

Rudolf Jürgler

Maschinendynamik

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH



<http://www.springer.de/engine/>

Rudolf Jürgler

Maschinendynamik

Dritte, neu bearbeitete Auflage

Mit 550 Abbildungen



Springer

Professor Dipl.-Ing. Rudolf Jürgler
Krefeld

Die zweite Auflage erschien im VDI-Verlag und wurde vom Springer-Verlag mit der ISBN 978-3-642-62259-5 übernommen.

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

ISBN 978-3-642-62259-5 ISBN 978-3-642-18706-3 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-18706-3

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

<http://www.springer.de>

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2004

Softcover reprint of the hardcover 3rd edition 2004

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für die Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

Einband-Entwurf: Struve & Partner, Heidelberg

Satz: Reproduktionsfertige Vorlage des Autors

Gedruckt auf säurefreiem Papier 68/3020 Rw- 5 4 3 2 1 0

Vorwort

Während die Schwingungen im allgemeinen in der Literatur der Mechanik (Kinetik/Kinematik) die letzten Kapitel bilden und von der physikalischen Seite her behandelt werden, wird die Maschinendynamik meist als Spezialgebiet des Maschinenbaus von der theoretischen Seite her behandelt. Das hat seinen Grund in der Tatsache, daß schwingungsfähige Systeme, und das sind nun einmal alle Konstruktionsteile, immer im Zusammenhang mit anderen Teilen schwingen. Gerade die Chaostheorie hat gezeigt, wie man aus der Zwickmühle einer zu starken Vereinfachung eines Systems und dem Zwang einer möglichst guten Annäherung an den praktischen Fall auf manchen Gebieten zu einer Lösung kommen kann, die den praktischen Anforderungen genügt. Dazu kommt die rasante Entwicklung der Computertechnik, die es ermöglicht, praktisch jeden Arbeitsplatz mit Geräten auszustatten, so daß Aufgabenstellungen, deren Lösung noch vor wenigen Jahren wegen des zu hohen Aufwandes nicht in Angriff genommen worden sind, nun gelöst werden können. Dabei stellt sich die Frage, ob nicht durch das Vertrauen auf die Fähigkeiten dieser Maschinen die eigenen Fähigkeiten vernachlässigt worden sind. Zwar sind die Systeme immer leistungsfähiger geworden, dabei ist jedoch der Arbeitsaufwand derart gestiegen, daß oft bereits Download und Installieren eines Service Pack erhebliche Arbeitszeit in Anspruch nehmen, die der eigentlichen Arbeitsaufgabe entzogen wird. Parkinson und Peter sind zu beachten und Murphy läßt grüßen.

Es soll nicht vergessen werden, daß Computer Maschinen sind, die mit ihren Programmen das ausführen, was ihnen eingegeben wird. Fehler, die zum Teil bei der Eingabe entstanden sind, werden dabei nicht immer bemerkt. Im Kapitel "Analogie von Mohr" ist ein Verfahren alter Art angegeben, mit dem mit einfachen Mitteln ein Computerresultat überprüft werden kann.

In diesem Buch soll - beginnend bei den Grundlagen - der Stoff der Maschinendynamik vermittelt werden, der für die Praxis der Konstruktion die Bausteine für Entwurf, Berechnung und Ausführung liefert.

Die übersichtliche Gestaltung des Textes, der Formeln und Abbildungen ermöglicht ein selbständiges Durcharbeiten des Stoffes.

Das Kapitel "Beispiele - Aufgaben und Lösungen" enthält eine umfangreiche Sammlung, wobei besonderer Wert auf ausführliche Lösungswege gelegt wurde. Der Text sollte auf diese Weise möglichst wenig unterbrochen werden.

Den Abschluß bilden ein Zeichenkatalog und eine Formelsammlung, deren Numerierung mit den Nummern der einzelnen Kapitel übereinstimmt. Um die Formulierung "auf bekannte Weise erhält man" nicht benutzen zu müssen, gibt es schließlich ein Kapitel "Hilfe" mit dem Symbol $\otimes$. Darauf folgen Literatur- und Sachwortverzeichnis.

Dem VDI-Verlag bin ich zu Dank für die gute Zusammenarbeit zur 2. Auflage verpflichtet. Die 3. Auflage erscheint nun in Zusammenarbeit mit dem Springer-Verlag. Auch hier möchte ich meinen Dank ausdrücken.

Danken möchte ich für die vielen Zuschriften. Durch die Erweiterungen in der 3. Auflage können sich trotz aller Mühe Fehler eingeschlichen haben. Für Hinweise und Anregungen bin ich auch weiterhin dankbar.

Krefeld, Juni 2003

Rudolf Jürgler

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Schwingungstechnische Grundbegriffe	3
2.1	Definition der Schwingung	3
2.2	Schwingungstechnische Ersatzbilder und Freiheitsgrade	5
3	Amplituden-Zeit-Diagramm	7
3.1	Grundformel	7
3.2	Translationsschwingung	9
3.3	Vektorbild der Schwingung	12
3.4	Realteil, Imaginärteil	14
4	Ungedämpfte freie lineare Schwingungen	15
4.1	Addition gleichfrequenter Schwingungen	15
4.2	Addition nicht gleichfrequenter Schwingungen	17
5	Schwingungen in der Ebene (Lissajous)	21
	Konstruktion von Lissajous-Figuren	23
	Zusammenfassung	24
6	Harmonische Synthese	25
7	Harmonische Analyse	27
7.1	Fourierreihen	27
7.2	Harmonische Analyse in der Maschinendynamik	31
8	Schwinger mit einem Freiheitsgrad	38
8.1	Längsschwinger	38
8.2	Drehschwinger, gefesselt, eine Drehmasse	41
9	Pendelschwingungen	43
9.1	Mathematisches Pendel	43
9.2	Parametrische Anregung	44
9.3	Physisches Pendel	45
	reduzierte Länge	46
9.4	Manometerschwingungen	48
10	Anteil der Federmasse	50
11	Phasendiagramm	53
11.1	Phasenebene	53
11.2	Starke Dämpfung	56
11.3	Nicht lineare Schwinger	57
11.4	Pendel im Schwerfeld	58

11.5	Zusammenfassung	61
11.6	Schwingungen, Spiralen	62
11.7	Fraktale	66
12	Attraktor, Grenzykel	69
13	Federn mit rechtwinkliger Belastung	71
14	Betriebsdrehzahl und Resonanz	73
15	Energie und Lagrange	75
15.1	Energiediagramm	75
15.2	Lagrange'sche Gleichungen zweiter Art	76
16	Zusammenschalten von Federn, Rahmen	84
16.1	Parallelschaltung	84
16.2	Hintereinanderschaltung	85
16.3	Rahmen	85
17	Mehrfach besetzte Wellen	87
17.1	n -fach besetzte Wellen, Biegung	88
18	Biegekritische Drehzahl einer Welle mit Einzelmasse	89
19	Superposition	91
20	Energiemethode von Rayleigh	92
	Mehrmassensystem, Energiemethode	92
	Näherungsverfahren nach Rayleigh	92
21	Sätze von Maxwell, Betti, Dunkerley	94
21.1	Einflußzahlen α , Formänderungsarbeit	94
	Welle mit n -Massen (Lösung nach Dunkerley)	99
21.2	Welle mit n -Massen (Lösung mit Hilfe der Einflußzahlen)	100
22	Federgefesselter Drehschwinger	101
22.1	Einfluß des Massenträgheitsmomentes	101
	Trägheitsradius	103
	reduzierte Masse	103
	Drehfederkonstante c_{Dreh}	103
22.2	Einfluß der Gewichtskraft	103
22.3	Einfluß der Dämpfung	105
22.4	Einfluß von Zusatzmassen	106
23	Torsionsschwingungen	107
23.1	Drehschwinger, zwei Drehmassen	107
	a) mit konstantem Wellendurchmesser	107
	b) mit eingeleitetem Moment	109

	c) Matrizenform	111
23.2	Drehschwinger, zwei Drehmassen	113
	mit abgesetztem Wellendurchmesser	113
23.3	Getriebeschwingungen, Ersatzsystem	114
23.4	Mehrmassenschwinger Torsion	119
	3-Drehmassensystem	119
	n -Drehmassensystem	121
24	Freie gedämpfte Schwingung	123
24.1	DGL der freien gedämpften Schwingung	124
24.2	Charakteristische Gleichung	125
24.3	Periodischer Fall	128
24.3.1	$\vartheta = 0$	128
24.3.2	$0 < \vartheta < 1$	128
24.4a	Logarithmisches Dekrement	130
24.4b	Extreme und Berührungspunkte	132
24.5	Aperiodischer Grenzfall $\vartheta = 1$	133
24.6	Aperiodischer Fall $\vartheta > 1$	135
25	Erzwungene Schwingung	137
25.1	Erzwungene gedämpfte Schwingung	137
25.2	Federkrafterregung	137
	Phasenfrequenzgang	140
	Vergrößerungsfunktion V_1	141
	Zusammenhang V_1 , $\hat{x}$, $\hat{p}$ und φ	145
25.3	Massenkrafterregung	146
	Zusammenfassung V_1 und V_3	148
25.4	Durchlässigkeit, Schwingungsleitfähigkeit $V_2 = V_D$	150
25.5	Isolierfaktor	157
25.6	Fallbeispiele der Anregung	158
25.7	Zusammenstellung V_1 , $V_2 = V_D$, V_3 , V_4	161
	V_1	161
	$V_2 = V_D$	163
	V_3	167
	V_4	169
	Werkzeugmaschinen	171
26	Analogie von Mohr	172
	Biegeschwingungen von mehrfach besetzten und mehrfach abgesetzten Wellen	172
27	Auswuchttechnik	175
27.1	Unwucht	175
27.2	Unwuchtmasse, Unwucht, Auswuchtgüte	176
27.3	Allgemeine dynamische Unwucht = quasistatische Unwucht	177
27.4	Statische Unwucht	178
27.5	Momentenunwucht = rein dynamische Unwucht	179

27.6	Unwuchtkreuz	179
27.7	Unwuchresultierende Unwuchtmoment, Unwuchtdynamik	181
27.8	Auswuchtmaschine	184
28	Koppelschwingungen	186
28.1	Erhöhung der Freiheitsgrade (Translation)	186
	n -Massen	189
28.2	Tilgung	193
28.3	Translation und Rotation	197
	Elastische Wellenlagerung	200
29	Dämpfung durch trockene Reibung	201
	Coulomb'sche Reibung	201
30	Sonderthemen	206
30.1	Wirbelbildung an Bauteilen	206
30.1.1	Strouhalzahl	207
30.1.2	Grenzschicht	208
30.1.3	Ablösung	211
30.1.4	Wirbelbildung	212
30.1.5	Kármánsche Wirbelstraße	212
30.1.6	Tragflügel und Selbsterregung	213
30.2	Meßtechnik	214
	DMS = Dehnungsmeßstreifen	214
	Induktive Geber	219
30.3	Ordnung und Chaos	221
30.4	Frequenzen und Wellen	227
30.5	Erdbeben und Schwingungen	230
	Vulkane und Schwingungen	242
30.6	Instationäre Strömungen in Leitungen	244
31	Beispiele	249
	Aufgaben	249
	Lösungen	276
32	Zeichenkatalog	338
33	Formelsammlung	343
	Flächenträgheitsmomente (axial)	369
	Massenträgheitsmomente	370
	Verformung von Biegeträgern (Tabelle)	371
34	Hilfe ☹	372
35	Literaturhinweise	382
36	Sachwortverzeichnis	384

Alles fließt
(Heraklit, um 500 v.Chr.)

1 Einleitung

Es gibt in unserer Welt praktisch keinen Stillstand. Das, was uns als unveränderlich erscheinen mag, ist trotzdem veränderlich, denn es unterliegt der Zeit. Dabei kann der Zeitraum, in dem es zu Veränderungen kommt, beliebige Größen annehmen, und die Tatsache, daß uns diese Veränderungen nicht immer wahrnehmbar erscheinen, ändert am Lauf der Zeit nichts.

Dabei können sich Vorgänge in bestimmten Größen wiederholen. Es lassen sich Perioden angeben, in denen mit genügender Genauigkeit bestimmte Größen wiederkehren. Sei es der Tag-Nacht-Rhythmus, der Monats-, Jahreszyklus, beliebige Größen der belebten und unbelebten Natur.

In Kap. 3 wird in der Einleitung auf diese Vorgänge näher eingegangen und die Chaostheorie herangezogen, die viele Vorgänge erkennbarer gemacht hat (Kap. 11 u. Kap. 30).

In diesem Buch sollen die allgemeinen Grundlagen der periodischen Vorgänge untersucht werden, die bei Maschinen eine Rolle spielen, wobei die Grundlagen eben Grundlagen bleiben müssen. Das heißt aber auch, daß spezielle Anwendungen und Lösungen zwangsläufig fehlen müssen. Sie sind der umfangreichen Spezialliteratur vorbehalten, setzen zu ihrem Verständnis aber auch ein umfangreiches Spezialwissen voraus. Hinzu kommt, daß sich in der industriellen Praxis die Probleme so differenziert entwickelt haben, daß die Industrie selbst für die jeweiligen Spezialgebiete die Fortbildung nach dem Hochschulabschluß für ihre eigenen Anforderungen und Probleme übernommen hat.

Daher kann und muß eine Hochschule die Grundlagen so gefächert bieten, daß in jeder Richtung eine Weiterbildung möglich ist, ohne bereits spezielle Richtungen zu bevorzugen.

Maschinendynamik ist an einer Hochschule ein Fach, das nach dem Vorexamen gelesen wird und damit die Fächer Mathematik und Mechanik und natürlich Physik voraussetzt. Darauf baut auch dieses Buch auf.

Anmerkung: Das bestimmende Werkzeug im heutigen Konstruktionsbüro ist der Computer, der Laptop und der programmierbare Taschenrechner. Darauf baut die Schreibweise der Formeln und Lösungen in diesem Buch auf.

1. Für die Bezeichnung der Dezimalstellen ist die Schreibweise E gewählt (Beispiel):
2,1E7 statt $2,1 \cdot 10^7$.
2. Für Schraubenfedern ist nach DIN 2089 (und folgenden) die Federkonstante c durch den Begriff Federrate R ersetzt worden. Da in der Maschinendynamik jedes Bauteil als elastisch angesehen wird, das dem Hooke'schen Gesetz folgt, wird der Begriff Federkonstante c als allgemein gültige Größe für alle Bauteile beibehalten. Daher wird für die Federkräfte an Bauteilen geschrieben:
 $F = c \cdot x$ statt $F = R \cdot x$.
In der Physikliteratur und in Programmen für die Simulation dynamischer Systeme findet man außerdem noch die Federkonstante als Hook'sche Konstante D , wobei dann gelegentlich der Hinweis zu finden ist: "nicht zu verwechseln mit dem Dämpfungsgrad D (Lehrschen Dämpfungsmaß)", siehe Kap. 24. Entsprechend DIN 1311, Blatt 2 wird in diesem Buch der Dämpfungsgrad mit ϑ bezeichnet.
3. In den Kapiteln, in denen die Methoden der Festigkeitslehre angewandt werden (19, 20, 21, 26 und in der Tafel - Verformung von Biegeträgern -), werden die Bezeichnungen der Achsen aus der Festigkeitslehre übernommen (Stablängsachse = x , Durchbiegung = y). Die Ausnahme bildet Kap. 10, da dort die Gleichungen der Schwingungslehre mit dem Weg x und der Amplitude $\hat{x}$ übernommen werden.
4. Viele Gleichungen nehmen einen erheblichen Platz ein, deshalb werden Einheiten erst beim Ergebnis geschrieben, da die Eingabe in der Praxis nur die Zahlen enthält. So soll bereits in diesem Buch eine praxisgerechte Benutzung des Computers geübt werden. Alle Größen müssen daher *vorher* in ihren Einheiten abgestimmt werden.
5. Bei Schwingungsgleichungen der Form $x = \hat{x} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$ ist eine harmonische Funktion mit einem Faktor (z.B. $\hat{x}$) verbunden. Dieser Faktor wird als Amplitude bezeichnet und stellt nach Abb. 3-2-2 einen rotierenden Zeiger dar. Die Amplitude ist von Vorzeichen frei. Ihre Lage wird durch die harmonische Funktion bestimmt. Deshalb wird auch z.B. in (4-1-8) bei der Lösung der Wurzel auf das $\pm$ Vorzeichen verzichtet.
6. Formeln sind im Buchsatz geringfügig verschieden, je nachdem, ob sie innerhalb des Textes als Text oder mit dem Formeleditor geschrieben sind.
Als Beispiel: $F = c \cdot x$ wird mit dem Formeleditor innerhalb des Textes so aussehen: $F = c \cdot x$. Damit wird auch der Zeilenabstand geringfügig verändert. Fast alle Formeln sind mit dem Editor geschrieben.

2 Schwingungstechnische Grundbegriffe

2.1 Definition der Schwingung

Wiederholt sich ein Vorgang nach der Zeit T , so nennt man ihn periodisch. Tritt dann eine Größe (z.B. der Weg, den ein Körper zurücklegt) nach dem gleichem Zeitelement wieder auf, dann spricht man von einer Schwingung.

Hier soll nun immer wieder die Frage gestellt werden, wie sich eine Masse (Maschine $\Rightarrow$ Maschinenteil) unter dem Einfluß von periodisch veränderlichen Kräften verhält.

Dazu ist es erforderlich, sich auf bestimmte Regeln (der Sprache, der Formelschreibung usw.) zu einigen, um Mißverständnissen vorzubeugen, die katastrophale Folgen haben können.

Wenn sich ein Vorgang nach einem Zeitraum $T = \Delta t$ wiederholt, dann muß auf ihn die Aussage zutreffen

$$x(t) = x(t + \Delta t) .$$

Diese Gleichung sagt lediglich aus, daß nach einer Periode (der Zeit $T = \Delta t = t_2 - t_1$) wieder der gleiche Ort (Weg = s) erreicht ist. Damit muß es aber auch eine Position geben, aus der die Bewegung begonnen hat und in der nach Aufzehrung der Bewegungsenergie wieder der Ruhezustand erreicht wird. Das ist die Null-Lage.

Unter einer Schwingung versteht man in der Dynamik die Pendelbewegung einer Masse um ihre Null-Lage. Sie wird als

freie ungedämpfte Schwingung

bezeichnet, wenn während der betrachteten Zeit weder Energie zugeführt oder/und entzogen wird. Beim einfachen Schwinger wechselt dabei z.B. die Energie von der potentiellen Energie zu der kinetischen Energie und umgekehrt (Kap.15). Der freie ungedämpfte Schwinger besitzt nur diese beiden Energien.

Luft- und Reibwiderstände sind dabei im Vergleich zur rückstellenden Federkraft vernachlässigbar gering.

a) Lineare Schwingung

Die Differentialgleichung dieser freien ungedämpften Schwingung ist

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0 \quad (\text{siehe 3-1-4})$$

Der Begriff linear bezieht sich auf den zweiten Summanden $c \cdot x = F_{\text{Feder}} = \text{Federkraft}$. Ist die Federkraft proportional zur Auslenkung, so ist die Federkennlinie linear. Nicht lineare Schwinger werden in Kap.11.3 behandelt.

b) Schwingung mit einem Freiheitsgrad (siehe auch 2.2)

Die Schwingung erfolgt längs einer Geraden oder um eine Achse.

c) Freie Schwingung

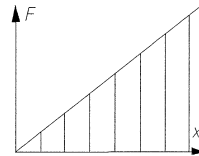
Dem System wird während der betrachteten Zeit weder Energie zugeführt noch entzogen.

- d) **Erzwungene Schwingung**
Dem System wird Energie zugeführt, das System wird zum Schwingen gezwungen (Fremderregung).
- e) **Ungedämpfte Schwingung**
Der Schwingung wird keine Energie entzogen. Verluste durch Reibung sind vernachlässigbar klein.
- f) **Gedämpfte Schwingung**
Der Schwingung wird Energie entzogen. Das kann durch innere oder äußere Reibung geschehen. Die Bewegung kann periodisch oder aperiodisch sein und als Sonderfall dem aperiodischen Grenzfall entsprechen. Die aperiodische Bewegung stellt sich als Kriechvorgang dar.
- g) **Angefachte Schwingung**
Der Schwingung wird ständig mehr Energie zugeführt als verbraucht wird. Die Amplituden werden ständig weiter wachsen (siehe Kap. 3).
- h) **Harmonische Bewegung**
Die Schwingung ist frei, ungedämpft, linear (auch erzwungen ohne Dämpfung).
- i) **Elastische Schwingung**
Die Rückstellkraft ist eine Federkraft.
- j) **Pendelschwingung**
Die Rückstellkraft wird durch das Schwerfeld bewirkt.

Zu a) Lineare Kennlinie (Schraubenfedern):

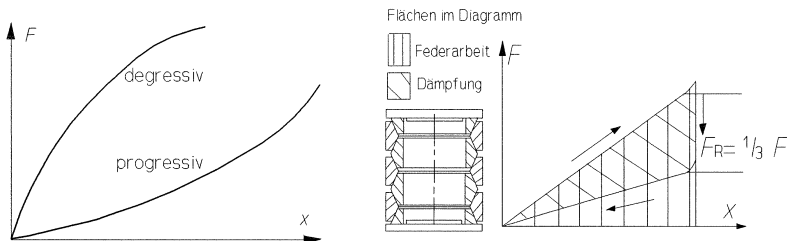
Die Federkraft beträgt $F_F = c \cdot x$; mit c (Federkonstante) ergibt die schraffierte Fläche die potentielle Arbeit

$$W_p = \frac{1}{2} \cdot F \cdot x = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x^2. \quad (2-2-1)$$



Während meist mit einer linearen Kennlinie in der Maschinendynamik gearbeitet wird, darf nicht vergessen werden, daß Federn mit nicht linearer Kennlinie häufig sind.

Progressive Kennlinie: Gummifedern (besonders zur Dämpfung bei der Lagerung zum Auffangen von Schwingungen und/oder Stößen).



Degressive Kennlinie: Tellerfedern (besonders um hohe Kräfte bei kleinen Federwegen aufzufangen).

Eine besondere Kennlinie hat die Reibungsfeder RINGFEDER®, bei der im Diagramm die Gesamtfläche die Federarbeit und die schrägschraffierte Fläche die Dämpfung darstellt. Große Bewegungsenergien können bei geringen Abmessungen und Gewichten geschwindigkeits- und temperaturunabhängig aufgenommen werden. Die Gleitflächen haben eine Lebensdauerschmierung.

2.2 Schwingungstechnische Ersatzbilder und Freiheitsgrade

Die Zahl der Freiheitsgrade wird durch die Anzahl der Koordinaten bestimmt, die notwendig sind, um eine Bewegung in eindeutiger Weise zu beschreiben.

Beispiele:

Freiheitsgrad 1

Es ist der Fall, auf den ein Schwingungsvorgang am häufigsten reduziert werden kann. Meist kann man ein Problem durch Vereinfachung auf diesen Fall zurückführen. Ist eine Dämpfung vorhanden, so wird sie in der gleichen Richtung wirken. Der Freiheitsgrad wird dadurch nicht verändert.

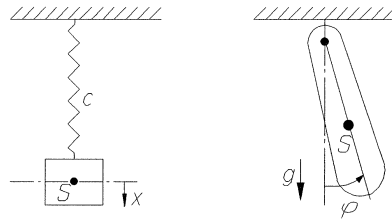


Abb. 2-2-1 Freiheitsgrad 1

Freiheitsgrad 2

Dieser Fall wird in Kap. 28 (Koppelschwingungen) behandelt. Dazu wird in Kap. 28 auch die Tilgung von Schwingungen untersucht. Außerdem werden dort Schwingerketten beschrieben, bei denen die Anzahl der Massen auf n erhöht wird. Dann wird dementsprechend die Anzahl der Koordinaten auf n -Koordinaten erhöht. Bei großen Ausschlägen des Pendels kann allerdings chaotisches Verhalten auftreten. (Nähere Angaben in Kap. 11). Das gilt für alle Freiheitsgrade.

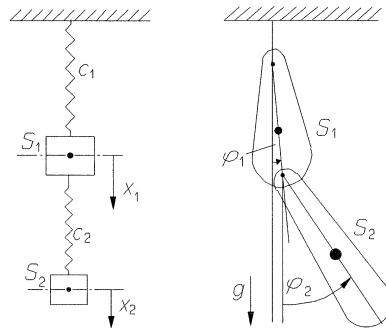


Abb. 2-2-2 Freiheitsgrad 2

Freiheitsgrad 6

Längsbewegungen sind in den Richtungen der drei Achsen möglich. Außerdem können auch Drehbewegungen um die drei Achsen erfolgen. Damit sind 6 Koordinatenangaben erforderlich.

Siehe Kap. 15.2 Lagrange'sche Gleichungen zweiter Art und generalisierte Koordinaten.

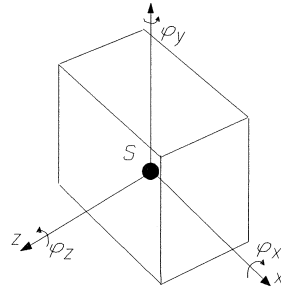


Abb. 2-2-3 Freiheitsgrad 6

Weniger Freiheitsgrade können durch Führungen erreicht werden. Die Abbildung zeigt eine typische Fundamentlagerung einer Maschine. Die Freiheitsgrade werden durch die Rollenführung reduziert.

Außerdem ist das Fundament gedämpft gelagert. Über Vor- und Nachteile dieser Lagerung und die Weiterleitung von Kräften in die Umgebung siehe Kap. 25.4 und Kap. 25.5.

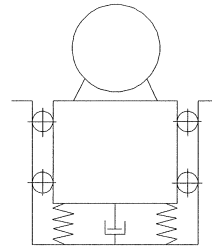


Abb. 2-2-4 Reduktion der Freiheitsgrade

3 Amplituden-Zeit-Diagramm

3.1 Grundformel

In Kap. 2 sind die Grundbegriffe der Schwingung dargestellt worden, wie sie auf allen Gebieten in Erscheinung treten. Schwingungsperioden werden meist den Naturwissenschaften zugeordnet, sind aber ebenso in den anderen Wissenschaften (bis zur Medizin - Kap. 30.4; Theologie - Kap. 12) nachweisbar, auch wenn sie dort nicht in dieser Form behandelt werden.

Betrachtet man die Entwicklung auf allen Gebieten, der belebten und unbelebten Natur, der Völker, der Religionen, Esoterik usw., so wird man auch dort Zeichen einer Auf- und Abwärtsentwicklung finden, die häufig Perioden erkennen lassen (Populationen in geschlossenen Systemen).

Gerade in der Literatur der Chaostheorie finden sich Autoren völlig unterschiedlicher Fachrichtungen zusammen.

Novalis (Friedrich Leopold Freiherr von Hardenberg 1772-1801; von ihm stammt bereits der Gedanke einer Wiedervereinigung Europas in der Bildung eines "Staates der Staaten") prägte den Begriff "Das sensible Chaos" und nannte so das Wasser. (Siehe Kap. 11 und Wirbelbildung und Schwingungen in Kap. 30.1 und Kap. 30.3 - Sonderthemen).

Theodor Schwenk hat bereits 1962 in seinem Buch "Das sensible Chaos" ausführlich aus geisteswissenschaftlicher Sicht Wirbelbildungen in Luft und Wasser beschrieben und mit vielen Fotos und Zeichnungen belegt. Allerdings fehlten ihm die mathematischen Erkenntnisse und technischen Möglichkeiten unserer Zeit. In diesem Buch finden sich dann auch die Hinweise auf Leonardo da Vinci, Goethe, Novalis, Hegel.

Ein Beispiel der neuen Veröffentlichungen ist das Buch von Briggs (Psychologe) und Peat (Physiker) "Die Entdeckung des Chaos" (1990), die das Thema mit den heutigen Mitteln der Mathematik und insbesondere der Computertechnik behandeln. Dort finden sich sehr ausführliche Literaturverzeichnisse.

Es zeigt sich, daß die Zusammenhänge so kompliziert sein können, daß man zwangsläufig auf Modelle zurückgreifen muß, um Berechnungen mit Erfolg durchführen zu können. Dabei ist es notwendig, soweit es möglich ist, die Vorgänge zu messen. Gerade die Genauigkeit der heutigen Meß- und Analysegeräte verführt dann dazu, einen unverhältnismäßigen Aufwand zu treiben. Nach dem Motto: **"mit möglichst geringem Aufwand an Geräten und Zeit >genügend< genau zu messen"**, sollte man auch die Berechnungen durchführen. Daher werden die Vorgänge auf Ersatzsysteme zurückgeführt.

Ersatzsystem

Die Abb. 3-1-1 zeigt das einfachste System, das schwingungsfähig ist. Da die Trägheitskraft $F_T = m \cdot \ddot{x}$ mit der Beschleunigung verbunden ist und die Beschleunigung $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ ist, wird damit der Vorgang durch eine Differentialgleichung beschrieben.

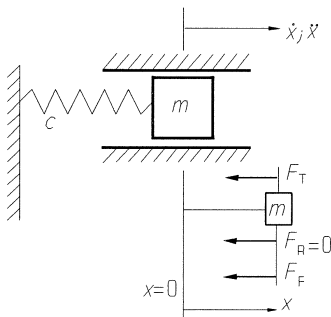


Abb. 3-1-1 Ein-Massen-Schwinger

Ein System wird auf ein Ersatzsystem zurückgeführt. Man kann grundsätzlich eine Schwingung zu jedem beliebigen Zeitpunkt betrachten. Sieht man sich die Abb. 3-3-1 an, so findet man die sich ständig wechselnden Vorzeichen von Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Es ist deshalb sinnvoll, die Bewegung unmittelbar am Beginn zu betrachten, d.h. ab dem Augenblick, in dem die äußere Einwirkung (Kraft, Moment) beendet ist, der Körper sich selbst überlassen ist und dann den Vorgang nach den Gesetzen der Statik zu behandeln. Die Reibung wird zunächst vernachlässigt.

Nach dem Gesetz von Newton gilt für die Bewegung eines Massenpunktes

$$F = m \cdot \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad F - m \cdot \ddot{x} = 0 . \quad (3-1-1)$$

Führt man die d'Alembertsche Trägheitskraft ein, mit

$$F_T = -m \cdot \ddot{x} , \quad (3-1-2)$$

so erhält man

$$F + F_T = 0 . \quad (3-1-3)$$

Dabei ist F die Resultierende aller Kräfte, die an der Masse m angreifen, während F_T eine Scheinkraft darstellt (zu ihr existiert keine Gegenkraft). Daher stellt die Gleichung (3-1-3) ein dynamisches Gleichgewicht dar. Andererseits kann man durchaus die Formulierung benutzen: "Summe aller Kräfte gleich Null", wenn man zu den angreifenden äußeren Kräften noch die Trägheitskraft hinzufügt.

Es wirkt eine Kraft, die der Bewegung entgegengesetzt ist:

Federkraft $F_F = c \cdot x$.

Mit der Trägheitskraft $F_T = m \cdot \ddot{x}$

erhält man

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0 . \quad (3-1-4)$$

Durch Umformen wird daraus die Standardgleichung einer Schwingung

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0 . \quad (3-1-5)$$

Später wird dann für den Koeffizienten von x , in diesem Fall c/m , der Ausdruck

$$\omega_0^2 , \text{ mit } \omega_0 = \sqrt{c/m} \quad \text{Eigenkreisfrequenz,}$$

eingeführt. Dabei können im Ausdruck für ω_0 eine Reihe von Größen vorkommen (siehe

Kap. 22). Hier ist in der Eigenkreisfrequenz im Zähler nur die Federkonstante und im Nenner die Masse enthalten. Sowohl Zähler als auch Nenner können entsprechende Erweiterungen je nach Aufgabenstellung erhalten (siehe z.B. Kap. 8.2).

3.2 Translationsschwingung

Die Beschreibung einer sich wiederholenden Bewegung ist durch die Betrachtung der Bewegung auf einer Kreisbahn leicht zu realisieren (Abb. 3-2-1). Projiziert man die Bewegung auf eine zeitabhängige Darstellung, indem man die Zeit auf der x -Achse und den Weg auf der y -Achse darstellt, so wird die Projektion eine sin-Kurve sein.

Ebenso kann man das Funktionsbild nach links projizieren und damit die durch eine Federkraft beeinflusste Bewegung einer Masse darstellen.

Eine Masse hängt an einer Feder in der Ruhelage $x = 0$. Die Masse wird nach unten ausgelenkt. Man kann die Bewegung in Form eines Zeigerdiagrammes und in einem Weg-Zeit-Diagramm darstellen:

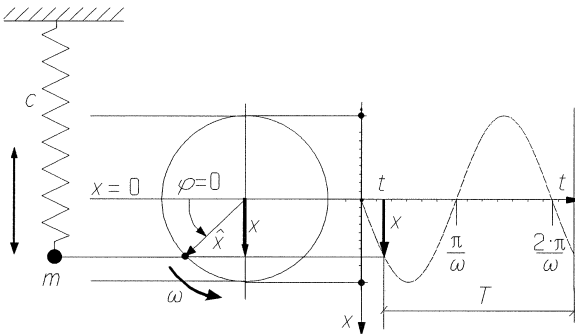


Abb. 3-2-1 Zeigerdiagramm, Weg-Zeit-Diagramm

Es werden bezeichnet:

Schwingdauer

$$T = 2 \cdot \pi / \omega$$

Amplitude = Schwingweite = Höchstausschlag

$$\hat{x}$$

Phasenwinkel (Bogenmaß)

$$\omega \cdot t$$

Kreisfrequenz

$$\omega$$

Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0$$

Ausführlich wird dieser Schwinger im Kap. 8 behandelt. Dort befinden sich die ausführlichen und in der Praxis gebräuchlichen Formeln.

Der Ansatz für den Weg ist

$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (3-2-1)$$

Die Ableitungen für Geschwindigkeit und Beschleunigung sind

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \omega \cdot \hat{x} \cdot \cos(\omega \cdot t) , \quad (3-2-2)$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot \underbrace{\hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t)}_{= \ddot{x}} . \quad (3-2-3)$$

Der zweite Teil der Formel (3-2-3) ist identisch mit der Formel (3-2-1), die man hier einsetzen kann

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x . \quad (3-2-4)$$

Damit ist die allgemeine Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 . \quad (3-2-5)$$

Vergleicht man (3-2-5) mit (3-1-5), so sind die Gleichungen identisch bis auf die Ausdrücke ω^2 und c/m . Daraus kann man schließen, daß auch diese beiden Ausdrücke identisch sind. c und m sind bei einem Feder-Masse-System konstante Größen. Es wird deshalb ω mit dem Index 0 versehen und als Eigenkreisfrequenz definiert

$$\omega_0^2 = c / m .$$

Damit ist die Unterscheidung zu der Kreisfrequenz $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ sichergestellt.

Das Maximum für Geschwindigkeit und Beschleunigung ergibt sich aus der Bedingung, daß $\sin(\omega \cdot t)$ bzw. $\cos(\omega \cdot t)$ für sich jeweils 1 sein müssen. Einen größeren Wert können sie nicht annehmen. Eingesetzt in (3-2-2) und (3-2-3) folgt

$$\dot{x}_{\max} = v_{\max} = \hat{v} = \omega \cdot \hat{x} , \quad \ddot{x}_{\max} = a_{t \max} = \hat{a}_t = -\omega^2 \cdot \hat{x} . \quad (3-2-6)$$

Diese Gleichungen für die Maximalwerte werden bei späteren Ableitungen immer wieder verwendet. Hierbei ist $a_{t \max}$ die maximale Tangentialbeschleunigung.

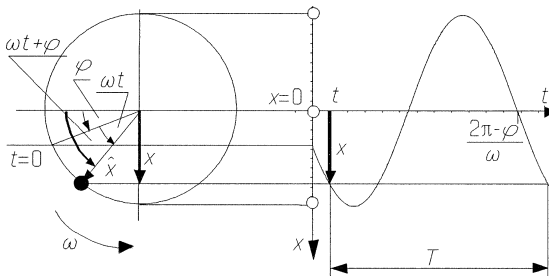


Abb. 3-2-2 Nullphasenwinkel φ

In Abb. 3-2-2 hat die Bewegung bereits begonnen, wenn die Zeitmessung mit $t = 0$ beginnt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Winkel φ zurückgelegt. Führt man den Nullphasenwinkel φ ein, so kann man die Schwingung zu jedem beliebigen Zeitpunkt beginnen lassen.

In der gleichen Weise werden wie in (3-2-1) die Gleichungen gebildet und differenziert

$$\dot{x} = \dot{x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) , \quad (3-2-7)$$

$$\dot{x} = \omega \cdot \dot{x} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) , \quad (3-2-8)$$

$$\ddot{x} = - \omega^2 \cdot \underbrace{\dot{x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)}_{= x} . \quad (3-2-9)$$

Das Maximum für Geschwindigkeit und Beschleunigung ergibt sich aus der Folgerung, daß $\sin(\omega \cdot t + \varphi)$ bzw. $\cos(\omega \cdot t + \varphi)$ maximal jeweils 1 sein können. Einen größeren Wert können sie nicht annehmen. Auch hier gilt wieder (3-2-6). Damit kann durch die Wahl des Nullphasenwinkels φ eine sin-Schwingung in eine cos-Schwingung überführt werden und umgekehrt. Bei den inhomogenen Differentialgleichungen macht man von der Möglichkeit, den partikulären Teil in sin- oder cos-Form anzusetzen, gern Gebrauch.

Mit Hilfe der Additionstheoreme der Trigonometrie erhält man durch Umformen

$$x = \dot{x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = \dot{x} \cdot (\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi + \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi) , \quad (3-2-10)$$

$$x = \underbrace{\dot{x} \cdot \cos \varphi}_{= A} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \underbrace{\dot{x} \cdot \sin \varphi}_{= B} \cdot \cos(\omega \cdot t) . \quad (3-2-11)$$

Die unterstrichenen Ausdrücke sind Konstante und werden ersetzt:

$$A = \dot{x} \cdot \cos \varphi , \quad B = \dot{x} \cdot \sin \varphi . \quad (3-2-12)$$

Damit kann man (3-2-7) auch in einer Addition darstellen:

$$x = \dot{x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t) . \quad (3-2-13)$$

Jede Schwingung läßt sich also durch eine sin-Schwingung mit Nullphasenwinkel φ oder durch die Summe aus einer sin-Schwingung und einer cos-Schwingung darstellen.

Die Amplituden im Weg-Zeitdiagramm können in der Maschinendynamik ebenso als Kräfte aufgefaßt werden, da die Federkräfte ($F = c \cdot x$) mit dem Weg verbunden sind. Bei instationären Gasströmungen (siehe Literaturverzeichnis Wilhelm/Jürgler und Kap. 30.6) können diese Amplituden auch Drücke darstellen, wobei über $p = F/A$ die Kraft enthalten ist.

Beispiel: Bei Motoren kann man das verbrannte Gemisch im Zylinderraum besonders gut absaugen, wenn im anschließenden Rohrsystem Unterdruck vorhanden ist. Durch einen Diffusor (stetige Rohrerweiterung) wird der Druck am Beginn des Diffusors kleiner als an seinen Ende (Austritt - Auspuff). Da das System eine periodische Druckänderung durch die Kolbenbewegung aufbaut, laufen Überdruck- und Unterdruck-Amplituden in einer Wellenbewegung durch und werden am Ende reflektiert. Ist das System gut abgestimmt, kommt beim Öffnen des Austrittsventiles eine Unterdruck-Amplitude am Auslaß an und saugt

zusätzlich ab. Bei schlechter Abstimmung (Basteln am Auspuff - Zweck: stärkerer Sound für die Umgebung) kann aber auch eine Überdruck-Amplitude zu diesem Zeitpunkt vor dem Auslaß stehen und damit die Spülung erheblich verschlechtern (Kap. 30.6).

3.3 Vektorbild der Schwingung

Darstellung von Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung:

Weg	x
Geschwindigkeit	dx/dt
Beschleunigung	d^2x/dt^2

Trägt man die Weg-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfunktionen über der Zeitachse auf, so erhält man die Zuordnung im Zeit-Diagramm und im Zeigerdiagramm. Hier sind die Amplituden beliebig angenommen worden. Da mit dem Weg die Federkraft, mit der Geschwindigkeit die Dämpfungskraft und mit der Beschleunigung die Trägheitskraft verbunden ist, müssen die Richtungen der Vektoren streng beachtet werden. Im Kap. 25 werden die Kräfte ausführlich behandelt. Außerdem kommen weitere Kräfte hinzu. Durch Differentiation wechselt der sin zum cos und zum -sin. Daher stehen die Zeiger von Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung jeweils senkrecht zu einander. (3-2-1) - (3-2-3).

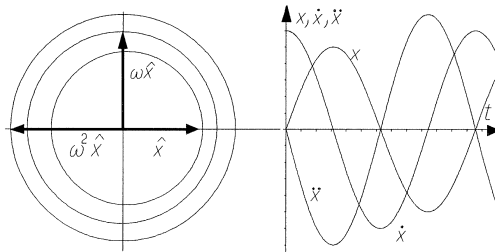


Abb. 3-3-1 Vektorbild

Schwierigkeiten macht immer wieder die Wahl der Vorzeichen für die Aufstellung der Gleichungen.

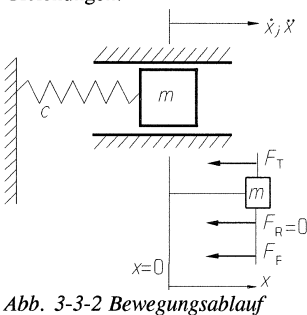


Abb. 3-3-2 Bewegungsablauf

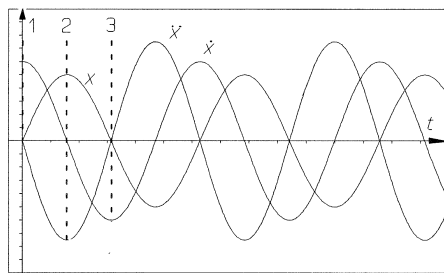


Abb. 3-3-3 Weg-, Geschwindigkeits-, Beschleunigungsfunktion

Den Bewegungsablauf kann man mit den Funktionsbildern für den Weg, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung über der Zeit auftragen.

Im Zustand 1 befindet sich die Masse im Nulldurchgang, dabei hat die Geschwindigkeit den maximalen Wert und die Beschleunigung ist Null.

Im Zustand 2 ist die Masse im oberen Totpunkt ($\Rightarrow \hat{x}$), die Geschwindigkeit Null und die Beschleunigung im negativen Maximum.

Im Zustand 3 sind Weg und Beschleunigung gleich Null, während die Geschwindigkeit im negativen Maximum ist.

Für die Berechnungen der Getriebetechnik sind die einzelnen Zeitpunkte von entscheidender Bedeutung. Für die grundsätzliche Aufstellung der Schwingungsgleichung ist der Ansatz nach (3-1-3) zu wählen, besonders im Hinblick auf die Vorzeichen. Dieser Ansatz beschreibt den Zustand in dem Augenblick, in dem die Masse angestoßen worden ist und der Schwingungsvorgang beginnt. Die Getriebetechnik ist ein eigenes Fachgebiet, es gibt hierfür eine umfangreiche Spezialliteratur.

Im Kap. 2 wurde bei der Definition der Schwingungen in den Punkten f) und g) zwischen gedämpften und angefachten Schwingungen unterschieden. In diesem Kapitel und in den nächsten Kapiteln werden Schwingungen behandelt, denen weder ständig Energie zugeführt wird, noch durch Reibung Energie entzogen wird. Deshalb sollen hier zunächst die Funktionsbilder von Schwingungen zu f) und g) gezeigt werden.

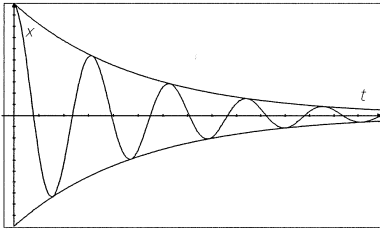


Abb. 3-3-4 Gedämpfte Schwingung

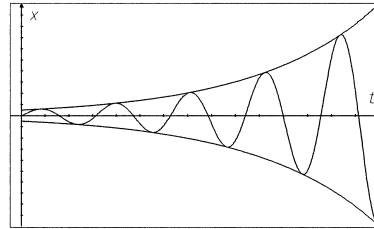


Abb. 3-3-5 Angefachte Schwingung

Im Fall f) wird Energie verbraucht (z.B. durch Reibung in Wärme umgewandelt). Das kann durch Dämpfung erfolgen.

Im Fall g) wird ständig Energie zugeführt. Das kann auf verschiedene Weise geschehen. Als Beispiele sollen angeführt werden: eine Unwucht auf einer rotierenden Welle erzeugt eine Auslenkung der Welle, das Schalten eines Getriebes erzeugt wechselnde Drehmomente und damit Drehschwingungen.

Ist das ganze System nicht im Gleichgewicht, so werden die Amplituden im Fall 2.1.f (Abb. 3-3-4) abnehmen und im Fall 2.1.g (Abb. 3-3-5) zunehmen (siehe Text in Kap. 2.1).

3.4 Realteil, Imaginärteil

Nach Euler ist (siehe auch (24-2-10))

$$e^{j \cdot \varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi \quad \text{mit} \quad \varphi = \omega \cdot t, \quad (3-4-1)$$

$$e^{j \cdot \omega \cdot t} = \cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t). \quad (3-4-2)$$

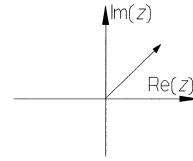


Abb. 3-4-1

Damit kann man die Summanden in der Gauß'schen Zahlenebene als einen Zeiger darstellen, dessen Länge $\hat{x}$ ist, dabei ist die übliche Darstellung Abb. 3-4-1.

$$z = f(t) = \hat{x} \cdot (\cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t)). \quad (3-4-3)$$

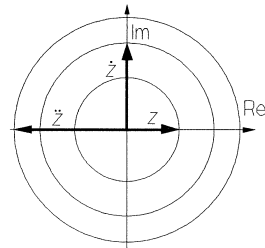


Abb. 3-4-2

Dann wird Abb. 3-3-1 zu Abb. 3-4-2 mit (siehe auch (3-2-6))

$$z = \hat{x}; \quad \dot{z} = j \cdot \omega \cdot \hat{x}; \quad \ddot{z} = -\omega^2 \cdot \hat{x}. \quad (3-4-4)$$

Der Weg x stellt den reellen Anteil dar, es wird deshalb das Koordinatensystem gedreht, um die x -Richtung beibehalten zu können. Für die Abb. 3-4-3 ist (entsprechend Abb. 3-2-2) die Gleichung einer Schwingung in der Schreibweise *reell*

$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \quad (3-4-5)$$

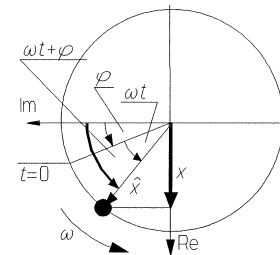


Abb. 3-4-3

und in der Schreibweise *komplex*

$$z = \hat{x} \cdot (\sin(\omega \cdot t + \varphi) + j \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)) = \hat{x} \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)}. \quad (3-4-6)$$

4 Ungedämpfte freie lineare Schwingungen

Es sollen zunächst Schwingungen betrachtet werden, die nicht an ein Problem des Maschinenbaues gebunden sind. Die Gleichungen haben allgemeine Gültigkeit und können Schwingungen aus jedem Gebiet der Naturwissenschaften beschreiben.

4.1 Addition gleichfrequenter Schwingungen

Haben zwei harmonische Schwingungen die gleiche Kreisfrequenz ω , so überlagern sie sich zu einer harmonischen Schwingung der gleichen Kreisfrequenz, aber mit einer neuen resultierenden Amplitude A und einem neuen Phasenwinkel φ . Es ist dann

$$A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) . \quad (4-1-1)$$

Mit dem Additionstheorem aus der Trigonometrie (die Bezeichnungen entsprechen einer trigonometrischen Formelsammlung) $\ominus$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

wobei $\sin(\omega \cdot t)$ und $\cos(\omega \cdot t)$ ausgeklammert werden, läßt sich die Gleichung umformen in

$$[A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2 - A \cdot \cos \varphi] \cdot \sin(\omega \cdot t) +$$

$$[A_1 \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin \varphi_2 - A \cdot \sin \varphi] \cdot \cos(\omega \cdot t) = 0 . \quad (4-1-4)$$

Da nicht für jedes t gilt, daß $\sin(\omega \cdot t)$ und $\cos(\omega \cdot t)$ gleichzeitig Null sind, ist die Gleichung (4-1-4) nur dann erfüllt, wenn die [] jeweils für sich Null sind. Indem man jede [] gleich Null setzt, erhält man so für die beiden Unbekannten A und φ aus einer Bestimmungsgleichung (4-1-4) die beiden unabhängigen Gleichungen

$$A \cdot \cos \varphi = A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2 , \quad (4-1-5)$$

$$A \cdot \sin \varphi = A_1 \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin \varphi_2 . \quad (4-1-6)$$

Das sind Gleichungen ersten Grades, sie werden quadriert und addiert $\ominus$. Daraus ergibt sich mit den Additionstheoremen der Trigonometrie (die Bezeichnungen entsprechen einer trigonometrischen Formelsammlung)

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \quad \text{und} \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

die Amplitude der resultierenden Schwingung A :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (4-1-8)$$

Durch Division der beiden Gleichungen erhält man die Phasenverschiebung

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin \varphi_2}{A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2} \quad (4-1-9)$$

Damit sind A und φ der resultierenden Schwingung bestimmt.

Es sind die Gleichungen, die aus der Geometrie als cos-Satz für das schiefwinklige Dreieck bekannt sind, wie sich in dem Zeigerdiagramm (Abb. 4-1-1) mit der Amplituden-Addition der Komponenten zeigen läßt $\ominus$.

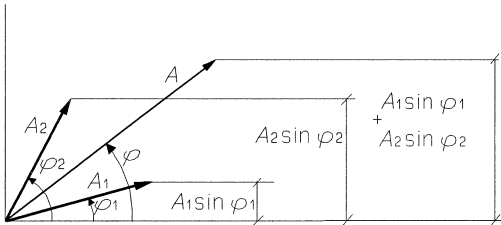


Abb. 4-1-1 Amplituden-Addition

Anschließend sollen zwei Fälle der Addition von Schwingungen mit gleicher Kreisfrequenz untersucht werden.

1. Geometrische Addition zweier Schwingungen ohne Phasenverschiebung mit $\omega = \text{const}$:

$$x_1 = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (4-1-10) \quad x_2 = B \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (4-1-11)$$

Als resultierende Schwingung erhält man eine Schwingung mit der neuen Amplitude C :

$$x_{\text{res}} = (A+B) \cdot \sin(\omega \cdot t) = C \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (4-1-12)$$

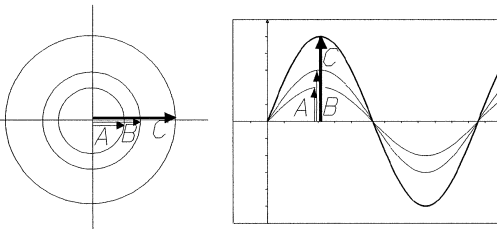


Abb. 4-1-2 Addition zweier Schwingungen

2. Mit einer Phasenverschiebung der Schwingung x_2 um φ und der Schwingung x_1

$$x_1 = A \cdot \sin(\omega \cdot t) , \quad (4-1-13) \quad x_2 = B \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) , \quad (4-1-14)$$

erhält die resultierende Schwingung die neue Amplitude C und die Phasenverschiebung γ

$$x_{\text{res}} = C \cdot \sin(\omega \cdot t + \gamma) . \quad (4-1-15)$$

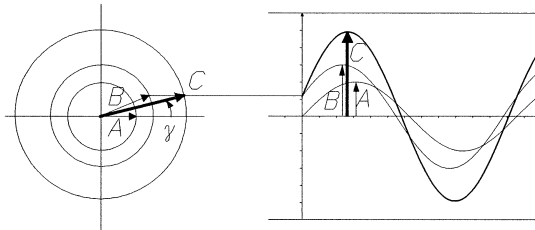


Abb. 4-1-3 Addition zweier Schwingungen

γ ist der Nullphasenwinkel der resultierenden Schwingung, der mit (4-1-9) ermittelt wird. Die Bezeichnung γ ist gewählt, um ihn von φ der Gleichung (4-1-14) zu unterscheiden.

4.2 Addition nicht gleichfrequenter Schwingungen

Es sind zwei Schwingungen mit verschiedener Amplitude und **verschiedener** Kreisfrequenz gegeben:

$$x_1 = A \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) , \quad (4-2-1)$$

$$x_2 = B \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) . \quad (4-2-2)$$

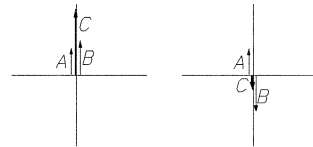


Abb. 4-2-1 C_{max} ; C_{min}

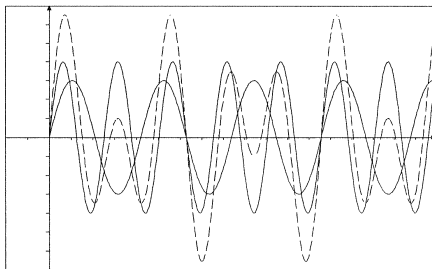


Abb. 4-2-2 Überlagerung zweier Schwingungen

Es wird häufig einen Zeitpunkt gegeben, bei dem die Einzelamplituden A und B die gleiche Richtung haben oder sich gegenüber stehen (Uhrzeigereffekt). Da es dazu aber auch alle möglichen Zwischenstellungen gibt, wird die resultierende Amplitude zwischen einem Maximalwert (C_{max}) und einem Minimalwert (C_{min}) schwanken.

Schwingung durch Getriebekräfte

Treten bei einer laufenden Maschine Schwingungen auf, so werden sie meist durch Unwuchten der in der Maschine umlaufenden Wellen, Zahnräder usw. verursacht. Das Problem, diese fertigungsbedingten Unwuchten zu reduzieren, liegt darin, daß man sie zunächst einmal einer Welle usw. zuordnen muß, d.h. man muß messen. Die Messung ergibt jedoch die Summe der auftretenden Kräfte. An einem Beispiel der Physik- bzw. Elektrotechnik soll zunächst der Zusammenhang gezeigt werden. Dabei soll gleichzeitig der Begriff der **Schwebung** erläutert werden.

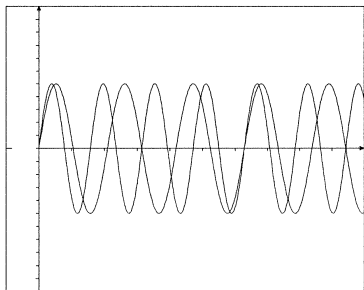


Abb. 4-2-3

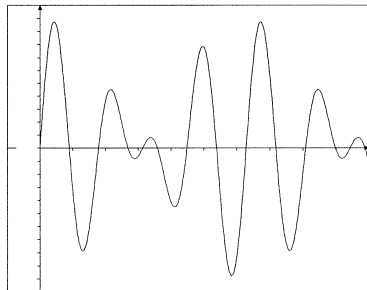


Abb. 4-2-4

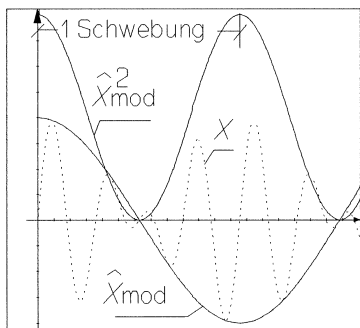
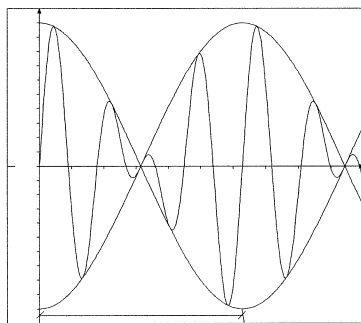


Abb. 4-2-5



$1/2$ Modulationswellenlänge

Abb. 4-2-3 zeigt zwei Schwingungen, deren Kreisfrequenzen sich geringfügig unterscheiden und deren Amplituden gleich sind. Eine Messung an der laufenden Maschine gibt die Summe der beiden Schwingungen. Der "Meßschrieb" sieht dann so aus: (in diesem Fall ist er gerechnet und gezeichnet) (Abb. 4-2-4). Dazu sind noch die beiden "Umhüllenden" gezeichnet. Diese Schwingung wird als **Schwebung** bezeichnet (Abb. 4-2-5). Bei der Schwebung stehen die Kreisfrequenzen im rationalen Verhältnis.

Während hier die zu messende Schwingung durch eine harmonische Synthese entstanden ist, muß man in der Praxis von Abb. 4-2-4 ausgehen und durch eine Analyse die verursachenden Kräfte ermitteln. Dazu wird die Fourieranalyse angewandt (Kap. 7). Diese Schwingungsform ist eine Amplitudenmodulation, bekannt vom Rundfunkgerät (Skalenbereich AM, so sieht die Trägerwelle aus. Siehe auch Kap. 30, Skala der Wellenbereiche. Amplitudenmoduliert sind Langwelle, Mittelwelle, Kurzwelle, frequenzmoduliert ist UKW). Musikfreunden ist diese Schwingungsform vom Stimmen der Instrumente bekannt.

Für gleiche Amplituden und nach der Umwandlung nach einem Additionstheorem erhält man (es ist ω_{mod} die Eigenkreisfrequenz der Schwebung und ω die Eigenkreisfrequenz der Schwingung)

$$\begin{aligned} x &= \hat{x} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + \hat{x} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) , \\ &= 2 \cdot \hat{x} \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right) , \\ &= 2 \cdot \hat{x} \cdot \cos(\omega_{\text{mod}} \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) . \end{aligned} \quad (4-2-3)$$

Addition von zwei Schwingungen nicht gleicher Frequenz

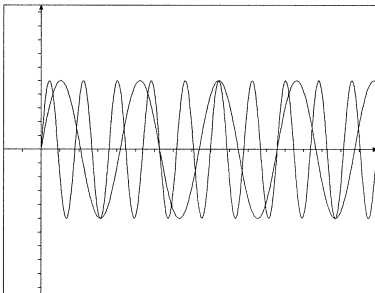


Abb. 4-2-6 Überlagerung

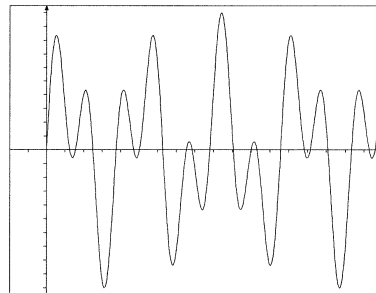


Abb. 4-2-7 Überlagerung von Schwingungen

Die Addition führt zu einer neuen Schwingung, deren Amplituden z.T. verstärkt werden. Die Frequenzen haben nun keinen geringen Frequenzunterschied, daher tritt eine Schwebung nicht mehr auf.

(Siehe auch Kap. 6 Harmonische Synthese). Der Vorgang kann ebenso umgekehrt werden. Im Automobilbau versucht man, den Lärm dadurch zu reduzieren, daß man der erzeugenden Schwingung eine Schwingung mit möglichst geringer Zeitverzögerung und negativer Amplitude über Lautsprecher entgegensetzt, so daß nur noch ein akzeptierbarer Rest übrigbleibt. Ebenso versucht man, an Autobahnen die teuren Schallschutzwände durch Lautsprecher zu ersetzen, die das umgedrehte Signal abstrahlen. Piloten von Testflugzeugen tragen Ohrschützer mit eingebauten Lautsprechern, die das Gegensignal abstrahlen.

Roboterarme können leichter ausgeführt werden, wenn über Sensoren die auftretenden Schwingungen aufgenommen werden und mit geringster Verzögerung (Echtzeitrechner) mit

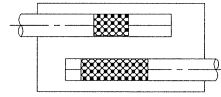
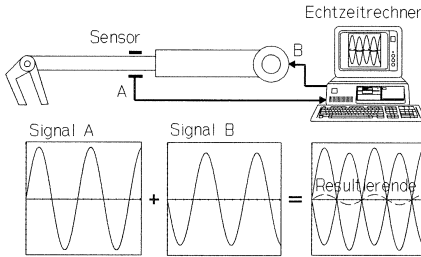


Abb. 4-2-8 Reflexionsanlage

Abb. 4-2-9 Reduzierung der Amplitude

umgedrehter Amplitude auf die Steuermotorik gegeben werden. Die Schwingung des Armes kann so praktisch auf die Resultierende reduziert werden. Mit Gyrometer-Sensoren kann eine Stabilisierung erreicht werden, wenn es sich um Drehbewegungen handelt. Sie werden eingesetzt auf Gebieten, die von der Stabilisierung von Hubschraubern über das Electronic Stability Programm ESP (Daimler-Benz), Fahrdynamikregelung FDR (Bosch) bis zu den Antiwackelsystemen der Camcorder reichen.

Eine Entwicklung, den Schall einer Auspuffanlage zu verringern, führt zu den Reflexionsanlagen. Es wird der Gasstrom umgelenkt, und die Schallwellen werden den ankommenden Schallwellen entgegengeleitet. Es laufen auch Entwicklungen, elektronische Aufnehmer und Geber einzusetzen.

Die Swiss-Air wird die schwedische Turbo-Prop Maschine Saab 2000 einsetzen, bei der im Innenraum mit Lautsprechern das Gegensignal zu den Triebwerken abgestrahlt wird.

5 Schwingungen in der Ebene (Lissajous)

In vielen Maschinen laufen Wellen und damit Unwuchten nicht geometrisch parallel sondern unter einem Winkel zueinander. Das einfachste Beispiel stellt ein Getriebe dar, dessen Wellen unter 90° zueinander gelagert sind (z.B. Differentialgetriebe). Da Drehbewegungen periodisch sind, lassen sie sich durch sin-Graphen darstellen. Durch die Addition zweier in x - und y -Richtung laufender Schwingungen erhält man die Lissajous-Figuren. Sie werden häufig für Vergleichsmessungen beim Arbeiten mit dem Oszilloskop benutzt (Abb. 5-1-7).

Zeichnet man die Summe, so erhält man je nach Wahl der Ausgangsfunktionen mit ihren Phasenwinkeln Strecken, Kreise, Ellipsen oder verschlungene Figuren, die sich nicht schließen müssen. Diese Figuren werden allgemein als Lissajous-Figuren bezeichnet. Sie geben gerade in der Meßtechnik der Maschinendynamik Hinweise auf Kreisfrequenzen und Amplituden der Schwingungen, da man eine der beiden Achsen mit einer bekannten Kreisfrequenz als Vergleichsfrequenz belegen kann und dann daraus Rückschlüsse auf eine unbekannte Schwingung ziehen kann. Es müssen also nicht immer sich in der Projektion kreuzende Wellen einer Maschine sein, deren Schwingungen auf dem Bildschirm dargestellt werden. Wer schon mit dem Oszilloskop gearbeitet hat, kennt diese Figuren. Wenn dann noch die Phasenverschiebung als Funktion der Zeit eingegeben wird, entsteht das Bild sich drehender Figuren. Ein Beispiel dafür ist Abb. 5-1-5.

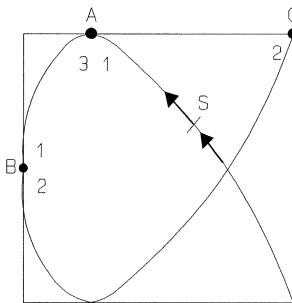


Abb. 5-1-1

Legt man auf die Achse der Schwingung, die in x -Richtung ihre Amplitude hat, die Standardfrequenz des Netzes von 50 Hz und auf die y -Amplitude eine unbekannte Frequenz, so erhält man durch Auszählen der Berührungspunkte die gesuchte Frequenz zu $f_y = 75 \text{ Hz} \Rightarrow \omega_y = 471,2 \text{ sec}^{-1} \Rightarrow n_y = 4500 \text{ min}^{-1}$. Abb. 5-1-2 bis Abb. 5-1-4 und Abb. 5-1-1.

Diese Schwingungen sind einzeln und als Parameterfunktion auf der nächsten Seite dargestellt. Fährt man von einem beliebigen Startpunkt S die Kurve entlang und numeriert die Berührungspunkte A,B,C, dann berührt man die waagerechte Begrenzung dreimal und die senkrechte Begrenzung zweimal, bis man wieder am Ausgangspunkt ankommt. Also $3:2 = 75:50$. (Siehe auch Bild 5 in Abb. 5-1-7).

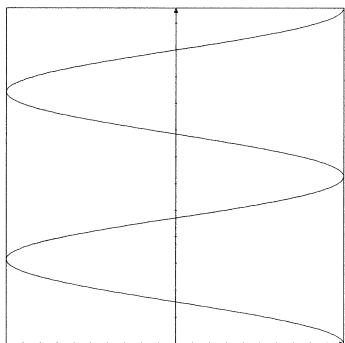


Abb. 5-1-2 x-Anteil

Diese Abbildungen sind so gezeichnet, wie in Abb. 5-1-2, Abb. 5-1-3 und Abb. 5-1-4 die Konstruktion der Lissajous-Figur erfolgt. Projiziert man für einen bestimmten Zeitpunkt den Kurvenpunkt des x - und y -Anteiles in die Abb. 5-1-3, so muß man einen Punkt der Abb. 5-1-3 erhalten. Dabei fallen in diesem Beispiel Kurvenanteile aufeinander. Das ist in Abb. 5-1-7 (5) zu erkennen. Dort sind die gleichen Funktionen mit einer anderen Phasenverschiebung gezeichnet.

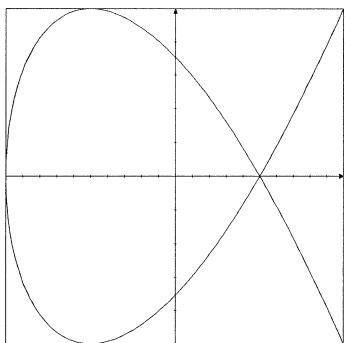


Abb. 5-1-3 Lissajous-Figur

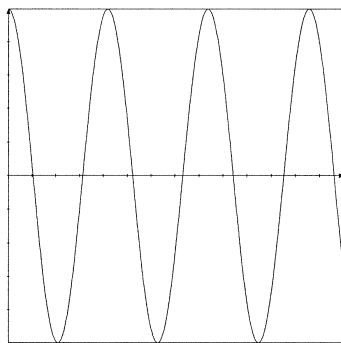
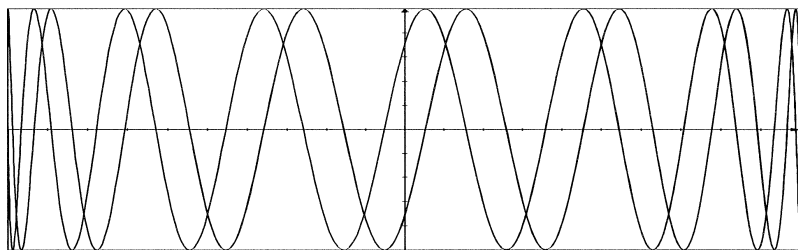


Abb. 5-1-4 y-Anteil

Abb. 5-1-5 Hohe y -Frequenz

Konstruktion von Lissajous-Figuren

Eine Überlagerung in x - und y -Richtung muß grundsätzlich auch in dieser Form erfolgen. In dem Beispiel der vorhergehenden Seite zeigt Abb. 5-1-2 den x -Anteil mit der Zeit-Achse nach oben und der x -Achse nach rechts.

Abb. 5-1-4 zeigt den y -Anteil mit der Zeitachse nach rechts und der y -Achse nach oben. Projiziert man für einen Zeitpunkt die jeweiligen Funktionspunkte in Abb. 5-1-3, bzw. Abb. 5-1-6, so ist der Schnittpunkt ein Punkt der Lissajous-Figur. Dabei zeigt in dieser Abbildung die Zeitachse nach vorn (sie steht senkrecht auf der Zeichenebene).

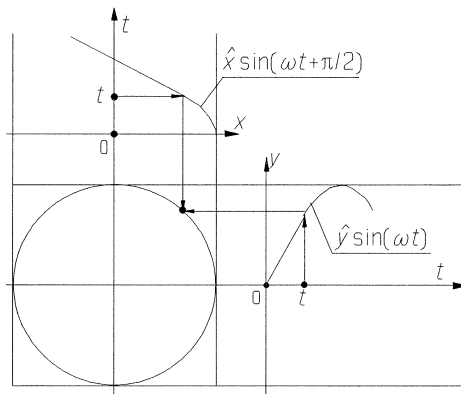


Abb. 5-1-6 Konstruktion der Lissajous-Figur

Es werden im x - t und y - t Diagramm gleiche Zeitintervalle abgetragen. Die Schnittpunkte mit den Kurven werden in das gemeinsame Diagramm projiziert und zum Schnitt gebracht. Der Schnittpunkt ist dann ein Punkt der Lissajous-Figur.

Einfach ist es, wenn man mit einem mathematischen Zeichenprogramm die Option Parameterfunktion aufruft und die Figur im Bereich von 0 bis $2 \cdot \pi$ zeichnen läßt.

Zusammenfassung

1. Beide Schwingungen gehen gleichzeitig durch die Null-Lage. Es entsteht bei gleicher Kreisfrequenz eine diagonal laufende Strecke, die Schwingung ist linear polarisiert.
Mit $x = \sin(\omega \cdot t)$ und $y = \sin(\omega \cdot t)$ ist $x = y$, also wird die Resultierende zu einer unter 45° laufenden Diagonalen.
2. Beträgt die Phasenverschiebung 180° , so erhält man die Linksdiagonale.
3. Beträgt der Phasenunterschied 90° , so setzt die x -Schwingung ein, wenn die y -Schwingung bereits den ersten Umkehrpunkt erreicht hat. Es entsteht eine Kreisbahn. Die Schwingung ist zirkular polarisiert.
Mit $x = \sin(\omega \cdot t)$ und $y = \sin(\omega \cdot t + \pi/2) = \cos(\omega \cdot t)$ wird durch Quadrieren und Addieren
 $x^2 + y^2 = 1$, d.h. man erhält die Kreisgleichung.
4. Bei allen anderen Phasenlagen entstehen Ellipsen verschiedener Form.
5. Sind die Kreisfrequenzen verschieden, entstehen verschlungene Figuren.
6. Bei gleichen Amplituden ist die Umhüllende ein Quadrat. Sind die Amplituden verschieden, ist die Umhüllende ein Rechteck.
7. Stehen die beiden Grundkreisfrequenzen in einem rationalen Verhältnis zu einander, so schließen sich die Kurven. Bei der geringsten Verstimmung ändert der Kurvenzug seine Form.

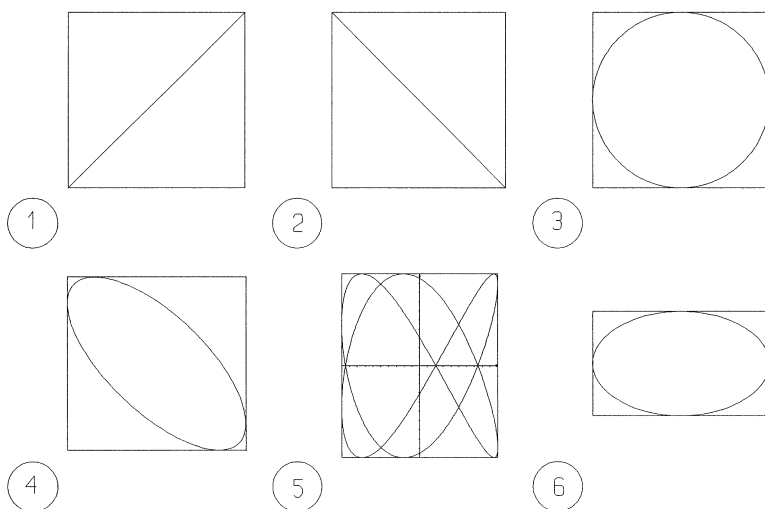


Abb. 5-1-7 Formen der Lissajous-Figuren

In Abb. 5-1-7 entspricht Teil 5 der Figur aus Abb. 5-1-3, hier ist dann der Phasenwinkel weiter verschoben.

6 Harmonische Synthese

Werden Schwingungen überlagert, spricht man von einer Synthese.

Die Summe der Einzelschwingungen in *Abb. 6-1-1*

$$f_1(x) = A_1 \cdot \sin(x) \quad \text{und} \quad f_2(x) = A_3 \cdot \sin(3 \cdot x)$$

führt zur Resultierenden in *Abb. 6-1-1*, die sich einem Rechteck nähert (Rechteckfunktion).

$$f(x) = A_1 \cdot \sin(x) + A_3 \cdot \sin(3 \cdot x) \quad \text{mit} \quad A_1=1 ; A_3=1/3.$$

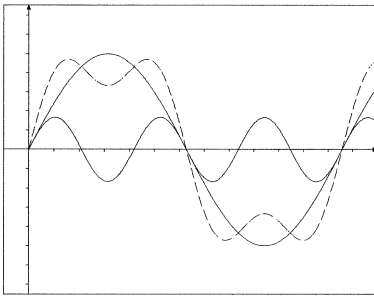


Abb. 6-1-1 Rechteckentwicklung

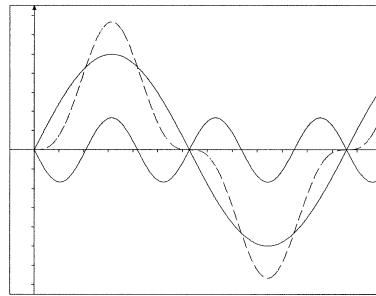


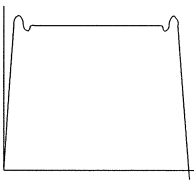
Abb. 6-1-2 Dreieckentwicklung

Die Summe der Einzelschwingungen in *Abb. 6-1-2*

$$f_1(x) = A_1 \cdot \sin(x) \quad \text{und} \quad f_2(x) = -A_3 \cdot \sin(3 \cdot x)$$

führt zur Resultierenden, die Dreieckform anzunehmen beginnt (Dreieckfunktion):

$$f(x) = A_1 \cdot \sin(x) - A_3 \cdot \sin(3 \cdot x) \quad \text{mit} \quad A_1=1 ; A_3=1/3.$$



Durch Fortsetzung der Reihenentwicklung lassen sich die Kurven weiter entwickeln (Beispiel *Abb. 6-1-3* und *Abb. 7-1-1*). Dabei ist zu beachten, daß es zu Überschwingungen kommt, die beachtet werden sollten, wenn man die Überlagerung von Schwingungen für z.B. Steuerungen benutzt. In *Abb. 6-1-3* ist dieser Vorgang übertrieben eingezeichnet (Gibbs'sches Phänomen).

Abb. 6-1-3

Die Summe der Funktion

$$f(x) = A_1 \cdot \sin(x) + A_2 \cdot \sin(2 \cdot x) + A_3 \cdot \sin(3 \cdot x) + A_4 \cdot \sin(4 \cdot x) + \dots$$

$$\text{mit } A_1=1; A_2=1/2; A_3=1/3 \text{ usw.}$$

ergibt dann folgendes Bild (Sägezahnfunktion)

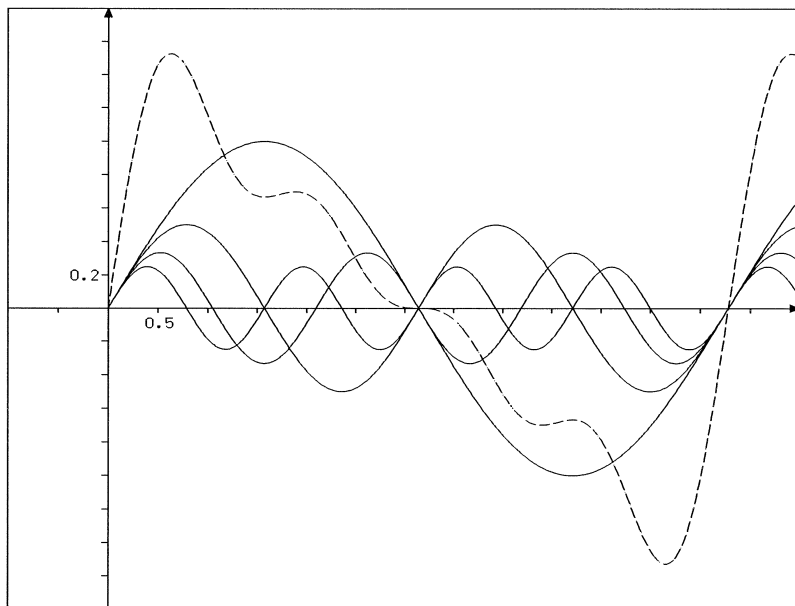


Abb. 6-1-4 Sägezahnfunktion

Auf diese Weise lassen sich harmonische Funktionen addieren (z.B. zu Sägezahn-, Rechteck-Kurven usw.) die dann u.a. im Maschinenbau in der Regelungstechnik für Steuerungen benutzt werden können. Andererseits erzeugen Unwuchten, die bei rotierenden Körpern auftreten, in der gleichen Weise harmonische Schwingungen, die dann ihrerseits diese resultierenden Schwingungen erzeugen können.

7 Harmonische Analyse

In Kap. 6 wurde gezeigt, wie sich aus Einzelschwingungen eine resultierende Schwingung zusammensetzen läßt. In der Praxis wird nun der Fall eintreten, daß man Schwingungen aufzeichnet, die als Resultierende von Einzelschwingungen existieren, also eine Umkehrung von Kap. 6 erfolgt. Das Problem liegt nun darin, daß man nicht weiß, aus welchen Schwingungen diese Resultierende besteht. Um aber die Ursachen (z.B. Unwucht einer Welle) zu beseitigen, muß man die Einzelschwingung in ihrer Amplitude und Kreisfrequenz kennen, um sie einer Maschine bzw. einem Maschinenteil zuordnen zu können. Nur dann kann man gezielt (z.B. bei Unwuchten durch Auswuchten) versuchen, die Schwingungen zu beheben bzw. zu dämpfen. Es ist also notwendig, ein Verfahren zu besitzen, das es ermöglicht, eine Resultierende (Funktion) in ihre Bestandteile zu zerlegen.

Die Mathematik liefert dieses Verfahren in Form der Fourieranalyse. Deshalb wird die Analyse zunächst von der mathematischen Seite beschrieben (Kap. 7.1) und dann in Kap. 7.2 auf die Maschinendynamik zugeschnitten.

7.1 Fourierreihen

Ist eine Funktion periodisch, so wird sie zweckmäßigerweise nicht durch eine Taylorreihe, sondern durch eine Fourierreihe dargestellt, da hier die sin- und cos-Funktionen bereits enthalten sind.

Die Periode beträgt bei diesen Funktionen 2π und es gilt

$$f(x+2\pi) = f(x).$$

Der Ansatz lautet:

$$f(x) = A_0 + A_1 \cdot \cos(x) + A_2 \cdot \cos(2 \cdot x) + \dots + A_n \cdot \cos(n \cdot x) \\ + B_1 \cdot \sin(x) + B_2 \cdot \sin(2 \cdot x) + \dots + B_n \cdot \sin(n \cdot x).$$

Dabei sind $\sin(x)$ und $\cos(x)$ die Grundschwingungen, während die folgenden Glieder die Oberschwingungen darstellen. Ihre Periode wird mit zunehmenden n immer kleiner, so daß man für $\sin(n \cdot x)$ bzw. $\cos(n \cdot x)$ die Periode $2\pi/n$ erhält.

Man unterscheidet:

Trigonometrische Summe

$$s_n(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{i=n} (A_i \cdot \cos(i \cdot x) + B_i \cdot \sin(i \cdot x)) , \quad (7-1-1)$$

Trigonometrische Reihe

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos(n \cdot x) + B_n \cdot \sin(n \cdot x)) . \quad (7-1-2)$$

Bei der Bestimmung der Koeffizienten A_0 ; A_n ; B_n (mit n ganzzahlig, positiv) geht man von der Forderung aus, daß die Annäherung der gegebenen Funktion durch die trigonometrische Summe überall möglichst gut sein soll.

Damit sind die Koeffizienten (mit n ganzzahlig, positiv):

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot dx , \quad (7-1-3)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) \cdot dx , \quad (7-1-4)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx . \quad (7-1-5)$$

Die durch die Integrale bestimmten Größen A_0 ; A_n ; B_n heißen **Fourierkoeffizienten**; die mit ihnen gebildete trigonometrische Reihe **Fourierreihe**. Bei den Integralen kann als untere Grenze ein beliebiges x_0 stehen, die obere Grenze lautet dann $x_0 + 2\pi$.

Zusammenfassung Fourierreihen

1. Liegt die gegebene Funktion symmetrisch zur y -Achse, dann ist $f(x)$ eine gerade Funktion

$$f(-x) = f(x).$$

Sie enthält dann als Fourierreihe nur $\cos$ -Anteile. Damit sind

$$B_1 = B_2 = \dots = B_n = 0.$$

2. Ist die gegebene Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung, so ist $f(x)$ ungerade.

$$f(-x) = -f(x).$$

Sie enthält dann als Fourierreihe nur $\sin$ -Anteile. Damit sind

$$A_0 = A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0.$$

3. Hat die Funktion $f(x)$ die beliebige Periode T , gilt also für alle $f(x+T) = f(x)$, so lautet die Fourierreihe

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot x\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot x\right) \right), \quad (7-1-6)$$

und ihre Koeffizienten sind

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cdot dx, \quad (7-1-7)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot x\right) \cdot dx, \quad (7-1-8)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot x\right) \cdot dx. \quad (7-1-9)$$

4. Nicht jede Funktion kann durch eine Fourierreihe dargestellt werden. Hinreichend für Konvergenz und Darstellbarkeit ist, daß sich der Grundbereich der Periode 2π in eine endliche Anzahl von Teilbereichen zerlegen läßt, in denen jeweils $f(x)$ monoton und stetig ist (Dirichlet-Bedingung).

Beispiel:

$$f(x) = \sin(x) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot x) - \frac{1}{4} \cdot \sin(4 \cdot x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5 \cdot x) - + \dots (7-1-10)$$

In der Abb. 7-1-1 ist eine Sägezahnfunktion aufgebaut, die bis zum Faktor 6 in der Reihe gezeichnet ist. Die unteren Bilder stellen die schrittweise Addition der Summanden 1, 2, 3 und 4 dar.

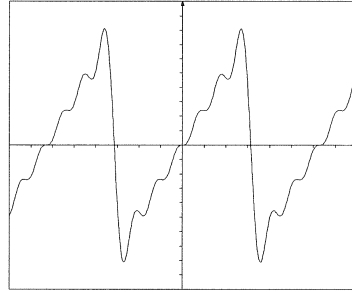
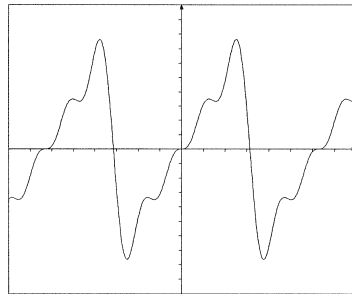
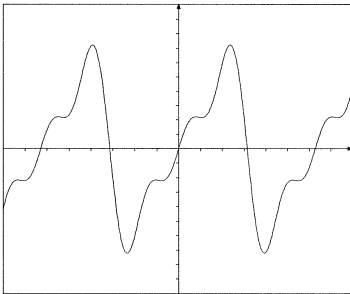
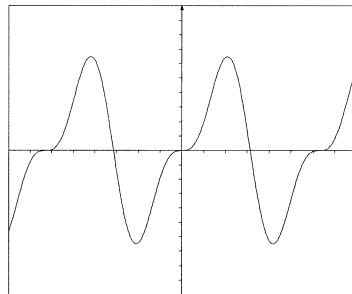
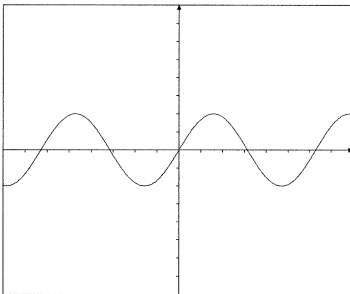


Abb. 7-1-1 Sägezahnfunktion



7.2 Harmonische Analyse in der Maschinendynamik

Will man eine periodische Funktion in ihre harmonischen Komponenten zerlegen, so wendet man die Fourierreihe an. Die periodische Funktion lautet dann

$$F(t) = F_0 + F_1(t) + F_2(t) + \dots + F_n(t)$$

und ihre harmonischen Komponenten sind

$$F_n(t), (n \text{ ganzzahlig und positiv}).$$

Eine periodische Funktion hat unendlich viele harmonische Komponenten. In der Praxis sind aber nur die niedrigen n -Zahlen für die Beurteilung der Drehzahl von Wellen bzw. für die Erregung von Massen von Bedeutung. Die Reihe wird dann nicht als Integral sondern als Summe geschrieben, wobei die Periode 2π im Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ in der Praxis stetig ist.

$$F(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + B_n \cdot \sin(n \cdot \varphi)) . \quad (7-2-1)$$

Die Koeffizienten werden aus der Integralschreibweise (siehe auch (7-1-3), (7-1-4), (7-1-5))

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cdot d\varphi , \quad (7-2-2)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cdot \cos(n \cdot \varphi) \cdot d\varphi , \quad (7-2-3)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cdot \sin(n \cdot \varphi) \cdot d\varphi . \quad (7-2-4)$$

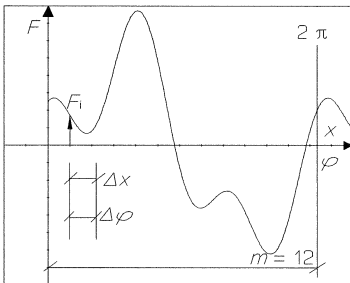


Abb. 7-2-1 Unterteilung der Funktion

in die aus der Trapezregel abgeleiteten Formeln überführt und berechnet. Dazu wird die zu untersuchende Funktion gezeichnet (geplottet oder als Meßschrieb). Eine volle Periode 2π wird in m gleiche Teile zerlegt, wobei häufig $m=12$ gesetzt wird. Für genauere Bestimmungen, die in der Praxis jedoch meist nicht erforderlich sind, wird auch $m=24$ gesetzt.

Andererseits können bei zu kleiner Wahl von m (der Stützstellen) Schwingungen höherer Ordnung verloren gehen. Bedingung ist nur, daß m ganzzahlig ist. An jeder Stelle i wird die Funk-

tionshöhe gemessen und in eine Tabelle eingetragen (siehe das folgende Beispiel und die Aufgaben im Kap. Beispiele). Dadurch entsteht eine Folge von Trapezflächen. Mit

$$\varphi_i = \frac{2\pi}{m} \cdot i \quad (7-2-5)$$

ist

$$A_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} F(i) , \quad (7-2-6)$$

$$A_n = \frac{2}{m} \sum_{i=0}^{m-1} F(i) \cdot \cos(n \cdot \varphi_i) , \quad (7-2-7)$$

$$B_n = \frac{2}{m} \sum_{i=0}^{m-1} F(i) \cdot \sin(n \cdot \varphi_i) . \quad (7-2-8)$$

Der erste Koeffizient A_0 gibt lediglich die Verschiebung der Achse und liefert zur Erregung keinen Beitrag.

Für die n -te harmonische Schwingung gilt mit (3-2-13)

$$F_n(\varphi) = A_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + B_n \cdot \sin(n \cdot \varphi) = C_n \cdot \sin(n \cdot \varphi + \varphi_n) . \quad (7-2-9)$$

Ihre Amplitude ist

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} . \quad (7-2-10)$$

In (7-2-9) sind beide Ausdrücke gleichwertig. Man kann eine Schwingung durch die Addition einer sin- und einer cos-Schwingung ebenso beschreiben wie durch eine sin-Schwingung mit ihrem Nullphasenwinkel. Der Unterschied liegt darin, daß im ersten Fall die gemessenen Amplituden A und B in den Formeln erscheinen, während im zweiten Fall die Amplitude C aus A und B zu berechnen ist.

Der Nullphasenwinkel ist

$$\tan \varphi_n = \frac{A_n}{B_n} . \quad (7-2-11)$$

Beispiel: Es soll die Harmonische Schwingung 2-Ordnung ermittelt werden.

Gemessen sind die Werte $F(i)$ an den Stellen i (2. Spalte in den Tabellen). Die Funktion ist zunächst zu zeichnen, um einen Überblick zu erhalten.

Siehe folgende Berechnungstabelle. Die Zahlen sind für die 2. Ordnung und die Formeln aus (7-2-5) bis (7-2-11). Die Tabellen befinden sich auf den folgenden Seiten nach dem Abschnitt Amplitudenspektrum.

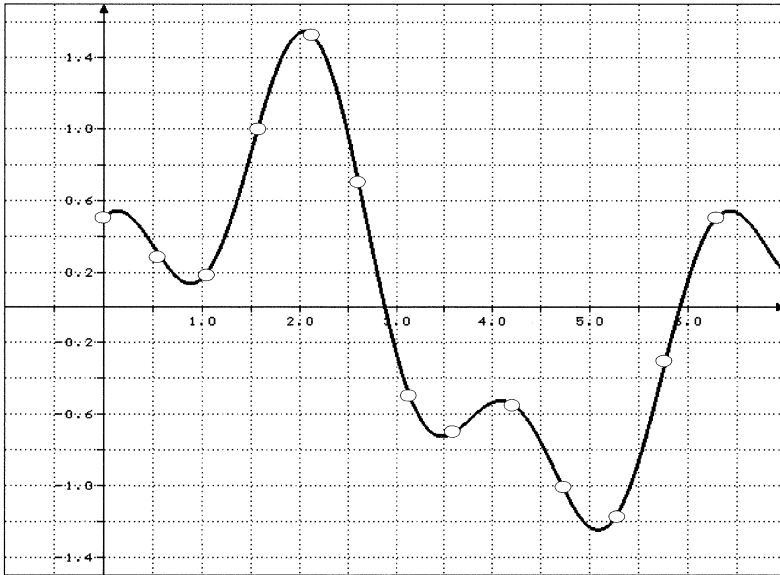


Abb. 7-2-2 Meßschrieb

Für die Fourierkoeffizienten der zweiten Ordnung erhält man aus der Berechnungstabelle

$$A_2 = 2/12 \cdot \Sigma \dots = 1/6 \cdot 0 = 0$$

$$B_2 = 2/12 \cdot \Sigma \dots = 1/6 \cdot (-1,2) = -0,2.$$

Daraus die Amplitude nach Formel (7-2-10)

$$C_2 = \sqrt{0^2 + (-0,2)^2} = 0,2 \text{ (ohne Vorzeichen, siehe Anmerkung Kap. 1.5)}$$

und die Phasenverschiebung nach Formel (7-2-11) - (siehe auch Abb. 7-2-5)

$$\tan \varphi_2 = A_2 / B_2 = 0 / -0,2 = -0 \Rightarrow \varphi_2 = 180^\circ.$$

Die 2. Harmonische ergibt sich somit zu

$$F_2(\varphi) = 0 \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + (-0,2) \cdot \sin(2 \cdot \varphi) = 0,2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi + \pi).$$

In der gleichen Weise erfolgt die Berechnung der übrigen Harmonischen n -ter Ordnung.

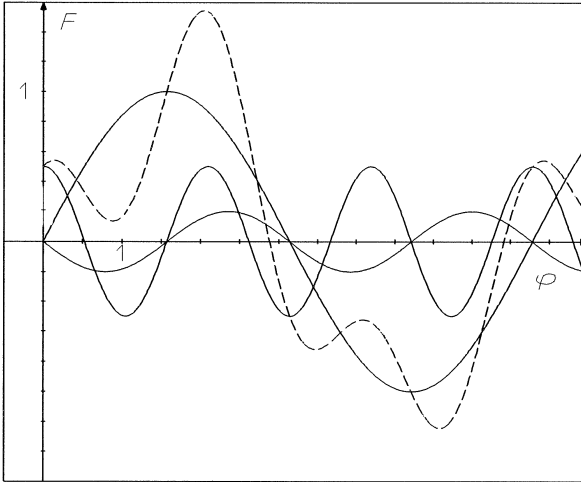


Abb. 7-2-3 Analyse zu Meßschrieb

Amplitudenspektrum

Es zeigt die Bedeutung der einzelnen Schwingung auf die gesamte Schwingung, während die *Phasenlage der Amplituden* die jeweilige Position der einzelnen Amplituden zueinander zeigt.

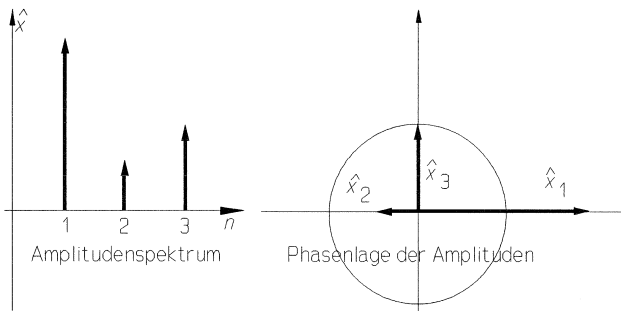


Abb. 7-2-4 Amplitudenspektrum, Phasenlage

Da bei der Ermittlung von C_n das in diesem Beispiel vorhandene Minuszeichen von A_n und B_n verloren geht, muß man die Funktion $\arctan$ und die Vorzeichen von A_n und B_n in Zähler und Nenner betrachten (hier bei der Ermittlung von φ_2).

Das Amplitudenspektrum gibt die Größe der jeweiligen Amplitude an und damit z.B. die Größe der einzelnen Unwucht, von der die Welle belastet wird. Damit ist eine Entscheidungshilfe gegeben, welche Unwuchten zunächst ausgewuchtet werden müssen, um die Güteklasse für diese Maschine zu erreichen. Siehe auch Kap. 27 - Auswuchttechnik.

Die Phasenwinkel der Schwingungen sind zu diesem Zeitpunkt um 180° bzw. 90° versetzt. Da die Summe der Schwingungen die Hauptbelastung ergibt, kann durchaus eine Unwucht mit kleinerer Amplitude eine Belastungsspitze erzeugen. Das ist in diesem Fall $\dot{x}_3$. Diese Schwingung treibt die Gesamtschwingung in die Maximalwerte.

Berechnungstabelle

Ordnung $n=1$

i	$F(i)$	$n \cdot \varphi$	$F(i) \cdot \cos(n \cdot \varphi)$	$F(i) \cdot \sin(n \cdot \varphi)$
0	0,5	0	0,5	0,0
1	0,33	30	0,286	0,165
2	0,19	60	0,095	0,165
3	1,0	90	0,0	1,0
4	1,54	120	-0,77	1,334
5	0,67	150	-0,58	0,335
6	-0,5	180	0,5	0,0
7	-0,67	210	0,58	0,335
8	-0,54	240	0,27	0,468
9	-1,0	270	0,0	1,0
10	-1,19	300	-0,595	1,031
11	-0,33	330	-0,286	0,165
			Summe: 0,0	Summe: 6,0

$$F_1(\varphi) = 0 \cdot \cos(1 \cdot \varphi) + 1 \cdot \sin(1 \cdot \varphi) = 1 \cdot \sin(1 \cdot \varphi + 0) .$$

Das ist eine Schwingung mit dem Amplitudenfaktor 1 (Vergrößerungsfaktor des Meßgerätes) und dem Drehzahlfaktor 1, bezogen auf die niedrigste Drehzahl. Die Phasenverschiebung dieser Schwingung beträgt 0° .

Ordnung $n=2$

i	$F(i)$	$n \cdot \varphi$	$F(i) \cdot \cos(n \cdot \varphi)$	$F(i) \cdot \sin(n \cdot \varphi)$
0	0,5	0	0,5	0,0
1	0,33	60	0,165	0,286
2	0,19	120	-0,095	0,165
3	1,0	180	-1,0	0,0
4	1,54	240	-0,77	-1,334
5	0,67	300	0,335	-0,58
6	-0,5	360	-0,5	0,0
7	-0,67	420	-0,335	-0,58
8	-0,54	480	0,27	-0,468
9	-1,0	540	1,0	0,0
10	-1,19	600	0,595	1,031
11	-0,33	660	-0,165	0,286
			Summe: 0,0	Summe: -1,194

$$F_2(\varphi) = 0 \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + (-0,2) \cdot \sin(2 \cdot \varphi) = 0,2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi + \pi) .$$

Für diese Ordnung ist die weitere ausführliche Berechnung vor dem Abschnitt "Amplitudenspektrum" durchgeführt. Dabei wird in der Summe der letzten Spalte statt -1,194 der gerundete Wert -1,2 eingesetzt, da durch die Ablesungenauigkeit im Diagramm und die zahlreichen Rechenschritte dieser Wert hinreichend genau ist. Das ist eine Schwingung mit dem Amplitudenfaktor 0,2 (Vergrößerungsfaktor des Meßgerätes) und dem Drehzahlfaktor 2, bezogen auf die niedrigste Drehzahl. Die Phasenverschiebung dieser Schwingung beträgt 180° .

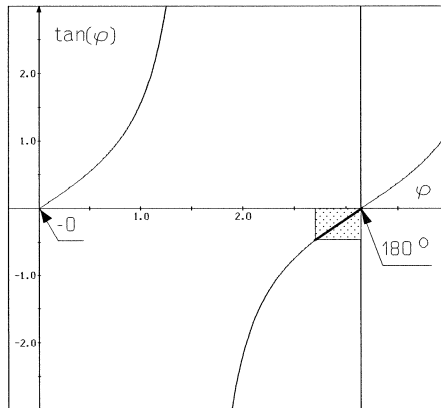


Abb. 7-2-5 tan-Bereich

Ordnung $n=3$

i	$F(i)$	$n \cdot \varphi$	$F(i) \cdot \cos(n \cdot \varphi)$	$F(i) \cdot \sin(n \cdot \varphi)$
0	0,5	0	0,5	0,0
1	0,33	90	0,0	0,33
2	0,19	180	-0,19	0,0
3	1,0	270	0,0	-1,0
4	1,54	360	1,54	0,0
5	0,67	450	0,0	0,67
6	-0,5	540	0,5	0,0
7	-0,67	630	0,0	0,67
8	-0,54	720	-0,54	0,0
9	-1,0	810	0,0	-1,0
10	-1,19	900	1,19	0,0
11	-0,33	990	0,0	0,33
			Summe: 3,0	Summe: 0,0

$$F_3(\varphi) = 0,5 \cdot \cos(3 \cdot \varphi) + 0 \cdot \sin(3 \cdot \varphi) = 0,5 \cdot \sin\left(3 \cdot \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Das ist eine Schwingung mit dem Amplitudenfaktor 0,5 (Vergrößerungsfaktor des Meßgerätes) und dem Drehzahlfaktor 3, bezogen auf die niedrigste Drehzahl. Die Phasenverschiebung dieser Schwingung beträgt 90° , d.h. diese Schwingung ist eine cos-Schwingung.

Alle weiteren Analysen ergeben 0, d.h. die gemessene Schwingung besteht aus drei Einzelschwingungen. Die Summen sind jeweils gerundete Werte, da die Tabellenwerte ebenfalls auf drei Stellen hinter dem Komma gerundet sind.

8 Schwinger mit einem Freiheitsgrad

Wie bereits im Kap. 3.1 beschrieben, werden schwingende Systeme auf möglichst überschaubare Ersatzbilder zurückgeführt. In Kap. 2.2 sind die Freiheitsgrade und Ersatzbilder aufgeführt.

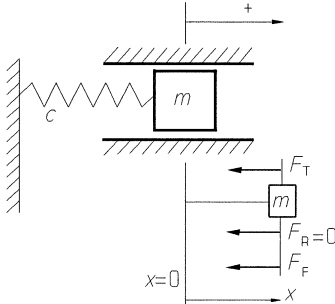


Abb. 8-1-1 Ein-Massen-Schwinger

Zunächst soll die Gleichung für einen Schwinger aufgestellt werden, der sich in x -Richtung bewegt und damit einen Freiheitsgrad hat. Durch die waagerechte Bewegung soll die Feder nicht durch die Gewichtskraft belastet werden. Außerdem soll die Schwingung reibungsfrei, d.h. ungedämpft erfolgen.

Die Reibung wird zunächst vernachlässigt $\Rightarrow$
Reibungskraft $F_R = 0$.

Es wirken die Kräfte (bereits in (3-1-4) und (3-1-5) beschrieben), die der Bewegung (Beschleunigung) entgegengesetzt sind:

Federkraft $F_F = c \cdot x$

Trägheitskraft $F_T = m \cdot \ddot{x}$

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + c \cdot x = 0, \quad (8-1-1)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} \cdot x = 0. \quad (8-1-2)$$

Die Ableitung aus der sin-Schwingung ist in Kap. 3.2 erfolgt.

8.1 Längsschwinger

Feder-Masse-System

Die Gewichtskraft soll die zunächst unbelastete Feder belasten. Dabei wird angenommen, daß die Feder keine Masse hat, d.h. die gesamte Masse sich in m konzentriert. Die Reibung wird vernachlässigt. Dann ist

$x_1=0$ die Position der unbelasteten Feder.

f_D die statische Federverlängerung, die durch das Aufbringen von m hervorgerufen wird. Das Ende der Feder kommt nun in die Position $x=0$, das ist die Ruhestellung der Feder. Dabei ist die statische Verformung f_D linear erfolgt, d.h. die Feder hat eine lineare Federkennlinie. f_D kann die Durchbiegung eines Balkens oder einer Welle sein. Jeder Körper, der einen E -Modul hat, erfährt nach dem Hooke'schen Gesetz unter Belastung ein $\Delta \ell$ und damit eine statische Verformung.

Die Masse soll nach unten angestoßen und dann sich selbst überlassen werden. Dabei entsteht durch die Rückstellkraft der ausgelenkten Feder eine freie ungedämpfte Schwingung. Zu den bereits in der Differentialgleichung verwendeten beiden Kräften (Federkraft und Trägheitskraft) kommt nun noch die Gewichtskraft hinzu.

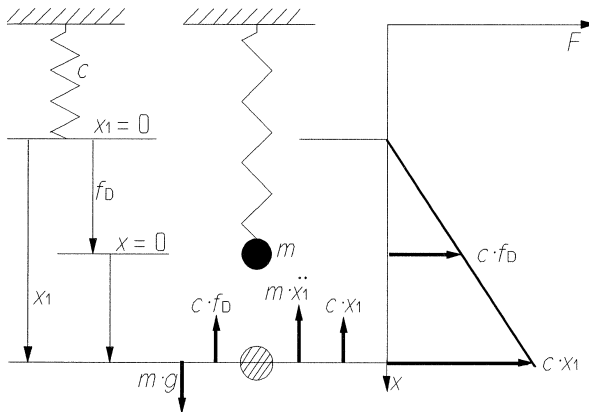


Abb. 8-1-2 Feder-Masse-System

Mit allen Kräften ist

$$m \cdot \ddot{x}_1 + c \cdot x_1 - m \cdot g = 0 . \quad (8-1-3)$$

Wird der Weg x_1 differenziert, folgt

$$x_1 = x + f_D , \quad \dot{x}_1 = \dot{x} , \quad \ddot{x}_1 = \ddot{x} . \quad (8-1-4)$$

Diese Größen in (8-1-3) eingesetzt, ergeben

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot (x + f_D) - m \cdot g = 0 , \quad (8-1-5)$$

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x + \underbrace{c \cdot f_D - m \cdot g}_{=0} = 0 . \quad (8-1-6)$$

Nun ist die Feder durch die Gewichtskraft $m \cdot g$ um f_D statisch verlängert worden, es ist also

$$F_G = m \cdot g = c \cdot f_D . \quad (8-1-7)$$

Das sind die beiden letzten Summanden in (8-1-6), sie heben sich auf.

So bleibt für die Gleichung einer ungedämpften freien linearen Schwingung

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0. \quad (8-1-8)$$

Mit der Gleichung (3-2-4) wird daraus (die Gleichung muß für alle x gelten, also muß die Klammer Null werden)

$$-\omega^2 \cdot x + \frac{c}{m} \cdot x = 0 ; \quad x \cdot \underbrace{\left(-\omega^2 + \frac{c}{m}\right)}_{=0} = 0, \quad \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (8-1-9)$$

Damit ergeben sich die Aussagen:

1. Eine Schwingung erfolgt immer um die statische Ruhe-Lage.
2. Der Schwingungsvorgang wird nicht durch eine Vorspannung des elastischen Elementes beeinflusst (z.B. durch die Gewichtskraft).
3. Wird eine Schwingung auf die Null-Lage bezogen, dann brauchen Vorspannkräfte nicht berücksichtigt zu werden.
4. Soll der Einfluß der mitschwingenden Federmasse berücksichtigt werden, so kann mit Faktoren hinreichend genau gerechnet werden. Die Ableitung erfolgt in Kapitel 10.

Aus Gleichung (8-1-7) folgt die Federkonstante der Längsbewegung

$$c = \frac{m \cdot g}{f_D} \quad \frac{N}{m} ; \quad \frac{m}{kg} ; \quad \frac{g}{m/s^2} ; \quad \frac{f_D}{m}. \quad (8-1-10)$$

Damit läßt sich für jeden elastischen Körper, für den das Hooke'sche Gesetz gilt, über die statische Belastung die Federkonstante c berechnen. Weitere Größen sind

$$\begin{aligned} T &= T_0 = 2 \cdot \pi / \omega_0 \quad s && \text{Dauer einer Periode} \\ f &= f_0 = 1/T_0 \quad 1/s = \text{Hz} && \text{Eigenfrequenz} \\ n &= n_0 = 60 \cdot f_0 \quad 1/\text{min} && \text{Eigenschwingungen/Minute} \Rightarrow \text{z.B. Drehzahl} \end{aligned}$$

Benutzt man die statische Verformung f_D (**Einheit in cm**), so erhält man (mit berechneten Zahlenwerten die Gleichungen, die häufig in der Praxis benutzt werden):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{m \cdot f_D}} = \sqrt{\frac{981 \text{ cm/s}^2}{f_D \text{ cm}}} = \frac{31,32}{\sqrt{f_D}} \frac{1}{s}; \quad \frac{g}{\text{cm/s}^2}; \quad \frac{f_D}{\text{cm}}. \quad (8-1-11)$$

$$T_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} = 0,2005 \cdot \sqrt{f_D} \quad s ; \quad \frac{f_D}{\text{cm}}. \quad (8-1-12)$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{4,99}{\sqrt{f_D}} \frac{1}{s} ; \quad \frac{f_D}{\text{cm}} . \quad (8-1-13)$$

$$n_0 = 60 \cdot f_0 \approx \frac{300}{\sqrt{f_D}} \frac{1}{\text{min}} ; \quad \frac{f_D}{\text{cm}} . \quad (8-1-14)$$

Mit dieser Gleichung kann man überschlägig die Resonanzdrehzahlen für Wellen und andere Konstruktionsteile berechnen, wenn man die statische Verformung f_D durch die Belastung (s.o. $\Rightarrow$ Eigengewicht) vorher ermittelt hat. Dazu stehen die Gleichungen der Festigkeitslehre zur Verfügung. Weitere Methoden werden ab dem Kapitel 17 besprochen.

8.2 Drehschwinger, gefesselt, eine Drehmasse

Auf einer Welle sitzt eine starre Scheibe (Drehmasse) mit dem Massenträgheitsmoment J . Die Welle ist einseitig eingespannt (gefesselt) und reibungsfrei gelagert, sie erfährt keine Durchbiegung. Sie kann sich nur verdrehen. Die Scheibe wird aus der Ruhelage um den Winkel φ verdreht (angestoßen) und sich selbst überlassen. Dabei führt sie eine harmonische Schwingung. Setzt man in den Gleichungen des Kapitels 8.1 für die Masse m das Massenträgheitsmoment J und für den Weg x den Winkel φ ein, so kann man die Gleichungen übernehmen und schreiben ($\dot{\varphi}$ entspricht der Amplitude $\dot{x}$)

$$J \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c \cdot \varphi = 0 , \quad (8-2-1)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{c}{J} \cdot \varphi = 0 . \quad (8-2-2)$$

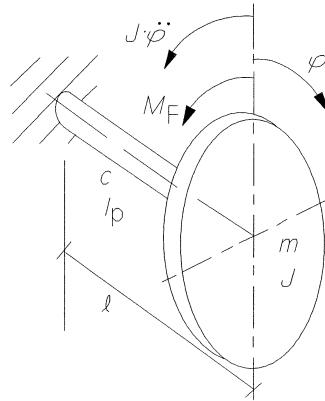


Abb. 8-2-1 Drehschwinger, eine Drehmasse

In diesen Gleichungen ist φ der Verdrehwinkel und φ_0 der Nullphasenwinkel:

$$\varphi = \dot{\varphi} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J}} . \quad (8-2-3)$$

Dabei ist aus der Festigkeitslehre (mit $M_T = M_F = c \cdot \varphi$) für die Berechnung von φ

$$\varphi = \frac{M_T \cdot \ell}{G \cdot I_p} = \frac{c \cdot \varphi \cdot \ell}{G \cdot I_p} \quad \text{mit} \quad M_T = c \cdot \varphi; \quad \frac{M_T}{\text{N} \cdot \text{m}}; \quad \frac{\ell}{\text{m}}; \quad \frac{G}{\text{N/m}^2}; \quad \frac{I_p}{\text{m}^4}. \quad (8-2-4)$$

Die Federkonstante für eine Welle erhält man durch Umformung nach c (Bedingung: der Durchmesser ist konstant). Hat die Welle verschiedene Durchmesser, so werden die einzelnen Segmente für sich gerechnet und dann zu einer Gesamtfederkonstanten zusammengesetzt (siehe hierzu Kap. 16 - Zusammenschalten von Federn).

$$c = \frac{G \cdot I_p}{\ell} \quad \text{N} \cdot \text{m} \quad ; \quad \frac{G}{\text{N/m}^2} ; \quad \frac{I_p}{\text{m}^4} ; \quad \frac{\ell}{\text{m}} . \quad (8-2-5)$$

Der Zusammenhang mit dem Drehschwinger mit zwei Drehmassen ist in Kap. 23.1 gezeigt. Dieser gefesselte Drehschwinger mit n Drehmassen (hier $n = 1$) hat n Eigenkreisfrequenzen.

9 Pendelschwingungen

Die rückstellende Kraft in einer Pendelbewegung ist die Schwerkraft. Es ist kein elastischer Körper vorhanden, und damit ist eine Formänderung entsprechend dem Hooke'schen Gesetz nicht möglich.

9.1 Mathematisches Pendel

Der Ansatz erfolgt zunächst ohne Beschränkung auf die Größe der Auslenkung. Der Weg ist für einen Punkt der Weg auf der Tangente, wobei die Aufhängung keine Masse haben soll, d.h. die gesamte Masse ist in m konzentriert. In Richtung der Tangente wirken nur zwei Kräfte, die der Bewegung entgegen gerichtet sind. Der Weg wird vom unteren Totpunkt aus gemessen. Er ist auf dem Bogen $x = \varphi \cdot \ell$.

Die rückstellende Kraft ist die Gewichtskraft $m \cdot g$, die entlang der Bahn mit ihrer Komponente $m \cdot g \cdot \sin \varphi$ wirkt.

Für die Beschleunigung gilt

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2(\ell \cdot \varphi)}{dt^2} = \ell \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} . \quad (9-1-1)$$

Eingesetzt in die Gleichung (3-1-4) folgt mit $m \cdot g \cdot \sin \varphi$ als rücktreibender Kraft in Richtung der Tangente

$$m \cdot \ddot{x} + m \cdot g \cdot \sin \varphi = 0 . \quad (9-1-2)$$

Mit der Beschleunigung aus (9-1-1) und in die Form (3-1-5) gebracht, ist

$$m \cdot \ell \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + m \cdot g \cdot \sin \varphi = 0 , \quad (9-1-3)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \cdot \sin \varphi = 0 . \quad (9-1-4)$$

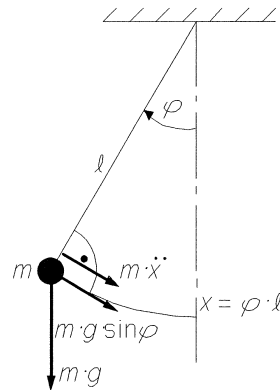


Abb. 9-1-1 Mathematisches Pendel

Um diese Gleichung auf einfache Weise lösen zu können, wird die Schwingung nur für kleine Amplituden betrachtet. Der Grund liegt darin, daß in der Gleichung die Variable als φ und $\sin \varphi$ vorkommt. Mit Hilfe der Phasenkurven (siehe Kap. 11) läßt sich der Vorgang bis zum sich überschlagenden Pendel leicht beschreiben.

Es wird also für kleine Winkel $\sin\varphi \approx \varphi$ gesetzt. Damit ist

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \cdot \varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \quad (9-1-5)$$

Die Schwingung des mathematischen Pendels ist also nur von der Pendellänge und nicht von der Masse abhängig. Damit kann man auf einfache Weise die Beschleunigung g messen oder z.B. eine Halbperiode genau auf 1 s abstimmen (Sekundenpendel). Die Pendellänge beträgt dann $\ell = 0,994 \text{ m}$ für $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

9.2 Parametrische Anregung

Schwingungsfähige Systeme können parametererregt werden. Sie kommt bei technischen Schwingungen häufig vor. Der Vorgang soll am mathematischen Pendel erklärt werden

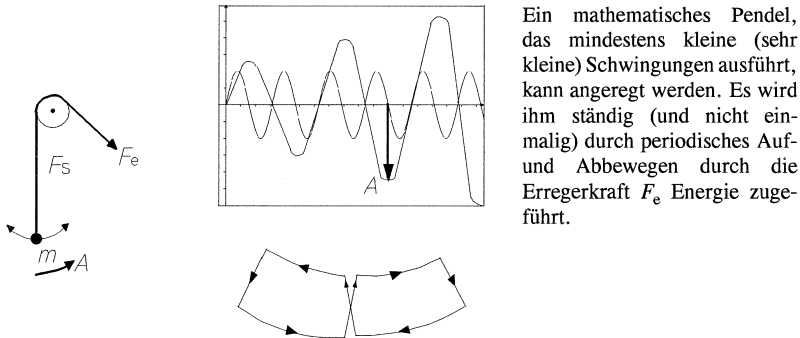


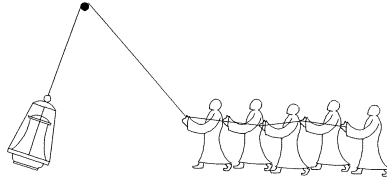
Abb. 9-2-1 Parametrische Anregung

Die Kraft, mit der der Pendelkörper am Seil zieht, schwankt:

1. Die Masse m bewegt sich auf einer Kreisbahn mit periodisch wechselnder Geschwindigkeit und damit periodisch wechselnder Zentrifugalkraft.
2. Die Gewichtskraft kann nur mit ihrer Komponente in Seilrichtung wirken, die Komponente ist in den oberen Totpunkten am kleinsten und erreicht den größten Wert im untersten Bahnpunkt.
3. Da die Geschwindigkeit im untersten Bahnpunkt ebenfalls am größten ist, haben die Zentrifugalkraft und die Komponente der Gewichtskraft gleichzeitig in diesem Punkt ihr Maximum.
4. Die Seilkraft F_s hat die doppelte Frequenz des Pendels. Pumpfrequenz = $2 \cdot$ Pendelfrequenz, da die Energiezufuhr durch Ziehen am Seil immer beim Durchgang durch den tiefsten Bahnpunkt erfolgt.
5. Am Seil wird immer dann gezogen, wenn sich die Masse m im tiefsten Punkt befindet

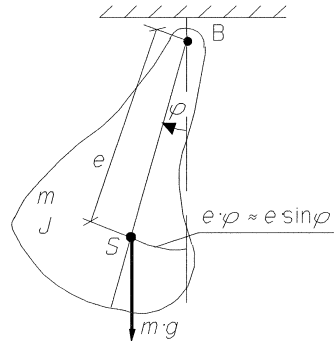
(größte Seilkraft), während am höchsten Punkt das Seil nachgelassen wird (kleinste Seilkraft). Dadurch wird dem System beim Ziehen mehr Energie zugeführt als beim Nachlassen abgeführt wird. Der Energieinhalt steigt, die Amplituden nehmen zu. Diesen Vorgang beherrscht bereits jedes Kind, das sich auf eine Schaukel setzt.

Eine sakrale Anwendung ist das Aufschaukeln eines schweren Weihrauchgefäßes (Botafumeiro; $m = 50 \text{ kg}$, Höhe 2 m) in der Kathedrale von Santiago de Compostela (11. Jahrhundert), wo eine kleine Gruppe das Gefäß durch das Querschiff der Kathedrale mit einer Amplitude $A = 38 \text{ m}$ schwingen läßt. In der Skizze ist für Personen und Gefäß der Maßstab 1:1, die Rolle, über die das Seil läuft, ist in der Vierung befestigt. Im Mittelalter stand die Kathedrale als Pilgerziel noch über Rom und Jerusalem.



9.3 Physisches Pendel

Beim physischen Pendel ist die Masse über den ganzen Körper verteilt. Die Drehbewegung wird auf den Aufhängepunkt bezogen, der Vorgang entspricht damit einer Drehschwingung. Da hier die Masse über den Körper verteilt ist, und nicht wie beim mathematischen Pendel in einem Punkt konzentriert wird, entspricht dieser Fall den tatsächlichen Verhältnissen.



Es ist

J_B	Massenträgheitsmoment, bezogen auf den Aufhängepunkt
$M = c \cdot \varphi$	Rückstellmoment
e	Schwerpunkt Abstand
$e \cdot \sin \varphi$	der angenäherte Abstand der Wirkungslinie der Gewichtskraft.

Abb. 9-3-1 Physisches Pendel

Die Schwingungsgleichung ist identisch mit (8-2-1)

$$J_B \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c \cdot \varphi = 0, \quad (9-3-1)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{c}{J_B} \cdot \varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J_B}}. \quad (9-3-2)$$

Die Drehfederkonstante läßt sich über das Rückstellmoment mit $M = c \cdot \varphi$ ermitteln

$$c = \frac{M}{\varphi} = \frac{F_G \cdot e \cdot \varphi}{\varphi} = m \cdot g \cdot e . \quad (9-3-3)$$

Damit wird die Eigenkreisfrequenz, (9-3-3) in (9-3-2) eingesetzt, zu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot e}{J_B}} = 2 \cdot \pi \cdot f_0 . \quad (9-3-4)$$

Vergleicht man diese Formel mit der Formel des mathematischen Pendels (9-1-5), so erhält man die Formel für die **reduzierte Länge** ℓ_{red}

$$\ell_{\text{red}} = \frac{J_B}{m \cdot e} . \quad (9-3-5)$$

Dabei ist J_B auf den Aufhängepunkt B bezogen. Formt man (9-3-4) nach J_B um, so kann man das Massenträgheitsmoment J_S für jeden beliebigen Körper bestimmen, wenn man ihn in einem Punkt aufhängt und die Frequenz der Pendelschwingung mißt. D.h. für die Praxis, daß man J_B auch für kompliziert geformte Maschinenteile (Läufer von Motoren, Rotoren, Pleuel (Abb. 9-3-2) usw.) mit Hilfe einer Stoppuhr ermitteln kann. Das Massenträgheitsmoment bezogen auf den Aufhängepunkt ist dann

$$J_B = \frac{F_G \cdot e}{4 \cdot \pi^2 \cdot f_0^2} . \quad (9-3-6)$$

Die Umrechnung auf J_S erfolgt über den Satz von Steiner:

$$J_B = J_S + e^2 \cdot m . \quad (9-3-7)$$

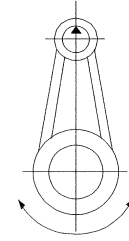


Abb. 9-3-2

Physisches Pendel $T_0 = f(e)$

Die Berechnung der Dauer einer Periode erfolgt nach der Gleichung

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J_S + e^2 \cdot m}{m \cdot g \cdot e}} . \quad (9-3-8)$$

Man kann nun die Frage stellen, welcher Abstand e für die Entfernung zwischen dem Schwerpunkt eines Körpers und der Achse, um die der Körper pendeln soll, gewählt werden muß, um die kleinste Zeit T_0 für eine Schwingung zu erreichen. Beim mathematischen Pendel wird mit größer werdender Pendellänge die Periodendauer für eine Schwingung immer größer.

In dem Beispiel ist für die einfache Kontrolle eine Stahlscheibe mit dem Radius $e = 0,1$ m und der Dicke $b = 0,01$ m gewählt worden, wobei in der Gleichung J_S das Massenträgheitsmoment ist (hier $J_S = 1,233\text{E-}2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$). (Siehe Beispiele).

Man verwendet diese Anordnung häufig, um durch Messen der Schwingungszeit bei komplizierter gebauten Körpern (Rotoren von Motoren) das Massenträgheitsmoment zu ermitteln. Die Gleichung wird dann nach J_S umgestellt (siehe auch Beispiel).

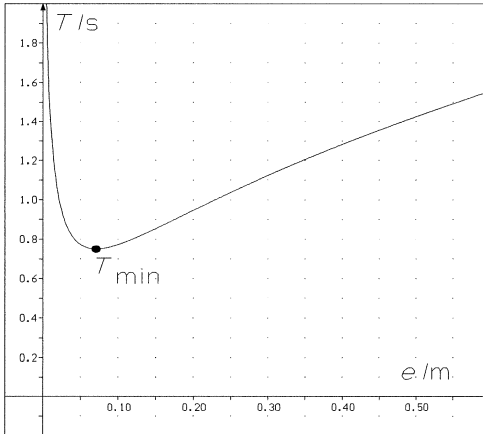


Abb. 9-3-3 Periodendauer $= f(e)$

Ein häufig verwendetes Beispiel ist die Schwerpunktsbestimmung eines Pleuels. Für die Berechnung der Kräfte an einem Kurbeltrieb ist es notwendig, die Lage des Schwerpunktes zu kennen, um die rotatorischen und translatorischen Kräfte bestimmen zu können.

Das Pleuel wird dabei zunächst in einem Pleuelauge aufgehängt und die Schwingungszeit gemessen. Danach wird das Pleuel gedreht, im anderen Pleuelauge aufgehängt und die Schwingungszeit erneut bestimmt. Da das Massenträgheitsmoment J_S konstant ist, kann die Gleichung (9-3-8) für jede Aufhängung nach J_S umgestellt werden. Setzt man die beiden auf diese Weise gewonnenen Gleichungen gleich, die sich in e_1 , e_2 , T_1 , T_2 unterscheiden, so kann daraus e_1 bzw. e_2 und damit die Schwerpunktlage ermittelt werden und danach J_S bestimmt werden.

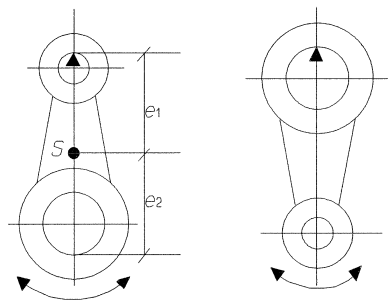


Abb. 9-3-4 Schwerpunkt am Pleuel

9.4 Manometerschwingungen

Bei einem Manometer (einem mit einer Flüssigkeit gefüllten U-Rohr) werden bei Meßvorgängen pulsierende Drücke auftreten. Sie können die Meßflüssigkeit in Resonanzschwingungen versetzen.

Die Rückstellung der ausgelenkten Masse erfolgt auch hier über die Schwerkraft. Es ist ein Element der Masse m um $2 \cdot x$ über das augenblickliche Niveau gehoben. Die Gewichtskraft dieses Elementes wirkt als rückstellende Federkraft. Dabei ist ℓ die gesamte Länge der Flüssigkeitssäule und A der lichte Querschnitt des U-Rohres.

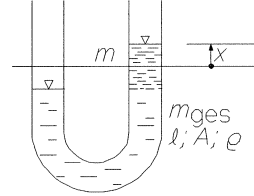


Abb. 9-4-1 Manometerschwingung

Die rückstellende Kraft ist

$$F_G = m \cdot g = 2 \cdot x \cdot A \cdot \rho \cdot g = F_{\text{Feder}} = c \cdot x. \quad (9-4-1)$$

Daraus folgt für die Federkonstante c des Manometers

$$c = 2 \cdot A \cdot g \cdot \rho \quad (9-4-2)$$

und für die Eigenfrequenz f_0 mit Umformung

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{c}{m_{\text{ges}}}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \rho \cdot A \cdot g}{\rho \cdot A \cdot \ell}} \quad (9-4-3)$$

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{\ell}} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{\ell}}. \quad (9-4-4)$$

Die Frequenz ist unabhängig z.B. von der Masse (Menge) der Flüssigkeit und deren Dichte. Man kann Resonanzschwingungen ganz einfach durch Ändern von ℓ verhindern, indem man etwas Flüssigkeit zufüllt oder abzapft.

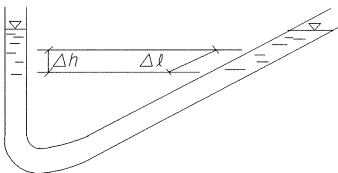


Abb. 9-4-2 Schrägrohrmanometer

Besonders empfindlich für Schwingungen sind Schrägrohrmanometer, die wegen ihrer hohen Meßgenauigkeit bei kleinen Drücken eingesetzt werden. Die Strecke Δh ist kleiner als die geneigte Strecke $\Delta \ell$, d.h. die Ablesegenauigkeit ist auf der Strecke $\Delta \ell$ größer.

Um bei Schiffen das Schlingern (Bewegen um die Längsachse, hervorgerufen durch Seegang und Wind) zu vermindern, werden Schlingertanks eingebaut. Auf das Wasser in den Tanks wirken Massenkräfte, die um ca. 180° phasenverschoben sind. Auf diese Weise gibt es zur Schlingeramplitude eine Gegenamplitude im Tank. Die Abstimmung kann ebenfalls durch ℓ erfolgen. (System Flume).

Siehe Kap. 28.2 (Tilgung) und am Ende des Kap. 4 (Amplitudendämpfung).

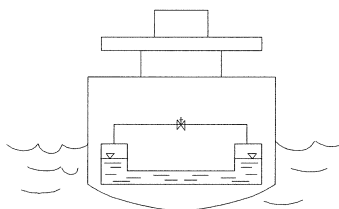


Abb. 9-4-3

10 Anteil der Federmasse

Zur Vereinfachung der Berechnung wird meist die Federmasse vernachlässigt. Da sie jedoch u.U. einen erheblichen Anteil an der Schwingungsenergie besitzt, kann sie mit einem Faktor zur belastenden Masse hinzugerechnet werden. Die Energie der Federmasse hängt von der Schwingungsform ab, die in guter Annäherung in Form der elastischen Linie bei statischer Auslenkung angenommen wird (s. Kap. 1, Anmerkung 3).

Für den einseitig eingespannten Balken sind in der Literatur zwei Gleichungen üblich, die durch Umformung ineinander übergeführt werden können $\ominus$.

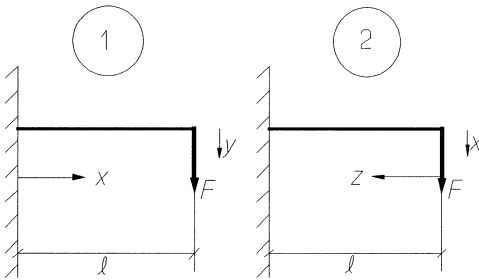


Abb. 10-1-1 Statische Durchbiegung

1. Durchbiegung mit y bezeichnet, Längskoordinate mit x von der Einspannungsseite

$$\text{Fall (1)} \quad y(x) = \frac{F}{6 \cdot I \cdot E} \cdot (3 \cdot \ell \cdot x^2 - x^3), \quad (10-1-1)$$

2. Durchbiegung mit x bezeichnet, Längskoordinate mit z von der Belastungsseite

$$\text{Fall (2)} \quad x(z) = \frac{F \cdot \ell^3}{6 \cdot I \cdot E} \cdot \left(\frac{z^3}{\ell^3} - 3 \cdot \frac{z}{\ell} + 2 \right). \quad (10-1-2)$$

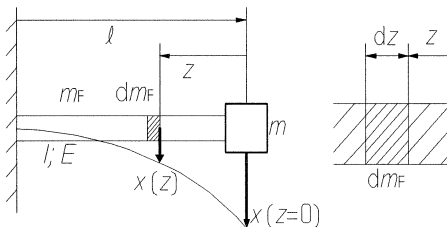


Abb. 10-1-2 Element des Biegebalkens

Für die Ableitung wird der Fall (2) gewählt (da hier mit (10-1-3) direkt zur Schwingungslehre übergegangen wird, ist die Durchbiegung = Schwingweg mit x bezeichnet). In der Festigkeitslehre werden die Bezeichnungen meist nach Bild 1 gewählt.

Es wird ein Element dm_F des Balkens an der Stelle z herausgeschnitten. An dieser Stelle beträgt die

Durchbiegung $x(z)$. Dieses Element hat die Masse dm (rechtes Teilbild in *Abb. 10-1-2* und (10-1-8) in Worten: Gesamtmasse des Balkens m_F dividiert durch die Gesamtlänge ℓ = Masse pro Längeneinheit, das multipliziert mit der Länge des Elementes dz ergibt die Masse des Elementes dm_F) $\odot$. Für alle Elemente dm_F des Balkens gilt die Schwingungsgleichung mit $x_0(z)$ als maximaler Ausschlag = Amplitude an der Stelle $z = 0$

$$x(z,t) = x_0(z) \cdot \sin(\omega t) . \quad (10-1-3)$$

Für die kinetische Energie wird die Geschwindigkeit benötigt, man erhält sie aus der ersten Ableitung von $x(z,t)$

$$\frac{dx}{dt}(z,t) = x_0(z) \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) . \quad (10-1-4)$$

Für die Schwingungsform wird die elastische Linie nach Fall (2) angenommen:

$$\text{Fall (2)} \quad x(z) = \frac{F \cdot \ell^3}{6 \cdot I \cdot E} \cdot \left(\frac{z^3}{\ell^3} - 3 \cdot \frac{z}{\ell} + 2 \right) . \quad (10-1-5)$$

Für die Angriffsstelle der Kraft gilt $z = 0$

$$x_{\max} = \frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot I \cdot E} = x_0(z=0) \Rightarrow F = \frac{3 \cdot I \cdot E \cdot x_{\max}}{\ell^3} . \quad (10-1-6)$$

Diese Kraft F in (10-1-5) eingesetzt, gibt die Amplitude an der Stelle z

$$x_0(z) = \frac{1}{2} \cdot x_{\max} \cdot \left(\frac{z^3}{\ell^3} - 3 \cdot \frac{z}{\ell} + 2 \right) . \quad (10-1-7)$$

Damit wird die kinetische Energie eines Masseteilchens dm_F [aus $(1/2 \cdot m \cdot v^2)$]

$$dE = \frac{1}{2} \cdot dm_F \cdot \left[\frac{dx}{dt}(z,t) \right]^2 \quad \text{mit} \quad dm_F = \frac{m_F}{\ell} \cdot dz \quad (10-1-8)$$

mit dm_F aus *Abb. 10-1-2* und Formel (10-1-4)² = Geschwindigkeit²

$$dE = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_F}{\ell} \cdot dz \cdot [x_0(z) \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)]^2 . \quad (10-1-9)$$

Wird Formel (10-1-7) eingesetzt, dann erhält man

$$dE = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_F}{\ell} \cdot \frac{1}{4} \cdot x_{\max}^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{z^3}{\ell^3} - 3 \cdot \frac{z}{\ell} + 2 \right)^2}_{(x_0(z))^2} \cdot dz \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) . \quad (10-1-10)$$

Für die Masse m am Ende des Balkens ist die kinetische Energie

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot x_{\max}^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) . \quad (10-1-11)$$

Addiert man die Gleichungen (10-1-10) und (10-1-11), so erhält man die gesamte Energie des Systems. Dabei lassen sich einzelne Faktoren ausklammern: $\ominus$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{m_F}{\ell} \cdot \int_0^\ell \left(\frac{z^3}{\ell^3} - 3 \cdot \frac{z}{\ell} + 2 \right)^2 \cdot dz + m \right] \cdot x_{\max}^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) . \quad (10-1-12)$$

Die Integration führt auf

$$E = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{m_F}{\ell} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{132}{140} \cdot \ell + m \right] \cdot x_{\max}^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) , \quad (10-1-13)$$

Die [] kann man zusammenfassen und erhält

$$E = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{33}{140} \cdot m_F + m \right] \cdot x_{\max}^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) . \quad (10-1-14)$$

Bei einem Ersatzsystem, das aus einem Balken ohne Masse = Feder und einer Ersatzmasse m_{ers} besteht, ist die kinetische Energie

$$E_{\text{ers}} = \frac{1}{2} \cdot [m_{\text{ers}}] \cdot x_{\max}^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) . \quad (10-1-15)$$

Die Energien von Formel (10-1-14) und (10-1-15) müssen gleich sein, d.h. aber, daß die []-Ausdrücke gleich sein müssen. Also muß für diesen Belastungsfall sein

$$m_{\text{ers}} = m + \frac{33}{140} \cdot m_F \approx m + \frac{1}{4} \cdot m_F . \quad (10-1-16)$$

Fügt man für diesen Fall zur Masse m noch 1/4 der Federmasse m_F hinzu, dann ist die mitschwingende Federmasse, die in der Formel für die Durchbiegung nicht erscheint, hinreichend genau berücksichtigt.

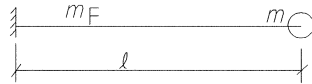


Abb. 10-1-3

Bei dem beidseitig gelagerten und in der Mitte durch m belasteten Balken kann man mit dem Faktor 0.5 arbeiten.

Das gilt mit hinreichender Genauigkeit auch dann, wenn m sich nicht genau in der Mitte befindet. (Siehe hierzu Kap. Beispiele)

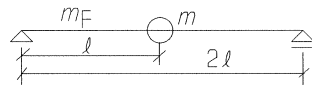


Abb. 10-1-4

$$m_{\text{ers}} = m + \frac{1}{2} \cdot m_F . \quad (10-1-17)$$

11 Phasendiagramm

11.1 Phasenebene

In der **Phasenebene** wird eine Schwingung dargestellt, indem man die Geschwindigkeit dx/dt als Ordinate über dem Ausschlag (Weg) x als Abzisse darstellt. Die **Phasendarstellung** ist vielseitiger und besonders für nicht harmonische Schwingungen geeignet. Damit stellt für jeden Zeitpunkt t ein Bildpunkt die Momentanwerte für Weg x und Geschwindigkeit $\dot{x} = v$ dar.

Damit ist in einem Punkt der Schwingungszustand eindeutig; die Zeit ist der Parameter. Die Gleichung der Phasenkurve ist $v = v(x)$.

Für eine Schwingung gilt, in der bereits früher aufgestellten Form (als Beispiel) für den Weg

$$x = \hat{x} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi), \quad (11-1-1)$$

und für die Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = -\hat{x} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi). \quad (11-1-2)$$

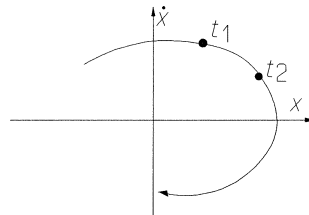


Abb. 11-1-1 x-v-Diagramm

Nach dem Quadrieren und Addieren erhält man, nach dem Additionstheorem der Trigonometrie ist der Faktor von $\hat{x}$ auf der rechten Seite der Gleichung $\sin^2(\cdot) + \cos^2(\cdot) = 1$:

$$x^2 + \left(\frac{dx/dt}{\omega} \right)^2 = \hat{x}^2 \cdot (\cos^2(\omega \cdot t - \varphi) + \sin^2(\omega \cdot t - \varphi)), \quad (11-1-3)$$

$= 1$

$$\left(\frac{x}{\hat{x}} \right)^2 + \left(\frac{dx/dt}{\hat{x} \cdot \omega} \right)^2 = 1. \quad (11-1-4)$$

Das ist in der Phasenebene eine Ellipse mit den Halbachsen $\hat{x}$ (= Amplitude der Schwingung) und $\hat{x} \cdot \omega$ mit $\omega = \omega_0$ (= Eigenkreisfrequenz der Schwingung).

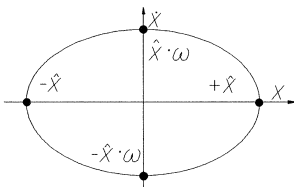


Abb. 11-1-2 Schwingungsellipse

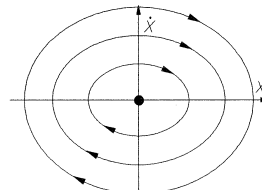


Abb. 11-1-3 Phasenporträt

Die Halbachsen hängen von der Schwingungsamplitude ab (Anfangsbedingung). Für verschiedene Anfangsbedingungen erhält man eine Schar konzentrischer Ellipsen.

Alle Phasenkurven ergeben das **Phasenbild = Phasenporträt** eines Schwingers. Sie laufen im Uhrzeigersinn.

Es folgt aus

$$\begin{array}{lll} dx/dt = \dot{x} & \Rightarrow & dx = \dot{x} \cdot dt \quad \text{und damit} \\ \text{für } \dot{x} > 0 & \Rightarrow & dx > 0 \quad (\text{der Weg nimmt zu}), \text{ sowie} \\ \text{für } \dot{x} < 0 & \Rightarrow & dx < 0 \quad (\text{der Weg nimmt ab}). \end{array}$$

Außerdem stehen die Phasenkurven senkrecht auf der x -Achse (=Weg), denn ihre Tangente ist dann (aus den Gleichungen für die Geschwindigkeit $dx/dt = \dot{x}$ und für die Beschleunigung $d\dot{x}/dt = \ddot{x}$) $\ominus$

$$\tan \alpha = d\dot{x} / dx = (\ddot{x} \cdot dt) / (\dot{x} \cdot dt) = \ddot{x} / \dot{x} ,$$

denn für $\dot{x} = 0$ wird die Steigung ($\tan \alpha \Rightarrow \alpha$) für $\ddot{x} \neq 0$ unendlich groß (Durchgang durch die x -Achse).

Es kann in der oberen und in der unteren Halbebene keine Punkte mit vertikaler Tangente geben, denn für jeden Punkt mit vertikaler Tangente **muß** $\dot{x} = 0$ sein. Werden $\dot{x}$ und $\ddot{x}$ gleichzeitig 0, so erhält man einen **Singulären Punkt**. Es ist die Ruhelage.

Aus der Phasenkurve kann der zeitliche Verlauf der Schwingung nicht erkannt werden. Er kann durch Integration bestimmt werden.

Mit der Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(x) \quad (11-1-5)$$

erhält man durch Trennung der Variablen

$$dt = \frac{dx}{\dot{x}(x)} . \quad (11-1-6)$$

Die Integration über die **gesamte geschlossene** Phasenkurve ergibt $\ominus$

$$t = t_0 + \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\dot{x}(x)} . \quad (11-1-7)$$

Als Beispiel soll die Gleichung (11-1-4) untersucht werden:

$$\left(\frac{x}{\dot{x}} \right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x} \cdot \omega} \right)^2 = 1 . \quad (11-1-8)$$

Durch Umformen und Auflösen
nach $\dot{x}$

$$\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x} \cdot \omega} \right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{\dot{x}} \right)^2$$

$$\dot{x} = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{x}{\hat{x}}\right)^2\right)} \cdot \hat{x}^2 \cdot \omega^2$$

erhält man den Nenner für das Integral in (11-1-7) zu

$$\dot{x} = \omega \cdot \sqrt{\hat{x}^2 - x^2}.$$

Mit den Grenzen des Integrales, in diesem Fall die positive und die negative Amplitude, wird die Gleichung (11-1-7) zu

$$T = 2 \cdot \int_{-\hat{x}}^{+\hat{x}} \frac{dx}{\omega \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (11-1-12)$$

Eine Integraltabelle liefert die Lösung des Integrales

$$T = 2 \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{\hat{x}}\right) \Big|_{-\hat{x}}^{+\hat{x}}. \quad (11-1-13)$$

Das ist die Periodendauer einer sin-Schwingung:

$$T = \frac{2}{\omega} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}. \quad (11-1-14)$$

Ein Feder-Masse-System mit sinusförmiger Schwingung ergibt konzentrische Ellipsen. Die Gleichgewichtslage ist ein singulärer Punkt.

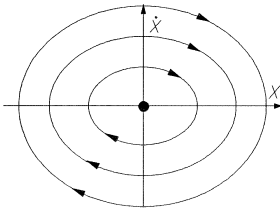


Abb. 11-1-4 Wirbelpunkt

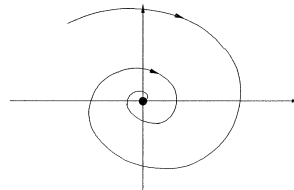


Abb. 11-1-5 Strudelpunkt

Wirbelpunkt:

Bei ungedämpfter Schwingung ist der singuläre Punkt ein Wirbelpunkt. (siehe auch Abb. 11-6-5).

Strudelpunkt:

Bei gedämpfter Schwingung wird die Ellipse zu einer Spirale und der singuläre Punkt im Nullpunkt zu einem Strudelpunkt (Siehe Abb. 11-6-6 bis Abb. 11-6-9).

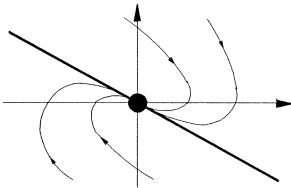


Abb. 11-1-6 Knotenpunkt

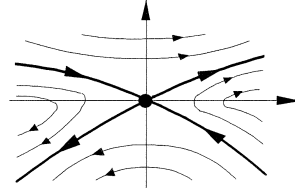


Abb. 11-1-7 Sattelpunkt

Knotenpunkt:

Ist die Dämpfung stark, rücken die Windungen auseinander. Bei sehr starker Dämpfung wird der singuläre Punkt zum Knotenpunkt (s. Kap. 11.2).

Sattelpunkt:

Bei instabilen Gleichgewichtslagen werden die Kurven hyperbelähnlich (siehe Abschnitt über Pendel im Schwerfeld: s. Kap. 11.3).

11.2 Starke Dämpfung

Bei starker Dämpfung sind alle Phasenkurven im Nullpunkt tangential zu einer schräg durch den Nullpunkt gehenden Geraden (Abb. 11-1-6). Sie wandern längs der Geraden in den Nullpunkt, wobei der Nullpunkt erst nach unendlich langer Zeit erreicht wird. In der Nähe der Nullpunktes kann die Phasenkurve durch die Gerade

$$\dot{x} = -C \cdot x \quad (\text{Gerade mit negativer Steigung}) \quad (11-2-1)$$

ersetzt werden. In das Lösungsintegral (11-1-7) eingesetzt, erhält man

$$t = t_0 - \int_{x_0}^x \frac{dx}{C \cdot x} = t_0 - \frac{1}{C} \cdot (\ln x - \ln x_0) . \quad (11-2-2)$$

Die Lösung dieser Gleichung führt mit

$$\ln x - \ln x_0 = (t - t_0) \cdot (-C) \quad (11-2-3)$$

auf eine Schreibweise in logarithmischer Form. Löst man diese Schreibweise auf, dann folgt daraus die e-Funktion in der Form $\ominus$

$$x = x_0 \cdot e^{-C \cdot (t - t_0)} \quad (11-2-4)$$

und damit ein Faktor der Gleichung einer gedämpften Schwingung (Kapitel 24). Der Nullpunkt kann nur asymptotisch erreicht werden, deshalb schneiden die Phasenkurven die Abzisse nicht senkrecht.

11.3 Nicht lineare Schwinger

In Kapitel 9.1 war das mathematische Pendel zunächst für beliebige Ausschläge angesetzt worden. In der weiteren Abwicklung war dann der Ausdruck $\sin\varphi$ durch φ für kleine Ausschläge ersetzt worden. Nun wird diese Einschränkung nicht mehr getroffen (im nächsten Abschnitt wird dann das Pendel selbst behandelt).

Die Differentialgleichung hat dann die Form

$$m \cdot \ddot{\varphi} + f(\varphi) = 0. \quad (11-3-1)$$

Dabei ist der zweite Term die rückstellende Größe, z. B. nach Kap. 9.1 Gleichung (9-1-4)

$$f(\varphi) = \frac{g}{\ell} \cdot \sin\varphi. \quad (11-3-2)$$

Das Phasendiagramm wird aus den Größen Geschwindigkeit und Weg gebildet; die DGL enthält jedoch die Beschleunigung. Die Beschleunigung ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Andererseits enthält die kinetische Energie die Geschwindigkeit, so daß man ein Phasendiagramm Geschwindigkeit/Weg bilden kann. Dabei ergibt sich in den folgenden Zeilen ein Problem: Nach DIN 1304 hat E_{kin} die Einheit N·m, mit der Geschwindigkeit $\dot{x}$ m/s, während beim Pendel die Geschwindigkeit auf dem Kreisbogen $\dot{\varphi}$ rad/s ist. Das ist jedoch für die weitere Entwicklung der Gleichungen ohne Bedeutung.

Differenziert man die kinetische Energie nach der Zeit, so ist (Kettenregel) $\otimes$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \Rightarrow \frac{2}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = m \cdot \ddot{\varphi} \cdot \dot{\varphi}. \quad (11-3-3)$$

Dieser Term enthält aber den ersten Summanden der DGL, multipliziert mit der Geschwindigkeit. Multipliziert man also die DGL mit der Geschwindigkeit und integriert anschließend (Umkehrung der Differentiation), dann wird der erste Summand zur kinetischen Energie. Es wird also die gesamte DGL zunächst mit der Geschwindigkeit multipliziert und danach integriert.

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\varphi}^2 + \int f(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \cdot dt = \text{const} = E_{\text{ges}}. \quad (11-3-4)$$

Wenn aber der erste Summand die kinetische Energie darstellt, muß der zweite Summand die potentielle Energie sein. Dann steht aber auch der gesamte Ausdruck für die gesamte Energie der Bewegung.

Mit dem Ersetzen von $\ddot{\varphi}$ durch den Differentialquotienten $d\varphi/dt$ und Gleichsetzen mit der potentiellen Energie wird der zweite Summand aus (11-3-4) zu

$$\int f(\varphi) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt = \int f(\varphi) \cdot d\varphi = E_p \quad (11-3-5)$$

und es ist dann

$$E_k + E_p = E_{\text{ges}} . \quad (11-3-6)$$

Umgeformt wird daraus

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\varphi}^2 + E_p = E_{\text{ges}} . \quad (11-3-7)$$

Löst man diese Gleichung nach $\dot{\varphi}$ auf, erhält man die Geschwindigkeit im Phasendiagramm

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_{\text{ges}} - E_p)} . \quad (11-3-8)$$

Die Gleichung (11-3-5) wird dann in Gleichung (11-4-4) verwendet werden.

11.4 Pendel im Schwerfeld

Die Gleichung für den nicht linearen Schwinger war (11-3-1)

$$m \cdot \ddot{\varphi} + f(\varphi) = 0 . \quad (11-4-1)$$

Für das Pendel mit beliebiger Schwingweite war (9-1-4) mit $c = m \cdot g/l$

$$m \cdot \ddot{\varphi} + c \cdot \sin \varphi = 0 . \quad (11-4-2)$$

Daraus folgt durch Vergleich der Summanden in (11-4-1) und (11-4-2)

$$f(\varphi) = c \cdot \sin \varphi , \quad (11-4-3)$$

und damit wird durch Integration

$$\int f(\varphi) \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi} c \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = c \cdot (-\cos \varphi) \Big|_0^{\varphi} = c \cdot (1 - \cos \varphi) . \quad (11-4-4)$$

Es wird nun auf die Ableitung in Kap. 11.3 zurückgegriffen:

Da der erste Summand der DGL mit der Geschwindigkeit multipliziert und integriert der kinetischen Energie entspricht (s. Kap. 11.3), muß dieser zweite Summand der potentiellen Energie entsprechen. Für diesen speziellen Fall des Pendels mit beliebig großem Ausschlag gilt:

Es muß im oberen Totpunkt (größter Ausschlag) $\varphi = \varphi_{\text{max}}$ sein und damit die potentielle Energie zur Gesamtenergie werden, da dann die kinetische Energie gleich Null ist. Denn im oberen Totpunkt ist die Geschwindigkeit gleich Null.

Es ist dann

$$E_{\text{ges}} = c \cdot (1 - \cos \varphi_{\text{max}}) . \quad (11-4-5)$$

Diese Gleichung wird in (11-3-8) eingesetzt und damit wird die Geschwindigkeit im Phasendiagramm mit $\omega = \sqrt{c/m}$ zu

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_{\text{ges}} - E_p)} , \quad (11-4-6)$$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2 \cdot c}{m} \cdot (1 - \cos \varphi_{\text{max}}) - (1 - \cos \varphi)} , \quad (11-4-7)$$

$$\dot{\varphi} = \omega \cdot \sqrt{2 \cdot (\cos \varphi - \cos \varphi_{\text{max}})} . \quad (11-4-8)$$

Das Phasendiagramm stellt dann die einzelnen Zustände dar, wobei sich leicht einige Begriffe der Chaostheorie erklären lassen.

Zunächst soll das Pendel (in diesem Fall das mathematische Pendel mit festem Faden = masseloser Stange) in den Schwingungsformen gezeigt werden, in denen es im Phasendiagramm dargestellt ist.

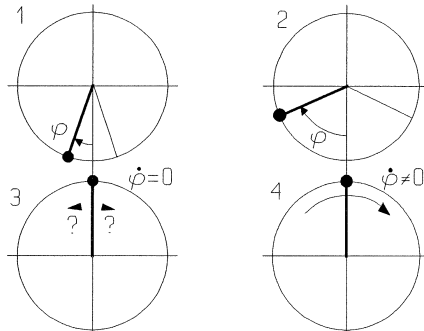


Abb. 11-4-1 Pendel in verschiedenen Bewegungslagen

Zustand 1: Das Pendel führt nur Schwingungen mit kleinem φ aus. Im Diagramm sind die Kurven Ellipsen um den Ruhepunkt W = Wirbelpunkt.

Zustand 2: Der Winkel φ wird größer, die Kurven werden einer Ellipse ähnlich. Dieser Bereich wird durch 3 begrenzt.

Zustand 3: Die **Separatrizen** (s. Abb. 11-4-2, 11-4-3) trennen die Zustände 2 und 4. Dabei erreicht das Pendel die obere instabile Gleichgewichtslage in den Sattelpunkten S, in

denen es zum Stillstand kommt. Es genügt die kleinste Störung, um das Pendel nach rechts oder links schwingen zu lassen.

Setzt man in die Gleichung (11-4-8)

$$\dot{\varphi} = \omega \cdot \sqrt{2 \cdot (\cos \varphi - \cos \varphi_{\text{max}})} \quad (11-4-9)$$

für $\varphi_{\text{max}} = \pm \pi$ ein, ist der $\cos(\pi) = (-1)$. Es wird dann die Gleichung zu

$$\dot{\varphi} = \omega \cdot \sqrt{2 \cdot (\cos \varphi + 1)} . \quad (11-4-10)$$

Aus der Trigonometrie wird die Gleichung benutzt

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2 \cdot \alpha)) \quad \text{mit} \quad 2 \cdot \alpha = \varphi \Rightarrow \alpha = \frac{\varphi}{2}$$

$$1 + \cos \varphi = 2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} . \quad (11-4-12)$$

Damit kann man die Wurzel auflösen und man erhält für die Geschwindigkeit

$$\dot{\varphi} = 2 \cdot \omega \cdot \cos \frac{\varphi}{2} , \quad (11-4-13)$$

d.h. die Geschwindigkeit/Weg-Funktion der Separatrize folgt dem Cosinus. Diese Funktion schneidet die Wegachse φ bei der Geschwindigkeit Null. Der Schnittpunkt ist ein Sattelpunkt, von ihm aus sind beide Richtungen möglich. In Abb. 11-4-2 und Abb. 11-4-3 ist u.a. der Sattelpunkt mit seinen möglichen Richtungen für Weg und Geschwindigkeit eingezeichnet.

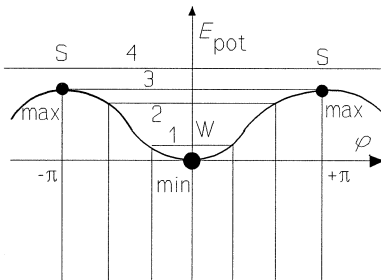


Abb. 11-4-2 Energie-Berg und -Tal eines Schwingers

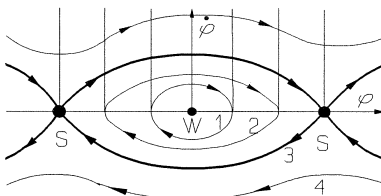


Abb. 11-4-3 Projektion zu Abb. 11-4-2

Zustand 4: Das Pendel führt eine sich überschlagende Bewegung aus. Dabei ist die Richtung der Bewegung vorgegeben. Die Kurven liegen nach Abb. 11-4-2 und Abb. 11-4-3 außerhalb der Separatrizen. In Abb. 11-5-1 ist gezeigt, daß auch eine solche Bewegung durch Energieverlust in einem Strudelpunkt enden kann.

Man kann einen Streifen der Breite 2π parallel zur $\dot{\varphi}$ -Achse zu einem Zylinder zusammenfügen. Dann laufen die Kurven 1 und 2 um den Wirbelpunkt, ohne um den Zylinder herumzulaufen, während die Kurve 3 sowohl den Zylinder umlaufen kann wie auch um den Wirbelpunkt "kreisen" kann. Die Kurve 4 läuft in Schwingungsform um den Zylinder herum.

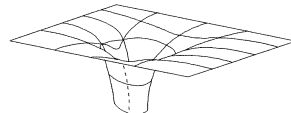


Abb. 11-4-4 3-D Darstellung

11.5 Zusammenfassung

Die Gleichgewichtspunkte bei linearen und nicht linearen Systemen können in zwei Gruppen zusammengefaßt werden:

Periodisches Verhalten:	Wirbel (ungedämpftes System) Strudel (gedämpftes System)
Aperiodisches Verhalten:	Sattel (instabiles Gleichgewicht) Knoten, Quelle, Senke (mit $\vartheta > 1$ gedämpftes System). Die Begriffe periodisch, aperiodisch und ϑ werden in Kap. 24 behandelt.

In Abb. 11-5-1 sind für einen Schwinger mehrere Phasen in einem Diagramm gezeichnet. Dabei ist zu erkennen, in welcher Weise in einem Phasenporträt die verschiedenen Kurven ineinander übergehen. Die Ziffern der Abb. 11-4-2 und Abb. 11-4-3 sind beibehalten. Hinzugekommen ist der Einfluß der Dämpfung, der zu einem Strudelpunkt führt. Es können alle Kurven in einem Strudelpunkt enden.

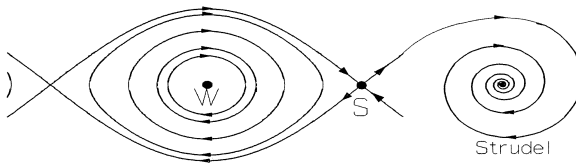


Abb. 11-5-1a Phasenkurven

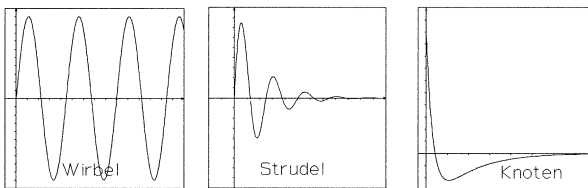


Abb. 11-5-1b Periodisches und aperiodisches Verhalten

Dreht man das Koordinatensystem um 90° und dividiert man die Geschwindigkeit der nun waagerechten Achse durch ω_0 , so erhält man das Diagramm eines Schwingers mit Coulomb'scher Dämpfung (trockene Reibung = siehe im Kapitel 29). Die Phasenkurven werden zu Halbkreisen, die ineinander übergehen (Abb. 29-1-4).

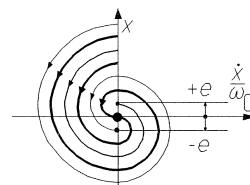


Abb. 11-5-2 Phasenporträt Coulomb'sche Dämpfung

11.6 Schwingungen, Spiralen

Archimedische Spirale

Verwendet man ein x - y -Koordinatensystem, so lassen sich die geometrischen Beziehungen in einfacher Weise darstellen. Wird ein Radius bei jeder Umdrehung (Durchlaufen eines Vollwinkels $2 \cdot \pi$) um den gleichen konstanten Betrag vergrößert, so lautet die Gleichung in Polarkoordinaten mit einer Konstanten c und dem Winkel β

$$r = c \cdot \beta ; \quad r_2 = r_1 + c \cdot 2 \cdot \pi = r_1 + \text{const} . \quad (11-6-1)$$

Der Radius nimmt konstant zu. Bildet man die Differenz zweier aufeinander folgender Radien, so sind die Differenzen gleich groß, da auch die Zunahme gleich ist.

$$r_3 - r_2 = r_2 - r_1 ; \quad r_2 = \frac{r_3 + r_1}{2} . \quad (11-6-2)$$

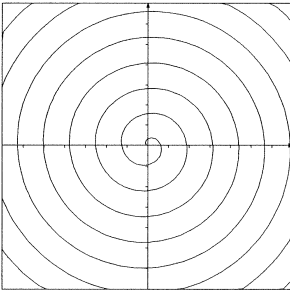


Abb. 11-6-1 Archimedische Spirale

Das ist das arithmetrische Mittel. Die Darstellung in kartesischen Koordinaten besteht in

$$x(t) = c \cdot t \cdot \cos(t) \quad (11-6-3)$$

$$y(t) = c \cdot t \cdot \sin(t) , \quad (11-6-4)$$

wobei t der Parameter und c ein frei wählbarer Faktor ist. Es ist eine Rotation mit konstanter Geschwindigkeit, überlagert mit einer radialen linearen Bewegung mit ebenfalls konstanter Geschwindigkeit. Alle Archimedischen Spiralen unterscheiden sich nur durch ihren Abbildungsmaßstab. Die damit verbundene Schwingung ist anschließend in Abb. 11-6-7 dargestellt und wird in Kap. 29 in Abb. 29-1-5 als Schwingung bei der Coulomb'schen Dämpfung wieder erscheinen.

Logarithmische Spirale

Steht die Vergrößerung für den Radius in einem Exponenten, so wird die Spirale wachsen. Durch Logarithmieren kommt man zu den Gleichungen

$$r = e^{(c \cdot \beta)} ; \quad \ln r = c \cdot \beta . \quad (11-6-5)$$

Bleibt man in der logarithmischen Darstellung, so ist

$$\ln r_3 - \ln r_2 = \ln r_2 - \ln r_1 , \quad (11-6-6)$$

$$\ln \frac{r_3}{r_2} = \ln \frac{r_2}{r_1} ; \quad \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (11-6-7)$$

eine geometrische Reihe und damit das geometrische Mittel

$$r_2 = \sqrt{r_3 \cdot r_1} . \quad (11-6-8)$$

Dabei ist in *Abb. 11-6-2* der Sektor 302 durch Drehung und Vergrößerung aus 201 entstanden. Vergleicht man die Formel (11-6-5) mit der Formel

$$x = e^{(t \cdot \eta)} , \quad (24-2-1)$$

-es ist der Ansatz für die charakteristische Gleichung (Kap. 24.2)-, so muß diese Spirale auch die freie gedämpfte Schwingung enthalten. In kartesischen Koordinaten ist sie in Parameterdarstellung

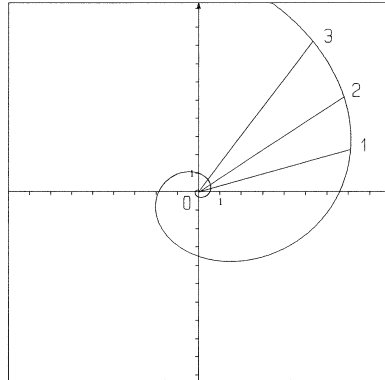


Abb. 11-6-2 Logarithmische Spirale

$$x(t) = e^{(-c \cdot t)} \cdot \sin(t) , \quad (11-6-10) \quad y(t) = e^{(-c \cdot t)} \cdot \cos(t) , \quad (11-6-11)$$

wobei c ein frei wählbarer Faktor ist. Nimmt man die Gleichung (11-6-5) und läßt die Spirale mit einem anderen Anfangswinkel γ beginnen, so wird aus

$$r = e^{(c \cdot \beta)} \Rightarrow r = e^{c \cdot (\beta + \gamma)} . \quad (11-6-12)$$

Das ist nach den Regeln für das Rechnen mit Logarithmen

$$r = e^{(c \cdot \gamma)} \cdot e^{(c \cdot \beta)} = e^{(c \cdot \beta)} \cdot \text{const} . \quad (11-6-13)$$

Man erhält also die gleiche Spirale, nur um den Mittelpunkt gedreht. Ebenso kann man sagen, daß die Spirale um einen Maßstabfaktor (je nach Vorzeichen) vergrößert oder verkleinert worden ist. Wendet man nun auf diese Spirale den Begriff der Ähnlichkeit an, so kann man sagen, daß die Spirale selbstähnlich ist. Das Bild der Spirale wiederholt sich ständig in größeren oder kleineren Maßstab. Dabei können Störungen eingegeben werden, die bei einer völlig symmetrischen Figur eine Asymmetrie erzeugen, die wiederum eine verblüffende Ähnlichkeit mit einem natürlichen Vorgang hervorruft. So wird durch Reibung aus einer harmonischen Bewegung und ihrer ellipsenförmigen achsensymmetrischen Darstellung die gedämpfte Bewegung mit ihrer abklingenden Schwingung.

In Kap. 30.3 wird dann das Thema der Periodenverdopplung mit Hilfe der Iteration angeschnitten, um zu zeigen, wie empfindlich "geordnete Systeme" gegenüber geringsten Störungen sein können und wie sie in "chaotisches Verhalten" umschlagen.

v. Koch'sche Kurve

Als ein Beispiel für eine selbstähnliche Kurve soll die Kurve dienen, die nach v.Koch benannt ist. Wird eine Strecke in drei gleiche Teile geteilt, das mittlere Teil entfernt und durch die zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ersetzt, so wird aus (a) $\Rightarrow$ "Initiator" das Bild (b) $\Rightarrow$ "Generator". Aus einem Segment sind nun vier Segmente gleicher Länge geworden. Die Gesamtlänge beträgt nun $4 \cdot (1/3) = 4/3$.

Wiederholt man in (c) den Vorgang, so erhält man 16 Segmente. Diesen Vorgang kann man beliebig fortsetzen, man erhält eine Kurve, die stetig ist aber nicht differenzierbar, sie hat keine Tangente. Bei beliebiger Verkleinerung wiederholen sich die Teilungen. Vergrößert man einen beliebig kleinen Ausschnitt, findet man immer die gleichen Formationen. Fügt man weitere Segmente an, so kann man die Kurve schließen und so die Schneeflockenkurve erzeugen. Der Beginn ist zunächst ein gleichseitiges Dreieck, in das ein auf der Spitze stehendes Dreieck eingezeichnet wird.

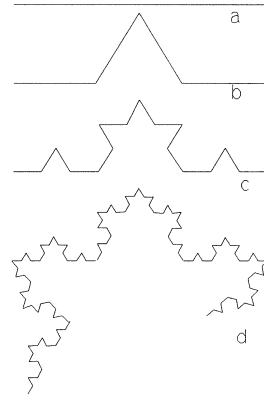


Abb. 11-6-3 Koch-Kurve

Mit dem gleichen Aufbau wie in Abb. 11-6-3 wird dann fortgefahren. Es entsteht die nach v.Koch benannte Insel oder Schneeflocke. Dabei kann jedes Segment wiederum gebrochen werden. Ebenso können Störungen in der Weise eingebaut werden, daß ein Schwenk in der entgegengesetzten Richtung erfolgt. Damit kann die Kurve praktisch beliebig verformt werden, ohne ihren fraktalen Charakter zu verlieren.

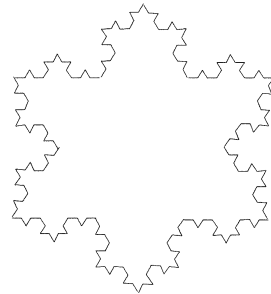


Abb. 11-6-4 Schneeflockenkurve

Wie ähnlich sich die Darstellungen von Schwingungen sein können, sollen die folgenden Abbildungen zeigen. Es werden die Abbildungen von Ellipsen, archimedischen und logarithmischen Spiralen in Zusammenhang mit den harmonischen Schwingungen, den periodisch gedämpften Schwingungen und den Schwingungen bei trockener Reibung gebracht.

Die Ellipsen stellen die freie ungedämpfte lineare Schwingung (harmonische Schwingung) dar (siehe Kap. 24.3.1).

Die Archimedische Spirale gibt die Projektion einer Coulomb'schen Dämpfung, d.h. die Wirkung der trockenen Reibung wieder (siehe Kap. 29).

Die Logarithmische Spirale ist das Bild einer freien gedämpften Schwingung (siehe Kap. 24.3.2 und Abb. 11-1-4 und Abb. 11-1-5))

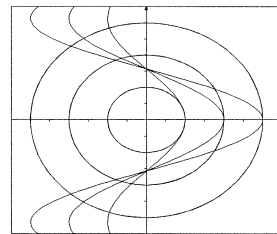


Abb. 11-6-5 Harm. Schwingung

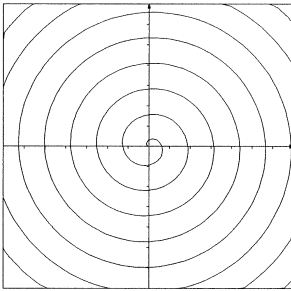


Abb. 11-6-6 Archimed.Spirale

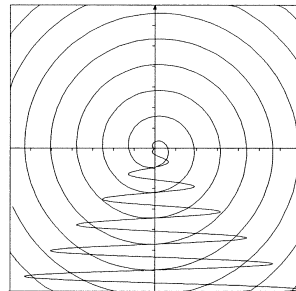


Abb. 11-6-7 Coulomb'sche Dämpf.

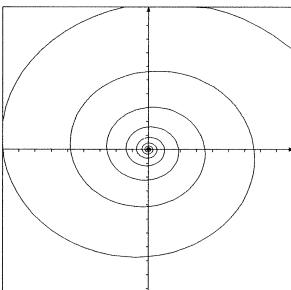


Abb. 11-6-8 Log.Spirale

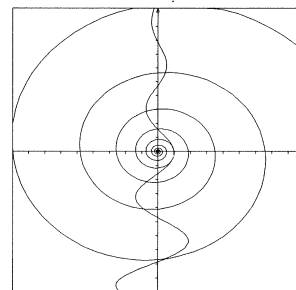


Abb. 11-6-9 Harm. Schwingung

Pythagorasbaum

Stellt man in der dargestellten Position den Satz von Pythagoras geometrisch dar, so werden sich die Verlängerungen der Seiten in einem Punkt schneiden. Nach den Sätzen der Geometrie (Strahlensatz und rechtwinkliges Dreieck) erhält man zunächst die Beziehungen

$$\sin \beta = \frac{a}{r_2} ; \quad a = r_2 \cdot \sin \beta , \quad (11-6-14)$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{r_1}{r_2} ; \quad a = c \cdot \frac{r_1}{r_2} . \quad (11-6-15)$$

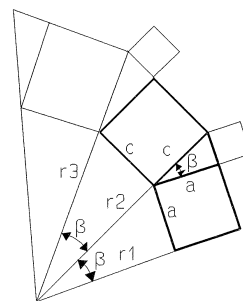


Abb. 11-6-10 Pythagorasbaum

Durch Gleichsetzen von a und Einsetzen von $\sin \beta$ wird daraus

$$r_2 \cdot \sin \beta = c \cdot \frac{r_1}{r_2} \quad \text{mit} \quad \sin \beta = \frac{c}{r_3}, \quad (11-6-16)$$

$$r_2^2 = c \cdot \frac{r_1}{\sin \beta} = c \cdot \frac{r_1}{\frac{c}{r_3}} = r_1 \cdot r_3. \quad (11-6-17)$$

Das ist aber die Gleichung (11-6-8), die man nun nach (11-6-5) zurückverfolgen kann. Damit stellt sich heraus, daß die Konstruktion die Entwicklung einer logarithmischen Spirale darstellt. Es gilt dann, daß durch Drehung und Vergrößerung bzw. Verkleinerung eine selbst-ähnliche Figur entsteht. Durch Variation der Anordnungen kann man bis zur Darstellung eines fast realistisch wirkenden Baumes kommen, indem man einzelne Quadrate wieder als Ursprünge eines "Baumastes" fortzeichnet. Dabei wird die Bedeutung von c als wachstum-bestimmende Größe deutlich (vergleiche Abb. 11-6-9 auch bei Schwingungen). Als $e^{-\dots}$ wird die Größe in Kap. 24 die gedämpften Schwingungen bestimmen. Zu diesem Thema sind in Kap. 30.3 -Ordnung und Chaos- noch weitere Ausführungen.

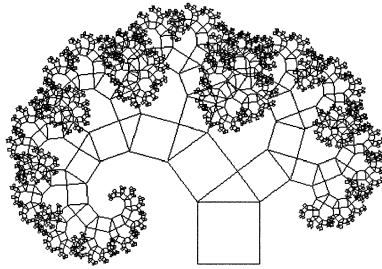


Abb. 11-6-11 Pythagorasbaum

11.7 Fraktale

Bei der v.Koch'schen Kurve nach Abb. 11-6-3 und Abb. 11-7-1 wird die Länge der ursprünglichen Strecke in s gleiche Segmente geteilt. Die Anzahl der verbleibenden Objekte ist nach der ersten Operation N . In der Abb. 11-7-1 ist für (b) $N = 4$; $s = 3$; Gesamtlänge $N \cdot (1/s) = 4 \cdot (1/3)$. Für (c) ist $N = 16$; $s = 9$; Gesamtlänge $16/9 = 4^2 / 3^2$.

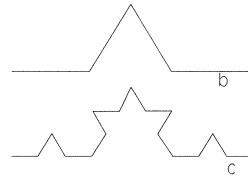


Abb. 11-7-1 Koch-Kurve

(Es wurden die 3 Segmente wiederum in 3 Segmente unterteilt). Die Figur wird also aus N Kopien aus der um s verkleinerten Grundfigur aufgebaut und so eine selbst-ähnliche Figur geschaffen. Nach Hausdorff gilt das Potenzgesetz

$$N = s^D; \quad D = \frac{\log N}{\log s} \quad \text{bzw.} \quad D = \frac{\ln N}{\ln s}. \quad (11-7-1)$$

Bei der Koch-Kurve erhält man

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{\log 4^2}{\log 3^2} = 1,26186 . \quad (11-7-2)$$

Betrachtet man Objekte der Euklidischen Geometrie, so ist D immer eine ganze Zahl:

Strecke: $N = 2; s = 2$

$D = \log 2 / \log 2 = 1.$

Quadrat: $N = 4; s = 2$

$D = \log 4 / \log 2 = 2.$

Würfel: $N = 8; s = 2$

$D = \log 8 / \log 2 = 3.$

Die Koch-Kurve hat mit $D = 1,26186$ eine gebrochene und keine ganze Zahl. Ausgehend von der Hausdorff-Definition führte Mandelbrot den Begriff "gebrochen" $\Rightarrow$ "fraktal, lat. fractus = gebrochen" ein und sprach von der fraktalen Dimension.

Gebrochene Dimensionen findet man bei selbstähnlichen Objekten. Dabei unterscheidet Mandelbrot zwischen der topologischen Dimension D_T und der fraktalen Dimension D . < Exkurs: Eine geometrische Figur bleibt in einer topologischen Abbildung vergrößert oder verkleinert erhalten, wobei Verzerrungen zulässig sind. Beispiel: Eine Figur wird auf ein Gumm Tuch gezeichnet. Das Tuch darf gestreckt oder gestaucht werden, es dürfen jedoch keine Risse auftreten oder vorhandene Löcher zuge drückt werden. > Die topologische Dimension D_T ist immer ganzzahlig. In der Euklidischen Geometrie ist $D_T = D$. Hier noch einige Beispiele:

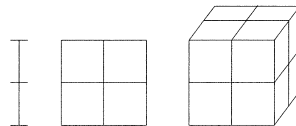


Abb. 11-7-2

Strecke, Quadrat, Würfel

v.Koch'sche Kurve

Verbleibende Objekte $N = 4$; Faktor $s = 3$;

$D = \log 4 / \log 3 = 1,26186$

Der Inhalt der v.Koch'schen Schneeflocke ist endlich, ihr Umfang wird unendlich groß.

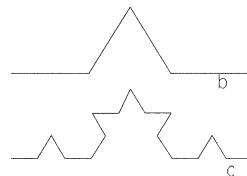


Abb. 11-7-3 Koch-Kurve

Sierpinski-Dreieck

Verbleibende Objekte $N = 3$; Faktor $s = 2$;

$D = \log 3 / \log 2 = 1,58496.$

Der Flächeninhalt wird Null, der totale Umfang aller Löcher wird unendlich groß.

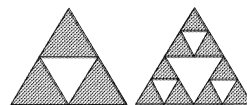


Abb. 11-7-4 Sierpinski-Dreieck

Sierpinski-Sieb

Verbleibende Objekte $N = 8$; Faktor $s = 3$;

$D = \log 8 / \log 3 = 1,892789.$

Der Flächeninhalt wird Null, der totale Umfang aller Löcher wird unendlich groß.

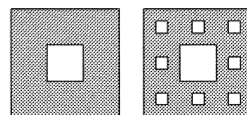


Abb. 11-7-5 Sierpinski-Sieb

Cantor-Menge

Verbleibende Objekte $N = 2$; Faktor $s = 3$;

$D = \log 2 / \log 3 = 0,63093$.

Es wird jeweils das mittlere Drittel herausgenommen. Die Cantor-Menge zerfällt zum Cantor-Staub. Zur besseren Darstellung ist die Linie jeweils als Fläche dargestellt.

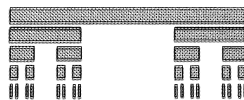


Abb. 11-7-6 Cantor-Menge

12 Attraktor, Grenzzykel

Nimmt man aus dem Phasendiagramm die Weg-Geschwindigkeitsfunktion, so sieht man, daß die Kurve geschlossen ist, wenn keine äußeren Einflüsse wirken (Reibung). Sobald das Pendel in einem wirklichen Raum schwingt, wird es sich dem Koordinaten-Null-Punkt nähern und schließlich in ihm stehen bleiben. Es hat die Auslenkung Null und die Geschwindigkeit Null.

Weil dieser Punkt das Pendel anzuziehen scheint, nennt man ihn Anziehungspunkt oder Attraktor. Das ist ein Punkt im Phasenraum, der ein System anscheinend in sich hereinziehen will. Damit ist die Verbindung zwischen Ordnung und Chaos gegeben. Man kann sich den Attraktor in einer Landschaft als tiefsten Punkt vorstellen. Damit kann es aber auch mehrere Attraktoren (Täler zwischen Bergen und mit dazwischen liegenden Sattelpunkten) geben. Natürliche Systeme werden so von Energietälern angezogen und von Energiebergen abgestoßen.

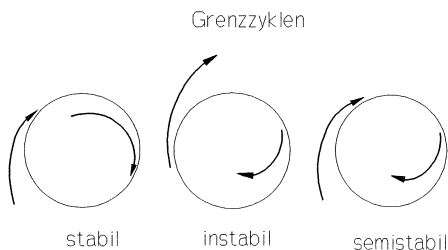


Abb. 12-1-1 Formen der Grenzzykel

Wird ein solches Pendel immer wieder angestoßen, so daß der Energieverlust (z.B. durch Reibung) durch Energiezufuhr ausgeglichen wird, dann bleibt das Pendel auf seiner zyklischen Bahn = Grenzzykel = Grenzzykelattraktor. Das ist eine geschlossene Kurve nach Abb. 12-1-2, wobei das Pendel immer bei einer Störung versuchen wird, diese Bahn als stabile Bahn zu erreichen. Anders verhält sich ein frei-schwingendes Pendel, das bei der kleinsten Änderung

von außen (Störung, z.B. durch Luftreibung) eine Bahnänderung erfährt. Das ist dann kein stabiler Grenzzykel. In dem Kapitel der Phasenkurven wird so der Strudelpunkt dargestellt, wenn die Störung konstant bleibt.

Nimmt man als Beispiel ein Uhrpendel, so wird ihm durch den Antrieb Energie zugeführt, durch die Reibung wird Energie entzogen.

Wird einem Schwinger ständig Energie zugeführt (Anfachung), so wird mit der zugeführten Energie auch die Amplitude A zunehmen. Die Dämpfung wird ebenfalls zunehmen und ab einem bestimmten Punkt, in dem die zugeführte Energie gleich der durch Dämpfung verbrauchten Energie ist, wird die Dämpfung überwiegen. Es wird sich ein Zustand einstellen, in den der Schwinger immer wieder durch Dämpfung oder Anfachung auf den Grenzzykel zurückgeführt wird, wenn der Grenzzykel im instabilen Zu-

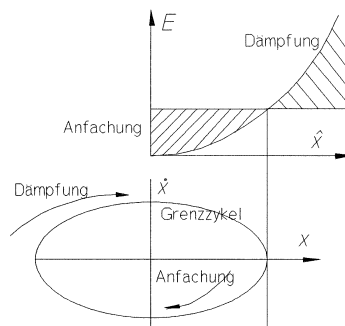


Abb. 12-1-2 Energiebilanz Grenzzykel

stand nach *Abb. 12-1-1* in der einen oder anderen Richtung verlassen wird. (Siehe auch Kap. 15 -Energiediagramm).

Der "moderne" Name Grenzzykel darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß es sich um ein Phänomen handelt, das die Menschen in ihrer Geschichte begleitet. Schon früh taucht in vielen Kulturen und Religionen das Motiv des Kreises (Wirbel, stabiler Grenzzykel) und der Spirale (Strudel, semistabiler Grenzzykel) auf. In der Bibel findet sich (als einziges Beispiel hier angeführt) die Stelle "Er ist der Herr, des Weg Wetter und Sturm ist..." (Nahum 1.3). Die germanischen Völker verbanden mit der Vorstellung des Sturmes (zur Jahreswende) das "Wilde Heer", ein Motiv, das Weber im Freischütz aufgreift.

Das Christentum übernahm später auf Steinkreuzen die Darstellung des Wirbels auf dem Kreuz als symbolische Darstellung für den Corpus Christi.

In asiatischen Religionen findet man den Wirbel als Symbol für Seelenwanderung.

Wiederkehrende, lebenserhaltende Zyklen wurden mit dem Kreismotiv verbunden (Tag-Nacht-Wechsel, Jahreszeiten, Sternkreise). Die Spirale steht für Entstehen und Vergehen, Aufstieg und Untergang, Schöpfung und Vernichtung. Aus dem Urwirbel entsteht Leben, der Strudel bringt den Tod. Quelle und Senke.



Abb. 12-1-3 Ammonites annulatus, Lias (älteste Schicht des Jura, 200 Mill. Jahre)

13 Federn mit rechtwinkliger Belastung

Werden zwei Federn in ihrer Achsrichtung belastet, so ist mit der Vorspannung F_0 für jede Feder die Kraft

$$F_1 = F_{01} + \frac{c}{2} \cdot x, \quad (13-1-1)$$

$$F_2 = F_{02} - \frac{c}{2} \cdot x. \quad (13-1-2)$$

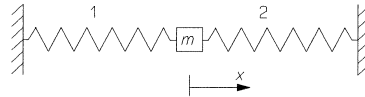


Abb. 13-1-1 Belastung in Achsrichtung

Mit

$$c_1 + c_2 = c; \quad c_1 = c_2 = \frac{c}{2} \quad (13-1-3)$$

folgt

$$F = F_1 - F_2 = c \cdot x. \quad (13-1-4)$$

Die Vorspannkraft hat in diesem Fall keine Wirkung.

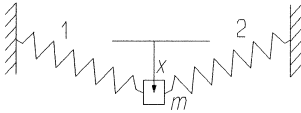


Abb. 13-1-2 Belastung senkrecht zur Achsrichtung

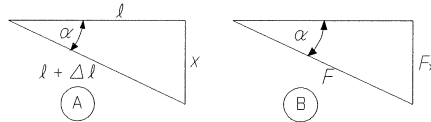


Abb. 13-1-3 Geometrie für Weg und Kraft

Werden dagegen die Federn senkrecht zu ihrer ursprünglichen Achsrichtung nach Abb. 13-1-2 belastet, so erfolgt die Längenänderung $\Delta \ell$ in der ausgelenkten Lage. Dann ist nach Abb. 13-1-3

$$\ell^2 + x^2 = (\ell + \Delta \ell)^2; \quad (13-1-5)$$

$$x = \sqrt{2 \cdot \Delta \ell \cdot \ell + \Delta \ell^2} \approx \sqrt{2 \cdot \Delta \ell \cdot \ell}, \quad (13-1-6)$$

da $\Delta \ell^2$ in der Summe vernachlässigbar klein wird.

Gleichung (13-1-5) läßt sich nach der Federverlängerung $\Delta \ell$ umstellen:

$$\Delta \ell = \sqrt{\ell^2 + x^2} - \ell. \quad (13-1-7)$$

Außerdem ist nach *Abb. 13-1-3*, Teil A und Teil B, und mit (13-1-5)

$$\sin \alpha = \frac{x}{\ell + \Delta \ell} = \frac{x}{\sqrt{\ell^2 + x^2}}, \quad (13-1-8)$$

sowie

$$F_x = F \cdot \sin \alpha. \quad (13-1-9)$$

Damit wird die Kraft in der Achse der ausgelenkten Feder mit der Vorspannkraft F_0

$$F = F_0 + \frac{c}{2} \cdot \Delta \ell, \quad (13-1-10)$$

$$F = F_0 + \frac{c}{2} \cdot \left(\sqrt{\ell^2 + x^2} - \ell \right). \quad (13-1-11)$$

Die Kraft in x-Richtung ist mit den beiden x-Komponenten der Federn 1 und 2 und (13-1-8)

$$F_x = F_{x1} + F_{x2} = 2 \cdot F \cdot \sin \alpha = 2 \cdot F \cdot \frac{x}{\sqrt{\ell^2 + x^2}}, \quad (13-1-12)$$

$$F_x = 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{\ell^2 + x^2}} \cdot \left(F_0 + \frac{c}{2} \cdot \left(\sqrt{\ell^2 + x^2} - \ell \right) \right), \quad (13-1-13)$$

$$F_x = \frac{2 \cdot x \cdot F_0}{\sqrt{\ell^2 + x^2}} + x \cdot c \cdot \left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + x^2}} \right). \quad (13-1-14)$$

Die Differentialgleichung erhält man mit $F_T = m \cdot \ddot{x}$ und F_x zu

$$F_T + F_x = 0. \quad (13-1-15)$$

14 Betriebsdrehzahl und Resonanz

Stimmen Eigenkreisfrequenz ω_0 und Erregerkreisfrequenz ω_e im Arbeitsbereich überein, so kommt es zur Resonanz. In (14-1-1) strebt dann $x \Rightarrow \infty$, wenn der Nenner mit $\omega_e \Rightarrow \omega_0$ gegen Null geht. Die Auslenkung einer Welle ist (Herleitung der Gleichung in Kap. 18)

$$x = \frac{e}{\left(\frac{\omega_0}{\omega_e}\right)^2 - 1} \quad (14-1-1)$$

Befindet sich der Betriebsbereich der Maschine im Bereich der kritischen Drehzahl (in Abb. 14-1-1 schneiden sich z.B. für den Fall(2) n_{krit} und damit ω_{02} mit der Erregerkreisfrequenz $\omega_e = \pi \cdot n_e / 30$ (ω 1/s; n 1/min) an der Stelle (2)), dann kommt es zu Resonanzschwingungen. Die Gleichung für die Eigenkreisfrequenz lautet:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \begin{array}{l} \text{mit } c = \text{Federkonstante} \\ m = \text{Masse} \end{array}$$

Da der Arbeitsbereich häufig die festgelegte Größe ist, muß von der Konstruktion her versucht werden, die Eigenkreisfrequenz aus diesem Bereich herauszulegen.

1. Möglichkeit: Vergrößern von ω_0

- a) Vergrößern von $c \Rightarrow$ möglichst harte Federung
- b) Verkleinern der Masse

Beide Fälle scheiden meist aus, denn harte (keine) Federung heißt, die Schwingung nahezu voll auf die Umgebung zu übertragen, und Verkleinern der Masse verbietet sich wegen der ohnehin meist in der Nähe der unteren Sicherheitsgrenze liegenden Konstruktionswerte.

Die Resonanz ist in Richtung der höheren Drehzahlen nach (3) verschoben. Der Zustand (3) ist erreicht. Die Maschine läuft in der Betriebsdrehzahl im unterkritischen Bereich, also links von (3). Dabei erkennt man leicht, daß der Resonanzbereich (= Bereich großer Amplituden) erheblich breiter geworden ist.

2. Möglichkeit: Verringern von ω_0

- a) Verkleinern von $c \Rightarrow$ möglichst weiche Federung
- b) Vergrößern der Masse

Beide Wege bringen Vorteile für die Konstruktion. Wird c verkleinert, dann ist die Federung weicher, die Umgebung wird weniger belastet. Der Resonanzbereich wird in Richtung der niedrigeren Drehzahlen nach (1) verschoben, die Betriebsdrehzahl ist nun rechts vom Zustand (1).

Wird m vergrößert, dann gewinnt man eine höhere Sicherheit. Die Maschine läuft dann im überkritischen Bereich, der Resonanzbereich liegt bei (1). Er muß also durchfahren werden, ist aber, wie leicht zu sehen ist, auch entsprechend schmal.

Die meisten, dem Laien bekannten Maschinen laufen auf diese Art, von der Waschmaschine bis zum Automotor.

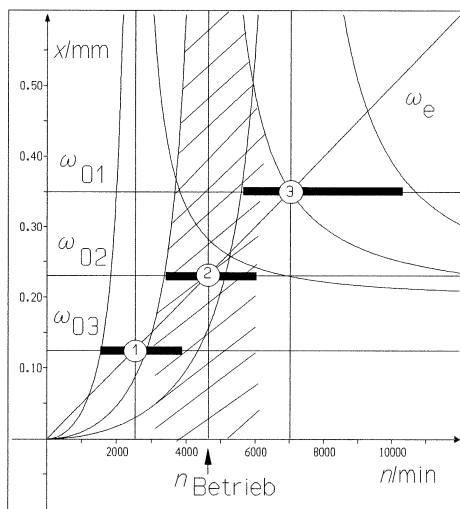


Abb. 14-1-1 Resonanzdiagramm

In der Auswuchttechnik wird sowohl im unterkritischen als auch im überkritischen Bereich gefahren (siehe Kap. 27.8 und Kap. 25.4).

15 Energie und Lagrange

15.1 Energiediagramm

Bei einer Schwingung läuft eine periodische ungedämpfte Bewegung in der Form ab, daß sich zwischen einem positiven und negativen Maximum (Amplitude $\hat{x}$) eine Masse mit den sich zeitlich ändernden Größen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung bewegt.

Die gesamte Energie muß sich aus der Summe der kinetischen Energie und der potentiellen Energie zusammensetzen:

$$W_{\text{ges}} = W_{\text{k}} + W_{\text{p}} . \quad (15-1-1)$$

Dabei ist die kinetische Energie

$$W_{\text{k}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 \quad (15-1-2)$$

und die potentielle Energie aus der Federarbeit (siehe nächste Seite)

$$W_{\text{p}} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot x = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x^2 . \quad (15-1-3)$$

Dabei gilt, daß jeweils dann, wenn die potentielle Energie ihr Maximum hat, die kinetische Energie Null sein muß und umgekehrt, denn im oberen (unteren) Totpunkt ist die Amplitude am größten und die Geschwindigkeit Null. Andererseits ist beim Durchgang durch die Null-Linie die Amplitude gleich Null, die Geschwindigkeit aber am größten (Kap. 3.3).

Daher muß die maximale kinetische Energie gleich der maximalen potentiellen Energie sein:

$$W_{\text{k max}} = W_{\text{p max}} . \quad (15-1-4)$$

Aus der ersten Ableitung der Schwingungsgleichung (Kap. 3) folgt für die Geschwindigkeit $\dot{x} = \omega \cdot \hat{x}$ und damit (für $\hat{x} = x_{\text{max}}$ mit $\hat{x}$ = maximalen Ausschlag = Amplitude)

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \hat{x}^2 , \quad (15-1-5)$$

$$m \cdot \omega^2 \cdot \hat{x}^2 = c \cdot \hat{x}^2 . \quad (15-1-6)$$

Die Division durch $\hat{x}$ und Umstellen nach ω ergibt dann wieder die Gleichung für die Eigenkreisfrequenz als

$$\omega_0 = \sqrt{c/m}.$$

Für die gerade wie auch für die kreisförmige Bewegung folgt mit den entsprechenden Federkonstanten

$$\omega_{0 \text{ Längs}} = \sqrt{\frac{c_{\text{Längs}}}{m}} ;$$

$$\omega_{0 \text{ Dreh}} = \sqrt{\frac{c_{\text{Dreh}}}{J}} .$$

Der Verlauf der Funktion Energie-Weg ist damit parabelförmig.

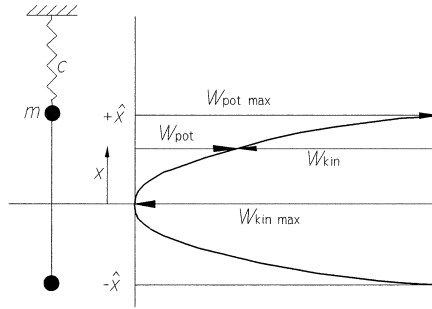


Abb. 15-1-1 Energiediagramm

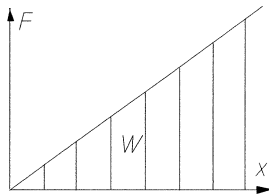


Abb. 15-1-2 Federarbeit

Wie bereits in Kap. 2 beschrieben, wird von einer linearen Federkennlinie ausgegangen. Geometrisch gesehen ist dann die Fläche unter der Kennlinie die Arbeit

$$W = \frac{1}{2} \cdot F \cdot x ,$$

und damit die potentielle Energie

$$W_p = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x^2 . \quad (15-1-7)$$

15.2 Lagrange'sche Gleichungen zweiter Art

Allgemeine Beschreibung

Nach Kap. 15.1 kann ein System in der Form (15-1-1) beschrieben werden

$$W_{\text{ges}} = W_k + W_p = \text{const} \quad (15-2-1)$$

Beispiel für ein Feder-Masse-System (System mit einem Freiheitsgrad) nach (15-1-5)

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot x^2 = \text{const} . \quad (15-2-2)$$

Es können also mit Hilfe der Energiebetrachtungen die Bewegungsgleichungen für schwingende Systeme aufgestellt werden. Dazu muß (15-2-2) differenziert werden

$$\frac{2}{2} \cdot m \cdot \ddot{x} + \frac{2}{2} \cdot c \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0 . \quad (15-2-3)$$

Nimmt man die *Abb. 2-2-3*, so hat dieser starre Körper 6 Freiheitsgrade. Es existieren die drei Wegkoordinaten und die drei Winkelkoordinaten. Es können elastische Bindungen (durch Federn) existieren. Zwangsbedingungen (kinematische Bindungen) entstehen durch Gelenke, Führungen, starre Lagerungen. (Beispiel: *Abb. 15-2-1* Kolben $\Rightarrow$ Translationsbewegung, Kurbelwelle $\Rightarrow$ Rotationsbewegung, die starre Verbindung erfolgt über das Pleuel). Zwangsbedingungen reduzieren die zur Beschreibung der Bewegung des Systems erforderlichen Koordinaten. Die dann noch erforderlichen Koordinaten werden als verallgemeinerte = generalisierte Koordinaten q_k bezeichnet. Sie können durch Längen, Winkel und deren Verhältnisse usw. dargestellt sein. Mit dem Buchstaben q soll deutlich gemacht werden, daß q nicht eine kartesische Koordinate sein muß. Die Anzahl der Freiheitsgrade werden mit f angegeben. Man unterscheidet:

Holonom-skleronom: die Zwangsbedingungen sind zeitunabhängig (zeitinvariant),

Holonom-rheonom: die Zwangsbedingungen enthalten explizit die Zeit (zeitvariant).

Bedingungsgleichungen, in denen neben der Zeit nur die Koordinaten q und nicht ihre Ableitungen nach der Zeit auftreten, werden als holonome Bedingungsgleichungen bezeichnet. Holonome Zwangsbedingungen bestehen dann, wenn die Systeme vollständig durch f notwendige verallgemeinerte Koordinaten beschrieben werden können. Bei nichtholonomen Bedingungsgleichungen treten neben q auch die Ableitungen $\dot{q}$ auf. In der Spezialliteratur wird gezeigt, daß es nicht möglich ist, sie durch Integration zurückzuführen. Nichtholonome Systeme werden daher in der allgemeinen Literatur nicht betrachtet.

In *Abb. 15-2-1* (ebene Schubkurbel) existiert ein Freiheitsgrad und die holonome Zwangsbedingung zwischen $q_1 = \varphi_1$ und $q_2 = \varphi_2$

$$\ell_1 \cdot \sin \varphi_1 = \ell_2 \cdot \sin \varphi_2 . \quad (15-2-4)$$

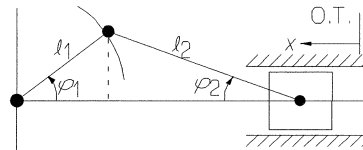


Abb. 15-2-1 Ebene Schubkurbel

Systemanalyse

Die Aussage über das System in *Abb. 15-2-1* ist:

Freiheitsgrad: 1

freie Koordinaten: 2 (x und φ_1)

Zwangsbedingung: 1 (nach folgender Umformung)

$$\begin{aligned} \ell_1 + \ell_2 &= \ell_1 \cdot \cos \varphi_1 + \ell_2 \cdot \cos \varphi_2 + x , \\ x &= \ell_1 \cdot \left(1 + \frac{\ell_2}{\ell_1} - \cos \varphi_1 - \frac{\ell_2}{\ell_1} \cdot \cos \varphi_2 \right) . \end{aligned} \quad (15-2-5)$$

Mit (15-2-4) kann man über die Winkelfunktionen $\cos \varphi_2$ eliminieren

$$\begin{aligned}
\ell_1 \cdot \sin \varphi_1 &= \ell_2 \cdot \sin \varphi_2 \\
\sin \varphi_2 &= \frac{\ell_1}{\ell_2} \cdot \sin \varphi_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_2} \\
\cos \varphi_2 &= \sqrt{1 - \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2 \cdot \sin^2 \varphi_1}
\end{aligned} \tag{15-2-6}$$

$$x = \ell_1 \cdot \left(1 - \cos \varphi_1 + \frac{\ell_2}{\ell_1} - \frac{\ell_2}{\ell_1} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2 \cdot \sin^2 \varphi_1} \right). \tag{15-2-7}$$

Lagrange'sche Gleichungen zweiter Art

Mit Hilfe der Lagrange'schen Funktion können die Bewegungen von Systemen (Massenpunkte, starre Körper) auch für beliebige Koordinaten beschrieben werden. Es werden dabei die kinetischen und potentiellen Energien betrachtet. Vergleicht man die Literatur, treten dabei verschiedene Bezeichnungen auf:

W_k	E_k	T	kinetische Energie,
W_p	E_p	U	potentielle Energie.

Die Lagrange'sche Funktion lautet mit den verallgemeinerten Koordinaten q_i und den Freiheitsgraden f , dabei ist $i = 1 \dots f$:

$$W_k(\dot{q}_1 \dots \dot{q}_f; q_1 \dots q_f) - W_p(q_1 \dots q_f) = L(\dot{q}_1 \dots \dot{q}_f; q_1 \dots q_f). \tag{15-2-8}$$

Für konservative Systeme erhält man die Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art durch partielle Differentiation (siehe z.B. (15-2-2) und (15-2-3))

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)^* - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{15-2-9}$$

Als Beispiel soll ein Translations-Rotations-Schwinger betrachtet werden, der in Kap. Beispiele zu Kap. 16, Aufgabe 3 und in Kap. 28.3 (Koppelschwingungen) mit anderen Methoden untersucht wird. Dabei soll die Einschränkung gelten, daß die Längsbewegung nur in einer Richtung und die Drehbewegung nur mit kleinen Winkeln und um den Schwerpunkt erfolgen darf. Die Auslenkung erfolgt um x und dazu wird die Feder 1 um den Weg $\ell_1 \cdot \varphi$ zusätzlich gestaucht und die Feder 2 um den Weg $\ell_2 \cdot \varphi$ weniger gestaucht. Da der Winkel φ der Rotationsbewegung klein sein soll, kann der Weg $\ell \cdot \varphi$ als linear in Richtung x angesehen werden.

Freiheitsgrade	2
Freie Koordinaten	2 (x ; φ)
Zwangsbedingungen	0
generalisierte Koordinaten	$q_1 = x$; $q_2 = \varphi$

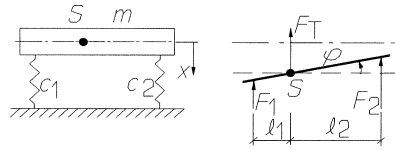


Abb. 15-2-2 Translations-Rotations-Bewegung

Die kinetische Energie ist

$$W_k = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{J_S \cdot \dot{\varphi}^2}{2} \quad (15-2-10)$$

Die potentielle Energie berechnet sich aus den Kräften (siehe auch (2-1-1) und (15-1-7))

$$F_1 = c_1 \cdot (x + \ell_1 \cdot \varphi) ; \quad F_2 = c_2 \cdot (x - \ell_2 \cdot \varphi) ; \quad (15-2-11)$$

$$W_p = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot (x + \ell_1 \cdot \varphi)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (x - \ell_2 \cdot \varphi)^2 . \quad (15-2-12)$$

Die Lagrange'sche Funktion $L = W_k - W_p$, (15-2-8), wird mit (15-2-10) und (15-2-12) zu

$$L = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_S \cdot \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot (x + \ell_1 \cdot \varphi)^2 - \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (x - \ell_2 \cdot \varphi)^2 . \quad (15-2-13)$$

Durch die partielle Differentiation erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m \cdot \dot{x} , \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= m \cdot \ddot{x} ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -c_1 \cdot (x + \ell_1 \cdot \varphi) \cdot 1 - c_2 \cdot (x - \ell_2 \cdot \varphi) \cdot 1 . \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= J_S \cdot \dot{\varphi} , \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= J_S \cdot \ddot{\varphi} ; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -c_1 \cdot (x + \ell_1 \cdot \varphi) \cdot \ell_1 \cdot 1 - c_2 \cdot (x - \ell_2 \cdot \varphi) \cdot (-\ell_2 \cdot 1) . \end{aligned} \quad (15-2-14)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)^{\bullet} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 ; \quad m \cdot \ddot{x} + c_1 \cdot (x + \ell_1 \cdot \varphi) + c_2 \cdot (x - \ell_2 \cdot \varphi) = 0 , \quad (15-2-15)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right)^{\bullet} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 ; \quad J_S \cdot \ddot{\varphi} + c_1 \cdot \ell_1 \cdot (x + \ell_1 \cdot \varphi) - c_2 \cdot \ell_2 \cdot (x - \ell_2 \cdot \varphi) = 0 . \quad (15-2-16)$$

Nach Umformung erhält man Gleichungen, die identisch mit (28-3-20) und (28-3-22) sind

$$m \cdot \ddot{x} + (c_1 + c_2) \cdot x + (c_1 \cdot \ell_1 - c_2 \cdot \ell_2) \cdot \varphi = 0 , \quad (15-2-17)$$

$$J_S \cdot \ddot{\varphi} + (c_1 \cdot \ell_1^2 + c_2 \cdot \ell_2^2) \cdot \varphi + (c_1 \cdot \ell_1 - c_2 \cdot \ell_2) \cdot x = 0 . \quad (15-2-18)$$

Ein Kran rollt reibungsfrei, dabei pendelt die Last m_2 . Gesucht sind mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art die Differentialgleichungen.

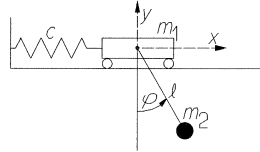


Abb. 15-2-3 System

Freiheitsgrade: 2

generalis. Koordin. $q_1 = x; q_2 = \varphi$

Die Masse m_1 hat die Geschwindigkeit $\dot{x}$, die Masse m_2 eine absolute Geschwindigkeit, die sich aus der Geschwindigkeit von m_1 und der Pendelgeschwindigkeit zusammensetzt. Für die potentielle Energie ist die Energie der Feder und die Lageenergie des Pendels, gemessen von dem Koordinaten-Nullpunkt, einzusetzen.

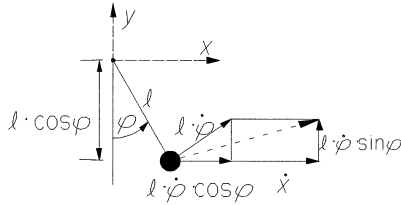


Abb. 15-2-4 Geometrie

Damit sind die Energiegleichungen

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot [(\dot{x} + \ell \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi)^2 + (\ell \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi)^2] ; \quad (15-2-19)$$

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot [\underbrace{\dot{x}^2}_{\text{cart}} + \underbrace{2 \cdot \dot{x} \cdot \ell \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi}_{\text{cross term}} + \underbrace{\ell^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos^2 \varphi + \ell^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin^2 \varphi}_{\text{pendulum}}] .$$

$$W_p = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x^2 - m_2 \cdot g \cdot \ell \cdot \cos \varphi . \quad (15-2-20)$$

Die Lagrange'sche Funktion wird zu

$$L = W_k - W_p = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot \dot{x}^2 + m_2 \cdot \dot{x} \cdot \ell \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + \frac{1}{2} m_2 \cdot \ell^2 \cdot \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} c \cdot x^2 + m_2 \cdot g \cdot \ell \cdot \cos \varphi \quad (15-2-21)$$

Die partiellen Differentiationen ergeben

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2) \cdot \dot{x} + m_2 \cdot \ell \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi ; \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= (m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} + \underbrace{m_2 \cdot \ell \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi}_1 - \underbrace{m_2 \cdot \ell \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}}_2 \cdot \underbrace{\dot{\varphi}}_3 ; \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= -c \cdot x .
\end{aligned} \tag{15-2-22}$$

Dabei ist zu beachten, daß $\cos \varphi$ bzw. $\sin \varphi$ eine innere Funktion enthält, da φ eine Funktion der Zeit ist und nach der Zeit differenziert wird. Die Ziffern geben die Reihenfolge der Schritte an.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m_2 \cdot \ell \cdot \dot{x} \cdot \cos \varphi + m_2 \cdot \ell^2 \cdot \dot{\varphi} ; \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= m_2 \cdot \ell \cdot \ddot{x} \cdot \cos \varphi - m_2 \cdot \ell \cdot \dot{x} \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} + m_2 \cdot \ell^2 \cdot \ddot{\varphi} ; \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m_2 \cdot \ell \cdot \dot{x} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi - m_2 \cdot g \cdot \ell \cdot \sin \varphi .
\end{aligned} \tag{15-2-23}$$

Man erhält durch Einsetzen in die Lagrange'schen Gleichungen die Differentialgleichungen

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)^* - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 ; \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right)^* - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 . \tag{15-2-24}$$

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} + m_2 \cdot \ell \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi - m_2 \cdot \ell \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi + c \cdot x = 0 ; \tag{15-2-25}$$

$$\ddot{x} \cdot \cos \varphi + \ell \cdot \ddot{\varphi} + g \cdot \sin \varphi = 0 . \tag{15-2-26}$$

Diese nicht linearen Differentialgleichungen sind geschlossen nicht lösbar. Sie können jedoch durch die Annahme kleiner Winkel φ linearisiert werden.

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} + m_2 \cdot \ell \cdot \ddot{\varphi} - m_2 \cdot \ell \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \varphi + c \cdot x = 0 ; \tag{15-2-27}$$

$$\ddot{x} + \ell \cdot \ddot{\varphi} + g \cdot \varphi = 0 . \tag{15-2-28}$$

Darin ist für die festgehaltene Masse m_1 die Gleichung für das mathematische Pendel enthalten.

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \cdot \sin \varphi = 0 . \tag{15-2-29}$$

Für die weitere Verwendung der DGL (15-2-27) kann der Summand $m_2 \cdot \ell \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \varphi$ vernachlässigt werden, da er gegenüber den anderen Summanden in höherer Ordnung klein ist.

Das Massenträgheitsmoment einer Walze soll durch Auspendeln bestimmt werden. Gesucht sind mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art die Differentialgleichung und die Zeit T für eine Periode. Dabei werden die Wellenzapfen auf Schneiden gelegt, auf denen sie abrollen können. Außerdem wird eine Zusatzmasse m_2 angebracht.

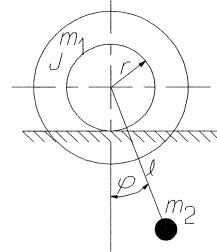


Abb. 15-2-5 System

Zwangsbedingung $x = r \cdot \varphi$
 generalisierte Koordinate φ

Während das Pendel nach rechts ausschlägt, es hat die Relativgeschwindigkeit $\ell \cdot \dot{\varphi}$, bewegt sich der Aufhängepunkt gleichzeitig mit der Geschwindigkeit $\dot{x}$ nach links. Das erklärt die Vektoren im Geschwindigkeitsdiagramm. Der Koordinaten-Nullpunkt liegt auf der Achse der Walze.

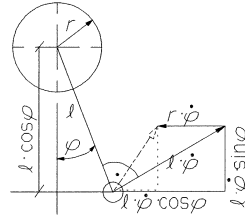


Abb. 15-2-6 Geometrie

Damit sind die Energiegleichungen

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot [(\ell \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi - r \cdot \dot{\varphi})^2 + (\ell \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi)^2] + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\varphi}^2;$$

$$W_k = \frac{1}{2} m_1 \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot [\ell^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos^2 \varphi - 2 \cdot \ell \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot r \cdot \cos \varphi + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \ell^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin^2 \varphi] + \frac{1}{2} J \cdot \dot{\varphi}^2.$$

mit $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$

(15-2-30)

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot (J + m_1 \cdot r^2) \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot [(\ell^2 + r^2) \cdot \dot{\varphi}^2 - 2 \cdot \ell \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot r \cdot \cos \varphi]. \quad (15-2-31)$$

$$W_p = - m_2 \cdot g \cdot \ell \cdot \cos \varphi. \quad (15-2-32)$$

Die Lagrange'sche Funktion wird zu

$$\begin{aligned}
 L &= W_k - W_p \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (J + m_1 \cdot r^2) \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot [(\ell^2 + r^2) \cdot \dot{\varphi}^2 - 2 \cdot \ell \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot r \cdot \cos \varphi] + m_2 \cdot g \cdot \ell \cdot \cos \varphi.
 \end{aligned} \quad (15-2-33)$$

Die partiellen Differentiationen ergeben

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= (J + m_1 \cdot r^2) \cdot \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot [2 \cdot (\ell^2 + r^2) \cdot \dot{\varphi} - 4 \cdot \ell \cdot \dot{\varphi} \cdot r \cdot \cos \varphi]; \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= (J + m_1 \cdot r^2) \cdot \ddot{\varphi} + m_2 \cdot (\ell^2 + r^2) \cdot \ddot{\varphi} - 2 \cdot m_2 \cdot \ell \cdot \ddot{\varphi} \cdot r \cdot \cos \varphi \\
 &\quad + 2 \cdot m_2 \cdot \ell \cdot \dot{\varphi} \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}, \\
 \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= + m_2 \cdot \ell \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot r \cdot \sin \varphi - m_2 \cdot g \cdot \ell \cdot \sin \varphi.
 \end{aligned} \quad (15-2-34)$$

Dabei ist zu beachten, daß $\cos \varphi$ bzw. $\sin \varphi$ eine innere Funktion enthält, da φ eine Funktion der Zeit ist.

Man erhält durch Einsetzen in die Lagrange'schen Gleichungen die Differentialgleichung zu

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right)' - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \quad (15-2-35)$$

$$(J + m_1 r^2 + m_2 (\ell^2 + r^2) - 2 m_2 \ell r \cos \varphi) \cdot \ddot{\varphi} + (m_2 \ell \dot{\varphi}^2 r + m_2 g \ell) \sin \varphi = 0. \quad (15-2-36)$$

Diese nicht lineare Differentialgleichung ist geschlossen nicht lösbar. Sie kann jedoch durch die Annahme kleiner Winkel φ linearisiert werden. Außerdem kann der Summand $m_2 \cdot \ell \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot r$ vernachlässigt werden, da er in höherer Ordnung klein wird. Damit ergibt sich die Differentialgleichung zu

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_2 \cdot g \cdot \ell}{J + m_1 \cdot r^2 + m_2 \cdot (\ell^2 + r^2) - 2 \cdot m_2 \cdot \ell \cdot r} \cdot \varphi = 0. \quad (15-2-37)$$

und mit einer binomischen Umformung im Nenner erhält man

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J + m_1 \cdot r^2 + m_2 \cdot (\ell - r)^2}{m_2 \cdot g \cdot \ell}}. \quad (15-2-38)$$

16 Zusammenschalten von Federn, Rahmen

In der DGL ist der Faktor des Weges immer ω_0^2 und nach der Grundformel der harmonischen Schwingung

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} . \quad (16-1-1)$$

Der Zähler stellt also immer eine Federkonstante dar, auch wenn nicht nur eine Feder vorhanden ist oder das Element keine Feder im allgemeinen Sprachgebrauch ist.

16.1 Parallelschaltung

Die Verlängerungen der einzelnen Federn sind gleich groß (gleiche Federwege). Dabei wird vorausgesetzt, daß die Masse in Richtung der Wirkungslinie der Federkraft bewegt wird.

$$x = x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad F = c \cdot x = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x , \quad (16-1-2)$$

$$c_{\text{ges}} = c_1 + c_2 . \quad (16-1-3)$$

Es spielt für die Schwingung keine Rolle, ob es sich um eine Druck- oder Zugfeder handelt, entscheidend ist die Bedingung nach Gleichung (16-1-2). Durch die Summe der Federkonstanten der Einzelfedern ist c_{ges} immer größer als die Federkonstante einer Einzelfeder, das System ist dadurch härter.

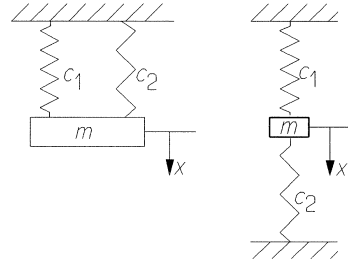


Abb. 16-1-1 Parallelschaltung

Achtung: Ist dagegen $x_1 \neq x_2$, so muß das System nach Kap. 28.3 (Koppelschwingungen) behandelt werden. Siehe hierzu auch Beispiel zu Kap. 16 in Kap. Beispiele. Dort finden sich die Bedeutungen der Größen. Die Gesamtfederkonstante ist

$$c_{\text{ges}} = \frac{c_1 \cdot c_2 \cdot (\ell_1^2 + \ell_2^2)}{c_1 \cdot \ell_1^2 + c_2 \cdot \ell_2^2} . \quad (16-1-4)$$

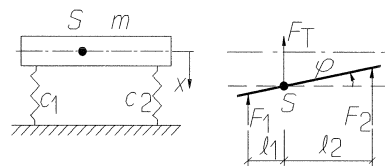


Abb. 16-1-2 Keine Parallelschaltung

16.2 Hintereinanderschaltung

Der Aufhängepunkt der zweiten Feder wandert mit dem Endpunkt der ersten Feder. Die Federwege addieren sich (mit $F = c \cdot x = m \cdot g$ ist die Belastung in diesem Fall die Gewichtskraft)

$$x_{\text{ges}} = x_1 + x_2, \quad (16-2-1)$$

$$\frac{m \cdot g}{c_{\text{ges}}} = \frac{m \cdot g}{c_1} + \frac{m \cdot g}{c_2}, \quad (16-2-2)$$

$$\frac{1}{c_{\text{ges}}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{c_1 + c_2}{c_1 \cdot c_2}, \quad (16-2-3)$$

$$c_{\text{ges}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}. \quad (16-2-4)$$

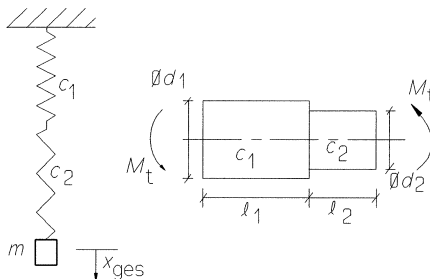


Abb. 16-2-1 Hintereinanderschaltung

Besonders für Wellen, deren Durchmesser sich ändern, wird die Gesamtdrehfederkonstante aus den einzelnen Federkonstanten der Wellenelemente auf diese Weise berechnet. Die Gesamtfederkonstante ist kleiner als jede Federkonstante für sich. Das System ist weicher gefedert. Hinweis: Bei weiteren Elementen ist die Bruchrechnung in (16-2-3) zu beachten (Hauptnenner) und nicht einfach in (16-2-4) weiterzuschreiben, als ob es eine Reihenentwicklung wäre!

16.3 Rahmen

In Kap. 30.5 -Erdbeben und Schwingungen- wird im Abschnitt -Auswirkungen- gezeigt, wie sich die Schwingungen, die durch Erdbeben hervorgerufen werden, auf Bauwerke auswirken. Es wird nur zu gern vergessen, daß Deutschland nach DIN 4149 Zonen aufweist, bei denen diese Belastung zu prüfen ist. Die meisten Industriebauten werden als Skelettbauten erstellt, d.h. das Gerüst ist ein Stahlrahmen, der die Belastungen (Menschen, Wände, Maschinen) aufnimmt und der entsprechend verkleidet wird. Nach Kap. 30.5 treten hauptsächlich horizontale Beschleunigungen auf. Dadurch werden nach $F = m \cdot x$ Kräfte auf das Bauwerk wirken, die zu Schwingungen führen.

Der zunächst nicht durch eine Horizontalkraft F belastete Rahmen trägt als Last die Masse m . Durch die horizontale Bewegung des Bodens (Untergrundes) wird eine Bewegung eingeleitet, die zu einer Auslenkung der Größe x führt. Durch die Konstruktionsbedingung, daß der Winkel $\varphi = 0^\circ$ sein muß, kann man das Moment M durch Ersetzen eliminieren und den Weg bestimmen. Für den einseitig eingespannten Balken im vierten Teilbild nach Abb. 16-3-1 gilt für die Durchbiegung und den Winkel am freien Ende

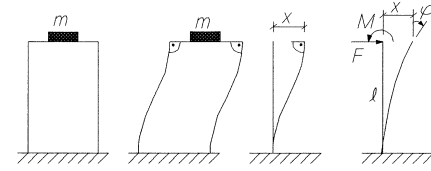


Abb. 16-3-1 Horizontal bewegter Rahmen

$$\text{Kraft:} \quad x = \frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot I \cdot E} ; \quad \varphi = \frac{F \cdot \ell^2}{2 \cdot I \cdot E} , \quad (16-3-1)$$

$$\text{Moment:} \quad x = \frac{M \cdot \ell^2}{2 \cdot I \cdot E} ; \quad \varphi = \frac{M \cdot \ell}{I \cdot E} . \quad (16-3-2)$$

Wegen der Symmetrie kann für den Weg eines Stieles aufgestellt werden

$$x = \frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot I \cdot E} - \frac{M \cdot \ell^2}{2 \cdot I \cdot E} . \quad (16-3-3)$$

Für den starren (nicht verformten) Riegel folgt aus der Bedingung für $\varphi = 0$

$$\varphi = \frac{F \cdot \ell^2}{2 \cdot I \cdot E} - \frac{M \cdot \ell}{I \cdot E} = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{F \cdot \ell}{2} . \quad (16-3-4)$$

Ersetzt man in (16-3-3) das Moment, so wird der Weg x

$$x = \frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot I \cdot E} - \frac{F \cdot \ell^3}{4 \cdot I \cdot E} = \frac{F \cdot \ell^3}{12 \cdot I \cdot E} . \quad (16-3-5)$$

Die Gleichung für eine Federkonstante ist allgemein mit der Umformung

$$F = c \cdot x \quad \Rightarrow \quad c = \frac{F}{x} = \frac{12 \cdot I \cdot E}{\ell^3} . \quad (16-3-6)$$

Für diesen Rahmen gilt, daß beide Stiele um den gleichen Weg x verformt werden. Das ist eine Parallelschaltung mit zwei Federn. Die Eigenkreisfrequenz wird dann für dieses System

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot c}{m}} = \sqrt{\frac{24 \cdot I \cdot E}{m \cdot \ell^3}} . \quad (16-3-7)$$

17 Mehrfach besetzte Wellen

Nur in der theoretischen Vereinfachung befindet sich eine in einem Punkt konzentrierte Masse auf einer masselosen Welle (Drehachse). In der Praxis wird mindestens eine Masse m , deren Schwerpunkt sich fertigungsbedingt nicht auf der Lagerachse befindet, eine Welle belasten, von der man annehmen kann, daß ihre Masse m_W vernachlässigbar gegenüber m ist. Bei der Biegung ist in Kap. 10 gezeigt worden, daß man den Anteil der mitschwingenden Balkenmasse mit einem Faktor hinreichend genau zur belastenden Masse zuschlagen kann. Auch ist in diesem Kapitel bereits gesagt worden, daß man die Verformung durch Schwingungen hinreichend genau mit den Gleichungen der Verformungen aus der Festigkeitslehre beschreiben kann.

Dabei ist streng zu unterscheiden, um welche Art der Schwingung es sich handelt. Sind es Biegeschwingungen von Balken, so ist der Fall eindeutig. Handelt es sich um Schwingungen von Wellen, so ist im allgemeinen Sprachgebrauch eine Biegeschwingung gemeint. Das liegt daran, daß die Welle durch Fliehkräfte durchgebogen wird und dabei umläuft, so daß es den Anschein hat, die Welle würde hin- und herschwingen. Dabei handelt es sich um die Verformung, die durch die biegekritische Drehzahl hervorgerufen wird (Kap. 18). Eine Welle kann jedoch auch wie ein Balken durch "echte" Biegeschwingungen belastet werden. Die andere Form der Wellenschwingung ist die Torsionsschwingung, die in Kap. 23 besprochen wird. Dabei ist der eigentlichen Drehbewegung (Drehzahl n) eine Schwingung um eine mit der Drehzahl n rotierende Null-Lage überlagert. Wie später noch gezeigt wird, könnte bei einer Torsionsschwingung die Welle ebenso stillstehen. Ist die Welle an einem Ende eingespannt, der Verdrehwinkel an dieser Stelle also Null, so bezeichnet man die Welle als gefesselt. Dabei kann die Einspannstelle durchaus eine Rotation ausführen.



Abb. 17-1-1 Biege- und Torsionsschwingung, Unterscheidung am Beispiel einer Einzelmasse

Bei den Biegeschwingungen, die durch die Fliehkräfte hervorgerufen werden, gibt es mehrere Lösungsverfahren, die in ihren Resultaten für die Praxis hinreichend genau übereinstimmen. Sie werden je nach Aufgabenstellung und Aufwand eingesetzt. In den folgenden Kapiteln werden zunächst die Biegeschwingungen besprochen.

Bei den Torsionsschwingungen kann es hilfreich sein, den Begriff Torsionsschwingung durch Drehschwingung und den Begriff Masse durch Drehmasse = Scheibe zu ersetzen.

17.1 n -fach besetzte Wellen, Biegung

In Kap. 19 wird die n -fach besetzte Welle und ihre Behandlung mit Hilfe der **Superposition** beschrieben.



In Kap. 20 wird die n -fach besetzte Welle und ihre Behandlung mit Hilfe der **Energiemethode von Rayleigh** beschrieben.

Abb. 17-1-2 Mit n Massen belastete Welle

In Kap. 21.1 wird die n -fach besetzte Welle und ihre Behandlung nach dem **Verfahren von Dunkerley** beschrieben.

In Kap. 21.2 wird die n -fach besetzte Welle und ihre Behandlung mit Hilfe der **Einflußzahlen** beschrieben.

In Kap. 26 wird die n -fach besetzte Welle und ihre Behandlung nach dem **Verfahren von Mohr** beschrieben.

18 Biegekritische Drehzahl einer Welle mit Einzelmasse

Es soll das Drehzahlverhalten einer zweifach gelagerten Welle, die durch eine Einzellast belastet wird, untersucht werden. Die Masse (z.B. eine Scheibe (Kupplung usw.)) hat fertigungsbedingt eine Unwucht. D.h. der Schwerpunkt S ist um den Betrag e aus der Lagerachse (Drehachse) verschoben.

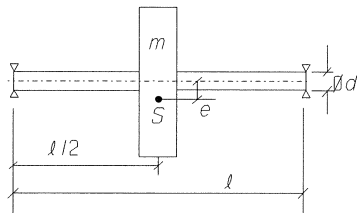


Abb. 18-1-1 Welle mit Einzelmasse

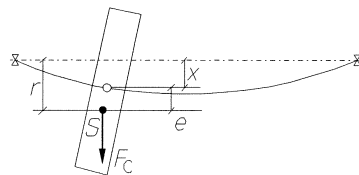


Abb. 18-1-2 Welle mit Fliehkraft

Insbesondere soll Abb. 18-1-3 die jeweilige Auslenkung der Welle aus der Drehachse in Abhängigkeit von der Drehzahl n darstellen und ihr Verhalten im Bereich der kritischen Drehzahl zeigen. Dabei wird sich herausstellen, daß die Welle, wenn sie in der Nähe der kritischen Drehzahl läuft, zerstört würde, da das Material die auftretenden Durchbiegungen nicht mehr ertragen kann. Jedoch wird die Welle, wenn der kritische Bereich schnell genug durchfahren wird, sich selbst zentrieren, d.h. der Schwerpunkt des Systems nähert sich bei größer werdender Drehzahl der Verbindungslinie der Lager als Achse. Das bedeutet, daß dann nach der Gleichung für die Fliehkraft

$$F = m \cdot r \cdot \omega^2 ; \quad \omega = \omega_c = \frac{\pi \cdot n}{30} \quad (18-1-1)$$

und (18-1-4) der Schwerpunkt sich der Drehachse immer mehr annähert und damit die Fliehkraft immer kleiner wird. Bei Drehzahlen oberhalb der kritischen Drehzahl wird die Welle also ruhiger laufen als unterhalb der kritischen Drehzahl, d.h. sie zentriert sich selbst. Für das Auge des Beobachters außerhalb des Systems "eiert" die Welle um den Schwerpunkt des Systems. Die Welle wird dabei als massedfrei angesehen (s. Kap. 25, Zusammenfassung 5.).

Es ist als Gleichgewicht der Kräfte anzusetzen

$$F = m \cdot r \cdot \omega^2 = F_F = c \cdot x . \quad (18-1-2)$$

Mit $r = e + x$ wird unter Vernachlässigung der Schiefstellung

$$m \cdot (e + x) \cdot \omega^2 = c \cdot x . \quad (18-1-3)$$

Löst man diese Gleichung nach x auf und ersetzt $c/m = \omega_0^2$, dann erhält man die Gleichung für die Berechnung der Auslenkung der Welle mit e $\ominus$

$$x = \frac{e}{\left(\frac{\omega_0}{\omega_e}\right)^2 - 1} \quad (18-1-4)$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Funktion für $\omega_0/\omega_e = 1$ nicht definiert ist, d.h. sie geht in diesem Fall im linken Teil gegen $+\infty$ und kommt im rechten Teil von $-\infty$ zurück. Außerdem geht dann der Term für immer größer werdende ω_e gegen $-e$.

Die Werte für die Abb. 18-1-3 sind aus Kap. Beispiele, Beispiel 18.1 und in der Form dargestellt

$$x = \text{abs}\left(\frac{e}{\left(\frac{\omega_0}{\omega_e}\right)^2 - 1}\right) \quad (18-1-5)$$

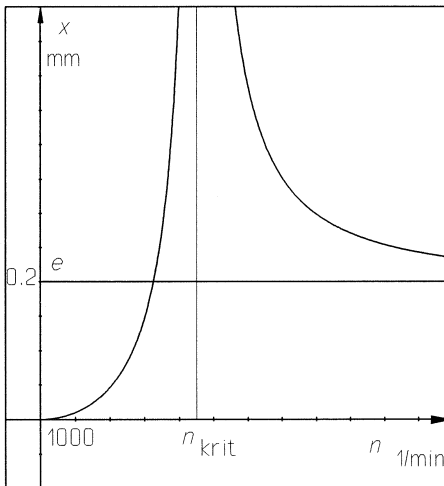


Abb. 18-1-3 Durchbiegung einer Welle

19 Superposition

Bei der Superposition von Belastungen bei Wellen wird die Gesamtformänderung als Überlagerung von Einzelformänderungen durch Teilbelastungen betrachtet. Dabei ist der

1. Index der Ort der Formänderung
2. Index der Ort des Kraftangriffes

Das gesamte System wird zunächst gezeichnet, danach werden die Einzelformänderungen betrachtet, und zwar jede für sich. D.h. es werden mit den Formeln der Festigkeitslehre die Durchbiegungen einzeln ermittelt und erst danach zu Gesamtverformungen addiert. Mit diesen Durchbiegungen wird dann im Verfahren von Rayleigh für ein Mehrmassensystem die kritische Drehzahl ermittelt (s. Kap.1 Anmerkung 3).

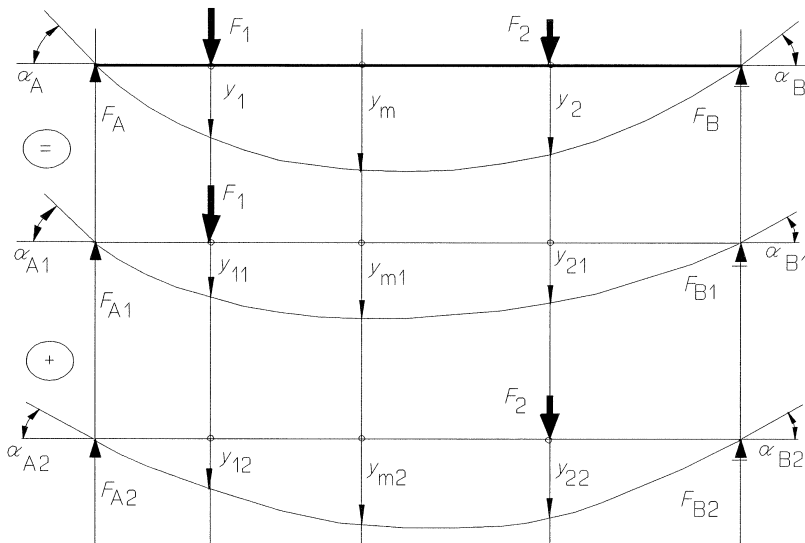


Abb. 19-1-1 Superposition

Es sind dann

$$y_1 = y_{11} + y_{12} ; \quad y_m = y_{m1} + y_{m2} ; \quad y_2 = y_{21} + y_{22} . \quad (19-1-1)$$

20 Energiemethode von Rayleigh

Mehrmassensystem, Energiemethode Näherungsverfahren nach Rayleigh

Eine mit n Punktmassen besetzte Welle kann in n -Formen Biegeschwingungen ausführen. Die Welle verhält sich wie ein Balken. Es sind übereinander gezeichnet:

- 3. Oberschwingung
- 2. Oberschwingung
- 1. Oberschwingung
- Grundschiwingung

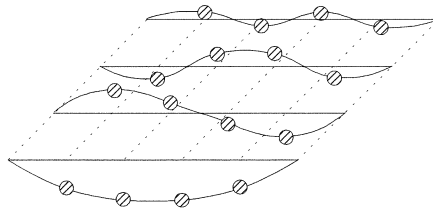


Abb. 20-1-1 Schwingungsformen

Eine Masse wird eine Welle belasten und durchbiegen. Rotiert die Welle, dann wird sie durch Fliehkräfte belastet und auf Biegung beansprucht. Die Biegelinie kann mit den Gleichungen für die Durchbiegung der ruhenden Welle mit hinreichender Genauigkeit ermittelt werden (s. Kap.1 Anmerkung 3).

In der Betrachtung der Energien (Kap. 15) wurde die kinetische und die potentielle Energie einer Schwingung untersucht. Aus (15-1-2) ist die kinetische Energie (mit $v_{\max} = \dot{x} \cdot \omega_0$ aus der Schwingungsformel für den Maximalwert (3-2-6) und entsprechend $\dot{x} = y$)

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (y \cdot \omega_0)^2. \quad (20-1-1)$$

Gleichzeitig wird die Welle durch die Gewichtskraft belastet. Die Welle wirkt wie eine Feder. Die elastische Energie (Energie einer Feder) ist mit der Durchbiegung y

$$W_{el} = W_p = \frac{1}{2} \cdot F \cdot y = \frac{1}{2} \cdot F_G \cdot y. \quad (20-1-2)$$

Die elastische Energie der Welle ist bei voller Durchbiegung (Weg $y =$ Amplitude $\hat{x}$) am größten. Diese Energie muß also im durchgebogenen Zustand gleich der kinetischen Energie der Welle beim Nulldurchgang sein. Dann hat die kinetische Energie ihr Maximum, da beim Null-Durchgang die Geschwindigkeit am größten ist. Die Massen m_i (und damit F_{Gi}) befinden sich an verschiedenen Stellen, also sind auch die Durchbiegungen an diesen Stellen verschieden, damit sind entsprechend die y -Werte für die einzelnen Stellen einzusetzen. Die Energien werden gleichgesetzt:

$$\frac{1}{2} \cdot F_{G1} \cdot y_1 + \frac{1}{2} \cdot F_{G2} \cdot y_2 + \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_{G1}}{g} \cdot \omega_0^2 \cdot y_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_{G2}}{g} \cdot \omega_0^2 \cdot y_2^2 + \dots \quad (20-1-3)$$

Dabei gilt für alle $y_i \Rightarrow y_1 = y_{11} + y_{12} \dots$; $y_2 = y_{22} + y_{21} \dots$

Daraus wird für **n Massen** durch Zusammenfassen

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi} \cdot y_i = \frac{\omega_0^2}{g} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi} \cdot y_i^2 \quad (20-1-4)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \cdot \sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi} \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi} \cdot y_i^2}} \quad (20-1-5)$$

Die bei der Verformung durch die Fliehkräfte entstehende Biegelinie entspricht hinreichend genau der Biegelinie im Ruhezustand, die durch die Gewichtskräfte hervorgerufen wird. Da die elastische Energie mit Hilfe der Gewichtskräfte ausgedrückt wurde (20-1-2), muß die elastische Linie bei Belastung durch Gewichtskräfte ermittelt werden. Für das Mehrmassensystem gelten dann ebenfalls die Berechnungsmethoden wie für das Einmassensystem. Bei fliegender Lagerung wirken bei der rotierenden Welle die Fliehkräfte entgegengesetzt; sie verstärken sich in ihrer verformenden Wirkung. Deshalb muß bei der Ermittlung der elastischen Linie im Ruhezustand mit entgegengesetzt wirkenden Gewichtskräften gerechnet werden, da dann die für die Welle größere Beanspruchung ermittelt wird (Abb. 20-1-2).

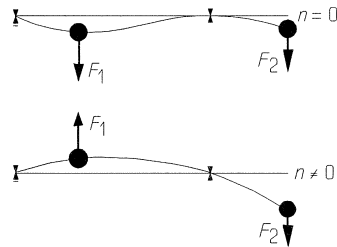


Abb. 20-1-2 Fliegende Lagerung

21 Sätze von Maxwell, Betti, Dunkerley

21.1 Einflußzahlen α , Formänderungsarbeit

Es werden die Bezeichnungen aus der Superposition beibehalten (s. Kap.1 Anmerkung 3)

1. Index der Ort der Formänderung
2. Index der Ort des Kraftangriffes

Es werden die Federkonstanten c durch die **Maxwell'schen Einflußzahlen α** ersetzt:

$$\alpha = \frac{1}{c} \Rightarrow \quad (21-1-1)$$

$$y_{11} \cdot c_{11} = F_1 \Rightarrow y_{11} = \frac{1}{c_{11}} \cdot F_1 = \alpha_{11} \cdot F_1 . \quad (21-1-2)$$

Es wird das Verfahren der **Formänderungsarbeit** angewendet und die Bezeichnungen 1 und 2 werden durch die Buchstaben i und k ersetzt. Die Welle soll durch die Kräfte F_i und F_k belastet sein. Siehe auch *Abb. 21-1-2*.

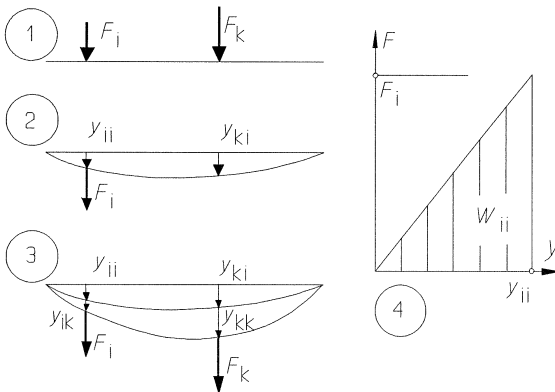


Abb. 21-1-1 Formänderungsarbeit

1. Schritt Bild 1 und 2

Es soll nur die Kraft F_i auf die Welle wirken. Dann biegt sich die Welle an der Stelle i um y_{ii} durch. Die Verformung ändert sich linear mit der Kraft F_i und die verrichtete Arbeit W_{ii} ist aus dem Diagramm der Federkennlinie aus der Fläche zu bestimmen.

Abb. 21-1-1, Bild 4

$$W_{i i} = \frac{1}{2} \cdot y_{i i} \cdot F_i . \quad (21-1-3)$$

2. Schritt Abb. 21-1-1, Bild 3

Es wird zusätzlich die Kraft F_k aufgebracht. Dadurch wird die Kraft F_i , die ja bereits ihre volle Belastung aufgebracht hat, um die weitere Strecke y_{ik} verschoben und verrichtet die Arbeit Kraft $\cdot$ Weg

$$W_{i k} = y_{i k} \cdot F_i . \quad (21-1-4)$$

Dabei ist im Schritt 1 der Angriffspunkt von F_k um y_{ki} verschoben worden. Diese Verschiebung erfolgte jedoch ohne die Kraft F_k , so daß hier keine Arbeit verrichtet worden ist. Jetzt greift F_k an dieser Stelle an und verschiebt diesen Punkt der Welle um y_{kk} , so daß nun folgende Arbeit hinzukommt:

$$W_{k k} = \frac{1}{2} \cdot y_{k k} \cdot F_k . \quad (21-1-5)$$

Die Summe der drei Arbeiten ist die gesamte Formänderungsarbeit:

$$W = \frac{1}{2} \cdot y_{i i} \cdot F_i + y_{i k} \cdot F_i + \frac{1}{2} \cdot y_{k k} \cdot F_k . \quad (21-1-6)$$

3. Schritt

Kehrt man die Reihenfolge der Arbeiten um, indem man zuerst F_k und danach F_i aufbringt, so bleibt die erste und die dritte Gleichung erhalten. Nur die zweite Gleichung muß sich ändern, da nun die Kraft F_i passiv verschoben wird. Es ist

$$W_{k i} = y_{k i} \cdot F_k . \quad (21-1-7)$$

Die gesamte Formänderungsarbeit ist nun

$$W = \frac{1}{2} \cdot y_{k k} \cdot F_k + y_{k i} \cdot F_k + \frac{1}{2} \cdot y_{i i} \cdot F_i . \quad (21-1-8)$$

Die beiden Formänderungsarbeiten müssen aber gleich sein. Da jeweils der erste Summand und der dritte Summand gleich sind, müssen auch die zweiten Summanden jeweils gleich sein. Mit dieser Forderung erhält man den **Satz von Betti**

$$W_{i k} = y_{i k} \cdot F_i = y_{k i} \cdot F_k = W_{k i} . \quad (21-1-9)$$

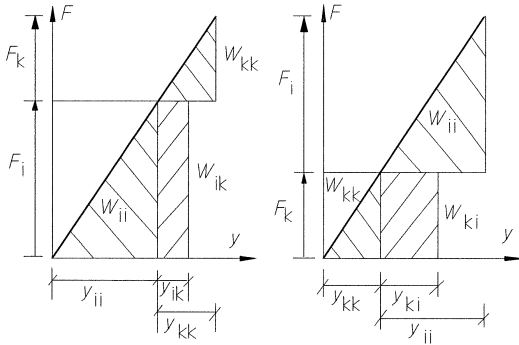


Abb.21-1-2 Formänderungsarbeiten

Die Arbeiten W_{ik} und W_{ki} sind gleich groß.

Nun kann man die Verschiebungen durch die Einflußzahlen ausdrücken, indem man auf die Gleichungen (21-1-1) und (21-1-2) zurückgreift:

$$F = c \cdot y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{c} \cdot F = \alpha \cdot F, \quad (21-1-10)$$

$$y_{ik} = \alpha_{ik} \cdot F_k \quad y_{ki} = \alpha_{ki} \cdot F_i. \quad (21-1-11)$$

Damit folgt eingesetzt in (21-1-9)

$$\alpha_{ik} \cdot F_k \cdot F_i = \alpha_{ki} \cdot F_i \cdot F_k \quad (21-1-12)$$

der Satz von Maxwell

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \quad (21-1-13)$$

Schreibt man nun wieder für i und k die Bezeichnungen 1 und 2, so ist, wenn die Kräfte F_1 und F_2 in den Punkten 1 und 2 wirksam sind,

$$y_I = y_{11} + y_{12} = \alpha_{11} \cdot F_1 + \alpha_{12} \cdot F_2, \quad (21-1-14)$$

$$y_{II} = y_{21} + y_{22} = \alpha_{21} \cdot F_1 + \alpha_{22} \cdot F_2. \quad (21-1-15)$$

Zur Berechnung der Eigenkreisfrequenzen werden die statischen Kräfte durch die Fliehkräfte ersetzt, die jeweils im Abstand y_I und y_{II} angreifen $\odot$:

$$y_I = \alpha_{11} \cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot y_I + \alpha_{12} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot y_{II} , \quad (21-1-16)$$

$$y_{II} = \alpha_{21} \cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot y_I + \alpha_{22} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot y_{II} . \quad (21-1-17)$$

Mit dem Satz von Maxwell kann für α_{21} auch α_{12} geschrieben werden (21-1-13). Es werden zwei Lösungswege angeboten. Der Weg (a) führt über die Substitutionsmethode und der Weg (b) ab (21-1-29) über die **Matrizenschreibweise** zur Gleichung (21-1-19).

Lösung (a)

Setzt man (21-1-13) in die Gleichungen ein, so kann man nach y_I auflösen

$$y_I = \frac{\alpha_{12} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot y_{II}}{1 - \alpha_{11} \cdot m_1 \cdot \omega^2} \quad (21-1-18)$$

und y_I in die Gleichung (21-1-17) einsetzen. Dabei fällt dieser Term heraus. Das führt auf die biquadratische Gleichung

$$\omega^4 - \frac{\alpha_{11} \cdot m_1 + \alpha_{22} \cdot m_2}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} \cdot \omega^2 + \frac{1}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} = 0 . \quad (21-1-19)$$

Diese Gleichung liefert zwei reelle positive Werte für ω_1^2 und ω_2^2 , denn auch der negative Wert der Lösung wird durch das Quadrieren positiv. Damit erhält man auch zwei positive Werte für ω_1 und ω_2 , während die negativen Werte keine Rolle für diese Anwendung spielen. Nach dem Wurzelsatz von Vieta liefert in (21-1-19) der Faktor von ω^2 die negative Summe der Lösungen 1 und 2, während der freie Summand das Produkt der beiden Lösungen 1 und 2 liefert $\ominus$.

Da nun $\omega_1 > \omega_2$ ist, gilt für $\omega_1^2 \gg \omega_2^2$ und deshalb mit genügender Genauigkeit in der *Summe*

$$\frac{\alpha_{11} \cdot m_1 + \alpha_{22} \cdot m_2}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} = \omega_1^2 + \omega_2^2 \approx \omega_1^2 \quad (21-1-20)$$

und im *Produkt*

$$\frac{1}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} = \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 . \quad (21-1-21)$$

Damit ist dann die niedrigste Kreisfrequenz

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2}{\omega_1^2} = \frac{1}{\alpha_{11} \cdot m_1 + \alpha_{22} \cdot m_2} \quad (21-1-22)$$

und mit $\alpha = 1/c$ umgeformt

$$\frac{1}{\omega_2^2} = \alpha_{11} \cdot m_1 + \alpha_{22} \cdot m_2 = \frac{m_1}{c_{11}} + \frac{m_2}{c_{22}}. \quad (21-1-23)$$

Dann müssen die beiden Summanden die Kreisfrequenzen ($1/\omega^2$) darstellen, und zwar einmal die Kreisfrequenz mit der die Welle schwingt, wenn sie nur mit der Masse 1 belastet ist und die entsprechende Durchbiegung y_{11} hat und zum Anderen die Kreisfrequenz, mit der die Welle schwingt, wenn sie nur mit der Masse 2 belastet ist und die Durchbiegung y_{22} hat.

$$\omega_2' = \sqrt{\frac{c_{11}}{m_1}}; \quad \omega_2'' = \sqrt{\frac{c_{22}}{m_2}}. \quad (21-1-24)$$

Es bedeuten hier ' und '' nicht die Ableitungen, sondern Markierungen. Setzt man diese Größen ein, so erhält man die Gleichung von **Dunkerley**

$$\frac{1}{\omega_2^2} = \frac{1}{\omega_2'^2} + \frac{1}{\omega_2''^2}. \quad (21-1-25)$$

Das ist die Grundschiwingung einer mit zwei Massen besetzten Welle.

Ist y_1 die Durchbiegung einer Welle unter der Kraft F_{G1} und y_2 die Durchbiegung unter der Kraft F_{G2} , so erhält man

$$\omega_2'^2 = \frac{c_{11}}{m_1} = \frac{g}{F_{G1}} \cdot \frac{F_{G1}}{y_1}; \quad \omega_2''^2 = \frac{c_{22}}{m_2} = \frac{g}{y_2} \quad (21-1-26)$$

und nach dem Auflösen nach $\omega_2 \Rightarrow \omega_{02}$ (der kleinsten Eigenkreisfrequenz)

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{g}{y_1 + y_2}} \Rightarrow n_{krit} = \frac{300}{\sqrt{y_1 + y_2}}; \quad \frac{n}{1/\text{min}}; \frac{y}{\text{cm}}. \quad (21-1-27)$$

mit $y_1 = y_{11}$ und $y_2 = y_{22}$ in der Einheit **cm**.

Die Umformungen der einzelnen Größen (ω_0, n_{krit}) befinden sich in Kap. 8. Man kann auf diese Weise auch die Gleichungen für Mehrmassensysteme ermitteln (d.h. Anzahl der Massen > 2), doch ist dann das Verfahren nach Mohr (Kap. 26) besser geeignet. Beim Zweimassenschwinger liegt der Vorteil darin, daß die Superposition nicht angewendet werden muß.

Die Gleichung (21-1-25) kann man als Gleichung für eine **Welle mit n -Massen (Lösung nach Dunkerley)** schreiben, wenn man die Schreibweise der einzelnen Glieder anpaßt

$$\omega_1 \Rightarrow \omega_{01} ; \quad \omega_2 \Rightarrow \omega_{02} . \quad (21-1-28)$$

Dann ist die Eigenkreisfrequenz nach Dunkerley ω_{0D} die untere Grenze für die kleinste Eigenkreisfrequenz eines Schwingers mit n Massen

$$\frac{1}{\omega_0^2} < \frac{1}{\omega_{01}^2} + \frac{1}{\omega_{02}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{0n}^2} = \frac{1}{\omega_{0D}^2} . \quad (21-1-29)$$

mit

$$\omega_0 > \omega_{0D} . \quad (21-1-30)$$

Lösung (b) in Matrizenschreibweise

Übernimmt man (21-1-16) und (21-1-17), dann schreiben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(\alpha_{11} \cdot m_1 - \frac{1}{\omega^2} \right) \cdot y_I + \alpha_{12} \cdot m_2 \cdot y_{II} &= 0 \\ \alpha_{21} \cdot m_1 \cdot y_I + \left(\alpha_{22} \cdot m_2 - \frac{1}{\omega^2} \right) \cdot y_{II} &= 0 . \end{aligned} \quad (21-1-31)$$

$$\begin{pmatrix} \left(\alpha_{11} \cdot m_1 - \frac{1}{\omega^2} \right) & \alpha_{12} \cdot m_2 \\ \alpha_{21} \cdot m_1 & \left(\alpha_{22} \cdot m_2 - \frac{1}{\omega^2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I \\ y_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (21-1-32)$$

Durch Lösen und Umformen wird daraus

$$\left(\frac{1}{\omega^2} \right)^2 - (\alpha_{11} \cdot m_1 + \alpha_{22} \cdot m_2) \cdot \frac{1}{\omega^2} + (\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}) \cdot m_1 \cdot m_2 = 0 . \quad (21-1-33)$$

Nach (21-1-13) ist $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ und bei der Multiplikation mit

$$\frac{\omega^4}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} \quad (21-1-34)$$

erhält man (21-1-19).

21.2 Welle mit n -Massen (Lösung mit Hilfe der Einflußzahlen)

Die Durchbiegung bei der Belastung durch zwei Kräfte war nach (21-1-14)

$$y_1 = y_{11} + y_{12} \quad (21-2-1)$$

Abb. 21-2-1 Mit n -Massen belastete Welle



Dann ist die Durchbiegung bei n Kräften an der Stelle i

$$y_i = y_{i1} + y_{i2} + \dots + y_{in} \quad (21-2-2)$$

Mit (21-1-16) folgt

$$y_i = \alpha_{i1} \cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot y_1 + \alpha_{i2} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot y_2 + \dots + \alpha_{in} \cdot m_n \cdot \omega^2 \cdot y_n \quad (21-2-3)$$

Für eine dreifach besetzte Welle folgt als Beispiel mit den Unbekannten y_1 , y_2 und y_3

$$\begin{aligned} \alpha_{11} \cdot m_1 \cdot y_1 \cdot \omega^2 + \alpha_{12} \cdot m_2 \cdot y_2 \cdot \omega^2 + \alpha_{13} \cdot m_3 \cdot y_3 \cdot \omega^2 &= y_1, \\ \alpha_{21} \cdot m_1 \cdot y_1 \cdot \omega^2 + \alpha_{22} \cdot m_2 \cdot y_2 \cdot \omega^2 + \alpha_{23} \cdot m_3 \cdot y_3 \cdot \omega^2 &= y_2, \\ \alpha_{31} \cdot m_1 \cdot y_1 \cdot \omega^2 + \alpha_{32} \cdot m_2 \cdot y_2 \cdot \omega^2 + \alpha_{33} \cdot m_3 \cdot y_3 \cdot \omega^2 &= y_3. \end{aligned} \quad (21-2-4)$$

Die Division durch ω^2 und Umformen der Gleichungen entsprechend (21-1-29) führt zu der Koeffizientendeterminante, die Null sein muß, wenn für die Unbekannten y_1 , y_2 und y_3 von Null verschiedene Lösungen existieren sollen:

$$\begin{vmatrix} \left(\alpha_{11} \cdot m_1 - \frac{1}{\omega^2} \right) & \alpha_{12} \cdot m_2 & \alpha_{13} \cdot m_3 \\ \alpha_{21} \cdot m_1 & \left(\alpha_{22} \cdot m_2 - \frac{1}{\omega^2} \right) & \alpha_{23} \cdot m_3 \\ \alpha_{31} \cdot m_1 & \alpha_{32} \cdot m_2 & \left(\alpha_{33} \cdot m_3 - \frac{1}{\omega^2} \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (21-2-5)$$

Die Lösung der Determinante führt auf eine Gleichung dritten Grades mit ω^2 . Es ergeben sich dann drei kritische Eigenkreisfrequenzen $\omega_{\text{krit } 1}$, $\omega_{\text{krit } 2}$ und $\omega_{\text{krit } 3}$. Diese Lösungen gelten mit Einschränkungen: die Massen sollten jeweils in einem Punkt konzentriert sein, die "Scheiben" sollen sich im Lauf nicht schräg stellen. Ist das doch der Fall, dann brauchen diese Einschränkungen nicht berücksichtigt werden, wenn die Massenträgheitsmomente der Scheiben relativ klein sind, das trifft in der Mehrzahl der Fälle zu. Bei Wellen, die nach Abb. 20-1-2 belastet sind, wird sich die Kreiselwirkung der Scheibe durch die Schrägstellung auf die Eigenkreisfrequenz auswirken.

22 Federgefesselter Drehschwinger

Ein sehr häufiges Bauteil besteht aus einer Masse, einer Lagerung, einer Feder und einer Dämpfung. Da in der Praxis diese Angaben auf die meisten beweglichen Teile einer Maschine zutreffen, ist damit auch die Wahrscheinlichkeit, an diesem Teil Fehler zu machen, besonders groß. Gerät ein solches Bauteil in Resonanzschwingungen, so können die Fehler praktisch in den meisten Fällen nur durch eine Neukonstruktion behoben werden. Die entscheidenden Größen, das wird sich in der Ableitung der Formeln zeigen, sind bereits in der Konstruktion festgelegt.

Zum Einfluß der Dämpfung auf ω_0 siehe Kap. 22.3.

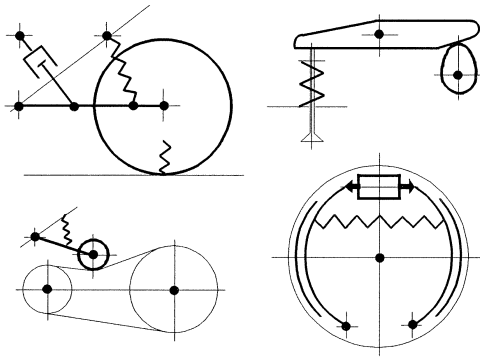


Abb. 22-1-1 Beispiele

Als Beispiele sind hier skizziert:

- Radaufhängung mit Dämpfung, Federung gegen den Fahrzeugrahmen und Federung durch die Reifen.
- Nockenwellensteuerung mit Feder am Ventil.
- Spannvorrichtung an einem Riementrieb mit Anpreßfeder.
- Backenbremse mit Rückholfedern.

22.1 Einfluß des Massenträgheitsmomentes

Reduzierte Masse, Trägheitsradius.

Ein Körper mit der Masse m und mit dem Massenträgheitsmoment J_B um den Drehpunkt B soll waagrecht um die senkrechte Achse durch B schwingen. Dann hat die Gewichtskraft keine Wirkung.

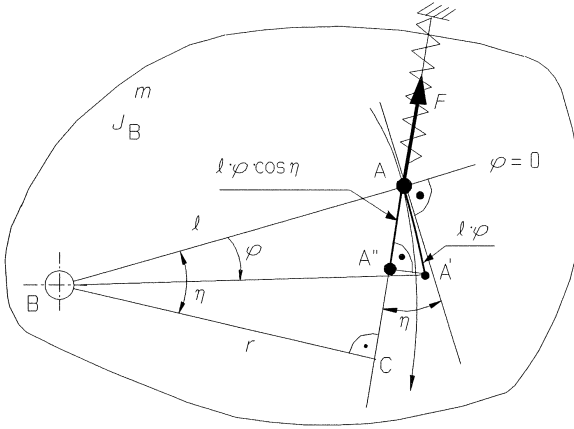


Abb. 22-1-2 Drehschwinger mit Federkraft

Der gelenkige Aufhängepunkt A der Feder bewegt sich auf einem Kreisbogen von A nach A', wobei der Bogen die Länge $\ell \cdot \varphi$ hat. Die Feder soll so lang sein, daß mit genügender Genauigkeit die Verlängerung der Feder mit der Strecke $A \Rightarrow A'' = \ell \cdot \varphi \cdot \cos \eta$ dargestellt werden kann.

Wegen der Gleichheit der Winkel in den Dreiecken $\triangle A' A A''$ und $\triangle A B C$ kann aber auch geschrieben werden, indem man innerhalb der Gleichung die Faktoren umstellt:

$$\ell \cdot \varphi \cdot \cos \eta = \ell \cdot \cos \eta \cdot \varphi = r \cdot \varphi, \quad (22-1-1)$$

so daß man für den Federweg einen anderen Ausdruck hat, der r enthält.

Dann ist die Federkraft und ihr Moment

$$F = c \cdot r \cdot \varphi; \quad M_F = F \cdot r = c \cdot r^2 \cdot \varphi. \quad (22-1-2)$$

Damit ergibt sich die DGL des Drehschwingers zu

$$J_B \cdot \ddot{\varphi} + c \cdot r^2 \cdot \varphi = 0, \quad (22-1-3)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{c \cdot r^2}{J_B} \cdot \varphi = 0, \quad (22-1-4)$$

und die Eigenkreisfrequenz zu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c \cdot r^2}{J_B}} = \sqrt{\frac{c}{\frac{J_B}{r^2}}}. \quad (22-1-5)$$

In der Dynamik werden noch zwei Begriffe verwendet:

Der **Trägheitsradius** i ist der Abstand, den alle vorhandenen Masseteilchen zur Drehachse haben, wenn das Massenträgheitsmoment gleich dem Massenträgheitsmoment des wirklichen Körpers ist (bei dem die Masse verteilt ist; die Masse bleibt gleich)

$$i = \sqrt{\frac{J}{m}} \quad (22-1-6)$$

Wird eine Masse m auf einen Punkt reduziert, der sich in dem beliebigen Abstand r von der Drehachse befindet, so wird diese Masse dann als **reduzierte Masse** m_{red} bezeichnet, wenn ihr Massenträgheitsmoment gleich dem Massenträgheitsmoment des wirklichen Körpers ist (bei dem die Masse verteilt ist)

$$m_{\text{red}} = \frac{J}{r^2} \quad (22-1-7)$$

Diese reduzierte Masse m_{red} ist im allgemeinen von der Masse m des Körpers verschieden.

Drehfederkonstante c_{Dreh}

Der Zähler von ω_0 stellt immer eine Federkonstante dar. In diesem Fall wird sie als Drehfederkonstante bezeichnet und hat hier die Form

$$c_{\text{Dreh}} = c \cdot r^2 \quad c_{\text{Dreh}} = \sum c_i \cdot r_i^2 \quad (22-1-8)$$

Sind mehrere Federn c_i vorhanden, die jeweils den Abstand r_i von der Drehachse haben, dann wird sinngemäß eingesetzt.

22.2 Einfluß der Gewichtskraft

Die Achse durch B soll nun waagrecht sein, so daß die Gewichtskraft, die im Schwerpunkt S angreift (Ruhelage $\varphi=0$), nun mit einbezogen werden muß. Die Federkonstante c_i (22-1-8) kann für mehrere Federn stehen. Die Auslenkung erfolgt um den kleinen Winkel φ .

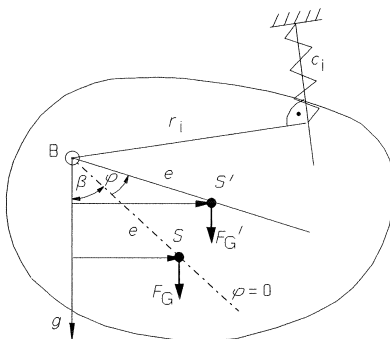


Abb. 22-2-1 Federkraft und Gewichtskraft

Das Moment der Federkräfte aus (22-1-2) war

$$M_F = \sum c_i \cdot r_i^2 \cdot \varphi . \quad (22-2-1)$$

In der Position S befindet sich das System in der Null-Lage, das Moment der Gewichtskraft wird durch die Federvorspannung aufgenommen. Das Moment der Gewichtskraft in der ausgelenkten Position S' ist (das Moment der Gleichgewichtslage wird abgezogen)

$$M_G = F_G \cdot [e \cdot \sin(\beta + \varphi) - e \cdot \sin\beta] . \quad (22-2-2)$$

Mit dem Additionstheorem für $\sin(\alpha + \beta)$ aus der Trigonometrie wird (22-2-2) zu

$$M_G = F_G \cdot e \cdot (\sin\beta \cdot \cos\varphi + \cos\beta \cdot \sin\varphi - \sin\beta) . \quad (22-2-3)$$

Für kleine Winkel φ wird $\cos\varphi \approx 1$ und $\sin\varphi \approx \varphi$, dann verkürzt sich die Gleichung zu

$$M_G = F_G \cdot e \cdot \varphi \cdot \cos\beta . \quad (22-2-4)$$

Die DGL ist mit dem Ansatz <Summe der Momente um B gleich Null>

$$J_B \cdot \ddot{\varphi} + M_F + M_G = 0 , \quad (22-2-5)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\sum c_i \cdot r_i^2 + F_G \cdot e \cdot \cos\beta}{J_B} \cdot \varphi = 0 , \quad (22-2-6)$$

und die Eigenkreisfrequenz mit der Drehfederkonstanten (Zähler des Bruches)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sum c_i \cdot r_i^2 + F_G \cdot e \cdot \cos\beta}{J_B}} = \sqrt{\frac{c_{\text{Dreh}}}{J_B}} . \quad (22-2-7)$$

Besonders ist hier der Einfluß der Gewichtskraft zu beachten. Man sollte annehmen, daß die Gewichtskraft ihren größten Einfluß dann hat, wenn der Schwerpunkt horizontal zum Drehpunkt liegt. Genau das ist nicht der Fall; im Gegenteil, der Einfluß der Gewichtskraft ist dann am größten, wenn der Schwerpunkt über oder unter dem Drehpunkt liegt, also der Schwinger sich im labilen oder stabilen Gleichgewicht befindet. Betrachtet man die gleiche Auslenkung (Bogenlänge) in Abb. 22-2-2, sie zeigt die Größe der Hebelarme der Gewichtskräfte bei kleinen Winkeln einer Schwingung, so sieht man, daß bei sich waagerechter Stellung der Hebelarm kaum ändert. In der senkrechten Stellung hat die Änderung des Hebelarmes der Gewichtskraft eine erhebliche Wirkung (in der Mittelstellung ist der Hebelarm gleich 0).

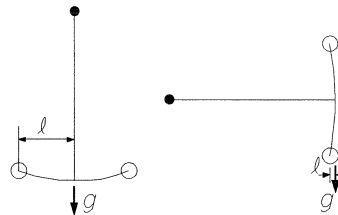


Abb. 22-2-2 Einfluß der Gewichtskraft

22.3 Einfluß der Dämpfung

Am federgeffesselten Drehschwinger wird eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung angebracht (siehe Kap. 24). Es gelten die Gleichungen aus Kap. 22.1 und Kap. 22.2 und die Annahme für kleine Drehwinkel φ .

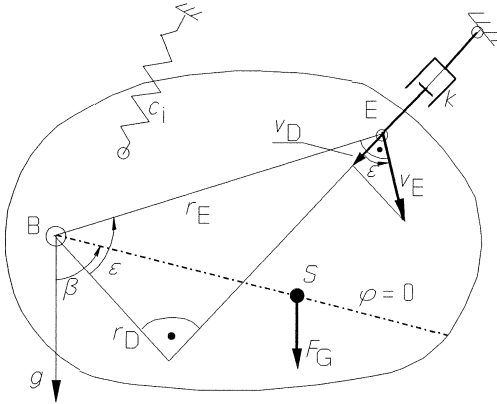


Abb. 22-3-1 Federkraft, Gewichtskraft, Dämpfung

Bei einer Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ (Abb. 22-2-1) hat der Punkt E des Schwingers die Geschwindigkeit v_E und der Dämpfer die Geschwindigkeit v_D

$$v_E = r_E \cdot \dot{\varphi}, \quad v_D = v_E \cdot \cos \epsilon. \quad (22-3-1)$$

Dabei wird angenommen, daß der Dämpfer so lang ist, daß eine Winkeländerung vernachlässigbar klein ist. Aus der Geometrie des Systems und der Umstellung der Faktoren folgt

$$v_D = r_E \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \epsilon = r_E \cdot \cos \epsilon \cdot \dot{\varphi} = r_D \cdot \dot{\varphi}. \quad (22-3-2)$$

Damit ist Dämpfungskraft und Dämpfungsmoment (k ist die Dämpfungskonstante, Kap. 24 Gedämpfte Schwingungen):

$$F_D = k \cdot v_D = k \cdot r_D \cdot \dot{\varphi} \quad \text{und} \quad M_D = F_D \cdot r_D = k \cdot r_D^2 \cdot \dot{\varphi}. \quad (22-3-3)$$

Es ist mit den Gleichungen aus Kap. 22.1 und Kap. 22.2

$$J_B \cdot \ddot{\varphi} + k \cdot r_D^2 \cdot \dot{\varphi} + c_{\text{Dreh}} \cdot \varphi = 0 \quad (22-3-4)$$

dann die DGL mit dem Abklingkoeffizienten δ (siehe auch (24-1-4))

$$\delta = \frac{k \cdot r_D^2}{2 \cdot J_B} \quad (22-3-5)$$

$$\ddot{\varphi} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0 . \quad (22-3-6)$$

Achtung: Die Dämpfung ist mit der Geschwindigkeit $\dot{\varphi}$ verbunden, die Eigenkreisfrequenz dagegen nur mit dem Weg φ . Also hat die Dämpfung keinen unmittelbaren Einfluß auf die Eigenkreisfrequenz. Eine wesentliche Änderung der Eigenkreisfrequenz kann also nicht über die Dämpfung erfolgen, wenn man davon absieht, daß nach (24-1-4) über den Abklingkoeffizienten δ die Größen k und J_B bzw. m verknüpft sind.

22.4 Einfluß von Zusatzmassen

Ist ein Drehschwinger noch mit einer Zusatzmasse m_2 belastet, so muß die Formel in Nenner noch um den "Steiner"-Anteil erweitert werden. (22-2-7) wird dann zu

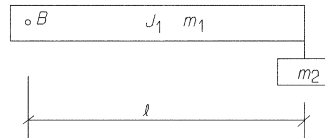


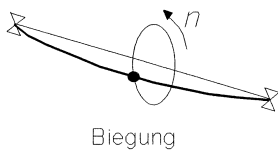
Abb. 22-4-1 Zusatzmasse m_2

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sum c_i \cdot r_i^2 + F_G \cdot e \cdot \cos \beta}{J_{\text{ges}}}} . \quad (22-4-1)$$

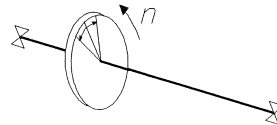
(ausführliche Beispiele s. Kap. Beispiele zu Kap. 22). Die Masse m_1 ist der eigentliche Drehschwinger, sein Massenträgheitsmoment J_1 ist dabei auf B nach dem Satz von Steiner zu beziehen.

23 Torsionsschwingungen

An Maschinen treten zwei Grundformen von Schwingungen auf. Bauteile können auf Biegung und/oder Torsion belastet sein. Diese Belastungen rufen im Betrieb Schwingungen hervor. Während die Biegeschwingungen meist einfach zu erkennen sind, ergeben sich bei Torsionsschwingungen Schwierigkeiten, weil viele Schwingungen, die als Torsionsschwingungen angesprochen werden, in Wirklichkeit durch Biegung hervorgerufen werden. So ist eine durch Fliehkräfte hervorgerufene Schwingung eine Biegeschwingung, auch wenn die Welle mit dieser Belastung rotiert. Für den Betrachter scheint die Welle eine "Auf- und Abbewegung" durchzuführen, obwohl sie lediglich im durchgebogenen Zustand rotiert. Torsionsschwingungen werden durch Drehmomente verursacht, dabei ist es gleichgültig, ob sich die Welle dreht oder ob sie steht, da die Schwingung um die Null-Lage erfolgt (siehe auch Kap. 17).



Biegung

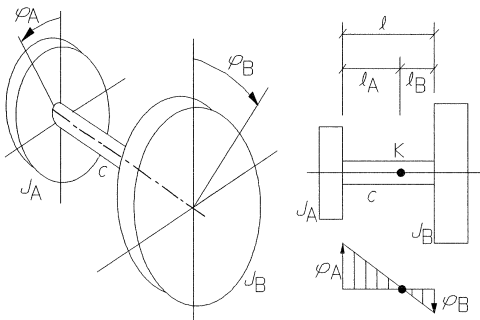


Torsion

Abb. 23-1-1 Biege- und Torsionsschwingung

23.1 Drehschwinger, zwei Drehmassen

a) mit konstantem Wellendurchmesser

Abb. 23-1-2 Drehschwinger, zwei Drehmassen, $d = \text{const}$

Auf einer Welle werden zwei Massen = Scheiben angebracht. Diese beiden Massen können z.B. Zahnräder, Schwungmassen, Keilriemenscheiben oder Kupplungen sein. Sie haben die Massenträgheitsmomente J_A und J_B . Die Welle soll konstanten Durchmesser haben. Damit gilt für die Welle $c = \text{const}$. Außerdem soll die Welle so gelagert sein, daß eine Durchbiegung nicht existiert und deshalb Biegeschwingungen nicht

auftreten können. Die Lagerung ist reibungsfrei. Es wird nur die reine Drehbewegung untersucht. Werden die beiden Scheiben gegeneinander verdreht, führt das System freie Drehschwingungen aus.

Ein Punkt der Welle bleibt dabei in Ruhe; es ist der Schwingungsknoten. Dabei wird die Welle in zwei Teilsysteme geteilt. Man kann diese Stelle als Einspannung ansehen und damit die Welle in zwei Einzelsysteme teilen. Jedes System hat einen Freiheitsgrad.

Für ein Moment gilt zunächst

$$M = J \cdot \ddot{\varphi} = J \cdot \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \quad (23-1-1)$$

Nach der Trennung der Variablen

$$M \cdot dt = J \cdot d\dot{\varphi} \quad (23-1-2)$$

wird integriert und das äußere Moment M gleich Null gesetzt, da es bei Beginn der freien Schwingung nicht mehr wirkt. Dann erhält man:

$$0 = J \cdot (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \quad (23-1-3)$$

Diese Gleichung aufgelöst und sinngemäß mit den Indizes der Zeichnung versehen, gibt die Aussage:

Der Drall für das gesamte System muß Null sein; also muß der Drall für das System A gleich dem Drall für das System B sein:

$$J_A \cdot \dot{\varphi}_A = J_B \cdot \dot{\varphi}_B \quad (23-1-4)$$

Daraus läßt sich das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ermitteln:

$$\frac{\dot{\varphi}_A}{\dot{\varphi}_B} = \frac{J_B}{J_A} \quad (23-1-5)$$

Hat die Welle konstanten Durchmesser, so ist der Verdrehwinkel über die Länge konstant. Nach dem Strahlensatz der Geometrie ist für Winkel und Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{\varphi_A}{\varphi_B} = \frac{\ell_A}{\ell_B}; \quad \frac{\dot{\varphi}_A}{\dot{\varphi}_B} = \frac{\ell_A}{\ell_B} \quad (23-1-6)$$

anzusetzen.

Nach ℓ_A aufgelöst und aus Gleichung (23-1-5) die Winkelgeschwindigkeiten durch die Massenträgheitsmomente ersetzt

$$\ell_A = \ell_B \cdot \frac{\dot{\varphi}_A}{\dot{\varphi}_B} = \ell_B \cdot \frac{J_B}{J_A} = (\ell - \ell_A) \cdot \frac{J_B}{J_A}, \quad (23-1-7)$$

wird daraus die Stelle für den Knotenpunkt

$$\ell_A = \ell \cdot \frac{J_B}{J_A + J_B} . \quad (23-1-8)$$

Stellt man für den rechten und den linken Teil die Gleichungen für die Eigenkreisfrequenzen auf, und betrachtet man die beiden Teile im Knotenpunkt als eingespannt, so erhält man mit

$$c = \frac{G \cdot I_p}{\ell} ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J}} \quad (23-1-9)$$

die Eigenkreisfrequenzen für den linken und für den rechten Teil der Welle

$$\omega_A = \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{\ell_A \cdot J_A}} , \quad \omega_B = \sqrt{\frac{G \cdot I_p}{\ell_B \cdot J_B}} , \quad (23-1-10)$$

wenn sie zunächst als Einzelstücke angesehen werden, die im Knotenpunkt eingespannt sind.

Beide Teile müssen aber die gleiche Eigenkreisfrequenz haben, also $\omega_A = \omega_B = \omega_0$. Setzt man nun noch ℓ_A und c ein, so wird

$$\omega_0 = \sqrt{c \cdot \frac{J_A + J_B}{J_A \cdot J_B}} . \quad (23-1-11)$$

Mit dieser Gleichung wird dann auch in Kap. 23.2 die Eigenkreisfrequenz eines Getriebes bestimmt. Für den Zusammenhang mit dem gefesselten Ein-Scheiben-Drehschwinger und zur Schreibweise in Matrizenform siehe Kap. 23.1 c.

Für die Konstruktion eines Wellensystems zeigt diese Gleichung, daß alle Größen, die Eigenkreisfrequenz und damit das Resonanzverhalten bestimmen, bereits bei dem Entwurf und damit bei der Konstruktion der Teile festgelegt werden. Fehler können dann praktisch nur durch eine Neukonstruktion behoben werden, da zur Änderung der Federkonstanten c und/oder den Massenträgheitsmomenten J die entsprechenden Konstruktionsgrößen geändert werden müssen.

b) mit eingeleitetem Moment

Die Lösung führt über das Schnittprinzip, dabei soll die ab Kap. 24 behandelte Dämpfung bereits eingeführt werden, das Moment $M(t)$ wirkt periodisch mit ω_e :

$$\begin{aligned} M &= J \cdot \ddot{\varphi} , \\ M_c &= c \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = c \cdot \Delta \varphi , \\ M_k &= k \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = k \cdot \Delta \dot{\varphi} , \\ M(t) &= \hat{M} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) . \end{aligned} \quad (23-1-12)$$

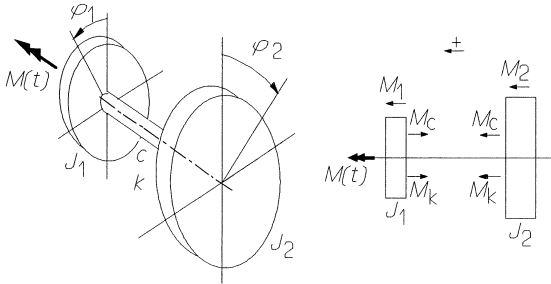


Abb. 23-1-3 Schnittprinzip mit eingeleitetem Moment

Wendet man den Drallsatz an, so muß $J \cdot \ddot{\varphi} = \text{Summe der äußeren Kräfte}$ sein:

$$\begin{aligned} J \cdot \ddot{\varphi} &= \sum M, \\ J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 &= -M_c - M_k + M(t), \\ J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 &= M_c + M_k. \end{aligned} \quad (23-1-13)$$

Durch Umformung und Subtraktion von I - II erhält man

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \ddot{\varphi}_1 + \frac{k}{J_1} \cdot \Delta \varphi + \frac{c}{J_1} \cdot \Delta \varphi &= \frac{M(t)}{J_1}, \\ \text{II)} \quad \ddot{\varphi}_2 - \frac{k}{J_2} \cdot \Delta \varphi - \frac{c}{J_2} \cdot \Delta \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (23-1-14)$$

schließlich die DGL

$$\Delta \ddot{\varphi} + \underbrace{k \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)}_{2 \cdot \delta} \cdot \Delta \varphi + \underbrace{c \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)}_{\omega_0^2} \cdot \Delta \varphi = \frac{M(t)}{J_1}. \quad (23-1-15)$$

Dabei ist δ der ab Kap. 24 eingeführte Abklingkoeffizient (24-1-4) bei einer gedämpften Schwingung und ω_0 die Eigenkreisfrequenz des Systems (23-1-11):

$$\delta = \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{J_1 + J_2}{J_1 \cdot J_2} \right); \quad \omega_0 = \sqrt{c \cdot \frac{J_1 + J_2}{J_1 \cdot J_2}}. \quad (23-1-16)$$

c) Matrizenform

Mit $k = 0$ und $M(t) = 0$ wird aus (23-1-14) das Beispiel in *Abb. 23-1-2* mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \ddot{\varphi}_1 + \frac{c}{J_1} \cdot \Delta \varphi &= 0, \\ \text{II)} \quad \ddot{\varphi}_2 - \frac{c}{J_2} \cdot \Delta \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (23-1-17)$$

und

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + c \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ \text{II)} \quad J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - c \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (23-1-18)$$

Schreibt man die Gleichungen in der folgenden Weise um

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + 0 \cdot \ddot{\varphi}_2 + c \cdot \varphi_1 - c \cdot \varphi_2 &= 0, \\ \text{II)} \quad 0 \cdot \ddot{\varphi}_1 + J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - c \cdot \varphi_1 + c \cdot \varphi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (23-1-19)$$

so erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (23-1-20)$$

Nimmt man aus (23-1-15) die Eigenkreisfrequenz ω_0 heraus

$$\omega_0 = \sqrt{c \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)}, \quad (23-1-21)$$

so wird für den gefesselten Drehschwinger mit einer Drehmasse in Kap. 8.2 mit $J_A = J_1 \Rightarrow \infty$ und $J_B = J_2 = J$

$$\omega_0 = \sqrt{c \cdot \frac{1}{J}}. \quad (8-2-3); (23-1-22)$$

Der ungefesselte Drehschwinger mit n Drehmassen hat $n-1$ Eigenkreisfrequenzen. Der gefesselte Drehschwinger mit n Drehmassen hat n Eigenkreisfrequenzen.

Konstruktionsfehler

Schäden an Lagern werden zum Teil durch falsche Konstruktion verursacht. In der Einführung zu diesem Kapitel wurde bereits gesagt, daß sich eine Torsionsschwingung einer Drehbewegung (Rotation mit der Drehzahl n) überlagert. Das bedeutet aber für ein Lager, daß es nicht nur die Belastung aufzufangen hat, die durch die Drehung der Welle entsteht, sondern auch noch die Belastungen, die durch die überlagerten Torsionsschwingungen entstehen. Da nun sowohl die Massenträgheitsmomente als auch die Federkonstante der Welle existieren, existiert damit auch eine Eigenkreisfrequenz der Welle und damit eine Torsionsschwingung der Welle.

Ist ein Lager in der Nähe des Knotenpunktes angebracht, dann hat es zusätzlich zur Drehzahlbelastung eine geringe Belastung durch die überlagerte Pendelbewegung aufzunehmen (im Idealfall wäre im Knotenpunkt keine Pendelbewegung vorhanden). Je weiter ein Lager vom Knotenpunkt entfernt ist, umso größer ist der Pendelausschlag der Welle. Die beiden Funktionsbilder sollen in *Abb. 23-1-3* die Drehzahl der Welle, die überlagerte Pendelbewegung und in *Abb. 23-1-4* ihre Summe zeigen.

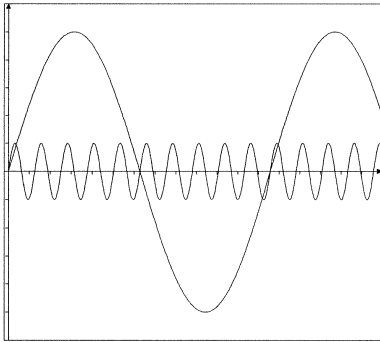


Abb. 23-1-4 Drehzahl und Schwingung

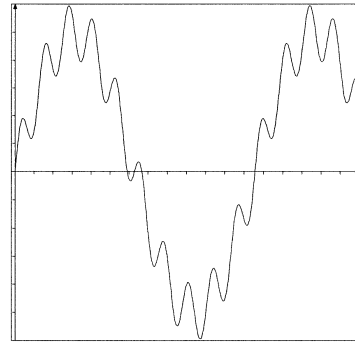


Abb. 23-1-5 Resultierende v. Abb. 23-1-4

Dabei stellt die Schwingung mit der größeren Amplitude und der kleineren Frequenz die Drehzahl dar, während die Pendelbewegung durch die Schwingung mit der kleineren Amplitude und der größeren Frequenz dargestellt wird.

23.2 Drehschwinger, zwei Drehmassen, mit abgesetztem Wellendurchmesser

Wellen mit verschiedenen Durchmessern verhalten sich schwingungstechnisch wie hintereinander geschaltete Federn (Kap. 16). Die Wellendurchmesser sind hier übertrieben gezeichnet. Das wirkliche System soll durch ein Ersatzsystem dargestellt werden.

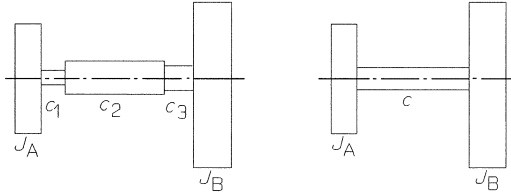


Abb. 23-2-1 Drehschwinger, zwei Drehmassen, $d \neq \text{const}$ und Ersatzsystem

Es muß Gleichheit zwischen den Größen des wirklichen Systems und dem Ersatzsystem bestehen

$$\begin{aligned} J_A &= J_A \\ J_B &= J_B \\ \varphi_{\text{ges}} &= \varphi_{\text{ers}} \end{aligned}$$

Das durchgeleitete Moment ist konstant. Man kann die Gleichung für das Moment (23-2-1 rechts) nach φ umformen und die Bedingung stellen, daß der gesamte Verdrehwinkel der zusammengesetzten Welle gleich dem Verdrehwinkel der Ersatzwelle ist. Stellt man auf ein Ersatzsystem um, so muß die Ersatzfederkonstante gleich der Gesamtfederkonstante sein.

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots = \varphi_{\text{ges}} = \varphi_{\text{ers}} = \varphi ; \quad M = c \cdot \varphi . \quad (23-2-1)$$

Die Verdrehwinkel φ addieren sich, da es sich um hintereinander geschaltete Federn handelt.

Ersetzt man die Verdrehwinkel durch Moment und Federkonstante, so ist das durchgeleitete Moment konstant und die Federkonstanten entsprechend den Durchmessern verschieden. Dadurch wird

$$\frac{M}{c_1} + \frac{M}{c_2} + \dots = \frac{M}{c} . \quad (23-2-2)$$

Es wird durch das konstante Moment dividiert und die Summe über alle Wellensegmente gebildet. Dann ist der Kehrwert der Federkonstanten einer abgesetzten Welle

$$\frac{1}{c} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{c_i} . \quad (23-2-3)$$

Abgesetzte Wellen sind hintereinander geschaltete Federn (siehe Kap. 16.2).

23.3 Getriebeschwingungen, Ersatzsystem

Es werden folgende Annahmen getroffen: das Getriebe hat kein Spiel; die Betriebsdrehzahlen n_1 und n_2 haben keinen Einfluß auf die Eigenkreisfrequenz der Schwingung; das Getriebe könnte ebenso stillstehen und Torsionsschwingungen ausführen. Dagegen geht das Übersetzungsverhältnis in die Gleichungen ein.

Es werden vernachlässigt:

die Massenträgheitsmomente der Zahnräder; die Elastizität der Zahnräder (jeder Zahn stellt einen Biegebalken dar, der schwingungsfähig ist); die Masse der Wellen. Die Zahnräder werden also als starr angenommen.

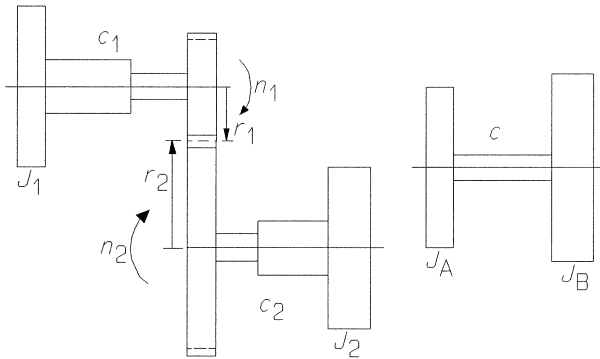


Abb. 23-3-1 Getriebe

Die Eigenkreisfrequenz des Ersatzsystems ist bereits in Kap. 23.1 und Kap. 23.2 ermittelt worden. Die Gleichung kann übernommen werden.

$$\omega_0 = \sqrt{c \cdot \frac{J_A + J_B}{J_A \cdot J_B}} \quad (23-3-1)$$

a) Ermittlung der Federkonstanten des Ersatzsystems

Die Ersatzwelle muß sich bei der gleichen Torsionsbelastung um den gleichen Winkel verformen wie das Getriebe. Die durch die beiden Wellen 1 und 2 durchgeleiteten Momente sind wegen der Übersetzung verschieden:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{r_2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad M_2 = M_1 \cdot \frac{r_2}{r_1} \quad (23-3-2)$$

Daher muß vor der weiteren Berechnung eine Transformation stattfinden. Es kann eine der beiden Massen unverändert in das Ersatzsystem übernommen werden. In diesem Fall wird

das Massenträgheitsmoment J_1 unverändert übernommen; daher muß J_2 und die Welle 2 transformiert werden.

Auf den Zahnradern 1 und 2 laufen in der gleichen Zeit gleiche Wege ab. Der gesamte Verdrehwinkel muß jedoch gleich bleiben; daher ist durch die Übersetzung

$$\varphi_1 \cdot r_1 = \varphi_2 \cdot r_2 \quad (23-3-3)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \cdot \frac{r_2}{r_1} \quad (23-3-4)$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_1 \quad (23-3-5)$$

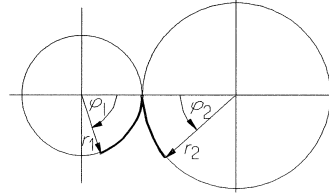


Abb. 23-3-2 Winkelübersetzung

Zeichnet man in Abb. 23-3-3 die Verdrehwinkel, so müssen die Strecken für φ in der Darstellung für das Getriebe und für die Ersatzwelle gleich lang sein. Der Verdrehwinkel der Welle 2 wird jedoch nicht unmittelbar nach Welle 1 übernommen, sondern er muß noch über die Getriebeübersetzung nach Abb. 23-3-2 umgewandelt werden. Außerdem wird $M_1 = M$ gesetzt.

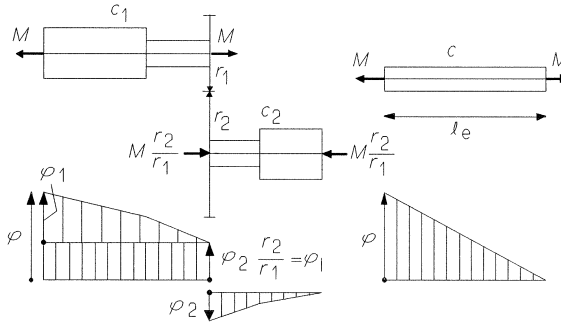


Abb. 23-3-3 Gesamttorsionen

Es wird die Bedingung gestellt, daß der Verdrehwinkel des wirklichen Systems gleich dem Verdrehwinkel des Ersatzsystems sein muß. Dann gilt für Welle 1, Welle 2 und Ersatzwelle

$$\varphi_1 = \frac{M}{c_1}, \quad \varphi_2 = \frac{M \cdot \frac{r_2}{r_1}}{c_2}, \quad \varphi = \frac{M}{c} \quad \text{mit } M_1 = M. \quad (23-3-6)$$

Der gesamte Verdrehwinkel φ ist gleich der Summe aus dem übersetzten Verdrehwinkel der Welle 2 und dem Verdrehwinkel der Welle 1

$$\varphi = \varphi_2 \cdot \frac{r_2}{r_1} + \varphi_1 \quad (23-3-7)$$

Man ersetzt die Winkel durch das durchgeleitete (und übersetzte) Moment und die Federkonstanten aus (23-3-6)

$$\frac{M}{c} = \frac{M \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}{c_2} + \frac{M}{c_1} \quad (23-3-8)$$

und erhält nach Division durch M :

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_2} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + \frac{1}{c_1} \quad (23-3-9)$$

Damit ist die Federkonstante c des Ersatzsystems bestimmt.

b) Ermittlung der zweiten Masse des Ersatzsystems

Vom Ersatzsystem sind nun bekannt:

$$c; \quad J_A = J_1$$

Zur Ermittlung von J_B wird die Masse 2 mit dem Massenträgheitsmoment J_2 unmittelbar an das Getriebe gesetzt, da die Masse 2 noch über das Getriebe mit der Ersatzwelle verbunden ist.

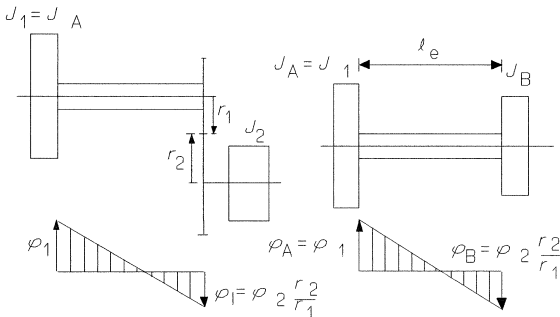


Abb. 23-3-4 Ersatzsystem

Es war der Zusammenhang der Momente in 1 und 2 nach Gleichung (23-3-2), wobei für die Ersatzwelle $M_B = M_1$ sein muß:

$$M_2 = M_1 \cdot \frac{r_2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad M_1 = M_2 \cdot \frac{r_1}{r_2} = M_B . \quad (23-3-10)$$

Für den übersetzten Verdrehwinkel gilt mit zweimaligen Differenzieren

$$\varphi_B = \varphi_2 \cdot \frac{r_2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}_B = \ddot{\varphi}_2 \cdot \frac{r_2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_B \cdot \frac{r_1}{r_2} . \quad (23-3-11)$$

Mit (23-3-10)

$$M_B = M_2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \quad (23-3-12)$$

und Umwandeln in die Schreibweise für die Massenträgheitsmomente ($M = J \cdot \ddot{\varphi}$)

$$J_B \cdot \ddot{\varphi}_B = J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \quad (23-3-13)$$

sowie Einsetzen von $\ddot{\varphi}_2$ aus (23-3-11) ergibt sich

$$J_B = J_2 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 . \quad (23-3-14)$$

Damit ist das Massenträgheitsmoment J_B des Ersatzsystems bekannt.

c) Ermittlung der Länge der Ersatzwelle

Für die Welle mit konstantem Wellendurchmesser gilt mit (23-3-9) Aus (23-1-9) kann c ersetzt werden.

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \cdot c_2} + \frac{1}{c_1} . \quad (23-3-15)$$

Aus (23-1-9) kann c ersetzt werden.

$$\frac{\ell_{\text{ers}}}{G \cdot I_p} = \frac{\ell_2}{\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \cdot G \cdot I_p} + \frac{\ell_1}{G \cdot I_p} . \quad (23-3-16)$$

Nach ℓ_{ers} aufgelöst, erhält man die Länge einer Ersatzwelle mit konstantem Durchmesser, die die gleichen Schwingungseigenschaften hat.

$$\ell_{\text{ers}} = \ell_2 \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 + \ell_1 . \quad (23-3-17)$$

d) Auswirkungen

Abgesehen von den Schwingungen, die sich auf die Wellen und ihre Lager auswirken, tritt ein erheblicher Verschleiß an den Zahnflanken auf. An den Flanken tritt ohnehin eine Gleitbewegung auf (DIN 3960), die aus der Geometrie der Wege bedingt ist und bereits einen Verschleiß hervorruft.

Durch die Erregerkreisfrequenz wird eine Torsionsschwingung in den Wellen hervorgerufen, die nach den Abb. 23-1-3 und Abb. 23-1-4 zu einem Pendeln (Schwingen) führt, das der eigentlichen Rotation überlagert ist. In der Abb. 23-3-5 ist zu sehen, daß an den Zahnflanken eine Schwingungsamplitude auftritt, die durch ihren + und -Wert zu einem weiteren zusätzlichen Verschleiß an den Zahnflanken führen muß. Lager, die an Knotenpunkten liegen, werden durch die reine Betriebsbewegung belastet, Lager, die neben den Knotenpunkten liegen, haben die Schwingungsbewegung zusätzlich aufzunehmen, so daß die Lebensdauer von Lagern gleicher Bauart auf der gleichen Welle unterschiedlich sein wird. Besonders sind die Pittings der Laufbahnen für den Betrieb gefährlich. In spannungsoptischen Aufnahmen läßt es sich gut zeigen, daß die größte Spannung unter der Oberfläche liegt und an dieser Stelle bereits die Fließgrenzen des Materials überschritten sein können (Abb. 23-3-6 Wälzlager). Dieser Effekt kann ebenso bei Zahnflanken auftreten.

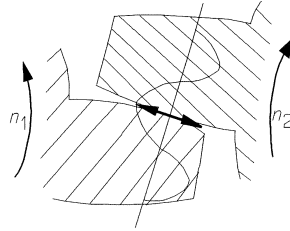


Abb. 23-3-5 Schwingungen am Zahnrad

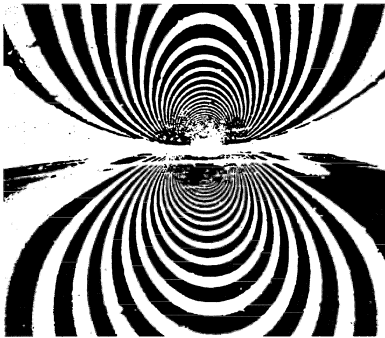


Abb. 23-3-6 Spannungsoptische Aufnahme

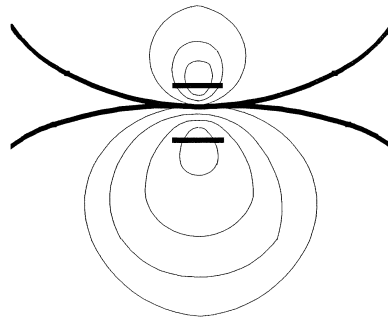


Abb. 23-3-7 Größte Beanspruchung

23.4 Mehrmassenschwinger Torsion

3-Drehmassensystem

Auf einer Welle sollen drei Massen = Scheiben montiert sein. Das 3-Massensystem hat zwei Torsionseigenschwingungsformen in der Form, daß in der Grundschiwingung ein Schwingungsknoten und in der Oberschwingung zwei Schwingungsknoten existieren.

1. Grad $\Rightarrow$ 1 Knoten

2. Grad $\Rightarrow$ 2 Knoten

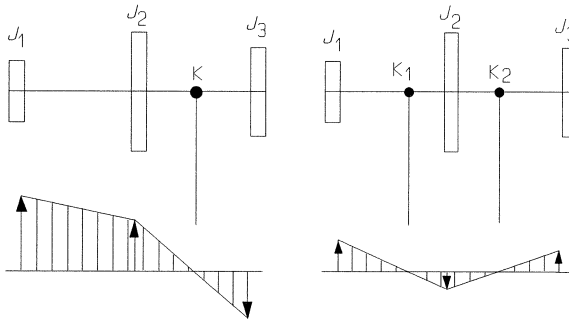


Abb. 23-4-1 3-Massensystem

Das System wird freigemacht. Die DGL wird mit den Wellenstücken als Torsionsfedern angesetzt. Es werden die Gleichungen für M und J sowie für M und φ angesetzt:

$$M = J \cdot \ddot{\varphi}, \quad (23-4-1)$$

$$M = c \cdot \varphi, \quad (23-4-2)$$

$$M_{12} = c_{12} \cdot \Delta \varphi_{12}, \quad (23-4-3)$$

$$\Delta \varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (23-4-4)$$

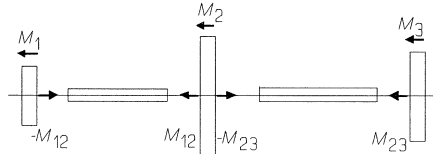


Abb. 23-4-2 freigemachtes System

Dabei ist $\Delta \varphi$ der Verdrehwinkel für ein Segment. (Siehe auch 23.1.b). Es wirken an einer Masse (z.B. der Masse 1) die Momente

$$M_1 = -M_{12}. \quad (23-4-5)$$

Damit können für die drei Massen die drei Gleichungen aufgestellt werden

$$I. \quad J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + c_{12} \cdot \Delta \varphi_{12} = 0, \quad (23-4-6)$$

$$II. \quad J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - c_{12} \cdot \Delta \varphi_{12} + c_{23} \cdot \Delta \varphi_{23} = 0, \quad (23-4-7)$$

$$III. \quad J_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 - c_{23} \cdot \Delta \varphi_{23} = 0. \quad (23-4-8)$$

Die Summe aus diesen Gleichungen ergibt

$$IV. \quad J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + J_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 = 0. \quad (23-4-9)$$

Es ist bei Torsionsschwingungen die zweite Ableitung mit ihrem Maximalwert ($\sin(\omega \cdot t) = 1$)

$$\varphi_1 = \hat{\varphi}_{1a} \cdot \sin(\omega \cdot t) \Rightarrow \ddot{\varphi}_1 = -\omega^2 \cdot \varphi_1. \quad (23-4-10)$$

Hier ist $\hat{\varphi}_{1a}$ die jeweilige Amplitude. Die zweite Ableitung ist negativ; deshalb werden die Gleichungen (23-4-6) und (23-4-8) mit (-1) multipliziert und $\ddot{\varphi}$ aus (23-4-1) eingesetzt. Außerdem werden für $\Delta \varphi$ die Differenzen aus (23-4-4) eingesetzt.

$$J_1 \cdot \omega^2 \cdot \varphi_1 - c_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{-c_{12} \cdot \varphi_2}{J_1 \cdot \omega^2 - c_{12}}, \quad (23-4-11)$$

$$J_3 \cdot \omega^2 \cdot \varphi_3 + c_{23} \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \Rightarrow \varphi_3 = \frac{-c_{23} \cdot \varphi_2}{J_3 \cdot \omega^2 - c_{23}}. \quad (23-4-12)$$

Die Winkel φ_1 und φ_3 werden in die mit (23-4-10) umgeformte Gleichung der Summe (23-4-9) eingesetzt:

$$J_1 \cdot \omega^2 \cdot \varphi_1 + J_2 \cdot \omega^2 \cdot \varphi_2 + J_3 \cdot \omega^2 \cdot \varphi_3 = 0. \quad (23-4-13)$$

Damit erhält man eine Gleichung, in der φ_1 und φ_3 ersetzt sind.

$$J_1 \cdot \omega^2 \cdot \frac{-c_{12} \cdot \varphi_2}{J_1 \cdot \omega^2 - c_{12}} + J_2 \cdot \omega^2 \cdot \varphi_2 + J_3 \cdot \omega^2 \cdot \frac{-c_{23} \cdot \varphi_2}{J_3 \cdot \omega^2 - c_{23}} = 0. \quad (23-4-14)$$

Damit können alle φ_2 eliminiert werden. Die Umformung führt auf $\ominus$

$$J_1 \cdot J_2 \cdot J_3 \cdot \omega^4 - [c_{12}(J_1 \cdot J_3 + J_2 \cdot J_3) + c_{23}(J_1 \cdot J_2 + J_1 \cdot J_3)] \cdot \omega^2 + c_{12} \cdot c_{23}(J_1 + J_2 + J_3) = 0 \quad (23-4-15)$$

Die Division durch $J_1 \cdot J_2 \cdot J_3$ und die Substitution mit A und B

$$\omega^4 - A \cdot \omega^2 + B = 0 \quad (23-4-16)$$

führt mit einer weiteren Substitution $z = \omega^2$ zu der vereinfachten Schreibweise

$$z^2 - A \cdot z + B = 0 . \quad (23-4-17)$$

Dann sind die Lösungen der biquadratischen Gleichung

$$z_{1,2} = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B} , \quad (23-4-18)$$

wobei sich hier 1 und 2 auf die Lösungen und nicht auf die Indizes der Wellen beziehen. Die positiven Lösungen ergeben dann aus der zweiten Substitution die Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_1 = +\sqrt{z_1} ; \quad \omega_2 = +\sqrt{z_2} \quad (23-4-19)$$

mit den Faktoren der ersten Substitution

$$A = c_{12} \cdot \frac{J_1 + J_2}{J_1 \cdot J_2} + c_{23} \cdot \frac{J_2 + J_3}{J_2 \cdot J_3} ; \quad B = c_{12} \cdot c_{23} \cdot \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 \cdot J_2 \cdot J_3} . \quad (23-4-20)$$

Schreibt man sich ein Programm für diesen Fall, so enthält es auch die zweifach besetzte Welle aus Kap. 23.1 und Kap. 23.2 mit J_1 und J_2 , wobei dann $B = 0$ wird, da $c_{23} = 0$ ist und A nur den ersten Summanden enthält. Die Abfrage gegen $J_3 = 0$ im Nenner ist dann in einem Rechnerprogramm entsprechend einzubauen.

***n*-Drehmassensystem**

Es sollen die Bewegungsgleichungen für eine Welle mit $d = \text{const.}$ aufgestellt werden. Die Welle ist mit n Massen besetzt. Die Welle ist elastisch, die Scheiben haben die Massenträgheitsmomente J_k und sind starr. Die Gleichungen sollen mit Hilfe der Lagrange'schen Funktion ermittelt werden.

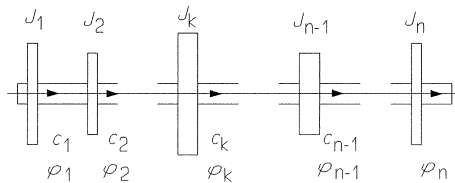


Abb. 23-4-3 *n*-Massenschwinger (Torsion)

Koordinaten: $q_k = \varphi_k$ für $k = 1 \dots n$.

Kinetische Energie:

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot J_n \cdot \dot{\varphi}_n^2 . \quad (23-4-21)$$

Potentielle Energie:

$$W_p = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot c_{n-1} \cdot (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 . \quad (23-4-22)$$

Die Lagrange'sche Funktion ist nach (15-2-8) $L = W_k - W_p$ und damit

$$L = \frac{1}{2} [J_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \dots + J_n \cdot \dot{\varphi}_n^2 - c_1 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)^2 - \dots - c_{n-1} \cdot (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2]. \quad (23-4-23)$$

Die Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_k} \right)' - \frac{\partial L}{\partial \varphi_k} = 0 \quad \text{für } k = 1 \dots n \quad (23-4-24)$$

ergeben für die einzelnen Scheiben (mit $c_0 = c_n = 0$)

$$J_k \cdot \ddot{\varphi}_k + c_{k-1} \cdot (\varphi_k - \varphi_{k-1}) - c_k \cdot (\varphi_{k+1} - \varphi_k) = 0. \quad (23-4-25)$$

So ist für die Scheibe 2 zunächst

$$J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + c_1 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) - c_2 \cdot (\varphi_3 - \varphi_2) = 0. \quad (23-4-26)$$

Vertauscht man in den Klammern die Winkel, nimmt das -Zeichen vor die Klammer, so ist

$$J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + c_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) = 0. \quad (23-4-27)$$

So wird mit der Definition (23-4-4) daraus die Gleichung (23-4-7).

24 Freie gedämpfte Schwingung

Jeder Schwingungsvorgang in der Natur (und damit in der Technik) wird durch äußere Einflüsse (Reibung usw.) gedämpft, d.h. der Schwingung wird Energie entzogen. Die Gleichungen für die ungedämpfte Schwingung gelten also nicht exakt für wirkliche Systeme, sondern mit guter Näherung für geringe Dämpfung und für einen Zeitraum, in dem der Energieentzug vernachlässigbar ist. Der Energieentzug kann durch trockene Reibung, durch Luft- bzw. Flüssigkeitsreibung und durch innere Reibung erfolgen. Auf die Reibung wird in Kap. 29 noch weiter eingegangen.

Die **trockene Reibung** ist praktisch in weitem Bereich nicht von der Geschwindigkeit abhängig. Für sie gelten besondere Gesetze, die in Kap. 29 näher behandelt werden (Stichwort: Coulomb'sche Reibung).

Die **flüssige Reibung** ist im *laminaren* Bereich (Ölfilm in einer Führung) linear von der Geschwindigkeit abhängig. Der Begriff laminar stammt aus der Strömungslehre und bezieht sich auf die Strömungsverhältnisse im Schmiermittel.

Die **flüssige Reibung** ist im *turbulenten* Bereich (umgebende Luft) vom Quadrat der Geschwindigkeit abhängig. Der Begriff der Turbulenz stammt ebenfalls aus der Strömungslehre. Meist handelt es sich um Medien mit geringer Viskosität. Dabei wird die Frage, ob eine Strömung laminar oder turbulent ist, von einer Verhältniszahl (Reynoldszahl Re) entschieden, die als Quotient $Re = w \cdot \ell / \nu$ von der Geschwindigkeit w , einer charakteristischen Länge ℓ und der kinematischen Zähigkeit ν abhängig ist.

Die **innere Reibung** wird maßgeblich von der Amplitude beeinflusst. Sie ist von den Werkstoffeigenschaften des Bauteiles abhängig, das als Feder wirkt. Die innere Reibung wird bei Stählen praktisch vernachlässigt. Handelt es sich bei dem Federwerkstoff z.B. um Gummi, so wird dieses Bauteil als Dämpfer behandelt und die von ihm ausgeübte Kraft als Dämpfungskraft in die Differentialgleichung eingeführt.

Bei Maschinen kann der Einfluß der Dämpfung weitgehend vernachlässigt werden, wenn nur die vorhandene Reibung zwischen den Bauteilen wirkt und ein Schmierfilm zwischen den Bauteilen vorhanden ist.

Die Dämpfung wird dann voll berücksichtigt, wenn Dämpfungselemente als Bauteile eingesetzt werden. Die Entscheidung muß von Fall zu Fall für die einzelne Konstruktion getroffen werden. Im Zweifelsfall muß dann sowohl mit Dämpfung als auch ohne Dämpfung gerechnet werden. Bei einer bereits gebauten Maschine läßt sich die Frage durch einen Ausschwingversuch beantworten (Aufgabe im Kap. Beispiele zu Kap. 23.1 und Kap. 24).

Der am häufigsten vorkommende Fall wird durch die **flüssige Reibung** im laminaren Bereich weitgehend erfaßt. Dieser Fall wird in den folgenden Kapiteln behandelt.

24.1 DGL der freien gedämpften Schwingung

Bei der freien gedämpften Schwingung wird ein schwingungsfähiges System nach dem einmaligen Anstoß sich selbst überlassen. Es wirken also von außen keine weiteren Kräfte mehr auf das System ein. Zu den Gleichungen, die bisher aufgestellt worden sind, kommt nun noch die Dämpfung hinzu. Damit sind wirksam:

$$\begin{array}{ll} \text{Trägheitskraft} & F_T = m \cdot \ddot{x} \\ \text{Dämpfungskraft} & F_D = k \cdot \dot{x} \quad (\text{geschwindigkeitsproportional}) \\ \text{Federkraft} & F_F = c \cdot x \end{array}$$

Die homogene Differentialgleichung eines Feder-Masse Schwingers mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung lautet dann (nach Division durch m)

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0, \quad (24-1-1)$$

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0. \quad (24-1-2)$$

Für δ und ω_0 siehe (24-1-4) und (24-1-3). Damit treten in der Differentialgleichung die Bewegungsgrößen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung auf.

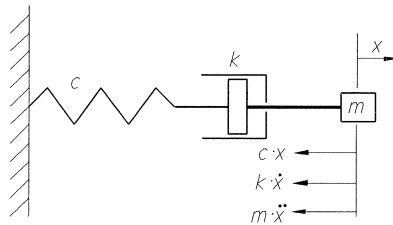


Abb. 24-1-1 Freie gedämpfte Schwingung

Es wird die Bewegung ab dem Zeitpunkt betrachtet, in dem die von außen wirkende Kraft, die die Bewegung hervorgerufen hat, nicht mehr wirkt, und die Masse sich selbst überlassen ist. Dabei können die einzelnen Größen, die bisher bei der ungedämpften Schwingung benutzt worden sind, beibehalten werden. Kap. 24.3.1 wird zeigen, daß die ungedämpfte Schwingung ein Sonderfall der gedämpften Schwingung ist.

In dieser symbolischen Darstellung (einem Ersatzsystem) ist die Dämpfung symbolisch eingezeichnet. Das bedeutet nicht, daß auch tatsächlich ein Dämpfer als Bauteil vorhanden sein muß. Sobald man Reibung in irgendeiner Form in die Berechnung mit einbeziehen will, wird dieses Ersatzbild verwendet.

Es war die

Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{1}{s}. \quad (24-1-3)$$

Weiter wird definiert der

Abklingkoeffizient δ

Der Abklingkoeffizient beschreibt die Abnahme der Amplituden der Schwingung. Er ist für die Torsionsschwingung bereits in (22-3-5) angewendet worden. Durch den Faktor 2 vermeidet man in der Lösung der Charakteristischen Gleichung den Faktor $\frac{1}{2}$ in (24-2-3).

$$\delta = \frac{k}{2 \cdot m} \quad \frac{1}{s} \quad (24-1-4)$$

mit der Dämpfungskonstanten k . Außerdem wird als praktisch wichtigster Begriff zur Beschreibung einer gedämpften Schwingung der

Dämpfungsgrad ϑ , als Lehr'sches Dämpfungsmaß siehe Kap. 30.5 (30-5-8)

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} \quad (24-1-5)$$

eingeführt, mit dem die einzelnen Fälle unterschieden werden.

Die beiden folgenden Begriffe sind in eigenen Kapiteln behandelt:

Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung ω_d
(siehe Kap. 24.2)

Logarithmisches Dekrement Λ
(siehe Kap. 24.4)

24.2 Charakteristische Gleichung

Für die Lösung der Differentialgleichung setzt man, mit zweimaliger Differentiation, an:

$$x = e^{\lambda \cdot t}; \quad \dot{x} = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t}; \quad \ddot{x} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t}. \quad (24-2-1)$$

Durch Einsetzen in die DGL, wobei man $e^{\lambda \cdot t}$ vorklammern kann und für alle Werte von t der Ausdruck $e^{\lambda \cdot t} \neq 0$ ist, erhält man die charakteristische Gleichung als Inhalt der Klammer. Dann muß der Inhalt der Klammer gleich Null sein:

$$\lambda^2 + 2 \cdot \delta \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (24-2-2)$$

Das ist eine quadratische Gleichung und deren Lösungen sind

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (24-2-3)$$

Diese Gleichung gilt sowohl für die geradlinige Bewegung mit

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2 \cdot m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{c}{m}}, \quad (24-2-4)$$

als auch für die kreisförmige Bewegung mit

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2 \cdot J} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2 \cdot J}\right)^2 - \frac{c}{J}}. \quad (24-2-5)$$

Zu dieser Gleichung (24-2-5) gehört die *Abb. 24-2-1*. Dort wird auch auf die Torsionsschwingung näher eingegangen. Es wird sich zeigen, daß für die DGL und deren Lösung die Lösungen der charakteristischen Gleichung für geradlinige und für kreisförmige Bewegung gleichwertig sind.

Der Ansatz für x in (24-2-1) liefert dann mit den Teillösungen $\lambda_{1,2}$ die allgemeinen Lösungen für verschiedene Werte der Integrationskonstanten C_1 und C_2 .

Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob die Wurzel reell, imaginär oder Null ist, d.h. ob das Argument der Wurzel größer, kleiner oder gleich Null ist.

Da allgemein zwei Lösungen für eine quadratische Gleichung existieren, muß das x aus (24-2-1) auch beide Lösungen im Exponenten von e enthalten. Deshalb erhält man für den Weg

$$x = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} . \quad (24-2-6)$$

Diese Gleichung wird in (24-6-3) weiterverwendet.

Betrachtet man die Wurzel aus (24-2-3), so ergeben die Umformungen mit dem **Dämpfungsgrad** $\vartheta = \delta / \omega_0$

$$\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = j \cdot \omega_d \quad (24-2-7)$$

mit ω_d als Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung. Sie ist

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2 = \omega_0^2 \cdot (1 - \vartheta^2) . \quad (24-2-8)$$

Damit wird die Lösung der charakteristischen Gleichung zu

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_d . \quad (24-2-9)$$

Diese Gleichungen werden mit dem Ansatz nach Euler (aus einer math. Formelsammlung) bearbeitet, da sie nach (24-2-6) im Exponenten von e stecken und ein Imaginärteil enthalten.

$$e^{j \cdot \varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi . \quad (24-2-10)$$

Dann wird die Gleichung (24-2-6) mit $\varphi = \omega_d \cdot t$ zu

$$x = C_1 \cdot e^{(-\delta + j \cdot \omega_d) \cdot t} + C_2 \cdot e^{(-\delta - j \cdot \omega_d) \cdot t} . \quad (24-2-11)$$

Der gemeinsame Faktor $e^{(-\delta \cdot t)}$ wird vorgeklammert

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot [C_1 \cdot (\cos(\omega_d \cdot t) + j \cdot \sin(\omega_d \cdot t)) + C_2 \cdot (\cos(\omega_d \cdot t) - j \cdot \sin(\omega_d \cdot t))] \quad (24-2-12)$$

und die Größen zusammengefaßt

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot [(C_1 + C_2) \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + j \cdot (C_1 - C_2) \cdot \sin(\omega_d \cdot t)] . \quad (24-2-13)$$

Mit $C_1 + C_2 = A$ und $j \cdot (C_1 - C_2) = B$ wird (24-2-13) zu

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot (A \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_d \cdot t)) \quad (24-2-14)$$

als die allgemeine Gleichung einer Schwingung, deren Bild in *Abb. 24-3-1* dargestellt ist. Ihre Umhüllende ist eine gegen Null strebende e-Funktion; die Amplituden nehmen mit der Zeit ab. Die Konstanten A und B bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen (siehe (24-2-16)).

Torsionsschwingung

Für die Torsion gelten die gleichen Betrachtungen. Für den Weg x wird der Verdrehwinkel φ eingeführt. Geschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und Beschleunigung $\ddot{\varphi}$ erhält man durch Differentiation nach der Zeit. Da es sich bereits bei der Torsion von Wellen gezeigt hat (Kap. 8.2), daß man Drehschwingungen auf Längsschwingungen zurückführen kann, wenn man die einzelnen Größen sinngemäß ersetzt ($x \Rightarrow \varphi$, $m \Rightarrow J$, $k_{\text{Längs}} \Rightarrow k_{\text{Dreh}}$, $c_{\text{Längs}} \Rightarrow c_{\text{Dreh}}$), erhält man die DGL mit (24-2-5) zu:

$$J \cdot \ddot{\varphi} + k \cdot \dot{\varphi} + c \cdot \varphi = 0. \quad (24-2-15)$$

Achtung: Die Federkonstante der Längsschwingung $c_{\text{Längs}}$ hat die Einheit N/m und die Federkonstante der Drehschwingung c_{Dreh} hat die Einheit N·m. Ebenso gilt entsprechend für $k_{\text{Längs}}$ N·s/m und k_{Dreh} N·s·m.

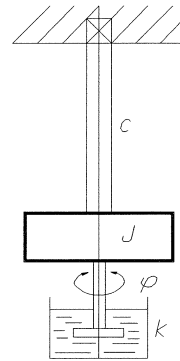


Abb. 24-2-1
Torsionsschwingung

Achtung: Die Dämpfung ist mit der Geschwindigkeit $\dot{x}$ verbunden, die Eigenkreisfrequenz dagegen nur mit dem Weg x . Also hat die Dämpfung keinen unmittelbaren Einfluß auf die Eigenkreisfrequenz. Eine wesentliche Änderung der Eigenkreisfrequenz kann also nicht über die Dämpfung erfolgen, wenn man davon absieht, daß nach (24-1-4) über den Abklingkoeffizienten δ die Größen k und m bzw. J verknüpft sind.

Anfangsbedingungen

Um die Konstanten A und B zu bestimmen, müssen die Anfangsbedingungen bekannt sein. Ist zur Zeit $t = 0$ die Position des Schwingers $x = x(0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x} = \dot{x}(0)$, so ist

$$A = x_0 \quad ; \quad B = \frac{\dot{x}_0 + \delta \cdot x_0}{\omega_d} \quad (24-2-16)$$

24.3 Periodischer Fall

24.3.1 $\vartheta = 0$

Der Dämpfungsgrad ist Null; dann muß gelten:

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = 0 \Rightarrow \delta = \frac{k}{2 \cdot m} = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow F_D = k \cdot \dot{x} = 0. \quad (24-3-1)$$

Daraus folgt, daß die Dämpfungskraft Null ist. Es handelt sich um eine Bewegung ohne Reibung. Aus der Gleichung (24-2-14) wird dann mit $\delta = 0$ eine ungedämpfte Schwingung mit $\omega_d \Rightarrow \omega_0$, denn $e^{\delta \cdot t}$ wird mit $\delta = 0$ zu $e^0 = 1$ und damit der Faktor der Klammer zu 1. Es bleibt nur der Inhalt der ()-Klammer übrig und damit

$$x = A \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \quad (24-3-2)$$

oder in gleichwertiger Schreibweise

$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \varphi). \quad (24-3-3)$$

Das ist eine freie, ungedämpfte, lineare Schwingung, also eine harmonische Schwingung, die bisher behandelt worden ist.

24.3.2 $0 < \vartheta < 1$

Es existiert eine Dämpfung, die jedoch gering ist. In der Praxis bedeutet das, daß meist kein Dämpfungselement als Bauteil in der Maschine vorhanden ist, es wirkt dann nur die normale Reibung. Dann ist $\delta < \omega_0$, da $\vartheta = \delta/\omega_0 < 1$ ist. Die Reibungskraft F_R ist klein im Verhältnis zur rücktreibenden Kraft F_F ; es gilt

$$\delta = \frac{k}{2 \cdot m} < \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (24-3-4)$$

Damit sind die Lösungen $\lambda_{1,2}$ konjugiert komplex, denn der Inhalt der Wurzeln in den Lösungen der charakteristischen Gleichung ist negativ. Die Lösung ist dann die bereits in Kap. 24.2 angeführte allgemeine Lösung als Gleichung einer freien gedämpften Schwingung mit den gleichwertigen Schreibweisen

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot (A \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_d \cdot t)), \quad (24-3-5)$$

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot \hat{x} \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \varphi). \quad (24-3-6)$$

Dabei ist die Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung ω_d nach (24-2-8)

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} . \quad (24-3-7)$$

Da der sin-Anteil nur Werte zwischen -1 und +1 annehmen kann (er ist in das Funktionsbild *Abb. 24-3-1* eingezeichnet), ist der Term aus (24-3-6)

$$x_1 = \pm \hat{x} \cdot e^{(-\delta \cdot t)}$$

der Faktor der reinen sin-Schwingung in (24-3-5). Er stellt die Funktion der beiden Hüllkurven dar. Mit

$$x_2 = \sin(\omega_d \cdot t + \varphi) \quad \text{wird die Gesamtfunktion zu} \quad x = x_1 \cdot x_2$$

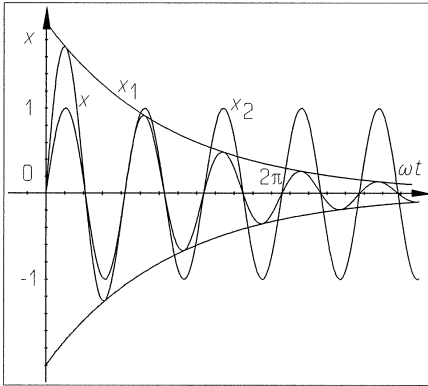


Abb. 24-3-1 Freie gedämpfte Schwingung

Die Funktionswerte sind für die Zeichnung willkürlich gewählt.

Die Amplituden der Schwingung nehmen nach einer e-Funktion mit der Zeit ab. Die sin-Schwingung ist eingezeichnet; ihre Eigenkreisfrequenz muß ω_d sein, denn sie hat die Eigenkreisfrequenz der abklingenden gedämpften Schwingung und nicht die Eigenkreisfrequenz einer ungedämpften Schwingung. Es war nach (24-2-8)

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 \cdot (1 - \vartheta^2) . \quad (24-3-8)$$

Das ist aber nach Umformung die Kreisgleichung der Geometrie ($x^2 + y^2 = 1$) für den positiven Teil der Achsen

$$\left(\frac{\omega_d}{\omega_0} \right)^2 + \vartheta^2 = 1 . \quad (24-3-9)$$

Zeichnet man den positiven Teil, der negative Teil hat keine praktische Bedeutung, so erhält man einen Viertelkreis (*Abb. 24-3-2*).

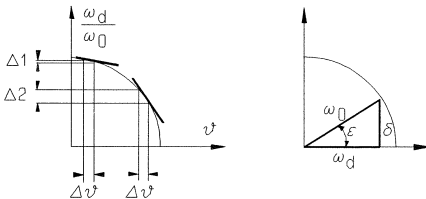


Abb. 24-3-2 Dämpfungsgrößen

Werden die Sekanten für die kleinen $\Delta\vartheta$ gezeichnet, so ist der Anstieg und damit die Änderung des Quotienten ω_d/ω_0 davon abhängig, ob ϑ nahe bei 0 oder nahe bei 1 ist. Dieser Unterschied der Änderung wird insbesondere bei den fremderregten Schwingungen eine erhebliche Rolle spielen.

Die Änderung bei $\vartheta \ll 1$ ist im Verhältnis ω_d/ω_0 so gering, daß ϑ meist vernachlässigt werden kann, d.h. ϑ wird gleich 0 gesetzt und eliminiert auf diese Weise die Summanden in den Gleichungen der Vergrößerungsfaktoren (als Beispiel) $\Rightarrow 4 \cdot \vartheta^2 \cdot (\omega_e/\omega_0)^2$ (Kap. 25).

Mit Hilfe des Dämpfungswinkels ε kann man schreiben (rechter Teil in *Abb. 24-3-2*):

$$\begin{aligned}\vartheta &= \sin \varepsilon = \delta/\omega_0, \\ \delta &= \omega_0 \cdot \sin \varepsilon, \\ \omega_d &= \omega_0 \cdot \cos \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit ist im Dreieck (Pythagoras)

$$\delta^2 + \omega_d^2 = \omega_0^2.$$

Setzt man die einzelnen Größen von oben ein, erhält man die Kreisgleichung

$$\sin^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon = 1$$

der Trigonometrie.

Außerdem ist für die anschließende Ableitung für $\vartheta^2 \ll 1$ in (24-4-5) für kleine Winkel mit dem in 24.4a einzuführenden logarithmischen Dekrement Λ

$$\Lambda = 2 \cdot \pi \cdot \vartheta = 2 \cdot \pi \cdot \sin \varepsilon = 2 \cdot \pi \cdot \tan \varepsilon \quad (24-3-10)$$

24.4a Logarithmisches Dekrement

Bildet man den Quotienten zweier Amplituden, die im Abstand $n \cdot T_d$ aufeinander folgen (mit T_d = Periodendauer einer vollen Schwingung, n = Anzahl der Vollschrwingungen mit $n \geq 1$ und ganzzahlig), so ist (aus (24-3-6)) eingesetzt

$$\frac{A_0}{A_n} = \frac{x(t)}{x(t + n \cdot T_d)} = \frac{e^{-\delta \cdot t}}{e^{-\delta \cdot (t + n \cdot T_d)}} = e^{\delta \cdot n \cdot T_d} \quad (24-4-1)$$

und logarithmiert, um den Exponenten freizumachen, so wird

$$\ln \frac{x(t)}{x(t + n \cdot T_d)} = n \cdot \delta \cdot T_d. \quad (24-4-2)$$

Es ist als das **logarithmische Dekrement** Λ definiert (nach der Division durch n)

$$\Lambda = \delta \cdot T_d = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{x(t)}{x(t + n \cdot T_d)}. \quad (24-4-3)$$

Durch Umformungen (25-2-13) erhält man, indem die einzelnen Größen nacheinander ersetzt werden,

$$\Lambda = \frac{2 \cdot \delta \cdot \pi}{\omega_d} = \frac{2 \cdot \vartheta \cdot \omega_0 \cdot \pi}{\omega_d} = \frac{2 \cdot \vartheta \cdot \omega_0 \cdot \pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \vartheta^2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2}}. \quad (24-4-4)$$

Für kleine Dämpfung ($\vartheta^2 \ll 1$) ergibt sich, da der Nenner zu 1 wird

$$\Lambda = 2 \cdot \vartheta \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\delta}{\omega_0} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{c}{m}}} \cdot \frac{k}{2 \cdot m} = \frac{\pi \cdot k}{\sqrt{c \cdot m}} \quad (24-4-5)$$

Diese Gleichung wird in (24-3-10) und im rechten Teil der *Abb. 24-3-2* verwendet. Sie enthält den Dämpfungswinkel ε mit $\Lambda = 2 \cdot \pi \cdot \tan \varepsilon$.

Alle Gleichungen gelten mit den entsprechenden Größen ebenso für Drehschwingungen.

Logarithmische Darstellung

In der Praxis müssen häufig Schriebe aufgenommen werden. Da die Amplituden zur Berechnung der einzelnen Parameter der Schwingung und damit der Maschine gemessen werden, sind genaue Werte durch Ungenauigkeiten der Aufzeichnung praktisch nicht zu ermitteln. Da kann man mit Gleichung (24-4-3) die Bedingung ausnutzen, daß das logarithmische Dekrement const. ist und damit in einem einfach logarithmischen Diagramm die Hüllkurve der Amplituden als eine fallende Gerade darstellen. *Abb. 24-4-1* stellt einen Meßschieb mit eingezeichneter Hüllkurve dar (hier allerdings vom Rechner erstellt). *Abb. 24-4-2* ist die zugehörige Darstellung im einfach logarithmischen Diagramm.

Arbeitet man mit einem lg-Diagramm, muß der ln in lg umgewandelt werden. Da die Steigung außerdem vom Maßstab der Achsen abhängt, müssen die Abbildungsmaßstäbe der Achsen berücksichtigt werden (Zahlenwerte in Beispiel 24-3):

$\ell y = 1 \text{ Dekade} = nnn \text{ [mm]};$

$\ell x = \text{Länge } T_D = nnn \text{ [mm]}.$

Damit ergibt sich mit $\lg e = 0,4343$:

$$\lg \frac{A_0}{A_1} = \delta \cdot T_d \cdot \lg e = \Lambda \cdot \lg e \quad (24-4-6)$$

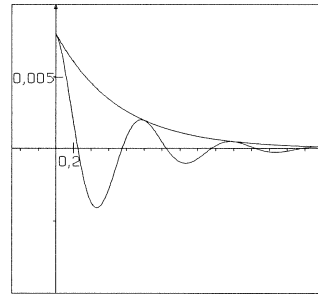


Abb. 24-4-1

$$\Lambda = \frac{\tan \alpha}{\lg e \cdot \frac{\ell y}{\ell x}} \quad (24-4-7)$$

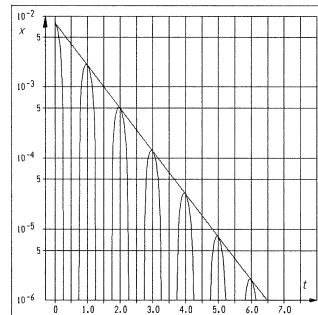


Abb. 24-4-2

24.4b Extreme und Berührungspunkte

Betrachtet man die Abb. 24-3-1, so fällt zunächst nicht auf, daß die Maxima der gedämpften Schwingung nicht die Berührungspunkte mit der Hüllkurve sind. Wird dagegen ein anderer Maßstab gewählt, so ist deutlich der Unterschied zu erkennen. Im Kap. Beispiele sind in einem Beispiel (Kap.24-7) die zu der Abb. 24-4-3 gehörenden Werte angegeben.

Geht man von (24-3-6) aus, so kann man, wie es bereits dort beschrieben ist, den Funktionsterm $x = f(t)$ in das Produkt der beiden Funktionsterme $x_1 = f(t)$ und $x_2 = f(t)$ zerlegen

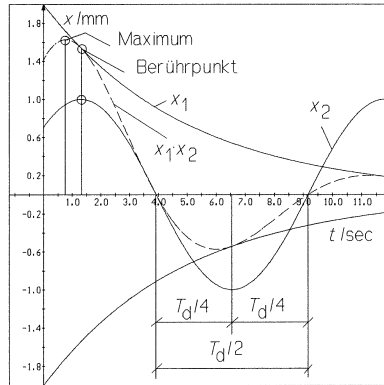


Abb. 24-4-3 Extreme und Berührungspunkte

$$x = \underbrace{e^{-\delta \cdot t} \cdot \hat{x}}_{= x_1} \cdot \underbrace{\sin(\omega_d \cdot t + \varphi)}_{= x_2} . \quad (24-4-8)$$

Da der Funktionsterm x_1 nicht Null sein kann, muß für die Nullstellen gelten

$$x_2 = 0 = \sin(\omega_d \cdot t + \varphi) = \sin(n \cdot \pi) \quad \text{für } n = 0; 1; 2; \dots \quad (24-4-9)$$

$$\begin{aligned} \omega_d \cdot t + \varphi &= n \cdot \pi , \\ \omega_d \cdot t &= n \cdot \pi - \varphi . \end{aligned} \quad (24-4-10)$$

In den Berührungspunkten müssen die Werte für $x = f(t)$ und $x_1 = f(t)$ übereinstimmen. Das ist jedoch nur dann der Fall, wenn $x_2 = \pm 1$ ist

$$x_2 = \pm 1 = \sin(\omega_d \cdot t + \varphi) = \sin\left(\frac{2 \cdot n + 1}{2} \cdot \pi\right) \quad \text{für } n = 0; 1; 2; \dots \quad (24-4-11)$$

$$\begin{aligned} \omega_d \cdot t + \varphi &= \frac{2 \cdot n + 1}{2} \cdot \pi , \\ \omega_d \cdot t &= \frac{2 \cdot n + 1}{2} \cdot \pi - \varphi = n \cdot \pi + \frac{\pi}{2} - \varphi , \\ &= (n \cdot \pi - \varphi) + \frac{\pi}{2} . \end{aligned} \quad (24-4-12)$$

Vergleicht man die jeweils letzte Gleichung aus (24-4-10) und (24-4-12), so sind sie bis auf den Summanden in (24-4-12) identisch. Der Summand $\pi/2$ gibt an, daß die Berührungspunkte genau in der Mitte zwischen zwei Nullstellen liegen.

Die Extremwerte erhält man durch Differentiation der Gleichung (24-4-8) mit der Bedingung, daß die []-Klammer Null werden muß

$$\dot{x} = \underbrace{e^{-\delta \cdot t}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\dot{x} \cdot [-\delta \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \varphi) + \omega_d \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \varphi)]}_{= 0} . \quad (24-4-13)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \tan(\omega_d \cdot t + \varphi) &= \frac{\omega_d}{\delta} , \\ \omega_d \cdot t &= \arctan \frac{\omega_d}{\delta} - \varphi . \end{aligned} \quad (24-4-14)$$

Mit den Gleichungen (24-3-8) und (21-1-5) kann man die Zeit t_E für einen Extremwert auch mit Hilfe der Dämpfungskonstanten ϑ berechnen.

$$t_E = \frac{1}{\omega_d} \cdot \left(\arctan \frac{\sqrt{1 - \vartheta^2}}{\vartheta} - \varphi \right) . \quad (24-4-15)$$

24.5 Aperiodischer Grenzfall $\vartheta = 1$

In Kap. 24.3.1 war $\vartheta = 0$, das führte zu einer ungedämpften Schwingung. In Kap. 24.3.2 galt $0 < \vartheta < 1$. Das war eine gedämpfte periodische Schwingung, deren Amplituden nach einer e-Funktion abnahmen. Nun soll $\vartheta = 1$ gelten. Nach der Definition für ϑ folgt aber daraus $\delta = \omega_0$ und damit ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$. Dann wird der Inhalt der Wurzel aus der Lösung der charakteristischen Gleichung zu 0. Es gibt nur eine Lösung

$$x = C \cdot e^{\lambda \cdot t} . \quad (24-5-1)$$

Der Ansatz erfolgt nach der Methode der Variation der Konstanten in der Form ($C(t)$ ist dabei eine Funktion von t)

$$x = C(t) \cdot e^{\lambda \cdot t} , \quad (24-5-2)$$

$$\dot{x} = C'(t) \cdot e^{\lambda \cdot t} + C(t) \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} , \quad (24-5-3)$$

$$\ddot{x} = C''(t) \cdot e^{\lambda \cdot t} + C'(t) \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} + C'(t) \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} + C(t) \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t}. \quad (24-5-4)$$

x wurde zweimal differenziert. Diese Größen werden in die DGL eingesetzt, wobei die DGL = 0 ist. Dabei wird durch Ausklammern die gesamte Gleichung zu $e^{\lambda \cdot t} \cdot [] = 0$ umgeformt. Da aber der Faktor $e^{\lambda \cdot t}$ nicht 0 sein kann, muß die $[] = 0$ sein! Es wird dann aus

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \quad (24-5-5)$$

auf diese Weise durch Zusammenfassen und Ordnen nach C'' , C' und C schließlich

$$C''(t) + [2 \cdot \lambda + 2 \cdot \delta] \cdot C'(t) + [\lambda^2 + 2 \cdot \delta \cdot \lambda + \omega_0^2] \cdot C(t) = 0. \quad (24-5-6)$$

Dabei ist wegen $\lambda = -\delta$ die erste $[] = 0$, und da die zweite $[]$ gleich der charakteristischen Gleichung ist ($= 0$), ist **jeder** Summand gleich Null, also muß auch $C''(t)$ gleich Null sein.

Die zweifache Integration bringt

$$C''(t) = 0 \quad C'(t) = C_2 \quad C(t) = C_2 \cdot t + C_1. \quad (24-5-7)$$

Alle $[]$ -Ausdrücke sind Null; deshalb existieren die $C'(t)$ und $C(t)$. Damit wird in den Ansatz $C(t)$ eingesetzt (24-5-2):

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t). \quad (24-5-8)$$

Das ist eine aperiodische Bewegung. Die Gleichung enthält keinen sin-Anteil mehr. Das System schwingt gerade nicht mehr. Die Bewegung strebt wegen des negativen Exponenten von e gegen Null. Die Bestimmung von C_1 und C_2 erfolgt aus den Randbedingungen der Bewegung. Sie wird in den Beispielen im Kap. Beispiele ausführlich durchgeführt. Je nach den Randbedingungen hat die Bewegung maximal einen Nulldurchgang und kriecht dann in die Ruhelage (siehe auch *Abb. 24-6-1*).

In diesem Diagramm ist eine Besonderheit in der Benennung der Achsen eingeführt. Die Maßsysteme der einzelnen Länder sind nicht einheitlich, das metrische System ist nicht überall eingeführt. Deshalb ist es üblich, die Achsen frei von Einheiten zu machen. Die Variable x wird durch die Division mit x_0 ($= \text{const.}$) einheitenfrei und die Zeit t durch die Multiplikation mit ω_0 ($= \text{const.}$) einheitenfrei.

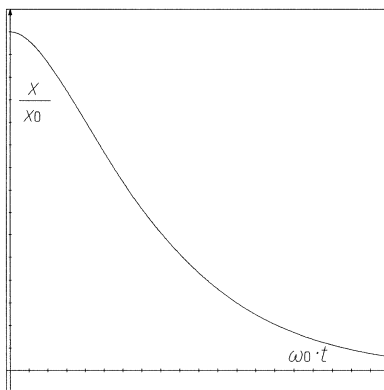


Abb. 24-5-1 Aperiodischer Grenzfall

24.6 Aperiodischer Fall $\vartheta > 1$

Zu der Einleitung zu Kap. 24.5 wird nun noch der Fall hinzugenommen, daß $\vartheta > 1$ ist. Damit gilt nach der Definition für ϑ , daß $\delta > \omega_0$ sein muß. Die Dämpfung ist groß (in der Maschine sind in der Regel Dämpfungselemente eingebaut). Die Wurzel aus der Lösung der charakteristischen Gleichung ist reell. Man setzt

$$\kappa = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (24-6-1)$$

als Abkürzung in der Schreibweise (κ = Kappa). Damit sind die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \kappa \quad \text{mit} \quad \kappa < \delta \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} < 0. \quad (24-6-2)$$

Die Lösungen sind also negativ, die Funktion strebt gegen Null, eine Schwingung tritt nicht ein. Der Vorgang ist aperiodisch. Die Weg-Zeit-Funktion ist mit (24-2-6)

$$x = C_1 \cdot e^{-(\delta-\kappa) \cdot t} + C_2 \cdot e^{-(\delta+\kappa) \cdot t} \quad (24-6-3)$$

und die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion als erste Ableitung

$$\dot{x} = -(\delta-\kappa) \cdot C_1 \cdot e^{-(\delta-\kappa) \cdot t} - (\delta+\kappa) \cdot C_2 \cdot e^{-(\delta+\kappa) \cdot t}. \quad (24-6-4)$$

Die Integrationskonstanten werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Wird der Körper aus der statischen Ruhelage ausgelenkt und ohne Anstoß losgelassen, gilt zur Zeit

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Diese Anfangsbedingungen werden in die Gleichungen (24-6-3) und (24-6-4) eingesetzt. Dann ergeben sich durch Einsetzen und Umformen die Konstanten zu $\ominus$

$$C_1 = \frac{\delta + \kappa}{2 \cdot \kappa} \cdot x_0; \quad C_2 = -\frac{\delta - \kappa}{2 \cdot \kappa} \cdot x_0. \quad (24-6-5)$$

Sie werden in die Weg-Zeit-Funktion eingesetzt (24-6-3) und man erhält

$$x = x_0 \cdot \left[\frac{\delta + \kappa}{2 \cdot \kappa} \cdot e^{-(\delta - \kappa) \cdot t} - \frac{\delta - \kappa}{2 \cdot \kappa} \cdot e^{-(\delta + \kappa) \cdot t} \right]. \quad (24-6-6)$$

Das ist Gleichung für eine gedämpfte Bewegung, bei der es keine Schwingung in Form einer sin-Schwingung gibt. Ist dagegen bereits eine Anfangsgeschwindigkeit und eine Auslenkung vorhanden, dann sind die Anfangsbedingungen

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Die Integrationskonstanten werden nun zu

$$C_1 = \frac{x_0 \cdot \lambda_2 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 \cdot x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (24-6-7)$$

Setzt man sie in die Weg-Zeit-Funktion ein (24-6-3), so ist

$$x = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left[(x_0 \cdot \lambda_2 - \dot{x}_0) \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} - (x_0 \cdot \lambda_1 - \dot{x}_0) \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \right]. \quad (24-6-8)$$

Mit $\dot{x}_0 = v_0$ und $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \kappa$ und ausgeklammerten Vorzeichen wird diese Gleichung zu

$$x = \frac{1}{2 \cdot \kappa} \cdot \left[[x_0 \cdot (\delta + \kappa) + v_0] \cdot e^{-(\delta - \kappa) \cdot t} + [x_0 \cdot (\kappa - \delta) - v_0] \cdot e^{-(\delta + \kappa) \cdot t} \right]. \quad (24-6-9)$$

Für die Grafik ergeben sich mit der Variation der Anfangsgeschwindigkeit

- (1) $v_0 > 0$
- (2) $v_0 = 0$
- (3) $v_0 < 0$.

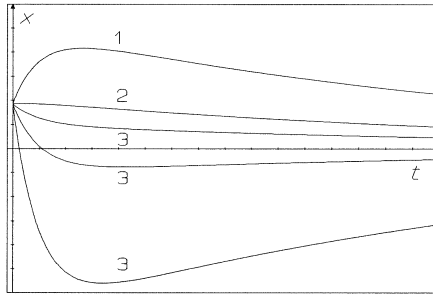


Abb.24-6-1 Aperiodische Bewegung

25 Erzwungene Schwingung

25.1 Erzwungene gedämpfte Schwingung

Der harmonische Schwinger wird um zwei weitere Größen ergänzt:

$$\hat{F}_R = k \cdot \dot{x} \quad \text{Reibungskraft; geschwindigkeitsproportional angesetzt;}$$

$$\hat{F}_e \cdot \sin(\omega_e \cdot t) \quad \text{periodische Erregerkraft (mit dem Index e für Erregung).}$$

Damit wird an einem Bauteil eine von außen eingeleitete, periodische Kraft wirksam, die dem Bauteil ständig neue Energie zuführt.

25.2 Federkrafterregung

Wird einer Masse, die in einer freien gedämpften Schwingung schwingt, ständig Energie zugeführt, dann tritt eine erzwungene Schwingung ein. Bei einer Maschine wird diese Zwangserregung meist periodisch sein.

Da die Materialien der technischen Konstruktionen einen Elastizitätsmodul haben, unterliegen sie dem Gesetz von Hooke, d.h. die Spannung ist der Dehnung proportional. Das bedeutet aber auch, daß alle Konstruktionsteile schwingungsfähig sind, sobald auf sie Kräfte ausgeübt werden.

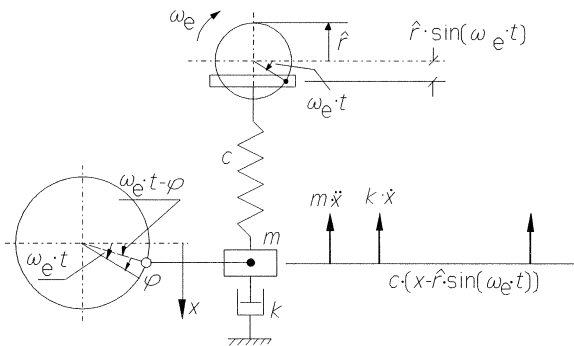


Abb. 25-2-1 System der Federkrafterregung

In diesem Beispiel erfolgt die Energiezufuhr über die Kurbel einer Kreuzschleife. Die Energie wird durch die Federn auf die Masse weitergeleitet, die nach unten frei durchschwingen kann. Die Masse m bleibt dabei um den Winkel φ zurück.

Damit erhält die Gleichung auf der rechten Seite ein Störglied F_e in Form einer

harmonischen Funktion. Die DGL wird damit zu einer inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wobei der Aufhängepunkt der Feder sich entsprechend der Bewegung der Kreuzschleife periodisch ändert (Weg der Feder - Weg des Aufhängepunktes):

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot (x - \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t)) = 0 . \quad (25-2-1)$$

Die Gleichung wird getrennt in Anteile, welche die Bewegungsgrößen enthalten, das ist die bisher verwendete DGL, und in den Anteil, der die "Störung" enthält.

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = c \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) . \quad (25-2-2)$$

Hält man die Masse in der Null-Lage fest und dreht man die Kurbel um 90° weiter, wird die Feder um den Weg $\hat{r}$ zusammengedrückt, so daß in ihr die Kraft $\hat{F}_e = c \cdot \hat{r}$ entsteht. Sie kann man als Erregerkraft deuten, die periodisch wirkt:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = \hat{F}_e \cdot \sin(\omega_e \cdot t) . \quad (25-2-3)$$

Dividiert man (25-2-2) durch m , so wird mit $c = \omega_0^2 \cdot m$ und $k = 2 \cdot \delta$

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \omega_0^2 \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) . \quad (25-2-4)$$

Die Lösung dieser Gleichung setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen DGL und einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL additiv zusammen:

$$x = x_h + x_p . \quad (25-2-5)$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist bereits behandelt worden. Sie klingt wegen des negativen Exponenten der Exponentialfunktion mit der Zeit ab. Für die erzwungene Schwingung ist die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL maßgebend, da nach einiger Zeit der homogene Anteil praktisch verschwunden ist und die Schwingung durch die Erregerkraft aufrechterhalten wird (Abb. 25-2-2).

Im eingeschwungenen Zustand bestimmt daher der partikuläre Teil die Gesamtschwingung. Daher wird der Lösungsansatz in Form des Störgliedes angesetzt:

$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega_e \cdot t - \varphi) . \quad (25-2-6)$$

Darin ist $\hat{x}$ die Amplitude = Maximalausschlag und φ der Winkel, um den die Masse m hinter dem Winkel $(\omega_e \cdot t)$ der Erregerkraft zurückbleibt.

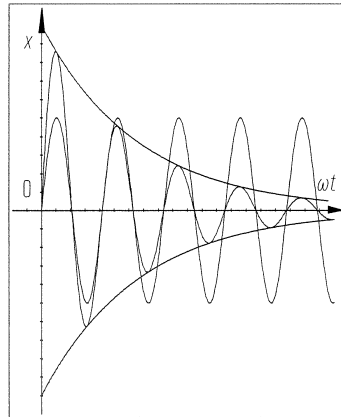


Abb. 25-2-2 Erzwungene gedämpfte Schwingung

Die Lösung erfolgt auf zwei Wegen: zunächst (a) auf konventionelle Weise mit Hilfe der Additionstheoreme und anschließend (b) über die Aufstellung der **Matrizen**.

Lösung (a): Zweimaliges Differenzieren von (25-2-6) und Einsetzen in (25-2-3), wobei gleichzeitig nach sin- und cos-Teilen geordnet wird, bringt die Gleichung in die Form

$$\hat{x} \cdot (c - m \cdot \omega_e^2) \cdot \sin(\omega_e \cdot t - \varphi) + k \cdot \omega_e \cdot \hat{x} \cdot \cos(\omega_e \cdot t - \varphi) = \hat{F}_e \cdot \sin(\omega_e \cdot t). \quad (25-2-7)$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme der Trigonometrie wird umgeformt:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta ; \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

und gibt in einer Doppelzeile geschrieben: (es wird nach $\sin(\omega_e \cdot t)$ und $\cos(\omega_e \cdot t)$ geordnet)

$$\begin{aligned} & [\hat{x} \cdot (c - m \cdot \omega_e^2) \cdot \cos \varphi + k \cdot \hat{x} \cdot \omega_e \cdot \sin \varphi - \hat{F}_e] \cdot \sin(\omega_e \cdot t) \\ & - [\hat{x} \cdot (c - m \cdot \omega_e^2) \cdot \sin \varphi - k \cdot \hat{x} \cdot \omega_e \cdot \cos \varphi] \cdot \cos(\omega_e \cdot t) = 0. \end{aligned} \quad (25-2-11)$$

In dieser einen Gleichung sind die unbekannte Amplitude $\hat{x}$ und der unbekannte Phasenwinkel φ enthalten. Für zwei Unbekannte steht zunächst nur eine Gleichung zur Verfügung. Da die Gleichung gleich Null ist und für *alle* Werte von $\omega_e \cdot t$ gelten muß, muß jede der []-Klammern für sich Null sein.

Zunächst wird die zweite []-Klammer gleich Null gesetzt. Das führt mit $\tan \varphi = \sin \varphi / \cos \varphi$ auf

$$\tan \varphi = \frac{k \cdot \omega_e}{c - m \cdot \omega_e^2}. \quad (25-2-12)$$

Es erfolgt die Division des Bruches durch c und mit den Umformungen für δ , ϑ und c

$$\delta = \frac{k}{2 \cdot m} ; \quad \frac{\delta}{\omega_0} = \vartheta = \frac{k}{2 \cdot m \cdot \omega_0} ; \quad c = m \cdot \omega_0^2 \quad (25-2-13)$$

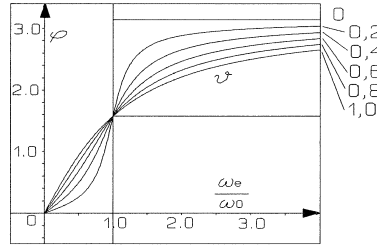
wird daraus

$$\tan \varphi = \frac{\frac{k \cdot \omega_e}{c}}{1 - \frac{m \cdot \omega_e^2}{c}} = \frac{\frac{k}{m \cdot \omega_0} \cdot \frac{\omega_e}{\omega_0}}{1 - \frac{m \cdot \omega_e^2}{m \cdot \omega_0^2}} \quad (25-2-14)$$

und schließlich

$$\tan \varphi = \frac{2 \cdot \hat{x} \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)}{1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2} \quad (25-2-15)$$

Man erhält so die Phasenverschiebung der Schwingung der Masse m gegenüber der Erregung, den **Phasenfrequenzgang**. Dabei zeigt es sich, daß vor dem Erreichen der kritischen Drehzahl Erregung und Masse gleichsinnig schwingen, während nach dem Durchfahren der kritischen Drehzahl Erregung und Masse gegenläufig sind.



Wird die erste []-Klammer aus (25-2-11) umgeformt und

Abb. 25-2-3 Phasenfrequenzgang

$$\tan \varphi = \frac{k \cdot \omega_e}{c - m \cdot \omega_e^2} \quad \text{und} \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \quad (25-2-16)$$

eingesetzt, so erhält man die Gleichung für die Amplitude $\hat{x}$ mit folgenden Schritten aus (25-2-11) zunächst durch Vorklammern:

$$\hat{x} \cdot (c - m \cdot \omega_e^2) \cdot \cos \varphi \cdot \left[1 + \frac{k \cdot \hat{x} \cdot \omega_e}{\hat{x} \cdot (c - m \cdot \omega_e^2)} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right] = \hat{F}_e \quad (25-2-17)$$

Mit (25-2-16) für $\cos \varphi$ und darin den $\tan \varphi$ wiederum durch (25-2-16) eingesetzt, folgt

$$\hat{x} \cdot (c - m \cdot \omega_e^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \cdot [1 + \tan \varphi \cdot \tan \varphi] = \hat{F}_e \quad (25-2-18)$$

Erweitern mit dem Nenner $\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}$

$$\hat{x} \cdot \frac{(c - m \cdot \omega_e^2) \cdot [1 + \tan^2 \varphi] \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}{(\sqrt{1 + \tan^2 \varphi})^2} = \hat{F}_e \quad (25-2-19)$$

und Kürzen der [] gegen $(\sqrt{\quad})^2$ und Ersetzen des $\tan \varphi$ nach (25-2-16) bringt die Gleichung

$$\hat{x} \cdot \sqrt{(c - m \cdot \omega_e^2)^2 + \frac{(c - m \cdot \omega_e^2)^2 \cdot (k \cdot \omega_e)^2}{(c - m \cdot \omega_e^2)^2}} = \hat{F}_e \quad (25-2-20)$$

und schließlich die Amplitude der Masse m

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}_e}{\sqrt{(c - m \cdot \omega_e^2)^2 + (k \cdot \omega_e)^2}}. \quad (25-2-21)$$

Die Division in Zähler und Nenner mit c und die Umformung für ϑ , δ , ω_0 , und c aus (25-2-13) ergibt die Amplitude

$$\hat{x} = \frac{\frac{\hat{F}_e}{c}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (25-2-22)$$

Die allgemeine Weg-Zeitgleichung wird dann mit dieser Amplitude $\hat{x}$ aus (25-2-6)

$$x = \frac{\frac{\hat{F}_e}{c}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}} \cdot \sin(\omega_e \cdot t - \varphi). \quad (25-2-23)$$

Durch Division von $\hat{x}$ durch $\hat{r}$ und $\hat{F}_e$ aus (25-2-2) und (25-2-3)

$$\frac{\frac{\hat{x}}{\hat{F}_e}}{\frac{c}{c}} = \frac{\hat{x}}{\hat{r}} = V_1 \quad (25-2-24)$$

erhält man die **Vergrößerungsfunktion** V_1 als Verhältnis der Amplitude $\hat{x}$ zur Amplitude $\hat{r}$ (vergleichbar einem Übersetzungsverhältnis):

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (25-2-25)$$

Bei kleiner Dämpfung $\vartheta^2 \ll 1$ wird V_1 zu (der zweite Summand wird praktisch vernachläss-

sigbar klein gegen den ersten Summanden)

$$V_1 = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 \right|} . \quad (25-2-26)$$

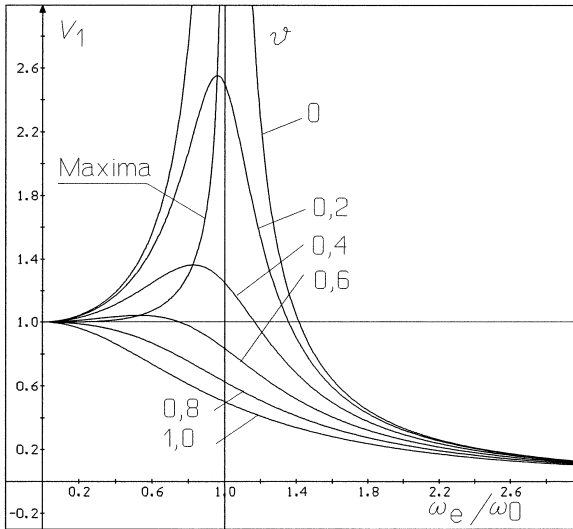


Abb. 25-2-4 Vergrößerungsfunktion V_1

Achten Sie auf die Maxima-Funktion. Mit größerer Dämpfung verschieben sich die Maxima nach links, d.h. zu niedrigeren Drehzahlen. Also wird das Maximum unterhalb der kritischen Drehzahl für $\vartheta = 0$, d.h. $\omega_e/\omega_0 = 1$ eintreten. Gleichzeitig verringert sich allerdings die Resonanzamplitude $\hat{x}$ der Masse m . Im Gegensatz hierzu wird sich bei der Massenkrafterregung (siehe dort) die Maxima-Funktion zu den höheren Drehzahlen verlagern.

V_1 wird wegen der Abhängigkeit vom Kreisfrequenzverhältnis auch Amplitudenfrequenzgang genannt.

Für $\vartheta > 0,5 \cdot \sqrt{2}$ wird die Amplitude $\hat{x}$ der erregten Masse m immer kleiner als die Erregeramplitude $\hat{r}$ sein, d.h. V_1 wird dann nicht mehr größer als 1.

Rechts von $\omega_e/\omega_0 \approx 1,5$ wird V_1 immer kleiner als 1. Gleichzeitig laufen die Kurven für die verschiedenen Werte der Dämpfung ϑ enger zusammen. In diesem Bereich wird die Dämpfung dann praktisch wirkungslos. Um die Dämpfer zu schonen, wird bei verschiedenen Konstruktionen die Dämpfung abgeschaltet. Die Masse schwingt dann mit und ohne

Dämpfung praktisch mit der gleichen Amplitude. Wichtig ist die Dämpfung in der Nähe der kritischen Drehzahl. In Kap. 14 - Betriebsdrehzahl und Resonanz - ist diese Fragestellung ausführlich behandelt. Andererseits wird in Kap. 25.4 - Durchlässigkeit und Isolierfaktor - die u.U. schädliche Wirkung einer Dämpfung behandelt.

(Siehe auch - Zusammenfassung - am Ende dieses Kapitels 25-3).

Lösung (b)

in Matrizenschreibweise

Als Ausgangsgleichung dient (25-2-3).

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = \hat{F}_e \cdot \sin(\omega_e \cdot t) . \quad (25-2-3); (25-2-27)$$

Der Ansatz erfolgt mit (3-2-13) und zweimaliger Differentiation

$$\begin{aligned} x &= A \cdot \sin(\omega_e \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_e \cdot t) , \\ \dot{x} &= A \cdot \omega_e \cdot \cos(\omega_e \cdot t) - B \cdot \omega_e \cdot \sin(\omega_e \cdot t) , \\ \ddot{x} &= -A \cdot \omega_e^2 \cdot \sin(\omega_e \cdot t) - B \cdot \omega_e^2 \cdot \cos(\omega_e \cdot t) , \end{aligned} \quad (25-2-28)$$

eingesetzt in (25-2-27) und geordnet nach $\sin(\omega_e \cdot t)$ und $\cos(\omega_e \cdot t)$ ergibt

$$\begin{aligned} [A \cdot (c - m \cdot \omega_e^2) - B \cdot k \cdot \omega_e - \hat{F}_e] \cdot \sin(\omega_e \cdot t) + \\ [A \cdot k \cdot \omega_e + B \cdot (c - m \cdot \omega_e^2)] \cdot \cos(\omega_e \cdot t) = 0 . \end{aligned} \quad (25-2-29)$$

Wie schon bei (25-2-11) erklärt, muß jede der [] für sich gleich Null sein.

$$\begin{aligned} A \cdot (c - m \cdot \omega_e^2) - B \cdot k \cdot \omega_e &= \hat{F}_e , \\ A \cdot k \cdot \omega_e + B \cdot (c - m \cdot \omega_e^2) &= 0 . \end{aligned} \quad (25-2-30)$$

Damit ist in der Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} (c - m \cdot \omega_e^2) & -k \cdot \omega_e \\ k \cdot \omega_e & (c - m \cdot \omega_e^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{F}_e \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (25-2-31)$$

Die Lösung erfolgt über die Koeffizientendeterminante $\ominus$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} \hat{F}_e & -k \cdot \omega_e \\ 0 & (c - m \cdot \omega_e^2) \end{vmatrix}}{N} = \frac{\hat{F}_e \cdot (c - m \cdot \omega_e^2)}{N} ; \quad (25-2-32)$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} (c - m \cdot \omega_e^2) & \hat{F}_e \\ k \cdot \omega_e & 0 \end{vmatrix}}{N} = \frac{\hat{F}_e \cdot k \cdot \omega_e}{N}; \quad (25-2-33)$$

$$N = \begin{vmatrix} (c - m \cdot \omega_e^2) & -k \cdot \omega_e \\ k \cdot \omega_e & (c - m \cdot \omega_e^2) \end{vmatrix} = (c - m \cdot \omega_e^2)^2 + (k \cdot \omega_e)^2. \quad (25-2-34)$$

Damit ist der Anschluß an (25-2-12) gegeben

$$\tan \varphi = \frac{B}{A} = \frac{k \cdot \omega_e}{c - m \cdot \omega_e^2}. \quad (25-2-12); (25-2-35)$$

Ebenso wird $\hat{x}$ ermittelt:

$$\hat{x} = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left(\frac{\hat{F}_e \cdot (c - m \cdot \omega_e^2)}{N} \right)^2 + \left(\frac{\hat{F}_e \cdot k \cdot \omega_e}{N} \right)^2}, \quad (25-2-36)$$

$$\hat{x} = \hat{F}_e \cdot \frac{\sqrt{(c - m \cdot \omega_e^2)^2 + (k \cdot \omega_e)^2}}{\sqrt{(c - m \cdot \omega_e^2)^2 + (k \cdot \omega_e)^2}}, \quad (25-2-37)$$

und damit zurück nach (25-2-21)

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}_e}{\sqrt{(c - m \cdot \omega_e^2)^2 + (k \cdot \omega_e)^2}}. \quad (25-2-21); (25-2-37)$$

Zusammenhang V_1 , $\hat{x}$, $\hat{r}$ und φ

Den Zusammenhang zwischen der Vergrößerungsfunktion V_1 , der Erregeramplitude $\hat{r}$ und der Amplitude $\hat{x}$, mit der die Masse m schwingt, kann man sich leicht und schnell mit einem Fadenpendel anschaulich machen. Die Abbildung zeigt die einzelnen Phasen und die Phasenverschiebung φ . Bei allen Schwingungen bleibt $\hat{r}$ konstant.

$$\omega_e \ll \omega_0 \Rightarrow V_1 \approx 1; \quad \varphi \approx 0^\circ; \quad \hat{x} \approx \hat{r}$$

$$\omega_e < \omega_0 \Rightarrow V_1 > 1; \quad \varphi \approx 0^\circ; \quad \hat{x} \gg \hat{r}$$

$$\omega_e = \omega_0 \Rightarrow V_1 \Rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \vartheta = 0$$

$$\omega_e > \omega_0 \Rightarrow V_1 < 1; \quad \varphi \approx 180^\circ; \quad \hat{x} < \hat{r}$$

$$\omega_e \gg \omega_0 \Rightarrow V_1 < 1; \quad \varphi \approx 180^\circ; \quad \hat{x} \ll \hat{r}$$

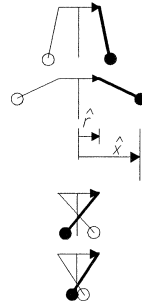


Abb. 25-2-5 Zusammenhang der Größen

Im ersten Fall ist die Erregerkreisfrequenz viel kleiner als die Eigenkreisfrequenz, es wird die Amplitude $\hat{x}$ des Pendels der Erregeramplitude $\hat{r}$ nahezu gleich sein. Da keine Dämpfung vorhanden ist, ist die Phasenverschiebung gleich Null. Im zweiten Fall wird die Erregerkreisfrequenz gesteigert, $\hat{x}$ wird erheblich größer als $\hat{r}$. Im dritten Fall ist die Erregerkreisfrequenz gleich der Eigenkreisfrequenz. Das ist die Resonanzstelle. Für den Dämpfungsgrad $\vartheta = 0$ wird der Pendelausschlag "unberechenbar". Im vierten Fall ist die Resonanz durchfahren, $\hat{x}$ wird kleiner als $\hat{r}$, schwingt aber im Gegentakt. Im fünften Fall ist dann die Erregerkreisfrequenz so groß, daß die Masse ihr kaum noch folgen kann.

25.3 Massenkrafterregung

Es wird eine periodische Kraft eingeleitet $\Rightarrow$ Fliehkraft, wie sie z.B. an Maschinen durch Unwuchten entstehen.

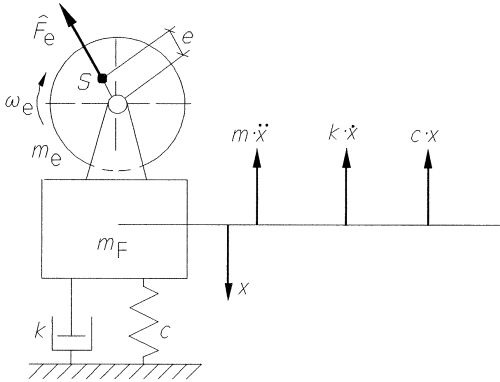


Abb. 25-3-1 System der Massenkrafterregung

Eine Maschine läuft mit der Drehzahl n_e (Index e für Erregung) und steht auf einem Fundamentblock, die Masse m_F ist reibungsfrei in x -Richtung geführt. Es ist die

a) Erregerkreisfrequenz ω_e

$$\omega_e = \pi \cdot n_e / 30 \quad (\omega \text{ 1/s; } n \text{ 1/min})$$

b) Erregerkraft = Fliehkraft $\hat{F}_e$

$$\hat{F}_e = m_e \cdot e \cdot \omega_e^2$$

Dividiert man durch c , führt ω_0 ein und erweitert mit $m = m_F + m_e$, dann erhält man den Ausdruck $\hat{F}_e/c$, der schon in (25-2-24) im Nenner der Amplitude $\hat{x}$ der federkrafterregten Schwingung steht:

$$\frac{\hat{F}_e}{c} = \frac{m_e}{c} \cdot \frac{m}{m} \cdot e \cdot \omega_e^2 \quad \text{mit} \quad m = \frac{c}{\omega_0^2}, \quad (25-3-1)$$

Weiter umgeformt wird daraus

$$\frac{\hat{F}_e}{c} = \frac{m_e}{m} \cdot e \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2. \quad (25-3-2)$$

Diese Gleichung wird in (25-2-24) eingesetzt und in d) weiter bearbeitet.

c) Phasenverschiebung φ

Entsprechend der Schwingungsgleichung tritt eine Phasenverschiebung φ auf. Sie wurde in Kap. 25.2: Erzwungene gedämpfte Schwingung (Federkrafteerregung) untersucht. Sie kann von 0 bis π in Abhängigkeit vom Kreisfrequenzverhältnis reichen.

d) Vergrößerungsfunktion V_3

Setzt man bei V_1 (25-2-24) den Wert $\hat{F}_e/c$ aus (25-3-2) ein

$$V_1 = \frac{\hat{x}}{\frac{\hat{F}_e}{c}} = \frac{\hat{x}}{\frac{m_e}{m} \cdot e \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}, \quad (25-3-3)$$

dann erhält man die Vergrößerungsfunktion V_3 für die Massenkrafteerregung

$$\frac{\hat{x}}{\frac{m_e}{m} \cdot e} = \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2 \cdot V_1 = V_3. \quad (25-3-4)$$

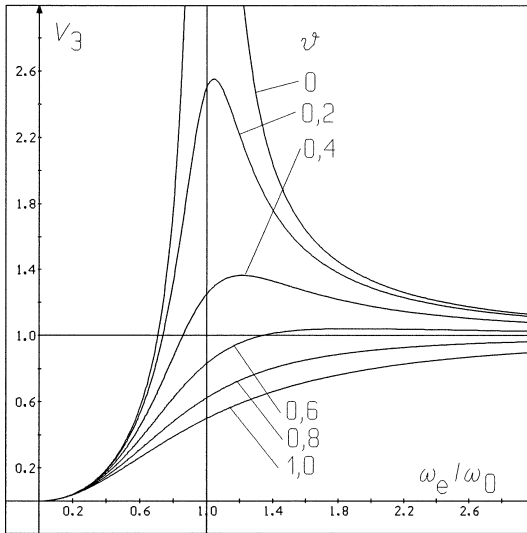
Hier wird nun noch V_1 aus (25-2-25) eingesetzt. Damit ist ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen den beiden Vergrößerungsfunktionen gegeben, die in ihrer Art Übersetzungsverhältnisse aus der Erregeramplitude und der Schwingungsamplitude $\hat{x}$ der Masse (z.B. Fundament) darstellen. Dieser Zusammenhang muß sich auch in der Diagrammdarstellung wiederfinden lassen (siehe Abschnitt Zusammenfassung am Ende dieses Kapitels).

Dann ist die Vergrößerungsfunktion V_3 :

$$V_3 = \frac{\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (25-3-5)$$

Und für kleine Dämpfung $\vartheta^2 \ll 1$ folgt (der zweite Summand im Nenner wird praktisch vernachlässigbar klein gegen den ersten Summanden):

$$V_3 = \frac{\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}{\left|1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right|}. \quad (25-3-6)$$

Abb. 25-3-2 Vergrößerungsfunktion V_3

Die Diskussion dieser Funktionskurven erfolgt in der Zusammenfassung im Anschluß an diesen Abschnitt gemeinsam für V_1 und V_3 , da V_3 aus V_1 hergeleitet worden ist.

Zusammenfassung V_1 und V_3

Das Diagramm für V_1 kann auch für V_3 benutzt werden, wenn man an der Abzisse eine Reziproskala anbringt. Dabei wandert für V_1 das Maximum der Amplitude mit zunehmender Dämpfung nach links und für V_3 entsprechend nach rechts. Für $\vartheta > 0,5 \cdot \sqrt{2}$ schaukeln sich die Schwingungen nicht mehr auf.

1. Gilt für ein System $\omega_e/\omega_0 \ll 1$, so können die auftretenden Deformationen aus der Festigkeitslehre mit dem Hooke'schen Gesetz berechnet werden.

$$\Delta l = \hat{F}_e / c.$$

2. Wird $\omega_e/\omega_0 \approx 1$ (Umgebung der Resonanzstelle), so werden selbst kleine erregende Kräfte sehr große Amplituden der Masse verursachen, wenn die Dämpfung klein ist oder fehlt. (Siehe Kap. 18 -Betriebsdrehzahl). Dieser Effekt wird ausgenutzt in Schwingförderanlagen, Vibrationsverdichtern.
3. Für ein *federkrafterregtes* System gilt: ist $\omega_e/\omega_0 > 1,5$, dann sind selbst bei fehlender Dämpfung die Amplituden der Masse kleiner als die Amplituden der Erregung, also $\Rightarrow$

$V_1 < 1$ (siehe oben $\Rightarrow$ Aufschaukeln) und Abb. 25-3-3.

Bei $\omega_e \gg \omega_0$ werden die Amplituden der schwingenden Masse sehr klein (weiche Lagerung).

Die Dämpfung ist in diesem Bereich praktisch ohne Wirkung, weil alle Kurven für V_1 praktisch zusammenlaufen. Sie ergeben unabhängig vom Dämpfungsgrad ϑ die fast gleichen Schwingungsamplituden der Masse. Das ist in Abb. 25-3-3 im stark umrandeten Rechteck zu erkennen.

4. Für ein *massenkrafterregtes System* gilt: ist die Erregerkreisfrequenz $\omega_e \gg \omega_0$, dann nähert sich die Amplitude dem Wert

$$\frac{m_e}{m} \cdot e \approx \hat{x} ; \quad V_3 = \frac{\hat{x}}{\frac{m_e}{m} \cdot e} \approx 1, \quad (25-3-7)$$

da nach dem Diagramm V_3 bei hohem ω_e gegen 1 strebt. Dieser Teil ist im Diagramm eingerahmt. Dann gilt aber für den Quotienten: Nenner $\approx$ Zähler. Setzt man in der Gleichung für die Federkraft $F = c \cdot \hat{x}$ für $\hat{x}$ das Produkt aus (25-3-6) ein und für $c/m = \omega_0^2$, dann ist mit genügend genauer Annäherung für die Praxis die durch die Federung auf das Fundament übertragene Kraft proportional der Eigenkreisfrequenz des Systems (mit dieser Gleichung soll jedoch nicht die Belastung der Umgebung berechnet werden, das wird in den folgenden Abschnitten behandelt):

$$F = c \cdot \hat{x} = c \cdot \frac{m_e}{m} \cdot e = \omega_0^2 \cdot m_e \cdot e \Rightarrow F = f(\omega_0^2). \quad (25-3-8)$$

Also muß eine solche Maschine mit größerer Unwucht weich gelagert werden, weil dann die Eigenkreisfrequenz klein wird $\Rightarrow$ kleines c !

5. Im Kap. 18 - Biegekritische Drehzahl einer Einzelmasse- wurde gezeigt, daß bei genügend hoher Drehzahl die Auslenkung der Wellenachse sich dem Wert e nähert, d.h. die Welle rotiert dann um den Schwerpunkt. In dieser Weise läßt sich die Aussage für $V_3 \approx 1$ bei $\omega_e \gg \omega_0$ als Amplitudenverhältnis deuten: Amplitude der erregten Masse / Amplitude der Erregung.

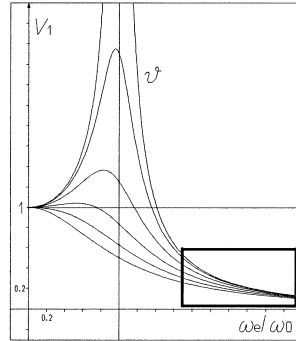


Abb. 25-3-3

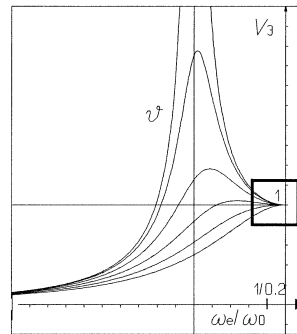


Abb. 25-3-4

25.4 Durchlässigkeit, Schwingungsleitfähigkeit $V_2 = V_D$

Jedes periodisch bewegte Teil wird in seiner Umgebung Schwingungen hervorrufen. Das kann die Membran eines Lautsprechers sein, oder ein Maschinenteil, das auf die Maschine und damit auf die Umgebung wirkt. In jedem Fall werden sich die Schwingungen auf die Umgebung auswirken und zumindest stören, wenn sie in ihrer Amplitude entsprechend groß sind und/oder ihre Kreisfrequenz die Eigenkreisfrequenz eines Körpers in der Umgebung erreicht. Sie können wegen des Vergrößerungseffektes (Vergrößerungsfaktoren!) zum Aufschaukeln führen und erhebliche Zerstörungen hervorrufen.

Ein bekanntes Beispiel ist der Effekt, eine Brücke durch rhythmisches Stampfen zum Schwingen zu bringen. Allerdings können die Folgen katastrophal sein: 1831 stürzte bei Manchester eine Brücke unter einer marschierenden Kolonne ein. Als sich solche Unfälle wiederholten, wurde in den Dienstvorschriften der Marschschritt auf einer Brücke verboten. Rechnet man die Eigenkreisfrequenz von Trägern nach, so entsprechen sie häufig der Schrittfrequenz (Gleichschritt 114 Schritte/min, Laufschrift 180 Schritte/min; siehe hierzu Beispiel in Kap. Beispiele zu Kap. 25.4). <Exkurs: In der Musik werden für den Marsch in Deutschland 114-116 (Metronom-)Schläge/min verwendet, in Österreich 112-114, in Italien 118. Beethoven schrieb den York'schen Marsch für 80-90 Schläge/min, er ist als Präsentiermarsch für Staatsempfänge heute sehr beliebt. Bei Friedrich II. waren es 60-72 Schläge/min. Im Mittelalter gab es keinen Marschschritt. Davor hatten Griechen und Römer den Marsch in die Geschichte eingeführt.>

Der Einsturz der Tacoma-Brücke, über den in Kap. 30 gesprochen wird, ist durch Selbst-erregung hervorgerufen worden.

Hier soll zunächst untersucht werden, wie die Auswirkungen von Resonanzschwingungen auf die Umgebung sind; wie man sie verhindern (?) kann, besser gesagt, wie man sie verringern kann und welchen (auch negativen) Einfluß Dämpfungen haben können.

Man unterscheidet bei Maschinenschwingungen:

1. **Aktivisolierung:** Von einer Maschine sollen keine Schwingungen auf die Umgebung übertragen werden. Die Maschine wird auf Isolatoren gesetzt.
2. **Passivisolierung:** Die Umgebung soll keine Schwingungen auf die Maschine oder das Gerät übertragen. Das sind z.B. Meßgeräte (insbesondere Waagen), Feinbearbeitungsmaschinen. Die Maschine/das Gerät wird auf Isolatoren gesetzt.

In beiden Fällen ist der Lösungsweg praktisch gleich. Es werden Schwingungsisolatoren benutzt, der Rahmen wird besonders schwer ausgeführt oder das Maschinenfundament wird als Beruhigungsmasse verwendet. (Siehe auch Kap. 25.7 - $V_2 = V_D$)

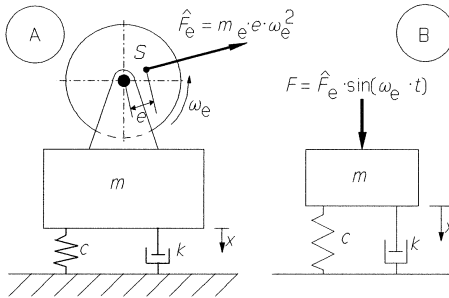


Abb. 25-4-1

A Erregung mit frequenzabhängiger Amplitude

B konstante Kraftamplitude

Siehe Kap. 25.7. Die Betrachtung wird für die Federkfterregung durchgeführt. Dabei sind

- c Federkonstante
- k Dämpfungskonstante
- m Masse
- x Schwingweg der Masse m
- S Schwerpunkt des rotierenden Körpers
- e Exzentrizität des Schwerpunktes (entspricht r in der Fliehkraftgleichung)
- ω_e Erregerkreisfrequenz.

Die auf die Umgebung übertragene dynamische Kraft F_G soll möglichst klein sein. Sie setzt sich aus

$$\begin{array}{lll} F_F = c \cdot x & \text{Federkraft} & \text{und} \\ F_D = k \cdot \dot{x} & \text{Dämpfungskraft} & \text{zusammen.} \end{array}$$

Es wird der übliche Ansatz und die Ableitung durchgeführt. Danach werden dann die Maximalwerte ($\hat{x}$ und $-\hat{x} \cdot \omega$) eingesetzt.

$$x = \hat{x} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) ; \quad \dot{x} = -\hat{x} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi) . \quad (25-4-1)$$

Der Realteil wird betrachtet; die Realkomponenten werden nicht als Vektoren geschrieben; dabei sind die Kräfte die Projektionen auf die Realachse der komplexen Zahlenebene (der Imaginärteil ergibt sich aus dem imaginären Anteil der periodisch erregten Schwingung (24-2-10) Siehe auch Kap.3.4). Da der sin-Anteil der Dämpfungskraft und der cos-Anteil der Federkraft senkrecht aufeinander stehen, werden die Kräfte auch so eingetragen, mit dem - Zeichen ist F_D nach links gerichtet. Beide bilden die Kraft $\hat{F}_G$, die durchgeleitet wird. Das System ist mit der Umgebung nur durch diese beiden Kräfte verbunden.

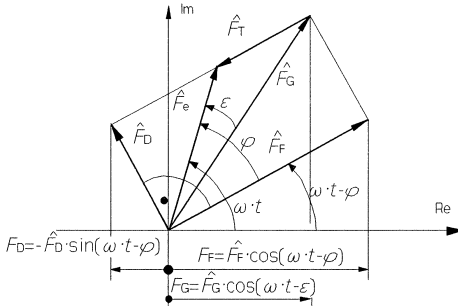


Abb. 25-4-2 Diagramm der Kräfte

Die Kräfte werden eingesetzt:

$$\hat{F}_G = \sqrt{(\hat{x} \cdot c)^2 + (k \cdot \hat{x} \cdot \omega_0^2)^2} . \quad (25-4-3)$$

Aus den Umformungen der gedämpften Schwingung ist

$$\vartheta = \frac{k}{2 \cdot m \cdot \omega_0} ; \quad k^2 = \vartheta^2 \cdot 4 \cdot m^2 \cdot \omega_0^2 ; \quad m^2 = \frac{c^2}{\omega_0^4} . \quad (25-4-4)$$

Mit dem Einsetzen von ϑ, k, m Umformen und Vorklammern in (25-4-3)

$$\hat{F}_G = \hat{x} \cdot c \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2} \quad (25-4-5)$$

und dem Erweitern mit $\hat{F}_e$ werden die Faktoren vor der Wurzel

$$\hat{F}_G = \hat{F}_e \cdot \frac{\hat{x}}{\frac{\hat{F}_e}{c}} \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2} . \quad (25-4-6)$$

Darin ist der zweite Faktor V_1 . Damit wird

$$\hat{F}_G = \hat{F}_e \cdot V_1 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2} . \quad (25-4-7)$$

Als **Durchlässigkeit** = **Schwingungsleitfähigkeit** wird definiert

Da die DGL der gedämpften Schwingung noch die Trägheitskraft und die Erregerkraft enthält, müssen diese beiden Kräfte ebenfalls im Diagramm enthalten sein. Sie bilden mit $\hat{F}_G$ ein Kräfteck. $\hat{F}_G$ ist die Resultierende aus $\hat{F}_D$ und $\hat{F}_F$. Die auf die Umgebung übertragene Kraft $\hat{F}_G$ eilt um den Phasenwinkel ε der Erregerkraft $\hat{F}_e$ nach. Es ist mit dem Satz von Pythagoras:

$$\hat{F}_G = \sqrt{\hat{F}_F^2 + \hat{F}_D^2} . \quad (25-4-2)$$

$$V_D = \frac{\hat{F}_G}{\hat{F}_e} = V_1 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}. \quad (25-4-8)$$

In Kap. 25.7 wird $V_D = V_2$ bezeichnet. In der Literatur sind die Bezeichnungen für die V -Faktoren nicht einheitlich. Für V_D ist die Art von $\hat{F}_e$ ohne Bedeutung (s. Kap. 25.7).

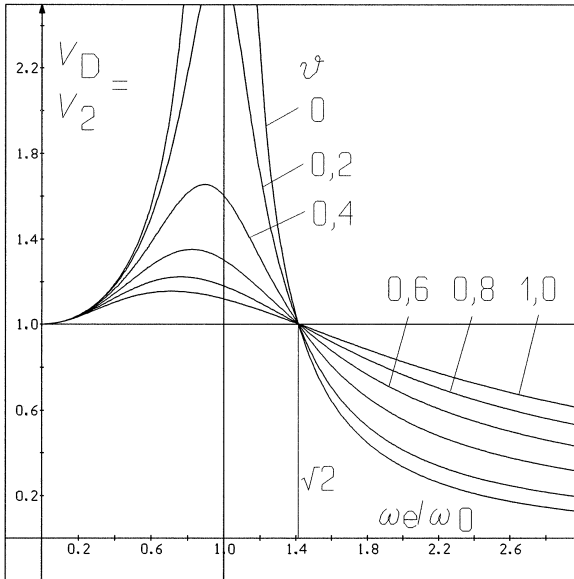


Abb. 25-4-3 Durchlässigkeit V_D

Bei elastischer Maschinenaufhängung wird im Bereich $0 < \omega_e / \omega_0 < \sqrt{2}$ die Durchlässigkeit $V_D > 1$. Die auf die Umgebung übertragene Kraft ist *größer* als die Erregerkraft. Erst nach diesem Punkt ist eine Schwingungsisolierung $V_D < 1$ möglich.

Achtung: Dabei geben die kleineren Werte für ϑ die kleinere Durchlässigkeit. Deshalb verschlechtert eine Dämpfung die Schwingungsisolierung. Allerdings können zu kleine Werte von ϑ vor und beim Durchfahren der kritischen Drehzahl zu Problemen führen. Dieser "Verschlechterungsbereich" ist in Abb. 25-4-4 rechts unten stärker eingrahmt.

Eine Dämpfung ist immer ein Kompromiß.

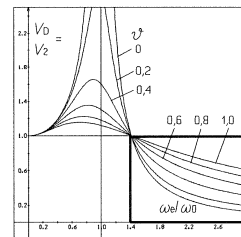


Abb. 25-4-4

Eine Masse kann durch ihren Untergrund erregt werden. Das wird im Kap. 25.6 (Fallbeispiele der Anregung) und im Kap. 25.7 näher beschrieben. Die Masse schwingt frei, in (25-4-10) stellt der rechte Teil der Gleichung den von dem Rahmen (= Untergrund) eingeleiteten Anteil von Feder und Dämpfer dar:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot (\dot{x} - \dot{s}) + c \cdot (x - s) = 0 \quad (25-4-9)$$

und $s = \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t)$,

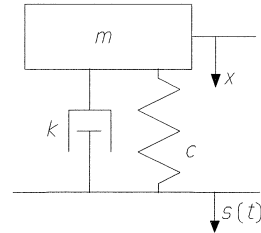


Abb. 25-4-5

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) + c \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) . \quad (25-4-10)$$

Für jede Schwingung gilt mit (3-2-13) bzw. (7-2-9) und (7-2-10)

$$A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \sin(\omega \cdot t) = C \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad \text{mit} \quad C = \sqrt{A^2 + B^2} . \quad (25-4-11)$$

Die Lösung soll wie bereit in Kap. 25.2 mit Hilfe der Additionstheoreme (a) und über die Matrizenschreibweise (b) erfolgen.

Lösung (a)

Macht man den Ansatz entsprechend (25-2-6), so erhält man den Phasenfrequenzgang φ mit dem Parameter ϑ . (25-2-6) wird zweimal differenziert und in (25-4-10) eingesetzt.

$$-m \cdot \hat{x} \cdot \omega_e^2 \cdot \sin(\omega_e \cdot t - \varphi) + k \cdot \hat{x} \cdot \omega_e \cdot \cos(\omega_e \cdot t - \varphi) + c \cdot \hat{x} \cdot \sin(\omega_e \cdot t - \varphi) = k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) + c \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) . \quad (25-4-12)$$

Es wird geordnet und mit Hilfe von

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta ; \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (25-4-13)$$

erhält man

$$\begin{aligned} & [(c - m \cdot \omega_e^2) \cdot \hat{x} \cdot \cos \varphi + k \cdot \omega_e \cdot \hat{x} \cdot \sin \varphi - c \cdot \hat{r}] \cdot \sin(\omega_e \cdot t) + \\ & [k \cdot \omega_e \cdot \hat{x} \cdot \cos \varphi - (c - m \cdot \omega_e^2) \cdot \hat{x} \cdot \sin \varphi - k \cdot \omega_e \cdot \hat{r}] \cdot \cos(\omega_e \cdot t) = 0 . \end{aligned} \quad (25-4-14)$$

Im Kap. 25.2 ist bereits erklärt, daß jede [] für sich Null sein muß. Man erhält zwei lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} (c - m \cdot \omega_e^2) \cdot \hat{x} \cdot \cos \varphi + k \cdot \omega_e \cdot \hat{x} \cdot \sin \varphi &= c \cdot \hat{r} , \\ k \cdot \omega_e \cdot \hat{x} \cdot \cos \varphi - (c - m \cdot \omega_e^2) \cdot \hat{x} \cdot \sin \varphi &= k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} . \end{aligned} \quad (25-4-15)$$

Dieses System wird Hilfe der Koeffizientendeterminanten gelöst. Damit ist für diesen Fall

$$A = \frac{\begin{vmatrix} c \cdot \hat{r} & k \cdot \omega_e \\ k \cdot \hat{r} \cdot \omega_e & -(c-m \cdot \omega_e^2) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-c \cdot \hat{r} \cdot (c-m \cdot \omega_e^2) - \hat{r} \cdot k^2 \cdot \omega_e^2}{\Delta}, \quad (25-4-16)$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} (c-m \cdot \omega_e^2) & c \cdot \hat{r} \\ k \cdot \omega_e & k \cdot \hat{r} \cdot \omega_e \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(c-m \cdot \omega_e^2) \cdot k \cdot \hat{r} \cdot \omega_e - c \cdot \hat{r} \cdot k \cdot \omega_e}{\Delta} = -\frac{m \cdot k \cdot \hat{r} \cdot \omega_e^3}{\Delta}. \quad (25-4-17)$$

Es ist $B = \hat{x} \cdot \sin \varphi$ und $A = \hat{x} \cdot \cos \varphi$. Man erhält den $\tan \varphi = B/A$. Der Quotient wird mit (-1) multipliziert, $\hat{r}$ wird gekürzt, $m = c/\omega_0^2$ und $k = 2 \cdot \vartheta \cdot m \cdot \omega_0$ gesetzt

$$\tan \varphi = \frac{m \cdot k \cdot \omega_e^3}{c^2 - c \cdot m \cdot \omega_e^2 + k^2 \cdot \omega_e^2}, \quad (25-4-18)$$

$$\tan \varphi = \frac{2 \cdot \vartheta \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^3}{1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2 + \left(2 \cdot \vartheta \cdot \frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}. \quad (25-4-19)$$

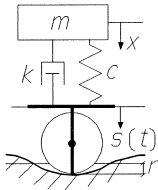


Abb. 25-4-7
Fahrzeug-
erregung

Die Abb. 25-4-5 kann in Abb. 25-4-7 überführt werden und so die Fahrzeugbewegung für einen Einmassenschwinger simulieren, der eine Bodenwelle durchfährt. Auf die Dämpfung kann wegen der

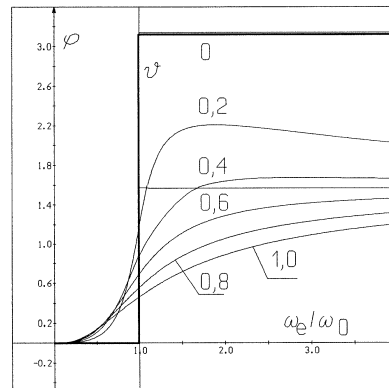


Abb. 25-4-6 Phasenfrequenzgang

Resonanzstelle nicht verzichtet werden, obwohl sie sich im überkritischen Bereich negativ auswirkt. Dieser Nachteil ist jedoch gering gegenüber dem Verlust der Haftung von Reifen/Fahrbahn im Resonanzfall.

(Achten Sie auf defekte Stoßdämpfer !).

Lösung (b)

Verwendet man den zu (25-2-6) gleichwertigen Ansatz

$$\begin{aligned} x &= A \cdot \sin(\omega_e \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_e \cdot t) , \\ \dot{x} &= A \cdot \omega_e \cdot \cos(\omega_e \cdot t) - B \cdot \omega_e \cdot \sin(\omega_e \cdot t) , \\ \ddot{x} &= -A \cdot \omega_e^2 \cdot \sin(\omega_e \cdot t) - B \cdot \omega_e^2 \cdot \cos(\omega_e \cdot t) , \end{aligned} \quad (25-4-20)$$

und setzt

$$s = \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) ; \quad \dot{s} = -\hat{r} \cdot \omega_e \cdot \sin(\omega_e \cdot t) , \quad (25-4-21)$$

so wird aus (25-4-10)

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = c \cdot \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) - k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) . \quad (25-4-10) ; (25-4-22)$$

durch Einsetzen von (25-4-20) und Ordnen

$$\begin{aligned} &[A \cdot (c - m \cdot \omega_e^2) - B \cdot k \cdot \omega_e + k \cdot \hat{r} \cdot \omega_e] \cdot \sin(\omega_e \cdot t) + \\ &[A \cdot k \cdot \omega_e + B \cdot (c - m \cdot \omega_e^2) - c \cdot \hat{r}] \cdot \cos(\omega_e \cdot t) = 0 . \end{aligned} \quad (25-4-23)$$

Die Matrix ist

$$\begin{pmatrix} (c - m \cdot \omega_e^2) & -k \cdot \omega_e \\ k \cdot \omega_e & (c - m \cdot \omega_e^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} \\ c \cdot \hat{r} \end{pmatrix} . \quad (25-4-24)$$

Damit sind die Determinanten

$$\begin{aligned} A &= \frac{\begin{vmatrix} -k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} & -k \cdot \omega_e \\ c \cdot \hat{r} & (c - m \cdot \omega_e^2) \end{vmatrix}}{N} = \frac{-k \cdot \hat{r} \cdot \omega_e \cdot (c - m \cdot \omega_e^2) + k \cdot \hat{r} \cdot \omega_e \cdot c}{N} \\ &= \frac{m \cdot k \cdot \hat{r} \cdot \omega_e^3}{N} , \end{aligned} \quad (25-4-25)$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} (c-m \cdot \omega_e^2) & -k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} \\ k \cdot \omega_e & (c-m \cdot \omega_e^2) \end{vmatrix}}{N} = \frac{c \cdot \hat{r} \cdot (c-m \cdot \omega_e^2) + \hat{r} \cdot (k \cdot \omega_e)^2}{N} \quad (25-4-26)$$

$$N = \begin{vmatrix} (c-m \cdot \omega_e^2) & -k \cdot \omega_e \\ k \cdot \omega_e & (c-m \cdot \omega_e^2) \end{vmatrix} = (c - m \cdot \omega_e^2)^2 + (k \cdot \omega_e)^2. \quad (25-4-27)$$

Mit $\tan \varphi = A/B$ erfolgt der Übergang zu (25-4-18)

$$\tan \varphi = \frac{m \cdot k \cdot \omega_e^3}{c^2 - c \cdot m \cdot \omega_e^2 + k^2 \cdot \omega_e^2}. \quad (25-4-18); (25-4-28)$$

25.5 Isolierfaktor

Der Klammerausdruck der Gleichung (25-5-1) ist als Isolierfaktor definiert:

$$(1 - V_D) = 1 - \frac{\hat{F}_G}{\hat{F}_e}. \quad (25-5-1)$$

Darunter versteht man den Anteil der Schwingungswirkung, der durch die Federwirkung und die Dämpfung *abgeschirmt* wird.

Für geringe Dämpfung $\vartheta^2 \ll 1$ wird dann in der Gleichung, wobei V_D eingesetzt und die Gleichung weiter umgeformt wird:

$$(1 - V_D) = 1 - V_1 \cdot \underbrace{\sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}_{\approx 0} = 1 - V_1 = 1 - \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right|}. \quad (25-5-2)$$

Beispiel: Im überkritischen Bereich erhält man für den abgeschirmten Anteil bei einem $\omega_e/\omega_0 = 3$

$$(1 - V_D) = 1 - \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right|} \Rightarrow (1 - V_D) = 1 - \frac{1}{|1 - 3^2|} = 0,875, \quad (25-5-3)$$

d.h. der abgeschirmte Anteil beträgt 87,5 % und der durchgeleitete Anteil beträgt 12,5 %.
Damit ist die Durchlässigkeit

$$V_D = \frac{1}{|1 - 3^2|} = 0,125 . \quad (25-5-4)$$

25.6 Fallbeispiele der Anregung

In Kap. 25.2 erfolgt die Anregung der Masse über die Kurbel einer Kreuzschleife. Geht man von der Gleichung (25-2-1) aus und betrachtet man die Anregung über die Wegfunktion mit ihrer ersten Ableitung

$$s(t) = \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) ; \quad \dot{s}(t) = \omega_e \cdot \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) , \quad (25-6-1)$$

so kann man den Fall nach *Abb. 25-2-1* in der Form darstellen

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot (x - s) = 0 , \quad (25-6-2)$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = c \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) , \quad (25-6-3)$$

mit

$$\hat{F}_e = c \cdot \hat{r} . \quad (25-6-4)$$

Die Erregung erfolgt über den Aufhängepunkt der Feder.
Die Masse ist über k mit der Umgebung verbunden.

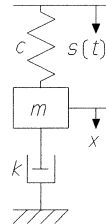


Abb. 25-6-1
Abb. 31-2-1

Dämpfer und Feder können vertauscht sein:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot (\dot{x} - \dot{s}) + c \cdot x = 0 , \quad (25-6-5)$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) , \quad (25-6-6)$$

mit

$$\hat{F}_e = k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} . \quad (25-6-7)$$

Die Erregung erfolgt über den Aufhängepunkt der Dämpfung.
Die Masse ist über c mit der Umgebung verbunden.

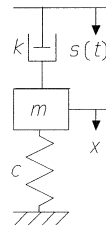


Abb. 25-6-2

Weitere Fälle ergeben sich durch Variationen der Konstruktionsteile:

$$m \cdot \ddot{x} + k(\dot{x} - \dot{s}) + c(x - s) = 0 . \quad (25-6-8)$$

Durch Auflösen der Klammern erhält man wie vorher den harmonischen Teil und den Erregerteil der Schwingung:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x \\ = k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) + c \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) . \end{aligned} \quad (25-6-9)$$

Die Erregerkraft ist dann als $F(t)$

$$F(t) = k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) + c \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) . \quad (25-6-10)$$

In Abb. 25-6-4 ist das System um 180° gedreht und entspricht damit der Darstellung eines Schwingungsmeßgerätes. Die dabei auftretenden Formen der Gleichungen werden ausführlicher in Kap. 25.7 behandelt. Die Erregung erfolgt über die gemeinsame Aufhängung von Feder und Dämpfer. Die Masse schwingt frei.

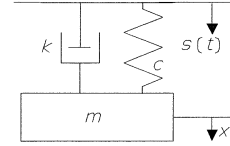


Abb. 25-6-3

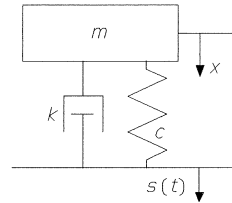


Abb. 25-6-4

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c_1 \cdot x + c_2(x - s) = 0 , \quad (25-6-11)$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + (c_1 + c_2) \cdot x = c_2 \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) , \quad (25-6-12)$$

mit

$$\hat{F}_e = c_2 \cdot \hat{r} . \quad (25-6-13)$$

Die Erregung erfolgt über den Aufhängepunkt der Feder c_2 . Die Masse ist über k und c_1 mit der Umgebung verbunden.

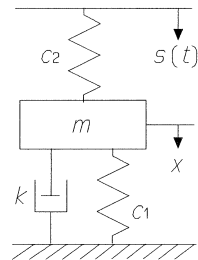


Abb. 25-6-5

$$m \cdot \ddot{x} + k_1 \cdot \dot{x} + k_2(\dot{x} - \dot{s}) + c \cdot x = 0 . \quad (25-6-14)$$

$$m \cdot \ddot{x} + (k_1 + k_2) \cdot \dot{x} + c \cdot x = k_2 \cdot \omega_e \cdot \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) , \quad (25-6-15)$$

mit

$$\hat{F}_e = k_2 \cdot \omega_e \cdot \hat{r} . \quad (25-6-16)$$

Die Erregung erfolgt über den Aufhängepunkt der Dämpfung k_2 .

Die Masse ist über k_1 und c mit der Umgebung verbunden.

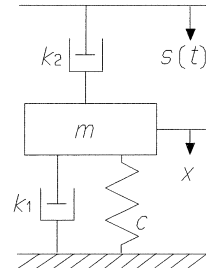


Abb. 25-6-6

Mit (25-2-5) wird für den partikulären Teil mit (25-2-6) angesetzt

$$x = x_h + x_p , \quad (25-6-17)$$

$$x_p = \hat{x} \cdot \sin(\omega_e \cdot t - \varphi) , \quad (25-6-18)$$

$$\dot{x}_p = \hat{x} \cdot \omega_e \cdot \cos(\omega_e \cdot t - \varphi) , \quad (25-6-19)$$

$$\ddot{x}_p = -\hat{x} \cdot \omega_e^2 \cdot \sin(\omega_e \cdot t - \varphi) . \quad (25-6-20)$$

Diese Gleichungen für x_p , $\dot{x}_p$ und $\ddot{x}_p$ werden in der gleichen Art wie in (25-2-11) weiter bearbeitet. Für Abb. 25-6-4 ist die Bearbeitung ausführlich in Kap. 25.7 unter V_2 durchgeführt. Es wird dabei der Phasenfrequenzgang berechnet.

25.7 Zusammenstellung $V_1, V_2 = V_D, V_3, V_4$

In den Kapiteln 25.1 bis 25.5 sind die Fälle hergeleitet worden, mit denen man in der Praxis einen großen Teil der auftretenden Fragen beantworten kann. Dabei wurden in Kap. 25.2 und Kap. 25.5 die Systeme von einer Federkraft bzw. Massenkraft erregt und damit praktisch die Randbedingungen festgelegt. In Kap. 25.4 wurde die Aktiv- und Passivisolierung in der Einführung unterschieden. In diesem Kapitel sollen nun die Randbedingungen so variiert werden, daß ein möglichst großer Teil von Anwendungen erfaßt wird, wobei auf die oben angeführten Kapitel zurückgegriffen wird und die Fallbeispiele der Anregung aus Kap. 25.2 mit verwendet werden.

Es werden die Begriffe verwendet:

e (als Index)	Fremderregung
$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega_e \cdot t)$	Weg der Erregung
$s_{\max} = \hat{s}$	Amplitude der Erregung
$\dot{s}(t) = \hat{s} \cdot \omega_e \cdot \cos(\omega_e \cdot t)$	Geschwindigkeit der Erregung
x	Weg der schwingenden Masse
$x_{\max} = \hat{x}$	Amplitude der schwingenden Masse
$F(t) = \hat{F}_e \cdot \sin(\omega_e \cdot t)$	konstante Kraftamplitude (Erregung)
$\hat{F}_e = c \cdot \hat{s}$	Federkrafterregung (konstant)
$F(t) = m_e \cdot e \cdot \omega_e^2 \cdot \sin(\omega_e \cdot t)$	frequenzabhängige Kraftamplitude
$\hat{F}_e = m_e \cdot e \cdot \omega_e^2$	Massenkrafterregung (z.B. Unwucht)
$\hat{F}_G$	Über den Grund in die Umgebung geleitete Kraft
$\hat{F}_{GR}$	Rahmenkraft (Gehäuse z.B. bei Meßgeräten)
e (als Faktor)	Exzentrizität (Angriffspunkt) der Unwucht

Es kann die Masse m , deren Schwingung betrachtet wird, aktiv auf das System wirken, ebenso kann die Masse passiv durch das System zum Schwingen gezwungen werden. Die Gleichungen, die bereits in den vorigen Abschnitten hergeleitet worden sind, werden in diesem Abschnitt sinngemäß mit neuen Nummern versehen, um die Zuordnung zu erleichtern. Es wird jedoch auf die vorhergehenden Nummern hingewiesen.

V_1

Es werden aus Kap. 25.2 die Gleichungen übernommen. In diesem Kapitel sind die Gleichungen ausführlich besprochen worden. Die Erregung erfolgt durch eine Kraft $F(t)$, deren Amplitude bei der Federkrafterregung (Abb. 25-7-1) const. und bei der Dämpferkrafterregung proportional der Erregerkreisfrequenz ist (Abb. 25-7-2). Es gilt für den Weg $s(t)$, mit dem der Aufhängepunkt der Feder bewegt wird, und für die Geschwindigkeit $\dot{s}(t)$, mit der der Aufhängepunkt des Dämpfers bewegt wird mit den Gleichungen (25-2-28) bis (25-2-29),

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) ; \quad \dot{s}(t) = \omega_e \cdot \hat{s} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) . \quad (25-7-1)$$

Mit (25-2-2) und (25-2-3) ist die Kraft

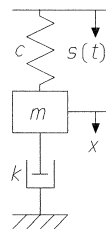


Abb. 25-7-1

$$F(t) = \hat{F}_e \cdot \sin(\omega_e \cdot t) \quad \text{mit} \quad \hat{F}_e = c \cdot \hat{f}. \quad (25-7-2)$$

Der Ansatz für die Erregung durch die Feder ist
(Abb. 25-7-1)

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot (x - s) = 0. \quad (25-7-3)$$

und für die Erregung durch den Dämpfer (Abb. 25-7-2)

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot (\dot{x} - \dot{s}) + c \cdot x = 0. \quad (25-7-4)$$

Als Bezeichnungen für diese Fälle werden verwendet

Federkrafterregung
Dämpferkrafterregung
Wegerregung
Fußpunkterregung

In diesen Fällen schwingt die Masse m und beeinflusst die Umgebung. Will man diese Wirkung reduzieren, dann eine aktive Schwingungsisolierung notwendig. Die Gleichungen für V_1 sind mit (25-2-24) und (25-2-25)

$$\frac{\hat{x}}{\frac{\hat{F}_e}{c}} = \frac{\hat{x}}{\hat{f}} = V_1 \quad (25-7-5)$$

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (25-7-6)$$

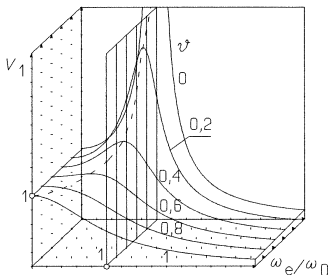


Abb. 25-7-4

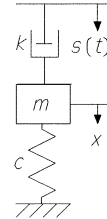


Abb. 25-7-2

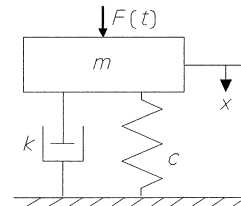


Abb. 25-7-3

Diese Gleichungen und das Diagramm sind in Kap. 25.2 ausführlich behandelt worden.

$$V_2 = V_D$$

Diese Vergrößerungsfunktion beschreibt die Kraft, die von einer schwingenden Masse m auf das Gehäuse (Untergrund, Umgebung) ausgeübt wird. Die Herleitung ist ausführlich in Kap. 25.4 erfolgt.

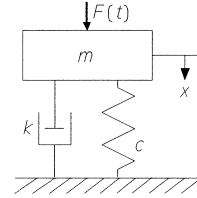


Abb. 25-7-5

Mit den Gleichungen (25-4-7) und (25-4-8) ist

$$V_D = \frac{\hat{F}_G}{\hat{F}_e} = V_1 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}. \quad (25-7-7)$$

Danach gilt für F_G

$$\hat{F}_G = \hat{F}_e \cdot V_1 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}, \quad (25-7-8)$$

und damit für V_D

$$V_2 = V_D = \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (25-7-9)$$

Es fällt $\hat{F}_e$ heraus. Es hat also keine Bedeutung, ob die Erregerkraft durch eine Federkraft (konstante Kraftamplitude $\hat{F}_e = c \cdot \hat{r}$) oder durch eine Massenkraft (frequenzabhängige Kraftamplitude $\hat{F}_e = m_e \cdot e \cdot \omega_e^2$) hervorgerufen wird.

Werden die Kraftverhältnisse untersucht, die zwischen schwingender Masse und ihrem Rahmen herrschen, so ist mit V_4 zu arbeiten.

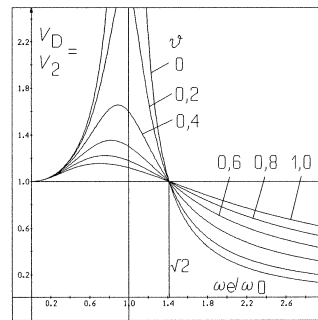


Abb. 25-7-6

Wie in Kap. 25.6 bei den Fallbeispielen gezeigt wurde, kann eine Masse durch ihren Untergrund erregt werden. Das ist bei Meßgeräten von Bedeutung, mit denen die Schwingung des Untergrundes gemessen werden soll. Besonders wird dieser Fall aber zum Problem bei Bearbeitungsmaschinen, die von durch den Untergrund eingeleiteten Fremdschwingungen zum Mitschwingen gezwungen werden. Dabei wird z.B. bei **Werkzeugmaschinen** die Güte der Bearbeitung erheblich beeinflusst (Siehe hierzu Ende des Kap.). Außerdem können z. B. **Waagen** durch Fremdschwingungen beeinflusst werden. Soll die Masse m vor Fremdschwingungen geschützt werden, so ist eine Passivisolierung durchzuführen. Mit (25-6-8) und (25-6-9) stellt der rechte Teil der Gleichung den von dem Rahmen (= Untergrund) eingeleiteten Anteil von Feder und Dämpfer dar:

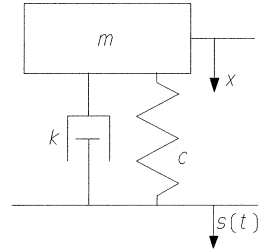


Abb. 25-7-7

$$m \cdot \ddot{x} + k(\dot{x} - \dot{s}) + c(x - s) = 0, \quad (25-7-10)$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) + c \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t). \quad (25-7-11)$$

Für jede Schwingung gilt mit (3-2-13) bzw. (7-2-9) und (7-2-10)

$$A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \sin(\omega \cdot t) = C \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \\ \text{mit } C = \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (25-7-12)$$

Formt man (25-7-11) um, so wird daraus mit (25-7-12)

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = \hat{r} \cdot \left(\frac{k}{m} \cdot \omega_e \cdot \cos(\omega_e \cdot t) + \frac{c}{m} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) \right), \quad (25-7-13)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = \left[\hat{r} \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{m} \right)^2 + \left(\frac{k}{m} \cdot \omega_e \right)^2} \right] \cdot \sin(\omega_e \cdot t + \varphi). \quad (25-7-14)$$

Vergleicht man diese Schreibweise mit (25-2-3) so muß $\hat{F}_e / m = []$ sein. Mit

$$\left(\frac{c}{m} \right)^2 = \omega_0^4; \quad \vartheta = \frac{k}{2 \cdot m \cdot \omega_0}; \quad (2 \cdot \vartheta \cdot \omega_0)^2 = \left(\frac{k}{m} \right)^2 \quad (25-7-15)$$

erhält man

$$\frac{\hat{F}_e}{m} = \hat{r} \cdot \sqrt{\omega_0^4 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \omega_0^4 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2}. \quad (25-7-16)$$

Es ist dann

$$\hat{F}_e = \hat{f} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2} . \quad (25-7-17)$$

Mit (25-2-24) ist, wobei $\hat{F}_e$ eingesetzt wird,

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}_e}{c} \cdot V_1 = \hat{f} \cdot \frac{m}{c} \cdot \omega_0^2 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2} \cdot V_1 . \quad (25-7-18)$$

$$\hat{x} = \hat{f} \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2} \cdot V_1 = \hat{f} \cdot V_2 . \quad (25-7-19)$$

Daraus folgt das Amplitudenverhältnis

$$\frac{\hat{x}}{\hat{f}} = V_2 = V_D \quad (25-7-20)$$

und ebenso mit (25-4-8)

$$\frac{\hat{F}_G}{\hat{F}_e} = V_D . \quad (25-7-21)$$

Aus Kap. 25.4 wird übernommen

$$\tan \varphi = \frac{2 \cdot \vartheta \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^3}{1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2 + \left(2 \cdot \vartheta \cdot \frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2} .$$

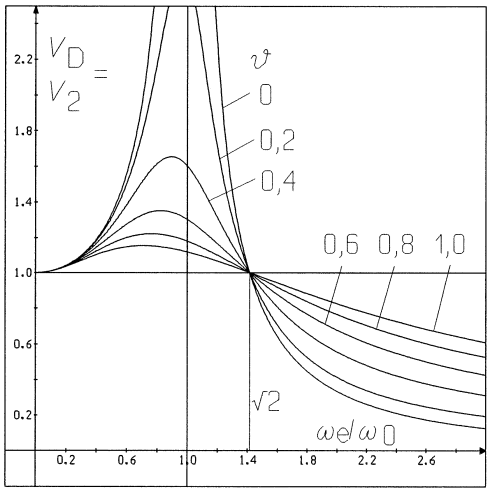


Abb. 25-7-8 Vergrößerungsfaktor V_2

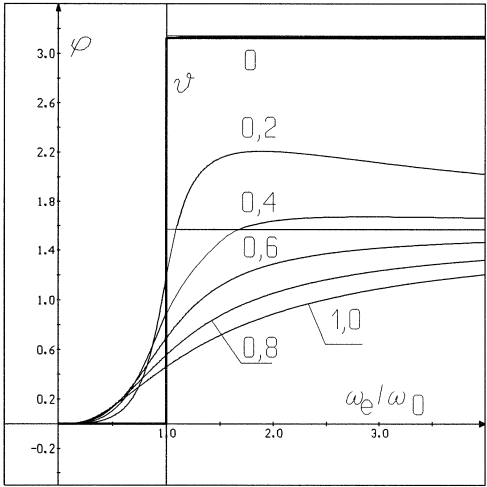


Abb. 25-7-9 Phasenfrequenzgang

V_3

V_3 ist in Kap. 25.3 ausführlich besprochen.
Mit (25-3-4) war

$$\frac{\frac{\hat{x}}{m_e \cdot e}}{\frac{m}{m}} = \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 \cdot V_1 = V_3 \quad (25-7-23)$$

Die Erregerkraft ist frequenzabhängig

$$\hat{F}_e = m_e \cdot e \cdot \omega_e^2 \quad (25-7-24)$$

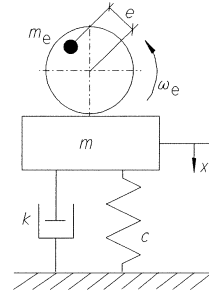


Abb. 25-7-10

Die üblichen Bezeichnungen für diese Fälle sind

Massenkrafterregung

Unwuchterregung

Erregung mit frequenzabhängiger Amplitude

(z.B. Kolbenmaschine)

In Abb. 25-7-11 ist eine Masse gezeichnet, die durch ihre Unterlage (= ihren Rahmen), zum Schwingen angeregt wird (Schwingungsmeßgerät = Seismometer). Damit bewegt sich die Amplitude der Masse m relativ zum Rahmen und ihr Weg ist x_{rel} . Mit dem Maximalausschlag $x_{\text{max}} = \hat{x}_{\text{rel}}$ wird V_3 zu der Amplitudenfunktion

$$V_3 = \frac{\hat{x}_{\text{rel}}}{\hat{r}} \quad (25-7-25)$$

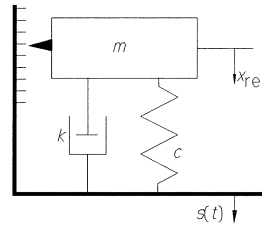


Abb. 25-7-11

Ist die Kraft $\hat{F}_{\text{GR}}$ (siehe hierzu V_4) gesucht, die von m auf den Rahmen ausgeübt wird, dann ist mit V_4 zu arbeiten.

Die Kraft $\hat{F}_e$ in Abb. 25-7-10 ist

$$F(t) = \hat{F}_e \cdot \sin(\omega_e \cdot t) = m_e \cdot e \cdot \omega_e^2 \cdot \sin(\omega_e \cdot t) \quad (25-7-26)$$

und ihr Maximalwert wird (für $\sin(\omega_e \cdot t) = 1$)

$$\hat{F}_{e \text{ max}} = m_e \cdot e \cdot \omega_e^2 = m_e \cdot e \cdot \omega_0^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 = \frac{m_e}{m} \cdot e \cdot c \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 \quad (25-7-27)$$

Auswuchtmaschine (siehe Kap. 27). Soll mit einer Auswuchtmaschine im unterkritischen Bereich die Unwucht gemessen werden, so muß die Drehzahl des Läufers erheblich unter ω_0 liegen. Es wird also hart gefedert und möglichst steif gebaut. Der Meßweg am Lager ist klein, er kann mit DMS aufgenommen werden. Bei dieser Methode wird von einer kraftmessenden Auswuchtmaschine gesprochen.

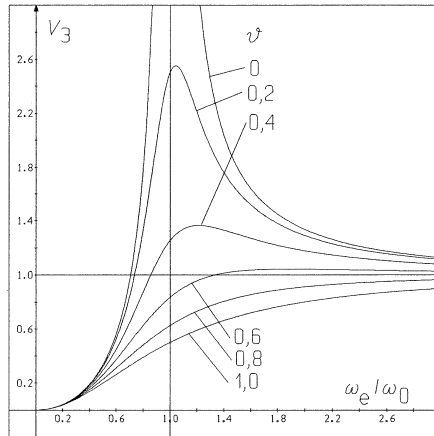


Abb. 25-7-12

Für kleine Dämpfung ist mit (25-7-23) und (25-3-6)

$$V_3 = \frac{\hat{x}}{\frac{m_e}{m} \cdot e} \approx \frac{\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}{1}; \quad \text{aus} \quad V_3 = \frac{(\omega_e / \omega_0)^2}{\pm \underbrace{\left(1 - (\omega_e / \omega_0)^2\right)}_{1 \gg (\quad)^2}} \quad (25-7-28)$$

$$\hat{x} \approx \frac{m_e}{m} \cdot e \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2. \quad (25-7-29)$$

Wird dagegen im überkritischen Bereich gearbeitet, so geht nach Abb. 25-7-12 (siehe hierzu auch Abb. 25-3-4) $V_3 \Rightarrow 1$ und damit wird (25-7-28) zu

$$\hat{x} \approx \frac{m_e}{m} \cdot e. \quad (25-7-30)$$

Es handelt sich dann um wegmessende Auswuchtmaschinen.

V₄

Mit (25-4-8) gilt für die Durchlässigkeit

$$V_D = \frac{\hat{F}_G}{\hat{F}_e} \quad (25-7-31)$$

und damit

$$\hat{F}_G = \hat{F}_e \cdot V_D \quad (25-7-32)$$

Ist dabei $\hat{F}_e = c \cdot r$ entsprechend (25-4-3) mit $\hat{x} = r$, so handelt es sich um eine Federkrafterregung, d.h. um eine konstante Kraftamplitude. Dann gilt für $\hat{F}_G$ die Funktion $V_D = V_2$ für die Übertragung. Ist dagegen $\hat{F}_e$ frequenzabhängig (Abb. 25-7-13)

$$\hat{F}_e = m_e \cdot e \cdot \omega_e^2 \quad (25-7-33)$$

so ist, eingesetzt in (25-7-36),

$$\hat{F}_G = m_e \cdot e \cdot \omega_e^2 \cdot V_D = m_e \cdot e \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 \cdot \omega_0^2 \cdot V_D \quad (25-7-34)$$

$$\frac{\hat{F}_G}{m_e \cdot e \cdot \omega_0^2} = \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 \cdot V_D = V_4 \quad (25-7-35)$$

Die Kraft $\hat{F}_{GR}$ auf den Rahmen entspricht (25-4-3). Die Amplitude $\hat{x}$ muß durch die Relativamplitude $\hat{x}_{rel}$ nach Abb. 25-7-11 und $\hat{F}_G$ durch $\hat{F}_{GR}$ nach Abb. 25-7-14 ersetzt werden

$$\hat{F}_{GR} = \hat{x}_{rel} \cdot \sqrt{c^2 + (k \cdot \omega_e)^2} \quad (25-7-36)$$

Außerdem war mit (25-7-30) und (25-7-28)

$$\hat{x}_{rel} = \hat{r} \cdot V_3, \quad (25-7-37)$$

$$\hat{x}_{rel} = \hat{r} \cdot V_1 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2. \quad (25-7-38)$$

Mit (25-7-41), das in Kap. 25.4 in (25-4-6) überführt wird, ist zunächst

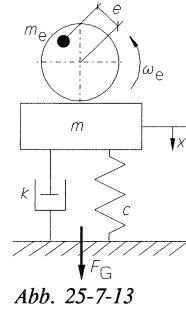


Abb. 25-7-13

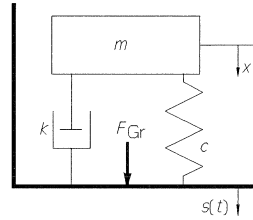


Abb. 25-7-14

$$\hat{F}_{\text{GR}} = \hat{F}_e \cdot \frac{\hat{x}_{\text{rel}}}{\frac{\hat{F}_e}{c}} \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}. \quad (25-7-39)$$

Durch Einsetzen aus (25-7-43) und Ordnen wird daraus

$$\frac{\hat{F}_{\text{GR}}}{\hat{F} \cdot c} = \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2 \cdot V_1 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2} = \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2 \cdot V_D = V_4. \quad (25-7-40)$$

$$V_4 = \frac{\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (25-7-41)$$

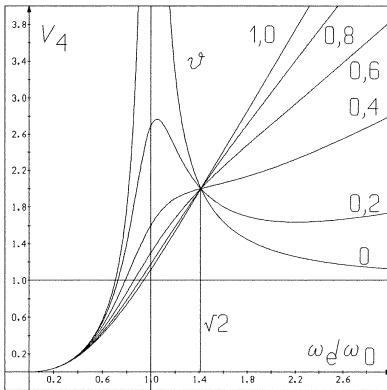


Abb. 25-7-15

Werkzeugmaschinen

Wird einem System eine Kraft aufgezwingen, so wird zunächst nach Abb. 25-2-2 eine freie gedämpfte Schwingung entstehen, die nach kurzer Zeit abgeklungen ist.

Nun besteht eine (Werkzeug-)Maschine aus einer Vielzahl von Maschinenteilen, die schwingungsfähig sind und zudem von außen (Antrieb) ständig Energie zugeführt erhalten. Damit wird sich der abklingenden harmonischen Schwingung eine erzwungene Schwingung überlagern. Nach Abb. 25-7-16 kann man das System Werkstück-Meißel in vielen Fällen als Einmassenschwinger auffassen, auf das sich die Vergrößerungsfaktoren anwenden lassen. Es treten alle Größen der DGL auf: Masse, Federkonstante (Steifigkeit), Dämpfung und Eigenkreisfrequenz. Die Dämpfungen der Teile sind gering und es gilt $\vartheta \ll 0,1$.

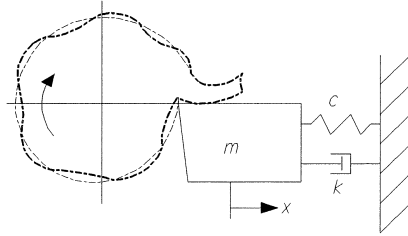


Abb. 25-7-16 Schnittverlauf

Am häufigsten wird V_1 zur Anwendung kommen, wobei auch die Phasenverschiebung in gleicher Weise auftritt. Eine Möglichkeit zur Ermittlung der Dämpfung ist die Messung und Auswertung der Abklingkurve, sie ist in Beispiel 25.3, Aufgabe 2 ausführlich beschrieben. Dabei ist zu beachten, daß diese Beschreibung nur für Einmassenschwinger gelten kann. Der erste Anstoß zur Schwingung erfolgt durch das Anfahren der Schneide. Dabei entsteht die erste Welligkeit der Oberfläche, so daß beim nächsten Durchlauf bereits eine weitere Anregung zur Schwingung durch die unterschiedliche Spandicke erfolgt. Diesen Fall kann man als Selbsterregung auffassen. Fremderregung kann von außen über das Fundament auf die Maschine wirken. Darunter fällt auch die Erregung durch Unwuchten usw. Diese Form der Erregung hat die Kreisfrequenz der Fremderregung, es gelten die Beschreibungen in Kap. 14 über den Zusammenhang zwischen Betriebsdrehzahl (Schnittgeschwindigkeit) und Eigenkreisfrequenz sinngemäß.

26 Analogie von Mohr

Biegeschwingungen von mehrfach besetzten und mehrfach abgesetzten Wellen

Das Verfahren nach Mohr erlaubt die Berechnung der Durchbiegung von Wellen, deren Durchmesser sich ändern und die an mehreren Stellen belastet sind. Daher können so auch bei rotierenden Wellen die Verformungen durch Kräfte berechnet werden.

Die Ableitungen der Formeln für die Berechnungen finden sich in den Büchern der Festigkeitslehre. Daher wird vorausgesetzt, daß das Verfahren bereits bekannt ist. Es wird hier lediglich das Verfahren beschrieben, soweit es für die Berechnung der kritischen Drehzahl erforderlich ist (siehe Kap.1 Anm.3).

1. Die Abmessungen der Welle werden aus ihren Belastungen ermittelt.
2. Die Biegemomente werden an allen Stellen berechnet, an denen entweder Durchmesseränderungen erfolgen oder Kräfte (Eigengewichte, s. Kap.8.1) eingeleitet werden.
3. Für die reduzierte Momentenfläche wird jeweils der k -Faktor an der Stelle ermittelt. Da $k = Mb/(I \cdot E)$ ist, sind es die Stellen, an denen sich der Durchmesser ändert oder eine Kraft eingeleitet wird. Es wird Stellen geben, an denen ein Sprung eintritt [k_{xa} zu k_{xb}] (gleiches Mb , aber Änderung des Flächenträgheitsmomentes I durch Änderung des Durchmessers) und Stellen, an denen $k_{xa} = k_{xb}$ ist (Einleitung einer Kraft bei gleichbleibendem Durchmesser).
4. Die Flächenkräfte werden als Inhalte der Flächen ermittelt, wenn das jeweilige k an seiner Stelle angetragen wird. Man erhält Dreiecke bzw. Trapezflächen.
Die Angriffspunkte der Flächenkräfte sind die Schwerpunkte der Flächen. Dabei sollte man bei den Trapezflächen einfach die Hälfte der jeweiligen Grundlinie für die Wirkungslinie der Kraft nehmen (das reicht mit genügender Genauigkeit aus), während für die Dreieckflächen der tatsächliche Schwerpunkt genommen werden sollte.
5. Trägt man die Flächenkräfte wie eine "Querkraftbelastung" auf, so wird eine der Kraftlinien die Null-Linie schneiden (hier F_{ks}). Die dicker gezeichnete Kurve stellt die tatsächliche Neigung dy/dx dar, so daß der Nulldurchgang auch das Maximum (waagerechte Tangente) der Durchbiegung darstellt. Die Nulldurchgänge (rechnerisch und tatsächlich) sind verschieden; sie werden näher aneinander rücken, wenn die Segmentlängen kleiner gewählt werden. In der Praxis spielt das kaum eine Rolle, da die Durchbiegung in beiden Punkten praktisch gleich ist.
6. Das ist eine einfache aber nützliche Übung, ein Programm selbst zu erstellen. Zweifellos gibt es neuere Methoden und z.T. nicht gerade preiswerte Programme. Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß es wegen seiner Einfachheit und Übersichtlichkeit auch mit kleineren (Taschen)Computern leicht zu kontrollieren ist.

Berechnungsschema

Die Abmessungen sind aus Abb. 26-1-1 zu entnehmen.

Auflagerkräfte $F_A = 3216 \text{ N}$

$F_B = 3283 \text{ N}$

Biegemomente

$M_{b0} = 0,0 \quad \text{N} \cdot \text{cm}$

$M_{b1} = 2,2514\text{E}4 \quad \text{N} \cdot \text{cm}$

$M_{b2} = 6,4328\text{E}4 \quad \text{N} \cdot \text{cm}$

$M_{b3} = 7,0410\text{E}4 \quad \text{N} \cdot \text{cm}$

$M_{b4} = 7,6492\text{E}4 \quad \text{N} \cdot \text{cm}$

$M_{b5} = 7,2238\text{E}4 \quad \text{N} \cdot \text{cm}$

$M_{b6} = 5,5820\text{E}4 \quad \text{N} \cdot \text{cm}$

$M_{b7} = 0,0 \quad \text{N} \cdot \text{cm}$

$k = Mb/(I \cdot E) \quad 1/\text{cm}$

$k_{1a} = 1,842\text{E}-4 \quad 1/\text{cm}$

$k_{1b} = 4,878\text{E}-5 \quad 1/\text{cm}$

$k_{2a} = 1,394\text{E}-4 \quad 1/\text{cm}$

$k_{2b} = 1,394\text{E}-4 \quad 1/\text{cm}$

$k_{3a} = 1,526\text{E}-4 \quad 1/\text{cm}$

$k_{3b} = 1,400\text{E}-4 \quad 1/\text{cm}$

$k_{4a} = 1,521\text{E}-4 \quad 1/\text{cm}$

$k_{4b} = 1,521\text{E}-4 \quad 1/\text{cm}$

$k_{5a} = 1,436\text{E}-4 \quad 1/\text{cm}$

$k_{5b} = 1,436\text{E}-4 \quad 1/\text{cm}$

$k_{6a} = 1,110\text{E}-4 \quad 1/\text{cm}$

$k_{6b} = 1,584\text{E}-4 \quad 1/\text{cm}$

Flächenkräfte F_k (Grundlinie $\cdot k$)

$F_{k1} = 6,446\text{E}-4$

$F_{k2} = 1,223\text{E}-3$

$F_{k3} = 7,298\text{E}-4$

$F_{k4} = 7,301\text{E}-4$

$F_{k5} = 2,218\text{E}-3$

$F_{k6} = 6,365\text{E}-4$

$F_{k7} = 1,346\text{E}-3$

Auflagerkraft $F_{kA} = 3,881\text{E}-3$

Auflagerkraft $F_{kB} = 3,647\text{E}-3$

Neigungswinkel Lager A = $2,224\text{E}-1^\circ$

Neigungswinkel Lager B = $2,090\text{E}-1^\circ$

Durchbiegungen

$y_1 = 1,811\text{E}-1 \text{ mm}$

$y_2 = 4,670\text{E}-1 \text{ mm}$

$y_3 = 6,482\text{E}-1 \text{ mm}$

$y_4 = 7,123\text{E}-1 \text{ mm}$

$y_5 = 7,677\text{E}-1 \text{ mm}$

$y_6 = 6,012\text{E}-1 \text{ mm}$

$y_7 = 4,133\text{E}-1 \text{ mm}$

Max. Durchbiegung nach der Berechnung $y_5 = 7,677\text{E}-1 \text{ mm}$

Stelle der max. Durchbiegung $\Rightarrow$ Berechnung $x_{y \max} = \ell(y_{\max}) = 375 \text{ mm}$

Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = 113 \quad 1/\text{s}$

Kritische Drehzahl $n_{\text{krit}} = 1083 \quad 1/\text{min}$

Die Berechnung der Durchbiegung nach Mohr ergibt immer den maximalen Wert. Die kritische Drehzahl wird dann nach Formel (8-1-14)

$$n_0 = \frac{300}{\sqrt{f_D}} ; \quad \frac{n_0}{\min} ; \quad \frac{f_D}{\text{cm}} \quad (26-1-1)$$

berechnet, dabei ist f_D in cm einzusetzen .

Beispiel für die Stelle y_3

$$y_3 = 3,881\text{E-}3 \cdot (70 + 130 + 50/2) - 6,446\text{E-}4 \cdot (70 \cdot 1/3 + 130 + 50/2) - 1,223\text{E-}3 \cdot (130/2 + 50/2) = 6,482\text{E-}1 \text{ mm}$$

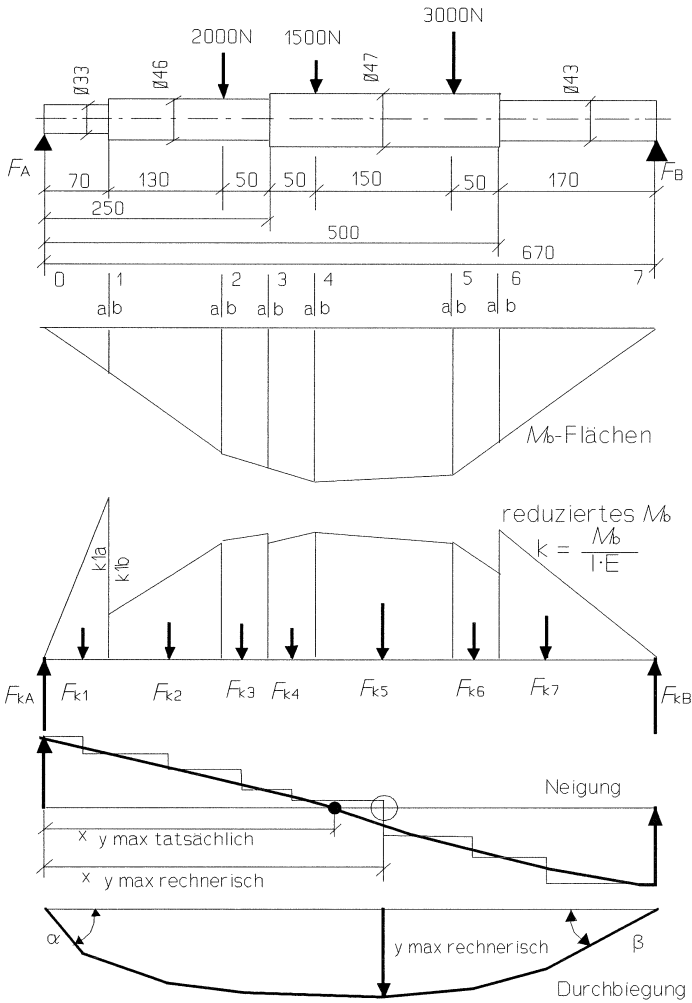


Abb. 26-1-1 Durchbiegung einer abgesetzten Welle nach Mohr

27 Auswuchttechnik

27.1 Unwucht

In jeder Maschine, in der Teile rotieren, treten Unwuchten auf, die fertigungsbedingt und/oder durch Verschleiß hervorgerufen worden sind. Es entstehen Kräfte, die die Lager belasten und durch Schwingungen den Betriebsablauf erheblich stören oder unmöglich machen können.

Für ein Element dm , das um die Achse x im Abstand r rotiert, kann man mit dem Prinzipbild die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen.

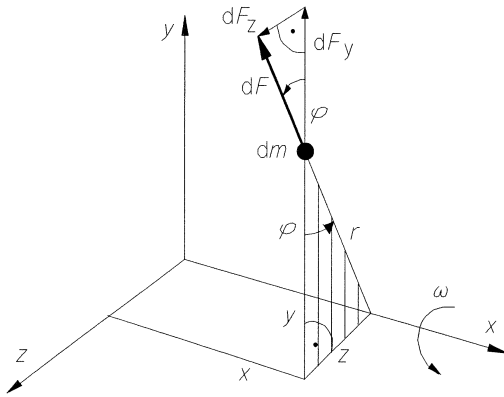


Abb. 27-1-1 Gleichgewichtsbedingungen

Die Komponenten der Fliehkraft dF sind

$$dF_y = dm \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos \varphi ; \quad dF_z = dm \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi . \quad (27-1-1)$$

Außerdem ist aus der Geometrie des Systems

$$r \cdot \cos \varphi = y ; \quad r \cdot \sin \varphi = z . \quad (27-1-2)$$

Diese Belastungsprobleme werden mit den Ansätzen der Statik für alle drei Achsen gelöst ($\Sigma F = 0$ und $\Sigma M = 0$): die Kräfte sind Fliehkräfte und enthalten deshalb über ω die Drehzahl n .

Die 1. und 2. Gleichgewichtsbedingung lautet:

$$\int dF_y = \omega^2 \cdot \int r \cdot \cos \varphi \cdot dm = 0 = \omega^2 \cdot \int y \cdot dm, \quad (27-1-3)$$

$$\int dF_z = \omega^2 \cdot \int r \cdot \sin \varphi \cdot dm = 0 = \omega^2 \cdot \int z \cdot dm. \quad (27-1-4)$$

Da $\omega \neq 0$ ist, müssen die Integrale Null sein. Es ist das statische Moment, d.h. die Bedingung ist dann erfüllt, wenn der Schwerpunkt des Körpers auf der Drehachse x liegt.

Die 3. und 4. Gleichgewichtsbedingung lautet mit

$$z = r \cdot \sin \varphi; \quad y = r \cdot \cos \varphi \Rightarrow \quad (27-1-5)$$

$$\int dM_z = \int dF_y \cdot x = \omega^2 \cdot \int r \cdot \cos \varphi \cdot x \cdot dm = 0 = \omega^2 \cdot \int y \cdot x \cdot dm, \quad (27-1-6)$$

$$\int dM_y = \int dF_z \cdot x = \omega^2 \cdot \int r \cdot \sin \varphi \cdot x \cdot dm = 0 = \omega^2 \cdot \int z \cdot x \cdot dm. \quad (27-1-7)$$

Da auch hier wieder $\omega \neq 0$ ist, müssen jeweils die Integrale Null werden. Das sind die Deviationsmomente J_{xy} und J_{xz} . Das ist dann der Fall, wenn die x -Achse eine Hauptträgheitsachse des Körpers ist. $\Rightarrow$ Trägheitskreis von Mohr.

Die 5. und die 6. Gleichgewichtsbedingung

$$\int dF_x = 0; \quad \int dM_x = 0 \quad (27-1-8)$$

sind dann erfüllt, wenn die Wirkungslinien der Fliehkräfte die x -Achse senkrecht schneiden. Wenn diese sechs Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind, dann sind keine freien Fliehkräfte vorhanden, der Körper ist im Gleichgewicht.

Daraus ergeben sich folgende Sätze: Liegt der Schwerpunkt eines Körpers auf der Drehachse und ist die Drehachse die Hauptträgheitsachse, dann treten keine freien Fliehkräfte auf. Die Drehung erfolgt um eine zentrale Hauptachse des Körpers. In jedem Körper gibt es 3 aufeinander senkrecht stehende Achsen, für die die Deviationsmomente Null werden. Es sind die Hauptträgheitsachsen. Schneiden sich die Hauptträgheitsachsen im Schwerpunkt, dann sind es zentrale Hauptträgheitsachsen.

27.2 Unwuchtmasse, Unwucht, Auswuchtgüte

Befindet sich an einer ruhenden Scheibe eine Unwuchtmasse u zusätzlich zur Masse m einer Scheibe, dann greift u im Abstand r und $m+u$ im Abstand e an. Der Schwerpunkt ist um diese Exzentrizität e verlagert und für den Ruhezustand folgt nach Abb. 27-2-1, Bild 1 mit $\Sigma M = 0$

$$(m+u) \cdot e = u \cdot r. \quad (27-2-1)$$

Es wird nach der Exzentrizität e umgestellt

$$e = \frac{u}{m+u} \cdot r. \quad (27-2-2)$$

Für $m \gg u$ bleibt im Zähler (als Produkt) die Unwuchtmasse u erhalten und im Nenner (in der Summe) kann u vernachlässigt werden. Unter dieser Voraussetzung stimmt der Quotient mit e überein:

$$\frac{u \cdot r}{m} = \frac{U}{m} \approx e = \frac{g \cdot \text{mm}}{\text{kg}} = \mu\text{m}. \quad (27-2-3)$$

Damit ist e als Auswuchtgüte die auf die Masse m bezogene Unwucht U . Die Multiplikation mit ω führt zur Gütestufe G (nach VDI 2060 mit Q bezeichnet)

$$G = e \cdot \omega \quad \text{mm/s}.$$

Rotiert die Scheibe, dann tritt eine Fliehkraft ($F = u \cdot r \cdot \omega^2$) auf, die jedoch von ω^2 abhängig ist. Kommt die Scheibe zur Ruhe, dann existiert das Produkt $u \cdot r = U$ weiter. Daher wird als Unwucht U definiert (Abb. 27-2-1 Bild 2):

$$U = u \cdot r; \quad F = U \cdot \omega^2 = u \cdot r \cdot \omega^2 \quad \text{g} \cdot \text{mm} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (27-2-4)$$

Damit ist U eine von der Drehzahl freie Größe.

Scheiben haben eine Unwucht in einer Ebene. Zylinderförmige Rotoren haben dagegen häufig Unwuchten in mehreren Ebenen.

Für die verschiedenen Maschinen ist die Auswuchtgüte im einzelnen vorgeschrieben und in Tabellen zusammengefaßt. Es werden Begriffe geprägt, die ein Unwuchtverhalten beschreiben. Sie werden zunächst zusammen dargestellt.

27.3 Allgemeine dynamische Unwucht = quasistatische Unwucht

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf starre Rotoren. Es soll der allgemeine Fall dargestellt werden, bei dem keine der auftretenden Größen ausgeglichen ist.

Bei der allgemeinen dynamischen Unwucht sind Unwuchtergebnierende und Unwuchtmoment $\neq 0$. Das Unwuchtmoment V wird dann in Kapitel 27.7 noch abgeleitet. Die Hauptträgheitsachse liegt windschief zur Drehachse, sie schneidet die Drehachse nicht.

Alle Kräfte, die zu einer Verlagerung des Schwerpunktes aus der Drehachse führen, sind vorhanden und nicht ausgeglichen:

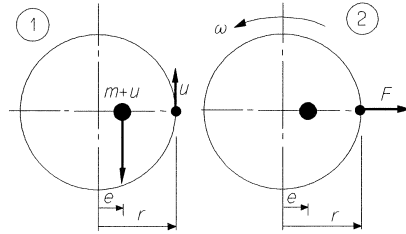


Abb. 27-2-1 Schwerpunkt und Fliehkraft

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i = \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} U_i . \quad (27-3-1)$$

Alle Einzelunwuchten können zu einer Unwuchtergebnierenden zusammengefaßt werden

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i = \omega^2 \cdot U_R \neq 0 . \quad (27-3-2)$$

Außerdem bilden die Kräfte ein Unwuchtmoment, das zu einer Schrägstellung der zentralen Hauptträgheitsachse führt:

$$\sum_{i=1}^{i=n} M_i = \omega^2 \cdot V \neq 0 . \quad (27-3-3)$$

Es können aus der allgemeinen dynamischen Unwucht zwei Sonderfälle abgeleitet werden.

27.4 Statische Unwucht

Bei diesem Sonderfall existiert kein Unwuchtmoment, das die Hauptträgheitsachse kippt. Sie bleibt parallel zur Drehachse. Es ist eine Kraft vorhanden (oder eine Resultierende), deren Wirkungslinie durch den Schwerpunkt geht.

Daher kann kein Moment existieren, das in bezug auf den Schwerpunkt wirkt.

Das einfachste Beispiel hierfür ist das Ventil am Fahrradreifen. Durch diese Gewichtskraft wird die zentrale Hauptträgheitsachse parallel zur Drehachse verschoben.

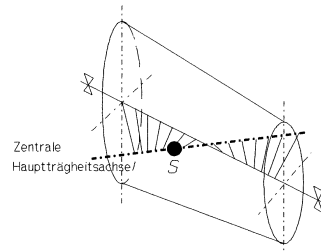


Abb. 27-3-1 Allgemeine dynamische Unwucht

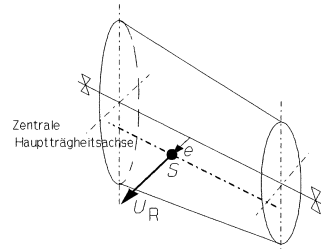


Abb. 27-4-1 Statische Unwucht

$$V = 0 , \quad (27-4-1)$$

$$U_R \neq 0 . \quad (27-4-2)$$

Um eine statische Unwucht festzustellen, braucht der Rotor nicht in Drehung versetzt zu werden. Er kann auf zwei Schneiden gelegt werden. Dabei wird er stets in die stabile Gleichgewichtslage rollen. Die zentrale Hauptträgheitsachse liegt parallel zur Drehachse: der Schwerpunkt ist in seiner Ebene um e verschoben worden.

27.5 Momentenunwucht = rein dynamische Unwucht

Es existiert keine Unwuchterresultierende, die den Schwerpunkt aus seiner Lage verschiebt. Es wird deshalb auch nicht eine zentrale Hauptträgheitsachse parallel zur Drehachse bestehen.

Es existiert ein Unwuchtpaar, es ist also ein Unwuchtmoment vorhanden. Der Schwerpunkt bleibt auf der Drehachse und die zentrale Hauptträgheitsachse neigt sich, sie schneidet dabei die Drehachse. Dann sind die Gleichungen

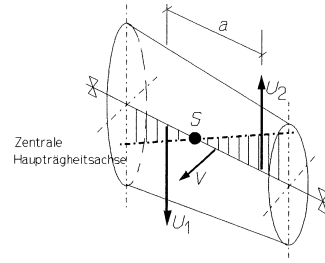


Abb. 27-5-1 Momentenunwucht

$$U_R = 0, \quad (27-5-1)$$

$$V \neq 0. \quad (27-5-2)$$

Die beiden Unwuchten sind gleich, aber entgegengesetzt gerichtet. Sie bilden das Unwuchtpaar

$$U_1 = -U_2. \quad (27-5-3)$$

Das Unwuchtmoment wird nach den Regeln der Statik gebildet:

$$V = U_1 \cdot a = U_2 \cdot a. \quad (27-5-4)$$

Legt man diesen Rotor auf zwei Schneiden, so bleibt er liegen, da der Schwerpunkt weiterhin auf der Drehachse liegt. Die Momentenunwucht ist daher nur bei der Rotation wirksam und meßbar. Ein Moment ist in seiner Ebene frei verschiebbar, daher sind die Unwuchten auch nicht symmetrisch zum Schwerpunkt (sie können es sein, es ist jedoch nicht Bedingung) und der Vektor des Momentes steht senkrecht auf der Ebene, die durch das Unwuchtpaar gebildet wird.

27.6 Unwuchtkreuz

In der Statik wird eine Kraft auf die beiden Lager eines Balkens verteilt. Im rechten Bild ist U_2 auf die Ebenen I und II verteilt. In der gleichen Weise kann man alle Unwuchten auf zwei frei gewählte Ebenen I und II verteilen, die senkrecht auf der Drehachse stehen. Dadurch wird der Körper selbst theoretisch frei von Unwuchten, sie befinden sich dann in den Ebenen, die in der Konstruktion vorgegeben sind.

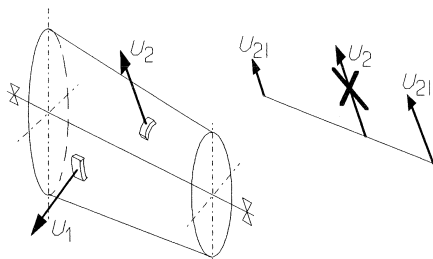


Abb. 27-6-1 Unwucht am Rotor

Unwuchtkreuz

Wenn man diesen Ebenen jeweils ein Achsenkreuz gibt, kann zunächst in jeder Ebene eine Resultierende gebildet werden. Diese Resultierenden können dann aus mehreren im Körper vorhandenen Unwuchten bestehen.

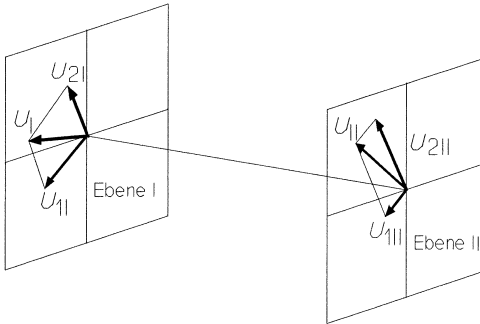


Abb. 27-6-2 Unwuchtkreuz - Unwuchteresultierende

Die Resultierenden U_I und U_{II} in den beiden Ebenen können nun ihrerseits in Komponenten in die x - und y -Achsen der Ebenen zerlegt werden.

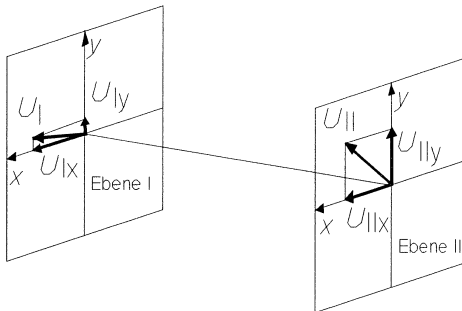


Abb. 27-6-3 Unwuchtkreuz - Komponenten

Diese Komponenten stellen nun im Unwuchtkreuz der Ebenen I und II alle Unwuchten dar, die im System auftreten, denn alle Unwuchten sind in diese beiden Ebenen zerlegt worden. Wenn man also jeweils entsprechend große Unwuchten (= Ausgleichsmassen) in der jeweils entgegengesetzten Richtung in diesen Ebenen aufbringt, dann kann man dadurch das System auswuchten. Die Unwuchten können gemessen

werden, wenn man die Ebenen in die Lagerebenen einer Auswuchtmaschine legt und an den Lagern in x - und y -Richtung entsprechende Meßwertaufnehmer anbringt.

Voraussetzung für das Auswuchten ist jedoch, daß in der Konstruktion entsprechende Auswuchtebenen bereits vorgesehen worden sind, in denen durch Zugabe oder durch Entfernen von Material eine Änderung der Masse möglich ist.

27.7 Unwuchresultierende Unwuchtmoment, Unwuchtdyname

Man kann auf die gleiche Weise, in der man die Unwuchten (Abb. 27-6-1) in die beiden freigewählten Ebenen I und II zerlegt hat, die Teilresultierenden U_I und U_{II} in einem beliebigen Punkt E auf der Drehachse des Rotors zu einer Gesamresultierenden U_R zusammenfassen.

Gleichzeitig wird das Achsensystem x - y verlassen und dafür ein neues Achsensystem m - n eingeführt, wobei die m -Achse genau auf der Wirkungslinie von U_R liegt.

Alle Unwuchten, Resultierende und Momente sind Vektoren.

Die Vektorpfeile sind weggelassen, um Formeln und Zeichnungen übersichtlicher zu halten.

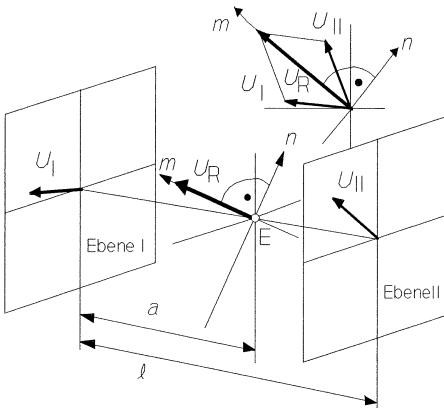


Abb. 27-7-1 Unwuchresultierende

Durch die Lage der neuen Achse m auf der Wirkungslinie von U_R werden sich die n -Komponenten von U_I und U_{II} aufheben. Das ist im folgenden Bild Abb. 27-7-2 dargestellt.

Aus diesem Bild kann man ablesen

$$U_R = U_I + U_{II} \quad (27-7-1)$$

$$U_I = U_{Im} + U_{In} \quad (27-7-2)$$

$$U_{II} = U_{IIm} + U_{IIn} \quad (27-7-3)$$

$$U_R = U_{Im} + U_{IIm} \quad (27-7-4)$$

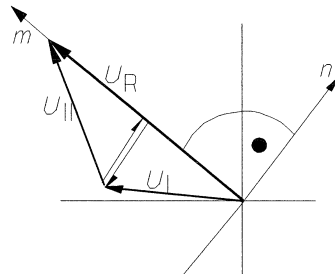


Abb. 27-7-2 Unwuchresultierende

Die beiden Komponenten in Richtung der n -Achse sind gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet. Das ist der Vorteil, den man gewinnt, wenn die m -Achse auf der Wirkungslinie der Resultierenden liegt.

Es sind die Unwuchresultierenden U_I und U_{II} parallel zu ihren Wirkungslinien verschoben worden. Dabei entstand ein Moment mit den Komponenten um die m -Achse

$$V_m = U_{In} \cdot a + U_{In} \cdot (\ell - a) . \quad (27-7-5)$$

Wegen der in ihren Beträgen gleich großen aber entgegengesetzt wirkenden Komponenten in n -Richtung erhält man aus dieser Gleichung die m -Komponente des Unwuchtmomentes V

$$V_m = U_{In} \cdot \ell = -U_{Im} \cdot \ell . \quad (27-7-6)$$

Dieser Vektor enthält nicht mehr die Länge a und damit die Position des Punktes E, d.h. er ist von der Lage von E unabhängig. In der gleichen Weise kann man die Komponente V_n des Unwuchtmomentes bilden:

$$V_n = U_{Im} \cdot a - U_{Im} \cdot (\ell - a) . \quad (27-7-7)$$

Schreibt man die Größen als Beträge, so ist mit dem Satz von Pythagoras

$$V = \sqrt{V_m^2 + V_n^2} . \quad (27-7-8)$$

Damit ist auch der Winkel β gegeben, d.h. das Unwuchtmoment V hat nicht die gleiche Wirkungslinie wie die Unwuchresultierende U_R .

$$\tan \beta = \frac{V_n}{V_m} . \quad (27-7-9)$$

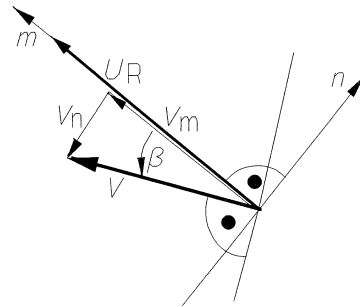


Abb. 27-7-3 Unwuchtmoment

Da der Punkt E für V_m nach (27-7-6) frei wählbar ist, können bei dem Entwurf eines Rotors bereits eine oder mehrere Auswuchtebenen bestimmt werden. Für den Unwuchtzustand eines Rotors gilt dann:

Die Darstellung im Unwuchtkreuz mit U_I und U_{II} ist der Darstellung durch Unwuchresultierende U_R und Unwuchtmoment V gleichwertig. Das bedeutet aber auch, daß man sowohl mit Hilfe des Unwuchtkreuzes als auch durch Unwuchresultierende und Unwuchtmoment Berechnung und Auswuchten durchführen kann.

U_R und V werden auch als **Unwuchtdynam** bezeichnet.

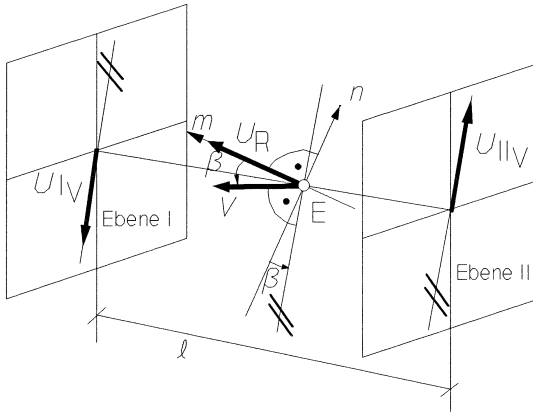


Abb. 27-7-4 Unwuchtdynamik

In den Ebenen I und II existiert ein Unwuchtpaar, das durch das Unwuchtmoment V dargestellt wird. Die Ebene, in der dieses Unwuchtpaar wirkt, ist um den Winkel β gegenüber der n -Ebene geneigt.

Das kleinste Unwuchtmoment V wird man mit dem kleinsten Wert für die Wurzel erhalten, d.h. dann, wenn $V_n = 0$ wird. Damit wird auch in (27-7-9) der Zähler zu Null und damit der Winkel $\beta = 0$ (siehe auch Abb. 27-7-3). Dann ist

$$V_n = U_{I\ m} \cdot a - U_{II\ m} \cdot (\ell - a) = 0, \quad (27-7-10)$$

also für $V_{\min}$

$$a = \frac{U_{II\ m}}{U_{I\ m} + U_{II\ m}} \cdot \ell = \frac{U_{II\ m}}{U_R} \cdot \ell. \quad (27-7-11)$$

Dem Unwuchtmoment entspricht ein Unwuchtpaar

$$U_{I_v} = U_{II_v} = \frac{V}{\ell}. \quad (27-7-12)$$

(Siehe auch Kap. 27.1)

Der Ausgleich kann durch die Korrektur der Hauptträgheitsachse erfolgen. Die Massenverteilung wird korrigiert, bis die geforderte Auswuchtgüte erreicht wird. Das kann erfolgen durch:

- Entfernen von Material (Ausbohren, Abschleifen),
 - Zugabe von Material (Schrauben, Ringe),
 - Verlagern von Material (Verdrehen einer Exenterscheibe).
- (Siehe hierzu auch die Aufgaben im Kap. Beispiele).

27.8 Auswuchtmaschine

In Kap. 25.3 ist die Vergrößerungsfunktion V_3 ausführlich behandelt worden. Außerdem wurde sie im Zusammenhang mit den anderen Vergrößerungsfunktionen im Kap. 25.7 besprochen. Es können daher die erforderlichen Gleichungen hier übernommen werden.

Soll mit einer Auswuchtmaschine im unterkritischen Bereich die Unwucht gemessen werden, so muß die Drehzahl des Läufers erheblich unter ω_0 liegen. Es wird also hart gefedert und möglichst steif gebaut. Der Meßweg am Lager ist klein, er kann mit DMS aufgenommen werden.

Bei dieser Methode wird von einer *kraftmessenden Auswuchtmaschine* gesprochen. Für kleine Dämpfung ist mit (25-7-28) und (25-3-6) für $\omega_e < \omega_0$ (der Nenner wird praktisch zu 1)

$$V_3 = \frac{\hat{x}}{\frac{m_e}{m} \cdot e} \approx \frac{\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}{1} ; \quad \text{aus} \quad V_3 = \frac{(\omega_e / \omega_0)^2}{\pm \underbrace{(1 - (\omega_e / \omega_0)^2)}_{1 \gg (\quad)^2}} . \quad (27-8-1)$$

$$\hat{x} \approx \frac{m_e}{m} \cdot e \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2 \approx m_e \cdot e \cdot \omega_e^2 \cdot \frac{1}{c} . \quad (27-8-2)$$

Die Amplitude ist der Fliehkraft proportional. Da m_e die Unwuchtmasse ist ($= u$), kann ihre Größe direkt gemessen werden. Die Resonanzstelle wird dabei nicht durchfahren. Daher bleiben die Belastungen in den Lagern gering. Die niedrige Betriebsdrehzahl erlaubt eine schnelle Durchführung der Messung. Wird mit konstanter Betriebsdrehzahl (Erregerkreisfrequenz) gemessen, so kann man ω_e im Meßgerät eliminieren und unmittelbar den Betrag der erforderlichen Ausgleichsmasse ablesen.

Für den Phasenwinkel gilt bei $\vartheta \ll 1$ praktisch $\varphi \approx 0^\circ$ (Abb. 25-2-3) und (25-2-15).

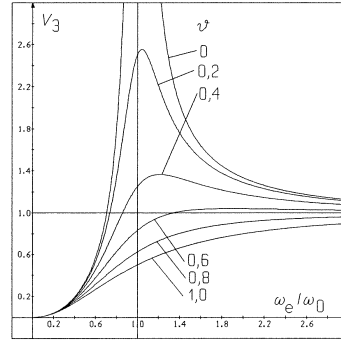


Abb. 27-8-1

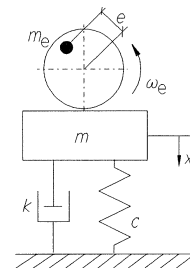


Abb. 27-8-2 Unwucht

Bei einer *wegmessenden Auswuchtmaschine* wird dagegen im überkritischen Bereich gearbeitet. Es geht nach *Abb. 25-7-12* (siehe hierzu auch *Abb. 25-3-4*) $V_3 \Rightarrow 1$ und damit wird (25-7-28) zu

$$\hat{x} \approx \frac{m_e}{m} \cdot e . \quad (27-8-3)$$

Die Lagerung und Aufhängung muß sehr weich erfolgen. Nach (27-2-4) ist mit $m_e = u$ und $e = r$ die Amplitude $\hat{x}$ proportional der Unwucht U . Im Nenner steht die Masse m , daher muß die Meßvorrichtung zuerst eingerichtet werden, um m in der Anzeige zu eliminieren. Es wird bei jedem Lauf die Resonanzstelle durchfahren, das führt zu einer erheblichen Belastung der Aufhängung, die daher bis kurz vor dem Erreichen der Betriebsdrehzahl arretiert wird. Nach *Abb. 25-2-3* und (25-2-15) ist oberhalb der Resonanzstelle für $\vartheta \ll 1$ der Phasenwinkel $\varphi \approx 180^\circ$.

28 Koppelschwingungen

28.1 Erhöhung der Freiheitsgrade (Translation)

Sind die Massen durch Federn verbunden, werden die Schwingungen als Koppelschwingungen bezeichnet. Ein System mit zwei Freiheitsgraden ist in statischer Ruhelage und in ausgelenkter Lage gezeichnet. Es sind zwei Freiheitsgrade vorhanden, weil zwei Koordinaten zur Beschreibung der Schwingung erforderlich sind.

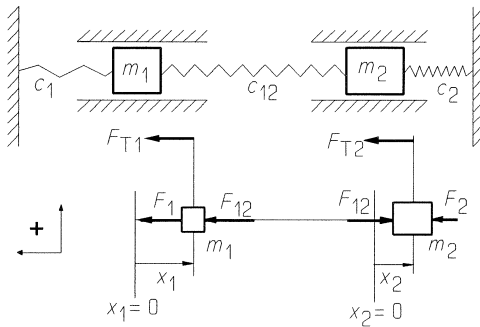


Abb. 28-1-1 Koppelschwingung

Der Index 12 bezeichnet die Größen, die zwischen 1 und 2 liegen. Dann gelten für jeweils ein Massensystem die Gleichungen nach dem Schnittprinzip

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + F_1 + F_{12} = 0, \quad (28-1-1)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 - F_{12} + F_2 = 0. \quad (28-1-2)$$

Die Federkräfte werden ersetzt, die Aufhängepunkte der Koppelfeder c_{12} verändern sich,

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + c_1 \cdot x_1 + c_{12} \cdot (x_1 - x_2) = 0, \quad (28-1-3)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 - c_{12} \cdot (x_1 - x_2) + c_2 \cdot x_2 = 0. \quad (28-1-4)$$

Die Klammern werden aufgelöst und die Gleichungen geordnet.

Durch Umformen erhält man die DGL:

$$\ddot{x}_1 + \frac{c_1 + c_{12}}{m_1} \cdot x_1 - \frac{c_{12}}{m_1} \cdot x_2 = 0 , \quad (28-1-5)$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{c_2 + c_{12}}{m_2} \cdot x_2 - \frac{c_{12}}{m_2} \cdot x_1 = 0 . \quad (28-1-6)$$

Hält man die Masse m_2 fest, dann ist der Weg $x_2 = 0$. Dann fällt in (28-1-5) der dritte Summand heraus. Wird m_1 festgehalten, dann ist $x_1 = 0$ und in (28-1-6) fällt der dritte Summand heraus. Also sind die Faktoren des jeweils zweiten Summanden der DGL gleich dem zugehörigen ω_0^2

$$\frac{c_1 + c_{12}}{m_1} = \omega_1^2 ; \quad \frac{c_2 + c_{12}}{m_2} = \omega_2^2 . \quad (28-1-7)$$

Das sind die Eigenkreisfrequenzen ω_0 für die Massen, wenn jeweils die andere Masse festgehalten wird. Es sind dann die Ausgangsgleichungen für die Ermittlung der Koppelkreisfrequenz ω_k . Der Index 0 ist bei den ω_0 weggelassen,

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 \cdot x_1 - \frac{c_{12}}{m_1} \cdot x_2 = 0 , \quad (28-1-8)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 \cdot x_2 - \frac{c_{12}}{m_2} \cdot x_1 = 0 . \quad (28-1-9)$$

Setzt man die Gleichung $x = \hat{x} \cdot \cos(\omega_k \cdot t)$ mit der Amplitude $\hat{x}$ und der Koppelkreisfrequenz ω_k für x und $\ddot{x}$ ein, wobei $\cos(\omega_k \cdot t)$ ausgeklammert werden kann, so ist

$$\cos(\omega_k \cdot t) \cdot \left[(\omega_1^2 - \omega_k^2) \cdot \hat{x}_1 - \frac{c_{12}}{m_1} \cdot \hat{x}_2 \right] = 0 , \quad (28-1-10)$$

$$\cos(\omega_k \cdot t) \cdot \left[-\frac{c_{12}}{m_2} \cdot \hat{x}_1 + (\omega_2^2 - \omega_k^2) \cdot \hat{x}_2 \right] = 0 . \quad (28-1-11)$$

Da in diesen Produkten die [] gleich Null sein müssen, denn $\cos(\omega \cdot t)$ kann nicht für jedes t Null werden, erhält man zwei Gleichungen für $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$, die dann eine triviale Lösung ergeben, wenn die Amplituden $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ selbst Null sind. Das ist der Ruhezustand. Sind die Amplituden $\neq 0$, so ist

$$(\omega_1^2 - \omega_k^2) \cdot \hat{x}_1 - \frac{c_{12}}{m_1} \cdot \hat{x}_2 = 0 , \quad (28-1-12)$$

$$-\frac{c_{12}}{m_2} \cdot \hat{x}_1 + (\omega_2^2 - \omega_k^2) \cdot \hat{x}_2 = 0 . \quad (28-1-13)$$

Für die Schwingung muß die Koeffizientendeterminante Null sein:

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \omega_k^2 & -\frac{c_{12}}{m_1} \\ -\frac{c_{12}}{m_2} & \omega_2^2 - \omega_k^2 \end{vmatrix} = 0 . \quad (28-1-14)$$

Die Determinante gelöst ergibt eine Gleichung 4. Grades:

$$\omega_k^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cdot \omega_k^2 + \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 - \frac{c_{12}^2}{m_1 \cdot m_2} = 0 . \quad (28-1-15)$$

Deren Lösung ist

$$\omega_k^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}\right)^2 - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 + \frac{c_{12}^2}{m_1 \cdot m_2}} , \quad (28-1-16)$$

$$\omega_k^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_1^4 + 2 \cdot \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 + \omega_2^4}{4} - \frac{4 \cdot \omega_1^2 \cdot \omega_2^2}{4} + \frac{4 \cdot c_{12}^2}{4 \cdot m_1 \cdot m_2}} . \quad (28-1-17)$$

Die Koppelkreisfrequenzen können nur positiv sein, das -Vorzeichen der großen Wurzel fällt daher weg. Durch Umformung ist

$$\omega_{k1,k2} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4 \cdot \frac{c_{12}^2}{m_1 \cdot m_2}}} . \quad (28-1-18)$$

Hierbei wird ω_{k1} als die kleinere Koppelkreisfrequenz mit dem negativen Vorzeichen der zweiten Wurzel gesetzt. Geht man in die Gleichungen (28-1-12) und (28-1-13) zurück, kann man das Amplitudenverhältnis bestimmen (z.B. mit ω_{k1}):

$$(\omega_1^2 - \omega_{k1}^2) \cdot \hat{x}_1 - \frac{c_{12}}{m_1} \cdot \hat{x}_2 = 0 , \quad (28-1-19)$$

$$\frac{\ddot{x}_2}{\ddot{x}_1} = \frac{\omega_1^2 - \omega_{k1}^2}{\frac{c_{12}}{m_1}} \quad (28-1-20)$$

In der niedrigeren Koppelkreisfrequenz sind die Schwingungen gleichsinnig, in der höheren Koppelkreisfrequenz sind die Schwingungen gegenläufig.

Zum Abschätzen von ω_{k1} und ω_{k2} siehe *Abb. 28-1-4*.

Setzt man die Kette in *Abb. 28-1-1* bis auf n -Massen weiter fort, so wird ein beliebiger Schwinger an der Stelle i mit dem Index i und der letzte Schwinger mit n bezeichnet.

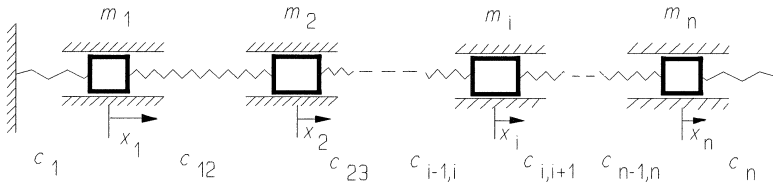


Abb. 28-1-2 Koppelschwingung, n -Massen

Dann kann man mit den Gleichungen (28-1-5) und (28-1-6) weiter arbeiten, wenn man sie sinngemäß erweitert. Außerdem kann man wie in (28-1-7) die Eigenkreisfrequenz des jeweiligen Einzelsystems m_i mit den zugehörigen Federelementen ermitteln, wenn die Masse davor und die Masse danach festgehalten wird.

$$\frac{c_{i-1,i} + c_{i,i+1}}{m_i} = \omega_i^2 \quad (28-1-21)$$

Die einzelnen DGL sind dann entsprechend (28-1-5) und (28-1-6)

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + \frac{c_1+c_{12}}{m_1} \cdot x_1 - \frac{c_{12}}{m_1} \cdot x_2 &= 0, \\
-\frac{c_{12}}{m_2} \cdot x_1 + \ddot{x}_2 + \frac{c_{12}+c_{23}}{m_2} \cdot x_2 - \frac{c_{23}}{m_2} \cdot x_3 &= 0, \\
&\vdots \\
&\vdots \\
-\frac{c_{i-1,i}}{m_i} \cdot x_{i-1} + \ddot{x}_i + \frac{c_{i-1,i} + c_{i,i+1}}{m_i} \cdot x_i - \frac{c_{i,i+1}}{m_i} \cdot x_{i+1} &= 0, \\
&\vdots \\
&\vdots \\
-\frac{c_{n-1,n}}{m_n} \cdot x_{n-1} + \ddot{x}_n + \frac{c_{n-1,n}+c_n}{m_n} \cdot x_n &= 0.
\end{aligned} \tag{28-1-22}$$

Die Ansätze $x = \hat{x} \cdot \cos(\omega_k \cdot t)$ und die weiteren Umformungen entsprechend (28-1-10) und folgende führen zu der Koeffizientendeterminanten

$$\begin{vmatrix}
\omega_1^2 - \omega_k^2 - \frac{c_{12}}{m_1} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
-\frac{c_{12}}{m_2} & \omega_2^2 - \omega_k^2 - \frac{c_{23}}{m_2} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & -\frac{c_{23}}{m_3} & \omega_3^2 - \omega_k^2 - \frac{c_{34}}{m_3} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & & & & & & & \\
\cdot & & & & & & & \\
0 & \cdot & 0 & -\frac{c_{i-1,i}}{m_i} & \omega_i^2 - \omega_k^2 - \frac{c_{i,i+1}}{m_i} & 0 & \cdot & 0 \\
\cdot & & & & & & & \\
\cdot & & & & & & & \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 - \frac{c_{n-1,n}}{m_n} & \omega_n^2 - \omega_k^2
\end{vmatrix} = 0. \tag{28-1-23}$$

Läßt man in Abb. 28-1-1 die Feder 2 weg, so werden in den Gleichungen die Ausdrücke für c_2 gleich Null. Die Gleichungen (28-1-12) und (28-1-13) können dann in der Form geschrieben werden

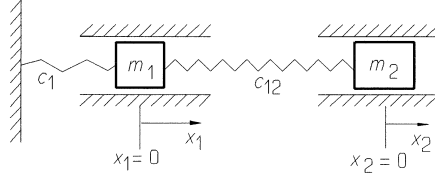


Abb. 28-1-3 Koppelschwingung

$$(\omega_1^2 - \omega_k^2) \cdot m_1 \cdot \hat{x}_1 - c_{12} \cdot \hat{x}_2 = 0, \quad (28-1-24)$$

$$-c_{12} \cdot \hat{x}_1 + (\omega_2^2 - \omega_k^2) \cdot m_2 \cdot \hat{x}_2 = 0. \quad (28-1-25)$$

mit der entsprechenden Schreibweise werden nach (28-1-7) mit $c_2 = 0$

$$\omega_1^2 = \frac{c_1 + c_{12}}{m_1}; \quad \omega_2^2 = \frac{c_2 + c_{12}}{m_2} = \frac{c_{12}}{m_2}. \quad (28-1-26)$$

Setzt man diese Größen in (28-1-21) und (28-1-22) ein, so wird

$$\begin{aligned} (c_1 + c_{12} - m_1 \cdot \omega_k^2) \cdot \hat{x}_1 - c_{12} \cdot \hat{x}_2 &= 0 \\ -c_{12} \cdot \hat{x}_1 + (c_{12} - m_2 \cdot \omega_k^2) \cdot \hat{x}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (28-1-27)$$

in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_{12} - m_1 \cdot \omega_k^2 & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{12} - m_2 \cdot \omega_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (28-1-28)$$

Die Amplituden $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ sind nur dann von Null (abgesehen vom Ruhezustand) verschieden, wenn die Determinante gleich Null ist:

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_{12} - m_1 \cdot \omega_k^2 & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{12} - m_2 \cdot \omega_k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (28-1-29)$$

Man kann die Eigenkreisfrequenzen abschätzen, wenn man die Gleichung

$$(c_1 + c_{12} - m_1 \cdot \omega_k^2) \cdot (c_{12} - m_2 \cdot \omega_k^2) - c_{12}^2 = 0 \quad (28-1-30)$$

näher betrachtet. Sie besteht aus zwei Teilfunktionen in der Form

$$y_1 = (c_1 + c_{12} - m_1 \cdot \omega_k^2) \cdot (c_{12} - m_2 \cdot \omega_k^2) \quad (28-1-31)$$

und dem konstanten Summanden

$$y_2 = c_{12}^2, \quad (28-1-32)$$

der nur eine Parallelverschiebung zur ω -Achse darstellt. Die Teilfunktion y_1 ist eine quadratische Parabel, ihre Schnittpunkte mit y_2 geben die Größen von ω_{k1}^2 und ω_{k2}^2 an. Die Schnittpunkte von y_1 mit der ω -Achse erhält man durch Nullsetzen der beiden Klammern von y_1

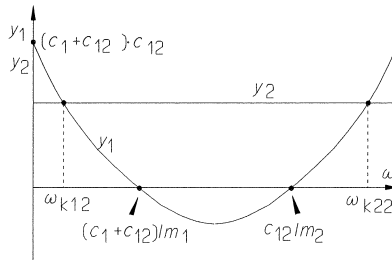


Abb. 28-1-4 Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_k^2 = \frac{c_1 + c_{12}}{m_1}; \quad \omega_k^2 = \frac{c_{12}}{m_2}. \quad (28-1-33)$$

Für die Gesamtfunktion ist jeweils y_2 zu subtrahieren. Damit liegt u.a. die niedrigste Eigenkreisfrequenz fest. Sie hat die größere Bedeutung, weil sie als erste Eigenkreisfrequenz beim Hochfahren einer Maschine erreicht wird. Für beide Eigenkreisfrequenzen gilt dann

$$\omega_{k1} < \sqrt{\frac{c_1 + c_{12}}{m_1}}; \quad \omega_{k2} > \sqrt{\frac{c_{12}}{m_2}}. \quad (28-1-34)$$

Auch kann das Verhältnis der Amplituden $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ bestimmt werden. Man bezeichnet die Amplitudenverhältnisse als Eigenformzahlen

$$\kappa_1 = \left[\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1} \right]_{\omega=\omega_1} = \frac{c_1 + c_{12} - m_1 \cdot \omega_1^2}{c_{12}}, \quad (28-1-35)$$

$$\kappa_2 = \left[\frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1} \right]_{\omega=\omega_2} = \frac{c_1 + c_{12} - m_1 \cdot \omega_2^2}{c_{12}}. \quad (28-1-36)$$

Für die Eigenformzahlen gilt

$$\begin{aligned} \kappa_1 > 0 &\Rightarrow \text{die Amplituden sind gleichläufig (unterkritisches Verhalten),} \\ \kappa_2 < 0 &\Rightarrow \text{die Amplituden sind gegenläufig (überkritisches Verhalten).} \end{aligned}$$

Zur Lösung von (28-1-10) und (28-1-11) wurde der Ansatz gemacht

$$x_1 = \hat{x}_1 \cdot \cos(\omega \cdot t); \quad x_2 = \hat{x}_2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{mit} \quad \omega_k = \omega. \quad (28-1-37)$$

Nach (3-2-12) sind, wobei hier $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \pi$ gesetzt ist,

$$A = \hat{x} \cdot \cos \varphi \quad \text{und} \quad B = \hat{x} \cdot \sin \varphi, \quad (28-1-38)$$

so daß mit (3-2-13) geschrieben werden kann

$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t). \quad (28-1-39)$$

Ebenso hätte der Ansatz in (28-1-37) mit

$$x_1 = \hat{x}_1 \cdot \sin(\omega \cdot t); \quad x_2 = \hat{x}_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \text{mit} \quad \omega_k = \omega \quad (28-1-40)$$

zu den gleichen Ergebnissen geführt.

Damit kann mit (28-1-39) die Gesamtlösung als Addition geschrieben werden. Es stehen die Indizes für die Koordinaten x ($x_1; x_2; \dots x_n$) an der ersten Stelle und für die Eigenkreisfrequenzen ω ($\omega_1; \omega_2; \dots \omega_n$) (ohne Index 0, wie vor (28-1-8) vereinbart) an der zweiten Stelle. Für einen 2-Massenschwinger ist dann

$$x_1 = A_{11} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + B_{11} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + A_{12} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) + B_{12} \cdot \cos(\omega_2 \cdot t), \quad (28-1-41)$$

$$x_2 = A_{21} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + B_{21} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + A_{22} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) + B_{22} \cdot \cos(\omega_2 \cdot t). \quad (28-1-42)$$

Benutzt man die gleichwertigen Schreibweisen nach (28-1-39), so kann man die Gleichungen in der kürzeren ersten Form schreiben und damit dann die Gleichungen für die freien Schwingungen eines **Schwingers mit n -Freiheitsgraden** darstellen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \hat{x}_{1i} \cdot \sin(\omega_i \cdot t + \varphi_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \hat{x}_{ni} \cdot \sin(\omega_i \cdot t + \varphi_i) \end{pmatrix}. \quad (28-1-43)$$

28.2 Tilgung

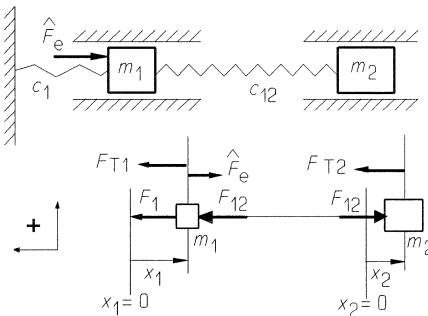


Abb. 28-2-1 Schwinger mit Tilgermasse m_2

Nimmt man die Koppelschwingung aus Kap. 28.1 und fügt gleichzeitig eine periodische Erregerkraft an der Masse 1 hinzu, dann kann man die Masse 2 zur Schwingungstilgung benutzen und damit die Masse 1 praktisch zur Ruhe zwingen, obwohl sie zu Schwingungen angeregt wird. Bedingung ist dann, daß die Tilgerkreisfrequenz = Erregerkreisfrequenz ist, d.h. die Maschine soll dann möglichst über längere Zeiträume mit dieser Betriebsdrehzahl laufen. Die Abb. 28-2-2 zeigt, daß diese Form der Tilgung nur bei einer

bestimmten Drehzahl möglich ist. Davor und danach gibt es die üblichen Resonanzfrequenzen.

Da nun für die Feder 2 die Federkonstante $c_2 = 0$ ist und eine periodische Erregerkraft F_e an der Masse 1 existiert, müssen die Formeln (28-1-3) und (28-1-4) entsprechend abgeändert werden. Sie lauten nun:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + c_1 \cdot x_1 + c_{12} \cdot (x_1 - x_2) = \hat{F}_e \cdot \cos(\omega_e \cdot t) , \quad (28-2-1)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 - c_{12} \cdot (x_1 - x_2) = 0 . \quad (28-2-2)$$

Damit ist die Gleichung (28-2-1) eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung.

In Kap. 25 ist für die erzwungenen Schwingungen bereits erklärt worden, daß die Lösung dann aus der allgemeinen Lösung der homogenen DGL und der partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung besteht. Damit erfolgt der Ansatz in Form des Störgliedes

$$x_{1p} = \hat{x}_1 \cdot \cos(\omega_e \cdot t) , \quad \ddot{x}_{1p} = -\hat{x}_1 \cdot \omega_e^2 \cdot \cos(\omega_e \cdot t) , \quad (28-2-3)$$

$$x_{2p} = \hat{x}_2 \cdot \cos(\omega_e \cdot t) , \quad \ddot{x}_{2p} = -\hat{x}_2 \cdot \omega_e^2 \cdot \cos(\omega_e \cdot t) . \quad (28-2-4)$$

Wie in Kap. 28.1 lassen sich die Gleichungen (28-1-12) und (28-1-13) jetzt schreiben

$$(\omega_1^2 - \omega_e^2) \cdot \hat{x}_1 - \frac{c_{12}}{m_1} \cdot \hat{x}_2 = \frac{\hat{F}_e}{m_1} , \quad (28-2-5)$$

$$- \frac{c_{12}}{m_2} \cdot \hat{x}_1 + \left(\frac{c_{12}}{m_2} - \omega_e^2 \right) \cdot \hat{x}_2 = 0 . \quad (28-2-6)$$

Dann ist wie in (28-1-14) die Determinante

$$D = (\omega_1^2 - \omega_e^2) \cdot \left(\frac{c_{12}}{m_2} - \omega_e^2 \right) - \frac{c_{12}^2}{m_1 \cdot m_2} . \quad (28-2-7)$$

Nach dem Additionsverfahren ergeben sich zunächst aus einer mathematischen Formelsammlung (alle Größen und Indizes beziehen sich von (28-2-8) bis (28-2-11) auf die entsprechende Sammlung und nicht auf die Größen dieses Kapitels)

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 , \quad (28-2-8)$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 , \quad (28-2-9)$$

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}, \quad (28-2-10)$$

$$x_2 = \frac{a_{11} \cdot b_2 - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}. \quad (28-2-11)$$

Damit werden die Schwingungsamplituden für das System mit $b_2 = 0$

$$\hat{x}_1 = \frac{\frac{\hat{F}_e}{m_1} \cdot \left(\frac{c_{12}}{m_2} - \omega_e^2 \right)}{D}, \quad (28-2-12)$$

$$\hat{x}_2 = \frac{0 - \frac{\hat{F}_e}{m_1} \cdot \left(-\frac{c_{12}}{m_2} \right)}{D}. \quad (28-2-13)$$

Man kann nun die Amplitude der Masse 1 zu Null werden lassen, indem man den Zähler des Bruches in (28-2-12) gleich Null setzt. Dann ist die Masse 1 in Ruhe und nur die Masse 2 schwingt. Die Erregerkreisfrequenz ist dann gleich der Tilgerkreisfrequenz

$$\frac{c_{12}}{m_2} - \omega_e^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_e = \sqrt{\frac{c_{12}}{m_2}} = \omega_T. \quad (28-2-14)$$

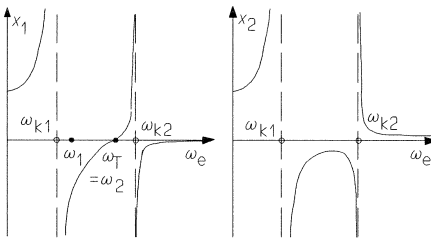


Abb. 28-2-2 Amplituden mit Tilgung ω_T

Die Amplituden sind in Abb. 28-2-2 dargestellt.

Es existieren die Resonanzkreisfrequenzen ω_{k1} und ω_{k2} . Ist ω_e gleich der Tilgerkreisfrequenz ω_T , bleibt die Masse m_1 in Ruhe. Dafür schwingt die Masse m_2 mit der Tilgerkreisfrequenz $\omega_T = \omega_2$. Auf diese Weise kann die Schwingung der Masse 1 getilgt werden, dazu muß jedoch die Resonanzstelle ω_{k1} durchfahren werden.

Die Tilgermasse m_2 wird dabei klein im Verhältnis zu m_1 sein.

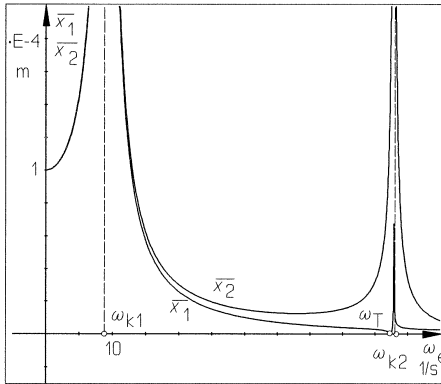


Abb. 28-2-3 Amplitudenfrequenzgang aus Kap. Beispiele > Beispiel 28-2 Fall 3

Es war mit (28-1-7) und (28-2-14)

$$\omega_1^2 = \frac{c_1 + c_{12}}{m_1}, \quad (28-2-15)$$

$$\omega_2^2 = \frac{c_{12}}{m_2} = \omega_T^2.$$

Werden die Gleichungen (28-2-12) und (28-2-13) in der Form geschrieben

$$\hat{x}_1 = \text{abs}\{ \}, \quad (28-2-16)$$

$$\hat{x}_2 = \text{abs}\{ \},$$

und wird außerdem für die Amplituden eingeführt

$$\bar{x}_1 = \frac{\hat{x}_1 \cdot c_1}{\hat{F}_1}, \quad (28-2-17)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\hat{x}_2 \cdot c_1}{\hat{F}_1},$$

dann erhält man mit den Werten aus Kap. Beispiele, Beispiel Kap. 28 - Fall 3, das Diagramm Abb. 28-2-3.

Bei einer translatorischen Schwingung wird wie in Abb. 28-2-1 eine Tilgermasse hinzugefügt.

Bei Rotationsschwingungen werden Tilgermassen hinzugefügt, die dann ebenfalls Rotationsschwingungen ausführen (siehe auch Beispiel in Kap. Beispiele).

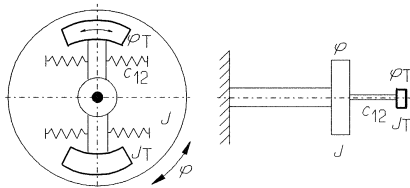


Abb. 28-2-4 Tilgung bei Rotationsschwingungen

Die Schwingungsenergie wird auf die Tilgermasse weitergeleitet, der Vorgang ist verlustfrei, während bei der Dämpfung Energie durch Reibung in Wärme umgewandelt wird. Allerdings muß die Drehzahl n_T (Tilgerkreisfrequenz ω_T) eingehalten werden, da nur bei dieser Drehzahl die Bedingung nach (28-2-14) erfüllt ist. Bei der Dämpfung wird ein großer Frequenzbereich in der Amplitude gemindert. Allerdings treten auch hier Nachteile auf (siehe Kap. 24.4 $\Rightarrow$ Dämpfung ist immer ein Kompromiß!).

28.3 Translation und Rotation

Wird eine Masse m so belastet, daß sie nur eine ebene Bewegung ausführen kann, so kann sie sowohl eine Längs- als auch eine Drehbewegung ausführen. Dabei soll die Einschränkung gelten, daß die Längsbewegung nur in einer Richtung und die Drehbewegung nur mit kleinen Winkeln und um den Schwerpunkt erfolgen darf. Die Auslenkung erfolgt um x . Dazu wird die Feder 1 um den Weg $\ell_1 \cdot \varphi$ zusätzlich gestaucht und die Feder 2 um den Weg $\ell_2 \cdot \varphi$ weniger gestaucht. Da der Winkel φ der Rotationsbewegung klein sein soll, kann der Weg $\ell \cdot \varphi$ als linear in Richtung x angesehen werden.

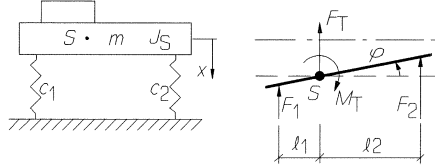


Abb. 28-3-1 Translation und Rotation

Es wirken in der Translation

$$F_T = m \cdot \ddot{x} ; \quad F_1 = c_1 \cdot (x + \ell_1 \cdot \varphi) ; \quad F_2 = c_2 \cdot (x - \ell_2 \cdot \varphi) ; \quad (28-3-1)$$

$$F_T + F_1 + F_2 = 0 ; \quad (28-3-2)$$

$$m \cdot \ddot{x} + c_1 \cdot (x + \ell_1 \cdot \varphi) + c_2 \cdot (x - \ell_2 \cdot \varphi) = 0 ; \quad (28-3-3)$$

$$\ddot{x} + \frac{c_1 + c_2}{m} \cdot x + \frac{c_1 \cdot \ell_1 - c_2 \cdot \ell_2}{m} \cdot \varphi = 0 . \quad (28-3-4)$$

Und in der Rotation (mit M_F als Moment der Federkraft)

$$M_T = -J_S \cdot \ddot{\varphi} ; \quad M_{F1} = -F_1 \cdot \ell_1 ; \quad M_{F2} = F_2 \cdot \ell_2 ; \quad (28-3-5)$$

$$M_T + M_{F1} + M_{F2} = 0 ; \quad (28-3-6)$$

$$J_S \cdot \ddot{\varphi} + c_1 \cdot (x + \ell_1 \cdot \varphi) \cdot \ell_1 - c_2 \cdot (x - \ell_2 \cdot \varphi) \cdot \ell_2 = 0 ; \quad (28-3-7)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_1 \cdot \ell_1^2 + c_2 \cdot \ell_2^2}{J_S} \cdot \varphi + \frac{c_1 \cdot \ell_1 - c_2 \cdot \ell_2}{J_S} \cdot x = 0 . \quad (28-3-8)$$

Also gibt es bei einer Schwingung gleichzeitig Bewegung in x - und in φ -Richtung. Die Bewegungen in x -Richtung und in φ -Richtung beeinflussen sich gegenseitig.

Diese gekoppelte Schwingung kann "entkoppelt" werden, wenn

$$c_1 \cdot \ell_1 - c_2 \cdot \ell_2 = 0 \quad (28-3-9)$$

gesetzt wird. Für die reine entkoppelte Translationschwingung (Hubschwingung) ist der Faktor von x nach (28-3-4)

$$\omega_x^2 = \frac{c_1 + c_2}{m} . \quad (28-3-10)$$

Für die reine entkoppelte Rotationsschwingungen (Nickschwingung) ist der Faktor von φ nach (28-3-8)

$$\omega_\varphi^2 = \frac{c_1 \cdot \ell_1^2 + c_2 \cdot \ell_2^2}{J_s} . \quad (28-3-11)$$

Mit diesen Eigenkreisfrequenzen erhält man die entkoppelten, voneinander unabhängigen Differentialgleichungen

$$\ddot{x} + \omega_x^2 \cdot x = 0 , \quad (28-3-12)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \cdot \varphi = 0 . \quad (28-3-13)$$

Außerdem kann gesetzt werden

$$k_1 = \frac{c_1 \cdot \ell_1 - c_2 \cdot \ell_2}{m} ; \quad k_2 = \frac{c_1 \cdot \ell_1 - c_2 \cdot \ell_2}{J_s} . \quad (28-3-14)$$

Daraus folgt für die Gleichungen (28-3-4) und (28-3-8)

$$\ddot{x} + \omega_x^2 \cdot x + k_1 \cdot \varphi = 0 , \quad (28-3-15)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \cdot \varphi + k_2 \cdot x = 0 . \quad (28-3-16)$$

Zur Lösung der DGL erfolgt der Ansatz

$$\begin{aligned} x &= \hat{x} \cdot \cos(\omega_k \cdot t) ; & \varphi &= \hat{\varphi} \cdot \cos(\omega_k \cdot t) , \\ \ddot{x} &= -\hat{x} \cdot \omega_k^2 \cdot \cos(\omega_k \cdot t) ; & \ddot{\varphi} &= -\hat{\varphi} \cdot \omega_k^2 \cdot \cos(\omega_k \cdot t) . \end{aligned} \quad (28-3-17)$$

Damit ist der Lösungsweg vergleichbar mit (28-1-10) und (28-1-11) und entsprechend (28-1-14) muß die Determinante Null sein:

$$\begin{vmatrix} (\omega_x^2 - \omega_k^2) & k_1 \\ k_2 & (\omega_\varphi^2 - \omega_k^2) \end{vmatrix} = 0 . \quad (28-3-18)$$

Und entsprechend (28-1-18) folgt

$$\omega_{k1,k2} = \sqrt{\frac{\omega_x^2 + \omega_\varphi^2}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\omega_x^2 - \omega_\varphi^2)^2 + k_1 \cdot k_2}} \quad (28-3-19)$$

Siehe auch Kap. 30.1.5: Anströmung von Flächen (Tragflächen) und Beispiel zu Kap. 16.

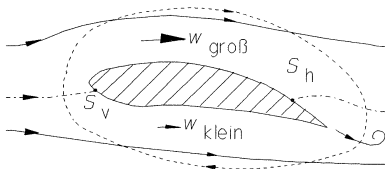


Abb. 28-3-2 / 30-1-13 Tragflügel

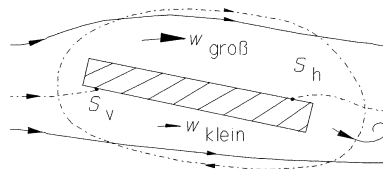


Abb. 28-3-3 / 30-1-14 Angeströmte Platte

Elastische Wellenlagerung

Wird eine Welle elastisch gelagert und wird die Welle als starr mit der Belastung m als Punktmasse angesehen, so kann man die Gleichungen aus Kap. 28.3 benutzen, wenn man folgende Änderungen vornimmt: die gesamte Masse soll im Schwerpunkt konzentriert sein, das Massenträgheitsmoment um den Schwerpunkt S soll Null sein, die Kräfte treten nur in x -Richtung auf, wobei die Wege ungleich sein sollen: $x_1 \neq x_2$. Die Federkräfte wirken parallel, es handelt sich jedoch **nicht** um eine Parallelschaltung nach Kap. 16.1. Schreibt man (28-3-8) in der Form

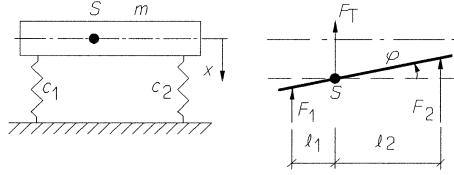


Abb. 28-3-4 Wellenlagerung

$$J_S \cdot \ddot{\varphi} + (c_1 \cdot \ell_1^2 + c_2 \cdot \ell_2^2) \cdot \varphi + (c_1 \cdot \ell_1 - c_2 \cdot \ell_2) \cdot x = 0, \quad (28-3-20)$$

dann kann man nach der Vereinbarung $J_S = 0$ setzen und nach φ auflösen

$$\varphi = - \frac{c_1 \cdot \ell_1 - c_2 \cdot \ell_2}{c_1 \cdot \ell_1^2 + c_2 \cdot \ell_2^2} \cdot x. \quad (28-3-21)$$

Schreibt man (28-3-4) in der Form

$$m \cdot \ddot{x} + (c_1 + c_2) \cdot x + (c_1 \cdot \ell_1 - c_2 \cdot \ell_2) \cdot \varphi = 0, \quad (28-3-22)$$

so kann man φ durch Einsetzen aus (28-3-21) eliminieren. Faßt man nun die x -Koeffizienten zusammen, so ist die Faktor von x identisch mit der Ersatzfederkonstanten c_{ers} des Systems

$$\left((c_1 + c_2) - \frac{(c_1 \cdot \ell_1 - c_2 \cdot \ell_2)^2}{c_1 \cdot \ell_1^2 + c_2 \cdot \ell_2^2} \right) \cdot x. \quad (28-3-23)$$

Nach dem Umformen wird daraus

$$c_{\text{ers}} = \frac{c_1 \cdot c_2 \cdot (\ell_1 + \ell_2)^2}{c_1 \cdot \ell_1^2 + c_2 \cdot \ell_2^2}. \quad (28-3-24)$$

Diese Gleichung wird als Beispiel 16.3 in Kap. Beispiele auf andere Weise gewonnen.

29 Dämpfung durch trockene Reibung

Coulomb'sche Reibung

Greift an einem ruhenden Körper eine Kraft an, so bleibt der Körper zunächst in Ruhe, wenn trockene Reibung vorhanden ist. Dabei steigt entsprechend der angreifenden Kraft die Reibungskraft bis zu einem Maximalwert linear an, bei dem der Übergang in die Gleitreibung erfolgt. Dann ist die Kraft, die zur Bewegung notwendig ist, geringer als die maximale Kraft, bei der Körper gerade noch in Ruhe war. Mit

$$\begin{aligned} F_N &= \text{Normalkraft} \\ F_{R0} &= \text{Haftreibungskraft (Ruhezustand)} \\ F_R &= \text{Gleitreibungskraft (Bewegungszustand)} \\ \mu_0 &= \text{Haftreibungszahl} \\ \mu &= \text{Gleitreibungszahl (hier dann als Reibungszahl)} \end{aligned}$$

$$F_{R0 \max} = \mu_0 \cdot F_N, \quad F_R = \mu \cdot F_N. \quad (29-1-1)$$

Für kleine Geschwindigkeiten kann μ als konstant angesehen werden

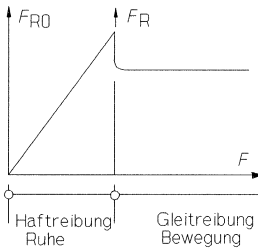


Abb. 29-1-1 Haft- und Gleitreibung

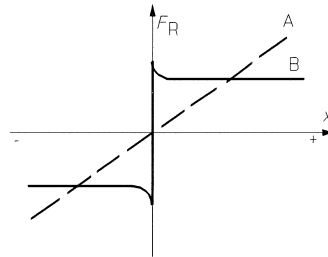
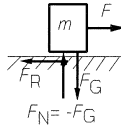


Abb. 29-1-2 Funktion Reibungskraft-Geschwindigkeit

Der Unterschied zwischen der nicht-trockenen Reibung und der trockenen Reibung besteht darin, daß bei der nicht-trockenen Reibung die Reibungskraft häufig proportional zur Geschwindigkeit ist (Funktion A), während bei der trockenen Reibung nach Überwindung der Haftreibung die Reibungskraft in erster Annäherung konstant bleibt (Funktion B). In beiden Fällen bestimmt aber die Geschwindigkeit das Vorzeichen. Reibung wirkt immer als Dämpfung. Es werden dabei unterschieden:

a) Coulomb'sche Reibung (trockene Reibung)

Die Reibungskraft ist meist konstant und nur von der Richtung der Geschwindigkeit abhängig (Der Quotient gibt nur das Geschwindigkeitsvorzeichen wieder, da k_0 kein Vorzeichen hat). k_0 entspricht dann $k_0 = \mu \cdot F_N$

$$F_D = k_0 \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}. \quad (29-1-2)$$

Zu der nicht-trockenen Reibung zählen

b) Geschwindigkeitsproportionale Dämpfung

$$F_D = k_1 \cdot \dot{x} . \quad (29-1-3)$$

Es ist die am häufigsten vorkommende Dämpfung. Dabei wird dann $k_1 = k$ gesetzt. Sie tritt insbesondere bei laminaren Strömungen auf, d.h. bei niedrigen Reynoldszahlen. In der Konstruktion entspricht sie der Reibung im geschmierten Lager (Siehe Kap. 30, Abb. 30-1-2).

c) Zusammengesetzte Dämpfung

$$F_D = k_1 \cdot \dot{x} + k_0 \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} . \quad (29-1-4)$$

d) Wegproportionale Dämpfung

$$F_D = k_2 \cdot \frac{\dot{x}}{\omega_0} . \quad (29-1-5)$$

zu b) Tritt turbulente Strömung auf, so gilt die quadratische Abhängigkeit:

$$F_D = k_3 \cdot |\dot{x}| \cdot \dot{x} . \quad (29-1-6)$$

Die Dämpfungskonstanten k_0 , k_1 , k_2 und k_3 werden experimentell bestimmt.

Für den Ansatz der Gleichung für den Fall der trockenen Reibung wird auf eine zusätzliche Dämpfung verzichtet, so daß Trägheitskraft, Reibungskraft und Federkraft wirken.

Die Reibungskraft ist der Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet, also muß für Hin- und Rückweg jeweils eine eigene DGL aufgestellt werden.

1. Fall $\dot{x} > 0$

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + F_R = 0 , \quad (29-1-7)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = - \frac{F_R}{m} . \quad (29-1-8)$$

2. Fall $\dot{x} < 0$

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} - F_R = 0 , \quad (29-1-9)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = + \frac{F_R}{m} . \quad (29-1-10)$$

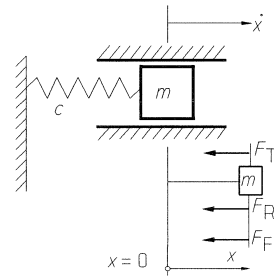


Abb. 29-1-3 Trockene Reibung

Man erhält also zwei inhomogene DGL 2. Ordnung, die sich nur durch das Vorzeichen des Störgliedes unterscheiden. Der homogene Teil wird auf die übliche Art gelöst mit dem Ansatz

$$x_h = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) . \quad (29-1-11)$$

Der Ansatz zur Lösung des partikulären Teiles erfolgt in der Form des Störgliedes. Hier kann man analog zur Gleichung für die Federkraft schreiben

$$F_F = x \cdot c \Rightarrow F_R = x_p \cdot c \Rightarrow x_p = \pm \frac{F_R}{c} \Rightarrow x_p = \pm \frac{F_R}{m \cdot \omega_0^2} . \quad (29-1-12)$$

Die Lösung setzt sich aus dem homogenen Teil und dem partikulären Teil zusammen und zwar in einer Doppelform. Wegen der Richtungsänderung der Geschwindigkeit ist

$$\dot{x} > 0 \Rightarrow x = A_1 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - \frac{F_R}{c} , \quad (29-1-13)$$

$$\dot{x} < 0 \Rightarrow x = A_2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B_2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{F_R}{c} . \quad (29-1-14)$$

Wie in jeder Gleichung bedeutet die additive Konstante lediglich eine Parallelverschiebung der Zeit-Achse um die Größe (es wird die jeweilige Amplitude von $\pm e$ aus gemessen)

$$\pm \frac{F_R}{c} = \pm e . \quad (29-1-15)$$

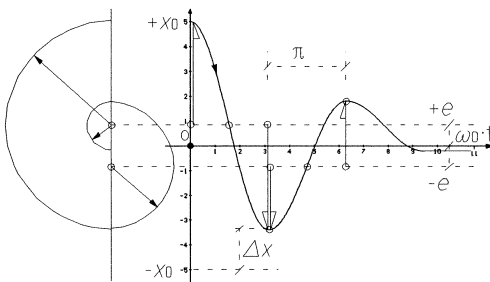


Abb. 29-1-4 Weg-Zeit-Diagramm

Die Schwingung startet aus der Position x_0 mit der Geschwindigkeit nach (29-1-14), also einer zum Nullpunkt gerichteten Geschwindigkeit. Daher ist als Bezugsachse die Achse $+e$ nach Gleichung (29-1-14) zu wählen.

Dabei ist

$$\Delta x = 2 \cdot e = \text{const} . \quad (29-1-16)$$

Die Schwingung erfolgt entsprechend der Ableitung mit ω_0 . Das ist die Eigenkreisfrequenz einer ungedämpften Schwingung. Da F_R eine konstante Kraft ist, besteht die Schwingung aus harmonischen Halbschwingungen, die im Zeigerdiagramm jeweils einen Halbkreis darstellen. Der Sprung von einem Zentrum eines Halbkreises zum anderen Zentrum beträgt $2 \cdot e = \text{const}$, d.h. die Amplituden müssen linear abnehmen. Die Umhüllenden der Schwingung sind Geraden.

Für die 1. Halbschwingung mit $\dot{x} < 0$ gelten die Randbedingungen
 $t = 0$; $x = x_0$; $\dot{x} = 0$.

$$x_0 - e = A_1 \cdot \underbrace{\sin(\omega_0 \cdot 0)}_0 + B_1 \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 \cdot 0)}_1 , \quad (29-1-17)$$

$$\dot{x} = 0 = A_1 \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 \cdot 0)}_1 - B_1 \cdot \underbrace{\sin(\omega_0 \cdot 0)}_0 , \quad (29-1-18)$$

$$B_1 = x_0 - e ; \quad A_1 = 0 , \quad (29-1-19)$$

$$x = (x_0 - e) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + e . \quad (29-1-20)$$

Es gelten für die 2. Halbschwingung mit $\dot{x} > 0$ die Randbedingungen
 $t = \pi/\omega_0$; $x = -x_0 + 2 \cdot e$; $\dot{x} = 0$.

$$\underbrace{-x_0 + 2 \cdot e + e}_0 = A_2 \cdot \underbrace{\sin(\omega_0 \cdot \pi/\omega_0)}_0 + B_2 \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 \cdot \pi/\omega_0)}_{-1} \quad (29-1-21)$$

$$B_2 = x_0 - 3 \cdot e ; \quad A_2 = 0 , \quad (29-1-22)$$

$$x = (x_0 - 3 \cdot e) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - e , \quad (29-1-23)$$

Für die 3. Halbschwingung gilt entsprechend

$$x = (x_0 - 5 \cdot e) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + e . \quad (29-1-24)$$

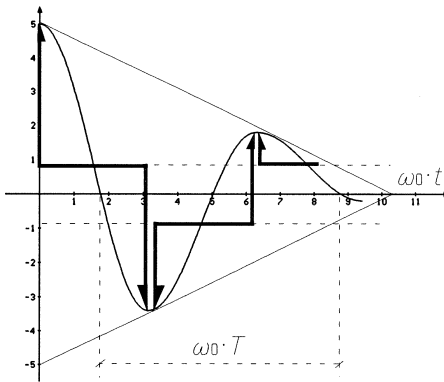


Abb. 29-1-5 Abnahme der Amplituden

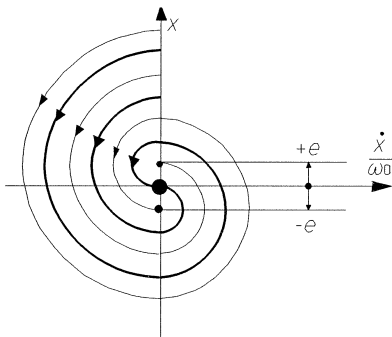


Abb. 29-1-6 Phasenporträt

Wählt man das entsprechende Achsensystem, so erhält man das Phasenporträt eines Schwingers bei Coulomb'scher Dämpfung. Die Geschwindigkeitsachse ist durch die Division mit ω_0 zu einer Weg-Achse geworden und das ganze Bild wurde um 90° gedreht (siehe auch Abb. 11-5-2):

30 Sonderthemen

30.1 Wirbelbildung an Bauteilen

Es gibt eine Reihe von Konstruktionen, bei denen Strömungsvorgänge und die dadurch hervorgerufenen Kräfte eine Belastung darstellen. (Rohrleitungen, Pumpen, Kamine von Klimaanlage, frei hängende Kabel, Turbinen. Dazu kommt die Gruppe der Fahrzeuge, die wiederum vom Auto, Lkw bis zum Flugzeug reichen). Das Problem bei solchen Vorgängen ist, daß praktisch immer Wirbelbildung auftritt. Die Wirbel bilden sich meist mit einer Regelmäßigkeit aus, die mit der Frequenz von Schwingungen vergleichbar ist und das Bauteil zu Schwingungen anregen. Dieser Vorgang entspricht einer Selbsterregung, die in Kap. 30.1.6 besprochen wird. Mit der Wirbelbildung ist eine Ablösung der auftretenden Wirbel verbunden. Dadurch werden wechselnd die Druckverhältnisse an Bauteilen verändert, die ihrerseits die Bauteile zu Schwingungen anregen, die dann häufig zu Ermüdungsbrüchen führen.

Ein in diesem Zusammenhang häufig erwähntes Beispiel ist die **Tacoma-Narrows-Brücke** Staat Washington/USA (s. auch Kap. 30.1.6). Die Brücke wurde als Hängekonstruktion ausgeführt und schwang schon während des Baues. Die Arbeiter wurden "seekrank". Nach Fertigstellung erreichten die Amplituden bis 1,5 m, so daß man vorausfahrende Fahrzeuge manchmal nicht mehr sehen konnte. Trotzdem kam der Einsturz überraschend (1940). Der Wind war an diesem Tage relativ gleichmäßig.

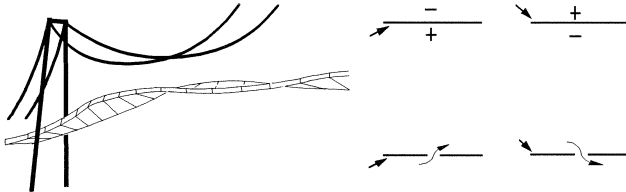


Abb. 30-1-1 Tacoma-Brücke und Fahrbahnen

Die Brücke hatte große vertikale Platten. Der Windwiderstand war groß, die Ablenkung ebenfalls und damit auch die Geschwindigkeit der umgelenkten Luft. Dadurch herrschten direkt über und unter den Fahrbahnplatten starke Druckunterschiede (Gleichung nach Bernoulli (Energiegleichung)). Da die Druckunterschiede aber nicht gleichmäßig waren und sich ständig änderten, wurde die Brücke zunächst nach Kap. 30.1.6 zu Biegeschwingungen angeregt und angefacht. Sie verhielt sich wie eine Tragfläche. Die Biegeschwingungen waren über die Länge jedoch nicht gleichmäßig und führten zu Torsionsschwingungen, die zum Einsturz führten. Danach wurden die Brücken dieser Konstruktionsform mit einem Längsspalt zwischen den Fahrbahnen gebaut, der zu einem Druckausgleich der Ober- und Unterseite führt. (Siehe auch Kap. 30.1.6)

Man braucht allerdings nicht so weit zu fahren, um Schwingungen von Brücken durch Windkräfte zu erleben. So wurde wiederholt (in der Umbauphase), auch am 11.11.92, die Autobahnbrücke **Köln-Rodenkirchen A4** über den Rhein gesperrt.

Um diese Vorgänge untersuchen zu können, ist man meist auf Versuche angewiesen. Man muß versuchen, die Vorgänge in der Natur und an der Konstruktion mit einem Modellversuch so ähnlich wie möglich nachzubilden, so daß die Versuchsergebnisse die Grundlagen für die Berechnungen liefern können. Dafür sind Ähnlichkeitszahlen entwickelt worden, von denen hier auf die Strouhalzahl eingegangen wird, die u.a. die Wirbelbildung beschreibt.

30.1.1 Strouhalzahl

Die Strouhalzahl wird bei der Berechnung *instationärer* Strömungsvorgänge verwendet:

$$Sr = \frac{\ell}{w \cdot t} = \frac{\frac{m}{s}}{\frac{m}{s} \cdot s} \quad (30-1-1)$$

Bezeichnung nach DIN 1304 2.4. In der Literatur sind auch üblich St , Str . w ist die Geschwindigkeit, mit der ein Teilchen den Weg ℓ zurücklegt. ℓ/w ist die dabei verbrauchte Zeit. Ist sie klein gegenüber der

Zeit t , in der sich der Vorgang abspielt, dann geht Sr gegen einen kleinen Wert, die Strömung kann als quasistationär betrachtet werden.

Stationär $\Rightarrow Sr = 0$.

t kann auch als Zeitintervall bei periodischen Vorgängen betrachtet werden (T = Periodendauer). Schreibt man die Strouhalzahl mit der Frequenz, dann muß sie lauten:

$$Sr = \frac{f \cdot \ell}{w} = \frac{\frac{1}{s} \cdot m}{\frac{m}{s}} \quad (30-1-2)$$

Dann gilt für die Wirbelbildung bei konstanter Geschwindigkeit:

viele kleine Wirbel $\Rightarrow$ kleine Wirbelabstände (t klein)
wenige große Wirbel $\Rightarrow$ große Wirbelabstände (t groß)

Die periodische Wirbelablösung an Körperhinterkanten kann zu periodischen Schwingungen der Körper führen, die sich aufschaukeln, wenn ihre Kreisfrequenz mit der Eigenkreisfrequenz der Körper übereinstimmt (Resonanz). Am 15. Januar 1985 brach der 300 m hohe **Sendemast Bielestein** bei Detmold in mehrere Teile. Der Schaden wurde auf widerregte Schwingungen zurückgeführt, die zu Materialermüdung und damit zum Bruch führten. Die Resonanz kann durch erzwungene Ablösung vermieden werden, da eine periodische Wirbelbildung (Kármánsche Wirbelstraße siehe Kapitel 30.1.5) aufhört, wenn die laminare Grenzschicht in die turbulente Grenzschicht umschlägt: durch Stolperkanten an Flächen, bei Kaminen (Lüftungsrohren) und Masten durch eine windelförmige Kante (Scruton-Spirale Abb. 30-1-2) oder bei Seilen (Schleppseile z.B. auf See) und Kabeln (Überlandleitungen) durch aufgesetzte Scheiben. Bei Sendemasten werden auch Tilger eingesetzt (Kap. 28.2).

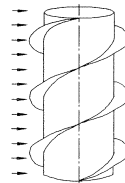


Abb. 30-1-2
Scruton-Spirale

Für die Kármánsche Wirbelstraße ergibt sich mit der Strouhalzahl die Frequenz

$$f = Sr \cdot w / \ell$$

Die Strouhalzahl ändert sich mit der Reynoldszahl:

$$\begin{aligned} Re = 60 &\Rightarrow Sr = 0,14 \text{ bis} \\ Re \geq 1000 &\Rightarrow Sr = 0,21 \end{aligned}$$

Wirbelstraßen treten im Bereich $60 < Re < 2E5$ auf.

30.1.2 Grenzschicht

Man untersucht den Strömungsverlauf in einem engen Spalt. Bei einer Maschine wird das der Spalt zwischen zwei Gleitflächen sein, in dem sich ein Schmiermittel befindet. Man spricht dann von einer "ebenen Schichtenströmung einer zähen Flüssigkeit". Es werden zunächst die Gleichungen für den Verlauf des Druckes in x -Richtung aufgestellt. Das führt auf das Viskositätsgesetz von Newton:

$$\tau = \eta \cdot \frac{du}{dy} \quad (30-1-3)$$

Diese Gleichung beschreibt zunächst die Abhängigkeit der Schubspannung in einer Flüssigkeit als Funktion der dynamischen Zähigkeit η multipliziert mit dem Gradienten du/dy (Änderung der Geschwindigkeit / Änderung der Entfernung von der Oberfläche). Andererseits gibt es einen Zusammenhang

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{dp}{dx} \quad (30-1-4)$$

der angibt, wie sich der Gradient Schubspannung / Entfernung von der Oberfläche zur Änderung des Druckes in x -Richtung verhält. In einem parallelen Spalt ändert sich die Geschwindigkeit nicht, daher ändert sich auch der Druck nicht. Anders sind jedoch die Verhältnisse in einem nicht parallelen Spalt.

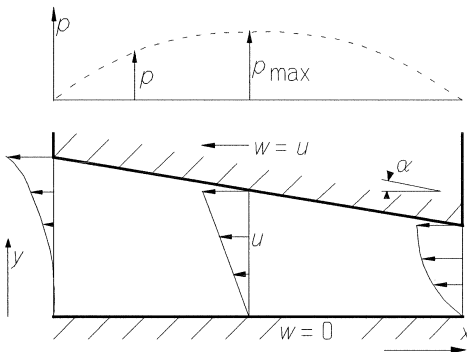


Abb. 30-1-3 Druck- und Geschwindigkeitsverlauf

Sind zwei Platten unter dem Winkel α gegeneinander geneigt, und werden sie gegeneinander verschoben, so gilt ebenfalls der Kontinuitätssatz.

Das bedeutet aber, daß in jedem Querschnitt die gleiche Menge Flüssigkeit (Schmiermittel) pro Zeiteinheit hindurchtreten muß.

Das ergibt dann ein sich änderndes Geschwindigkeitsprofil und einen nicht linearen Verlauf in y -Richtung. Es ist deshalb (es muß $d\tau/dy$ eingesetzt werden):

$$\frac{dp}{dx} = \eta \cdot \frac{d^2\dot{x}}{dy^2} \neq 0. \quad (30-1-5)$$

Der Druck in x -Richtung ändert sich; es findet ein Druckaufbau im Spalt statt. Der Druck am Anfang und am Ende des Spaltes muß jedoch gleich dem Umgebungsdruck sein, damit muß der Druckverlauf im Spalt dem Druckverlauf der Zeichnung entsprechen. Dann muß auch ein Maximum existieren, für das gilt

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\dot{x}}{dy^2} = 0 \quad \text{mit} \quad \dot{x} = u \Rightarrow \frac{du}{dy} = \text{const}. \quad (30-1-6)$$

Damit muß an der Stelle des Druckmaximums das Geschwindigkeitsprofil linear sein. Dieser Druckverlauf ist nun für viele Vorgänge in und an Maschinen und auch auf der Straße in *jedem Fall* wirksam.

In Abb. 30-1-4 zeigt Teilbild 1, wie ein Schlitten (z.B. einer Führung) durch den Ölfilm angehoben wird und auf diese Weise durch den Schmierkeil Öl zwischen Schlitten und Bahn gedrückt wird. Fehlerhafte Konstruktion kann dazu führen, daß sich ein Schmierkeil nicht bilden kann. Die Führung läuft trocken und es kommt zur Ausbildung der trockenen Reibung (siehe Kap. 29). Am Werkstück werden Rattermarken entstehen.

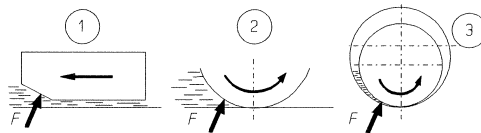


Abb. 30-1-4 Schmierkeil

Wird nun der Schlitten gekrümmt (Abb. 30-1-4 Bild 2), so entsteht durch die Krümmung ein Schmierkeil. Die Krümmung kann vollständig zu einem Kreisumfang werden. Auf diese Weise **muß** ein Reifen auf nasser Fahrbahn bei entsprechender Geschwindigkeit aufschwimmen und den Kontakt zur Straßenoberfläche verlieren. Gegen Aquaplaning hilft nur, rechtzeitig die Geschwindigkeit zu verringern.

Wird nun der Schlitten gekrümmt (Abb. 30-1-4 Bild 2), so entsteht durch die Krümmung ein Schmierkeil. Die Krümmung kann vollständig zu einem Kreisumfang werden. Auf diese Weise **muß** ein Reifen auf nasser Fahrbahn bei entsprechender Geschwindigkeit aufschwimmen und den Kontakt zur Straßenoberfläche verlieren. Gegen Aquaplaning hilft nur, rechtzeitig die Geschwindigkeit zu verringern.

Es wird vermutet, daß ein Hauptfahrwerk eines Lufthansa-Airbus bei der Landung in Warschau (September 1993) wegen Aquaplaning keinen Bodenkontakt hatte. Das Computerprogramm für die Landung verlangte aber die Rollmeldung beider Hauptfahrwerke und gab deshalb die Bremssysteme nicht frei. Dadurch gingen neun Sekunden verloren. Die Maschine raste über die Landebahn in einen Wall und ging in Flammen auf. Zwei Menschen wurden getötet und 45 Menschen verletzt.

Wird nun noch die äußere Bahn gekrümmt (Bild 3), ist es klar, daß ein Lager aufschwimmen muß, wenn der Ölfilm zum Schmierkeil wird. Dabei kann sich die Welle im Lager drehen oder die Nabe um die Achse. Die Ursache für das Abheben bleibt bestehen.

Denkt man sich die obere Wand dieser Strömung in einem Spalt durch eine ungestörte Außenströmung ersetzt, dann kann man diese Betrachtungen auf die Grenzschicht übertragen.

Die Strömungsgeschwindigkeit an der Wand muß wegen der Reibung Null sein, während sie relativ schnell auf die Geschwindigkeit u_∞ der ungestörten Umströmung ansteigen muß. Der Geschwindigkeitsgradient in y -Richtung muß groß sein. Nach Newton sind die Schubkräfte (Reibungskräfte) proportional zu den Geschwindigkeitsgradienten.

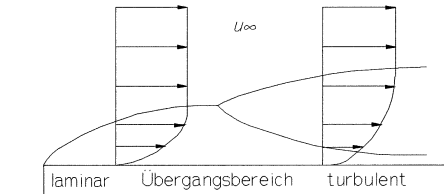


Abb. 30-1-5 Geschwindigkeiten in der Grenzschicht

Prandtl entwickelte 1904 die Grenzschichttheorie.

Für τ wird dann die Wandschubspannung τ_w eingeführt. Je dicker eine Grenzschicht ist, umso geringer ist der Anstieg der Geschwindigkeit und umso mehr nimmt τ_w ab. Die Kraft, die erforderlich ist, die Widerstände zu überwinden, ist die Widerstandskraft

$$F_w = c_w \cdot A_{\text{Str}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot w^2. \quad (30-1-7)$$

Sie ist abhängig von einem Beiwert c_w (eine beliebige Angabe in der Autoreklame), der angeströmten Fläche und dem Staudruck ($\rho/2 \cdot w^2$). Bei dieser Kraft werden in der Strömungslehre noch weitere Unterscheidungen gemacht. Das soll hier jedoch nicht weiter behandelt werden.

Die Reynoldszahl als charakteristische Ähnlichkeitszahl ist

$$Re = w_\infty \cdot \ell / \nu \quad (30-1-8)$$

mit ℓ Lauflänge, ν kinematische Zähigkeit, ungestörte Strömungsgeschwindigkeit w_∞ .

Die Grenzschicht ist zunächst laminar, nur bei sehr dünnen Platten (scharfe Kanten) beginnt sie praktisch turbulent. Im Umschlagpunkt wird sie turbulent, wobei unmittelbar an der Wand ein laminarer Schmierfilm erhalten bleibt. Die kritische Reynoldszahl für ebene Platten liegt bei $Re_{\text{krit}} = 5E5$. In Versuchen hat sich gezeigt, daß Treibstoffeinsparungen bis 30% möglich sein können, wenn es gelingt, die laminare Grenzschicht durch Beschichtung und Gestaltung des Tragflügels länger zu halten (Laminarflügel) - (s. Kap. 30.1.4).

Ähnlich wie bei der Rohrströmung (λ - Re -Diagramm) sieht das c_w - Re -Diagramm der Plattenströmung aus. Die Abb. 30-1-6 und Abb. 30-1-7 sind zusammen zu lesen.

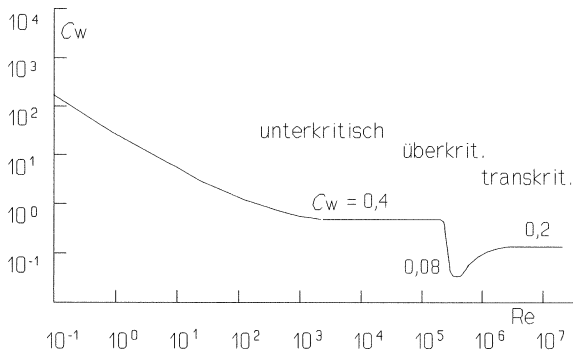
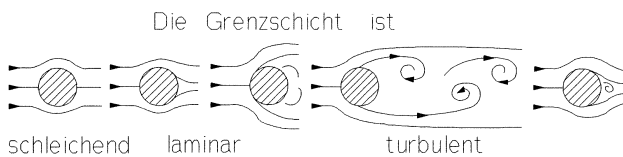
Abb. 30-1-6 c_w -Werte und Reynoldszahl

Abb. 30-1-7 Grenzschicht und Wirbel

30.1.3 Ablösung

Der Verlauf von c_{wK} -Werten für Kugel und Zylinder ist zwar zahlenmäßig nicht identisch, folgt aber geometrisch der gleichen Form.

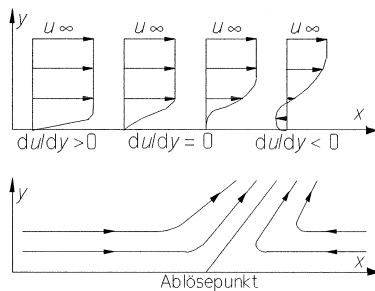


Abb. 30-1-8 Ablösung einer Grenzschicht

Der Widerstand ist zunächst sehr groß; der Einfluß der Viskosität (Reibungskräfte F_{WR}) ist maßgebend. Ab $Re > 1E3$ wird der Druckwiderstand F_{WD} entscheidend, der dann durch die Wirbelbildung hinter dem Körper beeinflusst wird. Am Anfang des umströmten Körpers wird die Strömung durch den Verdrängungseffekt des Körpers zunächst beschleunigt, dann durch Reibung und Körperform langsamer, es können sich die Strömungsbilder der Abb. 30-1-8 zeigen:

Die Strömungsgeschwindigkeit ist an der Wand wegen der Reibung praktisch gleich Null und steigt zum freien Raum hin bis auf die Umgebungsgeschwindigkeit u_∞ an. Längs der angeströmten Platte tritt eine Veränderung des Strömungsprofils wegen der sich ändernden Schubspannung (Gleichung (30-1-3)) auf.

An der Stelle, an der die Wandschubspannung $\tau_w = 0$ wird, wird die Strömung sich ablösen; es setzt unmittelbar an der Wand eine Rückströmung ein. Die Wandschubspannung kann nur bis zu diesem Ablösepunkt berechnet werden. Danach bildet sich ein Totwasser-gebiet mit Wirbelbildung.

30.1.4 Wirbelbildung (Beispiel: Kugel)

Am Ablösepunkt setzt eine Wirbelbildung ein. Bei laminarer Strömung wird der Körper zunächst völlig umströmt (schleichende Strömung in Abb. 30-1-7); dann beginnt bei dem Wert $Re \approx 1E3$ die Ablösung sehr früh und damit die Bildung eines großen Wirbelgebietes mit praktisch konstantem c_w -Wert ($=0,4$). Bei

$$Re_{krit} = w_\infty \cdot D / \nu = 3E5 \quad \text{mit } D = \text{Kugeldurchmesser}$$

fällt c_w fast schlagartig auf 0,08 ab. Es erfolgt ein Umschlag von laminarer zu turbulenter Grenzschicht; der Grenzschicht wird durch Turbulenz immer wieder Energie zugeführt, der Ablösepunkt "springt" weiter nach hinten und das Wirbelgebiet wird klein. Man kann mit einem Stolperdraht die spätere Ablösung erzwingen. Dieser Effekt ist in der Natur zu finden.

Z.B. ist die Haut eines Haies extrem strömungsgünstig. Sie ist mit Schuppen besetzt, die kleine Rinnen in Strömungsrichtung (Riblets) haben. Dadurch wird ein Anliegen der Grenzschicht erzwungen. Man versucht in der Technik, eine Sägezahnstruktur in selbstklebenden Vinyl-Folien (0,2 mm dick) nachzubilden. Damit wurden z.B. die Oberflächen von Flugzeugen beklebt. Dadurch wird zwar die Gesamtoberfläche erheblich vergrößert, der Luftwiderstand jedoch herabgesetzt und dadurch eine Brennstoffersparnis von 1 bis 2 % erreicht. Es laufen Versuche mit Airbus-Typen. Eine befriedigende Erklärung ist noch nicht erreicht. Einen ähnlichen Effekt kann man mit Abreißkanten erzwingen.

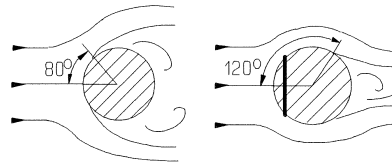


Abb. 30-1-9 Erzwungene Ablösung

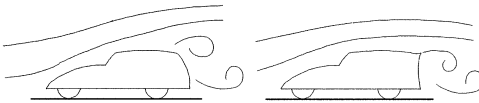


Abb. 30-1-10 Wirbelbildung am Fahrzeug

30.1.5 Kármánsche Wirbelstraße (hinter einem Zylinder)

Die Strömung rollt sich am Ablösepunkt ein und bildet Wirbel, die im Wechsel abschwimmen. Hinter umströmten Körpern bildet sich der Wirbel in der Mittellinie nach vorn laufend

aus, während bei einer Strömung aus einem Spalt in ein ruhendes Medium die Wirbel in der Mittellinie die Drehrichtung in der Strömungsrichtung haben. Die Ablösefrequenz kann mit der Strouhalzahl berechnet werden. Hinter einer Kugel bildet sich wegen der vollen Symmetrie eine alternierende Wirbelstraße nicht aus. Dagegen ist das Wirbelgebiet voll vorhanden.

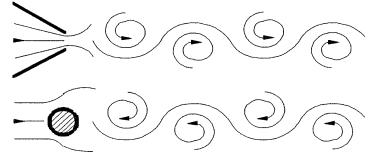


Abb.30-1-11 Kármánsche Wirbelstraße

30.1.6 Tragflügel und Selbsterregung

Durch Ablagerungen (Schmutz, Eis usw.) werden symmetrische Bauteile unrund und bilden für ein umströmendes Medium neue Bedingungen. Es werden Kräfte auftreten, die versuchen werden, das Bauteil aus der Null-Lage zu treiben.

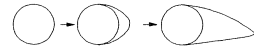


Abb.30-1-12 Entwicklung der Asymmetrie

Diesen Kräften werden die Federkräfte (Rückstellkräfte) des Bauteiles entgegen wirken. Damit wird sich ein Schwingungszustand einstellen. Durch die Strömungskräfte wird gleichzeitig die Geometrie der Strömung weiter verändert und die Schwingung verstärkt.

Potentialströmung, Zirkulation, Tragflügel

Ein angestellter Tragflügel wird nach der Potentialtheorie so umströmt, daß die Strömung bis zum hinteren Staupunkt fließt. Allgemein wird (falsch) behauptet, daß die Strömung die Ober- und Unterseite des Tragflügels in der gleichen Zeit umströmen muß. Nach Abb.30-1-8 wird die Strömung an der Hinterkante umgelenkt, diese plötzliche Richtungsänderung muß eine sehr große Beschleunigung hervorrufen. die Strömung wird dann bis zum hinteren Staupunkt S_h auf der Oberseite bis auf Null verzögert, sie löst sich ab. Es bildet sich der Anfahrwirbel, der mit der Strömung wegschwimmt. Da nach dem Satz von Thomson

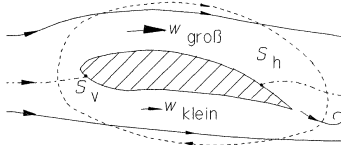


Abb.30-1-13 Tragflügel

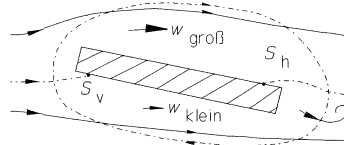


Abb.30-1-14 Angeströmte Platte

(Lord Kelvin) die Gesamtzirkulation konstant bleiben muß, bildet sich ein zweiter Wirbel, der im entgegengesetzten Sinn um die Tragfläche dreht. Durch die Reibung wird dieser Wirbel abgeschwächt, die Strömungsform nähert sich wieder der Potentialströmung an. Es lösen sich nun laufend kleine Wirbel ab, damit wird die Zirkulation ständig erneuert (Satz von Kutta-Joukowsky). An der Hinterkante bildet sich eine Wirbelfläche, die mit der Reibung den Strömungswiderstand ergibt. Mißt man die Druckverteilung am Tragflügel, so trägt der Überdruck auf der Unterseite nur etwa $1/3$ zum Auftrieb bei. Der Tragflügel hängt also an einem Unterdruckraum, der hauptsächlich durch die Zirkulation bewirkt wird. Es wirkt eine Kraft nahezu senkrecht zur Strömungsrichtung. Sie verstärkt die rückstellende Federkraft. Es wird eine Schwingung angefacht (Abb.3-3-5). Als Beispiel siehe die Tacoma-Brücke in Abb. 30-1-1. Diese Schwingungen sind in Kap. 28.3 und Beispiel zu Kap. 16 behandelt.

30.2 Meßtechnik

Sollen Schwingungen an Maschinen gemessen werden, so ist es erforderlich, entsprechende Methoden zu finden, mit denen man die Schwingungen registrieren kann. In Kap. 8.1 taucht in vielen Formeln die statische Durchbiegung f_D auf, die zur Bestimmung von Eigenkreisfrequenz und Resonanzstellen verwendet wird. Das bedeutet, daß man die Wege messen muß, die bei der Verformung auftreten. Bei der Messung sollte jedoch **immer mit möglichst geringem Aufwand genügend genau** gemessen werden. Eine zu hohe Meßgenauigkeit und/oder zu hoher Geräteaufwand kann dazu führen, daß Hintergrundsignale (Rauschen) die Meßergebnisse verfälschen. Es gibt viele Verfahren zur Messung von Schwingungen. Hier soll eine Einführung in die Meßtechnik erfolgen.

DMS = Dehnungsmeßstreifen

1843 fand der Physiker Wheatstone eine Brückenschaltung, bei der die Messung von elektrischen Widerständen im Vergleich zu bekannten Widerständen möglich war. Wird ein Draht von einem Strom durchflossen, so gibt es einen Widerstand, den man messen kann. Der Widerstand ändert sich, außer durch andere Größen, wenn sich der Querschnitt des Leiterdrahtes ändert. Genau das ist die Berührungsstelle zur Mechanik, denn wenn ein Stab (ein Leiterdraht) einer Zugspannung ausgesetzt ist, ändert er seinen Querschnitt. Damit gilt mit dem Hooke'schen Gesetz

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}; \quad (30-2-1)$$

darin ist σ die mechanische Spannung, ε die Dehnung, E der Elastizitätsmodul, $\Delta \ell$ die Längenänderung, ℓ_0 die Länge des unbelasteten Teiles. In der Elektrotechnik gilt für die Änderung eines Widerstandes ΔR

$$\frac{\Delta R}{R_0} = k \cdot \varepsilon \quad (30-2-2)$$

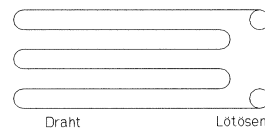


Abb. 30-2-1 Dehnmeßstreifen

Der Quotient ist also proportional der Dehnung ε mal einem Korrekturfaktor k , der als " k -Faktor" bezeichnet wird und vom Lieferanten eines DMS angegeben wird. So besteht über ε ein direkter Zusammenhang zwischen der Änderung eines elektrischen Widerstandes und der mechanischen Dehnung eines Drahtes. Klebt man einen Draht, der wegen seiner möglichst großen Länge nach Abb. 30-2-1 in "Schlangenlinien" gelegt und auf einer Folie aufgeklebt ist, auf ein Bauteil und verbindet den Draht an den Lötösen mit einer Stromquelle, so wird dieser Draht einen Widerstand aufweisen. Dieser Widerstand wird sich ändern, wenn das Bauteil belastet wird, da dann der Draht die Dehnung des Bauteiles mitmacht. Diese DMS bestehen heute im Normalfall nicht mehr aus Drähten, sondern werden aus geätzten Folien ähnlich einer gedruckten Schaltung hergestellt.

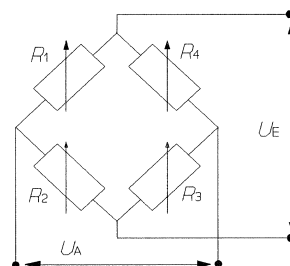


Abb. 30-2-2 Brücke

Es sind Leiterbahnen. Verbindet man nun vier dieser Widerstände nach *Abb. 30-2-2* und legt eine Eingangsspannung U_E an, so wird durch den rechten und den linken Zweig der gleiche Strom fließen, wenn die vier Widerstände gleich sind. Es liegt also in der Meßdiagonalen keine Differenzspannung U_A an. Das ändert sich, wenn mindestens einer der Widerstände eine Längenänderung erfährt, da sich dann auch sein Widerstand ändert. Dann zeigt ein Meßinstrument eine Ausgangsspannung U_A an, die von Null verschieden ist. Über die Kirchhofschen Gesetze für die Parallel- und Hintereinanderschaltung von Widerständen und die Maschenregel kommt man zu einer Gleichung, die hier nur vorgegeben wird:

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{k}{4} \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) . \quad (30-2-3)$$

Diese Gleichung sagt aus, daß bei bekannter Eingangsspannung U_E ein Ausgangssignal U_A erzeugt wird, wenn mindestens einer der vier Widerstände eine Dehnung ε erfährt. Dabei ist **Dehnung** = - **Stauchung**. Die Signale der einzelnen Widerstände sind bei gleicher Längenänderung gleich, jedoch werden bei Zugspannungen positive und bei Druckspannungen negative Vorzeichen der Signale auftreten. Das kann dazu führen, daß richtiger Applikation (Anordnung auf dem Bauteil und Verbindung der einzelnen Lötunkte) $4 \cdot \varepsilon$ und bei falscher Applikation $0 \cdot \varepsilon$ gemessen wird. Das soll an einem Beispiel gezeigt werden. Wichtig ist, daß die vorgegebene Numerierung der DMS beibehalten wird, und die DMS auch so verbunden werden, denn nur dann stimmen auch die Vorzeichen in der Gleichung (30-2-3). Bei dem Balken nach *Abb. 30-2-3* sind vier DMS appliziert. Zwei DMS befinden sich auf der Oberseite = Streckseite, zwei DMS befinden sich auf der Unterseite = Stauchseite. Die DMS1 und DMS3 werden auf Zug belastet und haben ein +Vorzeichen. Die DMS2 und DMS4 werden auf Druck belastet und haben ein -Vorzeichen. Da sie symmetrisch angeordnet sind, werden sie bei gleichem k -Faktor die gleichen Beträge in ε haben.

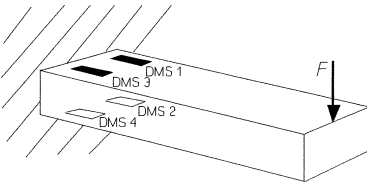


Abb. 30-2-3 Balken mit DMS

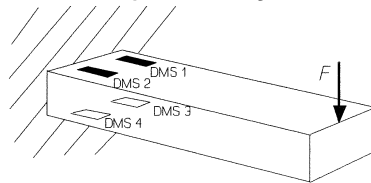


Abb. 30-2-4 Balken mit vertauschten DMS

Damit wird Gleichung (30-2-3) zu

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{k}{4} \cdot ((+)\varepsilon_1 - (-)\varepsilon_2 + (+)\varepsilon_3 - (-)\varepsilon_4) , \quad (30-2-4)$$

und mit den ausmultiplizierten Vorzeichen bei gleichem ε

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{k}{4} \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = \frac{4 \cdot k}{4} \cdot \varepsilon = k \cdot \varepsilon . \quad (30-2-5)$$

Das Ausgangssignal ist 4-fach verstärkt gegenüber dem ε , das ein einzelner DMS liefern würde. Man nennt den Faktor von k den Brückenfaktor B , in diesem Fall $B = 4$. Nun sollen die DMS an den gleichen Stellen aufgeklebt werden, jedoch sollen die Lötunkte in anderer

Weise verdrahtet werden. In *Abb. 30-2-4* sind die DMS in der Reihenfolge ihrer Numerierung verbunden. Es werden DMS1 und DMS2 auf Zug beansprucht und haben damit ein +Vorzeichen. DMS3 und DMS4 werden auf Druck beansprucht und haben damit ein -Vorzeichen. Für die Gleichungen nach (30-2-4) und (30-2-5) bedeutet das:

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{k}{4} \cdot ((+)e_1 - (+)e_2 + (-)e_3 - (-)e_4) , \quad (30-2-6)$$

die ε sind wieder gleich, jedoch die Vorzeichen bewirken:

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{k}{4} \cdot (+\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = \frac{k}{4} \cdot (0 \cdot \varepsilon) = 0 . \quad (30-2-7)$$

Das Meßgerät zeigt Null an, obwohl die Brücke belastet ist und sich die DMS an den gleichen Stellen befinden. Der Fehler liegt in der falschen Verdrahtung!

Man unterscheidet zwischen aktiven und passiven DMS. Eine Brücke muß immer vier Widerstände enthalten. DMS, die auf dem Werkstück angebracht sind und die Verformung messen, werden als aktive DMS bezeichnet. DMS, die zur Vervollständigung der Brücke dienen, werden als passive DMS bezeichnet. Ist z.B. die Meßstelle klein oder sind die Änderungen der Oberflächenspannung groß, so wird man nur einen DMS aufkleben. Dieser Fall wird wegen verschiedener Nachteile vermieden. Aus Kostengründen können zwei DMS auf dem Werkstück aufgebracht werden. Man sollte jedoch versuchen, vier DMS als aktive DMS auf dem Werkstück zu platzieren. Man unterscheidet:

Vollbrücke	4 aktive DMS
Halbbrücke	2 aktive DMS
Viertelbrücke	1 aktiver DMS

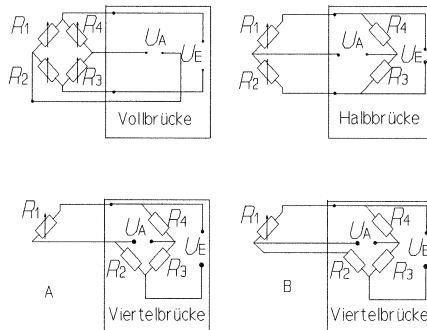


Abb. 30-2-5 Brückenschaltungen

Die Viertelbrücke in *Abb. 30-2-5* ist zweifach gezeichnet. Der Grund liegt in der **Kompensation von Leitungsfehlern**. Werden bei der Vollbrücke alle Kabel in den gleichen Abmessungen verwendet, dann wirken sie wie Vorwiderstände. Bei einem Brückenwiderstand $R_B = 120 \Omega$ beträgt der Empfindlichkeitsverlust der Brücke 6%, bei einem Brückenwiderstand $R_B = 600 \Omega$ beträgt der Empfindlichkeitsverlust 1.2%. Bei der Halbbrücke liegen die beiden Leitungen für U_E vor DMS1 und DMS2. Man kann sie als scheinbare Änderung des k -Faktors auffassen. Die Leitung für U_A hat schaltungsmäßig die gleiche Länge wie bei der Vollbrücke. Sie gehört praktisch zum Meßinstrument und ist für das Meßsignal selbst ohne Bedeutung. Anders ist es bei der Viertelbrücke, bei der auf dem Werkstück nur ein Meßstreifen als aktiver Streifen aufgebracht ist. Schaltet man in *Abb. 30-2-5* mit nur einer Leitung von DMS1 zurück zum Verstärker (Teilbild A), dann fließt durch diese Leitung gleichzeitig der Speisestrom und der Meßstrom. Durch das Trennen der Leitungen für U_A und U_E am Ausgang des DMS1 (Teilbild B) wird der Fehler behoben und

die Viertelbrücke leitungsmäßig auf eine Halbbrücke zurückgeführt. Bei der **Kompensation von Temperatureinflüssen** geht man von folgender Überlegung aus: Bei einer Vollbrücke unterliegen alle DMS der gleichen Erwärmung oder Abkühlung (sie sollten zumindest so appliziert sein). Damit erhalten die DMS bei Erwärmung (=Wärmedehnung) ein zusätzliches +Vorzeichen, bei Abkühlung ein -Vorzeichen. Bei einer Erwärmung werden alle DMS ein Wärmesignal $+\varepsilon_W$ zusätzlich zu ihrem Meßsignal ε_M erhalten. Dann ist mit (30-2-3) für eine Vollbrücke beim Biegebalken und gleichem Betrag des Meßsignales ε

$$\frac{U_A}{U_B} = \frac{k}{4} \cdot [(\varepsilon_M + \varepsilon_W)_1 - (-\varepsilon_M + \varepsilon_W)_2 + (\varepsilon_M + \varepsilon_W)_3 - (-\varepsilon_M + \varepsilon_W)_4] = \frac{k}{4} \cdot 4 \cdot \varepsilon_M \quad (30-2-8)$$

Der Einfluß der Wärmedehnung ist damit aufgehoben. Die Brücke hat sich selbst kompensiert. In der gleichen Weise arbeitet die Halbbrücke, nur ist dann der Brückenfaktor $B = 2$. Das Wärmesignal wird ebenfalls kompensiert.

Das Problem liegt bei der Viertelbrücke. Sie hat nur einen aktiven DMS. Darin liegt aber bereits die Antwort zur Lösung. Bringt man in unmittelbarer Nähe des aktiven DMS1 einen zweiten DMS2 an, der nur die Erwärmung, jedoch nicht die Belastung erfährt, dann kompensieren sich die ε_W der DMS1 und DMS2.

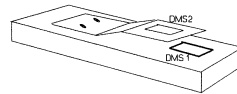


Abb. 30-2-6 Kompensation

Ein DMS zeigt nach (30-2-1) eine Längenänderung Δl an. Es kann durch entsprechenden Aufbau auch die Beschleunigung $\ddot{x}$ gemessen werden. Wird an einer Blattfeder, die einseitig eingespannt ist, am freien Ende eine Masse m angebracht, so wird bei einer Beschleunigung die Kraft $F_T = m \cdot \ddot{x}$ die Blattfeder biegen. Die Durchbiegung ist ein Maß für die Beschleunigung (siehe Kapitel Beispiele Aufgaben/Lösungen)

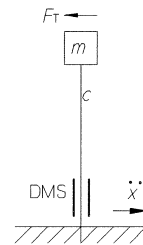


Abb. 30-2-7

Technische Daten

Material:

- Metallische DMS bestehen aus beschichteten Folien, die im Fotoätzverfahren in beliebigen Formen (für eine oder mehrere Achsen, als ebene Ringe oder anderen geometrischen Formen) hergestellt werden. Dicke 3 bis 5 μm .
- Draht-DMS bestehen aus Drähten. Dicke 15 bis 25 μm . Besonders für Längen > 20 mm. Sie wurden besonders in Betonbauteilen verwendet und dienten zur Dauerüberwachung. Allerdings werden sie heute nicht mehr hergestellt. Man verwendet nun zum Eingießen in Beton oder Asphalt gekapselte Folien-DMS von ca. 250 mm Länge und einer aktiven Meßlänge von ca. 90 mm.
- Halbleiter-DMS, die nach dem Piezo-Effekt arbeiten. Mechanische Beanspruchungen führen zu erheblichen Widerstandsveränderungen. (Gasanzünder arbeiten nach diesem Prinzip).

Meßkette

Der Aufbau einer vollständigen Meßanordnung wird als Meßkette bezeichnet. Sie besteht aus

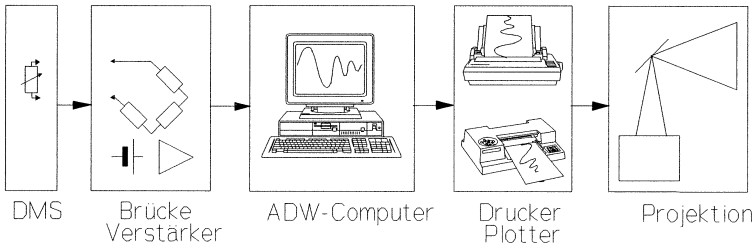


Abb. 30-2-8 Meßkette

1. **Meßwertaufnahme und Umformung:** Der Meßwert wird durch den Grad einer Veränderung einer mechanischen Größe (Längenänderung) und ihre Umwandlung in eine elektrische Größe (Widerstandsänderung) im DMS dargestellt.
2. Das Meßsignal wird in einem Meßverstärker verstärkt. Diese Baugruppe liefert die zur Messung erforderliche Spannung und enthält weitere Baugruppen zur Kompensation von Störgrößen. **Wichtig:** Der Vorteil der Vollbrücke liegt darin, daß das Signal bereits an der Meßstelle bis zum Brückenfaktor 4 verstärkt wird. Verstärkt man erst im Verstärker, so werden auch eingefangene Störsignale mit verstärkt.
3. Im Computer werden die Analogsignale in digitale Signale umgewandelt (AD-Wandler). Sie werden gespeichert und können durch entsprechende Programme ausgewertet werden.
4. Mit Drucker/Plotter können sie ausgegeben werden.
5. Über einen Flat-Screen können die Signale z.B. mit einem Tageslichtprojektor projiziert werden.

Induktive Geber

Wird eine Spule von einem zeitlich veränderlichen Strom durchflossen, so entsteht ein magnetisches Feld. Die Induktivität kann durch einen weichmagnetischen Kern verändert werden. Der Kern K sitzt auf einem Messingträger, der das Signal als veränderliche Länge x aufnimmt. Die erforderliche Speisespannung erhält der induktive Aufnehmer als Wechselspannung durch einen Trägerfrequenzmeßverstärker (TF).

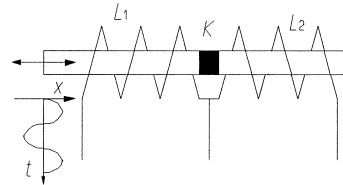


Abb. 30-2-9 Induktiver Tauchankerwandler, Differentialschaltung

Wie bei der Messung mit Dehnmeßstreifen wird die Schaltung zuerst abgeglichen, d.h. durch ein R- und C-Glied in dem Meßverstärker wird die Brückenausgangsspannung auf Null gesetzt. Durch die Längsbewegung des Kernes werden die Induktivitäten L1 und L2 verstimmt. Die nun vorhandene Brückenausgangsspannung ergibt eine Größe, die dem Weg (in Grenzen) proportional ist. Setzt man nun einen Operationsverstärker ein, der im Eingangskreis einen Kondensator und in der Rückführung einen Widerstand enthält, so erhält man eine Schaltung mit einem differenzierenden Verhalten, also einen **Differentiator**. Aus den Gleichungen, in denen $R \cdot C = T$ eine Zeitkonstante (Integrierzeit) ist,

$$U_1 = f(x), \quad (30-2-9)$$

$$U_2 = -C \cdot R \cdot \frac{\Delta U_1}{\Delta t} = f(\dot{x}) \quad (30-2-10)$$

$$U_3 = f(\ddot{x}). \quad (30-2-11)$$

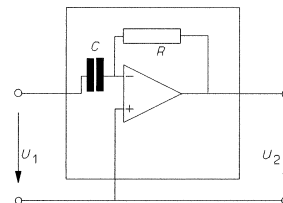


Abb. 30-2-10 Differentiator

folgt, daß die Spannung U_2 proportional der Geschwindigkeit ist (in Grenzen). In der gleichen Weise kann man einen weiteren Differentiator dahinterschalten und gewinnt so die Beschleunigung. Der Hinweis (in Grenzen) soll bedeuten, daß ein lineares Verhalten nur in einem von den verwendeten Meßaufnehmern vorgegebenen Bereich möglich ist.

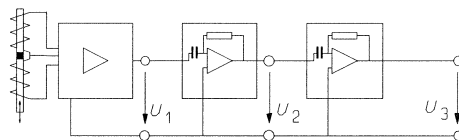


Abb. 30-2-11 Meßkette Differenziervverstärker

Bei der Wegaufnahme ist ein Festpunkt erforderlich, auf den sich der gemessene Weg bezieht (siehe Kap. 25.7). Will man z.B. in Fahrzeugen die Geschwindigkeiten oder Wege messen, so wird zunächst die Beschleunigung gemessen. Durch Änderung der Schaltung wird ein **Integrator** aufgebaut. Durch Umkehrung von (30-2-10) ist

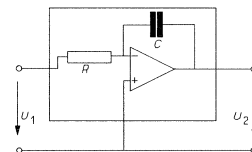


Abb. 30-2-12 Integrator

$$|U_1| = R \cdot C \cdot \frac{\Delta U_2}{\Delta t} , \quad (30-2-12)$$

$$U_1 = f(\ddot{x}) . \quad (30-2-13)$$

Die Messung erfolgt nach Kap. 25.7 und Abb. 30-2-12 durch Aufnahme der Beschleunigung. Dabei bestehen zwischen Beschleunigung und Weg die Beziehungen

$$F_T = m \cdot \ddot{x} ; \quad F_F = c \cdot x , \quad (30-2-14)$$

$$x = \frac{m}{c} \cdot \ddot{x} . \quad (30-2-15)$$

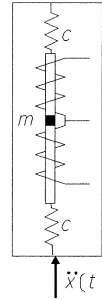


Abb. 30-2-13 Beschleunigungsaufnehmer

Die genauen Zusammenhänge der einzelnen Gleichungen finden sich in der Literatur der Elektronischen Schaltungen. Die von den Herstellern der Meßbrücken, DMS und induktiven Gebern erstellten Geräte ersparen dem Konstrukteur den Einzelaufbau.

Die induktiven Aufnehmer lassen auch eine berührungsfreie Messung zu, wenn das Werkstück selbst zum Geber wird. So lassen sich z.B. Schwingungen von Wellen oder Balken berührungsfrei messen.



Abb. 30-2-14 Berührungsfreie Aufnahme

30.3 Ordnung und Chaos

In der praktischen Meßtechnik tritt häufig der Fall ein, daß in einer Meßaufzeichnung Signale auftauchen, die nicht erwartet werden und auch nicht vorausberechenbar sind. Manchmal kann eine kleine Änderung der Meßanordnung, z.B. eine Änderung in der Position der gleichen Meßgeräte, der gleichen Aufnehmer usw. diese Störungen eliminieren oder auch verstärken. Da nun von der Mechanik her mit Abstraktionen gearbeitet wird, ist es schwierig, Formeln auf den wirklichen Fall in der richtigen Weise anzuwenden. Selbst einfache Taschenrechner bieten bei Berechnungen 8 bis 10 Stellen im Display an, obwohl bei einem Bauteil z.B. die Lage der Wirkungslinie einer Kraft nicht so genau angegeben werden kann. Es soll daher in diesem Kapitel an einem Beispiel, das häufig in der Literatur der Chaostheorie verwendet wird, gezeigt werden, wie schnell selbst geringfügige Änderungen zu einem Resultat in der "Ordnung" oder im "Chaos" führen.

Das Beispiel soll das Verhalten einer Menge zeigen, die anwachsen kann, wobei sie jedoch eine vorgegebene Grenze nicht überschreiten soll. Dabei soll der jeweils berechnete Wert als Startwert für die folgende Berechnung genommen werden (Iteration). Nimmt man die einfachste Form

$$x_{n+1} = a \cdot x_n, \quad (30-3-1)$$

so wird sich mit einem Wert $a = 2$, einem Startwert für $x_0 = 0,001$ und der Bedingung, daß $x_n \leq 1$ sein soll, eine Folge von 0,001; 0,002; 0,004; 0,008; 0,016; 0,032; 0,064; 0,128; 0,256; 0,512 ergeben. Dann ist die Folge beendet, denn der nächste Wert ist 1,024 und damit oberhalb der vorgegebenen Grenze. Diese Schreibweise ist nur eine andere Form für

$$b \cdot a^t \quad \text{für} \quad a = 2; \quad 0 \leq t \leq 9; \quad b = 0,001. \quad (30-3-2)$$

Der Faktor a wird nach einem Wissenschaftler, der das Wachstum von Populationen untersuchte, als Malthus-Faktor bezeichnet. Nun wird aber das Wachstum nicht steigen und an der Grenze plötzlich abbrechen. Verhulst hat dann den Faktor erweitert, so daß verhindert wird, daß der zur Verfügung stehende Bereich überschritten wird.

Wenn der zur Verfügung stehende Raum die Größe 1 hat und die vorhandene Menge x ist, dann hat der noch freie Raum die Größe $(1-x)$. Hierbei kann es hilfreich sein, 1 als 100% zu deuten.

$$x_{n+1} = a \cdot x_n \cdot (1 - x_n). \quad (30-3-3)$$

Stellt man den zweiten Teil der Formel als $y = x \cdot (1-x)$ dar, so erhält man die Parabel Abb. 30-3-1, die das Maximum 0,25 hat. Damit kann a als größten Wert nur 4 annehmen, wenn die Bedingung erfüllt sein soll, daß der Bereich nicht größer als 1 sein darf.

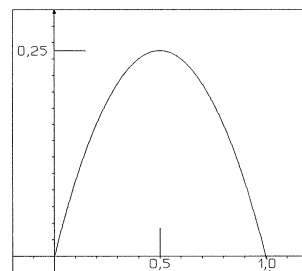


Abb. 30-3-1 Maximum $x \cdot (1-x)$

Beginnt man nun mit den gleichen Bedingungen wie für (30-3-1), dann wird sehr schnell der Wert $x_n = 0,5$ erreicht. Nun kann für a ebenso ein anderer Wert eingesetzt werden. Und nun treten die Besonderheiten dieser Formel auf.

Ist $0 < a \leq 1$, wird x_n gegen 0 gehen. Ist $1 < a \leq 2$, so wird sich ein fester Wert einstellen, der bei $a = 2$ und $x_0 = 0,001$ gleich 0,5 ist. Bei größeren Werten für a (Bedingung $a < 4$) wird sich das Bild völlig verändern. Für die verschiedenen Werte für a sind die Werte für x auf der nächsten Seite in der Tabelle dargestellt. In der Abb. 30-3-2 ist zur Ebene B senkrecht die Ebene A mit den konstanten a -Werten gestellt. Sie entsprechen den Abb. 30-3-3 bis Abb. 30-3-18.

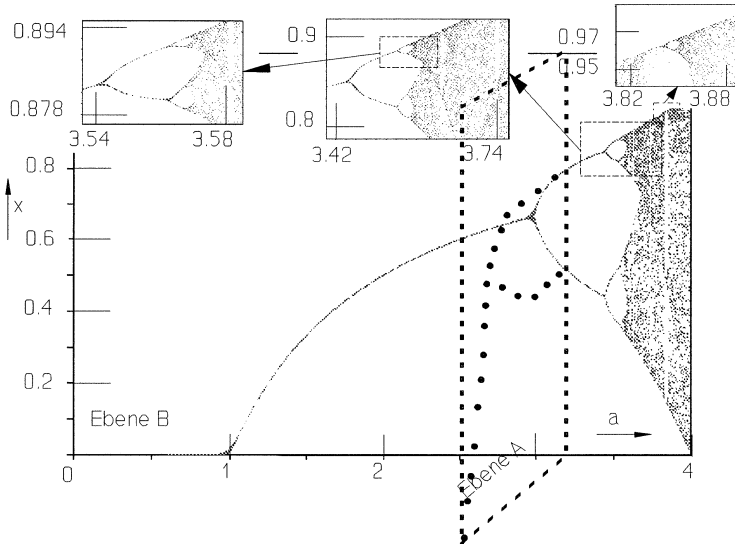


Abb. 30-3-2 Periodenverdopplungen

Während sich zunächst ohne Schwingung ein Gleichgewicht einstellt (Abb. 30-3-3 und 30-3-4), zeigt sich in der Anfangsphase in Abb. 30-3-5 und Abb. 30-3-6 eine Schwingung, bis sich der Zustand in einem Wert stabilisiert, der einem Attraktor entspricht. In Abb. 30-3-7 und Abb. 30-3-8 stellen sich zwei Werte ein, also zwei Attraktoren, zwischen denen das System schwingt. Das entspricht der in Abb. 30-3-2 dargestellten Schnitthlinie der Ebenen A und B. In Abb. 30-3-9 und Abb. 30-3-10 stellt sich nach der Verdoppelung ein 4-Zyklus ein, der besser in Abb. 30-3-10 zu erkennen ist. Danach folgt wiederum eine Periodenverdopplung. Schließlich wird das System in ein chaotisches Verhalten umschlagen. Die Abb. 30-3-13 und Abb. 30-3-14 zeigen das deutlich, in Abb. 30-3-2 ist es der Raum mit den berechneten Punkten. In diesem chaotischen Raum treten nun Fenster auf, die ein geordnetes Verhalten erkennen lassen. Das ist z.B. in Abb. 30-3-15 und Abb. 30-3-16 der Fall, wo nach einem chaotischen Beginn eine Ordnung in System einsetzt. Es entsteht ein 3-Zyklus, dessen mittlerer Teil eine verkleinerte Darstellung des Anfanges ist. Das System ist

selbstähnlich. Eine geringfügige Vergrößerung von a führt dann wieder zu chaotischen Verhalten (Abb. 30-3-17 und Abb. 30-3-18). Die Periodenverdopplung wird auch als Bifurcation bezeichnet (lat. bi als Vorsatz = zweifach, furca = Gabel).

Führt man an einer durch eine Fliehkraft belasteten Welle Messungen durch (Kap. 18), so erhält man die kritische Drehzahl, bei der Resonanz auftritt. Verdoppelt man die Drehzahl, so zeigt der Versuch wiederum eine Resonanzstelle.

Bei Untersuchungen von Herzrhythmusstörungen ist Ärzten aufgefallen, daß es bei der Erhöhung der Herzfrequenz zu Kammerflimmern kommt und daß hierbei die Periodenverdopplung eine wesentliche Rolle spielt.

Tabelle der Werte (Startwert $x = 0.001$)

i	$a = 1.9$	$a = 2$	$a = 2.9$	$a = 3.1$	$a = 3.5$	$a = 3.7$
1	0.001898	0.001998	0.002897	0.003097	0.003497	0.003696
2	0.003599	0.003988	0.008377	0.009571	0.012195	0.013626
3	0.006814	0.007944	0.024091	0.029385	0.042162	0.049728
4	0.012859	0.015762	0.006818	0.088417	0.141345	0.174845
5	0.024118	0.031028	0.18424	0.249858	0.424783	0.533815
6	0.044720	0.060113	0.435857	0.581030	0.855198	0.920769
7	0.008117	0.113028	0.713069	0.754645	0.433420	0.269927
8	0.141702	0.200506	0.593345	0.573982	0.859485	0.729146
9	0.231083	0.320606	0.699731	0.758033	0.422697	0.730721
10	0.337599	0.435636	0.609311	0.568599	0.854085	0.728041
11	0.424889	0.491715	0.690348	0.760412	0.436183	0.732590
12	0.464281	0.499863	0.619926	0.564776	0.860746	0.724837
13	0.472576	0.5	0.683291	0.761993	0.419518	0.737959
14	0.473571	0.5	0.627572	0.562215	0.852329	0.715489
15	0.473673	0.5	0.677803	0.763001	0.440524	0.753189
16	0.473683	0.5	0.633319	0.560575	0.862619	0.687781
17	0.473684	0.5	0.673455	0.763625	0.414776	0.794486
18	0.473684	0.5	0.637748	0.559556	0.849579	0.604128
19	0.473684	0.5	0.669974	0.764005	0.447280	0.884883
20	0.473684	0.5	0.641216	0.558935	0.865272	0.376902

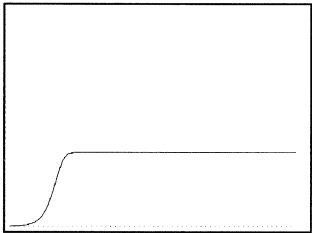


Abb. 30-3-3 $a = 1,9$

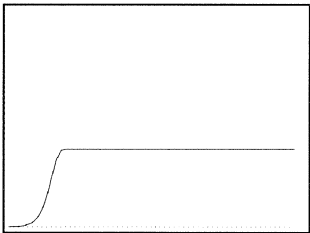


Abb. 30-3-4 $a = 2,0$

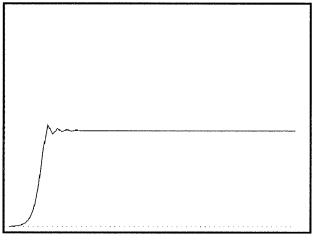


Abb. 30-3-5 $a = 2,6$

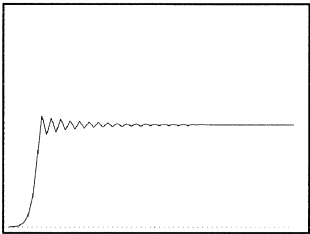


Abb. 30-3-6 $a = 2,9$

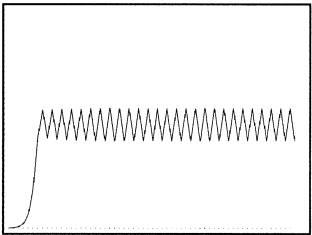


Abb. 30-3-7 $a = 3,1$

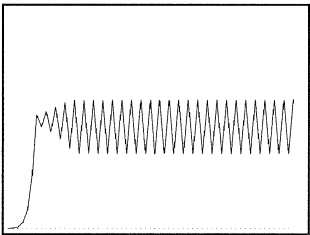


Abb. 30-3-8 $a = 3,3$

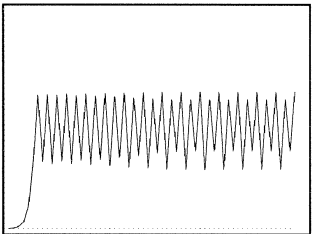


Abb. 30-3-9 $a = 3,5$

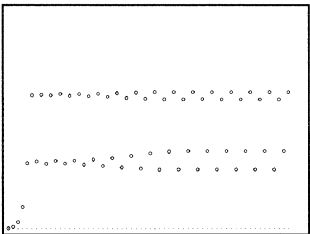


Abb. 30-3-10 $a = 3,5$

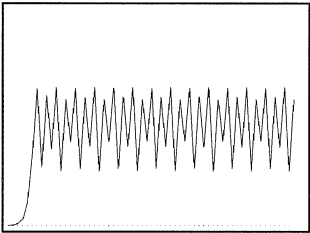


Abb. 30-3-11 $a = 3,55$

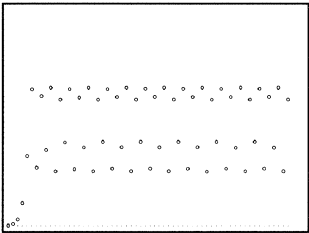


Abb. 30-3-12 $a = 3,55$

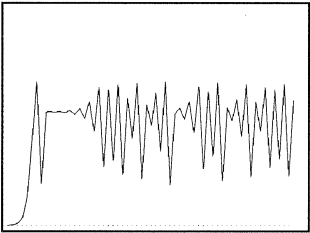


Abb. 30-3-13 $a = 3,7$

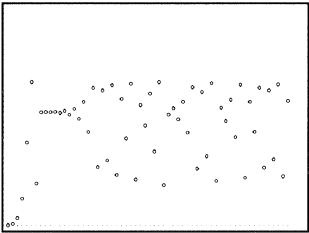


Abb. 30-3-14 $a = 3,7$

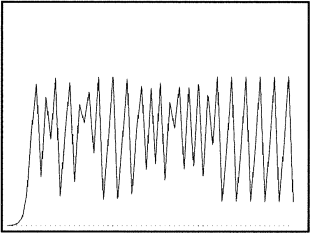


Abb. 30-3-15 $a = 3,83$

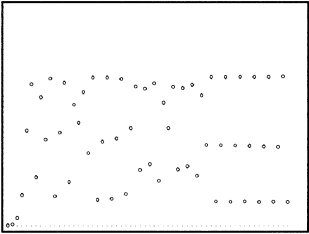


Abb. 30-3-16 $a = 3,83$

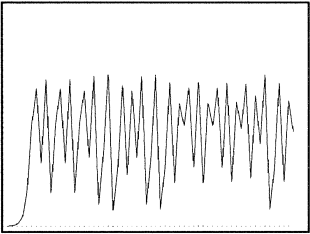


Abb. 30-3-17 $a = 3,9$

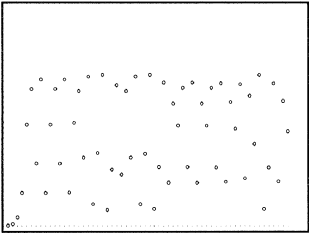


Abb. 30-3-18 $a = 3,9$

In dem Kapitel Beispiele ist in Kap. 25.3, Beispiel 2 und 3, ein Versuchsstand beschrieben, bei dem eine durch eine Masse m belastete Welle hochgefahren wird. Beim Hochfahren wird das Diagramm aufgenommen. In den beiden unteren Bildern ist jeweils ein Ausschnitt vergrößert. Die linke Abbildung ist aus der ersten Resonanzstelle, die rechte Abbildung aus der zweiten Resonanzstelle. Untersucht man die Resonanzdrehzahlen, so stellt sich heraus, daß bei den gewählten Ausschnitten das Drehzahlverhältnis bei 2,22 liegt.

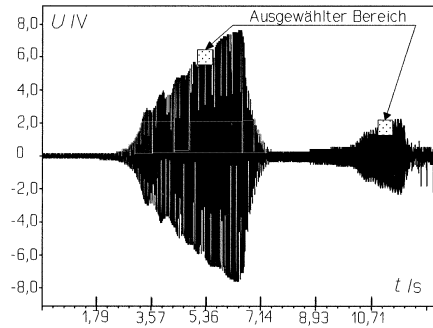


Abb. 30-3-19 Aufnahme eines Biegeschwingers

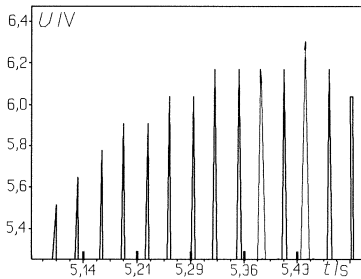


Abb. 30-3-20 Ausschnitt links

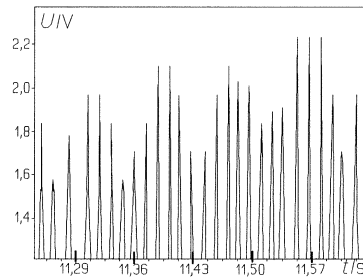


Abb. 30-3-21 Ausschnitt rechts

Für den Ausdruck auf ein DIN A4 Blatt ergeben sich die folgenden Werte

41,5 mm $\Rightarrow (5,43-5,14)$ s;
 1 mm $\Rightarrow 0,00699$ s;
 13 Schwingungen $\Rightarrow 58,5$ mm;
 1 Schwingung $\Rightarrow 4,5$ mm;
 $T = 0,031455$ s; $\omega_d = 199,75$ 1/s;
 $f = 31,79$ 1/s;
 $n = 1907$ 1/min

44,5 mm $\Rightarrow (11,57-11,29)$ s;
 1 mm $\Rightarrow 0,00629$ s;
 26 Schwingungen $\Rightarrow 58,5$ mm;
 1 Schwingung $\Rightarrow 2,25$ mm;
 $T = 0,01415$ s; $\omega_d = 444,04$ 1/s;
 $f = 70,65$ 1/s;
 $n = 4239$ 1/min.

30.4 Frequenzen und Wellen

Schwingungen bestimmen unsere Welt. Je nach ihren Frequenzen treten sie für uns in jeweils anderer Form in Erscheinung. Den größten Teil können wir nur als Signale messen. Aus dem ganzen Spektrum ist für uns mit Auge und Ohr nur ein ganz geringer Bereich unmittelbar wahrzunehmen.

Aber auch der nicht als Schall und Licht erkannte Teil wird ebenfalls vom Körper empfangen und ruft Reaktionen hervor, über deren Wirkungen kaum etwas bekannt ist. So laufen Maschinen in einem Bereich, der in der Ordnung der Gehirnwellen liegt. Die Frequenz des Versorgungsnetzes liegt mit 50 Hz (entsprechend 3000 1/min) nur knapp oberhalb der Betawellen der Gehirnströme. Darauf wird in diesem Kapitel noch eingegangen. Die Meinungen über den Einfluß auf Lebewesen sind zahlreich und häufig auch kontrovers. Das ist jedoch durch die Natur des Themas bedingt.

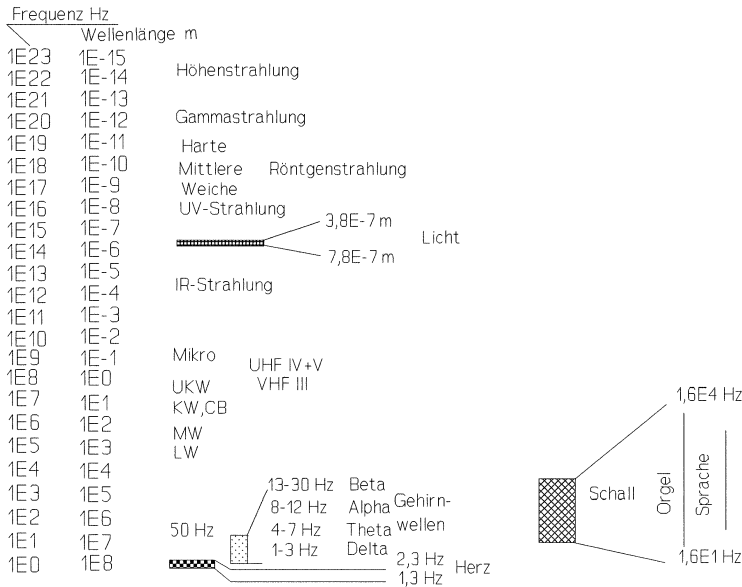


Abb. 30-4-1 Frequenz und Wellenlänge

In dieser Tabelle sind Schwingungen besonderer Art nicht enthalten. Als Beispiele sollen noch angeführt werden: Erdbeben und Bodenschwingungen, (siehe hierzu Kap. 30.5 Erdbeben und Schwingungen), Brandungswellen mit $1E-3$ bis $1,5E1$ Hz (die Brandung der

Nordsee ist noch in der Schweiz gemessen worden). Gezeitenwellen (auch auf dem Festland: der Kölner Domplatz hat eine Gezeitenamplitude von etwa 0,5 m).

Es gibt für die **Ausbreitung von Wellen** zwei Grundformen. Pflanzen sich mechanische Störungen in einem elastischen Medium fort, so nennt man sie elastische Wellen. Ein veränderliches elektromagnetisches Feld sendet elektromagnetische Wellen aus.

a. Bei der elastischen Schwingung unterscheidet man

1. Longitudinalwellen (nach DIN 1311-4) sind elastische Wellen, bei denen die Teilchen in Laufrichtung schwingen. Bei diesen Wellen treten im Medium Volumenänderungen auf, d.h. die Medien sind Festkörper, Flüssigkeiten und Gase.
2. Transversalwellen (nach DIN 1311-4) sind elastische Wellen, bei denen die Teilchen quer zur Laufrichtung schwingen. Sie treten in festen Körpern auf, d.h. bei Medien, die Scherkräfte aufnehmen können.
3. Sonderform: Oberflächenwellen (nach DIN 1311-4) treten in der Trennfläche zwischen zwei Medien (Luft/Wasser) auf. Es ist die Verbindung von Transversal- und Longitudinalwellen. Bestimmend sind Oberflächenspannung und Schwerkraft. Stichwort in der Strömungslehre: Froudezahl $Fr = v/\sqrt{\ell \cdot g}$ mit v = charakteristische Geschwindigkeit, ℓ = charakteristische Länge (DIN 1304-5 in ISO 31-12).

- b. Elektromagnetische Wellen (nach DIN 1311-4) sind Transversalwellen. Existiert nur eine Frequenz, so nennt man die Welle monochromatisch. Überlagert man monochromatische Wellen verschiedener Frequenz, so entstehen panchromatische Wellen. Elektromagnetische Wellen schwingen in einer Fläche. Ist die Fläche eine Ebene, so ist die Schwingung linear polarisiert. Ist diese Fläche schraubenförmig gedreht, so ist die Schwingung zirkular (kreisförmig) bzw. elliptisch polarisiert. Mit diesem Effekt werden in der Spannungsoptik mechanische Spannungen in Bauteilen dargestellt und ermittelt. Das Spektrum der elektromagnetischen Wellen zeigt Abb. 30-4-1. Sie sind im allgemeinen nicht monochromatisch.

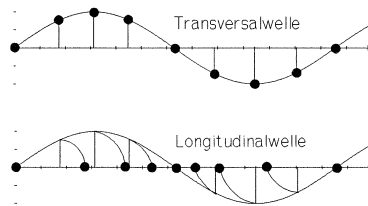


Abb. 30-4-2 Schwingungsrichtung der Wellen

Bemerkungen zu der Frequenztafel:

Herzfrequenz: Die normale Frequenz liegt beim Menschen bei 80 Schlägen /min. Streß (positiver (Sport) bzw. negativer Streß) wird die Frequenz in die Höhe treiben, wobei bei jüngeren Menschen die Grenze erheblich höher als bei älteren Menschen liegt. Werte werden mit Absicht nicht angegeben.

Gehirnwellen: Deltawellen treten im Tiefschlaf (traumlos), in Trance und Tiefenhypnose auf. Thetawellen treten im Schlaf und tiefer Meditation auf. Traum, Unterbewußtsein ohne Einfluß des Denkens sind typisch. Alphawellen kennzeichnen den entspannten Zustand, die Stimmung ist positiv. Man versucht durch technische Hilfen (Töne und Bilder) diesen Zustand zu erreichen. Das Rauschen ruhiger Brandung liegt in dieser Frequenz. Betawellen treten in voller Bereitschaft auf, die Wahrnehmung ist gespannt, Unruhe und Streß ist offen

oder verdeckt vorhanden. Die Reaktionen sind auf die Umwelt gerichtet. Vergleicht man den Frequenzbereich der Herzwellen mit dem Bereich der Delta-Gehirnwellen, so scheint die Erklärung für die Tatsache nahezuliegen, daß man Kleinkinder beruhigen kann, indem man sie in den Arm nimmt und sie so den Herzschlag in der Delta-Frequenz wahrnehmen können, den sie neun Monate in ihrer geschützten Sicherheit vernommen haben. Andererseits kann durch Schall im Beta-Frequenzbereich die Bereitschaft zu Emotionen gesteigert werden. Beim Disco-Techno wird mit 150-280 bpm (Bässe bis 700 bpm) gearbeitet (bpm = beats pro minute).

Schall: Das Hören ist stark altersabhängig. Sieht man von Schädigungen ab, so können junge Menschen bis 18 kHz hören, im Alter von 60 Jahren sinkt der Wert auf 6 kHz, wobei die Wahrnehmung noch von der Lautstärke abhängig ist und schon bei 1 kHz absinken kann. Die Geschwindigkeit der Schallwelle ist $c = \sqrt{E/\rho}$ m/s und damit abhängig vom Medium

Stahl	5000 m/s	Wasser	1500 m/s
Mauerwerk	3500 m/s	Luft	331,6 m/s (0°C)

Für Wellen im Boden siehe Kap. 30.5 Erdbeben.

Ultraschall: Bereich 2E4 bis 1E13 Hz. Wegen der kleinen Wellenlänge hat die Ultraschallwelle Eigenschaften wie das Licht: es bildet einen Strahl, reflektiert an Oberflächen (Auffinden von Rissen im Material, Ortung durch Sonar) und läßt sich focussieren. Sie wird in Gasen stark, in Flüssigkeiten wenig absorbiert. Die Energie ist hoch, beim Auftreffen auf Körper kommt es zur Erwärmung, die zur Bildung von Dampfblasen in kleinen Hohlräumen führt. Wie bei der Kavitation wird dabei das Material zerstört (zerrissen). Benutzt wird der Effekt beim Bohren und Schleifen in besonders harten Stoffen und Legierungen.

Stark zugenommen hat die Verwendung der Ultraschallwellen in der Medizin zur Diagnostik bei der Untersuchung der inneren Organe (siehe ersten Teil dieses Absatzes).

Infrarotstrahlung wird als Wärmestrahlung wahrgenommen.

UV-Strahlung zerstört bei längerer Einwirkung Zellmasse. Die Ozonschicht kann UV-Strahlung teilweise absorbieren, die Zerstörung der Ozonschicht bedeutet daher eine Gefahr.

30.5 Erdbeben und Schwingungen

Am 13. April 1992 wurde die Bevölkerung im Rheintal um 3²⁰ h recht unsanft daran erinnert, daß der feste Boden doch nicht so fest ist. Die Schlagzeilen des nächsten Tages lauteten übereinstimmend: **Die Erde bebte, Panik, Angst und Schrecken.** Nach den bisherigen Erkenntnissen hatte ein Erdbeben der Magnitude 5,9 (Richter-Skala) mit dem Herd 4 km südwestlich von der niederländischen Stadt Roermond nahe der deutschen Grenze ein Erdbeben ausgelöst, dessen Erschütterungen noch in Berlin, München und London zu spüren waren. Es war seit 1756 das stärkste Beben in der niederrheinischen Bucht. Viele Menschen verließen in Panik die schwankenden Häuser. Trotzdem waren die Schäden gering, die Menschen erlitten, im Vergleich zu den Opfern, die das Erdbeben vom 29.02.1960 in Agadir/Marokko (geschätzte Zahl der Todesopfer 10 000 bis 15 000) forderte, obwohl es auf der Richter-Skala von der gleichen Größe (5,8) war. Im Kernkraftwerk in Biblis schalteten die Instrumente den Block A ab, weil die eingestellten Grenzwerte überschritten wurden, nach Überprüfen des Bauwerkes auf Schäden wurde nach einer Woche der Betrieb wieder aufgenommen. In Abb. 30-5-1 und Abb. 30-5-2 bedeuten die Abkürzungen der Städte: H - Hannover, B - Biblis. In Abb. 30-5-2: AC - Aachen, AL - Altenberg, D - Düsseldorf, DÜ - Düren, DU - Duisburg, E - Essen, EU - Euskirchen, H - Hückelhoven, J - Jülich, K - Köln, KR - Krefeld, L - Lüttich, SP - Spa, MG - Mönchengladbach, R - Roermond, RO - Rolandseck. UTM = Universale transverse Mercatorprojektion.

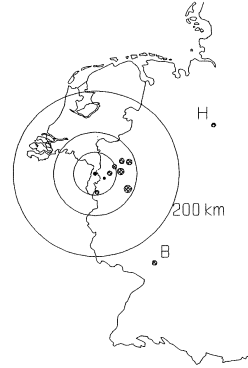


Abb. 30-5-1 Erdbebenherd

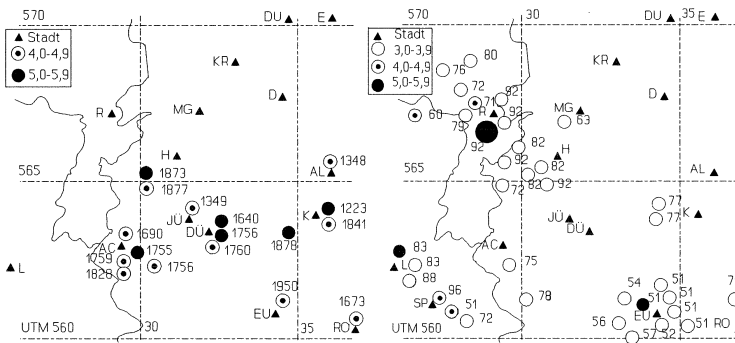


Abb. 30-5-2 Erdbeben aus historischer Zeit

Erdbeben seit 1951 (z.B. 96 $\hat{=}$ 1996)

Bei den Beben bis 1873 liegen die Angaben nur in der Intensität (subjektiver Eindruck) vor, sie sind zum besseren Vergleich als Magnitude angegeben, obwohl eine genaue "Umrechnung" nicht existiert. Sie sind von verschiedenen Autoren aus alten Handschriften (z.B. Klosterbüchern) zusammengestellt worden

Ursachen

Die Erdkruste kann als ein relativ fester Körper angesehen werden. Sie "schwimmt" auf dem Erdmantel, dessen oberer Teil noch eine hohe Viskosität hat. Die Dicke der Kruste liegt bei den Kontinenten bei 50 ± 20 km und bei den Ozeanen bei 12 ± 2 km. Das sind im Durchschnitt 0,5% vom Erdradius. Wie die Hydrostatik zeigt, taucht ein schwimmender Körper entsprechend seinem Auftrieb verschieden tief ein. Gebirgsmassen haben daher nicht nur nach oben ein wesentlich größeres Volumen. Wegener zeigte, daß die Kontinente driften. So treiben Europa und Nordamerika auseinander, der Bruch läuft durch den Nordatlantik, dort ist die Dicke der Kruste gering, sie reißt auseinander. Diese Verschiebungen gibt es auf der ganzen Erdoberfläche. Dabei werden Schollen auseinander driften (z.B. Nordamerika-Europa, Südamerika-Afrika). Gleichzeitig werden Schollen aufeinander zu driften (Afrika-Europa $\Rightarrow$ Auffaltung der Alpen usw., Indien-Asien $\Rightarrow$ Auffaltung des Himalajas). Diese Bewegungen erfassen auch den oberen Teil des Erdmantels. Kruste und oberer Erdmantel werden als Lithosphäre und ihre Bewegung als Tektonik bezeichnet.

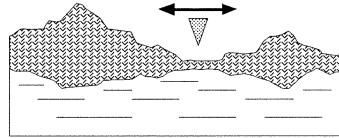


Abb. 30-5-3 "Hydrostatik" der Oberfläche

Bewegen sich zwei Schollen auseinander, so werden Brüche entstehen, bei denen es zu Absenkungen kommt. Dabei werden sich die Platten nicht nur auseinander bewegen, sondern sich entlang des Bruches verschieben. Ist die Bruchstelle sehr dünn, so wird "flüssiges" Gestein austreten (Mittelatlantik), ist die Bruchstelle stärker, so kommt es zu gewaltigen Stauungen. Diese Spannungen werden so lange zunehmen, bis die maximale Grenze der Haftreibung überschritten wird und die Gleitreibung einsetzt (vergleiche Kap. 29 - Coulomb'sche Reibung). Die freiwerdende Energien werden dabei zum Teil als elastische Wellen abgestrahlt und treten an der Erdoberfläche als Erdbeben auf. Diese seismische Bodenbewegung hat unmittelbare Auswirkungen auf Bauwerke und Fundamente.

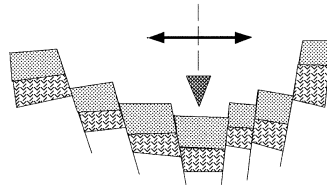


Abb. 30-5-4 Grabenbruch

Verlauf

Am 13. April 1992 kam es im Rurtal-Graben etwa 4 km südwestlich von der niederländischen Grenzstadt Roermond zu einem Erdbeben der Magnitude 5,9 (Richterskala). (Abb. 30-5-5 (R)). Das Beben dauerte 15 s, der Herd lag in 18 km Tiefe. Die anschließenden Nachbeben dauerten bis gegen 6 Uhr. Es folgten fast genau 24 Stunden später, am 14. April

1992 zwei Nachbeben um 3⁰⁶ h mit der Stärke 3,9 und um 3³⁶ h mit der Stärke 2,9 mit dem Herd bei Hückelhoven (Abb. 30-5-5 (H)). In der Abb. 30-5-5 sind die Meßstationen eingezeichnet, von denen die Abb. 30-5-15 bis Abb. 30-5-19 stammen. Es sind ▲ 1 WAS = Wassenberg, ▲ 2 GSH Großhau bei Hürtgen, ▲ 3 OLF Olefalsperre. (Die Abb. 30-5-15 bis Abb. 30-5-19 wurden mit freundlicher Genehmigung des Geologischen Landesamtes Nordrhein-Westfalen, Krefeld, wiedergegeben).

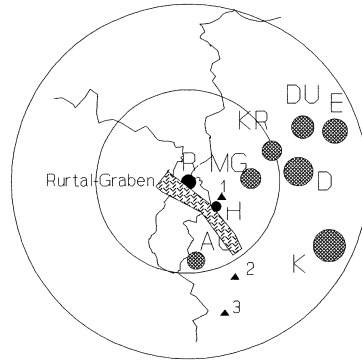


Abb. 30-5-5 Rurtal-Graben

Das Beben kam völlig unerwartet, es gab keine Vorbeben. Andererseits wäre eine Warnung an die Bevölkerung kaum möglich gewesen, weil die Laufzeiten der Erdbebenwellen im Sekundenbereich liegen. Die Abb. 30-5-18 und Abb. 30-5-19 zeigen, daß von dem ersten Auftreten der Primärwellen bis zum Eintreffen der Sekundärwellen nur etwa 8 s vergingen. Die geringen Amplituden der P-Wellen können bereits durch Tiere wahrgenommen werden. Versäumt wurde eine Information über den Rundfunk, die ersten Meldungen kamen erst um 4^h. Da die Telefonnetze durch Überlastung praktisch zusammenbrachen, waren zunächst keine Informationen vorhanden.

Vom Herd gehen gleichzeitig die Wellen aus. Wie im Kap. 30.4 gezeigt, werden in elastischen Medien zwei Formen auftreten, die Longitudinalwellen und die Transversalwellen. Die Laufzeiten sind verschieden. Es treffen an der Oberfläche zunächst die Longitudinalwellen (P $\Rightarrow$ Primärwellen) auf. Auf diese folgen die Transversalwellen (S $\Rightarrow$ Sekundärwellen). Da die P-Wellen auch den Schall erzeugen, ist das Beben als dumpfes Grollen zu hören, wobei mit der Entfernung vom Zentrum die höheren Frequenzen stärker gedämpft werden. An der Oberfläche breiten sich dann noch die Love-Wellen und Rayleigh-Wellen aus, die nach den S-Wellen auftreten und die durch ihre hohen Amplituden Bauwerke besonders gefährden können. Als Maß für ein Erdbeben wird meist die Richterskala genannt, die eine logarithmische Teilung hat und sich zunächst auf einen in den USA weitverbreiteten Seismographen bezog. Dabei konnten auch noch in großen Entfernungen die Erdbeben bestimmt werden. Es wird dabei mit einer Magnitude gearbeitet, die sich auf die von diesem Seismographentyp aufgezeichneten Amplituden bezieht. Mit einer Formel wird umgerechnet und der Abstand von einer Magnitude zur nächsten Magnitude bezeichnet eine Änderung der Energie um etwa das 30-fache. Andere Skalen sind die ältere Mercalli-Sieberg-Skala, die zur heutigen 12-teiligen Medvedev-Sponheuer-Karnik-Skala (MSK-64-Skala) -von 1964- entwickelt wurde. Diese Skala beschreibt die Intensität eines Bebens. Danach wäre das Beben auf der MSK-64-Skala in der Intensität VII (Risse im Verputz,

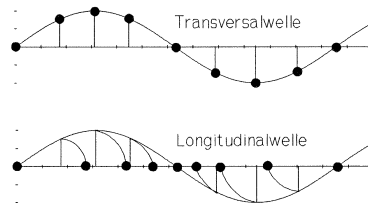


Abb. 30-5-6 P-Wellen = Longitudinalwellen
S-Wellen = Transversalwellen

Es wird dabei mit einer Magnitude gearbeitet, die sich auf die von diesem Seismographentyp aufgezeichneten Amplituden bezieht. Mit einer Formel wird umgerechnet und der Abstand von einer Magnitude zur nächsten Magnitude bezeichnet eine Änderung der Energie um etwa das 30-fache. Andere Skalen sind die ältere Mercalli-Sieberg-Skala, die zur heutigen 12-teiligen Medvedev-Sponheuer-Karnik-Skala (MSK-64-Skala) -von 1964- entwickelt wurde. Diese Skala beschreibt die Intensität eines Bebens. Danach wäre das Beben auf der MSK-64-Skala in der Intensität VII (Risse im Verputz,

Wänden und Schornsteinen) bis Intensität VIII (große Spalten im Mauerwerk, Giebelteile stürzen ab) einzuordnen. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Skalentypen liegt darin, daß bei der Richter-Skala Meßwerte vorliegen müssen, während bei der MSK-64-Skala der visuelle Eindruck (Beobachtungen aus der Bevölkerung) als Ausgangspunkt genommen wird. Bei dem Beben vom 13.04.1992 wurden z.B. noch aus Bonn (besonders aus dem Regierungsviertel), Essen und Hannover Schäden der Intensität V (hängende Gegenstände pendeln) und VI (leichte Schäden an Gebäuden) gemeldet. Die Gebäudeschäden werden für das niederländische und das deutsche Gebiet mit ca. 300 Mio. DM geschätzt. Die Bevölkerung wurde einige Tage später aufgefordert, Beobachtungen an die Erdbebenwarte der Kölner Universität in Bensberg zu melden, um ein flächendeckendes Bild der Ausbreitung zu erhalten.

Weitere Informationen:

VDI-Nachrichten

28.07.95 VDI-N Los Angeles. Es wird ein Bericht der regierungsamtlichen Seismic Safety Commission (SSC) zitiert: "viele Betonbauten und vor allem Stahlrahmenkonstruktionen hielten nicht, was sie vor kurzem noch versprochen. Das Beben des Jahres 1994 habe gezeigt, daß viele Konstruktionen versagten, und zwar vornehmlich im **Bereich der Schweißnähte**". Auch bei dem Roermonder Beben gab es Schäden an Produktionseinrichtungen, der Informationsfluß war (un-)verständlicher Weise gering.

Informationen von Dr. Pelzing, siehe auch Literaturverzeichnis

25.07.96 24.07.06, 00:30^b, Spa, Beben 4,0. 28 km SW Aachen, Ausschlagdauer: Messung in Krefeld 20 s, Laufzeit von Spa nach Krefeld 18 s.
Dr. Pelzing: "Gerade in der niederrheinischen Bucht wirkt sich das Aufeinandertreffen der afrikanischen mit der eurasischen Platte deutlich aus. Die afrikanische Platte schiebt sich unter die eurasische Platte. Die Bucht wird beständig in nordöstlicher und südwestlicher Richtung breiter, während gleichzeitig die Eifel sich pro Jahr um 1 bis 2 mm hebt." *Abb. 30-5-20* und *Abb. 30-5-21*.

(Für die Berechnung von Rahmen - *Abb. 30-5-7* - siehe Kap. 16.3)

Auswirkung

Während die Städte und Ortschaften in unmittelbarer Nähe zum Teil erhebliche Gebäudeschäden aufwiesen, auf der deutschen Seite der Grenze war Heinsberg besonders betroffen, waren die gemeldeten Gebäudeschäden im weiteren Umkreis vergleichsweise gering. So fielen zwar z.B. noch in Bonn und Essen Dachziegel herunter und beschädigten Autos. In Teilen von Köln war zeitweise die Wasserversorgung unterbrochen. Im engeren Umkreis des Zentrums wurden die Menschen, die in Panik die Häuser verließen, durch herabfallende Ziegel und Gebäudeteile verletzt.

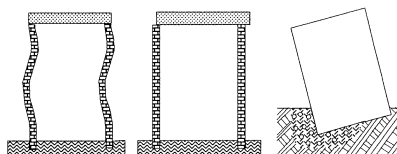


Abb. 30-5-7a
Bauwerkbewegung

Abb. 30-5-7b

Bei den Schwingungen, die das Fundament von Bauwerken bewegen, handelt es sich um eine Vielzahl von Einzelschwingungen, die in ihrer Summe die resultierende Schwingung bilden. Als Beispiel soll die Schwingung aus Kap. 7.2 dienen, die aus nur drei Einzelschwingungen besteht und für die in Kap. 7.2 die Fourieranalyse durchgeführt worden ist. Die Fourieranalyse ist deshalb geeignet, weil sie die Schwingung in ihre sin- und cos-Anteile zerlegt. In Abb. 30-5-8 fällt der zweite Teil der Funktion nach einer e-Kurve ab. Das entspricht auch dem tatsächlichen Verlauf. Bei dieser Funktion zeigte die Analyse, daß die dritte Ordnung die 3-fache Frequenz der Grundschwingung hat und damit auf Gebäude, Fundamente und Maschinen entsprechende Frequenzen im Resonanzbereich wirken können. So kann es bei Erdbeben zu Verschiebungen zwischen tragenden Wänden und Betondecken kommen, die zunächst durch die Schwingungen ausgelöst werden (Primäreffekt) und dann zu Zusammenbrüchen führen (Sekundäreffekt) (Abb. 30-5-7a). Durch die Bauvorschriften (DIN 4149) sind Schäden, die zum Einsturz eines Gebäudes führen, nach technischen Erkenntnissen bei "durchschnittlichen" Beben zu verhindern, um Personenschäden zu vermeiden. Daher sind in der DIN 4149

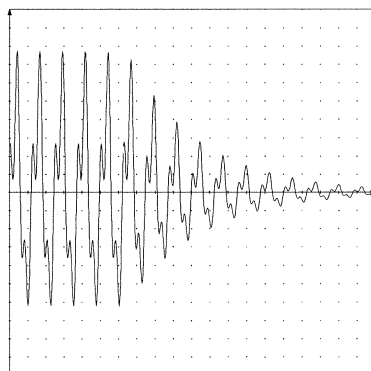


Abb. 30-5-8 Simulation

den einzelnen Gebieten Deutschland Zonen zugeordnet, für die entsprechend der vermuteten Gefährdung die Belastung durch Erdbeben festgelegt wird. Dabei müssen Schäden, wie Risse im Mauerwerk, herabfallender Putz usw. zugelassen werden, weil die Schwingungen als solche nicht vermeidbar sind. Bei dem Erdbeben von Roermond sind in Heinsberg Gebäude so schwer beschädigt worden, daß sie abgerissen werden müssen. Grundwasserabsenkungen spielen nach Meinung der Geophysiker für die Auslösung eines Bebens keine Rolle. Sie haben jedoch durch die Änderung des Baugrundes eine Wirkung auf die Fundamente.

Ist Grundwasser vorhanden, so wird durch die Bewegung Wasser zwischen die Bodenpartikel hochgepreßt, aus der trockenen Reibung wird eine Form der flüssigen Reibung. In der Strömungslehre ist dieses Verhalten für thixotrope und pseudoplastische Stoffe bekannt, bei denen mit zunehmender Schergeschwindigkeit die Zähigkeit abnimmt. Während bei der flüssigen Reibung die Gleitbewegung praktisch ohne Ruck einsetzen kann, ist bei der trockenen Reibung zunächst eine größere Kraft notwendig, um aus der Haftreibung in die Gleitreibung überzugehen. Die Abb. 30-5-8 ist dem Kap. 29 - Coulomb'sche Reibung entnommen. Dadurch besteht ein Überschuß an Energie, der bei gleichen Erregerkräften abgebaut werden muß. Das erklärt auch zum Teil, warum gleichartige Gebäude verschiedene Schäden bei verschiedenem Untergrund aufweisen. Dabei können hohe Gebäude, die eigentlich weitgehend unbeschädigt sind, im nun weichen Untergrund einseitig einsinken und kippen Abb. 30-5-7b.

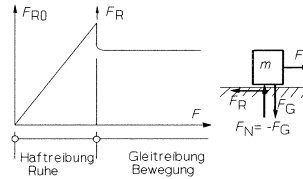


Abb. 30-5-9 Trockene Reibung

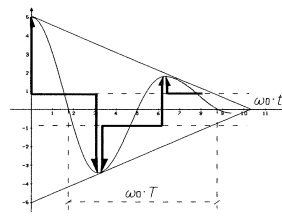
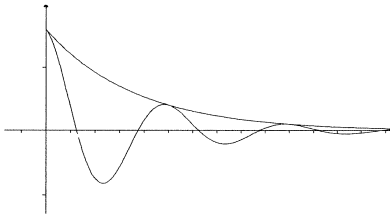


Abb. 30-5-10 Amplitudenabnahme e-Funktion Abb. 30-5-11 Amplitudenabnahme linear

Die Belastungen werden auf die Horizontalbeschleunigung bezogen, da die Kräfte nach der Beziehung $F = m \cdot \ddot{x}$ von der Beschleunigung abhängen. Daher sind in den beiden Abb. 30-5-18 und Abb. 30-5-19 die Beschleunigungen aufgetragen, die z.B. an der Station GSH in Nord-Südrichtung (NS) 270 mm/s^2 betrugen. Die Diagramme tragen eine dreistellige Ortsbezeichnung, UP bedeutet Up-Down, NS = Nord-Süd, EW = Ost-West. Der Abstand der DCF-Kennung ist 1 s. Abb. 30-5-18 zeigt zwei Aufnehmer für UP in horizontalem Abstand, wobei die Unterschiede in der Beschleunigung noch nicht geklärt sind.

Die Fundamentbewegungen wirken sich auf die Gebäude aus, gleichzeitig aber auch auf die Maschinen, die über ihre Fundamente mit dem Untergrund verbunden sind. In der Geophysik wird mit den Gleichungen gearbeitet, die auch in der Maschinendynamik üblich sind. Zwar sind die Formelzeichen z.T. anders gewählt, die Gleichungen lassen sich jedoch entsprechend lesen. Die Gleichungen werden aus den Kapiteln des Buches entnommen, in denen sie in Zusammenhang besprochen worden sind. Die erste Klammer gibt die Herkunft an, die zweite Klammer die laufende Nummer dieses Kapitels. Es wird aus Kap. 25.2 für die Fremderregung übernommen

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \omega_0^2 \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) \quad (25-2-4); (30-5-1)$$

$\hat{r}$ ist die maximale Erregeramplitude. Setzt man für $\sin(\omega_e \cdot t)$ den Maximalwert = 1 ein, so ist $\omega_0^2 \cdot \hat{r}$ nach (3-2-6) identisch mit der Beschleunigung.

Für diese inhomogene DGL gilt mit

$$x = x_h + x_p . \quad (25-2-5);(30-5-2)$$

Für den homogenen Teil ist

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot (A \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_d \cdot t)) . \quad (24-2-14);(30-5-3)$$

Darin sind die Konstanten A und B durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Die Herleitung erfolgt in Kap. 24.2. Ist die Ausgangsposition $x = x(0)$ und die Ausgangsgeschwindigkeit $\dot{x} = \dot{x}(0)$ zur Zeit $t = 0$, so ist A die Anfangsverschiebung und B ein zusammengesetzter Quotient

$$A = x_0 \quad ; \quad B = \frac{\dot{x}_0 + \delta \cdot x_0}{\omega_d} , \quad (24-2-16);(30-5-4)$$

der die Größen enthält:

Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \vartheta^2} = \frac{2 \cdot \pi}{T_d} . \quad (24-2-8);(30-5-5)$$

Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} . \quad (24-1-3);(30-5-6)$$

Abklingkoeffizient

$$\delta = \frac{k}{2 \cdot m} . \quad (24-1-4);(30-5-7)$$

Dämpfungsgrad (Lehr'sches Dämpfungsmaß)

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\Lambda}{T_d \cdot \omega_0} = \frac{\Lambda}{T_d \cdot \sqrt{\omega_d^2 + \delta^2}} = \frac{\Lambda}{\sqrt{4 \cdot \pi^2 + \Lambda^2}} . \quad (24-1-5);(30-5-8)$$

Der Dämpfungsgrad für Bauwerke ist gering, er wird im Durchschnitt mit $\vartheta = 0,05$ angegeben.

Das logarithmische Dekrement beschreibt die Abnahme der Amplituden einer gedämpften Schwingung

$$A = \delta \cdot T_d = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{x(t)}{x(t+n \cdot T_d)} . \quad (24-4-3); (30-5-9)$$

$$A = \frac{2 \cdot \delta \cdot \pi}{\omega_d} = \frac{2 \cdot \vartheta \cdot \omega_0 \cdot \pi}{\omega_d} = \frac{2 \cdot \vartheta \cdot \omega_0 \cdot \pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1-\vartheta^2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}} . \quad (24-4-4); (30-5-10)$$

Der partikuläre Teil der Lösung sollte der Fachliteratur der Geophysik entnommen werden.

Schadensbegrenzung

Es lassen sich für Schwingungen, die von Erdbebenwellen ausgelöst werden, Perioden angeben. Da es sich dabei Schwingungen handelt, die nach einer Fourieranalyse in einzelne sin-Schwingungen aufgelöst werden können, zeigt es sich, daß in den Wellen ein Spektrum enthalten ist. Es soll daher auf Kap. 7.2 zurückgegriffen werden, da in diesem Kapitel bereits eine Analyse durchgeführt worden ist. Es wurden als Modell drei sin-Schwingungen addiert und als resultierende Schwingung dargestellt. Durch eine Analyse sollte die Schwingung wieder in ihre Bestandteile zerlegt werden.

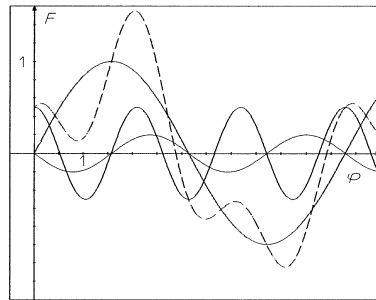


Abb. 30-5-12 Analyse zu einer Schwingung

Nimmt man als Frequenz für die Grundschiwingung der Erdbebenwelle 5 Hz an, so wäre die Frequenz der ersten Oberschwingung 10 Hz und die der zweiten Oberschwingung 15 Hz. Vergleicht man dazu das Beispiel Kap. 8.1 Beispiel 1, so liegt diese Motorkonsole mit der Eigenfrequenz 6 Hz voll im Wellenspektrum der Anregung. Würde die Erregerwelle voll und ungedämpft auf die Konsole übertragen, muß es zur Resonanz kommen. Wenn

dann noch die Dauer des Bebens ausreichend lang ist (13.04.92 Dauer 15 s), so kann die Zeit zum Aufschaukeln ausreichen (siehe Kap. 14). Die Schwingung nach Abb. 30-5-12 entspricht in der Frequenz einer wirklichen Schwingung, die Zusammensetzung einer Erdbebenschwingung ist jedoch wesentlich komplizierter und je nach Absorption einzelner Anteile durch Boden und Gebäude verschieden. Um bestimmte Maschinen und Geräte, die z.B. für die Versorgung, für Kommunikation usw. unentbehrlich sind, vor äußeren Störungen zu schützen, muß eine ausreichende Passivisolierung vorgesehen sein. Besonders sind Meßgeräte und Regler zu schützen, die im Störfall Notabschaltungen durchführen sollen und deshalb voll funktionsfähig bleiben müssen. Zum Teil waren die größten Schäden, die bei Erdbeben in Kalifornien entstanden sind, auf Folgeschäden zurückzuführen. Gebrochene Gasleitungen

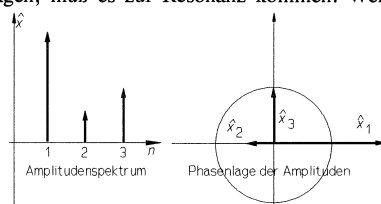


Abb. 30-5-13 Amplitudenspektrum, Phasenlage

führten zu katastrophalen Bränden, zerstörte Wasserleitungen machten die Löscharbeiten unmöglich. Im **Kap. 25** sind die erzwungenen Schwingungen behandelt. Dabei sind besonders die **Vergrößerungsfunktionen** von Bedeutung (Anregung Kap. 25.6 und Zusammenstellung der Vergrößerungsfunktionen Kap. 25.7). Wird ein Bauwerk von einer ersten Wellenfront erreicht, so wird es nach *Abb. 30-5-7* in Resonanzschwingung geraten, wenn seine Eigenfrequenz getroffen wird. Dabei kann die Festigkeit durchaus noch ausreichend sein und die Schwingungsamplitude nimmt durch Dämpfung ab. Läuft dann eine zweite Front auf, so kann die Summe aus der Restamplitude der bereits abklingenden ersten Amplitude mit der Amplitude der zweiten Schwingung einen Wert erreichen, dem das Bauwerk nicht mehr gewachsen ist und der Bruch erfolgt. In *Abb. 30-5-14* sind zwei periodisch gedämpfte Schwingungen zu einer Resultierenden überlagert. Dabei sind zwei gedämpfte Schwingungen gleicher Frequenz und gleicher Amplitude mit einer Laufzeitverschiebung gewählt worden.

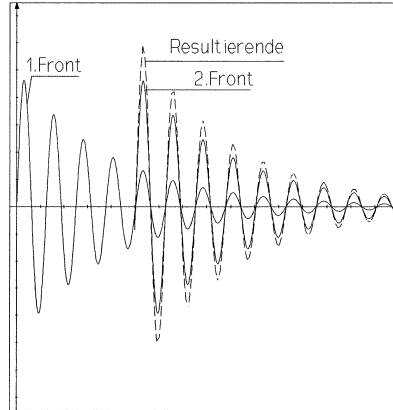


Abb. 30-5-14 Addition von Fronten

Die Modelldarstellung nach *Abb. 30-5-14* ist nahezu identisch mit dem Ausschnitt aus *Abb. 30-5-19* in *Abb. 30-5-15*. In *Abb. 30-5-17* sind deutlich die Frequenzen zu erkennen, die in der S-Welle in NS-Richtung enthalten waren. Das Diagramm zeigt das Scherwellenspektrum in der bei der Geophysik üblichen Darstellung und ist bei 50 Hz abgeschnitten. (Die *Abb. 30-5-15* bis *Abb. 30-5-21* wurden mit freundlicher Genehmigung des Geologischen Landesamtes Nordrhein-Westfalen, Krefeld, wiedergegeben).

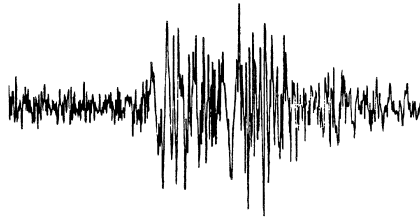


Abb. 30-5-15 Ausschnitt aus Abb. 30-5-19 (UD)

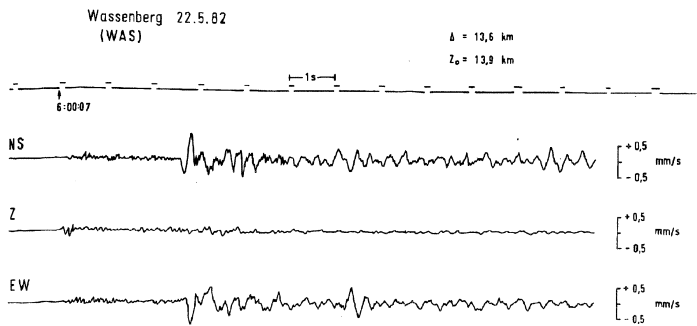


Abb. 30-5-16 Weg-Zeit-Diagramm der Station WAS vom 22.05.1982

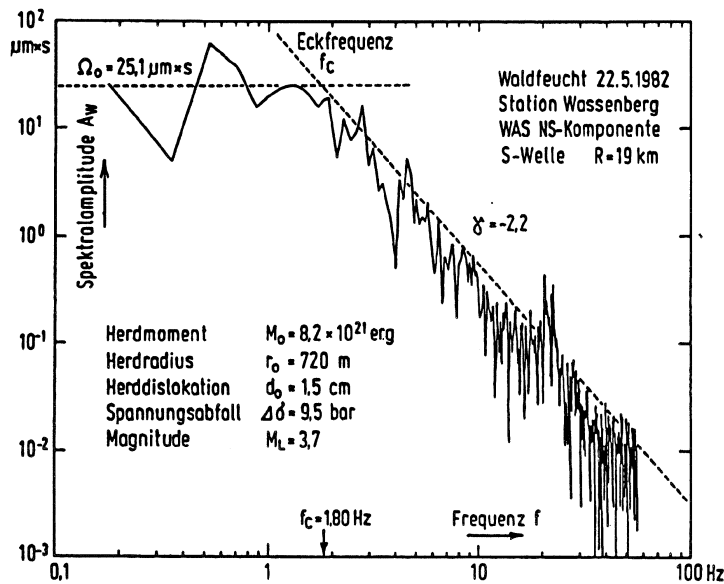


Abb. 30-5-17 Frequenzdiagramm zu Abb. 30-5-16

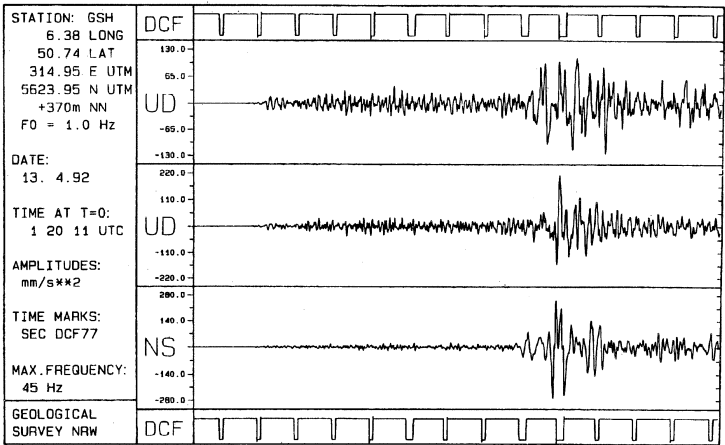


Abb. 30-5-18 Station Hürtgenwald-Großhau

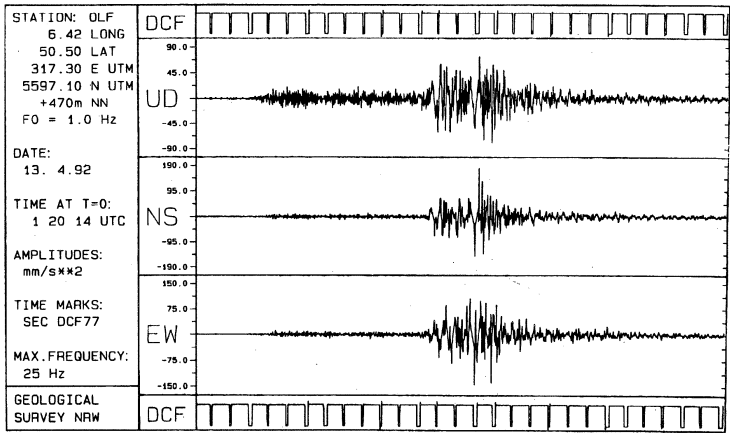


Abb. 30-5-19 Station Olefalsperre

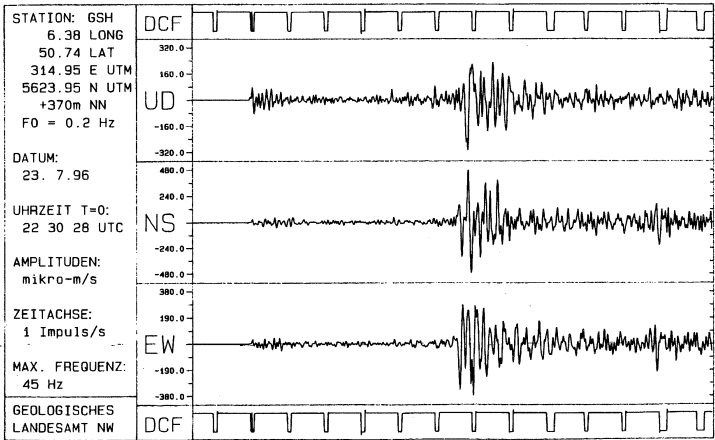


Abb. 30-5-20 Station Hürtgenwald-Großhau, Geschwindigkeit

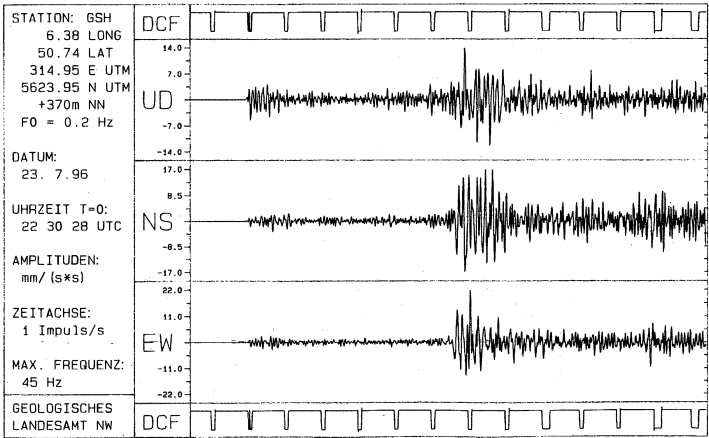


Abb. 30-5-21 Station Hürtgenwald-Großhau, Beschleunigung

Vulkane und Schwingungen

Bei seismischen Messungen in Schiltach/Schwarzwald (Geowissenschaftliches Gemeinschaftsobservatorium, Black Forest Observatory (BFO), Universitäten Karlsruhe/Stuttgart) wurden Besonderheiten bei den Ausbrüchen des El Chichón (04. April 1982) und des Pinatubo (15. Juni 1991) festgestellt. Dabei wurden Frequenzen von $3,76\text{E-}3$ Hz und $5,14\text{E-}3$ Hz bzw. $3,68\text{E-}3$ Hz und $4,44\text{E-}3$ Hz gemessen. Die ausführlichen Untersuchungen sind im Literaturverzeichnis aufgeführt. Für die Meßtechnik ist dabei nun besonders interessant, daß die Atmosphäre durch Vulkane zu harmonischen Schwingungen mit längeren Perioden angeregt wurde, was früher nicht beobachtet worden ist. In den Veröffentlichungen von W. Zürn und R. Widmer werden spekulative Modelle aufgestellt, die "ein Feedback zwischen der lokalen atmosphärischen Oscillation und dem Eruptionsprozeß" zeigen. Die Amplituden der atmosphärischen Schwingungen liegen bei $3\text{E}2$ Pa. Die Schwingungen begannen gegen 7^{h} und endeten nach 8 Stunden Ortszeit. Dabei zeigte sich eine lokale Anregung von Rayleigh-Wellen, die weltweit beobachtet werden konnten.

Vom Meer sind die Gezeiten ein Begriff. Dabei ist der "feste" Boden gar nicht so fest. Messungen haben ergeben, daß die Erdoberfläche (z.B. samt dem Kölner Dom) einen Gezeitenhub von max. 0,5 m hat (siehe auch Kap. 30.4)

Den folgenden Teil stellt Dr. Zürn einschließlich der *Abb. 30-5-22* bis *Abb. 30-5-24* zum Abdruck zur Verfügung:

In der *Abb. 30-5-22* ist als Schwingung mit etwa 12^{h} Periode und $14\text{E-}9$ m/s^2 Amplitude die Gezeitenschwingung der festen Erde erkennbar; allerdings stark abgeschwächt durch elektronische Filterung des Signals vor der Aufzeichnung. Vor der Filterung beträgt die entsprechende Schwingungsamplitude etwa $1000\text{E-}9$ m/s^2 .

Auf dieser Grundschiwingung sieht man zunächst überlagert die Rayleigh-Wellenzüge eines Erdbebens der Magnitude 6,3 bei den Süd-Sandwich-Inseln um 1^{13} GMT. Diese sind bezeichnet mit R_3 (Laufweg: vom Herd zur Station nach einem vollständigen Umlauf um die Erde, der etwa 3 Stunden dauert) und R_4 (Laufweg: vom Herd über den Antipodenpunkt zur Station und ein vollständiger Umlauf um die Erde), bei etwa 6^{30} GMT. Danach beginnen die Rayleigh-Wellen, die durch die vertikalen atmosphärischen Schwingungen beim Mount Pinatubo angeregt wurden, mit den oben erwähnten Frequenzen von $3,68\text{E-}3$ Hz und $4,44\text{E-}3$ Hz, die dann bis 20^{00} GMT anhalten. Auch diese treffen aus zwei entgegengesetzten Richtungen an der Station ein.

GMT = Greenwich Mean Time > MGZ = mittlere Greenwich Zeit

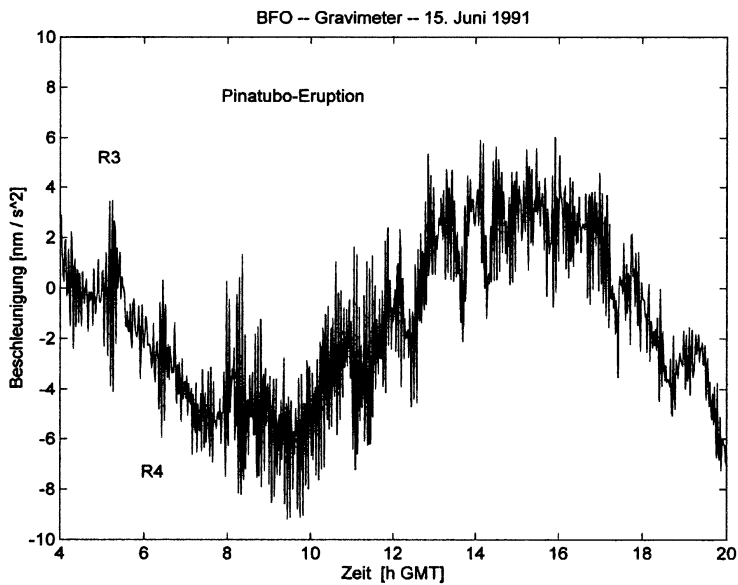


Abb. 30-5-22 Pinatubo-Eruption

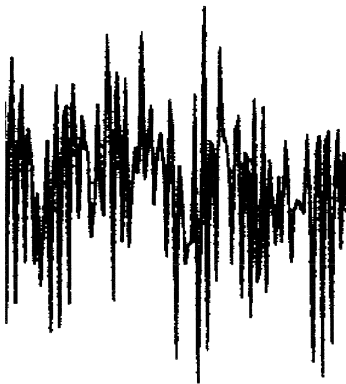


Abb. 30-5-23 Ausschnitt aus Abb. 30-5-22, Bereich 16 [h GMT]

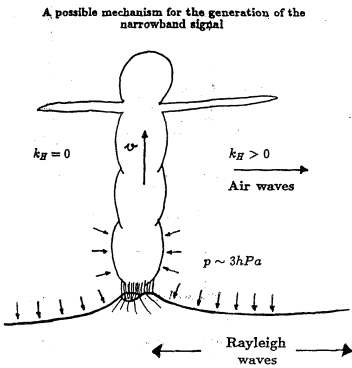


Abb. 30-5-24 Eine mögliche Erklärung der Anregung

30.6 Instationäre Strömungen in Leitungen

Erfolgt eine Strömung nicht mit kontinuierlich, so wird sich eine Druckwelle vom Ursprung ausbreiten und durch die Leitung laufen. Das ist zum Beispiel der Fall in Ansaug- und Abgasrohren von Motoren, Spülkanälen von 2-Takt-Motoren, bei Abgasrohren von Brennern (Schwingende Flammen), Leitungen von Kolbenverdichtern, Leitungen von Wasserkraftanlagen.

Ebenso treten Druckwellen durch die Pumpfunktion des Herzens auf (Pulsquelle).

Grundlegende Versuche sind in dem Forschungsbericht von Wilhelm/Jürgler (Kap. Literaturhinweise) beschrieben, bei denen der Verlauf des Druckes in Rohren untersucht wurde. Wenn ein Druck am Anfang eines Rohres aufgebaut wird, so wird die Welle durch das Rohr laufen und durch jede Veränderung des Rohres beeinflusst. Das kann das Rohrende, eine Verzweigung, eine Verengung, ein Diffusor sein. Die Welle wird reflektiert und läuft zum Ausgangspunkt zurück. So kann sie je nach ihrer Laufzeit und den örtlichen Verhältnissen als Über- oder Unterdruck am Ausgangspunkt auftreten. Tritt sie als Überdruck auf, so ist ein erhöhter Druck am Ursprung erforderlich, um den nächsten Vorgang einzuleiten. Tritt sie als Unterdruck auf, so wird sie praktisch einen Saugeffekt am Ursprung haben und damit den nächsten Vorgang unterstützen.

Die Pulswellen im menschlichen Körper wirken in erster Näherung ähnlich und somit kann man sich vorstellen, daß bei einer Herzmassage der Druckzustand am Austritt der Herzkammer einen wesentlichen Einfluß auf die geförderte Blutmenge hat. Der Zustand der Gefäße ist ohnehin von entscheidendem Einfluß auf die Versorgung des Körpers. In der *Abb. 30-6-1 Arterien* ist als Beispiel für die technischen Diagramme und Abbildungen eine Verzweigung und eine Verengung durch einen Thrombus (ähnlich einer Drossel im Versuch) herausgezeichnet.

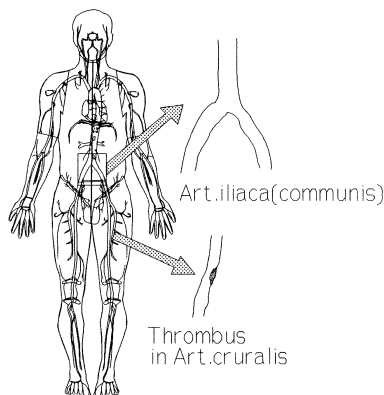


Abb. 30-6-1 Arterien

In den Abbildungen ist der gemessene und der gerechnete Druck über der Zeit an den angegebenen Meßstellen beim Durchgang einer einzelnen Überdruckwelle dargestellt. Außerdem ist die atmosphärische Linie eingezeichnet. Bei allen Rechnungen wurde der an Stelle 1 gemessene und bis zur ersten Reflexion an der nächsten Unstetigkeitsstelle auftretende Druck zugrunde gelegt. Es wurden die gerechneten Fortpflanzungslinien der vor- und rücklaufenden Überdruckwellen als durchgezogene Linien und die der vor- und rücklaufenden Unterdruckwellen als strichpunktierte Linien zum Teil mit eingetragen.

Für die Einheit des Druckes gilt $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ kg/(m} \cdot \text{s}^2)$.

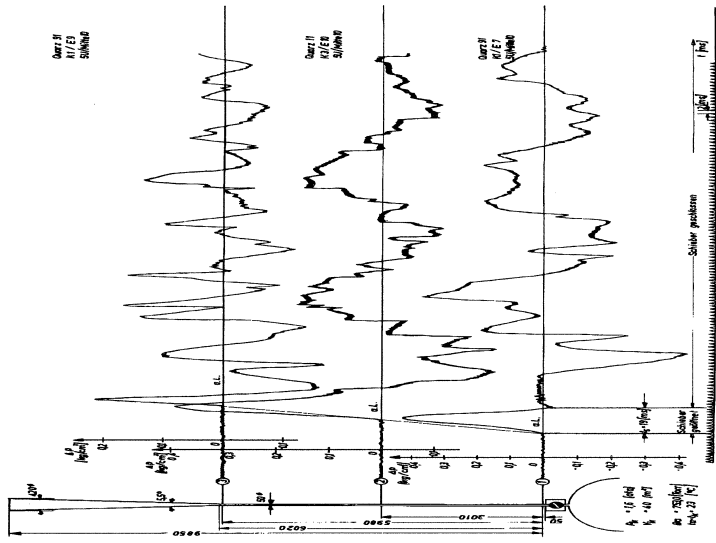


Abb. 30-6-2 Druckverlauf

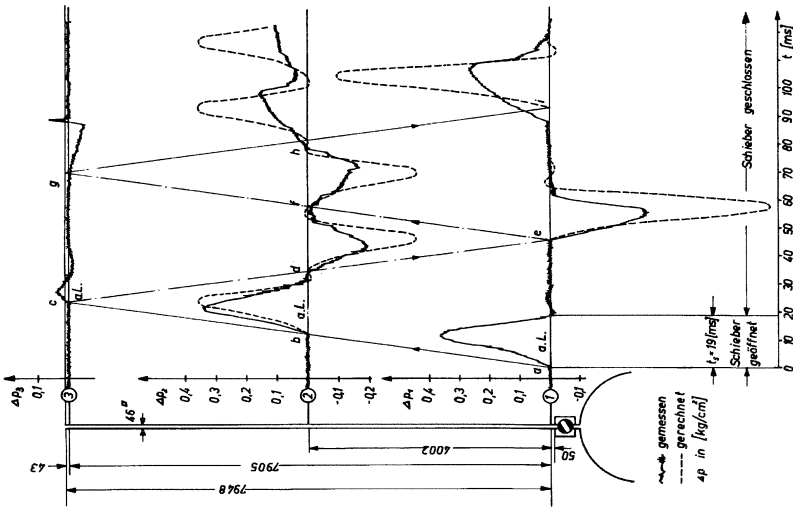


Abb. 30-6-3 Druckverlauf im geraden, einseitig offenen Rohr

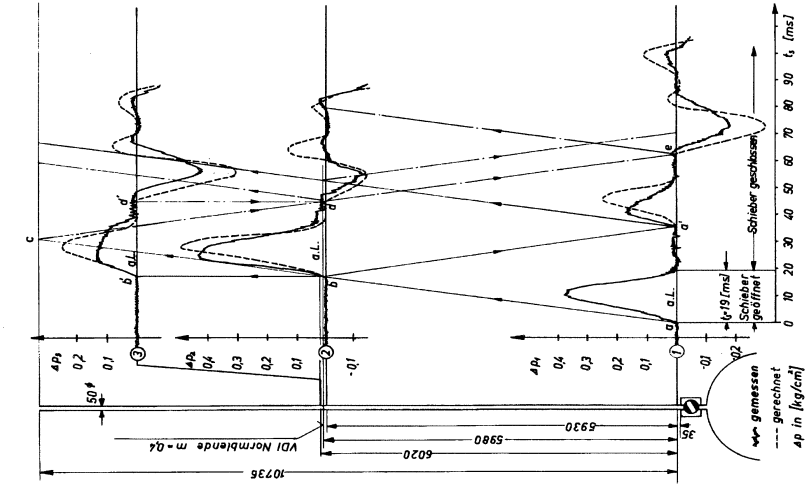


Abb. 30-6-4 Druckverlauf im geraden, einseitig offenen Rohr mit einer Normblende

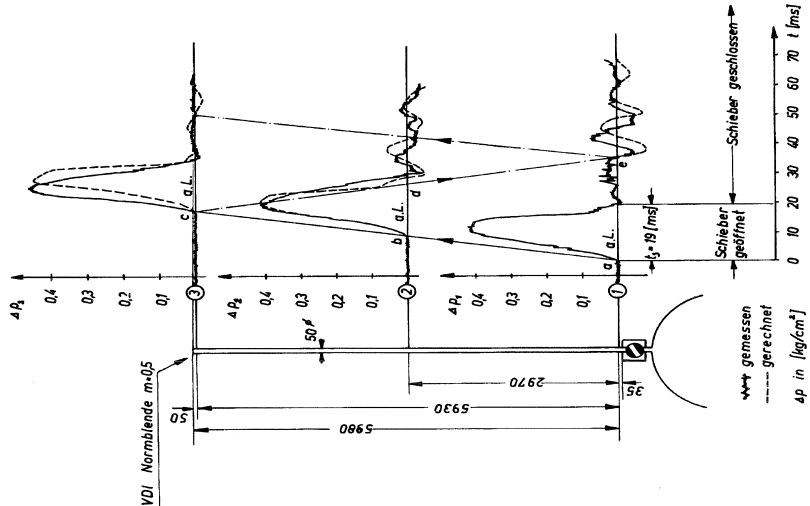


Abb. 30-6-5 Druckverlauf im geraden, einseitig offenen Rohr mit einer Normblende am Rohrende

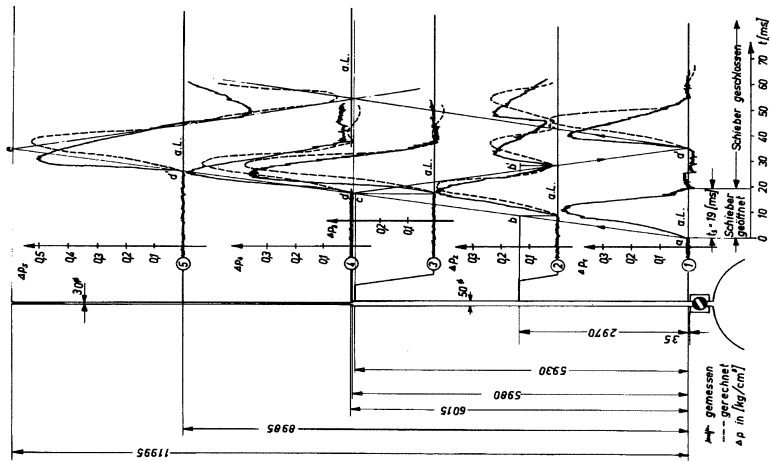


Abb. 30-6-6 Druckverlauf in einem geraden, einseitig offenen Rohr mit plötzlicher Querschnittsverengung

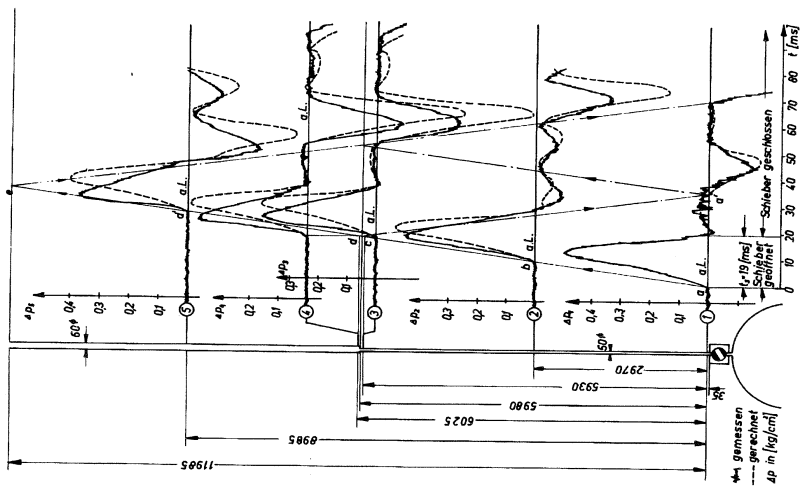


Abb. 30-6-7 Druckverlauf im geraden, einseitig offenen Rohr mit plötzlicher Querschnittserweiterung

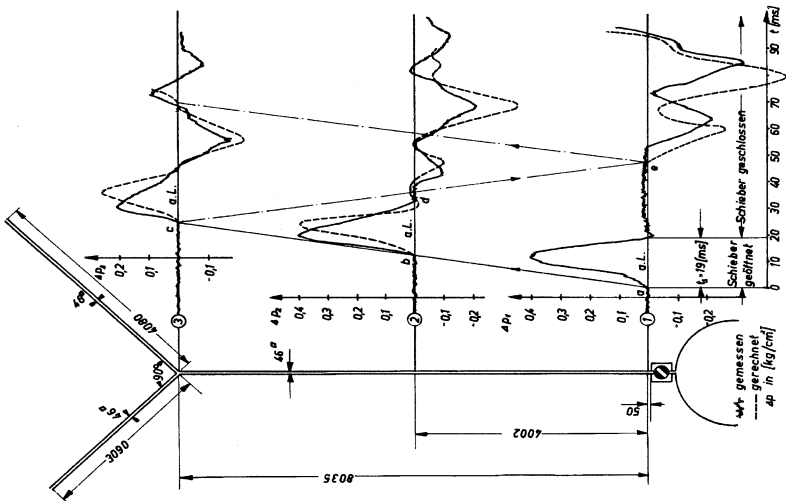


Abb. 30-6-8 Druckverlauf in einem Rohrverzweigungssystem

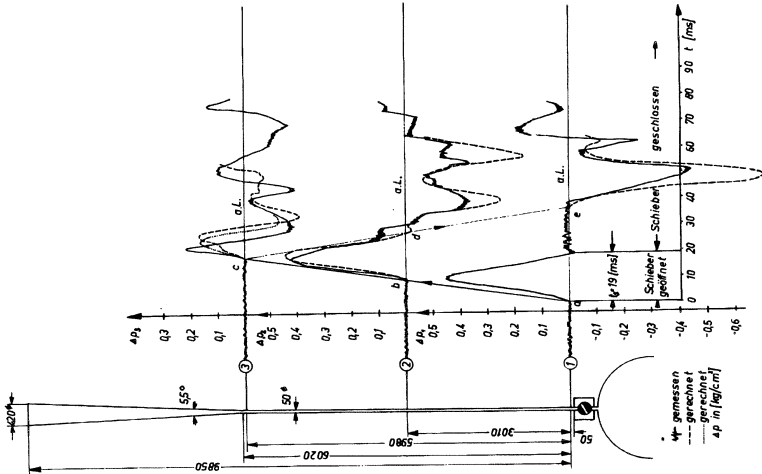


Abb. 30-6-9 Druckverlauf in einem geraden Rohr mit Diffusor

31 Beispiele

Aufgaben

Anmerkung: Das bestimmende Werkzeug im heutigen Konstruktionsbüro ist der Computer, der Laptop und der programmierbare Taschenrechner. Darauf baut die Schreibweise der Formeln und Lösungen in diesem Buch auf.

1. Für die Bezeichnung der Dezimalstellen ist die Schreibweise E gewählt (Beispiel):
 $2,1E7$ statt $2,1 \cdot 10^7$.
2. Für Schraubenfedern ist nach DIN 2089 (und folgenden) die Federkonstante c durch den Begriff Federrate R ersetzt worden. Da in der Maschinendynamik jedes Bauteil als elastisch angesehen wird, das dem Hooke'schen Gesetz folgt, wird der Begriff Federkonstante c als allgemein gültige Größe für alle Bauteile beibehalten. Daher wird für die Federkräfte an Bauteilen geschrieben:
 $F = c \cdot x$ statt $F = R \cdot x$.
3. In den Kapiteln, in denen die Methoden der Festigkeitslehre angewandt werden (19, 20, 21, 26 und in der Tafel - Verformung von Biegeträgern -), werden die Bezeichnungen der Achsen aus der Festigkeitslehre übernommen (Stablängsachse = x , Durchbiegung = y). Die Ausnahme bildet Kap. 10, da dort die Gleichungen der Schwingungslehre mit dem Weg x und der Amplitude $\hat{x}$ übernommen werden.
4. Viele Gleichungen nehmen einen erheblichen Platz ein, deshalb werden Einheiten erst beim Ergebnis geschrieben, da die Eingabe in der Praxis nur die Zahlen enthält. So soll bereits in diesem Buch eine praxisgerechte Benutzung des Computers geübt werden. Alle Größen müssen daher *vorher* in ihren Einheiten abgestimmt werden.
5. Bei Schwingungsgleichungen der Form $x = \hat{x} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$ ist eine harmonische Funktion mit einem Faktor (z.B. $\hat{x}$) verbunden. Dieser Faktor wird als Amplitude bezeichnet und stellt nach Abb. 3-2-2 einen rotierenden Zeiger dar. Die Amplitude ist von Vorzeichen frei. Ihre Lage wird durch die harmonische Funktion bestimmt. Deshalb wird auch z.B. in (4-1-8) bei der Lösung der Wurzel auf das $\pm$ -Vorzeichen verzichtet.

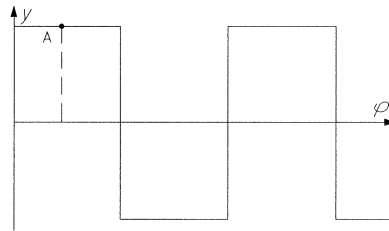
Kap. 5, Kap. 6**Beispiel 1**

In einer Maschine sind drei Wellen gelagert. Eine Welle (1) hat die Drehzahl $3 \cdot n$ und die Unwuchtmasse 5 g. Die beiden anderen Wellen (2 und 3) sind senkrecht zu der Welle (1) gelagert. Die Welle (2) hat die Drehzahl $1 \cdot n$ und die Unwuchtmasse 2 g. Die Welle (3) hat die Drehzahl $2 \cdot n$ und die Unwuchtmasse 5 g. Für (1) wird die Koordinate x , für (2) und (3) die Koordinate y festgelegt. Es ist zu zeichnen:

- 1) Die Schwingung für (1),
- 2) die Einzelschwingungen für (2) und (3) und deren Resultierende,
- 3) die Lissajous-Figur für das System.

Beispiel 2

Für eine Rechteckschwingung soll der Betrag von A in der Form $A = \pi/n$ bestimmt werden. Dabei ist n als ganze Zahl (auf- bzw. abrunden !) anzugeben. Hilfe: rechnen Sie für die Stelle $\varphi = \pi/2$. Die Reihe für die Rechteckschwingung lautet

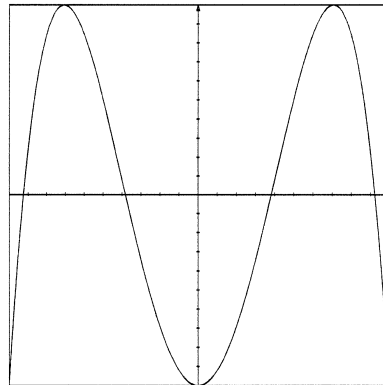
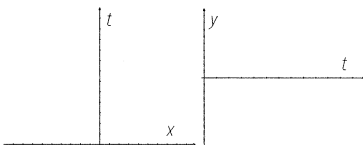


$$y = \sin(\varphi) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot \varphi) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5 \cdot \varphi) + \dots$$

Beispiel 3

Mit einem Oszilloskop wird die Lissajous-Figur aufgenommen. *Skizzieren* Sie jeweils die Einzelkurven in die x - t und y - t Diagramme. Dabei ist für die Zeit in jedem Diagramm die gleiche Skalierung zu wählen. Die Amplituden sind jeweils mit 1 zu wählen.

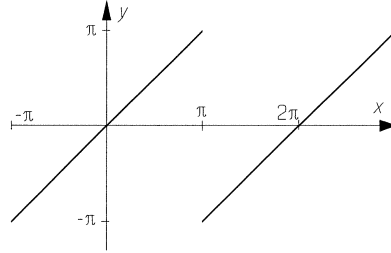
Das Frequenzverhältnis beträgt: /



Kap. 7.1**Beispiel 1**

Für eine Steuerung soll eine Sägezahnkurve nach der Abbildung mit überlagerten Sinus-Schwingungen simuliert werden.

Es ist die Reihe $f(x) = \dots$ aufzustellen, die dieser Bedingung entspricht. Es sind die ersten Glieder dieser Reihe anzugeben, die dazugehörigen Funktionsgraphen sind zu zeichnen.

**Beispiel 2**

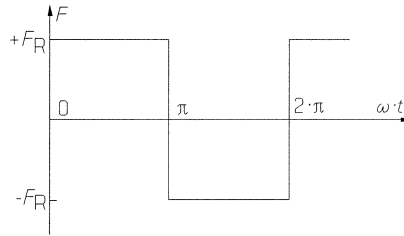
Eine Schwingung erfolgt mit Coulomb'scher Reibung. Die Reibungskraft bei trockener Reibung ist nach Kap. 29 konstant.

Es beträgt im Bereich von 0 bis $2 \cdot \pi$

$$F = \pm F_R.$$

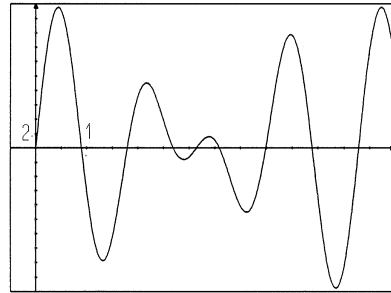
Der Vorgang ist periodisch. Gesucht sind die Fourierkoeffizienten

$$A_0 = \quad ; A_n = \quad ; B_n = \quad .$$

**Kap. 7.2****Beispiel 1**

An dem Gehäuse einer laufenden Maschine wird eine Schwingungsmessung durchgeführt. Dabei wird dieser Schrieb aufgenommen. Es laufen zwei Wellen.

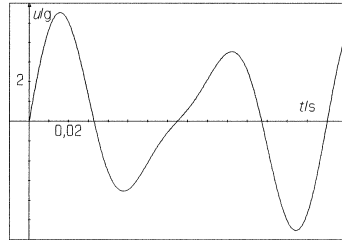
Es ist das Unwuchtverhalten jeder Welle und das Drehzahlverhältnis der beiden Wellen zu ermitteln. Für die Berechnung nach der Fourieranalyse können die Werte dem Schrieb entnommen werden. Sie sind in der folgenden Tabelle angegeben:



i	$F(i)$	i	$F(i)$	i	$F(i)$
0	0	4	8,66	8	-8,67
1	18,66	5	1,33	9	10,0
2	-8,67	6	0	10	8,66
3	-10	7	-1,33	11	-18,67

Beispiel 2

Durch Messung an einem Getriebe wurde die folgende Kurve als Schrieb ermittelt. Die Wirkung der Unwuchtmasse u wurde über der Zeitachse aufgezeichnet. Es ist Periodendauer $T = 0,15$ s, Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = 41,87$ s⁻¹ für die Gesamtperiode. Das Amplitudenspektrum ist zu zeichnen.



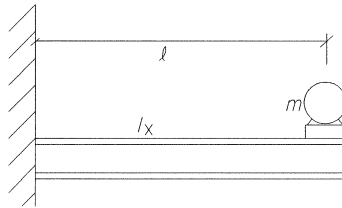
Die Werte sind in der Tabelle angegeben:

i	$F(i)$	i	$F(i)$	i	$F(i)$	i	$F(i)$
0	0	3	-1,8	6	0	9	1,8
1	5,26	4	-3,46	7	1,66	10	-3,46
2	3,46	5	-1,66	8	3,46	11	-5,26

Kap. 8.1**Beispiel 1**

Ein Motor ist auf einer Konsole aufgestellt. Es ist die Resonanzdrehzahl zu berechnen. Bekannt ist

$$\begin{aligned} m \cdot g &= 8000 \text{ N} \quad \text{als Gesamtbelastung,} \\ \ell &= 2000 \text{ mm,} \\ I_x &= 1450 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

**Beispiel 2**

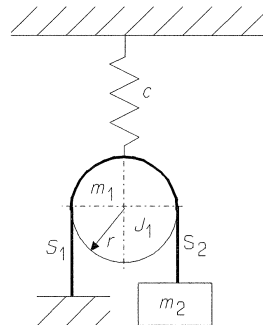
Ein schwingungsfähiges System soll durch das Ersatzbild dargestellt werden. Die Masse des Seiles und der Feder sind zu vernachlässigen. Das Seil hat Reibschluß mit der Scheibe 1. m_1 und m_2 sind zu berücksichtigen.

Es ist die Differentialgleichung des Ersatzsystems aufzustellen.

Es ist die Eigenkreisfrequenz ω_0 zu bestimmen.

Für $m_1 = m_2$ ist die Eigenkreisfrequenz ω_0 zu bestimmen.

Die statische Verlängerung der Feder durch die Gewichtskräfte ist zu vernachlässigen. Die Berücksichtigung erfolgt in Beispiel 3. (Siehe hierzu auch Abb. in Beispiel 3).



Beispiel 3

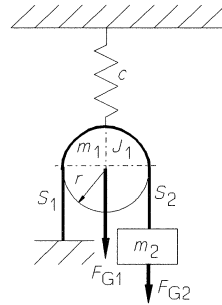
Ein schwingungsfähiges System soll durch das Ersatzbild dargestellt werden. Die Masse des Seiles und der Feder sind zu vernachlässigen. Das Seil hat Reibschluß mit der Scheibe 1. m_1 und m_2 sind zu berücksichtigen.

Zusätzlich zu der Aufgabenstellung im Beispiel 2 sind nun die Gewichtskräfte mit in die Berechnung einzubeziehen. Dabei ist zu zeigen, daß die Gewichtskräfte nicht in die Gleichung der Eigenkreisfrequenz eingehen.

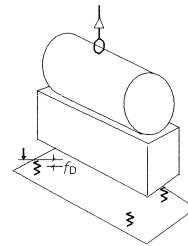
Es ist die Differentialgleichung des Ersatzsystems aufzustellen.

Es ist die Eigenkreisfrequenz ω_0 zu bestimmen.

Für $m_1 = m_2$ ist die Eigenkreisfrequenz ω_0 zu bestimmen.

**Beispiel 4**

Kann man die kritische Drehzahl (Resonanzdrehzahl) eines Systems ermitteln, indem man die Verformung f_D (Zusammendrücken) der 4 Federn mißt, wenn auf die unbelasteten Federn die Maschine aufgesetzt wird?

**Beispiel 5**

Von einem schwingenden System existieren die folgenden Meßwerte:

$F_G = 230 \text{ N}$;

statische Durchbiegung $f_D = 50 \text{ mm}$;

maximale Schwingungsamplitude $\hat{x} = 60 \text{ mm}$.

Gesucht sind die Größen

Eigenkreisfrequenz ω_0 ;

Periodendauer T_0 ;

Eigenfrequenz f_0 ;

kritische Drehzahl des Motors (Resonanzstelle) n_0 .

Zur Zeit $t = 0 \text{ s}$ ist $x(0) = \hat{x} \text{ m}$ und $v(0) = 0 \text{ m/s}$.

Es ist aufzustellen:

die Weg-Zeit-Gleichung; die Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung,

die Beschleunigungs-Zeit-Gleichung.

Außerdem ist die maximale Geschwindigkeit und die maximale Beschleunigung gesucht.

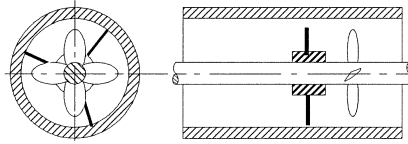
Beispiel 6

Ein Ventilator (4 Flügel) ist in einem Rohr eingebaut. Die Welle läuft durch ein Lager, das mit drei Streben im Rohr befestigt ist. Das System hat zwei Eigenkreisfrequenzen:

$$\omega_{01} = 66 \text{ s}^{-1} \text{ und } \omega_{02} = 314 \text{ s}^{-1}.$$

Bei welchen Drehzahlen der Welle (Erregerdrehzahlen) kommt das gesamte System in Resonanzschwingungen (Beachten Sie die einzelnen Konstruktionselemente):

$$n_1 = \quad \text{min}^{-1}; \quad n_2 = \quad \text{min}^{-1}.$$

**Kap. 9.3****Beispiel 1**

Eine Scheibe (Physisches Pendel) soll so aufgehängt werden, daß die kleinste Schwingungszeit erreicht wird.

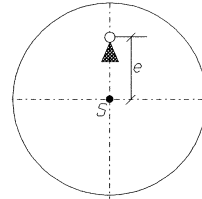
Gegeben:

$$r_{\text{Scheibe}} = 0,1 \text{ m},$$

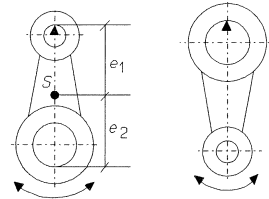
$$\text{Dicke}_{\text{Scheibe}} = b = 0,01 \text{ m},$$

Stahl.

Gesucht ist e für $T_{\min}$.

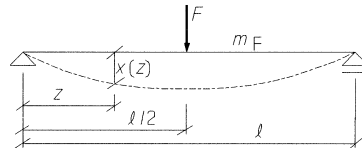
**Beispiel 2**

Es sind die Gleichungen für die experimentelle Bestimmung des Schwerpunktes und des Massenträgheitsmomentes aufzustellen, wenn die Zeiten T_1 und T_2 für die Aufhängung in 1 und in 2 gemessen werden.

**Kap. 10****Beispiel 1**

Für den gezeichneten Belastungsfall ist der genaue Betrag der Ersatzmasse m_{ers} zu bestimmen, wenn bei einer Biegeschwingung die Masse des Balkens (Masse der Feder m_F) zusätzlich zur Belastung $F = m \cdot g$ zu berücksichtigen ist.

$$m_{\text{ers}} = ??? \cdot m_F + m = \quad \cdot m_F + m.$$



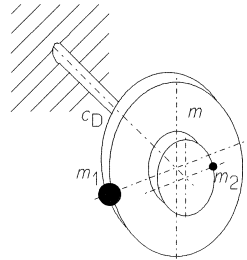
Hilfe: Die Gleichung aus der Tabelle kann in der folgenden (für diesen Fall umgewandelten) Form benutzt werden:

$$y = \frac{F \cdot b \cdot \ell \cdot z_a}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[1 - \left(\frac{b}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{z_a}{\ell} \right)^2 \right]$$

$$x(z) = \frac{F}{48 \cdot E \cdot I} (3 \cdot \ell^2 \cdot z - 4 \cdot z^3).$$

Kap. 15.2**Beispiel 1**

Eine Scheibe ($J_S = 4/5 \cdot m \cdot r_1^2$) mit den Durchmessern d_1 und d_2 ist durch die Massen $m_1 = 2 \cdot m$ (Hebelarm r_1) und $m_2 = m$ (Hebelarm r_2) belastet. Die Drehfeder hat die Drehfederkonstante $c_D = 5 \cdot m \cdot g \cdot r_1$ und ist nicht auf Biegung beansprucht. $r_1 = 2 \cdot r_2 = r$.



Gesucht sind

- Die Kinetische Energie W_k
- Die Potentielle Energie W_p
- Die Lagrange'sche Funktion L
- Die Differentiationen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right); \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi}.$$

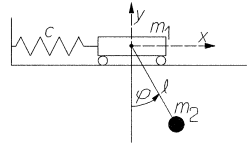
- Die Lagrange'sche Gleichung zweiter Art
- Die Differentialgleichung der Schwingung
- Mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichungen die Eigenkreisfrequenz $\omega_0 =$
- Die Amplitude der Schwingung

$$\varphi_{\max} = \hat{\varphi} = f(\dot{\varphi}_0; \omega_0) =$$

$$\text{Hilfe: } \varphi(t=0)=0; \quad \dot{\varphi}(t=0)=\dot{\varphi}_0$$

Beispiel 2

Ein Kran rollt reibungsfrei, dabei pendelt die Last m_2 . Gesucht sind mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art die Differentialgleichungen.

**Kap. 16****Beispiel 1**

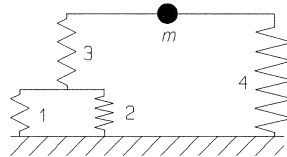
Ein Feder-Massesystem hat folgende Werte:

$$m = 50 \text{ kg},$$

$$c_1 = 800 \text{ N/cm}, \quad c_2 = 1200 \text{ N/cm},$$

$$c_3 = 1000 \text{ N/cm}, \quad c_4 = 2000 \text{ N/cm},$$

Es ist die Eigenfrequenz f_0 des Systems gesucht; zugelassen ist nur eine senkrechte Bewegung.



Beispiel 2

Eine Last $m = 3500 \text{ kg}$ wird mit der Geschwindigkeit $v = 5 \text{ m/s} = \text{const.}$ abgesenkt. Die Seiltrommel blockiert plötzlich, das Seil gerät in vertikale Schwingungen.

Die Federkonstante des Seiles ist $c_S = c_1 = 3,8\text{E}6 \text{ N/m}$.

Für den Beginn des Blockierens gilt:

$t = 0 \text{ s}$; $x(0) = 0 \text{ m}$; $v(0) = 5 \text{ m/s}$.

Fall 1: Gesucht sind:

die Eigenkreisfrequenz der Seilschwingung $\omega_1 \text{ 1/s}$;

die Amplitude $\hat{x}_1 \text{ m}$;

$F_{\max 1} \text{ N}$ (die Kraft, die das Seil bei der größten Auslenkung aufzunehmen hat).

Fall 2: Es soll zwischen das Seil und die Last eine Feder ($c_F = c_2 = 0,35\text{E}6 \text{ N/m}$) eingebaut werden.

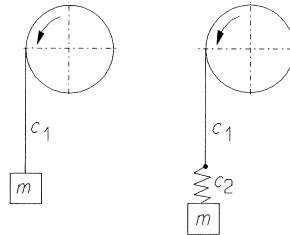
Gesucht sind:

die Eigenkreisfrequenz der Seilschwingung $\omega_2 \text{ 1/s}$;

die Amplitude $\hat{x}_2 \text{ m}$;

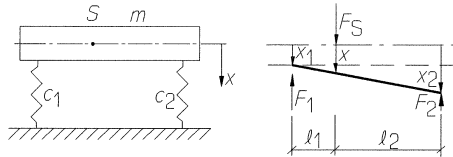
$F_{\max 2} \text{ N}$ (die Kraft, die das Seil bei der größten Auslenkung aufzunehmen hat).

Wird das Seil im Fall 2 stärker oder weniger stark als im Fall 1 belastet?

**Beispiel 3**

Eine starre, masselose Welle soll weich gelagert sein. Dabei bleibt die Verschiebung des Schwerpunktes in x -Richtung erhalten, jedoch wird die Achse durch die verschiedenen Federwege in x -Richtung gekippt. Als

Belastung wirkt die Kraft F_S . Sie greift im Schwerpunkt an. Gesucht ist die Federkonstante c_{ges} des Systems.

**Beispiel 4**

Es sind sechs schwingungsfähige Systeme gegeben.

a) Für jedes System ist c_{res} zu bestimmen.

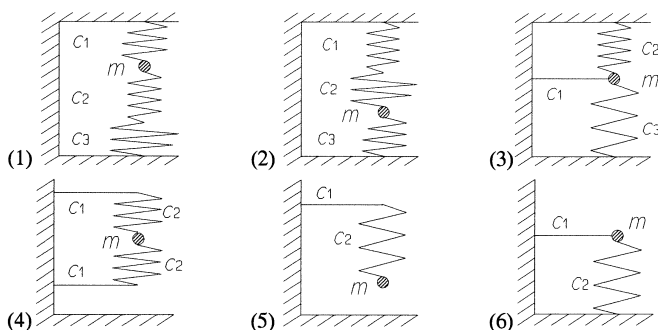
Dabei gilt für die Systeme 1 bis 3: $c_1 \neq c_2 \neq c_3$

und für die Systeme 4 bis 6: $c_1 \neq c_2$

b) Es ist für jedes System T_0 zu bestimmen und zwar unter der Voraussetzung,

daß in den Systemen 1 bis 3 jeweils $c_1 = c_2 = c_3 = c$ ist,

und in den Systemen 4 bis 6 jeweils $c_1 = c_2 = c$ ist.



Kap. 18

Beispiel 1

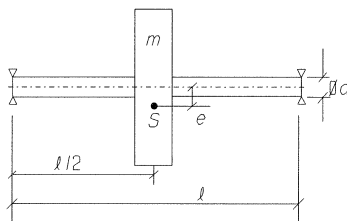
Für eine Welle, auf der sich eine Scheibe mit einer Unwucht befindet, soll das biegekritische Verhalten bestimmt werden.

Schwerpunktlage $e = 0,2 \text{ mm}$;

$\ell = 500 \text{ mm}$; $\varnothing d = 65 \text{ mm}$;

$F_G = 3000 \text{ N}$.

Es ist das Diagramm $x = f(n)$ zu zeichnen.
($n = \text{Drehzahl}$).



Kap. 19, 20, 21 und 26

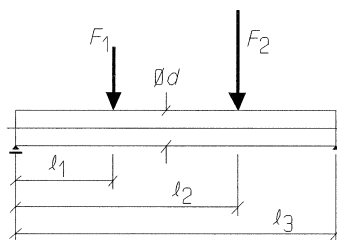
Beispiel 1

Um die einzelnen Verfahren vergleichen zu können, soll für eine Welle mit konstantem Durchmesser die biegekritische Drehzahl berechnet werden.

$\varnothing d = 160 \text{ mm}$; $\ell_1 = 600 \text{ mm}$;

$\ell_2 = 1700 \text{ mm}$; $\ell_3 = 2900 \text{ mm}$;

$F_1 = 8000 \text{ N}$; $F_2 = 12000 \text{ N}$.



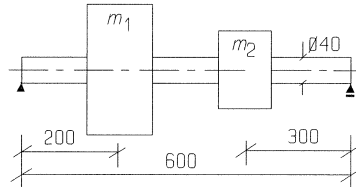
1. Gesucht ist die biegekritische Drehzahl nach dem Verfahren von Rayleigh.
2. Gesucht ist die biegekritische Drehzahl nach dem Verfahren von Dunkerley (Maxwell).
3. Gesucht ist die biegekritische Drehzahl nach dem Verfahren von Mohr (siehe Aufgabe Kap. 26).
4. Es sind die Verformungen mit Hilfe der Superposition zu ermitteln.

Beispiel 2

Eine Welle $\varnothing d = 40 \text{ mm}$ ist mit den Massen $m_1 = 40 \text{ kg}$ und $m_2 = 20 \text{ kg}$ besetzt. Die Lager befinden sich jeweils am Ende der Welle. Material Stahl. Das Eigengewicht der Welle ist zu vernachlässigen, die Massen können als punktförmige Belastung angesehen werden.

Es ist mit Hilfe der Formel nach Dunkerley die kritische Drehzahl zu bestimmen.

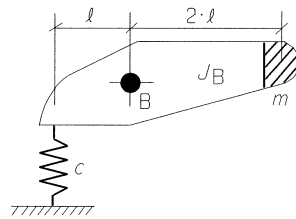
$$n_{\text{krit}} = \quad \text{min}^{-1}.$$

**Kap. 22****Beispiel 1**

Die Eigenkreisfrequenz ω_0 für den Hebel ist gesucht. Bekannt sind

ℓ , die Zusatzmasse m , das Massenträgheitsmoment für den Drehpunkt B und die Federkonstante c .

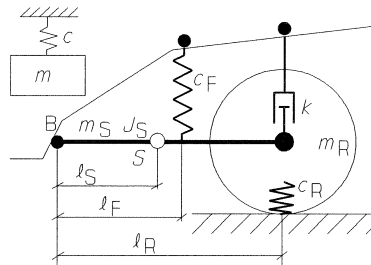
1. Es soll die Differentialgleichung aufgestellt werden und daraus die Eigenkreisfrequenz ermittelt werden.
2. Die Eigenkreisfrequenz soll über die Gleichung für den Federgefederten Drehschwinger ermittelt werden.

**Beispiel 2**

Für ein Ersatzsystem ist die Federkonstante c und die Masse m zu bestimmen.

Das Ersatzsystem hat die gleiche Eigenkreisfrequenz ω_0 .

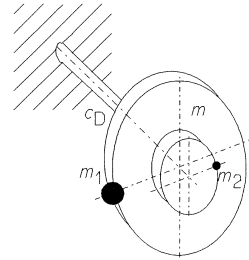
Die Bestimmung soll mit Hilfe der Gleichungen für den Drehschwinger erfolgen. Dabei ist für die Masse m zu berücksichtigen, daß beim Drehschwinger m_S ohne m_R eingesetzt wird und damit m_{Dreh} ermittelt wird, anschließend wird $m = m_R + m_{\text{Dreh}}$ gesetzt, da die Masse des Rades eine Längsbewegung durchführt.



Zur Kontrolle soll die Federkonstante des Ersatzsystems mit Hilfe des Ansatzes der Gleichheit der potentiellen Energie erfolgen.

Beispiel 3

Eine Scheibe ($J_S = 4/5 \cdot m \cdot r_1^2$) mit den Durchmessern d_1 und d_2 ist durch die Massen $m_1 = 2 \cdot m$ (Hebelarm r_1) und $m_2 = m$ (Hebelarm r_2) belastet. Die Drehfeder hat die Drehfederkonstante $c_{\text{Dreh}} = 5 \cdot m \cdot g \cdot r_1$ und ist nicht auf Biegung beansprucht. $r_1 = 2 \cdot r_2 = r$.



Gesucht ist

a) Mit Hilfe der Gleichungen für den Federgefedelten Drehschwinger die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \quad 1/s.$$

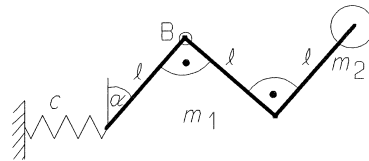
b) Die Differentialgleichung der Schwingung.

c) Die Amplitude der Schwingung

$$\varphi_{\max} = \dot{\varphi} = f(\dot{\varphi}_0; \omega_0). \quad \text{Hilfe: } \varphi(t=0)=0; \dot{\varphi}(t=0)=\dot{\varphi}_0.$$

Beispiel 4

Für eine Spannrolle soll die Eigenkreisfrequenz mit Hilfe der Gleichungen für den Federgefedelten Drehschwinger ermittelt werden. Der Auslenkwinkel ist klein. Für den Drehpunkt B kann der Winkel für die Gerade, auf der der Schwerpunkt liegt, mit $\beta = 90^\circ$ angenommen werden. Die Masse m_2 wird als Punktmasse angenommen. Die Gesamtmasse des Hebels ist m_1 , die Gesamtlänge $= 3 \cdot \ell$.



$$\omega_0 = \quad 1/s.$$

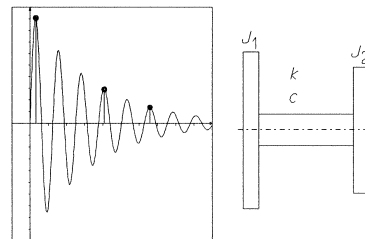
Kap. 23.1 und 24**Beispiel 1**

Eine Welle mit zwei Massen ist gedämpft. Die Federkonstante c der Welle beträgt $c = 6,1 \text{ Nm}$.

Nach 3 Schwingungen hat der Winkel φ von $\varphi_0 = 10^\circ$ auf $\varphi_3 = 1,5^\circ$ abgenommen.

Wie groß muß k gewählt werden, damit $\varphi_5 \leq 0,05$ wird. Die Massenträgheitsmomente betragen

$$J_1 = 0,03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; J_2 = 0,015 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$



Kap. 23.4

Beispiel 1

Ein Wellensystem besteht aus drei Massen und einer mehrfach abgesetzten Welle, die skizziert ist.

Die Abmessungen sind:

Für die Massenträgheitsmomente:

$d_1 = 400 \text{ mm}$; $\ell_1 = 100 \text{ mm}$;

$d_2 = 200 \text{ mm}$; $\ell_2 = 140 \text{ mm}$;

$d_3 = 400 \text{ mm}$; $\ell_3 = 100 \text{ mm}$.

Für die Wellensegmente:

$d_1 = 30 \text{ mm}$; $\ell_1 = 150 \text{ mm}$; $d_2 = 36 \text{ mm}$; $\ell_2 = 200 \text{ mm}$;

$d_3 = 38 \text{ mm}$; $\ell_3 = 460 \text{ mm}$; $d_4 = 40 \text{ mm}$; $\ell_4 = 800 \text{ mm}$.

Es sind zu bestimmen:

die Drehfederkonstanten c_1 ; c_2 ; c_3 ; c_4 ; c_{ges} 123;

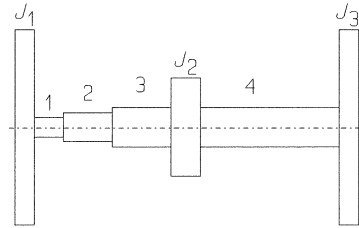
die Massenträgheitsmomente J_1 ; J_2 ; J_3 ;

die Eigenfrequenzen der Torsionsschwingungen f_{01} und f_{02} ;

die Eigenkreisfrequenzen ω_{01} ; ω_{02} ;

die kritischen Drehzahlen $n_{\text{krit } 1}$; $n_{\text{krit } 2}$;

zur Kontrolle die Faktoren A und B .



Kap. 24

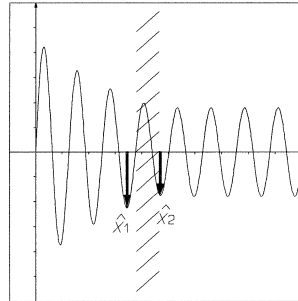
Beispiel 1

Während des Betriebes versagt die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung. Die Masse schwingt ungedämpft weiter mit der Amplitude $\hat{x}_2$. Aus der elektronischen Aufzeichnung läßt sich der Vorgang rekonstruieren. Zwei aufeinander folgende Amplituden der gedämpften Schwingung sind $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$.

Für die Auswertung ist die Dämpfungskonstante k zu ermitteln, die der Dämpfer zu Zeitpunkt des Versagens hatte. m und ω_0 sind bekannt.

Die Gleichung für k soll die Form haben:

$k = f(\ln(\hat{x}_1/\hat{x}_2); m; \omega_0)$.



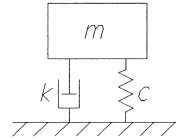
Beispiel 2

Eine Konstruktion soll so ausgelegt werden, daß bei einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung die Bewegung dem aperiodischen Grenzfall entspricht. Außerdem ist die Position

und die Geschwindigkeit dieses Teiles nach 0,06 s gesucht. Dazu ist die Dämpfungskonstante k zu bestimmen.

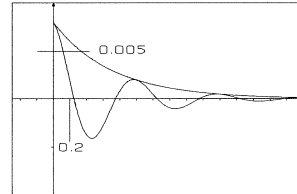
Bekannt sind: $c = 10 \text{ N/cm}$; $m = 0,4 \text{ kg}$.

Die Anfangsbedingungen sind zur Zeit $t = 0 \text{ s} \Rightarrow x(0) = 1,5 \text{ cm}$; $\dot{x}(0) = 0 \text{ cm/s}$.



Beispiel 3

Bei einem Einmassenschwinger ist dieser Schrieb aufgezeichnet worden. Die Amplituden sind auf einfach-logarithmischem Papier aufzutragen und das logarithmische Dekrement Λ daraus zu bestimmen.

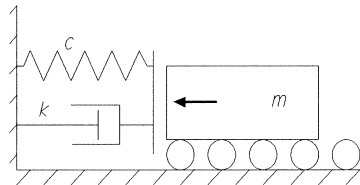


Beispiel 4

In einer Walzstraße werden die Stücke (Masse m) mit einem Puffer aufgefangen. Das Ersatzsystem ist reibungsfrei.

Gesucht ist die Dämpfungskonstante $k = f(c; m)$ für den aperiodischen Grenzfall.

Wie groß ist der Dämpfungsgrad ϑ , wenn zwei Stücke gleichzeitig auftreffen? Die Gesetze für den Stoß sind zu vernachlässigen. Es ist das gleiche bereits oben ermittelte k zu verwenden. Für beide Fälle ist das Weg-Zeit-Diagramm zu zeichnen.



Beispiel 5

Bei einer Konstruktion entspricht bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung die Bewegung dem aperiodischen Grenzfall. Die Bewegung beginnt mit der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0) < 0 \text{ cm/s}$ aus der Position $x(0) > 0 \text{ cm}$. Nach der Zeit $t(1)$ gilt $x(1) = 0 \text{ cm}$. Zur Zeit $t(2)$ hat der Schwinger den größten Abstand $x(2)$.

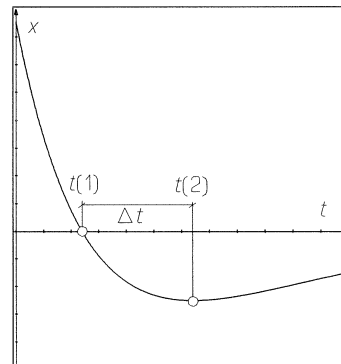
Entwickeln Sie die Funktion

$$\Delta t = t(2) - t(1)$$

$$\text{als } \Delta t = f(x(0))$$

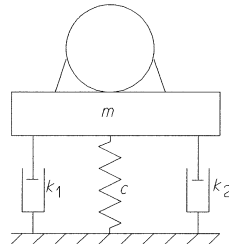
$$\text{und } \Delta t = f(\dot{x}(0))$$

und tragen Sie beide Funktionen in jeweils einem Diagramm auf.



Beispiel 6

Eine Maschine kann mit ihrem Fundament in ihrer Führung nur vertikale Bewegungen durchführen. Die Dämpfung ist geschwindigkeitsproportional.



a) Es wird der Dämpfer k_2 abgeschaltet. Die Federkonstante c ist so auszulegen, daß die Amplitude der dritten Periode nur noch 10% des Anfangswertes beträgt.

$c = f$ (Faktor, k_1 , m).

b) Der Dämpfer k_2 wird dazugeschaltet. Es soll die Dämpfungskonstante k_2 so ausgelegt werden, daß der aperiodische Grenzfall erreicht wird. $k_2 = f$ (Faktor, k_1).

c) Skizzieren Sie das Weg/Zeit-Diagramm für den Fall b) für die Anfangsbedingungen $x(0) > 0$ mm und $\dot{x}(0) > 0$ mm/s. Zeichnen Sie für $t = 0$ s die Tangente an die Kurve.

Beispiel 7

Für eine periodische gedämpfte Schwingung gelten die Werte:

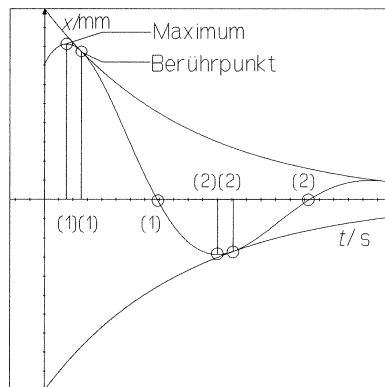
$\hat{x} = 2$ mm; $\delta = 0,2$ 1/s; $\omega_d = 0,6$ 1/s;

$\varphi = \pi/4$.

Der Funktionsterm ist

$$x = \underbrace{e^{-\delta \cdot t} \cdot \hat{x}}_{= x_1} \cdot \underbrace{\sin(\omega_d \cdot t + \varphi)}_{= x_2}.$$

Der Extremwert der abklingenden Schwingung $x = f(t)$ ist nicht identisch mit dem Berührungspunkt mit $x_1 = f(t)$.



2a) Bestimmen Sie die Zeiten für die Nulldurchgänge:

$t_0(1) =$ s; $t_0(2) =$ s.

b) Bestimmen Sie die Zeiten und die $x(t)$ -Werte für die Berührungspunkte

$t_B(1) =$ s; $t_B(2) =$ s.
 $x_B(1) =$ mm; $x_B(2) =$ mm.

c) Bestimmen Sie die Zeiten und die $x(t)$ -Werte der Extremwerte des Funktionsterms $x = f(t)$

$t_E(1) =$ s; $t_E(2) =$ s.
 $x_E(1) =$ mm; $x_E(2) =$ mm.

Beispiel 8

Eine gedämpfte Schwingung ist aufgezeichnet worden. Bekannt sind m , c , k .

a) Zeichnen Sie in das log. Weg-Zeit-Diagramm die Amplituden und die einhüllende Kurve ein.

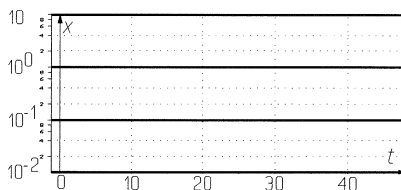
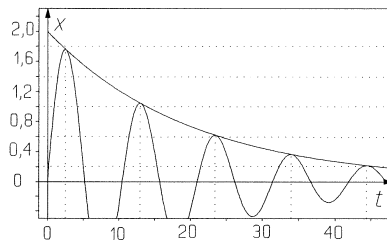
b) Wie ändert sich die Periodendauer, wenn $k = 0$ wird, gegenüber der vorhandenen Funktion mit $k \neq 0$; (richtige Antwort ankreuzen)

Die Periodendauer wird bei $k = 0$

☐ größer ☐ kleiner

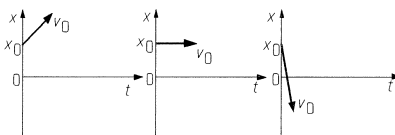
c) Die vorhandene Masse m soll in m_1 so geändert werden, daß der aperiodische Grenzfall entsteht. Geben Sie das erforderliche Verhältnis $m_1 / m = f(\vartheta)$ an:

$m_1 / m =$



d) In den rechtsstehenden Diagrammen beginnt jeweils eine Bewegung mit x_0 und v_0 . (Für $\vartheta > 1$).

Tragen Sie in die Diagramme die jeweils richtige Weg-Zeit-Funktion ein.

**Beispiel 9**

Ein Hebel schwingt horizontal in der Ebene x - y um die Achse z . Er ist in A gelagert. Die Lagerung in A wirkt als Feder und Dämpfer mit k und c . Das Massenträgheitsmoment bezogen auf A ist J_A . Gesucht ist:

a) Die Differentialgleichung für die freie gedämpfte Schwingung.

b) Für $\vartheta = 0,6$ soll $c_{0,6}$ bestimmt werden. $c_{0,6} = f(k; J_A; \text{Faktor})$: $c_{0,6} =$

c) Das logarithmische Dekrement für den Fall b): $\Lambda_{0,6} =$

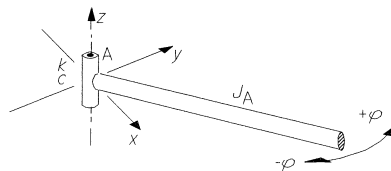
d) Skizzieren Sie das Phasendiagramm (= Phasenbild = Phasenporträt) für den Fall b). Es gelten die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0) = \varphi_0$; $\dot{\varphi}(t=0) = 0$.

Zeichnen Sie folgende Punkte deutlich in das Phasendiagramm ein:

I = erstes Maximum der Schwingung;

II = erster Nulldurchgang der Schwingung;

III = erstes Minimum der Schwingung.

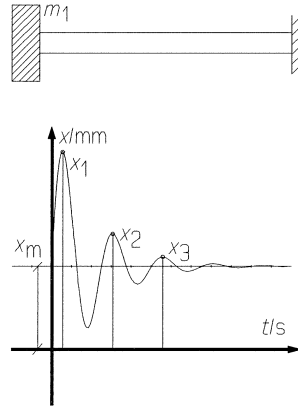


Beispiel 10

Die Abklingkurve eines Bauteiles wird aufgezeichnet. Der einseitig eingespannte Balken wird als masselos angesehen. Er ist am freien Ende durch m_1 belastet. Aus der Kurve lassen sich die Größen x_1 ; x_2 und x_3 sowie T_d ermitteln. Da die Lage von x_m nicht bekannt ist, werden die Amplituden von der t -Achse gemessen.

Gesucht ist (nicht durch Zahlenwerte und Abmessen)

- $\omega_0 = f(T_d; x_1; x_2; x_3; \text{konstante Größen}) =$
- Die Masse wird vergrößert, es ist $m_2 = 3 \cdot m_1$. Wie groß ist dann der Dämpfungsgrad ϑ_2 im Vergleich zum ursprünglichen Dämpfungsgrad ϑ_1
 $\vartheta_2 = f(\vartheta_1; \text{Faktor}) =$

**Beispiel 11**

Der Zeiger eines Meßinstrumentes schwingt geschwindigkeitsproportional gedämpft. Für die gesamte schwingende Masse ist $J_S = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ Nms}^2$. Für den Bereich von Amplitude $\hat{\varphi}_0$ bis zur Amplitude $\hat{\varphi}_3$ gilt ($\hat{\varphi}$ = maximale Amplitude)

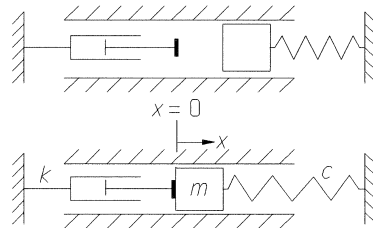
$$t_0 = 0 \text{ s}; \quad \hat{\varphi}_0 = 35^\circ;$$

$$t_3 = 1 \text{ s}; \quad \hat{\varphi}_3 = 15^\circ.$$

- Gesucht ist das logarithmische Dekrement $\Lambda =$
- Gesucht ist die Abklingkonstante $\delta =$ s^{-1}
- Geben Sie den Bereich an, in dem die Federkonstante c liegen muß, damit die Schwingung des Systems periodisch ist: $\dots > c > \dots \text{ Nm}$.
- Nach welcher Zeit ist der Betrag der maximalen Amplitude $\hat{\varphi}_n \leq 5^\circ$: $t_n =$ s .
- Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt die Amplitude $\hat{\varphi}_n =$ $^\circ$.

Kap. 24.5**Beispiel 1**

Eine Masse m wird gegen eine Feder c gedrückt und freigegeben. Die Masse trifft auf den Dämpfer. Von diesem Zeitpunkt wird die Bewegung betrachtet. Sie hat im Punkt $x(t=0) = 0$ die Geschwindigkeit $\dot{x}(t=0) = -\dot{x}_0$. Die Bewegung soll nach dem aperiodischen Grenzfall verlaufen und ist reibungsfrei. Bekannt sind außerdem m ; δ ; c . Alle Bauteile bleiben verbunden.



- Skizzieren Sie das x - t -Diagramm, tragen Sie den Vektor $\dot{x}_0$ ein.
- Geben Sie die Gleichung an: $x(t) = f(\dot{x}_0; t; \delta; c) =$
- Nach welcher Zeit hat das System den Maximalausschlag $t = t_{\max} = f(\delta) =$

- d) Wie groß ist dann der Maximalausschlag $x = x_{\max} = f(\dot{x}_0; \delta; e) =$
 e) Geben Sie k für den aperiodischen Grenzfall an: $k = f(m; c; \text{Faktor}) =$

Kap. 24.6

Beispiel 1

Bei dem Beginn der Zeitmessung ($t(0) = 0$ s) hat eine Masse $m = 1,2$ kg die Geschwindigkeit $\dot{x}(0) = -45$ m/s und die Position $x(0) = 0,5$ m. Die Bewegung ist geschwindigkeitsproportional gedämpft. Die Dämpfungskonstante ist $k = 90$ kg/s. Die Federkonstante beträgt $c = 900$ N/m.

Nach welcher Zeit $t(1)$ geht die Masse durch die Position $x(1) = 0$ m? $t(1) =$ s

Nach welcher Zeit $t(2)$ hat die Masse den größten Abstand von $x = 0$ m? $t(2) =$ s

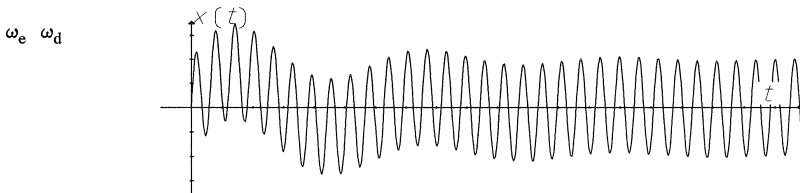
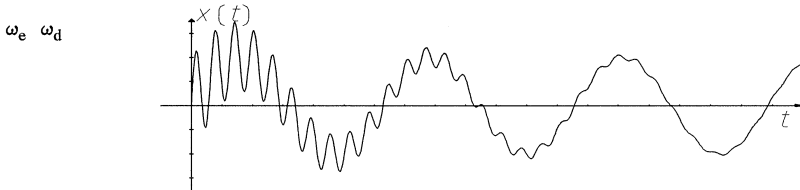
Wie groß ist dieser Abstand $x(2) =$ m

Ausgenommen ist für den Zustand (2) die Position (0). Die x - t Funktion ist zu skizzieren.

Kap. 25

Beispiel 1:

Ein System ist fremderregt. Es wird jeweils ein einmaliger Stoß auf das System ausgeübt. Dabei werden zwei Meßschriebe aufgezeichnet. Tragen Sie mit $>$ bzw. $<$ ein, ob die Erregerkreisfrequenz (Fremderregung) größer oder kleiner als die Eigenkreisfrequenz (Eigenkreisfrequenz einer gedämpften Schwingung) des Systemes ist.



Kap. 25.2

Beispiel 1

Für ein federkraftherregtes System mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung ($m = 1,2$ kg; $c = 1,4$ N/cm; $F_0/c = 28$ mm) soll für den Dämpfer die Dämpfungskon-

stante k ermittelt werden. Für die maximale Amplitude $\hat{x}$ gilt

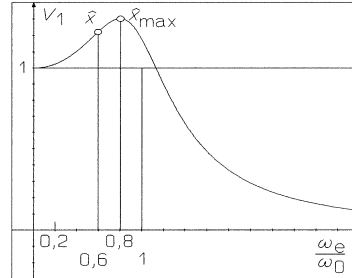
$$\omega_{e \text{ resonanz}} = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{2 \cdot m^2}}.$$

Außerdem sind gesucht:

die Amplitude für den unterkritischen Betriebszustand bei $\omega_e = 0,6 \cdot \omega_0$

Dämpfungsgrad $\vartheta =$;

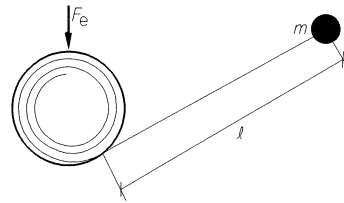
Abklingkoeffizient $\delta =$ 1/s.



Beispiel 2

Die Frequenz einer laufenden Maschine und damit ihre Drehzahl (bei einer Welle) kann man mit einem Zungenfrequenzmesser messen. Ein Stahldraht kann in seiner Länge verstellt werden, indem man ihn mehr oder weniger weit aus einem kleinen Behälter herauszieht. Das freie Ende des Drahtes, dessen Masse in der Zusatzmasse berücksichtigt wird, schwingt am weitesten aus, wenn es in Resonanz gerät. Auf einer Drehscheibe, die den Draht bewegt, kann die zugehörige Frequenz bzw. Drehzahl aufgetragen sein.

Gesucht ist die Gleichung für die Erregerfrequenz f_e , die Gleichung für die maximale Amplitude $\hat{x}$, die Gleichungen für die Erregerkraft, die Dämpfungskraft, die Trägheitskraft, die Federkraft.

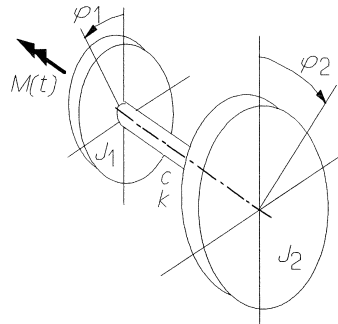


Beispiel 3

Auf einen Zweimassenschwinger (Kupplungs-Getriebe) wird ein veränderliches Moment (z.B. durch einen Motor) ausgeübt. Die Schwingung ist gedämpft. Es handelt sich dabei um eine Federkafterregung.

a) Stellen Sie die Gleichung auf für $(\omega_e/\omega_0) V_{1 \max} = f(\vartheta) =$ bei dem V_1 das Maximum hat.

b) Berechnen Sie für diesen Fall mit $\vartheta = 1/2$ $V_{1 \max} =$

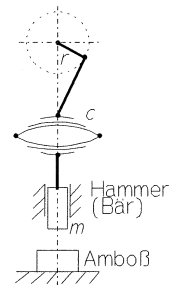
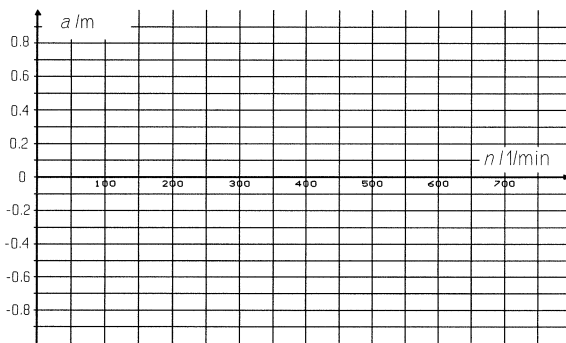


Beispiel 4

Für einen Federhammer (Schmiedehammer) sollen die Amplituden a des Hammers für verschiedene Drehzahlen in das Diagramm und die Tabelle eingetragen werden. Die Feder ist eine Blattfeder mit der Gesamtfederkonstanten $c = 1500 \text{ N/m}$, die Federkennlinie wird als linear angenommen. Der Antrieb erfolgt über die Kurbel $r = 100 \text{ mm}$. Die Masse des Hammers (Hammerbär) beträgt $m = 3 \text{ kg}$. Die Dämpfung ist vernachlässigbar klein. Außerdem ist die Resonanzdrehzahl zu bestimmen:

$$n_0 = \quad 1/\text{min}.$$

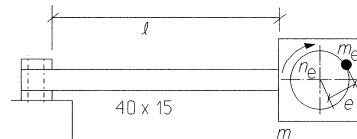
$n \text{ 1/min}$	100	200	300	400	500	600
$a \text{ m}$						

**Kap. 25.3****Beispiel 1**

Es soll das Weg-Zeit-Diagramm für den Fall gezeichnet werden, daß auf eine mit einer Unwucht belasteten Welle ein Stoß (z.B. durch Einkuppeln einer Last) ausgeübt wird.

Beispiel 2

Ein Vibrationsprüfstand soll durch Massenkraft-erregung in Schwingungen versetzt werden. Dazu wird ein Feder-Masse-System aufgeschraubt. Es besteht aus einem Flachstahl 40×15 der Länge $\ell = 400 \text{ mm}$. An dem Flachstahl ist am freien Ende ein Gehäuse montiert, das einen kleinen Elektromotor enthält. Gesamtmasse Gehäuse+Motor $m = 1,37 \text{ kg}$. Der Gleichstrommotor ist in der Drehzahl regelbar. In diesem Fall ist wegen der großen Abmessungen von m der Faktor für die Berücksichtigung der Federmasse bei der Schwingung $0,7345$ (durch einen Vorversuch bestimmt), also gilt

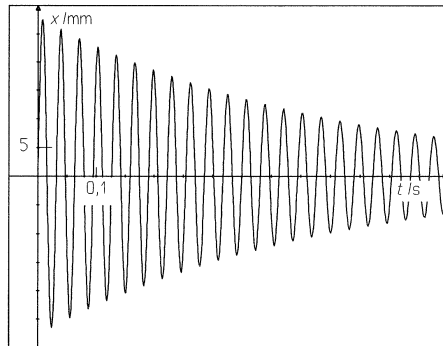


$$m_{\text{ges}} = m + 0,7345 \cdot m_{\text{Balken}}$$

Für die Erregung sind die Größen: $m_e = 6 \text{ g}$; $e = 26 \text{ mm}$.

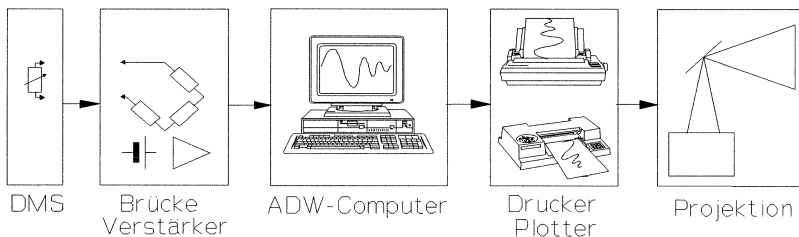
Um die Größen für die Berechnung ermitteln zu können, wird ein Ausschwingversuch durchgeführt, d.h. der Balken wird bei stehendem Motor angeschlagen und die bei der abklingenden Schwingung entstehenden Amplituden werden mit DMS (=Dehnungsmeßstreifen) aufgezeichnet. Die wesentlichen Grundlagen über die Arbeit mit DMS sind in Kap. 30.2 beschrieben. Es ist mit Hilfe des Diagrammes zu ermitteln:

Federkonstante c ;
 Eigenkreisfrequenz ω_0 ;
 Periodendauer T_d ;
 Abklingkoeffizient δ ;
 Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung ω_d ;
 Dämpfungsgrad ϑ ;
 Dämpfungskonstante k ;
 logarithmisches Dekrement Λ ;
 Erregerkreisfrequenz ω_e (aus Diagramm Abb. 25-3-2 für $V_{3 \text{ max}} \omega_e/\omega_0$ schätzen, daraus ω_e);
 Erregerkraft F_e für dieses ω_e .

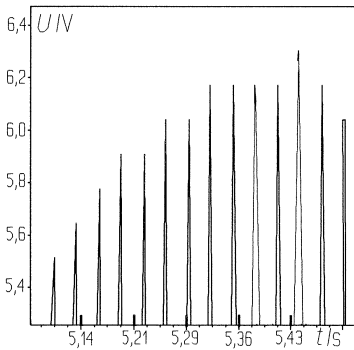
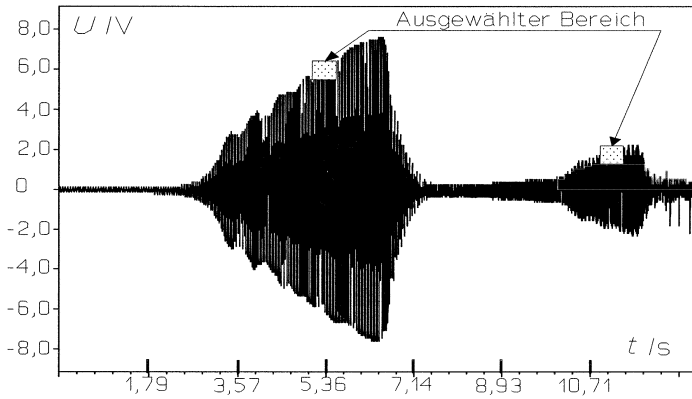


Beispiel 3

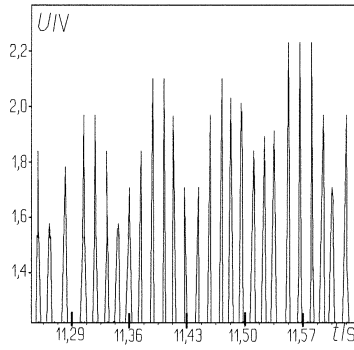
Der im Beispiel 25.3.2 bezeichnete Vibrationsprüfstand wird hochgefahren. Dabei stellt sich heraus, daß auf die Grundschwingung (Resonanzstelle) noch eine zweite Resonanzstelle folgt. Der folgende Meßschrieb ist ein echter Schrieb, aufgenommen mit einem AD-Wandler entsprechend der Anordnung nach Kap. 30.2 und Abb. 30-2-7.



Bei der Welle nach Beispiel 2, die durch eine Masse belastet ist, wird beim Hochfahren das folgende Diagramm aufgenommen. In den beiden unteren Bildern ist jeweils ein Ausschnitt vergrößert. Die linke Abbildung ist aus der ersten Resonanzstelle, die rechte Abbildung aus der zweiten Resonanzstelle. Ermitteln Sie die beiden Resonanzdrehzahlen.



$$n_{(1 \text{ Resonanz})} = 1/\text{min}$$



$$n_{(2 \text{ Resonanz})} = 1/\text{min}$$

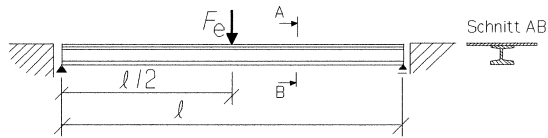
Kap. 25.4

Beispiel 1

Bei einer Stanzmaschine soll die Umgebung weitgehend vor den Schwingungen der Maschine geschützt werden.

Daher soll bei überkritischem Betrieb die Durchlässigkeit $V_D < 1$ sein.

Gesucht ist der Faktor, für den diese Bedingung erfüllt ist: $\omega_0 < \text{Faktor} \cdot \omega_e$.

Beispiel 2

Im Laufschrift beträgt die Schrittfrequenz ca. 180 Schritte/min. Im Beispiel 1 zu Kap. 8.1 wurde für einen Träger die Resonanzdrehzahl mit ≈ 360 1/min berechnet. Wie lang müßte für den Resonanzfall ein beidseitig frei gelagerter Träger bei der gleichen Belastung und gleichem Flächenträgheitsmoment sein, wenn er als Brückenträger einer Fußgängerbrücke dient und als Mittelträger verwendet wird, auf den die Laufplanken aufgeschraubt sind?

Beispiel 3

Eine Maschine kann mit ihrem Fundament in ihrer Führung nur vertikale Bewegungen durchführen. Die Dämpfung ist geschwindigkeitsproportional. Bekannt sind:

$$m = 1100 \text{ kg}; \quad \omega_e = 75,4 \text{ 1/s}; \quad \hat{F}_e = 900 \text{ N}.$$

Bei dem dämpfungsfreien Fall $\vartheta = 0$ (ausgeschaltete Dämpfung) sollen nur 3% der Schwingungsbelastung auf die Umgebung übertragen (durchgeleitet) werden. Es ist zu berechnen

a) mit Hilfe der Gleichung $V_D = 1/|1 - (\omega_e/\omega_0)^2|$ {Gleichung (25-5-3)} für diesen Fall ω_e/ω_0 ;

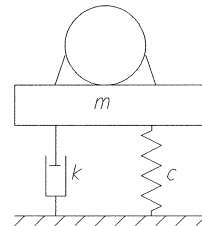
b) die Federkonstante c ;

c) die statische Verkürzung der Federn f_D ;

d) für den Fall $\vartheta = 0$ die maximale Schwingungsamplitude $\hat{x}$;

e) die Resonanzdrehzahl n_0 .

f) Um den Einfluß der Dämpfung auf die Kraft $\hat{F}_G$, die auf die Umgebung übertragen wird, zu ermitteln, ist für die angegebenen ϑ das Verhältnis von $\hat{F}_G$ bei eingeschalteter Dämpfung zu $\hat{F}_G$ bei $\vartheta = 0$ (ausgeschalteter Dämpfung) zu berechnen



ϑ	0,000	0,100	0,500
$\hat{F}_G / \hat{F}_G (\vartheta = 0)$			

Kap. 26

Beispiel 1

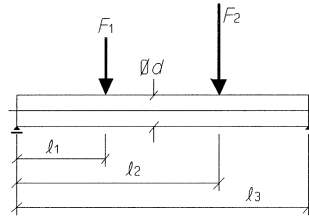
Um die einzelnen Verfahren vergleichen zu können, soll für eine Welle mit konstantem Durchmesser die biegekritische Drehzahl berechnet werden.

$$\varnothing d = 160 \text{ mm};$$

$$\ell_1 = 600 \text{ mm}; \quad \ell_2 = 1700 \text{ mm};$$

$$\ell_3 = 2900 \text{ mm};$$

$$F_1 = 8000 \text{ N}; \quad F_2 = 12000 \text{ N}.$$



1. Gesucht ist die biegekritische Drehzahl nach dem Verfahren von Mohr.
 2. Gesucht ist die biegekritische Drehzahl nach dem Verfahren von Rayleigh.
 3. Gesucht ist die biegekritische Drehzahl nach dem Verfahren von Dunkerley (Maxwell).
- Zu 2 und 3 siehe Aufgaben Kap. 19, 20, 21.

Kap. 27

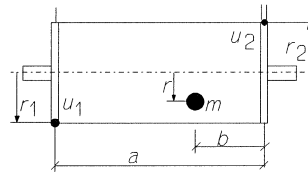
Beispiel 1

Bei einer Walze soll sich die Unwuchtmasse in m konzentrieren. Die Walze soll in den Auswuchtebenen I und II ausgewuchtet werden.

Es ist bekannt:

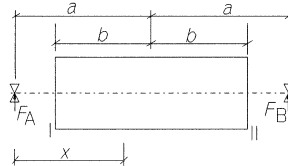
$$m; r; a; b;$$

die Auswuchtradien $r_1 = r_2$. Gesucht sind die zusätzlichen Auswuchtmassen u_1 und u_2 .



Beispiel 2

An den Lagern A und B einer Auswuchtmaschine werden die umlaufenden Lagerkräfte F_A und F_B in gleicher Richtung gemessen. Die Gewichtskraft ist kompensiert. Die Drehzahl des auszuwuchtenden Rotors beträgt $n = 1500 \text{ 1/min}$. $F_A = 10 \text{ N}$; $F_B = 5 \text{ N}$; $a = 400 \text{ mm}$; $b = 300 \text{ mm}$.



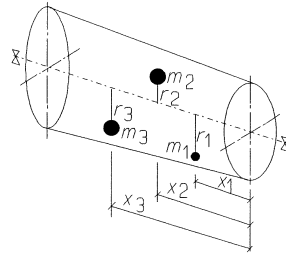
Gesucht ist:

- a) Die Unwuchten in A und B und die Unwuchteresultierende U_R . (U_A ; U_B ; U_R).
- b) In welchem Abstand x vom Lager A befindet sich die Wirkungslinie von U_R ?
- c) Wie groß sind die Ersatzunwuchten in den Ebenen I und II (U_I ; U_{II})?

Beispiel 3

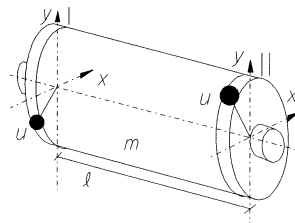
Bei einem mit ω rotierenden System sind die Koordinaten für die Auswuchtmasse m_3 zu bestimmen. Die auszuwuchtenden Massen sind m_1 und m_2 .

$m_1 = 1,5 \text{ kg};$	$x_1 = 100 \text{ mm};$	$r_1 = 200 \text{ mm};$
$m_2 = 3 \text{ kg};$	$x_2 = 150 \text{ mm};$	$r_2 = 150 \text{ mm};$
$m_3 = 4 \text{ kg};$	$x_3 = \text{ mm};$	$r_3 = \text{ mm}.$

**Beispiel 4**

Für einen Test erhält ein Rotor in den Ebenen I und II je eine drehbare Scheibe mit je einer Unwuchtmasse u . Die Scheiben können arretiert werden. Die Unwuchtmassen und die Unwuchten sind gleich. Bekannt sind ℓ ; m ; U .

In der Ebene I wird eine Scheibe in der eingezeichneten Position im Fall A und im Fall B arretiert. Zeichnen Sie jeweils die Unwuchtmasse der Ebene II für A und B ein:



1) Fall A: für die größtmögliche Unwuchteresultierende U_R . Wie groß ist U_R ?

$U_R =$

Kreuzen Sie an: Es ist eine

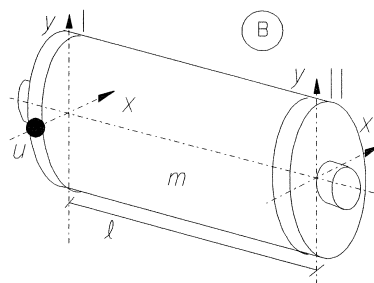
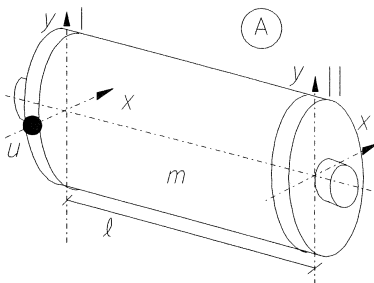
☐ statische Unwucht ☐ Momentenunwucht ☐ quasistatische Unwucht

2) Fall B: für das größtmögliche Unwuchtmoment V . Wie groß ist V ?

$V =$

Kreuzen Sie an: Es ist eine

☐ statische Unwucht ☐ Momentenunwucht ☐ quasistatische Unwucht



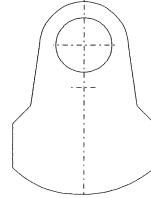
Kap. 28

Beispiel 1

Eine Kurbelwelle kann wie jede Welle Torsionsschwingungen ausführen.

Können diese Torsionsschwingungen durch Tilgung weitgehend reduziert werden und auf welche Weise kann das geschehen?

(Hilfe: In Abb. 2-2-2 ist ein Doppelpendel gezeichnet und auf das Kap. 28 - Koppelschwingungen hingewiesen).



Beispiel 2

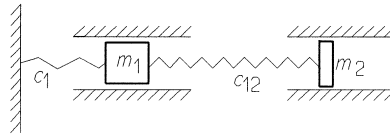
Fall 1:

Für ein System mit zwei Massen und einer Koppelfeder sollen die Koppelkreisfrequenzen bestimmt werden.

Es ist bekannt:

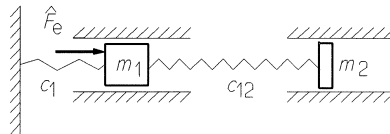
$$m_1 = 1800 \text{ kg}; \quad m_2 = 100 \text{ kg};$$

$$c_1 = 1,5 \text{E5 N/m}; \quad c_{12} = 9 \text{E4 N/m}.$$



Fall 2:

An der Masse m_1 aus dem System Fall 1 wirkt periodisch eine Kraft mit der Drehzahl $n = 500 \text{ 1/min}$. Die auftretenden Schwingungen der Masse m_1 sollen durch die Masse m_2 getilgt werden. Wie groß ist für diesen Fall die Masse m_2 auszuführen? Wo liegen dann die Koppelkreisfrequenzen im Fall 2?



Fall 3:

Auf das System soll eine Erregerkraft $\hat{F}_e = 100 \text{ N}$ wirken. Zeichnen Sie die Diagramme für $x_1 = f(\omega_e)$ und $x_2 = f(\omega_e)$.

Tragen Sie die Größen ω_{k1} ; ω_{k2} ; ω_1 ; ω_2 ; ω_T ein.

Kap. 29

Beispiel 1

Für die gedämpfte Schwingung mit Coulomb'scher Reibung sind für die 1., 2. und 3. Halbschwingung die Größen A und B zu bestimmen. Dabei ist von der Gleichung

$$x \pm e = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

auszugehen. Außerdem ist für den jeweiligen Bereich die Gleichung $x = f(t)$ aufzustellen.

Es gelten für die 1. Halbschwingung mit $\dot{x} < 0$ die Randbedingungen $t = 0$; $x = x_0$; $\dot{x} = 0$. Für die 2. Halbschwingung mit $\dot{x} > 0$ gelten die Randbedingungen $t = \pi/\omega_0$;

$x = -x_0 + 2 \cdot e$; $\dot{x} = 0$. Für die 3. Halbschwingung ist sinngemäß zu verfahren.

1. Halbschwingung: $A_1 =$ $B_1 =$ $x =$

2. Halbschwingung: $A_2 =$ $B_2 =$ $x =$

3. Halbschwingung: $A_3 =$ $B_3 =$ $x =$

Beispiel 2

Ein Torsionsstab ist in A eingespannt und in B gelagert. Die Reibkraft F_R im Lager B ist durch trockene Reibung bedingt. Die Scheibe am Ende des Stabes hat das Massenträgheitsmoment J . Bekannt sind: $c = 148 \text{ N} \cdot \text{m}$ ($= 148 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$); [Hilfe: für einen Einheitenvergleich wird zweckmäßigerweise mit der Klammer (...) gearbeitet]; $F_R = 200 \text{ N}$; $\varnothing d = 14,8 \text{ mm}$; $J = 15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

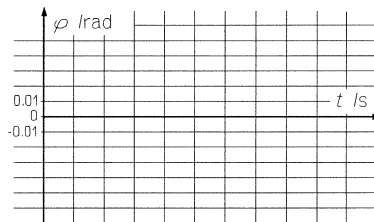
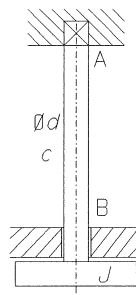
Anfangswerte $\varphi(t=0) = \varphi_0 = 0,06 \text{ rad}$; $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0 = 0 \text{ rad/s}$.

a) Gesucht ist die Differentialgleichung für $\dot{\varphi} > 0$ und die Differentialgleichung für $\dot{\varphi} < 0$

b) Gesucht sind die $\pm$ Maximalwerte der Amplituden

$\varphi_1 = \text{rad}$; $\varphi_2 = \text{rad}$; und der folgenden Amplituden, bis die Scheibe in den "Ruhebereich" kommt (mit $e = \pm M_R/c$):

c) Zeichnen Sie die Bewegung in das Diagramm, dabei ist die Skalierung der φ -Achse vorgegeben. Die Skalierung der Zeitachse t ist zu wählen. Dabei müssen die einzelnen $\pm$ Maximalwerte genau eingezeichnet werden, der Verlauf der Bewegung zwischen den $\pm$ Maximalwerten kann skizziert werden.



Kap. 30.1

Beispiel 1

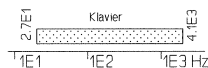
Ein Blechkamin wird durch Spanndrähte gehalten. Die Drähte haben einen Durchmesser $d = 3 \text{ mm} = \ell$ (charakteristische Länge in den Gleichungen). Die Windgeschwindigkeit beträgt $w = 25 \text{ m/s}$ (entspricht Windstärke 9 bis 10). Die Strouhalzahl beträgt in diesem Fall $St = 0,21$. $\nu_{\text{Luft}} = 15,1 \text{E-6 m}^2/\text{s}$. Nach Tabellen wird bei diesen Werten eine instationäre Wirbelablösung erfolgen, die einen Spanndraht zum Schwingen bringt. Gefragt ist, ob diese Schwingung im Hörbereich liegt.

Gesucht ist

$Re =$;

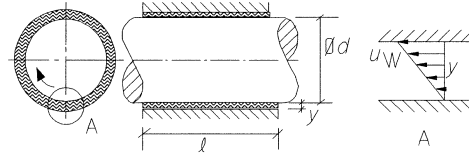
die Frequenz, mit der die Ablösung der Wirbel erfolgt $f = \text{Hz}$

Markieren Sie in der Skala den Frequenzwert. Zum Vergleich ist der Frequenzumfang eines Klaviers eingetragen.



Beispiel 2

Für ein Gleitlager soll die Wandschubspannung τ_W des Schmiermittels an dem Wellenzapfen berechnet werden. Dafür wird angenommen, daß der Zapfen genau zentrisch im Lager läuft. Im Spalt (Höhe = y) soll die Geschwindigkeitsverteilung linear sein. Das rechte Bild gibt den Ausschnitt A des linken Bildes wieder. Für die Flächenberechnung kann der Zapfendurchmesser = Lagerdurchmesser gesetzt werden.



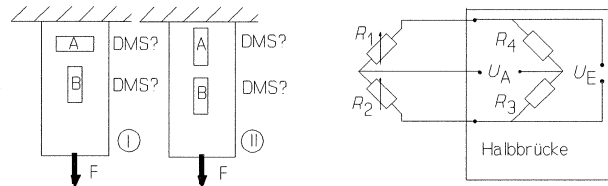
Gegeben ist:

$d = 40 \text{ mm}$; $\ell = 55 \text{ mm}$; $y = 0,02 \text{ mm}$; $n = 2500 \text{ 1/min}$;

Öl bei Betriebstemperatur $\eta = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(s} \cdot \text{m)}$

Gesucht ist:

Wandschubspannung	$\tau_W =$	N/m^2 ;
Reibungsmoment	$M_R =$	$\text{N} \cdot \text{m}$;
Verlustleistung	$P_R =$	W durch die Flüssigkeitsreibung.

Kap. 30.2**Beispiel 1**

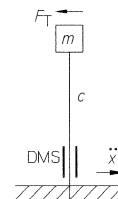
Auf einen Zugstab sind 2 DMS als Halbbrücke geklebt. Es soll die Dehnung in Krafttrichtung berechnet werden. Die Verdrahtung soll für maximale Empfindlichkeit der Meßbrücke erfolgen. Wählen Sie Fall I oder II.

Es ist bekannt: $U_E = 1 \text{ V}$; $k = 2,2$; $U_A = 165 \mu\text{V}$;

Querkontraktionsziffer für Stahl $\mu = 0,3$. Es ist anzugeben, welcher DMS = A und welcher DMS = B ist. Außerdem ist ε zu berechnen.

Beispiel 2

Geben Sie eine einfache Methode an, wie man eine Meßbrücke (Beschleunigungsaufnehmer - Feder-Masse-System) eichen kann, mit der Beschleunigungen gemessen werden sollen.



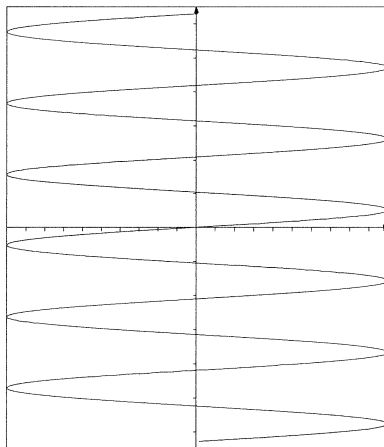
Lösungen

Kap. 5 und Kap. 6

Beispiel 1

Die Welle (1) hat ihre Amplitude in x -Richtung. Die Achse, auf der die Drehzahl aufgetragen wird, ist die t -Achse (= Zeitachse). Die Drehzahl der Welle hat den dreifachen Betrag der Grunddrehzahl, sie muß dreifach in der Grundperiode vorkommen.

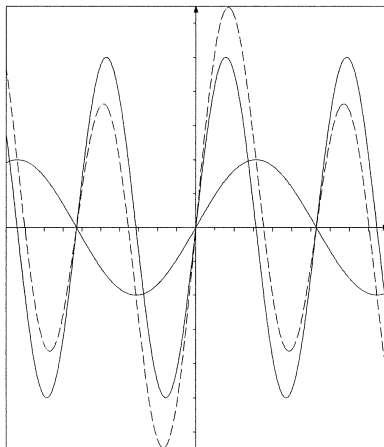
$$x(t) = 5 \cdot \sin(3 \cdot t)$$

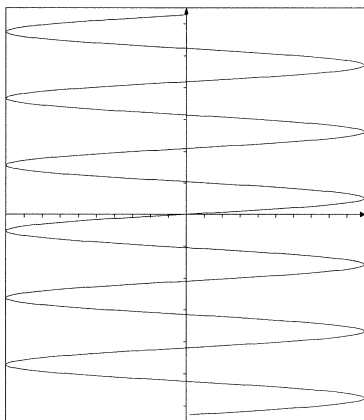


Zwei Wellen laufen parallel und haben Unwuchten in y -Richtung. Davon läuft eine Welle mit der Grunddrehzahl, während die andere Welle mit der doppelten Drehzahl läuft. Beide Wellen ergeben eine Resultierende durch die Addition ihrer Amplituden.

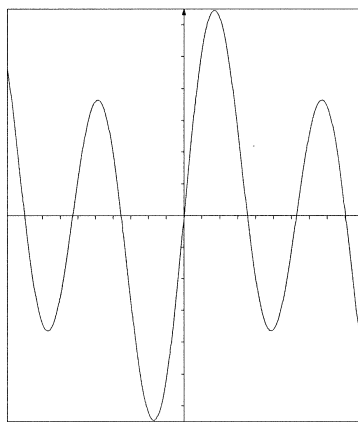
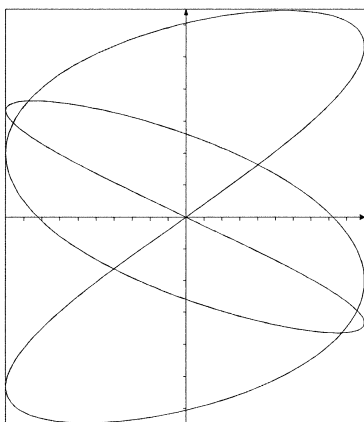
$$y(t) = 2 \cdot \sin(1 \cdot t) + 5 \cdot \sin(2 \cdot t)$$

Im Kap. 27 wird die Auswuchttechnik behandelt. Es soll eine Reduzierung der Belastung der Lager durch die Unwucht erreicht werden. Damit ist die Forderung verbunden, die Beeinflussung der Umgebung zu verringern.





Bringt man Meßaufnehmer (z.B. DMS = Dehnmeßstreifen) an der Lagerung der Maschine an, die in x - und y -Richtung messen, so wird das resultierende Meßbild auf dem Oszilloskopschirm die Lissajous-Figur zeigen. Eine einfache und preiswerte Methode zur Darstellung der Schwingungen läßt sich mit einer Lichtquelle realisieren.

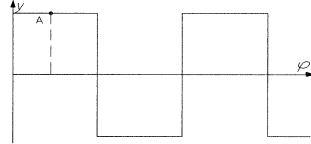


Bei einer elektronischen Messung mit Meßwertaufnehmern muß man beachten, daß die angezeigte Amplitude entsprechend der Einstellung am Oszilloskop vergrößert oder verkleinert ist. Es gehören immer zu einer Auswertung die Parameter, mit denen die Meßgeräte eingestellt worden sind, damit die Meßwerte nachvollziehbar sind.

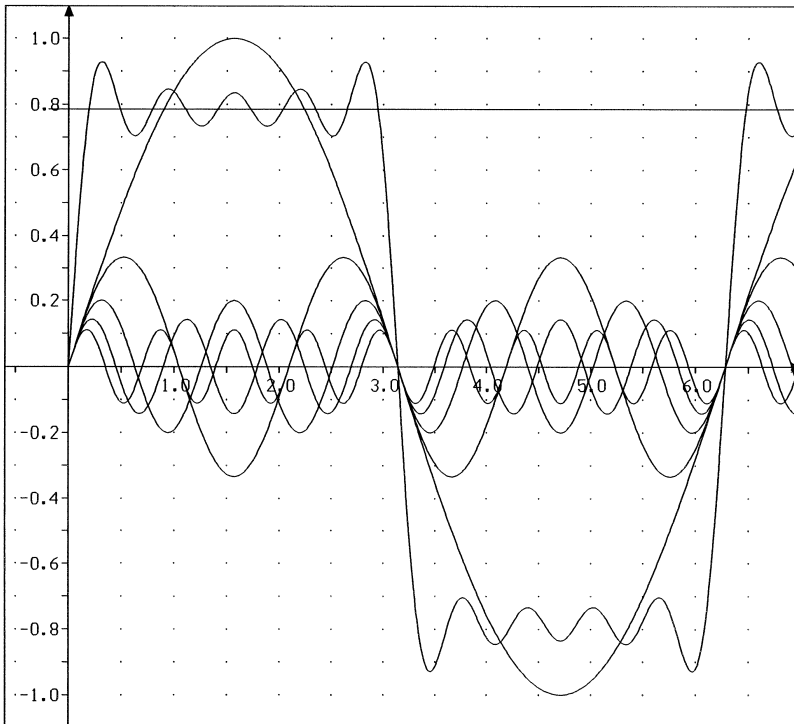
Beispiel 2

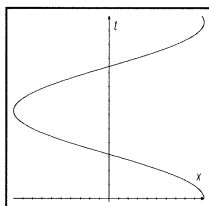
Die Reihe für die Rechteckschwingung lautet

$$y = \sin(\varphi) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot \varphi) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5 \cdot \varphi) + \dots$$



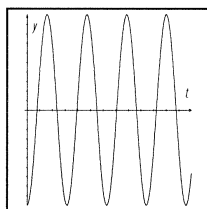
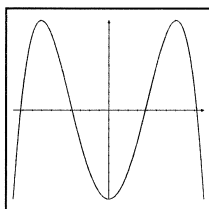
Die Summe der ersten drei Summanden ist	0,8666666666
Die Summe der ersten vier Summanden ist	0,7238095238
Ihre Differenz beträgt	0,1428571422
Die halbe Differenz beträgt	0,0714285711
Dieser Betrag zur Summe der ersten vier Summanden addiert, ergibt	0,7952380949
Auf π umgerechnet, (π / n)	3,950505734
erhält man den Faktor $n =$	4
und auf eine ganze Zahl gerundet	



**Beispiel 3**

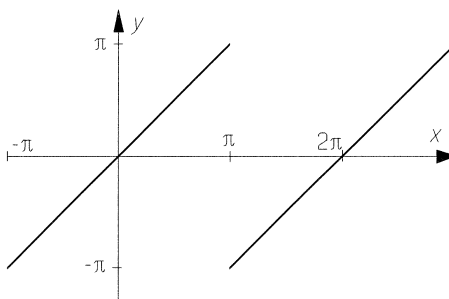
Mit einem Oszilloskop wird die Lissajousfigur aufgenommen.

Das Frequenzverhältnis beträgt: 4 / 1

**Kap. 7.1****Beispiel 1**

Da die Darstellung aus sin-Schwingungen erfolgen soll, wird eine Fourierreihe gewählt. Es müssen zunächst die Fourierkoeffizienten untersucht werden. Die Funktion ist nach Kap. 7 (Zusammenfassung) ungerade, daher sind alle $A_n = 0$, es existieren nur die B_n -Summanden. Für die Funktion gilt

$$f(x + 2 \cdot \pi) = f(x) ,$$



und für die Grenzen, (da aus der Aufgabenstellung bekannt ist, daß die Lösung mit sin-Schwingungen erfolgt, muß für $x = \pi \Rightarrow f(x) = 0$ folgen):

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } -\pi < x < +\pi \\ 0 & \text{für } x = \pm\pi \end{cases} .$$

Damit ist zunächst in der Integration

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx , \quad (7-1-5)$$

und in diesem Fall

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx ,$$

und mit

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int x \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx = -x \cdot \frac{\cos(n \cdot x)}{n} + \int \frac{\cos(n \cdot x)}{n} \cdot dx ,$$

$$\int x \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx = -x \cdot \frac{\cos(n \cdot x)}{n} + \frac{\sin(n \cdot x)}{n^2} .$$

Es ist dann mit den Grenzen für B_n aus Gleichung (7-1-5) und dieser Funktion

$$B_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left[-\frac{x \cdot \cos(n \cdot x)}{n} + \frac{\sin(n \cdot x)}{n^2} \right]_{-\pi}^{+\pi} ,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\left(-\frac{\pi \cdot \cos(n \cdot \pi)}{n} + \frac{\sin(n \cdot \pi)}{n^2} \right) - \left(-\frac{-\pi \cdot \cos(n \cdot \pi)}{n} + \frac{\sin(n \cdot \pi)}{n^2} \right) \right] ,$$

da gilt
folgt

$$\cos(n \cdot \pi) = \cos(n \cdot (-\pi)) ,$$

$$\sin(n \cdot \pi) = \sin(n \cdot (-\pi)) ,$$

$$B_n = -\frac{2}{n} \cdot \cos(n \cdot \pi) .$$

Für $n =$ ganzzahlig und positiv wird

$$B_n = -\frac{2}{n} \cdot (-1) \quad \text{für } n = 1 ; 3 ; 5 ; \dots ,$$

$$B_n = -\frac{2}{n} \cdot (+1) \quad \text{für } n = 2 ; 4 ; 6 ; \dots$$

und damit allgemein

$$B_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} .$$

Es ist die gesuchte Funktion

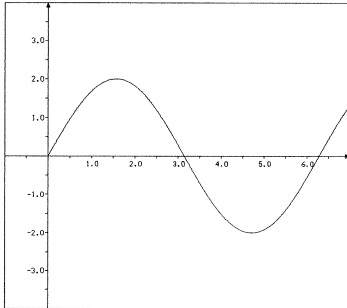
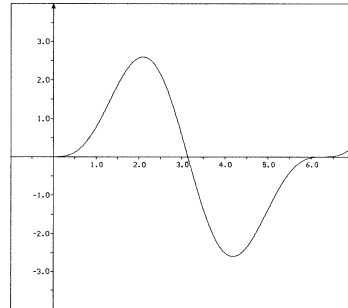
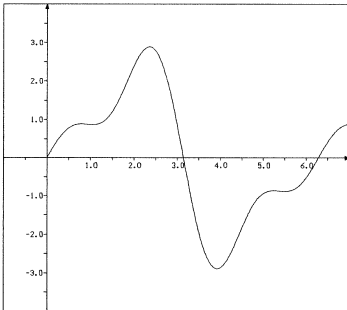
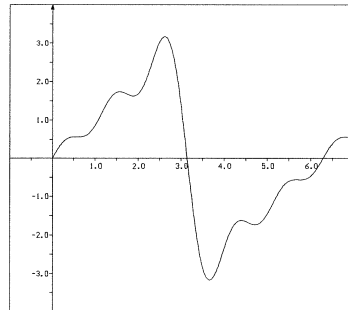
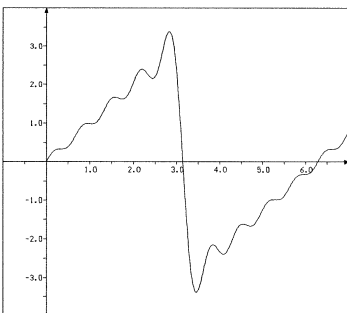
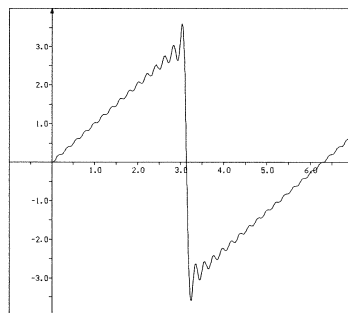
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(n \cdot x)$$

und die einzelnen Glieder der Summe sind

$$f(x) = 2 \cdot \sin(x) ,$$

$$f(x) = 2 \cdot \left(\sin(x) - \frac{\sin(2 \cdot x)}{2} \right) ,$$

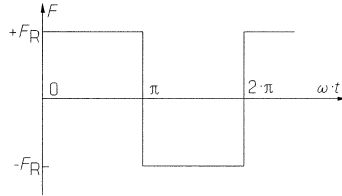
$$f(x) = 2 \cdot \left(\sin(x) - \frac{\sin(2 \cdot x)}{2} + \frac{\sin(3 \cdot x)}{3} - \dots \right) .$$

$n = 1$  $n = 2$  $n = 3$  $n = 4$  $n = 9$  $n = 30$ 

Beispiel 2

Eine Schwingung erfolgt mit Coulomb'scher Reibung. Die Reibungskraft bei trockener Reibung ist nach Kap. 29 konstant. Für den Bereich von 0 bis $2 \cdot \pi$ beträgt sie $F = \pm F_R$. Der Vorgang ist periodisch. Es gilt

$$f(x) = \begin{cases} F_R & \text{für } 0 < x < \pi \\ -F_R & \text{für } \pi < x < 2 \cdot \pi \end{cases}.$$



Da sich an der Stelle $x = \pi$ die Unstetigkeitsstelle befindet, muß die Lösung in zwei Integrale geteilt werden. Die Funktion ist ungerade, daher sind alle A -Koeffizienten Null.

$$A_0 = 0; \quad A_n = 0.$$

Damit ist mit (7-1-9)

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot x\right) \cdot dx \quad \text{mit } T = 2 \cdot \pi$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F_R \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2 \cdot \pi} -F_R \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx.$$

An dieser Stelle muß streng auf die -Zeichen geachtet werden!

$$B_n = \frac{F_R}{\pi} \left[\left(-\frac{1}{n} \cdot \cos(n \cdot x) \right) \Big|_0^{\pi} + \left(-\left(-\frac{1}{n} \cdot \cos(n \cdot x) \right) \Big|_{\pi}^{2 \cdot \pi} \right) \right],$$

$$B_n = \frac{F_R}{n \cdot \pi} [-(\cos(n \cdot \pi) - \cos(n \cdot 0)) + (\cos(n \cdot 2 \cdot \pi) - \cos(n \cdot \pi))].$$

Da $\cos(n \cdot 0) = \cos(n \cdot 2 \cdot \pi)$, folgt

$$B_n = \frac{F_R}{n \cdot \pi} (-2 \cdot \cos(n \cdot \pi) + 2 \cdot \cos(n \cdot 0)).$$

Für $n = 1; 3; 5; \dots$ ist $\cos(n \cdot \pi) = -1$ und $\cos(n \cdot 2 \cdot \pi) = +1$,

Für $n = 2; 4; 6; \dots$ ist $\cos(n \cdot \pi) = +1$ und $\cos(n \cdot 2 \cdot \pi) = +1$.

Also folgt für alle $n = 1; 3; 5; \dots$

$$B_n = \frac{F_R}{n \cdot \pi} \cdot 4,$$

und für alle $n = 2; 4; 6; \dots$

$$B_n = \frac{F_R}{n \cdot \pi} \cdot 0; \quad B_n = 0.$$

Die Schwingung ist damit

$$F(t) = 4 \cdot \frac{F_R}{\pi} \cdot \left(\sin(\omega \cdot t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5 \cdot \omega \cdot t) + \dots \right).$$

Kap. 7.2**Beispiel 1**Ordnung $n=1$

i	$F(i)$	$n \cdot \varphi$	$F(i) \cdot \cos(n \cdot \varphi)$	$F(i) \cdot \sin(n \cdot \varphi)$
0	0,00	0	0,000	0,000
1	18,66	30	16,160	9,330
2	-8,67	60	-4,335	-7,508
3	-10,00	90	0,000	-10,000
4	8,66	120	-4,330	7,500
5	1,33	150	-1,152	0,665
6	0,00	180	0,000	0,000
7	-1,34	210	1,160	0,670
8	-8,67	240	4,335	7,508
9	10,00	270	0,000	-10,000
10	8,66	300	4,330	-7,500
11	-18,67	330	-16,169	9,335
			Summe: 0,0	Summe: 0,0

$$F_1(\varphi) = 0 \cdot \cos(1 \cdot \varphi) + 0 \cdot \sin(1 \cdot \varphi) = 0 \cdot \sin(1 \cdot \varphi + 0) .$$

Da beide Summen = 0 sind, existieren keine Drehzahlen der 1.Ordnung

Ordnung $n=2$

i	$F(i)$	$n \cdot \varphi$	$F(i) \cdot \cos(n \cdot \varphi)$	$F(i) \cdot \sin(n \cdot \varphi)$
0	0,00	0	0,000	0,000
1	18,66	60	9,330	16,160
2	-8,67	120	4,330	-7,508
3	-10,00	180	10,000	0,000
4	8,66	240	-4,330	-7,500
5	1,33	300	0,665	-1,152
6	0,00	360	0,000	0,000
7	-1,34	420	-0,670	-1,160
8	-8,67	480	4,335	-7,508
9	10,00	540	-10,000	-0,000
10	8,66	600	-4,330	-7,500
11	-18,67	660	-9,335	16,168
			Summe: 0,0	Summe: 0,0

$$F_2(\varphi) = 0 \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + 0 \cdot \sin(2 \cdot \varphi) = 0 \cdot \sin(2 \cdot \varphi + 0) .$$

Da beide Summen = 0 sind, existieren keine Drehzahlen der zweiten Ordnung.

Ordnung $n=3$

i	$F(i)$	$n \cdot \varphi$	$F(i) \cdot \cos(n \cdot \varphi)$	$F(i) \cdot \sin(n \cdot \varphi)$
0	0,00	0	0,000	0,000
1	18,66	90	0,000	18,660
2	-8,67	180	8,670	0,000
3	-10,00	270	0,000	10,000
4	8,66	360	8,660	0,000
5	1,33	450	0,000	1,330
6	0,00	540	0,000	0,000
7	-1,34	630	0,000	1,340
8	-8,67	720	-8,670	0,000
9	10,00	810	0,000	10,000
10	8,66	900	-8,660	0,000
11	-18,67	990	0,000	18,670
			Summe: 0,0	Summe: 60,000

$$F_3(\varphi) = 0 \cdot \cos(3 \cdot \varphi) + 10 \cdot \sin(3 \cdot \varphi) = 10 \cdot \sin(3 \cdot \varphi + 0) .$$

Für die Fourierkoeffizienten erhält man

$$A_3 = 2/12 \cdot \Sigma \dots = 1/6 \cdot 0 = 0 ,$$

$$B_3 = 2/12 \cdot \Sigma \dots = 1/6 \cdot 60 = 10 .$$

Daraus die Amplitude

$$C_3 = \sqrt{0^2 + 10^2} = 10 \text{ (Zum Vorzeichen siehe Kapitel Beispiele, Anmerkung 5)}$$

und die Phasenverschiebung

$$\tan \varphi_3 = A_3 / B_3 = 0/10 = 0 \Rightarrow \varphi = 0^0 .$$

Es existiert eine Welle, die mit der 3-fachen Drehzahl der 1.Ordnung rotiert.
Ihre Unwucht beträgt 10 Einheiten.

Ordnung $n=4$

i	$F(i)$	$n \cdot \varphi$	$F(i) \cdot \cos(n \cdot \varphi)$	$F(i) \cdot \sin(n \cdot \varphi)$
0	0,00	0	0,000	0,000
1	18,66	120	-9,330	16,160
2	-8,67	240	4,335	7,508
3	-10,00	360	-10,000	0,000
4	8,66	480	-4,330	7,500
5	1,33	600	-0,665	-1,152
6	0,00	720	0,000	0,000
7	-1,34	840	0,670	-1,160
8	-8,67	960	4,335	7,509
9	10,00	1080	10,000	0,000
10	8,66	1200	-4,330	7,500
11	-18,67	1320	9,334	16,169
			Summe: 0,0	Summe: 60,000

$$F_4(\varphi) = 0 \cdot \cos(4 \cdot \varphi) + 10 \cdot \sin(4 \cdot \varphi) = 10 \cdot \sin(4 \cdot \varphi + 0) .$$

Für die Fourierkoeffizienten erhält man

$$A_4 = 2/12 \cdot \Sigma \dots = 1/6 \cdot 0 = 0 ,$$

$$B_4 = 2/12 \cdot \Sigma \dots = 1/6 \cdot 60 = 10 .$$

Daraus die Amplitude

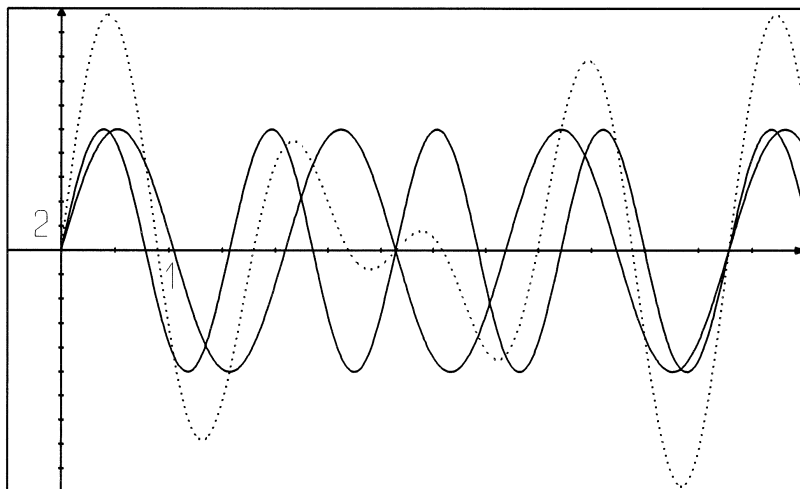
$$C_4 = \sqrt{0^2 + 10^2} = 10$$

und die Phasenverschiebung

$$\tan \varphi_4 = A_4 / B_4 = 0/10 = 0 \Rightarrow \varphi = 0^0 .$$

Es existiert eine Welle, die mit der 4-fachen Drehzahl der 1.Ordnung rotiert.
Ihre Unwucht beträgt 10 Einheiten.

Das Drehzahlverhältnis der beiden Wellen beträgt somit 3:4 .

**Beispiel 2**

Die Tabellen werden wie im Beispiel 1 aufgestellt.

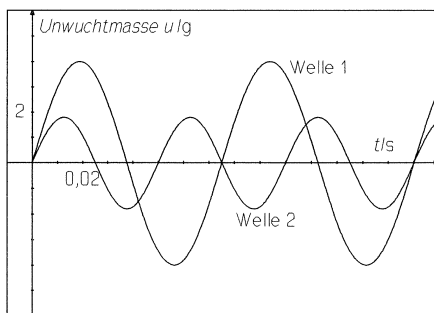
1. Ordnung Summe = 0 ; 0.

2. Ordnung Summe = 0 ; 24.

3. Ordnung Summe = 0 ; 10,8.

Ab der 4. Ordnung sind in allen Spalten die Summen der Spalten = 0.

Rechnerisch existiert keine Welle mit der Grunddrehzahl. In der Stückliste ist die Welle mit der zweifachen Grunddrehzahl $\Rightarrow$ 2. Ordnung die Welle mit der Nr.1, die Welle mit der 3. Ordnung ist die Welle mit der Stücklistennummer 2. So sind auch im Diagramm die Nummern eingetragen.



Für die Fourierkoeffizienten der 2. Ordnung erhält man

$$A_2 = 2/12 \cdot \Sigma \dots = 1/6 \cdot 0 = 0,$$

$$B_2 = 2/12 \cdot \Sigma \dots = 1/6 \cdot 24 = 4.$$

Daraus die Amplitude

$$C_2 = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$$

und die Phasenverschiebung

$$\tan \varphi_2 = A_2 / B_2 = 0 / 4 = 0 \Rightarrow \varphi = 0^0.$$

Für die Fourierkoeffizienten der 3. Ordnung erhält man

$$A_3 = 2/12 \cdot \Sigma \dots = 1/6 \cdot 0 = 0,$$

$$B_3 = 2/12 \cdot \Sigma \dots = 1/6 \cdot 10,8 = 1,8.$$

Daraus die Amplitude

$$C_3 = \sqrt{(0^2 + 1,8^2)} = 1,8$$

und die Phasenverschiebung

$$\tan \varphi_3 = A_3 / B_3 = 0 / 1,8 = 0 \Rightarrow \varphi = 0^0.$$

Mit der Berechnung der Periodenzeit für die Grundschiwingung und der Eigenkreisfrequenz

$$T_1 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_1} \Rightarrow \omega_1 = \frac{2 \cdot \pi}{0,15} \quad 1/s = 41,87 \quad 1/s$$

erhält man entsprechend den Ordnungen die Eigenkreisfrequenzen und die Drehzahlen der tatsächlich vorhandenen Wellen zu

$$\omega_2 = 2 \cdot \omega_1 = 83,73 \quad 1/s \Rightarrow n_2 = 800 \quad 1/min ;$$

$$\omega_3 = 3 \cdot \omega_1 = 125,6 \quad 1/s \Rightarrow n_3 = 1200 \quad 1/min .$$

Welle 1:

$$x_1 = 4 \cdot \sin(83,73 \cdot t + 0)$$

$$\text{Drehzahl } n_1 = 800 \text{ min}^{-1};$$

$$\text{Unwuchtmasse } u_1 = 4 \text{ g};$$

$$\text{Eigenkreisfrequenz } \omega_1 = 83,73 \text{ s}^{-1}.$$

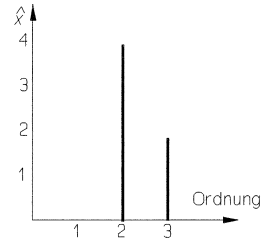
Welle 2:

$$x_2 = 1,8 \cdot \sin(125,6 \cdot t + 0);$$

$$\text{Drehzahl } n_2 = 1200 \text{ min}^{-1};$$

$$\text{Unwuchtmasse } u_2 = 1,8 \text{ g};$$

$$\text{Eigenkreisfrequenz } \omega_2 = 125,6 \text{ s}^{-1}.$$



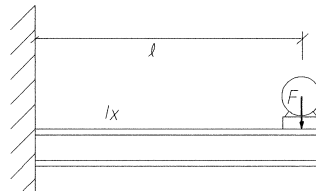
Kap. 8.1

Beispiel 1

Die statische Durchbiegung beträgt für den eingespannten Träger

$$f_D = \frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot I_x \cdot E} = \frac{8000 \cdot 200^3}{3 \cdot 1450 \cdot 2,1 \cdot 10^7} \frac{\text{N} \cdot \text{cm}^3}{\text{cm}^4 \cdot \text{N/cm}^2} = 0,7 \text{ cm} .$$

Damit ist mit (8-1-14)



$$n_{\text{krit}} = \frac{300}{\sqrt{0,7}} \text{ 1/min} = 358 \text{ 1/min.}$$

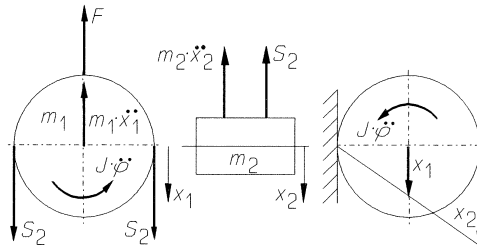
Der Motor darf in seiner Betriebsdrehzahl nicht mit dieser Drehzahl laufen, da dann das System in Resonanz gerät.

Ebenso darf aber auch in der Nähe keine Maschine mit dieser Drehzahl laufen, da durch Schwingungsübertragung das System ebenfalls in Resonanzschwingungen geraten würde.

Siehe hierzu auch Kap. 30.5 Erdbeben und Schwingungen.

Beispiel 2

Das System wird mit den Gesetzen der Statik freigemacht, die Elemente werden einzeln betrachtet. Die Scheibe rollt an der Wand wie an einer Zahnstange ab, wobei der Mittelpunkt der Scheibe die Geschwindigkeit $\dot{x}_1$ hat.



Aus dem mittlerem Bild folgt

$$\sum F = 0 = -m_2 \cdot \ddot{x}_2 - S_2 \Rightarrow S_2 = -m_2 \cdot \ddot{x}_2 .$$

Für das rechte Bild gilt

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_1}{r} ; \quad \ddot{x}_2 = 2 \cdot \ddot{x}_1 ; \quad J = \frac{m_1 \cdot r^2}{2} ; \quad F = c \cdot x_1 ,$$

und damit ist für das linke Bild

$$\sum F_x = 0 = S_2 - m_1 \cdot \ddot{x}_1 - F + S_1 \Rightarrow S_1 ,$$

$$\sum M = 0 = -S_2 \cdot r + J \cdot \ddot{\varphi} + S_1 \cdot r \Rightarrow S_1 .$$

Beide Gleichungen werden nach S_1 aufgelöst und gleichgesetzt. Mit den anderen Größen erhält man die DGL

$$\ddot{x}_1 + \frac{c}{\frac{3}{2} \cdot m_1 + 4 \cdot m_2} \cdot x_1 = 0 .$$

Der Faktor von x_1 ist die gesuchte Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{\frac{3}{2} \cdot m_1 + 4 \cdot m_2}} .$$

Für den Fall $m_1 = m_2 = m$ ist

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{11} \cdot \frac{c}{m}}.$$

Greift man an dieser Stelle auf Kap. 22.4 zu, so kann man für diese Aufgabe die Gleichung für den Federgefesselten Drehschwinger einsetzen und damit den Lösungsweg abkürzen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sum c_i \cdot r_i^2 + F_G \cdot e \cdot \cos \beta}{J_B + m_2 \cdot \ell^2}}.$$

$$J_B = J + m_1 \cdot (2 \cdot r)^2; \ell = 2 \cdot r; \beta = 90^\circ; \cos \beta = 0;$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c \cdot r^2}{\frac{m_1 \cdot r^2}{2} + m_1 \cdot r^2 + m_2 \cdot (2 \cdot r)^2}} = \sqrt{\frac{c}{\frac{3}{2} m_1 + 4 \cdot m_2}}.$$

Beispiel 3

Das System wird wie in dem Beispiel 1 freigemacht, die Elemente werden einzeln betrachtet. Die Scheibe rollt an der Wand wie an einer Zahnstange ab, wobei der Mittelpunkt der Scheibe die Geschwindigkeit $\dot{x}_1$ hat. Aus dem Bild für die Masse m_2 folgt

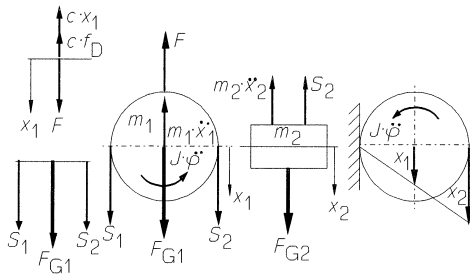
$$\sum F = 0 = m_2 \cdot g - m_2 \cdot \ddot{x}_2 - S_2 \Rightarrow S_2 = m_2 \cdot g - m_2 \cdot \ddot{x}_2.$$

Für das rechte Bild gilt

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_1}{r}; \quad \ddot{x}_2 = 2 \cdot \ddot{x}_1; \quad J = \frac{m_1 \cdot r^2}{2};$$

für das linke Bild (Schnitt durch die Feder am Angriffspunkt an der Scheibe) gilt:

Der Weg der Federkraft setzt sich aus der statischen Verlängerung f_D und der Dehnung durch die Schwingung zusammen. Die statische Verlängerung f_D wird durch die Belastung durch die beiden Seilkräfte und die Gewichtskraft der Scheibe bewirkt.



$$F = c \cdot (f_D + x_1) = (2 \cdot m_2 \cdot g + m_1 \cdot g) + c \cdot x_1$$

und damit ist in der Abb. für das Teilsystem der Scheibe

$$\sum F_x = 0 = S_2 - m_1 \cdot \ddot{x}_1 - F + m_1 \cdot g + S_1 \Rightarrow S_1,$$

$$\sum M = 0 = -S_2 \cdot r + J \cdot \ddot{\varphi} + S_1 \cdot r \Rightarrow S_1.$$

Beide Gleichungen werden nach S_1 aufgelöst und gleichgesetzt. Dabei heben sich alle Summanden, die g enthalten (also die Gewichtskräfte) heraus. Man erhält mit den anderen Größen die DGL erhält:

$$\ddot{x}_1 + \frac{c}{\frac{3}{2} \cdot m_1 + 4 \cdot m_2} \cdot x_1 = 0.$$

Der Faktor von x_1 ist die gesuchte Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{\frac{3}{2} \cdot m_1 + 4 \cdot m_2}}.$$

Für den Fall $m_1 = m_2 = m$ ist

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{11} \cdot \frac{c}{m}}.$$

Vergleiche den Lösungsweg nach Kap. 22.4 bei der vorhergehenden Aufgabe.

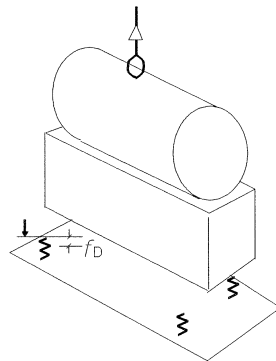
Beispiel 4

Ja $\Rightarrow$ siehe Gleichung (8-1-14)

Auf jeder Feder lastet $1/4 F_G$, so daß die Gesamtbelastung F_G ist, die Anzahl der Federn spielt also keine Rolle. (f_D in cm!, für die Einheiten siehe auch Beispiel 5).

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{mit} \quad c = \frac{F_G}{x} = \frac{m \cdot g}{x},$$

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{x}} \approx 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{x}} \Rightarrow n_0 \approx \frac{300}{\sqrt{f_D}}.$$



Beispiel 5

Federkonstante

$$c = \frac{F_G}{f_D} = \frac{230}{5} \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 46 \text{ N/cm} .$$

Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c \cdot g}{F_G}} = \sqrt{\frac{46 \cdot 981}{230}} \sqrt{\frac{\text{N/cm} \cdot \text{cm/s}^2}{\text{N}}} = 14 \text{ 1/s} .$$

Periodendauer

$$T_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} = 0,449 \text{ s} .$$

Eigenfrequenz

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = 2,23 \text{ 1/s} .$$

Kritische Drehzahl (Resonanzdrehzahl) - auch mit der Kurzformel gerechnet (8-1-14)

$$n_0 = 60 \cdot f_0 = 133,8 \text{ 1/min} ; \quad n_0 = \frac{300}{\sqrt{f_D}} = 134,1 \text{ 1/min} .$$

Die Schwingungsgleichungen sind

$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi) \quad \dot{x} = \hat{x} \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) .$$

Die Anfangsbedingungen sind

$$t = 0 \text{ s} ; \quad x(0) = \hat{x} \text{ m} ; \quad \dot{x}(0) = v(0) = 0 \text{ m/s} .$$

Damit kann man die Phasenverschiebung berechnen

$$\text{mit } t=0 \text{ s} \Rightarrow x = \hat{x} \cdot \sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) \Rightarrow \sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) = 1 \Rightarrow \sin \varphi = 1 .$$

Dann ist die Phasenverschiebung φ

$$\sin \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 90^\circ ; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} .$$

Die Weg-Zeitgleichung ergibt sich zu

$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \frac{\pi}{2}) = \hat{x} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = 60 \cdot \cos(14 \cdot t) \text{ mm} .$$

Die Geschwindigkeits-Zeitgleichung ergibt sich zu

$$\dot{x} = -\hat{x} \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) = -840 \cdot \sin(14 \cdot t) \text{ mm/s} .$$

Die Beschleunigungs-Zeitgleichung ergibt sich zu

$$\ddot{x} = -\dot{x} \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = -11760 \cdot \cos(14 \cdot t) \text{ mm/s}^2.$$

Die maximale Geschwindigkeit ist mit $14 \cdot t = \pi/2; 3\pi/2, \dots$, da dann $\sin(14 \cdot t) = 1$ ist,

$$\dot{x}_{\max} = \mp 840 \text{ mm/s}.$$

Die maximale Beschleunigung ist mit $14 \cdot t = 0; \pi; 2\pi, \dots$, da dann $\cos(14 \cdot t) = 1$ ist,

$$\ddot{x}_{\max} = \mp 11760 \text{ mm/s}^2.$$

Beispiel 6

Ein Ventilator (4 Flügel) ist in einem Rohr eingebaut. Die Welle läuft durch ein Lager, das mit drei Streben im Rohr befestigt ist. Das System hat zwei Eigenkreisfrequenzen:

$$\omega_{01} = 66 \text{ s}^{-1} \text{ und } \omega_{02} = 314 \text{ s}^{-1}.$$

Bei welchen Drehzahlen der Welle (Erregerdrehzahlen) kommt das

gesamte System in Resonanzschwingungen:

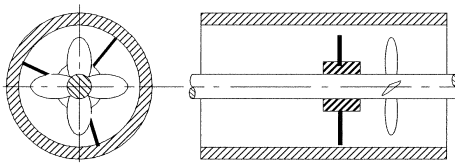
4 Ventilatorflügel, 3 Streben. Pro Umdrehung erfolgen 12 Anregungen.

$$n_{01} = \omega_{01} \cdot 30 / \pi = 630,25 \text{ min}^{-1};$$

$$n_1 = n_{01} / 12 = 52,2 \text{ min}^{-1};$$

$$n_{02} = \omega_{02} \cdot 30 / \pi = 2998,47 \text{ min}^{-1};$$

$$n_2 = n_{02} / 12 = 249,87 \text{ min}^{-1}.$$

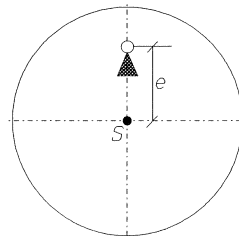


Kap. 9.3

Beispiel 1

Aus dem Kap. 9.3 folgt

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J_s + e^2 \cdot m}{m \cdot g \cdot e}}.$$



Für die Bestimmung von T_0 wird die erste Ableitung gebildet und Null gesetzt.

$$\frac{dT_0}{de} = \frac{2 \cdot \pi (\dots)^{-\frac{1}{2}}}{2} \cdot \left[\frac{(0 + 2 \cdot e \cdot m) \cdot m \cdot g \cdot e - (J_s + e^2 \cdot m) \cdot m \cdot g}{\text{Nenner}} \right] = 0.$$

In einem Quotientenprodukt, das Null ist, reicht es aus, wenn ein Zähler Null wird:

$$2 \cdot e^2 \cdot m^2 \cdot g - J_s \cdot m \cdot g - e^2 \cdot m^2 \cdot g = 0.$$

Die Gleichung wird nach e aufgelöst

$$e = \sqrt{\frac{J_S}{m}} = i_S.$$

Das ist gleichzeitig der Trägheitsradius des Systems (Kap. 22.1)

$$J_S = 1,233\text{E-}2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$$

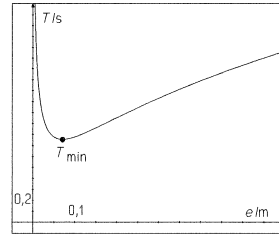
$$e = 0,0707 \text{ m};$$

$$T_{\min} = 0,7544 \text{ s}.$$

Dabei gilt für eine Scheibe

$$J_S = m \cdot r^2 / 2; \quad m = \varrho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot b$$

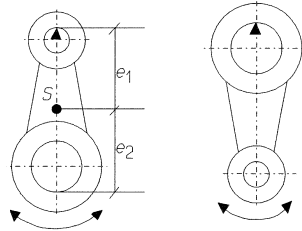
$$e = r \cdot \sqrt{0,5} = r \cdot 0,707.$$



Beispiel 2

Es werden die Gleichungen für die Massenträgheitsmomente J_S aufgestellt, indem man die Gleichung (9-3-8) nach J_S umstellt. Mit dem Satz von Steiner wird durch Gleichsetzen der J_S für die Aufhängung in den beiden Pleuelaugen

$$J_S = \frac{m \cdot g \cdot e_1}{4\pi^2 \left(\frac{1}{T_1}\right)^2} - e_1^2 \cdot m = \frac{m \cdot g \cdot e_2}{4\pi^2 \left(\frac{1}{T_2}\right)^2} - e_2^2 \cdot m$$



Man kann durch Einsetzen von $e_2 = \ell - e_1$ nach e_1 auflösen und erhält

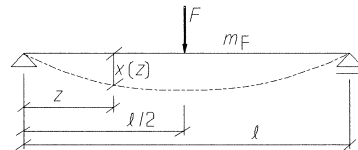
$$e_1 = \frac{\ell \cdot \left(T_2^2 - \frac{4\pi^2 \ell}{g} \right)}{T_1^2 + T_2^2 - \frac{4\pi^2}{g} \cdot 2\ell}.$$

Kap. 10

Beispiel 1

Die Gleichung aus der Tabelle

$$y = \frac{F \cdot b \cdot \ell \cdot z_a}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[1 - \left(\frac{b}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{z_a}{\ell} \right)^2 \right]$$



kann in der folgenden (für diesen Fall umgewandelten) Form benutzt werden:

$$x(z) = \frac{F}{48 \cdot E \cdot I} (3 \cdot \ell^2 \cdot z - 4 \cdot z^3) .$$

Es werden die Gleichungen aus Kap.10 übernommen. (Die Nummern der Gleichungen sind entsprechend angegeben).

Für jedes Masselement ist Weg und Geschwindigkeit mit der Amplitude $x_0(z)$ (= maximale Amplitude an der Stelle z):

$$x(z,t) = x_0(z) \cdot \sin(\omega \cdot t) , \quad (10-1-3)$$

$$\dot{x}(z,t) = x_0(z) \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) . \quad (10-1-4)$$

Für die Angriffsstelle der Kraft gilt

$$x_{\max} = \frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I} \quad \text{und damit} \quad F = \frac{x_{\max} \cdot 48 \cdot E \cdot I}{\ell^3} , \quad (10-1-6)$$

eingesetzt in die vorgegebene Gleichung folgt

$$x_0(z) = \frac{48 \cdot E \cdot I}{48 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{1}{\ell^3} \cdot (3 \cdot \ell^2 \cdot z - 4 \cdot z^3) \cdot x_{\max} . \quad (10-1-7)$$

Die Energie eines Masseteilchens ist mit (10-1-7) und Abb. 10-1-2

$$dE = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot dm}_{\text{---}} \cdot \underbrace{[\dot{x}(x,z)]^2}_{\text{---}} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{m_F}{\ell}}_{\text{---}} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{\ell^3} \cdot (3 \cdot \ell^2 \cdot z - 4 \cdot z^3) \right]^2}_{\text{---}} \cdot \underbrace{dz \cdot x_{\max}^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t)}_{\text{---}} .$$

Die Energie der Punktmasse beträgt

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot x_{\max}^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) . \quad (10-1-11)$$

Damit wird die Gesamtenergie

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{m_F}{\ell \cdot (\ell^3)^2} \cdot \underbrace{\int_0^\ell (3 \cdot \ell^2 \cdot z - 4 \cdot z^3)^2 \cdot dz}_{= \ell^7 \cdot \frac{17}{35}} + m \right] \cdot x_{\max}^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) .$$

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{17}{35} \cdot m_F + m \right] \cdot x_{\max}^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t)$$

$$\text{mit } m_{\text{ers}} = \frac{17}{35} \cdot m_F + m \approx \frac{1}{2} \cdot m_F + m .$$

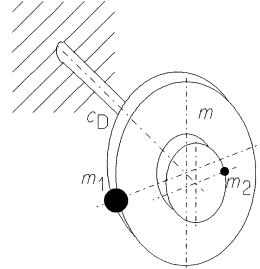
Kap. 15.2**Beispiel 1**

a); b)

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot J_s \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_2 \cdot \dot{\varphi}^2$$

$$\text{mit } J_1 = m_1 \cdot r_1^2; J_2 = m_2 \cdot r_2^2;$$

$$W_p = \frac{1}{2} \cdot c_D \cdot \varphi^2.$$



c)

$$L = W_k - W_p = \frac{1}{2} \cdot [J_s \cdot \dot{\varphi}^2 + J_1 \cdot \dot{\varphi}^2 + J_2 \cdot \dot{\varphi}^2 - c_D \cdot \varphi^2]$$

d)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_s \cdot \dot{\varphi} + J_1 \cdot \dot{\varphi} + J_2 \cdot \dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J_s \cdot \ddot{\varphi} + J_1 \cdot \ddot{\varphi} + J_2 \cdot \ddot{\varphi};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -c_D \cdot \varphi.$$

e)

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right)' - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0; \quad (J_s + J_1 + J_2) \cdot \ddot{\varphi} + c_D \cdot \varphi = 0.$$

f)

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_D}{J_s + m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2} \cdot \varphi = 0$$

g)

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{c_D}{J_s + m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2}} = \sqrt{\frac{5 \cdot m \cdot g \cdot r}{4/5 \cdot m \cdot r^2 + 2 \cdot m \cdot r^2 + m \cdot (1/2 \cdot r)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{100 \cdot g}{61 \cdot r}} \approx \frac{4}{\sqrt{r}} \quad 1/s. \end{aligned}$$

h)

$$\varphi(t=0) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot 0) + B \cdot \cos(\omega_0 \cdot 0) = 0 \Rightarrow B=0 \quad \text{mit } \cos(\omega_0 \cdot 0) = 1;$$

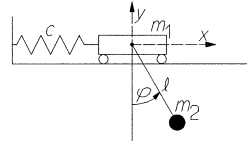
$$\dot{\varphi}(t=0) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot 0) = \dot{\varphi}_0 \Rightarrow A = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0}.$$

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \Rightarrow \varphi_{\max} = \dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0}.$$

Beispiel 2

Ein Kran rollt reibungsfrei, dabei pendelt die Last m_2 . Gesucht sind mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art die Differentialgleichungen.

Die Abbildung ist identisch mit *Abb. 15-2-3* in Kap. 15.2 - Lagrange'sche Gleichungen zweiter Art. In diesem Kapitel befindet sich der vollständige Lösungsgang.

**Kap. 16****Beispiel 1**

Zuerst wird die Parallelschaltung berechnet, da sie schwingungstechnisch den Aufhängepunkt für die Feder 3 ergibt:

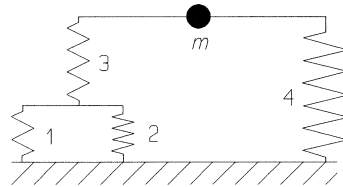
$$c_{12} = c_1 + c_2.$$

Dann folgt die Hintereinanderschaltung mit

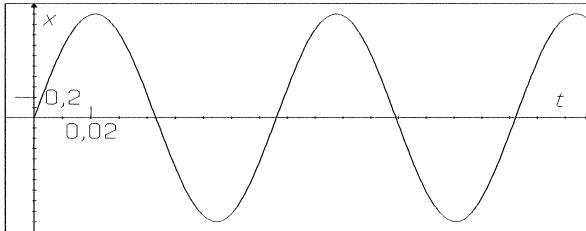
$$1/c_{123} = 1/c_{12} + 1/c_3.$$

Und schließlich

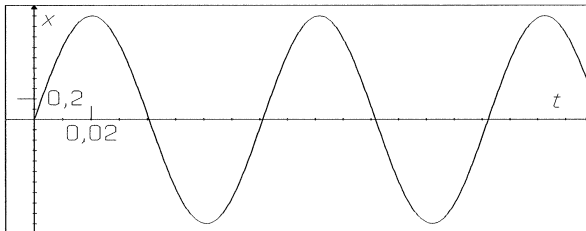
$$c_{\text{ges}} = c_{123} + c_4 = 2660 \text{ N/cm}.$$



$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{c_{\text{ges}}}{m}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{2,66\text{E}5}{50}} \sqrt{\frac{\text{N/m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2/\text{m}}} = 11,62 \text{ 1/s}.$$



Mit allen Federn ergibt die Funktion $x = f(t)$



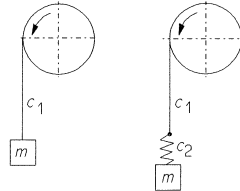
Nur mit den Federn 3 und 4 ergibt die Funktion $x = f(t)$

Beispiel 2

Fall 1:

Das Seil wirkt wegen seiner Elastizität als Feder.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}} = \sqrt{\frac{3,8E6}{3500}} \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}/(\text{s}^2 \cdot \text{m})}{\text{kg}}} = 32,95 \frac{1}{\text{s}}.$$



Die Gleichungen für Weg und Geschwindigkeit sind

$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t) ; \quad \dot{x} = \hat{x} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) .$$

Für den Beginn des Blockierens ist $t = 0$ s, damit ist $\cos(\omega \cdot t) = 1$ und daraus

$$\hat{x}_1 = \frac{\dot{x}}{\omega_1} = \frac{5}{32,95} \frac{\text{m/s}}{1/\text{s}} = 0,1517 \text{ m} \quad \text{mit } \dot{x} = v_0 .$$

Das Seil wird um die Amplitude $\hat{x}_1$ gedehnt, die Federkraft ist $F_S = c_S \cdot \hat{x}_1$ mit $c_1 = c_S$. Damit ist die Gesamtbelastung für den Fall 1

$$F_{\text{ges } 1} = F_{\text{max } 1} = F_{\text{Feder}} + F_{\text{Last}} = c_1 \cdot \hat{x}_1 + F_{\text{Last}} ,$$

$$F_{\text{ges } 1} = 3,8E6 \cdot 0,1517 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \text{m} + 3500 \cdot 9,81 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6,1E5 \text{ N} .$$

Fall 2:

Seil(feder) und Feder sind hintereinander geschaltet (mit $c_1 = c_S$; $c_2 = c_F$) :

$$c_{\text{ges}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = 3,2E5 \text{ N/m} .$$

Dann ist mit den Rechenschritten wie im Fall 1

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c_{\text{res}}}{m}} = 9,57 \text{ 1/s} ,$$

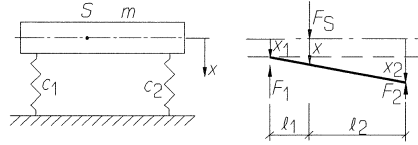
$$\hat{x}_2 = \frac{5}{9,57} \text{ m} = 0,52 \text{ m} ,$$

$$F_{\text{ges } 2} = 2E5 \text{ N} .$$

Durch das Zwischenschalten der Feder ist die Seilbelastung von 6,1E5 N auf 2E5 N reduziert worden.

Beispiel 3

Die Welle wird als starr und masselos angesehen. Daher besitzt sie kein Massenträgheitsmoment um den Schwerpunkt. Zur Ermittlung von c_{ges} wird angenommen, daß die Kraft F_S im Schwerpunkt S angreift.



Die Bewegung erfolgt nur in x -Richtung. Es werden die Momente ermittelt

$$F_1 \cdot (\ell_1 + \ell_2) - F_S \cdot \ell_2 = 0 ;$$

$$F_2 \cdot (\ell_1 + \ell_2) - F_S \cdot \ell_1 = 0 .$$

$$c_1 \cdot x_1 \cdot (\ell_1 + \ell_2) - F_S \cdot \ell_2 = 0 ;$$

$$c_2 \cdot x_2 \cdot (\ell_1 + \ell_2) - F_S \cdot \ell_1 = 0 .$$

$$x_1 = \frac{F_S \cdot \ell_2}{c_1 \cdot (\ell_1 + \ell_2)} ;$$

$$x_2 = \frac{F_S \cdot \ell_1}{c_2 \cdot (\ell_1 + \ell_2)} .$$

Wird der Strahlensatz aufgestellt, so ist

$$\frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{x_2 - x_1}{\ell_1 + \ell_2} ;$$

$$x = \frac{x_2 - x_1}{\ell_1 + \ell_2} \cdot \ell_1 + x_1 .$$

Die Auslenkung erfolgt durch die Kraft F_S , damit kann für c_{ges} gesetzt werden

$$c_{\text{ges}} \cdot x = F_S ;$$

$$c_{\text{ges}} = \frac{F_S}{x} .$$

Die oben gewonnenen Größen werden in diese Gleichung eingesetzt. Dabei fällt die Kraft F_S durch Kürzen sofort heraus. Danach wird für $c_{\text{ges}} = 1/N$ geschrieben und der *Nenner* allein bearbeitet, um die Schreibweise zu vereinfachen.

$$c_{\text{ges}} = \frac{F_S}{\left(\frac{\frac{F_S \cdot \ell_1}{c_2 \cdot (\ell_1 + \ell_2)} - \frac{F_S \cdot \ell_2}{c_1 \cdot (\ell_1 + \ell_2)}}{\ell_1 + \ell_2} \right) \cdot \ell_1 + \frac{F_S \cdot \ell_2}{c_1 \cdot (\ell_1 + \ell_2)}} = \frac{1}{N} ,$$

$$N = \frac{\frac{c_1 \cdot \ell_1^2 - \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot c_2}{c_1 \cdot c_2 \cdot (\ell_1 + \ell_2)}}{\ell_1 + \ell_2} + \frac{\ell_2}{c_1 \cdot (\ell_1 + \ell_2)} ,$$

$$N = \frac{c_1 \cdot \ell_1^2 - \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot c_2}{c_1 \cdot c_2 \cdot (\ell_1 + \ell_2)^2} + \frac{c_2 \cdot \ell_2 \cdot (\ell_1 + \ell_2)}{c_1 \cdot c_2 \cdot (\ell_1 + \ell_2)^2},$$

$$c_{\text{ges}} = \frac{c_1 \cdot c_2 \cdot (\ell_1 + \ell_2)^2}{c_1 \cdot \ell_1^2 + c_2 \cdot \ell_2^2} = \frac{1}{N}.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung (28-3-24) aus dem Kap. 28.3 -Koppelschwingungen. Es ist keine Parallelschaltung der Federn, da die Federwege nicht gleich sind. Mit $\ell_1 = \ell_2 = \ell/2$ und $c_1 = c_2 = c$ wird daraus die Parallelschaltung $c_{\text{ges}} = 2 \cdot c$.

Beispiel 4

Es sind sechs schwingungsfähige Systeme gegeben.

a) Für jedes System ist c_{res} zu bestimmen.

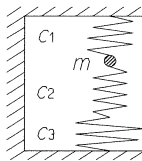
Dabei gilt für die Systeme 1 bis 3: $c_1 \neq c_2 \neq c_3$,

und für die Systeme 4 bis 6: $c_1 \neq c_2$.

b) Es ist für jedes System T_0 zu bestimmen und zwar unter der Voraussetzung,

daß in den Systemen 1 bis 3 jeweils $c_1 = c_2 = c_3 = c$ ist,

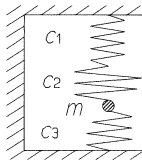
und in den Systemen 4 bis 6 jeweils $c_1 = c_2 = c$ ist.



(1)

$$c_{\text{res}} = c_1 + c_{23} = c_1 + \frac{c_2 \cdot c_3}{c_2 + c_3},$$

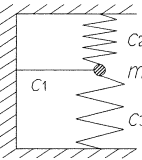
$$c_{\text{res}} = c + \frac{c}{2} = \frac{3}{2}c; T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m}{3 \cdot c}}.$$



(2)

$$c_{\text{res}} = c_{12} + c_3 = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} + c_3,$$

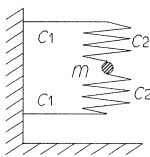
$$c_{\text{res}} = \frac{c}{2} + c = \frac{3}{2}c; T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m}{3 \cdot c}}.$$



(3)

$$c_{\text{res}} = c_1 + c_2 + c_3,$$

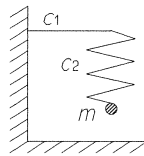
$$c_{\text{res}} = 3 \cdot c; T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{3 \cdot c}}.$$



(4)

$$c_{\text{res}} = c_{12} + c_{12} = 2 \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2},$$

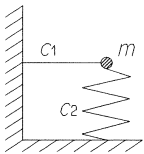
$$c_{\text{res}} = c; T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}.$$



(5)

$$c_{\text{res}} = c_{12} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2},$$

$$c_{\text{res}} = \frac{c}{2}; T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{m}{c}}.$$



(6)

$$c_{\text{res}} = c_1 + c_2,$$

$$c_{\text{res}} = 2 \cdot c; T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{2 \cdot c}}.$$

Kap. 18

Beispiel 1

Die statische Durchbiegung ist

$$\begin{aligned} f_D &= \frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot I \cdot E} \\ &= \frac{F \cdot \ell^3 \cdot 64}{48 \cdot E \cdot \pi \cdot d^4} = 0,04245 \text{ mm}, \end{aligned}$$

mit

$$c = \frac{F_G}{f_D} = 7,065 \text{ E4 N/mm}$$

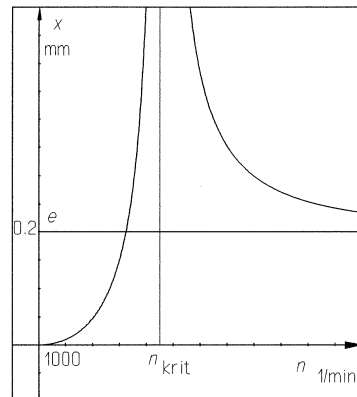
folgt die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c \cdot g}{F_G}} = 480 \text{ 1/s}$$

und damit die biegekritische Drehzahl

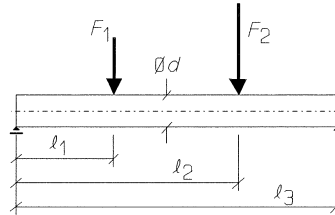
$$n_{\text{krit}} = \frac{30 \cdot 480}{\pi} \text{ 1/min} = 4590 \text{ 1/min.}$$

Die Welle zentriert sich nach Durchlaufen der kritischen Drehzahl um den Schwerpunkt.



Kap. 19, 20, 21**Beispiel 1**

$$\begin{aligned}
 \varnothing d &= 160 \text{ mm;} \\
 \ell_1 &= 600 \text{ mm;} \\
 \ell_2 &= 1700 \text{ mm;} \\
 \ell_3 &= 2900 \text{ mm;} \\
 F_1 &= 8000 \text{ N;} \\
 F_2 &= 12000 \text{ N.}
 \end{aligned}$$



1. Gesucht ist die biegekritische Drehzahl nach dem Verfahren von Rayleigh.

Es wird zunächst nach Kap. 19 über die Superposition die Verformung ermittelt:

Dabei ist der 1. Index der Ort der Formänderung und der 2. Index der Ort des Kraftangriffes

$$\begin{aligned}
 y_{11} &= 0,02592 \text{ cm;} & y_{22} &= 0,08497 \text{ cm;} \\
 y_{12} &= 0,04858 \text{ cm;} & y_{21} &= 0,03239 \text{ cm;} \\
 y_{11} &= 0,07451 \text{ cm;} & y_{22} &= 0,11736 \text{ cm.}
 \end{aligned}$$

Damit ist mit den Werten für y_1 und y_2 nach dem Verfahren von Rayleigh

$$\omega_0 = 97 \text{ 1/s} \Rightarrow n_{\text{krit}} = 925 \text{ 1/min.}$$

2. Für die Berechnung nach Dunkerley (Maxwell) wird y_{11} und y_{22} eingesetzt:

$$\omega_0 = 94 \text{ 1/s} \Rightarrow n_{\text{krit}} = 898 \text{ 1/min.}$$

Für die Lösung nach Mohr siehe Kap. 26.

Achtung : Wenn Sie für y_{21} einen anderen Wert erhalten, dann prüfen Sie, ob Sie in der Gleichung für die Berechnung der Durchbiegung an dieser Stelle sinngemäß die Längen vertauscht haben. Die Formel ist spiegelbildlich anzuwenden!

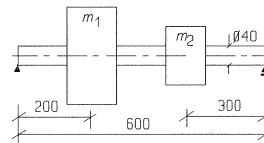
Beispiel 2

$$\varnothing d = 40 \text{ mm;} m_1 = 40 \text{ kg;} m_2 = 20 \text{ kg.}$$

$$F_1 = m_1 \cdot g = 392,4 \text{ N;} F_2 = 196,2 \text{ N;}$$

$$I_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 12,566 \text{ cm}^4.$$

$$f_1 = y_1 = \frac{F_1 \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot I_x \cdot E \cdot \ell} = \frac{392,4 \cdot 20^2 \cdot 40^2}{3 \cdot 12,566 \cdot 2,1 \text{E}7 \cdot 60} = 5,287 \text{E-3 cm,}$$



$$f_2 = y_2 = \frac{F_2 \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot I_x \cdot E \cdot \ell} = \frac{196,2 \cdot 30^2 \cdot 30^2}{3 \cdot 12,566 \cdot 2,1 \cdot 10^7 \cdot 60} = 3,346 \cdot 10^{-3} \text{ cm} ,$$

$$n_{\text{krit}} = \frac{300}{\sqrt{y_1 + y_2}} = 3230 \text{ 1/min} .$$

Kap. 22 und 22.4

Beispiel 1

1. Für den Ansatz der DGL gilt, daß die statischen Gewichtskräfte nicht berücksichtigt werden, da sie durch die statische Federkraft im Gleichgewicht gehalten werden. Das System pendelt um die Null-Lage (siehe Kap. 8). Mit

$$\ddot{x} = 2 \cdot \ell \cdot \ddot{\varphi} ; \quad F_F = c \cdot x = c \cdot \ell \cdot \varphi$$

ist die DGL mit den wirksamen Momenten

$$J_B \cdot \ddot{\varphi} + F_F \cdot \ell + m \cdot \ddot{x} \cdot 2 \cdot \ell = 0 ,$$

$$J_B \cdot \ddot{\varphi} + c \cdot \ell \cdot \varphi \cdot \ell + m \cdot 2 \cdot \ell \cdot \ddot{\varphi} \cdot 2 \cdot \ell = 0 .$$

Durch Ordnen erhält man die DGL zu

$$(J_B + m \cdot 4 \cdot \ell^2) \cdot \ddot{\varphi} + c \cdot \ell^2 \cdot \varphi = 0 .$$

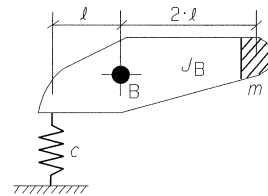
Die Division durch () führt dann mit dem Faktor von φ auf die Eigenkreisfrequenz

$$\ddot{\varphi} + \frac{c \cdot \ell^2}{J_B + m \cdot 4 \cdot \ell^2} \cdot \varphi = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c \cdot \ell^2}{J_B + m \cdot 4 \cdot \ell^2}} .$$

2. Für den Federgeffesselten Drehschwinger kann man mit (22-4-1) sofort schreiben, wenn man berücksichtigt, daß der Schwerpunkt praktisch bei $\beta = 90^\circ$ liegt und damit $\cos \beta = 0$ ist

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c \cdot \ell^2}{J_B + m \cdot (2 \cdot \ell)^2}} .$$

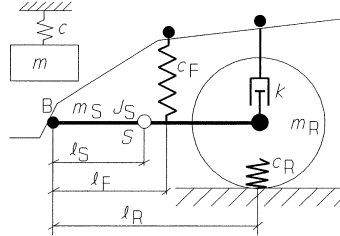


Beispiel 2

Es muß für das Drehschwingersystem sein:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sum c_i \cdot r_i^2}{J_B}}.$$

Federkonstante c und Masse m sind gesucht. Deshalb ist der Zähler auf eine Federkonstante und der Nenner auf eine Masse zurückzuführen. S führt eine Drehbewegung aus. R führt bei kleinen Winkeln eine Längsbewegung aus. Das Ersatzsystem führt ebenfalls eine Längsbewegung aus. Durch Division mit ℓ_R^2 in Zähler und Nenner wird in eine Längsbewegung transformiert. Siehe hierzu den Zusammenhang zwischen Weg und Winkel im zweiten Teil der Lösung:



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_R \cdot \ell_R^2 + c_F \cdot \ell_F^2}{(J_S + m_S \cdot \ell_S^2) + m_R \cdot \ell_R^2}}.$$

Für das Ersatzsystem ist Federkonstante und Masse gesucht:

$$\frac{c}{m} = \frac{c_R + c_F \cdot \left(\frac{\ell_F}{\ell_R}\right)^2}{J_S + m_S \cdot \ell_S^2 + m_R \cdot \ell_R^2} \cdot \ell_R^2$$

Somit ist die gesuchte Federkonstante und die Masse des Ersatzsystems

$$c = c_R + c_F \cdot \left(\frac{\ell_F}{\ell_R}\right)^2; \quad m = m_R + m_{\text{Dreh}} = m_R + \frac{J_S + m_S \cdot \ell_S^2}{\ell_R^2}.$$

Ebenso hätte der direkte Ansatz mit (22-4-1) für ω_0 das gleiche Ergebnis gebracht.

Zur Kontrolle wird die Federkonstante des Ersatzsystems über die potentielle Energie der beiden Systeme ermittelt.

Der Zusammenhang zwischen Weg x und Drehwinkel φ ist

$$x_F = \ell_F \cdot \varphi; \quad x = \ell_R \cdot \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{x}{\ell_R} \Rightarrow x_F = \ell_F \cdot \frac{x}{\ell_R}$$

und damit ist für beide Systeme die Energie für den jeweiligen Fall

$$W_{p \text{ Ers}} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x^2,$$

$$W_{p \text{ Original}} = \frac{1}{2} \cdot c_R \cdot x \cdot x + \frac{1}{2} \cdot c_F \cdot x_F \cdot x_F.$$

Diese beiden Gleichungen werden gleichgesetzt und x_F eingesetzt:

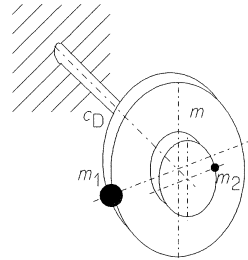
$$c = c_R + c_F \cdot \left(\frac{\ell_F}{\ell_R} \right)^2 .$$

Beispiel 3

Hilfe: $\varphi(t=0) = 0$; $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0$

a) mit (22-2-7) und den Zusatzmassen m_1 und m_2

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{c_D}{J_S + m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2}} \\ &= \sqrt{\frac{5 \cdot m \cdot g \cdot r}{4/5 \cdot m \cdot r^2 + 2 \cdot m \cdot r^2 + m \cdot (1/2 \cdot r)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{100 \cdot g}{61 \cdot r}} \approx \frac{4}{\sqrt{r}} \quad 1/s . \end{aligned}$$



b) allgemein

$$M = F \cdot r = m \cdot a_t \cdot r = m \cdot r \cdot \ddot{\varphi} \cdot r = m \cdot r^2 \cdot \ddot{\varphi} .$$

$$J_S \cdot \ddot{\varphi} + m_1 \cdot r_1^2 \cdot \ddot{\varphi} + m_2 \cdot r_2^2 \cdot \ddot{\varphi} + c_D \cdot \varphi = 0 ,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_D}{J_S + m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2} \cdot \varphi = 0 .$$

c)

$$\varphi(t=0) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot 0) + B \cdot \cos(\omega_0 \cdot 0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad \text{mit} \quad \cos(\omega_0 \cdot 0) = 1 ,$$

$$\dot{\varphi}(t=0) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot 0) = \dot{\varphi}_0 \Rightarrow A = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} ,$$

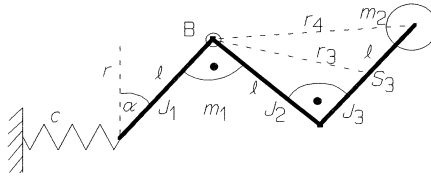
$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \Rightarrow \varphi_{\max} = \hat{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} .$$

Beispiel 4

Für den Hebelarm der Feder gilt
 $r = \ell \cdot \cos \alpha$.

Für die Massenträgheitsmomente gilt

$$J_1 = J_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{m_1}{3} \cdot \ell^2 .$$



$$J_3 = \underbrace{\frac{1}{12} \cdot \frac{m_1}{3} \cdot \ell^2 + \frac{m_1}{3} \cdot \left(\ell \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} \right)^2}_{J_s}; \quad \text{Steiner mit } r_3 = \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{\ell}{2} \right)^2} = \ell \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} .$$

$$J_4 = m_2 \cdot (\ell \cdot \sqrt{2})^2 \quad \text{mit} \quad r_4 = \sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \ell \cdot \sqrt{2} .$$

$$J_B = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \ell^2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 \right) .$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sum c_i \cdot r_i^2 + F_G \cdot e \cdot \cos \beta}{J_B}} = \sqrt{\frac{c \cdot \cos^2 \alpha + 0}{\frac{2}{3} \cdot m_1 + 2 \cdot m_2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot c \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cdot m_1 + 6 \cdot m_2}} .$$

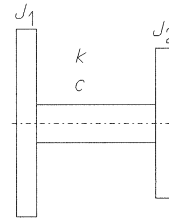
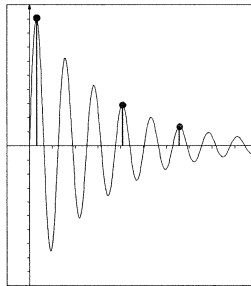
Kap. 23.1 und 24**Beispiel 1**

Die Eigenkreisfrequenz beträgt

$$\omega_0 = \sqrt{c \cdot \frac{J_1 + J_2}{J_1 \cdot J_2}} = 24,7 \text{ 1/s} .$$

Für das vorhandene System ist das logarithmische Dekrement

$$\Lambda = \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{10}{1,5} = 0,632 .$$



Die Zeit für eine Periode ist mit

$$\omega_0^2 = \omega_d^2 + \delta^2 = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_d} \right)^2 + \left(\frac{\Lambda}{T_d} \right)^2 .$$

$$T_d = \sqrt{\frac{(4 \cdot \pi^2 + \Lambda^2)}{\omega_0^2}} = 0,2557 \text{ s} .$$

Für das neue System ist Λ neu zu berechnen, da ein neues Verhältnis in der Amplitudenabnahme gefordert wird.

Da das gesuchte k über δ auch Λ und T_d enthält, müssen diese Größen berechnet werden

$$\Lambda = \frac{1}{5} \cdot \ln \frac{10}{0,05} = 1,0597 ,$$

$$\delta = \frac{k}{2 \cdot J} = \frac{\Lambda}{T_d} .$$

In der Gleichung für die Eigenkreisfrequenz sind die gesuchten Größen enthalten:

$$\omega_0^2 = \omega_d^2 + \delta^2 = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_d} \right)^2 + \left(\frac{\Lambda}{T_d} \right)^2 \Rightarrow T_d = 0,258 \text{ s} ,$$

$$k \geq 2 \cdot \delta \cdot J = 2 \cdot \frac{\Lambda}{T_d} \cdot \frac{J_1 \cdot J_2}{J_1 + J_2} = 0,0821 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} .$$

Kap. 23.4

Beispiel 1

Drehfederkonstante

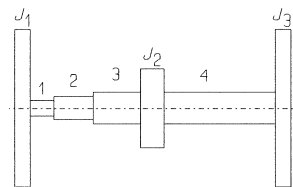
c_1	= 4,241E4	N · m
c_2	= 6,596E4	N · m
c_3	= 3,560E4	N · m
c_4	= 2,513E4	N · m
$c_{\text{ges } 123}$	= 1,496E4	N · m

Massenträgheitsmomente

J_1	= 1,973	kg · m ²
J_2	= 1,726E-1	kg · m ²
J_3	= 1,973	kg · m ²

Eigenfrequenzen der Torsionsschwingungen

f_{01}	= 1,550E1	1/s
f_{02}	= 7,847E1	1/s



Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_{01} = 9,737\text{E}1 \text{ 1/s}$$

$$\omega_{02} = 4,931\text{E}2 \text{ 1/s}$$

kritische Drehzahlen

$$n_{\text{krit } 1} = 9,298\text{E}2 \text{ 1/min}$$

$$n_{\text{krit } 2} = 4,708\text{E}3 \text{ 1/min}$$

Zur Kontrolle die Faktoren $A = 2,526\text{E}5$ und $B = 2,3\text{E}9$.

Kap. 24

Beispiel 1

Zunächst sind die Größen der gedämpften Schwingung zu ermitteln:

$$\ln\left(\frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2}\right) = \delta \cdot T_d = \frac{2 \cdot \pi \cdot \delta}{\omega_d} \quad ; \quad \delta = \frac{k}{2 \cdot m} \quad ; \quad \vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} .$$

Diese Gleichungen werden miteinander verknüpft:

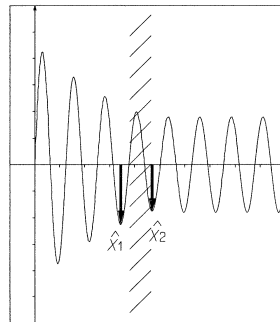
$$k = 2 \cdot m \cdot \delta = 2 \cdot m \cdot \ln\left(\frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2}\right) \cdot \frac{\omega_d}{2 \cdot \pi} ;$$

außerdem ist

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\ln\left(\frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2}\right)\right)^2 \cdot \frac{\omega_d^2}{4 \cdot \pi^2}} .$$

Daraus folgt durch Einsetzen in die Gleichung für k

$$k = \frac{m \cdot \ln\left(\frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2}\right) \cdot \omega_0}{\pi \cdot \sqrt{\left(\ln\left(\frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2}\right)\right)^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi^2} + 1}} .$$



Beispiel 2

Für den aperiodischen Grenzfall gilt $\vartheta=1$, d.h.

$$\delta = \omega_0 = k / (2 \cdot m).$$

Damit kann über

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = 50 \text{ 1/s} ;$$

$$k = 2 \cdot m \cdot \omega_0 = 40 \text{ N} \cdot \text{s/m} .$$

bestimmt werden.

Für die Gleichung gilt mit der ersten Ableitung

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) ;$$

$$\dot{x} = -\delta \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) + e^{-\delta \cdot t} \cdot C_2 .$$

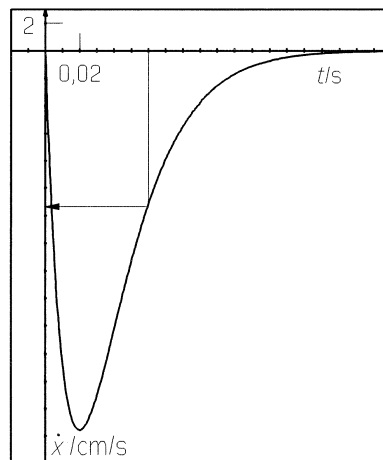
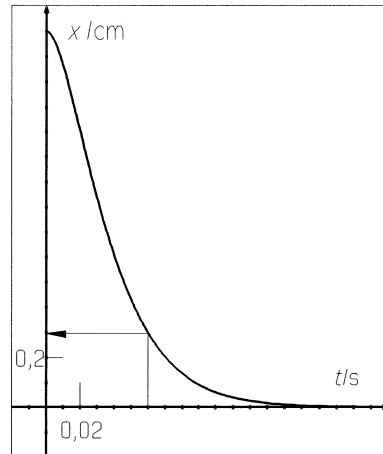
Mit den eingesetzten Anfangsbedingungen werden die Konstanten bestimmt:

$$C_1 = 1,5 \text{ cm und } C_2 = 75 \text{ cm/s} .$$

Damit ist dann die Position und die Geschwindigkeit bestimmt:

$$x(0,06) = 2,987\text{E-1} \text{ cm} ,$$

$$\dot{x}(0,06) = -1,1202\text{E1} \text{ cm/s} .$$



Beispiel 3

Bei dem in der Praxis vorliegenden Schrieb ergeben sich die Maße:

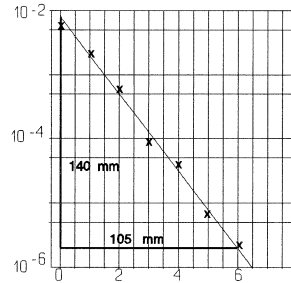
$$\ell y = 1 \text{ Dekade} = 39 \text{ mm};$$

$$\ell x = \text{Länge } T_D = 17,5 \text{ mm}.$$

Damit wird (siehe Gleichungen in Kap. 24.3)

$$\lg \frac{A_0}{A_1} = \delta \cdot T_D \cdot \lg e = \Lambda \cdot \lg e ,$$

$$\Lambda = \frac{\tan \alpha}{\lg e \cdot \frac{\ell y}{\ell x}} = \frac{\frac{140}{105}}{0,4343 \cdot \frac{39}{17,5}} = 1,3775 .$$

**Beispiel 4**

$$\vartheta = 1 = \frac{\delta}{\omega_0} \Rightarrow \delta = \omega_0 = \frac{k}{2 \cdot m} = \sqrt{\frac{c}{m}} ,$$

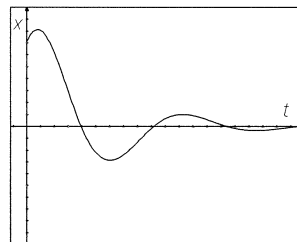
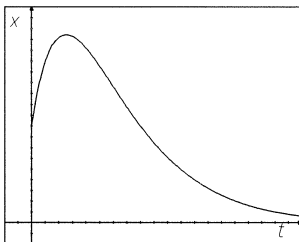
$$k = 2 \cdot \sqrt{c \cdot m} .$$

Mit diesem k wird weitergerechnet, denn die Dämpfung wird nicht geändert.

$$m_{\text{ges}} = 2 \cdot m ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{2 \cdot m}} ; \quad \delta = \frac{k}{2 \cdot 2 \cdot m} = \frac{k}{4 \cdot m} ;$$

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{k}{4 \cdot m} \sqrt{\frac{2 \cdot m}{c}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot c \cdot m}{4^2 \cdot m^2} \cdot \frac{2 \cdot m}{c}} = \sqrt{\frac{1}{2}} < 1 ;$$

also ist aus dem aperiodischen Grenzfall eine periodische gedämpfte Schwingung geworden.



Beispiel 5

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t),$$

$$\dot{x} = -\delta \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) + C_2 \cdot e^{-\delta \cdot t}.$$

Mit den Randbedingungen ist,

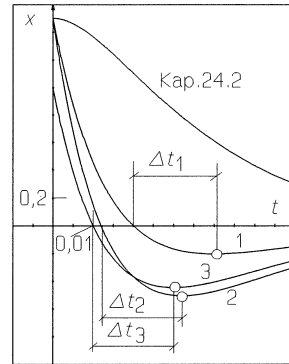
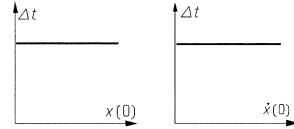
$$x(1)=0 = \underbrace{e^{-\delta \cdot t(1)}}_{\neq 0} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t(1)) = e^{-\delta \cdot t(1)} \cdot 0.$$

Der erste Faktor kann nicht 0 sein, also muß der zweite Faktor 0 werden. Daraus folgt für

$$t(1) = -\frac{C_1}{C_2}$$

und mit $t(2)$ für $\dot{x}(2) = 0$

$$\dot{x}=0 = \underbrace{e^{-\delta \cdot t(2)}}_{\neq 0} \cdot [(-\delta \cdot C_1 - \delta \cdot C_2 \cdot t(2)) + C_2].$$



Der erste Faktor kann nicht 0 sein, also muß der zweite Faktor 0 werden. Daraus folgt für die $[] = 0$

$$t(2) = \frac{1}{\delta} - \frac{C_1}{C_2}.$$

Damit ist dann für $\Delta t = t(2) - t(1)$

$$\Delta t = t(2) - t(1) = \left(\frac{1}{\delta} - \frac{C_1}{C_2} \right) - \left(-\frac{C_1}{C_2} \right) = \frac{1}{\delta} = \frac{2 \cdot m}{k} = \text{const.}$$

Die Differenz Δt ist const. Das Funktionsbild zeigt Variationen zu Aufgabe 24-2 mit

$$C_1 = x(0); \quad C_2 = \dot{x}(0) + \delta \cdot x(0) \quad \text{und} \quad \delta = 50 \quad 1/s.$$

Im Funktionsbild ist

(1) $\dot{x} = -150 \text{ cm/s}$

(2) $\dot{x} = -200 \text{ cm/s}$

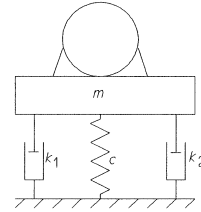
(3) $\dot{x} = -150 \text{ cm/s}$

Beispiel 6

a) Mit den bekannten Gleichungen läßt sich aufstellen

$$c = m \cdot \omega_0^2; \quad \omega_0^2 = \omega_d^2 + \delta^2; \quad \omega_d = \frac{2 \cdot \pi}{T_d}; \quad \delta = \frac{k_1}{2 \cdot m}.$$

$$\Lambda = \delta \cdot T_d = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{A_1}{A_n}; \quad n = 3; \quad \frac{A_1}{A_3} = 10; \quad \omega_d = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{1}{3} \cdot \ln 10} \cdot \delta.$$



$$c = \frac{k_1^2}{4 \cdot m} \cdot \left(\frac{4 \cdot \pi^2}{\left(\frac{1}{3} \cdot \ln 10 \right)^2} + 1 \right) = 17 \cdot \frac{k_1^2}{m}.$$

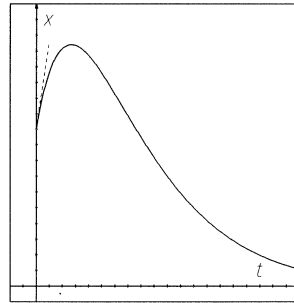
b) Die Dämpfer sind parallel geschaltet

$$m \cdot \ddot{x} + k_1 \cdot \dot{x} + k_2 \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0.$$

Für den aperiodischen Grenzfall ist $\delta = \omega_0$

$$\delta = \frac{k_1 + k_2}{2 \cdot m} = \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

$$k_2 = 2 \cdot \sqrt{c \cdot m} - k_1 = 7,246 \cdot k_1.$$

**Beispiel 7**

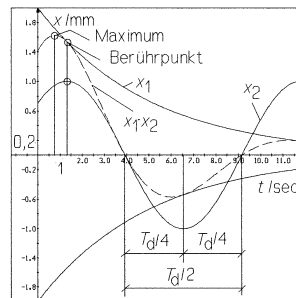
Bekannt ist

$$\hat{x} = 2 \text{ mm}; \quad \delta = 0,2 \text{ 1/s}; \quad \omega_d = 0,6 \text{ 1/s};$$

$$\varphi = \pi/4.$$

Man kann den Funktionsterm $x = f(t)$ in das Produkt der beiden Funktionsterme $x_1 = f(t)$ und $x_2 = f(t)$ zerlegen

$$x = \underbrace{e^{-\delta \cdot t} \cdot \hat{x}}_{= x_1} \cdot \underbrace{\sin(\omega_d \cdot t + \varphi)}_{= x_2}. \quad (24-4-8)$$



a) Da der Funktionsterm x_1 nicht Null sein kann, muß für die Nullstellen gelten

$$x_2 = 0 = \sin(\omega_d \cdot t + \varphi) = \sin(n \cdot \pi) \quad \text{für } n = 0; 1; 2; \dots \quad (24-4-9)$$

Daraus wird

$$\begin{aligned} \omega_d \cdot t + \varphi &= n \cdot \pi \\ t_0 &= \frac{1}{\omega_d} (n \cdot \pi - \varphi) \end{aligned} \quad (24-4-10)$$

$$t_0(1) = 3,927 \text{ s}; \quad t_0(2) = 9,163 \text{ s}.$$

b) In den Berührungspunkten müssen die Werte für $x = f(t)$ und $x_1 = f(t)$ übereinstimmen. Das ist jedoch nur dann der Fall, wenn $x_2 = \pm 1$ ist

$$x_2 = \pm 1 = \sin(\omega_d \cdot t + \varphi) = \sin\left(\frac{2 \cdot n + 1}{2} \cdot \pi\right) \quad \text{für } n = 0; 1; 2; \dots \quad (24-4-11)$$

Es wird dann

$$\begin{aligned} \omega_d \cdot t + \varphi &= \frac{2 \cdot n + 1}{2} \cdot \pi \\ \omega_d \cdot t &= \frac{2 \cdot n + 1}{2} \cdot \pi - \varphi = n \cdot \pi + \frac{\pi}{2} - \varphi \\ &= (n \cdot \pi - \varphi) + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (24-4-12)$$

Vergleicht man die jeweils letzte Gleichung aus (24-4-10) und (24-4-12), so sind sie bis auf den Summanden in (24-4-12) identisch. Der Summand $\pi/2$ gibt an, daß die Berührungspunkte genau in der Mitte zwischen zwei Nullstellen liegen.

$$\begin{aligned} t_B(1) &= 1,309 \text{ s}; & t_B(2) &= 6,545 \text{ s}. \\ x_B(1) &= 1,540 \text{ mm}; & x_B(2) &= -0,540 \text{ mm}. \end{aligned}$$

c) Die Extremwerte erhält man durch Differentiation der Gleichung (24-4-8) mit der Bedingung, daß die []-Klammer Null werden muß

$$\dot{x} = \underbrace{e^{-\delta \cdot t} \cdot \dot{x}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{[-\delta \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \varphi) + \omega_d \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \varphi)]}_{= 0} \quad (24-4-13)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \tan(\omega_d \cdot t + \varphi) &= \frac{\omega_d}{\delta} \\ \omega_d \cdot t &= \arctan \frac{\omega_d}{\delta} - \varphi \end{aligned} \quad (24-4-14)$$

Mit den Gleichungen (24-3-8) und (24-1-5) kann man die Zeit t_E für einen Extremwert auch mit Hilfe der Dämpfungskonstanten ϑ berechnen.

$$t_E = \frac{1}{\omega_d} \cdot \left(\arctan \frac{\sqrt{1 - \vartheta^2}}{\vartheta} - \varphi \right). \quad (24-4-15)$$

Mit (24-4-14) ist

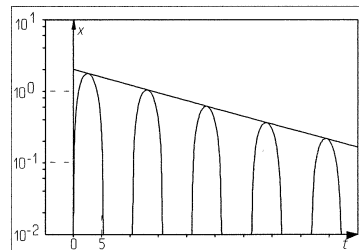
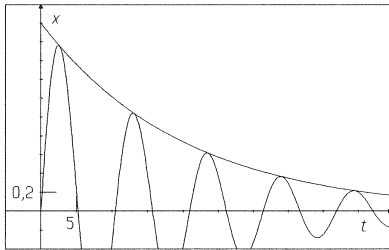
$$t_E(1) = \frac{1}{\omega_d} \cdot \left(\arctan \frac{\omega_d}{\delta} - \varphi \right) = \frac{1}{0.6} \cdot \left(\left(\arctan \frac{0.6}{0.2} \right) \cdot \frac{\pi}{180^\circ} - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$t_E(2) = t_E(1) + \frac{T_d}{2}.$$

$$\begin{array}{ll} t_E(1) &= 0,773 \text{ s}; & t_E(2) &= 6,009 \text{ s}. \\ x_E(1) &= 1,626 \text{ mm}; & x_E(2) &= -0,570 \text{ mm}. \end{array}$$

Beispiel 8

a)



$$\text{b) } \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \omega_d < \omega_0 \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \Rightarrow T_d > T_0.$$

Die Periodendauer wird kleiner.

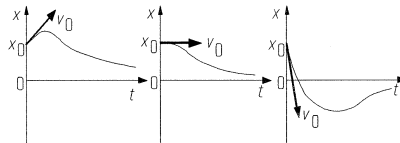
c), d)

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{k}{2 \cdot m} \sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{k}{2 \sqrt{m \cdot c}};$$

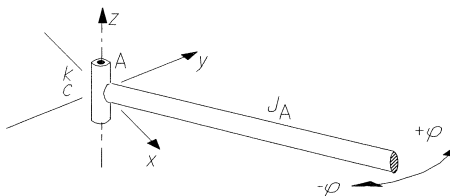
$$\frac{m_1}{m} = \frac{k^2 / (4 \cdot c \cdot \vartheta_1^2)}{k^2 / (4 \cdot c \cdot \vartheta^2)};$$

aperiodischer Grenzfall $\vartheta_1 = 1$;

$$\frac{m_1}{m} = \vartheta^2.$$



Beispiel 9



a)

$$J_A \cdot \ddot{\varphi} + k \cdot \dot{\varphi} + c \cdot \varphi = 0 ;$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{J_A} \cdot \dot{\varphi} + \frac{c}{J_A} \varphi = 0 ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J_A}} ; \quad \delta = \frac{k}{2 \cdot J_A} .$$

b)

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = 0,6 = \frac{k}{2 \cdot J_A} \cdot \sqrt{\frac{J_A}{c}} = \frac{k}{2 \cdot \sqrt{J_A \cdot c}} ;$$

$$c_{0,6} = \frac{1}{J_A} \cdot \left(\frac{k}{1,2} \right)^2 .$$

c)

$$\Lambda = \delta \cdot T_d ; \quad \omega_d = \frac{2 \cdot \pi}{T_d} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 \cdot (1 - \vartheta^2)} ;$$

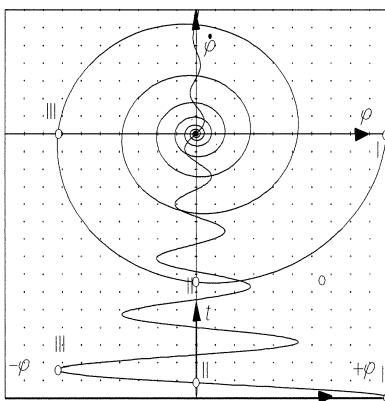
$$\Lambda_{0,6} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\delta}{\omega_d} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \vartheta \cdot \omega_0}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \vartheta^2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,6}{\sqrt{1 - 0,36}} = \frac{1,2 \cdot \pi}{0,8} = 1,5 \cdot \pi .$$

d) Skizzieren Sie das Phasendiagramm (= Phasenbild = Phasenporträt) für den Fall b). Es gelten die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0) = \varphi_0$; $\dot{\varphi}(t=0) = 0$.

Zeichnen Sie folgende Punkte deutlich in das Phasendiagramm ein:

- I = erstes Maximum der Schwingung;
- II = erster Nulldurchgang der Schwingung;
- III = erstes Minimum der Schwingung.

Das φ - t -Diagramm ist dem Phasendiagramm angeglichen.



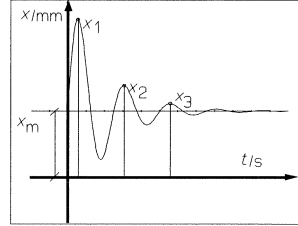
Beispiel 10

a)

$$\Lambda = \ln \frac{x_1 - x_m}{x_2 - x_m} = \ln \frac{x_2 - x_m}{x_3 - x_m};$$

$$(x_1 - x_m) \cdot (x_3 - x_m) = (x_2 - x_m)^2;$$

$$x_m = \frac{x_1 \cdot x_3 - x_2^2}{(x_1 + x_3) - 2 \cdot x_2};$$



$$\omega_0 = \sqrt{\delta^2 + \omega_d^2}; \quad \delta = \frac{\Lambda}{T_d}; \quad \omega_d = \frac{2 \cdot \pi}{T_d}; \quad \Lambda = \ln \frac{x_1 - x_m}{x_2 - x_m};$$

$$\Lambda = \ln \frac{x_1 - \frac{x_1 \cdot x_3 - x_2^2}{x_1 + x_3 - 2 \cdot x_2}}{x_2 - \frac{x_1 \cdot x_3 - x_2^2}{x_1 + x_3 - 2 \cdot x_2}} = \ln \frac{x_1^2 + x_1 \cdot x_3 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_3 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 - 2 \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_3 + x_2^2} = \ln \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3};$$

$$\omega_0 = \frac{1}{T_d} \cdot \sqrt{\left(\ln \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3} \right)^2 + 4 \cdot \pi^2};$$

b)

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{k}{2 \cdot m} \cdot \sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{k}{2 \cdot \sqrt{c \cdot m}};$$

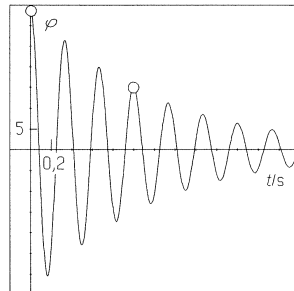
$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \cdot \sqrt{\frac{c \cdot m_1}{c \cdot m_2}} = \vartheta_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Beispiel 11

Der Zeiger eines Meßinstrumentes schwingt geschwindigkeitsproportional gedämpft. Für die gesamte schwingende Masse ist $J_S = 1,7E-6 \text{ Nms}^2$. Für den Bereich von Amplitude $\hat{\varphi}_0$ bis zur Amplitude $\hat{\varphi}_3$ gilt ($\hat{\varphi}$ = maximale Amplitude)

$$t_0 = 0 \text{ s}; \quad \hat{\varphi}_0 = 35^\circ;$$

$$t_3 = 1 \text{ s}; \quad \hat{\varphi}_3 = 15^\circ.$$



a) Periodischer Fall

$$0 < \vartheta < 1 ; \quad \vartheta = \delta / \omega_0 ;$$

$$\omega_0^2 > \delta^2 ; \quad c / J_s > \delta^2 ; \quad c > J_s \cdot \delta^2 ;$$

$$T_d = 1/3 \cdot (t_3 - t_0) = 0,3 \text{ s} ;$$

$$\Lambda = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{\hat{\phi}_0}{\hat{\phi}_n}\right) = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{35}{15}\right) = 0,2824 ;$$

$$\text{b), c) } \delta = \Lambda / T_d = 0,847 \text{ s}^{-1} ;$$

$$\rightarrow \infty > c > 1,22\text{E-}6 \text{ Nm} ;$$

d)

$$\Lambda = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{\hat{\phi}_0}{\hat{\phi}_n}\right) ;$$

$$n = \frac{1}{\Lambda} \cdot \ln\left(\frac{\hat{\phi}_0}{\hat{\phi}_n}\right) = \frac{1}{0,2824} \cdot \ln\left(\frac{35}{5}\right) = 6,89 \rightarrow 7 ;$$

$$t_7 = 7 \cdot T_d = 2,3 \text{ s} ;$$

$$\text{e) } \hat{\phi}_n = \hat{\phi}_0 \cdot e^{-n \cdot \Lambda} \Rightarrow \hat{\phi}_7 = 35^\circ \cdot e^{-7 \cdot 0,2824} = 4,847^\circ ;$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_d}\right)^2 - \delta^2} = 18,83 \text{ s}^{-1} ;$$

$$c = J_s \cdot \delta^2 = 1,7\text{E-}6 \cdot 0,847^2 = 1,22\text{E-}6 \text{ Nm} .$$

Kap. 24.5

Beispiel 1

a)

b)

$$x(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) ;$$

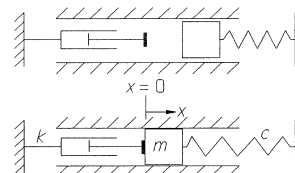
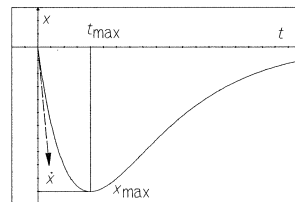
$$\dot{x}(t) = -\delta \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) + C_2 \cdot e^{-\delta \cdot t} .$$

mit den Anfangsbedingungen folgt:

$$C_1 = 0 ; \quad C_2 = -\dot{x}_0 .$$

Damit ist

$$x(t) = -\dot{x}_0 \cdot t \cdot e^{-\delta \cdot t} .$$



c)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 0 = -\delta \cdot e^{-\delta \cdot t_{\max}} \cdot (-\dot{x}_0 \cdot t_{\max}) - \dot{x}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t_{\max}} ; \\ 0 &= \dot{x}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t_{\max}} \cdot (\delta \cdot t_{\max} - 1) ; \\ t_{\max} &= \frac{1}{\delta} .\end{aligned}$$

d)

$$x_{\max} = -\dot{x}_0 \cdot \frac{1}{\delta} \cdot e^{-\delta \cdot \frac{1}{\delta}} = -\frac{\dot{x}_0 \cdot e^{-1}}{\delta} .$$

e)

$$\vartheta = 1 = \frac{\delta}{\omega_0} \Rightarrow \frac{k^2}{4 \cdot m^2} = \frac{c}{m} \Rightarrow k = \sqrt{4 \cdot c \cdot m} .$$

Kap. 24.6

Beispiel 1

Mit den gegebenen Werten lassen sich berechnen:

$$\delta = \frac{k}{2 \cdot m} = 37,5 \text{ 1/s}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = 27,386 \text{ 1/s} .$$

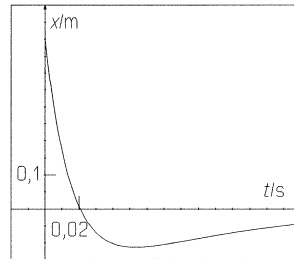
$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = 1,369 .$$

Damit handelt es sich um eine aperiodische gedämpfte Bewegung. Die für die Berechnung erforderlichen Werte ergeben sich zu

$$\kappa = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = 25,618 \text{ 1/s} ,$$

$$\lambda_1 = -(\delta - \kappa) = -11,882 \text{ 1/s}; \quad \lambda_2 = -(\delta + \kappa) = -63,118 \text{ 1/s};$$

$$C_1 = \frac{x_0 \cdot \lambda_2 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = -0,2623 \text{ m}; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 \cdot x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = 0,7623 \text{ m} .$$



Es stehen die Gleichungen zur Verfügung

$$x = C_1 \cdot e^{-(\delta - \kappa) \cdot t} + C_2 \cdot e^{-(\delta + \kappa) \cdot t} , \quad (24-6-3)$$

$$\dot{x} = -(\delta - \kappa) \cdot C_1 \cdot e^{-(\delta - \kappa) \cdot t} - (\delta + \kappa) \cdot C_2 \cdot e^{-(\delta + \kappa) \cdot t} . \quad (24-6-4)$$

Mit den Randbedingungen ist:

$$x(1) = 0 \Rightarrow \frac{e^{-(\delta-\kappa) \cdot t(1)}}{e^{-(\delta+\kappa) \cdot t(1)}} = -\frac{C_2}{C_1},$$

$$[-(\delta-\kappa) \cdot t(1)] - [-(\delta+\kappa) \cdot t(1)] = \ln\left(-\frac{C_2}{C_1}\right),$$

daraus

$$t(1) = \frac{1}{2 \cdot \kappa} \cdot \ln\left(-\frac{C_2}{C_1}\right) = 0,0208 \quad \text{s},$$

und für das Maximum $x(2)$ muß die Geschwindigkeit Null sein:

$$\dot{x}(2) = 0 \Rightarrow \frac{e^{-(\delta-\kappa) \cdot t(2)}}{e^{-(\delta+\kappa) \cdot t(2)}} = \frac{(\delta+\kappa)}{(\delta-\kappa)} \cdot \frac{C_2}{-C_1},$$

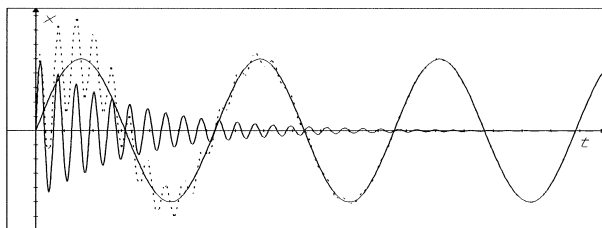
$$t(2) = \frac{1}{2 \cdot \kappa} \cdot \ln \frac{(\delta+\kappa) \cdot C_2}{(\delta-\kappa) \cdot (-C_1)} = 0,0533 \quad \text{s},$$

$$x(2) = C_1 \cdot e^{-(\delta-\kappa) \cdot t(2)} + C_2 \cdot e^{-(\delta+\kappa) \cdot t(2)} = -0,1128 \quad \text{m}.$$

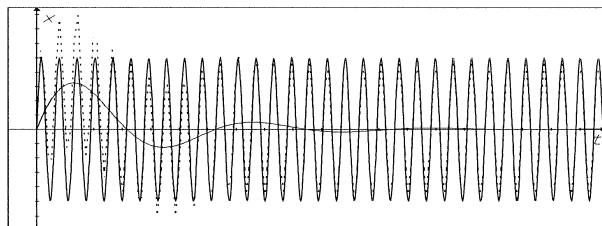
Kap. 25

Beispiel 1

$$\omega_e < \omega_d$$



$$\omega_e > \omega_d$$



Kap. 25.2**Beispiel 1**

Nach dem Diagramm ist das Maximum für $\hat{x}$ bei $\omega_e/\omega_0 = 0,8$.

In der Aufgabenstellung ist die Gleichung

$$\omega_{e \text{ resonanz}} = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{k^2}{2 \cdot m^2}} = 0,8 \cdot \omega_0 = 0,8 \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Damit wird

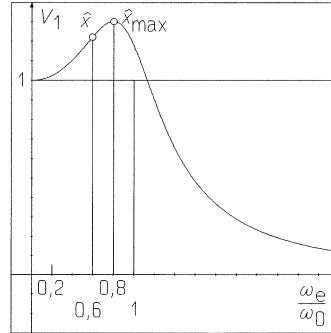
$$k = 10,998 \text{ N} \cdot \text{s/m};$$

$$\delta = 4,58 \text{ 1/s};$$

$$\vartheta = 0,424.$$

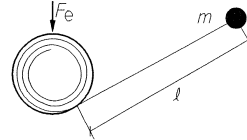
Mit diesen Werten errechnet sich die Amplitude für den Betriebsfall bei $\omega_e/\omega_0 = 0,6$ zu

$$\hat{x} = \frac{\frac{\hat{F}_e}{c}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}} = 34,25 \text{ mm}.$$

**Beispiel 2**

Für den einseitig eingespannten Balken und damit für die Eigenfrequenz gilt

$$x = \hat{x} = \frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot E \cdot I} \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}.$$



Es ist mit der Durchbiegung $x \Rightarrow F = c \cdot x$ die Federkonstante gegeben. Wenn man einen "Balken", in diesem Fall einen Stahldraht, als Resonanzmesser verwenden will, so muß seine Eigenfrequenz gleich der Erregerfrequenz sein. Formt man die Gleichung um, so wird $f_0 = f(\ell)$:

$$f_e \approx f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{F}{x} \cdot \frac{1}{m}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot E \cdot I}{\ell^3 \cdot m}}.$$

Mit $\hat{x}$ = Amplitude der Meßstelle an der Maschine und dem Resonanzfall $\omega_e = \omega_0$ erhält man den Ausschlag $\hat{x}$ der Masse m . Durch Drehen an der Aufwicklung des Stahldrahtes kann man durch die Längenänderung ℓ den maximalen Ausschlag von m erkennen und an der aufgebrachten Skala die Resonanzfrequenz ablesen. Über $\omega = \pi \cdot n/30$ (ω 1/s; n 1/min) ist auf einer zweiten Skala die Resonanzdrehzahl abzulesen.

$$\hat{x} = \frac{\frac{\hat{F}_e}{c}}{2 \cdot \vartheta} = \frac{\hat{r}}{2 \cdot \vartheta} . \quad (25-2-22)$$

Die Zusammenhänge der einzelnen Größen sind:

$$\omega_0 = \omega_e = 2 \cdot \pi \cdot f_e ; \quad k = \delta \cdot 2 \cdot m = \vartheta \cdot \omega_0^2 \cdot 2 \cdot m ; \quad c = \omega_0^2 \cdot m .$$

Daraus lassen sich die Kräfte bestimmen:

Erregerkraft:

$$\hat{F}_e = m \cdot r \cdot \omega_e^2 .$$

Dämpfungskraft:

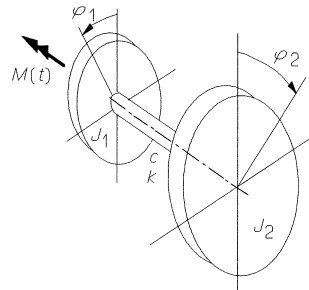
$$F_D = k \cdot \dot{x} = k \cdot \hat{x} \cdot \omega_e .$$

Trägheitskraft:

$$F_T = m \cdot \ddot{x} = m \cdot \hat{x} \cdot \omega_e^2 .$$

Federkraft:

$$F_F = c \cdot \hat{x} .$$



Beispiel 3

a) Wird eine Gleichung Null, so muß mindestens einer der Faktoren Null sein:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega_e/\omega_0)^2)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot (\omega_e/\omega_0)^2}} .$$

$$\frac{dV_1}{d(\omega_e/\omega_0)} = - \frac{1}{2} \cdot \left[\quad \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{\left[2 \cdot (1 - (\omega_e/\omega_0)^2) \cdot (-2 \cdot (\omega_e/\omega_0)) + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot 2 \cdot (\omega_e/\omega_0) \right]}_{= 0} = 0 ;$$

$$- 2 \cdot (\omega_e/\omega_0) \cdot \underbrace{\left[1 - (\omega_e/\omega_0)^2 - 2 \cdot \vartheta^2 \right]}_{= 0} = 0 ;$$

$$(\omega_e/\omega_0)_{V_1 \max} = \sqrt{1 - 2 \cdot \vartheta^2} .$$

b)

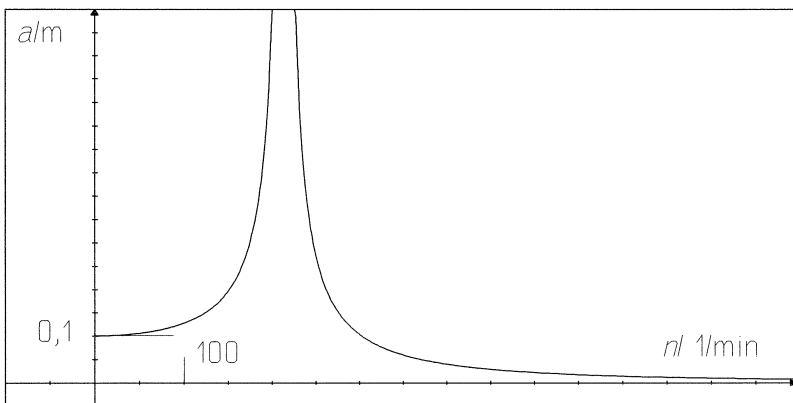
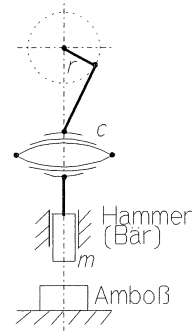
$$\begin{aligned}
 V_{1 \max} &= \frac{1}{\sqrt{(1 - 1 + 2 \cdot \vartheta^2)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot (1 - 2 \cdot \vartheta^2)}} ; \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \vartheta \cdot \sqrt{1 - \vartheta^2}} \quad \text{mit} \quad \vartheta = 1/2 ; \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154 .
 \end{aligned}$$

Beispiel 4

$$V_1 = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 \right|} = \frac{a}{r} .$$

$$a = r \cdot \frac{1}{\left| 1 - \frac{m \cdot \omega_e^2}{c} \right|} = r \cdot \frac{c}{c - m \cdot \omega_e^2} ;$$

$$\omega_0 = \sqrt{c/m} = 22,36 \text{ 1/s} \Rightarrow n_0 = 213,5 \text{ 1/min} .$$

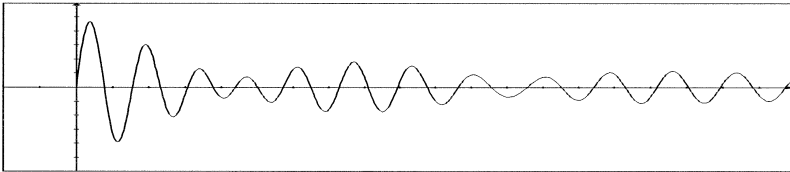
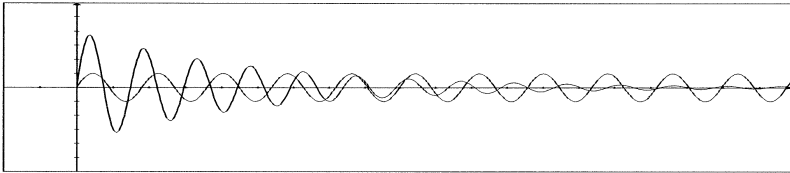


n 1/min	100	200	300	400	500	600	700	800
a m	0,128	0,815	0,1027	0,04	0,022	0,014	0,010	0,00767

Kap. 25.3

Beispiel 1; Welle mit Unwucht und Stoß

Läuft eine Welle mit einer Unwucht, dann zeigt die Messung eine Sinuswelle mit nahezu gleichbleibender Amplitude. Wird nun mit einer Kupplung eine Last auf diese Welle geschaltet, dann ist dieser Vorgang schwingungstechnisch eine gedämpfte Schwingung, die der Welle überlagert wird und mit der Zeit abklingt. Die Welle läuft dann mit der ursprünglichen Amplitude weiter.



Beispiel 2

Für die Berechnung der Federkonstanten eines Systems gilt allgemein:

$$F = c \cdot y(x) \text{ .}$$

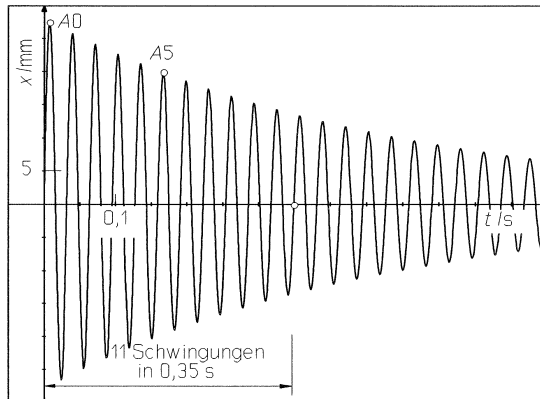
Für die maximale Durchbiegung eines einseitig eingespannten Balkens gilt:

$$y(x_{\max}) = \frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot I \cdot E} \text{ .}$$

Daraus nach c aufgelöst und eingesetzt, folgt

$$c = \frac{F \cdot 3 \cdot I \cdot E}{F \cdot \ell^3} = \frac{3 \cdot b \cdot h^3 \cdot E}{12 \cdot \ell^3} = \frac{3 \cdot 40 \cdot 15^3 \cdot 2,1 \text{E}5}{12 \cdot 400^3} = 1,1074 \text{E}5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \text{ .}$$

Die Masse des Gehäuses+Motor ist gegeben: $m = 1,37 \text{ kg}$. Dazu muß noch der Anteil der federnden Masse (Balken) addiert werden. Er beträgt mit dem Faktor 0,7345



$$m_{\text{Feder}} = \rho \cdot b \cdot h \cdot \ell = 1,88 \text{ kg} .$$

Damit beträgt die Gesamtmasse für die Berechnung der Eigenkreisfrequenz

$$m_{\text{ges}} = m + 0,7345 \cdot m_{\text{Feder}} = 2,7509 \text{ kg} ,$$

und die Eigenkreisfrequenz wird zu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_{\text{ges}}}} = \sqrt{\frac{1,1074\text{E}5}{2,7509}} \sqrt{\frac{\text{N/m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2/\text{m}}} = 200,64 \text{ 1/s} .$$

Um die Schwingungseigenschaften des Systems festzustellen, wird das System einmal kurz angeschlagen und die Schwingungen werden aufgezeichnet. Im Diagramm läßt sich auszählen, daß 11 Schwingungen in der Zeit $t = 0,35 \text{ s}$ erfolgen. Dann ist die Zeit für eine Schwingung

$$T_d = 0,35/11 \text{ s} = 0,0318 \text{ s} .$$

Zählt man die Schwingungen für den Abklingkoeffizienten δ aus, so erhält man z.B. für 5 Schwingungen die Amplituden $A_0 = 27,5 \text{ mm}$ und $A_5 = 19,8 \text{ mm}$. Das ergibt mit der Gleichung (24-4-3) für das logarithmische Dekrement den Abklingkoeffizienten:

$$\delta = \frac{1}{n \cdot T_d} \cdot \ln \frac{A_0}{A_5} = \frac{1}{5 \cdot 0,0318} \cdot \ln \frac{27,5}{19,8} \text{ 1/s} = 2,066 \text{ 1/s} .$$

Die Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung wird mit T_d berechnet:

$$\omega_d = \frac{2 \cdot \pi}{T_d} = 197,58 \text{ 1/s} .$$

Die weiteren Größen sind

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} \frac{1/\text{s}}{1/\text{s}} = 0,01 ,$$

$$k = 2 \cdot m_{\text{ges}} \cdot \delta = 2 \cdot 2,7509 \cdot 2,0066 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m} \cdot 1/\text{s} = 10,7 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m} .$$

Mit Gleichung (24-4-4) ist dann

$$\Lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot \vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} = 0,0628 .$$

Es handelt sich hier mit $\vartheta = 0,01$ nach Abb. 25-3-2 um eine praktisch ungedämpfte Schwingung. Für $V_{3 \text{ max}}$ erhält man durch Ablesen ein $\omega_e/\omega_0 \approx 1,02$ (geschätzt) und damit ein $\omega_e = 210,9 \text{ 1/s}$. Die Erregerkraft errechnet sich zu

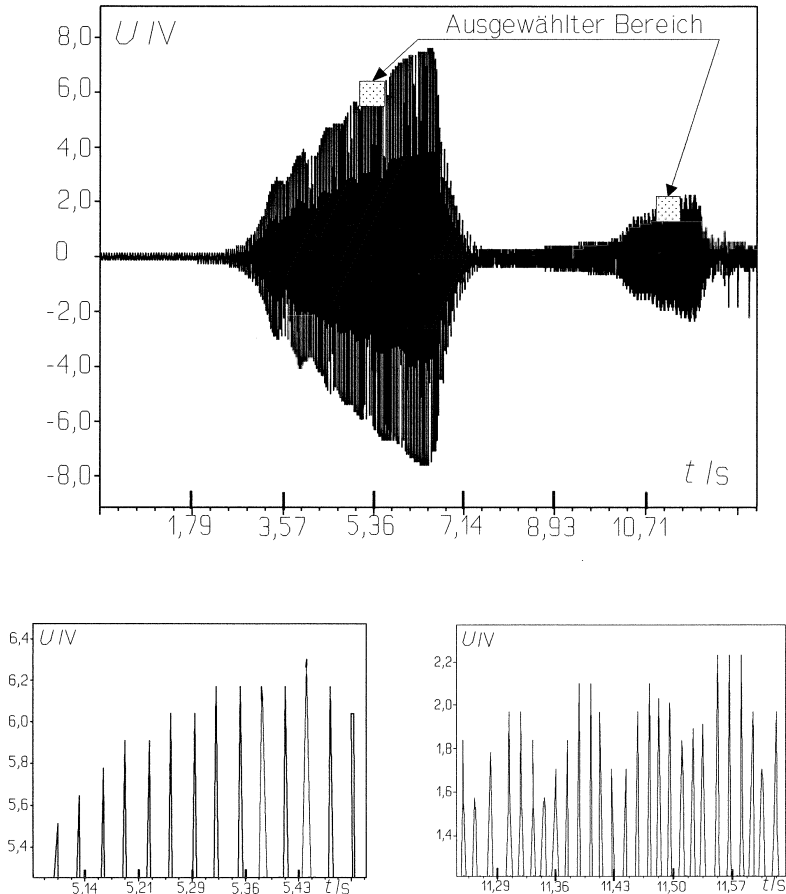
$$\begin{aligned} F_e &= m_e \cdot e \cdot \omega_e^2 \approx 6 \cdot 26 \cdot 210,9^2 \text{ g} \cdot \text{mm} \cdot \text{s}^{-2} = 6,94\text{E}6 \text{ g} \cdot \text{mm} \cdot \text{s}^{-2} \\ &= 6,94 \text{ N} . \end{aligned}$$

Eine Erregermasse = Unwuchtmasse von $m_e = u = 6 \text{ g}$ im Abstand von $e = 26 \text{ mm}$ erzeugt in der Resonanz eine Kraft $F = 6,94 \text{ N}$.

Beispiel 3

Die beiden Diagramme sind Ausschnitte aus der Gesamtaufzeichnung der Aufgabenstellung. An den Angaben der Volt-Achse und der Zeitachse lassen sich die Bereiche, aus denen die Ausschnitte stammen, finden. Die Auswertung erfolgte aus einem DIN A4 - Blatt. Darauf beziehen sich auch die mm-Angaben.

Das Diagramm ist eine Echtaufnahme und keine Simulation.



Zuordnung der Zeitachse:

41,5 mm $\Rightarrow (5,43-5,14)$ s;
1 mm $\Rightarrow 0,00699$ s;

44,5 mm $\Rightarrow (11,57-11,29)$ s;
1 mm $\Rightarrow 0,00629$ s;

Zuordnung der Schwingungsamplituden:

13 Schwingungen	$\Rightarrow 58,5 \text{ mm}$	26 Schwingungen	$\Rightarrow 58,5 \text{ mm}$
1 Schwingung	$\Rightarrow 4,5 \text{ mm}$	1 Schwingung	$\Rightarrow 2,25 \text{ mm}$

Berechnung der Schwingungswerte:

$$\begin{array}{ll} T = 0,031455 \text{ s}; \omega_d = 199,75 \text{ 1/s}; & T = 0,01415 \text{ s}; \omega_d = 444,04 \text{ 1/s}; \\ f = 31,79 \text{ 1/s}; & f = 70,65 \text{ 1/s}; \\ n = 1907 \text{ 1/min.} & n = 4239 \text{ 1/min.} \end{array}$$

Kap. 25.4 (und 25.5)

Beispiel 1

Gefordert ist $V_D < 1$. Nach Gleichung (25-4-8)

$$V_D = \frac{\hat{F}_G}{\hat{F}_e} = V_1 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}$$

folgt

$$\sqrt{\frac{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}} < 1.$$

Diese Gleichung quadriert und mit dem Nenner multipliziert, führt auf

$$1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot (\dots)^2 < (1 - (\dots)^2)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot (\dots)^2.$$

Der zweite Summand kürzt sich auf beiden Seiten heraus, die $\sqrt{\quad}$ wird gezogen, und so ist

$$1 < 1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2.$$

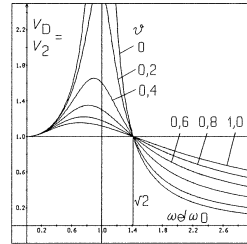
Da der Betrieb im überkritischen Bereich erfolgen soll, ist $\omega_e > \omega_0$. Damit ist das Verhältnis $(\dots) > 1$ und somit die rechte Seite negativ und die Bedingung nicht erfüllt. Die Gleichung muß jedoch für den überkritischen Fall erfüllt sein. Dann muß durch Vorzeichenumkehr sein

$$1 < (\dots)^2 - 1 \Rightarrow 2 < \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow \omega_0 < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \omega_e.$$

Auf andere Weise: In Kap. 25.5 ist für den überkritischen Fall mit (25-5-4) die Gleichung für V_D gegeben. Für die Bedingung dieser Aufgabe folgt daraus, wenn der Nenner auf die rechte Seite gebracht wird, ebenfalls die hier darüber stehende Gleichung.

$$V_D = \frac{1}{|1 - (\dots)^2|} < 1 ; \quad \Rightarrow \quad 1 < (\dots)^2 - 1 .$$

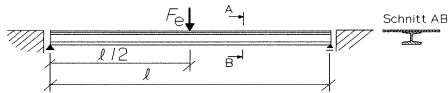
Im Diagramm *Abb. 25-4-3* ist zu erkennen, daß nur für alle Werte, die größer als $\omega_e / \omega_0 = \sqrt{2}$ sind, $V_D < 1$ ist.



Beispiel 2

Für eine Erregerkraft ist nach (8-1-14) die Anzahl der Anregungen/min

$$n_e = \frac{300}{\sqrt{f_D}} \text{ 1/min} ; \quad \frac{f_D}{\text{cm}}$$



Sie betrug in Aufgabe Kap. 8.1 Beispiel 1 $n_e = 358 \text{ 1/min}$. Sie soll nun auf $n_e = 180 \text{ 1/min}$ heruntergesetzt werden. Damit ist für die bestimmende Variable f_D

$$f_D = \left(\frac{300}{180} \right)^2 = 2,78 \text{ cm} .$$

Die Formel für die Durchbiegung des in der Mitte belasteten und beidseitig gelagerten Trägers ist

$$f_D = \frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot I \cdot E} .$$

Da alle Größen außer der Länge beibehalten werden sollen, muß die Länge berechnet werden. Die Länge eines Trägers, der seine Resonanzfrequenz bei 180 Anregungen/min hat, ist:

$$\begin{aligned} \ell &= \sqrt[3]{\frac{f_D \cdot 48 \cdot I \cdot E}{F}} = \sqrt[3]{\frac{2,78 \cdot 48 \cdot 1450 \cdot 2,1 \cdot 10^7}{8000}} \sqrt[3]{\frac{\text{cm} \cdot \text{cm}^4 \cdot \text{N/cm}^2}{\text{N}}} \\ &= 798 \text{ cm} . \end{aligned}$$

Also: Jogger können gefährlich leben.

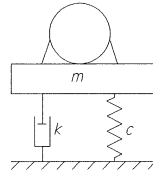
Beispiel 3

a) Aus (25-5-3) folgt

$$V_D = 1 / |1 - (\omega_e / \omega_0)^2| = 0,03 ; \quad \omega_e / \omega_0 = \sqrt{34,3} = 5,86.$$

Da der Nenner nur positiv sein kann, muß ein Vorzeichenwechsel erfolgen, siehe auch Beispiel 1.

$$1/0,03 = (\dots)^2 - 1.$$

b) Durch Erweitern mit ω_e^2 ist

$$c = m \cdot \omega_0^2 = m \cdot \frac{\omega_e^2}{(\omega_e / \omega_0)^2} = 1,82 \text{E}5 \text{ N/m}.$$

c) Mit (8-1-7) erhält man

$$f_D = \frac{m \cdot g}{c} = 5,93 \text{ cm}.$$

d) (25-2-24) und (25-2-26) ergeben

$$\hat{x} = V_1 \cdot \frac{\hat{F}_e}{c} = \frac{1}{|1 - (\omega_e / \omega_0)^2|} \cdot \frac{\hat{F}_e}{c} = 1,48 \text{E}-4 \text{ m}.$$

e) Mit f_D aus c) ist mit (8-1-14)

$$n_0 = 300 / \sqrt{f_D} = 123,2 \text{ 1/min}.$$

f) Und schließlich mit (25-4-7) und den jeweiligen ϑ ist

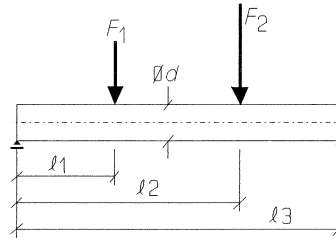
$$\frac{\hat{F}_G}{\hat{F}_{G(\vartheta=0)}} = \frac{\hat{F}_e \cdot V_1 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot (\omega_e / \omega_0)^2}}{\hat{F}_e \cdot V_1 \cdot \sqrt{1 + 0}} = \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot 21}.$$

ϑ	0,000	0,100	0,500
$\hat{F}_G / \hat{F}_{G(\vartheta=0)}$	1,000	1,54	5,944

Die Schwingungsisolierung gegen den Boden wird bei geringer Dämpfung ($\vartheta \ll 1$) praktisch noch erhalten, wird die Dämpfung jedoch größer ($\vartheta < 1$), dann wird die Schwingungsisolierung stark verschlechtert (siehe Abb. 25-4-3 und Kommentar dazu). Bei dem Dämpfungsgrad $\vartheta = 0,5$ ist die Belastung 6mal größer als bei abgeschaltetem Dämpfer.

Kap. 26**Beispiel 1**

$\varnothing d$	= 160	mm
ℓ_1	= 600	mm
ℓ_2	= 1700	mm
ℓ_3	= 2900	mm
F_1	= 8000	N
F_2	= 12000	N



1. Gesucht ist die biegekritische Drehzahl nach dem Verfahren von Rayleigh.
 2. Gesucht ist die biegekritische Drehzahl nach dem Verfahren von Dunkerley (Maxwell).
- Zu 1 und 2 siehe Aufgaben Kap. 19, 20, 21.

Für die biegekritische Drehzahl nach dem Verfahren von Mohr ergeben sich die Werte (die Reihenfolge der Indizes ergibt sich aus dem Kapitel).

Biegemomente

M_{b1}	= 6,786E5	N·cm
M_{b2}	= 1,043E6	N·cm

k_{1a}	= 1,004E-5	1/cm
k_{1b}	= 1,004E-5	1/cm
k_{2a}	= 1,543E-5	1/cm
k_{2b}	= 1,543E-5	1/cm

Flächenkräfte

F_{k1}	= 3,013E-4
F_{k2}	= 1,401E-3
F_{k3}	= 9,261E-4

Durchbiegungen

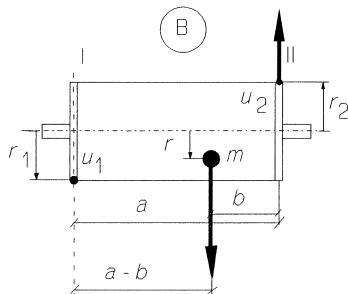
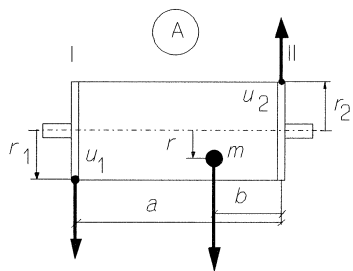
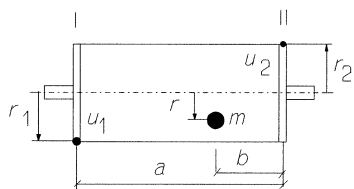
y_1	= 0,544	mm
y_2	= 1,339	mm
y_3	= 1,014	mm

Damit ist

ω_0	= 86	1/s
n_{krit}	= 820	1/min

Trotz dieser groben Teilung ist die Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus den Lösungen Kap. 19, 20 und 21 gut.

Hier ist nach dem Verfahren von Mohr eine Welle mit konstantem Durchmesser berechnet worden. Für die Berechnung von Wellen existieren eine Reihe von Programmen in verschiedenen Preisklassen für verschiedene Berechnungsmethoden. Das Verfahren von Mohr ist leicht zu programmieren. Es sollte hier gezeigt werden, daß die Übereinstimmung für die Praxis hinreichend genau und zur Kontrolle durchaus geeignet ist.

Kap. 27**Beispiel 1**

Die Lösung erfolgt nach den Regeln der Statik:

Bild A

Summe aller Kräfte = 0

$$u_2 \cdot r_2 \cdot \omega^2 = u_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2 + m \cdot r \cdot \omega^2 .$$

Bild B

Summe aller Momente = 0 mit der Ebene I

$$u_2 \cdot r_2 \cdot \omega^2 \cdot a = m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot (a-b) ,$$

$$u_2 \cdot r_2 = m \cdot r \cdot \frac{a-b}{a} ,$$

$$u_2 = m \cdot \frac{r}{r_2} \cdot \frac{a-b}{a} .$$

Damit zurück nach A

$$u_1 = \frac{m \cdot r \cdot \frac{a-b}{a} - m \cdot r}{r_1} .$$

Beispiel 2

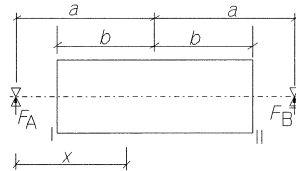
- a) Die Kräfte werden in den Lagern gemessen

$$F = U \cdot \omega^2 ; \quad \omega = \pi \cdot n / 30 = 157,08 \text{ 1/s.}$$

$$U_A = \frac{F_A}{\omega^2} = \frac{1E7}{157,08^2} = 405,28 \text{ g} \cdot \text{mm};$$

$$U_B = \frac{5E6}{157,08^2} = 202,64 \text{ g} \cdot \text{mm};$$

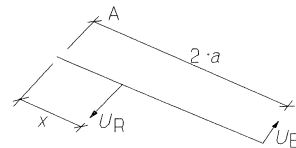
$$U_R = 607,92 \text{ g} \cdot \text{mm}.$$



- b)
- $\Sigma M_A = 0$

$$U_R \cdot x = U_B \cdot 2 \cdot a,$$

$$x = \frac{U_B \cdot 2 \cdot a}{U_R} = 266,6 \text{ mm}.$$



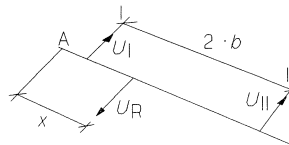
- c)
- $\Sigma M_I = 0$

$$U_R \cdot (x - (a - b)) = U_{II} \cdot 2 \cdot b,$$

$$U_{II} = \frac{U_R \cdot (x - (a - b))}{2 \cdot b},$$

$$U_{II} = \frac{607,92 \cdot 166,6}{2 \cdot 300} = 168,87 \text{ g} \cdot \text{mm}.$$

$$U_I = U_R - U_{II} = 439,05 \text{ g} \cdot \text{mm}.$$

**Beispiel 3**

Es wird zunächst $\Sigma F = 0$ und danach $\Sigma M = 0$ gebildet:

$$m_1 = 1,5 \text{ kg}; \quad x_1 = 100 \text{ mm};$$

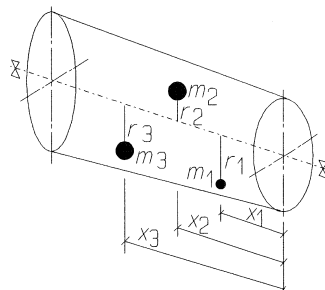
$$r_1 = 200 \text{ mm};$$

$$m_2 = 3 \text{ kg}; \quad x_2 = 150 \text{ mm};$$

$$r_2 = 150 \text{ mm};$$

$$m_3 = 4 \text{ kg}; \quad x_3 = \quad \text{mm};$$

$$r_3 = \quad \text{mm}.$$



$$m_3 \cdot r_3 \cdot \omega^2 + m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2 - m_2 \cdot r_2 \cdot \omega^2 = 0 ,$$

$$r_3 = \frac{m_2 \cdot r_2 - m_1 \cdot r_1}{m_3} = \frac{3 \cdot 150 - 1,5 \cdot 200}{4} = 37,5 \text{ mm} .$$

$$m_3 \cdot r_3 \cdot \omega^2 \cdot x_3 + m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2 \cdot x_1 - m_2 \cdot r_2 \cdot \omega^2 \cdot x_2 = 0 ,$$

$$x_3 = \frac{m_2 \cdot r_2 \cdot x_2 - m_1 \cdot r_1 \cdot x_1}{m_3 \cdot r_3} = \frac{3 \cdot 150 \cdot 150 - 1,5 \cdot 200 \cdot 100}{4 \cdot 37,5} = 250 \text{ mm} .$$

Beispiel 4

Fall A: $U_R = 2 \cdot U$;

X eine statische Unwucht

O eine Momentenunwucht

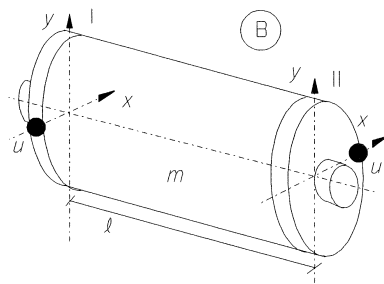
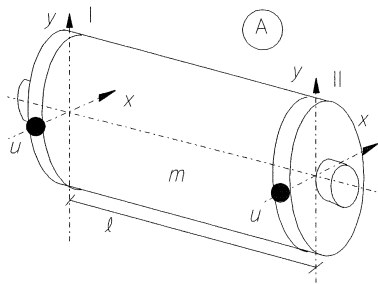
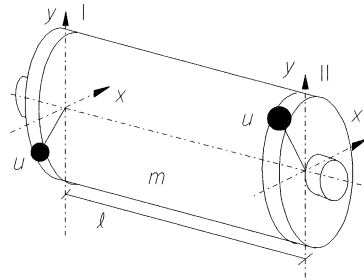
O eine quasistatische Unwucht

Fall B: $V = U \cdot \ell$

O eine statische Unwucht

X eine Momentenunwucht

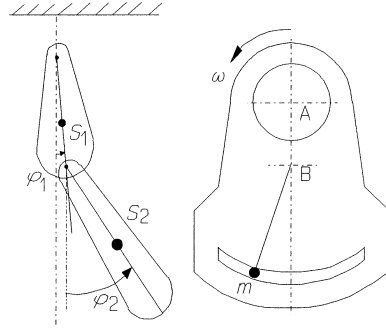
O eine quasistatische Unwucht



Kap.28

Beispiel 1

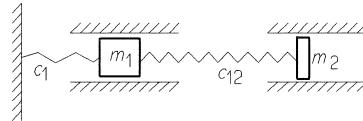
Bei einer Kurbelwelle wird ein Fliehkraftpendel zur Schwingungstilgung benutzt. Die Kurbelwelle rotiert um A. Sie führt Torsionsschwingungen während der Rotation aus. Man kann dann die Kurbelwelle nach der Abb. als Doppel-Pendel mit zwei Freiheitsgraden auffassen. Die Kurbelwelle ist das Pendel 1. Bringt man im Punkt B der Kurbelwelle ein zweites Pendel mit der Masse m an, diese Masse m ist in einer Nut um den Punkt B frei beweglich, so kann man damit ein gekoppeltes System realisieren. Es gibt dann eine Tilgerkreisfrequenz, die nach Kap. 28.2 die Eigenschwingungen der Kurbelwelle bei der Betriebsdrehzahl weitgehend neutralisieren kann.



Beispiel 2

Fall 1

Es sind zunächst die Eigenkreisfrequenzen zu berechnen (28-1-7)



$$\frac{c_1 + c_{12}}{m_1} = \omega_1^2 ; \quad \frac{c_2 + c_{12}}{m_2} = \omega_2^2 ; \quad \frac{c}{N/m} ; \quad \frac{m}{N \cdot s^2/m} ; \quad \frac{\omega}{1/s} .$$

$$\omega_1^2 = \frac{c_1 + c_{12}}{m_1} = \frac{1,5E5 + 9E4}{1800} \text{ 1/s}^2 = 133,3 \text{ 1/s}^2 ,$$

$$\omega_2^2 = \frac{c_2 + c_{12}}{m_2} = \frac{0 + 9E4}{100} \text{ 1/s}^2 = 900 \text{ 1/s}^2 .$$

Damit können die Koppelkreisfrequenzen berechnet werden (28-1-18)

$$\omega_{k1,k2} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4 \cdot \frac{c_{12}^2}{m_1 \cdot m_2}}} .$$

$$\omega_{k1,k2} = \sqrt{\frac{133,3 + 900}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(133,3 - 900)^2 + 4 \cdot \frac{(9E4)^2}{1800 \cdot 100}}} \text{ 1/s} ,$$

$$\omega_{k1,k2} = \sqrt{516 \pm 428} \text{ 1/s} ,$$

$$\omega_{k1} = 8,83 \text{ 1/s} ,$$

$$\omega_{k2} = 30,9 \text{ 1/s} .$$

Fall 2

Auf die Masse m_1 wirkt periodisch eine Kraft mit der Drehzahl $n = 500 \text{ 1/min}$. Also ist die Tilgerkreisfrequenz

$$\omega_T = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 500}{30} \text{ 1/s} = 52,36 \text{ 1/s} .$$

Die Tilgermasse ist mit (28-2-14)

$$\frac{c_{12}}{m_2} - \omega_e^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_e = \sqrt{\frac{c_{12}}{m_2}} = \omega_T .$$

$$m_2 = \frac{c_{12}}{\omega_T^2} = \frac{9E4}{52,36^2} \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{\text{m} \cdot \text{1/s}^2} = 32,8 \text{ kg} .$$

Es reicht eine Masse $m_2 = 32,8 \text{ kg}$ aus, um die Schwingungen der Masse $m_1 = 1800 \text{ kg}$ bei einer Drehzahl von 500 1/min zu tilgen.

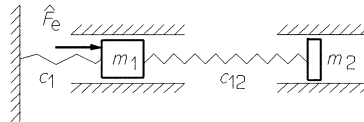
Für diese beiden Massen müssen dann die gleichen Berechnungen wie im Fall 1 durchgeführt werden. Zunächst werden die Eigenkreisfrequenzen berechnet (28-1-7)

$$\frac{c_1 + c_{12}}{m_1} = \omega_1^2 , \quad \frac{c_2 + c_{12}}{m_2} = \omega_2^2 , \quad \frac{c}{\text{N/m}} ; \frac{m}{\text{N} \cdot \text{s}^2/\text{m}} ; \frac{\omega}{1/\text{s}} .$$

$$\omega_1^2 = \frac{c_1 + c_{12}}{m_1} = \frac{1,5E5 + 9E4}{1800} \text{ 1/s}^2 = 133,3 \text{ 1/s}^2 .$$

$$\omega_2^2 = \frac{c_2 + c_{12}}{m_2} = \frac{0 + 9E4}{32,8} \text{ 1/s}^2 = 2744 \text{ 1/s}^2 .$$

Berechnung der neuen Koppelkreisfrequenzen:



$$\omega_{k1,k2} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4 \cdot \frac{c_{12}^2}{m_1 \cdot m_2}}}$$

$$\omega_{k1,k2} = \sqrt{\frac{133,3 + 2744}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(133,3 - 2744)^2 + 4 \cdot \frac{(9E4)^2}{1800 \cdot 32,8}}} \text{ 1/s}$$

$$\omega_{k1,k2} = \sqrt{1438,66 \pm 1356,87} \text{ 1/s}$$

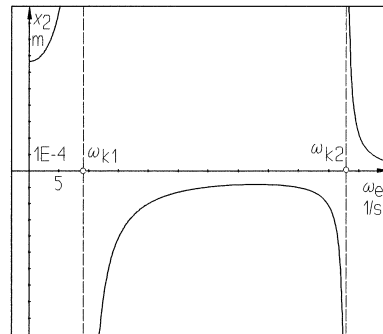
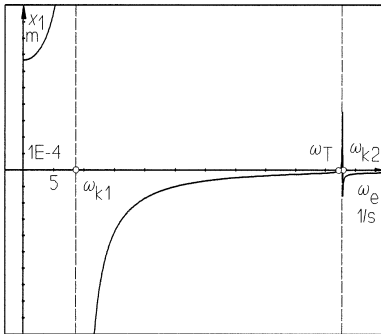
Die Koppelkreisfrequenzen sind

$$\omega_{k1} = 9,04 \text{ 1/s}; \quad \omega_{k2} = 52,87 \text{ 1/s}$$

Die Tilgerkreisfrequenz liegt knapp unter der oberen Koppelkreisfrequenz.

Fall 3

Auf das System soll eine Erregerkraft $\hat{F}_e = 100 \text{ N}$ wirken. Zeichnen Sie die Diagramme für $x_1 = f(\omega_e)$ und $x_2 = f(\omega_e)$



Kap. 29

Beispiel 1

Es ist von der Gleichung

$$x \pm e = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_0 \cdot t);$$

auszugehen.

Für die 1. Halbschwingung mit $\dot{x} < 0$ gelten die Randbedingungen $t = 0$; $x = x_0$; $\dot{x} = 0$.

$$x_0 - e = A_1 \cdot \underbrace{\sin(\omega_0 \cdot 0)}_0 + B_1 \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 \cdot 0)}_1 ;$$

$$\dot{x} = 0 = A_1 \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 \cdot 0)}_1 - B_1 \cdot \underbrace{\sin(\omega_0 \cdot 0)}_0 ;$$

$$B_1 = x_0 - e ; \quad A_1 = 0 ;$$

$$x = (x_0 - e) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + e .$$

Für die 2. Halbschwingung mit $\dot{x} > 0$ gelten die Randbedingungen $t = \pi/\omega_0$; $x = -x_0 + 2 \cdot e$; $\dot{x} = 0$.

$$-x_0 + 2 \cdot e + e = A_2 \cdot \underbrace{\sin(\omega_0 \cdot \pi/\omega_0)}_0 + B_2 \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 \cdot \pi/\omega_0)}_{-1} ;$$

$$B_2 = x_0 - 3 \cdot e ; \quad A_2 = 0 ;$$

$$x = (x_0 - 3 \cdot e) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - e ;$$

Für die 3. Halbschwingung gilt entsprechend

$$x = (x_0 - 5 \cdot e) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + e .$$

Beispiel 2

Die wirksamen Größen sind Momente, also M_R !

a) $J \cdot \ddot{\varphi} + c \cdot \varphi + M_R = 0 \quad \dot{\varphi} > 0 .$

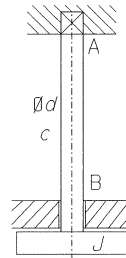
$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J} \cdot \varphi = - \frac{M_R}{J} \quad \dot{\varphi} > 0 ;$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J} \cdot \varphi = + \frac{M_R}{J} \quad \dot{\varphi} < 0 .$$

b) $\pm e = \pm \frac{M_R}{c} = \frac{F_R \cdot d/2}{c} = \frac{200 \cdot 0,0148}{2 \cdot 148} = \pm 0,01 \text{ rad} .$

$$\omega_0 = \sqrt{c / J} = \sqrt{148 / 15} = 3,14 \text{ rad/s} ;$$

$$T_0 = 2 \cdot \pi / \omega_0 = 2 \text{ s} .$$

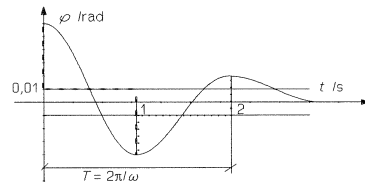


$$\varphi_0 = 0.06 \text{ rad};$$

$$\varphi_1 = -|\varphi_0 - 2 \cdot e| = -0,04 \text{ rad};$$

$$\varphi_2 = +|\varphi_1 + 2 \cdot e| = +0,02 \text{ rad}.$$

c) $\Rightarrow$ Diagramm



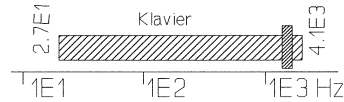
Kap. 30.1

Beispiel 1

$d = 3 \text{ mm} = \ell$ (charakteristische Länge in den Gleichungen); $w = 25 \text{ m/s}$; $Sr = 0,21$; $\nu_{\text{Luft}} = 15,1 \text{E-6 m}^2/\text{s}$. Mit (30-1-8) ist

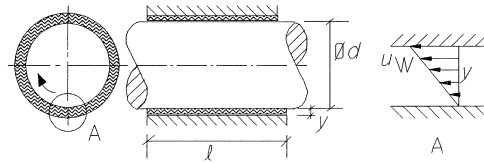
$$Re = \frac{w \cdot \ell}{\nu} = \frac{25 \cdot 0,003}{15,1 \text{E-6}} = 4,967 \text{E3} .$$

$$f = \frac{Sr \cdot w}{\ell} = \frac{0,21 \cdot 25}{0,003} = 1750 \text{ Hz} .$$



Beispiel 2

Es wird angenommen, daß der Zapfen genau zentrisch im Lager läuft. Im Spalt (Höhe = y) soll die Geschwindigkeitsverteilung linear sein. Das rechte Bild gibt den Ausschnitt A des linken Bildes wieder.



Für die Flächenberechnung kann der Zapfendurchmesser = Lagerdurchmesser gesetzt werden.

$d = 40 \text{ mm}$; $\ell = 55 \text{ mm}$; $y = 0,02 \text{ mm}$; $n = 2500 \text{ 1/min}$;
Öl bei Betriebstemperatur $\eta = 3,5 \text{E-3 kg/(s} \cdot \text{m)}$.

Die Geschwindigkeit am Zapfen beträgt

$$u_w = r \cdot \omega = \frac{d}{2} \cdot \frac{\pi \cdot n}{30} = 5,236 \text{ m/s} .$$

Nach (30-1-3) gilt (Viskosegesetz von Newton)

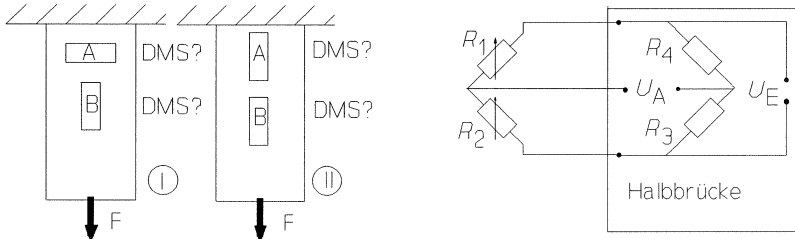
$$\tau_w = \eta \cdot \frac{du}{dy} \quad \text{in diesem Fall linearer Verlauf} \quad \tau_w = \eta \cdot \frac{u_w}{y} ;$$

$$\tau_w = \eta \cdot \frac{u_w}{y} = 3,5 \text{E-3} \cdot \frac{5,236}{2 \text{E-5}} = 916,3 \text{ N/m}^2 ;$$

und damit ist für das Reibungsmoment und die zu erbringende Leistung

$$M_R = F_R \cdot \frac{d}{2} = \tau_w \cdot \pi \cdot d \cdot \ell \cdot \frac{d}{2} = 0,1266 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{mit} \quad \tau_w = \frac{F_R}{A} .$$

$$P_R = M_R \cdot \omega = \frac{M_R \cdot \pi \cdot n}{30} = 33,16 \text{ W} .$$

Kap. 30.2**Beispiel 1**

Den maximalen Ausschlag der Meßanzeige erhält man dadurch, daß in der Gleichung (30-2-3) ε_1 und ε_2 das gleiche Vorzeichen erhalten. Es wird mit (I) erreicht, da dann durch das -Vorzeichen von μ das Vorzeichen der Klammer geändert wird. Ist DMS A = DMS 1 und DMS B = DMS 2, dann wird der Quotient negativ, vertauscht man DMS A und DMS B, wird der Quotient positiv, d.h. lediglich das Vorzeichen der Anzeige ändert sich.

A unterliegt der Querkontraktion des Stabes

$$\varepsilon_1 = -\mu \cdot \varepsilon,$$

B unterliegt der Zugbelastung mit $+\varepsilon$; damit wird

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{k}{4} \cdot [+ (-\mu \cdot \varepsilon) - (+\varepsilon)] = \frac{1,3 \cdot k}{4} \cdot (-\varepsilon)$$

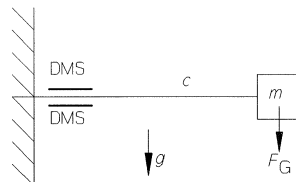
der Brückenfaktor $B = 1,3$.

Die Umformung nach ε bringt die gemessene Dehnung des Stabes

$$\varepsilon = \frac{U_A \cdot 4}{U_E \cdot k \cdot 1,3} = \frac{165\text{E}-6 \cdot 4}{1 \cdot 2,2 \cdot 1,3} = 231 \text{ } \mu\text{m/m}.$$

Beispiel 2

Die Blattfeder wird waagrecht eingespannt. Die belastende Kraft ist die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$, also ist die Beschleunigung gleich der Fallbeschleunigung. Die Verformung der Biegefeder entspricht einer Belastung, die durch die Kraft F_G mit der Beschleunigung g hervorgerufen wird. Dadurch ist die Eichung auf einfache Weise durchgeführt. Das Signal kann über DMS abgenommen werden und für andere Beschleunigungen proportional umgewandelt werden.



32 Zeichenkatalog

Mehrere Zeichen sind mehrfach besetzt. Sie sind jedoch im Zusammenhang des Stoffes leicht auseinanderzuhalten. Griechische Buchstaben sind in der Reihenfolge der deutschen Aussprache geordnet. Mit ¹ gekennzeichnete Größen beziehen sich auf DIN 1311-Schwingungslehre.

Kohärenzen: $N = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$; $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$; $J = \text{N} \cdot \text{m}$; $W = \text{N} \cdot \text{m}/\text{s}$;
 $\text{Hz} = 1/\text{s}$; $1^\circ = \pi/180 \cdot \text{rad}$

Indizes sind anschließend angeführt. Dabei werden die Vorgaben der Norm DIN 1304-3.10 berücksichtigt.

a	Beschleunigung	m/s^2
A	Fläche	m^2
A, B, C	Amplituden von Schwingungen	m
A, B	Faktoren der allgemeinen Schwingungsgleichung	m
α, β, γ	Winkel	rad
$\alpha_{i,k}$	Maxwell'sche Einflußzahlen	m/N
α	Winkelbeschleunigung	rad/s^2
a_t	Tangentialbeschleunigung	m/s^2
C	Kapazität (elektrisch - Kondensator)	F
c	Federkonstante [Einheiten siehe anschließend]	
$c_{\text{Längs}}$	Federkonstante der Längsbewegung	N/m
c_{Dreh}	Federkonstante der Drehbewegung	$\text{N} \cdot \text{m}$
c_{ges}	Federkonstante, gesamt (bei Mehrfachschaltungen) [Einh.s.davor]	
c_W	Widerstandsbeiwert	1
DGL	Differentialgleichung der Schwingung	-
δ	Delta = Abklingkoeffizient ¹	$1/\text{s}$
δ	Delta = virtuelle Änderung; δ Koordinate $\neq 0$; $\delta t = 0$	-
Δ	Delta = Differenz zweier Werte	
∂	d partiell	
E	Elastizitätsmodul	N/m^2
E	Energie, nur im Zusammenhang mit Phasendiagramm, sonst = W	J
ε	Epsilon = mechanische Dehnung	1
ε	Epsilon = Dämpfungswinkel	$^\circ$
e	Basis der natürlichen Logarithmen = 2,718281828459...	-
e	Auswuchtgüte	μm
e	Exzentrizität (besonders bei Schwerpunkten)	m
η	Eta = dynamische Zähigkeit	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
f	Frequenz, Periodenfrequenz ¹	Hz
f_d	Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung ¹	Hz
f_e	Erregerfrequenz (bei periodischer Erregung) ¹	Hz
f_D	statische Durchbiegung	m und cm

f_0	Eigenfrequenz, Kennfrequenz ¹	Hz
F	Kraft	N
F_e	Erregerkraft	N
F_F	Federkraft	N
F_G	Gewichtskraft	N
$\hat{F}_G$	max.harmon.Kraftamplitude, die auf die Umgebung übertragen wird	N
$\hat{F}_{GR}$	maximale auf den Schwingrahmen übertragene harmonische Kraft	N
F_N	Normalkraft	N
F_r	Froudezahl	1
F_R	Reibungskraft	N
F_T	Trägheitskraft	N
$F(t)$	Kraftfunktion bei Fremderregung	N
g	Fallbeschleunigung (örtlich)	m/s ²
G	Gleitmodul = Schubmodul	N/m ²
I	Flächenträgheitsmoment = Flächenmoment 2. Grades	m ⁴
i	Trägheitsradius	m
J	Massenträgheitsmoment = Massenmoment 2. Grades	kg · m ²
j	Imaginäre Einheit = $\sqrt{-1}$; $j^2 = -1$	-
k	Dämpfungskonstante [Einheiten siehe unten]	
$k_{\text{Längs}}$	Dämpfungskonstante der Längsbewegung	N · s/m
k_{Dreh}	Dämpfungskonstante der Drehbewegung	N · s · m
κ	Kappa = Faktor bei gedämpfter Schwingung	1/s
ℓ	Länge	m
Λ	Lambda = Logarithmisches Dekrement (Dämpfung)	1
λ	Lambda = Rohrreibungszahl	1
λ	Lambda = Lösung der charakteristischen Gleichung	1/s
λ	Lambda = Wellenlänge	m
L	Lagrange'sche Funktion	
m	Masse	kg
m_{ers}	Ersatzmasse	kg
m_F	Federmasse	kg
m_{ges}	gesamte Masse	kg
m_{red}	reduzierte Masse	kg
M	Moment (Kraftmoment, Drehmoment)	N · m
M_T	Torsionsmoment	N · m
M_b	Biegemoment	N · m
μ	My = Reibungskoeffizient	1
n	Ereignisse pro Minute, Drehzahl	1/min
ν	Ny = kinematische Zähigkeit	m ² /s

ω	Omega = Winkelgeschwindigkeit	rad/s
ω	Omega = Kreisfrequenz, Winkelfrequenz ¹	1/s
ω_d	$= 2 \cdot \pi \cdot f_d$ = Eigenkreisfreq. einer gedämpften Schwingung	1/s
ω_e	$= 2 \cdot \pi \cdot f_e$ = Erregerkreisfrequenz	1/s
ω_k	Koppelkreisfrequenz	1/s
ω_T	Tilgerkreisfrequenz	1/s
ω_0	$= 2 \cdot \pi \cdot f_0$ = Eigenkreisfreq. ungedämpften Schwingung ¹	1/s
ω_{0D}	Eigenkreisfrequenz nach Dunkerley	1/s
P	Leistung	W
p	Druck	Pa
φ	Phi = Phasenwinkel ¹	rad
φ	Nullphasenwinkel ¹ , auch φ_0	rad
$\hat{\varphi}$	$= \varphi_{\max}$ maximale Amplitude bei Drehschwingungen	rad
φ	Phasenverschiebung	rad
φ	Phi = Winkel (Weg)	rad
$\dot{\varphi}$	Winkelgeschwindigkeit	rad/s
$\ddot{\varphi}$	Winkelbeschleunigung	rad/s ²
$\hat{r}$	maximale Amplitude der Erregung	m
R	Widerstand (elektrisch)	Ω
R	Federrate $\Rightarrow$ siehe Kap.1 Einleitung-Anmerkung	
r	Radius	m
Re	Reynoldszahl	1
ρ	Rho = Dichte	kg/m ³
$s(t)$	Wegfunktion bei Fremderregung	m
$s_{\max}$	$= \hat{r}$ maximale Amplitude der Erregung	m
$\dot{s}(t)$	Geschwindigkeitsfunktion bei Fremderregung	m/s
σ	Sigma = Spannung (mechanisch)	N/m ²
St	Strouhalzahl	1
T	Periodendauer einer Schwingung ¹	s
t	Zeit	s
τ	Tau = Schubspannung	N/m ²
ϑ	Theta = Dämpfungsgrad	1
U	Spannung (elektrisch)	V
U	Unwucht	g · mm
u	Unwuchtmasse	g
V	Volumen	m ³
V	Unwuchtmoment	kg · m ²
V_1	Vergrößerungsfaktor Federkrafterregung	1
V_3	Vergrößerungsfaktor Massenkrafterregung	1
$V_D = V_2$	Durchlässigkeit, Schwingungsleitfähigkeit	1
V_4	Vergrößerungsfaktor bei Rahmenbelastungen	1

v	Geschwindigkeit	m/s^2
W_k	Kinetische Energie	J
W_p	Potentielle Energie	J
W	Widerstandsmoment	m^3
x_h	homogene Lösung der DGL	m
x_p	partikuläre Lösung der DGL	m
x	Weg	m
$\hat{x}$	$= x_{\max}$ maximale Amplitude der schwingenden Masse	m
$\dot{x}$	Geschwindigkeit	m/s
$\ddot{x}$	Beschleunigung	m/s^2
y	Weg	m
$\hat{y}$	$= y_{\max}$ maximale Amplitude der schwingenden Masse	m
$\dot{y}$	Geschwindigkeit	m/s
$\ddot{y}$	Beschleunigung	m/s^2
x, y, z	Koordinaten	m

Indizes

Index	Bedeutung	Beispiel
0	null	ω_0 Eigenkreisfrequenz, ungedämpft
1	eins	n_1 Drehzahl der Welle 1
2	zwei	d_2 Durchmesser 2
3	drei	V_3 Vergrößerungsfaktor Massenkrafterregung
∞	unendlich	u_∞ Strömungsgeschwindigkeit, ungestört
0D	Null-D	ω_{0D} Eigenkreisfrequenz nach Dunkerley
a	außen	r_a Außenradius
a,b	Entfernung	x_a Entfernung eines Punktes, Länge einer Strecke
B	Punkt	J_B Massenträgheitsmoment bezogen auf Punkt B
b	Biegung	M_b Biegemoment
d	gedämpft	ω_d Eigenkreisfrequenz d. gedämpft. Schwing.
D	Durchbiegung	f_D statische Durchbiegung
D	Durchlässigkeit	V_D Durchlässigkeit
Dreh	Dreh-	c_{Dreh} Federkonstante der Drehbewegung
e	Fremderregung	ω_e Erregerkreisfrequenz
E	Extremwert	x_E Maximum/Minimum einer Funktion
ers	Ersatz	m_{ers} Ersatzmasse
F	Feder	F_F Federkraft
ges	Gesamt	m_{ges} Gesamtmasse
G	Gewicht	F_G Gewichtskraft
GR	Rahmenkraft	F_{GR} auf den Rahmen übertragene Kraft
h	homogen	x_h homogene Lösung der DGL
i	innen	d_i Innendurchmesser
i	allgemeine Zahl	c_i Federkonstante der i-ten Feder

i	Anfangswert	$\sum_{i=1}^{i=n}$	von $i=1$ bis $i=n$
i,k	Kennzeichnung	$\alpha_{i,k}$	Maxwell'sche Einflußzahlen
k	kinetisch	W_k	kinetische Energie
k	Koppel	ω_k	Koppelkreisfrequenz
k	allgemeine Zahl	φ_k	Winkel der k -ten Schwingung
Längs	Längs-	$c_{\text{Längs}}$	Federkonstante der Längsbewegung
m	Mittel-	x_m	Mittlerer x -Wert
$\max$	maximal	$x_{\max} = \hat{x}$	maximale Amplitude
n	allgemeine Zahl	A_n	Fourierkoeffizient A der n -ten Schwingung
N	Normal	F_N	Normalkraft
p	partikulär	x_p	partikuläre Lösung der DGL
p	potentiell	W_p	potentielle Energie
R	Reibung	F_R	Reibungskraft
red	reduziert	m_{red}	reduzierte Masse
S	Schwerpunkt	J_S	Massenträgheitsmoment bez. auf Schwerpunkt
t	tangential	a_t	Tangentialbeschleunigung
T	Tilger	ω_T	Tilgerkreisfrequenz
T	Torsion	M_T	Torsionsmoment
T	Trägheit	F_T	Trägheitskraft
W	Widerstand	c_W	Widerstandsbeiwert
W	Wand	τ_W	Wandschubspannung

33 Formelsammlung

Die Formelsammlung soll die Formeln zusammenfassen, die zur Lösung einer Aufgabe erforderlich sind. Sie sind in der gleichen Weise numeriert wie in den einzelnen Kapiteln, in denen auch die Herleitungen der Gleichungen enthalten sind. Die Abbildungen sind verkleinert und sollen eine visuelle Erinnerung an die Größen sein, die in den Formeln enthalten sind. Auch sie sind entsprechend numeriert, damit sie im Zusammenhang eines Kapitels wiederzufinden sind. (Bitte lesen Sie die Anmerkung in Kap. 1 - Einleitung).

3 Amplituden-Zeitdiagramm

3.1 Grundformel

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0 \quad (3-1-4)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0 \quad (3-1-5)$$

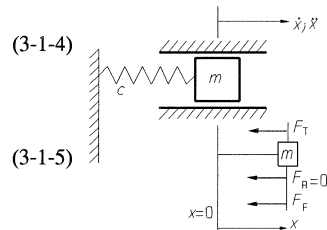


Abb. 3-1-1

3.2 Translationsschwingung

$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (3-2-1)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \omega \cdot \hat{x} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (3-2-2)$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot \underbrace{\hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t)}_{\cong x} \quad (3-2-3)$$

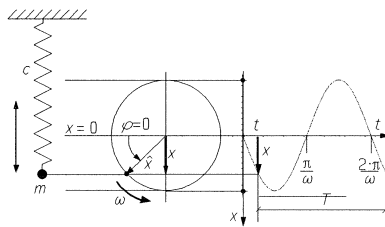


Abb. 3-2-1

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x \quad (3-2-4)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \quad (3-2-5)$$

$$\dot{x}_{\max} = v_{\max} = \omega \cdot \hat{x} \quad \ddot{x}_{\max} = a_{t \max} = -\omega^2 \cdot \hat{x} \quad (3-2-6)$$

$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (3-2-7)$$

$$\dot{x} = \omega \cdot \hat{x} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (3-2-8)$$

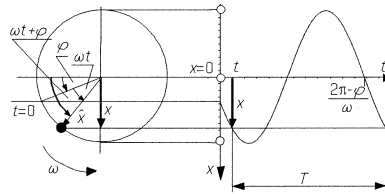


Abb. 3-2-2

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot \underbrace{\hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)}_{= x} \quad (3-2-9)$$

$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = \hat{x} \cdot (\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi + \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi) \quad (3-2-10)$$

$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (3-2-13)$$

4 Ungedämpfte freie lineare Schwingung

4.1 Addition gleichfrequenter Schwingungen

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (4-1-8)$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin \varphi_2}{A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2} \quad (4-1-9)$$

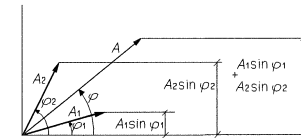


Abb. 4-1-1

4.2 Addition nicht gleichfrequenter Schwingungen (Schwebung)

$$\begin{aligned} x &= \hat{x} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + \hat{x} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) , \\ &= 2 \cdot \hat{x} \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right) , \\ &= 2 \cdot \hat{x} \cdot \cos(\omega_{\text{mod}} \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) . \end{aligned} \quad (4-2-3)$$

7 Harmonische Analyse

7.1 Fourierreihen

$$s_n(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{i=n} (A_i \cdot \cos(i \cdot x) + B_i \cdot \sin(i \cdot x)) \quad (7-1-1)$$

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos(n \cdot x) + B_n \cdot \sin(n \cdot x)) \quad (7-1-2)$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot dx \quad (7-1-3)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) \cdot dx \quad (7-1-4)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx \quad (7-1-5)$$

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot x\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot x\right) \right) \quad (7-1-6)$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cdot dx \quad (7-1-7)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot x\right) \cdot dx \quad (7-1-8)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T} \cdot x\right) \cdot dx \quad (7-1-9)$$

7.2 Harmonische Analyse der Maschinendynamik

$$F(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + B_n \cdot \sin(n \cdot \varphi)) \quad (7-2-1)$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cdot d\varphi \quad (7-2-2)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cdot \cos(n \cdot \varphi) \cdot d\varphi \quad (7-2-3)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cdot \sin(n \cdot \varphi) \cdot d\varphi \quad (7-2-4)$$

$$\varphi_i = \frac{2\pi}{m} \cdot i \quad (7-2-5)$$

$$A_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} F(i) \quad (7-2-6)$$

$$A_n = \frac{2}{m} \sum_{i=0}^{m-1} F(i) \cdot \cos(n \cdot \varphi_i) \quad (7-2-7)$$

$$B_n = \frac{2}{m} \sum_{i=0}^{m-1} F(i) \cdot \sin(n \cdot \varphi_i) \quad (7-2-8)$$

$$F_n(\varphi) = A_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + B_n \cdot \sin(n \cdot \varphi) = C_n \cdot \sin(n \cdot \varphi + \varphi_n) \quad (7-2-9)$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (7-2-10)$$

$$\tan \varphi_n = \frac{A_n}{B_n} \quad (7-2-11)$$

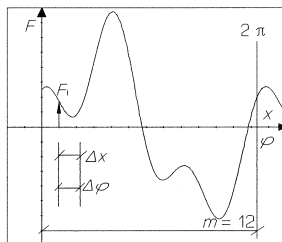


Abb. 7-2-1

8 Schwinger mit einem Freiheitsgrad

8.1 Längsschwinger

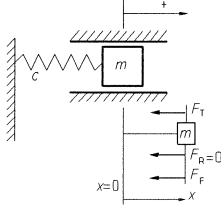


Abb. 8-1-1

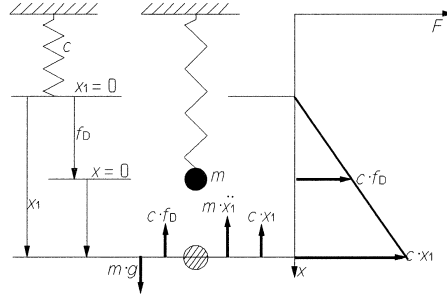


Abb. 8-1-2

$$c = \frac{m \cdot g}{f_D} \quad \frac{\text{N}}{\text{m}} ; \quad \frac{m}{\text{kg}} ; \quad \frac{g}{\text{m/s}^2} ; \quad \frac{f_D}{\text{m}} \quad (8-1-10)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{m \cdot f_D}} = \sqrt{\frac{981 \text{ cm/s}^2}{f_D \text{ cm}}} = \frac{31,32}{\sqrt{f_D}} \frac{1}{\text{s}} ; \quad \frac{g}{\text{cm/s}^2} ; \quad \frac{f_D}{\text{cm}} \quad (8-1-11)$$

$$T_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} = 0,2005 \cdot \sqrt{f_D} \text{ s} ; \quad \frac{f_D}{\text{cm}} \quad (8-1-12)$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{4,99}{\sqrt{f_D}} \frac{1}{\text{s}} ; \quad \frac{f_D}{\text{cm}} \quad (8-1-13)$$

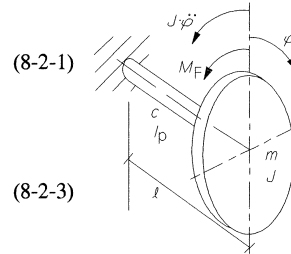
$$n_0 = 60 \cdot f_0 \approx \frac{300}{\sqrt{f_D}} \frac{1}{\text{min}} ; \quad \frac{f_D}{\text{cm}} \quad (8-1-14)$$

Achtung f_D in cm einsetzen !

8.2 Drehschwinger

$$J \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c \cdot \varphi = 0$$

$$\varphi = \hat{\varphi} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J}}$$



(8-2-1)

(8-2-3)

Abb. 8-2-1

$$\varphi = \frac{M_T \cdot \ell}{G \cdot I_p} = \frac{c \cdot \varphi \cdot \ell}{G \cdot I_p} \quad \text{mit } M_T = c \cdot \varphi ; \quad \frac{M_T}{N \cdot m} ; \frac{\ell}{m} ; \frac{G}{N/m^2} ; \frac{I_p}{m^4} \quad (8-2-4)$$

$$c = \frac{G \cdot I_p}{\ell} \quad N \cdot m ; \quad \frac{G}{N/m^2} ; \frac{I_p}{m^4} ; \frac{\ell}{m} \quad (8-2-5)$$

Tabelle der Flächenträgheitsmomente am Ende der Formelsammlung

9 Pendelschwingungen

9.1 Mathematisches Pendel

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \cdot \varphi = 0 \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (9-1-5)$$

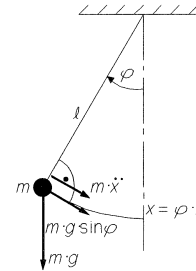


Abb. 9-1-1

9.3 Physisches Pendel

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{c}{J_B} \cdot \varphi = 0 \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J_B}} \quad (9-3-2)$$

$$c = \frac{M}{\varphi} = \frac{F_G \cdot e \cdot \varphi}{\varphi} = m \cdot g \cdot e \quad (9-3-3)$$

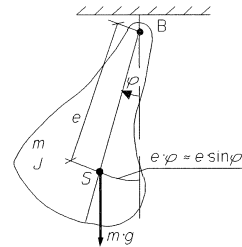


Abb. 9-3-1

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot e}{J_B}} = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \quad (9-3-4)$$

$$\ell_{\text{red}} = \frac{J_B}{m \cdot e} \quad (9-3-5)$$

$$J_B = \frac{F_G \cdot e}{4 \cdot \pi^2 \cdot f_0^2} \quad (9-3-6)$$

$$J_B = J_S + e^2 \cdot m \quad (\text{Steiner}) \quad (9-3-7)$$

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J_S + e^2 \cdot m}{m \cdot g \cdot e}} \quad (9-3-8)$$

10 Anteil der Federmasse

$$m_{\text{ers}} = m + \frac{33}{140} \cdot m_F \approx m + \frac{1}{4} \cdot m_F \quad (10-1-6)$$

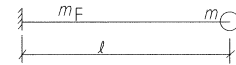


Abb. 10-1-3

$$m_{\text{ers}} = m + \frac{1}{2} \cdot m_F \quad (10-1-7)$$

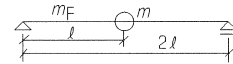


Abb. 10-1-4

14 Betriebsdrehzahl und Resonanz
Auslenkung der Welle

$$x = \frac{e}{\left(\frac{\omega_0}{\omega_e}\right)^2 - 1} \quad (14-1-1)$$

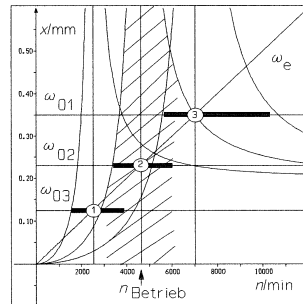


Abb. 14-1-1

15 Energie und Lagrange

15.1 Energiediagramm

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 \quad (15-1-2)$$

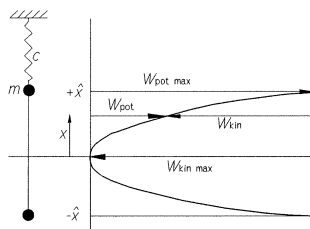


Abb. 15-1-1

$$W_p = \frac{1}{2} \cdot F \cdot x = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x^2 \quad (15-1-3)$$

15.2 Lagrange'sche Gleichungen 2. Art

Lagrange'sche Funktion

$$W_k(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; q_1, \dots, q_f) - W_p(q_1, \dots, q_f) = L(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; q_1, \dots, q_f) \quad (15-2-8)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)^* - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (15-2-9)$$

16 Zusammenschalten von Federn

16.1 Parallelschaltung

$$c_{\text{ges}} = c_1 + c_2 \quad (16-1-3)$$

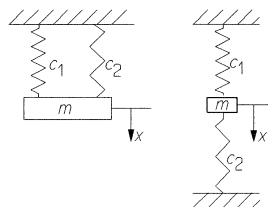


Abb. 16-1-1

16.2 Hintereinanderschaltung

$$c_{\text{ges}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} \quad (16-2-4)$$

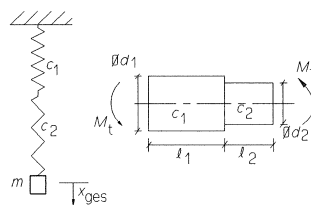


Abb. 16-2-1

Anmerkung: Für diesen Fall (Translation und Rotation) siehe Kap. 15.2 , Kap. 28.3 und in Kap. Beispiele das Beispiel zu Kap. 16, Aufgabe 3.

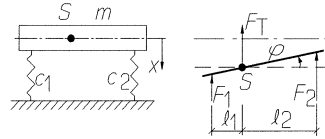


Abb. 15-2-2

Abb. 28-3-2

18 Biegekritische Drehzahl einer Einzelmasse

Auslenkung der Welle

$$F = m \cdot e \cdot \omega^2 ; \quad \omega = \omega_e = \frac{\pi \cdot n}{30} \quad (18-1-1)$$

$$x = \frac{e}{\left(\frac{\omega_0}{\omega_e}\right)^2 - 1} \quad (18-1-4)$$

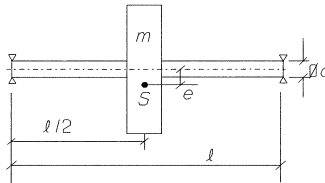


Abb. 18-1-1

19 Formeln zu Superposition am Ende der Formelsammlung

20 Energiemethode von Rayleigh

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \cdot \sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi} \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_{Gi} \cdot y_i^2}} \quad (20-1-5)$$

21 Sätze von Maxwell, Betti, Dunkerley Einflußzahlen

$$y_{11} \cdot c_{11} = F_1 \quad \Rightarrow \quad y_{11} = \frac{F_1}{c_{11}} = \alpha_{11} \cdot F_1 \quad (21-1-2)$$

Satz von Betti

$$W_{ik} = y_{ik} \cdot F_i = y_{ki} \cdot F_k = W_{ki} \quad (21-1-9)$$

Satz von Maxwell

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \quad (21-1-13)$$

Satz von Dunkerley

$$\frac{1}{\omega_2^2} = \frac{1}{\omega_2'^2} + \frac{1}{\omega_2''^2} \quad (21-1-25)$$

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{g}{y_1 + y_2}} \Rightarrow n_{\text{krit}} = \frac{300}{\sqrt{y_1 + y_2}} ; \frac{n}{1/\text{min}} ; \frac{y}{\text{cm}} \quad (21-1-27)$$

mit $y_1 = y_{11}$ und $y_2 = y_{22}$

y in cm einsetzen !

Die Gleichung (21-1-25) kann man als Gleichung für eine **Welle mit n-Massen (Lösung nach Dunkerley)** schreiben, wenn man die Schreibweise der einzelnen Glieder anpaßt

$$\omega_1 \Rightarrow \omega_{01} ; \quad \omega_2 \Rightarrow \omega_{02} \quad (21-1-28)$$

Dann ist die Eigenkreisfrequenz nach Dunkerley ω_{0D} die untere Grenze für die kleinste Eigenkreisfrequenz eines Schwingers mit n Massen

$$\frac{1}{\omega_0^2} < \frac{1}{\omega_{01}^2} + \frac{1}{\omega_{02}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{0n}^2} = \frac{1}{\omega_{0D}^2} \quad (21-1-29)$$

mit

$$\omega_0 > \omega_{0D} \quad (21-1-30)$$

21.2 Welle mit n -Massen (Lösung mit Hilfe der Einflußzahlen)

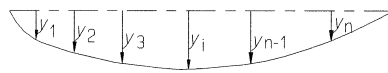


Abb. 21-2-1

$$y_i = \alpha_{i1} \cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot y_1 + \alpha_{i2} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot y_2 + \dots + y_{in} \cdot m_n \cdot \omega^2 \cdot y_n \quad (21-2-3)$$

22 Federgefesselter Drehschwinger

22.1 reduzierte Masse, Trägheitsradius

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J_B}} = \sqrt{\frac{c \cdot r^2}{J_B}} \quad (22-1-5)$$

$$m_{\text{red}} = \frac{J}{r^2}; \quad i = \sqrt{\frac{J}{m}} \quad (22-1-7); (22-1-6)$$

22.2, 22.3 Einfluß von Gewichtskraft und Dämpfung
Drehfederkonstante c_{Dreh}

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sum c_i \cdot r_i^2 + F_G \cdot e \cdot \cos \beta}{J_B}} = \sqrt{\frac{c_{\text{Dreh}}}{J_B}} \quad (22-3-6)$$

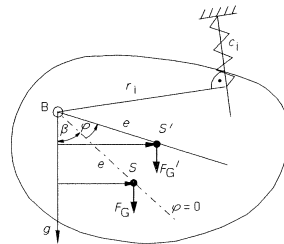


Abb. 22-2-1

22.4 Einfluß einer Zusatzmasse m_2

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sum c_i \cdot r_i^2 + F_G \cdot e \cdot \cos \beta}{J_{\text{ges}}}} \quad (22-4-1)$$

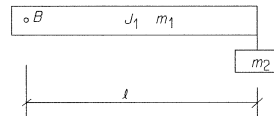


Abb. 22-4-1

23 Torsionsschwingungen

$$M = J \cdot \ddot{\phi} = J \cdot \frac{d^2 \phi}{dt^2} \quad (23-1-1)$$

$$\omega_0 = \sqrt{c \cdot \frac{J_A + J_B}{J_A \cdot J_B}} \quad (23-1-11)$$

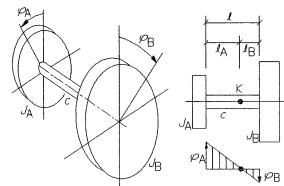


Abb. 23-1-2

Tabelle der Massenträgheitsmomente am Ende der Formelsammlung

23.3 Getriebebeschwingungen

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_2} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 + \frac{1}{c_1} \quad (23-3-9)$$

$$M_B = M_2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \quad (23-3-12)$$

$$J_B = J_2 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \quad \text{und} \quad J_A = J_1 \quad (23-3-14)$$

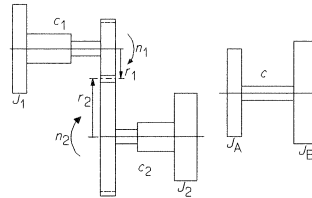


Abb. 23-3-1

23.4 3-Massensystem

$$z_{1,2} = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2} \right)^2 - B} \quad (23-4-18)$$

$$\omega_1 = +\sqrt{z_1}; \quad \omega_2 = +\sqrt{z_2} \quad (23-4-19)$$

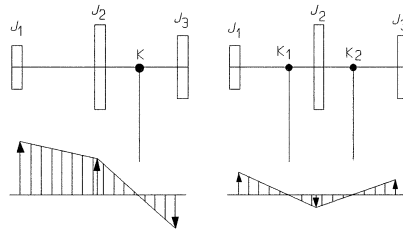


Abb. 23-4-1

$$A = c_{12} \cdot \frac{J_1 + J_2}{J_1 \cdot J_2} + c_{23} \cdot \frac{J_2 + J_3}{J_2 \cdot J_3}; \quad B = c_{12} \cdot c_{23} \cdot \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 \cdot J_2 \cdot J_3} \quad (23-4-20)$$

23.4 n-Massensystem

Lösung mit Hilfe der Lagrange'schen Funktion

Koordinaten: $q_k = \varphi_k$ für $k = 1 \dots n$.

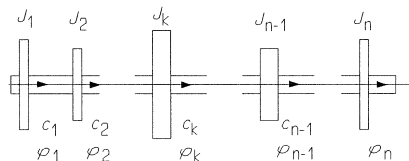


Abb. 23-4-3

Kinetische Energie:

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot J_n \cdot \dot{\varphi}_n^2 \quad (23-4-21)$$

Potentielle Energie:

$$W_p = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot c_{n-1} \cdot (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 \quad (23-4-22)$$

Die Lagrange'sche Funktion ist nach (15-2-8) $L = W_k - W_p$ und damit

$$L = \frac{1}{2} \cdot [J_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \dots + J_n \cdot \dot{\varphi}_n^2 - c_1 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)^2 - \dots - c_{n-1} \cdot (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2] \quad (23-4-23)$$

Die Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_k} \right)' - \frac{\partial L}{\partial \varphi_k} = 0 \quad \text{für } k = 1 \dots n \quad (23-4-24)$$

ergeben für die einzelnen Scheiben (mit $c_0 = c_n = 0$)

$$J_k \cdot \ddot{\varphi}_k + c_{k-1} \cdot (\varphi_k - \varphi_{k-1}) - c_k \cdot (\varphi_{k+1} - \varphi_k) = 0 \quad (23-4-25)$$

24 Freie gedämpfte Schwingung

24.1 DGL der freien gedämpften Schwingung

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \quad (24-1-2)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot \frac{1}{s} ; \quad \frac{c}{\text{kg/s}^2} ; \quad \frac{m}{\text{kg}} \quad (24-1-3)$$

$$\delta = \frac{k}{2 \cdot m} \cdot \frac{1}{s} ; \quad \frac{k}{\text{kg/s}} ; \quad \frac{m}{\text{kg}} \quad (24-1-4)$$

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} - ; \quad \frac{\delta}{1/s} ; \quad \frac{\omega_0}{1/s} \quad (24-1-5)$$

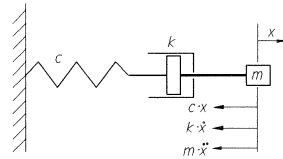


Abb. 24-1-1

24.2 Charakteristische Gleichung (Lösung)

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (24-2-3)$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2 \cdot m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{c}{m}} \quad (24-2-4)$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2 \cdot J} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2 \cdot J}\right)^2 - \frac{c}{J}} \quad (24-2-5)$$

Lösungen der allgemeinen Gleichung

$$x = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \quad (24-2-6)$$

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2 = \omega_0^2 \cdot (1 - \vartheta^2) \quad (24-2-8)$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_d \quad (24-2-9)$$

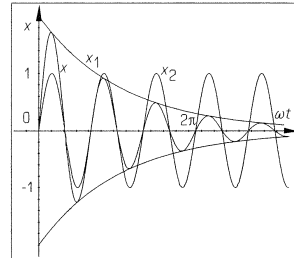


Abb. 24-3-1

$$x = C_1 \cdot e^{(-\delta + j \cdot \omega_d) \cdot t} + C_2 \cdot e^{(-\delta - j \cdot \omega_d) \cdot t} \quad (24-2-11)$$

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot (A \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_d \cdot t)) \quad (24-2-14)$$

24.3.1 Periodischer Fall (keine Dämpfung $\vartheta = 0$); $\omega_d \Rightarrow \omega_0$

$$x = A \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \quad (24-3-2)$$

$$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \varphi) \quad (24-3-3)$$

24.3.2 Periodischer Fall (geringe Dämpfung $0 < \vartheta < 0$)

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot (A \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_d \cdot t)) \quad (24-3-5)$$

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot \hat{x} \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \varphi) \quad (24-3-6)$$

24.4 Logarithmisches Dekrement

$$\frac{A_0}{A_n} = \frac{x(t)}{x(t + n \cdot T_d)} = \frac{e^{-\delta \cdot t}}{e^{-\delta \cdot (t + n \cdot T_d)}} = e^{\delta \cdot n \cdot T_d} \quad (24-4-1)$$

$$\Lambda = \delta \cdot T_d = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{x(t)}{x(t + n \cdot T_d)} \quad (24-4-3)$$

$$\Lambda = \frac{2 \cdot \delta \cdot \pi}{\omega_d} = \frac{2 \cdot \vartheta \cdot \omega_0 \cdot \pi}{\omega_d} = \frac{2 \cdot \vartheta \cdot \omega_0 \cdot \pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \vartheta^2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} \quad (24-4-4)$$

24.5 Aperiodischer Grenzfall $\vartheta = 1$

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) \quad (24-5-8)$$

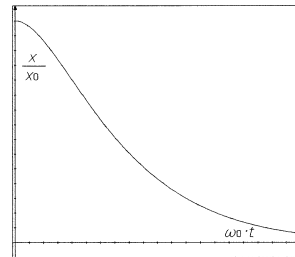


Abb. 24-5-1

24.6 Aperiodischer Fall $\vartheta > 1$

$$\kappa = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (24-6-1)$$

$$x = C_1 \cdot e^{-(\delta - \kappa) \cdot t} + C_2 \cdot e^{-(\delta + \kappa) \cdot t} \quad (24-6-3)$$

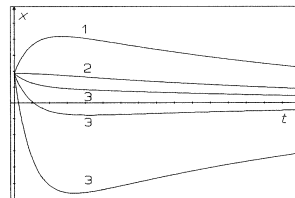


Abb. 24-6-1

$$\dot{x} = -(\delta - \kappa) \cdot C_1 \cdot e^{-(\delta - \kappa) \cdot t} - (\delta + \kappa) \cdot C_2 \cdot e^{-(\delta + \kappa) \cdot t} \quad (24-6-4)$$

Ohne Anfangsgeschwindigkeit

$$C_1 = \frac{\delta + \kappa}{2 \cdot \kappa} \cdot x_0; \quad C_2 = -\frac{\delta - \kappa}{2 \cdot \kappa} \cdot x_0 \quad (24-6-5)$$

$$x = x_0 \cdot \left[\frac{\delta + \kappa}{2 \cdot \kappa} \cdot e^{-(\delta - \kappa) \cdot t} - \frac{\delta - \kappa}{2 \cdot \kappa} \cdot e^{-(\delta + \kappa) \cdot t} \right] \quad (24-6-6)$$

Mit Anfangsgeschwindigkeit

$$C_1 = \frac{x_0 \cdot \lambda_2 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 \cdot x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (24-6-7)$$

$$x = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left[(x_0 \cdot \lambda_2 - \dot{x}_0) \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} - (x_0 \cdot \lambda_1 - \dot{x}_0) \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \right] \quad (24-6-8)$$

$$x = \frac{1}{2 \cdot \kappa} \cdot \left[[x_0 \cdot (\delta + \kappa) + v_0] \cdot e^{-(\delta - \kappa) \cdot t} + [x_0 \cdot (\kappa - \delta) - v_0] \cdot e^{-(\delta + \kappa) \cdot t} \right] \quad (24-6-9)$$

25 Erzwungene Schwingung

25.2 Federkrafterregung

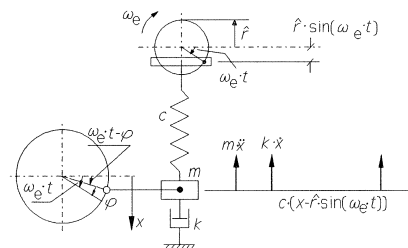


Abb. 25-2-1

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = \hat{F}_e \cdot \sin(\omega_e \cdot t) \quad (25-2-3)$$

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \omega_0^2 \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) \quad (25-2-4)$$

25.2 Phasenfrequenzgang

$$\tan \varphi = \frac{k \cdot \omega_e}{c - m \cdot \omega_e^2} \quad (25-2-12)$$

$$\tan \varphi = \frac{2 \cdot \vartheta \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)}{1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2} \quad (25-2-15)$$

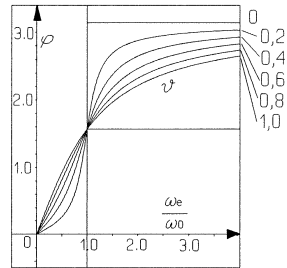


Abb. 25-2-3

Amplitudenfunktion

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}_e}{\sqrt{(c - m \cdot \omega_e^2)^2 + (k \cdot \omega_e)^2}} \quad (25-2-21)$$

$$\hat{x} = \frac{\frac{\hat{F}_e}{c}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}} \quad (25-2-22)$$

Vergrößerungsfunktion V_1 (25-2-25)

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$V_1 = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right|} \quad (25-2-26)$$

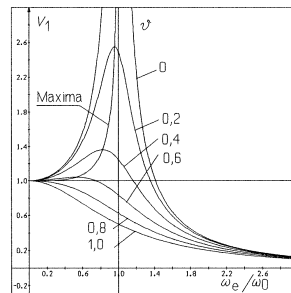


Abb. 25-2-4

25.3 Massenkrafterregung

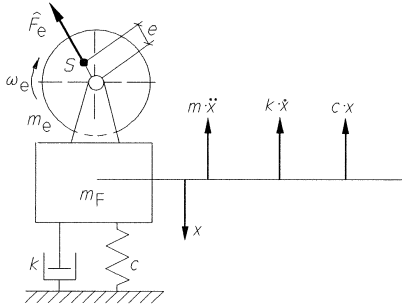
Vergrößerungsfunktion V_3 

Abb. 25-3-1

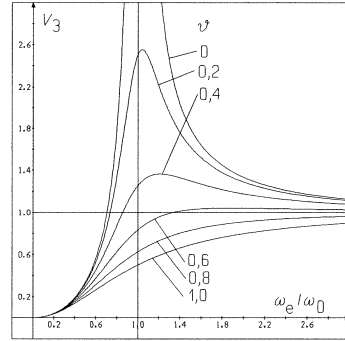


Abb. 25-3-2

$$V_3 = \frac{\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot d^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}} \quad (25-3-5)$$

$$V_3 = \frac{\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}{\left|1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right|} \quad (25-3-6)$$

25.4 Durchlässigkeit

(25-4-8)

$$V_D = \frac{\hat{F}_G}{\hat{F}_e} = V_1 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot d^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}$$

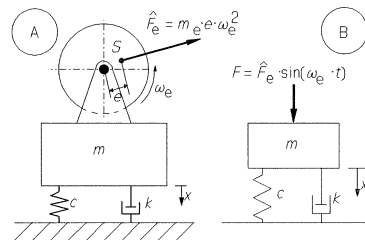


Abb. 25-4-1

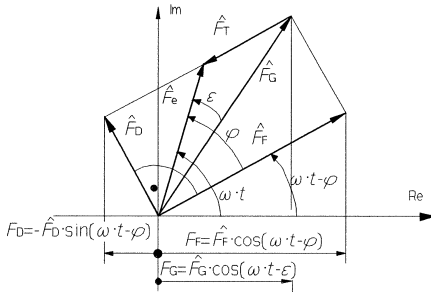


Abb. 25-4-2

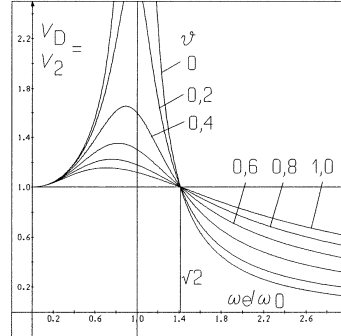


Abb. 25-4-3

25.5 Isolierfaktor

$$(1 - V_D) = 1 - V_1 \cdot \underbrace{\sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}_{\approx 0} = 1 - V_1 = 1 - \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right|} \quad (25-5-2)$$

25.6 Fallbeispiele der Anregung

In Kap. 25.2 erfolgt die Anregung der Masse über die Kurbel einer Kreuzschleife. Geht man von der Gleichung (25-2-1) aus und betrachtet man die Anregung über die Wegfunktion mit ihrer ersten Ableitung

$$s(t) = \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) ; \quad \dot{s}(t) = \omega_e \cdot \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) , \quad (25-6-1)$$

so kann man den Fall nach Abb. 25-2-1 in der Form darstellen

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot (x - s) = 0 , \quad (25-6-2)$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = c \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) , \quad (25-6-3)$$

mit

$$\hat{F}_e = c \cdot \hat{r} . \quad (25-6-4)$$

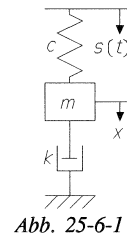


Abb. 25-6-1

Die Erregung erfolgt über den Aufhängepunkt der Feder.
Die Masse ist über k mit der Umgebung verbunden.

Dämpfer und Feder können vertauscht sein:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot (\dot{x} - \dot{s}) + c \cdot x = 0, \quad (25-6-5)$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t), \quad (25-6-6)$$

mit

$$\hat{F}_e = k \cdot \omega_e \cdot \hat{r}. \quad (25-6-7)$$

Die Erregung erfolgt über den Aufhängepunkt der Dämpfung.
Die Masse ist über c mit der Umgebung verbunden.

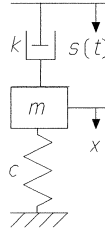


Abb. 25-6-2

Weitere Fälle ergeben sich durch Variationen der Konstruktionsteile:

$$m \cdot \ddot{x} + k(\dot{x} - \dot{s}) + c(x - s) = 0. \quad (25-6-8)$$

Durch Auflösen der Klammern erhält man wie vorher den harmonischen Teil und den Erregerteil der Schwingung:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c \cdot x = k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) + c \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t). \quad (25-6-9)$$

Die Erregerkraft ist dann als $F(t)$

$$F(t) = k \cdot \omega_e \cdot \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) + c \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t). \quad (25-6-10)$$

In Abb. 25-6-4 ist das System um 180° gedreht und entspricht damit der Darstellung eines Schwingungsmeßgerätes. Die dabei auftretenden Formen der Gleichungen werden ausführlicher in Kap. 25.7 behandelt. Die Erregung erfolgt über die gemeinsame Aufhängung von Feder und Dämpfer. Die Masse schwingt frei.

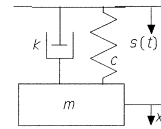


Abb. 25-6-3

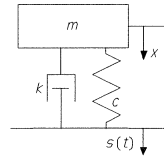


Abb. 25-6-4

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + c_1 \cdot x + c_2(x - s) = 0, \quad (25-6-11)$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + (c_1 + c_2) \cdot x = c_2 \cdot \hat{r} \cdot \sin(\omega_e \cdot t), \quad (25-6-12)$$

mit

$$\hat{F}_e = c_2 \cdot \hat{r}. \quad (25-6-13)$$

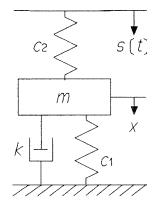


Abb. 25-6-5

Die Erregung erfolgt über den Aufhängepunkt der Feder c_2 . Die Masse ist über k und c_1 mit der Umgebung verbunden.

$$m \cdot \ddot{x} + k_1 \cdot \dot{x} + k_2(\dot{x} - \dot{s}) + c \cdot x = 0 . \quad (25-6-14)$$

$$m \cdot \ddot{x} + (k_1 + k_2) \cdot \dot{x} + c \cdot x = k_2 \cdot \omega_e \cdot \hat{r} \cdot \cos(\omega_e \cdot t) , \quad (25-6-15)$$

mit

$$\hat{F}_e = k_2 \cdot \omega_e \cdot \hat{r} . \quad (25-6-16)$$

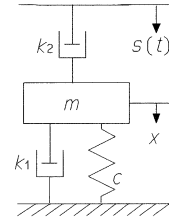


Abb. 25-6-6

Die Erregung erfolgt über den Aufhängepunkt der Dämpfung k_2 .
Die Masse ist über k_1 und c mit der Umgebung verbunden.

25.7 Zusammenstellung $V_1, V_2 = V_D, V_3, V_4$

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}} \quad (25-7-6)$$

$$V_2 = V_D = \frac{\sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}} \quad (25-7-9)$$

$$V_3 = \frac{\hat{x}}{\frac{m_e}{m} \cdot e} = \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2 \cdot V_1 \quad (25-7-33)$$

$$\frac{\hat{F}_G}{m_e \cdot e \cdot \omega_0^2} = \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2 \cdot V_D = V_4 \quad (25-7-40)$$

$$\frac{\hat{F}_{GR}}{\hat{r} \cdot c} = \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2 \cdot V_1 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2} = \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2 \cdot V_D = V_4 \quad (25-7-45)$$

$$V_4 = \frac{\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\right)^2}} \quad (25-7-46)$$

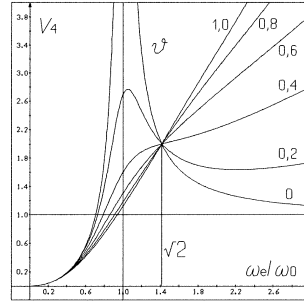


Abb. 25-7-15

27 Auswuchttechnik

Auswuchtgüte

$$\frac{u \cdot r}{m} = \frac{U}{m} \approx e \quad \frac{\text{g} \cdot \text{mm}}{\text{kg}} = \mu\text{m} \quad (27-2-3)$$

Allgemeine Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i = \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} U_i \quad (27-3-1)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i = \omega^2 \cdot U_R \neq 0 \quad (27-3-2)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} M_i = \omega^2 \cdot V \neq 0 \quad (27-3-3)$$

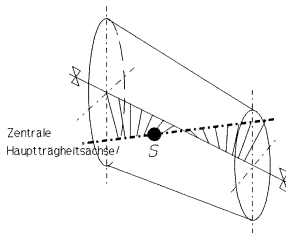


Abb. 27-3-1 Allgemeine dynamische Unwucht

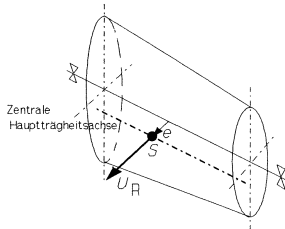


Abb. 27-4-1 Statische Unwucht

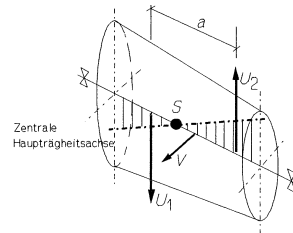


Abb. 27-5-1 Momentenunwucht

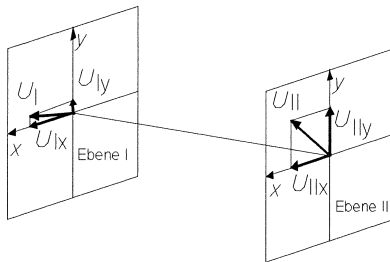


Abb. 27-6-3 Unwuchtkreuz

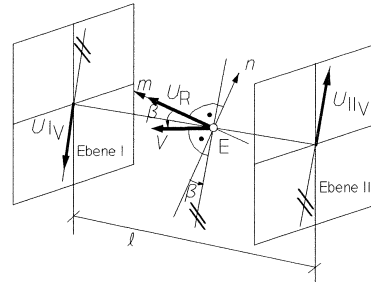


Abb. 27-7-4 Unwuchtdynamie

28.1 Koppelschwingungen 2-Massen

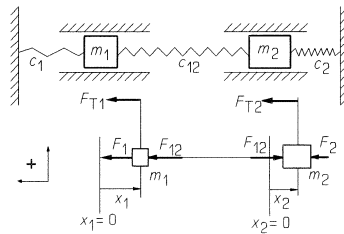


Abb. 28-1-1

$$\omega_{k1,k2} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4 \cdot \frac{c_{12}^2}{m_1 \cdot m_2}}} \quad (28-1-18)$$

n -Massen

Siehe Kap. 28.1 im Textteil
(28-1-23)

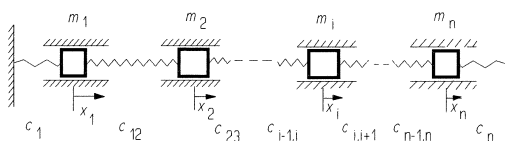


Abb. 28-1-2

28.2 Tilgung

$$\hat{x}_1 = \frac{\hat{F}_e}{m_1} \cdot \left(\frac{c_{12}}{m_2} - \omega_e^2 \right) \quad (28-2-12)$$

$$D$$

$$\hat{x}_2 = \frac{\hat{F}_e}{m_1} \cdot \left(- \frac{c_{12}}{m_2} \right) \quad (28-2-13)$$

$$D$$

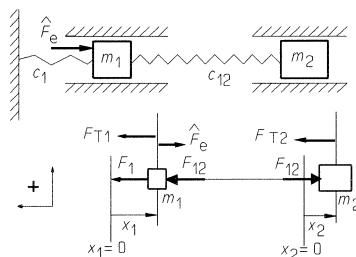


Abb. 28-2-1

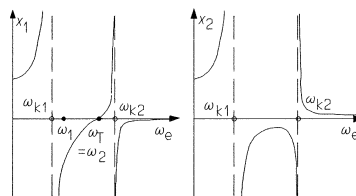


Abb. 28-2-2

Nenner siehe (28-2-7)

$$\frac{c_{12}}{m_2} - \omega_e^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_e = \sqrt{\frac{c_{12}}{m_2}} = \omega_T \quad (28-2-14)$$

$$D = (\omega_1^2 - \omega_e^2) \cdot \left(\frac{c_{12}}{m_2} - \omega_e^2 \right) - \frac{c_{12}^2}{m_1 \cdot m_2} \quad (28-2-7)$$

28.3 Translation und Rotation

Entkoppelt: Hubschwingung

$$\omega_x^2 = \frac{c_1 + c_2}{m} \quad (28-3-10)$$

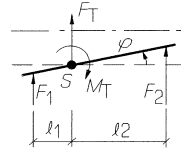
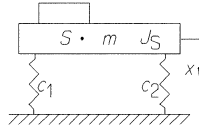


Abb. 28-3-1

Entkoppelt: Nickschwingung

$$\omega_\varphi^2 = \frac{c_1 \cdot \ell_1^2 + c_2 \cdot \ell_2^2}{J_S} \quad (28-3-11)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_1 \cdot \ell_1^2 + c_2 \cdot \ell_2^2}{J_S} \cdot \varphi + \frac{c_1 \cdot \ell_1 - c_2 \cdot \ell_2}{J_S} \cdot x = 0 \quad (28-3-8)$$

$$k_1 = \frac{c_1 \cdot \ell_1 - c_2 \cdot \ell_2}{m}; \quad k_2 = \frac{c_1 \cdot \ell_1 - c_2 \cdot \ell_2}{J_S} \quad (28-3-14)$$

$$\omega_{k1;k2} = \sqrt{\frac{\omega_x^2 + \omega_\varphi^2}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\omega_x^2 - \omega_\varphi^2)^2 + k_1 \cdot k_2}} \quad (28-3-19)$$

$$c_{\text{ers}} = \frac{c_1 \cdot c_2 \cdot (\ell_1 + \ell_2)^2}{c_1 \cdot \ell_1^2 + c_2 \cdot \ell_2^2} \quad (28-3-24)$$

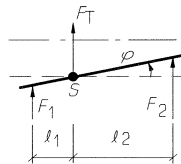
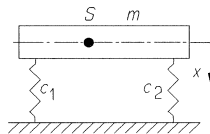


Abb. 28-3-4

29 Dämpfung durch trockene Reibung
Coulomb'sche Reibung

$$\dot{x} > 0 \Rightarrow x = A_1 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - \frac{F_R}{c} \quad (29-1-13)$$

$$\dot{x} < 0 \Rightarrow x = A_2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B_2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{F_R}{c} \quad (29-1-14)$$

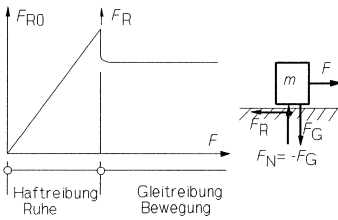


Abb. 29-1-1

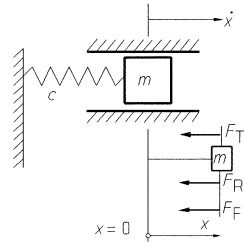


Abb. 29-1-3

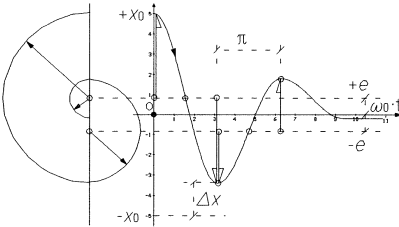
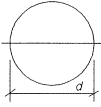
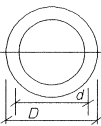
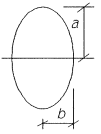
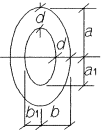
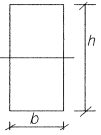
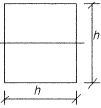


Abb. 29-1-4

Für Stahl: $E = 2,1 \text{E}5 \text{ N/mm}^2$; $G = 8 \text{E}4 \text{ N/mm}^2$

Für die Vollwelle: $I_p = \pi \cdot d^4 / 32 \text{ mm}^4$

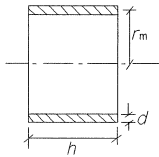
Flächenträgheitsmomente (axial)

Flächenträgheitsmoment I	Widerstandsmoment W	Trägheitsradius i
 $I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$W = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$	$i = \frac{d}{4}$
 $I = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$	$W = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32 \cdot D}$	$i = \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4}$
 $I = \frac{\pi \cdot a^3 b}{4}$	$W = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot b}{4}$	$i = \frac{a}{2}$
 $I = \frac{\pi(a^3 b - a_1^3 b_1)}{4}$	$W \approx \frac{\pi a(a+3b)d}{4}$	
 $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$	$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$	$i = 0,29 \cdot h$
 $I = \frac{h^4}{12}$	$W = \frac{h^3}{6}$	$i = 0,29 \cdot h$

Massenträgheitsmomente bezogen auf die Achse durch den Schwerpunkt

Massenträgheitsmoment J

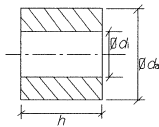
Masse m



dünner Hohlzylinder

$$J = m \cdot r_m^2$$

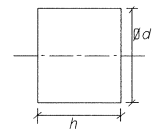
$$m = \varrho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_m \cdot h \cdot d$$



Hohlzylinder, beliebige Wanddicke

$$J = \frac{m}{2} \cdot (r_a^2 + r_i^2)$$

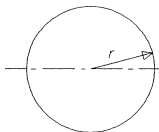
$$m = \varrho \cdot \pi \cdot (r_a^2 - r_i^2) \cdot h$$



Vollzylinder

$$J = \frac{m}{2} \cdot r^2$$

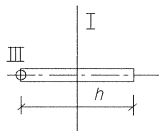
$$m = \varrho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$



Kugel

$$J = \frac{m}{5} \cdot 2 \cdot r^2$$

$$m = \frac{4}{3} \cdot \varrho \cdot \pi \cdot r^3$$



dünner Stab, J um Achse I, J_0 um Drehpunkt III

$$J = \frac{m}{12} \cdot h^2$$

$$J_0 = \frac{m}{3} \cdot h^2$$

$$m = \varrho \cdot h \cdot b \cdot a$$

Satz von Steiner:

$$J = J_S + m \cdot \ell^2$$

J Massenträgheitsmoment bezogen auf den Drehpunkt

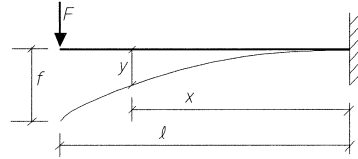
J_S Massenträgheitsmoment bezogen auf den Schwerpunkt

ℓ Abstand Drehachse - Schwerpunkt

Verformung von Biegeträgern (Tabelle)

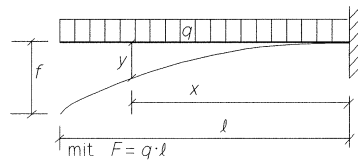
$$y = \frac{F \cdot \ell \cdot x^2}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[3 - \frac{x}{\ell} \right]$$

$$f = \frac{F \cdot \ell^3}{3 \cdot E \cdot I}$$



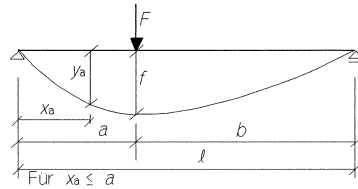
$$y = \frac{F \cdot \ell \cdot x^2}{8 \cdot E \cdot I} \cdot \left[2 - \frac{4}{3} \left(\frac{x}{\ell} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right]$$

$$f = \frac{F \cdot \ell^3}{8 \cdot E \cdot I}$$



$$y_a = \frac{F \cdot b \cdot \ell \cdot x_a}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left[1 - \left(\frac{b}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{x_a}{\ell} \right)^2 \right]$$

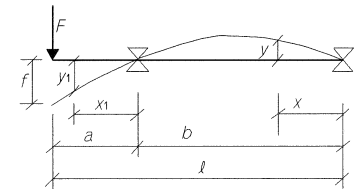
$$f = \frac{F \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot \ell}$$



$$y = - \frac{F \cdot a \cdot x}{6 \cdot E \cdot I \cdot \ell} \cdot (\ell^2 - x^2)$$

$$y_1 = \frac{F \cdot x_1}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (2 \cdot a \cdot \ell + 3 \cdot a \cdot x_1 - x_1^2)$$

$$f = \frac{F \cdot a^2 \cdot b}{3 \cdot E \cdot I}$$



34 Hilfe ☹

In diesem Kapitel sollen die Zwischenrechnungen gebracht werden, die in dem Text ausgelassen worden sind, um die Lesbarkeit nicht zu beeinflussen. Da aber bei den Umformungen gelegentlich Schwierigkeiten auftreten können (z.B. durch Übersehen eines Vorzeichens), deutet das Symbol ☹ darauf hin, daß hier die Schritte zwischen den einzelnen Gleichungen vollzogen werden. Gerade diese Schritte sollten aber durch Übung selbst vollzogen werden, sie sind hier nur als Hilfe gedacht. Dabei gibt es sicher verschiedene Wege, um zu einer Lösung zu kommen.

Kap. 4

$$A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) ; \quad (4-1-1)$$

mit der Gleichung aus der trigonometrischen Formelsammlung

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

wird daraus

$$\begin{aligned} A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi_1 + A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi_2 + \\ A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi_2 = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi + A \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi ; \end{aligned}$$

und Ausklammern von $\sin(\omega \cdot t)$ und $\cos(\omega \cdot t)$ führt zu

$$\begin{aligned} [A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2 - A \cdot \cos \varphi] \cdot \sin(\omega \cdot t) + \\ [A_1 \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin \varphi_2 - A \cdot \sin \varphi] \cdot \cos(\omega \cdot t) = 0 . \end{aligned} \quad (4-1-4)$$

$$A \cdot \cos \varphi = A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2 , \quad (4-1-5)$$

$$A \cdot \sin \varphi = A_1 \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin \varphi_2 . \quad (4-1-6)$$

Quadrieren und addieren führt zu

$$\begin{aligned} A^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \\ (A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin \varphi_2)^2 . \end{aligned}$$

Die Klammer der linken Seite ist $= 1$, da

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 ;$$

und durch Auflösen der Klammern erhält man

$$A^2 = A_1^2 \cdot \cos^2 \varphi_1 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + A_2^2 \cdot \cos^2 \varphi_2 \\ + A_1^2 \cdot \sin^2 \varphi_1 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + A_2^2 \cdot \sin^2 \varphi_2 .$$

Durch Zusammenfassen unter Verwendung von
und der trigonometrischen Gleichung für die mittleren Glieder

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

erhält man

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} . \quad (4-1-8)$$

Dabei ist die Differenz der beiden Winkel zu bilden.

Kap. 4

In der Gleichung heißt es zunächst

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Damit ist der cos-Satz

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} .$$

Da aber $\varphi_1 < \varphi_2$ ist, wird der Winkel negativ, es folgt mit $\cos(-\alpha) = +\cos(\alpha)$, es ist also der Ausdruck für den cos zu ersetzen, dabei müssen auch die Indizes der Winkel getauscht werden, damit der Winkel positiv wird, also folgt

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} . \quad (4-1-8)$$

Kap. 10

Zur Abb. 10-1-2

$$m_F(z) = m_F \cdot \frac{z}{\ell} ;$$

$$\frac{dm_F}{dz} = \frac{m_F}{\ell} ;$$

$$dm_F = \frac{m_F}{\ell} \cdot dz .$$

$$\text{Fall (1)} \quad y(x) = \frac{F}{6 \cdot I \cdot E} \cdot (3 \cdot \ell \cdot x^2 - x^3) . \quad (10-1-1)$$

Für die Klammer gilt

$$x = \ell - z ;$$

$$(3 \cdot \ell \cdot x^2 - x^3) ;$$

$$(3 \cdot \ell \cdot (\ell - z)^2 - (\ell - z)^3) ;$$

$$(3 \cdot \ell^3 - 6 \cdot \ell^2 \cdot z + 3 \cdot \ell \cdot z^2 - \ell^3 + 3 \cdot \ell^2 \cdot z - 3 \cdot \ell \cdot z^2 + z^3) ;$$

$$(2 \cdot \ell^3 - 3 \cdot \ell^2 \cdot z + z^3) ;$$

$$\ell^3 \cdot \left(\frac{z^3}{\ell^3} - 3 \cdot \frac{z}{\ell} + 2 \right) .$$

$$\text{Fall (2)} \quad x(z) = \frac{F \cdot \ell^3}{6 \cdot I \cdot E} \cdot \left(\frac{z^3}{\ell^3} - 3 \cdot \frac{z}{\ell} + 2 \right) . \quad (10-1-2)$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{m_F}{\ell} \cdot \int_0^\ell \left(\frac{z^3}{\ell^3} - 3 \cdot \frac{z}{\ell} + 2 \right)^2 \cdot dz + m \right] \cdot x_{\max}^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) . \quad (10-1-12)$$

Für das Integral gilt

$$\int_0^\ell (\quad)^2 \cdot dz = (\quad) \cdot (\quad) \cdot dz ;$$

$$\int_0^\ell \left(\frac{z^6}{\ell^6} - 3 \frac{z^4}{\ell^4} + 2 \frac{z^3}{\ell^3} - 3 \frac{z^4}{\ell^4} + 9 \frac{z^2}{\ell^2} - 6 \frac{z}{\ell} + 2 \frac{z^3}{\ell^3} - 6 \frac{z}{\ell} + 4 \right) \cdot dz ;$$

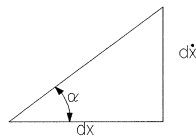
$$\int_0^\ell \left(\frac{z^6}{\ell^6} - 6 \frac{z^4}{\ell^4} + 4 \frac{z^3}{\ell^3} + 9 \frac{z^2}{\ell^2} - 12 \frac{z}{\ell} + 4 \right) \cdot dz ;$$

$$\ell \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{5}{6} + \frac{4}{4} + \frac{9}{3} - \frac{12}{2} + 4 \right) = \frac{132}{140} \cdot \ell ;$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{m_F}{\ell} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{132}{140} \cdot \ell + m \right] \cdot x_{\max}^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) . \quad (10-1-13)$$

Kap. 11

$$\tan \alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{\frac{d\dot{x}}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}.$$



Nach Kap. 3.3 ist die Geschwindigkeit $= 0$, wenn die Beschleunigung $\neq 0$ ist, d.h. ihr Maximum hat. Die Beschleunigung kann daher beim Durchgang durch die horizontale Achse in diesem Punkt nicht Null sein.

$$dt = \frac{dx}{\dot{x}(x)}; \quad (11-1-6)$$

Zur Zeit $t = t_0$ soll die Position $x(t_0)$ sein, so gilt für die Integration

$$\int_{t_0}^t dt = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\dot{x}(x)}, \quad \text{dabei wird nur die linke Seite integriert, die Funktion im Nenner}$$

der rechten Seite muß von Fall zu Fall jeweils erst bestimmt werden. Also wird

$$t - t_0 = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\dot{x}(t)} \quad \text{zu}$$

$$t = t_0 + \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\dot{x}(x)}. \quad \text{Als Beispiel wird in (11-1-8) die Gleichung aus (11-1-4) für}$$

den Nenner aufbereitet.

$$t = t_0 - \frac{1}{C} \cdot (\ln x - \ln x_0); \quad (11-2-2)$$

$$\ln x - \ln x_0 = (t - t_0) \cdot (-C); \quad (11-2-3)$$

Aus der Mathematik ist bekannt

$$\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v;$$

und

$$\ln e^a = a \quad \text{für } a > 0;$$

Damit ist aus (11-2-3)

$$\ln x - \ln x_0 = \underbrace{\ln \left(\frac{x}{x_0} \right)} = \ln e^{((t - t_0) \cdot (-C))} = (t - t_0) \cdot (-C) ;$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{-C \cdot (t - t_0)} ;$$

$$x = x_0 \cdot e^{-C \cdot (t - t_0)} . \quad (11-2-4)$$

$$m \cdot \ddot{\varphi} + f(\varphi) = 0 . \quad (11-3-1)$$

Betrachtet man unabhängig davon die kinetische Energie

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

und differenziert diesen Term, so erhält man (Kettenregel)

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad \text{diff.} \quad \frac{2}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = m \cdot \dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} . \quad (11-3-3)$$

Darin ist $\ddot{\varphi}$ enthalten.

Andererseits kann man die Gleichung (11-3-1) mit der Geschwindigkeit $\dot{\varphi}$ multiplizieren

$$m \cdot \ddot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} + f(\varphi) \cdot \dot{\varphi} = 0 .$$

Der erste Summand dieser Gleichung ist aber die rechte Seite der Gleichung (11-3-3). Wenn man also diese Gleichung integriert, kann man die "Zeile" (11-3-3) von rechts nach links lesen:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{\varphi}^2 + \int f(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \cdot dt = \text{const} = E_{\text{ges}} . \quad (11-3-4)$$

Kap. 18

$$m \cdot (e+x) \cdot \omega^2 = c \cdot x \quad (18-1-3)$$

$$x = \frac{m \cdot e \cdot \omega^2 + m \cdot x \cdot \omega^2}{c};$$

$$x = \frac{m \cdot e \cdot \omega^2}{c \cdot \left(1 - \frac{m \cdot \omega^2}{c}\right)};$$

$$x = \frac{e \cdot \omega^2}{\frac{c}{m} - \omega^2};$$

mit

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}; \quad \omega^2 = \omega_e^2;$$

erhält man

$$x = \frac{e}{\left(\frac{\omega_0}{\omega_e}\right)^2 - 1} \quad (18-1-4)$$

Kap. 21

$$y_{II} = \alpha_{11} \cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot y_I + \alpha_{12} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot y_{II}; \quad (21-1-16)$$

$$y_{II} = \alpha_{21} \cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot y_I + \alpha_{22} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot y_{II}. \quad (21-1-17)$$

Umformen (wobei nach Maxwell $\alpha_{21} = \alpha_{12}$ ist):

$$(1 - \alpha_{11} \cdot m_1 \cdot \omega^2) \cdot y_I = \alpha_{12} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot y_{II};$$

$$(1 - \alpha_{22} \cdot m_2 \cdot \omega^2) \cdot y_{II} = \alpha_{12} \cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot y_I;$$

und Auflösen der ersten Gleichung nach y_I :

$$y_I = \frac{\alpha_{12} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot y_{II}}{1 - \alpha_{11} \cdot m_1 \cdot \omega^2}. \quad (21-1-18)$$

Einsetzen in die zweite Gleichung:

$$(1 - \alpha_{22} \cdot m_2 \cdot \omega^2) \cdot y_{II} = \alpha_{12} \cdot m_1 \cdot \omega^2 \cdot \frac{\alpha_{12} \cdot m_2 \cdot \omega^2 \cdot y_{II}}{1 - \alpha_{11} \cdot m_1 \cdot \omega^2};$$

es fällt y_{II} heraus. Durch Ausmultiplizieren und Ordnen erhält man

$$\omega^4 - \frac{\alpha_{11} \cdot m_1 + \alpha_{22} \cdot m_2}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} \cdot \omega^2 + \frac{1}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} = 0. \quad (21-1-19)$$

Wendet man den Satz von Vieta an:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \Rightarrow -p = x_1 + x_2 \quad \text{und} \quad q = x_1 \cdot x_2;$$

so entspricht in der biquadratischen Gleichung der Faktor von ω^2 der Größe $-p$ und der freie Summand der Größe q . In einer Summe, in der jeder Summand quadriert wird, wird der kleinere Summand gegenüber dem größeren Summanden vernachlässigbar klein. Also gilt mit genügender Genauigkeit

$$\frac{\alpha_{11} \cdot m_1 + \alpha_{22} \cdot m_2}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} = \omega_1^2 + \omega_2^2 \approx \omega_1^2; \quad (21-1-20)$$

während man in einem Produkt keinen der Faktoren vernachlässigen darf:

$$\frac{1}{m_1 \cdot m_2 \cdot (\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} = \omega_1^2 \cdot \omega_2^2. \quad (21-1-21)$$

Dann wird mit einfacher Umformung

$$\omega_2^2 \cdot \omega_1^2 = \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2}{\omega_1^2} = \frac{1}{\alpha_{11} \cdot m_1 + \alpha_{22} \cdot m_2}; \quad (21-1-22)$$

durch Division von (21-1-21) und (21-1-20).

Kap. 23

$$J_1 \cdot \omega^2 \cdot \frac{-c_{12} \cdot \varphi_2}{J_1 \cdot \omega^2 - c_{12}} + J_2 \cdot \omega^2 \cdot \varphi_2 + J_3 \cdot \omega^2 \cdot \frac{-c_{23} \cdot \varphi_2}{J_3 \cdot \omega^2 - c_{23}} = 0. \quad (23-4-14)$$

Die SUMMANDEN werden mit dem Hauptnenner

$$(J_1 \cdot \omega^2 - c_{12}) \cdot (J_3 \cdot \omega^2 - c_{23})$$

erweitert. Da die Gleichung Null ist, reicht es aus, wenn der Zähler Null wird. Daher braucht der Nenner nicht mehr mitgeschrieben werden. Ebenso kann φ_2 eliminiert werden.

Nach dem Erweitern und Auflösen der Klammern erhält man zunächst

$$\begin{aligned} & -J_1 \cdot J_3 \cdot \omega^4 \cdot c_{12} + J_1 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} \cdot c_{23} + J_1 \cdot J_2 \cdot J_3 \cdot \omega^6 - J_1 \cdot J_2 \cdot \omega^4 \cdot c_{23} \\ & - J_2 \cdot J_3 \cdot \omega^4 \cdot c_{12} + J_2 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} \cdot c_{23} - J_1 \cdot J_3 \cdot \omega^4 \cdot c_{23} + J_3 \cdot \omega^2 \cdot c_{12} \cdot c_{23} = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird nach den Potenzen von ω geordnet:

$$\begin{aligned} & J_1 \cdot J_2 \cdot J_3 \cdot \omega^4 - [c_{12} \cdot (J_1 \cdot J_3 + J_2 \cdot J_3) + c_{23} \cdot (J_1 \cdot J_2 + J_1 \cdot J_3)] \cdot \omega^2 \\ & + c_{12} \cdot c_{23} \cdot (J_1 + J_2 + J_3) = 0. \end{aligned} \quad (23-4-15)$$

Die Division mit $J_1 \cdot J_2 \cdot J_3$ gibt

$$\begin{aligned} \omega^4 - \left[c_{12} \cdot \frac{J_3 \cdot (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2 \cdot J_3} + c_{23} \cdot \frac{J_1 \cdot (J_2 + J_3)}{J_1 \cdot J_2 \cdot J_3} \right] \cdot \omega^2 \\ + c_{12} \cdot c_{23} \cdot \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 \cdot J_2 \cdot J_3} = 0. \end{aligned}$$

Mit der Substitution mit A und B folgt

$$\omega^4 - A \cdot \omega^2 + B = 0. \quad (23-4-16)$$

Kap. 24

Es ist mit (24-2-14) für den Weg

$$x = e^{-\delta \cdot t} \cdot (A \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_d \cdot t)) \quad (24-2-14)$$

und für die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -\delta \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot (A \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_d \cdot t)) \\ & + e^{-\delta \cdot t} \cdot (-A \cdot \omega_d \cdot \sin(\omega_d \cdot t) + B \cdot \omega_d \cdot \cos(\omega_d \cdot t)). \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ sind für den Weg $x = x(0)$ und für die Geschwindigkeit $\dot{x} = \dot{x}(0)$. Damit wird für den Weg

$$x = 1 \cdot (A \cdot 1 + B \cdot 0) = x_0;$$

und für die Geschwindigkeit

$$\dot{x} = -\delta \cdot 1 \cdot (x_0 \cdot 1 + B \cdot 0) + 1 \cdot (-x_0 \cdot \omega_d \cdot 0 + B \cdot \omega_d \cdot 1) = \dot{x}_0;$$

und damit

$$A = x_0; \quad B = \frac{\dot{x}_0 + \delta \cdot x_0}{\omega_d}. \quad (24-2-16)$$

Kap. 24.6

Für diese Randbedingungen gilt also:

zur Zeit $t = 0$ existiert eine Auslenkung. Es ist $e^0 = 1$ in der Gleichung (24-6-3)

$$x = C_1 \cdot e^{-(\delta-\kappa) \cdot t} + C_2 \cdot e^{-(\delta+\kappa) \cdot t} = x_0 = C_1 + C_2 . \quad (24-6-3)$$

Nach C_1 aufgelöst und in (24-6-4) eingesetzt erhält man für $\dot{x} = 0$

$$\dot{x} = -(\delta-\kappa) \cdot C_1 \cdot 1 - (\delta+\kappa) \cdot C_2 \cdot 1 = 0 .$$

$$0 = -(\delta-\kappa) \cdot (x_0 - C_2) - (\delta+\kappa) \cdot C_2 .$$

Die Klammern werden aufgelöst und die Gleichung nach C_2 aufgelöst. Durch Einsetzen von C_2 in die Gleichung für C_1 erhält man die beiden Konstanten zu

$$C_1 = \frac{\delta+\kappa}{2 \cdot \kappa} \cdot x_0 , \quad C_2 = -\frac{\delta-\kappa}{2 \cdot \kappa} \cdot x_0 .$$

Damit zurück nach (24-6-3), gibt

$$x = x_0 \cdot \left[\frac{\delta+\kappa}{2 \cdot \kappa} \cdot e^{-(\delta-\kappa) \cdot t} - \frac{\delta-\kappa}{2 \cdot \kappa} \cdot e^{-(\delta+\kappa) \cdot t} \right] . \quad (24-6-6)$$

Ist eine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden, so ist zunächst nach den Anfangsbedingungen

$$x = C_1 \cdot e^{-(\delta-\kappa) \cdot t} + C_2 \cdot e^{-(\delta+\kappa) \cdot t} = x_0 = C_1 + C_2 . \quad (24-6-3)$$

In der Gleichung für die Geschwindigkeit wird mit $t = 0$

$$\dot{x}_0 = -(\delta-\kappa) \cdot C_1 \cdot 1 - (\delta+\kappa) \cdot C_2 \cdot 1 . \quad (24-6-4)$$

Um in der Schreibweise kürzer werden zu können, wird λ eingesetzt (aus (24-6-2))

$$\dot{x}_0 = \lambda_1 \cdot C_1 + \lambda_2 \cdot C_2 .$$

Hier wird nun $C_1 = x_0 - C_2$ ersetzt:

$$\dot{x}_0 = \lambda_1 \cdot (x_0 - C_2) + \lambda_2 \cdot C_2 ;$$

nach C_2 aufgelöst und C_2 wiederum in die Gleichung für C_1 eingesetzt, bringt die Konstanten

$$C_1 = \frac{x_0 \cdot \lambda_2 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} , \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 \cdot x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} . \quad (24-6-7)$$

In (24-6-3) eingesetzt und den Nenner vorgezogen:

$$x = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left[(x_0 \cdot \lambda_2 - \dot{x}_0) \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} - (x_0 \cdot \lambda_1 - \dot{x}_0) \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \right] . \quad (24-6-8)$$

Die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ ist eine konstante Größe und wird in der Gleichung als v_0 geschrieben.

$\lambda_{1,2}$ wird ersetzt durch die Lösung der charakteristischen Gleichung. Damit folgt zunächst

$$x = \frac{1}{(-\delta - \varkappa) - (-\delta + \varkappa)} \cdot \left[[x_0 \cdot (-\delta - \varkappa) - v_0] \cdot e^{(-\delta + \varkappa) \cdot t} - [x_0 \cdot (-\delta + \varkappa) - v_0] \cdot e^{(-\delta - \varkappa) \cdot t} \right].$$

Es wird in den Exponenten das - vor die Klammer gesetzt, um die fallende Tendenz der Funktion deutlicher zu machen. Außerdem wird aus der ersten [] Klammer das - nach vorn gezogen und mit dem - vor der zweiten [] vor die Gesamt [] gesetzt. In der zweiten () wechseln $\varkappa$ und δ lediglich die Plätze. Das führt zu

$$x = \frac{1}{2 \cdot \varkappa} \cdot \left[[x_0 \cdot (\delta + \varkappa) + v_0] \cdot e^{-(\delta - \varkappa) \cdot t} + [x_0 \cdot (\varkappa - \delta) - v_0] \cdot e^{-(\delta + \varkappa) \cdot t} \right]. \quad (24-6-9)$$

Kap. 25.2 und folgende

Nach den Regeln gilt für die Lösung von linearen Gleichungen mit Hilfe der Koeffizienten-determinante

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1,$$

$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad \text{für } \Delta \neq 0.$$

35 Literaturhinweise

Es sind hier Autoren und Bücher aufgeführt, die Hinweise auf die Fragen der Dynamik enthalten. Diese Liste kann nicht vollständig sein; andererseits enthält ein Teil der Bücher Themen der allgemeinen Dynamik und ist damit eher der allgemeinen Mechanik und der Physik zuzuordnen. Einige der Bücher sind mehrbändig, das ist hier nicht besonders angegeben.

- Assmann, B.*, Technische Mechanik. Oldenbourg, München 1989
Autorenkollektiv, Grundwissen des Ingenieurs. Deutsch, Frankfurt 1981
Autorenkollektiv, Zirpke, Technische Mechanik. Hoppenstedt, Darmstadt 1980
Bishop, R.E.D., Schwingungen in Natur und Technik. Teubner, Stuttgart 1985
Böhme, G., Mathematik. Springer, Berlin 1968
Brauch/Dreyer/Haacke, Mathematik für Ingenieure. Teubner, Stuttgart 1990
Demmig, Dynamik des Massenpunktes. Repetitorium, Demmig-Verlag, Nauheim
Dittrich, G., Maschinendynamik. Skript RWTH Aachen
Faatz, H., Übungsaufgaben aus der Technischen Mechanik. Deuticke, Wien 1964
Federhofer, Prüfungsaufgaben aus der Mechanik. Springer, Berlin 1950
Fischer/Stephan, Mechanische Schwingungen. Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig 1984
Göldner/Holzweißig, Leitfaden der Technischen Mechanik. Steinkopf, Darmstadt 1988
Göldner/Pfefferkorn, Technische Mechanik. Vieweg, Wiesbaden 1988
Hagedorn, P., Technische Schwingungslehre. Springer, Berlin 1989
Hagedorn, P., Aufgabensammlung Technische Mechanik. Teubner, Stuttgart 1988
Hahn, H.G., Technische Mechanik fester Körper. Hanser, München 1990
Hauger/Schnell/Groß, Technische Mechanik. Springer, Berlin 1992
Holzmann/Meyer/Schumpich, Technische Mechanik. Teubner, Stuttgart 1990
Holzweißig/Dresig, Lehrbuch der Maschinendynamik. Fachbuchverlag Leipzig, 1982
Jansen, G., Dynamik. Schroedel, Hannover 1961
Klotter, K., Technische Schwingungslehre. Springer, Berlin 1988
Knaebel, M., Technische Schwingungslehre. Teubner, Stuttgart 1987
Lindner, H., Physik für Ingenieure. Vieweg, Wiesbaden 1988
Magnus, K., Schwingungen. Teubner, Stuttgart 1986
Motz, H.D., Dynamik. Skript GHS Wuppertal 1981
Motz, H.D., Ingenieurmechanik. VDI, Düsseldorf, 1991
Müller/Magnus, Übungen zur Technischen Mechanik. Teubner, Stuttgart 1988
Menge/Schrieder, Mechanik. Schroedel, Hannover 1961
Oehler, Technische Schwingungslehre. Girardet, 1952
Pfeiffer, F., Einführung in die Dynamik. Teubner, Stuttgart 1989
Reckling, K.-A., Mechanik. Vieweg, Wiesbaden 1970
Roedel, H., Dynamik. Hanser, München 1971
Schiehlen, W., Technische Dynamik. Teubner, Stuttgart 1986
Steger/Sieghart/Glauning, Technische Mechanik. Teubner, Stuttgart 1990
Winkler/Aurich, Taschenbuch Techn.Mechanik. Deutsch, Frankfurt 1990
Wygodski, M. Höhere Mathematik griffbereit. Vieweg, Braunschweig 1973
Ziegler, G., Maschinendynamik. Westarp, Essen 1990

Aus dem Gebiet der Strömungslehre:

Wilhelm/Jürgler, Nichtstationäre...Gasströmung. Forsch.-Berichte Land Nordrhein-Westfalen Nr.988

Weitere Bücher:

Briggs/Peat, Die Entdeckung des Chaos. Hanser, München 1990

Lauwerier, H, Fractale. Wittig, Hückelhoven 1989

Peitgen/Richter, The Beauty of Fractals. Springer, Berlin 1986

Schwenk, T., Das sensible Chaos. Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1962 und 1988

Schneider, G., Erdbeben. Enke, Stuttgart 1975

Schneider, G., Naturkatastrophen. Enke, Stuttgart 1980

Pelzing/Querfurth, Erdbeben in Nordrhein-Westfalen, Geologisches Landesamt NRW 1987

Pelzing/Querfurth, GLA Krefeld, mündliche Informationen zum Erdbeben vom 13.04.1992 u. *Abb. 30-5-15* bis *Abb. 30-5-21*

Pelzing, R., Das Erdbeben von Roermond, GLA NRW, 1992

Pelzing, R., Information zum Erdbeben vom 25.07.1996

Widmer/Zürn, BICHROMATIC EXCITATION OF LONG-PERIOD RAYLEIGH AND AIR WAVES BY THE MOUNT PINATUBO AND EL CHICHON VOLCANIC ERUPTIONS; Geophys. Res. Lett. 1992
und mündliche Informationen (Zürn)

Felderhof, R., Elektrische Meßtechnik. Hanser, München 1990

Müseler/Schneider, Elektronik. Hanser, München 1989

36 Sachwortverzeichnis

A

Abgasrohre 244
 Abklingkoeffizient 124, 236, 266,
 268, 323
 Ablösung 207, 211
 Absorption 237
 AD-Wandler 218, 268
 Afrika 231
 Agadir/Marokko 230
 Aktivisolierung 150
 Alpen 231
 Alphawellen 228
 Amplitude 9, 15-17, 21, 32, 51, 75,
 92, 120, 123, 124, 130, 133,
 138, 145, 148, 161, 167, 184,
 203, 238
 Amplitudenfunktion 359
 Amplitudenspektrum 34, 252
 Amplitudenverhältnis 165, 192
 Analogsignale 218
 Analyse 27, 31, 234, 237, 346
 Anfachung 4, 13, 69
 Anfahrwirbel 213
 Anregung 44, 158, 171, 237, 361
 Antiwackelsystem 20
 Aperiodischer Fall 135, 357
 Aperiodischer Grenzfall 133, 308,
 357
 Aquaplaning 209
 Archimedische Spirale 62, 64
 Arterien 244
 Attraktor 69, 222
 Aufhängepunkt 160
 Auftrieb 213
 Ausgangsspannung 215
 Auspuffanlage 20
 Auswuchtgüte 176, 364
 Auswuchtmaschine 168, 184, 271
 Auswuchttechnik 74, 175, 364
 Autobahn 19

B

Bauwerke 85, 232
 Bearbeitung 164
 Bearbeitungsmaschinen 164

Bensberg 233
 Bereich 23, 74, 89, 153, 156, 168,
 219
 Berührungspunkt 132, 262, 312
 Beschleunigung 7, 9, 54
 Betawellen 227, 228
 Betriebsdrehzahl 73, 184, 193, 288,
 332, 349
 Betti 94, 351
 BFO 242
 Biblis 230
 Biegekritische Drehzahl 89, 257,
 271, 300, 328, 351
 Biegeschwingung 87, 92, 107
 Biegung 107
 Bifurcation 223
 Blattfeder 337
 Brandungswellen 227
 Brücke 150
 Brückenfaktor 215, 337
 Brückenschaltung 214

C

C-Glied 219
 Camcorder 20
 Cantor-Menge 68
 CDreh 103, 127, 353
 Chaos 7, 59, 221
 Charakteristische Gleichung 63, 125,
 356
 Charakteristische Länge 274
 CLängs 127
 Computer 218
 Coulomb'sche Reibung 123, 201,
 231, 251, 282, 368
 cw-Wert 212

D

Dämpferkrafterregung 162
 Dämpfung 4, 56, 101, 105, 123-126,
 128, 130, 147, 150, 153, 155,
 171, 184, 201, 236, 238, 259,
 268, 353, 355
 Dämpfungsgrad 125, 145, 149, 236,

261, 266, 268
 Dämpfungskonstante 105, 125, 151,
 202, 260, 261, 265, 268
 Dämpfungskraft 12, 105, 123, 124,
 128, 151, 266
 Dämpfungsmoment 105
 Dämpfungswinkel 130, 338
 degressiv 4
 Dehnungsmeßstreifen 214, 268
 Deltawellen 228
 Determinante 188, 191, 194
 Differentiator 219
 Differenzspannung 215
 Digital 218
 Digitale Signale 218
 Disco-Techno 229
 DMS 214, 268, 275
 Drall 108
 Drehfederkonstante 45, 103, 260,
 306, 353
 Drehmasse 107
 Drehschwinger 41, 101, 107, 258,
 289, 302, 348, 353
 Drehwinkel 105, 303
 Dreieckfunktion 25
 Drossel 244
 Druck 11, 84, 208
 Druckwelle 244
 Dunkerley 94, 257, 301, 328, 351
 Durchbiegung 2, 38, 50, 91, 92, 98,
 100, 107, 172, 214, 249
 Durchlässigkeit 150, 152, 169, 269,
 360
 Dynamische Unwucht 177
 Dynamische Zähigkeit 208
E
 Echtzeitrechner 20
 Eigenformzahlen 192
 Eigenfrequenz 40, 48, 237, 253, 255,
 260
 Eigenkreisfrequenz 8, 46, 53, 73,
 100, 106, 109, 114, 124, 128,
 145, 150, 171, 204, 214, 236,
 258
 Einflußzahlen 94, 351
 Eingangsspannung 215
 El Chichón 242

Elastische Bindungen 77
 Elastische Schwingung 4
 Elastizitätsmodul 137, 214
 Electronic Stability Programm 20
 Elektromagnetische Wellen 228
 Energie 3, 13, 44, 50, 57, 69, 75,
 92, 121, 123, 137, 171, 229
 Energiemethode 92
 entkoppelt 198
 Erdbeben 85, 230
 Erdkruste 231
 Erdmantel 231
 Erregerfrequenz 266
 Erregerkraft 44, 137, 146, 152, 153,
 163, 193, 362
 Erregerkreisfrequenz 146
 Ersatzfederkonstante 200
 Ersatzsystem 7, 52, 113, 114, 124,
 258, 303
 Ersatzwelle 113, 117
 Erzwungene Schwingung 4, 137,
 171, 358
 Euklidische Geometrie 67
 Euler 14, 126
 Europa 231
 Extreme 132
 Extremwert 262, 312
 Exzentrizität 151, 161, 176

F

Fahrbahn 156, 209
 Fahrdynamikregelung 20
 Fallbeispiele 158, 361
 Fallbeschleunigung 337
 Federgefesselter Drehschwinger 259
 Federhammer 267
 Federkonstante 2, 4, 40, 42, 48, 84,
 114, 127, 151, 171, 249
 Federkraft 3, 8, 38, 39, 48, 84, 124,
 137, 147, 151, 162, 202
 Federkrafterregung 147, 151, 161,
 162, 169, 358
 Federmasse 40, 50
 Festkörper 228
 Festpunkt 219
 Flächenträgheitsmoment 270, 348,
 369
 Flat-Screen-Monitor 218

fliegende Lagerung 93
 Fliehkraft 89, 93, 146, 175, 177,
 184, 223
 Flüssige Reibung 123
 Flüssigkeiten 228
 Flüssigkeitsreibung 275
 Formänderung 91
 Formänderungsarbeit 94
 Fourier 27, 234, 237, 251, 279, 345
 Fraktale 66
 Fraktale Dimension 67
 Freie Schwingung 3
 Freiheitsgrad 3, 5, 38, 77, 108, 347
 Fremderregung 4, 161, 171, 206,
 235
 Fremdschwingungen 164
 Frequenzumfang 274
 Froudezahl 228
 Führung 123, 209
 Fundament 6, 146, 149, 171, 234
 Fußpunkterregung 162

G

Gase 228
 gedämpft 6, 13, 123
 Gedämpfte Schwingung 4, 147, 355
 Gehirnwellen 228
 Generalisierte Koordinaten 77
 Generator 64
 Geophysik 235
 gerade 29, 56, 131
 Geschwindigkeit 8, 9, 11, 12, 44,
 51, 53, 57, 62, 75, 123, 124,
 127, 161, 201, 219, 229, 289
 Geschwindigkeitsprofil 209
 geschwindigkeitsproportional 124,
 137, 202
 Geschwindigkeitsproportionale Dämp-
 fung 202
 Geschwindigkeitsverteilung 275
 Getriebe 18, 114
 Getriebschwingungen 354
 Gewichtskraft 38-40, 43-45, 48, 92,
 93, 101, 103, 178, 289, 353
 Gezeiten 242
 Gezeitenamplitude 228
 Gezeitenhub 242
 Gezeitenwellen 228

Gleichschritt 150
 Gleitbewegung 118, 235
 Gleitlager 275
 Gleitreibungskraft 201
 Gleitreibungszahl 201
 Grenzschicht 207, 208, 210
 Grenzykel 69
 Großhau 232
 Grundschiwingung 92, 98, 119, 234,
 237, 287
 Gummifedern 4
 Güte 164
 Gyrometer-Sensoren 20

H

Haftreibungskraft 201
 Haftreibungszahl 201
 Haftung 156
 Halbbrücke 216, 275
 Hammerbär 267
 Hannover 230
 Hauptträgheitsachse 176
 Hausdorff 66
 Heinsberg 234
 Herzfrequenz 223, 228
 Herzkammer 244
 Herzmassage 244
 Hintereinanderschaltung 85, 215,
 296, 350
 Holonom-rheonom 77
 Holonom-skleronom 77
 homogen 138, 203
 Hörbereich 274
 Hören 229
 Hubschrauber 20
 Hubschwingung 198
 Hüllkurve 132
 Hürtgenwald-Großhau 241
 Hydrostatik 231

I

Imaginär 126
 Imaginärteil 14, 126, 151
 Infrarotstrahlung 229
 Initiator 64
 Innere Reibung 123
 Instationäre Strömung 244
 Instationäre Strömungen 244

Instationäre Strömungsvorgänge 207
Integrator 219
Intensität 232
Isolatoren 150
Isolierfaktor 157, 361
Iteration 63, 221

K

k-Faktor 172, 214
Kamin 274
Kappa 135
Kármánsche Wirbelstraße 212
KDreh 127
Kinematische Bindungen 77
Kinematische Zähigkeit 123, 210
KLängs 127
Klavier 274
Knotenpunkt 56
Koch'sche Kurve (v.Koch) 64
Koeffizienten 28
Koeffizientendeterminante 100, 143,
154, 188
Kohärenzen 338
Kolbenmaschine 167
Kölner Dom 242
Kompensation 216
Konsole 237, 252
Konstruktion 73, 101, 112, 142, 159,
179, 202, 206
Kontinent 231
Konvergenz 29
Koppelfeder 186
Koppelkreisfrequenz 187, 334
Koppelschwingungen 186, 365
Kraftamplitude 161, 163, 169
Kraftmessende Auswuchtmaschine
168, 184
Kreuzschleife 138
Kritische Drehzahl 173
Kurbelwelle 273
Kutta-Joukowski 213

L

Lager 336
Lagerdurchmesser 275
Lagrange 76, 78, 121
Lagrange'sche Funktion 78, 255
laminar 123, 210

Laminarflügel 210
Laufschritt 150, 270
Lehr'sches Dämpfungsmaß 125, 236
Licht 227
linear 3, 4, 24, 38, 78, 94, 106, 123,
197, 201, 209, 228
Lissajous 21
Lithosphäre 231
Logarithmische Darstellung 131
Logarithmische Spirale 62, 64
Logarithmisches Dekrement 130,
268, 357
Longitudinalwellen 228
Lord Kelvin 213
Love-Wellen 232

M

Magnitude 230, 232
Malthus 221
Mandelbrot 67
Manometerschwingungen 48
Marsch 150
Massenkrafterregung 142, 146, 161,
167, 360
Massenträgheitsmoment 41, 45, 101,
115, 200, 353, 370
Mathematisches Pendel 43, 348
Matrix 156
Matrizen 99, 143, 191
Maxima 132
Maxwell 94, 96, 257, 301, 328, 351
Maxwell'sche Einflußzahlen 338
Meditation 228
Medizin 7
Mehrmassensystem 91, 92
Mercalli-Sieberg-Skala 232
Meßbrücke 275
Meßdiagonale 215
Meßgeräte 150
Meßkette 218
Meßsignal 216
Meßverstärker 218
Meßweg 168, 184
Meßwert 218
Mohr 172, 176, 257, 328
Moment 102, 108, 113, 116, 176,
178, 182
Momentenunwucht 179

monochromatisch 228
MSK-64-Skala 232

N

Näherungsverfahren 92
Newton 8, 208
Nickschwingung 198
Niederrhein 230
Nordamerika 231
Nordsee 228
Normalkraft 201
Null-Lage 3, 40, 104, 138, 302
Nulldurchgang 262

O

Oberflächenwellen 228
Oberschwingung 92, 237
Oleiftalsperre 232, 240
Ölfilm 123
Operationsverstärker 219

P

panchromatisch 228
Parallelschaltung 84, 215, 350
Parametrische Anregung 44
partikulär 138, 160, 203
Passivisolierung 150, 164, 237
Pendelschwingungen 43, 348
Periode 3, 27, 29, 40, 46, 305
Periodendauer 253, 268, 291
Periodenverdopplung 63, 222
Periodischer Fall 356
Phasendiagramm 53
Phasenebene 53
Phasenfrequenzgang 140, 154, 359
Phasenporträt 54
Phasenverschiebung 16, 17, 33, 140, 145, 147, 171, 284, 291
Phasenwinkel 9, 15, 139, 185
Physisches Pendel 45, 46, 254, 348
Pinatubo 242
Pittings 118
polarisiert 24, 228
Potentialströmung 213
Potentialtheorie 213
Prandtl 210
Primäreffekt 234
Primärwellen 232

progressiv 4
Pseudoplastisch 235
Pulswelle 244
Pumpfrequenz 44
punktsymmetrisch 29
Pythagorasbaum 65

Q

Quasistatische Unwucht 177

R

R-Glied 219
Rahmen 85, 150, 154, 163, 164, 167, 169
Rahmenkraft 161
Rattermarken 209
Rayleigh 92, 242, 257, 301, 328, 351
Rayleigh-Wellen 232
Realteil 14, 151
Rechteckfunktion 25
Rechteckschwingung 250, 278
Reduzierte Länge 46
Reduzierte Masse 103, 353
Reduzierte Momentenfläche 172
Reell 126
Reflexionsanlage 20
Reibungskraft 137, 251
Reibungsmoment 275, 336
Reifen 156, 209
Reihe 25, 28, 251, 345
Rein dynamische Unwucht 179
Relativamplitude 169
Resonanz 73, 266, 349
Reynoldszahl 123, 208, 210
Rheintal 230
Riblets 212
Richterskala 231
Riegel 86
Roboterarm 20
Ruck 235
Rückstellkraft 4, 39
Rurtal-Graben 231

S

Saab 2000 20
Sägezahnfunktion 26, 30
Sägezahnkurve 251

Sattel 61
Sattelpunkt 56
Saugeffekt 244
Schall 227, 232
Schallschutzwand 19
Scheiben 107
Schergeschwindigkeit 235
Scherkräfte 228
Schiefstellung 89
Schiltach/Schwarzwald 242
Schlaf 228
Schlingern 49
Schlitten 209
Schmiedehammer 267
Schmierkeil 209
Schmiermittel 208, 275
Schneeflockenkurve 64
Schollen 231
Schubkurbel 77
Schwebung 18
Schweißnaht 233
Schweiz 228
Schwerefeld 4, 58
Schwingdauer 9
Schwingungsisolierung 153, 162
Schwingungsknoten 119
Schwingungsleitfähigkeit 150, 152
Schwingungsmeßgerät 167
Schwingweg 50
Schwingweite 9
Scruton-Spirale 207
seismisch 231
Sekundäreffekt 234
Sekundärwellen 232
selbstähnlich 63, 223
Selbsterregung 213
Sendemast Bielstein 207
Sensor 20
Separatrizen 59
Sierpinski 67
Singulärer Punkt 54
Skelettbauten 85
Sonar 229
Spa 230
Spalt 208, 213
Spanndrähte 274
Spannrolle 259
Spektrum 227, 237

Spirale 55, 62
Stabilisierung 20
Stahlrahmen 85
Stanzmaschine 269
Starrer Körper 77
Statische Ruhe-Lage 40
Statische Unwucht 178
Staupunkt 213
Steiner, Satz von 370
Stiel 86
Störglied 137, 203
Stoßdämpfer 156
Streß 228
Strouhalzahl 207, 213, 274
Strudel 61
Strudelpunkt 55
Stützstellen 31
Summe 8, 11, 18, 25, 27, 75, 84,
95, 97, 112, 234, 238
Superposition 91, 257
Swiss-Air 20
symmetrisch 29, 179
Synthese 19, 25

T

Tacoma-Narrows-Brücke 206
Tektonik 231
Tellerfeder 5
Theologie 7
Thetawellen 228
Thixotrop 235
Thomson 213
Thrombus 244
Tilgerkreisfrequenz 193, 332-334
Tilgermasse 333
Tilgung 193, 273, 366
Topologische Dimension 67
Torsion 107, 127
Torsionsschwingung 87, 107, 112,
118, 124, 127
Tragflügel 213
Trägheitskraft 8, 38, 124, 152, 266,
320
Trägheitsradius 103, 293, 353
Translationsschwingung 343
Transversalwellen 228
Trapezregel 31
Traum 228

Trennfläche 228
 Trigonometrische Reihe 28
 Trigonometrische Summe 27
 Trockene Reibung 61, 123, 201, 274,
 368

U

Turbulent 123, 210
 Ultraschall 229
 Umgebung 73, 149, 150, 153, 158,
 160, 161, 163, 276, 361
 Ungedämpft 4, 15
 Unterbewußtsein 228
 Untergrund 86, 154, 163, 164
 Unwucht 21, 35, 89, 146, 149, 171,
 175, 176, 179, 181
 Unwuchtdynamik 181
 Unwuchterregung 167
 Unwuchtkreuz 179
 Unwuchtmasse 176
 Unwuchtmoment 178, 181
 Unwuchresultierende 178, 181
 UTM 230
 UV-Strahlung 229

V

V1 141, 145, 148, 161, 171, 359,
 363
 V2 150, 153, 160, 161, 163, 363
 V3 147, 148, 161, 167, 184, 360,
 363
 V4 161, 163, 167, 169, 363
 VD 150, 153, 161, 163, 269, 325,
 363
 Vektorbild 12
 Verdrahtung 216, 275
 Verdrehwinkel 41, 108, 113, 115,
 119, 127
 Vergrößerungsfunktion 141, 145,
 147, 359
 Verhulst 221
 Verlustleistung 275
 Verschiebung 32, 95, 256
 Vibrationsprüfstand 267
 Viertelbrücke 216
 Vollbrücke 216
 Vorspannkräfte 40
 Vorspannung 40

Vulkane 242

W

Waagen 150
 Wachstum 66, 221
 Wälzlager 118
 Wandschubspannung 275
 Wassenberg 232
 Weg 8
 Wegener 231
 Wegerregung 162
 Wegmessende Auswuchtmaschine
 168, 185
 Wegproportionale Dämpfung 202
 Welle 18, 21, 31, 35, 38, 41, 42, 73,
 85, 87, 89-92, 100, 107, 113,
 117, 119, 127, 149, 172, 200,
 209, 220, 223, 227
 Wellenlagerung, elastisch 200
 Wellenzapfen 275
 Werkzeugmaschinen 164, 171
 Wheatstone 214
 Widerstände 210, 215
 Wirbel 61, 206, 207, 212
 Wirbelbildung 212
 Wirbelpunkt 55, 60

Z

Zahnräder 114
 Zapfen 336
 Zeigerdiagramm 16
 zeitinvariant 77
 zeitvariant 77
 zirkular 24
 Zirkulation 213
 Zug 84
 Zusatzmasse 353
 Zwangsbedingungen 77