

Eberhard Brommundt, Delf Sachau

Schwingungslehre

mit Maschinendynamik



Teubner

Eberhard Brommundt, Delf Sachau

Schwingungslehre

mit Maschinendynamik

Eberhard Brommundt, Delf Sachau

Schwingungslehre

mit Maschinendynamik

Mit 210 Abbildungen und 286 Aufgaben



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Prof. em. Dr. Eberhard Brommundt hatte von 1970 bis 2000 die Professur für Technische Mechanik, mit gleichnamigen Institut, an der Technischen Universität Braunschweig inne. Sein Arbeitsgebiet sind Dynamik und lineare wie nichtlineare Schwingungen. Vor seiner Berufung als Professor arbeitete er als Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Angewandte Mechanik und Technische Schwingungslehre an der TH Darmstadt und als Privatdozent, ebenfalls an der TH Darmstadt.

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Delf Sachau hat seit 2001 die Professur für Mechatronik an der Helmut-Schmidt-Universität – Universität der Bundeswehr Hamburg inne und leitet dort das Institut für Mechanik. Vor Antritt der Professur arbeitete er nach seinem Studium des Maschinenbaus an der Technischen Universität Braunschweig als Entwicklungsingenieur in der Industrie und als Wissenschaftler am Institut für Robotik und Systemdynamik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR) sowie als Leiter der Abteilung Adaptronik am DLR Institut für Strukturmechanik.

1. Auflage 2008

Alle Rechte vorbehalten

© B.G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2008

Der B.G. Teubner Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.teubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8351-0151-7

Vorwort

Maschinen und Fahrzeuge werden leistungsfähiger, schneller und leichter. Um die daraus resultierende Umweltbelastung durch Vibrationen und Lärm gering zu halten, benötigt der Ingenieur fundierte Kenntnisse der Schwingungslehre mit Maschinendynamik.

Dieses Buch behandelt die Schwingungslehre mit Frage- und Aufgabestellungen aus der Maschinendynamik. Dabei geht der Schwingungslehre stets die Modellbildung, d. h. das Eindringen in die Physik des Systems und das Aufstellen der Bewegungsgleichungen voraus. Ziel ist es, das Verständnis der Vorgehensweisen und das Denken in den Begriffen am Schwingungsverhalten einfach aufgebauter Maschinen zu lernen. Diese Grundlagen benötigt der Ingenieur später im Beruf, selbst dann, wenn er die Dynamik mechatronischer Systeme mit Hilfe modernster Rechnerprogramme untersucht. Dann hilft ihm die aus der Beschäftigung mit den Grundbegriffen erworbene Anschauung, die Rechnerergebnisse zu durchschauen und zu bewerten.

Die erforderlichen mathematischen Grundlagen stammen überwiegend aus der Einführungsvorlesung Mathematik. Kapitel I fasst sie in der Terminologie der Schwingungslehre zusammen. Der Leser hat die Freiheit, dieses Kapitel nur zu überfliegen, durcharbeiten, bei Bedarf nachzulesen oder es als Formelsammlung zu benutzen. Ähnliches gilt für die Grundlagen aus der Technischen Mechanik bzw. Dynamik, die am Ende des Buches in den Anhängen A, B, C zusammengestellt sind.

Die eigentliche Schwingungslehre ist in vier Kapitel mit jeweils mehreren Abschnitten gegliedert: Kapitel II, Maschinen und Geräte unter dynamischer Last, nimmt die Modellbildung auf. Bewegungsgleichungen werden anfangs als Gleichgewichtsbedingungen, mit d'Alembertschen Trägheits-Kräften und -Momenten, später mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen (2. Art) formuliert. Kapitel III gelangt von einem nicht ganz einfachen System zum Schwinger vom Freiheitsgrad eins und handelt ihn ab. Rotoren mit aufgesetzten Massen, Kapitel IV, begründen die Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden. Die Torsionsschwingungen der Welle mit verteilter Masse und die Biegeschwingungen einer Kranbrücke (Balken) führen beispielhaft auf schwingende Continua, Kapitel V.

Der Inhalt beschränkt sich im Wesentlichen auf lineare Schwingungen. Die Lösungen der Bewegungsgleichungen werden analytisch herausgearbeitet, diskutiert und in Diagrammen veranschaulicht. Eine Reihe von den Text begleitenden und ergänzenden Aufgaben bietet dem Leser Gelegenheit zu Übung und Verständniskontrolle.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	II
Inhaltsverzeichnis	III
Hinweise zu Schreibweisen	1
I GRUNDBEGRIFFE DER SCHWINGUNGSLEHRE	2
1 Einleitung	2
1.1 Definition einer Schwingung.....	2
1.2 Harmonische Schwingung, Sinusschwingung	3
1.3 Allgemeine periodische Schwingung	9
1.4 Nichtperiodische Schwingung.....	18
1.5 Aufgaben	23
II MASCHINEN UND GERÄTE UNTER DYNAMISCHER LAST	26
2 Bodenkräfte einer Rüttelmaschine	26
2.1 Aufgabenstellung.....	26
2.2 Lösung	26
2.3 Aufgaben	29
3 Auswuchten starrer Rotoren	30
3.1 Aufgabenstellung.....	30
3.2 Modell	31
3.3 Gleichgewichtsbedingungen	31
3.4 Diskussion der Lagerkräfte infolge Unwucht	34
3.5 Das Wuchten	36
3.6 Aufgaben	37
III SCHWINGER MIT EINEM FREIHEITSGRAD	40
4 Vertikalschwingungen eines Paares gekoppelter Exzenterpressen	40
4.1 Aufgabenstellung.....	40
4.2 Modell	41

4.3 Massenkräfte	43
4.4 Schwingungserregung durch bewegte Massen	46
4.5 Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungs-Differentialgleichung	49
4.6 Allgemeine Aussagen; Ergänzende Hinweise	50
4.7 Aufgaben	54
5 Freie Schwingungen	56
5.1 Bewegungsgleichung; Bemerkungen zur Nomenklatur	56
5.2 Lösen der Differentialgleichung	57
5.3 Ausdeuten der Lösung	57
5.4 Aufgaben	60
6 Erzwungene Schwingungen	62
6.1 Allgemeine Aussagen	62
6.2 Erzwungene harmonische Schwingungen	63
6.3 Das Arbeiten mit Stoßerregung und Stoßantwort	71
6.4 Aufgaben	74
7 Erzwungene Schwingungen der Exzenterpressen	77
7.1 Wirkung der relativ bewegten Massen auf die Rahmenauslenkung $x(t)$	77
7.2 Wirkung der bewegten Bodenplatte	80
7.3 Wirkung der bewegten Massen auf den Boden	82
7.4 Aufgaben	84
8 Einschwing- und Anlaufvorgänge	85
8.1 Einschwingvorgänge	85
8.2 Anlauf einer Erregung	88
8.3 Aufgaben	94
IV ROTORSCHWINGUNGEN	96
9 Der starr gelagerte Rotor mit einfacher Durchbiegung	96
9.1 Aufgabenstellung	96
9.2 Modell	96
9.3 Bewegungsgleichungen	98
9.4 Erzwungene Schwingungen	108
9.5 Freie Schwingungen	110

9.6 Schlüsse aus den Untersuchungen.....	112
9.7 Aufgaben	113
10 Anisotrope Rotorlager – der Schwinger mit zwei Freiheitsgraden	115
10.1 Aufgabenstellung.....	115
10.2 Modell	116
10.3 Steifigkeit des Lagerbocks	116
10.4 Eigenschwingungen des Lagerbocks mit angehängter Masse.....	121
10.5 Erzwungene Schwingungen des Lagerbocks	135
10.6 Aufgaben	144
11 Rotorsysteme	148
11.1 Die einfach besetzte Welle auf nachgiebigen Lagern	148
11.2 Rotoren mit aufgesetztem Kreisel	158
11.3 Aufgaben	171
12 Dreh- und Torsionsschwingungen	173
12.1 Aufgabenstellung, Symbole.....	174
12.2 Drehschwingungen eines Systems mit einer Übersetzung	175
12.3 Reduktion von Drehschwingern auf eine Welle	181
12.4 Erzwungene Drehschwingungen.....	183
12.5 Aufgaben	189
V KONTINUA	191
13 Mitschwingen der Wellenmasse bei Drehschwingungen	191
13.1 Aufgabenstellung.....	191
13.2 Freie Schwingungen	191
13.3 Erzwungene Schwingungen	199
13.4 Diskretisieren des Kontinuums Welle	202
13.5 Aufgaben	214
14 Balken-Biegeschwingungen	216
14.1 Aufgabe: Schwingungen einer Kranbrücke.....	216
14.2 Die partiellen Dgln der Balkenbiegung.....	217
14.3 Eigenschwingungen der Kranbrücke.....	220
14.4 Diskretisieren des Kontinuums Balken	232

14.5 Schwingungen der Kranbrücke nach dem Lastabfall.....	238
14.6 Aufgaben	243
ANHANG	246
A Einige Grundlagen aus der Kinetik	246
A.1 Bewegung des starren Körpers	246
A.2 Massengeometrie des starren Körpers	262
A.3 Die kinetischen Grundgrößen des starren Körpers	265
A.4 Bewegungsgleichungen aus Gleichgewichtsbedingungen.....	266
B Arbeitsaussagen aus der Elastostatik	270
B.1 Arbeit von äußeren Kräften und Momenten	270
B.2 Arbeit von inneren Kräften und Momenten	271
B.3 Hinweise	273
B.4 Der erste Satz von Castigliano – Verformungseinflusszahlen (Nachgiebigkeiten).....	274
B.5 Der zweite Satz von Castigliano – Krafteinflusszahlen (Steifigkeiten)	275
B.6 Das Berechnen von Einflusszahlen.....	277
C Energieverfahren	283
C.1 Das verallgemeinerte Hamiltonsche Prinzip	283
C.2 Die Lagrangeschen Gleichungen (2. Art)	287
Literaturverzeichnis	290
Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen	293
Sachwortverzeichnis	295

Hinweise zu Schreibweisen

Die Wahl der Formelzeichen hält sich an folgende Konventionen: Kursive Buchstaben bezeichnen Skalare (z. B. x , t , k), halbfette (Spalten-) Matrizen (z. B. $\mathbf{x}$, $\mathbf{M}$). Große steile Buchstaben (z. B. P , O) benennen Punkte. Der Unterstrich (z. B. $\underline{x}$) kennzeichnet komplexe und die Tilde (z. B. $\tilde{Q}$) dimensionslose (bezogene) Größen. Das Dach ($\hat{x}$) verdeutlicht Amplituden.

Vektoren

Wir wollen mit *Vektor* nur *physikalische* Vektoren benennen. (Den *Spalten-Vektor* der Matrizenrechnung nennt man heute lieber *Spalten-Matrix*.)

Ein Formelbuchstabe mit darüber gesetztem Pfeil (z. B. $\vec{F}$) bezeichnet einen Vektor. Der Pfeilschaft gibt die Richtung an, s. Bild 0-1. Der Pfeil kennzeichnet die Orientierung (= Pfeilsinn oder *positive Richtung*).

Schreibweise Einheitsvektor $\times$ Betrag: $\vec{F} = \vec{e}_F |\vec{F}|$ mit Betrag $|\vec{F}|$ ("Länge" des Vektors $\vec{F}$) und Einheitsvektor $\vec{e}_F = \vec{F}/|\vec{F}|$ vom Betrag $|\vec{e}_F| = 1$. Der Einheitsvektor $\vec{e}_F \equiv \vec{e}_{\vec{F}}$ hat dieselbe Richtung und dieselbe Orientierung wie der Vektor $\vec{F}$, s. Bild 0-2.

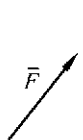


Bild 0-1

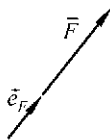


Bild 0-2

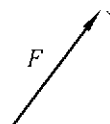


Bild 0-3

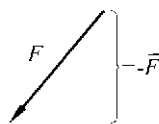


Bild 0-4

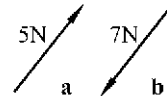


Bild 0-5



Bild 0-6

Schreibweise Einheitsvektor $\times$ Maßzahl: $\vec{F} = \vec{e} \cdot F$ mit Einheitsvektor $\vec{e}$ und Maßzahl F .

Der Vektor $\vec{F}$ hat dieselbe Richtung wie der Einheitsvektor $\vec{e}$, doch nur bei $F > 0$ dieselbe Orientierung, bei $F < 0$ die entgegengesetzte. In Bild 0-3 kann man den Pfeil als Bild des Einheitsvektors auffassen. F steht dann als Name und Maßzahl.

Beim Vektor $-\vec{F}$ dreht man dann einfach den Einheitsvektor (den Pfeil) um: $-\vec{F} = -(\vec{e} F) = (-\vec{e}) F$, vgl. Bild 0-4.

Berechnet man zur Darstellung nach Bild 0-3 die Kraft F zu a) $F = 5\text{N}$, b) $F = -7\text{N}$, so erhält man die in Bild 0-5 gezeichneten Pfeile. Stellt man das Ergebnis b) wie in Bild 0-6 dar, ist das nicht falsch, doch fehleranfällig!

Die Darstellung von Einheitsvektor $\times$ Maßzahl steht hinter allen Koordinatendarstellungen von Vektoren und ist für den Einzelvektor in der Mechanik sehr beliebt.

I Grundbegriffe der Schwingungslehre

1 Einleitung

Die Normenreihe DIN 1311 legt mit ihren Teilen 1, 2, 3 – die Teile 4 und 5 sind in Vorbereitung – Begriffe zu Schwingungen und schwingungsfähigen Systemen vorwiegend im Bereich der Mechanik fest. Wir halten uns überwiegend an die genormten Benennungen und Bezeichnungen, weichen jedoch des bildhaften Ausdrucks oder der Kürze halber (z. B. Periodendauer $\rightarrow$ Periode) auch von der Norm ab. Einleitend werden hier vor allem die Grundbegriffe zusammengestellt (siehe DIN 1311, Teil 1). Dabei wird angenommen, dass die Einzelheiten dem Leser aus Mathematik und Technischer Mechanik bekannt sind. Die Zusammenstellung gibt vor allem die schwingungstechnische Sicht und Ausdrucksweise wieder.

1.1 Definition einer Schwingung

Unter einer Schwingung versteht man einen Vorgang, bei dem sich die interessierende Größe x so mit der Zeit ändert, dass bestimmte Merkmale wiederkehren.

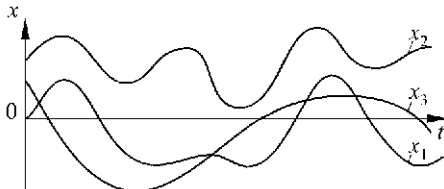


Bild 1-1
Schwingungen

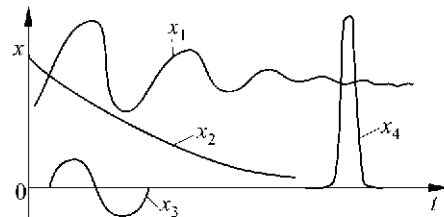


Bild 1-2 Schwingungen: x_1 (nicht monoton) abklingend, x_2 kriechend (monoton) abklingend, x_3 begrenzt, x_4 impulsartig

Im allgemeinen sprechen wir x als Ausschlag oder Auslenkung an. Der Augenblickswert von x sei eine (deterministische) Funktion der Zeit t : $x = x(t)$.

Es ist unmöglich, eine Schwingung gegenüber einer allgemeinen Bewegung ohne Willkür abzugrenzen. Deshalb rechnet man auch Größen, die nur wenige Male zu- und abnehmen, impulsartig verlaufen, schwingend oder monoton abklingen zu den Schwingungen, s. Bild 1-2. Wir nennen dann auch den zeitlichen Ablauf von $x(t)$ *Bewegung*, gleichgültig, ob es sich bei x um eine Ortskoordinate, einen Weg, einen Winkel, eine Geschwindigkeit, einen Strom usw. handelt.

1.2 Harmonische Schwingung, Sinusschwingung

1.2.1 Reelle Darstellung der harmonischen Schwingung

Eine Schwingung $x = x(t)$, deren Zeitverlauf sich durch eine Kosinus- oder Sinusfunktion beschreiben lässt, heißt *harmonische Schwingung* oder *Sinusschwingung* (auch Kosinusschwingung)

$$x = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_0) \text{ oder } x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_{0,s}), \quad (1.1)$$

wo $\hat{x}$ Amplitude, ω Kreisfrequenz, φ_0 Nullphasenwinkel, $\varphi_{0,s} := \varphi_0 + \pi/2$ sind.

Bild 1-3 zeigt den Zeitverlauf der harmonischen Schwingungen. Darin bedeutet T die Periodendauer (DIN 1311, hier auch kurz Periode), das ist die Zeit, nach der sich die Auslenkung x wiederholt:

$$x(t+T) = x(t). \quad (1.2)$$

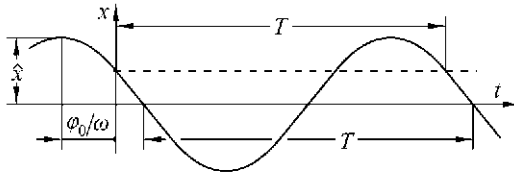


Bild 1-3
Harmonische Schwingung

Zwischen der Periodendauer T und der Kreisfrequenz ω gelten die Beziehungen

$$\omega T = 2\pi \text{ oder } T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.3)$$

Das Argument der Kosinusfunktion von (1.1),

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0, \quad (1.4)$$

heißt *Phasenwinkel*; $\varphi(0) = \varphi_0$ ist der *Nullphasenwinkel*. Im Laufe einer Periode ändert sich φ um 2π , die Schwingung durchläuft eine Sinuswelle. Der Kehrwert der Periodendauer T liefert die *Frequenz*

$$f = \frac{1}{T}; \quad (1.5)$$

man kann sie als Anzahl der Sinuswellen pro Zeiteinheit lesen. Eliminiert man T mit (1.3), folgt der Zusammenhang zwischen Frequenz und Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f. \quad (1.6)$$

Dimensionen und Einheiten

$$\begin{aligned}
 \dim(x) &= \dim(\hat{x}) & [x] &= [\hat{x}] - \text{je nach Gr\o{\ss}e,} \\
 \dim(T) &= \text{Zeit} & [T] &= \text{s,} \\
 \dim(\omega) &= 1/\text{Zeit} & [\omega] &= 1/\text{s, auch } [\omega] = \text{rad/s,} \\
 \dim(f) &= 1/\text{Zeit} & [f] &= 1/\text{s, meist } [f] = \text{Hz,} \\
 \dim(\varphi) &= 1 & [\varphi] &= 1, \text{ auch } [\varphi] = \text{rad.}
 \end{aligned}$$

Umformungen: Summen von Sinus- und Kosinusschwingungen gleicher Frequenz

Zerlegung: Mit dem Additionstheorem $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ folgt aus (1.1)

$$x = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_0) = \underbrace{\hat{x} \cos \varphi_0}_{\hat{x}_c} \cos \omega t - \underbrace{\hat{x} \sin \varphi_0}_{\hat{x}_s} \sin \omega t, \quad (1.7)$$

also die Zerlegung

$$x = \hat{x}_c \cos \omega t + \hat{x}_s \sin \omega t, \text{ wo } \hat{x}_c := \hat{x} \cos \varphi_0, \hat{x}_s := -\hat{x} \sin \varphi_0. \quad (1.8)$$

Die letzten beiden Gleichungen schreiben wir auch mit Zeilenmatrizen:

$$(\hat{x}_c, \hat{x}_s) = (\hat{x} \cos \varphi_0, -\hat{x} \sin \varphi_0). \quad (1.9)$$

Zusammenfassung: Kehrt man diese Transformation um, erh\u00e4lt man zur Summe $x = \hat{x}_c \cos \omega t + \hat{x}_s \sin \omega t$ die Form $x = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_0)$, wo

$$\hat{x} = \sqrt{\hat{x}_c^2 + \hat{x}_s^2}, \quad \varphi_0 = \arctan\left(-\frac{\hat{x}_s}{\hat{x}_c}\right); \quad (1.10)$$

dabei muss der Quadrant von φ_0 so gew\u00e4hlt werden, dass (1.9) mit den richtigen Vorzeichen erf\u00fcllt ist.

Dimensionslose Schreibweisen

Dr\u00fcckt man in der harmonischen Schwingung nach (1.1) die Kreisfrequenz ω gem\u00e4\u00df (1.3) durch die Periodendauer aus und dividiert die entstandene Gleichung durch die Amplitude $\hat{x}$, so erh\u00e4lt man

$$\tilde{x} = \frac{x}{\hat{x}} = \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0\right) = \cos(2\pi \tilde{t} + \varphi_0). \quad (1.11)$$

Hier sind

$$\tilde{x} := \frac{x}{\hat{x}} \text{ und } \tilde{t} := \frac{t}{T} \quad (1.12)$$

eine bezogene, also dimensionslose, Auslenkung bzw. Zeit. Bild 1-4 zeigt die harmonische Schwingung (1.11).

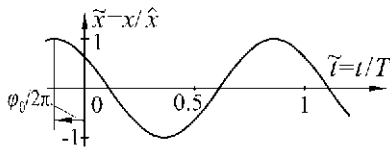


Bild 1-4

Harmonische Schwingung in bezogener Form

Dimensionslose Größen eignen sich besonders gut zur Verarbeitung in Rechnern und zur Darstellung in Diagrammen, auch weil die Anzahl der Parameter verringert wird. (In Bild 1-4 unterscheiden sich die harmonischen Schwingungen nur noch durch den Nullphasenwinkel φ_0 .)

Bezeichnungen: Wir kennzeichnen *dimensionslose Größen* durch eine Tilde über dem "alten" Formelbuchstaben, $\tilde{x}, \tilde{t}$. Die Bezugs- oder Referenzgröße trägt als Kennzeichen den Index R; in (1.12) wurden $x_R = \hat{x}$ und $t_R = T$ gewählt. Allgemein gelten also (für evtl. andere x_R, t_R)

$$\tilde{x} = \frac{x}{x_R}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_R}, \quad (1.13)$$

in Umkehrrichtung

$$x = \tilde{x} x_R, \quad t = \tilde{t} t_R. \quad (1.14)$$

1.2.2 Komplexe Darstellung harmonischer Schwingungen; Zeigerdiagramme

Die komplexe Darstellung reeller Sinusschwingungen mit Hilfe von Drehzeigern ist anschaulich einprägsam und formal für viele Zwecke vorteilhaft.

Zeiger-Diagramme

Drehzeiger: Aus der Eulerschen Formel

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad j := \sqrt{-1} \quad (1.15)$$

folgen mit $\alpha = \omega t$

$$\cos \omega t = \operatorname{Re} e^{j\omega t}, \quad \sin \omega t = \operatorname{Im} e^{j\omega t}. \quad (1.16)$$

In der komplexen Zahlenebene nach Bild 1-5, mit der reellen Achse Re und der imaginären Achse Im, stellt $z = \exp(j\omega t)$ einen auf dem Einheitskreis mit der Winkelgeschwindigkeit ω , der *Kreisfrequenz*, mathematisch positiv, also linksdrehend umlaufenden Pfeil, einen (Einheits-)Drehzeiger dar. Seine jeweiligen *Projektionen* auf die reelle Achse Re und die imaginäre Achse Im liefern die Funktionen $\cos \omega t$ bzw. $\sin \omega t$, s. Bild 1-5.

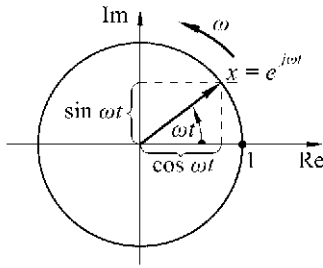


Bild 1-5

Komplexe Ebene mit Drehzeiger

Drehzeiger und Zeiger der harmonischen Schwingung:

Die Sinusschwingung (1.1) kann man parallel zu (1.16) wie folgt *komplex schreiben*:

$$x = x(t) = \operatorname{Re} \hat{x} e^{j(\omega t - \varphi_0)} \quad (1.17)$$

Dabei steht

$$\underline{x} = \underline{x}(t) = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_0)} = \left(\hat{x} e^{j\varphi_0} \right) e^{j\omega t} := \underline{\hat{x}} e^{j\omega t} \quad (1.18)$$

für die der harmonischen Schwingung $x(t)$ zugeordnete *komplexe Schwingung* $\underline{\hat{x}} \exp(j\omega t)$, den *Drehzeiger* $\underline{x}$ in Bild 1-6. Der nicht-drehende Pfeil

$$\underline{\hat{x}} = \hat{x} e^{j\varphi_0} \quad (1.19)$$

ist die *komplexe Amplitude* oder *Zeiger* von x , Bild 1-6.

Nach DIN 1311 werden komplexe Größen, die Zeiger, durch *Unterstriche* gekennzeichnet. (Falls keine Verwechselungsgefahr besteht, lässt man die Unterstriche auch weg.)

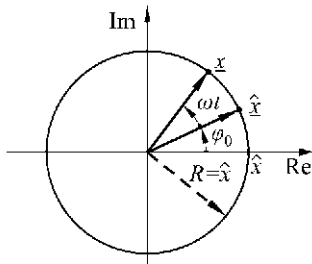


Bild 1-6

Zeiger $\underline{\hat{x}} = \hat{x} \exp(j\varphi_0)$ und Drehzeiger $\underline{x} = \underline{\hat{x}} \exp(j\omega t)$ der harmonischen Schwingung; φ_0 - Nullphasenwinkel, ω - Kreisfrequenz, $\hat{x}$ - Amplitude, $R = \hat{x}$ - Kreisradius

In Bild 1-6 liegt der Zeiger $\underline{\hat{x}}$ fest, der Drehzeiger $\underline{x}$ läuft gegenüber dem Koordinatensystem mit der Winkelgeschwindigkeit ω um, der Winkel ωt wird gegen $\underline{\hat{x}}$ gemessen. Dann ist die Sinusschwingung durch Angabe des Zeigers und der Kreisfrequenz eindeutig festgelegt; es genügt die Darstellung nach Bild 1-7. Bild 1-8 stellt die Projektion von $\underline{x}(t)$ auf die reelle Achse zeitabhängig dar.

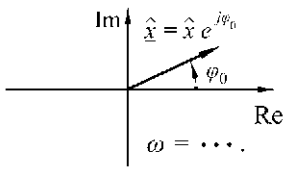


Bild 1-7: Darstellung der harmonischen Schwingung durch Zeiger $\hat{x}$ und Angabe der Kreisfrequenz ω

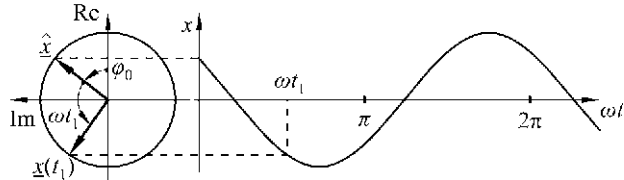


Bild 1-8: Harmonische Schwingung $x(t)$ als Projektion der komplexen Schwingung $\underline{x}(t)$ auf die reelle Achse

Zeigerdiagramme eignen sich besonders zum Vergleich mehrerer Sinusschwingungen gleicher Frequenz, zur Addition (Überlagerung) solcher Schwingungen und zur Gegenüberstellung mit ihren Zeitableitungen:

Vergleich gleichfrequenter Schwingungen

Gegeben: $x_i(t) = \hat{x}_i \cos(\omega t + \varphi_{0i})$, $i = 1, 2, 3$, komplex $\underline{x}_i = \hat{x}_i e^{j\varphi_{0i}} e^{j\omega t} = \underline{\hat{x}}_i e^{j\omega t}$, mit den komplexen Amplituden $\underline{\hat{x}}_i$ nach Bild 1-9.

Gesucht: Phasenverschiebungswinkel von $x_2(t)$, $x_3(t)$ gegenüber $x_1(t)$ der Referenzschwingung.

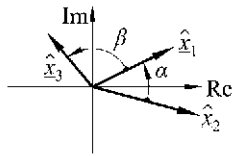


Bild 1-9

Zeiger $\underline{\hat{x}}_i$ der Schwingungen $x_i(t)$; vgl. Bild 1-7

Nach Auftragen der Zeiger $\underline{\hat{x}}_1$, $\underline{\hat{x}}_2$, $\underline{\hat{x}}_3$ liest man aus Bild 1-9 die Phasenverschiebungswinkel α , β zwischen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bzw. $x_3(t)$ unmittelbar ab:

$$\alpha = \varphi_{01} - \varphi_{02}, \quad \beta = \varphi_{03} - \varphi_{01}, \quad (1.20)$$

also $x_2(t) = \hat{x}_2 \cos(\omega t - \varphi_{01} - \alpha)$, $x_3(t) = \hat{x}_3 \cos(\omega t + \varphi_{01} + \beta)$;

$x_2(t)$ eilt gegenüber $x_1(t)$ um den Winkel α nach, $x_3(t)$ eilt um den Winkel β voraus.

Man sagt, zwei gleichfrequente Sinusschwingungen $x_1(t)$, $x_2(t)$ liegen in Phase (schwingen in Phase), wenn ihr Phasenverschiebungswinkel Null ist,

$$\Delta\varphi := \varphi_{02} - \varphi_{01} = 0. \quad (1.21)$$

Addition (Überlagerung) gleichfrequenter Schwingungen

Gegeben: $x_i(t) = \hat{x}_i \cos(\omega t + \varphi_{0i}) = \text{Re } \underline{\hat{x}}_i e^{j\omega t}$, $i = 1, 2$.

Gesucht: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Aus

$$x(t) = \operatorname{Re} \hat{x}_1 e^{j\omega t} + \operatorname{Re} \hat{x}_2 e^{j\omega t} = \operatorname{Re} [\hat{x}_1 e^{j\omega t} + \hat{x}_2 e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [\hat{x} e^{j\omega t}] \quad (1.22)$$

folgt für den Zeiger von $x(t)$

$$\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2. \quad (1.23)$$

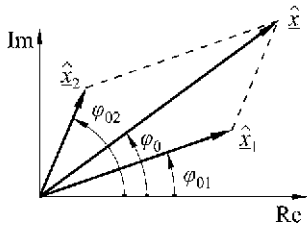


Bild 1-10

Parallelogramm für $\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$.

Braucht man $\hat{x}$ formelmäßig, rechnet man reell z. B. die obenstehenden Dreiecke trigonometrisch nach, einfacher geht es komplex.

1.2.3 Zeiger und Zeigerdiagramme für Ableitungen

Durch Ableitung folgen aus der Auslenkung

$$x = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1.24)$$

die *Geschwindigkeit*

$$v := \dot{x} = -\hat{x} \omega \sin(\omega t + \varphi_0) = \hat{v} \cos(\omega t + \varphi_0 + 90^\circ), \quad (1.25)$$

wo $\hat{v} := \hat{x} \omega$, und die *Beschleunigung*

$$a := \dot{v} = \ddot{x} = -\omega^2 \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_0) = \hat{a} \cos(\omega t + \varphi_0 + 180^\circ), \quad (1.26)$$

wo $\hat{a} := \omega^2 \hat{x}$.

Durch Ableitung der zugeordneten komplexen Schwingung (des Drehzeigers)

$$x = \hat{x} e^{j\omega t} \quad (1.27)$$

folgen

$$\dot{x} = j \omega \hat{x} e^{j\omega t} \quad \text{und} \quad \ddot{x} = -\omega^2 \hat{x} e^{j\omega t}. \quad (1.28)$$

Man erkennt unmittelbar

$$v = \operatorname{Re} \underline{v} = \operatorname{Re} \dot{x} = \operatorname{Re} \underline{\hat{v}} e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad \underline{\hat{v}} = j \omega \underline{\hat{x}}, \quad (1.29)$$

$$a = \operatorname{Re} \underline{a} = \operatorname{Re} \ddot{x} = \operatorname{Re} \underline{\hat{a}} e^{j\omega t} \quad \text{mit} \quad \underline{\hat{a}} = -\omega^2 \underline{\hat{x}}. \quad (1.30)$$

Der Zeiger der Geschwindigkeit ist mathematisch positiv um 90° , der der Beschleunigung ist um 180° gegenüber dem des Ausschlags gedreht, Bild 1-11.

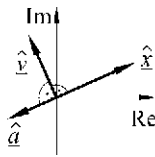


Bild 1-11

Relative Phasenlage der Zeiger $\hat{x}$, $\hat{v}$, $\hat{a}$ von Auslenkung, Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung

1.3 Allgemeine periodische Schwingung

Die folgenden Seiten fassen die Fouriarentwicklung für periodische Schwingungen zusammen.

1.3.1 Definition

Eine Schwingung heißt periodisch mit der *Periode* T (nach DIN 1311 *Periodendauer*), wenn sie sich nach Ablauf der Zeit T wiederholt:

$$x(t+T) = x(t) \text{ für alle } t; \quad T > 0. \quad (1.31)$$

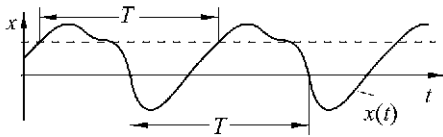


Bild 1-12

Periodische Schwingung

Mit T ist auch nT (n ganze Zahl) eine Periode von $x(t)$. Als Periode schlechthin bezeichnet man die kleinste Periode T , für die (1.31) erfüllt ist. Analog zu (1.3) und (1.5) ordnet man einer periodischen Schwingung mit der Periode T eine Kreisfrequenz ω und eine Frequenz f in der folgenden Weise zu:

$$\omega := \frac{2\pi}{T}, \quad f := \frac{1}{T}. \quad (1.32)$$

Sinusschwingung als Beispiele

Die Sinusschwingung $x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_0)$ ist das einfachste Beispiel einer periodischen Schwingung; sie hat die Periode $T = 2\pi / \omega$. Auch Sinusschwingungen $x(t) = \hat{x} \cos(n\omega t + \varphi_{0n})$ mit irgendwelchen ganzen Zahlen n (positiv oder negativ) haben dieses T als Periode (für $|n| \neq 1$ nicht als kleinste).

1.3.2 Manipulation periodischer Funktionen

Ableitung einer periodischen Funktion

Man darf (1.31) differenzieren:

$$\dot{x}(t+T) = \dot{x}(t). \quad (1.33)$$

Falls der Ausschlag $x(t)$ die Periode T hat, besitzt die Geschwindigkeit $v(t) := \dot{x}(t)$ dieselbe (kleinste) Periode,

$$v(t+T) = v(t). \quad (1.34)$$

Entsprechendes gilt für höhere Ableitungen.

Funktion einer periodischen Funktion

Sei $y = F(x)$ irgendeine (glatte) Funktion. Mit (1.31) folgt

$$y(t) = F(x(t)) = F(x(t+T)) = y(t+T); \quad (1.35)$$

auch $y(t)$ hat also die Periode T . Dies braucht aber nicht die kleinste Periode zu sein, wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei $x = \hat{x} \cos \omega t$. Dann hat $y := x^2 = \hat{x}^2 \cos^2 \omega t = \hat{x}^2 [1 + \cos 2\omega t]/2$ die Periode $T/2$.

Summe periodischer Funktionen

Die Summe (Überlagerung) zweier Schwingungen derselben Periode T hat wieder diese Periode.

Seien $x_1(t) = x_1(t+T_1)$ und $x_2(t) = x_2(t+T_2)$ zwei Schwingungen mit den kleinsten Perioden T_1 bzw. T_2 und mit dem rationalen Frequenzverhältnis, vgl. (1.32),

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1}; \quad n_1, n_2 \text{ ganz, teilerfremd.} \quad (1.36)$$

Dann ist

$$T := n_1 T_1 = n_2 T_2 \quad (1.37)$$

gemeinsame Periode von x_1, x_2 und damit Periode der Summe

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = x(t+T). \quad (1.38)$$

(Wieder braucht es nicht die kleinste Periode zu sein!)

1.3.3 Harmonische Synthese

Die additive Zusammensetzung einer periodischen Schwingung aus Sinusschwingungen der Perioden $T_n = T/n$ heißt harmonische Synthese:

$$x(t) = \sum_{n=1}^N \hat{x}_n \cos(n\omega t + \varphi_{0n}), \quad (1.39)$$

wo, vgl. (1.32),

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad (1.40)$$

man definiert auch

$$n\omega =: \omega_n, \quad \omega = \omega_1. \quad (1.41)$$

Die einzelnen Summanden heißen Teilschwingungen, zur Ordnungszahl n gehört die n -te Teilschwingung, die n -te *Harmonische*. Die erste Teilschwingung heißt Grundschiwingung, ω ist dann die Grund-Kreisfrequenz, die Teilschwingungen zu $n > 1$ nennt man gemeinsam auch Oberschwingungen (*höhere Harmonische*). In der Mathematik nennt man (1.39) für endliches N Fourier-Polynom, für $N \rightarrow \infty$ Fourier-Reihe (s. Abschnitt 1.3.4). Die $\hat{x}_n$ heißen Fourierkoeffizienten.

Die Harmonische Synthese ist wichtig, weil eine Reihe von analytischen und numerischen Näherungs-Verfahren zur Untersuchung von Schwingungsproblemen auf Lösungen der Form (1.39) führen, s. unten.

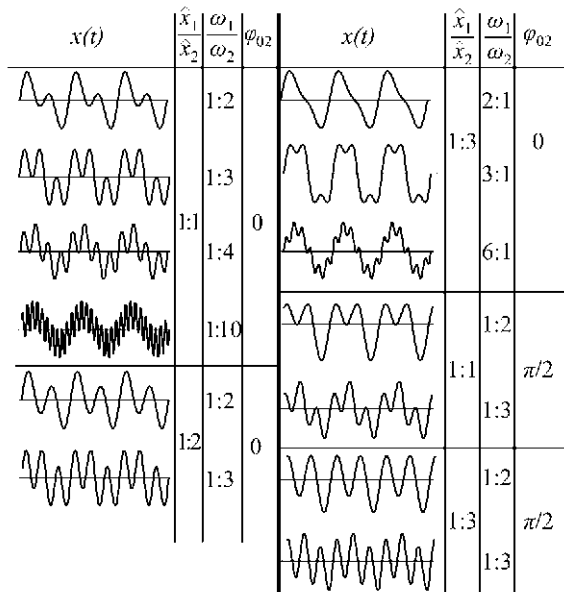


Bild 1-13

Mannigfaltigkeit von Formen der Summe aus zwei Sinusschwingungen gemeinsamer Periode

Beispiele für zweigliedrige Zusammensetzungen

Sei

$$x(t) = \hat{x}_1 \sin \omega_1 t + \hat{x}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02}). \quad (1.42)$$

Das Bild 1-13 zeigt für verschiedene einfache Verhältnisse $\hat{x}_1 : \hat{x}_2$ und $\omega_1 : \omega_2$ sowie Nullphasenwinkel φ_{02} , wie mannigfach schon die Erscheinungsbilder dieser einfachen Summe sind.

1.3.4 Harmonische Analyse periodischer Schwingungen

Die Zerlegung einer periodischen Schwingung in ihre Teilschwingungen heißt *harmonische Analyse*. Man analysiert periodische und auch nichtperiodische Schwingungen, weil sich die zerlegten Schwingungen oft leichter beurteilen und verarbeiten lassen als die (zusammengesetzten) Ausgangsschwingungen.

1.3.4.1 Die (reelle) Fourierreihe

Stückweise stetige periodische Funktionen $x(t) = x(t+T)$ kann man als Fourierreihen schreiben:

$$x(t) = \frac{\hat{x}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_{cn} \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_{sn} \sin n\omega t, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T \text{ Periode.} \quad (1.43)$$

Zu Funktionen mit Sprungstellen vgl. Hinweis 7 unten.

Die *Fourierkoeffizienten* $\hat{x}_0, \hat{x}_{cn}, \hat{x}_{sn}$ erhält man, wenn man die obige Gleichung mit $\cos m\omega t$, $\sin m\omega t$, m ganze Zahl, multipliziert und nach t über eine Periode integriert:

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t) \begin{Bmatrix} \cos m\omega t \\ \sin m\omega t \end{Bmatrix} dt &= \\ &= \frac{\hat{x}_0}{2} \int_0^T \begin{Bmatrix} \cos m\omega t \\ \sin m\omega t \end{Bmatrix} dt + \int_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_{cn} \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_{sn} \sin n\omega t \right] \begin{Bmatrix} \cos m\omega t \\ \sin m\omega t \end{Bmatrix} dt. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Es gelten die *Orthogonalitätsrelationen*

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t dt &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{für } n = m \end{cases}, \quad \int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{für } n = m \end{cases} \\ \text{und} \quad \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t dt &= 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Zum Beweis formt man die Produkte in den Integranden über Additionstheoreme in Summen um.

Konvergiert die Reihe (1.43) gleichmäßig, so kann man die rechte Seite von (1.44) gliedweise integrieren und erhält

$$\hat{x}_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt, \quad (1.46)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_{cn} &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(n\omega t) dt \\ \hat{x}_{sn} &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(n\omega t) dt \end{aligned} \right\} n=1, 2, \dots \quad (1.47)$$

In den Integralen rechts bedeutet t_0 , dass man das Integrationsintervall beliebig verschieben kann. (Damit lassen sich Rechnungen oft vereinfachen.)

Spektren:

Als Ergebnis der Fourieranalyse stellt man die bestimmenden Größen der Harmonischen (der Ordnung n)

$$x_n(t) = \hat{x}_{cn} \cos n\omega t + \hat{x}_{sn} \sin n\omega t = \hat{x}_n \cos(n\omega t + \varphi_{0n}), \quad (1.48)$$

die Fourierkoeffizienten $\hat{x}_{cn}$, $\hat{x}_{sn}$ und die Amplituden $\hat{x}_n$ sowie die Nullphasenwinkel φ_{0n} in *diskreten Spektren*, auch *Linienpektren*, über einer Frequenz- oder Ordnungsachse dar, s. Bild 1-14 und Bild 1-15.

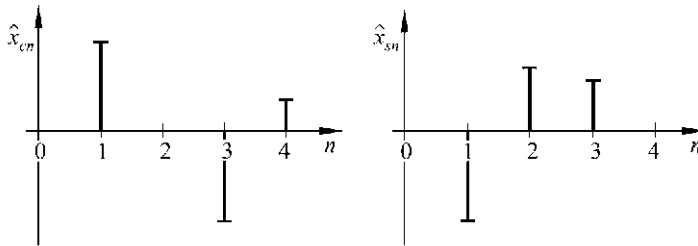


Bild 1-14
Spektren der Koeffizienten
 $\hat{x}_{cn}$ und $\hat{x}_{sn}$

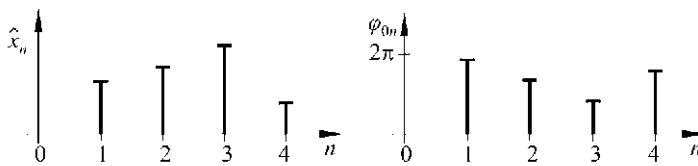


Bild 1-15
Spektren der Amplituden $\hat{x}_n$
und Nullphasenwinkel φ_{0n}

1.3.4.2 Hinweise zur reellen Fourierreihe

1. Die Benennung *reelle Fourierreihe* besagt, dass die Reihe mit den reellen Funktionen $\cos, \dots, \sin, \dots$ angeschrieben wurde. Die Funktion $x(t)$ selbst darf komplexwertig sein, dann sind auch die Fourierkoeffizienten komplex.
2. Das zeitunabhängige Glied $\hat{x}_0/2$ in (1.43) heißt Mittel- oder Gleichwert. Es hat diese Form, damit $\hat{x}_0$ aus $\hat{x}_{cn}$ für $n=0$ entsteht, vgl. (1.46) mit (1.47). DIN 1311 schreibt $x_0 := \hat{x}_0/2$.
3. Für die zusammengefassten Glieder

$$\hat{x}_{cn} \cos n\omega t + \hat{x}_{sn} \sin n\omega t = \hat{x}_n \cos(n\omega t + \varphi_{0n}) \quad (1.49)$$

gelten die Bezeichnungen für Teilschwingungen nach Abschnitt 1.3.3.

4. Formeln für die Fourieranalyse in Digitalrechner-Programmen zur numerischen Bestimmung der Fourierkoeffizienten enthalten viele numerische Tricks. Man findet sie unter dem Stichwort *Fast Fourier Transform(ation)*, *FFT*.
5. Für gerade Funktionen $x(t)$,

$$x(-t) = x(t), \quad (1.50)$$

folgt aus (1.47) mit $t_0 = -T/2$

$$\hat{x}_{sn} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt = 0, \quad (1.51)$$

die Fourierreihe enthält keine Sinusglieder.

6. Für ungerade Funktionen $x(t)$,

$$x(-t) = -x(t), \quad (1.52)$$

folgt aus (1.47)

$$\hat{x}_{cn} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt = 0, \quad (1.53)$$

die Fourierreihe enthält weder Gleichwert noch Kosinusglieder.

7. Man kann zeigen: Bei Funktionen mit Sprüngen in der k -ten Ableitung streben die Fourier-Koeffizienten für große n nicht stärker gegen 0 als mit $n^{-(k+1)}$; vgl. das folgende Beispiel mit $k=0$.

Beispiel Sägezahnfunktion

Gegeben sei die Sägezahnfunktion nach Bild 1-16,

$$0 \leq t < T: \quad x(t) = \frac{h}{T}t; \quad x(t+T) = x(t); \quad \omega = 2\pi/T \quad (1.54)$$

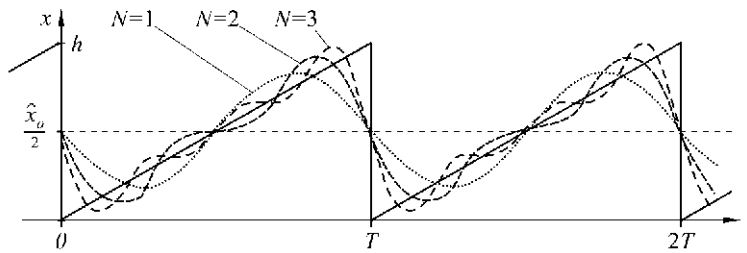


Bild 1-16
Sägezahnfunktion der
Höhe h , Periode T

Gesucht ist die Fourierreihe gemäß (1.43).

Für $x(t)$ nach (1.54) erhält man aus (1.46) und (1.47)

$$\begin{aligned}\hat{x}_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T h t \, dt = h, & \hat{x}_{cn} &= \frac{2}{T} \int_0^T h t \cos n\omega t \, dt = 0, \\ \hat{x}_{sn} &= \frac{2}{T} \int_0^T h t \sin n\omega t \, dt = -\frac{h}{\pi n}.\end{aligned}\tag{1.55}$$

Die Fourierreihe der Sägezahnfunktion lautet also

$$x(t) = \frac{h}{2} - \frac{h}{\pi} \left\{ \frac{\sin \omega t}{1} + \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \dots \right\}.\tag{1.56}$$

In Bild 1-16 sind die Näherungen mit den N ersten Teilschwingungen ($N=1, 2, 3$) punktiert eingetragen.

1.3.4.3 Konvergenz

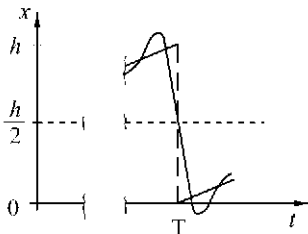


Bild 1-17
Konvergenz an einer Sprungstelle

Fourierreihen für stückweise glatte Funktionen konvergieren. An Sprungstellen (im Bild 1-16 also bei $t = kT$, k ganze Zahl) konvergiert die Reihe gegen das arithmetische Mittel aus den beiden Werten links und rechts von der Sprungstelle (im Beispiel gegen $h/2$), unabhängig davon, welchen Wert man dort x zugeordnet hat. Links und rechts von der Sprungstelle schwingt die Reihe über, vgl. Bild 1-17. (Deshalb schreibt man in (1.43) oft $\approx$ statt $=$.) Der

Bereich des Überschwingens lässt sich durch höhere Gliederzahl zeitlich zusammendrücken, doch nie vollständig unterdrücken; Gibbssches Phänomen*.

1.3.4.4 Die komplexe Fourierreihe

Die komplexe Fourierreihe ist formal einfacher als die reelle. An Stelle von (1.43) setzt man für die periodische Funktion $x(t) = x(t+T)$ an

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}_n e^{jn\omega t}, \quad \omega = 2\pi/T; \quad (1.57)$$

damit sind die $\hat{x}_n$ komplexe Fourierkoeffizienten.

Multiplikation beider Seiten von (1.57) mit $e^{-jm\omega t}$ und Integration über t von t_0 bis t_0+T (über eine Periode) liefert wegen der Orthogonalität,

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{j\omega(n-m)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ T & \text{für } n = m \end{cases}, \quad (1.58)$$

die Fourierkoeffizienten, vgl. (1.46), (1.47),

$$\hat{x}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jn\omega t} dt. \quad (1.59)$$

1.3.4.5 Hinweise zur komplexen Fourierreihe

1. Die Benennung *komplexe Fourierreihe* besagt, dass die Reihe mit den komplexwertigen Funktionen $\exp(jn\omega t)$ angeschrieben wurde. Die Fourierkoeffizienten $\hat{x}_n$ sind – auch bei reellem $x(t)$ – in der Regel komplex, vgl. Punkte 3. bis 5. unten.
2. Die Spektraldarstellungen aus Abschnitt 1.3.4.1, die Hinweise 3, 4, 7 aus Abschnitt 1.3.4.2 sowie die Aussagen zur Konvergenz in 1.3.4.3 werden sinngemäß hierher übertragen.
3. Für reelles $x(t)$ folgt aus (1.59)

$$\hat{x}_{-n} = \hat{x}_n^*, \quad (1.60)$$

$\hat{x}_{-n}$ ist konjugiert komplex zu $\hat{x}_n$ (das bedeutet der Stern bei $\hat{x}_n^*$).

4. Ist $x(t)$ eine gerade Funktion,

$$x(-t) = x(t), \quad (1.61)$$

* Josiah Willard Gibbs (* 11. Februar 1839 in New Haven, Connecticut; † 28. April 1903 ebenda) war ein US-amerikanischer Physiker.

reell oder komplex, so folgt aus (1.59)

$$\hat{x}_{-n} = \hat{x}_n. \quad (1.62)$$

Ist $x(t)$ gleichzeitig reell, so folgt das auch aus (1.60) und (1.62) für die $\hat{x}_n$, denn

$$\text{Im } \hat{x}_n = 0. \quad (1.63)$$

5. Ist $x(t)$ eine ungerade Funktion,

$$x(-t) = -x(t), \quad (1.64)$$

reell oder komplex, so folgt aus (1.59)

$$\hat{x}_{-n} = -\hat{x}_n. \quad (1.65)$$

Ist $x(t)$ gleichzeitig reell, so sind nach (1.60) und (1.65) die $\hat{x}_n$ imaginär, denn

$$\text{Re } \hat{x}_n = 0. \quad (1.66)$$

1.3.4.6 Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Fourierreihe

Setzt man gemäß der Eulerschen Formel (1.15) $\exp(j\omega t) = \cos \omega t + j \sin \omega t$ in (1.57) ein, so erhält man durch Umordnen

$$x(t) = \hat{x}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(\hat{x}_n + \hat{x}_{-n}) \cos n\omega t + j(\hat{x}_n - \hat{x}_{-n}) \sin n\omega t]. \quad (1.67)$$

Vergleich von (1.67) mit (1.43) liefert den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der beiden Formen der Fourierreihe:

$$\hat{x}_0 / 2 = \hat{x}_0, \quad \hat{x}_{cn} = \hat{x}_n + \hat{x}_{-n}, \quad \hat{x}_{sn} = j(\hat{x}_n - \hat{x}_{-n}) \quad (1.68)$$

und

$$\hat{x}_0 = \hat{x}_0 / 2, \quad \hat{x}_n = \frac{\hat{x}_{cn} - j\hat{x}_{sn}}{2}, \quad \hat{x}_{-n} = \frac{\hat{x}_{cn} + j\hat{x}_{sn}}{2}. \quad (1.69)$$

1.3.5 Zeitliche Mittelwerte und besondere Bezeichnungen

Mittelwerte

Der *Gleichwert* $\bar{x}$ (vgl. Abschnitt 1.3.4.2, Punkt 2), auch *linearer* oder *arithmetischer Mittelwert*, ist definiert durch

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt. \quad (1.70)$$

Der *Effektivwert* x_{eff} , auch *quadratischer Mittelwert*, ist definiert durch

$$x_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt} . \quad (1.71)$$

Die Lage des Zeitintervalls $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, also der Zeitpunkt t_0 , kann rechengünstig gewählt werden.

Besondere Bezeichnungen

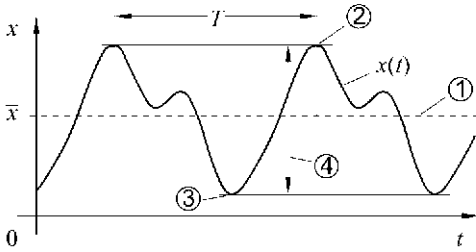


Bild 1-18
Besondere Benennungen

In Bild 1-18 bedeuten:

- ① Gleichwertachse,
- ② Maximalwert $x_{\max}$, auch Größt-, Spitzen- oder Gipfelwert,
- ③ Minimalwert $x_{\min}$, auch Kleinst- oder Talwert. Auf ① bezogen heißen ② und ③ auch oberer bzw. unterer Scheitelwert,
- ④ Schwingungsbreite $x_n := x_{\max} - x_{\min}$.

1.4 Nichtperiodische Schwingung

Eine *nicht-* oder *unperiodische Schwingung* ist eine (deterministische) Schwingung, deren Zeitverlauf $x(t)$ sich nicht (ständig) wiederholt.

1.4.1 Fastperiodische Schwingung

Eine Überlagerung, eine Summe, von harmonischen Schwingungen unterschiedlicher Perioden (und damit Frequenzen) heißt *fastperiodische Schwingung*, zum Beispiel

$$x(t) = \frac{\hat{x}_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \hat{x}_{cr} \cos \omega_r t + \sum_{r=1}^{\infty} \hat{x}_{sr} \sin \omega_r t. \quad (1.72)$$

Dabei sind ω_r irgendwelche Frequenzen und die $\hat{x}_{cr}, \hat{x}_{sr}$ sind Zahlen, für die die Reihen konvergieren.

Lassen sich in (1.72) die ω_r als Linearkombinationen von endlich vielen (inkommensurablen*) Basisfrequenzen ω_{Bj} schreiben, zum Beispiel

$$\omega_r = k \omega_{B1} + l \omega_{B2} + m \omega_{B3}, \quad k, l, m \text{ ganz}, \quad (1.73)$$

so spricht man von einer *quasiperiodischen Schwingung*.

1.4.2 Modulierte Schwingung

Aus der harmonischen Schwingung $x = \hat{x} \cos \varphi$, vgl. (1.1) und (1.4), entsteht eine *modulierte Schwingung*, wenn man die Amplitude $\hat{x}$ oder die Phase φ durch einen modulierenden Vorgang zeitlich ändert:

$$x = x_M(t) \cos \varphi_M(t). \quad (1.74)$$

Die Schwingung heißt *sinnverwand*t oder *sinnähnlich*, wenn sich $x_M(t)$ und $[\varphi_M(t) - (\omega t + \varphi_0)]$ verglichen mit $\varphi = \omega t + \varphi_0$ nur langsam mit der Zeit ändern.

Amplitudenmodulierte Schwingung

Beispiel: Sei in

$$x = x_M(t) \cos(\omega_T t + \varphi_{0T}) \quad (1.75)$$

der modulierende Vorgang selbst eine harmonische Schwingung:

$$x_M = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \cos(\omega_M t + \varphi_{0M}) = \hat{x}_1 [1 + m \cos(\omega_M t + \varphi_{0M})]. \quad (1.76)$$

Hier stehen ω_T und ω_M für die *Träger-* bzw. die *Modulationskreisfrequenz*, $m := \hat{x}_2 / \hat{x}_1$ ist der *Modulationsgrad*. Einsetzen von x_M aus (1.76) in (1.75) liefert nach trigonometrischer Umformung für x die spektrale Darstellung, die Summe seiner Harmonischen:

$$x = \hat{x}_1 \left\{ \cos(\omega_T t + \varphi_{0T}) + \frac{m}{2} \cos[(\omega_T - \omega_M)t + (\varphi_{0T} - \varphi_{0M})] + \right. \\ \left. + \frac{m}{2} \cos[(\omega_T + \omega_M)t + (\varphi_{0T} + \varphi_{0M})] \right\}. \quad (1.77)$$

Stehen die beiden Frequenzen ω_T, ω_M in einem rationalen Verhältnis, ist $x(t)$ periodisch.

Bild 1-19a zeigt den Zeitverlauf für $\hat{x}_1 = 1, \hat{x}_2 = 1.7, \omega_T : \omega_M = 50 : \pi, \varphi_{0T} = \varphi_{0M}$, Bild 1-19b zeigt das zugehörige Spektrum.

* Zwei Zahlen heißen *kommensurabel*, wenn sie ganzzahlige Vielfache einer dritten Zahl sind. Andernfalls sind sie *inkommensurabel*.

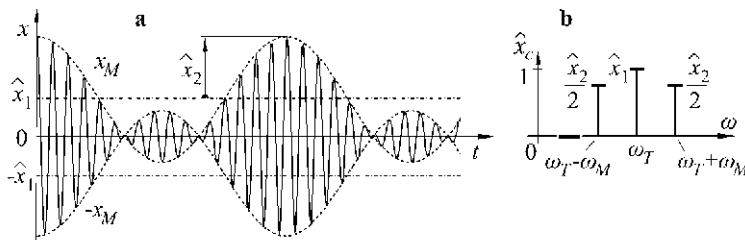


Bild 1-19
Amplitudenmodulierte Schwingung.
a Zeitverlauf $x(t)$,
b Spektrum

Winkelmodulierte Schwingung

Beispiel: Werde in

$$x = \hat{x} \cos(\omega_T t + \varphi_{0T} + \Delta\varphi(t)) \quad (1.78)$$

die Phase $\varphi(t)$ harmonisch moduliert:

$$\Delta\varphi = \Delta\hat{\varphi} \cos(\omega_M t + \varphi_{0M}); \quad (1.79)$$

$\Delta\hat{\varphi}$ heißt Phasenhub. Vereinfachende trigonometrische Umformungen sind nicht möglich. Man kann jedoch eine *momentane Kreisfrequenz* $\dot{\varphi}$ anschreiben:

$$\dot{\varphi} = \omega_T - \omega_M \cdot \Delta\hat{\varphi} \sin(\omega_M t + \varphi_{0M}). \quad (1.80)$$

Bild 1-18 zeigt eine phasenmodulierte Schwingung mit $\hat{x} = 1$, $\omega_T : \omega_M = 20 : \pi$, $\Delta\hat{\varphi} = 3$, $\varphi_{0T} = \varphi_{0M} = 0$.

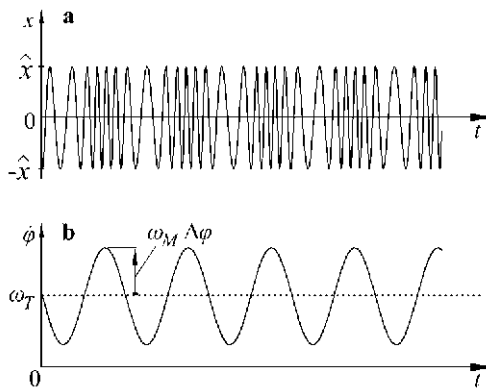


Bild 1-20
Phasenmodulierte Schwingung. a Zeitverlauf $x(t)$,
b momentane Kreisfrequenz

1.4.3 Schwebung

Sei $x(t)$ die Summe zweier harmonischer Schwingungen

$$x(t) = \hat{x}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) + \hat{x}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}) \quad (1.81)$$

mit nahe beieinander liegenden Kreisfrequenzen. Sei $\omega_1 > \omega_2$. Mit der Differenzfrequenz bzw. der Summenfrequenz

$$\omega_d := \omega_1 - \omega_2, \quad \omega_s := \omega_1 + \omega_2 \quad (1.82)$$

soll also $\omega_d \ll \omega_s$ gelten. Drückt man ω_1, ω_2 durch ω_d und ω_s aus und setzt das Ergebnis in (1.81) ein, so erhält man durch trigonometrische Entwicklung

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{x}_1 \cos\left(\frac{\omega_s + \omega_d}{2} t + \varphi_{01}\right) + \hat{x}_2 \cos\left(\frac{\omega_s - \omega_d}{2} t + \varphi_{02}\right) = \\ &= \left[\hat{x}_1 \cos\left(\frac{\omega_d t}{2} + \varphi_{01}\right) + \hat{x}_2 \cos\left(\frac{\omega_d t}{2} - \varphi_{02}\right) \right] \cos\frac{\omega_s t}{2} - \\ &= \left[\hat{x}_1 \sin\left(\frac{\omega_d t}{2} + \varphi_{01}\right) - \hat{x}_2 \sin\left(\frac{\omega_d t}{2} - \varphi_{02}\right) \right] \sin\frac{\omega_s t}{2}. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Zusammenfassung gemäß (1.7) bis (1.10) liefert

$$x(t) = x_S(t) \cdot \cos\left(\frac{\omega_s}{2} t + \psi(t)\right), \quad (1.84)$$

wo

$$x_S(t) = \sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 2 \hat{x}_1 \hat{x}_2 \cos(\omega_d t + \varphi_{01} - \varphi_{02})}, \quad (1.85)$$

$$\tan \psi(t) = \frac{\hat{x}_1 \sin\left(\frac{\omega_d t}{2} + \varphi_{01}\right) - \hat{x}_2 \sin\left(\frac{\omega_d t}{2} - \varphi_{02}\right)}{\hat{x}_1 \cos\left(\frac{\omega_d t}{2} + \varphi_{01}\right) + \hat{x}_2 \cos\left(\frac{\omega_d t}{2} - \varphi_{02}\right)}. \quad (1.86)$$

Die Funktion $x_S(t)$ schwingt langsam mit der Differenzfrequenz ω_d , die dann auch *Schwingungsfrequenz* heißt. Die Funktion $x_S(t)$ hüllt den Kosinus ein, der seinerseits mit

$$\left(\frac{\omega_s}{2} t + \psi(t)\right)' = \frac{1}{2} \omega_s + \frac{1}{2} \omega_d \frac{\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2}{x_S^2(t)}, \quad (1.87)$$

also rasch schwingt. Die Maxima und Minima von $x_S(t)$ liegen bei

$$x_{S\max} = |\hat{x}_1| + |\hat{x}_2|, \quad x_{S\min} = \left| |\hat{x}_1| - |\hat{x}_2| \right|. \quad (1.88)$$

Vorgänge dieser Art heißen *Schwebungen*. (Zwei gegeneinander leicht verstimmte Geigenseiten liefern gemeinsam einen "schwebenden" Ton, seine Lautstärke schwankt mit der Differenzfrequenz.)

Für $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 := \hat{x}$ erhält man die *reine Schwebung*

$$x(t) = \underbrace{2 \cos \frac{\omega_d t + \varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}}_{x_s(t)} \sin \frac{\omega_s t + \varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}. \quad (1.89)$$

Nur für rationale Frequenzverhältnisse $\omega_1 : \omega_2$ sind Schwebungen periodisch (s. Abschnitt 1.3.2). Bild 1-21 zeigt eine Schwebung für $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$.

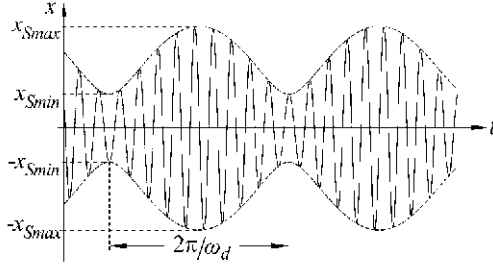


Bild 1-21
Schwebung

1.4.4 Exponentiell wachsende und schwindende Schwingung

Die Schwingung

$$x(t) = A e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi_0) = x_M(t) \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1.90)$$

ist ein sinusverwandter Vorgang (s. DIN 5483, Teil 1). Die Parameter ω und φ_0 sind konstant und heißen, wie bisher, *Kreisfrequenz* bzw. *Nullphasenwinkel*, obwohl $x(t)$ *nicht periodisch* ist. (Deshalb nach DIN 1311 auch z. B. *Quasi-Kreisfrequenz* ω .) Die Konstante A dient in der Regel, gemeinsam mit φ_0 , zum Anpassen an vorgegebene Anfangsbedingungen (s. Abschnitt 5.3.1). Der Parameter σ heißt *Ankling-* oder *Wuchskoeffizient*, wenn positiv, $\sigma > 0$. Die (modulierte) Amplitude $x_M(t)$, und damit die Schwingung, *wachsen* exponentiell, die Schwingung *klingt an* (DIN 5483), s. Bild 1-22a.

Weil besonders wichtig (s. Abschnitt 5.3.2), führt man für $\sigma < 0$ den *Abklingkoeffizienten*

$$\delta := -\sigma \text{ und } x_M := A e^{-\delta t} \quad (1.91)$$

ein. Amplitude $x(t)$ und *Schwingung* schwinden für $\delta > 0$ exponentiell, die Schwingung *klingt ab*, s. Bild 1-22b.

Es kann zweckmäßig sein (σ, ω) bzw. (δ, ω) komplex zusammenzufassen,

$$\lambda := \sigma + j\omega \text{ bzw. } \lambda := -\delta + j\omega \quad (1.92)$$

und $x(t)$ als Projektion eines (auf einer Spirale statt einem Kreis) umlaufenden Drehzeigers auf die reelle Achse zu sehen (ähnlich Bild 1-6):

$$x(t) = \operatorname{Re} A e^{(\lambda t + j\varphi_0)}. \quad (1.93)$$

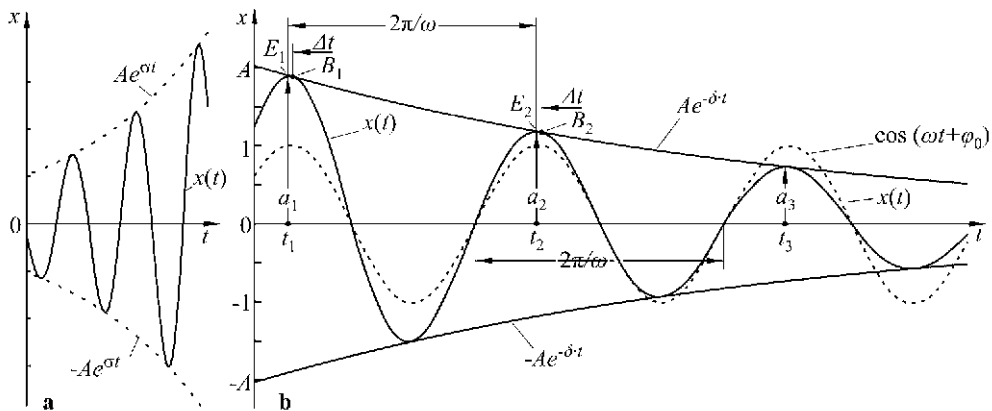


Bild 1-22

Schwingung. a exponentiell wachsend (anklingend), b exponentiell schwindend (abklingend)

In Bild 1-22b sind eingetragen: Die Trägerschwingung $\cos(\omega t + \varphi_0)$ gestrichelt, die Einhüllenden $\pm A \exp(-\delta \cdot t)$, die Schwingung $x(t)$, die *positiven relativen Extrema* E_k mit den zugehörigen Auslenkungen

$$a_k := x(t_k), \quad (1.94)$$

die (positiven) Berührungspunkte B_k von Schwingung $x(t)$ und Einhüllender $A \exp(-\delta \cdot t)$, zweimal die Quasi-Periode $2\pi/\omega$ als zeitlichen Abstand zweier aufeinander folgender gleichsinniger Nulldurchgänge von $x(t)$ bzw. der Extrema E_1, E_2 . (Nur die Nullstellen, die Extrema und die Berührungspunkte wiederholen sich im Abstand der Quasi-Periode.)

Logarithmisches Dekrement

Man greift aus Bild 1-22b zwei Auslenkungen a_k und a_{k+n} , Abstand n , heraus und logarithmiert ihren Quotienten. Damit erhält man das *logarithmische Dekrement* (den logarithmischen Abfall)

$$\Lambda := \frac{1}{n} \ln \left(\frac{a_k}{a_{k+n}} \right) \text{ und } \Lambda = \frac{2\pi}{\omega} \delta. \quad (1.95)$$

1.5 Aufgaben

Aufgabe 1-1: Phasenvergleich gleichfrequenter Schwingungen. Für die Sinusschwingungen $x_i(t)$ in Abschnitt 1.2.2 sind neben der gemeinsamen Frequenz ω und den Amplituden $\hat{x}_i$ die Phasenverschiebungswinkel $\varphi_{0i} - (0.5, -0.3, 2.1, 4.0, -3.6, 8.0)$ rad gegeben. Wählen Sie eine der Schwingungen als Referenzschwingung und bestimmen Sie die diesbezüglichen Phasenverschiebungswinkel (Vor- oder Nachteilwinkel) der anderen (Skizzen!).

Aufgabe 1-2: Addition gleichfrequenter Schwingungen. Für die beiden Sinusschwingungen $x_i(t)$ in Abschnitt 1.2.2 sind neben der gemeinsamen Frequenz die beiden Amplituden $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ und die Nullphasenwinkel $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ gegeben. Berechnen Sie die Amplitude $\hat{x}$ und den Nullphasenwinkel φ_0 der Summe in allgemeiner Form und speziell für $\hat{x}_2 = 2 \hat{x}_1, \varphi_{01} = 60^\circ, \varphi_{02} = -60^\circ$.

Aufgabe 1-3: Geben Sie zwei Funktionen mit gemeinsamer Periode T an, deren Summe eine kleinere Periode hat (vgl. Abschnitt 1.3.2), zum Beispiel die Periode $T/3$.

Aufgabe 1-4: Gegeben seien drei periodische Funktionen, deren Perioden T_i sich wie $T_1 : T_2 : T_3 = n_1 : n_2 : n_3$ verhalten, n_i – ganze Zahlen. Wie lautet die gemeinsame Periode? (Abschnitt 1.3.2)

Aufgabe 1-5: Rechnen Sie die Orthogonalitätsrelationen (1.45) nach.

Aufgabe 1-6: Skizzieren Sie für die Schwingungen nach Bild 1-13 für $\hat{x}_1 = 1$ die Spektren der Amplituden und Nullphasenwinkel sowie die der Fourierkoeffizienten.

Aufgabe 1-7: Erfülle $x(t)$ die Periodizitätsbedingung $x(t + T/2) = -x(t)$. Zeigen Sie, dass in der Fourierreihe alle Glieder mit geradzahligem Index verschwinden. Man nennt $x(t)$ dann ungerade-harmonisch.

Aufgabe 1-8: Welche besondere Periodizität besitzt eine Funktion $x(t)$, deren Fourierreihe nur Glieder mit geradzahligem Index enthält?

Aufgabe 1-9: Kontrollieren Sie die in (1.55) angegebenen Fourierkoeffizienten der Sägezahnfunktion. (Wie sieht das Spektrum aus?)

Aufgabe 1-10: Werten Sie mit Hilfe eines Digitalrechners die Fourierreihe (1.56) der N ersten Teilschwingungen aus und verfolgen Sie in Diagrammen ähnlich Bild 1-14, wie mit wachsendem N in der Umgebung der Sprungstelle der Bereich des Überschwings zwar schmaler und schmaler wird, der Übersprung jedoch erhalten bleibt.

Aufgabe 1-11: Kontrollieren Sie die Aussagen (1.58) und (1.59).

Aufgabe 1-12: Überprüfen Sie in Abschnitt 1.3.4.5 die Aussagen 3, 4 und 5.

Aufgabe 1-13: Zeigen Sie, dass der Effektivwert einer harmonischen Schwingung $x_{\text{eff}} = \hat{x} / \sqrt{2}$ beträgt. Wie groß ist der Effektivwert von $x = \hat{x}(\cos \omega t + \sin 2 \omega t)$, wie groß der von $\dot{x}$?

Aufgabe 1-14: Sei in der amplitudenmodulierten Schwingung $x(t)$ nach (1.77) das Frequenzverhältnis rational, $\omega_T : \omega_M = n : m, n, m$ – ganze Zahlen. Welche Periode T hat $x(t)$?

Aufgabe 1-15: Skizzieren Sie die reine Schwebung nach (1.89).

Aufgabe 1-16: Führen Sie die Projektion (1.93) aus (Skizzen für $\sigma > 0$ und $\delta > 0$!).

Aufgabe 1-17: Zeigen Sie, dass in Bild 1-22b gleichsinnige Nulldurchgänge sowie Extrema E_k und Berührungspunkte B_k im Abstand der Quasi-Periode wiederkehren.

Aufgabe 1-18: Wie kann man aus einem gemessenen Verlauf $x(t)$, vgl. Bild 1-22b, die Parameter δ und ω ermitteln? Kann man statt mit den a_k in (1.95) auch mit den Auslenkungen an den Berührungspunkten arbeiten? Ist es hilfreich, $x(t)$ für $x(t) > c > 0$ halb-logarithmisch aufzutragen?

II Maschinen und Geräte unter dynamischer Last

Am Beispiel der Bodenkräfte einer arretierten Rüttelmaschine und des Auswuchtens eines starren, starr gelagerten Rotors wird ein systematisches Vorgehen zur Lösung von Kinetikaufgaben dargelegt.

2 Bodenkräfte einer Rüttelmaschine

2.1 Aufgabenstellung

Für den in Bild 2-1 schematisch dargestellten Rüttler (Baumaschine zur Bodenverdichtung) sollen die auf den Boden wirkenden Kräfte berechnet werden, die entstehen, wenn die Maschine in arretiertem Zustand (vgl. *Transportbolzen T*) angelassen wird.

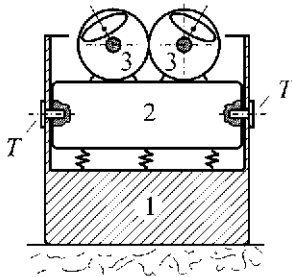


Bild 2-1

Rüttler, bestehend aus 1-Bodenplatte, 2-Schwingkörper, 3-Unwuchträder (Zahnräder mit aufgesetzten Unwuchtmassen), *T*-Transportbolzen (zur Arretierung)

2.2 Lösung

2.2.1 Allgemeines Lösungsvorgehen

Berechnungsaufgaben sind häufig reine Textaufgaben (ohne Schemaskizze): Der Bearbeiter muss oft erst herausfinden, was der Fragesteller *eigentlich* wissen will.

Die Lösung erfolgt in etwa 7 Stufen:

1. Modell entwerfen
2. Gleichungen ansetzen
3. Systemparameter beschaffen
4. Evtl. Rechnerprogramm schreiben
5. System simulieren (Gleichungen lösen)
6. Ergebnisse interpretieren
7. Untersuchung schriftlich festhalten

Jede der Stufen 1 – 7 erfordert in der Regel das Lösen von mehreren Teilaufgaben. Man kann sie oft nicht nacheinander abarbeiten, sondern wird parallel vorgehen, weil man sein System erst während des LöSENS *richtig* kennen lernt.

2.2.2 Entwurf des Modells

Schritt 1.1: Modell gegen Umgebung abgrenzen (am besten durch eine gedachte *Hüllfläche*) und idealisieren (s. Bild 2-2)

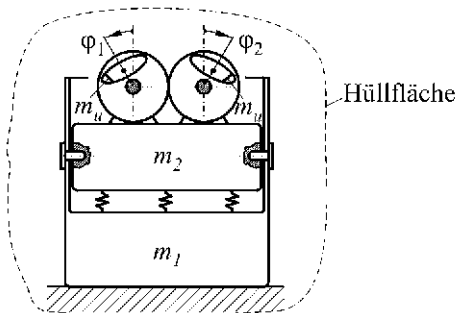


Bild 2-2: Rüttler als abgegrenztes System

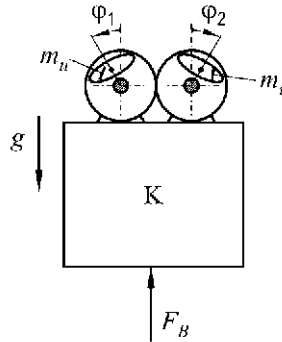


Bild 2-3: Rüttler: Ersatzsystem

Annahmen:

- Durch die Hüllfläche werden die Gewichtskräfte auf die Maschine und die Vertikalkräfte auf den starren, waagerechten Boden übertragen.
- Bodenplatte (m_2) und Schwingkörper (m_1) sind starr.
- Unwuchträder (Zahnräder) laufen mit

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \Omega t \quad (2.1)$$

gleichförmig um: $\Omega = \text{const.}$ (Dies ist ein Modell für das Verhalten des Antriebsmotors.)

Schritt 1.2: Oft fasst man die Annahmen in einem *Ersatzsystem* – einem Strichbild – zusammen. Dem Ersatzsystem *weist* man dann die *Eigenschaften* zu, die das Modell haben soll;

Schritt 1.3: Schnittkräfte (und -momente) einführen.

Bild 2-3 zeigt das vom Boden freigeschnittene Ersatzsystem. Bodenplatte, Masse m_1 und Schwingkörper (samt Zahnräder), Masse m_2 , bilden einen starren Körper K der Masse $m = m_1 + m_2$. Die gesuchten Kräfte zwischen Boden und Bodenplatte sind als Bodenkraft F_B zusammengefasst. Ferner zeigt das Bild 2-4 auch die beiden Unwuchtmassen m_u , deren Schwerpunkte S_{u1} , S_{u2} den in Bild 2-3 nicht eingetragenen Abstand r (= Exzentrizität) von der jeweiligen Drehachse haben.

2.2.3 Gleichgewichtsbedingungen

Schritt 2.1: Lageplan für Koordinaten und Kinematik skizzieren:

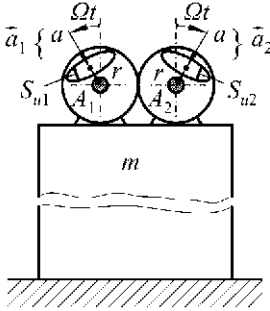


Bild 2-4

Rüttler: Lageplan

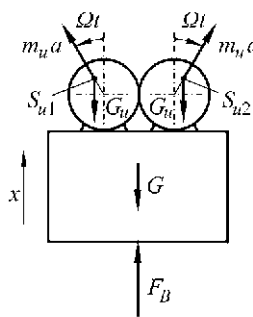


Bild 2-5

Rüttler mit äußeren einschließlich d'Alembertschen Kräften

Bild 2-4 zeigt den Lageplan. Der Körper ruht im Inertialsystem. Die beiden Schwerpunkte S_{u1} , S_{u2} laufen auf Kreisen vom Radius r mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um. Beide erfahren die Zentripetalbeschleunigungen

$$a = \Omega^2 r \quad (2.2)$$

auf den Drehpunkt A_1 bzw. A_2 zu. (Die beiden Zentripetalbeschleunigungen $\bar{a}_1$ und $\bar{a}_2$ haben dieselbe Maßzahl.

Schritt 2.2: Schnittbild mit allen wirkenden Kräften (und Momenten) einschließlich der d'Alembertschen skizzieren.

Bild 2-5 enthält: F_B – Bodenkraft, $G = mg = (m_1 + m_2)g$ – Gewicht von Bodenplatte und Schwingkörper, $G_u = m_u g$ – Gewichte der Unwuchtmassen m_u , und die beiden gegen $\bar{a}$ wirkenden d'Alembertschen Kräfte $m_u \bar{a}$, in Vektorform $-m_u \bar{a}_1$, $-m_u \bar{a}_2$.

Schritt 2.3: Gleichgewichtsbedingungen formulieren: Für das Körpersystem nach Bild 2-5 lauten die Gleichgewichtsbedingungen (der Koordinatenpfeil x deutet die positive Richtung an):

$$\sum F_{xi} = 0: \quad F_B - G - 2G_u + 2m_u r \Omega^2 \cos \Omega t = 0. \quad (2.3)$$

Wegen des angenommenen symmetrischen Laufs der Maschine treten (nach außen) keine horizontalen Kräfte und Momente auf.

2.2.4 Beschaffen der Systemparameter

Falls es den Rüttler bereits gibt: Firmenangaben; Massen wiegen, Unwucht messen.

Falls es vom Rüttler nur Zeichnungen gibt, muss man die Massen und die Schwerpunktlagen berechnen.

2.2.5 Rechnerprogramm

Hier evtl. nur erforderlich, um Abhebezeitpunkte oder Zeitverläufe zu berechnen (vgl. Aufgaben unten).

2.2.6 Rechenergebnis/Interpretation

Diese Aufgabe ist sehr einfach. Aus Gleichung (2.3) folgt

$$F_B = G + 2 G_u - 2 m_u r \Omega^2 \cos \Omega t. \quad (2.4)$$

Darin ist

$$G_{ges} = G + 2 G_u \quad (2.5)$$

das Gesamtgewicht. Das *statische Moment*

$$U := m_u r \quad (2.6)$$

nennt man oft *Unwucht* (m_u – Unwuchtmasse, Exzentermasse; r – Exzentrizität, häufig schreibt man e statt r). Man fasst das Ergebnis (2.4) zusammen:

$$F_B = G_{ges} - \hat{F} \cos \Omega t, \quad (2.7)$$

$\hat{F} = 2 m_u r \Omega^2$ – Amplitude, Ω – Kreisfrequenz der Sinusschwingung.

Bild 2-6 zeigt den Zeitverlauf der Bodenkraft F_B / G_{ges} für $\hat{F} / G_{ges} = (0.2, 0.8, 1.1)$. Falls $\hat{F} / G_{ges} > 1$, also $2 m_u r \Omega^2 > G_{ges}$, hebt die Rüttelmaschine vom Boden ab, aus unseren Gleichungen ergibt sich $F_B < 0$. Unsere Annahmen bleiben nur dann sinnvoll, falls der Rüttler am Boden verankert ist, anderenfalls ist das Modell ungültig.

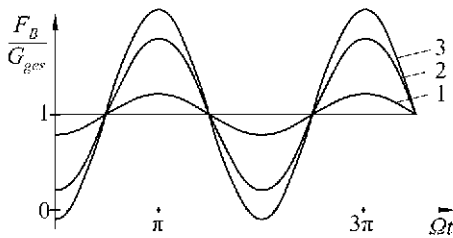


Bild 2-6

Rüttler: relative Bodenkraft F_B / G_{ges} für

$\hat{F} / G_{ges} = (0.2, 0.8, 1.1)$

2.2.7 Aufzeichnung

Das schriftliche Festhalten einer Untersuchung kann zum Beispiel in der hier vorliegenden Form geschehen. Wichtig ist es, Annahmen auch in Worte zu fassen, weil man sonst nach einiger Zeit nicht mehr erkennt, was man überlegt hat.

2.3 Aufgaben

Aufgabe 2-1: Wie kann man die Unwucht $U = m_u r$ messen?

Aufgabe 2-2: Beim Zusammenbau des Rüttlers wurden die Zahnräder versehentlich um ein paar Zähne – um den Winkel α – versetzt zusammengesteckt. Wie wirkt sich das auf die Bodenkraft $F_B(t)$ aus? Schreiben Sie ein Computerprogramm, das Ihnen $F_B(t)$ aufzeichnet. Welche zusätzlichen Kräfte und Momente werden nun auf den Boden ausgeübt? Welche zusätzlichen Parameter brauchen Sie, um diese Größen zu berechnen?

Aufgabe 2-3: Am vom Motor mit konstanter Drehgeschwindigkeit Ω angetriebenen linken Zahnrad brechen ein paar Zähne aus. Zufällig findet der Bauarbeiter ein paar alte Räder, doch statt 22 Zähne haben sie 20 und 24 (selber Modul; der Achsabstand ist fest; das 24er Rad passt auf die linke Welle). Wie läuft der (nach wie vor) arretierte Rüttler? (Gleichung (2.1), übrige Fragen wie bei Aufgabe 2-2.)

Aufgabe 2-4: Welche Modelle würden Sie für den Fall entwerfen, dass der Rüttler vom Boden abhebt? (Frage geht über Stoff der Vorlesung hinaus.)

3 Auswuchten starrer Rotoren

3.1 Aufgabenstellung

Infolge von Fertigungsungenauigkeiten und von Unregelmäßigkeiten im Werkstoff liegt der Schwerpunkt S des Rotors nach Bild 3-1 nicht auf der Drehachse A, B, sondern exzentrisch im Abstand r_S davon. Außerdem liegen die Trägheitshauptachsen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ nicht senkrecht bzw. parallel zur Drehachse. Bei Rotation, bei Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit Ω , entstehen in den Lagern Kräfte. Solche Kräfte müssen vermieden, mindestens so klein wie möglich gemacht werden.

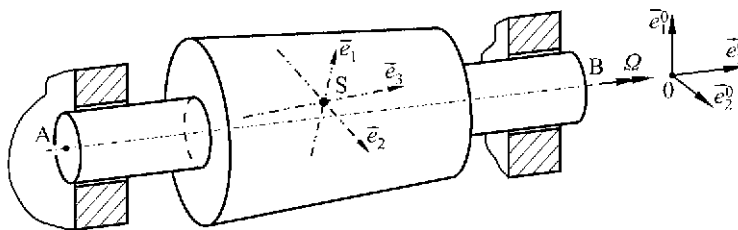


Bild 3-1

Starrer Rotor mit exzentrischem Schwerpunkt und schräg liegenden Trägheitshauptachsen; Basis $(0, \vec{e}_1^0, \vec{e}_2^0, \vec{e}_3^0)$

Man hat es mit zwei Teilaufgaben zu tun:

1. Wie groß sind die Lagerkräfte?
2. Welche (Wucht-) Massen muss man hinzufügen (Ort und Größe) oder wegnehmen (z. B. durch Bohrungen oder Anfräsungen), um die Lagerkräfte zu verringern?

Das *allgemeine Lösungsvorgehen* nach Abschnitt 2.2.1 gilt auch hier.

3.2 Modell

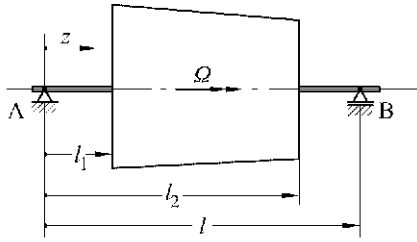


Bild 3-2
Starrer Rotor: Ersatzsystem

Modell abgrenzen und idealisieren. Bild 3-2 zeigt das Ersatzsystem. Es enthält folgende *Annahmen*:

- Der Rotor ist starr.
- Die Lager sind starr.
- Die Lagerkräfte *greifen* an den Zapfenachsen an (es wirken keine Reibmomente!).
- Es wirken keine äußeren Kräfte.
- Auch das Gewicht bleibt unberücksichtigt, weil es nur konstante Beiträge zu den Lagerkräften liefern würde.

3.3 Gleichgewichtsbedingungen

3.3.1 Lageplan, Koordinaten, Kinematik

Wir betrachten auf zwei verschiedene Weisen die *unsymmetrische* Massenverteilung des starren Rotors, die zu den Lagerkräften führt:

- a) Der Schwerpunkt S des Rotors mit der Masse m liegt bei l_s im Abstand r_s von der Drehachse A–B in Bild 3-3. Die Achse $\vec{e}_z$ der *körperfesten Basis* $(S, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ liegt *parallel* zu A–B, und bezogen auf diese Basis hat der Rotor die Trägheitsmomente $J_{xx}, J_{xy}, J_{xz}, J_{yy}, J_{yz}, J_{zz}$, vgl. Abschnitt A.2.4 mit (x, y, z) anstelle von (x_1, x_2, x_3) .

Mit dieser Darstellungsweise a) arbeiten wir zuerst.

- b) Bei der zweiten Beschreibungsweise der unsymmetrischen Massenverteilung erfassen wir die Schwerpunktlage wie in Bild 3-3, doch statt der achsparallelen Basis $(S, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ wählen wir die Basis der *Hauptachsen* $(S, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, wie sie in Bild 3-1 angedeutet sind. Dann treten an die Stelle der oben sechs Trägheitsmomente die drei Hauptträgheitsmomente J_1, J_2, J_3 , doch müssen wir zusätzlich die Winkellage von $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ gegenüber dem Inertialsystem $(0, \vec{e}_1^0, \vec{e}_2^0, \vec{e}_3^0)$ vermaßen (vgl. Aufgabe 3-4).

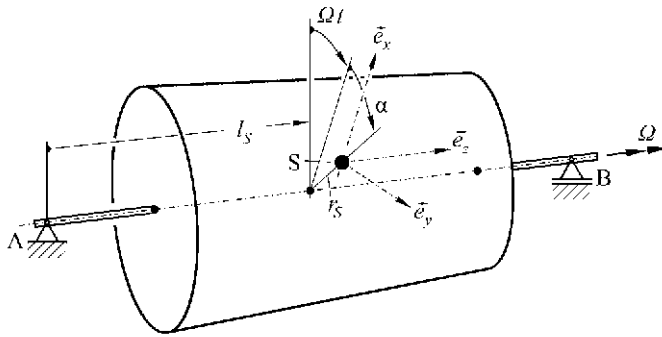


Bild 3-3
Starrer Rotor mit körperfester
Basis $(S, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, $\vec{e}_z$ achs-
parallel

In der Darstellungsweise a) gelten, vgl. Bild 3-3:

- Ωt - Drehwinkel, gemessen von der Vertikalen gegen den rotorfesten Bezugsstrahl, der parallel zu $\vec{e}_x$ durch A – B führt.
- α - Winkellage des Schwerpunkts gegen Bezugsstrahl.
- r_S - Exzentrizität des Schwerpunkts S.
- l_S - Abstand des Schwerpunkts von Lager A

3.3.2 Schwerpunktbeschleunigung und Drall

Bezogen auf die drehende Basis $(S, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ nach Bild 3-3 gilt für die Schwerpunktbeschleunigung (Zentripetalbeschleunigung)

$$\vec{a}_S = -\Omega^2 \vec{r}_S \quad (3.1)$$

mit

$$\vec{r}_S = r_S \vec{e}_x \cos \alpha + r_S \vec{e}_y \sin \alpha. \quad (3.2)$$

In (3.2) hängen nur $\vec{e}_x = \vec{e}_x(t)$ und $\vec{e}_y = \vec{e}_y(t)$ explizit von der Zeit ab: Von der *drehenden Basis* gesehen ist der Vektor(pfeil) $\vec{a}_S$ fest (er dreht mit!).

Um den auf $(S, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ bezogenen Drall $\vec{L} = \vec{\bar{J}} \cdot \vec{\omega}$ zu berechnen, vgl. Abschnitt A.3.2, brauchen wir den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$,

$$\vec{\omega} = \vec{e}_z \Omega \quad (3.3)$$

und den Trägheitstensor $\vec{\bar{J}}$

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{J}} = & \left(\ddot{\vec{e}}_x J_{xx} + \ddot{\vec{e}}_y J_{yx} + \ddot{\vec{e}}_z J_{zx} \right) \vec{e}_x \\
& + \left(\dot{\vec{e}}_x J_{xy} + \dot{\vec{e}}_y J_{yy} + \dot{\vec{e}}_z J_{zy} \right) \dot{\vec{e}}_y \\
& + \left(\ddot{\vec{e}}_x J_{xz} + \ddot{\vec{e}}_y J_{yz} + \ddot{\vec{e}}_z J_{zz} \right) \vec{e}_z.
\end{aligned} \quad (3.4)$$

Man erhält den mit $\vec{e}$ umlaufenden Drall(pfeil)

$$\vec{L} = (J_{xx} \Omega \vec{e}_x + J_{yz} \Omega \vec{e}_y + J_{zz} \Omega \vec{e}_z). \quad (3.5)$$

Für das d'Alembertsche Moment $(-\dot{\vec{L}})$ brauchen wir die Ableitung

$$\dot{\vec{L}} = (J_{xx} \Omega \dot{\vec{e}}_x + J_{yz} \Omega \dot{\vec{e}}_y + J_{zz} \Omega \dot{\vec{e}}_z)^*. \quad (3.6)$$

Da die $J \dots$ und Ω konstant sind, erhält man

$$\dot{\vec{L}} = J_{xx} \Omega \dot{\vec{e}}_x + J_{yz} \Omega \dot{\vec{e}}_y + J_{zz} \Omega \dot{\vec{e}}_z. \quad (3.7)$$

Für die Zeitableitung $\dot{\vec{e}}$ des Dreibein $\vec{e}$ gilt

$$\dot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times \vec{e}, \text{ also } \dot{\vec{e}}_x = \Omega \vec{e}_y, \quad \dot{\vec{e}}_y = -\Omega \vec{e}_x, \quad \dot{\vec{e}}_z = \vec{0}. \quad (3.8)$$

Damit folgt aus (3.7)

$$\dot{\vec{L}} = -J_{yz} \Omega^2 \vec{e}_x + J_{xz} \Omega^2 \vec{e}_y. \quad (3.9)$$

Man sieht: $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$, falls die Deviationsmomente J_{xz} und J_{yz} verschwinden, falls die Drehachse A–B parallel zu einer Trägheitshauptachse liegt (vgl. Abschnitt A.3.2).

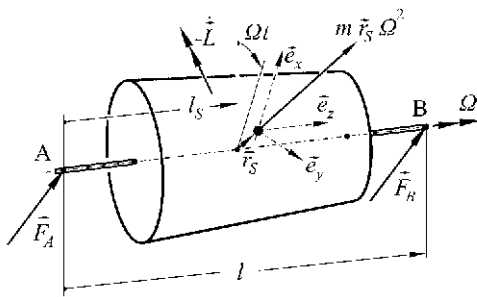


Bild 3-4
Starrer Rotor: Freikörperbild mit Lager- und Trägheitskräften

3.3.3 Lagerkräfte

Das Freikörperbild – Bild 3-4 – enthält die d'Alembertsche (Trägheits-)Kraft $-m \ddot{a}_S = m \bar{r}_S \Omega^2$ und das d'Alembertsche (Trägheits-)Moment $-\dot{\bar{L}}$ sowie die Lagerkräfte $\bar{F}_A, \bar{F}_B$ in der Form

$$\bar{F}_A = \bar{e}_x F_{xA} + \bar{e}_y F_{yA}, \quad \bar{F}_B = \bar{e}_x F_{xB} + \bar{e}_y F_{yB}. \quad (3.10)$$

Aus den Momentengleichgewichten um die Lagerpunkte A und B folgt

$$\sum \bar{M}_i^{(A)} = \bar{0}: \quad (l \bar{e}_z) \times \bar{F}_B + (l_S \bar{e}_z) \times (-m \ddot{a}_S) + \left(-\dot{\bar{L}} \right) = \bar{0}, \quad (3.11)$$

$$\sum \bar{M}_i^{(B)} = \bar{0}: \quad (-l \bar{e}_z) \times \bar{F}_A + (-(l-l_S) \bar{e}_z) \times (-m \ddot{a}_S) + \left(-\dot{\bar{L}} \right) = \bar{0}. \quad (3.12)$$

Multiplikation beider Gleichungen von links mit $\bar{e}_z \times$ liefert mit (3.1) und (3.9) für die Kraft auf den linken Lagerzapfen

$$l \bar{F}_A = - \left[(l-l_S) m \bar{r}_S + J_{xz} \bar{e}_x + J_{yz} \bar{e}_y \right] \Omega^2, \quad (3.13)$$

für die Kraft auf den rechten Lagerzapfen

$$l \bar{F}_B = - \left[l_S m \bar{r}_S - J_{xz} \bar{e}_x - J_{yz} \bar{e}_y \right] \Omega^2. \quad (3.14)$$

3.4 Diskussion der Lagerkräfte infolge Unwucht

1. Anschauliche Deutung

Für eine Diskussion der Lagerkräfte infolge Unwucht zeichnen wir das Freikörper-Bild 3-4 noch einmal und tragen d'Alembertsche Kraft und Moment an dem zu einer *Strichskizze* vereinfachten Rotor in der Form von Pfeilen und Maßzahlen ein, vgl. Bild 3-5.

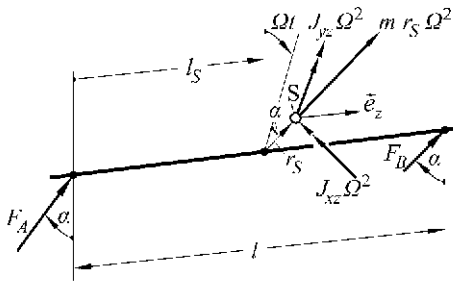


Bild 3-5
Starrer Rotor: Strichskizze mit Lager- und Trägheitskräften

Die Glieder mit den Deviationsmomenten deuten wir mit Bild 3-6 als Fliehkraftmomente. Gemäß (A.83) gelten

$$\Omega^2 J_{xz} = -\Omega^2 \int x z \, dm, \quad \Omega^2 J_{yz} = -\Omega^2 \int y z \, dm. \quad (3.15)$$

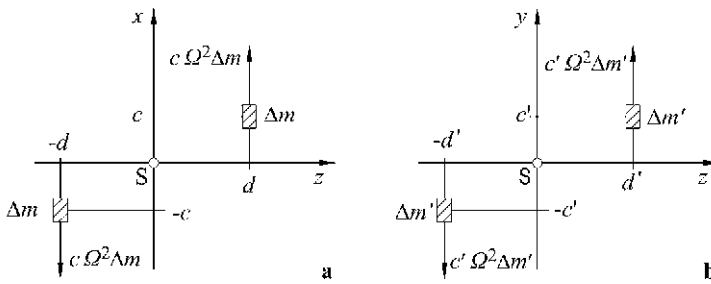


Bild 3-6

Punktmassen. a in der x - z -Ebene, b in der y - z -Ebene

Als Beispiele, siehe Bild 3-6, seien je zwei Punktmassen Δm bzw. $\Delta m'$ symmetrisch zum Schwerpunkt S in die x - z -Ebene bzw. die y - z -Ebene gelegt, Orte (c, d) und $(-c, -d)$ bzw. (c', d') und $(-c', -d')$. (Die $\Delta m, \Delta m'$ liegen symmetrisch zu S, damit sie dessen Lage nicht beeinflussen.)

Für diese Punktmassenpaare gilt:

$$J_{xz} = -2 c d \Delta m, \quad J_{yz} = -2 c' d' \Delta m'. \quad (3.16)$$

Andererseits erhält man die Fliehkräfte $c \Omega^2 \Delta m$ bzw. $c' \Omega^2 \Delta m'$ und – bezüglich S – die Fliehkraftmomente

$$\Omega^2 J_{xz} = -2 c d \Delta m \Omega^2, \quad \Omega^2 J_{yz} = -2 c' d' \Delta m' \Omega^2 \quad (3.17)$$

mit den in Bild 3-5 gezeigten Orientierungen.

Kennt man also $m r_s, J_{xz}, J_{yz}$ und Ω^2 , so kann man $\vec{F}_A, \vec{F}_B$ sich anhand von Bild 3-5 leicht anschaulich klar machen. (Eine formale Lösung hat man mit (3.13), (3.14).)

2. Bedeutung der Kräfte und Momente

Die an den Lagern merk- und messbaren Kräfte sind Folge zweier Ursachen:

1. Der Schwerpunkt S ist aus der Drehachse herausgerückt. Dies wirkt sich im Schwerefall so aus, dass sich – bei sehr geringer Lagerreibung – der Rotor mit seinem Schwerpunkt nach unten dreht. Man kann diese Unwucht also auch beim nichtdrehenden Rotor bemerken und nennt sie deshalb *statische Unwucht*.
2. Liegt der Schwerpunkt S auf der Drehachse, entfällt die statische Unwucht. Doch bei $\Omega \neq 0$ können Lagerkräfte aus den Deviationsmomenten entstehen. Weil die nur bei $\Omega \neq 0$ beobachtet werden können, spricht man jetzt von *kinetischer Unwucht*.

Alle Unwuchtkräfte laufen mit dem Rotor um. Bei starrem Rotor und starren Lagern sind sie *rotorfest*. Aus den Unwuchten folgen für den Rotor also zeitunabhängige (konstante) Kräfte, Biegemomente – also Spannungsbeanspruchungen.

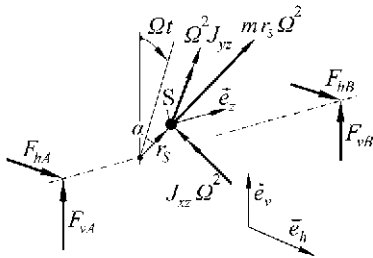


Bild 3-7

Starrer Rotor: Lagerkräfte in nichtdrehendem Bezugssystem

Anders sieht es mit den Lagerkräften $\vec{F}_A, \vec{F}_B$ aus, die man vom festen – nichtdrehenden – Bezugssystem sehen muss, wenn man ihre Wirkung *aus der Maschine heraus* bewerten will. Bild 3-7 zeigt die Zerlegung von $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ in Richtung der festen Vektoren $\vec{e}_v$ – vertikal, $\vec{e}_h$ – horizontal.

Mit Bild 3-7 oder auch nach (3.13), (3.14) mit Bild 3-4 folgen (ohne Gewichtsanteile):

$$\begin{aligned}
 l F_{vA} &= -m(l-l_S)r_S\Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha) - (J_{xz} \cos \Omega t - J_{yz} \sin \Omega t)\Omega^2, \\
 l F_{hA} &= -m(l-l_S)r_S\Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha) - (J_{xz} \sin \Omega t + J_{yz} \cos \Omega t)\Omega^2, \\
 l F_{vB} &= -m l_S r_S \Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha) + (J_{xz} \cos \Omega t - J_{yz} \sin \Omega t)\Omega^2, \\
 l F_{hB} &= -m l_S r_S \Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha) + (J_{xz} \sin \Omega t + J_{yz} \cos \Omega t)\Omega^2.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Vom festen System her gesehen, führen die Unwuchten zu Wechsellasten.

3.5 Das Wuchten

Durch das Anbringen – oder Wegnehmen – von Ausgleichsmassen versucht man, die Unwuchtlasten zu verringern. (Das Wegnehmen – durch Bohren, Fräsen usw. – von Ausgleichsmassen sehen wir als Hinzufügen von *negativen* Ausgleichsmassen.) Man spricht vom *Wuchten*.

Es gibt zwei Sichtweisen des Wuchters:

1. Fliehkräfte der hinzugefügten Massen heben die Lagerkräfte auf.
2. Hinzugefügte Massen verschieben den Schwerpunkt auf der Drehachse und drehen die Hauptachse in die Drehachse.

Vorgehen

Bei der Konstruktion von Rotoren sieht man Plätze zum Anbringen von Ausgleichsmassen (*Wuchtgewichten*) vor. (Beim Kfz-Rad z. B. die beiden Felgenränder.) Im allgemeinen muss man mindestens zwei Punktmassen m_1 und m_2 in unterschiedlichen Abständen von den Lagern anbringen, z. B. in den Wuchtebenen 1 und 2 bei, l_1 und l_2 , in Bild 3-2.

Nimmt man an, dass diese Massen in den Ebenen 1 und 2 sitzen, analog zu $\vec{r}_S$ für den Schwerpunkt S auf den *Spitzen* der Vektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$, so kann man die Gleichungen (3.13) und (3.14) um die entsprechenden Glieder ergänzen und erhält

$$l \vec{F}_A + (l - l_S) m \Omega^2 \vec{r}_S + (J_{xz} \vec{e}_x + J_{yz} \vec{e}_y) \Omega^2 + (l - l_1) m_1 \Omega^2 \vec{r}_1 + (l - l_2) m_2 \Omega^2 \vec{r}_2 = \vec{0}, \quad (3.19)$$

$$l \vec{F}_B + l_S m \Omega^2 \vec{r}_S - (J_{xz} \vec{e}_x + J_{yz} \vec{e}_y) \Omega^2 + l_1 m_1 \Omega^2 \vec{r}_1 + l_2 m_2 \Omega^2 \vec{r}_2 = \vec{0}. \quad (3.20)$$

Hieraus folgen zwei Vorgehensweisen:

1. Man fordert formal $\vec{F}_A = \vec{0}$, $\vec{F}_B = \vec{0}$ und erhält aus (3.19) und (3.20) zwei Gleichungen für $m_1 \vec{r}_1$ und $m_2 \vec{r}_2$ (das sind *statische Momente*). Hierzu ist allerdings die Kenntnis der Schwerpunktlage sowie von J_{xz}, J_{yz} erforderlich. (Man kann das Vorgehen als obige Sichtweise 2 einordnen).
2. Man hat zunächst $\vec{F}_A =: \vec{S}_A \Omega^2$, $\vec{F}_B =: \vec{S}_B \Omega^2$ – gewissermaßen als Lösungen von (3.13) und (3.14) – die statischen Momente $\vec{S}_A, \vec{S}_B$ gemessen. Dann folgen aus (3.19), (3.20) für verschwindende (resultierende) Lagerkräfte

$$-l \vec{S}_A \Omega^2 + (l - l_1) m_1 \Omega^2 \vec{r}_1 + (l - l_2) m_2 \Omega^2 \vec{r}_2 = \vec{0}, \quad (3.21)$$

$$-l \vec{S}_B \Omega^2 + l_1 m_1 \Omega^2 \vec{r}_1 + l_2 m_2 \Omega^2 \vec{r}_2 = \vec{0} \quad (3.22)$$

und

$$m_1 \vec{r}_1 = \frac{l_2 \vec{S}_A - (l - l_2) \vec{S}_B}{l_2 - l_1}, \quad m_2 \vec{r}_2 = \frac{l_1 \vec{S}_A - (l - l_1) \vec{S}_B}{l_2 - l_1}. \quad (3.23)$$

Aus diesen Gleichungen liest man sofort ab: Sollen die Ausgleichsmassen klein sein, müssen die Wuchtebenen einen möglichst großen Abstand $(l_2 - l_1)$ haben und die Wuchtradien $|\vec{r}_1|$ und $|\vec{r}_2|$ möglichst groß sein.

Achtung auf Vorzeichen: Am Lager misst man die Reaktionskräfte $-\vec{F}_A$ und $-\vec{F}_B$!

3.6 Aufgaben

Aufgabe 3-1: Für das praktisch *ebene* Speichenrad nach Bild 3-8, Masse $m = 50$ kg, Durchmesser 1 m, wurde $\vec{S} = (25.0 \vec{e}_x + 17.0 \vec{e}_y)$ gm gemessen ($\vec{e}_x, \vec{e}_y$ körperfest). Die Ausgleichsmassen dürfen nur (in Nuten) auf den drei Speichen angebracht werden. Zur Verfügung stehen Passstücke von 20 g. Wie gleichen Sie die Unwucht aus?

Aufgabe 3-2: Zum Wuchten wird das Speichenrad aus Aufgabe 3-1 auf die Welle nach Bild 3-9 gesteckt ($l = 800$ mm, $l_S = 1100$ mm). Bei der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 20$ rad/s wird, von der Welle auf das Lager B wirkend, horizontal der Kraftverlauf $F_{hB} = \hat{F} \cos(\Omega t + \varphi_0)$ gemessen (Orientierung vgl. Bild 3-7), mit $\hat{F} = 21.0$ N, $\varphi_0 = 30^\circ$.

(Zur Zeit $t = 0$ weise $\vec{e}_x$ senkrecht nach oben, vgl. Bild 3-8.) Wie gleichen Sie die Unwucht aus?

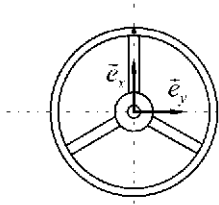


Bild 3-8
Speichenrad

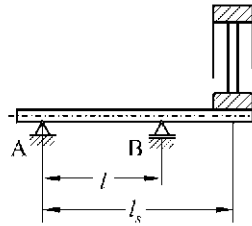


Bild 3-9
Speichenrad auf Welle

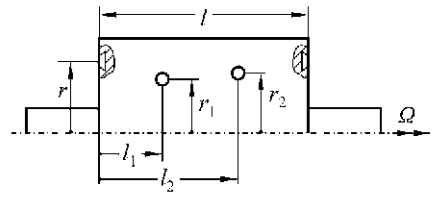


Bild 3-10
Rotor mit Fehlstellen

Aufgabe 3-3: Der Rotor nach Bild 3-10, $l = 700$ mm, hat bei $(r_1, l_1) = (200$ mm, 250 mm) eine Fehlstelle mit $\Delta m_1 = -20$ g und bei $(r_2, l_2) = (320$ mm, 480 mm) eine mit $\Delta m_2 = -15$ g. Dabei ist Δm_2 gegenüber Δm_1 in positive Drehrichtung um 60° versetzt. Welche Zusatzmassen muss man in Schwalbenschwanznuten ($r = 350$ mm) bringen, um den Rotor auszuwuchten? (Stückelung der Massen 10 g.)

Aufgabe 3-4: Der Rotor nach Bild 3-11 sei rotationssymmetrisch und bereits ideal ausgewuchtet (Masse m , Massenmomente $J_1 - J_2, J_3$; Längen l_s, l). Wegen eines exzentrischen inneren Lauftrings im rechten Wälzlager läuft der Zapfen B jedoch auf einem Kreis mit dem Radius r ($r/l \ll 1$) um. Welche Kräfte wirken auf die Lager?

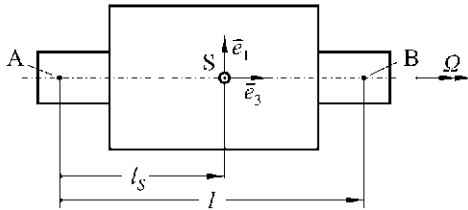


Bild 3-11
Rotor in unrundem Lauftring

Lösungshinweis: Es ist zweckmäßig, das linke Lager A als *festen Bezugspunkt* zu wählen. Wir arbeiten mit den Kippwinkeln nach Anhang A.1.3.4. Die rotorfeste Basis $(A, \vec{e}_1^A, \vec{e}_2^A, \vec{e}_3^A)$ falle mit $(0, \vec{e}_1^2, \vec{e}_2^2, \vec{e}_3^2)$ nach Bild A-8 zusammen. $\vec{e}^A$ dreht gegenüber $\vec{e}^0$, vgl. Bild 3-1. Für den Neigungswinkel ψ gilt $\sin \psi := r/l$, in linearer Näherung, bei $r/l \ll 1$, $\psi = r/l$. Mit dem Knotenwinkel $\chi := \pi/2 + \Omega t$ kippt die Rotorachse bei $t = 0$ mit dem Winkel ψ um $\vec{e}_2^0$ und läuft dann auf dem Kegel mit dem Öffnungswinkel 2ψ um die Lagerachse $\overline{AB} \parallel \vec{e}_3^0$. Die Rotordrehung folgt mit $\varphi := \Omega t$. Dann gilt gemäß (A.26), (A.29)

$$\vec{e}^A = \mathbf{R}_G \vec{e}^O, \text{ mit } \mathbf{R}_G = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t & -\psi \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ \psi \cos \Omega t & \psi \sin \Omega t & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Aus (A.61), (A.63) folgen mit $(\dot{\chi}, \dot{\psi}, \dot{\phi}) = (\Omega, 0, \Omega)$

$$\vec{\omega} = -\vec{e}_1^A \psi \Omega + \vec{e}_3^A \Omega. \quad (3.25)$$

Der auf A bezogene Trägheitstensor lautet

$$\vec{\vec{J}}^A = \vec{e}_1^A J_{11}^A \vec{e}_1^A + \vec{e}_2^A J_{22}^A \vec{e}_2^A + \vec{e}_3^A J_{33}^A \vec{e}_3^A, \quad (3.26)$$

wo (nach Steiner)

$$J_{11}^A = J_{22}^A = J_{11} + m l_S^2. \quad (3.27)$$

Aufgabe 3-5: Formulieren Sie die Lösungsansätze zu Aufgabe 3-4 mit Hilfe von Euler- und von Kardanwinkeln.

III Schwinger mit einem Freiheitsgrad

Lineare Schwinger mit einem Freiheitsgrad stehen am Anfang der Schwingungslehre. Deren Begriffe bauen weitgehend auf der systematischen Untersuchung des Einmassenschwingers auf. Aber auch über das Schwingungsverhalten technischer Systeme kann man oft mit einem Modell von einem Freiheitsgrad einen Überblick gewinnen, der Beobachtungen an der Maschine erklärt und Eingriffe nahe legt, zum Beispiel, um unerwünschte Schwingungen zu verringern.

In Kapitel 4 führt eine maschinendynamische Aufgabe auf einen Einmassenschwinger, der anschließend in den Abschnitten 4, 5, 6 systematisch abgehandelt wird.

4 Vertikalschwingungen eines Paares gekoppelter Exzenterpressen

4.1 Aufgabenstellung

Bild 4-1 zeigt zwei Exzenterpressen 1, 2 auf einem gemeinsamen Rahmen 3, der auf 8 nachgiebigen Stützelementen 5 auf dem Maschinenhausboden 4 steht.

Die beiden Pressen werden von einem gemeinsamen Motor über Zahnriemen mit $\varphi(t)$ gegenläufig so angetrieben, dass sich die Massenmomente und horizontalen Massenkräfte ausgleichen (s. Bild 4-1). In vertikaler Richtung verbleiben die Massenkräfte von Kurbel, Pleuel und Stößel (Kolben). Außerdem wird dem Maschinenhausboden von Nachbarmaschinen eine Vertikalbewegung $u(t)$ aufgezwungen.

Gesucht sind die Vertikalbewegungen des Rahmens und die Kräfte auf die Federelemente.

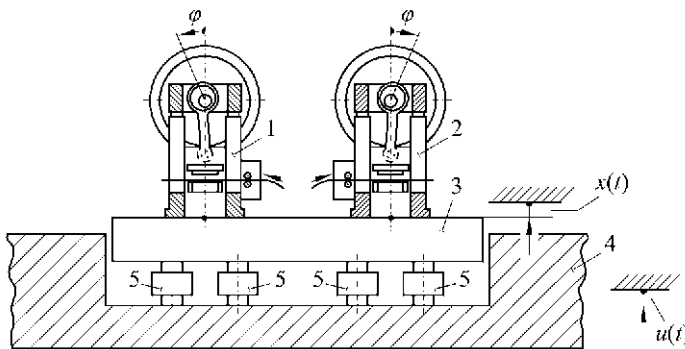


Bild 4-1
Exzenterpressen auf gemeinsamem Rahmen; Auslenkungen $x(t)$ und $u(t)$

4.2 Modell

4.2.1 Vereinfachende Annahmen

In Bild 4-1 ist das System bereits aus seiner Umgebung herausgeschnitten (die am Maschinenhausboden angreifenden Schnittkräfte sind nicht angezeigt).

Die Biegeverformungen von Bodenplatte und Rahmen sollen in dem betrachteten Frequenzbereich vernachlässigbar klein sein, beide werden als starre Körper angesehen. Wegen der gegenläufigen Arbeitsweise der Pressen entfällt ein Kippen. Dann können wir die Vertikalbewegung der Bodenplatte mit $u(t)$ messen und die Absenkung des Rahmens mit $x(t)$ erfassen. Sowohl $u(t)$ als auch $x(t)$ seien Auslenkungen in einem Inertialsystem, bei $x = 0$, $u = 0$ seien die Federelemente entspannt.

Für den Antrieb nehmen wir einen *idealen* Motor mit $\varphi = \Omega t$, $\Omega = \text{konstant}$, unabhängig von den jeweils wirkenden Massen- und Presskräften an.

4.2.2 Die Stütz- oder Federelemente

Die *Stütz- oder Federelemente* bestehen im allgemeinen aus Paketen von Schraubenfedern, Tellerfedern, auch Ringfedern, irgendwelchen gummielastischen Elementen und Dämpfern (z. B. Reib-Elementen). Ihr *Verhalten* erfasst man häufig durch eine (gemessene) Kennlinie, vgl. Bild 4-2.

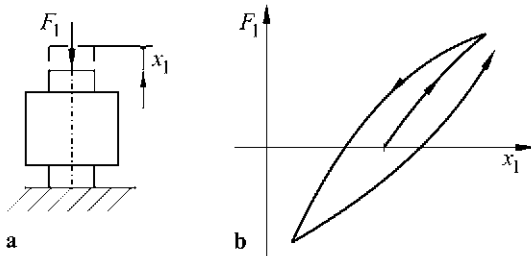


Bild 4-2
Stützelement. a schematisch, b Kennlinie als Verhaltensmodell

Da eine solche Kennlinie die *parallele* Wirkung von Federn und Dämpfern (*Reibern*) erfasst, kann man die Kraft F_1 nicht einfach als Funktion der Auslenkung x_1 angeben. Man muss für das Federelement ein *Strukturmodell* entwickeln, das seinen *Aufbau*, die *parallele* Wirkung von Feder und Dämpfer wiedergibt. Bild 4-3 zeigt den einfachsten Fall, dass sich $F_1 = F_1(x_1, \dot{x}_1)$ als Summe

$$F_1 = F_{F1}(x_1) + F_{D1}(\dot{x}_1) \quad (4.1)$$

schreiben lässt, wo $F_{F1}(x_1)$ und $F_{D1}(\dot{x}_1)$ je für sich die *Verhaltensmodelle* für *Feder* und *Reiber* (Dämpfer) in Form der vom Hersteller gelieferten Kennlinien nach Bild 4-4 a bzw. b sind.

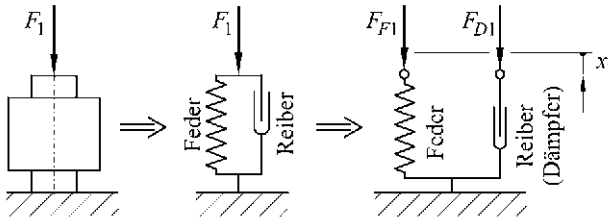


Bild 4-3
Strukturiertes Federelement

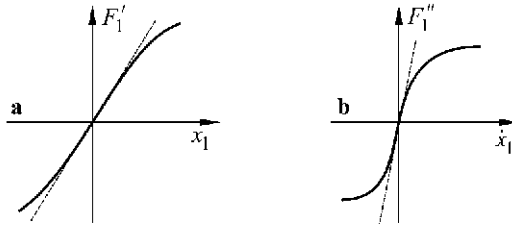


Bild 4-4
Nichtlineare Kennlinien. a Feder, b Dämpfer

Kann man sich keine Kennlinien $F_{F1}(x_1)$ oder $F_{D1}(\dot{x}_1)$ beschaffen, muss man erneut – und feiner – strukturieren, bei der Feder, zum Beispiel, auf Einzelheiten der Form und Abmessungen sowie auf das Hookesche Gesetz (als Verhaltensmodell) zurückgreifen; eine *Formel* mag helfen, wenn man sie durchschaut und ihr traut.

Untersuchungen mit *nichtlinearen* Kennlinien nach Bild 4-3 wird man *nur* durchführen, wenn man es unbedingt muss, *denn*

1. die Untersuchungen nichtlinearer Systeme sind sehr mühselig und praktisch nur mit Computer möglich,
2. die Ergebnisse sind sehr schwer zu durchschauen und erfordern Vertrautheit mit solchen Aufgaben.

Deshalb *linearisiert* man (um den Nullpunkt), d. h., man legt bei $x_1 = 0$ bzw. $\dot{x}_1 = 0$ eine Tangente an die Federkennlinie $F_{F1}(x_1)$ bzw. die Dämpferkennlinie $F_{D1}(\dot{x}_1)$, in Bild 4-4 gestrichelt, und erhält

$$F_{F1} = k_1 x_1 \text{ bzw. } F_{D1} = b_1 \dot{x}_1. \quad (4.2)$$

An die Stelle von Bild 4-3 tritt nun Bild 4-5.

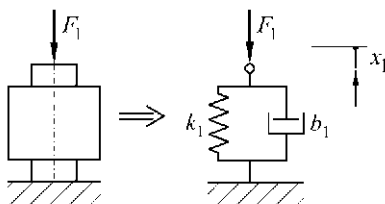


Bild 4-5
Lineares Stützelement, k_1 – Federsteifigkeit,
 b_1 – Dämpfungskoeffizient

Bei der Parallelschaltung von acht Federelementen an unseren Exzenterpressen gilt

$$l \sin \beta = r \sin \varphi, \text{ also } \cos \beta = \sqrt{1 - (r/l \cdot \sin \varphi)^2}. \quad (4.8)$$

Wegen $r/l < 1$ lässt sich (4.8) stets eindeutig auflösen. (Bei $r/l > 1$ würde die Kurbel sperren.)

Die Beschleunigungen $\ddot{\xi}_k, \ddot{\xi}_p, \ddot{\xi}_s$ folgen durch Differenzieren von (4.7) zu

$$\ddot{\xi}_k = r_k \Omega^2 \cos \varphi, \quad (4.9)$$

$$\ddot{\xi}_p = r \Omega^2 \cos \varphi - l_1 \ddot{\beta} \sin \beta - l_1 \dot{\beta}^2 \cos \beta, \quad (4.10)$$

$$\ddot{\xi}_s = r \Omega^2 \cos \varphi - l \ddot{\beta} \sin \beta - l \dot{\beta}^2 \cos \beta. \quad (4.11)$$

Darin stehen

$$\dot{\beta} \cos \beta = \frac{r}{l} \Omega \cos \varphi \quad \text{und} \quad \ddot{\beta} = -\frac{r}{l} \Omega^2 \frac{\sin \varphi}{\cos \beta} \left(1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \beta} \right) \quad (4.12)$$

als Hilfsgrößen, mit $\cos \beta$ aus (4.8).

4.3.3 Kinetik der Relativbewegungen

Bild 4-8 zeigt die *Trägheitskräfte* und das *Moment* infolge der *Relativbewegungen*

an der Kurbel der Masse m_k : $m_k \ddot{\xi}_k$, $m_k \ddot{y}_k$,

am Pleuel durch die Masse m_p : $m_p \ddot{\xi}_p$, $m_p \ddot{y}_p$, durch das Trägheitsmoment J_p : $J_p \ddot{\beta}$,

am Stößel der Masse m_s : $m_s \ddot{\xi}_s$, $m_s \ddot{y}_s$

jeweils gegen die (positive) Orientierung der Koordinaten ξ , y und β aus Bild 4-7 eingetragen (vgl. Anhang A).

Die Summe der Relativ-Trägheitskräfte an einer Maschine lautet

$$F_{Trel} = -(m_k \ddot{\xi}_k + m_p \ddot{\xi}_p + m_s \ddot{\xi}_s). \quad (4.13)$$

Mit den oben berechneten Beschleunigungen erhält man

$$\begin{aligned} F_{Trel} &= -\left(\frac{r_k}{r} m_k + m_p + m_s \right) r \Omega^2 \cos \varphi + \left(\frac{l_1}{l} m_p + m_s \right) l \left(\dot{\beta}^2 \cos \beta + \ddot{\beta} \sin \beta \right) \\ &= -\left(\frac{r_k}{r} m_k + m_p + m_s \right) r \Omega^2 \cos \varphi \\ &\quad + \left(\frac{l_1}{l} m_p + m_s \right) \frac{r \Omega^2}{\cos \beta} \frac{r}{l} \left[\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \left(1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \beta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Hiermit sind alle auf das Ersatzsystem nach Bild 4-6, ergänzt um die zweite Maschine, wirkenden Kräfte durch gegebene Größen oder die Koordinaten und ihre Zeitableitungen ausgedrückt. Aus dem Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung folgt in Abschnitt 4.5 die Bewegungsgleichung. Zuvor ziehen wir, *ohne Kenntnis der Bewegungsgleichung*, aus der Form (4.14) der Trägheitskräfte F_T einige technisch relevante Schlüsse.

4.4 Schwingungserregung durch bewegte Massen

Die Trägheitskräfte F_{Trel} hängen gemäß (4.14) explizit von der Zeit ab. Mit $\varphi = \Omega t$ bilden sie eine T -periodische Erregung des Systems, $T = 2\pi / \Omega$. Zwei Fragen treten auf:

1. Wie kann man die Erregungen im Rahmen des vorliegenden Modells, also durch Wahl der Parameter, gezielt beeinflussen, zum Beispiel verringern?
2. Vorbereitend für die spätere Schwingungsuntersuchung: Wie sieht der Zeitverlauf der Erregung im Einzelnen aus?

4.4.1 Reduktion der Erregerkräfte

Die Erregerkraft F_{Trel} nach (4.14) zerlegt man zweckmäßig in zwei Anteile

$$F_{Trel} = F_{Trel}^* + F_{Trel}^{**}, \quad (4.15)$$

mit

$$F_{Trel}^* = -m_{red}^* r \Omega^2 \cos \varphi, \quad F_{Trel}^{**} = m_{red}^{**} r \Omega^2 \frac{\lambda}{\cos \beta} \left[\cos 2\varphi + \lambda^2 \frac{\sin^2(2\varphi)}{4 \cos^2 \beta} \right], \quad (4.16)$$

$\lambda := r/l$ - Stangenverhältnis, und den reduzierten Massen

$$\begin{aligned} m_{red}^* &:= m_s + m_p + \frac{r_k}{r} m_k = m_s \left(1 + \frac{m_p}{m_s} + \frac{r_k}{r} \frac{m_k}{m_s} \right), \\ m_{red}^{**} &:= m_s + \frac{l_1}{l} m_p = m_s \left(1 + \frac{l_1}{l} \frac{m_p}{m_s} \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ganz rechts wurde m_s als größte Masse angenommen und als Referenzgröße für m_p, m_k benutzt (vgl. Abschnitt 0). Die relativen Massen lassen sich bei etwas Erfahrung leichter abschätzen als die absoluten.

Für das Beispiel unten und die Aufgaben seien die *numerischen* Parameter wie folgt gegeben: $m_k/m_s = 0.2$, $m_p/m_s = 0.9$, $r_k/r = 0.5$, $l_1/l = 0.4$, $\lambda = r/l = 0.3$.

Um die Erregerkräfte F_{rel}^*, F_{rel}^{**} bei gegebenen Kurbelradius r und Drehfrequenz Ω klein zu halten, muss man die reduzierten Massen klein halten, also möglichst leicht bauen. Man kann jedoch auch, durch Anbringen von Zusatz- oder Ausgleichsmassen am Achsende von Kurbelarm (oder -wange) bzw. am unteren Ende des Pleuels die *Produkte* $(r_k m_k)$ bzw. $(l_1 m_p)$

minimieren. (Bei der Kurbel lässt sich die Ausgleichsmasse evtl. so wählen, dass $r_k m_k$ negativ und $m_{rel}^* = 0$ wird.) Geringer Bauraum, die Forderung nach geringem Gewicht, aber auch durch die Zusatzmassen erhöhte innere Kräfte auf Lager usw. können einen Massenausgleich einschränken.

Bemerkung: Die vorstehende kurze Diskussion soll (auch) andeuten, dass schon eine sorgfältige Analyse des Systems auf dem Wege zu den Bewegungsgleichungen auf nutzbringende Zusammenhänge und Einsichten führen kann.

4.4.2 Zeitverlauf der Erregung; Fourier-Zerlegung

Aus Gleichung (4.16) liest man ab

$$F_{Trel}^*(t+T) = F_{Trel}^*(t), \quad F_{Trel}^{**}(t+T/2) = F_{Trel}^{**}(t). \quad (4.18)$$

F_{Trel}^* regt das System also mit der *einfachen* Drehfrequenz Ω , F_{Trel}^{**} regt mit der *doppelten* Drehfrequenz 2Ω an. Die Einzelheiten des Zeitverlaufs erfasst man zweckmäßig mit einer Fourier-Reihe oder -Zerlegung. Zweckmäßigerweise zieht man dazu, wie in (4.17), die Stößelmasse m_s auf der rechten Seite von (4.17) heraus, dividiert durch $m_s r \Omega^2$ und betrachtet die (bezogene, d. h.) dimensionslose Erregung

$$f(t) := \frac{F_{Trel}}{m_s r \Omega^2} = - \left(1 + \frac{m_p}{m_s} + \frac{r_k}{r} \frac{m_k}{m_s} \right) \cos \varphi + \left(1 + \frac{l_1}{l} \frac{m_p}{m_s} \right) \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \left[\cos 2\varphi + \lambda^2 \frac{\sin^2(2\varphi)}{4(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)} \right]. \quad (4.19)$$

In allgemeiner Form lautet die Fourierreihe für $f(t)$, vgl. Abschnitt 1.3.4 mit $\omega = \Omega$:

$$f(t) = \frac{\hat{f}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{f}_{cn} \cos n\Omega t + \hat{f}_{sn} \sin n\Omega t) = \frac{\hat{f}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{f}_{cn} \cos n\varphi + \hat{f}_{sn} \sin n\varphi). \quad (4.20)$$

Zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten $\hat{f}_0, \hat{f}_{cn}, \hat{f}_{sn}$ dienen die Formeln (1.46), (1.47). Hier kann man besondere Eigenschaften von $f(t) = f(\varphi)$ zum Vereinfachen der Rechnungen ausnutzen (vgl. die Hinweise in Abschnitt 1.3.4.2). Wegen $f(\varphi) = f(-\varphi)$, die Funktion $f(\varphi)$ ist gerade bezüglich $\varphi = 0$, entfallen in (4.20) die (ungeraden) Sinusglieder. Wegen $f(\varphi - \pi/2) = -f(-(\varphi - \pi/2))$, die Funktion $f(\varphi)$ ist ungerade bezüglich $\pi/2$, entfällt das konstante Glied $\hat{f}_0$; vgl. auch Aufgabe 4-8. Da die zweite Zeile von (4.19) bezüglich $\varphi - \pi$ -periodisch ist, folgt aus der ersten

$$f_{c1} = - \left(1 + \frac{m_p}{m_s} + \frac{r_k}{r} \frac{m_k}{m_s} \right), \quad (4.21)$$

und es gilt $f_{cn} = 0$ für die *ungeraden* $n > 1$. Die $\hat{f}_{cn}$ zu geradzahligem Index n müssen im allgemeinen gemäß (1.47) aus

$$\hat{f}_{cn} = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi \quad (4.22)$$

numerisch berechnet werden.

Alternativ kann man für *kleine Stangenverhältnisse* $r/l = \lambda \ll 1$ die Funktion $f(\varphi, \lambda)$ bezüglich λ in eine Taylorreihe entwickeln. Mit den Gliedern bis λ^5 erhält man

$$f(\varphi) = - \left(1 + \frac{m_p}{m_s} + \frac{r_k}{r} \frac{m_k}{m_s} \right) \cos \varphi + \left(1 + \frac{l_1}{l} \frac{m_p}{m_s} \right) \lambda \left[\left(1 + \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{15}{128} \lambda^4 + \dots \right) \cos 2\varphi - \frac{1}{4} \lambda^2 \left(1 + \frac{3}{4} \lambda^2 + \dots \right) \cos 4\varphi + \frac{9}{128} \lambda^4 (1 + \dots) \cos 6\varphi + \dots \right]. \quad (4.23)$$

Mit den bei (4.17) angegebenen Parametern erhält man die Zahlenwerte

$$\hat{f}_0 = 0, \quad \hat{f}_{c1} = -2.0, \quad \hat{f}_{c2} = 0.426\dots, \quad \hat{f}_{c4} = -0.0097\dots, \quad \hat{f}_{c6} = 0.00023\dots$$

Bild 4-9 zeigt das Linienspektrum der vier ersten cos-Koeffizienten ($\hat{f}_{c4}, \hat{f}_{c6}$ fallen in die Strichstärke der Abszisse).

Bild 4-10 zeigt $f(\varphi)$ für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Zum Vergleich ist $\hat{f}_{c1} \cos \varphi$ eingetragen.

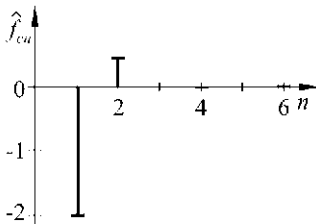


Bild 4-9: Linienspektrum

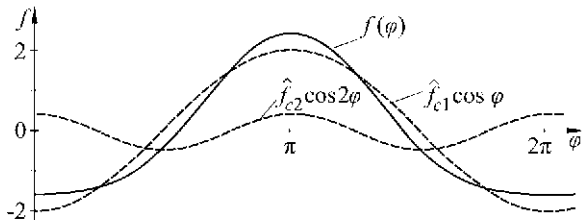


Bild 4-10: Funktionsverlauf

Allgemeine Bemerkungen zu zeitabhängigen Erregungen

Genauso wie die periodischen Erregerkräfte aus hin- und hergehenden oder umlaufenden Massen wird man periodische Fundamentbewegungen $u(t)$ usw. in Fourierreihen entwickeln. Die Fourierentwicklung ist nicht nur zweckmäßig für die unten folgenden Untersuchungen der erzwungenen Schwingungen, sie ermöglicht als Ergebnis einer Messung nicht nur, die Quellen der häufig unerwünschten Schwingungen auszumachen und Abhilfen zu entwickeln, sondern gestattet auch, Schwingungen auf ihre Gefährlichkeit hin zu beurteilen.

4.5 Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungs-Differentialgleichung

4.5.1 Gleichgewicht

Bild 4-11 zeigt das freigeschnittene Ersatzsystem mit der Stützkraft $F = k(x-u) + b(\dot{x}-\dot{u})$ nach (4.3), (4.4), dem Gesamtgewicht $G = mg$, der Gesamt-Trägheitskraft $F_{Tges} = -m\ddot{x} + 2F_{Trel}$, vgl. Abschnitt 4.3.1 und (4.14).

In x -Richtung muss Gleichgewicht herrschen, $\sum F_{xi} = 0$:

$$F_{Tges} + G - F = 0. \quad (4.24)$$

Einsetzen obiger Einzelterme und Ordnen der Glieder liefert

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = mg + 2F_{Trel}(t) + ku(t) + b\dot{u}(t). \quad (4.25)$$

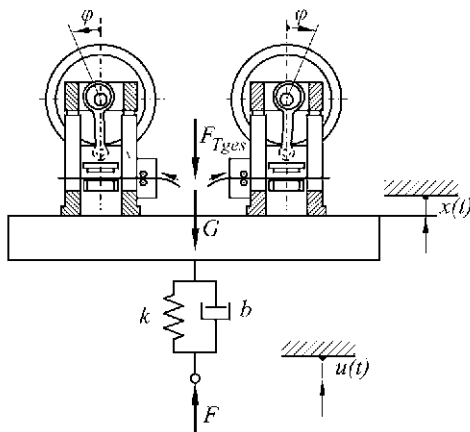


Bild 4-11

Exzenterpresse: Freigeschnittenes Ersatzsystem mit Trägheitskräften und Gewicht

4.5.2 Die Bewegungs-(Differential-)Gleichung

Die Differentialgleichung 2. Ordnung (4.25) für die Bewegung $x(t)$ heißt Bewegungsgleichung. Man kürzt sie mit

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_e(t) \quad (4.26)$$

ab. Auf der rechten Seite steht die *allgemeine Erregerkraft* $F_e(t)$, in unserem Fall also

$$F_e(t) = mg + 2F_{Trel} + ku(t) + b\dot{u}(t). \quad (4.27)$$

Da die Bewegungsgleichung *dimensionsrichtig* ist (sein muss!), haben alle Glieder dieselbe Dimension, hier die einer Kraft. Der physikalische Charakter der Glieder, Federkraft, Dämpfungskraft usw., ist jetzt nebensächlich.

In Handbüchern, Formelsammlungen usw. findet man zu (4.26) das System nach Bild 4-12, den Einmassenschwinger. An diesem Bild werden dann auch die Lösungen gedeutet. Nur im günstigen (Ausnahme-) Fall passen die Deutungen unmittelbar zum eigenen System.

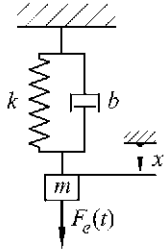


Bild 4-12
Einmassenschwinger

In der Regel braucht man zur Schwingungsuntersuchung ein eigenes Schnittbild (z. B. wie Bild 4-11), das zum System passt.

4.6 Allgemeine Aussagen; Ergänzende Hinweise

4.6.1 Benennungen

Die [oder eine] Differentialgleichung [der Form]

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = F_e(t), \quad (4.28)$$

mit der *linearen* linken Seite

$$L(\ddot{x}, \dot{x}, x) = m \ddot{x} + b \dot{x} + k x, \quad (4.29)$$

heißt *lineare Differentialgleichung*.

Die Funktion $L(\ddot{x}, \dot{x}, x)$ der drei Variablen $(\ddot{x}, \dot{x}, x)$ ist *homogen*, d. h.

$$L(\alpha \ddot{x}, \alpha \dot{x}, \alpha x) = \alpha L(\ddot{x}, \dot{x}, x), \quad (4.30)$$

und *additiv*, d. h.

$$L(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2, \dot{x}_1 + \dot{x}_2, x_1 + x_2) = L(\ddot{x}_1, \dot{x}_1, x_1) + L(\ddot{x}_2, \dot{x}_2, x_2). \quad (4.31)$$

Die (lineare) Differentialgleichung (4.26) – als Funktion der vier Variablen $(\ddot{x}, \dot{x}, x, F_e)$ angesehen – ist für $F_e \neq 0$ bezüglich $(\ddot{x}, \dot{x}, x)$ nicht homogen. Deshalb *unterscheidet* man die *in-* oder *inhomogene lineare Differentialgleichung* (4.26) von der *homogenen linearen Differentialgleichung*

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = 0, \quad (4.32)$$

(die die Bedingung (4.30) erfüllt). Oft braucht man zur inhomogenen Differentialgleichung (4.26) die zugehörige oder zugeordnete homogene Gleichung (4.32), in der man dann – zur Unterscheidung – gelegentlich x_h statt x schreibt.

Aus Sicht der Schwingungslehre beschreibt die lineare inhomogene Differentialgleichung die erzwungenen oder erregten Schwingungen (eines linearen Schwingers), während die homogene Gleichung freie (d. h. nicht erzwungene) Schwingungen erfasst.

Im ersten Fall hängt die Dgl explizit von der Zeit ab, das Schwingungssystem ist also (im Sinne eines Schnittbildes) von *außen beeinflusst* und deshalb *nicht autonom*. Bei homogener Gleichung entfällt die *explizite Zeitabhängigkeit*, das System ist *autonom*.

4.6.2 Überlagerung von Lösungen

Ohne Lösungen der linearen Dgl (4.26) zu kennen, folgt aus der Additivität nach (4.31):

1. Ist $x(t)$ eine beliebige Lösung der inhomogenen Dgl (4.26) und $x_h(t)$ eine (beliebige) Lösung der (4.26) zugeordneten homogenen Dgl (4.32), so ist (auch)

$$x_{ges} = x(t) + x_h(t) \quad (4.33)$$

eine Lösung von (4.26).

2. Sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ beliebige Lösungen von

$$m \ddot{x}_1 + b \dot{x}_1 + k x_1 = F_{e1}(t) \text{ bzw. } m \ddot{x}_2 + b \dot{x}_2 + k x_2 = F_{e2}(t), \quad (4.34)$$

so löst

$$x = x_1(t) + x_2(t) \text{ die Dgl. } m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = F_{e1}(t) + F_{e2}(t). \quad (4.35)$$

Auf diesen beiden *Überlagerungssätzen*, auch *Superpositionsprinzip* genannt, beruht – nach analoger Erweiterung auch umfangreicherer Systeme – ein großer Teil der Theorie der linearen Schwingungen.

4.6.3 Schwinger mit negativer Dämpfung*

Bild 4-13 zeigt einen Reibschwinger, Masse m , Gewicht G , an der Wand C mit einem Feder-Dämpferelement (Parameter k, b_1) aufgehängt, der auf einem schnell laufenden rauen Band, $v \gg |\dot{x}|$, Reibungszahl μ , liegt. Zusätzlich ist ein schräge auf das System wirkender Dämpfer, Dämpfungskoeffizient b_2 angebracht, sodass die *horizontale* Bewegung des Klotzes Einfluss auf die *Normalkraft* zwischen Klotz und Band hat. Im Ausgangszustand, bei $x = 0$, sei die Feder entspannt, die Dämpferstange habe die Länge l und sei unter dem Winkel α geneigt.

Bleibt die Auslenkung x *klein* gegenüber der Länge l , $|x| \ll l$, behält der Zusatzdämpfer am ausgelenkten Klotz (näherungsweise) seine Richtung α . Dann lautet die (lineare) Bewegungsgleichung

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = \mu G, \quad (4.36)$$

wo

* nach Dr.-Ing. Heinz Waltermann, Remscheid

$$b = b_1 + b_2 \cos \alpha (\cos \alpha - \mu \sin \alpha). \quad (4.37)$$

Mit dem *Reibungswinkel* $\rho = \arctan \mu$ kann man (4.37) umformen:

$$b = b_1 + b_2 (\cos \rho + \cos(2\alpha + \rho)) / 2 \cos \rho. \quad (4.38)$$

Zu $\alpha = (-\rho \pm \pi)/2$ folgt

$$b = b_1 - b_2 \frac{(1 - \cos \rho)}{2 \cos \rho}. \quad (4.39)$$

Für $b_2 > 2b_1 \cos \rho / (1 - \cos \rho)$ wird b also negativ.

Bemerkung: Der Dämpfer eines mechanischen Systems *vernichtet* Energie, er *dissipiert*, d. h. zerstreut, sie (letztlich wird sie in Wärme umgewandelt). Ein *negativer* Dämpfungskoeffizient b erfordert *Energiezufuhr*, also eine *Energiequelle*. In obigem Beispiel stammt die – bei negativem b – erforderliche Energie aus dem Antrieb des Bandes. Die beiden Dämpfer dissipieren Energie!

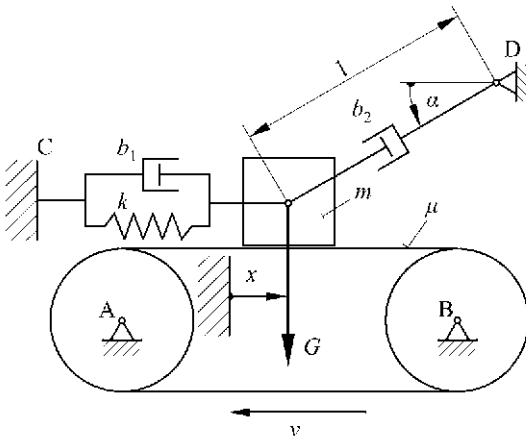


Bild 4-13
Reibschwinger mit Laufband

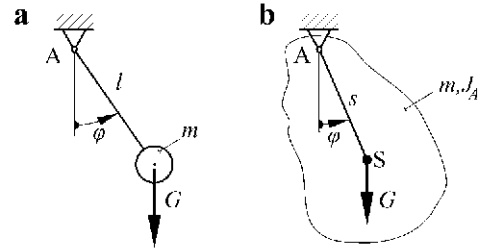


Bild 4-14
Pendel. a mathematisches, b physikalisches

4.6.4 Pendel als nichtlineare Schwinger

Das *mathematische* und das *physikalische Pendel* nach Bild 4-14a bzw. b sind die Prototypen nichtlinearer Schwinger.

Beim mathematischen Pendel hängt eine Punktmasse m mit einer masselosen Stange der Länge l am Aufhängepunkt A, beim physikalischen Pendel ist es ein Körper der Masse m , Trägheitsmoment J_A (bezogen auf A), Schwerpunktabstand $s = \overline{AS}$. Beide Pendel *schwingen* unter dem Einfluss ihres Gewichts $G = mg$ – so ist Pendeln in der Physik charakterisiert – im Schwerfeld.

Die Bewegungsgleichungen für die Winkel-Auslenkung $\varphi = \varphi(t)$ lauten

$$ml^2 \ddot{\varphi} + m l g \cdot \sin \varphi = 0 \quad \text{bzw.} \quad J_A \ddot{\varphi} + m s g \sin \varphi = 0. \quad (4.40)$$

Die Pendelgleichungen (4.40) sind *nichtlinear* (vgl. Aufgabe 4-19), die Überlagerung von (Teil-)Lösungen ist *nicht* möglich (vgl. Abschnitt 4.6.2).

Die Pendelgleichungen (4.40) sind *konservativ* (vgl. Aufgabe 4-18), gemäß diesen Gleichungen würde ein einmal angestoßenes Pendel dauernd weiter schwingen. Die Modelle taugen also nicht für reale Pendel.

Beim mathematischen Pendel liegt es nahe, einen dem Geschwindigkeitsquadrat proportionalen Luftwiderstand einzuführen:

$$ml^2 \ddot{\varphi} + b^* l v |v| + m g l \cdot \sin \varphi = 0, \quad (4.41)$$

mit $v = l \dot{\varphi}$, und b^* ist proportional zu Querschnittsfläche und Luftdichte. Mit $b := b^* l$ lautet (4.41) nach Division durch (ml^2) :

$$\ddot{\varphi} + \frac{b}{m} \dot{\varphi} |\dot{\varphi}| + g/l \sin \varphi = 0. \quad (4.42)$$

4.6.5 Allgemeine Bewegungsgleichung

Die vorangehenden Überlegungen und Beispiele legen für den Schwinger von einem Freiheitsgrad (nach Division durch m) die allgemeine Form

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \quad (4.43)$$

nahe. Dabei müssen $\ddot{x}$ und f *dimensionsgleich* sein! (Eine dimensionslose, bezogene, Schreibweise ist stets zweckmäßig.) Gelegentlich schreibt man auch

$$\ddot{x} + f^*(x, \dot{x}, t) = 0 \quad \text{mit} \quad f^* = -f, \quad (4.44)$$

Hängt $f(x, \dot{x}, t)$, wie in dieser allgemeinen Form, explizit von der Zeit ab, heißen System wie Bewegungsgleichung *nicht-autonom*. Wird $f(x, \dot{x}, t) \rightarrow f(x, \dot{x})$ zeitunabhängig, sind sie *autonom*.

Für *numerische* Lösungen muss in der Regel eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung durch ein System von zwei Gleichungen *erster* Ordnung ersetzt werden. Mit

$$y = \dot{x} \quad (4.45)$$

entsteht aus (4.43) – in Matrixschreibweise – das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ f(x, y, t) \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

was man mit $\mathbf{x} = (x, y)^T$, $\mathbf{f} = (y, f)$ mit

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (4.47)$$

abkürzt.

4.7 Aufgaben

Aufgabe 4-1: Für das Modell zum Stützelement nach Bild 4-3, Bild 4-4 mit Gleichung (4.1) nehme man an: $F_{F1} = k_1 x_1 + k_1^* x_1^2$, $F_{D1} = F_R \tanh(\alpha \dot{x}_1)$ mit den Parametern $k_1 = 250 \text{ N/mm}$, $k_1^* = 50 \text{ N/mm}^2$, $F_R = 200 \text{ N}$, $\alpha = 0.05 \text{ s/mm}$. Berechnen Sie die Kennlinien nach Bild 4-4 und für $x_1 = \hat{x}_1 \cos \Omega t$, mit $\hat{x}_1 = 1 \text{ mm}$, $\Omega = 50 \text{ rad/s}$, einen Stützkraftverlauf wie in Bild 4-2b.

Aufgabe 4-2: Man variere die Parameter in Aufgabe 4-1, zum Beispiel $\hat{x}_1 = 0.5 \text{ mm}$, 2 mm ; $\Omega = 25 \text{ rad/s}$, 75 rad/s (Computer!)

Aufgabe 4-3: Linearisieren Sie die Modelle in Aufgabe 4-1 und Aufgabe 4-2, indem Sie $F_{K1} = k_1 \cdot x_1$, $F_{D1} = F_R \alpha \dot{x}_1$ setzen. Berechnen Sie die Linien analog zu Aufgabe 4-1. Wie unterscheiden sich die neuen Kennlinien von den alten? (Computer!)

Aufgabe 4-4: Nehmen Sie in den voran stehenden Aufgaben $x_1 = \hat{x}_1 \cos \Omega t + \hat{x}_3 \cos(3 \Omega t)$ mit $\hat{x}_3 = \hat{x}_1$ an und berechnen Sie den Verlauf F_1 analog zu Bild 4-2b.

Aufgabe 4-5: Kontrollieren Sie die Beschleunigungen $\ddot{\xi}_k, \ddot{\xi}_p, \ddot{\xi}_s, \ddot{\beta}$ in Abschnitt 4.3.2.

Aufgabe 4-6: Wenn man die Standsicherheit der einzelnen Presse untersuchen will, braucht man auch die horizontalen Trägheitskräfte und das d'Alembertsche Moment des Pleuels, vgl. Bild 4-8. Schreiben Sie die erforderlichen Schwerpunktauslenkungen y_k, y_p, y_s an und berechnen Sie $\ddot{y}_k, \ddot{y}_p, \ddot{y}_s$.

Aufgabe 4-7: Welches dynamische (Kipp-)Moment um den Mittelpunkt B der Bodenplatte einer Maschine tritt auf? (Kurbel-Welle hat Höhe h gegen Bodenplatte, s. Bild 4-6.) Geht auch $\ddot{x}(t)$ in das Moment ein?

Aufgabe 4-8: Untersuchen Sie die Periodizität der einzelnen Glieder von $f(t)$ nach (4.19). Zeigen Sie mit $\varphi = \Omega t$, dass $f(\varphi) = f(-\varphi)$, $f(\varphi)$ ist gerade bezüglich $\varphi = 0$ (oder $t = 0$). Ferner $f(\varphi - \pi/2) = -f(-(\varphi - \pi/2))$, $f(\varphi)$ ist ungerade bezüglich $\varphi = \pi/2$ (oder $t = T/4$).

Aufgabe 4-9: Führen Sie für $f(\varphi, \lambda)$ nach (4.19) die Taylorentwicklung nach λ aus, die auf (4.23) führt.

Aufgabe 4-10: Für die Kraft $F(t)$ von der Decke auf den Maschinenrahmen (s. Bild 4-11) gilt laut (4.3)/(4.4) $F(t) = b(\dot{x} - \dot{u}) + k(x - u)$, wobei $x(t)$ die Dgl (4.25) erfüllt: $m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = m g + 2 F_{Trel} + k u + b \dot{u}$. Eliminieren Sie aus diesen beiden Gleichungen

$x, \dot{x}, \ddot{x}$ und schreiben Sie eine Dgl für $F(t)$ an. (*Hinweis:* Um $x, \dot{x}, \ddot{x}$ zu eliminieren, muss man die Gleichung für $F(t)$ ein- und zweimal nach t differenzieren; $\dot{u}, \ddot{u}, \dddot{u}$ sind mit $u(t)$ bekannt.)

Aufgabe 4-11: Schreiben Sie für die linke Seite $L(\ddot{x}, \dot{x}, x)$ der linearen Dgl (4.26) die Beziehungen (4.30), (4.31) im Einzelnen an.

Aufgabe 4-12: Verfolgen Sie – durch ausführliches Anschreiben der Gleichungsterme – die Überlagerungsaussagen in Abschnitt 4.6.3.

Aufgabe 4-13: Setzen Sie die lineare Bewegungsgleichung (4.36)/(4.37) für den Reibschwinger aus Abschnitt 4.6.3, Bild 4-13 an. (*Hinweis:* Bei $|x| \ll l$ wird der Zusatzdämpfer bei Auslenkung $x(t)$ mit der Geschwindigkeit $V_D = \dot{x} \cos \alpha$ zusammengepresst.)

Aufgabe 4-14: Führen Sie für den Reibschwinger aus Aufgabe 4-13 die Umformungen von Gl. (4.36)/(4.37) nach (4.38)/(4.39) durch. Nehmen Sie zum Beispiel $\mu = 0.75$ an und skizzieren Sie für das System die Dämpferlagen $\alpha = (-\rho \pm \pi)/2$.

Aufgabe 4-15: Schreiben Sie für den Bandantrieb des Reibschwingers aus Aufgabe 4-13 eine Leistungsbilanz an. (Nehmen Sie dabei $x = x(t)$, also auch $\dot{x}$ als bekannt an.)

Aufgabe 4-16: Bei größeren Auslenkungen $x(t)$ ändert sich in Aufgabe 4-13 die Stangenlänge $l = l(t)$ abhängig von $x(t)$. Für den Dämpferzug gilt dann $F_D = b_2 \dot{l}$, auch der Winkel $\alpha = \alpha(t)$ hängt dann von $x(t)$ ab. Setzen Sie die, nun *nichtlineare*, Bewegungsgleichung für $x(t)$ an.

Aufgabe 4-17: Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Pendel in Abschnitt 4.6.4 auf.

Aufgabe 4-18: Multiplizieren Sie die Bewegungsgleichungen (4.40) der Pendel mit $\dot{\phi}$. Wie können Sie das Resultat als Leistungsaussage lesen? Integrieren Sie unter Beachtung von $d\phi = \dot{\phi} dt$ und $d\dot{\phi} = \ddot{\phi} dt$ über die Zeit und zeigen Sie, dass die Pendel konservativ sind: Die Summe von kinetischer und potentieller Energie bleibt erhalten.

Aufgabe 4-19: Zeigen Sie, dass die Gleichungen (4.40) weder *homogen* noch *additiv* sind; vgl. (4.30), (4.31).

Aufgabe 4-20: Kontrollieren Sie in den Pendelgleichungen (4.41), (4.42) die Dimensionen der Koeffizienten und der Gleichungsterme sowie die Richtung des *Luftwiderstandes*.

Aufgabe 4-21: Bringen Sie die Bewegungsgleichung (4.40) des physikalischen Pendels auf die Form (4.42); dabei wird l zu einer durch die Parameter J_A, m, s ausgedrückten reduzierten Länge l_{red} . Wie verfahren Sie mit dem Luftwiderstand?

Aufgabe 4-22: Wie sieht die Leistungsbilanz und die Energieaussage von Aufgabe 4-18 aus, wenn Sie, wie in (4.41), (4.42) den Luftwiderstand berücksichtigen?

Aufgabe 4-23: Schreiben Sie einige der in diesem Kapitel behandelten Bewegungsgleichungen in den Formen (4.43) bis (4.47) an.

5 Freie Schwingungen

5.1 Bewegungsgleichung; Bemerkungen zur Nomenklatur

Die Bewegungsgleichung für die *freien Schwingungen* des Schwingers vom Freiheitsgrad eins lautet

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = 0. \quad (5.1)$$

Meistens sieht man sie als Bewegungsgleichung des Einmassenschwingers nach Bild 5-1 an, vgl. Bild 4-12 und Gleichung (4.26) ohne Erregerkraft: $F_e(t) \equiv 0$. (Aufgabe 5-1).

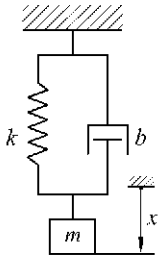


Bild 5-1
Feder-Masse-Dämpfer-Schwinger

In (5.1) stehen (noch) die allgemein mechanischen Parameter m – Trägheit (Masse), b – Dämpfungskoeffizient, k – (Feder-)Steifigkeit. Für die Schwingungslehre dividiert man (5.1) durch m und setzt (für $k > 0$)

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{b}{m} = \frac{b}{m \omega_0} \omega_0 = 2 D \omega_0, \quad (5.2)$$

wo

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad D := \frac{b}{2\sqrt{km}} \quad (5.3)$$

für die *Eigen(kreis)frequenz des ungedämpften Schwingers* (mit $b = 0$) bzw. den *Dämpfungsgrad* (auch *Lehr'sche Dämpfungsmaß*) stehen, die unten unmittelbar in die Schwingungen eingehen. Aus (5.1) folgt damit (Aufgabe 5-2):

$$\ddot{x} + 2 D \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.4)$$

Führt man in (5.4) mit $t_R = 1/\omega_0$, vgl. Abschnitt 1.2.1, die dimensionslose Zeit $\tilde{t} = \omega_0 t$

ein, setzt $\dot{x} = dx/dt = \omega_0 dx/d\tilde{t} =: \omega_0 \dot{\tilde{x}}$, so entsteht aus (5.4) nach Division durch ω_0^2

$$\ddot{\tilde{x}} + 2 D \dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = 0. \quad (5.5)$$

In dieser Gleichung haben alle Glieder die Dimension $\dim(x)$, die man auch herausdividieren könnte (vgl. (4.30)).

5.2 Lösen der Differentialgleichung

Eine homogene lineare Differentialgleichung (beliebiger Ordnung) mit konstanten Koeffizienten löst man mit einem $e^{\lambda t}$ -Ansatz:

$$x = x(t) = C e^{\lambda t}, \quad (5.6)$$

C, λ – freie Konstanten (komplexe). Aus (5.6) folgen

$$\dot{x} = C \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = C \lambda^2 e^{\lambda t}. \quad (5.7)$$

Einsetzen von $x, \dot{x}, \ddot{x}$ aus (5.6), (5.7) in (5.4) und geeignetes Zusammenfassen liefert

$$C \lambda^2 e^{\lambda t} + C 2 D \omega_0 \lambda e^{\lambda t} + C \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \text{ und} \quad (5.8)$$

$$\left(\lambda^2 + 2 D \omega_0 \lambda + \omega_0^2 \right) C e^{\lambda t} = 0.$$

Wegen $e^{\lambda t} \neq 0$ kann man Gleichung (5.8) durch $e^{\lambda t}$ dividieren:

$$\left(\lambda^2 + 2 D \omega_0 \lambda + \omega_0^2 \right) C = 0. \quad (5.9)$$

Dies ist ein (sehr einfaches) *Eigenwertproblem* mit zwei prinzipiell verschiedenen Lösungen:

- a) $C = 0$: Dies ist die *triviale Lösung* $x \equiv 0$, das System steht still! (Für Schwingungslehre ist sie uninteressant, doch für Gebäude wichtig.)
- b) Für $C \neq 0$:

$$\lambda^2 + 2 D \omega_0 \lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (5.10)$$

Diese Gleichung heißt *charakteristische Gleichung*, in der Schwingungslehre auch *Frequenzgleichung*.

Aus (5.10) folgen die beiden *Eigenwerte*

$$\lambda_{1/2} = -D \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{D^2 - 1}. \quad (5.11)$$

Im Regelfall, bei *unterkritischer Dämpfung* $|D| < 1$, sind die beiden Eigenwerte zueinander konjugiert komplex: $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, bei $|D| = 1$ fallen sie zusammen, bei $D > 1$ sind sie reell negativ, bei $D < -1$ reell positiv.

Mit den beiden Eigenwerten λ_1, λ_2 lautet die *allgemeine Lösung* von (5.4) (Aufgabe 5-4, Aufgabe 5-5)

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (5.12)$$

5.3 Ausdeuten der Lösung

Wir unterscheiden zwischen der ungedämpften Schwingung, der gedämpften Schwingung mit $b > 0$, also $D > 0$, und der angefachten mit $b < 0$, also $D < 0$.

5.3.1 Ungedämpfte Schwingung

Bei fehlender Dämpfung lauten die Bewegungsgleichungen (5.1) bzw. (5.4)

$$m \ddot{x} + k x = 0, \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.13)$$

und die allgemeine Lösung (5.12), mit $\lambda_{1/2} = \pm j \omega_0$ aus (5.11):

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{j\omega_0 t} + C_2 e^{-j\omega_0 t}. \quad (5.14)$$

Die komplexe Form schreibt man um:

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{j\omega_0 t} + C_2 e^{-j\omega_0 t} \\ &= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{\hat{x}_c} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} + \underbrace{j(C_1 - C_2)}_{\hat{x}_s} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \\ &= \hat{x}_c \cos \omega_0 t + \hat{x}_s \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Anpassen der allgemeinen Lösung an die Anfangsbedingungen (Aufgabe 5-6)

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (5.16)$$

liefert

$$x = x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (5.17)$$

Auch dies ist eine Form der allgemeinen Lösung von (5.13), denn x_0 und v_0 sind (physikalisch leicht interpretierbare) freie Konstanten.

Gemäß Abschnitt 1.2.1 schreibt man (5.15) und (5.17) als harmonische Schwingung

$$x = \hat{x} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.18)$$

mit der Amplitude $\hat{x}$ und dem Nullphasenwinkel φ_0 (Aufgabe 5-7 bis Aufgabe 5-10).

Darstellung des Zeitverlaufs

Man stellt $x(t)$ als Sinuslinie, den Zeitverlauf nach Bild 0-3, Bild 0-4 sowie durch den (komplexen) Drehzeiger, Bild 0-5, Bild 1-8, dar. Man trägt auch $\dot{x}(t)$ über $x(t)$ in einer *Phasenebene* – mit der Zeit t als Kurvenparameter auf, Bild 5-2 (Aufgabe 5-11).

Der Punkt $(x, \dot{x})$ läuft darin während der Periode $T = 2\pi / \omega_0$ einmal um:

$$x(t+T) = x(t), \quad \dot{x}(t+T) = \dot{x}(t). \quad (5.19)$$

Die Auslenkung $x(t)$ schwankt in der Phasenebene zwischen den Extremwerten $-x_E$ und x_E , die Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ zwischen $-v_E$ und v_E .

Bezieht man in der Phasenebene $x(t)$ auf die Amplitude $\hat{x}$ und $\dot{x}(t)$ auf $(\hat{x} \omega_0)$, so erhält man als *Phasenkurve* den Einheitskreis nach Bild 5-3. Darin läuft der Phasenpunkt

$(x/\hat{x}, \dot{x}/(\hat{x}\omega_0))$ rechtsdrehend mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 – der Kreisfrequenz oder Winkelfrequenz – um (Aufgabe 5-12).

Hinweis: Die Darstellung des Verlaufs des System-Zustandes $(x, \dot{x})$ in der Phaseebene bringt hier wenig zusätzlichen Nutzen (Aufgabe 5-13). Bei nichtlinearen Schwingungen (vom Freiheitsgrad 1) bilden Phasenkurven oft den einzigen einfachen Zugang.

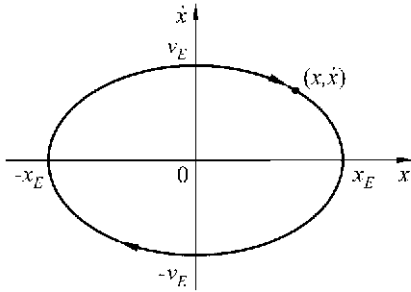


Bild 5-2: Phaseebene

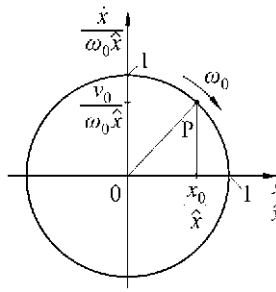


Bild 5-3: Phasenkurve dimensionslos

5.3.2 Gedämpfte Schwingungen

Man wählt den ungedämpften Schwinger nach (5.13)₁ als gedanklichen Ausgangspunkt und schreibt diese Bewegungsgleichung – nach Division durch m und mit $\omega_0^2 = k/m$ vgl. (5.2) – in der Form (5.13)₂. Jetzt sieht man ω_0 , die *Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung*, als unmittelbar gegebenen (z. B. gemessenen, also bekannten) Parameter an.

Die in Abschnitt 5.1 entsprechend umgeformte Bewegungsgleichung des gedämpften Schwingers lautet, vgl. (5.4),

$$\ddot{x} + 2D\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.20)$$

In dieser Form ist die Bewegungsgleichung für Schwingungsuntersuchungen besonders geeignet, weil die Parameter leicht interpretiert werden können. Für positive D unterscheidet man etwa

$$D = \begin{cases} 0.001 - 0.01 & \text{sehr schwache Dämpfung} \\ 0.01 - 0.1 & \text{schwache Dämpfung} \\ 0.1 - 0.2 & \text{mittlere Dämpfung} \\ 1 & \text{kritische Dämpfung} \\ > 1 & \text{Kriechfälle} \end{cases} \quad (5.21)$$

Dies sind willkürlich gesetzte grobe Anhaltswerte. (Dämpfungszahlen lassen sich ebenso wenig allgemein vorhersagen wie Reibungszahlen.)

Mit den Parametern ω_0 und D nach (5.3) lauten die Eigenwerte λ_1, λ_2 aus (5.11):

Für $|D| < 1$ erhält man

$$\lambda_{1/2} = -D\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}. \quad (5.22)$$

Man setzt

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm j\omega \quad (5.23)$$

mit $\delta := D\omega_0$ – Abklingkoeffizient und $\omega := \omega_0\sqrt{1-D^2}$ – Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung.

Für $D = 1$ erhält man den *aperiodischen Grenzfall* (Aufgabe 5-5), für $D > 1$ sind beide Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ reell, man erhält *Kriechbewegungen* (vgl. Aufgabe 5-14).

Für $0 \leq D < 1$ gewinnen wir die reelle Lösung $x(t)$ durch Projektion (– Realteil-Bildung) einer der komplexen Lösungen aus (5.12), (5.23), vgl. Abschnitt 1.2.2. Mit $C = A$, reell, gilt

$$\underline{x} = C e^{\lambda_1 t} = A e^{j\varphi_0} e^{(-\delta - j\omega)t} = A e^{-\delta t} e^{j(\omega t + \varphi_0)} \quad (5.24)$$

und

$$x(t) = A e^{-\delta t} \operatorname{Re} e^{j(\omega t + \varphi_0)} \text{ also } x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (5.25)$$

gemäß Abschnitt 0 umgeformt (Aufgabe 5-15)

$$x(t) = e^{-\delta t} (A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t). \quad (5.26)$$

(Es ist unzweckmäßig, die *Koeffizienten* A , A_c , A_s Amplituden zu nennen.)

Anpassen an die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ liefert (Aufgabe 5-16)

$$x(t) = e^{-\delta t} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \delta \cdot x_0}{\omega} \sin \omega t \right]. \quad (5.27)$$

Den Zeitverlauf $x(t)$ nach (5.27) kann man als modulierte Schwingung ansehen, vgl. Abschnitt 1.4.4.

Bild 1-22b zeigt den Zeitverlauf $x(t)$ gemäß (5.25). Zum besseren Verständnis sind dort auch $\pm A e^{-\delta t}$ und $A \cos(\omega t + \varphi_0)$ eingetragen. Die Lösung $x(t)$ *schwingt unperiodisch*, sie klingt exponentiell ab. Die *gleichsinnigen* Nulldurchgänge, die Extrema E_1, E_2 und die Berührungspunkte von $x(t)$ mit $A e^{-\delta t}$ haben den Abstand $2\pi/\omega$. Man kann ω also aus einem gemessenen Verlauf $x(t)$ gewinnen. (Aufgabe 5-16 und Aufgabe 5-17).

5.4 Aufgaben

Aufgabe 5-1: In der Bewegungsgleichung (4.40)₁ des Pendels setzt man $\sin \varphi \approx \varphi$ für kleine Auslenkungen $|\varphi| \ll 1$. Führen Sie unter dieser Annahme in (4.40)₁ eine lineare Dämpfung ein und bringen Sie die dann lineare Bewegungsgleichung auf die Form (5.1).

Aufgabe 5-2: Führen Sie den Übergang von der Bewegungsgleichung (5.1) nach (5.4) durch und kontrollieren Sie die Dimensionen.

Aufgabe 5-3: Setzen Sie den Ansatz (5.6) in die Ausgangsform (5.1) der Bewegungsgleichung ein und ermitteln Sie daraus die Eigenwerte λ_1, λ_2 .

Aufgabe 5-4: Passen Sie die allgemeine Lösung (5.12) an die *Anfangsbedingungen* $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ an, (x_0, v_0) gegeben.

Aufgabe 5-5: Zeigen Sie, dass die beiden Teillösungen in (5.12) für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ linear unabhängig sind. Bei $D \rightarrow \pm 1$ gilt $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$, dann sind $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ nicht mehr linear unabhängig. Man kann die allgemeine Lösung (5.12) aber auch in der Form

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (5.28)$$

schreiben. (Passen Sie diese Lösung an die Anfangsbedingungen von Aufgabe 5-4 an.)

Die Lösung (5.28) gestattet den Grenzübergang $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ und liefert auch für $\lambda_1 = \lambda_2$ die zwei linear unabhängigen Teillösungen (einer Dgl 2. Ordnung). Ein alter (und nicht sehr treffender Name) des Sonderfalles $\lambda_1 = \lambda_2$ ist *aperiodischer Grenzfall*.

Aufgabe 5-6: Passen Sie die allgemeine Lösung (5.15) an die *Anfangsbedingungen* $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ an; vgl. (5.17).

Aufgabe 5-7: Welches sind die freien Konstanten in der allgemeinen Lösung (5.18)? Passen Sie (5.18) an die Anfangsbedingungen (5.16) an.

Aufgabe 5-8: Viele Taschenrechner haben ein Tastenpaar, in dem die Umformungen (5.15) / (5.17) $\leftrightarrow$ (5.18) numerisch durchgeführt werden können. Nutzen Sie dies für das Umformen der folgenden Ausdrücke: a) $3 \sin \omega_0 t + 4 \cos \omega_0 t$, b) $5 \cos(\omega_0 t + 120^\circ)$, c) $2 \sin(\omega_0 t + 5)$, d) $3 \cos \omega_0 t + 4 \sin \omega_0 t + 5 \cos(\omega_0 t - \pi/6)$.

Aufgabe 5-9: Skizzieren Sie den einen oder anderen Schwingungsverlauf aus Aufgabe 5-8 ohne besondere Rechnung grob.

Aufgabe 5-10: Berechnen Sie zu $x(t)$ nach (5.18) die Funktionen $v(t) := \dot{x}(t)$ und $a(t) := \ddot{x}(t)$ und zeigen Sie für die Amplituden $\hat{v} = \hat{x} \omega_0$ und $\hat{a} = \hat{x} \omega_0^2$. Wie unterscheiden sich die Nullphasenwinkel von x, v, a (vgl. Abschnitt 1.2.3)?

Aufgabe 5-11: Zeigen Sie, dass die Phasenkurve $(x(t), \dot{x}(t))$ in Bild 5-2 eine Ellipse mit der Zeit als Kurvenparameter ist. (Eliminieren Sie dazu die Zeit.) Drücken Sie die Halbachsen, die Extremwerte x_E und v_E durch die Anfangswerte x_0, v_0 aus.

Aufgabe 5-12: Zeigen Sie, dass längs der elliptischen Phasenkurve in Bild 5-2 Energieerhaltung gilt, d. h. die Summe von kinetischer und potentieller Energie ist konstant.

Aufgabe 5-13: Zeigen Sie, dass die Ellipse nach Bild 5-2 mit der Transformation $x/\hat{x}, \dot{x}/(\hat{x}\omega_0)$ in den Einheitskreis nach Bild 5-3 übergeht und dass am Einheitskreis deren Phasenpunkt P mit ω_0 umläuft.

Aufgabe 5-14: Schreiben Sie ein Rechnerprogramm, dass für $D > 1$ die Lösung $x(t)$ gemäß Aufgabe 5-4 – und auch $\dot{x}(t)$ – zu gegebenen Anfangswerten (x_0, v_0) zeichnet und erläutern Sie die Bezeichnung *Kriechbewegungen* an einigen Beispielen.

Aufgabe 5-15: Formen Sie $x(t)$ von (5.25) nach (5.26) und umgekehrt um.

Aufgabe 5-16: Kontrollieren Sie die Lösung (5.27).

Aufgabe 5-17: Nehmen Sie in Bild 1-22b die Zeit t_3 mit 11.4 s an. (Das Bild ist maßstäblich gezeichnet.) Berechnen Sie ω und D , indem Sie die erforderliche Zusatzinformation aus dem Bild heraus messen. Wie groß sind Dämpfungskoeffizient b und Federsteifigkeit k , wenn der Schwinger eine Masse von 3.7 kg hat?

Aufgabe 5-18: Wie sieht die Phasenkurve $(x(t), \dot{x}(t))$ zu einer gedämpften Schwingung aus – vgl. Bild 5-2 – und wie sieht das Zeigerdiagramm – vgl. Bild 0-6 – aus? (Beide Darstellungen sind wenig üblich.)

Aufgabe 5-19: Im Fall negativer Dämpfung $b < 0$ (vgl. das System in Abschnitt 4.6.3) *wachsen* oder *schwellen die Schwingungen an*, sie werden *angefacht*. Was ändert sich in Abschnitt 5.3.2 (vgl. Abschnitt 1.4.4)?

6 Erzwungene Schwingungen

6.1 Allgemeine Aussagen

Gegeben sei die Bewegungsgleichung (4.26) aus Abschnitt 4.5.2 bzw. 4.6.1 für den Einmassenschwinger nach Bild 4-12,

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = F_e(t), \quad (6.1)$$

mit beliebiger Erregerkraft $F_e(t)$. Eine (spezielle) Lösung $x(t)$ von (6.1) zu einem gegebenen $F_e(t)$ nennt man allgemein *erzwungene Schwingung*. Dabei kümmert man sich zunächst nicht um (oft unbekannte und unwichtige) Anfangsbedingungen (s. Abschnitt 8). Die spezielle Lösung nennt man dann auch *Partikularlösung* (oder *Partikularintegral*) und schreibt x_p , um sie von der Lösung x_h der zugeordneten homogenen Gleichung (4.29) bzw. (5.1), (5.4) zu unterscheiden.

Die große Mannigfaltigkeit möglicher Erregerfunktionen $F_e(t)$ setzt man aus wenigen typischen Erregungen zusammen. Prototyp aller T -periodischen Erregungen ist die *harmonische Erregung*

$$F_e = \hat{F}_e \cos \Omega t \quad (6.2)$$

mit der Erregeramplitude $\hat{F}_e$ und der Erregerfrequenz $\Omega = 2\pi/T$. Über die Fouriersynthese (s. Abschnitt 1.3.3) setzt man beliebige T -periodische Erregungen aus harmonischen zusammen. (Mit Hilfe des hier nicht behandelten Fourier-Integrals gelingt das auch für unperiodische Erregungen mit verschwindendem Mittelwert.) Wenn dann auf der rechten Seite von (6.1) eine Fouriersumme als Erregung steht, berechnet man die durch die einzelnen Summanden erzwungenen Schwingungen und *überlagert* sie gemäß Abschnitt 4.6.2.

Weiter lässt sich *jeder* (stetige) *Kraftverlauf* als Folge unendlich kurzer Stöße auffassen. Deshalb führt man einen Einheitsstoß $1 \cdot \delta(t - \tau)$ ein, der zum Zeitpunkt τ wirkt, s. Bild 6-14a, und berechnet die durch ihn erzwungene Schwingung. Aus der *Überlagerung* der Wirkungen der Einzelstöße wird dann ein Integral (s. Abschnitt 6.3.3). Weitere typische Erregungen lassen sich daraus ableiten.

6.2 Erzwungene harmonische Schwingungen

6.2.1 Komplexe Schreibweise der Bewegungsgleichung

Mit (6.2) lautet die Bewegungsgleichung (6.1)

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = \hat{F}_e \cos \Omega t. \quad (6.3)$$

Es ist wichtig, die *erzwungene Schwingung* in einer möglichst übersichtlichen und manipulierbaren Form zu gewinnen. Das gelingt in komplexer Schreibweise mit Hilfe von Drehzeigern, wie wir sie in Abschnitt 1.2.2 bereits eingeführt haben.

Analog zu (6.3) gelte die Gleichung

$$m \ddot{y} + b \dot{y} + k y = \hat{F}_e \sin \Omega t. \quad (6.4)$$

Addiert man zu (6.3) die mit der imaginären Einheit $j := \sqrt{-1}$ multiplizierte Gleichung (6.4), so folgt

$$m(x + jy)'' + b(x + jy)' + k(x + jy) = \hat{F}_e(\cos \Omega t + j \sin \Omega t). \quad (6.5)$$

Mit der *komplexen Auslenkung*

$$\underline{x} := x + jy \quad \text{ sowie } \quad (\cos \Omega t + j \sin \Omega t) = e^{j\Omega t} \quad (6.6)$$

entsteht aus (6.5) die *komplexe (Form der) Bewegungsgleichung*:

$$m \underline{\ddot{x}} + b \underline{\dot{x}} + k \underline{x} = \hat{F}_e e^{j\Omega t}. \quad (6.7)$$

Wie wir in Abschnitt 6.2.2 sehen, lässt sie sich einfacher lösen als (6.3). Kennt man ihre Lösung $\underline{x}(t)$, so gelangt man gemäß (6.6) durch Bilden des Realteils oder des Imaginärteils (Operationen Re bzw. Im , d. h. Projektionen auf die reelle Achse bzw. imaginäre Achse in Bild 6-1) zurück zu

$$x(t) = \text{Re } \underline{x}(t) \quad \text{bzw.} \quad y(t) = \text{Im } \underline{x}(t). \quad (6.8)$$

Hinweis 1: Unterwirft man die ganze Gleichung (6.7) den Operationen (*Projektionen Re oder Im*), so erhält man (wieder) die Gleichungen (6.3) bzw. (6.4).

Hinweis 2: Man nutzt *Hinweis 1* zum Übergang von einer reellen Dgl – z. B. (6.3) – zur zugehörigen komplexen – hier (6.7) – aus, indem man die komplexe Form errät und durch Bilden des Realteils überprüft, ob man richtig geraten hat, (s. Aufgaben 6-1/2/3).

Hinweis 3: Wenn man häufig mit komplexen Gleichungen umgeht, *vergisst* man auch, zwischen x und $\underline{x}$ zu unterscheiden und erschließt aus dem Zusammenhang, was gemeint ist.

Mit den bezogenen Größen aus Abschnitt 5.1 lautet die komplexe Bewegungsgleichung (6.7), vgl. Aufgabe 6-4,

$$\ddot{\underline{x}} + 2 D \omega_0 \dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 \frac{\hat{F}_e}{k} e^{j\Omega t}. \quad (6.9)$$

6.2.2 Berechnen der erzwungenen Schwingung

Gesucht ist die erzwungene Schwingung der komplexen Dgl (6.7)*

$$m \ddot{\underline{x}} + b \dot{\underline{x}} + k \underline{x} = \hat{F}_e e^{j\Omega t}. \quad (6.10)$$

Hinweis: Man löst eine inhomogene lineare Dgl mit konstanten Koeffizienten durch einen *Ansatz vom Typ der rechten Seite* (auch Aufgabe 6-18).

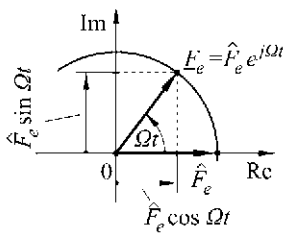


Bild 6-1
Erregerkraft als Zeiger

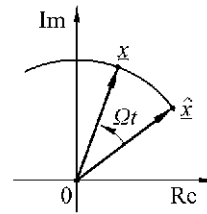


Bild 6-2
Lösungsansatz
als Zeiger

In Dgl (6.10) ist die rechte Seite vom Typ *linksdrehender Zeiger*, vgl. Abschnitt 1.2.2 und Bild 6-1. Dementsprechend setzt man an, vgl. Bild 6-2

$$\underline{x} = \hat{x} e^{j\Omega t}. \quad (6.11)$$

* Die freie Schwingung, die Lösung der zugeordneten homogenen Dgl haben wir in Kapitel 5 bestimmt. Die nun komplexe Schreibweise ändert nichts daran.

Daraus folgen

$$\dot{\underline{x}} = j \Omega \hat{\underline{x}} e^{j\Omega t}, \quad \ddot{\underline{x}} = -\Omega^2 \hat{\underline{x}} e^{j\Omega t}. \quad (6.12)$$

Einsetzen von $\underline{x}$, $\dot{\underline{x}}$, $\ddot{\underline{x}}$ in (6.10) liefert

$$\begin{aligned} -m \Omega^2 \hat{\underline{x}} e^{j\Omega t} + b j \Omega \hat{\underline{x}} e^{j\Omega t} + k \hat{\underline{x}} e^{j\Omega t} &= \hat{F}_e e^{j\Omega t}, \\ \text{also } (k - m \Omega^2 + b j \Omega) \hat{\underline{x}} e^{j\Omega t} &= \hat{F}_e e^{j\Omega t} \end{aligned} \quad (6.13)$$

und

$$\hat{\underline{x}} = \frac{\hat{F}_e}{k - m \Omega^2 + b j \Omega}. \quad (6.14)$$

Dieses $\underline{x}$ ist der Zeiger, der in Bild 6-2 umläuft:

$$\underline{x} = \underline{x}(t) = \frac{\hat{F}_e e^{j\Omega t}}{k - m \Omega^2 + b j \Omega}. \quad (6.15)$$

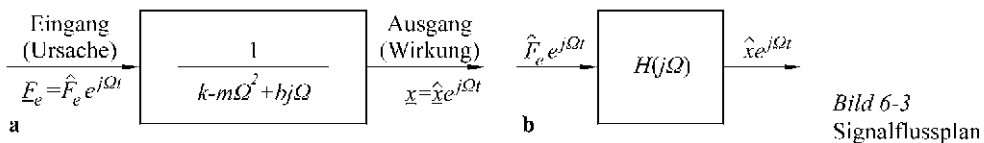
Man definiert die komplexwertige *Übertragungsfunktion* (meistens ohne Unterstrich geschrieben)

$$H(j\Omega) := \frac{1}{k - m \Omega^2 + b j \Omega}, \quad (6.16)$$

weil sie mit der Frequenz *geht* (sich ändert), oft kurz *Frequenzgang* genannt, und erhält aus (6.15)

$$\underline{x} = \hat{\underline{x}} e^{j\Omega t} = H(j\Omega) \hat{F}_e e^{j\Omega t}. \quad (6.17)$$

Der *Regelungstechnik* folgend zeichnet man für den Wirk-Zusammenhang zwischen $\underline{F}(t) = \hat{F}_e e^{j\Omega t}$ und $\underline{x} = \hat{\underline{x}} e^{j\Omega t}$ den *Signalflussplan* nach Bild 6-3.



Das Ergebnis – am *Ausgang* des Blocks – ist das *Produkt* aus *Eingang* mal *Frequenzgang* – dem *Inhalt* des Blocks. Man spricht vom *Übertragungssystem* und *Übertragungsverhalten*, skizziert gelegentlich auch das Ersatzsystem aus Bild 5.1 in den Block. Zeichnet man die beiden Drehzeiger in ein Diagramm, so laufen sie dort *gemeinsam* mit einem *festen* (zeit-unabhängigen) Winkel α um, Bild 6-4. Deshalb genügt es auch, statt der Drehzeiger $\underline{F}_e$ und $\underline{x}$ die Zeiger $\hat{F}_e$ und $\hat{\underline{x}}$ aufzuzeichnen, Bild 6-5, (s. Aufgabe 6-5).

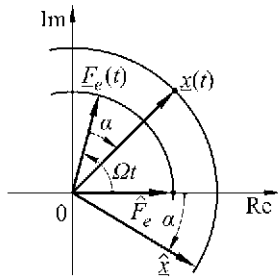


Bild 6-4
Drehzeiger-Diagramm

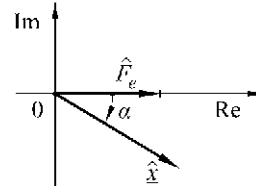


Bild 6-5
Zeiger-Diagramm

Der Zeiger $\hat{x}$ eilt dem Zeiger $\hat{F}_e$ um den Winkel α nach.

Um den Zusammenhang (6.14) zwischen $\hat{F}_e$ und $\hat{x}$ besser diskutieren zu können, zieht man aus dem Nenner die Steifigkeit k heraus und erhält mit ω_0 und D aus (5.2), (5.3)

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad D = b/(2m\omega_0) \quad (6.18)$$

zunächst

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}_e}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m}{k} \Omega^2 + 2D j m \omega_0 \Omega / k} = \frac{\hat{F}_e}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + 2D j \frac{\Omega}{\omega_0}}. \quad (6.19)$$

Mit der auf die Eigenfrequenz ω_0 bezogenen Erregerfrequenz

$$\tilde{\Omega} := \Omega / \omega_0, \quad \text{auch } \eta := \Omega / \omega_0, \quad (6.20)$$

gilt

$$\hat{x} = \frac{1}{1 - \tilde{\Omega}^2 + 2D j \tilde{\Omega}} \frac{\hat{F}_e}{k}. \quad (6.21)$$

In der Schwingungslehre ist statt $\tilde{\Omega}$ (leider der weniger einprägsame) Buchstabe η üblich. In (6.21) steht rechts mit $\hat{F}_e/k$ die Auslenkung, die eine *statische Last* $\hat{F}_e$ an der Feder bewirken würde. Der komplexe Faktor $1/(1 - \tilde{\Omega}^2 + 2D j \tilde{\Omega})$ die bezogene (dimensionslose) Übertragungsfunktion

$$\tilde{H}(j\tilde{\Omega}) := k H(j\Omega) = \frac{1}{1 - \tilde{\Omega}^2 + 2D j \tilde{\Omega}} \quad (6.22)$$

gibt an, wie sich $\hat{x}$ von dieser Auslenkung unterscheidet. Der Nenner von $\tilde{H}$, vgl. Bild 6-6,

$$\underline{N} = 1 - \tilde{\Omega}^2 + 2D j \tilde{\Omega}, \quad (6.23)$$

lautet in Polarform

$$\underline{N} = |\underline{N}| e^{j\alpha}, \text{ wo } |\underline{N}| = \sqrt{(1 - \tilde{\Omega}^2)^2 + 4D^2 \tilde{\Omega}^2}, \tan \alpha = 2D\tilde{\Omega} / (1 - \tilde{\Omega}^2), \quad 0 \leq \alpha < \pi. \quad (6.24)$$

Dann lauten (6.15), (6.19) oder (6.21)

$$\underline{x}(t) = \frac{\hat{F}_e e^{j\Omega t}}{k - m\Omega^2 + b j \Omega} = \frac{\hat{F}_e}{k} \frac{e^{j\Omega t}}{\underline{N}} = \frac{\hat{F}_e}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \tilde{\Omega}^2)^2 + 4D^2 \tilde{\Omega}^2}} e^{j(\Omega t - \alpha)}. \quad (6.25)$$

Bilden des Realteils liefert die (reelle) Lösung, die erzwungene Schwingung

$$x_p = x_p(t) = \hat{x}_p \cos(\Omega t - \alpha) \quad (6.26)$$

mit der *Amplitude* (Index *p*: Partikularlösung!)

$$\hat{x}_p = \frac{\hat{F}_e}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \tilde{\Omega}^2)^2 + 4D^2 \tilde{\Omega}^2}} \quad (6.27)$$

und dem *Phasenverschiebungswinkel* (vgl. (6.24))

$$\alpha = \arctan \frac{2D\tilde{\Omega}}{1 - \tilde{\Omega}^2}, \quad 0 \leq \alpha < \pi. \quad (6.28)$$

Bild 6-7 stellt die Zeitverläufe $F_e(t)$ und $x_p(t)$ einander gegenüber; man vergleiche mit Bild 6-4 und Bild 6-5.

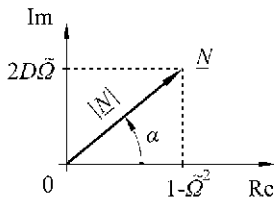


Bild 6-6
Nenner $\underline{N}$

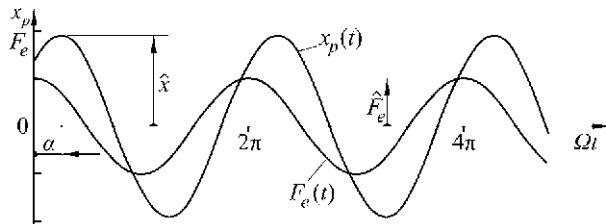


Bild 6-7
Zeitverläufe $F_e(t)$ und $x_p(t)$ bei harmonischer Erregung

6.2.3 Diagramme für Amplitudengang, Phasengang, Vergrößerungsfunktion

Bild 6-8 und Bild 6-9 zeigen den *Amplituden-Frequenzgang* $\hat{x}_p(\tilde{\Omega})$ – früher auch *Resonanzkurve* genannt – und den *Phasen-Frequenzgang* $\alpha(\tilde{\Omega})$ nach Gl. (6.27) bzw. (6.28).

Aufgetragen wurden in den Bildern bezogene (dimensionslose) Größen, nämlich

$$\hat{x}_p / (\hat{F}_e / k), \quad \alpha / \pi, \quad \Omega / \omega_0 =: \tilde{\Omega}, \quad (6.29)$$

für vier Dämpfungsgrade ($D = 0, 0.1, 0.16, 1/\sqrt{2}$).

Man sieht: In der Umgebung von $\tilde{\Omega} = 1$ – also bei $\Omega \approx \omega_0$, die Erreger- liegt nahe der Eigenfrequenz – treten bei kleinem D sehr große Amplituden auf; man spricht von *Resonanz* (Widerhall) und nennt die Umgebung von ω_0 *Resonanzbereich*.

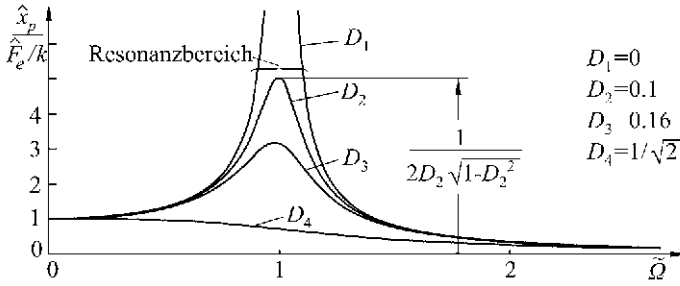


Bild 6-8
Amplituden-Frequenzgang

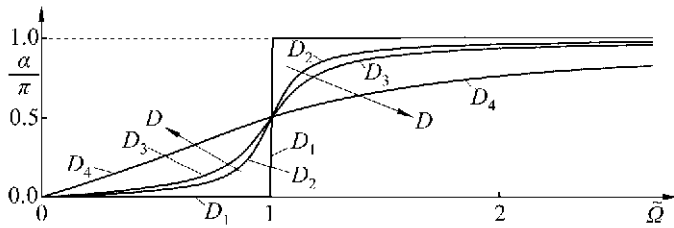


Bild 6-9
Phasen-Frequenzgang

Für den Fall verschwindender Dämpfung $D \rightarrow 0$ entstehen aus (6.27), (6.28) für $\tilde{\Omega} \neq 1$:

$$\hat{x}_p = \frac{\hat{F}/k}{|1 - \tilde{\Omega}^2|}, \quad \alpha = \begin{cases} 0 & \text{für } \tilde{\Omega} < 1 \\ \pi & \text{für } \tilde{\Omega} > 1. \end{cases} \quad (6.30)$$

Bei fehlender Dämpfung wächst $\hat{x}_p$ für $\tilde{\Omega} > 1$ über alle Grenzen. Deshalb hört man gelegentlich, Resonanz führe bei fehlender Dämpfung zu unendlich großen Amplituden. Das trifft in dreierlei Hinsicht praktisch nicht zu.

- *Erstens* gibt es keine Schwinger ohne Dämpfung, sondern allenfalls solche mit sehr schwacher Dämpfung – und dann großen Amplituden.
- *Zweitens* gelten die angesetzten Bewegungsgleichungen nur für beschränkte Auslenkungen. Bei (zu) großen Auslenkungen ändern die Schwinger ihr Verhalten (es gelten nicht-lineare Bewegungsgleichungen) oder sie brechen und ändern damit ihr Verhalten drastisch.
- *Drittens* wachsen die Amplituden *langsam* mit der Zeit (vgl. Aufgabe 6-15), der Erreger muss ja die Energie für den Schwinger liefern.

Aus Bild 6-9 liest man ab, dass die Phasenverschiebungswinkel α im Resonanzbereich in der Nähe von $\alpha = \pi/2 = 90^\circ$ liegt und dass $\alpha = \pi/2 = 90^\circ$ für $\tilde{\Omega} = 1$, ($\Omega = \omega_0$), für alle Werte $D \geq 0$ gilt. (Dies nutzt man gelegentlich bei Messungen aus, um die *Resonanzstelle* zu erkennen.)

Bei vorhandener Dämpfung sind die *Resonanzamplituden* für $0 < D < 1/\sqrt{2}$ durch $1/\left(2 D \sqrt{1-D^2}\right) \cdot \hat{F}_e/k$ beschränkt (vgl. Aufgabe 6-11 und 12). Für $D > 1/\sqrt{2}$ gibt es praktisch keine *Resonanzspitzen* mehr. Im Übrigen nähern sich die Resonanzkurven für $D > 0$ umso stärker – von unten – an die für $D = 0$ an, je weiter man sich von $\tilde{\Omega} = 1$ entfernt.

Bei kleiner Erregerfrequenz, $0 < \tilde{\Omega} < 1$, ist die Amplitude etwa gleich der Auslenkung der Feder unter der Last $\hat{F}_e$, denn die wirkende Trägheitskraft wächst mit Ω^2 , ist also noch klein, vgl. (6.27). Mit zunehmendem Ω wird der Einfluss der Trägheitskraft größer, die Amplitude nimmt zu, bei strenger Resonanz heben sich Feder- und Trägheitskraft auf, der Dämpfer allein hält der Erregung das (dynamische) Gleichgewicht. Oberhalb $\tilde{\Omega} = 1$ übertrifft die Trägheitskraft die Federkraft, sie übernimmt zunehmend die Erregung, für $\tilde{\Omega} \rightarrow \infty$ gilt $\hat{x}_p \rightarrow 0$. Damit dieses (dynamische) Gleichgewicht möglich ist, steigt der Phasenverschiebungswinkel α für $0 < \tilde{\Omega} < 1$ zunächst langsam, dann sehr rasch von 0 auf 90° , für $\tilde{\Omega} > 1$ nähert er sich zunächst rasch, dann langsam werdend asymptotisch dem Wert $\alpha = \pi$ (von unten).

Vergrößerungsfunktion

Schreibt man die erzwungene Schwingung $x_p(t)$ gemäß (6.26) mit $\hat{x}_p$ nach (6.27) und α nach (6.28) in der Form

$$x_p = \frac{\hat{F}}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\tilde{\Omega}^2)^2 + 4D^2\tilde{\Omega}^2}} \cos(\Omega t - \alpha), \quad (6.31)$$

so steht $\hat{F}/k$ als *statische Auslenkung* und $1/\sqrt{(1-\tilde{\Omega}^2)^2 + 4D^2\tilde{\Omega}^2}$ als eine Einflussfunktion, die die Wirkung des Schwingens berücksichtigt. Man nennt

$$V_1 := \frac{1}{\sqrt{(1-\tilde{\Omega}^2)^2 + 4D^2\tilde{\Omega}^2}} \quad (6.32)$$

Vergrößerungsfunktion^{*} und schreibt statt (6.31)

^{*} Es gibt auch V_2, V_3 .

$$x_p = \frac{\hat{F}}{k} V_1(\tilde{\Omega}) \cos(\Omega t - \alpha). \quad (6.33)$$

Für α gilt nach wie vor (6.24)₃ bzw. (6.28):

$$\tan \alpha = \frac{2D\tilde{\Omega}}{1-\tilde{\Omega}^2}, \quad 0 \leq \alpha < \pi. \quad (6.34)$$

Das Diagramm für $V_1(\tilde{\Omega})$ unterscheidet sich praktisch nicht von Bild 6-8. Es ist allerdings üblich, auf der Abszisse ($\tilde{\Omega}$ -Achse) für $\tilde{\Omega} \geq 1$ statt $\tilde{\Omega}$ den transformierten Wert

$$a(\tilde{\Omega}) := 2 - 1/\tilde{\Omega} \quad (6.35)$$

aufzutragen, vgl. Bild 6-10.

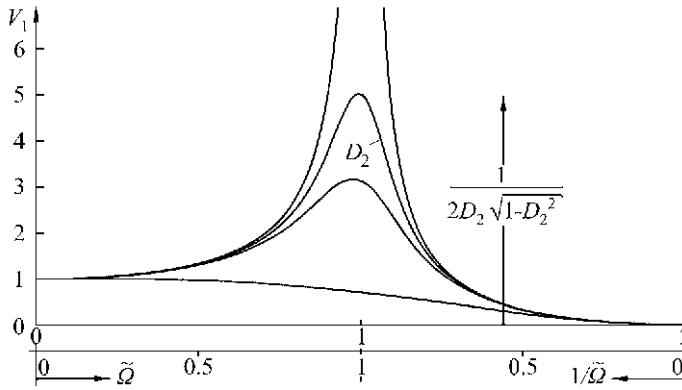


Bild 6-10
Vergrößerungsfunktion V_1

6.2.4 Der Frequenzgang der Übertragungsfunktion

Die *Produktdarstellung* der erzwungenen Schwingung – in der *komplexen Form* bzw. Sichtweise von Abschnitt 6.2.2 – als *Eingang* $\times$ *Übertragungsfunktion* (s. Bild 6-3) ist besonders wichtig, weil sie den Zugang zu theoretischen und messtechnischen Methoden der *Signalverarbeitung* eröffnet. (In reeller Form, vgl. Aufgabe 6-18, ist das nicht möglich.)

Die Darstellung der *Übertragungsfunktion* $H(j\Omega)$, die man dazu braucht, nennt man *Ortskurve*, sie zeigt H oder $\tilde{H}$ in der komplexen Ebene mit Ω oder $\tilde{\Omega}$ als Kurvenparameter. Der Vergleich von (6.22), (6.25), (6.32), (6.34) liefert

$$\tilde{H}(j\tilde{\Omega}) = \frac{1}{1-\tilde{\Omega}^2 + 2Dj\tilde{\Omega}} = \frac{e^{j\alpha}}{\sqrt{(1-\tilde{\Omega}^2)^2 + 4D^2\tilde{\Omega}^2}} = V_1(\tilde{\Omega})e^{-j\alpha(\tilde{\Omega})}. \quad (6.36)$$

Zur Veranschaulichung ist $\tilde{H}(j\tilde{\Omega})$ für $D=0.2$ in Bild 6-11a als dreidimensionale Raumkurve dargestellt. (Aus dem Diagramm lassen sich nur schwer Daten abgreifen.) Bild 6-11b zeigt die zugehörige Ortskurve.

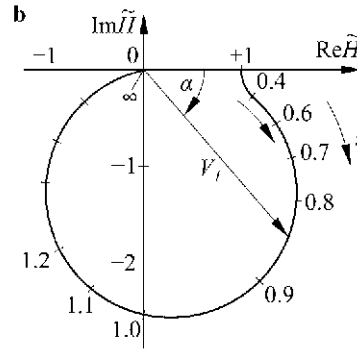
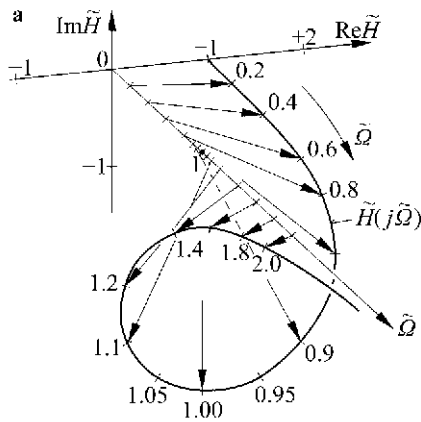


Bild 6-11
Frequenzgang
der Übertra-
gungsfunkti-
on $\tilde{H}(j\Omega)$ für
 $D = 0.2$.
a drei-
dimensional,
in perspektivi-
scher Darstel-
lung, b als
Ortskurve

6.3 Das Arbeiten mit Stoßerregung und Stoßantwort

Statt *Stoßerregung* und *Stoßantwort* sagt man oft *Impulserregung* bzw. *Impulsantwort* (vgl. die Bemerkung in A.3.1).

6.3.1 Die Delta-Funktion

Man kann – mit einiger Vorsicht – die Delta-Funktion $\delta(t - \tau)$ als einen sehr kurzen *Einheitsstoß* ansehen. Mit Bild 6-12a gelten bei $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\delta(t - \tau) \equiv 0 \text{ für } |t - \tau| > \varepsilon, \quad (6.37)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau + \varepsilon} \delta(t - \tau) dt = A \stackrel{!}{=} 1. \quad (6.38)$$

Bemerkungen:

1. Man nennt $\delta(t - \tau)$ auch *Dirac-Funktion*, aus mathematischer Sicht handelt es sich um eine *Distribution* (nach L. Schwartz^{*}).
2. Im Intervall $|t - \tau| < \varepsilon$ darf $\delta(t - \tau)$ auch negative Werte annehmen, s. Bild 6-12b, doch muss die, unter Beachtung der Vorzeichen, berechnete Fläche die Bedingung (6.38) erfüllen.
3. Dimensionen: Für die Fläche A gilt $\dim(A) = 1$, für die Delta-Funktion $\dim \delta = 1/\text{Zeit}$; beim Einführen einer dimensionslosen Zeit muss $\delta(t - \tau)$ also (mit)transformiert werden.

^{*} Laurent Schwartz, *1915-2002*, französischer Mathematiker.

4. Damit $\delta(t-\tau)$ nicht mit dem Abklingkoeffizienten δ , s. z. B. (1.91) und (6.23) verwechselt wird, bezeichnen wir die letzteren mit δ^* , soweit er parallel zur Delta-Funktion vorkommt.
5. Zur Vereinfachung schreiben wir unten

$$\tau^- := \tau - \varepsilon, \quad \tau^+ := \tau + \varepsilon. \quad (6.39)$$

6. Überlegungen mit Hilfe von Delta-Funktionen führen stets auf Integrale der Art (6.38), wo jedoch die Delta-Funktion im Integranden mit einer *stetigen* Funktion $f(t)$ multipliziert ist. Dann gilt (vgl. Aufgabe 6-21):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-\tau) dt = \int_{\tau^-}^{\tau^+} f(t) \delta(t-\tau) dt = f(\tau). \quad (6.40)$$

6.3.2 Erregung durch einen Einheitsstoß

Auf den Einmassenschwinger nach Bild 6-13 (vgl. Bild 4-12) wirkt zur Zeit $t = \tau$ als "Erregerkraft F_e " der Stoß $I \cdot \delta(t-\tau)$, wobei zunächst $I = 1$ (dimensionslos!) gesetzt wird. Die Bewegungsgleichung (6.1) lautet dann (Aufgabe 6-22):

$$m \ddot{h} + b \dot{h} + k h = I \cdot \delta(t-\tau), \quad (6.41)$$

wobei wir – um Dimensionswirrwarr zu vermeiden – die Auslenkung $x(t)$ durch die *Stoßantwort* $h(t)$ ersetzen.

Sei der Schwinger bis zum Zeitpunkt τ^- in Ruhe: $h(t) \equiv 0$ für $t \leq \tau^-$. Wir integrieren linke wie rechte Seite von (6.41) über das Intervall $\tau^- \leq t < \tau^+$ nach der Zeit t und erhalten (vgl. (6.38), (6.40)):

$$m \left(\dot{h}(\tau^+) - \dot{h}(\tau^-) \right) + b \left(h(\tau^+) - h(\tau^-) \right) + k \int_{\tau^-}^{\tau^+} h(t) dt = I. \quad (6.42)$$

Die Stoßantwort $h(t)$ muss stetig sein: Wegen $h = 0$ für $t < \tau^-$ und $\varepsilon \rightarrow 0$ gelten dann

$$\dot{h}(\tau^-) = 0, \quad h(\tau^+) \rightarrow 0, \quad h(\tau^-) = 0, \quad \int_{\tau^-}^{\tau^+} h d\tau = 0, \quad (6.43)$$

und (6.42) liefert

$$\dot{h}(\tau^+) = I/m. \quad (6.44)$$

Die für $t \leq \tau$ verschwindende Stoßantwort $h(t)$ genügt *unmittelbar nach dem Einheitsstoß* also den Anfangsbedingungen

$$h(\tau^+) = 0, \quad \dot{h}(\tau^+) = I/m. \quad (6.45)$$

Nach dem Stoß gilt anstelle von (6.41) die zugeordnete homogene Dgl

$$m \ddot{h} + b \dot{h} + k h = 0. \quad (6.46)$$

Die Stoßantwort $h(t)$ ist für $t > \tau$ also als Lösung von (6.46) zu den Anfangsbedingungen (6.45) definiert. Aus (5.27) folgt für $t > \tau$

$$h(t - \tau) = \frac{I}{m\omega} e^{-\delta^*(t-\tau)} \sin \omega(t - \tau). \quad (6.47)$$

Bild 6-14b zeigt den Verlauf; vgl. Bild 1-22.

Meistens setzt man bei der Darstellung $\tau = 0$ und nennt $h(t)$ Stoßantwort zum Einheitsstoß $\delta(t)$. Parallel zum Signalfussplan nach Bild 6-3 zeichnet man für lineare Schwingungssysteme (mit konstanten Koeffizienten) den Wirkungsplan nach Bild 6-15.

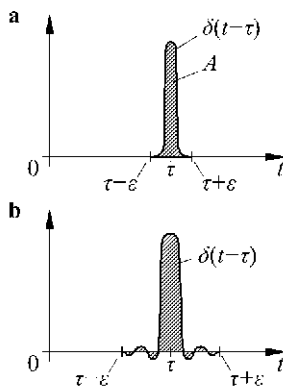


Bild 6-12
Delta Funktionen

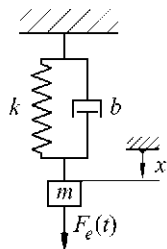


Bild 6-13
Einmassenschwinger

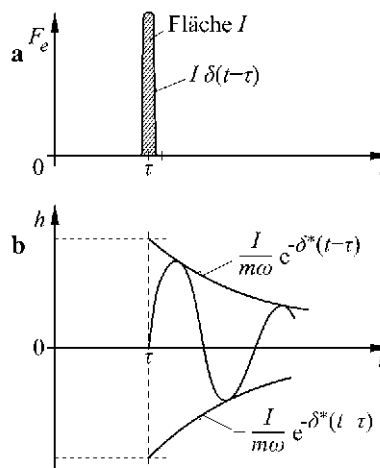


Bild 6-14
a Stoß, b Stoßantwort, c $F_e(t)$ als Stoßfolge

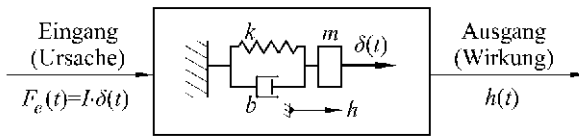


Bild 6-15
Wirkungsplan für Einheitsstoß $I \cdot \delta(t)$
und Stoßantwort $h(t)$

6.3.3 Erregerkraft als Stoßfolge

Eine stetige Erregerkraft $F(t)$ kann man als Folge von Stößen mit $I = F(t) \cdot \Delta\tau$ ansehen, vgl. Bild 6-14c. Wir dürfen die Wirkungen der Folge von Einzelstößen überlagern, vgl. Abschnitt 4.6.2. Da die Einzelstöße – wegen $\varepsilon \rightarrow 0$ bzw. $\Delta\tau \rightarrow 0$ – jeweils unendlich kurz werden, müssen wir integrieren und erhalten für $t \geq \tau$

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_{t_A}^t F(\tau) e^{-\delta^*(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau, \quad (6.48)$$

in allgemeiner Form

$$x(t) = \int_{t_A}^t F(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (6.49)$$

Darin steht t_A für einen Anfangszeitpunkt (evtl. $t_A < 0$), zudem das System in Ruhe war (vgl. Abschnitt 8).

Integrale der Form (6.48), (6.49) heißen *Faltungsintegrale*. Für verwickelte Funktionen ist ihre Auswertung schwierig, wenn nicht unmöglich. Routinaufgaben erledigt man mit Hilfe der Laplace-Transformation. (Heute geht man oft zu numerischen Lösungen über.)

Ersetzt man in (6.49) die Integrationsvariable τ durch

$$\sigma = t - \tau, \quad (6.50)$$

so liefert die entsprechende Transformation

$$x(t) = \int_0^{t-t_A} F(t-\sigma) h(\sigma) d\sigma. \quad (6.51)$$

Dies ist eine andere Lesart obiger Überlagerung.

6.4 Aufgaben

Aufgabe 6-1: Schreiben Sie die komplexe Form zur Dgl $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \hat{F}_1 \cos \Omega t + \hat{F}_2 \sin \Omega t$ an.

Aufgabe 6-2: Schreiben Sie die komplexe Form zur Dgl $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = b\dot{u} + ku$ mit $u(t) = \hat{u} \cos \Omega t$ an.

Aufgabe 6-3: Gegeben sei die *nichtlineare* Bewegungsgleichung $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + cx^3 = \hat{F}_e \cos \Omega t$, $\dim c = \text{Kraft/Länge}^3$. Zeigen Sie, dass die nichtlineare komplexe Dgl $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + cx^3 = \hat{F}_e e^{j\Omega t}$ *nicht* durch Realteilbildung in die reelle übergeht.

Aufgabe 6-4: Überführen Sie die Dgln (6.3) und (6.7) in die Formen $\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \hat{F}_e / k \cdot \cos \Omega t$ bzw. $\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \hat{F}_e / k \cdot e^{j\Omega t}$ mit *leicht interpretierbaren Parametern*.

Aufgabe 6-5: Berechnen Sie die erzwungene Schwingung für die Bewegungsgleichung aus Aufgabe 6-1.

Aufgabe 6-6: Zeigen Sie, dass aus der Dgl (6.9) unmittelbar die Form (6.19), (6.21) der (komplexen) Amplitude der erzwungenen Schwingung folgt.

Aufgabe 6-7: Setzen Sie den Zeiger (die komplexe Amplitude) zu Aufgabe 6-5 entsprechend Bild 6-5 grafisch aus zwei Anteilen – für F_1 und F_2 – zusammen.

Aufgabe 6-8: Schreiben Sie für den in Abschnitt 6.2.2 untersuchten Schwinger für die Geschwindigkeit $v_p := \dot{x}_p$ und die Beschleunigung $a_p := \ddot{x}_p$ die (komplexen) Ausdrücke für die Drehzeiger $\underline{v}_p, \underline{a}_p$ und Zeiger $\hat{v}_p, \hat{a}_p$ an. Tragen Sie die Zeiger jeweils gemeinsam in Diagramme entsprechend Bild 6-4 und Bild 6-5 ein.

Aufgabe 6-9: Deuten Sie Gl. (6.13) grafisch als *geometrische Summe* von (Dreh-)Zeigern.

Aufgabe 6-10: Bringen Sie die rechte Seite der Gl. (6.21) auf eine Form mit reellem Nenner und schreiben daraus (6.25) an.

Aufgabe 6-11: Zeigen Sie, dass die Amplituden $\hat{x}_p(\tilde{\Omega})$ für $0 < D < 1/\sqrt{2}$ ihren Maximalwert bei $\tilde{\Omega} = \sqrt{1 - 2D^2}$ annehmen (*Resonanzstelle*) und dass der Maximalwert $\hat{x}_p / (\hat{F}_e/k)$ bei $1 / \left(2D\sqrt{1 - D^2} \right)$ liegt.

Aufgabe 6-12: Zeigen Sie, dass für $\tilde{\Omega} = 1$, (also $\Omega = \omega_0$), $\hat{x} = \hat{F}_e / (2Dk)$ gilt (vgl. Aufgabe 6-11 für $0 < D \ll 1$).

Aufgabe 6-13: Leiten Sie durch Grenzübergang $D \rightarrow 0$ die Gleichungen (6.30) und (6.28) her.

Aufgabe 6-14: Ermitteln Sie für den Fall verschwindender Dämpfung die erzwungenen Schwingungen für $m\ddot{x} + kx = \hat{F}_e \cos \Omega t$ (vgl. (6.3)) mit dem Ansatz $x_p = x_p^* \cos \Omega t$ und weisen Sie nach, dass dieses x_p für $\Omega \neq \omega_0$ mit dem nach (6.30) übereinstimmt.

Aufgabe 6-15: Zeigen Sie, dass die Dgl $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \hat{F}_e/k \cdot \cos \omega_0 t$ die Lösung $x_p = 1/2 \cdot \hat{F}_e/k \cdot (\omega_0 t) \cdot \sin \omega_0 t$ hat.

Aufgabe 6-16: Zeigen Sie, dass in den Kurven $V_1(\tilde{\Omega})$ von Bild 6-10 durch die Verzerrung gemäß (6.35) bei $\tilde{\Omega} = 1$ keine Knicke entstehen.

Aufgabe 6-17: Verzerren Sie in Bild 6-10 die Ordinate der Vergrößerungsfunktion $V_1(\tilde{\Omega})$ für $V_1 \geq 1$ gemäß $b(V_1) = 2 - 1/V_1$ und zeichnen Sie das entsprechende Diagramm.

Aufgabe 6-18: Gesucht ist die Lösung der Dgl aus Aufgabe 6-1 auf *reellem* Wege mit einem Ansatz vom *Typ der rechten Seite*: dort ist das $x_p = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$. Bestimmen Sie die zunächst freien Konstanten A, B durch Abgleich der Sinus- und Kosinus-Terme.

Aufgabe 6-19: Vergleichen Sie die Diagramme in Bild 6-8 (bzw. Bild 6-10) und Bild 6-9 mit der Ortskurve in Bild 6-11a. Versuchen Sie jeweils $V_a(\tilde{\Omega}), \alpha(\tilde{\Omega})$ aus $\tilde{H}(j\tilde{\Omega})$ und umgekehrt zu skizzieren.

Aufgabe 6-20: Schreiben Sie für die Aufhängekraft $F = kx + b\dot{x}$, vgl. Bild 4-12, zu gegebener harmonischer Erregung, vgl. (6.2), (6.3), eine Übertragungsfunktion $H(j\Omega)$ zum Eingang $\hat{F}_e \exp(j\Omega t)$ und Ausgang $\hat{F} \exp(j\Omega t)$ an, machen Sie sie dimensionslos und entwerfen Sie eine Vergrößerungsfunktion und eine Ortskurve des Frequenzgangs $\tilde{H}(j\tilde{\Omega})$.

Aufgabe 6-21: Wählen Sie als Delta-Funktion $\delta(t)$ im Intervall $-\varepsilon < t < \varepsilon$ zum Beispiel $\delta(t) = 1/2\varepsilon$ oder $\delta(t) = (\pi/4\varepsilon) \cdot \cos(\pi t/2\varepsilon)$ und als $f(t)$ ein Polynom oder eine trigonometrische Funktion. Werten Sie damit die Integrale (6.38), (6.40) und führen die Grenzübergänge $\varepsilon \rightarrow \infty$ durch.

Aufgabe 6-22: Welche Dimension hat die Stoßantwort $h(t)$ aus Dgl (6.41)?

Aufgabe 6-23: Nehmen Sie an, dass auf einen Schwinger als Erregung eine Stoßfolge der Periode T jeweils mit den Kraftstößen $\hat{I}$, $\dim(\hat{I}) = \text{Masse} \cdot \text{Geschwindigkeit}$ wirkt. Setzen Sie die Bewegung aus Stoßantworten zusammen.

Aufgabe 6-24: Der Schwinger nach Bild 6-13 sei zunächst in Ruhe. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird als konstante Last das Gewicht G aufgebracht. Berechnen Sie $x(t)$ für $t > 0$ nach Gl. (6.48).

Aufgabe 6-25: Auf den Schwinger nach Aufgabe 6-23 wirkt die konstante Kraft $F_e(t) = F_c$ stufenförmig, d. h. nur im Intervall $0 \leq t \leq T_1$. Wie lautet $x(t)$ für $t > T_1$?

Aufgabe 6-26: Die stufenförmige Kraft aus Aufgabe 6-25 wird durch eine bei $t = T_1$ abbrechende Rampe $F(t) = (t/T_1) \cdot F_c$ ersetzt. Wie lautet $x(t)$ für $0 \leq t \leq T_1$ und für $t > T_1$?

Aufgabe 6-27: Kontrollieren Sie die Transformation (6.50), (6.51) und vergleichen Sie die Lesarten von (6.48), (6.49) mit der von (6.51) an Hand von Bild 6-14.

7 Erzwungene Schwingungen der Exzenterpressen

Die Bewegungsgleichung (4.25) bzw. (4.26), (4.27) ist linear, die Wirkungen der einzelnen Erregerterme auf der rechten Seite, vgl. (4.27), können gemäß Abschnitt 4.6.2 getrennt untersucht und dann einander überlagert werden. (In Abschnitt 8 kommen dann noch Wirkungen aus der zugeordneten homogenen Gleichung hinzu, die die Anfangsbedingungen erfassen; sie klingen in der Regel rasch ab.)

Das Überlagern gilt allerdings nur für das Auffinden der Lösungen. Bewerten muss man oft die Summe. Das gilt besonders für das Erreichen und *Überschreiten* von *zulässigen Lasten* oder *Auslenkungen*. In Grenzfällen sind für solche Untersuchungen umständliche numerische Rechnungen erforderlich.

7.1 Wirkung der relativ bewegten Massen auf die Rahmenauslenkung $x(t)$

Berücksichtigt man in der Bewegungsgleichung (4.25) allein die Erregerkräfte $2F_{Trel}$ aus der Relativbewegung von Kurbel, Pleuel und Stößel, so lautet sie

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_e \quad (7.1)$$

mit

$$F_e = 2 F_{Trel} = 2 m_s r \Omega^2 \{ \hat{f}_{c1} \cos \varphi + \hat{f}_{c2} \cos 2\varphi + \hat{f}_{c4} \cos 4\varphi + \dots \}, \quad (7.2)$$

wo $\varphi = \Omega t$, vgl. (4.7), (4.15)-(4.23).

Man setzt die erzwungenen Schwingungen aus den Lösungen der Dgl

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 2 m_s r \Omega^2 \hat{f}_{cn} \cos n \Omega t \quad (7.3)$$

zusammen für die einzelnen Erregungen $\dots \cos n \Omega t$. In der bezogenen Schreibweise aus Abschnitt 5.1, vgl. auch Gl. (6.9), lautet (7.3)

$$\ddot{x} + 2D\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 2r \frac{m_s}{m} \hat{f}_{cn} \omega_0^2 \tilde{\Omega}^2 \cos n \Omega t, \quad (7.4)$$

komplex, vgl. Abschnitt 6.2.1.

$$\ddot{\underline{x}} + 2D\omega_0 \dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = 2r \frac{m_s}{m} \hat{f}_{cn} \omega_0^2 \tilde{\Omega}^2 e^{jn\Omega t}. \quad (7.5)$$

Der Lösungsansatz

$$\underline{x} = \hat{\underline{x}} e^{jn\Omega t}, \quad (7.6)$$

vgl. Abschnitt 6.2.2, führt auf

$$\hat{\underline{x}} = 2r \frac{m_s}{m} \hat{f}_{cn} \frac{\omega_0^2 \tilde{\Omega}^2}{\omega_0^2 - n^2 \tilde{\Omega}^2 + 2Dn\omega_0 j \tilde{\Omega}} = 2r \frac{m_s}{m} \hat{f}_{cn} \frac{\tilde{\Omega}^2}{1 - n^2 \tilde{\Omega}^2 + 2jnD\tilde{\Omega}}. \quad (7.7)$$

Ähnlich Abschnitt 6.2.2 gelangt man zu

$$\hat{x} = 2r \frac{m_s}{m} \hat{f}_{cn} \frac{\tilde{\Omega}^2 e^{-j\alpha}}{\sqrt{(1-n^2 \tilde{\Omega}^2)^2 + 4D^2 n^2 \tilde{\Omega}^2}}, \text{ wo } \tan \alpha = \frac{2Dn\tilde{\Omega}}{1-n^2 \tilde{\Omega}^2}, \quad 0 \leq \alpha < \pi. \quad (7.8)$$

Hier wird die neue *Vergrößerungsfunktion*

$$V_3(\tilde{\Omega}) := \frac{\tilde{\Omega}^2}{\sqrt{(1-\tilde{\Omega}^2)^2 + 4D^2 \tilde{\Omega}^2}} \quad (7.9)$$

eingeführt; für den *Phasenverschiebungswinkel* gilt (6.28). Bild 7-1 zeigt $V_3(\tilde{\Omega})$, für $\alpha(\tilde{\Omega})$ gilt Bild 6-9.

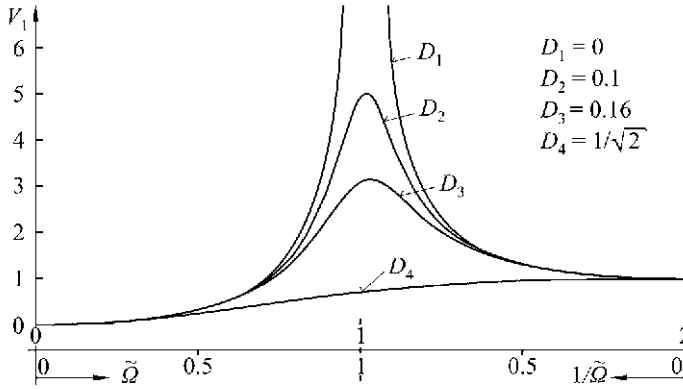


Bild 7-1
Vergrößerungsfunktion V_3

Überlagert man die Wirkungen der einzelnen Terme von (7.2) gemäß (7.8), so erhält man – in reeller Form – die erzwungene Schwingung

$$x_p(t) = 2r \frac{m_s}{m} \left\{ \hat{f}_{c1} V_3(\tilde{\Omega}) \cos(\Omega t - \alpha(\tilde{\Omega})) + \frac{\hat{f}_{c2}}{2^2} V_3(2\tilde{\Omega}) \cos(\Omega t - \alpha(2\tilde{\Omega})) \right. \\ \left. + \frac{\hat{f}_{c4}}{4^2} V_3(4\tilde{\Omega}) \cos(\Omega t - \alpha(4\tilde{\Omega})) + \dots \right\}. \quad (7.10)$$

Man liest aus (7.10) ab:

1. Die erzwungenen Schwingungen werden umso kleiner, je kleiner das Verhältnis $2m_s/m$ ist, je kleiner also die bewegten Massen im Verhältnis zur Gesamtmasse sind. (Ein schweres Fundament ist günstig.)
2. Durch die Faktoren $\hat{f}_{cn}/n^2$ wird die Wirkung der höheren Harmonischen ($n > 1$) abgemindert. Für die $\hat{f}_{cn}$ gilt das Linienspektrum nach Bild 4-9.

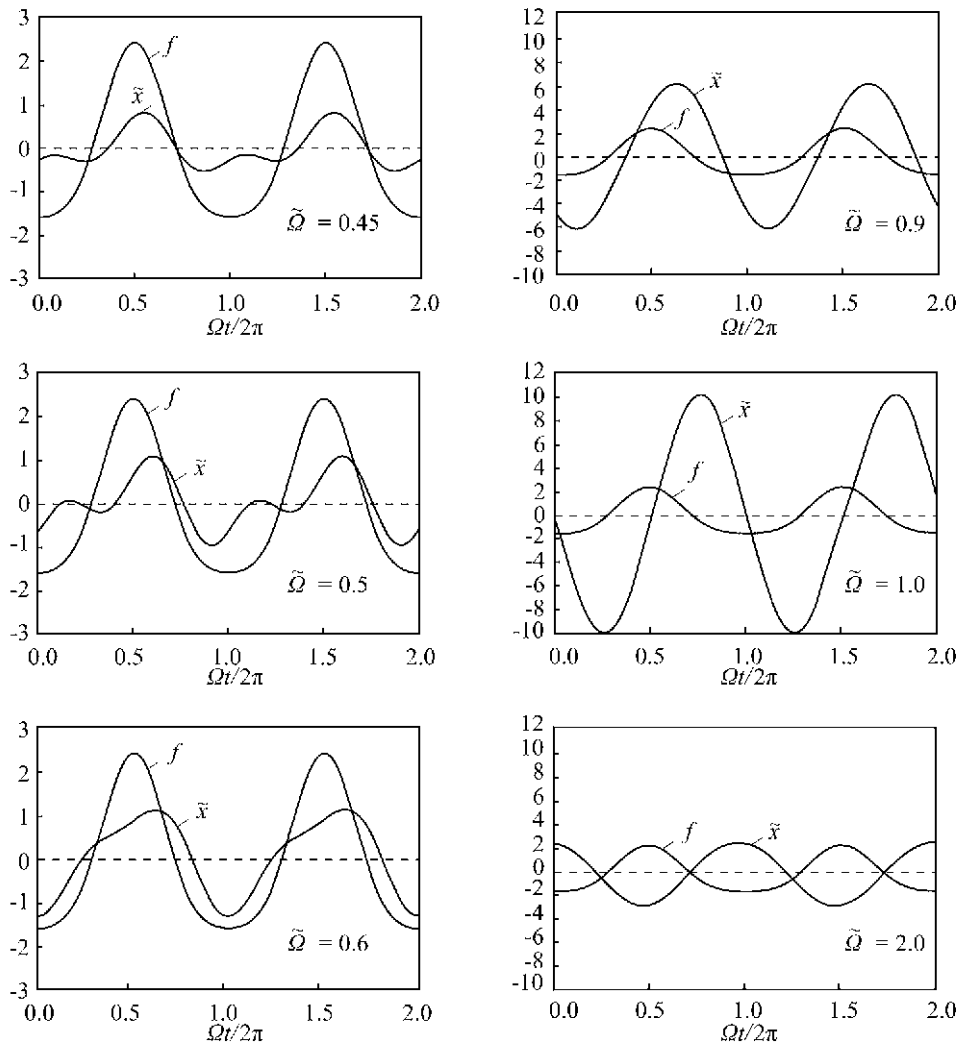


Bild 7-2 Exzenterpresse: Zeitverläufe der bezogenen Erregerkraft $f(t)$ und bezogener Auslenkungen $\tilde{x}(t)$ zu verschiedenen Erregerfrequenzen $\tilde{\Omega} = \Omega/\omega_0$ mit $D = 0.05$

3. In $V_3(n\tilde{\Omega})$ trifft man auf Resonanz, wenn $n\tilde{\Omega} = n\Omega/\omega_0 \approx 1$ ist. Man kann Resonanz vermeiden, wenn man $\tilde{\Omega} > 1$ wählt, also $\omega_0 < \Omega$, *tief abstimmen*. Dann ist man allerdings in einem Bereich $V_3 \approx 1$.
4. Da die $\hat{f}_{cn}$ mit steigendem n rasch abnehmen, vgl. Bild 4-9, kann man hier auch $\tilde{\Omega} < 1$ wählen und braucht nur darauf zu achten, z. B. $2\tilde{\Omega} \approx 1$ zu vermeiden.

In Bild 7-2 ist die (bezogene) Erregerkraft $f(t)$ gemäß (4.23) – vgl. auch Bild 4-10 – gemeinsam mit der bezogenen Auslenkung

$$\tilde{x}(t) := \frac{1}{2r m_s / m} x_p(t) \quad (7.11)$$

mit $D = 0.05$ für 6 verschiedene Werte $\tilde{\Omega}$ dargestellt.

Die ersten 3 (untereinander stehenden) Teilbilder zeigen das Schwingungsverhalten für $\tilde{\Omega} = 0.45, 0.5$ und 0.6 , also in der Umgebung der Resonanz mit $\hat{f}_{c2} \cos 2\Omega t$ (bei $\tilde{\Omega} = 0.5$).

Man beachte den stark von $\tilde{\Omega}$ beeinflussten Zeitverlauf!

Die zwei oberen Bilder in der 2. Spalte zeigen $\tilde{x}(t)$ bei $\tilde{\Omega} = 0.9$ und 1.0 , also in der Nähe der Resonanz mit $\hat{f}_{c1} \cos \Omega t$ (bei $\tilde{\Omega} = 1$). Das letzte Bild, für $\tilde{\Omega} = 2.0$, zeigt fast schon den *asymptotischen* Wert (für $\tilde{\Omega} \rightarrow \infty$), vgl. $V_3 \approx 1$ in Bild 7-2.

7.2 Wirkung der bewegten Bodenplatte

Lässt man nun in der Bewegungsgleichung (4.25) $2F_{Trel}$ und G weg und nimmt für die *Fußpunkterregung* durch die Bodenplatte eine (komplexe) Bewegung

$$\underline{u}(t) = \hat{u} e^{j\Omega t} \quad (7.12)$$

an, so erhält man (komplex) die Gleichung*

$$m\ddot{\underline{x}} + b\dot{\underline{x}} + k\underline{x} = b\dot{\underline{u}} + k\underline{u}. \quad (7.13)$$

Will man (anschließend) auch die Kraft $\underline{F}(t)$ auf die Decke berechnen, gilt dafür, vgl.

$$\underline{F}(t) = b(\dot{\underline{x}} - \dot{\underline{u}}) + k(\underline{x} - \underline{u}). \quad (7.14)$$

Mit den Lösungsansätzen

$$\underline{x} = \hat{\underline{x}} e^{j\Omega t}, \quad \underline{F} = \hat{\underline{F}} e^{j\Omega t} \quad (7.15)$$

erhalten wir aus (7.13) und (7.14)

$$\hat{\underline{x}} = \frac{k + j b \Omega}{k - m \Omega^2 + j b \Omega} \hat{u}, \quad (7.16)$$

$$\hat{\underline{F}} = (k + j b \Omega)(\hat{\underline{x}} - \hat{u}) = \frac{(k + j b \Omega)m \Omega^2}{k - m \Omega^2 + j b \Omega} \hat{u}. \quad (7.17)$$

Zieht man in (7.16) und (7.17) in Zähler und Nenner das k heraus, so ergeben sich mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $b = 2D\omega_0 m$, $\tilde{\Omega} = \Omega/\omega_0$, vgl. Abschnitte 5.1 und 6.2.2

* Wegen der Gleichbehandlung von $F(t)$ und $x(t)$ schreiben wir komplex $\underline{F}(t)$ und $\underline{x}(t)$.

$$\underline{\hat{x}} = \frac{1 + 2Dj\tilde{\Omega}}{1 - \tilde{\Omega}^2 + 2Dj\tilde{\Omega}} \hat{u}, \quad (7.18)$$

und

$$\underline{\hat{F}} = \frac{(1 + 2Dj\tilde{\Omega})\tilde{\Omega}^2}{1 - \tilde{\Omega}^2 + 2Dj\tilde{\Omega}} k \hat{u}. \quad (7.19)$$

Man setzt

$$\frac{1 + 2Dj\tilde{\Omega}}{1 - \tilde{\Omega}^2 + 2Dj\tilde{\Omega}} = V_2(\tilde{\Omega}) e^{-j\alpha_2(\tilde{\Omega})}, \quad (7.20)$$

$$\frac{(1 + 2Dj\tilde{\Omega})\tilde{\Omega}^2}{1 - \tilde{\Omega}^2 + 2Dj\tilde{\Omega}} = \tilde{\Omega}^2 V_2(\tilde{\Omega}) e^{-j\alpha_2(\tilde{\Omega})}, \quad (7.21)$$

wo

$$V_2(\tilde{\Omega}) = \frac{\sqrt{1 + 4D^2\tilde{\Omega}^2}}{\sqrt{(1 - \tilde{\Omega}^2)^2 + 4D^2\tilde{\Omega}^2}} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \alpha - \beta, \quad (7.22)$$

mit α aus (6.28), vgl. Bild 6-9, und β aus

$$\tan \beta = 2D\tilde{\Omega}, \quad 0 \leq \beta < \pi/2. \quad (7.23)$$

Dann lauten (7.18) und (7.19)

$$\underline{\hat{x}} = \hat{u} V_2 e^{-j\alpha_2}, \quad \underline{\hat{F}} = k \hat{u} \tilde{\Omega}^2 V_2 e^{-j\alpha_2}. \quad (7.24)$$

Bild 7-3, Bild 7-4 und Bild 7-5 zeigen $V_2(\tilde{\Omega})$, $\tilde{\Omega}^2 V_2(\tilde{\Omega})$, $\alpha_2(\tilde{\Omega})$.

7.2.1 Passivisolierung

Man spricht von *Passivisolierung*, wenn man ein schwingungsfähiges System durch geeignet gewählte Parameter vor starken Auswirkungen durch Erregungen von außen bewahren will, hier ist das die Bewegung der Bodenplatte. Man verlangt kleine Bewegungen, also kleine Amplituden $|\underline{\hat{x}}|$, also muss $V_2(\tilde{\Omega})$ klein sein, vgl. (7.24) und Bild 7-3, $\tilde{\Omega} = \Omega/\omega_0$ muss

danach groß, bei gegebener Erregerfrequenz Ω also $\omega_0^2 = k/m$ klein sein. Man spricht von *tiefer Abstimmung*, die man durch weiche Federn und große Masse erreicht. Dabei sollen die Kräfte, also die Beschleunigungen $|\Omega^2 \underline{\hat{x}}|$, also auch $\tilde{\Omega}^2 V_2(\tilde{\Omega})$ möglichst klein bleiben.

Demnach darf, vgl. Bild 7-4, das Dämpfungsmaß D nicht zu groß sein.

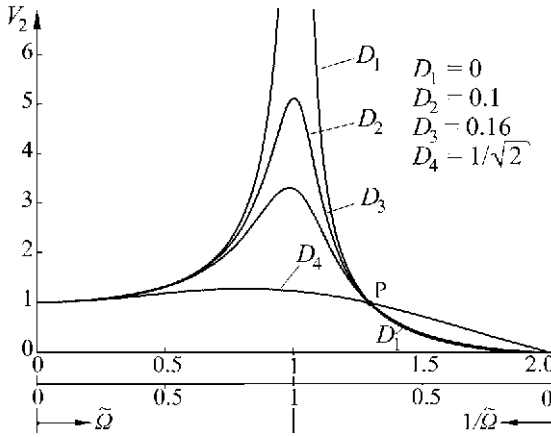


Bild 7-3
Vergrößerungsfunktion V_2

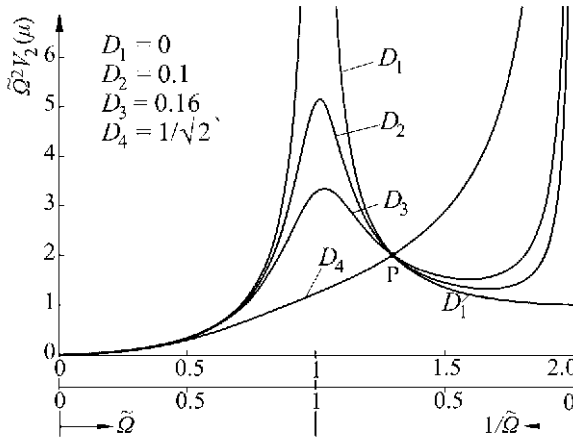


Bild 7-4
Vergrößerungsfunktion $\tilde{\Omega}^2 V_2$

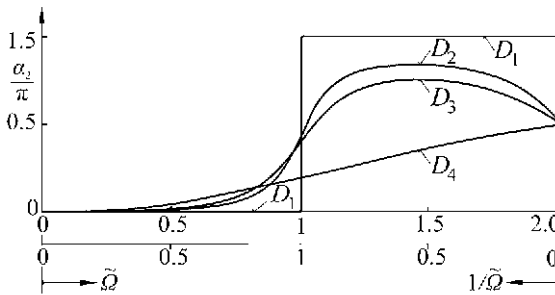


Bild 7-5
Phasengang α_2

7.3 Wirkung der bewegten Massen auf den Boden

Infolge der Erregerkräfte F_{Trel} bewegt sich der *Maschinensatz* mit $x_p(t)$, vgl. Abschnitt 7.1. Gemäß Gleichung (4.3), (4.4) übt er auf den Boden die Kraft

$$F(t) = b(\dot{x}_p - \dot{u}) + k(x_p - u) \quad (7.25)$$

aus. Bleibt die Bodenplatte in Ruhe, gilt also $u(t) \equiv 0$, so folgt aus (7.25)

$$F(t) = b\dot{x}_p + kx_p. \quad (7.26)$$

Schreibt man $x_p(t)$ wieder komplex, vgl. (7.5), so liefert (7.26) für die n -te Harmonische

$$\underline{F} - b\underline{\dot{x}} + k\underline{x} = (k + b j \Omega n) \hat{x} e^{jn\Omega t} =: \underline{\hat{F}} e^{jn\Omega t}. \quad (7.27)$$

Man erhält mit (5.3) und (7.7)

$$\underline{\hat{F}} = 2r \frac{m_s}{m} \hat{f}_{cn} k \frac{(1 + 2D j \tilde{\Omega} n) \tilde{\Omega}^2}{(1 - \tilde{\Omega}^2 n^2) + 2D j \tilde{\Omega} n}. \quad (7.28)$$

Vergleich mit (7.20) – (7.22) liefert

$$\underline{\hat{F}} = 2r \frac{m_s}{m} k \frac{1}{n^2} \hat{f}_{cn} (n \tilde{\Omega})^2 V_2(n \tilde{\Omega}) e^{-j\alpha_2(n \tilde{\Omega})}. \quad (7.29)$$

Damit folgt mit den $\hat{f}_{cn}$ aus (4.23)

$$\begin{aligned} \underline{F}(t) = 2r \frac{m_s}{m} k \left\{ \hat{f}_{c1} \tilde{\Omega}^2 V_2(\tilde{\Omega}) e^{j(\Omega t - \alpha_2(\tilde{\Omega}))} + \frac{1}{2^2} \hat{f}_{c2} (2\tilde{\Omega})^2 V_2(2\tilde{\Omega}) e^{j(2\Omega t - \alpha_2(2\tilde{\Omega}))} \right. \\ \left. + \frac{1}{4^2} \hat{f}_{c4} (4\tilde{\Omega})^2 V_2(4\tilde{\Omega}) e^{j(4\Omega t - \alpha_2(4\tilde{\Omega}))} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (7.30)$$

und reell

$$\begin{aligned} F(t) = r \frac{m_s}{m} k \left\{ \hat{f}_{c1} \tilde{\Omega}^2 V_2(\tilde{\Omega}) \cos(\Omega t - \alpha_2(\tilde{\Omega})) \right. \\ \left. + \frac{1}{2^2} \hat{f}_{c2} (2\tilde{\Omega})^2 V_2(2\tilde{\Omega}) \cos(2\Omega t - \alpha_2(2\tilde{\Omega})) \right. \\ \left. + \frac{1}{4^2} \hat{f}_{c4} (4\tilde{\Omega})^2 V_2(4\tilde{\Omega}) \cos(4\Omega t - \alpha_2(4\tilde{\Omega})) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

7.3.1 Aktivisolierung

Man spricht von *Aktivisolierung*, wenn man die Umgebung eines schwingenden Systems durch geeignet gewählte Parameter vor der Auswirkung der über die Anschlusspunkte wirkenden Kräfte bewahren will.

Bei den Exzenterpressen sind die Wirkungen der (relativ) bewegten Massen auf den Boden durch (7.30) bzw. (7.31) gegeben. In der Regel wird es nicht gelingen, $\tilde{\Omega} = \Omega/\omega_0 \ll 1$ zu wählen, sodass man im Bereich $\tilde{\Omega}^2 V_2(\tilde{\Omega}) < 1$ liegt, vgl. Bild 7-4. Also muss man wieder,

wie bei der Passivisolierung in Abschnitt 7.2.1 *tief abstimmen*, $\omega_0^2 = k/m$ und D klein wählen. (Ein Beispiel dafür ist die Waschmaschine.)

7.4 Aufgaben

Aufgabe 7-1: Zeigen Sie $V_3(\tilde{\Omega}) = \tilde{\Omega}^2 V_1(\tilde{\Omega}) = V_1(1/\tilde{\Omega})$; – vgl. (7.9) mit (6.32).

Aufgabe 7-2: Nehmen Sie für $2rm_s/m$, D und $\tilde{\Omega}$ Zahlenwerte an und berechnen Sie mit den Daten von Bild 4-9 das Linienspektrum von (7.8). Variieren Sie mit $\tilde{\Omega}$.

Aufgabe 7-3: Schreiben Sie ein Rechnerprogramm, das – etwa zu den Daten gemäß Aufgabe 7-2 – die Funktionsverläufe $x_p(\varphi)$, $\varphi = \Omega t$ zur Lösung (7.8) zeichnet. Wie sehen die Funktionsverläufe $x_p(\varphi)$ im Vergleich zu Bild 4-10 aus, wenn man in die Resonanzen $\tilde{\Omega} = 1$ und $\tilde{\Omega} = 0.5$ hineinfährt? Was muss man also beachten, wenn man die Pressen mit veränderlicher Drehzahl betreiben will? – vgl. Bild 7-2.

Aufgabe 7-4: Welche Phasen(winkel) Beziehungen können Sie aus den Einzelbildern von Bild 7-2 ablesen?

Aufgabe 7-5: Schreiben Sie die linke Seite der Gleichung (7.20) durch Vergleich mit (6.36) in der Form $(1 + 2Dj\tilde{\Omega}) / (1 - \tilde{\Omega}^2 + 2Dj\tilde{\Omega}) = (1 + 2Dj\tilde{\Omega}) V_1 e^{-j\alpha} =: \sqrt{1 + 4D^2\tilde{\Omega}^2} e^{j\beta} V_1 e^{-j\alpha}$ und verifizieren Sie damit (7.20), (7.22), (7.23).

Aufgabe 7-6: Bei welchem Wert $\tilde{\Omega}$ liegt der Punkt P in Bild 7-3 und Bild 7-5, bei dem die Dämpfung D die Wirkung umkehrt?

Aufgabe 7-7: Wie erklären Sie physikalisch anschaulich den Umschlag der Wirkungsrichtung der Dämpfung D bei P? Vgl. Bild 7-3, Bild 7-4 und Aufgabe 7-8; links von P wirkt größere Dämpfung mindernd, rechts von P verstärkt größere Dämpfung.

Aufgabe 7-8: Berechnen Sie zu Bild 7-3 und Bild 7-4 die Lage der Extrema.

Aufgabe 7-9: Nehmen Sie Zahlenwerte für die Parameter in (7.30) und zeichnen Sie parallel zu Aufgabe 7-2 das Linienspektrum zu $F(t)$.

Aufgabe 7-10: Schreiben Sie ein Rechnerprogramm, das Ihnen die Zeitverläufe $F(t)$ gemäß (7.31) berechnet, vgl. Bild 7-2.

Aufgabe 7-11: Denken Sie über die Wahl der Parameter m und k nach, wenn die Drehzahl Ω , der Kurbelradius r , die Masse m_s und die $\hat{f}_c$ gegeben sind und Sie $x_p(t)$ oder $F(t)$ – am besten beide – klein halten wollen. (Wie kann man m und k beeinflussen?) Beachten Sie $\tilde{\Omega} = \Omega / \sqrt{k/m}$; auch ist die statische Absenkung durch das Gewicht $x_{stat} = G/k = mg/k = g/\omega_0^2$, meistens durch die Nutzung der Maschine beschränkt.

8 Einschwing- und Anlaufvorgänge

Unmittelbar nach dem Einschalten einer Schwingungserregung, während ihres Anlaufs und einer Weile danach schwingt das erregte System *instationär*, d. h. die momentane Amplitude und die momentane Kreisfrequenz (vgl. Abschnitt 1.4.2) ändern sich, sind evtl. gar nicht definiert (vgl. Bild 8-1). Nach dem Übergang der Erregung in den periodischen Verlauf, oder auch nach dem Aufhören der Erregungen, klingen die Anfangsstörungen je nach Größe der Dämpfung mehr oder minder rasch ab (vgl. Bild 8-1). Hier stellen wir allgemeine Überlegungen zusammen. Quantitative Aussagen lassen sich in der Regel nur numerisch – für ein vorliegendes System mit konkreten Parametern – gewinnen.

8.1 Einschwingvorgänge

Gegeben sei die Bewegungsgleichung (4.26):

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = F_e(t). \quad (8.1)$$

Die Erregbarkeit $F_e(t)$ ist gemäß (4.27) aus konstanten und harmonisch schwingenden Anteilen zusammengesetzt. Die dadurch hervorgerufenen erzwungenen Schwingungen $x_p(t)$ wurden in den Abschnitten 6.2, 6.3, auch 7.1, 7.2 angeschrieben, dort der Einfachheit halber zum Teil ohne den Index p , sind also *bekannt*. Man stellt sich nun vor, dass die Erregerkraft $F_e(t)$ schon auf das System wirkt, der Schwinger jedoch bis zu einem Zeitpunkt t_0 festgehalten wird – oft setzt man $t_0 = 0$ – und mit einer Anfangsauslenkung x_0 sowie einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 losgelassen wird; das führt auf die *Anfangsbedingungen*

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0. \quad (8.2)$$

8.1.1 Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung; Anpassen an die Anfangsbedingungen

Die *allgemeine Lösung* $x(t)$ der Bewegungsgleichung (8.1) setzt sich aus einem *Partikularintegral* $x_p(t)$ der *inhomogenen* Gleichung und der *allgemeinen Lösung* $x_h(t)$ der (zugeordneten) *homogenen* Gleichung (4.32) zusammen:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t). \quad (8.3)$$

Mit $x_h(t)$ nach (5.26) folgt

$$x(t) = e^{-\delta t} (A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t) + x_p(t); \quad (8.4)$$

die beiden Konstanten A_c und A_s sind frei. *Anpassen* der allgemeinen Lösung (8.3) bzw. (8.4) an die *Anfangsbedingungen* (8.2) liefert

$$x_0 = x_h(t_0) + x_p(t_0), \quad v_0 = \dot{x}_h(t_0) + \dot{x}_p(t_0). \quad (8.5)$$

Mit (8.4) folgen hieraus die Bestimmungsgleichungen für A_c und A_s und damit – auf umständlichem Wege (vgl. Aufgabe 7-1) – für $t \geq t_0$

$$x(t) = e^{-\delta(t-t_0)} \left[(x_0 - x_p(t_0)) \cos \omega(t-t_0) + \frac{(v_0 - \dot{x}_p(t_0)) + \delta \cdot (x_0 - x_p(t_0))}{\omega} \sin \omega(t-t_0) \right] + x_p(t). \quad (8.6)$$

Hinweise:

1. *Allgemeine Lösung* heißt, dass man jede (denkbare Form einer) Lösung von (8.1) durch (8.3) und (8.4) ausdrücken kann.
2. Die *zwei freien Konstanten* A_c und A_s werden durch die *zwei Anfangsbedingungen* (8.2) bestimmt. Damit wird die Lösung der Bewegungsgleichung *eindeutig festgelegt*.
3. Die Eindeutigkeitsaussage bietet die Möglichkeit, Lösungen zu *raten*: Eine geratene Lösung, die die Differentialgleichung und die Anfangsbedingungen erfüllt, ist die gesuchte Lösung (vgl. Aufgabe 7-2).
4. In (8.6) erscheint die Lösung $x_h(t)$ aus (4.32) mit $x_h(t-t_0)$ als längs der Zeitachse verschoben. Das ist möglich, weil die homogene Dgl nicht explizit von der Zeit abhängt, weil sie autonom ist.
5. Je nach vorliegender Dämpfung, $D > 0$ bzw. $\delta > 0$, klingt der Lösungsanteil $x_h(t)$, also der Einfluss der Anfangsbedingungen mehr oder minder rasch ab, vgl. Abschnitt 8.1.2.

8.1.2 Einschwingvorgang

Sei in (8.1) die Erregerkraft $F_e(t)$ harmonisch, vgl. (6.3). Dann lautet (8.6) mit $x_p(t)$ nach (6.31) – (6.34)

$$x = e^{-\delta(t-t_0)} \left[(x_0 - x_{p0}) \cos \omega(t-t_0) + \frac{(v_0 - \dot{x}_{p0}) - \delta \cdot (x_0 - x_{p0})}{\omega} \sin \omega(t-t_0) \right] + \frac{\hat{F}_e}{k} V_1(\eta) \cos(\Omega t - \alpha), \quad (8.7)$$

wo

$$x_{p0} = \frac{\hat{F}_e}{k} \cdot V_1(\eta) \cos(\Omega t_0 - \alpha), \quad \dot{x}_{p0} = -\Omega \frac{\hat{F}_e}{k} \cdot V_1(\eta) \sin(\Omega t_0 - \alpha). \quad (8.8)$$

Bild 8-1 zeigt zu angenommenen Parametern einen *Einschwingvorgang* $x(t)$ gemäß (8.7). Innerhalb der *Einschwingdauer* ist der erzwungenen Schwingung $x_p(t)$ die freie $x_h(t)$ überlagert, vgl. (8.3), (8.4) und (8.6).

Bei vorhandener Dämpfung ($b > 0$, also $D > 0$, $\delta > 0$) klingt die freie Schwingung exponentiell – also asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ – ab; das Einschwingen dauert (theoretisch) unendlich lange. (In Bild 8-1 wurde δ recht groß gewählt, sodass x_h nach kurzer *Einschwingdauer* innerhalb der Strichstärke liegt.) In realen Systemen stets vorhandene Coulombsche Reibungsanteile bewirken abbrechende Einschwingvorgänge. Die Einschwingdauer ist bei praktischen Problemen deshalb endlich, meistens aber nicht genau erfassbar. Am Ende des Einschwingvorgangs verbleibt die (stationäre) erzwungene Schwingung (ggf. auch die Gleichgewichtslage, vgl. Aufgaben 8-3/4).

Des Aufwandes halber berechnet man häufig nur die Partikularlösung $x_p(t)$ und verlässt sich darauf, dass die "stets vorhandene kleine Dämpfung" für das Abklingen der Eigenschwingung $x_h(t)$ sorgt. (Das gilt jedoch nicht immer: bei einer rotierenden Welle kann die "innere" Werkstoffdämpfung anfachend wirken; vgl. auch das System aus Abschnitt 4.6.3.) Weglassen von $x_h(t)$ bedeutet nach (8.5) die Wahl der Anfangsbedingungen

$$x_0 = x_p(t_0) \text{ und } v_0 = \dot{x}_p(t_0). \quad (8.9)$$

(Weglassen von $x_h(t)$ bedeutet also *nicht*, dass *keine* Anfangsbedingungen vorgegeben wurden.) Bei Rechnungen mit dem Faltungsintegral (6.48) kann man den Anfangszeitpunkt $t_0 = t_A \rightarrow -\infty$ schieben, um sicher zu gehen, dass (bei $D > 0$) alle Einschwingvorgänge abgeklungen sind (Aufgabe 8-5).

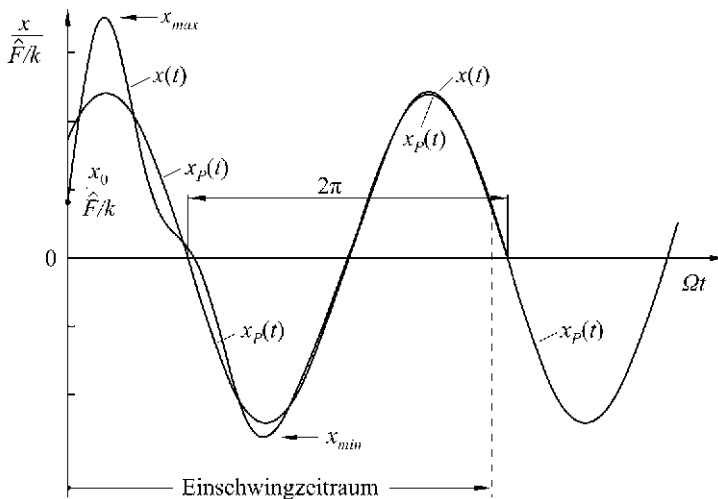


Bild 8-1
Einschwingvorgang

8.2 Anlauf einer Erregung

8.2.1 Vorüberlegungen

Sowohl in der Schwingungslehre als auch in der Maschinendynamik werden die Grundbegriffe der erzwungenen Schwingungen an Hand von Schwingern bzw. von Modellen entwickelt, die mit (vorgegebener) fester Frequenz erregt werden. Hierzu gibt es Standarduntersuchungsmethoden, man gewinnt allgemeine Aussagen, wie wir schon einige kennen gelernt haben. Bei experimenteller Überprüfung muss man sicherstellen, dass die Annahme eines gleichförmigen *Rundlaufs* des Phasenwinkels $\varphi(t)$ und einer festen Amplitude *trotz der Rückwirkung des Schwingers auf den Erreger* genügend genau erfüllt sind. (Vor der Untersuchung des aus Erreger und Schwinger bestehenden dynamischen Systems scheut man an dieser Stelle zurück, weil der dazu erforderliche Aufwand zu hoch ist.)

Unabhängig von eventueller Rückwirkungen fragen wir uns, wie sich ein Schwinger

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \hat{F}_e \cos \varphi(t) \quad (8.10)$$

verhält, wenn die momentane Erregerfrequenz

$$\Omega = \dot{\varphi}(t) \quad (8.11)$$

nicht konstant ist, sondern sich mit der Zeit ändert, weil der Erreger anläuft oder die Maschine eine Drehzahländerung erfährt.

Die Änderung der Erregerfrequenz beginne zur Zeit t_0 mit einer gegebenen Winkelbeschleunigung

$$\ddot{\varphi} = \dot{\Omega} = \varepsilon(t) \quad (8.12)$$

für $t \geq t_0$. Ausgangspunkt der Änderung seien die vorgeschriebenen (Anfangs-) Bedingungen

$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \Omega(t_0) = \Omega_0. \quad (8.13)$$

Gewinnt man $\varphi(t)$ aus der Dgl (8.12), zum Beispiel numerisch, und setzt es auf der rechten Seite von (8.10) ein, kann man auch diese Dgl – parallel zu (8.12) – *numerisch* lösen. Dabei ist eine geringe Anzahl von Systemparametern von Vorteil. Mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $D = b/(2\sqrt{km})$, vgl. (5.2), (5.3), und der dimensionslosen Zeit

$$\tilde{t} := \omega_0 t, \quad \dot{x} = dx/dt = \omega_0 dx/d\tilde{t} =: \omega_0 \dot{\tilde{x}} \quad (8.14)$$

sowie

$$\tilde{x} := x/(\hat{F}_e/k), \quad \tilde{\Omega} := \Omega/\omega_0, \quad \tilde{\varepsilon} := \varepsilon/\omega_0^2 \quad (8.15)$$

lauten (8.10) und (8.12)

$$\ddot{\tilde{x}} + 2D\dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = \cos \varphi(\tilde{t}), \quad (8.16)$$

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\tilde{\Omega}} = \ddot{\varepsilon}(\tilde{t}). \quad (8.17)$$

8.2.2 Berechnen einer Einhüllenden

Erwünscht ist die Lösung $\tilde{x}(t)$ in einer Form, die – obwohl nur numerisch bestimmt – leicht interpretierbar ist. Dazu schreiben wir (8.16) analog zu (6.3), (6.4) komplex:

$$\ddot{\tilde{x}} + 2D\dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = e^{j\varphi(\tilde{t})}. \quad (8.18)$$

Das Vorgehen in Abschnitt 6.2.2 legt den Ansatz

$$\tilde{x} = \hat{x}(\tilde{t}) e^{j(\varphi(\tilde{t}) - \alpha(\tilde{t}))} \quad (8.19)$$

nahe. Für reelles $\hat{x}(\tilde{t}) > 0$ und $\alpha(\tilde{t}) = 0$ steht hier auf der rechten Seite der Drehzeiger $\exp(j\varphi(\tilde{t}))$, der um die Zeitachse $\tilde{t}$ in einem "Schlauch" vom Radius $\hat{x}(t)$ umläuft. (Solange die Beschleunigung $\varepsilon(t)$ klein bleibt, $|\varepsilon/\omega_0^2| \ll 1$, werden sich $\hat{x}(\tilde{t})$ und $\alpha(\tilde{t})$ nur langsam ändern.) Der Schlauch bildet eine *Einhüllende* der Schwingung $x(t)$.

Die Funktionen $\hat{x}(\tilde{t})$ und $\alpha(\tilde{t})$ lassen sich am einfachsten berechnen. Sei

$$\tilde{x} := \hat{x}(\tilde{t}) e^{-j\alpha(\tilde{t})}, \quad (8.20)$$

dann lautet (8.19)

$$\tilde{x} = \tilde{X} e^{j\varphi}. \quad (8.21)$$

Einsetzen von $\tilde{x}$ gemäß (8.21) in (8.18) liefert, nach Herauskürzen von $\exp(j\varphi)$,

$$\ddot{\tilde{X}} + 2\left(D + j\dot{\varphi}\right)\dot{\tilde{X}} + \left(1 - \dot{\varphi}^2 + 2Dj\dot{\varphi} + j\ddot{\varphi}\right)\tilde{X} = 1. \quad (8.22)$$

Bei den Anfangsbedingungen unterscheiden wir die Anfahrt aus dem Stillstand und die Beschleunigung (oder Verzögerung) aus dem stationären Lauf mit $\tilde{\Omega}_0$ ab dem Zeitpunkt $\tilde{t}_0$, vgl. (8.13).

Für die Anfahrt aus dem Stillstand gelten die Anfangsbedingungen

$$\varphi_0 = \varphi(0) = 0, \quad \tilde{\Omega}_0 = \tilde{\Omega}(0) = 0, \quad \tilde{X}_0 = \tilde{X}(0) = 1, \quad \ddot{\tilde{X}}_0 = \ddot{\tilde{X}}(0) = 0. \quad (8.23)$$

Diese Bedingungen sind so gesetzt, dass zum Zeitpunkt $\tilde{t} = 0$ am System Gleichgewicht herrscht, vgl. (8.16), (8.18), (8.21).

Im zweiten Fall ist der Endpunkt $\tilde{t}_0$ des stationären Laufs gleich dem Anfangspunkt $\tilde{t}_0$ des instationären. Also müssen – komplex! – übereinstimmen, vgl. (6.36),

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_0 &= \tilde{\Omega}(\tilde{t}_0), \quad \varphi_0 = \tilde{\Omega}_0 \tilde{t}_0 = \varphi(\tilde{t}_0), \\ \tilde{X}_0 - \tilde{X}(\tilde{t}_0) - V_1(\tilde{\Omega}_0) e^{-\alpha(\tilde{\Omega}_0)}, \quad \dot{\tilde{X}}_0 - \dot{\tilde{X}}(\tilde{t}_0) &= 0.\end{aligned}\quad (8.24)$$

Mit den Anfangsbedingungen (8.23) oder (8.24) kann man die Dgln (8.17) und (8.22) gemeinsam numerisch lösen. Dazu müsste man die komplexe Gleichung (8.22) als gekoppeltes System aus ihren Real- und Imaginärteilen schreiben. Bei Verwendung von Matlab geschieht das im Rechenprogramm.

Kennt man $\tilde{X}(\tilde{t})$ numerisch, folgt aus (8.20)

$$\hat{x}(\tilde{t}) = |\tilde{X}|, \quad \alpha(\tilde{t}) = -\text{Arg}(\tilde{X}), \quad (8.25)$$

in Matlab: $\alpha = -\text{angle}(\tilde{X})$. Die Funktion $\hat{x}(t)$ ist die gesuchte *Einhüllende*, der Winkel $\alpha(t)$ gibt die Phasenlage relativ zur Erregerphase $\varphi(t)$ an. Projektion von $\hat{x}(t)$ auf die reelle Achse liefert

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(\tilde{t}) \cos(\varphi(\tilde{t}) - \alpha(\tilde{t})). \quad (8.26)$$

8.2.3 Erregeranlauf mit Resonanzdurchfahrt

Auf ein zunächst stillstehendes System wirkt während einer Anlaufzeit $0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T}_A$ die Beschleunigung

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_0 \tilde{t} / \tilde{T}_A. \quad (8.27)$$

Im Anschluss läuft der Erreger mit der bei $\tilde{t} = \tilde{T}_A$ erreichten Winkelgeschwindigkeit $\tilde{\Omega}_A = \tilde{\varepsilon}_0 \tilde{T}_A / 2$. Gegeben sind die Parameter $D = 0.05$, $\tilde{T}_A = 600$, $\tilde{\varepsilon}_0 = 0.005$.

Zur Lösung (mit Matlab) werden die Dgln (8.17), (8.22) als System erster Ordnung geschrieben, vgl. (4.45) - (4.47):

Mit

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (u_1, u_2, u_3, u_4)^T := \left(\tilde{\Omega}, \varphi, \tilde{X}, \dot{\tilde{X}} \right), \\ \mathbf{f} &= (f_1, f_2, f_3, f_4)^T := \left(\tilde{\varepsilon}(\tilde{t}), \tilde{\Omega}, f_3, \dot{\tilde{X}} \right), \\ f_3 &:= 1 - 2(D + j\tilde{\Omega})\dot{\tilde{X}} - \left(1 - \tilde{\Omega}^2 + 2Dj\tilde{\Omega} + j\tilde{\varepsilon}(\tilde{t}) \right) \tilde{X},\end{aligned}\quad (8.28)$$

lautet es

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t). \quad (8.29)$$

Dazu gehören die Anfangsbedingungen (8.23):

$$\mathbf{u}(0) = (0, 0, 0, 1)^T.$$

Bild 8-2 zeigt für das Zeitintervall $0 \leq \tilde{t} = \omega_0 t \leq 700$ (entspricht etwa 110 Perioden der Eigenschwingung) a den Verlauf von $\tilde{\varepsilon}(\tilde{t})$, b den Verlauf von $\tilde{\Omega}(\tilde{t})$, c den Verlauf von $\hat{x}(\tilde{t})$ sowie die Einhüllenden $\pm \hat{x}(\tilde{t})$. Die Erregerfrequenz $\Omega = \omega_0 \tilde{\Omega}$ erreicht die Eigenfrequenz ω_0 bei $\approx \tilde{t} = 490$, vgl. die vertikalen strichpunktierten Linien in Bild 8-2b und c. Am Ende des Anlaufs, bei $\tilde{T}_A = 600$ liegt Ω um 50 % über der Eigenfrequenz (gestrichelte Vertikalen).

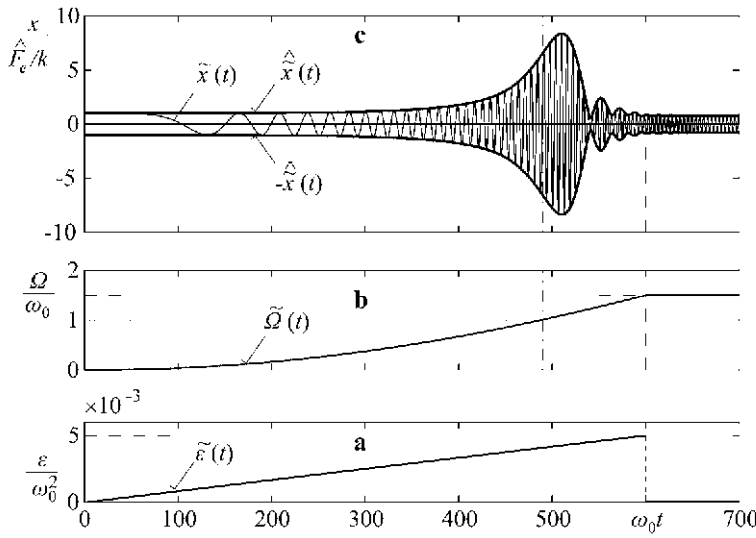


Bild 8-2

Erzwungene Schwingung: Anlauf und Resonanzdurchfahrt. a Winkelbeschleunigung $\varepsilon(t)$, b Winkelgeschwindigkeit $\Omega(t)$, c Auslenkung $x(t)$ und Einhüllende $\hat{x}(t)$

In Bild 8-3 wurden die Einhüllende $\hat{x}(\tilde{t})$ und der Phasenverschiebungswinkel $\alpha(\tilde{t})$ über der momentanen Frequenz $\tilde{\Omega}(\tilde{t})$ und, zum Vergleich, die (stationäre) Vergrößerungsfunktion $V_1(\tilde{\Omega})$ sowie der Phasenverschiebungswinkel $\alpha_1(\tilde{\Omega})$ nach (6.30) bzw. (6.32) aufgetragen.

Über gut die Hälfte des betrachteten Zeitintervalls, solange $\tilde{\Omega}(\tilde{t}) < 0.5$, folgt $\hat{x}(\tilde{t})$ nahezu quasi-statisch der anlaufenden Oszillation von $F_e(\tilde{t})$. Bei Annäherung von $\tilde{\Omega}$ an den Resonanzbereich, $\tilde{\Omega} \approx 1$, erscheint die Reaktion des Systems gegenüber dem stationären Verhalten verzögert, die Erregung braucht Zeit, um dem Schwinger Energie zuzuführen. Da die Zeit fehlt, bleibt $\hat{x}(\tilde{t})$ unterhalb der Resonanzspitze von V_1 . Andererseits enthält der Schwinger kurz oberhalb $\tilde{\Omega} > 1$ noch mehr Energie als es dem stationären Lauf entspricht. Die steckt, aus einer Sicht ähnlich Abschnitt 6.3, in einer beim Resonanzdurchgang "angestoßenen"

Eigenschwingung. Die Schwingung $\tilde{x}(\tilde{t})$ setzt sich in diesem Frequenzbereich also aus der mit $\Omega(\tilde{t}) > \omega_0$ erregten Schwingung und der (abklingenden) Eigenschwingung mit einer Frequenz $\approx \omega_0$ zusammen, es entsteht eine *Schwebung*, s. Abschnitt 1.4.3, mit der Differenzfrequenz $\omega_d = \Omega - \omega_0$. Wächst $\Omega(\tilde{t})$ mit $\tilde{t}$ weiter, nimmt die Schwebungsfrequenz zu, deren Amplitude jedoch wegen der schwindenden Eigenschwingung ab.

Die Bild 8-3 a und b zeigen die Unterschiede zwischen instationärem und stationärem Lauf besonders deutlich. Nur bei sehr langsamer Resonanzdurchfahrt – wenn dem System Zeit zum Einschwingen bleibt –, werden $V_1(\tilde{\Omega})$ und $\alpha_1(\tilde{\Omega})$ nachgefahren. Bei rascherer Durchfahrt wird die Resonanzspitze von V_1 nicht erreicht, der Bereich großer Ausschläge erscheint in Richtung der Beschleunigung verschoben, bei kleinem Dämpfungsgrad D können recht weit außerhalb $\tilde{\Omega} = 1$ noch große Amplituden auftreten.

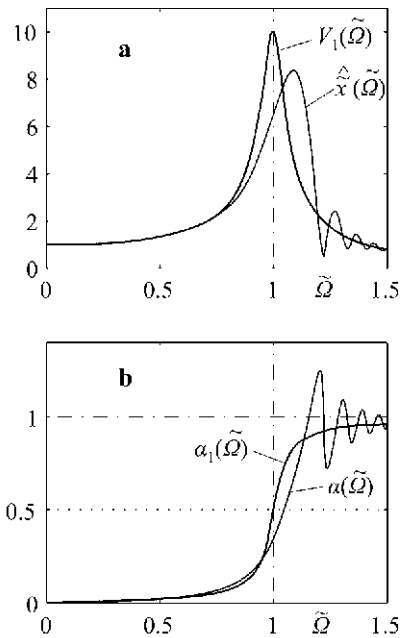


Bild 8-3

Erzwungene Schwingung: Anlauf und Resonanzdurchfahrt von stationären und instationären Verläufen (dicke bzw. dünne Linie). a Vergrößerungsfunktion V_1 und Einhüllende $\hat{x}$, b Phasenverschiebungswinkel α_1 und α

8.2.4 Anlauf bei Unwuchterregung

Bei der Rüttelmaschine aus Kapitel 2 seien die Transportbolzen T entfernt, die Federn haben die Gesamtsteifigkeit k , sie werden um einen Dämpfer mit der Konstanten b ergänzt. Die Unwuchträder laufen mit $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi(t)$ gemäß den Überlegungen in Abschnitt 8.2.1 an. Die Bodenplatte möge zunächst nicht abheben. Wie läuft die Rüttelmaschine an? (Zusatzfrage: Zu welchem Zeitpunkt t_A wird die Bodenpressung erstmals gerade aufgehoben?)

Die Bewegungsgleichung

Zunächst brauchen wir eine Bewegungsgleichung. Die Auslenkung x , nach oben positiv, s. Bild 8-4, wird gegenüber der statischen Ruhelage gemessen. Die Federn sind dann bereits durch das Gewicht

$$G = (m_2 + 2m_u)g \quad \text{um} \quad x_{stat} = -G/k \quad (8.30)$$

ausgelenkt.

Wir stellen die Bewegungsgleichung für $x(t)$ nach Lagrange auf. Dazu braucht man die kinetische Energie T , das Potential U und die Rayleighsche Dissipationsfunktion R , ausgedrückt durch x , $\dot{x}$ und bekannte Funktionen der Zeit; hier ist das $\varphi(t)$.

Mit den Unwucht-Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} V_{xu} &= (x + h + x_u)^* = (x + h + r \cos \varphi)^* = \dot{x} - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \\ V_{yu} &= \dot{y}_u = (r \sin \varphi)^* = r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned} \quad (8.31)$$

erhält man die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + 2 \left[\frac{1}{2} m_u (v_{xu}^2 + v_{yu}^2) \right] = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + 2 \left[\frac{1}{2} m_u (\dot{x}^2 - 2 \dot{x} r \dot{\varphi} \sin \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2) \right]. \quad (8.32)$$

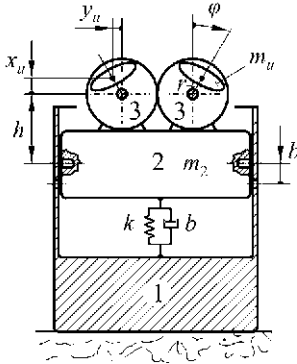


Bild 8-4

Das Potential, bezogen auf die entlastete Feder, lautet

$$U = \frac{1}{2} k (x + s_{stat})^2 + G (x + x_{stat}) + 2 m_u g r \cos \varphi. \quad (8.33)$$

Für die Dissipationsfunktion gilt

$$R = \frac{1}{2} b \dot{x}^2. \quad (8.34)$$

Die Lagrange-Gleichung (C.25) lautet mit $q = x$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{R}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (8.35)$$

Einsetzen von T , U , R aus (8.32) - (8.34) ergibt

$$(m_2 + 2m_u) \ddot{x} + b \dot{x} + kx = 2m_u r (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi); \quad (8.36)$$

das Gewicht G hebt sich wegen (8.30)₂ heraus.

In dimensionsloser Form, mit

$$\omega_0^2 = k/(m_2 + 2m_u), \quad \tilde{t} = \omega_0 t, \quad 2D\omega_0 = b, \quad x = \tilde{x} 2m_u r / (m_2 + 2m_u), \quad (8.37)$$

lautet (8.35), vgl. (8.14) bis (8.16)

$$\ddot{\tilde{x}} + 2D \dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = (\tilde{\varepsilon} \sin \varphi + \tilde{\varrho}^2 \cos \varphi). \quad (8.38)$$

Die komplexe Form der Bewegungsgleichung

Parallel zum Übergang von (8.16) zu (8.18) folgt hier aus (8.38)

$$\ddot{\tilde{x}} + 2D \dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = (\tilde{\varrho}^2 - j \tilde{\varepsilon}) e^{j\varphi(\tilde{t})}. \quad (8.39)$$

Der Ansatz $\tilde{x} = \tilde{X} \exp(j\varphi)$ liefert

$$\ddot{\tilde{X}} + 2(D + j\tilde{\varrho}) \dot{\tilde{X}} + (1 - \tilde{\varrho}^2 + 2Dj\tilde{\varrho} + j\tilde{\varepsilon}) \tilde{X} = (\tilde{\varrho}^2 - j\tilde{\varepsilon}). \quad (8.40)$$

Wenn man – ähnlich wie in Abschnitt 8.2.2 – aus dem Stillstand ($\tilde{t}_0 = 0$) anfahren will, kann man aus (8.23)

$$\varphi_0 = \varphi(0) = 0, \quad \tilde{\varrho}_0 = \tilde{\varrho}(0) = 0, \quad \dot{\tilde{X}} = \dot{\tilde{X}}(0) = 0 \quad (8.41)$$

aus (8.23) übernehmen. Ein stoßfreier Anlauf des Schwingers erfordert jedoch, falls $\tilde{\varepsilon}(0) \neq 0$,

$$\tilde{X}_0 = \tilde{X}(0) = -j \tilde{\varepsilon}(0). \quad (8.42)$$

Das übrige Vorgehen entspricht dem von Abschnitt 8.2.2.

8.3 Aufgaben

Aufgabe 8-1: Schreiben Sie mit (8.5) die Bestimmungsgleichungen für A_c , A_s an, lösen Sie sie, setzen Ihr Ergebnis in (8.4) ein und bringen es auf die Form (8.6).

Aufgabe 8-2: Die Lösung (5.27) legt zu den Anfangsbedingungen (8.2) die Form $x_h(t - t_0)$ nahe, wobei in (5.27) $x_0 \rightarrow x_0 - x_p(t_0)$, $v_0 \rightarrow v_0 - \dot{x}_p(t_0)$ gesetzt wird. Zeigen Sie, dass die so "geratene" Lösung die gesuchte Lösung ist.

Aufgabe 8-3: Nehmen Sie an, dass die Federn der Exzenterpressen bei der Montage (bewegliche Maschinenteile arretiert) gerade entspannt waren, die Stützklötze zur Zeit $t_0 = 0$ plötzlich weggeschlagen werden und damit das Gewicht mg in (4.26), (4.27) wirksam wird. Berechnen Sie $x(t)$ unter der Annahme verschwindender Bodenauslenkung, $u \equiv 0$.

Aufgabe 8-4: Wie verläuft der "Fall" der Exzenterpressen von Aufgabe 8-3, wenn bei aufgestellten Maschinen zwischen Feder und Federabstützung ein (kleiner) Spalt der Höhe h vorliegt?

Aufgabe 8-5: Sei $x_p(t)$ durch das Faltungsintegral (6.48) gegeben. Welche Anfangsbedingungen (8.8) erfüllt es?

Aufgabe 8-6: Auf einen zunächst ruhenden Schwinger ($x_0 = 0, v_0 = 0$) wird eine Erregung $\hat{F}_e \cos \Omega t$ aufgeschaltet, vgl. (8.1). Zu welchem Zeitpunkt $t^* (> 0)$ muss die Erregung auf den Schwinger gegeben werden, damit möglichst geringe freie Schwingungen angestoßen werden?

Aufgabe 8-7: Was wäre in Aufgabe 8-6 ein sehr ungünstiger Einschaltzeitpunkt t^{**} ?

Aufgabe 8-8: Für einen Schwinger nach (8.1) sei der Einschwingvorgang zur Zeit $t = 0$ bereits abgeklungen (vgl. Bild 8-1). Wann ($t^* = ?$) muss man abschalten, damit freie Schwingungen klein bleiben?

Aufgabe 8-9: Überprüfen Sie die Anfangsbedingungen (8.23) und (8.24).

Aufgabe 8-10: Setzen Sie ausgehend von Gleichung (8.36) unter der Annahme, dass $x(t)$ bekannt ist, eine Gleichung für die Bodenkraft $F_B(t)$ an, vgl. Bild 2-5.

Aufgabe 8-11: Verifizieren Sie die dimensionslose Form (8.38) der Bewegungsgleichung (8.36).

Aufgabe 8-12: Kontrollieren Sie den Übergang von (8.39) zu (8.40).

Aufgabe 8-13: Lesen Sie die Bedingung (8.42) für stoßfreien Anlauf aus den vorangehenden Gleichungen ab.

Aufgabe 8-14: Schreiben Sie parallel zu (8.28), (8.29) die Dgln (8.17) und (8.40) als Differentialgleichungssystem 1. Ordnung an.

Aufgabe 8-15: Entwickeln Sie ein Matlab-Programm zum Lösen der Dgl aus Aufgabe 8-14.

Aufgabe 8-16: Arbeiten Sie die numerische Lösung aus Aufgabe 8-15 in die Gleichung für die Bodenkraft F_B aus Aufgabe 8-10 ein (Abspaltung (8.30)₂ beachten!) und berechnen Sie – zu gewählten Parameterwerten – den Abhebeaugenblick t_A .

Aufgabe 8-17: Formulieren Sie, analog zu (8.24), die Anfangsbedingung für einen unwuchterregten Schwinger, der bis zum Zeitpunkt t_0 stationär betrieben wird, und dessen Erregung sich ab t_0 beschleunigt.

IV Rotorschwingungen

In den folgenden drei Kapiteln 9, 10 und 11 behandeln wir einige Schwingungsaufgaben, die bei Maschinen mit rotierenden Wellen – man spricht von Rotoren – häufig vorkommen. Um die Überlegungen übersichtlich zu halten, wählen wir für die Rotoren möglichst einfache Modelle. Einführendes Beispiel ist die mit einer Einzelmasse oder Einzelscheibe besetzte Welle.

9 Der starr gelagerte Rotor mit einfacher Durchbiegung

9.1 Aufgabenstellung

Der Verdichter, den Bild 9-1 im Schnitt schematisch zeigt, soll auf Schwingungen seines Rotors untersucht werden. Diese Aufgabe stellt sich zum Beispiel während der Konstruktion: Man will wissen, welche Schwingungen man zu erwarten hat, will vielleicht gezielt Änderungen gegenüber einer Vorgängeranlage durchführen, will konstruktiv Eingriffsmöglichkeiten vorsehen, um nachträglich Schwingungen beeinflussen zu können, falls sie sich – nach dem Bau der Maschine – als zu stark erweisen. Ist die Maschine bereits gebaut, so muss man Schwingungen – messend und rechnend – untersuchen, wenn sie zu stark schwingt, muss man nach den Ursachen, Erklärungen und nach Abhilfemaßnahmen suchen.

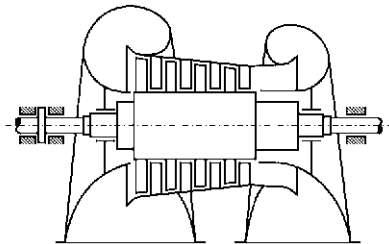


Bild 9-1
Verdichter

9.2 Modell

Die Maschine nach Bild 9-1 ist offensichtlich Teil eines Maschinensatzes, steht wahrscheinlich mit der Antriebsmaschine auf einem gemeinsamen Fundament. Falls die Kupplung zum Antrieb relativ *weich* – im Vergleich zur Steifigkeit der Wellenzapfen ist und die Lager (andererseits) sehr viel steifer als die Wellenzapfen sind, können wir die Wechselwirkung zum Antrieb vernachlässigen und starre Lager annehmen (auch die Nachgiebigkeit des Ölfilms muss klein sein!). Weiter lassen wir auch die Kräfte an den Dichtungen außer Acht und nehmen an, dass Gaskräfte auf die Verdichterschaukeln – selbst beim schwingenden Rotor – in jedem Augenblick ausgeglichen sind. Die Schaukeln sollen mit dem Rotorballen als starrer

Körper schwingen. (Die Reihe dieser Annahmen zeigt nur, wie gewagt das unten angegebene Modell schon im Hinblick auf das Freischneiden – die Wechselwirkung mit der Umgebung – ist.



Bild 9-2
Rotor in starren Lagern

Bild 9-2 zeigt den im Sinne obiger Annahmen frei geschnittenen Rotor. (Dabei sei die Schau-felmasse zur Ballenmasse addiert.) Wir vereinfachen jetzt weiter, nehmen an, dass sich der Rotorballen praktisch nicht verformt, dass die gesamte Nachgiebigkeit von den *Wellenzapfen* – den dünneren Rotorteilen in Bild 9-2 – herrührt.

Wir wählen dann als Ersatzsystem für unseren Rotor die auf einem elastischen Balken sitzen-de einzelne Punktmasse nach Bild 9-3, die sich in der Blattebene vertikal und senkrecht zur Blattebene bewegen kann (Bild 9-2). Mit der Wahl einer Punktmasse als Modellkörper haben wir auch alle Dralleinflüsse vernachlässigt.

Der größeren Anschaulichkeit halber zeichnet man das Ersatzsystem nach Bild 9-3 gern mit einer Scheibe als Rotorkörper. Damit man dann in keinen Anschauungskonflikt mit der Ver-nachlässigung der Dralleinflüsse durch *Kippen* der Scheibe um die Achsen in der Scheiben-ebene kommt, setzt man die Scheibe in die Mitte zwischen die Lager und spricht von der *mittig besetzten Welle* oder auch *Laval-Welle*, vgl. Bild 9-4.

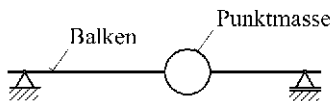


Bild 9-3
Rotor Ersatzsystem

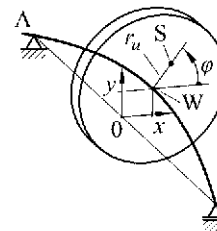


Bild 9-4
Laval-Welle

In Bild 9-4 ist die Scheibe auch gleich ausgelenkt gezeichnet. Es bedeuten:

- O – Schnittpunkt der Lagerverbindungsgeraden AB mit Scheiben(mitte)ebene
- W – *Wellendurchstoßpunkt* (liegt auf O bei ungebogener gerader Welle)
- x, y – Koordinaten von W bei ausgelenkter (gebogener) Welle; auch horizontale bzw. vertikale Wellen-(oder Rotor-)Auslenkung genannt
- S – Scheiben-(oder Rotor)Schwerpunkt
- r_u – Exzentrizität (mr_u – Unwucht, m – Masse)
- Ω – Drehfrequenz
- φ – Drehwinkel ($\varphi := \Omega t$)

9.3 Bewegungsgleichungen

Wir erfassen die Wellen- oder Rotorbewegung durch die in Bild 9-4 eingeführten Koordinaten x, y . Das Modell hat damit den Freiheitsgrad 2, wir brauchen zwei Bewegungsgleichungen.

Bild 9-5 zeigt die von der Welle freigeschnittene Scheibe mit den (Schwerpunkt-)Hilfskoordinaten

$$x_s = x + r_u \cos \varphi, \quad y_s = y + r_u \sin \varphi, \quad (9.1)$$

den d'Alembertschen Kräften $m\ddot{x}_s, m\ddot{y}_s$, den (Rückstell-)Kräften F_x, F_y von der Welle auf die Scheibe (Masse) und dem Gewicht $G = mg$. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$m\ddot{x}_s + F_x = 0, \quad m\ddot{y}_s + F_y + G = 0. \quad (9.2)$$

Mit $\varphi = \Omega t$ und (9.1) erhält man

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + F_x &= m r_u \Omega^2 \cos \Omega t, \\ m\ddot{y} + F_y &= -G + m r_u \Omega^2 \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Die Masse m und die Kräfte F_x, F_y werden in den drei folgenden Abschnitten ermittelt.

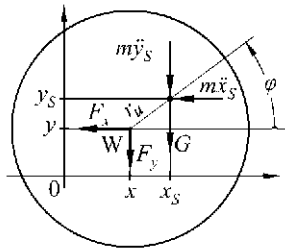


Bild 9-5
Freigeschnittene Rotor-Scheibe

9.3.1 Rotormasse

Welches m , welche Rotor-(oder auch Wellen-)Masse muss man in die Gln (9.3) einsetzen? Eine Antwort ist: die (mit)schwingende Masse. Wie man sie systematisch gewinnen kann, überlegen wir uns unten. Meistens und vor allem bei Übersichtsrechnungen wählt man die in m zu berücksichtigenden Rotorteile *per Anschauung* oder *gemäß Erfahrung*. Bei dem Rotor nach Bild 9-2 könnten es zum Beispiel die in Bild 9-6 schraffierten Teile sein. (In diesem Fall würden die Wellenenden auch nicht viel zur Masse beitragen.) Man berechnet dann diese Masse. (Falls es den Rotor bereits gibt, kann man ihn auch wiegen und die Wellenendteile abziehen.)

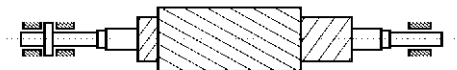


Bild 9-6
Schwingende Masse des Rotors

Ein systematisches Vorgehen, das auf Energieüberlegungen beruht, zeigen wir anhand von Bild 9-7. Dort ist für die horizontale Ebene durch die Rotorachse eine Auslenkung $w(\zeta, t)$ – eine momentane Biegelinie – der Welle gezeichnet. Es gelten ζ – Längskoordinate, t – Zeit, L – Wellenlänge (greift evtl. über Lagerspanne hinaus, falls dort große Massen vorkommen; wir setzen $0 \leq \zeta \leq L$), x – Auslenkung in x -Richtung gemäß Bild 9-4 und Bild 9-5. Wir nehmen hier an, dass dies die Auslenkung am Schwerpunkt S des *starr gedachten* Rotors ist.

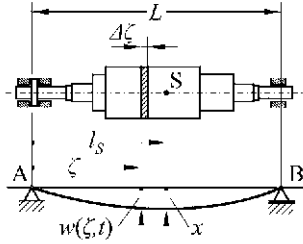


Bild 9-7
Momentane Wellen-Biegelinie

Für die Biegelinie $w(\zeta, t)$ setzen wir an

$$w(\zeta, t) = W(\zeta) \cdot x(t). \quad (9.4)$$

Die Funktion $W(\zeta)$ – die Form der Biegelinie – nennt man auch *Formfunktion*. Diese Funktion muss man *schätzen* – also wählen!^{*} Im einfachsten Fall kann man zum Beispiel eine Parabel ansetzen, die durch die Lager A und B geht:

$$W(\zeta) = C \zeta (L - \zeta) \quad (9.5)$$

und C wählt man so, dass am Schwerpunkt bei $\zeta = l_s$ gilt

$$W(l_s) = 1. \quad (9.6)$$

Man erhält

$$W(\zeta) = \frac{\zeta (L - \zeta)}{l_s (L - l_s)}. \quad (9.7)$$

Andere Schätzungen erfordern mehr Mühe (z. B. kann man $W(\zeta)$ proportional zur Biegelinie infolge Eigengewicht wählen).

Man verlangt nun, dass die mit m und $\dot{x}$ angeschriebene kinetische Energie dieselbe ist wie die der gebogenen Welle:

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \int_0^L \mu(\zeta) \dot{w}^2(\zeta, t) d\zeta. \quad (9.8)$$

^{*} Bei den *Finiten Elementen* (FE) wählt man *lokale* Formfunktionen, siehe [56].

Darin ist μ die *Massenbelegung*

$$\mu(\zeta) = \rho A(\zeta); \quad (9.9)$$

ρ – Dichte, $A = r^2 \pi$ – Fläche, $r = r(\zeta)$ – Radius

Setzt man (9.4) in (9.8) ein, so kann man wegen $\dot{w}(\zeta, t) = \dot{x} \cdot W(\zeta)$ beide Seiten durch $\dot{x}^2/2$ dividieren und erhält

$$m = \int_0^L \rho A(\zeta) W^2(\zeta) d\zeta. \quad (9.10)$$

Man sieht: Wenn man eine Vorstellung von der Formfunktion (oder Biegelinie) $W(\zeta)$ hat, kann die Masse über den Rotor beliebig verteilt sein. Die *schwingende Masse* oder *Ersatzmasse* m weicht unter Umständen stark von der wahren Masse ab; l_s gibt (nur) an, wo man x , y misst.

9.3.2 Rotorsteifigkeit

Die in den Bewegungsgleichungen (9.3) auftretenden Kräfte F_x, F_y zwischen Welle und Rotor (vgl. Bild 9-5) sind in Bild 9-8 so eingetragen, wie sie auf die Welle wirken und wir nehmen an, dass sie am Rotorschwerpunkt auf die Welle wirken.

Von der Welle her gesehen sind diese Kräfte erforderlich, um die Welle elastisch zu verformen und um etwa vorhandene *innere Dämpfungen* (oder Reibungen) zu überwinden. Zusätzlich wollen wir in F_x und F_y jedoch auch Kräfte aufnehmen, die von außen – über das Arbeitsmedium – auf den Rotor wirken. (Wir werden dafür unten *äußere Dämpfungen* ansetzen.)

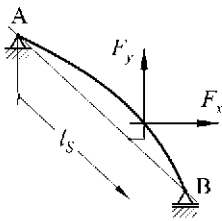


Bild 9-8
Schnittkräfte Welle – Rotor

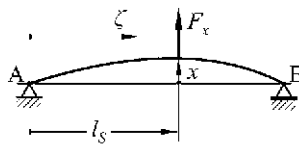


Bild 9-9
Wellenverformung in horizontaler
Rotorebene

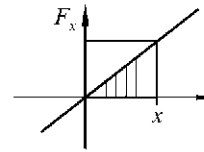


Bild 9-10
Lineares (Verformungs-)
Gesetz

In diesem Abschnitt sollen nur elastische Verformungen berücksichtigt werden. Bild 9-9 zeigt die Verformung in der horizontalen Rotorebene (ein entsprechendes Bild gilt für die vertikale Ebene).

Für die hier vorliegenden kleinen Auslenkungen kann man ein lineares (Hookesches) Gesetz annehmen (vgl. Bild 9-10):

$$F_x = k x. \quad (9.11)$$

Die Wellensteifigkeit k gewinnt man in der Regel mit Hilfe von *Balken-Biegelinien* aus einem Taschenbuch [2] (oder mit einem Rechnerprogramm).

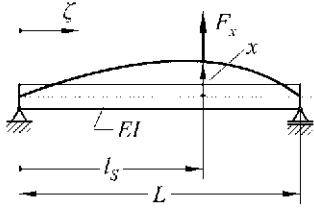


Bild 9-11

Welle mit konstanter Biegesteifigkeit

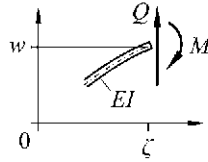


Bild 9-12

Balken-Schnittgrößen

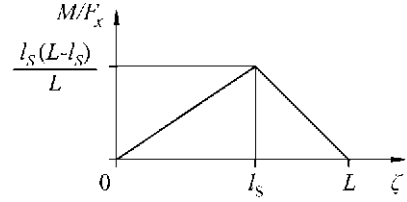


Bild 9-13

Momentenlinie unter Einzellast

Im einfachsten Fall, bei einer Welle mit konstanter Biegesteifigkeit EI (vgl. Bild 9-11) berechnet man die Durchbiegung bei $\zeta = l_s$ zu

$$x = \frac{F_x l_s^2 (L - l_s)^2}{3 EI L} \quad (9.12)$$

und erhält durch Vergleich mit (9.11) die Steifigkeit k zu

$$k = \frac{3 EI L}{l_s^2 (L - l_s)^2}. \quad (9.13)$$

Die meisten Maschinenwellen haben jedoch keinen konstanten Durchmesser, sie sind mehrfach abgesetzt (s. unten). Auch dann kann man (9.13) benutzen, um überschlägig einen groben Anhaltswert für die Steifigkeit zu gewinnen; zum Beispiel um zu entscheiden, ob die Lager(böcke) im Vergleich dazu *weich* oder *hart* sind (s. Abschnitt 9.2).

Bei einer abgesetzten Welle kann man k – wie m in Abschnitt 9.3.1 – wieder über eine Energiebetrachtung gewinnen.

Bild 9-12 zeigt das Biegemoment $M(\zeta, t)$ und die Querkraft $Q(\zeta, t)$ an einem Balken mit der Biegesteifigkeit $EI = EI(\zeta)$. Sei $w(\zeta, t)$ die Biegelinie. Dann gilt die Biegedifferentialgleichung ($w' = \partial w / \partial \zeta$ usw.):

$$EI w'' = -M. \quad (9.14)$$

Die in einem gemäß $w(\zeta, t)$ gebogenen Balken steckende potentielle Energie erhält man aus

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \int_0^L EI(\zeta) \cdot [w''(\zeta, t)]^2 d\zeta. \quad (9.15)$$

Mit (9.14) kann man hierfür auch schreiben

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2(\zeta, t)}{EI(\zeta)} d\zeta = E_{pot}(t). \quad (9.16)$$

Diese Energie muss (zu jedem Zeitpunkt t) gleich der durch die schraffierte Fläche von Bild 9-10 wiedergegeben sein:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \frac{F_x^2}{k}. \quad (9.17)$$

Unabhängig von den Wellendurchmessern erzeugt die Last F_x in der Welle nach Bild 9-9 eine Momentenlinie, wie in Bild 9-13 gezeigt:

$$M(\zeta, t) = F_x(t) \cdot M(\zeta), \quad (9.18)$$

wo

$$M(\zeta) = \begin{cases} \zeta \frac{(L-l_s)}{L} & \text{für } 0 \leq \zeta \leq l_s, \\ \frac{l_s}{L} (L - \zeta) & \text{für } l_s \leq \zeta \leq L. \end{cases} \quad (9.19)$$

Setzt man die rechte Form von (9.17) gleich E_{pot} nach (9.16), so erhält man mit (9.18) · (9.19)

$$\frac{1}{2} \frac{F_x^2}{k} = \frac{1}{2} F_x^2 \int_0^L \frac{M^2(\zeta)}{EI(\zeta)} d\zeta, \quad (9.20)$$

und (nach Division durch $F_x^2/2$):

$$\frac{1}{k} = \int_0^L \frac{M^2(\zeta)}{EI(\zeta)} d\zeta. \quad (9.21)$$

Das rechts stehende Integral wird man im allgemeinen abschnittsweise numerisch auswerten.

Man setzt, vgl. Bild 9-14,

$$\frac{1}{k} = \int_{(l_1)} \frac{\ddot{M}}{EI_1} d\zeta + \int_{(l_2)} \frac{\ddot{M}}{EI_2} d\zeta + \dots, \quad (9.22)$$

wobei im Zähler die entsprechenden $M^2(\zeta)$ eingesetzt werden müssen. Da dünnere Wellenteile an die stärkeren nicht *starr* anschließen, verlängert man die ersten oft zu Lasten der zweiten, vgl. die l^* in Bild 9-14 oben (in Bild 9-14 wurde unter 30° abgeschrägt^{*}).

* Natürlich kann man das heute mit Hilfe von Finiten Elementen auch genauer berechnen.

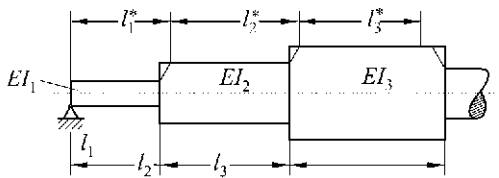


Bild 9-14
Mehrfach abgesetzte Welle

Alternative Vorgehensweise

Vergleicht man $E_{pot} = k x^2 / 2$ aus (9.17) mit E_{pot} aus (9.15),

$$\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \int_0^L EI(\zeta) [w''(\zeta, t)]^2 d\zeta, \quad (9.23)$$

und setzt hier $w(\zeta, t) = W(\zeta) \cdot x(t)$ gemäß (9.4) ein, so erhält man anstelle von (9.21) für die Steifigkeit k den Ausdruck

$$k = \int_0^L EI(\zeta) [W''(\zeta)]^2 d\zeta. \quad (9.24)$$

Setzt man hier für $W(\zeta)$ die Biegeform ein, die der Momentenlinie (9.18) entspricht, liefern (9.21) und (9.24) dieselbe Steifigkeit k (Übungsaufgabe!).

Hinweis 1: Auch (9.24) muss analog zu (9.21), (9.22) abschnittsweise ausgewertet werden.

Hinweis 2: Arbeitet man mit m nach (9.10) und k nach (9.24) – beide Male mit demselben $W(\zeta)$ –, so spielt die Schwerpunktlage keine Rolle. Man hat sein System mit dem Ansatz (9.4) *diskretisiert* – das kontinuierliche Gebilde durch eins vom Freiheitsgrad 1 – ersetzt.

Hinweis 3: Setzt man für $W(\zeta)$ eine *Eigenschwingungsform* an – wir kommen später darauf zu sprechen –, so gelangt man mit (9.10) und (9.24) zu einer *strengen Lösung*. (Falls es nicht die Eigenschwingungsform zur tiefsten Eigenfrequenz ist, hat man nicht viel davon.)

9.3.3 Dämpfungen

9.3.3.1 Allgemeine Überlegungen

In Kapitel 5 haben wir am Beispiel des Feder-Masse-(Dämpfer)-Schwingers gesehen, dass Federsteifigkeit und Masse die Eigenfrequenz bestimmen. Mit der Eigenfrequenz lagen dann im Kapitel 6 (und 7) die Resonanzbereiche fest, die man vermeiden muss. Diese Aussagen gelten recht allgemein: Steifigkeiten (Steifigkeitsverteilungen) und Massen (Masseverteilungen) legen die Eigenfrequenzen und Schwingungsformen fest (das werden wir noch untersuchen).

Die Dämpfung erscheint dagegen in Kapitel 5 von nachrangiger Bedeutung. Wesentlich ist es, dass die freien Schwingungen (die Eigenschwingungen) abklingen – und das tun sie an-

scheinend fast immer. Der Dämpfer entzieht ja – dem im übrigen konservativen System – Energie.

Bei den erzwungenen Schwingungen (Kapitel 6 und 7) ist die Wirkung der Dämpfung außerhalb der Resonanzbereiche schwach. In den Resonanzbereichen – wo sich elastische Kräfte und Massenkräfte weitgehend oder vollständig aufheben – begrenzt die Dämpfung die Ausschläge. (Die Ausschläge werden gerade so groß, dass der Dämpfer die vom Erreger zugeführte Energie verzehrt.)

Man braucht also die Dämpfung (wie Reibung und Haftung). Da man – wie oben angedeutet – alle Einflüsse unter Dämpfung zusammenfasst, die mit dem betrachteten System in (nicht zu starker) energetischer Wechselwirkung stehen, gibt es sehr viele *Dämpfungen* (man spricht auch von *Energiedissipation* = *Energiezerstreuung*).

Bewegt sich ein Gebilde, so gibt es Energie an das umgebende Medium (z. B. Luft) ab, über Lager oder vermeintlich feste Einspannungen wandert Energie in die Umgebung, quietschende Systeme strahlen Schall ab. Werkstoffe sind nicht ideal elastisch, sie haben *innere Reibungen*, Fügestellen reiben aufeinander. Aber auch zwischen dem Arbeitsprozess der Maschine und ihren Schwingungen entstehen energetische Wechselwirkungen, z. B. ändern sich die Anströmwinkel bei Turbinenbeschaufungen, wenn der Rotor schwingt.

Sind die Dämpfungseinwirkungen groß im Verhältnis zu den elastischen Kräften, z. B. bei plastischen Verformungen, muss man sie besonders untersuchen (sie heißen dann auch anders). Sind sie klein, nimmt man sie fast regelmäßig proportional zu einer (Relativ-) Geschwindigkeit an, wie wir es auch mit dem Dämpfer in Kapitel 4 taten.

9.3.3.2 Äußere Dämpfung

Wir unterscheiden bei unserem Rotor zwischen einer *äußeren* Dämpfung und einer *inneren*. Die äußere soll die Wechselwirkung mit der Umgebung erfassen, die innere die Wirkung der Rotorverformungen. (Wir behandeln die innere Dämpfung im nächsten Abschnitt separat.)

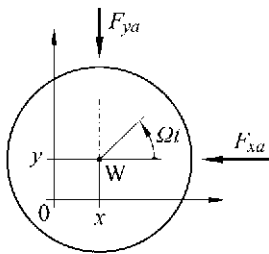


Bild 9-15
Äußere Dämpfung

Für die *äußere* Dämpfung setzen wir mit dem Koeffizienten b_a Bild 9-15 (vgl. auch Bild 9-5) geschwindigkeitsproportional an:

$$F_{xa} = b_a \dot{x}, \quad F_{ya} = b_a \dot{y}. \quad (9.25)$$

Dabei lassen wir zum Beispiel den Einfluss der Rotordrehung auf die Wechselwirkung mit dem umgebenden Medium unberücksichtigt. Auch für die Koeffizienten b_a kann man Energiebetrachtungen wie in den Abschnitten 9.3.1 und 9.3.2 anstellen.)

9.3.3.3 Innere Dämpfung

Die Beschauflung des Verdichterrotors nach Bild 9-1 ist, zum Beispiel, in geeigneten Nuten auf dem Rotor eingesetzt und verkeilt. Bei Rotorbiegungen reiben die Schaufelfüße am Rotor und verhindern damit eine rein elastische Rotorverformung, wie wir sie in Abschnitt 9.3.2 angenommen haben. In ähnlicher Weise wirken andere Fügstellen am Rotor (z. B. Schrumpfsitze) aber auch Gefügereibung im Werkstoff (*Werkstoffdämpfung*).

Die Wirkung all dieser im Rotor gelegenen Dämpfungen fassen wir zu einer *inneren Dämpfung* zusammen, die wir geschwindigkeitsproportional ansetzen wollen. Ganz sicher müssen wir sie dann proportional zur Verformungsgeschwindigkeit des Rotors ansetzen. Die erfasst man am einfachsten in einer mit dem Rotor umlaufenden Basis. Bild 9-16 zeigt neben der *festen* Basis $\bar{e}$ die um die Lagerverbindungsline A-B mit $\varphi = \Omega t$ *rotierende* Basis $\bar{e}^R$,

$$\bar{e} = (\bar{e}_x, \bar{e}_y)^T \text{ bzw. } \bar{e}^R = (\bar{e}_x^R, \bar{e}_y^R)^T. \quad (9.26)$$

(Die Bezeichnungen aus Anhang A.1, $\bar{e}^0$ für die *feste* und $\bar{e}$ für die *rotierende* Basis würden hier schwerfällig wirken. Der Basisvektor $\bar{e}_z - \bar{e}_z^R$ wird hier nicht gebraucht.)

Bezüglich $\bar{e}$ bzw. $\bar{e}^R$ lauten die Koordinaten des Wellendurchstoßpunktes W in Matrix-Schreibweise

$$\mathbf{r} = (x, y)^T \text{ bzw. } \mathbf{r}^R = (x^R, y^R)^T, \quad (9.27)$$

vgl. Bild 9-16 mit Bild 9-4. Damit lautet der Vektor $\overline{0W}$ der Wellenauslenkung, vgl. (A.12),

$$\overline{0W} = \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{r} = \bar{\mathbf{e}}^{R^T} \mathbf{r}^R. \quad (9.28)$$

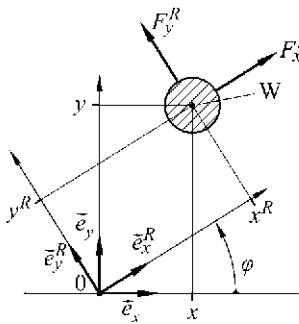


Bild 9-16

Auslenkungen und Kräfte im umlaufenden Bezugssystem

Von der umlaufenden Basis $\bar{\mathbf{e}}^R$ her gesehen sind zur Rotorverformung die Kräfte F_x^R und F_y^R erforderlich:

$$\begin{aligned} F_x^R &= k x^R + b_i \dot{x}^R, \\ F_y^R &= k y^R + b_i \dot{y}^R. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Darin ist k die in Abschnitt 9.3.2 berechnete Rotorsteifigkeit und b_i ist der Koeffizient der *inneren* Dämpfung (elastische Kraft und Dämpfungskräfte wirken parallel, vgl. Bild 4-3, Bild 4-5, Bild 5-1 usw.).

Mit

$$\mathbf{F}^R = (F_x^R, F_y^R)^T \quad (9.30)$$

und (9.27) lautet (9.29) in Matrixschreibweise

$$\mathbf{F}^R = k \mathbf{r}^R + b_i \dot{\mathbf{r}}^R. \quad (9.31)$$

Fasst man auch die auf die feste Basis $\bar{\mathbf{e}}$ bezogenen Kräfte F_x, F_y , in der Orientierung von Bild 9-8, als Spaltenmatrix zusammen,

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y)^T, \quad (9.32)$$

so gilt, analog zu (9.28), für den Kraftvektor

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{e}^T \mathbf{F} = \mathbf{e}^{R^T} \mathbf{F}^R. \quad (9.33)$$

Wenn wir, am Ende, die Bewegungsgleichungen (9.3) bezüglich der festen Basis ansetzen wollen, müssen wir die Beziehung (9.31) auf $\mathbf{F}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ umrechnen, also die Basisdrehung mit ihren Auswirkungen verfolgen.

9.3.3.4 Die Basisdrehung und ihre Auswirkungen

Aus Bild 9-16 liest man ab

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_x^R \\ \bar{e}_y^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_x \\ \bar{e}_y \end{pmatrix}, \quad (9.34)$$

kurz, vgl. Anhang A.1.2,

$$\bar{\mathbf{e}}^R = \mathbf{R} \bar{\mathbf{e}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad (9.35)$$

$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3$ aus (A.16) ohne die 3- bzw. z-Achse. Die Transformation (9.35)₁ gilt auch für die Koordinaten,

$$\mathbf{r}^R = \mathbf{R} \mathbf{r}, \quad \mathbf{F}^R = \mathbf{R} \mathbf{F}, \quad (9.36)$$

vgl. (9.28) bzw. (9.33) mit (A.12) – (A.14). Ableiten von (9.36) nach der Zeit liefert, vgl. A.1.5.1,

$$\dot{\mathbf{r}}^R = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{r} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{r}}. \quad (9.37)$$

Mit (9.36)₁ und (9.37) folgt aus (9.31)

$$\mathbf{F}^R = \left(k \mathbf{R} + b_i \dot{\mathbf{R}} \right) \mathbf{r} + b_i \mathbf{R} \dot{\mathbf{r}}. \quad (9.38)$$

Multiplikation von (9.36)₂ mit der Matrix $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}(-\varphi)$ – die Inversion entspricht einem Zurück-Drehen – führt mit (9.38) auf

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}^R = \left(k + b_i \mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{R}} \right) \mathbf{r} + b_i \dot{\mathbf{r}}. \quad (9.39)$$

Mit $\varphi = \Omega t$ erhält man aus (9.35)₂

$$\mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{R}} = -\Omega \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} = -\Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.40)$$

Damit lautet die Matrizengleichung (9.39)

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = b_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & \Omega b_i \\ -\Omega b_i & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (9.41)$$

skalar ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} F_x &= b_i \dot{x} + k x + \Omega b_i y, \\ F_y &= b_i \dot{y} + k y - \Omega b_i x. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Die mitrotierende innere Dämpfung wirkt sich also wegen der Drehung auch mit Termen aus, die – schiefssymmetrisch! – den Auslenkungen selbst proportional sind.

9.3.4 Bewegungsgleichungen

Setzt man alle in den Abschnitten 9.3.1 bis 9.3.3 ermittelten Größen in die Bewegungsgleichungen (9.3) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} m \ddot{x} + (b_a + b_i) \dot{x} + k x + \Omega b_i y &= m r_u \Omega^2 \cos \Omega t, \\ m \ddot{y} + (b_a + b_i) \dot{y} + k y - \Omega b_i x &= m r_u \Omega^2 \sin \Omega t - G. \end{aligned} \quad (9.43)$$

Auch hier lohnt sich eine komplexe Rechnung: Multiplikation von (9.43)₂ mit $j = \sqrt{-1}$ und Addition von (9.43)₁ liefert mit

$$z = x + jy \quad (9.44)$$

$$m \ddot{z} + (b_a + b_i) \dot{z} + k z - j \Omega b_i z = -j G + m r_u \Omega^2 e^{j \Omega t}. \quad (9.45)$$

Achtung! Die Dgl (9.45) hat komplexe Koeffizienten. Das hat zur Folge, dass von der komplexen Lösung $z(t)$ NICHT $\operatorname{Re} z(t)$ und $\operatorname{Im} z(t)$ je für sich Lösungen sind.

9.4 Erzwungene Schwingungen

Wir untersuchen hier den Einfluss des Gewichts und den Einfluss der Unwuchterregung.

9.4.1 Gewichtseinfluss

Die Unwuchterregung bleibt zunächst weg. Dann lautet (9.45):

$$m \ddot{z} + (b_a + b_i) \dot{z} + (k - j \Omega b_i) z = -j G. \quad (9.46)$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$z = z_G = \text{konstant}, \quad (9.47)$$

liefert

$$(k - j \Omega b_i) z_G = -j G \quad (9.48)$$

und (vgl. Bild 9-17)

$$z_G = -j \frac{G}{k - j \Omega b_i} = \frac{G/k}{1 + \left(\frac{\Omega b_i}{k} \right)^2} \left(-j + \frac{\Omega b_i}{k} \right) =: j y_G + x_G. \quad (9.49)$$

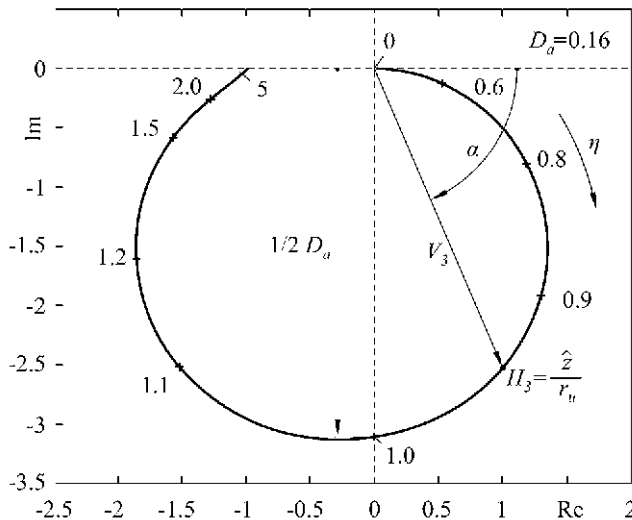


Bild 9-17

Ortskurve für Frequenzgang

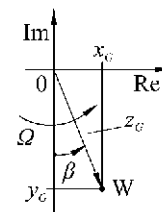


Bild 9-18

Rotorauslenkung

Aus Bild 9-17 liest man den Winkel β ab:

$$\tan \beta = \Omega b_i / k. \quad (9.50)$$

Durch die innere Dämpfung (oder Reibung) erfährt der Rotor neben der Absenkung durch das Gewicht eine Auslenkung aus der vertikalen Ebene in Drehrichtung, – die innere Dämpfung verzögert die Wirkung der elastischen Rückstellkräfte. Der Winkel β ist ein Maß für die innere Dämpfung.

9.4.2 Unwuchteinfluss

Jetzt bleibt das Gewicht weg und (9.45) liefert

$$m \ddot{z} + (b_a + b_i) \dot{z} + (k - j \Omega b_i) z = m r_u \Omega^2 e^{j \Omega t}. \quad (9.51)$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite,

$$z = \hat{z} e^{j \Omega t}, \quad (9.52)$$

ergibt

$$\hat{z} = \frac{m r_u \Omega^2}{k - m \Omega^2 + j \Omega b_a}. \quad (9.53)$$

Der Einfluss der inneren Dämpfung fällt heraus, weil der Rotor gewissermaßen *eingefroren* umläuft. Mit

$$\omega_0^2 = k / m, \quad \tilde{\Omega} = \Omega / \omega_0, \quad b_a = 2 D_a \omega_0 m \quad (9.54)$$

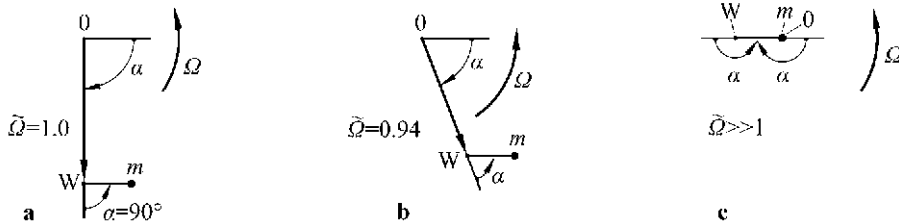
erhält man aus (9.53), vgl. Abschnitt 7.1, Gl. (7.8), (7.9),

$$\hat{z} = r_u V_3 (\tilde{\Omega}) e^{-j \alpha}. \quad (9.55)$$

Es ist zweckmäßig, die Ortskurve für den Frequenzgang, die Übertragungsfunktion

$$\frac{\hat{z}}{r_u} = V_3 e^{-j \alpha} \quad (9.56)$$

aufzutragen, vgl. Bild 9-18.



Aus Bild 9-18 liest man ab, wie der Rotor mit der Unwucht umläuft, vgl. Bild 9-4 und Bild 9-5 mit Bild 9-19a, b, c.

Man sieht: Die Unwuchtkraft lenkt den Rotor aus und zieht ihn gegen die äußere Dämpfungskraft. Vgl. auch die Diskussion im Abschnitt 9.6.

9.5 Freie Schwingungen

Die der Bewegungsgleichung (9.45) zugeordnete homogene Differentialgleichung lautet

$$m \ddot{z} + (b_a + b_i) \dot{z} + (k - j \Omega b_i) z = 0. \quad (9.57)$$

Der Lösungsansatz

$$z = C e^{\lambda t}, \quad (9.58)$$

vgl. (5.6), führt auf das Eigenwertproblem

$$\left(m \lambda^2 + (b_a + b_i) \lambda + k - j \Omega b_i \right) C e^{\lambda t} = 0 \quad (9.59)$$

und die charakteristische Gleichung $\mathcal{Q}$,

$$m \lambda^2 + (b_a + b_i) \lambda + k - j \Omega b_i = 0. \quad (9.60)$$

Mit

$$\omega_0^2 = k / m, \quad \tilde{\Omega} = \Omega / \omega_0, \quad \tilde{\lambda} = \lambda / \omega_0, \quad b_a = 2 D_a \omega_0 m, \quad b_i = 2 D_i \omega_0 m, \quad (9.61)$$

lautet sie

$$\tilde{\lambda}^2 + 2(D_a + D_i) \tilde{\lambda} + 1 - 2 D_i j \tilde{\Omega} = 0. \quad (9.62)$$

Man erhält die Eigenwerte

$$\tilde{\lambda}_{1/2} = -(D_a + D_i) \pm \sqrt{(D_a + D_i)^2 - 1 + 2 D_i j \tilde{\Omega}}. \quad (9.63)$$

Die allgemeine Lösung von (9.57) lautet nun

$$z = C_1 e^{\tilde{\lambda}_1 \omega_0 t} + C_2 e^{\tilde{\lambda}_2 \omega_0 t} = C_1 e^{\tilde{\lambda}_1 \tilde{t}} + C_2 e^{\tilde{\lambda}_2 \tilde{t}}, \quad (9.64)$$

mit $\tilde{t} = \omega_0 t$.

Bild 9-20 zeigt die Lage von $\tilde{\lambda}_1$ und $\tilde{\lambda}_2$ in der komplexen Ebene. Es gilt

$$c^2 = -1 + (D_a + D_i)^2 + 2 D_i j \tilde{\Omega} = |c^2| e^{j\gamma} \quad (9.65)$$

mit

$$\tan \gamma = \frac{2 D_i \tilde{\Omega}}{-1 + (D_a + D_i)^2}, \quad \pi/2 < \gamma \leq \pi. \quad (9.66)$$

Dann folgt die Wurzel aus (9.63)

$$\sqrt{\dots} = |c| e^{j\gamma/2}, \quad (9.67)$$

vgl. Bild 9-20, und $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ liegen an den markierten Stellen.

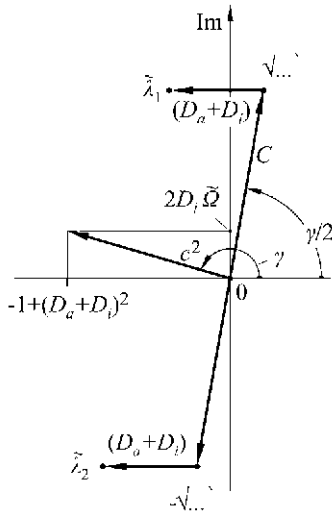


Bild 9-20
Eigenwerte in
komplexer Ebene

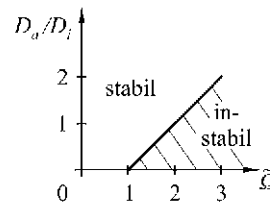


Bild 9-21
Stabilitäts-
karte

Die Zerlegungen von $\tilde{\lambda}_1$ und $\tilde{\lambda}_2$ in Real- und Imaginärteil laute

$$\tilde{\lambda}_1 = -\tilde{\delta}_1 + j\tilde{\omega}_1, \quad \tilde{\lambda}_2 = -\tilde{\delta}_2 - j\tilde{\omega}_2. \quad (9.68)$$

Aus Bild 9-20 liest man ab:

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 \text{ und } \tilde{\delta}_1 < \tilde{\delta}_2. \quad (9.69)$$

Es erhebt sich die Frage, kann $\tilde{\delta}_1$ negativ werden? Dann klingt $C_1 e^{\tilde{\lambda}_1 t}$ nicht mehr ab, sondern wächst mit der Zeit (der Rotor wird *instabil*!).

Im Grenzfall muss $\tilde{\delta}_1 = 0$ gelten und (9.63) liefert dafür:

$$j\tilde{\omega}_1 = -(D_a + D_i) + \sqrt{(D_a + D_i)^2 - 1 + 2D_i j\tilde{\Omega}}. \quad (9.70)$$

Addiert man auf beiden Seiten $(D_a + D_i)$ und quadriert dann, so erhält man (für den Grenzfall)

$$\tilde{\omega}_1 = 1 \text{ und } D_a = (\tilde{\Omega} - 1)D_i. \quad (9.71)$$

Man sieht: Für $\tilde{\Omega} \leq 1$ ist (9.71) nicht mit positiven Dämpfungszahlen D_a, D_i erfüllbar.

Für $\tilde{\Omega} > 1$ erhält man den Grenzfall, wenn

$$D_a / D_i = \tilde{\Omega} - 1. \quad (9.72)$$

Ist D_i größer als dieser Grenzwert, wird $\tilde{\delta}_1$ negativ. (*Übungsaufgabe!*) Man zeichnet eine *Stabilitätskarte* (vgl. Bild 9-21), aus der man ablesen kann, wann – für welche Parameter D_a, D_i – ein stabiler Betrieb der Maschine möglich ist.

9.6 Schlüsse aus den Untersuchungen

Wir haben in diesem Kapitel für die zweifach gelagerte Welle ein einfaches Modell zur Schwingungsuntersuchung hergeleitet. Dabei wurden in horizontaler und vertikaler Richtung je eine Auslenkung (Gesamt-Freiheitsgrad 2) vorgesehen. Das Modell eignet sich zur Untersuchung niederfrequenter Schwingungen – solange die Welle näherungsweise in der angenommenen Form schwingt.

Man erhält für die zwei Auslenkungen zwei Bewegungsgleichungen, die über die innere Dämpfung miteinander gekoppelt sind.

Da in diesem Modell in beiden Gleichungen dieselben Parameter auftreten, braucht man die Bewegungsgleichungen (noch) nicht mit Hilfe von Matrizen zu untersuchen, sondern kann mit der komplexen Ebene arbeiten.

Als Lösung der Bewegungsgleichung(en) fanden wir

- in Abschnitt 9.4.1 eine Änderung der stationären Biegung durch das Gewicht infolge innerer Dämpfung und Rotation,
- in Abschnitt 9.4.2 erzwungene Schwingungen mit einem Resonanzbereich infolge (unvermeidbarer) Unwucht,
- in Abschnitt 9.5 ein mögliches Instabil-Werden der stationären Lösung (das ist Biegung durch Gewicht und erzwungener Schwingung) infolge der inneren Dämpfung bei $\tilde{\Omega} > 1$ (das heißt $\Omega > \omega_0$).

Welchen Nutzen, welche allgemeinen Schlüsse kann man aus den Ergebnissen ziehen? Wir wollen vorsichtig verallgemeinern:

Falls man bei einer Maschine eine Verlagerung der Wellenachse bei Drehzahländerungen beobachtet, kann man Mechanismen, wie sie hinter der inneren Dämpfung stecken, zur Erklärung heranziehen und muss dann auch mit Instabilität rechnen, vgl. jedoch Kapitel 10. (Auch der Ölfilm von Gleitlagern kann drehzahlabhängige Wellenverlagerungen bewirken.)

Eine Unwucht erzeugt eine mit der Drehfrequenz Ω (Drehzahl $n = 60 \Omega / 2\pi$) umlaufende Auslenkung, die bei *isotroper Lagerung* (horizontal und vertikal gleiche Steifigkeit) für den Rotor eine *quasistatische Last*, für die Lager eine *harmonisch schwingende Last* bedeutet.

In der Umgebung von $\tilde{\Omega} = 1$, also in einem Ω -Bereich um die Eigenfrequenz ω_0 , treten sehr große Ausschläge auf. Man nennt dann auch $\Omega_{krit} = \omega_0$ eine kritische Drehgeschwindigkeit (*kritische Drehzahl*). Einen fortdauernden Betrieb im Bereich der kritischen Drehzahl – vgl. schraffiertes Gebiet in Bild 9-22 – muss man vermeiden.

Nach Bild 9-22 wäre ein Betrieb bei $\Omega \ll \omega_0$ wünschenswert. Das ist heute jedoch nicht möglich, weil erstens die Produktivität der Maschine bei kleinem Ω zu gering ist und zwei-

tens, ebenfalls aus Kostengründen, Maschinen möglichst *leicht* und nicht *klotzig* (mit großem ω_0) gebaut werden.

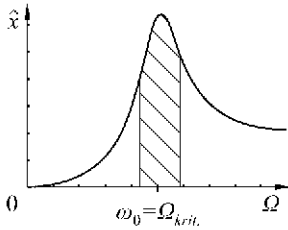


Bild 9-22
Amplitude
im Bereich
der kriti-
schen Dreh-
zahl

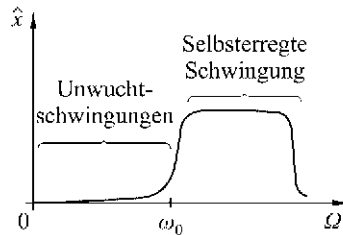


Bild 9-23
Amplituden-
verlauf selbst-
erregte
Schwingung

Man wählt den Betriebsbereich oberhalb von ω_0 , sodass man genügend weit vom kritischen Bereich – bei mehreren Eigenfrequenzen von den kritischen Bereichen – entfernt ist. Den kritischen Bereich – oder die kritischen Bereiche – muss man beim An- oder Abfahren der Maschine möglichst rasch durchlaufen (dazu ist eine Leistungsreserve erforderlich).

Das Instabil-Werden der stationären Lösungen infolge der inneren Dämpfung führt auf sogenannte *Selbsterregte Schwingungen* (bekannt sind solche vor allem als *Ratterschwingungen*). Diese Schwingungen wachsen nur während einer kleinen Zeit exponentiell mit der Zeit, wie in unserem Modell. Sehr rasch werden – bei etwas größeren Auslenkungen – nichtlineare Terme in den Gleichungen wirksam und begrenzen die Amplituden der sich einstellenden Schwingungen.

Von den Unwuchtschwingungen unterscheiden sich die selbsterregten einmal dadurch, dass sie nicht mit der Drehfrequenz Ω ablaufen, sondern weitgehend unabhängig von Ω mit der etwa festen Frequenz $\omega_1 < \Omega$, vgl. Abschnitt 9.5. Trägt man die Amplitude $\hat{x}$ einer selbsterregten Schwingung über der Drehfrequenz Ω auf, so erhält man zum Beispiel einen Verlauf wie in Bild 9-23, der sich im allgemeinen deutlich von der Resonanzkurve in Bild 9-22 unterscheidet.

Sieht man sich in Abschnitt 9.5 die Terme an, die das Instabil-Werden einer Maschine bei $\Omega > \omega_0$ verhindern – und die meisten Maschinen laufen bei $\Omega > \omega_0$ –, so stößt man auf die äußere Dämpfung als einzigen stabilisierenden Parameter. Zwar bereitet die Instabilität bei sehr hohen Drehzahlen Kopfzerbrechen, und Flugtriebwerke enthalten Quetschöldämpfer, um die äußere Dämpfung zu erhöhen, doch laufen die meisten Maschinen auch so – warum? So beliebt unser Modell ist, es muss einen Mangel haben.

9.7 Aufgaben

Aufgabe 9-1: Wie muss man $W(\zeta)$ in (9.10) wählen, damit sich als (Ersatz-)Masse m die Masse der in Bild 9-6 schraffierten Rotorteile ergibt? (*Hinweis:* Die Teilchen müssen identische Geschwindigkeit haben.)

Aufgabe 9-2: Gegeben sei der in Bild 9-24 skizzierte Rotor mit den Abmessungen R und l sowie der Dichte ρ . Berechnen Sie m mit Hilfe von (9.10). (Schätzen Sie m vor der Rechnung!)

Aufgabe 9-3: Gegeben sei der in Bild 9-25 skizzierte Turbinenläufer mit den Abmessungen R und l sowie der Dichte ρ . Berechnen Sie m mit Hilfe von (9.10). (Schätzen Sie m vor der Rechnung!)

Aufgabe 9-4: Gegeben sei der zylindrische Rotor (Bild 9-26) mit den Abmessungen R und l sowie der Dichte ρ . Berechnen Sie die (statische) Biegelinie $w(\zeta)$ unter der Einwirkung des Wellengewichtes. Entwickeln Sie die Formfunktion $W(\zeta)$ aus $w(\zeta)$ und setzen Sie sie statt (9.7) in (9.10) ein; berechnen Sie damit m . Wie unterscheidet sich dieses m von einem mit (9.7) gewonnenen?

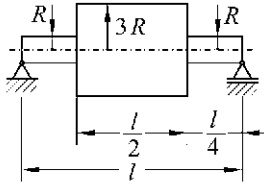


Bild 9-24

Abgesetzte Welle

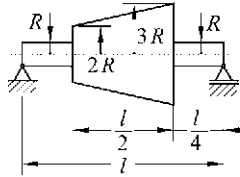


Bild 9-25

Kegelförmiger Rotor

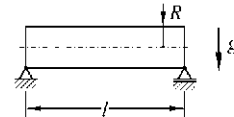


Bild 9-26

Zylindrischer Rotor

Aufgabe 9-5: Kontrollieren Sie die Formel (9.12).

Aufgabe 9-6: Die Maschinenwelle nach Bild 9-11 habe eine Länge $L = 2.0$ m, einen Durchmesser $d = 100$ mm, es sei $I_y = 1.2$ m und $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ N/m² (Elastizitätsmodul von Stahl). Berechnen Sie die Steifigkeit k nach (9.13) in N/m, N/mm und N/μm. Welche elastische Energie steht bei einer Durchbiegung von $x = 1$ mm in der Welle? (Vgl. schraffierte Fläche in Bild 9-10.)

Aufgabe 9-7: Kontrollieren Sie (9.12) mit (9.21).

Aufgabe 9-8: Berechnen Sie die Wellensteifigkeit k gemäß (9.21) für den Rotor aus Bild 9-24.

Aufgabe 9-9: Berechnen Sie die Steifigkeit der Welle nach Bild 9-11 mit $W(\zeta)$ gemäß (9.7) nach (9.24).

Aufgabe 9-10: Zeigen Sie für die Drehmatrix $R_z(\varphi)$ nach (9.35)₂: $R_z(\varphi_1)R_z(\varphi_2) = R_z(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Aufgabe 9-11: Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen (9.43) in Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + m r_u \Omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9-12: Schreiben Sie in (9.49) den Ausdruck $\Omega b_i / k$ mit $b_i = 2 D_i \omega_0 m$ usw. dimensionslos.

Aufgabe 9-13: Passen Sie die allgemeine Lösung (9.64) an die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0, y(0) = y_0, \dot{x}(0) = v_{x0}, \dot{y}(0) = v_{y0}$ an; vgl. auch (9.45).

Aufgabe 9-14: Nehmen Sie für die Anfangswerte von Aufgabe 9-3 und für D_a, D_i Zahlenwerte an, z. B. $(D_a, D_i) = (0.1, 0.05), (0.05, 0.1)$ sowie $\tilde{\Omega} = 0.5, 1.0, 1.5$ und berechnen Sie die Bahnkurve $z(t)$ des Wellendurchstoßpunkts W.

10 Anisotrope Rotorlager – der Schwinger mit zwei Freiheitsgraden

Sehr oft sind die Lager von Rotoren gar nicht steif im Verhältnis zur Welle und dürfen dann nicht als *starr* angenommen werden. In der Regel haben sie auch horizontal und vertikal unterschiedliche Steifigkeiten, sie sind *anisotrop*. In diesem Kapitel wollen wir den Einfluss nachgiebiger Lagerböcke auf die Wellenschwingungen untersuchen.

Diese maschinendynamische Aufgabe dient als Motivation zur Untersuchung der freien und erzwungenen Schwingungen der Systeme mit zwei Freiheitsgraden. Die Überlegungen sind hier so geführt, dass ein Übergang zu höherem Freiheitsgrad nahe liegt.

10.1 Aufgabenstellung

Es gibt keine einheitliche Form der Lagerung von Rotoren. Die Lager können am Gehäuse *angegossen* sein, sie können auf eigenen Böcken vom Gehäuse getrennt stehen. Wir wollen hier annehmen, dass zwei Böcke die beiden Rotorlager und das Gehäuse tragen (Bild 10-1). Die beiden Böcke stehen je auf einen I-Träger, die mit ihren Enden auf festem Mauerwerk ruhen. Das Maschinengehäuse ist – etwa in Zapfenmitte – an den Böcken aufgehängt und auch dort gegen Verdrehen gesichert.

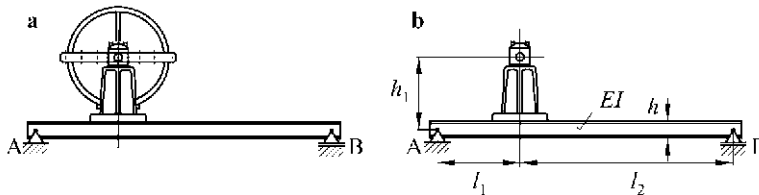


Bild 10-1
Nachgiebige Lagerung, a Schema, b Abmessungen

Wegen der langen Träger ist die Lagerung hier sicher nicht *starr* (selbst wenn die Lagerböcke relativ steif sind).

Gefragt ist nach dem Einfluss der nachgiebigen Lagerung auf die Maschinenschwingungen. Für den Rotor sollen bei der Untersuchung die Annahmen aus Kapitel 9 übernommen werden.

10.2 Modell

Wir fragen hier zunächst nach den Nachgiebigkeiten *eines Lagerbocks*. In der Praxis ist das eine sehr schwierige Frage, weil – wie hier – der Bock nicht auf einem starren Fundament ruht. Sehr oft ist die Gründung des Lagerbocks nachgiebiger als dieser selbst.

In unserem Fall nehmen wir an, dass der Lagerbock starr ist und auf einem Balken der Biegesteifigkeit EI steht, der bei A und B gelenkig gelagert ist. Bild 10-1b zeigt die wesentlichen Abmessungen, es gelte $h \ll l_1, l_2$. Wenn wir die versteifende Wirkung der Grundplatte des Lagerbocks auf den Balken vernachlässigen, können wir ihn als *Durchlaufträger* mit den Lasten F_{xL} , F_{yL} und $M_L := h_1 F_{xL}$ ansehen, vgl. Bild 10-2.

Dabei sind F_{xL} und F_{yL} die im Zapfenmittelpunkt am Lagerbock angreifend gedachten Kräfte, die vom Rotor und dem Gehäuse herrühren. Das Gewicht des Lagerbocks und des Trägers lassen wir außer Acht.

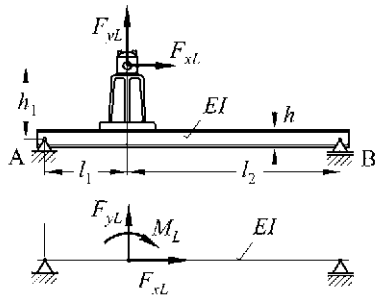


Bild 10-2
Lagerung
Kräfte

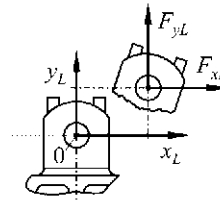


Bild 10-3
Auslenkungen am
Lagerbock

10.3 Steifigkeit des Lagerbocks

Bild 10-3 zeigt am Lagerbock die Auslenkungen x_L, y_L infolge der wirkenden Kräfte F_{xL}, F_{yL} . Gesucht ist der Zusammenhang zwischen (x_L, y_L) und (F_{xL}, F_{yL}) .

Hinweis: Es ist nur nach dem Zusammenhang zwischen (x_L, y_L) und (F_{xL}, F_{yL}) und nicht nach der Biegelinie des Balkens gefragt. Wenn wir den Zusammenhang finden, ohne die Biegelinie zu berechnen, ist die Frage beantwortet.

10.3.1 Berechnen der Lagersteifigkeiten nach dem ersten Satz von Castigliano (vgl. Anhang, Kapitel B.4)

Um den *ersten Satz von Castigliano* anzuwenden, müssen wir die innere Arbeit W^i im Balken A-B durch die Lasten F_{xL} und F_{yL} ausdrücken, vgl. Bild 10-4.

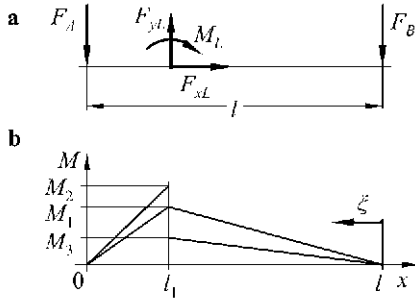


Bild 10-4

Kräfte und Momente am Balken. a Lasten, b Momentenlinien

Da wir nur Biegeverformungen im Balken berücksichtigen, gilt

$$W^i = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2(x) dx. \quad (10.1)$$

Darin ist $M(x)$ die Momentenlinie nach Bild 10-4b.

Mit den Parametern aus Bild 10-2a gelten in Bild 10-4

$$\text{Lagerkräfte: } F_A = (l_2 F_{yL} + h_1 F_{xL})/l, \quad F_B = (l_1 F_{yL} + h_1 F_{xL})/l, \quad (10.2)$$

$$\text{Momente: } M_1 = l_1 l_2 F_{yL}/l, \quad M_2 = l_1 l_2 F_{yL}/l + h_1 l_1 F_{xL}/l, \quad M_3 = l_1 l_2 F_{yL} - h_1 l_2 F_{xL}/l. \quad (10.3)$$

Momentenlinie $M(x)$ – vgl. auch $\xi := l - x$ in Bild 10-4b

$$\begin{aligned} M(x) &= F_A x = (l_2 F_{yL} + h_1 F_{xL})/l \cdot x \quad \text{für } 0 \leq x \leq l_1, \\ M(x) &= F_B \xi = (l_1 F_{yL} + h_1 F_{xL})/l \cdot \xi \quad \text{für } 0 \leq \xi \leq l_2. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Einsetzen von (10.4) in (10.1) liefert

$$\begin{aligned} W^i &= \frac{1}{2EI} (l_2 F_{yL} + h_1 F_{xL})^2 / l^2 \cdot \int_0^{l_1} x^2 dx + \frac{1}{2EI} (l_1 F_{yL} + h_1 F_{xL})^2 / l^2 \cdot \int_0^{l_2} \xi^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{l_1^3}{3} (l_2 F_{yL} + h_1 F_{xL})^2 / l^2 + \frac{l_2^3}{3} (l_1 F_{yL} + h_1 F_{xL})^2 / l^2 \right\} = W^i(F_{xL}, F_{yL}). \end{aligned} \quad (10.5)$$

Nach dem ersten Satz von Castigliano erhält man die Auslenkungen x_L und y_L aus

$$x_L = \frac{\partial W^i}{\partial F_{xL}}, \quad y_L = \frac{\partial W^i}{\partial F_{yL}}. \quad (10.6)$$

zu

$$x_L = \frac{h_1^2 (l_1^3 + l_2^3)}{3EI l^2} F_{xL} + \frac{h_1 l_1 l_2 (l_1 - l_2)}{3EI l} F_{yL}, \quad y_L = \frac{h_1 l_1 l_2 (l_1 - l_2)}{3EI l} F_{xL} + \frac{l_1^2 l_2^2}{3EI l} F_{yL}. \quad (10.7)$$

Mit den *Verformungseinflusszahlen* oder *Nachgiebigkeiten* h_{kl} , s. Kapitel B.4,

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{h_1^2 (l_1^3 + l_2^3)}{3EI l^2}, & h_{12} &= \frac{h_1 l_1 l_2 (l_1 - l_2)}{3EI l}, \\ h_{21} &= \frac{h_1 l_1 l_2 (l_1 - l_2)}{3EI l}, & h_{22} &= \frac{l_1^2 l_2^2}{3EI l} \end{aligned} \quad (10.8)$$

lauten die Gleichungen (10.7)

$$\begin{aligned} x_L &= h_{11} F_{xL} + h_{12} F_{yL}, \\ y_L &= h_{21} F_{xL} + h_{22} F_{yL}, \end{aligned} \quad (10.9)$$

symbolisch, in Matrixschreibweise

$$\mathbf{x}_L = \mathbf{H} \mathbf{F}_L, \quad (10.10)$$

mit den Spaltenmatrizen der Auslenkungen, der Kräfte bzw. der *Nachgiebigkeitsmatrix*

$$\mathbf{x}_L := \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_L = \begin{pmatrix} F_{xL} \\ F_{yL} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}. \quad (10.11)$$

Wegen der Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T$, also $h_{kl} = h_{lk}$, vgl. (B.21), liest man gelegentlich

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}. \quad (10.12)$$

Wenn $\det \mathbf{H} \neq 0$, diese Bedingung ist hier erfüllt, führt die Umkehrung von Gleichung (10.10) auf

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{x}_L, \text{ also } \mathbf{F}_L = \mathbf{K} \mathbf{x}_L, \quad (10.13)$$

mit der *Steifigkeitsmatrix*, Kapitel B.5,

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^{-1} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}. \quad (10.14)$$

Auch sie ist symmetrisch, $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$, ihre Elemente, die *Krafteinflusszahlen* k_{kl} erfüllen $k_{kl} = k_{lk}$; hier gelten, vgl. (10.8),

$$k_{11} = \frac{3EI l}{h_1^2 l_1 l_2}, \quad k_{12} = k_{21} = \frac{3EI l (l_1 - l_2)}{h_1 l_1^2 l_2^2}, \quad k_{22} = \frac{3EI l (l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2)}{l_1^3 l_2^3}. \quad (10.15)$$

Ausführlich lautet (10.13)₂, vgl. (10.9)

$$\begin{pmatrix} F_{xL} \\ F_{yL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix}. \quad (10.16)$$

10.3.2 Einbau eines Versteifungselements – der zweite Satz von Castigliano

Aufgabe: Man befürchtet, dass der Lagerbock nach Bild 10-1b zu *weich*, das heißt zu nachgiebig ist (die h_{kl} sind zu groß). Deshalb will man ihn durch eine Stange – einen Stab der Dehnsteifigkeit EA – versteifen, die, wie in Bild 10-5 gezeigt, mit dem einen Ende am Lager A , mit dem anderen am Lagerbock angelenkt ist. Wie groß muss man EA wählen, damit eine nennenswerte Versteifung (von vielleicht 20 %) erzielt wird?

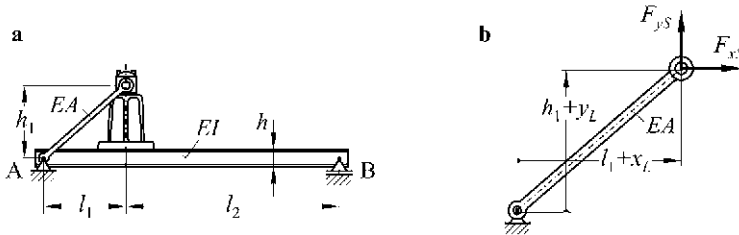


Bild 10-5
Verspannter Lagerbock.
a Gesamtbild,
b Spannstränge

Wir berechnen die durch die Stange erzeugten Zusatzkräfte (F_{xS}, F_{yS}) (vgl. Bild 10-5b) und addieren sie zu (F_{xL}, F_{yL}) nach Bild 10-3.

Wir vernachlässigen die Abmessungen der Anschlussköpfe der Stange und setzen ihre unverformte Länge mit

$$l_{S0} = \sqrt{h_1^2 + l_1^2} \quad (10.17)$$

an (vgl. Bild 10-5); beachte $(h \ll l_1, l_2, h_1)$. Bild 10-5b zeigt die belastete und durch die Lagerauslenkungen x_L, y_L verformte Stange. Sie hat die Länge

$$l_S = \sqrt{(l_1 + x_L)^2 + (h_1 + y_L)^2}. \quad (10.18)$$

Die Verlängerung der Stange beträgt

$$\Delta l_S = l_S - l_{S0} = \sqrt{(l_1 + x_L)^2 + (h_1 + y_L)^2} - \sqrt{h_1^2 + l_1^2}. \quad (10.19)$$

Dann lautet die Stangenkraft

$$F_S = EA \Delta l_S / l_{S0}, \quad (10.20)$$

und die in der Stange gespeicherte innere Arbeit beträgt

$$W^i = \frac{1}{2} F_S \cdot \Delta l_S = \frac{1}{2} EA \frac{(\Delta l_S)^2}{l_{S0}}. \quad (10.21)$$

Setzt man Δl_S aus (10.19) hier ein, so erhält man

$$W^i = W^i(x_L, y_L). \quad (10.22)$$

Nach dem zweiten Satz von Castigliano gelten

$$F_{xS} = \frac{\partial W^i}{\partial x_L}, \quad F_{yS} = \frac{\partial W^i}{\partial y_L}. \quad (10.23)$$

Man erhält mit (10.21) und (10.19)

$$\begin{aligned} F_{xS} &= EA \frac{\Delta l_S}{l_{S0}} \frac{\partial \Delta l_S}{\partial x_L} = \frac{\Delta l_S}{l_{S0}} \frac{EA(l_1 + x_L)}{\sqrt{(l_1 + x_L)^2 + (h_1 + y_L)^2}}, \\ F_{yS} &= EA \frac{\Delta l_S}{l_{S0}} \frac{\partial \Delta l_S}{\partial y_L} = \frac{\Delta l_S}{l_{S0}} \frac{EA(h_1 + y_L)}{\sqrt{(l_1 + x_L)^2 + (h_1 + y_L)^2}}. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Diese Gleichungen sind bezüglich x_L und y_L noch *nichtlinear*.

10.3.2.1 Linearisieren der Gleichungen

Wir gehen in 3 Schritten vor:

1. In (10.24) werden x_L und y_L wie folgt ersetzt (ε kleiner Parameter):

$$x_L \mapsto \varepsilon x_L, \quad y_L \mapsto \varepsilon y_L; \quad (10.25)$$

dadurch entstehen $F_{xS}(\varepsilon)$, $F_{yS}(\varepsilon)$; die Abhängigkeit von EA , l_1 , h_1 , x_L , y_L bleibt hier im Hintergrund.

2. Für $F_{xS}(\varepsilon)$, $F_{yS}(\varepsilon)$ werden die linearen Glieder der (Taylor)Reihen nach ε am Punkt $\varepsilon = 0$ angeschrieben, zum Beispiel:

$$F_{xS}(\varepsilon) = F_{xS}(0) + \varepsilon \left. \frac{\partial F_{xS}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad F_{yS}(\varepsilon) = F_{yS}(0) + \varepsilon \left. \frac{\partial F_{yS}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (10.26)$$

(Die Ausdrücke $F_{xS}(0)$, $F_{yS}(0)$ verschwinden hier, weil $\Delta l_S(\varepsilon) = 0$ für $\varepsilon = 0$.)

3. Mit $\varepsilon = 1$ liefert (10.26) die linearisierten Gleichungen. Man erhält auf diese Weise aus (10.24)

$$F_{xS} = EA \frac{l_1^2}{l_{S0}^3} x_L + EA \frac{h_1 l_1}{l_{S0}^3} y_L, \quad F_{yS} = EA \frac{h_1 l_1}{l_{S0}^3} x_L + EA \frac{h_1^2}{l_{S0}^3} y_L; \quad (10.27)$$

in Matrixschreibweise:

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{K}_S \mathbf{x}_L, \quad (10.28)$$

wo

$$\mathbf{F}_S = \begin{pmatrix} F_{xS} \\ F_{yS} \end{pmatrix}; \mathbf{K}_S = \begin{pmatrix} k_{11S} & k_{12S} \\ k_{21S} & k_{22S} \end{pmatrix} \quad (10.29)$$

und, mit l_{S0} nach (10.17)

$$k_{11S} = EA l_1^2 / l_{S0}^3, \quad k_{12S} = k_{21S} = EA h_1 l_1 / l_{S0}^3, \quad k_{22S} = EA h_1^2 / l_{S0}^3. \quad (10.30)$$

10.3.2.2 Wirksame Steifigkeiten

Am Lagerbock – am Zapfen – addieren sich die Kräfte $\mathbf{F}_L$ und $\mathbf{F}_S$. Für die Gesamtkräfte folgt aus (10.13)₂ und (10.28)

$$\mathbf{F}_{ges} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_S = (\mathbf{K} + \mathbf{K}_S) \mathbf{x}_L. \quad (10.31)$$

In der Aufgabenstellung wurde gefragt, wie groß EA gewählt werden muss, damit durch die Stange eine Zusatzsteifigkeit von 20 % erzeugt wird:

Vergleicht man k_{11} nach (10.15)₁ und k_{11S} nach (10.30)₁ und setzt $k_{11S} = 0.2 k_{11}$ folgt:

$$EA \frac{l_1^2}{\left(\sqrt{h_1^2 + l_1^2}\right)^3} = 0.2 \frac{3EI l}{h_1^2 l_1 l_2}. \quad (10.32)$$

Dies ist eine Gleichung für EA . Um einen Eindruck von der Größenordnung von EA zu gewinnen, setzen wir in (10.32) $l_1 \approx h_1 \approx l/2$ und erhalten, wenn wir E herauskürzen:

$$A = 0.2 \frac{96}{\sqrt{2}} \frac{I}{l^2}. \quad (10.33)$$

Schreibt man $I = A_I i_I^2$ (A_I – Trägerquerschnitt, i_I – Trägheitsradius), so folgt

$$A = 0.2 \frac{96}{\sqrt{2}} A_I \left(\frac{i_I}{l}\right)^2. \quad (10.34)$$

Da $(i_I/l)^2 \ll 1$, ergibt sich eine sehr kleine Fläche. (Das *Verspannen* von Bauteilen ist sehr steifigkeitswirksam, falls man *feste Punkte* – hier das Lager A – hat.)

10.4 Eigenschwingungen des Lagerbocks mit angehängter Masse

Wie erwähnt, ist die Modellbildung für Lagerungen nicht einfach, weil man die Nachgiebigkeiten der *Anschlussstellen* – Fundamente, Mauerwerk – häufig nur sehr grob schätzen kann. Bei größeren Anlagen führt man deshalb während des Aufbaus auch Messungen an fertiggestellten Teilsystemen durch, um die getroffenen Annahmen zu überprüfen und – falls erforderlich – Änderungen vorzunehmen.

Stellen wir uns vor, einer der Lagerböcke der Maschine sei aufgebaut, Rotor und Maschinengehäuse fehlen noch. Um die getroffenen Annahmen zu überprüfen, soll eine Masse m (entsprechend etwa der halben Gehäuse- und Rotormasse) in das Lager eingehängt und angesto-

Ben werden, um anhand der gemessenen Eigenschwingungen (Eigenfrequenzen) die Steifigkeiten festzustellen. In einem weiteren Versuch soll der Bock (mit der Masse m) durch einen Unwuchtschwinger erregt werden.

Wir betrachten den ersten Versuch hier im Abschnitt 10.4, den zweiten im Abschnitt 10.5. Aus der Sicht der Schwingungslehre handelt es sich bei dem Lagerbock mit der Masse m um einen Schwinger vom Freiheitsgrad 2 – man spricht auch von *mehrläufigen Schwingern*. Das Modell dient auch dazu, in die Untersuchung solcher Schwingungen einzuführen.

10.4.1 Modell und Bewegungsgleichungen

Bild 10-6 zeigt den Lagerbock mit der eingehängten Masse m . Der Körper ist drehbar im Lager eingehängt, da man andernfalls die durch das Kippen des Bocks (vgl. Winkelauslenkung in Bild 10-3) bewirkte Drehträgheit der Masse beachten müsste. Ferner soll die Masse m so groß sein, dass man ihr gegenüber die Masse des Bocks und des Trägers vernachlässigen kann.

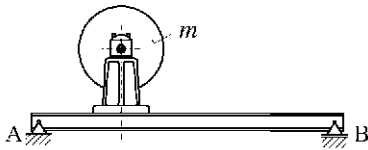


Bild 10-6

Versuchsaufbau für Eigenschwingungen

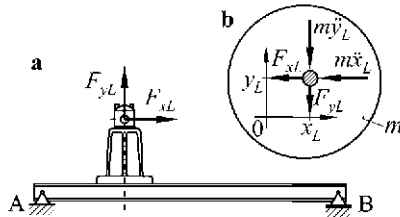


Bild 10-7

Schnittbilder zum Eigenschwingungsversuch

Bild 10-7 zeigt die Schnittbilder für Bock und Zusatzmasse. Am Bock greifen die Kräfte (F_{xL}, F_{yL}) an, die Masse ist mit (x_L, y_L) ausgelenkt, vgl. Bild 10-3. Neben (F_{xL}, F_{yL}) wirken die d'Alembertschen Kräfte $(m\ddot{x}_L, m\ddot{y}_L)$. (Das Gewicht – als statische Kraft – bleibt unbeachtet.)

Die Gleichgewichtsbedingungen für die Massen lauten, vgl. Bild 10-7b,

$$m\ddot{x}_L + F_{xL} = 0, \quad m\ddot{y}_L + F_{yL} = 0. \quad (10.35)$$

Mit (F_{xL}, F_{yL}) nach (10.16) erhält man die beiden Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_L + k_{11}x_L + k_{12}y_L &= 0, \\ m\ddot{y}_L + k_{21}x_L + k_{22}y_L &= 0. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Die Krafteinflusszahlen k_{kl} nehmen wir hier als bekannt an. Die beiden Gleichungen (10.36) bilden ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Da es sich um zwei Gleichungen zweiter Ordnung handelt, spricht man auch von einem *System vierter Ordnung*. Man schreibt (10.36) als Matrixengleichung:

Mit der *Massen-* (oder auch *Trägheits-*)*Matrix*

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad (10.37)$$

der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ nach (10.14) – oder auch der Gesamtsteifigkeit in (10.31) – und der Spaltenmatrix $\mathbf{x}_L = (x_L, y_L)^T$ der Auslenkungen erhält (10.36) die Form

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_L + \mathbf{K} \mathbf{x}_L = \mathbf{0}. \quad (10.38)$$

Abgesehen davon, dass hier Matrizen stehen, ist dies eine Gleichung wie (5.13)₁: "Masse $\times$ Beschleunigung plus Steifigkeit $\times$ Auslenkung ist gleich Null."

10.4.2 Eigenschwingungen - allgemein

Eine lineare homogene Dgl mit konstanten Koeffizienten,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (10.39)$$

löst man mit einem $e^{\lambda t}$ -Ansatz (vgl. Abschnitt 5.2). Hier lautet der $e^{\lambda t}$ -Ansatz

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}} e^{\lambda t}. \quad (10.40)$$

Der Allgemeinheit halber schreiben wir $\mathbf{x}$ statt $\mathbf{x}_L$ und auch (x_1, x_2) statt (x_L, y_L) ,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T, \quad (10.41)$$

die Massenmatrix $\mathbf{M}$ wird aufgefüllt:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}. \quad (10.42)$$

Trägheitsglieder m_{12}, m_{21} treten bei obiger Aufgabe hinzu, wenn man die Massen von Lagerbock und Balken berücksichtigt, zum Beispiel auf die dem Vorgehen in Abschnitt 9.3.1 entsprechende Weise.

Einsetzen von (10.40) in (10.39) liefert

$$\mathbf{M} \lambda^2 \hat{\mathbf{x}} e^{\lambda t} + \mathbf{K} \hat{\mathbf{x}} e^{\lambda t} = (\mathbf{M} \lambda^2 + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{x}} e^{\lambda t} = \mathbf{0}. \quad (10.43)$$

Wegen $e^{\lambda t} \neq 0$ darf man (10.43) durch $e^{\lambda t}$ dividieren und erhält das System homogener linearer Gleichungen

$$(\mathbf{M} \lambda^2 + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (10.44)$$

Mit $\mathbf{M}$ nach (10.42), $\mathbf{K}$ nach (10.14) und $\mathbf{x}$ nach (10.41) lautet es ausführlich

$$\left\{ \begin{pmatrix} m_{11}\lambda^2 & m_{12}\lambda^2 \\ m_{21}\lambda^2 & m_{22}\lambda^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

oder

$$\begin{pmatrix} m_{11}\lambda^2 + k_{11} & m_{12}\lambda^2 + k_{12} \\ m_{21}\lambda^2 + k_{21} & m_{22}\lambda^2 + k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (10.45)$$

oder

$$\begin{pmatrix} (m_{11}\lambda^2 + k_{11})\hat{x}_1 + (m_{12}\lambda^2 + k_{12})\hat{x}_2 \\ (m_{21}\lambda^2 + k_{21})\hat{x}_1 + (m_{22}\lambda^2 + k_{22})\hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es sind noch eine Reihe anderer *gemischter* Schreibweisen möglich, die jeweils bestimmte Aspekte hervorheben oder besonders deutlich machen.

10.4.2.1 Eigenwertproblem

Das lineare homogene Gleichungssystem (10.44) mit dem Parameter λ hat stets die triviale Lösung $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, die *statische* Gleichgewichtslage (das Gewicht wurde vernachlässigt; vgl. auch Abschnitt 5.2).

Frage: Gibt es spezielle dem System eigene Parameterwerte λ – man nennt sie *Eigenwerte* –, zu denen

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (10.46)$$

eine nicht-triviale Lösung $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ hat? Man nennt dies eine *Eigenwertaufgabe* oder ein *Eigenwertproblem*.

Antwort: Das Eigenwertproblem (10.46) hat für jene Parameterwerte λ eine nicht-triviale Lösung, für die seine *Koeffizientendeterminante*,

$$\Delta(\lambda) := \det(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K}), \quad (10.47)$$

verschwindet:

$$\Delta(\lambda) = 0. \quad (10.48)$$

Dies ist eine (algebraische) Bestimmungsgleichung für λ . Sie heißt *charakteristische Gleichung*, in der Schwingungslehre häufig auch *Frequenzgleichung*.

Die Nullstellen (Lösungen, Wurzeln) $\lambda = \lambda_i, i = 1, 2, \dots$, von (10.47) heißen *charakteristische Werte* oder *Eigenwerte*.

Konkret lautet die charakteristische Gleichung, vgl. (10.45)₂,

$$\begin{aligned}
\Lambda(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} m_{11}\lambda^2 + k_{11} & m_{12}\lambda^2 + k_{12} \\ m_{21}\lambda^2 + k_{21} & m_{22}\lambda^2 + k_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11}\lambda^2 + k_{11} & m_{12}\lambda^2 + k_{12} \\ m_{21}\lambda^2 + k_{21} & m_{22}\lambda^2 + k_{22} \end{vmatrix} \\
&= (m_{11}\lambda^2 + k_{11})(m_{22}\lambda^2 + k_{22}) - (m_{12}\lambda^2 + k_{12})(m_{21}\lambda^2 + k_{21}) \\
&= \lambda^4 (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) + \lambda^2 (m_{11}k_{22} - m_{21}k_{12} + k_{11}m_{22} - k_{21}m_{12}) + \\
&\quad + (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}) \\
&= \lambda^4 \det \mathbf{M} + \lambda^2 \left(\begin{vmatrix} m_{11} & k_{12} \\ m_{21} & k_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{11} & m_{12} \\ k_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \right) + \det \mathbf{K} = 0.
\end{aligned} \tag{10.49}$$

Die charakteristische Gleichung ist hier eine (algebraische) Gleichung 4. Grades. (Sie ist sogar *biquadratisch* und lässt sich deshalb wie folgt formal lösen.)

Kürzt man (10.49) mit

$$a_4 \lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_0 = 0 \tag{10.50}$$

ab, so lautet die Lösung – in 2 Schritten –

$$\left(\lambda^2 \right)_{1/2} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_0a_4}}{2a_4} \tag{10.51}$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda_{1/-1} &= \pm \sqrt{\left(\lambda^2 \right)_1} = \pm \sqrt{\frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_0a_4}}{2a_4}}, \\
\lambda_{2/-2} &= \pm \sqrt{\left(\lambda^2 \right)_2} = \pm \sqrt{\frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_0a_4}}{2a_4}}.
\end{aligned} \tag{10.52}$$

Hinweis 1: Bei Systemen höherer Ordnung – bei mehr als 2 Gleichungen – lassen sich die Eigenwerte λ_i nicht explizit anschreiben.

Hinweis 2: Sind $\mathbf{M}$ und $\mathbf{K}$ positiv definit,

$$\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} > 0 \text{ für } \dot{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} > 0 \text{ für } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \tag{10.53}$$

so werden die Eigenwerte λ rein imaginär und treten komplex konjugiert auf; wir schreiben

$$\left(\lambda^2 \right)_k = -\omega_k^2 \tag{10.54}$$

und setzen die Indizes *paarig*:

$$\lambda_k = j\omega_k, \quad \lambda_{-k} = -j\omega_k. \tag{10.55}$$

Man ordnet die *Eigenfrequenzen* ω_k der Größe nach:

$$\omega_{k+1} \geq \omega_k; \tag{10.56}$$

Doppelwurzeln werden doppelt gezählt usw.

10.4.2.2 Eigenlösungen

Setzt man $\lambda = \lambda_k = j\omega_k$ (oder $\lambda = \lambda_k = -j\omega_k$) in (10.44) – zum Beispiel in der Form (10.45)₂ ein, so erhält man

$$\begin{pmatrix} k_{11} - m_{11}\omega_k^2 & k_{12} - m_{12}\omega_k^2 \\ k_{21} - m_{21}\omega_k^2 & k_{22} - m_{22}\omega_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}_k = \mathbf{0}, \quad (10.57)$$

– und für $\lambda = -j\omega_k$ dieselbe Gleichung!

Da mit λ = Eigenwert die Koeffizientendeterminante verschwindet, ist eine Gleichung des Systems – eine Zeile der Matrix $(\mathbf{M}\lambda_k^2 + \mathbf{K})$ – eine Linearkombination der übrigen also überflüssig. Man kann eines der Elemente der Spaltenmatrix $\hat{\mathbf{x}}$ frei wählen – zum Beispiel gleich 1 setzen – und die übrigen aus dem verbleibenden Gleichungssystem berechnen.

Bei nur 2 Gleichungen, wie hier in (10.57), lässt man einfach eine Gleichung weg und erhält, zum Beispiel aus der ersten Gleichung

$$(k_{11} - m_{11}\omega_k^2)\hat{x}_{1k} + (k_{12} - m_{12}\omega_k^2)\hat{x}_{2k} = 0 \quad (10.58)$$

die reelle (!) Lösung

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} -(k_{12} - m_{12}\omega_k^2) \\ k_{11} - m_{11}\omega_k^2 \end{pmatrix}. \quad (10.59)$$

Die Lösung $\hat{\mathbf{x}}_k$ heißt *Eigenvektor* $\hat{\mathbf{x}}_k$.

Hinweis 3: Zu $\omega_{-k} = -\omega_k$, zu $\lambda_{-k} = \overline{\lambda_k}$ gehört derselbe Eigenvektor wie zu ω_k .

Hinweis 4: Mit $\hat{\mathbf{x}}_k$ ist auch $c_k \hat{\mathbf{x}}_k$ (c_k skalarer komplexer Faktor) ein Eigenvektor. Die Zusammenfassung $(\lambda_k, \hat{\mathbf{x}}_k)$ von Eigenwert $\lambda_k (= j\omega_k)$ und zugehörigem Eigenvektor $\hat{\mathbf{x}}_k$ nennen wir *Eigenlösung*. Setzt man λ_k und $\hat{\mathbf{x}}_k$ in (10.40) ein, erhält man die *Eigenschwingung*

$$\mathbf{x}_k(t) = c_k \hat{\mathbf{x}}_k e^{\lambda_k t} = c_k \hat{\mathbf{x}}_k e^{j\omega_k t}. \quad (10.60)$$

10.4.2.3 Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung der linearen homogenen Dgl (10.39) setzt sich aus ihren Eigenschwingungen zusammen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \sum_{k=-2}^2 \mathbf{x}_k(t) = \sum_{k=-2}^2 c_k \hat{\mathbf{x}}_k e^{\lambda_k t} = \sum_{k=-2}^2 c_k \hat{\mathbf{x}}_k e^{j\omega_k t} \\
 &= \sum_{k=1}^2 \left(c_k e^{j\omega_k t} + c_{-k} e^{-j\omega_k t} \right) \hat{\mathbf{x}}_k.
 \end{aligned} \tag{10.61}$$

Weitere Umformungen folgen unter 10.4.3 für das Beispiel.

10.4.2.4 Orthogonalität der Eigenschwingungen

Sind im Eigenwertproblem (10.55) die Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{K}$ symmetrisch, so sind die zu verschiedenen Eigenwerte $\lambda_k := \lambda_k^2$ und $\lambda_l := \lambda_l^2$ gehörenden Eigenvektoren $\hat{\mathbf{x}}_k$ bzw. $\hat{\mathbf{x}}_l$ im verallgemeinerten Sinne orthogonal.

Man definiert mit den Matrizen $\mathbf{M}$ bzw. $\mathbf{K}$ (als Gewichtsfunktionen) für zwei nicht notwendig verschiedene Eigenvektoren $\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{x}}_l$ die *Skalarprodukte*

$$(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{x}}_l)_{\mathbf{M}} := \hat{\mathbf{x}}_k^{\mathbf{T}} \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_l, \quad (\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{x}}_l)_{\mathbf{K}} := \hat{\mathbf{x}}_k^{\mathbf{T}} \mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}_l. \tag{10.62}$$

Für die Eigenlösungen $(\lambda_k, \hat{\mathbf{x}}_k)$ und $(\lambda_l, \hat{\mathbf{x}}_l)$ ist (10.46) erfüllt,

$$(\mathbf{M} \lambda_k + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{M} \lambda_l + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{x}}_l = \mathbf{0}. \tag{10.63}$$

Multipliziert man (10.63)₁ von links mit $\hat{\mathbf{x}}_l^{\mathbf{T}}$ und (10.63)₂ mit $\hat{\mathbf{x}}_k^{\mathbf{T}}$, so erhält man

$$\lambda_k \hat{\mathbf{x}}_l^{\mathbf{T}} \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_k = -\hat{\mathbf{x}}_l^{\mathbf{T}} \mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}_k, \quad \lambda_l \hat{\mathbf{x}}_k^{\mathbf{T}} \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_l = -\hat{\mathbf{x}}_k^{\mathbf{T}} \mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}_l. \tag{10.64}$$

Transposition von (10.64)₁ liefert wegen $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{\mathbf{T}}$ und $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{\mathbf{T}}$

$$\lambda_k \hat{\mathbf{x}}_k^{\mathbf{T}} \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_l = -\hat{\mathbf{x}}_k^{\mathbf{T}} \mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}_l. \tag{10.65}$$

Die rechten Seiten von (10.65) und (10.64)₂ stimmen überein. Die Differenz dieser beiden Gleichungen liefert

$$(\lambda_k - \lambda_l) \hat{\mathbf{x}}_k^{\mathbf{T}} \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_l = 0. \tag{10.66}$$

Falls $\lambda_k \neq \lambda_l$, folgt daraus

$$(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{x}}_l)_{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{x}}_k^{\mathbf{T}} \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_l = 0. \tag{10.67}$$

Wegen (10.64) gilt dann auch

$$(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{x}}_l)_{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{x}}_k^{\mathbf{T}} \mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}_l = 0. \tag{10.68}$$

Eigenvektoren $\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{x}}_l$ zu unterschiedlichen Eigenwerten $\lambda_k = \lambda_k^2, \lambda_l = \lambda_l^2$, also $\lambda_k \neq \lambda_l$, sind im Sinne des Skalarprodukts (10.62)₁ orthogonal.

Hinweis 5: Nur für den Fall, dass $\mathbf{M}$ proportional zur Einheitsmatrix ist, stimmt diese Orthogonalität mit jener der Vektorrechnung überein.

10.4.3 Eigenschwingungen des Lagerbocks

Für die Bewegungsgleichung (10.36)

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_L \\ \ddot{y}_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (10.69)$$

folgt die charakteristische Gleichung zu

$$\lambda^4 + \lambda^2 \frac{k_{11} + k_{22}}{m} + \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}{m^2} = 0 \quad (10.70)$$

mit den Lösungen

$$\omega_k^2 = \frac{1}{2m} \left\{ (k_{11} + k_{22}) \pm \sqrt{(k_{11} - k_{22})^2 + 4k_{12}k_{21}} \right\}. \quad (10.71)$$

Um interpretierbare Ergebnisse zu erhalten, muss man in die k_{il} -Gleichungen (10.15) Zahlenwerte für die Längen oder Längenverhältnisse einsetzen. Wir wählen für den Lagerbock (vgl. Bild 10-2)

$$l_1 = l/3, \quad l_2 = 2l/3, \quad h_1 = l/4. \quad (10.72)$$

Bezieht man die k_{il} auf

$$k_R := 27 \frac{EI}{l^3}, \quad \text{setzt also } k_{il} =: k_R \tilde{k}_{il}; \quad (10.73)$$

so folgen

$$\tilde{k}_{11} = 8, \quad \tilde{k}_{12} = 3, \quad \tilde{k}_{21} = 3, \quad \tilde{k}_{22} = 27/8, \quad (10.74)$$

und aus (10.71)

$$\omega_k^2 = \frac{k_R}{2m} \left\{ \tilde{k}_{11} + \tilde{k}_{22} \pm \sqrt{(\tilde{k}_{11} - \tilde{k}_{22})^2 + 4\tilde{k}_{12}\tilde{k}_{21}} \right\}. \quad (10.75)$$

Mit

$$\omega_R := \sqrt{k_R/m} \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}_k := \omega_k / \omega_R \quad (10.76)$$

liefert (10.75)

$$\tilde{\omega}_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{91}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{37}{8}\right)^2 + 36} \right\}, \quad (10.77)$$

gerundet

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{1}{4} \sqrt{91 - \sqrt{3673}} \approx 1.37828, \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{1}{4} \sqrt{91 + \sqrt{3673}} \approx 3.07820. \quad (10.78)$$

Die Eigenvektoren $\hat{x}_k$ gemäß (10.59) lauten bezogen

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{pmatrix} \hat{x}_L \\ \hat{y}_L \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} -\tilde{k}_{12} + \tilde{\omega}_k^2 \\ \tilde{k}_{11} - \tilde{\omega}_k^2 \end{pmatrix}. \quad (10.79)$$

Man erhält die numerischen Werte

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ (37 + \sqrt{3673})/16 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3 \\ 6.10033 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ (37 - \sqrt{3673})/16 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3 \\ -1.47533 \end{pmatrix}. \quad (10.80)$$

10.4.3.1 Normierung der Eigenvektoren

Meistens wird man die Eigenvektoren $\hat{\mathbf{x}}_k$ irgendwie *normieren*, sie mit irgendwelchen Zahlen multiplizieren, damit sie besser aussehen, leichter zu interpretieren sind oder eine passende physikalische Deutung gestatten. (Gemäß Hinweis 4 in Abschnitt 10.4.2 sind solche Multiplikationen erlaubt.) Hier einige Beispiele:

a) Erstes Element ($\hat{x}_L$) positiv:

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6.10033 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.47533 \end{pmatrix}, \quad (10.81)$$

b) Erstes Element ($\hat{x}_L$) gleich 1:

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2.03344 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.49177 \end{pmatrix}, \quad (10.82)$$

c) Dem Betrage nach größtes Element gleich 1:

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} -0.491776 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.49177 \end{pmatrix}, \quad (10.83)$$

d) Dem Betrage nach größtes Element positiv und $\hat{x}_{Lk}^2 + \hat{y}_{Lk}^2 = 1$:

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} -0.441300 \\ 0.897359 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0.897359 \\ 0.441300 \end{pmatrix}. \quad (10.84)$$

c) Standard für allgemeine Untersuchungen ist die Norm gemäß dem Skalarprodukt (10.62):

$$(\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{x}}_k)_M = \hat{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_k = 1. \quad (10.85)$$

Hinweis 1: In unserem Beispiel ist $\mathbf{M}$ proportional zur Einheitsmatrix, vgl. (10.37). Gemäß Hinweis 5 in Abschnitt "Orthogonalität der Eigenschwingungen" sind deshalb die Eigenvektoren $\hat{\mathbf{x}}_1$ und $\hat{\mathbf{x}}_2$ im üblichen Sinne orthogonal, vgl. Bild 10-8.

10.4.3.2 Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (10.38) lautet, vgl. (10.61),

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_L(t) \\ y_L(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^2 \left(c_k e^{j\omega_k t} + c_{-k} e^{-j\omega_k t} \right) \hat{\mathbf{x}}_k. \quad (10.86)$$

Analog zu Abschnitt 5.3.1 schreibt man diese Lösung vollständig reell:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{k=1}^2 (a_{ck} \cos \omega_k t + a_{sk} \sin \omega_k t) \hat{\mathbf{x}}_k \\ &= \begin{pmatrix} -0.441300 \\ 0.897359 \end{pmatrix} (a_{c1} \cos \omega_1 t + a_{s1} \sin \omega_1 t) + \begin{pmatrix} 0.897359 \\ 0.441300 \end{pmatrix} (a_{c2} \cos \omega_2 t + a_{s2} \sin \omega_2 t). \end{aligned} \quad (10.87)$$

Dies ist die reelle Form der Eigenschwingungen.

10.4.3.3 Anpassen an Anfangsbedingungen

Seien für $t = 0$ die folgenden Anfangsbedingungen gegeben:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{L0} \\ y_{L0} \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} \dot{x}_{L0} \\ \dot{y}_{L0} \end{pmatrix}. \quad (10.88)$$

Mit (10.79) erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \hat{\mathbf{x}}_1 a_{c1} + \hat{\mathbf{x}}_2 a_{c2}, \\ \mathbf{v}_0 &= \omega_1 \hat{\mathbf{x}}_1 a_{s1} + \omega_2 \hat{\mathbf{x}}_2 a_{s2}. \end{aligned} \quad (10.89)$$

Ausgeschrieben sind dies je zwei Bestimmungsgleichungen für (a_{c1}, a_{c2}) bzw. (a_{s1}, a_{s2}) .

10.4.3.4 Ausdeuten der Schwingungen

Bei geeigneten Anfangsbedingungen schwingt das System mit $a_{c2} = 0, a_{s2} = 0$ gemäß

$$\mathbf{x}_1(t) = \hat{\mathbf{x}}_1 (a_{c1} \cos \omega_1 t + a_{s1} \sin \omega_1 t) = \begin{pmatrix} -0.441300 \\ 0.897359 \end{pmatrix} (a_{c1} \cos \omega_1 t + a_{s1} \sin \omega_1 t). \quad (10.90)$$

Dies ist die erste Eigenschwingung. Das System schwingt *in* (oder *mit*) der Form $\hat{\mathbf{x}}_1$ und der Frequenz ω_1 *rein sinusförmig*.

Wählt man die Anfangsbedingungen so, dass $a_{c1} = 0, a_{s1} = 0$, schwingt das System gemäß

$$\mathbf{x}_2(t) = \hat{\mathbf{x}}_2 (a_{c2} \cos \omega_2 t + a_{s2} \sin \omega_2 t) = \begin{pmatrix} 0.897359 \\ 0.441300 \end{pmatrix} (a_{c2} \cos \omega_2 t + a_{s2} \sin \omega_2 t) \quad (10.91)$$

rein sinusförmig.

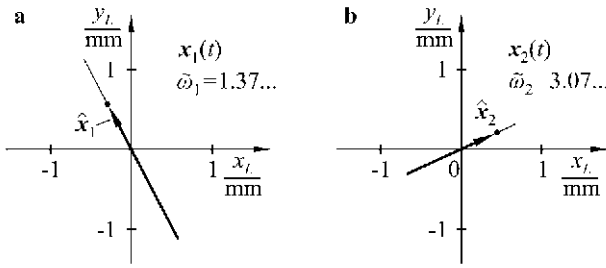


Bild 10-8

Am Lager beobachtete Eigenschwingungen. a $x_1(t)$, b $x_2(t)$

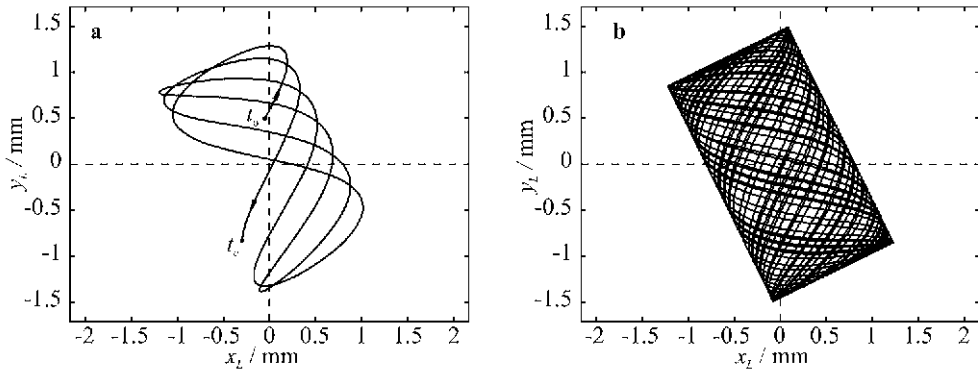


Bild 10-9

Am Lager beobachtete freie Schwingungen des Lagerbocks (Lissajous-Figuren). a kurzzeitig, b langfristig

Bild 10-8 verdeutlicht diese Schwingungen am Lagerbock. Gewählt wurden dort

- a) $a_{c1} = 0.5 \text{ mm}$, $a_{s1} = 1.2 \text{ mm}$, $a_{c2} = 0$, $a_{s2} = 0$
- b) $a_{c1} = 0$, $a_{s1} = 0$, $a_{c2} = 0.2 \text{ mm}$, $a_{s2} = 0.7 \text{ mm}$

Die Bilder machen deutlich, dass die Eigenschwingungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ senkrecht aufeinander stehen, denn es gilt

$$\hat{x}_1^T \mathbf{M} \hat{x}_2 = m \hat{x}_1^T \mathbf{I} \hat{x}_2 = m \hat{x}_1^T \hat{x}_2 = 0. \quad (10.92)$$

Addiert man die beiden Lösungen $x_1(t)$, $x_2(t)$, wie sie in Bild 10-9 aufgezeichnet sind, setzt man in (10.87) also $a_{c1} = 0.5 \text{ mm}$, $a_{s1} = 1.2 \text{ mm}$, $a_{c2} = 0.2 \text{ mm}$, $a_{s2} = 0.7 \text{ mm}$, so erhält man für $0 = \omega_R t_0 \leq \omega_R t \leq \omega_R t_e = 11.5$ für $(x_L(t), y_L(t))$ den in Bild 10-9a gezeigten Verlauf. Man nennt ein solches Bild *Lissajous-Figur*. Im allgemeinen Fall – wie hier – ist die Gesamtbewegung unperiodisch. Lässt man den Schwinger *länger laufen*, wird das durch $\pm \sqrt{a_{c1}^2 + a_{s1}^2} \hat{x}_1$ und $\pm \sqrt{a_{c2}^2 + a_{s2}^2} \hat{x}_2$ aufgespannte Rechteck allmählich überdeckt, vgl. Bild 10-9b.

Hinweis 2: Bei rationalen Frequenzverhältnissen ω_1/ω_2 wird $\mathbf{x}(t)$ periodisch, die Lissajous-Figuren bilden geschlossene Kurvenzüge.

10.4.4 Der Einfluss von Dämpfung auf die Eigenschwingungen

Wir fügen zu den Bewegungsgleichungen (10.36) ohne besondere Begründung Dämpfungsterme hinzu und untersuchen, wie sie sich auf die Schwingungen auswirken.

10.4.4.1 Bewegungsgleichungen mit Dämpfung

Parallel zu den Kraft-Einflusszahlen k_{il} führt man Dämpfungs-Einflusszahlen b_{il} ein und setzt für die Dämpferkräfte an

$$\begin{pmatrix} F_{xL}^D \\ F_{yL}^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{y}_L \end{pmatrix}, \quad (10.93)$$

vgl. (10.16). Matrixschreibweise:

$$\mathbf{F}_L^D = \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}}_L; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \quad (10.94)$$

Hinweis 1: Damit $\mathbf{F}_L^D$ stets Dämpfungskraft ist (Energie dissipiert) muss $\mathbf{B}$ positiv definit sein, das heißt, für beliebige Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{x}}_L \neq \mathbf{0}$ muss die Leistung

$$P = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}} > 0 \quad (10.95)$$

sein.

Mit Dämpfung lautet die Bewegungsgleichung, vgl. (10.35) bis (10.38),

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_L + \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}}_L + \mathbf{K} \mathbf{x}_L = \mathbf{0}. \quad (10.96)$$

10.4.4.2 Eigenschwingungen

Der Exponentialansatz

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_L = \hat{\mathbf{x}} e^{\lambda t} \quad (10.97)$$

führt hier auf das Eigenwertproblem

$$\left(\mathbf{M} \lambda^2 + \mathbf{B} \lambda + \mathbf{K} \right) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad (10.98)$$

vgl. (10.44). Dazu gehört die charakteristische Gleichung

$$\Delta(\lambda) := \det \left(\mathbf{M} \lambda^2 + \mathbf{B} \lambda + \mathbf{K} \right) \stackrel{!}{=} 0, \quad (10.99)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_{11} \lambda^2 + b_{11} \lambda + k_{11} & m_{12} \lambda^2 + b_{12} \lambda + k_{12} \\ m_{21} \lambda^2 + b_{21} \lambda + k_{21} & m_{22} \lambda^2 + b_{22} \lambda + k_{22} \end{vmatrix}, \quad (10.100)$$

vgl. (10.46) bis (10.48). Multipliziert man (10.100) aus, erhält man die charakteristische Gleichung in der Form

$$a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (10.101)$$

mit

$$\begin{aligned} a_0 &= \det \mathbf{K} = k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21}, \\ a_1 &= b_{11} k_{22} - b_{12} k_{21} - b_{21} k_{12} + b_{22} k_{11}, \\ a_2 &= (k_{11} m_{22} - k_{12} m_{21} - k_{21} m_{12} + k_{22} m_{11}) + (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}), \\ a_3 &= b_{11} m_{22} - b_{12} m_{21} - b_{21} m_{12} + b_{22} m_{11}, \\ a_4 &= \det \mathbf{M} = m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}. \end{aligned} \quad (10.102)$$

Hinweise (vgl. auch Lagerbock-Ergebnisse in Abschnitt 10.4.3)

Die charakteristische Gleichung (10.101) lässt sich im allgemeinen nur numerisch lösen. (Für 2 Gleichungen, also ein System 4. Ordnung gibt es zwar noch Formeln, doch sind die numerischen Verfahren meistens effektiver.)

Die Eigenwerte λ_k sind meistens komplex, vgl. Abschnitt 5.3.2, bei sehr großen Dämpfungskoeffizienten b_{kl} treten auch reelle λ_k auf.

Da in (10.101) alle Koeffizienten der λ -Potenzen reell sind, ist mit $\lambda = \lambda_k$ komplex auch die komplex konjugierte Zahl $\bar{\lambda}_k$ Lösung (*Wurzel, Eigenwert*) der Aufgabe. Die Eigenwerte treten also paarig komplex konjugiert auf: $\lambda_k = \bar{\lambda}_k$, und/oder reell: λ_k . Da die Gesamtzahl gerade ist, gibt es ggf. also auch eine gerade Anzahl reeller Eigenwerte.

Zum Eigenwert λ_k berechnet man den Eigenvektor $\hat{x}_k$ entsprechend dem Vorgehen in Abschnitt 10.4.2 (vgl. (10.57) usw.). Zu einem komplexen Eigenwert λ_k gehört im allgemeinen ein komplexer Eigenvektor $\hat{x}_k$ (zu $\bar{\lambda}_k$ gehört dann $\bar{\hat{x}}_k$).

Zur Eigenlösung $(\lambda_k, \hat{x}_k)$ schreibt man die Eigenschwingung

$$\mathbf{x}_k(t) = c_k \hat{x}_k e^{\lambda_k t} \quad (10.103)$$

an, vgl. (10.60).

Die allgemeine Lösung von (10.96) lautet

$$\mathbf{x}(t) = \sum_k \mathbf{x}_k(t) = \sum_k c_k \hat{x}_k e^{\lambda_k t}. \quad (10.104)$$

10.4.5 Schwach gedämpfte Eigenschwingungen des Lagerbocks

10.4.5.1 Untersuchung mit Hilfe von Störungsrechnung

Oft kennt man die ungedämpften Eigenschwingungen, die Eigenlösungen $(\omega_k, \mathbf{x}_k)$ eines Systems und will die Wirkung einer schwachen Dämpfung abschätzen. Dann bietet sich eine

Störungsrechnung an. Das Klein-Sein der Dämpfung kennzeichnen wir in (10.96) durch den kleinen Faktor ε vor dem Dämpfungsglied:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (10.105)$$

Beim Exponentialansatz (10.97) hängen dann $\hat{\mathbf{x}}$ und λ von ε ab. Wir fragen konkret, wie die ungedämpfte Eigenlösung $(\omega_k, \mathbf{x}_k)$ gestört wird und setzen im Sinne einer Taylorreihe mit Gliedern ε^0 und ε^1 an:

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \hat{\mathbf{x}}(\varepsilon) e^{j\lambda(\varepsilon)t} = \left[\mathbf{x}_k + \varepsilon \sum_l a_l \mathbf{x}_l + \varepsilon^2 \dots \right] \exp(j\omega_k t + \varepsilon \Delta\lambda t + \varepsilon^2 \dots). \quad (10.106)$$

Dabei darf in der eckigen Klammer der Faktor bei $\mathbf{x}_k$ gleich 1 gesetzt werden, denn Gleichung (10.105) ist homogen. Ferner erfasst $\mathbf{x}_k$ gemeinsam mit den in der Summe stehenden anderen Eigenvektoren $\mathbf{x}_l, l \neq k$, alle Bewegungsmöglichkeiten des Systems. Im Exponenten bedeutet $\varepsilon \Delta\lambda$ die mit ε lineare Änderung des Eigenwerts. Dabei kann $\Delta\lambda$ ebenso wie die a_l reell oder komplex sein.

Mit $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ und $\ddot{\mathbf{x}}$ gemäß (10.106) folgt aus (10.105)

$$\begin{aligned} & \left[(-\omega_k^2 + 2\varepsilon j\omega_k \Delta\lambda + \varepsilon^2 \dots) \mathbf{M} + \varepsilon (j\omega_k + \varepsilon \Delta\lambda + \varepsilon^2 \dots) \mathbf{B} + \mathbf{K} \right] \cdot \\ & \left(\hat{\mathbf{x}}_k + \varepsilon \sum_l a_l \hat{\mathbf{x}}_l + \varepsilon^2 \dots \right) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (10.107)$$

Subtrahiert man $\left[-\omega_k^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \right] \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, vgl. (10.43), (10.54), verbleibt bis auf Glieder ε^2 usw.

$$\varepsilon \left[\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M} \right] \sum_l a_l \hat{\mathbf{x}}_l + \varepsilon j\omega_k [2\Delta\lambda \mathbf{M} + \mathbf{B}] \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{0}. \quad (10.108)$$

Multiplikation von links mit $\hat{\mathbf{x}}_k^T$ liefert bei Orthogonalität, vgl. Abschnitt 10.4.2.4,

$$2\Delta\lambda \hat{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_k + \hat{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{B} \hat{\mathbf{x}}_k = 0,$$

also

$$\Delta\lambda = -\frac{1}{2} \frac{\hat{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{B} \hat{\mathbf{x}}_k}{\hat{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_k}. \quad (10.109)$$

(Durch Multiplikation mit $\hat{\mathbf{x}}_l^T$ kann man die Koeffizienten a_l gewinnen. Aufgabe 10-22.)

10.4.5.2 Zahlenbeispiel für den Lagerbock

Im Anschluss an Abschnitt 10.4.3 schreiben wir (10.105) wie folgt an

$$m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_L + b \begin{pmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_L + k_R \begin{pmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} \end{pmatrix} \mathbf{x}_L = \mathbf{0}. \quad (10.110)$$

Darin sind die Zahlenwerte von $\mathbf{B}$ willkürlich gewählt, und b ist zunächst ein Dimensionsfaktor. Mit $\tilde{t} = \omega_R t$, vgl. (10.76), folgt aus (10.110) nach Division durch k

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_L + \frac{b}{\sqrt{k_R m}} \begin{pmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_L + \begin{pmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} \end{pmatrix} \mathbf{x}_L = \mathbf{0}. \quad (10.111)$$

Wir wählen $b/\sqrt{k_R m} = 1$.

Die Eigenlösungen $(\tilde{\omega}_k, \hat{\mathbf{x}}_k)$ des ungedämpften Lagerbocks lauten, vgl. (10.78) und (10.84),

$$\begin{aligned} (\omega_1; \hat{\mathbf{x}}_1) &= (1.37828; (-0.441300, 0.897359)^T), \\ (\omega_2; \hat{\mathbf{x}}_2) &= (3.07820; (0.897359, 0.441300)^T). \end{aligned} \quad (10.112)$$

Damit erhält man aus (10.109)

$$\Delta \tilde{\lambda}_1 = -0.0101, \quad \Delta \tilde{\lambda}_2 = -0.0649. \quad (10.113)$$

Mithin lauten die (bezogenen) Eigenwerte

$$\tilde{\lambda}_{1/-1} \approx \pm 1.378j - 0.0101, \quad \tilde{\lambda}_{2/-2} \approx \pm 3.078j - 0.0649. \quad (10.114)$$

Vom praktischen Standpunkt aus ist es wichtig, dass die Realteile der Eigenwerte negativ sind, die Schwingungen also abklingen.

Hinweis 1: Der kleine Faktor ε erscheint in (10.111) – also auch in (10.113), (10.114) – nicht explizit. (Wenn man will, kann man ihn, etwa mit $\varepsilon = 0.1$, einführen und kommt zum selben Ergebnis.)

Hinweis 2: Der Wert der Formel (10.109) liegt NICHT darin, dass man das erneute Lösen des Eigenwertproblems umgeht, sondern in der Möglichkeit, den Einfluss der einzelnen Dämpfungskoeffizienten b_{ij} auf die $\tilde{\lambda}_k$ zu überschauen.

10.5 Erzwungene Schwingungen des Lagerbocks

Am Beispiel der Lagerbockschwingungen vom Freiheitsgrad 2 führen wir in die Untersuchung von erzwungenen harmonischen Schwingungen bei Schwingungssystemen ein.

10.5.1 Experimente: Aufgabe

Wie in der Einleitung zu Abschnitt 10.4 angedeutet, misstraut man den Annahmen, die zu den Steifigkeiten in Abschnitt 10.3 führten. Jetzt will man sie mit Hilfe von erzwungenen Schwingungen, die bei sinusförmiger Anregung auftreten, untersuchen. Zwei Versuchsreihen sollen durchgeführt werden:

Einmal wird am Lager unter einem Winkel α sinusförmig mit veränderlicher Frequenz Ω erregt, Bild 10-10, die Auslenkungen werden gemessen. Zweitens wird mit einer Unwucht erregt, Bild 10-11, die Auslenkungen werden gemessen. Wir berechnen, was man zu erwarten hat.

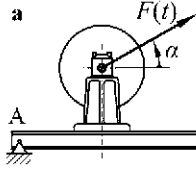


Bild 10-10

Lagerbock mit Kräfteerregung

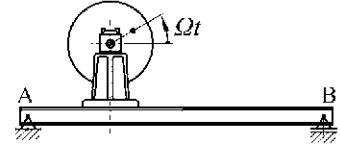
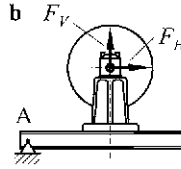


Bild 10-11: Lagerbock mit Unwuchterregung

10.5.2 Bewegungsgleichungen

An dem Lagerbock mit Masse m nach Bild 10-6 greifen nun horizontal und vertikal die zeitabhängigen Kräfte $F_H(t)$ und $F_V(t)$ an, vgl. Bild 10-10b. Im Fall von Bild 10-10a gilt

$$F_H = F(t) \cos \alpha, \quad F_V = F(t) \sin \alpha, \quad \text{mit } F(t) = \hat{F} \cos \Omega t, \quad (10.115)$$

bei der Unwuchterregung nach Bild 10-11 gilt

$$F_H = m r_u \Omega^2 \cos \Omega t, \quad F_V = m r_u \Omega^2 \sin \Omega t, \quad (10.116)$$

vgl. Abschnitt 9.3. (In (10.116) haben wir angenommen, dass die Exzentrizität r_u auf die Gesamtmasse m bezogen wurde.)

Die Erregerkräfte $F_H(t)$ und $F_V(t)$ treten auf die rechte Seite der Bewegungsgleichungen (10.36) oder (10.38) – im Fall fehlender Dämpfung – bzw. (10.96) – bei vorhandener Dämpfung. Wir schreiben

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_l + \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}}_l + \mathbf{K} \mathbf{x}_l = \mathbf{F}_e(t), \quad (10.117)$$

wobei die Erregerkräfte $F_H(t)$, $F_V(t)$ in der Spaltenmatrix

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_e(t) = (F_H, F_V)^T \quad (10.118)$$

zusammengefasst sind.

Für den Lagerbock stehen in (10.117) die Massenmatrix $\mathbf{M}$ nach (10.37), die Dämpfungsmatrix $\mathbf{B}$ nach (10.94) und die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ nach (10.16) oder auch die Summe in (10.31).

Bei einem System vom Freiheitsgrad n sind $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{K}$ voll besetzte $n \times n$ -Matrizen und $\mathbf{x}$, $\mathbf{F}_e$ $n \times 1$ -Spaltenmatrizen (Spaltenvektoren).

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{F}_e(t) \quad (10.119)$$

Die Gleichung (10.119) gilt für beliebige Zeitverläufe $\mathbf{F}_e(t)$, wir werten sie jedoch nur für harmonische Schwingungen aus.

10.5.3 Erzwungene Schwingungen

Wir nehmen für $F_e(t)$ eine harmonische Erregung mit der Frequenz Ω an und schreiben komplex

$$\underline{F}_e(t) = \hat{\underline{F}}_e e^{j\Omega t}. \quad (10.120)$$

Die Dgl (10.119) lautet dann

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{B} \dot{\underline{x}} + \underline{K} \underline{x} = \hat{\underline{F}}_e e^{j\Omega t}. \quad (10.121)$$

Der Ansatz vom Typ der rechten Seite lautet

$$\underline{x} = \hat{\underline{x}} e^{j\Omega t} \quad (10.122)$$

und liefert

$$\left(\underline{K} - \underline{M} \Omega^2 + j \Omega \underline{B} \right) \hat{\underline{x}} = \hat{\underline{F}}_e. \quad (10.123)$$

10.5.3.1 Dynamische Steifigkeit

Man kann die Amplituden $\hat{\underline{F}}_e$ und $\hat{\underline{x}}$ als Kräfte bzw. Auslenkungen auffassen und (10.123) parallel zu (10.13)₂ lesen:

$$\hat{\underline{F}}_e = \left(\underline{K} - \underline{M} \Omega^2 + j \Omega \underline{B} \right) \hat{\underline{x}} =: \underline{\underline{K}}(j\Omega) \hat{\underline{x}}. \quad (10.124)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}(j\Omega) &:= \left(\underline{K} - \underline{M} \Omega^2 + j \Omega \underline{B} \right) \\ &= \begin{pmatrix} k_{11} - m_{11} \Omega^2 + j \Omega b_{11} & k_{12} - m_{12} \Omega^2 + j \Omega b_{12} \\ k_{21} - m_{21} \Omega^2 + j \Omega b_{21} & k_{22} - m_{22} \Omega^2 + j \Omega b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.125)$$

eine (komplexe) *dynamische Steifigkeit*, die für $\Omega = 0$ in die normale Steifigkeit übergeht:

$$\underline{\underline{K}}(0) = \underline{K}. \quad (10.126)$$

Zahlenbeispiel für den Lagerbock: In der entsprechend (10.111) bezogenen Form erhalten wir für $\underline{\underline{K}}(j\tilde{\Omega}) = \underline{\underline{K}}(j\tilde{\Omega})/k$ den Ausdruck

$$\underline{\underline{K}}(j\tilde{\Omega}) = \begin{pmatrix} \tilde{k}_{11} - \tilde{\Omega}^2 + j \tilde{b}_{11} \tilde{\Omega} & \tilde{k}_{12} + j \tilde{b}_{12} \tilde{\Omega} \\ \tilde{k}_{21} + j \tilde{b}_{21} \tilde{\Omega} & \tilde{k}_{22} - \tilde{\Omega}^2 + j \tilde{b}_{22} \tilde{\Omega} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \tilde{\underline{k}}_{11}(j\tilde{\Omega}) & \tilde{\underline{k}}_{12}(j\tilde{\Omega}) \\ \tilde{\underline{k}}_{21}(j\tilde{\Omega}) & \tilde{\underline{k}}_{22}(j\tilde{\Omega}) \end{pmatrix}. \quad (10.127)$$

Mit

$$\tilde{\underline{K}} = \begin{pmatrix} 8.0 & 3.0 \\ 3.0 & 3.375 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.08 \\ 0.08 & 0.1 \end{pmatrix} \quad (10.128)$$

erhält man für die $\tilde{k}_{il}(j\tilde{\Omega})$ die in Bild 10-12 gezeigten *Frequenzgänge* in Form von *Ortskurven*.

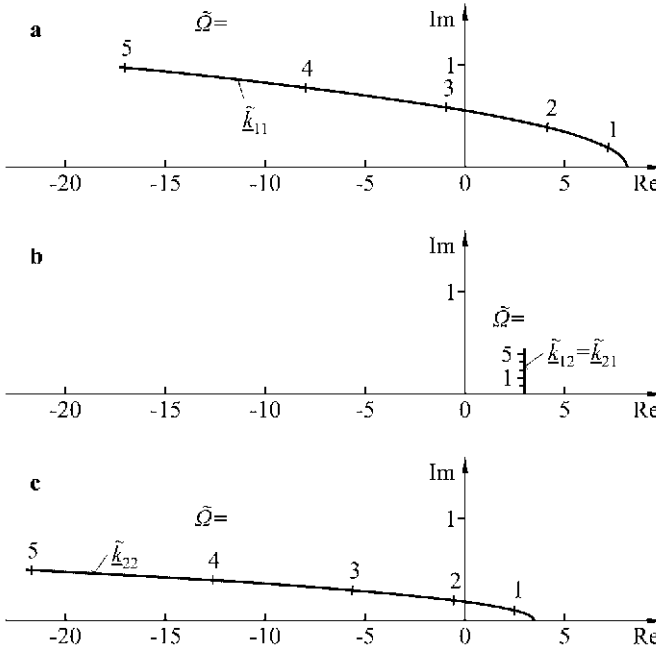


Bild 10-12
Frequenzgänge der dynamischen Steifigkeiten

In dieser Darstellung werden die Phasenbeziehungen zwischen $\hat{\underline{x}}$ und $\hat{\underline{F}}_e$ nach (10.124) besonders deutlich. Schreibt man die $\tilde{k}_{il}$ in Polarform,

$$\tilde{k}_{il} = |\tilde{k}_{il}| e^{j\psi_{il}}, \quad (10.129)$$

so erhält man die Kurven nach Bild 10-13.

10.5.3.2 Dynamische Nachgiebigkeit, Frequenzgang, Übertragungsfunktion

Löst man $\hat{\underline{F}}_e = \underline{\mathbf{K}}(j\Omega)\hat{\underline{x}}$, vgl. (10.124), nach $\hat{\underline{x}}$ auf, erhält man

$$\hat{\underline{x}} = \underline{\mathbf{K}}^{-1}(j\Omega)\hat{\underline{F}}_e = \left(\underline{\mathbf{K}} - \Omega^2 \underline{\mathbf{M}} + j\Omega \underline{\mathbf{B}} \right)^{-1} \hat{\underline{F}}_e. \quad (10.130)$$

Man setzt

$$\underline{\mathbf{H}}(j\Omega) := \left(\underline{\mathbf{K}} - \Omega^2 \underline{\mathbf{M}} + j\Omega \underline{\mathbf{B}} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} H_{11}(j\Omega) & H_{12}(j\Omega) \\ H_{21}(j\Omega) & H_{22}(j\Omega) \end{pmatrix} \quad (10.131)$$

und nennt $\underline{\mathbf{H}}(j\Omega)$ *dynamische Nachgiebigkeit*, öfter jedoch *Frequenzgang*(-Matrix):

$$\hat{\underline{x}} = \underline{\mathbf{H}}(j\Omega)\hat{\underline{F}}_e. \quad (10.132)$$

Parallel zu Bild 6-3 kann man ein Blockbild (Bild 10-14) zeichnen, welches die Zeitfunktion

$$\hat{\underline{x}} e^{j\Omega t} = \underline{H}(j\Omega) \hat{\underline{F}}_e e^{j\Omega t}. \quad (10.133)$$

überträgt.

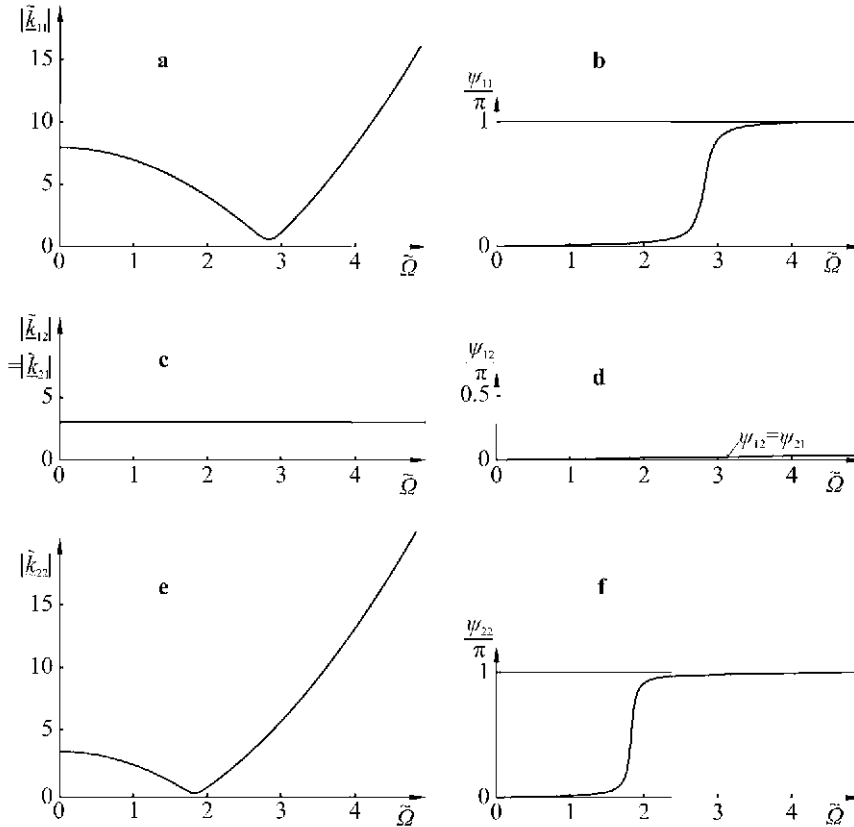


Bild 10-13: Polarform der dynamischen Steifigkeiten

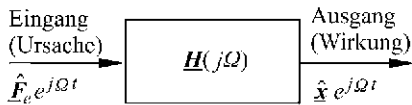


Bild 10-14
Blockbild mit Übertragung einer Zeitfunktion

Hinweis 1: Arbeitet man mit der Laplace-Transformation statt mit dem $e^{j\Omega t}$ -Ansatz, nennt man die zu (10.133) analoge Gleichung – dann mit s statt $j\Omega$ geschrieben – *Übertragungsgleichung* und $\sigma(s)$ *Übertragungsfunktion*. Dieser Name beschreibt die Beziehung (10.132), oder auch (10.133) besser als der Name *Frequenzgang*.

10.5.3.3 Diskussion der Frequenzgänge am Beispiel

Aus (10.125) berechnet man gemäß (10.131)

$$\begin{aligned}\underline{H}(j\Omega) &= \begin{pmatrix} k_{11} - m_{11}\Omega^2 + j\Omega b_{11} & k_{12} - m_{12}\Omega^2 + j\Omega b_{12} \\ k_{21} - m_{21}\Omega^2 + j\Omega b_{21} & k_{22} - m_{22}\Omega^2 + j\Omega b_{22} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} k_{22} - m_{22}\Omega^2 + j\Omega b_{22} & -(k_{21} - m_{21}\Omega^2 + j\Omega b_{21}) \\ -(k_{12} - m_{12}\Omega^2 + j\Omega b_{12}) & k_{11} - m_{11}\Omega^2 + j\Omega b_{11} \end{pmatrix} \\ &=: \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (10.134)$$

Dabei steht Δ für die Koeffizientendeterminante

$$\begin{aligned}\Delta &= \det(\underline{K} - \Omega^2 \underline{M} + j\Omega \underline{B}) = \Delta(j\Omega) \\ &= (k_{11} - m_{11}\Omega^2 + j\Omega b_{11}) \cdot (k_{22} - m_{22}\Omega^2 + j\Omega b_{22}) \\ &\quad - (k_{12} - m_{12}\Omega^2 + j\Omega b_{12}) \cdot (k_{21} - m_{21}\Omega^2 + j\Omega b_{21}),\end{aligned}\quad (10.135)$$

vgl. auch (10.99).

Mit den Zahlenwerten aus (10.127), (10.128) erhält man

$$\underline{H}(j\tilde{\Omega}) = \begin{pmatrix} \tilde{k}_{11} - \tilde{m}\tilde{\Omega}^2 + j\tilde{\Omega}\tilde{b}_{11} & \tilde{k}_{12} - j\tilde{\Omega}^2\tilde{b}_{12} \\ \tilde{k}_{21} - j\tilde{\Omega} + j\tilde{\Omega}\tilde{b}_{12} & \tilde{k}_{11} - \tilde{m}\tilde{\Omega}^2 + j\tilde{\Omega}\tilde{b}_{22} \end{pmatrix}^{-1}\quad (10.136)$$

die folgenden Darstellungen.

Bild 10-15 zeigt die Elemente $\tilde{H}_{ik}(j\tilde{\Omega})$ der Übertragungsmatrix für $0 \leq \tilde{\Omega} \leq 5$ als Ortskurven, zum Teil in vergrößerten Ausschnitten.

Bild 10-16 zeigt $|\tilde{H}_{ik}(j\tilde{\Omega})|$ und die Winkel $\varphi_{ik}(\tilde{\Omega})$ für die Polardarstellung

$$\tilde{H}_{ik}(j\tilde{\Omega}) = |\tilde{H}_{ik}| e^{j\varphi_{ik}(\tilde{\Omega})}.\quad (10.137)$$

Man erkennt unmittelbar:

Wenn $\tilde{\Omega}$ – die Erregerfrequenz – in der Nähe einer der Eigenfrequenzen liegt ($\tilde{\omega}_1 = 1.378$, $\tilde{\omega}_2 = 3.078$, vgl. (10.78)), nehmen die $|\tilde{H}_{ik}|$ Extremwerte an.

Bei $\tilde{\Omega} \approx \tilde{\omega}_1$ schwingt der Lagerbock – vergleiche jeweils $\tilde{H}_{11}$ mit $\tilde{H}_{12}$ und $\tilde{H}_{12}$ mit $\tilde{H}_{22}$ so, dass sich die Ausschläge etwa wie $|-0.47| : (0.89)$ verhalten, vgl. (10.84), für die Pha-

senwinkel gilt $|\varphi_{11}(\tilde{\omega}_1) - \varphi_{12}(\tilde{\omega}_1)| \approx |\varphi_{12}(\tilde{\omega}_1) - \varphi_{22}(\tilde{\omega}_1)| \approx \pi$. Man kann sagen, bei $\tilde{\Omega} \approx \tilde{\omega}_1$ schwingt das System im Wesentlichen in Richtung des Eigenvektors $\hat{x}_1$.

Entsprechendes gilt für $\tilde{\Omega} \approx \tilde{\omega}_2$ und $\hat{x}_2$. Allerdings wirkt sich bei $\tilde{\Omega} \approx \tilde{\omega}_2$ die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung auch stärker aus als bei $\tilde{\omega}_1$. Deshalb wird die *Resonanzstelle* bei $\tilde{\Omega} \approx \tilde{\omega}_2$ in Bild 10-16b und c nur wenig deutlich.

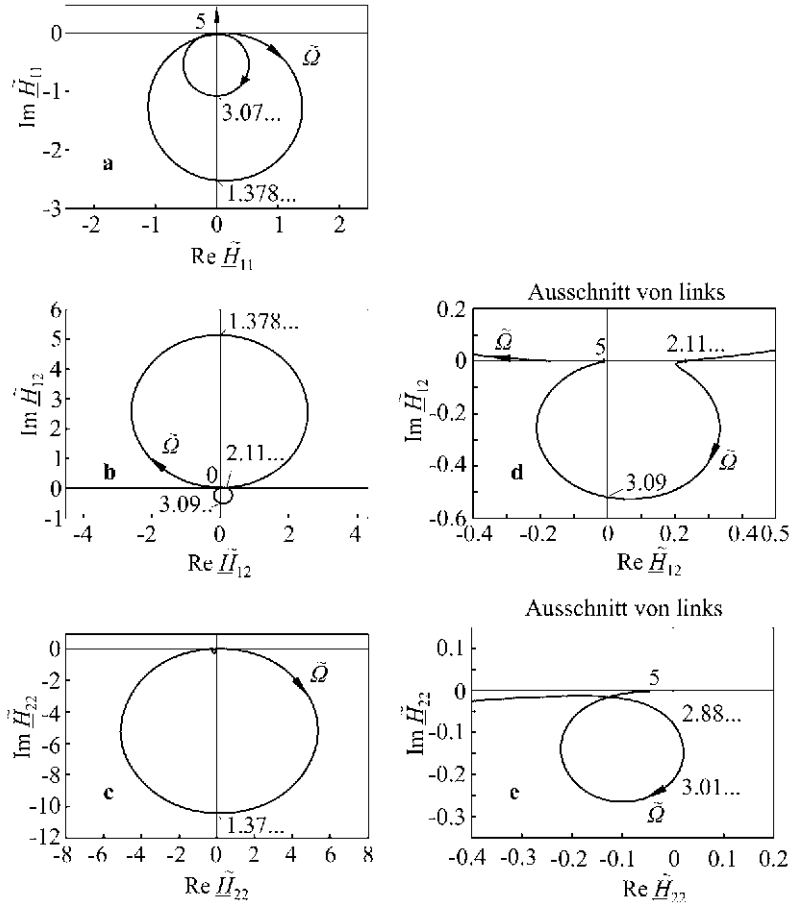


Bild 10-15: Ortskurven der Elemente $\tilde{H}_{ik}(j\tilde{\Omega})$ der Übertragungsmatrix für $0 < \tilde{\Omega} < 5$

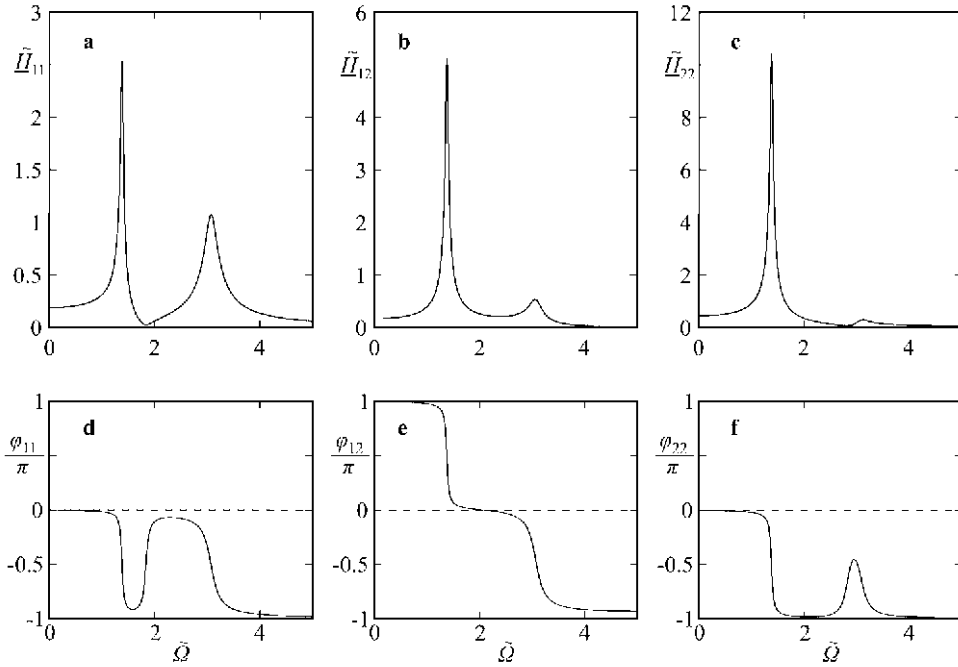


Bild 10-16: Polarform der Elemente $\tilde{U}_{lk}(j\tilde{\Omega})$ der Übertragungsmatrix für $0 \leq \tilde{\Omega} \leq 5$

10.5.3.4 Resonanzkurven für Sinusanregung

Bei der Sinusanregung nach Bild 10-10 gilt für F_e und $\hat{F}_e$ nach (10.118), (10.120)

$$F_e = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \hat{F} \cos \Omega t, \quad \hat{F}_e = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \hat{F}. \quad (10.138)$$

Man erhält aus (10.132)

$$\hat{\underline{x}} = \underline{H}(j\tilde{\Omega}) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \hat{F}, \quad (10.139)$$

dimensionslos (bezogen), k_R vgl. (10.73),

$$\tilde{\hat{\underline{x}}} := \begin{pmatrix} \tilde{\hat{x}}_1 \\ \tilde{\hat{x}}_2 \end{pmatrix} := \frac{\hat{\underline{x}}}{\hat{F}/k_R} = \underline{H}(j\tilde{\Omega}) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (10.140)$$

Im folgenden *Zahlenbeispiel* setzen wir wieder die Zahlen von oben ein, vgl. (10.127) usw., und wählen $\alpha = 30^\circ$. Bild 10-17 zeigt für

$$\hat{\tilde{x}}_i = \left| \tilde{\hat{x}}_i \right| e^{j\varphi_i} \quad (10.141)$$

die Amplituden $|\hat{\underline{x}}_i|$ und die Phasen-(verschiebungs-)winkel φ_i als Funktionen von $\tilde{\Omega}$.

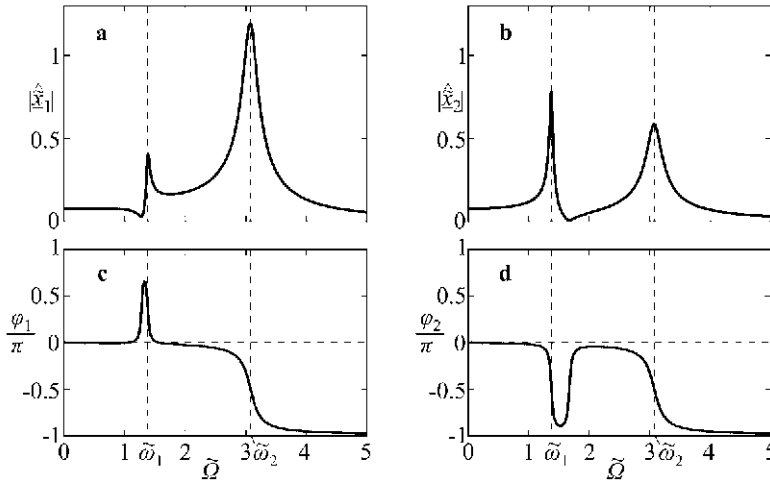


Bild 10-17

Frequenzgänge der Amplituden $|\hat{\underline{x}}_i|$ und Phasenwinkel φ_i bei Erregung unter dem Winkel $\alpha = 30^\circ$

10.5.3.5 Resonanzkurven für Unwuchterregung

Bei der Unwuchterregung nach Bild 10-11 gilt für $\underline{F}_e$ nach (10.116), (10.118), (10.120)

$$\underline{F}_e = r_u m \Omega^2 \begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{pmatrix}, \text{ also } \hat{\underline{F}}_e = r_u m \Omega^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}. \quad (10.142)$$

Damit folgt aus (10.132) mit $\tilde{\Omega} = \Omega/\omega_R$, $\omega_R^2 = k/m$

$$\hat{\underline{x}} = r_u m \Omega^2 \underline{H}(j\Omega) \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} = r_u m \Omega^2 \frac{1}{k_R} \tilde{\underline{H}}(j\tilde{\Omega}) \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} = r_u \tilde{\Omega}^2 \tilde{\underline{H}}(j\tilde{\Omega}) \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}, \quad (10.143)$$

und

$$\hat{\underline{x}} := \hat{\underline{x}}/r_u = \tilde{\Omega}^2 \tilde{\underline{H}}(j\tilde{\Omega}) \begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}. \quad (10.144)$$

Bild 10-18a und b zeigen die Frequenzgänge $\hat{\underline{x}}_1$ und $\hat{\underline{x}}_2$, Bild 10-18c zeigt die Phasenverschiebungswinkel $\varphi_i(\tilde{\Omega})$ gemäß

$$\hat{\underline{x}}_i = |\hat{\underline{x}}_i| e^{j\varphi_i}. \quad (10.145)$$

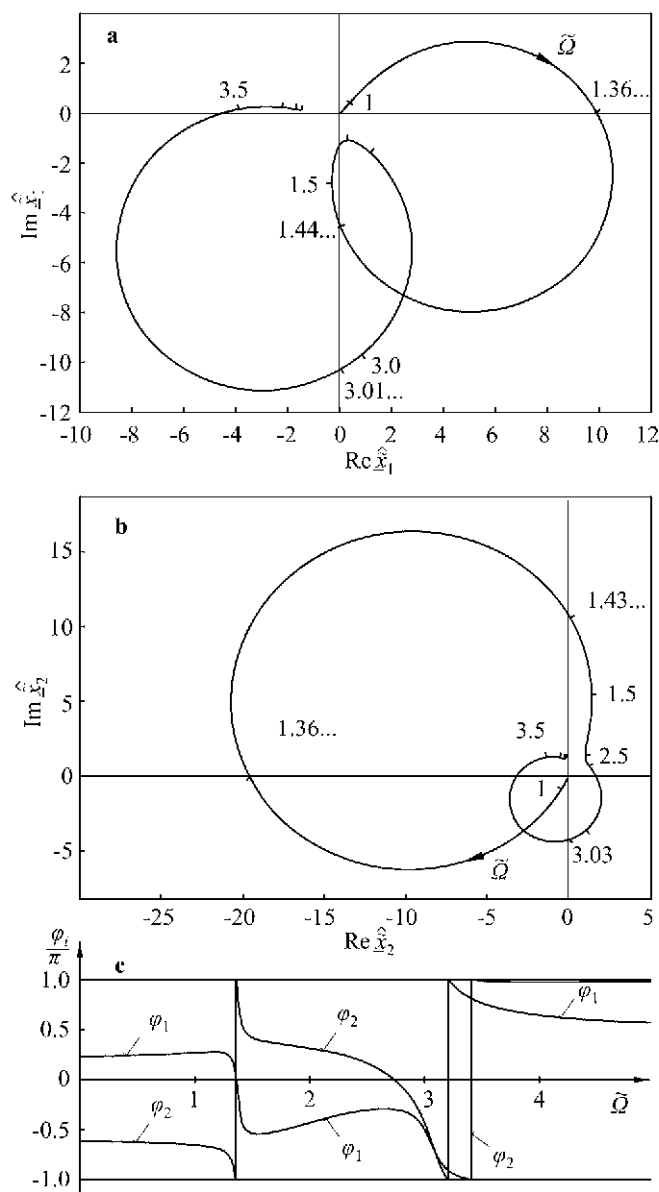


Bild 10-18
Unwuchtanregung. a, b Fre-
quenzgänge, c Phasenver-
schiebungswinkel

10.6 Aufgaben

Aufgabe 10-1: Berechnen Sie die h_{ik} für den Lagerbock nach Bild 10-1 mit Hilfe von Formeln für Balkenbiegung gemäß Abschnitt B.6.1 oder aus einem Tabellenbuch; vgl. (10.8).

Aufgabe 10-2: Wie muss man in (10.8) die Höhe h_1 wählen, damit der Lagerbock horizontal und vertikal gleich nachgiebig ist ($h_{11} = h_{22}$)? Wie nachgiebig ist er dann unter 45° – für eine Kraft $(F_{xL}, F_{yL}) = (1, 1) F_L / \sqrt{2}$?

Aufgabe 10-3: Berechnen Sie die k_{il} für den Lagerbock nach Bild 10-4 mit den Hilfsformeln für Balkenbiegung aus einem Tabellenbuch; vgl. (10.14), (10.15) und Aufgabe 10-1.

Aufgabe 10-4: Wie muss man in (10.23) die Höhe h_1 wählen, damit der Lagerbock horizontal und vertikal gleich steif ist ($k_{11} = k_{22}$)?

Aufgabe 10-5: Weshalb führen die Forderungen "gleich nachgiebig" – Aufgabe 10-2 – und "gleich steif" – Aufgabe 10-4 – nicht auf dasselbe h_1 ?

Aufgabe 10-6: Überlegen Sie sich Messvorschriften für die h_{ik} und die k_{il} . Gehen Sie dabei von (10.9), (10.10), (10.13)₂ bzw. (10.16) aus.

Aufgabe 10-7: Berechnen Sie die Kräfte F_{xS}, F_{yS} in Gleichung (10.27) mit den Mitteln der Grundvorlesung Mechanik (Verlängerung eines Zugstabes, Verschiebungsplan).

Aufgabe 10-8: Versuchen Sie (10.28) mit Nachgiebigkeiten zu schreiben, $\mathbf{x}_L = \mathbf{H}_S \mathbf{F}_S$, vgl. (10.10) und (10.13)₂. Weshalb ist das nicht möglich? Können Sie die Aussage anschaulich begründen?

Aufgabe 10-9: Ohne es besonders erwähnt zu haben, lassen wir bei der Stangenkraft F_S nach (10.20) auch Druck zu (z. B. bei $x_L < 0$ oder $y_L < 0$). Nach (10.34) erhält der Stab eine relativ kleine Querschnittsfläche und wird deshalb bei Druck knicken. (Dann gilt (10.20) nicht mehr!) Was muss man tun, um die Steifigkeiten $\mathbf{K}_S$ gemäß (10.30) auch für $x_L < 0, y_L < 0$ garantieren zu können?

Aufgabe 10-10: Schreiben Sie für $\hat{\mathbf{x}}_1$ entsprechend (10.59) einen Ausdruck mit Hilfe von (10.55)₂ an und zeigen sie, dass sich der von (10.57) nur um einen (skalaren) Faktor unterscheidet.

Aufgabe 10-11: Wie kann man die Definitheitsbedingungen (10.53) physikalisch deuten? Nennen Sie Beispiele für nicht definite (*indefinite*) Systeme.

Aufgabe 10-12: Kontrollieren Sie die Lösungen (10.69).

Aufgabe 10-13: Kontrollieren Sie die Rechnungen (10.70) bis (10.77).

Aufgabe 10-14: Kontrollieren Sie den Eigenvektor $\hat{\mathbf{x}}_k$ gemäß (10.79).

Aufgabe 10-15: Schreiben Sie die Gleichungen (10.89) ausführlich (mit den Zahlenwerten der Eigenvektoren) an und lösen Sie sie für a) $\mathbf{x}_0 = x_0 \hat{\mathbf{x}}_1, \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, b) $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{x}}_2$; (x_0, v_0 Zahlenwerte für Auslenkung und Geschwindigkeit). Welche Dimensionen haben die a_{ck} und a_{sk} ?

Aufgabe 10-16: Berechnen Sie zu den Schwingungen in Bild 10-8 a), b) und Bild 10-9 die Anfangsauslenkungen $\mathbf{x}_0$ und die Anfangsgeschwindigkeiten $\mathbf{v}_0$.

Aufgabe 10-17: Schreiben Sie $\mathbf{x}(t)$ nach (10.87) in der Form $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_1 a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{\mathbf{x}}_2 a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ und berechnen Sie $a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2$ für die Schwingung nach Bild 10-9. (Nehmen Sie dazu ω_R – vgl. (10.76) – als bekannten Zahlenwert an.)

Aufgabe 10-18: Können Sie aus Bild 10-9 eine grobe Näherung für das Frequenzverhältnis ω_1/ω_2 abzählen?

Aufgabe 10-19: Können Sie sich durch einen Blick auf die Steifigkeiten $\tilde{k}_{il}$ in (10.74) plausibel machen, dass zur Eigenschwingung $\mathbf{x}_2$ – in Richtung $\hat{\mathbf{x}}_2$ – eine größere Eigenfrequenz ($\tilde{\omega}_2$) gehört als zur Eigenschwingung $\mathbf{x}_1$ – in Richtung $\hat{\mathbf{x}}_1$ – mit $\tilde{\omega}_1$.

Aufgabe 10-20: Führen Sie (zu den konkreten Zahlen) in Richtung von $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2$ gedrehte Koordinaten y_L^* bzw. x_L^* ein und berechnen Sie die darauf bezogenen Steifigkeiten k_{il}^* .

Aufgabe 10-21: Berechnen Sie numerisch die Eigenwerte λ_k und die Eigenvektoren $\hat{\mathbf{x}}_k$ zum Eigenwertproblem (10.111).

Aufgabe 10-22: Ermitteln Sie aus (10.108) – durch Multiplikation der Gleichung von links mit $\hat{\mathbf{x}}_l^T$ – die Korrekturkoeffizienten a_l für die k -te Eigenschwingung. Setzen Sie die Zahlenwerte aus Abschnitt 10.4.5 in Ihr Ergebnis ein.

Aufgabe 10-23: Schreiben Sie mit den Ergebnissen aus Aufgabe 10-22 für den Lagerbock die Eigenschwingungen $\mathbf{x}_i(t)$ entsprechend (10.103) an.

Aufgabe 10-24: Schreiben Sie für den Lagerbock die allgemeine Lösung (10.104) an.

Bringen Sie die allgemeine Lösung auf eine reelle Schreibweise (vgl. (10.86)/(10.87) und (5.24)/(5.26)).

Aufgabe 10-25: Der Versuch zu Bild 10-11 wurde mit der (großen) Masse m und einem Unwuchterreger der Gesamtmasse m_1 und der Exzentrizität r_1 vorgenommen. Welches m und welches r_u müssen in (10.116) und in die Bewegungsgleichungen eingesetzt werden?

Aufgabe 10-26: Erläutern Sie den Aufbau der Gleichung (10.117) anhand eines Schnittbildes nach Art von Bild 9-5 und Bild 10-7. Welche Dämpfungseinflüsse kann man mit $\mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}$ erfassen, wo greifen die entsprechenden Kräfte im Schnittbild an?

Aufgabe 10-27: Bei einem Schwingungssystem vom Freiheitsgrad 2 sei (vgl. (10.119)) $F_{1e} = \hat{F} \cos \Omega t$, $F_{2e} = \hat{F} (\cos \Omega t - \sin \Omega t)$.

Wie lautet die Erregeramplituden $\hat{\mathbf{F}}_e$ in (10.121)?

Aufgabe 10-28: Der Lagerbock soll so durch eine Kraft $\mathbf{F}(t) = \hat{\mathbf{F}}_e e^{j\Omega t}$ erregt werden, dass er unter $\alpha = 30^\circ$, vgl. Bild 10-10, gemäß $\underline{x}_\alpha = \hat{x} e^{j\Omega t}$ harmonisch ("hin und her") schwingt. Welche (komplexe) Amplitude $\hat{\mathbf{F}}_e$ ist erforderlich? Berechnen Sie $\hat{\mathbf{F}}_e$ für $\tilde{\Omega} = 3$ mit Hilfe

von Gl. (10.124) und den Zahlenwerten (10.127), (10.128). Tragen Sie $F_H(t)$, $F_V(t)$ – reell! – in einem F_H - F_V -Diagramm für $0 \leq \tilde{\Omega} \tilde{t} \leq 2\pi$ auf.

Aufgabe 10-29: Für welchen Wert $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}^*$ ist in Aufgabe 10-28 – für die dort angegebenen Zahlenwerte – die Amplitude $|\hat{F}_H|/\hat{x}$ am kleinsten? (Bei welchem $\tilde{\Omega}$ treten das kleinste $|\hat{F}_H|/\hat{x}$, das kleinste $|\hat{F}_V|/\hat{x}$, das kleinste $\sqrt{|\hat{F}_H|^2 + |\hat{F}_V|^2}/\hat{x}$ und der kleinste Extremwert $F_{\max}/\hat{x}$ auf, wo $F_{\max}/\hat{x} = \max_{0 < \tilde{\Omega} \tilde{t} < 2\pi} \sqrt{F_H^2(\tilde{t}) + F_V^2(\tilde{t})}/\hat{x}$.)

Aufgabe 10-30: Rechnen Sie (10.134), (10.135) nach.

Aufgabe 10-31: Lesen Sie aus Bild 10-16d, e zu $\tilde{\Omega} = 1.4$ und $\tilde{\Omega} = 3.1$ die Winkel φ_{ik} ab und tragen Sie in die Bild 10-15 die entsprechenden Winkel ein. (Achtung! Wegen des Drucks sind die Achsen etwas verzerrt – berücksichtigen Sie das!)

Aufgabe 10-32: Lesen Sie aus Bild 10-16 die $\tilde{\Omega}$ -Bereiche ab, in denen sowohl die Bedingung $|\hat{\mathbf{x}}| < 0.2$ als auch die Bedingung $|\hat{\mathbf{x}}| < 0.3$ erfüllt sind.

Aufgabe 10-33: Es interessiert für die Erregung (10.138), vgl. Bild 10-10, die Schwingung $x_a(t)$ in Richtung der anregenden Kraft. Wie berechnet man sie aus (10.132) oder (10.133)? Wie kann man sie aus den Diagrammen nach Bild 10-16 ermitteln (die könnten z. B. gemessen sein)?

Aufgabe 10-34: Zeichnen Sie für $\mathbf{x}(t)$ zur Erregung $\mathbf{F}_e$ nach (10.142) je einen Zeitverlauf $\tilde{x}_1(\tilde{t})$, $\tilde{x}_2(\tilde{t})$ für $0 \leq \tilde{\Omega} \tilde{t} \leq 2\pi$ für $\tilde{\Omega} \approx \tilde{\omega}_1$ und $\tilde{\Omega} \approx \tilde{\omega}_2$; vgl. die Darstellung in Bild 10-9.

Aufgabe 10-35: Finden Sie eine anschauliche Begründung, weshalb in Bild 10-16a die Resonanzamplitude für $x_1 = x_L$ bei $\tilde{\Omega} = \tilde{\omega}_2$ sehr viel größer ist als die bei $\tilde{\Omega} = \tilde{\omega}_1$? (Vgl. Bild 10-8.)

Aufgabe 10-36: Wie kann man aus Bild 10-16 entnehmen, dass bei $\tilde{\Omega} \approx \tilde{\omega}_1$ die Schwingungen $x_1(t) - x_L(t)$ und $x_2(t) - y_L(t)$ im Wesentlichen *gegenphasig* stattfinden und bei $\tilde{\Omega} \approx \tilde{\omega}_2$ *gleichphasig*?

Aufgabe 10-37: Zeichnen Sie für die unwuchterregten Schwingungen, Gl. (10.142)–(10.145), entsprechend Bild 9-19 für $\tilde{\Omega} = 1.36$ und $\tilde{\Omega} = 1.43$ – z. B. mit den Angaben in Bild 10-18 – jeweils die Winkellage zwischen Unwucht und Auslenkung für $\tilde{\Omega} \omega_0 t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$.

Aufgabe 10-38: Lesen Sie aus Bild 10-18 ab, in welchen Drehzahlbereichen der Lagermittelpunkt mit demselben Drehsinn wie die Unwucht umläuft und wann er gegensinnig umläuft.

Aufgabe 10-39: Lesen Sie aus Bild 10-18 ab, bei welcher Drehzahl sich der Lagermittelpunkt bei Unwuchterregung längs einer Geraden bewegt.

11 Rotorsysteme

11.1 Die einfach besetzte Welle auf nachgiebigen Lagern

11.1.1 Das System

Die einfach besetzte Welle aus Abschnitt 9.3 wird auf zwei Lagerböcke nach Art von Abschnitt 10 gesetzt, Bild 11-1. Das System besteht dann aus der Scheibe S , der Welle W und den beiden Lagerböcken A und B . Die Untersuchung hier greift auf die vorangehenden Überlegungen zurück und setzt die neuen Bewegungsgleichungen aus den bekannten gemäß der Systemstruktur zusammen. (Das Gewicht der Teile wird vernachlässigt, da sein Einfluss trivial ist.)

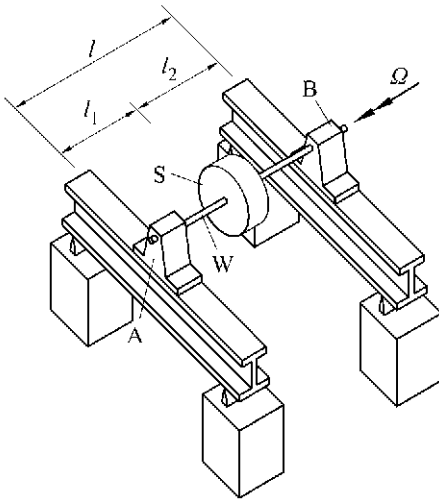


Bild 11-1

Einfach besetzte Welle auf nachgiebigen Böcken

11.1.2 Das Modell

Die aus den Abschnitten 9.3 und 10 übernommenen Größen werden durch die vier Indizes S , W , A , B – Scheibe, Welle, Bock A bzw. Bock B – unterschieden. Wesentliche neue Systemparameter sind die Längenverhältnisse, vgl. Bild 11-1:

$$\tilde{l}_1 = l_1/l, \quad \tilde{l}_2 = l_2/l, \quad \text{wo } l := l_1 + l_2. \quad (11.1)$$

Die Gleichungen für die vier Systemteile werden zunächst vorbereitend zusammengestellt und dann zusammengefasst. Verbindendes Element ist die Welle, sie steht deshalb an erster Stelle.

11.1.2.1 Gleichgewicht, Kinematik, konstitutives Verhalten der Welle

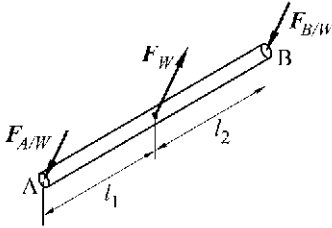


Bild 11-2
Kräfte auf Welle

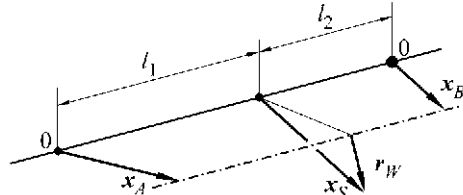


Bild 11-3: Auslenkungen der Welle, ——— Verbindungsgerade der ausgelenkten Lager A und B

Bild 11-2 zeigt die herausgeschnittene Welle mit den angreifenden Kräften. (Da mit linearen Gleichungen gearbeitet wird, darf das Gleichgewicht an der unverformten Welle angesetzt werden.) Momentengleichgewicht um den Lagerpunkt B bzw. A liefert die Kräfte $F_{A/W}$ bzw. $F_{B/W}$ auf den Lagerbock A bzw. B von der Welle W:

$$F_{A/W} = \tilde{l}_2 F_W, F_{B/W} = \tilde{l}_1 F_W. \quad (11.2)$$

Dabei steht F_W für $(F_{xW}, F_{yW})^T$, die Wellenkraft F aus Gl. (9.32). Analog bezeichnen die Pfeile $F_{A/W}$ und $F_{B/W}$ die Reaktionen zu den Lagerkräften F_L aus Gl. (10.11)₂, vgl. Bild 10-3.

Die geometrischen und kinematischen Beziehungen liest man aus Bild 11-3 ab:

$$x_S = \tilde{l}_2 x_A + \tilde{l}_1 x_B + r_W. \quad (11.3)$$

Hier ist r_W die Wellendurchbiegung, vgl. (9.27)₁, x_A, x_B stehen für die Auslenkungen x_L der Lagerböcke A bzw. B, vgl. (10.11)₁, und x_S ist jetzt die Auslenkung des Wellendurchstoßpunktes (Punkt W in Bild 9-5) gegenüber der Ausgangslage auf der Geraden 0–0 in Bild 11-3, entsprechend $(x, y)^T$ in den Gln (9.1) und (9.3).

Die konstitutiven Gleichungen (9.42) der mit der Winkelgeschwindigkeit Ω umlaufenden Welle mit innerer Dämpfung, ihr Deformations-Kraft-Verhalten, lautet in Matrixform

$$F_W = b_i \dot{r}_W + (k_W I_2 + b_i \Omega J_2) r_W, \quad (11.4)$$

mit den 2×2 -Matrizen

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.5)$$

11.1.2.2 Gleichgewicht an der Scheibe

Parallel zu (9.43) gilt, in Matrixschreibweise,

$$m_S \ddot{x}_S + b_a \dot{x}_S + F_W = m_S r_u \Omega^2 f_2(\Omega t), \quad (11.6)$$

wo

$$f_2(\Omega t) = \begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{pmatrix}. \quad (11.7)$$

11.1.2.3 Gleichgewicht an den Lagerböcken

Für die Entwicklung des Systems der Bewegungsgleichungen ist es fast gleichgültig, ob man die Lagermassen in der Form der Massenmatrix $\mathbf{M}$, vgl. (10.42), berücksichtigt oder vernachlässigt. Wir greifen auf Gl. (10.96) zurück und fügen auf der rechten Seite die von der Welle ausgeübten (Zusatz)Kräfte $F_{A/W}$ bzw. $F_{B/W}$ aus (11.2) hinzu. Mit der oben eingeführten Indizierung erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A \ddot{\mathbf{x}}_A + \mathbf{B}_A \dot{\mathbf{x}}_A + \mathbf{K}_A \mathbf{x}_A &= F_{A/W}, \\ \mathbf{M}_B \ddot{\mathbf{x}}_B + \mathbf{B}_B \dot{\mathbf{x}}_B + \mathbf{K}_B \mathbf{x}_B &= F_{B/W}; \end{aligned} \quad (11.8)$$

die Lagerböcke brauchen nicht gleich zu sein.

11.1.2.4 Die Bewegungsgleichungen

Mit (11.2) bis (11.8) stehen alle Gleichungen bereit. Die Kräfte werden eliminiert, die Bewegungsgleichungen enthalten nur die Auslenkungen und deren Zeitableitungen. Entscheiden muss man, ob die Scheibenauslenkung durch r_W , d. h. gegenüber der Verbindungsgeraden der beiden Lager (in Bild 11-3 strichpunktirt) oder absolut, durch x_S , gemessen werden soll. Wir arbeiten mit x_S , da die Systemmatrizen dann weitgehend symmetrisch werden.

Der Arbeitsaufwand wird verringert und die Lesbarkeit der Gleichungen wird erhöht, wenn man mit Block-Matrizen arbeitet. Elimination von r_W sowie der Kräfte liefert

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} m_S \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_S \\ \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_B \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} (b_a + b_i) \mathbf{I}_2 & -b_i \tilde{l}_2 \mathbf{I}_2 & -b_i \tilde{l}_1 \mathbf{I}_2 \\ -b_i \tilde{l}_2 \mathbf{I}_2 & \mathbf{B}_A + b_i \tilde{l}_2^2 \mathbf{I}_2 & b_i \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \mathbf{I}_2 \\ -b_i \tilde{l}_2 \mathbf{I}_2 & b_i \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \mathbf{I}_2 & \mathbf{B}_B + b_i \tilde{l}_1^2 \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_S \\ \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_B \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} k_W \mathbf{I}_2 & -k_W \tilde{l}_2 \mathbf{I}_2 & -k_W \tilde{l}_1 \mathbf{I}_2 \\ -k_W \tilde{l}_2 \mathbf{I}_2 & \mathbf{K}_A + k_W \tilde{l}_2^2 \mathbf{I}_2 & k_W \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \mathbf{I}_2 \\ -k_W \tilde{l}_1 \mathbf{I}_2 & k_W \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \mathbf{I}_2 & \mathbf{K}_B + \tilde{l}_1^2 k_W \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} + b_i \Omega \begin{pmatrix} \mathbf{J}_2 & -\tilde{l}_2 \mathbf{J}_2 & -\tilde{l}_1 \mathbf{J}_2 \\ -\tilde{l}_2 \mathbf{J}_2 & \tilde{l}_2^2 \mathbf{J}_2 & \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \mathbf{J}_2 \\ -\tilde{l}_1 \mathbf{J}_2 & \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \mathbf{J}_2 & \tilde{l}_1^2 \mathbf{J}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_S \\ \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_B \end{pmatrix} \\ & = m_S r_u \Omega^2 \begin{pmatrix} f_2(\Omega t) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11.9)$$

abgekürzt

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}} + [\mathbf{K} + b_i \Omega \mathbf{J}] \mathbf{x} = m_S r_u \Omega^2 \mathbf{f}(\Omega t). \quad (11.10)$$

Die 6×6 -Matrix $\mathbf{J}$ ist *schiefssymmetrisch*: $\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$.

11.1.3 Numerische Beispiele

Zur numerischen Auswertung der Bewegungsgleichungen (11.9) braucht man Maschinenparameter. Der Einfachheit halber greifen wir auf die Parameter aus den Abschnitten 9.3 und 10 zurück. Dann muss man die Skalierungen (9.61) aus Abschnitt 9.5 und (10.73)ff. aus Abschnitt 10.4.3 aufeinander abstimmen.

11.1.3.1 Skalieren der Bewegungsgleichungen

Sind die beiden Lagerböcke (einschließlich Massen) identisch und ist $(\lambda_L, \hat{\mathbf{x}}_L)$ eine der Eigenschwingungen aus Abschnitt 10.4, also ohne die Welle mit der Scheibe, so hat die (11.10) zugeordnete homogene Gleichung – unabhängig von den Wellenparametern – die Eigenlösung $(\lambda_g, \hat{\mathbf{x}}_g)$ mit

$$\hat{\mathbf{x}}^T = (0, 0, \tilde{l}_1 \hat{\mathbf{x}}_L^T, -\tilde{l}_2 \hat{\mathbf{x}}_L^T). \quad (11.11)$$

Um diesen Sonderfall zu vermeiden, gehen wir zu unterschiedlichen Lagermassen über und setzen

$$m_A = \tilde{m}_A m_L, \quad m_B = \tilde{m}_B m_L. \quad (11.12)$$

Die übrigen Lagerbockparameter sollen gleich sein.

Mit der Referenzmasse m_L übernehmen wir aus Abschnitt 10.4.3 die Referenzgrößen

$$m_R = m_L, \quad k_R = 27 E I_B / l_B^3, \quad \omega_R := \sqrt{k_R / m_R}, \quad (11.13)$$

wo l_B und $E I_B$ für die Länge bzw. Biegesteifigkeit des Lagerbock-Trägers stehen.

Die Skalierung (9.61) lautet nun

$$\omega_0^2 = k_W / m_S, \quad b_a = 2 D_a \omega_0 m_S, \quad b_i = 2 D_i \omega_0 m_S. \quad (11.14)$$

Mit

$$\tilde{m}_S = m_S / m_R, \quad \tilde{k}_W = k_W / k_R \quad (11.15)$$

folgt daraus

$$\omega_0^2 = \frac{\tilde{k}_W}{\tilde{m}_S} \omega_R^2, \quad b_a = 2 D_a \sqrt{\tilde{k}_W \tilde{m}_S} \omega_R m_R, \quad b_i = 2 D_i \sqrt{\tilde{k}_W \tilde{m}_S} \omega_R m_R. \quad (11.16)$$

Mit obigen Transformationen und mit

$$\tilde{t} = \omega_R t, \quad \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \Omega_R \quad (11.17)$$

erhält man aus (11.10) in einem ersten Schritt

$$\omega_R^2 m_R \tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{x}} + \omega_R^2 m_R \tilde{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{x}} + k_R \left[\tilde{\mathbf{K}} + 2 D_i \tilde{\Omega} \sqrt{\tilde{k}_W \tilde{m}_S} \mathbf{J} \right] \mathbf{x} = \omega_R^2 m_R \tilde{m}_S r_u \tilde{\Omega}^2 \mathbf{f}(\tilde{\Omega} \tilde{t}). \quad (11.18)$$

Nach Division durch $(m_R \omega_R^2) = k_R$ und mit

$$\tilde{x} = x/r_u \quad (11.19)$$

folgt

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{x}} + \tilde{B} \dot{\tilde{x}} + \left[\tilde{K} + 2 D_i \tilde{\mathcal{Q}} \sqrt{\tilde{k}_W \tilde{m}_S} J \right] \tilde{x} - \tilde{m}_S \tilde{\mathcal{Q}} f(\tilde{\mathcal{Q}} \tilde{r}) = 0. \quad (11.20)$$

Vergleich der Koeffizienten liefert

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_S I_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{m}_A I_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{m}_B I_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{K} = \tilde{k}_W A + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_L & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{K}_L \end{pmatrix}, \quad (11.21)$$

$$\tilde{B} = 2 \sqrt{\tilde{k}_W \tilde{m}_S} D_i A + \begin{pmatrix} 2 \sqrt{\tilde{k}_W \tilde{m}_S} D_a I_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{B}_L & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{B}_L \end{pmatrix}, \quad (11.22)$$

wo A und J für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} I_2 & -\tilde{l}_2 I_2 & -\tilde{l}_1 I_2 \\ -\tilde{l}_2 I_2 & \tilde{l}_2^2 I_2 & \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 I_2 \\ -\tilde{l}_1 I_2 & \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 I_2 & \tilde{l}_1^2 I_2 \end{pmatrix}, \quad J = -J^T = \begin{pmatrix} J_2 & -\tilde{l}_2 J_2 & -\tilde{l}_1 J_2 \\ -\tilde{l}_2 J_2 & \tilde{l}_2^2 J_2 & \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 J_2 \\ -\tilde{l}_1 J_2 & \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 J_2 & \tilde{l}_1^2 J_2 \end{pmatrix} \quad (11.23)$$

stehen und $\tilde{K}_A = \tilde{K}_B = \tilde{K}_L$, vgl. (10.74), $\tilde{B}_A = \tilde{B}_B = \tilde{B}_L$, vgl. (10.110), gesetzt wurde.

11.1.3.2 Wahl der numerischen Parameter

Ziel des Beispiels ist ein kurzer Überblick über die Eigenschwingungsformen des Systems vom Freiheitsgrad 6 sowie ein Einblick in die Phänomene, die aus der (mitrotierenden) inneren Dämpfung der Welle (vgl. Abschnitte 9.3.3 und 9.5) in diesem System entstehen.

Gewählt werden als Nominalparameter für Welle und Scheibe

$$\tilde{l}_1 = 0.6, \tilde{l}_2 = 0.4, \tilde{m}_S = 5, \tilde{k}_W = 3, D_a = 0.02, D_i = 0.01, \quad (11.24)$$

für die Lagerböcke, s. auch (10.74) und (10.111),

$$\tilde{m}_A = 0.9, \tilde{m}_B = 1.1, \quad K_N = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 3.75 \end{pmatrix}, \quad B_N = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}. \quad (11.25)$$

Bei der Untersuchung der Wirkung der inneren Dämpfung muss man *isotrope Lagerung* – die Steifigkeiten und Dämpfungen der Lagerböcke sind richtungsunabhängig – und *anisotrope Lagerung* – Steifigkeiten und Dämpfungen sind richtungsabhängig – unterscheiden. Für den isotropen Fall setzen wir mit den Mittelwerten der Hauptdiagonalelemente

$$\tilde{k}_m = 5.875, \tilde{b}_m = 0.075, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{IS} = \begin{pmatrix} \tilde{k}_m & 0 \\ 0 & \tilde{k}_m \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{IS} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_m & 0 \\ 0 & \tilde{b}_m \end{pmatrix}. \quad (11.26)$$

Für den Übergang vom isotropen zum (anisotropen) Nominalsystem wählen wir die Homotopie

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_A = \mathbf{K}_B = \mathbf{K}_L &= h \cdot \mathbf{K}_N + (1-h) \cdot \mathbf{K}_{IS}, \\ \mathbf{B}_A = \mathbf{B}_B = \mathbf{B}_L &= h \cdot \mathbf{B}_N + (1-h) \cdot \mathbf{B}_{IS}, \end{aligned} \quad (11.27)$$

mit $h = 0$: Isotropie, $h = 1$: anisotropes Nominalsystem.

Wir beschränken uns auf die Untersuchung von Eigenschwingungen. Das dem System (11.20) zugeordnete homogene Dgl-System

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{K}}^* \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (11.28)$$

wird in ein System erster Ordnung umgeschrieben

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{B}} & -\tilde{\mathbf{K}}^* \\ \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad (11.29)$$

und das zugehörige Eigenwertproblem mit Matlab numerisch gelöst. Mit den hier vorliegenden Parameterwerten treten Eigenwerte stets paarig komplex konjugiert auf. Es genügt dann, den Eigenwert mit dem positiven Imaginärteil darzustellen.

11.1.3.3 Ungedämpfte Eigenschwingungen

Tabelle 11-1 listet die Eigenfrequenzen $\tilde{\omega}_k$ und die zugehörigen Eigenschwingungsformen (Eigenvektoren) $\hat{\mathbf{x}}_k = (\hat{x}_{Sk}, \hat{y}_{Sk}, \hat{x}_{Ak}, \hat{y}_{Ak}, \hat{x}_{Bk}, \hat{y}_{Bk})^T$ für die Fälle $h = 0$ (isotrope Lagerung), $h = 0.5$ und $h = 1$ (nominale Lagerung) auf. Die jeweils größte Auslenkung wurde auf 1 normiert.

Um sich die Eigenschwingungen zu veranschaulichen, muss man die Eigenschwingungsformen anhand der Zahlenwerte aus Tabelle 11-1 skizzieren (s. Bild 11-4). In den Fällen $h > 0$ schwingen die Punkte S, A, B von Scheibe bzw. Lagern längs Geraden, vgl. Bild 10-8.

Wegen der speziellen Struktur (11.9), (11.10) und der Wahl $\mathbf{K}_A = \mathbf{K}_B$, vgl. (11.27), liegen (ohne Dämpfung) die Eigenschwingungen jeweils in einer Ebene (s. Aufgabe 11-3).

Bei $h = 0$, im isotropen Fall, fallen jeweils zwei Eigenfrequenzen zusammen.

11.1.3.4 Gedämpfte Eigenschwingungen

Wir gehen vom isotrop gelagerten Rotor unter der Wirkung der inneren Dämpfung D_i aus und ändern das System schrittweise ab:

a) Allein innere Dämpfung $D_i = 0.01$ ist wirksam, $h = 0$:

Genau wie in Abschnitt 9.5, Bild 9-21, wird der Realteil des (kleinsten) Eigenwerts positiv, wenn die Winkelgeschwindigkeit $\tilde{\Omega}$ die kleinste Eigenfrequenz $\tilde{\omega}_1$ überschreitet. An der Stabilitätsgrenze gelten die Eigenlösungen nach Tabelle 11-2, die zweite und die dritte Eigenlösung klingen ab: vgl. $\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_k < 0$ für $k=2,3$ in Tabelle 11-2. Oberhalb $\tilde{\Omega}_G = \tilde{\omega}_1 = 0.680$ klingt die erste Schwingung auf. Nach Tabelle 11-2 laufen die Punkte S, A, B bei $\tilde{\lambda}_1, \hat{x}_1$ auf Kreisen mit der Welle um (s. Aufgabe 11-5).

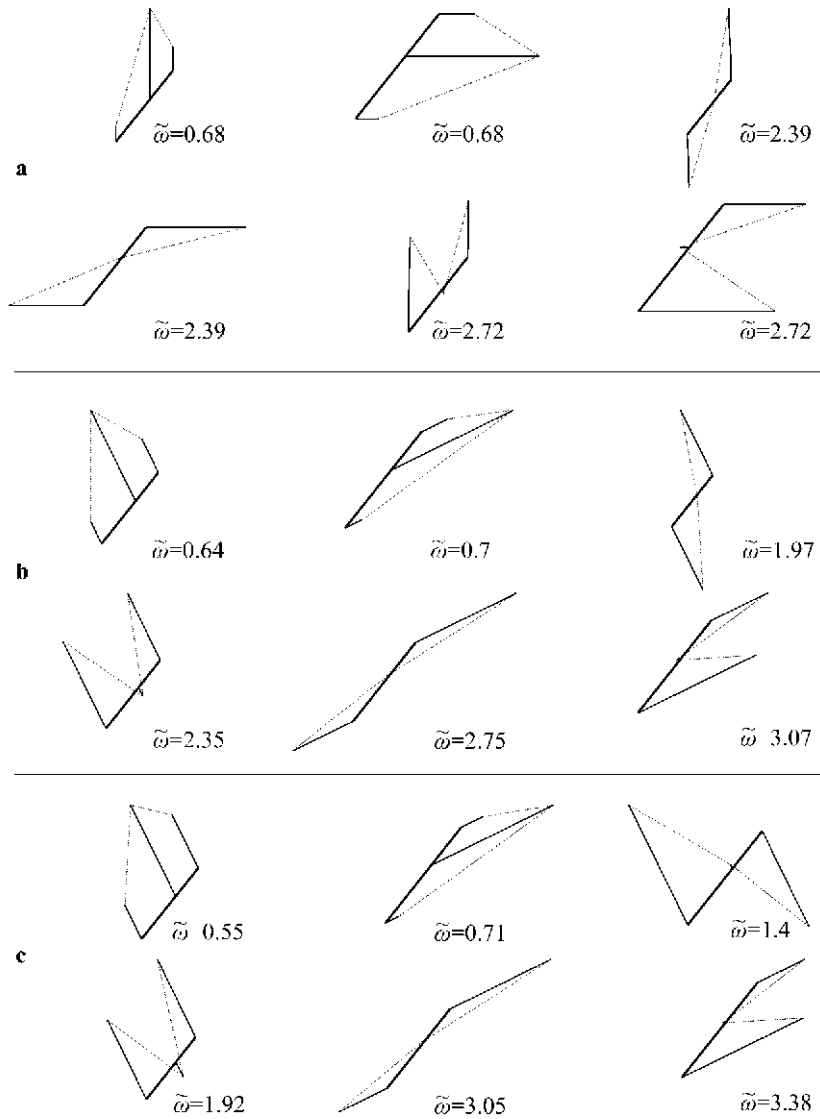
b) Gemischte Dämpfungen für $h=0$ mit $D_I = 0.01$:

Bei $D_a = 0.02$, $\tilde{\mathbf{B}}_L = \mathbf{0}$ rückt die Stabilitätsgrenze nach $\tilde{\Omega}_G = 2.44$, die Eigenschwingung mit $\tilde{\omega}_2 = 2.39$ beginnt zu wachsen.

Bei $D_a = 0.02$ mit $\tilde{\mathbf{B}}_L = \tilde{\mathbf{B}}_{IS}$ rückt die Stabilitätsgrenze nach 3.09, hier wird, wie bei a), die Eigenschwingung mit $\tilde{\omega}_1 \approx 0.68$ entscheidend.

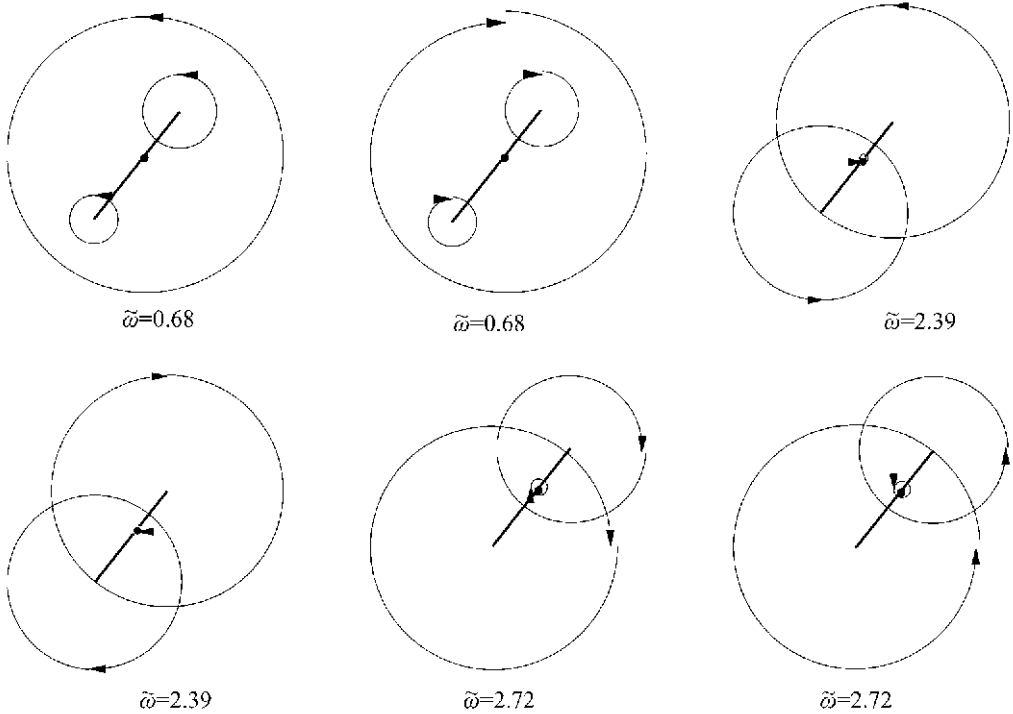
h	k	$\tilde{\omega}_k$	$\hat{x}_{Sk}$	$\hat{y}_{Sk}$	$\hat{x}_{Ak}$	$\hat{y}_{Ak}$	$\hat{x}_{Bk}$	$\hat{y}_{Bk}$
0	1	0.680	1	0	0.175	0	0.267	0
	2	0.680	0	1	0	0.175	0	0.267
	3	2.392	-0.035	0	-0.784	0	1	0
	4	2.392	0	-0.035	0	-0.784	0	1
	5	2.725	-0.067	0	1	0	0.601	0
	6	2.725	0	-0.067	0	1	0	0.601
0.5	1	0.640	-0.492	1	-0.118	0.240	-0.181	0.368
	2	0.701	1	0.492	0.138	0.068	0.209	0.103
	3	1.966	0.019	-0.039	0.474	-0.964	-0.492	1
	4	2.346	0.052	-0.105	-0.492	1	-0.379	0.770
	5	2.745	-0.031	-0.015	-0.593	-0.292	1	0.492
	6	3.066	-0.047	-0.023	1	0.492	0.479	0.235
1	1	0.550	-0.492	1	-0.183	0.372	-0.285	0.579
	2	0.715	1	0.492	0.113	0.056	0.172	0.085
	3	1.400	-0.017	0.035	-0.492	1	0.392	-0.798
	4	1.921	0.095	-0.193	-0.492	1	-0.486	0.988
	5	3.054	-0.028	-0.014	-0.482	-0.237	1	0.492
	6	3.379	-0.035	-0.017	1	0.492	0.390	0.192

Tabelle 11-1 Eigenschwingungen ohne Dämpfung $h=0, 0.5, 1$

Bild 11-4: Eigenformen ohne Dämpfungen. a: $h = 0$, b: $h = 0.5$, c: $h = 1$

k	1	2	3
$\tilde{\lambda}_k$	$0.0001 - 0.680 \text{ j}$	$-0.0035 + 2.392 \text{ j}$	$-0.015 + 2.724 \text{ j}$
$\hat{x}_{Sk}$	j	$-0.035 - 0.001 \text{ j}$	$-0.067 - 0.0042 \text{ j}$
$\hat{y}_{Sk}$	1	$0.010 - 0.035 \text{ j}$	$-0.0042 + 0.067 \text{ j}$
$\hat{x}_{Ak}$	$0.0001 - 0.175 \text{ j}$	$-0.750 - 0.044 \text{ j}$	1

$\hat{y}_{Ak}$	$0.175-0.0001j$	$0.044-0.750j$	$0.0000-1.0000j$
$\hat{x}_{Bk}$	$0.0001+0.267j$	1	$0.602-0.023j$
$\hat{y}_{Bk}$	0.267	$-0.0000+1.0000j$	$0.023-0.602j$

Tabelle 11-2 Eigenschwingungen für $h = 0$, $D_i = 0.01$, $D_a = 0.00$ Bild 11-5 Umlaufende Eigenschwingungen für $D_i = 0.01$, $D_a = 0.00$ an der Stabilitätsgrenze $\tilde{\Omega} = 0.680$

11.1.3.5 Stabilitätskarten

Kennt man keine allgemeinen Stabilitätsaussagen, muss man numerisch für alle Parameterkombinationen – das sind hier der Homotopiebereich $0 \leq h \leq 1$ und ein Drehgeschwindigkeitsbereich, sagen wir $0 \leq \tilde{\Omega} \leq \tilde{\Omega}_E$, – sämtliche Eigenwerte $\tilde{\lambda}_k$ auf

$$\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_k < 0 \quad (11.30)$$

überprüfen. Parameterkombinationen, die auf

$$\max(\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_k) = 0 \quad (11.31)$$

führen, begrenzen den Stabilitätsbereich. Wir untersuchen die Dämpfungskombinationen

- a: $D_i = 0.01, D_a = 0, \quad \mathbf{B}_L = \mathbf{0},$
 b: $D_i = 0.01, D_a = 0.02, \quad \mathbf{B}_L = \mathbf{0},$
 c: $D_i = 0.01, D_a = 0, \quad \mathbf{B}_L \text{ nach (11.27)}_3,$
 d: $D_i = 0.01, D_a = 0.02, \quad \mathbf{B}_L \text{ nach (11.27)}_2$

für den $\tilde{\Omega}$ -Bereich $0 \leq \tilde{\Omega} \leq 8$.

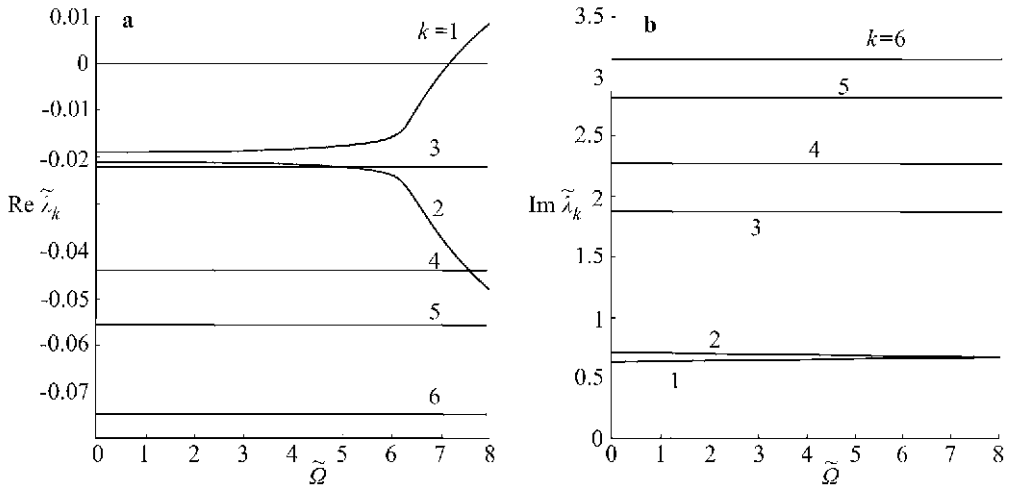


Bild 11-6: Verlauf von a Real- und b Imaginärteil der Eigenwerte $\tilde{\lambda}_k(\tilde{\Omega})$ für den Parametersatz d in (11.32), Homotopie $h=0.6$

Bild 11-6 zeigt den Verlauf der 6 Eigenwerte $\tilde{\lambda}_k$ (mit positivem Imaginärteil $\tilde{\omega}_k = \text{Im } \tilde{\lambda}_k$) über $\tilde{\Omega}$ für den Parametersatz d aus (11.32) zu $h=0.6$. Der *Nulldurchgang* von $\text{Re } \tilde{\lambda}_k$ bei $\tilde{\Omega} \approx 7.20$ ist ein *Punkt der Stabilitätsgrenze* in der Stabilitätskarte in Bild 11-8d.

Bild 11-8 zeigt die Stabilitätskarten für die vier Parametersätze (11.32). Man liest daraus ab: Bei fester Anisotropie, bei konstantem h , erhöht die äußere Dämpfung D_a die Stabilitätsgrenze erheblich, vgl. jeweils die Bilder a $\leftrightarrow$ b und c $\leftrightarrow$ d; siehe auch Bild 9-21. Dagegen hat die Lagerbockdämpfung $\tilde{\mathbf{B}}_L$ nur geringen (stabilisierenden) Einfluss, vgl. jeweils die Bilder a $\leftrightarrow$ c und b $\leftrightarrow$ d. Allerdings hebt $\tilde{\mathbf{B}}_L$ die Stabilitätseinbrüche in Bild 11-6b bei sehr kleinem h und bei $h \approx 0.25$ auf, die durch Schwankung der Vorzeichen der Realteile und durch Wechsel der diskriminierenden Eigenschwingung hervorgerufen werden. Steigendes h – zunehmende Anisotropie der Lagerbocksteifigkeiten, vgl. (11.25)₂ und (11.27)₁ – stabilisiert sehr wirksam, stärker als die äußeren Dämpfungen.

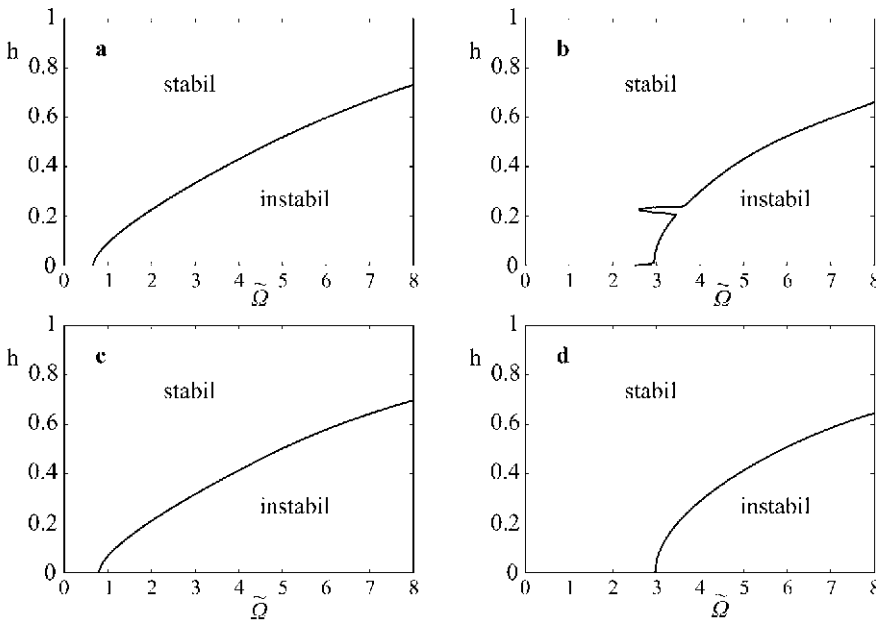


Bild 11-7: Stabilitätskarte für die Parameter nach (11.32)

11.2 Rotoren mit aufgesetztem Kreisel

11.2.1 Kreiselwirkungen

11.2.1.1 Allgemeine Bemerkungen

Der Drall von Drehkörpern, zum Beispiel von Rädern oder Scheiben, die auf einer Welle sitzen und mit ihr schnell umlaufen, ist so groß, dass der Körper einer Richtungsänderung seiner Drehachse einen zu beachtenden Widerstand entgegensetzt. (Ein schnell laufender Kreiselkompass bewahrt seine Richtung.) Hinzu kommt der sogenannte Kreiseleffekt: Für eine kurzzeitige Dralländerung gilt das Vektorgesetz, vgl. (A.106),

$$\vec{L}(t + \Delta t) = \vec{L}(t) + \vec{M} \cdot \Delta t, \text{ anders gelesen: } \vec{L}(t + \Delta t) - \vec{L}(t) =: \Delta \vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t. \quad (11.33)$$

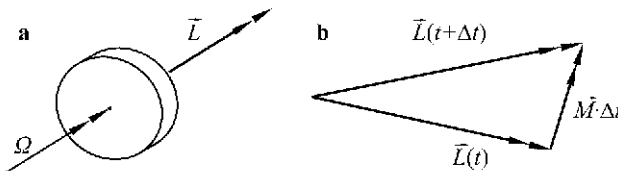
Bild 11-8
Kreiseleffekt: Dralländerung
infolge Moment(enstoß)

Bild 11-8 illustriert den Zusammenhang: Die Scheibe im Teilbild a drehe schnell um ihre Figurenachse. (*Schnell* heißt, die Drehgeschwindigkeit Ω ist sehr viel größer als die Winkel-

geschwindigkeiten der Achskippungen.) Dann liegt der Drallvektor $\vec{L}$ mit guter Genauigkeit auf der Figurenachse. Gemäß der Gleichung (11.33) kippt ein Moment(envektor) $\vec{M}$, der während der Zeit Δt wirkt, die Figurenachse *nicht* um die Wirkrichtung von $\vec{M}$, sondern schwenkt sie in der von $\vec{L}(t)$ und $\vec{M}$ aufgespannten Ebene von $\vec{L}(t)$ nach $\vec{L}(t + \Delta t)$, vgl. Bild 11-8b. Das muss man beim Ansetzen der Bewegungsgleichungen beachten.

Wir zeigen hier ein systematisches Vorgehen nach Lagrange (s. Anhang C.2.3) mit Hilfe der Kippwinkel (aus Anhang A.1.3.4). Dabei beschränken wir uns auf kleine Winkelauslenkungen, also lineare Bewegungsgleichungen (die aus teilweise zunächst nichtlinearen Gleichungen durch Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung entstehen).

11.2.1.2 Lagekoordinaten

Bild 11-9 zeigt einen allgemeinen Körper und, als konkretes Beispiel, eine Scheibe, die in ihrer Ausgangslage mit ihren Hauptachsen auf der Inertialbasis $\vec{e}^0$ liegen. (Die schnelle Rotation Ω erfolgt um die 3-Achse. Deshalb ist die Basis gegenüber Bild A-8 gedreht gezeichnet, vgl. Bild 11-1).

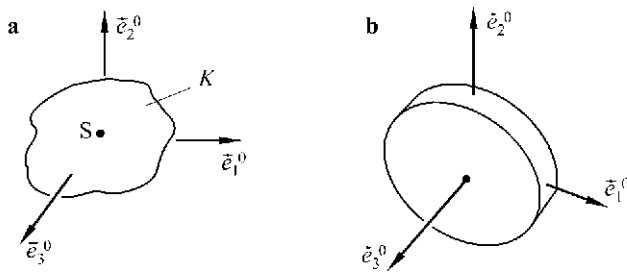


Bild 11-9
Körper mit Hauptachsen in Ausgangslage

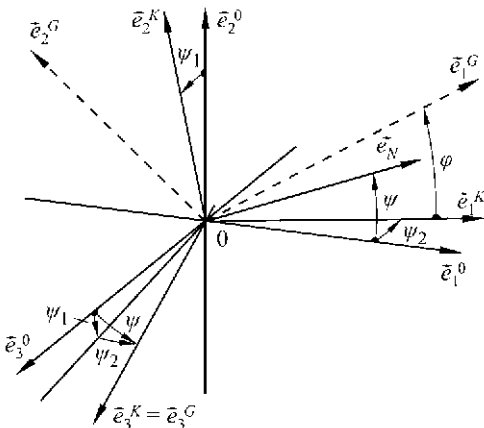


Bild 11-10
Basen $\vec{e}^0, \vec{e}^K, \vec{e}^G$; Kippwinkel (χ, ψ) bzw. (ψ_1, ψ_2) und Drehwinkel φ

Die (Dreh-)Bewegung des Körpers wird in zwei Teile zerlegt (s. Bild 11-10):

Im ersten Schritt kippt der Körper um die durch den Winkel χ in der $\vec{e}_1^0 - \vec{e}_2^0$ -Ebene festgelegte Knotenlinie, den Schaft des Einheitsvektors $\vec{e}_N$ mit dem Winkel ψ ; die (mit)gekippte Basis heiße $\vec{e}^K$. Statt durch (χ, ψ) kann man die Kippung am Schaft des Einheitsvektors $\vec{e}_3^0$ – wie in einer technischen Zeichnung – auch durch die (Kipp-)Winkel (ψ_1, ψ_2) erfassen, $\vec{e}_3^0$ kippt nach $\vec{e}_3^K$. (Der Zusammenhang zwischen (χ, ψ) und (ψ_1, ψ_2) ist in A.1.3.4 erläutert.)

Im zweiten Schritt dreht (rotiert) der Körper, die Basis $\vec{e}^K$ um die Achse $\vec{e}_3^K$ mit dem Winkel φ , bei der hier angenommenen festen Drehgeschwindigkeit Ω gilt

$$\varphi = \Omega t. \quad (11.34)$$

Die körperfeste Basis $\vec{e}^G$ ist das Ergebnis der Gesamtdrehung, die momentane Lage des Körpers, die also durch die Koordinaten

$$(\psi_1, \psi_2, \varphi) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \Omega t) \quad (11.35)$$

erfasst wird.

11.2.1.3 Kinetische Energie und Winkelgeschwindigkeiten

Bezogen auf $\vec{e}^G$ lautet die kinetische Energie der Rotation, vgl. (A.102),

$$E_{kr} = \frac{1}{2} (J_{11} \omega_{1G}^2 + J_{22} \omega_{2G}^2 + J_{33} \omega_{3G}^2), \quad (11.36)$$

darin sind $(\omega_{1G}, \omega_{2G}, \omega_{3G})$ die auf $\vec{e}^G$ bezogenen Koordinaten der Winkelgeschwindigkeiten ω^G der Basis $\vec{e}^G$ gegenüber der Inertialbasis $\vec{e}^0$, vgl. (A.63):

$$\begin{pmatrix} \omega_{1G} \\ \omega_{2G} \\ \omega_{3G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{1K} \\ \omega_{2K} \\ \omega_{3K} + \Omega \end{pmatrix}. \quad (11.37)$$

Einsetzen von (11.37) in (11.36) liefert

$$\begin{aligned} E_{kr} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{J_{11} + J_{22}}{2} (\omega_{1K}^2 + \omega_{2K}^2) + \frac{1}{2} J_{33} (\Omega + \omega_{3K})^2 \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{J_{11} - J_{22}}{2} [(\omega_{1K}^2 + \omega_{2K}^2) \cos 2\varphi + 2\omega_{1K} \omega_{2K} \sin 2\varphi]. \end{aligned} \quad (11.38)$$

Im allgemeinen Fall, bei einem unrunder Körper mit $J_{11} - J_{22} \neq 0$, gelangen mit $\cos 2\varphi = \cos 2\Omega t$ und $\sin 2\varphi = \sin 2\Omega t$ periodisch von der Zeit abhängende Terme in die Bewegungsgleichungen. Unrunde Körper schließen wir aus und setzen

$$J_{11} = J_{22} =: J_a, J_{33} =: J_p; \quad (11.39)$$

J_a ist das axiale Massenträgheitsmoment, J_p das polare. Die Winkelgeschwindigkeiten $(\omega_{1K}, \omega_{2K}, \omega_{3K})$ gelten für die Kippung von $\bar{e}^0$ nach $\bar{e}^K$, vgl. (A.62).

11.2.1.4 Vereinfachen der Gleichungen

Beim Aufstellen von Bewegungsgleichungen nach Lagrange werden kinetische Energie und Potential einmal nach den (generalisierten) Koordinaten bzw. den Geschwindigkeiten differenziert. Damit werden in den Termen – soweit sie Polynome sind – die Potenzen von Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten um eins herabgesetzt. Sind lineare – also linearisierte – Bewegungsgleichungen das Ziel, muss man demnach sicherstellen, dass kinetische Energie und Potential mindestens bis zur zweiten Potenz korrekt sind. (Höhere Potenzen braucht man nicht zu beachten.)

In der kinetischen Energie nach (11.38) treten ω_{1K} und ω_{2K} selbst quadratisch auf, also genügt es, ω_{1K} und ω_{2K} durch die Kippwinkel (ψ_1, ψ_2) bzw. deren Ableitungen *linear* zu erfassen. Dagegen kann in $(\Omega + \omega_{3K})$ die Drehfrequenz Ω groß sein. Deshalb müssen in ω_{3K} zunächst (ψ_1, ψ_2) und ihre Ableitungen – als Produkte – bis zur 2. Ordnung beachtet werden.

Aus (A.32) folgen in linearer Näherung

$$t_1 = \psi_1, \quad t_2 = \psi_2, \quad \dot{t}_1 = \dot{\psi}_1, \quad \dot{t}_2 = \dot{\psi}_2. \quad (11.40)$$

Für $\cos \psi$, das in (A.62), der Gleichung für $(\omega_{1K}, \omega_{2K}, \omega_{3K})$ als Abkürzung benutzt wird, folgt aus (A.36) für $|t_1|, |t_2| \ll 1$ mit Gliedern bis zur 2. Ordnung

$$\cos \psi \approx 1 + \left(t_1^2 + t_2^2 \right) / 2. \quad (11.41)$$

Dann liefert (A.62) in linearer bzw. quadratischer Näherung

$$\begin{pmatrix} \omega_{1K} \\ \omega_{2K} \\ \omega_{3K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \Omega + (\psi_2 \dot{\psi}_1 - \psi_1 \dot{\psi}_2) / 2 \end{pmatrix}. \quad (11.42)$$

Mit (11.39) und (11.42) erhält man aus (11.38)

$$E_{kr} = \frac{1}{2} J_a (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2) + \frac{1}{2} J_p \left[\Omega^2 + (\psi_2 \dot{\psi}_1 - \psi_1 \dot{\psi}_2) / 2 \right]^2. \quad (11.43)$$

Dieser Ausdruck wird in der Lagrange-Gleichung (C.25) eingesetzt. (Nach dem Differenzieren streicht man die nichtlinearen Glieder weg.) Übrig bleiben die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} J_a \ddot{\psi}_1 + J_p \dot{\psi}_2 &= M_1, \\ J_a \ddot{\psi}_2 - J_p \Omega \dot{\psi}_1 &= M_2, \end{aligned} \quad (11.44)$$

in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} J_a & 0 \\ 0 & J_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\psi}_1 \\ \ddot{\psi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & J_p \Omega \\ -J_p \Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}. \quad (11.45)$$

Dabei sind M_1 und M_2 die auf die Scheibe wirkenden Momente um e_1^0 bzw. e_2^0 .

11.2.2 Anwendungsbeispiel

Aufgabe: Bild 11-11 zeigt eine fliegend gelagerte flache Kreisscheibe: Masse m , Trägheitsmomente J_a, J_p , Winkelgeschwindigkeit Ω , Länge der Kragwelle l , Biegesteifigkeit EI ; Gewichte und Wellenmasse vernachlässigt.

Gesucht sind die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen.

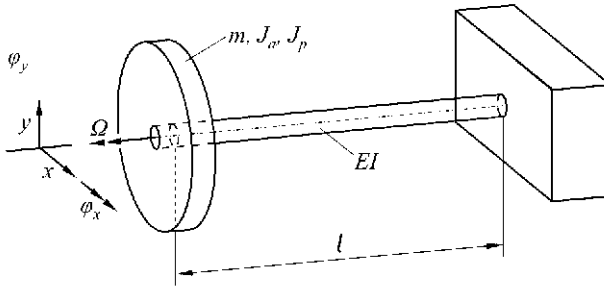


Bild 11-11
Fliegend gelagerte Kreisscheibe

11.2.2.1 Bewegungsgleichungen (Lagrange)

Die kinetische Energie lautet mit den Auslenkungen (x, y) und den Winkeln φ_x, φ_y nach Bild 11-11, vgl. Bild 11-10 und E_{kr} nach (11.43),

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_a (\dot{\varphi}_x^2 + \dot{\varphi}_y^2) + \frac{1}{2} J_p \left[\Omega^2 + (\varphi_y \dot{\varphi}_x - \varphi_x \dot{\varphi}_y) / 2 \right]^2. \quad (11.46)$$

Um das Potential der elastischen Verformung der Welle anzuschreiben, brauchen wir deren Steifigkeitsmatrix, s. Anhang (B.6).

Aus der Kragbalkenformel (B.37) folgen

$$\begin{pmatrix} x \\ -\varphi_y \end{pmatrix} = \frac{l}{6 EI} \begin{pmatrix} 2l^2 & -3l \\ -3l & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ -M_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y \\ \varphi_x \end{pmatrix} = \frac{l}{6 EI} \begin{pmatrix} 2l^2 & 3l \\ 3l & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_y \\ M_x \end{pmatrix}, \quad (11.47)$$

invertiert:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ M_y \end{pmatrix} = \mathbf{K}_1 \begin{pmatrix} x \\ \varphi_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F_y \\ M_x \end{pmatrix} = \mathbf{K}_2 \begin{pmatrix} y \\ \varphi_x \end{pmatrix} \quad (11.48)$$

mit den *Steifigkeitsmatrizen*

$$\mathbf{K}_1 = \frac{2EI}{l^3} \begin{pmatrix} 6 & 3l \\ 3l & 2l^2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} k_{11} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}. \quad (11.49)$$

Dann lautet das Potential der elastischen Wellenbiegung

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ \varphi_y \end{pmatrix}^T \mathbf{K}_1 \begin{pmatrix} x \\ \varphi_y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y \\ \varphi_x \end{pmatrix}^T \mathbf{K}_2 \begin{pmatrix} y \\ \varphi_x \end{pmatrix}. \quad (11.50)$$

Mit den (generalisierten) Koordinaten $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (x, y, \varphi_x, \varphi_y)$ erhält man nach *Lagrange* die vier Bewegungsgleichungen, je zweiter Ordnung,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_{11}x + k_{12}\varphi_y &= 0, \\ m\ddot{y} + k_{11}y - k_{12}\varphi_x &= 0, \\ J_a\ddot{\varphi}_x + J_p\Omega\dot{\varphi}_y - k_{21}y + k_{22}\varphi_x &= 0, \\ J_a\ddot{\varphi}_y - J_p\Omega\dot{\varphi}_x + k_{21}x + k_{22}\varphi_y &= 0. \end{aligned} \quad (11.51)$$

In Matrixschreibweise lauten sie

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \Omega\mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (11.52)$$

mit der *Trägheits-* bzw. der *Steifigkeitsmatrix*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{12} \\ 0 & k_{11} & -k_{12} & 0 \\ 0 & -k_{12} & k_{22} & 0 \\ k_{12} & 0 & 0 & k_{22} \end{pmatrix} \quad (11.53)$$

und der *gyroskopischen Matrix*

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p \\ 0 & 0 & -J_p & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.54)$$

Die *Schief-Symmetrie* der gyroskopischen Matrix,

$$\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T, \quad (11.55)$$

bewirkt (hier in linearer Näherung) den in Abschnitt 11.2.1 erwähnten Kreiseleffekt (s. auch Gl. (11.45)).

11.2.2.2 Komplexe Form der Bewegungsgleichungen

Bei isotropen und isotrop gelagerten Rotoren ist es zweckmäßig, die (Quer-)Auslenkungen komplex zusammenzufassen (vgl. Abschnitt 9.3.4). Erstens halbiert man die Anzahl der Bewegungsgleichungen, zweitens lassen sich kreisförmige Bewegungen leicht deuten.

Multipliziert man die zweite und die vierte Gleichung (11.51) mit $j = \sqrt{-1}$ und addiert sie zur ersten bzw. dritten, so folgen mit

$$\underline{x} := (x + jy), \quad \underline{\varphi} := (\varphi_x + j\varphi_y) \quad (11.56)$$

die beiden komplexen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m \ddot{\underline{x}} + k_{11} \underline{x} - j k_{12} \underline{\varphi} &= 0, \\ J_a \ddot{\underline{\varphi}} - j \Omega J_p \dot{\underline{\varphi}} + k_{22} \underline{\varphi} + j k_{21} \underline{x} &= 0. \end{aligned} \quad (11.57)$$

11.2.2.3 Eigenschwingungen

Mit dem Lösungsansatz

$$(\underline{x}, \underline{\varphi}) = (\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{\varphi}}) e^{j\omega t} \quad (11.58)$$

folgt aus (11.57) das Eigenwertproblem

$$\begin{pmatrix} k_{11} - m\omega^2 & -jk_{12} \\ jk_{21} & k_{22} + \Omega J_p \omega - J_a \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\underline{x}} \\ \hat{\underline{\varphi}} \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (11.59)$$

mit der Frequenz ω als Parameter. Die Frequenzgleichung – die Koeffizientendeterminante muss verschwinden! – lautet (mit $k_{12} = k_{21}$, vgl. (11.49))

$$(k_{11} - m\omega^2)(k_{22} + \Omega J_p \omega - J_a \omega^2) = k_{12}^2, \quad (11.60)$$

ausmultipliziert:

$$f(\omega) := m J_a \omega^4 - \Omega m J_p \omega^3 - (m k_{22} + J_a k_{11}) \omega^2 + \Omega k_{11} J_p \omega + (k_{11} k_{22} - k_{12}^2) = 0. \quad (11.61)$$

(Wir benutzen $f(\omega)$ unten als Abkürzung.)

11.2.2.4 Diskussion der Eigenlösungen

Die formelmäßige Lösung dieser Gleichung vierten Grades ist zur Diskussion der Wurzeln nicht geeignet. Deshalb dividieren wir (11.60) durch $m J_a$ und erhalten mit den Hilfsfunktionen

$$g_1(\omega) := \left(\frac{k_{11}}{m} - \omega^2 \right), \quad g_2(\omega) := \left(\frac{k_{22}}{J_a} + \Omega \frac{J_p}{J_a} \omega - \omega^2 \right) \quad (11.62)$$

und

$$g(\omega) := g_1(\omega) \cdot g_2(\omega), \quad g(0) = \frac{k_{11} k_{22}}{m J_a} > \frac{k_{12}^2}{m J_a} \quad (11.63)$$

an Stelle von (11.60)

$$g(\omega) = \frac{k_{12}^2}{m J_a}. \quad (11.64)$$

Die Hilfsfunktionen $g_1(\omega)$, $g_2(\omega)$ haben die Nullstellen

$$g_1(\omega): \omega_I = -\sqrt{\frac{k_{11}}{m}}, \quad \omega_{II} = \sqrt{\frac{k_{11}}{m}}, \quad (11.65)$$

$$g_2(\omega): \omega_{III} = \frac{-\sqrt{(\Omega J_p)^2 + 4k_{22} J_a + \Omega J_p}}{2 J_a},$$

$$\omega_{IV} = \frac{\sqrt{(\Omega J_p)^2 + 4k_{22} J_a + \Omega J_p}}{2 J_a}. \quad (11.66)$$

Bild 11-12 zeigt (zu angenommenen Zahlenwerten) die Funktionsverläufe $g_1(\omega)$, $g_2(\omega)$ und $g(\omega)$ mit den eingetragenen Nullstellen $\omega_I, \dots, \omega_{IV}$. Die Eigenfrequenzen ω_k liest man als Schnittstellen von $g(\omega)$ mit der horizontalen Geraden $k_{12}^2/(m J_a)$ ab, vgl. (11.64) und das Bild.

Man sieht: Wegen (11.63)₂ gibt es stets zwei negative Eigenfrequenzen: ω_1, ω_2 und zwei positive: ω_3, ω_4 . Aus Diagrammen der Art von Bild 11-12 liest man für den allgemeinen Fall für die Größe nach geordneten Eigenfrequenzen ω_k ab:

$$\omega_1 < \min(\omega_I, \omega_{III}), \quad \max(\omega_I, \omega_{III}) < \omega_2 < 0,$$

$$0 < \omega_3 < \min(\omega_{II}, \omega_{IV}), \quad \max(\omega_{II}, \omega_{IV}) < \omega_4. \quad (11.67)$$

Zu den Eigenfrequenzen ω_k erhält man aus (11.58) mit (11.59) die Eigenschwingungen:

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{\varphi} \end{pmatrix}_k = \underline{C}_k^1 \begin{pmatrix} j k_{12} \\ m g_1(\omega_k) \end{pmatrix} e^{j\omega_k t} = \underline{C}_k^2 \begin{pmatrix} J_a g_2(\omega_k) \\ -j k_{12} \end{pmatrix} e^{j\omega_k t}. \quad (11.68)$$

Dabei stehen $\underline{C}_k^{1/2}$ als komplexe Konstanten (Zeiger, vgl. Abschnitt 1.2.2); bei $\underline{C}_k^1$ wird mit der oberen Zeile von (11.68) und der Abkürzung $g_1(\omega)$ gearbeitet, bei $\underline{C}_k^2$ mit der unteren Zeile und $g_2(\omega)$.

Bild 11-13a, b zeigen jeweils komplexe $\underline{x}$ - bzw. $\underline{\varphi}$ -Ebenen mit angenommenen Konstanten $\underline{C}_k^1$ zu positiven ω_k und $g_1(\omega_k) > 0$ bzw. $g_1(\omega_k) < 0$, vgl. Bild 11-12. Für die Drehzeiger $\underline{x}(t)$ und $\underline{\varphi}(t)$ gilt

$$\underline{x}(t) = \hat{x} e^{j(\omega_k t + \alpha_k \pm \pi/2)}, \quad \underline{\varphi}(t) = \hat{\varphi} e^{j(\omega_k t - \alpha_k)}, \quad (11.69)$$

wo

$$\hat{x} = k_{12} \cdot |\underline{C}_k^1|, \quad \hat{\varphi} = m g_1(\omega_k) \cdot |\underline{C}_k^1|, \quad \alpha_k = \arg(\underline{C}_k^1 g_1). \quad (11.70)$$

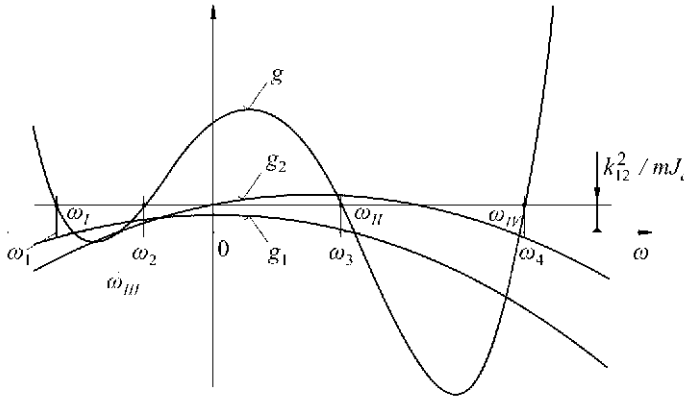


Bild 11-12

Lage der Eigenfrequenzen

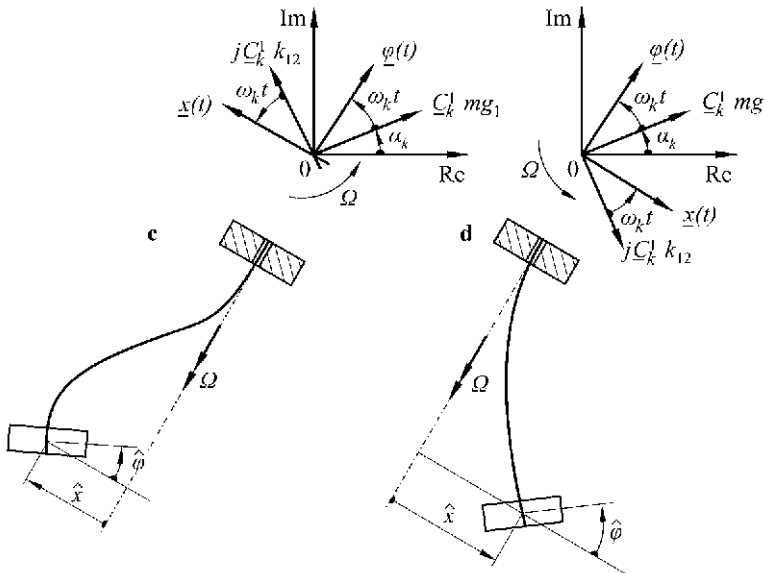
a $g_1(\omega_k) > 0$ b $g_1(\omega_k) < 0$ 

Bild 11-13

Umlaufende Eigenschwingungen

 $(\underline{x}, \varphi)_k$. Momentaufnahme zur Zeit t für $g_a(\omega_k) > 0$,

 Teile a, c, und für $g_a(\omega_k) < 0$, Teile b, d; a, b komplexe Zeiger; c, d in die Bildebene geklappte Biegelinien (nicht maßstäblich)

Bei positiver Eigenfrequenz ω_k laufen die Zeiger und damit die auf der gebogenen Welle sitzende Scheibe auf Kreisen im Drehsinn von Ω um, bei negativem ω_k dagegen (man spricht von Gleich- bzw. Gegenlauf). Die Biegelinie der Welle bleibt in der Ebene, die durch das umlaufende $\underline{x}(t)$ und die gerade Ausgangsachse aufgespannt wird, vgl. Bild 11-13c, d.

Da $\Omega = \omega_k$ nur als Sonderfall gilt, wird bei einer Eigenschwingung die Welle fortdauernd gebogen oder "gewalkt". (Eine innere Dämpfung der Welle wirkt sich dabei umso stärker aus, je größer $|\Omega - \omega_k|$ ist.)

11.2.2.5 Drehzahlabhängigkeit der Eigenfrequenzen

Wegen der Kreiselglieder $\Omega J_p \dots$ in den Bewegungsgleichungen (11.51) bzw. der Frequenzgleichung (11.61) hängen die Eigenfrequenzen ω_k bei $J_p > 0$ deutlich von der Drehgeschwindigkeit ab. Um einen Überblick über die Zusammenhänge zu gewinnen, berechnen wir $\omega_k(\Omega)$ zu gewählten Rotorparametern numerisch:

Habe die Scheibe mit der Masse m den Radius R . Dann gelten

$$J_p = 0.5 m R^2 \text{ und } J_a = \Theta_r \cdot J_p, \quad (11.71)$$

wo $\Theta_r \approx 0.5$ für eine sehr flache Scheibe und $\Theta_r > 0.5$ für eine breitere gilt. (In der Kreiseltheorie spricht man bei $\Theta_r < 1$ von einem abgeplatteten, bei $\Theta_r > 1$ von einem gestreckten Kreisel.

Als Referenzsystem für eine dimensionslose Form der Frequenzgleichung gelte der Kragbalken nach Bild 11-11 mit einer Punkt-Endmasse m (an Stelle der Scheibe).

Für seine Eigenfrequenz gilt

$$\omega_R = \sqrt{\frac{k_R}{m}} \text{ mit } k_R = \frac{3EI}{l^3}. \quad (11.72)$$

Mit

$$\begin{aligned} \omega &= \tilde{\omega} \omega_R, \quad \Omega = \tilde{\Omega} \omega_R, \quad R = \tilde{R} \cdot l, \\ \tilde{k}_{11} &= k_{11}/k_R = 4, \quad \tilde{k}_{12} = k_{12}/k_R = 2l, \quad \tilde{k}_{22} = k_{22}/k_R = 4l^2/3 \end{aligned} \quad (11.73)$$

folgt aus (11.61) – nach Multiplikation mit 6 – die dimensionslose Frequenzgleichung

$$3\Theta_r \tilde{R}^2 \tilde{\omega}^4 - 3\tilde{R}^2 \tilde{\Omega} \tilde{\omega}^3 - (8 + 12\Theta_r \tilde{R}^2) \tilde{\omega}^2 + 12\tilde{R}^2 \tilde{\Omega} \tilde{\omega} + 8 = 0. \quad (11.74)$$

Bild 11-14 zeigt die numerisch gewonnenen Eigenfrequenzverläufe $\tilde{\omega}_k(\tilde{\Omega})$ zu den in der Legende genannten Parametern. Bei $\tilde{\Omega} = 0$, also ohne Kreiselwirkung, gelten

$$\tilde{\omega}_1(0) = -\tilde{\omega}_4(0), \quad \tilde{\omega}_2(0) = -\tilde{\omega}_3(0). \quad (11.75)$$

Mit zunehmenden $\tilde{\Omega}$ ändern sich die Eigenfrequenzen – durch die Richtwirkungen von $J_p \Omega$ – in charakteristischer Weise: $\tilde{\omega}_1$ und $\tilde{\omega}_2$ nehmen – dem Betrage nach – ab, $\tilde{\omega}_3$ wächst schwach, $\tilde{\omega}_4$ ist bei größerem $\tilde{\Omega}$ an $\tilde{\Omega}$ gebunden, bei $\Theta_r = 2/3$ gilt $\tilde{\omega}_4 > \tilde{\Omega}$, bei $\Theta_r = 3/2$ bleibt $\tilde{\omega}_4 < \tilde{\Omega}$.

11.2.2.6 Das asymptotische Verhalten der Eigenfrequenzen für große Drehgeschwindigkeiten

Das Verhalten der Eigenfrequenzen $\tilde{\omega}_k(\tilde{\Omega})$ für $\tilde{\Omega} \rightarrow \infty$ kann man aus den Bewegungsgleichungen (11.52), (11.57) oder der Frequenzgleichung (11.74) oft verhältnismäßig einfach ermitteln. Die gewonnenen Zahlen bieten Orientierungshilfen, auch bei umfangreicheren numerischen Studien komplexer Systeme.

Wir zeigen das Vorgehen anhand der Frequenzgleichung und weisen auf das Arbeiten mit den Bewegungsgleichungen (11.52) nur hin.

Ein Blick auf den Verlauf von $\tilde{\omega}_2(\tilde{\Omega})$ legt für $\tilde{\Omega} \gg 1$ den Ansatz

$$\tilde{\omega}_2 = \alpha_2 / \tilde{\Omega} \quad (11.76)$$

nahe.

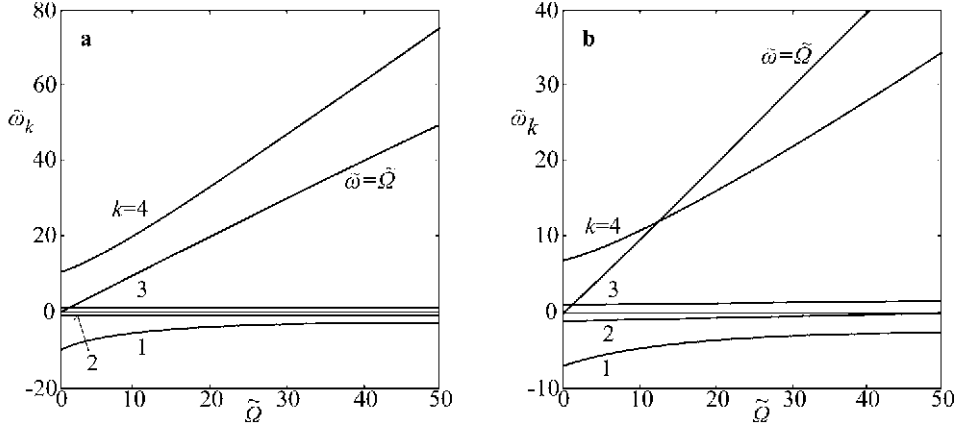


Bild 11-14: Eigenfrequenzen $\tilde{\omega}_k$ zu $\tilde{R} = 0.2$ und a $\Theta_r = 2/3$, b $\Theta_r = 3/2$

Einsetzen von (11.76) in (11.74) liefert für $\alpha_2(\tilde{\Omega})$ nach Umstellung die Gleichung

$$12 \tilde{R}^2 \alpha_2 = -8 + (8 + 12 \Theta_r \tilde{R}^2) \alpha_2^2 / \tilde{\Omega}^2 + 3 \tilde{R}^2 \alpha_2^3 / \tilde{\Omega}^2 - 3 \Theta_r \tilde{R}^2 \alpha_2^4 / \tilde{\Omega}^4. \quad (11.77)$$

In erster Näherung folgt aus (11.77), vgl. Aufgabe 11-10,

$$\tilde{\omega}_2 = -\frac{2}{3 \tilde{R}^2 \tilde{\Omega}}. \quad (11.78)$$

Bei $\tilde{\omega}_{1,3}(\tilde{\Omega})$ gilt sicherlich $|\tilde{\omega}| \ll \tilde{\Omega}$. Division von (11.74) durch $\tilde{\Omega}$ liefert nach Umstellung

$$(3 \tilde{R}^2 \tilde{\omega}^2 - 12 \tilde{R}^2) = [3 \Theta_r \tilde{R}^2 \tilde{\omega}^4 - (8 + 12 \Theta_r \tilde{R}^2) \tilde{\omega}^2 + 8] / (\tilde{\Omega} \tilde{\omega}). \quad (11.79)$$

In erster Näherung folgen aus (11.79), vgl. Aufgabe 11-10/Aufgabe 11-11,

$$\tilde{\omega}_1 = -2, \quad \tilde{\omega}_3 = 2. \quad (11.80)$$

Bei $\tilde{\omega}_4(\tilde{\Omega})$ setzen wir an

$$\tilde{\omega}_4 = \alpha_4 \tilde{\Omega} \quad (11.81)$$

und erhalten aus (11.74) nach Umstellung

$$\left(3 \Theta_r \tilde{R}^2 \alpha_4 - 3 \tilde{R}^2\right) = \left(8 + 12 \Theta_r \tilde{R}^2\right) / \left(\alpha_4 \tilde{\Omega}^2\right) - 12 \tilde{R}^2 / \left(\alpha_4 \tilde{\Omega}\right)^2 - 8 / \tilde{\Omega}^4. \quad (11.82)$$

Daraus folgt in erster Näherung, vgl. Aufgabe 11-10,

$$\tilde{\omega}_4 = \tilde{\Omega} / \Theta_r. \quad (11.83)$$

11.2.2.7 Erzwungene Schwingungen

Enthält die fliegend gelagerte Scheibe nach Bild 11-11 eine Unwucht mit der Exzentrizität r_u , vgl. Bild 9-5, sei jedoch gerade auf die Welle aufgesetzt, kommen in den Bewegungsgleichungen (11.52) die Fliehkraftterme wie in (9.43) hin (vgl. Aufgabe 11-12):

$$\begin{aligned} m \ddot{x} + k_{11} x + k_{12} \varphi_y &= m r_u \Omega^2 \cos \Omega t, \\ m \ddot{y} + k_{11} y - k_{12} \varphi_x &= m r_u \Omega^2 \sin \Omega t, \\ J_a \ddot{\varphi}_x + J_p \Omega \dot{\varphi}_y - k_{21} y + k_{22} \varphi_x &= 0, \\ J_a \ddot{\varphi}_y + J_p \Omega \dot{\varphi}_x - k_{21} x + k_{22} \varphi_y &= 0. \end{aligned} \quad (11.84)$$

In komplexer Form, vgl. (11.56), (11.57), lauten sie

$$\begin{aligned} m \ddot{\underline{x}} + k_{11} \underline{x} - j k_{12} \underline{\varphi} &= m r_u \Omega^2 e^{j\Omega t}, \\ J_a \ddot{\underline{\varphi}} - j \Omega J_p \dot{\underline{\varphi}} + k_{22} \underline{\varphi} + j k_{21} \underline{x} &= 0. \end{aligned} \quad (11.85)$$

Mit dem Lösungsansatz

$$(\underline{x}, \underline{\varphi}) = (\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{\varphi}}) e^{j\Omega t} \quad (11.86)$$

folgen aus (11.85) und der Frequenzfunktion $f(\omega)$ nach (11.61)

$$(\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{\varphi}}) = \frac{m r_u \Omega^2}{f(\Omega)} \left(k_{22} + \Omega^2 (J_p - J_a), -j k_{12} \right). \quad (11.87)$$

Die Zeiger $\hat{\underline{x}}$ und $\hat{\underline{\varphi}}$ laufen mit dem Rotor "eingefroren" um.

Resonanzen treten an den Nullstellen des Nenners auf. Der verschwindet bei den Eigenfrequenzen ω_k . Da $\Omega > 0$ gilt, kommen nach Bild 11-14 nur die Resonanzzahlen

$$\Omega = \omega_3 \text{ und } \Omega = \omega_4 \quad (11.88)$$

in Frage.

Bei $\Theta_{rel} < 1$ liegt jedoch $\tilde{\omega}_4(\tilde{\Omega})$ oberhalb $\tilde{\Omega}$, vgl. die Gerade $\tilde{\omega} = \tilde{\Omega}$ in Bild 11-14a und Gleichung (11.83); in diesem Fall gibt es nur die Resonanzstelle $\Omega = \omega_3$.

Bei $\Theta_{rel} > 1$ gibt es einen Schnittpunkt von $\tilde{\omega}_4(\tilde{\Omega})$ und $\tilde{\omega} = \tilde{\Omega}$, vgl. Bild 11-14b, beide Resonanzstellen (11.88) sind möglich.

11.2.3 Reelle Form der Kreisel-Bewegungsgleichungen

Der Übergang von den (reellen) Bewegungsgleichungen (11.52) ff. zu den komplexen Gleichungen (11.57) bringt uns bei isotropen und isotrop gelagerten Rotoren Vorteile.

Im allgemeinen Fall symmetrischer *Trägheits-* und *Steifigkeitsmatrizen* $\mathbf{M}$ bzw. $\mathbf{K}$ und schiefsymmetrischer *gyroskopischer Matrix* $\mathbf{G}$ nach (11.54), (11.55) muss man mit (11.53) arbeiten.

Für die *Eigenschwingungen* erhält man, vgl. Abschnitt 10.4.2, mit dem Ansatz (10.40), d. h. $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} \exp(\lambda t)$, das Eigenwertproblem

$$\left(\mathbf{M} \lambda^2 + \Omega \mathbf{G} \lambda + \mathbf{K} \right) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (11.89)$$

und daraus die *charakteristische Gleichung*

$$\Delta(\lambda) = 0, \text{ wo } \Delta(\lambda) := \det(\mathbf{M} \lambda^2 + \Omega \mathbf{G} \lambda + \mathbf{K}). \quad (11.90)$$

Solange das System (11.53) keine Dämpfung enthält, sind die Lösungen λ_k von (11.90)₁ rein imaginär:

$$\lambda_k = j \omega_k, \quad (11.91)$$

vgl. das Anwendungsbeispiel in Abschnitt 10.2. Um das zu zeigen, ersetzen wir (11.53) durch das Dgl-System erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega \mathbf{G} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}, \quad (11.92)$$

abgekürzt:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad (11.93)$$

wo

$$\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}, \mathbf{B}^\top = -\mathbf{B}, \quad \det \mathbf{A} \neq 0, \quad \det \mathbf{B} \neq 0. \quad (11.94)$$

Dem Eigenwertproblem (11.89) entspricht

$$(\mathbf{A} \lambda - \mathbf{B}) \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (11.95)$$

Sei $(\lambda_k, \hat{\mathbf{u}}_k)$ eine Eigenlösung von (11.95). Dann gilt

$$\lambda_k \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_k = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_k. \quad (11.96)$$

Multiplikation von links mit $\hat{\mathbf{u}}^* := \overline{\hat{\mathbf{u}}}^\top$ liefert

$$\lambda_k a_h = b_k, \quad \text{wo } a_h := \hat{\mathbf{u}}_k^* \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}, \quad b_k := \hat{\mathbf{u}}_k^* \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_k. \quad (11.97)$$

Transponiert man die rechten Seiten von a_k, b_k und geht danach zum konjugiert komplexen Ausdruck über, $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind reell, folgt wegen (11.94)_{1,2}

$$\bar{a}_k = a_k, \quad \bar{b}_k = -b_k. \quad (11.98)$$

Demnach ist a_k reell und b_k rein imaginär, und aus (11.97)₁ folgt

$$\lambda_k = j \omega_k. \quad (11.99)$$

Die Eigenvektoren $\hat{\mathbf{u}}_k$ sind komplex, s. Aufgabe 11-11.

Sei $(\lambda_i, \hat{\mathbf{u}}_i)$, neben $(\lambda_k, \hat{\mathbf{u}}_k)$, eine zweite Eigenlösung von (11.95). Wir multiplizieren (11.96) von links mit $\hat{\mathbf{u}}_i^*$ und die (11.96) entsprechende Gleichung mit $\hat{\mathbf{u}}_k^*$:

$$\lambda_k \hat{\mathbf{u}}_i^* \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_k = \hat{\mathbf{u}}_i^* \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_k, \quad \lambda_i \hat{\mathbf{u}}_k^* \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{u}}_k^* \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_i. \quad (11.100)$$

Transposition und komplexe Konjugation des rechten Ausdrucks liefert

$$\bar{\lambda}_i \hat{\mathbf{u}}_i^* \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_k = -\hat{\mathbf{u}}_i^* \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}_k. \quad (11.101)$$

Addiert man (11.100)₁ und (11.101), so folgt

$$(\lambda_k + \bar{\lambda}_i) \hat{\mathbf{u}}_i^* \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_k = 0 \quad \text{bzw.} \quad (\omega_k - \omega_i) \hat{\mathbf{u}}_i^* \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_k, \quad (11.102)$$

letzteres wegen (11.99).

Demnach gilt: Im Sinne des komplexwertigen Skalarprodukts

$$(\hat{\mathbf{u}}_i, \hat{\mathbf{u}}_k)_A := \hat{\mathbf{U}}_i^* \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}_k \quad (11.103)$$

sind die zu zwei verschiedenen Eigenfrequenzen $\omega_i \neq \omega_k$ gehörenden Eigenvektoren orthogonal:

$$\hat{\mathbf{u}}_i \perp \hat{\mathbf{u}}_k, \quad \text{falls } \omega_i \neq \omega_k; \quad (11.104)$$

s. Aufgabe 11.16.

11.3 Aufgaben

Aufgabe 11-1: Kontrollieren Sie die Gültigkeit von (11.11) für den Fall identischer Lagerböcke.

Aufgabe 11-2: Deuten und diskutieren Sie die mit (11.24) und (11.25) gewählten Parameter. Stellen Sie Überlegungen für Variationen an.

Aufgabe 11-3: Habe die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_N$ in (11.25)₂ die Eigenlösungen $(\kappa_i, \mathbf{k}_i)$ mit

$$\mathbf{K}_N \mathbf{k}_i = \kappa_i \mathbf{k}_i. \quad (11.105)$$

Zeigen Sie: Wegen des speziellen Aufbaus der Bewegungsgleichungen (11.9) ff. liegen für $h > 0$ und ohne Dämpfungen die Eigenschwingungen jeweils in der k_1 - oder k_2 -Ebene; vgl. Bild 11-4. Kann man dies ausnutzen, um die Lösung des Eigenwertproblems zu vereinfachen?

Aufgabe 11-4: Zeigen Sie für den Fall isotroper Lagerung (Fall $h = 0$ in Tabelle 11-1), dass die Eigenschwingungen zur jeweils gleichen Frequenz so zusammengesetzt werden können, dass die Punkte S, A, B von Scheibe bzw. Lagern auf Ellipsen in oder gegen die Wellendrehrichtung umlaufen.

Aufgabe 11-5: Kontrollieren Sie den Umlaufsinn der Punkte S, A, B in Bild 11-5 anhand der Eigenlösungen $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ aus Tabelle 11-2.

Aufgabe 11-6: Sei in (11.38) – abweichend von (11.39) – der Körper unrund, $J_{11} \neq J_{22}$. Schreiben Sie für diesen Fall die (11.44), (11.45) entsprechenden linearen Bewegungsgleichungen an, die mit $\varphi = \Omega t$, vgl. (11.34), explizit mit der Periode $T = \pi/\Omega$ von der Zeit abhängen.

Aufgabe 11-7: Kontrollieren Sie die Gleichung (11.47), insbesondere im Hinblick auf die Vorzeichen von φ_x und M_x .

Aufgabe 11-8: Will man in (11.47)₁ und (11.48)₂ die negativen Vorzeichen in $(x, -\varphi_y)$, $(F_x, -M_y)$ vermeiden und mit (x, φ_y) , (F_x, M_y) arbeiten, muss man in (11.48)₂ die Steifigkeitsmatrix entsprechend abändern, zum Beispiel $K_1 = K$ in (11.48)₁ von K_2 in (11.48)₂ unterscheiden und dann das Potential U parallel zu (11.50) ansetzen. Ermitteln Sie auf solche Weise die Bewegungsgleichungen (11.51).

Aufgabe 11-9: Statt beim Übergang von (11.51) zu (11.56) zu addieren, kann man auch subtrahieren, dann die Lösung parallel zu (11.58) mit einem rechtsdrehenden Zeiger ansetzen, alle Überlegungen gewissermaßen "spiegelbildlich" abhandeln. Erhält man auf diese Weise anders ablaufende Eigenschwingung?

Aufgabe 11-10: Drücken Sie in (11.70) die Konstante $\underline{C}_k^1$ durch $\underline{C}_k^2$ aus.

Aufgabe 11-11: Die fliegend gelagerte Kreisscheibe nach Bild 11-11 hat offensichtlich den Freiheitsgrad vier, vgl. die Bewegungsgleichungen (11.51). Dann muss man *acht* Anfangsbedingungen für $x(0), y(0), \varphi_x(0), \varphi_y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{\varphi}_x(0), \dot{\varphi}_y(0)$ vorgeben. Setzen Sie mit den *vier* komplexen Eigenschwingungen nach (11.59) die entsprechende (allgemeine) Lösung an.

Aufgabe 11-12: Löst man die Bewegungsgleichungen (11.51) direkt, also nicht über (11.56) usw. komplex, so erhält man *acht* Eigenlösungen. Wie hängen diese mit den komplexen zusammen (vgl. Aufgabe 11-11)?

Aufgabe 11-13: Man kann die beiden Biegeformen nach Bild 11-13a, c und Bild 11-13b, d dadurch unterscheiden, dass die Subtangente s_t der Biegelinie auf der vom Lager abgewandten Seite der Scheibe liegt, $s_t > 0$, bzw. auf der dem Lager zugewandten Seite, $s_t < 0$.

Schreiben Sie für die Eigenschwingungen (11.68) eine Formel für $s_t(\omega_k)$ an, vgl. Bild 11-15.

Aufgabe 11-14: Zeigen Sie für die fliegend gelagerte Kreisscheibe nach Bild 11-11, dass es zu Gleich- und Gegenlauf jeweils die Eigenschwingungen mit positiver und negativer Subtangente gibt.

Aufgabe 11-15: Ergänzen Sie die Frequenzverläufe $\tilde{\omega}_k(\tilde{\Omega})$ nach Bild 11-14 für negative $\tilde{\Omega}$, also für das Intervall $-50 \leq \tilde{\Omega} \leq 0$.

Aufgabe 11-16: Ermitteln Sie durch Rekursionen höhere Näherungen für die asymptotischen Entwicklungen (11.77), (11.79), (11.82) und erhehlen damit die Kurvenverläufe in Bild 11-14.

Aufgabe 11-17: Zeigen Sie, dass die asymptotischen Eigenfrequenzen $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ in (11.80) dadurch entstehen, dass der Drall $J_p \Omega$ wie eine Parallelführung, oder Winkeleinspannung, des freien Wellenendes wirkt.

Aufgabe 11-18: Ergänzen Sie die kinetische Energie nach (11.47) um Unwuchtterme und stellen sodann die Bewegungsgleichungen (11.84) nach Lagrange auf.

Aufgabe 11-19: Wie ändern sich die auf Gl. (11.87) folgenden Resonanzaussagen bei Umkehr der Drehrichtung (vgl. Aufgabe 11-9)?

Aufgabe 11-20: Kontrollieren Sie die Aussage $(11.97)_{2,3} \rightarrow (11.98)_{1,2}$.

Aufgabe 11-21: Sei von der Eigenlösung $(\lambda_k, \hat{x}_k) = (j\omega_k, \hat{x}_k)$ der Realteil $\hat{x}_{kR} := \operatorname{Re} \hat{x}_k$ bekannt. Ermitteln Sie aus (11.89) oder (11.96) den Imaginärteil $\hat{x}_{kI} := \operatorname{Im} \hat{x}_k$.

Aufgabe 11-22: Untersuchen Sie die Orthogonalität der Eigenlösungen des Beispiels 11.2.2 im Sinne des Skalarprodukts (11.103). (Können Sie dazu geometrisch anschauliche Deutungen entwickeln?)

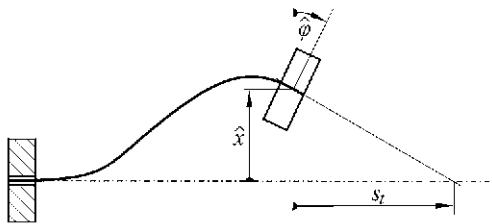


Bild 11-15
Subtangente: $\hat{x} = \hat{\phi} \cdot s_t$

12 Dreh- und Torsionsschwingungen

Wir benutzen *Drehschwingungen* und *Torsionsschwingungen* in der Regel synonym. Bei einer ungleichförmig drehenden Windmühle wird man jedoch von Drehschwingungen sprechen, während man *Torsionsschwingungen* vorzieht, wenn bei dem Vorgang eine Welle tor-

diert (*verwunden, verdreht*) wird. Auch bei Kolbenmaschinen spricht man von Dreh- oder Torsionsschwingungen, wobei die Kurbelwelle in sehr verwickelter Weise verbogen und verwunden wird, was man unter einer *Torsion* näherungsweise (!) zusammenfasst. Bei einem Verbrennungsmotor kann ein *Zylinder* – die dazugehörigen beweglichen Teile – unter Umständen gegen den anderen *Zylinder* schwingen. Die Abweichungen der Bewegungen des Kolbens, des Pleuels vom regelmäßigen Lauf infolge der Drehschwingungen "ihres" Kurbelzapfens werden dann einfach als Drehschwingungen gesehen.

12.1 Aufgabenstellung, Symbole

Drehschwingungen treten bei vielen Maschinen auf. Bild 12-1 zeigt einen Motor, der über eine (längere) Welle eine Kreiselpumpe antreibt. Hier kann der Anker des Motors gegen den Lauf der Pumpe schwingen, die Welle wirkt als Torsionsstab (*Drehfeder*).

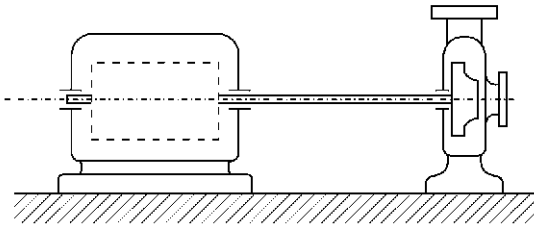


Bild 12-1
Pumpensatz

Wenn man genauer hinguckt, sieht man, dass die Drehschwingungen des Ankers auch mit der *Elektrik* des Motors verknüpft sind. Wir gehen darauf nicht ein und lassen diese Wechselwirkungen außer Acht. Ähnlich – fast noch verwickelter – sieht es beim Pumpenläufer aus: Drehschwingungen des Läufers ändern die Anströmwinkel, die gepumpte Flüssigkeit schwingt mit usw. Auch diese Effekte bleiben unbeachtet.

Zur Untersuchung der Drehschwingungen eines solchen Maschinensatzes zeichnet man dann ein Ersatzsystem nach Bild 12-2a oder b.

Dabei steht J für eine Drehträgheit (Massenmoment) und k_T für eine Torsionssteifigkeit.

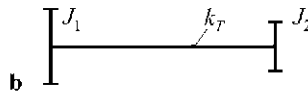
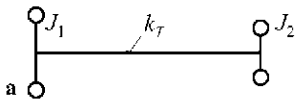


Bild 12-2
Schematische Darstellungen von
Drehschwingern

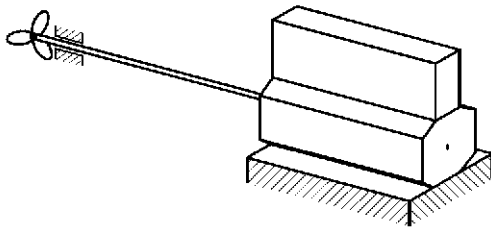


Bild 12-3
Schiffsantrieb

Beachtet man beim Schiffsantrieb nach Bild 12-3 nur die Verformungen der Propellerwelle, so erhält man wieder ein Modell nach Bild 12-2, wobei J_1 die Drehträgheit des Propellers (evtl. mit einem *Wasserzuschlag*) und J_2 die des Motors bezeichnet. Berücksichtigt man dagegen die Verformbarkeit der Kurbelwelle – und das muss man tun, wenn hohe Erregerfrequenzen vorliegen –, so erhält man ein Ersatzsystem nach Bild 12-4 (6-Zylinder-Motor).

Enthält das Aggregat ein Getriebe, so gilt im einfachen Fall ein Ersatzsystem nach Bild 12-5, wobei zunächst offen bleibt, ob die Drehträgheiten der Zahnräder beachtet werden oder nicht.

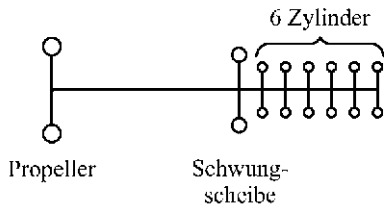


Bild 12-4
Ersatzsystem für Schiffsantrieb mit 6-Zylinder-Motor

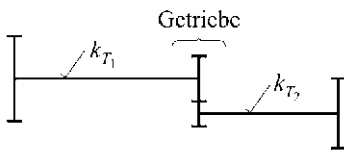


Bild 12-5
Drehschwinger mit Getriebe

12.2 Drehschwingungen eines Systems mit einer Übersetzung

Aufgabe: Das Drehschwingungssystem nach Bild 12-6 besteht aus zwei Drehmassen J_1, J_4 , zwei (Torsions-)Wellen mit den Steifigkeiten k_{T1}, k_{T2} und einem Zahnradgetriebe, dessen Räder die (Teilkreis-)Radien r_2, r_3 haben. (Die Drehträgheiten der Zahnräder werden hier vernachlässigt.)

Gesucht werden die Eigenfrequenzen und die Eigenschwingungsformen (der freien ungedämpften Schwingungen) des Systems.

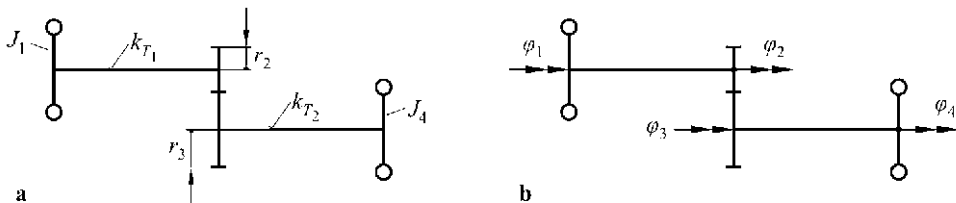


Bild 12-6: Drehschwingungssystem. a Ersatzsystem, b Drehwinkel

Lösung:

12.2.1 Aufstellen der Bewegungsgleichungen nach Lagrange (s. Abschnitt C.2.3)

Koordinaten

Wir führen an den vier Wellenendpunkten i die Drehwinkel φ_i ein, vgl. Bild 12-6b. Der Systematik halber erhalten alle φ_i die gleiche Drehrichtung als positiv. (Der Doppelpfeil steht für eine Drehung im Sinne einer Rechtsschraube.) Bei $\varphi_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$ sind die Wellen momentenfrei.

Übersetzung

Am Getriebe gelten die Übersetzungsverhältnisse

$$i_{2/3} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3} \text{ oder } i_{3/2} = \frac{\varphi_3}{\varphi_2}, \quad (12.1)$$

$$i_{2/3} = 1/i_{3/2}. \quad (12.2)$$

Löst man (12.1) nach φ_2 bzw. φ_3 auf, erhält man

$$\varphi_2 = i_{2/3} \varphi_3 \text{ und } \varphi_3 = i_{3/2} \varphi_2. \quad (12.3)$$

Mit den Radien r_2 und r_3 aus Bild 12-6 gelten

$$i_{2/3} = -\frac{r_3}{r_2}, \quad i_{3/2} = -\frac{r_2}{r_3}. \quad (12.4)$$

(Natürlich kann man statt r_2 , r_3 die Zähnezahlen z_2 bzw. z_3 setzen.)

Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_4 \dot{\varphi}_4^2. \quad (12.5)$$

Potentielle Energie

$$U = \frac{1}{2} k_{T1} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} k_{T2} (\varphi_4 - \varphi_3)^2. \quad (12.6)$$

Wir eliminieren sofort φ_3 mit Hilfe von (12.3)

$$U = \frac{1}{2} k_{T1} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} k_{T2} (\varphi_4 - \varphi_2 i_{3/2})^2. \quad (12.7)$$

(Hier muss natürlich später $i_{3/2} = -r_2/r_3$ gesetzt werden.)

Lagrangesche Gleichungen

Nachdem aus (12.6) φ_3 eliminiert ist, lauten die generalisierten Koordinaten:

$$q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2, q_3 = \varphi_4. \quad (12.8)$$

Man erhält aus $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0$

$$\text{für } q_1: \quad J_1 \ddot{\varphi}_1 + k_{T_1} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad (12.9)$$

$$\text{für } q_2: \quad k_{T_1} (\varphi_2 - \varphi_1) - i_{3/2} k_{T_2} (\varphi_4 - \varphi_2 i_{3/2}) = 0, \quad (12.10)$$

$$\text{für } q_3: \quad J_4 \ddot{\varphi}_4 + k_{T_2} (\varphi_4 - \varphi_2 i_{3/2}) = 0. \quad (12.11)$$

Mit (12.9), (12.10), (12.11) liegen drei Gleichungen für die drei Unbekannten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ vor. Die Gleichungen (12.9) und (12.11) sind Differentialgleichungen, Gleichung (12.10) ist eine algebraische Gleichung (*Momentengleichgewicht am Getriebe*). Aus (12.10) folgt

$$\left(k_{T_1} + i_{3/2}^2 k_{T_2} \right) \varphi_2 - k_{T_1} \varphi_1 + i_{3/2} k_{T_2} \varphi_4 = 0, \quad (12.12)$$

und damit aus (12.9), (12.11)

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + k_{T_1} \left(1 - \frac{k_{T_1}}{k_{T_1} + i_{3/2}^2 k_{T_2}} \right) \varphi_1 - \frac{i_{3/2} k_{T_1} k_{T_2}}{k_{T_1} + i_{3/2}^2 k_{T_2}} \varphi_4 &= 0, \\ J_4 \ddot{\varphi}_4 - \frac{i_{3/2} k_{T_1} k_{T_2}}{k_{T_1} + i_{3/2}^2 k_{T_2}} \varphi_1 + k_{T_2} \left(1 - \frac{i_{3/2}^2 k_{T_2}}{k_{T_1} + i_{3/2}^2 k_{T_2}} \right) \varphi_4 &= 0, \end{aligned}$$

zusammengefasst:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + \frac{i_{3/2}^2 k_{T_1} k_{T_2}}{k_{T_1} + i_{3/2}^2 k_{T_2}} \varphi_1 - \frac{i_{3/2} k_{T_1} k_{T_2}}{k_{T_1} + i_{3/2}^2 k_{T_2}} \varphi_4 &= 0, \\ J_4 \ddot{\varphi}_4 - \frac{i_{3/2} k_{T_1} k_{T_2}}{k_{T_1} + i_{3/2}^2 k_{T_2}} \varphi_1 + \frac{k_{T_1} k_{T_2}}{k_{T_1} + i_{3/2}^2 k_{T_2}} \varphi_4 &= 0. \end{aligned} \quad (12.13)$$

In Matrixschreibweise lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_4 \end{pmatrix} + \frac{k_{T_1} k_{T_2}}{k_{T_1} + i_{3/2}^2 k_{T_2}} \begin{pmatrix} i_{3/2}^2 & -i_{3/2} \\ -i_{3/2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (12.14)$$

und haben damit die allgemeine Form (10.39)

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (12.15)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{k_{T_1} k_{T_2}}{k_{T_1} + i_{3/2}^2 k_{T_2}} \begin{pmatrix} i_{3/2}^2 & -i_{3/2} \\ -i_{3/2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (12.16)$$

12.2.2 Bezogene Schreibweise

Mit den Bezugsgrößen

$$k_{TR} = \frac{k_{T_1} k_{T_2}}{k_{T_1} + i_{3/2}^2 k_{T_2}} J_R \quad \text{sowie} \quad \omega_R := \sqrt{k_{TR} / J_R} \quad (12.17)$$

gelte

$$J_1 = \tilde{J}_1 J_R, \quad J_4 = \tilde{J}_4 J_R, \quad \tilde{t} = \omega_R t, \quad (\cdot)^\circ = d(\cdot) / d\tilde{t}. \quad (12.18)$$

Dann lautet (12.14)

$$\begin{pmatrix} \tilde{J}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}^\circ + \begin{pmatrix} i_{3/2}^2 & -i_{3/2} \\ -i_{3/2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (12.19)$$

Wenn man will, kann man $i_{3/2}$ aus (12.4) hier einsetzen:

$$\begin{pmatrix} \tilde{J}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (r_2 / r_3)^2 & r_2 / r_3 \\ r_2 / r_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (12.20)$$

12.2.3 Eigenwertproblem

Der $e^{\lambda \tilde{t}}$ -Ansatz, vgl. (10.40), führt zu

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = e^{\tilde{\lambda} \tilde{t}} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_4 \end{pmatrix}. \quad (12.21)$$

Aus (12.20) folgt damit das *Eigenwertproblem*

$$\begin{pmatrix} \tilde{J}_1 \tilde{\lambda}^2 + (r_2 / r_3)^2 & r_2 / r_3 \\ r_2 / r_3 & \tilde{J}_4 \tilde{\lambda}^2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (12.22)$$

mit der *charakteristischen Gleichung*:

$$A(\tilde{\lambda}) = \tilde{J}_1 \tilde{J}_4 \tilde{\lambda}^4 + \left(\tilde{J}_1 + \tilde{J}_4 (r_2 / r_3)^2 \right) \tilde{\lambda}^2 - 0. \quad (12.23)$$

Sie hat die Doppelwurzel

$$\tilde{\lambda}_0 = 0 \quad (12.24)$$

sowie die rein imaginären Lösungen

$$\tilde{\lambda}_1 = j \tilde{\omega}_1, \quad \tilde{\lambda}_{-1} = -j \tilde{\omega}_1, \quad \text{wo} \quad \tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{1}{\tilde{J}_4} + \frac{(r_2/r_3)^2}{\tilde{J}_1}}. \quad (12.25)$$

Zu $\tilde{\lambda}_0 = 0$ folgt aus (12.22)

$$\begin{pmatrix} (r_2/r_3)^2 & r_2/r_3 \\ r_2/r_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}_0 = \mathbf{0}, \quad (12.26)$$

also der Eigenvektor*

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -r_2/r_3 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} r_3 \\ -r_2 \end{pmatrix}. \quad (12.27)$$

Zu $\tilde{\omega}_1$ folgt aus (12.22)

$$\begin{pmatrix} -\tilde{J}_1/\tilde{J}_4 & r_2/r_3 \\ r_2/r_3 & - (r_2/r_3)^2 \tilde{J}_4/\tilde{J}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}_1 = \mathbf{0}, \quad (12.28)$$

also der Eigenvektor*

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} r_2/r_3 \\ \tilde{J}_1/\tilde{J}_4 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} r_2 \tilde{J}_4 \\ r_3 \tilde{J}_1 \end{pmatrix}. \quad (12.29)$$

Die allgemeine Lösung von (12.19) lautet, vgl. (10.61),

komplex:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}_0 (c_0 + \tilde{\mathcal{L}}_0 \tilde{t}) + \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}_1 (c_1 e^{j\tilde{\omega}_1 \tilde{t}} + c_{-1} e^{-j\tilde{\omega}_1 \tilde{t}}), \quad (12.30)$$

reell:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}_0 (c_0 + \tilde{\mathcal{L}}_0 \tilde{t}) + \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}_1 (a_{c1} \cos \omega_1 t + a_{s1} \sin \omega_1 t). \quad (12.31)$$

Hinweis 1: Wegen der Doppelwurzel $\tilde{\lambda} = 0$ enthalten die allgemeinen Lösungen (12.30), (12.31) nicht nur die konstanten Lösungsanteile $\mathbf{x}^T = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_4)_0 c_0$, die besagen, dass die Nulllage des Systems nach Bild 12-6 nicht festgelegt ist – also über Anfangsbedingungen vorgeschrieben werden kann –, sondern auch den sogenannten *säkularen Anteil*

$$\mathbf{x} = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_4)_0^T \tilde{\mathcal{L}}_0 \tilde{t},$$

* Bei der jeweils 2. Form müssen die Faktoren c_i oder a_i in (12.30)/(12.31) die Dimensionen anpassen!

der bedeutet, dass das System auch mit einer frei vorgebbaren Winkelgeschwindigkeit $\Omega_0 = \tilde{\Omega}_0 \omega_0$ drehen kann.

12.2.4 Schwingungsformen

Um die Schwingungsformen darstellen zu können, müssen für die Parameter Zahlenwerte gegeben sein. Wir wählen:

$$r_2 / r_3 = 4/5 = 0.8, \quad \tilde{J}_1 / \tilde{J}_4 = 3/2 = 1.5.$$

Damit lauten die Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.5 \end{pmatrix}. \quad (12.32)$$

Zur Darstellung braucht man auch $\hat{\phi}_2$ und $\hat{\phi}_3$. Aus (12.12) folgt

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_2 &= \frac{k_{T_1}}{k_{T_1} + i_{3/2}^2 k_{T_2}} \hat{\phi}_1 + \frac{i_{3/2} k_{T_2}}{k_{T_1} + i_{3/2}^2 k_{T_2}} \hat{\phi}_4 \\ &= \frac{\hat{\phi}_1}{1 + (r_2 / r_3)^2 k_{T_2} / k_{T_1}} - \frac{r_2 / r_3 \cdot k_{T_2} / k_{T_1} \hat{\phi}_4}{1 + (r_2 / r_3)^2 k_{T_2} / k_{T_1}}. \end{aligned} \quad (12.33)$$

Um $\hat{\phi}_2$ festzulegen, braucht man auch den Wert von k_{T_2} / k_{T_1} . Wir wählen $k_{T_2} / k_{T_1} = 1.8$.

Mit den Zahlenwerten erhält man aus (12.33) und (12.3)₂

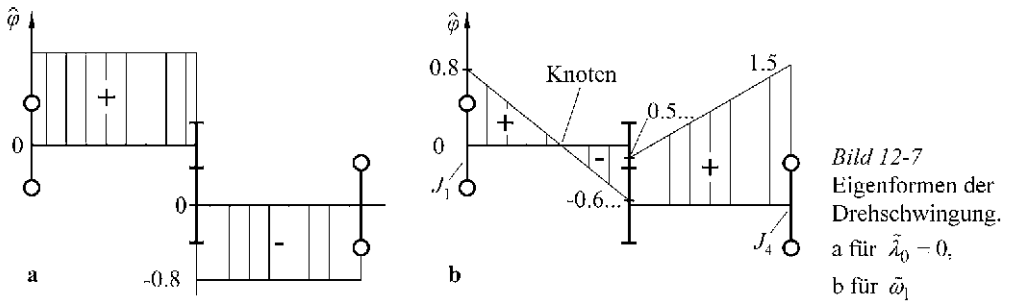
$$\begin{aligned} \text{für } \tilde{\lambda}_0 = 0: \quad & \hat{\phi}_2 = 1, \quad \hat{\phi}_3 = -0.8 \\ \text{für } \tilde{\omega}_1: \quad & \hat{\phi}_2 = -0.631\dots, \quad \hat{\phi}_3 = 0.5055\dots \end{aligned}$$

Als Spaltenmatrizen lauten die Schwingungsformen:

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -0.8 \\ -0.8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \\ \hat{\phi}_4 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.631 \\ 0.5055 \\ 1.5 \end{pmatrix}. \quad (12.34)$$

Man trägt das Ergebnis in Schemabilder ein (vgl. Bild 12-7).

Beim Eigenwert λ_0 , Bild 12-7a, treten keine Wellenverwindungen auf. Bei der Eigenfrequenz ω_1 schwingen die Drehmasse J_1 und J_4 gemäß dem Eigenvektor ϕ_1 , vgl. (12.34)₂, gegeneinander. Man entnimmt dem Eigenvektor, dass in der Welle 1 (k_{T_1}) ein *Knoten* liegt, an dem die Welle stillsteht. (Hält man das System am Knoten einer Eigenschwingung fest, ändern sich die betreffende Eigenfrequenz und Eigenschwingungsform nicht.)



12.3 Reduktion von Drehschwingern auf eine Welle

Vor allem bei Drehschwingern mit mehreren Übersetzungen ist es häufig vorteilhaft, den Schwinger auf *eine der Wellen* zu reduzieren.

Bei dem Schwinger aus Abschnitt 12.2 berücksichtigen wir jetzt auch die Massenmomente J_2 und J_3 der beiden Zahnräder.

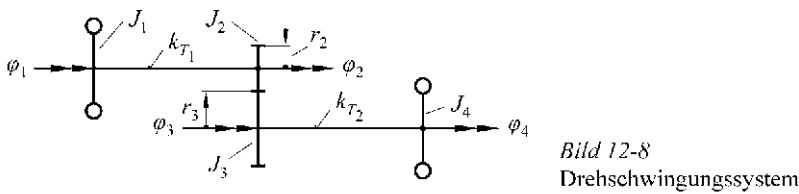


Bild 12-8 zeigt das so ergänzte System mit den vier Massenmomenten J_1, J_2, J_3, J_4 , den beiden Drehsteifigkeiten k_{T1}, k_{T2} . Die Drehungen werden durch die vier Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ erfasst.

Reduktion des Drehschwingers auf die Welle 1

Für die kinetische Energie gilt, vgl. (12.5)

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} J_4 \dot{\varphi}_4^2, \quad (12.35)$$

für die potentielle Energie, vgl. (12.6)

$$U = \frac{1}{2} k_{T1} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} k_{T2} (\varphi_4 - \varphi_3)^2. \quad (12.36)$$

Für φ_3 gilt gemäß (12.3), (12.4)

$$\varphi_3 = i_{3/2} \varphi_2, \quad i_{3/2} = -r_2 / r_3. \quad (12.37)$$

Falls die Wellen (torsions-)starr sind, sich infolge von Momenten also nicht verformen, ist $i_{3/2}$ das Übersetzungsverhältnis von Welle 2 gegenüber Welle 1. In dem Fall gilt auch $\varphi_4 = \varphi_3 = i_{3/2} \varphi_2 = i_{3/2} \varphi_1$.

Man setzt für die verformbare Welle

$$\varphi_3 = i_{3/2} \varphi_3^r, \quad \varphi_4 = i_{3/2} \varphi_4^r; \quad (12.38)$$

dabei sind φ_3^r und φ_4^r *reduzierte Winkel*.

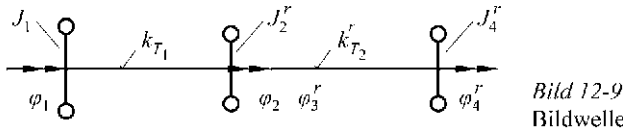
Einsetzen von φ_3, φ_4 gemäß (12.38) in T und U nach (12.35)/(12.36) liefert

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} (i_{3/2})^2 J_3 (\dot{\varphi}_3^r)^2 + \frac{1}{2} (i_{3/2})^2 J_4 (\dot{\varphi}_4^r)^2 \\ &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} (J_2 + (i_{3/2})^2 J_3) \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} (i_{3/2})^2 J_4 (\dot{\varphi}_4^r)^2, \end{aligned} \quad (12.39)$$

und

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} k_{T1} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} k_{T2} (i_{3/2} \varphi_4^r - i_{3/2} \varphi_3^r)^2 \\ &= \frac{1}{2} k_{T1} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} k_{T2} (i_{3/2})^2 (\varphi_4^r - \varphi_2^r)^2. \end{aligned} \quad (12.40)$$

Diese Gleichungen kann man als Gleichungen für die *Bildwelle* gemäß Bild 12-9 ansehen.



Bei der Reduktion auf Welle 1 bleiben $\varphi_1, \varphi_2, J_1$ und k_{T1} erhalten. An die Stelle von φ_3, φ_4 treten $\varphi_3^r (= \varphi_2)$ und φ_4^r . Man erhält die *reduzierten Massenträgheitsmomente* (Drehmassen)

$$J_2^r = J_2 + (i_{3/2})^2 J_3 = J_2 + (r_2 / r_3)^2 J_3, \quad J_4^r = (i_{3/2})^2 J_4 = (r_2 / r_3)^2 J_4 \quad (12.41)$$

und die *reduzierte Drehsteifigkeit*

$$k_{T2}^r = (i_{3/2})^2 k_{T2} = (r_2 / r_3)^2 k_{T2}. \quad (12.42)$$

Für das auf die Welle 1 reduzierte Drehschwingungssystem gemäß Bild 12-9 erhält man – formal nach Lagrange oder elementar über Gleichgewichtsbedingungen und Verformungsansätze – die Bewegungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2^r & 0 \\ 0 & 0 & J_4^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_4^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{T1} & -k_{T1} & 0 \\ -k_{T1} & k_{T1} + k_{T2}^r & -k_{T2}^r \\ 0 & -k_{T2}^r & k_{T2}^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_4^r \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (12.43)$$

12.4 Erzwungene Drehschwingungen

Wir nehmen an, dass auf den Drehschwinger nach Bild 12-10 (im allgemeinen Fall) die vier Erregermomente $M_i(t)$ wirken, wobei – zur Verwirrung! – $M_3(t)$ gegen die positive Orientierung des Drehwinkels φ_3 positiv gezählt wird, vgl. Bild 12-10a, b; die b_{T_i} bedeuten Dämpfung.

Gesucht sind für das System nach Bild 12-10 das auf die Welle 1 reduzierte Bildsystem und dazu die Bewegungsgleichungen. Für den Sonderfall $M_2 = 0, M_3 = 0, M_4 = 0$ und $M_1 = \hat{M} \cos \Omega t$ sollen die Amplituden-Frequenzgänge für die Winkelauslenkungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ berechnet werden (Parameter vgl. Abschnitte 12.2 und 12.3). Die Dämpfungen b_{T_i} seien klein.

Hinweis 1: Für das Torsionsmoment M gilt, vgl. Bild 12-11,

$$M = b_T (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + k_T (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (12.44)$$

Man kann dieses Moment in elastischen Anteil und Dämpfungsanteil zerlegen:

$$M^k = k_T (\varphi_2 - \varphi_1), \quad M^b = b_T (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1), \quad M = M^k + M^b. \quad (12.45)$$

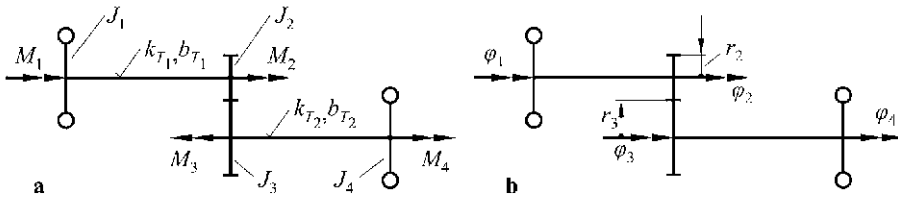


Bild 12-10: Drehschwinger. a Ersatzsystem, b Drehwinkel

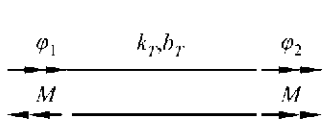


Bild 12-11
Torsion mit
Dämpfung

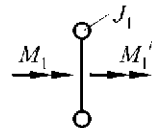


Bild 12-12
Momente ohne Potential
an Drehmasse J_1

12.4.1 Bewegungsgleichungen (nach Lagrange)

Kinetische Energie (vgl. (12.35))

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} J_4 \dot{\varphi}_4^2. \quad (12.46)$$

Potentielle Energie (vgl. (12.36))

$$U = \frac{1}{2} k_{T_1} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} k_{T_2} (\varphi_4 - \varphi_3)^2. \quad (12.47)$$

Virtuelle Arbeiten

An der Drehmasse J_1 , Drehwinkel φ_1 , vgl. Bild 12-10, greifen neben dem elastischen Anteil des Wellenmoments, der mit der potentiellen Energie U in (12.47) erfasst ist, noch von außen das Moment $M_1(t)$ und der Dämpfungsanteil des Wellenmoments an,

$$M_1^h = b_{T_1} (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1), \quad (12.48)$$

vgl. Bild 12-11 und Bild 12-12.

Bei einer virtuellen Drehung $\delta\varphi_1$ wird dem System die virtuelle Arbeit

$$\delta W_1 = M_1 \delta\varphi_1 + b_{T_1} (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \delta\varphi_1 \quad (12.49)$$

zugeführt. Entsprechend muss man sich die virtuellen Arbeiten zu den Drehungen $\delta\varphi_2, \delta\varphi_3, \delta\varphi_4$ überlegen. Die gesamte virtuelle Arbeit beträgt:

$$\begin{aligned} \delta W &= M_1 \delta\varphi_1 + M_2 \delta\varphi_2 - M_3 \delta\varphi_3 + M_4 \delta\varphi_4 \\ &\quad - b_{T_1} (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) (\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1) - b_{T_2} (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3) (\delta\varphi_4 - \delta\varphi_3) \\ &=: \sum_{i=1}^4 Q_i \delta\varphi_i. \end{aligned} \quad (12.50)$$

Einführen der reduzierten Winkel

Mit den reduzierten Winkeln $\varphi_2 = \varphi_3^r$ und $\varphi_4 = \varphi_4^r$ aus Abschnitt 12.3 gilt

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= i_{3/2} \varphi_2, & \dot{\varphi}_3 &= i_{3/2} \dot{\varphi}_2, & \delta\varphi_3 &= i_{3/2} \delta\varphi_2, \\ \varphi_4 &= i_{3/2} \varphi_4^r, & \dot{\varphi}_4 &= i_{3/2} \dot{\varphi}_4^r, & \delta\varphi_4 &= i_{3/2} \delta\varphi_4^r. \end{aligned} \quad (12.51)$$

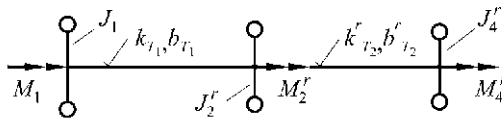
Damit erhält man aus (12.46), (12.47) und (12.50)

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} (J_2 + i_{3/2}^2 J_3) \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} i_{3/2}^2 J_4 (\dot{\varphi}_4^r)^2, \quad (12.52)$$

$$U = \frac{1}{2} k_{T_1} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} i_{3/2}^2 k_{T_2} (\varphi_4^r - \varphi_2)^2, \quad (12.53)$$

$$\begin{aligned} \delta W &= M_1 \delta\varphi_1 + (M_2 - i_{3/2} M_3) \delta\varphi_2 + M_4 i_{3/2} \delta\varphi_4^r \\ &\quad - b_{T_1} (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) (\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1) - i_{3/2}^2 b_{T_2} (\dot{\varphi}_4^r - \dot{\varphi}_2) (\delta\varphi_4^r - \delta\varphi_2). \end{aligned} \quad (12.54)$$

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich die Bildwelle nach Bild 12-13.

Bild 12-13
Bildwelle

Die Parameter lauten:

$$\begin{aligned} J_1, M_1, k_{T1}, b_{T1} & \text{ wie bisher,} \\ J_2^r &= J_2 + i_{3/2}^2 J_3, \quad k_{T2}^r = i_{3/2}^2 k_{T2}, \quad b_{T2}^r = i_{3/2}^2 b_{T2}, \\ M_2^r &= M_2 - i_{3/2} M_3, \quad M_4^r = i_{3/2} M_4. \end{aligned} \quad (12.55)$$

Schließlich gewinnt man aus (12.52) bis (12.55) die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2^r & 0 \\ 0 & 0 & J_4^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{T1} & -b_{T1} & 0 \\ -b_{T1} & b_{T1} + b_{T2}^r & -b_{T2}^r \\ 0 & -b_{T2}^r & b_{T2}^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_4 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} k_{T1} & -k_{T1} & 0 \\ -k_{T1} & k_{T1} + k_{T2}^r & -k_{T2}^r \\ 0 & -k_{T2}^r & k_{T2}^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2^r \\ M_4^r \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12.56)$$

Hinweis 2: Wenn die Dämpfungen, wie hier, völlig *parallel* zu den Steifigkeiten wirken, kann man, wie zu sehen, in den Bewegungsgleichungen die Dämpfungsterme einfach *parallel* zu den Rückstelltermen anschreiben, ohne den Weg über die virtuelle Arbeit δW zu gehen.

12.4.2 Zahlenbeispiel

Neben den Parametern aus den Abschnitten 12.2 und 12.3, $r_2/r_3 = 0.8$, $J_1/J_4 = 1.5$, $k_{T2}/k_{T1} = 1.8$, gelte: $J_2/J_1 = 0.2$, $J_3/J_1 = 0.3$. Günstige Bezugswerte sind

$$J_R = J_1, \quad k_{TR} = k_{T1}, \quad \omega_R = \sqrt{k_{TR}/J_R}, \quad \tilde{t} = \omega_R t. \quad (12.57)$$

Damit folgen die Massenmomente (Drehmassen):

$$\begin{aligned} J_1 &= \tilde{J}_1 J_R = 1.0 J_R, \\ J_2^r &= \tilde{J}_2^r J_R = \left(\tilde{J}_2 + i_{3/2}^2 \tilde{J}_3 \right) J_R = \left(0.2 + 0.8^2 \cdot 0.3 \right) J_R = 0.392 J_R, \\ J_4^r &= \tilde{J}_4^r J_R = i_{3/2}^2 \tilde{J}_4 J_R = 0.8^2 \cdot (2/3)^2 J_R = 0.284 J_R \end{aligned} \quad (12.58)$$

und die Dreh-Steifigkeiten:

$$\begin{aligned}
 k_{T_1} &= \tilde{k}_{T_1} k_{TR} = 1.0 k_{TR} \\
 k_{T_2}^r &= \tilde{k}_{T_2}^r k_{TR} = i_{3/2}^2 \tilde{k}_{T_2} k_{TR} = 0.8^2 \cdot 1.8 k_{TR} = 1.152 k_{TR}.
 \end{aligned}
 \quad (12.59)$$

Die Dämpfungen setzen wir proportional zu den Steifigkeiten an:

$$\mathbf{B} = \tilde{b} \frac{k_{TR}}{\omega_R} \tilde{\mathbf{K}}, \quad \text{mit } \tilde{b} = 0.02. \quad (12.60)$$

Mit der Erregung

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2^r \\ M_4^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \hat{M} \cos \tilde{\Omega} \tilde{t} =: \mathbf{f} \hat{M} \cos \tilde{\Omega} \tilde{t} \quad (12.61)$$

lautet schließlich die Bewegungsgleichung:

$$J_R \omega_R^2 \tilde{\mathbf{M}} \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \omega_R \tilde{b} \frac{k_{TR}}{\omega_R} \tilde{\mathbf{K}} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + k_{TR} \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{x}} = \hat{M} \cos \tilde{\Omega} \tilde{t} \mathbf{f} \quad (12.62)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \tilde{J}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_2^r & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{J}_4^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.392 & 0 \\ 0 & 0 & 0.284 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} 1.0 & -1.0 & 0 \\ -1.0 & 2.152 & -1.152 \\ 0 & -1.152 & 1.152 \end{pmatrix}, \quad (12.63)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{b} \tilde{\mathbf{K}}, \quad \mathbf{f} = (1, 0, 0)^T; \quad \tilde{\mathbf{x}} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4)^T.$$

Dimensionslos lautet die Bewegungsgleichung:

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{b} \tilde{\mathbf{K}} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \cos \tilde{\Omega} \tilde{t} \quad \text{mit } \tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} / (\hat{M} / k_{TR}). \quad (12.64)$$

Berechnen der erzwungenen Schwingungen

Komplexe Form der Gl.:

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{b} \tilde{\mathbf{K}} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f} e^{j\tilde{\Omega}\tilde{t}}. \quad (12.65)$$

Lösungsansatz und Lösungsergebnisse:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\tilde{\mathbf{x}}} e^{j\tilde{\Omega}\tilde{t}}. \quad (12.66)$$

Man erhält:

$$(\tilde{\mathbf{K}} - \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\Omega}^2 + \tilde{b} j \tilde{\Omega} \tilde{\mathbf{K}}) \hat{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f} \quad (12.67)$$

und

$$\hat{\underline{x}} = \left(\tilde{\mathbf{K}} - \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\Omega}^2 + \tilde{b} j \tilde{\Omega} \tilde{\mathbf{K}} \right)^{-1} \mathbf{f}. \quad (12.68)$$

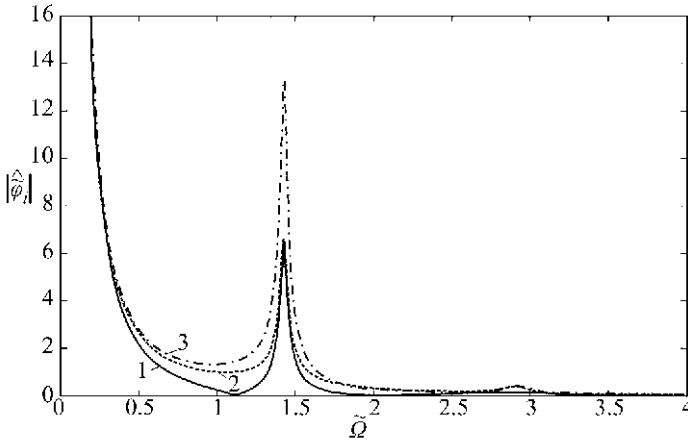


Bild 12-14
Amplituden-Frequenzgänge

Bild 12-14 zeigt die numerisch berechneten Resonanzkurven für $0 < \tilde{\Omega} < 4.0$,

$$|\hat{\phi}_i| = |\hat{\phi}_i| / (\hat{M} / k_{TR}). \quad (12.69)$$

Bild 12-15a zeigt den unteren Bereich der Frequenzgänge vergrößert, und Bild 12-15b zeigt die Phasenverschiebungswinkel ψ_i gegenüber der Erregung $M_1 = \hat{M} \cos \Omega t$,

$$\hat{\phi}_i = |\hat{\phi}_i| e^{j\psi_i}. \quad (12.70)$$

Die Amplitudenkurve hat 2 Maxima, etwa bei $\tilde{\Omega} = 1.4$ und bei $\tilde{\Omega} = 2.9$. Das heißt, dort liegen die Eigenfrequenzen: $\tilde{\omega}_1 \approx 1.4$, $\tilde{\omega}_2 \approx 2.9$.

Bei $\tilde{\Omega} = 0$ hat die Resonanzkurve des Schwingers (unabhängig von der Dämpfung) eine Unendlichkeitsstelle. Das rührt daher, dass bei $\tilde{\Omega} = 0$ das Erregermoment $M_1 = \hat{M} \cos \tilde{\Omega} \tilde{t}$ als konstantes Moment wirkt und natürlich nach Abklingen des Einschwingvorganges, vgl. die Bemerkungen zu Gl. (6.30) und die Aufgabe 6-15, also nach sehr langer (*unendlich langer*) Zeit einen sehr (*unendlich*) großen Ausschlag erzeugt. (Es sind zwei Integrationen erforderlich, also erhält man formal – wie bei einem sehr, sehr kleinen $\tilde{\Omega}$ Phasenverschiebungswinkel $\psi_i \approx \pm 180^\circ$, vgl. Bild 12-15b.

Formal kann man die Unendlichkeitsspitze bei $\tilde{\Omega} = 0$ auch als Resonanz mit dem Eigenwert $\tilde{\lambda}_0 = 0$ ansehen (vgl. Abschnitt 12.2); das ist jedoch nicht allgemein üblich. (Da $\tilde{\lambda}_0 = 0$ ein doppelter Eigenwert ist, ist die zugehörige *Resonanzspitze* besonders breit, vgl. Bild 12-14 und Bild 12-15a.

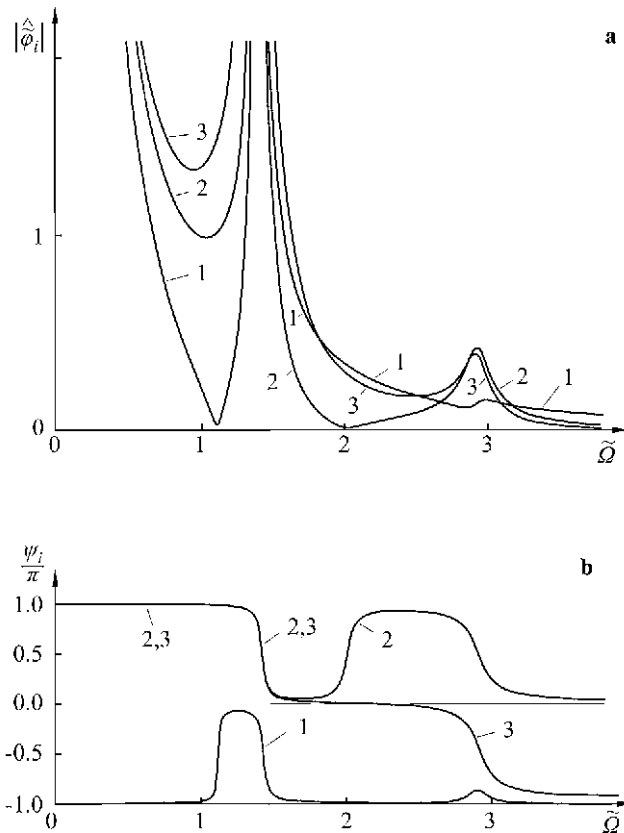


Bild 12-15

Frequenzgänge, vergrößert.
a Amplituden, b Phasenverschiebungswinkel

Man gewinnt Einsicht in das Schwingungsverhalten des Systems, wenn man sich die Amplituden-Frequenzgänge als Versuchsergebnisse vorstellt und ihren Verlauf – gemeinsam mit den Phasenverschiebungswinkeln – in Abhängigkeit von $\tilde{\Omega}$ verfolgt.

Man sieht dann zum Beispiel (vgl. Bild 12-15): Bei sehr kleinen $\tilde{\Omega}$ schwingt das System unter der Einwirkung von $M_1(t)$ etwa so, wie wenn es unverformbar (*starr*) wäre. Oberhalb $\tilde{\Omega} = 0.5$ kommt man aus der *Resonanz bei 0* heraus, die Amplituden nehmen ab, weil sich bei der steigenden Frequenz die Trägheitswirkungen der Massen bemerkbar machen. Gleichzeitig nimmt die Amplitude von ϕ_1 deutlich stärker ab als die Amplituden von ϕ_2 und ϕ_4^* . In der Welle 1 (k_{T1}) baut sich also eine Torsionsschwingung auf (in Welle 2 ist sie schwächer). Bei $\tilde{\Omega} \approx 1.1$ kommt ϕ_1 fast zum Stillstand (bei sehr kleiner Dämpfung steht ϕ_1 dort praktisch still) und kehrt danach seine Schwingungsrichtung um (vgl. Phasenverschiebungswinkel ψ_1 in Bild 12-15b). In der Welle 1 entsteht dadurch ein (nahezu) schwingungsfreier Knoten, der mit steigendem $\tilde{\Omega}$ von J_1 nach J_2^r wandert (vgl. Bild 12-13).

Beim Hineinlaufen in den Resonanzbereich $\tilde{\Omega} \approx \tilde{\omega}_1 (\approx 1.4)$ wachsen alle Amplituden $\hat{\phi}_i$, dort bleibt $\hat{\phi}_2$ gegen $\hat{\phi}_4^r$ zurück, während $\hat{\phi}_1$ aufholt ($\hat{\phi}_1$ und $\hat{\phi}_2$ schwingen gegeneinander, vgl. Bild 12-15b). In der Resonanz schwingt das System etwa in der zu $\tilde{\omega}_1$ gehörenden Eigenschwingungsform.

Oberhalb $\tilde{\omega}_1$ bleibt $\hat{\phi}_2$ weiter zurück, bei $\tilde{\Omega} \approx 2.0$ (vgl. auch Bild 12-15b) bleibt ϕ_2 fast stehen, der oben erwähnte Knoten wandert über J_2^r hinweg in die Welle 2 usw.

12.5 Aufgaben

Aufgabe 12-1: Leiten Sie die Bewegungsgleichungen (12.9) bis (12.11), und damit auch (12.13), auf "konventionelle Weise" (Verformungsansätze, Momentengleichgewichte) her.

Aufgabe 12-2: Wie sehen die Schwingungsformen für das untersuchte System aus (vgl. Bild 12-7, wenn man im Getriebe die Zahnräder vertauscht, also $r_2/r_3 = 1.25$ setzt)?

Aufgabe 12-3: Welche Eigenfrequenzen erhält man, wenn man a) die Drehmasse J_1 , b) die Drehmasse J_4 , c) das Getriebe festsetzt?

Aufgabe 12-4: Das Aggregat nach Bild 12-6 laufe mit der konstanten Drehgeschwindigkeit $\dot{\phi}_1 = \Omega$. Plötzlich (zur Zeit $t_0 = 0$) bricht ein Zahn im Getriebe und sperrt es. Was geschieht? (Treffen Sie vereinfachende Annahmen, z. B. die, dass die Antriebsmomente vernachlässigt werden können. Wählen Sie evtl. zusätzlich erforderliche Parameter.) Welche Schwingungen stellen sich ein? Welche Momente wirken auf das Getriebe?

Aufgabe 12-5: Reduzieren Sie das System nach Bild 12-8 auf die Welle 2 (k_{T_2}).

Aufgabe 12-6: Stellen Sie für die Bildwelle gemäß Bild 12-9 die Bewegungsgleichungen (12.43) nach Lagrange auf.

Aufgabe 12-7: Stellen Sie für die Bildwelle gemäß Bild 12-9 die Bewegungsgleichungen (12.43) mit den Mitteln der Grundvorlesung Technische Mechanik auf.

Aufgabe 12-8: Welche Eigenfrequenzen und welche Eigenschwingungsformen erhält man aus (12.43) mit den Parametern des Zahlenbeispiels 12.4.2?

Aufgabe 12-9: Rechnen Sie die Eigenschwingungsformen der Bildwelle aus Aufgabe 12-8 auf die Originalwelle nach Bild 12-8 um.

Aufgabe 12-10: Zeichnen Sie Schnittbilder nach Art von Bild 12-12 auch für die anderen Drehmassen und kontrollieren Sie (12.50).

Aufgabe 12-11: Schreiben Sie mit T, U und δW nach (12.46), (12.47) und (12.50) die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für das nicht reduzierte System bezüglich der Winkel ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_4 an $\left(\phi_3 = i_{3/2} \phi_2\right)$.

Aufgabe 12-12: Berechnen Sie im Anschluss an Aufgabe 12-11 mit den in Abschnitt 12.4.2 angegebenen Zahlenwerten die Eigenfrequenzen und die Eigenschwingungsformen des ungedämpften Schwingers.

Aufgabe 12-13: Schreiben Sie ein Rechnerprogramm zur Lösung von (12.68). Sie haben dabei die Wahl zwischen zwei Vorgehensweisen: Entweder arbeiten Sie mit komplexen Zahlen und dem Gauß-Algorithmus für die 3×3 Matrix oder Sie ersetzen das Gleichungssystem (12.67) durch ein doppelt so großes System (mit einer 6×6 Matrix) und rechnen reell.

Aufgabe 12-14: Führen Sie die Diskussion der Ergebnisse des Zahlenbeispiels 12.4.2 zu Ende. (Man sieht Details bei $\tilde{\Omega} \approx \tilde{\omega}_2$ besser, wenn man mit $\tilde{b} = 0.002$ oder sogar $\tilde{b} = 0$ – dann reell! – rechnet.)

Aufgabe 12-15: Ersetzen Sie die Amplituden- und Phasenverschiebungs-Frequenzgänge nach Bild 12-15 durch Ortskurven wie, zum Beispiel, in Bild 10-18.

Aufgabe 12-16: Untersuchen Sie die erzwungenen Schwingungen des Systems nach Bild 12-10, wenn die Erregung $\hat{M} \cos \Omega t$ a) als M_3 , b) als M_4 angreift. (Welche qualitativen Änderungen gegenüber Bild 12-15 erwarten Sie?)

V Kontinua

13 Mitswingen der Wellenmasse bei Drehschwingungen

Als einfachen Fall eines *schwingenden Kontinuums* untersuchen wir in diesem Abschnitt die Wirkung der *mitschwingenden Wellenmasse* auf das Schwingungsverhalten des Systems.

13.1 Aufgabenstellung

Als typisches Beispiel untersuchen wir den Drehschwinger nach Bild 13-1. Eine Welle (Radius R , Länge l , Dichte ρ , Schubmodul G) trägt an den Enden zwei Drehmassen (Massenmomente J_1, J_2).

Gesucht sind die Eigenfrequenzen, Eigenschwingungsformen und die erzwungenen Schwingungen (bei Anregung an einem Ende). Schließlich interessiert die Frage, wie man das *Kontinuum Welle* näherungsweise durch ein diskretes System ersetzen kann.

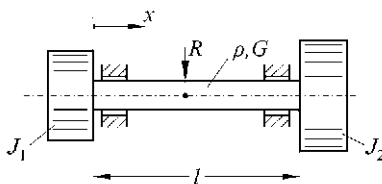


Bild 13-1 Drehschwinger

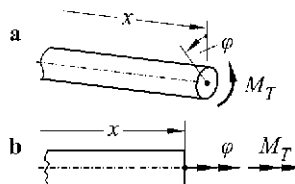


Bild 13-2 Drehwinkel $\varphi(x, t)$, Torsionsmoment $M_T(x, t)$.
a ausführlich, b symbolisch

13.2 Freie Schwingungen

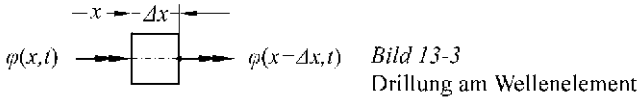
13.2.1 Herleiten der partiellen Dgl für die Drehschwingungen der Welle

Bild 13-2a zeigt einen Schnitt durch die Welle an der Stelle x , wobei die Koordinate von einem Wellenende gezählt ist, vgl. etwa Bild 13-1. Die Wellendrehung an der Stelle x wird durch den Winkel $\varphi = \varphi(x, t)$ gemessen, wobei $\varphi = 0$ zum Beispiel der vertikalen Referenzlage entspricht. Bild 13-2b zeigt den Winkel symbolisch als Drehpfeil.

Drillung

Bild 13-3 zeigt ein Wellenelement der Länge Δx . Es erfährt die *Drillung*

$$\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, t) - \varphi(x, t)}{\Delta x}. \quad (13.1)$$



Moment (Torsionsmoment)

Für das Torsionsmoment M_T gilt, vgl. Bild 13-2,

$$M_T = G I_p \cdot \varphi'. \quad (13.2)$$

Dabei ist G der Schubmodul und

$$I_p = \int_A r^2 dA = \frac{\pi}{2} R^4 \quad (13.3)$$

das polare Flächenmoment 2. Grades (früher *Flächenträgheitsmoment*). Man nennt das Produkt $G I_p$ *Drillsteifigkeit*.

Momentengleichgewicht am Wellenelement

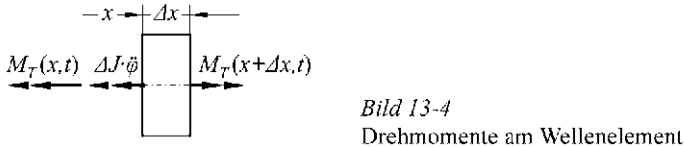


Bild 13-4 zeigt ein Wellenelement der Länge Δx mit den angreifenden Torsionsmomenten sowie dem d'Alembertschen Moment $\Delta J \ddot{\varphi}$. Das Massenmoment ΔJ lautet

$$\Delta J = \rho I_p \Delta x = J_w / l \cdot \Delta x. \quad (13.4)$$

Dabei ist

$$J_w = \rho I_p \cdot l = \frac{1}{2} m R^2 \cdot l \quad (13.5)$$

das Massenmoment der als starr angenommenen Welle; J_w / l ist das auf die Länge bezogene Massenmoment.

Die Bedingung für das Momentengleichgewicht am Element nach Bild 13-4 lautet:

$$M_T(x + \Delta x, t) - M_T(x, t) - J_w / l \cdot \ddot{\varphi} \Delta x = 0. \quad (13.6)$$

Mit Division durch Δx und Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ erhält man

$$J_w/l \cdot \ddot{\varphi} = \lim_{\Delta x} \frac{M_T(x + \Delta x, t) - M_T(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial M_T}{\partial x} = M'_T. \quad (13.7)$$

Einsetzen von M_T aus (13.2) liefert

$$\frac{J_w}{l} \ddot{\varphi} = (G I_p \varphi')'. \quad (13.8)$$

Falls $G I_p$ unabhängig von x ist, falls also R – wie bisher angenommen – konstant ist, gilt

$$J_w/l \cdot \ddot{\varphi} - G I_p \varphi'' = 0. \quad (13.9)$$

Dies – wie auch (13.8) – ist eine lineare partielle Dgl 2. Ordnung nach der Zeit t ($\rightarrow$ 2 Anfangsbedingungen erforderlich) und 2. Ordnung nach dem Ort x ($\rightarrow$ 2 Randbedingungen erforderlich).

Hinweis 1: Wenn man will, kann man nach (13.4) $J_w/l = \rho I_p$ setzen und I_p aus (13.9) herauskürzen (das ist nur bei $I_p = \text{const}$ möglich). Man erhält

$$\rho \ddot{\varphi} - G \varphi'' = 0. \quad (13.10)$$

(Wir werden stets mit (13.9) arbeiten.)

13.2.2 Untersuchung der freien Schwingungen

Bild 13-5 zeigt die geometrischen Beziehungen und die Schnittmomente an unseren Systemen.

Bild 13-5a macht die geometrischen (die kinematischen) Beziehungen deutlich:

$$\varphi_1(t) = \varphi(0, t), \quad \varphi_2(t) = \varphi(l, t). \quad (13.11)$$

Bild 13-5b enthält neben den Schnittmomenten auch die d'Alembertschen Momente $J_1 \ddot{\varphi}_1$ und $J_2 \ddot{\varphi}_2$.

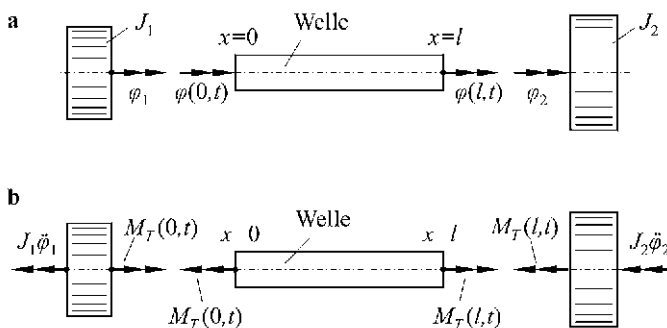


Bild 13-5
System mit a geometrischen, b kinetischen Größen

Bewegungsgleichungen: Partielle Dgl und Randbedingungen

Für die Bewegung der Welle gilt die partielle Dgl (13.9):

$$J_w/l \ddot{\varphi} - G I_p \varphi'' = 0. \quad (13.12)$$

Für die Drehmassen J_1, J_2 gelten mit den Momenten gemäß Bild 13-5 b) die Gleichgewichtsbedingungen

$$-J_1 \ddot{\varphi}_1 + M_T(0, t) = 0, \quad -J_2 \ddot{\varphi}_2 - M_T(l, t) = 0. \quad (13.13)$$

Darin sind φ_1 und φ_2 gemäß (13.11) mit Hilfe von $\varphi(x, t)$ auszudrücken, und für $M_T(0, t)$, $M_T(l, t)$ folgen aus (13.2)

$$M_T(0, t) = G I_p \varphi'(0, t), \quad M_T(l, t) = G I_p \varphi'(l, t). \quad (13.14)$$

Zusammengefasst liefern (13.13) mit (13.11) und (13.14) die beiden *Randbedingungen*

$$\begin{aligned} -J_1 \ddot{\varphi}(0, t) + G I_p \varphi'(0, t) &= 0, \\ -J_2 \ddot{\varphi}(l, t) - G I_p \varphi'(l, t) &= 0 \end{aligned} \quad (13.15)$$

für die partielle Dgl (13.12).

Lösung der Bewegungsgleichungen

Wir suchen freie Schwingungen des Schwingers nach Bild 13-1, die durch den Satz homogener Gleichungen (13.12), (13.11), (13.13), (13.14) bzw. – nach Elimination von $M_T(0, t)$, $M_T(l, t)$, φ_1 und φ_2 – durch (13.12) und (13.15) beschrieben werden.

Das System von Gleichungen hat bezüglich der Zeit konstante Koeffizienten, deshalb liegt ein $e^{\lambda t}$ -Ansatz nahe:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ M_T(x, t) \\ \varphi(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \hat{M}_T(x) \\ \hat{\varphi}(x) \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \quad (13.16)$$

Darin sind $\hat{M}_T(x)$ und $\hat{\varphi}(x)$ natürlich noch Funktionen von x .

Arbeitet man mit den Gleichungen (13.12) und (13.15) – in denen $\varphi_1, \varphi_2, M_T$ nicht mehr vorkommen –, braucht man von (13.16) nur die letzte Zeile:

$$\varphi(x, t) = \hat{\varphi}(x) e^{\lambda t}. \quad (13.17)$$

Da wir die Systemdämpfung weggelassen haben, erwarten wir rein imaginäre Eigenwerte

$$\lambda_{\pm i} = \pm j \omega_i. \quad (13.18)$$

Da in unserem System nur Zeitableitungen zweiter Ordnung vorkommen, liegt es nahe, statt des komplexen Ansatzes (13.17) den reellen Ansatz

$$\varphi(x, t) = \hat{\varphi}(x) \cos \omega t \quad (13.19)$$

zu wählen (die Funktionen $\sin \omega t$, $\cos(\omega t + \psi)$ tun es auch!).

Lösen der partiellen Dgl

Mit (13.19) folgt aus (13.12)

$$-J_w/l \cdot \omega^2 \hat{\varphi} \cos \omega t - G I_p \hat{\varphi}'' \cos \omega t = 0. \quad (13.20)$$

Da $\cos \omega t \neq 0$, ergibt sich aus (13.20) für $\hat{\varphi}(x)$ die gewöhnliche Dgl

$$G I_p \hat{\varphi}'' + \omega^2 J_w/l \hat{\varphi} = 0. \quad (13.21)$$

Hierin ist ω der freie Parameter des Eigenwertproblems. Zur Abkürzung dividieren wir (13.21) durch $G I_p$ und setzen

$$\kappa^2 = \omega^2 J_w / (l G I_p), \quad \text{also } \kappa = \omega \sqrt{\frac{J_w}{l G I_p}}. \quad (13.22)$$

Der Parameter κ tritt an die Stelle von ω , aus (13.21) entsteht

$$\hat{\varphi}'' + \kappa^2 \hat{\varphi} = 0 \quad (13.23)$$

Dies ist mathematisch dieselbe Dgl wie (5.13) – mit x statt t als unabhängiger Variabler – und hat die *allgemeine Lösung*, vgl. (5.15),

$$\hat{\varphi} = a_1 \cos \kappa x + a_2 \sin \kappa x. \quad (13.24)$$

Einarbeiten der allgemeinen Lösung in die Randbedingungen

Mit dem Ansatz (13.19) nehmen die *Randbedingungen* (13.15) nach Herauskürzen von $\cos \omega t$ die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \omega^2 J_1 \hat{\varphi}(0) + G I_p \hat{\varphi}'(0) &= 0, \\ \omega^2 J_2 \hat{\varphi}(l) - G I_p \hat{\varphi}'(l) &= 0. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Mit $\omega^2 = \frac{\kappa^2 l G I_p}{J_w}$ aus (13.22) lauten sie:

$$\begin{aligned} \kappa^2 l \frac{J_1}{J_w} \cancel{G I_p} \hat{\varphi}(0) + \cancel{G I_p} \hat{\varphi}'(0) &= 0, \\ \kappa^2 l \frac{J_2}{J_w} \cancel{G I_p} \hat{\varphi}(l) - \cancel{G I_p} \hat{\varphi}'(l) &= 0. \end{aligned} \quad (13.26)$$

hier wurde durch $GI_p (\neq 0)$ dividiert.

Einsetzen der allgemeinen Lösung $\hat{\phi}(x)$ nach (13.24) in die Randbedingungen (13.26) liefert

$$\begin{aligned}\kappa^2 l \frac{J_1}{J_w} (a_1 \cos(0) + a_2 \sin(0)) + \kappa (-a_1 \sin(0) + a_2 \cos(0)) &= 0, \\ \kappa^2 l \frac{J_2}{J_w} (a_1 \cos \kappa l + a_2 \sin \kappa l) - \kappa (-a_1 \sin \kappa l + a_2 \cos \kappa l) &= 0.\end{aligned}\quad (13.27)$$

Achtung! Es ist gefährlich, durch κ zu teilen, bevor man zu $\kappa = 0$ gehörende Lösungen ausgeschlossen hat. (Hier gibt es solche! – vgl. λ_0 in Abschnitt 12.2.4)

Zusammenfassen der Koeffiziententerme von a_1 und a_2 liefert

$$\begin{aligned}\kappa^2 l \frac{J_1}{J_w} a_1 + \kappa a_2 &= 0, \\ \left(\kappa^2 l \frac{J_2}{J_w} \cos \kappa l + \kappa \sin \kappa l \right) a_1 + \left(\kappa^2 l \frac{J_2}{J_w} \sin \kappa l - \kappa \cos \kappa l \right) a_2 &= 0.\end{aligned}\quad (13.28)$$

Es ist zweckmäßig, statt κ das Produkt $\kappa l =: \alpha$ als dimensionslosen Parameter einzuführen. Dann gelten, vgl. (13.22), (13.5),

$$\alpha = \kappa l = \omega \sqrt{\frac{I J_w}{G I_p}} = \omega l \sqrt{\frac{\rho}{G}}. \quad (13.29)$$

Nach Multiplikation von (13.28) mit l lauten die Gln in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 \frac{J_1}{J_w} & \alpha \\ \alpha^2 \frac{J_2}{J_w} \cos \alpha + \alpha \sin \alpha & \alpha^2 \frac{J_2}{J_w} \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (13.30)$$

Dies ist ein lineares homogenes Gleichungssystem für a_1, a_2 , dessen Koeffizienten vom freien Parameter α abhängen, vgl. (5.9), (10.44) usw. Damit es eine nichttriviale Lösung hat, muss die Koeffizientendeterminante verschwinden:

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha) &:= \det \begin{pmatrix} \alpha^2 \frac{J_1}{J_w} & \alpha \\ \alpha^2 \frac{J_2}{J_w} \cos \alpha + \alpha \sin \alpha & \alpha^2 \frac{J_2}{J_w} \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \alpha^4 \frac{J_1 J_2}{J_w^2} \sin \alpha - \alpha^3 \frac{J_1 + J_2}{J_w} \cos \alpha - \alpha^2 \sin \alpha \stackrel{!}{=} 0.\end{aligned}\quad (13.31)$$

Dies ist die charakteristische Gleichung unseres Systems. Es handelt sich um eine transzendente Gleichung mit unendlich vielen Lösungen (*Wurzeln*). Man kann zeigen, dass alle Wurzeln α_i reell sind.

13.2.3 Eigenlösungen

Lösungen zu $\alpha_0 = 0$

Man erkennt unmittelbar, dass $\Delta(\alpha) = 0$ nach (13.31) die dreifache Wurzel $\alpha_0 = 0$ hat. (Bestimmend für *dreifach* sind das zweite und dritte Glied in der letzten Zeile von (13.31); $\alpha^2 \sin \alpha$ hat die 3-fache Wurzel $\alpha = 0$, weil $\sin 0 = 0$.) Die lineare Gleichung (13.30) lässt für $\alpha = 0$ beliebige Koeffizienten a_{10} und a_{20} zu. Aus (13.24) folgt

$$\hat{\phi}_0 = a_{10} = 1 \text{ (gesetzt!)} \quad (13.32)$$

und die zugehörige Eigenbewegung lautet

$$\varphi_0(x, t) = (c_0 + \Omega_0 t), \quad (13.33)$$

vgl. (12.30) und den Hinweis 1 dort. Zur dritten Wurzel $\alpha = 0$ gibt es keine Auslenkungsform.

Lösungen zu $\alpha \neq 0$

Nach dem Abhandeln der Wurzeln $\alpha = 0$ darf man (13.31) durch $\alpha^2 (\neq 0)$ dividieren und umstellen.

$$\left(\alpha^2 \frac{J_1 J_2}{J_w^2} - 1 \right) \sin \alpha = \alpha \frac{J_1 + J_2}{J_w} \cos \alpha. \quad (13.34)$$

Seien zunächst $\cos \alpha_i \neq 0$ und $\left(\alpha_i^2 J_1 J_2 / J_w^2 - 1 \right) \neq 0$; (s. Aufgabe 13-6). Dann folgt aus (13.34) die charakteristische Gleichung in der Form

$$\tan \alpha = \frac{J_1 + J_2}{J_w} \frac{\alpha}{\alpha^2 \frac{J_1 J_2}{J_w^2} - 1}. \quad (13.35)$$

Zu ihrer grafischen Lösung sind in Bild 13-6 für die Parameterwerte

$$\frac{J_1}{J_w} = 1.0, \quad \frac{J_2}{J_w} = 2.0 \quad (13.36)$$

über α/π als Abszisse die Äste tg_i der Tangensfunktion und die beiden Äste f_1, f_2 der hyperbelförmig von α abhängigen Funktion auf der rechten Seite aufgetragen. Die Schnittpunkte der beiden Kurvenscharen liefern die charakteristischen Wurzeln α_i .

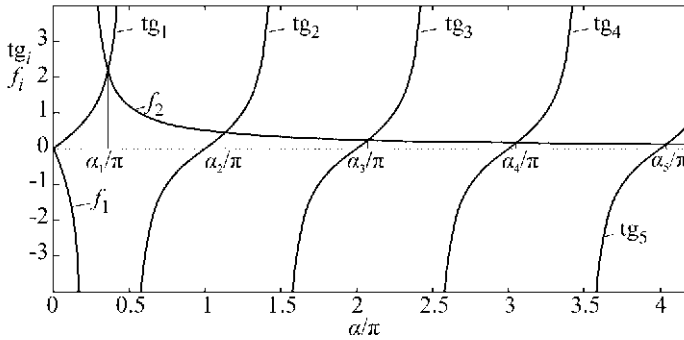


Bild 13-6
Graphische Lösung der
charakteristischen Gleichung

Aus Bild 13-6 liest man (nach Vergrößern der jeweiligen Bildausschnitte) ab:

i	1	2	3	4	n (>>1)
α_i/π	0.362	1.132	2.073	3.050	$(n-1) + \dots$

Tabelle 13-1: Eigenwerte α_i

Wenn man will, kann man diese Näherungswerte mit Hilfe von (13.35) – zu den gewählten Parametern (13.36) – iterativ verbessern (evtl. auch Newton-Verfahren).

Zu den Eigenwerten α_i nach Tabelle 13-1 erhält man aus dem Gleichungssystem (13.30) die Eigenvektoren

$$(a_1, a_2)_i^T = (J_w / (\alpha_i J_1), -1)^T. \quad (13.37)$$

(Diese Normierung wurde für die Darstellung in Bild 13-7 gewählt, sie setzt $J_1 \neq 0$ voraus.)

Dann lauten die Eigenschwingungsformen $\hat{\phi}_i$ nach (13.24)

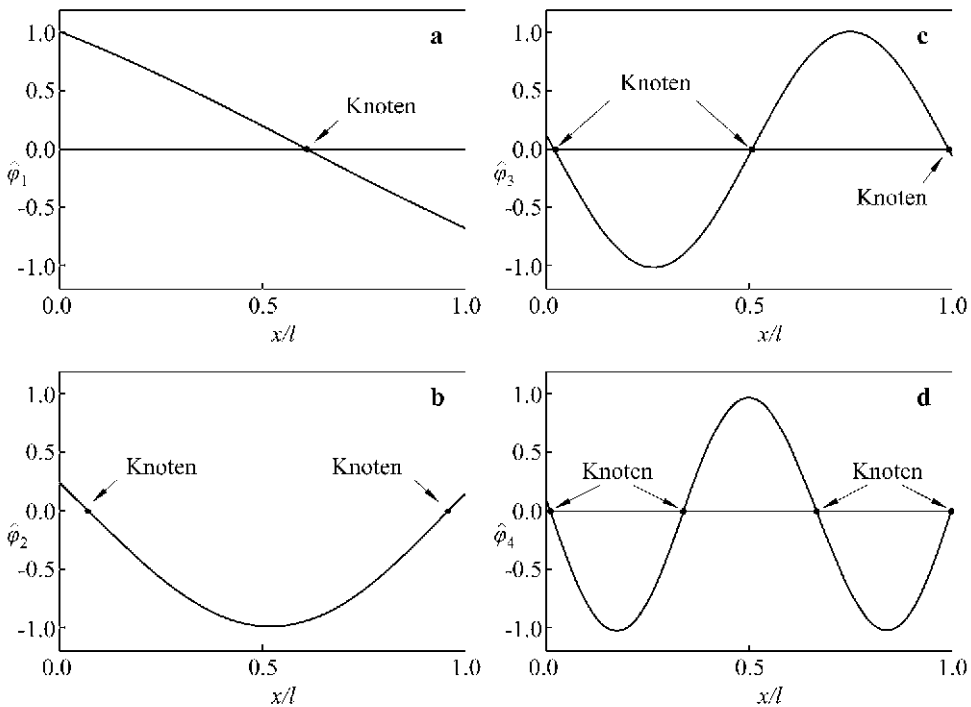
$$\hat{\phi}_i(x) = \frac{J_w}{\alpha_i J_1} \cos \alpha_i \frac{x}{l} - \sin \alpha_i \frac{x}{l}, \quad (13.38)$$

mit den zugehörigen Eigenfrequenzen nach (13.29)

$$\omega_i = \alpha_i \sqrt{\frac{G}{\rho l^2}}. \quad (13.39)$$

Bild 13-7 zeigt die ersten vier Eigenschwingungsformen $\hat{\phi}_i(x)$.

Bei $i=1$, $\alpha_1 = 0.362\pi$ verläuft $\hat{\phi}_1(x)$ nahezu linear, die *verteilte Trägheit* der Welle wirkt sich praktisch kaum aus (vgl. Aufgabe 13-1). Bei $i=2$, $\alpha_2 = 1.132 (\approx 3\alpha_1)$ schwingt die Welle gegen die Endmassen. Bei $i > 2$ schwingt die Welle teils mit, teils gegen die Endmassen.

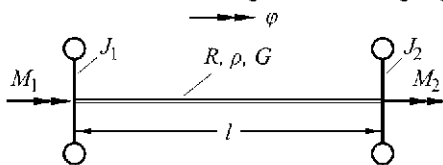
Bild 13-7: Eigenschwingungsformen $\hat{\varphi}_i(x)$ für die Eigenwerte α_i nach Tabelle 13-1

13.3 Erzwungene Schwingungen

Aufgabe: Auf den Schwinger nach Bild 13-8 wirken die beiden Erregermomente

$$M_i = \hat{M}_i \cos \Omega t. \quad (13.40)$$

Wie lauten die erzwungenen Schwingungen?

Bild 13-8
Schwinger mit Erregermomenten

Lösung:

Für die Welle gilt (nach wie vor) die Bewegungsgleichung (13.9),

$$J_w / l \cdot \ddot{\varphi} - G I_p \varphi'' = 0, \quad (13.41)$$

vgl. (13.5) für J_w und (13.3) für I_p . Auch die Beziehung (13.2) für das Torsionsmoment gilt (vgl. Bild 13-2):

$$G I_p \varphi' = M_T. \quad (13.42)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen an den ähnlich wie in Bild 13-5b freigeschnittenen End-Drehmassen lauten, vgl. (13.13),

$$\begin{aligned} -J_1 \ddot{\varphi}_1 + M_T(0, t) + M_1(t) &= 0, \\ -J_2 \ddot{\varphi}_2 - M_T(l, t) + M_2(t) &= 0. \end{aligned} \quad (13.43)$$

Mit (13.40) und (13.42) erhalten wir daraus die Randbedingungen, vgl. (13.15),

$$\begin{aligned} -J_1 \ddot{\varphi}(0, t) + G I_p \varphi'(0, t) &= -\hat{M}_1 \cos \Omega t, \\ -J_2 \ddot{\varphi}(l, t) - G I_p \varphi'(l, t) &= -\hat{M}_2 \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (13.44)$$

(Um die Parallelen zu Abschnitt 13.2 zu bewahren, lassen wir die Gleichungen in dieser Form stehen.)

Die Gleichungen (13.41) und (13.44) sind die Bewegungsgleichungen für die erzwungenen Schwingungen. Sie sind inhomogen, haben also – wenigstens zum Teil, vgl. (13.44) – nicht-verschwindende rechte Seiten.

Zur Lösung der Bewegungsgleichungen kann man auf komplexe Schreibweise übergehen – rechte Seiten erhalten die Form $\dots e^{j\Omega t}$ –, doch genügt für die ungedämpften erzwungenen Schwingungen der Ansatz

$$\varphi(x, t) = \hat{\varphi}(x) \cos \Omega t, \quad (13.45)$$

vgl. (13.16) bis (13.19).

Die Lösung der partiellen Dgl (13.41) kann man aus Abschnitt 13.2 übernehmen, wenn man in (13.19) ff. die unbekannte Frequenz ω durch die hier bekannte Erregerfrequenz Ω ersetzt. Insbesondere gelten jetzt, vgl. (13.22), (13.29),

$$\kappa = \Omega \sqrt{\frac{J_w}{l G I_p}}, \quad \alpha = \kappa l = \Omega \sqrt{\frac{l J_w}{G I_p}} = \Omega l \sqrt{\frac{\rho}{G}}; \quad (13.46)$$

und für die Schwingungsform $\hat{\varphi}(x)$ gilt wieder (13.24):

$$\hat{\varphi}(x) = a_1 \cos \kappa x + a_2 \sin \kappa x. \quad (13.47)$$

Mit (13.45) lauten die Randbedingungen (13.44)

$$\begin{aligned} J_1 \Omega^2 \hat{\varphi}(0) + G I_p \hat{\varphi}'(0) &= -\hat{M}_1, \\ J_2 \Omega^2 \hat{\varphi}(l) - G I_p \hat{\varphi}'(l) &= -\hat{M}_2, \end{aligned} \quad (13.48)$$

und mit (13.47) erhält man unter Beachtung von (13.46)

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 \frac{J_1}{J_w} & \alpha \\ \alpha^2 \frac{J_2}{J_w} \cos \alpha + \alpha \sin \alpha & \alpha^2 \frac{J_2}{J_w} \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -\frac{l}{GI_p} \begin{pmatrix} \hat{M}_1 \\ \hat{M}_2 \end{pmatrix}, \quad (13.49)$$

vgl. (13.26) bis (13.30). Dies ist ein lineares Gleichungssystem für a_1 und a_2 mit der Lösung

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{l}{GI_p \cdot \Delta(\alpha)} \left[\hat{M}_1 \left(\alpha^2 \frac{J_1}{J_w} \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \right) - \hat{M}_2 \right], \\ a_2 &= -\frac{l}{GI_p \cdot \Delta(\alpha)} \left[-\hat{M}_1 \left(\alpha^2 \frac{J_2}{J_w} \cos \alpha + \alpha \sin \alpha \right) + \hat{M}_2 \alpha^2 \frac{J_1}{J_w} \right], \end{aligned} \quad (13.50)$$

dabei ist $\Delta(\alpha)$ die Koeffizientendeterminante nach (13.31).

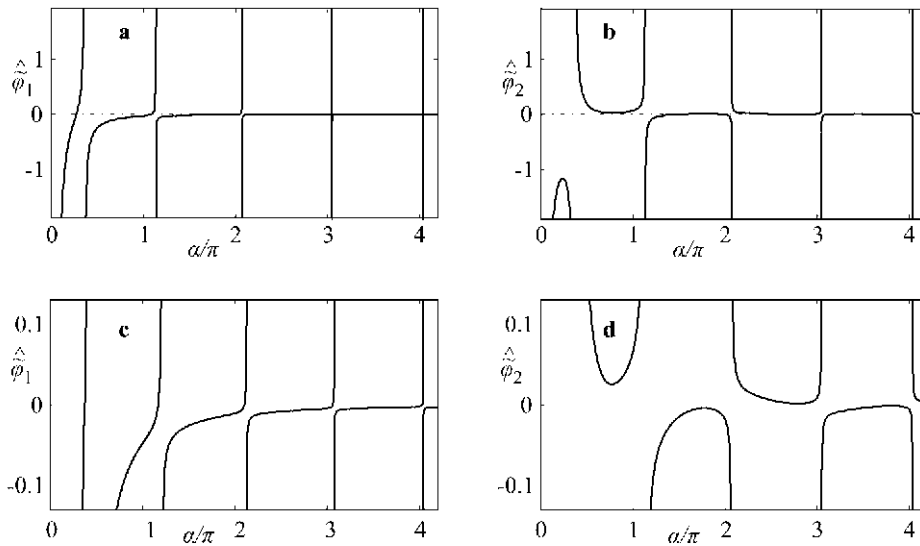


Bild 13-9 Frequenzgänge. a $\hat{\phi}_1(\alpha)$, b $\hat{\phi}_2(\alpha)$, c, d vertikal gestreckt

Diese Ausdrücke für a_1, a_2 muss man in (13.47) einsetzen (Übungsaufgabe).

Aus (13.50) liest man direkt ab: Stimmt Ω mit einer der Eigenfrequenzen ω_i , vgl. (13.39) überein, so verschwindet $\Delta(\alpha)$ im Nenner. Die Koeffizienten, a_1, a_2 wachsen über alle Grenzen (soweit die Ausdrücke in den eckigen Klammern nicht zufällig gleichzeitig verschwinden), man hat Resonanz für alle

$$|\Omega| = \omega_i, \quad (13.51)$$

Für $|\Omega| \approx \omega_i$ werden a_1, a_2 sehr groß.

Das Bild 13-9 zeigt für die Parameter (13.36) zur Erregung $\hat{M}_1 = \hat{M}, \hat{M}_2 = 0$ die Frequenzgänge von

$$\hat{\phi}_1 := \frac{G I_p}{l \hat{M}} \hat{\phi}(0), \quad \hat{\phi}_2 := \frac{G I_p}{l \hat{M}} \hat{\phi}(l), \quad (13.52)$$

aufgetragen über

$$\alpha / \pi = \frac{\Omega}{\pi} \sqrt{\frac{l J_w}{G I_p}}. \quad (13.53)$$

13.4 Diskretisieren des Kontinuums Welle

13.4.1 Allgemeines

Unter *Diskretisieren – Vereinzeln* – eines Kontinuums versteht man das Einschränken der oft unüberschaubaren Mannigfaltigkeit seiner Bewegungsmöglichkeiten auf (relativ) wenige, überschaubare, die man für wichtig hält. Bei den *eindimensionalen technischen Kontinua dreh-schwingende Welle, längs-schwingender Stab und biege-schwingender Balken* (auch die *quer-schwingende Seite* gehört hierher) hat man bereits vereinfacht, indem man die Querschnittsverformungen unbeachtet gelassen oder speziell angenommen hat. Ihre Bewegungen werden jedoch immer noch durch *partielle Differentialgleichungen* beschrieben.

Von *Diskretisieren* und einem *diskretisierten* oder auch *diskreten Modell* spricht man erst dann, wenn man die Bewegungen des Systems durch einzelne Variablen erfasst, die im allgemeinen Funktionen der Zeit sind und durch *gewöhnliche Differentialgleichungen* beschrieben werden.

Alle Diskretisierungsverfahren sind Näherungsverfahren, man muss sich also stets fragen, ob die getroffenen vereinfachenden Annahmen (noch) zulässig sind.

Die im Ingenieurwesen angewandten diskreten Modelle werden heute in der Regel aus Variationsprinzipien oder gleichwertigen Gleichungssätzen hergeleitet.

Man kann zwei Ansatzweisen unterscheiden:

- Man setzt für einzelne Komponenten seines Systems (zum Beispiel) Verformungstypen an, wie es die Fragestellung gebietet und die eigene Erfahrung nahe legt.
- Man zerlegt sein System in sehr viele, sehr kleine (*finite*) Elemente, für die man (meistens sehr) einfache Verformungstypen ansetzt.

Beim Vorgehen a) gelangt man in der Regel zu kleinen Gleichungssystemen, die sich leicht lösen und interpretieren lassen. Auch Einschwingvorgänge oder nichtlineare Schwingungen lassen sich (numerisch, mit einem Computer) untersuchen. Ehe man ansetzen kann, muss man jedoch schon einen Einblick in die *Physik seines Systems* haben, und man braucht auch Grundlagenkenntnisse, um die Frage- und Aufgabenstellungen in *Gleichungen umsetzen zu können* (die man dann mit dem Computer löst).

Beim Vorgehen b) gelangt man rasch zu großen Gleichungssystemen, die häufig eine besondere (z. B. Band-)Struktur haben. Das Vorgehen lässt sich leicht schematisieren, man braucht z. B. nur noch die Umrissse eines Bauteils und die Belastungen in ein entsprechendes Programmsystem einzugeben. Von den Einzelheiten braucht man nicht viel zu verstehen, wenn man nur Antworten auf bestimmte Fragen, z. B. nach der Spannung in einer bestimmten Kerbe, haben will. Zeitabhängige Vorgänge lassen sich mit Hilfe von Finiten Elementen nur schwer untersuchen, weil der Rechenaufwand sehr, sehr groß wird.

Eine Kombination beider Vorgehensweisen erscheint als günstig: Mit Hilfe von Finiten Elementen berechnet man sich *Detail-Erfahrungen*, die man in spezielle Ansätze für das (Gesamt-)System einbringt.

13.4.2 Das Arbeiten mit globalen Ansatzfunktionen

Wir schließen an die freien Schwingungen in Abschnitt 13.2 an. In *Bild 13-7a* ist der Einfluss der verteilten Masse auf die (erste) Eigenschwingungsform offenbar klein, der Drehwinkelverlauf weicht nur wenig von einer Geraden ab. Man fragt nach einem Modell, das die verteilte Wellenmasse näherungsweise erfasst und einfacher ist als die partielle Dgl (13.12) mit den Randbedingungen (13.15). Es liegt nahe, die Aufgabe auch gleich um ein Erregermoment $M_1(t)$ zu erweitern. *Bild 13-10* zeigt das zu untersuchende System.

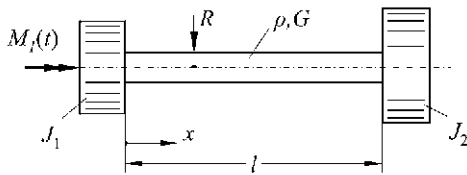


Bild 13-10
Drehschwinger

13.4.2.1 Vorbereitung für Lagrange-Gleichungen

Wir arbeiten mit den Lagrange-Gleichungen nach Abschnitt C.2.3.

Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho I_p \dot{\varphi}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 \quad (13.54)$$

mit

$$\varphi_1 = \varphi(0, t), \quad \varphi_2 = \varphi(l, t), \quad (13.55)$$

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{\pi}{2} R^4 = I_p(x) && \text{falls } R = R(x), \\ \rho I_p &= J_w/l && \text{falls } R \text{ konstant.} \end{aligned} \quad (13.56)$$

Potential

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l G I_p [\varphi'(x, t)]^2 dx \quad (13.57)$$

Virtuelle Arbeit

$$\delta W = M_1(t) \cdot \delta \varphi_1. \quad (13.58)$$

Ansatzfunktionen

Wir bilden ein diskretes System mit drei Variablen $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ – vom Freiheitsgrad 3 –, und zwar setzen wir, vgl. Bild 13-11,

$$\varphi(x, t) = \varphi_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \varphi_2 \frac{x}{l} + \varphi_3 4 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad (13.59)$$

Die Funktionen $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ und $\varphi_3(t)$ sind die generalisierten Koordinaten q_1, q_2 bzw. q_3 .

Die beiden ersten Summanden erfassen die Gerade, φ_3 liefert die Abweichung davon (in Wellenmitte gemessen) in Form einer (quadratischen) Parabel. Es ist zweckmäßig, (13.59) abzukürzen:

$$\varphi(x, t) = \sum_{i=1}^3 \phi_i(x) \varphi_i(t), \quad (13.60)$$

mit

$$\phi_1 := 1 - \frac{x}{l}, \quad \phi_2 := \frac{x}{l}, \quad \phi_3 := 4 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad (13.61)$$

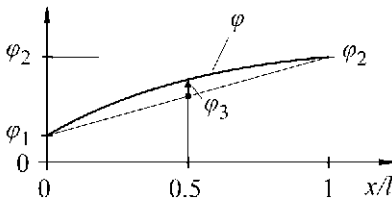


Bild 13-11
Globale Ansätze für die Auslenkung

Matrix-Schreibweise

Setzt man $\varphi(x, t)$ gemäß (13.60) bzw. (13.59) in die Ausdrücke (13.54), (13.57) der kinetischen Energie T bzw. der potentiellen Energie U ein, kann man die Koeffizienten $\varphi_i(t)$, sie stehen hier als generalisierte Koordinaten $q_i(t)$, aus den Integralen herausziehen. Mit der Spaltenmatrix

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) := (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T \quad (13.62)$$

erhält man, in Matrixschreibweise, die quadratischen Formen

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}}, \quad U = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}, \quad (13.63)$$

mit der Trägheitsmatrix

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_1 + J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_2 + J_{33} \end{pmatrix} \quad (13.64)$$

und der Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}, \quad (13.65)$$

wo, vgl. (13.54) bzw. (13.57)

$$J_{ik} := \int_0^l \rho I_p(x) \phi_i(x) \phi_k(x) dx, \quad (13.66)$$

$$K_{ik} := \int_0^l G I_p(x) \phi_i'(x) \phi_k'(x) dx. \quad (13.67)$$

Diese Integrale muss man vorab, das heißt vor dem Lösen der Bewegungsgleichungen (evtl. numerisch), auswerten.

Die virtuelle Arbeit δW erhält die Form

$$\delta W = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{x}; \quad (13.68)$$

aus (13.58) folgt hier für die generalisierte Kraft

$$\mathbf{Q}^T = (M_1(t), 0, 0). \quad (13.69)$$

13.4.2.2 Lagrange-Formalismus

Will man die Lagrangeschen Gleichungen in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (13.70)$$

anwenden, muss man T und U aus (13.63) in Doppelsummen umschreiben, die Differentiationen ausführen und dann zur Matrix-Schreibweise zurückkehren (Übungsaufgabe). Man erhält die Bewegungsdifferentialgleichung

$$\mathbf{J} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{Q}. \quad (13.71)$$

Im Fall konstanten Wellenquerschnitts, vgl. (13.56)₂, kann man die Integrale (13.66), (13.67) leicht ausrechnen und findet (Übungsaufgabe):

$$\begin{pmatrix} J_1 + \frac{J_w}{3} & \frac{J_w}{6} & \frac{J_w}{3} \\ \frac{J_w}{6} & J_2 + \frac{J_w}{3} & \frac{J_w}{3} \\ \frac{J_w}{3} & \frac{J_w}{3} & 8\frac{J_w}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \end{pmatrix} + \frac{GI_P}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.72)$$

Das diskrete System (13.72) ist in einem großen Frequenzbereich – solange nur die ersten beiden Eigenformen $\hat{\phi}_i$ in Abschnitt 13.2 erregt werden, also bis etwa $\alpha = 1.3\pi$ für die dort gewählten Parameter – eine Näherung für das dort angegebene Modell. Es hat den Vorteil, dass es einfach aufgebaut ist und auch numerisch einfach gelöst werden kann.

13.4.2.3 Eigenschwingungen (Zahlenbeispiel)

Wir setzen $M_1 = 0$ und wählen die Bezugsgrößen

$$J_R = J_w, \quad k_{TR} = \frac{GI_P}{l}, \quad \omega_R = \sqrt{\frac{k_{TR}}{J_R}} \quad (13.73)$$

und die Parameter

$$J_1 = J_w, \quad J_2 = 2J_w. \quad (13.74)$$

Dann lautet (13.72)

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (13.75)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 40 & 5 & 10 \\ 5 & 70 & 10 \\ 10 & 10 & 16 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}. \quad (13.76)$$

Der Ansatz $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} e^{j\tilde{\omega}t}$ führt auf das Eigenwertproblem

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{4\tilde{\omega}^2}{3} & -1 - \frac{\tilde{\omega}^2}{6} & -\frac{\tilde{\omega}^2}{3} \\ -1 - \frac{\tilde{\omega}^2}{6} & 1 - \frac{7\tilde{\omega}^2}{3} & -\frac{\tilde{\omega}^2}{3} \\ -\frac{\tilde{\omega}^2}{3} & -\frac{\tilde{\omega}^2}{3} & \frac{16}{3} - \frac{8\tilde{\omega}^2}{15} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (13.77)$$

Die charakteristische Gleichung lautet nach Multiplikation mit $(-135/4)$

$$\Delta(\tilde{\omega}) = (43\tilde{\omega}^4 - 612\tilde{\omega}^2 + 720) = 0 \quad (13.78)$$

und hat die Lösungen (vgl. *Tabelle 13-1*)

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_0 &= 0 & \text{vgl. } \alpha_0 &= 0 \\ \tilde{\omega}_1 &= 1.13768 & \text{vgl. } \alpha_1 &= 0.362\pi = 1.13725... \\ \tilde{\omega}_2 &= 3.59699 & \text{vgl. } \alpha_2 &= 1.132\pi = 3.55628... \end{aligned} \quad (13.79)$$

mit den Eigenvektoren:

$$\hat{x}_0^T = (1, 1, 0), \quad \hat{x}_1^T = (1, -0.609, 0.036), \quad \hat{x}_2^T = (1, 0.503, -4.136). \quad (13.80)$$

13.4.3 Das Arbeiten mit lokalen Ansatzfunktionen

Hinweis 1: Die hier vorgestellten Ansätze entsprechen gängigen Finiten Elementen, vgl. [56].

13.4.3.1 Die Ausgangsgleichungen

Nehmen wir an, es liegt dieselbe Aufgabe wie in Abschnitt 13.4.2 vor, vgl. Bild 13-10. Die kinetische Energie T , das Potential U und die virtuelle Arbeit δW werden aus Abschnitt 13.4.2 übernommen:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho I_p \dot{\phi}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}^2(0, t) + \frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}^2(L, t), \quad (13.81)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L G I_p [\phi'(x, t)]^2 dx, \quad (13.82)$$

$$\delta W = M_1(t) \delta \phi(0, t). \quad (13.83)$$

13.4.3.2 Ansatzfunktionen

Beim Arbeiten mit lokalen Ansatzfunktionen zerlegt man die Welle in $n-1$ Abschnitte der Längen l_i , $i = 1, \dots, n-1$ (sie können auch alle gleich lang sein, $l_i = L/(n-1)$), Bild 13-12.

Damit liegen die Endpunkte x_i der Abschnitte (*Elemente*, Intervalle) i fest:

$$x_1 = 0, x_{i+1} = x_i + l_i, x_n = L. \quad (13.84)$$

Die einfachste Ansatzfunktion (die die Welle nicht *abschert*) ist ein Polygonzug, vgl. Bild 13-13.

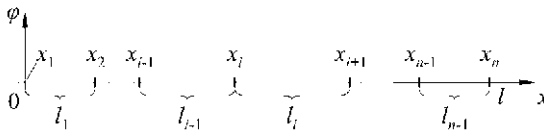


Bild 13-12
Wellenabschnitte l_i

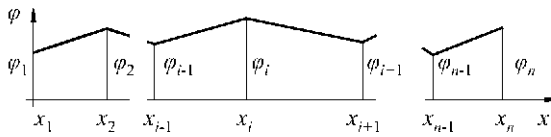


Bild 13-13

Polygonzug als Wellendrehwinkel zum Zeitpunkt t

Es gilt

$$\varphi_i = \varphi_i(t) = \varphi(x_i, t). \quad (13.85)$$

Man wählt nun *Formfunktionen* $N_i(x)$, wie in Bild 13-14 skizziert. Mit den jeweiligen lokalen Koordinaten ξ_i , vgl. Bild 13-14, lauten sie

$$N_1(x) := \begin{cases} 1 - \xi_1 / l_1 & \text{für } 0 \leq \xi_1 \leq l_1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (13.86)$$

$$N_i(x) := \begin{cases} 1 + \xi_i / l_{i-1} & \text{für } -l_{i-1} \leq \xi_i \leq 0, \\ 1 - \xi_i / l_i & \text{für } 0 \leq \xi_i \leq l_i, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (13.87)$$

$$N_n(x) := \begin{cases} 1 + \xi_n / l_{n-1} & \text{für } -l_{n-1} \leq \xi_n \leq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (13.88)$$

Mit den Formfunktionen schreibt man den Polygonzug nach Bild 13-13 als Summe:

$$\varphi(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) N_i(x). \quad (13.89)$$

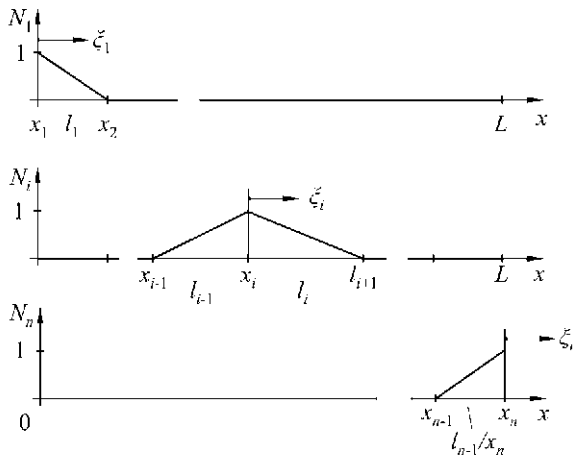
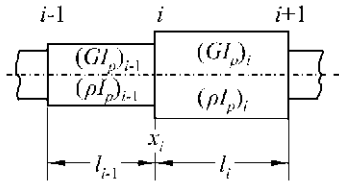
Dabei wird durch φ markiert, dass wir die rechts stehende Summe meinen. Den Ausdruck $\varphi(x, t)$ können wir in (13.81) bis (13.83) einsetzen und dabei zulassen, dass die Drillsteifigkeit GI_ρ und auch die Trägheit ρI_ρ von Abschnitt zu Abschnitt springt, vgl. Bild 13-15.

Dann lauten die Ausdrücke (13.81) bis (13.83)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\rho I_\rho)_i \dot{\varphi}^2 dx + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_n^2, \quad (13.90)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (GI_\rho)_i [\varphi']^2 dx, \quad (13.91)$$

$$\delta W = M_1(t) \delta \varphi_1. \quad (13.92)$$

Bild 13-14
FormfunktionenBild 13-15
Abschnittsweise konstante Drillsteifigkeiten und Drehträgheiten

13.4.3.3 Formales Auswerten der Integrale

Nun muss φ nach (13.89) mit den $N_j(x)$ nach (13.86) bis (13.88) in T – und dann auch in U und δW – eingesetzt und die Ausdrücke ausgewertet werden. Dabei geht man wie folgt vor:

Man reserviert den Summationsindex i für die Summe in (13.90) und schreibt (13.89) einmal mit dem Summationsindex j und einmal mit k an:

$$\varphi(x, t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) N_j(x), \quad \varphi(x, t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) N_k(x). \quad (13.93)$$

Setzt man die Zeitableitungen der φ aus (13.93) in (13.90) ein, erhält man

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\rho I_\rho)_i \left[\sum_{j=1}^n \dot{\varphi}_j N_j(x) \right] \left[\sum_{k=1}^n \dot{\varphi}_k N_k(x) \right] dx. \quad (13.94)$$

Da alles beschränkt ist, darf man Summationen und Integration vertauschen:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \dot{\varphi}_j \dot{\varphi}_k \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\rho I_\rho)_i N_j(x) N_k(x) dx. \quad (13.95)$$

Da von den $N_j(x)$ im i -ten Intervall $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ nur $N_i(x)$ und $N_{i+1}(x)$ NICHT verschwinden, bleiben in (13.95) von der Summe über j nur diese beiden Glieder übrig:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n \dot{\phi}_k \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\rho I_p)_i N_k(x) [\dot{\phi}_i N_i(x) + \dot{\phi}_{i+1} N_{i+1}(x)] dx. \quad (13.96)$$

Das gleiche Argument gilt für die Summe über k , man erhält:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\rho I_p)_i [\dot{\phi}_i N_i(x) + \dot{\phi}_{i+1} N_{i+1}(x)]^2 dx,$$

also

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}_1^2 + \frac{12}{2} J_2 \dot{\phi}_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\rho I_p)_i [\dot{\phi}_i^2 N_i^2 + 2 \dot{\phi}_i \dot{\phi}_{i+1} N_i N_{i+1} + \dot{\phi}_{i+1}^2 N_{i+1}^2] dx. \quad (13.97)$$

Analog ergibt sich

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (G I_p)_i \left[\varphi_i^2 (N'_i)^2 + 2 \varphi_i \varphi_{i+1} N'_i N'_{i+1} + \varphi_{i+1}^2 (N'_{i+1})^2 \right] dx. \quad (13.98)$$

Man rechnet für abschnittsweise konstante Wellenquerschnitte leicht aus, vgl. Bild 13-14:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\rho I_p)_i N_i^2 dx &= (\rho I_p)_i \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{\xi_i}{l_i}\right)^2 d\xi_i = \frac{l_i (\rho I_p)_i}{3}, \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\rho I_p)_i N_i N_{i+1} dx &= (\rho I_p)_i \int_0^{l_i} \frac{\xi_i}{l_i} \left(1 - \frac{\xi_i}{l_i}\right) d\xi_i = \frac{l_i (\rho I_p)_i}{6}, \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\rho I_p)_i N_{i+1}^2 dx &= (\rho I_p)_i \int_0^{l_i} \left(\frac{\xi_i}{l_i}\right)^2 d\xi_i = \frac{l_i (\rho I_p)_i}{3}, \end{aligned} \quad (13.99)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (G I_p)_i N_i'^2 dx &= (G I_p)_i \int_0^{l_i} \frac{d\xi_i}{l_i^2} = \frac{(G I_p)_i}{l_i}, \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (G I_p)_i N'_i N'_{i+1} dx &= (G I_p)_i \int_0^{l_i} \frac{d\xi_i}{l_i^2} = -\frac{(G I_p)_i}{l_i}, \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (G I_p)_i N_{i+1}'^2 dx &= (G I_p)_i \int_0^{l_i} \frac{d\xi_i}{l_i^2} = \frac{(G I_p)_i}{l_i}. \end{aligned} \quad (13.100)$$

Mit den Abkürzungen

$$\left(\rho I_p\right)_i l_i \doteq J_{wi}, \quad \frac{\left(G I_p\right)_i}{l_i} \doteq k_{wi} \quad (13.101)$$

lauten T und U

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{J_{w_i}}{3} \cdot \left(\dot{\varphi}_i^2 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_{i+1} + \dot{\varphi}_{i+1}^2 \right), \quad (13.102)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_{w_i} \left(\varphi_i^2 - 2 \varphi_i \varphi_{i+1} + \varphi_{i+1}^2 \right), \quad (13.103)$$

$$\delta W = M_1 \delta \varphi_n. \quad (13.104)$$

Aus den Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (13.105)$$

erhält man

für $i = 1$:

$$\left(J_1 + \frac{J_{w_1}}{3} \right) \ddot{\varphi}_1 + \frac{J_{w_1}}{6} \ddot{\varphi}_2 + k_{w_1} \varphi_1 - k_{w_1} \varphi_2 = M_1, \quad (13.106)$$

für $1 < i < n$:

$$\frac{J_{w_{i-1}}}{6} \ddot{\varphi}_{i-1} + \frac{J_{w_{i-1}} + J_{w_i}}{3} \ddot{\varphi}_i + \frac{J_{w_i}}{6} \ddot{\varphi}_{i+1} - k_{w_{i-1}} \varphi_{i-1} + \left(k_{w_{i-1}} + k_{w_i} \right) \varphi_i - k_{w_i} \varphi_{i+1} = 0, \quad (13.107)$$

für $i = n$ (entspricht Index $i+1$ mit $i = n-1$ in (13.102) usw.

$$\frac{J_{w_{n-1}}}{6} \ddot{\varphi}_{n-1} + \left(J_2 + \frac{J_{w_{n-1}}}{3} \right) \ddot{\varphi}_n - k_{w_{n-1}} \varphi_{n-1} + k_{w_{n-1}} \varphi_n = 0. \quad (13.108)$$

Mit dem Auslenkungsvektor

$$\mathbf{x} := \left(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n \right)^T \quad (13.109)$$

und den Matrizen

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} J_1 + \frac{J_{w_1}}{3} & \frac{J_{w_1}}{6} & 0 & 0 \\ \frac{J_{w_1}}{6} & \frac{J_{w_1} + J_{w_2}}{3} & \frac{J_{w_2}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{J_{w_2}}{6} & \frac{J_{w_2} + J_{w_3}}{3} & \frac{J_{w_3}}{6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{J_{w_{n-2}}}{6} & \frac{J_{w_{n-2}} + J_{w_{n-1}}}{3} & \frac{J_{w_{n-1}}}{6} & \\ 0 & \frac{J_{w_{n-1}}}{6} & J_2 + \frac{J_{w_{n-1}}}{3} & \end{pmatrix} \quad (13.110)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{w_1} & -k_{w_1} & 0 & 0 \\ -k_{w_1} & k_{w_1} + k_{w_2} & -k_{w_2} & 0 \\ 0 & -k_{w_2} & k_{w_2} + k_{w_3} & -k_{w_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -k_{w_{n-2}} & k_{w_{n-2}} + k_{w_{n-1}} & -k_{w_{n-1}} & \\ 0 & -k_{w_{n-1}} & k_{w_{n-1}} & \end{pmatrix} \quad (13.111)$$

lauten die Bewegungsgleichungen (13.106) bis (13.108)

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = (M_1, 0, 0, \dots, 0, 0)^T. \quad (13.112)$$

Achtung!

Die Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{K}$ gemäß (13.110) und (13.111) haben *Bandstruktur*: Nur die Hauptdiagonale und die beiden benachbarten Parallelen sind mit (Matrix-)Elementen $\neq 0$ besetzt. (Für solche Matrizen gibt es spezielle Lösungsverfahren, die die Besonderheit ausnutzen.)

Bandstrukturen erhält man (immer dann), wenn sich die Formfunktionen N_i der Strukturelemente nur zum Teil *überlappen*. In Bild 13-14 tun das nur die Formfunktionen unmittelbar benachbarter Wellenabschnitte.

13.4.3.4 Zahlenbeispiel

Wir wenden die Überlegungen auf das Eigenwertproblem aus Abschnitt 13.2, auch Abschnitt 13.4.2, an und arbeiten mit $n=2$ Elementen der Längen $l_1 = l_2 = l/2$, vgl. Bild 13-10.

Um mit den Ergebnissen aus Abschnitt 13.4.2 leicht vergleichen zu können, setzen wir $l_i = l/2$ ein:

$$k_{wi} = \frac{G I_p}{l_i} = 2 \frac{G I_p}{l}, \quad J_{wi} = \frac{J_w}{l} l_i = \frac{1}{2} J_w, \quad i = 1, 2, \quad (13.113)$$

vgl. (13.72). Dann lauten die Bewegungsgleichungen (13.112) mit $M_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} J_1 + \frac{J_w}{6} & \frac{J_w}{12} & 0 \\ \frac{J_w}{12} & \frac{J_w}{3} & \frac{J_w}{12} \\ 0 & \frac{J_w}{12} & J_2 + \frac{J_w}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} + \frac{G I_p}{l} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (13.114)$$

Achtung! Die $\varphi_i(t)$ hier sind andere Koordinaten als in Abschnitt 13.4.2. In dimensionsloser Form gilt, vgl. (13.73) bis (13.76),

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{7\tilde{\omega}^2}{6} & -2 - \frac{\tilde{\omega}^2}{12} & 0 \\ -2 - \frac{\tilde{\omega}^2}{12} & 4 - \frac{\tilde{\omega}^2}{3} & -2 - \frac{\tilde{\omega}^2}{12} \\ 0 & -2 - \frac{\tilde{\omega}^2}{12} & 2 - \frac{13\tilde{\omega}^2}{6} \end{pmatrix} \hat{x} = 0. \quad (13.115)$$

Die Eigenwerte lauten, vgl. (13.79)

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_0 &= 0, \\ \tilde{\omega}_1 &= 1.13796, \quad \text{Kontin.: } 1.13725, \quad \text{global: } 1.13768, \\ \tilde{\omega}_2 &= 3.88302, \quad \text{Kontin.: } 3.55628, \quad \text{global: } 3.59699. \end{aligned} \quad (13.116)$$

Die Eigenvektoren ergeben sich zu:

$$\hat{x}_1 = (1, 0.2320, -0.6071)^T, \quad \hat{x}_2 = (1, -4.7876, 0.5083)^T. \quad (13.117)$$

Zum Vergleich mit dem Ergebnis aus Abschnitt 13.4.2 rechnen wir $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ um: x_3 tritt an die Stelle von x_2 , das neue x_3 – mit φ_3 aus Abschnitt 13.4.2 vergleichbar – ergibt sich aus dem alten $x_2 - (x_1 + x_3)/2$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{1\text{vergl.}} &= (1, -0.6071, 0.0355)^T, \\ \hat{x}_{2\text{vergl.}} &= (1, 0.5083, -5.5417)^T; \end{aligned} \quad (13.118)$$

(13.118) muss man mit (13.80) vergleichen.

13.5 Aufgaben

Aufgabe 13-1: Die Schwingungsform nach Bild 13-7a für die tiefste Eigenfrequenz ω_1 weicht nur wenig von einer Geraden ab, der Einfluss der Wellenträgheit ist gering. Berechnen Sie zum Vergleich die Eigenfrequenz ω_1 bei Vernachlässigung der Wellenträgheit (d. h. $J_w = 0$ bzw. $\rho = 0$).

Aufgabe 13-2: Wie lauten die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen der freischwingenden Welle nach Bild 13-5 für den Fall fehlender End-Drehmassen, d. h. $J_1 = J_2 = 0$?

Aufgabe 13-3: Kontrollieren Sie die Zahlenwerte $\alpha_i, i = 1, \dots, 4$ in Tabelle 13-1 und verbessern Sie die Näherungswerte mit Hilfe eines Iterationsverfahrens um (wenigstens) eine weitere Stelle.

Aufgabe 13-4: Schreiben Sie mit Hilfe der Eigenfrequenzen ω_i und Eigenformen $\hat{\phi}_i(x)$ nach (13.39) bzw. (13.38) – auch (13.32) – die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen an.

Aufgabe 13-5: Welche Bedingung müssen die Parameter J_1/J_w und J_2/J_w in der charakteristischen Gleichung (13.35) erfüllen, damit – wie in unserem Beispiel – keine Eigenwerte α_i auftreten, für die $\tan \alpha_i < 0$ gilt? (... in Bild 13-6 keine Schnittpunkte in der unteren Halbebene auftreten?)

Aufgabe 13-6: Für welche Parameterwerte $(J_1 J_2 / J_w^2)$ hat die charakteristische Gleichung (13.35) Lösungen α_i mit $\cos \alpha_i = 0$?

Aufgabe 13-7: In Bild 13-9 sind die Amplituden $\hat{\phi}_i$ über der bezogenen Frequenz

$\alpha / \pi \equiv \tilde{\Omega} / \pi = \frac{\Omega}{\pi} \sqrt{\frac{I J_w}{G I_p}}$ mit Vorzeichen aufgetragen. Schreiben Sie $\hat{\phi}_i = |\hat{\phi}_i| e^{j\psi_i}$, vgl.

(12.70), und skizzieren Sie parallel zu Bild 12-15 die Verläufe (die Frequenzgänge) der Amplituden $|\hat{\phi}_i|$ und der Phasenverschiebungswinkel ψ_i in Abhängigkeit von $\tilde{\Omega}$.

Aufgabe 13-8: Diskutieren Sie die Frequenzgänge aus Aufgabe 13-7 analog zu Seite 188. Dazu ist es günstig, sich die Schwingungsform $\hat{\phi}(x)$ für einige Erregerfrequenzen $\tilde{\Omega} = \alpha$ zu berechnen (PC!)

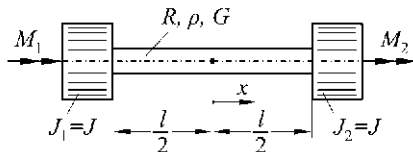


Bild 13-16
Symmetrisch aufgebauter Drehschwinger

Aufgabe 13-9: Besonders bei symmetrisch aufgebauten Systemen, vgl. Bild 13-16, mit a) symmetrischer Erregung $M_1 = M_2 = M(t)$ oder mit b) antisymmetrischer Erregung

$M_1 = -M_2 = M(t)$ ist es günstig, die Koordinaten so zu wählen – hier z. B. den Nullpunkt von x in die Wellenmitte zu legen –, dass Symmetrien und Antimetrien in den Gln wiederzuerkennen sind. Welche Symmetrien und Antimetrien treten in diesem System in den freien und den erzwungenen Schwingungen auf?

Aufgabe 13-10: Überführen Sie die kinetische Energie T nach (13.54) und die potentielle Energie U nach (13.57) mit dem Ansatz (13.60) in die Matrizenformen (13.64), (13.65) mit den Integralen (13.66) bzw. (13.67).

Aufgabe 13-11: Zeigen Sie, dass die Matrizen J und K symmetrisch sind: $J = J^T$, $K = K^T$

Aufgabe 13-12: Wie sähe die generalisierte Kraft Q in (13.69) aus, wenn in Wellenmitte bei $x = l/2$ das Drehmoment $M(t)$ angriffe?

Aufgabe 13-13: Schreiben Sie T und U nach (13.63) als Doppelsumme über $(i, k) = (1:3, 1:3)$, setzen Sie sie in (13.70) ein und schreiben Sie die drei (gekoppelten) Bewegungsdifferentialgleichungen für die drei φ_i an. Fassen Sie die drei Dgln zu einer Matrixgleichung (13.71) zusammen.

Aufgabe 13-14: Können Sie sich aus Aufgabe 13-13 eine "Ableitungsregel" zurechtlegen, die Ihnen in Zukunft gestattet, die in (13.70) geforderten Ableitungen aus der Matrixschreibweise (13.63) unmittelbar zu gewinnen? (Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie aus, s. Aufgabe 13-11.)

Aufgabe 13-15: Werten Sie die Integrale (13.66), (13.67) mit den Ansatzfunktionen $\phi_i(x)$ nach (13.61) für den Fall konstanten Wellenquerschnitts aus, vgl. (13.56)₂, und kontrollieren damit (13.72).

Aufgabe 13-16: Schreiben Sie die Schritte des Dimensionslos-Machens von (13.72) nach (13.75) ausführlich an. Weshalb kann man in (13.79) $\tilde{\omega}_i$ direkt mit α_i aus Abschnitt 13.2 vergleichen?

Aufgabe 13-17: Skizzieren Sie die Schwingungsformen $\hat{\phi}(x)$ zu den Eigenvektoren nach (13.80) und vergleichen Sie sie mit jenen nach Bild 13-7.

Aufgabe 13-18: Berechnen Sie zu den angegebenen Parametern und mit $M_1(t) = \hat{M}(\cos \Omega t + 0.5 \sin 3\Omega t)$ die erzwungenen Schwingungen. Bei welchen Frequenzen Ω treten Resonanzen auf?

Aufgabe 13-19: Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen (13.112) analog zu (13.114) für den Fall an, dass die Welle in 3 gleich lange Elemente $l_1 = l_2 = l_3 = l/3$ geteilt wird. Das entstehende Eigenwertproblem – analog (13.115) – enthält dann eine 4×4 -Matrix. Die charakteristische Gleichung ist vom 4. bzw. 3. Grad (Wurzel $\tilde{\omega} = 0$ trivial); Lösung von Hand oder PC.

Aufgabe 13-20: Der in Bild 13-17 skizzierte Drehschwinger besteht aus zwei dicken Wellen (Parameter ρ, G, I_{p_i}, l_i) und einer Drehmasse J und ist mit einem dünnen Torsionsstab (Steif-

figkeit k_T) an die Umgebung angeschlossen. Gesucht sind Näherungsgleichungen der Form (13.112) für Eigenschwingungen.

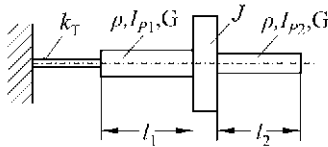


Bild 13-17: Dreh Swinger

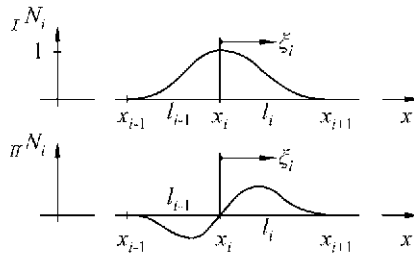


Bild 13-18: Ansatzfunktionen für finite Elemente

Aufgabe 13-21: Zur genaueren Untersuchung von Drehschwingungen $\varphi(x, t)$ soll mit dem Ansatz $\varphi(x, t) = \sum \varphi_i I N_i(x) + \sum \varphi_i^* II N_i(x)$ gearbeitet werden. Die beiden Formfunktionen $I N_i(\xi_i)$ und $II N_i(\xi_i)$ sind in Bild 13-18 skizziert. Sie genügen den Bedingungen

$$\begin{aligned} I N_i(-l_{i-1}) &= I N_i(l_i) = 0, & II N_i(-l_{i-1}) &= II N_i(l_i) = 0, \\ I N_i'(-l_{i-1}) &= I N_i'(l_i) = 0, & II N_i'(-l_{i-1}) &= II N_i'(l_i) = 0, \\ I N_i(0) &= 1, & II N_i(0) &= 0, \\ I N_i'(0) &= 0, & N_i'(0) &= 1/\sqrt{l_i l_{i-1}}. \end{aligned}$$

- Ergänzen Sie die Bedingungen für $I N_1(\xi_1)$, $I N_n(\xi_n)$ und $II N_1(\xi_1)$, $II N_n(\xi_n)$, die Formfunktionen an den beiden Wellenenden.
- Entwickeln Sie die $I N_i(\xi_i)$ und $II N_i(\xi_i)$ jeweils für positives und negatives Argument.
- Stellen Sie die Trägheitsmatrix $\mathbf{M}$ und die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ zu (13.99), (13.100) auf.

14 Balken-Biegeschwingungen

14.1 Aufgabe: Schwingungen einer Kranbrücke

Bild 14-1 zeigt schematisch eine Kranbrücke mit Laufkatze, die an einem Seil eine Last trägt. Gefragt ist nach den Schwingungen im System, wenn die Last (oder auch nur ein Teil davon) plötzlich abfällt.

Das System ist bereits stark vereinfacht: Die Stützen wurden als (vertikal) starre Auflager gezeichnet, der Kranträger als Balken mit konstantem Querschnitt (Biegesteifigkeit EI , Massebelegung μ) angenommen.

Wir vereinfachen noch weiter: Der Achsabstand der Laufkatze ($= 2a$) soll klein gegenüber den Balkenlängen l_1, l_2 sein; dann kann die Laufkatze durch eine Punktmasse m ersetzt werden. Wir fragen auch nur nach dem vollständigen Abfall der Last $G_L = g m_L$.

Dann gilt das Ersatzsystem nach Bild 14-2: Der Balken ist infolge des Katzen- und Eigengewichts und zusätzlich durch das Gewicht G_L der Last statisch durchgebogen (und in Ruhe). Plötzlich fällt die Last ab. Wie schwingt er danach? Insbesondere interessieren die beiden tiefsten Eigenfrequenzen und die zugehörigen Eigenschwingungsformen. (Man könnte z. B. auch nach den schwingenden Auflagerkräften fragen, ob eines der Lager abhebt – die Brücke aus einer Führung springen kann – usw.)

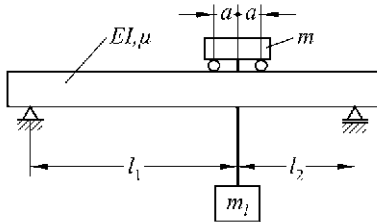


Bild 14-1: Kranbrücke mit Laufkatze

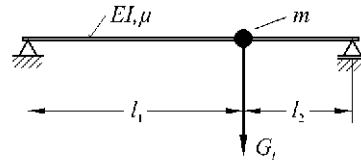


Bild 14-2: Kranbrücke mit Punktmasse

14.2 Die partiellen Dgln der Balkenbiegung

14.2.1 Herleitung der Dgln

Kräfte und Gleichgewichtsbedingungen

Bild 14-3a zeigt in Abhängigkeit von der Längskoordinate x die auf den Balken vertikal nach unten wirkende verteilte Last, $q(x, t)$, kurz *Streckenlast*, sowie die *Querkraft* $Q(x, t)$ und das *Biegemoment* $M(x, t)$, die Schnittgrößen.

In der Mechanik leitet man für die Querkraft bzw. das Moment am Balkenelement die *Gleichgewichtsbedingungen*

$$Q' = \frac{\partial Q}{\partial x} = -q, \quad M' = \frac{\partial M}{\partial x} = Q \quad (14.1)$$

her.

Auslenkungen

Der Balken sei in der Ausgangslage unbelastet gerade. Seine Achse, die Schwerelinie seiner Querschnitte, falle auf die x -Achse, vgl. Bild 14-3b. Die Auslenkung $w(x, t)$ wird (positiv)

als Absenkung der Schwerlinie gegenüber der Ausgangslage gemessen. (Als Funktion von x wird $w(x, t)$ auch Biegelinie genannt. Der Winkel $\varphi(x, t)$ erfasst die Neigung der Biegelinie gegenüber der x -Achse, s. Bild 14-3b. In linearer Näherung gilt

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial x} = w'. \quad (14.2)$$

Balkenbiegung der Elastostatik

Unter Annahme der Hypothese von Bernoulli-Euler, dass ursprünglich auf der Balkenachse senkrecht stehende ebene Querschnitte auch bei der Biegung eben und senkrecht zur Biegelinie bleiben, leitet man in der Elastostatik die Balken-Biegegleichung

$$\varphi' = w'' = -\frac{M}{EI} \quad (14.3)$$

her. Darin darf die Biegesteifigkeit EI (schwach) veränderlich sein.

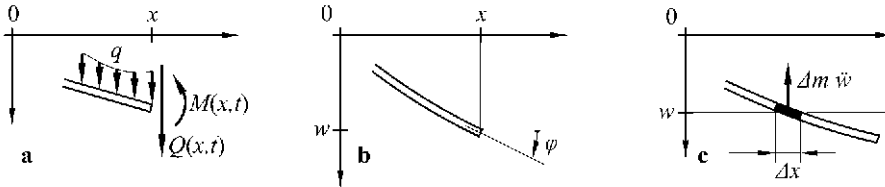


Bild 14-3: Kräfte und Auslenkungen am Balken

Die Schwingungs-Differentialgleichung

Habe der Balken eine Massebelegung $\mu(x) = \rho A(x)$. Ein Masseelement $\Delta m = \mu \Delta x$ auf dem Balkenabschnitt Δx , vgl. Bild 14-3c, erfährt die (d'Alembertsche) Trägheitskraft

$$\Delta m \ddot{w} = \mu \Delta x \ddot{w} \quad (14.4)$$

und ist eine *dynamische Streckenlast*

$$q_{dyn} \Delta x = -\mu \ddot{w} \Delta x, \quad (14.5)$$

vergleiche Bild 14-3a mit Bild 14-3c (insbesondere die Vorzeichen). Die dynamische Streckenlast $q_{dyn} = -\mu \ddot{w}$ nach (14.5) tritt auf der rechten Seite von (14.1) hinzu. Wir haben damit für unser Problem den folgenden Gleichungssatz gewonnen

$$Q' = -q + \mu \ddot{w}, \quad M' = Q, \quad \varphi' = -\frac{M}{EI}, \quad w' = \varphi. \quad (14.6)$$

Hier steht die *Bewegungsgleichung* als System von partiellen Dgln 1. Ordnung bezüglich x . (Das ist für manche Untersuchungen günstig.)

Eliminiert man aus (14.6) Q, M, φ , so erhält man

$$(EI w'')'' + \mu \ddot{w} = q(x, t). \quad (14.7)$$

Dies ist eine partielle Dgl vierter Ordnung nach dem Ort x : man braucht 4 Randbedingungen, und zweiter Ordnung nach der Zeit t : man braucht 2 Anfangsbedingungen.

Für $EI = \text{constant}$ erhält man

$$EI w^{IV} + \mu \ddot{w} = q(x, t). \quad (14.8)$$

14.2.2 Randbedingungen

In der Regel muss man zum Einarbeiten von Randbedingungen φ, M, Q durch w ausdrücken. Deshalb seien zusammengestellt:

$$\varphi = w', \quad M = -EI w'', \quad Q = -(EI w'')' \quad \text{oder} \quad Q = -EI w''' \quad (\text{bei } EI = \text{const.}). \quad (14.9)$$

Für jedes Balkenende muss man zwei Randbedingungen vorschreiben. Tabelle 11-1 zeigt vier Standardfälle, bei denen an den Rändern einfache geometrische oder Belastungs-(d. h. Kraft- oder Moment-)Bedingungen vorliegen.

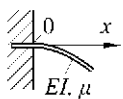
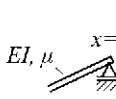
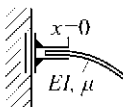
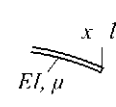
a 	$w(0, t) = 0,$ $\varphi(0, t) = 0.$	c 	$w(l, t) = 0,$ $M(l, t) = 0.$
b 	$\varphi(0, t) = 0,$ $Q(0, t) = 0.$	d 	$M(l, t) = 0,$ $Q(l, t) = 0.$

Tabelle 14-1 Einfache Randbedingungen

Zusammengesetzte Randbedingungen

Anschlüsse an andere *Elemente* (Federn, Massen, andere Balken usw.) formuliert man über *geometrische Verträglichkeiten* (Auslenkungen, Winkel) und *Gleichgewichtsbedingungen* (die man oft auch als *Aktion = Reaktion* sehen kann).

Beispiel 1: Mit Feder, Steifigkeit k , gestütztes Balkenende

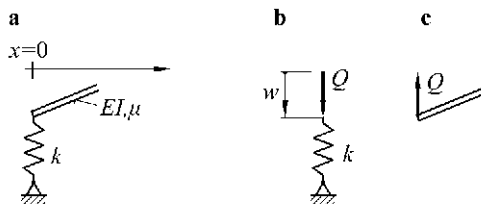


Bild 14-4
Balkenende mit Federstützung

Bild 14-4a zeigt das betrachtete Balkenende, die *Schnittbilder* Bild 14-4b und c zeigen $Q = Q(0, t)$ als Kraft auf die Feder bzw. Querkraft am Balken.

Aus Bild 14-4a liest man ab: $M(0, t) = 0$. Bild 14-4b zeigt $Q(0, t) = -k w(0, t)$. Aus (14.9)_{2,3} entnimmt man $M(0, t) = -EI w''(0, t)$, $Q(0, t) = -(EI w''')'|_{x=0}$.

Für $EI = \text{const.}$ erhält man daraus die beiden Randbedingungen

$$w''(0, t) = 0, \quad k w(0, t) + EI w'''(0, t) = 0. \quad (14.10)$$

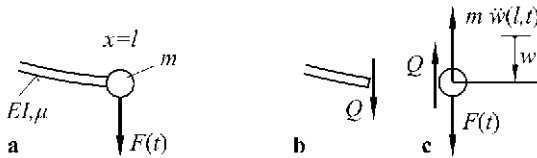


Bild 14-5
Balkenende mit aufgesetzter Punktmasse

Beispiel 2: Balkenende mit aufgesetzter Punktmasse m und Kräfteerregung $F(t)$

Bild 14-5 zeigt das Balkenende $x = l$ und die benötigten Schnittbilder. Man liest aus den Bildern ab:

$$M(l, t) = 0, \quad Q(l, t) + \ddot{m} \ddot{w}(l, t) - F(t) = 0.$$

Für $EI = \text{const.}$ erhält man daraus mit (14.9)_{2,3} die beiden Randbedingungen

$$w''(l, t) = 0, \quad -EI w'''(l, t) + m \ddot{w}(l, t) = F(t). \quad (14.11)$$

Es ist ratsam, in den endgültigen Formen der Randbedingungen (wenigstens einmal) die Funktionsargumente vollständig anzuführen.

14.3 Eigenschwingungen der Kranbrücke

14.3.1 Bereichsweise Wahl der Längskoordinate

In Bild 14-6 ist das Ersatzsystem der Kranbrücke noch einmal skizziert. Gesucht ist die Schwingung $w(x, t)$, also die zeitabhängige Biegelinie.

Wegen der bei $x = l_1$ aufgesetzten Punktmasse zerfällt die x -Achse in zwei Abschnitte;

Bereich 1: $0 \leq x \leq l_1$, Bereich 2: $l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$,

in denen $w(x, t)$ formal unterschieden werden muss, sagen wir $w_1(x, t)$ im ersten, $w_2(x, t)$ im zweiten Bereich. Für Biegelinien unter statischen Lasten führen die etwas umständlichen Rechnungen zu leicht auswertbaren Formeln, siehe [11], auch Abschnitt B.6.1. Die Rechnungen werden einfacher, wenn man für die beiden Bereiche individuelle Abszissenachsen x_1 und x_2 einführt, vgl. Bild 14-7a. Dann gilt im

1. Bereich: $w(x, t) \rightarrow w_1(x_1, t)$ mit $0 \leq x_1 \leq l_1$,

2. Bereich: $w(x, t) \rightarrow w_2(x_2, t)$ mit $0 \leq x_2 < l_2$.

Die in Abschnitt 14.2 getroffenen Vorzeichenvereinbarungen gelten in beiden Bereichen in gleicher Weise.

Erheblich einfacher werden die formalen Rechnungen oft, wenn man die x_i -Achsen gegenläufig wählt und die Nullpunkte zusammenfallen, Bild 14-7b, oder sich für die Nullpunkte besonders einfache (Rand-)Bedingungen ergeben, z. B. $w_i(0, t) = 0$ und $w_i''(0, t) = 0$, mit den x -Achsen nach Bild 14-7c.

Der Nachteil gegenläufiger x_i -Achsen ist, dass die Orientierungen der w_i und ihrer Ortsableitungen (nach den x_i) und auch die von φ_i, M_i, Q_i nur noch zum Teil zusammenpassen; man begeht also sehr leicht Vorzeichenfehler beim Aneinander-Stückeln der Funktionen an der Verbindungsstelle (hier der Punktmasse m).

Wir arbeiten deshalb im Folgenden mit den Koordinaten x_1 und x_2 nach Bild 14-7a.

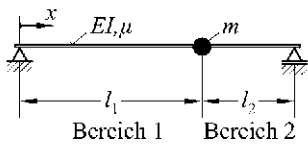


Bild 14-6
Balken mit
Punktmasse

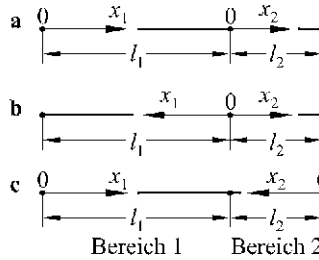


Bild 14-7
Abschnittsweise
Längskoordinaten

14.3.2 Lösen der partiellen Differentialgleichung

Für die beiden Bereiche 1 und 2 in Bild 14-6 und Bild 14-7a gilt die Dgl (14.8) mit $q = 0$, zwischen $w_1(x_1, t)$ und $w_2(x_2, t)$ brauchen wir erst später zu unterscheiden:

$$EI w^{IV} + \mu \ddot{w} = 0. \quad (14.12)$$

Da keine Dämpfung vorliegt, erwarten wir eine Eigenschwingung

$$w(x, t) = \hat{w}(x) e^{\lambda t} \quad (14.13)$$

mit rein imaginären Eigenwerten $\lambda_k = j\omega_k$ und können deshalb statt (14.13) auch

$$w(x, t) = \hat{w}(x) e^{j\omega t} \text{ oder } w(x, t) = \hat{w}(x) \cos \omega t \quad (14.14)$$

ansetzen. Auf beiden Wegen (14.14) entsteht aus (14.12)

$$EI \hat{w}^{IV} = \mu \omega^2 \hat{w}. \quad (14.15)$$

Dies ist eine lineare, gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten (x -unabhängigen!) Koeffizienten; sie enthält ω als (unbekannten) Parameter. Wir dividieren (14.15) durch $E I (\neq 0)$ und setzen

$$\kappa^4 := \frac{\mu \omega^2}{E I} > 0, \quad \kappa := \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{E I}} > 0; \quad (14.16)$$

später brauchen wir

$$\omega^2 = \frac{\kappa^4 E I}{\mu}. \quad (14.17)$$

Jetzt lautet (14.15)

$$\hat{w}^{IV} = \kappa^4 \hat{w} \quad (14.18)$$

mit κ als Parameter. Mit dem Lösungsansatz

$$\hat{w}(x) = C e^{kx} \quad (14.19)$$

erhält man aus (14.18) das (Unter-)Eigenwertproblem

$$(k^4 - \kappa^4) C e^{kx} = 0 \quad (14.20)$$

mit den vier Lösungen

$$k_1 = j\kappa, \quad k_2 = -j\kappa, \quad k_3 = \kappa, \quad k_4 = -\kappa. \quad (14.21)$$

Damit lautet die allgemeine Lösung von (14.18)

$$\hat{w}(x) = C_1 e^{j\kappa x} + C_2 e^{-j\kappa x} + C_3 e^{\kappa x} + C_4 e^{-\kappa x}. \quad (14.22)$$

Die C_i sind freie Konstanten.

Arbeitet man mit $\hat{w}(x)$, so läuft die Rechnung *durchs Komplexe* (das kann Vorteile haben).

Will man im Reellen bleiben, muss man die Teillösungen $e^{k_i x}$ geeignet kombinieren, vgl. (5.15). Man erhält neben den trigonometrischen (oder Kreis-)Funktionen

$$\frac{e^{j\kappa x} + e^{-j\kappa x}}{2} = \cos \kappa x, \quad \frac{e^{j\kappa x} - e^{-j\kappa x}}{2j} = \sin \kappa x \quad (14.23)$$

die hyperbolischen (oder Hyperbel-)Funktionen

$$\frac{e^{\kappa x} + e^{-\kappa x}}{2} = \cosh \kappa x, \quad \frac{e^{\kappa x} - e^{-\kappa x}}{2} = \sinh \kappa x. \quad (14.24)$$

Lösen Sie hierzu die Aufgabe 14-1 bis Aufgabe 14-11.

Mit (14.23), (14.24) kann man die allgemeine Lösung (14.22) umschreiben in

$$\hat{w}(x) = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x + C \cosh \kappa x + D \sinh \kappa x; \quad (14.25)$$

mit den Konstanten A, B, C, D .

14.3.3 Zwei kleine Orientierungsaufgaben

Vor der Untersuchung des in Abschnitt 14.1 vorgestellten Systems, betrachten wir zur Orientierung die in Bild 14-8 und Bild 14-9 gezeigten zweiseitig gestützten und einseitig eingespannten Balken.

14.3.3.1 Zweiseitig gestützter Balken

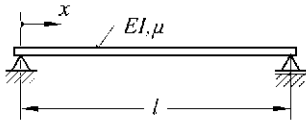


Bild 14-8
Beidseitig gelenkig gelagerter Balken

Für den beidseitig gestützten Balken nach Bild 14-8 gelten die Randbedingungen, vgl. Tabelle 14-1,

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0 &\rightarrow \hat{w}(0) = 0, \\ M(0, t) = 0 &\rightarrow -EI w''(0, t) = 0 \rightarrow \hat{w}''(0) = 0, \\ w(l, t) = 0 &\rightarrow \hat{w}(l) = 0, \\ M(l, t) = 0 &\rightarrow -EI w''(l, t) = 0 \rightarrow \hat{w}''(l) = 0. \end{aligned} \quad (14.26)$$

Dabei folgen die ganz rechts stehenden Ausdrücke aus den linken mit (14.9). Die rechts stehenden Ausdrücke muss (14.25) erfüllen.

$$\begin{aligned} \hat{w}(0) &= A \cos 0 + B \sin 0 + C \cosh 0 + D \sinh 0 = 0, \\ \hat{w}''(0) &= \kappa^2 (-A \cos 0 + B \sin 0 + C \cosh 0 + D \sinh 0) = 0, \\ \hat{w}(l) &= A \cos \kappa l + B \sin \kappa l + C \cosh \kappa l + D \sinh \kappa l = 0, \\ \hat{w}''(l) &= \kappa^2 (-A \cos \kappa l + B \sin \kappa l + C \cosh \kappa l + D \sinh \kappa l) = 0. \end{aligned} \quad (14.27)$$

In Matrixschreibweise lauten die Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\kappa^2 & 0 & \kappa^2 & 0 \\ \cos \kappa l & \sin \kappa l & \cosh \kappa l & \sinh \kappa l \\ -\kappa^2 \cos \kappa l & -\kappa^2 \sin \kappa l & \kappa^2 \cosh \kappa l & \kappa^2 \sinh \kappa l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (14.28)$$

Damit dieses lineare homogene Gleichungssystem (für A, B, C, D) eine nichttriviale Lösung hat, muss die Koeffizientendeterminante verschwinden. Man erhält die charakteristische Gleichung

$$A(\kappa l) = \det(\dots) = -4\kappa^4 \sin \kappa l \sinh \kappa l = 0 \quad (14.29)$$

als Bestimmungsgleichung für κ (oder $\kappa \cdot l$). Offensichtlich gibt es die folgenden Lösungen:

$$\kappa^4 = 0 \rightarrow 4\text{-fache Wurzel } \kappa = 0, \quad (14.30)$$

$$\sin \kappa l = 0 \rightarrow \kappa_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (14.31)$$

$$\sinh \kappa l = 0 \rightarrow \kappa_n = j \frac{n\pi}{l}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = \sqrt{-1}. \quad (14.32)$$

Zu $\kappa_0 = 0$, vgl. (14.30) und (14.31), (14.32) mit $n = 0$, lautet das Gleichungssystem (14.28).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (14.33)$$

Es hat den Lösungsvektor (Eigenvektor)

$$\hat{\mathbf{v}}_0 = (A, B, -A, D)^T \quad (14.34)$$

Setzt man diese Koeffizienten – und $\kappa_0 = 0$ – in (14.25) ein, erhält man

$$\hat{w}_0(x) = A \cdot 1 + B \cdot 0 - A \cdot 1 + D \cdot 0 \equiv 0. \quad (14.35)$$

Dies ist also eine verwickelte Form der trivialen Lösung.

Zu $\kappa_n = n\pi/l$, vgl. (14.31) mit $n \neq 0$, lautet das Gleichungssystem (14.28):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 & 0 & \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 & 0 \\ (-1)^n & 0 & \cosh\left(\frac{n\pi}{l}\right) & \sinh\left(\frac{n\pi}{l}\right) \\ -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (-1)^n & 0 & \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \cosh\frac{n\pi}{l} & \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sinh\left(\frac{n\pi}{l}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}_n = \mathbf{0}. \quad (14.36)$$

Wegen $\sinh(n\pi/l) \neq 0$ gelten $A_n = 0$, $C_n = 0$, $D_n = 0$ und $B_n \neq 0$. Dann lautet die n -te Eigenschwingung

$$w_n(x, t) = (a_{cn} \cos \omega_n t + a_{sn} \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (14.37)$$

wo

$$\omega_n = \kappa_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad (14.38)$$

vgl. (14.17). (Die Lösungen zu positiven und negativen n fallen zusammen.) Die Lösungen zu $\kappa_n = j n \pi / l$ lassen sich auf die $w_n(x, t)$ nach (14.37) zurückführen (vgl. Aufgabe 14-5).

14.3.3.2 Einseitig eingespannter Balken

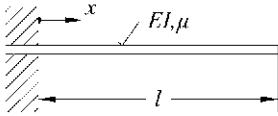


Bild 14-9
Einseitig eingespannter Balken

Für den einseitig eingespannten Balken nach Bild 14-9 gelten die Randbedingungen, vgl. Tabelle 14-1:

$$\begin{aligned}
 w(0, t) = 0 &\rightarrow \hat{w}(0) = 0, \\
 \varphi(0, t) = 0 &\rightarrow \hat{w}'(0) = 0, \\
 M(l, t) = 0 \rightarrow -EI w''(l, t) = 0 &\rightarrow \hat{w}''(l) = 0, \\
 Q(l, t) = 0 \rightarrow -EI w'''(l, t) = 0 &\rightarrow \hat{w}'''(l) = 0.
 \end{aligned} \tag{14.39}$$

Einsetzen der Randbedingungen in (14.25) liefert

$$\begin{aligned}
 \hat{w}(0) &= A \cos 0 + B \sin 0 + C \cosh 0 + D \sinh 0 = 0, \\
 \hat{w}'(0) &= \kappa (-A \sin 0 + B \cos 0 + C \sinh 0 + D \cosh 0) = 0, \\
 \hat{w}''(l) &= \kappa^2 (-A \cos \kappa l - B \sin \kappa l + C \cosh \kappa l + D \sinh \kappa l) = 0, \\
 \hat{w}'''(l) &= \kappa^3 (A \sin \kappa l - B \cos \kappa l + C \sinh \kappa l + D \cosh \kappa l) = 0.
 \end{aligned} \tag{14.40}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & \kappa \\ -\kappa^2 \cos \kappa l & -\kappa^2 \sin \kappa l & \kappa^2 \cosh \kappa l & \kappa^2 \sinh \kappa l \\ \kappa^3 \sin \kappa l & -\kappa^3 \cos \kappa l & \kappa^3 \sinh \kappa l & \kappa^3 \cosh \kappa l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0. \tag{14.41}$$

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\kappa l) &= \det(\dots) = \frac{(\kappa l)^6}{l^6} \left[(\cosh \kappa l + \cos \kappa l)^2 - (\sinh^2 \kappa l - \sin^2 \kappa l) \right] = \\
 &= 2 \frac{(\kappa l)^6}{l^6} (1 + \cosh \kappa l \cdot \cos \kappa l).
 \end{aligned} \tag{14.42}$$

Die 6-fache Nullstelle $\kappa_0 = 0$ erkennt man direkt. Die übrigen Wurzeln liest man zweckgemäß aus einer grafischen Darstellung ab. Bild 14-10 zeigt

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\cosh \alpha}, \quad \text{wo } \alpha = \kappa l. \quad (14.43)$$

Man liest die Abszissen der Kurvenschnittpunkte (in der gewünschten Genauigkeit durch entsprechendes Vergrößern auf dem Bildschirm eines PC) unmittelbar ab:

$$\alpha_1 = 0.597\pi, \quad \alpha_2 = 1.493\pi$$

und

$$\alpha_n = \begin{cases} 0.5\pi + (n-1)\pi + \varepsilon & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ 0.5\pi + (n-1)\pi - \varepsilon & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases} \quad (14.44)$$

wo ε eine kleine positive Zahl ist, die rasch gegen Null strebt, s. Bild 14-10.

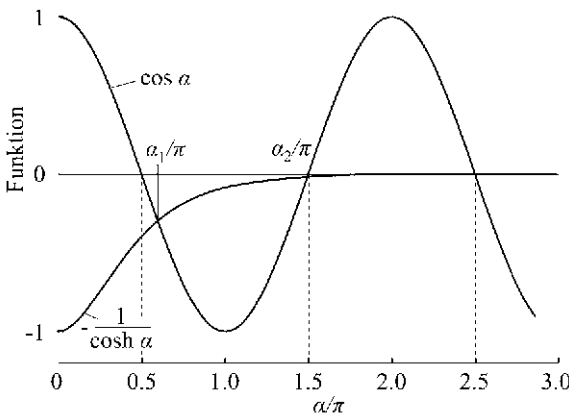


Bild 14-10

Graphische Lösung der charakteristischen Gleichung

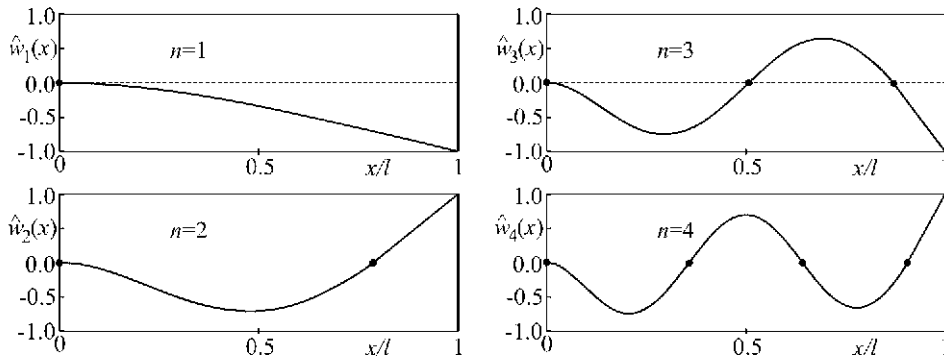


Bild 14-11: Eigenschwingungen des eingespannten Balkens (• Knoten)

Zu $\alpha_0 = 0$ erhält man $\hat{w}_0(x) = 0$. Zu $\alpha_n \neq 0$ erhält man aus (14.41) die Eigenschwingungen

$$\begin{aligned}\hat{w}_n(x) = & (\cos \alpha_n + \cosh \alpha_n) (\cos(\alpha_n x/l) - \cosh(\alpha_n x/l)) \\ & + (\sin \alpha_n - \sinh \alpha_n) (\sin(\alpha_n x/l) - \sinh(\alpha_n x/l)).\end{aligned}\quad (14.45)$$

Natürlich kann man die $\hat{w}_n(x)$ noch mit einer beliebigen Zahl ($\neq 0$) multiplizieren (weil (14.41) homogen ist). Bild 14-11 zeigt die auf den Maximalausschlag 1 normierten vier ersten $\hat{w}_i(x)$.

14.3.4 Rand- und Übergangsbedingungen bei der Kranbrücke

Bei der Kranbrücke gilt für die beiden Abzissenbereiche 1 und 2, vgl. Bild 14-7, jeweils eine Lösung der Form (14.25):

$$\begin{aligned}\hat{w}_1(x_1) = & A_1 \cos \kappa x_1 + B_1 \sin \kappa x_1 + C_1 \cosh \kappa x_1 + D_1 \sinh \kappa x_1, \\ \hat{w}_2(x_2) = & A_2 \cos \kappa x_2 + B_2 \sin \kappa x_2 + C_2 \cosh \kappa x_2 + D_2 \sinh \kappa x_2.\end{aligned}\quad (14.46)$$

Hinweis 1: Da EI und μ in beiden Bereichen gleich sind, gilt hier für beide Bereiche dasselbe κ ; vgl. (14.16). Bei verschiedenen EI oder μ müsste man zum gemeinsamen Parameter ω aus (14.16) jeweilige κ_1, κ_2 ausrechnen und in (14.46) einsetzen.

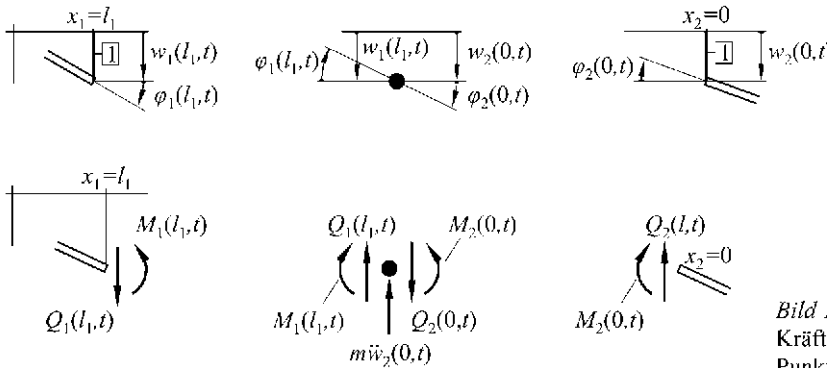


Bild 14-12
Auslenkungen
an der Punkt-
masse

Bild 14-13
Kräfte und Momente
an
Punktmasse

Für die $\hat{w}_k(x_k)$, $k=1,2$, in (14.46) liest man aus Bild 14-6 mit x_1, x_2 nach Bild 14-7a unmittelbar ab:

$$\begin{aligned}w(0, t) = 0 & \rightarrow \hat{w}_1(0) = 0, \\ M(0, t) = 0 & \rightarrow \hat{w}_1''(0) = 0, \\ w(l_1 + l_2, t) = 0 & \rightarrow \hat{w}_2(l_2) = 0, \\ M(l_1 + l_2, t) = 0 & \rightarrow \hat{w}_2''(l_2) = 0.\end{aligned}\quad (14.47)$$

Aus Bild 14-12 liest man für den Übergang von Bereich 1 nach Bereich 2 – von $x_1 = l_1$ nach $x_2 = 0$ – die folgenden Bedingungen für *geometrische Verträglichkeit* ab:

$$\begin{aligned} w_1(l_1, t) - w_2(0, t) &\rightarrow \hat{w}_1(l_1) - \hat{w}_2(0) = 0, \\ \varphi_1(l_1, t) - \varphi_2(0, t) &\rightarrow \hat{w}'_1(l_1) - \hat{w}'_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (14.48)$$

Bild 14-13 zeigt die Schnittgrößen und die d'Alembertsche Kraft an der Übergangsstelle.

Aus dem Bild liest man für die Schnittgrößen die folgenden Bedingungen ab:

$$\begin{aligned} M_1(l_1, t) = M_2(0, t) &\rightarrow \hat{w}''_1(l_1) - \hat{w}''_2(0) = 0, \\ Q_1(l_1, t) + m \ddot{w}_2(0, t) - Q_2(0, t) = 0 &\rightarrow \hat{w}'''_1(l_1) + \frac{m \omega^2}{EI} \hat{w}_2(0) - \hat{w}'''_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (14.49)$$

Mit (14.47), (14.48), (14.49) sind acht Bedingungen (Gleichungen) für die acht freien Konstanten $A_k, B_k, C_k, D_k, k = 1, 2$, von (14.46) gegeben.

Vor dem Einsetzen der Bedingungen (14.47) bis (14.49) in (14.46), führen wir einige Abkürzungen ein: Wir beziehen die l_1, l_2 auf die Gesamtlänge l und setzen

$$l := l_1 + l_2, \quad \tilde{l}_1 := l_1/l, \quad \tilde{l}_2 := l_2/l, \quad \tilde{l}_1 + \tilde{l}_2 = 1. \quad (14.50)$$

Außerdem sei, vgl. (14.43),

$$\alpha := \kappa l. \quad (14.51)$$

Für den Faktor $\frac{m \omega^2}{EI}$ in (14.49) erhält man mit $\omega^2 = \frac{\kappa^4 EI}{\mu}$, s. (14.17),

$$\frac{m \omega^2}{EI} = \frac{m \kappa^4 EI}{EI \mu} = \kappa^3 \alpha \frac{m}{\mu l}, \quad (14.52)$$

und mit der auf die Brückenmasse μl bezogenen Punktmasse

$$\tilde{m} := \frac{m}{\mu l} \quad (14.53)$$

lautet der Faktor

$$\frac{m \omega^2}{EI} = \kappa^3 \alpha \tilde{m}. \quad (14.54)$$

(Der Faktor κ^3 tritt auch bei den $\hat{w}'''_k$ auf und lässt sich dann herauskürzen; s. unten.)

14.3.5 Das Eigenwertproblem

Einsetzen der Bedingungen (14.47) bis (14.49) in (14.46) liefert das Eigenwertproblem:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 -\kappa^2 & 0 & \kappa^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cos \tilde{l}_1 \alpha & \sin \tilde{l}_1 \alpha & \cosh \tilde{l}_1 \alpha & \sinh \tilde{l}_1 \alpha \\
 -\kappa \sin \tilde{l}_1 \alpha & \kappa \cos \tilde{l}_1 \alpha & \kappa \sinh \tilde{l}_1 \alpha & \kappa \cosh \tilde{l}_1 \alpha \\
 -\kappa^2 \cos \tilde{l}_1 \alpha & -\kappa^2 \sin \tilde{l}_1 \alpha & \kappa^2 \cosh \tilde{l}_1 \alpha & \kappa^2 \sinh \tilde{l}_1 \alpha \\
 \kappa^3 \sin \tilde{l}_1 \alpha & -\kappa^3 \cos \tilde{l}_1 \alpha & \kappa^3 \sinh \tilde{l}_1 \alpha & \kappa^3 \cosh \tilde{l}_1 \alpha \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cos \tilde{l}_2 \alpha & \sin \tilde{l}_2 \alpha & \cosh \tilde{l}_2 \alpha & \sinh \tilde{l}_2 \alpha \\
 -\kappa^2 \cos \tilde{l}_2 \alpha & -\kappa^2 \sin \tilde{l}_2 \alpha & \kappa^2 \cosh \tilde{l}_2 \alpha & \kappa^2 \sinh \tilde{l}_2 \alpha \\
 -1 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & -\kappa & 0 & -\kappa \\
 \kappa^2 & 0 & -\kappa^2 & 0 \\
 \kappa^3 \alpha \tilde{m} & \kappa^3 & \kappa^3 \alpha \tilde{m} & -\kappa^3
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 A_1 \\
 B_1 \\
 C_1 \\
 D_1 \\
 A_2 \\
 B_2 \\
 C_2 \\
 D_2
 \end{pmatrix}
 = \mathbf{0}. \quad (14.55)$$

Die Koeffizientendeterminante von (14.55) ist die charakteristische Gleichung. Man erkennt unmittelbar eine Mehrfachnullstelle $\kappa = 0$ (bzw. $\alpha = 0$), sieht aber auch sofort, dass der nur eine triviale Lösung $\hat{w} \equiv 0$ entspricht.

Für $\kappa_n \neq 0$ kann man die κ aus (14.55) herauskürzen. Wir kürzen außerdem ab und setzen

$$\begin{aligned}
 s_1 &:= \sin \tilde{l}_1 \alpha, & c_1 &:= \cos \tilde{l}_1 \alpha, & sh_1 &:= \sinh \tilde{l}_1 \alpha, & ch_1 &:= \cosh \tilde{l}_1 \alpha, \\
 s_2 &:= \sin \tilde{l}_2 \alpha, & c_2 &:= \cos \tilde{l}_2 \alpha, & sh_2 &:= \sinh \tilde{l}_2 \alpha, & ch_2 &:= \cosh \tilde{l}_2 \alpha.
 \end{aligned} \quad (14.56)$$

Addiert man in der Determinante die erste Zeile zur zweiten, dritte Zeile zur vierten, fünfte Zeile zur siebten, sechste Zeile zur achten und zieht Faktoren 2 sofort heraus, erhält man

$$\Delta(\alpha) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 * \begin{vmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & s_2 & \cancel{sh_2} & \cancel{ch_2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ch_2 & sh_2 \\
 c_1 & s_1 & \cancel{ch_1} & \cancel{sh_1} & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 -s_1 & c_1 & sh_1 & ch_1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & ch_1 & sh_1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & sh_1 & ch_1 & \frac{\alpha \tilde{m}}{2} & 0 & \frac{\alpha \tilde{m}}{2} & -1
 \end{vmatrix} \quad (14.57)$$

Die gestrichenen Glieder entfallen bei Subtraktion von Zeile 4 von Zeile 3, Zeile 7 von Zeile 5. Entwickeln nach erster und zweiter Zeile liefert

$$\Delta(\alpha) = -16 \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ch_2 & sh_2 \\ s_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & ch_1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & sh_1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & ch_1 & \alpha \tilde{m}/2 & 0 & \alpha \tilde{m}/2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -16 \{ \alpha \tilde{m}/2 [(s_1 c_2 + c_1 s_2) sh_1 sh_2 - (sh_1 ch_2 + ch_1 sh_2) s_1 s_2] +$$

$$+ (s_1 c_2 + c_1 s_2) (sh_1 ch_2 + ch_1 sh_2) \} \stackrel{!}{=} 0 \quad (14.58)$$

Aus den Additionstheoremen (vgl. Aufgabe 14-3) folgen

$$s_1 c_2 + c_1 s_2 = \sin \tilde{l}_1 \alpha \cdot \cos \tilde{l}_2 \alpha + \cos \tilde{l}_1 \alpha \cdot \sin \tilde{l}_2 \alpha = \sin(\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2) \alpha = \sin \alpha,$$

$$j sh_1 ch_2 + j ch_1 sh_2 = \sin(j \tilde{l}_1 \alpha) \cdot \cos(j \tilde{l}_2 \alpha) + \cos(j \tilde{l}_1 \alpha) \cdot \sin(j \tilde{l}_2 \alpha) =$$

$$= \sin[j(\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2) \alpha] = j \sinh \alpha. \quad (14.59)$$

Damit liefert (14.58) für α die Bestimmungsgleichung

$$\sin \alpha \sinh \alpha = \frac{\alpha \tilde{m}}{2} [\sinh \alpha \cdot \sin \tilde{l}_1 \alpha \cdot \sin \tilde{l}_2 \alpha - \sin \alpha \cdot \sinh \tilde{l}_1 \alpha \cdot \sinh \tilde{l}_2 \alpha]. \quad (14.60)$$

Hinweis 1: Für $\tilde{m} = 0$ stimmt (14.58) mit (14.29) im Wesentlichen überein (Kontrollmöglichkeit!).

Hinweis 2: Man sieht: Mit α_n ist auch $-\alpha_n$ eine Lösung von (14.60); also braucht man nur positive Wurzeln zu suchen. (Wie ist das mit rein imaginären? – vgl. Aufgabe 14-5.)

Hinweis 3: Will man (14.60) – wenigstens zur Orientierung – grafisch lösen, ist es zweckmäßig, mit Funktionen zu arbeiten, deren Schnittpunkte für größere α in der Nähe der Abszisse bleiben. Deshalb dividieren wir die Gleichung für $\alpha > 0$ durch $\alpha \cdot \sinh \alpha$:

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{\tilde{m}}{2} \left[\sin \tilde{l}_1 \alpha \sin \tilde{l}_2 \alpha - \sin \alpha \frac{\sinh \tilde{l}_1 \alpha \sinh \tilde{l}_2 \alpha}{\sinh \alpha} \right]. \quad (14.61)$$

Bild 14-14 zeigt grafisch ermittelte Eigenwerte für $\tilde{m} = 0.5$, im Teil a) für $\tilde{l}_1 = 0.7, \tilde{l}_2 = 0.3$, im Teil b) für $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 0.5$. Man gewinnt für die ersten 6 Eigenwerte α_n die Näherungen:

$\tilde{l}_1$	n	1	2	3	4	5	6
0.7	α_n/π	0.878	1.795	2.971	3.848	4.654	5.887
0.5	α_n/π	0.840	2	2.697	4	4.635	6

Tabelle 14-2

Mit den α_n kann man aus (14.51) die κ_n und damit aus (14.52) die Eigenfrequenzen ω_n berechnen. (Setzt man die α_n in (14.55) ein, kann man daraus die Eigenvektoren und damit aus (14.46) die Eigenschwingungsformen berechnen.

Wenn man will, kann man die α_n (und natürlich auch die entsprechenden ω_n) aus Tabelle 14-2 mit jenen der Balken ohne Punktmasse, vgl. Bild 14-8, vergleichen. Wir fanden dort $\alpha_n = n \cdot \pi$.

Man sieht: Die Eigenwerte werden im allgemeinen durch die Zusatzmasse m abgesenkt, jedoch unterschiedlich stark. Und zwar werden jene Eigenwerte stärker beeinflusst, deren Eigenschwingungsformen am Ort ($x = l_1$) der Punktmasse eine relativ starke Auslenkung (einen *Schwingungshauch*) haben, während die Eigenwerte, deren Eigenform in der Nähe der Punktmasse einen Knoten oder einen sehr kleinen Ausschlag hat, kaum beeinflusst werden (vgl. $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6$ – also gerade n – bei $\tilde{l}_1 = 0.5$).

Man sieht auch, dass die α_n zusammen- und auseinanderrücken können, wenn die Punktmasse ihren Ort ändert.

Die *Eigenschwingungsform* $\hat{w}_n(x)$ zum Eigenwert α_n – bzw. der Eigenfrequenz ω_n –, vgl. den Ansatz (14.13), wird für die beiden Bereiche 1 und 2, s. Bild 14-13, gemäß (14.46) durch $\hat{w}_{1n}(x)$ bzw. $\hat{w}_{2n}(x)$ ausgedrückt, wobei die Koeffizienten $(A_1, B_1, C_1, D_1)_n$ und $(A_2, B_2, C_2, D_2)_n$ aus der homogenen Gleichung (14.55) abgelesen werden. Da deren Determinante für $\alpha = \alpha_n$ verschwindet, sind darin nur 7 der 8 Gleichungen linear unabhängig: man kann einen der Koeffizienten gleich 1 setzen und die übrigen durch ihn ausdrücken.

Im vorliegenden Fall ist die Rechnung einfach: Die mit (14.56) eingeführten Abkürzungen für die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen mögen nun für den interessierenden Eigenwert $\alpha = \alpha_n$ gelten. Da die Zeilenkombinationen, die von der Matrizengleichung (14.55) zur Determinante (14.57) führen, auch bei der Matrizengleichung selbst ausgeführt werden dürfen, kann man den Elementblock (14.57) als Umformung der Matrix von (14.55) sehen. Man liest aus der 1. und 2. Zeile ab: $A_{1n} = 0, C_{1n} = 0$. Damit sind 1. und 2. Zeile erfüllt und 1. sowie 3. Spalte verschwinden. Übrig bleibt der Elementblock von (14.58) mit 5 unabhängigen Gleichungen. Sei (zunächst) $B_{1n} = 1$. Aus den 5 ersten Zeilen folgen die übrigen Koeffizienten. Multiplikation des Endergebnisses mit $s_2 \cdot \sinh \alpha_n$ und Einsetzen in (14.46) liefert mit $\tilde{x}_1 := x_1/l, \tilde{x}_2 := x_2/l$ für $0 \leq \tilde{x}_1 \leq \tilde{l}_1, 0 \leq \tilde{x}_2 \leq \tilde{l}_2$:

$$\begin{aligned}\hat{w}_{1n} &= \sinh \alpha_n \cdot \sin \tilde{l}_2 \alpha_n \cdot \sin \tilde{x}_1 \alpha_n - \sin \alpha_n \cdot \sin \tilde{l}_2 \alpha_n \cdot \sinh \tilde{x}_1 \alpha_n, \\ \hat{w}_{2n} &= \sinh \alpha_n \cdot \sin \tilde{l}_1 \alpha_n \cdot \sin \left[(\tilde{l}_2 - \tilde{x}_2) \alpha_n \right] - \sin \alpha_n \cdot \sinh \tilde{l}_1 \alpha_n \cdot \sinh \left[(\tilde{l}_2 - \tilde{x}_2) \alpha_n \right].\end{aligned}\quad (14.62)$$

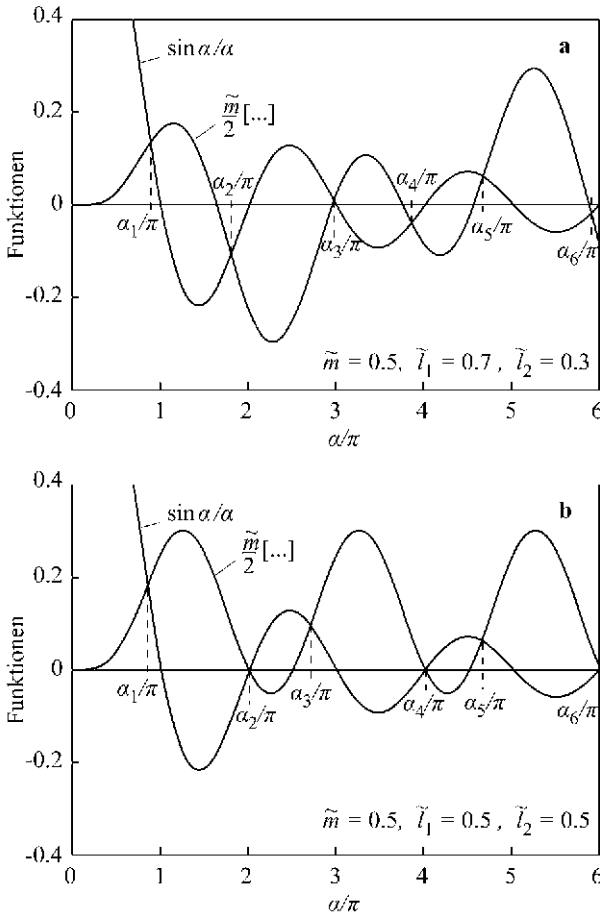


Bild 14-14
Graphische Lösung der charakteristischen Gleichungen

14.4 Diskretisieren des Kontinuums Balken

Die allgemeinen Überlegungen sind – mutatis mutandis – dieselben wie bei den Drehschwingungen der Welle in Abschnitt 13.4. Wir beschränken uns hier auf den Fall globaler Ansatzfunktionen.

14.4.1 Das Arbeiten mit globalen Ansatzfunktionen

Ausgangspunkt ist das Ersatzsystem nach Bild 14-15 (vgl. Bild 14-8) mit den Abschnittslängen $l_1, l_2, l := l_1 + l_2$, der Biegesteifigkeit EI , der Massebelegung μ sowie einer bei $x = l_1$ aufgesetzten Punktmasse m .

Gesucht ist eine Näherungslösung für die drei tiefsten Eigenfrequenzen.

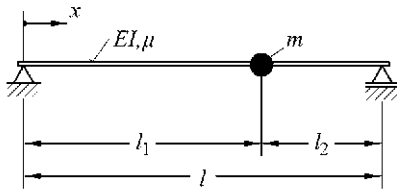


Bild 14-15
Balken mit Punktmasse

14.4.1.1 Vorbereitung für die Lagrange-Gleichungen

Kinetische Energie (vgl. auch (9.8)):

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} m \dot{w}^2(l_1, t). \quad (14.63)$$

Potential (vgl. auch (9.15)):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI [w''(x, t)]^2 dx. \quad (14.64)$$

Zieht man eine numerische Auswertung der Integrale (14.72), (14.73), s. unten, in Betracht, kann man hier ortsabhängige Biegesteifigkeit $EI = EI(x)$ und Massebelegung $\mu = \mu(x)$ zulassen.

Ansatzfunktionen

In allgemeiner Form setzen wir an, vgl. (13.60),

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^3 q_k(t) W_k(x). \quad (14.65)$$

Dabei müssen die $W_k(x)$ die *geometrischen* Randbedingungen, vgl. Bild 14-15,

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0 \quad (14.66)$$

erfüllen (diese heißen auch *wesentliche Bedingungen*).

Hinweis 1: Erfüllen die Ansatzfunktionen $W_k(x)$ die geometrischen Randbedingungen *nicht* von vornherein, muss man das Erfüllen durch Nebenbedingungen beim Lösen der Variationsaufgabe erzwingen.

Die nicht-wesentlichen Randbedingungen, das sind hier die Momentenbedingungen an den Balkenenden, vgl. Bild 14-15,

$$M(0, t) = 0, \quad M(l, t) = 0 \quad \text{bzw.} \quad w''(0, t) = 0, \quad w''(l, t) = 0. \quad (14.67)$$

brauchen von den Ansatzfunktionen $W_k(x)$ nicht erfüllt zu werden (das verringert nur die Lösungsgüte). Speziell wählen wir als Lösungsansatz die drei ersten Sinus-Halbwellen

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^3 w_k(t) \sin \frac{k \pi x}{l}, \quad \text{also } W_k(x) = \frac{\sin k \pi x}{l}. \quad (14.68)$$

Die $W_k(x) = \sin(k \pi x/l)$ erfüllen *alle* Randbedingungen.

Überdies sind die $\sin(k \pi x/l)$ die Eigenschwingungsformen des Balkens ohne die Masse m ; vgl. (14.37). Eigenschwingungsformen eines *Nachbarsystems* sind im allgemeinen günstige Ansatzfunktionen.

14.4.1.2 Lagrange Formalismus

Einsetzen von (14.68) in (14.63) und (14.64) liefern parallel zu (13.62) bis (13.69)

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (14.69)$$

mit

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T \quad (14.70)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}, \quad (14.71)$$

$$m_{ik} := \int_0^l [\mu(x) + m \delta(x - l_1)] W_i(x) W_k(x) dx, \quad (14.72)$$

$$k_{ik} := \int_0^l E I(x) W_i''(x) W_k''(x) dx. \quad (14.73)$$

Hinweis 2: In (14.72) steht $\delta(x - l_1)$ für die Delta-Funktion aus Abschnitt 6.3.1, jetzt als Funktion der Ortsvariable x . Analog zu (6.38) folgt

$$\int_0^l m W_i(x) W_k(x) \delta(x - l_1) dx = m W_i(l_1) W_k(l_1). \quad (14.74)$$

Aus den Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (14.75)$$

erhält man für die Matrizenform der Bewegungsgleichungen, vgl. Aufgabe 13-14,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (14.76)$$

Für die Sinus-Halbwellen nach (14.68) erhält man im Fall *konstanten Balkenquerschnitts* die Massenmatrix (Trägheitsmatrix, $\tilde{l}_1 := l_1/l$)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\mu l}{2} + m \sin^2 \pi \tilde{l}_1 & m \sin \pi \tilde{l}_1 \sin 2\pi \tilde{l}_1 & m \sin \pi \tilde{l}_1 \sin 3\pi \tilde{l}_1 \\ m \sin \pi \tilde{l}_1 \sin 2\pi \tilde{l}_1 & \frac{\mu l}{2} + m \sin^2 2\pi \tilde{l}_1 & m \sin 2\pi \tilde{l}_1 \sin 3\pi \tilde{l}_1 \\ m \sin \pi \tilde{l}_1 \sin 3\pi \tilde{l}_1 & m \sin 2\pi \tilde{l}_1 \sin 3\pi \tilde{l}_1 & \frac{\mu l}{2} + m \sin^2 3\pi \tilde{l}_1 \end{pmatrix}, \quad (14.77)$$

und die Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \frac{EI\pi^4}{2l^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}. \quad (14.78)$$

Für konstante Biegesteifigkeit EI und die W_k nach (14.68) verschwinden die Integrale

$$\int_0^l EI W_i''(x) W_k''(x) dx = 0 \text{ für } i \neq k; \quad (14.79)$$

die W_k sind zueinander orthogonal. Deshalb wird die Steifigkeitsmatrix hier diagonal.

14.4.1.3 Auswertung der Gleichungen (Zahlenbeispiel)

Seien

$$\tilde{m} = \frac{m}{\mu l} \text{ und } \tilde{t} = \omega_R t, \text{ wo } \frac{\omega_R^2 \mu l}{2} = \frac{EI\pi^4}{2l^3}. \quad (14.80)$$

vgl. (14.53). Dann lauten die Bewegungsgleichungen (14.76)

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (14.81)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 + 2\tilde{m} \sin^2 \pi \tilde{l}_1 & 2\tilde{m} \sin \pi \tilde{l}_1 \sin 2\pi \tilde{l}_1 & 2\tilde{m} \sin \pi \tilde{l}_1 \sin 3\pi \tilde{l}_1 \\ 2\tilde{m} \sin \pi \tilde{l}_1 \sin 2\pi \tilde{l}_1 & 1 + 2\tilde{m} \sin^2 2\pi \tilde{l}_1 & 2\tilde{m} \sin 2\pi \tilde{l}_1 \sin 3\pi \tilde{l}_1 \\ 2\tilde{m} \sin \pi \tilde{l}_1 \sin 3\pi \tilde{l}_1 & 2\tilde{m} \sin 2\pi \tilde{l}_1 \sin 3\pi \tilde{l}_1 & 1 + 2\tilde{m} \sin^2 3\pi \tilde{l}_1 \end{pmatrix}, \quad (14.82)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}. \quad (14.83)$$

Für $\tilde{m} = 0.5$ und $\tilde{l}_1 = 0.5$, vgl. die Parameter zu Tabelle 14-2, erhält man aus (14.81) mit $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}} \cos(\tilde{\omega} \tilde{t})$ das Eigenwertproblem

$$\begin{pmatrix} 1 - \tilde{\omega}^2 \cdot 2 & 0 & \tilde{\omega}^2 \\ 0 & 16 - \tilde{\omega}^2 & 0 \\ \tilde{\omega}^2 & 0 & 81 - 2\tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (14.84)$$

während sich für $\tilde{l}_1 = 0.7$ (gerundet) das *Eigenwertproblem*

$$\begin{pmatrix} 1 - 1.6545 \tilde{\omega}^2 & 0.76942 \tilde{\omega}^2 & -0.25 \tilde{\omega}^2 \\ 0.76942 \tilde{\omega}^2 & 16 - 1.90450 \tilde{\omega}^2 & 0.29389 \tilde{\omega}^2 \\ -0.25 \tilde{\omega}^2 & 0.29389 \tilde{\omega}^2 & 81 - 1.09549 \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (14.85)$$

ergibt. Man erhält (numerisch) die folgenden $\tilde{\omega}_n^2$ und zum Vergleich mit Tabelle 14-2

$$\frac{\alpha_n}{\pi} = \sqrt[4]{\tilde{\omega}_n^2} :$$

$\tilde{l}_1$	n	1	2	3
0.7	$\tilde{\omega}_n^2$	0.59569	10.4636	78.3281
	$\frac{\alpha_n}{\pi}$	0.87853	1.79854	2.97494
0.5	$\tilde{\omega}_n^2$	0.49844	16.0	54.1682
	$\frac{\alpha_n}{\pi}$	0.84024	2.0	2.71291

Tabelle 14-3

Die Übereinstimmung der Ergebnisse ist so gut, weil die Ansatzfunktionen (14.68) hier sehr gut sind.

14.4.1.4 Modalmatrix und allgemeine Lösung

Zu den Eigenwerten $\tilde{\omega}_n^2$ in Tabelle 14-3 erhält man aus (14.84) und (14.85) die folgenden Eigenvektoren:

für $\tilde{l}_1 = 0.7$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -0.03085 & 0.00190 \end{pmatrix}^T, \\ \hat{\mathbf{q}}_2 &= \begin{pmatrix} 0.49765 & 1 & -0.02558 \end{pmatrix}^T, \\ \hat{\mathbf{q}}_3 &= \begin{pmatrix} -0.09045 & 0.13192 & 1 \end{pmatrix}^T, \end{aligned} \quad (14.86)$$

für $\tilde{l}_1 = 0.5$:

$$\begin{aligned}
\hat{q}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -0.03804 & 1.28994 \end{pmatrix}^T, \\
\hat{q}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3.07764 \end{pmatrix}^T, \\
\hat{q}_3 &= \begin{pmatrix} -0.08632 & 0.14136 & 1 \end{pmatrix}^T.
\end{aligned} \tag{14.87}$$

Man fasst die Eigenvektoren $\hat{q}_n$ als Spaltenvektoren in der *Modalmatrix* $\mathbf{Q}$ zusammen:

$$\mathbf{Q} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3). \tag{14.88}$$

Aus (14.86), (14.87) folgen (auf 3 Stellen gerundet) $\mathbf{Q}_1$ bzw. $\mathbf{Q}_2$:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.498 & -0.090 \\ -0.031 & 1 & 0.132 \\ 0.002 & -0.026 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.086 \\ -0.038 & 1 & 0.141 \\ 1.296 & 3.078 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14.89}$$

Die *allgemeine Lösung* von (14.76) lautet dann

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(t) &= \sum_{n=1}^3 \hat{q}_n (a_{cn} \cos \tilde{\omega}_n \tilde{t} + a_{sn} \sin \tilde{\omega}_n \tilde{t}) \\
&= \mathbf{Q} \cdot [\text{diag}(\cos \tilde{\omega}_n \tilde{t}) \mathbf{a}_c + \text{diag}(\sin \tilde{\omega}_n \tilde{t}) \mathbf{a}_s], \quad n = 1, 2, 3,
\end{aligned} \tag{14.90}$$

wo

$$\mathbf{a}_c = (a_{c1}, a_{c2}, a_{c3})^T, \quad \mathbf{a}_s = (a_{s1}, a_{s2}, a_{s3})^T. \tag{14.91}$$

Vor dem Einsetzen der $q_{kn}(t)$ in den Ansatz (14.68) fasst man die Formfunktionen $W_k(x)$ zweckmäßig auch als Diagonalmatrix zusammen:

$$\mathbf{W} = \text{diag}(W_k(x)) = \text{diag}(\sin k \pi \tilde{x}), \quad k = 1, 2, 3. \tag{14.92}$$

Dann gilt mit einer der Formen von $\mathbf{q}(t)$ aus (14.90)

$$w(x, t) = \mathbf{W}(x) \mathbf{q}(t). \tag{14.93}$$

Für den Anfangspunkt $\tilde{t}_0 = 0$ erhält man die *Anfangsauslenkungen*

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0) = \mathbf{Q} \mathbf{a}_c \quad \text{und} \quad w(x, 0) = \mathbf{W}(x) \mathbf{q}(0), \tag{14.94}$$

für die *Anfangsgeschwindigkeiten* gilt

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{Q} \text{diag}(\tilde{\omega}_n) \mathbf{a}_s \quad \text{und} \quad \dot{w}(x, t) = \mathbf{W}(x) \dot{\mathbf{q}}(0). \tag{14.95}$$

Das Anpassen der allgemeinen Lösung an Anfangsbedingungen hängt davon ab, ob die Anfangsbedingungen für $\mathbf{q}(t)$ oder für $w(x, t)$ gegeben sind. Der erste Fall wird in Abschnitt 14.5.1, der zweite in 14.5.2 behandelt.

14.5 Schwingungen der Kranbrücke nach dem Lastabfall

Unter der Last, dem Gewicht G_L in Bild 14-2, hat sich die Brücke abgesenkt. Fällt die Last weg, beginnt die Brücke um die unbelastete Gleichgewichtslage zu schwingen. Anfangsauslenkung ist die statische Auslenkung.

Um zwei Vorgehensweisen zu demonstrieren, wird zuerst mit den globalen Ansatzfunktionen aus Abschnitt 14.4 gearbeitet und danach mit den Gleichungen des Kontinuums aus 14.3.

14.5.1 Untersuchung des Lastabfalls mit globalen Ansatzfunktionen

Die Konstanten $\mathbf{a}_c, \mathbf{a}_s$ der allgemeinen Lösung (14.90) folgen aus (14.94), (14.95) zu vorgegebenen Anfangsauslenkungen $\mathbf{q}_0$ und Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_0$.

Unmittelbar vor dem Lastabfall sei die Brücke in Ruhe. Dann gilt $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$ bzw. $\dot{w}(x, 0) \equiv 0$, und aus (14.95) folgt $\mathbf{a}_s = \mathbf{0}$.

Die statische Absenkung $\mathbf{q}_{st}$ infolge der Last G müssen wir zuerst berechnen. Es ist zweckmäßig, sie mit Hilfe der Ansatzfunktionen $W_k(x)$ zu ermitteln.

14.5.1.1 Bestimmen der statischen Absenkung

Wir arbeiten mit Lagrange. Dann kommt zum Potential U nach (14.64) das Potential der Last G , s. Bild 14-2, hinzu. Mit der statischen Auslenkung $w_{st}(x)$ gilt

$$U_{st} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[w_{st}''(x) \right]^2 dx + G \cdot w_{st}(l_1). \quad (14.96)$$

Setzt man die statische Absenkung mit (14.68) an, nimmt (14.96) analog zu (14.69) ff. die folgende Form an:

$$U_{st} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_{st}^T \mathbf{K} \mathbf{q}_{st} - \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{q}_{st} \quad (14.97)$$

wo, vgl. (14.68),

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= G \left(W_1(l_1), W_2(l_1), W_3(l_1) \right)^T \\ &= G \left(\sin \pi \tilde{l}_1, \sin 2\pi \tilde{l}_1, \sin 3\pi \tilde{l}_1 \right)^T. \end{aligned} \quad (14.98)$$

Aus den Lagrangeschen Gln, zum Beispiel (14.75), folgt

$$\mathbf{K} \mathbf{q}_{st} - \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (14.99)$$

also, mit (14.78):

$$\mathbf{q}_{st} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g} = \frac{2l^3 G}{EI \pi^4} \left(\sin \pi \tilde{l}_1, \frac{1}{16} \sin 2\pi \tilde{l}_1, \frac{1}{81} \sin 3\pi \tilde{l}_1 \right)^T. \quad (14.100)$$

14.5.1.2 Bestimmen der Konstanten a_c :

Mit $q_0 = q_{st}$ folgt aus (14.94)₁

$$a_c = Q^{-1} q_{st} - Q^{-1} K^{-1} g; \quad (14.101)$$

s. Aufgabe 14-15 ff.

14.5.2 Untersuchungen des Lastabfalls mit den Eigenschwingungen des Balkens als Kontinuum

Ausgangspunkte sind (wieder) die Anfangsbedingungen

$$w(x, 0) = w_{st}(x), \quad \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x), \quad (14.102)$$

wobei $w_{st}(x)$ für die statische Absenkung unter der Last G_L steht und $\dot{w}_0(x)$ z. B. eine durch einen Anfangsstoß hervorgerufene Anfangsgeschwindigkeit sein mag.

14.5.2.1 Statische Absenkung: Anpassen der allgemeinen Lösung

Die statische Biegelinie folgt am einfachsten aus (B.38). Mit $\tilde{x} = x/l$, $\tilde{l}_1 = l_1/l$, $\tilde{l}_2 = l_2/l$ gilt

$$w_{st}(\tilde{x}) = \begin{cases} \frac{G l^3}{6 E I} \tilde{x} \tilde{l}_2 [1 - \tilde{l}_2^2 - \tilde{x}^2] & \text{für } 0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}_1 \\ \frac{G l^3}{6 E I} (1 - \tilde{x}) [1 - \tilde{l}_1^2 - (1 - \tilde{x})^2] & \text{für } \tilde{l}_1 \leq \tilde{x} \leq 1 \end{cases} \quad (14.103)$$

Die aus den Eigenschwingungen α_n , $\hat{w}_n(\tilde{x})$ oder $\tilde{\omega}_n$, $\hat{w}_n(\tilde{x})$ zusammengesetzte allgemeine Lösung* der Partiellen Dgl. (14.12), oder der Gewöhnlichen Dgl. (14.15), mit den Randbedingungen (14.47) bis (14.49) lautet, vgl. (14.90),

$$w(\tilde{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{w}_n(\tilde{x}) (a_{cn} \cos \tilde{\omega}_n \tilde{t} + a_{sn} \sin \tilde{\omega}_n \tilde{t}), \quad (14.104)$$

wobei sich die $\hat{w}_n(\tilde{x})$ gemäß (14.62) aus zwei Teilen zusammensetzt. Setzt man dieses $w(\tilde{x}, \tilde{t})$ in (14.102) ein, ergeben sich

$$w_{st}(\tilde{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{cn} \hat{w}_n(\tilde{x}), \quad \dot{w}_0(\tilde{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n a_{sn} \hat{w}_n(\tilde{x}). \quad (14.105)$$

* Der Begriff der "Allgemeinen Lösung" aus der Theorie der gewöhnlichen Dgln wird hier der Anschauung halber übernommen. Er ist bei den partiellen Dgln unüblich, weil es dort zu viele Einschränkungen dafür gibt.

Die beiden Gln (14.105) sind die Bestimmungsgleichungen für die Konstanten a_{cn}, a_{sn} , d. h. der Entwicklungskoeffizienten der rechts stehenden Reihen.

Ein scheinbarer Umweg führt am raschesten zum Ziel:

14.5.2.2 Die Orthogonalität der Eigenfunktionen

Sei T nach (14.63) die kinetische Energie des Systems:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} m \dot{w}^2(l_1, x). \quad (14.106)$$

Seien $\hat{w}_i(x)$ und $\hat{w}_k(x)$ zwei Eigenschwingungsformen des Systems. In Anlehnung an die quadratische Form (14.106) definiert man die folgende *Bilinearform* als *Skalarprodukt*:

$$(\hat{w}_i, \hat{w}_k)_{\mu, m} = \int_0^l \mu \hat{w}_i(x) \hat{w}_k(x) dx + m \hat{w}_i(l_1) \hat{w}_k(l_1). \quad (14.107)$$

Man erkennt unmittelbar die Symmetrie

$$(\hat{w}_i, \hat{w}_k)_{\mu, m} = (\hat{w}_k, \hat{w}_i)_{\mu, m}. \quad (14.108)$$

Für die Eigenschwingung $(\omega_i, \hat{w}_i)$ folgt aus (14.15)

$$\mu \omega_i^2 \hat{w}_i = E I \hat{w}_i^{IV}, \quad (14.109)$$

und aus (14.49)₂

$$m \omega_i^2 \hat{w}_i(l_1) = E I [\hat{w}_i'''(l_1 + \varepsilon) - \hat{w}_i'''(l_1 - \varepsilon)]; \quad (14.110)$$

darin bedeuten $\hat{w}_i'''(l_1 \pm \varepsilon)$, dass der Funktionswert unmittelbar rechts bzw. links von $x = l_1$ zu nehmen ist.

Multipliziert man (14.109) mit $\hat{w}_k(x)$ und integriert über x , multipliziert auch (14.110) mit $\hat{w}_k(l_1)$, addiert dann beide Ergebnisse, so folgt, vgl. (14.107):

$$\omega_i^2 (\hat{w}_i, \hat{w}_k)_{\mu, m} = \int_0^l E I \hat{w}_i^{IV}(x) \hat{w}_k(x) dx + E I [\hat{w}_i'''(l_1 + \varepsilon) - \hat{w}_i'''(l_1 - \varepsilon)] \hat{w}_k(l_1). \quad (14.111)$$

Zweifache partielle Integration der rechten Seite liefert:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l E I \hat{w}_i''' \cdot \hat{w}_k' dx + E I \left[\hat{w}_i'''(l_1^-) - \hat{w}_i'''(l_1^+) \right] \hat{w}_k'(l_1) = \\
& - E I \hat{w}_i''' \hat{w}_k' \Big|_0^{l_1^-} + E I \hat{w}_i''' \hat{w}_k' \Big|_{l_1^-}^l + E I \hat{w}_i''' \hat{w}_k' \Big|_{l_1^+}^{l_1^+} - E I \hat{w}_i''' \hat{w}_k' \Big|_0^{l_1^-} - E I \hat{w}_i''' \hat{w}_k' \Big|_{l_1^+}^l + \\
& + \int_0^l E I \hat{w}_i'' \hat{w}_k'' dx.
\end{aligned} \quad (14.112)$$

Dabei wurde das Integrationsintervall wegen der Unstetigkeit der dritten Ableitungen bei $x = l_1$ in die beiden Abschnitte $0 \leq x < l_1$ und $l_1 < x \leq l$ zerlegt; die Schreibweise der Glieder aus (14.110) wurde angepasst; ε wurde unterdrückt.

Beide Eigenschwingungen $\hat{w}_i(x)$, $\hat{w}_k(x)$ erfüllen, je für sich, alle Rand- und Zwischenbedingungen (14.47) bis (14.49). Setzt man diese in (14.112) ein, bleibt nur das Integral übrig, aus (14.111) entsteht

$$\omega_i^2 (\hat{w}_i, \hat{w}_k)_{\mu, m} = \int_0^l E I \hat{w}_i'' \hat{w}_k'' dx. \quad (14.113)$$

Vertauscht man i und k , erhält man

$$\omega_k^2 (\hat{w}_k, \hat{w}_i)_{\mu, m} = \int_0^l E I \hat{w}_k'' \hat{w}_i'' dx. \quad (14.114)$$

Auch in die rechten Seiten gehen $\hat{w}_i$ und $\hat{w}_k$ symmetrisch ein.

Subtraktion von (14.113), (14.114) liefert

$$(\omega_i^2 - \omega_k^2) (\hat{w}_i, \hat{w}_k)_{\mu, m} = 0. \quad (14.115)$$

Für $\omega_i^2 \neq \omega_k^2$ folgt daraus:

$$(\hat{w}_i, \hat{w}_k)_{\mu, m} = 0. \quad (14.116)$$

Die Eigenschwingungsformen $\hat{w}_i(x)$ und $\hat{w}_k(x)$ zu verschiedenen Eigenfrequenzen ω_i, ω_k – oder Eigenwerten α_i, α_k – sind (im verallgemeinerten Sinne) bezüglich der Gewichte μ und m *orthogonal*.

Für $\hat{w}_i(x) \equiv \hat{w}_k(x)$ gilt $\omega_i = \omega_k$ und $(\hat{w}_i, \hat{w}_k)_{\mu, m} > 0$, vgl. (14.107). Man definiert für eine Funktion $\hat{w}(x)$, die die geometrischen (die wesentlichen) Randbedingungen erfüllt, die Norm

$$\|\hat{w}\|_{\mu,m} = \sqrt{(\hat{w}, \hat{w})_{\mu,m}} = \left[\int_0^l \mu [\hat{w}(x)]^2 dx + m \hat{w}^2(l_1) \right]^{1/2}. \quad (14.117)$$

Hinweise:

1. Der Ausdruck für die gesamte kinetische Energie des Systems – hier Gl. (14.106) – dient nur als Vorbild für die Formulierung des Skalarprodukts – hier Gl. (14.107). Bei der Nutzung ist von Energie nicht mehr die Rede.
2. Das Skalarprodukt $(\hat{w}_i, \hat{w}_k)_{\mu,m}$ heißt Bilinearform, weil es bezüglich seiner beiden Argumente, je für sich, linear ist.
3. Wie die Herleitung zeigt, hängt das Skalarprodukt vom Aufbau des Systems, insbesondere seiner Massenverteilung ab.
4. Man braucht die Eigenschwingungen nicht zu kennen, um das Skalarprodukt zu definieren.
5. Die Norm $\|\hat{w}\|_{\mu,m}$ ist positiv definit, das heißt $\|\hat{w}\|_{\mu,m} > 0$ für $\hat{w} \neq 0$.

14.5.2.3 Bestimmen der Entwicklungskoeffizienten

Wir betrachten (14.105)₁ und schreiben in dimensionsbehafteter Form

$$w_{st}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{cn} \hat{w}_n(x). \quad (14.118)$$

Multiplikation von (14.118) mit $\mu \hat{w}_i(x)$ und Integration über die Länge l liefert

$$\int_0^l \mu w_{st}(x) \hat{w}_i(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_{cn} \int_0^l \mu \hat{w}_n(x) \hat{w}_i(x) dx. \quad (14.119)$$

Unter der *Annahme*, dass die Summe rechts gleichmäßig konvertiert, wurden Summation und Integration vertauscht.

Für $x = l_1$ folgt aus (14.118) nach Multiplikation mit $m \cdot \hat{w}_i(l_1)$:

$$m \cdot w_{st}(l_1) \hat{w}_i(l_1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{cn} m \hat{w}_n(l_1) \hat{w}_i(l_1). \quad (14.120)$$

Addition von (14.119) und (14.120) liefert unter Beachtung von (14.107) nach Vertauschen von linker und rechter Seite

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{cn} (\hat{w}_n, \hat{w}_i)_{\mu,m} = m w_{st}(l_1) \hat{w}_i(l_1) + \int_0^l \mu \hat{w}_n \hat{w}_i dx. \quad (14.121)$$

Links gilt $(\hat{w}_n, \hat{w}_i)_{\mu,m} = 0$ für $n \neq i$. Es verbleibt für $n = i$, vgl. (14.117),

$$a_{ci} \|\hat{w}_i\|^2 = m w_{st}(l_1) \hat{w}_i(l_1) + \int_0^l \mu \hat{w}_n \hat{w}_i dx. \quad (14.122)$$

Mit Hilfe des Skalarprodukts gelingt es also, das unendliche Gleichungssystem (14.118) zu entkoppeln und zu lösen.

14.6 Aufgaben

Aufgabe 14-1: Man zeige im Anschluss an (14.23): $\cos jx = \cosh x$, $\sin jx = j \sinh x$,

$\cosh jx = \cos x$, $\sinh jx = j \sin x$.

Aufgabe 14-2: Man zeige mit Hilfe von (14.24) oder mit den Formeln aus Aufgabe 14-1:

$(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x$.

Aufgabe 14-3: Schreiben Sie die Analoga zu den Additionstheoremen für $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, $\sin \alpha \cdot \cos \beta$, $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ sowie zu $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$ für die Hyperbelfunktionen an.

Aufgabe 14-4: Skizzieren Sie die Verläufe $\sinh x$ und $\cosh x$ mit Hilfe der e-Funktionen. Berechnen Sie insbesondere $\cosh 0$, $\sinh 0$ und die Werte der Ableitungen von $\cosh x$, $\sinh x$ bei $x = 0$.

Aufgabe 14-5: Zeigen Sie, dass die zu κ_n nach (14.32) gehörenden $w_n(x, t)$ mit den zu (14.31) gehörenden zusammenfallen.

Aufgabe 14-6: Nehmen Sie für den Balken nach Bild 14-8 $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ (Stahl), einen Durchmesser D (z. B. in m), eine Länge l (in m) an und stellen Sie mit Hilfe von (14.38) eine Formel für ω_n auf, die Sie am besten gleich auf (kritische) Drehzahlen n_{krit} umrechnen ($[n] = \text{Umdr./min}$). Gelegentlich kann man eine solche Formel als grobe Faustformel benutzen, um die n_i einer Welle abzuschätzen, bei der D nur näherungsweise konstant ist.

Aufgabe 14-7: Zeigen Sie, dass zur Wurzel $\kappa_0 = 0$ das Eigenwertproblem (14.41) nur die triviale Lösung $\hat{w}_0(x) = 0$ hat.

Aufgabe 14-8: Kontrollieren Sie die Eigenschwungsform $\hat{w}_n(x)$ nach (14.45).

Aufgabe 14-9: Kontrollieren Sie die Rand- und Übergangsbedingungen in Abschnitt 14.3.4.

Aufgabe 14-10: Rechnen Sie die Bestimmungsgleichung (14.60) nach.

Aufgabe 14-11: Wie könnte man bei der Kranbrücke eine mitschwingende Masse der Last (m_L in Bild 14-1) berücksichtigen, die an einem Seil (= Feder) der Dehnsteifigkeit k hängt?

Aufgabe 14-12: Kontrollieren Sie die Eigenschwingungsform $\hat{w}_n(x)$ nach (14.62) und zeichnen Sie die einzelnen Verläufe mit den Eigenwerten aus Tabelle 14-2.

Aufgabe 14-13: Die Nachgiebigkeit des Kranseils in Bild 14-1 soll berücksichtigt werden (damit man auch den Abfall von Lastteilen untersuchen kann). Seien die (am Seil verbleibende) Masse m_L und die Seilsteifigkeit $k_s = 1/h_s$, h_s -Seilnachgiebigkeit, als Vielfache f_1, f_2 der Katzenmasse m bzw. der Balkenbiegenachgiebigkeit h_B am Katzenort, $x = l_1$, gegeben: $m_L = f_1 \cdot m, h_s = f_2 \cdot h_B$.

Zur Untersuchung werde angenommen, dass die Masse m_L nur vertikal schwingt und dass das durch das Gewicht G_L vorbelastete Seil nicht schlaff wird. Damit Sie auf den Untersuchungen aus Abschnitt 14.4 aufbauen können, führen Sie $q_4(t)$ als Koordinate für die Absenkung der Last ein.

Lösen Sie die Aufgabe, zum Beispiel, in folgenden Schritten:

1. Ergänzen der kinetischen Energie T aus (14.63) und des Potentials U aus (14.64) um die Terme für die Masse m_L bzw. das Seil der Steifigkeit k_s .
2. Ergänzen des Ansatzes (14.65), (14.68), (14.70) um die Koordinate q_4 .
3. Berechnen der Zusatzelemente m_{Lk} und k_{ik} für die erweiterten 4×4 -Matrizen $\mathbf{M}$ bzw. $\mathbf{K}$, vgl. (14.71) bis (14.73).
4. Machen Sie Ihre Bewegungsgleichung dimensionslos und schreiben Sie sie in der Form von (14.81).
5. Lösen Sie die Bewegungsgleichung (PC) mit den Zahlen aus Abschnitt 14.4 für $f_1 = 0.5$, $f_2 = 0.25$, vgl. (14.84)ff.

Aufgabe 14-14: Berechnen Sie die statische Durchbiegung $w_0(x)$ des Kranbalkens nach Bild 14-2 unter der Last G_L . (Die Durchbiegungen infolge der *Eigengewichte* des Balkens und der Masse m interessieren hier nicht.)

Aufgabe 14-15: Entwickeln Sie $w_0(x)$ aus Aufgabe 14-14 in eine Fouriersumme mit $K \geq 3$:

$$w_0(x) = \sum_{k=1}^K q_k \sin(k\pi x/l).$$

Aufgabe 14-16: Nehmen Sie $\tilde{l}_1 = 0.5$ oder $\tilde{l}_1 = 0.7$ an und formulieren Sie für den Fall, dass zur Zeit $t = 0$ die Last G_L abfällt (s. Aufgabe 14-14), die Anfangsbedingungen für die sich anschließenden Schwingungen, (vgl. (14.100).

Aufgabe 14-17: Berechnen Sie für die Eigenschwingungen der Form (14.90) zu den Anfangsbedingungen nach Aufgabe 14-16 die Entwicklungskoeffizienten a , vgl. (14.101).

Aufgabe 14-18: Berechnen Sie auf einem PC für bestimmte Balkenpunkte x^* die Bewegungen $w(x^*, t)$ mit Hilfe der aus Aufgabe 14-7 (näherungsweise) bekannten Eigenschwingungen.

Aufgabe 14-19: Nach einer Reparatur, bei der die Kranbrücke aus Abschnitt 14.3 als Ganzes, mit aufgesetzter Laufkatze, angehoben wurde, fällt sie versehentlich aus der Höhe h auf die (starre) Fahrbahn. Wie lauten die Anfangsbedingungen $w_0(x)$ und $\dot{w}_0(x)$ für die anschließenden Schwingungen?

Aufgabe 14-20: Berechnen Sie nach (14.117) die Norm $\|w_{st}\|_{\mu, m}$ der statischen Biegelinie (14.103).

Aufgabe 14-21: Man kann die Orthogonalität zweier Eigenlösungen $(\alpha_i, \hat{w}_i)$, $(\alpha_n, \hat{w}_n)$, $\alpha_i \neq \alpha_n$, aus Gl. (14.62) bezüglich des Skalarprodukts (14.107) nachweisen, indem man $\hat{w}_i$ und $\hat{w}_k$ rechts einsetzt, das Integral auswertet und zeigt, dass sich die Glieder wegheben. (Das ist sehr mühselig!)

Aufgabe 14-22: Formulieren Sie das Skalarprodukt für die Eigenschwingungen des Systems aus Aufgabe 14-13. (Das System besteht aus dem Kontinuum Balken und der angehängten Punktmasse. Deshalb bestehen die Eigenschwingungen aus den Paaren $(\hat{w}, \hat{q})_n = (\hat{w}_n, \hat{q}_n)$, wobei $\hat{w}_n(x)$ die Balkenbiegung und $\hat{q}_n = (\hat{q}_4)_n$ die Absenkung von m_L beschreibt.)

Aufgabe 14-23: Nehmen Sie an, dass der Kranbalkenquerschnitt ortsabhängig ist. Dann folgt $\mu = \mu(x)$ und $EI = EI(x)$. Wie sieht jetzt das Skalarprodukt aus? (Zum Lösen dieser Aufgabe muss man von der PDgl (14.7) ausgehen und auch die Randbedingungen, die Querkräfte enthalten, umarbeiten. Das Endergebnis ist fast identisch mit (14.107). Die Eigenschwingungen lassen sich allerdings nur numerisch ermitteln.)

Aufgabe 14-24: Schreiben Sie parallel zum Abschnitt "Bestimmen der Entwicklungskoeffizienten" die Koeffizienten a_{sn} für (14.105) an.

Aufgabe 14-25: Berechnen Sie mit den Anfangsbedingungen aus Aufgabe 14-18 einige Koeffizienten a_{sn} für die Eigenwerte α_i aus Tabelle 14-2 und die Schwingungsformen $\hat{w}_n(x)$ nach (14.62).

Anhang

A Einige Grundlagen aus der Kinetik

Soweit die Maschinendynamik nach den Wechselwirkungen zwischen Kräften und Bewegungen in einem vorgegebenen System fragt, ist sie Teil der *Kinetik*, der Wissenschaft von diesen Zusammenhängen. Wir sprechen vom *Ansetzen der Bewegungsgleichungen* (des gegebenen Systems), wenn wir die Analyse der jeweils vorliegenden Zusammenhänge meinen. Ob wir dann, *bei gegebener Bewegung*, die *Gleichungen nach den Kräften* auflösen oder, *bei gegebenen Kräften, nach der Bewegung*, ist zunächst gleichgültig.

Im Rahmen dieses Buches bestehen die Gebilde überwiegend aus starren Körpern, die durch starre und elastische Elemente, zum Beispiel Gestänge und Federn, miteinander verbunden sind. Die Bewegungsgleichungen bauen dann auf der Kinematik und der Kinetik des starren Körpers auf. Deshalb stellen wir die diesbezüglichen Grundlagen hier knapp zusammen.

A.1 Bewegung des starren Körpers

A.1.1 Bezugssystem, Bezugspunkt, Basis

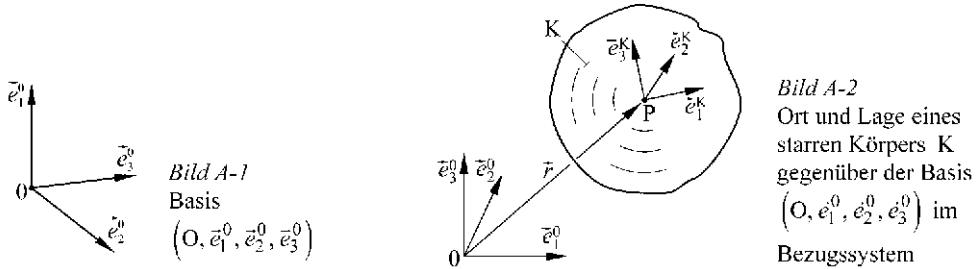
A.1.1.1 Bezugssystem (engl.: frame)

Der Beobachter eines physikalischen Geschehens sieht den Ablauf des Vorgangs von seinem momentanen (räumlichen) Bezugssystem aus. Wenn er sich als Teil seines Aufenthaltsortes auffasst, kann das Bezugssystem ein Labor, eine Maschinenhalle, ein Fahrstuhl, ein Kraftfahrzeug, ein Raumschiff usw. sein. In Gedanken kann er sich in die Mitte der Erde, auf die Sonne, aber auch auf eine rotierende Turbinenwelle begeben. Vom Standpunkt der Allgemeinen Relativitätstheorie sind alle Bezugssysteme – im Prinzip – gleichberechtigt. Für praktische Fragen gibt es jedoch stets zweckmäßige Bezugssysteme (oft mehrere). Will man zum Beispiel Bewegungsgleichungen formulieren, die auf dem Newtonschen Gesetz beruhen, muss man ein *Inertialsystem* als Bezugssystem wählen (in einem anderen wären die Gleichungen verwickelt). Will man gemessene Schwingungen von Hubschrauberblättern deuten, wird man sie zweckmäßig vom drehenden Rotor her sehen. (Dieses Beispiel macht auch deutlich, dass man nicht nur vor Rechnungen, sondern auch vor Messungen über Bezugssysteme nachdenken muss, – man würde sonst vielleicht vergessen, auch die Rotordrehung aufzunehmen.)

Häufig arbeitet man, selbst bei einfachen Aufgaben, mit mehreren Bezugssystemen parallel. Erforderlichenfalls muss man dann Gleichungen oder Aussagen von einem System ins andere umrechnen (*transformieren*).

A.1.1.2 Bezugspunkt, Basis

Im gewählten *Bezugssystem* werden festgelegt: Ein *Bezugspunkt* O (Ursprung, engl. origin) als (Bezugs-)Ort und ein orientiertes Dreiein (engl. triad) für die *Richtungen*, zweckmäßig in Form von drei (rechtshändig angeordneten) *orthogonalen Einsvektoren* $(\bar{e}_1^0, \bar{e}_2^0, \bar{e}_3^0)$, die gemeinsam mit O die Basis $(O, \bar{e}_1^0, \bar{e}_2^0, \bar{e}_3^0)$ des unten eingeführten Koordinatensystems bilden, Bild A-1. Wir sehen $(O, \bar{e}_1^0, \bar{e}_2^0, \bar{e}_3^0)$ als ein Inertialsystem an.



A.1.2 Ort und (Winkel-) Lage eines starren Körpers

Gegeben sei ein starrer Körper K. In dem Körper sei ein Punkt P und eine (orthonormale) Basis $(P, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ fixiert. Für kinetische Untersuchungen besonders geeignet sind als Punkt P der Massenmittelpunkt C und als Dreiein $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ die Trägheitshauptachsen. Das werden wir unten häufig annehmen.

A.1.2.1 Ort und Ortskoordinaten

Der Ort des Körpers K wird durch den Orts- (oder Radius-)Vektor $\bar{r}$ von O nach P erfasst, Bild A-2. Wenn sich der Körper bewegt, hängt der Ortsvektor von der Zeit t ab:

$$\overline{OP} = \bar{r} = \bar{r}(t). \quad (\text{A.1})$$

Bezogen auf die Basis $(O, \bar{e}_1^0, \bar{e}_2^0, \bar{e}_3^0)$ schreiben wir

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = \bar{e}_1^0 x_1^0 + \bar{e}_2^0 x_2^0 + \bar{e}_3^0 x_3^0 = \bar{e}_1^0 x_1^0(t) + \bar{e}_2^0 x_2^0(t) + \bar{e}_3^0 x_3^0(t), \quad (\text{A.2})$$

mit den *Ortskoordinaten* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) ; vgl. DIN 13317. Die Koordinaten und auch die Basisvektoren werden in Spaltenmatrizen (oft Spaltenvektoren genannt) zusammengefasst:

$$\mathbf{r}^0 := \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^T, \quad \bar{\mathbf{e}}^0 := \begin{pmatrix} \bar{e}_1^0 \\ \bar{e}_2^0 \\ \bar{e}_3^0 \end{pmatrix} = (\bar{e}_1^0, \bar{e}_2^0, \bar{e}_3^0)^T. \quad (\text{A.3})$$

Dann lautet der Ortsvektor $\vec{r}$ in Matrixschreibweise

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \dot{\vec{e}}^{0T} \mathbf{r}^0 = \dot{\vec{e}}^{0T} \mathbf{r}^0(t). \quad (\text{A.4})$$

A.1.2.2 Lage und Lagekoordinaten

Die (Winkel-)Lage, die räumliche Ausrichtung des Körpers K wird durch die Beschreibung der Basis $(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, bezogen auf die Basis $(O, \vec{e}_1^0, \vec{e}_2^0, \vec{e}_3^0)$ erfasst, vgl. DIN 13317.

Man legt den Punkt P gedanklich auf O und schreibt $(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ als Ergebnis einer *Drehung* von $(O, \vec{e}_1^0, \vec{e}_2^0, \vec{e}_3^0)$ an. In der Matrixschreibweise (A.3) gilt

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1^0 \\ \vec{e}_2^0 \\ \vec{e}_3^0 \end{pmatrix}, \text{ kurz } \vec{e} = \mathbf{R} \vec{e}^0. \quad (\text{A.5})$$

Dabei stehen die Elemente R_{ik} der Drehmatrix $\mathbf{R}$ für die *Richtungskosinus*, s. Bild A-3,

$$R_{ik} = \cos \angle(\vec{e}_i, \vec{e}_k^0) = \cos \alpha_{ik}, i, k = 1, 2, 3. \quad (\text{A.6})$$

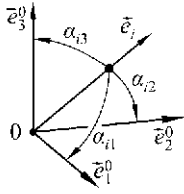


Bild A-3

Richtungswinkel $\alpha_{ik} = \angle(\vec{e}_i, \vec{e}_k^0)$, jeweils in von $\vec{e}_i$ und $\vec{e}_k^0$ aufgespannter Ebene gemessen

Zur Ausdeutung von (A.5) lese man die Gleichung zeilenweise:

$$\vec{e}_i = R_{i1} \vec{e}_1^0 + R_{i2} \vec{e}_2^0 + R_{i3} \vec{e}_3^0; \quad (\text{A.7})$$

also stehen in der i -ten Zeile von $\mathbf{R}$ die Koordinaten von $\vec{e}_i$ bezogen auf $\vec{e}^0$. Auflösen von (A.5) nach $\vec{e}_i$ liefert

$$\vec{e}^0 = \mathbf{R}^{-1} \vec{e}, \quad (\text{A.8})$$

mit der zu $\mathbf{R}$ inversen Drehung $\mathbf{R}^{-1}$. Die in $\mathbf{R}_{inv} := \mathbf{R}^{-1}$ stehenden Richtungskosinus (Zeile i , Spalte k) erfüllen

$$\cos \angle(\vec{e}_i^0, \vec{e}_k) = \cos \angle(\vec{e}_k, \vec{e}_i^0). \quad (\text{A.9})$$

Also gelten

$$\mathbf{R}_{inv} = \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \text{ und } \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}; \quad (\text{A.10})$$

die Matrix $\mathbf{R}$ ist *orthogonal*, in ihrer k -ten Spalte stehen die Koordinaten von $\vec{e}_k^0$ bezogen auf $\vec{e}$.

Aus der Orthonormalität der Dreibeine aus $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1, i = 1, 2, 3$, und $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = 0$ für $i \neq k$, folgen sechs Bedingungen, denen die R_{ik} unterliegen. Also enthalten die neun R_{ik} (im allgemeinen) drei freie Bestimmungsgrößen für die Lage des Körpers, die man im Prinzip als drei *Lagekoordinaten* ansehen kann.

Obwohl alle Drehungen die Form (A.5) haben, sind die Richtungskosinus viel zu unanschaulich und schwerfällig, um praktisch anwendbar zu sein. In der Technik setzt man die allgemeine Drehung in der Regel aus drei aufeinander folgenden Elementardrehungen, deren Winkel – oft in beschränkten Intervallen – als *Lagekoordinaten* dienen (s. Abschnitt A.1.4).

A.1.2.3 Koordinatendrehung

Gleichung (A.4) drückt den Ortsvektor $\vec{r}$ durch die Koordinaten $\mathbf{r}^0$ bezogen auf das Dreibein $\vec{e}^0$ aus, $\vec{r} = \vec{e}^{0T} \mathbf{r}^0$. Vom gemäß (A.5) gedrehten Dreibein $\vec{e}$ gesehen, lautet derselbe Ortsvektor (derselbe Pfeil)

$$\vec{r} = \vec{e}^T \mathbf{r} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3. \quad (\text{A.11})$$

Darin sind $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ die auf $\vec{e}$ bezogenen (gedrehten) Koordinaten von $\vec{r}$.

Aus

$$\vec{r} = \vec{e}^{0T} \mathbf{r}^0 = \vec{e}^T \mathbf{r} \quad (\text{A.12})$$

folgt mit (A.8) und (A.10)

$$\vec{e}^{0T} \mathbf{r}^0 = (\mathbf{R}^T \vec{e})^T \mathbf{r}^0 = (\vec{e}^T \mathbf{R}) \mathbf{r}^0 = \vec{e}^T (\mathbf{R} \mathbf{r}^0) = \vec{e}^T \mathbf{r}, \quad (\text{A.13})$$

also, vgl. (A.5),

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \mathbf{r}^0; \quad (\text{A.14})$$

die Koordinaten transformieren sich wie die Basisvektoren.

Die Transformationen der Abschnitte A.1.2.2 und A.1.2.3 gelten für beliebige orthonormale Basen und beliebige Vektoren, wie zum Beispiel Geschwindigkeiten und Kräfte.

A.1.3 Zusammengesetzte Drehungen

A.1.3.1 Elementardrehungen

Die Drehung eines Dreibeins $\vec{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^T$ um einen Einsvektor $\vec{e}_i$ mit dem Winkel φ_i , vgl. Bild A-4, in das Dreibein $\vec{e}^i = (\vec{e}_1^i, \vec{e}_2^i, \vec{e}_3^i)^T$ heißt *Elementardrehung*,

$$\vec{e}^i = \mathbf{R}_i \vec{e}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.15})$$

Auch die Drehmatrizen R_i nennen wir Elementardrehungen. Es gelten

$$\begin{aligned} R_1(\varphi_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ 0 & -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad R_2(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix}, \\ R_3(\varphi_3) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 & 0 \\ -\sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Aufeinander folgende Drehungen werden nummeriert; von $\vec{e}^0$ ausgehend durchnummeriert, zum Beispiel

$$\vec{e}^1 = R_3(\varphi_3') \vec{e}^0, \quad \vec{e}^2 = R_1(\varphi_1) \vec{e}^1, \quad \vec{e}^3 = R_3(\varphi_3'') \vec{e}^2, \quad (\text{A.17})$$

zusammengesetzt:

$$\vec{e}^3 = R_3(\varphi_3'') \left(R_1(\varphi_1) \left(R_3(\varphi_3') \vec{e}^0 \right) \right) = (R_3 R_1 R_3) \vec{e}^0 =: R \vec{e}^0; \quad (\text{A.18})$$

Reihenfolge beachten und Drehwinkel (hier φ_3', φ_3'') unterscheiden!

A.1.3.2 Cardan-Winkel

Sehr gebräuchlich sind die Cardan-Winkel, bei denen die Drehungen $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ um die drei (ursprünglich) senkrecht aufeinander stehenden Achsen $\vec{e}_1^0, \vec{e}_2^1, \vec{e}_3^2$ erfolgen. Für die Cardan-Drehung gilt, Bild A-5,

$$R_C := R_3(\varphi_3) R_2(\varphi_2) R_1(\varphi_1); \quad (\text{A.19})$$

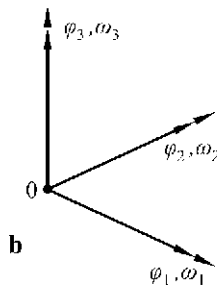
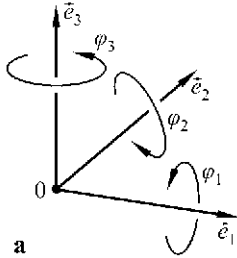


Bild A-4

Drehsinn der Winkel φ_i um Basisvektoren $\vec{e}_i$, a anschaulich, b symbolisch (Rechtsschraubsinn)

mit (A.16) folgt durch Ausmultiplizieren

$$R_C = \begin{pmatrix} c_2 c_3 & c_1 s_3 + c_3 s_1 s_2 & s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 \\ -c_2 s_3 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & c_1 s_2 s_3 + c_3 s_1 \\ s_2 & -c_2 s_1 & c_1 c_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

wo $c_i := \cos \varphi_i$, $s_i := \sin \varphi_i$; $i = 1, 2, 3$.

In manchen Anwendungsbereichen sind andere Reihenfolgen der Drehungen üblich (zum Beispiel Bild A-6).

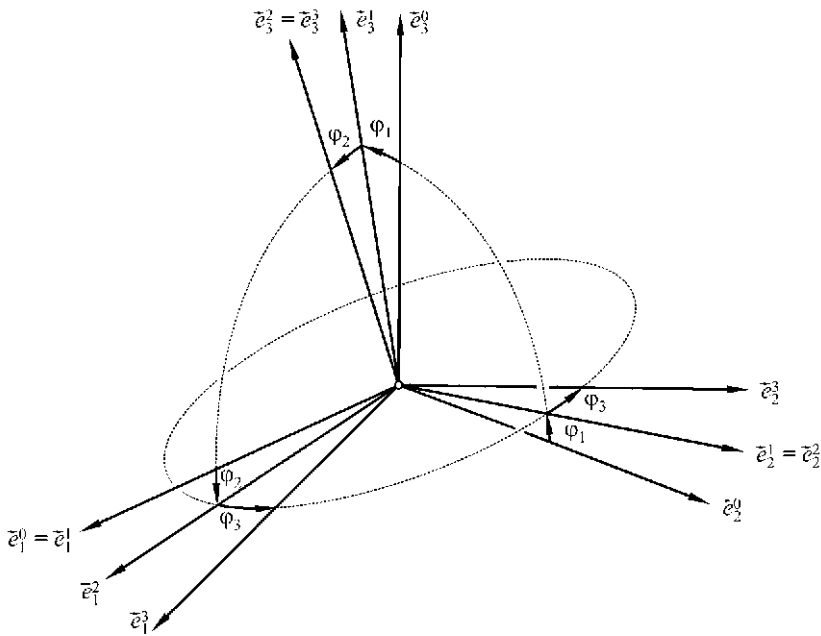


Bild A-5
Cardan-Drehung
 $R_C = R_3 R_2 R_1$

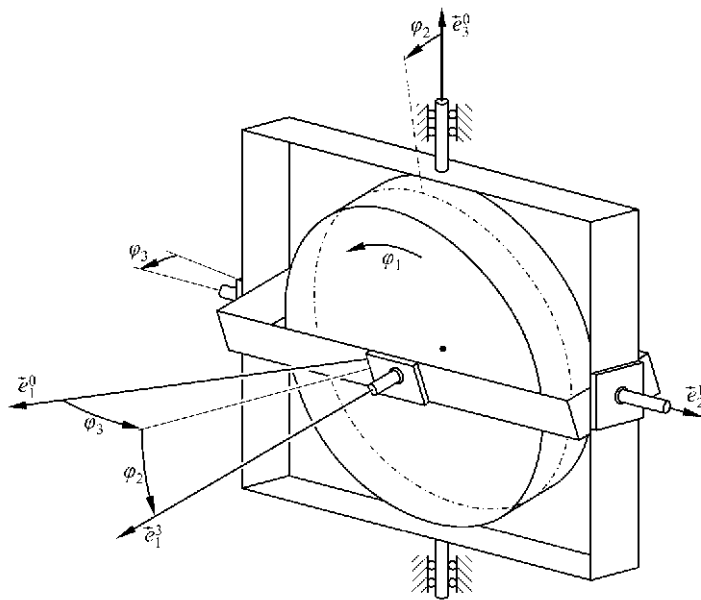


Bild A-6
Kreiselaufhängung mit
Cardan-Drehung
 $R_C = R_1 R_2 R_3$

A.1.3.3 Euler-Winkel

Bei den *Euler-Winkeln*, zum Beispiel $(\psi, \vartheta, \varphi)$ dreht man wie folgt, s. Bild A-7,

$$\mathbf{R}_E = \mathbf{R}_3(\varphi) \mathbf{R}_1(\vartheta) \mathbf{R}_3(\psi); \quad (\text{A.21})$$

mit (A.16) folgt durch Ausmultiplizieren

$$\mathbf{R}_E = \begin{pmatrix} c_\varphi c_\psi - c_\vartheta s_\varphi s_\psi & c_\vartheta s_\varphi c_\psi + c_\varphi s_\psi & s_\vartheta s_\varphi \\ -s_\varphi c_\psi - c_\vartheta c_\varphi s_\psi & c_\vartheta c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\psi & s_\vartheta c_\varphi \\ s_\vartheta s_\psi & -s_\vartheta c_\psi & c_\vartheta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

wo $c_\psi := \cos \psi$, $s_\psi := \sin \psi$, $c_\vartheta := \cos \vartheta$, $s_\vartheta := \sin \vartheta$, $c_\varphi := \cos \varphi$, $s_\varphi := \sin \varphi$. Man findet auch die Eulerdrehung

$$\mathbf{R}_E = \mathbf{R}_3(\varphi) \mathbf{R}_2(\vartheta) \mathbf{R}_3(\psi). \quad (\text{A.23})$$

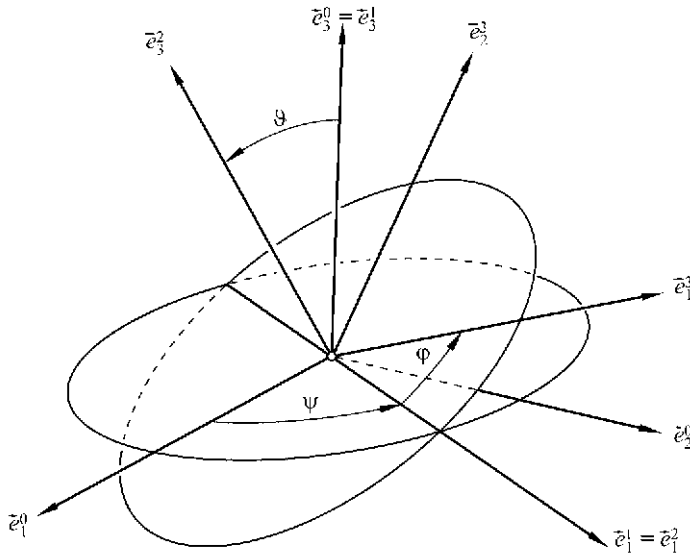


Bild A-7
Eulerwinkel und Drehung
 $\mathbf{R}_E = \mathbf{R}_3(\varphi) \mathbf{R}_1(\vartheta) \mathbf{R}_3(\psi)$

A.1.3.4 Kippwinkel

Die Kippwinkel (vgl. [6, 7]) werden in zwei Formen, (χ, ψ, φ) und $(\psi_1, \psi_2, \varphi)$, eingeführt: In der polaren Form (χ, ψ, φ) sind sie mit den Eulerwinkeln $(\psi, \vartheta, \varphi)$ eng verwandt, vermeiden jedoch die Vieldeutigkeit bei $\vartheta = 0$, in der axialen Form $(\psi_1, \psi_2, \varphi)$ haben sie gegenüber Cardanwinkeln den Vorteil, dass die Kippachsen $\bar{e}_1^0$ und $\bar{e}_2^0$ gleichberechtigt in die Drehung eingehen.

Zur Erklärung ist es zweckmäßig, Bild A-8, einen Kreis um den Ursprung in die von $\vec{e}_1^0$ und $\vec{e}_2^0$ aufgespannte Ebene zu legen. Wir nennen seine Ebene *Äquatorebene* $\ddot{A}^0$. Die allgemeine Drehung wird nun aus *zwei Drehungen* zusammengesetzt: Auf eine *Kippung* um den (*Knoten-)*Einsvektor $\vec{e}_N^0$ in der Ebene $\ddot{A}^0$,

$$\vec{e}^1 = R_K(\chi, \psi) \vec{e}^0 \quad (\text{A.24})$$

folgt die Drehung $R_3(\varphi)$ um die Achse $\vec{e}_3^1$:

$$\vec{e}^2 = R_3(\varphi) \vec{e}^1. \quad (\text{A.25})$$

Die Gesamtdrehung lautet

$$\vec{e}^2 = R_3(\varphi) R_K(\chi, \psi) \vec{e}^0 = R_G \vec{e}^0. \quad (\text{A.26})$$

Im Unterschied zu den Eulerwinkeln wird also das Dreibein nicht um $\vec{e}_3^0$ gedreht, bevor es um die Knotenlinie gekippt wird. Man kann die *Kippung* R_K aber auch als besondere Eulerdrehung sehen, nämlich als

$$R_K(\chi, \psi) = R_3(-\chi) R_1(\psi) R_3(\chi). \quad (\text{A.27})$$

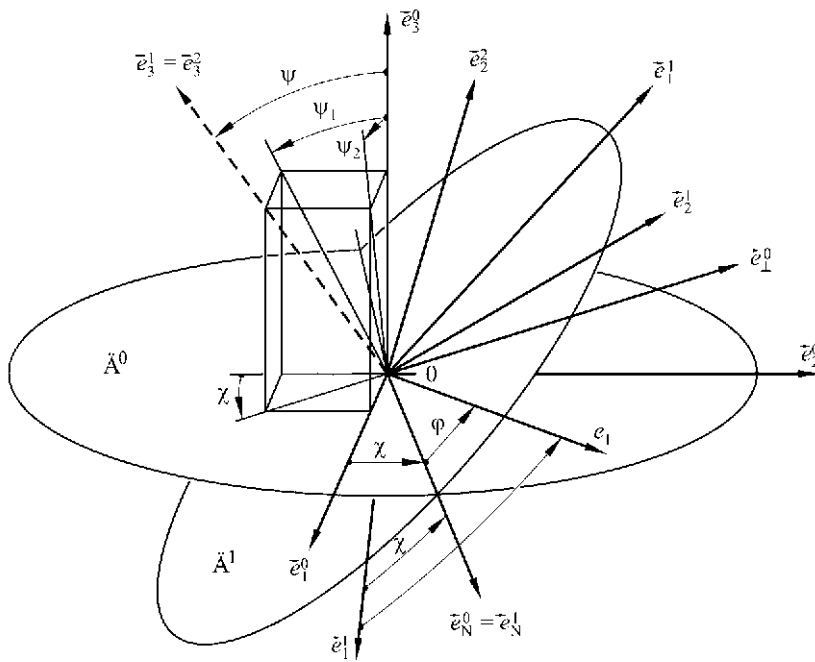


Bild A-8
Kippwinkel
(χ, ψ, φ) bzw.
(ψ_1, ψ_2, φ)

Formales Ausrechnen liefert (vgl. auch Aufgabe A-12):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_K &= \begin{pmatrix} \cos^2 \chi + \sin^2 \chi \cos \psi & \sin \chi \cos \chi (1 - \cos \psi) & -\sin \chi \sin \psi \\ \sin \chi \cos \chi (1 - \cos \psi) & \cos^2 \chi \cos \psi + \sin^2 \chi & \cos \chi \sin \psi \\ \sin \chi \sin \psi & -\cos \chi \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) + \cos(2\chi) \sin^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) & \sin(2\chi) \sin^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) & -\sin \chi \sin \psi \\ \sin(2\chi) \sin^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) & \cos^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) - \cos(2\chi) \sin^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) & \cos \chi \sin \psi \\ \sin \chi \sin \psi & -\cos \chi \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_G &= \begin{pmatrix} c \cdot \cos^2(\psi/2) + \cos(2\chi - \varphi) \sin^2(\psi/2) & \dots \\ -s \cdot \cos^2(\psi/2) + \sin(2\chi - \varphi) \sin^2(\psi/2) & \dots \\ \sin \chi \sin \psi & \dots \end{pmatrix} \\
 &\quad \begin{pmatrix} s \cdot \cos^2(\psi/2) + \sin(2\chi - \varphi) \sin^2(\psi/2) & -\sin(\chi - \varphi) \sin \psi \\ c \cdot \cos^2(\psi/2) - \cos(2\chi - \varphi) \sin^2(\psi/2) & \cos(\chi - \varphi) \sin \psi \\ -\cos \chi \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})
 \end{aligned}$$

Darin heißen χ *Knotenwinkel*, ψ *Neigungswinkel*, φ *eigentlicher Drehwinkel*; um sie von φ abzuheben, nennen wir (χ, ψ) gemeinsam auch *Kippwinkel* (in polarer Form). Während χ und φ unbeschränkt sind (sie gehen periodisch in (A.28) bzw. (A.29) ein), muss der Neigungswinkel ψ beschränkt werden; zweckmäßig ist

$$0 \leq \psi < \pi. \quad (\text{A.30})$$

Die Kippung kann man jedoch auch durch die Winkel (ψ_1, ψ_2) zwischen $\vec{e}_3^1$ und $\vec{e}_3^0$ erfassen, wenn man die Neigung wie in einer technischen Zeichnung vermaßt (s. den Quader in Bild A.1.8). Am Quader liest man ab

$$\tan \psi_1 = \tan \psi \cos \chi, \quad \tan \psi_2 = \tan \psi \sin \chi. \quad (\text{A.31})$$

Führt man

$$t_1 := \tan \psi_1, \quad t_2 := \tan \psi_2 \quad (\text{A.32})$$

für

$$-\pi/2 < t_1, \quad t_2 < \pi/2 \quad (\text{A.33})$$

als generalisierte Koordinaten ein, so gelten im Überlappungsbereich von (ψ_1, ψ_2) und (χ, ψ)

$$t_1 = \tan \psi \cos \chi, \quad t_2 = \tan \psi \sin \chi \quad (\text{A.34})$$

und

$$\tan \psi = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}, \quad (\cos \chi, \sin \chi) = \left(\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}, \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \right), \quad (\text{A.35})$$

auch

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}{\sqrt{1 + t_1^2 + t_2^2}}, \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + t_1^2 + t_2^2}}. \quad (\text{A.36})$$

Die Winkel (ψ_1, ψ_2) und auch die generalisierten Koordinaten kann man als Kippung(en) des Einsvektors $\vec{e}_3$ um $(\vec{e}_1^0, \vec{e}_2^0)$ als Achsen ansehen. Deshalb heißen (ψ_1, ψ_2) *axiale Kippwinkel*; wir sprechen von der *axialen Form der Kippung*. Aus (A.28) folgt mit (A.35)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_K &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_2 \cos \psi \\ 0 & 1 & t_1 \cos \psi \\ t_2 \cos \psi & -t_1 \cos \psi & \cos \psi \end{pmatrix} + \frac{\cos^2 \psi}{1 + \cos \psi} \begin{pmatrix} -t_2^2 & t_1 t_2 & 0 \\ t_1 t_2 & -t_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \cos \psi \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_2 \\ 0 & 1 & t_1 \\ t_2 & -t_1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\cos^2 \psi}{1 + \cos \psi} \begin{pmatrix} t_2^2 & t_1 t_2 & 0 \\ t_1 t_2 & t_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

dabei steht $\cos \psi$ als Abkürzung für die rechte Seite von (A.36). Aus (A.29) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_G &= \begin{pmatrix} c & s & (s t_1 - c t_2) \cos \psi \\ -s & c & (c t_1 + s t_2) \cos \psi \\ t_2 \cos \psi & -t_1 \cos \psi & \cos \psi \end{pmatrix} + \\ &\quad + \frac{\cos^2 \psi}{1 + \cos \psi} \begin{pmatrix} t_2 (s t_1 - c t_2) & -t_1 (s t_1 - c t_2) & 0 \\ t_2 (c t_1 + s t_2) & -t_1 (c t_1 + s t_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.38}) \\ &= \cos \psi \begin{pmatrix} c & s & (s t_1 - c t_2) \\ -s & c & (c t_1 + s t_2) \\ t_2 & -t_1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\cos^2 \psi}{1 + \cos \psi} \begin{pmatrix} t_2 (c t_1 + s t_2) & t_2 (c t_1 + s t_2) & 0 \\ -t_1 (s t_1 - c t_2) & -t_2 (s t_1 - c t_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wo $c := \cos \varphi$, $s := \sin \varphi$. (Soweit $\mathbf{R}_K$ und $\mathbf{R}_G$ in zwei Formen angegeben sind, unterscheiden sie sich nur durch trigonometrische Umformungen.)

Weitere Aussagen über die Kippwinkel findet man in [6].

A.1.4 Geschwindigkeit

Gegeben sei der Ort des Punktes P, vgl. Bild A-2, in der Form (A.4),

$$\vec{r} = \vec{e}^T \mathbf{r}, \text{ ausführlich: } \vec{r}(t) = (\vec{e}(t))^T \mathbf{r}(t). \quad (\text{A.39})$$

Dabei sollen jetzt, gegenüber Abschnitt A.1.2.1 verallgemeinert, nicht nur die Koordinaten $\mathbf{r}(t)$ von der Zeit t abhängen, sondern das Dreibein $\vec{e}$ kann auch drehen, etwa gemäß

$$\vec{e}(t) = \mathbf{R}(t) \vec{e}^0, \quad (\text{A.40})$$

wo $\vec{e}^0$ fest und $\mathbf{R}$ zeitabhängig vorgegeben sind. Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Punktes P ist die Zeitableitung des Ortsvektors $\dot{\vec{r}}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (\text{A.41})$$

Einsetzen von (A.39) liefert

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{e}}^T \mathbf{r} + \vec{e}^T \dot{\mathbf{r}}, \quad (\text{A.42})$$

und, wegen (A.40),

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{\mathbf{R}} \vec{e}^0)^T \mathbf{r} + \vec{e}^T \dot{\mathbf{r}} = \vec{e}^{0T} \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{r} + \vec{e}^T \dot{\mathbf{r}}, \quad (\text{A.43})$$

Je nachdem, ob man nun mittels (A.40) $\vec{e}$ durch $\vec{e}^0$ oder $\vec{e}^0$ durch $\vec{e}$ ausdrückt, erhält man für ein und denselben Vektor(-Pfeil) $\vec{v}$ die beiden Formen

$$\vec{v} = \vec{e}^{0T} (\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{r} + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{r}}) =: \vec{e}^{0T} \mathbf{v}^0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{v} = \vec{e}^T (\mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}) =: \vec{e}^T \mathbf{v}, \quad (\text{A.44})$$

wo

$$\mathbf{v}^0 = (v_1^0, v_2^0, v_3^0)^T, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T \quad (\text{A.45})$$

die auf $\vec{e}^0$ bzw. $\vec{e}$ bezogenen Geschwindigkeitskoordinaten sind.

Analog zu (A.5), (A.14) gilt, vgl. (A.40) und (A.44),

$$\mathbf{v} = \mathbf{R} \mathbf{v}^0. \quad (\text{A.46})$$

Im Fall $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ gilt $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$.

A.1.5 Drehgeschwindigkeit, Winkelgeschwindigkeit

A.1.5.1 Drehgeschwindigkeit

Beim Übergang von (A.41) zu (A.42) wurde die Drehung (A.40) nach der Zeit differenziert:

$$\dot{\vec{e}} = \mathbf{R} \dot{\vec{e}}^0. \quad (\text{A.47})$$

Dabei werden die Änderungsgeschwindigkeiten der Einsvektoren des Dreibeins $\vec{e}$ von $\vec{e}^0$ aus gemessen. Mit $\vec{e}^0 = \mathbf{R}^T \vec{e}$ aus (A.40) folgt die von $\vec{e}$ aus gemessene Änderungsgeschwindigkeit

$$\dot{\vec{e}} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \vec{e} = \mathbf{\Omega} \vec{e}, \quad (\text{A.48})$$

mit der Drehgeschwindigkeitsmatrix

$$\mathbf{\Omega} := \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T. \quad (\text{A.49})$$

Aus (A.10) folgt durch Differenzieren

$$\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T = 0, \quad \text{also } \mathbf{\Omega} = -\mathbf{\Omega}^T, \quad (\text{A.50})$$

die Matrix $\mathbf{\Omega}$ ist schiefssymmetrisch!

Um die Geschwindigkeit der Drehung $\dot{\vec{e}}^K = \mathbf{R} \dot{\vec{e}}$ des starren Körpers K nach (A.5) zu erfassen, muss man $(\vec{e}^K, \vec{e})$ dort mit $(\vec{e}^T, \vec{e}^0)$ hier identifizieren.

A.1.5.2 Winkelgeschwindigkeit

Bezogen auf das Dreibein $\vec{e}$ setzen wir für den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ (den Pfeil) an

$$\vec{\omega} = \vec{e}_1 \vec{\omega}_1 + \vec{e}_2 \vec{\omega}_2 + \vec{e}_3 \vec{\omega}_3 = \vec{e}^T \boldsymbol{\omega}, \quad (\text{A.51})$$

wo

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T; \quad (\text{A.52})$$

vgl. die Doppelpfeile in Bild A-4b.

Bezogen auf $\vec{e}^0$ lautet $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \vec{e}^{0T} \boldsymbol{\omega}^0 \quad \text{mit } \boldsymbol{\omega}^0 = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{A.53})$$

Der Endpunkt P des (Orts-)Vektors $O\vec{P} = \vec{r}$, der der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ unterworfen ist, bewegt sich gegenüber O mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (\text{A.54})$$

Falls wir für $\vec{r}$ die Basisvektoren $\vec{e}_i$ einsetzen, erhalten wir, vgl. (A.48),

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times \vec{e} &= \begin{pmatrix} \vec{\omega} \times \vec{e}_1 \\ \vec{\omega} \times \vec{e}_2 \\ \vec{\omega} \times \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1 \omega_1 + \vec{e}_2 \omega_2 + \vec{e}_3 \omega_3) \times \vec{e}_1 \\ (\vec{e}_1 \omega_1 + \vec{e}_2 \omega_2 + \vec{e}_3 \omega_3) \times \vec{e}_2 \\ (\vec{e}_1 \omega_1 + \vec{e}_2 \omega_2 + \vec{e}_3 \omega_3) \times \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\omega_3 \vec{e}_2 - \omega_2 \vec{e}_3) \\ (-\omega_1 \vec{e}_3 - \omega_3 \vec{e}_1) \\ (\omega_2 \vec{e}_1 - \omega_1 \vec{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{\Omega} \vec{e}. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Also hängen die Elemente der Drehgeschwindigkeitsmatrix Ω und die Winkelgeschwindigkeiten ω_i gemäß

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.56})$$

zusammen.

Mit Ω nach (A.49) erhält man den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{v}}$, bezogen auf $\bar{\mathbf{e}}$, vgl. (A.44) und (A.55), in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \bar{\mathbf{e}}^T \left(\Omega^T \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} \right) - (\Omega \bar{\mathbf{e}})^T \mathbf{r} + \bar{\mathbf{e}}^T \dot{\mathbf{r}} = \\ &= (\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{e}})^T \mathbf{r} + \bar{\mathbf{e}}^T \dot{\mathbf{r}} = \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{e}}^T \dot{\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

also zerlegt in *Führungs-* bzw. *Relativgeschwindigkeit*.

Ausrechnen von Ω gemäß (A.49) liefert die Winkelgeschwindigkeiten ω_i für die *Cardanwinkel*, vgl. (A.20),

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} c_2 c_3 & s_3 & 0 \\ -c_2 s_3 & c_3 & 0 \\ s_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.58})$$

Eulerwinkel, vgl. (A.22),

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} s_\vartheta s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ s_\vartheta c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ c_\vartheta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.59})$$

Für die *Kippwinkel* gliedern wir auf, da man gelegentlich die Äquatorebene $\bar{A}^1$ – ohne eigentliche Drehung φ – als kippende Plattform benutzen will, s. Bild A-8. Wir unterscheiden also zwischen Kippung und Gesamtdrehung, vgl. (A.24) und (A.26):

$$\Omega_K = \dot{\mathbf{R}}_K \mathbf{R}_K^T \text{ bzw. } \Omega_G = \dot{\mathbf{R}}_G \mathbf{R}_G^T. \quad (\text{A.60})$$

Ferner müssen wir die polare Form (χ, ψ, φ) mit den Zeitableitungen $(\dot{\chi}, \dot{\psi}, \dot{\phi})$ und die axiale Form $(\psi_1, \psi_2, \varphi)$ mit $(\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\phi})$ auseinander halten, vgl. (A.30) bis (A.36).

Bezogen auf $\bar{\mathbf{e}}_K = \bar{\mathbf{e}}^1$, s. Bild A-8 gilt in polarer Form mit $(\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\phi})$

$$\omega_K = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_K = \begin{pmatrix} -\sin \chi \sin \psi & \cos \chi & 0 \\ \cos \chi \sin \psi & \sin \chi & 0 \\ -(1 - \cos \psi) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.61})$$

in axialer Form mit $(i_1, i_2, \dot{\phi})$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_K = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_K &= \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{t_1^2 \cos^2 \psi}{1 + \cos \psi}\right) \cos \psi & -\frac{t_1 t_2 \cos^3 \psi}{1 + \cos \psi} & 0 \\ -\frac{t_1 t_2 \cos^3 \psi}{1 + \cos \psi} & \left(1 - \frac{t_2^2 \cos^2 \psi}{1 + \cos \psi}\right) \cos \psi & 0 \\ \frac{t_2 \cos^2 \psi}{1 + \cos \psi} \vartheta & -\frac{t_1 \cos^2 \psi}{1 + \cos \psi} \vartheta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{t}_1 \\ \dot{t}_2 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{t_2^2 \cos^2 \psi}{1 + \cos \psi}\right) \cos^2 \psi & -\frac{t_1 t_2 \cos^3 \psi}{1 + \cos \psi} & 0 \\ -\frac{t_1 t_2 \cos^3 \psi}{1 + \cos \psi} & \left(1 + \frac{t_1^2 \cos^2 \psi}{1 + \cos \psi}\right) \cos^2 \psi & 0 \\ \frac{t_2 \cos^2 \psi}{1 + \cos \psi} \vartheta & -\frac{t_1 \cos^2 \psi}{1 + \cos \psi} \vartheta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{t}_1 \\ \dot{t}_2 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.62}$$

Bezogen auf $\dot{\boldsymbol{e}}_G = \dot{\boldsymbol{e}}^2$, s. Bild A-8, folgt $\boldsymbol{\omega}_G$ aus (Koordinaten-)Drehung von $\boldsymbol{\omega}_K$ und Addition von $\dot{\phi} \bar{\boldsymbol{e}}_3^2$ zu

$$\boldsymbol{\omega}_G = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_G = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{1K} \\ \omega_{2K} \\ \omega_3 + \dot{\phi} \end{pmatrix}. \tag{A.63}$$

A.1.6 Beschleunigung

Die *Beschleunigung* $\bar{\boldsymbol{a}}$ des Punktes P ist die Zeitableitung des Geschwindigkeitsvektors, vgl. (A.41),

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{d\bar{\boldsymbol{v}}}{dt} = \dot{\bar{\boldsymbol{v}}}. \tag{A.64}$$

Setzt man hier $\bar{\boldsymbol{v}}$ nach (A.44) ein, erhält man durch formales Ableiten

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{e}}^{0T} \left(\dot{\bar{\boldsymbol{R}}}^T \boldsymbol{r} + 2 \dot{\bar{\boldsymbol{R}}}^T \dot{\boldsymbol{r}} + \bar{\boldsymbol{R}}^T \ddot{\boldsymbol{r}} \right) =: \bar{\boldsymbol{e}}^{0T} \boldsymbol{a}^0. \tag{A.65}$$

Dabei enthält $\boldsymbol{r}$ die auf $\bar{\boldsymbol{e}}$ bezogenen Koordinaten, vgl. (A.39).

Setzt man $\bar{\boldsymbol{V}}$ nach (A.44), mit $\bar{\boldsymbol{R}} \dot{\bar{\boldsymbol{R}}}^T = \boldsymbol{\Omega}^T$, ein, so folgt

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{e}}^T \left(\ddot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}^T \boldsymbol{r} + 2 \boldsymbol{\Omega}^T \dot{\boldsymbol{r}} + (\boldsymbol{\Omega}^T)^2 \boldsymbol{r} \right) =: \bar{\boldsymbol{e}}^T \boldsymbol{a}. \tag{A.66}$$

In (A.65), (A.66) stehen $\mathbf{a}^0$ und $\mathbf{a}$ für die auf $\bar{\mathbf{e}}^0$ bzw. $\bar{\mathbf{e}}$ bezogenen Beschleunigungskordinaten

$$\mathbf{a}^0 = (a_1^0, a_2^0, a_3^0)^T \text{ bzw. } \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T. \quad (\text{A.67})$$

A.1.7 Winkelbeschleunigung

Der Vektor $\bar{\alpha}$ der Winkelbeschleunigung folgt aus

$$\bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \dot{\bar{\omega}}. \quad (\text{A.68})$$

Mit $\bar{\omega} = \bar{\mathbf{e}}^T \boldsymbol{\omega}$ aus (A.51) erhält man gemäß (A.57)

$$\bar{\alpha} = \dot{\omega} \times \bar{\omega} + \bar{\mathbf{e}}^T \dot{\omega} = \bar{\mathbf{e}}^T \dot{\omega} =: \bar{\mathbf{e}}^T \boldsymbol{\alpha}, \quad (\text{A.69})$$

also die auf $\bar{\mathbf{e}}$ bezogenen Winkelbeschleunigungs-Koordinaten

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\omega} = (\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3)^T. \quad (\text{A.70})$$

Die Gleichungen (A.58), (A.59), (A.61), (A.62), (A.63) listen $\boldsymbol{\omega}$ als Funktion der Zeitableitungen der Winkel oder Lagekoordinaten, zum Beispiel $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$, auf:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \boldsymbol{\phi}. \quad (\text{A.71})$$

Ableiten dieser Gleichung nach t liefert

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A} \ddot{\boldsymbol{\phi}} + (\mathbf{A}_{:,1} \dot{\boldsymbol{\phi}}, \mathbf{A}_{:,2} \dot{\boldsymbol{\phi}}, \mathbf{A}_{:,3} \dot{\boldsymbol{\phi}}) \dot{\boldsymbol{\phi}}; \quad (\text{A.72})$$

dabei stehen die drei Matrixspalten $\mathbf{A}_{:,k} \dot{\boldsymbol{\phi}}$ für

$$\mathbf{A}_{:,k} \dot{\boldsymbol{\phi}} := \frac{\partial}{\partial \phi_k} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\phi}}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (\text{A.73})$$

A.1.8 Aufgaben

Aufgabe A-1: Schreiben Sie sechs (unabhängige) Orthogonalitätsbedingungen für die Richtungskosinus (A.6) an; vgl. (A.10).

Aufgabe A-2: Kontrollieren Sie die Elementardrehungen (A.16).

Aufgabe A-3: Zeigen Sie durch Ausrechnen, dass $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$ eine andere Drehung als $\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$ ist. Fertigen Sie Skizzen an.

Aufgabe A-4: Zeigen Sie $\mathbf{R}_i(\psi) \mathbf{R}_i(\vartheta) = \mathbf{R}_i(\psi + \vartheta)$.

Aufgabe A-5: Vervollständigen Sie in Bild A.1.6 die Basisvektoren $\bar{\mathbf{e}}_i^k, i = 1, 2, 3; k = 0, 1, 2, 3$.

Aufgabe A-6: Rechnen Sie zu Bild A.1.6 die Cardandrehung $\mathbf{R}_C = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3$ aus und vergleichen Sie sie mit (A.20).

Aufgabe A-7: Zeigen Sie durch Ausrechnen (Formelmanipulator), dass $\det \mathbf{R}_C = 1$ und $\det(\mathbf{R}_C - \mathbf{I}) = 0$ gelten.

Aufgabe A-8: Wegen $\det(\mathbf{R}_C - \mathbf{I}) = 0$ hat die Matrix $\mathbf{R}_C$ den Eigenwert 1 und der zugehörige Eigenvektor ist die Achse der Eulerschen Drehung von, sagen wir, $\vec{e}^0$ nach $\vec{e}^3$. Berechnen Sie zu numerisch gegebenem $\mathbf{R}_C$ die Achse und den Drehwinkel.

Aufgabe A-9: Vervollständigen Sie in Bild A-7 die Basisvektoren $\vec{e}_i^k, i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3$.

Aufgabe A-10: Rechnen Sie die Aufgabe A-7 und Aufgabe A-8 für die Eulerwinkel durch.

Aufgabe A-11: Entwerfen Sie analog zu Bild A-7 ein Bild für die Eulerdrehung (A.23) und schreiben Sie die zugehörige Drehungsmatrix $\mathbf{R}_E$ analog zu (A.22) an.

Aufgabe A-12: Verifizieren Sie die Drehung $\mathbf{R}_K$ nach (A.28), indem sie ihre Elemente als Richtungskosinus von $\angle(\vec{e}_i^1, \vec{e}_k^0)$, der Winkel zwischen den Basisvektoren von gedrehtem und festem Dreibein, nachrechnen. (Dabei ist es zweckmäßig, mit Projektionen auf den Knoteneinsvektor $\vec{e}_N^0 = \vec{e}_N^1$, sowie auf die in den Äquatorebenen $\vec{A}^0$ und $\vec{A}^1$ liegenden Normalen zu $\vec{e}_N^0$, nämlich $\vec{e}_\perp^0$ bzw. $\vec{e}_\perp^1$, und auf $\vec{e}_3^0$ bzw. $\vec{e}_3^1$ zu arbeiten.)

Aufgabe A-13: Gegeben sei die Drehmatrix $\mathbf{R}$ aus (A.5) in numerischer Form. Ermitteln Sie, in Umkehrung von Aufgabe A-12, die Kippwinkel (χ, ψ, φ) aus den gegebenen R_{ik} mit Hilfe von Bild A-8.

Aufgabe A-14: Linearisieren Sie die Kippung $\mathbf{R}_K$ nach (A.37) und die Gesamtdrehung $\mathbf{R}_G$ nach (A.38) für kleine Kippwinkel, $|\varphi_1|, |\varphi_2| \ll 1, t_1 \approx \psi_1, t_2 \approx \psi_2$, bezüglich ψ_1, ψ_2 .

Aufgabe A-15: Sie wollen den Einfluss schwach nichtlinearer Rotorauslenkungen auf das Schwingungsverhalten einer Zentrifuge untersuchen und in den Kippungen die Winkel ψ_1, ψ_2 bis zu quadratischen Gliedern berücksichtigen. Wie sehen die bis zu quadratischen Gliedern ψ_1, ψ_2 entwickelten Matrizen $\mathbf{R}_K$ und $\mathbf{R}_G$ aus?

Aufgabe A-16: Zeigen Sie, dass bei den Elementardrehungen aus Abschnitt A.1.3.1 für die Winkelgeschwindigkeiten jeweils $\omega_i = \dot{\varphi}_i, i = 1, 2, 3$, gilt.

Aufgabe A-17: Differenziert man die Cardandrehung $\mathbf{R}_C$ nach (A.19), so erhält man mit

$\mathbf{R}_i' := \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \varphi_i}$ die Ableitung $\dot{\mathbf{R}}_C = (\mathbf{R}_3' \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1) \dot{\varphi}_3 + (\mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2' \mathbf{R}_1) \dot{\varphi}_2 + (\mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1') \dot{\varphi}_1$. Berechnen

Sie $\boldsymbol{\Omega}_C = \dot{\mathbf{R}}_C \mathbf{R}_C^T$ und kontrollieren Sie damit (A.58).

Aufgabe A-18: Kontrollieren Sie für die Eulerwinkel die Gleichung (A.59) auf die in Aufgabe A-17 für die Cardanwinkel vorgeschlagene Weise.

Aufgabe A-19: Werten Sie die Beziehung (A.72)/(A.73) für einzelne der Gleichungen (A.58), (A.59), (A.61), (A.62), (A.63) aus.

A.2 Massengeometrie des starren Körpers

Unter dem Stichwort *Massengeometrie* fasst man das Berechnen der *kennzeichnenden Größen* des starren Körpers, nämlich von *Masse*, *Ort von Massenmittelpunkt* (oder Schwerpunkt) sowie der *Massenmomente zweiten Grades* (Trägheitsmomente) zusammen.

Der Körper K nach Bild A-9 habe das Volumen V . Im Körper sei ein "Anfangspunkt" A und die Basis $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ gewählt. Der Ort P eines Massenelements Δm gegenüber A wird dann durch den Vektor

$$\vec{r} = \overrightarrow{AP} = \bar{e}^T \mathbf{r}, \quad \text{mit } \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad (\text{A.74})$$

erfasst. Die Masseverteilung sei als Dichte

$$\rho = \rho(\mathbf{r}) \quad (\text{A.75})$$

festgelegt.

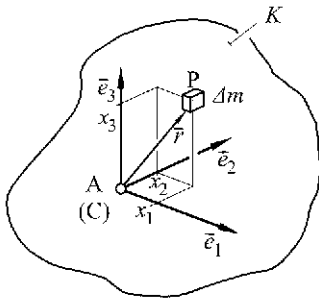


Bild A-9

Körper K mit Basis $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ bzw. $(C, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

A.2.1 Masse

Seien ΔV bzw. Δm das bei P gelegene Volumen bzw. Massenelement

$$\Delta m = \rho(\mathbf{r}) \Delta V = \rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3. \quad (\text{A.76})$$

Dann hat der Körper K die Masse

$$m = \int_V \rho dV = \int_V dm. \quad (\text{A.77})$$

Das zweite Form rechts, als Stieltjes-Integral, bietet den gedanklichen Vorteil, dass man Punktmassen umstandslos aufnehmen kann. (Mit dem *Integrationsbereich* V deuten wir die Integration über die gesamte in V enthaltene Masse an.)

A.2.2 Ort des Massenmittelpunktes

Der Ort des Massenmittelpunktes C, bezogen auf $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, ist gegeben durch

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \int_V \vec{r}(\pi) \rho(\pi) dV = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} dm, \quad (\text{A.78})$$

oder, mit

$$\vec{r}_C = \vec{e}^T \mathbf{r}_C, \quad \mathbf{r}_C = (x_{C1}, x_{C2}, x_{C3})^T, \quad (\text{A.79})$$

$$x_{Ci} = \frac{1}{m} \int_V x_i \rho dV = \frac{1}{m} \int_V x_i dm, \quad i=1, 2, 3. \quad (\text{A.80})$$

Hinweis 1: In einem *homogenen Schwerfeld* fallen Massenmittelpunkt C und Schwerpunkt S *zusammen*. Das nehmen wir hier an und folgen der Gewohnheit, vom Schwerpunkt zu sprechen, auch wenn der Massenmittelpunkt gemeint ist.

A.2.3 Massenmomente zweiten Grades (Trägheitsmomente)

Sei nun in Bild A-9 der Ursprung der Basis von A in den Schwerpunkt S verschoben. Die neue körperfeste Basis $(S, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ kann auch gegenüber der Anfangsbasis verdreht sein.

Mit

$$\vec{r} = \overline{SP} = \vec{e}^T \mathbf{r} = (\vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3) \quad (\text{A.81})$$

vgl. (A.74), erhält man die axialen Trägheitsmomente, kurz Trägheitsmomente,

$$\begin{aligned} J_{11} &= \int_V (x_2^2 + x_3^2) \rho dV = \int_V (x_2^2 + x_3^2) dm, \\ J_{22} &= \int_V (x_1^2 + x_3^2) \rho dV = \int_V (x_1^2 + x_3^2) dm, \\ J_{33} &= \int_V (x_1^2 + x_2^2) \rho dV = \int_V (x_1^2 + x_2^2) dm, \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

die Deviationsmomente

$$\begin{aligned} J_{12} &= J_{21} = - \int_V x_1 x_2 \rho dV = - \int_V x_1 x_2 dm, \\ J_{23} &= J_{32} = - \int_V x_2 x_3 \rho dV = - \int_V x_2 x_3 dm, \\ J_{31} &= J_{13} = - \int_V x_3 x_1 \rho dV = - \int_V x_3 x_1 dm. \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

Man fasst die Massenmomente zweiten Grades als Trägheitsmatrix $\mathbf{J}$ zusammen:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^T. \quad (\text{A.84})$$

Die Trägheitsmatrix $\mathbf{J}$ ist konstant (zeitunabhängig).

Hauptträgheitsachsen: Man kann das Dreibein $\vec{e}$ stets so drehen, dass die Deviationsmomente verschwinden:

$$J_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (\text{A.85})$$

Die so gedrehten Achsen heißen *Hauptträgheitsachsen* (auch *Trägheits-Hauptachsen*), die zugehörigen Trägheitsmomente J_{ii} *Hauptträgheitsmomente* (auch *zentrale Hauptträgheitsmomente*, wenn man den Schwerpunkt S als Bezugspunkt betonen will). (Bezogen auf Hauptachsen ist die Trägheitsmatrix $\mathbf{J}$ diagonal.)

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.86})$$

A.2.4 Trägheitstensor

In der Schreibweise (A.84) bleibt die zu Grunde gelegte Basis $(S, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, das Dreibein $\vec{e}$ versteckt. Das vermeidet man durch Anschreiben des *Trägheitstensors*

$$\vec{\vec{J}} := \vec{e}^T \mathbf{J} \vec{e}. \quad (\text{A.87})$$

Da sich das Dreibein $\vec{e}$ mit dem Körper K dreht, ist der Trägheitstensor $\vec{\vec{J}}$ zeitabhängig.

Ausführlich, in Komponenten geschrieben, lautet der Trägheitstensor

$$\begin{aligned} \vec{\vec{J}} = & J_{11} \vec{e}_1 \vec{e}_1 + J_{12} \vec{e}_1 \vec{e}_2 + J_{13} \vec{e}_1 \vec{e}_3 + \\ & + J_{21} \vec{e}_2 \vec{e}_1 + J_{22} \vec{e}_2 \vec{e}_2 + J_{23} \vec{e}_2 \vec{e}_3 + \\ & + J_{31} \vec{e}_3 \vec{e}_1 + J_{32} \vec{e}_3 \vec{e}_2 + J_{33} \vec{e}_3 \vec{e}_3, \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

und im Fall, dass $(S, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ auf die *Hauptträgheitsachsen* fällt:

$$\vec{\vec{J}} = J_{11} \vec{e}_1 \vec{e}_1 + J_{22} \vec{e}_2 \vec{e}_2 + J_{33} \vec{e}_3 \vec{e}_3. \quad (\text{A.89})$$

Hinweis 2: Hier darf im *Tensorprodukt* $\vec{e}_i \vec{e}_k$ die Reihenfolge der Faktoren nicht vertauscht werden, also $\vec{e}_i \vec{e}_k \neq \vec{e}_k \vec{e}_i$. Wir vermeiden die etwas schwerfällige Form $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_k$ des Tensorprodukts nach DIN 1303. Dann müssen wir allerdings $\vec{e}_i \vec{e}_k$ sorgfältig vom Skalarprodukt $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \cos \angle(\vec{e}_i, \vec{e}_k)$ unterscheiden, dieses also stets mit einem Malpunkt schreiben.

A.3 Die kinetischen Grundgrößen des starren Körpers

Unter *kinetischen Grundgrößen* fassen wir die *Bewegungsgröße* (engl. momentum), den *Drall* (engl. moment of momentum) und die *kinetische Energie* zusammen.

In Bild A-2 sei nun $(O, \dot{e}_1^0, \dot{e}_2^0, \dot{e}_3^0)$ feste Basis in einem *Inertialsystem* (in dem *erfahrungsgemäß das Newton'sche Gesetz gilt*) und der Punkt P falle auf den Schwerpunkt S des Körpers K: die Basis $(S, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ ist fest mit K verbunden.

Es gelten die kinematischen Überlegungen aus Abschnitt A.1, aus Abschnitt A.2 sind Masse m und Trägheitstensor $\bar{\bar{J}}$ bekannt.

A.3.1 Bewegungsgröße (Momentum)

Die *Bewegungsgröße* $\bar{p}$ ist das Produkt aus Masse m und Schwerpunktgeschwindigkeit $\bar{v}$:

$$\bar{p} := m \bar{v}. \quad (\text{A.90})$$

Es ist (noch) sehr üblich, die Bewegungsgröße $\bar{p}$ *Impuls* zu nennen. Da (engl.) *impulse* international für den *Kraftstoß* steht, vermeiden wir "Impuls". Mit (A.44) folgen

$$\begin{aligned} \bar{p} &= m \dot{e}^{0T} v^0 =: \dot{e}^{0T} p^0 \\ \text{bzw.} \\ \bar{p} &= m \bar{e}^T v =: \bar{e}^T p, \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

wo

$$p^0 = (p_1^0, p_2^0, p_3^0)^T, \quad P = (p_1, p_2, p_3)^T. \quad (\text{A.92})$$

A.3.2 Drall

Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$, vgl. (A.87) bzw. (A.51),

$$\bar{L} = \bar{\bar{J}} \cdot \bar{\omega}. \quad (\text{A.93})$$

Einsetzen von (A.87) und (A.51) in (A.93) liefert

$$\bar{L} = (\bar{e}^T J \bar{e}) \cdot (\bar{e}^T \omega) = \bar{e}^T J (\bar{e} \cdot \bar{e}^T) \omega. \quad (\text{A.94})$$

Darin steht $(\bar{e} \cdot \bar{e}^T)$ für das dyadische Produkt

$$\bar{e} \cdot \bar{e}^T = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} \cdot (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 \\ \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 \end{pmatrix} = I, \quad (\text{A.95})$$

also die 3×3 -Einheitsmatrix I .

Damit lautet der Drall

$$\bar{L} = \bar{e}^T J \omega =: \bar{e}^T L = \bar{e}_1 L_1 + \bar{e}_2 L_2 + \bar{e}_3 L_3; \quad (\text{A.96})$$

bezogen auf Hauptachsen gilt, vgl. (A.86),

$$L_i = J_{ii} \omega_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.97})$$

Mit $\bar{e} = R \bar{e}^0$, vgl. (A.5), kann man L auf das Dreiein $\bar{e}^0$ transformieren:

$$\dot{L} = \bar{e}^{0T} R^T J \omega =: \bar{e}^{0T} L = \bar{e}_1^0 L_1^0 + \bar{e}_2^0 L_2^0 + \bar{e}_3^0 L_3^0. \quad (\text{A.98})$$

Unbeschadet der Transformation (der Sichtweise) bleibt $\bar{L}$ derselbe (physikalische) Vektor.

Drückt man in (A.96) die Winkelgeschwindigkeit ω mit Hilfe von (A.71) durch die Zeitableitungen der Winkel aus, folgen

$$\dot{L} = \bar{e}^T J A \dot{\phi} \text{ bzw. } \dot{L} = \bar{e}^{0T} R^T J A \dot{\phi}. \quad (\text{A.99})$$

In (A.99)₁ geht die (Winkel-)Lage des Körpers implizit über $\bar{e}$ und explizit über A in den Drall ein, in (A.99)₂ ist die Lageabhängigkeit mit R^T und A explizit herausgestellt.

A.3.3 Kinetische Energie

Die *kinetische Energie* E_k des starren Körpers K,

$$E_k = E_{kl} + E_{kr}, \quad (\text{A.100})$$

besteht aus dem *translatorischen* Anteil

$$E_{kl} = \frac{1}{2} m \bar{v} \cdot \bar{v} = \frac{1}{2} m (\bar{v}^T \bar{e}) \cdot (\bar{e}^T \bar{v}) = \frac{1}{2} m \bar{v}^T \bar{v}, \quad (\text{A.101})$$

und dem *rotatorischen* Anteil

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \dot{J} \cdot \bar{\omega} = \frac{1}{2} \omega^T J \omega = \frac{1}{2} \dot{\phi}^T A^T J A \dot{\phi}. \quad (\text{A.102})$$

(Die Rechnungen laufen parallel zu Abschnitt A.3.2.)

A.4 Bewegungsgleichungen aus Gleichgewichtsbedingungen

A.4.1 Allgemeines, Zustand

Ort und (Winkel-) Lage der in einem mechanischen System enthaltenen Körper werden durch ihre jeweiligen *Koordinaten* *zeitabhängig* erfasst, zum Beispiel durch $(\bar{r}^{0T}, \phi)$ in Abschnitt

A.1. Die Zeitableitungen der Koordinaten $(\dot{\bar{r}}^{0T}, \dot{\phi})$ führen auf Geschwindigkeit und Winkel-

geschwindigkeit, also $\dot{\mathbf{v}}$ bzw. $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, vgl. Abschnitte A.1.4, A.1.5. Wir fassen $(\mathbf{r}^0, \boldsymbol{\varphi})$ und $(\dot{\mathbf{r}}^0, \dot{\boldsymbol{\varphi}})$ im Zustand(svektor), der Spaltenmatrix

$$\mathbf{z} = (\mathbf{r}^{0T}, \boldsymbol{\varphi}^T, \dot{\mathbf{r}}^{0T}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T)^T = (z_1, \dots, z_6)^T \quad (\text{A.103})$$

zusammen, die einzelnen z_i nennt man auch *Zustandsgrößen*. (Wir vermeiden den in der Regelungstechnik oft benutzten Buchstaben $\mathbf{x}$.)

Hinweis: Die Elemente z_i von $\mathbf{z}$ haben im allgemeinen unterschiedliche Dimensionen. Die Zustände mehrerer Körper werden durch zusätzliche Indizes unterschieden.

Zum bekannten (oder als bekannt angenommenen) Zustand $\mathbf{z}$ folgen mit der *Massengeometrie* nach Abschnitt A.3 die *Bewegungsgröße* (Momentum) und der *Drall*. Deren *Zeitableitungen* müssen mit den im und auf das System wirkenden Kräften und Momenten im Gleichgewicht stehen (s. unten). Auf diese Weise erhält man die *Bewegungsgleichungen* für die Koordinaten des Systems (in der Regel) in der Form von *Differentialgleichungssystemen zweiter Ordnung* nach der Zeit. (Bezüglich der Zustandsgrößen erhält man ein doppelt so großes System erster Ordnung, was für numerische Lösungen oft günstig ist.)

A.4.2 Bewegungsgleichungen für den einzelnen starren Körper nach Newton-Euler

Gegeben sei der freigeschnittene starre Körper K nach Bild A-10, Masse m , Trägheitstensor $\tilde{\mathbf{J}}$. Zur Zeit t , im (angenommenen) Zustand $\mathbf{z}(t)$ wirken auf den Körper die (äußeren) Kräfte $\vec{F}_n$ und Momente $\vec{M}_l$; nur jeweils ein $\vec{F}_n$ und ein $\vec{M}_l$ wurden eingetragen.

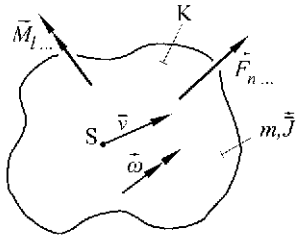


Bild A-10

Freigeschnittener starrer Körper K, Zustand $\mathbf{z}(t)$, unter der Einwirkung der Kräfte $\vec{F}_n$ und Momente $\vec{M}_l$

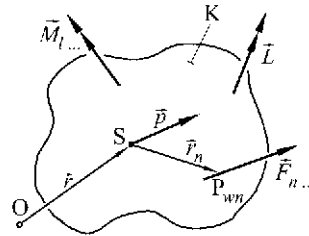


Bild A-11

Freigeschnittener starrer Körper K mit Kräften $\vec{F}_n$, Momenten $\vec{M}_l$, Bewegungsgröße $\vec{p}$ und Drall $\vec{L}$.

Bild A-11 enthält neben den Kräften $\vec{F}_n$ auch die Abstandsvektoren $\vec{r}_n := \overline{SP_{wn}}$ vom Schwerpunkt S zu einem Punkt P_{wn} auf der Wirkungslinie w_n der Kraft $\vec{F}_n$, die Momente $\vec{M}_l$ sowie die Bewegungsgröße $\vec{p}$, mit Angriffspunkt S, und den Drall $\vec{L}$ bezogen auf den Schwer-

punkt S. Nach Newton-Euler gelten für den einzelnen starren Körper der Kräftesatz (auch Schwerpunktsatz genannt) und der Momentensatz:

Der Schwerpunkt S (= Massenmittelpunkt C) eines starren Körpers bewegt sich so, als wenn die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre und die Resultierende ALLER äußeren Kräfte an ihm angriffe:

$$\dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\dot{\vec{a}} = \dot{\vec{F}}_{res}, \quad (\text{A.104})$$

$$\text{wo } \dot{\vec{F}}_{res} = \sum_n \dot{\vec{F}}_n. \quad (\text{A.105})$$

Sei $\vec{L}$ der auf den Schwerpunkt S (= Massenmittelpunkt C) bezogene Drall. Dann ist die Zeitableitung $\dot{\vec{L}}$ gleich dem resultierenden Moment $\vec{M}_{res}$ ALLER äußeren Kräfte und Momente (= Kräftepaare) um S:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}_{res}, \quad (\text{A.106})$$

$$\text{wo } \vec{M}_{res} = \sum_{(n)} \vec{r}_n \times \vec{F}_n + \sum_{(l)} \vec{M}_l. \quad (\text{A.107})$$

Hinweis: Der Momentensatz hat dieselbe Form (A.106), (A.107), wenn man den Drall $\vec{L}$ und das resultierende Moment $\vec{M}_{res}$ nicht auf den Schwerpunkt, sondern auf einen im Inertialsystem festen Punkt A bezieht. (Wo erforderlich, unterscheiden wir $\vec{L}^S$, $\vec{M}_{res}^S$ und $\vec{L}^A$, $\vec{M}_{res}^A$.)

A.4.3 Das d'Alembertsche Prinzip

Mit dem *d'Alembertschen Prinzip* gelingt es, das Aufstellen von Bewegungsgleichungen auf die Gleichgewichtsbedingungen der Statik zurückzuführen. Das bietet nicht nur formal Vorteile, das Einführen von *Trägheits*-Kräften und *Trägheits*-Momenten macht die Kinetik der Anschauung besser zugänglich als die Newton-Eulersche Sicht.

In vielen Lehrbüchern findet man unter dem Stichwort d'Alembertsches Prinzip das d'Alembertsche Prinzip in der Lagrangeschen Form mit virtuellen Verrückungen verknüpft, was natürlich weitere Vorteile bietet. (Andere Lehrbücher nennen das dann kurz Lagrangesches Prinzip.)

Formal richtig* erhält man das d'Alembertsche Prinzip, indem man in (A.104) und (A.106) die Trägheitsglieder $m\dot{\vec{a}}$ bzw. $\dot{\vec{L}}$ – unter Vorzeichenwechsel – zu $\dot{\vec{F}}_{res}$ bzw. $\vec{M}_{res}$ stellt:

$$\dot{\vec{F}}_{res} - m\dot{\vec{a}} = \vec{0}, \quad \vec{M}_{res} - \dot{\vec{L}} = \vec{0}. \quad (\text{A.108})$$

Man sieht nun

$$\dot{\vec{F}}_{dA} := (-m\dot{\vec{a}}) = (-m\ddot{\vec{r}}) \quad (\text{A.109})$$

* Eine sorgfältige Begründung mag dem Muster von [8], S. 249 folgen.

als (d'Alembertsche) *Trägheits-Kraft* an, die, am *Schwerpunkt S angreifend*, zu den alten äußeren Kräften $\vec{F}_n$ hinzutritt, vgl. Bild A-12.

Weiter sieht man

$$\vec{M}_{dA} := (-\dot{\vec{L}}) = (-\vec{J} \cdot \dot{\omega})^* \quad (\text{A.110})$$

als (d'Alembertsches) *Trägheits-Moment*, das, am *Körper K angreifend*, zu den alten äußeren Momenten $\vec{M}_l$ hinzutritt, vgl. Bild A-12.

Bemerkung: Gelegentlich werden d'Alembertsche Kräfte *Scheinkräfte* genannt oder als *fiktiv* bezeichnet. Fast jedermann akzeptiert jedoch die Zentrifugalkraft, die durch die Zentripetalbeschleunigung hervorgerufene d'Alembertsche Kraft, als real. So spürt er auch die Kraft, die ihn gegen die Rückenlehne presst, wenn er im Auto sitzt und Vollgas gibt. Beim frei fallenden Körper halten sich Gewicht und d'Alembertsche Trägheitskraft gerade im Gleichgewicht.

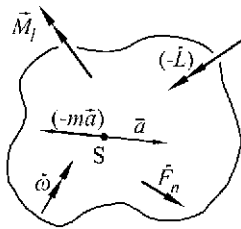


Bild A-12: Freigeschnittener Körper mit äußeren Kräften $\vec{F}_n$, Momenten $\vec{M}_l$, sowie d'Alembertscher Kraft $(-m\vec{a})$ und Moment $(-\dot{\vec{L}})$

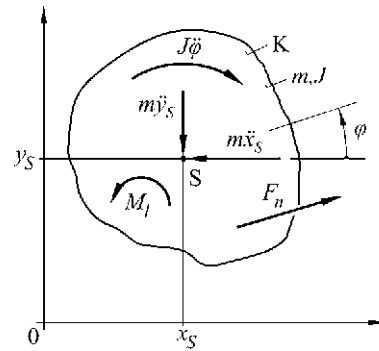


Bild A-13: Freigeschnittener Körper für ebene Bewegung, mit d'Alembertschen Kräften und Moment.

A.4.4 Das Anschreiben von Bewegungsgleichungen mit d'Alembertschen Kräften (und Momenten)

1. *Schritt:* Für den aktuellen Zustand – zur Zeit t – Geschwindigkeit (Beschleunigung) sowie Winkelgeschwindigkeit und Momentum sowie Drall anschreiben, Bild A-10, Bild A-11. Zur Auswertung der Gleichungen (A.109), (A.110) kann man formal vorgehen, indem man eine geeignete (meistens die körperfeste) Basis wählt, oder man arbeitet unmittelbar mit den anschaulich vorgestellten Vektorpfeilen.

2. *Schritt:* Man trägt auf dem Freikörperbild des jeweiligen Körpers neben den äußeren Kräften $\vec{F}_n$ und Momenten $\vec{M}_l$ die d'Alembertsche (Trägheits-) Kraft $(-m\vec{a})$, am Schwerpunkt angreifend und das d'Alembertsche (Trägheits-) Moment $(-\dot{\vec{L}})$ an einem beliebigen Punkt des Körpers angreifend, ein. s. Bild A-12.

3. *Schritt*: Gleichgewichtsbedingungen für den Körper nach Bild A-12 (oder das Körpersystem) unter Einbeziehung der d'Alembertschen Kräfte und Momente (beliebig) formulieren.

Besonders einfach wird das Vorgehen im Fall der ebenen Bewegung, s. Bild A-13: Die d'Alembertsche Kraft wird, in $(-m\ddot{x}_S), (-m\ddot{y}_S)$ zerlegt, einfach gegen die positiven Richtungen der Schwerpunktkoordinaten (x_S, y_S) eingetragen, und das d'Alembertsche Moment $(-J\ddot{\varphi})$ ist gegen den Drehwinkel φ orientiert.

B Arbeitsaussagen aus der Elastostatik

Wir stellen hier einige Arbeitsaussagen der Elastostatik zusammen, die zum Aufstellen von Bewegungsgleichungen benötigt werden. Dabei beschränken wir uns im Wesentlichen auf kleine Verformungen *linear elastischer* Gebilde, nämlich auf Längsdehnung, Schub, Torsion und Biegung von Stäben und Balken.

B.1 Arbeit von äußeren Kräften und Momenten

Wirken auf einen *linear elastischen* Körper, z. B. auf den in Bild B-1 gezeigten Balken, die äußeren Kräfte F_j und die äußeren Momente M_k und haben die Kräfte und Momente gemeinsam an dem Körper die Verschiebungen f_j und die Winkel(auslenkungen) ψ_k hervorgerufen, so haben sie am Körper die äußere Arbeit

$$W^a = \frac{1}{2} \sum_j F_j f_j + \frac{1}{2} \sum_k M_k \psi_k \quad (\text{B.1})$$

verrichtet (dem Körper zugeführt).

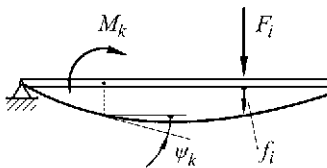


Bild B-1

Balkenauslenkung durch Kräfte und Momente

Dabei sind die Kräfte F_j und die Auslenkungen f_j sowie die Momente M_k und die Winkel ψ_k einander so zugeordnet, dass

$$\Delta W^a = F_j \Delta f_j \text{ bzw. } \Delta W^a = M_k \Delta \psi_k \quad (\text{B.2})$$

die dem Körper zugeführte Arbeit bei einer infinitesimal kleinen Zusatzverformung Δf_j bzw. $\Delta \psi_k$ erfasst.

In Gleichung (B.1) muss über jeweils ALLE am Körper angreifenden Kräfte und Momente addiert werden.

Häufig fasst man F_j, M_k zu generalisierten Kräften Q_l und f_j, ψ_k zu generalisierten Auslenkungen (Koordinaten) q_l zusammen und schreibt statt (B.1)

$$W^a = \frac{1}{2} \sum_l Q_l q_l. \quad (\text{B.3})$$

Für Q_l, q_l müssen die Gleichungen (B.2) erfüllt sein.

B.2 Arbeit von inneren Kräften und Momenten

Die auf den Körper wirkenden äußeren Kräfte und Momente haben im Körper innere Kräfte und Momente zur Folge.

Mit Hilfe der inneren Kräfte und Momente lässt sich die im Körper *gespeicherte* innere Arbeit W^i (*Formänderungsenergie, Potential*) ausdrücken. Für den Zugstab, den Torsionsstab, den gebogenen und gescherten Balken schreiben wir die Ausdrücke an.

Im Folgenden zeigt Bildteil a) jeweils das unverformte Gebilde in der Referenzlage, Bildteil b) das verformte Gebilde mit den Auslenkungs koordinaten und c) die Schnittgrößen (am unverformten Gebilde). Die dargestellten Einspannungen wurden willkürlich gewählt und sind unwesentlich. Äußere Kräfte (Lasten) wurden nicht gezeichnet!

B.2.1 Zugstab

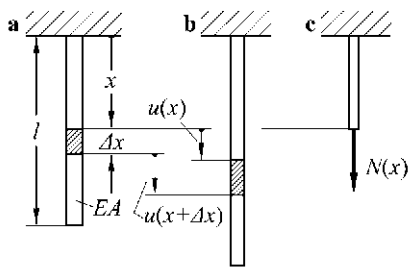


Bild B-2
Zugstab; Auslenkungen und Schnittkraft

Bild B-2 zeigt: x -Längsordinate, $u(x)$ -Längsverschiebung, $N(x)$ -Normalkraft.

Mit der Längsdehnung

$$\varepsilon := \frac{\partial u}{\partial x} = u' \quad (\text{B.4})$$

folgt für die Normalkraft N die Gleichung

$$N = EA u', \quad (\text{B.5})$$

mit EA -Dehnsteifigkeit (E -Elastizitätsmodul, A -Querschnittsfläche).

Innere Arbeit

Für die *innere Arbeit* gilt

$$W^i = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx. \quad (\text{B.6})$$

Im allgemeinen hängen $N = N(x)$ und $EA = EA(x)$ vom Ort ab, z. B. wegen längs des Stabes angreifenden äußeren Kräften bzw. veränderlichen Querschnitten (auch Absätze und Sprünge können auftreten).

Bei Schwingungsaufgaben werden u und N zeitabhängig, doch (B.6) bleibt gültig, soweit man keine Werkstoffdämpfung berücksichtigen muss.

B.2.2 Torsionsstab

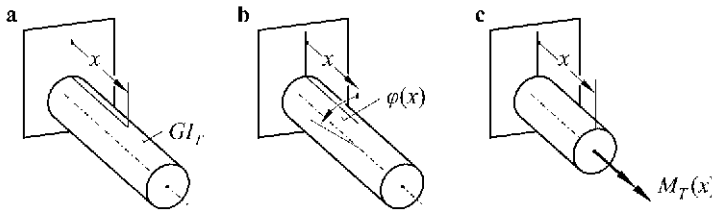


Bild B-3
Torsionsstab; Auslenkungen und Schnittmoment

Bild B-3 zeigt: x -Längskoordinate, $\varphi(x)$ -Winkelauslenkung, $M_T(x)$ -Torsionsmoment.

Mit der Drillung

$$\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{B.7})$$

folgt für das Torsionsmoment M_T die Gleichung

$$M_T = GI_T \varphi', \quad (\text{B.8})$$

mit GI_T -Drillsteifigkeit (G -Gleitmodul, $I_T = I_p$ -polares Flächenträgheitsmoment bei Kreis- oder Kreisringquerschnitt; $I_T \neq I_p$ bei anderen Querschnittsformen).

Innere Arbeit

Für die *innere Arbeit* gilt

$$W^i = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_T^2}{GI_p} dx. \quad (\text{B.9})$$

Auch hier hängen $M_T = M_T(x)$ und $G I_T = G I_T(x)$ oft vom Ort ab.

B.2.3 Balken

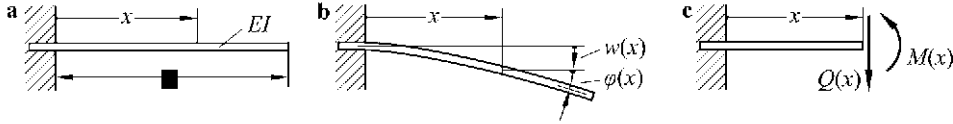


Bild B-4: Balken; Auslenkungen, Querkraft, Biegemoment

Bild B-4 zeigt: x -Längskoordinate, $w(x)$ -Auslenkung („Biegeauslenkung“), $\varphi(x)$ -Biege-
winkel, $Q(x)$ -Querkraft, $M(x)$ -Biegemoment.

Mit

$$\varphi \approx w' = \frac{\partial w}{\partial x} \text{ und der Krümmung } \varphi' \approx w'' \quad (\text{B.10})$$

folgt für das Biegemoment die Gleichung

$$M = -EI w'', \quad (\text{B.11})$$

mit EI -Biegesteifigkeit (E -Elastizitätsmodul, I -Flächenmoment zweiten Grades).

Innere Arbeit

Für die *innere Arbeit* durch Biegung gilt

$$W^i = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx. \quad (\text{B.12})$$

Auch hier hängen $M = M(x)$, $EI = EI(x)$ oft vom Ort ab.

Für die *innere Arbeit* durch die Querkraft gilt

$$W^i = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{Q^2}{GA_s} ds, \quad (\text{B.13})$$

mit GA_s -Schubsteifigkeit (G -Gleitmodul, A_s -Schubfläche; $A_s = A/\kappa$, κ -Querschubzahl, $\kappa > 1$; s. Hütte). Der Querkraftbeitrag zu W^i ist bei schlanken Balken vernachlässigbar klein.

B.3 Hinweise

Hinweis 1: Treten mehrere Belastungsarten gleichzeitig auf (z. B. Zug und Biegung oder Biegung um zwei zueinander senkrechte Achsen), werden die einzelnen W^i addiert. Besteht das System aus mehreren Stäben und Balken, so muss man die inneren Arbeiten von ALLEN Systemteilen addieren.

Hinweis 2: Die Schnittgrößen [Schnittkräfte $N(x)$ und $Q(x)$; Schnittmomente $M(x)$ und $M_T(x)$] sind durch die äußeren Kräfte F_j und äußeren Momente M_k – durch die generalisierten Kräfte Q_l – bestimmt, und zwar hängen die Schnittgrößen im Rahmen der bei Zugstab, Torsionstab, Biege-Balken üblichen Annahme, dass man das Gleichgewicht am unverformten Gebilde ansetzt, linear von den generalisierten (äußeren) Kräften ab.

Hinweis 3: Die inneren Arbeiten W^i hängen quadratisch von den Schnittgrößen ab; vgl. (B.6), (B.9), (B.12), (B.13).

Hinweis 4: Drückt man in W^i die Schnittgrößen gemäß Hinweis 2 durch die generalisierten Kräfte aus, so erhält man sie gemäß Hinweis 3 als in den generalisierten Kräften *quadratische Formen*. Da die W^i nicht negativ werden können, sind die quadratischen Formen wenigstens *positiv semidefinit*. Sie sind *positiv definit*,^{*} wenn zu jeder Auslenkung Kräfte erforderlich sind, also Energie ins System gesteckt wird.

Hinweis 5: Wegen $W^i = W^a$ stellt die Rechnung gemäß Hinweis 4 einen Weg dar, W^a zu gewinnen und gemäß (B.1) bzw. (B.3) auszuwerten. Das nutzt man bei den folgenden Sätzen von Castigliano aus.

B.4 Der erste Satz von Castigliano – Verformungseinflusszahlen (Nachgiebigkeiten)

Der *erste Satz von Castigliano* lautet:

Schreibt man die innere Arbeit W^i (das elastische Potential) als Funktion der äußeren Lasten,

$$W^i = W^i(Q_1, \dots, Q_L, \dots) = W^i(F_1, \dots, F_j, \dots, M_1, \dots, M_k, \dots), \quad (\text{B.14})$$

so liefert die partielle Ableitung nach einer Kraft die zugeordnete Auslenkung:

$$q_l = \frac{\partial W^i}{\partial Q_l} \text{ bzw. } f_j = \frac{\partial W^i}{\partial F_j} \text{ und } \psi_k = \frac{\partial W^i}{\partial M_k}. \quad (\text{B.15})$$

Diese Aussagen gelten ganz allgemein, also nichtlinear, wenn nur das Potential existiert.

Falls W^i eine quadratische Form in den Q_l (den F_j und M_k) ist, hängt $\frac{\partial W^i}{\partial Q_l}$ bzw. $\frac{\partial W^i}{\partial F_j}$

und $\frac{\partial W^i}{\partial M_k}$ linear von den äußeren Lasten ab. Man schreibt:

$$q_l = \sum_{k=1}^L h_{lk} Q_k, \quad l = 1, \dots, L. \quad (\text{B.16})$$

^{*} Gegenbeispiel: Frei beweglicher Dehnstab liegt auf glatter Fläche.

Deutung: Die h_{lk} heißen *Verformungseinflusszahlen* oder *Nachgiebigkeiten*. h_{lk} = Auslenkung q_l (Wirkung) infolge *Einheitslast* Q_k (Ursache). Aus (B.16) und (B.15) folgt

$$h_{lk} = \frac{\partial^2 W^i}{\partial Q_l \partial Q_k}. \quad (\text{B.17})$$

Wegen

$$\frac{\partial^2 W^i}{\partial Q_k \partial Q_l} = \frac{\partial^2 W^i}{\partial Q_l \partial Q_k} \text{ gilt } h_{kl} = h_{lk}. \quad (\text{B.18})$$

Dies ist der *Maxwellsche Reziprozitätssatz* (für die h_{kl}).

Man fasst die Auslenkungen für q_l und Kräfte Q_l in Spaltenmatrizen zusammen,

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l, \dots, q_L)^T, \quad \mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_k, \dots, Q_L)^T \quad (\text{B.19})$$

und bildet aus den h_{lk} die *Nachgiebigkeitsmatrix*

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1L} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{l1} & \dots & h_{lk} & \dots & h_{lL} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{L1} & \dots & h_{LK} & \dots & h_{LL} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

Aus (B.18) folgt

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^T, \quad (\text{B.21})$$

die *Nachgiebigkeitsmatrix* ist symmetrisch.

Mit (B.19) – (B.20) lautet (B.16)

$$\mathbf{q} = \mathbf{H} \mathbf{Q}. \quad (\text{B.22})$$

Setzt man (B.16) – oder (B.22) – in (B.3) ein, so erhält man

$$W^a = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^L h_{lk} Q_l Q_k = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{H} \mathbf{Q}. \quad (\text{B.23})$$

Dies ist (natürlich) wieder die quadratische Form für die innere Energie.

B.5 Der zweite Satz von Castigliano – Krafteinflusszahlen (Steifigkeiten)

Der *zweite Satz von Castigliano* lautet:

Schreibt man die innere Arbeit W^i (das elastische Potential) als Funktion der Auslenkungen,

$$W^i = W^i(q_1, \dots, q_l, \dots) = W^i(f_1, \dots, f_j, \dots, \psi_1, \dots, \psi_k, \dots), \quad (\text{B.24})$$

so liefert die partielle Ableitung nach einer Auslenkung die zugeordnete Kraft:

$$Q_l = \frac{\partial W^i}{\partial q_l} \text{ bzw. } F_j = \frac{\partial W^i}{\partial f_j} \text{ und } M_k = \frac{\partial W^i}{\partial \psi_k}. \quad (\text{B.25})$$

Diese Aussagen gelten ganz allgemein, also nichtlinear, wenn nur das Potential existiert.

Falls W^i eine quadratische Form in den q_l (den f_j und ψ_k) ist, hängt $\frac{\partial W^i}{\partial q_l}$ bzw. $\frac{\partial W^i}{\partial f_j}$

und $\frac{\partial W^i}{\partial \psi_k}$ linear von den Auslenkungen ab. Wir können schreiben:

$$Q_l = \sum_{j=1}^L k_{lj} q_j, \quad l = 1, \dots, L. \quad (\text{B.26})$$

Deutung: Die k_{lj} heißen *Krafteinflusszahlen* oder *Steifigkeiten*. k_{lj} = Kraft Q_l (Wirkung) infolge *Einheitsauslenkung* q_j (Ursache).

Aus (B.26) und (B.25) folgt

$$k_{lj} = \frac{\partial^2 W^i}{\partial q_l \partial q_j}. \quad (\text{B.27})$$

Wegen

$$\frac{\partial^2 W^i}{\partial q_l \partial q_j} = \frac{\partial^2 W^i}{\partial q_j \partial q_l} \text{ gilt } k_{jl} = k_{lj}. \quad (\text{B.28})$$

Dies ist der *Maxwellsche Reziprozitätssatz* für die k_{jl} . Man bildet die *Steifigkeitsmatrix*

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1L} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{l1} & \cdots & k_{lj} & \cdots & k_{lL} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{L1} & \cdots & k_{Lj} & \cdots & k_{LL} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^T; \quad (\text{B.29})$$

und erhält mit den Auslenkungen $\mathbf{q}$ und Kräften $\mathbf{Q}$ nach (B.19) anstelle von (B.26)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K} \mathbf{q}. \quad (\text{B.30})$$

Setzt man (B.26) oder (B.30) in (B.3) ein, so folgt

$$W^a = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^L k_{il} q_i q_l = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}. \quad (\text{B.31})$$

B.5.1 Zusammenhang zwischen Verformungs- und Kraft-Einflusszahlen

Setzt man $\underline{Q}$ aus (B.30) in (B.22) ein, erhält man

$$\underline{q} = \underline{H} \underline{K} \underline{q}, \quad \text{also } \underline{H} \underline{K} = \underline{I} \quad (\text{B.32})$$

und

$$\underline{K} = \underline{H}^{-1} \text{ sowie } \underline{H} = \underline{K}^{-1}. \quad (\text{B.33})$$

Dies gilt jedoch nur, solange $\underline{H}$ bzw. $\underline{K}$ regulär sind, also $\det \underline{H} \neq 0$ bzw. $\det \underline{K} \neq 0$ gilt.

Die Determinanten verschwinden,

$$\det \underline{H} = 0 \text{ oder } \det \underline{K} = 0, \quad (\text{B.34})$$

wenn (B.22) eine Kraft $\underline{Q} \neq 0$ ohne eine zugehörige Auslenkung $\underline{q} \neq 0$ zulässt (z. B. weil in einer Federkette ein Element nachträglich als starr angenommen wurde) bzw. (B.30) eine Auslenkung $\underline{q} \neq 0$ ohne Kraft(änderung), also mit $\underline{Q} = 0$, zulässt (z. B. bei zwei durch eine Feder gekoppelten Punktmassen, die frei auf einer Ebene gleiten können).

B.6 Das Berechnen von Einflusszahlen

Hinweis 1: Das Berechnen von Einflusszahlen von Hand ist mühselig. Entsprechend den obigen Deutungen muss man, um in

$$\underline{q} = \underline{H} \underline{Q} \text{ oder } \underline{Q} = \underline{K} \underline{q} \quad (\text{B.35})$$

jeweils die l -te Spalte $\underline{h}^l$ der Nachgiebigkeitsmatrix $\underline{H}$ bzw. die l -Spalte $\underline{k}^l$ der Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ zu berechnen, eine einzelne entsprechende (Einheits-)Kraft Q_l bzw. (Einheits-)Auslenkung q_l annehmen (alle anderen Q_k bzw. q_k , $k \neq l$ bleiben weg) und die zugehörigen Auslenkungen $\underline{q}^l$ bzw. Kräfte $\underline{Q}^l$ berechnen. Damit findet man

$$\underline{h}^l \cdot Q_l = \underline{q}^l \text{ bzw. } \underline{k}^l \cdot q_l = \underline{Q}^l. \quad (\text{B.36})$$

Hinweis 2: Besonders umständlich ist die Berechnung für statisch unbestimmte Systeme. Sie kann man vermeiden, indem man nachgiebige Stütz- und Einspannstellen einführt und deren Auslenkungen in die q_l aufnimmt. Man berechnet dann die Nachgiebigkeitsmatrix $\underline{H}$ für die Gesamtheit aller Auslenkungen, bildet $\underline{K} = \underline{H}^{-1}$ numerisch und lässt in $\underline{Q} = \underline{K} \underline{q}$ auf der rechten Seite die den unnachgiebigen Stützen oder Einspannungen l entsprechenden Auslenkungen verschwinden, streicht also die zugehörigen Spalten $\underline{k}^l$. (Die Zeilen $\underline{k}_l$ kann man auch weglassen, soweit die Q_l nicht interessieren.)

B.6.1 Berechnen von Einflusszahlen mit Hilfe von Biegelinien

Biegelinien für Balken mit über ihre Länge konstanter Biegesteifigkeit findet man in vielen Handbüchern. Für unsere Überlegungen greifen wir den Kragbalken unter Endlasten und den

an den Enden gelenkig gestützten Balken mit Einzelkraft und Einzelmoment im Feld heraus, siehe Bild B-5.

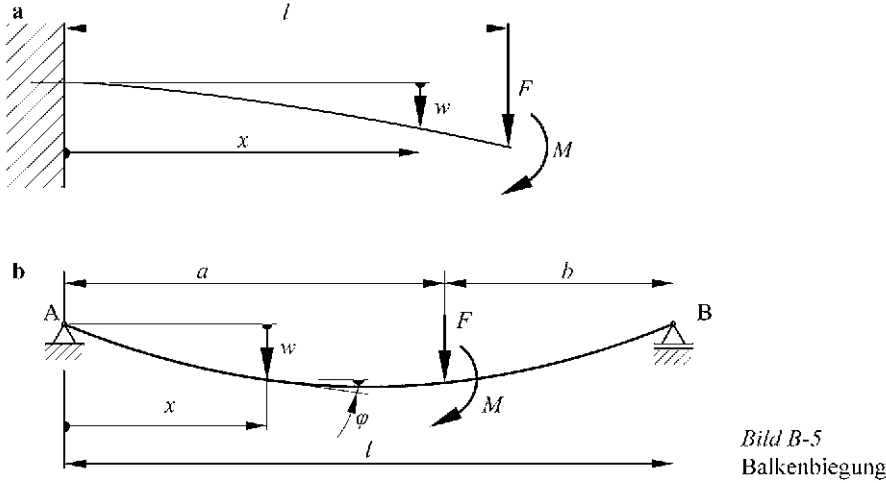


Bild B-5
Balkenbiegung

Die Biegelinien lautet (s. Hütte [11], Grundlagen) für den Kragbalken, Bild B-5a[‡],

$$w = W_1(x, f, M) = \frac{F l^3}{6 EI} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \left(3 - \frac{x}{l} \right) + \frac{M l^2}{2 EI} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \quad (\text{B.37})$$

für den beidseitig gestützten Balken, Bild B-5b[‡],

$$\begin{aligned} w &= W_2(x, a, F, M) \\ &= \frac{F l^3}{6 EI} \left(1 - \frac{a}{l} \right) \frac{x}{l} \left(1 - \left(1 - \frac{a}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right) - \frac{M l^2}{6 EI} \frac{x}{l} \left(1 - 3 \left(1 - \frac{a}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right) \quad \text{für } x \leq a \\ &= \frac{F l^3}{6 EI} \frac{a}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(1 - \left(\frac{a}{l} \right)^2 - \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 \right) - \\ &\quad - \frac{M l^2}{6 EI} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(3 \left(\frac{a}{l} \right)^2 - 2 \frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right) \quad \text{für } x \geq a. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Die Biegewinkel $\varphi(x)$, vgl. Bild B-5, erhält man als Ableitung von w^* :

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \phi_1(x, F, M) := \frac{\partial W_1}{\partial x}; \quad \phi_2(x, a, F, M) := \frac{\partial W_2}{\partial x}. \quad (\text{B.39})$$

[‡] $W_1(x, f, M)$, $W_2(x, a, F, M)$, $\phi_1(x, F, M)$ und $\phi_2(x, F, M)$ werden in Abschnitt B.6.2 benötigt.

B.6.2 Einflusszahlen für den an den Enden gestützten Rotor konstanter Biegesteifigkeit

Die an ihren Enden A, B gelenkig gelagerte Welle konstanter Biegesteifigkeit EI nach Bild B-6 trägt zwei Scheiben 1 und 2; Längen L_1, L_2, L_3 siehe Bild. Gesucht sind für Schwingungsuntersuchungen die Krafteinflusszahlen (die Steifigkeiten) für Weg- und Winkelauslenkungen der Nabenmittelpunkte. (Die versteifende Wirkung der Naben soll vernachlässigt werden.)

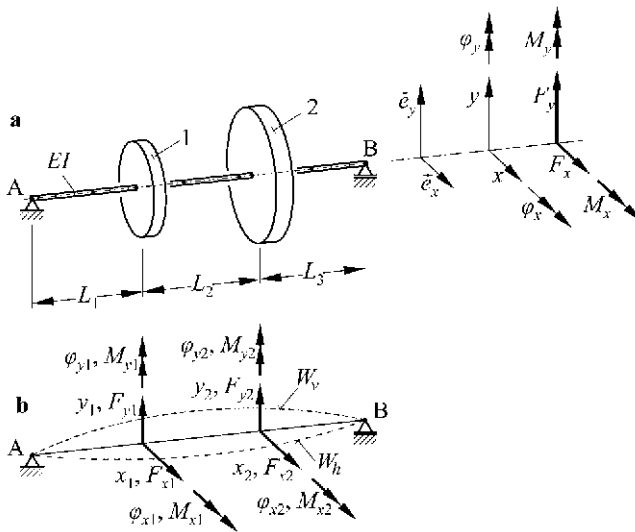


Bild B-6

Mit zwei Scheiben besetzter Rotor.
a Ersatzsystem, b Auslenkungen

1. Wahl der generalisierten Koordinaten und Kräfte

Bild B-6a zeigt die allgemeinen Koordinatenorientierungen. Dabei sind die Winkel φ_x, φ_y als Drehungen um die x - bzw. y -Achse eingeführt, damit man sie, wie x, y , in Vektoren zusammenfassen kann.

Die Auslenkungen $(x_1, x_2, \varphi_{y1}, \varphi_{y2})$ entstehen durch Biegungen w_h in der horizontalen Ebene, die $(y_1, y_2, \varphi_{x1}, \varphi_{x2})$ durch Biegungen w_v in der vertikalen. (Die in Bild B-6b gestrichelt eingetragenen Linien w_h und w_v entstehen durch Klappen der Biegelinie $w(x)$, mit $\varphi(x) = w'(x)$, aus Bild B-5b; dabei klappen F und M mit und gehen in F_h, M_h bzw. F_v, M_v über.)

Die generalisierten Koordinaten lauten mit $a_1 = L_1, a_2 = L_1 + L_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (x_1, x_2, \varphi_{y1}, \varphi_{y2}, y_1, y_2, \varphi_{x1}, \varphi_{x2})^T \\ &= (w_h(a_1), w_h(a_2), -\varphi_h(a_1), -\varphi_h(a_2), w_v(a_1), w_v(a_2), \varphi_v(a_1), \varphi_v(a_2))^T. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Für die generalisierten Kräfte gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (F_{x1}, F_{x2}, M_{y1}, M_{y2}, F_{y1}, F_{y2}, M_{x1}, M_{x2})^T \\ &= (F_{h1}, F_{h2}, -M_{h1}, -M_{h2}, F_{v1}, F_{v2}, M_{v1}, M_{v2}). \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

2. Anschreiben der Verschiebungseinflusszahlen

Die Biegelinien (B.38), (B.39) liefern Auslenkungen als Funktion von Kräften und Momenten. Deshalb eignen sie sich besonders zum Anschreiben von *Verformungseinflusszahlen*, d. h. *Nachgiebigkeiten*.

Da bei dem vorliegenden Rotor die Biegungen in der horizontalen und der vertikalen Ebene *entkoppelt* sind, ist es günstig, die Gleichung (B.22) in 4×1 - bzw. 4×4 -Blöcke zu zerlegen

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.42})$$

Man erhält $\mathbf{H}_{12} = \mathbf{H}_{21}^T = \mathbf{0}$ und – wegen der Symmetrie –

$$\mathbf{H}_{11} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} & h_{34} \\ h_{14} & h_{24} & h_{34} & h_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{22} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & -h_{13} & -h_{14} \\ h_{12} & h_{22} & -h_{23} & -h_{24} \\ -h_{13} & -h_{23} & h_{33} & h_{34} \\ -h_{14} & -h_{24} & h_{34} & h_{44} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.43})$$

Mit $L = L_1 + L_2 + L_3$, $a_1 = L_1$, $a_2 = L_1 + L_2$, $\alpha_i = a_i / L$, $\beta_i = 1 - \alpha_i$, $i = 1, 2$; erhält man durch Einsetzen von (B.40), (B.41) in (B.38), (B.39) und Vergleich mit (B.42)

$$\begin{aligned} h_{11} &= W_2(a_1, a_1, 1, 0) = \alpha_1^2 \beta_1^2 L^3 / 3 EI, \\ h_{12} &= W_2(a_1, a_2, 1, 0) = -\alpha_1 \beta_2 (\beta_1^2 - 2 \beta_1 + \beta_2^2) L^3 / 6 EI, \\ h_{13} &= W_2(a_1, a_1, 0, -1) = \alpha_1 \beta_1 (\alpha_1 - \beta_1) L^2 / 3 EI, \\ h_{14} &= W_2(a_1, a_2, 0, -1) = -\alpha_1 (\beta_1^2 - 2 \beta_1 + 3 \beta_2^2) L^2 / 6 EI, \\ h_{22} &= W_2(a_2, a_2, 1, 0) = \alpha_2^2 \beta_2^2 L^3 / 3 EI, \\ h_{23} &= W_2(a_2, a_1, 0, -1) = \beta_2 (3 \alpha_1^2 - \alpha_2 (1 + \beta_2)) L^2 / 6 EI, \\ h_{24} &= W_2(a_2, a_2, 0, -1) = \alpha_2 \beta_2 (\alpha_2 - \beta_2) L^2 / 3 EI, \\ h_{33} &= -\phi_2(a_1, a_1, 0, -1) = (3 \alpha_1^2 - 3 \alpha_1 + 1) L / 3 EI, \\ h_{34} &= -\phi_2(a_1, a_2, 0, -1) = (3 \alpha_1^2 + 3 \beta_2^2 - 1) L / 6 EI, \\ h_{44} &= -\phi_2(a_2, a_2, 0, -1) = (3 \alpha_2^2 - 3 \alpha_2 + 1) L / 3 EI. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Zur bekannten Nachgiebigkeitsmatrix $\mathbf{H}$ erhält man die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ durch (zu gegebenen Zahlenwerten numerische) Inversion:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^{-1} = \begin{pmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & H_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} H_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & H_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.45})$$

B.6.3 Das Berechnen von Einflusszahlen mit dem Arbeitssatz

Für ein aus Balken und Stäben bestehendes System unter den generalisierten Kräften $Q_l, l = 1, \dots, L$, lautet die innere Energie

$$W^i = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int \frac{S^2}{GA_s} dx + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int \frac{M_T^2}{GI_T} dx, \quad (\text{B.46})$$

vgl. (B.6), (B.13), (B.12) bzw. (B.9). Darin sind in den Linien der Normalkraft N , der Querkraft S (– Scherkraft, um Verwechslung mit Q_l vorzubeugen), des Biegemoments M und des Torsionsmoments M_T jeweils die Wirkungen ALLER Q_l enthalten, und es muss über alle Bauelemente mit ihren jeweiligen Steifigkeiten EA, GA_s, EI, GI_T summiert, über deren Längen jeweils integriert, evtl. zweiachsige Biegung und Querkraft berücksichtigt werden.

Mit (B.46) folgt aus (B.18)

$$h_{kl} = \int \frac{N_k N_l}{EA} dx + \int \frac{S_k S_l}{GA_s} dx + \int \frac{M_k M_l}{EI} dx + \int \frac{M_{Tk} M_{Tl}}{GI_T} dx; \quad k, L = 1, \dots, L. \quad (\text{B.47})$$

Darin bedeuten

$$(N_l, S_l, M_l, M_{Tl}) = \frac{\partial}{\partial Q_l} (N, S, M, M_T), \quad l = 1 \dots L; \quad (\text{B.48})$$

es sind also die Normal- und Querkraft-, Biege- und Torsionsmoment-Linien, die im System vorliegen, wenn es *allein* durch eine *Eins-Last* belastet wird, die wie Q_l wirkt.

Formel (B.47) muss für die einzelnen h_{kl} ausgewertet werden. Für abschnittsweise konstante Steifigkeiten EA, GA_s, EI, GI_T geschieht das zweckmäßig mit Hilfe der Integrale aus Tabelle B-1. Wieder muss über alle Bauelemente und alle Linien summiert werden.

B.6.4 Aufgaben

Aufgabe B-1: Kontrollieren Sie die Einflusszahlen (B.44) mit Hilfe des Arbeitssatzes.

Aufgabe B-2: Nehmen Sie für die Welle nach Bild B-6 für die drei Wellenabschnitte L_1, L_2, L_3 die Biegesteifigkeiten EI_1, EI_2, EI_3 an und berechnen Sie die h_{kl} nach dem Arbeitssatz.

Aufgabe B-3: Seien für die h_{kl} nach (B.44) $L = 1.2$ m, $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.7$ gegeben, die Biegesteifigkeit EI bleibt offen. Berechnen Sie numerisch (PC) die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$.

Aufgabe B-4: Bei dem Rotor nach Bild B-6 wird an der Stelle von Scheibe 1 ein starr gestütztes Pendelrollenlager eingebaut. Stellen Sie unter Verwendung der Ergebnisse von *Aufgabe B-3* die Steifigkeitsmatrix für das System vom Freiheitsgrad 6 auf.

Aufgabe B-5: Das Pendellager aus Aufgabe B-4 ist (ohne abzuheben) in x-Richtung verschieblich. Wie lautet die Steifigkeitsmatrix?

Aufgabe B-6: Der Rotor nach Bild B-6 ragt um die Länge L_4 nach rechts über das Lager B hinaus und trägt dort eine dritte Scheibe, Biegesteifigkeit EI wie bisher. Wie viele wesentliche Nachgiebigkeiten h_{kl} kommen hinzu? Berechnen Sie sie mit Hilfe des Arbeitssatzes.

$n \backslash m$	1	2	3	4
$f(x)$ $g(x)$				
1	lfg	$\frac{l}{2}fg$	$\frac{l}{2}fg$	$\frac{l}{2}(f_1+f_2)g$
2	$\frac{l}{2}fg$	$\frac{l}{3}fg$	$\frac{l}{6}fg$	$\frac{l}{6}(f_1+2f_2)g$
3	$\frac{l}{2}f(g_1+g_2)$	$\frac{l}{6}f(g_1+2g_2)$	$\frac{l}{6}f(2g_1+g_2)$	$\frac{l}{6}[f_1(2g_1+g_2)+f_2(g_1+2g_2)]$
4 $\frac{\alpha l}{\alpha+\beta=1} \frac{\beta l}{\alpha+\beta=1} g$	$lfg\beta$	$\frac{l}{2}fg(1-\alpha^2)$	$\frac{l}{2}fg\beta^2$	$\frac{lg}{2}[f_1\beta^2+f_2(1-\alpha^2)]$
5 $\frac{\alpha l}{\alpha+\beta=1} \frac{\beta l}{\alpha+\beta=1} g$	$\frac{l}{2}fg\beta$	$\frac{l}{6}fg\beta(3-\beta)$	$\frac{l}{6}fg\beta^2$	$\frac{lg\beta}{6}[f_1\beta+f_2(3-\beta)]$
6 $\frac{\alpha l}{\alpha+\beta=1} \frac{\beta l}{\alpha+\beta=1} g$	$\frac{l}{2}fg$	$\frac{l}{6}fg(1+\alpha)$	$\frac{l}{6}fg(1+\beta)$	$\frac{lg}{6}[f_1(1+\beta)+f_2(1+\alpha)]$

Tabelle B-1: Integrale $I^{m,n} = \int_0^l f^m(x) g^n(x) dx$

C Energieverfahren

Beim Arbeiten mit dem Hamiltonschen Prinzip und den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art wird das Aufstellen von Bewegungsgleichungen auf Energieüberlegungen zurückgeführt. Dies hat vier Vorteile:

1. Man braucht weniger Schnittbilder.
2. Die Kinematik wird einfacher, weil man sich nur noch Geschwindigkeiten und nicht mehr Beschleunigungen überlegen muss.
3. Man kann leicht vereinfachte Modelle entwickeln, z. B. den Freiheitsgrad herabsetzen oder ein Kontinuum *diskretisieren*, also durch ein Modell mit endlichem Freiheitsgrad ersetzen.
4. Die Energieverfahren sind Schema-Verfahren. Beim schematischen Vorgehen entstehen meistens Bewegungsgleichungen mit einer günstigen Struktur (z. B. mit symmetrischen Koeffizientenmatrizen).

C.1 Das verallgemeinerte Hamiltonsche Prinzip

Wenn man mit dem Hamiltonschen Prinzip oder mit den Lagrangeschen Gleichungen arbeitet, ist es üblich, die *kinetische Energie* mit dem Buchstaben T und das *Potential* (die potentielle Energie) mit den Buchstaben U oder V zu bezeichnen.

C.1.1 Kinetische Energie

Die in einem System steckende kinetische Energie kann man ganz allgemein durch

$$T = \frac{1}{2} \int_V v^2 dm = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV \quad (\text{C.1})$$

erfassen. Dabei denkt man sich beim linken Integral das System aus Massenelementen Δm aufgebaut, die jeweils die Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ haben, während im rechten mit Volumenelementen ΔV und der Dichte ρ gearbeitet wird,

$$\Delta m = \rho \Delta V. \quad (\text{C.2})$$

Das unter den Integralzeichen stehende V deutet an, dass jeweils über das Gesamtgebilde – hier als *Volumen* V aufgefasst – integriert wird, vgl. Anhang A.2.

Im konkreten Fall wird man für die einzelnen Teile (Körper) des Systems statt (C.1) häufig daraus abgeleitet einfachere Ausdrücke anschreiben, z. B. $T = \frac{1}{2} \cdot m v^2$ für einen starren Körper der (Gesamt-)Masse m , der Schwerpunktgeschwindigkeit v , wenn er sich nicht dreht, oder $T = \frac{1}{2} J \omega^2$ für einen Körper, der sich um eine feste Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht und bezüglich der Drehachse das Massenmoment J hat, vgl. Anhang A.3.3.

C.1.2 Generalisierte Koordinaten; virtuelle Verrückung

Natürlich muss man vor (!) dem Anschreiben der kinetischen Energie irgendwelche Koordinaten einführen, die die Auslenkungen – oder die Lage, die Bewegungen – des Systems vollständig erfassen. Bei Hamilton/Lagrange ist es üblich, mit den generalisierten Koordinaten

$$q_i = q_i(t), \quad i = 1, \dots \quad (\text{C.3})$$

zu arbeiten, vgl. (B.3). Mit dem *generalisiert* will man nicht nur andeuten, dass einzelne q_i zum Beispiel Weg-Auslenkungen und andere Winkel-Auslenkungen sein können. Man will auch irgendwelche Verknüpfungen als Koordinaten zulassen – z. B. $q_1 = x - l\varphi, q_2 = x + 2l\varphi$, wo x, φ die Auslenkungen eines Systems vom Freiheitsgrad 2 sind und l eine im System vorkommende Länge ist –, solange man eindeutig von den q_i auf die Bewegungen des Systems zurück schließen kann. (Es könnte im konkreten Fall notwendig oder zweckmäßig sein, *besondere* Koordinaten einzuführen, weil mit ihrer Hilfe ein Effekt sichtbar wird.)

Braucht man zum Erfassen der Bewegungen eines Systems genau n generalisierte Koordinaten $q_i, i = 1, \dots, n$, so hat es den *Freiheitsgrad* n .

Wenn man an dem System *wackelt*, kann man das nach dem Einführen der q_i auch als kleine Änderung eines oder mehrerer der q_i auffassen. Man schreibt für diese – infinitesimal klein gedachten – willkürlichen *Wackeländerungen* δq_i und nennt sie virtuelle (= gedachte) Verrückungen.

So gesehen ist der Freiheitsgrad n auch gleich der Anzahl der grundsätzlich verschiedenen Bewegungsmöglichkeiten eines Systems, und es ist deshalb (international) üblich geworden, eine Bewegungsmöglichkeit einen Freiheitsgrad – statt etwa eine *Freiheit* – zu nennen. Dann wird aus dem n die *Anzahl der Freiheitsgrade*.

Sind die Auslenkungen – die Lage – eines Systems vollständig durch generalisierte Koordinaten q_i erfasst, so kann man alle jeweils im System vorliegenden Geschwindigkeiten durch die q_i und deren Zeitableitungen

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \quad (\text{C.4})$$

ausdrücken. Man arbeitet mit den $\dot{q}_i$ und führt keine besonderen Bezeichnungen dafür ein.

C.1.3 Potential

Man muss bei Hamilton/Lagrange die Kräfte mit Potential von den Kräften ohne Potential unterscheiden. Die ersten lassen sich leicht und übersichtlich in die allgemeinen Gleichungen einbauen, die zweiten erfordern jeweils das Anschreiben der von ihnen verrichteten virtuellen Arbeiten (s. unten), also detaillierte Überlegungen. Allerdings gestattet der Formalismus das Anschreiben von Potentialen für zeitabhängige Kräfte: Wenn man sie (während des Ansatzens der Gleichungen) mit Formelbuchstaben $F_i(t)$ einführt, darf man für sie Potentiale anschreiben als wären sie konstant. Natürlich bietet es sich dann an, eine verwickelt von den

q_i und $\dot{q}_i$ abhängende Kraft $F_l(\dots, q_i, \dots, \dot{q}_i, \dots, t)$ vorübergehend als $F_l(t)$ zu sehen und erst nach dem Fertigstellen der Gleichungen an der Stelle von F_l den verwickelten Ausdruck einzusetzen.

Von den Kräften (und Momenten) mit Potential sind die aus elastischen Verformungen am wichtigsten.

Für aus Stäben und Balken aufgebaute linear elastische Systeme können wir auf Anhang B zurückgreifen und einfach

$$U_{el} \equiv W^i \quad (C.5)$$

setzen. Sieht man die Kräfte etwa wie in Bild B-1, so kann man auch

$$U_{el} \equiv W^a = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (C.6)$$

schreiben, vgl. (B.31) und die dort erklärten Bezeichnungen.

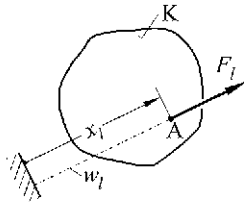


Bild C-1

Körper K mit Angriffspunkt A und Wirkungslinie w einer Kraft F_l

Greifen ein oder mehrere Einzelkräfte $F_l(t)$ an einem Körper K des Systems an, so ist es bequem, eine Koordinate x_l in Richtung der Wirkungslinie w_l zum Angriffspunkt A einzuführen und x_l durch die generalisierten Koordinaten q_i auszudrücken,

$$x_l = x_l(\dots, q_i, \dots, t). \quad (C.7)$$

Dann lautet das Potential für F_l

$$U_l = -x_l F_l, \quad (C.8)$$

dabei gelten die in Bild C-1 gezeigten Orientierungen. Ändert F_l seine Richtung, so muss es als Vektor $\vec{F}_l$ gesehen werden. Dessen zwei oder drei zueinander senkrechten Komponenten kann man jeweils wie F_l zuvor abhandeln.

C.1.4 Virtuelle Arbeit

Verrückt oder verschiebt sich der Angriffspunkt A der Kraft F_l in Bild C-1 um ein kleines Stück δx_l , so verrichtet die Kraft F_l am Körper K die Arbeit

$$\delta W = F_l \delta x_l. \quad (C.9)$$

Dabei wird die Arbeit hineingesteckt – und fände sich im Körper zum Beispiel als Erhöhung der kinetischen Energie wieder –, wenn δW positiv ist.

Wackelt man an dem System mit δq_i , vgl. Punkt C.1.2, so folgt für x_l nach (C.7) für infinitesimal kleine δq_i :

$$\delta x_l = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (\text{C.10})$$

Dabei sind die $\partial x_l / \partial q_i$ die partiellen Ableitungen von x_l nach den q_i (einzelne können verschwinden; mindestens ein $\partial x_l / \partial q_i \neq 0$ muss vorhanden sein, oder A verschiebt sich nicht) und die δq_i sind virtuelle Verrückungen. Dann ist

$$\delta W = F_l \delta x_l = \sum_{i=1}^n F_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \delta q_i \quad (\text{C.11})$$

die *virtuelle Arbeit* (bei der nur gedachten Verrückung δx_l).

Man deutet die Summe rechts als

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (\text{C.12})$$

und die Q_i sind die *generalisierten Kräfte* – es sind Kräfte *in Richtung von* q_i – infolge der Kraft F_l , vgl. (B.2), (B.3).

Im allgemeinen Fall kommen natürlich mehrere Kräfte F_l vor und die Q_i fassen Anteile aus mehreren Kräften zusammen.

Hinweis: Hier, unter Punkt C.1.4, haben wir bezüglich der Kraft F_l keine Einschränkungen gemacht, wir könnten sofort jedes beliebig verwickelte F_l (oder auch Moment) in δW einsetzen, denn beim *Wackeln*, bei den virtuellen Verrückungen, halten wir die Zeit t fest, vgl. (C.7) mit (C.10).

C.1.5 Das verallgemeinerte Hamiltonsche Prinzip

Das verallgemeinerte Hamiltonsche Prinzip lautet: Jedes mechanische System bewegt sich so, dass

$$\delta S := \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (\text{C.13})$$

gilt.

Das Integral $\int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt$ heißt *Wirkung*; die Wirkung lässt sich nicht einfach anschaulich

interpretieren. Das gewählte Zeitintervall $t_1 \leq t \leq t_2$ ist willkürlich; δT und δU sind die Änderungen der kinetischen Energie bzw. des Potentials, wenn man am System mit δq_i wackelt, wenn man die q_i variiert. Man sagt dann auch: Die Variation der Wirkung ist stationär.

Wir benutzen das verallgemeinerte Hamiltonsche Prinzip (C.13), um daraus die Lagrange-schen Gleichungen (2. Art) herzuleiten.

C.2 Die Lagrangeschen Gleichungen (2. Art)

Wir gehen in 3 Schritten vor und behandeln zunächst die Variationen δT und δU .

C.2.1 Variation der kinetischen Energie

Im verallgemeinerten Hamiltonschen Prinzip (C.13) ist die kinetische Energie T eine Funktion der generalisierten Koordinaten q_i und deren Zeitableitungen $\dot{q}_i$. Außerdem kann, zum Beispiel bei bewegtem – etwa schwingenden – Bezugssystem die kinetische Energie T auch explizit von der Zeit t abhängen:

$$T = T(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n, \dots; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (\text{C.14})$$

Hinweis 1: Da die Teilchengeschwindigkeit v in (C.1) quadratisch steht, ist T bezüglich der $\dot{q}_i$ bei festem Bezugssystem eine quadratische Form, bei bewegtem Bezugssystem gibt es auch bezüglich $\dot{q}_i$ lineare und von $\dot{q}_i$ unabhängige Terme in T .

Wenn wir an T wackeln, können wir das in zweierlei Weise tun, wir können mit δq_i die q_i variieren und mit $\delta \dot{q}_i$ die $\dot{q}_i$. Dann gilt

$$\delta T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i. \quad (\text{C.15})$$

Wie hängen die δq_i und die $\delta \dot{q}_i$ zusammen? Nehmen wir an, wir wackeln nach einem Zeitgesetz

$$\delta q_i = \delta q_i(t) \quad (\text{C.16})$$

und fordern

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i. \quad (\text{C.17})$$

Setzt man δT nach (C.15) in das Integral (C.13) ein, so erhält man

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i \right] \right\} dt. \quad (\text{C.18})$$

Wegen (C.16), (C.17) können wir von $\delta \dot{q}_i$ die Zeitableitung durch partielles Integrieren abwälzen. Es gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i dt = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} dt. \quad (\text{C.19})$$

Die Randterme für t_1 und t_2 lauten:

$$-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t_1) \text{ und } \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t_2). \quad (\text{C.20})$$

In der Regel nimmt man an, dass man zu den Zeiten t_1 und t_2 nicht wackelt, weil z. B. Anfangsbedingungen vorgegeben sind. Dann verschwinden $\delta q_i(t_1)$ und $\delta q_i(t_2)$, es gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt. \quad (\text{C.21})$$

C.2.2 Die Variation des Potentials

Das Potential U ist im verallgemeinerten Hamiltonschen Prinzip (C.13) eine Funktion der generalisierten Koordinaten q_i und – bei bewegten Bezugssystem oder zeitabhängigen Kräften – der Zeit t :

$$U = U(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n, t). \quad (\text{C.22})$$

Die Variation lautet, vgl. (C.15)

$$\delta U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (\text{C.23})$$

Dies kann man unmittelbar in (C.13) einsetzen.

C.2.3 Die Lagrangeschen Gleichungen

Setzt man (C.21), (C.23) und (C.12) in (C.13) ein, so erhält man

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i dt = 0. \quad (\text{C.24})$$

Die δq_i sind frei! – man darf beliebig am System wackeln, also müssen die $(\dots)_i$ einzeln verschwinden:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i; \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{C.25})$$

Dies sind die Lagrangeschen Gleichungen.

Gemäß dem Hinweis 1 unter Punkt C.2.1 enthält T bezüglich $\dot{q}_i$ quadratische (und lineare) Glieder. Dann ist $\partial T / \partial \dot{q}_i$ bezüglich $\dot{q}_i$ linear und $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ liefert Terme mit $\ddot{q}_i$, also Beschleunigungen. Die Gesamtheit der Trägheitsterme steht hier als $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}$, wobei das zweite Glied häufig wegfällt.

C.2.4 Andere Schreibweisen der Lagrangeschen Gleichungen

Neben der Schreibweise

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{C.26})$$

ist es sehr üblich die *Lagrange Funktion*

$$L := T - U \quad (\text{C.27})$$

einzuführen und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{C.28})$$

zu schreiben. Hier muss man darauf achten, Kräfte, die man als zeitabhängig mit Potential eingeführt hat (vgl. C.1.3), in $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ nicht selbst zu differenzieren. (Die Gleichung (C.26)

sieht nicht so elegant aus, ist da aber sicherer.)

Anhänger des Prinzips der virtuellen Verrückungen werden es gelegentlich vielleicht sogar vorziehen, statt der Lagrangeschen Gleichungen die virtuelle Gesamtarbeit

$$\delta W_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i \right) \delta q_i \quad (\text{C.29})$$

anzuschreiben und

$$\delta W_{\text{ges}} = 0 \quad (\text{C.30})$$

zu fordern.

Mit etwas Übung kann man bei nicht zu komplexen Systemen aus (C.29), (C.30) die Transformation der Gleichungen auf andere Koordinaten oder auch den Einfluss von Systemmodifikationen direkt ablesen.

Literaturverzeichnis

1. *The Shock and Vibration Digest*, The Vibration Institute: Suite 212, 6262 S. Kingery Hwy., Willowbrook, IL 60514, USA.
2. Beitz, W. and K.-H. Grote, *DUBBEL Taschenbuch für den Maschinenbau*. 1997, Berlin: Springer.
3. Bishop, R.F.D., *Schwingungen in Natur und Technik*. Studienbücher. 1985, Stuttgart: B.G. Teubner.
4. Braun, M., *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*. 2 ed. 1991, Berlin: Springer-Verlag.
5. Bremer, H., *Dynamik und Regelung mechanischer Systeme*. 1988, Stuttgart: Teubner.
6. Brommundt, E., *Beschreibung von Kreiselbewegungen mit Kippwinkeln*. ZAMM, Zeitschr. angew. Math. Mech., 1993. 73: p. 229-230.
7. Brommundt, E., *Tilt Angles*. Technische Mechanik, 2006. 26: p. 148-167.
8. Brommundt, E., G. Sachs, and D. Sachau, *Technische Mechanik*. 4. Auflage ed. 2007, München: Oldenbourg-Verlag.
9. Bronstein, et al., *Taschenbuch der Mathematik*. 6 ed. 2005, Thun und Frankfurt am Main: Harri Deutsch.
10. Budó, A., *Theoretische Mechanik*. 11. Auflage ed. 1987, Berlin: VEB Verlag.
11. Czichos, H., *HÜTTE Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften*. 31 ed. 2000, Berlin: Springer.
12. Dankert, H. and J. Dankert, *Technische Mechanik computerunterstützt*. 1994, Stuttgart: Teubner.
13. DIN1302, *Allgemeine mathematische Zeichen und Begriffe*, Deutsches Institut für Normung e.V.
14. DIN1303, *Vektoren, Matrizen, Tensoren*, Deutsches Institut für Normung e.V.
15. DIN1304, *Formelzeichen*, Deutsches Institut für Normung e.V.
16. DIN1305, *Masse, Kraft, Gewichtskraft, Gewicht*, Deutsches Institut für Normung e.V.
17. DIN1311-1, *Schwingungen und schwingungsfähige Systeme Teil 1 Grundbegriffe, Einteilung*. 2000, Deutsches Institut für Normung e.V. p. 18.
18. DIN1311-2, *Schwingungen und schwingungsfähige Systeme Teil 2: Lineare, zeitinvariante schwingungsfähige Systeme mit einem Freiheitsgrad*. 2002, Deutsches Institut für Normung e.V.
19. DIN1311-3, *Schwingungen und schwingungsfähige Systeme Teil 3: Lineare, zeitinvariante schwingungsfähige Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden* 2000, Deutsches Institut für Normung e.V.
20. DIN1311-4, *Schwingungslehre Blatt 4: Schwingende Kontinua, Wellen*. 1974, Deutsches Institut für Normung e.V.
21. DIN1312, *Geometrische Orientierung*, Deutsches Institut für Normung e.V.
22. DIN1313, *Physikalische Größen und Gleichungen*, Deutsches Institut für Normung e.V.
23. DIN1314, *Winkel*, Deutsches Institut für Normung e.V.
24. DIN1319, *Meßtechnik*, Deutsches Institut für Normung e.V.

25. DIN19226, *Regelungstechnik und Steuerungstechnik*, Deutsches Institut für Normung e.V.
26. Dresig, H., *Schwingungen mechanischer Antriebssysteme*. 2001, Berlin: Springer.
27. Dresig, H. and F. Holzweissig, *Maschinendynamik*. 5 ed. 2004, Berlin: Springer.
28. Dresig, H. and L. Rockhausen, *Aufgabensammlung Maschinendynamik*. 1994, Köln: Fachbuchverlag Leipzig.
29. Dresig, H. and I.I. Vul'fson, *Dynamik der Mechanismen*. 1989, Wien: Springer-Verlag.
30. Fischer, U. and W. Stephan, *Mechanische Schwingungen*. 3 ed. 1993, Leipzig, Köln.
31. Gasch, R., R. Nordmann, and H. Pfützner, *Rotordynamik*. 2 ed. 2002, Berlin: Springer.
32. Gross, D., et al., *Technische Mechanik 1, 2*. 2004: Springer Verlag.
33. Grote, K.-H. and J. Feldhusen, *DUBBEL Taschenbuch für den Maschinenbau*. 22 ed. 2007, Berlin: Springer.
34. Hagedorn, P., *Technische Schwingungslehre - Lineare Schwingungen kontinuierlicher mechanischer Systeme*. Vol. 2. 1989, Berlin: Springer-Verlag.
35. Hagedorn, P. and S. Otterbein, *Technische Schwingungslehre - Lineare Schwingungen diskreter mechanischer Systeme*. Vol. 1. 1987, Berlin: Springer-Verlag.
36. Harris, C.M., *Shock and Vibration Handbook*. 3 ed. 1988, New York: McGraw-Hill.
37. Hollburg, U., *Maschinendynamik*. 2 ed. 2007, München: Oldenbourg Verlag.
38. Holzweissig and Dresig, *Lehrbuch der Maschinendynamik*. 4 ed. 1994, Leipzig: Fachbuchverlag.
39. Inman, D.J., *Engineering Vibration*. 2 ed. 2001, New Jersey: Prentice Hall.
40. Knaebel, M., *Technische Schwingungslehre*. 2006, Wiesbaden: Teubner-Verlag.
41. Krämer, E., *Maschinendynamik*. 1984, Berlin: Springer-Verlag.
42. Krämer, E., *Dynamics of Rotors and Foundations*. 1993, Berlin: Springer-Verlag.
43. Lunze, J., *Regelungstechnik 1*. 5 ed. Lehrbuch. 2006, Berlin: Springer.
44. Magnus, K., *Kreisel*. 1971, Berlin: Springer.
45. Magnus, K. and K. Popp, *Schwingungen - Eine Einführung in die physikalischen Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. Studienbücher. 1997, Stuttgart: B.G. Teubner.
46. Malkin, J.G., *Theorie der Stabilität einer Bewegung*. 1959, München: Oldenbourg.
47. Meirovitch, L., *Analytical methods in vibrations*. 1967, New York: Macmillan.
48. Moon, F.C., *Applied Dynamics*. 1998, Weinheim: John Wiley & Sons.
49. Müller, P.C., *Stabilität und Matrizen*. 1977, Berlin: Springer.
50. Nayfeh, A.H. and D.T. Mook, *Nonlinear oscillations*. 1979, New York: Wiley.
51. Ogata, K., *System Dynamics*. 3 ed. 1998, New Jersey: Prentice Hall.
52. Parkus, E., *Mechanik der festen Körper*. 2 ed. 1966, Wien: Springer.
53. Pfeiffer, F., *Einführung in die Dynamik*. Studienbücher. 1992, Stuttgart: B.G. Teubner.
54. Schichlén, W., *Technische Dynamik*. 1986, Stuttgart: Teubner.
55. Schmidt, G., *Parametererregte Schwingungen*. 1975, Berlin: Dt. Verlag d. Wiss.
56. Schwarz, H.R., *Methode der finiten Elemente*. 2 ed. 1984, Stuttgart: B. G. Teubner.
57. Schwarz, H.R. and N. Köckler, *Numerische Mathematik*. 2004, Stuttgart: Teubner.
58. Schwetlick, H. and H. Kretzschmar, *Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure: eine computerorientierte Einführung*. 1991: Fachbuchverlag Leipzig.
59. Szabó, I., *Höhere Technische Mechanik*. 3 ed. 1972, Berlin: Springer.
60. Szabó, I., *Einführung in die Technische Mechanik*. 8 ed. 1975, Berlin: Springer.

61. Thomson, W.T., *Theory of Vibration With Applications*. 4 ed. 1993, Englewood Cliffs: Prentice Hall.
62. Ulbrich, H., *Maschinendynamik*. Studienbücher. 1996, Stuttgart: B.G. Teubner.
63. Walter, W., *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung*. 7 ed. 2000, Berlin: Springer-Verlag.
64. Wittenburg, J., *Dynamics of systems of rigid bodies*. 1977, Stuttgart: Teubner.
65. Ziegler, F., *Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper*. 2 ed. 1992, Wien: Springer.
66. Zurmühl and Falk, *Matrizen und ihre technischen Anwendungen - für angewandte Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Teil 1: Grundlagen; Teil 2: Numerische Methoden*. 1992, Berlin: Springer-Verlag.
67. Zurmühl, R., *Matrizen und ihre technischen Anwendungen*. 4 ed. 1964, Berlin: Springer-Verlag.

Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen

a	Beschleunigung	z	Auslenkung des Wellendurchstoßpunktes (komplex)
b	Dämpferkonstante	A	Fläche, Koeffizient
$\vec{e}$	Achsen-Einheitsvektor	$\mathbf{B}$	Dämpfungsmatrix
$\vec{e}$	Spaltenmatrix der drei Einheitsvektoren eines kartesischen Achsensystems (einer Basis)	C	Konstante
f	Anzahl der Freiheitsgrade	D	Dämpfungsgrad
g	Fallbeschleunigung	E	Elastizitätsmodul, Energie, Extremum
h	Höhe, Stoßantwort	F	Kraft
i	Übersetzung	$\vec{F}$	Kraft
j	imaginäre Einheit	G	Gewicht
k	Federkonstante	H	Übertragungsfunktion
l	Länge	$\mathbf{H}$	Nachgiebigkeitsmatrix
m	Masse	I	axiale Flächenmomente 2. Grades
n	Anzahl	J	Massenmomente
$\vec{p}$	Bewegungsgröße	$\vec{J}$	Trägheitstensor
q	generalisierte Koordinate, Streckenlast	K	Körper
$\mathbf{q}$	Spaltenmatrix von generalisierten Koordinaten	$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix
r	Exzentrizität, Radius	L	Länge
r, φ	Polarkoordinaten	$\bar{L}$	Drall
$\vec{r}$	Ortsvektor	M	Masse
s	Abstand	$\bar{M}$	Moment
t	Zeit	$\mathbf{M}$	Massenmatrix
u	Ausschlag, Durchbiegung, Verschiebung	N	Normalkraft
v	Geschwindigkeit	P	Punkt
$\vec{v}$	Geschwindigkeit	P	Leistung
w	Auslenkung	$\mathbf{R}$	Drehmatrix
x	Bewegung	S	Schwerpunkt
$\mathbf{x}$	Zustandsvektor	T	Periodendauer,
y	Geschwindigkeits-Zustand	U	Unwucht, statische Moment
		V	Volumen, Vergrößerungsfunktion
		W	Arbeit
		W	Wellendurchstoßpunkt

α	Winkel, Phase
δ	Abklingkoeffizient, Delta-Funktion
ε	Dehnung
η	Verhältnis Erregerkreisfrequenz / Eigenkreisfrequenz
λ	Eigenwert, Stangenverhältnis
μ	Reibungszahl
ρ	Reibungswinkel
ρ, φ, z	Zylinderkoordinaten
σ	Spannung
τ	Schubspannung, Zeitpunkt
φ	Winkel (-Auslenkung)
ψ, ϑ, φ	Eulerwinkel
ω	Kreisfrequenz, Winkelgeschwindigkeit
Ω	Erregerkreisfrequenz, Drehfrequenz

Indizes

0	Anfangswert
h	homogen
p	Partikularlösung
E	Extremwert

Sonstige Zeichen

$\wedge$	Amplitude
$_$	komplex
$\sim$	dimensionslos

Operationen

d/dt	Zeitableitung
Re	Realteil
Im	Imaginärteil
$\bar{x}$	komplex konjugiert

Sachwortverzeichnis

Abklingkoeffizient.....	22, 60
Abstimmung, tiefe	81
Achse, Balken-	217
additive Funktion.....	50
Aktivisolierung.....	83
Amplitude.....	3
komplexe	6
Anfangsbedingung	60, 72
anisotrop	115
Anklingkoeffizient.....	22
Ansatz vom Typ der rechten Seite	64
Ansatzfunktion	
globale	232
lokale	207
aperiodischer Grenzfall	60
Arbeit, innere.....	272
Ausgleichsmasse	36
Auslenkung	
komplexe	63
statische	69, 238
autonom	51, 53
Balken	
beidseitig gestützt	223
-Biegegleichung	218
biege-schwingender.....	202
einseitig eingespannt	225
Bandstruktur	212
Basis	247
Bernoulli-Euler Hypothese.....	218
Beschleunigung	259
Winkel-	260

Bewegung.....	2
Bewegungsgleichung.....	49, 267
ansetzen	246
komplexe	63
System 1.Ordnung	218
Bewegungsgröße	265, 267
Bezugspunkt	247
Bezugssystem	246
Biegelinie.....	218
Biegemoment.....	217
Bildwelle	182, 184
biquadratisch	125
Cardan-Winkel	250
Castigliano	
erster Satz von	116
zweite Satz.....	275
charakteristische Gleichung...57, 124, 197	
d'Alembertsche	
Kraft	28, 34, 270
Moment	33, 34, 270
Prinzip	268
Dämpfung.....	104
äußere	100
innere.....	100
-sgrad.....	56
-smaß, Lehr'sche	56
-szahl	59
unterkritische	57
Dehnsteifigkeit	272
Delta-Funktion	71
Deviationsmoment.....	33, 264

- Differentialgleichung
 inhomogene 50, 64
 lineare 50
 -system 267
- Dirac-Funktion 71
- Diskretisieren 103, 202, 283
- dissipiert 52
- Distribution 71
- Drall 265, 267
- Drehfeder 174
- Drehgeschwindigkeitsmatrix 257
- Drehmatrix 248
- Drehschwingungen 173, 174, 216
- Drehsteifigkeit, reduzierte 182
- Drehung 248
- Drehwinkel, eigentlicher 254
- Drehzahl 84, 147
 kritische 112
- Drehzeiger 5, 63, 65
- Dreibein 247
- Drillsteifigkeit 208, 272
- Drillung 192, 272
- Durchlaufräger 116
- dynamische Steifigkeit 137
- Effektivwert 17
- Eigen(kreis)frequenz 56
- Eigenlösung 133
- Eigenschwingung 126, 130, 133, 146, 221, 224
- Eigenschwingungsform 103, 189, 203, 231, 243
- Eigenvektor 126, 133, 145, 179, 224
- Eigenwert 57, 124
- Eigenwertproblem 57, 124, 178, 235
- Einheitsstoß 63, 71
- Einhüllende 23
- Einmassenschwinger 56
- Elementardrehung 249
- Energie
 -dissipation 104
 kinetische 265, 266, 283
- Erreger
 -amplitude 63
 -frequenz 63
 -kraft 62
 -kraft, allgemeine 49
- Erregung*, harmonische 63
- Ersatzsystem .. 27, 31, 43, 44, 97, 174, 217
- Euler
 -drehung 252
 -Winkel 252
- Eulersche Formel 5
- Exzentrizität 27, 29, 32, 97, 136, 146
- Faltungsintegral 74
- Fast Fourier Transform 14
- Feder
 -kennlinie 42
 Parallelschaltung 42
 -stützung 219
- finite Elemente 99, 202
- Flächenträgheitsmoment 192, 272
- Fliehkraft 35
 -moment 35
- Formänderungsenergie 271
- Formfunktion 99, 208
- Fourier
 -Integral 63
 -koeffizient 11, 12
 komplexer 16

-reihe.....	12, 47
komplexe	16
reelle	14
-synthese.....	63
<i>Freiheitsgrad</i>	284
Anzahl	284
Frequenz	3
<i>Kreis</i> -	59
<i>Winkel</i> -	59
Frequenzgang	65, 109, 138, 139, 202
Amplituden-	67
Phasen-	67
Frequenzgleichung	57, 124
Fußpunkterregung	80
Gegenlauf	166
generalisiert	284
geometrische Verträglichkeit	219
Geschwindigkeit.....	8
Führungs-	258
Relativ-	258
Gibbssches Phänomen.....	16
Gipfelwert.....	18
Gleichlauf.....	166
Gleichwert	14, 17
Größtwert	18
gyroskopische Matrix	163, 170
Hamiltonsche Prinzip, verallgemeinerte.....	286
harmonische	
Analyse.....	12
Synthese	10
Harmonische.....	11, 13
höhere	11
Hauptträgheitsachse.....	264
Hauptträgheitsmoment	264

homogen	50
Homotopie	153
Hüllfläche	27
Hyperbelfunktion	222
Impuls	
-antwort	Siehe Stoßantwort
-erregung	Siehe Stoßerregung
Inertialsystem	246
instationär	85
Kinetik	246
Kippwinkel	252
axiale	255
Kleinstwert	18
Knoten einer Eigenschwingung.....	180
Knotenwinkel	254
Koeffizientendeterminante	124
Kontinua, eindimensionale technische	202
Koordinate, generalisierte	204, 279, 284
Koordinatensystem	247
Kraft	
-einflusszahl.....	118, 122, 276
generalisierte	280
-stoß	265
Kräftegesetz	268
Kreisel	
abgeplatteter	167
gestreckter	167
<i>Kreisfrequenz</i>	3, 5, 9, 11, 59
d. gedämpften Schwingung	60
d. ungedämpften Schwingung	59
momentane	20
Quasi-	22
Kriechbewegung.....	60
Lagekoordinate	249

- Lagerung
 anisotrope 152
 isotrope 112, 152
 Lagrange Funktion 289
 Lagrange-Formalismus 205
 Laplace-Transformation 74
 Last
 statische 66
 Laval-Welle 97
 Lehr'sche Dämpfungsmaß 56
 linearisieren 42
 Linienspektrum 13, 48
 Lissajous-Figur 131
 logarithmische Dekrement 23
 Lösung
 nichttriviale 196, 223
 triviale 224
 Luftwiderstand 53
 Masse, reduzierte 46
 Masse, schwingende 100
 Massen
 -belegung 100
 -geometrie 262
 -matrix 122
 -mittelpunkt 263
 -moment, reduziertes 182
 -momente zweiten Grades 262
 Matrixschreibweise 205
 Maximalwert 18
 Maxwell'sche Reziprozitätssatz 275
 Minimalwert 18
 Mittelwert 14
 arithmetischer 17
 linearer 17
 quadratischer 17
 Modalmatrix 237
 Modell, diskretes 202
 Modulations
 -grad 19
 -kreisfrequenz 19
 Moment, statisches 29
 Momentensatz 268
 Nachgiebigkeit 116, 118, 121, 145, 280
 -smatrix 275, 281
 Neigungswinkel 254
 Newton-Euler 268
 Nullphasenwinkel 3
 Oberschwingung 11
 Ordnungssachse 13
 orthogonal 249
 Orts
 -koordinaten 247
 -kurve 70, 109, 138
 -vektor 248
 Partikularintegral ... *Siehe* Partikularlösung
 Partikularlösung 62, 67
 Passivisolierung 81
 Pendel
 mathematische 52
 physikalische 52
 Periode 3, 9, 10, 16, 58
 -ndauer 3, 9
 Quasi- 23
 Phasen
 -ebene 58
 -hub 20
 -kurve 58
 -punkt 58

- verschiebungswinkel 7, 67, 78
- winkel 3
- positiv definit 125, 132, 274
- Potential 271, 283
- Querkraft 217
- Randbedingung 194, 195
 - Belastungs- 219
 - geometrische 219, 233
 - nicht-wesentliche 233
- Ratterschwingungen 113
- Reibung
 - innere 104
 - swinkel 52
- Resonanz 68, 79, 187, 188, 189
 - amplitude 69
 - bereich 68
 - kurve 67
 - spitze 69
 - stelle 69, 75
 - strenge 69
- Richtungskosinus 248
- Sägezahnfunktion 14
- säkulare Anteil 179
- Scheinkraft 269
- Scheitelwert 18
- Schwebung 21
 - reine 21
- Schwerelinie 217
- Schwerpunkt 263
 - satz 268
- Schwinger
 - gedämpfter 59
 - mehrläufiger 122
 - nichtlinearer 52
 - ungedämpfter 56
- Schwingung
 - angefachte 57
 - erzwungene 62, 63, 64, 67, 69, 75
 - fastperiodische 18
 - freie 56
 - gedämpfte 57
 - harmonische 3
 - modulierte 60
 - phasenmodulierte 20
 - quasiperiodisch 19
 - sbauch 231
 - sbreite 18
 - selbsterregte 113
 - sform 180
 - sfrequenz 21
 - sinnähnlich 19
 - sinnverwandte 19
 - Sinus- 3
 - sknoten 231
 - ungedämpft 57
 - unperiodische 18
- Seite, quer-schwingende 202
- Signalflussplan 65, 73
- Sinusschwingung 9
- Spalten-Matrix 1
- Spaltenvektor 136, 247
- Spektren, diskrete 13
- Spitzenwert 18
- Stab, längs-schwingender 202
- Stabilitäts
 - grenze 157
 - karte 112, 157
- Stangenverhältnis 46

- Steifigkeitsmatrix 281
 diagonale 235
 Störungsrechnung 134
 Stoß
 -antwort 71, 72, 73
 -erregung 71
 Streckenlast 217
 dynamische 218
 Superpositionsprinzip 51
 System
 erster Ordnung 53
 indefinites 145
 vierter Ordnung 122
 -Zustand 59
 Talwert 18
 Teilschwingung 11
 tief abstimmen 79
 Torsions
 -schwingungen 173
 -stab 215
 Trägerkreisfrequenz 19
 Trägheit, verteilte 198
 Trägheits
 -kraft 269
 -matrix 263
 -moment 262, 268
 -tensor 32, 264
 triviale Lösung 57, 229
 Überlagerungssatz *Siehe*
 Superpositionsprinzip
 Übertragungs
 -funktion 65, 70, 139
 -gleichung 139
 -system 65
 -verhalten 65
 Unwucht 28, 29, 34, 109
 kinetische 35
 -masse 27
 statische 35
 Variation 288
 Vektor 1
 Verformungseinflusszahl 118, 275, 280
 Vergrößerungsfunktion 69, 78
 Verträglichkeit, geometrische 227
 virtuelle
 Arbeit 184, 207, 286
 Verrückung 286
 Welle, dreh-schwingende 202
Welle, mittig besetzt 97
 Wellen
 -durchstoßpunkt 97
 -masse, mitschwingende 191
 -zapfen 96, 97
 Werkstoffdämpfung 105
 wesentliche Bedingungen *Siehe*
 Randbedingung geometrische
 Widerhall *Siehe* Resonanz
 Winkelgeschwindigkeit 257
 Wirkung 287
 -splan 73
 Wuchskoeffizient 22
 Wuchten 36
 Wuchtmasse 30
 Zeiger 6
 der harmonischen Schwingung 6
 -diagramm 7
 linksdrehend 64
 Zentripetalbeschleunigung 32
 Zustandsgröße 267