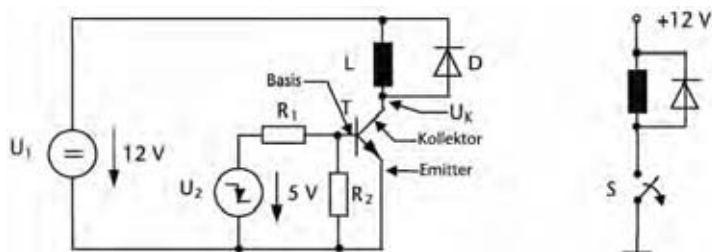


Abb. 321: Transistor als Schalter (links) und Ersatzschaltbild (rechts)

Die Spule L könnte die Wicklung eines 12 V Relais sein, die von der Spannung U_1 gespeist wird. Springt die Spannung U_2 von 5 V auf 0 V, so wird die Kollektor-Emittor-Strecke des Transistors T hochohmig (man sagt, der Transistor sperrt), und der Strom durch die Spule wird ausgeschaltet. Ohne Freilaufdiode entsteht am Kollektor eine hohe Spannungsspitze.

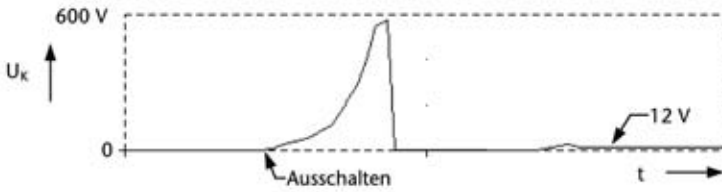


Abb. 322: Verlauf von U_k ohne Freilaufdiode

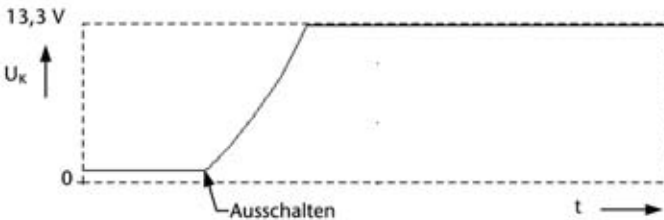


Abb. 323: Verlauf von U_k mit Freilaufdiode

Anmerkung: Die zeitliche Dauer der Spannungsspitze sei hier nicht von Interesse.

18.7.3 Eingangsschutzschaltung

Führen die Steckerkontakte einer Baugruppe direkt auf die Eingänge elektronischer Bauteile (z.B. eines Mikroprozessors), so besteht die Gefahr der Zerstörung der Bauteile durch hohe Spannungsspitzen oder negative Spannungen, falls diese, bedingt durch die Betriebsumgebung, auf den Eingang gelangen können. Die Eingänge müssen dann gegen Spannungen außerhalb des erlaubten Bereiches geschützt werden. Dies kann durch eine Schaltung mit Dioden erfolgen.

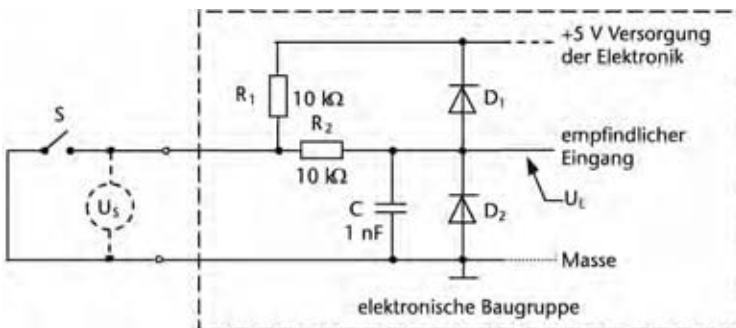


Abb. 324: Eingangsschutzschaltung einer elektronischen Baugruppe

Eine Baugruppe soll z.B. den Zustand eines Schalters S einlesen, ob dieser geöffnet oder geschlossen ist. Normalerweise würde der Schalter direkt an einen Eingang der elektronischen Schaltung angeschlossen werden. Falls jedoch eine Störspannung U_s auf den Eingang gelangen kann, die den erlaubten Bereich der Eingangsspannung übersteigt, so kann die Baugruppe zerstört werden.

Der empfindliche Eingang wird deshalb geschützt. Ist U_s negativ, so leitet die Diode D_2 , und die Spannung U_E am Eingang wird auf ca. $-0,7$ V begrenzt. Der Widerstand R_2 begrenzt dabei den Strom durch die Diode D_2 . Ist U_s positiv, so leitet D_1 , und U_E kann einen Wert von ca. $5,7$ V nicht übersteigen. Den Strom durch D_1 begrenzt R_2 . R_2 und C bilden außerdem ein Tiefpaßfilter gegen schnelle Spannungsspitzen.

18.7.4 Dioden in der Digitaltechnik

Halbleiterdioden lassen sich als Schalter verwenden, die durch die angelegte Spannung betätigt werden. Eine Spannung in Durchlaßrichtung ruft die Schalterstellung »Ein« hervor, eine Spannung in Sperrichtung die Schalterstellung »Aus«. Da keine mechanisch bewegten Teile vorhanden sind, lassen sich hohe Schaltgeschwindigkeiten erreichen.

In Computern und anderen Geräten zur Nachrichtenverarbeitung werden derartige schnelle Schalter in großer Zahl benötigt. Ein Computer arbeitet nur mit den Zuständen »Ein« (entspricht »Spannung ist da«) und »Aus« (entspricht »keine Spannung da«). Der Zustand »Ein« wird auch mit »High«, der Zustand »Aus« mit »Low« bezeichnet. Es werden die Abkürzungen H (= High) und L (= Low) benutzt. High wird auch als **logische »1«** und Low als **logische »0«** bezeichnet. Man spricht von einem **Bit**, das »1« oder »0« sein kann. Die »1« und »0« sind die einzigen Elemente des **binären Zahlensystems (Dualzahlensystems)**, in dem jede Zahl des dezimalen Zahlensystems darstellbar ist.

Der absolute Betrag der Spannung ist für die Zustände High und Low nicht von Interesse. Es kann z.B. festgelegt werden, daß alle Spannungen, die kleiner als $0,8$ V sind, dem Zustand Low entsprechen und alle Spannungen, die größer als $2,0$ V sind, dem Zustand High. Zwischenwerte der Spannung treten nur beim Schalten auf und werden in der Digitaltechnik – im Gegensatz zur Analogtechnik – nicht ausgewertet.

Schnelle Schaltdioden werden bei der Datenverarbeitung zur logischen Verknüpfung von Informationen (z.B. von Zahlen) verwendet. Die zu verknüpfenden Informationen werden binär kodiert (verschlüsselt) und bestehen danach aus einer Folge logischer »1«en und »0«en. An den Dateneingängen einer logischen Schaltung liegen dann verschiedene Rechteckimpulse. Am Ausgang der logischen Schaltung erscheint eine Impulsfolge, deren Form von der Art der logischen Verknüpfung abhängt.

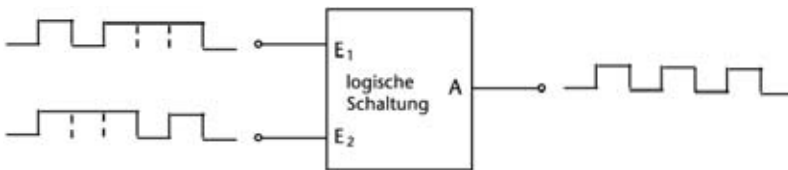


Abb. 325: Logische Verknüpfung von zwei Impulsfolgen

Zwei Grundschaltungen zur logischen Verknüpfung sind die UND-Verknüpfung sowie die ODER-Verknüpfung. Sind E_1 und E_2 die beiden Eingänge und A der Ausgang der logischen Schaltung, so gelten die Regeln der nachfolgenden Tabelle zur Verknüpfung.

Tabelle 14: UND- bzw. ODER-Verknüpfung

UND-Verknüpfung			ODER- Verknüpfung		
E_1	E_2	A	E_1	E_2	A
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Werden in Abb. 325 die beiden Eingangsimpulsfolgen UND-verknüpft, so ergibt sich die gezeichnete Impulsfolge am Ausgang.

Die beiden logischen Grundverknüpfungen UND bzw. ODER kann man sich mit einer Reihen- bzw. Parallelschaltung von Schaltern leicht veranschaulichen.



Abb. 326: Darstellung der UND- bzw. ODER-Verknüpfung mit Schaltern

Die Schalter entsprechen den Eingängen E_1 und E_2 . Ein geöffneter Schalter entspricht »0«, ein geschlossener Schalter entspricht »1«. Bei der UND-Verknüpfung genügt, daß einer der Eingänge »0« ist, damit der Ausgang ebenfalls »0« wird. Bei der ODER-Verknüpfung wird der Ausgang »1«, falls nur einer der Eingänge »1« ist. Als Symbol für die UND-Verknüpfung wird das Zeichen » $\wedge$ « verwendet, für die ODER-Verknüpfung das Zeichen » $\vee$ «.

Die logische Schaltung zur UND- bzw. ODER Verknüpfung von Impulsfolgen läßt sich mit Dioden realisieren.

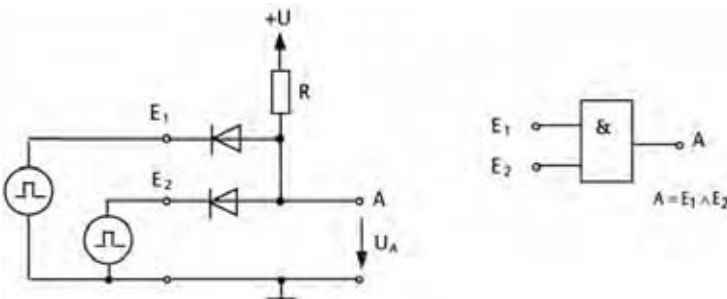


Abb. 327: Schaltung zur UND-Verknüpfung (links) und Verknüpfungssymbol (rechts)

Eine Schaltung zur logischen Verknüpfung wird auch als **Gatter** bezeichnet.

Ist einer der beiden Eingänge des Dioden-UND-Gatters 0 V, so entspricht die Ausgangsspannung U_A der Durchlaßspannung der entsprechenden Diode ($\approx 0,7$ V). Sind beide Eingänge 0 V, so wird die Ausgangsspannung durch die höhere der Durchlaßspannungen der Dioden

bestimmt. Auf alle Fälle liegt die Ausgangsspannung unterhalb einer bestimmten Schwelle (z.B. $U_A < 1\text{ V}$), falls auch nur einer der Eingänge auf 0 V liegt.

Sind alle Eingänge auf positivem Potential (z.B. $+U$), so sperren die Dioden und für die Ausgangsspannung gilt $U_A = +U$.

Nimmt man z.B. für $+U = 5\text{ V}$ an, so hat die Ausgangsimpulsfolge eine Spannung zwischen $+5\text{ V}$ und ca. $0,7\text{ V}$. Der zeitliche Verlauf der Impulsfolge am Ausgang entspricht einer UND-Verknüpfung der Eingangsimpulsfolgen.

Auch ein ODER-Gatter läßt sich mit Dioden realisieren.

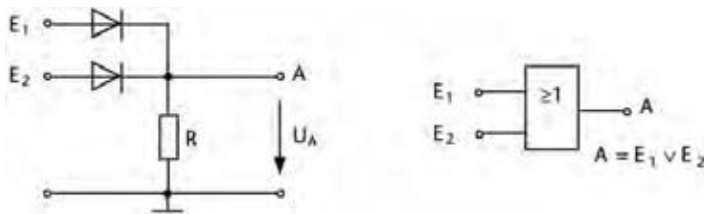


Abb. 328: Schaltung zur ODER-Verknüpfung (links) und Verknüpfungssymbol (rechts)

Die Ausgangsspannung U_A ist nur dann 0 V, wenn alle Eingänge 0 V sind. Liegt auch nur einer der Eingänge auf positivem Potential (z.B. $+5\text{ V}$), so leitet die zugehörige Diode, und es ergibt sich eine Ausgangsspannung, die um die Durchlaßspannung der Diode unterhalb der Eingangsspannung liegt.

Die Eingänge der Schaltungen zur UND- bzw. ODER-Verknüpfung können durch zusätzliche Dioden beliebig erweitert werden.

18.7.5 Begrenzung einer Wechselspannung

Frequenzfilter sind Schaltungen, deren Übertragungseigenschaften frequenzabhängig sind. Amplitudenfilter sind Schaltungen, deren Übertragungseigenschaften von der Amplitude abhängig sind. Der Amplitudentiefpaß, auch als Begrenzer bezeichnet, läßt Signale kleiner Amplitude (nahezu) unverändert durch. Sobald die Amplitude jedoch einen bestimmten positiven oberen oder negativen unteren Wert überschreitet, wird das Ausgangssignal auf diese Grenzwerte begrenzt. Mit Dioden können Amplitudenfilter realisiert werden.

Durch zwei entgegengesetzt in Reihe geschaltete Zenerdioden kann z.B. eine Wechselspannung in ihrer Amplitude auf den Wert der Zenerspannungen (die als Begrenzungsschwellen unterschiedlich sein können) begrenzt werden. Die Amplitude der Wechselspannung wird bei der Zenerspannung »abgeschnitten«. Eine Begrenzerschaltung wird auch »Clipper-Schaltung« genannt.

Die Begrenzung einer Wechselspannung kann auch mit normalen Dioden erfolgen, die antiparallel geschaltet sind. Zur Festlegung der Begrenzungsschwellen kann den einzelnen Dioden eine Spannung in Reihe geschaltet werden. Man beachte, daß sich die Durchlaßspannungen der Dioden zu den Spannungen U_1 und U_2 addieren, und jeweils diese Summe die Begrenzungsschwelle bildet.

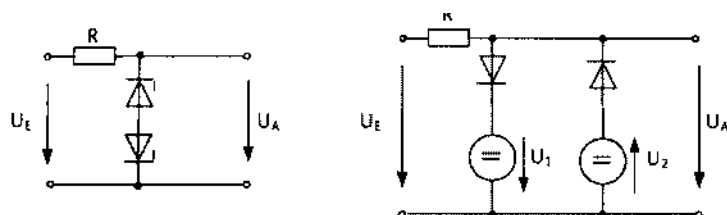


Abb. 329: Zwei Begrenzerschaltungen

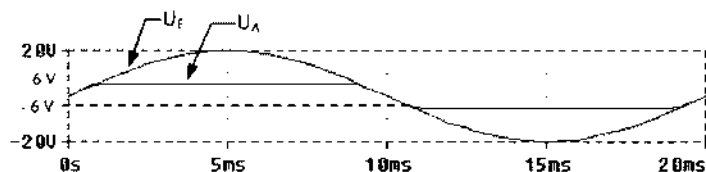
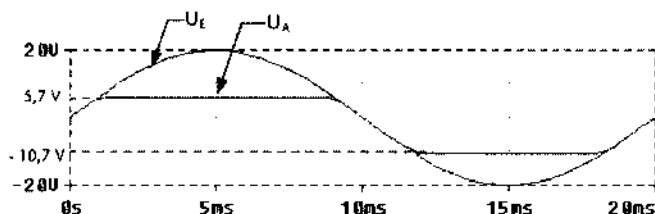


Abb. 330: Symmetrische Begrenzung einer Sinusspannung mit zwei Zenerdioden gleicher Zenerspannung (6 V) nach Abb. 329 links

Abb. 331: Asymmetrische Begrenzung einer Sinusspannung nach Abb. 329 rechts mit $U_1 = 5 \text{ V}$, $U_2 = 10 \text{ V}$

18.7.6 Stabilisierung kleiner Gleichspannungen

Z-Dioden mit einer Z-Spannung unter ca. 3 V besitzen einen hohen Innenwiderstand. Mit Z-Dioden können kleine Gleichspannungen daher nur schlecht stabilisiert werden. Wird in einer Brückenschaltung die stabilisierte Ausgangsspannung als Differenz zweier Zenerspannungen abgegriffen, so lassen sich sehr kleine stabilisierte Gleichspannungen realisieren. Die Z-Dioden D_1 und D_2 haben z.B. gleiche Zenerspannungen, die Vorwiderstände R_1 und R_2 besitzen unterschiedliche Werte und legen damit verschiedene Arbeitspunkte der Dioden fest.

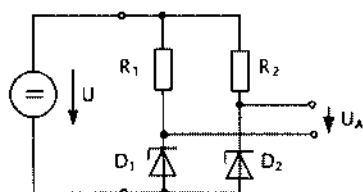


Abb. 332: Erzeugung einer kleinen stabilisierten Gleichspannung

18.8 Zusammenfassung: Halbleiterdioden

1. Der PN-Übergang eines Halbleiters bildet die Grundlage einer Halbleiterdiode.
2. Eine Diode besitzt »Ventilwirkung«. In Durchlaßrichtung läßt sie Strom durch, in Sperrrichtung nicht.
3. Die Kennlinie einer Diode ist nichtlinear.
4. Es gibt Germaniumdioden (Durchlaßspannung ca. 0,35 V) und Siliziumdioden (Durchlaßspannung ca. 0,7 V)
5. Durchbrucherscheinungen bei Dioden sind der Zenerdurchbruch und der Lawinendurchbruch (Avalanche-Effekt).
6. Eine Diode darf nie ohne strombegrenzenden Vorwiderstand betrieben werden.
7. Eine Diode wird durch statische und dynamische Kennwerte beschrieben.
8. Der Sperrstrom einer Diode ist sehr klein. Er steigt exponentiell mit der Temperatur an.
9. Im Durchlaßbereich wird die I-U-Kennlinie mit steigender Temperatur steiler.
10. Die Anschlüsse einer Diode heißen Anode und Katode.
11. Bei Kleindioden wird die Katode durch einen Ring auf dem Gehäuse gekennzeichnet.
12. Eine Schottkydiode besitzt eine kleine Durchlaßspannung (ca. 0,35 V) und schaltet sehr schnell.
13. Eine LED wird zur optischen Anzeige verwendet.
14. Mit Zenerdioden können Spannungen stabilisiert werden.
15. Mit dem Arbeitspunkt und der Widerstandsgeraden können die Strom-Spannungs-verhältnisse einer Schaltung mit einem nichtlinearen Bauteil graphisch bestimmt werden.
16. Anwendungen von Dioden sind z.B.: Gleichrichtung von Wechselspannung, Freilaufdiode, Schutz empfindlicher Eingänge, elektronische Schalter, logische Verknüpfung digitaler Signale, Amplitudenbegrenzung von Signalen.

19 Bipolare Transistoren

19.1 Definition und Klassifizierung von Transistoren

Die bisher behandelten Netzwerke waren aus **passiven** Bauelementen zusammengesetzt. Ohmsche Widerstände, Kondensatoren und Spulen sind wichtige passive und lineare Bauelemente. Eine Diode ist ein passives, aber nichtlineares Bauteil. Mit einem Transformator kann man zwar Spannungen bzw. Ströme heraufsetzen, die Leistung am Ausgang ist jedoch nie größer als am Eingang. Folglich ist auch ein Transformator ein passives Bauteil.

Von passiven Bauelementen wird die Leistung $P > 0$ aufgenommen; sie sind elektrische Verbraucher.

Soll ein elektrisches Signal verstärkt (vergrößert) werden, um z.B. die Verluste einer Übertragung auszugleichen, so benötigt man **aktive** Bauelemente. Mit einem aktiven Bauelement kann mit einer kleinen Steuerleistung am Eingang eine große Leistung am Ausgang **gesteuert** werden. Mit Halbleiterbauelementen erfolgt diese Steuerung stufenlos und proportional zur Steuerleistung am Eingang. Man erhält einen linearen Verstärker. Aktive Bauelemente erzeugen oder liefern keine Leistung, mit ihnen kann nur mit einer kleinen Leistung am Eingang eine große Leistung am Ausgang gesteuert werden. Eine Ausnahme bilden die unabhängigen Spannungsquellen, welche zu den aktiven Bauelementen gehören und Energie liefern.

Mit aktiven Halbleiterbauelementen lassen sich **gesteuerte** Quellen realisieren, deren Ausgangswert von einem Eingangssignal abhängt, und die mehr Leistung abgeben als aufnehmen. Eine Hilfsenergiequelle (Netzgerät, Batterie als Betriebsspannungsquelle) liefert die für die Verstärkung notwendige Leistung.

Der Transistor ist ein aktives Halbleiterbauelement. Er dient zum Verstärken oder Schalten elektrischer Signale. Transistoren haben drei Anschlüsse. Je ein Anschluß kann als Eingang bzw. Ausgang einer Verstärkeranordnung betrachtet werden. Den dritten Anschluß benutzen Eingang und Ausgang gemeinsam. Je nach Schaltungsart wird eine Verstärkung (Vergrößerung) einer Spannung, eines Stromes oder einer Leistung erzielt. Die für die Verstärkung erforderliche Energie wird einer Gleichspannungsquelle, der Betriebsspannung, entnommen (meistens mit U_B bezeichnet).

Die verschiedenen Arten von Transistoren unterscheiden sich z.B. nach Wirkungsweise, Aufbau, Herstellungsverfahren, Anwendungsgebiet, Leistung, Frequenzbereich. Eine mögliche Klassifizierung der unterschiedlichen Transistortypen erfolgt nach den an der Wirkungsweise beteiligten Arten von Ladungsträgern. Somit unterscheidet man **bipolare** und **unipolare** Transistoren. Bei den bipolaren Transistoren (Abk.: BJT³¹) sind Elektronen und Löcher an der Wirkungsweise des Transistors beteiligt.

Dagegen sind bei den unipolaren Transistoren, die als **Feldeffekt-Transistoren** (Abk.: FET) bezeichnet werden, entweder nur Elektronen oder nur Löcher wirksam. Bei einem FET wird

³¹ Englisch: **bipolar junction transistor**

nahezu kein Eingangsstrom benötigt, während bei einem Bipolartransistor die Stromverstärkung B immer endlich (typ. 10...1000) und eine charakteristische Größe ist.

Bipolare Transistoren können je nach der Aufeinanderfolge (je nach Polarität) des dotierten Halbleitermaterials in **NPN-** oder **PNP-Transistoren** eingeteilt werden, wobei man jeweils wiederum zwischen Germanium- und Silizium-Transistoren unterscheidet.

Sind die elektrischen Eigenschaften zweier NPN- und PNP-Transistoren fast gleich, so spricht man von **Komplementär-Transistoren** (die beiden Typen eines Pärchens ergänzen sich). Als Äquivalenztypen bezeichnet man Transistoren, die in fast allen Daten und der Polarität (außer z.B. der Gehäuseform) übereinstimmen.

Ein bipolarer Transistor wird in diesem Abschnitt nur kurz Transistor genannt.

19.2 Aufbau des Transistors

Ein bipolarer Transistor ist ein Halbleiterkristall, der aus drei unterschiedlich dotierten, schichtweise aufeinanderfolgenden Gebieten besteht, welche zwei PN-Übergänge bilden. Die Folge der Gebiete ist entweder N-P-N oder P-N-P. Das mittlere Gebiet ist sehr dünn (etwa $1\text{ }\mu\text{m}$ bis $50\text{ }\mu\text{m}$) und nur schwach dotiert. Jedes Gebiet ist mit einer sperrschichtfreien Anschlußelektrode versehen. Die drei Gebiete (bzw. die nach außen geführten Anschlüsse) bezeichnet man als **Emitter**, **Basis** und **Kollektor**.

Emitter: Das Wort ist lateinischen Ursprungs (emittere = aussenden) und bedeutet soviel wie »Aussender«. Von einem N-Emitter werden Elektronen und von einem P-Emitter Löcher abgegeben oder »emittiert«. Das Kurzzeichen für Emitter ist »E«.

Basis: Die Basis ist eine schmale Schicht zwischen Emitter und Kollektor. Sie kann ebenfalls N- oder P-dotiert sein. Das Kurzzeichen für Basis ist »B«.

Kollektor: Dieses Wort stammt auch aus dem Lateinischen (colligere = sammeln) und bedeutet soviel wie »Sammler«. Den Kollektor kann man als eine Art Auffangelektrode für die vom Emitter kommenden Ladungsträger betrachten. Das Kurzzeichen für Kollektor ist »C« (engl.: collector).

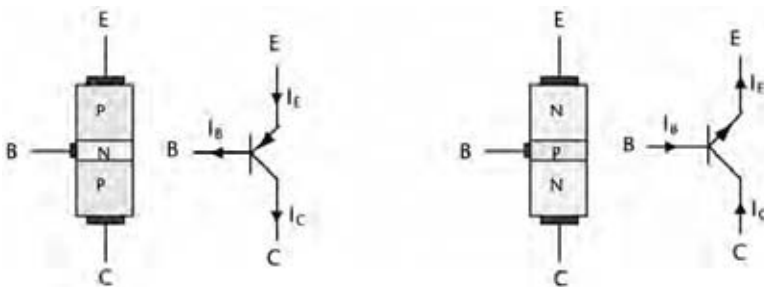


Abb. 333: Schematische Darstellung der Gebietsfolge eines PNP-Transistors (links) und eines NPN-Transistors (rechts). Der Emitterpfeil im Schaltzeichen zeigt (wie bei der Diode auch) in die technische Stromrichtung (vom P-Gebiet zum N-Gebiet entsprechend der Flußrichtung der Löcher und entgegengesetzt der Flußrichtung der Elektronen)

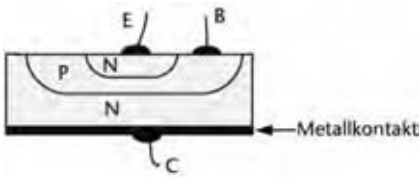


Abb. 334: Prinzipieller Aufbau eines bipolaren NPN-Transistors im Schnitt (Flächentransistor in Planartechnologie)

Der Transistor-Halbleiterkristall ist von einem schützenden Gehäuse aus Plastik oder Metall umgeben, aus dem die drei Anschlüsse als Anschlußdrähte oder Anschlußfahnen herausgeführt sind. Transistoren für größere Leistungen werden häufig direkt auf dem Chassis oder auf einem Kühlkörper befestigt. Die Erläuterungen von Abschnitt 18.4 über die Verlustleistung bei Dioden gelten sinngemäß auch für den Transistor.

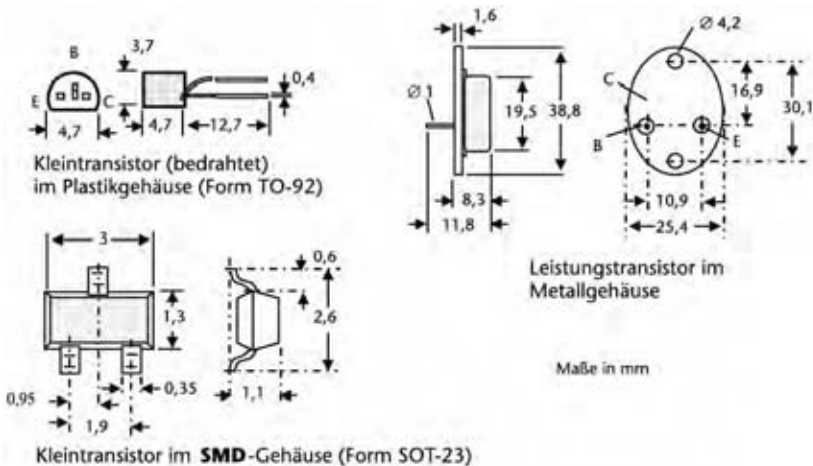


Abb. 335: Beispiele für verschiedene Gehäuseformen von Transistoren

19.3 Richtung von Strömen und Spannungen beim Transistor

Mit seinen äußeren Stromkreisen stellt ein Transistor ein vermaschtes elektrisches Netzwerk dar. Die Richtungen von Spannungen und Strömen müssen eindeutig gekennzeichnet werden. Dies geschieht normalerweise durch die willkürliche Festlegung von Bezugsrichtungen.

Für den Transistor wird hier die Wahl getroffen:

Bei Betrieb des Transistors als Verstärker (Normalbetrieb) weisen alle Klemmenströme I_B , I_E und I_C positive Vorzeichen auf. Fließt ein Strom in Wirklichkeit entgegengesetzt zu dieser Bezugsrichtung, so erhält sein Zahlenwert oder sein Formelzeichen ein negatives Vorzeichen.

Für die Spannungen sind bestimmte Bezugsrichtungen nicht vorgeschrieben. Der Zahlenwert oder das Formelzeichen einer Spannung erhält ein positives Vorzeichen, wenn das Potentialgefälle die gleiche Richtung hat wie die gewählte Bezugsrichtung. In einem Schaltbild kann die Bezugsrichtung durch einen Bezugs Pfeil oder durch Zusatzbuchstaben beim Formelzeichen

angegeben werden, z.B. ist U_{EB} die Spannung zwischen Emitter und Basis. Der Zahlenwert oder das Formelzeichen hat ein positives Vorzeichen, wenn das Potential der zuerst genannten Elektrode höher ist als das der zweiten Elektrode. Es könnte z.B. heißen: $U_{CB} = 8 \text{ V}$ (der Kollektor ist positiv gegenüber der Basis, der Bezugspfeil zeigt vom Kollektor zur Basis) oder $U_{BC} = -8 \text{ V}$ oder $-U_{BC} = 8 \text{ V}$.

Allgemein gilt: $U_{XY} = -U_{YX}$.

Bei den Spannungen ergibt die Reihenfolge der Indizes zugleich eine Aussage über die vereinbarte Spannungsrichtung. Wird nur ein Index verwendet, so ist der Bezugspunkt die Masse (z.B. ist die Kollektorspannung U_C das Potential am Kollektor bezogen auf Masse = Spannung Kollektor-Masse).

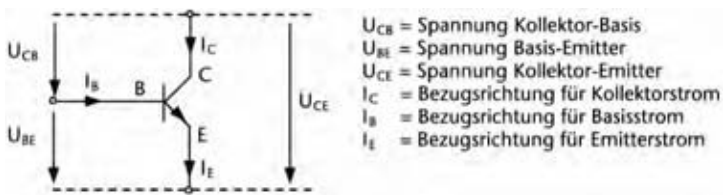


Abb. 336: Zur Bezugsrichtung der äußeren Spannungen und Ströme beim Transistor

Nach den Kirchhoffschen Sätzen gilt: $I_E = I_B + I_C$ und $U_{CE} = U_{CB} + U_{BE}$.

Anmerkung: Die Bezugsrichtung für den Emitterstrom I_E wird häufig in entgegengesetzter Richtung festgelegt. Nach der Knotenregel ist dann $I_B + I_C + I_E = 0$ und I_E ist im Normalbetrieb negativ.

19.4 Wirkungsweise

Zur Erläuterung der Wirkungsweise des Bipolartransistors werden im weiteren Verlauf ausschließlich NPN-Transistoren betrachtet. Sie haben größere technische Bedeutung als PNP-Transistoren, da sie gegenüber diesen eine höhere Stromverstärkung und kürzere Schaltzeiten besitzen. Dies ist durch die größere Beweglichkeit der Elektronen gegenüber den Löchern im Halbleitermaterial bedingt.

Bezogen auf das Potential des Emitters hat ein NPN-Transistor eine positive Basis- und eine positive Kollektor-Betriebsspannung.

Bei PNP-Transistoren sind Dotierung und Polarität der Ladungsträger gegenüber NPN-Transistoren vertauscht. Die Ergebnisse für NPN-Transistoren lassen sich direkt auf PNP-Transistoren übertragen, wenn das **Vorzeichen aller Spannungen und Ströme umgekehrt** wird. In einer Schaltung kann man NPN-Transistoren durch PNP-Typen ersetzen und umgekehrt, wenn man gleichzeitig die Betriebsgleichspannungen (und natürlich auch die Elektrolytkondensatoren) umpolt.

Eine Diode hat nur einen PN-Übergang, ein Transistor arbeitet mit zwei PN-Übergängen. Ein Transistor besteht im Prinzip aus zwei gegeneinander in Reihe geschalteten Dioden, die eine gemeinsame P- bzw. N-Schicht besitzen. Die Verteilung der beweglichen Ladungsträger in den verschiedenen Gebieten zeigt die folgende Abbildung, wobei keine äußere Spannung ange-

geschlossen ist. Wie bereits bei der Diode besprochen, bilden sich an den PN-Übergängen Grenzschichten aus, in denen sich fast keine beweglichen Ladungsträger befinden.

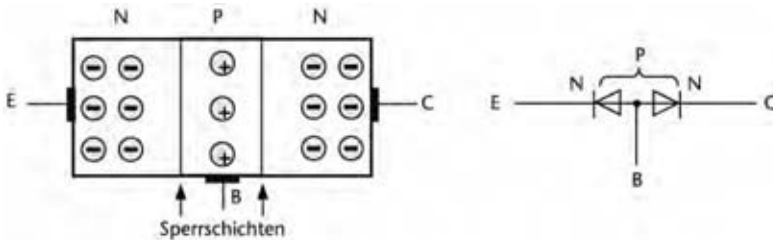


Abb. 337: NPN-Transistor ohne äußere Spannung mit Verteilung der beweglichen Ladungsträger (links) und Dioden-Ersatzschaltbild (rechts) Die Basisschicht ist übertrieben breit gezeichnet.

Anmerkung: Das Dioden-Ersatzschaltbild gibt zwar die Funktion des Transistors nicht vollständig wieder, ermöglicht aber einen Überblick über die auftretenden Sperr- und Durchlaßspannungen.

Wird zunächst nur eine äußere Gleichspannungsquelle U_{BE} in Durchlaßrichtung an die Emitter-Basis-Diode mit ihrem Minuspol an den Emitter und mit ihrem Pluspol an die Basis angeschlossen, so fließt im Emitter-Basis-Stromkreis ein relativ großer **Durchlaßstrom** I_E , dessen **Größe von der Spannung U_{BE} abhängt** (entsprechend der Strom-Spannungs-Kennlinie im Durchlaßbereich einer Diode). Er besteht im Emittorgebiet aus einer Elektronenströmung und im Basisgebiet aus einer Löcherströmung.

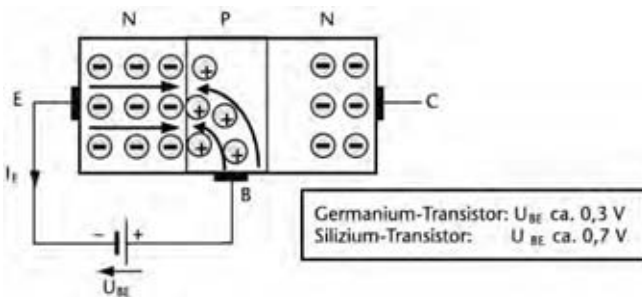


Abb. 338: NPN-Transistor mit Durchlaßspannung im Eingangskreis und offenem Ausgangskreis³²

Wird nun bei offenem Eingangskreis eine äußere Spannung U_{CB} in Sperrrichtung der Kollektor-Basis-Diode zwischen Kollektor und Basis angeschlossen, so fließt im Kollektor-Basis-Stromkreis nur ein sehr kleiner Sperrstrom, der durch die wenigen thermisch erzeugten Ladungsträger hervorgerufen wird. Er wird als Kollektor-Basis-Reststrom I_{CB0} bezeichnet und ist gleich dem Sperrstrom der Kollektor-Basis-Diode.

³² Da es sich hier um Gedankenexperimente handelt, wurden strombegrenzende Widerstände in den Schaltbildern weggelassen.

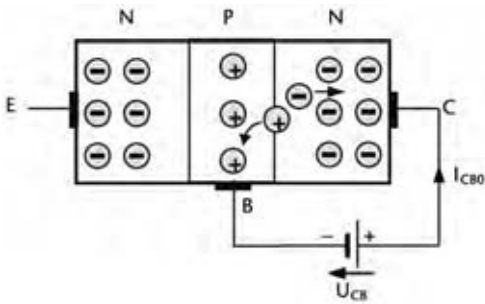


Abb. 339: NPN-Transistor mit Sperrspannung im Ausgangskreis und offenem Eingangskreis

Werden beide Spannungen U_{BE} und U_{CB} gleichzeitig angelegt, so fließt wie in Abb. 338 vom Emitter aus der große Durchlaßstrom I_E in Form eines Elektronenstromes durch das Emitter-N-Gebiet. Dieser Elektronenstrom überquert die Emitter-Basis-Grenzschicht und gelangt in das nur schwach dotierte Basis-P-Gebiet. Ein kleiner Teil der Elektronen rekombiniert hier mit den im Basisgebiet vorherrschenden Löchern und bildet den Basisstrom I_B . Die überwiegende Mehrzahl der Elektronen ($> 99\%$) durchquert infolge der ihrer Strombewegung überlagerten Wärmebewegung (Diffusion) die dünne Basiszone und dringt bis in die Basis-Kollektor-Grenzschicht vor³³. Dort werden die Elektronen durch die positive Kollektorspannung U_{CB} in das Kollektorgebiet gezogen und durchqueren es als Elektronenstrom.

An der Kollektorelektrode rekombinieren diese Elektronen mit den über den Zuleitungsdraht heranströmenden Löchern, die im Draht den Kollektorstrom I_C bilden. Obwohl die Basis-Kollektor-Grenzschicht durch die Spannung U_{CB} in Sperrichtung vorgespannt ist, fließt ein Kollektorstrom I_C , der fast so groß ist wie der Emitterstrom I_E . Da der Kollektorstrom vom Charakter her ein Sperrstrom ist, ist er im Prinzip von der Höhe der angelegten Kollektor-Basis-Spannung unabhängig.

Zusammenfassung: Die in Flußrichtung gepolte Emitterdiode injiziert die Ladungsträger in die Basis, die in Sperrichtung gepolte Kollektordiode saugt sie ab.

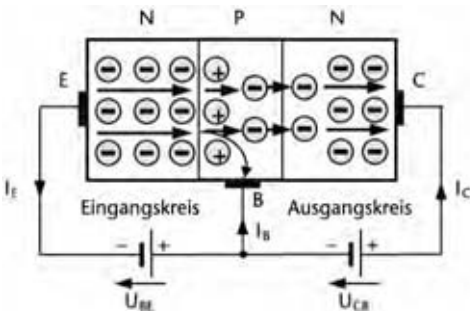


Abb. 340: NPN-Transistor mit Durchlaßspannung im Eingangskreis und Sperrspannung im Ausgangskreis

³³ Dieser Elektronenstrom wird als Transferstrom bezeichnet.

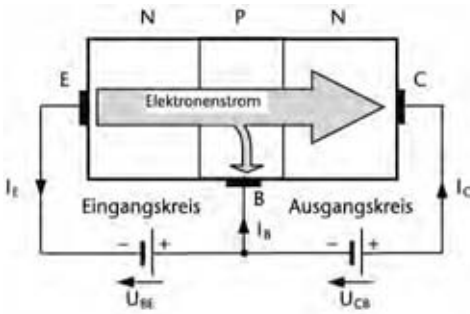


Abb. 341: Ströme beim NPN-Transistor (andere Darstellung der Abb. 340)

Der Basisanschluß hat die Funktion einer Steuerelektrode. Durch ein Verändern der Basisspannung bzw. des Basisstromes läßt sich die Größe des Elektronenstromes vom Emitter zum Kollektor vergrößern oder verkleinern. **Der große Kollektorstrom ist durch den kleinen Basisstrom steuerbar.** Darauf beruht die Anwendung des Transistors als Verstärker.

Durch Verändern der Spannung U_{BE} kann der Wert des injizierten Emittierelektronenstromes $-I_E$ entsprechend einer Diodenkennlinie eingestellt werden. Dieser Strom geht ohne nennenswerte Einbuße in den Kollektorelektronenstrom $-I_C$ über, und zwar fast unabhängig vom Wert der Spannung U_{CB} . Die hierdurch gegebene Steuerungsmöglichkeit ist die wesentliche Eigenschaft des Transistors.

Hauptmerkmal eines Transistors:

Es fließt ein Kollektorstrom I_C , der ein bestimmtes Vielfaches des Basisstromes I_B beträgt.

Das **Verhältnis von Kollektor- zu Basisstrom** wird als **Gleichstromverstärkung B** (meist nur als Stromverstärkung) bezeichnet.

Gl. 149: Stromverstärkung eines Transistors

$$B = \frac{I_C}{I_B}$$

Da die Steuerung des Kollektorstromes in der Schaltung nach Abb. 341 vom Emitter-Basis-Kreis ausgeht, wird dieser als **Eingangskreis** bezeichnet. Weil der Kollektorstrom gesteuert wird, ist der Kollektor-Basis-Kreis der **Ausgangskreis** der Schaltung.

Jetzt ist auch verständlich, warum der Name Transistor ein Kunstwort ist und aus »transfer resistor« zusammengesetzt wurde. Damit wird auf die Wirkungsweise des Transistors hingewiesen, nämlich auf die Übertragung einer Widerstandsänderung von einem PN-Übergang zum anderen (Prinzip eines »steuerbaren elektrischen Widerstandes« als Verstärkerelement).

Als Merkregel, wann ein Transistor leitet, kann dienen (die Basis ist in der »Mitte«):

Ein NPN-Transistor leitet, wenn die Basis positiv ist.

Ein PNP-Transistor leitet, wenn die Basis negativ ist.

Um die Funktion eines Transistors anschaulich zu erklären, soll hier wieder einmal ein Vergleich mit einem Wasserkreislauf stattfinden. Eine drehbare Klappe entspricht in ihrer Funktion als

Steuerelement der Basis. Sie sperrt einen großen Wasserstrom, der dem Kollektorstrom in technischer Stromrichtung entspricht. Entsprechend dem Druck eines kleinen Wasserstromes, welcher dem Basisstrom entspricht, wird die Drehklappe ein Stück geöffnet. Nun kann der große Wasserstrom (Kollektorstrom) fließen, zu dem sich der kleine Wasserstrom (Basisstrom) addiert. Ein kleiner Strom am Steuerelement hat eine starke Schwankung des Stromes am Ausgang zur Folge.

Auch hier gilt die Knotenregel: Der in Basis und Kollektor hineinfließende Strom kommt am Emitter wieder heraus. Außerdem erkennt man: Ist kein großer Wasserstrom (Kollektorstrom) vorhanden, so kann durch Drehen der Klappe auch keiner erzeugt werden. Der Transistor steuert mit einer kleinen Leistung eine große Leistung, kann aber keine Leistung erzeugen.

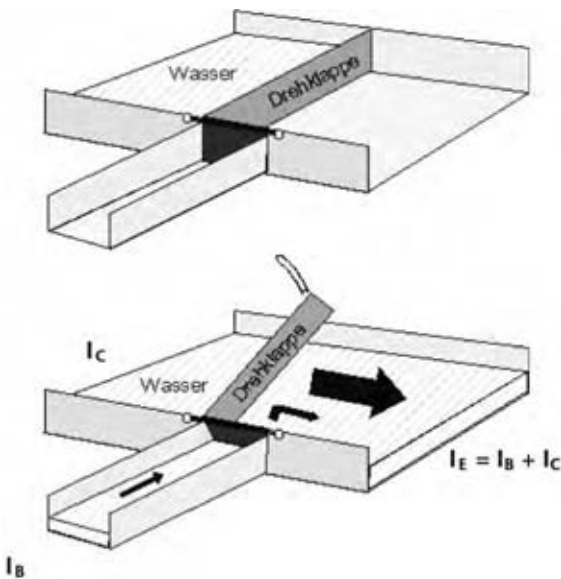


Abb. 342: Funktionsmodell eines Transistors mittels eines Wasserkreislaufes Transistor sperrt (oben), Transistor leitet (unten)

19.5 Die drei Grundschaltungen des Transistors

Bei den bisherigen Betrachtungen war die Basis der gemeinsame Anschlußpunkt des Eingangs- und des Ausgangskreises. Diese Grundschaltung des Transistors wird als **Basisschaltung** bezeichnet. Bei gleichen inneren Vorgängen kann der Transistor auch in zwei anderen Grundschaltungen betrieben werden. In der **Emitterschaltung** ist der Emitter, in der **Kollektorschaltung** der Kollektor der gemeinsame Anschlußpunkt von Eingangs- und Ausgangskreis. Die drei Grundschaltungen des Transistors werden jeweils nach dem Anschluß benannt, der auf konstantem Potential liegt, bzw. der mit Ein- und Ausgang verbunden ist.

Die drei Grundschaltungen unterscheiden sich wesentlich in ihren typischen Eigenschaften z.B. bezüglich Eingangs-, Ausgangswiderstand, Strom-, Spannungs-, Leistungsverstärkung, woraus sich ihre Anwendungen ableiten.

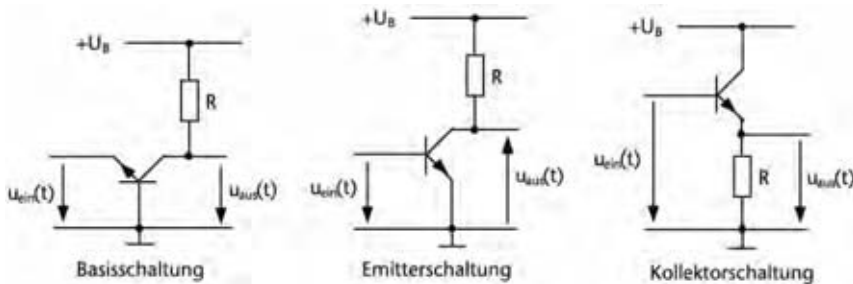


Abb. 343: Grundsaltungen eines NPN-Transistors

19.6 Betriebsarten

Zwei grundsätzliche Betriebsarten eines Transistors sind je nach Verwendungszweck der **Betrieb als linearer Verstärker** und der **Betrieb als Schalter**.

Ein linearer elektronischer Verstärker hat die Aufgabe, die kleine Amplitude eines elektrischen Signals am Eingang auf einen gewünschten Wert am Ausgang zu vergrößern. Die Verstärkung soll möglichst linear, d.h. ohne Verzerrung oder Verfälschung der Kurvenform des Originalsignals erfolgen. Verzerrungen durch eine nichtlineare, gekrümmte Kennlinie des Verstärkers führen zu einem merklichen Klirrfaktor. Ändert man den Basisstrom eines Transistors in positiver und negativer Richtung um gleiche Beträge, so soll im Idealfall auch der Kollektorstrom im gleichen Verhältnis schwanken. Dies ist eine lineare Aussteuerung des Transistors im Verstärkerbetrieb. (Siehe auch Abb. 353)

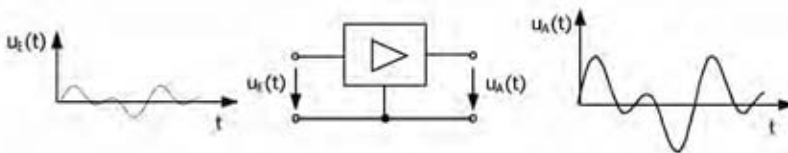


Abb. 344: Schematische Darstellung eines Verstärkers mit Ein- und Ausgangssignal

Der Betrieb des Transistors als Verstärker heißt **Normalbetrieb** oder **Vorwärtsbetrieb**. Man sagt, der Transistor arbeitet im **aktiven Bereich** oder im normalen Arbeitsbereich, in dem eine lineare Verstärkung stattfindet.

Im Normalbetrieb werden die äußeren Gleichspannungen an den Transistor immer so angelegt, daß der Übergang Emitter-Basis in Durchlaßrichtung und der Übergang Kollektor-Basis in Sperrrichtung gepolt ist. Im aktiven Bereich ist die Emitter-Basis-Diode immer leitend und die Kollektor-Basis-Diode immer gesperrt.

Bei der Anwendung des Transistors als Verstärker liegt im Ausgangskreis stets ein Lastwiderstand R_L (Außenwiderstand). Außerdem ist die Gleichspannung U_B im Ausgangskreis größer als die Gleichspannung U_{BE} im Eingangskreis. U_{BE} bewirkt nach Polung und Größe, daß die Emitter-Basis-Diode leitet und der Gleichstrom I_B fließt. Der Gleichspannung U_{BE} ist eine kleine Wech-

selspannung $u_B(t)$ überlagert. Dadurch wird I_B ein kleiner Wechselstrom $i_B(t)$ überlagert. Ändert sich die Eingangsspannung um ΔU_{BE} , so ergibt dies entsprechend der Steuerwirkung des Eingangskreises eine starke Änderung ΔI_C des Ausgangsstromes. Dadurch entsteht am Lastwiderstand eine Spannungsänderung $\Delta I_C \cdot R_L$, die viel größer ist als die Eingangsspannungsänderung ΔU_{BE} . Die Eingangsspannung $u_B(t)$ wird also verstärkt und liegt als Spannungsabfall $u_C(t)$ am Lastwiderstand R_L . Die Spannung $u_B(t)$ im Eingangskreis steuert im Ausgangskreis den Strom $i_C(t)$, der die verstärkte Spannung $u_C(t)$ ergibt.

Da eine Gleichspannungsquelle für Wechselstrom durchlässig ist (sie kann durch einen Kurzschluß ersetzt werden), muß $u_C(t)$ nicht über zwei Klemmen an R_L abgegriffen werden, sondern kann von einem Punkt (Kollektor) gegen Masse abgenommen werden (vgl. Abb. 343, Emitterschaltung).

Anmerkung: R_L wird meistens mit R_C bezeichnet, da der Widerstand am Kollektor angeschlossen ist.

Bei der Emitterschaltung ist die Ausgangsspannung gegenüber der Eingangsspannung um $\varphi = 180^\circ$ phasenverschoben. Wird die Basis positiver, so nimmt der Kollektorstrom zu, $u_C(t)$ wird größer und der Kollektor negativer (Pfeilspitze von $u_C(t)$ = negatives Potential).

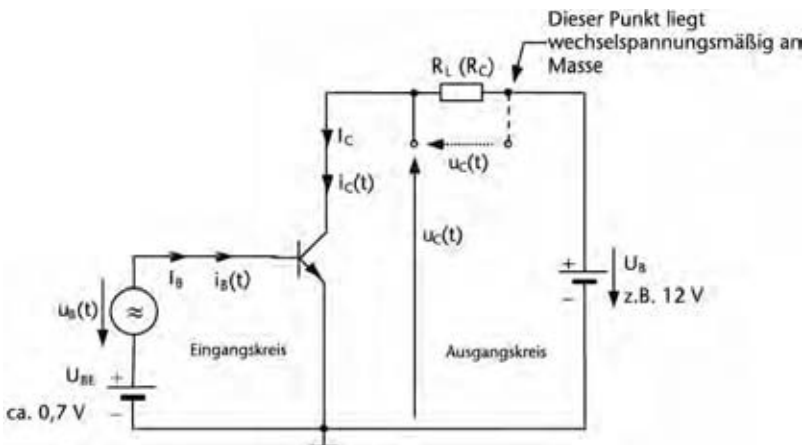


Abb. 345: Prinzipielle Arbeitsweise des Transistors als Verstärker (Emitterschaltung)

Vom Betrieb des Transistors als Verstärker ist der Betrieb als elektronischer Schalter zu unterscheiden. Unter Schalterbetrieb eines Transistors versteht man, daß dieser nur zwei verschiedene Schaltzustände einnimmt. Obwohl ein Schalterbetrieb in allen drei Grundschaltungen (Basis-, Kollektor-, Emitterschaltung) möglich ist, wird meist die Emitterschaltung bevorzugt, da hierbei sowohl eine Strom- als auch eine Spannungsverstärkung auftreten. Im Schalterbetrieb wird die Basis mit einer impulsförmigen Spannung so angesteuert, daß die Kollektor-Emitter-Strecke schlagartig leitet oder sperrt. Die Spannung über dem Transistor (Spannung zwischen Kollektor und Emitter) nimmt in Abhängigkeit von dessen Schaltzustand nur zwei, voneinander verschiedene, Werte an. Bei eingeschaltetem Transistor (U_E positiv) ist die Ausgangsspannung $U_A (= U_{CE})$ nahezu 0 V (Schalter schließt kurz, ist ein), während sie bei gesperrtem Transistor ($U_E = \text{Null}$ oder negativ) fast gleich der Speisespannung $+U_B$ ist (Schalter sperrt, ist aus).

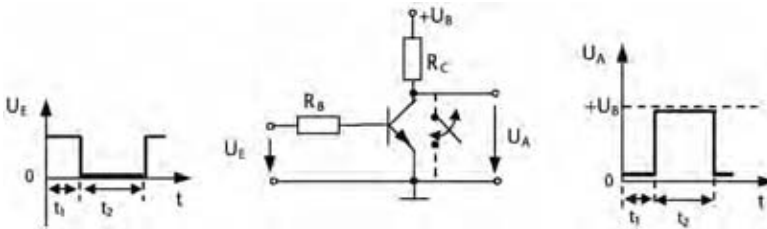


Abb. 346: Prinzipschaltung für einen Transistor als Schalter
(das Schaltersymbol soll die Wirkungsweise veranschaulichen)

Beim Betrieb des Transistors als Schalter wird zwischen dem **Sperrbereich** und dem **Übersteuerungs- oder Sättigungsbereich** des Kollektorstromes hin- und hergeschaltet.

Im Sperrbetrieb sind die äußeren Gleichspannungen an den Transistor so angelegt, daß sowohl der Übergang Emitter-Basis als auch der Übergang Kollektor-Basis in Sperrichtung gepolt ist. Die Emitter-Basis-Diode und die Kollektor-Basis-Diode sperren.

Im Sättigungsbetrieb liegen die äußeren Gleichspannungen am Transistor so an, daß sowohl der Übergang Emitter-Basis als auch der Übergang Kollektor-Basis in Durchlaßrichtung gepolt ist. Die Emitter-Basis-Diode und die Kollektor-Basis-Diode leiten.

Je nachdem, mit welcher Polarität die äußeren Gleichspannungen an den Emitter-Basis-Übergang und an den Kollektor-Basis-Übergang angelegt werden, unterscheidet man unterschiedliche Betriebsarten des Transistors.

Für einen schnellen Überblick des Durchlaß- oder Sperrzustandes vom Emitter-Basis- sowie Kollektor-Basis-Übergang dient das folgende einfache Diodenersatzschaltbild eines NPN-Transistors in Emitterschaltung.

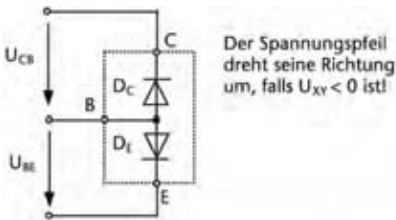


Abb. 347: Diodenersatzschaltbild eines NPN-Transistors in Emitterschaltung

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Betriebsarten eines Transistors.

Tabelle 15: Betriebsarten eines NPN-Transistors mit den zugehörigen Spannungen U_{BE} , U_{CB}

U_{BE}	D_E	U_{CB}	D_C	Betriebsart
> 0	leitet	> 0	sperrt	Normalbetrieb (Verstärkerbetrieb, Vorwärtsbetrieb, aktiver Bereich)
< 0	sperrt	> 0	sperrt	Sperrbetrieb
> 0	leitet	< 0	leitet	Betrieb im Sättigungs- (Übersteuerungs-) bereich
< 0	sperrt	< 0	leitet	Inversbetrieb ³⁴ (Rückwärtsbetrieb)

³⁴ Der Inversbetrieb hat nur bei bestimmten Anwendungen des Transistors als Schalter eine Bedeutung.

Zusammenfassung der Betriebsarten:

- a) Betrieb nach Verwendungszweck: Als Verstärker oder elektronischer Schalter.
- b) Betrieb nach angelegten Gleichspannungen (evtl. verbunden mit dem Betrieb nach Verwendungszweck): Normalbetrieb, Sperrbetrieb, Sättigungsbetrieb, Inversbetrieb.
- c) Betrieb in einer der drei Grundschaltungen: Basis-, Emitter-, Kollektorschaltung.

Beim Transistor wird häufig von **statischen** und **dynamischen Eigenschaften** (bzw. Verhalten) gesprochen. Statische Eigenschaften betreffen die Gleichspannungen und –ströme. Die Gleichstromverstärkung $B = I_C / I_B$ ist z.B. eine statische Kenngröße eines Transistors. Die Eingangskennlinie $I_B = f(U_{BE})$ (Basisstrom als Funktion der Basis-Emitter-Spannung, entspricht der Durchlaßkennlinie einer Diode, siehe Abb. 348) ist eine statische Kennlinie. Als dynamisches Verhalten bezeichnet man das Verhalten des Transistors bei einer Ansteuerung mit Wechselgrößen. Dynamische Eigenschaften sind z.B. die Wechselspannungsverstärkung, die Phasenverschiebung zwischen Eingang und Ausgang usw.

Wichtig sind auch die Begriffe »**Großsignal**« und »**Kleinsignal**« mit einem Zusatz, z.B. Großsignalaussteuerung oder Kleinsignalstromverstärkung.

Befindet sich das Signal, mit dem der Transistor angesteuert wird, in der Größenordnung weniger (zehn) Millivolt wie z.B. bei einem Vorverstärker, so handelt es sich um eine Kleinsignalaussteuerung. Eine Kleinsignalaussteuerung erfolgt um einen festen Arbeitspunkt bei linearen Zusammenhängen zwischen Wechselströmen und Wechselspannungen unter Ausnutzung nur kleiner Teile der nichtlinearen Kennlinien. Die kleinen Teile der Kennlinien können dann als linear angesehen werden. Kleinsignalwerte sind differentielle Werte (kleine Werte, die zu einem bestimmten Arbeitspunkt gehören). Der Widerstand zwischen Basis und Emitter ist z.B. der differentielle Eingangswiderstand des Transistors $r_{BE} = \Delta U_{BE} / \Delta I_B$ (bei $U_{CE} = \text{const.}$). Kleinsignalgrößen werden klein geschrieben. Siehe hierzu auch Abschnitt 18.3.2.2.

Alle Werte und Kennlinien, die mit den äußeren Gleichspannungen in Verbindung stehen, gehören zu einer Großsignalaussteuerung. Eine Großsignalaussteuerung findet z.B. auch in einem Endverstärker (Leistungsverstärker) statt. Schaltvorgänge gehören ebenfalls zu einer Großsignalaussteuerung.

19.7 Kennlinien des Transistors

Wie bei Dioden gibt es auch bei Transistoren verschiedene Kennlinien, die etwas über bestimmte Eigenschaften und Funktionen aussagen, und die Zusammenhänge zwischen Spannungen und Strömen beschreiben. Im folgenden werden die wichtigsten Kennlinien für die Emitterschaltung beschrieben.

19.7.1 Eingangskennlinie

Die Eingangskennlinie gibt den Zusammenhang zwischen dem Basisstrom I_B und der Basis-Emitter-Gleichspannung U_{BE} (**Basisvorspannung**, Basisruhespannung) im Eingangskreis an. Die Eingangskennlinie $I_B = f(U_{BE})$ entspricht einer Diodenkennlinie im Durchlaßbereich, da die Basis-Emitter-Diode im Normalbetrieb leitet. Die Abhängigkeit der Eingangskennlinie von der

angelegten Kollektor-Emitter-Spannung ist sehr gering. Sie wird als Spannungsrückwirkung bezeichnet und kann in der Praxis meist vernachlässigt werden.

Die Eingangskennlinie ist jedoch von der Temperatur abhängig (Temperaturdrift).

Der Basisstrom nimmt mit steigender Temperatur zu. (Vergleiche Abschnitt 18.3.2.3)

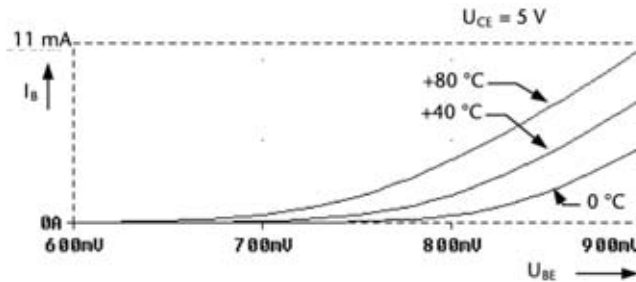


Abb. 348: Eingangskennlinie eines Transistors bei drei verschiedenen Temperaturen

Die Eingangskennlinie verschiebt sich mit steigender Temperatur nach links. Dies entspricht einem Sinken der Basis-Emitter-Spannung. U_{BE} sinkt mit steigender Temperatur um ca. 2 mV/°C. Da der Basisstrom mit der Temperatur zunimmt, steigt auch der Kollektorstrom mit der Temperatur an.

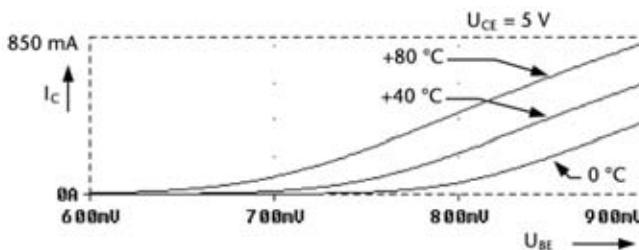


Abb. 349: Kollektorstrom als Funktion von U_{BE} bei drei verschiedenen Temperaturen

19.7.2 Ausgangskennlinie

Die Ausgangskennlinie zeigt den Zusammenhang zwischen dem Kollektorstrom I_C und der Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} im Ausgangskreis, wobei der Basisstrom ein Parameter ist. Werden die Ausgangskennlinien für mehrere Basisströme in ein Koordinatensystem eingetragen, so erhält man eine Kurvenschar, das Ausgangskennlinienfeld $I_C = f(U_{CE}, I_B)$.

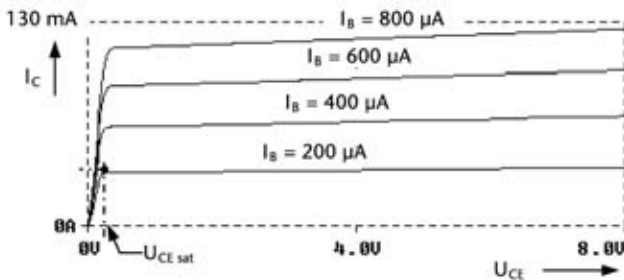


Abb. 350: Ausgangskennlinienfeld eines NPN-Transistors in Emitterschaltung mit I_B als Parameter ($T_j = 27^\circ\text{C} = \text{const.}$)

Unterhalb einer bestimmten Kollektor-Emitter-Spannung $U_{CE\text{ sat}}$ ist I_C nur von U_{CE} abhängig und nicht vom Basisstrom I_B . $U_{CE\text{ sat}}$ wird meist nur **Sättigungsspannung**, aber auch Kollektor-Emitter-Sättigungsspannung, Kollektorrestspannung oder Kniespannung genannt und ist eine charakteristische Größe des Transistors. In dem Bereich $0 < U_{CE} < U_{CE\text{ sat}}$ (Sättigungsbereich, Übersteuerungsbereich) ist die Kollektorspannung nicht groß genug, um die in die Basis-Kollektor-Grenzschicht diffundierenden Ladungsträger abzusaugen. $U_{CE\text{ sat}}$ hängt deutlich von I_C ab und ist bei einem Transistor für ein konstantes Verhältnis I_C / I_B spezifiziert, welches Übersteuerungsfaktor genannt wird. Bei Germanium- und Silizium-Kleinsignaltransistoren hat $U_{CE\text{ sat}}$ einen Wert von ca. 0,2 V. Bei Leistungstransistoren kann $U_{CE\text{ sat}}$ bis auf 1 V ansteigen.

Oberhalb von $U_{CE\text{ sat}}$ ist I_C von U_{CE} weitgehend unabhängig (der Kollektorstrom ist ein von der Sperrspannung unabhängiger Sperrstrom). Die Kennlinien verlaufen fast horizontal. Dies ist der lineare (aktive) Bereich des Normalbetriebs.

Anmerkung: Der leichte Anstieg der Ausgangskennlinien ist auf den sogenannten **Early-Effekt** zurückzuführen. Wächst U_{CE} und damit U_{CB} , so verschiebt sich die Kollektor-Basis-Grenzschicht weiter in die Basis, die Basis wird »dünner« und damit I_C größer. Die »Durchgreifspannung« ist erreicht, wenn U_{CE} so groß wird, daß die Kollektor-Basis-Grenzschicht die Emitter-Basis-Grenzschicht berührt und ein sehr hoher Strom fließen kann (»punchthrough«, Zerstörungsgefahr wegen Durchbruch).

19.7.3 Steuerkennlinie

In der Strom-Steuerkennlinie wird der Zusammenhang zwischen Kollektorstrom I_C und Basisstrom I_B dargestellt. Aus dieser Steuerkennlinie ist direkt die Gleichstromverstärkung $B = I_C / I_B$ entnehmbar.

I_C ist ziemlich gut proportional zu I_B , d.h. $I_C = f(I_B)$ ist fast eine Gerade.

Für das folgende Beispiel ist $B = I_C / I_B = 125\text{ mA} / 0,8\text{ mA} \approx 156$.

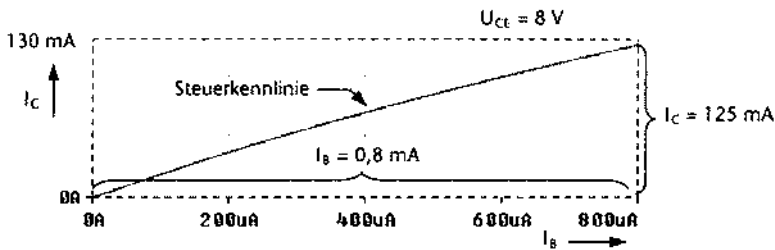


Abb. 351: Strom-Steuerkennlinie eines NPN-Transistors in Emitterschaltung

Anmerkung: Die Gleichstromverstärkung B kann man auch dem Ausgangskennlinienfeld (Abb. 350) entnehmen. Bei einer gewählten Spannung U_{CE} schneidet eine Senkrechte eine Ausgangskennlinie mit einem bestimmten I_B -Wert als Parameter. Von diesem Punkt aus geht man waagrecht nach links bis zur Ordinate und liest den zugehörigen I_C -Wert ab. Es ist dann $B = I_C / I_B$.

Anmerkung: In der Fachliteratur wird an das Formelzeichen B häufig der Index N (B_N) geschrieben, als Kennzeichen für die Vorwärtsstromverstärkung im Normalbetrieb. Die Rückwärtsstromverstärkung im Inversbetrieb wird dagegen mit B_I bezeichnet und weist deutlich kleinere Werte auf als B_N . Da die Grundschaltungen unterschiedliche Stromverstärkung haben, ist auch ein von der Grundschaltung abhängiger Index üblich, z.B. B_{EN} für Stromverstärkung in Emitterschaltung, Normalbetrieb.

Im Gegensatz zur Strom-Steuerkennlinie wird die Kennlinie nach Abb. 349 als Spannungs-Steuerkennlinie bezeichnet. Diese Kennlinie zeigt den Zusammenhang zwischen Kollektorstrom I_C und der Basis-Emitter-Spannung U_{BE} . Die Strom-Steuerkennlinie ist (fast) linear, die Spannungs-Steuerkennlinie stark nichtlinear. Bei einer Anwendung des Transistors als Verstärker schwankt das Eingangssignal um einen Arbeitspunkt auf der Spannungs- oder Strom-Steuerkennlinie. Wird der Transistor an der Basis mit einer Wechselspannung bzw. mit einem Wechselstrom gesteuert, so pendeln diese Werte im Rhythmus der Steuerspannung bzw. des Steuerstromes um eine Ruheeinstellung, die dem gewählten Arbeitspunkt entspricht.

Wird der Arbeitspunkt auf der Spannungs-Steuerkennlinie mit einer Gleichspannungsquelle eingestellt, z.B. $U_{BE} = 0,7 \text{ V}$ in Abb. 345, so entstehen folgende Nachteile:

- Durch die nichtlineare Spannungs-Steuerkennlinie ergeben gleich große Schwankungen der Spannung um den Arbeitspunkt keine gleich großen Schwankungen des Kollektorstromes um dessen Ruhewert (und damit auch keine gleich großen Schwankungen der verstärkten Spannung am Lastwiderstand, siehe Abb. 345). Die Verstärkung ist nichtlinear bzw. verzerrt. Eine Spannungsänderung an der Basis von $+50 \text{ mV}$ und -50 mV (um $0,7 \text{ V}$ herum) kann z.B. eine Kollektorstromänderung von $+20 \text{ mA}$ und -5 mA ergeben.

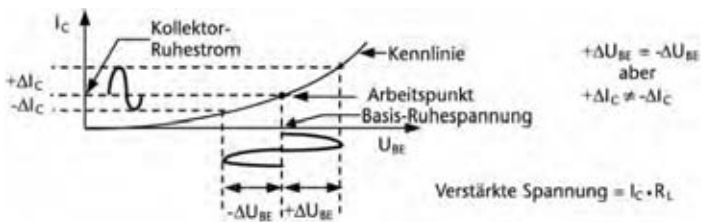


Abb. 352: Nichtlineare Verstärkung durch gekrümmte Kennlinie

- b) Da der Kollektorstrom I_C durch die Krümmung der Spannungs-Steuerkennlinie stark von U_{BE} abhängt, muß die Basisvorspannung sehr genau eingestellt werden. Ändert sich die Vorspannung z.B. durch ungenügende Stabilisierung des Netzgerätes, so ändert sich auch die Verstärkung.
- c) Der Basisstrom und damit auch der gesteuerte Kollektorstrom ändert sich stark mit der Temperatur. Der Arbeitspunkt ist temperaturabhängig und kann »davonlaufen«. Die Schaltung hat eine schlechte Temperaturstabilität, da der Arbeitspunkt mit der Temperatur driftet. Dadurch ändert sich nicht nur die Verstärkung, sondern es kann durch eine weitere Temperaturerhöhung und durch ein erneutes Anwachsen des Kollektorstromes (thermisches »Aufschaukeln«) zu einer Überlastung und Zerstörung des Transistors kommen. Diese thermische Instabilität durch Eigenerwärmung wird als **Mitlaufeffekt** bezeichnet.

Die **Spannungssteuerung** des Transistors hat wie beschrieben große Nachteile gegenüber der **Stromsteuerung**.

Bei der Stromsteuerung wird der Arbeitspunkt auf der Strom-Steuerkennlinie mit einer Konstantstromquelle eingestellt, z.B. $I_B = 100 \mu A$. Werden diesem Basisruhestrom Schwankungen überlagert, so ergeben sich gleich große Schwankungen des Kollektorstromes, die Verstärkung ist linear.

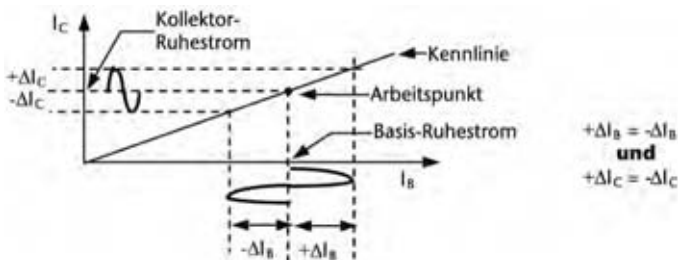


Abb. 353: Verzerrungsfreie Verstärkung durch lineare Kennlinie

Da sich der Basisstrom und damit der Kollektorstrom bei Temperaturschwankungen nicht ändert (der Basisstrom ist eingepreßt), ist der Arbeitspunkt temperaturstabil und driftet nicht. Nach $I_C = B \cdot I_B$ ist der Kollektorstrom von der Stromverstärkung abhängig. Wie in Abschnitt 19.9 erwähnt wird, nimmt B mit steigender Temperatur zu. Somit bleibt der Nachteil, daß I_C auch bei der Stromsteuerung von der Temperatur abhängt, jedoch in kleinerem Maße als bei der Spannungssteuerung. Nachteilig ist ebenfalls, daß B bei verschiedenen Transistoren des gleichen

Typs fertigungsbedingt stark unterschiedliche Werte haben kann und dadurch evtl. ein Abgleich des Ruhestromes erforderlich ist.

Bei der Spannungssteuerung ist zur Einstellung des Arbeitspunktes (zur Erzeugung der Basisvorspannung U_{BE}) nicht unbedingt eine extra Gleichspannungsquelle erforderlich, sie soll aus Kostengründen vermieden werden. U_{BE} kann durch einen Spannungsteiler erzeugt werden. Der **Querstrom** des Spannungsteilers R_1 , R_2 sollte etwa das **Zehnfache des Basisstromes** betragen, damit der Spannungsteiler als unbelastet angesehen werden kann. – Häufig sollen nur Wechselspannungen verstärkt werden. Damit eine Beeinflussung des Arbeitspunktes durch einen Gleichspannungsanteil der Eingangsspannung vermieden wird, muß der Transistoreingang von der Signalquelle gleichspannungsmäßig getrennt werden. Deshalb wird die Wechselspannung der Basis über einen **Koppelkondensator** C_1 zugeführt. Ein Kondensator C_2 am Ausgang erlaubt das Abnehmen der verstärkten Wechselspannung ohne Änderung der Gleichspannungsverhältnisse am Ausgang oder dient als Koppelkondensator zur nächsten Verstärkerstufe. Durch Koppelkondensatoren wird allerdings die Verstärkung bei tiefen Frequenzen verringert. Die Kondensatoren sind groß genug zu wählen, daß die Verstärkung im ganzen Frequenzbereich noch ausreicht.

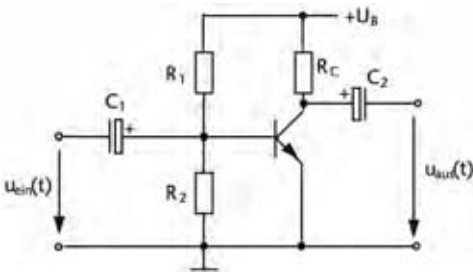


Abb. 354: Einstellung des Arbeitspunkts mit einem Spannungsteiler R_1 , R_2

Bei der Stromsteuerung kann die Konstantstromquelle zur Erzeugung des Basisruhestromes durch einen hochohmigen Widerstand in Reihe mit der Betriebsspannungsquelle realisiert werden (siehe auch Abschnitt 4.6). Die Schaltung entspricht genau Abb. 354, nur daß der Widerstand R_2 entfällt. Von der Betriebsspannung $+U_B$ wird über R_1 (einige hundert $k\Omega$) der Basis ein Strom eingeprägt.

19.7.4 Vierquadranten-Kennlinienfeld, Arbeitspunkt, Lastgerade

Eingangs-, Ausgangs- und Strom-Steuerkennlinie werden oft in einem Kennlinienfeld mit vier Quadranten zusammengefaßt. Im ersten Quadranten wird das Ausgangskennlinienfeld, im zweiten Quadranten die Strom-Steuerkennlinie dargestellt. Der dritte Quadrant zeigt die Eingangskennlinie, der vierte Quadrant die Spannungsrückwirkung vom Kollektor auf die Basis (meistens vernachlässigbar).

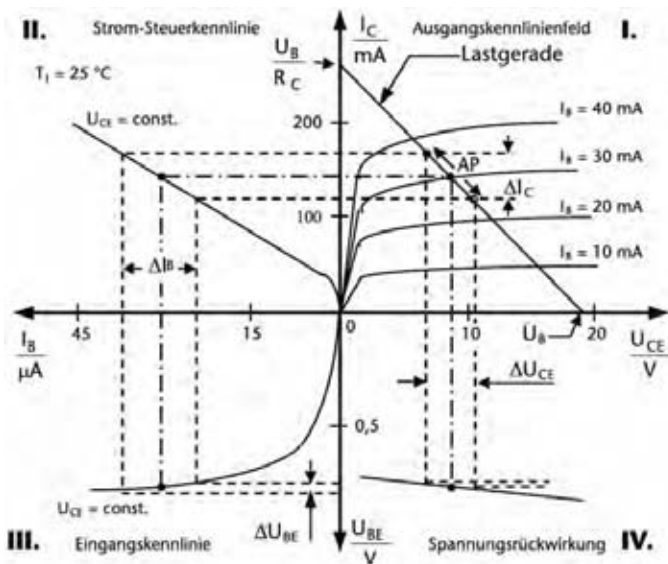


Abb. 355: Vierquadranten-Kennlinienfeld eines NPN-Transistors (Zahlenwerte als Beispiel)

Ohne Steuersignal im Eingangskreis stellt sich im Ausgangskennlinienfeld des Transistors ein fester Betriebspunkt ein, der als **Arbeitspunkt** bezeichnet wird. Er ist durch die Betriebsspannung $+U_B$, den Arbeitswiderstand R_C (Lastwiderstand R_L) und einen gewählten Basisstrom I_B festgelegt.

Die Maschengleichung im Ausgangskreis des Transistors in Emitterschaltung ergibt (siehe Abb. 345):

$$-U_B + I_C \cdot R_C + U_{CE} = 0. \text{ Daraus folgt die Gleichung der Lastgeraden oder Arbeitsgeraden.}$$

Gl. 150: Gleichung der Lastgeraden

$$I_C = -\frac{1}{R_C} \cdot U_{CE} + \frac{U_B}{R_C}$$

Die Gleichung stellt eine Gerade mit negativer Steigung dar. Für $I_C = 0$ schneidet die Gerade die Abszisse bei $U_{CE} = U_B$. Mit $U_{CE} = 0$ ergibt sich der Schnittpunkt der Geraden mit der Ordinate zu

$$I_C = \frac{U_B}{R_C}.$$

Durch Verbinden der beiden Schnittpunkte kann die Gerade in das Ausgangskennlinienfeld eingetragen werden. Der Arbeitspunkt (AP) wird festgelegt durch den Schnittpunkt dieser Geraden mit einer $I_C(U_{CE})$ -Kurve, deren Basisstrom I_B gewählt wird. Durch die Festlegung des Arbeitspunktes im Ausgangskennlinienfeld ist der Arbeitspunkt im 2., 3. und 4. Quadranten ebenfalls festgelegt. Der gewählte Basis-Ruhestrom ist durch eine geeignete Schaltung (z.B. nach dem vorangegangenen Abschnitt) zu erzeugen. Wie bereits erklärt, kann dies bei Spannungssteuerung durch einen Spannungsteiler zur Erzeugung der aus der Eingangskennlinie abgelesenen, zum Arbeitspunkt gehörenden Basisvorspannung erfolgen. Bei Stromsteuerung wird der Basis ein aus

der Strom-Steuerkennlinie abgelesener, zum Arbeitspunkt gehörender Basis-Ruhestrom aus einer Konstantstromquelle eingepreßt.

Wird der Eingangskreis durch ein Signal ΔU_{BE} bzw. ΔI_B angesteuert, so wandert dem Signal entsprechend der Betriebspunkt vom eingestellten Arbeitspunkt AP ausgehend auf der Lastgeraden hin und her. Die sich dadurch ergebende Ausgangsspannung und der Ausgangswechselstrom lassen sich auf den Koordinatenachsen ablesen (ΔU_{CE} , ΔI_C). Es sind verstärkte Werte.

19.8 Die Stromverstärkung α , β und γ

Wird in der Emitterschaltung der Basis-Emitter-Gleichspannung eine kleine Wechselspannung überlagert, so führt der Wechselstrom i_b im Eingangskreis zu einem verstärkten Wechselstrom i_c im Ausgangskreis. Diese Wechselstromverstärkung ist eine Kleinsignalstromverstärkung. Sie ist für einen festgelegten Arbeitspunkt mit I_C , U_{CE} und bei der Frequenz $f = 1 \text{ kHz}$ definiert als $\beta = i_c / i_b$.

In der Praxis wird die Gleichstromverstärkung B angegeben. Sie entspricht bei kleinen Stromänderungen mit ausreichender Genauigkeit der Wechselstromverstärkung β .

Da I_C wesentlich größer als I_B ist ($I_C \gg I_B$), hat B einen Wert erheblich größer als 1 ($B \gg 1$).

In den Transistor-Datenblättern findet man oft nur die Größe β , die häufig auch als » h_{fe} « bezeichnet wird. Nicht verwechseln: B wird in den Datenblättern auch » h_{FE} « genannt (DC current gain, static forward current transfer ratio).

Gl. 151: Kleinsignalstromverstärkung eines Transistors in Emitterschaltung

$$\beta = \left. \frac{i_c}{i_b} \right|_{U_{CE} = \text{const}} ; \beta \approx B \gg 1$$

Die Stromverstärkung ist eine für den Transistortyp charakteristische Größe. Die Werte von β liegen, abhängig vom Transistortyp, im Bereich von 10 bis 1000. In der Praxis ist zu beachten, daß β zwischen unterschiedlichen Exemplaren des gleichen Transistortyps erheblich streuen kann (z.B. $\beta = 100$ bis 300). In den Datenblättern werden oft minimaler, typischer und maximaler Wert von β angegeben.

Für β wird häufig das Wort Kurzschlußstromverstärkung statt Stromverstärkung verwendet. Das Wort »Kurzschluß« bedeutet, daß bei der Messung von β der Ausgangskreis zwischen Kollektor und Emitter wechselstrommäßig kurzgeschlossen ist.

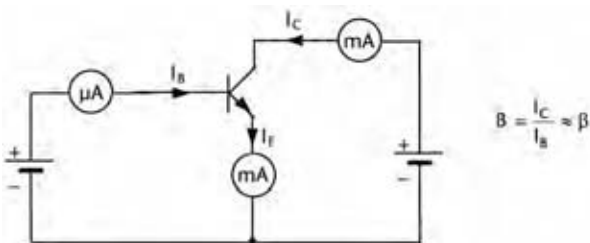


Abb. 356: Bestimmung der Stromverstärkung (Prinzip)

Die Stromverstärkung α ist die Stromverstärkung des Transistors in Basisschaltung, die man durch Vertauschen von Basis und Emitter in Abb. 356 erhält. Die Stromverstärkung α gibt das Verhältnis von Kollektor- zu Emitterstrom an: $\alpha = \frac{I_C}{I_E}$.

Sie ist ebenso wie β eine Wechselstromverstärkung und wird hier wie β einer Gleichstromverstärkung gleichgesetzt.

Da $I_C < I_E$ ist, wird $\alpha < 1$.

Gl. 152: Stromverstärkung in Basisschaltung

$$\alpha = \frac{I_C}{I_E} < 1$$

Zwischen α und β gibt es die Möglichkeit zur Umrechnung. Wird $I_E = I_C + I_B$ durch I_C dividiert, so erhält man $\frac{I_E}{I_C} = 1 + \frac{I_B}{I_C}$ oder $\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{\beta}$. Somit ist:

Gl. 153: Umrechnung zwischen α und β

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\beta}{\beta + 1}$$

Die Stromverstärkung γ gibt das Verhältnis von Emitter- zu Basisstrom in der Kollektorschaltung an.

$$\text{Aus } \gamma = \frac{I_E}{I_B} \text{ und } I_B = I_E - I_C \text{ folgt } \gamma = \frac{I_E}{I_E - I_C} = \frac{1}{1 - \frac{I_C}{I_E}}.$$

Gl. 154: Stromverstärkung in Kollektorschaltung

$$\gamma = \frac{1}{1 - \alpha} = \beta + 1$$

19.9 Abhängigkeiten der Stromverstärkung

Die Stromverstärkung β ist für sehr kleine und sehr große Kollektorströme unterschiedlich. Außerdem nimmt β mit steigender Temperatur zu³⁵. Den typischen Verlauf von β zeigt die folgende Abbildung (Abszisse logarithmisch).

³⁵ Die Gründe, warum β vom Kollektorstrom und von der Temperatur abhängig ist, sind kompliziert und werden hier nicht erläutert.

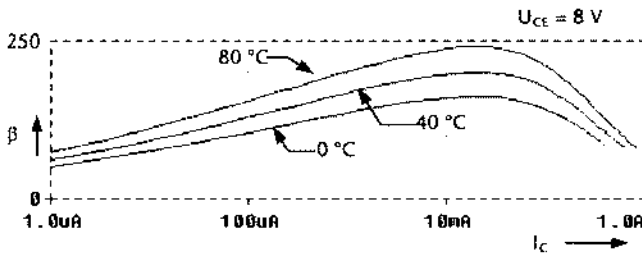


Abb. 357: Typischer Verlauf der Stromverstärkung bei einem Kleinsignaltransistor

Die Lage des Maximums von β kann bei unterschiedlichen Transistortypen sehr verschieden sein. Leistungstransistoren haben das Maximum von β bei höheren Strömen.

Die Stromverstärkung ist abhängig vom Arbeitspunkt und von der Temperatur.

Gibt man auf den Eingang eines Transistorverstärkers ein sinusförmiges Eingangssignal und betrachtet die verstärkte Ausgangsspannung, so nimmt deren Amplitude mit wachsender Frequenz der Eingangsspannung ab. Der Grund ist: Die Stromverstärkung sinkt mit wachsender Frequenz (und damit die Spannungsverstärkung). Bei hohen Frequenzen kann man für einen Transistor ein Funktionersatzschaltbild angeben, das aus einem Netzwerk von Widerständen (Basis-, Emitter-, Kollektor-Bahnwiderstände) und Kapazitäten (Sperrschicht-, Diffusionskapazität) sowie einer Stromquelle besteht. Dieses Wechselstrom-Ersatzschaltbild sei hier nur erwähnt. Wichtig ist die Tatsache, daß die inneren Widerstände und Kapazitäten des Transistors ein Netzwerk bilden, das für die steuernde Frequenz als Tiefpaß wirkt.

Die Frequenz, bei der die Stromverstärkung in Emitterschaltung um 3 dB auf ca. 70 % ihres Wertes β_0 bei 1 kHz abgesunken ist, heißt β -Grenzfrequenz f_β . Oberhalb der β -Grenzfrequenz nimmt die Stromverstärkung mit 20 dB pro Frequenzdekade ab. In gleicher Weise ist die α -Grenzfrequenz f_α der Basisschaltung definiert.

Als Transistfrequenz f_T (engl.: unity gain frequency) bezeichnet man diejenige Frequenz, bei der die Stromverstärkung auf den Wert Eins abgesunken ist.

Zwischen der β -Grenzfrequenz und der Transistfrequenz besteht die Beziehung $f_T = \beta \cdot f_\beta$.

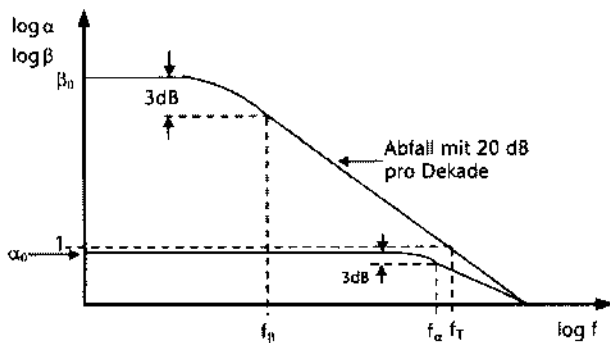


Abb. 358: Frequenzabhängigkeit der Verstärkungen α und β

Die Transistfrequenz ist sehr stark vom Kollektorstrom (und damit vom Arbeitspunkt) abhängig und wird in den Datenblättern als Kurve $f_T(I_C)$ angegeben.

Sucht man in der Emitterschaltung bei einer bestimmten Arbeitsfrequenz f_A den Wert der Stromverstärkung β_A , so erhält man diesen aus:

Gl. 155: Stromverstärkung bei einer bestimmten Frequenz (Emitterschaltung)

$$\beta_A = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_A}{f_T}\right)^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta \cdot f_A}{f_T}\right)^2}}$$

Beispiel: Ein Transistor hat die Transistfrequenz $f_T = 300$ MHz und die Stromverstärkung $\beta = 100$. Wie groß ist die Stromverstärkung in Emitterschaltung bei der Frequenz 10 MHz?

$$\beta_A = \frac{100}{\sqrt{1 + \left(\frac{100 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8}\right)^2}} = 28,7 \quad \text{Bei 10 MHz hat die Stromverstärkung nur noch den Wert } \beta = 28,7.$$

19.10 Wahl des Arbeitspunktes

Beim Betrieb eines Transistors sind für die Lage des Arbeitspunktes im Ausgangskennlinienfeld einige Grenzen zu beachten, um Überlastungen, die zur Zerstörung führen können, zu vermeiden.

1. Der vom Hersteller angegebene Maximalwert des Kollektor(dauer)stromes $I_{C \max}$ darf nicht überschritten werden ($I_C < I_{C \max}$), sonst kann ein Anschlußdraht schmelzen.
2. Die Kollektor-Emitter-Spannung muß unter dem vom Hersteller angegeben Höchstwert $U_{CE \max}$ (Durchbruchspannung) liegen ($U_{CE} < U_{CE \max}$). Wird diese Grenze überschritten, kann ein Lawinendurchbruch erfolgen.
3. Die Verlustleistung muß kleiner sein als die vom Hersteller angegebene maximal zulässige Verlustleistung P_{tot} , sonst wird der Transistor thermisch überlastet. Es muß gelten: $U_{CE} \cdot I_C < P_{\text{tot}}$. Der Arbeitspunkt muß also unterhalb der maximalen Verlustleistungshyperbel $U_{CE} \cdot I_C = P_{\text{tot}} = \text{const.}$ liegen. P_{tot} ist eine Funktion der Umgebungstemperatur und nimmt mit zunehmender Umgebungstemperatur ab. Die zulässige Verlustleistung ist bei gegebener Umgebungstemperatur aus der Lastminderungskurve des Herstellers zu entnehmen, wobei eventuelle Kühlmaßnahmen zu berücksichtigen sind.
4. Bei größeren Werten von U_{CE} kann ein »zweiter Durchbruch« auftreten (Durchbruch zweiter Art, sekundärer Durchbruch). Dieser Durchbruch erfolgt durch örtliche Stromkonzentrationen, die zu lokalen Überhitzungen der Sperrschicht im Zentrum des Transistors und zur Zerstörung führen (Lawineneffekt). Durch den zweiten Durchbruch wird bei größeren Kollektor-Emitter-Spannungen der maximal zulässige Kollektorstrom auf kleinere Werte begrenzt.

Diese Grenzen des erlaubten Arbeitsbereiches werden vom Hersteller oft in einem **SOAR-Diagramm** (Abkürzung für englisch: **s**afe **o**perating **a**rea) angegeben. Die Menge der erlaubten Arbeitspunkte liegt dabei innerhalb der grauen Fläche der nächsten Abbildung.

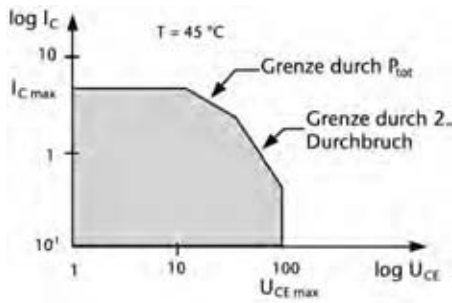


Abb. 359: SOAR-Diagramm eines Bipolartransistors (Zahlenwerte als Beispiel)

Neben dieser typabhängigen Eingrenzung des erlaubten Arbeitsbereiches eines Transistors kann sich die Lage des Arbeitspunktes je nach Aufgabe des Transistors richten.

1. Im Verstärkerbetrieb eines einzelnen Transistors soll dieser symmetrisch um den Arbeitspunkt herum angesteuert werden, damit Ausgangswechselstrom und -spannung möglichst genau dem Eingangssignal entsprechen. Um nichtlineare Verzerrungen des Ausgangssignals zu vermeiden, darf der Arbeitspunkt nur im linearen Teil (der fast horizontal verlaufenden Kennlinien) des Ausgangskennlinienfeldes liegen. Für eine Großsignalverstärkung wird der Arbeitspunkt in die Mitte des ausnutzbaren Teiles der Lastgeraden gelegt (AP1 in Abb. 361). Bei einer Leistungsstufe mit nur einem Transistor wird dies als **A-Betrieb** bezeichnet.
2. Beim **B-Betrieb** von zwei Transistoren in einer Leistungsstufe wird jeder der beiden Komplementärtransistoren (ein NPN- und ein PNP-Typ) nur in einer Richtung durch das Signal angesteuert. Je nach Polarität der Eingangsspannung sperrt ein Transistor und der andere verstärkt. Das Ausgangssignal jeder der beiden Transistoren soll möglichst genau einer Halbwelle des Eingangssignals entsprechen. Der Arbeitspunkt wird an das untere Ende der Lastgeraden gelegt (AP4 in Abb. 361). Die Schaltungsart des B-Betriebs wird auch als **Gegentaktschaltung** bezeichnet (engl.: push-pull-stage).

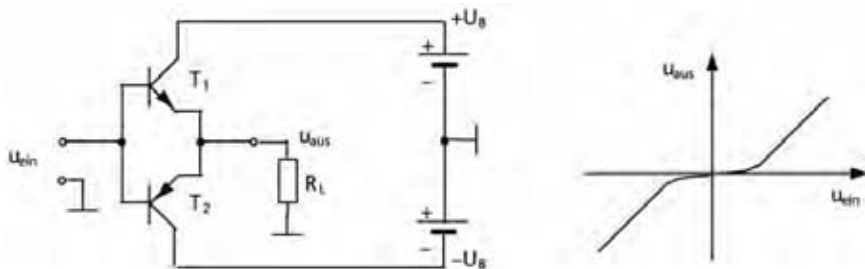


Abb. 360: Gegentakt-Endstufe im B-Betrieb (komplementäre Ausgangsstufe) (links) und Übertragungskennlinie (rechts)

3. Bei reinem B-Betrieb treten für kleine Eingangsspannungen Übernahmeverzerrungen auf, da der Aussteuerungsbereich den nichtlinearen Teil der Eingangskennlinie einschließt. Deshalb

wird der Arbeitspunkt oft nicht ganz an das unter Ende der Lastgeraden gelegt (AP3 in Abb. 361). Erreicht wird dies durch einen kleinen Basisruhestrom der Transistoren T_1 und T_2 mittels den Basisanschlüssen vorgeschalteter Gleichspannungsquellen. Dieser Betrieb wird **AB-Betrieb** genannt.

4. Die größte Ausgangsleistung ergibt sich, wenn der Arbeitspunkt auf der Leistungshyperbel liegt und die Lastgerade eine Tangente an die Leistungshyperbel im Arbeitspunkt ist (AP2 in Abb. 361).
5. Die Kniespannung begrenzt die Lage des Arbeitspunktes im linken Teil des Ausgangskennlinienfeldes (Verzerrungsbereich). Gerät der kleinste Augenblickswert der Ausgangsspannung U_{CE} in den Bereich des steilen Anstiegs des Ausgangsstromes, so ergeben sich starke Verzerrungen des Ausgangssignals. Durch die Aussteuerung des Eingangs darf der Arbeitspunkt auf der Lastgeraden nur in einen Betriebspunkt wandern, der im flach verlaufenden Teil des Ausgangskennlinienfeldes liegt.
6. Der Sperrbereich begrenzt die Lage des Arbeitspunktes nach unten. Der kleinste Augenblickswert des Ausgangsstromes muß größer sein als der Ausgangsstrom ohne Aussteuerung am Eingang. Wandert der Arbeitspunkt durch die Aussteuerung des Eingangs in einen Betriebspunkt innerhalb des Sperrbereiches, so kann der Ausgangsstrom dem Eingangsstrom nicht mehr proportional folgen, und das Ausgangssignal wird verzerrt.
7. Bei Kleinsignalverstärkung (Vorverstärker) kann man den Arbeitspunkt möglichst nahe an den Koordinatennullpunkt des Ausgangskennlinienfeldes legen, um den Leistungsverbrauch niedrig zu halten.

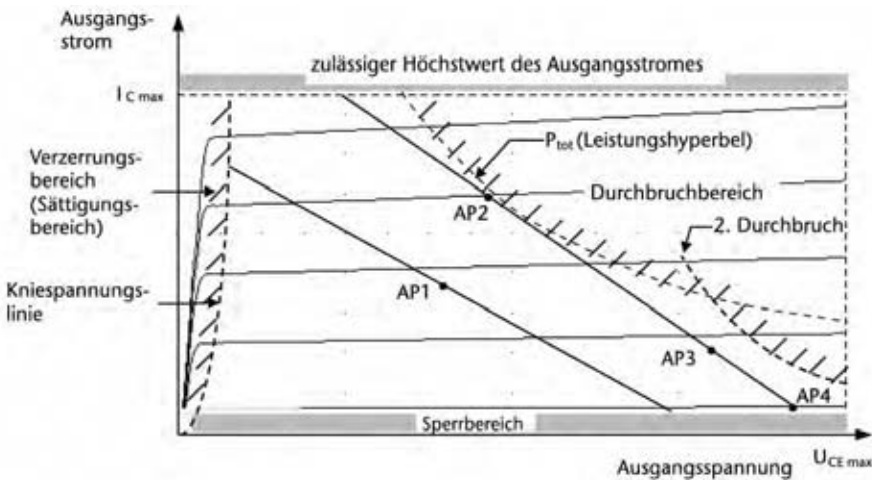


Abb. 361: Ausgangskennlinienfeld mit erlaubtem Arbeitsbereich

19.11 Die Grundschaltungen im Detail

19.11.1 Die Emitterschaltung

Die Eingangskennlinie hat bei Germanium- und Siliziumtransistoren qualitativ denselben Verlauf und entspricht der Durchlaßkennlinie einer Diode. Die Durchlaßspannung im Arbeitspunkt AP ist U_{BEAP} und beträgt bei Germaniumtransistoren ca. 0,3 V und bei Siliziumtransistoren ca. 0,6 V bis 0,7 V.

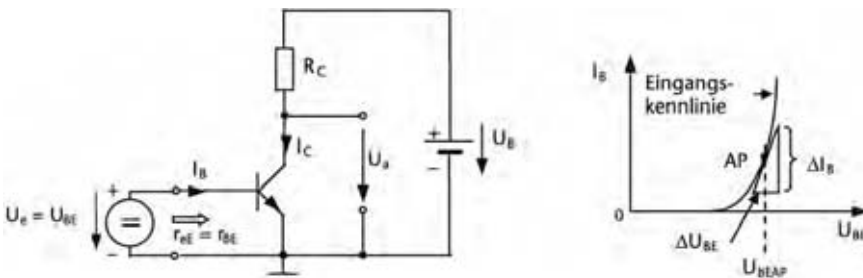


Abb. 362: Transistor in Emitterschaltung (links) und Eingangskennlinie (rechts)

19.11.1.1 Eingangsimpedanz

Eine Signalspannungsquelle am Eingang wird mit dem dynamischen (dem differentiellen) Wechselstrom-Eingangswiderstand (Eingangsimpedanz) r_{BE} des Transistors belastet. $r_{BE} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B}$

ist der differentielle Durchlaßwiderstand der Basis-Emitter-Diode. Mit zunehmendem Basisstrom nimmt r_{BE} ab, da wegen der größer werdenden Steilheit der Kennlinie die zu einer Basisstromänderung ΔI_B gehörende Änderung der Basis-Emitter-Spannung ΔU_{BE} kleiner wird. Die Steigung $\frac{\Delta I_B}{\Delta U_{BE}}$ der Tangente im Arbeitspunkt ist gleich dem Kehrwert von r_{BE} . Um die Steigung

der Tangente zu berechnen, wird die Gleichung einer Diodenkennlinie (Gl. 138) differenziert.

$$\text{Aus } I_B = I_R \cdot \left(e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - 1 \right) \text{ oder } I_B = I_R \cdot e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} - I_R \text{ erhält man } \frac{dI_B}{dU_{BE}} = I_R \cdot e^{\frac{U_{BE}}{U_T}} \cdot \frac{1}{U_T} \approx \frac{I_B}{U_T}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\approx I_B}$

Der Kehrwert gibt mit $I_B = I_C / \beta$:

Gl. 156: Eingangsimpedanz der Emitterschaltung (die Steilheit S wird weiter unten definiert)

$$r_{eE} = r_{BE} = \frac{U_T}{I_B} = \frac{U_T \cdot \beta}{I_C} = \frac{\beta}{S}$$

U_T ist die Temperaturspannung (siehe Gl. 138). Sie hat bei 22 °C den Wert 25,4 mV.

Damit erhält man bei Kleinsignaltransistoren mit Basisströmen von 100 μA bis 100 nA je nach Lage des Arbeitspunktes (!) Wechselstrom-Eingangswiderstände zwischen ca. 250 Ω und 250 k Ω .

Da I_C in Gl. 156 im Nenner steht, nimmt die Eingangsimpedanz mit größer werdendem Kollektorstrom einen kleineren Wert an, der die Signalspannungsquelle belastet. Durch den Spannungsabfall am Innenwiderstand der Signalspannungsquelle tritt dann nur ein Teil ihrer Leerlaufspannung als Eingangsspannung auf. Bei einer hochohmigen Signalspannungsquelle (mit hohem Innenwiderstand) wählt man deshalb einen kleinen Kollektorstrom.

19.11.1.2 Ausgangsimpedanz

Der Wechselstrom-Ausgangswiderstand zwischen Kollektor und Emitter des Transistors läßt sich für einen bestimmten Arbeitspunkt aus dem Ausgangskennlinienfeld ablesen.

Im flachen Teil der Ausgangskennlinien besitzt der Ausgangswiderstand $r_{CE} = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta I_C}$ große Werte, da zu einer bestimmten Änderung der Kollektor-Emitter-Spannung ΔU_{CE} eine kleine Änderung ΔI_C gehört. Meist liegt r_{CE} bei Kleinsignaltransistoren in der Größenordnung von einigen 100 k Ω .

Bei der Emitterschaltung mit einem Arbeitswiderstand R_C sind r_{CE} und R_C über die Betriebsspannungsquelle U_B wechselstrommäßig parallel geschaltet. Damit ergibt sich unter Vernachlässigung der Spannungsrückwirkung (das Zeichen $\parallel$ bedeutet parallel):

Gl. 157: Ausgangsimpedanz der Emitterschaltung

$$r_{aE} = R_C \parallel r_{CE} \approx R_C$$

Für $R_C \ll r_{CE}$ kann r_{CE} vernachlässigt werden.

Wird die Verstärkerschaltung nach Abb. 362 aus einer Signalspannungsquelle mit dem Innenwiderstand R_i angesteuert, so beeinflusst dies die Ausgangsimpedanz nicht. Wird die Spannungsrückwirkung vernachlässigt, so bleibt bei sich ändernder Ausgangsspannung I_B konstant und R_i kann sich auf den Ausgangswiderstand nicht auswirken.

19.11.1.3 Wechselspannungsverstärkung

An der Eingangskennlinie in Abb. 362 erkennt man, daß eine kleine Änderung der Eingangsspannung $\Delta U_e = \Delta U_{BE}$ eine große Änderung ΔI_B des Basisstromes zur Folge hat.

Es ist $\Delta I_B = \frac{\Delta U_e}{r_{BE}}$. Durch die Änderung des Basisstromes ergibt sich eine Änderung des Kollektorstromes $\Delta I_C = \beta \cdot \Delta I_B = \beta \cdot \frac{\Delta U_e}{r_{BE}}$.

Der Kollektorstrom fließt durch R_C und erzeugt eine Änderung der Ausgangsspannung $\Delta U_a = -\Delta I_C \cdot R_C$. Das Minuszeichen ergibt sich, da die Spannung ΔU_a , und damit die Spannung an R_C , entgegengesetzt zur Stromrichtung ΔI_C ist.

Der Kollektorstrom fließt durch R_C und erzeugt eine Änderung der Ausgangsspannung $\Delta U_a = -\Delta I_C \cdot R_C$. Das Minuszeichen ergibt sich, da die Spannung ΔU_a , und damit die Spannung an R_C , entgegengesetzt zur Stromrichtung ΔI_C ist.

Weiter folgt: $\Delta U_a = -\beta \frac{R_C}{r_{BE}} \cdot \Delta U_e$; $V_{uE} = -\frac{\Delta U_a}{\Delta U_e} = -\beta \cdot \frac{R_C}{r_{BE}}$.

Am Minuszeichen erkennt man die bereits in Abschnitt 19.6 erläuterte Phasendrehung von 180 Grad zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung.

Die Steigung der Tangente im Arbeitspunkt einer Spannungs-Steuerkennlinie wird **Steilheit** genannt.

Gl. 158: Steilheit eines Transistors

$$S = \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{BE}} = \frac{\beta}{r_{BE}}$$

Mit $\Delta I_C = \beta \cdot \Delta I_B$ und $\Delta U_{BE} = \Delta I_B \cdot r_{BE}$ kann man die Steilheit auch ausdrücken als $S = \frac{\beta}{r_{BE}}$.

Die Spannungsverstärkung ist dann $V_{uE} = -S \cdot R_C$.

Wird $r_{BE} = \frac{U_T \cdot B}{I_C}$ in $V_{uE} = -\beta \cdot \frac{R_C}{r_{BE}}$ eingesetzt, so erhält man: $V_{uE} = -\frac{\beta}{B} \cdot \frac{I_C \cdot R_C}{U_T}$. Das Produkt

$I_C \cdot R_C$ ist der Gleichspannungsabfall U_{RC} am ohmschen Kollektorwiderstand R_C im Arbeitspunkt.

Mit $\beta \approx B$ folgt für die Spannungsverstärkung $V_{uE} = -\frac{U_{RC}}{U_T} = -\frac{I_C \cdot R_C}{U_T}$.

Gl. 159: Wechselspannungsverstärkung der Emitterschaltung

$$V_{uE} = -\frac{\Delta U_a}{\Delta U_e} = -\beta \cdot \frac{R_C}{r_{BE}} = -S \cdot R_C = -\frac{U_{RC}}{U_T} = -\frac{I_C \cdot R_C}{U_T}$$

Anmerkung: Meist wird der absolute Betrag (der positive Wert) von V_{uE} angegeben, da es klar ist, daß die Emitterschaltung eine Phasendrehung von 180 Grad bewirkt.

Die Wechselspannungsverstärkung der Emitterschaltung kann angenähert aus dem Gleichspannungsabfall U_{RC} am Kollektorwiderstand im Arbeitspunkt berechnet werden (Bedingung: $R_C \ll r_{CE}$). Für eine möglichst hohe Spannungsverstärkung wird U_{RC} so groß wie möglich gewählt.

Wichtig für die Praxis:

Will man eine überschlägige Abschätzung der Spannungsverstärkung vornehmen, so setzt man an: $U_T = 25 \text{ mV}$ bei 22°C bzw. $\frac{1}{V} = 40 \frac{1}{V}$. Die Wechselspannungsverstärkung ist dann:

Gl. 160: Abschätzung der Wechselspannungsverstärkung der Emitterschaltung

$$V_{uE} = -40 \cdot U_{RC} = -40 \cdot I_C \cdot R_C$$

19.11.1.4 Leistungsverstärkung

Die Stromverstärkung β der Emitterschaltung hat einen Wert erheblich größer als 1 ($\beta \gg 1$). Die Spannungsverstärkung ist ebenfalls $\gg 1$. Da mit einer Emittterstufe sowohl eine Stromverstärkung als auch eine Spannungsverstärkung erzielt wird, findet auch eine Leistungsverstärkung $\gg 1$ statt.

Die Leistung im Eingangskreis ist $P_e = U_e \cdot I_B$. Die Ausgangsspannung ist $U_a = V_{uE} \cdot U_e$ und der Ausgangsstrom ist $I_C = \beta \cdot I_B$. Die Leistung im Ausgangskreis ist somit $P_a = V_{uE} \cdot U_e \cdot \beta \cdot I_B$.

Die Leistungsverstärkung ist

Gl. 161: Leistungsverstärkung der Emitterschaltung

$$V_{pE} = \frac{P_a}{P_e} = \beta \cdot V_{uE}$$

Unter Vernachlässigung der Verlustleistung im Eingangskreis wird ohne wechselstrommäßige Aussteuerung am Eingang im Transistor die Verlustleistung $P_V \approx U_{CE} \cdot I_C$ in Wärme umgesetzt.

Bei der Emitterschaltung als Großsignalverstärker im Eintakt-A-Betrieb liegt der Arbeitspunkt in der Mitte der Lastgeraden (Abb. 363). Es fließt der Kollektorruhestrom (Gleichstrom)

$I_{C0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_B}{R_C}$. Die Kollektor-Emitter-Spannung (Gleichspannung) ist ca. $U_{CE0} = \frac{U_B}{2}$. Die Gleich-

strom-Verlustleistung im Transistor ist somit ohne wechselstrommäßige Aussteuerung

$P_V = U_{CE0} \cdot I_{C0} = \frac{U_B^2}{4R_C}$. Dieselbe Gleichstrom-Verlustleistung tritt im Lastwiderstand R_C auf, da an

ihm die gleiche Spannung und der gleiche Strom auftreten. Insgesamt nimmt die Schaltung die

Leistung $P_g = 2P_V = \frac{U_B^2}{2R_C}$ auf.

Eine sinusförmige Aussteuerung am Eingang ergibt am Ausgang einen Scheitelwert des Kollektorstromes von ca. I_{C0} und einen Scheitelwert der Ausgangsspannung von ca. U_{CE0} . Die an den

Lastwiderstand R_C abgegebene Wechselstromleistung ist somit $P_{\sim} = \frac{U_B^2}{8R_C}$ ($P = \frac{1}{2} \hat{U} \cdot \hat{I}$).

Der Wirkungsgrad als Verhältnis von abgegebener Nutzleistung (Effektivwert der im Widerstand umgesetzten Wechselleistung) zu insgesamt aufgenommenener Leistung (Effektivwert der von der

Betriebsspannungsquelle aufgebrauchten Leistung) ist $\eta = \frac{P_{\sim}}{P_g} = \frac{\frac{U_B^2}{8R_C}}{\frac{U_B^2}{2R_C}} = \frac{1}{4}$; $\eta = 0,25$ oder $\eta = 25\%$.

Wegen des geringen maximalen Wirkungsgrades $\eta = 25\%$ wird die Schaltung nur für Kleinleistungsverstärker eingesetzt.

Bei wechselstrommäßiger Aussteuerung vermindert sich die Gleichstrom-Verlustleistung im Transistor um die an den Lastwiderstand abgegebene Wechselstromleistung, da die aus der Betriebsspannungsquelle zugeführte Gleichstromleistung P_g von der Aussteuerung unabhängig ist und konstant bleibt.

Die Gleichstrom-Verlustleistung im Transistor ist dann $P_V = P_V - P_{\sim} = \frac{U_B^2}{8R_C}$.

Die Verlustleistung im Transistor ist ohne Eingangssignal am größten.

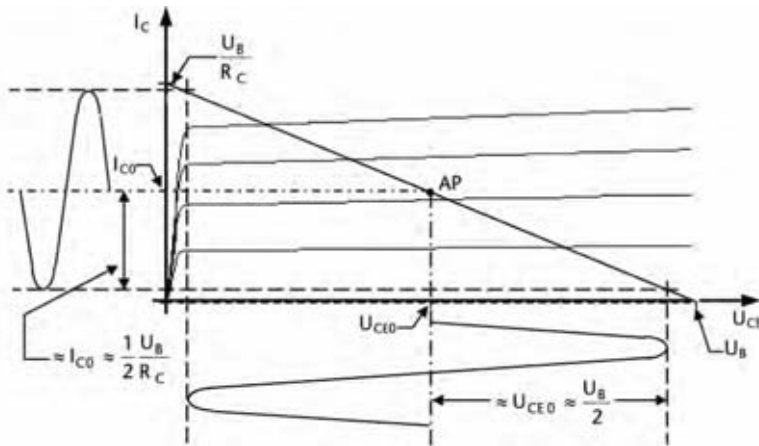


Abb. 363: Ausgangskennlinienfeld der Emitterschaltung bei Leistungsverstärkung im Eintakt-A-Betrieb

19.11.1.5 Verhalten bei hohen Frequenzen

Oberhalb der Grenzfrequenz f_β sinkt die Kleinsignalstromverstärkung β ab, während die Gleichstromverstärkung B konstant bleibt. Es gilt dann nicht mehr $\beta \approx B$, sondern β ist abhängig von der Frequenz: $\beta = \beta(f)$. Wird dies in $V_{uE} = -\frac{\beta}{B} \cdot \frac{I_C \cdot R_C}{U_T}$ mit $I_C \cdot R_C = U_{RC}$ eingesetzt, so erhalten wir

Gl. 162: Frequenzgang der Wechselspannungsverstärkung (Emitterschaltung)

$$V_{uE} = -\frac{\beta(f)}{B} \cdot \frac{U_{RC}}{U_T}$$

Man erkennt, daß V_{uE} den gleichen Frequenzgang hat wie β und ab der Grenzfrequenz f_β abnimmt. (Siehe auch Abb. 358)

Zusätzlich wird der Frequenzgang der Wechselspannungsverstärkung durch die äußere Beschaltung des Transistors und durch innere Kapazitäten des Transistors bestimmt. Ein Koppelkondensator am Eingang läßt tiefe Frequenzen nicht durch und ergibt mit der Transistor-Eingangsimpedanz und anderen wechselstrommäßig parallel dazu liegenden Eingangswiderständen (z.B. durch einen Basisspannungsteiler) einen Hochpaß. Im Ausgangskreis bildet sich ein Tiefpaß, der durch parallel zu R_C liegende Transistorkapazitäten und einer kapazitiven Last (bzw. der Eingangskapazität der nächsten Verstärkerstufe) bestimmt wird. Für eine derart aufgebaute komplette Verstärkerstufe erhält man den Frequenzgang eines Bandpasses.

19.11.2 Die Basisschaltung

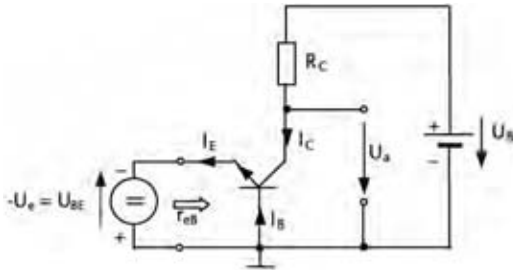


Abb. 364: Transistor in Basisschaltung

19.11.2.1 Eingangsimpedanz

Die Eingangsimpedanz der Basisschaltung ist viel niedriger als die Eingangsimpedanz der Emitterschaltung, da die Signalspannungsquelle mit dem Emitterstrom belastet wird. Unter der Annahme, daß Basis- und Kollektorstrom von U_{CE} unabhängig sind, berechnet sich die Eingangsimpedanz zu:

$$r_{eB} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_E}; \Delta U_{BE} = \Delta I_B \cdot r_{BE}; \Delta I_E \approx \Delta I_C = \beta \cdot \Delta I_B \text{ Daraus folgt mit Gl. 156 und } \beta \approx \beta:$$

Gl. 163: Eingangsimpedanz der Basisschaltung

$$r_{eB} = \frac{r_{BE}}{\beta} = \frac{U_T}{I_C} = \frac{1}{S}$$

19.11.2.2 Ausgangsimpedanz

Die Kollektor-Basis-Strecke wird in Sperrichtung betrieben und stellt einen vernachlässigbar hohen Widerstand dar. Wechselstrommäßig parallel zu R_C liegt der Widerstand der Kollektor-Emitter-Strecke r_{CE} . Somit besitzt die Basisschaltung dieselbe Ausgangsimpedanz wie die Emitterschaltung.

Gl. 164: Ausgangsimpedanz der Basisschaltung

$$r_{aB} = R_C \parallel r_{CE} \approx R_C$$

19.11.2.3 Wechselspannungsverstärkung

Die Basisschaltung besitzt dieselbe Spannungsverstärkung wie die Emitterschaltung. Da $U_{BE} = -U_e$ ist, befindet sich die Ausgangsspannung U_a mit der Eingangsspannung U_e in Phase.

Gl. 165: Wechselspannungsverstärkung der Basisschaltung

$$V_{uB} = V_{uE}$$

19.11.2.4 Leistungsverstärkung

Die Stromverstärkung der Basisschaltung ist $\alpha < 1$. Die Spannungsverstärkung ist $\gg 1$. Damit ist die Leistungsverstärkung in einem mittleren Größenbereich und wesentlich kleiner als bei der Emitterschaltung.

Die Leistung im Eingangskreis ist $P_e = U_e \cdot I_e$. Die Ausgangsspannung ist $U_a = V_{ub} \cdot U_e$ und der Ausgangsstrom ist $I_c = \alpha \cdot I_e$. Die Leistung im Ausgangskreis ist somit $P_a = V_{ub} \cdot U_e \cdot \alpha \cdot I_e$. Damit ergibt sich die Leistungsverstärkung aus:

Gl. 166: Leistungsverstärkung der Basisschaltung

$$V_{pB} = \frac{P_a}{P_e} = \alpha \cdot V_{uB}$$

19.11.2.5 Verhalten bei hohen Frequenzen

Die Basisschaltung weist sehr gute HF-Eigenschaften auf, da die Basis auf Masse liegt und dadurch eine hervorragende Trennung zwischen Eingang und Ausgang gewährleistet ist. Sie wird zur Verstärkung von Signalen mit hohen Frequenzen in HF-Verstärkern eingesetzt, z.B. im Antennenteil von Fernseh- und Rundfunkgeräten.

Bei der Basisschaltung liegt parallel zum Eingang eine wesentlich kleinere innere Kapazität des Transistors als bei der Emitterschaltung. Zusammen mit dem Innenwiderstand der Signalquelle bildet diese Kapazität einen Tiefpaß mit einer viel höheren Grenzfrequenz als bei der Emitterschaltung. Die α -Grenzfrequenz f_α der Basisschaltung liegt sehr viel höher als die β -Grenzfrequenz f_β der Emitterschaltung. f_α liegt in der Nähe der Transitfrequenz f_T (siehe auch Abb. 358).

Es gilt: $f_\alpha \approx f_T$ für $\alpha \approx 1$ und mit $f_T = \beta \cdot f_\beta$ ist $f_\alpha \approx \beta \cdot f_\beta$.

19.11.3 Die Kollektorschaltung

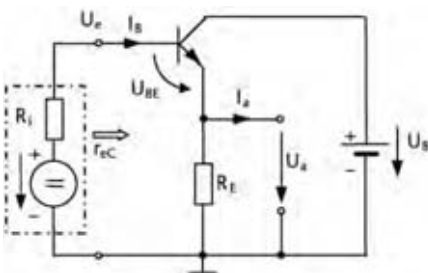


Abb. 365: Transistor in Kollektorschaltung

19.11.3.1 Eingangsimpedanz

Berechnung des Wechselstrom-Eingangswiderstandes: $r_{eC} = \frac{\Delta U_e}{\Delta I_B}$

$$\Delta I_B = \frac{\Delta U_{BE}}{r_{BE}} = \frac{\Delta U_e - \Delta U_a}{r_{BE}}; \Delta U_a = \Delta I_E \cdot R_E; \Delta I_E \approx \Delta I_C = \beta \cdot \Delta I_B; \Delta U_a = \beta \cdot \Delta I_B \cdot R_E;$$

$$\Delta I_B = \frac{\Delta U_e - \beta \cdot \Delta I_B \cdot R_E}{r_{BE}}; \Delta I_B \cdot r_{BE} = \Delta U_e - \beta \cdot \Delta I_B \cdot R_E; \Delta I_B \cdot (r_{BE} + \beta \cdot R_E) = \Delta U_e$$

$$r_{eC} = \frac{\Delta U_e}{\Delta I_B} = r_{BE} + \beta \cdot R_E$$

Gl. 167: Eingangsimpedanz der Kollektorschaltung

$$r_{eC} = \frac{U_T}{I_B} + \beta \cdot R_E = \beta \cdot \left(\frac{U_T}{I_C} + R_E \right) \quad r_{eC} \approx \beta \cdot R_E$$

Der Eingangswiderstand der Kollektorschaltung ist sehr groß.

Für $R_E = 470 \, \Omega$ und $\beta = 300$ ergibt sich z.B. $r_{eC} \approx 141 \, k\Omega$.

19.11.3.2 Ausgangsimpedanz

Zur Berechnung des Ausgangswiderstandes wird der Ausgangsstrom um ΔI_a geändert und die Ausgangsspannungsänderung ΔU_a bei konstanter Eingangsspannung U_e (d.h. $R_i = 0$) berechnet.

$$r_{aC} = \frac{\Delta U_a}{\Delta I_a}; \Delta I_B = \frac{\Delta U_{BE}}{r_{BE}} = \frac{\Delta U_e - \Delta U_a}{r_{BE}}; \text{wegen } \Delta U_e = 0: \Delta I_B = \frac{-\Delta U_a}{r_{BE}}$$

Unter Vernachlässigung der Spannungsrückwirkung ist $\Delta I_C = \beta \cdot \Delta I_B$

$$\text{Aus der Schaltung folgt nach der Knotenregel: } \Delta I_E \approx \Delta I_C = \frac{\Delta U_a}{R_E} + \Delta I_a$$

$$\text{Einsetzen ergibt: } \frac{\Delta U_a}{R_E} + \Delta I_a = -\beta \cdot \frac{\Delta U_a}{r_{BE}}; \text{umformen: } \Delta U_a \cdot \left(\frac{1}{R_E} + \frac{\beta}{r_{BE}} \right) = -\Delta I_a$$

$$-\frac{\Delta U_a}{\Delta I_a} = \frac{1}{\frac{1}{R_E} + \frac{\beta}{r_{BE}}}; r_{aC} = \frac{R_E \cdot r_{BE}}{\beta R_E + r_{BE}}; \text{mit } r_{BE} = \frac{U_T \cdot \beta}{I_C} \text{ folgt:}$$

Gl. 168: Ausgangsimpedanz der Kollektorschaltung

$$r_{aC} = \frac{R_E \cdot U_T}{R_E \cdot I_C + U_T} \quad \text{oder mit } \beta R_E \gg r_{BE} \quad r_{aC} \approx \frac{U_T}{I_C} \quad (\text{für } R_i \approx 0)$$

Der Ausgangswiderstand der Kollektorschaltung ist sehr niedrig.

Für $U_T = 25 \, \text{mV}$ und $I_C = 1 \, \text{mA}$ ergibt sich z.B. $r_{aC} \approx 25 \, \Omega$.

Ist die Signalspannungsquelle hochohmig ($R_i > 0$), so muß der Einfluß von R_i auf r_{aC} beachtet werden. Setzt man statt $\Delta I_B = \frac{-\Delta U_a}{r_{BE}}$ in obiger Rechnung $\Delta I_B = \frac{-\Delta U_a}{R_i + r_{BE}}$ ein, so erhält man das

$$\text{Ergebnis } r_{aC} = \frac{R_E (r_{BE} + R_i)}{\beta R_E + r_{BE} + R_i} \approx \frac{r_{BE} + R_i}{\beta}; \quad r_{aC} \approx \frac{R_i + U_T}{\beta + I_C} \quad (\text{für } R_i > 0)$$

Die Kollektorschaltung wird als **Impedanzwandler** benutzt, da der Eingangswiderstand sehr groß und der Ausgangswiderstand sehr klein ist. Wird ein niederohmiger Verbraucher aus einer

hochohmigen Spannungsquelle gespeist, so verringert sich die Klemmenspannung der Spannungsquelle entsprechend der Spannungsteilung an Innen- und Lastwiderstand (siehe Abschnitt 4.5.1). Will man z.B. zwei Verstärkerstufen in Basisschaltung in Reihe schalten, so ist dies nicht unmittelbar möglich, da der Ausgangswiderstand der ersten Stufe sehr hoch, der Eingangswiderstand der zweiten Stufe aber sehr niedrig ist. Eine zwischengeschaltete Transistorstufe in Kollektorschaltung paßt den niedrigen Eingangswiderstand der zweiten Verstärkerstufe in Basisschaltung an den hohen Ausgangswiderstand der ersten an.

19.11.3.3 Wechselspannungsverstärkung

Da die Basis-Emitter-Diode im Eingangskreis in Durchlaßrichtung betrieben wird, stellt sich für eine Eingangsspannung $U_e > \text{ca. } 0,6 \text{ V}$ eine Basis-Emitter-Spannung U_{BE} von ca. $0,6 \text{ V}$ ein. Damit wird $U_a \approx U_e - 0,6 \text{ V}$. Es fließt ein Kollektorstrom, der an R_E einen Spannungsabfall hervorruft. Wird U_e vergrößert, so nimmt der Kollektorstrom und damit der Spannungsabfall an R_E zu, wobei sich U_{BE} wegen der steilen Eingangskennlinie nur geringfügig vergrößert. Die Ausgangsspannung nimmt somit in fast gleichem Maße zu wie die Eingangsspannung und ist mit dieser in Phase. Die Spannungsverstärkung ist:

Gl. 169: Wechselspannungsverstärkung der Kollektorschaltung

$$V_{uC} = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_e} \approx 1 \quad (\leq 1)$$

Die Kollektorschaltung wird üblicherweise als **Emitterfolger** bezeichnet, da das Emitterpotential dem Basispotential nachfolgt.

19.11.3.4 Leistungsverstärkung

Die Leistung im Eingangskreis ist $P_e = U_e \cdot I_B$. Die Ausgangsspannung ist $U_a = V_{uC} \cdot U_e$ und der Strom im Ausgangskreis ist $I_c = \gamma \cdot I_B$. Die Leistung im Ausgangskreis ist somit $P_a = V_{uC} \cdot U_e \cdot \gamma \cdot I_B$. Damit ergibt sich die Leistungsverstärkung mit $\gamma = \beta + 1 \approx \beta$ aus:

Gl. 170: Leistungsverstärkung der Kollektorschaltung

$$V_{pC} = \frac{P_a}{P_e} = \gamma \cdot V_{uC} \approx \beta \cdot V_{uC}$$

19.11.3.5 Verhalten bei hohen Frequenzen

Die obere Grenzfrequenz f_γ der Kollektorschaltung hat den gleichen Wert wie die obere Grenzfrequenz f_β der Emitterschaltung: $f_\gamma = f_\beta$.

Tabelle 16: Vergleich der drei Transistor-Grundsaltungen (Zahlenwerte sind nur grobe Richtwerte)

	Basisschaltung	Emitterschaltung	Kollektorschaltung
Eingangsimpedanz	klein (5 Ω bis 100 Ω)	mittel (1 k Ω bis 10 k Ω)	groß (10 k Ω bis 500 k Ω)
Ausgangsimpedanz	sehr groß (bis 500 k Ω)	mittel (1 k Ω bis 10 k Ω)	klein (5 Ω bis 100 Ω)
Spannungsverstärkung	groß (bis 1000fach)	groß (bis 1000fach)	< 1
Leistungsverstärkung	mittel (bis 1000)	sehr groß (bis 10000)	klein (bis 100)
Grenzfrequenz	hoch (f_α bis 5 GHz)	mittel (f_β bis 20 MHz)	mittel (f_γ bis 20 MHz)
Phasenwinkel U_a zu U_e	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 180^\circ$	$\varphi = 0^\circ$
Stromverstärkung	< 1 (0,95 < α < 0,99)	groß ($\beta = 10$ bis 1000)	groß ($\gamma = \beta + 1$)

19.12 Rückkopplung

Mit Rückkopplung bezeichnet man die (teilweise) Rückführung eines Signals vom Ausgang (z.B. eines Verstärkers) über ein (im allgemeinen passives) Netzwerk auf den Eingang. Wird durch die Rückkopplung die Verstärkung vermindert, so spricht man von **Gegenkopplung**. Wird durch die Rückkopplung die Verstärkung vergrößert, so spricht man von **Mitkopplung**. Bei der Gegenkopplung wird das Eingangssignal durch das rückgeführte Signal verkleinert, bei der Mitkopplung vergrößert. Daraus folgt, daß bei der Gegenkopplung das rückgekoppelte Signal gegenüber dem Eingangssignal im Idealfall um 180° phasenverschoben ist, und daß bei Mitkopplung das rückgeführte Signal mit dem Eingangssignal in Phase ist.

Wird eine Wechselgröße rückgekoppelt, so spricht man von Signalarückkopplung (Wechselspannungs- bzw. Wechselstrom-Rückkopplung, dynamische Rückkopplung). Bei der Rückkopplung einer schwankenden Gleichgröße spricht man von Gleichspannungs- bzw. Gleichstrom-Rückkopplung (statische Rückkopplung).

Eine Signalmitkopplung kann bei einem Oszillator gewollt zur Erzeugung selbsterregter elektrischer Schwingungen dienen. Eine Signalgegenkopplung kann sich bei einer Verstärkerschaltung aber auch unbeabsichtigt in eine Signalmitkopplung verwandeln. Aufgrund der Phasenverschiebung im Verstärker und im Rückkopplungsnetzwerk ist das rückgekoppelte Signal um weniger als 180° gegenüber dem Eingangssignal phasenverschoben. Nimmt die Phasenverschiebung des Verstärkers (z.B. durch Kapazitäten) mit der Frequenz zu, so ist bei einer bestimmten Frequenz das rückgekoppelte Signal mit dem Eingangssignal in Phase. Bei dieser Frequenz besitzt der Verstärker keine Gegenkopplung sondern eine Mitkopplung, und es treten unerwünschte selbsterregte Schwingungen auf (»die Schaltung schwingt«). Die Stabilitätsbedingungen sind dann nicht mehr erfüllt.

Obwohl durch die Gegenkopplung die Verstärkung verringert wird, überwiegen die Vorteile.

Eine Signalgegenkopplung wirkt sich günstig auf die Verstärkereigenschaften aus. Eingangs- und Ausgangsimpedanz einer Verstärkerstufe lassen sich durch eine Signalgegenkopplung verändern und die einzelnen Stufen leichter anpassen. Auch der Frequenzgang einer Verstärkerstufe kann

geändert werden. Durch eine Gegenkopplung mit ohmschen Widerständen wird die Verstärkung vermindert und die obere Grenzfrequenz (und damit die Bandbreite) erhöht, wobei das Verstärkungs-Bandbreite-Produkt konstant bleibt. Durch frequenzabhängige Gegenkopplungen mit kapazitiven oder induktiven Rückkopplungsimpedanzen kann der Frequenzgang eines Verstärkers beeinflusst werden. Verzerrungen aufgrund der nichtlinearen Kennlinien der Transistoren werden durch eine Gegenkopplung reduziert.

Durch eine Gleichstrom- oder Gleichspannungs-Gegenkopplung wird der Arbeitspunkt stabilisiert. Die Verstärkerschaltung wird dadurch gegenüber Schwankungen der Temperatur und der Betriebsspannung sowie Exemplarstreuungen weitgehend unempfindlich.

Allgemein gibt es vier Möglichkeiten der Gegenkopplung. Die rückgekoppelte Größe kann parallel zum Verstärkerausgang, also als Ausgangsspannung, abgegriffen werden und dem Gegenkopplungsnetzwerk zugeführt werden. In diesem Fall spricht man von **Spannungsgegenkopplung**. Verstärkerausgang und Eingang des Gegenkopplungsnetzwerks sind dann parallel geschaltet. Die andere Möglichkeit ist, daß der Ausgangsstrom in das Gegenkopplungsnetzwerk fließt (**Stromgegenkopplung**). Verstärkerausgang und Eingang des Gegenkopplungsnetzwerks sind dann in Reihe geschaltet. Am Verstärkereingang kann die rückgekoppelte Größe entweder als Spannung oder als Strom eingespeist werden. Entsprechend sind Verstärkereingang und Ausgang des Gegenkopplungsnetzwerks entweder in Reihe oder parallel geschaltet.

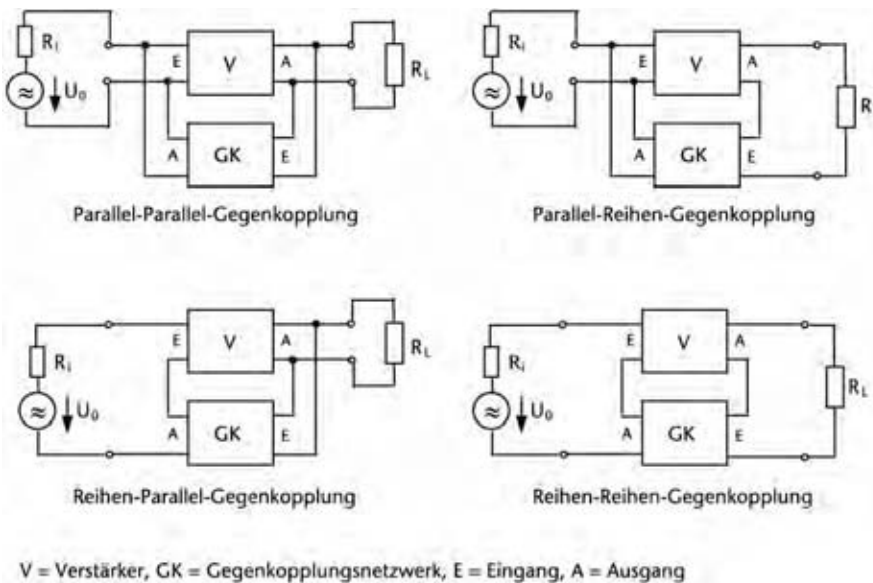


Abb. 366: Die vier Möglichkeiten der Gegenkopplung

Folgen mehrere Verstärkerstufen aufeinander, so kann auch von einer der nachfolgenden Stufen auf die erste Verstärkerstufe zurückgekoppelt werden. Für die Verstärkung ist es dabei gleichgültig, ob z.B. bei einem zweistufigen Verstärker über alle zwei Stufen um 20 dB oder in jeder Stufe nur um 10 dB gegengekoppelt wird. Für den Nutzen der Gegenkopplung ist dies aber nicht gleichgültig. Unerwünschte Schwankungen der Verstärkerelemente, der Betriebsspannung usw.

werden im ersten Fall um 20 dB verkleinert, im zweiten Fall nur um 10 dB. Eine Gegenkopplung über mehrere Verstärkerstufen ist also günstiger, jedoch ist es schwieriger, die Schaltung stabil zu halten und ein Schwingen zu vermeiden.



Abb. 367: Möglichkeiten der Gegenkopplung bei einem zweistufigen Verstärker (Beispiel: insgesamt 20 dB)

In obiger Abbildung sind Funktionsgruppen (Verstärker V_1 , V_2) in einem Block zusammengefaßt. Eine solche Darstellung wird **Blockschaltbild** genannt. Komplizierte und umfangreiche Grundschaltungen lassen sich durch ein Blockschaltbild besser überblicken. Die Darstellung ist außerdem noch weiter vereinfacht, indem Hin- und Rückleitungen der einzelnen Blöcke durch nur eine Verbindung ersetzt sind. Diese Einzelverbindung hat nicht mehr die Bedeutung eines tatsächlich vorhandenen elektrischen Leiters, sondern kennzeichnet nur den Signalweg (Signalfluß) und bringt zum Ausdruck, daß der einzelne Block ein Signal, welches eine Spannung oder ein Strom sein kann, erhält oder abgibt.

Am Beispiel der Reihen-Parallel-Gegenkopplung wird nun der Einfluß der Gegenkopplung auf die Verstärkung, auf die Eingangsimpedanz und auf den Frequenzgang eines Verstärkers untersucht.

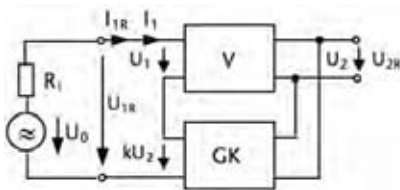


Abb. 368: Zum Einfluß der Gegenkopplung

Verstärkung

Die Spannungsverstärkung ohne Gegenkopplung (**Leerlaufverstärkung**) ist $V = \frac{U_2}{U_1}$.

Mit Gegenkopplung ist die Spannungsverstärkung $V_R = \frac{U_{2R}}{U_{1R}}$.

Es gilt: $U_{2R} = U_2$ und $U_{1R} = U_1 + k \cdot U_2$. Somit ist: $V_R = \frac{U_{2R}}{U_{1R}} = \frac{U_2}{U_1 + kU_2} = \frac{\frac{U_2}{U_1}}{1 + k \cdot \frac{U_2}{U_1}} = \frac{V}{1 + kV}$

Gl. 171: Spannungsverstärkung bei Gegenkopplung

$$V_R = \frac{V}{1 + kV}$$

Gegenkopplung liegt vor für: $1 + k \cdot V > 1$ und somit $V_R < V$.

Mitkopplung liegt vor für: $1 + k \cdot V < 1$ und somit $V_R > V$.

Ist $k \cdot V = -1$, so wird V_R unendlich groß und es tritt eine konstante Selbsterregung auf (Oszillator).

Der Ausdruck kV wird Schleifenverstärkung des rückgekoppelten Verstärkers genannt.

Der Gegenkopplungsfaktor k gibt an, welcher Bruchteil der Ausgangsspannung des Verstärkers auf seinen Eingang zurückgeführt wird und ist definiert als das Verhältnis der Gegenkopplungsspannung zur Ausgangsspannung. Mit $U_R = k \cdot U_2$ ist

Gl. 172: Definition des Gegenkopplungsfaktors

$$k = \frac{U_R}{U_2}$$

Der Ausdruck $G = 1 + kV$ wird als Gegenkopplungsgrad bezeichnet. Er ist das Verhältnis zwischen der Leerlaufverstärkung V und der Verstärkung V_R mit Gegenkopplung und gibt an, um welchen Faktor die Leerlaufverstärkung durch die Gegenkopplung herabgesetzt wird.

$$G = \frac{V}{V_R} = \frac{V}{\frac{V}{1+kV}} = 1 + kV \approx kV \text{ für } kV \gg 1$$

Ist das Produkt kV bei einer Gegenkopplung groß gegen 1, so ergibt sich eine von der Leerlaufverstärkung V fast unabhängige Verstärkung $V_R = \frac{1}{k}$. Dies wird durch eine große Leerlaufverstärkung erreicht, wie folgende Rechnung zeigt: $V_R = \frac{V}{1+kV} = \frac{1}{\frac{1}{V} + k} \approx \frac{1}{k}$ für $V \gg 1$

Die Verstärkung V_R hängt dann nur noch von der Größe k ab, welche durch passive Bauelemente (z.B. ohmsche Widerstände) mit kleinen Toleranzen, geringen Temperaturänderungen und zu vernachlässigenden Nichtlinearitäten bestimmt wird. Mit anderen Worten: Der Faktor k des passiven Rückkopplungsnetzwerks ist kaum Schwankungen unterworfen. V_R ändert sich deshalb nicht, falls V schwankt infolge von Exemplarstreuungen, Temperaturänderungen, Nichtlinearitäten oder Größenänderungen durch Alterung der Bauteile.

Um zu ermitteln, wie sich Änderungen von V auf V_R auswirken, wird V_R unter Anwendung der Quotientenregel nach V differenziert. $\frac{dV_R}{dV} = \frac{1+kV - kV}{(1+kV)^2} = \frac{1}{(1+kV)^2}$. Auflösen nach dV_R ergibt:

$dV_R = \frac{1}{(1+kV)^2} \cdot dV$. Die Änderung der Verstärkung ΔV_R des gegengekoppelten Verstärkers durch eine Änderung der Verstärkung ΔV des nicht gegengekoppelten Verstärkers ist $\Delta V_R = \frac{1}{(1+kV)^2} \cdot \Delta V$.

Die relative Verstärkungsänderung ist somit $\frac{\Delta V_R}{V_R} = \frac{\frac{1}{(1+kV)^2} \cdot \Delta V}{\frac{V}{1+kV}} = \frac{1}{1+kV} \cdot \frac{\Delta V}{V}$.

Die relative Verstärkungsänderung des gegengekoppelten Verstärkers ist also um

den Faktor $1/(1+kV) = 1/G \approx 1/kV$ kleiner gegenüber der relativen Verstärkungsänderung des nicht gegengekoppelten Verstärkers.

Beispiel: Die Leerlaufverstärkung sei $V = 10000$, die Verstärkung mit Gegenkopplung sei $V_R = 100$. Damit ist der Gegenkopplungsgrad $G = 100$. Ändert sich die Leerlaufverstärkung um 10 % ($\Delta V = 1000$), so ändert sich V_R um 0,1 % ($\Delta V_R = 0,1$).

Eine Änderung von V kann von einer nichtlinearen Übertragungskennlinie herrühren. Die Gegenkopplung verbessert daher auch die Linearität der Übertragungskennlinie.

Eingangsimpedanz

Aus Abb. 368 ergibt sich: $r_{eR} = \frac{U_{IR}}{I_R} = \frac{U_{IR}}{I_1} = \frac{U_1 + kU_2}{I_1} = \frac{U_1 + kVU_1}{I_1} = \frac{U_1}{I_1}(1 + kV) = r_e \cdot (1 + kV)$

Gl. 173: Eingangsimpedanz eines am Eingang in Reihe gegengekoppelten Verstärkers

$$r_{eR} = r_e \cdot (1 + kV)$$

Da die Eingangsspannung des am Eingang in Reihe gegengekoppelten Verstärkers steigt, wird sein Eingangswiderstand größer. Der Eingangswiderstand r_e des nicht gegengekoppelten Verstärkers vergrößert sich um den Faktor $(1 + kV)$ und ergibt den Eingangswiderstand r_{eR} des am Eingang in Reihe gegengekoppelten Verstärkers.

Frequenzgang

In Abschnitt 11.6.7 haben wir einen Tiefpaß erster Ordnung am Beispiel eines RC-Tiefpasses kennengelernt.

Die normierte Übertragungsfunktion war dort $H(j\omega) = \frac{U_A}{U_E} = \frac{1}{1 + j\omega}$.

Die Ausgangsspannung U_A konnte nicht größer als die Eingangsspannung U_E werden, da es sich um ein passives Netzwerk handelte, und U_A wurde mit zunehmender Frequenz kleiner. Wir nehmen jetzt an, daß eine nicht gegengekoppelte Verstärkerstufe bezüglich des Frequenzganges der Verstärkung das Verhalten eines Tiefpasses erster Ordnung aufweist.

Die Verstärkung der Stufe ist damit $H(j\omega) = V = \frac{V_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_\beta}}$. Darin ist:

V_0 = Verstärkung unterhalb der Grenzfrequenz ω_β

ω_β = Grenzfrequenz (gegeben durch die Stromverstärkung des Transistors).

Für die gegengekoppelte Verstärkerstufe ergibt sich der Frequenzgang der Verstärkung:

$$V_R = \frac{V}{1 + kV} = \frac{\frac{V_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_\beta}}}{1 + k \cdot \frac{V_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_\beta}}} = \frac{V_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_\beta} + kV_0} = \frac{V_0}{kV_0 \cdot \left(\frac{1}{kV_0} + j\frac{\omega}{kV_0\omega_\beta} + 1 \right)} = \frac{1}{k \cdot \left(\frac{1}{kV_0} + j\frac{\omega}{kV_0\omega_\beta} + 1 \right)}.$$

Mit $kV_0 \gg 1$ und $\omega_{\beta R} = kV_0\omega_\beta$ folgt: $V_R = \frac{1}{k \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{\beta R}} \right)}$. Mit $V_{OR} = \frac{1}{k}$ wird $V_R = \frac{V_{OR}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{\beta R}}}$. Dies ist

ebenfalls der Frequenzgang eines Tiefpasses erster Ordnung.

Mit $k = \frac{1}{V_{OR}}$ folgt aus $\omega_{\beta R} = kV_0\omega_\beta$: $\omega_{\beta R} = \frac{V_0}{V_{OR}} \cdot \omega_\beta$ oder

Gl. 174: Verstärkungs-Bandbreite-Produkt

$$\omega_{\beta R} \cdot V_{OR} = \omega_\beta \cdot V$$

Diese Gleichung sagt aus, daß das **Produkt aus Verstärkung und Bandbreite konstant** ist und durch die Gegenkopplung nicht beeinflußt wird. Somit kann durch Verringerung der Verstärkung die Bandbreite vergrößert werden. Die Bandbreite wird um den Faktor vergrößert, um den die Verstärkung herabgesetzt wird. Ein Verstärker hat also **entweder eine hohe Verstärkung oder eine große Bandbreite, aber nicht gleichzeitig beides**.

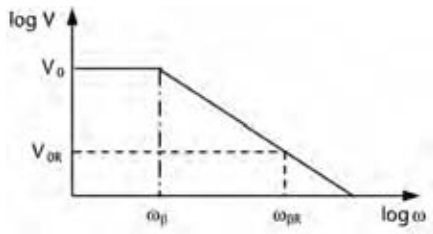


Abb. 369: Durch Gegenkopplung wird die Verstärkung kleiner und die Bandbreite größer

19.13 Emitterstufe mit Gegenkopplung

Gleichstrom-Gegenkopplung

Zum Stabilisieren des Arbeitspunktes eines Transistors ist eine Gleichstrom-Gegenkopplung sehr gut geeignet.

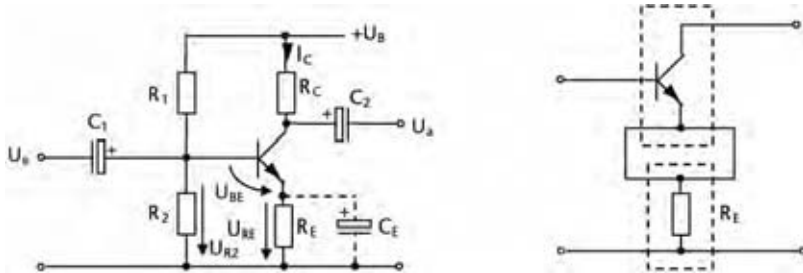


Abb. 370: Emitterstufe mit Stromgegenkopplung (links) und vereinfachte Vierpoldarstellung (rechts) Koppelkondensatoren C_1, C_2 sind mit eingezeichnet

Die Gleichstrom-Gegenkopplung wird durch den Emittorwiderstand R_E (ca. 10...1000 Ω) hervorgerufen. Wie aus obiger Abbildung rechts zu ersehen ist, handelt es sich um eine Reihen-Reihen-Gegenkopplung. Steigt infolge einer Temperaturerhöhung der Kollektorstrom und damit der Emittorstrom, so steigt ebenfalls der Gleichspannungsabfall $U_{RE} = I_E \cdot R_E$.

Nach einer Maschengleichung ist $U_{BE} = U_{R2} - U_{RE}$. Wird U_{RE} größer, so wird U_{BE} kleiner. Somit sinkt der Kollektorstrom wieder, und der temperaturbedingten Stromsteigerung wird entgegengewirkt.

Der Gleichspannungsabfall U_{RE} muß stets kleiner bleiben als U_{R2} , da sich sonst die Richtung von U_{BE} umkehrt und kein Verstärkerbetrieb mehr vorliegt. Unter Einhaltung dieser Bedingung ist die stabilisierende Wirkung dieser Gleichstrom-Gegenkopplung um so besser, je größer R_E gemacht wird.

Damit keine zusätzliche Wechselstrom-Gegenkopplung auftritt, wird R_E durch einen Kondensator C_E wechselstrommäßig überbrückt. Dadurch werden Wechselspannungen an R_E kurzgeschlossen und nicht auf den Eingang der Verstärkerstufe zurückgeführt.

Wechselstrom-Gegenkopplung

Ist eine zusätzliche Signalgegenkopplung erwünscht, so muß C_E entfallen. Soll die Signalgegenkopplung schwächer als die Gleichstrom-Gegenkopplung sein, so kann mit C_E ein Widerstand in Reihe geschaltet werden. Der Ausgangswechselstrom erzeugt an R_E einen Wechselspannungsabfall, der (wegen der Phasenumkehr der Emitterschaltung) im Eingangskreis gegenphasig zur Eingangsspannung in Reihe liegt. Die Wechselstrom-Gegenkopplung wirkt um so besser, je niedriger der Innenwiderstand der Signalquelle am Eingang der Verstärkerstufe ist. Da Eingangsspannung und Gegenkopplungswechselspannung in Reihe liegen, muß eine Spannungssteuerung vorliegen. Bei Stromsteuerung aus einer Signalquelle mit hohem Innenwiderstand ist die Gegenkopplungswechselspannung fast ohne Wirkung.

Durch R_C und R_E fließt fast der gleiche Strom I_C . Damit ist $U_a = -I_C \cdot R_C$ und $U_{RE} = I_C \cdot R_E$. Der Gegenkopplungsfaktor k als Verhältnis von Gegenkopplungswechselspannung zu Ausgangsspannung (Gl. 172) berechnet sich damit zu $k = \frac{U_{RE}}{U_a} = \frac{I_C \cdot R_E}{-I_C \cdot R_C}$; $k = -\frac{R_E}{R_C}$. Daraus erhält man

mit Gl. 171: $V_R = \frac{V}{1 - \frac{R_E}{R_C} \cdot V}$ mit $V = V_{uE} = -\frac{I_C \cdot R_C}{U_T}$ (Leerlaufverstärkung) aus Gl. 159. Einsetzen

ergibt:

Gl. 175: Wechselspannungsverstärkung der Emitterschaltung bei Wechselstrom-Gegenkopplung

$$V_R = \frac{-R_C \cdot I_C}{U_T + R_E \cdot I_C} \approx -\frac{R_C}{R_E}$$

Der Eingangswiderstand ist nach Gl. 173: $r_{eR} = r_e \cdot (1 + kV)$. Mit $r_e = r_{eE} = \frac{U_T \cdot B}{I_C}$ nach Gl. 156 und

$V = V_{uE}$ nach Gl. 159 erhält man: $r_{eR} = \frac{U_T \cdot B}{I_C} + \frac{U_T \cdot B}{I_C} \cdot \frac{R_E}{R_C} \cdot \frac{I_C \cdot R_C}{U_T}$. Nach Kürzen folgt:

Gl. 176: Eingangsimpedanz der Emitterschaltung bei Reihen-Gegenkopplung am Eingang

$$r_{eR} = \frac{U_T \cdot B}{I_C} + B \cdot R_E$$

Durch die Stromgegenkopplung der Emitterstufe nimmt die Spannungsverstärkung ab, während der Eingangswiderstand erhöht wird.

Gleichspannungs-Gegenkopplung

Die Gleichspannungs-Gegenkopplung eignet sich ebenfalls zum Stabilisieren des Arbeitspunktes eines Transistors.

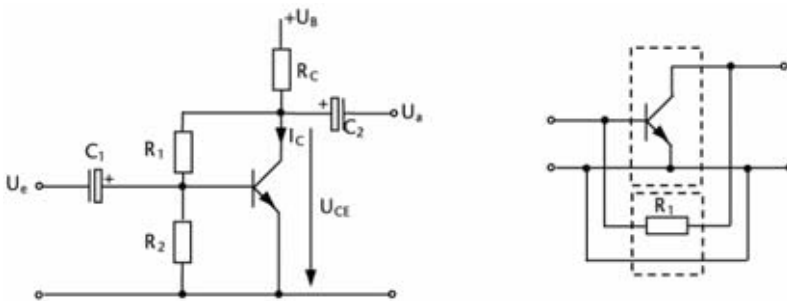


Abb. 371: Emitterstufe mit Spannungsgegenkopplung (links) und vereinfachte Vierpoldarstellung (rechts)

Wie man aus obiger Abbildung rechts sieht, handelt es sich um eine Parallel-Parallel-Gegenkopplung. Der Spannungsteiler R_1 , R_2 zur Erzeugung der Basisvorspannung wird nicht an $+U_B$ angeschlossen, sondern an den Kollektor. Steigt bei einer Erhöhung der Temperatur der Kollektorgleichstrom I_C an, so erhöht sich der Gleichspannungsabfall an R_C , und die Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} vermindert sich. Da U_{CE} den Spannungsteiler R_1 , R_2 speist, sinkt dadurch auch die Basisvorspannung und damit der Basisstrom, der Kollektorstrom nimmt wieder ab.

Wechselspannungs-Gegenkopplung

Durch die Gleichspannungs-Gegenkopplung tritt gleichzeitig eine Wechselspannungs-Gegenkopplung auf. Über den Widerstand R_1 wird vom Kollektor ein Teil der Ausgangswechselspannung, welche gegenphasig zur Eingangswechselspannung ist, auf die Basis zurückgeführt. Dadurch sinkt die Wechselspannungsverstärkung.

19.14 Ersatzschaltungen des Transistors

Die Untersuchung des Signalverhaltens von Transistoren wird wesentlich erleichtert, wenn man für den Transistor eine Ersatzschaltung benutzt. Die komplizierten inneren Zusammenhänge des Transistors werden dann nicht mehr betrachtet. Statt dessen verwendet man eine Ersatzschaltung aus linearen Schaltelementen (R , C) und Signaleratzquellen. Diese linearen Ersatzschaltungen gelten natürlich nur für Aussteuerungen, für die man das Verhalten des Transistors als

linear ansehen und die Kennlinienkrümmungen vernachlässigen kann, d.h. für die Kleinsignalverstärkung.

Die Ersatzschaltungen können auf zwei verschiedene Arten aufgestellt werden.

1. Man geht von Vierpolgleichungen aus und bildet eine Ersatzschaltung, die den Vierpolgleichungen rein formal entspricht. Die Ersatzschaltung gibt die physikalischen Vorgänge im Inneren des Transistors **nicht** wieder. Eine solche Ersatzschaltung wird **formale Ersatzschaltung** genannt.
2. Ausgehend von den physikalischen Vorgängen im Inneren des Transistors kommt man zu einer Ersatzschaltung, deren Elemente eine bestimmte physikalische Bedeutung haben. Eine derartige Ersatzschaltung wird **Funktionsersatzschaltung** oder **physikalische Ersatzschaltung** genannt.

19.14.1 Die formale Ersatzschaltung

Für das zu verstärkende Signal verkörpert der Transistor eine »Schaltung« mit zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen. Betrachtet man den Transistor also »von außen her«, so stellt er einen Vierpol dar.

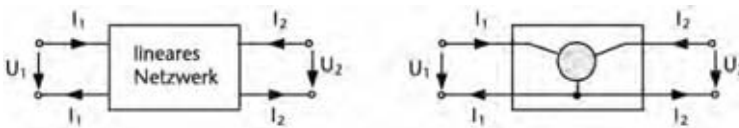


Abb. 372: Allgemeiner linearer Vierpol (links) und Transistor als Vierpol in beliebiger Grundschialtung (rechts)

Ein Vierpol oder Zweitor ist ein Netzwerk mit zwei Eingangsklemmen (dem Eingangstor) und zwei Ausgangsklemmen (dem Ausgangstor). Es wird angenommen, daß hineinfließender und herausfließender Strom des jeweiligen Tors gleich groß sind.

Das elektrische Verhalten linearer Vierpole läßt sich eindeutig durch zwei Gleichungen beschreiben. Diese **Vierpolgleichungen** verknüpfen die elektrischen Eingangsgrößen (U_1 , I_1) mit den elektrischen Ausgangsgrößen (U_2 , I_2). Von den Eingangs- und Ausgangsgrößen können zwei als abhängige Variable (gesteuerte Größen) und zwei als unabhängige Variable (steuernde Größen) aufgefaßt werden. Der lineare Zusammenhang zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen wird durch konstante, nur vom inneren Aufbau des Vierpols abhängige Faktoren hergestellt, die **Vierpolparameter** genannt werden. Ohne den inneren Aufbau und die Wirkungsweise des Vierpols zu kennen, können die Vierpolparameter durch Messungen an den Eingangs- und Ausgangsklemmen bestimmt werden.

Es gibt mehrere Arten von Vierpolparametern.

Für niedrige Frequenzen (bis einige zehn kHz) werden die h-Parameter als Kenngrößen für Transistoren benutzt. Man bezeichnet die h-Parameter als **Hybridparameter**, da sie unterschiedliche Einheiten haben (Widerstand, Leitwert, einheitenlos). Die h-Parameter sind reelle Zahlen, solange bei niedrigen Frequenzen die Ladungsträgerlaufzeiten und die Kapazitäten des Transistors vernachlässigt werden können.

Bei hohen Frequenzen (bis ca. 100 MHz) verwendet man die Vierpolgleichungen mit y-Parametern, die alle die Einheit von Leitwerten haben, und daher auch Leitwertparameter genannt werden. Bei hohen Frequenzen sind Signalspannungen und -ströme nicht mehr in Phase, daher sind die y-Parameter komplexe Größen.

Bei sehr hohen Frequenzen (> ca. 100 MHz) werden in den Vierpolgleichungen die s-Parameter (**Streuparameter**) verwendet. Die verschiedenen Arten der Vierpolparameter lassen sich ineinander umrechnen (die Formeln werden hier nicht angegeben).

Die Vierpolgleichungen mit h-Parametern lauten (siehe Abb. 372):

$$U_1 = h_{11} \cdot I_1 + h_{12} \cdot U_2$$

$$I_2 = h_{21} \cdot I_1 + h_{22} \cdot U_2$$

U und I sind hierin die Scheitelwerte sinusförmiger Signalspannungen und -ströme.

Die Zahlenwerte der h-Parameter sind abhängig von Typ, Grundschaltung, Arbeitspunkt und Exemplarstreuungen des Transistors.

Die h-Parameter einer bestimmten Grundschaltung können über hier nicht aufgeführte Formeln für eine andere Grundschaltung umgerechnet werden.

Aus den h-Parametern lassen sich mittels Formeln z.B. Eingangs-, Ausgangswiderstand oder Spannungsverstärkung des am Eingang aus einer Signalquelle mit Innenwiderstand R_i gespeisten und am Ausgang mit einem Arbeitswiderstand R_L abgeschlossenen Transistorvierpols berechnen.

Mit $\Delta h = h_{11} \cdot h_{22} - h_{21} \cdot h_{12}$ gilt z.B.:

$$V_u = \frac{-h_{21} \cdot R_L}{h_{11} + \Delta h \cdot R_L} \quad r_e = \frac{h_{11} + \Delta h \cdot R_L}{1 + h_{22} \cdot R_L} \quad r_a = \frac{h_{11} + R_i}{\Delta h + h_{22} \cdot R_i}$$

Diese Gleichungen gelten für alle Grundschaltungen. Der Wert der einzelnen Vierpolparameter ist jedoch von der Grundschaltung, dem Arbeitspunkt und vom Transistortyp abhängig.

Wie man sieht, sind Signaleingangs- und Signalausgangswiderstand nicht nur von den Eigenschaften des Transistors selbst (von den h-Parametern), sondern auch von R_i bzw. R_L abhängig.

Die h-Parameter können für einen gegebenen Arbeitspunkt aus den statischen Kennlinien des Transistors graphisch entnommen werden.

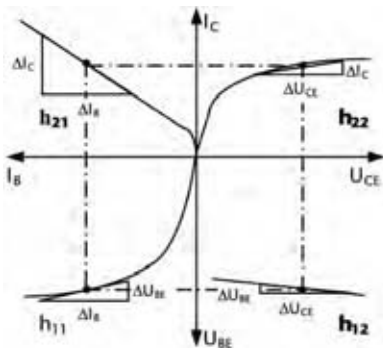


Abb. 373: Ermittlung der h-Parameter aus dem Vierquadranten-Kennlinienfeld bei Emitterschaltung

$$h_{11e} = \left. \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B} \right|_{U_{CE} = \text{konstant}} = \text{Steigung der Eingangskennlinie im Arbeitspunkt}$$

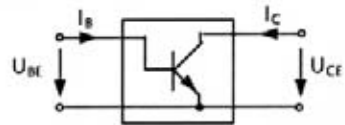
$$h_{12e} = \left. \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta U_{CE}} \right|_{I_B = \text{konstant}} = \text{Steigung der Spannungsrückwirkungskennlinie im Arbeitspunkt}$$

$$h_{21e} = \left. \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} \right|_{U_{CE} = \text{konstant}} = \beta = \text{Steigung der Strom-Steuerkennlinie im Arbeitspunkt}$$

$$h_{22e} = \left. \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{CE}} \right|_{I_B = \text{konstant}} = \text{Steigung der Ausgangskennlinie im Arbeitspunkt}$$

Für den Transistor in Emitterschaltung gelten somit die Vierpolgleichungen:

$$\begin{aligned} U_{BE} &= h_{11} \cdot I_B + h_{12} \cdot U_{CE} \\ I_C &= h_{21} \cdot I_B + h_{22} \cdot U_{CE} \end{aligned}$$



Beispiel für die Angabe der h-Parameter im Datenblatt eines Transistors für die Emitterschaltung:

Arbeitspunkt $I_C = 1 \text{ mA}$, $U_{CE} = 6 \text{ V}$; Meßfrequenz = 1 kHz

$h_{11e} = 5 \text{ k}\Omega$ (Eingangswiderstand)

$h_{12e} = 8 \cdot 10^{-4}$ (Spannungsrückwirkung, einheitenlos)

$h_{21e} = 250$ (Stromverstärkung β , einheitenlos)

$h_{22e} = 20 \text{ }\mu\text{S}$ (Ausgangsleitwert)

Die formalen Zusammenhänge der Vierpolgleichungen lassen sich in einem formalen Ersatzschaltbild veranschaulichen.

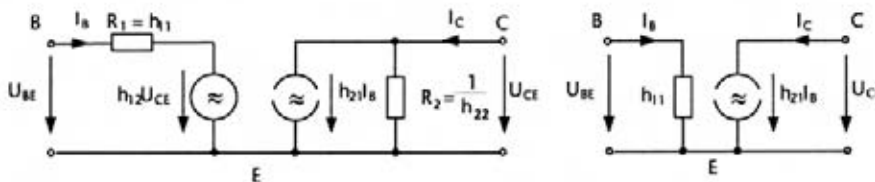


Abb. 374: Formales Ersatzschaltbild eines Transistors mit h-Parametern (links), vereinfachtes formales Ersatzschaltbild (rechts)

Durch Vernachlässigung der Spannungsrückwirkung ($h_{12} = 0$) und unter Berücksichtigung, daß der Kollektor-Emitter-Widerstand R_2 sehr groß ist, erhält man das vereinfachte Ersatzschaltbild.

In obiger Abbildung sind die Spannungsquelle mit dem Wert $h_{12}U_{CE}$ und die Stromquelle mit dem Wert $h_{21}I_B$ gesteuerte Quellen. Den Begriff der gesteuerten Quelle benutzt man zur Beschreibung verstärkender Elemente wie z.B. Transistoren. An den Klemmen einer unabhängigen Spannungsquelle liegt eine Leerlaufspannung U_q , die von Spannung oder Strom in irgendeinem anderen Teil des Netzwerks unabhängig ist. Eine unabhängige Stromquelle liefert einen

von ihrer Belastung und von Spannung oder Strom in irgendeinem anderen Teil des Netzwerks unabhängigen (eingepprägten) Strom I_q . Bei gesteuerten (abhängigen) Quellen hängen Leerlaufspannung und Kurzschlußstrom von Spannung oder Strom in irgendeinem anderen Teil des Netzwerks ab. Unabhängige und gesteuerte Quellen sind aktive Netzwerkelemente. Die Abhängigkeit einer gesteuerten Quelle von einer bestimmten Spannung oder einem bestimmten Strom an einer anderen Stelle wird durch einen konstanten Steuerkoeffizienten k ausgedrückt, falls die Abhängigkeit zeitunabhängig ist. Im Gegensatz zur unabhängigen Quelle ist bei der gesteuerten Quelle die Leerlaufspannung U_q bzw. der Kurzschlußstrom I_q nicht konstant, sondern proportional einer Steuerspannung oder einem Steuerstrom.

Da sowohl eine Spannungsquelle als auch eine Stromquelle jeweils spannungs- oder stromgesteuert sein kann, gibt es vier mögliche Arten gesteuerter Quellen.

Mit k = Steuerkoeffizient, U_1 = Steuerspannung, I_1 = Steuerstrom sind die gesteuerten Quellen:

$U_q = k \cdot U_1$ spannungsgesteuerte Spannungsquelle

$U_q = k \cdot I_1$ stromgesteuerte Spannungsquelle

$I_q = k \cdot U_1$ spannungsgesteuerte Stromquelle

$I_q = k \cdot I_1$ stromgesteuerte Stromquelle.

In Abb. 374 beschreibt die stromgesteuerte Stromquelle $h_{21} \cdot I_b = \beta \cdot I_b$ den Kollektorstrom I_c in Abhängigkeit der Stromverstärkung β und des Basisstromes I_b . Die spannungsgesteuerte Spannungsquelle $h_{12} \cdot U_{ce}$ beschreibt die Spannungsrückwirkung des Ausgangskreises auf den Eingangskreis in Abhängigkeit des Parameters für die Spannungsrückwirkung h_{12} und der Kollektor-Emitter-Spannung.

Durch seine Vierpolparameter wird das Signalverhalten eines Transistors vollständig beschrieben. Ihrer Stellung in den Vierpolgleichungen entsprechend faßt man deshalb die Vierpolparameter in einem Anordnungsschema zusammen, das man als **Matrix** bezeichnet.

$$\text{h-Matrix: } \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

Als **Determinante** der h-Matrix bezeichnet man die häufig vorkommende Verknüpfung der Matrixelemente $h_{11} \cdot h_{22} - h_{21} \cdot h_{12} = \Delta h$. Besonders Vorteilhaft ist die Matrizenschreibweise bei Schaltungen, die aus mehreren Vierpolen bestehen. Die Parameter des Gesamtvierpols lassen sich dann aus den Parametern der Einzelvierpole nach relativ einfachen Regeln der Matrizenrechnung bestimmen. Die Vierpolparameter einer Schaltung mit Gegenkopplung lassen sich z.B. berechnen, indem man die Gegenkopplungsschaltung ebenfalls als Vierpol auffaßt.

Es sei noch angemerkt, daß aus den Vierpolparametern die Elemente des physikalischen Ersatzschaltbildes und umgekehrt aus den Elementen der Funktionsersatzschaltung die Vierpolparameter berechnet werden können.

19.14.2 Die physikalische Ersatzschaltung

Die Elemente der Funktionsersatzschaltung haben eine bestimmte physikalische Bedeutung. Damit die Ersatzschaltung nicht unnötig kompliziert wird, verwendet man für den Gültigkeitsbereich von Genauigkeit und Frequenz nur die unbedingt nötigen Elemente. Bei niedrigen Fre-

quenzen werden innere Kapazitäten des Transistors vernachlässigt, das Funktionsersatzschaltbild besteht nur aus reellen Widerständen und einer gesteuerten Stromquelle.

Die Werte der Elemente der Funktionsersatzschaltung sind abhängig vom Arbeitspunkt, jedoch unabhängig von der Grundsaltung des Transistors. Das Funktionsersatzschaltbild muß nur für die jeweilige Grundsaltung umgezeichnet werden.

Man unterscheidet nach der Zeichnungsform zwischen T- und π -Ersatzschaltbild.

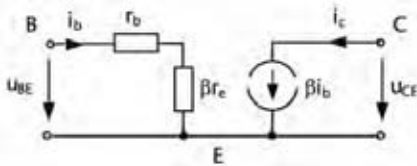


Abb. 375: Einfache π -Funktionsersatzschaltung eines Transistors in Emitterschaltung (NF-Bereich)

r_b ist der Basisbahnwiderstand (Widerstand vom äußeren Basisanschluß bis zur Basis-Emitter-Grenzschicht) und liegt je nach Transistortyp in der Größenordnung von 1 Ω bis 100 Ω . r_b kann gegenüber βr_e meist vernachlässigt werden ($r_b = 0 \Omega$).

r_e ist der differentielle Durchlaßwiderstand der Emitter-Basis-Diode im Arbeitspunkt.

Aus dem Ruhegleichstrom $I_E \approx I_C$ berechnet sich r_e aus

Gl. 177: Durchlaßwiderstand der Emitter-Basis-Diode im Arbeitspunkt

$$r_e \approx \frac{U_T}{I_E}$$

Bei Kleinsignaltransistoren liegt r_e zwischen 0,1 Ω und 10 Ω , je nach Transistortyp.

Für die drei Grundsaltungen werden noch die T-Ersatzschaltbilder des Transistors angegeben.

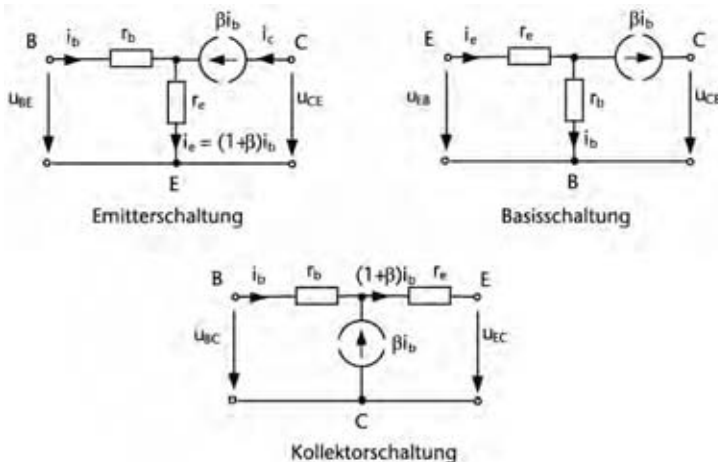


Abb. 376: Physikalische T-Ersatzschaltbilder der drei Grundsaltungen eines Transistors

Aufgabe 84:

Die Umgebungstemperatur beträgt 22 °C. Die Sättigungsspannung des Transistors ist $U_{CE\text{ sat}} = 0,3\text{V}$.

- Welche Wechselspannungsverstärkung besitzt die Transistorschaltung in Abb. 377?
- Wie groß darf U_e maximal sein, damit U_a unverzerrt bleibt?
- Wie groß ist die Eingangsimpedanz der Schaltung?
- Wie groß ist die Ausgangsimpedanz der Schaltung?
- Wie kann der Eingangswiderstand der Schaltung meßtechnisch bestimmt werden?
- Wie groß ist die Wechselspannungsverstärkung, wenn U_a mit $R_L = 10\text{ k}\Omega$ belastet wird?
- Berechnen Sie den Amplitudengang $|H(j\omega)| = \frac{|U_e(\omega)|}{|U_q(\omega)|}$ für den Fall, daß U_q über einen Koppelkondensator C eingekoppelt wird. Welche Charakteristik des Frequenzganges erhält man? Wie groß ist die Wechselspannungsverstärkung für $C = 1\text{ }\mu\text{F}$, $f = 10\text{ Hz}$?

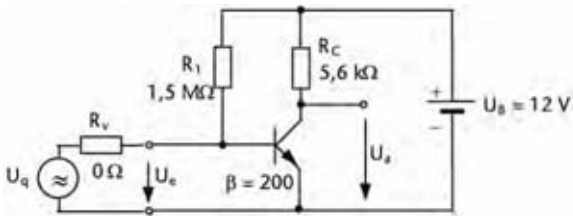


Abb. 377: Schaltung zu Aufgabe 84

Lösung:

a) Die Basis-Emitter-Strecke stellt eine leitende Diode dar. Damit beträgt die Basis-Emitter-Gleichspannung ca. $U_{BE} = 0,7\text{ V}$. An R_1 liegt somit die Gleichspannung $U_{R1} = U_B - U_{BE} = 11,3\text{ V}$. Durch R_1 fließt der Gleichstrom $I_B = \frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{11,3\text{ V}}{1,5\text{ M}\Omega} = 7,5\text{ }\mu\text{A}$. Dieser Strom fließt in die Basis des Transistors.

Mit $B \approx \beta = 200$ ergibt sich der Kollektorgleichstrom zu $I_C = B \cdot I_B = 1,5\text{ mA}$. Bei 22 °C ist $U_T = 25,4\text{ mV}$.

$$\text{Nach Gl. 159 ist } V_{UE} = -\frac{I_C \cdot R_C}{U_T} = -\frac{1,5\text{ mA} \cdot 5,6\text{ k}\Omega}{25,4\text{ mV}}; V_{UE} = -330$$

b) An R_C liegt die Gleichspannung $U_{RC} = I_C \cdot R_C = 1,5\text{ mA} \cdot 5,6\text{ k}\Omega = 8,4\text{ V}$. Die Kollektorspannung U_a kann nur Werte zwischen $12\text{ V} - 8,4\text{ V} = 3,6\text{ V}$ und $U_{CE\text{ sat}} = 0,3\text{ V}$ annehmen. U_e darf den Wert $\frac{3,6\text{ V} - 0,3\text{ V}}{330}$ nicht überschreiten, damit die positiven und negativen Spitzen von U_a nicht begrenzt werden. Für ein unverzerrtes Ausgangssignal muß $U_e \leq 10\text{ mV}$ sein.

$$\text{c) Die Eingangsimpedanz ist nach Gl. 156: } r_{eE} = \frac{U_T}{I_B} \cdot r_{eE} = 3,39\text{ k}\Omega$$

$$\text{d) Die Ausgangsimpedanz ist nach Gl. 157: } r_{aE} \approx R_C \cdot r_{aE} = 5,6\text{ k}\Omega.$$

e) Der Eingangswiderstand kann nach der Spannungsteilermethode gemessen werden. Mit einem Wechselspannungs-Voltmeter wird U_q und mit einem zweiten Wechselspannungs-Volt-

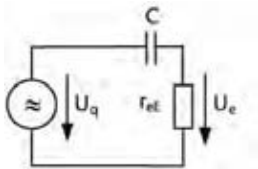
meter wird U_e gemessen. Der Vorwiderstand R_v wird solange erhöht, bis $U_e = U_q / 2$ ist (bzw. bei linearer Verstärkung, bis U_a auf die Hälfte des Wertes bei $R_v = 0$ abgesunken ist). Der Wert von R_v entspricht dann dem Eingangswiderstand.

Bei dieser Methode wird deutlich, daß der Innenwiderstand der speisenden Spannungsquelle U_q mit dem Eingangswiderstand der Schaltung einen Spannungsteiler bildet.

f) Wird U_a mit einem Lastwiderstand R_L (z.B. dem Eingangswiderstand der nachfolgenden Verstärkerstufe) belastet, so liegt R_L dynamisch (wechselstrommäßig) parallel zu R_C , da die Gleichspannungsquelle U_B für Wechselstrom einen Kurzschluß darstellt. Die Parallelschaltung von R_L und R_C ergibt 3590Ω . Die Wechselspannungsverstärkung ist somit

$$V_{uE} = -\frac{I_C \cdot R_C}{U_T} = -\frac{1,5 \text{ mA} \cdot 3590 \Omega}{25,4 \text{ mV}} \cdot V_{uE} = -212.$$

g) Der Eingangswiderstand r_{eE} bildet mit dem Koppelkondensator C einen frequenzabhängigen Spannungsteiler. Es ergibt sich der Frequenzgang von einem RC-Hochpaß.



Ersatzschaltbild mit Koppelkondensator C und Eingangswiderstand r_{eE}

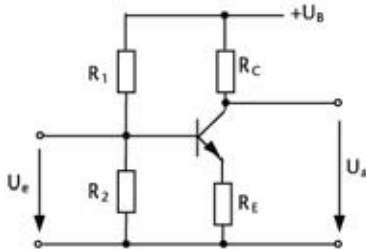
$$\text{Es ist } U_e(\omega) = U_q(\omega) \frac{r_{eE}}{r_{eE} + \frac{1}{j\omega C}} \text{ und somit } |H(j\omega)| = \frac{|U_e(\omega)|}{|U_q(\omega)|} = \frac{r_{eE}}{\sqrt{r_{eE}^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}.$$

Mit $r_{eE} = 3,39 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$, $f = 10 \text{ Hz}$ ist $|H(j\omega)| = 0,2$. Die Wechselspannungsverstärkung ist dann $0,2 \cdot V_{uE} \Rightarrow V_{uE} = -66$.

Aufgabe 85:

Die folgende Emitterschaltung ist so zu dimensionieren, daß die Wechselspannungsverstärkung $V_{uE} = -20$ beträgt. Die Schaltung soll am Eingang maximal aussteuerbar sein.

Vorgegeben sind: Betriebsspannung $U_B = 9 \text{ V}$, Stromverstärkung des Si-Transistors $B \approx \beta = 300$.



Lösung:

Es handelt sich um eine Emitterschaltung mit Gleichstrom- und Wechselstrom-Gegenkopplung.

Damit die Schaltung am Eingang maximal aussteuerbar ist, und U_a dabei unverzerrt bleibt, muß U_{CE} symmetrisch um den Arbeitspunkt herum maximal schwanken können. Dies ist der Fall,

wenn gilt: $U_{CE} = U_B / 2$. Der Arbeitspunkt liegt dann in der Mitte der Arbeitsgeraden. Der Kollektorgleichstrom ist im Prinzip frei wählbar. Es wird angesetzt: $I_C = 1 \text{ mA}$. Die Wechselspannungsverstärkung ist nach Gl. 175 überschlägig $V_R \approx -\frac{R_C}{R_E}$.

Mit $I_E \approx I_C$ gilt im Ausgangskreis die Maschengleichung $I_C \cdot R_C + U_{CE} + I_C \cdot R_E - U_B = 0$.

Mit $U_{CE} = U_B / 2$ und $R_E = -\frac{R_C}{V_R}$ eingesetzt wird der Kollektorwiderstand berechnet.

$$I_C \cdot R_C + \frac{U_B}{2} - I_C \cdot \frac{R_C}{V_R} - U_B = 0; R_C \cdot \left(I_C - \frac{I_C}{V_R} \right) = \frac{U_B}{2}; R_C = \frac{U_B \cdot V_R}{2 \cdot I_C \cdot (V_R - 1)}$$

$$R_C = \frac{9 \text{ V} \cdot (-20)}{2 \cdot 1 \text{ mA} \cdot (-20 - 1)}; R_C = 4,286 \text{ k}\Omega. \text{ Es wird der nächste Wert aus der Normreihe E24 mit } 4,3$$

k Ω gewählt. $R_C = 4,3 \text{ k}\Omega$.

Aus der Verstärkung und dem Kollektorwiderstand wird der Emitterwiderstand berechnet.

$$R_E = \frac{R_C}{|V_R|} = \frac{4,3 \text{ k}\Omega}{20} = 215 \Omega. \text{ Der Normwert aus der Reihe E48 ist } R_E = 215 \Omega.$$

Der Spannungsteiler R_1, R_2 dient zur Erzeugung der Basisvorspannung (zur Einstellung des Arbeitspunktes). Damit der Spannungsteiler als unbelastet angesehen werden kann und die Gleichstromverhältnisse stabil werden, wird das Querstromverhältnis mit 1:10 angesetzt. Durch den Widerstand R_2 , an dem die Gleichspannung U_{R2} liegt, soll also der 10fache Basisstrom fließen. Somit folgt für R_2 : $R_2 = \frac{U_{R2}}{10 \cdot I_B}$. Die Spannung U_{R2} ist die Summe aus der Basis-Emitter-

Spannung des Silizium-Transistors mit ca. 0,7 V und dem Spannungsabfall an R_E mit $215 \Omega \cdot 1 \text{ mA} = 0,215 \text{ V} \Rightarrow U_{R2} = 0,915 \text{ V}$.

Der Basisstrom ergibt sich aus $I_B = \frac{I_C}{\beta} = \frac{1 \text{ mA}}{300} = 3,33 \mu\text{A}$. Damit ist $R_2 = \frac{0,915 \text{ V}}{33,3 \mu\text{A}} = 27,48 \text{ k}\Omega$.

Gewählt wird aus der E48-Reihe: $R_2 = 27,4 \text{ k}\Omega$.

An R_1 liegt die Gleichspannung $U_B - U_{R2}$. Durch R_1 fließt der Gleichstrom $10 \cdot I_B + I_B$. Es folgt:

$$R_1 = \frac{U_B - U_{R2}}{11 \cdot I_B} = \frac{9 \text{ V} - 0,915 \text{ V}}{11 \cdot 3,33 \mu\text{A}}; R_1 = 220,7 \text{ k}\Omega. \text{ Aus der E12-Reihe wird gewählt: } R_1 = 220 \text{ k}\Omega.$$

Mit den jetzt bekannten Bauteilen ist die Wechselspannungsverstärkung überschlägig berechnet:

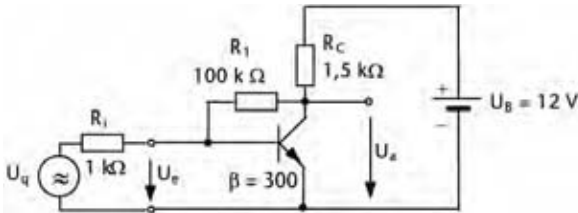
$$V_u \approx -\frac{R_C}{R_E} \approx -\frac{4,3 \text{ k}\Omega}{215 \Omega} \approx -20. \text{ Nach der genaueren Gleichung (Gl. 175) ist die Verstärkung:}$$

$$V_u = \frac{-R_C \cdot I_C}{U_T + R_E \cdot I_C} = -\frac{4,3 \text{ k}\Omega \cdot 1 \text{ mA}}{25,4 \text{ mV} + 215 \Omega \cdot 1 \text{ mA}} = -17,9. \text{ Die überschlägig berechnete Verstärkung ist}$$

um ca. 10 % höher als die genauer berechnete Verstärkung. Vergrößert man den Arbeitswiderstand R_C im Verhältnis $\frac{V_{\text{soll}}}{V_{\text{ist}}} = \frac{-20}{-17,9} = 1,1173$ auf den Wert $4,3 \text{ k}\Omega \cdot 1,1173 = 4,8 \text{ k}\Omega$ (Normwert der E48-Reihe 4,87 k Ω), so hat die Schaltung die gewünschte Verstärkung.

Aufgabe 86:

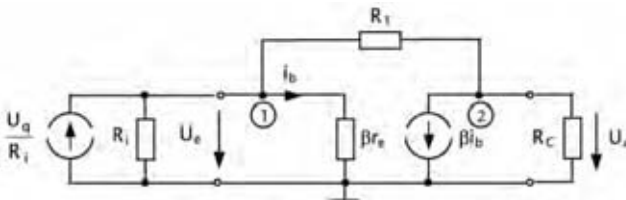
Mit einer Knotenanalyse ist unter Verwendung einer einfachen π -Funktionsersatzschaltung des Transistors (der Basisbahnwiderstand r_b kann vernachlässigt werden) die Verstärkung der folgenden Schaltung zu bestimmen. Die Verstärkerstufe ist am Eingang maximal aussteuerbar.



Lösung:

Zuerst wird das Wechselstrom-Ersatzschaltbild der Schaltung gezeichnet. Dabei wird die π -Funktionsersatzschaltung nach Abb. 375 benutzt. Zu beachten ist:

1. Bei einer Knotenanalyse sollen im Schaltbild nur Stromquellen vorkommen. Die Spannungsquelle U_q wird deshalb nach Abschnitt 8.6 in eine Stromquelle umgewandelt.
2. Der Arbeitswiderstand R_C liegt wechselstrommäßig parallel zum Ausgang, da die Gleichspannungsquelle U_B für Wechselstrom einen Kurzschluß darstellt.



Die Schaltung ist am Eingang maximal aussteuerbar, somit gilt: $U_{CE} = U_B / 2$. Damit wird der Kollektorstrom $I_C = \frac{U_B / 2}{R_C} = 4 \text{ mA}$. Nach Gl. 177 ist $r_e \approx \frac{U_T}{I_E} \approx \frac{25,4 \text{ mV}}{4 \text{ mA}} \approx 6,4 \Omega$

Knotenanalyse:

Als Bezugsknoten wird der Massepunkt gewählt. Für die Knoten ① und ② werden die Knotenpunktgleichungen aufgestellt.

$$\text{Knoten ①: } U_e \cdot \left(\frac{1}{\beta \cdot r_e} + \frac{1}{R_i} \right) + (U_e - U_a) \cdot \frac{1}{R_1} - \frac{U_q}{R_i} = 0 \quad (\text{Gl. 1})$$

$$\text{Knoten ②: } U_a \cdot \frac{1}{R_C} + (U_a - U_e) \cdot \frac{1}{R_1} + \beta \cdot i_b = 0 \quad (\text{Gl. 2})$$

$$\text{Isolieren der Knotenspannungen in Gl. 1 ergibt: } U_e \cdot \left(\frac{1}{\beta \cdot r_e} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_1} \right) - \frac{1}{R_1} \cdot U_a - \frac{U_q}{R_i} = 0$$

Mit eingesetzten Zahlenwerten folgt: $0,002 \cdot U_e - 10^{-5} \cdot U_a - 10^{-3} \cdot U_q = 0$

$$U_e = 5 \cdot 10^{-3} \cdot U_a + 0,5 \cdot U_q$$

Mit $i_b = \frac{U_e}{\beta \cdot r_e}$ folgt aus Gl. 2: $U_a \cdot \frac{1}{R_C} + (U_a - U_e) \cdot \frac{1}{R_1} + U_e \cdot \frac{1}{r_e} = 0$

Auflösen nach U_a ergibt: $U_a = -U_e \cdot \frac{(R_1 - r_e) \cdot R_C}{r_e \cdot (R_1 + R_C)}$; Zahlenwerte eingesetzt: $U_a = -231 \cdot U_e$

Einsetzen von U_e : $U_a = -231 \cdot (5 \cdot 10^{-3} \cdot U_a + 0,5 \cdot U_q) \Rightarrow U_a = -53,6 \cdot U_q$

$$V = \frac{U_a}{U_q}; V \approx -54$$

19.15 Spezielle Schaltungen mit Bipolartransistoren

19.15.1 Darlington-Schaltung

Reicht die Stromverstärkung eines einzigen Transistors (z.B. bei einem Leistungsverstärker) nicht aus, so kann der Basis des Ausgangstransistors ein Emittterfolger vorgeschaltet werden. Die dadurch entstehende Darlington-Schaltung wirkt wie ein einzelner Transistor mit sehr hoher Stromverstärkung. Die Gesamtstromverstärkung ist $\beta_{ges} = \beta_1 \cdot \beta_2$.

Darlington-Transistoren gibt es für viele Anwendungen fertig eingebaut in einem Gehäuse.

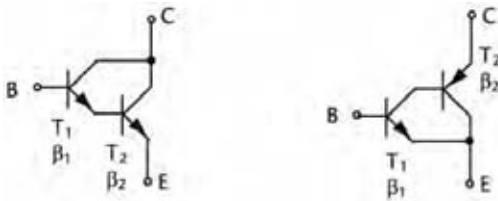


Abb. 378: Darlington-Schaltung (links) und Komplementär-Darlington-Schaltung, auch »NEP«-Transistor genannt (rechts)

19.15.2 Bootstrap-Schaltung

Der Eingangswiderstand einer Verstärkerstufe in Kollektor- oder Emitterschaltung kann mit einer als »Bootstrap« bezeichneten Methode erheblich vergrößert werden.

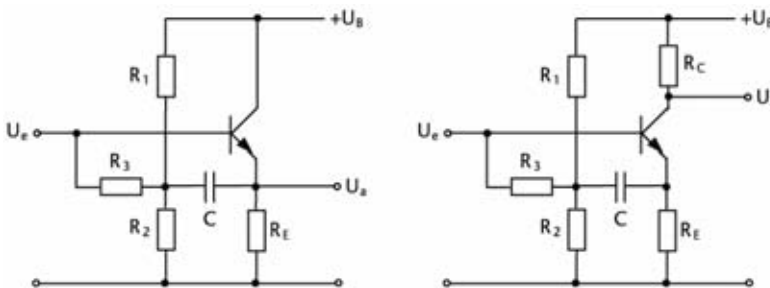


Abb. 379: Bootstrap-Schaltung bei einem Emittterfolger (links) und einer Emitterschaltung (rechts)

Beim Emittierfolger wird die Ausgangsspannung U_a über den Bootstrapkondensator C und den Widerstand R_3 auf den Eingang U_e zurückgeführt, wodurch sich eine Erhöhung des Eingangswiderstandes ergibt. Mit der Bootstrap-Schaltung kann man Eingangswiderstände von einigen $M\Omega$ erreichen.

19.15.3 Kaskodeschaltung

Bei der Emitterschaltung wirkt parallel zum Eingang die sog. **Miller-Kapazität** C_M . Dies ist die um den Faktor $(V_{ue} + 1)$ vergrößerte Basis-Kollektor-Sperrschichtkapazität C_{BK} : $C_M = C_{BK} \cdot (V_{ue} + 1)$. Die dynamische Vergrößerung der Basis-Kollektor-Kapazität wird als **Miller-Effekt** bezeichnet. Durch ihn wird die Eingangskapazität mit steigender Verstärkung (mit größer werdendem Arbeitswiderstand R_C) stark erhöht.

Bei der Kaskodeschaltung werden die Vorteile der Emitterschaltung (relativ hoher Eingangswiderstand) mit denen der Basisschaltung (hohe Bandbreite) kombiniert. Der Eingangstransistor T_1 arbeitet in Emitterschaltung und der Ausgangstransistor T_2 in Basisschaltung. Da die beiden Transistoren ausgangseitig in Reihe geschaltet sind, ergibt sich die für die Kaskodeschaltung typische Verbindung von Kollektor und Emitter der beiden Transistoren. Der Transistor T_1 hat den sehr kleinen Eingangswiderstand der Basisschaltung von T_2 als Arbeitswiderstand im Kollektorkreis. Wegen der niedrigen Spannungsverstärkung von T_1 ist die wirksame Miller-Kapazität von T_1 gering. Dadurch hat die Kaskodeschaltung eine sehr kleine Eingangskapazität wie die Basisschaltung bei gleichzeitig relativ hohen Eingangswiderstand der Emitterschaltung.

Die Kaskodeschaltung hat mit zwei Transistoren die gleiche Verstärkung wie ein Transistor in Emitterschaltung. Wegen des kleinen Arbeitswiderstandes des Transistors T_1 führt sein Kollektor praktisch keine Signalspannung. Da das Kollektorpotential von T_1 beinahe konstant bleibt, arbeitet T_1 eigentlich in der Kollektorschaltung und dient nur der Stromverstärkung. Der Signalstrom wird am Emitter von T_2 eingespeist und in der Basisschaltung von T_2 erfolgt die Spannungsverstärkung.

Die Kaskodestufe eignet sich gut für Breitbandverstärker mit Frequenzen bis weit über 100 MHz (breitbandige Meßverstärker und Verstärkerstufen der Impulstechnik).

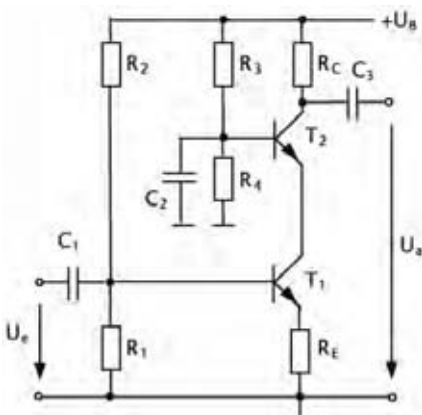


Abb. 380: Eine Kaskodestufe

19.15.4 Konstantstromquelle

Wie man an den fast horizontal verlaufenden Kennlinien im Ausgangskennlinienfeld eines Transistors sieht (Abschnitt 19.7.2), ist oberhalb von $U_{CE\text{ sat}}$ der Kollektorstrom I_C von U_{CE} weitgehend unabhängig. Durch eine Gegenkopplung verlaufen die Ausgangskennlinien noch flacher als ohne Gegenkopplung, und der dynamische Innenwiderstand $\Delta U_{CE} / \Delta I_C$ wird noch größer. Eine ideale Konstantstromquelle (siehe auch Abschnitt 4.6) hat einen unendlich großen Innenwiderstand. Mit einem Transistor läßt sich eine Konstantstromquelle mit sehr hohem Innenwiderstand realisieren.

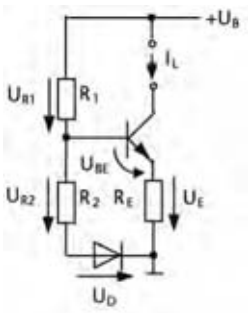


Abb. 381: Temperaturkompensierte Konstantstromquelle in Emitterschaltung mit Stromgegenkopplung

Annahme: $I_L = I_C \approx I_E$ und $\beta \gg 1$. Es gilt: $U_{R2} + U_D = U_{BE} + U_E$. Mit $U_D \approx U_{BE} \approx 0,7\text{ V}$ folgt: $U_{R2} = U_E$.

Der konstante Ausgangsstrom ist somit:

Gl. 178: Wert des Konstantstromes nach Abb. 381

$$I_L = \frac{U_E}{R_E} = \frac{U_{R2}}{R_E}$$

Schließt man an die Ausgangsklemmen einen ohmschen Widerstand an, so bleibt der Strom I_L durch den Widerstand unabhängig vom Wert des Widerstandes konstant. Dies gilt bis zu einem bestimmten oberen Wert des Widerstandes, ab dem $U_{CE} < U_{CE\text{ sat}}$ wird.

Der Spannungsteiler R_1, R_2 ist so niederohmig zu wählen, daß der Basisstrom des Transistors vernachlässigt werden kann.

Bei dieser Schaltung ist I_L nur dann konstant, wenn die Betriebsspannung U_B konstant ist.

Die Spannung U_D besitzt ungefähr den gleichen Temperaturgang von $2\text{ mV}/^\circ\text{C}$ wie die Basis-Emitter-Spannung des Transistors. Durch diese Temperaturkompensation bleibt die Spannung U_E und somit auch der Strom I_L unabhängig von der Temperatur konstant.

Aufgabe 87:

Die Widerstände R_1, R_2 und R_E von Abb. 381 sind so zu dimensionieren, daß der konstante Ausgangsstrom $I_L = 1\text{ mA}$ ist. Es ist $U_B = 12\text{ V}$.

Lösung:

Es wird frei gewählt: $R_E = 10 \text{ k}\Omega$. Nach Gl. 178 ist $U_{R_2} = I_L \cdot R_E = 1 \text{ mA} \cdot 10 \text{ k}\Omega = 10 \text{ V}$. Für den Querstrom des Spannungsteilers R_1, R_2 wird 2 mA gewählt. Damit ist der Basisstrom des Transistors von einigen μA als Belastung des Spannungsteilers vernachlässigbar. Mit der Spannung an R_2 und dem durch ihn fließenden Strom von 2 mA liegt der Wert von R_2 fest: $R_2 = \frac{10 \text{ V}}{2 \text{ mA}}$;

$R_2 = 5 \text{ k}\Omega$. Der nächstliegende Normwert aus der Reihe E24 ist $R_2 = 5,1 \text{ k}\Omega$.

Aus $U_{R_1} = U_B - U_{R_2} - U_D$ folgt mit $U_D \approx 0,7 \text{ V}$: $U_{R_1} = 12 \text{ V} - 10 \text{ V} - 0,7 \text{ V} = 1,3 \text{ V}$. $R_1 = \frac{1,3 \text{ V}}{2 \text{ mA}}$;

$R_1 = 650 \Omega$. Aus der Reihe E24 wird gewählt: $R_1 = 620 \Omega$.

Weicht I_L geringfügig vom Sollwert 1 mA ab, so kann I_L mit einem Trimpotentiometer (z.B. mit 50Ω) in Reihe mit R_1 geschaltet auf seinen genauen Sollwert eingestellt werden.

19.15.5 Differenzverstärker

Die Basis-Emitter-Spannung von bipolaren Transistoren driftet mit ca. $2 \text{ mV}/^\circ\text{C}$. Solange man nur Wechselspannungen verstärken will, kann man zur Stabilisierung des Arbeitspunktes die Gleichspannungsverstärkung durch Gleichspannungs- oder Gleichstrom-Gegenkopplung klein halten. Will man jedoch Gleichspannungen verstärken, so muß die Temperaturdrift der Basis-Emitter-Spannung des Transistors kompensiert werden. Dies kann durch einen zweiten Transistor geschehen, der unter genau gleichen Bedingungen arbeitet wie der erste Transistor. Beide Transistoren eines Differenzverstärkers sind gepaart; sie sollen die gleichen Eigenschaften besitzen und bei gleicher Temperatur arbeiten. Weiterhin sind beide Stufen eines Differenzverstärkers symmetrisch aufgebaut.

Der Differenzverstärker verstärkt nur die Differenz zweier Eingangsspannungen. Somit wird auch nur die Differenz der temperaturbedingten Drift der Basis-Emitter-Spannung verstärkt. Diese Driftdifferenz ist durch den gleichen Aufbau und durch gleiche Arbeitsbedingungen sehr klein. Exemplarstreuungen der Transistorparameter und Temperaturänderungen haben durch das Prinzip der Differenzverstärkung nur noch einen sehr geringen Einfluß auf das Ausgangssignal des Verstärkers.

Ein Differenzverstärker ist ein symmetrischer Gleichspannungsverstärker mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen. Will man nur eine einzige Eingangsspannung verstärken, so legt man einen der beiden Eingänge auf Nullpotential. Häufig wird auch nur einer der beiden Ausgänge benutzt.

Mit einem Differenzverstärker kann man Gleichspannungen genau verstärken (und natürlich auch Wechselspannungen). Differenzverstärker werden u.a. in der Meßtechnik benutzt. Die Eingänge von Operationsverstärkern sind meistens als Differenzverstärker ausgeführt.

Gegenüber einer einfachen Emitterschaltung hat der Differenzverstärker auch den Vorteil geringerer Verzerrungen, da sich geradzahlige Oberschwingungen jeweils gegenseitig aufheben.

Wichtig sind die Begriffe »Gleichtakt-« (z.B. Gleichtaktunterdrückung) und »Differenz-« (z.B. Differenzverstärkung). Bei einer **Gleichtaktansteuerung** werden beide Eingänge mit gleicher Amplitude und in gleicher Phasenlage angesteuert (gleichsinnige Ansteuerung). Bei einer **Differenzansteuerung** sind die beiden Eingangssignale i.a. gegenphasig zueinander, oder sie unterscheiden sich in der Amplitude.

Beim Differenzverstärker werden zwei Transistoren in einer der Emitterschaltung ähnlichen Art kombiniert.

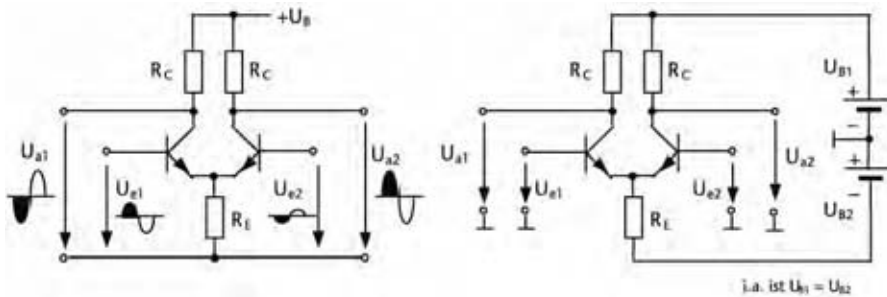


Abb. 382: Grundsaltung des Differenzverstärkers

Der Differenzverstärker benötigt zwei Betriebsspannungen (Abb. 382 rechts), wenn die Eingangsspannung auf Masse bezogen wird, also wenn eine galvanische Kopplung zu einem Generator vorliegt.

An den in Abb. 382 links eingezeichneten Phasenlagen ist zu erkennen, daß die Phasenlagen von U_{e1} und U_{a2} gleich sind. Dagegen ist U_{a2} gegenüber U_{e2} um 180° phasenverschoben. Der Eingang U_{e1} entspricht dem nichtinvertierenden, der Eingang U_{e2} dem invertierenden Eingang beim Operationsverstärker.

Die Basis-Emitterspannungen beider Transistoren heben sich auf und es wird nur die Spannungsdifferenz zwischen beiden Basisanschlüssen verstärkt. Ohne Herleitung wird angegeben:

Die Verstärkung einer Spannungsdifferenz zwischen beiden Eingängen beträgt $V_D = \frac{I_C \cdot R_C}{2 \cdot U_T}$.

Die Phasenlage der Ausgangsspannung ist durch das Vorzeichen der **Differenzverstärkung** V_D zu berücksichtigen.

Bei einer Gleichtaktaussteuerung liegt an beiden Eingängen dieselbe Spannung bzw. beide Eingänge ändern sich gleichsinnig um den selben Betrag (phasen- und amplitudengleiche Ansteuerung beider Eingänge).

Durch nicht vollkommene Gleichheit der Transistordaten kommt es zu einer **Gleichtaktverstärkung**.

Auch die unerwünschte Gleichtaktverstärkung $V_{GL} = \frac{R_C}{2 \cdot R_E}$ führt zu einem kleinen Ausgangssignal.

In der Praxis ist $V_{GL} < 1$.

Die **Gleichtaktunterdrückung** G gibt an, um welchen Faktor eine an beiden Eingängen gleiche Spannung geringer verstärkt wird als eine Spannungsdifferenz zwischen beiden Eingängen. Eine übliche Abkürzung für die Gleichtaktunterdrückung ist **CMMR** (engl.: Common Mode Rejection Ratio).

Die Gleichtaktunterdrückung ist $G = \frac{V_D}{V_{GL}} = \frac{I_C \cdot R_E}{U_T}$. In der Praxis wird CMMR in dB angegeben.

Beispiel: $I_C = 1 \text{ mA}$, $R_E = 10 \text{ k}\Omega$. $G = \frac{0,001 \text{ A} \cdot 10000 \Omega}{0,0254 \text{ V}} = 394$; $G' = \text{CMMR} = 20 \cdot \log 394 = 51,9 \text{ dB}$.

Gute Differenzverstärker können mehr als 100 dB Gleichtaktunterdrückung haben, d.h., die Gleichtaktspannung wird um den Faktor 100 000 weniger verstärkt als die Differenzspannung.

Je größer der Emittorwiderstand R_E wird, um so kleiner wird die Gleichtaktverstärkung bzw. um so größer wird die Gleichtaktunterdrückung. Es ist jedoch sinnlos, R_E bei konstanter negativer Betriebsspannung zu erhöhen, um eine hohe Gleichtaktunterdrückung zu erhalten, da der Kollektorstrom I_C in gleichem Maße abnimmt und dadurch die Gleichtaktunterdrückung so gut wie konstant bleibt.

Für eine besonders hohe Gleichtaktunterdrückung ersetzt man den Emittorwiderstand R_E durch eine Konstantstromquelle (Abb. 383).

Beim idealen Differenzverstärker führt eine Eingangsspannungsdifferenz von $U_{e1} - U_{e2} = 0 \text{ V}$ zu gleichen Ausgangsspannungen $U_{a1} = U_{a2}$.

Wegen geringfügigen Unterschieden der Transistordaten erhält man beim realen Differenzverstärker $U_{a1} = U_{a2}$ nur für eine Differenz der Eingangsspannungen $U_o = U_{e1} - U_{e2} \neq 0$. Die Spannung U_o heißt **Offsetspannung** und liegt bei bipolaren Differenzverstärkern im Bereich von wenigen μV bis mV .

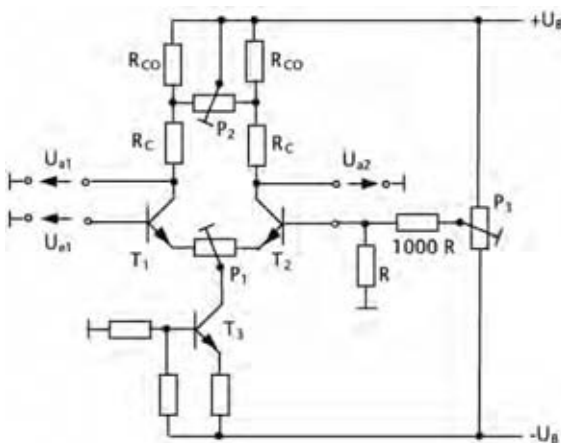


Abb. 383: Differenzverstärker mit drei Möglichkeiten der Offsetspannungskompensation und Stromquelle im Emittor (T₃)

Es gibt drei Möglichkeiten zur Korrektur (Kompensation) der Offsetspannung mit Nullpunkt-einstellern.

1. Potentiometer P_1 wird so eingestellt, daß die unterschiedlichen Basis-Emitter-Spannungen von T_1 und T_2 gleich werden. P_2 mit den Widerständen R_{CO} und P_3 mit R und $1000 R$ werden dabei nicht benötigt. Potentiometer P_1 vermindert die Verstärkung durch Stromgegenkopplung.
2. Am ansonsten nicht benutzten invertierenden Eingang wird durch Einstellung von P_3 von außen die Offsetspannung zugeführt. Bei einer Drift von P_3 ergibt sich durch den Span-

nungsteiler R , 1000 R kaum eine Offsetspannungsdrift. Bei dieser Methode werden P_1 und P_2 nicht benötigt.

3. Die Kollektorwiderstände werden jeweils in einen großen Widerstand R_c und einen kleinen Widerstand R_{co} geteilt. Durch unsymmetrische Einstellung von P_2 werden die Kollektorwiderstände verschieden groß. Bei Ansteuerung des Verstärkers mit der Differenzspannung 0 V entstehen dann zwar unterschiedliche Kollektorströme, welche aber an den ungleichen Kollektorwiderständen gleich große Spannungen erzeugen. Bei dieser Methode werden P_1 und P_3 nicht benötigt.

Für den Offsetabgleich legt man in der Praxis beide Eingänge des Differenzverstärkers auf Masse (Null Volt) und schließt zwischen den beiden Ausgängen ein Voltmeter an. Mit dem Nullpunkt-einsteller wird die Schaltung so abgeglichen, daß die Spannungsdifferenz zwischen beiden Ausgängen Null Volt beträgt.

19.15.6 Selektivverstärker

Ein Verstärker mit einem ohmschen Kollektorwiderstand wird meist von tiefen Frequenzen bis zu einer oberen Grenzfrequenz verwendet. Soll nur ein bestimmtes Frequenzband verstärkt werden, wobei die Mitte dieses Frequenzbereiches so hoch liegt, daß eine Verstärkung mit einem Verstärker mit ohmschem Kollektorwiderstand nicht möglich ist, so kann man einen Selektivverstärker (**Resonanzverstärker**) verwenden. Dieser besitzt statt des ohmschen Arbeitswiderstandes einen Parallelschwingkreis. Bei der Resonanzfrequenz des Schwingkreises erreicht die Verstärkung einen hohen Wert. Die Dämpfung des Schwingkreises bestimmt die Bandbreite des Resonanzverstärkers.

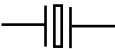
Eine wichtige Anwendung sind Zwischenfrequenz-Verstärker (ZF-Verstärker) in Funkempfängern.

19.15.7 Oszillatoren

Harmonische Oszillatoren erzeugen Sinusschwingungen durch Mitkopplung eines Verstärkers. Die wichtigsten Oszillatoren sind: Quarzoszillator, RC-Oszillator und LC-Oszillator.

Beim **Quarzoszillator** bestimmt die Resonanzfrequenz des Schwingquarzes die Frequenz der Schwingung. Ein Quarz ist ein Kristall, an dessen Oberfläche elektrische Kontakte mit zwei Anschlüssen angebracht sind. Wird ein Quarzkristall mechanisch verformt, so entsteht an seinen Elektroden eine elektrische Spannung (sog. **Piezoeffekt**). Wird eine elektrische Spannung an den Quarz angelegt, so verformt er sich (inverser Piezoeffekt). Durch eine elektrische Spannung läßt sich ein Quarz zu mechanischen Schwingungen anregen. Dadurch entsteht an den Quarzelektroden eine Wechselspannung, deren Frequenz exakt mit der sehr stabilen mechanischen Resonanzfrequenz des Quarzes übereinstimmt. Der Quarz verhält sich als mechanischer Resonator elektrisch wie ein Schwingkreis mit sehr hoher Güte. Im Resonanzfall wirkt ein Quarz wie ein rein ohmscher Widerstand.

Die Frequenz eines Quarzoszillators ist sehr temperaturstabil ($\Delta f / f = 10^{-6} \dots 10^{-10}$). Quarze werden von etwa 100 kHz bis ca. 200 MHz verwendet. Statt eines Schwingquarzes kann auch ein billigerer Keramikresonator eingesetzt werden, der allerdings weniger frequenzstabil ist.

Schaltzeichen des Quarzes: 

Beim **RC-Oszillator** wird die Schwingfrequenz durch ein RC-Netzwerk bestimmt. RC-Oszillatoren eignen sich für den Niederfrequenzbereich. Ein Beispiel für einen RC-Oszillator ist der Phasenschieberoszillator. Bei ihm erfolgt die für den Schwingensatz notwendige Phasenverschiebung des rückgekoppelten Signals durch drei RC-Hochpaßglieder oder drei RC-Tiefpaßglieder mit 60° Phasenverschiebung je RC-Glied. Zusammen mit der Phasenverschiebung einer Emitterschaltung von 180° ergibt sich die für den Schwingensatz notwendige Phasenverschiebung von $\varphi = 360^\circ = 0^\circ$.

Beim **LC-Oszillator** bestimmt ein LC-Kreis die Schwingfrequenz. LC-Oszillatoren werden wegen der teuren Spulen mit ihren nicht idealen Eigenschaften nur selten eingesetzt.

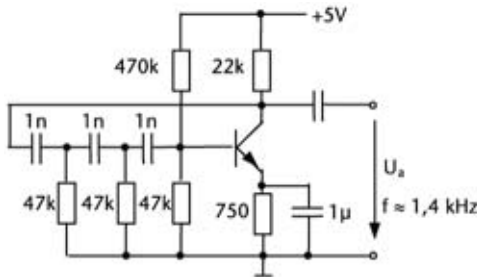


Abb. 384: Beispiel für einen RC-Sinus-Oszillator mit RC-Hochpaß-Phasenschieberkette

19.16 Der Transistor als Schalter

Bei den bisherigen Anwendungen wurde der Transistor als stetig steuerbares Element zum Verstärken elektrischer Signale angewandt. Es handelte sich um lineare Schaltungen der **Analogtechnik**. Das Kollektorruhepotential lag zwischen den Aussteuerungsgrenzen $U_{CE\text{ sat}}$ und U_B und eine Aussteuerung erfolgte um diesen Arbeitspunkt. Bei einer linearen Schaltung wird die Aussteuerung am Eingang so klein gehalten, daß die Ausgangsspannung eine lineare Funktion der Eingangsspannung ist. Die Ausgangsspannung darf deshalb die Aussteuerungsgrenzen nicht erreichen oder überschreiten, da sonst Verzerrungen auftreten.

Schaltungen der **Digitaltechnik** arbeiten nur mit zwei Betriebszuständen. Von Interesse ist nur, ob eine Spannung größer ist als ein bestimmter Wert U_H oder kleiner ist als ein bestimmter Wert U_L , wobei gilt: $U_L < U_H$. Ist die Spannung größer als U_H , so sagt man, sie ist im Zustand »High« (Abk. »H« oder »1«). Ist die Spannung kleiner als U_L , sagt man, sie befindet sich im Zustand »Low« (Abk. »L« oder »0«). Der Wert der Spannungen U_H und U_L hängt von der verwendeten Schaltungstechnik ab, bei der Wahl der beiden Spannungsniveaus ist man im Prinzip völlig frei. Der Übergang von U_H auf U_L oder umgekehrt wird als Schalten eines logischen Signals bezeichnet. Spannungen zwischen U_L und U_H treten nur während des Schaltvorganges auf. Siehe auch Abschnitt 18.7.4.

Ein Transistor lässt sich als schneller, kontaktloser Schalter verwenden (siehe auch Abschnitt 19.6).

Beim Betrieb als Schalttransistor³⁶ soll bei einer sprunghaften Änderung der Eingangsgröße der Ausgang möglichst verzögerungsfrei und verformungsfrei zwischen den Zuständen »H« und »L« wechseln. Der Betrieb als Schalttransistor weicht stark von einer linearen Verstärkeranwendung (Kleinsignalbetrieb) ab. Verfahren wie z.B. die Rechnung mit Vierpolparametern sind daher nicht anwendbar.

Bei der Verwendung eines Transistors als Schalter betreibt man diesen fast immer in der Emitterschaltung. Beim Schalttransistor werden zunächst die beiden statischen Zustände »Ein« und »Aus«, und dann das dynamische Verhalten beim Übergang betrachtet.

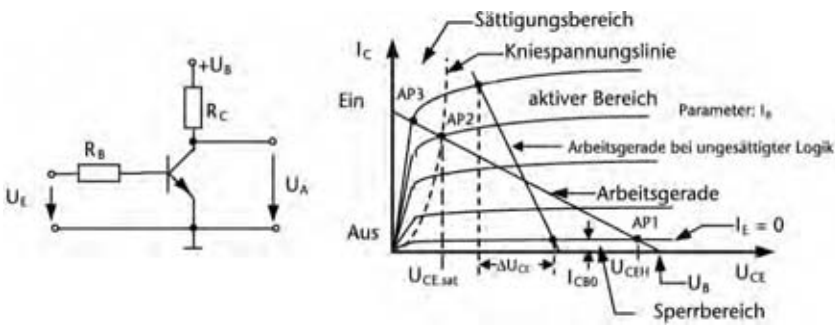


Abb. 385: Transistor als Schalter in Emitterschaltung (links) und Ausgangskennlinienfeld mit Arbeitspunkten (rechts)

19.16.1 Schalttransistor im Sperrzustand

Ein Si-NPN-Transistor sperrt, d.h. es fließt kein Emitterstrom und nur ein sehr kleiner Kollektorstrom, wenn die Basis negativ gegenüber dem Emitter ist. Bei einem Si-NPN-Transistor muß die Basis nicht unbedingt negatives Potential gegenüber dem Emitter besitzen, damit der Transistor ausreichend sperrt. Es genügt, wenn die Basis-Emitter-Spannung zwar in Durchlaßrichtung anliegt, jedoch sehr klein ist (z.B. $< 100 \text{ mV}$). Ist die Eingangsspannung U_E in Abb. 385 sehr klein, so sperrt der Transistor. Die Emitter-Basis-Diode und die Kollektor-Basis-Diode sperren. Der Emitterstrom wird $I_E = 0$. Im Ausgangskreis fließt nur noch der sehr kleine Kollektor-Basis-Reststrom I_{CB0} (Sperrstrom der Kollektor-Basis-Diode). Im Ausgangskennlinienfeld stellt sich auf der Arbeitsgeraden der Arbeitspunkt AP1 am Beginn des Sperrbereiches des Transistors ein (Abb. 385 rechts). Die zum Arbeitspunkt AP1 gehörende Kollektor-Emitter-Spannung U_{CEH} entspricht der Ausgangsspannung U_A und liegt in ihrem Wert nahe bei $+U_B$. Die Ausgangsspannung ist im Zustand »H«.

³⁶ Der Begriff Schalttransistor kann sich auf die Anwendung eines Transistors als Schalter oder auf einen Transistor mit speziellen Eigenschaften, z.B. besonders kurzen Schaltzeiten, beziehen.

19.16.2 Schalttransistor im Durchlaßzustand

Ist die Eingangsspannung U_E groß, so leitet der Transistor, d.h. es fließt ein Kollektor- und Emittterstrom $I_C \approx I_E$. Hat die Eingangsspannung U_{BE} die gleiche Größe wie die Ausgangsspannung U_{CE} , so ist $U_{CB} = 0$ und es stellt sich der Arbeitspunkt AP2 an der Grenze zum Sättigungsbereich (Übersteuerungsgrenze) ein. Die Emittter-Basis-Diode leitet und die Kollektor-Basis-Diode sperrt gerade noch. Die zum Arbeitspunkt AP2 gehörende Kollektor-Emitter-Spannung $U_{CE\text{ sat}}$ entspricht wieder der Ausgangsspannung U_A und beträgt ca. 0,2 V. Die Ausgangsspannung ist im Zustand »L«.

Macht man durch Erhöhung von U_{BE} den Basisstrom größer, so wird U_{CB} negativ und auch die Kollektor-Basis-Diode leitet. Dadurch wird die Ladungsträgerkonzentration in der Basiszone vergrößert (Sättigung). Der Arbeitspunkt verlagert sich in den Sättigungsbereich hinein zu AP3. Die zu AP3 gehörende Kollektor-Emitter-Spannung ist noch kleiner als $U_{CE\text{ sat}}$. Durch die Sättigung ergibt sich eine besonders gute Durchlaßeigenschaft des Transistors.

Das Verhältnis des im eingeschalteten Zustand fließenden Basisstromes $I_{B\text{ ein}}$ zum Basisstrom $I_{BÜ}$, der nötig wäre, um den Transistor bis zur Übersteuerungsgrenze durchzusteuern, heißt:

Übersteuerungsfaktor $\ddot{u}$.
$$\ddot{u} = \frac{I_{B\text{ ein}}}{I_{BÜ}}$$

19.16.3 Dynamisches Schaltverhalten

Um das zeitliche Verhalten eines Schalttransistors zu charakterisieren, betrachtet man seine Reaktion am Ausgang auf eine Ansteuerung mit einem rechteckförmigen Impuls am Eingang. Der Ausgangsimpuls ist gegenüber dem Eingangsimpuls verformt und verzögert.

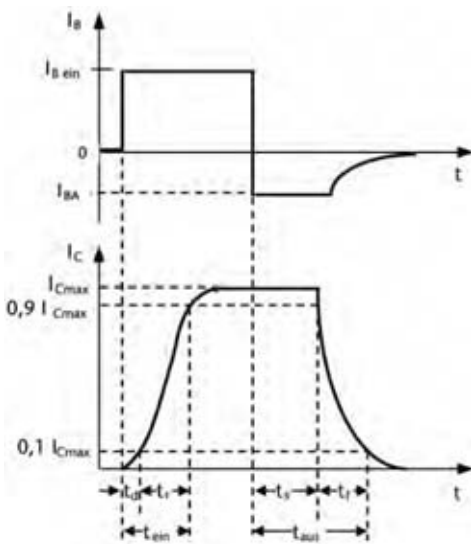


Abb. 386: Zeitlicher Verlauf des Ausgangsstromes eines Schalttransistors (unten) bei rechteckigem Impuls am Eingang (oben)

Ist der Basisstrom Null, so fließt im Ausgangskreis nur ein sehr kleiner Sperrstrom. Der Strom im Ausgangskreis ist annähernd Null. Springt der eingepreßte Basisstrom auf den Wert $I_{B\text{ ein}}$, so

steigt der Kollektorstrom infolge der Sperrschichtkapazitäten nicht ebenfalls sprunghaft an, sondern nimmt allmählich zu, bis er seinen Endwert I_{Cmax} im Durchlaßzustand erreicht. Geht nach einiger Zeit der Basisstrom schlagartig auf Null, so fließt die im Basisraum vorhandene Ladung ab. Es entsteht so ein »umgekehrter« Basisstrom I_{BA} , den man als **Ausräumstrom** bezeichnet. Fällt der Ausräumstrom gegen Null ab, so sinkt auch der Kollektorstrom ziemlich steil auf Null.

Gemäß Abb. 386 unterscheidet man bei einem solchen Schaltvorgang die folgenden Zeiten:

Tabelle 17: Zur Definition der Schaltzeiten eines Transistors

Formelzeichen	Deutsche Bezeichnung	Englische Bezeichnung
t_d	Verzögerungszeit	delay time
t_r	Anstiegszeit	rise time
$t_{ein} = t_d + t_r$	Einschaltzeit	turn on time, t_{on}
t_s	Speicherzeit	storage time
t_f	Abfallzeit	fall time
$t_{aus} = t_s + t_f$	Ausschaltzeit	turn off time, t_{off}

Als Schwellen für die Definition der Zeiten gelten jeweils $0,1 \cdot I_{Cmax}$ und $0,9 \cdot I_{Cmax}$.

Die Schaltzeiten liegen im Bereich von einigen ns bis wenigen μs .

Das Verhältnis des Ausräumstromes I_{BA} zum Basisstrom I_{BU} an der Sättigungsgrenze wird als

Ausräumfaktor a bezeichnet.
$$a = \frac{I_{BA}}{I_{BU}}$$

Die Schaltzeiten sind vom Transistortyp und von der Auslegung der Schaltung (vom Übersteuerungsfaktor und vom Ausräumfaktor) abhängig. Von der Dauer des Steuerimpulses sind die Schaltzeiten u.a. ebenfalls abhängig. Die Schaltzeiten bleiben nur konstant, wenn die Dauer des Steuerimpulses um ein Mehrfaches größer ist als die Schaltzeiten. Bei kürzer werdendem Steuerimpuls nimmt insbesondere die Speicherzeit ab.

Die Einschaltzeit t_{ein} wird um so kürzer, je größer der Übersteuerungsfaktor gemacht wird. Andererseits erhöht sich durch die Übersteuerung beim Ausschalten die Speicherzeit t_s und damit die Ausschaltzeit t_{aus} .

19.16.4 Verkürzung der Schaltzeiten

Die Speicherzeit läßt sich durch Vergrößerung des Ausräumstromes, z.B. durch Anlegen einer Spannung $-U_{BE}$ in Sperrichtung verkürzen. Durch die Erhöhung des Ausräumfaktors ergibt sich jedoch gleichzeitig eine Vergrößerung der Einschaltverzögerung t_d . Durch schaltungstechnische Maßnahmen kann man erreichen, daß die Übersteuerung nur während des Einschaltvorganges und eine Erhöhung des Ausräumstromes nur während des Ausschaltvorganges wirksam ist. Realisiert wird dies durch ein RC-Glied in der Basisleitung (Abb. 387 links). Die Umladeströme des Kondensators C bilden den Übersteuerungsstrom beim Einschalten und den Ausräumstrom beim Ausschalten des Transistors. Im stationären Zustand ist für den Basisstrom die Reihenschaltung aus R und R_b ($R_b > R$) ausschlaggebend. Im wesentlichen bestimmt R_b die Begrenzung

des Basisstromes. Die Werte von R und C sind abhängig von der Dauer des Steuerimpulses für sicheres Schalten experimentell zu ermitteln.

Die größte der Schaltzeiten, die Speicherzeit t_s , tritt auf, wenn man einen zuvor gesättigten Transistor ($U_{CE} = U_{CE\text{ sat}}$) sperrt. Die Speicherzeit läßt sich stark verkleinern, wenn man den »Ein«-Betriebspunkt nicht in den Sättigungsbereich, sondern in den aktiven Bereich legt. Die Kollektorspannung braucht dann nicht zwischen dem hohen Wert U_{CEH} und dem kleinen Wert $U_{CE\text{ sat}}$ (Abb. 385 rechts) hin- und her zu springen, sondern ändert sich beim Umschalten nur um den kleineren Betrag ΔU_{CE} . Dieses Prinzip der **ungesättigten Logik** wird bei schnellen Schaltern angewandt.

In Abb. 387 rechts verhindert die Zenerdiode, daß die Kollektorspannung den Sättigungswert $U_{CE\text{ sat}}$ annimmt. Ist z.B. bei $U_B = 10\text{ V}$ die Zenerspannung $U_Z = 8,2\text{ V}$, so ist bei $I_{C\text{ max}}$ der Wert der Kollektorspannung $U_C = 10\text{ V} - 8,2\text{ V} = 1,8\text{ V}$.

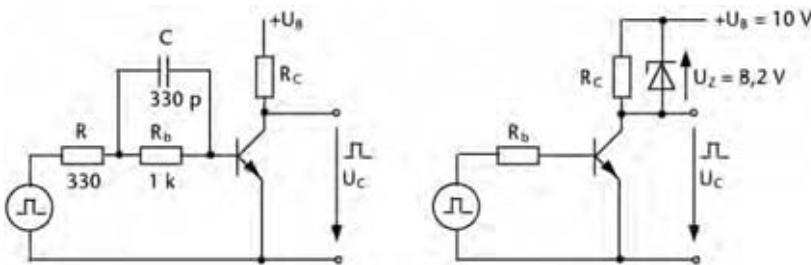


Abb. 387: Schaltungsmaßnahmen zur Verkürzung der Schaltzeiten (Zahlenwerte als Beispiel)

19.16.5 Beispiele für die Anwendung von Schalttransistoren

Das Anwendungsgebiet von Schalttransistoren umfaßt z.B. die Impulstechnik (Einsatz in der Fernseh- und Radartechnik), Impuls-Modulationsverfahren in der Nachrichtenübertragung, das große Gebiet der logischen Schaltungen in digitalen Rechnern oder kontaktlosen Steuerungen.

Die Grundsaltung (Abb. 385 links) kann allgemein anstelle eines Relais zum Ein- und Ausschalten eines Verbrauchers verwendet werden. In der Datenverarbeitung benutzt man eine derartige Schaltstufe zur Signalumkehrung als **Inverter**, da die Ausgangsspannung entgegengesetzt zur Eingangsspannung verläuft.

In den folgenden Beispielen arbeiten die durchgeschalteten Transistoren im Sättigungsgebiet. Zum Verständnis der Schaltungen sollte man sich vor Augen halten, daß die Kollektorspannung U_{CE} im durchgeschalteten Zustand des Transistors sehr niedrig ist ($U_{CE} = U_{CE\text{ sat}}$), d.h., der Kollektor weist fast Nullpotential auf. Im gesperrten Zustand liegt der Wert der Kollektorspannung nahe der Speisespannung U_B .

19.16.5.1 Schalten einer Last

Der Strom durch einen Verbraucher kann mit einem Transistor kontaktlos ein- und ausgeschaltet werden. Die Last kann z.B. der ohmsche Widerstand einer Glühlampe oder der ohmsch-induktive Widerstand R_L , L der Wicklung eines Relais sein. Mit den an eine entfernte Stelle

geführten Anschlüssen des Relaisschalters kann eine angeschlossene Last hoher Leistung geschaltet werden.

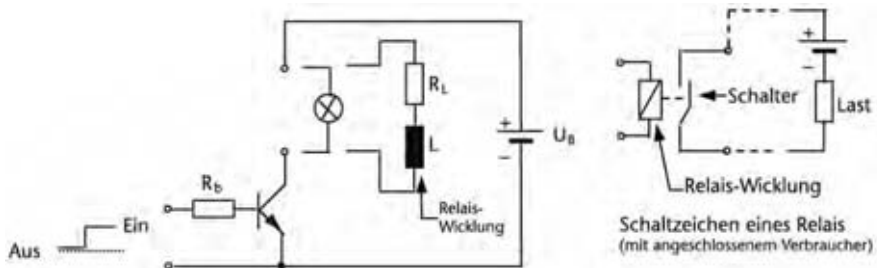


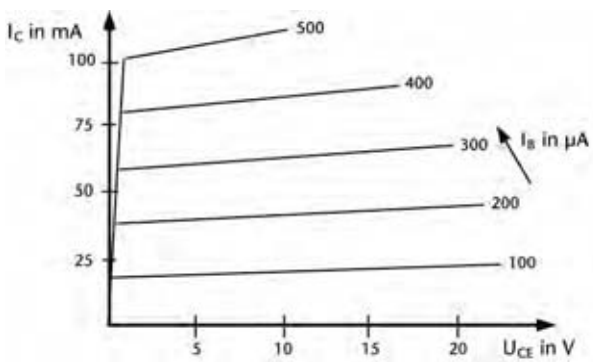
Abb. 388: Transistor als Schalter für einen Verbraucher

Mit einem logischen Signal kleiner Leistung kann so ein Verbraucher großer Leistung ein- und ausgeschaltet werden.

Aufgabe 88:

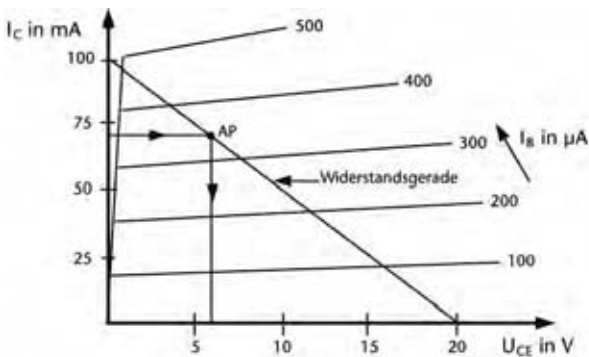
Es steht eine Speisespannung $U_B = 20\text{ V}$ zur Verfügung. Ein Relais, welches bei $I = 70\text{ mA}$ sicher angezogen hat (den Schaltkontakt betätigt hat), besitzt den Wicklungswiderstand $R = 200\ \Omega$. Das Relais soll mit einem Transistor gesteuert werden, dessen I_C / U_{CE} -Kennlinienfeld gegeben ist.

Wie groß ist der minimale Strom, den die steuernde Spannungsquelle liefern muß, damit das Relais sicher anzieht? Wie groß darf der Basisvorwiderstand R_b maximal sein, wenn die Steuerungsspannung am Eingang 2 V beträgt? Wie groß ist die Leistungsverstärkung? Was ist in der Praxis zu beachten?



Lösung:

Zuerst wird die Widerstandsgerade $U_{CE} = U_B - I_C \cdot R_C$ in das I_C / U_{CE} -Kennlinienfeld eingetragen. Sie schneidet die Abszisse bei $U_B = 20\text{ V}$ und die Ordinate bei $20\text{ V} / 200\ \Omega = 100\text{ mA}$. Für $I_C = 70\text{ mA}$ erhält man den Arbeitspunkt AP mit $U_{CE} = 6\text{ V}$ und $I_B \approx 350\ \mu\text{A}$.



Die steuernde Spannungsquelle wird also mit $350 \mu\text{A}$ belastet. Dies ist der minimale Strom den sie liefern muß, damit im Kollektorkreis 70 mA fließen und das Relais sicher anzieht.

Die Basis-Emitter-Spannung beträgt ca. $0,7 \text{ V}$. Mit der Steuerspannung von 2 V ergibt sich der Wert von R_b zu: $R_b = \frac{2 \text{ V} - 0,7 \text{ V}}{350 \mu\text{A}}$; $R_{b \max} \approx 3,7 \text{ k}\Omega$.

Um das Relais zum Anziehen zu bringen, benötigt man die Leistung $P_2 = 200 \Omega \cdot (70 \text{ mA})^2 = 0,98 \text{ W}$.

Die steuernde Spannungsquelle muß aber nur die Leistung $P_1 = 2 \text{ V} \cdot 350 \mu\text{A} = 0,7 \text{ mW}$ liefern. Die Leistungsverstärkung beträgt somit **1400**.

Im praktischen Einsatz wird man wegen der Streuung der Stromverstärkung und ihrer Änderung mit der Temperatur einen höheren Basisstrom wählen, damit das Relais auch sicher anspricht.

19.16.5.2 Astabile Kippschaltung (Multivibrator)

Ein Multivibrator ist eine selbstschwingende Kippschaltung und erzeugt periodische, rechteckförmige Spannungen (Rechteck-Generator).

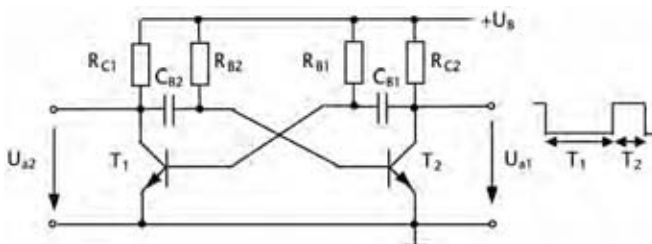


Abb. 389: Grundschaltung des Multivibrators

Die beiden Transistoren sind über RC-Glieder so miteinander gekoppelt, daß sie sich selbständig wechselseitig ein- und ausschalten. Die gesamte Periodendauer der entstehenden Rechteckschwingung ist $T = T_1 + T_2$. Die Zeiten T_1 und T_2 werden durch die Zeitkonstanten der RC-Glieder bestimmt. Es gilt: $T_1 = \ln 2 \cdot R_{B1} \cdot C_{B1} \approx 0,7 \cdot R_{B1} \cdot C_{B1}$ und $T_2 = \ln 2 \cdot R_{B2} \cdot C_{B2} \approx 0,7 \cdot R_{B2} \cdot C_{B2}$. Beim symmetrischen Multivibrator ($R_B = R_{B1} = R_{B2}$; $C_B = C_{B1} = C_{B2}$) ist $T \approx 1,4 \cdot R_B \cdot C_B$. Damit die

Transistoren bis in die Sättigung gesteuert werden, muß $R_{B1} < B_1 \cdot R_{C1}$ und $R_{B2} < B_2 \cdot R_{C2}$ ($B_1, B_2 =$ Stromverstärkung) sein.

Der Verlauf der Ausgangsspannungen ist nicht ideal rechteckförmig, die Anstiegsflanke ist ver-rundet. Die Anstiegszeit läßt sich durch verschiedene Schaltungsmaßnahmen verkleinern. Die Ausgangsspannungen U_{a1} und U_{a2} sind komplementär, d.h., U_{a1} ist High, wenn U_{a2} Low ist und umgekehrt. Mit der Schaltung sind Frequenzen von ca. 1 Hz bis ca. 1 MHz erzeugbar.

19.16.5.3 Monostabile Kippschaltung (Univibrator, Monoflop)

Ein Monoflop schaltet sich durch einen kurzen, positiven Eingangsimpuls für eine bestimmte Zeit ein und kippt dann wieder in den Ruhezustand zurück (Funktion eines Zeitschalters). Der Ruhezustand bleibt stabil erhalten, bis der nächste positive Eingangsimpuls einen neuen Kippvorgang auslöst. Das Monoflop dient zur Erzeugung eines Rechteckimpulses bestimmter Dauer, welcher durch einen Eingangsimpuls ausgelöst wird. Der Eingangsimpuls wird auch Triggerimpuls, kurz **Trigger**, genannt.

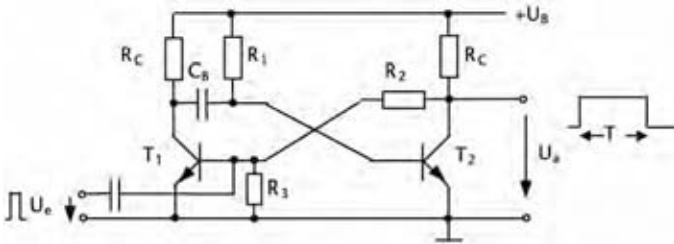


Abb. 390: Grundsaltung eines Monoflops

Die Dauer des Ausgangsimpulses (Verweilzeit) ist: $T \approx 0,7 \cdot R_1 \cdot C_B$.

Ohne Eingangssignal ist T_2 leitend, weil er über R_1 eine positive Basisspannung erhält. Die Kollektorspannung U_{CE2} ist daher auf dem niedrigen Sättigungswert $U_{CE\text{ sat}}$. Diese kleine Spannung wird über den Spannungsteiler R_2, R_3 geteilt und der noch kleinere Bruchteil der Basis von T_1 zugeführt. An der Basis von T_1 liegt somit eine so kleine Spannung, daß T_1 sicher gesperrt ist. Die Ausgangsspannung U_a ist Low.

Der Spannungsteiler R_2, R_3 verbessert den Low-Störspannungsabstand am Eingang von T_1 . Die Höhe einer Störspannung an der Basis von T_1 , die T_1 leitend machen würde, muß mit diesem Spannungsteiler wesentlich größer sein als ohne ihn. Der Spannungsteiler verhindert auch, daß bereits ein kleiner Eingangsimpuls das Monoflop einschaltet.

Der Ruhezustand des Monoflops ($U_a = \text{Low}$) ist so lange stabil, bis durch einen kurzen, positiven Eingangsimpuls die Basis von T_1 positiv wird. Dadurch wird T_1 leitend und sein Kollektorpotential sinkt fast auf Null. Der Kondensator C_B wird umgeladen, dadurch wird U_{BE2} negativ und T_2 sperrt. Die Ausgangsspannung U_a ist High. Über den Spannungsteiler R_2, R_3 wird U_a der Basis von T_1 zugeführt und dieser somit auch nach dem Ende des Eingangsimpulses leitend gehalten, bis die Umladung von C_B beendet ist. Dann wird U_{BE2} wieder positiv und T_2 leitend. Jetzt wird U_{BE1} so klein, daß T_1 sperrt. Dies entspricht dem Anfangszustand der stabil bleibt, bis der nächste Triggerimpuls einen neuen Kippvorgang auslöst.

Es sei erwähnt, daß die Schaltung sehr empfindlich gegenüber Störsignalen auf der Speisespannung ist. – Beim Monoflop kann man zwischen nachtriggerbaren und nichtnachtriggerbaren Typen unterscheiden. Ist das Monoflop **retriggerbar**, so kann der Ausgangsimpuls durch einen Triggerimpuls am Eingang neu aktiviert werden, bevor die Dauer des Ausgangsimpulses abgelaufen ist. Der Ausgang bleibt dann für die Zeit T plus der bisher abgelaufenen Zeit auf High. Eine Möglichkeit der Anwendung ist z.B. ein Treppenhautomat, bei dem durch Drücken einer Taste das Licht für eine bestimmte Zeit T eingeschaltet wird. Wird die Taste vor dem Erlöschen des Lichtes erneut gedrückt, so verlängert sich die Einschaltzeit um T .

19.16.5.4 Bistabile Kippschaltung (Flipflop)

Wie der Name sagt, weist eine bistabile Kippschaltung zwei stabile statische Schaltzustände auf. Im ersten Zustand ist ein Transistor gesättigt (stromführend) und der andere Transistor gesperrt. Im zweiten Zustand sperrt der vorher gesättigte Transistor und der andere leitet.

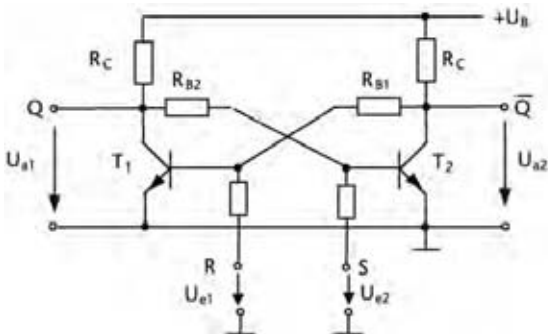


Abb. 391: Grundsaltung eines Flipflops

Ein Grundtyp eines Flipflops ist das RS-Flipflop. Die Eingänge werden mit S (set) und R (reset), die Ausgänge mit Q und $\bar{Q}$ bezeichnet. Der logische Zustand der Ausgänge ist komplementär, d.h., U_{a1} ist High, wenn U_{a2} Low ist und umgekehrt. Ein positiver Impuls am S-Eingang setzt den Q-Ausgang auf High (H). Ein positiver Impuls am R-Eingang bewirkt, daß der Q-Ausgang auf Low (L) zurückgesetzt wird.

Wird U_{e2} positiv, so leitet T_2 und T_1 sperrt. Dadurch wird $Q = H$ ($U_{a1} \approx U_B$) und $\bar{Q} = L$ ($U_{a2} \approx 0$). Durch die starke Rückkopplung über die Basiswiderstände R_{B1} und R_{B2} bleibt dieser Zustand erhalten, auch wenn der S-Eingang wieder Low wird. Wird U_{e1} positiv (oder U_{e2} negativ), so kippt das Flipflop in seinen Ausgangszustand zurück ($Q = L$, $\bar{Q} = H$).

Die Eingänge R und S dürfen nicht gleichzeitig positiv (oder negativ) sein, sonst ergibt sich kein definierter Schaltzustand, wenn R und S wieder Low werden. Eine Funktionstabelle gibt eine Übersicht über die Schaltzustände.

Tabelle 18: Funktionstabelle des RS-Flipflops

R	S	Q	$\overline{Q}$
H	H	nicht definiert	nicht definiert
H	L	L	H
L	H	H	L
L	L	wie vorher	wie vorher

Legt man an den Eingang eines Flipflop eine periodische Rechteckspannung an, so erscheint am Ausgang des Flipflop eine Rechteckspannung der halben Frequenz. Ein Flipflop kann also zur Frequenzteilung angewandt werden. Durch mehrere in Reihe geschaltete Flipflops kann ein Impulszähler realisiert werden. Ein Flipflop kann zur Speicherung eines binären Zeichens, eines Bit, verwendet werden. In der digitalen Rechentechnik werden Flipflops als **Register** (ein Register besteht aus mehreren Speicherelementen) zur Speicherung binärer Signale verwendet.

19.16.5.5 Schmitt-Trigger

Der Schmitt-Trigger wandelt ein analoges Signal in ein digitales Signal um. Die Ausgangsspannung kann in Abhängigkeit der Eingangsspannung nur zwei definierte Werte annehmen (bistabile Schaltung mit der Funktion eines Schwellwertschalters). Ist die Eingangsspannung kleiner als ein bestimmter Wert $U_{e\text{ ein}}$, so hat die Ausgangsspannung den kleinen Wert $U_{a\text{ min}}$ nahe 0 V ($U_{CE\text{ sat}}$). Wächst die Eingangsspannung an und überschreitet den Wert $U_{e\text{ ein}}$, so springt die Ausgangsspannung auf einen hohen Wert $U_{a\text{ max}}$ nahe $+U_B$. Wird die Eingangsspannung dann wieder kleiner und unterschreitet den Wert $U_{e\text{ aus}}$, der etwas kleiner ist als $U_{e\text{ ein}}$, so springt die Ausgangsspannung auf den Wert $U_{a\text{ min}}$ zurück. Die Umschaltpegel hängen also von der Richtung des Schaltvorganges ab, der Einschaltpegel $U_{e\text{ ein}}$ und der Ausschaltpegel $U_{e\text{ aus}}$ sind unterschiedlich. $\Delta U_{eH} = U_{e\text{ ein}} - U_{e\text{ aus}}$ heißt **Schalthysteresese**.

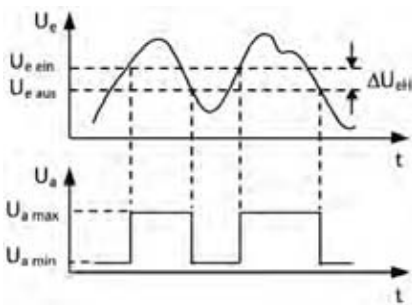


Abb. 392: Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung beim Schmitt-Trigger

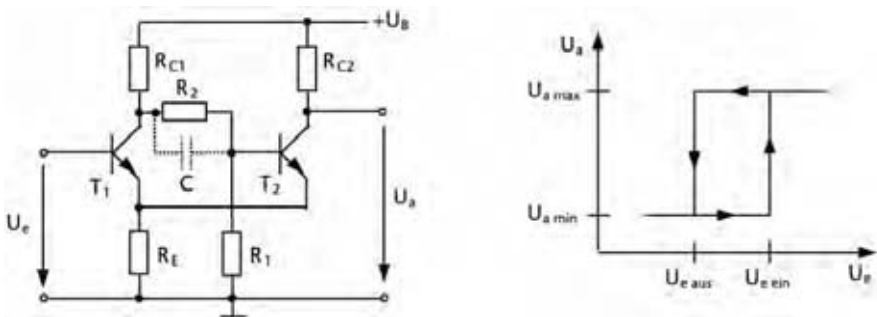


Abb. 393: Grundsaltung des Schmitt-Triggers (links) und Übertragungskennlinie (rechts)

Ist U_e klein, so sperrt T_1 . Über den Spannungsteiler R_{C1} , R_2 , R_1 erhält die Basis von T_2 eine positive Vorspannung, so daß T_2 leitet und sich im Sättigungsbereich befindet. Es ist $U_a = U_{a \min}$. Der Spannungsabfall an R_E wird durch den Emittorstrom von T_2 bestimmt. – Wird U_e erhöht, so beginnt T_1 zu leiten. Seine Kollektorspannung und damit die Basisspannung von T_2 nimmt ab, T_2 beginnt zu sperren. Durch den kleiner werdenden Emittorstrom von T_2 wird der Spannungsabfall an R_E kleiner und damit die Basis von T_1 noch positiver. Der Strom durch T_1 steigt weiter an, der durch T_2 sinkt weiter ab. Durch die Rückkopplung erfolgt ein rasches Kippen in den Zustand, bei dem T_1 leitet und T_2 sperrt. Jetzt ist $U_a = U_{a \max}$. – Auf eine Beschreibung des Rückkippens in den Ausgangszustand, auf eine Erläuterung für den Grund der Hysterese sowie auf Angaben zur Dimensionierung des Schmitt-Triggers wird hier verzichtet. Es sei erwähnt, daß der Kondensator C zur Beschleunigung der Kippvorgänge eingefügt werden kann.

In der Praxis verwendet man einen Schmitt-Trigger zur Umwandlung einer Sinus- oder Dreiecksspannung o.ä. in eine Rechtecksspannung, zur Wiederherstellung (Regeneration) verformter Rechteckimpulse und zur Unterscheidung von Spannungen (Amplitudenkomparator mit Hysterese), die oberhalb oder unterhalb gegebener Schwellwerte liegen.

19.17 Transistoren in der Digitaltechnik

19.17.1 Kodes, Logische Funktionen, Schaltalgebra

Digitale³⁷ Schaltungen sind die Grundbausteine elektronischer Digitalrechner. In der Digitaltechnik arbeitet man mit **binären**³⁸ elektrischen Signalen, die nur zwei Spannungswerte aufweisen (High oder Low), siehe auch Abschnitt 18.7.4. Die kleinste Einheit eines Zahlensystems wird mit »**digit**« bezeichnet. Ein Digit einer binären Information kann nur die Werte »H« (logische »1«) oder »L« (logische »0«) haben und stellt ein **Bit** dar (zusammengesetzt aus engl. »binary digit«). 1 Bit ist die Kurzbezeichnung für die Nachrichtenmenge einer Binärstelle bzw. einer Binärziffer und ist somit das kleinste Informationsquantum. Die Dualzahl »101« beinhaltet z.B. die Nachrichtenmenge 3 Bit. Acht Bit werden als **Byte** bezeichnet. Achtung! Wegen der Potenzen von Zwei ist: 1 **Kilobyte** (KByte) = 1024 Bit.

³⁷ digitus (lat.) = Finger, Ziffer

³⁸ binär = zweiwertig

Die Zuordnung $H = 1$ und $L = 0$ bezeichnet man als **positive Logik**. Die ebenfalls mögliche umgekehrte Zuordnung $H = 0$ und $L = 1$ wird als negative Logik bezeichnet.

Die Zeichen des dezimalen Zahlensystems sind die Ziffern 0 bis 9, während das duale (binäre) Zahlensystem nur die Zeichen 1 und 0 besitzt. Mehrere Zeichen werden in einem Zeichenverband zusammengefaßt, welcher als »Wort« bezeichnet wird. Durch die Art der verwendeten Zeichensymbole, ihrer Anzahl und Stellung im Wort entsteht ein »Kodewort«. Die Vorschrift für die Zusammensetzung eines Kodewortes nennt man **Kode**.

Ein Beispiel für eine Kodierung ist die Darstellung von Zahlen mittels Ziffern durch den Dezimalzahlenkode im Dezimalsystem. In ihm wird die Wertigkeit der einzelnen Ziffer durch ihre Stelle innerhalb der Ziffernfolge bestimmt. So ist z.B. $7351_{10} = 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$. Die einzelnen Ziffern sind den Potenzen von Zehn als Faktoren zugeordnet. So kann man mit nur zehn Ziffern jede beliebig große Zahl darstellen. Die Basis des Zahlensystems wird als Index hinter die Zahl geschrieben.

Im **Dualsystem** gibt es nur zwei Zeichen, die Ziffern 0 und 1 sind als Faktoren den Potenzen von Zwei zugeordnet. Ein Beispiel für eine Dualzahl ist $1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Als Dezimalzahl ist dies die Zahl 13. Verwendet man bei Dualzahlen eine feste Stellenzahl, so nennt man das niederwertigste Bit »**LSB**« (least significant bit), das höchstwertigste Bit »**MSB**« (most significant bit). Die Darstellung negativer und gebrochener Zahlen im Dualsystem unterliegt bestimmten Gesetzen, die hier nicht erläutert werden.

Eine Dualzahl kann leicht in eine Dezimalzahl umgerechnet werden. Rechts beginnend, addiert man die Potenzen von Zwei derjenigen Stellen, an denen in der Dualzahl eine Eins steht.

Die Potenzen von Zwei sind von 2^0 bis 2^{12} von rechts nach links geschrieben:

4096, 2048, 1024, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1.

Beispiel: $10110101_2 = 1 + 4 + 16 + 32 + 128 = 181_{10}$.

Für den Menschen sind Dualzahlen sehr unübersichtlich. **Hexadezimalzahlen** stellen eine Zusammenfassung von Dualzahlen dar. Die vier Bit einer Hex-Zahl, mit denen sich sechzehn unterschiedliche Kombinationsmöglichkeiten ergeben, nennt man **Nibble**. Die Basis des Hexadezimalsystems ist sechzehn. Die hexadezimalen Zeichen sind die Ziffern 0 bis 9 und die Buchstaben A bis F für die Zahlen 10 bis 15.

Eine andere Art der Zusammenfassung von Dualzahlen ist der **BCD-Kode** (binary coded decimal). Bei ihm werden mit vier Bit eine Stelle des Dezimalsystems kodiert.

Beispiele für Hexadezimalzahlen:

$$C8_{16} = 8 \cdot 16^0 + 12 \cdot 16^1 = 200_{10}; F2A_{16} = 10 \cdot 16^0 + 2 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^2 = 3882_{10}$$

Beispiel für den BCD-Kode: 0100 0111

$$\begin{array}{cc} 4 & 7 \end{array} = 47$$

Die folgende Tabelle gibt die Zahlen 0 bis 15 als Dezimal-, Dual und Hexadezimalzahlen an.

Tabelle 19: Dezimal-, Dual- und Hexzahlen von 0 bis 15

Dezimalzahl	Dualzahl	Hex-Zahl	Dezimalzahl	Dualzahl	Hex-Zahl
0	0000	0	8	1000	8
1	0001	1	9	1001	9
2	0010	2	10	1010	A
3	0011	3	11	1011	B
4	0100	4	12	1100	C
5	0101	5	13	1101	D
6	0110	6	14	1110	E
7	0111	7	15	1111	F

Die Dualzahlen besitzen eine für elektronische Digitalrechner sehr nützliche Eigenschaft. Dualzahlen sind alle durch Folgen von nur zwei unterschiedlichen Ziffern gebildet, die durch den Zustand High oder Low repräsentiert werden können. Schaltungstechnisch kann man diese Zustände mit elektronischen Schaltern leicht verwirklichen. Mit logischen Schaltungen werden Signale des Zustandes H oder L miteinander verknüpft, um algebraische Operationen durchzuführen. Logische Schaltungen werden als Gatter bezeichnet, weil sie die Signale auf eine bestimmte Art und Weise durchlassen.

In der Schaltalgebra von C. Shannon, die auf den Arbeiten des englischen Mathematikers G. Boole (Boolesche Algebra) beruht, sind die Gesetze zur Verknüpfung logischer Variablen festgelegt.

In der normalen Algebra kann eine Variable mehrere unterschiedliche Werte annehmen. Eine logische (binäre) Variable der Schaltalgebra kann nur zwei diskrete Werte annehmen, die logische Null und die logische Eins. In der von Aristoteles³⁹ stammenden klassischen Logik entspricht dies den Wahrheitswerten »falsch« und »wahr«. Für die logische Null verwendet man das Zeichen »0«, für die logische Eins das Zeichen »1«. Es sei betont, daß diese Zeichen keine Zahlenwerte, sondern Wahrheitswerte darstellen. **Man kann diese Wahrheitswerte schaltungstechnisch, z.B. mit elektronischen Schaltern, leicht verwirklichen.** Ein Schalter besitzt auch zwei Betriebszustände (Zustandswerte), »geöffnet« und »geschlossen«, denen man wieder die Zeichen »0« und »1« zuordnen kann. Wird bei einem elektronischen Schalter dem Spannungszustand High die logische 1, dem Spannungszustand Low die logische 0 zugeordnet, so entspricht dies der bereits erwähnten positiven Logik.

Für das Rechnen in der Schaltalgebra gelten bestimmte Gesetze.

Die unabhängige Variable wird als x , die abhängige Variable als y bezeichnet. Die drei grundlegenden Verknüpfungen zwischen diesen logischen Variablen sind die Konjunktion (UND-Verknüpfung), die Disjunktion (ODER-Verknüpfung) und die Negation (auch NICHT-Verknüpfung, Komplementierung oder Invertierung genannt).

Konjunktion (UND-Verknüpfung): $y = x_1 \wedge x_2$

Disjunktion (ODER-Verknüpfung): $y = x_1 \vee x_2$

Negation (Komplementierung): $y = \bar{x}$

³⁹ Aristoteles (384 – 322 v.Chr.), griech. Philosoph und Naturforscher

Als Zeichen für seine Invertierung wird eine logische Variable überstrichen.

Die UND- bzw. ODER-Verknüpfung kann auf beliebig viele Variablen erweitert werden.

Ähnlich der herkömmlichen Algebra gelten das assoziative, das kommutative und das distributive Gesetz. Auch die Klammerregeln entsprechen denen in der konventionellen Algebra mit der üblichen Operationsfolge für die Addition und die Multiplikation. Speziell für die Schaltalgebra gilt das Gesetz von De Morgan. Den Begriff der Negation gibt es bei Zahlen überhaupt nicht. Eine Potenz wie x^2 tritt in der Schaltalgebra wegen der Tautologie nicht auf. Die Rechenregeln der Schaltalgebra sind in der folgenden Übersicht zusammengestellt.

Tabelle 20: Rechenregeln der Schaltalgebra

Grundgleichungen	
$x \wedge 0 = 0$	$x \vee 0 = x$
$x \wedge 1 = x$	$x \vee 1 = 1$
$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$
Kommutativgesetz	
$x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$	$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$
Assoziativgesetz	
$x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3$	$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$
Distributivgesetz	
$x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge x_3$	$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$
Absorptionsgesetz	
$x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1$	$x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) = x_1$
Tautologie	
$x \wedge x = x$	$x \vee x = x$
Gesetz für die Negation	
$x \wedge \overline{x} = 0$	$x \vee \overline{x} = 1$
Gesetz von De Morgan	
$\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$	$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$
Doppelte Negation	
$\overline{\overline{x}} = x$	

Durch Umformungen lassen sich logische Gleichungen vereinfachen und die Anzahl der logischen Verknüpfungen kann reduziert werden. Auch die Anzahl der unterschiedlichen Verknüpfungsarten kann dadurch minimal gehalten werden. Damit vermindert sich auch die Anzahl der notwendigen Schaltelemente bzw. unterschiedlicher Gatter. Dies ist eine sehr wichtige Aufgabe beim Entwurf logischer Schaltungen.

Das Aufsuchen möglichst einfacher und kurzer Ausdrücke zu einer gegebenen logischen Funktion (**Schaltfunktion**) nennt man **Minimisierung**.

Ein graphisches Minimisierungsverfahren, welches für Funktionen mit weniger als ca. sechs logischen Variablen geeignet ist, ist das **Karnaugh-Veitch-Diagramm**. Das algorithmische Verfahren

nach Quine-Mc Cluskey ist zur rechnerischen Minimisierung einer Schaltfunktion mit vielen logischen Variablen geeignet. Beide Verfahren werden hier nicht erläutert.

Beispiele für die Vereinfachung einer logischen Funktion:

$$y = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} = 0 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} = 0$$

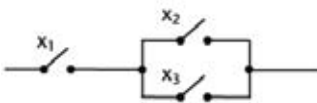
$$y = (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}) = (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (0 \wedge x_2) = (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee 0 = x_1 \wedge \overline{x_2}$$

Eine Schaltfunktion kann nicht nur als Boolescher Ausdruck in Form einer logischen Gleichung, sondern auch in Form einer **Wahrheitstabelle** (Wahrheitstafel, Funktionstabelle) dargestellt werden. In den Zeilen einer Wahrheitstabelle wird zu jeder der möglichen Wertekombinationen der Eingangsvariablen der durch die Verknüpfungsvorschrift gegebene Funktionswert geschrieben. Bei n Variablen ergeben sich somit 2^n Zeilen.

Die Zeilen der Wahrheitstabelle sind für die Eingangsvariablen leicht auszufüllen, da sie immer Dualzahlen, von Null beginnend, darstellen. Man beachte dabei das Entstehen des 0/1-Musters und vergleiche mit Tabelle 19: In der niederwertigsten (rechten) Stelle der Dualzahlen wechseln sich in den Zeilen die 0 und die 1 immer ab. In der nächsten Stelle wechseln sich 00 und 11 ab, in der nächsten Stelle 0000 und 1111 usw. – Der Wert für die Ausgangsvariable wird in jeder Zeile entsprechend der Funktionsvorschrift ermittelt.

In Abschnitt 18.7.4, Tabelle 14, wurden die Wahrheitstabellen für die UND- bzw. ODER-Verknüpfung angegeben. Dort wurde auch bereits gezeigt, daß sich logische Verknüpfungen anschaulich durch Schalter darstellen lassen. Es folgt ein weiteres Beispiel.

Der logische Ausdruck $y = x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$ entspricht der Schaltung:



Nur wenn Schalter x_1 und Schalter x_2 oder Schalter x_3 geschlossen sind, kann Strom fließen.

Wird ein geschlossener Schalter mit 1 bezeichnet, so ist die zugehörige Wahrheitstabelle:

x_3	x_2	x_1	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Die Realisierung einer Schaltfunktion nennt man Zuordner oder **Schaltnetz**. Enthält ein logisches Netz Speicherelemente, wie z.B. Flipflops, deren Schaltzustände nicht allein von den momentanen logischen Zuständen, sondern auch von einer »Vorgeschichte« abhängen und den Ausgangswert mit beeinflussen, so nennt man dieses Netz **Schaltwerk**. Schaltwerke sind mit Hilfe der Schaltalgebra nur noch unvollkommen behandelbar. Die statische Logik mit Speichern und die zeitabhängige Logik mit Zeitfunktionselementen (z.B. Monoflops) werden unter dem Begriff »sequentielle Logik« zusammengefaßt.

Digitale Verknüpfungsschaltungen als Schaltnetze werden für die unterschiedlichsten Steuer- und Rechenwerke benötigt. Der Entwurf solcher Schaltungen wird als Synthese von Schaltnetzen bezeichnet.

Die Schaltungssynthese erfolgt in fünf Schritten:

1. Festlegen der Ein- und Ausgangsvariablen sowie der Bedeutung von 0 und 1.
2. Erstellen der Wahrheitstabelle
3. Aufstellen der Funktionsgleichungen
4. Schaltungsoptimierung
5. Erstellen des Schaltnetzes.

19.17.2 Schaltungstechnische Realisierung der logischen Grundfunktionen

Sämtliche logische Schaltungen bestehen aus drei Grundschaltungen, und zwar aus dem UND-Gatter, dem ODER-Gatter und dem Inverter (engl.: AND-Gate, OR-Gate, Inverter). Eine Reihenschaltung aus AND-Gatter und Inverter ergibt das NAND-Gatter (Not-And), aus OR-Gatter und Inverter das NOR-Gatter (Not-Or). Durch Kombination der drei Grundschaltungen kann man alle logischen Schaltungen aufbauen, um arithmetische Operationen mit Dualzahlen einschließlich der Multiplikation und Division durchzuführen. Als weiteres Grundelement kann ein Speicher, wie z.B. das Flipflop, angesehen werden.

Zur schaltungstechnischen Realisierung eines Inverters ist ein Schalttransistor in Emitterschaltung geeignet. Das Eingangssignal wird durch die Phasendrehung von 180° invertiert.

Liegt am Eingang eines Inverters High, so ist der Ausgang Low und umgekehrt.

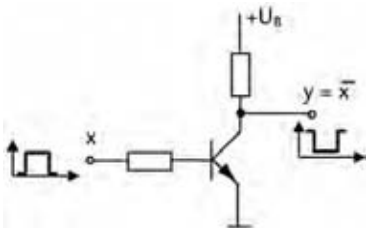


Abb. 394: Transistor in Emitterschaltung als Inverter

In der Digitaltechnik interessiert man sich nicht für die Spannung als physikalische Größe, sondern nur für ihren logischen Zustand. Die Ein- und Ausgänge werden deshalb nicht mit U_e , U_a usw. bezeichnet, sondern direkt mit der logischen Variablen.

Ein AND-Gatter kann man im Prinzip aus einer Reihenschaltung, ein OR-Gatter aus einer Parallelschaltung zweier Transistoren realisieren.

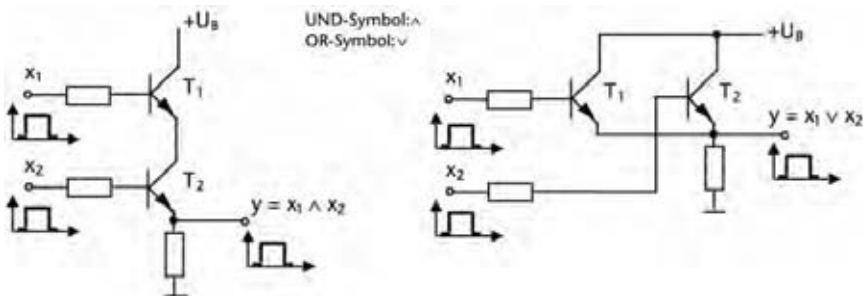


Abb. 395: Prinzipschaltung eines AND-Gatters (links) und eines OR-Gatters (rechts)

Wirkungsweise des AND-Gatters:

Ist beim AND-Gatter $x_1 = \text{Low}$, so sperrt T_1 ; ist $x_2 = \text{Low}$, so sperrt T_2 . Nur wenn beide Eingänge, x_1 **und** x_2 , auf High sind, leiten beide Transistoren und am Emitterwiderstand von T_2 fällt eine Spannung ab, der Ausgang ist dann High.

Ist nur einer der Eingänge eines AND-Gatters auf Low, so ist der Ausgang Low.

Wirkungsweise des OR-Gatters:

Beim OR-Gatter sperrt T_1 , wenn $x_1 = \text{Low}$ ist; T_2 sperrt, wenn $x_2 = \text{Low}$ ist. Ist nur einer der Eingänge, x_1 **oder** x_2 , auf High, so leitet der zugehörige Transistor und am Emitterwiderstand fällt eine Spannung ab, der Ausgang ist High.

Ist nur einer der Eingänge eines OR-Gatters auf High, so ist der Ausgang High.

Schaltet man hinter den Ausgang eines AND- bzw. OR-Gatters einen Inverter, so erhält man ein NAND- bzw. ein NOR-Gatter.

Wie man mit Dioden ein AND- bzw. OR-Gatter realisieren kann, wurde bereits in Abschnitt 18.7.4 beschrieben. Diese Technik wird abgekürzt als **DL-Technik** (Dioden-Logik) bezeichnet. Eine Kopplung mehrerer logischer Schaltungen in DL-Technik ist nicht ohne weiteres möglich, da durch den Spannungsabfall an den Dioden die Ausgangsspannung unter den High-Wert sinken kann.

Eine Erweiterung der DL-Technik ist die **DTL-Technik** (Dioden-Transistor-Logik). Bei ihr führen die logischen Verknüpfungen wieder Dioden aus und der Transistor wird für die Phasenumkehr und für die Verstärkung zum Ausgleich des Spannungsabfalls an den Dioden ausgenutzt.

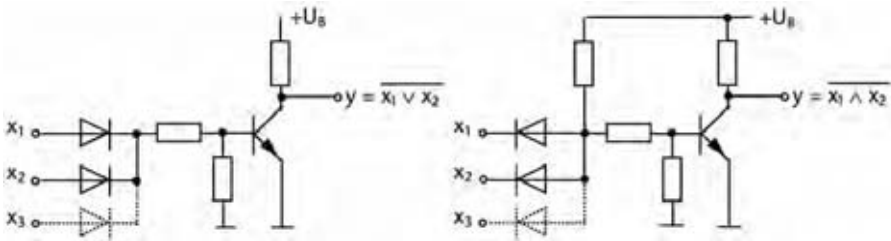


Abb. 396: Prinzip des DTL-NOR-Gatters (links) und DTL-NAND-Gatters (rechts)

Wirkungsweise des DTL-NOR-Gatters:

Ist auch nur einer der Eingänge High, so leitet die zugehörige Eingangsdiode. Über den Spannungsteiler erhält die Basis des Transistors eine positive Vorspannung, der Transistor leitet und der Ausgang ist Low. Sind alle Eingänge Low, so sperrt der Transistor und der Ausgang ist High.

Wirkungsweise des DTL-NAND-Gatters:

Sind alle Eingänge High, so sperren die Eingangsdioden, die Basis des Transistors ist positiv, der Transistor leitet, der Ausgang ist Low. Ist auch nur einer der Eingänge Low, so leitet die zugehörige Eingangsdiode. Über den Basisspannungsteiler wird die Durchlaßspannung der Diode heruntergeteilt. Das Basispotential des Transistors sinkt unter 0,6 V, der Transistor sperrt, der Ausgang ist High.

Mit der **RTL-Technik** (Widerstands-Transistor-Logik) lassen sich NAND- und NOR-Gatter recht einfach realisieren.

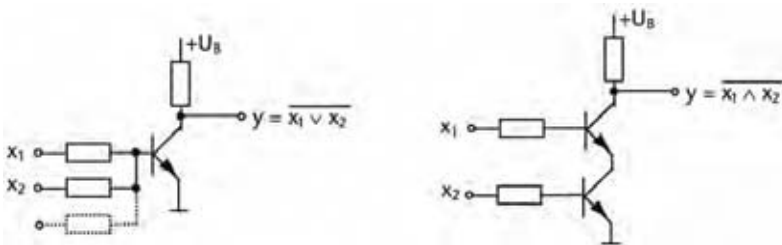


Abb. 397: RTL-NOR-Gatter (links) und RTL-NAND-Gatter (rechts)

Wirkungsweise des RTL-NOR-Gatters:

Ist auch nur einer der Eingänge High, so leitet der Transistor und der Ausgang ist Low. Sind alle Eingänge Low, so sperrt der Transistor und der Ausgang ist High.

Wirkungsweise des RTL-NAND-Gatters:

Sind alle Eingänge High, so leiten die Transistoren und der Ausgang ist Low. Ist auch nur einer der Eingänge Low, so sperrt der zugehörige Transistor und der Ausgang ist High.

Mit der RTL- und DTL-Technik kann man Schaltfrequenzen bis ca. 2 MHz verarbeiten.

Die vorhergehend beschriebenen Schaltungen sind typisch für einen Aufbau mit einzelnen Bauteilen. Bei monolithisch integrierten Schaltungen, die auf einem einzigen Kristallplättchen (Sili-

zium-Chip) sehr viele Transistoren enthalten, werden andere Schaltungstechniken angewandt. Die Abkürzung für »integrierte Schaltung« ist »IC« (engl. Integrated Circuit).

In integrierten Schaltungen wird die **TTL-Technik** (Transistor-Transistor-Logik) eingesetzt. Die Eingangsdiolen der DTL-Schaltungen sind hier durch die Emitter-Basis-Strecken eines Transistors mit mehreren Emitttern ersetzt. Durch den integrierten Aufbau des Multi-Emitter-Transistors können parasitäre Kapazitäten sehr klein gehalten, und dadurch wesentlich kürzere Schaltzeiten erreicht werden. Typische Schaltzeiten liegen bei einigen ns, die Leistungsaufnahme eines TTL-Gatters liegt bei einigen mW. Noch kürzere Schaltzeiten bei reduziertem Leistungsverbrauch erreicht man mit **Low Power Schottky** Bausteinen (LS-ICs), bei denen Schottky-Dioden eine Sättigung der Transistoren verhindern. Die kürzesten Schaltzeiten (bis 1 ns) ergeben sich bei der **ECL-Technik** (emittergekoppelte Logik, emitter coupled logic). Dabei wird durch eine spezielle Schaltungstechnik verhindert, daß die Transistoren in die Sättigung kommen.

Erwähnt sei, daß gegenüber den bisher beschriebenen Logikfamilien mit ausschließlich bipolaren Transistoren auch mit Feldeffekttransistoren logische Schaltungen, diskret oder integriert, realisiert werden können.

Integrierte Schaltungen in **CMOS-Technik** (complementary metal oxid semiconductor) weisen eine besonders geringe Verlustleistung auf.

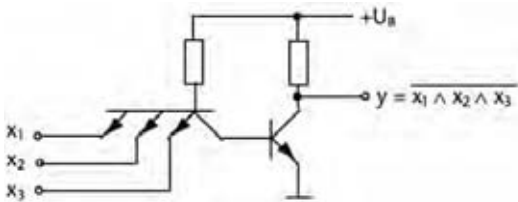


Abb. 398: Prinzip eines TTL-NAND-Gatters

Werden mehrere logische Schaltungen miteinander verknüpft (Beispiel: Reihenschaltung aus AND-Gatter und Inverter), so wäre der Zeichenaufwand groß, wenn man immer alle Bauteile der realisierten Grundfunktionen zeichnen würde. Zur Vereinfachung wurden Schaltzeichen eingeführt, welche nur die logische Funktion kennzeichnen, aber nichts über den inneren Aufbau aussagen. Mit diesen Schaltzeichen entstehen **logische Schaltbilder**, die den Informations- oder Signalfluß kennzeichnen, aber keinerlei Aussage über die technische Ausführung dieser Schaltungen machen. Auch in den Datenbüchern digitaler ICs werden diese Schaltzeichen angegeben. Einige dieser Schaltzeichen nach IEC⁴⁰-Norm werden hier aufgeführt.

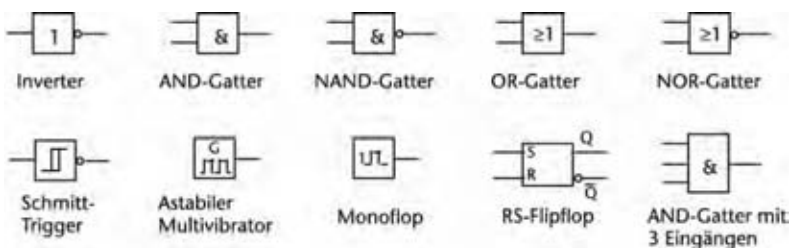


Abb. 399: Einige digitale Schaltsymbole für logische Funktionen

⁴⁰ IEC = International Electrotechnical Commission

In integrierten Schaltungen sind meist mehrere dieser digitalen Funktionen realisiert, z.B. kann ein IC sechs Inverter, vier NAND-Gatter oder zwei Monoflops enthalten. Im Datenblatt des ICs ist angegeben, an welchen Anschlüssen die Stromversorgung bzw. die Ein- und Ausgänge liegen.

Mit den digitalen Schaltzeichen lassen sich logische Grundsaltungen und Kippschaltungen einfacher zeichnen. Als Beispiel soll hier nur der Multivibrator dienen.

Wie man in Abb. 389 sieht, stellen die Transistoren zusammen mit ihren Kollektorwiderständen je einen Inverter in RTL-Technik dar. Unter Verwendung des logischen Schaltsymbols für einen Inverter erhält man die zu Abb. 389 äquivalente Darstellung in Form eines logischen Schaltbildes.

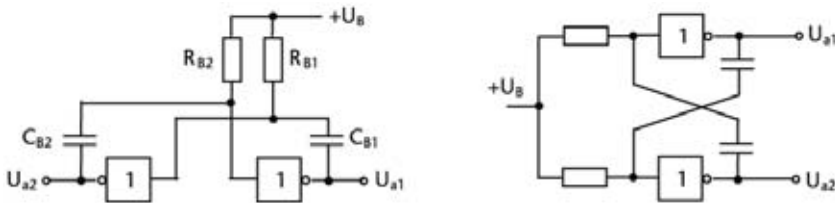


Abb. 400: Zu Abb. 389 äquivalente Darstellung (links) und umgezeichnet in eine übliche Form (rechts)

Mit den digitalen Grundsaltungen können z.B. Komparatoren für den Vergleich zweier Zahlen, Addierer, Subtrahierer, Register und Impulszähler aufgebaut werden. Dieses Gebiet der digitalen Schaltungstechnik wird hier nicht weiter behandelt.

Aufgabe 89:

Drei Maschinen werden von Elektromotoren angetrieben. Die Leistungsaufnahme der Motoren ist: Motor A = 1 kW, Motor B = 2 kW, Motor C = 4 kW. Die maximal verfügbare Netzleistung beträgt 4 kW und reicht für Motor C nur aus, wenn die beiden anderen Motoren nicht eingeschaltet werden. Der Zustand der Motoren (ein, aus) steht als logisches Signal zur Verfügung.

Zu entwerfen ist eine Schaltung, die ein Warnsignal ausgibt, wenn von den drei Motoren eine Leistung von mehr als 4 kW aus dem Netz entnommen wird.

Lösung:

1. Variablenfestlegung

Der Zustand des Motors A ist x_1 . Motor aus: $x_1 = 0$. Motor ein: $x_1 = 1$.

Der Zustand des Motors B ist x_2 . Motor aus: $x_2 = 0$. Motor ein: $x_2 = 1$.

Der Zustand des Motors C ist x_3 . Motor aus: $x_3 = 0$. Motor ein: $x_3 = 1$.

Der Zustand des Warnsignals ist y . Warnsignal aus: $y = 0$. Warnsignal ein: $y = 1$.

2. Erstellen der Wahrheitstabelle

x_3	x_2	x_1	y	Leistung in kW	Bemerkung
0	0	0	0	0	kein Motor ein
0	0	1	0	1	A ein
0	1	0	0	2	B ein
0	1	1	0	3	A und B ein
1	0	0	0	4	C ein
z_1	1	0	1	5	A und C ein
z_2	1	1	0	6	B und C ein
z_3	1	1	1	7	A, B und C ein

} Warnsignal ein

3. Aufstellen der Funktionsgleichung

Die Funktionsgleichung wird mit der ODER-Normalform (disjunktive Normalform) aus der Wahrheitstabelle ermittelt (dies wurde bisher nicht erläutert). Als Zwischenfunktionen werden zunächst alle Konjunktionen derjenigen Zeilen gebildet, in denen $y = 1$ ist.

$$z_1 = x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \quad z_2 = \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \quad z_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

Die gesuchte Funktion erhält man als die Disjunktion der Konjunktionen.

$$y = z_1 \vee z_2 \vee z_3 = (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

4. Schaltungsoptimierung (Vereinfachen der Funktionsgleichung)

$$\text{Ausklammern von } x_3 \text{ ergibt: } y = [(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2)] \wedge x_3$$

$$\text{Anders geschrieben: } y = [(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2)] \wedge x_3$$

Zwischenrechnung für die eckige Klammer:

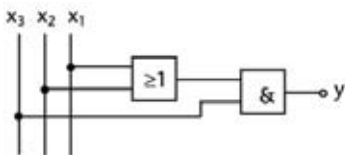
$$(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_2) = \overline{x_1} \wedge (\overline{x_2} \vee x_2) = \overline{x_1} \wedge 1 = \overline{x_1}$$

$$\overline{x_1} \vee (\overline{x_1} \wedge x_2) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_1}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2) = \overline{x_1} \wedge (\overline{x_1} \vee x_2) = \overline{x_1} \vee x_2$$

Der Ausdruck für die eckige Klammer ist $\overline{x_1} \vee x_2$.

$$\text{Somit ist } y = (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge x_3$$

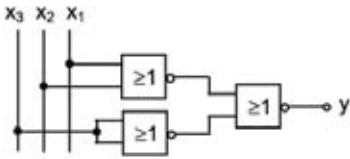
5. Erstellung des Schaltnetzes



Da ein IC häufig nur gleichartige Gatter enthält (z.B. vier UND-Gatter), bräuchte man für die Schaltung zwei ICs. Einige Gatter bleiben unbenutzt, soweit sie nicht in einem anderen Schaltungsteil gebraucht werden. Wird die Schaltung mit NOR-Gattern realisiert, so benötigt man zwar drei Gatter, aber nur ein IC (z.B. mit vier NOR-Gattern).

Die Schaltung mit NOR-Gattern ergibt sich aus der Umformung der Funktionsgleichung.

$$y = (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge x_3 = \overline{(\overline{\overline{x_1} \vee x_2})} \wedge x_3 = \overline{(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2})} \wedge x_3 = (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$$



Wie man sieht, wirkt ein NOR-Gatter (ebenso wie ein NAND-Gatter) als Inverter, wenn man alle Eingänge des Gatters verbindet.

Anmerkung für die Praxis: Unbenutzte Eingänge von AND- und NAND-Gattern werden (häufig über einen Schutzwiderstand von 1 k Ω) an die Versorgungsspannung angeschlossen. Unbenutzte Eingänge von OR- und NOR-Gattern legt man an Masse.

19.18 Zusammenfassung: Bipolare Transistoren

1. Ein Transistor ist ein aktives Halbleiterbauelement.
2. Es gibt bipolare und unipolare (FETs) Transistoren.
3. Bei den bipolaren Transistoren gibt es Germanium- und Silizium-, NPN- und PNP-Typen.
4. Die Anschlüsse des Transistors heißen Emitter, Basis und Kollektor.
5. Im Arbeitspunkt ist beim Germanium-Transistor U_{BE} ca. 0,3 V, beim Silizium-Transistor ca. 0,7 V.
6. Wirkt der Transistor als Verstärker, so steuert der kleine Basisstrom den großen Kollektorstrom.
7. Stromverstärkung des Transistors: $B = \frac{I_C}{I_B}$
8. Ein NPN-Transistor leitet, wenn die Basis positiv ist.
9. Ein PNP-Transistor leitet, wenn die Basis negativ ist.
10. Es gibt drei Grundschaltungen des Transistors: Basis-, Emitter- und Kollektorschaltung.
11. Ein Transistor kann als linearer Verstärker oder als Schalter betrieben werden.
12. Eingangs-, Ausgangs- und Steuerkennlinie beschreiben den Transistor.
13. Die Sättigungsspannung $U_{CE\text{ sat}}$ beträgt ca. 0,2 V.
14. Der Arbeitspunkt auf der Lastgeraden im Ausgangskennlinienfeld wird durch einen Basis-Ruhegleichstrom festgelegt.
15. Wechselstrom-Kleinsignalverstärkung in Emitterschaltung: $\beta = \left. \frac{i_C}{i_B} \right|_{U_{CE=\text{const}}}$; $\beta \approx B \gg 1$
16. Stromverstärkung in Basisschaltung: $\alpha = \frac{I_C}{I_E} < 1$

17. Stromverstärkung in Kollektorschaltung: $\gamma = \frac{1}{1 - \alpha} = \beta + 1$

18. Umrechnung zwischen α und β : $\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$ und $\alpha = \frac{\beta}{\beta + 1}$

19. Die Stromverstärkung ist abhängig vom Arbeitspunkt und von der Temperatur.

20. Die Stromverstärkung sinkt mit wachsender Frequenz.

21. Beziehung zwischen der β -Grenzfrequenz und der Transistfrequenz: $f_T = \beta \cdot f_\beta$.

22. Bei der Wahl des Arbeitspunktes sind bestimmte Grenzen des erlaubten Arbeitsbereiches zu beachten.

23. Eingangsimpedanz der Emitterschaltung: $r_{eE} = r_{BE} = \frac{U_T}{I_B} = \frac{U_T \cdot \beta}{I_C} = \frac{\beta}{S}$

24. Ausgangsimpedanz der Emitterschaltung: $r_{aE} = R_C \parallel r_{CE} \approx R_C$

25. Steilheit eines Transistors: $S = \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{BE}} = \frac{\beta}{r_{BE}}$

26. Wechselspannungsverstärkung der Emitterschaltung:

$$V_{uE} = -\frac{\Delta U_a}{\Delta U_e} = -\beta \cdot \frac{R_C}{r_{BE}} = -S \cdot R_C = -\frac{U_{RC}}{U_T} = -\frac{I_C \cdot R_C}{U_T}$$

27. Abschätzung der Wechselspannungsverstärkung der Emitterschaltung:

$$V_{uE} = -40 \cdot U_{RC} = -40 \cdot I_C \cdot R_C$$

28. Leistungsverstärkung der Emitterschaltung: $V_{pE} = \frac{P_a}{P_e} = \beta \cdot V_{uE}$

29. Frequenzgang der Wechselspannungsverstärkung in Emitterschaltung: $V_{uE} = -\frac{\beta(f)}{\beta} \cdot \frac{U_{RC}}{U_T}$

30. Eingangsimpedanz der Basisschaltung: $r_{eB} = \frac{r_{BE}}{\beta} = \frac{U_T}{I_C} = \frac{1}{S}$

31. Ausgangsimpedanz der Basisschaltung: $r_{aB} = R_C \parallel r_{CE} \approx R_C$

32. Wechselspannungsverstärkung der Basisschaltung: $V_{uB} = V_{uE}$

33. Leistungsverstärkung der Basisschaltung: $V_{pB} = \frac{P_a}{P_e} = \alpha \cdot V_{uB}$

34. Eingangsimpedanz der Kollektorschaltung: $r_{eC} = \frac{U_T}{I_B} + \beta \cdot R_E = \beta \cdot \left(\frac{U_T}{I_C} + R_E \right)$ $r_{eC} \approx \beta \cdot R_E$

35. Der Eingangswiderstand der Kollektorschaltung ist sehr groß.

36. Ausgangsimpedanz der Kollektorschaltung: $r_{aC} \approx \frac{U_T}{I_C}$
37. Der Ausgangswiderstand der Kollektorschaltung ist sehr niedrig.
38. Wechselspannungsverstärkung der Kollektorschaltung: $V_{uC} = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_e} \approx 1 \quad (\leq 1)$
39. Leistungsverstärkung der Kollektorschaltung: $V_{pC} = \frac{P_a}{P_e} = \gamma \cdot V_{uC} \approx \beta \cdot V_{uC}$
40. Bei der Rückkopplung unterscheidet man Mitkopplung und Gegenkopplung.
41. Die Gegenkopplung verbessert die Eigenschaften eines Verstärkers, obwohl die Verstärkung abnimmt.
42. Das Produkt aus Verstärkung und Bandbreite ist konstant.
43. Ein Transistor kann durch eine formale oder eine physikalische Ersatzschaltung beschrieben werden.
44. Die formale Ersatzschaltung benutzt Vierpolgleichungen mit meist h-Parametern.
45. Ersatzschaltbilder des Transistors enthalten gesteuerte Quellen.
46. Spezielle Schaltungen sind die Darlington-, Bootstrap-, Kaskodeschaltung.
47. Der Differenzverstärker verstärkt die Differenz zweier Eingangsspannungen.
48. Harmonische Oszillatoren erzeugen Sinusschwingungen.
49. In der Digitaltechnik wird der Transistor als Schalter verwendet.
50. Ein Transistor als Schalter hat bestimmte Schaltzeiten.
51. Ein Transistor kann zum Schalten eines Verbrauchers benutzt werden.
52. Ein Multivibrator erzeugt periodische, rechteckförmige Spannungen.
53. Ein Monoflop erzeugt einen Rechteckimpuls bestimmter Dauer.
54. Ein Flipflop ist ein Speicherelement.
55. Der Schmitt-Trigger wandelt ein analoges in ein digitales Signal um (mit Hysterese).
56. Binäre Signale haben nur zwei Spannungswerte, High und Low.
57. Ein Bit entspricht einer Binärstelle (kleinste Informationseinheit).
58. Elektronische Digitalrechner arbeiten mit Dualzahlen, die mit elektronischen Schaltern leicht realisierbar sind.
59. Für das Rechnen in der Schaltalgebra gelten bestimmte Gesetze.
60. Grundlegende Verknüpfungen logischer Variablen sind UND, ODER, NICHT.
61. Liegt am Eingang eines Inverters High, so ist der Ausgang Low und umgekehrt.
62. Ist nur einer der Eingänge eines AND-Gatters auf Low, so ist der Ausgang Low.

- 63. Ist nur einer der Eingänge eines OR-Gatters auf High, so ist der Ausgang High.
- 64. Gatter können in DL-, DTL-, RTL-, TTL-, ECL-, CMOS-Technik diskret oder integriert als IC realisiert werden.
- 65. Für logische Funktionen gibt es digitale Schaltzeichen.

20 Feldeffekt-Transistoren

20.1 Bezeichnungen und Klassifizierung

Ein Feldeffekttransistor, abgekürzt FET, arbeitet nach einem ganz anderen Prinzip als ein bipolarer Transistor. Ein bipolarer Transistor besteht aus P- und N-dotierten Halbleiterschichten mit unterschiedlicher Dotierung. Er wird durch einen Basisstrom gesteuert, wobei die Ansteuerung eine kleine Leistung erfordert. Ein Feldeffekttransistor besteht dagegen aus einem Halbleiterblock mit nur einer Dotierung. Der Stromfluß wird durch eine Steuerspannung gesteuert, die Steuerung des Ladungsträgerstromes erfolgt leistungslos.

Der FET wird als unipolarer Transistor bezeichnet, weil nur Elektronen **oder** Löcher an der Stromleitung im Halbleiterblock beteiligt sind.

Seinen Namen hat der Feldeffekttransistor daher, daß ein elektrisches Feld, welches senkrecht zur Stromflußrichtung wirkt, den Stromfluß steuert.

Den Begriff des Feldes haben wir bereits beim magnetischen Feld in Abschnitt 3.4.1 kennengelernt. Der Raum, in dem magnetische Kräfte wirksam sind, heißt Magnetfeld. Den Raum in der Umgebung eines elektrisch geladenen Körpers, in dem auf andere elektrische Ladungen Kräfte der Anziehung oder Abstoßung wirken, nennt man **elektrisches Feld**. So wie beim Magnetfeld wird ein elektrisches Feld durch elektrische Kraftlinien oder Feldlinien dargestellt. Die Feldlinien geben in jedem Punkt eines elektrischen Feldes die Richtung der auf eine positive Ladung wirkenden Kraft an. Elektrische Feldlinien treten stets senkrecht aus der Oberfläche eines leitenden Körpers aus und verlaufen von der positiven zur negativen Ladung, haben also Anfang und Ende (im Gegensatz dazu sind magnetische Feldlinien stets in sich geschlossen). In Richtung der Feldlinien herrscht als Kraft »Zug«, quer zu ihnen »Druck«. Zwischen den Platten eines Plattenkondensators besteht z.B. ein homogenes elektrisches Feld mit parallelen Feldlinien.

Ein von außen auf den Halbleiterblock des FET einwirkendes elektrisches Feld wirkt je nach seiner Stärke auf den Ladungsträgerfluß mehr oder weniger hindernd ein. FETs sind somit wie bipolare Transistoren als »steuerbare elektrische Widerstände« anzusehen.

Durch die leistungslose Steuerung ergibt sich ein außerordentlich hoher Eingangswiderstand, der eine hohe Empfindlichkeit gegenüber statischen Entladungen am Gate zur Folge hat (Gefahr der Zerstörung bei Berührung der Anschlüsse).

Gegen thermische Instabilitäten sind FETs hingegen unempfindlich, da der Strom mit steigender Temperatur kleiner wird.

Ein FET hat normalerweise drei **Anschlüsse**: **Source** (S), **Gate** (G) und **Drain** (D).

Source kann man mit Quelle übersetzen und entspricht beim bipolaren Transistor dem Emitter. Gate bedeutet Tor, es ist die Steuerelektrode und entspricht der Basis. Mit dem Gate läßt sich der Widerstand zwischen Drain und Source steuern. Die Übersetzung für Drain ist Senke. Der Drainanschluß entspricht dem Kollektor.

Den Strompfad, also das Gebiet des Halbleiterblocks, welches von Ladungsträgern (Elektronen oder Löcher) von Source nach Drain durchflossen wird, nennt man **Kanal** (engl.: channel).

Man unterscheidet **zwei Grundformen** des FET: Den **Sperrschicht-Typ** und den **Isolierschicht-Typ**.

Von beiden Grundformen gibt es Ausführungen mit P- oder N-dotiertem Halbleitermaterial des Kanals. Sie unterscheiden sich hauptsächlich durch die Polarität der erforderlichen Betriebsspannungen. Da es wegen der einfacheren Herstellbarkeit und besseren Eigenschaften mehr N-Kanal-Typen gibt, erfolgen die weiteren Erläuterungen für diese Typen.

Beim Sperrschicht-FET (engl.: Junction-FET, JFET) ist das Gate vom Kanal durch einen in Sperrrichtung vorgespannten PN- bzw. NP-Übergang getrennt. Bei Sperrschicht-FETs fließt der größte Kanalstrom (Drainstrom) bei der Gate-Source-Spannung $U_{GS} = 0$ V. Deshalb werden sie als selbstleitend bezeichnet.

Beim Isolierschicht-Typ (engl.: Metal-Oxid-Semiconductor-FET, kurz **MOSFET**) isoliert eine dünne Oxidschicht des Halbleiters (SiO_2) das Gate vom Kanal. Beim Isolierschicht-Typ ist also die Reihenfolge des Aufbaus Metall/ Oxid/ Halbleiter. Unabhängig von der Polung des Gates kann bei einem MOSFET wegen der isolierenden Oxidschicht nie ein Gatestrom fließen.

Je nachdem, ob die angelegte Gate-Source-Spannung U_{GS} die Ladungsträger im Kanal verdrängt oder vermehrt, unterscheidet man bei den MOSFETs wiederum **selbstleitende** und **selbstsperrende** Ausführungen. Die selbstleitenden MOSFETs gehören zum **Verarmungstyp** (engl.: depletion type), die selbstsperrenden zum **Anreicherungstyp** (engl.: enhancement type).

Beim selbstleitenden MOSFET fließt der größte Drainstrom bei der Spannung $U_{GS} = 0$ V. Beim selbstsperrenden MOSFET fließt bei $U_{GS} = 0$ V kein Drainstrom. Bei einem selbstsperrenden N-Kanal-MOSFET fließt erst dann ein Drainstrom, wenn U_{GS} positiv wird.

Bei Sperrschicht-FETs liegt der beim Betrieb fließende Gate-Gleichstrom im pA-Bereich bei einem Eingangswiderstand von bis zu $> 10000 \text{ M}\Omega$ (bei MOSFETs $> 10^8 \text{ M}\Omega$).

Als **Unterschiede zwischen unipolaren und bipolaren Transistoren** sind zu nennen:

Der Hauptunterschied ist die fast verlustfreie, leistungslose Steuerung des FET mit einer Spannung gegenüber der Ansteuerung eines bipolaren Transistors mit einem Strom. Der Eingangswiderstand eines FET ist sehr hoch.

Ein FET hat eine höhere Sättigungsspannung als ein bipolarer Transistor.

Im Bereich kleiner Betriebsspannungen verläuft das Ausgangskennlinienfeld eines FET weniger linear als das eines bipolaren Transistors.

Ein FET ist äußerst empfindlich gegen Überspannungen (statischen Entladungen) am Gate.

Die Exemplarstreuungen von FET-Daten sind viel größer als diejenigen von bipolaren Transistoren.

Im Vergleich zum bipolaren Transistor ist die Temperaturabhängigkeit eines FET geringer und die thermische Stabilität besser (der Drainstrom nimmt mit steigender Temperatur ab).

Im Schaltbetrieb tritt bei bipolaren Transistoren im niederohmigen Zustand (Sättigung) eine große Speicherladung auf. Dies führt beim Ausschaltvorgang zu einer unerwünschten Speicherzeit. FETs zeigen keinen vergleichbaren Effekt und eignen sich als schnelle Schalter.

Bei MOSFETs ist das **Substrat** (Bulk) häufig als vierter Anschluß (B) herausgeführt. In fast allen Fällen wird dieser Anschluß mit dem Sourceanschluß verbunden.

Bei hochintegrierten Digitalschaltungen überwiegt der Einsatz von MOSFETs. Leistungs-MOSFETs (Power-FETs) werden bei Schaltanwendungen mit Drainströmen bis einigen zehn Ampere (Verlustleistung bis über 150 W) und in Verstärkerendstufen eingesetzt.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die sechs verschiedenen Typen von FETs. Zu den einzelnen Typen ist das Schaltzeichen und die Eingangskennlinie angegeben.

Tabelle 21: Übersicht über die verschiedenen Typen von Feldeffekt-Transistoren

Feldeffekt-Transistoren					
Sperrschicht-FET (JFET)		MOSFET			
selbstleitend leitet bei $U_{GS} = 0$		Verarmungstyp, selbstleitend leitet bei $U_{GS} = 0$		Anreicherungstyp, selbstsperrend sperrt bei $U_{GS} = 0$	
N-Kanal	P-Kanal	N-Kanal	P-Kanal	N-Kanal	P-Kanal

Im Schaltzeichen deutet der durchgehende Strich zwischen D und S bei den selbstleitenden Typen den für $U_{GS} = 0$ stromführenden Kanal an. Bei den selbstsperrenden Typen ist der Kanal für $U_{GS} = 0$ »unterbrochen« (gestrichelt) gezeichnet. Bei den MOSFETs ist die isolierte Gate-Elektrode durch eine Linie parallel zum Kanalstrich angedeutet.

20.2 Sperrschicht-FET mit N-Kanal

20.2.1 Aufbau und Arbeitsweise

Der Aufbau und die Arbeitsweise eines N-Kanal Sperrschicht-FETs wird mit der Prinzipdarstellung der nächsten Abbildung erläutert.

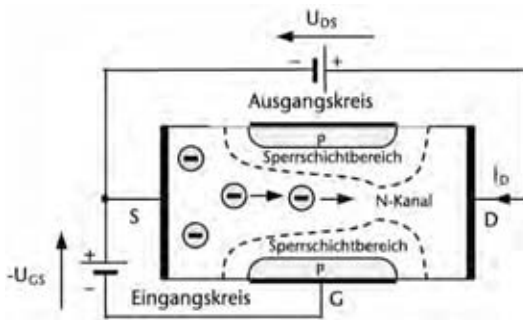


Abb. 401: Modell eines Sperrschicht-FETs (Längsschnitt)

An den beiden Enden eines N-leitenden Silizium-Stäbchens sind zwei Elektroden angebracht; sie bilden die Anschlüsse Source (S) und Drain (D). Zwischen ihnen befindet sich der Kanal. Wird zwischen Drain und Source eine positive Spannung angelegt, ohne daß eine Spannung zwischen Gate (G) und Source vorhanden ist, so fließen Elektronen ungehindert durch den Kanal vom Source- zum Drainanschluß.

Der N-Kanal ist ringförmig von einer P-leitenden Schicht umgeben, die mit dem Gateanschluß verbunden ist. Zwischen P-Schicht und N-Kanal bildet sich eine Sperrschichtzone, ein PN-Übergang. Legt man zwischen Gate und Source eine negative Spannung, so wird dieser PN-Übergang in Sperrrichtung betrieben. Die Sperrschicht wird breiter und wächst stärker in den Kanal hinein, je größer die negative Gatespannung wird. Der stromführende Querschnitt des Kanals wird um so enger und damit dessen Widerstand um so größer, je negativer das Gate gegenüber Source wird. Somit kann der von Source nach Drain fließende Elektronenstrom durch die Gatespannung gesteuert werden. Die Steuerung erfolgt nahezu leistungslos, da der Steuerstrom ein sehr kleiner Sperrstrom ist.

Auch die Drain-Source-Spannung U_{DS} trägt zur Verengung des Kanals bei. Dadurch ist die Verengung unsymmetrisch und auf der Drainseite stärker. Bei einer bestimmten Spannung $U_{DS} = U_p$, die **Abschnürspannung** oder Schwellenspannung genannt wird (engl.: pinch-off voltage), kommt es auf der Drainseite fast zu einer Berührung der Sperrschichtbereiche. Der Drainstrom I_D bleibt für $U_{DS} > U_p$ trotz weiter steigender Spannung U_{DS} fast konstant. Obwohl durch die höhere Spannung U_{DS} ein stärkeres elektrisches Feld in Längsrichtung des Kanals vorliegt, kann der Drainstrom I_D nicht weiter ansteigen, da der enge Querschnitt des Kanals die Zahl der fließenden Elektronen begrenzt. Es tritt eine Stromsättigung ein. Der Ausgangswiderstand ist im **Abschnürbereich** sehr hoch.

Aus der beschriebenen Wirkungsweise ist zu erkennen, daß ein Sperrschicht-FET immer selbst-leitend ist, durch die Ansteuerung kann die Leitfähigkeit nur verringert werden.

Eine große Gatespannung unterbricht den Drainstrom bis auf wenige Nanoampere. Liegen am Gate Null Volt, so fließt der größte Drainstrom. Ein FET ist daher gut zum Schalten kleiner Signale geeignet.

20.2.2 Kennlinien und Arbeitsbereiche

Die Eingangskennlinie (Übertragungskennlinie) gibt die Abhängigkeit des Drainstromes I_D von der Gate-Source-Spannung U_{GS} an.

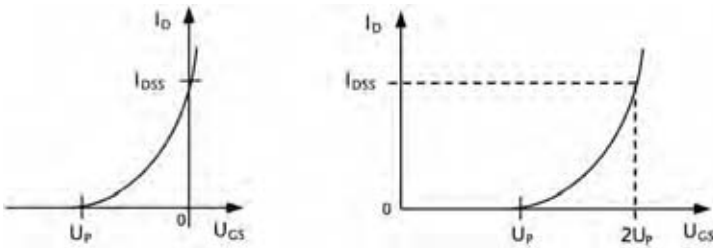


Abb. 402: Eingangskennlinie eines selbstleitenden N-Kanal-FETs (links) und eines selbstsperrenden (rechts)

Die Abschnürspannung U_p ist eine charakteristische Größe der Eingangskennlinie. Wird U_p unterschritten, so sinkt der Drainstrom auf einen sehr kleinen Wert im nA-Bereich.

Oberhalb von U_p steigt der Drainstrom angenähert quadratisch nach der Gleichung:

Gl. 179: Zusammenhang zwischen Drainstrom I_{DS} und Steuerspannung U_{GS}

$$I_D = I_{DSS} \left(1 - \frac{U_{GS}}{U_p} \right)^2$$

Bei selbstleitenden FETs ist I_{DSS} der Drainstrom für $U_{GS} = 0$ V (Gate-Source-Strecke kurzgeschlossen). Bei selbstsperrenden FETs ist I_{DSS} der Drainstrom für $U_{GS} = 2U_p$.

Die Steigung der Eingangskennlinie wird als **Steilheit** S (engl.: transconductance) des FET bezeichnet. Die Steilheit wird in mA/V angegeben. Sie hängt vom Arbeitspunkt auf der Eingangskennlinie mit zugehöriger Spannung U_{GS} und zugehörigem Strom I_D ab, ist also je nach Arbeitspunkt verschieden groß.

Gl. 180: Definition der Steilheit eines FETs

$$S = \left. \frac{\Delta I_D}{\Delta U_{GS}} \right|_{U_{DS} = \text{const}}$$

Die Eingangskennlinie ist temperaturabhängig. Die nächste Abbildung zeigt die Eingangskennlinie für drei verschiedene Temperaturen. Man erkennt, daß es einen Arbeitspunkt AP gibt, in dem der Drainstrom von der Temperatur unabhängig ist.

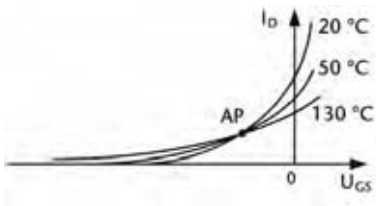


Abb. 403: Temperaturabhängigkeit der Eingangskennlinie

Die Ausgangskennlinie gibt die Abhängigkeit des Drainstromes I_D von der Drain-Source-Spannung U_{DS} an.

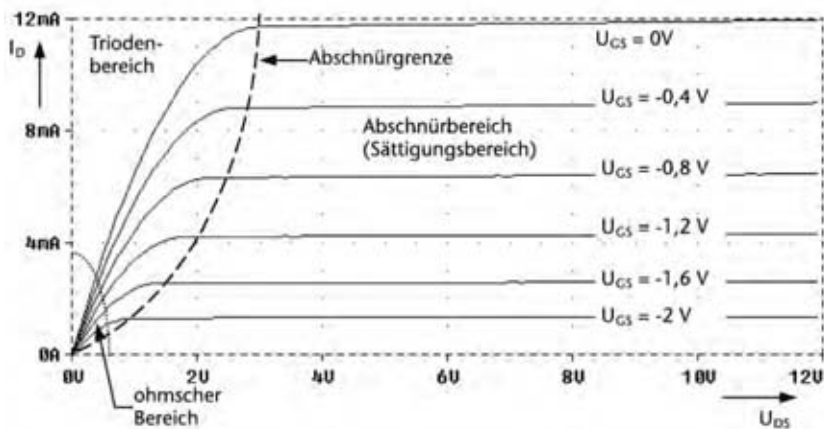


Abb. 404: Ausgangskennlinienfeld mit Arbeitsbereichen eines N-Kanal Sperrschicht-FETs

In der Nähe des Koordinatenursprungs steigt bei kleinen Werten von U_{DS} der Drainstrom I_D zunächst proportional (linear) zu U_{DS} an. In diesem Bereich verhält sich der FET wie ein ohmscher Widerstand, dessen Widerstandswert mit der Gate-Spannung U_{GS} gesteuert wird. Im **ohmschen Bereich** eignet sich der FET zur Steuerung kleiner Wechselspannungen.

Im **Triodenbereich** gehen die Kennlinien in einen sehr flachen Bereich mit geringer Steigung über. An der **Abschnürgrenze** endet der Triodenbereich.

Im **Abschnürbereich** oder Sättigungsbereich oberhalb der Abschnürgrenze ist der Drainstrom unabhängig von U_{DS} und bleibt weitgehend konstant. Der Abschnürbereich ist der am meisten genutzte Arbeitsbereich des FET. Durch eine Gate-Source-Spannung U_{GS} wird in diesem Bereich der Drainstrom I_D entsprechend Gl. 179 gesteuert. – Man beachte die grundlegend verschiedene Definition des Wortes »Sättigungsbereich« beim bipolaren Transistor und beim FET. Im Sättigungsbereich des bipolaren Transistors tritt eine Sättigung von Ladungsträgern auf, da die Kollektor-Emitter-Spannung nicht groß genug ist, um die in die Basis-Kollektor-Grenzschicht diffundierenden Ladungsträger abzusaugen. Beim FET nimmt im Sättigungsbereich der Drainstrom einen fast konstanten, gesättigten Wert an.

Vergleicht man das Ausgangskennlinienfeld des bipolaren Transistors (Abb. 350) mit Abb. 404, so erkennt man, daß beim FET die Steigung der Ausgangskennlinien im ohmschen Bereich von der steuernden Gate-Spannung U_{GS} abhängt. Die Kennlinien verlaufen wie ein Geradenbüschel.

Beim bipolaren Transistor liegen die Ausgangskennlinien im Sättigungsbereich alle übereinander und sind vom steuernden Basisstrom fast unabhängig.

Bei großen Drain-Source-Spannungen bricht die Gate-Drain-Strecke durch. Durch einen Spannungsdurchbruch zwischen Gate und Drain wird der FET zerstört.

Wie beim bipolaren Transistor definiert man einen Ausgangswiderstand (Kanalwiderstand) r_{DS} .

Gl. 181: Definition des Ausgangswiderstandes

$$r_{DS} = \left. \frac{\Delta U_{DS}}{\Delta I_D} \right|_{U_{GS} = \text{const}}$$

Im ohmschen Bereich entspricht dieser differentielle Drain-Source-Widerstand dem Kehrwert der Steilheit S im jeweiligen Arbeitspunkt: $r_{DS} = \frac{\Delta U_{GS}}{\Delta I_D} = \frac{1}{S}$.

Je nach Größe von U_{GS} liegt r_{DS} zwischen ca. 5 k Ω bis > 200 k Ω .

20.3 Schaltungstechnik mit FETs (Beispiele)

Es gibt drei Grundschaltungen: Gate-, Source- und Drainschaltung. Überwiegend wird die Sourceschaltung verwendet, die mit der Emitterschaltung des bipolaren Transistors vergleichbar ist.

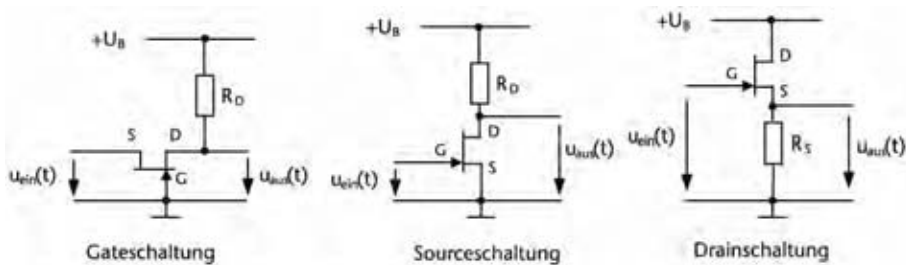


Abb. 405: Grundschaltungen des FET

Die folgende Tabelle stellt die Eigenschaften der drei FET-Grundschaltungen gegenüber.

Tabelle 22: Vergleich der drei FET-Grundschaltungen (Zahlenwerte sind nur grobe Richtwerte)

Grundschaltung des FET	Gateschaltung	Sourceschaltung	Drainschaltung
Entspricht bei bipolaren Transistoren der	Basisschaltung	Emitterschaltung	Kollektorschaltung
Spannungsverstärkung	groß	groß	< 1
Eingangsimpedanz	klein	groß	sehr groß
Ausgangsimpedanz	groß ($\approx 10 \text{ k}\Omega$)	groß ($\approx 10 \text{ k}\Omega$)	klein ($\approx 1 \text{ k}\Omega$)
Phasenwinkel U_a zu U_e	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 180^\circ$	$\varphi = 0^\circ$

Grundschaltung des FET	Gateschaltung	Sourceschaltung	Drainschaltung
Grenzfrequenz	hoch (< 1 GHz)	klein (< 1 MHz)	mittel (< 10 MHz)
Anwendungsbereich	HF-Verstärker für sehr hohe Frequenzen	Gleichspannung, NF-/HF-Verstärker, Schalter	Impedanzwandler

20.3.1 Verstärkerbetrieb

20.3.1.1 Sourceschaltung

Berechnung der Spannungsverstärkung: $V_{uS} = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_e}$. Mit $\Delta U_a = \Delta I_D \cdot R_D$ und $\Delta I_D = S \cdot \Delta U_e$ folgt

Gl. 182: Spannungsverstärkung der Sourceschaltung

$$V_{uS} = S \cdot R_D$$

Zum Arbeitswiderstand R_D liegt wechselstrommäßig der Drain-Source-Widerstand r_{DS} parallel. Ist r_{DS} für Drainströme $I_D > \text{ca. } 5 \text{ mA}$ gegenüber R_D nicht mehr vernachlässigbar groß, so gilt:

$$V_{uS} = S \cdot (R_D \parallel r_{DS}).$$

Je kleiner der Drainstrom I_D gewählt wird, desto größer ist r_{DS} und desto größer ist die Spannungsverstärkung.

Die Ausgangsspannung hat gegenüber der Eingangsspannung eine Phasendrehung von 180° .

Der Eingangswiderstand $r_e = r_{GS}$ ist sehr hoch, da fast kein Eingangsstrom fließt.

Der Ausgangswiderstand ist $r_a = R_D \parallel r_{DS} \approx R_D$.

20.3.1.2 Gateschaltung

Spannungsverstärkung und Ausgangswiderstand sind identisch mit der Sourceschaltung.

Der Eingangswiderstand $r_e = 1/S$ ist niedrig. Zwischen Eingang und Ausgang erfolgt keine Phasendrehung. Die Gateschaltung wird nur für Hochfrequenzverstärker verwendet.

20.3.1.3 Drainschaltung

Die Drainschaltung wird auch als Sourcefolger bezeichnet. Der Eingangswiderstand ist noch höher als der ohnehin schon sehr hohe Eingangswiderstand der Sourceschaltung. Der Ausgangswiderstand ist klein. Die Spannungsverstärkung ist nahezu Eins. Es findet keine Phasendrehung statt.

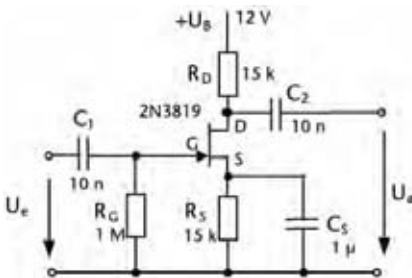
Gl. 183: Spannungsverstärkung und Ausgangswiderstand der Drainschaltung

$$V_{uD} = \frac{1}{1 + \frac{1}{S \cdot R_S}} \approx 1 \quad r_a = \frac{R_S}{1 + S \cdot R_S}$$

20.3.1.4 Verstärkung mit Gegenkopplung

Beim Betrieb des FET als Verstärker wird durch eine Gate-Source-Spannung ein bestimmter Gleichstromarbeitspunkt mit zugehörigem Drain-Ruhestrom festgelegt. Die Gate-Source-Spannung für diesen Arbeitspunkt ist von Exemplar zu Exemplar des FET stark unterschiedlich. Die Exemplarstreuungen der Abschnürspannung U_p verschieben den Arbeitspunkt und ergeben exemplarabhängig unterschiedliche Verstärkungen. Zur Stabilisierung des Arbeitspunktes eignet sich ein Widerstand in der Source-Leitung des FET, der eine Gleichstromgegenkopplung bewirkt. Der Sourcewiderstand bildet auch für das zu verstärkende Signal eine Gegenkopplung und vermindert die Verstärkung. Ist dies unerwünscht, so kann parallel zum Sourcewiderstand ein Kondensator geschaltet werden, der die Signalfrequenzen kurzschließt.

Ist die Signalquelle über einen Koppelkondensator mit dem Gate verbunden (Wechselspannungskopplung), so wird ein Widerstand R_G (1 M Ω bis 10 M Ω) vom Gate nach Masse geschaltet. Dieser Widerstand bestimmt im wesentlichen den Eingangswiderstand des Kleinsignalverstärkers.

**Abb. 406:** Kleinsignalverstärker mit FET**20.3.2 Betrieb als steuerbarer Widerstand**

Für kleine Werte von U_{DS} gehen im ohmschen Bereich die Ausgangskennlinien als Geraden durch den Nullpunkt (vgl. Abb. 404) und entsprechen dem linearen Widerstandsverlauf eines ohmschen Widerstandes. Die Steigung der Kennlinien und somit der Widerstandswert von R_{DS} hängt von der Gate-Source-Spannung U_{GS} ab. Der Wert von R_{DS} lässt sich folglich durch U_{GS} verändern. Der FET verhält sich bei diesem Betrieb wie ein durch U_{GS} steuerbarer ohmscher Widerstand. Mit einem FET und einem Festwiderstand kann ein **spannungsgesteuerter Spannungsteiler** realisiert werden.

Die Streuung der Kennlinien verläuft in Abhängigkeit von U_{GS} nicht gleichmäßig (nicht proportional zu U_{GS}). Daraus und aus der Krümmung der Kennlinien für größere Werte von U_{DS} ergibt sich eine Verzerrung der Ausgangsspannung des Spannungsteilers, die Schaltung ist nur für

kleine Signale geeignet. Dieser Nachteil kann weitgehend durch entsprechende Schaltungsmaßnahmen zur Linearisierung des Ausgangskennlinienfeldes vermieden werden.

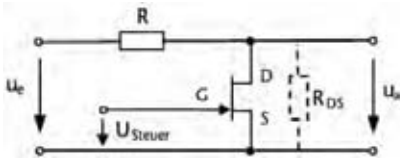


Abb. 407: Spannungsgesteuerter Spannungsteiler mit FET

Der Spannungsteiler besteht aus einem Festwiderstand R und einem FET, dessen Widerstand R_{DS} symbolisch eingezeichnet ist. Die Ausgangsspannung u_a ist Null, wenn der FET sperrt und damit R_{DS} unendlich groß ist. Leitet der FET, so ist $u_a = u_e \cdot \frac{R_{DS}}{R + R_{DS}}$.

Damit sich u_a mit $U_{Steuer} = -U_{GS}$ in einem weiten Bereich ändern läßt, sollte $R \gg R_{DS\min}$ sein.

20.3.3 Konstantstromquelle mit FET

Die Schaltung wirkt analog zu der Konstantstromquelle in Abschnitt 19.15.4. Ein Vorteil ist, daß man keine extra Spannung benötigt, falls man einen selbstleitenden FET verwendet. Die Schaltung kann als Zweipol anstelle eines ohmschen Widerstandes eingesetzt werden. Für den gewünschten Strom I wird aus der Eingangskennlinie die zugehörige Spannung U_{GS} abgelesen. Dann ist $R = |U_{GS}| / I$.

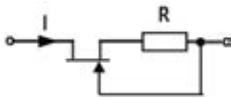


Abb. 408: FET als Konstantstromquelle

20.3.4 Der FET als Schalter

Mit Feldeffekttransistoren lassen sich analoge Signale umschalten. Besitzt ein aus FETs aufgebauter Umschalter n Eingänge und einen Ausgang, so leitet ein FET, während die anderen $n - 1$ sperren. Die Wahl der Kanäle erfolgt über eine entsprechende Ansteuerung der Gates, z.B. ist nur eine Spannung U_{GS} positiv (FET leitet), während alle anderen U_{GS} negativ sind (FETs sperren). Fertige Bauteile, in vielen Varianten erhältlich und meist aus MOSFET aufgebaut, gibt es als integrierte Schaltungen. Sie werden als **Analogmultiplexer** bezeichnet.

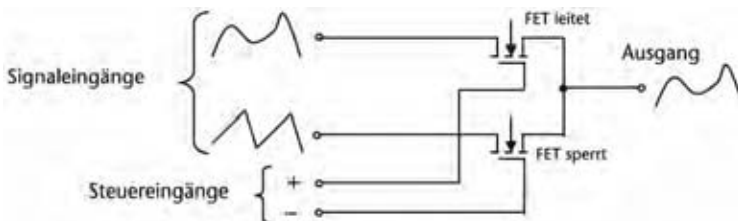


Abb. 409: Prinzip eines Analogmultiplexers mit zwei Kanälen

In digitalen ICs werden Feldeffekttransistoren zum Schalten logischer Signale eingesetzt. Gatter, Flip-Flops, Zähler usw. werden als monolithisch integrierte Schaltungen hergestellt.

Mit MOSFET-Leistungstransistoren (Power-MOS-FET oder PMF) lassen sich hohe Ströme schalten. Dabei ist einer der wichtigsten Parameter des MOSFET der **Einschaltwiderstand** $R_{DS\ on}$, da er im eingeschalteten Zustand die Verlustleistung $P_{on} = I_D^2 \cdot R_{DS\ on}$ bestimmt. Power-MOS-FETs sind mit einem $R_{DS\ on}$ von wenigen $m\Omega$ erhältlich. Leistungen $> 250\ W$ bei Drainströmen $> 50\ A$ sind realisierbar. Anwendungsgebiete sind z.B.: Relaisfunktionen, NF-Verstärker, Motorsteuerungen.

Werden Power-MOS-FET zur Erhöhung der Leistung parallel geschaltet, so müssen die Gates durch einen Reihenwiderstand (typ. $10\ \Omega$) in jeder Gate-Leitung entkoppelt oder durch separate Treiber angesteuert werden, um ein Schwingen zu vermeiden.

Sogenannte »intelligente« Leistungsschalter beinhalten Ansteuer- und Schutzschaltungen sowie andere Logikfunktionen auf einem Chip:

- Eingang und Statusausgang sind CMOS- oder TTL-kompatibel
- Ein Status-Ausgang meldet Zustände zurück
- Alle Ein- und Ausgänge sind gegen statische Entladungen geschützt (ESD-Schutz)
- Beim Schalten induktiver Lasten werden negative Spannungsspitzen begrenzt
- Erkennung von Über- bzw. Unterspannung
- Erkennung von Kurzschluß oder Leerlauf der Last
- Schutzfunktionen gegen Zerstörung durch Überstrom, Übertemperatur des Bauelements
- Eingebaute Ladungspumpe für den Betrieb als Highside-Schalter.

Der Herstellungsprozeß eines Power-MOS-FET bedingt, daß jeder PMF eine parasitäre Diode enthält, die der Drain-Source-Strecke antiparallel geschaltet ist. Diese Diode wird als **Inversdiode** bezeichnet.

Die Inversdiode hat bezüglich der Spannungen und Ströme die gleichen Daten wie der MOSFET, d.h., der maximal zulässige Strom durch die Inversdiode entspricht im allgemeinen dem maximal zulässigen Drainstrom. Die Flußspannung dieser Diode liegt bei ca. 1 bis 1,5 V.

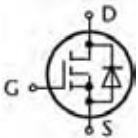


Abb. 410: Power-MOSFET mit parasitärer Inversdiode

Aus obiger Abbildung ist ersichtlich, daß ein PMF einen Strom nur in der Flußrichtung von Drain zu Source sperren kann, während man bei einem FET wegen seines symmetrischen Aufbaus Drain und Source prinzipiell vertauschen könnte.

Einerseits kann die Inversdiode beim Schalten induktiver Lasten als Freilaufdiode nützlich sein. Andererseits kann die Inversdiode ein Problem darstellen, vor allem in einer Netzwerkmassche mit einer Spannungsquelle und zwei in Reihe geschalteten PMF. Die Sperrverzögerungszeit der

Inversdiode ist mit typisch einigen hundert Nanosekunden relativ groß. Während dieser Zeit kann es ohne zusätzlich Maßnahmen bei bestimmten Schaltungen zu hohen Stromspitzen und einer verlustleistungsbedingten Überlastung des PMF kommen.

Beim Schalterbetrieb eines PMF kann man zwischen zwei Arten des Schaltens unterscheiden:

Dem **Lowside-Schalter** und dem **Highside-Schalter**.

Beim Lowside-Schalter ist die Last mit dem Pluspol der Spannungsversorgung verbunden, der Schalter liegt gegen Masse. Wird eine der Verbindungsleitungen zur Last unbeabsichtigt mit Masse verbunden (z.B. durch Beschädigung der Isolation), so kommt es zu einem Kurzschluß, oder, und dies ist in manchen Fällen noch schlimmer, zu einem unbeabsichtigten, evtl. dauernden Einschalten der Last.

Beim Highside-Schalter ist die Last mit Masse verbunden, der Schalter liegt gegen Plus. Bei masseseitiger Last benötigt man zu deren Stromversorgung im Prinzip nur eine einpolige, plus-führende Leitung. Die Rückleitung kann über ein metallisches Teil der konstruktiven Auslegung (z.B. Kfz-Karosserie) erfolgen, welches mit dem Minuspol der Versorgungsspannung verbunden ist und die Masse bildet. Neben der Einsparung einer Leitung besteht der Vorteil, daß die Last nicht unbeabsichtigt eingeschaltet wird, wenn z.B. die Isolation der Zuleitung durchgescheuert wird und der blanke Draht mit dem Chassis in Berührung kommt.

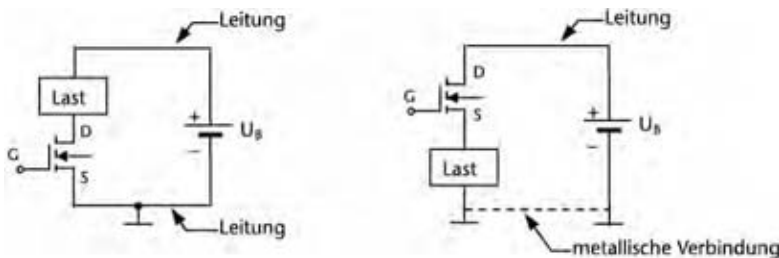


Abb. 411: Lowside-Schalter (links) und Highside-Schalter (rechts)

Der Highside-Schalter benötigt zwischen Gate und Source eine Spannung U_{GS} , die um ca. 7 bis 10 V über der Betriebsspannung U_B liegen muß. Steht eine solche Spannungsquelle nicht extra zur Verfügung, so kann U_{GS} mit einer **Ladungspumpe** erzeugt werden. Eine Ladungspumpe »zerhackt« eine Gleichspannung, die dann gleichgerichtet wird. So kann eine bereits vorhandene Gleichspannung mit einer Spannungsverdoppler-Schaltung in eine höhere umgesetzt werden. Die zum Zerhacken notwendige Rechteckspannung kann z.B. mit einem astabilen Multivibrator erzeugt werden.

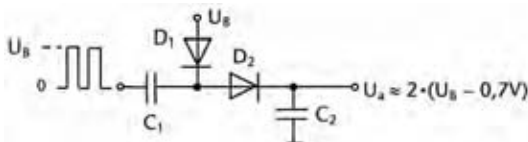


Abb. 412: Ladungspumpe zur Spannungsverdopplung als Gatespannungsgenerator

Ist die Rechteckspannung am Eingang Low, so wird C_1 über D_1 auf $U_B - 0,7$ V aufgeladen.

Diese Spannung addiert sich während der darauffolgenden Highzeit der Rechteckspannung zu U_B .

Während der High-Halbperiode der Rechteckspannung liegt nach D_2 am Ausgang die Spannung

$$U_a = U_B - 0,7 \text{ V} + U_B - 0,7 \text{ V. Damit ist } U_a = 2 \cdot U_B - 1,4 \text{ V.}$$

Der Ladekondensator C_2 kann entfallen, wenn die Eingangskapazität des PMF zur Spannungsglättung ausreicht.

Zum Ausschalten der so gewonnenen U_{GS} -Spannung kann z.B. die Spannungsversorgung des Gatespannungsgenerators über einen Kleinsignaltransistor ausgeschaltet werden, wobei ein Widerstand zwischen Gate und Masse (ca. 100 k Ω) für eine automatische Entladung des Gate sorgt. Die Drain-Source-Strecke wird dann hochohmig, der Schalter ist ausgeschaltet.

Diese kurze Einführung behandelt nur einige Grundlagen der Feldeffekt-Transistoren. Für ein weitergehendes Studium ist entsprechende Fachliteratur erhältlich.

20.4 Zusammenfassung: Feldeffekt-Transistoren

1. Ein Feldeffekt-Transistor (FET) wird leistungslos durch eine Spannung gesteuert.
2. Die Anschlüsse eines FET heißen Source (S), Gate (G) und Drain (D).
3. Der Eingangswiderstand eines FET ist sehr hoch.
4. Es gibt Sperrschicht- und Isolierschicht-FETs.
5. In der integrierten Halbleitertechnik spielen MOSFETs eine wichtige Rolle.
6. Beim Power-MOSFET ist die Inversdiode zu beachten.
7. Grundlegende Betriebsarten als Schalter sind Highside- und Lowside-Schalter.
8. Eine Ladungspumpe dient zur Verdopplung einer Gleichspannung.
9. FETs können durch statische Entladungen zerstört werden. Bestimmte Regeln zur Handhabung sind zu beachten.

21 Operationsverstärker

Operationsverstärker sind analoge, aktive Bauelemente. Sie werden als integrierte Schaltung (IC) in Form eines Bauteils mit mehreren Anschlüssen im Handel angeboten.

Operationsverstärker können als Bauelement für die verschiedensten Verstärkeraufgaben zur Spannungs- oder Leistungsverstärkung eingesetzt werden. Wie der Name sagt, wurden Operationsverstärker ursprünglich zur Ausführung mathematischer Operationen in Analogrechnern angewandt. Daher kommt auch die ebenfalls gebräuchliche Bezeichnung »Rechenverstärker«. Üblich ist die Abkürzung »OP« (operational amplifier). Der Anwendungsbereich umfaßt die Meß- und Regelungstechnik, NF-Technik, Signalformung und Signaländerung, Realisierung von Sinus- und Impulsgeneratoren.

Beim OP sind diejenigen Teile, welche die eigentliche Verstärkung bewirken, in einem integrierten Schaltkreis zusammengefaßt. Die speziell gewünschten Eigenschaften bzw. die Wirkungsweise des Verstärkers wird für den jeweiligen Verwendungszweck durch eine äußere Beschaltung des OP erreicht. Der OP ist somit ein universelles Verstärkungselement, dessen speziell gewünschte Übertragungseigenschaften durch eine geeignete äußere Beschaltung, vor allem durch die Rückkopplung, erzielt werden.

Ein OP ist ein Differenzverstärker mit sehr hoher Verstärkung, zwei hochohmigen Eingängen und einem niederohmigen Ausgang. Neben den Anschlüssen (Pins) für Masse, positive oder evtl. gleichzeitig benötigte negative Betriebsspannung sind evtl. noch Pins für den Abgleich der Offsetspannung oder zur Korrektur des Phasenfrequenzganges (Phasenkompensation, Frequenzkompensation) vorhanden. Ein Gehäuse kann mehrere OPs enthalten.

21.1 Interner Aufbau von Operationsverstärkern

Ein OP ist ein mehrstufiger Gleichspannungsverstärker. Um die Strom- und Spannungsdrift möglichst klein zu halten, ist die Eingangsstufe als Differenzverstärker mit einem invertierenden und einem nichtinvertierenden Eingang ausgelegt. Wird an den invertierenden Eingang ein Signal angelegt, so ist das Ausgangssignal gegenüber dem Eingangssignal um 180° phasenverschoben. Zwischen dem nichtinvertierenden Eingang und dem Ausgang erfolgt keine Phasenverschiebung. Je nach Typ des OP kann die Eingangsstufe bipolare Transistoren oder zur Erhöhung des Eingangswiderstandes FET- oder MOSFET-Transistoren enthalten.

Der Eingangsstufe folgt eine Stufe zur Spannungsverstärkung, welche für eine hohe Leerlaufverstärkung sorgt. Die erforderliche Ausgangsleistung liefert die darauffolgende Leistungsstufe. Diese kann als Eintakt- oder Gegentaktendstufe ausgelegt sein. Ist der Ausgang mit einer Gegentaktendstufe versehen, so wird der OP mit zwei symmetrischen Betriebsspannungen $+U_B$ und $-U_B$ betrieben.

Bei einer Eintaktendstufe (A-Betrieb) genügt eine Betriebsspannung $+U_B$ und Masse. Ist die Eintaktendstufe als Ausführung mit »offenem Kollektor« realisiert, so ist ein externer Arbeitswiderstand erforderlich!

Das Schaltzeichen des Operationsverstärkers in einem Schaltplan enthält meist nur die beiden Eingänge und den Ausgang, die Anschlüsse für die Spannungsversorgung werden nicht gezeichnet.

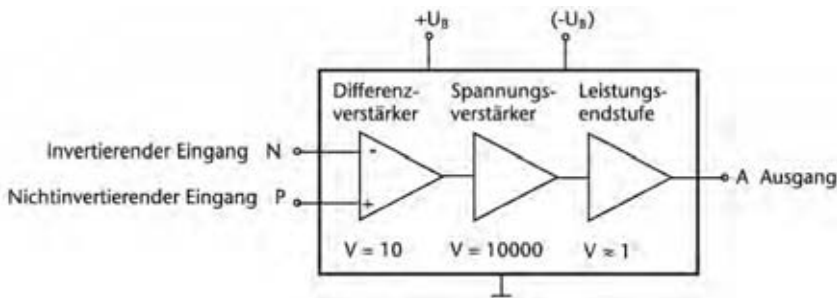


Abb. 413: Blockschaltbild des internen Aufbaus eines Operationsverstärkers (Werte für die Verstärkung sind Zahlenbeispiele)

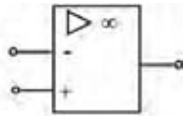
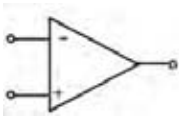


Abb. 414: Schaltzeichen für einen Operationsverstärker

21.2 Eigenschaften des Operationsverstärkers

21.2.1 Leerlaufverstärkung

Da die Eingangsstufe ein Differenzverstärker ist, wird die Spannungsdifferenz $U_D = U_P - U_N$ zwischen dem nichtinvertierenden und dem invertierenden Eingang mit dem Verstärkungsfaktor V_0 verstärkt.

Die Ausgangsspannung ist $U_a = V_0 \cdot (U_P - U_N) = V_0 \cdot U_D$.

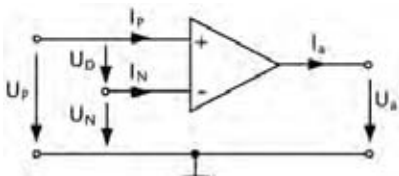


Abb. 415: Spannungen und Ströme bei einem Operationsverstärker

Der Wert V_0 wird als Leerlaufverstärkung (open loop gain), Differenzverstärkung oder offene Schleifenverstärkung bezeichnet. Beim idealen OP ist $V_0 = \infty$. Beim realen OP wird V_0 vom Hersteller angegeben und liegt je nach Typ in der Größenordnung 10^4 bis 10^6 . Der Begriff »Leerlauf-

verstärkung« bedeutet nicht, daß der Ausgang unbelastet ist, sondern daß keine externe Beschaltung als Gegenkopplung wirkt.

Ist $U_N = 0$ V (N-Eingang auf Masse), so ist $U_a = V_0 \cdot U_p$. Ausgangsspannung und Eingangsspannung sind gleichphasig. Ist $U_p = 0$ V (P-Eingang auf Masse), so ist $U_a = V_0 \cdot (-U_N) = -V_0 \cdot U_N$. Die Ausgangsspannung ist in diesem Fall gegenüber der Eingangsspannung um 180° phasenverschoben.

Gl. 184: Definition der Leerlaufverstärkung beim Operationsverstärker

$$V_0 = \frac{U_a}{U_p - U_N} = \frac{U_a}{U_D} = \begin{cases} \frac{U_a}{U_p} \text{ für } U_N = 0 \text{ V} \\ -\frac{U_a}{U_N} \text{ für } U_p = 0 \text{ V} \end{cases}$$

Beim idealen OP fließen keine Eingangsströme ($I_p = I_N = 0$), die Eingangswiderstände sind unendlich groß. Ein realer OP mit MOSFET-Eingangsstufe hat Eingangswiderstände bis zu $1 \text{ T}\Omega$.

Der Ausgangswiderstand des idealen OP ist 0Ω , des realen OP ca. $< 10 \Omega$.

21.2.2 Übertragungskennlinie

Aus der Gleichung $U_a = V_0 \cdot U_D$ mit der Konstanten V_0 geht hervor, daß die Ausgangsspannung U_a linear von der Differenzeingangsspannung U_D abhängt.

Dies gilt im Bereich der Ausgangsaussteuerbarkeit $U_{a \min} < U_a < U_{a \max}$ mit $U_{a \min} = -U_B$ und $U_{a \max} = U_B$.

Da die Ausgangsspannung U_a nicht größer als die Betriebsspannung werden kann, bewirkt eine Vergrößerung von U_D ab einem bestimmten Wert keine Veränderung von U_a mehr. Die Ausgangsspannung bleibt dann konstant auf dem negativen oder positiven Sättigungswert der Versorgungsspannung, der OP ist übersteuert.

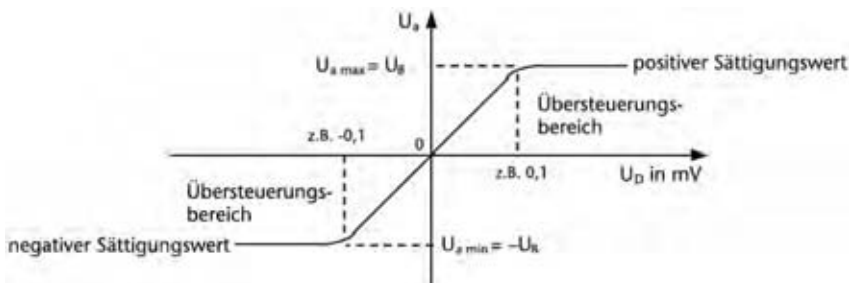


Abb. 416: Übertragungskennlinie der Differenzverstärkung eines Operationsverstärkers

Wegen der sehr großen Leerlaufverstärkung V_0 reicht eine kleine Spannungsdifferenz $U_D = U_p - U_N$ aus, damit die Ausgangsspannung U_a den jeweiligen Sättigungswert annimmt. Entsprechend der Anforderung an die Schaltung wird die Leerlaufverstärkung durch eine externe Gegenkopplung reduziert. Die Eingangsspannung wird dann um einen bestimmten Faktor verstärkt, wel-

cher durch die externe Beschaltung des OP bestimmt wird. Die Art und Stärke der Rückkopplung bestimmt den Einsatzzweck der Schaltung; der OP selbst hat immer die gleiche Verstärkung.

21.2.3 Gleichtaktaussteuerung

Wird an den P- und N-Eingang die gleiche Spannung $U_p = U_n = U_{gl}$ angelegt, so ist $U_D = 0$ V. Diese Betriebsart wird als Gleichtaktaussteuerung bezeichnet. Beim realen OP wird die Ausgangsspannung nicht $U_a = V_0 \cdot U_D = 0$ V, sondern nimmt durch die unerwünschte Gleichtaktverstärkung, welche durch Unsymmetrien in der Eingangsstufe unvermeidbar ist, einen Wert $U_a \neq 0$ V an.

Die Gleichtaktverstärkung (common mode gain) $V_{gl} = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_{gl}}$ soll möglichst klein gegenüber der

Leerlaufverstärkung sein. In den Datenblättern wird die Gleichtaktunterdrückung $G = \frac{V_0}{V_{gl}}$

(meist in dB) angegeben und kann mehr als 100 dB betragen.

Dies bedeutet, daß die Gleichtaktspannung um mehr als den Faktor 100 000 weniger verstärkt wird als eine Differenzspannung. Die Gleichtaktunterdrückung nimmt mit zunehmender Frequenz des Gleichtaktsignals stark ab.

21.2.4 Offsetspannung

Legt man den P- und N-Eingang auf Masse, so ist $U_p = U_n = 0$ V und die Ausgangsspannung müßte $U_a = 0$ V sein. Dies ist beim realen Operationsverstärker wegen Unsymmetrien in der Eingangsstufe nicht der Fall. Die Offsetspannung U_0 ist definiert als die Spannungsdifferenz zwischen beiden Eingängen, damit $U_a = 0$ V wird: $U_0 = U_p - U_n$ für $U_a = 0$ V. Die unerwünschte Offsetspannung liegt je nach OP-Typ im Bereich einiger zehn μ V bis einige mV und läßt sich kompensieren. Zum Abgleich der Offsetspannung kann ein Trimpotentiometer an eigens dafür vorgesehene Pins des OP angeschlossen werden. Eine andere Möglichkeit stellt eine äußere Abgleichbeschaltung dar, durch die dem P- oder N-Eingang eine Gleichspannung zugeführt wird.

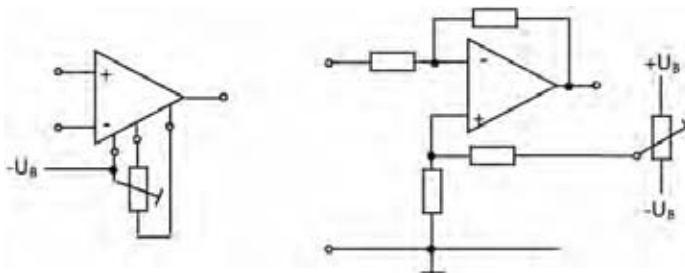


Abb. 417: Möglichkeiten zum Abgleich der Offsetspannung

21.2.5 Frequenzverhalten

Bis zu niedrigen Frequenzen (einigen Hz) der Eingangsspannung ist die Leerlaufverstärkung V_0 frequenzunabhängig und wird ab einer bestimmten Frequenz mit zunehmender Signalfrequenz kleiner. Da es sich bei einem OP um einen Gleichspannungsverstärker handelt, ist die untere Grenzfrequenz 0 Hz und die Bandbreite B gleich der oberen Grenzfrequenz.

Die Phasenverschiebung zwischen der Ausgangsspannung U_a und der Differenz-Eingangsspannung U_D ist ebenfalls frequenzabhängig. Beim beschalteten OP mit Gegenkopplung kann es durch diese Phasenverschiebung zu einer Mitkopplung und bei Erfüllung der Amplitudenbedingung zu selbständigen Schwingungen kommen.

Betrag und Phase der Leerlaufverstärkung sind frequenzabhängig, wobei häufig die Beschreibung mittels eines Tiefpasses erster Ordnung ausreichend ist.

$$V(jf) = \frac{V_0}{1 + j \frac{f}{f_0}} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} V_0 = \text{Gleichspannungs-Differenzverstärkung (Leerlaufverstärkung)} \\ f_0 = \text{Grenzfrequenz, bei der } |V(jf)| \text{ um 3 dB abgefallen ist} \end{array}$$

Für Frequenzen $f \gg f_0$ fällt $|V(jf)|$ umgekehrt proportional zur Frequenz ab. Bei der Transitfrequenz f_T ist der Betrag der Differenzverstärkung $|V(jf)|$ auf den Wert $V = 1$ gesunken bzw. auf 0 dB abgefallen.

Die Transitfrequenz $f_T = V_0 \cdot f_0$ wird auch als Verstärkungs-Bandbreite-Produkt bezeichnet.

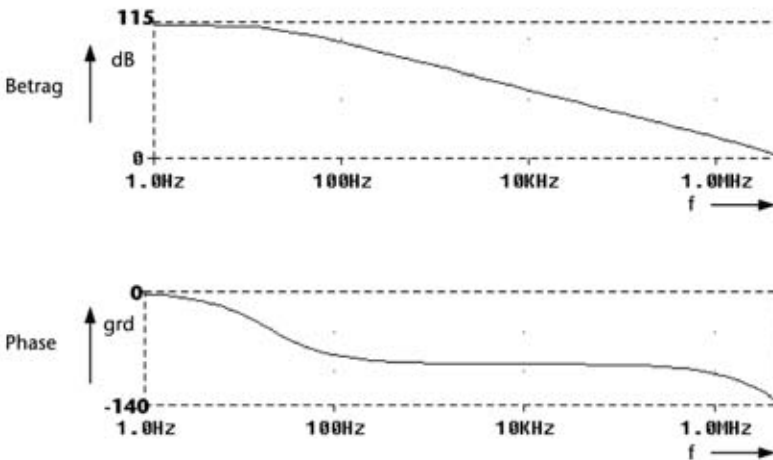


Abb. 418: Frequenzgang von Betrag (oben) und Phasenverschiebung (unten) der Leerlaufverstärkung des Operationsverstärkers LF411

21.2.6 Sprungverhalten

Die (Flanken-) **Anstiegszeit** t_r und (Flanken-) **Abfallzeit** t_f ist die Zeitdauer, welche die Ausgangsspannung benötigt, um von 10 % auf 90 % ihres Endwertes bzw. umgekehrt zu gelangen, wenn

an den Eingang des OP ein idealer Spannungssprung gelegt wird. Der OP darf dabei nicht übersteuert werden.

Durch den Spannungssprung am Eingang ergibt sich ein Überspringen des Ausgangssignals, welches abklingt. Als **Einschwingzeit** t_s (settling time) ist die Zeit vom Anfang der Sprungerregung bis zum endgültigen Eintauchen des Ausgangssignals in ein Fehlerband definiert.

Die maximale **Flankensteilheit** S (slew rate) ist die maximal mögliche Änderung der Ausgangsspannung pro Zeiteinheit. Die slew rate wird in $V/\mu s$ angegeben. Typisch sind Werte von einigen $V/\mu s$ bis über $1\text{ kV}/\mu s$. Eine unverzerrte Übertragung ist nicht möglich, falls die maximale Anstiegsgeschwindigkeit des Ausgangssignal nicht kleiner ist als die slew rate S .

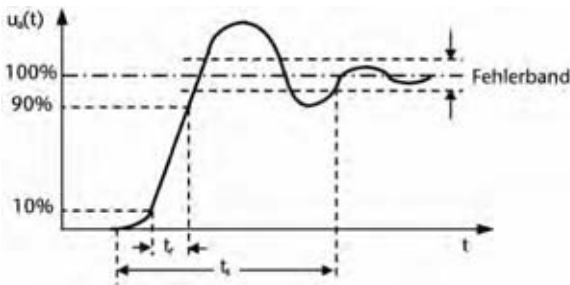


Abb. 419: Zur Definition von Anstiegs- und Einschwingzeit bei Sprungerregung eines OP

Es folgt noch eine Tabelle, in der Eigenschaften eines idealen und eines realen Operationsverstärkers zusammengestellt sind. Die Zahlenwerte beim realen OP sind grobe Richtwerte.

Tabelle 23: Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften eines OP

Eigenschaft	ideal	real
Leerlaufverstärkung	∞	$10^4 \dots 10^6$
Eingangswiderstand	∞	$1\text{ M}\Omega \dots 1\text{ T}\Omega$
Ausgangswiderstand	0	$5\text{ }\Omega \dots 50\text{ }\Omega$
untere Grenzfrequenz in Hz	0	≈ 0
obere Grenzfrequenz in Hz	∞	10^6
Gleichtaktverstärkung	0	$\approx 0,2$
Gleichtaktunterdrückung	∞	$> 10^6\text{ (120 dB)}$
Eingangsoffsetspannung	0	$10\text{ }\mu\text{V} \dots 5\text{ mV}$

Die Speisespannung eines OP sollte gut stabilisiert sein. Die Betriebsspannung kann z.B. je nach Typ bei bipolarer Versorgung im Bereich $\pm 2,2\text{ V}$ bis $\pm 15\text{ V}$ liegen.

21.3 Betriebsarten

Bei Operationsverstärkern kann man vier allgemeine Betriebsarten unterscheiden:

- Spannungsverstärker: Eingangsgröße und Ausgangsgröße sind Spannungen

- Stromverstärker: Eingangsgröße und Ausgangsgröße sind Ströme
- Spannungs-Strom-Verstärker (transconductance amplifier): Eingangsgröße ist eine Spannung, Ausgangsgröße ist ein Strom
- Strom-Spannungsverstärker (transimpedance amplifier): Eingangsgröße ist ein Strom, Ausgangsgröße ist eine Spannung

Überwiegend findet eine Anwendung als Spannungsverstärker statt.

Je nach äußerer Beschaltung unterscheidet man bei den Betriebsarten außerdem zwischen einem Betrieb mit Mitkopplung und einem Betrieb mit Gegenkopplung.

Eine Mitkopplung liegt vor, wenn das Ausgangssignal über ein Rückkopplungsnetzwerk auf den nichtinvertierenden Eingang zurückgeführt wird. Eingangssignal und rückgeführtes Signal sind dann in Phase. Wird das Ausgangssignal auf den invertierenden Eingang zurückgeführt, so sind Eingangssignal und rückgeführtes Signal gegenphasig (um 180° phasenverschoben) und es handelt sich um eine Gegenkopplung.

Durch eine Mitkopplung kann man z.B. Schwingungen unterschiedlicher Form erzeugen. Beim Betrieb als Verstärker wird die hohe Leerlaufverstärkung durch eine Gegenkopplung auf den gewünschten Wert herabgesetzt.

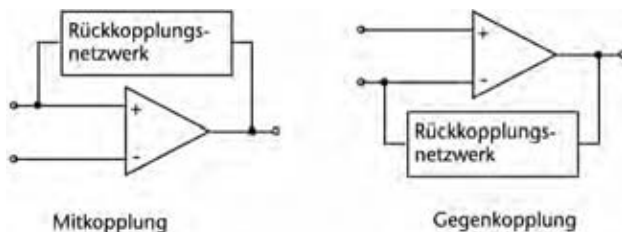


Abb. 420: Arten der Rückkopplung beim Operationsverstärker

Zusätzlich wird zwischen nichtinvertierendem und invertierendem Betrieb unterschieden, je nachdem, ob das Ausgangssignal mit dem Eingangssignal in Phase oder zu diesem gegenphasig ist.

21.4 Grundsaltungen, Anwendungsbeispiele

Es folgen einige grundlegende Schaltungen mit Operationsverstärkern und Beispiele für die Anwendung von OPs.

21.4.1 Nichtinvertierender Verstärker

Es handelt sich um eine Schaltung mit Gegenkopplung und um einen nichtinvertierenden Betrieb, da das Eingangssignal U_e am nichtinvertierenden Eingang liegt.

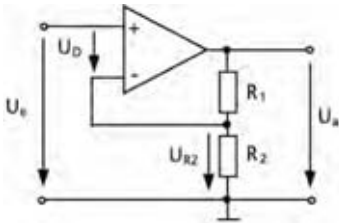


Abb. 421: Schaltung eines OP als nichtinvertierender Verstärker

Geht man von einem idealen OP aus, so fließt in den N-Eingang kein Eingangsstrom, der Spannungsteiler R_1 , R_2 ist somit unbelastet. Die Spannung an R_2 ist $U_{R2} = U_a \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. Da die Leerlaufverstärkung V_0 beim idealen OP unendlich groß ist, wird $U_D = \frac{U_a}{V_0} = 0 \text{ V}$ und damit $U_{R2} = U_e$.

Daraus folgt:

$V = \frac{U_a}{U_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$. Die Verstärkung der Schaltung hängt also ausschließlich vom Widerstandsverhältnis R_1/R_2 ab! Für $R_1 = R_2$ ist $V = 2$.

Gl. 185: Spannungsverstärkung eines idealen OP als nichtinvertierender Verstärker

$$V = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

Der Eingangswiderstand der Schaltung ist für den idealen OP unendlich hoch, da in den P-Eingang kein Strom fließt. Die Schaltung wird deshalb auch als Elektrometerverstärker⁴¹ bezeichnet.

21.4.2 Invertierender Verstärker

Die Schaltung arbeitet mit Gegenkopplung und im invertierenden Betrieb, da das Eingangssignal U_e am invertierenden Eingang liegt. Der invertierende Verstärker wird auch Umkehrverstärker genannt.

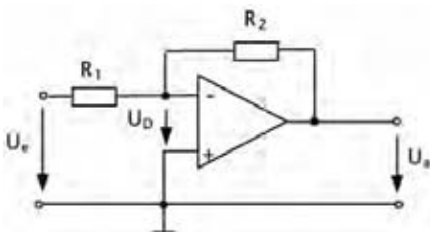


Abb. 422: OP als invertierender Verstärker

⁴¹ Dieser Begriff stammt aus der Röhrentechnik.

Für $V_o \rightarrow \infty$ (idealer OP) gilt wieder $U_D = \frac{U_a}{V_o} = 0 \text{ V}$. In dieser Schaltung wird der N-Eingang deshalb auch als virtuelle Masse bezeichnet. Wird unter der Annahme, daß in den N-Eingang kein Strom fließt, die Knotenregel auf den N-Eingang angewandt, so folgt: $\frac{U_e}{R_1} + \frac{U_a}{R_2} = 0$. Die Verstärkung ist:

Gl. 186: Spannungsverstärkung beim Umkehrverstärker

$$V = -\frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Das Minuszeichen in Gl. 186 drückt aus, daß zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung eine Phasenverschiebung von 180° vorliegt. Der Eingangswiderstand des Umkehrverstärkers entspricht dem Wert von R_1 .

21.4.3 Impedanzwandler (Spannungsfolger)

Ein Impedanzwandler hat einen hohen Eingangswiderstand und einen niedrigen Ausgangswiderstand. Die Schaltung entspricht dem Emitterfolger einer Transistorschaltung. Die Verstärkung ist $V = 1$. Eingangs- und Ausgangswiderstand entsprechen den Werten des gewählten Operationsverstärkers.

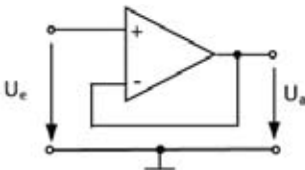


Abb. 423: Schaltung eines Impedanzwandlers

21.4.4 Differenzverstärker (Subtrahierer)

Aus den beiden Eingangsspannungen bildet der OP eine Differenz, die entsprechend verstärkt wird.

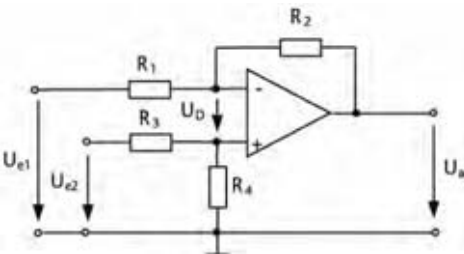


Abb. 424: Schaltung eines Differenzverstärkers

Die Schaltung ist eine Kombination aus nichtinvertierendem Verstärker und Umkehrverstärker. Durch Anwendung des Überlagerungssatzes wird die Beziehung zwischen der Ausgangsspannung U_a und den beiden Eingangsspannungen U_{e1} , U_{e2} gefunden.

$U_{e2} = 0$: Die Schaltung verhält sich wie der Umkehrverstärker mit $U_{a1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot U_{e1}$

$U_{e1} = 0$: Bezogen auf die Spannung U_p am P-Eingang verhält sich die Schaltung wie der nicht-invertierende Verstärker mit $U_{a2} = U_p \cdot \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)$; mit $U_p = U_{e2} \frac{R_4}{R_3 + R_4}$ folgt $U_{a2} = U_{e2} \frac{R_4}{R_3}$.

Durch Überlagerung der beiden Teilspannungen U_{a1} und U_{a2} erhält man

$$U_a = U_{a1} + U_{a2} = U_{e2} \frac{R_4}{R_3} - U_{e1} \frac{R_2}{R_1} \quad \text{Für } R_1 = R_3 \text{ und } R_2 = R_4 \text{ ist } U_a = (U_{e2} - U_{e1}) \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

Die Differenz der beiden Eingangsspannungen wird mit dem Faktor R_2/R_1 verstärkt.

In der Praxis wird ein Differenzverstärker oft in Verbindung mit einer Brückenschaltung eingesetzt. Ist die Brücke abgeglichen, so ist die Ausgangsspannung des OP Null Volt. Besteht z.B. ein Brückenweig aus einem temperaturabhängigen Widerstand (NTC-Widerstand), so ist die Ausgangsspannung eine Funktion der Temperatur.

21.4.5 Addierer (Summierer)

Beim Addierer werden die Eingangsspannungen addiert und stehen am Ausgang als Summe zur Verfügung. Die Eingangsspannungen können positive und negative Amplituden haben.

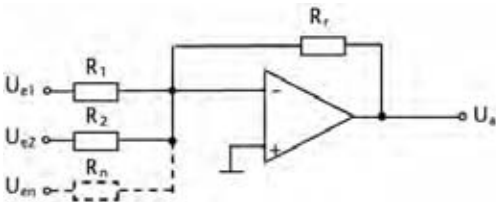


Abb. 425: Addierschaltung mit OP

Die Ausgangsspannung ist $-U_a = U_{e1} \frac{R_f}{R_1} + U_{e2} \frac{R_f}{R_2} + \dots + U_{en} \frac{R_f}{R_n}$. Die Eingangsspannungen können unterschiedlich gewichtet addiert werden. Verwendet man nur gleiche Widerstände, so ist $-U_a = U_{e1} + U_{e2} + \dots + U_{en}$.

21.4.6 Aktive Filter

Mit Operationsverstärkern lassen sich sogenannte **aktive Filter** (Tiefpaß-, Hochpaß-, Bandpaß-, Bandsperfilter) aufbauen, die Filtern aus passiven Bauelementen bezüglich der Steilheit der Durchlaß- oder Sperrkurven weit überlegen sind. Hier soll als Beispiel nur ein aktives Tiefpaßfilter 4. Ordnung mit seinem Amplituden-Frequenzgang gezeigt werden.

Sollte dem Leser das Einarbeiten in die Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik wenigstens streckenweise leicht gefallen sein und ebensoviel Freude bereitet haben wie dem Autor das Schreiben dieses Buches, so hat dieses Werk seinen Zweck erfüllt.

22 Literaturverzeichnis

- Bergtold, F.: Schaltungen mit Operationsverstärkern, Band 1, R. Oldenbourg-Verlag, 1973
- Bernstein, H.: Analoge Schaltungstechnik mit diskreten und integrierten Bauelementen, Hüthig-Verlag, Heidelberg 1997
- Bernstein, H.: PC-Elektronik-Labor Band 1, 3. Auflage 1996, Franzis-Verlag, Feldkirchen
- Bieneck, W.: Elektro T Grundlagen der Elektrotechnik, Holland + Josenhans Verlag, 1996
- Born, G., Hübscher, H., Lochhaas, H., Pradel, G., Vorwerk, B.: Querschnitt Physik und Technik, Westermann Verlag, 1983
- Bosse, G.: Grundlagen der Elektrotechnik I, II, III, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1966, 1967, 1968
- Czmock, G.: Operationsverstärker, Vogel-Verlag, Würzburg, 1972
- Dokter F., Steinhauer, J.: Digitale Elektronik in der Meßtechnik und Datenverarbeitung, Band 1,4. Auflage 1972, Philips Fachbücher
- Dorn: Physik, Mittelstufe, Ausgabe A, 8. Auflage 1957, Hermann Schroedel Verlag, Hannover
- Duyan, H., Hahnloser, G., Traeger, D.: PSPICE für Windows, 2. Auflage 1996, Teubner Studienskripten, Stuttgart
- Elektromeßtechnik, 5. Auflage, Siemens AG, Berlin-München 1968
- Graf, W., Küllmer, H.: Grundlagen der Schwachstromtechnik. 5. Auflage 1964, Fachverlag Schiele & Schön GmbH, Berlin.
- Hagmann, G.: Grundlagen der Elektrotechnik, 3. Auflage 1990, AULA-Verlag GmbH, Wiesbaden
- Hammer, A.: Physik, Oberstufe Elektrizitätslehre, 1. Auflage 1966, R. Oldenbourg Verlag, München
- Herter, E., Röcker, W.: Nachrichtentechnik, Übertragung und Verarbeitung, 1. Auflage 1976, Carl Hanser Verlag München Wien
- Hilpert, H.: Halbleiterbauelemente, Teubner-Verlag, Stuttgart 1972
- Höfling, O.: Lehrbuch der Physik, Oberstufe Ausgabe A, 5. Auflage 1962, Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn
- Klar, R.: Digitale Rechenautomaten, Walter de Gruyter & Co, Berlin 1970
- Kuchling, H.: Taschenbuch der Physik, 16. Auflage 1996, Carl Hanser Verlag, München Wien
- Küpfmüller, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik, 9. Auflage 1968, Springer Verlag
- Lehmann, E., Schmidt, F.: FOS Training Physik 2, 3. Auflage 1993, Stark Verlagsgesellschaft mbH, Freising

- Lehmann, J.: Dioden und Transistoren, 3. Auflage 1972, Vogel-Verlag, Würzburg
- Leucht, K.: Die elektrischen Grundlagen der Radiotechnik, 7. Auflage 1964, Franzis-Verlag
- Lowenberg, C.E.: Theory and Problems of Electronic Circuits, Mc. Graw-Hill, 1967
- Ludwig, W., Goetze, F.: Lehrbuch der Chemie, 1. Band, Anorganische Chemie. 11. Auflage 1966, C. C. Buchners Verlag, Bamberg.
- Maier, G., Zimmer, O.: Grundstufe der Elektrotechnik, Frankfurter Fachverlag, Kohl + Noltemeyer Verlag, 1989
- Nüßmann, D.: Das große Werkbuch Elektronik - Band 1 bis 3, 6. Auflage, Franzis-Verlag GmbH, Poing, 1994
- Philippow, E.: Taschenbuch Elektrotechnik, Band 3, Nachrichtentechnik, 2. Auflage, VEB Verlag Technik, Berlin, 1969
- Philips Lehrbriefe, Elektrotechnik und Elektronik, Bd. 1 Einführung und Grundlagen, 11. Auflage, Dr. Alfred Hüthig Verlag, Heidelberg, 1987
- Pohl, E.: Nachrichtentechnik kurz und bündig, 2. Auflage, Vogel-Verlag Würzburg, 1973
- Pregla, R.: Grundlagen der Elektrotechnik, 5. Auflage, Hüthig Verlag Heidelberg, 1998
- Reisch, M.: Elektronische Bauelemente, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998
- Reiß, K., Liedl, H., Spichall, W.: Integrierte Digitalbausteine, Kleines Praktikum, 3. Auflage, Siemens Aktiengesellschaft, Berlin, München, 1970
- Schüssler, H.W.: Netzwerke und Systeme I, Bibliographisches Institut Mannheim, 1971
- Sextl, R., Raab, I., Streeruwitz, E.: Der Weg zur modernen Physik, Eine Einführung in die Physik, Band 2, Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main, 1980
- Steinbuch, K., Rupprecht, W.: Nachrichtentechnik, Springer-Verlag, 1967
- Surina, T., Klasche G.: Angewandte Impulstechnik, Franzis Verlag, 1974
- Texas Instruments Deutschland GmbH: Das TTL-Kochbuch, 2. Auflage, Freising, 1972
- Tietze, U., Schenk, Ch.: Halbleiter-Schaltungstechnik, 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971
- Unbehauen, R.: Grundlagenpraktikum in Elektrotechnik und Meßtechnik, Univ. Erlangen-Nürnberg, März 1971
- Unger, H.-G., Schultz, W.: Elektronische Bauelemente und Netzwerke I, Friedr. Vieweg & Sohn GmbH, Braunschweig, 1968
- Vahldiek, Hansjürgen: Übertragungsfunktionen, R. Oldenbourg Verlag, München, 1973
- Valvo: Operationsverstärker Grundlagen, Verlag Boysen & Maasch, Hamburg, 1974
- Wolf, H.: Lineare Systeme und Netzwerke, Eine Einführung, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971
- Zirpel, M.: Operationsverstärker, Franzis-Verlag, 1976

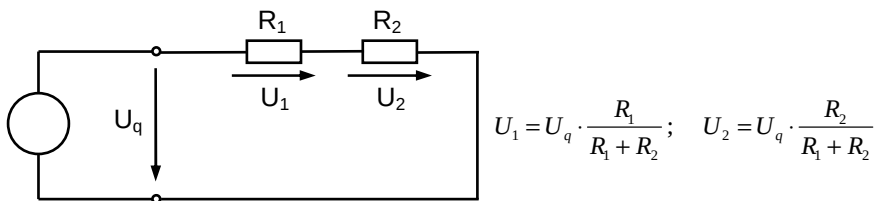
Anhang

A.1 Die Stromteilerregel

Ergänzung zu den Abschnitten „3.2.3.3 Aufteilung des Stromes“ und „8 Der verzweigte Gleichstromkreis“

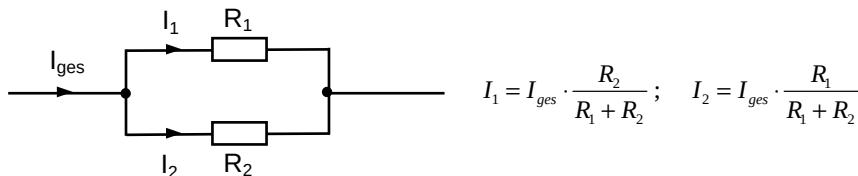
Die Stromteilerregel ist ebenso wichtig wie die Spannungsteilerregel. Hier wird die rein schematische Anwendung der Stromteilerregel gezeigt.

Eine kurze Wiederholung der Spannungsteilerregel: Liegen zwei in Reihe geschaltete Widerstände an einer Spannungsquelle, so fällt an jedem der Widerstände eine Spannung ab, die Spannung teilt sich auf. Die Spannung an einem der Widerstände wird mit der Spannungsteilerregel berechnet.



Es wird der Widerstand, an dem man den Spannungsabfall wissen will, durch den Gesamtwiderstand der Reihenschaltung dividiert und das Ergebnis mit der gesamten Spannung multipliziert.

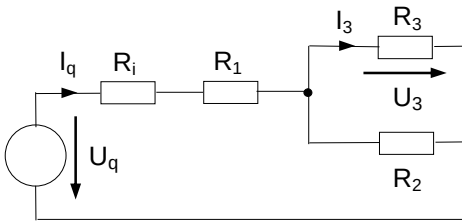
Werden zwei parallel geschaltete Widerstände von einem Strom durchflossen, so teilt sich der Strom auf. Der Strom durch einen der Widerstände wird mit der Stromteilerregel berechnet.



Es wird der Widerstand, der dem interessierenden Teilstrom gegenüberliegt, durch die Summe beider Widerstände dividiert und das Ergebnis mit dem gesamten Strom multipliziert.

Beispiel

Berechnen Sie den Strom I_3 durch R_3 in der angegebenen Schaltung mit Hilfe a) der Spannungsteilerregel und b) der Stromteilerregel. $U_q = 12 \text{ V}$; $R_1 = 1 \Omega$; $R_2 = 9 \Omega$; $R_3 = 8 \Omega$; $R_4 = 2 \Omega$



$$\text{a) } U_3 = U_q \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}{R_i + R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = 12 \text{ V} \cdot \frac{\frac{8 \cdot 2}{10}}{10 + 1,6} = 1,66 \text{ V} \quad I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{1,66 \text{ V}}{2 \Omega} = \underline{\underline{0,83 \text{ A}}}$$

$$\text{b) } I_3 = I_q \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{U_q}{R_i + R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{12 \text{ V}}{11,6 \Omega} \cdot \frac{8}{10} = \underline{\underline{0,83 \text{ A}}}$$

A.2 Bestimmung des Innenwiderstandes eines Netzwerkes

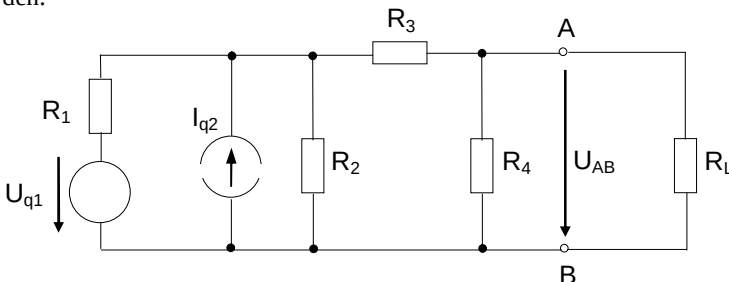
Ergänzung zu den Abschnitten „4.5 Die belastete Gleichspannungsquelle“, „8.6 Umwandlung von Quellen“ und „8.7.4 Der Satz von der Ersatzspannungsquelle“

Jedes lineare Netzwerk lässt sich bezüglich zweier beliebiger Klemmen durch eine Ersatzspannungs- oder Ersatzstromquelle nachbilden. Bezüglich der Klemmen verhalten sich beide Ersatzschaltungen genau so wie das ursprüngliche Netzwerk. Ob man eine Ersatzspannungs- oder Ersatzstromquelle verwendet, hängt von der jeweils vorliegenden Aufgabenstellung ab. Die Daten der Ersatzquellen können aus zwei der drei Größen *Leerlaufspannung*, *Kurzschlußstrom* und *Innenwiderstand* abgeleitet werden.

Der Innenwiderstand ist häufig am einfachsten zu bestimmen. **Von den Klemmen A und B aus schauen wir in das Netzwerk hinein und denken uns Spannungsquellen kurzgeschlossen und Stromquellen unterbrochen. Der Widerstand, den man dann sieht, ist der Innenwiderstand.**

Beispiel

Das Netzwerk links von den Klemmen A und B soll als Ersatzspannungsquelle dargestellt werden.

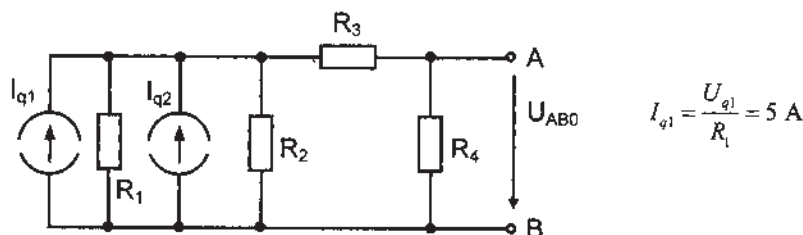


Gegeben: $U_{q1} = 10 \text{ V}$, $I_{q2} = 2 \text{ A}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 0,5 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $R_4 = 6 \Omega$, $R_L = 4 \Omega$

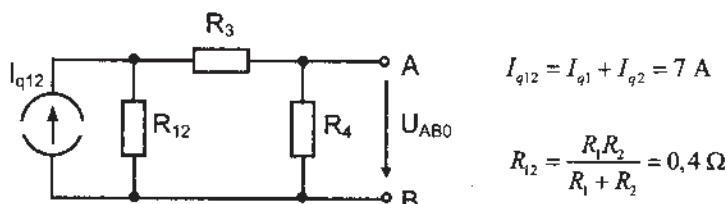
Der Innenwiderstand R_i der Ersatzspannungsquelle mit den Klemmen A und B wird bestimmt, indem zunächst alle Spannungsquellen im Netzwerk kurzgeschlossen und alle Stromquellen aufgetrennt werden. Anschließend schaut man von den Klemmen A und B in das Netzwerk hinein und ermittelt den Widerstand, den man von dort aus sieht.

$$R_i = R_4 \parallel (R_1 \parallel R_2 + R_3); \quad R_i = R_4 \parallel \frac{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2}; \quad R_i = 6 \Omega \parallel 3,4 \Omega; \quad \underline{\underline{R_i = 2,17 \Omega}}$$

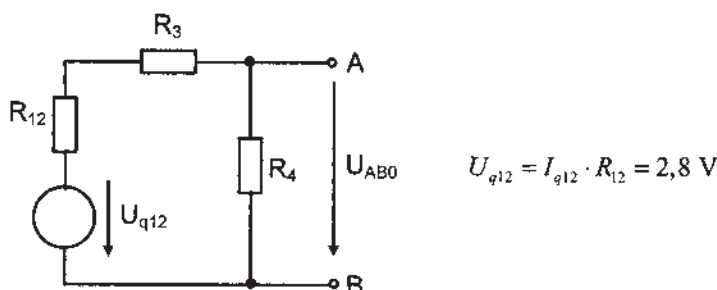
Nun wird die Leerlaufspannung U_{AB0} bestimmt. Hierzu wird die Spannungsquelle U_{q1} in eine Stromquelle umgewandelt, R_L entfällt (Leerlauf). Man erhält folgendes Netzwerk.



Die beiden parallel liegenden Stromquellen werden zusammengefasst.

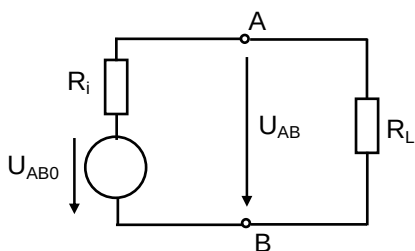


Das Ergebnis wird wieder in eine Spannungsquelle umgewandelt.



$$U_{AB0} \text{ ist nach der Spannungsteilerregel } U_{AB0} = U_{q12} \frac{R_4}{R_{12} + R_3 + R_4}. \quad \underline{\underline{U_{AB0} = 1,79 \text{ V}}}$$

Es folgt die Darstellung des ursprünglichen Netzwerkes mit der Ersatzspannungsquelle.



A.3 Harmonische Schwingung

Ergänzung zu Abschnitt „10.1.4 Sinusförmige Wechselspannung in komplexer Darstellung“

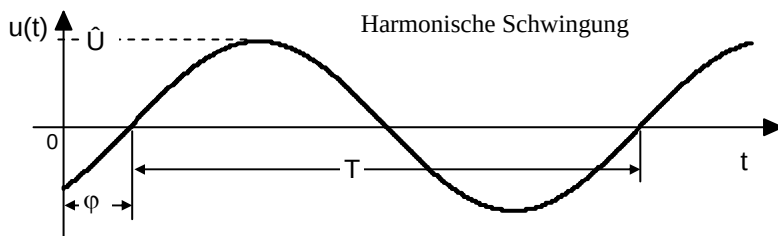
Die Kosinusfunktion und Sinusfunktion sind periodisch und harmonisch. Es sind wichtige Funktionen in der Nachrichtentechnik. Sie haben eine zentrale Bedeutung in der Modulationstechnik und dienen als Testfunktionen. Ein Kosinus-Signal kann als Wobbelsignal mit variabler Frequenz zur Ermittlung des frequenzabhängigen Verhaltens (Frequenzgang) einer Schaltung bzw. eines Systems verwendet werden. Die komplexe Darstellung der harmonischen Schwingung wird nachfolgend vertieft.

Für die Darstellung des zeitlichen Verlaufes eines stationären, harmonischen Signals wird hier die Bezeichnung einer Spannung $u(t)$ gewählt.

1. Reelle Darstellung

Definition der Kosinusfunktion: $u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

$\hat{U}$ = Amplitude, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ = Kreisfrequenz, $f = \frac{1}{T}$ = Frequenz, $T = \frac{1}{f}$ = Periodendauer, φ = Phasenverschiebung (Phasenwinkel der Wechselgröße, Nullphasenwinkel)

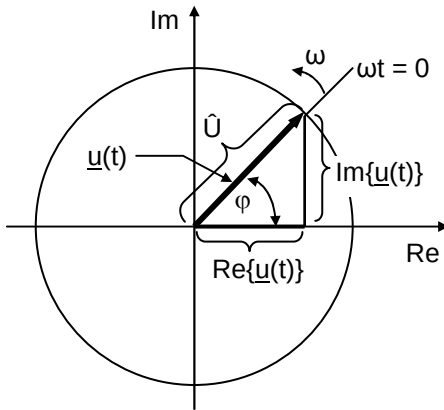


2. Komplexe Darstellung

Die reelle harmonische Schwingung bzw. die reelle Zeitfunktion $u(t)$ kann als *komplexe* Zeitfunktion $\underline{u}(t)$ dargestellt werden (eine komplexe Größe wird hier unterstrichen). Es ergibt sich ein Zeiger in der komplexen Ebene mit der Länge $\hat{U}$, der mit der Winkelgeschwindigkeit

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ rotiert (Drehzeiger) und zum Zeitpunkt „ t “ mit der reellen Achse den Winkel $\omega t + \varphi$ einschließt. Die komplexe Zeitfunktion $\underline{u}(t)$ gibt den komplexen Momentanwert an.

Kurz: **Drehzeiger = komplexer Momentanwert**



Darstellung einer komplexen Zeitfunktion als Drehzeiger

$$\underline{u}(t) = \underbrace{\hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{Re}\{\underline{u}(t)\}} + j \cdot \underbrace{\hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi)}_{\text{Im}\{\underline{u}(t)\}}$$

Mit der Eulerschen Formel $\cos(x) + j \cdot \sin(x) = e^{jx}$ ergibt sich

$$\underbrace{\underline{u}(t)}_{\text{komplexer Momentanwert}} = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{\hat{U} \cdot e^{j\varphi}}_{\substack{\underline{U} = \text{ruhender Zeiger} \\ = \text{komplexe Amplitude}}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{rotierender Einheitszeiger}}$$

ist gleich mal

Für $\omega t = 0$ ergibt sich eine komplexe Amplitude $\underline{U}$ mit dem Betrag $\hat{U}$ und dem Phasenwinkel φ .

In dem Faktor $\underline{U}$ sind die zeitunabhängigen Größen zusammengefasst, dieser komplexe Amplitudenzeiger wird mit der Kreisfrequenz ω herumgedreht, und zwar durch den Faktor $e^{j\omega t}$.

Komplexe Amplitude: $\underline{U} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi}$

Die komplexe Amplitude entspricht dem bei $\omega t = 0$ ruhenden Zeiger.

Oft sind Momentanwerte nicht von Interesse. Dann können Sinus- und kosinusförmige Größen durch ihre komplexen Amplituden beschrieben werden.

Anmerkung: An der komplexen Amplitude kann man nicht mehr erkennen, ob die zugeordnete Größe eine Sinus- oder eine Kosinusfunktion ist.

Die komplexe Zeitfunktion $\underline{u}(t) = \underline{U} \cdot e^{j\omega t}$ enthält die volle Information der reellen Zeitfunktion

$u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$. Mit der Schreibweise für die komplexe Frequenz $s = j\omega$ ergibt sich für die komplexen Momentanwerte $\underline{u}(t) = \underline{U} \cdot e^{st}$. Diese Funktion wird auch als komplexe Exponentialfunktion oder als harmonische Exponentielle bezeichnet.

Zusammenhang zwischen harmonischer Schwingung und komplexer Zeitfunktion

Es gilt: $e^{jx} = \cos(x) + j \cdot \sin(x)$; $e^{-jx} = \cos(x) - j \cdot \sin(x) \Rightarrow e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cdot \cos(x) \Rightarrow$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}); \text{ somit ist}$$

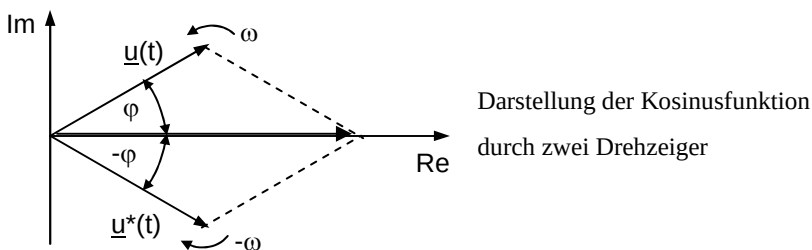
$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{\hat{U}}{2} \left(e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)} \right) \\ &= \frac{\hat{U}}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega t} + \frac{\hat{U}}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega t} \\ &= \frac{1}{2} \left(\underline{U} \cdot e^{j\omega t} + \underline{U}^* \cdot e^{-j\omega t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \underline{u}(t) + \frac{1}{2} \underline{u}^*(t) \\ &= \operatorname{Re}\{\underline{u}(t)\} \end{aligned}$$

Der physikalische Augenblickswert ist also der Realteil des komplexen Augenblickswertes.

Anmerkung: Der Stern kennzeichnet die konjugiert komplexe Größe.

Anmerkung: Die reelle Schwingung wird mathematisch unter formaler Verwendung von $-\omega$ aus zwei komplexen Schwingungen zusammengesetzt. Die negative Kreisfrequenz $-\omega$ hat keine physikalische Bedeutung.

Die Kosinusfunktion kann in der komplexen Ebene als Summe von zwei Drehzeigern mit entgegengesetzter Drehrichtung dargestellt werden. Die Summe ist in jedem Augenblick reell.

**Anklingende und abklingende (gedämpfte) Schwingung**

Erfolgt außer der Rotation des Drehzeigers noch eine zeitliche Änderung (exponentielles An- oder Abklingen) der Zeigerlänge (Amplitude), so folgt für die komplexe Frequenz der an- oder abklingenden Schwingung:

$$\boxed{s = \sigma + j\omega}$$

s = komplexe Frequenz der Schwingung e^{st}

σ = Exponent, der die Längenänderung des Drehzeigers beschreibt

ω = Kreisfrequenz des Drehzeigers

Für die Schwingung e^{st} folgt: $e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$

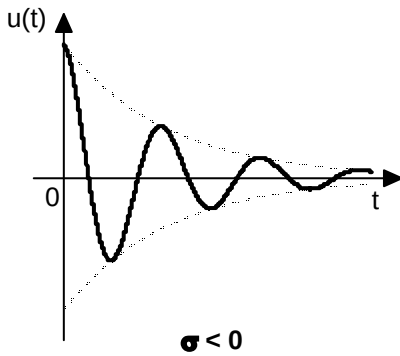
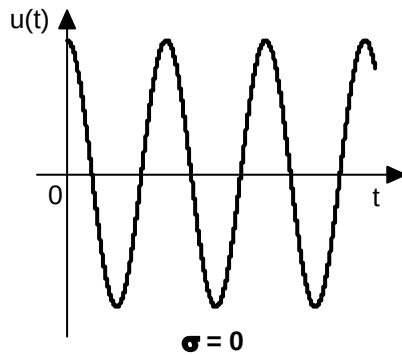
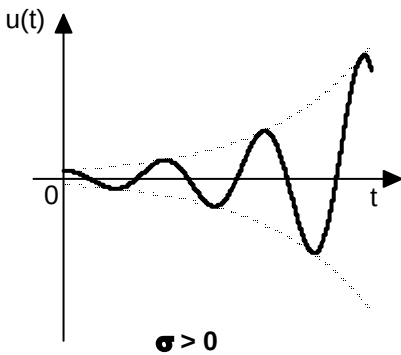
$e^{\sigma t}$ = Faktor des exponentiellen An- bzw. Abklingens.

Man erhält für

$\sigma > 0$ eine an klingende Schwingung

$\sigma = 0$ eine ungedämpfte Schwingung

$\sigma < 0$ eine ab klingende (gedämpfte) Schwingung.



A.4 Die Stromdichte

Ergänzung zu den Abschnitten „1 Elektrischer Strom“ und „2 Der unverzweigte Gleichstromkreis“

In Kapitel 1 und 2 haben wir den elektrischen Strom als die gerichtete Bewegung von Ladungsträgern kennengelernt. Die Stromstärke $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q}{t}$ war definiert als die durch eine

gegebene Fläche (z. B. einen Leiterquerschnitt) strömende Ladung pro Zeiteinheit. Betrachten wir den Stromfluß im Inneren eines Leiters, so ist für dessen Beschreibung die Stromdichte S eine wichtige Größe.

Homogener Stromfluß

Wir nehmen an, daß sich in einem langen zylindrischen Leiter aus homogenem Material mit der Querschnittsfläche A und der konstanten Raumladungsdichte ρ (gleichmäßig verteilte Ladung pro Volumen) alle Ladungsträger mit gleicher konstanter Geschwindigkeit v bewegen. Fließt während des Zeitabschnitts Δt ein Strom, so legen alle Ladungsträger die Strecke $\Delta s = v \cdot \Delta t$ zurück. Durch die Fläche A bewegt sich ein Volumen von $\Delta V = A \cdot \Delta s = A \cdot v \cdot \Delta t$. Die Ladung dieses Volumens ist $\Delta Q = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \cdot v \cdot \Delta t$. Für die

Stromstärke gilt somit $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho \cdot A \cdot v$. Nach Division dieser Gleichung durch A erhalten

wir die auf den Leiterquerschnitt bezogene Stromstärke für einen konstanten Strom in einem

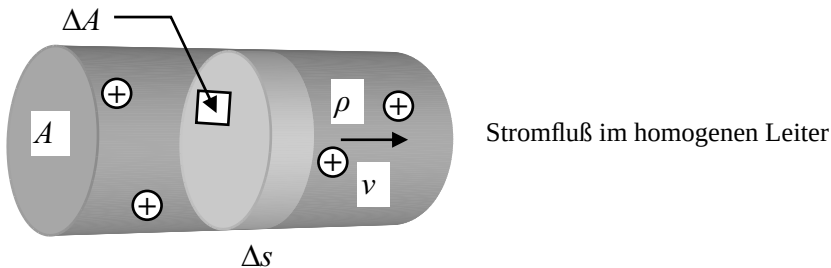
Leiter, welche als Stromflussdichte oder kurz **Stromdichte** bezeichnet wird: $S = \frac{I}{A} = \rho \cdot v$

Als Formelzeichen wird statt S auch J oder j verwendet. Die Einheit von S ist $[S] = \frac{A}{m^2}$, in

der Technik ist die Einheit $\frac{A}{mm^2}$ üblich.

Bei konstantem Strom I ist aus der Formel für die Stromdichte ersichtlich:

Die Stromdichte und die Bewegungsgeschwindigkeit der Ladungsträger ist umso größer, je kleiner die Querschnittsfläche des Leiters ist.



Basiert die Stromdichte auf Elektronen als Ladungsträger, so ist die Raumladungsdichte $\rho = n \cdot e$ (n = Anzahldichte der Elektronen, $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C = Elementarladung). Die Elektronendichte in Metallen ist typisch $n = 10^{29} \text{ m}^{-3}$. Aus $v = \frac{I}{A \cdot n \cdot e}$ kann die (mittlere) Elektronengeschwindigkeit (Driftgeschwindigkeit) in einem Leiter berechnet werden, wenn Querschnitt und konstante Stromstärke gegeben sind. Bei Metallen ergeben sich Werte von

$v < 1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$. Dies ist die Geschwindigkeit der Ladungsträger (Elektronen), die Wirkungen des Stromes breiten sich mit der Geschwindigkeit der elektromagnetischen Felder, d. h. mit Lichtgeschwindigkeit $c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ aus. Anders als in Metallen sind in Halbleitern nur recht wenige, aber sehr viel „beweglichere“ Elektronen vorhanden.

Die Raumladungsdichte ρ ist eine skalare Größe und nur durch einen Zahlenwert mit einer Einheit vollständig bestimmt. Die Stromdichte dagegen hat nicht nur eine Größe (einen Betrag), sondern durch die Bewegungsrichtung der Ladungsträger auch eine Richtung. Ebenso wie die Geschwindigkeit v (auch diese hat einen Betrag und eine Richtung) ist die Stromdichte S ein Vektor, sie hat immer dieselbe Richtung wie die elektrische Feldstärke.

In vektorieller Schreibweise ist: $\vec{S} = \rho \cdot \vec{v}$

Ist die Bewegungsrichtung der Ladungsträger nicht senkrecht zur Fläche A , sondern bildet

mit A den Winkel α , so ist die Stromdichte: $S = \frac{I}{A \cdot \cos \alpha}$

Für den Strom gilt: $I = S \cdot A \cdot \cos \alpha = \vec{S} \cdot \vec{A}$ (Skalarprodukt)

Falls zwei unterschiedliche Ladungsträger vorhanden sind bewegen sich diese in entgegengesetzter Richtung und es gilt: $\vec{S} = \rho_- \cdot \vec{v}_- + \rho_+ \cdot \vec{v}_+$

Im homogenen Halbleiter ist die Stromdichte: $S = n_h \cdot e \cdot \overline{v_h} - n_e \cdot e \cdot \overline{v_e}$

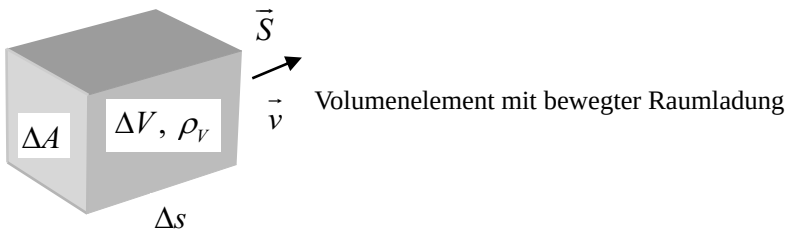
mit n_h bzw. n_e = Dichte der freien Löcher bzw. Elektronen, e = Elementarladung,

$\overline{v_h}$ bzw. $\overline{v_e}$ = mittlere Driftgeschwindigkeit der Löcher bzw. Elektronen

Inhomogener Stromfluss

Im allgemeinen Fall sind die Verteilung der Ladungsträger, ihre Geschwindigkeit und ihre Bewegungsrichtung und damit auch die Stromdichte nicht im ganzen Leiter konstant.

Für die Stromdichte $\vec{S}$ wird für einen gegebenen Raumpunkt ein Vektor definiert, dessen Betrag gleich dem Betrag des Stroms pro Flächeneinheit und dessen Richtung gleich der Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger ist. In gleicher Weise wie vorher kann abgeleitet werden: $\vec{S} = \rho_v \cdot \vec{v}$



Ist bei inhomogenem Stromfluß der Gesamtstrom durch eine gegebene Fläche zu berechnen, so muß der Strom, der senkrecht durch diese Fläche hindurchtritt, über alle infinitesimalen Teilflächen aufsummiert werden, d. h. die Stromdichte ist über die Fläche zu integrieren:

$$I_A = \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A} \quad \text{Die Stromstärke ist gleich dem Flächenintegral der Stromdichte.}$$

$d\vec{A}$ ist ein Vektor senkrecht zum jeweiligen infinitesimalen Flächenelement und $\vec{S} \cdot d\vec{A}$ ist der Strom, der senkrecht durch dieses Element hindurchfließt.

Praktische Bedeutung der Stromdichte

Technisch ist die Stromdichte, die man einem Leitermaterial (Aluminium, Kupfer, etc.) zu-muten kann, beschränkt. Wenn die Stromdichte S in einem Leiter zu große Werte annimmt, werden die Atomrümpfe zu solch großen Schwingungen angeregt, daß das Metallgitter zerstört wird. Der Leiter brennt durch. In der Technik gebräuchliche Werte für Stromdichten liegen im Bereich 1 bis 20 A/mm². Bei Supraleitern sind Stromdichten um 100 A/mm² möglich.

Auf elektronischen Leiterplatten kann bei zu hohen Stromdichten eine Wanderung von Material auftreten („metal migration“), wodurch Kurzschlüsse entstehen können.

A.5 Magnetische Kreise

Ergänzung zu Abschnitt „3.4 Die Spule“

Der magnetische Kreis

Als magnetische Kreise bezeichnet man Anordnungen zur kontrollierten Führung magnetischer Feldlinien, wobei der magnetische Fluß verstärkt werden kann. Da Magnetfeldlinien stets in sich geschlossen sind, muß ein magnetischer Kreis, ähnlich einem Stromkreis, auch stets geschlossen sein.

Der magnetische Kreis vieler technischer Anwendungen (z. B. Transformator, Drosselspule, Motor) besteht in seiner überwiegenden Länge aus einem ferromagnetischen Material („Eisen“) mit hoher Permeabilität ($\mu_r \gg 1$), auf welches eine oder mehrere stromdurchflossene Wicklungen aufgebracht sind. Der Eisenkreis kann anwendungsbedingt durch einen oder mehrere kleine Luftspalte unterbrochen sein. Die Magnetfeldlinien verlaufen überwiegend im Eisen, der magnetische Fluss Φ wird weitestgehend durch den Eisenkreis geführt. Meis-

tens ist die Länge des magnetischen Kreises groß gegenüber dem vom Fluß durchsetzten Eisenquerschnitt, so daß im Eisen annähernd ein homogenes Feld vorliegt. Die Weite des Luftspalts ist meist deutlich kleiner als seine Querabmessungen, das Feld im Luftspalt kann daher ebenfalls als homogen angesehen werden (der magnetische Fluss im Luftspalt ist der Gleiche wie im Eisen). In diesem Fall besteht völlige Analogie zwischen magnetischem Kreis und einem Gleichstromkreis. Zur Berechnung solcher magnetischen Kreise können alle von der Berechnung von Gleichstromkreisen her bekannten Verfahren verwendet werden, wie z. B. der Knoten- und Maschensatz, die Strom- und Spannungsteilerregel, die Ersatzwiderstände von Reihen- und Parallelschaltung. Voraussetzung ist, daß die Permeabilität $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ abschnittsweise als konstant angenommen und somit der magnetische Kreis als linear betrachtet werden kann.

Magnetischer Widerstand

Ursache des magnetischen Feldes einer von Gleichstrom durchflossenen Spule ist die Summenwirkung des Stroms in allen Windungen, die magnetische Durchflutung.

Für die Durchflutung gilt: $\Theta = I \cdot N = H \cdot l$

N = Windungszahl, I = Stromstärke in A, H = magnetische Feldstärke in A/m, l = mittlere Feldlinienlänge

Der magnetische Fluss eines homogenen Magnetfeldes ist: $\Phi = B \cdot A = \mu_0 \mu_r \cdot H \cdot A$

B = Flussdichte = magnetische Induktion, A = vom Magnetfeld in Richtung der Flächennormalen durchsetzte Querschnittsfläche, μ_0 = magnetische Feldkonstante, μ_r = Permeabilitätszahl

Umstellen ergibt $H = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{\Phi}{A}$

Durch Einsetzen von H in die Durchflutung folgt: $\Theta = \underbrace{\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{l}{A}}_{R_m} \cdot \Phi$

Formal besteht eine Ähnlichkeit zum Ohmschen Gesetz $U = R \cdot I$ mit $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$.

Aus der Analogiebetrachtung gewinnt man somit das *Ohmsche Gesetz des magnetischen*

Kreises: $\Theta = R_m \cdot \Phi$. Die Größe $R_m = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A}$ mit der Einheit $[R_m] = \frac{A}{V \cdot s}$ wird als *magne-*

tischer Widerstand bezeichnet. In Analogie zum ohmschen spezifischen Widerstand ρ wird

$\rho_m = \frac{1}{\mu_0 \mu_r}$ *spezifischer magnetischer Widerstand* genannt.

Der magnetische Kreis kann also in eine entsprechende Ersatzschaltung aus Spannungsquelle und Widerstand überführt werden, die mit den Methoden zur Berechnung von Gleichstromkreisen analysiert werden kann.



Die magnetische Durchflutung übernimmt im magnetischen Kreis eine vergleichbare Funktion wie die elektrische Spannungsquelle im Stromkreis. Die Durchflutung (d. h. die Ströme) erzeugt ebenso einen magnetischen Fluss, wie die elektrische Spannungsquelle einen elektrischen Strom hervorruft.

Im elektrischen Stromkreis treten an einzelnen Abschnitten des Stromkreises Teilspannungen auf. Genauso können im magnetischen Kreis magnetische Teilspannungen auftreten. Entsprechend kann der gesamte magnetische Widerstand in magnetische Teilwiderstände aufgeteilt werden. Die magnetische Durchflutung entspricht der Spannungsquelle, die magnetischen Spannungen entsprechen den elektrischen Spannungsabfällen über den Widerständen im Stromkreis. Die Summe aller magnetischen Teilspannungen ergibt die magnetische Durchflutung (äquivalent zum 2. Kirchhoffschen Gesetz = Maschensatz). Die magnetische Spannung U_m ist gleich dem Produkt von magnetischem Widerstand und magnetischem Fluß:

$$U_m = R_m \cdot \Phi = H \cdot l$$

Im Falle eines geschlossenen Weges ist die magnetische Spannung gleich der Summe der eingeschlossenen Ströme, sie heißt magnetische Umlaufspannung. Die magnetische Umlaufspannung ist gleich der zu diesem Umlauf gehörenden Durchflutung.

$$U_m = \sum_{v=1}^n N_v \cdot I_v = \Theta = I \cdot N \quad [U_m] = A$$

Vorgehensweise bei der Berechnung

In einem magnetischen Ersatzschaltbild werden einzelne Widerstände für die Bereiche eingeführt, in denen sich entweder die Permeabilität μ oder die Geometrie des Materials ändert. Der zu berechnende magnetische Kreis wird in Abschnitte (Schenkel) mit konstantem Querschnitt und konstanter Permeabilität unterteilt. Dann können in einem Abschnitt die Feldgrößen B und H als konstant angesehen werden. Für jeden Abschnitt wird ein magnetischer

Widerstand $R_m = \frac{l_m}{\mu_0 \mu_r A}$ definiert, wobei die mittlere Schenkellänge l_m , der Weg durch die

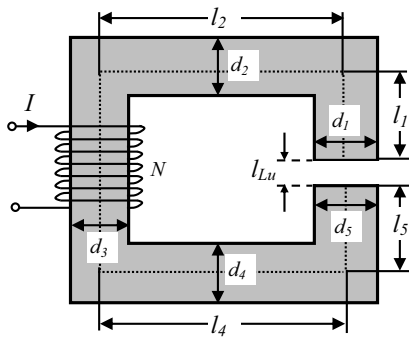
Mitte des Schenkelquerschnittes, benutzt wird. Für die magnetische Ersatzschaltung werden die Knoten- und Maschengleichungen aufgestellt und die unbekannten Flüsse Φ berechnet. Aus den magnetischen Flüssen Φ_γ werden die Feldgrößen B und H in einzelnen Abschnitten berechnet.

Beispiel: Ferromagnetischer Rahmen mit Luftspalt

Die Querschnittsfläche A ist überall im Eisenkern gleich groß. Der Luftspalt verläuft senkrecht zu den magnetischen Induktionslinien und ist schmal im Vergleich zu seinen Querschnittsabmessungen. Damit ist das Feld im Luftspalt nahezu homogen, der Luftspalt kann

Bei den Richtungspfeilen der Durchflutungen ist darauf zu achten, dass sie entsprechend dem Wicklungssinn der Spulen und der Richtung des Erregerstromes gerade entgegengesetzt zu der Richtung des Magnetfeldes in der jeweiligen Spule gewählt werden.

Beispiel: Berechnung der magnetischen Widerstände mit mittleren Feldlinienlängen



Gegeben:

$$l_1 = l_5 = 2 \text{ cm}; l_2 = l_4 = 6 \text{ cm}; l_{Lu} = 0,2 \text{ cm};$$

$$d_1 = d_5 = 1 \text{ cm}; d_2 = 1,5 \text{ cm}; d_3 = 2 \text{ cm}; d_4 = 1 \text{ cm};$$

Dicke (Tiefe) des Eisenkerns: $b = 2 \text{ cm}$; $\mu_{rFe} = 2000$

Windungszahl $N = 3310$

Die Flußdichte B im Luftspalt soll $0,2 \text{ Tesla}$ sein.

Gesucht: Notwendige Stromstärke I

$$R_{mLu} = \frac{l_{Lu}}{\mu_0 \cdot A_{Lu}} = \frac{l_{Lu}}{\mu_0 \cdot d_1 \cdot b} = \frac{0,002 \text{ m}}{1,257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot 0,01 \text{ m} \cdot 0,02 \text{ m}} = 7,955 \cdot 10^6 \frac{A}{Vs}$$

$$R_{m1} = R_{m5} = \frac{l_1}{\mu_0 \mu_{rFe} \cdot d_1 \cdot b} = 39,77 \cdot 10^3 \frac{A}{Vs}; R_{m2} = \frac{l_2}{\mu_0 \mu_{rFe} \cdot d_2 \cdot b} = 79,55 \cdot 10^3 \frac{A}{Vs}$$

$$l_3 = l_1 + l_5 + l_{Lu}; R_{m3} = \frac{l_3}{\mu_0 \mu_{rFe} \cdot d_3 \cdot b} = 41,77 \cdot 10^3 \frac{A}{Vs}; R_{m4} = \frac{l_4}{\mu_0 \mu_{rFe} \cdot d_4 \cdot b} = 119,3 \cdot 10^3 \frac{A}{Vs}$$

$$R_{mges} = R_{m1} + R_{m2} + R_{m3} + R_{m4} + R_{m5} + R_{mLu} = 8,275 \cdot 10^6 \frac{A}{Vs}$$

Der größte Teil des magnetischen Widerstandes entfällt auf den Luftspalt.

$$\Phi = B \cdot A = B \cdot d_1 \cdot b = 0,2 \frac{Vs}{m^2} \cdot 0,01 \text{ m} \cdot 0,02 \text{ m} = 40 \cdot 10^{-6} Vs$$

$$\Theta_{ges} = \Phi \cdot R_{mges} = 40 \cdot 10^{-6} Vs \cdot 8,275 \cdot 10^6 \frac{A}{Vs} = 331,0 A$$

$$I = \frac{\Theta}{N} = \frac{331,0}{3310}; \underline{\underline{I = 0,1 A}}$$

A.6 Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung

Ergänzung zu Abschnitt „9.3 Kennwerte von Wechselgrößen“

Der Nullphasenwinkel φ_0 (Phasenlage) einer sinusförmigen Wechselgröße gibt deren Winkel bezogen auf den Ursprung $\varphi_u = 0$ (= Bezugspunkt), also ihre Phasenverschiebung gegenüber dem Nullpunkt an.

Es sollen folgende Voraussetzungen gelten:

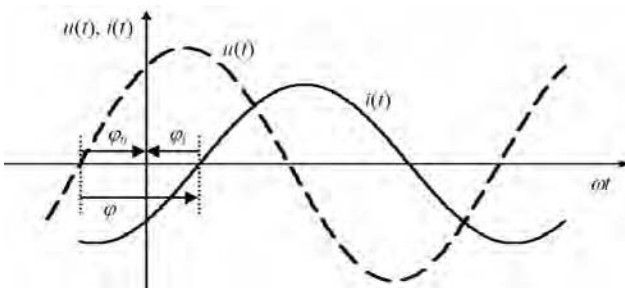
- Es liegt der eingeschwungene Zustand vor (transiente Vorgänge sind abgeklungen).
- Das vorliegende Netzwerk ist linear, somit treten keine Frequenzänderungen, sondern ausschließlich Amplitudenänderungen und Phasenverschiebungen auf.
- Alle Wechselgrößen im Netzwerk (Spannungen, Ströme) sind harmonisch (sinusförmig) und haben gleiche Frequenz.

Betrachtet werden:

- eine Spannung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$ mit dem Nullphasenwinkel φ_u
- und ein Strom $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$ mit dem Nullphasenwinkel φ_i .

Phasenwinkel im Liniendiagramm

Eine Darstellung von Spannungen und Strömen in einem Wechselstromnetzwerk als Funktion des Winkels ωt wird Liniendiagramm genannt. Der Nullphasenwinkel wird im Liniendiagramm von demjenigen Schnittpunkt der sinusförmigen Größe mit der ωt -Achse (Nulldurchgang), ab dem der Funktionswert positiv wird und dem Ursprung am nächsten liegt, bis zum Ursprung bei $\omega t = 0$ eingezeichnet. Erfolgt bei diesem Einzeichnen das Fortschreiten in positive ωt -Richtung, so ist der Nullphasenwinkel positiv ($\varphi > 0$), andernfalls negativ ($\varphi < 0$). Als Beispiel sind die beiden zeitlich zueinander verschobenen Größen $u(t)$ und $i(t)$ mit ihren Nullphasenwinkeln in der folgenden Abbildung dargestellt.



Im Allgemeinen sind in einem Wechselstromnetzwerk (z.B. wegen Kapazitäten, Induktivitäten) Strom und Spannung an einem Bauelement nicht gleichphasig, sondern haben untereinander den Phasenwinkel φ . Als Phasenwinkel (oder Phasenverschiebung, Phasenverschiebungswinkel, relativer Phasenverschiebungswinkel) wird die Phasendifferenz, also die Differenz der Nullphasenwinkel zweier Schwingungen bezeichnet. Im Liniendiagramm wird der Phasenwinkel vom Nulldurchgang der Spannungscurve zum Nulldurchgang der Stromkurve eingezeichnet, wie in obiger Abbildung gezeigt.

Der Phasenwinkel φ kann aus den Nullphasenwinkeln berechnet werden:

$$\varphi = \varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i$$

φ gibt an, um welchen Winkel die Spannung dem Strom nachfolgt oder vorausseilt.

Als **Bezugskurve**, die durch den Bezugspunkt $\omega t = 0$ gelegt werden kann, wird immer die **Stromkurve** gewählt. Somit sind bezüglich des Phasenwinkels φ zu betrachten:

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \text{ und } i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden.

$\varphi > 0$: Die Spannung eilt dem Strom um den Winkel φ voraus. Die Spannungskurve ist gegenüber der Stromkurve in ωt -Richtung verschoben. Bei $\omega t = 0$ hat $u(t)$ schon einen positiven Wert.

$\varphi = 0$: Spannung und Strom sind phasengleich.

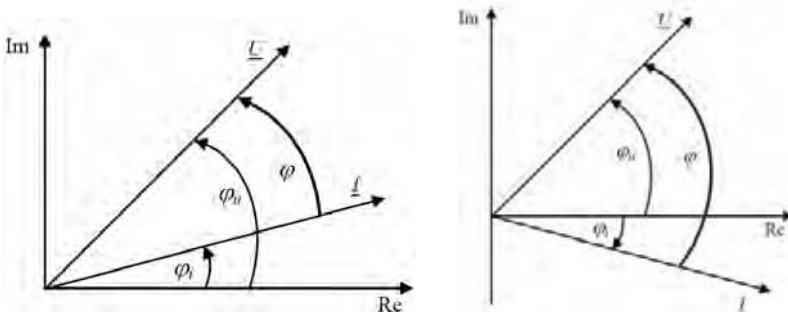
$\varphi < 0$: Die Spannung läuft dem Strom um den Winkel φ hinterher. Die Spannungskurve ist gegenüber der Stromkurve in $+\omega t$ -Richtung verschoben. Bei $\omega t = 0$ hat $u(t)$ noch einen negativen Wert.

In obiger Abbildung ist $\varphi_u > 0$ und $\varphi_i < 0$. Nach $\varphi = \varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i$ ergibt sich $\varphi > 0$. Die Spannung eilt dem Strom voraus.

Phasenwinkel im Zeigerdiagramm

Da in einem Zeigerdiagramm mit reellen oder komplexen Zeigern entsprechend den festgelegten Voraussetzungen alle Zeiger mit derselben Winkelgeschwindigkeit rotieren, bleiben die Winkel zwischen ihnen stets konstant. Die Phasenverschiebung zwischen ihnen ist also nicht vom Zeitpunkt der Betrachtung abhängig. Damit hat man die Freiheit, zumindest einem der Zeiger im Zeigerdiagramm eine beliebige Winkellage zu geben (z.B. den Stromzeiger bei $\varphi = 0$ einzutragen). Weitere Zeiger müssen dann im richtigen Winkel zum Bezugszeiger eingetragen werden. Im Allgemeinen können die Zeiger zu einem beliebigen Zeitpunkt dargestellt werden.

Achtung: Im Gegensatz zum Liniendiagramm muss im Zeigerdiagramm der Phasenwinkel φ zwischen Strom und Spannung vom *Strom-* zum *Spannungszeiger* gezeichnet werden. Um φ vorzeichenrichtig zu erhalten, muss also φ immer vom Strom- zum Spannungszeiger eingetragen werden, wie in den Abbildungen unten zu sehen ist.



Sachverzeichnis

A

AB-Betrieb 410
 Abblock-Kondensator 82
 A-Betrieb 409, 484
 Abfallzeit 447, 487
 Abschalt-Induktionsspannung, ~strom 150, 151
 Abschalt-Induktionsstromkreis 148, 149, 150, 151, 152
 Abschirmung 95, 313
 – elektromagnetischer Störungen 210
 – von Magnetfeldern 95
 Abschlußwiderstand 278, 281, 283
 Abschnürbereich 472, 474
 Abschnürspannung 472, 473, 477
 Abstimmkreis 304, 305, 307, 309
 Abzweigschaltung 164
 Addierer 463, 492
 Admittanz 221, 222
 Aggregatzustände 17
 Akzeptor 34
 AM 361
 Ampere 39, 42
 Amperemeter 133
 – Erweiterung Meßbereich 159
 Amplitude 193
 Amplitudenfilter 383
 Amplitudenmodulation 361, 362
 Amplitudenspektrum 204, 206, 208, 209, 210
 Analoginstrument 134
 Analogmultiplexer 478
 Analyse
 – allgemeiner Wechselstromnetze 329
 – von Netzwerken 167, 168, 240
 Anode 107, 347, 360, 385
 Anreicherungstyp 470, 471
 Anstiegszeit 447, 451, 487
 Approximation 208, 350
 Äquivalenztypen 388

Arbeit 40, 41, 42, 55, 56, 355
 Arbeitsgerade 371
 Arbeitspunkt 370
 Atom 18
 Atombau 21, 24
 Atombindung 31
 Atomhülle 22
 Atomkern 22
 Atomrumpf 25
 Audioverstärker 278
 Augenblicksleistung 194, 265, 266, 271, 326
 Augenblickswert 188, 190, 194, 220, 265, 361, 410
 Augenblickswerte 144, 151, 195, 200, 201, 220, 225, 229
 Ausgangsimpedanz 412, 416, 418, 420, 433, 466, 467, 475
 Ausgangskennlinienfeld 399, 400, 401, 403, 404, 408, 410, 412, 415, 439, 445, 465, 470, 474
 Ausgangskreis 393
 Ausgleichsvorgang 139, 140, 141
 Ausräumfaktor 447
 Ausräumstrom 447
 Ausschwingvorgang 308, 309
 Außenleiter 318
 Außenleiterspannung 318
 Außenwiderstand 395
 Avalanche-Effekt 346, 385

B

Bahnwiderstand 348, 349, 350
 Bandbreite 294, 305
 Bandfilter mit Schwingkreisen 310
 Bandpaß 281, 286, 314, 492
 Bandpaßfilter 295, 304
 Bandsperre 295, 314, 315
 Bandspreizung 304
 Basis 465

- Basisruhespannung 398
 - Basisschaltung 394, 406, 407, 416, 417, 419, 420, 438, 466, 475
 - Basisstrom 392
 - Basisvorspannung 398, 402, 403, 404, 427, 435
 - Batterien 107, 108, 109, 118, 159, 376
 - Bauelemente
 - aktive 387, 483, 493
 - duale 151
 - passive 54
 - Baum 168, 169, 181, 186
 - Bauteile, lineare 45
 - B-Betrieb 409
 - Begrenzerschaltung 383
 - Begrenzung einer Wechselspannung 383
 - Beläge 77
 - Belastbarkeit 57, 65, 67, 68, 69, 72, 75, 105, 124, 125, 130, 132, 136, 162, 369
 - Bereich, aktiver 395, 448
 - Betriebslast 71
 - Betriebsspannung 87, 147, 148, 149, 365, 387, 403, 404, 421, 434, 439, 442, 480, 483, 484, 485, 488
 - Bezugsknoten 174, 175, 176, 182, 436
 - Bezugspfeil 51
 - Bezugspunkt 28, 30, 50, 168, 174, 176, 187, 390
 - Binärziffer 454
 - Bipolare Transistoren 387, 388
 - Bit 381, 453, 454, 455, 467
 - BJT 387
 - Blechkern 103, 274
 - Bleiakkumulator 109, 110
 - Blindleistung 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 326
 - Blindleistungskompensation 269, 270, 272
 - Blindleitwert 221
 - Blindwiderstand 221, 222, 225, 226, 228, 229, 230, 232, 236, 258, 266, 267, 269, 288, 290, 299, 310
 - Blockschaltbild 422, 484
 - Bodediagramm 243, 244, 248, 258
 - Bodediagramme mit Mathcad 249
 - Bohrsches Atommodell 21
 - Boltzmannkonstante 348
 - Boolesche Algebra 456
 - Bootstrap-Schaltung 437, 438
 - breitbandig 210
 - Brücke, abgegliche 185
 - Brückengleichrichter 379
 - Brückenschaltung 184, 378, 384, 492
 - Brummgeräusche 274
 - Brummspannung 377, 378
 - Bulk 471
 - Byte 454
- ## C
- Chassis 50, 274, 389, 480
 - Clipper-Schaltung 383
 - CMMR 441, 442
 - CMOS-Technik 462, 468
 - common mode gain 486
 - Computer 82, 190, 381
 - Coulomb 39, 40, 41
- ## D
- Dämpfung 244
 - des Parallelschwingkreises 302
 - des Reihenschwingkreises 291, 302
 - Darlington-Schaltung 437
 - Datenblatt 57, 71, 357, 358, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 430, 463
 - Defektelektron 32, 35
 - Defektelektronen 26
 - Dehnungsmessstreifen 75
 - Dekade 67, 243
 - Demodulation 361
 - Denkmodell 17
 - Deratingkurve 71, 72
 - Dezibel 242, 243, 299
 - Dezimalsystem 455
 - Dielektrikum 77, 78, 79, 80, 81, 82, 85, 86, 87, 88, 227, 263
 - Dielektrizitätskonstante 80, 81
 - Dielektrizitätszahl 81, 82
 - Differenzansteuerung 440
 - Differenzverstärkung 440, 441, 484, 485, 487
 - Diffusion 341, 342, 392
 - Diffusionskapazität 352, 353, 360, 407
 - Diffusionsspannung 342, 343, 344, 352
 - digit 454
 - Digitalrechner, elektronischer 456
 - Digitaltechnik 82, 381, 444, 454, 459, 467

- Diode 347
 - Anwendungen 376, 385
 - Ausschaltverhalten 351
 - Ersatzschaltungen 348
 - Gunn~ 360
 - hot carrier~ 360
 - ideale 348
 - Kapazitäts~ 304, 360, 361
 - Kennliniengleichung 347
 - Kennwerte 350
 - Kennzeichnung der Katode 359, 385
 - Lumineszenz~ 363
 - Photo~ 363, 364
 - PIN~ 360
 - Schaltzeichen 347
 - Schottky~ 360, 385
 - Suppressor~ 370
 - Tunnel~ 359, 362, 363
 - Verlustleistung 355
 - vollständige Kennlinie 347
 - Wechselstrom-Ersatzschaltbild 353
 - Zener~ 364
 - Dioden in der Digitaltechnik 381
 - Diodenkennlinie, Temperaturabhängigkeit 353
 - Dipol 79, 90, 315
 - Dipolbildung 80
 - Disjunktion 456, 464
 - DL-Technik 460
 - Donator 34
 - Doppeldrahtleitung 260
 - Doppelverstimung 296, 299, 305, 308
 - Dotierung 34, 346, 362, 390, 469
 - Drahtwiderstand 67, 260
 - Drain 469, 470, 472, 475, 479, 481
 - Drainschaltung 475, 476, 477
 - Dreheisenmeßwerk 133, 196
 - Drehfaktor 220
 - Drehfeld 326
 - Drehkondensator 87, 304
 - Drehpotentiometer 72
 - Drehspulmeßwerk 133, 136
 - Drehstrom 317, 326
 - Drehstromgenerator 317, 318, 319, 326, 327
 - Dreieckschaltung 319
 - Sternschaltung 318
 - Drehstrommotor 326
 - Drehstromsystem, Verbraucher 320
 - Drehzeiger 220
 - Dreieckschaltung 165, 166, 185, 318, 319, 324, 325, 327
 - Dreieck-Stern-Umwandlung 164, 165
 - Dreileitersystem 318
 - Drift 27, 440, 442
 - Driftgeschwindigkeit 27
 - Drossel 104, 105
 - DTL-Technik 460, 461
 - Dualsystem 455
 - Dualzahl 454, 455, 456
 - Dualzahlensystem 381
 - Durchbruch zweiter Art (sekundärer) 408
 - Durchbruchbereich 346, 347, 348, 364, 365
 - Durchbruchkennlinie 364
 - Durchflutung 92, 93
 - Durchgreifspannung 400
 - Durchlaßbereich 245, 253, 310, 347, 348, 351, 353, 360, 376, 385, 391, 398
 - Durchlaßkennlinie 344, 348, 349, 353, 398, 411
 - Durchlaßrichtung 348
 - Durchlaßspannung 344, 350, 351, 352, 353, 359, 360, 362, 364, 382, 383, 385, 391, 392, 411, 461
 - Durchlaßverzögerungszeit 350, 352, 353
- ## E
- Early-Effekt 400
 - Eckfrequenz 244
 - ECL-Technik 462
 - Effektivwert 194
 - Eigenfrequenz 241
 - Eigeninduktivität 260, 263, 264
 - Eigenkapazität 77, 260, 264
 - Eigenleitung 31, 33
 - eindiffundieren 34
 - Eingangsimpedanz 411, 412, 416, 417, 418, 420, 422, 424, 427, 433, 466, 475
 - Eingangskennlinie 398, 399, 403, 404, 409, 411, 412, 419, 430, 471, 473, 474, 478
 - Eingangskreis 393
 - Eingangsschutzschaltung 380
 - Einheitenzeichen 37, 38, 39, 40, 41, 42, 56, 77, 94, 100, 191, 267, 268
 - einlegiert 34

Einschaltstrom 71, 140
 Einschaltwiderstand 479
 Einschwingvorgang 308, 309
 Einschwingzeit 488
 Einweg-Gleichrichterschaltung 376
 EI-Schnitt 274, 275
 Eisenblechkern 103
 Eisenkern 101, 102, 103, 104, 263, 273, 274, 280, 285
 Elektrizität 17, 24, 25, 30, 40, 76
 – statische 25
 Elektrode 107, 108, 110, 227, 260, 390
 Elektroden 77, 108, 109, 227, 360, 443, 472
 Elektrolytkondensator 86, 88, 390
 Elektromagnet 92, 104, 133
 elektromagnetische Verträglichkeit 210
 Elektromagnetismus 91
 Elektrometerverserker 490
 Elektronen 21
 – freie 25, 27, 28, 31, 33
 Elektronenpaarbindung 31, 32, 33
 Elektronenschale 22
 Elektronenströmung 343, 391
 Element 18, 54, 108, 280, 444
 Elementarladung 22, 24, 35, 40, 348
 Elementarmagnet 89
 Elementarströme 90
 Elemente, aktive 54
 Emitter 388
 Emitterfolger 419, 437, 438, 491
 Emitterschaltung 394, 396, 397, 398, 400, 401, 404, 405, 407, 408, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 419, 420, 426, 427, 429, 430, 432, 434, 437, 438, 440, 441, 444, 445, 459, 465, 466, 475
 EMV 210
 Energie 55
 Energie im Magnetfeld einer Spule 148
 Energie in einem geladenen Kondensator 142
 Energieerhaltungssatz 277
 Energieübertragung 63, 273, 285
 Entladekapazität 110
 Entladestrom 76, 143
 Entladevorgang 143
 Entladezeit 143, 378
 Entmagnetisierung 95

Erholungszeit 351
 Ersatz von Bauteilen 129, 159
 Ersatzkapazität 126, 132
 Ersatzschaltbild 65, 77, 88, 105, 113, 117, 122, 155, 260, 279, 280, 348, 349, 350, 365, 374, 379, 430
 Ersatzschaltungen für Bauelemente 259
 Ersatzspannungsquelle 113
 Ersatzstromquelle 117, 167
 Ersatzwiderstand 122, 124, 125, 132, 155, 159, 161, 166, 179, 373
 Erzeuger 52, 53, 116, 117, 122, 148, 278
 ESAKI-Diode 362
 Exponentialform 214, 215, 216, 220
 Exponentialfunktion 143, 144, 151, 152, 344

F

Farad 77
 Farbcode 68, 75, 87
 Feinabstimmung 304
 Feld, elektrisches 469, 472
 Feldeffekt-Transistoren 387, 469, 471, 481
 Feldeffekttransistoren 462, 478, 479
 Feldkonstante
 – elektrische 81
 – magnetische 93, 94, 100
 Feldlinien, magnetische 90, 91
 Feldstärke, magnetische 93, 94
 Ferrite 103
 Ferritkern 95, 103, 263
 Ferromagnetismus 88
 Festkondensator 85
 Festzeiger 220
 FET 469
 FET als Konstantstromquelle 478
 FET als Schalter 478
 FET-Grundsaltungen 475
 Filter 20, 210, 245, 253, 258, 314, 316, 492
 – aktive 492, 493
 Filterung eines Sinussignals 252
 Flankensteilheit 311, 488
 Flipflop 452, 453, 459, 467
 Fluß, magnetischer 95, 96, 317
 Flußdichte, magnetische 93, 94, 95, 96, 97, 99
 Flußrichtung 95, 155, 344, 388, 392, 479
 FM 361

Folienkondensator 86
 Formelzeichen 37
 Fourier-Analyse 190, 195, 206, 207, 210, 211
 Fourierkoeffizienten 206, 208
 Fourierreihen 205, 210
 Freilaufdiode 150, 151, 152, 379, 380, 479
 Frequenz 191
 – normierende und normierte 244, 245
 Frequenzfilter 383
 Frequenzgang 234, 235, 287, 288, 290, 300, 301,
 415, 420, 422, 424, 425, 434, 466, 487
 Frequenzgemisch 295
 Frequenzmodulation 361, 362
 Frequenzspektrum 204
 Frequenzteilung 453
 Frequenzweiche 104
 Funkentstörung 85
 Funktion, periodische 188, 205
 Funktionstabelle 452, 453, 458

G

galvanische Trennung 274, 309
 galvanisches Element 107, 109
 Galvanisieren 26
 Galvanometer 133
 Gate 469
 Gateschaltung 475, 476
 Gatter 382, 456, 457, 464, 468, 479
 – AND~ 459, 460, 462
 – NOR~ 459, 460, 461, 465
 – OR~ 459, 460
 Gaußsche Zahlenebene 213
 Gegeninduktivität 279, 286, 312
 Gegenkopplung 420, 421, 422, 423, 424, 425,
 431, 439, 467, 477, 485, 487, 489, 490
 – Gleichspannungs~ 421, 427
 – Gleichstrom~ 425, 426, 440
 – Wechselspannungs~ 427
 – Wechselstrom~ 426, 434
 Gegenkopplungsfaktor 423, 426
 Gegenkopplungsgrad 423, 424
 Gegendtatschaltung 409
 Gemisch 18
 Generation 32, 346
 Geradengleichung 45
 Germanium 27

Gesetz von De Morgan 457
 Gesetz von Lenz 98
 gesintert 103
 Gitterschwingungen 354
 Glättung von Spannungen 84, 111
 Glättungsfaktor 367
 Gleichrichtung 376, 385
 Gleichrichtwert 196, 197, 199
 Gleichspannung
 – pulsierende 84, 376, 377
 – störungsfreie Versorgung 112
 Gleichspannungsquellen 107, 111, 118, 119, 122,
 128, 158, 185, 410
 Gleichstrom 46
 Gleichstromverstärkung 393, 398, 400, 401, 405,
 406, 415
 Gleichtaktansteuerung 440
 Gleichtaktunterdrückung 440, 441, 442, 486,
 488
 Gleichtaktverstärkung 441, 442, 486, 488
 Gleichungssystem 170, 172, 175, 176
 Graph eines Netzwerkes 169
 Grenzfrequenz 244, 245, 247, 248, 258, 281, 294,
 295, 296, 304, 415, 417, 419, 420, 421, 424,
 443, 476, 487, 488
 Grenzschiicht 341
 Grunddämpfung 281
 Güte einer Spule 261
 Gütefaktor 290, 291, 293, 302, 303
 – des Parallelschwingkreises 302
 – des Reihenschwingkreises 291

H

Halbleiter 26, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 344, 345,
 355, 364, 368, 470
 Halbleiterdiode 150, 347, 385
 Harmonische 196, 204, 205, 443, 467
 Henry 100
 Hertz 191
 heterogen 18, 20
 Hexadezimalzahl 455
 HF-Gleichrichtung 361
 High 381
 Highside-Schalter 479, 480
 Hochfrequenz 189, 192, 262, 361
 Hochfrequenzlitze 262

homogen 18
 Hufeisenmagnet 89, 90
 Hüllkurve 361
 Hüllkurvendemodulation 362
 Hyperbel 53, 69, 288, 299, 366
 Hystereseschleife 94, 95, 263

I

IC 462
 Imaginärteil 214
 Impedanz 219
 Impedanzwandler 418, 476, 491
 Impulstechnik 193, 438, 448, 496
 Impulszähler 453, 463
 Induktion 96, 99, 100, 104, 191, 225, 262, 263, 273
 Induktionskonstante 93
 Induktionsspannung 96, 97, 98, 100, 148, 149
 Induktionsstrom 98
 Induktivität
 – feste 104
 – Schaltzeichen 101
 – veränderliche 105
 Induktivitätstoleranz 105
 Influenz, magnetische 89, 91
 Innenwiderstand 113
 – Ermittlung 115
 Inversbetrieb 397, 398, 401
 Inversdiode 479, 481
 Inverter 448, 459, 460, 462, 463, 465
 Invertierung 456, 457
 Ion 26, 34
 Isolationswiderstand 87, 88, 227, 263
 Isolator 27, 76

J

Joule 41, 55
 JOULEsche Wärme 27, 56, 61
 junction 342, 356, 387
 Junction-FET 470

K

Kanal 470, 471, 472
 Kapazität 77
 Kapazität eines Akkumulators 110
 Kapazitäten, parasitäre 77, 261

Kapazitätsänderung 87, 88
 Kapazitätstoleranz 87
 Karnaugh-Veitch-Diagramm 457
 Kaskodeschaltung 438, 467
 Kationen 107
 Katode 107, 347, 360, 365, 385
 Kelvin 69, 348, 355
 Kennwiderstand des Schwingkreises 291
 Keramik Kondensator 86
 Kippschaltung
 – astabile 450
 – bistabile 452
 – monostabile 451
 Kippvorgang 451
 Kirchhoffsche Gesetze 153
 Kleinsignalaussteuerung 398
 Kleinsignalstromverstärkung 398, 405, 415
 Klemmenspannung 114, 115, 116, 119, 162, 419
 Klirrfaktor 211, 395
 Kniespannung 344, 349, 350, 400, 410
 Knopfzellen 109
 Knoten 153
 Knotenanalyse 174, 176, 177, 181, 182, 186, 240, 329, 436
 Knotengleichungen 170, 176
 Knotenpunktspannung 168
 Knotenregel 153, 154, 175, 185, 320, 321, 390, 394, 418, 491
 Knotenspannungen 174, 175, 176, 436
 Kode 455
 Kodierung 455
 Koerzitivkraft 95, 263
 Kollektor 388
 Kollektorschaltung 394, 398, 406, 417, 418, 419, 420, 438, 465, 466, 467, 475
 komplementär 451, 452
 komplementäre Ausgangsstufe 409
 Komplementär-Transistoren 388
 Komplementierung 456
 komplexe
 – Amplitude 230
 – Frequenz 230
 – Rechenregeln 214, 215, 221, 457
 – Rechnung 213, 220, 223, 246, 253, 329
 – Spannung 214, 217, 220, 226
 – Zahl 213, 214, 215, 217, 218, 221, 241

komplexer

- Blindwiderstand der Spule 226, 231
- Blindwiderstand des Kondensators 229, 231
- Frequenzgang 238
- Leitwert 221, 222
- Widerstand 219, 221, 224, 232, 246, 284, 329

Komponentenform 214, 215, 216, 220, 323, 330**Kondensator**

- ausschalten 142, 152
- einschalten 140
- entladen 142
- idealer 227, 266, 272, 299
- Nennspannung 87
- veränderbarer 87
- Verwendungszweck 82
- Wirkungsweise 75

konjugiert komplexe Zahl 214**Konjunktion** 456**Konstantstromquelle** 117, 118, 119, 402, 403, 405, 439, 442, 478**Konstantstromquelle mit Transistor** 439**Konvektion** 356**Koppelkondensator** 313, 314, 403, 415, 433, 434, 477**Koppelspule** 312, 313**Kopplung**

- feste 273
- Fußpunkt 310, 312, 314
- galvanische 309
- induktive 100, 101, 112, 260, 312
- kapazitive 260, 264, 312
- Kopfpunkt 313
- kritische 311
- lose 273
- mit Koppelspule 312, 313
- transformatorische 312
- transitionale 311
- überkritische 311
- unterkritische 311

Kopplungsarten, grundsätzliche 309**Kopplungsfaktor** 273, 279, 286, 309, 312**kovalente Bindung** 31**Kraft**

- auf stromdurchflossene Leiter 99

- elektromotorische 113

- magnetische 90, 92, 133

Kreisfrequenz 192**Kriechströme** 349**Kristallgitter** 31, 34**Kühlkörper** 356, 357, 358, 389**Kühlung** 69, 71, 105, 356**Kurzschluß** 53**Kurzschlußstromverstärkung** 405**Kurzwellenbereich** 304**L****Ladekondensator** 84, 376, 377, 378, 481**Ladestrom** 76, 110, 140, 141, 228**Ladestromstoß** 151**Ladevorgang** 141, 142, 143, 256**Ladung, elektrische** 24, 30**Ladungsmenge** 39, 41, 42, 77, 78**Ladungspumpe** 479, 480, 481**Ladungsspeicher** 75**Ladungstransport** 26, 29, 30**Ladungstrennung** 40, 41, 76, 96**Lastminderungskurve** 71, 359, 408**Lastschwankungen** 112, 116**Lastwiderstand**

- als Verbraucher 114
- beim Transistor 395

Lawinendurchbruch 346, 354, 364, 385, 408**Lawineneffekt** 346, 367, 408**LC-Bandpaß** 314**LC-Bandsperre** 315**LC-Oszillator** 443, 444**Lebensdauer** 87, 109, 110, 356, 364**Leckstrom** 263, 349**LED** 363, 364, 385**Leerlaufspannung** 113**Leerlaufverstärkung** 422, 423, 424, 426, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490**Leistung**

- bei Drehstrom 326
- elektrische 55
- im Wechselstromkreis 265, 269
- mittlere 265

Leistungsanpassung 117, 119, 278, 282, 283, 284**Leistungsdreieck** 269**Leistungsfaktor** 269, 270, 271, 326

Leistungshyperbel 69, 410
 Leistungspegel 242
 Leistungsverstärkung 394, 413, 414, 415, 417,
 419, 420, 449, 450, 466, 467, 483
 Leiter 27
 Leiterplatte 72
 Leitfähigkeit 27, 28, 41, 42
 Leitung, elektrische 77, 101, 259
 Leitungselektronen 25, 27
 Lichtgeschwindigkeit 27, 192
 Linienspektrum 206, 210
 Linke-Hand-Regel 99
 Lithium-Batterien 109
 Litze 104
 Loch 32, 35
 Löcherströmung 343, 391
 Logik
 – positive und negative 455
 – ungesättigte 448
 logische
 – Funktionen 454
 – Gleichungen 457
 – Null und Eins 381, 454
 – Schaltbilder 462
 – Schaltungen 360, 363, 448, 456, 459
 – Verknüpfung 381, 382, 457, 460
 Lorentzkraft 96
 Lösungsdruck, elektrolytischer 108
 Low 381
 Low Power Schottky 462
 Low-side-Schalter 480, 481
 LRC-Tiefpaß 255, 256
 LSB 455
 Luftspule 93, 102, 103

M

Magnetfeld 90, 91, 92, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100,
 101, 102, 104, 105, 133, 148, 191, 263, 266,
 273, 275, 287, 288, 312, 313, 317, 469
 Magnetfeldänderung, induzierende 98
 magnetisch gekoppelt 127, 273, 285
 Magnetisierungskurve 94
 Magnetismus, Grundlagen 88, 91
 Majoritätsträger 34
 Masche 154

Maschenanalyse 169, 171, 174, 176, 177, 181,
 186, 240, 329, 334
 Maschengleichung 170, 365, 371, 372, 373, 375,
 404, 426, 435
 Maschenregel 154, 155, 185, 284, 370
 Masse, elektrische 28
 Materie 17
 Mathcad 173, 208, 235, 244, 248, 249, 250, 251
 Matrix 431
 Maxwell-Wien-Brücke 337
 Mehrphasensysteme 317, 327
 Meßbereich 134, 135, 136, 160, 185
 Meßbrücke 184, 185
 Meßfehler 135
 Meßgerät, digitales 134
 Meßinstrument 133, 135, 160
 Meßverstärker 134, 438
 Metalle, edle und unedle 108
 Metalloxidwiderstand 67
 Miller-Kapazität 438
 Minimisierung 457, 458
 Minoritätsträger 352
 Minoritätsträger 34
 Minuspol 25
 Mitkopplung 420, 423, 443, 467, 487, 489
 Mitlaufeffekt 402
 Mittelleiter 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324,
 327
 Mittelpunktsschaltung 378
 Mittelwellen-Rundfunk 361
 Molekül 18, 19, 20, 21
 Momentanwert 188
 Momentanwerte 143, 144, 151, 202
 Monoflop 451, 452, 467
 MOSFET 470, 471, 478, 479
 MSB 455
 M-Schnitt 274, 275
 Multi-Emitter-Transistor 462
 Multimeter 134
 Multivibrator 450, 463, 467, 480

N

NAND-Gatter 459, 463, 465
 Nebenwiderstand 160
 Negation 456, 457

Nennlast 71
 Nennspannung 65, 87, 109, 110, 130, 131, 153
 Neper 242
 Netzfrequenz 192, 274, 326
 Netzgeräte 107, 111, 119
 Netzteil 107, 111, 119
 Netzwerk 48
 Netzwerkanalyse 173, 240, 246, 336
 Neutronen 21, 22, 23, 24
 N-Halbleiter 34, 341
 Nibble 455
 Nichtleiter 27, 30
 nichtperiodisch 210
 nichtsinusförmig 189, 190, 204, 205, 206, 211
 Nickel-Cadmium-Akkumulator 110
 Nickel-Metallhydrid-Akkumulator 110
 Niederfrequenz 192
 Normalbetrieb 389, 390, 395, 397, 398, 401
 Normierung 244, 245, 247, 248, 258
 Normreihe 67, 162, 435
 Nullphasenwinkel 198, 204, 205, 206, 234
 Nullpotential 28, 440, 448
 Nullpunkt, absoluter 69
 Nullstellen 240, 243
 Nullzweig 185, 337
 Nutzsignal 245, 252

O

Oberschwingungen 196, 204, 205, 211, 440
 Oberwellen 205, 210
 Offsetspannung (Differenzverstärker) 442
 Ohm 42
 OHMsches Gesetz 41
 Ohmsches Gesetz der Wärmelehre 355
 open loop gain 484
 Operationsverstärker

- Eigenschaften 484
- Frequenzverhalten 487
- interner Aufbau 483
- Rückkopplung 489
- Spannungsfolger 491
- Sprungverhalten 487
- Subtrahierer 491
- Summierer 492

 Oszillator 363, 420, 423
 Oszillatoren, harmonische 443, 467

P

Parallelschaltung 47

- ohmscher Widerstände 155
- von Gleichspannungsquellen 158, 159
- von Kondensatoren 157, 185
- von Spulen 157

 Parallelschwingkreis 287, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 307, 308, 314, 315, 316, 443
 Parallelschwingkreis mit Verlusten 301
 Parallelschwingkreis ohne Verluste 299
 parasitäre Größen 259, 264
 PC 173, 241, 244, 248, 493
 Pegel 242, 243
 Periodendauer 188
 Permeabilität 93, 94, 95, 263, 277
 P-Halbleiter 34, 341
 Phasengang 239, 240, 248, 250, 336
 Phasenschieberkondensator 270, 272
 Phasenspektrum 204, 206
 Phasensprung 240
 Phasenverschiebung 198
 Phasenwinkel 198
 physikalische Größen 37, 93
 Piezoeffekt 443
 pinch-off voltage 472
 Plattenkondensator 77, 78, 82, 86, 87, 342, 352
 Pluspol 25
 PN-Übergang 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 352, 360, 363, 385, 390, 393, 472
 Polarisation 80, 81
 Pole

- einer Bruchfunktion 240
- magnetische 22, 89

 Potential 28
 Potentialdifferenz 28, 29, 30, 61, 96
 Potentialtrennung 274
 potentielle Energie 58
 Potentiometer 72, 73, 74, 75, 131, 442
 Potentiometer-Kennlinie 73
 Power-MOS-FET 479
 ppm 71
 Praxis

- Elko und Z-Diode 368
- Ersatzwiderstand durch Reihenschaltung 125
- HF-Litze 262

- Kurzschluß 53
- Netzgeräte 111
- Potentiometer 73
- Reihenschaltung ohmscher Widerstände 123
- Schätzung Spannungsverstärkung 413
- Spannungsanpassung 116
- Spannungsspitzen durch Induktion 149
- Stabilisierung mit Z-Diode 365
- Widerstandstransformation 278

Primärelement 107, 108, 118

Primärspule 273, 274, 277, 312, 313

Primärwicklung 273, 275, 276, 278, 280, 282, 285

Protonen 21, 22, 23, 24

PSPICE 174, 495

punchthrough 400

Q

Quarz 18, 443

Quarzoszillator 443

Quelle 52

- gesteuerte 54, 387, 430, 467
- lineare 114
- unabhängige 54

Quellenspannung 115, 116

Querstrom 161, 403, 440

Quine-Mc Cluskey-Verfahren 458

R

Radartechnik 448

Raumladung 342, 345

Rauschen 189

Rauschspannung 189

RC-Hochpaß 253, 434

RC-Oszillator 443, 444

RC-Tiefpaß 245, 246, 247, 252, 256

RDS on 479

Reaktanz 221

Realteil 214

Rechteckspannung 83, 189, 190, 197, 198, 453, 454, 480, 481

Rechte-Hand-Regel 91

recovery time 351

Referenzspannung 107, 368, 374

Referenzspannungsänderung 375

Regel von Lenz 98, 275

Register 453, 463

Reihenschaltung 47, 122

- von Gleichspannungsquellen 128, 159
- von Kondensatoren 126, 132, 156, 158
- von ohmschen Widerständen 122, 132
- von Spulen 127

Reihenschwingkreis

- mit Verlusten 289, 290
- ohne Verluste 287

Reinstoffe 18, 19

Rekombination 32, 341, 343

Relais 104, 150, 379, 448, 449, 450

Remanenz 95, 263

Resonanz, Kennzeichen 290, 301

Resonanzbedingung 289, 290, 291, 297, 300, 301

Resonanzfrequenz 289

- allgemeine Ermittlung 292, 316

Resonanzkreis 287, 311

Resonanzkurve, Asymmetrie 296, 305

Resonanzkurven 292, 293, 303, 305, 306, 312

Resonanzüberhöhung 293

Resonanzverstärker 443

Resonanzwiderstand 290, 295, 301, 302, 308, 316

Richtungspfeil 49

Richtungswinkel 214, 215

RL-Tiefpaß 233, 255

RS-Flipflop 452

RTL-Technik 461, 463

Rückkopplung 420, 452, 454, 467, 483, 486, 489

Rückspeisung 159

Rückwärtsbetrieb 397

S

Sägezahnspannung 189, 209

Sättigungsbereich 397, 400, 446, 448, 454, 474, 475

Sättigungsspannung 400, 433, 465, 470

Sättigungsstrom 345, 351

Satz von der Ersatzspannungsquelle 179, 181, 183, 186, 329

Sauerstoff 18, 19, 20, 21

Schalenkern 103

Schaltalgebra 454, 456, 457, 459, 467

Schaltbild 48

Schaltbilder, identische 50

- Schaltdioden 381
- Schaltfunktion 457, 458, 459
- Schalthysterese 453
- Schaltnetz 459
- Schaltplan 48
- Schalttransistor 445, 446, 459
- Schaltung, integrierte 34, 462, 478, 479, 483
- Schaltungen, gemischte 163, 185
- Schaltvorgänge 116, 139, 398
- Schaltwerk 459
- Schaltzeichen 48
 - digitale 462
- Scheinleistung 268, 269, 270, 271, 272, 326
- Scheinleitwert 221, 307
- Scheinwiderstand 221, 222, 232, 234, 258, 267, 268, 272, 290, 294, 297, 301
- Scheitelwert 193
- Schichtwiderstand 67, 261
- Schiebepotentiometer 72
- Schleifenverstärkung 423, 484
- Schmitt-Trigger 453, 454, 467
- Schnittbandkern 274
- Schraubenregel 91, 275
- Schutzdiode 379
- Schutzwiderstand 65, 344, 465
- Schwellertschalter 453
- Schwingkreis 287
 - Bandbreite 294, 305
 - Zeitverhalten 308
- Schwingkreise 287, 304, 306, 311, 312, 313, 315, 316
 - zusammenschalten 314
- Schwingung, gedämpfte und ungedämpfte 308
- Sekundärelement 109
- Sekundärspule 273, 274, 277, 279, 312, 313
- Sekundärwicklung 273, 274, 275, 276, 277, 278, 282, 285, 377, 378
- Selbstentladung 142
- Selbsterregung 423
- Selbstinduktion 99, 102, 106, 147
- Selbstinduktionsspannung 101, 102, 225
- Selektion 296, 297, 299, 305, 308
- Selektivverstärker 443
- Serienschaltung 47
- settling time 488
- Shunt 160, 185
- Siebglied 295
- Siemens 42, 495, 496
- Signal, analoges und digitales 190, 453
- Silizium 27
- Simulation 173, 174, 379
- Sinusfunktion 46, 188
- Sinuskurve, Entstehung 190
- Skineffekt 104, 262, 264, 289
- slew rate 488
- SMD – Bauteile 72, 75
- SOAR-Diagramm 409
- Sollwert 67
- Source 469
- Sourceschaltung 475, 476
- Spannung, elektrische 28
- Spannungsabfall 61
- Spannungsabfall an Leitungen 131
- Spannungsanpassung 116
- Spannungsdurchschlag 87
- Spannungseinbrüche 84
- Spannungsfehlerschaltung 137
- Spannungsgegenkopplung 421, 427
- Spannungsmessung 134, 135, 137
- Spannungspegel 242, 258
- Spannungsquelle 25
- Spannungsreihe, elektrochemische 108
- Spannungsresonanz 290, 295, 316
- Spannungsrückwirkung 399, 403, 412, 418, 430, 431
- Spannungs-Steuerkennlinie 401, 402, 413
- Spannungsteiler 66
 - belasteter 161, 162, 163
 - spannungsgesteuerter 477
- Spannungsteiler-Formel 123, 161, 178
- Spannungsverdoppler-Schaltung 480
- Spannungsverstärkung 396, 407, 413, 416, 417, 419, 420, 422, 427, 429, 438, 475, 476, 477, 483, 490, 491
- Spartransformator 285
- Speicherzeit 351, 360, 447, 448, 470
- Spektrum 204, 210
- Sperrbereich 245, 246, 253, 348, 349, 350, 363, 376, 397, 410
- Sperrbetrieb 397, 398
- Sperrichtung 344
- Sperrkreis 303, 305, 306

- Sperrschicht 342
 - Sperrschicht-FET 470, 471, 472
 - Sperrschicht-FET mit N-Kanal 472
 - Sperrschichtkapazität 352, 353, 361
 - Sperrschichttemperatur 356, 357, 358, 368
 - Sperrspannung 345
 - Sperrstrom 345
 - Sperrverzögerungszeit 351, 352, 353, 479
 - Spitzenwert 193, 377
 - Spitze-Spitze-Wert 193, 199, 377
 - Sprungantwort 189
 - Sprungfunktion 189
 - Spule
 - ausschalten 148, 149
 - einschalten 147, 152
 - ideale 105, 225, 226, 227, 231, 258, 287
 - im Wechselstromkreis 225, 226, 231
 - mit Kern 94, 103
 - Verwendungszweck 104
 - Wirkungsweise 92
 - Spulengüte 105
 - Spulenkörper 105, 274, 275
 - Stabilisierung 364, 367, 384, 402, 440, 477
 - Stabilisierung kleiner Gleichspannungen 384
 - Stabilisierungsfaktor
 - absoluter 367
 - relativer 367
 - Stabilität 105, 112, 470
 - Stabmagnet 89, 90, 92, 98
 - stationärer (eingeschwungener) Zustand 139
 - Steilheit
 - eines FETs 473
 - eines Transistors 413, 466
 - Stern-Dreieck-Umwandlung 165
 - Sternpunkt 318
 - Sternschaltung 165, 166, 185, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 327
 - Stoff 17
 - Stoffe, unpolare und polare 79
 - Stoffgemische 18, 19
 - Störfestigkeit 210
 - Störstellenleitung 34
 - Störungen 83, 84, 85, 112, 189, 210, 264
 - Strang 317, 318, 319, 325
 - Strangspannung 318, 319, 322, 323, 324, 326, 327, 328
 - Streufaktor 280
 - Streufeld 273, 280
 - Streuinduktivitäten 273, 280
 - Strom
 - eingepprägter 117
 - elektrischer 17, 25, 40, 46
 - Stromanpassung 117
 - Strombegrenzung
 - durch Vorwiderstand 65
 - einstellbare 111
 - Stromfehlerschaltung 137
 - Stromgegenkopplung 421, 425, 427, 439, 442
 - Stromkreis 47
 - linearer 45
 - Stromlaufplan 48
 - Strommessung 133, 134, 135, 159
 - Stromquelle 29, 117, 118, 167, 177, 178, 185, 260, 407, 430, 431, 432, 436, 442
 - Stromresonanz 302, 316
 - Stromrichtung, technische 49, 164
 - Stromstärke 39
 - Strom-Steuerkennlinie 400, 401, 402, 403, 405, 430
 - Stromverdrängung 262
 - Stromversorgung 107, 118, 131, 269, 376, 463, 480
 - Stromverstärkung in Basisschaltung 406, 465
 - Stromverstärkung in Kollektorschaltung 406, 466
 - Stromverstärkung, Abhängigkeiten 406
 - Stromverzweigung 66, 153, 168, 329
 - Stützkondensator 82, 84
 - Substrat 471
 - Subtrahierer 463
 - Superpositionsprinzip 59, 177
 - Systemfunktion 238
- T**
- Tandempotentiometer 73
 - Tantal-Elektrolytkondensator 87
 - Tastverhältnis 198
 - Tautologie 457
 - TAZ-Dioden 370
 - Temperaturabhängigkeit 69, 353, 368, 470, 474
 - Temperaturdrift 354, 399, 440
 - Temperaturkoeffizient 70, 74, 368

- Temperaturkoeffizient der Z-Diode 368
 - Temperaturspannung 348, 411
 - Temperaturstabilität 402
 - Tesla 94
 - Thomson-Gleichung 289
 - Tiefpaß 1. Ordnung 247
 - Tiefpaß 2. Ordnung 256
 - Toleranz 67, 68, 124, 125, 130, 159
 - Tonfrequenzbereich 192
 - Träger 30, 35, 40, 361
 - Trägerspannung 361
 - transconductance 473, 489
 - transconductance amplifier 489
 - Transferstrom 392
 - Transformation der Spannungen 276
 - Transformation der Stromstärken 276
 - Transformation des Widerstandes 277, 278
 - Transformator 95, 99, 269, 273, 285
 - Funktion 101
 - realer 280
 - verlustloser, streufreier 275
 - transimpedance amplifier 489
 - Transistor
 - als Schalter 379, 397, 444, 445, 449, 467
 - als Verstärker 389, 393, 395, 396, 401
 - als Verstärker (Emitterschaltung) 396
 - Aufbau 388
 - bei hohen Frequenzen 415, 417, 419
 - Betriebsarten 395, 397
 - Bezugsrichtungen 389
 - bipolarer 387, 388
 - Definition der Schaltzeiten 447
 - dynamisches Schaltverhalten 446
 - formale Ersatzschaltung 428, 467
 - Grundsaltungen 395
 - h-Parameter (Hybridparameter) 428, 429, 430
 - Kennlinien 398, 429
 - Leitwertparameter 429
 - physikalische Ersatzschaltung 431
 - Schalten einer Last 448
 - Schalterbetrieb 396
 - Spannungssteuerung 402
 - Streuparameter 429
 - Stromsteuerung 402
 - unipolarer 387
 - Verkürzung der Schaltzeiten 447, 448
 - Vierpolgleichungen 428
 - Wahl des Arbeitspunktes 408, 466
 - wann leitet er 393
 - Wirkungsweise 390
 - Transitfrequenz 407, 408, 417, 466, 487
 - Trennen von Gleich- und Wechselspannung 84
 - Trennschärfe 295, 296
 - Trigger 451
 - trigonometrische Form 214
 - Trimmer 73, 74, 75, 87
 - Trimmkondensator 87
 - Trockenbatterie 109
 - TTL-Technik 462
 - Tunneleffekt 362
- ## U
- Überanpassung 116
 - Übergangswiderstand, thermischer 357
 - Übergangszeit 351
 - Überlagerungsprinzip 59
 - Überlagerungssatz 177, 179, 180, 181, 183, 184, 186, 329, 339
 - Übersetzungsverhältnis 276, 282, 283, 309
 - Übersprechen 260, 264
 - Übersteuerungsbereich 400
 - Übersteuerungsfaktor 400, 446, 447
 - Übertemperatur 71, 479
 - Übertrager 273
 - idealer 277, 278, 281, 282, 283, 285
 - verlustlos, mit Streuung 278
 - Übertragungsfunktion 238, 239, 240, 243, 244, 245, 246, 247, 249, 251, 253, 255, 256, 258, 338, 424
 - normierte 244
 - UKW-Rundfunk 361
 - Umgebungstemperatur 70, 71, 74, 107, 357, 358, 359, 368, 408, 433
 - Ummagnetisierungsverluste 95, 263, 264, 275, 289
 - Umwandlung von Quellen 167
 - Univibrator 451
 - Unteranpassung 117
 - Urspannung 113
 - UVW-Regel 99

V

Vakuum 81
 Valenzelektronen 22, 24, 25, 31, 34, 107, 346, 354
 var 267, 271, 272, 326
 Varaktor 360
 Varikap 360
 Varistor 74
 Verarmungstyp 470, 471
 Verarmungszone 342
 Verbindung, chemische 18, 19
 Verbindungszweige 168, 169, 170, 171, 334
 Verbraucher 47
 Verknüpfung
 – NICHT~ 456
 – ODER~ 381, 382, 383, 456, 457, 458
 – UND~ 381, 382, 383, 456
 Verknüpfungsvorschrift 458
 Verluste
 – im Kondensator 263
 – in Spulen 261
 Verlustfaktor
 – einer Spule 261, 264
 – eines Kondensators 264
 Verlustleistung 58, 65, 105, 111, 115, 116, 117, 123, 125, 130, 131, 132, 156, 157, 159, 275, 350, 351, 355, 356, 357, 358, 359, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 389, 408, 414, 462, 471, 479
 Verlustleistungshyperbel 366, 408
 Verlustwinkel 261, 264
 Verstärker
 – invertierender 490
 – nichtinvertierender 489
 Verstärkerbetrieb 395, 397, 409, 426, 476
 Verstärkerstufe 278, 309, 403, 415, 419, 420, 421, 424, 426, 434, 436, 437
 Verstärkerstufen 278, 419, 421, 438
 Verstärkung 116, 243, 362, 387, 395, 401, 402, 403, 417, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 434, 435, 436, 438, 441, 442, 443, 460, 467, 477, 483, 484, 486, 490, 491, 493
 – nichtlineare 402
 Verstärkungsänderung, relative 423
 Verstärkungs-Bandbreite-Produkt 421, 425, 487
 Verstimmung, absolute und relative 296

Verzerrung 211, 395, 477
 Verzerrungsbereich 410
 Vierpol 184, 238, 239, 246, 428, 431
 Vierquadranten-Kennlinienfeld 403, 404, 429
 Vollweggleichrichter 378
 Volt 40, 42
 Voltmeter 133
 – Erweiterung Meßbereich 136
 Vorwärtsbetrieb 395, 397
 Vorwiderstand 65

W

Wahrheitstabelle 458, 459, 463, 464
 Wahrheitswerte 456
 Wärmebewegung der Elektronen 27
 Wärmedurchbruch 346
 Wärmeleistung 133, 194, 195, 355
 Wärmeleitfolie 358
 Wärmeleitung 355
 Wärmeschwingungen der Atomrümpfe 27
 Wärmestrom 355, 356
 Wärmeströmung 355
 Wärmeverluste 58, 95
 Wärmewiderstand 355, 356, 357, 358
 Wasserstoff 18, 19, 20, 21, 108, 110
 Watt 55
 Weber 96
 Wechselgröße 189, 192, 194, 195, 196, 199, 201, 207, 211, 420
 Wechselgröße mit Offset 189
 Wechselspannung
 – Definition 46
 – mit Offset 85
 – Zeitfunktion 187
 Wechselspannungsverstärkung 398, 412, 413, 415, 416, 419, 426, 427, 433, 434, 435, 466, 467
 Wechselstrom
 – Definition 46
 – Zeitfunktion 187
 Wechselstromgenerator 317
 Wechselstrommeßbrücke 337
 Wechselstromverstärkung 405, 406
 Weißsche Bezirke 89, 91
 Wellenlänge 192, 193, 199, 363
 Wendepotentiometer 73

Wicklungskapazitäten 273, 280
 Wicklungsverluste 261
 Wicklungswiderstand 63, 70, 105, 129, 261, 264,
 277, 280, 282, 297, 449
 Widerstand
 – ausschalten 139
 – bedrahteter 72
 – Definition 27, 28, 41, 42
 – differentieller 351
 – dynamischer 351
 – einschalten 139
 – fester 66, 67, 75
 – Foto~ 74
 – Heißleiter~ 74
 – im Wechselstromkreis 223, 224
 – induktiver 225, 289
 – Kaltleiter~ 74
 – kapazitiver 228, 229
 – LDR~ 74
 – NTC~ 74
 – ohmscher 60, 75, 147
 – PTC~ 74
 – spannungsabhängiger 74
 – spezifischer 61
 – steuerbarer 477
 – veränderbarer 72
 Widerstandsbereich, negativer 362
 Widerstandsgerade 371, 372, 373, 375, 449
 Widerstandskennlinie 45
 widerstandslos 50, 131
 Winkelgeschwindigkeit 192, 220, 317

Wirbelströme 95, 263, 274, 313
 Wirbelstromverluste 95, 263, 264, 274
 Wirkleistung 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271,
 272, 326
 Wirkleitwert 221, 224
 Wirkungsgrad 57
 Wirkwiderstand 221

Z

Zahlensystem, binäres 381
 Zählpeile 51, 52, 53
 Zählpeilsystem 52
 Z-Diode 364, 365, 366, 367, 368, 369, 374, 377
 Zeigerbild 201, 217, 218, 268
 Zeigerdarstellung von Sinusgrößen 200
 Zeigerdiagramm 200
 Zeigerinstrument 135
 Zeitkonstante 141, 143, 145, 147, 148, 152
 Zeitschalter 451
 Zenerbereich 346, 365
 Zenerdurchbruch 346, 367, 385
 Zenereffekt 346, 354, 367
 Zink/Kohle-Batterie 109
 Zusammenfassung von Bauelementen 128, 185
 Zusammensetzung von Wechselspannungen 202
 Zweig 168
 Zweigspannung 168, 177
 Zweigspannungen 169, 173, 176, 177
 Zweigstrom 168, 177
 Zweipole 121, 122, 123, 153, 370
 Zweitor 184, 428

Leonhard Stiny

Grundwissen **Elektrotechnik**

Dieses Buch ist für all diejenigen gedacht, die sich mit den Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik näher beschäftigen wollen oder müssen. Auszubildende elektrotechnischer Berufe, Schüler weiterführender Schulen, Berufserfahrene, die ihr Wissen auffrischen wollen, Hobbyelektroniker, aber auch Studierende der Elektrotechnik oder einer verwandten Fachrichtung finden hier alles, was sie über Theorie und Praxis der Elektrotechnik wissen sollten.

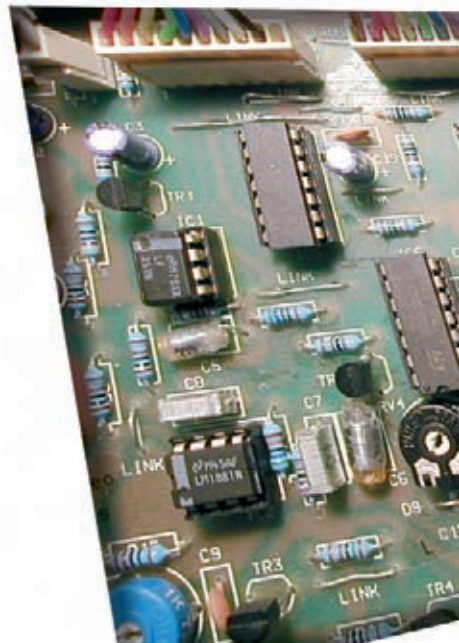
Zahlreiche Abbildungen, Beispiele und Schritt-für-Schritt-Anleitungen erleichtern die Einführung. Die theoretische Darstellung wird ergänzt durch zahlreiche Bezüge zur Praxis. Den einzelnen Abschnitten zugeordnet sind Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen, die der Vertiefung des Stoffes dienen. Zusammenfassungen am Ende der Kapitel heben das Wesentliche hervor. Von den Grundlagen der Elektronik bis zur Kenntnis elektrischer Schaltungen vermittelt dieses Buch die Grundzüge des Faches und kann zugleich als zuverlässiges Nachschlagewerk verwendet werden.

Aus dem Inhalt:

- Elektrische Größen, Schaltbilder, Quellen
- Wirkungsweise und Verwendungszweck von Bauelementen
- Gleich- und Wechselstromtechnik
- Einschwingvorgänge
- Analyse von Netzwerken
- Komplexe Wechselstromrechnung
- Fourier-Analyse, Übertragungsfunktion, Bodediagramm
- Filter
- Transformatoren, Übertrager
- Schwingkreise, Drehstrom
- Halbleiterdioden
- Bipolare Transistoren, Feldeffekttransistoren
- Digitaltechnik
- Operationsverstärker

Der Autor:

Leonhard Stiny machte an der Universität Erlangen seinen Abschluss als Dipl.-Ing. der Elektrotechnik. Er ist in der Elektrotechnik-Entwicklung eines großen Industrieunternehmens als Abteilungsleiter tätig.



ISBN 978-3-7723-5328-4



9 783772 353284

Euro 29,95 [D]

Besuchen Sie uns im Internet: www.franzis.de