

H. Dresig
F. Holzweißig

Maschinendynamik

8. Auflage

 Springer

Hans Dresig · Franz Holzweißig

Maschinendynamik

Hans Dresig · Franz Holzweißig

Maschinendynamik

8., neu bearbeitete Auflage

Unter Mitarbeit von L. Rockhausen

Mit 235 Abbildungen und 38 Tabellen

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Hans Dresig
Mittelstraße 1
09244 Lichtenau, OT Auerswalde
Deutschland
dresig.hans@vdi.de

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Franz Holzweißig
Kaitzer Straße 66
01187 Dresden
Deutschland

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-540-72032-4 8. Auflage Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN 978-3-540-30709-5 7. Auflage Springer Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1980, 1983, 2003, 2004, 2006, 2007

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Text und Abbildungen wurden mit größter Sorgfalt erarbeitet. Verlag und Autor können jedoch für eventuell verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen weder eine juristische Verantwortung noch irgendeine Haftung übernehmen.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z. B. DIN, GEFMA, VDMA) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für die Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen.

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, Chemnitz
Herstellung: LE-TeX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig
Einbandgestaltung: eStudio Calamar S.L., F. Steinen-Broo, Pau/Girona, Spanien

SPIN 12050475 7/3180/YL – 5 4 3 2 1 0 Gedruckt auf säurefreiem Papier

Vorwort

Die Maschinendynamik ist durch Beschluss der Bundes-Rektorenkonferenz vom Juli 1991 ein Pflichtfach des Studienplans für alle Studenten des „kalten“ Maschinenbaus an den Technischen Universitäten und Technischen Hochschulen Deutschlands geworden. Auch an den meisten Fachhochschulen ist die Maschinendynamik in den Lehrplänen verankert. Der Umfang ist laut diesem Rahmenstudienplan mit 6 Semesterwochenstunden angesetzt, aber es hat sich eingebürgert, dass die Maschinendynamik-Vorlesungen meist nur im Umfang 2V/2Ü gehalten und bestimmte Stoffgebiete daraus in andere Lehrveranstaltungen eingelagert werden. Das vorliegende Lehrbuch enthält so viel Stoff, dass sich die einzelnen Fachrichtungen an Universitäten und Fachhochschulen die für sie wichtigen Gebiete daraus auswählen können.

Dieses Lehrbuch beruht auf dem Grundkonzept meines mir freundschaftlich verbundenen Kollegen, Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Franz Holzweißig, der seit seiner Berufung im Jahre 1964 die Maschinendynamik an der TU Dresden in den Studienplan des Maschinenbaues einführte. Er hat mir nach seiner Emeritierung im Jahre 1993 alle Rechte an diesem Lehrbuch überlassen, und ich hatte sowohl die vierte als auch die fünfte Auflage vollständig überarbeitet. Die vorliegende 8. Auflage unterscheidet sich von der 5. bis 7. Auflage durch einige ergänzende Korrekturen. Es wurden Schreib- und Druckfehler ausgemerzt sowie das Sach- und Literaturverzeichnis aktualisiert. Die seit der 5. Auflage erweiterten Auflagen entstanden unter Mitarbeit von Herrn Dr.-Ing. Ludwig Rockhausen, der vor allem bei der Überarbeitung von Kapitel 2 sowie bei der Ausarbeitung einiger Aufgaben und Beispiele mitwirkte.

Das vorliegende Lehrbuch baut auf der Technischen Mechanik auf und stellt für die Studenten eine unmittelbare Konfrontation mit typischen dynamischen Problemen ihres Fachgebietes dar. Dabei wird die Maschinendynamik sowohl als ein typisches Gebiet für die mathematische Modellierung technischer Prozesse aufgefasst als auch als ein Teilgebiet des Maschinenbaus, welches dynamische Probleme des Energiemaschinenbaus (Kolbenmaschinen und Turbomaschinen), des Verarbeitungsmaschinenbaus (z. B. Druckmaschinen, Textilmaschinen, Verpackungsmaschinen), der Fördergeräte, Landmaschinen und Fahrzeuge sowie des Anlagenbaus anspricht.

In der fünften Auflage sind gegenüber der vierten Auflage, die beim Fachbuchverlag Leipzig im Jahre 1994 erschien, etwa 200 Seiten neu verfasst, z. B. Aufgaben, Beispiele, Teile von Kapitel 2 und das ganze Kapitel 7. Veraltete Stoffgebiete wurden gekürzt oder, wie das Verfahren der Übertragungsmatrizen, ganz gestrichen.

Das bisherige Konzept wurde beibehalten, d. h., das Buch hat relativ selbstständige Abschnitte, die typische Inhalte der Maschinendynamik vom Standpunkt des Maschinenbauers behandeln. Kapitel 6 enthält eine allgemeine Darstellung der linearen Schwingung und umfasst dabei Methoden der Kapitel 3, 4 und 5. Einige

Überschneidungen und Wiederholungen wurden bewusst in Kauf genommen, wobei vielfach auf Querverbindungen zwischen den Abschnitten verwiesen wird.

Die 60 Übungsaufgaben mit Lösungen dienen der Erarbeitung und Festigung des vermittelten Stoffes. Sie sind zum Teil dem Buch von Dresig/Rockhausen: „Aufgabensammlung Maschinendynamik“ entnommen, welches vom Fachbuchverlag Leipzig nicht wieder aufgelegt wird.

Das Buch ist nicht nur für Studenten, sondern auch für den Ingenieur der Praxis geschrieben. Die Beispiele aus vielen Gebieten des Maschinenbaus sowie die Angabe von Parameterwerten und Verweise auf Richtlinien und Vorschriften unterstreichen dies. Der Denkweise des Ingenieurs wird insofern entgegengekommen, als Methoden der Abschätzung, Überschlagsrechnungen und Minimalmodelle behandelt und viele lehrreiche dynamische Effekte (Kreiselwirkung, Resonanzdurchlauf, Tilgung, Selbstsynchronisation, ...) erläutert werden, die für die Konstruktion dynamisch hochbelasteter Maschinen bedeutsam sind. Die schnelle Entwicklung der Hardware und Software brachte es mit sich, dass heutzutage für fast jedes maschinendynamische Problem Software vorliegt. Die Aufgabe des Ingenieurs bleibt, die entsprechenden Berechnungsmodelle und ihre Parameter bereitzustellen, den Geltungsbereich der Rechenprogramme zu bewerten, das Rechenergebnis zu kontrollieren und bereits vor Beginn der Rechnung eine Vorstellung vom erwarteten Ergebnis zu haben.

Da die moderne Entwicklung zur verfeinerten Modellbildung tendiert, wurden drei Aspekte weiterhin hervorgehoben: Die Schulung des physikalischen Verständnisses, die Nutzung der Modalanalyse einschließlich der Empfindlichkeitsanalyse und die Anwendung computergestützter Methoden. Es sei betont, dass das Ziel der Berechnungen nicht nur die Zahlenangabe ist, sondern ein verbessertes Verständnis und die Fähigkeit, physikalisch begründete konstruktive Maßnahmen zu treffen.

Besonders danken möchte ich meinen ehemaligen Mitarbeitern, Herrn Dr.-Ing. Ludwig Rockhausen und Herrn Dr.-Ing. Dietrich Waldeck, mit denen ich fast drei Jahrzehnte in Lehre und Forschung fruchtbringend zusammenarbeitete und meinem Freund und Kollegen, Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Hans Heinrich Müller-Slany, für ihre fachkundigen Anregungen und hilfreichen Bemerkungen. Ihnen und meinem Sohn Friedmar danke ich für die geduldige Mitarbeit bei der Korrektur des Endmanuskripts. Für die Ausarbeitung einiger Beispiele bin ich meinen ehemaligen Mitarbeitern, den Herren Dr.-Ing. Klaus Kaltofen und Dr.-Ing. Paul Rodionow dankbar. Auch mit ihnen und mit Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Zehn führte ich viele anregende Gespräche während der Bearbeitung dieses Manuskriptes. Ein Lob möchte ich der engagierten Arbeit von Frau Richter und Herrn Dr.-Ing. Steffen Naake aussprechen, dank deren Mitwirkung das vorliegende Manuskript trotz aller meiner Sonderwünsche termingerecht und druckfertig an den Verlag übergeben werden konnte.

Inhaltsverzeichnis

0	Aufgaben und Gliederung der Maschinendynamik	1
1	Modellbildung und Kennwertermittlung	5
1.1	Einteilung der Berechnungsmodelle	5
1.1.1	Allgemeine Grundsätze	5
1.1.2	Beispiele	10
1.2	Bestimmung von Massenkennwerten	14
1.2.1	Übersicht	14
1.2.2	Masse und Schwerpunktlage	15
1.2.3	Trägheitsmoment um eine Achse	17
1.2.4	Trägheitstensor	21
1.3	Federkennwerte	25
1.3.1	Allgemeine Zusammenhänge	25
1.3.2	Maschinenelemente, Baugruppen	29
1.3.3	Gummifedern	35
1.3.4	Aufgaben A1.1 bis A1.3	37
1.3.5	Lösungen L1.1 bis L1.3	39
1.4	Dämpfungskennwerte	41
1.4.1	Allgemeine Zusammenhänge	41
1.4.2	Bestimmungsmethoden für Dämpfungskennwerte	47
1.4.3	Erfahrungswerte zur Dämpfung	50
1.5	Erregerkennwerte	54
1.5.1	Periodische Erregung	54
1.5.2	Nichtperiodische Erregung	57
1.5.3	Aufgaben A1.4 bis A1.6	61
1.5.4	Lösungen L1.4 bis L1.6	62
2	Dynamik der starren Maschine	65
2.1	Einleitung	65
2.2	Zur Kinematik eines starren Körpers	66
2.2.1	Koordinatentransformationen	66
2.2.2	Bewegungsgrößen	71
2.2.3	Kinematik des kardanisch gelagerten Kreisel	73
2.2.4	Aufgaben A2.1 und A2.2	74
2.2.5	Lösungen L2.1 und L2.2	75
2.3	Zur Kinetik des starren Körpers	79
2.3.1	Kinetische Energie und Trägheitstensor	79
2.3.2	Kräftesatz und Momentensatz	84

2.3.3	Kollergang	87
2.3.4	Aufgaben A2.3 und A2.4	92
2.3.5	Lösungen L2.3 und L2.4	93
2.4	Zur Kinetik der Mehrkörpersysteme	98
2.4.1	Mechanismen mit mehreren Antrieben	98
2.4.1.1	Zu räumlichen Starrkörper-Mechanismen	98
2.4.1.2	Bewegungsgleichungen eines Planetengetriebes	104
2.4.1.3	Kardanisch gelagerter Rotor	107
2.4.2	Ebene Mechanismen	110
2.4.2.1	Allgemeine Zusammenhänge	110
2.4.2.2	Hubwerksgetriebe	114
2.4.2.3	Viergelenkgetriebe	115
2.4.2.4	Großpresse	118
2.4.3	Bewegungszustände der starren Maschine	119
2.4.4	Lösung der Bewegungsgleichungen	121
2.4.5	Beispiel: Pressenantrieb	126
2.4.6	Aufgaben A2.5 bis A2.8	130
2.4.7	Lösungen L2.5 bis L2.8	133
2.5	Gelenkkräfte und Fundamentbelastung	139
2.5.1	Allgemeine Zusammenhänge	139
2.5.2	Berechnung der Gelenkkräfte	140
2.5.3	Berechnung der auf das Gestell wirkenden Kraftgrößen	143
2.5.4	Gelenkkräfte im Koppelgetriebe einer Verarbeitungsmaschine	146
2.5.5	Aufgaben A2.9 und A2.10	148
2.5.6	Lösungen L2.9 und L2.10	149
2.6	Methoden des Massenausgleichs	151
2.6.1	Aufgabenstellung	151
2.6.2	Auswuchten starrer Rotoren	151
2.6.3	Massenausgleich von ebenen Koppelgetrieben	158
2.6.3.1	Vollständiger und harmonischer Ausgleich	158
2.6.3.2	Massenausgleich beim Schubkurbelgetriebe	162
2.6.3.3	Harmonischer Ausgleich bei Mehrzylindermaschinen	163
2.6.3.4	Optimaler Massenausgleich	165
2.6.4	Aufgaben A2.11 bis A2.14	166
2.6.5	Lösungen L2.11 bis L2.14	168
3	Fundamentierung und Schwingungsisolierung	175
3.1	Vorbemerkungen	175
3.2	Fundamentbelastung bei periodischer Erregung	179
3.2.1	Minimalmodelle mit einem Freiheitsgrad	179
3.2.1.1	Modellbeschreibung	179
3.2.1.2	Harmonische Erregung	182
3.2.1.3	Periodische Erregung/Fourierreihe	186
3.2.2	Blockfundamente	189
3.2.2.1	Eigenfrequenzen und Eigenformen	189
3.2.2.2	Modellzerlegung bei Symmetrie	191
3.2.2.3	Ausführungsformen der Blockfundamente	194

3.2.3	Fundament mit zwei Freiheitsgraden – Schwingungstilgung . . .	197
3.2.4	Beispiel: Schwingungen eines Motor-Generator-Aggregates	201
3.2.5	Aufgaben A3.1 bis A3.3	204
3.2.6	Lösungen der Aufgaben L3.1 bis L3.3	206
3.3	Fundamente unter Stoßbelastung	208
3.3.1	Zur Modellierung von Schmiedehämmern	208
3.3.2	Berechnungsmodell mit zwei Freiheitsgraden	210
3.3.3	Periodische Erregung – Kumulationsfaktor	213
3.3.4	Aufgaben A3.4 bis A3.6	217
3.3.5	Lösungen L3.4 bis L3.6	218
4	Torsionsschwinger und Schwingerketten	223
4.1	Einleitung	223
4.2	Freie Schwingungen der Torsionsschwinger	228
4.2.1	Modelle mit zwei Freiheitsgraden	228
4.2.1.1	Lineare Torsionsschwinger mit zwei Freiheitsgraden . . .	228
4.2.1.2	Antriebssystem mit Spiel	230
4.2.2	Torsionsschwingerkette mit mehreren Freiheitsgraden	234
4.2.3	Zur Bewertung von Eigenfrequenzen und Eigenformen	238
4.2.4	Beispiele	241
4.2.4.1	Vierzylindermotor	241
4.2.4.2	Torsionsschwingungen einer Druckmaschine	242
4.2.4.3	Fahrzeug-Antriebsstrang	245
4.2.5	Aufgaben A4.1 bis A4.3	248
4.2.6	Lösungen L4.1 bis L4.3	250
4.3	Erzwungene Schwingungen diskreter Torsionsschwinger	257
4.3.1	Periodische Erregung	257
4.3.2	Beispiele	260
4.3.2.1	Motorradmotor	260
4.3.2.2	Fahrzeugantrieb mit Zweimassenschwungrad	263
4.3.2.3	Schrittgetriebe mit HS-Kurvenprofil	266
4.3.3	Transiente Erregung	270
4.3.3.1	Mehrere Momentensprünge	270
4.3.3.2	Anlauffunktionen	273
4.3.4	Aufgaben A4.4 bis A4.6	275
4.3.5	Lösungen L4.4 bis L4.6	277
4.4	Tilger und Dämpfer in Antriebssystemen	280
4.4.1	Einleitung	280
4.4.2	Auslegung eines ungedämpften Tilgers	281
4.4.3	Auslegung eines federgefedelten Dämpfers	283
4.4.4	Auslegung eines federlosen Dämpfers	287
4.4.5	Beispiele	288
4.4.5.1	Besonderheiten des Viskositätsdrehschwingungs- dämpfers	288
4.4.5.2	Zum Tilgerpendel	289

4.5	Parametererregte Schwingungen durch ungleichmäßig übersetzende Getriebe	292
4.5.1	Problemstellung/Bewegungsgleichung	292
4.5.2	Zur Lösung der Bewegungsgleichung, Stabilitätsverhalten	294
4.5.3	Beispiele	296
4.5.3.1	Transfer-Manipulator	296
4.5.3.2	Veränderliche Zahnsteifigkeit als Schwingungserregung	300
4.5.4	Aufgaben A4.7 und A4.8	303
4.5.5	Lösungen L4.7 und L4.8	304
5	Biegeschwinger	307
5.1	Zur Entwicklung der Problemstellungen	307
5.2	Grundlegende Zusammenhänge	308
5.2.1	Selbstzentrierung beim symmetrischen Rotor	308
5.2.2	Durchfahren der Resonanzstelle	311
5.2.3	Rotierende Welle mit Scheibe (Kreiselwirkung)	312
5.2.4	Biegeschwinger mit endlich vielen Freiheitsgraden	321
5.2.5	Beispiele	323
5.2.5.1	Eigenfrequenzen einer Milchzentrifuge	323
5.2.5.2	Aufprallen eines bewegten Balkens	328
5.2.6	Aufgaben A5.1 bis A5.3	329
5.2.7	Lösungen L5.1 bis L5.3	331
5.3	Massebelegter Balken	332
5.3.1	Allgemeine Zusammenhänge	332
5.3.2	Gerader Balken auf zwei Stützen	339
5.3.3	Abschätzungen von Dunkerley und Neuber	340
5.4	Zur Modellbildung bei Rotoren	341
5.4.1	Allgemeine Bemerkungen	341
5.4.2	Beispiel: Schleifspindel	344
5.5	Aufgaben A5.4 bis A5.6	345
5.6	Lösungen L5.4 bis L5.6	346
6	Lineare Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden	349
6.1	Einleitung	349
6.2	Bewegungsgleichungen	352
6.2.1	Massen-, Feder- und Nachgiebigkeitsmatrix	352
6.2.2	Beispiele	357
6.2.2.1	Gestell/Kraftgrößenmethode	357
6.2.2.2	Balkenelement/Deformationsmethode	359
6.2.2.3	Fahrzeug/Energiemethode	361
6.2.2.4	Tragwerk, bestehend aus Substrukturen	362
6.2.3	Aufgaben A6.1 bis A6.3	365
6.2.4	Lösungen L6.1 bis L6.3	366
6.3	Freie ungedämpfte Schwingungen	369
6.3.1	Eigenfrequenzen, Eigenformen, Eigenkräfte	369
6.3.2	Orthogonalität und Hauptkoordinaten	372
6.3.3	Anfangsbedingungen	374

6.3.4	Beispiele	377
6.3.4.1	Zur Modalanalyse von Maschinen	377
6.3.4.2	Stoß auf ein Gestell	382
6.3.4.3	Eigenschwingungen eines Tragwerkes	387
6.3.5	Aufgaben A6.4 bis A6.6	389
6.3.6	Lösung L6.4 bis L6.6	390
6.4	Struktur- und Parameteränderungen	393
6.4.1	Rayleigh-Quotient	393
6.4.2	Sensitivität von Eigenfrequenzen und Eigenformen	394
6.4.3	Reduktion von Freiheitsgraden	398
6.4.4	Einfluss von Zwangsbedingungen auf Eigenfrequenzen und Eigenformen	400
6.4.5	Beispiele zur Reduktion von Freiheitsgraden	403
6.4.5.1	Einfaches Gestell (von vier zu zwei)	403
6.4.5.2	Textilspindel (zur Sensitivität)	404
6.4.5.3	Tragwerk (Reduktion von zehn auf fünf)	408
6.4.6	Aufgaben A6.7 bis A6.9	411
6.4.7	Lösungen L6.7 bis L6.9	412
6.5	Erzwungene ungedämpfte Schwingungen	418
6.5.1	Allgemeine Lösung	418
6.5.2	Harmonische Erregung (Resonanz, Tilgung)	419
6.5.3	Instationäre Erregung (Rechteckstoß)	425
6.5.4	Beispiele	429
6.5.4.1	Gestell	429
6.5.4.2	Schwingförderer	430
6.5.5	Aufgaben A6.10 bis A6.12	431
6.5.6	Lösungen L6.10 bis L6.12	433
6.6	Gedämpfte Schwingungen	435
6.6.1	Zur Erfassung der Dämpfung	435
6.6.2	Freie gedämpfte Schwingungen	436
6.6.3	Harmonische Erregung	438
6.6.4	Periodische Erregung	444
6.6.5	Beispiele	447
6.6.5.1	Textilspindel	447
6.6.5.2	Riemengetriebe	448
6.6.6	Aufgaben A6.13 bis A6.16	452
6.6.7	Lösungen L6.13 bis L6.16	454
6.7	Beziehungen zur Systemdynamik	459
6.7.1	Einige Grundbegriffe	459
6.7.2	Zum Superpositionsprinzip	461
7	Einfache nichtlineare und selbsterregte Schwinger	463
7.1	Einführung	463
7.2	Nichtlineare Schwinger	465
7.2.1	Ungedämpfte freie nichtlineare Schwinger	465
7.2.2	Erzwungene Schwingungen bei harmonischer Erregung	468
7.2.2.1	Erste Harmonische bei nichtlinearer Federung	468

7.2.2.2	Superharmonische und Subharmonische beim ungedämpften Duffing-Schwinger	470
7.2.2.3	Erste Harmonische bei nichtlinearer Dämpfung	473
7.2.3	Beispiele	476
7.2.3.1	Schwingförderer mit gestuften Federn	476
7.2.3.2	Hochlauf und Bremsen einer Verarbeitungsmaschine mit nichtlinearer Kupplung	479
7.2.3.3	Selbstsynchronisation von Unwuchterregern	482
7.2.4	Aufgaben A7.1 und A7.2	486
7.2.5	Lösungen L7.1 und L7.2	486
7.3	Selbsterregte Schwinger	488
7.3.1	Allgemeine Zusammenhänge	488
7.3.2	Beispiele	489
7.3.2.1	Stick-Slip-Schwingungen	489
7.3.2.2	Flatterschwingungen einer angeströmten Platte	493
7.3.2.3	Rattern von Werkzeugmaschinen bei der Zerspanung	495
7.3.3	Aufgaben A7.3 und A7.4	498
7.3.4	Lösungen L7.3 und L7.4	499
8	Regeln für dynamisch günstige Konstruktionen	503
	Formelzeichen	509
	Literaturverzeichnis	513
	Sachverzeichnis	515

0 Aufgaben und Gliederung der Maschinendynamik

Aufgabe der Maschinendynamik ist es, die Erkenntnisse der Dynamik auf spezielle Probleme im Maschinenwesen anzuwenden. Ihre Entwicklung hängt eng mit den Entwicklungen im Maschinenbau zusammen.

Zuerst traten dynamische Probleme an den Kraft- und Arbeitsmaschinen auf. Torsionsschwingungen wurden an Kolbenmaschinen beobachtet, und Biegeschwingungen gefährdeten die Bauelemente der Turbinen. Die Klärung dieser Erscheinungen galt lange Zeit als einzige Aufgabe der Maschinendynamik, wie dies in den Standardwerken, z. B. [1], zum Ausdruck kommt.

Kenntnisse der Maschinendynamik werden aber auch bei der Entwicklung von Maschinen benötigt, die auf dynamischen Wirkprinzipien beruhen. Dazu gehören Hämmer, Roboter, Stampfer, Schwingförderer, Siebe, Vibratoren, Textilspindeln, Zentrifugen, u. a.

Mit der ständig wachsenden Arbeitsgeschwindigkeit und der Durchsetzung der Prinzipien des Leichtbaus auf den Gebieten der Verarbeitungsmaschinen, Landmaschinen, Werkzeugmaschinen, Druckmaschinen und Fördermaschinen traten hier dynamische Probleme in den Vordergrund. Um ihre Vielzahl beherrschen zu können, machte es sich erforderlich, die prinzipiellen Fragen herauszuschälen und unter weitestgehender Loslösung von der speziellen Maschine zu beantworten. Damit wurde die Maschinendynamik zu einem selbstständigen Wissenschaftsgebiet, das zum Rüstzeug eines jeden Maschinenbauingenieurs gehört.

Während man noch vor 50 Jahren der Meinung war, dass eine Beschäftigung mit Schwingungsproblemen nur wenigen Spezialisten vorbehalten bleibt, muss man heute von einer großen Zahl von Ingenieuren verlangen, dass sie eine genaue Vorstellung von den dynamischen Vorgängen in einer Maschine besitzen. Hochleistungsfähige Maschinen sind nicht nur nach statischen, sondern häufig in erster Linie nach dynamischen Gesichtspunkten zu dimensionieren. So hängt der Einsatz von Berechnungsverfahren der Betriebsfestigkeit von der Sicherheit der Lastannahmen ab, die aus einer maschinendynamischen Berechnung resultieren. Der Ingenieur muss also die Gesetzmäßigkeiten, nach denen sich periodische Dauerbelastungen, Stöße, Anfahr- und Bremsvorgänge in der Maschine auswirken, kennen.

Dabei ist jedoch die Arbeitsweise des Ingenieurs zu berücksichtigen. Sie wird durch die Forderung bestimmt, eine praktische Aufgabe in kurzer Zeit mit ökonomisch vertretbarem Aufwand zu lösen. Da er sich oft schnell entscheiden muss, kann nicht die wissenschaftliche Klärung von Einzelfragen abgewartet werden. Er muss vielmehr alles Erreichbare heranziehen und die Aufgabenlösung dem vorliegenden Stand anpassen. Eine wichtige Fertigkeit, die der Ingenieur beherrschen sollte, ist die, eine unvollkommene oder unvollständige Theorie anzuwenden, solange es keine bessere gibt. Dies setzt natürlich einen Fundus von Wissen voraus, zu dem nicht

immer die Kenntnis aller Gedankengänge, die zu einer Formel oder einem Rechenprogramm führen, gehört. Wichtig für ihn ist jedoch, den Geltungsbereich zu kennen und die Möglichkeit einer Überprüfung der Ergebnisse durch Abschätzungen zu nutzen.

Das folgende Schema in Bild 0.1 skizziert, welcher Weg bei der Lösung einer konstruktiven Aufgabe gegangen wird. Wünschenswert ist jemand, der den äußeren Weg gehen kann, also mit einem Blick auf die Maschine sieht (oder ihr anhört), welche Ursachen geändert werden müssen, um die gewünschte Wirkung zu erzielen. In Kapitel 8 sind einige allgemeine Regeln angegeben, auf die sich der Erfahrene stützen kann, aber sie sind unvollständig und deren Kenntnis genügt nicht, um alle Probleme zu lösen. Vereinfachend gesagt kommt es letzten Endes auf Entscheidungen an, bei einem konkreten Objekt etwas an der Struktur oder deren Parametern so zu ändern, damit etwas dynamisch besser funktioniert.

Da diese Auswahl von Entscheidungen nicht trivial ist, wird üblicherweise in den Schritten vorgegangen, die auf der linken Seite des Schemas angegeben sind. Wesentliche Schritte sind dabei, aus der konstruktiven (oder technologischen) Aufgabe eine mechanische Aufgabe zu erkennen und eine mathematische Aufgabe zu formulieren, was zum Gebiet der Modellbildung gehört. Man muss das physikalische Verhalten verstehen, bevor man ein Modell bildet. Kapitel 1 befasst sich mit Fragen der Modellbildung und Kennwertermittlung.

Im Laufe der vergangenen zwei Jahrzehnte ist auch in der Maschinendynamik die rechnergestützte Analyse mit handelsüblicher Software zur Norm geworden. Die vielen Mühen, die früher mit der Lösung der mathematischen Aufgaben verbunden waren, werden dem heutigen Ingenieur erspart. In den vergangenen Jahren sind die Interpretation der mathematischen Lösung und die Umsetzung mechanischer Wirkprinzipien in eine konstruktive Lösung immer wichtigere Ingenieuraufgaben geworden. Es können dynamische Erscheinungen jetzt besser vorausberechnet und genutzt werden, wie z. B. der dynamische Ausgleich, die Wirkungen von Kreiseln, Tilgern, Dämpfern und nichtlineare Einflüsse (z. B. Selbstsynchronisation).

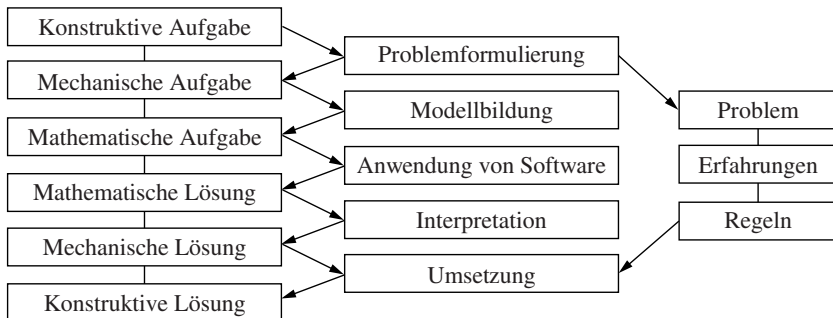


Bild 0.1 Aufgaben der Maschinendynamik

Bild 0.2 zeigt, wie die Maschinendynamik in Nachbargebiete eingebettet ist. Man könnte in ähnlicher Weise vielleicht die Rotordynamik [7] oder die Fahrzeugdynamik [25] einordnen, mit denen es vielfache Überschneidungen gibt. Im Gegensatz

zur Rotor- und Fahrzeugdynamik hat es die Maschinendynamik aber mit vielen unterschiedlichen Objekten und Problemen zu tun, angefangen bei den Maschinenelementen [21] bis zu komplexen Konstruktionen, wo (nicht nur wie bei der Fundamentierung) enge Beziehungen zur Baudynamik bestehen [18].

Die theoretische Basis der Maschinendynamik sind die Mathematik und Physik [30], dabei naturgemäß fast alle Gebiete der Technischen Mechanik [10], [28] und besonders der Schwingungslehre [5], [9], [15], [23]. Die Ergebnisse maschinendynamischer Untersuchungen haben Einfluss auf die Gestaltung und Auslegung realer Maschinen, wobei enge Verbindungen zur Konstruktionslehre, zu den Maschinenelementen, zur Betriebsfestigkeit, der Antriebstechnik und der Maschinenakustik bestehen. Praktisch sind die Antriebstechnik (für die Antriebe) [4], [8], [20] und die Baudynamik (für die Gestelle) [18], [24] die Nachbarn, wenn man die Maschine aus Sicht der Konstruktionslehre als eine Kombination von Antriebs- und Tragsystem ansieht.

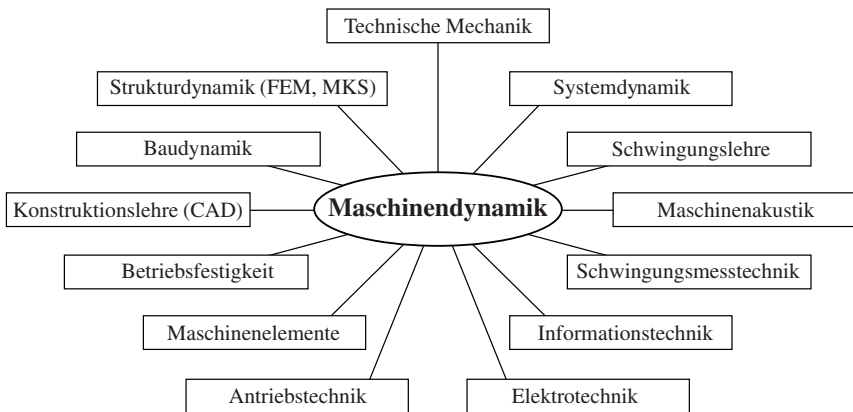


Bild 0.2 Zur Einordnung der Maschinendynamik

In der Maschinendynamik geht es immer um reale Objekte, die zeitlich veränderlich belastet sind, Effekten der Massenträgheit ausgesetzt sind oder diese nutzen und oft auch darum, Störungen und Schäden zu vermeiden. Die Erkenntnisse der Schwingungslehre bilden die Grundlage für das Verständnis vieler realer Erscheinungen. Die technische Entwicklung vieler Maschinen hat die Schwingungslehre insofern beeinflusst, als sie immer wieder neue Fragen aus der Praxis stellte, die mit dem bis dahin bekannten Theorienvorrat nicht beantwortet werden konnten.

Fragen der Modellbildung in der Maschinendynamik stehen im engen Zusammenhang mit der Systemdynamik [2], [13], [17] und der Schwingungsmesstechnik, aber auch mit Methoden der Beurteilung und Bewertung [14], [16] der Schwingungserscheinungen. Genutzt werden in der Maschinendynamik die Ergebnisse der Entwicklungen auf den Gebieten der Strukturmechanik [6] und Mehrkörperdynamik [3], [26], die sich oft – mithilfe der numerischen Mathematik umgesetzt – in handelsüblicher Software wieder finden. Nur durch die wechselseitige Vervollkommenung von Rechen- und Messtechnik lassen sich quantitative Verbesserungen der Berech-

nungsmodelle erzielen. Querverbindungen zur Elektrotechnik bestehen bei den elektrischen Antrieben und bei der Anwendung von Ergebnissen der Regelungstechnik und Informatik, wobei in der Maschinendynamik (im Gegensatz zur Mechatronik) die wesentliche Aufgabe die Beherrschung der Massenkräfte ist.

Ein eigenes Gebiet der Maschinendynamik ist die Sammlung und Ordnung bewährter Berechnungsmodelle und der zugehörigen Kennwerte, die als Eingabedaten für die Computerprogramme benötigt werden. Hoch entwickelte und erprobte Berechnungsmodelle realer Maschinen unterliegen bei den Firmen oft der Geheimhaltung. Sie sind als Ergebnis langer Entwicklungen sehr detailliert und aussagefähig. Auf Anfrage können sie (z. B. bei der Berechnung gewisser Maschinenelemente) meist auch von Außenstehenden genutzt werden.

Der Studierende und der Ingenieur in der Praxis müssen vor allem verstehen, was an Berechnungsmodellen hinter der handelsüblichen Software steckt, was der physikalische Hintergrund ist. Jeder sollte auch eine Vorstellung von den Größenordnungen der Massen, Federkonstanten, Dämpfungen, Kräften, Frequenzen usw. haben, mit denen er zu tun hat. Im vorliegenden Buch werden deshalb bei den meisten Aufgaben Parameterwerte benutzt, die „aus dem Leben“ gegriffen sind. Man sollte immer versuchen zu ahnen, was der Computer für Ergebnisse liefern wird. Mit einiger Übung lässt sich in der Berufspraxis oft erreichen, die Größenordnung realer Parameterwerte und Ergebnisse einer Berechnung vorauszusagen.

Im vorliegenden Lehrbuch wird aus Gründen der Fasslichkeit der Stoff vom Einfachen zum Komplizierten geordnet. Es wird darauf vertraut, dass aus dem Fach Technische Mechanik Grundkenntnisse vorhanden sind. Kapitel 2 enthält mit der Dynamik des starren Körpers vermutlich auch Bekanntes. Das Verständnis der Kräfteverhältnisse im Starrkörpersystem bildet die Grundlage für viele andere dynamische Erscheinungen. Spezielle Schwingungssysteme werden in den Kapiteln 3 bis 5 behandelt, die aber jeweils „klassische“ Gebiete der Maschinendynamik (Fundamentierung, Schwingungsisolierung, Torsions- und Längsschwingungen, Biegeschwingungen) mit ihren wesentlichen Anwendungen behandeln. Kapitel 6 wiederholt aus höherer Sicht einen Teil des in den Kapiteln 3 bis 5 dargestellten Stoffes, aber er beinhaltet mit der linearen Schwingungstheorie ein Gebiet, das bei vielen Maschinen anwendbar ist. Kapitel 7 gibt Einblick in einige nichtlineare Erscheinungen und in das Verhalten selbsterregter Schwinger, die Bedeutung im Maschinenbau haben. Die Regeln in Kapitel 8 sollen auf die qualitative Seite der Maschinendynamik hinweisen.

1 Modellbildung und Kennwertermittlung

1.1

Einteilung der Berechnungsmodelle

1.1.1

Allgemeine Grundsätze

Man benutzt Berechnungsmodelle in der Maschinendynamik meist aus drei Gründen:

1. Zeit- und Kostenersparnis bei der Entwicklung neuer oder verbesserter Erzeugnisse dadurch, dass an Stelle teurer Versuchsstände (oder Messungen an der realen Maschine, deren Betrieb man unterbrechen muss) die dynamische Simulation am Computer erfolgen kann.
2. Hilfe bei der Klärung physikalischer Ursachen für störende Erscheinungen (z. B. Resonanzschwingungen, Brüche, Lärm) oder gewünschter Effekte (z. B. Tilgung).
3. Ermittlung optimaler Parameterwerte hinsichtlich der jeweiligen speziellen Kriterien (z. B. Materialaufwand, Energiebedarf, Steifigkeit, Arbeitsschutz, Lebensdauer, Zuverlässigkeit).

In den vergangenen Jahren haben die Möglichkeiten zur modellgestützten Analyse an Bedeutung gewonnen, da sich durch die Leistungsfähigkeit der Computer und der Software der zeitliche und finanzielle Aufwand für Simulationsrechnungen bedeutend vermindert hat. Demgegenüber sind Prüfstandversuche zeit- und kostenintensiv geblieben.

Dem Ingenieur muss also ein bestimmter „Modellvorrat“ zur Verfügung stehen, für den er Software kennt und deren Behandlung er beherrscht.

Man muss zur Kenntnis nehmen, dass es eine „Berechnung der Maschine“ nicht gibt, sondern die erste Aufgabe in der Bereitstellung eines Berechnungsmodells besteht. Die dafür angewendeten Methoden richten sich danach, ob als Ausgangsmaterial die Konstruktionsunterlagen oder Messungen an einer Maschine vorliegen.

Geht man von den Konstruktionsunterlagen aus, so muss als erstes eine *Struktur* definiert werden. Man versteht darunter die gegenseitigen Kopplungen der Elemente (Topologie) und den Aufbau des Berechnungsmodells aus den Elementen

Masse: Speicher für kinetische Energie

Feder: Speicher für potenzielle Energie

Dämpfer: Elemente zur Wandlung von mechanischer Energie in Wärmeenergie

Erreger: Elemente zur Energiezufuhr aus einer Energiequelle.

Liegt die Struktur fest, müssen deren Parameter definiert werden. Unter **Parameter** versteht man dabei eine geometrische oder physikalische Größe, die mit einem Buchstaben bezeichnet wird und in dem Berechnungsmodell vorkommt. Strukturfestlegung bedeutet hauptsächlich: Auswahl der Parameter, die auf eine bestimmte Erscheinung Einfluss haben. Die Anzahl K der Parameter ist neben der Anzahl n der Freiheitsgrade das wesentliche Merkmal eines Berechnungsmodells. Mit der Auswahl der Parameter wird entschieden, wie die räumlichen und zeitlichen Grenzen des Modells (Energiequelle) gewählt und welche internen Wechselwirkungen berücksichtigt werden. Bei der theoretischen Modellbildung, die von den Konstruktionsunterlagen ausgeht, sind z. B. Längen, Übersetzungsverhältnisse, Massen, Feder- und Dämpferkonstanten und Koeffizienten der kinematischen oder dynamischen Erregungen die Parameter. Man muss begrifflich unterscheiden zwischen Parametern, Parameterwerten, dimensionslosen Kenngrößen und Kennzahlen.

Parameterwerte (oder „Kennwerte“) enthalten die Daten der Parameter, also Zahlenwerte und Maßeinheiten. Ein konkretes Modell wird durch seine Parameterwerte, die man im Parametervektor zusammenfassen kann, charakterisiert, aus denen sich dann z. B. die Elemente der Massen- und Steifigkeitsmatrix ergeben. Solche Parameterwerte sind bei Beispielen und Aufgaben in allen Kapiteln angegeben, vgl. Abschnitt 2.4.5, 3.2.4, 4.2.4.1 oder z. B. A2.5, A3.3, A4.1, L5.5, A6.16 sowie Bild 4.13. Die theoretische oder experimentelle Bestimmung der Parameterwerte gehört zu den Aufgaben der Modellbildung und wird in den Abschnitten 1.2 bis 1.5 behandelt.

Vor allem in der Steifigkeits- und Dämpfungsbestimmung ist man weitgehend auf Erfahrungen, die aus Messungen resultieren, angewiesen. Liegen zu Beginn der Modellbildung Messungen an einer Maschine vor, zeigt sich oft, dass nur wenige Eigenfrequenzen und Schwingformen eine Rolle spielen. Es ist deshalb eine wesentliche Aufgabe, ein Modell zu finden, das mit der geringsten Anzahl von Freiheitsgraden eine zutreffende Aussage über das dynamische Verhalten des Systems mit abgestecktem Gültigkeitsbereich ermöglicht.

Die experimentelle Modellbildung (oder auch Identifikation) geht von Messungen an Maschinen aus. Sie wird wesentlich vom Stand der Messtechnik bestimmt und bildet die Erfahrungsgrundlage für die analytische Modellbildung. Sie geht in wesentlichen Zweigen auf Verfahren der Systemtheorie zurück und versucht Aussagen sowohl über Strukturen als auch über deren Parameterwerte zu machen.

Als Parameterwerte, die bei der experimentellen Modellbildung anfallen, kann man neben den einem Bauelement zugeordneten „lokalen“ auch „globale Parameterwerte“ des Gesamtsystems auffassen, wie die identifizierten Eigenfrequenzen und Eigenformen, die sich z. B. bei der experimentellen Modalanalyse zeigen. Deren Zahlenwerte charakterisieren ein Realsystem. Ein Berechnungsmodell kann daran geprüft werden, inwiefern die auf verschiedenen Wegen ermittelten Parameterwerte übereinstimmen.

Aus den (meist dimensionsbehafteten) Parametern können stets **dimensionslose Kenngrößen** (Ähnlichkeitskennzahlen) gebildet werden. Normalerweise lassen sich in der Maschinendynamik aus K Parametern insgesamt $(K - 3)$ dimensionslose Kennzahlen (Zahlenwert einer Kenngröße) bilden [4]. Berechnungsmodelle mit gleicher Struktur und gleichen dimensionslosen Kenngrößen sind physikalisch ähnlich. Die Modellgesetze der Ähnlichkeitsmechanik muss man beim Bau vergrößerter oder verkleinerter realer Modelle beachten. Man kann sie auch bei der numerischen

Rechnung und der Ergebnisdarstellung nutzen. Mithilfe dimensionsloser Kenngrößen lassen sich, wie in der Strömungsmechanik, auch in der Maschinendynamik theoretisch oder experimentell gewonnene Ergebnisse verallgemeinern. Dies gilt z. B. für die Gewinnung von Aussagen über das dynamische Verhalten der Baureihen von Maschinenelementen oder Maschinen.

Bekanntlich liegen beim Berechnungsmodell des harmonisch erregten Einmassenschwingers $K = 7$ ursprüngliche physikalische Größen (m, c, b, F, Ω, t, x) vor, aus denen man für die Ergebnisdarstellung $K - 3 = 4$ dimensionslose Kenngrößen ($2D = b/\sqrt{mc}$; $\eta = \Omega \sqrt{m/c}$; $\tau = \Omega t$; $\xi = cx/F$) bildet. Dimensionslose Kenngrößen werden z. B. in (1.140), (4.181), (5.58), Bild 4.5, Bild 4.36, Bild 5.17, Bild 6.24 und (7.25) definiert.

In einigen Industriezweigen sind oft komplizierte Berechnungsmodelle üblich. Diese sind in jahrzehntelanger Wechselwirkung zwischen Rechnung und Messung entwickelt worden. Das trifft z. B. auf den Turbinenbau, Schiffbau, Fahrzeugbau und die Luft- und Raumfahrttechnik zu, wo hunderte von Mannjahren in die Entwicklung zutreffender Berechnungsmodelle und deren Umsetzung in ergebnisorientierte Spezialprogramme investiert wurden.

Im allgemeinen Maschinenbau sind für viele Objekte und Vorgänge noch keine ausreichenden Berechnungsmodelle vorhanden. Der Prozess der Modellbildung ist bei vielen Baugruppen gegenwärtig in vollem Gange.

Man kann die Berechnungsmodelle in der Maschinendynamik *drei Modellstufen* zuordnen:

1. zwangsläufiges System starrer Körper („Starre Maschine“)
2. lineares Schwingungssystem (freie Schwingung oder Zwangserregung)
3. nichtlineares oder selbsterregtes System.

Die zwangserregten Schwingungssysteme kann man noch in erzwungene und parametererregte einteilen. Diese Einteilung lässt sich unter den drei Aspekten

- physikalisch (nach der Herkunft und Intensität der Energiezufuhr)
- mathematisch (nach der Komplexität der Gleichungen) und
- historisch (nach der Entstehungsgeschichte des Problems)

begründen.

Ein reales Objekt (Realsystem), also eine Maschine oder deren Baugruppe, kann nicht automatisch einem dieser Berechnungsmodelle zugeordnet, sondern auf alle drei Modellstufen abgebildet werden, je nachdem, welchen konkreten Belastungs- und Bewegungsverhältnissen es unterliegt. Die Energiequelle wird von der niederen zur höheren Stufe immer genauer modelliert.

Auf der Stufe 1 und Stufe 2 sind Bewegungs- oder Kraftgrößen als Funktion der Zeit vorgegeben, die unbeeinflusst von der Reaktion des Modells bleiben. In Stufe 3 ist schließlich die Energiequelle Bestandteil des autonomen Systems. Es ist dann erforderlich, auch eine Modellbildung des Motors (z. B. für elektrische Baugruppen) vorzunehmen.

Dabei stellt Modellstufe 3 das autonome System dar, von dem die Modelle der anderen Stufen deduktiv ableitbar sind. Man kann zeigen, dass unter vereinfachenden Annahmen die jeweils niedere Stufe eine Näherung der höheren Stufe ist, d. h., mit dem Modell der höheren Stufe lassen sich die Effekte prinzipiell realitätsnaher als mit den Modellen der tieferen Stufen beschreiben.

Bei vielen Objekten begann eine Modellierung mit einem zwangsläufigen Mechanismus, vgl. Kapitel 2. Dies hängt auch damit zusammen, dass die historische Entwicklung jeder Maschine bei niederen Geschwindigkeiten beginnt. Beim Hochlauf eines Antriebssystems von null auf die Maximaldrehzahl werden gewissermaßen auch die verschiedenen („historischen“) Modellstufen vom Einfachen zum Komplizierten durchlaufen. Bei niederen Geschwindigkeiten verhält sich das Objekt wie ein zwangsläufiges System, während man das nichtlineare Verhalten spätestens bei der Zerstörung des Objekts vorführen kann. Dieser Fall muss übrigens bei der Rekonstruktion von Schadensfällen manchmal ernsthaft analysiert werden.

Ein Starrkörpersystem (Modell „starre Maschine“) ist durch geometrische Abmessungen und Masseparameter beschreibbar. Kapitel 2 dieses Buches widmet sich Objekten, welche der Modellstufe 1 entsprechen. Zur Abgrenzung des Geltungsbereichs des Starrkörpermodells gegenüber dem des Schwingungssystems gibt es zwei einfache Kriterien:

1. Bei periodischen Erregungen ist das Starrkörpersystem („Modell der starren Maschine“) für den stationären Zustand als Modell anwendbar, wenn es „langsam“ erregt wird. Dies bedeutet bei periodischen Erregungen, dass die *höchste Erregerfrequenz* $f_{\max} = k\Omega/(2\pi)$, die noch eine bedeutsame Amplitude im Fournierspektrum aufweist, wesentlich kleiner als die niedrigste Eigenfrequenz f_1 des realen Objekts sein muss. Also lautet das Kriterium:

$$k\Omega \ll \omega_1 = 2\pi f_1 \quad (1.1)$$

mit der Grundkreisfrequenz Ω der Erregung und der Ordnung k der höchsten relevanten Harmonischen.

2. Bei instationären Erregungen, also den typischen Anfahr-, Brems-, Beschleunigungs- oder Verzögerungsvorgängen, ist das Modell des Starrkörpersystems anwendbar, so lange die einwirkende Kraft sich „langsam“ ändert, d. h. wenn die größte Schwingungsdauer T_1 des realen Objekts bedeutend kleiner als die *Anlaufzeit* t_a der einwirkenden Kraft- oder Bewegungsgröße ist. Als Kriterium gilt:

$$\frac{1}{f_1} = T_1 \ll t_a \quad (1.2)$$

In Tabelle 1.1 sind die wesentlichen Parameter aufgeführt, welche üblicherweise zu den jeweiligen Modellstufen gehören.

Ein wesentliches Kennzeichen der *Schwingungssysteme* (Modellstufe 2) ist die Anzahl ihrer Freiheitsgrade. Sie richtet sich einerseits danach, welche physikalischen Effekte zu berücksichtigen sind, wie viele Eigenformen (Moden) bei einem linearen System tatsächlich angeregt werden, aber auch danach, wie genau man die räumliche Auflösung des Belastungs- und Deformationsverhaltens bestimmen will.

Es muss gewährleistet sein, dass der Erregerfrequenzbereich innerhalb des Eigenfrequenzbereichs des Modells liegt. Deshalb gilt das Kriterium:

Das Modell eines Schwingungssystems soll Eigenfrequenzen bis oberhalb der höchsten Erregerfrequenz besitzen.

Tabelle 1.1 Typische Parameter der drei Modellstufen

Stufe	gegebene Parameter	berechenbare Größen
1	geometrische Abmessungen (Längen, Winkel, Übersetzungsverhältnisse), Masseparameter, kinematische Bewegungsabläufe und/oder Antriebskraftgrößen	reduziertes Trägheitsmoment, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Starrkörperbewegungen, Gelenk- und Lagerkräfte, Fundamentbelastung, Antriebs- oder Bremsmoment
2	Längs- und Drehfederkonstanten, Biegesteifigkeit, Längs- und Drehdämpferkonstanten, Materialkennwerte, zeitliche Erregerkraftverläufe, Fourierkoeffizienten bei periodischer Erregung, zeitliche Veränderung der Parameter	Eigenfrequenzen und Eigenformen, Zeitverläufe der Kraft- und Bewegungsgrößen bei erzwungenen Schwingungen, Resonanzstellen höherer Ordnung (kritische Drehzahlen), Ortskurven, Instabilitätsbereiche parametererregter Schwingungen, Tilgung
3	geschwindigkeitsabhängige Lagerdaten (Ölfilm-Einfluss), Reibwerte, Kennlinien der Motor- und Bremsmomente, nichtelastisches Materialverhalten (viskos, plastisch), nichtlineare geometrische und stoffliche Kennwerte	nichtlineare Schwingungen, selbsterregte Schwingungen, Kombinationsresonanzen, Grenzykel, Wechselwirkung zwischen Schwingungssystemen und Energiequelle, amplitudenabhängige Eigenfrequenzen, nichtlineare Wechselwirkungen

Selbsterregte Schwinger (Modellstufe 3) werden meist als Systeme mit wenigen Freiheitsgraden behandelt. Es sind stets nichtlineare Systeme, wobei die Stabilitätsgrenzen oft schon mit linearen Systemen ermittelt werden können, vgl. Abschnitt 7.3.

Man sollte bei jeder Modellbildung mit einem *Minimalmodell* beginnen. Dieses Berechnungsmodell, mit dem die Modellbildung für ein reales Objekt gestartet wird, ist dadurch charakterisiert, dass es

- bewusst räumlich und/oder zeitlich eng begrenzt ist
- nur eine kleine Anzahl von Freiheitsgraden besitzt
- nur wenige („robuste“) Parameter berücksichtigt
- wesentliche physikalische Vorgänge qualitativ richtig erfasst
- mit relativ wenig Aufwand auswertbar ist (Variantenvergleich)
- qualitativ (und quantitativ tendenziell) richtige Aussagen liefert.

Ein Minimalmodell ist dazu geeignet, eine erste Hypothese zu prüfen und Anregungen für weitere theoretische und experimentelle Schritte zu geben. Man kann, je nach den Ansprüchen, das Minimalmodell beibehalten oder, davon ausgehend, nach jedem Schritt aufgrund der Zwischenergebnisse über den weiteren Fortgang der Modellbildung entscheiden.

In der Regel ist der Grad des Verständnisses einer Erscheinung umgekehrt proportional zur Anzahl der verwendeten Freiheitsgrade und Modellparameter. Minimalmodelle sind übersichtlich und überschaubar. Man muss wissen, dass die Einführung zu vieler Parameter eine unrichtige (zufällige) Übereinstimmung zwischen Ergebnissen der Modellberechnung und eines Experiments vortäuschen kann. Fälschlicherweise wird manchmal daraus die „Richtigkeit“ des Modells gefolgert. Es besteht psychologisch auch die Gefahr, dass man die mit komplizierten Modellen

und großen Computerprogrammen gewonnenen Rechenergebnisse für besonders wertvoll hält. Dabei darf man aber nicht vergessen, wie ungenau die meisten Eingabedaten und wie sensibel die Resultate sind. Man erhält normalerweise weder bei den Messungen noch bei Modellberechnungen Ergebnisse, welche auf drei Ziffern genau richtig sind. Wenn in den folgenden Abschnitten mehr als drei Ziffern angegeben sind, dann hat das meist mathematische Gründe.

1.1.2

Beispiele

Das Problem der Modellbildung soll zunächst am Beispiel eines Turmkrans erläutert werden, vgl. Bild 1.1. Schon seit langem gibt es Berechnungsmodelle für Krane, um die Festigkeit der Bauteile gegen Bruch und um die Standsicherheit nachzuweisen. Dynamische Kräfte, die beim Beschleunigen der Hublast offensichtlich entstehen, wurden – historisch gesehen – zunächst durch eine zusätzliche Beschleunigung a an der Masse der Last erfasst, also mit Modellstufe 1 gerechnet, vgl. Bild 1.1b.

Erst in der Mitte des 20. Jahrhunderts, nachdem bei mit solchen Lastannahmen berechneten Kranen Schadensfälle auftraten, wurden Turmkrane als Schwingungssysteme behandelt, von denen Bild 1.1c ein Beispiel zeigt. Damit gelang schon mit einfachen Berechnungsmodellen die qualitativ richtige Erfassung der realen Schwingungsvorgänge. Sie sind dadurch gekennzeichnet, dass die oben liegenden Massen des Turms horizontal schwingen und damit den Turm im unteren Teil durch zusätzliche dynamische Biegemomente belasten, die nicht einfach der angehängten Last proportional sind, wie es mit der ersten Modellstufe vorausgesetzt wurde. Man beachte den unterschiedlichen Anteil der dynamischen Momente an Stelle 1 und Stelle 2 des Krans in Bild 1.1c. Schon mit diesem einfachen Berechnungsmodell konnte erklärt werden, warum es aus Sicht der Dynamik vorteilhafter ist, das Gegengewicht unten anzubringen (da schwingt es nicht mit) – solche Krane waren auch seltener zu Schaden gekommen. Gegenwärtig werden sehr komplizierte Berechnungsmodelle für Krane benutzt, bei welchen alle tragenden Teile sehr genau modelliert werden (Leichtbau) und die Kopplung zwischen Antrieben, Maschinenbau und Stahlbau berücksichtigt wird.

Das zweite Beispiel soll die Problematik der Berechnungsmodelle für Zahnradgetriebe erläutern. Bild 1.2 zeigt die Konstruktionszeichnung eines Stirnradgetriebes. Einige der dafür verwendbaren Berechnungsmodelle zeigt Tabelle 1.2, die dort vom Einfachen zum Komplizierten geordnet sind. Man beachte, wie die Anzahl der Freiheitsgrade und Parameter, die auf der rechten Seite genannt sind, von Stufe zu Stufe immer größer wird. Welches der Modelle geeignet ist, hängt von der jeweiligen Zielstellung ab. Man kann damit die in Tabelle 1.1 bei den jeweiligen Stufen genannten Größen berechnen.

Mit dem Modell der Stufe 1 wurde bereits eine Trennung in starre Zahnräder (Trägheitsmomente) und starre masselose Wellen vorgenommen. Bei diesem Modell treten alle inneren Momente zeitgleich auf, es gibt keine Schwingungen, die zeitlich veränderlichen Momente folgen der kinetostatischen Momentenverteilung, vgl. dazu auch Bild 4.1.

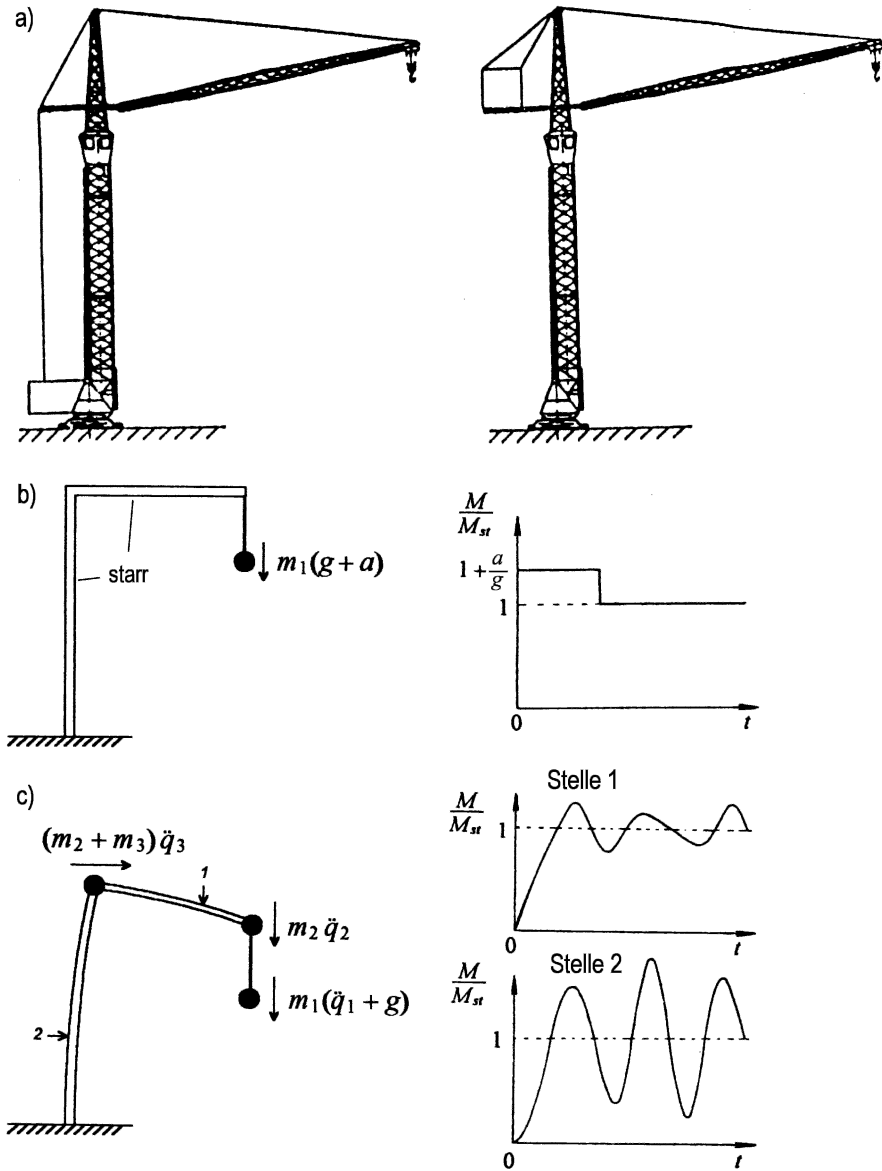


Bild 1.1 Turmkran

a) Skizze des Realsystems

b) Berechnungsmodell "Starrkörpersystem"

c) Minimalmodell für Schwingungssystem mit typischen gemessenen Momentenverläufen

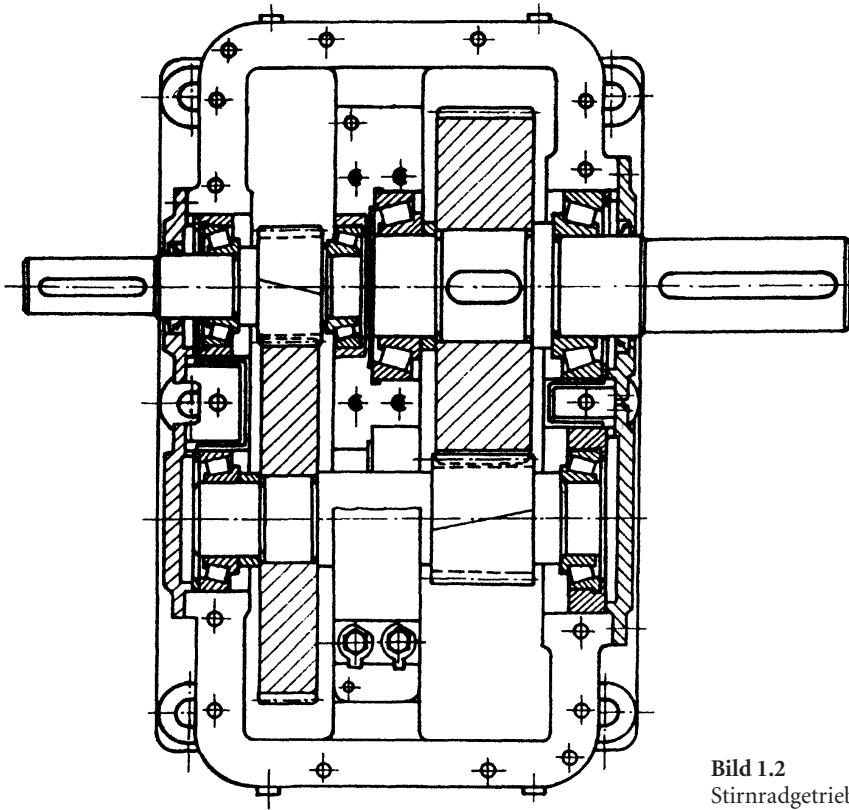


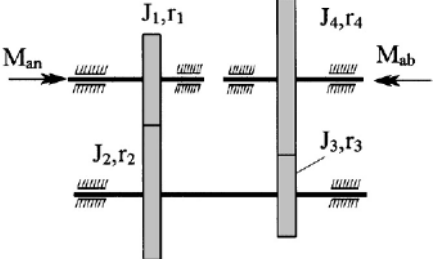
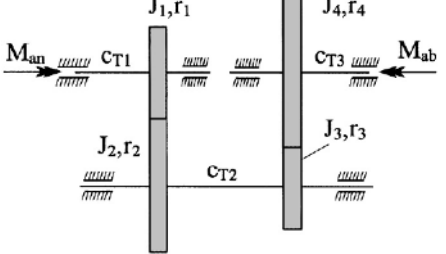
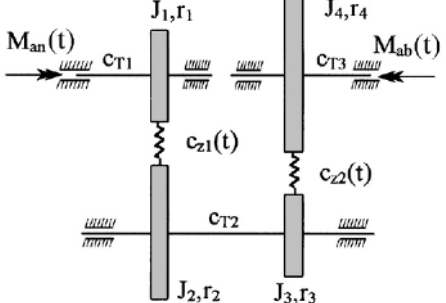
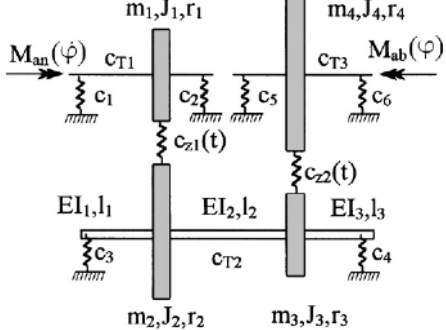
Bild 1.2
Stirnradgetriebe

Mit dem Modell der Stufe 2a liegt ein klassisches Modell eines zwangserregten Torsionsschwingungssystems vor, mit dem die Eigenfrequenzen, Eigenformen und dynamischen Momente berechnet werden können, vgl. Abschnitt 4.2 bis 4.4. Dabei kann die Ermittlung der realen Torsionssteifigkeiten ein Problem sein, vgl. Tabelle 1.5. Mit dem Modell der Stufe 2b wird die Parametererregung berücksichtigt, die durch die zeitlich veränderlichen Zahnsteifigkeiten entsteht, vgl. Bild 1.12 und Abschnitt 4.5.3.2.

Mit dem in Tabelle 1.2 unten angegebenen Modell wird die Kopplung der Torsions- und Biegeschwingungen der Wellen mit den elastischen Lagern berücksichtigt, was noch im Rahmen der linearen Theorie bleibt, vgl. Aufgabe A6.6. Dabei spielen auch die Massen der Zahnräder eine Rolle. Werden aber die nichtlinearen Kennlinien des Antriebs- und des Abtriebsmomentes und der Lagerfedern berücksichtigt, so liegt ein Berechnungsmodell der Stufe 3 vor, vgl. dazu auch Abschnitt 4.5.3.2.

Man hat noch viel kompliziertere Berechnungsmodelle für Zahnradgetriebe aufgestellt, bei denen z. B. die Kennlinien der Lager, der Zahnräder und die Schwingungen der Gehäusewände im akustischen Frequenzbereich enthalten sind. Ein zwar aus einem andern Gebiet stammendes, aber in der Kompliziertheit vergleichbares Modell zeigt dazu Bild 6.6.

Tabelle 1.2 Berechnungsmodelle eines Zahnradgetriebes

	Modellstufe	Modellelemente, Parameter
1		Starrkörper-Modell (starre Scheiben, starre Wellen) Parameter $J_1, J_2, J_3, J_4, r_1, r_2, r_3, r_4,$ M_{an}, M_{ab} Freiheitsgrad $f = 1$
2a		Torsionsschwinger (starre Scheiben, torsionselastische Wellen) Parameter $J_1, J_2, J_3, J_4, r_1, r_2, r_3, r_4,$ $c_{T1}, c_{T2}, c_{T3}, M_{an}, M_{ab}$ Freiheitsgrad $f = 2$
2b		Torsionsschwinger mit Parametererregung (starre Scheiben, torsionselastische Wellen, veränderliche Zahnsteifigkeit) Parameter $J_1, J_2, J_3, J_4, r_1, r_2, r_3, r_4,$ $c_{T1}, c_{T2}, c_{T3}, c_{z1}(t), c_{z2}(t),$ $M_{an}(t), M_{ab}(t)$ Freiheitsgrad $f = 4$
3		Schwingungssystem mit endlich vielen Freiheitsgraden und Parametererregung (starre Scheiben, torsionselastische Wellen, veränderliche Zahnsteifigkeit, Biegesteifigkeit der Wellen, Lagersteifigkeit) Parameter $J_1, J_2, J_3, J_4, r_1, r_2, r_3, r_4,$ $c_{T1}, c_{T2}, c_{T3}, c_{z1}(\varphi), c_{z2}(\varphi),$ $M_{an}(\varphi), M_{ab}(\varphi)$ Freiheitsgrad $f = 8$ (eben)

1.2

Bestimmung von Massenkennwerten

1.2.1

Übersicht

Um das dynamische Verhalten eines starren Körpers beschreiben zu können, müssen seine zehn Masseparameter bekannt sein: Masse (m), Lage des Schwerpunktes (ξ_s, η_s, ζ_s), Lage der Trägheitshauptachsen und Hauptträgheitsmomente oder der Trägheitstensor ($J_{\xi\xi}, J_{\xi\eta}, J_{\xi\zeta}, J_{\eta\eta}, J_{\eta\zeta}, J_{\zeta\zeta}$).

Je nachdem, ob der Körper durch Konstruktionsunterlagen beschrieben wird, oder als reales Objekt vorliegt, werden verschiedene Verfahren zur Ermittlung der Kennwerte verwendet, vgl. Tabelle 1.3.

Tabelle 1.3 Verfahren zur Ermittlung von Massenkennwerten

Parameter	Bestimmung nach Realsystem	Bestimmung nach Zeichnung
Masse	Wägung Frequenzmessungen	Volumenbestimmung, Dichte, Zerlegung in Elementarkörper
Schwerpunkt	a) Bestimmung der Massenverteilung b) Ausbalancieren, Aushängen c) Doppelpendelung als physikalisches Pendel	Ermittlung des Gesamtschwerpunktes mithilfe der Einzelschwerpunkte von Elementarkörpern
Trägheitsmoment um eine vorgegebene Achse	Rotationskörper:	
	a) Torsionsstabaufhängung b) Mehrfadenaufhängung c) Rollpendel	a) Zerlegung in Ring- und Scheibenelemente, Bestimmung mit den Einzelträgheitsmomenten
	beliebige Körper:	
	d) Doppelpendelung als physikalisches Pendel	b) Zerlegung in Elementarkörper c) Zylinderschnittverfahren
Trägheitstensor	Pendeln um mehrere Achsen	CAD-Programm

Die analytischen Verfahren zur Bestimmung aus den Konstruktionsunterlagen beruhen stets auf einer Zerlegung in Elementarkörper (Ring, Scheibe, Quader, Kugel, Beispiel: vgl. Bild 1.6). Für die Bestimmung der Trägheitsmomente werden z. B. Zylinderschnitte mit der Bezugsachse des Trägheitsmoments als Zylinderachse verwendet.

Masseparameter der starren Körper werden als Eingabedaten für Computerprogramme benötigt. Die Genauigkeit dieser Parameterwerte (Eingabedaten) ist von großer Bedeutung, da von ihr die Genauigkeit der zu berechnenden Kraftgrößen und Bewegungsgrößen (Ausgabedaten) abhängt. Nicht immer ist die Berechnung der Masseparameter aus den Daten der geometrischen Strukturbeschreibung in einem CAD-Programm (und den angegebenen Dichten für die Werkstoffe) genau genug möglich. Für Maschinenbauteile, die eine komplizierte geometrische Form haben und/oder aus verschiedenen Materialien bestehen, deren Dichte nicht genau bekannt

ist, ist die Berechnung der Masseparameter schwierig. Manchmal braucht man auch Vergleichswerte, um die Exemplarstreuung bei einem Massenprodukt zu ermitteln. Deshalb besteht oft die Aufgabe, für ein konkretes reales Bauteil die Masseparameter experimentell zu bestimmen.

1.2.2

Masse und Schwerpunktlage

Die Bestimmung der Masse m ist meist durch Wägung problemlos möglich, aber nicht immer. Die Masse eines Einmassenschwingers, die sich nicht von der Feder trennen lässt, kann man indirekt bestimmen. Dazu braucht man die Eigenkreisfrequenz im ursprünglichen Zustand (ω_0^2) und eine Eigenfrequenz nach einer definierten Parameteränderung.

Bringt man eine Zusatzmasse Δm an oder versteift man durch eine Zusatzfeder mit der Federkonstante Δc , ändert sich die Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_m^2 = \frac{c}{m + \Delta m} = (2\pi f_m)^2; \quad \omega_c^2 = \frac{c + \Delta c}{m} = (2\pi f_c)^2. \quad (1.3)$$

Aus der Größe der Zusatzmasse oder -federkonstante und den gemessenen Eigenfrequenzen kann man die ursprüngliche Masse bestimmen, denn aus (1.3) lassen sich durch eine kurze Umformung folgende Gleichungen gewinnen:

$$m = \frac{\omega_m^2 \Delta m}{\omega_0^2 - \omega_m^2} = \frac{f_m^2 \Delta m}{f_0^2 - f_m^2}; \quad m = \frac{\Delta c}{\omega_c^2 - \omega_m^2} = \frac{\Delta c}{4\pi^2(f_c^2 - f_0^2)}. \quad (1.4)$$

Die Genauigkeit der Masse m hängt wesentlich von der Genauigkeit der Frequenzmessung ab. Es ist deshalb ratsam, die Messungen mehrfach zu wiederholen, um einen Mittelwert bilden zu können. Analog kann man zur Bestimmung von Trägheitsmomenten bezüglich einer vorgegebenen Achse vorgehen, vgl. Bild 1.7.

Statische Verfahren werden zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes angewendet. Die einfachste Methode ist das Aushängen. Da sich der Schwerpunkt eines frei aufgehängten Körpers immer unter dem Aufhängepunkt befindet, ist eine durch den Aufhängepunkt gehende senkrechte Achse die Schwerpunktachse. Für zwei Aufhängepunkte, die nicht auf einer gemeinsamen Schwerpunktachse liegen, ergibt sich der Schwerpunkt als Schnittpunkt dieser Achsen. Der Schnittpunkt der Vertikalen lässt sich nach dem Aufhängen an mehreren Punkten anhand von Fotos (oder fotogrammetrisch) ermitteln.

Für kleine Teile wird das Ausbalancieren angewendet. Legt man das Teil auf eine Schneide, so spürt man deutlich, wenn der Schwerpunkt über der Schneide liegt. Für größere Körper, beispielsweise Krane und Kraftfahrzeuge, wird häufig die Bestimmung der Massenverteilung durch Ermittlung von Auflagekräften vorgenommen. Bild 1.3 zeigt die Ermittlung an einem Pleuel. Hat man die Auflagekraft zu $m_1 g$ bestimmt, so folgt für den Schwerpunktabstand

$$\xi_s = \frac{m_1 l}{m}. \quad (1.5)$$

Für das symmetrische Pleuel war eine Schwerpunktachse durch die Symmetrielinie gegeben. Ist das nicht der Fall, kann durch Schrägstellen der Körperachse die noch fehlende zweite Schwerpunktachse gefunden werden.

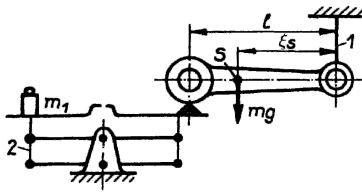


Bild 1.3 Schwerpunktbestimmung durch Ermittlung der Massenverteilung (1 Faden; 2 Waage)

Am Beispiel der Schwerpunktbestimmung an einem Kraftfahrzeug soll das demonstriert werden. Nach Bild 1.4 sind gegeben: $l = 2450 \text{ mm}$; $h = 500 \text{ mm}$; $d = 554 \text{ mm}$. Gemessen wurde

a) in horizontaler Lage $F_1 = 4840 \text{ N}$

b) in gekippter Lage $F_2 = 5090 \text{ N}$

Das Gesamtgewicht beträgt $F_G = 9918 \text{ N}$.

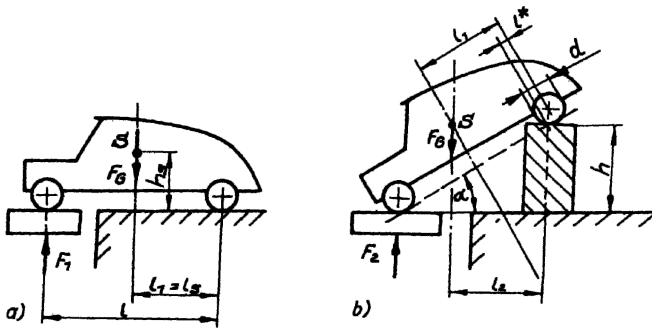


Bild 1.4 Schwerpunktbestimmung an einem Kraftfahrzeug
a) horizontale Lage; b) gekippte Lage

In horizontaler Lage (a) ergibt sich

$$l_1 = l_s = \frac{F_1 l}{F_G}. \quad (1.6)$$

In gekippter Lage (b) gilt

$$l_2 = \frac{F_2 l \cos \alpha}{F_G}; \quad \sin \alpha = \frac{h}{l}. \quad (1.7)$$

Damit berechnet sich die Schwerpunkthöhe h_S zu:

$$h_S = \left(\frac{l_2}{\cos \alpha} + l^* - l_1 \right) \frac{1}{\tan \alpha}; \quad l^* = \frac{d}{2} \tan \alpha \quad (1.8)$$

$$h_S = \frac{d}{2} + \frac{F_2 - F_1}{F_G} \cdot \frac{l^2}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{l} \right)^2}$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten ergibt sich $l_S = 1196 \text{ mm}$; $h_S = 573 \text{ mm}$. Die Genauigkeit des Ergebnisses wird durch die Differenz ($F_2 - F_1$) bestimmt. Es ist deshalb h so groß wie möglich zu wählen.

1.2.3

Trägheitsmoment um eine Achse

Beim *einfachen Pendelversuch* hängt der Körper als physikalisches Pendel in einer Bohrung auf einer Schneide und kann sehr schwach gedämpfte Schwingungen um den Berührungspunkt ausführen. In der Gleichung für seine Eigenfrequenz bei kleinem Ausschlag treten das Trägheitsmoment um die Achse des Aufhängepunktes und der Schwerpunkt Abstand auf. So gilt für die Periodendauer des Pendels, vgl. Bild 1.5, bei Pendelung um A und bei Pendelung um B:

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mga}}; \quad T_B = 2\pi \sqrt{\frac{J_B}{mgb}}. \quad (1.9)$$

Die Abstände a und b zählen vom Schwerpunkt bis zu den Aufhängepunkten A und B.

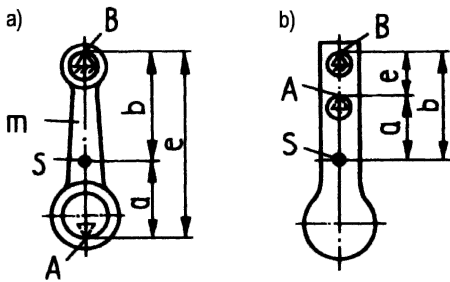


Bild 1.5 Bezeichnungen am physikalischen Pendel;
a) innen liegender Schwerpunkt,
b) außen liegender Schwerpunkt

Weiterhin gilt nach dem Satz von Steiner:

$$J_A = J_S + ma^2; \quad J_B = J_S + mb^2, \quad (1.10)$$

dabei ist J_S das Trägheitsmoment bezüglich der Schwerachse in S. Mit dem Abstand der Pendelpunkte $e = b \pm a$ folgt:

$$b = e \frac{\frac{4\pi^2 e}{g} \mp T_A^2}{2 \frac{4\pi^2 e}{g} \mp T_A^2 - T_B^2}; \quad J_S = \frac{T_B^2}{4\pi^2} mgb - mb^2. \quad (1.11)$$

Das obere Vorzeichen ($-$) gilt für S zwischen A und B (Bild 1.5a), das untere ($+$) für S außerhalb $\overline{AB}$ (Bild 1.5b). Man muss beachten, dass (1.11) nur gilt, wenn der Schwerpunkt auf der Verbindungsline der beiden Aufhängepunkte liegt. Ist das nicht der Fall, wird man zunächst den Schwerpunkt nach einem statischen Verfahren und danach das Trägheitsmoment nach (1.9) und (1.10) bestimmen.

An einem Beispiel soll das experimentell ermittelte Ergebnis mit einer Überschlagsrechnung verglichen werden. Für das auf Bild 1.6b wiedergegebene Pleuel wurde bestimmt:

$$e = 156 \text{ mm}; \quad m = 0,225 \text{ kg}; \quad T_A = 0,681 \text{ s}; \quad T_B = 0,709 \text{ s}. \quad (1.12)$$

Damit findet man nach (1.11) den Schwerpunktabstand $b = 89 \text{ mm}$ und das Trägheitsmoment $J_S = 7,25 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Für die Überschlagsrechnung wird eine Zerlegung in Elementarkörper nach Bild 1.6b vorgenommen. Hierfür genügt es, den Schaft als prismatischen Stab mit den Abmessungen

$$l_{\text{St}} = 129,5 \text{ mm} - \frac{46 + 27}{2} \text{ mm} = 93 \text{ mm} \quad (1.13)$$

$$f = \frac{18 + 20}{2} \text{ mm} = 19 \text{ mm}; \quad c = 5 \text{ mm}$$

anzusehen.

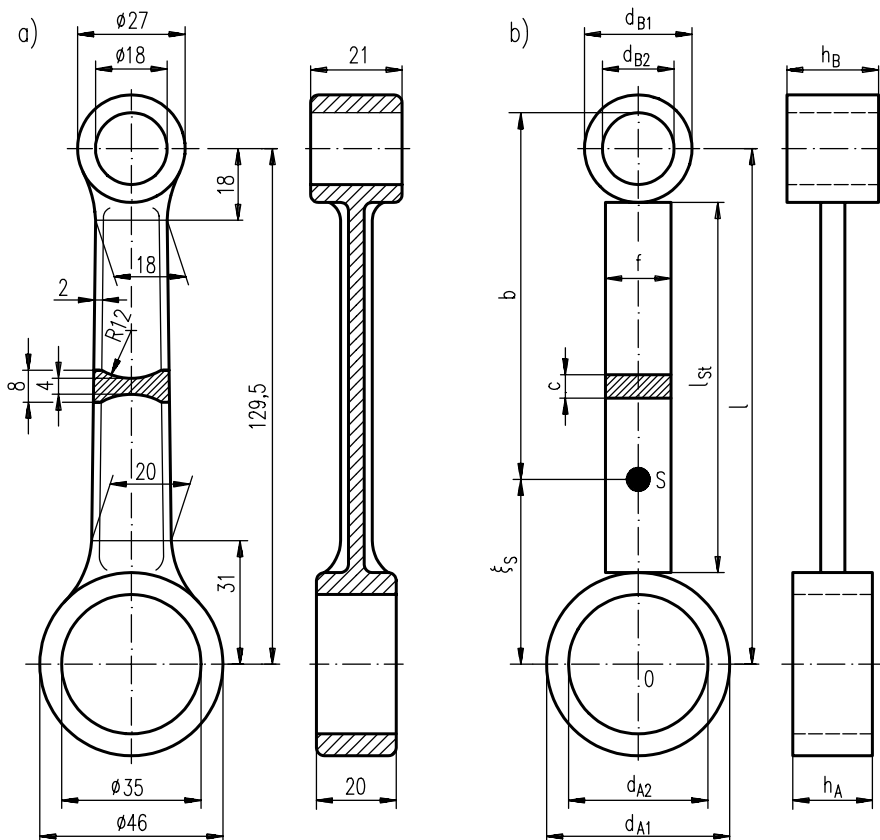


Bild 1.6 Pleuel; a) Zeichnung, b) Aufteilung in Elementarkörper

Geht man von der Achse 0 aus, so ergibt sich für den Schwerpunktabstand ξ_S :

$$\xi_S = \frac{\frac{l_{St} f c (l_{St} + d_{A1})}{2} + \frac{\pi (d_{B1}^2 - d_{B2}^2) h_B l}{4}}{l_{St} f c + \frac{\pi (d_{B1}^2 - d_{B2}^2) h_B}{4} + \frac{\pi (d_{A1}^2 - d_{A2}^2) h_A}{4}}. \quad (1.14)$$

Mit den Zahlenwerten aus Bild 1.6 findet man

$$\xi_S = 50,0 \text{ mm}; \quad b = l - \xi_S + \frac{d_{B2}}{2}; \quad b = 88,5 \text{ mm}. \quad (1.15)$$

Wird als Dichte $\varrho = 7,85 \text{ g/cm}^3$ angenommen, berechnet sich das Trägheitsmoment bezüglich der Schwerachse aus

$$J_S = \varrho \left\{ \pi h_A (d_{A1}^4 - d_{A2}^4) / 32 + \pi (d_{A1}^2 - d_{A2}^2) h_A \xi_S^2 / 4 + c f^3 l_{St} / 12 + f c l_{St}^3 / 12 + c f l_{St} [(l_{St} + d_{A1}) / 2 - \xi_S]^2 + \pi h_B (d_{B1}^4 - d_{B2}^4) / 32 + \pi (d_{B1}^2 - d_{B2}^2) h_B (l - \xi_S)^2 / 4 \right\} \quad (1.16)$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich $J_S = 7,37 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Wird der Schaft als trapezförmiger Stab gerechnet, so findet man $\xi_S = 49,85 \text{ mm}$.

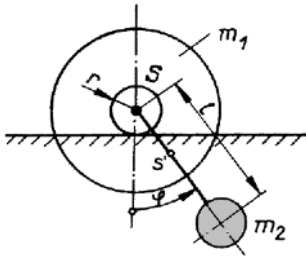


Bild 1.7 Bezeichnung am Rollpendel
S Schwerpunktachse des Zylinders,
S' Schwerpunktachse des Pendelsystems

Für große Zylinder oder Kurbelwellen eignet sich noch das Verfahren des *Rollpendels* zur Bestimmung des Trägheitsmomentes J_S . Dabei wird der Zylinder der Masse m_1 mit seinen Schenkeln auf zwei parallele, horizontale Schneiden aufgelegt und an der Stirnseite eine bekannte Punktmasse m_2 exzentrisch mit dem Abstand l von der Zylinderachse befestigt (Bild 1.7). Der Zylinder kann dann eine pendelnde Rollbewegung ausführen. Es ist allerdings erforderlich, vorher eine statische Auswuchtung vorzunehmen, also zu erreichen, dass der Rotor in jeder Stellung stehen bleibt. Die Bewegungsgleichung lautet für kleine Schwingungsausschläge ($\sin \varphi \approx \varphi$):

$$[J_S + m_1 r^2 + m_2 (l - r)^2] \ddot{\varphi} + m_2 g l \varphi = 0. \quad (1.17)$$

Für die Periodendauer findet man

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 r^2 + m_2 (l - r)^2 + J_S}{m_2 g l}}. \quad (1.18)$$

Daraus ergibt sich das gesuchte Trägheitsmoment des Zylinders um die Achse S:

$$J_S = \frac{T^2}{4\pi^2} m_2 g l - m_1 r^2 - m_2 (l - r)^2. \quad (1.19)$$

Zur Bestimmung von Trägheitsmomenten wird häufig ein Torsionsschwingungssystem verwendet. Dabei erreicht man das Rückstellmoment entweder durch einen Torsionsstab oder durch eine Fadenaufhängung. Es besteht die Möglichkeit, die Federkonstante zu berechnen (absolutes Verfahren). Häufig vergleicht man jedoch das gesuchte Trägheitsmoment mit einem bekannten, indem man die Periodendauer außerdem noch mit einer gegebenen Zusatzmasse bestimmt (relatives Verfahren). Dabei eliminiert man die Federkonstante.

Für die Bestimmung mit einer Torsionsstabaufhängung (Bild 1.8) gilt bezüglich der Schwerachse (die Drehachse ist):

$$J_S = \frac{T^2}{4\pi^2} c_T; \quad c_T = \frac{GI_p}{l} \quad (1.20)$$

I_p polares Flächenträgheitsmoment des kreisförmigen Stabquerschnittes

G Gleitmodul

T Periodendauer der Torsionsschwingung ohne Zusatzmasse.

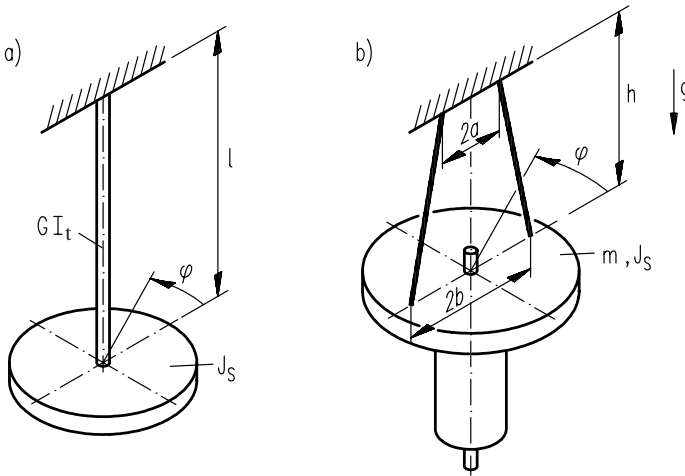


Bild 1.8 Torsionsschwinger; a) Torsionsstabaufhängung, b) Mehrfadenaufhängung

Bringt man ein bekanntes Trägheitsmoment J_Z zusätzlich an der unbekannten Drehmasse J_S an, gilt analog zu (1.20)

$$(J_S + J_Z) = \frac{T_Z^2}{4\pi^2} c_T. \quad (1.21)$$

Eliminiert man aus (1.20) und (1.21) die Federkonstante, folgt

$$J_S = J_Z \frac{T^2}{T_Z^2 - T^2}. \quad (1.22)$$

T_Z ist die Periodendauer mit Zusatzmasse.

An die Stelle der Torsionsfeder kann auch die Aufhängung an Fäden (zwei oder drei) treten. Mit den Bezeichnungen aus Bild 1.8b ergibt sich unter Voraussetzung

kleiner Schwingwinkel (Drehung des zu untersuchenden Körpers um die zentrale Schwerachse):

$$J_S = \frac{mg}{4\pi^2} T^2 \frac{ab}{h}. \quad (1.23)$$

Um im linearen Bereich zu bleiben, sind kleine Schrägstellwinkel der Fäden bei der Auslenkung anzustreben. Man erreicht sie durch Verwendung langer Fäden, sodass $h \gg a$, $h \gg b$ wird. Häufig hängt man die Pendeleinrichtung an die Deckenkonstruktion der Versuchshalle oder den Brückenkran.

Auch bei diesem Verfahren kann man eine Zusatzmasse benutzen. Man führt dazu eine zweite Pendelung durch, bei der eine Masse m_Z mit bekanntem Trägheitsmoment J_Z an der zu untersuchenden Masse befestigt wird. Das gesuchte Trägheitsmoment berechnet sich dann aus

$$J_S = J_Z \frac{mT^2}{(m + m_Z)T_Z^2 - mT^2}. \quad (1.24)$$

Die Trägheitsmomente von Motoren und Kupplungen enthalten die Kataloge der Herstellerfirmen. Die Trägheitsmomente von Zahnradgetrieben findet man seltener. Aus diesem Grund müssen sie oft überschlägig berechnet werden. Da bei der Reduktion auf die schnell laufende Antriebswelle die Trägheitsmomente der einzelnen Stufen mit dem Quadrat der Übersetzungsverhältnisse vermindert werden, sind die Trägheitsmomente der langsamen Wellen oft vernachlässigbar, vgl. Abschnitt 2.3. Es reicht dann meist aus, das Trägheitsmoment der Baugruppen der schnell laufenden Welle zu bestimmen und mit dem Faktor 1,1 bis 1,2 zu multiplizieren, um das Trägheitsmoment des gesamten Zahnradgetriebes abzuschätzen.

Für Antriebe von Kranen wurde für Schleifringläufermotoren (prozentuale Einschaltdauer 60 %, $n = 1000/\text{min}$) folgender Zusammenhang (Zahlenwertgleichung) zwischen dem Trägheitsmoment des Motors und der Antriebsleistung für den Bereich bis 100 kW empirisch ermittelt:

$$J = 0,0076 P^{1,384}; \quad J \text{ in kg} \cdot \text{m}^2, \quad P \text{ in kW}. \quad (1.25)$$

Man sollte diese Formel unter Vorsicht benutzen, aber als Anregung dafür auffassen, für die jeweils bearbeitete Erzeugnisgruppe nach Bedarf empirische Formeln aufzustellen.

1.2.4

Trägheitstensor

Die sechs Elemente des Trägheitstensors sind aus dynamischen Versuchen zu ermitteln. Es gibt Verfahren, um diese aus den Massenkräften und Massenmomenten zu bestimmen, die bei einer vorgegebenen Bewegung des realen Körpers gemessen werden. Es hat sich herausgestellt, dass die Werte der Trägheitsmomente ungenau sind, wenn man den Trägheitstensor für einen beliebigen Bezugspunkt bestimmt, weil die sog. „Steineranteile“ zu groß sind. Man bezieht sich deshalb zweckmäßig auf den Schwerpunkt. Es sind also drei Trägheitsmomente ($J_{\xi\xi}^S, J_{\eta\eta}^S, J_{\zeta\zeta}^S$) und drei Deviationsmomente ($J_{\xi\eta}^S = J_{\eta\xi}^S, J_{\eta\zeta}^S = J_{\zeta\eta}^S, J_{\xi\zeta}^S = J_{\zeta\xi}^S$) bezüglich eines körperfesten ξ - η - ζ -Koordinatensystems zu bestimmen, das seinen Ursprung im Schwerpunkt

hat. Diese sechs Masseparameter können auch aus den Hauptträgheitsmomenten J_I^S , J_{II}^S und J_{III}^S und den drei Richtungswinkeln α , β und γ bestimmt werden, welche die Lage der Hauptachsen I, II und III in Bezug auf das körperfeste System angeben.

Zunächst wird die Aufgabe betrachtet, bezüglich eines körperfesten ξ - η - ζ -Koordinatensystems diejenigen sechs Größen zu bestimmen, die im zentralen Trägheitstensor zusammengefasst sind, vgl. Abschnitt 2.3:

$$\begin{aligned} \bar{J}^S &= \begin{bmatrix} J_{\xi\xi}^S & \text{symmetr.} \\ J_{\eta\xi}^S & J_{\eta\eta}^S \\ J_{\zeta\xi}^S & J_{\zeta\eta}^S & J_{\zeta\zeta}^S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int (\eta^2 + \zeta^2) dm & & \text{symmetrisch} \\ -\int \eta\xi dm & \int (\xi^2 + \zeta^2) dm & \\ -\int \xi\zeta dm & -\int \eta\zeta dm & \int (\xi^2 + \eta^2) dm \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Die Trägheitsmomente bezüglich mehrerer ($k = 1, 2, \dots, K$) Schwerpunktsachsen lassen sich durch den in Abschnitt 1.2.3 beschriebenen Versuch bestimmen, bei dem die Periodendauer einer Torsionsschwingung gemessen wird. Für verschiedene Aufhängepunkte erhält man jeweils die Trägheitsmomente J_{kk}^S .

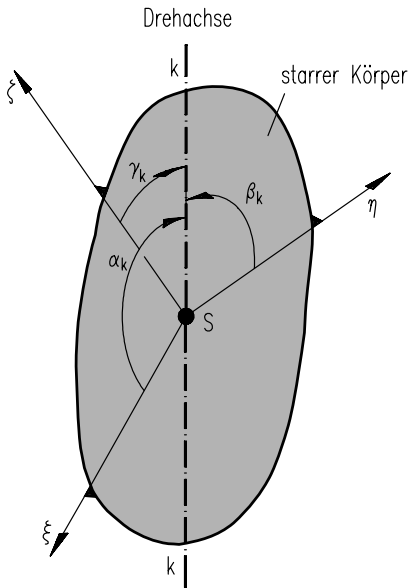


Bild 1.9

Zur Kennzeichnung der Lage der k -ten Drehachse im körperfesten ξ - η - ζ -System

Die Lage der k -ten Drehachse, die durch den Schwerpunkt geht, lässt sich im körperfesten ξ - η - ζ -System durch die drei Winkel α_k , β_k und γ_k eindeutig beschreiben, vgl. Bild 1.9. Das Trägheitsmoment bezüglich der momentanen Drehachse, die bei

der Aufhängung durch den Schwerpunkt geht, steht mit den sechs Elementen des Trägheitstensors in folgendem Zusammenhang, vgl. (2.69) in Abschnitt 2.3.1:

$$J_{kk}^S = \cos^2 \alpha_k J_{\xi\xi}^S + \cos^2 \beta_k J_{\eta\eta}^S + \cos^2 \gamma_k J_{\zeta\zeta}^S + 2 \cos \alpha_k \cos \beta_k J_{\xi\eta}^S + 2 \cos \alpha_k \cos \gamma_k J_{\xi\zeta}^S + 2 \cos \beta_k \cos \gamma_k J_{\eta\zeta}^S. \quad (1.27)$$

Die Winkel α_k , β_k und γ_k welche die Drehachse k - k mit den Richtungen des körperfesten Bezugssystems einschließt, müssen gemessen werden. Zur Kontrolle der Genauigkeit dieser Werte kann man prüfen, wie genau der Satz des Pythagoras erfüllt ist, der in diesem räumlichen Fall folgendermaßen lautet:

$$\cos^2 \alpha_k + \cos^2 \beta_k + \cos^2 \gamma_k = 1; \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (1.28)$$

Für einen realen Körper werden durch K Schwingungsversuche nacheinander die Trägheitsmomente J_{kk}^S bezüglich der K verschiedenen Drehachsen bestimmt, die sich alle im Schwerpunkt S schneiden. Es genügen eigentlich $K = 6$ Versuche, es ist aber zweckmäßig überzählige Versuche durchzuführen, um eine Fehlerbetrachtung anstellen zu können.

Im Weiteren wird ein Vektor $\mathbf{j}^S$ eingeführt, welcher die sechs unbekannten Elemente des Trägheitstensors enthält:

$$\mathbf{j}^S = [J_{\xi\xi}^S, J_{\eta\eta}^S, J_{\zeta\zeta}^S, J_{\xi\eta}^S, J_{\xi\zeta}^S, J_{\eta\zeta}^S]^T. \quad (1.29)$$

Nach Auswertung der Schwingungsmessungen sind die Trägheitsmomente bezüglich der k -ten Drehachse bekannt, die im Vektor

$$\mathbf{b} = [J_{11}^S, J_{22}^S, J_{33}^S, \dots, J_{KK}^S]^T \quad (1.30)$$

zusammengefasst werden. Weiterhin sind die Richtungs cosinus aller K Versuche bekannt, woraus die Elemente folgender Matrix $\mathbf{B}$ bestimmbar sind.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \cos^2 \beta_1 & \cos^2 \gamma_1 & 2 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 & 2 \cos \alpha_1 \cos \gamma_1 & 2 \cos \beta_1 \cos \gamma_1 \\ \cos^2 \alpha_2 & \cos^2 \beta_2 & \cos^2 \gamma_2 & 2 \cos \alpha_2 \cos \beta_2 & 2 \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 & 2 \cos \beta_2 \cos \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos^2 \alpha_K & \cos^2 \beta_K & \cos^2 \gamma_K & 2 \cos \alpha_K \cos \beta_K & 2 \cos \alpha_K \cos \gamma_K & 2 \cos \beta_K \cos \gamma_K \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

Auf diese Weise entsteht aus (1.27) die Matrizengleichung

$$\mathbf{B} \mathbf{j}^S = \mathbf{b}. \quad (1.32)$$

Die Rechteckmatrix $\mathbf{B}$ hat K Zeilen und sechs Spalten. Werden $K = 6$ Messwerte benutzt, ergeben sich die sechs Unbekannten aus der Lösung sechs linearer Gleichungen. Im Falle $K > 6$ stellt (1.32) ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem für die in $\mathbf{j}^S$ zusammengefassten sechs Unbekannten dar. Gemäß der Ausgleichsrechnung [30] ergibt sich aus der Forderung nach dem Fehlerquadrat-Minimum dann folgende Lösung für die gesuchten Elemente des Trägheitstensors:

$$\mathbf{j}^S = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{b}. \quad (1.33)$$

Bei $K > 6$ Messungen ist es möglich, außer den Mittelwerten auch die Streuungen zu berechnen [30], d. h., man kann sich durch „überzählige“ Messungen Klarheit über die Anzahl der gültigen Ziffern der Ergebnisse verschaffen.

Die manchmal interessierenden Hauptträgheitsmomente werden aus den Elementen des Trägheitstensors ermittelt, indem man folgendes Eigenwertproblem löst, wozu man auf übliche Software zurückgreifen kann, vgl. dazu auch Abschnitt 2.3.1 und (2.79):

$$\begin{bmatrix} J_{\xi\xi}^S - J & J_{\xi\eta}^S & J_{\xi\zeta}^S \\ J_{\xi\eta}^S & J_{\eta\eta}^S - J & J_{\eta\zeta}^S \\ J_{\xi\zeta}^S & J_{\eta\zeta}^S & J_{\zeta\zeta}^S - J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Die drei Eigenwerte sind die Hauptträgheitsmomente J_I , J_{II} und J_{III} . Die Komponenten der drei Eigenvektoren entsprechen den drei Richtungscosinus, die das orthogonale Hauptachsensystem kennzeichnen, das gegenüber dem körperfesten ξ - η - ζ -System räumlich verdreht ist. Das Hauptträgheitsmoment J_I bezieht sich auf die Hauptachse I, die analog zu Bild 1.9 gegenüber dem ξ - η - ζ -System um die Winkel α_I , β_I und γ_I geneigt ist, die sich aus den drei Richtungscosinus $\cos \alpha_I$, $\cos \beta_I$ und $\cos \gamma_I$ berechnen lassen. Die Lage der beiden anderen Hauptachsen II und III lässt sich auf analoge Weise ermitteln.

Die Berechnung vereinfacht sich, wenn der reale Körper eine Symmetrieebene besitzt, als die in vorliegendem Falle die ξ - ζ -Ebene angenommen wird. Jede senkrecht auf der Symmetrieebene stehende Achse ist eine Trägheitshauptachse und die Bestimmung der Elemente des Trägheitstensors vereinfacht sich, vgl. Bild 1.18.

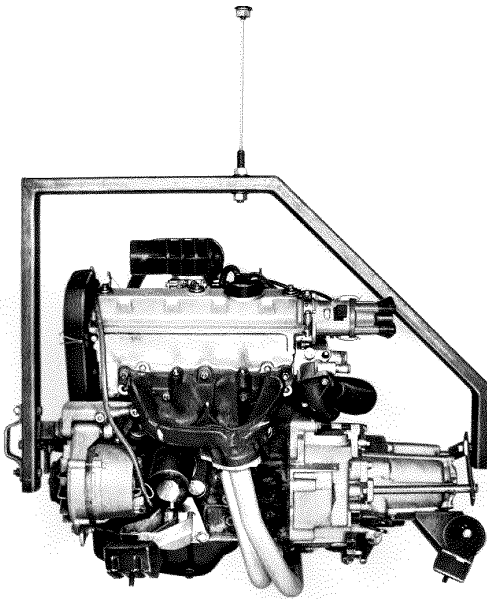


Bild 1.10 Aufhängung eines Kraftfahrzeugmotors

Bild 1.10 zeigt die Aufhängung eines Kraftfahrzeugmotors zur Bestimmung der Trägheitshauptachsen. Der Motor befindet sich in einem Rahmen, der in verschiedenen Lagen an dem Torsionsstab befestigt werden kann.

Bei der Durchführung der Versuche muss darauf geachtet werden, dass die den Berechnungsformeln zugrunde liegenden Voraussetzungen eingehalten werden. Diese sind in erster Linie die lineare Bewegungsgleichung und die Vernachlässigung der Dämpfung. Da sowohl die Pendelgleichungen als auch die Bewegungsgleichung bei Mehrfadenaufhängung nur für kleine Ausschläge als linear zu betrachten sind, darf der Pendelwinkel bzw. Fadenwinkel nicht größer als 6° sein. Die Dämpfung ist dann hinreichend klein, wenn mehr als 10 Schwingungen mühelos abgezählt werden können, vgl. (1.108).

Mit besonderer Sorgfalt ist die Zeitmessung durchzuführen, da die Periodendauer in (1.19) bis (1.24) quadratisch eingeht. Im Allgemeinen sind die Schwingungen so schwach gedämpft, dass 50 und mehr Schwingungsperioden auftreten. Es wird empfohlen, die Zeit für eine große Periodenanzahl zur Auswertung zu verwenden. Fehlerquellen liegen auch in der analytischen Bestimmung der Federkonstanten bzw. der Zusatzträgheitsmomente.

Verwendet man Beziehungen, in denen Differenzen auftreten, vgl. (1.19), (1.22), (1.24), sind die Versuchsparameter so festzulegen, dass eine Differenz nahezu gleichgroßer Größen vermieden wird.

1.3 Federkennwerte

1.3.1 Allgemeine Zusammenhänge

In einem Schwingungssystem dient die Feder zur Speicherung von Energie in Form von Verformungsarbeit. In Mehrkörperstrukturen sind die masselosen Federn zwischen den Massen oder zwischen Massen und Festpunkten angeordnet. Dabei können mehrere Federn parallel oder hintereinander liegen. Tabelle 1.4 gibt für Beispiele die Gesamtfederkonstanten an.

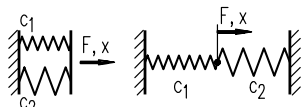
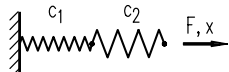
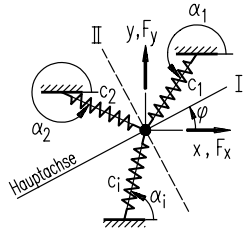
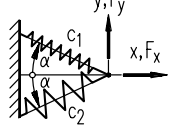
Die Berechnung von Federkennwerten der Bauteile aus Vollmaterial erfolgt im Rahmen statischer Verformungsberechnungen, wobei als Materialkonstanten der Elastizitätsmodul E und der Gleitmodul G ausreichen, zwischen denen mit der Querkontraktionszahl ν die Beziehung $E = 2G(1 + \nu)$ besteht.

Die Schwierigkeit besteht weniger darin, die Abmessungen und Materialwerte festzulegen, sondern auch die Wirksamkeit der Federbefestigungen in Form der Randbedingungen auszudrücken. Die Fragen, ob zum Beispiel ein Balken starr eingespannt ist oder eine „Einspannfeder“ wirkt, oder ob eine Schraubenfeder auf den Kontaktflächen sich verdrehen kann, haben auf ihre Federwirkung großen Einfluss. Diese Unsicherheiten führen dazu, dass die Eigenfrequenzen von Modellen, deren Parameter rein rechnerisch ermittelt wurden, meist zu hoch liegen, da die vielen Annahmen die Federn zu steif wiedergeben.

Ein typisches elastisches Element im Maschinenbau ist die Torsionswelle. Die meisten Antriebswellen haben Absätze, an denen verschiedene Wellendurchmesser

zusammenstoßen, unterschiedliche Übergangsradien, die verschiedensten Verbindungselemente zwischen Welle und Nabe, Lagersitze usw. Man kann das so ansehen, als ob eine große Anzahl Einzelfedern hintereinander geschaltet ist. Um den Einfluss dieser Einzelfedern auf die Gesamtfederkonstante besser abschätzen zu können, hat man den Begriff der reduzierten Länge eingeführt. Als Beispiel dazu dient ein aus zwei Abschnitten bestehendes Wellenstück (Bild 1.11), an dessen Enden das Torsionsmoment M_t angreift. Das eine Ende (Einspannung) hat den Verdrehwinkel Null. Es soll nun ein glattes Wellenstück mit vorgegebenem Durchmesser, das die gleiche Torsionssteifigkeit besitzt, gefunden werden.

Tabelle 1.4 Beispiele für die Kopplung von Federn

Fall	Systemskizze	Federzahlen und Federkonstanten
1	 $F = cx$	$c = c_1 + c_2$
2	 $F = cx$	$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$
3	 $F_x = c_{xx}x + c_{xy}y$ $F_y = c_{yx}x + c_{yy}y$	$c_{xx} = \sum_{i=1}^I c_i \cos^2 \alpha_i; \quad c_{yy} = \sum_{i=1}^I c_i \sin^2 \alpha_i$ $c_{xy} = c_{yx} = - \sum_{i=1}^I c_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i$ Hauptsteifigkeiten $c_{I, II} = \frac{c_{xx} + c_{yy}}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - 4 \frac{c_{xx}c_{yy} - c_{xy}^2}{(c_{xx} + c_{yy})^2}} \right)$ Hauptrichtungen $\tan \varphi_{I, II} = \frac{c_{I, II} - c_{xx}}{c_{xy}}$
4	 $F_x = c_{xx}x + c_{xy}y$ $F_y = c_{yx}x + c_{yy}y$	$c_{xx} = (c_1 + c_2) \cos^2 \alpha$ $c_{yy} = (c_1 + c_2) \sin^2 \alpha$ $c_{xy} = c_{yx} = (c_1 - c_2) \sin \alpha \cos \alpha$

Fall 1 und Fall 4 sind Sonderfälle von Fall 3. Man beachte bei Fall 3, dass die Richtung der Komponenten der Kraft F durch deren Vorzeichen bestimmt wird und die resultierende Kraft beliebig gerichtet sein kann. Der Kraftangriffspunkt bewegt

sich im Allgemeinen nicht einfach in Richtung der eingepägten Kraft, sondern auch quer dazu, und zwar dann, wenn $c_{xy} = c_{yx} \neq 0$ ist.

Es gibt im ebenen Fall für die Federanordnungen von Fall 3 und Fall 4 zwei Hauptsteifigkeiten c_I und c_{II} und zwei Federungshauptachsen, für die Formeln in Tabelle 1.4 angegeben sind. Nur dann, wenn eine Kraft in Richtung einer der beiden Hauptsteifigkeiten wirkt, erfolgt die Verschiebung in derselben Richtung. Die beiden Eigenkreisfrequenzen einer in einem ebenen Federsystem aufgehängten Masse betragen $\omega_1^2 = c_I/m$ und $\omega_2^2 = c_{II}/m$.

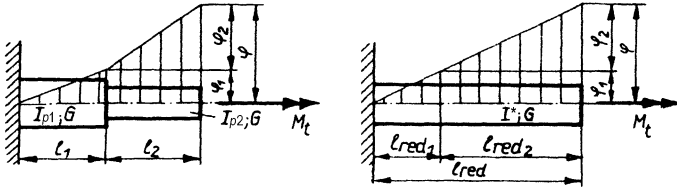


Bild 1.11 Reduzierte Länge bei zwei Wellenabschnitten

Für eine zylindrische Welle lässt sich die Torsionsfederkonstante berechnen nach

$$c_T = \frac{GI_p}{l}; \quad c_{Ti} = \frac{GI_{pi}}{l_i}. \quad (1.35)$$

G Gleitmodul, für Stahl $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$

I_p polares Flächenträgheitsmoment des Kreisquerschnitts

l_i Längen der Wellenabschnitte

Die Gesamtverdrehung beträgt:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{M_t}{c_T} = \frac{M_{t1}}{c_{T1}} + \frac{M_{t2}}{c_{T2}}. \quad (1.36)$$

Da das Torsionsmoment in allen Wellenabschnitten gleich ist, gilt:

$$M_t = M_{t1} = M_{t2} \quad (1.37)$$

und damit

$$\frac{1}{c_T} = \frac{1}{c_{T1}} + \frac{1}{c_{T2}}; \quad c_T = \frac{c_{T1}c_{T2}}{c_{T1} + c_{T2}}. \quad (1.38)$$

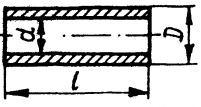
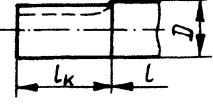
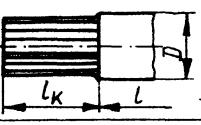
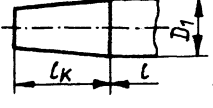
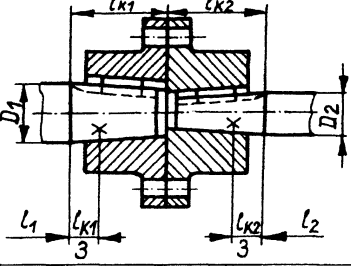
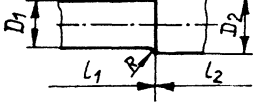
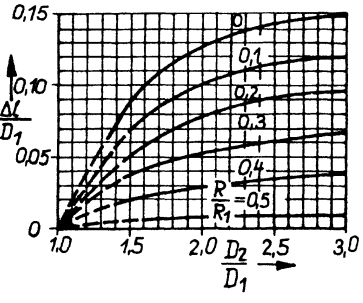
Will man das abgesetzte Wellenstück durch ein glattes ersetzen, wird zunächst das polare Torsionsträgheitsmoment I^* der Ersatzwelle definiert. Damit gilt

$$c_T = \frac{GI^*}{l_{red}}. \quad (1.39)$$

Mit (1.38) folgt

$$l_{red} = l_1 \frac{I^*}{I_{p1}} + l_2 \frac{I^*}{I_{p2}} = l_{red1} + l_{red2}. \quad (1.40)$$

Tabelle 1.5 Reduzierte Längen verschiedener Wellenabschnitte

Benennung	Bezeichnung	Reduzierte Wellenlänge
Glatte zylindrische Welle		Vollwelle: $l_{red} = l \frac{I_{red}}{I_p} = l \frac{D_{red}^4}{D^4}$ Hohlwelle: $l_{red} = l \frac{I_{red}}{I_p} = l \frac{D_{red}^4}{D^4 - d^4}$
Welle mit Keilnut		$l_{red} = l_K \frac{I_{red}}{I_K} + l \frac{I_{red}}{I_p}$
Keilwelle		$I_K = \frac{\pi d_K^4}{32}; I_p = \frac{\pi D^4}{32}$
Welle mit Kegel		$l_{red} = l_K \frac{I_{red}}{I_m} + l \frac{I_{red}}{I_{p1}}$ $I_m = \frac{3 I_{p1}}{\frac{D_1}{D_2} \left[\left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 + \left(\frac{D_1}{D_2} \right) + 1 \right]}$ I_m mittleres polares Flächenträgheitsmoment des keglichen Wellenendes
Kegelverbindung		$l_{red} = \left(l_1 + \frac{l_{K1}}{3} \right) \frac{I_{red}}{I_{p1}} + \left(l_2 + \frac{l_{K2}}{3} \right) \frac{I_{red}}{I_{p2}}$ Das Stück zwischen den angenommenen Kraftübertragungsstellen (x) ist nach den obigen Formeln zu berechnen.
Wellenübergänge, Presssitzverbindungen	 	$l_{red} = l_{red1} + l_{red2} + \Delta l_{red}$ $l_{red1} = l_1 \frac{I_{red}}{I_{p1}};$ $l_{red2} = l_2 \frac{I_{red}}{I_{p2}}$ $\Delta l_{red} = \frac{\Delta l}{D_1} D_1 \frac{I_{red}}{I_{p1}}$ $R_1 = \frac{D_1}{2}$

Die reduzierte Länge einer aus Teilstücken bestehenden Welle ergibt sich als Summe der einzelnen reduzierten Längen der Teilstücke. Sie tritt an die Stelle der Gesamtfederkonstante und hat den Vorteil, dass die einzelnen Anteile in ihrer Wirkung auf das Gesamtsystem besser erkannt werden können.

Mithilfe der reduzierten Längen lässt sich die Bildwelle zeichnen, vgl. Bild 4.2. Die Tabelle 1.5 zeigt eine Zusammenstellung verschiedener reduzierter Längen.

1.3.2

Maschinenelemente, Baugruppen

Maschinen bestehen aus vielen miteinander zusammengefügt Baugruppen, die sich unter Belastung im Mikrobereich relativ zueinander bewegen. An allen (scheinbar unbeweglichen) Kontaktstellen sind die Steifigkeiten geringer als die des Vollmaterials, und auch eine größere Dämpfung tritt dort infolge des Mikroschlupfes auf. Die geringeren Steifigkeiten senken die Eigenfrequenzen, und es ist bei der Aufstellung eines Berechnungsmodells wichtig, diese Einflüsse zu berücksichtigen.

In den vergangenen Jahrzehnten wurden für viele Baugruppen experimentell Steifigkeiten und Dämpfungen ermittelt. Diese Erfahrungswerte sind in Firmenkatalogen und Fachbüchern [1], [4], [8], [11], [12], [19], [20], [21], [24], [29], [31]) zu finden. Für manche Baugruppen, wie z. B. Kurbelwellen, Kupplungen, Schraubenfedern, Wälzlager haben Firmen Software entwickelt, mit der interessierte Kunden genaue Daten bestimmen können. Schwierig sind solche Kennwerte oft für neuartige Werkstoffe (z. B. faserverstärkte Kunststoffe) oder extreme Parametergebiete (z. B. sehr hohe Belastungsgeschwindigkeiten, extreme Temperaturen) zu erhalten.

Bevor auf Beispiele eingegangen wird, soll noch erwähnt werden, dass man in der Praxis oft scheinbar sehr große Abweichungen von den theoretisch ermittelten Werten feststellt. Die realen (experimentell kontrollierten) Steifigkeiten sind in der Regel kleiner als die berechneten. Dazu sei gesagt, dass dies meist an einer fehlerhaften Modellbildung liegt. Manchmal wird ein sekundärer Einfluss von Bedeutung (vgl. Aufgabe A6.6) oder es ist nicht berechtigt, ideale Spielfreiheit und Linearität anzunehmen, vgl. Kapitel 7. Meist wird die Kontaktsteifigkeit der Verbindungselemente unterschätzt oder eine statische Bestimmtheit vorausgesetzt, die nicht gegeben ist. Durch Risse und Abnutzungen wird jede Maschinenbaugruppe nach längerer Betriebsdauer weicher und nie steifer.

Zahnradgetriebe: Für Zahnräder wird die Torsionsfederkonstante mithilfe der Zahnverformung ermittelt. Diese ist unabhängig vom Zahnmodul und kann mithilfe von Zahlenwertgleichungen bestimmt werden. Denkt man sich die Zahnfeder als Längsfeder auf der Zahneingriffslinie wirkend, gilt für geradzahnte Stirnräder aus Stahl, wenn nur ein Zahn im Eingriff ist, vgl. [21]:

$$c_z = bc'; \quad c' = 0,8c'_{th} \cdot \cos \beta \quad (1.41)$$

$$c'_{th} = 1/[0,04723 + 0,15551/z_{n1} + 0,25791/z_{n2} - 0,00635x_1 - 0,11654x_1/z_{n1} - 0,00193x_2 - 0,24188x_2/z_{n2} + 0,00529x_1^2 + 0,00182x_2^2] \text{ N}/(\mu\text{m} \cdot \text{mm})$$

mit $z_{n1,2} = z_{1,2}/(\cos \beta)^3$, b Zahnbreite, z_1, z_2 Zähnezahlen, x_1, x_2 Profilverschiebungsfaktoren, β Schrägungswinkel.

In (1.41) sind Vollscheibenräder und das Norm-Bezugsprofil (DIN 867) für die Verzahnung vorausgesetzt. In DIN 3990 sind zusätzlich für die Anwendung von Stegrändern und von Profilen, die vom Normprofil abweichen, Korrekturfaktoren angegeben, um die resultierenden Einflüsse auf die Zahnsteifigkeit zu berücksichtigen. Aufgrund der Überdeckung befinden sich je nach Radstellung verschieden viele Zahnpaare im Eingriff, wodurch auch die effektive Zahnsteifigkeit während einer Eingriffsperiode schwankt.

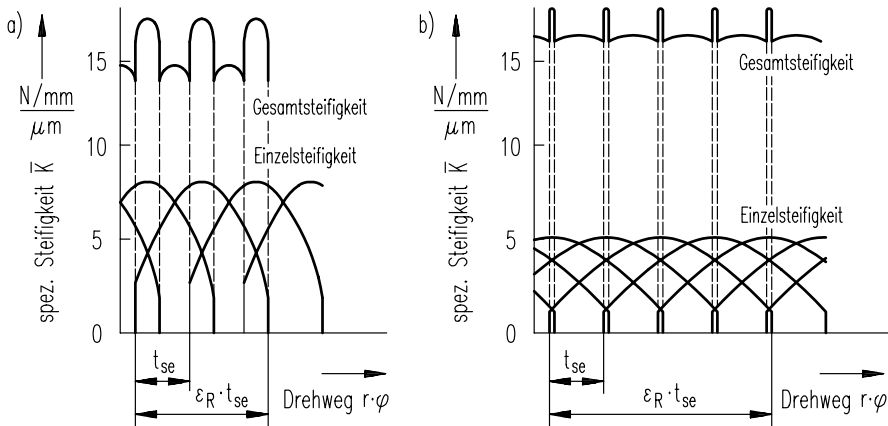


Bild 1.12 Steifigkeitsverlauf beim Zahneingriff

a) Überdeckungsgrad $\varepsilon = 2,5$, b) Überdeckungsgrad $\varepsilon = 4,1$

Bild 1.12 zeigt den Verlauf der Steifigkeit einer Zahnradpaarung bei zwei verschiedenen Überdeckungsgraden [4]. Man kann erkennen, wie sich die resultierende Steifigkeit aus der Steifigkeit der einzelnen Zähne zusammensetzt. Bei der Geradverzahnung entsteht ein größerer Sprung bei der Änderung des Überdeckungsgrades. Bei der Schrägverzahnung sind naturgemäß mehrere Zähne im Eingriff, sodass die Steifigkeitssprünge kleiner sind, was sich auf die Schwingungserregung auswirkt, vgl. Abschnitt 4.5.3.2. Zur Berechnung der Verzahnungssteifigkeit $c(t)$, die in DIN 3990 definiert ist, steht Software zur Verfügung. Die entsprechenden Daten für eine konkrete Verzahnung kann man von den Herstellerfirmen erfahren.

Der Mittelwert der innerhalb einer Eingriffsperiode wirkenden Zahnsteifigkeit (Eingriffsfedersteifigkeit) wird näherungsweise wie folgt berechnet:

$$c_m = c' \cdot (0,75\varepsilon_\alpha + 0,25); \quad \varepsilon_\alpha \text{ Profilüberdeckung.} \quad (1.42)$$

Für die Einzelfedersteifigkeit und die Eingriffsfedersteifigkeit können für Stahlzahnradpaarungen überschlägig folgende Werte gesetzt werden:

$$c' = 14 \text{ N}/(\mu\text{m} \cdot \text{mm}); \quad c_m = 20 \text{ N}/(\mu\text{m} \cdot \text{mm}). \quad (1.43)$$

Für den Fall nur schwach belasteter Verzahnungen ($F_t/b < 100 \text{ N/mm}$) ergeben sich deutlich geringere Federkennwerte, die näherungsweise unter Annahme eines linearen Steifigkeitsabfalles berechnet werden können:

Für $F_t/b < 100 \text{ N/mm}$:

$$c' = 0,8c'_{\text{th}} \cdot \cos \beta \cdot F_t / (100b) \quad (1.44)$$

F_t an der Verzahnung wirkende Umfangskraft in N

b Zahnbreite in mm

Tabelle 1.6 Federkonstanten und Torsionsfederkonstanten

Maschinenelement/ Baugruppe	Federkonstante c in N/mm=kN/m	abhängig von
Baugrund	$(0,2 \dots 1,4) \cdot 10^5 (A/\text{m}^2)$	Bodenart, Stützfläche A
	$(0,2 \dots 1,4) \cdot 10^7$	z.B. $A = 100 \text{ m}^2$
Gewinde	$(1,5 \dots 2) \cdot 10^5 (d/\text{mm})$	Nenn Durchmesser d
	$(1,5 \dots 2) \cdot 10^6$	z.B. M10, $d = 10 \text{ mm}$
Zahnsteifigkeit von Stahlzahnradern	$(1 \dots 2) \cdot 10^4 (b/\text{mm})$	Zahnbreite b
	$(3 \dots 6) \cdot 10^5$	z.B. $b = 30 \text{ mm}$
Kugellager – radial	$(5 \dots 10) \cdot 10^3 (d/\text{mm})$	Innendurchmesser d
	$(2,5 \dots 5) \cdot 10^5$	z.B. $d = 50 \text{ mm}$ Vorspannung, Wälzkörperzahl
Stahl-Zugstab	$1,6 \cdot 10^4$	$c = EA/l$; z.B.: $l = 1 \text{ m}$, $d = 10 \text{ mm}$
Pufferfeder einer Kranbahn	$(0,1 \dots 1) \cdot 10^4$	Abmessungen
Rundstahlketten	$600 \dots 3700$	z.B. 1 m Länge
Stahlfedern für Maschinenfundamente	$(30 \dots 60) \cdot (F/\text{kN})$	Bauform, statische Belastung F
	$600 \dots 1200$	z.B. $F = 20 \text{ kN}$
Pkw-Reifen	$80 \dots 160$	Konstruktion, Luft- druck, Fahrgeschw.
Auslegerspitze Turmkran (vertikal)	$40 \dots 400$	Bauhöhe, Auslegerlänge
Federbein Motorrad	$10 \dots 20$	Federtyp
Stahl-Biegebalken (Endpunkt d. Kragträgers)		$c = 3EI/l^3$; z.B.:
	$0,3$	$l = 1 \text{ m}$, $d = 10 \text{ mm}$
	Torsionsfederkonstante c_T in Nm/rad $\hat{=}$ Nm	
Stahlblock (Halbraumtheorie) kreisförmige Einspannstelle	$3,1 \cdot 10^2 (r^3/\text{mm}^3)$	Radius r in mm
	$3,1 \cdot 10^5$	z.B. $r = 10 \text{ mm}$
Stahl-Kupplungen	$(0,1 \dots 2,5) \cdot 10^5$	Durchmesser
Gummifeder-Kupplungen	$1000 \dots 6000$	Bauart, Belastung
Stahl-Torsionsstab	80	$c_T = GI_p/l$; z.B.:
		$l = 1 \text{ m}$, $d = 10 \text{ mm}$

Die oben gemachten Angaben dienen nur zur Orientierung und sollen dem Studierenden helfen, eine anschauliche Vorstellung zu gewinnen. Für praktische Berechnungen sind genauere Parameterwerte den Katalogen der Hersteller und Taschenbüchern zu entnehmen oder durch eine spezielle Modellierung zu berechnen.

Gewinde: (nach VDI 2230) Längsfederkonstante:

$$c = \frac{Ed \left(1 - 0,65 \frac{h_3}{d_3}\right)}{\sqrt{0,3 + 5,4 \frac{h_3}{d_3}}} \quad (1.45)$$

mit d Nenndurchmesser, d_3 Kerndurchmesser, $h_3 = (d - d_3)/2$ Gewindetiefe. Die Federkonstante einer gesamten Schraubenverbindung ist infolge der Kontaktsteifigkeiten zwischen Schraube, Unterlegscheibe und Blech wesentlich niedriger.

Für die Federkonstanten des Riemens gilt

$$c_{rz} = \frac{E_z A}{L}; \quad c_r = \frac{EA}{L} \quad (1.46)$$

A Riemenquerschnitt

L wirksame Trumlänge

Da der Elastizitätsmodul E von der Riemenvorspannkraft F_v abhängt, unterscheiden sich E_z und E .

Zylindrische Schraubenfedern: Oft wird für zylindrische Schraubenfedern nur die Längssteifigkeit

$$c = \frac{8iD^3}{d^4G} \quad (1.47)$$

berücksichtigt, vgl. die in Bild 1.13 genannten Federparameter:

d Drahtdurchmesser

r mittlerer Windungsdurchmesser

i Anzahl der wirksamen Federwindungen

G Gleitmodul (für gehärteten Walzstahl gilt: $G = 7,9 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$)

$l_0 = l + y$ ungespannte Federlänge

l Federlänge nach der Belastung.

Die Schraubenfeder kann für jedes gewünschte Verhältnis von Längssteifigkeit c zur Quersteifigkeit c_q ausgelegt werden. $y = F/c$ ist die Verschiebung infolge der Längskraft F , $x = Q/c_q$ ist der Federweg quer zur Federachse infolge der Querkraft Q .

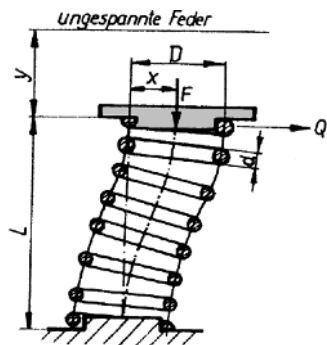


Bild 1.13 Schraubenfeder, Koordinaten und Abmessungen

Die Quersteifigkeit einer zylindrischen Schraubenfeder lässt sich aus dem Bild 1.14 entnehmen, das aus [31] stammt. Diese Kurven stellen das Verhältnis der Quersteifigkeit zur Längssteifigkeit dar und entsprechen der Formel:

$$\frac{c}{c_q} = 1,0613 \frac{D}{y} \sqrt{\frac{l_0}{y}} - 0,6142 \cdot \tan \left(0,9422 \frac{y}{D} \sqrt{\frac{l_0}{y}} - 0,6142 \right) + 1 - \frac{l_0}{y}. \quad (1.48)$$

Bild 1.14 zeigt den nach (1.48) berechneten Verlauf für den Bereich $l_0/D = 1 \dots 4$. Es wurden zwei Kurven $y/l_0 = 0,1$ und $2/3$ eingezeichnet. Alle praktisch bedeutsamen Belastungsfälle liegen im Bereich dieses Diagramms.

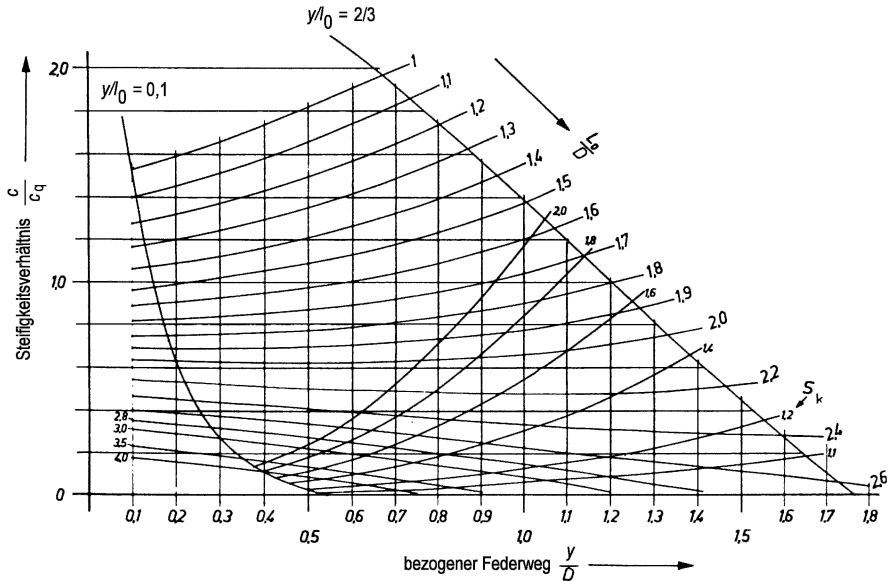


Bild 1.14 Abhängigkeit des Steifigkeitsverhältnisses vom bezogenen Federweg

Ein weiteres, sehr nachgiebiges Federelement stellt das *Drahtseil* dar. Die Federkonstante eines gespannten Drahtseiles berechnet sich nach

$$c = \frac{E_S A}{l}. \quad (1.49)$$

Dabei ist A die metallische Querschnittsfläche, l die Seillänge und E_S der Elastizitätsmodul. Für ihn findet man in der Literatur verschiedene Werte, die zeigen, dass er von der Machart der Seile, der Einsatzdauer und der Vorlast abhängt. Als Richtwerte kann man annehmen:

$$E_S = (1 \dots 1,6) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \quad (1.50)$$

Die **Lagerung** einer Welle kann erhebliche Auswirkungen auf ihr Schwingungsverhalten haben. Die Lagerauswahl geschieht jedoch nach der Tragfähigkeit und Lebensdauer, sodass damit ihre Federkonstante gegeben ist. Vor allem bei starren

Lagergehäusen sollte man einen Vergleich der Wellensteifigkeit mit der Lagersteifigkeit durchführen. Möglichkeiten dazu bietet Tabelle 5.1.

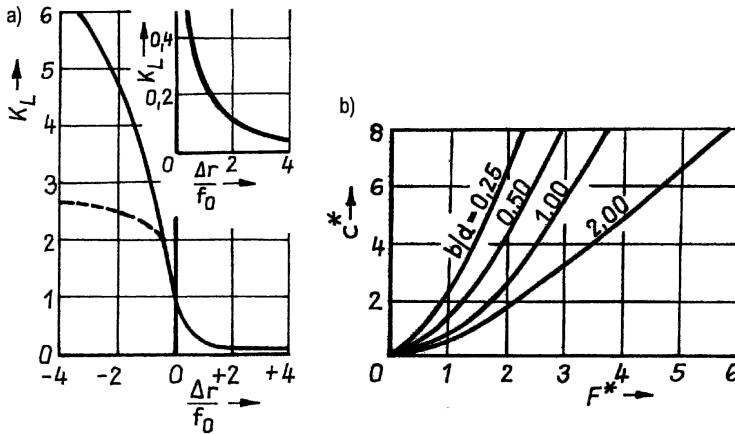


Bild 1.15 Beiwerte zur Ermittlung der Lagersteifigkeit

a) K_L für Wälzlager, — Kugellager, - - - Rollenlager, b) c^* für Gleitlager

Für **radiale Wälzlager** berechnet sich die radiale Lagersteifigkeit nach WICHE (Konstruktion 1967):

$$c_r = K_L \cdot \frac{F_L}{f_0}. \quad (1.51)$$

Darin bedeutet K_L einen Beiwert, der nach Bild 1.15a in Abhängigkeit vom relativen Lagerspiel bestimmt werden kann. F_L ist die statische Lagerlast und f_0 die Einfeldung des spielfrei eingebauten Lagers. Diese berechnet sich aus den Zahlenwertgleichungen

Kugellager:

$$f_0 = \sqrt[3]{\frac{2,08}{d} + \left(\frac{F_L}{i}\right)^2} \mu\text{m}; \quad d \text{ in mm; } F_L \text{ in N.} \quad (1.52)$$

Rollen- und Nadellager:

$$f_0 = \left(\frac{0,252}{L_W - 2r_W}\right)^{0,8} \cdot \left(\frac{F_L}{i}\right)^{0,9} \mu\text{m}; \quad L_W \text{ in mm; } r_W \text{ in mm.} \quad (1.53)$$

Die Angaben über die Anzahl der Wälzkörper i , der Wälzkörperdurchmesser d , die Wälzkörperlänge L_W und deren Kantenkürzung r_W kann den Informationsblättern der Lagerhersteller entnommen werden. Das Lagerspiel $\Delta r = R_L/2$, welches positiv (Lagerluft) oder negativ (Vorspannung) sein kann, richtet sich nach der Lagerluft R_L im Anlieferungszustand des Lagers. Sie ist in DIN 620 in Abhängigkeit vom Wellendurchmesser angegeben. Man erkennt aber bereits aus Bild 1.15 den starken Einfluss des Spieles besonders im negativen Bereich.

Für **radiale Gleitlager** ist die Steifigkeit im starken Maße von der Lagergeometrie und dem Schmierfilm abhängig. Eine Überslagsberechnung kann nach der Beziehung:

$$c = c^* \cdot 2\pi \cdot \frac{bd^3 \eta f}{(\Delta r)^3} \quad (1.54)$$

erfolgen.

Darin bedeuten

- b tragende Breite
- d Wellendurchmesser
- η dynamische Zähigkeit des Öles bei Betriebstemperatur
- f Drehfrequenz der Welle
- Δr Radialspiel.

Der Beiwert c^* lässt sich in Abhängigkeit von der relativen Lagerkraft

$$F^* = \frac{2F_L(\Delta r)^2}{\pi b d^3 \eta f} \quad (1.55)$$

mit dem Breitenverhältnis b/d als Parameter aus Bild 1.15b entnehmen. Sowohl bei Wälzlagern, als auch bei Gleitlagern sind die Federkennlinien stark nichtlinear und die angegebenen Beziehungen (1.51) und (1.54) stellen nur Näherungen für eine bestimmte Lagerlast dar.

Im Allgemeinen wird die Masse eines Federelementes vernachlässigt. Man macht dabei die Annahme, dass die Eigenfrequenz des Federelementes groß ist gegenüber der Frequenz, in der die Schwingung des Systems erfolgt. Hat man jedoch Schwingbewegungen mit breitem Frequenzspektrum, wie sie beispielsweise durch Überlagerung von Maschinen- und Körperschallschwingungen auftreten, ist die Eigenfrequenz der Feder abzuschätzen, um die Federfunktion zu prüfen. Es kann sonst vorkommen, dass bestimmte Frequenzen trotz einer tiefen Abstimmung des Gesamtsystems übertragen werden.

1.3.3

Gummifedern

Federelemente aus Gummi zeigen gegenüber Metallfedern besondere Eigenschaften. So ist das Deformationsverhalten abhängig von der Vorbehandlung, der Gummiqualität, der Frequenz, der Lastwechselzahl, der Geometrie und auch der Zeit (Alterung des Gummis).

Gummifedern haben eine schwach nichtlineare Kraft-Verformungs-Funktion, die für überschlägliche Berechnungen als linear angesehen werden kann, vgl. A1.3. Die Federkonstante resultiert dann aus der Steigung der Kennlinie im Betriebspunkt. Die wesentliche Werkstoffkenngröße ist der Schubmodul G , der in Abhängigkeit von der Shore-Härte angegeben wird, vgl. Bild 1.16c. Die Querkontraktionszahl von Gummi ist $\nu \approx 0,5$.

Der Gummikörper muss fest mit Metallteilen, über die die Kraft ein- und abgeleitet wird, verbunden sein (man nennt diese Federelemente gebundene Gummifedern). Die Randbedingungen haben bei der großen Verformung entscheidenden

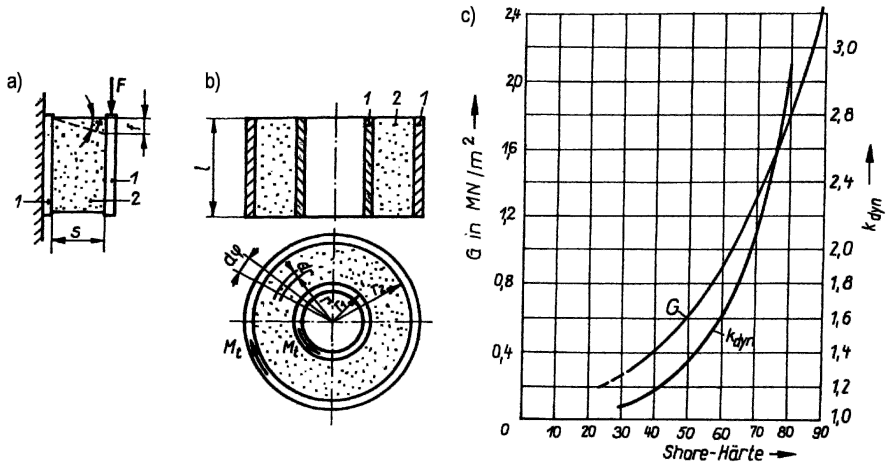


Bild 1.16 Schubbeanspruchte Gummifedern

a) Scheibengummifeder bei Parallelschub

b) Hülseingummifeder bei Torsionsbelastung, 1 Metallteile; 2 Gummi

c) Schubmodul und Faktor k_{dyn} in Abhängigkeit von der Shore-Härte

Einfluss und hängen bei freiem Gummielement von den Reib- und Rauigkeitsverhältnissen der Auflageflächen ab. Liegt reine Schubbeanspruchung vor, lassen sich die statischen Federkonstanten mit den Methoden der Kontinuumsmechanik unter Zugrundelegen des Hookeschen Gesetzes berechnen. So gilt zum Beispiel für die Scheibengummifeder (Bild 1.16a)

$$c = \frac{F}{f} = \frac{AG}{s}. \quad (1.56)$$

Für die torsionsbeanspruchte Hülsefeder, Bild 1.16b, ergibt sich die statische Federkonstante

$$c_T = \frac{M_t}{\varphi} = \frac{4\pi l G}{(1/r_1^2) - (1/r_2^2)}. \quad (1.57)$$

Treten bei einer Beanspruchung Normalspannungen auf, erfolgt die Umrechnung zwischen Spannung und Dehnung unter Beachtung des Elastizitätsmoduls E . Für Gummielemente ist dieser jedoch nicht mehr ein reiner Werkstoffparameter, sondern von der Form der Gummifeder abhängig. Unter Einführung eines Formfaktors k_E lässt er sich aus Bild 1.17b angenähert bestimmen.

Für den Formfaktor gilt:

$$k_E = \frac{\text{eine belastete Fläche}}{\text{gesamte freie Oberfläche}}. \quad (1.58)$$

Die gebundene zylindrische Gummifeder, Bild 1.17a, hat somit den Formfaktor

$$k_E = \frac{d^2 \pi}{4\pi d h} = \frac{d}{4h}. \quad (1.59)$$

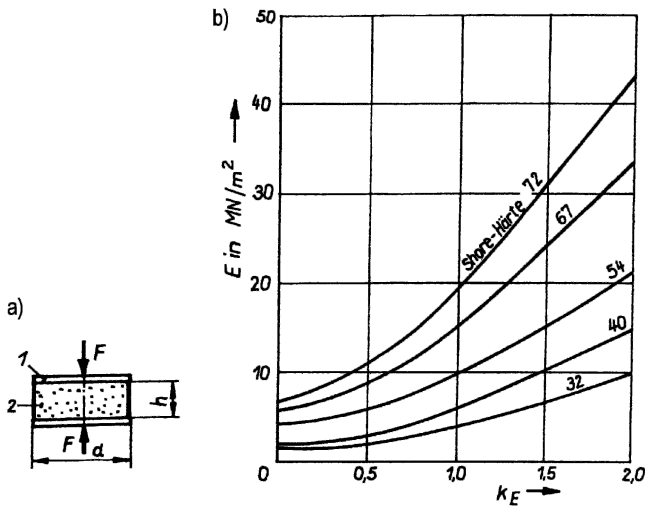


Bild 1.17 Druckbeanspruchte Gummifeder; 1 Metallteile, 2 Gummi

a) Parameter, b) Fiktiver Elastizitätsmodul in Abhängigkeit vom Formfaktor k_E
(Quelle: Göbel – Gummifedern)

Für sie berechnet sich die Federkonstante zu

$$c_{\text{st}} = \frac{AE}{h}. \quad (1.60)$$

Man muss jedoch feststellen, dass die Berechnung von Gummifedern mit Druckbeanspruchung noch große Unsicherheiten birgt.

Eine experimentelle Überprüfung wird stets von Vorteil sein. Im Gegensatz zu den Federkonstanten von Metallfedern sind die von Gummifedern frequenzabhängig. In der Berechnung berücksichtigt man den Effekt durch Einführen einer dynamischen Federkonstante und setzt

$$c_{\text{dyn}} = k_{\text{dyn}} c_{\text{st}}. \quad (1.61)$$

Im Bereich der üblichen Gummihärte (35 bis 95 Shore) gilt $k_{\text{dyn}} = 1,1$ bis $3,0$, vgl. Bild 1.16. Für die Betriebssicherheit von Gummifedern ist ihre Festigkeit und die Erwärmung ausschlaggebend. Bei Frequenzen oberhalb von etwa 20 Hz ist $k_{\text{dyn}} \approx 2,8$ bis $3,2$.

1.3.4

Aufgaben A1.1 bis A1.3

A1.1 Bestimmung eines Trägheitsmoments

Mithilfe einer Torsionsstabauflängung (Bild 1.8) soll das Trägheitsmoment einer Kurbelwelle bezüglich der Drehachse experimentell bestimmt werden. Für den Torsionsstab gilt: Länge $l = 380$ mm; Durchmesser $d = 4$ mm; Gleitmodul $G = 7,93 \cdot 10^4$ N/mm². Für 50 volle Schwingungen wurde die Zeit $T = 41,5$ s gemessen.

A1.2 Trägheitstensor eines symmetrischen Körpers

Für einen symmetrischen Körper soll der Trägheitstensor experimentell bestimmt werden. Um die in Bild 1.18 dargestellten drei Achsen ($k = 1, 2$ und 3), die in der Symmetrieebene liegen, wurden Pendelversuche vorgenommen, aus denen sich drei Trägheitsmomente um die Achsen 1, 2 und 3 bestimmen ließen.

Gegeben:

Trägheitsmomente um diese Achsen: J_{11}^S, J_{22}^S und J_{33}^S

Gesucht:

1. Hauptträgheitsmomente $J_I^S, J_{II}^S, J_{III}^S$
2. Hauptachsenwinkel $\alpha_1, \gamma_1, \alpha_{II}, \gamma_{II}$

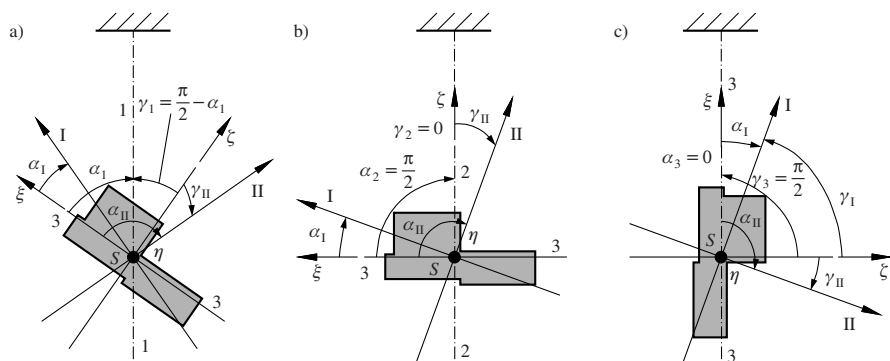


Bild 1.18 Kennzeichnung der Lage der drei Schwerpunktsachsen

A1.3 Nichtlineare Federkennlinie

Für eine Druckfeder aus Gummi wurde die statische Kennlinie nach Bild 1.19 bestimmt. Mit welchem Federwert ist in einem linearen Schwingungssystem zu rechnen, wenn die Belastung der Feder in der Ruhelage 9 kN beträgt und die Frequenz in der Größenordnung 20 Hz liegt (Gummihärte über 80 Shore)?

Tabelle 1.7 Gegebene Messwerte

k	1	2	3	4	5	6	7
x_k in mm	0	2	4	6	8	10	12
F_k in kN	0	2,00	4,39	6,74	9,26	12,32	16,00

Man approximiere die Kennlinie durch das Polynom

$$F = c_1 x + c_3 x^3 \quad (1.62)$$

und ermittle c_1 und c_3 mithilfe der Ausgleichsrechnung.

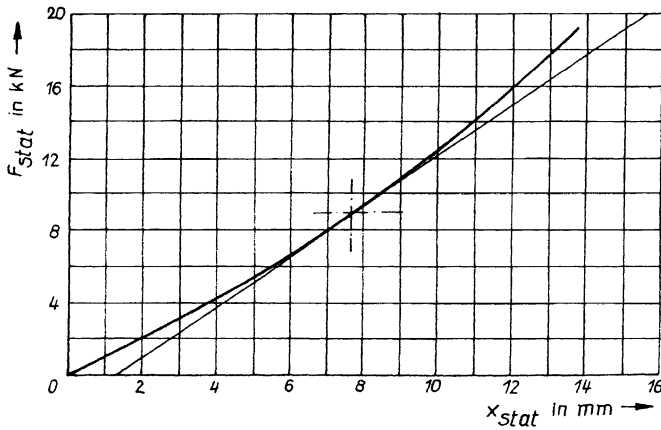


Bild 1.19 Statische Federkennlinie einer Gummifeder

1.3.5

Lösungen L1.1 bis L1.3

L1.1 Nach Gleichung (1.20) gilt

$$J_S = \frac{T^2}{4\pi^2} c_T; \quad c_T = \frac{I_P G}{l}. \quad (1.63)$$

Man findet

$$T = \frac{41,5}{50} \text{ s} = 0,83 \text{ s}; \quad I_P = \frac{\pi d^4}{32} = 0,002\,513 \text{ cm}^4; \quad c_T = 5,244 \text{ N} \cdot \text{m};$$

$$\underline{\underline{J_S = 0,0915 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}} \quad (1.64)$$

L1.2 Wenn das körperfeste Koordinatensystem in die Symmetrieebene gelegt wird, folgt für einen symmetrischen Körper, dass $J_{\xi\eta}^S = J_{\eta\zeta}^S = 0$ gilt. Das Gleichungssystem (1.32) vereinfacht sich wegen $\cos \gamma_1 = \cos(\pi/2 - \alpha_1) = \sin \alpha_1$ zu

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \sin^2 \alpha_1 & 2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{\xi\xi}^S \\ J_{\zeta\zeta}^S \\ J_{\xi\zeta}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^S \\ J_{22}^S \\ J_{33}^S \end{bmatrix}. \quad (1.65)$$

Es hat die Lösungen

$$\underline{\underline{J_{\xi\xi}^S = J_{33}^S; \quad J_{\zeta\zeta}^S = J_{22}^S; \quad J_{\xi\zeta}^S = \frac{J_{11}^S - J_{33}^S \cos^2 \alpha_1 - J_{22}^S \sin^2 \alpha_1}{2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1}}}. \quad (1.66)$$

Ein vierter Versuch liefert aus der DrehSchwingung um die η -Achse unmittelbar das Hauptträgheitsmoment

$$\underline{\underline{J_{\eta\eta}^S = J_{III}^S}}. \quad (1.67)$$

Mit (1.66) und (1.67) sind vier Elemente des Trägheitstensors des symmetrischen Körpers bestimmt. Um daraus die beiden anderen Hauptträgheitsmomente zu bestimmen, ist aufgrund von (1.34) folgendes Eigenwertproblem zu lösen:

$$\begin{bmatrix} J_{\xi\xi}^S - J & J_{\xi\zeta}^S \\ J_{\xi\zeta}^S & J_{\zeta\zeta}^S - J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.68)$$

Hieraus folgen die beiden anderen Hauptträgheitsmomente aus einer quadratischen Gleichung:

$$J_{I,II}^S = \frac{1}{2}(J_{\xi\xi}^S + J_{\zeta\zeta}^S) \pm \sqrt{\frac{(J_{\xi\xi}^S - J_{\zeta\zeta}^S)^2}{4} - J_{\xi\zeta}^S J_{\zeta\xi}^S + (J_{\xi\zeta}^S)^2}. \quad (1.69)$$

Die Hauptachsenwinkel α_1 und γ_1 folgen aus (1.68), wenn dort die Hauptträgheitsmomente J_I^S und J_{II}^S eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \tan \alpha_1 &= -\frac{J_{\xi\zeta}^S}{J_{\zeta\zeta}^S - J_I^S} = \frac{J_I^S - J_{\zeta\zeta}^S}{J_{\xi\zeta}^S}; & \underline{\underline{\cos \gamma_1 = \sin \alpha_1}} \\ \tan \alpha_{II} &= -\frac{J_{\xi\zeta}^S}{J_{\zeta\zeta}^S - J_{II}^S} = \frac{J_{II}^S - J_{\xi\zeta}^S}{J_{\xi\zeta}^S}; & \underline{\underline{\cos \gamma_{II} = \sin \alpha_{II}}} \end{aligned} \quad (1.70)$$

L1.3 Das kubische Polynom soll die Messwerte approximieren, also die Bedingungen

$$c_1 x_k + c_3 x_k^3 = F_k \quad (1.71)$$

für $k = 1$ bis 7 möglichst gut erfüllen. Das sind 7 lineare Gleichungen für die beiden Unbekannten c_1 und c_3 , die Elemente des Parametervektors $\mathbf{p}$. Schreibt man diese Gleichungen in Matrixschreibweise als

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b}, \quad (1.72)$$

deren Ausdrücke folgende Bedeutungen haben

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_7 \\ x_1^3 & x_2^3 & \dots & x_7^3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}^T = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_7]; \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad (1.73)$$

dann liefert die Forderung nach dem Minimum der mittleren quadratischen Abweichung folgende Matrixengleichung [30] (Ausgleichsrechnung):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (1.74)$$

Dies sind zwei Zahlenwertgleichungen für die beiden Unbekannten, die nach dem Einsetzen der Messwerte aus Tabelle 1.7 lauten:

$$\begin{aligned} 0,364 c_1 + 36,4 \cdot 10^{-6} c_3 m^2 &= 450,92 \text{ kN/m} \\ 36,4 c_1 + 4,298\,944 \cdot 10^{-3} c_3 m^2 &= 46\,456,16 \text{ kN/m}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Ihre Lösungen sind

$$\underline{\underline{c_1 = 1032 \text{ kN/m}}}; \quad \underline{\underline{c_3 = 2,07 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^3}}. \quad (1.76)$$

Die Tangente entspricht der lokalen Federkonstante, d.h. es folgt aus dem Ansatz (1.62):

$$\frac{dF}{dx} = c(x) = c_1 + 3c_3 x^2. \quad (1.77)$$

Für $x_{\text{st}} = 7,66 \text{ mm}$ gilt also

$$\begin{aligned} c(x_{\text{st}}) &= 1032 + 3 \cdot 2,07 \cdot 10^6 \cdot (7,66^2 \cdot 10^{-3})^2 \text{ kN/m} \\ &= (1032 + 364) \text{ kN/m} = 1396 \text{ kN/m.} \end{aligned} \quad (1.78)$$

Da es sich um eine harte Gummisorte handelt, und eine Frequenz von 20 Hz für Gummi schon als hoch anzusehen ist, ist der Faktor von Bedeutung, der im Bereich $k_{\text{dyn}} = 2,8$ bis 3,2 liegt, vgl. Bild 1.16c. Die dynamische Federkonstante ist also etwa

$$\underline{\underline{c_{\text{dyn}} \approx 3 \cdot 1400 = 4200 \text{ kN/m.}}} \quad (1.79)$$

Die Annahme von k_{dyn} stellt eine große Unsicherheit bei der Bestimmung der dynamischen Federkonstante dar. Es wäre hier wohl ausreichend gewesen, mit einem Mittelwert einer linearisierten Kennlinie zu rechnen, da die Ungenauigkeit von k_{dyn} diejenige der Nichtlinearität überdeckt.

1.4

Dämpfungskennwerte

1.4.1

Allgemeine Zusammenhänge

Mechanische Energieverluste treten bei allen mechanischen Bewegungen auf, d. h., Dämpfung ist zwar bei allen Schwingungen stets vorhanden, aber bei der dynamischen Analyse eines Antriebssystems muss entschieden werden, ob sie von Bedeutung ist und in welcher Form sie im Berechnungsmodell überhaupt erfasst werden soll. Dazu kann man sich an folgende Regeln halten:

1. Auf die Berücksichtigung der Dämpfung kann man meist verzichten, wenn bloß folgende Größen interessieren:
 - niedere Eigenfrequenzen (und Resonanzgebiete) eines Antriebssystems,
 - die Spitzenwerte nach Stoßvorgängen,
 - Schwingungszustände außerhalb der Resonanzgebiete.
2. Dämpfungskräfte haben merklichen Einfluss und sollten zumindest durch die modale oder viskose Dämpfung einbezogen werden, wenn folgende Größen interessieren:
 - Resonanzamplituden linearer Systeme bei periodischer Belastung,
 - die Lastwechselzahl bei Ausschwingvorgängen, z. B. nach Stößen,
 - höhere Eigenfrequenzen und höhere Eigenformen,
 - Aussagen zum Stabilitätsverhalten parametererregter Schwinger.
3. Genauere Dämpfungsansätze sind dann zu empfehlen, wenn folgende Größen interessieren
 - die Erwärmung des Materials, z. B. von Gummifedern,
 - das Verhalten absichtlich eingebauter dämpfender Baugruppen, z. B. Viskositäts-Drehschwingungsdämpfer und gedämpfte Tilger,
 - das dynamische Verhalten nichtmetallischer Werkstoffe.

Dämpfungskräfte entstehen an der Oberfläche der sich bewegenden Festkörper, wie z. B. Reibung in Führungen und Lagern oder bei Relativbewegungen im Innern der Festkörperwerkstoffe. Die Dämpfungskräfte an den Fugen und Kontaktstellen werden für die jeweilige Baugruppe mit experimentell ermittelten Dämpfungskoeffizienten berechnet.

Für die inneren **Dämpfungskräfte** infolge der Werkstoffdeformationen sind kontinuumsmechanische Berechnungsmodelle zu verwenden, deren Auswertung aufwendig ist, weil Systeme von partiellen Differentialgleichungen zu lösen sind. Meist muss auch die Wechselwirkung der mechanischen und thermodynamischen Prozesse berücksichtigt werden, wenn sich das Material infolge der Dämpfungsarbeit aufheizt und sich dabei die Werkstoffparameter ändern. Vielfach hat sich gezeigt, dass man allein etwa fünf bis zehn Parameter braucht, um das Werkstoffverhalten genau zu erfassen.

Für viele Bauteile werden deshalb Parameterwerte zur Erfassung der Dämpfung für das komplette Bauteil ermittelt. Es besteht in der Berechnungspraxis der Wunsch, mit wenigen (und nach Möglichkeit experimentell einfach zu bestimmenden) Parameterwerten eine möglichst gute Approximation der Dämpfungskräfte bei beliebigen Zeitverläufen der Belastungen zu erhalten.

Jeder Dämpfungsansatz muss mathematisch ausdrücken, dass die Dämpfungskraft entgegengesetzt zur momentanen Geschwindigkeitsrichtung wirkt, weil nur dann dem mechanischen System bei der Bewegung mechanische Energie entzogen wird. Im allgemeinen sind Dämpfungskräfte bei den verschiedenen Werkstoffen auf verschiedene Weise von den Kräften, Deformationen und deren Zeitableitungen abhängig, so dass ein funktioneller Zusammenhang

$$f(\dots, \ddot{q}, \dot{q}, q, F, \dot{F}, \dots) = 0 \quad (1.80)$$

besteht. Falls Dämpfungskräfte nur von der Koordinate und deren Ableitungen abhängen, kann man sie in folgender Weise beschreiben:

$$F_D = |F(q, \dot{q})| \operatorname{sign}(\dot{q}) \quad (1.81)$$

Dabei ist q die Koordinate, an welcher infolge der Relativbewegung die Dämpfungskraft F_D wirkt. Der Betrag kann eine nichtlineare Funktion der Koordinate und/oder der Geschwindigkeit sein.

Zur Beschreibung äußerer Dämpfungen wird im Allgemeinen eine Trennung von Federkraft und Dämpfungskraft in der Bewegungsgleichung vorgenommen. Man erhält dann bei harmonischer Erregung und linearer Federkraft die Form

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + F_D = \hat{F} \sin \Omega t \quad (1.82)$$

Für die Dämpfungskraft sind folgende Ansätze üblich:

Coulomb'sche Reibung:

$$F_D = F_R \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|} = F_R \operatorname{sign}(\dot{q}) \quad (1.83)$$

Viskose Dämpfung:

$$F_D = b\dot{q} = b|\dot{q}| \operatorname{sign}(\dot{q}) \quad (1.84)$$

Komplexe Dämpfung:

$$F_D = j b^* \dot{q} \quad (1.85)$$

Frequenzunabhängige Dämpfung:

$$F_D = \frac{b^* \dot{q}}{\Omega} = \frac{b^*}{\Omega} |\dot{q}| \operatorname{sign}(\dot{q}) \quad (1.86)$$

Hysteres-Dämpfung:

$$F_D = F_R \sqrt{1 - \left(\frac{q}{\hat{q}}\right)^2} \operatorname{sign}(\dot{q}). \quad (1.87)$$

Da im stationären Betrieb eines linearen Systems die Bewegung in der Frequenz der Erregung erfolgt – $q = \hat{q} \sin(\Omega t - \varphi)$; $\dot{q} = \hat{q} \Omega \cos(\Omega t - \varphi)$ – stellt (1.86) eine amplitudenabhängige Dämpfungskraft dar.

Die Coulomb'sche Reibung (1.83) ist demgegenüber weder amplituden- noch frequenzabhängig. Das Glied $\dot{q}/|\dot{q}|$ gibt lediglich die von der Geschwindigkeit gesteuerte Wirkungsrichtung von F_D an. Dieser Ansatz liefert im Gegensatz zu den anderen Ansätzen keine elliptische Hysteresekurve (vgl. Tabelle 1.8) und ist für beliebige zeitliche Erregungen brauchbar. Er hat nur gewisse Nachteile bei der analytischen Behandlung, die aber bei numerischen Lösungen nicht von Bedeutung sind.

Bei dem linearen Ansatz der viskosen Dämpfung (1.84) ändert sich die Richtung der Dämpfungskraft $b|\dot{q}|$ mit dem Vorzeichen der Geschwindigkeit $\dot{q}$. Dies gilt für die harmonische Bewegung, aber nicht für alle Bewegungen, weshalb dieser Ansatz bei komplizierteren Kraftverläufen „nicht richtig dämpft“, d. h. Lösungen liefert, die von der Realität abweichen. Der Ansatz (1.84) wird am häufigsten bei allen Anwendungen benutzt, weil er die Vorzüge der mathematischen Behandlung linearer Systeme (Superposition!) hat.

Der Ansatz der frequenzunabhängigen Dämpfung (1.86) beschreibt die Materialdämpfung erfahrungsgemäß besser als der Ansatz (1.84), aber er gilt nur für rein harmonische Bewegungen mit gegebener Erregerkreisfrequenz Ω . Mathematisch lässt er sich analog zum Ansatz (1.84) behandeln. Alle Formeln, die für die viskose Dämpfung hergeleitet werden, lassen sich übernehmen, wenn man statt b dann b^*/Ω einsetzt, vgl. auch Bild 1.23 und (1.111).

Man hat versucht, diese Beschränkung des Ansatzes (1.86) mit der komplexen Dämpfung (1.85) aufzuheben. Wie der Vergleich der beiden Ansätze zeigt, benutzen sie dieselbe Konstante b^* als Kennwert, vgl. dazu auch die Verallgemeinerung in Abschnitt 6.6.3 und (6.342) bis (6.347). Der Nachteil der komplexen Dämpfung ist seine fehlende Kausalität, wie S. CRANDALL im Jahre 1962 bewies, d. h., die Schwingungsantwort kann zeitlich vor(!) der Erregung (also die Wirkung vor der Ursache) auftreten.

Eine ebenfalls frequenzunabhängige Dämpfung beschreibt der nichtlineare Ansatz (1.87). Er modelliert die Werkstoffdämpfung nichtlinear, wodurch die Amplitude des Weges nicht einfach derjenigen der Erregerkraft proportional ist. Auch dieser Ansatz hat den Nachteil, dass er sich nur bei der harmonischen Bewegung leicht anwenden lässt. Er wird in Abschnitt 7.2.2.3 näher behandelt.

Es haben sich international mehrere dimensionslose Kenngrößen zur Beschreibung der Dämpfung eingebürgert, von denen der Dämpfungsgrad D (Dämpfungsmaß nach E. LEHR) am weitesten verbreitet ist. Bei harmonischer Erregung gelten für das Berechnungsmodell des linearen Schwingers mit einem Freiheitsgrad folgende Zusammenhänge zwischen den Dämpfungsparametern und -kenngrößen bei $D \ll 1$ (vgl. Tabelle 1.9):

$$D = \frac{\Lambda}{2\pi} = \frac{\psi}{4\pi\eta} = \frac{\varphi}{2\eta} = \frac{\delta}{\omega_0}. \quad (1.88)$$

Die vier dimensionslosen Kenngrößen D , Λ , ψ und φ in (1.88) sind proportional dem relativen Verlust an mechanischer Energie pro Schwingung. Es gibt auch noch einen Zusammenhang mit der Anzahl n der auftretenden Schwingungen (1.108), (1.109), mit der Stoßzahl (1.138) und dem Wirkungsgrad, was hier nicht weiter verfolgt werden soll.

Die Dämpferkonstante

$$b = 2D\sqrt{mc} = \frac{2Dc}{\omega_0} = 2Dm\omega_0 \quad (1.89)$$

hat die Maßeinheit $N \cdot s/m$ und kann nur in Verbindung mit einer anderen dimensionsbehafteten Größe des Schwingers bestimmt werden, wie (1.89) zeigt.

Nun sollen noch einige analytische Zusammenhänge gezeigt werden, die für die Ermittlung der Dämpfungsparameter von Bedeutung sind. Die Bewegungsgleichung für freie Schwingungen eines viskos gedämpften Einzelschwingers lautet:

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0 \quad (1.90)$$

oder mit den Kenngrößen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad 2D = \frac{b}{\sqrt{mc}} \quad (1.91)$$

für die Eigenkreisfrequenz ω_0 des ungedämpften Schwingers und den Dämpfungsgrad D :

$$\ddot{q} + 2D\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (1.92)$$

Sie hat für die Anfangsbedingungen

$$t = 0: \quad q(0) = q_0; \quad \dot{q}(0) = v_0 \quad (1.93)$$

die Lösung (mit der Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems $\omega = \omega_0\sqrt{1-D^2}$ und der Abklingkonstante $\delta = D\omega_0$):

$$\begin{aligned} q(t) &= \exp(-\delta t) \left[q_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \delta q_0}{\omega} \sin \omega t \right] \\ &= C \exp(-\delta t) \cos(\omega t - \beta). \end{aligned} \quad (1.94)$$

C und β sind durch die Anfangsbedingungen bestimmte Konstanten. Einen typischen Zeitverlauf zeigt Bild 1.20.

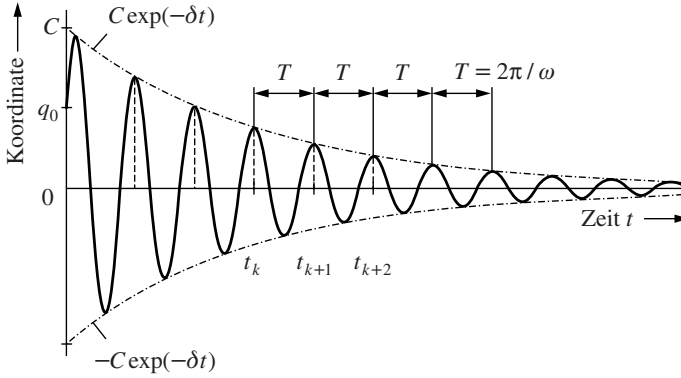


Bild 1.20 Ausschwingvorgang für eine freie Schwingung (Dämpfungsgrad $D = 0,05$)

Bildet man das Verhältnis zweier lokaler Maxima, deren Zeitabstand das n -fache der Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ ist, so gilt

$$q(t) = C \exp(-\delta t) \cos(\omega t - \beta) \quad (1.95)$$

$$q(t + nT) = C \exp(-\delta t - \delta nT) \cos(\omega t + n\omega T - \beta). \quad (1.96)$$

Da $\omega T = 2\pi$ ist, ändert sich der Kosinuswert nach einer vollen Periode nicht. Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{q(t)}{q(t + nT)} &= \frac{q_k}{q_{k+n}} = \frac{C \exp(-\delta t)}{C \exp(-\delta t - \delta nT)} \\ &= \exp(\delta nT) = \exp\left(\frac{2\pi nD}{\sqrt{1 - D^2}}\right) = \exp(n\Lambda). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Daraus folgt der exakte Zusammenhang zwischen dem Dämpfungsgrad D und dem logarithmischen Dekrement, vgl. die Näherung in (1.88).

Bei harmonisch erregten erzwungenen Schwingungen lautet die Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = \hat{F} \sin(\Omega t). \quad (1.98)$$

Die partikuläre Lösung liefert den stationären Verlauf (Dauerzustand)

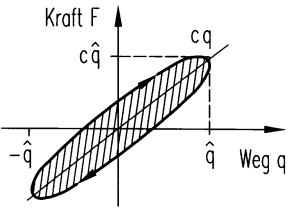
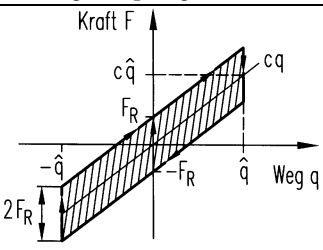
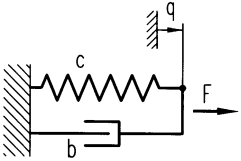
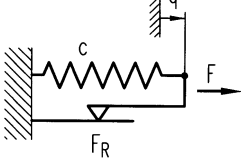
$$q(t) = \frac{1}{c} V \hat{F} \sin(\Omega t - \varphi) = \hat{q} \sin(\Omega t - \varphi); \quad \dot{q}(t) = \hat{q} \Omega \cos(\Omega t - \varphi). \quad (1.99)$$

Mit dem Abstimmungsverhältnis $\eta = \Omega/\omega_0$ und den aus (1.91) bekannten Größen ergibt sich die Wegamplitude $\hat{q} = V \hat{F}/c$ mit der Vergrößerungsfunktion

$$V(D, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}}. \quad (1.100)$$

Trägt man die Kraft über dem Weg auf, so ergibt sich die in Tabelle 1.8 gezeigte Ellipse für die viskose Dämpfung. Man beachte den Durchlaufsin, der sich aus dem harmonischen Zeitverlauf der Erregerkraft ergibt. Infolge der Dämpfung eilt

Tabelle 1.8 Hysteresekurven bei verschiedenen Dämpfungsansätzen

Viskose Dämpfung	Reibungsdämpfung
	
	
$F = c\dot{q} + b\dot{q}$	$F = c\dot{q} + F_R \text{sign}(\dot{q})$
$\Delta W = \pi b \Omega \hat{q}^2$	$\Delta W = 4F_R \hat{q}$

der Wegverlauf dem Kraftverlauf um den „Verlustwinkel“ φ nach, der sich aus

$$\sin \varphi = 2D\eta V; \quad \cos \varphi = (1 - \eta^2)V \quad (1.101)$$

ergibt, vgl. auch Tabelle 1.9. Die mechanische Arbeit, welche die Erregerkraft während eines vollen Zyklus ($0 \leq t \leq T$) verrichtet, beträgt unter Beachtung von (1.101):

$$\begin{aligned}
 \Delta W &= \oint F d q = \int_0^T F(t) \dot{q}(t) dt = \int_0^T \hat{F} \sin \Omega t \hat{q} \Omega \cos(\Omega t - \varphi) dt \\
 &= \hat{F} \hat{q} \int_0^{2\pi} (\sin \Omega t \cos \Omega t \cos \varphi + \sin^2 \Omega t \sin \varphi) d(\Omega t) = \hat{F} \hat{q} \pi \sin \varphi \quad (1.102) \\
 &= \hat{F} \hat{q} \pi 2D\eta V = 2\pi D c \eta \hat{q}^2 = \pi b \Omega \hat{q}^2.
 \end{aligned}$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb der Hysteresekurve, vgl. Tabelle 1.8. Die relative Dämpfung ψ ist gleich dem Verlust an mechanischer Energie pro Periode im Verhältnis zur mechanischen Arbeit $W = (1/2)c\hat{q}^2$ und beträgt wegen (1.102):

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} = \frac{2\pi b \Omega}{c} = 4\pi D\eta. \quad (1.103)$$

Die Hysteresekurven bei den Dämpfungsansätzen (1.84) bis (1.86) sind ebenfalls Ellipsen. Für die Reibungsdämpfung ergibt sich ein Parallelogramm, wie man Tabelle 1.8 entnehmen kann.

1.4.2

Bestimmungsmethoden für Dämpfungskennwerte

Zur Ermittlung der Dämpfungskennwerte werden neben den theoretischen Methoden, welche von den rheologischen Kenngrößen des Materials und den Besonderheiten des Werkstücks oder der Konstruktion ausgehen, vor allem experimentelle Methoden eingesetzt. Es haben sich dabei der Ausschwingversuch und erzwungene Schwingungen mit harmonischer Erregung bewährt. Eine Übersicht über Methoden zur Ermittlung der Dämpfungsparameter gibt Tabelle 1.9.

Beim *Ausschwingversuch* wird das zu untersuchende Objekt, (z. B. eine Gummimatte mit darauf liegender Masse oder ein Maschinen-Bauteil) durch einen Schlag oder eine plötzliche statische Belastung oder Entlastung zur Eigenschwingung angeregt. Bei einfachen Ansprüchen wird z. B. mit einem Hammer geschlagen oder ein vorgespanntes Seil plötzlich durchgetrennt. Aus dem Ausschwingversuch ermittelt man üblicherweise das logarithmische Dekrement Λ . Mit dem Zeitabstand einer einzigen Periodendauer zwischen zwei Maxima folgt für $n = 1$ aus (1.97):

$$\Lambda = \ln(q_k/q_{k+1}). \quad (1.104)$$

Häufig wird über n Vollschrwingungen ausgewertet. Man erhält dann ebenfalls aus (1.97):

$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln(q_k/q_{k+n}). \quad (1.105)$$

Um die Größenordnung des Dämpfungsgrades aus einem vorliegenden Messschrieb abzuschätzen, kann man beim Ausschwingversuch abzählen, wie viele Vollschrwingungen aufgetreten sind, bis die Schwingung auf ihre halbe Anfangs-Amplitude abgeklungen ist. Aus (1.97) folgt der Zusammenhang, dass eine Schwingung nach n Perioden den Ausschlag

$$q(nT) = C \cdot \exp(-\delta nT) = C \cdot \exp(-\omega_0 T D n) = C \cdot \exp(-2\pi D n) \quad (1.106)$$

besitzt. Aus dieser Gleichung folgt, dass eine Schwingung nur noch den halben Anfangsausschlag $q(nT) = C/2$ hat, wenn

$$\exp(-2\pi D n) = 0,5; \quad 2\pi n D = \ln 2 \approx 0,6931 \quad (1.107)$$

beträgt, also für $D \ll 1$ etwa

$$D \approx \frac{0,11}{n}. \quad (1.108)$$

Man kann allein aus der Anzahl der Schwingungen n , die bis zum Abklingen auf den halben Anfangswert auftreten, den Dämpfungsgrad abschätzen. Somit folgt z. B. aus Bild 1.20 der Wert $n \approx 2$, also aus (1.108) der Dämpfungsgrad $D \approx 0,11/2 = 0,055$. Mit etwas Übung kann man aus Ausschwingkurven die Größe des Dämpfungsgrades ungefähr erkennen.

Folgende Abschätzung liefert einen Mittelwert, wenn man die Zeit bis zum praktischen Auslöschen der Schwingungen für die Zählung nutzen kann. Die ganz kleinen Ausschläge sollte man dabei ignorieren, da dafür „wieder eine andere Theorie“

Tabelle 1.9 Elementare Methoden zur Ermittlung der Dämpfungskennwerte

	Kenngröße	Herkunft, geometrische Größe
Ausschwingversuch	Logarithmisches Dämpfungsdekrement $\Lambda = \frac{1}{n} \ln \left \frac{q(t_k)}{q(t_k + nT)} \right \quad (1)$	Abklingkurve
	Relative Dämpfung $\psi = \frac{\Delta W}{W} \quad (2)$	Hysteresekurve
	Verlustwinkel $\sin \varphi = \frac{b \Omega \hat{q}}{\hat{F}} \approx \varphi \quad (3)$	Zeitverlauf
Erzwungene harmonische Schwingung	Dämpfungsgrad aus Halbwertsbreite $D = \frac{f_2 - f_1}{2f_0} \quad (4)$	Resonanzkurve
	Dämpfungsgrad $D = \frac{b}{2\sqrt{cm}} \quad (5)$	Berechnungsmodell

zutrifft. Wenn man das Abklingen bis auf etwa 4 % des Anfangswertes verfolgen kann, ergibt sich aus einer analogen Rechnung aus (1.106) die Näherungsformel

$$D \approx \frac{0,5}{n^*}, \quad (1.109)$$

wenn n^* die Anzahl der Schwingungen bis zum Abklingen ist.

Es ist anzustreben, die Feder- und Dämpfungskennwerte bei denselben Frequenzen und Amplituden zu ermitteln, die im realen Betriebszustand auftreten.

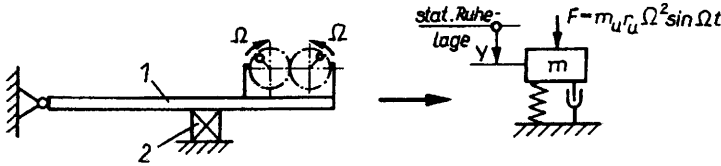


Bild 1.21 Prüfstand zur Kennwertbestimmung einer Gummifeder;
1 Belastung und Führung, 2 Gummifeder

Bild 1.21 zeigt das Schema eines Versuchsstandes zur Parameterbestimmung an einer Gummifeder und das Berechnungsmodell.

Die Energieverluste durch innere Dämpfung entstehen dadurch, dass das Kraft-Verformungs-Diagramm bei Belastung mit dem bei Entlastung nicht übereinstimmt. Beide Kurven bilden vielmehr bei stationärer Bewegung die Hysteresekurve, deren Fläche ein Maß für die Verlustenergie einer vollen Schwingung liefert, da die Fläche in einem Kraft-Verformungsdiagramm einer Arbeit proportional ist. Die Form der Fläche hängt vom Werkstoff, der Beanspruchung und der Form des Werkstückes ab.

Die relative Dämpfung ψ ergibt sich bei harmonischer Wegerregung eines Bauteils im stationären Zustand aus der Hysteresekurve, vgl. (2) in Tabelle 1.9. Aus den in Tabelle 1.8 angegebenen Dämpfungsansätzen folgen die Formen der dazu gezeichneten Hysteresekurven. Man kann unter Beachtung des äquivalenten Dämpfungsvermögens die Dämpfungsparameter aller Ansätze ineinander umrechnen, wenn man die relative Dämpfung ψ gleichsetzt, also auch in die Parameter eines linearen Schwingers, vgl. (1.103) und Tabelle 1.8.

Die Messung des Verlustwinkels ϕ ist relativ schwierig und liefert meist ungenaue Werte, da dieser Winkel klein und nicht auf mehrere Ziffern genau bestimmbar ist, vgl. (1.101) und (3) in Tabelle 1.9. Die Auswertung erzwungener Schwingungen liefert in Resonanznähe relativ genaue Aussagen für den Dämpfungsgrad D . Um möglichst genaue Werte zu erhalten, ist es günstig, nicht die Höhe der Resonanzspitze (die umgekehrt proportional zu $2D$ ist) auszumessen, sondern die Breite der Resonanzkurve bei den angegebenen Frequenzen, vgl. (4) in Tabelle 1.9.

Für kleine Dämpfungen eignet sich das aus (1.100) begründete Verfahren der Halbwertsbreite. Bei der Messung geht man folgendermaßen vor: Man erregt das Schwingungssystem in Resonanz und bestimmt den Resonanzausschlag $\dot{q}_{\max}$ und die Resonanzfrequenz f_0 . Dann wird die Erregerfrequenz so lange verändert, bis die Schwingungsamplitude $\dot{q}_{\max}/\sqrt{2}$ vorliegt.

Die zugehörigen Erregerfrequenzen sind f_1 und f_2 . Aus ihrer Differenz lässt sich gemäß (4) in Tabelle 1.9 der Dämpfungsgrad D bestimmen. Bei bekannter Masse m könnte man auch die Dämpferkonstante aus

$$b = m(\Omega_2 - \Omega_1) = 2\pi m(f_2 - f_1) \quad (1.110)$$

berechnen. Ein wesentlicher Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, dass man dabei die Größe der Erregerkraft nicht kennen muss.

1.4.3

Erfahrungswerte zur Dämpfung

Der klassische Weg besteht darin, die Parameterwerte der Bauteile zu vermessen, die als Dämpfer dienen. Dieser Weg wird bei den Baugruppen gegangen, die als Dämpfer produziert werden, z. B. die in Abschnitt 4.4 behandelten Torsionsschwingungsdämpfer oder die handelsüblichen Dämpfer, die z. T. in der VDI-Richtlinie 3833 beschrieben sind, vgl. die Beispiele in Bild 1.22.

Viele Dämpfer nutzen den Effekt, dass beim Quetschen eines zähen Mediums durch einen engen Spalt eine geschwindigkeitsabhängige Kraft entsteht. Als Dämpfungsmedium haben sich verschiedene Öle, Bitumen, Polybuten und Silikon bewährt. Auch die Reibung wird bei manchen Dämpfern genutzt, vgl. Bild 4.42 und Bild 4.44. Für die handelsüblichen Dämpfer liegen meist Kennlinien und Parameterwerte vor, die man von den Herstellerfirmen erfahren kann.

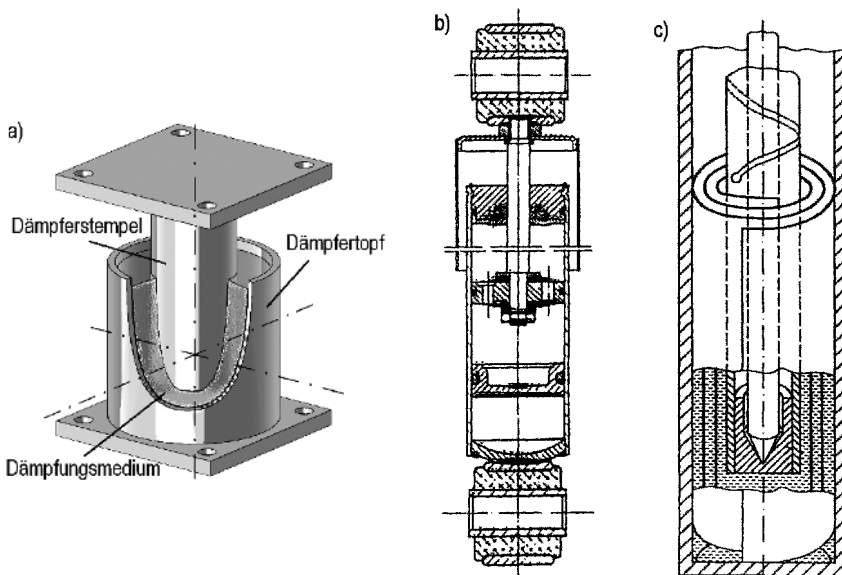


Bild 1.22 Dämpfer als Baugruppen;

a) VISCO-Dämpfer (Quelle: GERB), **b)** Einrohrdämpfer (VDI 3833) (Quelle: Fichtel & Sachs), **c)** Spiral-Lagerdämpfer (VDI 3833)

Wertet man einen Ausschwingversuch aus, so findet man in den meisten Fällen eine Abhängigkeit des logarithmischen Dekrementes vom Ausschlag. Dies besagt, dass die Annahme einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung für den gesamten Bereich nicht zutrifft, vgl. Bild 1.24.

Man erkennt daraus, dass dieser Versuch durchaus dazu geeignet ist, eine Amplitudenabhängigkeit der Dämpfung zu bestimmen. Will man auch eine Frequenzabhängigkeit feststellen, so müsste die Eigenfrequenz durch Änderung der Masse verschoben werden. Dies ist jedoch meist nur in engen Grenzen möglich. Weiterhin muss beachtet werden, dass die gefundenen Werte für Schwingungen um die statische Ruhelage gelten.

Bild 1.23 zeigt die Ergebnisse von Ausschwingversuchen der Radialbewegung eines Traktorreifens. Es zeigt sich eine starke Frequenzabhängigkeit der Dämpfungskonstante b . Dies weist auf eine frequenzunabhängige Werkstückdämpfung hin, wie sie durch einen Ansatz (1.86) beschrieben wird. Approximiert man die Versuchspunkte durch die eingezeichnete Hyperbel, so findet man $b^* = b/f = \text{konst.}$

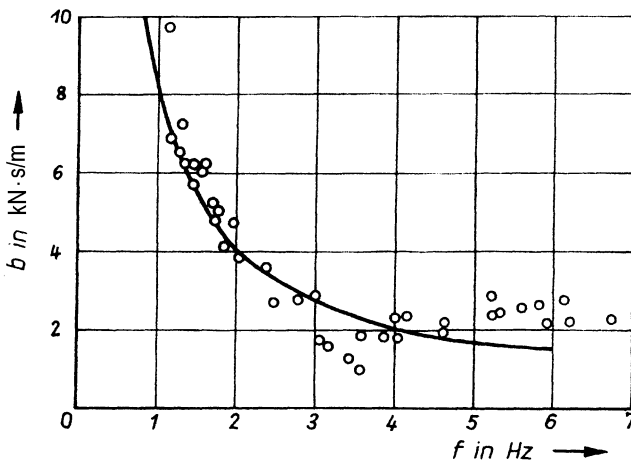


Bild 1.23 Frequenzabhängige „Dämpfungskonstante“ eines Traktorreifens
(Quelle: Diss. Müller, H., TU Dresden 1977)

Für einige Baugruppen existieren analytische Formeln zur Berechnung der Dämpfungskonstanten. Davon zeigt Tabelle 1.10 einige Beispiele. Meist wirkt die Dämpfung innerhalb der Maschinenbaugruppen, ohne dass ein bestimmtes Bauteil dafür angeordnet wird. Für solche Fälle wird für einzelne Moden der Dämpfungsgrad des Gesamtsystems bestimmt und z. B. in Form der modalen Dämpfung berücksichtigt. Die experimentelle Modalanalyse liefert neben den Eigenfrequenzen und Eigenformen auch modale Dämpfungsgrade D_i . Es liegen nur wenige Erfahrungen für Dämpfungskennwerte bei nichtharmonischer Belastung vor.

Genauere Untersuchungen haben gezeigt, dass der Dämpfungsgrad eines Werkstoffs oder eines Bauteils bei höheren Frequenzen niedriger ist als bei tiefen Frequenzen. Die Ansätze (1.85) bis (1.87), die eine elliptische Hysteresekurve des Materials liefern, beschreiben jeweils eine Dämpfung, die unabhängig von der Frequenz ist.

Man hilft sich in der Praxis mit der Angabe von Dämpfungsgraden in bestimmten Belastungsbereichen.

Für Torsionseigenfrequenzen von Dampfturbinen wurde z. B. aufgrund von Experimenten im Bereich von 8 Hz bis 150 Hz folgende Zahlenwertgleichung für den Dämpfungsgrad ermittelt (HUSTER/ZIEGLER, VDI-Berichte 1749):

$$D = (0,05 \dots 0,08) / f; \quad \text{Eigenfrequenz } f \text{ in Hz.} \quad (1.111)$$

Damit ergeben sich Dämpfungsgrade für dasselbe Material von $D = 0,0003 \dots 0,01$!

Als Erfahrungswerte sind bekannt:

Maschinenstahl	$D = 0,0008$
Hochfester Stahl	$D = 0,0003 \dots 0,0015$
Baustahl	$D = 0,0025$
Grauguss	$D = 0,01 \dots 0,05$
Antriebsstränge, Maschinengestelle	$D = 0,02 \dots 0,08$
Beton, Baugrund	$D = 0,01 \dots 0,1$
Gummifedern	$D = 0,08 \dots 0,12$

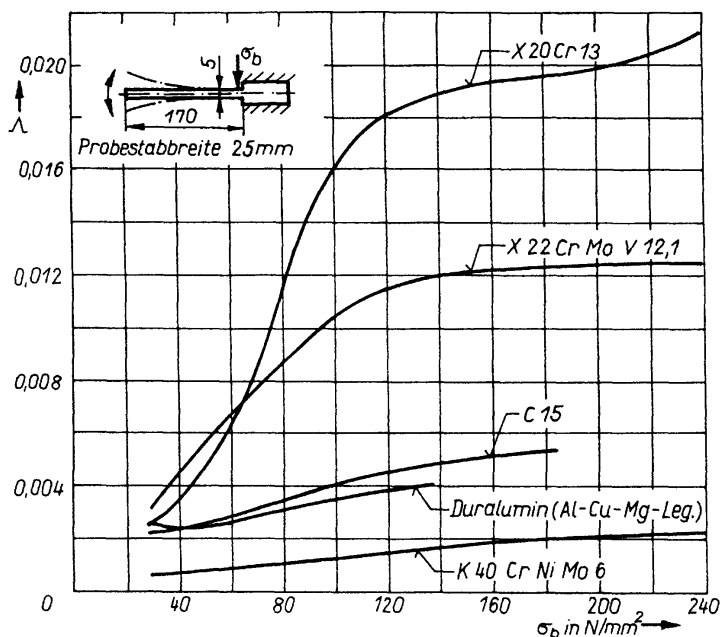


Bild 1.24 Logarithmisches Dekrement der Werkstückdämpfung in Abhängigkeit vom Spannungsausschlag bei verschiedenen Werkstoffen

Man benutzt die in (1.88) genannten Kenngrößen der Dämpfung oft zum gegenseitigen Vergleich der Dämpfungsfähigkeit von Werkstoffen, wie dies z. B. in Bild 1.24 dargestellt ist. Durch Messung des logarithmischen Dekrements in Abhängigkeit vom Spannungsausschlag kann beispielsweise abgelesen werden, dass der Stahl X20Cr13 gegenüber dem Stahl K40NiMo6 vor allem bei großer Spannungsamplitude bedeutend bessere Dämpfungseigenschaften hat.

Tabelle 1.10 Erfahrungswerte von Dämpfungskonstanten

Dämpfungskonstante	Gültigkeit
$b = c_1 B \cdot \eta \left[\frac{D}{(D-d)} \right]^3$	Radiale Zapfenbewegung in Gleitlagern
$b = c_2 \eta \left(\frac{B}{h_0} \right)^3$	Geschmierte Führungen bei Bewegung senkrecht zur Führungsrichtung
c_1, c_2 von Lager- und Führungsart abhängige Konstante D Lagerdurchmesser d Zapfendurchmesser B Breite von Lager- und Führungsbahn h_0 Führungsspiel η dynamische Ölzähigkeit	
$b_T = \mu A r^2 \quad \text{N} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}$	Kurbeltriebe von Kolbenmotoren bei Torsionsschwingungen
A Kolbenfläche cm^2 r Kurbelradius cm μ Dämpfungsbeiwert $\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-3}$	Dieselmotoren: $\mu = 0,04 \dots 0,05 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-3}$ Kraftfahrzeugmotoren: $\mu = 0,015 \dots 0,02 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{cm}^{-3}$
$b_T = 19,1 \cdot \frac{M_m}{n} \quad \text{N} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}$	Kreiselverdichter, Ventilatoren Gebläse bei Torsionsschwingungen
$b_T = 38,2 \cdot \frac{M_m}{n} \quad \text{N} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}$	Schiffsschrauben bei Torsionsschwingungen
M_m durch den Rotor aufgenommenes mittleres Drehmoment $\text{N} \cdot \text{cm}$ n Drehzahl in 1/min	
$b_T = 9,3 \cdot 10^3 \frac{EI}{(E - E_s)} n^2 \quad \text{N} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}$	Rotoren von Elektrogeneratoren bei Torsionsschwingungen
E Elektromotorische Kraft (EMK) des Generators V E_s EMK des Energieverbrauchers (Motor oder Batterie) V, wird gegen äußere Widerstände gefahren, ist $E_s = 0$ I Stromstärke A n Drehzahl in 1/min	
$b = \frac{\pi \eta l d^2}{(D-d)^2} \left[3 + \frac{3}{4} \frac{d}{(D-d)} \right]$	Kolbendämpfer für Translationsbewegung
$D-d$ Kolbenspiel d Kolbendurchmesser l Kolbenlänge η dynamische Ölzähigkeit	
$b_T = \frac{\pi \eta}{\delta} [r_a^4 - r_i^4 + 2B(r_a^3 + r_i^3)]$	Viskositätsdreherschwingungsdämpfer nach Bild 4.45
δ Radialspiel r_a Außenradius r_i Innenradius	B Breite η dynamische Ölzähigkeit

1.5

Erregerkennwerte

1.5.1

Periodische Erregung

Erregungen können in Form von Kraft- und Bewegungserregung auftreten. So werden Torsionsschwingungen durch periodische Erregermomente, die durch die *Gaskräfte* entstehen, erregt, vgl. Kapitel 4. Biegeschwingungen schnell laufender Rotoren haben als Haupterregung die harmonisch wirkende Unwuchtkraft oder die periodische Bewegung von Lagern. Fundamentalschwingungen können ebenfalls sowohl durch periodisch bewegte Maschinenteile (Krafterregung) als auch durch die Bewegung ihres Aufstellungsortes erregt werden, vgl. Kapitel 3.

In der Dynamik ist es üblich, periodische Vorgänge in Form von *Fourier-Reihen* zu beschreiben. Ist $f(\Omega t)$ die periodische Funktion, gilt also mit der Periodendauer $T_0 = 2\pi/\Omega$ die Periodizitätsbedingung:

$$f(\Omega t) = f[\Omega(t + kT_0)]; \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.112)$$

Die Fourier-Reihe lautet

$$f(\Omega t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\Omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\Omega t). \quad (1.113)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\Omega t + \beta_k). \quad (1.114)$$

Es besteht der Zusammenhang

$$c_0 = a_0; \quad c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \sin \beta_k = \frac{a_k}{c_k}; \quad \cos \beta_k = \frac{b_k}{c_k}. \quad (1.115)$$

Die einzelnen Summanden in (1.113) nennt man die *Harmonischen*. Die Parameter a_k , b_k oder c_k sind die *Fourierkoeffizienten*. Ihre Ermittlung ist die Aufgabe der *Fourieranalyse*.

Liegt die Funktion $f(\Omega t)$ analytisch vor, lassen sich die Fourierkoeffizienten geschlossen berechnen. Es gilt dann

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\Omega t) d(\Omega t) \quad (\text{Mittelwert}) \quad (1.116)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\Omega t) \cos k\Omega t d(\Omega t) \quad (1.117)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\Omega t) \sin k\Omega t d(\Omega t). \quad (1.118)$$

Für gerade Funktionen mit $f(\Omega t) = f(-\Omega t)$ gilt $b_k = 0$, für ungerade Funktionen mit $-f(\Omega t) = f(-\Omega t)$ gilt $a_0 = a_k = 0$.

Tabelle 1.11 Fourier-Reihen verschiedener analytisch gegebener Funktionen

Fall	Bild der Funktion	Funktion	Fourier-Koeffizienten	Fourier-Reihe
1		$f(\varphi) = \frac{h}{\pi} \varphi$ $-\pi < \varphi < \pi$	$a_0 = 0; \quad a_k = 0$ $b_k = \pm \frac{2h}{k\pi}; \quad k = \begin{cases} 1; 3; 5; \dots \\ 2; 4; 6; \dots \end{cases}$	$f(\varphi) = \frac{2h}{\pi} \left(\sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi - \dots \right)$
2		$f(\varphi) = \frac{2h}{\pi} \varphi; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ $f(\varphi) = \frac{2h}{\pi} (\pi - \varphi); \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$	$a_0 = 0; \quad a_k = 0$ $b_2 = b_4 = b_6 = \dots = 0$ $b_k = \pm \frac{8h}{k^2\pi^2}; \quad k = \begin{cases} 1; 5; 9; \dots \\ 3; 7; 11; \dots \end{cases}$	$f(\varphi) = \frac{8h}{\pi^2} \left(\sin \varphi - \frac{1}{3^2} \sin 3\varphi + \frac{1}{5^2} \sin 5\varphi - \dots \right)$
3		$f(\varphi) = h \sin \varphi $	$b_k = 0; a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$ $a_0 = \frac{2h}{\pi}; \quad a_k = -\frac{4h}{\pi(k^2-1)}$ $k = 2, 4, 6; \dots$	$f(\varphi) = \frac{4h}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1^2} \cos 2\varphi - \frac{1}{3^2} \cos 4\varphi + \frac{1}{5^2} \cos 6\varphi - \dots \right)$
4		$f(\varphi) = h \sin \varphi; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$ $f(\varphi) = 0; \quad \pi \leq \varphi \leq 2\pi$	$a_1 = a_3 = \dots = 0; a_0 = \frac{h}{\pi}$ $b_k = 0; \quad k \neq 1; \quad b_1 = \frac{h}{2}$ $a_k = -\frac{2h}{\pi(k^2-1)}; k = 2, 4, 6$	$f(\varphi) = \frac{h}{\pi} + \frac{h}{2} \sin \varphi - \frac{2h}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} \cos 2\varphi + \frac{1}{3^2} \cos 4\varphi + \dots \right)$
5		$f(\varphi) = h; \quad -\frac{\varphi_1}{2} \leq \varphi \leq \frac{\varphi_1}{2}$ $f(\varphi) = 0; \quad \frac{\varphi_1}{2} \leq \varphi \leq (2\pi - \frac{\varphi_1}{2})$	$a_0 = \frac{h\varphi_1}{2\pi}; \quad b_k = 0$ $a_k = \frac{2h}{k\pi} \sin k \frac{\varphi_1}{2}$	$f(\varphi) = \frac{h\varphi_1}{2\pi} + \frac{2h}{\pi} \left(\sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi_1 \cos 2\varphi + \frac{1}{3} \sin \frac{3\varphi_1}{2} \cos 3\varphi + \dots \right)$
6		Nr. 5 mit $\varphi_s \rightarrow 0; \quad h \rightarrow \infty$ $h\varphi_s \rightarrow J$ (endlicher Wert)	$a_0 = \frac{J}{2\pi}$ $a_k = \frac{J}{\pi}$	$f(\varphi) = \frac{J}{2\pi} + \frac{J}{\pi} (\cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots)$

Tabelle 1.11 gibt die Fourier-Reihen einiger Funktionen an, wobei $\Omega t = \varphi$ gesetzt wurde.

In der Maschinendynamik fällt $f(\Omega t)$ sehr häufig durch Messungen oder numerische Berechnungen in Form äquidistanter diskreter Funktionswerte an. Die Ermittlung der Fourierkoeffizienten erfolgt deshalb meist numerisch, wobei die Integrale (1.116) bis (1.118) durch Summen approximiert werden.

Soll die Funktion $y(t)$ bis zur Frequenz f_N approximiert werden, so muss aufgrund der Beziehung

$$f_N = \frac{N}{T_0} = \frac{N\Omega}{2\pi}$$

(1.119)

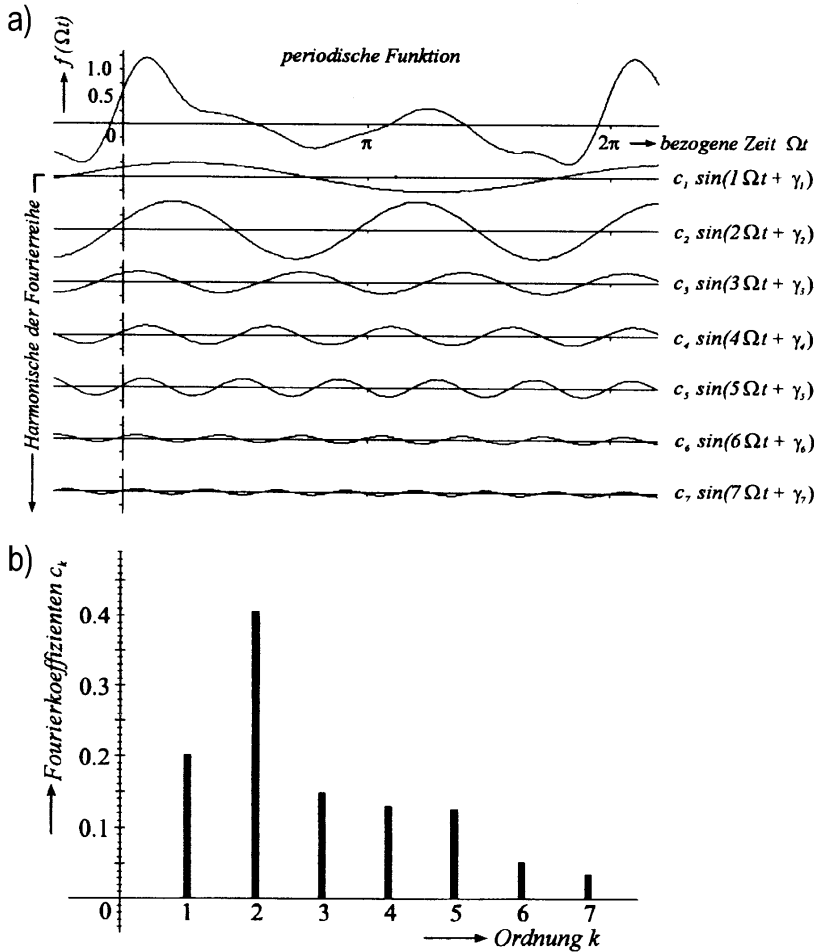


Bild 1.25 Periodische Kraft
a) Zerlegung in Harmonische, b) Erregerspektrum

die Periodendauer T_0 in $2N \geq 2f_N T_0$ Schritten abgetastet werden. Die Stützstellenzahl muss also größer als die höchste Harmonische sein. Die Genauigkeit der höchsten Harmonischen richtet sich nach der Anzahl der Stützstellen. In der Praxis werden oft $N = 2m$ Stützstellen und der Algorithmus der *Fast-Fourier-Transformation* (FFT) verwendet.

Bild 1.25 zeigt die Verläufe der ersten sieben Harmonischen, in welche eine periodische Funktion $f(\Omega t)$ zerlegt wurde. Die höheren Harmonischen ($k \geq 8$) werden mit steigender Ordnung immer kleiner und sind nicht dargestellt. Jeder Funktionswert der Funktion $f(\Omega t)$ ergibt sich zu jedem Zeitpunkt aus der Summe der Harmonischen, vgl. (1.113).

Für ein Schubkurbelgetriebe lassen sich die Fourierkoeffizienten des durch die Massenkkräfte bedingten Antriebsmomentes M_{an} (das Moment $M_T = -M_{\text{an}}$ wirkt auf die Kurbelwelle) analytisch angeben, vgl. Bild 2.29, Bild 2.50 und (2.293). Mit der oszillierenden Masse m , dem Kurbelradius l_2 , der Schubstangenlänge l_3 , dem Kurbelverhältnis $\lambda = l_2/l_3 < 1$ und der Kurbelwellen-Winkelgeschwindigkeit Ω findet man:

$$M_{\text{an}} = -M_T = -ml_2^2 \Omega^2 (D_1 \sin \Omega t + D_2 \sin 2\Omega t + D_3 \sin 3\Omega t + \dots) \quad (1.120)$$

mit den Amplituden der Harmonischen

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda^3}{16} + 15 \frac{\lambda^5}{512} + \dots & D_4 &= -\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^4}{8} - \frac{\lambda^6}{16} - \dots \\ D_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\lambda^4}{32} - \frac{\lambda^6}{32} - \dots & D_5 &= 5 \frac{\lambda^3}{32} + 75 \frac{\lambda^5}{512} + \dots \\ D_3 &= -3 \frac{\lambda}{4} - 9 \frac{\lambda^3}{32} - 81 \frac{\lambda^5}{512} - \dots & D_6 &= 3 \frac{\lambda^4}{32} + 3 \frac{\lambda^6}{32} + \dots \end{aligned} \quad (1.121)$$

1.5.2

Nichtperiodische Erregung

Nichtperiodische Erregungen treten in erster Linie bei Anfahr-, Kupplungs- und Bremsvorgängen auf. Dabei bleibt der Begriff des Bremsens nicht auf das Bauelement Bremse beschränkt, sondern schließt auch den Arbeitswiderstand mit ein, der das Antriebsmoment einer Arbeitsmaschine bestimmt.

Ein Drehmoment $M(\varphi; \dot{\varphi})$ tritt meist in den Drehzahl-Drehmoment-Kennlinien der Motoren und Bremsen, Lüfter, Pumpen sowie bei Arbeitswiderständen von Verarbeitungsmaschinen auf.

Ein spezieller Fall ist das konservative Kraftfeld, bei dem nur eine Abhängigkeit von der Antriebskoordinate besteht. Bild 1.26a zeigt einige Drehmomentkennlinien $M(\varphi)$.

Bei der Auslegung von Antriebssystemen ist die dynamische Analyse mit spezifischen Programmen für die Simulation zu empfehlen, welche die Verläufe der Kräfte oder Momente in Abhängigkeit von den Bewegungsgrößen beschreibt [4]. Derartige Software stützt sich auf mathematische Modelle, die die Kennlinien in Abhängigkeit von den jeweiligen internen Parametern der Antriebsmotoren, Kupplungen oder Bremsen beschreiben.

Sehr häufig wird der Asynchronmotor eingesetzt. Der Asynchronmotor ist ein elektromagnetisches System, das eine charakteristische Übertragungsfunktion besitzt, die sich aus solchen Parametern wie Polpaarzahl, Ständerspannung, Läuferinduktivität, Ständerinduktivität, Läuferwiderstand, synchrone Drehzahl u. a. berechnen lässt. Damit ist es möglich, Differentialgleichungen für die gekoppelten elektromechanischen Schwingungen aufzustellen.

Bei Vernachlässigung des Ständerwiderstands und unter der Annahme, dass der Leerlaufschlupf Null ist, können die Differentialgleichungen des Asynchronmotors durch die stationären Werte der Parameter Kippschlupf s_K und Kippmoment M_K ausgedrückt werden. Für den Fall, dass bei einem Antrieb nur kleine Schwingungen um ein mittleres Moment (und entsprechend um eine mittlere Winkelgeschwindigkeit) stattfinden, gilt eine Beziehung für die dynamische Motorkennlinie, die mit diesen beiden Parametern auskommt. Sie lautet:

$$\ddot{M} + \left(2s_K + \frac{\ddot{\phi}}{s\Omega^2}\right) \dot{M}\Omega + \left((s_K^2 + s^2)\Omega^2 + \frac{\dot{\phi}s_K}{s}\right) M = 2M_K s_K s \Omega^2 \quad (1.122)$$

Dabei bedeuten

M	Motormoment	
Ω	synchrone Winkelgeschwindigkeit	
$\dot{\phi}$	Winkelgeschwindigkeit des Motors	
s	Schlupf ($s = 1 - \dot{\phi}/\Omega$)	(1.123)
s_K	Kippschlupf	
M_K	Kippmoment des Motors.	

Der Kippschlupf s_K und das Kippmoment M_K sind die beiden Parameter, die in diese Differenzialgleichung eingehen und den Momentenverlauf bestimmen. Linearisiert man (1.122) bezüglich der Winkelgeschwindigkeit des Motors, ergibt sich

$$\ddot{M} + 2s_K \dot{M}\Omega + \Omega^2 s_K M = 2M_K s_K s \Omega^2. \quad (1.124)$$

Für den „statischen Fall“ ($\ddot{\phi} = 0$, $\dot{M} = 0$, $\ddot{M} = 0$) folgt aus (1.122)

$$M = 2M_K \frac{s_K s}{s_K^2 + s^2}. \quad (1.125)$$

Diese Gleichung von Kloss gilt bei annähernd konstanter Drehgeschwindigkeit $\dot{\phi}$, also im stationären Betriebszustand, wenn $\dot{\phi} \ll \Omega^2$ ist. Gleichung (1.125) kann linearisiert werden, wenn $s/s_K \ll 1$ ist. Dann verbleibt folgende Gleichung für die Motorkennlinie:

$$M = 2M_K \frac{s}{s_K} = M_0 \left(1 - \frac{\dot{\phi}}{\Omega}\right). \quad (1.126)$$

Die Abhängigkeit der Erregung von der Geschwindigkeit wird durch die Kennlinien der Motoren und Maschinen beschrieben, vgl. Bild 1.26. Beim Hochfahren des Motors gemäß Bild 1.27 wird die Kennlinie mit $n = 0$ beginnend über das Kippmoment M_K zum Nennmoment M_N bis zur Nenndrehzahl $n_N \approx 970/\text{min}$ durchlaufen. Beim Einschalten von Kurzschlussläufern fließen Ströme vom Vier- bis Achtfachen des Nennstromes. Bei Schleifringläufermotoren werden durch Einschalten von Anlasswiderständen in den Läuferkreis die Kennlinien geändert.

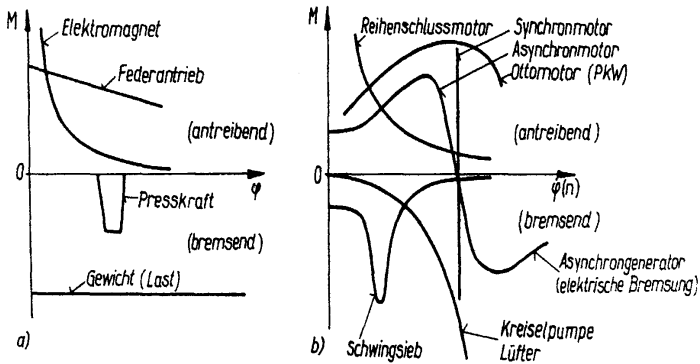


Bild 1.26 Momentenkennlinien verschiedener Maschinen

a) Maschinen mit konservativem Antriebsmoment $M(\varphi)$

b) Maschinen mit autonomem Antriebsmotor $M(\dot{\varphi})$

Bild 1.27 zeigt die Kennlinienschar des Motors eines Tagebaugroßgerätes bei verschiedenen Läuferwiderständen. Gemäß der eingezeichneten Zackenlinie fährt man den Motor hoch, indem immer beim Erreichen einer bestimmten Drehzahl auf einen anderen Läuferwiderstand umgeschaltet wird. Beim Einschalten und Umschalten treten große dynamische Momente auf, welche die Antriebswellen zerstören können [4].

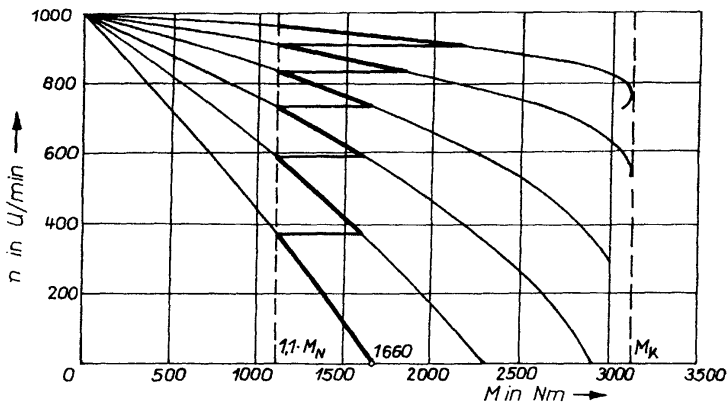


Bild 1.27 Drehzahlkennlinie eines Asynchronmotors ohne Schleifringe für verschiedene Läuferwiderstände mit eingezeichneter Hochlaufcharakteristik

Schwierig ist es, die Verläufe der Kräfte und Momente zu modellieren, die bei technologischen Prozessen entstehen, z. B. beim Umformen, Schneiden, Pressen und vielen Vorgängen in Textil- und Verpackungsmaschinen. Dazu liefern nur experimentelle Untersuchungen die erforderlichen Parameterwerte.

In vielen Fällen ist das Reibmoment einer Maschine nicht bekannt, da es neben den Reibungszahlen in den Gelenken von vielen Einflussgrößen abhängt. Es ist

bekannt, dass im kalten Zustand der Maschine die Reibmomente (und damit die Antriebsleistung) größer sind als im eingelaufenen warmen Zustand. Die absolute Größe kann über die Messung der Motorleistung erfolgen, da das Motormoment dem Motorstrom proportional ist.

In Abschnitt 2.3 wird gezeigt, dass die Lager- und Gelenkkräfte in einer Maschine dem Quadrat der Antriebsgeschwindigkeit proportional sind. Darüber hinaus gibt es oft Reibkräfte, die infolge statischer Belastungen unabhängig von der Drehzahl sind. Es ist deshalb zu erwarten, dass das auf den Antrieb wirkende Reibmoment mit dem Ansatz

$$M_R = M_1 + M_2 \left(\frac{\dot{\phi}}{\omega_0} \right)^2 \quad (1.127)$$

erfasst werden kann, wobei ω_0 die Anfangswinkelgeschwindigkeit ist und M_1 und M_2 solche Parameterwerte, die aus einem Auslaufversuch bestimmt werden können, vgl. dazu Aufgabe A1.6.

Extreme Stoßbelastungen lassen sich durch die **Stoßzahl** k erfassen. Dieser Modellierung entspricht eine plötzliche unbegrenzt große Kraft, die in einer differenziell kleinen Zeit wirkt, wobei das Integral $I = \int F(t) dt$ endlich ist. Bei einer derartigen Modellierung wird an der Stoßstelle keine Kraft angesetzt, aber es wird dabei erfasst, welche Anfangsgeschwindigkeit diese Kraft hervorgerufen hat. In Abschnitt 4.3.3.2 und 6.5.3 wird gezeigt, dass diese Modellierung berechtigt ist, wenn die Wirkungsdauer der Stoßkraft wesentlich kleiner als die kleinste Periodendauer einer wesentlichen Eigenform des angestoßenen Schwingungssystems ist.

Die Stoßzahl k der Stoßtheorie von Newton gilt für den senkrechten Aufprall einer Masse auf eine feste Unterlage und gibt das Verhältnis der Rückprallgeschwindigkeit v_1 (Rückprallen bis zur Höhe h_1) zur Auftreffgeschwindigkeit v_0 (Fallen aus der Anfangshöhe h_0) an, das man durch einen Rücksprungversuch ermitteln kann. Es gilt

$$k = \left| \frac{v_1}{v_0} \right| = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} < 1. \quad (1.128)$$

Man spricht vom ideal plastischen Stoß bei $k = 0$ und dem ideal elastischen Stoß bei $k = 1$. Die Stoßzahl steht in einem komplizierten Zusammenhang mit den Materialparametern der in Kontakt kommenden Körper. Sie ist gleich der Wurzel aus der Rückprall-Elastizität nach DIN 53 512. Als Näherungswerte für verschiedene Materialpaarungen kann man annehmen:

Materialpaarung	Stoßzahl k
Holz/Holz	0,5
Elastomere	0,4 bis 0,8
Schmiedevorgänge	0,2 bis 0,8
Glas/Glas	0,9

In manchen Fällen ist es berechtigt, mit der Stoßzahl den Verlust an mechanischer Energie (teilplastische Deformation) zu berechnen. Es kann aber auch sein, dass beim Stoß zweier unterschiedlicher ideal elastischer Körper die Stoßzahl nicht in einer einfachen Beziehung zum Verlust an mechanischer Energie steht.

Mithilfe der Stoßzahl ist es möglich, die Bewegung der aufeinander prallenden Körper zu berechnen, z. B. die Bewegungsabläufe von Stößen, Meißeln, Hämmern, Rammen, Schlaggeräten. Problematisch ist es, mithilfe der Stoßzahl Belastungen im Innern der Körper zu berechnen. Für spezielle Vorgänge, wie z. B. dem Schmieden, können mit Erfahrungswerten die jeweiligen Vorgänge analysiert und die Hammerfundamente optimal ausgelegt werden, vgl. Abschnitt 3.3.2.

1.5.3

Aufgaben A1.4 bis A1.6

A1.4 Dämpfungsbestimmung aus Resonanzkurve

Bild 1.28 zeigt die gemessene Resonanzkurve eines Schwingungssystems bei Erregung mit konstanter Kraftamplitude. Mithilfe des Verfahrens der Halbwertsbreite ist der Dämpfungsgrad D zu bestimmen.

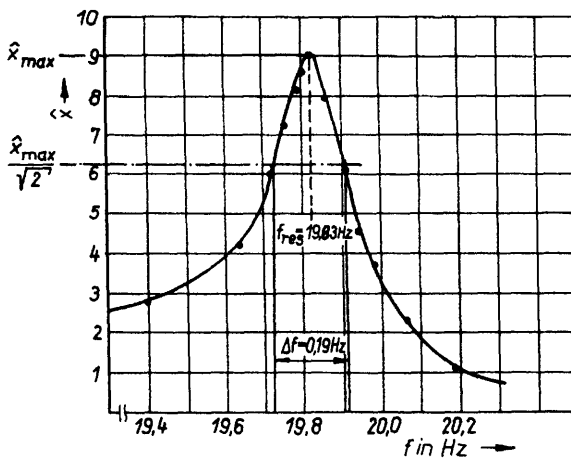


Bild 1.28
Resonanzkurve
zur Bestimmung
der Dämpfung

A1.5 Beziehung zwischen Stoßzahl und Dämpfungsgrad

Die Stoßzahl ist gemäß (1.128) als das Verhältnis der Rückprallgeschwindigkeit v_1 zur Auftreffgeschwindigkeit v_0 definiert. Man modelliere die Aufprallstelle durch ein Feder-Dämpfer-System (c , b), berechne die Rückprallgeschwindigkeit einer Masse m und drücke die Stoßzahl k durch den Dämpfungsgrad D aus.

A1.6 Reibmoment aus Auslaufversuch

Man ermittle für das drehzahlabhängige Reibmoment $M_R = M_1 + M_2 (\dot{\varphi}/\omega_0)^2$ den Verlauf $\varphi(\varphi)$ und $\dot{\varphi}(t)$ der Winkelgeschwindigkeit beim Auslaufvorgang einer Maschine, die das reduzierte Trägheitsmoment J_m hat. Man berechne daraus den Auslaufwinkel φ_1 , bis zu dem der Stillstand erreicht wird und die Auslaufzeit t_1 , die bis dahin vergeht. Man gebe an, wie sich die Koeffizienten M_1 und M_2 aus J_m und den gemessenen Größen φ_1 und t_1 berechnen lassen. Man ermittle für den Sonderfall $M_2 = 0$ die expliziten Formeln für φ_1 und t_1 .

1.5.4

Lösungen L1.4 bis L1.6

L1.4 Zunächst wird die Resonanzamplitude $\hat{x}_{\max}$ ermittelt. Sie beträgt im Bild 1.28 etwa 9 Einheiten. Für die Halbwertsbreite bestimmt man nun den Wert $\hat{x}_{\max}/\sqrt{2}$ und zeichnet ihn in die Resonanzkurve ein. Die Schnittpunkte mit der Resonanzkurve ergeben eine Frequenzdifferenz von $\Delta f = 0,19$ Hz. Nach (1.110) gilt für die Dämpfungskonstante

$$b = m(\Omega_2 - \Omega_1) = 2\pi m \Delta f \quad (1.129)$$

und für den Dämpfungsgrad gemäß (1.89)

$$D = b/2m\omega_0. \quad (1.130)$$

Dabei ist ω_0 die Kreisfrequenz des ungedämpften Schwingers, die bei derartig schwacher Dämpfung der Resonanzfrequenz entspricht. Es gilt also

$$\underline{\underline{D}} = \frac{2\pi \Delta f}{2m2\pi f_{\text{res}}} = \frac{\Delta f}{2f_{\text{res}}} = \underline{\underline{0,0048}}. \quad (1.131)$$

L1.5 Die Bewegungsgleichung eines gedämpften Schwingers, den die Kontaktstelle nach dem Aufprallen der Masse m darstellt, lautet gemäß (1.92)

$$\ddot{q} + 2D\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (1.132)$$

Beim Aufprall am Kontaktpunkt gelten die Anfangsbedingungen

$$t = 0: \quad q(0) = 0; \quad \dot{q}(0) = v_0. \quad (1.133)$$

Die Lösung ist aus (1.94) bekannt. Mit $\omega = \omega_0\sqrt{1-D^2}$ lautet sie

$$q(t) = \frac{v_0}{\omega} \exp(-D\omega_0 t) \sin \omega t \quad (1.134)$$

$$\dot{q}(t) = v_0 \exp(-D\omega_0 t) \left[\cos \omega t - \left(D \frac{\omega_0}{\omega} \right) \sin \omega t \right]. \quad (1.135)$$

Solange $q < 0$ ist, hat die Masse m Kontakt mit der Aufprallstelle. Es interessiert die Geschwindigkeit in dem Augenblick, wenn die Masse den Kontakt verliert. Dies tritt zur Zeit t_1 ein, wenn

$$q(t_1) = 0; \quad \sin \omega t_1 = 0, \quad \omega t_1 = \pi. \quad (1.136)$$

Die Geschwindigkeit beträgt in diesem Augenblick

$$\begin{aligned} \dot{q}(t_1) &= v_0 \exp(-D\omega_0 t_1) \left[\cos \omega t_1 - \left(D \frac{\omega_0}{\omega} \right) \sin \omega t_1 \right] \\ &= v_0 \exp \left(-D \frac{\omega_0 \pi}{\omega} \right) [-1 - 0] = v_1. \end{aligned} \quad (1.137)$$

Es ist die gesuchte Rückprallgeschwindigkeit v_1 . Damit ist die Stoßzahl, vgl. (1.128)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{k}} &= \left| \frac{v_1}{v_0} \right| = \exp \left(-D \frac{\omega_0 \pi}{\omega} \right) \\ &= \exp \left(-\frac{\pi D}{\sqrt{1-D^2}} \right) \approx 1 - \pi D + \frac{1}{2}(\pi D)^2. \end{aligned} \quad (1.138)$$

Da der Dämpfungsgrad $D \ll 1$ ist, kann man die Exponentialfunktion in eine Taylor-Reihe entwickeln und die angegebene Näherung benutzen.

Wegen (1.138) könnte man den Dämpfungsgrad aus der Stoßzahl berechnen. Es ist aber gewagt, diese Beziehung anzuwenden, denn beide Kennzahlen sind in Wirklichkeit von der Geschwindigkeit, der Kraft und anderen Materialparametern beider Körper abhängig.

L1.6 Die Bewegungsgleichung der Maschine lautet für diesen Fall

$$J_m \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} J_m \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi} = -M_1 - M_2 \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega_0} \right)^2. \quad (1.139)$$

Sie kann in beiden Darstellungsarten in geschlossener Form mit den Anfangswerten $\varphi_0 = 0$ und ω_0 integriert werden. Mit Benutzung der dimensionslosen Kenngrößen

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{M_1}{J_m \omega_0^2} \quad (1.140)$$

findet man durch Lösung des aus obiger Gleichung folgenden Integrals

$$2 \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_{\omega_0}^{\dot{\varphi}} \frac{J_m d(\dot{\varphi}^2)}{-M_1 - M_2 \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega_0} \right)^2} = \frac{-1}{\beta} \int_{\omega_0}^{\dot{\varphi}} \frac{d(\dot{\varphi}^2)}{\omega_0^2 + \alpha \dot{\varphi}^2} \quad (1.141)$$

als Umkehrfunktion die stellungsabhängige Winkelgeschwindigkeit:

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \omega_0 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) e^{-2\alpha\beta\varphi} - \frac{1}{\alpha}}. \quad (1.142)$$

Geht man andererseits von $\ddot{\varphi} = d\dot{\varphi}/dt$ und der Umformung

$$\int_0^t dt = \int_{\omega_0}^{\dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{\ddot{\varphi}(\dot{\varphi}^2)} = \int_{\omega_0}^{\dot{\varphi}} \frac{J_m d\dot{\varphi}}{-M_1 - M_2 \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega_0} \right)^2} = \frac{-1}{\beta} \int_{\omega_0}^{\dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{\omega_0^2 + \alpha \dot{\varphi}^2} \quad (1.143)$$

aus, so liefert die Integration zunächst $t = t(\dot{\varphi})$ und daraus die Umkehrfunktion mit der zeitabhängigen Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi}(t) = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{\alpha} \tan^2(\arctan \sqrt{\alpha} - \beta \sqrt{\alpha} \omega_0 t)}. \quad (1.144)$$

Der Auslaufwinkel und die Auslaufzeit folgen aus (1.142) und (1.144) für $\dot{\varphi} = 0$:

$$\varphi_1 = \frac{\ln(1 + \alpha)}{2\alpha\beta}; \quad t_1 = \frac{\arctan \sqrt{\alpha}}{\omega_0 \beta \sqrt{\alpha}}. \quad (1.145)$$

Dies sind zwei gekoppelte transzendente Gleichungen, aus denen zunächst α und β und dann M_1 und M_2 aus (1.140) berechenbar sind. Für den Sonderfall $M_2 = 0$ ist $\alpha = 0$ und durch Grenzwertbildung findet man bei konstantem Reibmoment M_1 aus (1.145):

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\beta} = \frac{J_m \omega_0^2}{2M_1}; \quad t_1 = \frac{1}{\beta \omega_0} = \frac{J_m \omega_0}{M_1} \quad (1.146)$$

Bild 1.29 zeigt typische Verläufe der Auslaufbewegung. Bei $M_2 = 0$ tritt der bekannte lineare Abfall bezüglich der Zeit und der quadratische Abfall bezüglich des Winkels auf. Mit zunehmendem M_2 verkürzt sich der Auslauf. In der Praxis ist die Bestimmung des Auslaufwinkels genauer als die der Auslaufzeit möglich, da dabei keine solch langsame Zunahme in der Endphase eintritt. Dieses Verhalten ist auch aus Bild 1.29 erkennbar.

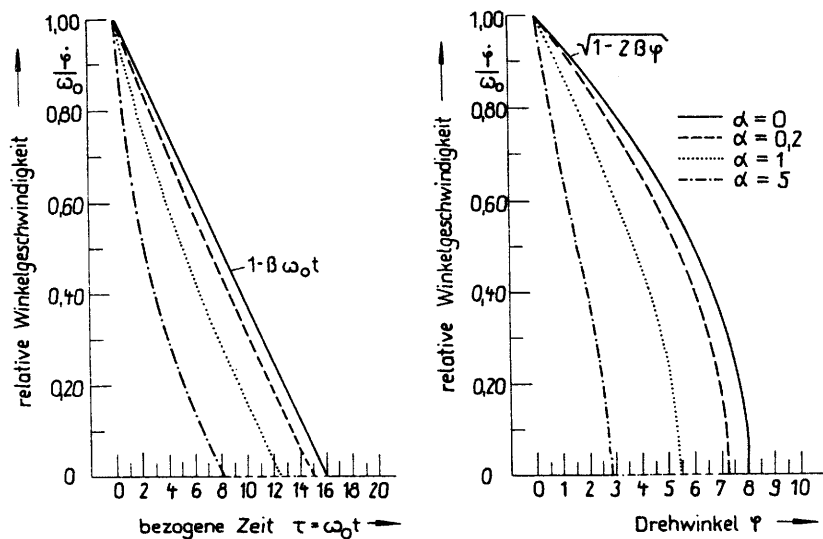


Bild 1.29 Winkelgeschwindigkeit beim Auslauf-Vorgang bei unterschiedlichen Momentenverhältnissen $\alpha = M_2/M_1$ und $\beta = 1/16$

2 Dynamik der starren Maschine

2.1

Einleitung

Eine „starre Maschine“ ist das einfachste Berechnungsmodell in der Maschinendynamik. Es lässt sich definieren als ein zwangsläufiges System starrer Körper, dessen Bewegung bei gegebener Antriebsbewegung aufgrund holonomer Zwangsbedingungen eindeutig bestimmt ist. Dieses Berechnungsmodell ist anwendbar, wenn die in Wirklichkeit infolge der wirkenden Kräfte stets vorhandenen Deformationen so gering sind, dass sie die Bewegungen hinreichend wenig beeinflussen. Dabei wird auch vorausgesetzt, dass die Gelenke und Lager ideal spielfrei sind.

Das Modell der starren Maschine kann der Berechnung „langsamlauender“ Maschinen zugrunde gelegt werden, d. h. wenn die niedrigste Eigenfrequenz des betrachteten realen Objekts bedeutend größer ist als die größte auftretende Erregerfrequenz. Mit dem Berechnungsmodell der starren Maschine lassen sich sowohl gleichmäßig übersetzende Getriebe, wie Zahnradgetriebe, Schneckengetriebe, Riemen- und Kettengetriebe, als auch ungleichmäßig übersetzende Getriebe, wie Koppelgetriebe, Kurvengetriebe und Räderkoppelgetriebe, behandeln.

Die Grundlagen zur Theorie der starren Maschine gehen auf die Arbeiten von L. EULER (1707–1783) und J. L. LAGRANGE (1736–1813) zurück. Mit der Entwicklung der Dampfmaschine gewannen diese Theorien in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts auch für Maschinenbau-Ingenieure an Interesse. Die Maschinenbauer benutzten zunächst die Methode der Kinetostatik, d. h., die Trägheitskräfte bewegter Mechanismen wurden entsprechend dem d'Alembertschen Prinzip als statische Kräfte aufgefasst und mit bekannten Methoden der Statik (damals vorwiegend Graphostatik) behandelt. Aus dieser Zeit ist das Buch „Versuch einer grafischen Dynamik“ von PROELL zu nennen, das 1874 in Leipzig erschien.

Der im Jahre 1883 von F. GRASHOF (1826–1893) erschienene zweite Band „Theoretische Maschinenlehre“ enthielt auch Grundlagen der Maschinendynamik. Dort ist z. B. schon der Begriff der reduzierten Masse eingeführt worden, der sich im weiteren als sehr fruchtbar erweisen sollte. Die entstehenden Fragen zur Theorie des Massenausgleichs wurden erstmals in dem Buch von H. LORENZ (1865–1940) „Dynamik der Kurbelgetriebe“ behandelt (Leipzig, 1901). Die Arbeiten von KARL HEUN (1859–1929), der die mathematischen Aspekte betonte (z. B. Integration der Differenzialgleichungen), und R. VON MISES (1883–1953) fasste 1907 „Dynamische Probleme der Maschinenlehre“ zusammen, sodass zu Beginn des 20. Jahrhunderts die Theorie der starren Maschine im Wesentlichen ausgearbeitet war.

Lange Zeit war für die Maschinenbauer das Buch von F. WITTENBAUER (1857–1922) maßgebend, welches für ebene Mechanismen geeignete grafische Methoden darstellte. Die Erweiterungen dieser Methoden auf räumliche Mechanismen stammen von K. FEDERHOFER (1885–1960), von dem 1928 in Wien das Buch „Grafische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems“ erschien.

Seitdem sind diese Theorien in die Lehrbücher der Getriebetechnik, Maschinendynamik und Mechatronik eingegangen. Die Monografie von BIEZENO/GRAMMEL [1] behandelt den Massenausgleich von Maschinen umfassend. Ein fundamentales Werk zum Kreisel schrieb K. MAGNUS [22]. Seit etwa 1970 bekam die Theorie der starren Maschine neue Anstöße, als mit dem Aufkommen der Computer und der Industrieroboter die Frage nach zweckmäßigen Algorithmen zur Berechnung von Starrkörpersystemen beliebiger topologischer Struktur aktuell wurde.

Heutzutage ist es dem Ingenieur möglich, Aufgaben aus diesem Gebiet mithilfe handelsüblicher Software zu lösen, ohne dass die zugrunde liegenden mathematischen oder numerischen Verfahren im einzelnen bekannt sein müssen. Trotzdem muss sich der Anwender solcher Programme mit den grundlegenden Ideen der Modellbildung vertraut machen, um zu verstehen, was damit berechenbar ist und was nicht. Von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) wurde ein Schwerpunktprogramm „Mehrkörperdynamik“ finanziert, dessen Ergebnisse von W. SCHIEHLEN im Sammelband [26] zusammengefasst wurden.

2.2

Zur Kinematik eines starren Körpers

2.2.1

Koordinatentransformationen

Um die Lage und die Bewegungen eines starren Körpers im Raum zu beschreiben, ist es nützlich, neben einem raumfesten Koordinatensystem $\{O; x, y, z\}$ auch ein körperfestes, also mitbewegtes Koordinatensystem $\{\bar{O}; \xi, \eta, \zeta\}$, einzuführen, vgl. Bild 2.1. In der Kinematik und Kinetik treten geometrische und physikalische Größen auf, die durch mehrere Komponenten definiert sind. Dies sind Vektoren und Tensoren, deren Komponenten sich im körperfesten System von denen im raumfesten System unterscheiden. Sie lassen sich nach bestimmten Regeln (Koordinatentransformation) beim Wechsel der Koordinatensysteme umrechnen.

Es ist in Verbindung mit anderen Aufgaben der Maschinendynamik günstig, für die Darstellung der kinematischen und dynamischen Zusammenhänge auch bei Beziehungen zwischen *Vektoren* und *Tensoren* die Matrizen Schreibweise zu benutzen. Vektoren werden durch fette Buchstaben und Spaltenmatrizen, Tensoren durch fette Buchstaben und quadratische (3×3) -Matrizen beschrieben. Um die Matrizenrechnung für das vektorielle Produkt (oder Kreuzprodukt) anwenden zu können, wird jedem Vektor eine schiefsymmetrische Matrix zugeordnet, welche mit

dem Buchstaben des Vektors und einer darüber geschriebenen **Tilde** ($\sim$) bezeichnet wird. Die drei Koordinaten eines Vektors werden z. B. wie folgt angeordnet:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.1)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 & -F_z & F_y \\ F_z & 0 & -F_x \\ -F_y & F_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Das **Kreuzprodukt** des Ortsvektors $\mathbf{r}$ mit dem Kraftvektor $\mathbf{F}$, welches bekanntlich den Momentenvektor ergibt, lässt sich in folgender Weise als Matrizenprodukt ausdrücken:

$$\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -zF_y + yF_z \\ zF_x - xF_z \\ -yF_x + xF_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x^O \\ M_y^O \\ M_z^O \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

In Matrizenschreibweise (unter Verwendung des Tilde-Operators) gilt also

$$\tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F} = -\tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{M}^O \quad (2.3)$$

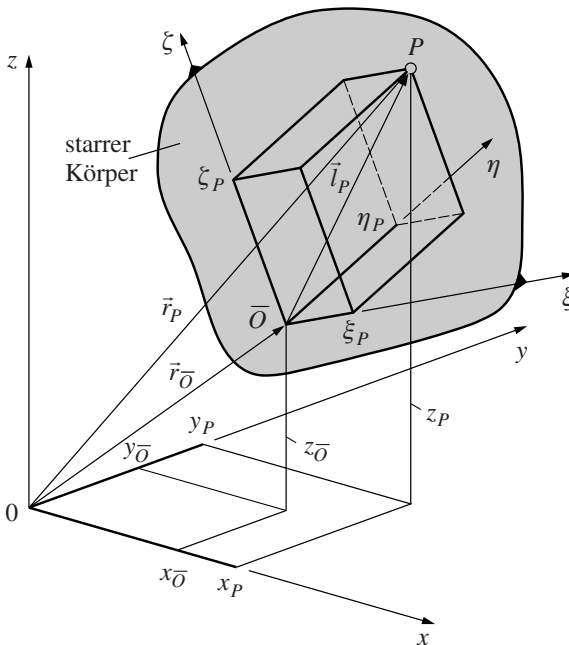


Bild 2.1 Zur Definition der Koordinatensysteme und Ortsvektoren

In einem Inertialsystem ist der Punkt O der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems, das die raumfesten Koordinatenrichtungen x , y und z hat, vgl. Bild 2.1.

Die Lage eines beliebigen Punktes P des starren Körpers wird durch drei Koordinaten x_P, y_P und z_P eindeutig gekennzeichnet, die im Ortsvektor $\mathbf{r}_P = (x_P, y_P, z_P)^T$ zusammengefasst sind. Ein **körperfester Bezugspunkt** $\bar{O}$ wird als Ursprung eines körperfesten ξ - η - ζ -Koordinatensystems gewählt. Er hat die raumfesten Koordinaten $\mathbf{r}_{\bar{O}} = (x_{\bar{O}}, y_{\bar{O}}, z_{\bar{O}})^T$. Der von diesem Bezugspunkt $\bar{O}$ aus betrachtete gleiche Punkt P hat bezüglich der Richtungen des raumfesten Bezugssystems die Komponenten

$$\mathbf{l}_P = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{\bar{O}} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T = (x_P - x_{\bar{O}}, y_P - y_{\bar{O}}, z_P - z_{\bar{O}})^T. \quad (2.4)$$

Im körperfesten System lässt sich die Lage desselben Punktes P durch folgende Komponenten angeben:

$$\bar{\mathbf{l}} = (\xi_P, \eta_P, \zeta_P)^T. \quad (2.5)$$

Die Komponenten von $\mathbf{l}_P$ und $\bar{\mathbf{l}}_P$ unterscheiden sich, wenn die beiden Koordinatensysteme keine parallelen Achsen haben. Bei den weiteren Rechnungen wird der Index P weggelassen, der einen beliebigen Punkt im Körper kennzeichnet, d. h. es ist $\bar{\mathbf{l}}_P \equiv \bar{\mathbf{l}} = (\xi, \eta, \zeta)^T$. Die Koordinaten x, y und z sowie ξ, η und ζ beziehen sich dann auf alle Punkte, die zu dem starren Körper gehören.

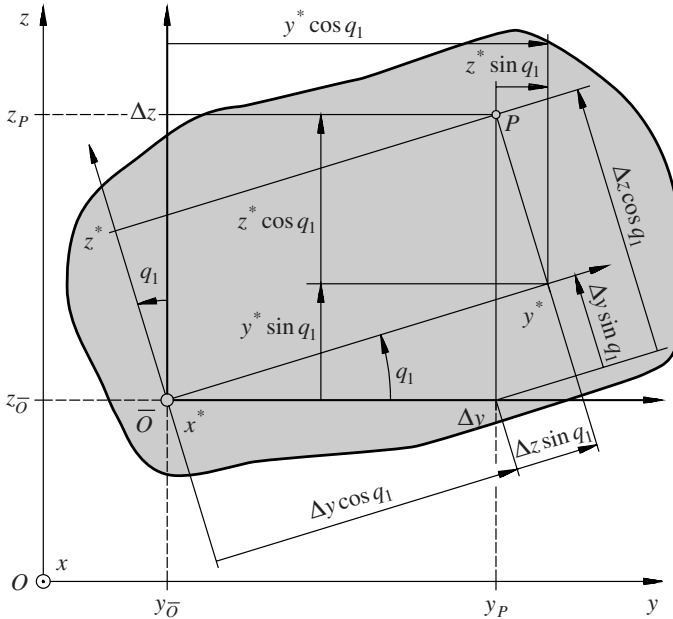


Bild 2.2 Zur Koordinatentransformation bei der ebenen Drehung

Bei Bewegungen im dreidimensionalen Raum hat der starre Körper neben den drei translatorischen Freiheitsgraden des Bezugspunktes auch drei rotatorische Freiheitsgrade. Letztere kann man durch drei Winkel beschreiben. Zunächst werden die Beziehungen zwischen den Koordinaten eines Punktes bei einer **ebenen Drehung** um den Winkel q_1 aufgestellt. Aus Bild 2.2 kann man für die Projektionen der

körperfesten Koordinaten auf die raumfesten Achsen (und umgekehrt) folgende Beziehungen ablesen:

$$\begin{aligned}\Delta x &= 1 \cdot x^*, & x^* &= 1 \cdot \Delta x, \\ \Delta y &= \cos q_1 \cdot y^* - \sin q_1 \cdot z^*, & y^* &= \cos q_1 \cdot \Delta y + \sin q_1 \cdot \Delta z, \\ \Delta z &= \sin q_1 \cdot y^* + \cos q_1 \cdot z^*, & z^* &= -\sin q_1 \cdot \Delta y + \cos q_1 \cdot \Delta z.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Diese zweimal drei Gleichungen entsprechen je einer Matrixengleichung, wenn man den Vektor $\mathbf{l}^* = (x^*, y^*, z^*)^T$ und die Drehtransformationsmatrix $\mathbf{A}_1$ einführt:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_1 & -\sin q_1 \\ 0 & \sin q_1 & \cos q_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_1 & \sin q_1 \\ 0 & -\sin q_1 & \cos q_1 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Die Drehtransformationsmatrix ist orthonormal, d. h. es gilt mit der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{A}_1)^T = \mathbf{E}; \quad (\mathbf{A}_1)^T = (\mathbf{A}_1)^{-1}. \quad (2.8)$$

Die Beziehungen (2.6) lauten also

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}_1 \mathbf{l}^*; \quad \mathbf{l}^* = (\mathbf{A}_1)^T \mathbf{l}. \quad (2.9)$$

Bei einer **räumlichen Drehung** sind die Elemente der Drehtransformationsmatrix $\mathbf{A}$ von drei speziell zu definierenden Winkeln abhängig. Zur Beschreibung der Lage des Körpers werden die **Kardanwinkel** verwendet, die hier mit q_1 , q_2 und q_3 bezeichnet werden, vgl. Bild 2.3.

In der Anfangslage fallen das raumfeste x - y - z -Bezugssystem und das körperfeste ξ - η - ζ -System zusammen. Bei der Drehung des äußeren Rahmens um den Drehwinkel q_1 bleibt die x -Achse erhalten ($x = x^*$), und die Ebene des inneren Rahmens ist die neue y^* - z^* -Ebene. Der Drehwinkel q_2 beschreibt die Drehung des inneren Rahmens um die positive die y^* -Achse, die mit der y^{**} -Achse übereinstimmt, sodass die darauf senkrechte x^{**} - z^{**} -Ebene eine neue Lage einnimmt. Der Drehwinkel q_3 bezieht sich schließlich auf die z^{**} -Achse, die mit der ζ -Achse des körperfesten Bezugssystems zusammenfällt. Auf der Achse $z^{**} = \zeta$, steht die ξ - η -Ebene senkrecht. Nach den drei Drehungen nimmt das körperfeste ξ - η - ζ -System gegenüber dem raumfesten x - y - z -System eine beliebige gedrehte Lage ein.

Jede der drei Drehungen stellt für sich eine ebene Drehung um eine andere Achse dar. Es gelten nach Bild 2.3 folgende drei Elementardrehungen:

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}_1 \mathbf{l}^*; \quad \mathbf{l}^* = \mathbf{A}_2 \mathbf{l}^{**}; \quad \mathbf{l}^{**} = \mathbf{A}_3 \bar{\mathbf{l}}. \quad (2.10)$$

Man kann die Drehtransformationsmatrizen für Drehungen um die y^* - und um die z^{**} -Achse gewinnen, wenn man von den Projektionen analog zu Bild 2.2 auf die anderen Ebenen ausgeht. Folgende Matrizen realisieren die Drehungen um die Winkel q_2 und q_3 der betreffenden Achsen:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & \sin q_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

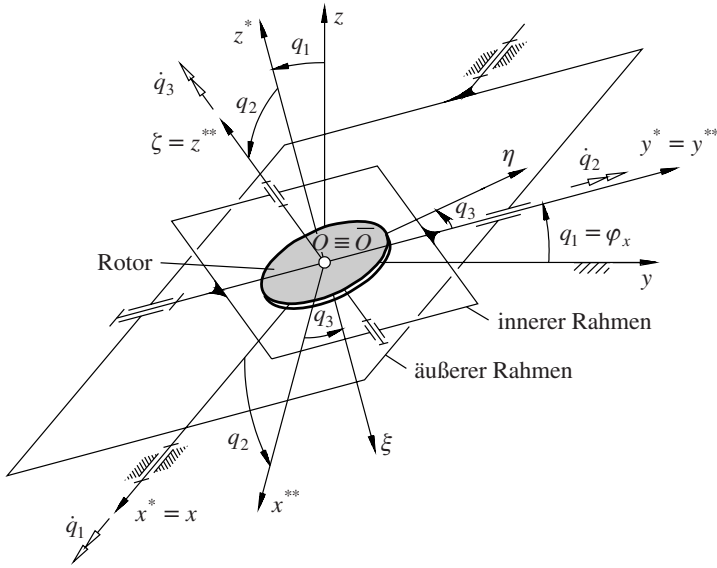


Bild 2.3 Zur Beschreibung einer räumlichen Drehung

Setzt man die Beziehungen gemäß (2.10) ineinander ein, so ergibt sich

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}_1 \mathbf{l}^* = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{l}^{**} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \bar{\mathbf{l}} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{l}}; \quad \bar{\mathbf{l}} = \mathbf{A}^T \mathbf{l} \quad (2.12)$$

und somit die Transformationsmatrix für die räumliche Drehung

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3. \quad (2.13)$$

Führt man mit den aus (2.7) und (2.11) bekannten Matrizen die Multiplikation entsprechend (2.13) aus, ergibt sich:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos q_2 \cos q_3 & -\cos q_2 \sin q_3 & \sin q_2 \\ \sin q_1 \sin q_2 \cos q_3 & -\sin q_1 \sin q_2 \sin q_3 & -\sin q_1 \cos q_2 \\ +\cos q_1 \sin q_3 & +\cos q_1 \cos q_3 & \\ -\cos q_1 \sin q_2 \cos q_3 & \cos q_1 \sin q_2 \sin q_3 & \cos q_1 \cos q_2 \\ +\sin q_1 \sin q_3 & +\sin q_1 \cos q_3 & \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Nicht nur die Ortsvektoren, sondern alle Vektoren kann man mit dieser Matrix transformieren, z. B. gilt auch für die Kraft- und Momentenvektoren aus (2.1)

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{F}}; \quad \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{A}^T \mathbf{F}; \quad \mathbf{M}^O = \mathbf{A} \bar{\mathbf{M}}^O; \quad \bar{\mathbf{M}}^O = \mathbf{A}^T \mathbf{M}^O. \quad (2.15)$$

Die Komponenten eines Vektors werden i. Allg. mit demselben Buchstaben wie der Vektor bezeichnet, aber nicht fett gedruckt, und im raumfesten Bezugssystem mit den Indizes x, y, z versehen. Im körperfesten System erhält der fette Buchstabe des Vektors einen Querstrich, und seine Komponenten bekommen die Indizes ξ, η

und ζ . Zum Beispiel hat derselbe (physikalische) Vektor der Kraft je nach Bezugssystem die Komponenten $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$ oder $\bar{\mathbf{F}} = (F_\xi, F_\eta, F_\zeta)^T$.

Die Elemente der Drehtransformationsmatrix $\mathbf{A}$ sind nichtlineare Funktionen der drei Drehwinkel q_1, q_2 und q_3 , vgl. (2.14). Auch bei räumlichen Drehungen sind die Transformationsmatrizen **orthonormal**, d. h. es gilt analog zu (2.8)

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{A})^{-1}; \quad \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{E}. \quad (2.16)$$

Die Koordinaten eines Körperpunktes bezüglich raumfester Richtungen in Bezug auf den Ursprung O können in Matrixschreibweise aus denen des Bezugspunktes $\bar{O}$ und den körperfesten Koordinaten berechnet werden:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\bar{O}} + \mathbf{l} = \mathbf{r}_{\bar{O}} + \mathbf{A} \bar{\mathbf{l}}. \quad (2.17)$$

2.2.2

Bewegungsgrößen

Unter dem Oberbegriff **Bewegungsgröße** sollen im Folgenden die Geschwindigkeit, die Beschleunigung, die Drehgeschwindigkeit und die Drehbeschleunigung verstanden werden. Er wird in Analogie zum Begriff „Kraftgröße“ gebraucht, welcher den Oberbegriff für Kraft und Moment darstellt.

Die drei Komponenten der absoluten **Geschwindigkeit** $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ bezüglich der raumfesten Richtungen ergeben sich aus der Zeitableitung von $\mathbf{r}$ aus (2.17). Sie lauten unter Verwendung von (2.12)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_{\bar{O}} + \dot{\mathbf{l}} = \dot{\mathbf{r}}_{\bar{O}} + \dot{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{l}} = \dot{\mathbf{r}}_{\bar{O}} + \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T \mathbf{l}. \quad (2.18)$$

Die Zeitableitung der rechts angegebenen Beziehung in (2.16) ergibt:

$$\frac{d(\mathbf{A} \mathbf{A}^T)}{dt} = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} (\dot{\mathbf{A}}^T) = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T + (\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T)^T = \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T = \mathbf{o}. \quad (2.19)$$

Aus dieser Gleichung kann man schlussfolgern: weil die Summe einer Matrix mit ihrer Transponierten nur dann null ist, wenn die Matrix selbst schiefssymmetrisch ist, muss das Produkt $\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T = \tilde{\boldsymbol{\omega}}$ in (2.19) eine schiefssymmetrische Matrix sein. Man kann also, wie in (2.1) vereinbart, dem Vektor der Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ eine (3×3) -Matrix $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ des Tensors der Drehgeschwindigkeit zuordnen:

$$\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T = \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = -(\tilde{\boldsymbol{\omega}})^T = -\mathbf{A} (\dot{\mathbf{A}}^T). \quad (2.20)$$

Die Vektoren und Matrizen der Drehgeschwindigkeit transformiert man zwischen dem raumfesten und dem körperfesten Koordinatensystem analog zu (2.12):

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\omega}}; \quad \bar{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}, \quad (2.21)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A} \tilde{\bar{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{A}^T; \quad \tilde{\bar{\boldsymbol{\omega}}} = \mathbf{A}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{A}. \quad (2.22)$$

Bei manchen Anwendungen ist es vorteilhaft, sofort die körperfesten Komponenten der Drehgeschwindigkeit zu ermitteln. Es gilt als Alternative zu (2.20)

$$A^T \dot{A} = \bar{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & 0 \end{bmatrix} = \bar{\omega}. \quad (2.23)$$

Die **Drehgeschwindigkeit** ist an allen Punkten des starren Körpers gleich groß, sie lässt sich keinem Punkt des starren Körpers zuordnen und kann bei allgemein räumlicher Bewegung nicht durch eine zeitliche Ableitung eines Winkels berechnet werden. Ohne näher darauf einzugehen, sei noch erwähnt, dass sich jeder räumliche Bewegungszustand eines starren Körpers als eine Schraubung um eine momentane Achse beschreiben lässt, bei der die Vektoren der Geschwindigkeit und der Drehgeschwindigkeit einander proportional sind ($\mathbf{v} = k\boldsymbol{\omega}$).

Der Betrag ω der Drehgeschwindigkeit ergibt sich sowohl aus (2.20) als auch aus (2.23):

$$\omega = \sqrt{\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega}} = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\bar{\boldsymbol{\omega}}^T \bar{\boldsymbol{\omega}}}. \quad (2.24)$$

Die Gleichung (2.18) lässt sich unter Beachtung von (2.20) auf zweierlei Weise schreiben:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_O + \bar{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{l} = \dot{\mathbf{r}}_O - \bar{\mathbf{l}} \boldsymbol{\omega}. \quad (2.25)$$

Ausführlich lauten demzufolge die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_O - \omega_z \Delta y + \omega_y \Delta z \\ \dot{y} &= \dot{y}_O + \omega_z \Delta x - \omega_x \Delta z. \\ \dot{z} &= \dot{z}_O - \omega_y \Delta x + \omega_x \Delta y \end{aligned} \quad (2.26)$$

Man kann die Geschwindigkeit auch in Abhängigkeit von den körperfesten Komponenten ausdrücken:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_O + \bar{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{A} \bar{\mathbf{l}} = \dot{\mathbf{r}}_O + \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\omega}} \bar{\mathbf{l}} = \dot{\mathbf{r}}_O - \mathbf{A} \bar{\mathbf{l}} \bar{\boldsymbol{\omega}}. \quad (2.27)$$

Die Komponenten des $\boldsymbol{\omega}$ -Vektors lassen sich bei konkreten Aufgabenstellungen nicht nur aus (2.20), sondern auch durch die Projektion des Vektors der Drehgeschwindigkeit auf die Richtungen des jeweiligen Bezugssystems finden.

Die Differenziation der Geschwindigkeit in (2.25) und (2.27) liefert schließlich die absolute **Beschleunigung** eines Punktes in folgender Form:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} &= \frac{d(\dot{\mathbf{r}}_O + \bar{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{l})}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}_O + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{l} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{l}} \\ \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} &= \ddot{\mathbf{r}}_O + \mathbf{A}(\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \bar{\boldsymbol{\omega}}) \bar{\mathbf{l}}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

wobei die erste Zeile Koordinaten im raumfesten System benutzt und die zweite Zeile auf die Drehtransformationsmatrix und die Koordinaten im körperfesten Koordinatensystem Bezug nimmt.

2.2.3

Kinematik des kardanisch gelagerten Kreisel

Bild 2.3 zeigt einen starren Körper, der sich (in einer angedeuteten masselosen Vorrichtung) um drei Achsen im Raum beliebig drehen kann. Einen starren Körper, der nur drei Drehungen ausführen kann, nennt man **Kreisel**. Die Lage des Kreisels lässt sich durch die Kardanwinkel $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ eindeutig angeben, vgl. (2.14).

Bildet man aus der Matrix $\mathbf{A}$ und deren zeitlicher Ableitung $\dot{\mathbf{A}}$ das Produkt gemäß (2.20), so erhält man die Matrix des Tensors der Drehgeschwindigkeit $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, in welcher die folgenden Komponenten als Matrizenelemente enthalten sind:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{q}_1 & + \dot{q}_3 \sin q_2 \\ \omega_y &= \dot{q}_2 \cos q_1 - \dot{q}_3 \sin q_1 \cos q_2 \\ \omega_z &= \dot{q}_2 \sin q_1 + \dot{q}_3 \cos q_1 \cos q_2.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Bezüglich des körperfesten Koordinatensystems ergeben sich die Komponenten der Drehgeschwindigkeit entsprechend (2.21) mit der Transformation $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}$ nach Ausführung der Matrizenmultiplikation und einigen Umformungen der trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{q}_1 \cos q_2 \cos q_3 + \dot{q}_2 \sin q_3 \\ \omega_\eta &= -\dot{q}_1 \cos q_2 \sin q_3 + \dot{q}_2 \cos q_3 \\ \omega_\zeta &= \dot{q}_1 \sin q_2 & + \dot{q}_3.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Der Betrag ω der Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ergibt sich aus (2.24) zu:

$$\omega = \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3 \sin q_2}.\quad (2.31)$$

Daraus geht hervor: Der Betrag der Drehgeschwindigkeit ist bei der kardanischen Lagerung gemäß Bild 2.3 bei konstanten Winkelgeschwindigkeiten i. Allg. nicht konstant, sondern nur dann, wenn eine davon ($\dot{q}_1$ oder $\dot{q}_2$ oder $\dot{q}_3$) null ist.

Unter der Bedingung, dass in der Anfangslage das raumfeste x - y - z -System und das körperfeste ξ - η - ζ -System übereinstimmen, können für kleine Drehwinkel

$$|q_1| \ll 1; \quad |q_2| \ll 1; \quad |q_3| \ll 1 \quad (2.32)$$

welche „kleine Bewegungen“ beschreiben, die Winkelkoordinaten

$$\varphi_x \approx q_1; \quad \varphi_y \approx q_2; \quad \varphi_z \approx q_3, \quad (2.33)$$

eingeführt werden. Wegen $\sin q_k \approx q_k$ und $\cos q_k \approx 1$ folgt dann aus (2.14) und (2.20):

$$\mathbf{A} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 1 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

und

$$\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \approx \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi}_z & \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z & 0 & -\dot{\varphi}_x \\ -\dot{\varphi}_y & \dot{\varphi}_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Diese einfachen Matrizen werden bei manchen Anwendungen gern benutzt. Man muss sich über deren Geltungsbereich im Klaren sein.

2.2.4

Aufgaben A2.1 und A2.2

A2.1 Kinematik eines schwenkbaren Rotors

Bei vielen technischen Anwendungen werden rotierende Körper um eine Achse senkrecht zu ihrer Lagerachse geschwenkt. Solche Bewegungen gibt es bei der Kurvenfahrt von Rädern (Fahrrad, Motorrad, PKW), beim Schwenken eines Karussells, einer Bohrmaschine oder einer laufenden Wäscheschleuder. Bild 2.4 zeigt ein Modell, das solche Bewegungen beschreibt. Ein Rahmen, der sich im raumfesten x - y - z -Bezugssystem um die x -Achse drehen kann, trägt einen darin drehbaren Rotor. Es wird die Bewegung des Rotors und eines seiner Punkte betrachtet.

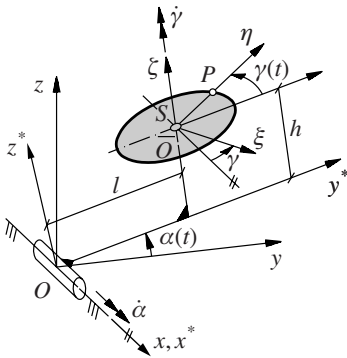


Bild 2.4 Rotor im schwenkbaren Rahmen

Gegeben:

Abmessungen des Rahmens	l und h
Abstand eines Punktes P im Rotor	η_P
Schwenkwinkel	$\alpha(t)$
Drehwinkel des Rotors	$\gamma(t)$

Gesucht:

1. Komponenten der Drehgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und der Drehbeschleunigung $\dot{\vec{\omega}}$ des Rotors im mitrotierenden ξ - η - ζ -Koordinatensystem
2. Komponenten der Absolutgeschwindigkeit $\vec{v}_P$ des Punktes P .

A2.2 Bewegungen einer Kugel im Kugellager

In einem Kugellager rollen die Kugeln auf den beiden Rollbahnen, welche die Form von Torusschalen haben. Die Kugeln berühren sich nicht gegenseitig, denn den Abstand zwischen ihnen sichert ein so genannter Käfig. Hier sollen die Bewegungsgrößen einer einzigen Kugel ohne Beachtung des Käfigs unter der Annahme berechnet werden, dass sie zwischen vorgespannten zentrischen Bahnen starr und spielfrei rollt.

Der Außenring des in Bild 2.5 skizzierten Kugellagers rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}_1$ und der Innenring mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}_2$. Die Kugel berührt den Außenring am Punkt P_1 und den Innenring am Punkt P_2 . Sie bewegt sich

in der x - y -Ebene zwischen den Ringen ohne an den beiden Kontaktpunkten zu gleiten. Die Kontaktpunkte P_1 und P_2 liegen mit dem Mittelpunkt S der Kugel, der auch ihr Schwerpunkt ist, auf der Normalen zu den Kontaktflächen, die gegenüber der z -Achse um den Winkel α geneigt ist, damit das Kugellager sowohl Radial- als auch Axialkräfte übertragen kann.

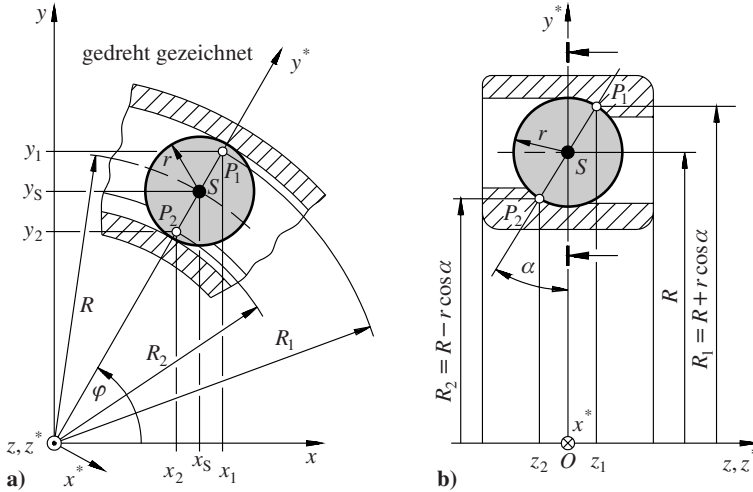


Bild 2.5 Geometrische Größen am Kugellager

Gegeben:

Teilkreisradius des Käfigs	R
Radius der Kugel	r
Druckwinkel	α
Winkelgeschwindigkeit des Außenrings	$\dot{\phi}_1(t)$
Winkelgeschwindigkeit des Innenrings	$\dot{\phi}_2(t)$

Gesucht:

1. Winkelgeschwindigkeit des Kugelkäfigs
2. Komponenten der Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ der Kugel
3. Komponenten der Drehbeschleunigung $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ der Kugel

Es soll bei der Lösung angenommen werden, dass die Komponente der Drehgeschwindigkeit der Kugel in Richtung der Normalen null ist, welche die Punkte P_1 , S und P_2 verbindet.

2.2.5

Lösungen L2.1 und L2.2

L2.1 Das System in Bild 2.4 ist hinsichtlich der Drehung ein Sonderfall des kardanisch gelagerten Kreisels, vgl. Bild 2.3. Die körperfesten Komponenten der Drehgeschwindigkeit des Körpers ergeben sich aus (2.30) mit $\alpha = q_1$, $\beta = q_2 = 0$ und $\gamma = q_3$ zu

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\omega} = (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)^T = (\dot{\alpha} \cos \gamma, -\dot{\alpha} \sin \gamma, \dot{\gamma})^T.}} \quad (2.36)$$

Die Komponenten der Drehbeschleunigung $\dot{\vec{\omega}}$ sind deren Ableitung nach der Zeit:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_\xi &= \ddot{\alpha} \cos \gamma - \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \gamma \\ \dot{\omega}_\eta &= -\ddot{\alpha} \sin \gamma - \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \gamma \\ \dot{\omega}_\zeta &= \ddot{\gamma}\end{aligned}\quad (2.37)$$

Die Lage des Punktes P wird gemäß (2.17) mit dem körperfesten Bezugspunkt O , der Drehtransformationsmatrix $\mathbf{A}$ und der Koordinate im körperfesten System beschrieben:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_O + \mathbf{l}_P = \mathbf{r}_O + \mathbf{A}\bar{\mathbf{l}}_P. \quad (2.38)$$

Hierbei gilt

$$\mathbf{r}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ l \cos \alpha - h \sin \alpha \\ l \sin \alpha + h \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{l}}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_P \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ wird entweder aus dem Produkt der Matrix $\mathbf{A}_1$ aus (2.7) und der Matrix $\mathbf{A}_3$ aus (2.11) oder als Sonderfall von (2.14) für $q_2 = 0$ ermittelt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \\ \sin \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Die Geschwindigkeit des Punktes P ist wegen (2.18) oder (2.27)

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_O + \dot{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{l}}_P = \dot{\mathbf{r}}_O + \mathbf{A}\dot{\vec{\omega}}\bar{\mathbf{l}}_P. \quad (2.41)$$

Nach dem Einsetzen von (2.39) und einigen Rechenschritten ergibt sich

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \\ \dot{z}_P \end{bmatrix} &= \dot{\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ -l \sin \alpha - h \cos \alpha \\ l \cos \alpha - h \sin \alpha \end{bmatrix} \\ &+ \eta_P \begin{bmatrix} -\dot{\gamma} \cos \gamma \\ -\dot{\gamma} \cos \alpha \sin \gamma - \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \gamma \\ -\dot{\gamma} \sin \alpha \sin \gamma + \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \gamma \end{bmatrix}. \end{aligned}\quad (2.42)$$

Der erste Ausdruck ergibt sich durch Differenziation von $\mathbf{r}_O$ aus (2.39). Der zweite Ausdruck ergibt sich entweder nach der Differenziation von $\mathbf{A}$ und $\bar{\mathbf{l}}_P$ aus (2.39) oder aus der Multiplikation von $\mathbf{A}$ aus (2.40) mit $\dot{\vec{\omega}}$ aus (2.36) und $\bar{\mathbf{l}}_P$.

Die Beschleunigung $\mathbf{a}_P$ ließe sich aus einer weiteren Ableitung von $\mathbf{v}_P$ nach der Zeit ermitteln. Dabei treten Terme mit den Faktoren $\ddot{\alpha}$, $\ddot{\gamma}$, $\dot{\alpha}^2$, $\dot{\gamma}^2$ und $\dot{\alpha}\dot{\gamma}$ auf.

L2.2 Die momentane Lage der Kugel und der beiden Kontaktpunkte zum Zeitpunkt t wird durch den Winkel φ beschrieben. Da die Kugel als ein starrer Körper angesehen wird, müssen zwischen den drei Punkten P_1 , S und P_2 die kinematischen Gleichungen (2.25) für den Starrkörper erfüllt sein. Diese Bedingungen lauten hierbei mit dem Bezugspunkt $S = O$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_S + \dot{\vec{\omega}}\mathbf{l}_i; \quad i = 1, 2. \quad (2.43)$$

An den Kontaktpunkten der Kugel mit den Ringen findet beim reinen Rollen keine Relativbewegung statt, d. h., ihre Geschwindigkeit ist dort ebenso groß wie die der

Ringe. Die Kontaktpunkte bewegen sich im raumfesten System auf Kreisbahnen, sie sind aber weder mit einem der Ringe noch mit der Kugel körperfest verbunden.

Aus Bild 2.5 kann man die Koordinaten der drei Punkte ablesen:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_1 \cos \varphi \\ R_1 \sin \varphi \\ r \sin \alpha \end{bmatrix}; & \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_2 \cos \varphi \\ R_2 \sin \varphi \\ -r \sin \alpha \end{bmatrix}; \\ \mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Die Radien der Kontaktpunkte ergeben sich aus dem Teilkreisradius R , dem Kugelradius r und dem Druckwinkel α zu

$$R_1 = R + r \cos \alpha; \quad R_2 = R - r \cos \alpha. \quad (2.45)$$

Die vom Bezugspunkt S aus gemessenen Ortsvektoren zu den Kontaktpunkten haben bezüglich der raumfesten Richtungen die Koordinaten

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S; \quad i = 1, 2, \quad (2.46)$$

vgl. (2.4). Nach dem Einsetzen der Ausdrücke aus (2.44) und (2.45) erhält man

$$\mathbf{l}_1 = -\mathbf{l}_2 = r \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \varphi \\ \cos \alpha \sin \varphi \\ \sin \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Die Geschwindigkeiten der Punkte P_1 und P_2 sind aus den in der Aufgabenstellung gegebenen Winkelgeschwindigkeiten der beiden Ringe berechenbar:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} = \mathbf{v}_i = R_i \dot{\varphi}_i \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}; \quad i = 1, 2. \quad (2.48)$$

Sie sind nicht die Ableitung der Ausdrücke in (2.44), da sie keine körperfesten Punkte beschreiben, im Gegensatz zur Geschwindigkeit des Schwerpunktes, die sich aus der Differenziation seiner Koordinaten nach der Zeit ergibt:

$$\dot{\mathbf{r}}_S = \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \\ \dot{z}_S \end{bmatrix} = R \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Aus (2.43) erhält man unter Beachtung von (2.47) folgende zwei Bedingungen, welche der starre Körper „Kugel“ erfüllen muss:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_S + \dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{l}_1; \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_S + \dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{l}_2 = \dot{\mathbf{r}}_S - \dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{l}_1. \quad (2.50)$$

Aus der Summe und der Differenz dieser Gleichungen ergeben sich nach einer Umstellung der Terme die Bedingungen

$$2\dot{\mathbf{r}}_S - \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}; \quad \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = 2\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{l}_1. \quad (2.51)$$

Diese lauten mit (2.47) bis (2.49) ausführlich

$$(2R\dot{\varphi} - R_1\dot{\varphi}_1 - R_2\dot{\varphi}_2) \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

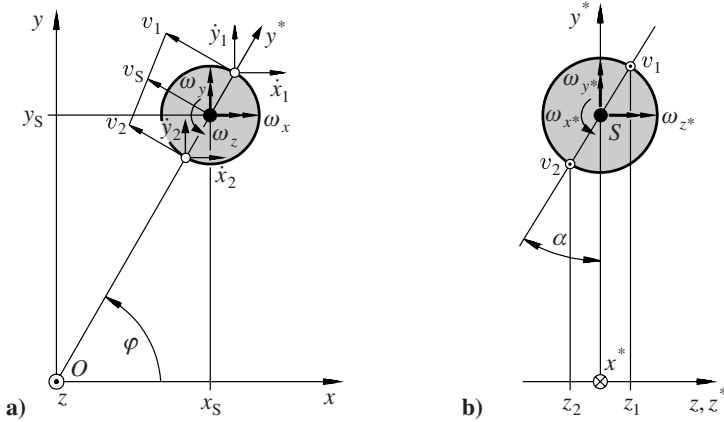


Bild 2.6 Kinematische Größen der Kugel im Kugellager

und

$$(R_1 \dot{\phi}_1 - R_2 \dot{\phi}_2) \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = 2r \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \varphi \\ \cos \alpha \sin \varphi \\ \sin \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Aus (2.52) folgt unmittelbar die Winkelgeschwindigkeit des Kugelkäfigs

$$\dot{\varphi} = \frac{R_1 \dot{\phi}_1 + R_2 \dot{\phi}_2}{2R}. \quad (2.54)$$

Aus (2.53) folgen drei Gleichungen für die drei Unbekannten ω_x , ω_y und ω_z :

$$-2\omega_z r \cos \alpha \sin \varphi + 2\omega_y r \sin \alpha = -(R_1 \dot{\phi}_1 - R_2 \dot{\phi}_2) \sin \varphi \quad (2.55)$$

$$2\omega_z r \cos \alpha \cos \varphi - 2\omega_x r \sin \alpha = (R_1 \dot{\phi}_1 - R_2 \dot{\phi}_2) \cos \varphi \quad (2.56)$$

$$-\omega_y \cos \varphi + \omega_x \sin \varphi = 0. \quad (2.57)$$

Dieses Gleichungssystem kann nicht gelöst werden, da seine Hauptdeterminante null ist. Zwei dieser Gleichungen sagen dasselbe aus. Man kann dies daran erkennen, dass man ω_y aus (2.57) in (2.55) einsetzt. Es entsteht dann dieselbe Gleichung, die man aus (2.56) nach der Multiplikation mit $\sin \varphi / \cos \varphi$ erhält. Dieser Sachverhalt hat eine kinematische Ursache: Die Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ der Kugel kann aus den bisher formulierten Bedingungen deshalb nicht eindeutig bestimmt werden, weil sich die Kugel um die Achse der Normalen frei drehen kann, die durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft.

Es muss noch eine weitere Bedingung vorgegeben werden, z. B. (siehe Aufgabenstellung) dass die Drehgeschwindigkeit der Kugel keine Komponente um die Achse $P_1 P_2$ hat, d. h. es wird so getan, als ob diese Drehung infolge der Reibung vollständig verhindert wird. Die Komponente der Drehgeschwindigkeit in Richtung der y^* -Achse ist aus Bild 2.6a erkennbar:

$$\omega_{y^*} = \omega_x \cos \varphi + \omega_y \sin \varphi. \quad (2.58)$$

Aus Bild 2.6b kann man sehen, dass die in Richtung der Normalen liegende Komponente der Drehgeschwindigkeit sich aus

$$\omega_{21} = \omega_{y*} \cos \alpha + \omega_z \sin \alpha \quad (2.59)$$

ergibt. Also ist als dritte Gleichung die Bedingung

$$\omega_{21} = (\omega_x \cos \varphi + \omega_y \sin \varphi) \cos \alpha + \omega_z \sin \alpha = 0 \quad (2.60)$$

zu erfüllen. Die Auflösung der nunmehr regulären Gleichungen (2.56), (2.57) und (2.60) ergibt schließlich die gesuchten Komponenten der Drehgeschwindigkeit:

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \frac{R_1 \dot{\varphi}_1 - R_2 \ddot{\varphi}_2}{2r} \begin{bmatrix} -\sin \alpha \cos \varphi \\ -\sin \alpha \sin \varphi \\ \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Die Komponenten der Drehbeschleunigung der Kugel sind durch die Differenziation daraus unter Berücksichtigung von (2.54) zu finden:

$$\underline{\dot{\omega}} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \frac{R_1 \ddot{\varphi}_1 - R_2 \ddot{\varphi}_2}{2r} \begin{bmatrix} -\sin \alpha \cos \varphi \\ -\sin \alpha \sin \varphi \\ \cos \alpha \end{bmatrix} + \frac{(R_1 \dot{\varphi}_1)^2 - (R_2 \dot{\varphi}_2)^2}{4Rr} \begin{bmatrix} \sin \alpha \sin \varphi \\ -\sin \alpha \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Aus den vorstehenden Gleichungen geht hervor, dass die Kugel während des Umlaufs eine beschleunigte Drehbewegung ausführt. Wenn man sich für die Belastung der Kugel und der Laufflächen der Ringe interessiert, ist außer dem (bereits durch (2.60) indirekt an den Punkten P_1 und P_2 angenommenen) Haftmoment auch mit tangential wirkenden Reibkräften zu rechnen.

2.3

Zur Kinetik des starren Körpers

2.3.1

Kinetische Energie und Trägheitstensor

Die kinetische Energie eines Massenelements dm , das sich mit der Geschwindigkeit $\underline{v} = \dot{\underline{r}}$ bezüglich eines raumfesten Bezugssystems bewegt, beträgt

$$dW_{\text{kin}} = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} d\mathbf{m}(\dot{\underline{r}})^T \dot{\underline{r}}. \quad (2.63)$$

Die kinetische Energie eines starren Körpers findet man durch die Integration über den gesamten Körper mit der Geschwindigkeitsverteilung gemäß (2.25) zu

$$W_{\text{kin}} = \int dW_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} \int (\dot{\underline{r}}_{\underline{O}} - \dot{\underline{l}} \boldsymbol{\omega})^T (\dot{\underline{r}}_{\underline{O}} - \dot{\underline{l}} \boldsymbol{\omega}) dm. \quad (2.64)$$

In der Technischen Mechanik wird gezeigt, dass es zweckmäßig ist, als körperfesten Bezugspunkt den Schwerpunkt S zu wählen. Dann kann, ausgehend von (2.64), die kinetische Energie eines beliebig bewegten starren Körpers in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} W_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_S^T \mathbf{v}_S + \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\omega}}^T \bar{\mathbf{J}} \bar{\boldsymbol{\omega}} \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 + \dot{z}_S^2) + \frac{1}{2} (J_{\xi\xi}^S \omega_\xi^2 + J_{\eta\eta}^S \omega_\eta^2 + J_{\zeta\zeta}^S \omega_\zeta^2) \\ &\quad + J_{\xi\eta}^S \omega_\xi \omega_\eta + J_{\eta\zeta}^S \omega_\eta \omega_\zeta + J_{\xi\zeta}^S \omega_\xi \omega_\zeta. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Dabei ist die Masse des Körpers $m = \int dm$, und $\mathbf{v}_S = (\dot{x}_S, \dot{y}_S, \dot{z}_S)^T$ die Absolutgeschwindigkeit des Schwerpunktes S . Aus ihr ergibt sich mit der Masse m des Körpers die Translationsenergie. Der Vektor $\bar{\boldsymbol{\omega}} = (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)^T$ der Drehgeschwindigkeit ist auf das körperfeste ξ - η - ζ -Koordinatensystem bezogen, vgl. Abschnitt 2.2.2 und 2.2.3. Die Rotationsenergie, die den anderen Termen in (2.65) entspricht, kann man mit dem Trägheitsmoment J_{kk}^S bezüglich der momentanen Drehachse ausdrücken, die mit dem Index k gekennzeichnet wird. Es gilt

$$J_{kk}^S \omega^2 = J_{\xi\xi}^S \omega_\xi^2 + J_{\eta\eta}^S \omega_\eta^2 + J_{\zeta\zeta}^S \omega_\zeta^2 + 2(J_{\xi\eta}^S \omega_\xi \omega_\eta + J_{\eta\zeta}^S \omega_\eta \omega_\zeta + J_{\xi\zeta}^S \omega_\xi \omega_\zeta). \quad (2.66)$$

Die kinetische Energie ist damit einfach

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_S^2 + \frac{1}{2} J_{kk}^S \omega^2. \quad (2.67)$$

Das Trägheitsmoment J_{kk}^S bezieht sich auf die Richtung der momentanen Drehachse, vgl. die Anwendung in Abschnitt 1.2.4. Die Richtung der momentanen Drehachse k lässt sich gegenüber den Richtungen des körperfesten Bezugssystems mit den Winkeln α_k , β_k und γ_k beschreiben, vgl. Bild 2.7a. Die Komponenten der Drehgeschwindigkeit bezüglich dieser Richtung sind

$$\omega_\xi = \omega \cos \alpha_k; \quad \omega_\eta = \omega \cos \beta_k; \quad \omega_\zeta = \omega \cos \gamma_k. \quad (2.68)$$

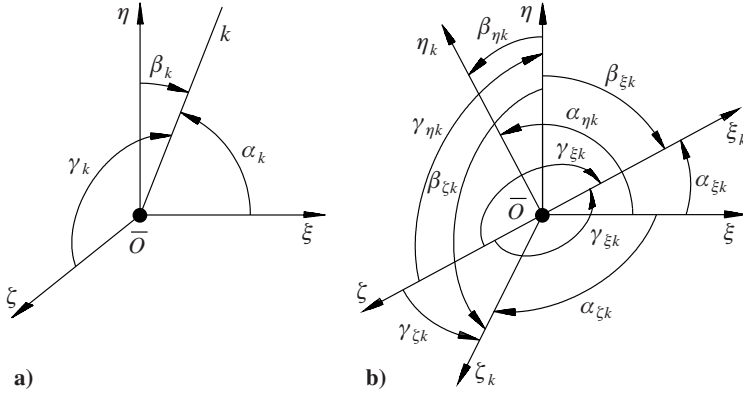
Aus (2.66) und (2.68) findet man die Abhängigkeit des Trägheitsmoments J_{kk}^S von diesen Winkeln:

$$\begin{aligned} J_{kk}^S &= J_{\xi\xi}^S \cos^2 \alpha_k + J_{\eta\eta}^S \cos^2 \beta_k + J_{\zeta\zeta}^S \cos^2 \gamma_k \\ &\quad + 2(J_{\xi\eta}^S \cos \alpha_k \cos \beta_k + J_{\eta\zeta}^S \cos \beta_k \cos \gamma_k + J_{\xi\zeta}^S \cos \gamma_k \cos \alpha_k). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Die Matrix des Trägheitstensors bezüglich des Schwerpunktes ist im körperfesten System definiert durch:

$$\bar{\mathbf{J}}^S = \int (\bar{\mathbf{l}} - \bar{\mathbf{l}}_S)^T (\bar{\mathbf{l}} - \bar{\mathbf{l}}_S) dm. \quad (2.70)$$

Die Integration bezieht sich auf das gesamte Körpervolumen und erfolgt theoretisch durch ein dreifaches Integral, das praktisch aber kaum geschlossen gelöst wird, weil die Körper so vielgestaltig sind. Meist wird durch die Aufteilung eines Körpers in Elementarkörper mit kleinen Massen (oder in solche mit bekanntem Trägheitstensor) aus den CAD-Programmen für beliebige Maschinenteile der Trägheitstensor berechnet. Für real existierende Bauteile empfiehlt es sich, den Trägheitstensor aus

**Bild 2.7** Richtungswinkel innerhalb des starren Körpersa) Kennzeichnung einer Richtung k (z. B. $k = \text{I, II, III}$)b) Kennzeichnung der Lage eines ξ_k - η_k - ζ_k -Systems im ξ - η - ζ -System

experimentellen Ergebnissen zu bestimmen und die theoretischen Werte zu kontrollieren, vgl. dazu Abschnitt 1.2.4.

Die Masse m charakterisiert die Trägheit des Körpers bei Translationsbewegungen. Analog erfasst der Trägheitstensor die entsprechenden Eigenschaften eines starren Körpers hinsichtlich von Drehbewegungen. Mit dem Schwerpunkt als Ursprung ($S = \bar{O}$) lautet die Matrix des Trägheitstensors:

$$\begin{aligned} \bar{J}^S &= \begin{bmatrix} J_{\xi\xi}^S & J_{\xi\eta}^S & J_{\xi\zeta}^S \\ J_{\eta\xi}^S & J_{\eta\eta}^S & J_{\eta\zeta}^S \\ J_{\zeta\xi}^S & J_{\zeta\eta}^S & J_{\zeta\zeta}^S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int (\eta^2 + \zeta^2) dm & -\int \eta\xi dm & -\int \xi\zeta dm \\ -\int \eta\xi dm & \int (\xi^2 + \zeta^2) dm & -\int \eta\zeta dm \\ -\int \xi\zeta dm & -\int \eta\zeta dm & \int (\xi^2 + \eta^2) dm \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Diese Matrix ist symmetrisch. Die Elemente auf der Hauptdiagonale werden Trägheitsmomente (kurz „Drehmassen“), die außerhalb der Hauptdiagonalen werden **Deviationsmomente** (auch Zentrifugalmomente oder „Kippmassen“) genannt. Die Deviationsmomente können im Gegensatz zu den Trägheitsmomenten auch null oder negativ sein. Die Trägheitsmomente sind ein Maß für die Drehträgheit eines Körpers, die Deviationsmomente sind ein Maß für das Bestreben des Körpers, bei Rotation seine Drehachse zu verändern. Sie charakterisieren die unsymmetrische Massenverteilung des Körpers, vgl. auch (2.83).

Bezüglich der raumfesten Richtungen ergibt sich der Trägheitstensor entsprechend der Transformation (2.22) zu

$$J^S = A \bar{J}^S A^T. \quad (2.72)$$

Er ist i. Allg. veränderlich, d. h. entsprechend der Drehtransformationsmatrix $\mathbf{A}$ von den Drehwinkeln abhängig. Ihm entspricht die Matrix

$$\mathbf{J}^S = \begin{bmatrix} J_{xx}^S & J_{xy}^S & J_{xz}^S \\ J_{xy}^S & J_{yy}^S & J_{yz}^S \\ J_{xz}^S & J_{yz}^S & J_{zz}^S \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Bei kleinen Winkeln gemäß (2.32) folgt aus (2.72) wegen $\mathbf{A} \approx \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{q}}$ (vgl. (2.34)) die lineare Näherung

$$\mathbf{J}^S \approx \bar{\mathbf{J}}^S - \bar{\mathbf{J}}^S \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{J}}^S. \quad (2.74)$$

In der nochmals vereinfachten Form $\mathbf{J}^S \approx \bar{\mathbf{J}}^S$ (d. h. $\mathbf{A} \approx \mathbf{E}$) wird der Trägheitstensor oft bei der Berechnung linearer Schwingungen benutzt, vgl. Abschnitt 1.2.4, 3.2.2 und 5.2.3.

Die statischen Momente und der Trägheitstensor sind abhängig vom gewählten Bezugspunkt. Der **Schwerpunkt** (oder *Massenmittelpunkt*) S ist ein besonderer körperfester (Bezugs-)Punkt. Seine Lage ist dadurch definiert, dass die auf ihn bezogenen statischen Momente null sind. Für den Fall, dass er der Ursprung des körperfesten ξ - η - ζ -Koordinatensystems ist, müssen die Bedingungen

$$\int \xi \, dm = \int \eta \, dm = \int \zeta \, dm = 0.$$

erfüllt sein. Beim Wechsel von einem beliebigen Bezugspunkt $\bar{O}$ zum Schwerpunkt S bezüglich **paralleler Achsen** gilt für die Umrechnung der Matrixelemente des Trägheitstensors der **Satz von Steiner**:

$$\bar{\mathbf{J}}^O = \bar{\mathbf{J}}^S + m(\bar{\mathbf{l}}_S)^T \bar{\mathbf{l}}_S, \quad \text{mit} \quad (2.75)$$

$$\bar{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} 0 & -\zeta_S & \eta_S \\ \zeta_S & 0 & -\xi_S \\ -\eta_S & \xi_S & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Die Trägheitsmomente haben bezüglich der Schwerpunktsachsen demzufolge immer den kleinsten Wert, weil bei anderen Achsen die „Steiner-Terme“ dazukommen. Die Komponenten des Trägheitstensors ändern sich auch beim Übergang auf **gedrehte körperfeste Achsen** ξ_1 - η_1 - ζ_1 . Man kann analog zu (2.22), wo es um die Transformation zwischen raumfesten und körperfesten Richtungen geht, ebenfalls eine Transformationsmatrix benutzen, die mit $\mathbf{A}^*$ bezeichnet wird. Die Richtungscosinus in $\mathbf{A}^*$ beziehen sich dann auf die analog zu den in Bild 2.7b definierten neun Winkel $\alpha_{\xi k}$ bis $\gamma_{\zeta k}$ zwischen dem ξ - η - ζ -System und dem ξ_k - η_k - ζ_k -System, das denselben Punkt $\bar{O}$ als körperfesten Ursprung hat.

Die Transformation des Trägheitstensors (hier als Beispiel bezogen auf den Schwerpunkt S – analog gilt sie für jeden körperfesten Punkt) erfolgt bei der Drehung im körperfesten Bezugssystem mit der Matrix

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{\xi k} & \cos \beta_{\xi k} & \cos \gamma_{\xi k} \\ \cos \alpha_{\eta k} & \cos \beta_{\eta k} & \cos \gamma_{\eta k} \\ \cos \alpha_{\zeta k} & \cos \beta_{\zeta k} & \cos \gamma_{\zeta k} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

durch die Matrizenmultiplikationen

$$\bar{\mathbf{J}}^S = \mathbf{A}^* \mathbf{J}^{*S} \mathbf{A}^{*T}; \quad \mathbf{J}^{*S} = \mathbf{A}^{*T} \bar{\mathbf{J}}^S \mathbf{A}^*. \quad (2.78)$$

Dabei enthält die Matrix $\bar{\mathbf{J}}^S$ die aus (2.71) bekannten Komponenten, während sich die Komponenten in $\mathbf{J}^{*S}$ auf das innerhalb des starren Körpers gedrehte ξ_k - η_k - ζ_k -System beziehen.

Für jeden Bezugspunkt $\bar{O}$ gibt es ein spezielles Koordinatensystem mit drei zueinander senkrechten Richtungen, für das der Trägheitstensor zu einer Diagonalmatrix wird. Man nennt diese Achsen **Hauptachsen**. Besonders interessiert die Transformation auf die **zentralen Hauptachsen**, wenn als Bezugspunkt der Schwerpunkt gewählt wird ($O = S$). Die Hauptachsen werden durch die römischen Zahlen I, II und III gekennzeichnet. Die **Hauptträgheitsmomente** J_I^S , J_{II}^S und J_{III}^S sind die drei Eigenwerte des Eigenwertproblems

$$(\bar{\mathbf{J}}^S - J^S \mathbf{E}) \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (2.79)$$

das man bei gegebenen Parameterwerten mit bekannter Software numerisch lösen kann. Die den drei Eigenwerten zugehörigen drei Eigenvektoren

$$\mathbf{a}_k = [\cos \alpha_k, \cos \beta_k, \cos \gamma_k]^T; \quad k = \text{I, II, III} \quad (2.80)$$

enthalten als Elemente dann die Richtungscosinus, welche die Lage der Hauptachsen mit den Raumwinkeln α_k , β_k und γ_k gegenüber dem ursprünglichen ξ - η - ζ -System definieren, vgl. auch Bild 2.7a. Sie werden so normiert, dass

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_I)^T \mathbf{a}_I &= (\mathbf{a}_{II})^T \mathbf{a}_{II} = (\mathbf{a}_{III})^T \mathbf{a}_{III} = 1; \\ (\mathbf{a}_I)^T \mathbf{a}_{II} &= (\mathbf{a}_{II})^T \mathbf{a}_{III} = (\mathbf{a}_{III})^T \mathbf{a}_I = 0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

und $\det(\mathbf{a}_I, \mathbf{a}_{II}, \mathbf{a}_{III}) = 1$ gilt. Aus diesen drei Eigenvektoren wird die Transformationsmatrix

$$\mathbf{A}_H^* = [\mathbf{a}_I, \mathbf{a}_{II}, \mathbf{a}_{III}] \quad (2.82)$$

gebildet, womit der Trägheitstensor bezüglich der zentralen Hauptachsen wie folgt angegeben werden kann:

$$\hat{\mathbf{J}}^S = \mathbf{A}_H^{*T} \bar{\mathbf{J}}^S \mathbf{A}_H^* = \begin{bmatrix} J_I^S & 0 & 0 \\ 0 & J_{II}^S & 0 \\ 0 & 0 & J_{III}^S \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

Bezüglich der Hauptachsen sind die Deviationsmomente null. Symmetrieachsen eines homogenen starren Körpers sind Hauptachsen. In Tabelle 5.2 sind für einige Rotationskörper die Trägheitsmomente bezüglich der drei Hauptachsen angegeben.

Die Komponenten der Drehgeschwindigkeit bezüglich der Hauptachsen ergeben sich aus:

$$\boldsymbol{\omega}_H = \mathbf{A}_H^{*T} \bar{\boldsymbol{\omega}} = [\omega_I, \omega_{II}, \omega_{III}]^T. \quad (2.84)$$

Der Ausdruck für die kinetische Energie aus (2.65) vereinfacht sich, wenn man sich auf Hauptachsen beziehen kann, zu:

$$\begin{aligned} W_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_S^T \mathbf{v}_S + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_H)^T \hat{\mathbf{J}}^S \boldsymbol{\omega}_H \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 + \dot{z}_S^2) + \frac{1}{2} (J_I^S \omega_I^2 + J_{II}^S \omega_{II}^2 + J_{III}^S \omega_{III}^2). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Wenn die Bewegung eine Drehung um einen im Raum fixierten Körperpunkt $\bar{O}$ ist, dann kann die kinetische Energie auch einfach mit dem auf diesen Punkt bezogenen Trägheitstensor $\bar{\mathbf{J}}^{\bar{O}}$ ausgedrückt werden, vgl. (2.75):

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_H)^T \bar{\mathbf{J}}^{\bar{O}} \boldsymbol{\omega}_H = \frac{1}{2} (J_I^{\bar{O}} \omega_I^2 + J_{II}^{\bar{O}} \omega_{II}^2 + J_{III}^{\bar{O}} \omega_{III}^2). \quad (2.86)$$

Die Hauptrichtungen in (2.85) sind i. Allg. andere als in (2.86), weshalb sich dann auch die Komponenten der Drehgeschwindigkeit bezüglich S und bezüglich $\bar{O}$ unterscheiden.

2.3.2

Kräftesatz und Momentensatz

Der Kräftesatz und der Momentensatz sind die fundamentalen Gesetze, aus denen der Zusammenhang zwischen Kraftgrößen und Bewegungsgrößen eines starren Körpers hervorgeht.

Der **Kräftesatz** (auch Schwerpunktsatz genannt) besagt, dass sich der Schwerpunkt S so beschleunigt ($\ddot{\mathbf{r}}_S$), als ob die Resultierende $\mathbf{F}$ der äußeren Kräfte (also sowohl der eingepägten Kräfte als auch der Reaktionskräfte) an ihm angreift und als ob in S die Masse m konzentriert wäre. Er lautet in Bezug auf das raumfeste Bezugssystem

$$m \ddot{\mathbf{r}}_S = \mathbf{F} \quad (2.87)$$

und für die Komponenten im raumfesten Bezugssystem

$$m \ddot{x}_S = F_x; \quad m \ddot{y}_S = F_y; \quad m \ddot{z}_S = F_z. \quad (2.88)$$

Man kann den Schwerpunktsatz mit (2.15) und (2.28) umformen in

$$m \ddot{\mathbf{r}}_S = m \left[\ddot{\mathbf{r}}_{\bar{O}} + \mathbf{A} (\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \bar{\boldsymbol{\omega}}) \bar{\mathbf{I}}_S \right] = \mathbf{F} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{F}} \quad (2.89)$$

sodass er bezüglich körperfester Komponenten lautet, vgl. (2.16):

$$m \left[\mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{r}}_{\bar{O}} + (\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \bar{\boldsymbol{\omega}}) \bar{\mathbf{I}}_S \right] = \bar{\mathbf{F}}. \quad (2.90)$$

Der Drall eines Massenelements dm bezüglich des raumfesten Bezugspunktes O ist das Produkt aus den Komponenten seiner Geschwindigkeit mit deren senkrechtem Abstand von den Achsen, die durch den Bezugspunkt verlaufen

$$dL^O = dm \tilde{\mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}}. \quad (2.91)$$

Den Drall des beliebig räumlich bewegten starren Körpers findet man daraus durch die Integration über den gesamten Körper zu

$$\mathbf{L}^O = \int \tilde{\mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} \, dm = \int \tilde{\mathbf{r}} (\mathbf{v}_{\bar{O}} - \tilde{\mathbf{l}} \boldsymbol{\omega}) \, dm. \quad (2.92)$$

Der **Momentensatz** (oder Drallsatz), den L. EULER im Jahre 1750 formulierte, lautet bezüglich des raumfesten Bezugspunktes O und der raumfesten Richtungen

$$\frac{d\mathbf{L}^O}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left[m (\tilde{\mathbf{r}}_O \dot{\mathbf{r}}_S + (\tilde{\mathbf{l}}_S - \tilde{\mathbf{l}}_O) \dot{\mathbf{r}}_O) + \mathbf{J}^{\bar{O}} \boldsymbol{\omega} \right] = \mathbf{M}^O. \quad (2.93)$$

Dabei hat der Vektor der äußeren Momente, also die Summe der eingepägten Momente $\mathbf{M}^{O(e)}$ und der Reaktionsmomente $\mathbf{M}^{O(z)}$, die Komponenten $\mathbf{M}^O = (M_x^O, M_y^O, M_z^O)^T$ im raumfesten Bezugssystem. Während der Kräftesatz meist bezüglich raumfester Koordinaten benutzt wird, wendet man den Momentensatz oft bezüglich der körperfesten Richtungen an. Er wird deshalb im Weiteren nur für die meist interessierenden Fälle in Form der **Euler'schen Kreiselgleichungen** angegeben: Wenn der körperfeste Bezugspunkt $\bar{O}$ nicht beschleunigt ist ($\dot{\mathbf{r}}_{\bar{O}} \equiv \mathbf{0}$), lautet der Momentensatz

$$\bar{\mathbf{M}}_{\text{kin}}^{\bar{O}} \equiv \bar{\boldsymbol{\omega}} \bar{\mathbf{J}}^{\bar{O}} \bar{\boldsymbol{\omega}} + \bar{\mathbf{J}}^{\bar{O}} \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} = \bar{\mathbf{M}}^{\bar{O}}. \quad (2.94)$$

Auf der linken Seite steht das **kinetische Moment** (oder Massenmoment) infolge der Drehträgheit. $\bar{\mathbf{M}}^{\bar{O}} = (M_{\xi}^{\bar{O}}, M_{\eta}^{\bar{O}}, M_{\zeta}^{\bar{O}})^T$ ist der Vektor des resultierenden äußeren Moments im körperfesten Bezugssystem bezüglich $\bar{O}$. In Bezug auf den beliebig bewegten Schwerpunkt lautet der Momentensatz analog zu (2.94):

$$\bar{\mathbf{M}}_{\text{kin}}^S \equiv \bar{\boldsymbol{\omega}} \bar{\mathbf{J}}^S \bar{\boldsymbol{\omega}} + \bar{\mathbf{J}}^S \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} = \bar{\mathbf{M}}^S. \quad (2.95)$$

Dabei ist $\bar{\mathbf{M}}^S = (M_{\xi}^S, M_{\eta}^S, M_{\zeta}^S)^T$ der Vektor des resultierenden äußeren Moments im körperfesten Bezugssystem bezüglich S. Dem Leser wird empfohlen, die mit (2.95) beschriebenen drei Gleichungen einmal ausführlich anzugeben. Er wird daraus auch erkennen, dass sich folgende Form ergibt, wenn die zentralen Hauptachsen als körperfestes Bezugssystem gewählt werden:

$$\begin{aligned} M_{\text{kin I}}^S &\equiv J_I^S \dot{\omega}_I - (J_{\text{II}}^S - J_{\text{III}}^S) \omega_{\text{II}} \omega_{\text{III}} = M_I^S \\ M_{\text{kin II}}^S &\equiv J_{\text{II}}^S \dot{\omega}_{\text{II}} - (J_{\text{III}}^S - J_I^S) \omega_{\text{III}} \omega_I = M_{\text{II}}^S \\ M_{\text{kin III}}^S &\equiv J_{\text{III}}^S \dot{\omega}_{\text{III}} - (J_I^S - J_{\text{II}}^S) \omega_I \omega_{\text{II}} = M_{\text{III}}^S. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Das kinetische Moment enthält neben dem Term mit der Drehbeschleunigung auch einen Term, der bei **konstanten Drehgeschwindigkeiten** auftritt, das so genannte **Kreiselmoment**. Zum Kreiselmoment kann man sich z. B. aufgrund des Terms $(J_I - J_{\text{II}}) \omega_I \omega_{\text{II}}$ merken: Infolge der Massenträgheit entsteht das Kreiselmoment um die jeweils dritte Hauptachse, die auf den beiden anderen senkrecht steht. Für die Richtung des Kreiselmoments gilt die Rechte-Hand-Regel: Wenn Daumen und Zeigefinger der rechten Hand in Richtung der Vektoren von ω_I und ω_{II} zeigen, dann zeigt der Mittelfinger die Richtung III an, um die das Kreiselmoment auftritt. Der Körper „will“ sich in diese Richtung III drehen. Wenn er an dieser Drehung gehindert wird, dann tritt ein Reaktionsmoment auf, welches entgegengesetzt zur

Richtung III wirkt. Wenn z. B. ein Rad (Drehung um horizontale Komponente I) um eine Kurve (vertikale Komponente II) rollt, dann wirkt das Kreiselmoment um die dazu senkrechte horizontale Achse III so, dass es zusätzlich auf den Boden drückt. Es wird dem Leser empfohlen, sich diese Regel einzuprägen und ihre Gültigkeit an allen Beispielen zu prüfen, vgl. z. B. die Aufgaben A2.1, A2.3 und in Abschnitt 2.3.3.

Analog zu (2.87) bis (2.90), wo die äußeren Kräfte (eingeprägte Kraft $\mathbf{F}^{(e)}$ und Zwangskraft $\mathbf{F}^{(z)}$) auf der rechten Seite und die Massenkraft auf der linken Seite der Gleichungen steht, enthalten die rechten Seiten von (2.93) bis (2.96) immer die **äußeren Momente** und die linken Seiten die **kinetischen Momente** $\mathbf{M}_{\text{kin}}$ (oder „Massenmomente“ als Analogie zu „Massenkräften“). Äußere Momente können sowohl **eingeprägte Momente** $\mathbf{M}^{(e)}$ (z. B. Antriebsmomente oder Reibmomente) als auch **Reaktionsmomente** $\mathbf{M}^{(z)}$ sein, z. B. aus Zwangskräften, die von den Lagern aufgenommen werden.

Bei der Lösung von Aufgaben wird der starre Körper frei geschnitten (Schnittprinzip) und alle Kraftgrößen eingetragen, die **von außen** auf ihn wirken. „Aus dem Inneren“ kommen infolge der Massenträgheit die **Massenkräfte** und **-momente**, die man in Analogie zur kinetischen Energie auch als kinetische Kraft $\mathbf{F}_{\text{kin}}$ und kinetisches Moment $\mathbf{M}_{\text{kin}}$ bezeichnen kann. Die Massenkräfte $\mathbf{F}_{\text{kin}} \equiv m\ddot{\mathbf{r}}_S$ werden in der Skizze **entgegengesetzt zur positiven Koordinatenrichtung** von $\mathbf{r}_S$, die kinetischen Momente $\overline{\mathbf{M}}_{\text{kin}}^S \equiv \overline{\boldsymbol{\omega}} \overline{\mathbf{J}}^S \overline{\boldsymbol{\omega}} + \overline{\mathbf{J}}^S \overline{\boldsymbol{\dot{\omega}}}$ werden entgegengesetzt zur positiven Koordinatenrichtung des körperfesten ξ - η - ζ -Systems eingetragen.

Die formale Identität von (2.94) und (2.95) lässt sich auch auf (2.96) und die im Weiteren betrachteten speziellen Formen (2.98), (2.100) und (2.101) dieser Gleichungen übertragen. Es wird darauf verzichtet, diese auch für den Fall eines raumfesten Körperpunktes $\overline{\mathbf{O}}$ gesondert anzugeben. Man kann, wie bei ingenieurtechnischen Berechnungen üblich, dann den Kräftesatz und den Momentensatz unter Benutzung der in einer Skizze dargestellten Richtungen der Kraftgrößen sechs Gleichgewichtsbedingungen formulieren:

$$\mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{F}^{(z)} + (-\mathbf{F}_{\text{kin}}) = \mathbf{o}; \quad \overline{\mathbf{M}}^{S(e)} + \overline{\mathbf{M}}^{S(z)} + (-\overline{\mathbf{M}}_{\text{kin}}^S) = \mathbf{o}. \quad (2.97)$$

Man beachte die Anwendung bei der Lösung der Aufgaben in Abschnitt 2.3.3 bis 2.3.5, vgl. die Bilder 2.9, 2.11 und 2.34.

Für den Fall, dass sich der Körper nur um eine einzige raumfeste Achse (die hier die ζ -Achse ist) dreht, also für den starren Rotor in starren Lagern, folgen aus (2.95) für $\omega_\xi \equiv \omega_\eta \equiv 0$ die Bewegungsgleichungen zu

$$\begin{aligned} M_{\text{kin} \xi}^S &\equiv J_{\xi \xi}^S \dot{\omega}_\zeta - J_{\eta \zeta}^S \omega_\zeta^2 = M_\xi^S \\ M_{\text{kin} \eta}^S &\equiv J_{\eta \zeta}^S \dot{\omega}_\zeta + J_{\xi \zeta}^S \omega_\zeta^2 = M_\eta^S \\ M_{\text{kin} \zeta}^S &\equiv J_{\zeta \zeta}^S \dot{\omega}_\zeta = M_\zeta^S. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Daraus ist erkennbar, dass im Falle konstanter Drehgeschwindigkeit kinetische Momente um die ξ - und η -Achse (also senkrecht zur Drehachse ζ) auftreten, wenn die Deviationsmomente nicht null sind. Diese kinetischen Momente müssen von Lagerkräften senkrecht zur Drehachse aufgenommen werden, um die raumfeste Drehachse zu erzwingen.

Unter der Bedingung, dass in der Anfangslage das raumfeste x - y - z -System und das körperfeste ξ - η - ζ -System übereinstimmen, kann man kleine Drehwinkel φ_x , φ_y und φ_z bezüglich der raumfesten Achsen einführen, so dass wegen (2.33) und (2.35) gilt:

$$\omega_\xi \approx \dot{\varphi}_x; \quad \omega_\eta \approx \dot{\varphi}_y; \quad \omega_\zeta \approx \dot{\varphi}_z. \quad (2.99)$$

Vernachlässigt man die Produkte der Winkelgeschwindigkeiten gegenüber den Drehbeschleunigungen, da sie von zweiter Ordnung klein sind, so folgt die linearisierte Form des Momentensatzes aus (2.95) unter Beachtung von (2.99) mit einem zeitlich unveränderlichen Trägheitstensor. Infolge der kleinen Winkel stimmen die körperfesten und die raumfesten Komponenten näherungsweise überein, wenn sie in der Anfangslage deckungsgleich waren:

$$\begin{aligned} M_{\text{kin } \xi}^S &\equiv J_{\xi\xi}^S \ddot{\varphi}_x + J_{\xi\eta}^S \ddot{\varphi}_y + J_{\xi\zeta}^S \ddot{\varphi}_z = M_\xi^S \approx M_x^S \\ M_{\text{kin } \eta}^S &\equiv J_{\xi\eta}^S \ddot{\varphi}_x + J_{\eta\eta}^S \ddot{\varphi}_y + J_{\eta\zeta}^S \ddot{\varphi}_z = M_\eta^S \approx M_y^S \\ M_{\text{kin } \zeta}^S &\equiv J_{\xi\zeta}^S \ddot{\varphi}_x + J_{\eta\zeta}^S \ddot{\varphi}_y + J_{\zeta\zeta}^S \ddot{\varphi}_z = M_\zeta^S \approx M_z^S. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Rotiert ein Körper mit der „großen“ Drehgeschwindigkeit $\omega_\zeta = \Omega = \text{konst.}$, so folgt aus (2.95) für $|\omega_\xi| \ll \Omega$ und $|\omega_\eta| \ll \Omega$ bei Vernachlässigung der Produkte der kleinen Komponenten der Drehgeschwindigkeit eine andere Form der linearisierten Kreiselgleichungen:

$$\begin{aligned} M_{\text{kin } \xi}^S &\equiv J_{\xi\xi}^S \dot{\omega}_\xi + J_{\xi\eta}^S \dot{\omega}_\eta - [J_{\xi\eta}^S \omega_\xi + (J_{\eta\eta}^S - J_{\xi\zeta}^S) \omega_\eta] \Omega - J_{\eta\zeta}^S \Omega^2 = M_\xi^S \\ M_{\text{kin } \eta}^S &\equiv J_{\xi\eta}^S \dot{\omega}_\xi + J_{\eta\eta}^S \dot{\omega}_\eta + [J_{\xi\eta}^S \omega_\eta + (J_{\xi\xi}^S - J_{\zeta\zeta}^S) \omega_\xi] \Omega + J_{\xi\zeta}^S \Omega^2 = M_\eta^S \\ M_{\text{kin } \zeta}^S &\equiv J_{\xi\zeta}^S \dot{\omega}_\xi + J_{\eta\zeta}^S \dot{\omega}_\eta + (J_{\eta\zeta}^S \omega_\xi - J_{\xi\zeta}^S \omega_\eta) \Omega = M_\zeta^S. \end{aligned} \quad (2.101)$$

In der Form von (2.100) oder (2.101) wird der Momentensatz oft benutzt, wenn ein starrer Körper Teil eines Schwingungssystems ist, vgl. auch Abschnitt 3.2.2 und Abschnitt 5.2.3.

Wer an ausführlichen weitergehenden Informationen zur Kreiseltheorie und deren Anwendungen interessiert ist, sei auf [22] verwiesen.

2.3.3 Kollergang

Ein Kollergang ist eine Maschine zum Zerkleinern, Mahlen oder Mischen (z. B. von Erzen, Kohle, Ton, Getreide, u. a.), bei der auf einer ringförmigen Bahn Walzen geführt werden, welche das Mahlgut zerdrücken und zerreiben. Der umlaufende Körper (Mahlstein), der auf der Kreisbahn abrollt, übt außer seinem Eigengewicht infolge der Kreiselwirkung eine zusätzliche Kraft auf die Unterlage aus.

Auf dem in Bild 2.8 schematisch dargestellten Kollergang ist der als homogener Zylinder modellierte Mahlstein zu sehen, dessen Schwerpunkt im Abstand ξ_S auf einer ebenen Kreisbahn um die raumfeste vertikale z -Achse geführt wird. Die ξ -Achse des Mahlsteins wird horizontal geschwenkt. Für einen gegebenen Zeitverlauf des

Winkels $\varphi(t)$ soll berechnet werden, wie groß das dafür erforderliche Antriebsmoment, die Normalkraft und die Horizontalkraft am Mahlstein beim reinen Rollen ist.

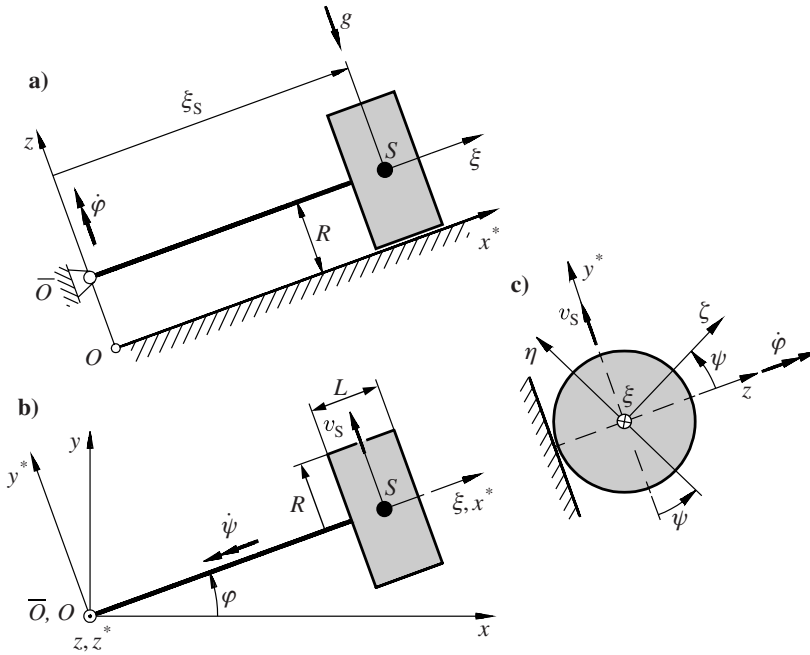


Bild 2.8 Geometrische und kinematische Größen an einer Walze des Kollergangs

Gegeben:

Fallbeschleunigung

g

Walzenradius

R

Walzenlänge

L

Schwerpunktabstand

ξ_S

Zeitverlauf des Schwenkwinkels

$\varphi(t)$

Masse der Walze (Mahlstein)

m

Trägheitsmomente der Walze bezüglich S

$J_{\xi\xi}^S = J_{\eta\eta}^S = m(3R^2 + L^2)/12,$

$J_{\zeta\zeta}^S = 1/2 mR^2$

Es wird neben dem raumfesten x - y - z -Bezugssystem ein körperfestes ξ - η - ζ -System mit dem Ursprung im Lager $\bar{O}$ eingeführt, vgl. Bild 2.8. In der Anfangsstellung ist die ξ -Achse zur x -Achse, die η -Achse zur y -Achse und die ζ -Achse zur z -Achse parallel. Reines Rollen eines Kreiskegels wäre bei einer kegelförmigen Unterlagefläche möglich. Hier wird aber mit einer ebenen Unterlage und einem Kreiszylinder gerechnet und angenommen, dass der Kreis im Abstand ξ_S auf der Ebene $z = 0$ abrollt.

Für die Winkel gilt (wenn im Abstand ξ_S reines Rollen stattfindet) unter Beachtung der als positiv eingeführten Drehrichtungen die Zwangsbedingung

$$\xi_S \varphi = R\psi; \quad \psi = \frac{\xi_S \varphi}{R}. \quad (2.102)$$

Damit ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes:

$$v_S = \xi_S \dot{\varphi} = R\dot{\psi}. \quad (2.103)$$

An den anderen Kontaktpunkten zwischen Mahlstein und Ebene gleitet der jeweilige Walzenpunkt auf der Unterlage, was zum Mahlen oder Schroten erwünscht sein kann. Die Gleitgeschwindigkeit der Kontaktpunkte zwischen Walze und Mahlebene beträgt

$$v_{\text{rel}} = (\xi_S - \xi)\dot{\varphi}. \quad (2.104)$$

Im Berechnungsmodell wird zur Vereinfachung angenommen, dass nur unterhalb des Schwerpunktes der Walze eine vertikale Normalkraft F_N und eine horizontale Haftkraft F_H wirkt. Die Reibungskräfte für $\xi \neq \xi_S$ werden nicht beachtet.

Die Komponenten der Drehgeschwindigkeit der Walze bezüglich des körperfesten und raumfesten Bezugssystems findet man anschaulich aus Bild 2.8, wenn man $\omega_\xi = -\dot{\psi}$ aus (2.103) kennt und den gegebenen Wert für $\omega_z = \dot{\varphi}$ in körperfeste Komponenten zerlegt, vgl. auch (2.30):

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= -\dot{\psi} \\ \omega_\eta &= -\dot{\varphi} \sin \psi \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi} \cos \psi. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Die Komponenten der Drehbeschleunigung folgen aus (2.105) durch die Differenzierung nach der Zeit:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_\xi &= -\ddot{\psi} \\ \dot{\omega}_\eta &= -\ddot{\varphi} \sin \psi - \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \psi \\ \dot{\omega}_\zeta &= \ddot{\varphi} \cos \psi - \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Das körperfeste ξ - η - ζ -System entspricht dem System der Hauptachsen dieses symmetrischen starren Körpers. Man kann der Koordinate ξ die Achse I, der η -Koordinate die Achse II und der ζ -Koordinate die Achse III zuordnen. Dann folgen aus (2.96) mit Bezug auf den raumfesten Körperpunkt $\bar{O}$ die Euler'schen Kreiselgleichungen:

$$\begin{aligned} M_{\text{kin } \xi}^{\bar{O}} &\equiv J_{\xi\xi}^{\bar{O}} \dot{\omega}_\xi - (J_{\eta\eta}^{\bar{O}} - J_{\zeta\zeta}^{\bar{O}}) \omega_\eta \omega_\zeta = M_\xi^{\bar{O}} \\ M_{\text{kin } \eta}^{\bar{O}} &\equiv J_{\eta\eta}^{\bar{O}} \dot{\omega}_\eta - (J_{\xi\xi}^{\bar{O}} - J_{\zeta\zeta}^{\bar{O}}) \omega_\xi \omega_\zeta = M_\eta^{\bar{O}} \\ M_{\text{kin } \zeta}^{\bar{O}} &\equiv J_{\zeta\zeta}^{\bar{O}} \dot{\omega}_\zeta - (J_{\xi\xi}^{\bar{O}} - J_{\eta\eta}^{\bar{O}}) \omega_\xi \omega_\eta = M_\zeta^{\bar{O}}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Diese Gleichungen drücken aus, dass die kinetischen Momente aus der Drehträgheit des Körpers mit den äußeren Momenten im Gleichgewicht stehen. Die Trägheitsmomente, die bezüglich des Schwerpunktes gegeben sind, müssen auf den raumfesten

Körperpunkt $\bar{O}$ mit dem Satz von Steiner transformiert werden, vgl. (2.80). Sie betragen

$$J_{\xi\xi}^{\bar{O}} = J_{\eta\eta}^{\bar{O}} = J_{\eta\eta}^S + m\xi_S^2 = J_a = \frac{m(3R^2 + L^2 + 12\xi_S^2)}{12} \quad (2.108)$$

$$J_{\xi\xi}^{\bar{O}} = J_{\xi\xi}^S = J_p = \frac{1}{2}mR^2.$$

Berücksichtigt man (2.105) und (2.106), so kann man aus (2.107) zunächst die kinetischen Momente berechnen:

$$M_{\text{kin}\xi}^{\bar{O}} \equiv J_{\xi\xi}^{\bar{O}} \dot{\omega}_\xi = -J_p \ddot{\psi} \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} M_{\text{kin}\eta}^{\bar{O}} &\equiv J_{\eta\eta}^{\bar{O}} \dot{\omega}_\eta - (J_{\xi\xi}^{\bar{O}} - J_{\xi\xi}^{\bar{O}}) \omega_\xi \omega_\eta \\ &= J_a (\ddot{\psi} \sin \psi + \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \psi) - (J_a - J_p) \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \psi \\ &= J_a \ddot{\psi} \sin \psi + J_p \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \psi \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} M_{\text{kin}\zeta}^{\bar{O}} &\equiv J_{\zeta\zeta}^{\bar{O}} \dot{\omega}_\zeta - (J_{\xi\xi}^{\bar{O}} - J_{\eta\eta}^{\bar{O}}) \omega_\xi \omega_\eta \\ &= J_a (\ddot{\psi} \cos \psi - \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \psi) + (J_p - J_a) \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \psi \\ &= J_a \ddot{\psi} \cos \psi + J_p \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \psi. \end{aligned} \quad (2.111)$$

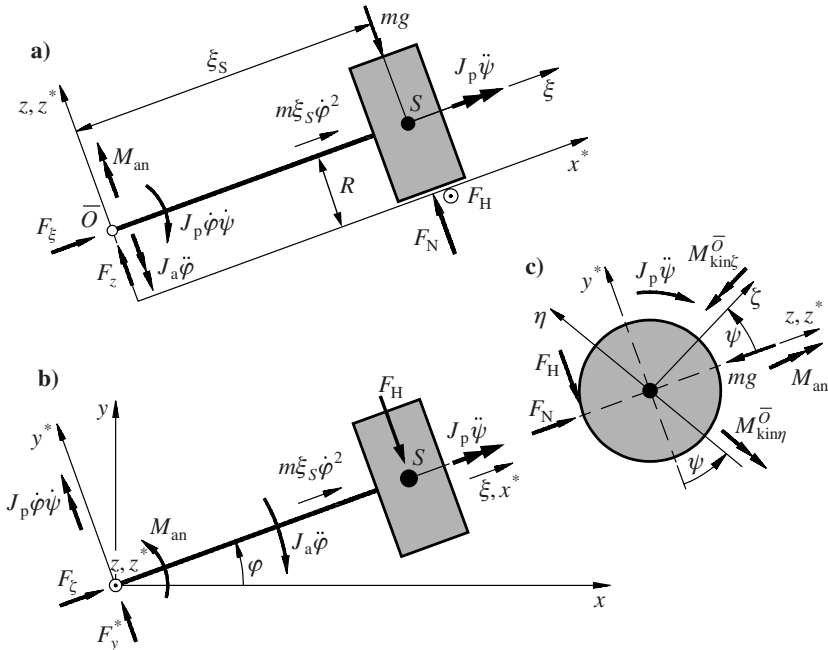


Bild 2.9 Kräfte und Momente an der frei geschnittenen Walze

Die in (2.107) stehenden Komponenten ($M_{\xi}^{\overline{O}}$, $M_{\eta}^{\overline{O}}$ und $M_{\zeta}^{\overline{O}}$) des resultierenden äußeren Moments $\mathbf{M}^{\overline{O}}$ ergeben sich aus den am frei geschnittenen Körper angreifenden äußeren Kraftgrößen, also aus dem Antriebsmoment M_{an} , dem Eigengewicht mg und den Reaktionskräften (F_N und F_H) am Kontaktpunkt. Anstelle des Momentengleichgewichts um die η - und ζ -Achse kann man günstiger das Momentengleichgewicht um die y^* -Achse und um die z -Achse aufstellen. Sowohl formal mit (2.109) bis (2.111) als auch anschaulich ergibt sich bezüglich der ξ -Achse (Bild 2.9b und c)

$$M_{\text{kin } \xi}^{\overline{O}} \equiv -J_p \ddot{\psi} = -F_H R \quad (2.112)$$

um die z -Achse (vgl. Bild 2.9a und b):

$$M_{\text{kin } \zeta}^{\overline{O}} \cos \psi - M_{\text{kin } \eta}^{\overline{O}} \sin \psi \equiv J_a \ddot{\phi} = M_{\text{an}} - F_H \xi_S \quad (2.113)$$

und um die y^* -Achse, vgl. Bild 2.9a und c:

$$M_{\text{kin } \zeta}^{\overline{O}} \sin \psi + M_{\text{kin } \eta}^{\overline{O}} \cos \psi \equiv J_p \dot{\phi} \dot{\psi} = (F_N - mg) \xi_S. \quad (2.114)$$

Dies sind Gleichungen zur Berechnung des Antriebsmoments sowie der Reaktionskräfte F_N und F_H . Man kann die Ergebnisse mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Parametern ausdrücken – die obige Form lässt allerdings die „Herkunft“ der einzelnen Terme besser erkennen, z. B. die Kreiselwirkung des Rotors.

Die Horizontalkraft, welche die Haftung sichert, ist

$$F_H = \frac{J_p \ddot{\psi}}{R} = \frac{J_p}{R^2} \xi_S \ddot{\phi} = \frac{1}{2} m \xi_S \ddot{\phi}. \quad (2.115)$$

Das Antriebsmoment, welche den gegebenen Antriebswinkelverlauf erzwingt, ist

$$M_{\text{an}} = \left(J_a + J_p \frac{\xi_S^2}{R^2} \right) \ddot{\phi} = \frac{m \ddot{\phi} (3R^2 + L^2 + 18\xi_S^2)}{12} \quad (2.116)$$

und die Normalkraft folgt aus (2.114):

$$F_N = mg + \frac{J_p \dot{\phi} \dot{\psi}}{\xi_S} = mg \left(1 + \frac{R \dot{\phi}^2}{2g} \right). \quad (2.117)$$

Sie ist dem Radius R und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ($\dot{\phi}^2$) proportional, aber unabhängig von der Länge ξ_S . Sie kann bedeutend größer sein als das (statische) Eigengewicht. Der Einfluss des Walzenradius scheint schon in uralten Zeiten empirisch bekannt gewesen zu sein, denn man findet in alten Mühlen solche Kollergänge meist mit großen Radien der Mahlsteine. Die Horizontalkraft F_H , die sich aus (2.112) ergibt, ist eine Reaktionskraft, die nur bei Drehbeschleunigungen auftritt. Die hier angenommenen Einzelkräfte sind die Resultierenden der in Wirklichkeit unter dem Mahlstein sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung auftretenden Linienlasten. Um deren Verteilung ausrechnen zu können, müssten Ansätze für das mechanische Verhalten des Mahlgutes berücksichtigt werden.

2.3.4

Aufgaben A2.3 und A2.4

A2.3 Kinetik eines schwenkbaren Rotors

Bei vielen technischen Anwendungen interessieren die Lagerreaktionen rotierender Körper, die um ihre Lagerachse und gleichzeitig noch um eine dazu senkrechte Achse gedreht werden. Bild 2.4 zeigt einen (als masselos betrachteten) Rahmen, der im raumfesten x - y - z -Bezugssystem um die x -Achse geschwenkt wird, in dem ein Rotor drehbar gelagert ist, der im Rahmen um seine ζ -Achse (Hauptachse III) rotieren kann. Der Schwerpunkt des Rotors liegt im Ursprung des körperfesten Bezugssystems ($\bar{O} = S$). Es interessieren allgemeine Formeln zur Berechnung der Momente bezüglich des raumfesten Bezugssystems, die bei gleichzeitiger Drehung von Rotor und Rahmen auftreten.

Gegeben:

Abmessungen des Rahmens	l und h
Zeitverläufe der Winkel	$\alpha(t)$ und $\gamma(t)$
Masse des Rotors	m
Hauptträgheitsmomente des Rotors	$J_{\xi\xi}^S = J_I^S = J_{\eta\eta}^S = J_{II}^S = J_a^S,$ $J_{\zeta\zeta}^S = J_{III}^S = J_p^S$

Gesucht:

1. Komponenten der Schwerpunktbeschleunigung
2. kinetische Momente bezüglich des Schwerpunktes
3. Moment zwischen Rotor und Rahmen ($M_{x*}^S, M_{y*}^S, M_{z*}^S$)
4. Reaktionen am Ursprung O ($F_y, F_z, M_x^O, M_y^O, M_z^O$)
5. Antriebsmomente am Rotor (M_{an}^γ) und am Rahmen (M_{an}^α)

A2.4 Lagerkräfte eines rotierenden Körpers

Für den in Bild 2.10 gezeigten starren Rotor sind die Lagerkräfte zu ermitteln. Der Körper hat einen exzentrischen Schwerpunkt S gegenüber der Rotationsachse. Es wird ein körperfestes ξ - η - ζ -Koordinatensystem benutzt, dessen Ursprung mit dem raumfesten Ursprung übereinstimmt ($O = \bar{O}$) und dessen ζ -Achse mit der raumfesten z -Achse identisch ist.

Gegeben:

Masse	m
Trägheitsmoment	$J_{\zeta\zeta}^S$
Deviationsmomente	$J_{\xi\zeta}^S, J_{\eta\zeta}^S$
Körperfeste Schwerpunktkoordinaten	$\bar{l}_S = (\xi_S, \eta_S, \zeta_S)^T$
Drehwinkel	$\varphi(t)$
Lagerabstände vom Schwerpunkt	a, b
Kreiszyylinder mit	Radius R und Länge L
Neigungswinkel der ζ_1 -Achse zur ζ -Achse	γ
polares Trägheitsmoment	$J_p = 1/2 m R^2$, vgl. (2.108)
axiales Trägheitsmoment	$J_a = m(3R^2 + L^2)/12$

Gesucht:

1. Für beliebigen Verlauf $\varphi(t)$ und allgemeinen Rotorkörper
 - 1.1 Lagerkräfte F_A und F_B im körperfesten Bezugssystem
 - 1.2 Antriebsmoment M_{an}

2. Trägheitstensor J^{*S} des symmetrisch im ξ_1 - η_1 - ζ_1 -System angeordneten Kreiszylinders, der in der ξ - ζ -Ebene um den Winkel γ gegenüber der Rotationsachse geneigt ist, vgl. Bild 2.10b.

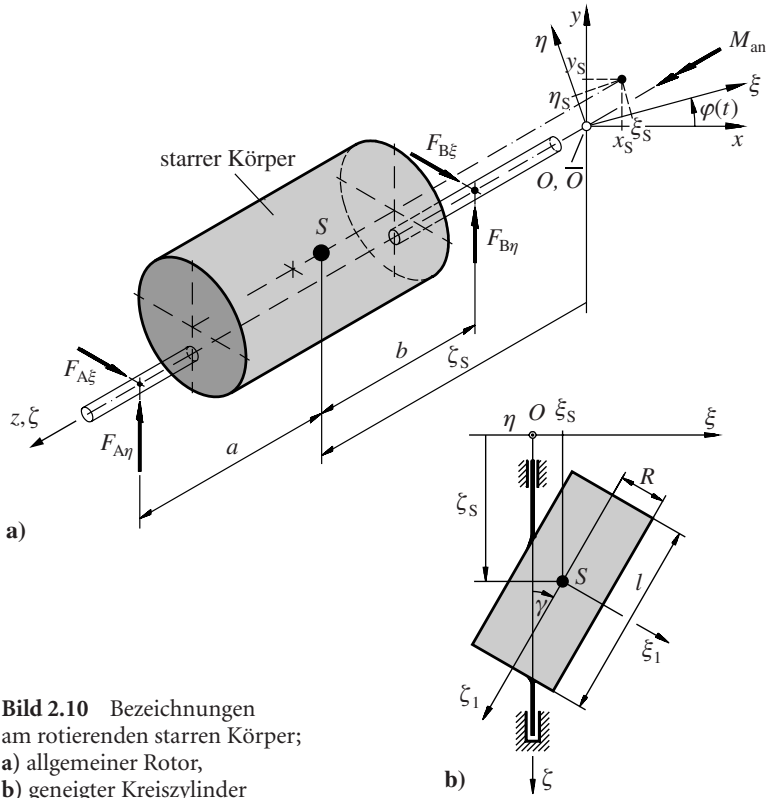


Bild 2.10 Bezeichnungen
am rotierenden starren Körper;
a) allgemeiner Rotor,
b) geneigter Kreiszylinder

2.3.5

Lösungen L2.3 und L2.4

- L2.3** Die Beschleunigung des Schwerpunktes kann aus den Geschwindigkeiten berechnet werden, die in L2.1 für einen Körperpunkt ermittelt wurden. Für $\eta_P = 0$ wird $P = S$, und es folgt aus (2.42):

$$\dot{\mathbf{r}}_S = \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \\ \dot{z}_S \end{bmatrix} = \dot{\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ -l \sin \alpha - h \cos \alpha \\ l \cos \alpha - h \sin \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.118)$$

Die Beschleunigung des Schwerpunktes ist also

$$\ddot{\mathbf{r}}_S = \begin{bmatrix} \ddot{x}_S \\ \ddot{y}_S \\ \ddot{z}_S \end{bmatrix} = \ddot{\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ -l \sin \alpha - h \cos \alpha \\ l \cos \alpha - h \sin \alpha \end{bmatrix} - \dot{\alpha}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ l \cos \alpha - h \sin \alpha \\ l \sin \alpha + h \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.119)$$

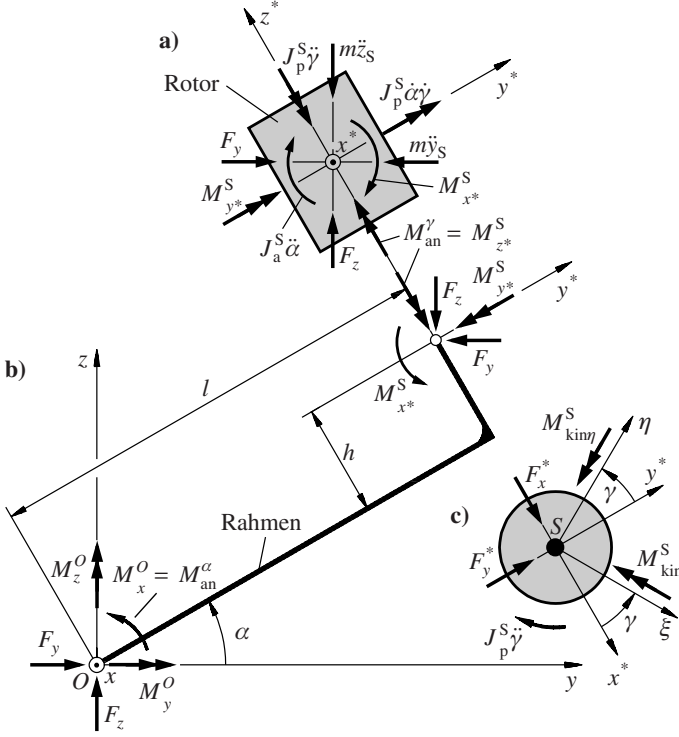


Bild 2.11 Kräfte und Momente am schwenkbaren Rahmen mit Rotor

Die Aufgabe wird hier mit Benutzung des Schnittprinzips gelöst (sie könnte auch mit der in Abschnitt 2.4.1 beschriebenen Methode mit α und γ als unabhängige Antriebe gelöst werden). Am frei geschnittenen Rotor in Bild 2.11a und c sind die Massenkräfte ($m\ddot{y}_S, m\ddot{z}_S$), Massenmomente (kinetische Momente), das dort angreifende Antriebsmoment M^S_{an} , die vom Rahmen ausgeübten Zwangskräfte (F_y, F_z) und Zwangsmomente ($M^S_{x^*}, M^S_{y^*}, M^S_{z^*}$) eingetragen. Die Kräfte in x -Richtung sind null.

Die kinetischen Momente sind durch die Euler'schen Kreiselgleichungen (2.107) definiert und ergeben sich in Verbindung mit den aus (2.36) bekannten Drehgeschwindigkeiten und den aus (2.37) bekannten Drehbeschleunigungen zu

$$\begin{aligned}
 M^S_{kin\xi} &\equiv J^S_{\xi\xi} \dot{\omega}_\xi - (J^S_{\eta\eta} - J^S_{\zeta\zeta}) \omega_\eta \omega_\zeta \\
 &= J^S_a (\ddot{\alpha} \cos \gamma - \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \gamma) + (J^S_a - J^S_p) \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \gamma \\
 &= \underline{\underline{J^S_a \ddot{\alpha} \cos \gamma - J^S_p \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \gamma}}
 \end{aligned} \tag{2.120}$$

$$\begin{aligned}
 M^S_{kin\eta} &\equiv J^S_{\eta\eta} \dot{\omega}_\eta - (J^S_{\xi\xi} - J^S_{\zeta\zeta}) \omega_\xi \omega_\zeta \\
 &= J^S_a (-\ddot{\alpha} \sin \gamma - \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \gamma) - (J^S_p - J^S_a) \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \gamma \\
 &= \underline{\underline{-J^S_a \ddot{\alpha} \sin \gamma - J^S_p \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \gamma}}
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

$$\begin{aligned} M_{\text{kin } \zeta}^S &\equiv J_{\zeta \zeta}^S \dot{\omega}_{\zeta} - (J_{\zeta \xi}^S - J_{\eta \eta}^S) \omega_{\xi} \omega_{\eta} \\ &= \underline{\underline{J_p^S \ddot{\gamma}}}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

In Bild 2.11c sind sie entgegengesetzt zur Richtung der körperfesten Koordinatenrichtungen eingetragen. Sie werden in die Richtungen des $x^*-y^*-z^*$ -Koordinatensystems transformiert sowie mit den eingetragten Momenten und Reaktionsmomenten ins Gleichgewicht gebracht:

$$M_{\text{kin } x^*}^S \equiv -M_{\text{kin } \eta}^S \sin \gamma + M_{\text{kin } \xi}^S \cos \gamma = \underline{\underline{J_a^S \ddot{\alpha} = -M_{x^*}^S}} \quad (2.123)$$

$$M_{\text{kin } y^*}^S \equiv M_{\text{kin } \eta}^S \cos \gamma + M_{\text{kin } \xi}^S \sin \gamma = \underline{\underline{-J_p^S \dot{\alpha} \dot{\gamma} = M_{y^*}^S}} \quad (2.124)$$

$$M_{\text{kin } z^*}^S \equiv M_{\text{kin } \zeta}^S = \underline{\underline{J_p^S \ddot{\gamma} = M_{z^*}^S = M_{\text{an}}^{\gamma}}} \quad (2.125)$$

vgl. die Darstellung in Bild 2.11a. Das Moment M_{an}^{γ} ruft die Winkelbeschleunigung $\ddot{\gamma}$ hervor und stützt sich gegenüber dem Rahmen ab. Die Komponenten der kinetischen Momente des bewegten Rotors bezüglich des $x^*-y^*-z^*$ -Koordinatensystems sind entgegengesetzt zu den positiven Koordinatenrichtungen eingetragen. Die gleiche, bereits in Abschnitt 2.3.2 erläuterte Vorzeichenregel, wurde auch für die mit (2.119) berechenbaren Massenkräfte angewandt. Es gilt am Rotor (und infolge des Kräftegleichgewichts auch am Rahmen) für die Reaktionskräfte:

$$\underline{\underline{F_y = m \ddot{y}_S = m [-\ddot{\alpha}(l \sin \alpha + h \cos \alpha) - \dot{\alpha}^2(l \cos \alpha - h \sin \alpha)]}} \quad (2.126)$$

$$\underline{\underline{F_z = m \ddot{z}_S = m [\ddot{\alpha}(l \cos \alpha - h \sin \alpha) - \dot{\alpha}^2(l \sin \alpha + h \cos \alpha)]}}. \quad (2.127)$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen am Rahmen findet man die Reaktionsmomente bezüglich des Ursprungs O, vgl. Bild 2.11a:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M_x^O}} &= M_{\text{an}}^{\alpha} = -F_y(l \sin \alpha + h \cos \alpha) + F_z(l \cos \alpha - h \sin \alpha) - M_{x^*}^S \\ &= \underline{\underline{[m(l^2 + h^2) + J_a^S] \ddot{\alpha}}} \end{aligned} \quad (2.128)$$

$$\underline{\underline{M_y^O}} = M_{y^*}^S \cos \alpha - M_{z^*}^S \sin \alpha = \underline{\underline{-J_p^S(\dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \alpha + \ddot{\gamma} \sin \alpha)}} \quad (2.129)$$

$$\underline{\underline{M_z^O}} = M_{y^*}^S \sin \alpha + M_{z^*}^S \cos \alpha = \underline{\underline{J_p^S(-\dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \alpha + \ddot{\gamma} \cos \alpha)}}. \quad (2.130)$$

Aus (2.128) erkennt man, dass der Ausdruck in der eckigen Klammer das Trägheitsmoment um O ist (Satz von Steiner). Die Terme, die von $\dot{\alpha}^2$ abhängen, haben auf das Moment um den Ursprung keinen Einfluss, da die resultierende Fliehkraft radial gerichtet ist und bezüglich O keinen Hebelarm hat. Bei konstanten Winkelgeschwindigkeiten entsteht ein Kreiselmoment, das sich auf die y - und z -Achse auswirkt, vgl. Abschnitt 2.3.

- I2.4** Für einen rotierenden Körper, der sich um eine raumfeste ζ -Achse dreht, sind die Bewegungsgleichungen in (2.98) bezüglich des Schwerpunktes angegeben. Mit der Komponente der Drehgeschwindigkeit $\omega_{\zeta} = \dot{\varphi}$ ergibt sich hierfür also

$$J_{\xi \zeta}^S \ddot{\varphi} - J_{\eta \zeta}^S \dot{\varphi}^2 = M_{\xi}^S \quad (2.131)$$

$$J_{\eta \zeta}^S \ddot{\varphi} + J_{\xi \zeta}^S \dot{\varphi}^2 = M_{\eta}^S \quad (2.132)$$

$$J_{\zeta \zeta}^S \ddot{\varphi} = M_{\zeta}^S. \quad (2.133)$$

Auf der linken Seite dieser Gleichungen stehen die kinetischen Momente, auf der rechten Seite die äußeren Momente, die von den Lagerkräften und dem Antriebsmoment stammen, welches den Rotor in diesen Bewegungszustand versetzt.

Die Komponenten des resultierenden äußeren Moments aus den Lagerkräften und dem Antriebsmoment sind, vgl. Bild 2.12

$$M_{\xi}^S = -F_{A\eta}a + F_{B\eta}b \quad (2.134)$$

$$M_{\eta}^S = -F_{A\xi}a + F_{B\xi}b \quad (2.135)$$

$$M_{\zeta}^S = M_{\text{an}} + (F_{A\xi} + F_{B\xi})\eta_S - (F_{A\eta} + F_{B\eta})\xi_S, \quad (2.136)$$

sodass man aus (2.131) bis (2.136) zunächst drei Gleichungen für die unbekannten Komponenten der Lagerkräfte und für das Antriebsmoment erhält:

$$-F_{A\eta}a + F_{B\eta}b = J_{\xi\xi}^S \ddot{\varphi} - J_{\eta\xi}^S \dot{\varphi}^2 \quad (2.137)$$

$$F_{A\xi}a - F_{B\xi}b = J_{\eta\xi}^S \ddot{\varphi} + J_{\xi\xi}^S \dot{\varphi}^2 \quad (2.138)$$

$$M_{\text{an}} + (F_{A\xi} + F_{B\xi})\eta_S - (F_{A\eta} + F_{B\eta})\xi_S = J_{\zeta\zeta}^S \ddot{\varphi} \quad (2.139)$$

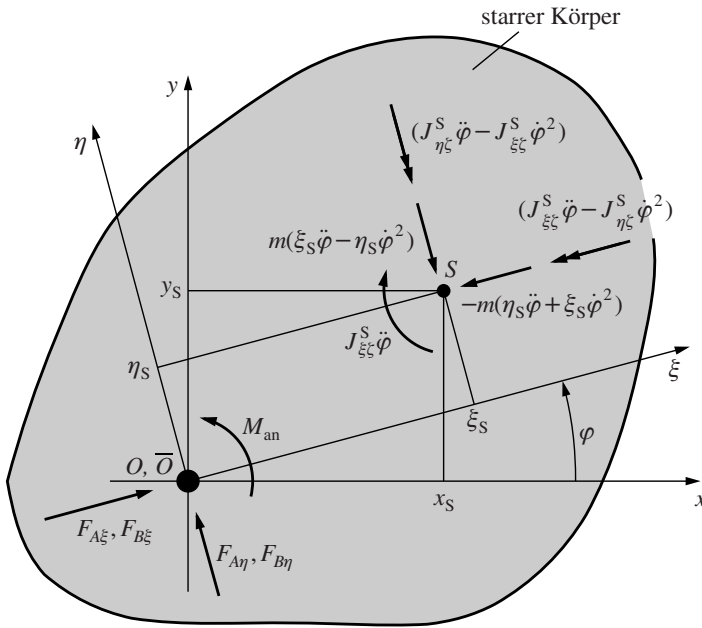


Bild 2.12 Kraftgrößen am frei geschnittenen Körper

Aus dem Schwerpunktsatz folgen drei weitere Gleichungen für die Unbekannten. Im raumfesten Bezugssystem gilt (2.87). Es ist aber hier zweckmäßig, ihn gemäß (2.90) in körperfesten Komponenten zu benutzen. Es gilt wegen $\vec{r}_{\bar{O}} \equiv \vec{o}$, vgl. Bild 2.12:

$$m(\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \vec{\omega})\bar{I}_S = \vec{F}. \quad (2.140)$$

Da die äußeren Kräfte die unbekannten Lagerkräfte in A und B sind, kann man auch schreiben:

$$\bar{\mathbf{F}}_A + \bar{\mathbf{F}}_B = m(\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \bar{\boldsymbol{\omega}}) \bar{\mathbf{l}}_S. \quad (2.141)$$

Ausführlich lautet diese Gleichung mit dem Vektor $\bar{\mathbf{l}}_S = (\xi_S, \eta_S, \zeta_S)^T$ und den Tensor-matrizen

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} & 0 \\ \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi & 0 \\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

nach der Multiplikation der jeweils drei Matrizen

$$F_{A\xi} + F_{B\xi} = m(-\ddot{\phi}\eta_S - \dot{\phi}^2\xi_S) \quad (2.143)$$

$$F_{A\eta} + F_{B\eta} = m(\ddot{\phi}\xi_S - \dot{\phi}^2\eta_S). \quad (2.144)$$

Die Komponenten in ζ -Richtung sind null. Mit (2.137), (2.138), (2.143) und (2.144) liegen je zwei lineare Gleichungen für je zwei Unbekannte vor, die sich leicht lösen lassen. Die Komponenten der Lagerkräfte im körperfesten Bezugssystem ergeben sich daraus zu

$$\begin{aligned} F_{A\xi} &= \frac{J_{\eta\xi}^S \ddot{\phi} + J_{\xi\xi}^S \dot{\phi}^2 - mb(\ddot{\phi}\eta_S + \dot{\phi}^2\xi_S)}{a+b} \\ F_{B\xi} &= \frac{-J_{\eta\xi}^S \ddot{\phi} - J_{\xi\xi}^S \dot{\phi}^2 - ma(\ddot{\phi}\eta_S + \dot{\phi}^2\xi_S)}{a+b} \\ F_{A\eta} &= \frac{-J_{\xi\xi}^S \ddot{\phi} + J_{\eta\xi}^S \dot{\phi}^2 + mb(\ddot{\phi}\xi_S - \dot{\phi}^2\eta_S)}{a+b} \\ F_{B\eta} &= \frac{J_{\xi\xi}^S \ddot{\phi} - J_{\eta\xi}^S \dot{\phi}^2 + ma(\ddot{\phi}\xi_S - \dot{\phi}^2\eta_S)}{a+b}. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Das Antriebsmoment findet man aus (2.139), wenn man dort die Kräfte aus (2.143) und (2.144) einsetzt:

$$M_{\text{an}} = \left[J_{\xi\xi}^S + m(\xi_S^2 + \eta_S^2) \right] \ddot{\phi}. \quad (2.146)$$

Dem Trägheitstensor des symmetrisch im ξ_1 - η_1 - ζ_1 -System angeordneten Kreiszylinders, dessen Mittelachse die ζ_1 -Achse ist, entspricht mit (2.108) die Matrix (2.83):

$$\mathbf{J}^{*S} = \begin{bmatrix} J_a & 0 & 0 \\ 0 & J_a & 0 \\ 0 & 0 & J_p \end{bmatrix}. \quad (2.147)$$

Die Transformation auf das ξ - η - ζ -Koordinatensystem erfolgt mit der Matrix $\mathbf{A}^*$ aus (2.77), die sich aus den Winkeln

$$\begin{aligned} \alpha_{\xi k} &= \gamma; & \beta_{\xi k} &= \frac{\pi}{2}; & \gamma_{\xi k} &= \frac{\pi}{2} - \gamma \\ \alpha_{\eta k} &= \frac{\pi}{2}; & \beta_{\eta k} &= 0; & \gamma_{\eta k} &= \frac{\pi}{2} \\ \alpha_{\zeta k} &= \frac{\pi}{2} + \gamma; & \beta_{\zeta k} &= \frac{\pi}{2}; & \gamma_{\zeta k} &= \gamma \end{aligned} \quad (2.148)$$

ergibt und analog zu A_2 in (2.11) aufgebaut ist:

$$A^* = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{\xi k} & \cos \beta_{\xi k} & \cos \gamma_{\xi k} \\ \cos \alpha_{\eta k} & \cos \beta_{\eta k} & \cos \gamma_{\eta k} \\ \cos \alpha_{\zeta k} & \cos \beta_{\zeta k} & \cos \gamma_{\zeta k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.149)$$

Durch die Matrizenmultiplikationen gemäß (2.78) erhält man folgenden Trägheitstensor für den geneigten Kreiszylinder bezüglich der Richtungen des ξ - η - ζ -Systems:

$$\bar{J}^S = A^* J^{*S} A^{*T} = \begin{bmatrix} J_a \cos^2 \gamma + J_p \sin^2 \gamma & 0 & (J_p - J_a) \sin \gamma \cos \gamma \\ 0 & J_a & 0 \\ (J_p - J_a) \sin \gamma \cos \gamma & 0 & J_a \sin^2 \gamma + J_p \cos^2 \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.150)$$

Die zur Berechnung der Lagerkräfte in (2.145) und (2.146) benötigten Elemente des Trägheitstensors sind also (Koeffizientenvergleich)

$$\underline{J_{\xi\xi}^S} = (J_p - J_a) \sin \gamma \cos \gamma; \quad \underline{J_{\eta\eta}^S} = 0; \quad \underline{J_{\zeta\zeta}^S} = J_a \sin^2 \gamma + J_p \cos^2 \gamma. \quad (2.151)$$

Das kinetische Moment, welches auf die Lager wirkt, würde sein Vorzeichen ändern, wenn γ negativ wird, d. h. die Neigung in anderer Richtung erfolgt. Das Deviationsmoment $J_{\xi\xi}^S$ heißt auch deshalb „Kippmasse“, weil es den Rotor aus der Drehachse heraus „zu kippen versucht“. Man kann sich die Wirkung der Deviationsmomente anschaulich durch die Fliehkräfte erklären, die bei einer solchen schiefen Rotorstellung ein Moment um die negative η -Achse hervorrufen.

Es spielt auch noch eine Rolle, ob es sich bei dem Rotor um eine flache dünne Scheibe ($J_p > J_a$) oder um eine lange Walze ($J_p < J_a$) handelt, vgl. Bild 5.5 und Tabelle 5.2. Bei einem Kreiszylinder ist gemäß (2.131) und (2.132) die Differenz der Hauptträgheitsmomente $J_p - J_a = m(3R^2 - L^2)/12$, d. h., es kommt bei dem Vorzeichen von $J_{\xi\xi}^S$ und bei der Richtung des „Kippmoments“ darauf an, ob der zylindrische Rotor dick ($L < \sqrt{3}R$) oder schlank ($L > \sqrt{3}R$) ist.

2.4

Zur Kinetik der Mehrkörpersysteme

2.4.1

Mechanismen mit mehreren Antrieben

2.4.1.1

Zu räumlichen Starrkörper-Mechanismen

Starrkörper-Mechanismen sind zwangsläufige Systeme starrer Körper, die in Abhängigkeit von den Bewegungen ihrer Antriebsglieder ebene oder räumliche Bewegungen ausführen. Zur Beschreibung der Bewegung eines solchen Systems werden so genannte generalisierte (oder **verallgemeinerte**) **Koordinaten** q_k benutzt, wobei jedem Antrieb eine Koordinate und eine **verallgemeinerte Kraftgröße** Q_k zugeordnet wird ($k = 1, 2, \dots, n$). Die Lage jedes Gliedes eines Mechanismus mit mehreren Antrieben ist von diesen n Antriebskoordinaten

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T \quad (2.152)$$

abhängig. Die einzelnen q_k sind Wege (dann ist Q_k eine Kraft) oder Winkel (dann ist diesem ein Moment zugeordnet). Die Anzahl n der unabhängigen Antriebe wird in der Getriebetechnik als *Laufgrad* (VDI-Richtlinie 2127) bezeichnet, um sie vom Freiheitsgrad zu unterscheiden, der sich z. B. auf elastische Deformationen beziehen kann.

Ein Mechanismus ist **zwangsläufig**, wenn den Stellungen der Antriebsglieder die Lagen aller anderen Glieder des Mechanismus eindeutig zugeordnet sind. Die Bedingungen des Zwangslaufs sind in der Praxis dann erfüllt – und das Berechnungsmodell der Starrkörper-Mechanismen (*starre Maschine*) für solche Maschinen und deren Baugruppen anwendbar – wenn die Einflüsse von Spiel, elastischen Deformationen und Schwingungen der Glieder der Mechanismen vernachlässigbar klein sind.

Die kinematische Analyse ebener und räumlicher Mechanismen mit mehreren Antrieben erfolgt üblicherweise mit entsprechender Software aus dem Gebiet der Mehrkörperdynamik. Mit solchen Programmen können die dynamischen Belastungen sehr komplexer Mechanismen unter Berücksichtigung beliebiger Verläufe eingepprägter Kräfte und Momente (z. B. Antriebskräfte, Federkräfte, Dämpferkräfte, technologische Kräfte) analysiert werden. In der Konstruktionspraxis muss sich der Bearbeiter gründlich mit der umfangreichen Anwendungsbeschreibung befassen, um diese leistungsfähigen Werkzeuge zielgerichtet nutzen zu können.

Im Folgenden sollen lediglich einige allgemeine Zusammenhänge dargestellt werden, die zwischen den Antriebsbewegungen (also Zeitverläufe der Wege oder Winkel) und den Kraftgrößen der Antriebe bestehen. Dies ist zum Verständnis des Geltungsbereichs solcher Programme, zu deren zweckmäßigem Einsatz und zur Bewertung der Rechenergebnisse von Interesse. In der Praxis sind meist die Antriebskräfte durch die Motorkennlinien gegeben, sodass die Integration der Bewegungsgleichungen notwendig wird, vgl. dazu Abschnitt 2.4.3.

Ein Mechanismus besteht aus I Gliedern, von denen das Gestell mit dem Index 1 und die beweglichen Körper mit den Indizes $i = 2, 3, \dots, I$ bezeichnet werden, wobei dem Index I meist ein Abtriebsglied zugeordnet wird. Bild 2.13 zeigt einige Beispiele für Starrkörpermechanismen mit mehreren Antrieben. Auch der Kreisel in Bild 2.15 kann so gedeutet werden, dass die Lage des starren Körpers durch die drei „Antriebskoordinaten“ q_1, q_2 und q_3 bestimmt wird.

Die Schwerpunktkoordinaten $\mathbf{r}_{Si}$ des i -ten Gliedes eines Mechanismus sind von den so genannten kinematischen Abmessungen und der Stellung der n Antriebsglieder (oft nichtlinear) abhängig:

$$\mathbf{r}_{Si}(\mathbf{q}) = [x_{Si}(\mathbf{q}), y_{Si}(\mathbf{q}), z_{Si}(\mathbf{q})]^T. \quad (2.153)$$

Ihre Geschwindigkeiten kann man nach der Kettenregel berechnen:

$$\frac{d(\mathbf{r}_{Si})}{dt} = \mathbf{v}_{Si} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_{Si}}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_{Si,k} \dot{q}_k; \quad i = 2, 3, \dots, I. \quad (2.154)$$

Ausführlich lautet (2.154)

$$\dot{x}_{Si} = \sum_{k=1}^n x_{Si,k} \dot{q}_k; \quad \dot{y}_{Si} = \sum_{k=1}^n y_{Si,k} \dot{q}_k; \quad \dot{z}_{Si} = \sum_{k=1}^n z_{Si,k} \dot{q}_k. \quad (2.155)$$

Die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten q_k werden durch den nach einem Komma folgenden Buchstaben k abgekürzt.

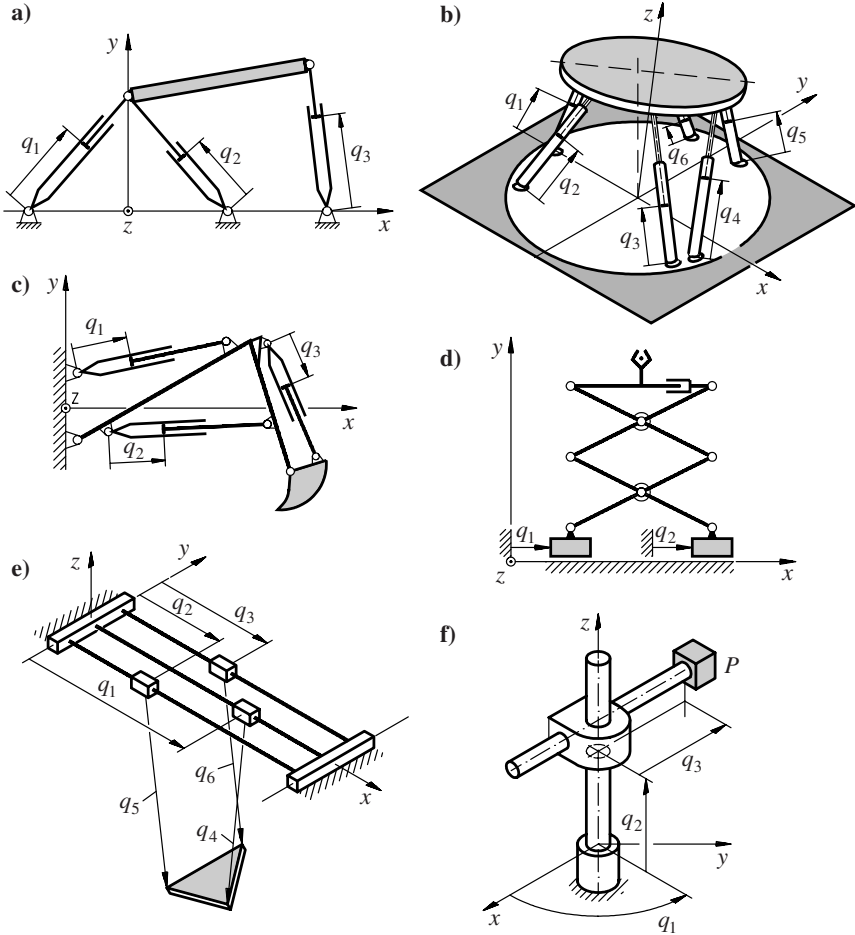


Bild 2.13 Beispiele für Starrkörpermechanismen mit mehreren Antrieben; **a)** ebene Stewart-Plattform ($n = 3$), **b)** räumliche Stewart-Plattform ($n = 6$), **c)** hydraulische Antriebe eines Löffelbaggers ($n = 3$), **d)** Hubwagen ($n = 2$), **e)** seilgeführtes Handhabungssystem ($n = 6$), **f)** Schweißroboter ($n = 3$)

Die Komponenten der Drehgeschwindigkeiten jedes Gliedes sind bei zwangsläufigen Mechanismen linear abhängig von den Geschwindigkeiten der Antriebskoordinaten. Für die körperfesten Komponenten des Vektors $\bar{\omega}_i = (\omega_{\xi i}, \omega_{\eta i}, \omega_{\zeta i})^T$ der Drehgeschwindigkeit des i -ten Gliedes gilt:

$$\omega_{\xi i} = \sum_{k=1}^n u_{\xi ik} \dot{q}_k; \quad \omega_{\eta i} = \sum_{k=1}^n u_{\eta ik} \dot{q}_k; \quad \omega_{\zeta i} = \sum_{k=1}^n u_{\zeta ik} \dot{q}_k. \quad (2.156)$$

Man vergleiche dazu z. B. (2.175) und (2.176).

Man kann die linearen Beziehungen gemäß (2.154) und (2.156) jeweils mit einer **Jacobimatrix** ausdrücken. Es gelten für die Translation der Schwerpunkte und für die Rotation folgende Beziehungen:

$$\dot{\mathbf{r}}_{Si} = \mathbf{Y}_i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}; \quad \dot{\overline{\omega}}_i = \mathbf{Z}_i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}; \quad i = 2, 3, \dots, I. \quad (2.157)$$

Dabei sind $\mathbf{Y}_i(\mathbf{q})$ und $\mathbf{Z}_i(\mathbf{q})$ die Jacobimatrizen für Translation und Rotation des i -ten starren Körpers (Getriebegliedes). Es sind Rechteckmatrizen mit drei Zeilen und n Spalten. Aus (2.154) und (2.156) folgt, welche Elemente in diesen Matrizen enthalten sind:

$$\mathbf{Y}_i(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} x_{Si,1} & x_{Si,2} & \dots & x_{Si,n} \\ y_{Si,1} & y_{Si,2} & \dots & y_{Si,n} \\ z_{Si,1} & z_{Si,2} & \dots & z_{Si,n} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Z}_i(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} u_{\xi i1} & u_{\xi i2} & \dots & u_{\xi in} \\ u_{\eta i1} & u_{\eta i2} & \dots & u_{\eta in} \\ u_{\zeta i1} & u_{\zeta i2} & \dots & u_{\zeta in} \end{pmatrix} \quad (2.158)$$

Durch Differenziation der Drehgeschwindigkeiten nach den Antriebsgeschwindigkeiten $\dot{q}_k$ bzw. einfach aus einem Koeffizientenvergleich findet man $\mathbf{Z}_i(\mathbf{q})$, vgl. z. B. (2.30) aus Abschnitt 2.2.3.

Lagefunktionen und Jacobimatrizen können bei offenen Gelenkketten, wie bei den Beispielen c, d und f in Bild 2.13, in analytischer Form explizit angegeben werden. Bei Mechanismen mit Maschenstruktur, wie bei den Fällen a, b und e in Bild 2.13, wo die Zwangsbedingungen nicht geschlossen auflösbar sind, kann man die Jacobimatrizen (unter Computernutzung mit vorhandener Software) stellungsabhängig numerisch berechnen. Die Elemente der Jacobimatrizen hängen i. Allg. von der Stellung der Antriebskoordinaten ab. Sie werden auch als *Lagefunktionen erster Ordnung* bezeichnet.

Ein Mechanismus besteht aus $I - 1$ beweglichen starren Körpern, deren dynamische Eigenschaften jeweils durch 10 Masseparameter erfasst werden, die im Parametervektor

$$\mathbf{p}_i = (m_i, \xi_{Si}, \eta_{Si}, \zeta_{Si}, J_{\xi\xi i}^S, J_{\eta\eta i}^S, J_{\zeta\zeta i}^S, J_{\xi\eta i}^S, J_{\eta\zeta i}^S, J_{\xi\zeta i}^S)^T; \quad i = 2, 3, \dots, I \quad (2.159)$$

enthalten sind. Es sind dies für den i -ten Körper die Masse m_i , drei statische Momente ($m_i\xi_{Si}$, $m_i\eta_{Si}$, $m_i\zeta_{Si}$) und sechs Elemente des Trägheitstensors ($J_{\xi\xi i}^S$, $J_{\eta\eta i}^S$, $J_{\zeta\zeta i}^S$, $J_{\xi\eta i}^S$, $J_{\eta\zeta i}^S$, $J_{\xi\zeta i}^S$), falls man sich auf die Schwerpunktsachsen bezieht. Falls man die Lage der zentralen Hauptachsen (durch den Schwerpunkt) kennt, dann gehören zum Trägheitstensor nur die drei Hauptträgheitsmomente J_{Ii}^S , J_{IIi}^S und J_{IIIi}^S .

Die kinetische Energie des Starrkörpersystems ist die Summe der kinetischen Energien aller seiner Einzelkörper, die sich aus der Translationsenergie und der Rotationsenergie addiert, vgl. (2.65). Mit den Jacobimatrizen gemäß (2.158) folgt die kinetische Energie mit den Trägheitstensen analog zu (2.65) zu

$$\begin{aligned} W_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[\sum_{i=2}^I (m_i \mathbf{Y}_i^T \mathbf{Y}_i + \mathbf{Z}_i^T \mathbf{J}_i^S \mathbf{Z}_i) \right] \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_{kl}(\mathbf{q}) \dot{q}_k \dot{q}_l \end{aligned} \quad (2.160)$$

Die symmetrische Massenmatrix $\mathbf{M}$ ist nur dann von $\mathbf{q}$ abhängig, wenn die Jacobimatrizen Terme enthalten, welche von $\mathbf{q}$ abhängen. Die Matrix $\mathbf{M}$ hat n^2 Elemente

m_{kl} , die **verallgemeinerte Massen** genannt werden:

$$m_{kl}(\mathbf{q}) = m_{lk}(\mathbf{q}) = \sum_{i=2}^I \left\{ m_i (x_{Si,k} x_{Si,l} + y_{Si,k} y_{Si,l} + z_{Si,k} z_{Si,l}) \right. \\ \left. + J_{\xi\xi}^S u_{\xi ik} u_{\xi il} + J_{\eta\eta}^S u_{\eta ik} u_{\eta il} + J_{\zeta\zeta}^S u_{\zeta ik} u_{\zeta il} \right. \\ \left. + 2(J_{\xi\eta}^S u_{\xi ik} u_{\eta ik} + J_{\eta\zeta}^S u_{\zeta ik} u_{\eta ik} + J_{\xi\zeta}^S u_{\xi ik} u_{\zeta ik}) \right\} \quad (2.161)$$

Für ebene Mechanismen, bei denen sich alle Getriebeglieder parallel zur x - y -Ebene bewegen, gilt wegen $z_{Si} = \text{konst.}$ und $\omega_{\xi i} = \omega_{\eta i} = 0$ immer $u_{\xi ik} = u_{\eta ik} = 0$. Die Winkel φ_i sind in Bild 2.16 definiert. Wegen $\omega_{\zeta i} = \dot{\varphi}_i$ gilt $u_{\zeta ik} = \varphi_{i,k}$ und deshalb mit $J_{\zeta\zeta}^S = J_{Si}$:

$$m_{kl}(\mathbf{q}) = m_{lk}(\mathbf{q}) = \sum_{i=2}^I [m_i (x_{Si,k} x_{Si,l} + y_{Si,k} y_{Si,l}) + J_{Si} \varphi_{i,k} \varphi_{i,l}] \quad (2.162)$$

Die verallgemeinerten (oder generalisierten) Massen sind unabhängig vom Bewegungszustand, aber bei ungleichmäßig übersetzenden Mechanismen abhängig von der Stellung der Antriebskoordinaten.

Mit der bereits in (2.154) benutzten Kurzschreibweise (Komma und Index der Koordinate) werden die partiellen Ableitungen bezeichnet:

$$\frac{\partial(m_{kl})}{\partial q_p} = m_{kl,p} \quad (2.163)$$

Die so genannten **Christoffel-Symbole 1. Art**, die bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen mithilfe der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art auftreten, ergeben sich aus den partiellen Ableitungen der verallgemeinerten Massen in folgender Weise:

$$\Gamma_{klp} = \Gamma_{lkp} = \frac{1}{2} (m_{lp,k} + m_{pk,l} - m_{kl,p}) \quad (2.164)$$

Mehrere eingeprägte Kräfte und Momente, die an beliebigen Stellen am i -ten Körper angreifen, werden durch die Resultierenden zusammengefasst, die auf den i -ten Schwerpunkt wirken. Diese auf alle Getriebeglieder wirkenden Resultierenden der eingepägten Kräfte $\mathbf{F}_i^{(e)}$ und Momente $\bar{\mathbf{M}}_i^{S(e)}$ werden dann über die virtuelle Arbeit auf die Antriebskoordinaten $\mathbf{q}$ bezogen:

$$\delta W^{(e)} = \delta \mathbf{q}^T \sum_i (\mathbf{Y}_i^T \mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{Z}_i^T \bar{\mathbf{M}}_i^{S(e)}) = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{Q} \quad (2.165)$$

Damit ergeben sich die **verallgemeinerten Kraftgrößen** aus:

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)^T = \sum_i (\mathbf{Y}_i^T \mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{Z}_i^T \bar{\mathbf{M}}_i^{S(e)}) \quad (2.166)$$

Jede Komponente Q_p der verallgemeinerten Kräfte folgt somit aus den eingepägten Kraftgrößen und den für einen Mechanismus charakteristischen Jacobimatrizen. Es wird bei den verallgemeinerten Kraftgrößen hier nicht unterschieden, ob sie aus der

Ableitung eines Potentials (z. B. potenzielle Energie, Formänderungsenergie, magnetische Energie) folgen (also z. B. Eigengewicht, Federkräfte, elektromagnetische Kräfte) oder nicht (z. B. Antriebskräfte, Antriebsmomente, Bremsmomente, Reibungs- und Dämpfungskräfte), was aber gelegentlich in der Fachliteratur geschieht.

Aus der kinetischen Energie (2.160) und den aus (2.166) gewonnenen generalisierten Kräften ergeben sich mithilfe der Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art die *Bewegungsgleichungen für Starrkörper-Mechanismen* mit n Antrieben:

$$Q_{p \text{ kin}} \equiv \sum_{l=1}^n m_{pl}(\mathbf{q})\ddot{q}_l + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Gamma_{klp}(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_l = Q_p; \quad p = 1, 2, \dots, n \quad (2.167)$$

Bezüglich der betreffenden Koordinaten q_p drücken sie jeweils das Gleichgewicht zwischen den *eingepprägten Kraftgrößen* und den kinetischen (durch die Massenträgheit bedingten) Kraftgrößen aus. Man bezeichnet die sich aus der *Massenträgheit der starren Körper des zwangläufigen Systems* ergebenden Kraftgrößen als *kinetische* (oder traditionell als „*kinetostatische*“) *Kraftgrößen*, im Unterschied zu den allgemeinen „Vibrationskräften“, die infolge der Schwingungen elastischer Körper entstehen, vgl. die anderen Kapitel dieses Buchs. Die kinetostatischen Kraftgrößen können für gegebene Antriebsbewegungen $\mathbf{q}(t)$ berechnet werden – aus der linken Seite von (2.167). Sie hängen von den Masseparametern, den geometrischen Verhältnissen und dem Bewegungszustand ab, vgl. z. B. auch (2.98), (2.100), (2.107) und (2.109) bis (2.111).

Man kann (2.167) von mehreren Standpunkten aus betrachten:

- Wenn die Bewegungsgrößen gegeben sind, müssen die verallgemeinerten Kraftgrößen $\mathbf{Q}$ „in Richtung der Antriebskoordinaten“ so wirken, dass der durch die Bewegungsgrößen $\dot{\mathbf{q}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ beschriebene Bewegungszustand zustande kommt. Oder:
- Wenn man die verallgemeinerten Kraftgrößen $\mathbf{Q}$ kennt, z. B. ihre jeweiligen Funktionen von den Koordinaten und Geschwindigkeiten, so stellt (2.167) ein System von gewöhnlichen nichtlinearen Differenzialgl. dar, die integriert werden müssen, wenn man $\mathbf{q}(t)$ und seine Zeitableitungen berechnen will.
- Wenn ein Teil der verallgemeinerten Kraftgrößen gegebene Antriebskraftgrößen sind, können die anderen als Reaktionen aufgefasst und nach der Ermittlung von $\mathbf{q}(t)$ und seinen Zeitableitungen berechnet werden, vgl. z. B. (2.171) und (2.172).

Aus (2.167) ist ersichtlich, dass die kinetostatischen Kraftgrößen nicht nur von den Beschleunigungen der Antriebsbewegungen abhängen. Das heißt, dass auch dann Massenkkräfte wirken, wenn die Antriebe konstante Geschwindigkeiten haben. Das ist nicht verwunderlich, denn die Massen im Starrkörpersystem werden ja beschleunigt und/oder verzögert. Dieser Zusammenhang ist aus einfachen Fällen bekannt: die Fliehkraft steigt mit dem Quadrat der Drehzahl und die Corioliskraft ist dem Produkt von Geschwindigkeit und Drehgeschwindigkeit proportional. Gleichung (2.167) zeigt, dass im allgemeinen Fall die Produkte von allen Antriebsgeschwindigkeiten kombiniert auftreten können.

Für den Sonderfall des Mechanismus mit zwei Antrieben ($n = 2$) folgt aus (2.167):

$$m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + \Gamma_{111}\dot{q}_1^2 + 2\Gamma_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \Gamma_{221}\dot{q}_2^2 = Q_1 \quad (2.168)$$

$$m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + \Gamma_{112}\dot{q}_1^2 + 2\Gamma_{122}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \Gamma_{222}\dot{q}_2^2 = Q_2 \quad (2.169)$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} \Gamma_{111} &= \frac{1}{2}m_{11,1}; & \Gamma_{121} &= \frac{1}{2}m_{11,2}; & \Gamma_{221} &= m_{12,2} - \frac{1}{2}m_{22,1} \\ \Gamma_{112} &= m_{12,1} - \frac{1}{2}m_{11,2}; & \Gamma_{122} &= \frac{1}{2}m_{22,1}; & \Gamma_{222} &= \frac{1}{2}m_{22,2} \end{aligned} \quad (2.170)$$

Falls z. B. die Antriebskoordinate $q_2 = \text{konst.}$ ist, so folgt aus (2.168) die Beziehung zwischen der auf den Antrieb reduzierten Kraftgröße Q_1 und den kinetostatischen Kräften zu

$$m_{11}\ddot{q}_1 + \Gamma_{111}\dot{q}_1^2 = Q_1 \quad (2.171)$$

Die kinetostatischen Kräfte wirken auch in Richtung der Koordinate q_2 :

$$m_{21}\ddot{q}_1 + \Gamma_{112}\dot{q}_1^2 = m_{21}\ddot{q}_1 + \left(m_{12,1} - \frac{1}{2}m_{11,2}\right)\dot{q}_1^2 = Q_2 \quad (2.172)$$

Somit lassen sich wesentliche Folgerungen hinsichtlich der Parameterabhängigkeit der Massenkräfte ziehen. Da q_2 eine beliebige Koordinate sein kann, in deren Richtung die Geschwindigkeit und die Beschleunigung null sind, ist Q_2 dann dementsprechend eine Kraft oder ein Moment an dieser „unbeweglichen Stelle“ des Mechanismus. Eine derartige Kraftgröße in Richtung einer beliebigen Koordinate kann als eine generalisierte **Reaktionskraft im Innern des Mechanismus** gedeutet werden. Sie kann also z. B. eine Gelenkkraft oder eine Längskraft sein, wenn eine Koordinate q_2 deren Richtung entspricht. Gleichungen vom Typ (2.172) werden selten zur Berechnung solcher inneren Kraftgrößen benutzt, aber sie kann zur Begründung folgender wichtiger allgemeiner Schlussfolgerungen dienen:

Alle Reaktionskräfte und -momente an allen Stellen in beliebigen Gliedern von Mechanismen mit einem einzigen Antrieb ($n = 1$) **ergeben sich aus zwei Termen**, von denen einer der **Beschleunigung** und der andere dem **Quadrat der Geschwindigkeit** des Antriebs proportional ist. Sie hängen alle **linear von den Masseparametern** der einzelnen starren Körper ab, vgl. (2.159) und (2.161).

2.4.1.2

Bewegungsgleichungen eines Planetengetriebes

Planeten- oder Umlaufrädergetriebe werden wegen ihrer Einsatzmöglichkeit als Übersetzungs-, Überlagerungs- und Schaltgetriebe in vielen Bereichen der Antriebstechnik angewendet. Dieser Getriebetyp hat sich besonders im Fahrzeugbau und Schiffbau bewährt, wo große Leistungen und Drehmomente bei hohen Drehzahlen zu übertragen sind. Mit ihnen können extrem hohe und niedrige Übersetzungen bei kleinem Bauraum erreicht werden. Vorteilhaft ist die Verteilung der statischen und dynamischen Kräfte auf mehrere Räder und die geringe Lagerbelastung bei coaxialer Lage der An- und Abtriebswellen. Es können damit Drehzahlen und Drehmomente mehrerer Antriebe überlagert werden, und sie werden auch als Differenzialgetriebe eingesetzt, vgl. VDI-Richtlinie 2157.

Für ein einfaches Planetengetriebe, das in Bild 2.14 skizziert ist, sollen die Bewegungsgleichungen aufgestellt werden, welche die Beziehungen zwischen seinen Antriebsmomenten und den Winkelbeschleunigungen beschreiben. Dieses Überlagerungsgetriebe (auch Sammel-, Verteil-, Differenzial- oder Ausgleichsgetriebe

genannt) hat zwei Freiheitsgrade (Laufgrad $n = 2$). Es besteht aus dem Sonnenrad 2, dem Hohlrad 3, drei Planetenrädern und dem die Planetenräder tragenden Steg 5, die alle drehbar um die z -Achse gelagert sind. Gegeben seien die Radien r_2 und r_4 , die Trägheitsmomente J_2, J_3 und J_5 bezüglich der raumfesten Drehachse, die Masse m_4 jedes Zahnrades 4 und das Trägheitsmoment J_4 eines der Zahnräder 4 um seine Lagerachse. Der Schwerpunkt S der Planetenräder liegt jeweils in deren Lagerachse. Es sollen Drehmomente berücksichtigt werden, die an den Wellen der Glieder 2, 3 und 5 angreifen.

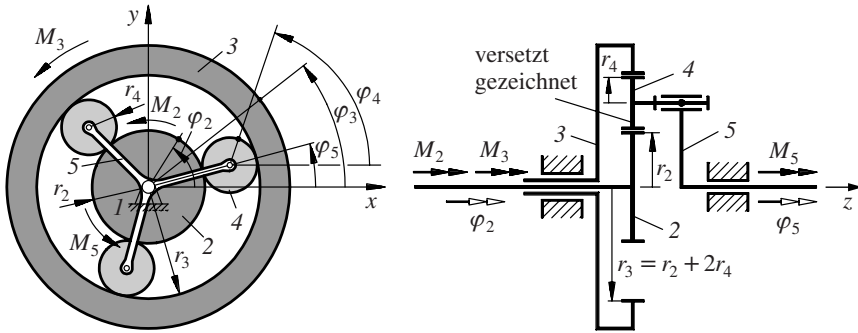


Bild 2.14 Bezeichnungen am Stirnrad-Planetengetriebe

Ausgangspunkt für die kinematische und dynamische Analyse sind die Zwangsbedingungen. Sie werden anhand von Bild 2.14 hier in allgemeiner Form aufgestellt, sodass sie auch für Spezialfälle von Planetengetrieben mit einem Freiheitsgrad gelten (z. B. $\dot{\varphi}_3 = 0$ oder $\dot{\varphi}_5 = 0$).

Die Zwangsbedingungen folgen aus der Tatsache, dass die Relativgeschwindigkeit der sich berührenden Räder an ihren Kontaktpunkten (den Wälzpunkten) null ist. Es gilt also

$$r_2 \dot{\varphi}_2 - [r_2 \dot{\varphi}_5 - r_4 (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_5)] = 0 \quad (2.173)$$

$$(r_2 + 2r_4) \dot{\varphi}_3 - [(r_2 + 2r_4) \dot{\varphi}_5 + r_4 (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_5)] = 0 \quad (2.174)$$

Es wurden hier zwar vier Lagekoordinaten eingeführt, aber wegen der zwei Zwangsbedingungen existieren nur zwei voneinander unabhängige Koordinaten. Als die beiden unabhängigen Antriebskoordinaten werden die Drehwinkel von Sonnenrad ($q_1 = \varphi_2$) und Hohlrad ($q_2 = \varphi_3$) benutzt. Aus (2.173) und (2.174) findet man die abhängigen Winkelgeschwindigkeiten:

$$\dot{\varphi}_4 = \frac{-r_2}{2r_4} \dot{q}_1 + \frac{r_2 + 2r_4}{2r_4} \dot{q}_2 = u_{41} \dot{q}_1 + u_{42} \dot{q}_2 \quad (2.175)$$

$$\dot{\varphi}_5 = \frac{r_2}{2(r_2 + r_4)} \dot{q}_1 + \frac{r_2 + 2r_4}{2(r_2 + r_4)} \dot{q}_2 = u_{51} \dot{q}_1 + u_{52} \dot{q}_2 \quad (2.176)$$

Diese Gleichungen haben die Form von (2.156) mit $\omega_{\xi i} \equiv 0$, $\omega_{\eta i} \equiv 0$ und $\omega_{\xi i} = \dot{\varphi}_i = \sum u_{ik} \dot{q}_k$. Die **Übersetzungsverhältnisse** u_{ik} drücken das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_i$ zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{q}_k$ aus. Die kinetische Energie ist die

Summe der Rotationsenergien von Sonnenrad (2), Steg (5), Planetenrädern (4) und Hohlrad (3) sowie der Translationsenergie der drei Planetenräder (4):

$$2W_{\text{kin}} = J_2 \dot{\phi}_2^2 + J_3 \dot{\phi}_3^2 + 3J_4 \dot{\phi}_4^2 + J_5 \dot{\phi}_5^2 + 3m_4(r_2 + r_4)^2 \dot{\phi}_5^2 \quad (2.177)$$

Um die kinetische Energie als Funktion der Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2)^T$ angeben zu können, werden (2.175) und (2.176) benutzt, damit die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\phi}_4$ und $\dot{\phi}_5$ eliminiert werden können. Formal könnte man auch entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 2.4.1.1 mit der beim gleichmäßig übersetzenden Getriebe von der Getriebestellung unabhängigen Jacobimatrizen gemäß (2.158) operieren, die hier bei Beschränkung auf $\omega_{\zeta i}$ „zusammenschrumpfen“ auf:

$$\mathbf{Z}_2 = (1 \quad 0); \quad \mathbf{Z}_3 = (0 \quad 1); \quad \mathbf{Z}_4 = (u_{41} \quad u_{42}); \quad \mathbf{Z}_5 = (u_{51} \quad u_{52}) \quad (2.178)$$

Die kinetische Energie ist damit entsprechend (2.160)

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.179)$$

mit der Massenmatrix $\mathbf{M}$ entsprechend (2.160), die folgende verallgemeinerte Massen als Elemente hat:

$$\begin{aligned} m_{11} &= J_2 + 3J_4 u_{41}^2 + [J_5 + 3m_4(r_2 + r_4)^2] u_{51}^2 \\ m_{12} = m_{21} &= 3J_4 u_{41} u_{42} + [J_5 + 3m_4(r_2 + r_4)^2] u_{51} u_{52} \\ m_{22} &= J_3 + 3J_4 u_{42}^2 + [J_5 + 3m_4(r_2 + r_4)^2] u_{52}^2 \end{aligned} \quad (2.180)$$

Die verallgemeinerten Massen sind hier konstant, also sind ihre partiellen Ableitungen und damit alle Christoffel-Symbole gleich null. Die verallgemeinerten Kräfte Q_1 und Q_2 sind von den Momenten M_2 , M_3 und M_5 abhängig. Die virtuelle Arbeit der Antriebsmomente muss ebenso groß sein wie die der verallgemeinerten Kräfte. Es gilt deshalb

$$\begin{aligned} \delta W^{(e)} &= M_2 \delta \varphi_2 + M_3 \delta \varphi_3 + M_5 \delta \varphi_5 \\ &= M_2 \delta q_1 + M_3 \delta q_2 + M_5 (u_{51} \delta q_1 + u_{52} \delta q_2) \\ &= (M_2 + M_5 u_{51}) \delta q_1 + (M_3 + M_5 u_{52}) \delta q_2 = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 \end{aligned} \quad (2.181)$$

Aus einem Koeffizientenvergleich bei δq_1 und δq_2 findet man

$$Q_1 = M_2 + M_5 u_{51}; \quad Q_2 = M_3 + M_5 u_{52} \quad (2.182)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten also entsprechend (2.168) und (2.169) unter Beachtung von (2.180) und (2.182):

$$m_{11} \ddot{q}_1 + m_{12} \ddot{q}_2 = M_2 + M_5 u_{51} \quad (2.183)$$

$$m_{21} \ddot{q}_1 + m_{22} \ddot{q}_2 = M_3 + M_5 u_{52} \quad (2.184)$$

Dieser allgemeine Zusammenhang lässt noch offen, welches der drei Momente oder welche zwei Winkelbeschleunigungen gegeben oder gesucht sind. Entsprechend (2.175) und (2.176) könnten auch Bedingungen für die anderen Winkel berücksichtigt werden. Da dieses Getriebe den Laufgrad $n = 2$ hat, können jeweils drei der fünf Größen (q_1 , q_2 , M_2 , M_3 , M_5) vorgegeben werden, um die verbleibenden

zwei Unbekannten zu berechnen. Man kann durch Integration der Differenzialgleichungen (2.183) und (2.184) verschiedene Betriebszustände dynamisch analysieren, z. B. Zeitverläufe und dynamische Belastungen bei Anlauf-, Umschalt- und Bremsvorgängen, wenn die Kennlinien von Motoren oder Kupplungen für die Momente gegeben sind. Die Antriebsleistungen, die sich aus dem Produkt der Momente mit den Winkelgeschwindigkeiten ergeben, sind ebenfalls berechenbar.

Es sind z. B. folgende Betriebszustände möglich:

Betriebszustand a): Antrieb am Sonnenrad 2, Hohlrad 3 steht still, Abtrieb am Steg 5

Gegeben sind dann M_2 und M_5 sowie $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}_3 = 0$. Aus (2.183) folgt die Winkelbeschleunigung am Antriebsglied 2 zu

$$\ddot{q}_1 = \frac{M_2 + M_5 u_{51}}{m_{11}} \quad (2.185)$$

Der Zeitverlauf ergibt sich unter Beachtung der Anfangsbedingungen aus der Integration dieser Differenzialgleichung und das Moment am Hohlrad folgt nach dem Einsetzen in (2.184):

$$M_3 = -M_5 u_{52} + m_{21} \ddot{q}_1 = -M_5 u_{52} + m_{21} \frac{M_2 + M_5 u_{51}}{m_{11}} \quad (2.186)$$

Betriebszustand b): Antrieb am Hohlrad 3 und am Sonnenrad 2, Abtrieb am Steg 5

Gegeben sind dann M_2 , M_3 und M_5 . Aus (2.183) und (2.184) folgen die Winkelbeschleunigungen $\ddot{q}_1$ und $\ddot{q}_2$ aus der Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Für gegebene Momentenverläufe lassen sich dann die Zeitverläufe aller Winkel von q_1 und q_2 und auch aller anderen Winkel aus (2.175) und (2.176) berechnen.

Für den Betriebszustand „Antrieb am Sonnenrad 2 und am Steg 5, Abtrieb am Hohlrad 3“ können dieselben Gleichungen benutzt werden.

2.4.1.3

Kardanisch gelagerter Rotor

Für den Kreisel, der gemäß Bild 2.15 gelagert ist, sollen die Ausdrücke für die kinetische Energie und die Beziehungen zwischen den Momenten ($Q_1 = M_x$, $Q_2 = M_y$, $Q_3 = M_z$) und den drei Kardanwinkeln q_1 , q_2 und q_3 aufgestellt werden. Der Schwerpunkt liege im Ursprung des körperfesten Koordinatensystems ($S = \bar{O}$). Gegeben sind alle Elemente des Trägheitstensors $\bar{J}^S$ bezüglich des Schwerpunktes S , sowie die Trägheitsmomente J_A und J_B der beiden Rahmen um ihre Lagerachsen.

Als Ausgangspunkt dient die kinetische Energie der Rotation in (2.65), die noch um die kinetische Energie der beiden Rahmen

$$W_{\text{kin Rahmen}} = \frac{1}{2} (J_A \dot{q}_1^2 + J_B \dot{q}_2^2) \quad (2.187)$$

werden, wenn sich der Kreisel mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_\zeta = \dot{q}_3$ um seine ζ -Achse [Hauptträgheitsachse III ($J_{\zeta\zeta}^S = J_{III}^S$)] dreht und die Winkel des Rahmens gemäß $q_1(t)$ und $q_2(t)$ verändert werden. $J_{\xi\xi}^S = J_I^S$ und $J_{\eta\eta}^S = J_{II}^S$ sind ebenfalls Hauptträgheitsmomente.

Aus (2.164) folgt unter Beachtung der Besonderheit, dass $m_{23} = m_{32} = 0$ und $m_{33} = J_{\zeta\zeta}^S = \text{konst.}$ ist, zunächst für die Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{111} = \Gamma_{331} = \Gamma_{122} = \Gamma_{222} = \Gamma_{332} = \Gamma_{133} = \Gamma_{233} = \Gamma_{333} = 0. \quad (2.190)$$

Damit folgt aus (2.167)

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + m_{13}\ddot{q}_3 + \Gamma_{221}\dot{q}_2^2 + 2\Gamma_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2\Gamma_{131}\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2\Gamma_{231}\dot{q}_2\dot{q}_3 &= Q_1 \\ m_{12}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + \Gamma_{112}\dot{q}_1^2 + 2\Gamma_{132}\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2\Gamma_{232}\dot{q}_2\dot{q}_3 &= Q_2 \quad (2.191) \\ m_{13}\ddot{q}_1 + m_{33}\ddot{q}_3 + \Gamma_{113}\dot{q}_1^2 + 2\Gamma_{123}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \Gamma_{223}\dot{q}_2^2 &= Q_3 \end{aligned}$$

Aus den verallgemeinerten Massen in (2.189) ergeben sich für diesen **Sonderfall** folgende Ausdrücke für die Christoffel-Symbole:

$$\begin{aligned} \Gamma_{121} &= -\Gamma_{112} = \frac{1}{2}m_{11,2} = -(J_{\xi\xi}^S \cos^2 q_3 + J_{\eta\eta}^S \sin^2 q_3 - J_{\zeta\zeta}^S) \sin q_2 \cos q_2 \\ \Gamma_{221} &= m_{12,2} = -(J_{\xi\xi}^S - J_{\eta\eta}^S) \sin q_2 \sin q_3 \cos q_3 \\ \Gamma_{131} &= -\Gamma_{113} = \frac{1}{2}m_{11,3} = -(J_{\xi\xi}^S - J_{\eta\eta}^S) \sin q_3 \cos q_3 \cos^2 q_2 \\ \Gamma_{231} &= \frac{1}{2}m_{13,2} + \frac{1}{2}m_{12,3} = \frac{1}{2}[(J_{\xi\xi}^S - J_{\eta\eta}^S)(\cos^2 q_3 - \sin^2 q_3) + J_{\zeta\zeta}^S] \cos q_2 \quad (2.192) \\ \Gamma_{132} &= -\Gamma_{123} = \frac{1}{2}m_{12,3} - \frac{1}{2}m_{13,2} \\ &= \frac{1}{2}[(J_{\xi\xi}^S - J_{\eta\eta}^S)(\cos^2 q_3 - \sin^2 q_3) - J_{\zeta\zeta}^S] \cos q_2 \\ \Gamma_{232} &= -\Gamma_{223} = \frac{1}{2}m_{22,3} = (J_{\xi\xi}^S - J_{\eta\eta}^S) \sin q_3 \cos q_3 \end{aligned}$$

Die Ausdrücke vereinfachen sich weiter, wenn noch spezieller

$$J_{\xi\xi}^S = J_{\eta\eta}^S = J_a^S, \quad \text{also} \quad m_{12} = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma_{221} = \Gamma_{131} = \Gamma_{113} = \Gamma_{232} = 0 \quad (2.193)$$

betrachtet wird, z. B. ein rotationssymmetrischer Rotor. Dann lauten die Bewegungsgleichungen (2.191):

$$\begin{aligned} (J_a + J_a^S \cos^2 q_2 + J_{\zeta\zeta}^S \sin^2 q_2)\ddot{q}_1 + J_{\zeta\zeta}^S \sin q_2 \dot{q}_3 \\ - 2(J_a^S - J_{\zeta\zeta}^S) \sin q_2 \cos q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + J_{\zeta\zeta}^S \cos q_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 &= Q_1 \end{aligned} \quad (2.194)$$

$$(J_b + J_a^S)\ddot{q}_2 + (J_a^S - J_{\zeta\zeta}^S) \sin q_2 \cos q_2 \dot{q}_1^2 - J_{\zeta\zeta}^S \cos q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 = Q_2 \quad (2.195)$$

$$J_{\zeta\zeta}^S \sin q_2 \dot{q}_1 + J_{\zeta\zeta}^S \ddot{q}_3 + J_{\zeta\zeta}^S \cos q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 = Q_3 \quad (2.196)$$

Beachtlich ist die Tatsache, dass auch im Falle konstanter Winkelgeschwindigkeiten, also bei $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = \ddot{q}_3 \equiv 0$, wechselnde Momente um die drei Achsen wirken müssen, um diesen Bewegungszustand zu erhalten.

Häufig kommt der Fall vor, dass sich ein rotationssymmetrischer Körper nur um zwei Achsen dreht. Aus (2.194) bis (2.196) folgen diese Sonderfälle:

Fall 1: $q_1 = \text{konst.}$; $q_2(t)$ und $q_3(t)$ veränderlich.

$$J_{\zeta\zeta}^S \sin q_2 \ddot{q}_3 + J_{\zeta\zeta}^S \cos q_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 = Q_1 \quad (2.197)$$

$$(J_A + J_a^S) \ddot{q}_2 = Q_2 \quad (2.198)$$

$$J_{\zeta\zeta}^S \ddot{q}_3 = Q_3 \quad (2.199)$$

Fall 2: $q_1(t)$ veränderlich; $q_2 = \beta = \text{konst.}$; $q_3(t)$ veränderlich

$$(J_A + J_a^S \cos^2 \beta + J_{\zeta\zeta}^S \sin^2 \beta) \ddot{q}_1 + J_{\zeta\zeta}^S \sin \beta \ddot{q}_3 = Q_1 \quad (2.200)$$

$$(J_a^S - J_{\zeta\zeta}^S) \sin \beta \cos \beta \dot{q}_1^2 - J_{\zeta\zeta}^S \cos \beta \dot{q}_1 \dot{q}_3 = Q_2 \quad (2.201)$$

$$J_{\zeta\zeta}^S \sin \beta \ddot{q}_1 + J_{\zeta\zeta}^S \ddot{q}_3 = Q_3 \quad (2.202)$$

Für den Sonderfall, der durch (2.193) definiert ist, vereinfachen sich alle Terme der kinetischen Energie, und es gilt:

$$\begin{aligned} W_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} (J_A + J_a^S \cos^2 q_2 + J_{\zeta\zeta}^S \sin^2 q_2) \dot{q}_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (J_B + J_a^S) \dot{q}_2^2 + J_{\zeta\zeta}^S \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \frac{1}{2} J_{\zeta\zeta}^S \dot{q}_3^2 \end{aligned} \quad (2.203)$$

Auch im Falle $J_{\xi\xi}^S = J_{\eta\eta}^S = J_{\zeta\zeta}^S = J$ (z. B. starrer Körper als eine homogene Kugel) ist die kinetische Energie bei konstanten Antriebsgeschwindigkeiten $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = \Omega$ nicht konstant, sondern noch vom Winkel q_2 abhängig: $W_{\text{kin}} = 1/2 [J_A + J_B + J(3 + 2 \sin q_2)] \Omega^2$. Dies ist dadurch bedingt, dass infolge der Kreiselwirkung noch ein Moment Q_2 gemäß (2.201) wirkt, um diesen Bewegungszustand zu erzwingen, vgl. auch (2.31).

2.4.2

Ebene Mechanismen

2.4.2.1

Allgemeine Zusammenhänge

Ebene Mechanismen, deren Glieder sich in parallelen Ebenen bewegen, werden im Maschinenbau häufiger eingesetzt als räumliche Mechanismen, da sie unkompliziert zu bauen und bequemer zu berechnen sind, insbesondere die mit nur einem einzigen Antrieb. Aus der Sicht der Mechanik sind es Sonderfälle der in Abschnitt 2.4.1 behandelten Mechanismen, für die $n = 1$, $q_1 = q$, $\dot{z}_{Si} \equiv 0$, $\omega_{\xi i} = \omega_{\eta i} \equiv 0$ und $\omega_{\zeta i} = \dot{\phi}_i$ gilt. Diese ebenen Mechanismen werden nicht als Sonderfall abgetan, sondern im Folgenden etwas ausführlicher behandelt, auch um dem Leser, der nur an diesen Objekten interessiert ist, die Lektüre von Abschnitt 2.4.1 zu ersparen.

Der (kinematisch) ebene Mechanismus bestehe aus insgesamt I starren Körpern, die so nummeriert werden, dass das Gestell die Nummer 1 hat. Meist erhält das Antriebsglied die Nummer $i = 2$ und das Abtriebsglied die Nummer I . Die geometrischen Verhältnisse sind durch die Struktur des Mechanismus und die Abmessungen seiner Getriebeglieder bestimmt.

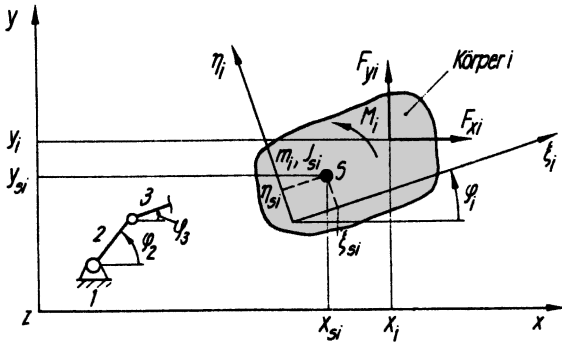


Bild 2.16 Bezeichnungen am eben bewegten starren Körper (Getriebeglied i)

Von allen starren Körpern seien die für die ebene Bewegung charakteristischen Masseparameter gegeben: die Schwerpunktlagen im körperfesten (ξ_{Si} ; η_{Si}) bzw. im raumfesten Bezugssystem (x_{Si} ; y_{Si}), die Massen m_i und die auf die körperfesten Schwerpunktsachsen bezogenen Trägheitsmomente J_{Si} , die in Abschnitt 2.3.1 mit $J_{\xi\zeta i}^S$ bezeichnet wurden. Auf jeden Körper (Getriebeglied) können äußere Kräfte und Momente wirken, wie z. B. Antriebs- und Bremsmomente, Reibkräfte und -momente, Schneid- oder Presskräfte u. a. Die eingprägten Kräfte am i -ten Körper werden mit ihren Komponenten in den raumfesten Koordinatenrichtungen erfasst und mit F_{xi} und F_{yi} bezeichnet. Das eingprägte Moment am i -ten Körper ist M_i .

Bild 2.16 definiert die Bezeichnungen der eingprägten Kraftgrößen und geometrischen Abmessungen an einem beliebigen Körper. Aufgrund der Struktur und der Abmessungen einer Maschine lassen sich die geometrischen Beziehungen zwischen der Stellung des Antriebsgliedes, die durch die verallgemeinerte Koordinate q bezeichnet wird, und denjenigen Koordinaten formulieren, die die Lage jedes starren Körpers angeben. Bei Mechanismen mit rotierendem Antriebsglied, wie in den Bildern 2.16, 2.19, 2.27, 2.30 und 2.21, wird oft $q = \varphi_2$ gesetzt, jedoch kann prinzipiell ebenso eine Wegkoordinate benutzt werden.

Bekannt sei die Abhängigkeit der Schwerpunktkoordinaten und der Drehwinkel φ_i von der Antriebskoordinate in Form der Lagefunktionen nullter Ordnung:

$$x_{Si} = x_{Si}(q); \quad y_{Si} = y_{Si}(q); \quad \varphi_i = \varphi_i(q); \quad i = 2, 3, \dots, I. \quad (2.204)$$

Ihre Berechnung wird in den folgenden Abschnitten an mehreren Beispielen erläutert.

Wird von der Zeitabhängigkeit der Antriebskoordinate $q = q(t)$ ausgegangen, so können die Lagen der Mechanismenglieder als Zeitfunktionen bestimmt werden, vgl. auch (2.154), (2.155) und (2.156):

$$x_{Si}(t) = x_{Si}[q(t)]; \quad y_{Si}(t) = y_{Si}[q(t)]; \quad \varphi_i(t) = \varphi_i[q(t)]. \quad (2.205)$$

Die Geschwindigkeiten ergeben sich durch eine Differenziation nach der Zeit gemäß der Kettenregel

$$\dot{x}_{Si} = \frac{dx_{Si}}{dt} = \frac{dx_{Si}}{dq} \frac{dq}{dt} = x'_{Si} \dot{q}, \quad \dot{y}_{Si} = y'_{Si} \dot{q}, \quad \dot{\varphi}_i = \varphi'_i \dot{q} \quad (2.206)$$

Ableitungen nach der Antriebskoordinate q werden durch einen Strich, totale Ableitungen nach der Zeit durch einen Punkt abgekürzt. Die Beschleunigungen berechnen sich zu

$$\ddot{x}_{Si} = \frac{d^2 x_{Si}}{dt^2} = \frac{d \dot{x}_{Si}}{dt} = \frac{d(x'_{Si} \dot{q})}{dt} = \frac{dx'_{Si}}{dt} \dot{q} + x'_{Si} \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{dx'_{Si}}{dq} \frac{dq}{dt} \dot{q} + x'_{Si} \ddot{q} \quad (2.207)$$

Zusammengefasst gilt also:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{Si}(q, t) &= x''_{Si}(q) \dot{q}^2(t) + x'_{Si}(q) \ddot{q}(t) \\ \ddot{y}_{Si}(q, t) &= y''_{Si}(q) \dot{q}^2(t) + y'_{Si}(q) \ddot{q}(t) \\ \ddot{\phi}_i(q, t) &= \phi''_i(q) \dot{q}^2(t) + \phi'_i(q) \ddot{q}(t) \end{aligned} \quad (2.208)$$

Diese Darstellung beinhaltet eine Trennung zwischen den Lagefunktionen nullter Ordnung $x_{Si}(q)$, $y_{Si}(q)$, $\phi_i(q)$ bis zweiter Ordnung (x''_{Si} , y''_{Si} , ϕ''_i), die unabhängig vom Bewegungszustand sind, und den Zeitfunktionen $q(t)$, $\dot{q}(t)$ und $\ddot{q}(t)$ des Antriebsgliedes, die den Bewegungszustand charakterisieren.

Die Lagefunktionen lassen sich für einfache Systeme, wie Zahnradgetriebe, Schubkurbelgetriebe u. a. in geschlossener Form analytisch angeben; für kompliziertere Systeme, wie mehrgliedrige Gelenkgetriebe, lassen sie sich numerisch berechnen (Software).

Die kinetische Energie ergibt sich unter Berücksichtigung der Translationsbewegungen aller Schwerpunkte und der Rotationen um die Schwerpunktachsen aller bewegten Getriebeglieder zu

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^I [m_i (\dot{x}_{Si}^2 + \dot{y}_{Si}^2) + J_{Si} \dot{\phi}_i^2] \quad (2.209)$$

Werden die Beziehungen (2.206) benutzt, so ergibt sich aus (2.209) als Sonderfall von (2.160)

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \dot{q}^2 \sum_{i=2}^I [m_i (x_{Si}'^2 + y_{Si}'^2) + J_{Si} \phi_i'^2] = \frac{1}{2} J(q) \dot{q}^2, \quad (2.210)$$

wenn die generalisierte Masse, die auch als reduziertes Trägheitsmoment bezeichnet wird, in der Form

$$J_{\text{red}} = J(q) = \sum_{i=2}^I [m_i (x_{Si}'^2 + y_{Si}'^2) + J_{Si} \phi_i'^2] \quad (2.211)$$

(Sonderfall von m_{11}) eingeführt wird. Vergleicht man (2.210) mit (2.209), so wird deutlich, dass die kinetische Energie der verallgemeinerten Masse gleich ist der kinetischen Energie aller bewegten Getriebeglieder. Die generalisierte Masse $J(q)$ hat die Dimension eines Trägheitsmomentes, wenn die verallgemeinerte Koordinate q ein Winkel ist, und sie hat die Dimension einer Masse, wenn q ein Weg ist. $J(q)$ ist stets positiv. Bemerkenswert ist, dass die Lagefunktionen erster Ordnung in (2.211) zum Quadrat auftreten und damit $J(q)$ unabhängig von der Bewegungsrichtung ist.

Potenzielle Energie wird in Mechanismen oft in Form von Hubarbeit und/oder Federarbeit (Federkonstante c , Federlänge l , ungespannte Federlänge l_0)

$$W_{\text{pot}} = \sum \left[m_i g y_{Si} + \frac{1}{2} c_i (l_i - l_{0i})^2 \right] \quad (2.212)$$

gespeichert (y -Achse sei vertikal nach oben gerichtet). Die Gesamtmasse der bewegten Getriebeglieder und die Gesamtschwerpunkthöhe y_s sind

$$m = \sum_{i=2}^I m_i \quad (2.213) \quad y_s = \frac{1}{m} \sum_{i=2}^I m_i y_{si} \quad (2.214)$$

Die auf die Glieder des Mechanismus wirkenden eingepprägten Nichtpotenzialkräfte F_{xi}, F_{yi} und -momente M_i werden auf die generalisierte Koordinate bezogen, vgl. (2.165). Ihre Arbeit muss gleich der Arbeit der generalisierten Kraft Q sein. Es gilt somit

$$dW = Qdq = \sum_{i=2}^I (F_{xi} dx_i + F_{yi} dy_i + M_i d\varphi_i) \quad (2.215)$$

Daraus ergibt sich für die Leistung der eingepprägten Kraftgrößen:

$$P = Q \frac{dq}{dt} = \sum_{i=2}^I \left(F_{xi} \frac{dx_i}{dt} + F_{yi} \frac{dy_i}{dt} + M_i \frac{d\varphi_i}{dt} \right) \quad (2.216)$$

Mit (2.206) findet man nach einer Division durch $\dot{q}$ die gesuchte Gleichung für die generalisierte Kraft

$$Q = \sum_{i=2}^I (F_{xi} x'_i + F_{yi} y'_i + M_i \varphi'_i) = Q_{an} + Q^* \quad (2.217)$$

Meist ist Q nicht konstant, sondern von der Stellung (q), der Geschwindigkeit ($\dot{q}$) und/oder von der Zeit (t) abhängig. Die generalisierte Antriebskraft Q_{an} (bei Drehantrieb Antriebsmoment M_{an} und bei Schubantrieb Antriebskraft F_{an}) ist keine Potenzialkraft und in Q enthalten. Es ist zweckmäßig, sie gesondert zu bezeichnen und hervorzuheben. Die anderen Nichtpotenzialkräfte sind in der Größe Q^* erfasst.

Die Lagrange'sche Gleichung zweiter Art lautet für dieses System mit einem Freiheitsgrad

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (2.218)$$

mit der Lagrange-Funktion:

$$L = W_{kin} - W_{pot}. \quad (2.219)$$

Die einzelnen Differenziationen liefern mit Gl. (2.210):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= J(q) \dot{q} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) &= \frac{dJ(q)}{dt} \dot{q} + J(q) \ddot{q} = J'(q) \dot{q}^2 + J(q) \ddot{q} \\ \frac{\partial L}{\partial q} &= \frac{1}{2} J'(q) \dot{q}^2 - W'_{pot} \end{aligned} \quad (2.220)$$

Aus den Gleichungen (2.219), (2.220) und (2.218) ergibt sich:

$$J(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} J'(q) \dot{q}^2 + W'_{pot} = Q_{an} + Q^* \quad (2.221)$$

Diese Bewegungsgleichung der starren Maschine mit einem Freiheitsgrad ist ein Sonderfall von (2.167).

2.4.2.2

Hubwerksgetriebe

Als Vertreter der gleichmäßig übersetzenden Getriebe wird das in Bild 2.17 dargestellte Hubwerksgetriebe eines Krans betrachtet, das aus zwei Zahnradstufen und der translatorisch bewegten Last besteht. Es wird vorausgesetzt, dass das Hubseil masselos, biegeweich und ebenso wie alle anderen Bauteile ideal starr ist.

Gegeben sind die geometrischen Größen des Systems, d. h. die Teilkreisradien der Zahnräder (r_2, r_{32}, r_{34}, r_4) und die Seillänge l (spielt im weiteren keine Rolle). Die Masseparameter des Systems sind die Massenträgheitsmomente der Zahnräder um ihre Schwerpunktsachsen, die mit den Drehachsen zusammenfallen ($J_2; J_3; J_4$) und die Masse der Hublast m_5 . In den Trägheitsmomenten J_2, J_3 und J_4 sind die des Motors, der Kupplung, der Seiltrommel und aller anderen rotierenden Teile einbezogen. Das äußere Kraftfeld besteht aus dem Eigengewicht der Last (der entgegen der Koordinatenrichtung y wirkenden Kraft $F_{y5} = -m_5g$) und aus dem Antriebsmoment M_{an} .

Gesucht sind bezüglich der Koordinate $q = \varphi_2$ das reduzierte Trägheitsmoment J_{red} und die Bewegungsgleichung.

Die Lösung beginnt mit der Aufstellung der Zwangsbedingungen. Aus Bild 2.17 können folgende geometrische Beziehungen entnommen werden:

$$r_2 \varphi_2 = -r_{32} \varphi_3, \quad r_{34} \varphi_3 = -r_4 \varphi_4, \quad y_{S5} = r_4 \varphi_4 - l \quad (2.222)$$

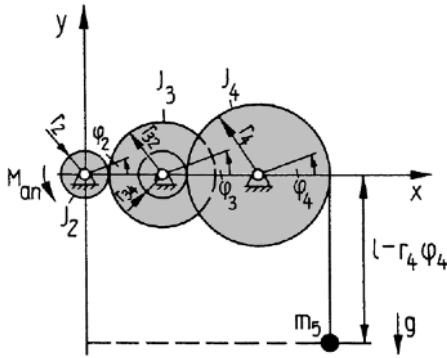


Bild 2.17
Getriebschema eines Hubwerkes

Nach kurzer Umformung findet man daraus die Lagefunktionen in der Form der Gln. (2.204):

$$\varphi_3 = -\frac{r_2}{r_{32}} \varphi_2, \quad \varphi_4 = \frac{r_2 r_{34}}{r_4 r_{32}} \varphi_2, \quad y_{S5} = \frac{r_2 r_{34}}{r_4 r_{32}} \varphi_2 - l \quad (2.223)$$

Die Lagefunktionen erster Ordnung lauten

$$\varphi_2' = 1, \quad \varphi_3' = -\frac{r_2}{r_{32}} = u_{23}, \quad \varphi_4' = \frac{r_2 r_{34}}{r_4 r_{32}} = u_{24}, \quad y_{S5}' = r_2 \frac{r_{34}}{r_{32}} \quad (2.224)$$

Hier werden die Übersetzungsverhältnisse u_{2k} eingeführt, vgl. (2.156), (2.175) und (2.176). Bei der Übersetzung ins Langsame ist der Betrag eines Übersetzungsverhältnisses größer als Eins, bei der Übersetzung ins Schnelle ist er kleiner als Eins. Das Vorzeichen gibt die Drehrichtung im Verhältnis zum Antrieb an. Das reduzierte Trägheitsmoment ergibt sich nach (2.211) zu

$$J_{\text{red}} = J_2 \varphi_2'^2 + J_3 \varphi_3'^2 + J_4 \varphi_4'^2 + m_5 y_{S5}'^2,$$

d. h., es ist

$$J_{\text{red}} = J_2 + J_3 u_{23}^2 + J_4 u_{24}^2 + m_5 \left(\frac{r_2 r_{34}}{r_{32}} \right)^2 = \text{konst.} \quad (2.225)$$

Daran erkennt man, dass die Übersetzungsverhältnisse u_{2k} bei der Berechnung der generalisierten Masse zum Quadrat eingehen und es also nicht auf ihr Vorzeichen (die Drehrichtung) ankommt. Dieses Quadrat des Übersetzungsverhältnisses hat zur Folge, dass das reduzierte Trägheitsmoment vieler Zahnradgetriebe im Wesentlichen durch das Trägheitsmoment der schnell laufenden Stufe bestimmt wird und man das gesamte Trägheitsmoment eines Zahnradgetriebes oft durch das der ersten Stufe und einen Faktor (z. B. 1,1 bis 1,2) abschätzen kann.

Die Änderung der Schwerpunkthöhe der bewegten Massen, die für die Hubarbeit maßgebend ist, beträgt $y'_S = y'_{S5}$, weil nur die Masse m_5 ihre Höhe ändert, vgl. (2.214). Die Bewegungsgleichung ergibt sich also gemäß (2.221) mit $W'_{\text{pot}} = m_5 g y'_{S5}$ und $Q^* \equiv Q$ zu

$$\left[J_2 + J_3 u_{23}^2 + J_4 u_{24}^2 + m_5 \left(\frac{r_2 r_{34}}{r_{32}} \right)^2 \right] \ddot{\varphi}_2 + m_5 g (r_2 r_{34} / r_{32}) = M_{\text{an}} \quad (2.226)$$

2.4.2.3

Viergelenkgetriebe

Viergelenkgetriebe mit rotierendem Antriebsglied werden in Form von Kurbelschwingen (Abtriebsglied 4 schwingt) oder Doppelkurbeln (Abtriebsglied 4 läuft um) in vielen Maschinen eingesetzt, um ungleichmäßige Bewegungsabläufe zu erzielen.

Gegeben sind die in Bild 2.18 dargestellten Längen l_i , die Schwerpunktkoordinaten ξ_{Si} im körperfesten Bezugssystem, die Massen m_i und Trägheitsmomente J_{Si} , welche für die Massenkkräfte und -momente maßgebend sind. Außer dem Antriebsmoment M_2 und dem Eigengewicht der Getriebeglieder wirkt noch eine Federkraft, deren Größe sich aus der Federkonstanten c und dem Federweg berechnen lässt, der sich wiederum aus der ungespannten Federlänge l_0 und der momentanen Federlänge l ergibt. Die Federlänge hängt von den raumfesten Koordinaten x_{15} , y_{15} und den gliedfesten Koordinaten des Anlenkpunktes (ξ_{35} , η_{35}) ab.

Gesucht sind allgemeine Formeln zur Berechnung des reduzierten Trägheitsmomentes und der anderen Terme, die in die Bewegungsgleichung der starren Maschine eingehen für $q = \varphi_2$.

Die Gleichungen zur Berechnung der Winkel φ_3 und φ_4 folgen aus den Zwangsbedingungen. Diese drücken aus, dass die Projektionen der Koordinaten der Gelenkpunkte auf die beiden Koordinatenrichtungen einen geschlossenen Geradenzug

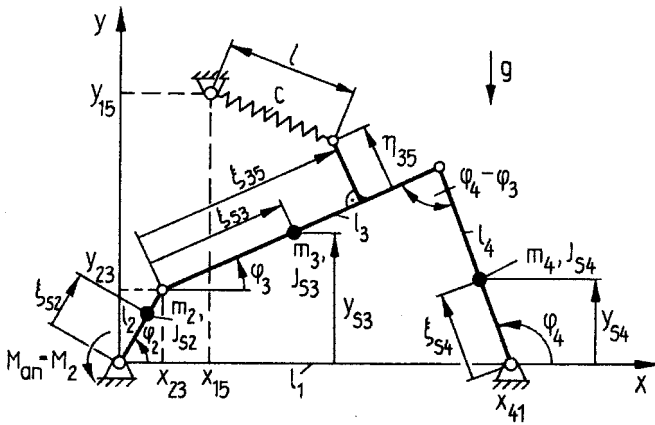


Bild 2.18 Geometrische und mechanische Parameter an einem Viergelenkgetriebe mit Längsfeder

(Masche) bilden, vgl. Bild 2.18:

$$l_3 \cos \varphi_3 = l_4 \cos \varphi_4 + l_1 - l_2 \cos \varphi_2 \quad (2.227)$$

$$l_3 \sin \varphi_3 = l_4 \sin \varphi_4 - l_2 \sin \varphi_2 \quad (2.228)$$

Quadrieren und Summieren ergibt daraus

$$l_3^2 = l_4^2 + l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \varphi_2 + 2l_4 (l_1 - l_2 \cos \varphi_2) \cos \varphi_4 - 2l_4 l_2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_4. \quad (2.229)$$

Löst man diese Gleichung auf, erhält man nach einigen Zwischenrechnungen mit den Abkürzungen

$$a_{34} = \frac{2(l_2 \cos \varphi_2 - l_1)l_4}{N}, \quad b_{34} = \frac{2l_2 l_4 \sin \varphi_2}{N}, \quad w_{34} = a_{34}^2 + b_{34}^2 \quad (2.230)$$

und dem Nenner

$$N = (l_2 \cos \varphi_2 - l_1)^2 + l_2^2 \sin^2 \varphi_2 + l_4^2 - l_3^2 \quad (2.231)$$

die Sinus und Kosinus von φ_4 zu:

$$\sin \varphi_4 = \frac{b_{34} - a_{34} \sqrt{w_{34} - 1}}{w_{34}}, \quad \cos \varphi_4 = \frac{a_{34} + b_{34} \sqrt{w_{34} - 1}}{w_{34}}. \quad (2.232)$$

Die anderen unbekannten trigonometrischen Funktionen folgen am einfachsten aus Gl. (2.227) und (2.228) unter Benutzung von (2.232):

$$\cos \varphi_3 = \frac{l_4 \cos \varphi_4 - l_2 \cos \varphi_2 + l_1}{l_3}, \quad \sin \varphi_3 = \frac{l_4 \sin \varphi_4 - l_2 \sin \varphi_2}{l_3}. \quad (2.233)$$

Damit können alle Lagefunktionen (nullter Ordnung) der Schwerpunkte berechnet werden, vgl. Bild 2.18:

$$\begin{aligned} x_{S2} &= \xi_{S2} \cos \varphi_2, & y_{S2} &= \xi_{S2} \sin \varphi_2 \\ x_{S3} &= l_2 \cos \varphi_2 + \xi_{S3} \cos \varphi_3, & y_{S3} &= l_2 \sin \varphi_2 + \xi_{S3} \sin \varphi_3 \\ x_{S4} &= l_1 + \xi_{S4} \cos \varphi_4, & y_{S4} &= \xi_{S4} \sin \varphi_4. \end{aligned} \quad (2.234)$$

Die Lagefunktionen erster Ordnung folgen daraus als Ableitungen nach der Antriebskoordinate $q = \varphi_2$:

$$\begin{aligned} x'_{S2} &= -\xi_{S2} \sin \varphi_2, & y'_{S2} &= \xi_{S2} \cos \varphi_2 \\ x'_{S3} &= -l_2 \sin \varphi_2 - \xi_{S3} \varphi'_3 \sin \varphi_3, & y'_{S3} &= l_2 \cos \varphi_2 + \xi_{S3} \varphi'_3 \cos \varphi_3 \\ x'_{S4} &= -\xi_{S4} \varphi'_4 \sin \varphi_4, & y'_{S4} &= \xi_{S4} \varphi'_4 \cos \varphi_4. \end{aligned} \quad (2.235)$$

Dabei treten die bisher noch nicht ermittelten Lagefunktionen erster Ordnung der Winkel φ_3 und φ_4 auf. Ihre Berechnung ist aus folgendem linearen Gleichungssystem möglich, welches durch Differenziation von (2.227) und (2.228) entsteht:

$$-l_3 \sin \varphi_3 \varphi'_3 + l_4 \sin \varphi_4 \varphi'_4 = l_2 \sin \varphi_2 \quad (2.236)$$

$$l_3 \cos \varphi_3 \varphi'_3 + l_4 \sin \varphi_4 \varphi'_4 = -l_2 \cos \varphi_2. \quad (2.237)$$

Es ergibt sich

$$\varphi'_3 = \frac{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4)}{l_3 \sin(\varphi_4 - \varphi_3)}; \quad \varphi'_4 = \frac{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{l_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_3)}. \quad (2.238)$$

Das reduzierte Trägheitsmoment des Viergelenkgetriebes folgt aus Gl. (2.211) für $I = 4$ zu

$$\begin{aligned} J_{\text{red}} &= m_2(x'^2_{S2} + y'^2_{S2}) + J_{S2}\varphi'^2_2 + m_3(x'^2_{S3} + y'^2_{S3}) + J_{S3}\varphi'^2_3 \\ &\quad + m_4(x'^2_{S4} + y'^2_{S4}) + J_{S4}\varphi'^2_4, \end{aligned} \quad (2.239)$$

woraus sich mit Benutzung von (2.235) ergibt:

$$\begin{aligned} J_{\text{red}} &= m_2\xi^2_{S2} + J_{S2}\varphi'^2_2 + m_3(l^2_2 + 2l_2\xi_{S3}\cos(\varphi_2 - \varphi_3)\varphi'_3 + \xi^2_{S3}\varphi'^2_3) + J_{S3}\varphi'^2_3 \\ &\quad + (m_4\xi^2_{S4} + J_{S4})\varphi'^2_4. \end{aligned} \quad (2.240)$$

Die darin auftretenden Lagefunktionen erster Ordnung der Winkel sind aus (2.238) bekannt. Das durch die Massenkräfte bedingte Antriebsmoment hängt gemäß (2.221) von der Ableitung des reduzierten Trägheitsmomentes und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ab. Die statischen Momentenanteile M_{st} aus dem Eigengewicht der Getriebeglieder folgen – ohne dass die Gleichgewichtsbedingungen explizit benutzt werden – aus der Lagefunktion der Schwerpunkthöhe:

$$W'_{\text{pot}} = M_{\text{st}} = mgy'_S = (m_2y'_{S2} + m_3y'_{S3} + m_4y'_{S4})g. \quad (2.241)$$

Mit den aus Gl. (2.235) bekannten Lagefunktionen y'_{Si} ist dieser Momentenanteil als Funktion des Kurbelwinkels φ_2 berechenbar.

Schließlich ist noch der Momentenanteil zu berechnen, den die an beliebiger Stelle des Gliedes 3 angelenkte Feder auf das Antriebsglied 2 ausübt. Das Federmoment folgt aus der potenziellen Federenergie $W_{\text{potF}} = c(l - l_0)^2/2$ zu

$$W'_{\text{potF}} = M_c = c(l - l_0)l' = cl' \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l^2}} \right). \quad (2.242)$$

Die Federlänge im gespannten Zustand wird mithilfe des Satzes von Pythagoras aus den Koordinaten beider Federanlenkpunkte berechnet:

$$l^2 = (x_{35} - x_{15})^2 + (y_{35} - y_{15})^2. \quad (2.243)$$

Die implizite Differenziation ergibt

$$2ll' = 2(x_{35} - x_{15})x'_{35} + 2(y_{35} - y_{15})y'_{35} \quad (2.244)$$

und liefert den Ausdruck, der für Gl. (2.242) gebraucht wird. Dazu werden die Lagefunktionen der Federanlenkpunkte benötigt. Aus Bild 2.18 kann man entnehmen, dass folgende geometrischen Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} x_{35} &= l_2 \cos \varphi_2 + \xi_{35} \cos \varphi_3 - \eta_{35} \sin \varphi_3 \\ y_{35} &= l_2 \sin \varphi_2 + \xi_{35} \sin \varphi_3 + \eta_{35} \cos \varphi_3. \end{aligned} \quad (2.245)$$

Deren partielle Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} x'_{35} &= -l_2 \sin \varphi_2 - (\xi_{35} \sin \varphi_3 + \eta_{35} \cos \varphi_3) \varphi'_3 \\ y'_{35} &= l_2 \cos \varphi_2 + (\xi_{35} \cos \varphi_3 - \eta_{35} \sin \varphi_3) \varphi'_3. \end{aligned} \quad (2.246)$$

Das Federmoment gemäß (2.242) wird damit:

$$M_c = c [(x_{35} - x_{15}) x'_{35} + (y_{35} - y_{15}) y'_{35}] \left[1 - \frac{l_0}{\sqrt{(x_{35} - x_{15})^2 + (y_{35} - y_{15})^2}} \right]. \quad (2.247)$$

Damit sind alle Momentenanteile, die in die Bewegungsgleichung (2.221) eingehen, für das dargestellte Viergelenkgetriebe bekannt. Mit den aus den gegebenen Parametern gemäß Gl. (2.240), (2.241) und (2.247) berechenbaren Ausdrücken ergibt sich die Bewegungsgleichung für $q = \varphi_2$:

$$J(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}J'(q)\dot{q}^2 + M_{st}(q) + M_c(q) = M_{an}. \quad (2.248)$$

2.4.2.4 Großpresse

In einer Großpresse wird das in Bild 2.19a als Getriebeschema dargestellte 14-gliedrige Koppelgetriebe eingesetzt. Bei der Konstruktion der Antriebselemente sind neben der Kinematik besonders die dynamischen Kräfte von Bedeutung, die bei den Betriebszuständen Anfahren, Umformen und Bremsen auftreten. Aus den gegebenen Abmessungen und Masseparametern wurde zunächst mithilfe eines Rechenprogramms der Verlauf des reduzierten Trägheitsmomentes und dessen Ableitung berechnet, Bild 2.19b. Danach erfolgte die numerische Integration der Bewegungsgleichung (2.221) und die Berechnung der Gelenkkräfte.

Entsprechend den interessierenden Betriebszuständen sind mehrere unterschiedliche Kraftfelder zu beachten:

1. Beim Bremsen oder Kuppeln treten infolge der druckluftgesteuerten Reibkuppelungen bzw. -bremsen Antriebsmomente auf, die von der Zeit abhängen: $M(t)$
2. Beim stationären Betriebszustand liegt entsprechend der Motorkennlinie ein nur von der Winkelgeschwindigkeit abhängiges Moment vor: $M(\dot{\varphi}_2)$; vgl. Abschnitt 1.5.2.

3. Beim Pressen treten Kräfte auf, die sowohl weg- als auch geschwindigkeitsabhängig sind, und die auf die Antriebswelle reduziert werden müssen: $M(\varphi_2, \dot{\varphi}_2)$.
4. Die Reibkräfte und -momente sind von den Gelenkkräften, den Relativgeschwindigkeiten und dem Reibfaktor abhängig und durch eine Funktion $M(\varphi_2, \dot{\varphi}_2)$ zu erfassen.

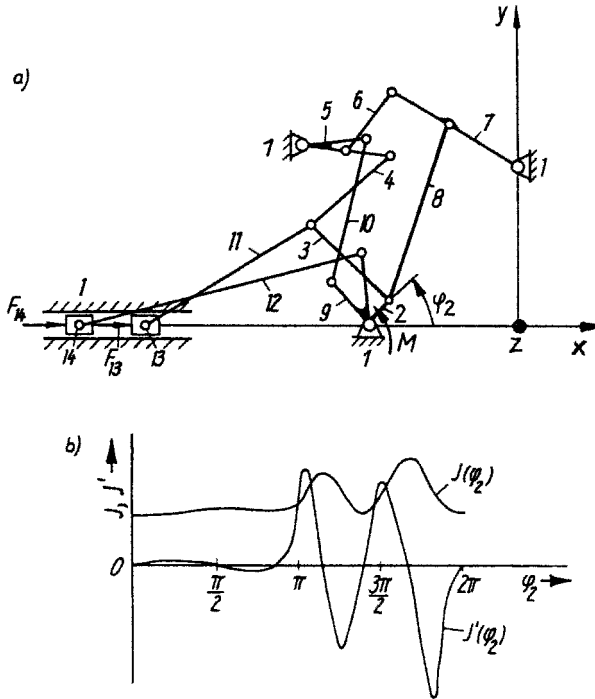


Bild 2.19 Pressenantrieb
a) Getriebschema
b) Verlauf des reduzierten Trägheitsmomentes $J(\varphi_2)$ und dessen Ableitung $J'(\varphi_2)$

Für derartig komplizierte und teure Maschinen, wie solche Großpressen, lohnt es sich oft, spezifische Computerprogramme aufzustellen, welche deren konstruktive Besonderheiten erfassen. Der Konstrukteur hat dabei die Aufgabe, die technischen Daten, die für eine solche Rechnung benötigt werden, gewissenhaft zusammenzustellen und dann mit dem Rechenprogramm zu „arbeiten“.

2.4.3

Bewegungszustände der starren Maschine

Der zeitliche Verlauf der Antriebsbewegung kann bei gegebenem reduzierten Trägheitsmoment J_{red} und dem Moment Q_{an} im allgemeinen durch eine numerische Integration der Bewegungsgleichung (2.221) gewonnen werden. Deren geschlossene Lösung ist allerdings bei konservativem Kraftfeld möglich, vgl. 2.4.4. Das Ergebnis der Integration ist der Verlauf des Antriebswinkels $\varphi(t)$ und dessen zeitliche Ableitungen $\dot{\varphi}(t)$ und $\ddot{\varphi}(t)$, die zur Berechnung aller weiteren kinematischen und dynamischen Größen benötigt werden.

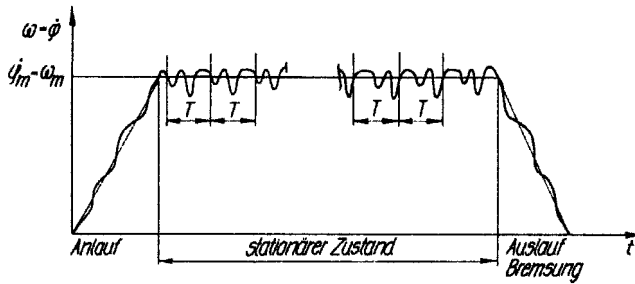


Bild 2.20 Typischer Arbeitszyklus eines Antriebs

Der Arbeitszyklus eines Mechanismus hat meist den in Bild 2.20 schematisch dargestellten Verlauf. Er besteht aus dem Anlauf, dem stationären (oder Dauer-) Zustand und dem Auslauf. Zu den Maschinen, die im instationären Betriebszustand arbeiten, gehören z. B. Krane, Bagger, Fahrzeuge, Fördermittel, Pressen, Stell- und Transporteinrichtungen, bei denen sich Anfahr- und Bremsvorgänge häufig wiederholen.

In der Praxis interessieren bei Anlauf- und Bremsvorgängen meist die Anfahr- bzw. Bremszeiten, die Anfahr- bzw. Bremswege und -winkel und der zeitliche Momentenverlauf. Diese Größen benutzt der Konstrukteur, um verschiedene Antriebssysteme zu vergleichen, oder um Motoren, Bremsen und Kupplungen auszulegen. Auch die dynamischen Kräfte, die man zur Dimensionierung der Getriebeglieder und Gelenke (Bolzen, Lager, Zahnräder usw.) benötigt, können berechnet werden, wenn der tatsächliche Bewegungsablauf bekannt ist. Diese dynamischen Belastungen bei Anfahr- und Bremsvorgängen müssen oft für den Festigkeitsnachweis ermittelt werden.

Das Reibmoment einer Maschine lässt sich nur schwer vorausberechnen, da es von Einflussgrößen abhängt, die erst durch die Montage oder den Betriebszustand festgelegt werden, vgl. (1.127). Dazu gehören Zwangskräfte bei einer statisch unbestimmten Lagerung und die Betriebstemperatur eines Lagers (Zähigkeit des Schmiermittels). Reibmoment und Reibleistung werden meist durch den Wirkungsgrad pauschal erfasst oder experimentell mithilfe von Auslaufversuchen bestimmt, vgl. dazu auch VDI-Richtlinie 2158.

Der mechanische Wirkungsgrad ist als Verhältnis der abgegebenen Leistung P_m zur aufgenommenen Leistung ($P_m + P_v$) definiert, wobei P_v die Verlustleistung ist:

$$\eta = \frac{P_m}{P_m + P_v} < 1. \quad (2.249)$$

Der Wirkungsgrad ist für spezielle Baugruppen, wie Zahnradgetriebe, Flaschenzüge von Hebezeugen u. a. in der Literatur auf dem Gebiet der Maschinenelemente angegeben.

Elektromotoren werden i. Allg. nach Antriebsleistung und Erwärmung unter Beachtung der relativen Einschaltdauer ausgewählt. Für die Charakterisierung der mechanischen Belastung der Maschinenelemente ist jedoch das Antriebsmoment aussagefähiger als die Antriebsleistung.

Bei den meisten Maschinen arbeiten mehrere Antriebsmechanismen in einem zeitlich genau aufeinander abgestimmten Bewegungsablauf zusammen. Mit dem Zyklusdiagramm, welches die koordinierten Bewegungsabläufe aller Antriebe einer Maschine beschreibt, werden in der Entwurfsphase vom Konstrukteur wesentliche Entscheidungen getroffen, die auch das dynamische Verhalten betreffen. Bild 2.21 zeigt ein Beispiel für ein **Zyklusdiagramm**.

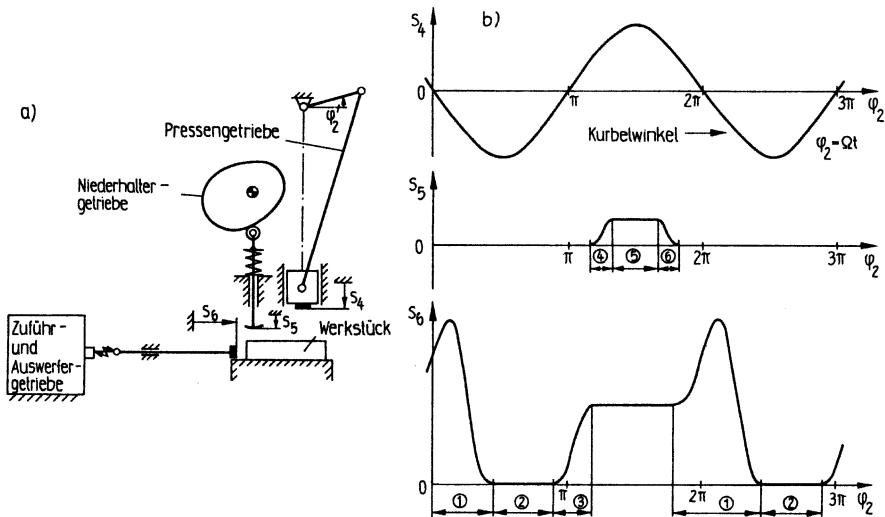


Bild 2.21 Schneidemaschine als Beispiel für eine Maschine mit mehreren Mechanismen
a) Getriebschema, **b)** Zyklusdiagramme der drei Bewegungsabläufe; sechs Etappen: 1 Auswerfen, 2 Aufnehmen, 3 Zuführen, 4 Niederhalten, 5 Pressen, 6 Freigeben

Ausgehend von den technologischen Mindestanforderungen muss der Konstrukteur alle Bewegungsabläufe auch unter dynamischen Aspekten festlegen, um bei hohen Arbeitsgeschwindigkeiten eine stabile Betriebsweise zu sichern. Da die einzelnen Mechanismen unterschiedliche Massenkräfte aufweisen, sollte der dynamisch gefährdetste z. B. durch lang ausgedehnte instationäre Bewegungsetappen ausgelegt werden.

Im Beispiel nach Bild 2.21 weisen z. B. die Bewegungsetappen 1, 3, 4 und 6 die höchsten Beschleunigungen auf. In diesen Abschnitten ändert sich das reduzierte Trägheitsmoment am meisten. Der Konstrukteur muss auch den Einfluss auf die Anregung von Torsionsschwingungen beachten, vgl. Abschnitt 4.3.

2.4.4

Lösung der Bewegungsgleichungen

Die Behandlung von Anfahr- und Bremsvorgängen führt auf die mathematische Aufgabe, die Differenzialgleichung (2.221) unter den Anfangsbedingungen

$$t = 0 : \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \quad (2.250)$$

zu integrieren (Drehwinkel $\varphi = q$).

Physikalisch bedeutet dies, den Bewegungsablauf $\varphi(t)$ zu ermitteln, wenn zu einer bestimmten Zeit eine Anfangsstellung φ_0 und eine Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_0 gegeben sind. Für den Fall einer beliebigen Winkelabhängigkeit $Q_{\text{an}} = M_{\text{an}}(\varphi)$, $Q^* = M^*(\varphi)$, zu dem auch konstante Werte gehören, kann eine analytische Lösung angegeben werden. Da die Momente aus den Massenkräften sich aus der Änderung der kinetischen Energie ergeben, wie man aus der Umformung

$$W'_{\text{kin}} = \frac{dW_{\text{kin}}}{d\varphi} = \frac{d(J\dot{\varphi}^2/2)}{d\varphi} = \frac{1}{2}J'\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J\frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi} = \frac{1}{2}J'\dot{\varphi}^2 + J\ddot{\varphi} \quad (2.251)$$

ersehen kann, lässt sich (2.221) auch so schreiben:

$$W'_{\text{kin}} = M_{\text{an}} + M^* - W'_{\text{pot}}. \quad (2.252)$$

Die Integration, ausgeführt von dem Anfangszustand gemäß Gl. (2.250) bis zu einer beliebigen Stellung φ , ergibt:

$$\begin{aligned} \int_{W_{\text{kin}0}}^{W_{\text{kin}}} dW_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}J(\varphi)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}J(\varphi_0)\omega_0^2 \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} (M_{\text{an}} + M^*) d\bar{\varphi} - W_{\text{pot}}(\varphi) + W_{\text{pot}}(\varphi_0). \end{aligned} \quad (2.253)$$

Wird die **Arbeit des eingepprägten Kraftfeldes** und die potenzielle Energie gemeinsam durch

$$W(\varphi, \varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (M_{\text{an}} + M^*) d\bar{\varphi} - W_{\text{pot}}(\varphi) + W_{\text{pot}}(\varphi_0) \quad (2.254)$$

abgekürzt, so erhält man aus (2.253) zunächst

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}J(\varphi)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}J(\varphi_0)\omega_0^2 + W(\varphi, \varphi_0) \quad (2.255)$$

und daraus die Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit vom Drehwinkel mit $W_{\text{kin}0} = J(\varphi_0)\omega_0^2/2$:

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{J(\varphi_0)\omega_0^2 + 2W(\varphi, \varphi_0)}{J(\varphi)}} = \omega_0 \sqrt{\frac{J(\varphi_0)}{J(\varphi)} \left(1 + \frac{W(\varphi, \varphi_0)}{W_{\text{kin}0}}\right)}. \quad (2.256)$$

Wird die Arbeit W des eingepprägten Kraftfeldes ganz vernachlässigt, so folgt daraus als Sonderfall von (2.256) und dessen Ableitung:

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \omega_0 \sqrt{\frac{J(\varphi_0)}{J(\varphi)}} = \sqrt{\frac{2W_{\text{kin}0}}{J}}, \quad \ddot{\varphi}(\varphi) = \frac{-J'(\varphi)J(\varphi_0)}{2J^2(\varphi)}\omega_0^2 = \frac{-J'W_{\text{kin}0}}{J^2}. \quad (2.257)$$

Der durch (2.257) beschriebene Bewegungszustand ergibt sich, wenn der Mechanismus in der Stellung φ_0 mit der Anfangsenergie $W_{\text{kin}0}$ sich selbst überlassen wird. Bei dieser so genannten **Eigenbewegung** ist kein Antriebsmoment erforderlich. Man prüfe dies durch Einsetzen in (2.221)!

Die periodische Bewegung, die durch die Veränderlichkeit von $J(\varphi)$ und/oder $M(\varphi)$ verursacht sein kann, wird durch den Ungleichförmigkeitsgrad δ ausgedrückt. Im 19. Jahrhundert befasste man sich mit derartigen Maschinenuntersuchungen erstmals in Verbindung mit der Entwicklung von Dampfmaschinen. Der **Ungleichförmigkeitsgrad** drückt die Schwankung der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ des Antriebes während eines Arbeitszyklus (meist eine volle Umdrehung), bezogen auf den Mittelwert aus:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_m} \approx \frac{2(\omega_{\max} - \omega_{\min})}{\omega_{\max} + \omega_{\min}}. \quad (2.258)$$

Der Ungleichförmigkeitsgrad beträgt $\delta = 0$ bei $\omega_{\max} = \omega_{\min}$ und $\delta = 2$ bei $\omega_{\min} = 0$. Eine Maschine arbeitet umso gleichmäßiger, je kleiner der Ungleichförmigkeitsgrad ist.

Für die Näherung $W \ll W_{\text{kin}0}$ können nach (2.257) die extremen Winkelgeschwindigkeiten angegeben werden. Geht man von dem mittleren Trägheitsmoment $J(\varphi_0) = J_m$ und der mittleren Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = \omega_m$ aus, so folgt:

$$\omega_{\min} = \omega_0 \sqrt{\frac{J_m}{J_{\max}}}; \quad \omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{\frac{J_m}{J_{\min}}}. \quad (2.259)$$

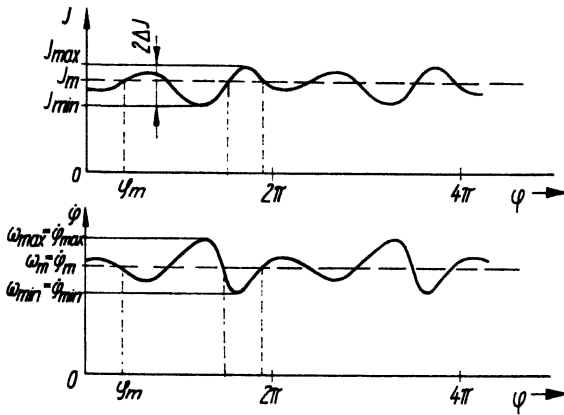


Bild 2.22 Typischer Verlauf des reduzierten Trägheitsmomentes und der Winkelgeschwindigkeit eines Mechanismus ohne äußeres Kraftfeld

Diese Beziehungen illustriert Bild 2.22. Mit (2.258) und (2.259) ergibt sich nach kurzer Umformung

$$\delta = 2 \frac{\sqrt{J_{\max}} - \sqrt{J_{\min}}}{\sqrt{J_{\max}} + \sqrt{J_{\min}}} \approx \frac{\Delta J}{J_m} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta J}{J_m} \right)^2 + \dots \right]. \quad (2.260)$$

Man braucht also bei vernachlässigbar kleinem äußerem Kraftfeld ($W \ll W_{\text{kin}0}$) nur die Funktion $J(\varphi)$ für einen Arbeitszyklus zu ermitteln und daraus die Differenz ΔJ

zu bestimmen, um den Ungleichförmigkeitsgrad angeben zu können. Ausgehend von der Näherung

$$\Delta J = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} \ll J_m; \quad J_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J(\varphi) d\varphi \approx \frac{J_{\max} + J_{\min}}{2}. \quad (2.261)$$

lässt sich Gl. (2.260) durch die Reihenentwicklungen

$$\sqrt{J_{\max/\min}} = \sqrt{J_m \pm \Delta J} = \sqrt{J_m} \left[1 \pm \frac{\Delta J}{2J_m} - \frac{1}{8} \left(\frac{\Delta J}{J_m} \right)^2 + \dots \right] \quad (2.262)$$

vereinfachen. Aus Gl. (2.260) folgt die Näherung zur Berechnung des erforderlichen Mittelwertes für einen gegebenen Ungleichförmigkeitsgrad:

$$J_m = \frac{\Delta J}{\delta} \left[1 + \frac{\delta^2}{4 + 2\delta^2} + \dots \right] \approx \frac{\Delta J}{\delta_{\text{zul}}}. \quad (2.263)$$

Es soll nun der andere Sonderfall betrachtet werden, bei dem die Ungleichförmigkeit im Wesentlichen durch die Arbeit $W(\varphi, \varphi_0)$ und nicht durch $J(\varphi)$ bestimmt wird. Das reduzierte Trägheitsmoment wird durch seinen Mittelwert J_m gemäß (2.261) erfasst. Im stationären Zustand folgt aus (2.256) mit $J(\varphi_0) = J(\varphi) = J_m$, der mittleren Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = \omega_m$ und der mittleren kinetischen Energie $J_m \omega_m^2/2$:

$$\omega_{\min} = \omega_m \left(1 + \frac{W_{\min}}{2W_{\text{kin.m}}} \right); \quad \omega_{\max} = \omega_m \left(1 + \frac{W_{\max}}{2W_{\text{kin.m}}} \right). \quad (2.264)$$

Setzt man die Extremwerte in (2.258) ein, so folgt eine Alternative zu den Gln. (2.260) und (2.263):

$$\delta = \frac{\Delta W}{2T_m} = \frac{\Delta W}{J_m \omega_m^2} \quad \text{bzw.} \quad J_m = \frac{\Delta W}{\omega_m^2 \delta}. \quad (2.265)$$

Hierin ist $\Delta W = W_{\max} - W_{\min}$ die Überschussarbeit pro Periode.

Aus (2.263) und (2.265) folgt, dass bei gegebener Überschussarbeit ΔW der Ungleichförmigkeitsgrad desto geringer wird, je größer das mittlere reduzierte Trägheitsmoment J_m ist. Um eine gleichmäßigere Bewegung zu erhalten, muss man also das mittlere Trägheitsmoment erhöhen. Praktisch wird das durch ein Schwungrad erreicht.

Ein **Schwungrad** dient als Speicher der kinetischen Energie. Es gleicht die Ungleichförmigkeit aus, indem es in der Phase der Beschleunigung kinetische Energie akkumuliert und diese bei Belastung wieder abgibt. Es ermöglicht den Einsatz eines Antriebsmotors mit einem Kippmoment, das kleiner als das reduzierte statische Antriebsmoment ist. Oft ist es zweckmäßig, das Schwungrad dauernd rotieren zu lassen und die Getriebe nur während der Arbeitstakte oder Belastungsphasen anzukuppeln. Schwungräder werden vor allem bei Maschinen angewendet, die im stationären Betrieb arbeiten.

Man hat zu unterscheiden, ob man das Schwungrad zwischen Motor und Getriebe oder zwischen Getriebe und Arbeitsmaschine anbringt, vgl. Bild 2.28. Um das Getriebe vor Belastungsstößen zu schonen, ist ein Einbau zwischen Getriebe und Arbeitsmaschine günstig. Die Schwunghasse wird jedoch kleiner, wenn es

auf der schnell laufenden Welle zwischen Motor und Getriebe angeordnet wird. Der Konstrukteur muss je nach der Bedeutung beider Kriterien im konkreten Fall entscheiden, welche Anordnung zu bevorzugen ist. Bei Maschinen mit instationärer Arbeitsweise ist ein kleines Trägheitsmoment vorteilhaft, denn infolge häufiger Beschleunigungs- und Verzögerungsvorgänge tritt bei größerem Schwungrad eine stärkere Belastung der Motoren und Bremsen auf (Überhitzungsgefahr).

Nicht nur in Spielzeugen, auch bei Fahrzeugen wird die kinetische Energie von Schwungrädern als Antrieb technisch genutzt (Gyrobusse in der Schweiz seit 1945). Man hat nachgewiesen, dass sich in hochfesten schnell rotierenden Schwungrädern Energie von $400\,000 \text{ N} \cdot \text{m/kg}$ speichern lässt. Theoretisch sollen sogar Werte von $1\,750\,000 \text{ N} \cdot \text{m/kg}$ physikalisch möglich sein, womit solche Superschwungräder, bezogen auf ihre Masse, mehr Energie speichern könnten als elektrochemische Akkumulatoren.

Bei realen Maschinen hängen die eingprägten Kräfte und Momente in komplizierter Weise von der Getriebestellung, der Winkelgeschwindigkeit und der Zeit ab. Sind diese Funktionen bekannt, dann kann die Bewegungsgleichung (2.221) numerisch gelöst werden, nachdem sie nach der Winkelbeschleunigung aufgelöst wurde ($\varphi \hat{=} q$):

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{J(\varphi)} \left[M_{\text{an}} + M^* - W'_{\text{pot}} - \frac{1}{2} J'(\varphi) \dot{\varphi}^2 \right] \quad (2.266)$$

Unter Benutzung der Anfangsbedingungen (2.250) kann der Bewegungsablauf für kleine Zeitschritte Δt schrittweise berechnet werden.

Bild 2.23 illustriert die Herangehensweise. Schritt für Schritt werden, beginnend mit der Zeit $t_0 = 0$, aus den Werten zur Zeit t_k die Funktionswerte zur Zeit $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ berechnet. Die Genauigkeit von $\varphi(t_k)$ hängt von der richtigen Wahl der Schrittweite Δt ab. Aus der mathematischen Analyse folgt, dass sich der Fehler mit $(\Delta t)^5$ ändert. Das bedeutet, dass die Genauigkeit des Verfahrens bei Halbierung der Schrittweite um den Faktor 16 verbessert wird und sich bei Verdoppelung der Schrittweite um denselben Faktor verschlechtert. Da die Anzahl der Schritte umgekehrt proportional zur Schrittweite ist, beträgt dieser Faktor bei gegebenem Intervall nicht 32 sondern 16.

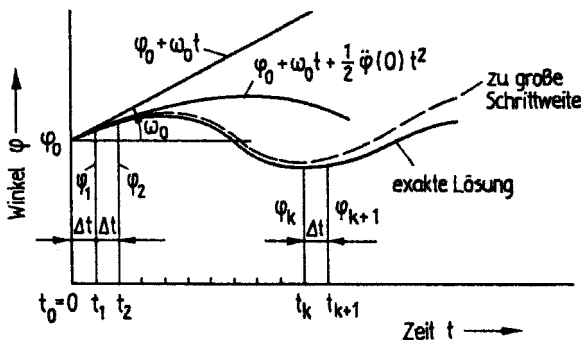


Bild 2.23
Zur Näherung bei
numerischer Integration

Mit kleinen Schrittweiten erreicht man oft höhere Genauigkeiten, aber es besteht die Gefahr, dass sich infolge der vielen Schritte Abrundungsfehler summieren. Als

Richtwert kann empfohlen werden, pro (geschätzter) Periodendauer eines Bewegungszyklus mindestens 20 Schritte zu wählen, also etwa $\Delta t = T_0/20$ bei einer Periodendauer T_0 .

Mit der bisher beschriebenen Verfahrensweise (Anfangswertproblem) können instationäre Bewegungsabläufe (Anfahren, Bremsen) von Maschinen berechnet werden. Werden auf demselben Wege **stationäre Bewegungsabläufe** einer Maschine gesucht, besteht das Problem, zunächst Anfangsbedingungen dafür zu ermitteln. Im stationären Zustand muss die Periodizitätsbedingung

$$\omega_0 = \dot{\varphi}(\varphi_0 + 2\pi) = \dot{\varphi}(\varphi_0) \quad (2.267)$$

erfüllt sein, da nach einer vollen Umdrehung des Kurbelwinkels dieselbe Winkelgeschwindigkeit vorhanden sein muss.

Um den stationären Zustand zu finden, kann man den Anlaufvorgang einer Maschine simulieren, vgl. Bild 2.20. Schon nach wenigen Umdrehungen wird er dabei oft, wie in der Wirklichkeit, erreicht. Man kann diesen Vorgang auch verkürzen, indem man zunächst einen Anfangswert $\dot{\varphi}(\varphi_0)$ für eine beliebige Anfangsstellung φ_0 des Mechanismus schätzt, z. B. in der Nähe des erwarteten Mittelwertes ω_m . Dann wird über eine volle Umdrehung numerisch integriert und geprüft, welcher Wert für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi_0 + 2\pi)$ herauskommt. Zunächst wird Gl. (2.267) nicht erfüllt sein. So lange wie $\dot{\varphi}(\varphi_0 + 2\pi)$ gegenüber $\dot{\varphi}(\varphi_0)$ nach oben oder unten abweicht, muss der nächste Iterationsschritt mit einem kleinerem oder größerem Anfangswert beginnen. Das Suchen nach der stationären Lösung läuft dann darauf hinaus, das Optimierungsproblem

$$|\dot{\varphi}(\varphi_0 + 2\pi) - \dot{\varphi}(\varphi_0)| \stackrel{!}{=} \text{Min.}$$

zu lösen.

2.4.5

Beispiel: Pressenantrieb

Eine Strohpresse besteht aus einer Kurbelschwinge, für deren geometrische Parameter $r_4/l_5 \ll 1$ und $r_4/l_4 \ll 1$ gilt, vgl. Bild 2.24a. Das dynamische Verhalten soll unter Berücksichtigung der Motorkennlinie, der technologischen Kraft am Abtrieb und des Reibmomentes berechnet werden, wobei insbesondere der Einfluss des Schwungrades zu analysieren ist. Die Masse des Gliedes 4 sei auf die Nachbarglieder aufgeteilt.

Gegeben:

$r_2 = 80 \text{ mm}$, $r_3 = 320 \text{ mm}$, $r_4 = 150 \text{ mm}$, $l_5 = 1,0 \text{ m}$, $\xi_{S5} = 1,5 \text{ m}$.
 $J_2 = 0,03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_3 = 10; 25; 100; 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $m_5 = 40 \text{ kg}$, $J_{S5} = 36 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
 Presskraft $F_{50} = 7,6 \text{ kN}$, vgl. Verlauf in Bild 2.24b,
 Reibmoment $M_R = (7,5 + 0,022\dot{\varphi}_2^2) \text{ N} \cdot \text{m}$, experimentell ermittelt, vgl. auch Aufgabe A1.6 ($\dot{\varphi}_2$ in rad/s)
 Motormoment $M_{\text{an}} = M_0(1 - \dot{\varphi}_2/\Omega)$ mit $M_0 = 10\,200 \text{ N} \cdot \text{m}$,
 Synchrondrehzahl des Motors: $n = 750 \text{ min}^{-1}$
 Kräfte aus dem Eigengewicht seien hier gegenüber Massenkräften vernachlässigbar.

Mit den obigen Ausdrücken folgt nach kurzer Rechnung

$$J(\varphi_2) = J_2 + J_3 \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 + m_5 \left(\frac{\xi_{S5}}{l_5} r_4 \frac{r_2}{r_3} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{r_2 \varphi_2}{r_3} \right) + J_{S5} \left(\frac{r_4}{l_5} \frac{r_2}{r_3} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{r_2 \varphi_2}{r_3} \right). \quad (2.273)$$

Mit den Zahlenwerten gilt dann

$$\begin{aligned} \underline{\underline{J(\varphi_2)}} &= \left[1,593 + 0,178 \sin^2 \left(\frac{r_2 \varphi_2}{r_3} \right) \right] \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ &= \underline{\underline{\left(1,682 - 0,089 \cos \frac{\varphi_2}{2} \right) \text{ kg} \cdot \text{m}^2}}, \end{aligned} \quad (2.274)$$

wegen $r_3 = 4r_2$ und

$$\sin^2 \left(\frac{r_2 \varphi_2}{r_3} \right) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(2 \frac{r_2}{r_3} \varphi_2 \right) \right]. \quad (2.275)$$

Das auf den Antrieb reduzierte Moment infolge der Presskraft ist nach Gl. (2.217)

$$M_t(\varphi_2) = F_5 x'_{S5} = \begin{cases} -F_{50} r_4 \frac{r_2}{r_3} \sin^2 \left(\frac{r_2 \varphi_2}{r_3} \right) & \text{für } 0 \leq \varphi_2 \leq 4\pi \\ 0 & \text{für } 4\pi < \varphi_2 < 8\pi \end{cases} \quad (2.276)$$

und mit den angegebenen Zahlenwerten (M_t in $\text{N} \cdot \text{m}$):

$$M_t(\varphi_2) = \begin{cases} 427 \sin(\varphi_2/4) & \text{für } 0 \leq \varphi_2 \leq 4\pi \\ 0 & \text{für } 4\pi < \varphi_2 < 8\pi \end{cases}. \quad (2.277)$$

Mit einem numerischen Verfahren wurde die Bewegungsgleichung der starren Maschine integriert, nachdem sie in die Form

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{M_{\text{an}}(\dot{\varphi}_2) - M_t(\varphi_2) - M_R(\dot{\varphi}_2^2) - 0,5J'(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2}{J(\varphi_2)} \quad (2.278)$$

überführt wurde. Aus dem zunächst ermittelten Verlauf von $\varphi_2(t)$ und $\dot{\varphi}_2(t)$ wurden die einzelnen Momentenanteile und das Antriebsmoment berechnet, deren Verlauf Bild 2.25 zeigt.

Wie man sieht, stellt sich eine mittlere Winkelgeschwindigkeit von $\omega_{2m} = 76,4 \text{ s}^{-1}$ ein (Zyklusdauer $T_0 = 8\pi/\omega_{2m} = 0,329 \text{ s}$), die erwartungsgemäß etwas niedriger als die Synchrondrehzahl des Motors ist, welche $\Omega = 750\pi/30 = 78,5 \text{ s}^{-1}$ beträgt. Das aus Bild 2.25c erkennbare mittlere Antriebsmoment $M_{\text{an}} = 272 \text{ N} \cdot \text{m}$ ergibt sich überschläglich als Summe aus dem mittleren Reibmoment $M_R = 136 \text{ N} \cdot \text{m}$ (Bild 2.25b) und dem mittleren technologischen Moment $M_t = W_N/8\pi = 136 \text{ N} \cdot \text{m}$. Den Drehzahlverlauf kann man deuten, wenn man den Verlauf des Antriebsmomentes vergleicht und die lineare Motorkennlinie beachtet. Die Drehzahl fällt/steigt bei zunehmendem/abnehmendem Antriebsmoment. Der starke Drehzahlabfall bei relativ kleinem J_3 ist durch das technologische Moment M_t bedingt, vgl. Bild 2.25a.

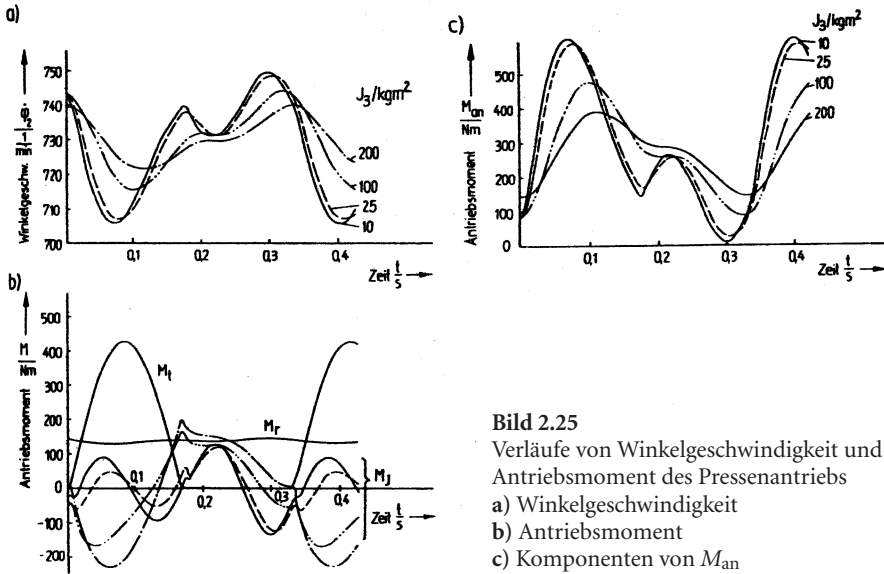


Bild 2.25

Verläufe von Winkelgeschwindigkeit und Antriebsmoment des Pressenantriebs

- a) Winkelgeschwindigkeit
 b) Antriebsmoment
 c) Komponenten von M_{an}

Das Antriebsmoment M_{an} setzt sich aus den drei Komponenten zusammen, die einzeln in Bild 2.25b dargestellt sind. Man kann den großen Einfluss des Schwungrads deutlich erkennen. Während M_t und M_r nur unwesentlich durch die Drehzahl-schwankung beeinflusst werden (sodass dieser Einfluss im Bild innerhalb der Strich-dicke verschwindet), wird das kinetische Moment wesentlich von der Schwungrad-größe bestimmt. Es gilt $M_{kin} = J(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 + 0,5J'(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2$, und man kann aus dem Kurvenverlauf in Bild 2.25b sowohl die Wirkung der Winkelbeschleunigung als auch der Winkelgeschwindigkeit erkennen. Bei kleinen J_3 -Werten dominiert der Momentenanteil, der von der Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes herrührt. Bei den Kurven in Bild 2.25a ist die zweifache Schwingung pro Periode, die von $J'(\varphi_2)$ stammt, bemerkbar. Bei den großen Werten von J_3 überwiegt der Einfluss der Winkelbeschleunigung, obwohl diese selbst niedriger wird!

Die Ergebnisse zeigen, dass infolge eines großen Schwungrads der Spitzenwert des Antriebsmoments kleiner als derjenige sein kann, welcher sich aus dem Reib-moment und dem technologischen Moment ergibt. Der mittlere Wert des Antriebs-momentes wird durch die Schwungradgröße praktisch nicht beeinflusst. Je größer das Schwungrad ausgelegt wird, desto geringer sind die Drehzahlschwankungen im stationären Betriebszustand.

Ein ganzer Arbeitszyklus entspricht einer vollen Umdrehung der Kurbel ($0 < \varphi_3 < 2\pi$), d.h. vier Umdrehungen der Motorwelle ($0 < \varphi_2 < 8\pi$). Nach (2.254) beträgt die Nutzarbeit während des Arbeitszyklus infolge des Pressvorganges

$$\begin{aligned}
 W_N &= \int_0^{8\pi} M(\varphi_2) d\varphi_2 = F_{50} r_4 \frac{\xi_{S5}}{l_5} \frac{r_2}{r_3} \int_0^{4\pi} \sin \frac{\varphi_2}{4} d\varphi_2 + \int_{4\pi}^{8\pi} 0 d\varphi_2 \\
 &= 8F_{50} r_4 \frac{\xi_{S5}}{l_5} \frac{r_2}{r_3} = 3420 \text{ N} \cdot \text{m}.
 \end{aligned} \tag{2.279}$$

Bei der mittleren Winkelgeschwindigkeit $\omega_{2m} = 76,4 \text{ s}^{-1}$ beträgt die mechanische Nutzleistung $P_m = W_N/T = 3420 \text{ N} \cdot \text{m}/0,329 \text{ s} = 10,4 \text{ kW}$. Das mittlere Antriebsmoment $M_{an} = 272 \text{ N} \cdot \text{m}$, das sich aus allen Momentenkomponenten ergibt, erbringt die Gesamtleistung $P_m + P_v = M_{an}\omega_{2m} = 272 \cdot 76,4 \text{ W} = 20,8 \text{ kW}$. Gemäß (2.249) beträgt also der Wirkungsgrad dieses Pressenantriebs nur etwa $\eta = 0,5$.

2.4.6

Aufgaben A2.5 bis A2.8

A2.5 Antrieb eines Tagebau-Bandabsetzers

Dem Antriebssystem eines Tagebau-Bandabsetzers zum Verkippen von Abraum entspricht das in Bild 2.26 stark vereinfacht dargestellte Berechnungsmodell. Das Drehwerk, welches aus Motor, Kupplung und zwei Getrieben besteht, setzt den Oberbau in Bewegung.

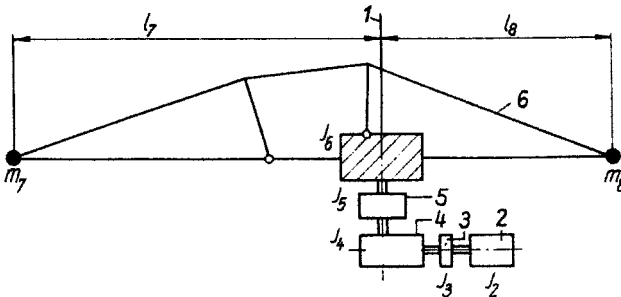


Bild 2.26 Kinematisches Schema eines Tagebau-Bandabsetzers
1 Schwenkachse; 2 Motor; 3 Kupplung; 4, 5 Getriebe; 6 Oberbau

Gegeben: Trägheitsmomente von

Motor:	$J_2 = 2,14 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
Kupplung:	$J_3 = 1,12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
Getriebe 1:	$J_4 = 22,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; bezogen auf
Getriebe 2:	$J_5 = 4540 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; Getriebeausgang
Maschinenhaus:	$J_6 = 1,185 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$;
Massen des Oberbaus:	$m_7 = 2,05 \cdot 10^4 \text{ kg}$; $m_8 = 1,85 \cdot 10^5 \text{ kg}$;
Längen des Oberbaus:	$l_7 = 110 \text{ m}$; $l_8 = 61 \text{ m}$;
Übersetzungsverhältnisse der Getriebe:	$u_{42} = u_{43} = 627$; $u_{54} = u_{64} = 36,2$

Man beachte, dass beim Übersetzungsverhältnis die Reihenfolge der Indizes von Bedeutung ist ($\varphi'_k = u_{2k} = 1/u_{k2}$) und dass es als Verhältnis von Antriebs- zu Abtriebswinkelgeschwindigkeit definiert ist, vgl. Gl. (2.224).

Gesucht:

1. Antriebsmoment des Motors, sodass der Oberbau mit einer Winkelbeschleunigung von $\ddot{\phi}_6 = 0,0007 \text{ rad/s}^2$ bewegt wird.
2. Antriebsmoment M_6 bezogen auf die Schwenkachse.

Gesucht:

Formel zur Berechnung der erforderlichen Trägheitsmomente der Schwungräder, wenn der Mechanismus im Leerlauf arbeitet. Man vergleiche die Größen von J_{S1} und J_{S2} .

A2.8 Schwungradeinfluss bei Umformmaschine

Bei Pressen, Schneidemaschinen und anderen Umformmaschinen wirkt am Abtriebsglied nur in einem kleinen Bereich des Arbeitszyklus die Umformkraft. Die Antriebe von Umformmaschinen werden deshalb mit Schwungrädern versehen, die während des Umformvorganges kinetische Energie abgeben und in der restlichen Zeit in jeder Periode wieder „aufgeladen“ werden. Zwischen zwei Umformvorgängen wird keine nennenswerte Arbeit vom Motor abverlangt.

Für eine Kurbelpresse, deren kinematisches Schema in Bild 2.29 dargestellt ist, soll das Antriebsmoment, das der Motor im statischen Fall aufbringen müsste, mit demjenigen verglichen werden, welches beim Einsatz eines Schwungrades erforderlich ist. Es soll der Verlauf der Winkelgeschwindigkeit des Antriebs berechnet und abgeschätzt werden, wie groß das Schwungrad mindestens sein muss, damit der Uneleichförmigkeitsgrad nicht größer als ein zulässiger Mindestwert wird. Um die Berechnung zu vereinfachen, wird angenommen, dass im stationären Betrieb ein konstantes Motor-moment wirkt.

Gegeben:

Konstante Umformkraft F_0 im Winkelbereich

mit dem Winkel

Winkelgeschwindigkeit in der Strecklage $\varphi_2(t=0) = 0$

Zulässiger Ungleichförmigkeitsgrad

Kurbelverhältnis

Verhältnis der Trägheitsmomente

Bezogene Umformkraft

Bezogene Stößelmasse

Näherung für Stößelweg, vgl. Tabelle 2.1

$$2\pi - \varphi^* \leq \varphi_2 \leq 2\pi$$

$$\varphi^* = \pi/12 \cong 15^\circ$$

$$\dot{\varphi}_2(t=0) = \Omega$$

$$\delta_{zul} = 0,12$$

$$\lambda = l_2/l_3 = 0,05$$

$$J_S/J_M = 5; 10; 20$$

$$F_0 l_2 / (J_M \Omega^2) = 60$$

$$m_4 l_2^2 / J_M = 0,65$$

$$x_4 \approx l_3 + l_2 \left(\cos \varphi_2 + \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi_2 \right) \quad (2.280)$$

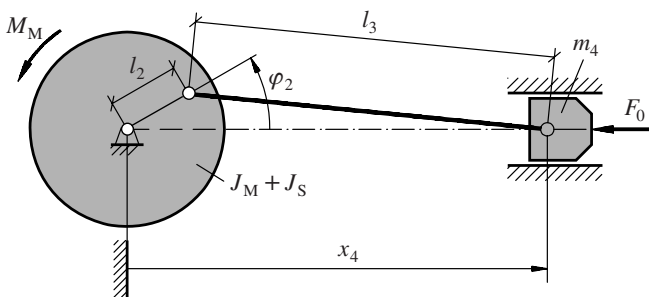


Bild 2.29 Bezeichnungen am Pressengetriebe

Gesucht:

1. Reduziertes Trägheitsmoment $J_{red}(\varphi_2)$
2. Motormoment

3. mittleres Antriebsmoment M_{Mm} für stationären Betrieb
4. Verlauf der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_2(\varphi_2)$ als Funktion des Verhältnisses J_S/J_M bei konstantem mittleren Antriebsmoment M_{Mm}
5. Einfluss der Verhältnisse J_S/J_M und $R_0 l_2/(J_M \omega^2)$ auf den Ungleichförmigkeitsgrad.

Die Ergebnisse sollen für den stationären Zustand für eine Periode ($0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$) ermittelt und im Bereich $-\pi/2 < \varphi_2 < 3\pi$ grafisch dargestellt werden.

2.4.7

Lösungen L2.5 bis L2.8

- L2.5** Es handelt sich um ein gleichmäßig übersetzendes Getriebe ($J' = 0$). Damit folgt das Antriebsmoment aus Gl. (2.221) zu

$$M_{an} = J\ddot{\varphi}_2 = (J_A + J_O)\ddot{\varphi}_2 \quad (2.281)$$

Gemäß Gl. (2.217) gilt zwischen Antriebsmoment und Moment an der Schwenkachse die Beziehung $M_{an} = M_6\varphi'_6 = M_6u_{26} = M_6u_{24}u_{46}$. Das auf die Motorwelle reduzierte Trägheitsmoment des Antriebs ist, vgl. Gln. (2.211) und (2.225):

$$J_A = J_2 + J_3 + J_4u_{24}^2 + J_5u_{25}^2 = J_2 + J_3 + \frac{J_4}{u_{42}^2} + \frac{J_5}{u_{42}^2u_{54}^2} = 3,26 \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (2.282)$$

Das auf die Motorwelle reduzierte Trägheitsmoment des Oberbaus ist

$$J_O = \frac{J_6 + m_7l_7^2 + m_8l_8^2}{u_{42}^2u_{64}^2} = \frac{1055 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{627^2 \cdot 36,2^2} = 2,05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (2.283)$$

Wie die genannten Zahlenwerte zeigen, ist das reduzierte Trägheitsmoment des Antriebssystems wegen des großen Übersetzungsverhältnisses größer (und hat damit einen größeren Einfluss auf das Anlaufverhalten) als das des gesamten Oberbaus mit seinen riesigen Massen. Das Antriebsmoment des Motors ist daher mit $\ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_6u_{42}u_{64} = 15,89 \text{ rad/s}^2$ gleich

$$\underline{M_{an}} = J\ddot{\varphi}_2 = (3,26 + 2,05) \cdot 15,89 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = \underline{\underline{84,37 \text{ N} \cdot \text{m}}}. \quad (2.284)$$

Das Moment an der Schwenkachse ist

$$\underline{M_6} = u_{42} \cdot u_{64} M_{an} = 22\,665 \cdot 84,37 \text{ N} \cdot \text{m} = \underline{\underline{1,915 \text{ MN} \cdot \text{m}}}. \quad (2.285)$$

- L2.6** Für das Schubkurbelgetriebe ergeben sich nach kurzer Rechnung die in der ersten Spalte von Tabelle 2.1 angegebenen exakten Koordinaten aufgrund einfacher geometrischer Beziehungen.

In der zweiten und dritten Spalte sind die Werte angegeben, die sich für $\lambda = l_2/l_3 < 1$ durch eine Reihenentwicklung ergeben.

Das reduzierte Trägheitsmoment erhält man gemäß Gl. (2.211) zu

$$J(\varphi_2) = m_2(x_{S2}'^2 + y_{S2}'^2) + J_{S2}\varphi_2'^2 + m_3(x_{S3}'^2 + y_{S3}'^2) + J_{S3}\varphi_3'^2 + m_4x_{S4}'^2. \quad (2.286)$$

Berücksichtigt man nur Terme bis zur 2. Potenz von λ , so folgt mit den Werten aus der dritten Spalte von Tabelle 2.1

$$\begin{aligned} J(\varphi_2) = & m_2\xi_{S2}^2 + J_{S2} + m_3l_2^2 \left\{ 1 + \left[-2\frac{\xi_{S3}}{l_3} + \left(\frac{\xi_{S3}}{l_3} \right)^2 \right] \cos^2 \varphi_2 + \dots \right\} \\ & + J_{S3}\lambda^2 \cos^2 \varphi_2 + m_4l_2^2 \sin^2 \varphi_2 (1 + \lambda \cos \varphi_2)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.287)$$

Tabelle 2.1 Lagefunktionen des Schubkurbelgetriebes, vgl. Bild 2.27

Lagefunktion nullter Ordnung		Lagefunktion erster
exakt	Näherung für $\lambda = l_2/l_3 \ll 1$	Ordnung ($\lambda \ll 1$)
$x_{S2} = \xi_{S2} \cos \varphi_2$	$x_{S2} = \xi_{S2} \cos \varphi_2$	$x'_{S2} = -\xi_{S2} \sin \varphi_2$
$y_{S2} = \xi_{S2} \sin \varphi_2$	$y_{S2} = \xi_{S2} \sin \varphi_2$	$y'_{S2} = \xi_{S2} \cos \varphi_2$
$x_{S3} = l_2 \cos \varphi_2$ $+ \xi_{S3} \cos \varphi_3$	$x_{S3} = l_2 \cos \varphi_2$ $+ \xi_{S3} (1 - \lambda^2/4)$ $+ \xi_{S3} (\lambda^2/4) \cos 2\varphi_2$	$x'_{S3} = -l_2 \sin \varphi_2$ $- \xi_{S3} (\lambda^2/2) \sin 2\varphi_2$
$y_{S3} = l_2 \sin \varphi_2$ $+ \xi_{S3} \sin \varphi_3$	$y_{S3} = (l_2 - \xi_{S3} \lambda) \sin \varphi_2$	$y'_{S3} = (l_2 - \xi_{S3} \lambda) \cos \varphi_2$
$x_4 = x_{S4} = l_2 \cos \varphi_2$ $+ l_3 \cos \varphi_3$	$x_{S4} = l_2 \cos \varphi_2$ $+ l_3 (1 - \lambda^2/4)$ $+ l_2 (\lambda/4) \cos 2\varphi_2$	$x'_{S4} = -l_2 \sin \varphi_2$ $- l_2 (\lambda/2) \sin 2\varphi_2$
$\varphi_3 = \arcsin(-\lambda \sin \varphi_2)$	$\varphi_3 = -(\lambda + \lambda^3/8) \sin \varphi_2$ $+ (\lambda^3/24) \sin 3\varphi_2$	$\varphi'_3 = -(\lambda + \lambda^3/8) \cos \varphi_2$ $+ (\lambda^3/8) \cos 3\varphi_2$

Man erkennt daraus, dass der Einfluss des Pleuelträgheitsmomentes J_{S3} gering ist, da das Kurbelverhältnis im Quadrat steht. Es liegt also nahe, diesen Term genauso wie alle anderen Terme mit höheren λ -Potenzen zu vernachlässigen. Es erfolgt eine Aufteilung von m_3 in zwei Ersatzmassen m_{32} und m_{34} am Kurbel- und Pleuellagerbolzen, sodass Masse und Schwerpunktlage erhalten bleiben (Bild 2.30). Es gilt:

$$m_{32} + m_{34} = m_3, \quad m_{34}(l_3 - \xi_{S3}) = m_{32}\xi_{S3}. \quad (2.288)$$

Daraus folgen die beiden Ersatzmassen

$$m_{34} = m_3 \frac{\xi_{S3}}{l_3}, \quad m_{32} = m_3 \left(1 - \frac{\xi_{S3}}{l_3}\right). \quad (2.289)$$

Das reduzierte Trägheitsmoment lässt sich damit unter Verwendung von

$$J_A = J_{S2} + m_2 \xi_{S2}^2 \quad (2.290)$$

angeben:

$$\underline{J(\varphi_2)} = J_A + m_{32}l_2^2 + (m_4 + m_{34})l_2^2 \sin^2 \varphi_2 (1 + 2\lambda \cos \varphi_2 + \dots). \quad (2.291)$$

Es setzt sich aus einem konstanten und einem winkelabhängigen Anteil zusammen: $J(\varphi_2) = J_m + J_1(\varphi_2)$. Unter der Voraussetzung $J_m > J_{1\max}$, die bei Kolbenmotoren meist erfüllt ist, kann man den Mittelwert bilden. Es gilt

$$\underline{J_m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J(\varphi_2) d\varphi_2 = J_A + m_{32}l_2^2 + \frac{1}{2} (m_4 + m_{34}) l_2^2. \quad (2.292)$$

Damit sich die Pleuelwelle mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_2 = \Omega$ dreht, muss an ihr ein veränderliches Antriebsmoment angreifen. Setzt man $J(\varphi_2)$ in (2.221) ein, so ergibt sich:

$$\underline{M_{an}} = (m_4 + m_{34})l_2^2 \Omega^2 \left[-\frac{1}{4} \lambda \sin \Omega t + \frac{1}{2} \sin 2\Omega t + \frac{3}{4} \lambda \sin 3\Omega t \right] + F_4 x'_4. \quad (2.293)$$

Ein kleineres Antriebsmoment würde auftreten, wenn man keine konstante Drehzahl $\dot{\varphi}_2 = \Omega$ erzwingt, sondern Drehzahlschwankungen um den Mittelwert zulässt.

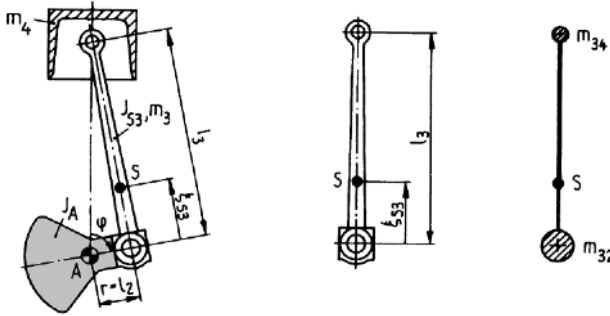


Bild 2.30 Aufteilung der Pleuellmasse auf zwei Ersatzmassen

L2.7 Es wird zunächst das auf φ_1 reduzierte Trägheitsmoment gemäß (2.211) bestimmt:

$$\begin{aligned} J(\varphi_1) &= J_M + J_{S1} + J_G + u_{12}^2(J_{S2} + J_0 + J_1 \sin 2\varphi) \\ J(\varphi_1) &= J_m + u_{12}^2 J_1 \sin 2\varphi; \quad u_{12} = 1/u_{21} \end{aligned} \quad (2.294)$$

Da $J_1 \ll J_0$, gilt auch $u_{12}^2 J_1 \ll J_m$; $\Delta J = u_{12}^2 J_1$, vgl. (2.261). Mit (2.263) kann in erster Näherung für den Leerlauf gesetzt werden:

$$J_m = \frac{\Delta J}{\delta_{zul}} = J_M + J_{S1} + J_G + u_{12}^2(J_{S2} + J_0). \quad (2.295)$$

Damit findet man für das Schwungrad auf der schnell laufenden Welle J_{S1} ($J_{S2} = 0$):

$$J_{S1} = u_{12}^2 \left(\frac{J_1}{\delta_{zul}} - J_0 \right) - (J_M + J_G) \quad (2.296)$$

und für das Schwungrad auf der langsamlaufenden Welle J_{S2} ($J_{S1} = 0$):

$$J_{S2} = \left(\frac{J_1}{\delta_{zul}} - J_0 \right) - \frac{1}{u_{12}^2} (J_M + J_G); \quad J_{S2} = \frac{J_{S1}}{u_{12}^2} = J_{S1} u_{21}^2 > J_{S1}. \quad (2.297)$$

L2.8 Das reduzierte Trägheitsmoment ergibt sich aus (2.287) zu

$$J_{red} = J_M + J_S + m_4 (x'_4)^2 \quad (2.298)$$

$$J_{red} \approx J_M + J_S + m_4 l_2^2 \sin^2 \varphi_2 (1 + \lambda \cos \varphi_2)^2. \quad (2.299)$$

Dabei wurde, ausgehend von (2.280)

$$\frac{dx_4}{d\varphi_2} = x'_4 \approx -l_2 \left(\sin \varphi_2 + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi_2 \right) \quad (2.300)$$

eingesetzt. Statisch betrachtet (z. B. bei extrem langsamen Lauf der Maschine), müsste das Antriebsmoment so groß sein, dass es die Umformkraft ($F_4 = -F_0$) überwindet. Es beträgt entsprechend (2.166):

$$\underline{\underline{M_{st}}} = -F_4 x'_4 \approx \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi - \varphi^* \\ -F_0 l_2 \left(\sin \varphi_2 + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi_2 \right) & \text{für } 2\pi - \varphi^* \leq \varphi_2 \leq 2\pi \end{cases} \quad (2.301)$$

Der Maximalwert tritt hierbei zu Beginn der Belastung ($\varphi_2 = 2\pi - \varphi^*$) durch die Presskraft auf:

$$M_{st \max} = F_0 l_2 \left(\sin \varphi^* + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi^* \right) = 0,271 F_0 l_2. \quad (2.302)$$

Die Arbeit der technologischen Kraft muss vom Antriebsmotor aufgebracht werden. Es folgt aus der Energiebilanz für eine Periode der Mittelwert des Antriebsmoments aus

$$\begin{aligned} W &= 2\pi M_{Mm} = \int_0^{2\pi} M_{st} d\varphi_2 = - \int_{2\pi - \varphi^*}^{2\pi} F_0 l_2 \left(\sin \varphi_2 + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi_2 \right) d\varphi_2 \\ &= F_0 l_2 \left[1 - \cos \varphi^* + \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\varphi^*) \right] \\ &= 2\pi \varkappa F_0 l_2 = 0,03575 F_0 l_2 \end{aligned} \quad (2.303)$$

mit

$$\varkappa = \frac{1 - \cos \varphi^* + \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\varphi^*)}{2\pi}. \quad (2.304)$$

Der Mittelwert

$$\underline{\underline{M_{Mm}}} = \varkappa F_0 l_2 = 0,00569 F_0 l_2 \quad (2.305)$$

ist also bedeutend kleiner als der bei statischer Betrachtungsweise auftretende Maximalwert in (2.302). Wenn man davon ausgeht, dass die in dem kleinen Winkelbereich $2\pi - \varphi^* \leq \varphi_2 \leq 2\pi$ zu verrichtende Umformarbeit im stationären Betrieb durch dieses mittlere (und damit konstante) Antriebsmoment im gesamten Winkelbereich $0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$ aufgebracht werden kann, so folgt für das auf den Antrieb bezogene resultierende Moment

$$Q(\varphi_2) = \begin{cases} M_{Mm} & \text{für } 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi - \varphi^* \\ M_{Mm} - F_0 x'_4(\varphi_2) & \text{für } 2\pi - \varphi^* \leq \varphi_2 \leq 2\pi \end{cases} \quad (2.306)$$

Aus Gl. (2.253) ist der Verlauf der Winkelgeschwindigkeit als Funktion des Kurbelwinkels in den beiden Bereichen berechenbar:

$$J_{red}(\varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2^2 - J_{red}(\varphi_2 = 0) \cdot \Omega^2 = 2 \int_0^{\varphi_2} Q(\bar{\varphi}_2) d\bar{\varphi}_2 \quad (2.307)$$

$$= 2 \cdot \begin{cases} M_{Mm} \varphi_2 & \text{für } 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi - \varphi^* \\ M_{Mm} \varphi_2 - \int_{2\pi - \varphi^*}^{\varphi_2} F_0 x'_4(\bar{\varphi}_2) d\bar{\varphi}_2 & \text{für } 2\pi - \varphi^* \leq \varphi_2 \leq 2\pi. \end{cases} \quad (2.308)$$

Daraus folgt mit $J_{\text{red}}(\varphi_2 = 0) = J_S + J_M$ aus (2.299) und M_{Mm} aus (2.305) für das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi}_2^2(\varphi_2) = \frac{J_M \Omega^2}{J_{\text{red}}(\varphi_2)} \begin{cases} 1 + \frac{J_S}{J_M} + 2\kappa \frac{F_0 l_2}{J_M \Omega^2} \cdot \varphi_2 & \text{für } 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi - \varphi^* \\ 1 + \frac{J_S}{J_M} + 2 \frac{F_0 l_2}{J_M \Omega^2} \cdot g(\varphi_2) & \text{für } 2\pi - \varphi^* \leq \varphi_2 \leq 2\pi. \end{cases} \quad (2.309)$$

mit

$$g(\varphi_2) = \kappa \cdot (\varphi_2 - 2\pi) + 1 - \cos \varphi_2 + \frac{\lambda}{4} (1 - \cos 2\varphi_2). \quad (2.310)$$

In Bild 2.31 sind für drei Werte des Verhältnisses J_S/J_M die Verläufe der Winkelgeschwindigkeit über fast zwei Perioden im Vergleich zum Verlauf des statischen Antriebsmomentes dargestellt. Die Schwankung der Winkelgeschwindigkeit hat zwei Ursachen: Das veränderliche reduzierte Trägheitsmoment (siehe Bereich $0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi - \varphi^*$) und die Umformkraft. In der Decklage ($\varphi_2 = \pi$) und Strecklage ($\varphi_2 = 2\pi$) des Schubkurbelgetriebes bewegt sich die Masse m_4 nicht, sodass das reduzierte Trägheitsmoment ein Minimum hat und die Winkelgeschwindigkeit dort ohne Umformkraft ein Maximum hätte. Der starke Drehzahlabfall im Bereich $2\pi - \varphi^* \leq \varphi_2 \leq 2\pi$ wird durch die Umformkraft verursacht.

Die Ergebnisse der Variantenrechnungen nach Bild 2.31 zeigen, dass und wie stark ein größeres Trägheitsmoment des Schwungrads den Ungleichförmigkeitsgrad vermindert.

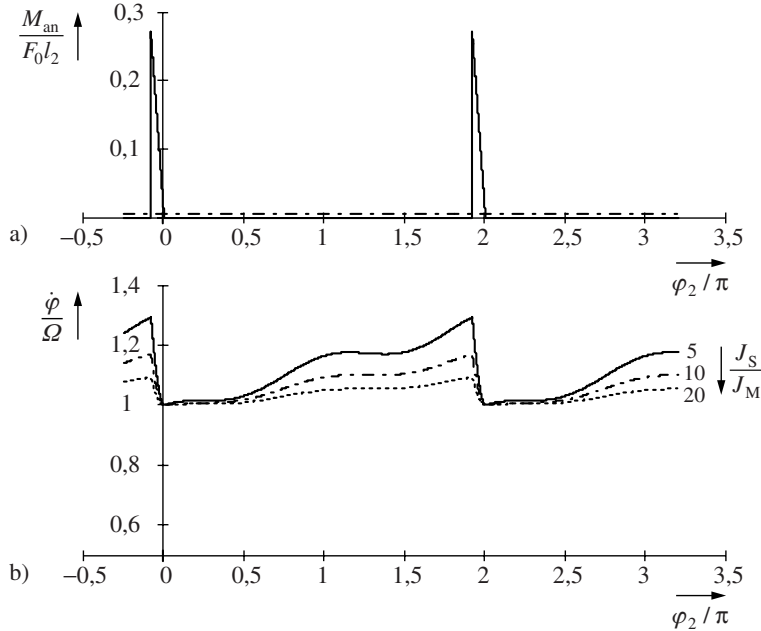


Bild 2.31 Zum Schwungradeinfluss beim Pressengetriebe

a) Statisches Antriebsmoment

b) Winkelgeschwindigkeit bei verschiedenen Trägheitsmomenten

Der Ungleichförmigkeitsgrad ergibt sich laut (2.258):

$$\delta = 2 \frac{\dot{\varphi}_{2 \max} - \dot{\varphi}_{2 \min}}{\dot{\varphi}_{2 \max} + \dot{\varphi}_{2 \min}} \quad (2.311)$$

Die Extremwerte der Winkelgeschwindigkeit ergeben sich aus (2.309):

$$\varphi_2 = 0: \quad \dot{\varphi}_{2 \min} = \Omega \quad (2.312)$$

$$\varphi_2 = 2\pi - \varphi^*: \quad \dot{\varphi}_{2 \max}^2 = \Omega^2 \frac{1 + \frac{J_S}{J_M} + \frac{2\kappa F_0 l_2}{J_M \Omega^2} (2\pi - \varphi^*)}{1 + \frac{J_S}{J_M} + \frac{m_4 l_2^2}{J_M} \sin^2 \varphi^* (1 + \lambda \cos \varphi^*)^2} \quad (2.313)$$

Hierbei wurde das reduzierte Trägheitsmoment aus (2.299) eingesetzt. Damit ergibt sich eine Funktion, die in Bild 2.32 dargestellt ist. Man kann daraus entnehmen, für welche Parameter der zulässige Ungleichförmigkeitsgrad erreicht wird.

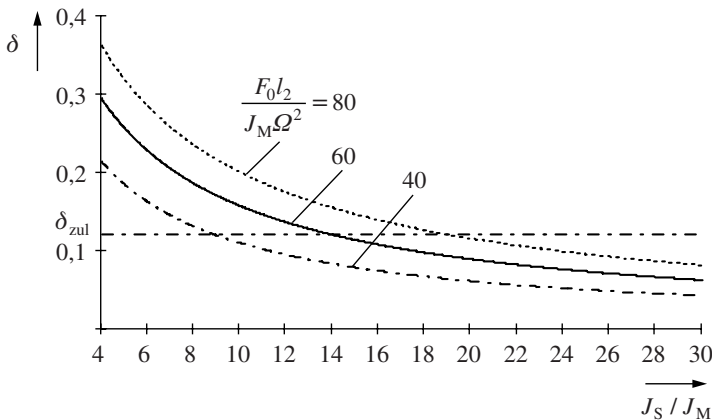


Bild 2.32 Abhängigkeit des Ungleichförmigkeitsgrades von Kenngrößen der Umformkraft und Trägheitsmomenten

Derartige Diagramme sind zur Auslegung von Schwungrädern bei solchen Pressen geeignet. Mit den vorliegenden Parameterwerten ergibt sich, dass das Verhältnis $J_S / J_M \approx 9; 14; 19$ oder größer sein muss, damit bei den Parameterwerten $F_0 l_2 / (J_M \Omega^2) = 40; 60$ oder 80 der Ungleichförmigkeitsgrad den zulässigen Wert $\delta_{zul} = 0,12$ nicht überschreitet.

Die vorliegende Lösung zeigt, dass der **mechanische Energiebedarf** unabhängig von der Größe des Schwungrads ist und der Motor nach dem mittleren Moment dimensioniert werden kann. Der Antriebsmotor braucht nicht die große Kraft (bzw. das Moment) aufzubringen, welches der Umformvorgang kurzzeitig benötigt. Er kann die mechanische Energie in einem längeren Zeitbereich in das Schwungrad speisen, sodass er sich im Dauerbetrieb nicht unzulässig erwärmt. Die Motorerwärmung ist dem Quadratmittelwert des Momentes proportional.

Das Antriebsmoment ist von der Drehzahl-Drehmomenten-Kennlinie des Elektromotors abhängig. Ein Motor mit einer „weichen“ Kennlinie ergibt einen relativ größeren Drehzahlabfall als ein Motor mit „harter“ Kennlinie. Im vorliegenden Fall

wurde „ideal weich“ gerechnet, d. h., der Ungleichförmigkeitsgrad wird unter Berücksichtigung der Motorkennlinie kleiner. Wird ein Schwungrad in Verbindung mit einem kleinen Motor eingesetzt, der im Bereich seines besten Wirkungsgrades arbeitet, wird der Motor billiger, und es wird weniger **elektrische Energie** verbraucht, als bei einem größeren Motor. Es wäre unwirtschaftlich, den Antriebsmotor nach der Momentenspitze zu bemessen.

2.5

Gelenkkräfte und Fundamentbelastung

2.5.1

Allgemeine Zusammenhänge

Innerhalb der Maschinen entstehen bei den Bewegungen Massenkräfte, die oft die statischen Kräfte aus dem Eigengewicht der Bauteile bedeutend übersteigen. Die Beschleunigungen der Getriebeglieder betragen häufig das Mehrfache der Fallbeschleunigung, vgl. Tabelle 2.2. Der Konstrukteur benötigt deshalb Methoden, um bei gegebenen Kennwerten von Masseparametern, geometrischen Parametern, äußerem Kraftfeld und Bewegungsablauf $q(t)$ die Lager- und Gelenkkräfte in beliebigen Mechanismen und Maschinen zu bestimmen. Damit können dann die Zahnräder, Bolzen und Lager (Flächenpressung, Deformation, ...), Getriebeglieder (Biegung, Schub, Längskraft, ...) und Fundamente (Schwingungen) ausgelegt werden. Die kinetostatischen Kräfte und Momente, die auf das Gestell wirken, sind für die Schwingungserregung des Fundaments von Bedeutung, vgl. Kapitel 3.

Bei allen Mechanismen, die dem Modell der starren Maschine entsprechen, besteht derselbe allgemeine Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung des Antriebsgliedes und den Gelenkkräften, die durch die Massenkräfte bedingt sind. Dieser wichtige Zusammenhang, der schon in (2.172) gezeigt wurde, gilt unabhängig von der Struktur eines Mechanismus für jede innere Kraftgröße Q_p bei einer Antriebsbewegung $q_1(t)$:

$$F_{\text{kin}} = Q_p(t) = m_{p1}(q_1)\ddot{q}_1(t) + F_{11p}(q_1)\dot{q}_1^2(t). \quad (2.314)$$

Wesentlich ist hierbei die Tatsache, dass jede Gelenkkraft sich aus zwei Termen zusammensetzt, die sich der Beschleunigung und dem Quadrat der Geschwindigkeit des Antriebsgliedes zuordnen lassen. Die Faktoren zu diesen kinematischen Größen sind von der Getriebestellung, den geometrischen Abmessungen und den Masseparametern abhängig.

Aus Gleichung (2.314) kann z. B. geschlossen werden, dass

- bei $\dot{q}_1 = \text{konst.}$ alle Gelenkkräfte mit dem Quadrat der Antriebsdrehzahl zunehmen
- sich die Gelenkkräfte mit dem Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverlauf beeinflussen lassen, z. B. durch gesteuerte oder geregelte Antriebe
- eine wiederholte Berechnung bei verschiedenen Bewegungszuständen vereinfacht werden kann, da der Einfluss von $\dot{q}_1$ und $\dot{q}_1^2$ aus Gl. (2.314) hervorgeht.

Mechanismen mit rotierender Antriebskurbel führen eine periodische Bewegung aus, wobei im allgemeinen keine harmonischen, sondern periodische Erregerkräfte mit Erregerkreisfrequenzen Ω ; 2Ω ; 3Ω ; ... entstehen:

$$F_{\text{kin}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\Omega t + B_k \sin k\Omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\Omega t + \beta_k). \quad (2.315)$$

Die Fourierkoeffizienten A_k und B_k hängen von den Masseparametern ab. Sie sind für einfache Beispiele in der VDI-Richtlinie 2149 Bl. 1 angegeben. Für komplizierte Mechanismen können sie mit bekannter Software für gegebene Masseparameter berechnet werden.

Zur Veranschaulichung des Drehzahleinflusses ist in Bild 2.33 der Verlauf einer Gelenkkraft für drei verschiedene Drehzahlen, die sich wie 1 : 2 : 3 verhalten, dargestellt worden.

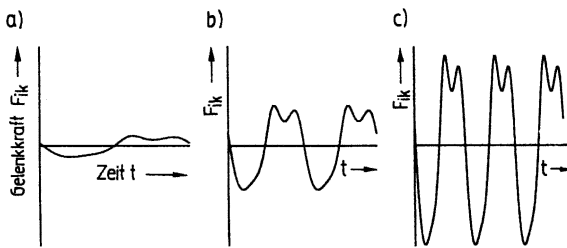


Bild 2.33 Verlauf einer periodischen Gelenkkraft-Komponente bei verschiedenen Drehzahlen; a) 100/min, b) 200/min, c) 300/min

Man beachte, dass sich die Zyklusdauer ($T_0 = 2\pi/\Omega$) **linear** (3 : 2 : 1) verkürzt, aber sich die Maximalkraft **quadratisch** vergrößert (1 : 4 : 9).

2.5.2

Berechnung der Gelenkkräfte

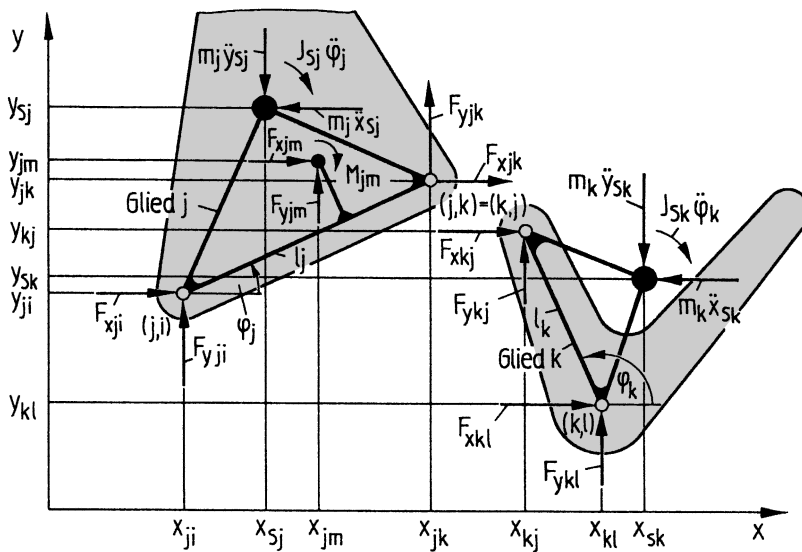
Die dynamischen Belastungen in vielen Maschinen sind bedeutend größer als die statischen, vgl. Tabelle 2.2. Lärm durch Schwingungen der Getriebeglieder und des Gehäuses sowie die Gefahr von Störungen des technologischen Ablaufs sind der Anlass dafür, dass sich die Konstrukteure mit den auftretenden dynamischen Gelenkkräften näher befassen müssen.

Hier soll für den Fall ebener Mechanismen, die sich aus einfachen Gliedergruppen mit Drehgelenken zusammensetzen, eine handliche Methode zur Berechnung der Gelenkkräfte dargestellt werden. Der Algorithmus baut auf Formeln auf, welche jeweils für einen Zweischlag gelten, vgl. auch VDI-Richtlinie 2729.

Die Definition der an einem Getriebeglied wirkenden Kräfte geht aus Bild 2.34 hervor. Man beachte, dass aus Gründen der Systematik, die wiederum den Anforderungen der rechentechnischen Behandlung entgegenkommt, die Komponenten der Kräfte und Momente einheitlich in den angegebenen Richtungen definiert werden. Die Kraft, die auf Glied j von Glied k ausgeübt wird, erhält die Bezeichnung F_{jk}

Tabelle 2.2 Drehzahlen und relative Maximalbeschleunigungen bei einigen Maschinenarten

Maschinenart	Drehzahl n in 1/min	Beschleunigungsverhältnis $a_{\max}/g$
Schneidemaschinen, Pressen	30 ... 100	0,3 ... 3
Webmaschinen	200 ... 600	1,0 ... 10
Wirkmaschinen	1500 ... 3000	15 ... 60
Schiffsdieselmotoren	400 ... 500	70 ... 80
Haushaltnähmaschinen	1000 ... 2000	50 ... 100
Industrienähmaschinen	5000 ... 8000	300 ... 600

**Bild 2.34** Kräfte und Momente an einem Zweischlag

und ihre Komponenten werden entsprechend den Koordinatenrichtungen positiv definiert. Die gleich große und entgegengesetzt gerichtete Gegenkraft erhält die Bezeichnung F_{kj} und wird ebenso definiert. Aus diesem Grund gilt stets

$$F_{xjk} + F_{xkj} = 0, \quad F_{yjk} + F_{ykj} = 0 \quad (2.316)$$

Für den skizzierten Zweischlag seien die Koordinaten der Gelenkpunkte ($x_{ji}, y_{ji}, x_{jk} \equiv x_{kj}, y_{jk} \equiv y_{kj}, x_{kl}, y_{kl}, x_{jm}, y_{jm}$) und der Schwerpunkte ($x_{sj}, y_{sj}, x_{sk}, y_{sk}$) aus einer vorausgegangenen kinematischen Analyse bekannt. Am Gelenkpunkt (j, m) greift die vom benachbarten Getriebeglied m wirkende Gelenkkraft (F_{xjm}, F_{yjm}) und das Moment M_{jm} an. Die Kraftkomponenten sind positiv in Richtung der positiven Koordinatenachsen definiert.

Aus dem Momentengleichgewicht um das Drehgelenk (j, i) und um das Drehgelenk (k, l) ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} -F_{xjk} (y_{jk} - y_{ji}) + F_{yjk} (x_{jk} - x_{ji}) &= F_{xjm} (y_{jm} - y_{ji}) - F_{yjm} (x_{jm} - x_{ji}) \\ &\quad + M_{jm} + m_j \ddot{y}_{sj} (x_{sj} - x_{ji}) \\ &\quad - m_j \ddot{x}_{sj} (y_{sj} - y_{ji}) + J_{sj} \ddot{\phi}_j \end{aligned} \quad (2.317)$$

$$\begin{aligned} -F_{xkj} (y_{kj} - y_{kl}) + F_{ykj} (x_{kj} - x_{kl}) &= m_k \ddot{y}_{sk} (x_{sk} - x_{kl}) \\ &\quad - m_k \ddot{x}_{sk} (y_{sk} - y_{kl}) + J_{sk} \ddot{\phi}_k \end{aligned} \quad (2.318)$$

Mit (2.316) bis (2.318) kann man die vier Unbekannten F_{xjk} , F_{xkj} , F_{yjk} und F_{ykj} berechnen.

Beachtet man das Kräftegleichgewicht in horizontaler und vertikaler Richtung, so kann man die weiteren interessierenden Gelenkkraftkomponenten bestimmen:

$$\begin{aligned} F_{xji} &= m_j \ddot{x}_{sj} - F_{xjk} - F_{xjm}, & F_{yji} &= m_j \ddot{y}_{sj} - F_{yjk} - F_{yjm} \\ F_{xkl} &= m_k \ddot{x}_{sk} - F_{xki}, & F_{ykl} &= m_k \ddot{y}_{sk} - F_{ykj} \end{aligned} \quad (2.319)$$

Auf der Zerlegung von mehrgliedrigen Mechanismen in einfache (statisch bestimmte) Gliedergruppen beruhen effektive Algorithmen zur Berechnung der Gelenkkräfte.

Bei ungleichmäßig übersetzenden Mechanismen ändert sich mit der Getriebestellung die kinetische Energie aller bewegten Getriebeglieder. Es findet zwischen den Getriebegliedern über die Gelenkkräfte ein ständiger Austausch von kinetischer Energie statt. Die Arbeit, welche am Gelenk (j, k) von der Gelenkkraft F_{jk} am Glied j verrichtet wird, hat denselben Betrag wie die der Gelenkkraft F_{kj} am Glied k , vgl. Bild 2.34.

Die beiden Kräfte, die aufgrund des Schnittprinzips an der „Schnittstelle Gelenk“ angesetzt wurden, haben das entgegengesetzte Vorzeichen ($F_{kj} = -F_{jk}$). In der Summe ist die Arbeit der Gelenkkraft, die auf die benachbarten Glieder wirkt (actio = reactio), gleich null. Reaktionskräfte verrichten also am Gesamtsystem keine Arbeit.

Nun wird diese Betrachtung auf ein beliebiges Glied i verallgemeinert ($i = 2, 3, \dots, I$). Die mechanische Arbeit, welche die Gelenkkraft F_{ik} an einem (für sich betrachteten und frei geschnittenen) Glied i verrichtet, ist abhängig von dem Weg, den dieses Gelenk bei der Bewegung zurücklegt. Am frei geschnittenen Getriebeglied i , auf das keine eingepprägten Kräfte und Momente wirken, gilt für die Arbeit aller Gelenkkräfte F_{ik} , der Massenkkräfte und der Massenmomente längs differenziell kleiner Wege und Winkel aufgrund des Arbeitssatzes:

$$dW_i = \sum_{k^*} (F_{xik} dx_{ik} + F_{yik} dy_{ik}) - m_i (\ddot{x}_{si} dx_{si} + \ddot{y}_{si} dy_{si}) - J_{si} \ddot{\phi}_i d\phi_i = 0. \quad (2.320)$$

Der Summation (Index k^*) erfolgt über alle mit dem Glied i verbundenen Glieder. Hierbei sind $\dot{x}_{ik}$ und $\dot{y}_{ik}$ die Geschwindigkeitskomponenten des Gelenkpunktes (i, k). Es gilt ebenso:

$$dW_i = \left[\sum_{k^*} (F_{xik} \dot{x}_{ik} + F_{yik} \dot{y}_{ik}) - m_i (\ddot{x}_{si} \dot{x}_{si} + \ddot{y}_{si} \dot{y}_{si}) - J_{si} \ddot{\phi}_i \dot{\phi}_i \right] dt = 0. \quad (2.321)$$

Die kinetische Energie des Gliedes i beträgt, vgl. Gl. (2.209) und (2.210),

$$W_{\text{kin } i} = \frac{1}{2} [m_i(\dot{x}_{Si}^2 + \dot{y}_{Si}^2) + J_{Si}\dot{\phi}_i^2] = \frac{1}{2} J_{\text{red } i}(q)\dot{q}^2. \quad (2.322)$$

Aus (2.321) und (2.322) folgt, dass die zeitliche Ableitung der kinetischen Energie, also die kinetische Leistung der Massenkräfte und -momente, ebenso groß ist wie die Leistung, welche die Gelenkkräfte der Nachbarglieder auf das Glied i übertragen:

$$\begin{aligned} P_{\text{kin } i} &= \frac{W_{\text{kin } i}}{dt} = \sum_{k^*} (F_{xik}\dot{x}_{ik} + F_{yik}\dot{y}_{ik}) \\ &= m_i(\ddot{x}_{Si}\dot{x}_{Si} + \ddot{y}_{Si}\dot{y}_{Si}) + J_{Si}\ddot{\phi}_i\dot{\phi}_i = \frac{1}{2} J_{\text{red } i}(q)\dot{q}^3 + J_{\text{red } i}\dot{q}\ddot{q}. \end{aligned} \quad (2.323)$$

Für eine konstante Antriebsgeschwindigkeit $\dot{q} = \Omega$ gilt für die kinetische Leistung des i -ten Gliedes

$$P_{\text{kin } i} = \frac{1}{2} J_{\text{red } i}(q)\Omega^3. \quad (2.324)$$

Für die Beurteilung des dynamischen Verhaltens eines Mechanismus interessiert auch, welcher Austausch von kinetischer Energie zwischen den Gliedern stattfindet. Die kinetische Leistung am Glied i ist ein Maß dafür, wie sich die Gelenkkräfte F_{ik} ändern. Interessant ist neben J_{red} deshalb auch der Verlauf des Anteils jedes einzelnen Gliedes, also die Summanden $J_{\text{red } i}(q)$ und deren Ableitungen, vgl. Bild 2.37b.

2.5.3

Berechnung der auf das Gestell wirkenden Kraftgrößen

Von großer praktischer Bedeutung ist die Kenntnis der von einer Maschine auf das Gestell übertragenen dynamischen Erregerkräfte und -momente, da diese den Baugrund oder die Gebäude zu störenden Schwingungen anregen können. Die damit im Zusammenhang stehenden Probleme der Maschinenfundamentierung und der Schwingungsisolierung werden in Kapitel 3 näher behandelt.

In Verbindung mit der Schwingungsberechnung der Fundamente interessiert nicht nur der Maximalwert der von der Maschine abgeleiteten periodischen Kräfte und Momente, sondern auch die Größe der einzelnen Fourierkoeffizienten, vgl. 3.2.1.3. Von den Massenkräften sind bei vielgliedrigen Mechanismen auch die höheren Harmonischen von Bedeutung. Oft besteht die Aufgabe, die auf das Fundament übertragenen Massenkräfte bzw. bestimmte Erreger-Harmonische so klein wie möglich zu halten. Die diesbezüglichen Methoden des Massenausgleichs von Mechanismen und des Auswuchtens von Rotoren werden in 2.6 behandelt.

Es wird ein beliebiges mehrgliedriges Getriebe betrachtet, dessen Glieder sich in parallelen Ebenen bewegen, die in z -Richtung versetzt sein können, vgl. z. B. Bild 2.35. Es interessieren die resultierenden Kräfte und Momente, die von den bewegten Maschinenteilen über das Maschinengestell auf das Fundament wirken.

Innere statische und kinetostatische Kräfte und Momente der Maschine, wie Federkräfte zwischen einzelnen Getriebegliedern, technologische Kräfte (z. B. Schneid- und Presskräfte in Umformmaschinen und polygrafischen Maschinen, Gaskräfte in

Die resultierenden Gestellkräfte lassen sich demnach aus der Beschleunigung des Gesamtschwerpunktes berechnen. Daraus folgt, dass diese Kräfte nur von der Bewegung des Gesamtschwerpunktes und der Gesamtmasse der Getriebeglieder abhängen. Falls der Gesamtschwerpunkt während der Bewegung in Ruhe bleibt, ist die Resultierende der Gestellkräfte identisch null. Die einzelnen Lagerkräfte haben dabei jedoch endliche Werte, und es verbleibt auch meist ein resultierendes Moment M_z , vgl. auch Abschnitt 2.6.3.

Die kinetischen Momente sind, vgl. Bild 2.36 und (2.98):

$$\begin{aligned}
 M_{\text{kin } x}^O &\equiv \sum_{i=2}^I [m_i z_{Si} \ddot{y}_{Si} + (J_{\eta \zeta i}^S \ddot{\varphi}_i + J_{\xi \zeta i}^S \dot{\varphi}_i^2) \sin \varphi_i - (J_{\xi \zeta i}^S \ddot{\varphi}_i - J_{\eta \zeta i}^S \dot{\varphi}_i^2) \cos \varphi_i] \\
 M_{\text{kin } y}^O &\equiv - \sum_{i=2}^I [m_i z_{Si} \ddot{x}_{Si} + (J_{\eta \zeta i}^S \ddot{\varphi}_i + J_{\xi \zeta i}^S \dot{\varphi}_i^2) \cos \varphi_i + (J_{\xi \zeta i}^S \ddot{\varphi}_i - J_{\eta \zeta i}^S \dot{\varphi}_i^2) \sin \varphi_i] \\
 M_{\text{kin } z}^O &\equiv \sum_{i=2}^I [m_i (y_{Si} \ddot{x}_{Si} - x_{Si} \ddot{y}_{Si}) - J_{Si} \ddot{\varphi}_i] \quad (2.328)
 \end{aligned}$$

Man hat zu beachten, dass sie von der Lage des Koordinatensystems relativ zur Maschine abhängen. Es empfiehlt sich, bei der Behandlung von Fundamentierungsfragen als Ursprung O des Koordinatensystems den Schwerpunkt des Fundamentblockes zu wählen, auf dem der Mechanismus angeordnet ist, vgl. die Bilder 3.6 und 3.8.

Die auf das Gestell wirkenden Kraftgrößen lassen sich selbstverständlich auch aus der Überlagerung aller Gelenkkräfte berechnen, die auf das Gestell wirken. Dieser Weg ist aber umständlich, da er die Berechnung der inneren Gelenkkräfte verlangt.

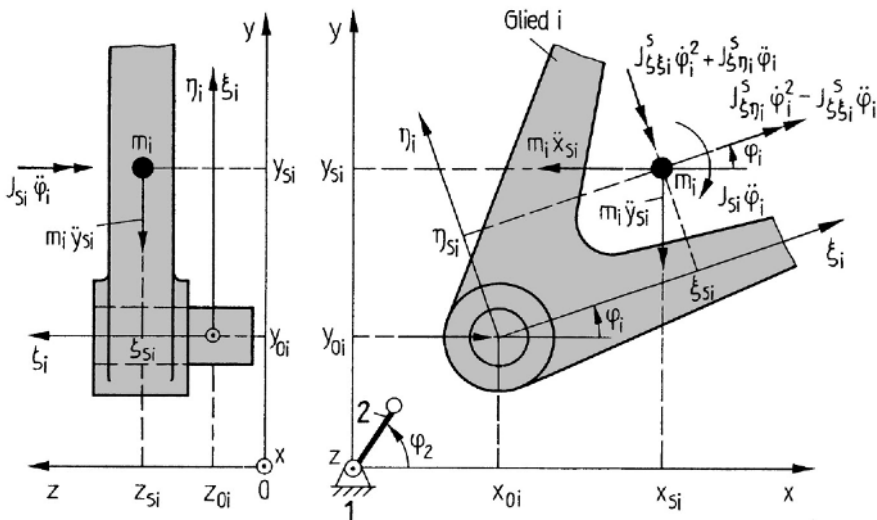


Bild 2.36 Massenkräfte und -momente an einem Getriebeglied im raumfesten und körperfesten Bezugssystem

2.5.4

Gelenkkräfte im Koppelgetriebe einer Verarbeitungsmaschine

Dank der Software zur dynamischen Analyse und Optimierung von Koppelgetrieben kann der Konstrukteur sich einen genauen Überblick über die Gelenkkraft-Verläufe komplizierter Mechanismen verschaffen. Den größten Aufwand erfordert dabei die Zusammenstellung aller Daten aus den Konstruktionsunterlagen, z. B. der Masseparameter der Getriebeglieder.

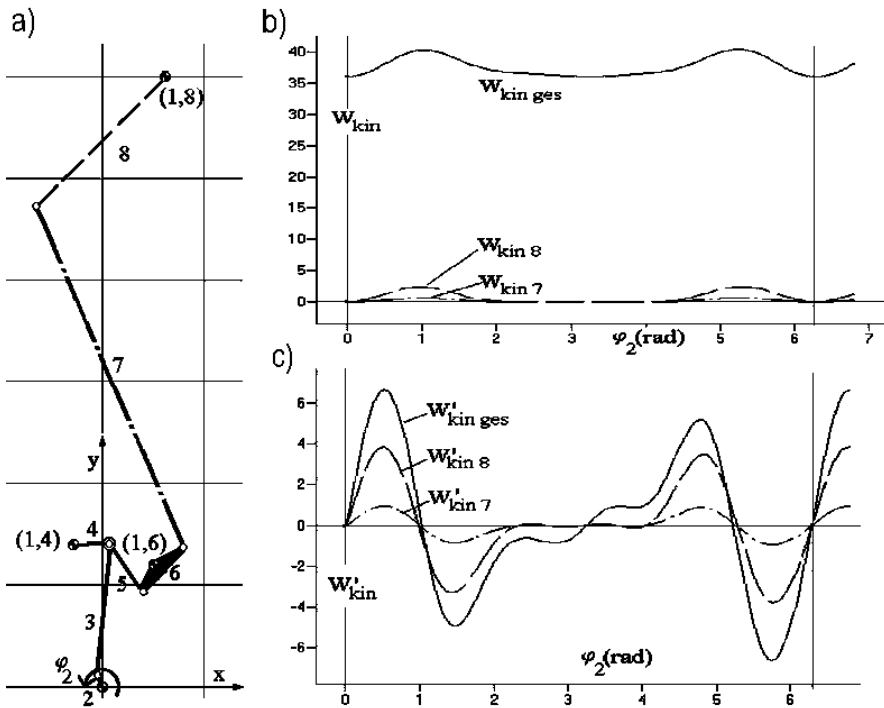


Bild 2.37 Koppelgetriebe einer Verarbeitungsmaschine

a) Kinematisches Schema

b) Kinetische Energie und Anteile der Glieder 7 und 8, vgl. (2.323)

c) Kinetische Leistungen der Glieder 7 und 8 gemäß Gl. (2.324)

Für das in Bild 2.37a dargestellte achtgliedrige Koppelgetriebe ist in Bild 2.37b das reduzierte Trägheitsmoment (kinetische Energie) und in Bild 2.37c die kinetische Leistung des gesamten Mechanismus im Vergleich mit zwei einzelnen Getriebegliedern dargestellt. Man sieht aus diesen Verläufen, dass die Glieder 7 und 8 die Schwankungen des Trägheitsmoments hervorrufen und im Wesentlichen für die Änderung der kinetischen Leistung verantwortlich sind. Schon aus dieser Betrachtung folgt, dass sich deren Gelenkkräfte stark ändern müssen, vgl. dazu Abschnitt 2.5.2. In Bild 2.38 sind die berechneten Gelenkkräfte für drei Lager dargestellt.

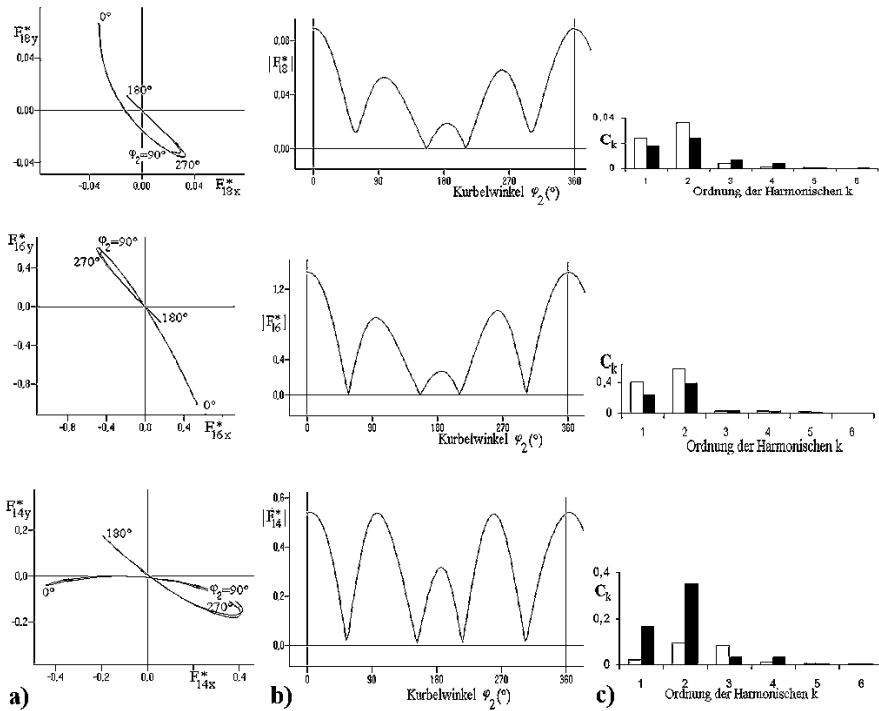


Bild 2.38 Periodische Gelenkkräfte im Koppelgetriebe gemäß Bild 2.37a

a) Polardiagramme der Gelenkkräfte F_{14} , F_{16} und F_{18}

b) Betrag der Gelenkkräfte F_{14} , F_{16} , und F_{18} als Funktion des Kurbelwinkels $q = \Omega t$

c) Erregerspektrum (Fourierkoeffizienten der Gelenkkräfte)

Sowohl die Darstellung der Kräfte mit ihren Wirkungsrichtungen (Bild 2.38a), als auch des zeitlichen Verlaufs der resultierenden Kraft (Bild 2.38b) besitzt praktisches Interesse. Die Analyse des Verlaufs dieser Kräfte erlaubt, Aussagen über die dynamischen Belastungen in den Gelenkbolzen (damit über Reibung, Schmierung und Verschleiß des Lagers) und über die auftretenden Schwingungserregungen zu treffen. Durch Vergleich mit experimentell ermittelten Werten kann auch über die Zulässigkeit des benutzten Berechnungsmodells („starre Maschine“) entschieden werden.

Zur Beurteilung der Gelenkkräfte (Bild 2.38) sind auch die Fourierkoeffizienten von Interesse, vgl. (2.315). Sie kennzeichnen die periodische Erregung und sind für die Berechnung der erzwungenen Schwingungen erforderlich, vgl. Abschnitt 3.2 und 6.6.4. Wie man aus Bild 2.38c erkennen kann, haben die höheren Harmonischen eine wesentliche Bedeutung.

Weichen gemessene Verläufe deutlich von dem berechneten ab, was in der Praxis oft zu beobachten ist, so kann man aus der Differenz zwischen realen und kinetostatischen Verläufen auf die Schwingungsursachen schließen, vgl. VDI-Richtlinie 2149 Bl. 2.

2.5.5

Aufgaben A2.9 und A2.10

A2.9 Parametereinflüsse auf Gelenkkräfte

Es ist möglich, mit Computerprogrammen die Gelenkkräfte in beliebigen Starrkörper-Mechanismen zu berechnen. Gelegentlich gibt es das Problem, die Ergebnisse solcher Berechnungen zu kontrollieren. Mithilfe der allgemeinen Zusammenhänge können solche Kontrollen und Plausibilitätsbetrachtungen angestellt werden.

Es wird ein beliebiger Mechanismus unter der Annahme betrachtet, dass alle seine Getriebeglieder aus geraden zylindrischen starren Stäben aus gleichem Material bestehen und die Lagerabmessungen in den Gelenken einen vernachlässigbar kleinen Einfluss auf die Masseparameter haben. Wie verlaufen die massebedingten Gelenkkräfte, wenn die bisherigen Querschnittsflächen A_i aller Glieder um den gleichen Faktor $\varkappa$ und die Drehzahl um den Faktor $\varkappa_n$ verändert werden?

Gegeben: Alle geometrischen und kinematischen Abmessungen

1. Faktor $\varkappa$, um den alle Querschnittsflächen verändert werden ($A_i^* = \varkappa A_i$)
2. Faktor $\varkappa_n$, um den die Drehzahl verändert wird ($n^* = \varkappa_n n$)

Gesucht: Einfluss der Faktoren $\varkappa$ und $\varkappa_n$ auf alle Gelenkkräfte

A2.10 Günstiger Abstand des Kraftangriffspunktes

Bei der Wahl kinematischer Abmessungen und der Masseparameter gibt es gewisse Freiheiten, die genutzt werden können, um kinetische Belastungen zu vermindern.

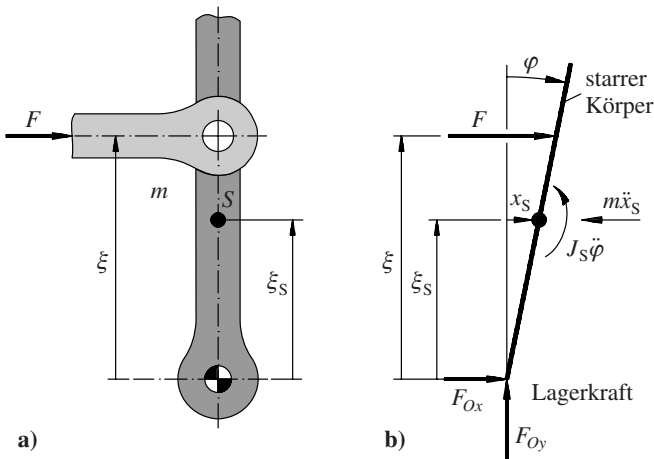


Bild 2.39 Koppelkraft am Abtriebsglied

a) Skizze des Getriebegliedes, b) Kraftgrößen am frei geschnittenen Körper für $|\varphi| \ll 1$

Bild 2.39a zeigt das Abtriebsglied eines Koppelgetriebes, das im Gestell drehbar gelagert ist. Es wird durch die Koppelkraft angetrieben, sodass die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ auftritt. Für kleine Winkel $|\varphi| \ll 1$ soll die horizontale Komponente der Lagerkraft

berechnet und angegeben werden, bei welchen Parameterwerten diese Lagerkraftkomponente null wird.

Gegeben:

Masse	m
Schwerpunktsabstand	ξ_S
Trägheitsmoment	J_S
Koppelkraft	F

Gesucht:

Horizontalkraft	F_{Ox}
Lagerabstand	ξ , bei dem die Horizontalkraft null wird.

2.5.6

Lösungen L2.9 und L2.10

L2.9 Die Massen und Trägheitsmomente der schlanken stabförmigen Glieder mit den Längen l_i ergeben sich aus

$$m_i = \varrho A_i l_i; \quad J_{Si} = \frac{m_i l_i^2}{12}; \quad i = 2, 3, \dots, I. \quad (2.329)$$

Die veränderten Parameter werden mit dem Symbol * versehen. Werden die Querschnitte aller Glieder im gleichen Maßstab vergrößert oder verkleinert, so gilt für die veränderten Masseparameter wegen $A_i^* = \varkappa A_i$

$$m_i^* = \varrho A_i^* l_i = \varrho \varkappa A_i l_i = \varkappa m_i; \quad J_{Si}^* = \frac{m_i^* l_i^2}{12} = \varkappa J_{Si}; \quad i = 2, 3, \dots, I. \quad (2.330)$$

Die Schwerpunktkoordinaten bleiben sowohl in den Körpern als auch in x - und y -Richtung erhalten. Eine beliebige Gelenkkraft (Kraftgröße F in beliebiger Richtung q) ergibt sich bei Starrkörper-Mechanismen bei Abwesenheit eingepprägter Kraftgrößen gemäß (2.172) oder (2.314) zu

$$m_{21} \ddot{q}(t) + \left(m_{12,1} - \frac{1}{2} m_{11,2} \right) \dot{q}^2(t) = F(t). \quad (2.331)$$

Die verallgemeinerten Massen sind von den Massen und Trägheitsmomenten linear abhängig, denn es gilt für ebene Mechanismen laut (2.162)

$$m_{kl}(q) = \sum_{i=2}^I [m_i (x_{Si,k} x_{Si,l} + y_{Si,k} y_{Si,l}) + J_{Si} \varphi_{i,k} \varphi_{i,l}] \quad (2.332)$$

und somit auch wegen (2.330)

$$m_{kl}^*(q) = \sum_{i=2}^I [m_i^* (x_{Si,k} x_{Si,l} + y_{Si,k} y_{Si,l}) + J_{Si}^* \varphi_{i,k} \varphi_{i,l}] = \varkappa m_{kl}(q). \quad (2.333)$$

Damit ergibt sich der zeitliche Verlauf einer Gelenkkraft bei veränderten Querschnittsflächen:

$$\begin{aligned} F^*(t) &= m_{21}^* \ddot{q}(t) + \left(m_{12,1}^* - \frac{1}{2} m_{11,2}^* \right) \dot{q}^2(t) = \\ &= \varkappa \left[m_{21} \ddot{q}(t) + \left(m_{12,1} - \frac{1}{2} m_{11,2} \right) \dot{q}^2(t) \right] = \varkappa F(t). \end{aligned} \quad (2.334)$$

Erstes Ergebnis:

Alle Gelenkkräfte ändern sich um denselben Faktor $\varkappa$. Werden z. B. alle Breiten und Höhen der rechteckigen Stabquerschnitte (oder die Durchmesser kreisförmiger Querschnitte) auf $2/3$ der bisherigen Werte vermindert, so ändert sich jede Querschnittsfläche um den Faktor $\varkappa = (2/3)^2 = 4/9$. Also haben alle Gelenkkräfte dann gemäß (A2.9/6) lediglich noch 44,4 % der ursprünglichen Werte, aber ihr zeitlicher Verlauf bleibt derselbe, abgesehen vom Faktor $\varkappa$.

Die Drehzahl ist der Winkelgeschwindigkeit proportional ($\Omega = \pi n/30$). Bei konstanter Drehzahl beträgt eine Gelenkkraft gemäß (2.314) oder auch (2.331)

$$\Gamma_{11p}(q)\Omega^2 = F_p \quad (2.335)$$

Bei veränderter Drehzahl ($n^* = \varkappa_n n$) gilt $\Omega^* = \varkappa_n \Omega$ und somit

$$F_p^* = \Gamma_{11p}(q)\Omega^{*2} = \Gamma_{11p}(q)\varkappa_n^2\Omega^2 = \varkappa_n^2 F_p \quad (2.336)$$

Zweites Ergebnis:

Die Gelenkkräfte ändern sich mit dem Quadrat des Drehzahlverhältnisses. Bei einer Verdoppelung der Drehzahl z. B. vervierfachen sich alle Gelenkkräfte, wenn keine äußeren Kräfte wirken und das Berechnungsmodell des Starrkörpersystems noch gültig ist.

L2.10 Aus dem Momentengleichgewicht um den Punkt O folgt, vgl. Bild 2.39b:

$$F\xi \approx (m\xi_S^2 + J_S)\ddot{\varphi}. \quad (2.337)$$

Das Kräftegleichgewicht in horizontaler Richtung liefert für $\varphi \ll 1$

$$F + F_{Ox} = m\ddot{x}_S = m\xi_S\ddot{\varphi} \quad (2.338)$$

Die horizontale Komponente der Lagerkraft ist aus diesen Gleichungen berechenbar:

$$F_{Ox} = \left[m\xi_S - \frac{m\xi_S^2 + J_S}{\xi} \right] \ddot{\varphi}. \quad (2.339)$$

Diese horizontale Komponente der Lagerkraft ist null, wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer null ist, d. h. wenn die Koppelkraft im Abstand des so genannten Stoßmittelpunktes

$$\xi = \xi_S + \frac{J_S}{m\xi_S} \quad (2.340)$$

angreift. Dieser Abstand ist größer als der Schwerpunktabstand.

Man kann durch die Gestaltung des Abtriebsgliedes versuchen, die Masseparameter in die Nähe der durch (2.340) beschriebenen Relationen zu legen.

Das zunächst vielleicht verblüffende Ergebnis wird physikalisch verständlich, wenn man sich vorstellt, dass eine Einzelkraft einen freien starren Körper sowohl translatorisch (Schwerpunktsatz) als auch rotatorisch (Momentensatz) bewegt. Es existiert dann ein Momentanpol. Wenn in diesen das Lager gelegt wird, braucht dieses keine Kraft zu übertragen, da der Körper sich um diesen Punkt „drehen will“. Für die Gestaltung von Getriebegliedern sollte man vor allem die Umkehrlagen der Abtriebsglieder unter diesem Gesichtspunkt beachten, da dort die Winkelbeschleunigungen am größten sind.

2.6

Methoden des Massenausgleichs

2.6.1

Aufgabenstellung

Durch geschickte Anordnung von Massen kann man erreichen, dass die resultierenden Massenkräfte, die von der Maschine auf den Aufstellort übertragen werden, klein werden. Man bezeichnet alle Maßnahmen, die den Ausgleich der Massenkräfte zum Ziel haben, mit dem Begriff Massenausgleich. Obwohl der Massenausgleich an Rotoren (das Auswuchten) eine Unteraufgabe darstellt, bezieht sich im technischen Sprachgebrauch der Begriff „Massenausgleich“ meist auf Mechanismen und der Begriff „Auswuchten“ auf Rotoren.

Es muss betont werden, dass der Massenausgleich lediglich das Fundament entlastet. Die Kräfte auf die Antriebswelle und die dynamischen Lagerbelastungen einzelner Gelenke können sich bei einem solchen Ausgleich durchaus auch verschlechtern und damit die Leistungsfähigkeit der Maschine beschränken. Bei Anwendung des Massenausgleichs ist also stets der Zusammenhang mit anderen Nebenwirkungen zu bedenken (beispielsweise auch der Einfluss auf die Eigenfrequenzen).

Neben der Verminderung der Maximalkraft

$$|F_{\text{kin}}|_{\text{max}} \stackrel{!}{=} \text{Min} \quad (2.341)$$

besteht auch oft die Aufgabe, einzelne k -te Harmonische zu minimieren:

$$A_k^2 + B_k^2 \stackrel{!}{=} \text{Min}. \quad (2.342)$$

Mit (2.341) und (2.342) lassen sich Aufgaben des Massenausgleichs definieren.

Der Konstrukteur wird zuerst versuchen, die umlaufenden und die hin- und hergehenden Massen klein zu halten, z. B. durch Maßnahmen des Formleichtbaus oder die Verwendung von Leichtmetallen oder faserverstärkten Kunststoffen anstelle von Stahl. Zusatzmassen aus Schwermetallen (Wolfram-Sinterwerkstoffe) besitzen wegen ihrer großen Dichte ($\rho = 17 \dots 19 \text{ g/cm}^3$) kleinste Abmessungen.

2.6.2

Auswuchten starrer Rotoren

In fast allen Maschinen kommen Rotoren vor, weshalb man sich ausführlich mit der Auswuchttechnik befassen sollte, wenn man damit zu tun hat [27]. Hier kann nur eine Einführung gegeben werden.

Rotoren sind rotierende Körper, deren Lagerzapfen durch Lager unterstützt werden. Dieser Begriff umfasst viele Maschinenteile, z. B. schlanke Wellen, flache Scheiben, lange Trommeln, unabhängig davon, ob sie starr oder elastisch sind. Ein Rotor ist *starr*, wenn er sich wie ein idealer starrer Körper verhält, d. h. bei Betriebsdrehzahl nur vernachlässigbar kleine Deformationen erleidet. In der Praxis kann ein Rotor oft als starr angesehen werden, solange seine Drehzahl kleiner als etwa die Hälfte seiner kleinsten kritischen Drehzahl ist, die auch von den Lagerbedingungen

abhängt. Bei einem *elastischen* Rotor ändert sich infolge der Deformationen sein Auswuchtzustand mit der Drehzahl.

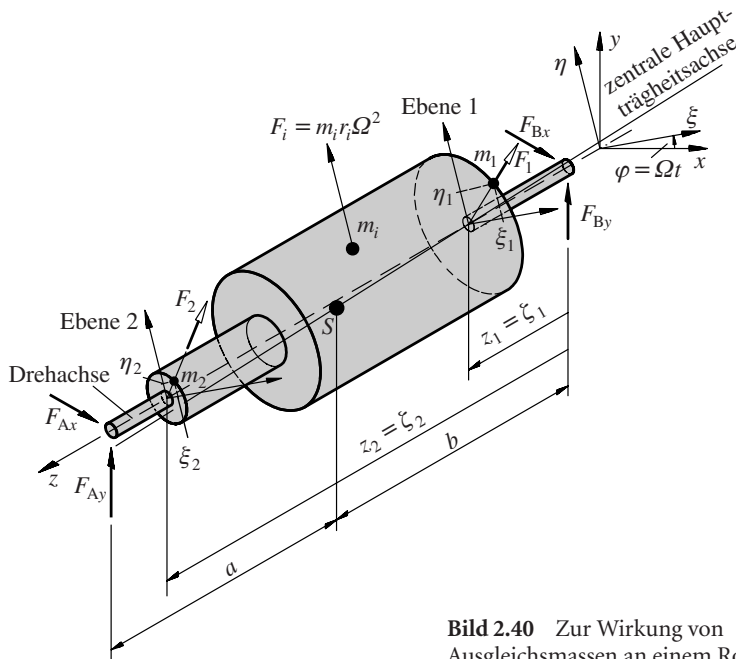


Bild 2.40 Zur Wirkung von Ausgleichsmassen an einem Rotor

Unwuchten entstehen infolge von Fertigungsungenauigkeiten und Inhomogenitäten des Materials. Ein rotationssymmetrisch konstruiertes Bauteil hat in Wirklichkeit keine ideale rotationssymmetrische Masseverteilung. Eine **Unwucht** ist definiert als das Produkt aus einer Punktmasse m_i und deren Abstand r_i von der Drehachse, vgl. Bild 2.40:

$$U_i = m_i r_i \quad (2.343)$$

Bei einer einzelnen rotierenden Punktmasse tritt bei der Winkelgeschwindigkeit Ω die Fliehkraft

$$F_i = m_i r_i \Omega^2 = U_i \Omega^2 \quad (2.344)$$

auf. Die Unwuchten sind in einem Rotor im Allgemeinen ungleichmäßig und zufällig räumlich verteilt. Wegen der stets vorhandenen Unwuchten entstehen bei der Drehung der Rotoren dynamische Kräfte, die sich negativ auswirken können auf

1. die Lagerkräfte (Flächenpressung, Verschleiß, Lebensdauer ...)
2. die Belastung des Maschinengestells und des Fundaments (Schwingungserregung)
3. Belastungen im Innern des Rotors.

Es ist deshalb vor allem bei schnell laufenden Rotoren ratsam, die Unwuchten auszugleichen, d. h. diese auszuwuchten.

Auswuchten nennt man den Vorgang, bei dem die Massenverteilung eines Rotors geprüft und durch Massenausgleich (Entfernen oder Hinzufügen von Material) korrigiert wird, um zu erreichen, dass die dynamischen Lagerkräfte bei Betriebsdrehzahl in vorgegebenen Grenzen liegen. Das Auswuchten geschieht mithilfe von Auswuchtmaschinen oder in der Originallagerung mithilfe spezieller Messeinrichtungen.

Ein Rotor ist *vollkommen* ausgewuchtet, wenn seine Masse derart verteilt ist, dass er auf die Lager keine dynamischen Kräfte überträgt. Dieser ideale Zustand ist praktisch nicht erreichbar. Restunwuchten innerhalb gewisser Grenzen sind vielfach durch Vorschriften festgelegt sind, vgl. z. B. die Normen DIN ISO 1940-1, DIN ISO 11 342, ISO 19 499 oder OENORM S9032.

Zur Kennzeichnung des Wuchtzustandes wird eine von der Masse des Wuchtkörpers unabhängige Größe benötigt. Man definiert dafür die so genannte Exzentrizität

$$e = \frac{m_u r_u}{m} = \frac{U}{m} \quad (2.345)$$

U ist dabei die Gesamtunwucht und m die Gesamtmasse des Rotors. An tief abgestimmten, also wegmessenden Auswuchtmaschinen wird e direkt durch die Auswuchtmaschine angegeben. Als Beurteilungsmaßstab gilt das Produkt $e\Omega$. Um eine Vorstellung von seiner Größenordnung zu erhalten, sind einige Werte in der Tabelle 2.3 zusammengestellt.

Tabelle 2.3 Zulässige Werte für das Produkt von Exzentrizität und Winkelgeschwindigkeit, vgl. e in Gl. (2.345)

$e\Omega$ in mm/s	Rotor oder Maschine
1600	Kurbelgetriebe von starr aufgestellten langsamlaufenden Schiffsdieselmotoren
100	Kurbelgetriebe von starr und elastisch aufgestellten Motoren
16	Kurbelgetriebe von PKW- und LKW-Motoren, Autoräder, Felgen, Radsätze, Gelenkwellen
2,5	Zentrifugentrommeln, Ventilatoren, Schwungräder, Elektromotorenanker, Werkzeugmaschinenteile
0,4	Gas- und Dampfturbinen, Werkzeugmaschinenantriebe, Magnetophon- und Phono-Antriebe
	Feinschleifmaschinenanker, -wellen und -scheiben, Kreiselgeräte

In Abschnitt 2.3.5 wurden die Lagerkräfte eines Rotors für körperfeste Koordinaten berechnet, vgl. (2.145). Man kann diese in raumfeste Komponenten mit der Drehmatrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}_3$ aus (2.11) umrechnen. Mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.346)$$

ergeben sich wegen der aus (2.15) bekannten Beziehung $\mathbf{F} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{F}}$ die Komponenten im raumfesten Bezugssystem:

$$\begin{aligned} F_{Ax} &= F_{A\xi} \cos \varphi - F_{A\eta} \sin \varphi; & F_{Bx} &= F_{B\xi} \cos \varphi - F_{B\eta} \sin \varphi \\ F_{Ay} &= F_{A\xi} \sin \varphi + F_{A\eta} \cos \varphi; & F_{By} &= F_{B\xi} \sin \varphi + F_{B\eta} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.347)$$

Diese sind zeitlich mit $\varphi(t)$ harmonisch veränderlich, und es gilt

$$F_{Ax}(\varphi - \pi/2) = F_{Ay}; \quad F_{Bx}(\varphi - \pi/2) = F_{By}. \quad (2.348)$$

Für den Sonderfall einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \Omega$ betragen die kinetischen Kräfte, die vom Rotor auf die Lager wirken, vgl. (2.145) Bild 2.41:

$$\begin{aligned} F_{Ax} &= [(J_{\xi\xi}^S - mb\xi_S) \cos \Omega t - (J_{\eta\xi}^S - mb\eta_S) \sin \Omega t] \frac{\Omega^2}{a+b} \\ F_{Ay} &= [(J_{\xi\xi}^S - mb\xi_S) \sin \Omega t + (J_{\eta\xi}^S - mb\eta_S) \cos \Omega t] \frac{\Omega^2}{a+b} \\ F_{Bx} &= [-(J_{\xi\xi}^S + ma\xi_S) \cos \Omega t + (J_{\eta\xi}^S + ma\eta_S) \sin \Omega t] \frac{\Omega^2}{a+b} \\ F_{By} &= [-(J_{\xi\xi}^S + ma\xi_S) \sin \Omega t - (J_{\eta\xi}^S + ma\eta_S) \cos \Omega t] \frac{\Omega^2}{a+b}. \end{aligned} \quad (2.349)$$

Aus diesen Gleichungen ist ablesbar, wodurch die dynamischen Lagerkräfte eines starren Rotors bestimmt werden. Eine beliebige Unwuchtverteilung in einem starren Rotor entspricht einer Schwerpunktverlagerung und einer schiefen Lage der Trägheitshauptachsen in Bezug auf die Drehachse. Man erkennt daraus, dass die dynamischen Kräfte in den Lagern A und B mit der Kreisfrequenz umlaufen, jedoch nicht in gleicher Phase liegen, wenn die Deviationsmomente ungleich null sind.

Bild 2.41 zeigt ein Beispiel für typische Verläufe der Lagerkräfte eines nicht ausgewuchteten starren Rotors, wobei unterschiedliche Amplituden und Phasen bei gleicher Drehfrequenz auftreten.

Ein starrer Rotor ist also vollkommen ausgewuchtet, wenn sein Schwerpunkt auf der Drehachse liegt ($\xi_S = \eta_S = 0$) und wenn seine zentrale Trägheitshauptachse mit der Drehachse zusammenfällt ($J_{\xi\xi}^S = J_{\eta\xi}^S = 0$). Dann ist $F_A = F_B \equiv 0$.

Man spricht von einer *statischen* Unwucht, wenn der Schwerpunkt außerhalb der Drehachse liegt. Eine *dynamische* Unwucht des Rotors liegt vor, wenn die zentrale Trägheitshauptachse (die durch den Schwerpunkt geht) nicht mit der Drehachse zusammenfällt. Beide Erscheinungen sind praktisch stets überlagert. Beim Auswuchten wird die Massenverteilung des starren Rotors durch einen Ausgleich in *zwei* Ebenen korrigiert, sodass die statische und die dynamische Unwucht ausgeglichen werden. Dabei werden $m_1, m_2, \xi_1, \xi_2, \eta_1$ und η_2 aus den gemessenen Lagerkräften oder -verschiebungen bestimmt, vgl. Bild 2.40.

Mit der folgenden Betrachtung soll gezeigt werden, dass i. Allg. zwei Ausgleichsmassen in zwei verschiedenen Auswuchtebenen ausreichen, um einen beliebigen starren Rotor vollständig auszuwuchten.

Die harmonisch mit der Drehfrequenz Ω veränderlichen Lagerkräfte hängen gemäß (2.347) von vier Komponenten $F_{A\xi}, F_{A\eta}, F_{B\xi}$ und $F_{B\eta}$ ab. Das Auswuchten beruht auf der Überlegung, diese vier Komponenten (die man für einen realen

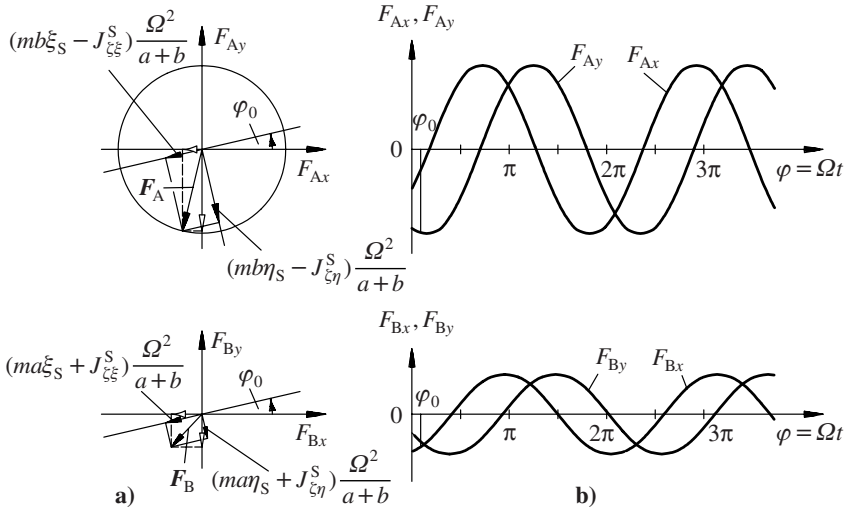


Bild 2.41 Typischer Verlauf der Lagerkräfte eines starren Rotors für $\dot{\varphi} = \Omega = \text{konst.}$
a) Komponenten der Lagerkräfte infolge der statischen und dynamischen Unwucht
b) Verlauf der Lagerkräfte

Rotor experimentell bestimmen muss) durch zusätzliche Ausgleichsmassen in Gegenrichtung zu erzeugen und damit die Summe an jedem Lager zu kompensieren. Gibt man die Lage der Ausgleichsebenen durch die Abstände ζ_1 und ζ_2 vor, so kann man mit den vier statischen Momenten von zwei Ausgleichsmassen ($m_1\xi_1$, $m_1\eta_1$, $m_2\xi_2$ und $m_2\eta_2$) vier unabhängige Komponenten der Lagerkräfte erzeugen. Der Zusammenhang ergibt sich aus dem Gleichgewicht am Rotor zu:

$$\begin{aligned}
 F_{A\xi} &= -(\mathbf{m}_1\xi_1\zeta_1 + \mathbf{m}_2\xi_2\zeta_2) \frac{\Omega^2}{a+b} \\
 F_{B\xi} &= [\mathbf{m}_1\xi_1(a+b-\zeta_1) + \mathbf{m}_2\xi_2(a+b-\zeta_2)] \frac{\Omega^2}{a+b} \\
 F_{A\eta} &= -(\mathbf{m}_1\eta_1\zeta_1 + \mathbf{m}_2\eta_2\zeta_2) \frac{\Omega^2}{a+b} \\
 F_{B\eta} &= -[\mathbf{m}_1\eta_1(a+b-\zeta_1) + \mathbf{m}_2\eta_2(a+b-\zeta_2)] \frac{\Omega^2}{a+b}
 \end{aligned} \tag{2.350}$$

Es sind jeweils zwei Gleichungen für zwei Unbekannte, d. h. mit vier statischen Momenten (fett gedruckt) kann man die vier Kraftkomponenten „erzeugen“. In Auswuchtmaschinen werden die Lage und Größe der Ausgleichsmassen „automatisch“ ermittelt, d. h. durch interne Software. Das Auswuchten erfolgt bei Serienfertigungen von Motoren und anderen Kleinrotoren, die in großer Stückzahl produziert werden, innerhalb weniger Sekunden, während das Auswuchten großer Turbogeneratoren mehrere Stunden in Anspruch nimmt.

Mit Rücksicht auf die entstehenden Biegemomente innerhalb des Rotors sollten Unwuchten möglichst in der Nähe der Ebene ausgeglichen werden, in der sie auf-

treten. Den Einfluss der gewählten Ausgleichsebene auf die Momentenverteilung im Rotor illustriert Bild 2.42 für eine gleichmäßig verteilte Unwucht.

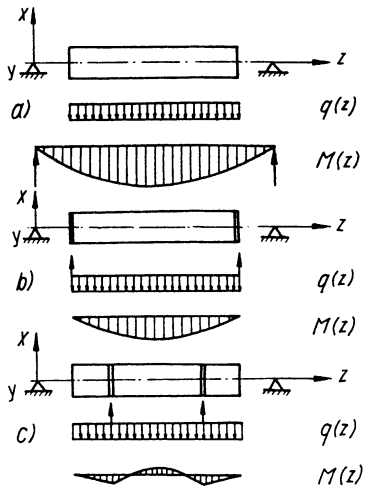


Bild 2.42 Verlauf des inneren Momentes bei verschiedener Wahl der Auswuchtebenen

a) Rotor ohne Auswuchtung

b) Auswuchtebenen an den Stirnflächen des Rotors

c) Auswuchtebenen im Rotor

Für so genannte „wellenelastische Rotoren“, die in der Nähe einer ihrer kritischen Drehzahlen laufen, ist das Auswuchten in zwei willkürlichen Ebenen nicht mehr hinreichend. Dafür wurden Auswuchtverfahren in drei und mehr Ebenen entwickelt, die einen erheblichen rechnerischen und experimentellen Mehraufwand gegenüber dem Auswuchten starrer Rotoren erfordern.

Für die Wahl der Auswuchtebenen sind folgende Gesichtspunkte zu beachten:

1. Die Auswuchtebenen sollen möglichst weit voneinander entfernt liegen.
2. Bei zusammengebauten Rotoren, deren Auswuchtebenen auf verschiedenen Einzelteilen angebracht sind, ist konstruktiv zu sichern, dass eine eindeutige Zuordnung besteht (formschlüssige Sicherung der Teile gegeneinander, z. B. durch Stifte).
3. Beim Auswuchten darf die Festigkeit des Bauteils nicht beeinträchtigt werden.

Bild 2.43 vermittelt einen kleinen Einblick in die Korrekturmöglichkeiten beim Auswuchten: Abschneiden, Abschleifen oder Abfräsen von Material (Bild 2.43a, e). Ausbrechen von Segmenten an für den Ausgleich vorgesehenen Scheiben innen (Bild 2.27 d) oder außen (Bild 2.43f) sind Beispiele für den subtraktiven Ausgleich. Dosierung der Ausgleichsunwucht durch Schrauben verschiedener Längen oder Durchmesser (Bild 2.43c) oder Einsetzen von Bleidraht in umlaufende Nuten (Bild 2.43b) gehören zu den additiven Verfahren. Bei der Auswahl der Verfahren müssen die technologischen Bedingungen der Serienfertigung beachtet werden. Es kann auch zweckmäßig sein, Blechstreifen aufzuschweißen oder anzulöten. Der Konstrukteur muss also von Anfang an die Lage der Auswuchtebenen festlegen, und er darf auch die Festlegung der Ausgleichsmethode nicht dem Zufall überlassen. Praktisch erfolgt das Auswuchten mithilfe von Auswuchtmaschinen, mit deren Hilfe die Lage und Größe der Unwucht aus den Lagerreaktionen des Rotors ermittelt wird. Ohne darauf

näher einzugehen, sei lediglich erwähnt, dass je nach Größe und Drehzahl des Rotors „wegmessende“ oder „kraftmessende“ Auswuchtmaschinen weit verbreitet sind, vgl. Bild 2.44. Bei „kraftmessenden“ Auswuchtmaschinen ist der Rotor starr gelagert, die Lagerkräfte werden im unterkritischen Drehzahlbereich gemessen. Praktisch liegt ihr Arbeitsbereich bei Drehzahlen von 200 bis 3000 1/min.

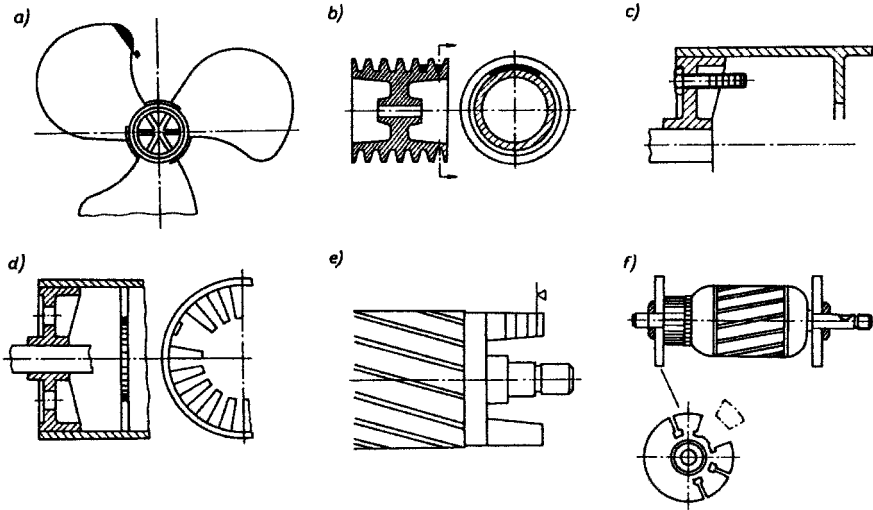


Bild 2.43 Beispiele für Möglichkeiten des Massenausgleichs an Rotoren

a) Abschneiden an Ventilatorflügel, b) Einsetzen von Bleidraht in Nut, c) Eindrehen von Schraubbolzen unterschiedlicher Länge, d) Ausbrechen von Segmenten im Inneren, e) Abfräsen angegossener Zapfen an Stirnseite, f) Ausbrechen von Segmenten an speziell gestalteten Außenscheiben

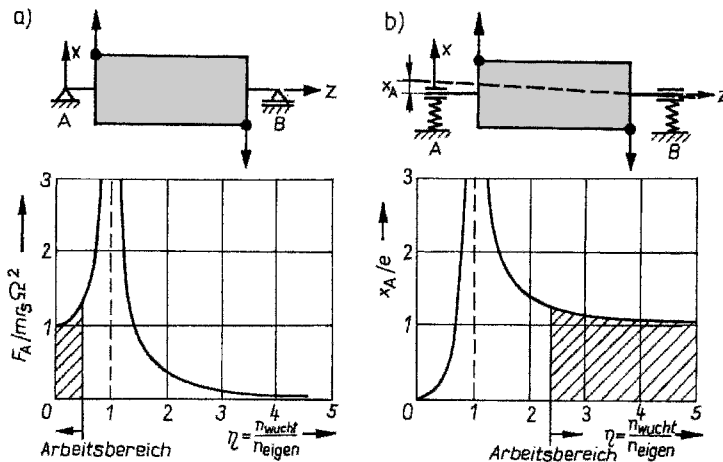


Bild 2.44 Zum Wirkprinzip der Auswuchtmaschinen

a) kraftmessende Auswuchtverfahren, b) wegmessende Auswuchtverfahren

2.6.3

Massenausgleich von ebenen Koppelgetrieben

2.6.3.1

Vollständiger und harmonischer Ausgleich

Die aus Massenkraften resultierenden Gestellkräfte und -momente lassen sich durch die Masseparameter ($m_i, \xi_{Si}, \eta_{Si}, J_{Si}, J_{\xi \xi i}^S, J_{\eta \eta i}^S$), d. h. durch die Masseverteilung an den bewegten Getriebegliedern, beeinflussen, vgl. (2.325) und (2.328). Ein *vollständiger* Massenkraftausgleich liegt vor, falls der Gesamtschwerpunkt trotz der Mechanismenbewegung in Ruhe bleibt. Zweckdienlicher und leichter realisierbar ist oft der *harmonische* Ausgleich, bei dem man die störenden Erreger-Harmonischen der Kräfte und Momente eliminiert.

Jeder ebene Mechanismus lässt sich prinzipiell durch eine geeignete Masseverteilung seiner Glieder so auslegen, dass sein Schwerpunkt trotz beliebiger Bewegung in Ruhe bleibt. Hier soll nur das in der Praxis oft eingesetzte Viereckgetriebe behandelt werden.

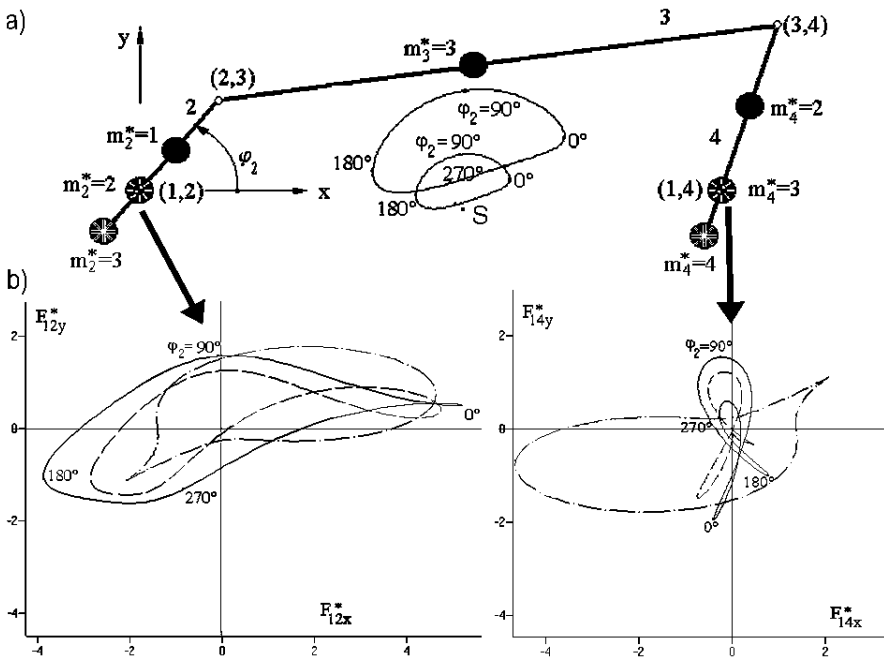


Bild 2.45 Einfluss von Masseparametern auf die Gestellkräfte einer Kurbelschwinge

a) Kinematisches Schema und Schwerpunktbahnen mit Angabe der bezogenen Massen $m_i^* = m_i/m$; b) Polardiagramme der Gelenkkräfte F_{12} und F_{14}

Variante 1: —, Variante 2: ---, Variante 3: - · - · -

Normalerweise bewegt sich der Gesamtschwerpunkt eines Mechanismus auf einer Bahn, wie es Bild 2.45 für ein Beispiel zeigt, vgl. (2.327). Neben den Schwerpunkts-

bahnen sind die Polardiagramme der beiden Gestellkräfte einer Kurbelschwinge bei drei Varianten der Masseverteilung dargestellt. Es wurden jeweils die Massen m_2 und m_4 und deren Schwerpunktabstände ξ_{S2} und ξ_{S4} verändert. Diese Verläufe ergeben sich bei einer konstanten Winkelgeschwindigkeit des Antriebs.

Interessant ist die Beziehung der Schwerpunktbahnen zu den Polardiagrammen. Mit kleinerer Ausdehnung der Schwerpunktbahn werden bei Variante 2 auch die Gelenkkräfte kleiner als bei Variante 1. Bei Variante 3, wo sich die Schwerpunktbahn zu einem Punkt zusammenzieht, ist zwar gemäß (2.325) die Summe der Gelenkkräfte null, aber die einzelnen Gelenkkräfte sind vorhanden.

Unter gewissen Bedingungen, die nun ermittelt werden sollen, entartet die Schwerpunktbahn zu einem Punkt. Zu den folgenden Ableitungen werden die Bezeichnungen aus Bild 2.46 verwendet. In komplexer Schreibweise lautet die Zwangsbedingung für den Zusammenhang des Viergelenkgetriebes (die so genannte Maschengleichung), vgl. auch (2.227) und (2.228):

$$l_2 e^{j\varphi_2} + l_3 e^{j\varphi_3} = l_1 + l_4 e^{j\varphi_4} \quad (2.351)$$

Diese Gleichung könnte unter Benutzung der Euler'schen Relation in zwei reelle Gleichungen umgeformt werden. Hier wird jedoch die komplexe Schreibweise angewendet, weil dabei nur die halbe Anzahl von Gleichungen anfällt. Die Ortsvektoren der im Schwerpunkt liegenden Massen sind nach Bild 2.46:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{S2} &= x_{S2} + jy_{S2} = (\xi_{S2} + j\eta_{S2}) e^{j\varphi_2} \\ \mathbf{r}_{S3} &= x_{S3} + jy_{S3} = l_2 e^{j\varphi_2} + (\xi_{S3} + j\eta_{S3}) e^{j\varphi_3} \\ \mathbf{r}_{S4} &= x_{S4} + jy_{S4} = l_1 + (\xi_{S4} + j\eta_{S4}) e^{j\varphi_4} \end{aligned} \quad (2.352)$$

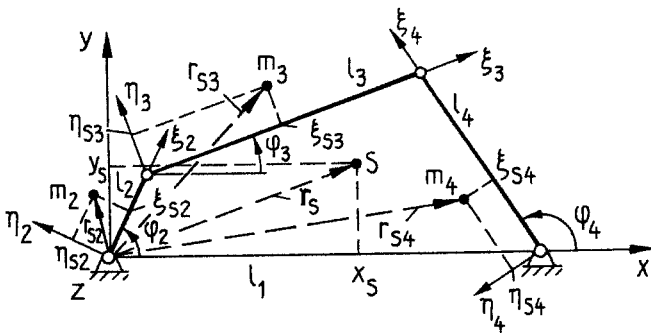


Bild 2.46 Bezeichnung der Parameter am Viergelenkgetriebe

Der Schwerpunkt des gesamten Getriebes ergibt sich nach (2.327) aus der Bedingung

$$(m_2 + m_3 + m_4) \mathbf{r}_S = m_2 \mathbf{r}_{S2} + m_3 \mathbf{r}_{S3} + m_4 \mathbf{r}_{S4} \quad (2.353)$$

Das Einsetzen der Koordinaten der Einzelschwerpunkte und die Umformung nach Gl. (2.351)

$$e^{j\varphi_4} = \frac{l_2 e^{j\varphi_2} + l_3 e^{j\varphi_3} - l_1}{l_4} \quad (2.354)$$

liefert dann mit Gl. (2.352)

$$\begin{aligned}
 (m_2 + m_3 + m_4) \mathbf{r}_S &= m_2 (\xi_{S2} + j\eta_{S2}) e^{j\varphi_2} \\
 &+ m_3 \left[l_2 e^{j\varphi_2} + (\xi_{S3} + j\eta_{S3}) e^{j\varphi_3} \right] \\
 &+ m_4 \left[l_1 + (\xi_{S4} + j\eta_{S4}) \frac{l_2 e^{j\varphi_2} + l_3 e^{j\varphi_3} - l_1}{l_4} \right].
 \end{aligned} \quad (2.355)$$

Nach Umordnung der Terme ergibt sich die Schwerpunktbahn aus

$$\begin{aligned}
 (m_2 + m_3 + m_4) \mathbf{r}_S &= e^{j\varphi_2} \left[m_2 (\xi_{S2} + j\eta_{S2}) + m_3 l_2 + m_4 (\xi_{S4} + j\eta_{S4}) \frac{l_2}{l_4} \right] \\
 &+ e^{j\varphi_3} \left[m_3 (\xi_{S3} + j\eta_{S3}) + m_4 (\xi_{S4} + j\eta_{S4}) \frac{l_3}{l_4} \right] \\
 &+ m_4 \left[l_1 - (\xi_{S4} + j\eta_{S4}) \frac{l_1}{l_4} \right].
 \end{aligned} \quad (2.356)$$

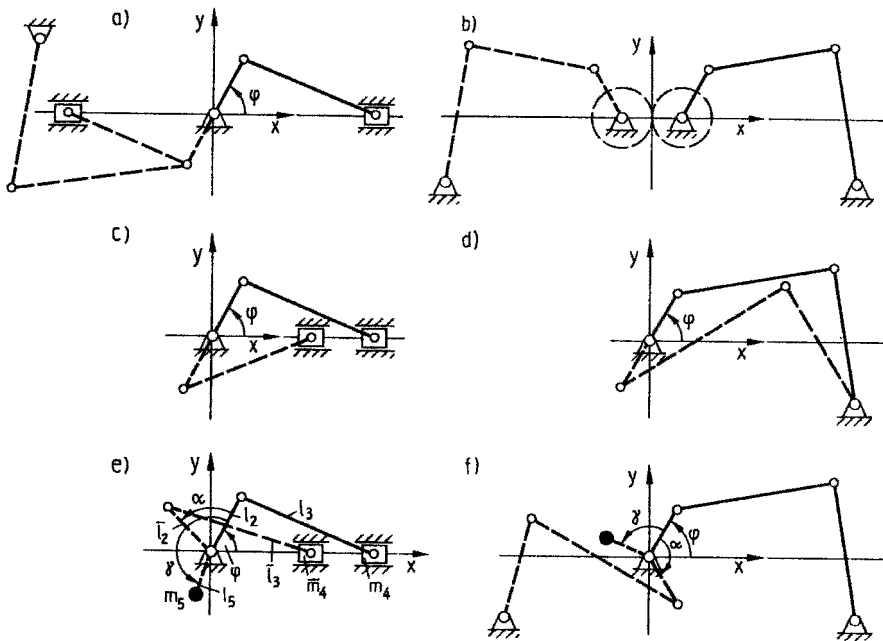


Bild 2.47 Beispiele für den Massenausgleich durch Anordnung eines gegenläufigen Getriebes (Volllinie: ursprüngliches Getriebe; Strichlinie: Ausgleichsgetriebe)

Für eine beliebige Getriebebestellung (gekennzeichnet durch die Winkel φ_2 und φ_3 (φ_2)) kann damit die Schwerpunktlage berechnet werden. Gl. (2.356) beschreibt also die Schwerpunktbahn. Der Schwerpunkt bewegt sich harmonisch auf einer Kreisbahn, falls der Klammerausdruck nach $e^{j\varphi_3}$ verschwindet. Er bleibt in Ruhe, falls beide Koeffizienten von $e^{j\varphi_2}$ und $e^{j\varphi_3}$ null sind.

Die Bedingungen für den vollständigen Ausgleich folgen aus dem Nullsetzen der Ausdrücke in den eckigen Klammern. Sie lauten für den Sonderfall, dass die Schwerpunkte auf den Gliedachsen liegen ($\eta_{S2} = \eta_{S3} = \eta_{S4} = 0$):

$$m_2 \xi_{S2} + m_3 l_2 + m_4 \frac{\xi_{S4}}{l_4} l_2 = 0, \quad m_3 \xi_{S3} + m_4 \frac{\xi_{S4}}{l_4} l_3 = 0 \quad (2.357)$$

Dies sind zwei Gleichungen für die 9 Parameter des Viergelenkgetriebes ($l_2, l_3, l_4, m_2, m_3, m_4, \xi_{S2}, \xi_{S3}, \xi_{S4}$). Es existieren also gewisse Freiheiten bei der Wahl der Parameter, da weniger Gleichungen als Unbekannte vorliegen.

Der vollständige Ausgleich der Kräfte erfolgt praktisch nur selten, weil er folgende Nachteile hat:

1. Es entstehen meist sperrige Getriebe mit konstruktiv nicht realisierbaren großen Abmessungen.
2. Die Masse der Getriebeglieder muss oft beträchtlich verändert werden.
3. Die einzelnen Lager- und Gelenkkräfte können zunehmen, ebenso das resultierende Gestellmoment M_z .

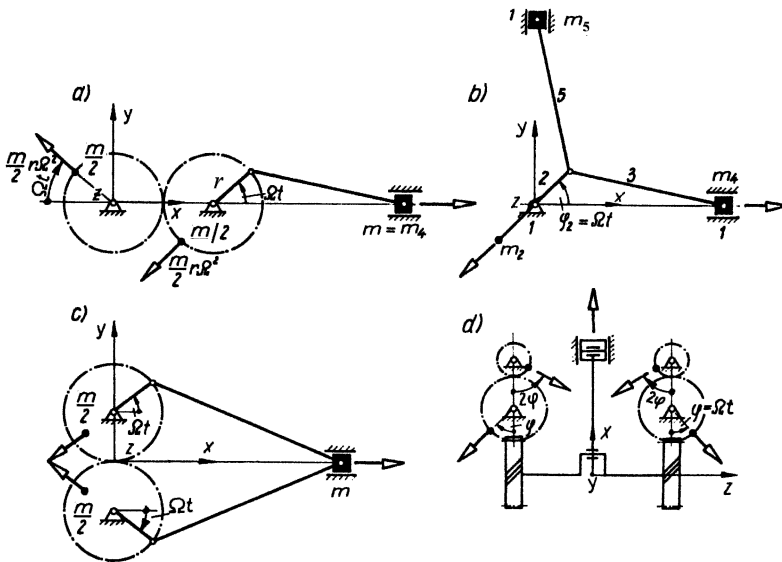


Bild 2.48 Konstruktive Möglichkeiten zum Ausgleich einzelner Harmonischer (Ausgleichsgetriebe); a) und c) Kräfte und Moment (1. Harmonische), b) Kräfte (1. Harmonische), d) Kräfte (1. und 2. Harmonische)

Neben dem hier erwähnten **vollständigen Massenausgleich** kann in der Praxis eine Verbesserung durch folgende Maßnahmen erreicht werden:

1. Erzeugung einer äquivalenten Gegenbewegung, d. h. Kompensation durch gleich große entgegengerichtete Massenkräfte eines anderen Mechanismus (Bild 2.47) oder von zusätzlichen Zweischlägen.
2. Ausgleich bestimmter Harmonischer mithilfe von Ausgleichsgetrieben (Bild 2.48).

3. Bei Mehrzylindermaschinen durch Anordnung von Gegenmassen mit verschiedenen Kurbelwinkeln, durch Versetzung der Getriebeebenen zur Achse und evtl. durch verschieden große Kurbelradien und Kolbenmassen, vgl. Abschnitt 2.6.3.3.

Der harmonische Ausgleich, d. h. der Ausgleich einzelner Harmonischer der periodischen Erregung, die von ungleichmäßig übersetzenden Mechanismen ausgeht, hat für die Praxis des Maschinenbaus die größte Bedeutung, da er die Schwingungserregung minimiert. Bei Kurvengetrieben haben sich dabei die Kurvenscheiben mit HS-Profilen bewährt. Man kann bei der computergestützten Synthese von Koppelgetrieben und Räderkoppelgetrieben auch solche Mechanismen finden, bei denen bestimmte Harmonische minimale Größe haben. Es kommt nicht immer auf den Ausgleich der ersten oder zweiten Harmonischen an, manchmal ist auch der **Ausgleich einer höheren Harmonischen** von praktischer Bedeutung.

2.6.3.2

Massenausgleich beim Schubkurbelgetriebe

Das Schubkurbelgetriebe wird in vielen Maschinen zur Umformung von Dreh- in Schubbewegungen (und umgekehrt) benutzt, sodass sein Massenausgleich seit langem besonderes Interesse besitzt.

Die Schwerpunktlage ergibt sich in Abhängigkeit von den Getriebebestellungen analog zu Gl. (2.353) zu

$$(m_2 + m_3 + m_4)r_S = m_2 r_{S2} + m_3 r_{S3} + m_4 r_{S4} \quad (2.358)$$

Die Schwerpunkte der Getriebeglieder bewegen sich folgendermaßen (vgl. Bild 2.27):

$$r_{S2} = \xi_{S2} e^{j\varphi_2}; \quad r_{S3} = l_2 e^{j\varphi_2} + \xi_{S3} e^{j\varphi_3}; \quad r_{S4} = l_2 e^{j\varphi_2} + l_3 e^{j\varphi_3} \quad (2.359)$$

Einsetzen in (2.358) liefert die Schwerpunktbahn, vgl. auch (2.355):

$$\begin{aligned} (m_2 + m_3 + m_4)r_S &= m_2 \xi_{S2} e^{j\varphi_2} + m_3 (l_2 e^{j\varphi_2} + \xi_{S3} e^{j\varphi_3}) \\ &\quad + m_4 (l_2 e^{j\varphi_2} + l_3 e^{j\varphi_3}) \\ &= e^{j\varphi_2} (m_2 \xi_{S2} + m_3 l_2 + m_4 l_2) + e^{j\varphi_3} (m_3 \xi_{S3} + m_4 l_3) \end{aligned} \quad (2.360)$$

Der Schwerpunkt bleibt in Ruhe und es treten keine resultierenden Massenkräfte auf das Gestell auf, wenn folgende Ausgleichsbedingungen erfüllt sind (Nullsetzen der runden Klammern):

$$m_2 \xi_{S2} + (m_3 + m_4) l_2 = 0 \quad (2.361)$$

$$m_3 \xi_{S3} + m_4 l_3 = 0 \quad (2.362)$$

Aus ihnen ergeben sich die Schwerpunktabstände von den Drehgelenken beim vollständigen Ausgleich zu

$$\xi_{S2} = -\frac{m_3 + m_4}{m_2} l_2; \quad \xi_{S3} = -\frac{m_4}{m_3} l_3 \quad (2.363)$$

Sie führen dazu, den gemeinsamen Schwerpunkt der Massen m_3 und m_4 in das Gelenk (2, 3) zu legen. Falls nur (2.362) erfüllt ist, bewegt sich der Schwerpunkt auf einer Kreisbahn und ruft harmonische Erregerkräfte hervor. Liegt der Schwerpunkt

der Massen m_3 und m_4 im Gelenk (2, 3), so kann er durch die Gegenmasse m_2 in den Punkt (1, 2) verlegt werden, sodass er seine Lage nicht ändert. Dieser vollständige Massenausgleich ist praktisch kaum realisierbar. Wichtiger ist der teilweise Ausgleich der Massenkräfte. Die Kräfte F_x , F_y und das Moment M_z setzen sich in ihrem zeitlichen Ablauf aus mehreren Harmonischen zusammen. Die erste harmonische Komponente wird als *Massenkraft erster Ordnung* bezeichnet. Der zweite Term in der Fourierentwicklung ändert sich mit der doppelten Frequenz und wird deshalb als *Massenkraft zweiter Ordnung* bezeichnet. Die Massenkraft erster Ordnung, also die erste Harmonische der Kraft F_x , wird ausgeglichen, wenn die Bedingung (2.361) erfüllt ist, d. h. wenn nur an der Kurbel eine Ausgleichsmasse angebracht wird. Nach (2.363) befindet sich die Ausgleichsmasse dann auf der Gegenseite der Kurbel. Sie wird praktisch oft durch ein Kreissegment konstruktiv gestaltet, vgl. Bild 2.30. Die Massenkraft erster Ordnung von F_y ist ausgeglichen, wenn die Ausgleichsbedingung

$$m_2 \xi_{s2} + m_3 l_2 \left(1 - \frac{\xi_{s3}}{l_3} \right) = 0 \quad (2.364)$$

erfüllt ist. Das Moment M_z lässt sich nur durch die Anordnung von Zusatzgliedern vollständig ausgleichen.

Weitere Möglichkeiten des Massenausgleichs sind durch die in Bild 2.47 und 2.48 gezeigten Ausführungen praktisch angewendet worden. Die konstruktive Verwirklichung scheitert oft an dem zu hohen ökonomischen Aufwand. Der Konstrukteur muss von Fall zu Fall entscheiden, welche Methode im konkreten Fall am geeigneten ist und ob der Aufwand in vertretbarem Verhältnis zum erreichbaren Nutzen steht.

2.6.3.3

Harmonischer Ausgleich bei Mehrzylindermaschinen

Im Motoren- und Kompressorenbau werden oft Mehrzylindermaschinen angewendet, bei denen mehrere Schubkurbelgetriebe durch eine gemeinsame Welle verbunden sind. Dadurch, dass die relative Lage der einzelnen Getriebeebenen und die relative Verdrehung der Kurbelwinkel günstig gewählt werden, ist ein gegenseitiger Ausgleich einiger Harmonischer möglich.

Für die folgenden Ableitungen wird angenommen, dass die Zylinderachsen und die Kurbelwellenachse in einer Ebene, der y - z -Ebene, liegen. Damit wird der Fall des Reihenmotors mit k Zylindern erfasst. Der interessante Fall des V-Motors oder Sternmotors, bei dem die Richtungen der Kolben einen bestimmten Winkel zueinander bilden, wird aus den Betrachtungen hier ausgeschlossen, vgl. dazu [1]. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass alle umlaufenden Massen, also die Kurbelwelle mit den umlaufenden Pleuelanteilen (vgl. m_{32} , Bild 2.30) vollständig ausgeglichen sind. Alle Triebwerke sollen außerdem gleichartig sein (gleiche Massen und gleiche Geometrie) und nur unterschiedliche Kurbelwinkel haben, vgl. Bild 2.49. Der Winkel zwischen der ersten Kurbel ($j = 1$) und der j -ten Kurbel wird mit γ_j bezeichnet. Die Massenkräfte lassen sich in Form einer Fourier-Reihe angeben, vgl. (2.315). Für jeden Mechanismus gilt ($j = 1, 2, \dots, J$):

$$F_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos k(\Omega t + \gamma_j) + B_k \sin k(\Omega t + \gamma_j)] \quad (2.365)$$

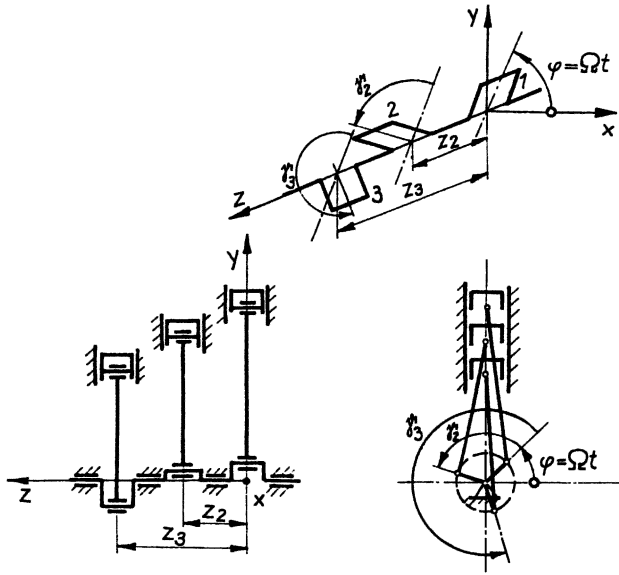


Bild 2.49 Zur Herleitung der Ausgleichsbedingungen bei einer Mehrzylindermaschine

Dabei bezeichnet k die Ordnung der Harmonischen. Wird davon ausgegangen, dass sich die Kurbelwelle mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht, so sind die einzelnen Kurbelwinkel $\varphi_j = \Omega t + \gamma_j$. Für den ersten Zylinder gilt $\gamma_1 = 0$. Die Fourierkoeffizienten (A_k ; B_k) eines Mechanismus seien bekannt.

Die resultierenden dynamischen Kräfte und Momente, die auf das Fundament übertragen werden, ergeben sich bei J Zylindern sowohl für die x - als auch für die y -Komponenten (weswegen der Index weggelassen wird):

$$F = \sum_{j=1}^J F_j; \quad M = \sum_{j=1}^J F_j z_j \quad (2.366)$$

Dabei ist z_j der Abstand der jeweiligen Getriebeebe von der x - y -Ebene des Koordinatensystems, wie in Bild 2.35, Bild 2.36 und Bild 2.49.

Einsetzen von F_j aus (2.365) in (2.366) liefert unter Verwendung von Additionstheoremen und einigen Umstellungen

$$\begin{aligned} F &= \sum_j \sum_k [A_k (\cos k\Omega t \cos k\gamma_j - \sin k\Omega t \sin k\gamma_j) \\ &\quad + B_k (\sin k\Omega t \cos k\gamma_j + \cos k\Omega t \sin k\gamma_j)] \\ F &= \sum_k \left[(A_k \cos k\Omega t + B_k \sin k\Omega t) \sum_j \cos(k\gamma_j) \right. \\ &\quad \left. + \sum_k [-A_k \sin k\Omega t + B_k \cos k\Omega t] \sum_j \sin(k\gamma_j) \right] \end{aligned} \quad (2.367)$$

Daraus folgt durch einen Koeffizientenvergleich, dass die Harmonische k -ter Ordnung der resultierenden Kraft einer Mehrzylindermaschine vollständig ausgeglichen ist, wenn folgende zwei Gleichungen erfüllt sind:

$$\sum_{j=1}^J \cos k\gamma_j = 0; \quad \sum_{j=1}^J \sin k\gamma_j = 0 \quad (2.368)$$

Analog sind die Harmonischen k -ter Ordnung des Moments M vollständig ausgeglichen, falls gilt:

$$\sum_{j=1}^J z_j \cos k\gamma_j = 0; \quad \sum_{j=1}^J z_j \sin k\gamma_j = 0 \quad (2.369)$$

Dies sind die wichtigen Ausgleichsbedingungen von Massenkräften k -ter Ordnung von Mehrzylindermaschinen. Interessanterweise gehen die Massen der Getriebeglieder, die Drehzahl und geometrische Abmessungen in diese Formeln nicht ein. Zur Berechnung der Kurbelwinkel γ_j und der Abstände z_j (das sind bei J Getrieben $2J-1$ Unbekannte), die für einen vollkommenen Massenausgleich vorliegen müssen, stehen demnach vier transzendente Gleichungen für jede Ordnung k zur Verfügung.

2.6.3.4

Optimaler Massenausgleich

Sowohl die Massen m_i , Trägheitsmomente J_{Si} als auch die Koordinaten der körperfesten Gliedschwerpunkte (ξ_{Si} ; η_{Si}) können praktisch nur innerhalb von gegebenen Grenzen verändert werden, die normalerweise der Konstrukteur kennt. Diese Beschränkungen werden beschrieben durch die unteren und oberen Grenzen der Masseparameter:

$$\begin{aligned} m_{i \min} \leq m_i \leq m_{i \max}; \quad J_{Si \min} \leq J_{Si} \leq J_{Si \max} \\ \xi_{Si \min} \leq \xi_{Si} \leq \xi_{Si \max}; \quad \eta_{Si \min} \leq \eta_{Si} \leq \eta_{Si \max} \end{aligned} \quad i = 2, 3, \dots, I \quad (2.370)$$

Die auf das Maschinengestell wirkenden Kräfte sind eine Funktion der Drehzahl, der geometrischen Abmessungen des Mechanismus und der oben genannten Masseparameter. Die Masseparameter, die an dem Getriebe veränderbar sind, werden im Parametervektor

$$\mathbf{p}^T = (\dots, m_i, J_{Si}, \xi_{Si}, \eta_{Si}, \dots) \quad (2.371)$$

zusammengefasst. Betrachtet man ein ebenes Getriebe, so lautet die Bedingung für den optimalen Massenausgleich:

$$f(\mathbf{p}) = w_1 \sum_j F_x^2(\mathbf{p}; t_j) + w_2 \sum_j F_y^2(\mathbf{p}; t_j) + w_3 \sum_j M_z^2(\mathbf{p}; t_j) \stackrel{!}{=} \text{Min} \quad (2.372)$$

Die Faktoren w_1, w_2 und w_3 sind dabei Bewertungsfaktoren, die ausdrücken, wie stark man die Forderung nach der Minimierung einer dieser Kraftgrößen betont. Sie sind sämtlich positiv. Ist ein Bewertungsfaktor gleich null, so heißt das, dass die betreffende Kraftgröße bei der Optimierung nicht beachtet wird (der Summand liefert dann keinen Beitrag zur Zielfunktion $f(\mathbf{p})$).

Die Anwendung von Optimierungsmethoden ist durch Software soweit mathematisch-rechentechnisch aufbereitet, dass sich die Arbeit des Konstrukteurs darauf reduziert, lediglich sinnvolle und praktisch realisierbare Grenzen für die Masseparameter anzugeben und die zweckmäßige Wahl der Bewertungsfaktoren zu überlegen.

2.6.4

Aufgaben A2.11 bis A2.14

A2.11 Harmonischer Ausgleich eines Verdichters

Die bei ungleichförmig übertragenden Mechanismen entstehenden Massenkräfte können Ursache von Gestellschwingungen sein. Insbesondere diejenigen Komponenten des Erregerspektrums sind gefährlich, deren Frequenz einer Eigenfrequenz des Gestells entspricht.

Die zusätzlich an der Antriebskurbel des Verdichters (zentrische Schubkurbel, vgl. Bild 2.50) anzubringende Ausgleichsmasse m_a in Form eines Kreisringausschnitts konstanter Dicke soll so dimensioniert werden, dass bei konstanter Antriebswinkelgeschwindigkeit die erste Harmonische der resultierenden Gestellkraftkomponente F_x völlig ausgeglichen wird.

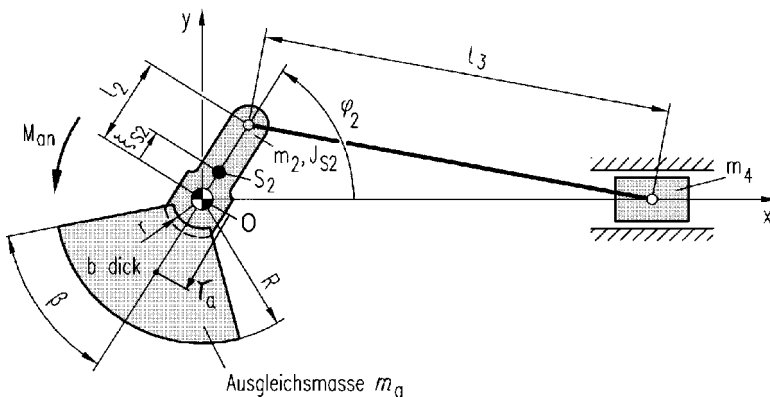


Bild 2.50 Zentrische Schubkurbel

Gegeben:

l_2	$= 40 \text{ mm}$	Länge der Kurbel
l_3	$= 750 \text{ mm}$	Länge der Koppel
ξ_{S_2}	$= 12 \text{ mm}$	Abstand des Schwerpunktes der Kurbel von O
J_{S_2}	$= 6,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	auf die Schwerachse bezogenes Trägheitsmoment der Kurbel
m_2	$= 4,8 \text{ kg}$	Masse der Kurbel
m_4	$= 14 \text{ kg}$	Masse des Pleuellagers
r	$= 20 \text{ mm}$	Innenradius der Ausgleichsmasse

$R_{\max} = 140 \text{ mm}$	maximaler Außenradius der Ausgleichsmasse (Bauraum!)
$b = 40 \text{ mm}$	Dicke der Ausgleichsmasse
$\varrho_G = 7250 \text{ kg/m}^3$	Dichte von Grauguss
$\varrho_Z = 8900 \text{ kg/m}^3$	Dichte von Zinnbronze
$\varrho_W = 9800 \text{ kg/m}^3$	Dichte von Weißmetall

Hinweis: Die Masseparameter der Koppel 3 wurden bereits näherungsweise in die der Glieder 2 und 4 eingerechnet, vgl. Bild 2.30.

Gesucht:

1. Resultierende Gestellkraftkomponenten F_x und F_y in allgemeiner Form für eine beliebige Antriebsbewegung $\varphi_2(t)$ unter Berücksichtigung der Ausgleichsmasse.
2. Erforderliche Abmessungen (R , β), Masse m_a und Trägheitsmoment J_a^O der Ausgleichsmasse so, dass sowohl die erste Harmonische der Gestellkraft F_x ausgeglichen als auch J_a^O möglichst klein wird. Als Werkstoffe stehen Grauguss, Zinnbronze und Weißmetall zur Auswahl.

A2.12 Ausgleichsgetriebe für Schubkurbelgetriebe

Für ein Schubkurbelgetriebe, dessen Massenkräfte durch eine Unwuchtmasse und ein Ausgleichsgetriebe mit der in Bild 2.47e dargestellten Anordnung ausgeglichen werden sollen, berechne man die x -Komponente der Lagerkraft (F_{x12}) und das Antriebsmoment M_{an} . Man gebe in allgemeiner Form die Ausgleichsbedingungen für die erste und zweite Harmonische von F_{x12} und M_{an} an. Wie groß sind die Winkel α und γ sowie die Ausgleichsmassen $\bar{m}_4$ und m_5 zu wählen, damit die ersten beiden Harmonischen dieser Kraftgrößen ausgeglichen sind? Es sei $\lambda = l_2/l_3 = \bar{l}_2/\bar{l}_3 \ll 1$ und $\varphi = \Omega t$.

A2.13 Kurbelwelle einer Vierzylindermaschine

Zum Ausgleich einzelner Harmonischer stehen bei einer Vierzylindermaschine folgende Größen der Kurbelwinkel zur Diskussion, vgl. Bild 2.53:

Variante a): $\gamma_1 = 0^\circ$; $\gamma_2 = 90^\circ$; $\gamma_3 = 270^\circ$; $\gamma_4 = 180^\circ$

Variante b): $\gamma_1 = 0^\circ$; $\gamma_2 = 180^\circ$; $\gamma_3 = 180^\circ$; $\gamma_4 = 0^\circ$

Man ermittle, welche Ordnungen der Kräfte und Momente bei diesen Varianten ausgeglichen werden, wenn gleiche Zylinderabstände und gleiche Triebwerke vorliegen.

A2.14 Massenausgleich einer Kurbelschere

Die Erhöhung der Walzgeschwindigkeit bedingt auch höhere Geschwindigkeiten der Schere, die einen Walzstrang „im Fluge“ auf vorgegebene Länge schneidet. Die freien Massenkräfte der Kurbelschere regen das Maschinengestell zu unerwünschten Schwingungen an und rufen unzulässig große Belastungen in der Maschinenverankerung hervor, sodass Maßnahmen zum Massenkraftausgleich erforderlich werden.

An einer Kurbelschere gemäß Bild 2.51 ist der Massenausgleich so vorzunehmen, dass mittels der an Kurbel und Schwinge zusätzlich anzubringenden Ausgleichsmassen ein vollständiger Kraftausgleich erreicht wird.

Die Kurbelschere besteht aus zwei zwangsläufig miteinander gekoppelten Kurbelschwingen, die bezüglich des Walzstranges symmetrisch angeordnet sind und gegensinnig umlaufen. Da die beiden Kurbelschwingen hinsichtlich ihrer Abmessungen und Masseparameter fast gleich und symmetrisch angeordnet sind, genügt es, die Betrachtungen an nur einem Mechanismus vorzunehmen, vgl. das Berechnungsmodell in Bild 2.51.

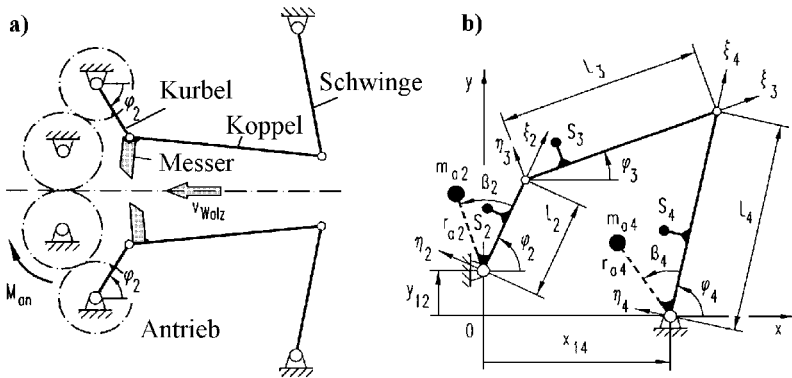


Bild 2.51 Kurbelschere

a) kinematisches Schema, b) Berechnungsmodell mit Masseparametern

Gegeben:

Parameterwerte:

i	Bezeichnung	l_i in m	m_i in kg	ξ_{Si} in m	η_{Si} in m
2	Kurbel	0,100	41,5	0,021	0
3	Koppel (Messerträger)	0,205	53,2	0,074	0,018
4	Schwinge	0,147	17,7	0,065	0

Gesucht:

Betrag ($U_2 = m_{a2} \cdot r_{a2}$; $U_4 = m_{a4} \cdot r_{a4}$) und Winkellage (β_2, β_4) der an der Kurbel und Schwinge anzubringenden Zusatzunwuchten, damit ein vollständiger Ausgleich der resultierenden Gestellkräfte erreicht wird.

2.6.5

Lösungen L2.11 bis L2.14

L2.11 Gemäß (2.325) kann man unter Beachtung der Funktionen $x_{Si} = x_{Si}(\varphi_2(t))$ und $y_{Si} = y_{Si}(\varphi_2(t))$ schreiben:

$$F_x = -\ddot{\varphi}_2 \sum_{i=2}^I m_i x'_{Si} - \dot{\varphi}_2^2 \sum_{i=2}^I m_i x''_{Si}; \quad F_y = -\ddot{\varphi}_2 \sum_{i=2}^I m_i y'_{Si} - \dot{\varphi}_2^2 \sum_{i=2}^I m_i y''_{Si} \quad (2.373)$$

Da die hier verwendeten Bezeichnungen weitestgehend mit denen aus Bild 2.27a übereinstimmen, können die Lagefunktionen erster Ordnung direkt aus Tabelle 2.1 übernommen werden, da die dort getroffene Voraussetzung hinsichtlich des Kurbel-Verhältnisses zutrifft.

Für die gegebenen Parameterwerte erhält man $\lambda = l_2/l_3 = 0,04 \text{ m}/0,75 \text{ m} = 0,0533 \ll 1$. Damit wird mit den Funktionen aus Tabelle 2.1 und bei nochmaliger Differenziation nach φ_2 :

$$\begin{aligned} x''_{S_2} &= -\xi_{S_2} \cdot \cos \varphi_2; & y''_{S_2} &= -\xi_{S_2} \cdot \sin \varphi_2 \\ x''_{S_4} &= -l_2 \cdot (\cos \varphi_2 + \lambda \cos 2\varphi_2) \end{aligned} \quad (2.374)$$

Die Ausgleichsmasse hat folgende Schwerpunktkoordinaten im raumfesten System, vgl. Bild 2.50:

$$\begin{aligned}x_{Sa} &= r_a \cdot \cos(\varphi_2 + \pi) = -r_a \cdot \cos \varphi_2 \\y_{Sa} &= r_a \cdot \sin(\varphi_2 + \pi) = -r_a \cdot \sin \varphi_2\end{aligned}\quad (2.375)$$

Die Ableitungen nach dem Kurbelwinkel sind dann

$$\begin{aligned}x'_{Sa} &= r_a \cdot \sin \varphi_2; & x''_{Sa} &= r_a \cdot \cos \varphi_2 \\y'_{Sa} &= -r_a \cdot \cos \varphi_2; & y''_{Sa} &= r_a \cdot \sin \varphi_2\end{aligned}\quad (2.376)$$

Setzt man nun die Ausdrücke aus (2.374) und (2.376) in die Beziehung (2.373) für die Kräfte ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}F_x &= \left[(m_2 \xi_{S_2} - m_a r_a + m_4 l_2) \cdot \sin \varphi_2 + m_4 l_2 \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\varphi_2 \right] \cdot \ddot{\varphi}_2 \\&\quad + \left[(m_2 \xi_{S_2} - m_a r_a + m_4 l_2) \cdot \cos \varphi_2 + m_4 l_2 \lambda \cdot \cos 2\varphi_2 \right] \cdot \dot{\varphi}_2^2 \\F_y &= - (m_2 \xi_{S_2} - m_a r_a) \cdot (\ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2)\end{aligned}\quad (2.377)$$

Die Gl. für die Kraft F_x stellt eine Näherung dar, weil aufgrund $\lambda \ll 1$ schon in den Gln. für x'_{S_4}, x''_{S_4} die Terme, die höhere Potenzen von λ enthalten, vernachlässigt wurden.

Die erste Harmonische von F_x wird identisch null, falls der Ausdruck in der runden Klammer verschwindet. Die Ausgleichsbedingung lautet also:

$$m_2 \xi_{S_2} - m_a r_a + m_4 l_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.378)$$

Hieraus folgt für die Unwucht der Ausgleichsmasse:

$$U_a = m_a r_a = m_2 \xi_{S_2} + m_4 l_2 = 0,6176 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad (2.379)$$

Zur Dimensionierung der Ausgleichsmasse werden für die vorgegebene Form eines Kreisingausschnittes die allgemeinen Formeln für Masse, Schwerpunktlage und Trägheitsmoment benötigt. In Taschenbüchern findet man:

$$m_a = \varrho b \cdot (R^2 - r^2) \cdot \beta; \quad r_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} \quad (2.380)$$

$$J_a^O = \frac{\varrho b}{2} \cdot (R^4 - r^4) \cdot \beta \quad (2.381)$$

Aus (2.380) folgt für die Unwucht, deren erforderliche Größe aus (2.379) bekannt ist, die Formel

$$U_a = \frac{2}{3} \varrho b \cdot (R^3 - r^3) \cdot \sin \beta \quad (2.382)$$

Sie enthält noch zwei variable Größen, nämlich R und β . Löst man (2.382) nach $\sin \beta$ auf, erhält man die Relation

$$\sin \beta = \frac{3 \cdot U_a}{2 \varrho b \cdot (R^3 - r^3)} \leq 1 \quad (2.383)$$

Aus dieser Ungleichung folgt für den Außenradius R in Verbindung mit der Beschränkung laut Aufgabenstellung:

$$R_{\min} = \sqrt[3]{r^3 + \frac{3 \cdot U_a}{2 \rho b}} \leq R \leq R_{\max} \quad (2.384)$$

Mit den gegebenen Parameterwerten und der Unwucht gemäß (2.379) ergeben sich die minimalen Radien für:

Grauguss	$R_{\min} = 147,4 \text{ mm}$
Sn-Bronze	$R_{\min} = 137,7 \text{ mm}$
Weißmetall	$R_{\min} = 133,4 \text{ mm}$

Der Vergleich der einzelnen Minimalradien mit dem zulässigen Maximalwert $R_{\max} = 140 \text{ mm}$ zeigt, dass Grauguss hier nicht infrage kommt. Es wird als Werkstoff Weißmetall ($\rho b = 392 \text{ kg/m}^2$) und als Radius $R = 135 \text{ mm}$ gewählt. Mit diesen Festlegungen kann nun der Winkel β aus (2.383) bestimmt werden. Zunächst ergibt sich der Sinus zu $\sin \beta = 0,96366$. Von den beiden möglichen Lösungen

$$\beta_1 = 1,3004 \text{ rad} \quad (\cong 74,5^\circ) \quad \text{und} \quad \beta_2 = 1,8412 \text{ rad} \quad (\cong 105,5^\circ) \quad (2.385)$$

wird derjenige Winkel benutzt, für den die Masse und das Trägheitsmoment am kleinsten ist. Da beide linear vom Winkel β abhängen, kommt nur der kleinere der beiden Winkel infrage.

Masse und Trägheitsmoment der Ausgleichsmasse lassen sich nun aus (2.380) und (2.381) berechnen:

$$\underline{m_a = 9,09 \text{ kg};} \quad \underline{J_a^O = 0,0846 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \quad (2.386)$$

Durch eine mit dem Antrieb umlaufende Ausgleichsmasse lässt sich in einem Mechanismus nur die **erste Harmonische** einer Kraftkomponente ausgleichen. Für den Ausgleich mehrerer Kraftkomponenten und mehrerer Harmonischer sind kompliziertere Ausgleichsmechanismen erforderlich.

L2.12 Die Lagerkraft eines Schubkurbelgetriebes mit einer Unwuchtmasse m_5 hat (vgl. Tabelle 2.1) die x -Komponente

$$\begin{aligned} F_{x12} &= -m_5 \ddot{x}_5 - m_4 \ddot{x}_4 \\ &= \Omega^2 [m_5 l_5 \cos(\varphi + \gamma) + m_4 l_2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi + \dots)] \end{aligned} \quad (2.387)$$

Von der Fourierreihe wurden nur die ersten beiden Harmonischen angegeben, da die höheren kleiner sind als die Ordnung λ^2 .

Für das Ausgleichsgetriebe mit einer um den Winkel α versetzten Kurbel ergibt sich demzufolge (weil anstelle von φ der Winkel $\varphi + \alpha$ steht):

$$\bar{F}_{x12} = \bar{m}_4 \bar{l}_2 \Omega^2 [\cos(\varphi + \alpha) + \lambda \cos 2(\varphi + \alpha) + \dots] \quad (2.388)$$

Die Summe $F_x = F_{x12} + \bar{F}_{x12}$ ist dann nach der Benutzung von Additionstheoremen, geordnet nach der Ordnung der Harmonischen

$$\begin{aligned} F_x &= \Omega^2 [\cos \varphi (m_4 l_2 + \bar{m}_4 \bar{l}_2 \cos \alpha + m_5 l_5 \cos \gamma) \\ &\quad - \sin \varphi (\bar{m}_4 \bar{l}_2 \sin \alpha + m_5 l_5 \sin \gamma) \\ &\quad + \lambda \cos 2\varphi (m_4 l_2 + \bar{m}_4 \bar{l}_2 \cos 2\alpha) + \lambda \sin 2\varphi (\bar{m}_4 \bar{l}_2 \sin 2\alpha) + \dots]. \end{aligned} \quad (2.389)$$

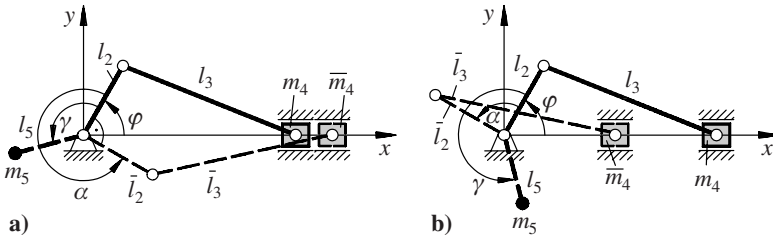


Bild 2.52 Mechanismen zum Ausgleich der 1. und 2. Harmonischen von F_x und der 2. Harmonischen von M_{an} des Schubkurbelgetriebes

a) $\alpha = 3\pi/2$, $\gamma = 3\pi/4$; **b)** $\alpha = \pi/2$, $\gamma = 5\pi/4$

Das Antriebsmoment des mit dem Ausgleichsgetriebe gekoppelten Schubkurbelgetriebes ergibt sich (bei $\varphi = \Omega t$ unabhängig von m_5) mit (2.326) zu

$$\begin{aligned}
 M_{an} &= m_4 \ddot{x}_4 x'_4 + \bar{m}_4 \ddot{x}_4 \bar{x}'_4 \\
 &= -\frac{\Omega^2}{4} \left[\lambda \cos \varphi (\bar{m}_4 \bar{l}_2^2 \sin \alpha) \right. \\
 &\quad + \lambda \sin \varphi (m_4 l_2^2 + \bar{m}_4 \bar{l}_2^2 \cos \alpha) - 2 \cos 2\varphi (\bar{m}_4 \bar{l}_2^2 \sin 2\alpha) \\
 &\quad \left. - 2 \sin 2\varphi (m_4 l_2^2 + \bar{m}_4 \bar{l}_2^2 \cos 2\alpha) + \dots \right].
 \end{aligned} \tag{2.390}$$

Es verschwinden diejenigen Harmonischen von F_x und M_{an} , deren Ausdrücke in den runden Klammern gleich null gesetzt werden. Man kann die Ausgleichsbedingungen auswählen, die für den jeweiligen Anwendungsfall wesentlich sind und dementsprechende konstruktive Maßnahmen festlegen.

Die erste Harmonische von F_x kann ohne Ausgleichsgetriebe mit einer Unwuchtmasse m_5 ausgeglichen werden. Aus den ersten beiden Klammern von F_x folgen mit $\bar{m}_4 = 0$ die Ausgleichsbedingungen

$$m_4 l_2 + m_5 l_5 \cos \gamma = 0, \quad m_5 l_5 \sin \gamma = 0. \tag{2.391}$$

Beide sind für die Werte $\gamma = \pi$ und $m_5 l_5 = m_4 l_2$ erfüllt, vgl. Bild 2.30.

Einen kombinierten Massen- und Leistungsausgleich erreicht man, wenn man die erste Harmonische von F_x und die dominierende zweite Harmonische von M_{an} null setzt. Aus den entsprechenden vier Ausgleichsbedingungen

$$\begin{aligned}
 m_4 l_2 + \bar{m}_4 \bar{l}_2 \cos \alpha + m_5 l_5 \cos \gamma &= 0 \\
 \bar{m}_4 \bar{l}_2 \sin \alpha + m_5 l_5 \sin \gamma &= 0 \\
 \bar{m}_4 \bar{l}_2^2 \sin 2\alpha &= 0 \\
 m_4 l_2^2 + \bar{m}_4 \bar{l}_2^2 \cos 2\alpha &= 0
 \end{aligned} \tag{2.392}$$

folgt die Lösung $\bar{m}_4 = m_4$, $\bar{l}_2 = l_2$, $m_5 l_5 = \sqrt{2} m_4 l_2$ und entweder $\alpha = 3\pi/2$, $\gamma = 3\pi/4$ (Bild 2.52a) oder $\alpha = \pi/2$, $\gamma = 5\pi/4$ (Bild 2.52b). Damit ist auch die zweite Harmonische von F_x ausgeglichen. Durch Einsetzen prüfe man die Erfüllung der Ausgleichsbedingungen!

I.2.13 Legt man das Koordinatensystem in das erste Triebwerk (Bild 2.53), so gilt $z_1 = 0$. Die allgemeinen Ausgleichsbedingungen nach (2.368) und (2.369) für eine Vierzylindermaschine lauten dann:

Kräfte k -ter Ordnung

$$\left. \begin{aligned} 1 + \cos k\gamma_2 + \cos k\gamma_3 + \cos k\gamma_4 &= 0 \\ 0 + \sin k\gamma_2 + \sin k\gamma_3 + \sin k\gamma_4 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.393)$$

Momente k -ter Ordnung

$$\left. \begin{aligned} 0 + z_2 \cos k\gamma_2 + z_3 \cos k\gamma_3 + z_4 \cos k\gamma_4 &= 0 \\ 0 + z_2 \sin k\gamma_2 + z_3 \sin k\gamma_3 + z_4 \sin k\gamma_4 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.394)$$

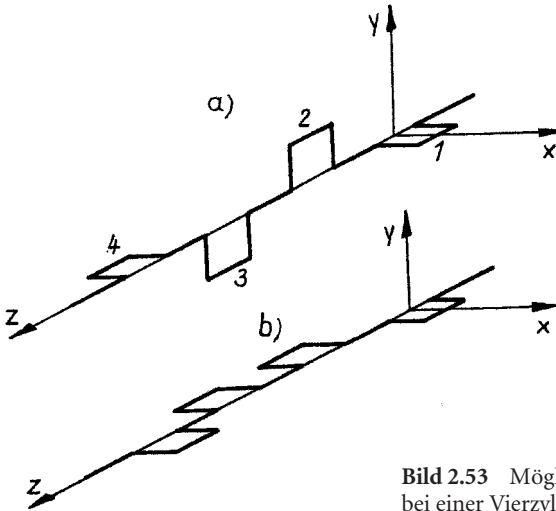


Bild 2.53 Mögliche Kurbelanordnungen bei einer Vierzylindermaschine

Für Variante a) gilt mit den angegebenen Winkeln für

$k = 1 :$	$k = 2 :$	
$1 + 0 + 0 - 1 = 0$	$1 - 1 - 1 + 1 = 0$	
$0 + 1 - 1 + 0 = 0$	$0 + 0 + 0 + 0 = 0$	(2.395)
$0 + 0 + 0 - z_4 \neq 0$	$0 - z_2 - z_3 + z_4 = 0$	
$0 + z_2 - z_3 + 0 \neq 0$	$0 + 0 + 0 + 0 = 0$	

Es sind also Kräfte erster und zweiter Ordnung und die Momente zweiter Ordnung ausgleichbar. Die Momente erster Ordnung sind wegen der Nichterfüllbarkeit der Bedingungen $z_4 = 0$ und $z_2 = z_3$ nicht ausgeglichen.

Bei Variante b) ergibt sich mit $\gamma_2 = \gamma_3 = \pi, \gamma_4 = 0$:

$k = 1 :$	$k = 2 :$	
$1 - 1 - 1 + 1 = 0$	$1 + 1 + 1 + 1 \neq 0$	
$0 + 0 + 0 + 0 = 0$	$0 + 0 + 0 + 0 = 0$	(2.396)
$0 - z_2 - z_3 + z_4 = 0$	$0 + z_2 + z_3 + z_4 \neq 0$	
$0 + 0 + 0 + 0 = 0$	$0 + 0 + 0 + 0 = 0$	

Bei dieser Variante sind die Kräfte und Momente erster Ordnung ausgeglichen, während die Kräfte und Momente zweiter Ordnung nicht ausgleichbar sind.

L2.14 Ausgangspunkt ist (2.356) für die zu einer komplexen Größe zusammengefassten Schwerpunktlage eines Viergelenkgetriebes. Um sie auf die hier vorliegenden Verhältnisse anwenden zu können, müssen die statischen Momente der Glieder 2 (Kurbel) und 4 (Schwinge) um die anzubringenden Zusatzunwuchten ergänzt werden, also:

$$m_2 \xi_{S_2} \Rightarrow m_2 \xi_{S_2} + u_2 \cdot \cos \beta_2; \quad m_2 \eta_{S_2} \Rightarrow m_2 \eta_{S_2} + u_2 \cdot \sin \beta_2 \quad (2.397)$$

$$m_4 \xi_{S_4} \Rightarrow m_4 \xi_{S_4} + u_4 \cdot \cos \beta_4; \quad m_4 \eta_{S_4} \Rightarrow m_4 \eta_{S_4} + u_4 \cdot \sin \beta_4. \quad (2.398)$$

Einsetzen in (2.356) ergibt mit der Forderung, dass für den vollständigen Ausgleich der Gesamtschwerpunkt für jede beliebige Getriebestellung unbeweglich bleiben muss, die Ausgleichsbedingungen (Auftrennung in Real- und Imaginärteil) für dieses Getriebe, die eine Verallgemeinerung von (2.357) darstellen:

$$m_2 \xi_{S_2} + U_2 \cdot \cos \beta_2 + m_3 l_2 + (m_4 \xi_{S_4} + U_4 \cdot \cos \beta_4) \cdot \frac{l_2}{l_4} = 0 \quad (2.399)$$

$$m_2 \eta_{S_2} + U_2 \cdot \sin \beta_2 + (m_4 \eta_{S_4} + U_4 \cdot \sin \beta_4) \cdot \frac{l_2}{l_4} = 0 \quad (2.400)$$

$$m_3 \xi_{S_3} + (m_4 \xi_{S_4} + U_4 \cdot \cos \beta_4) \cdot \frac{l_3}{l_4} = 0 \quad (2.401)$$

$$m_3 \eta_{S_3} + (m_4 \eta_{S_4} + U_4 \cdot \sin \beta_4) \cdot \frac{l_3}{l_4} = 0. \quad (2.402)$$

Ihre Auflösung nach den Unwuchtkomponenten liefert, wobei Terme aus (2.401) und (2.402) noch in (2.399) und (2.400) eingesetzt werden:

$$U_{2\xi} = U_2 \cdot \cos \beta_2 = -m_2 \xi_{S_2} - m_3 l_2 \cdot \left(1 - \frac{\xi_{S_3}}{l_3}\right) \quad (2.403)$$

$$U_{2\eta} = U_2 \cdot \sin \beta_2 = -m_2 \eta_{S_2} + m_3 \eta_{S_3} \cdot \frac{l_2}{l_3} \quad (2.404)$$

$$U_{4\xi} = U_4 \cdot \cos \beta_4 = -m_4 \xi_{S_4} - m_3 \xi_{S_3} \cdot \frac{l_4}{l_3} \quad (2.405)$$

$$U_{4\eta} = U_4 \cdot \sin \beta_4 = -m_4 \eta_{S_4} - m_3 \eta_{S_3} \cdot \frac{l_4}{l_3}. \quad (2.406)$$

Aus den Unwuchtkomponenten lassen sich nun die Unwuchtbeträge und ihre Winkellagen berechnen. Aus (2.403) bis (2.406) folgt mit $k = 2$ und 4:

$$U_k = \sqrt{U_{k\xi}^2 + U_{k\eta}^2}; \quad \cos \beta_k = \frac{U_{k\xi}}{U_k}; \quad \sin \beta_k = \frac{U_{k\eta}}{U_k}. \quad (2.407)$$

Mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Parameterwerten erhält man:

$$U_{2\xi} = -4,2711 \text{ kg} \cdot \text{m}; \quad U_{2\eta} = 0,46712 \text{ kg} \cdot \text{m}. \quad (2.408)$$

Der Betrag der Unwucht an der Kurbel ist also

$$\underline{U_2 = m_{a2} \cdot r_{a2} = 4,2966 \text{ kg} \cdot \text{m}.} \quad (2.409)$$

und ihre Winkellage ist festgelegt mit:

$$\cos \beta_2 = -0,99407; \quad \sin \beta_2 = 0,10872 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\beta_2 = 173,76^\circ.}} \quad (2.410)$$

Für die analogen Größen an der Schwinge ergibt sich:

$$U_{4\xi} = -3,9735 \text{ kg} \cdot \text{m}; \quad U_{4\eta} = -0,68667 \text{ kg} \cdot \text{m}. \quad (2.411)$$

Hieraus berechnet sich der Betrag der Unwucht an der Schwinge zu:

$$\underline{U_4 = m_{a4} \cdot r_{a4} = 4,0324 \text{ kg} \cdot \text{m}} \quad (2.412)$$

mit einer Winkellage von:

$$\cos \beta_4 = -0,98539; \quad \sin \beta_4 = -0,17029 \Rightarrow \underline{\beta_4 = 189,8^\circ}. \quad (2.413)$$

In Bild 2.54 ist der Mechanismus maßstabsgerecht mit den Zusatzunwuchten dargestellt.

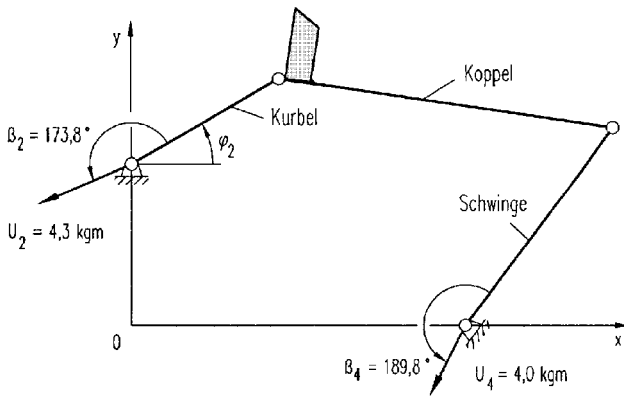


Bild 2.54 Mechanismus mit Zusatzunwuchten

Die konstruktive Gestaltung der Ausgleichsmassen hängt noch von den konkreten Gegebenheiten, wie z. B. verfügbarer Bauraum, ab. Die Ausgleichsmassen werden oft so ausgelegt, dass ihre Trägheitsmomente möglichst klein werden.

Beim Viergelenkgetriebe ist ein vollständiger Ausgleich durch jeweils eine Zusatzunwucht an Kurbel und Schwinge realisierbar. Ihr Einfluss auf das Antriebsmoment und auf die einzelnen Lager- und Gelenkkräfte sollte durch Nachrechnung überprüft werden.

3 Fundamentierung und Schwingungsisolierung

3.1

Vorbemerkungen

Maschinen verursachen oft leider Vibrationen des Aufstellortes und damit Störungen, Schäden sowie Belästigungen von Menschen. Solche Schäden, die tatsächlich oder vermeintlich durch Schwingungen entstanden sind, führen häufig zu Verhandlungen über Entschädigungen und zu gerichtlichen Auseinandersetzungen. Bei rechtzeitiger Modellierung und Schwingungsberechnung der kompletten Anlage, bei der sich die Projektanten verschiedener Firmen (oder Abteilungen) untereinander abstimmen, ließen sich viele solcher Auseinandersetzungen vermeiden. Es geht dabei meist um größere Beträge, denn die Fundamentmassen betragen nicht nur dutzende, sondern hunderte (Schmiedehämmer, Druckmaschinen) oder tausende Tonnen (Gebäudegruppen) [24], [31].

Das folgende Kapitel befasst sich nur mit einigen Teilproblemen aus dem großen Gebiet der Fundamentierung von Maschinen [14], [18], [24], [29], nämlich den Blockfundamenten. Es soll aber darauf hingewiesen werden, dass es viele dynamische Probleme bei der Auslegung der Tischfundamente gibt, wie sie z. B. bei Turbogeneratoren und Druckmaschinen eingesetzt werden, von denen Bild 3.1 ein Beispiel zeigt.

Solche großen Fundamentkonstruktionen erfordern eine umfassende Vorausberechnung mit Modellen mit vielen Freiheitsgraden, vgl. Kapitel 6. Die Stahlkonstruktion, welche die eigentlichen Maschinenbaugruppen trägt, ist mit einem Betonfundament verbunden, das wiederum im Erdboden ruht, dessen Kennwerte von den geologischen Bedingungen am Aufstellort abhängen. Es muss manchmal ein gewaltiger Aufwand getrieben werden, um eine so große Maschine, deren Fundament mehrere hundert Tonnen wiegt, betriebssicher schwingungsisoliert aufzustellen. In Erdbebengebieten müssen konstruktive Lösungen gefunden werden, damit die Maschinen bei Erdbeben nicht gestört oder beschädigt werden.

Außer störenden dynamischen Belastungen des Aufstellortes belasten Vibrationen der Maschinen häufig auch den menschlichen Körper (z. B. bei der Vibration des Fußbodens, des Fahrersitzes) oder das Hand-Arm-System bei der Führung von Vibrationsgeräten (Hämmer, Bohrer, Stampfer). Aus dynamischer Sicht sind Fragen der Fundamentierung und Schwingungsisolierung verwandt. Messprinzipien und Beurteilungsverfahren sind bezüglich der Einwirkungen auf Menschen (Anforderungen des Arbeitsschutzes), Gebäude und Maschinen in Normen und Richtlinien formuliert, die der Konstrukteur beachten muss. Tabelle 3.1 nennt einige solcher Vorschriften, deren Aufzählung allerdings nicht vollzählig ist. Die in Normen oder Richtlinien niedergelegten Erfahrungen können als Anhaltswerte angesehen werden,

obwohl sie den konkreten Einzelfall nicht genau betreffen können und sich teilweise sogar widersprechen.

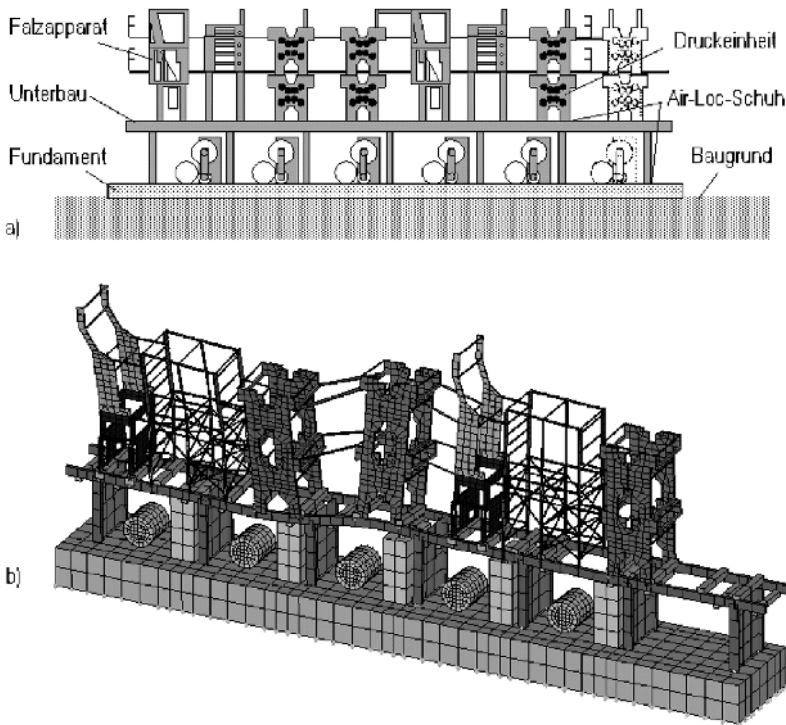


Bild 3.1 Rollen-Offsetdruckmaschine mit Fundament; **a)** Übersichtsbild, **b)** FE-Modell und berechnete dritte Eigenform bei $f_3 = 5,01$ Hz (Quelle: Dissertation *Xingliang Gao*, TU Chemnitz, 2001)

Die Erregung der Fundamentalschwingung erfolgt meist periodisch oder stoßartig. Periodische Erregungen treten durch nichtausgeglichene Massenkräfte auf. Stoßerregungen gibt es z. B. bei Pressen, Stanzen, Scheren und Hämmern.

Die Aufstellung von Maschinen interessiert den Maschinenhersteller, den Projektanten und den Betreiber. Jeder Aufstellungsort, ob der direkte Baugrund, eine Bauwerksdecke oder eine Tragkonstruktion, ist elastisch. Mit der aufgestellten Maschine ergibt sich also stets ein Schwingungssystem. Die Fundamentierungsaufgabe besteht zunächst im Nachweis der Zulässigkeit einer Maschinenaufstellung, die ohne spezielle Isoliermaßnahmen durchgeführt werden kann. Dabei spielen die auf den Boden übertragenen statischen und dynamischen Kräfte und die Bewegung der Maschine eine wesentliche Rolle.

Der Vibrationsschutz beginnt mit Verfahren, bei denen die Schwingbewegungen durch Beeinflussung der Erregermechanismen oder gesteuerte Gegenbewegungen ausgeglichen werden. Hierein fallen die Maßnahmen des Auswuchtens und des Massenausgleiches, vgl. Kapitel 2.

Tabelle 3.1 Normen und Richtlinien zur Schwingungsisolierung (Auszug)

BS 7385	(British Standard): Measurement and Evaluation of Vibration in Buildings
DIN ISO 10 816-1	Bewertung der Schwingungen von Maschinen durch Messungen an nichtrotierenden Teilen
DIN 4150 Teil 2	Erschütterungen im Bauwesen, Einwirkungen auf Menschen in Gebäuden
DIN 30 786	Transportbelastungen, Teil 1: Grundlagen, Teil 2: Schwingungen und Stoßbeanspruchungen beim Straßentransport
E DIN ISO 8002	Mechanische Schwingungen Landfahrzeuge
DIN EN ISO 5349-1	Messung und Bewertung der Einwirkungen von Schwingungen auf das Hand-Arm-System des Menschen
DIN EN 28 662-1	Handgehaltene motorbetriebene Maschinen. Messung mechanischer Schwingungen am Handgriff – Allgemeines Hand-Arm-System des Menschen
SN 640 323	(Schweizer Norm) Erschütterungseinwirkungen auf Bauwerke
VDI 2057 1-4	Einwirkung mechanischer Schwingungen auf den Menschen
VDI 2059 1-5	Wellenschwingungen von Turbosätzen
VDI 2062-1	Schwingungsisolierung; Begriffe und Methoden
VDI 2062-2	Schwingungsisolierung, Isolierelemente
VDI 3831	Schutzmaßnahmen gegen die Einwirkung mechanischer Schwingungen auf den Menschen

Der zweite Schritt umfasst alle Verfahren, bei denen durch geeignete Aufstellung des Objektes die Übertragung der Kräfte oder Schwingungen beeinflusst wird. Bei der **Schwingungsisolierung** will man den Aufstellungsort vor den von der Maschine ausgehenden dynamischen Kräften schützen oder Vibrationen des Aufstellungsortes von der Maschine (oder z. B. auch von einem Menschen oder Messgerät) fernhalten. Im ersten Fall wirkt also im Berechnungsmodell eine Kräfteerregung, während im zweiten Wegerregung vorliegt.

Bei der aktiven Schwingungskompensation wird ein Zeitsignal der Vibration von einem Sensor gemessen, „verarbeitet“ und zur Ansteuerung eines Aktuators verwendet. Aktuatoren können piezoelektrische, elektromagnetische, hydraulische oder pneumatische Stellglieder sein. Die „Verarbeitung“ des Signals erfolgt meist durch einen Regelkreis, der die Differenz zwischen Sollwert und Istwert auswertet [10], [17], [31].

Der Ingenieur wird häufig vor die Aufgabe gestellt, die Auswirkungen von Schwingungen auf Menschen, Bauwerke oder Maschinen zu beurteilen. Dazu dienen Beurteilungsmaßstäbe, die, sobald ein exakter Nachweis nicht möglich ist, herangezogen werden können. Sie sind in Form von Standards, Richtlinien und Empfehlungen sowohl im Hinblick auf Beurteilungsgrößen als auch ihrer messtechnischen Erfassung niedergelegt. Dabei herrscht im internationalen Maßstab die beste Übereinstimmung in der Beurteilung der Schwingungseinwirkungen auf den Menschen. Für Bauwerke beziehen sich die Angaben zumeist auf konventionelle Bauweisen und sind für moderne Industriebauten nicht immer ohne Weiteres anwendbar.

Für die Beurteilung der Schwingungseinwirkung auf Maschinen gibt es eine große Anzahl spezieller Werkstandards oder Angaben für Maschinengruppen, die nur den Charakter von Richtwerten haben.

Für die Beurteilung der Schwingungseinwirkung auf den Menschen gelten DIN 45 671, DIN 45 675 sowie die VDI-Richtlinien 2057 und 3831. Die Belastung durch die auf den Menschen einwirkenden mechanischen Schwingungen hängt von verschiedenen Parametern ab, wie Amplitude, Frequenz (Spektrum) und Richtung der einwirkenden Schwingungen sowie von der Dauer der Einwirkung und der Einwirkungsstelle am Körper. Aus den physikalischen Kenngrößen der Schwingungsbelastung wird unter Berücksichtigung der unterschiedlichen frequenzabhängigen Wirkung eine „Bewertete Schwingstärke“ K als Kenngröße der Beanspruchung ermittelt.

Zur Beurteilung der Schwingungseinwirkung auf Gebäude und Baugrund ist die Skala der Schwingstärkemaße nach RISCH und ZELLER am weitesten verbreitet, die auf die Schwingleistung zurückführt. Es gilt:

$$S = 10 \lg \frac{x}{x_0} \quad \text{in vbrar}$$

$$x = \frac{a^2}{f}; \quad x_0 = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^3 \quad (3.1)$$

a Amplitude der Beschleunigung in m/s^2

f Frequenz in Hz

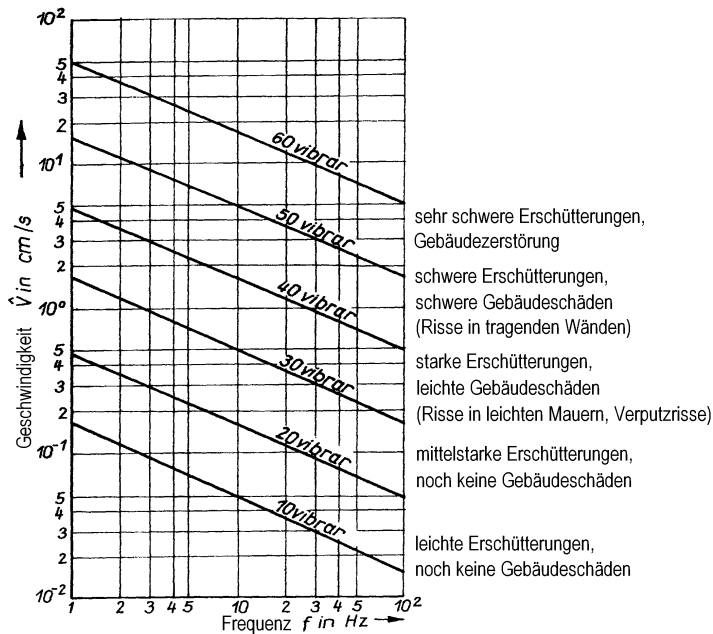


Bild 3.2 Schwingstärkemaß zur Beurteilung der Bauwerksgefährdung

Der Zusammenhang gemäß (3.1) ist in Bild 3.2 im Geschwindigkeits-Frequenz-Schaubild aufgetragen.

Für die Beurteilung der Schwingungswirkung auf den Baugrund wird in Abhängigkeit von einem Dichteindex I_D eine zulässige Grenzgeschwindigkeit (Effektivwert in mm/s) angegeben. Dabei gilt:

$$\bar{v}_{Gr} = 1,5 \cdot e^{2,85I_D} \text{ mm/s.} \quad (3.2)$$

I_D liegt in der Größenordnung von 0,1 bis 0,7. Damit liegt $\bar{v}_{Gr}$ je nach Bodenzustand und -art im Bereich

$$\bar{v}_{Gr} = (2 \dots 11,0) \text{ mm/s.} \quad (3.3)$$

3.2

Fundamentbelastung bei periodischer Erregung

3.2.1

Minimalmodelle mit einem Freiheitsgrad

3.2.1.1

Modellbeschreibung

Geht man von einer elastisch aufgestellten starren Maschine aus, so würde sich ein Berechnungsmodell von sechs Freiheitsgraden ergeben. Für die Klärung prinzipieller Fragen der Schwingungsisolierung unter periodischer Erregung (Kraft- bzw. Wegerregung) genügt jedoch ein Modell von einem Freiheitsgrad, während die Stoßerregung meist ein Minimalmodell von zwei Massen mit je einem Freiheitsgrad erfordert. In diesen Modellen haben die Parameter Masse m , Federkonstante c und Dämpfungskonstante b verschiedene Zuordnungen zum System. Sie sind für periodische Schwingungen in der Tabelle 3.3 zusammengestellt.

Jede Fundamentierung hat das Ziel, die auf den Aufstellungsort übertragenen dynamischen Kräfte zu beschränken und auch die Bewegung der Maschine in bestimmten Grenzen zu halten. Dies wird durch entsprechende Abstimmung der Fundament-Eigenfrequenzen gegenüber den durch die Maschine festgelegten Erregerfrequenzen erreicht. Die Dämpfung des Systems spielt dabei eine relativ geringe Rolle.

Die in Tabelle 3.2 angegebenen Grundsätze sind von der Maschinendrehzahl abhängig, die meist der niedrigsten Erregerdrehzahl entspricht. Dies wird durch die unterschiedliche Realisierungsmöglichkeit bedingt, da eine tiefe Abstimmung bei kleiner Erregerfrequenz einen großen konstruktiven Aufwand erfordert. Geht man von dem Minimalmodell einer elastisch aufgestellten Maschine (Tabelle 3.3) aus, lautet die Eigenkreisfrequenz unter Vernachlässigung der Dämpfung:

$$(2\pi f)^2 = \omega_0^2 = \frac{c}{m} = \frac{g}{\frac{mg}{c}} = \frac{g}{x_{st}}. \quad (3.4)$$

Die Federsteifigkeit kann bei linearer Feder auch durch die Federdurchsenkung x_{st} in der statischen Ruhelage dargestellt werden.

Tabelle 3.2 Überblick über Grundsätze zur Schwingungsisolierung bei verschiedenen Aufstellungsarten

	Aufstellung direkt auf dem Baugrund	Aufstellung auf Bauwerksdecke oder Tragkonstruktionen
Maschinen- drehzahl in 1/min	kleine Erregerkräfte (gut aus- gewuchtet, Massenausgleich)	kleine Erregerkräfte (gut aus- gewuchtet, Massenausgleich)
0 bis 500	hohe Abstimmung; kleiner Fundamentblock; Baugrund mit großer Sohlfläche	hohe Abstimmung; großer Fundamentblock; Baugrund mit großer Sohlfläche
300 bis 1000	hohe, tiefe oder gemischte Abstimmung; kleiner Funda- mentblock; Baugrundfeder; auf Resonanzfreiheit achten	hohe oder gemischte Abstim- mung kleiner Fundamentblö- cke; Baugrundfeder oder tiefe Abstimmung; großer Funda- mentblock; Stahl- oder Gum- mifedern
über 1000	tiefe Abstimmung; kleiner Fundamentblock; Baugrund- federung bei kleiner Sohl- fläche; federnde Zwischen- schichten oder Einzelfedern	tiefe Abstimmung; kleiner oder kein Fundamentblock; Stahl- oder Gummifedern; elastische Zwischenschichten; Tragkonstruktionen

Dabei gelten folgende Begriffe:

Tiefe Abstimmung: Die höchste Eigenfrequenz der Fundamentschwingung ist kleiner als die niedrigste Erregerfrequenz.

Hohe Abstimmung: Die Eigenfrequenzen der Fundamentschwingungen liegen über dem Erregerfrequenzspektrum.

Gemischte Abstimmung: Die Spektren der Eigen- und Erregerfrequenzen überlagern sich teilweise, es tritt aber keine Resonanz auf.

Damit folgt für die Eigenfrequenz

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x_{st}}}. \quad (3.5)$$

Setzt man für die Fallbeschleunigung $g \approx 100\pi^2 \text{ cm/s}^2$, ergibt sich mit x_{st} in cm die Näherungsformel für die Grundfrequenz f oder für die entsprechende Drehzahl:

$$f \approx \frac{5}{\sqrt{\frac{x_{st}}{\text{cm}}}} \text{ in Hz}; \quad n \approx \frac{300}{\sqrt{\frac{x_{st}}{\text{cm}}}} \text{ in 1/min.} \quad (3.6)$$

Bild 3.3 zeigt diesen Zusammenhang, der gleichzeitig auf die Möglichkeiten der konstruktiven Ausführung elastischer Zwischenschichten hinweist.

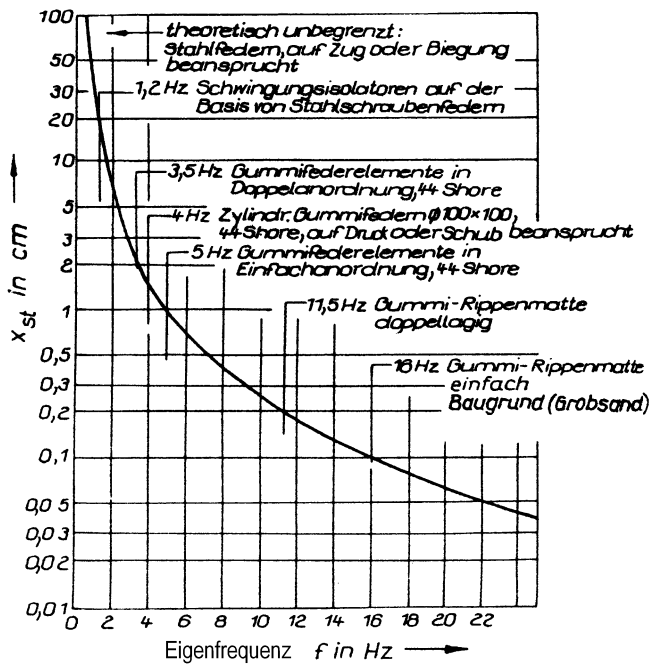
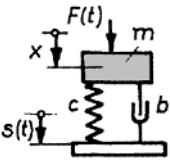


Bild 3.3 Eigenfrequenzen der Maschinenaufstellung in Abhängigkeit von der statischen Federverformung infolge der Eigenlast

Für die Beurteilung der Baugrundbelastung oder der Belastung einer Bauwerksdecke bei direkter Aufstellung sind die Bewegungsgrößen gesucht. Dabei ist der Schwingweg für die Belastung des Bauwerkes maßgebend, die Schwinggeschwindigkeit ein Maß der Maschinenbelastung und die Schwingbeschleunigung ein Maß für die Baugrundbelastung. Wird zwischen Aufstellungsort und Maschine eine elastische Zwischenschicht gebracht, deren Steifigkeit klein gegenüber der des Aufstellungsortes ist, interessiert noch die Kraft auf den Boden, die dann zur Beurteilung der Belas-

tung herangezogen wird. Elastische Zwischenschichten können durch Einzelfedern (Schraubenfedern, Gummifedern, Luftfedern) oder Isoliermatten realisiert werden.

Tabelle 3.3 Parameterzuordnung für das Minimalmodell bei harmonischer Erregung

Modell		Aufstellung auf Baugrund	Direkte Aufstellung auf Bauwerksdecke	Aufstellung über elastische Zwischenschicht
	m	Masse von Maschine und Fundament	Masse von Maschine und Anteil der Geschoßdecke	Masse von Maschine und Fundament
	c	Steifigkeit des Baugrundes	Federung der Bauwerksdecke	Federung der elastischen Zwischenschicht
	b	Dämpfung des Baugrundes	Dämpfung der Bauwerksdecke. Einfluß der Maschinenbefestigung	Dämpfung der elastischen Zwischenschicht
Interessierende Größen		Schwingweg, Schwinggeschwindigkeit, Schwingbeschleunigung		dynamische Kraft auf den Boden

3.2.1.2

Harmonische Erregung

Für das in Tabelle 3.3 dargestellte Berechnungsmodell mit kinematischer oder Krafterregung gilt die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(t) + cs(t) + bs(t) = Q(t) \quad (3.7)$$

oder bei harmonischem Erregerkraftverlauf (Periodendauer $T_0 = 2\pi/\Omega$)

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\hat{Q}}{m} \sin \Omega t. \quad (3.8)$$

Mit den Abkürzungen

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2m\omega_0}; \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}; \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m} \quad (3.9)$$

ergibt sich die zweite Darstellungsform (3.8) aus (3.7). Die stationäre Lösung lautet:

$$x = \frac{\hat{Q}}{c} \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \sin(\Omega t - \varphi); \quad \tan \varphi = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}. \quad (3.10)$$

Die dynamische Kraft auf den Boden ergibt sich bei $s(t) \equiv 0$ mit $\hat{Q} = \hat{F}$ zu

$$F_B = cx + b\dot{x} = \hat{F} \sqrt{\frac{1 + 4D^2\eta^2}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \sin(\Omega t + \gamma - \varphi). \quad (3.11)$$

Darin ist γ die Phasenverschiebung, die durch die Zusammenfassung der Federkraft cx und der Dämpfungskraft $b\dot{x}$ entsteht, während die Phasenverschiebung φ zwischen Erregerkraft und Bewegung liegt. Die Bewegung bei harmonischer Erregung erfolgt mit der Erregerfrequenz.

Für die Amplituden gilt:

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{c} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} = \frac{\hat{F}}{c} V_1 \quad (3.12)$$

$$\hat{F}_B = \hat{F} \sqrt{\frac{1 + 4\eta^2 D^2}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} = \hat{F} V_2. \quad (3.13)$$

Für die Unwuchterregung $\hat{Q} = m_u r_u \Omega^2$ ergibt sich

$$\hat{x} = \frac{m_u r_u}{m} \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} = \frac{m_u r_u}{m} V_3 \quad (3.14)$$

$$\hat{F}_B = \frac{m_u r_u}{m} c \eta^2 \sqrt{\frac{1 + 4D^2\eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} = \frac{m_u r_u}{m} c V_4. \quad (3.15)$$

Die Maschinenschwingung und die Kraft auf den Boden werden durch die *Vergrößerungsfunktionen* V_1, V_2, V_3, V_4 bestimmt. Sie sind in Bild 3.4 dargestellt.

Für das in Tabelle 3.3 dargestellte Berechnungsmodell mit reiner Wegerregung $s = \hat{s} \sin \Omega t$ ist die Bewegungsgleichung (3.7) für $F \equiv 0$ gültig. Damit gilt:

$$\begin{aligned} Q(t) &= m(2\delta \hat{s} \Omega \cos \Omega t + \omega_0^2 \hat{s} \sin \Omega t) \\ &= m \left[\hat{s} \sqrt{\omega_0^4 + (2\delta \Omega)^2} \sin(\Omega t + \gamma) \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Vergleicht man (3.16) mit (3.8), so wird deutlich, dass die Lösung (3.10) benutzt werden kann, wenn gesetzt wird

$$\hat{Q} = m \hat{s} \sqrt{\omega_0^4 + (2\delta \Omega)^2} = m \hat{s} \omega_0^2 \sqrt{1 + 4D^2\eta^2}. \quad (3.17)$$

Mit den Abkürzungen (3.9) ergibt sich also für die Amplitude der Absolutbewegung, die ein Kriterium für die Schwingungsisolierung der Masse ist,

$$\hat{x} = \hat{s} \sqrt{\frac{1 + 4\eta^2 D^2}{(1 - \eta^2)^2 + 4\eta^2 D^2}} = \hat{s} V_2. \quad (3.18)$$

Gleichung (3.12) ist für die direkte Aufstellung auf den Baugrund oder eine Bauwerksdecke maßgebend. Es muss meist davon ausgegangen werden, dass die Dämpfung klein ist und auch nicht durch entsprechende Bauelemente vergrößert werden kann. Man erkennt aus Bild 3.4, dass die Ausschläge im Bereich $\eta = 1$, also in Resonanznähe, sehr groß werden. Für den praktischen Betrieb kommen nur die hohe oder tiefe Abstimmung infrage.

Für $\eta \ll 1$ (hohe Abstimmung) geht $V_1 \rightarrow 1$. Man erreicht dies durch eine steife Feder und Verzicht auf eine Fundamentmasse. Bei der Aufstellung direkt auf den

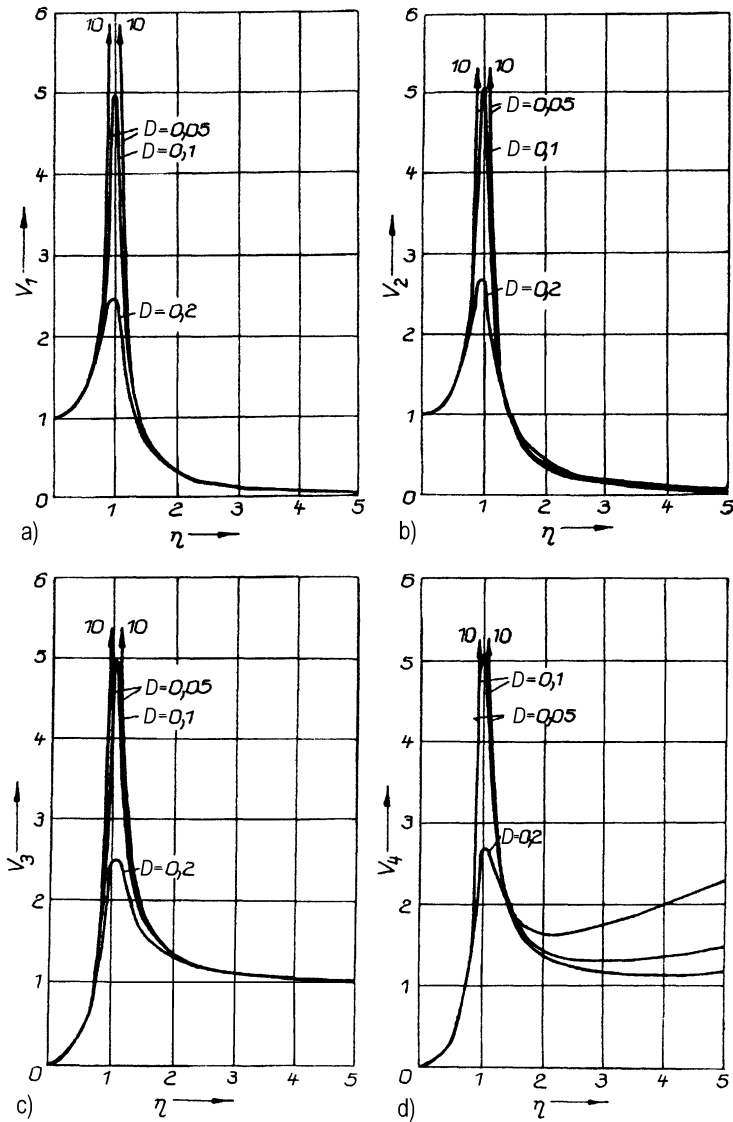


Bild 3.4 Vergrößerungsfunktionen des Schwingers mit einem Freiheitsgrad gemäß (3.12) bis (3.15)

Baugrund muss dazu eine große Auflagefläche vorliegen, bei Bauwerksdecken wird dies erreicht durch entsprechende Deckenversteifung. Im günstigsten Fall beträgt $\hat{x} = \hat{F}/c$, was der statischen Durchbiegung unter der Kraft entspricht. Aufgrund der Vergrößerungsfunktion bietet sich auch die tiefe Abstimmung ($\eta \gg 1$) an. Um den dabei maximal erreichbaren Effekt abschätzen zu können, wird von $\eta \rightarrow \infty$ ausgegangen.

Aus (3.12) ergibt sich der Grenzwert:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{x} = \frac{\hat{F}}{c\eta^2} = \frac{\hat{F}}{m\Omega^2}. \quad (3.19)$$

Kleine Schwingungsamplituden im tief abgestimmten Bereich werden bei großer Masse erreicht. Zur Vergrößerung der Maschinenmasse setzt man diese deshalb auf Fundamentblöcke mit einer mehrfach größeren Masse. In den meisten Fällen wird jedoch dadurch die statische Belastbarkeit des Aufstellungsortes (etwa der Bauwerksdecke) überschritten. Dies führt zur Notwendigkeit, die Tragfunktion von der Federfunktion zu trennen, was man durch elastische Zwischenschichten (Einzelfedern oder Isoliermatten) zwischen Fundament und Aufstellungsort erreicht. Wird nun angenommen, dass ihre Steifigkeit klein gegenüber der Steifigkeit des Aufstellungsortes ist, kommt man zu der zweiten Fragestellung, die die Kraft auf den Boden beinhaltet. Nach (3.13) ist sie unmittelbar proportional zur Vergrößerungsfunktion V_2 . Man erkennt aus Bild 3.4b, dass die kleinste dynamische Bodenkraft bei kleiner Dämpfung auftritt. Es muss deshalb, vor allem bei kleinen η -Werten im tiefabgestimmten Bereich ($\eta \approx 3$), eine dämpfungsarme Federung erreicht werden. Man wird daher Einzelfedern und besonders Schraubenfedern oder Federpaketen den Vorzug vor Isoliermatten geben.

Solange sich die Unwuchtmasse auf einer Kreisbahn bewegt, wirkt eine umlaufende Erregerkraft $\dot{Q} = m_u r_u \Omega^2$, und es gilt die Vergrößerungsfunktion V_3 . Infolge der Bewegung der Fundamentmasse wird diese Kreisbahn verändert, und bei großen Resonanzbewegungen wird die Erregerkraft merklich beeinflusst, vgl. den in [4] beschriebenen Sommerfeldeffekt.

Die Vergrößerungsfunktion V_3 erreicht für die tief abgestimmte Aufstellung den Wert $V_3 = 1$. Dieser Wert wird bei hochabgestimmter Aufstellung für $\eta < \sqrt{1/2} \approx 0,7$ unterschritten. Dazwischen liegen größere Werte, die in Resonanznähe ($\eta = 1$) erheblich ansteigen. Für die Fundamentierung kommen nur die Bereiche $0 < \eta < \sqrt{1/2}$ oder $\eta > 3$ infrage. Ist $V_3 = 1$, folgt für die Bewegungsamplitude aus dem Schwerpunktsatz $\hat{x}m = m_u r_u$.

Man wird zunächst versuchen, im hochabgestimmten Bereich zu fahren. Dies ist jedoch dann schwierig, wenn die Erregerkraft mehrere Harmonische hat, wie beispielsweise der Kolbenmotor, da für die hohe Abstimmung die höchste Harmonische herangezogen werden muss, vgl. Bild 3.5. In einem Fahrzeug erreicht man dies nicht und wählt deshalb wieder elastische Zwischenschichten in Form von Einzelfedern. Dafür ist jedoch die dynamische Kraft auf den Boden (3.15) maßgebend. Sie hängt von der Vergrößerungsfunktion V_4 ab. Aus Bild 3.4d erkennt man den starken Einfluss der Dämpfung bei tief abgestimmter Aufstellung. Dies ist ein Grund dafür, dass der Geräuschpegel des Motoranteiles im Kraftfahrzeug mit steigender Drehzahl steigt.

Für die Wegerregung gilt (3.18). Die beste Isolierwirkung tritt somit bei schwach gedämpfter, tief abgestimmter Aufstellung ein. Es ist jedoch zu beachten, dass (3.12) bis (3.15) und (3.18) nur für den stationären Zustand gelten. Dämpfung sorgt praktisch immer dafür, dass Anlaufstörungen abklingen. Bei allen behandelten Fällen der Schwingungsisolierung trat die Bedeutung einer tief abgestimmten Aufstellung hervor. Für die praktische Ausführung sei jedoch darauf hingewiesen, dass dafür natürlich eine freie Bewegung des Fundamentblockes gewährleistet sein muss. Rohr-

leitungen oder andere Verbindungen müssen entweder sehr flexibel sein oder in die Berechnung der Federwerte mit eingehen. Auf jeden Fall ist zu beachten, dass beim Durchfahren der Resonanz eine hohe Beanspruchung in steifen Verbindungen auftritt.

Die Spitzenwerte liegen bei diesen Vergrößerungsfunktionen in der Nähe von $\eta = 1$ bei

$$V_{\max} = \frac{1}{2D}. \quad (3.20)$$

3.2.1.3

Periodische Erregung/Fourierreihe

Zyklisch arbeitende Maschinen, wie Kraft- und Arbeitsmaschinen (z. B. Pumpen, Verdichter), Verarbeitungsmaschinen (z. B. Textilmaschinen, Verpackungsmaschinen, polygrafische Maschinen), Roboter und Transportmaschinen werden meist durch periodische Kräfte und Momente belastet. Hier soll nicht der Anlauf- oder Bremsvorgang, sondern der stationäre Betriebszustand behandelt werden, der durch eine bestimmte (kinematische) Zyklusdauer $T_0 = 2\pi/\Omega$ gekennzeichnet ist. Eine periodische Erregerkraft lässt sich gemäß (1.112) durch eine Fourier-Reihe beschreiben:

$$F(t) = F(t + T_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(F_{ak} \cos \frac{2\pi kt}{T_0} + F_{bk} \sin \frac{2\pi kt}{T_0} \right). \quad (3.21)$$

Die Summanden heißen Harmonische k -ter Ordnung der Erregerkraft.

Es kann mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 2\pi/T_0$ des Antriebs gerechnet werden, die auch veränderlich und durch einen Ungleichförmigkeitsgrad gekennzeichnet sein kann. Die Fourier-Reihe hat dann eine der beiden folgenden Formen:

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}_k \sin(k\Omega t + \beta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (F_{ak} \cos k\Omega t + F_{bk} \sin k\Omega t). \quad (3.22)$$

Die Fourierkoeffizienten $\hat{F}_k$ und die Phasenwinkel β_k stehen mit den Koeffizienten F_{ak} und F_{bk} in der aus (1.115) bekannten Beziehung.

Die Bewegungsgleichung des gedämpften Schwingers mit einem Freiheitsgrad, der periodisch erregt wird, lautet, vgl. (3.7):

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{F}_k \sin(k\Omega t + \beta_k). \quad (3.23)$$

Die stationäre Lösung dieser Bewegungsgleichung ist analog zu (3.10)

$$x(t) = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \hat{F}_k \sin(k\Omega t + \beta_k - \varphi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k \sin(k\Omega t + \beta_k - \varphi_k). \quad (3.24)$$

Es ist zweckmäßig, das in (3.9) definierte Abstimmungsverhältnis η und den Dämpfungsgrad D zu benutzen. Die sich analog zu (3.12) ergebenden Fourierkoeffizienten des Weges

$$\hat{x}_k = \frac{V(k, D, \eta) \hat{F}_k}{c} \quad (3.25)$$

werden gegenüber denen der Erregung ($\hat{F}_k$) durch die *Vergrößerungsfunktionen*

$$V(k, D, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - k^2 \eta^2)^2 + 4D^2 k^2 \eta^2}}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

„verzerrt“, d. h., sie können gegenüber den „statischen“ Werten ($\hat{F}_k/c$) vergrößert oder verkleinert werden. Der periodische Zeitverlauf der Lösung $x(t)$ hat im Allgemeinen keine geometrische Ähnlichkeit mit demjenigen der Erregung, vgl. das Beispiel in Bild 3.5. Infolge der Dämpfung eilt der Wegverlauf jeder Harmonischen dem Kraftverlauf nach. Die Phasenwinkel folgen aus

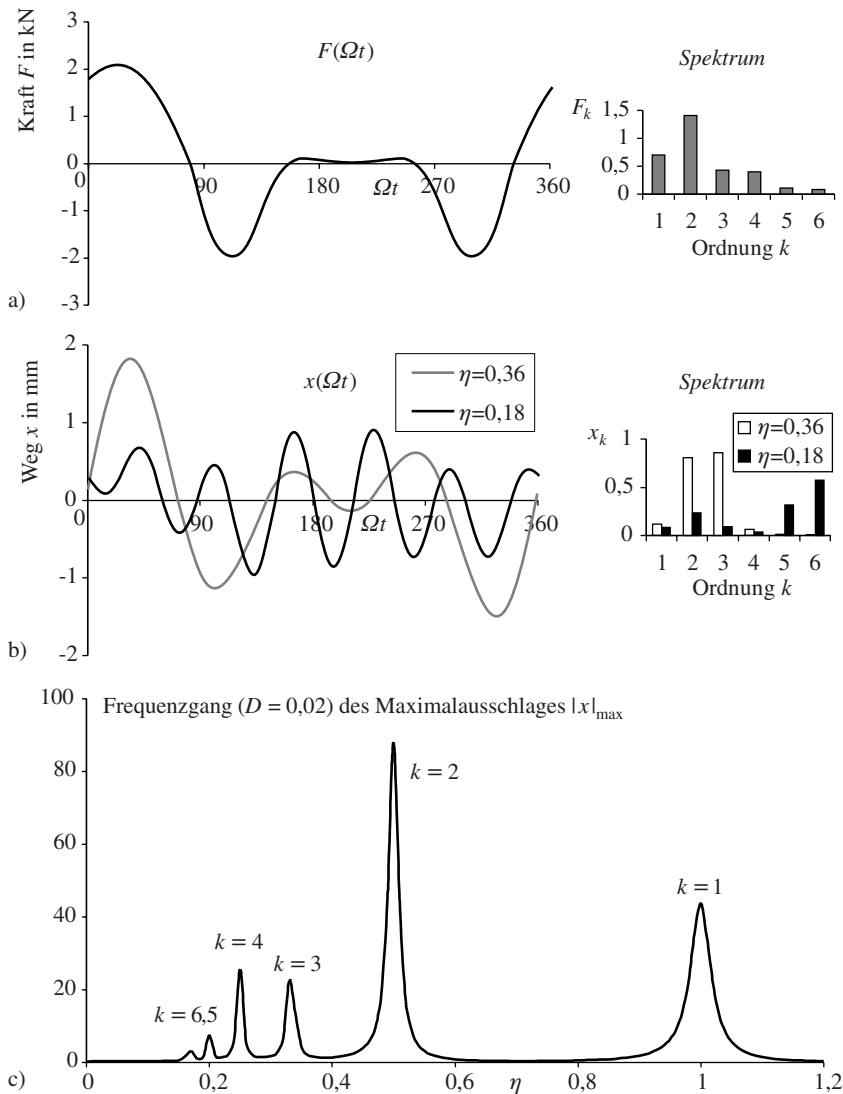
$$\begin{aligned} \sin \varphi_k &= \frac{2Dk\eta}{\sqrt{(1 - k^2 \eta^2)^2 + 4D^2 k^2 \eta^2}} \\ \cos \varphi_k &= \frac{1 - k^2 \eta^2}{\sqrt{(1 - k^2 \eta^2)^2 + 4D^2 k^2 \eta^2}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Bild 3.5a zeigt den Verlauf einer periodischen Erregerkraft entsprechend (3.22) im Vergleich zum Verlauf der Wege gemäß (3.24) in Bild 3.5b. Die Zeitverläufe sind auf der linken Seite des Bildes und die entsprechenden Fourierkoeffizienten $\hat{F}_k$ und $\hat{x}_k$ auf der rechten Seite maßstabsgerecht dargestellt. Das Bild illustriert anhand von zwei Beispielen den großen Einfluss, den das Abstimmungsverhältnis hat, vgl. Bild 3.5b.

Das Abstimmungsverhältnis $\eta = 0,18$ liegt zwischen den Resonanzstellen 5. Ordnung ($\eta = 1/5$) und 6. Ordnung ($\eta = 1/6$). Deshalb vergrößern sich die Amplituden der fünften und sechsten Harmonischen besonders, wie Bild 3.5b zeigt. Die Zahl der Maxima (oder Minima) pro Periode entspricht der Ordnung der Harmonischen. Die ursprüngliche Funktion des Kraftverlaufs wird von den Schwingungen mit der angeregten Eigenfrequenz so stark dominiert, dass er kaum noch erkennbar ist. Ähnlich ist es bei dem Abstimmungsverhältnis $\eta = 0,36$. Dort ist die Nähe zur Resonanz dritter Ordnung deutlich zu sehen. Für die Deutung von Messergebnissen ist es wichtig zu beachten, dass sich je nach Drehzahlbereich andere Zeitverläufe bei den Wegen (und bei den noch stärker „aufgerauten“ Beschleunigungen) ergeben. Manchmal ist es schwierig, in einem gemessenen Verlauf einer Beschleunigung den Erregerkraftverlauf überhaupt wieder zu erkennen.

Die Resonanzkurve ist in Bild 3.5c dargestellt. Sie zeigt den maximalen Ausschlag als Funktion des Abstimmungsverhältnisses. In unmittelbarer Nähe der Resonanzstellen der k -ten Harmonischen treten beim Weg Maxima auf, deren Höhe der Größe des k -ten Fourierkoeffizienten der Kraft ungefähr proportional ist, wie ein Vergleich mit Bild 3.5a zeigt.

Man sollte Maschinen im Dauerbetrieb in einem resonanzfreien Bereich betreiben! Oft liegt die Betriebsdrehzahl zwischen zwei Resonanzgebieten, ohne dass es den Betreibern bewusst ist. Es kann also sein, dass sich das dynamische Verhalten einer Maschine bei einer Drehzahlerhöhung zunächst verschlechtert, aber bei noch höheren Drehzahlen wieder besser wird. Da wäre z. B. der Fall, wenn eine Maschine bei $\eta = 0,15$ arbeitet, bei $\eta = 0,165$ (10 % Drehzahlerhöhung) stark vibriert, aber bei $\eta = 0,18$ (also bei 20 % Drehzahlerhöhung) ruhiger läuft. Man darf sich also nicht wundern, dass bei einer Drehzahlerhöhung unerwartet starke Schwingungen auftreten, die aber bei noch höheren Drehzahlen wieder verschwinden, vgl. die Resonanzkurve in Bild 3.5c

**Bild 3.5** Periodische Erregung (Zeit- und Frequenzbereich)

a) Erregerkraft, b) Weg (Abstimmungsverhältnis $\eta = 0,18$ und $\eta = 0,36$), c) Resonanzkurve

Es ist zu prüfen, in welchem „Tal“ der Resonanzkurve eine Maschine arbeitet. Es brauchen auf den ersten Blick gar keine höheren Harmonischen als Erregung sichtbar zu sein. Auch bei einer scheinbar harmonischen Bewegung kann es zu periodischen Kräften und zu mehreren Resonanzstellen kommen, z. B. wenn die Maschinendrehzahl schwankt, wie das oft der Fall ist, vgl. Abschnitt 2.3. Man muss daraus den Schluss ziehen, dass man immer auf die Resonanzstellen höherer Ordnung achten muss. Die unteren Drehzahlbereiche, denen Resonanzgebiete höherer

Ordnung entsprechen, müssen beim Hochlauf einer Maschine meist durchfahren werden, bevor man den Betriebsdrehzahlbereich erreicht. Die Verminderung der Amplituden der höheren Harmonischen der Erregerkraft ist eine wichtige Maßnahme zur Schwingungsbekämpfung, vgl. dazu auch die Ausführungen in Abschnitt 4.3.2.3.

3.2.2

Blockfundamente

3.2.2.1

Eigenfrequenzen und Eigenformen

Jede elastisch aufgestellte starre Maschine hat sechs Freiheitsgrade. Ein Berechnungsmodell mit sechs Freiheitsgraden hat sechs Eigenfrequenzen. Fordert man nun eine tiefe Abstimmung, so muss gewährleistet sein, dass die höchste Eigenfrequenz kleiner als die niedrigste Erregerfrequenz ist. Bei einer gemischten Abstimmung muss erreicht werden, dass alle Eigenfrequenzen genügend weit von den Erregerfrequenzen entfernt sind.

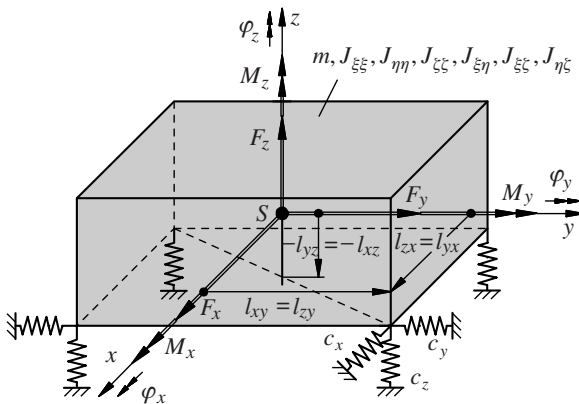


Bild 3.6
Berechnungsmodell
des Blockfundaments

Das Berechnungsmodell zeigt Bild 3.6. Es wird von folgenden Voraussetzungen ausgegangen:

1. Der Koordinatenursprung liegt im Schwerpunkt des in der statischen Ruhelage befindlichen starren Systems, das sich aus starrer Maschine und Fundamentmasse (kurz Blockfundament) zusammensetzt.
2. Das körperfeste Koordinatensystem ξ - η - ζ ist dabei in der Ruhelage deckungsgleich mit dem raumfesten x - y - z -System, in dem die Verschiebungen x, y, z und die kleinen Winkel $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ um diese Achsen gemessen werden.
3. Alle äußeren Kräfte und Momente sind auf dieses Koordinatensystem bezogen.
4. Jede masselos gedachte Feder hat Federkonstanten in den drei Koordinatenrichtungen. Die Bestimmung der Querfederkonstanten wird in 1.3.2 behandelt.

5. Der Angriffspunkt der Federkräfte am Blockfundament liegt im elastischen Zentrum, das sich bei zylindrischen Schraubenfedern in der Mitte der statisch zusammengedrückten Federn befindet. Er wird für jede Feder durch drei Abstände l_{mn} bestimmt. Dabei bedeutet m die Koordinatenrichtung der Federkraft und n die Koordinatenrichtung des Abstandes. So hat eine bestimmte Feder mit der Federkonstante c_x die (vorzeichenbehafteten) Abstände l_{xy} , l_{xz} . Die Federungshauptachsen sind parallel zu den Achsen des Systems, vgl. Tabelle 1.4.
6. Von den Masseparametern sind neben der Lage des Schwerpunktes die Masse m , die Trägheitsmomentente $J_{\xi\xi}$, $J_{\eta\eta}$, $J_{\zeta\zeta}$ und die Deviationsmomente $J_{\xi\eta}$, $J_{\xi\zeta}$, $J_{\eta\zeta}$ gegeben ($\bar{J}^S \approx J^S$, vgl. Abschnitt 2.3.1).
7. Die Dämpfung wird vernachlässigt.
8. Es werden kleine Amplituden vorausgesetzt (lineare Bewegungsgleichungen).
9. Der Schwerkrafteinfluss auf die Schwingbewegung wird nicht berücksichtigt.

Zur Aufstellung der sechs Bewegungsgleichungen dienen die *Lagrangeschen* Gleichungen. Sie werden in der Matrizenform

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f} \quad (3.28)$$

zusammengefasst. Darin gilt für den Koordinatenvektor $\mathbf{q} = [x \ y \ z \ \varphi_x \ \varphi_y \ \varphi_z]^T = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T$ und den Erregerkraftvektor $\mathbf{f} = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z]^T$.

Die Elemente m_{kl} der Massenmatrix $\mathbf{M}$ und die Elemente c_{kl} der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{C}$ können aus der kinetischen und potenziellen Energie bestimmt werden, vgl. (6.10) und (6.15):

$$m_{kl} = m_{lk} = \frac{\partial^2 W_{\text{kin}}}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l}; \quad c_{kl} = c_{lk} = \frac{\partial^2 W_{\text{pot}}}{\partial q_k \partial q_l}. \quad (3.29)$$

Die kinetische Energie ist aus Abschnitt 2.3.1 bekannt:

$$\begin{aligned} 2W_{\text{kin}} = & m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + J_{\xi\xi}\dot{\varphi}_x^2 + J_{\eta\eta}\dot{\varphi}_y^2 + J_{\zeta\zeta}\dot{\varphi}_z^2 \\ & + 2J_{\xi\eta}\dot{\varphi}_x\dot{\varphi}_y + 2J_{\xi\zeta}\dot{\varphi}_x\dot{\varphi}_z + 2J_{\eta\zeta}\dot{\varphi}_y\dot{\varphi}_z. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die potenzielle Energie ergibt sich aus (Index der Federnummern wird weggelassen)

$$\begin{aligned} 2W_{\text{pot}} = & \sum c_x(x + \varphi_y l_{xz} - \varphi_z l_{xy})^2 + \sum c_y(y - \varphi_x l_{yz} + \varphi_z l_{yx})^2 \\ & + \sum c_z(z + \varphi_x l_{zy} - \varphi_y l_{zx})^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Mithilfe von (3.29) findet man für die Massenmatrix und die Federmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{\xi\xi} & J_{\xi\eta} & J_{\xi\zeta} \\ 0 & 0 & 0 & J_{\eta\xi} & J_{\eta\eta} & J_{\eta\zeta} \\ 0 & 0 & 0 & J_{\zeta\xi} & J_{\zeta\eta} & J_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & c_{15} & c_{16} \\ 0 & c_{22} & 0 & c_{24} & 0 & c_{26} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & c_{35} & 0 \\ 0 & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & 0 & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & 0 & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Dabei gilt für die Elemente der Federmatrix C :

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \sum c_x; & c_{15} &= c_{51} = \sum c_x l_{xz}; & c_{16} &= c_{61} = - \sum c_x l_{xy} \\
 c_{22} &= \sum c_y; & c_{24} &= c_{42} = \sum c_y l_{yz}; & c_{26} &= c_{62} = - \sum c_y l_{yx} \\
 c_{33} &= \sum c_z; & c_{34} &= c_{43} = \sum c_z l_{zy}; & c_{35} &= c_{53} = - \sum c_z l_{zx} \\
 c_{44} &= \sum c_y l_{yz}^2 + \sum c_z l_{zy}^2; & c_{45} &= c_{54} = - \sum c_z l_{zx} l_{zy} \\
 c_{46} &= c_{64} = - \sum c_y l_{yx} l_{yz}; & c_{55} &= \sum c_x l_{xz}^2 + \sum c_z l_{zx}^2 \\
 c_{56} &= c_{65} = - \sum c_x l_{xy} l_{xz}; & c_{66} &= \sum c_x l_{xy}^2 + \sum c_y l_{yx}^2
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Mit dem Lösungsansatz $\mathbf{q} = \mathbf{v} \sin \omega t$ gewinnt man für die freien Schwingungen ($\mathbf{f} = \mathbf{o}$) aus (3.28) das Eigenwertproblem

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{v} = \mathbf{o}. \tag{3.34}$$

Der Vektor $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6]^T$ enthält dabei die normierten Amplituden der Eigenformen. Die Lösung von (3.34) ist mit handelsüblicher Software möglich und liefert die Eigenfrequenzen und Eigenformen, vgl. 3.2.2.2 und Kapitel 6. Die Lage der Eigenfrequenzen ist interessant im Zusammenhang mit dem Drehzahlbereich, in dem die auf dem Fundament stehende Maschine arbeitet. Zur Bewertung der Gefährlichkeit von Resonanzen sind aber die Eigenformen wesentlich. Es muss hier allerdings nochmals darauf hingewiesen werden, dass die „richtigen“ Eigenfrequenzen nicht allein für die Masse des Blockfundaments, sondern für das Gesamtsystem (gemeinsam mit der darauf gestellten Maschine) berechnet werden müssen.

Unsymmetrische Blockfundamente haben komplizierte Eigenformen, weil i. Allg. mehr als zwei Translations- und Drehbewegungen miteinander gekoppelt sind, d. h. es treten schraubenförmig verlaufende Eigenbewegungen um schräg im Raum liegende Achsen auf. Noch komplizierter werden die Eigenbewegungen gedämpfter Systeme, vgl. Abschnitt 6.5.

3.2.2.2

Modellzerlegung bei Symmetrie

Es ist aus mehreren Gründen vorteilhaft, die sechs Bewegungsgleichungen für das Blockfundament zu entkoppeln. Dies gelingt, wenn die ξ -, η - und ζ -Achsen Hauptträgheitsachsen sind und die Federn symmetrisch angeordnet werden. Es sind dann die Deviationsmomente $J_{\xi\eta} = J_{\eta\zeta} = J_{\zeta\xi} = 0$ (vgl. Abschnitt 2.5) und die Massenmatrix wird eine Diagonalmatrix. Bei symmetrischer Federanordnung werden bestimmte Federzahlen null, weil die Federabstände in die Rechnung vorzeichenbehaftet eingehen. Für $c_{16} = c_{34} = c_{36} = c_{45} = c_{56} = 0$ entstehen aus (3.28) zwei unabhängige Systeme:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_{\eta\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\varphi}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{15} \\ 0 & c_{33} & c_{35} \\ c_{15} & c_{35} & c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ \varphi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & J_{\xi\xi} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{22} & c_{24} & c_{26} \\ c_{24} & c_{44} & c_{46} \\ c_{26} & c_{46} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \varphi_x \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

d. h., die Frequenzdeterminante des Eigenwertproblems (3.34) $\det(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$ zerfällt in die beiden Determinanten

$$\det = \begin{vmatrix} c_{11} - m\omega^2 & 0 & c_{15} \\ 0 & c_{33} - m\omega^2 & c_{35} \\ c_{15} & c_{35} & c_{55} - J_{\eta\eta}\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

$$\det = \begin{vmatrix} c_{22} - m\omega^2 & c_{24} & c_{26} \\ c_{24} & c_{44} - J_{\xi\xi}\omega^2 & c_{46} \\ c_{26} & c_{46} & c_{66} - J_{\zeta\zeta}\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

aus denen sich jeweils zwei kubische Gleichungen für die Quadrate der Eigenkreisfrequenzen ergeben. Fordert man noch zusätzlich die Symmetrie zur x - z -Ebene und zur y - z -Ebene, so werden die Federzahlen $c_{35} = c_{26} = c_{46} = 0$, und aus den beiden Determinanten ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} c_{33} - m\omega^2 &= 0; & c_{66} - J_{\zeta\zeta}\omega^2 &= 0 \\ (c_{11} - m\omega^2)(c_{55} - J_{\eta\eta}\omega^2) - c_{15}^2 &= 0 \\ (c_{22} - m\omega^2)(c_{44} - J_{\xi\xi}\omega^2) - c_{24}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Es treten also zwei lineare und zwei quadratische Gleichungen für ω^2 auf. Die Bezeichnung der Lösungen erfolgt hier mit dem Koordinatenindex k :

$$\begin{aligned} \omega_3^2 &= \frac{c_{33}}{m}; & \omega_6^2 &= \frac{c_{66}}{J_{\zeta\zeta}} \\ \omega_{1,5}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{c_{55}}{J_{\eta\eta}} + \frac{c_{11}}{m} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_{55}}{J_{\eta\eta}} + \frac{c_{11}}{m} \right)^2 + \frac{c_{15}^2 - c_{11}c_{55}}{J_{\eta\eta}m}} \\ \omega_{2,4}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{c_{44}}{J_{\xi\xi}} + \frac{c_{22}}{m} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_{44}}{J_{\xi\xi}} + \frac{c_{22}}{m} \right)^2 + \frac{c_{24}^2 - c_{22}c_{44}}{J_{\xi\xi}m}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dabei ist ω_3 die Eigenkreisfrequenz der Schwingung in z -Richtung und ω_6 die einer Drehung um die z -Achse. Mit ω_1 und ω_5 verlaufen die Bewegungen in x - und φ_y -Richtung und mit ω_2 und ω_4 in y - und φ_x -Richtung.

Bild 3.7 zeigt ein solches Ergebnis, allerdings sind die Eigenfrequenzen dort anders indiziert (der Größe nach, Index i). Bei der Eigenfrequenz von 4,75 Hz ergab sich eine reine Hubschwingung und bei 7,78 Hz eine reine Drehschwingung. Man beachte, dass bei den anderen Frequenzen jeweils eine Dreh- und Schubbewegung miteinander gekoppelt sind.

Die dicken und dünnen Pfeile im Bild 3.7 geben die synchrone Bewegung der jeweiligen Koordinaten an. Man kann aus den Pfeilrichtungen schließen, dass die **Darstellung von zwei Eigenformen fehlerhaft** ist. Dies soll als belehrendes Beispiel

dafür dienen, dass man alle Ergebnisse genau ansehen (bezweifeln) und kritisch prüfen muss. Kann es sein, dass bei 4,42 Hz die gegenphasige Richtung der Translations- und Drehbewegung bei einer niedrigeren Eigenfrequenz auftritt als die gleichphasige Schwingung bei der Eigenfrequenz von 8,47 Hz? In diesen beiden Fällen ist jeweils eine Pfeilrichtung zu vertauschen! Man vergleiche dazu auch die Eigenformen bei 4,02 Hz und 7,79 Hz.

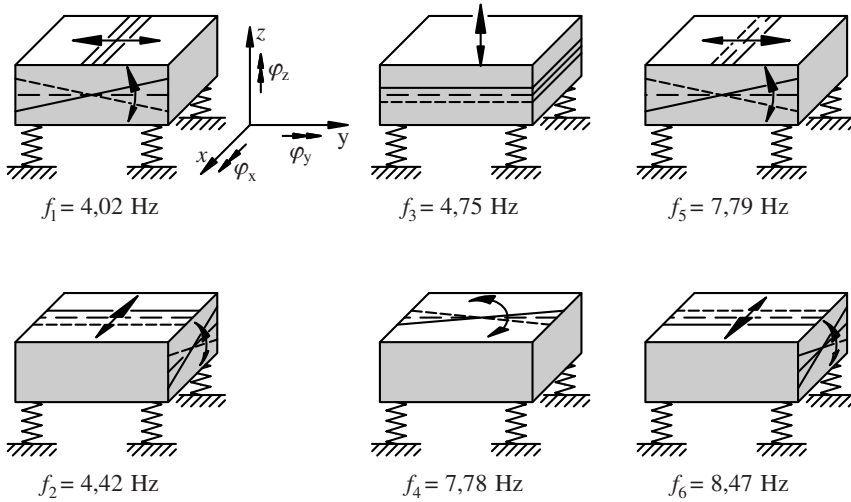


Bild 3.7 Eigenfrequenzen und Eigenformen (Achtung: Fehler) eines Blockfundamentes

Setzt man voraus, dass bei der Aufstellung auf Einzelisolatoren nur eine Federebene parallel zur x, y -Ebene existiert ($l_{xz} = l_{yz} = l_z$) und nur n gleiche Federelemente mit $c_x = c_y = c_H$; $c_z = c$ verwendet werden, so gilt

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22} = nc_H; & c_{33} &= nc; & c_{15} &= c_{51} = nc_H l_z; & c_{24} &= c_{42} = -nc_H l_z \\ c_{44} &= c \sum_{i=1}^n l_{yi}^2 + nc_H l_z^2; & c_{55} &= c \sum_{i=1}^n l_{xi}^2 + nc_H l_z^2; & c_{66} &= c_H \sum_{i=1}^n (l_{xi}^2 + l_{yi}^2) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Rein formal lässt sich natürlich auch noch durch eine Symmetrie zur x, y -Ebene eine vollständige Entkopplung erreichen. Dies ließe sich jedoch, von Spezialfällen abgesehen, nur durch zwei Federebenen, die ober- und unterhalb der x, y -Ebene liegen müssten, erreichen, was konstruktiv jedoch nicht sinnvoll ist. Man beschränkt sich deshalb meist auf die Symmetrie der Aufstellung zu zwei Ebenen und ist damit leichter in der Lage, gezielt Eigenfrequenzen zu beeinflussen. In vielen Fällen sind Fundamente symmetrisch aufgebaut, sodass ihre Hauptachsen leicht gefunden werden. Man sollte dann auch versuchen, die Federanordnung symmetrisch zu den Hauptachsen vorzunehmen.

Eine wesentliche Vereinfachung tritt für das ebene Blockfundament auf. Man kann mit diesem Modell für Überslagsrechnungen arbeiten, wenn die Erregerkräfte in einer Symmetrieebene mit dem Schwerpunkt liegen.

Zur Fundamentberechnung existiert Software, die sowohl die Auslegung von Blockfundamenten als auch die Bestimmung von Erregerkräften bei gemessener Bewegung ermöglichen.

3.2.2.3

Ausführungsformen der Blockfundamente

Bei den Blockfundamenten unterscheidet man im Wesentlichen drei Ausführungsgruppen. Die erste Gruppe bilden die unmittelbar auf dem Baugrund stehenden Fundamente. Will man damit eine hohe Abstimmung erreichen (vgl. Tabelle 3.2), so muss die Fundamentmasse klein sein. Um jedoch eine entsprechend steife „Bodenfeder“ zu erhalten, wird eine große Sohlfläche benötigt. Die Fundamentform wird deshalb in erster Linie durch die benötigte Sohlfläche und die geforderte Steifigkeit des Blockes bestimmt. Zur zweiten Gruppe gehören die Maschinen, die ohne ein spezielles Fundament über Federelemente aufgestellt werden. Dazu sind verschiedene Bedingungen zu erfüllen.

Die Erregeramplitude darf nur so groß sein, dass die Maschinenmasse auf der tiefabgestimmten Aufstellung die zulässige Schwingungsamplitude nicht überschreitet. Die Erregerfrequenz muss so groß sein, dass eine tiefabgestimmte, stabile Aufstellung möglich ist. Weiter muss das Maschinengestell so steif sein, dass durch die Punktaufstellung auf Einzelfedern keine Funktionsstörungen entstehen.

Beispiele hierfür sind die Aufstellung von Fahrzeugmotoren im Rahmen über drei oder vier Einzelfederelemente, die Aufstellung von schnell laufenden Werkzeugmaschinen, Lüftern usw. Es handelt sich in den meisten Fällen um hochtourige Maschinen mit kleinen Erregerkräften. Die dritte Gruppe benötigt neben der Maschinenmasse eine Fundamentmasse. Diese Ausführung ist auch für niedrige Erregerfrequenzen und große Erregerkräfte geeignet. Bild 3.8 zeigt die Aufstellung eines Schiffsdieselmotors mit Generator und Erregermaschine in einem Spitzenlastkraftwerk (Betriebsdrehzahl $n = 300$ 1/min).

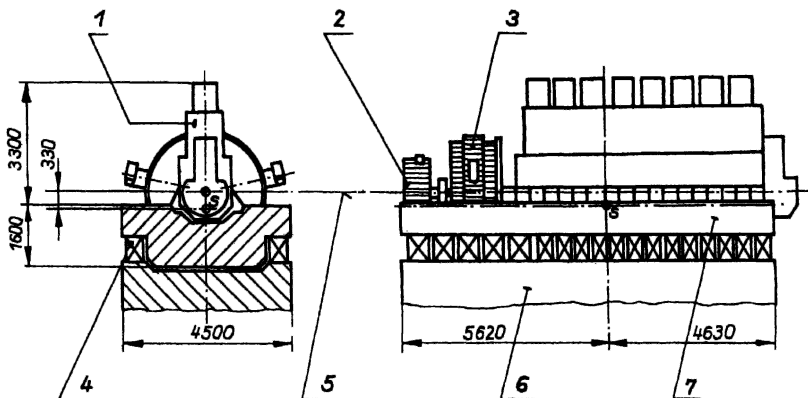


Bild 3.8 Beispiel für ein Blockfundament mit einem Diesel-Spitzenlast-Aggregat
1 Dieselmotor; 2 Erregermaschine; 3 Generator; 4 Federpakete; 5 Kurbelwellenachse;
6 Unterfundament; 7 Oberfundament

Häufig stellt der Maschinenbauer im Hinblick auf die zulässige Schwingungsamplitude des Fundamentblockes sehr harte Forderungen. Diese bedingen eine Überprüfung der Voraussetzung, dass der Fundamentblock als starrer Körper angesehen werden kann. Es muss dann eine Überschlagsrechnung zur Bestimmung seiner Eigenfrequenz durchgeführt werden.

Masseelose Federn dürfen nur vorausgesetzt werden, solange die Frequenzen der Fundamentalschwingung klein gegenüber den Eigenfrequenzen der vorgespannten Feder sind. Besonders bei Körperschallschwingungen wird diese Voraussetzung oft verletzt. Die Feder kann dann zu Resonanzschwingungen kommen. In diesen „Einbruchsfrequenzen“, die bei Stahlfedern im Bereich $f = 100$ bis $1\,000$ Hz und für Gummifedern im Bereich von $f = 200$ bis $4\,000$ Hz liegen, ist die Schwingungsisolierung wirkungslos. Es sei noch vermerkt, dass auf Druck beanspruchte Federn, wie sie für Blockfundamente häufig verwendet werden, auch auf Knicksicherheit überprüft werden müssen.

Die Größe und Ausführung des Fundamentblockes richtet sich nach der Art der Aufstellung. Wird dieser direkt auf den Baugrund aufgestellt, ist die zulässige Flächenpressung maßgebend. Sie liegt in der Größenordnung von $\sigma = 20$ N/cm² (Sand); $\sigma = 30$ N/cm² (Ton); $\sigma > 60$ N/cm² (Fels). Fragen der Bodenstabilität werden z. B. in DIN 4019 angesprochen. Außerdem sind die Federkonstante des Bodens und die erreichbare Eigenfrequenz von der Fundamentfläche abhängig. Weiterhin muss der Fundamentblock so gestaltet werden, dass der Gesamtschwerpunkt (Maschine und Fundament) über dem Schwerpunkt der Fundamentfläche liegt. Als Richtwert für die Größe der Fundamentmasse m_F kann in Abhängigkeit von der Maschinendrehzahl n gelten:

$$\text{für } n < 300 \text{ 1/min: } m_F = (5 \dots 10)m_M$$

$$\text{für } n > 1000 \text{ 1/min: } m_F = (10 \dots 20)m_M$$

(m_M ist die Masse der Maschine).

Für tief abgestimmte Fundamente wird die Gesamtmasse durch die zulässige Schwingungsamplitude des Fundamentes bestimmt. Die bisherigen Ableitungen wurden unter der Voraussetzung der elastisch aufgestellten starren Maschine durchgeführt. Das bedeutet, dass die niedrigste Eigenfrequenz von Maschine und Fundamentblock groß gegenüber der höchsten Erregerfrequenz sein muss. Für den Fundamentblock rechnet man mit einem Abstimmungsverhältnis

$$\eta = \frac{f_{\text{err max}}}{f_1} \leq 0,2 \dots 0,33. \quad (3.41)$$

Für die Ermittlung der niedrigsten Eigenfrequenz genügt manchmal eine Abschätzung. Während bei Fundamentblöcken, bei denen Höhe, Breite und Länge in der gleichen Größenordnung liegen, die Eigenfrequenzen meist hoch genug sind, treten an schlanken und besonders langen Fundamenten durchaus Abstimmungsschwierigkeiten auf. Für die Überschlagsrechnung wird das Fundament als Balken mit konstantem Querschnitt und homogener Masseverteilung angenommen. Da der Fundamentblock tief abgestimmt aufgestellt ist, trifft dann das Modell des frei-freien Balkens zu. Ausführlich wird der schwingende Balken in 5.3 behandelt.

Für das in Bild 3.8 dargestellte Fundament soll eine Nachrechnung erfolgen. Mit den angegebenen Abmessungen $h = 1,6$ m, $l = 10,25$ m, der Dichte $\varrho = 1,8$ t/m³,

dem Elastizitätsmodul $E = 3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ (Betongüte B 25 nach DIN 1045) findet man bei einem Rechteckquerschnitt:

$$f_1 = 1,029 \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1,029 \frac{1,6}{10,25^2} \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{10}}{1,8 \cdot 10^3}} \text{ Hz} \approx 64 \text{ Hz} \quad (3.42)$$

Als Erregung kämen die freien Massenkräfte des Achtzylindermotors infrage. Es zeigt sich bei Messungen, dass aufgrund der fertigungsbedingten Abweichungen die 1. und 2. Erregerordnung auch bei theoretisch vollständig ausgeglichenen Motoren auftreten. Setzt man als höchste Erregerordnung die zweite an, gilt bei der Drehfrequenz von $f = n/60 = 300/60 = 5 \text{ Hz}$: $f_{\text{err max}} = 10 \text{ Hz} \ll 64 \text{ Hz}$. Die Forderung (3.41) für ein „starres“ Fundament ist somit erfüllt.

Wie aus Bild 3.3 ersichtlich ist, hängt die niedrigste erreichbare Eigenfrequenz einer Fundamentierung mit der *Verformbarkeit* der Feder zusammen. Die niedrigsten Eigenfrequenzen erreicht man mit *Schraubenfedern*, sie liegen bei einem Wert von 1 Hz. Ihre Berechnung wurde in 1.3.2 behandelt. Der Dämpfungsgrad besitzt die Größenordnung von $D = 0,001$ bis $0,01$.

Als Einzelfederelemente werden auch *Gummifedern* oder Gummi-Metall-Verbindungen verwendet. Aufgrund der geringen maximal zulässigen Beanspruchung ist ihre Verformbarkeit geringer, und es können nur Eigenfrequenzen der Fundamente über 5 Hz erreicht werden. Der Dämpfungsgrad der damit ausgestatteten Anlagen liegt bei $D = 0,01$ bis $0,1$.

In 1.3.3 wird über die Berechnung von Gummifedern gesprochen. Es sei nur noch darauf hingewiesen, dass bei größerem Wert $k_{\text{dyn}} = c_{\text{dyn}}/c_{\text{stat}}$ die statische Durchsenkung als Maß der zu isolierenden Frequenz ungeeignet ist. Bild 3.9a zeigt eine Gummifeder, die häufig für Fundamentierungsaufgaben verwendet wird.

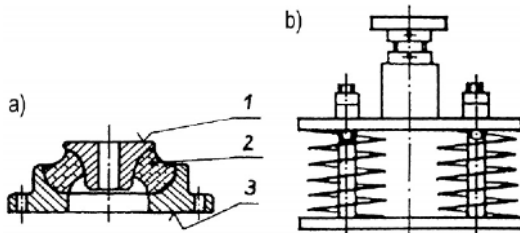


Bild 3.9 Bauformen von Federn

a) Prinzipieller Aufbau einer Gummifeder; 1 Fundament oder Maschine, 2 Gummifeder, 3 Aufstellungsort; b) Stahlfeder-Anordnung

Die dynamische Steifigkeit des *Baugrundes* oder von *Dämmplatten* wird durch Bettungsziffern angenähert. Dabei wird in Berechnungsvorschriften der Kontakt zwischen Fundament und Baugrund durch elastische Kräfte nur an der Sohlfläche des Fundamentes berücksichtigt.

Die Bettungsziffern stellen flächenbezogene Federkonstanten dar, sie hängen von Bodenart, Dichteindex, Sohlfläche und der statischen Sohlpressung ab. Bezugswert

ist die in senkrechter Richtung wirkende Bettungsziffer C_z . Sie liegt in der Größenordnung

$$C_z = (2 \cdots 15) \cdot 10^4 \text{ kN/m}^3 \quad (3.43)$$

und wird im Baugrundgutachten festgelegt. Diese Angaben beziehen sich auf Sohlflächen $A \geq 10 \text{ m}^2$ und gelten für eine statische Sohlpressung $p_{\text{stat}} \leq 5 \text{ N/cm}^2$. Für $A < 10 \text{ m}^2$ ist C_z mit dem Faktor $a_1 = \sqrt{10/A}$ (A in m^2) zu multiplizieren. Für $p_{\text{stat}} > 5 \text{ N/cm}^2$ gilt ein Faktor $a_2 = \sqrt{p_{\text{stat}}/5 \text{ N/cm}^2}$.

Aus diesem Wert leiten sich ab:

$$C_x = C_y = 0,7C_z; \quad C_{\varphi x} = C_{\varphi y} = 2C_z \quad (3.44)$$

(Verdrehung des Fundamentes um eine Schwerachse der Sohlfläche),

$$C_{\varphi z} = 1,05C_z \quad (3.45)$$

(Verdrehung des Fundamentes um die vertikale Achse).

Unter der Voraussetzung, dass der Schwerpunkt (Koordinatenursprung) über dem Schwerpunkt der Auflagefläche liegt, gilt die Entkopplung durch Symmetrie in zwei Ebenen, die auf (3.39) führt. Es muss beachtet werden, dass die Federabstände $l_{xz} = l_{yz} = l_z$, die bis zur Sohlfläche gerechnet werden, für jedes Flächenelement gleich, also Konstante sind, während l_{zx} , l_{zy} von der Lage der Flächenelemente abhängen. Es gilt somit für die Elemente der Steifigkeitsmatrix in (3.32):

$$c_{11} = c_{22} = \int 0,7C_z \, dA = 0,7C_z A; \quad c_{33} = \int C_z \, dA = C_z A \quad (3.46)$$

$$c_{44} = \int 0,7C_z l_z^2 \, dA + \int C_{\varphi x} l_{zy}^2 \, dA = 0,7C_z l_z^2 A + C_{\varphi x} I_x = C_z (2I_x + 0,7A l_z^2) \quad (3.47)$$

$$c_{55} = C_z (2I_y + 0,7A l_z^2); \quad c_{66} = C_{\varphi z} I_z = 1,05C_z I_z \quad (3.48)$$

$$c_{15} = c_{51} = -c_{24} = -c_{42} = -C_x A l_z = -0,7C_z A l_z \quad (3.49)$$

Darin bedeuten I_x und I_y die Flächenträgheitsmomente der Sohlfläche bezüglich der x - und y -Achse, $I_z = I_x + I_y$ das polare Flächenträgheitsmoment. Bei dem Wert für c_{44} , (und analog dazu c_{55}) wurde berücksichtigt, dass bei einer Kippung nicht C_z , sondern $C_{\varphi x}$ wirksam wird. Setzt man die Beziehungen in (3.39) ein, so ergeben sich die sechs Eigenkreisfrequenzen.

3.2.3

Fundament mit zwei Freiheitsgraden – Schwingungstilgung

Bild 3.10a zeigt einen Längsschwinger mit zwei Freiheitsgraden. Er kann als Berechnungsmodell für eine elastisch gelagerte Maschine (auf einem im nachgiebigen Baugrund eingebetteten Fundamentblock oder mit zusätzlichem Schwingungstilger) dienen. Dem Tilger entspricht dann das äußere Feder- Masse-System. Es wird zunächst die Dämpfung vernachlässigt, um einige wesentliche Zusammenhänge deutlicher zu zeigen. Die Bewegungsgleichungen haben im Prinzip dieselbe Form wie die eines Torsionsschwingers, auf den in Abschnitt 4.4.3 auch unter Berücksichtigung der Dämpfung näher eingegangen wird.

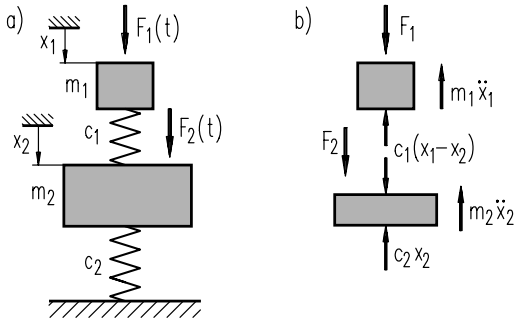


Bild 3.10 Schwinger mit zwei Freiheitsgraden
a) Berechnungsmodell,
b) Kräftebild am freigeschnittenen System

Die Bewegungsgleichungen für erzwungene Schwingungen folgen aus dem dynamischen Kräftegleichgewicht, vgl. Bild 3.10b:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1(x_1 - x_2) &= F_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_1(x_1 - x_2) + c_2 x_2 &= F_2(t). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Im einfachsten Fall der harmonischen Erregerkräfte

$$F_1(t) = \hat{F}_1 \sin \Omega t; \quad F_2(t) = \hat{F}_2 \sin \Omega t \quad (3.51)$$

setzt sich im Dauerzustand die Schwingung mit der Erregerkreisfrequenz Ω durch, sodass für die stationäre Lösung der „Gleichtaktansatz“ gemacht wird:

$$x_1(t) = \hat{x}_1 \sin \Omega t; \quad x_2(t) = \hat{x}_2 \sin \Omega t. \quad (3.52)$$

Im stationären Zustand schwingt das System mit der Erregerfrequenz. Setzt man die Erregerkräfte (3.51) und die Lösungsansätze (3.52) in (3.50) ein, so erhält man ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der beiden Amplituden:

$$\begin{aligned} (c_1 - m_1 \Omega^2) \hat{x}_1 - c_1 \hat{x}_2 &= \hat{F}_1 \\ -c_1 \hat{x}_1 + (c_1 + c_2 - m_2 \Omega^2) \hat{x}_2 &= \hat{F}_2. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Es hat die Lösungen

$$\hat{x}_1 = \frac{(c_1 + c_2 - m_2 \Omega^2) \hat{F}_1 + c_1 \hat{F}_2}{\Delta}; \quad \hat{x}_2 = \frac{c_1 \hat{F}_1 + (c_1 - m_1 \Omega^2) \hat{F}_2}{\Delta}. \quad (3.54)$$

Dabei ist der Nenner

$$\begin{aligned} \det &= (c_1 - m_1 \Omega^2)(c_1 + c_2 - m_2 \Omega^2) - c_1^2 \\ &= m_1 m_2 (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2) \end{aligned} \quad (3.55)$$

die Hauptdeterminante des Gleichungssystems (3.53). Die Nullstellen des Nenners sind die beiden Eigenkreisfrequenzen dieses Schwingungssystems, vgl. auch (3.39). Das Vorzeichen der Amplituden $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ beschreibt hier (wegen der fehlenden Dämpfung) die Phasenlage.

Aus (3.54) kann man die Abhängigkeit der Amplituden von der Erregerfrequenz, den *Amplituden-Frequenzgang* berechnen.

Der bedeutsame Zusammenhang zwischen Weg- und Kraftamplituden

$$\hat{x}_1 = \frac{c_1 \hat{F}_2}{\Delta} = x_{\text{st}} V_1(\Omega); \quad \hat{x}_2 = \frac{(c_1 - m_1 \Omega^2) \hat{F}_2}{\Delta} = x_{\text{st}} V_2(\Omega) \quad (3.56)$$

wird für den Sonderfall, dass nur die Kraft F_2 wirkt, in Bild 3.11 dargestellt. Aus (3.56) geht die Beziehung zur statischen Deformation $x_{\text{st}} = \hat{F}_2/c_2$ hervor, sodass man die Amplituden-Frequenzgänge $\hat{x}_1(\Omega)$ und $\hat{x}_2(\Omega)$ als **Vergrößerungsfunktion** auffassen kann. Diese Darstellung verallgemeinert die Aussagen, die für den Schwinger mit einem Freiheitsgrad gewonnen wurden, vgl. Bild 3.4 und Bild 3.5. Man beachte aber den Unterschied: An den Resonanzstellen in Bild 3.5c schwingt der Schwinger mit einem Freiheitsgrad bei *periodischer* Erregung jeweils mit einem Bruchteil der Grunderregerfrequenz (bei $\Omega = \omega/k$) mit seiner (einzigen) Eigenfrequenz, aber beim Zweimassensystem treten schon bei *harmonischer* Erregung zwei Resonanzstellen auf, wenn die Erregerfrequenz mit einer der beiden Eigenfrequenzen übereinstimmt.

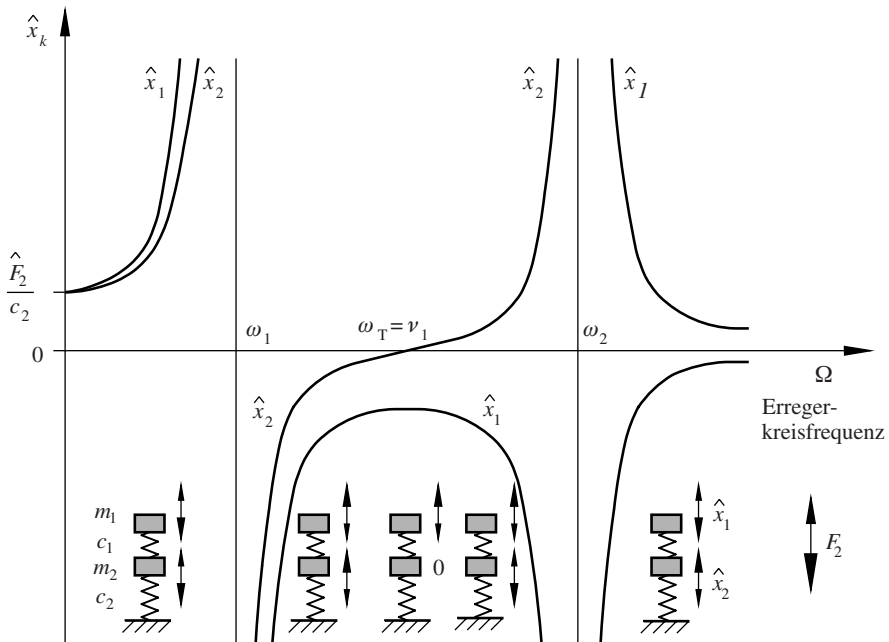


Bild 3.11 Amplituden-Frequenzgang des Schwingers mit zwei Freiheitsgraden bei $F_1 \equiv 0$ (dünne und dicke Pfeile charakterisieren gleiche Phasenlagen)

Bei ganz kleiner Erregerfrequenz ($f_{\text{err}} = \Omega/(2\pi)$) bewegen sich beide Massen wie im statischen Fall gleichsinnig, und für den Grenzfall $\Omega = 0$ ist der Weg beider Massen sogar gleich groß, vgl. Bild 3.11. Mit zunehmender Erregerfrequenz verstärken die Massenkräfte zunächst die Amplituden, wobei im unteren Frequenzbereich $\hat{x}_1 > \hat{x}_2$ gilt. Die Richtung beider Ausschläge stimmt nur unterhalb der ersten Eigenkreisfrequenz (im Bereich $0 < \Omega < \omega_1$) zu jedem Zeitpunkt mit derjenigen der Erregerkraft

F_2 überein. Die Schwingungen der beiden Massen verlaufen in diesem ungedämpften Fall gleichphasig im Bereich $0 < \Omega < \omega_T$, aber oberhalb der ersten Resonanzstelle verlaufen sie entgegengesetzt zur Erregerkraft.

Eine interessante Erscheinung gibt es bei der Tilgungskreisfrequenz

$$\Omega = \omega_T = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}. \quad (3.57)$$

Hier tritt die so genannte *Schwingungstilgung* auf, d. h., der Kraftangriffspunkt bleibt in Ruhe, die Feder c_2 wird nicht belastet, und nur die Masse m_1 schwingt weiter, und zwar in Gegenphase zur Erregerkraft. Die Massenkraft, welche die schwingende Masse m_1 über die Feder c_1 in den unteren Teil des Schwingers einleitet, ist ganz genau so groß (aber entgegengesetzt gerichtet) wie die Erregerkraft – entsprechend der idealen Annahmen bei diesem ungedämpften System. Die Dämpfung sorgt dafür, dass nicht diese ideale Tilgung auftritt, aber dafür erweitert sie den Bereich kleiner Amplituden, vgl. Abschnitt 4.4.

Bei schwingungserregten Bauwerken müssen die Tilger immer der Konstruktion angepasst werden. Es gibt Schwingungstilger mit Tilgermassen von 40 kg bis 4500 kg, die bei Frequenzen von 16 Hz bis etwa 0,3 Hz wirksam sind. In den meisten Fällen sind es vertikal angeordnete Tilger mit Schraubendruckfedern und viskoser Dämpfung, von denen Bild 3.12 ein Beispiel zeigt. Gegen horizontale Schwingungen der Fernseh- und Kirchtürme wird oft ein Tilger mit Blattfedern oder mit Pendelaufhängung eingesetzt.

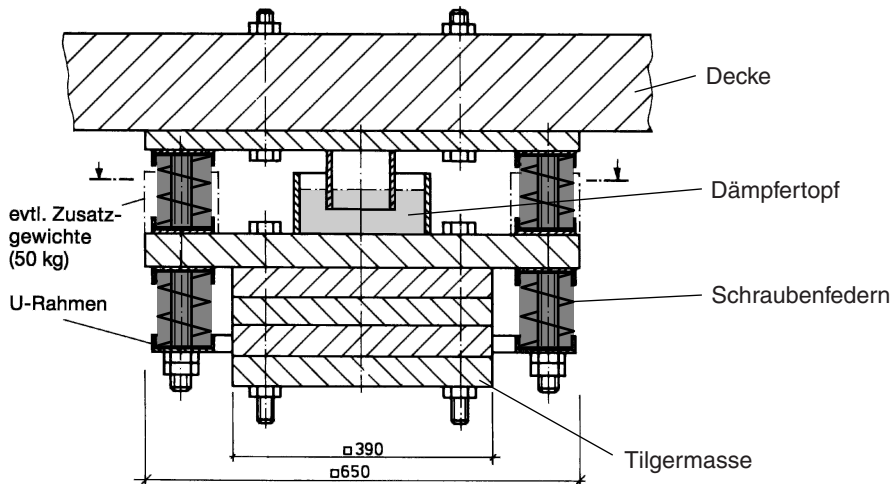


Bild 3.12 Deckentilger (Quelle: GERB, Berlin)

Im Bereich $\omega_T < \Omega$ schwingen die beiden Massen gegenphasig, wie die dicken und dünnen Pfeile für die Phasenlage im unteren Teil des Bildes 3.11 andeuten. Erreicht die Erregerfrequenz die Nähe der zweiten Eigenfrequenz, treten wieder sehr große Amplituden auf, und oberhalb von ω_2 wechselt nochmals die Phasenlage. Bei sehr hohen Erregerfrequenzen werden die Amplituden immer kleiner, weil die

trägen Massen immer größere (mit Ω^2 zunehmende) Massenkkräfte der Erregerkraft entgegensetzen. Die Kraft auf den Aufstellort ist $F(t) = c_2 x_2(t)$, also dem Betrag der Amplitude $\hat{x}_2$ proportional. Insofern liefert Bild 3.11 auch eine Aussage über die dynamische Fundamentbelastung.

Im Abschnitt 4.4 wird auf den *Tilgungseffekt* im Zusammenhang mit Dämpfen näher eingegangen. Die dort für Torsionsschwinger beschriebenen physikalischen Zusammenhänge gelten ebenso für Längsschwinger. Hier sei schon bemerkt, dass Maßnahmen der Schwingungstilgung nicht auf harmonische Erregungen beschränkt sind. Man kann den Tilger auch auf höhere Harmonische der Erregung oder in Verbindung mit der Dämpfung auf beliebige andere Erregungen bei Schwingern mit mehreren Freiheitsgraden abstimmen, vgl. Abschnitt 6.5.2.

3.2.4

Beispiel: Schwingungen eines Motor-Generator-Aggregates

Bild 3.13 zeigt einen Fundamentblock mit symmetrisch angeordneten Fundamentfedern.

Gegeben seien die Parameterwerte

Fundamentmasse

$$m = 20 \text{ t}$$

Hauptträgheitsmomente bezüglich der Achsen durch den Schwerpunkt S

$$J_{xx} = 48 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$$

$$J_{yy} = 14 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$$

$$J_{zz} = 52 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

horizontale Federkonstante eines Schwingungsisolators

$$c_x = c_y = c_H = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

Federkonstante eines Schwingungsisolators in z-Richtung

$$c_z = 3,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

Abstände der Federangriffspunkte

$$a = h = 1 \text{ m}; l = 0,5 \text{ m};$$

$$l_0 = 0,4l; l_1 = 1,6l$$

Anzahl der Schwingungsisolatoren

$$n = 16.$$

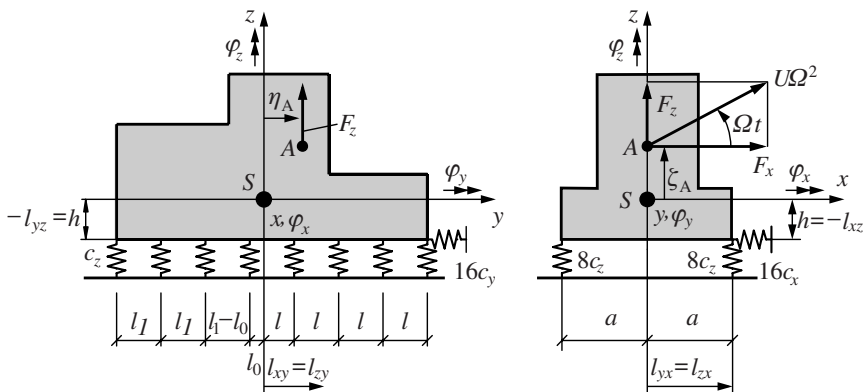


Bild 3.13 Bezeichnungen am Fundamentblock

Die Federzahlen ergeben sich aus den gegebenen Daten mit (3.33) zu

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= c_{22} = 16c_H; & c_{24} &= -c_{15} = 16hc_H; & c_{33} &= 16c_z \\
 c_{16} &= c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0 \\
 c_{44} &= 65,86l^2c_z + 16c_Hh^2; & c_{55} &= 16(c_Hh^2 + c_z a^2) \\
 c_{66} &= c_H(65,86l^2 + 16a^2).
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Es werden zunächst die Eigenfrequenzen und Eigenformen berechnet. Die Gleichungen (3.28) zerfallen in (3.35) und (3.36). Die zugehörigen Eigenwertgleichungen aus (3.34) vereinfachen sich noch weiter zu

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} c_{11} - m\omega^2 & c_{15} \\ c_{15} & c_{55} - J_{\eta\eta}\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} c_{22} - m\omega^2 & c_{24} \\ c_{24} & c_{44} - J_{\xi\xi}\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Aus (3.59) folgen die Amplitudenverhältnisse der zugehörigen Eigenformen

$$\begin{aligned}
 (\hat{x}/\hat{\phi}_y)_i &= v_{1i}/v_{5i} = (c_{55} - J_{\eta\eta}\omega_i^2)/c_{15}; & \text{für } i &= 1 \text{ und } 5 \\
 (\hat{y}/\hat{\phi}_z)_i &= v_{2i}/v_{4i} = (c_{44} - J_{\xi\xi}\omega_i^2)/c_{24}; & \text{für } i &= 2 \text{ und } 4.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Die Eigenfrequenzen folgen aus (3.39) nach kurzer Rechnung mit den dort angegebenen Indizes (Ausnahme! Normalerweise werden sie mit dem Index i der Größe nach geordnet) aus $f_i = \omega_i/(2\pi)$ zu:

$$\begin{aligned}
 \text{Hubschwingung:} & & f_3 &= 2,466 \text{ Hz} \\
 \text{Drehschwingung um die } z\text{-Achse:} & & f_6 &= 1,892 \text{ Hz} \\
 \text{Nickschwingungen in der } x\text{-}z\text{-Ebene:} & & f_1 &= 3,769 \text{ Hz}; f_5 = 1,365 \text{ Hz;} \\
 & & v_{51} &= 0,3888; v_{15} = -0,2722 \\
 \text{Nickschwingungen in der } y\text{-}z\text{-Ebene:} & & f_2 &= 2,716 \text{ Hz}; f_4 = 1,467 \text{ Hz;} \\
 & & v_{42} &= -0,2919; v_{24} = 0,7006
 \end{aligned}$$

Man beachte sie in Bild 3.14. Die Amplitudenverhältnisse der genannten Eigenformen erhält man bei der Normierung $v_{ii} = 1$ aus (3.60). Man skizziere diese Formen! Zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens im Betriebszustand ist die Kenntnis der Eigenfrequenzen und Eigenformen nicht ausreichend. Dazu ist die Berechnung der erzwungenen Schwingungen unter Berücksichtigung der Dämpfung erforderlich.

Es wird angenommen, dass das Aggregat eine Unwucht U besitzt, die in der x - z -Ebene um eine Achse A rotiert, vgl. die körperfesten Abstände η_A und ζ_A in Bild 3.13. Die aus dieser Unwucht resultierende Fliehkraft wirkt auf das Fundament mit folgenden Komponenten:

$$\begin{aligned}
 F_x &= U\Omega^2 \sin \Omega t; & M_x &= F_z \eta = \eta_A U \Omega^2 \sin \Omega t \\
 F_y &= 0; & M_y &= \zeta F_x = \zeta_A U \Omega^2 \sin \Omega t \\
 F_z &= U\Omega^2 \cos \Omega t; & M_z &= -F_x \eta = -\eta_A U \Omega^2 \sin \Omega t.
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Für konkrete Abstände ($\eta_A = 0,5 \text{ m}$; $\zeta_A = 0,3 \text{ m}$), eine Unwucht $U = 0,3 \text{ kg} \cdot \text{m}$ und eine Dämpfungskonstante für jede Feder ($b = 3000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$) wurden die stationären Amplituden der erzwungenen Schwingungen mit der in Abschnitt 6.5 beschriebenen Methode berechnet. In Bild 3.14 sind die Ergebnisse in Form der Amplituden-Frequenzgänge dargestellt, vgl. dazu auch (3.14) und V_3 in Bild 3.4. Der Bezugswert $e = U/m = 0,015 \text{ mm}$ ist die Wegamplitude, mit der sich der ungefesselte Block infolge der rotierenden Unwucht bewegen würde (Schwerpunktsatz).

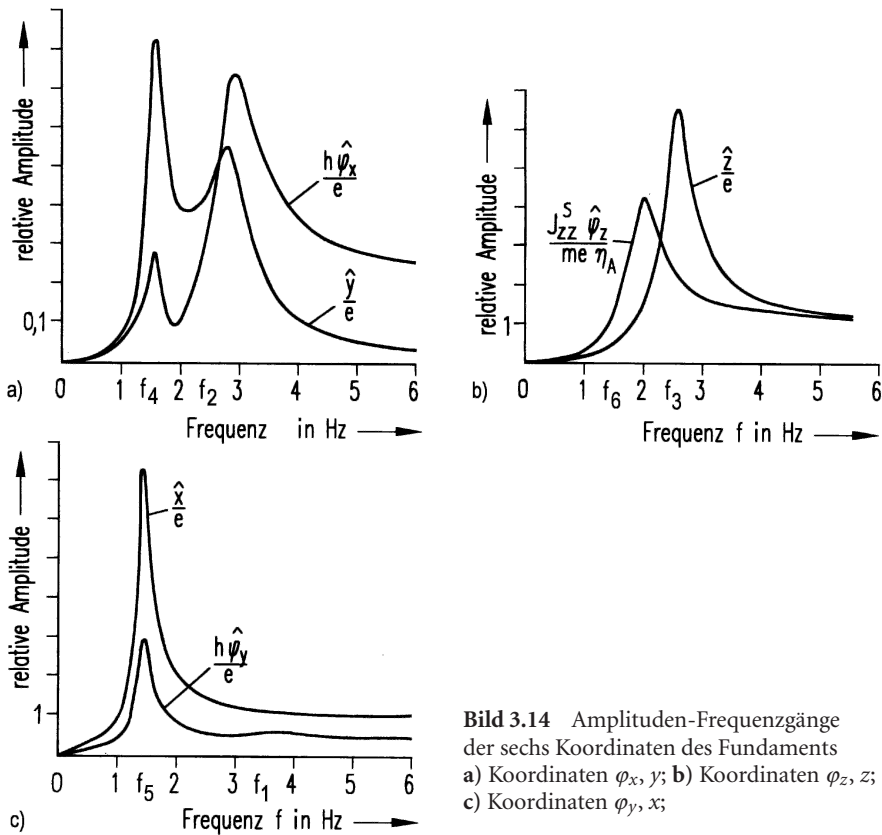


Bild 3.14 Amplituden-Frequenzgänge der sechs Koordinaten des Fundaments
a) Koordinaten φ_x, y ; b) Koordinaten φ_z, z ;
c) Koordinaten φ_y, x ;

Man kann erkennen, dass alle Eigenfrequenzen unterhalb der Betriebsdrehzahl von 300/min ($f_{\text{err}} = 5 \text{ Hz}$) liegen und das Fundament **tief abgestimmt** ist. Die Resonanzstellen müssen durchfahren werden, aber im Betrieb sind die auftretenden Schwingungsamplituden unbedeutend. Die Resonanzstellen liegen bei den berechneten Eigenfrequenzen. Zur Kontrolle möge man prüfen, ob bei sehr hohen Erregerfrequenzen (wenn die Federkräfte gegenüber den Massenkräften klein sind) sich die Amplitude des freien unwuchterregten Systems einstellt, d. h. für $f \rightarrow \infty$ muss $\hat{x}/e = \hat{z}/e = J_{zz} \hat{\varphi}_z / (U \eta_A) = 1$ und $h \hat{\varphi}_y / e = \hat{y}/e = 0$ sein.

3.2.5

Aufgaben A3.1 bis A3.3

A3.1 Aufstellung eines Sägegatters

Ein Sägegatter soll tief abgestimmt aufgestellt werden. Durch das hin- und hergehende Gatter entsteht die Kraft $F = \hat{F} \sin \Omega t$. Das Sägegatter läuft mit der Drehzahl n . Wie groß muss die Masse von Fundament und Sägegatter sein und welche Gesamtfederkonstante muss vorliegen, damit nur 5 % der Erregerkraft in den Baugrund eingehen und die Amplitude des Fundamentes nicht größer als $\hat{x}$ wird?

Gegeben:

$$\hat{F} = 16 \cdot 10^4 \text{ N}; n = 600 \text{ 1/min}; \hat{x} = 1 \text{ mm}$$

Gesucht:

1. Abstimmungsverhältnis η
2. Federkonstante c
3. Statische Durchsenkung der Feder infolge des Eigengewichts

A3.2 Minimale dynamische Gehäusebelastung

Im Verdichter eines Kühlschranks rotiert eine vertikal angeordnete Welle um die ζ -Achse, die an einem Ende (im Abstand ζ_1) den Kolben antreibt, welcher die horizontale Massenkraft $F_1(t)$ verursacht. Der erwünschte Massenausgleich ist aus konstruktiven Gründen nicht in der Ebene im Abstand ζ_1 möglich. Eine Ausgleichsmasse kann nur im Abstand ζ_2 angeordnet werden, aber der Bauraum ist so beengt, dass diese in der erforderlichen Größe nicht hineinpasst und nur einen Anteil von p Prozent der Massenkraft (um 180 Grad phasenversetzt) aufbringen kann, der zum vollständigen Ausgleich notwendig wäre. Der Verdichterblock (einschließlich Motorwelle) hat die Masse m und das Trägheitsmoment $J_S = J_{yy}$, vgl. Bild 3.15.

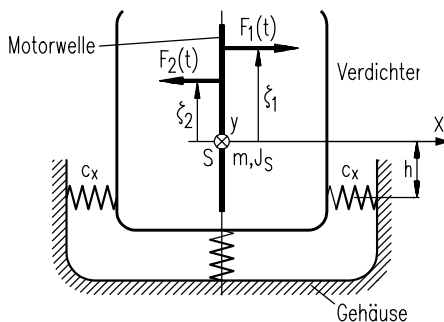


Bild 3.15
Verdichterblock
mit Erregerkräften

Der Verdichter soll elastisch gelagert werden, und zwar so, dass möglichst keine horizontalen dynamischen Kräfte von ihm auf das Gehäuse des Kühlschranks übertragen werden. Der Körperschall würde zu störender Geräuschbildung führen. Die Lagerung des Verdichters im Gehäuse erfolgt durch eine zentrale vertikale Feder (welche das Eigengewicht aufnimmt) und horizontal wirkende Federn im Abstand h vom Schwerpunkt.

Gegeben:

Horizontale Erregerkraft im Abstand ζ_1	$F_1(t)$
Ausgleichskraft im Abstand ζ_2	$F_2(t) = pF_1(t)$
Abstände der Wirkungsebenen der Kräfte	ζ_1 und ζ_2
Masse des Motorblocks	m
Trägheitsmoment des Motorblocks	J_S

Gesucht:

1. Herleitung der Bedingungen für die minimale Belastung des Gehäuses (nach Aufstellung der Bewegungsgleichungen)
2. Optimaler Abstand h für die Anordnung der horizontalen Federn
3. Abstand h für die Parameterwerte $J_S = ml^2$; $\zeta_1 = l$; $\zeta_2 = 0,8l$; $p = 0,8$

Zur Vereinfachung betrachte man nur das Gleichgewicht in der x - z -Ebene ohne die Berücksichtigung der vertikalen Kraftkomponenten.

A3.3 Schwingungsisolierende Lagerung eines Motorradmotors

Ein Motorradmotor soll elastisch gelagert werden, vgl. Bild 3.16. Die durch die Kolbenbewegung entstehende Schwingungsamplitude $\dot{x}_p$ des Kurbelwellenmittelpunktes P soll einen vorgeschriebenen Wert $\dot{x}_{zul}$ nicht überschreiten. Es können kleine Schwingungen vorausgesetzt werden.

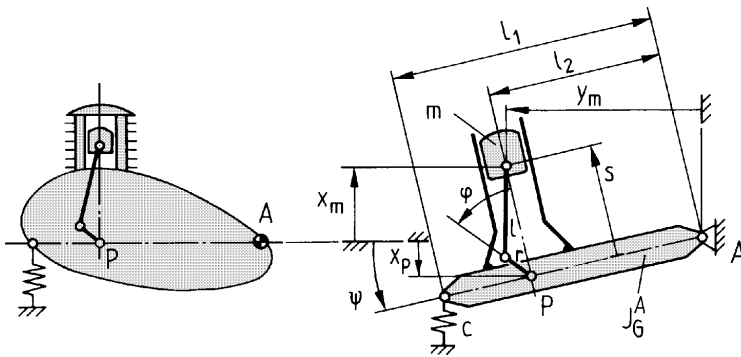


Bild 3.16 Lagerung eines Motorradmotors

Gegeben:

Bewegung des Kolbens	$s = l + r \cos \Omega t$
Masse des Kolbens einschließlich der reduzierten Pleuelmasse (Schwerpunkt liegt im Pleuellager des Kolbens)	$m = 0,6 \text{ kg}$
Trägheitsmoment des Gehäuses mit Einbauteilen	$J_G^A = 0,523 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Längen	$l_1 = 360 \text{ mm};$ $l_2 = 150 \text{ mm};$ $l = 150 \text{ mm};$ $r = 32 \text{ mm}$
zulässige Amplitude des Punktes P	$\dot{x}_{zul} = 1 \text{ mm}$
Drehzahlbereich	$n \geq 1000 / \text{min}$

Gesucht:

1. Bewegungsgleichung für $x_p(t)$
2. erforderliche Federsteifigkeit c für die Bedingung $|\dot{x}_p| \leq \dot{x}_{zul}$ im ganzen Drehzahlbereich

3.2.6

Lösungen der Aufgaben L3.1 bis L3.3

- L3.1** Es wird von einer dämpfungs freien Aufstellung ausgegangen, da die Dämpfung außerhalb einer Resonanz keinen merklichen Einfluss hat, vgl. die Vergrößerungsfunktionen V_1 und V_2 in Bild 3.4.

Für die Berechnung liegt das Modell mit Krafterregung (Tabelle 3.3) zugrunde. Außerhalb der Resonanz wird die Dämpfung vernachlässigt. Es gilt also $D = 0$ und nach (3.12), (3.13) sind die Amplituden des Weges und der Bodenkraft:

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{c} \frac{1}{|1 - \eta^2|}; \quad \hat{F}_B = \hat{F} \frac{1}{|1 - \eta^2|}. \quad (3.62)$$

Da bei tiefer Abstimmung $\eta > 1$ ist, wird das negative Vorzeichen der Bodenkraft berücksichtigt. Man erhält somit aus (3.62)

$$\eta^2 = 1 + \frac{\hat{F}}{\hat{F}_B} = 1 + \frac{1}{0,05} = 21; \quad \underline{\underline{\eta = 4,58.}} \quad (3.63)$$

Damit lässt sich nun die Federkonstante bei vorgegebener Amplitude $\hat{x}$ bestimmen.

$$c = \frac{\hat{F}}{\hat{x}} \frac{1}{\eta^2 - 1} = \frac{\hat{F}}{\hat{x}} 0,05 = \frac{16 \cdot 10^4 \text{ N}}{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \cdot 0,05 = \underline{\underline{8 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}}. \quad (3.64)$$

Mit dem Abstimmungsverhältnis η und der Federkonstanten c lässt sich die Gesamtmasse bestimmen.

$$\eta^2 = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}; \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}; \quad \Omega = \frac{\pi n}{30} = 62,8 \text{ s}^{-1}; \quad (3.65)$$

$$m = \frac{\eta^2 c}{\Omega^2} = \frac{21 \cdot 8 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}{62,8^2 \cdot \text{s}^{-2}} = 42,6 \cdot 10^3 \text{ kg}.$$

Der Vorspannweg, den die Ersatzfeder im eingebauten Zustand hat, beträgt

$$\underline{\underline{x_{st}}} = \frac{mg}{c} = \frac{42,6 \cdot 10^3 \cdot \text{kg} \cdot 9,81 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{8 \cdot 10^6 \cdot \text{N} \cdot \text{m}^{-1}} = \underline{\underline{0,052 \text{ m}}}. \quad (3.66)$$

Diesen Wert erhält man auch aus Bild 3.3, wenn man als erforderliche Eigenfrequenz $f = n/(60\eta) = 2,18 \text{ Hz}$ einsetzt.

- L3.2** Die Bewegungsgleichungen folgen aus dem dynamischen Kräfte- und Momentengleichgewicht für $\varphi_y \ll 1$, $\sin \varphi_y = \varphi_y$, $\cos \varphi_y = 1$, vgl. Bild 3.17:

$$m\ddot{x}_S - F_1 + F_2 - F_H = 0 \quad (3.67)$$

$$J_S \ddot{\varphi}_y - F_1 \zeta_1 + F_2 \zeta_2 - F_H h = 0. \quad (3.68)$$

Die Horizontalkraft auf die Federn beträgt

$$F_H = 2c_x(x_S - h\varphi_y). \quad (3.69)$$

Führt man statt des Winkels ψ die Koordinate x_P des Punktes P durch die für $\sin \psi \ll 1$ geltende Beziehung $x_P = l_2 \psi$ ein, so gewinnt man eine lineare Bewegungsgleichung bezüglich x_P , welche die Form von (3.8) hat:

$$\ddot{x}_P + \frac{cl_1^2}{J_A} x_P = -\frac{ml_2^2}{J_A} r \Omega^2 \cos \Omega t. \quad (3.77)$$

Hierfür lautet die Lösung für den stationären Schwingungszustand $x_P = \hat{x}_P \cos \Omega t$. Mit $\omega_0^2 = cl_1^2/J_A$ und $\eta = \Omega/\omega_0$ gilt für die Amplitude, vgl. (3.14):

$$\hat{x}_P = \frac{mrl_2^2}{J_A} \cdot \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1}. \quad (3.78)$$

Entsprechend der Aufgabenstellung ist die Forderung $|\hat{x}_P| \leq \hat{x}_{zul}$ zu erfüllen. Unter der Voraussetzung eines tief abgestimmten Systems ($\eta > 1$) – nur dabei nimmt mit zunehmender Drehzahl die Amplitude ab, vgl. die Vergrößerungsfunktion V_3 in Bild 3.4 – folgt aus (3.78)

$$(\eta^2 - 1)x_{zul} = \frac{mrl_2^2}{J_A} \eta^2 \quad \text{und} \quad (3.79)$$

$$\eta^2 = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = \frac{J_A \Omega^2}{c \cdot l_1^2} \geq \frac{1}{1 - \frac{mrl_2^2}{J_A \hat{x}_{zul}}}. \quad (3.80)$$

Damit ergibt sich für die Steifigkeit mit den Parameterwerten aus der Aufgabenstellung ($\Omega = \Omega_{\min} = \pi \cdot 1000/30 = 104,7 \text{ s}^{-1}$):

$$c \leq \left(1 - \frac{mrl_2^2}{J_A \cdot x_{zul}}\right) \cdot \frac{J_A \Omega^2}{l_1^2} = 9985 \text{ N/m}. \quad (3.81)$$

3.3

Fundamente unter Stoßbelastung

3.3.1

Zur Modellierung von Schmiedehämmern

Eine Stoßbelastung des Fundaments entsteht bei Schmiedehämmern, Schlagscheren, Pressen und Stanzen. Der Projektant solcher Anlagen muss eine Konstruktion schaffen, die die Kräfte aufnimmt (der Beton darf nicht durch die Schläge zertrümmert werden). Man muss verhindern, dass unzulässige Erschütterungen auf die Umgebung übertragen werden und dass sich die Anlage „setzt“ (im Boden einrüttelt) oder schräg stellt. Keine Maßnahme darf dabei eine der technologischen Forderungen (z. B. guter Schmiedewirkungsgrad) beeinträchtigen.

Schmiedehämmer erfordern in der Regel große Stahlbetonfundamente (Bild 3.18a), um hohe dynamische Beanspruchungen beim Hammerschlag abzufangen. Bild 3.18b und c zeigen alternative Aufstellungen eines Schmiedehammers. Aus dem Vergleich der Volumina der Betonkörper kann man schon ahnen, welche unterschiedlichen Kosten für das Fundament entstehen. Es ist also sehr günstig, eine elastische Lagerung derartiger Anlagen vorzusehen. Durch die Verwendung von

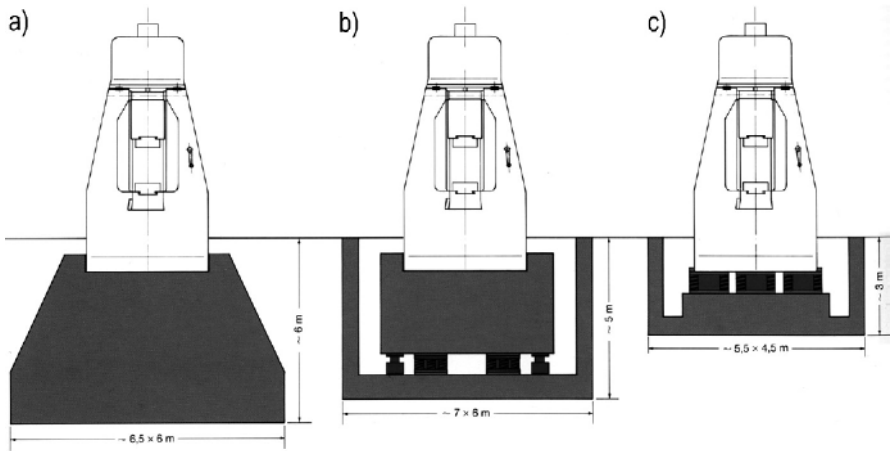


Bild 3.18 Aufstellung von Schmiedehämmern (Quelle: GERB, Berlin)

a) feste Gründung im Baugrund, b) abgefederter Fundamentblock, c) Direktabfederung

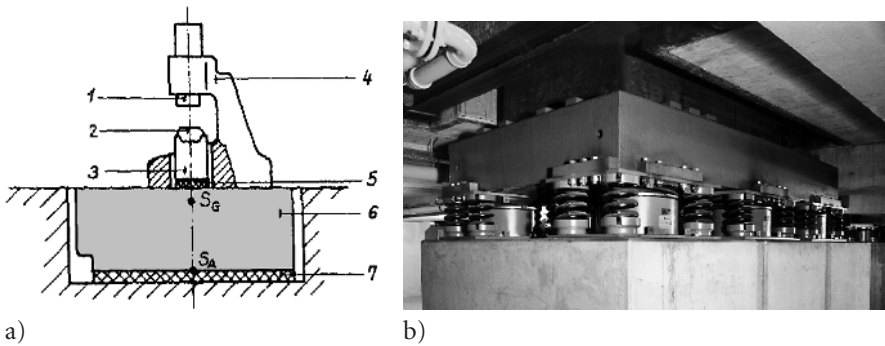
VISCO-Dämpfern (parallel zu den Federn) gemäß Bild 1.22a kann die Masse des abgefederten Fundamentblockes gegenüber der festen Gründung deutlich verringert werden. Das in Bild 3.18c dargestellte System hat sich bei Hämmern mit einem Arbeitsvermögen bis 400 kJ bewährt.

Der prinzipielle Aufbau ist in Bild 3.19 wiedergegeben. Das Gestell des Schmiedehammers steht fest auf dem Fundamentblock. In ihm befindet sich der Hub- oder Beschleunigungsmechanismus für den Hammer (Bär). Dabei unterscheidet man frei fallende oder durch Antrieb (z. B. Druckluft) beschleunigte Hämmer. Beim Auftreffen des Hammers auf den Amboss hat dieser eine bestimmte kinetische Energie, die mit möglichst gutem Wirkungsgrad in Verformungsenergie des Werkstückes umzusetzen ist. Die Schabotte, die den Amboss trägt, steht gesondert über einer elastischen Zwischenschicht auf dem Fundamentblock. Um die Federung des Fundamentblockes gegen Feuchtigkeit zu schützen, befindet sich dieser meist in einer Fundamentwanne, die auf dem Baugrund steht. Der Fundamenttrog steht auf der Federung des Baugrundes.

Die Masse des Bären m_B wird durch die geforderte Schlagenergie bestimmt. Die Masse von Amboss und Schabotte liegt, um einen guten Schmiedewirkungsgrad zu erhalten, in der Größenordnung von $m_A = 20m_B$. Für die Masse des Fundaments m_F wird angegeben

$$m_F > 60m_B \quad \text{oder} \quad m_F = 2,4v_B^2 m_B. \quad (3.82)$$

Darin ist v_B die Bargeschwindigkeit unmittelbar vor dem Aufschlag in m/s. Gleichung (3.82) gilt jedoch nicht für Schnellschlaghämmer oder Gegenschlaghämmer. Die Fundamentmasse sollte so ausgeführt werden, dass der Gesamtschwerpunkt S_G und der Flächenschwerpunkt der Federung S_A auf einer Linie mit der Schlagrichtung liegen. Man erreicht damit eine gleichmäßige Belastung und vermeidet Kippbewegungen.

**Bild 3.19** Schmiedehammer

a) Gesamtansicht, 1 Bär; 2 Amboss; 3 Schabotte; 4 Gestell; 5 Federung; 6 Fundamentblock; 7 Federung; S_G Schwerpunkt der Gesamtmasse; S_A Schwerpunkt der Sohlfläche
 b) Blick auf eine Lagerung (Quelle: GERB, Berlin)

Als Berechnungsmodell müsste danach ein Dreimassensystem (Schabotte-Fundament-Fundamenttrog) untersucht werden. Wegen der Massenunterschiede und der großen Steifigkeitsunterschiede (die Federung der Schabotte ist wesentlich steifer als die Federung des Fundamentes) begnügt man sich für eine Überschlagsrechnung häufig mit einem Zweimassensystem. Dabei kommt es zunächst darauf an, die Eigenfrequenzen und die maximalen dynamischen Verschiebungen zu bestimmen. Hierzu ist die Dämpfung nicht erforderlich. Will man jedoch, was für Schnellschlaghämmer erforderlich ist, überprüfen, ob die Schwingungen zwischen zwei Schlägen genügend abklingen, muss die Dämpfung einbezogen werden, vgl. Bild 3.22.

3.3.2

Berechnungsmodell mit zwei Freiheitsgraden

Das der Berechnung zugrunde gelegte Modell zeigt Bild 3.20. Dabei können die Massen m_1 , m_2 und die Steifigkeiten c_1 , c_2 des Modells je nach der Aufgabenstellung a) oder b) gewählt werden. Diese richten sich nach den Steifigkeits- und Massenverhältnissen des Systems. Der Ursprung der Koordinaten x_1 , x_2 liegt in der statischen Ruhelage vor dem Auftreffen der Bärmasse. Da $m_B \ll m_1$ und $m_B \ll m_2$ gilt, werden die geringe statische Durchsenkung und der dynamische Einfluss durch m_B nach dem Stoß vernachlässigt.

Die Bewegungsgleichungen lauten als Sonderfall von (3.50):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1(x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_1(x_1 - x_2) + c_2 x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Sie müssen mit den Anfangsbedingungen:

$$t = 0: \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad \dot{x}_1 = u_1; \quad \dot{x}_2 = 0 \quad (3.84)$$

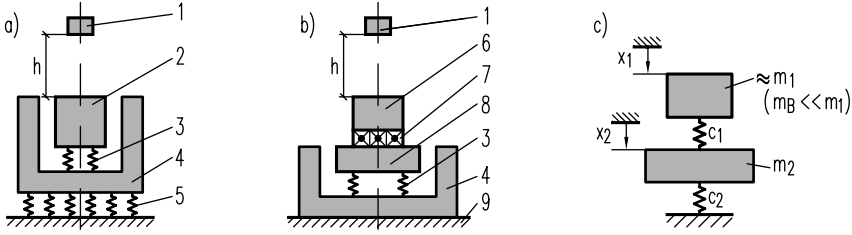


Bild 3.20 Berechnungsmodell c) für den Schmiedehammer bei verschiedenen Aufgabenstellungen a) und b); 1 Bär; 2 Amboss und Fundament; 3 Fundamentfeder; 4 Fundamenttrog; 5 Bodenfeder; 6 Amboss; 7 Balkenlage (Feder); 8 Fundament; 9 Boden starr

gelöst werden. Die Anfangsgeschwindigkeit u wird durch den Stoß des Bären auf den Amboss bestimmt. Unter der Voraussetzung eines kurzen Stoßes gilt für die beiden Massen m_B und m_1 der Impulssatz:

$$m_B u_{v0} = m_B u_0 + m_1 u_1. \quad (3.85)$$

Darin ist u_{v0} die Geschwindigkeit von m_B unmittelbar vor dem Stoß und u_0 ; u_1 sind die Geschwindigkeiten nach dem Stoß. Im Allgemeinen wird als zusätzliche Gleichung die *Newton'sche Stoßhypothese* verwendet

$$k = - \frac{u_0 - u_1}{u_{v0}}. \quad (3.86)$$

Für die *Stoßzahl* k liegen Erfahrungswerte vor:

- $k = 0,2$ für leichtes Warmrecken
- $k = 0,5$ für Kaltrecken
- $k = 0,8$ für schwere Gesenkarbeiten

Die Geschwindigkeit u_{v0} kann bei Freifallhämmern gesetzt werden: $u_{v0} = \sqrt{2gh}$ (h Fallhöhe). Für die Geschwindigkeit des Amboss nach dem Stoß findet man somit aus den (3.85) und (3.86):

$$u_1 = \frac{(1+k)u_{v0}m_B}{m_1 + m_B}. \quad (3.87)$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^2 v_{ki}(a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t); \quad k = 1, 2, \quad (3.88)$$

vgl. auch die Abschnitte 4.2.1.1 und 4.4.2.

Die beiden Eigenkreisfrequenzen erhält man analog zu (3.39) aus

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1} \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{c_1}{m_1} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}. \quad (3.89)$$

Für das Hammerfundament sind die dimensionslosen Kenngrößen

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \ll 1; \quad \gamma = \frac{c_1}{c_2} \gg 1. \quad (3.90)$$

Dafür gilt als Näherung

$$\omega_1^2 \approx \frac{\frac{c_1}{m_1}}{1 + \frac{c_1}{c_2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}; \quad \omega_2^2 \approx \frac{c_2}{m_2} \left[1 + \frac{c_1}{c_2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\right], \quad (3.91)$$

wobei der genaue Wert von ω_1 etwas größer und der von ω_2 etwas kleiner ist.

Bei Hammerfundamenten gilt als Anhaltswert $\mu \approx 0,3$; $\gamma > 5$, die beiden Eigenfrequenzen liegen also weit auseinander.

Die Amplitudenverhältnisse sind $v_{11} = v_{12} = 1$ und analog (4.29)

$$v_{21} = 1 - \frac{m_1 \omega_1^2}{c_1}; \quad v_{22} = 1 - \frac{m_1 \omega_2^2}{c_1} \quad (3.92)$$

und aus den Anfangsbedingungen (3.84) findet man $a_1 = a_2 = 0$

$$b_1 = \frac{u_1}{\omega_1} \cdot \frac{c_1/m_1 - \omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}; \quad b_2 = -\frac{u_2}{\omega_2} \cdot \frac{c_1/m_1 - \omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}. \quad (3.93)$$

Die Lösung von (3.83) ergibt sich aus (3.88), (3.92) und (3.93):

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \sin \omega_2 t \\ x_2 &= v_{21} b_1 \sin \omega_1 t + v_{22} b_2 \sin \omega_2 t. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Die Schwingbewegung beider Massen setzt sich also aus zwei harmonischen Anteilen zusammen, die mit den Eigenfrequenzen schwingen. Beide Massen werden im Allgemeinen nichtperiodische Bewegungen ausführen. Da für Hammerfundamente $\omega_1 \ll \omega_2$ und $m_1 \omega_1^2 / c_1 \ll 1$ gilt, ist $v_{21} \approx 1$. Für die Relativverschiebung Δx zwischen Schabotte und Amboss ist dann nur die Schwingung in der zweiten Eigenfrequenz, bei der beide Massen gegeneinander schwingen, interessant:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_1 - x_2 \approx (1 - v_{22}) b_2 \sin \omega_2 t \\ \Delta x_{\max} &= b_2 (1 - v_{22}) = \frac{b_2 m_1 \omega_2^2}{c_1}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Tabelle 3.4 Richtwerte für zulässige Ausschläge an Hammerfundamenten

Zulässige Maximalausschläge der Schabotte (m_1) auf dem Fundament (Modell a, b)	Zulässige Maximalausschläge des Fundamentes (m_2) (Modell a)
$\Delta x = 1 \text{ mm}$ ($m_B < 1 \text{ t}$)	$x_{2\max} = 0,5 \dots 2 \text{ mm}$ für Reckhämmer
$\Delta x = 2 \text{ mm}$ ($m_B = 1 \dots 2 \text{ t}$)	
$\Delta x = 3 \dots 4 \text{ mm}$ ($m_0 > 3 \text{ t}$)	$x_{2\max} = 3 \dots 4 \text{ mm}$ für Gesenkhämmer

Richtwerte für Maximalausschläge der Hammerfundamente sind in Tabelle 3.4 zusammengestellt.

Die bisherige Rechnung erfolgte ohne Berücksichtigung der Dämpfung und ergab somit Amplitudenwerte, die über den wirklichen liegen. Weiterhin wurde durch

die Anfangsbedingungen (3.84) festgelegt, dass nur eine durch den Stoß bedingte Anfangsgeschwindigkeit vorliegt. Die Schwingungen, die vom vorangegangenen Stoß herrühren, müssen also schon abgeklungen sein. Die Abschätzung dieses Vorganges erfolgt an einem gedämpften System mit einem Freiheitsgrad, für das die niedrigste Eigenfrequenz zugrunde gelegt wird. Zunächst wird die Anzahl der Schwingungen zwischen zwei Stößen festgelegt.

$$z = \frac{T_0}{T} \quad (3.96)$$

T_0 Zyklusdauer, Zeit zwischen 2 Schlägen ($T_0 = 2\pi/\Omega$)

T Periodendauer, die der niedrigsten Eigenfrequenz entspricht ($T = 2\pi/\omega_1$)

Die Amplitudenabnahme zwischen zwei aufeinander folgenden positiven Maxima beträgt für $D \ll 1$: $x_k/x_{k+1} = e^{2\pi D}$, vgl. (1.97).

Es muss der Wert $x_{\min}$, auf den die Amplitude beim nächsten Schlag abgeklungen sein soll, vorgegeben werden. Zwischen $x_{\max}$ und $x_{\min}$ liegen z Vollschrwingungen. Somit gilt

$$\frac{x_{\max}}{x_{\min}} = e^{2\pi z D}; \quad D = \frac{1}{2\pi} \frac{T}{T_0} \ln \left(\frac{x_{\max}}{x_{\min}} \right). \quad (3.97)$$

Gibt man beispielsweise vor: $x_{\max}/x_{\min} = 10$; $T/T_0 = 1/3$, so muss ein Dämpfungsgrad $D = 0,12$ vorliegen. Dieser Wert wird nicht immer durch die natürliche Dämpfung erreicht.

3.3.3

Periodische Erregung – Kumulationsfaktor

Bei vielen Maschinen und in Mechanismen treten kurzzeitig eingeprägte Kräfte auf, die sich periodisch wiederholen. Das können z. B. periodische Schneidkräfte, Presskräfte, Stoßkräfte mit der Zahneingriffsfrequenz bei Zahnradern oder Kettenradern, periodische Schienenstöße oder periodische Impulse bei Verdichtern, Schwingförderern oder Sieben sein. Die folgende Methode bietet eine alternative Lösung gegenüber der Anwendung einer Fourierreihe, vgl. 3.2.1.3. Sie lässt sich auf beliebige Erregerkraftverläufe anwenden und liefert in vielen Fällen auf elegantem Wege und mit geringem Rechenaufwand die exakte Lösung.

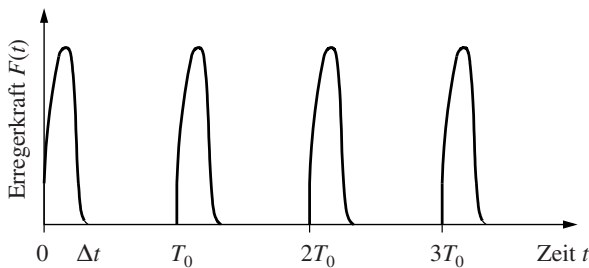


Bild 3.21
Periodische Erregung

Das Verhalten des Schwingungssystems wird während eines Zyklus betrachtet, der sich periodisch wiederholt, vgl. Bild 3.21. Die für einen Zyklus ($0 \leq t \leq T_0$) gewonnenen Ergebnisse gelten analog für alle anderen Zyklen $kT_0 \leq t \leq (k+1)T_0$ für $k = 0, 1, 2, \dots$, denn es gilt die Periodizitätsbedingung

$$F(t) = F(t + kT_0). \quad (3.98)$$

Die Bewegungsgleichung lautet für das in Tabelle 3.3 skizzierte System, vgl. (3.8) und (3.23)

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F(t)}{m}. \quad (3.99)$$

Es wird die stationäre Lösung gesucht. Die vollständige Lösung ist die Summe aus der allgemeinen Lösung x_h der homogenen Gleichung und der partikulären Lösung x_p der inhomogenen Gleichung:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t). \quad (3.100)$$

Die partikuläre Lösung $x_p(t)$ sei bekannt. Sie kann durch eine analytische Methode oder innerhalb des Intervalls $0 \leq t \leq T_0$ mit den Anfangsbedingungen

$$t = 0: \quad x_p(0) = 0, \quad \dot{x}_p(0) = 0 \quad (3.101)$$

numerisch bestimmt werden. Die Besonderheit der vollständigen periodischen Lösung besteht darin, dass ihre „Anfangsbedingungen“ x_0 und v_0 zunächst unbekannt sind, weil der betrachteten Periode bereits eine unbegrenzte Anzahl von Zyklen vorangegangen ist. Man könnte sonst gleich eine numerische Lösung mit diesen (die Periodizität garantierenden) Anfangsbedingungen beginnen. Da es sich um einen stationären Vorgang handelt, wird Periodizität gefordert, und zwar durch die Bedingungen

$$\begin{aligned} x(0) &= x_h(0) + x_p(0) = x(T_0) = x_h(T_0) + x_p(T_0) = x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_h(0) + \dot{x}_p(0) = \dot{x}(T_0) = \dot{x}_h(T_0) + \dot{x}_p(T_0) = v_0. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Die homogene Lösung von (3.99) ist aus (1.94) bekannt, wobei $\omega = \omega_0\sqrt{1-D^2}$:

$$x_h(t) = \exp(-\delta t) \left[x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \delta x_0}{\omega} \sin \omega t \right] \quad (3.103)$$

$$\dot{x}_h(t) = \exp(-\delta t) \left[v_0 \cos \omega t - \frac{(\omega^2 + \delta^2)x_0 + \delta v_0}{\omega} \sin \omega t \right]. \quad (3.104)$$

Da die partikuläre Lösung $x_p(t)$ auch bekannt ist, kennt man deren Endwerte $x_p(T_0)$ und $\dot{x}_p(T_0)$. Es kommt auf deren möglichst große Genauigkeit an, denn von ihnen hängt die vollständige Lösung ab. Die unbekannten Anfangswerte der vollständigen Lösung stimmen mit denen der homogenen Lösung wegen (3.101) überein:

$$x_h(0) = x(0) = x_0; \quad \dot{x}_h(0) = \dot{x}(0) = v_0. \quad (3.105)$$

Sie können nun nach dem Einsetzen aller Größen in die beiden Periodizitätsbedingungen (3.102), also aus

$$x_h(0) = x_0 = x_h(T_0) + x_p(T_0); \quad \dot{x}_h(0) = v_0 = \dot{x}_h(T_0) + \dot{x}_p(T_0) \quad (3.106)$$

gefunden werden, woraus folgendes lineare Gleichungssystem für die beiden Unbekannten x_0 und v_0 folgt:

$$\begin{aligned} x_0 \left[1 - \exp(-\delta T_0) \left(\cos \omega T_0 + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega T_0 \right) \right] \\ - \frac{v_0}{\omega} \exp(-\delta T_0) \sin \omega T_0 &= x_p(T_0) \\ x_0 \exp(-\delta T_0) \frac{\omega^2 + \delta^2}{\omega} \sin \omega T_0 \\ + v_0 \left[1 - \exp(-\delta T_0) \left(\cos \omega T_0 - \frac{\delta}{\omega} \sin \omega T_0 \right) \right] &= \dot{x}_p(T_0) \end{aligned} \quad (3.107)$$

Die Auflösung ergibt die Anfangswerte der periodischen Lösung:

$$\begin{aligned} x_0 &= \mu \left\{ \left[1 - \exp(-\delta T_0) \left(\cos \omega T_0 - \frac{\delta}{\omega} \sin \omega T_0 \right) \right] x_p(T_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\omega} \exp(-\delta T_0) \sin \omega T_0 \dot{x}_p(T_0) \right\} \\ v_0 &= \mu \left\{ \left[-\exp(-\delta T_0) \frac{\omega^2 + \delta^2}{\omega} \sin \omega T_0 x_p(T_0) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[1 - \exp(-\delta T_0) \left(\cos \omega T_0 + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega T_0 \right) \right] \dot{x}_p(T_0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Dabei ist der Kehrwert der Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems (3.107)

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{1 - 2 \exp(-\delta T_0) \cos \omega T_0 + \exp(-2\delta T_0)} \\ &= \frac{1}{1 - 2 \exp(-2\pi D/\eta) \cos(2\pi \sqrt{1 - D^2}/\eta) + \exp(-4\pi D/\eta)} \end{aligned} \quad (3.109)$$

der so genannte *Kumulationsfaktor* oder „Wiederholungskoeffizient“ [18]. Dieser drückt den Sachverhalt aus, dass der Verlauf innerhalb der betrachteten Periode ($0 \leq t \leq T_0$) nicht nur eine Folge der einmaligen Erregung ist, sondern alle in den vorangegangenen Perioden wiederholt angeregten Schwingungen angehäuft („kumuliert“) hat. Der Kumulationsfaktor erfasst die in der betrachteten Periode ankommenden „Restverläufe“. Er ist, ebenso wie die Vergrößerungsfunktionen V in (3.26), unabhängig vom zeitlichen Erregerkraftverlauf.

Für das ungedämpfte System ($D = 0$) ergibt sich aus (3.108) und (3.109) mit $\omega = \omega_0$

$$\begin{aligned} x_0 &= \mu \frac{\omega(1 - \cos \omega T_0)x_p(T_0) + \sin \omega T_0 \dot{x}_p(T_0)}{\omega} \\ v_0 &= \mu [-\omega \sin \omega T_0 x_p(T_0) + (1 - \cos \omega T_0) \dot{x}_p(T_0)] \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\mu = \frac{1}{2 - 2 \cos \omega T_0} = \frac{1}{4 \sin^2(\omega_0 T_0/2)} = \frac{1}{4 \sin^2(\pi/\eta)}. \quad (3.111)$$

Bild 3.22 zeigt den Verlauf des Kumulationsfaktors für den üblichen Bereich real auftretender Dämpfungsgrade. Die Darstellung in Bild 3.22a ist mit der Resonanzkurve in Bild 3.5c vergleichbar. Der Bereich großer Drehzahlen kommt in Bild 3.22b deutlicher zum Ausdruck. Erwartungsgemäß zeigt der Kumulationsfaktor große Werte an den Stellen $\eta = 1/k$, also dort, wo die Bedingungen für Resonanzen k -ter Ordnung erfüllt sind. Die Breite der Resonanzbereiche und die Höhe der Resonanzspitzen nehmen mit zunehmender Ordnung k ab.

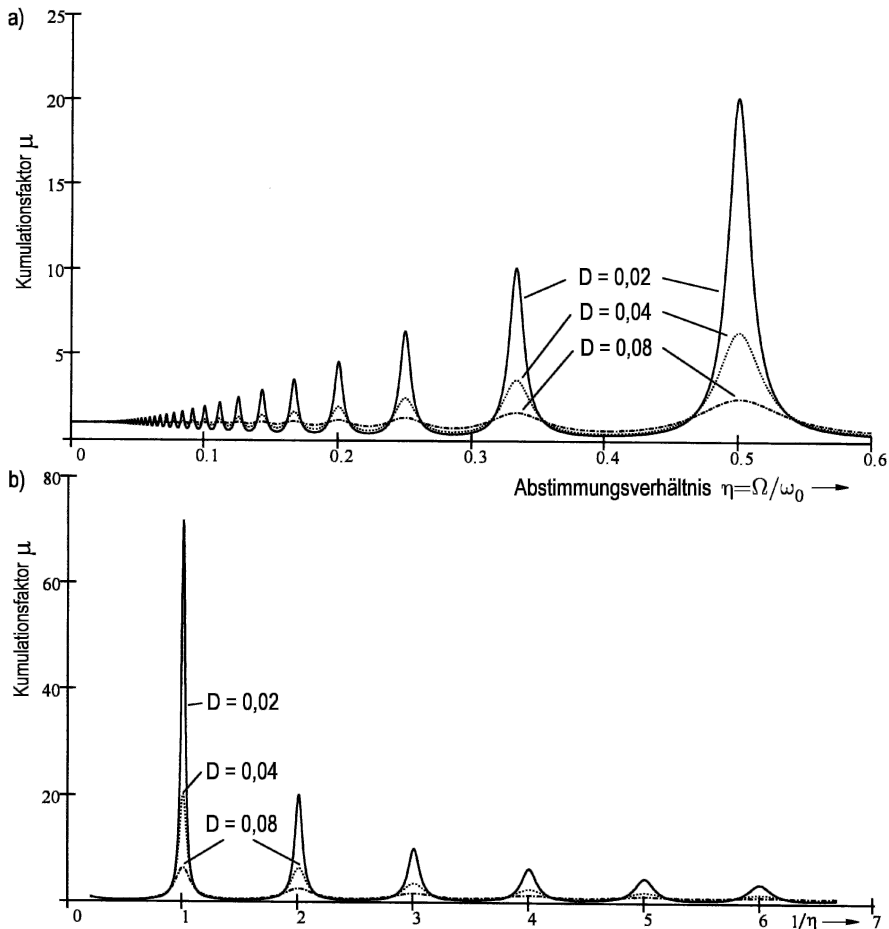


Bild 3.22 Kumulationsfaktor μ für Dämpfungsgrade $D = 0,02; 0,04$ und $0,08$

a) Funktion vom Abstimmungsverhältnis η

b) Funktion vom Kehrwert des Abstimmungsverhältnisses

Zuerst wird bei dieser Methode die partikuläre Lösung $x_p(t)$ für die (möglicherweise auch unstetige) Erregung ermittelt, dann die Anfangswerte der periodischen Lösung aus (3.108) und der Kumulationsfaktor aus (3.109). Schließlich wird die dann

bekannte homogene Lösung aus (3.103) mit der partikulären Lösung summiert, vgl. (3.100).

Die beschriebene Methode lässt sich bei linearen Schwingern immer anwenden, wenn die partikuläre Lösung $x_p(t)$ in einem begrenzten Zeitabschnitt ($0 \leq t \leq T$) und damit auch die Endwerte $x_p(T_0)$ und $\dot{x}_p(T_0)$ bestimmt werden können. Das hat wesentliche Vorteile für die Genauigkeit der dadurch bestimmbaren periodischen Lösung gegenüber anderen Verfahren. Vor allem bei abschnittsweise bekannten Erregerfunktionen $F(t)$ oder sich periodisch wiederholenden Stößen und Kraftsprüngen können stationäre Schwingungen auf diese Weise bequem berechnet werden, vgl. Aufgabe A3.6 und [18].

3.3.4

Aufgaben A3.4 bis A3.6

A3.4 Hammerfundament

Für die Aufstellung eines Lufthammers sind die maximalen Schwingungsausschläge abzuschätzen. Als Berechnungsmodell dient Bild 3.20c.

Gegeben: Bärmasse: $m_B = 0,1$ t; Masse von Amboss und Schabotte: $m_1 = 1,5$ t; Masse von Hammer und Fundament: $m_2 = 22,1$ t; Schlagzahl je Minute: $n = 190$, Schlagenergie: $W = 1,6 \cdot 10^3$ N · m

Elastische Zwischenschicht zwischen Schabotte und Fundament: Hammerfilz $d = 40$ mm dick; dynamischer Elastizitätsmodul des Hammerfilzes; $E = 8 \cdot 10^7$ N/m². Fläche zwischen Schabotte und Hammer: $A = 0,5$ m². Das Fundament steht auf 6 Federkörpern. Ihre Gesamtfederkonstante beträgt $c_2 = 4 \cdot 10^6$ N/m. Als Stoßzahl wird $k = 0,6$ angenommen.

A3.5 Aufstellung eines Kolbenkompressors

Ein liegender Kolbenkompressor mit der Drehzahl $n = 258$ 1/min soll hoch abgestimmt auf den Baugrund gestellt werden. Aus dem Richtwert $m_F = (5 \dots 10)m_M$ für $n < 300$ 1/min wurde die Größe des Fundamentblockes bestimmt. Die Abmessungen des Systems sind aus Bild 3.23 zu entnehmen. Der Schwerpunkt des Gesamtsystems liegt über dem Flächenschwerpunkt der Grundfläche. Die eingezeichneten Achsen sind Trägheitshauptachsen.

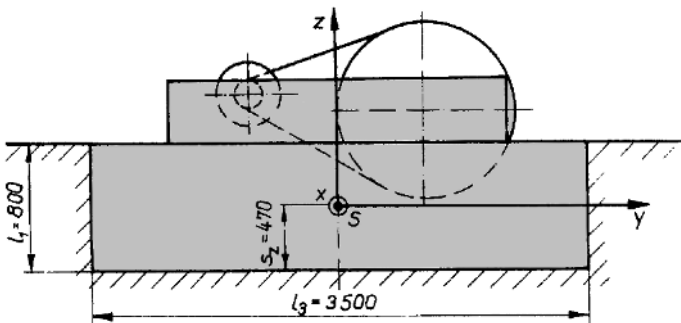


Bild 3.23 Fundament eines Kolbenkompressors

Es liegen folgende Parameterwerte vor:

Maschinenmasse: $m_M = 1\,500\text{ kg}$

Fundamentmasse: $m_F = 12\,000\text{ kg}$

Hauptträgheitsmomente:

$$J_x = 1,483 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; \quad J_y = 0,725 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; \quad J_z = 2,014 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Schwerpunkt Abstand vom Baugrund: $s_z = 0,47\text{ m}$

Fundamentaußenabmessungen:

Höhe: $l_1 = 0,8\text{ m}$; Breite: $l_2 = 2,4\text{ m}$; Länge: $l_3 = 3,5\text{ m}$

Baugrund: Sehr weicher Ton mit einer Bettungsziffer $C_z = 4 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^3$, vgl. (3.43)

Unter Berücksichtigung der zweiten Erregerharmonischen soll überprüft werden, ob eine hochabgestimmte Aufstellung vorliegt.

A3.6 Periodische Stoßfolge (Hammer)

Auf ein dämpfungsfrei vorausgesetztes Fundament wirken im konstanten Zeitabstand der Zyklusdauer $T_0 = 2\pi/\Omega$ Schläge, deren Einwirkungsdauer Δt wesentlich kleiner als die Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega_0$ des Schwingers ist. Es soll berechnet werden, welche Belastung auf den Aufstellungsort im stationären Zustand entsteht. Dabei soll die Lösung, die mit der Fourierreihe gewonnen werden kann, mit derjenigen verglichen werden, die sich bei der Lösung innerhalb einer Zyklusdauer ergibt.

Gegeben:

Ungedämpfter Schwinger mit einem Freiheitsgrad

Masse m

Federkonstante c

Eigenkreisfrequenz $\omega = \omega_0 = \sqrt{c/m}$

Zyklusdauer der Stoßfolge $T_0 > T$

Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{m/c} \gg \Delta t$, vgl. Bild 3.21

Impulse der Intensität $I = mv = \int_0^{\Delta t} F(t) dt$

Gesucht:

1. Fourierreihe der Erregerkraft
2. Stationäre Lösung mithilfe der Fourierreihe
3. Anfangsbedingungen der homogenen Lösung innerhalb eines Zyklus ($0 < t < T_0$)
4. Stationäre Lösung innerhalb eines Zyklus
5. Vergleich der Lösungen und Lösungsmethoden

3.3.5

Lösungen L3.4 bis L3.6

L3.4 Um mit dem Berechnungsmodell Bild 3.20c arbeiten zu können, ist die Auftreffgeschwindigkeit des Bären aus der Schlagenergie zu berechnen. Es gilt:

$$W = \frac{m_B u_{v0}^2}{2}; \quad u_{v0} = \sqrt{\frac{2W}{m_B}}; \quad u_{v0} = 5,65 \text{ m/s.} \quad (3.112)$$

Die Anfangsgeschwindigkeit von Amboss und Schabotte bestimmt man nach (3.87):

$$u_1 = (1 + 0,6) 5,65 \text{ m/s} \cdot \frac{0,1 \text{ t}}{1,6 \text{ t}} = 0,57 \text{ m/s.} \quad (3.113)$$

Die Federkonstante zwischen Schabotte und Fundament berechnet sich zu

$$c_1 = \frac{AE}{d} = \frac{0,5 \text{ m}^2 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot \text{N/m}^2}{0,04 \text{ m}} = 10^9 \text{ N/m.} \quad (3.114)$$

Für die Eigenkreisfrequenzen erhält man nach (3.89):

$$\omega_1 = 13,02 \text{ 1/s;} \quad \omega_2 = 843,8 \text{ 1/s.} \quad (3.115)$$

Mit (3.93) findet man

$$b_1 = 2,78 \cdot 10^{-3} \text{ m;} \quad b_2 = 6,33 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (3.116)$$

und nach (3.92)

$$v_{21} = 1; \quad v_{22} = -0,068. \quad (3.117)$$

Somit gilt gemäß (3.94):

$$x_1 = (2,78 \sin \omega_1 t + 0,63 \sin \omega_2 t) \text{ mm} \quad (3.118)$$

$$x_2 = (2,78 \sin \omega_1 t - 0,04 \sin \omega_2 t) \text{ mm} \quad (3.119)$$

In der ersten Eigenfrequenz tritt praktisch keine Relativverschiebung zwischen Schabotte und Fundament auf. Die in der zweiten Eigenfrequenz vorliegende Bewegung der Schabotte gegenüber dem Fundament von $(0,63 + 0,04) \text{ mm}$ ist nach Tabelle 3.4 zulässig. Auch die Amplitude der Fundamentalschwingung in der Grundfrequenz liegt im zulässigen Bereich.

Interessant ist noch die Frage der Abstimmung. Die Erregerkreisfrequenz erster Ordnung ergibt sich aus der Schlagzahl zu $\Omega = \pi n/30 = 19,88 \text{ 1/s}$. Für die Grundschwingung gilt $\eta = \Omega/\omega_1 = 1,5$.

Es liegt also geringe tiefe Abstimmung vor. Ein Herabsetzen der Eigenfrequenz wäre zu empfehlen, um nicht durch Unsicherheiten in den Modellparametern zu nahe an die Resonanz zu kommen.

- I.3.5** Zur Bestimmung der Bettungsziffern wird die Fundamentfläche und die Flächenpressung benötigt. Aus den Angaben findet man:

$$\text{Fundamentfläche: } A = 3,5 \text{ cm} \cdot 2,4 \text{ cm} = 8,4 \text{ m}^2$$

$$\text{Gesamtmasse: } m = m_M + m_F = 13\,500 \text{ kg}$$

$$\text{Flächenpressung: } p = mg/A = 1,58 \text{ N/cm}^2$$

Für die Korrekturkonstanten gilt: Da $A < 10 \text{ m}^2$: $a_1 = 1,09$, wegen $p_{\text{stat}} < 5 \text{ N/cm}^2$ wird gemäß (3.43):

$$C_z = 1,09 \cdot 4 \cdot 10^4 = 4,36 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^3. \quad (3.120)$$

Für die Berechnung der Elemente der Steifigkeitsmatrix nach (3.46) bis (3.49) werden benötigt:

$$I_x = \frac{l_2 l_3^3}{12} = 8,58 \text{ m}^4; \quad I_y = \frac{l_3 l_2^3}{12} = 4,03 \text{ m}^4; \quad I_z = I_x + I_y = 12,61 \text{ m}^4 \quad (3.121)$$

Damit ergeben sich aus (3.39) ($f_i = \omega_i/2\pi$):

$$\begin{aligned} f_1 &= 26,2 \text{ Hz}; & f_2 &= 26,9 \text{ Hz} \\ f_3 &= 38,9 \text{ Hz}; & f_4 &= 19,7 \text{ Hz} \\ f_5 &= 37,7 \text{ Hz}; & f_6 &= 20,8 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (3.122)$$

Die Grunderregerfrequenz beträgt $f_{\text{err}1} = n/60 = 4,3$ Hz. Gegenüber der zweiten Erregerordnung liegt somit ein Frequenzverhältnis $f_{\text{err}2}/f_{\text{min}} = 8,6/19,7 = 0,44$, also eine hohe Abstimmung vor. Erst die 4. Erregerordnung würde in Resonanznähe kommen.

L3.6 Zunächst wird die Lösung gemäß der in Abschnitt 3.2.1.3 behandelten Methode ermittelt. Dazu müssen die Fourierkoeffizienten der Erregerkraft bekannt sein. Sie sind für Fall 6 in Tabelle 1.11 angegeben: $F_{kc} = 2I/T_0$, $F_{ks} = 0$. Der Erregerkraftverlauf entspricht damit der Fourierreihe

$$F(t) = \frac{I}{T_0} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\Omega t \right). \quad (3.123)$$

Die stationäre Lösung der Bewegungsgleichung (3.8) lautet also gemäß (3.24) bis (3.26) für $D = 0$:

$$x(t) = \frac{I}{cT_0} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\Omega t}{1 - k^2\eta^2} \right). \quad (3.124)$$

Um ein auf etwa drei gültige Ziffern genaues Ergebnis zu erhalten, müsste der Nenner etwa die Größe von 10 000 haben, d. h. es sind etwa $k^* = 100$ Summanden zu berücksichtigen, um ein brauchbares Ergebnis zu erhalten.

Auf dem Wege gemäß Abschnitt 3.3.3 erhält man zunächst im Bereich $0 \leq t \leq T_0$ die partikuläre Lösung, die freie Schwingung bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit (aus dem Impuls $I = mv$) zu

$$x_p(t) = \frac{I}{m\omega} \sin \omega t; \quad \dot{x}_p(t) = \frac{I}{m} \cos \omega t. \quad (3.125)$$

Am Ende der kinematischen Zyklusdauer gilt also

$$x_p(T_0) = \frac{I}{m\omega} \sin \omega T_0; \quad \dot{x}_p(T_0) = \frac{I}{m} \cos \omega T_0. \quad (3.126)$$

Nun sind damit die Anfangsbedingungen aus (3.110) zu berechnen, die sich für die stationäre Lösung ergeben:

$$x_0 = \mu \frac{I}{m\omega} [(1 - \cos \omega T_0) \sin \omega T_0 + \sin \omega T_0 \cos \omega T_0] \quad (3.127)$$

$$v_0 = \mu \frac{I}{m} [-\sin \omega T_0 \sin \omega T_0 + (1 - \cos \omega T_0) \cos \omega T_0] \quad (3.128)$$

mit dem aus (3.111) bekannten Kumulationsfaktor lassen sich diese Lösungen nach kurzen Umformungen schreiben als

$$\underline{x_0 = \frac{I}{2m\omega} \cot(\omega T_0/2);} \quad \underline{v_0 = -\frac{I}{2m}.} \quad (3.129)$$

Dies sind die Anfangsbedingungen der homogenen Lösung für das Intervall ($0 \leq t \leq T_0$). Die stationäre Lösung erhält man damit innerhalb eines kinematischen

Zyklus mit (3.100) aus (3.103) (für $\delta = 0$) und (3.125) zu

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{I}{m\omega} \sin \omega t$$

$$\underline{x(t) = \frac{I}{2m\omega} [\cot(\omega T_0/2) \cos \omega t + \sin \omega t]; \quad 0 \leq t \leq T_0.} \quad (3.130)$$

Da die Belastung sich ständig wiederholt, gilt diese Lösung auch für alle anderen Zeitintervalle. Gleichung (3.130) liefert denselben Zeitverlauf wie die Lösung (3.124), obwohl sie ganz anders aussieht. Aus (3.124) ist sofort zu erkennen, dass im Falle $k\eta = 1$ der Nenner beim k -ten Summanden null wird und damit unbegrenzt große Resonanzausschläge (Resonanz k -ter Ordnung) zustande kommen. Aus der Lösung (3.130) kann man schließen, dass immer dann, wenn $\cot(\omega T_0/2) \rightarrow \infty$, also $\omega T_0/2 = k\pi$ (für ganzzahlige $k = 1, 2, \dots$) gilt, ebenfalls unbegrenzt große Ausschläge entstehen. Diese äußerlich unterschiedlichen Formeln liefern physikalisch identische Ergebnisse, denn es gilt

$$\frac{\omega T_0}{2} = \frac{\pi\omega}{\Omega} = \frac{\pi T_0}{T} = \frac{\pi}{\eta} = \pi k. \quad (3.131)$$

Fazit: Eine Fourier-Reihe konvergiert dann schlecht, wenn kurzzeitige Stöße und Kraftsprünge im zeitlichen Verlauf auftreten. Sie enthält sehr viele Koeffizienten, die nur langsam mit höherer Ordnung kleiner werden. Es ist deshalb zweckmäßiger, bei unstetigen periodischen Belastungen anstelle der Fourier-Reihe die Methode zu benutzen, welche die Lösung innerhalb eines Zyklus liefert. Die Zeitverläufe der Bewegungsgrößen und die Resonanzstellen, die sich aus der Fourier-Reihe ergeben, sind dieselben wie die aus der Berechnung eines einzelnen Zyklus.

4 Torsionsschwinger und Schwingerketten

4.1

Einleitung

Torsionsschwingungen in Kolbenmaschinen gehörten historisch gesehen zu den ersten Problemen der Maschinendynamik. Sie traten zunächst in Schiffsanlagen auf und wurden bereits 1902 von O. FRAHM berechnet und gemessen. Eine wesentliche Entwicklung erlebte die Forschung auf diesem Gebiet durch die Forderung nach Leichtbau für die Luftschiffe und Flugzeuge. Besonders das Unglück des LZ 4 (5.8.1906 bei Echterdingen) und der Motorschaden an den zwei *Maybach*-Motoren des LZ 6 (1910) haben die Entwicklung vorangetrieben. Auf dem Gebiet der parametertregten Schwingungen im Rahmen der Maschinendynamik kann die Behandlung der Triebwerksschwingungen an einer Elektrolokomotive durch E. MEISSNER (1918) als eine der ersten Arbeiten angesehen werden. Eine zusammenfassende Darstellung der Kolbenmaschinendynamik vor dem „Computerzeitalter“ enthält die „Technische Dynamik“ von BIEZENO und GRAMMEL [1].

Auch heute steht die Kolbenmaschine noch im Vordergrund, wobei es jedoch darauf ankommt, nicht nur den Motor, sondern die ganze Antriebsanlage zu untersuchen. Dadurch entstehen Berechnungsmodelle mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden. In zunehmendem Maße werden aber Torsionsschwingungen auch in Antriebsanlagen anderer Maschinenarten interessant. So ist beispielsweise durch die steigenden Ansprüche an die Druckqualität die dynamische Berechnung einer Druckmaschine heute unumgänglich. Die steigenden Forderungen an die Produktivität zwingen zu einer möglichst genauen Erfassung der Dynamik von Antriebssystemen an vielen Verarbeitungsmaschinen. Man kann allgemein feststellen, dass Torsionsschwingungen in fast allen Maschinengruppen, bei denen eine rotierende Bewegung auftritt, beachtet werden müssen. Ihre mathematische Behandlung ist unabhängig davon, ob es sich z. B. um Werkzeugmaschinen, Zementmühlen, Schiffsantriebe oder Motorradmotoren handelt.

In diesem Abschnitt wird speziell auf die Torsionsschwingungen in Antriebssystemen eingegangen, sodass nur Schwingerketten behandelt werden, die sich auf ein schwingungsfähiges Torsionsmodell reduzieren lassen. Tabelle 4.1 zeigt verschiedene Grundformen ungefesselter Torsionsmodelle.

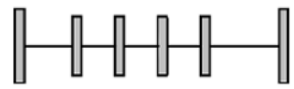
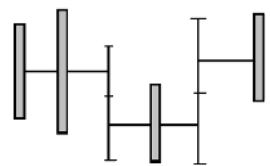
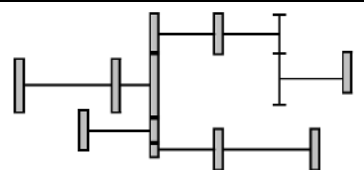
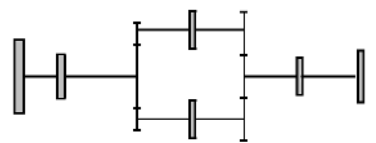
Die zunächst wesentlichste Frage, die vor der dynamischen Untersuchung einer Maschine beantwortet werden muss, betrifft die Zuordnung des Problems in die Modellstufen *Starre Maschine* oder *Schwingungssystem*, vgl. Kapitel 1. Dazu benötigt man die Eigenfrequenzen, die mit den Erregerfrequenzen verglichen werden. Da Maschinen im Wesentlichen schwach gedämpft sind, lassen sich die Eigenfrequenzen unter Vernachlässigung der Dämpfung berechnen. Bei der Berechnung erhält man gleichzeitig die Eigenschwingformen, aus denen wichtige Schlüsse auf die Beeinflus-

sung der Eigenfrequenzen gezogen werden können. Auch für eine Abschätzung der erzwungenen Schwingungen und des Verhaltens eines Systems unter vorgegebenen Anfangsbedingungen, was beispielsweise bei Kupplungsvorgängen auftritt, verwendet man die Eigenschwingformen.

Das einfachste Berechnungsmodell für dynamische Belastungen von Antriebssystemen ist das **Modell der starren Maschine** (Starrkörpersystem), welches *kinetostatische* Beanspruchungen liefert. Es gilt für „langsame“ Belastungen – vgl. (1.1) oder (1.2) – und bildet gewissermaßen eine Zwischenstufe zur statischen Berechnung der Schnittreaktionen. Die Torsionsmomente ergeben sich dabei (ohne Schwingungen) als zeitlich veränderlich, und sie sind längs des Antriebsstranges von der Verteilung der Massenträgheit abhängig.

Die kinetostatischen Momente, die aus dem Modell des Starrkörpersystems folgen, liefern **Mittelwerte für die dynamische Beanspruchung**. Sie überlagern sich mit den Momenten infolge der Schwingungen des elastischen Systems (den „Vibrationsmomenten“), die bedeutend größer sein können, vgl. z. B. (4.41) und (4.42).

Tabelle 4.1 Grundformen ungefesselter Torsionsmodelle

	<i>Glatter Wellenstrang.</i> Dieses Modell gilt z. B. für einen Kolben-Reihenmotor ohne Berücksichtigung von Nebentrieben.
	<i>Wellenstrang mit Übersetzungen.</i> Dieses Modell gilt immer, wenn keine Leistungsverzweigung auftritt.
	<i>Verzweigter Antrieb.</i> Dieses Modell gilt, solange beliebig viele Leistungsverzweigungen auftreten, ohne dass die Zweige wieder zusammentreffen. Beispiele sind hierfür ein Fahrzeugantrieb mit Lastverteilungsgetriebe für Vorder- und Hinterrantrieb, bzw. ein Schiffsantrieb mit mehreren Antriebswellen.
	<i>Vermaschter Antrieb.</i> Dieses Modell gilt, wenn nach einer Verzweigung wieder eine Zusammenfassung auf einen Wellenstrang erfolgt. Dafür findet man Beispiele im Druckmaschinenbau, an Verspannungsgetrieben zur Zahnradprüfung und bei Lastausgleichsgetrieben.

Zunächst wird ein an der Stelle $x = 0$ durch ein Antriebsmoment M_{an} bewegter Stab betrachtet, vgl. Bild 4.1a. Es beschleunigt den Torsionsstab mit

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{M_{\text{an}}(t)}{J_p}, \quad (4.1)$$

wobei das Trägheitsmoment $J_p = \varrho L I_p$ ist. Der Stab wird infolgedessen in wechselnder Richtung tordiert, und in seinem Inneren entsteht infolge der Massenträgheit an der Stelle x das **kinetostatische Torsionsmoment**

$$M(x, t) = \varrho(L - x)I_p \ddot{\varphi}(t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) J_p \ddot{\varphi}(t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) M_{\text{an}}(t). \quad (4.2)$$

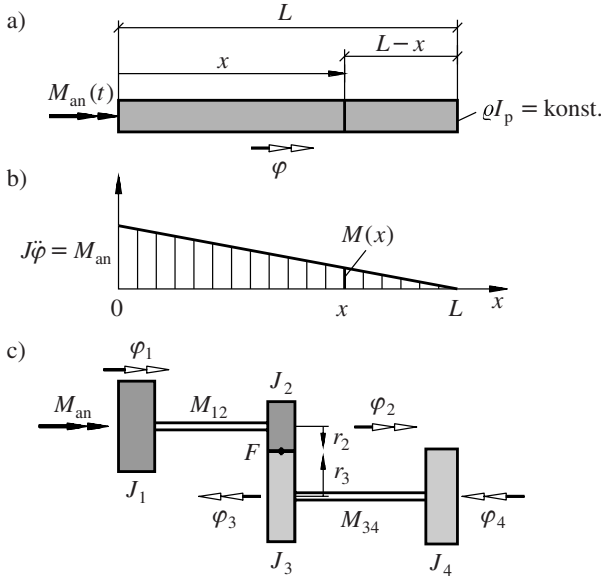


Bild 4.1 Zu kinetostatischen Momenten
a) Torsionsstab,
b) Momentenverlauf im Torsionsstab,
c) Getriebestufe

Diesen Momentenverlauf zeigt Bild 4.1b. Die Drehträgheit der Drehmasse hinter der „Schnittstelle“ x belastet gewissermaßen den Stab durch das **kinetostatische Moment**. Teilt man den Torsionsstab an der Stelle x , wobei links das Trägheitsmoment $J_1 = J_p x/L$ beträgt und der rechte Teil das Trägheitsmoment $J_2 = J_p(1 - x/L)$ hat, so ist an der Schnittstelle das Torsionsmoment

$$M(x, t) = J_2 \ddot{\varphi} = \frac{J_2 M_{\text{an}}(t)}{J_1 + J_2}. \quad (4.3)$$

Zur Erläuterung der kinetostatischen Momente wird als weiteres Beispiel das Zahnradgetriebe in Bild 4.1c betrachtet. Das Antriebsmoment bewirkt eine Winkelbeschleunigung, die mithilfe des aus (2.211) folgenden reduzierten Trägheitsmomentes

$$J_{\text{red}} = J_1 + J_2 + (J_3 + J_4) \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 \quad (4.4)$$

berechnet werden kann, vgl. (2.225). Es gilt damit für die Winkelbeschleunigungen

$$\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 = \frac{M_{\text{an}}}{J_{\text{red}}}; \quad \ddot{\varphi}_4 = \ddot{\varphi}_3 = \left(\frac{r_2}{r_3}\right) \ddot{\varphi}_1 = \left(\frac{r_2}{r_3}\right) \frac{M_{\text{an}}}{J_{\text{red}}}. \quad (4.5)$$

Für die Torsionsmomente innerhalb des Zahnradgetriebes ergeben sich in den beiden Wellensträngen unterschiedliche Werte, die man bei Anwendung des Schnittprinzips sofort findet:

$$M_{12} = (J_{\text{red}} - J_1)\ddot{\varphi}_1 = \left[J_2 + (J_3 + J_4) \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \ddot{\varphi}_1 = \left[J_2 + (J_3 + J_4) \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \frac{M_{\text{an}}}{J_{\text{red}}}$$

$$M_{34} = J_4 \ddot{\varphi}_4 = J_4 \left(\frac{r_2}{r_3} \right) \frac{M_{\text{an}}}{J_{\text{red}}}.$$
(4.6)

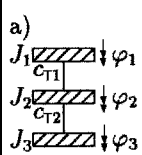
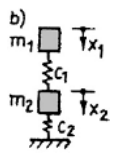
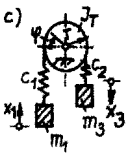
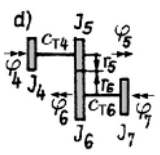
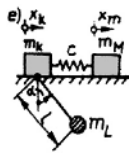
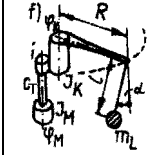
Die Tangentialkraft F in der Verzahnung ergibt sich, je nach dem, ob man nach dem Schnitt an dieser Stelle die linke oder rechte Seite betrachtet, zu:

$$F = \frac{(J_{\text{red}} - J_1 - J_2)\ddot{\varphi}_1}{r_2} = \frac{(J_3 + J_4)\ddot{\varphi}_4}{r_3}.$$
(4.7)

Man möge sich davon überzeugen, dass beide Ergebnisse identisch sind.

In Tabelle 4.2 sind Beispiele für die Reduktion von Schwingerketten auf ein unverzweigtes Standardmodell mit Formeln zur Berechnung der freien Schwingungen angegeben. Diese Beispiele könnten folgenden Systemen zugeordnet werden: *a)* Elastisch gekoppelte Fahrzeuge, *b)* Hammerfundament, *c)* Aufzug mit Gegenmasse, *d)* Antriebssystem mit Übersetzung, *e)* Kran mit pendelnder Last, *f)* Drehkran mit pendelnder Last. Bei *e)* und *f)* ist diese Reduktion nur mit der Annahme kleiner Pendelwinkel möglich.

Tabelle 4.2 Beispiele für die Reduktion von Schwingerketten

					
φ_1	x_1	x_1	φ_4	x_M	φ_M
φ_2	x_2	$r\varphi$	φ_5	x_K	$i\varphi_K; i = r_K/r_M$
φ_3	0	x_3	$(r_6/r_5)\varphi_7$	$x_K + l\alpha$	$i[\varphi_K + \alpha(l/R)]$
J_1	m_1	m_1	J_4	m_K	J_M
J_2	m_2	J_T/r^2	$J_5 + J_6(r_5/r_6)^2$	m_L	J_K/i^2
J_3	$1/J_3 = 0$	m_3	$J_7(r_5/r_6)^2$	m_L	$m_L R^2/i^2$
c_{T1}	c_1	c_1	c_{T4}	c	c_T
c_{T2}	c_2	c_2	$c_{T6}(r_5/r_6)^2$	$m_L g/l$	$m_L g R^2/li^2$

Die Bewegungsgleichungen des Torsionsschwingers in Tabelle 4.2, Fall a lauten

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{T1}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$
(4.8)

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_{T1}(\varphi_1 - \varphi_2) + c_{T2}(\varphi_2 - \varphi_3) = 0$$
(4.9)

$$J_3 \ddot{\varphi}_3 - c_{T2}(\varphi_2 - \varphi_3) = 0$$
(4.10)

Für die Systeme b) bis f) in Tabelle 4.2 haben die Bewegungsgleichungen ganz genau dieselbe Struktur, nur die Koordinaten und Parameter haben jeweils die Bezeichnungen, die in Tabelle 4.2 angegeben sind. Die folgenden Formeln für die Eigenfrequenzen und Eigenformen gelten für alle diese sechs Systeme:

Bezugskreisfrequenz:

$$\omega^{*2} = \frac{c_{T1}}{J_1} + \frac{c_{T1} + c_{T2}}{J_2} + \frac{c_{T2}}{J_3}, \quad (4.11)$$

Eigenkreisfrequenzen, vgl. auch Tabelle 4.4, Fall 1:

$$\omega_1^2 = 0; \quad \omega_{2,3}^2 = \frac{1}{2} \left[\omega^{*2} \mp \sqrt{\omega^{*4} - \frac{4c_{T1}c_{T2}}{J_1J_2} \left(\frac{J_1 + J_2}{J_3} + 1 \right)} \right]. \quad (4.12)$$

Die Eigenformen können auf verschiedene Weise normiert werden, u. a. mit

$$v_{1i} = \frac{1}{1 - \frac{J_1 \omega_i^2}{c_{T1}}}; \quad v_{2i} = 1; \quad v_{3i} = \frac{1}{1 - \frac{J_3 \omega_i^2}{c_{T2}}} \quad (4.13)$$

oder

$$v_{1i} = \frac{1 - \frac{J_3 \omega_i^2}{c_{T2}}}{1 - \frac{J_1 \omega_i^2}{c_{T1}}}; \quad v_{2i} = 1 - \frac{J_3 \omega_i^2}{c_{T2}}; \quad v_{3i} = 1. \quad (4.14)$$

Schwingerketten kann man als so genannte Bildwelle darstellen. Eine Bildwelle ist ein mechanisch ähnliches Schwingungssystem, bei welchem alle Parameter als Trägheitsmomente und Torsionsfederkonstanten auf dieselbe Achse bezogen (wie in Tabelle 4.2) und maßstäblich aufgezeichnet werden. Die Trägheitsmomente sind dann dem Radius und die Nachgiebigkeit der Torsionsfedern (also der Kehrwert der Torsionssteifigkeit) den Längen l_{red} der Abschnitte zwischen den Scheiben proportional, vgl. Abschnitt 1.3 und Tabelle 1.5. Die Reduktion erfolgt unter der Bedingung, dass kinetische und potenzielle Energie des ursprünglichen Systems und der Bildwelle übereinstimmen.

Die Darstellung einer Schwingerkette als Bildwelle wird gern benutzt, um die Steifigkeit- und Massenverteilung zu illustrieren. Diese anschauliche (früher oft benutzte) Methode hat an Bedeutung verloren, sodass sie hier nicht mehr ausführlich beschrieben wird. Ein kleines Beispiel soll trotzdem dargestellt werden. Bild 4.2a zeigt das Berechnungsmodell eines zweistufigen Zahnradgetriebes und Bild 4.2b die zugehörige Bildwelle. Gegeben sind die Parameterwerte

$$i_{12} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}; \quad i_{34} = \frac{r_3}{r_4} = \frac{1}{3}; \quad i_{13} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \left(\frac{r_3}{r_4} \right) = \frac{1}{6} \quad (4.15)$$

$$J_1 = 2J; \quad J_{21} = J; \quad J_{22} = 3J; \quad J_{23} = 2J; \quad J_{24} = 3J; \quad J_3 = 12J \quad (4.16)$$

$$c'_{T1} = 3c_T; \quad c''_{T1} = c_T; \quad c_{T2} = c_T. \quad (4.17)$$

Man kann zeigen, dass diese beiden Systeme dynamisch äquivalent sind, wenn man folgende Transformationen vornimmt (die Winkel werden linear und die Torsionsfederkonstanten und Trägheitsmomente mit den Quadraten der Übersetzungsverhältnisse umgerechnet):

$$\varphi_{1r} = \varphi_1; \quad \varphi_{2r} = \varphi_2; \quad \varphi_{3r} = \varphi_3 / i_{13} \quad (4.18)$$

$$J_1^r = J_1 = 2J; \quad J_2^r = J_{21} + i_{12}^2(J_{22} + J_{23}) + i_{13}^2 J_{24} = \frac{7J}{3}; \quad J_3^r = i_{13}^2 J_3 = \frac{J}{3} \quad (4.19)$$

$$c_{T1}^r = c_{T1} = \frac{c_{T1}' c_{T1}''}{c_{T1}' + c_{T1}''} = \frac{3}{4} c_T \sim \frac{1}{l_{1red}}; \quad c_{T2}^r = i_{13}^2 c_{T2} = \frac{c_T}{36} \sim \frac{1}{l_{2red}}. \quad (4.20)$$

Durch die maßstäbliche Darstellung wird offensichtlich, dass die erste Welle wesentlich steifer als die zweite ist. Für eine Übersichtsrechnung kann man das Getriebe also so behandeln, als ob die beiden linken Scheiben starr miteinander verbunden sind und es sich im unteren Frequenzbereich wie ein Zweimassensystem verhält.

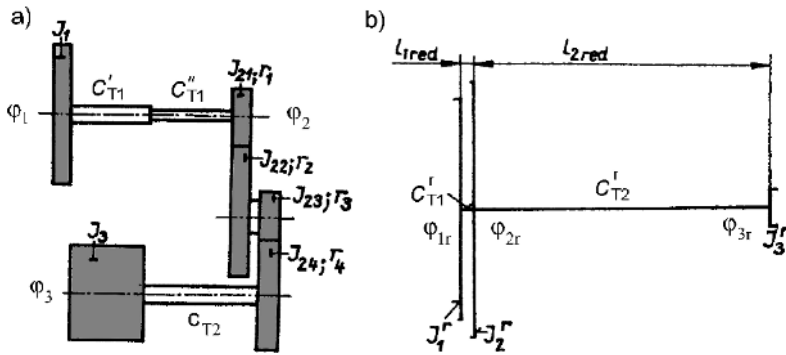


Bild 4.2 Beispiel für eine Bildwelle

a) Ursprüngliches Modell des Zahnradgetriebes, b) Bildwelle

4.2

Freie Schwingungen der Torsionsschwinger

4.2.1

Modelle mit zwei Freiheitsgraden

4.2.1.1

Lineare Torsionsschwinger mit zwei Freiheitsgraden

Bei Torsionsschwingern unterscheidet man gefesselte und freie Schwinger. Gefesselte Schwinger werden verwendet, wenn entweder mindestens eine Feder fest eingespannt ist, also keine freie Drehung des Starrkörpersystems auftreten kann, oder mindestens eine Feder an einer mit bekannter Bewegung rotierenden Drehmasse anschließt. Torsionsschwinger mit Winkelerregung gelten somit (analog zur Wegerregung der Längsschwinger) als gefesselte Modelle, vgl. Abschnitt 4.3.2.3. Aus

einem freien Modell wird ein gefesselter Modell, wenn eine Scheibe festgehalten (eingespannt) wird, wie beim Bremsen, vgl. Bild 4.3.

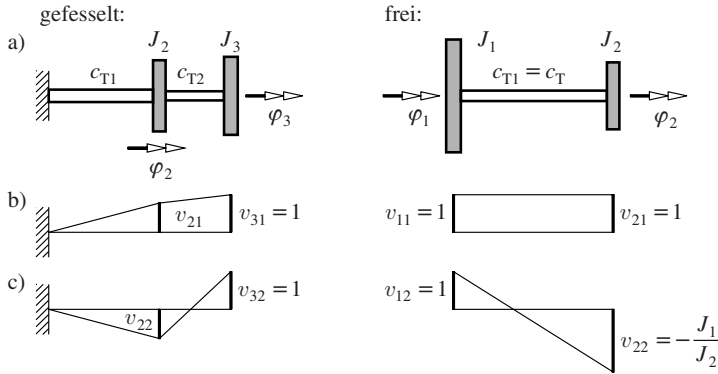


Bild 4.3 Torsionsschwinger mit zwei Freiheitsgraden
a) Systemskizze, b) erste Eigenform, c) zweite Eigenform

Die Bewegungsgleichungen für das gefesselte Modell lauten, vgl. (4.9) und (4.10):

$$\begin{aligned} J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_{T2}(\varphi_2 - \varphi_3) + c_{T1} \varphi_2 &= 0 \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 - c_{T2}(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Man kann (4.21) mit der Bewegungsgleichung (3.83) des Hammerfundaments vergleichen. Da sie denselben Aufbau haben, kann man die in Kapitel 3 gewonnenen Ergebnisse übertragen. Für die Lösung ergibt sich also gemäß (3.94):

$$\varphi_k(t) = \sum_{i=1}^2 v_{ki}(a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t), \quad k = 2, 3 \quad (4.22)$$

mit den Amplitudenverhältnissen v_{ki} der Eigenformen aus (4.13) oder (4.14) und den Eigenkreisfrequenzen ω_i . Die Unbekannten a_i und b_i können mithilfe der Anfangsbedingungen bestimmt werden, vgl. z. B. Lösung L4.2 oder L4.3.

Die Bewegungsgleichungen für das freie Modell sind ein Sonderfall von (4.8) und (4.9) und lauten

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_T(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_T(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Mit den Ansätzen $\varphi_k = v_k \cdot \sin \omega t$ folgt (für $k = 1, 2$) nach dem Einsetzen:

$$\begin{aligned} (c_T - J_1 \omega^2) v_1 - c_T v_2 &= 0 \\ -c_T v_1 + (c_T - J_2 \omega^2) v_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Als Lösung ergibt sich aus jeder Gleichung das Amplitudenverhältnis

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{c_T - J_1 \omega^2}{c_T} = \frac{c_T}{c_T - J_2 \omega^2} \quad (4.25)$$

und aus den beiden rechten Brüchen folgt die Frequenzgleichung

$$(c_T - J_1 \omega^2) (c_T - J_2 \omega^2) - c_T^2 = \omega^2 [J_1 J_2 \omega^2 - c_T (J_1 + J_2)] = 0. \quad (4.26)$$

Sie hat die Wurzeln

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2^2 = c_T \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} = \frac{c_T}{J_1} + \frac{c_T}{J_2}. \quad (4.27)$$

Hier wird nicht nur aus formalen, sondern auch aus physikalischen Gründen $\omega_1 = 0$ als erste Eigenkreisfrequenz mitgezählt. Damit lautet die Lösung von (4.23) im Gegensatz zu (4.22)

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= v_{11} (\varphi_0 + \omega_0 t) + v_{12} (a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t) \\ \varphi_2 &= v_{21} (\varphi_0 + \omega_0 t) + v_{22} (a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Darin sind φ_0 , ω_0 , a_2 und b_2 Konstanten, die aus Anfangsbedingungen bestimmt werden können. Die Amplitudenverhältnisse folgen aus (4.25), wenn dort ω_1 und ω_2 aus (4.27) eingesetzt werden und die Normierung $v_{11} = v_{12} = 1$ benutzt wird:

$$\left(\frac{v_2}{v_1} \right)_1 = \frac{v_{21}}{v_{11}} = v_{21} = 1 - \frac{\omega_1^2 J_1}{c_T} = 1; \quad v_{22} = 1 - \frac{\omega_2^2 J_1}{c_T} = -\frac{J_1}{J_2}. \quad (4.29)$$

Die erste Eigenform ist, wie aus Bild 4.3b folgt, die Starrkörperdrehung, deren „Schwingungsdauer“ $T_1 = 2\pi/\omega_1 \rightarrow \infty$ beträgt. Die zweite Eigenform hat einen Schwingungsknoten, dessen Lage vom Größenverhältnis J_1/J_2 abhängt.

Bei Torsionsschwingern werden zur Veranschaulichung die Winkelausschläge als Strecke senkrecht zur Drehachse an der jeweiligen Drehmasse angetragen, vgl. die Bilder 4.3, 4.7, 4.9, 4.14, 4.20 u. a.

Bei allen frei beweglichen Systemen ist während der Bewegung die erste Eigenfrequenz gleich Null, vgl. auch (4.82) und (4.98). Deshalb tritt der bemerkenswerte Fall ein, dass ein Maschinenantrieb nach dem Bremsen in Messergebnissen eine tiefere Grundfrequenz zeigt als während des vorangegangenen Bewegungszustandes.

4.2.1.2

Antriebssystem mit Spiel

Infolge des Spiels (z. B. in Kupplungen oder Zahnradgetrieben) treten innerhalb der Antriebssysteme bei Anfahr- und Bremsvorgängen Stöße auf. Die dadurch entstehenden dynamischen Kräfte, die vor allem bei wechselnder Drehrichtung eines Antriebs auftreten (z. B. bei der Umkehr der Antriebsrichtung des Drehwerks eines Krans oder des Antriebs eines Baggerlöffels) sind oft wesentlich größer als die kinetostatischen Belastungen. Überlastungen und Schadensfälle können entstehen, wenn der Konstrukteur den Einfluss des Getriebespiels nicht in die Berechnungen einbezieht.

Die Größe des **Drehspiels** φ_s eines Getriebes kann man oft bereits bei Hin- und Her- Bewegungen des Antriebs spüren, und es ist keine Seltenheit, dass das reduzierte Spiel bei Antrieben mit großen Übersetzungsverhältnissen an der Motorwelle Dutzende von Grad beträgt. Die Erfahrung lehrt, dass sich das Spiel mit längerer Betriebsdauer eines Antriebs vergrößert, weil der Verschleiß (z. B. der Zahnräder oder Kupplungen) im Laufe der Zeit zunimmt. Besonders gefährlich wird es, wenn

es zum Lockern der Pressverbindungen kommt. Insbesondere die Bauteile auf der langsam laufenden Welle eines Antriebs sollten auf die extremen Stoßbelastungen nachgerechnet werden, da sich das Spiel dort am stärksten auswirkt.

Die hohen dynamischen Belastungen gegenüber dem spielfreien Antrieb entstehen dadurch, dass die angetriebene Drehmasse während des Spieldurchlaufs schnell eine hohe Drehgeschwindigkeit erreicht und damit auf die Gegenseite aufprallt. Das Minimalmodell zur Berechnung des Spieleinflusses zeigt Bild 4.4. Dort ist neben dem Modell des Torsionsschwingers der Längsschwinger abgebildet, dessen Bewegungsgleichungen wegen der bereits in Tabelle 4.2 gezeigten Analogie damit übereinstimmen. Die beiden Etappen des Spieldurchlaufs lassen sich dabei besser veranschaulichen (dem Längsspiel δ entspricht das Drehspiel φ_s).

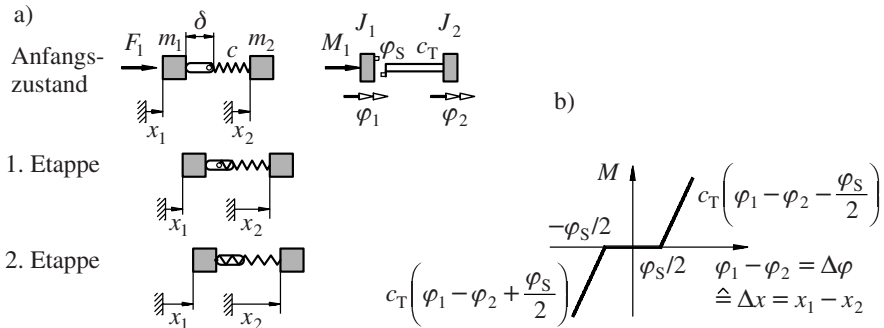


Bild 4.4 Minimalmodell eines Antriebs mit Getriebeispiel

a) Systemskizze mit Parametern, b) Kennlinie mit Spiel

Es wird der extreme Fall angenommen, dass das Antriebsmoment zu Beginn sofort auf den Wert M_{10} springt. Für den spielfreien Antrieb wird in 4.3.3.1 eine Folge von mehreren Momentensprüngen untersucht. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$J_1 \ddot{\phi}_1 + M = M_{\text{an}} = M_{10} \quad (4.30)$$

$$J_2 \ddot{\phi}_2 - M = 0. \quad (4.31)$$

Das Torsionsmoment M entsteht in der Torsionsfeder und beträgt unter Berücksichtigung des Spiels

$$M = \begin{cases} c_T(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_S/2) & \text{für } \varphi_1 - \varphi_2 \leq -\varphi_S/2 \\ 0 & \text{für } -\varphi_S/2 \leq \varphi_1 - \varphi_2 \leq +\varphi_S/2 \\ c_T(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_S/2) & \text{für } \varphi_1 - \varphi_2 \geq \varphi_S/2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} c_T \left[\Delta\varphi - \frac{\varphi_S}{2} \text{sign}(\Delta\varphi) \right] \left[1 + \text{sign} \left(\left| \Delta\varphi \right| - \frac{\varphi_S}{2} \right) \right]. \quad (4.32)$$

Dividiert man (4.30) durch J_1 und (4.31) durch J_2 , so kann man aus der Differenz der Winkelbeschleunigungen und nach der Multiplikation mit c_T unter Beachtung von (4.32) folgende Differenzialgleichung für das Torsionsmoment im Winkelbereich $|\varphi_1 - \varphi_2| \leq \varphi_S/2$ gewinnen:

$$\ddot{M} + \omega^2 M = \frac{c_T M_{10}}{J_1}. \quad (4.33)$$

Aus (4.27) ist das Quadrat der Eigenkreisfrequenz bekannt. Während der *ersten Etappe* wird der Motor (J_1) durch das konstante Antriebsmoment M_{10} beschleunigt, sodass das gesamte Spiel durchlaufen wird, vgl. Bild 4.4. Die Drehmasse J_2 bleibt während dieser Etappe ($0 \leq t \leq t_1$) in Ruhe, es gilt $\varphi_2 \equiv 0$. Die Anfangsbedingungen sind

$$t = 0: \quad \varphi_1(0) = -\frac{\varphi_S}{2}, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0. \quad (4.34)$$

Sie drücken aus, dass aus einer vorangegangenen Bewegung die linke Masse (Drehmasse) am linken Anschlag ruht (wenn man in der Mitte des Spiels beginnen würde, wären andere Anfangsbedingungen zu formulieren). Während dieser Etappe ist gemäß (4.32) $M \equiv 0$, und es folgt aus der Lösung der Differenzialgleichung (4.30):

$$\varphi_1(t) = -\frac{\varphi_S}{2} + \frac{M_{10}}{2J_1}t^2, \quad \dot{\varphi}_1(t) = \frac{M_{10}}{J_1}t; \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (4.35)$$

Die erste Etappe ist zur Zeit t_1 zu Ende, wenn die Drehmasse das Spiel φ_S durchlaufen hat. Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_1) &= -\frac{\varphi_S}{2} + \frac{M_{10}}{2J_1}t_1^2 = \frac{\varphi_S}{2}; & \dot{\varphi}_1(t_1) &= \frac{M_{10}}{J_1}t_1 = \sqrt{2\frac{M_{10}\varphi_S}{J_1}} \\ \varphi_2(t_1) &= 0; & \dot{\varphi}_2(t_1) &= 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Aus der ersten Gleichung folgt die Durchlaufzeit

$$t_1 = \sqrt{2\frac{J_1\varphi_S}{M_{10}}}. \quad (4.37)$$

Die Endbedingungen der ersten Etappe sind gleichzeitig die Anfangsbedingungen der *zweiten Etappe* ($t_1 \leq t \leq t_2$). Die beiden Massen (Drehmassen) sind jetzt durch die Feder verbunden. Aus (4.30) bis (4.32) folgt für den Winkelbereich $\varphi_1 - \varphi_2 \geq \varphi_S/2$:

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\varphi}_1 + c_T\left(\varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\varphi_S}{2}\right) &= M_{10} \\ J_2\ddot{\varphi}_2 - c_T\left(\varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\varphi_S}{2}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Hier soll nicht der Zeitverlauf der Winkel, sondern der des Torsionsmomentes berechnet werden. Mit den sich aus (4.36) ergebenden Anfangsbedingungen für das Moment:

$$t = t_1: \quad M(t_1) = 0, \quad \dot{M}(t_1) = c_T[\dot{\varphi}_1(t_1) - \dot{\varphi}_2(t_1)] = c_T\sqrt{2\frac{M_{10}\varphi_S}{J_1}} \quad (4.39)$$

folgt als Lösung von (4.33) der Verlauf des Momentes in der Welle während dieser Etappe:

$$M(t) = M_{10}\frac{J_2}{J_1+J_2} \left[1 - \cos \omega(t-t_1) + \sqrt{2\frac{c_T(J_1+J_2)\varphi_S}{M_{10}J_2}} \sin \omega(t-t_1) \right]. \quad (4.40)$$

Man erkennt daraus, dass neben dem Spiel das Verhältnis der Trägheitsmomente von großem Einfluss auf die Wellenbelastung ist. Wie man sehen kann, überlagert sich dem Mittelwert des kinetostatischen Moments aus (4.3) die „Vibrationsbelastung“ mit der Eigenschwingung. Das Maximalmoment ergibt sich aus (4.40):

$$\begin{aligned} M_{\max} &= \frac{M_{10}J_2}{J_1 + J_2} \left(1 + \sqrt{1 + 2 \frac{J_1 + J_2}{J_2} \cdot \frac{c_T \varphi_S}{M_{10}}} \right) \\ &= \frac{M_{10}J_2}{J_1 + J_2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2J_1 \omega^2}{M_{10}}} \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Daraus folgt, dass der Einfluss des Spiels auf die Höhe der dynamischen Belastung umso kleiner ist, je kleiner die Eigenfrequenz des elastischen Systems ist. In „harten“ Kupplungen treten deshalb stärkere dynamische Beanspruchungen auf als in „weichen“. Drückt man dieses maximale Moment mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_1(t_1) = \Omega$ aus, indem man φ_S in (4.41) mittels (4.36) ersetzt, so erhält es die Form

$$M_{\max} = M_{10} \frac{J_2}{J_1 + J_2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{J_1 + J_2}{J_2} \cdot \frac{c_T J_1 \Omega^2}{M_{10}^2}} \right). \quad (4.42)$$

Das maximale Moment im Belastungsfall „**Kupplungsstoß**“, das sich für $M_{10} = 0$ daraus durch einen Grenzübergang ergibt, ist

$$M_{\max} = \Omega \sqrt{\frac{J_1 J_2 c_T}{J_1 + J_2}} = \frac{\Omega \omega J_1 J_2}{J_1 + J_2} = \frac{c_T \Omega}{\omega}. \quad (4.43)$$

Die Formeln (4.41) bis (4.43) sind für die Berechnung der Maximalmomente geeignet. Man kann sie auch auf modale Schwinger anwenden, vgl. Abschnitt 6.3.3.

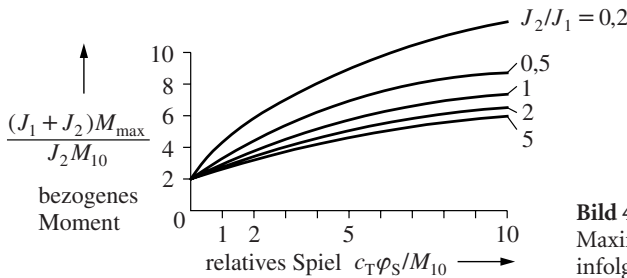


Bild 4.5
Maximales Moment
infolge Spiel im Antrieb

Bild 4.5 zeigt die Auswertung von (4.41), d. h. die Abhängigkeit des maximalen Momentes vom Spiel. Auf der Ordinate ist das Verhältnis zum kinetostatischen Moment aufgetragen. Schon im spielfreien Fall ist es gleich 2, aber mit Spiel im Antrieb kann es weit größere Werte erreichen, wie die Kurven zeigen.

Man nimmt manchmal fälschlicherweise an, dass dynamische Belastungen nur den doppelten Wert der kinetostatischen erreichen. Bild 4.5 zeigt, dass dies ein Irrtum ist. Eine solche Unterschätzung kann zu falschen Lastannahmen, zu unerwarteten Überlastungen und damit zu beträchtlichen Schäden führen. Besonders

große Kräfte entstehen in Antrieben, bei denen das Verhältnis $J_1/J_2 \ll 1$ ist. Dies trifft oft für Antriebe zu, die kein großes statisches Moment zu übertragen haben, z. B. für Drehwerkantriebe von Kranen oder Baggern. Für Antriebe, die im Verhältnis zu dynamischen Kräften große statische Kräfte zu übertragen haben, ist meist das Verhältnis $J_1/J_2 \gg 1$, sodass der Spieleinfluss auf die Belastungen im Antrieb nicht so riesig ist.

4.2.2

Torsionsschwingerkette mit mehreren Freiheitsgraden

Die Torsionsschwinger sind ein Sonderfall der allgemeinen linearen Schwinger, so dass zum besseren Verständnis die Ausführungen in Kapitel 6 zu beachten sind. Hier soll lediglich gezeigt werden, welche Besonderheiten diese Torsionsschwingerketten haben. Bild 4.6a zeigt eine Torsionsschwingerkette mit n Freiheitsgraden, deren Eigenschwingungsverhalten interessiert. Die Parameter der Drehmassen (J_k) und Drehfedern (c_{Tk}) sind für das dynamische Verhalten verantwortlich. Die Erregermomente $M_k(t)$ sind mit eingetragen.

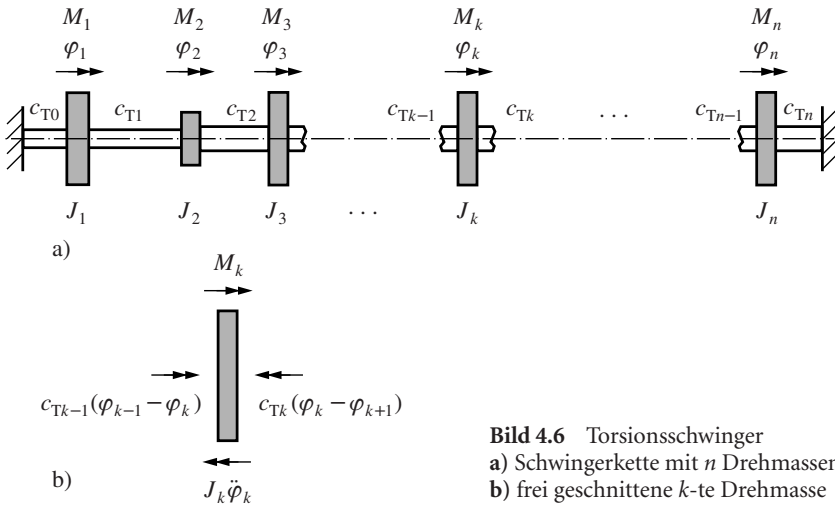


Bild 4.6 Torsionsschwinger
a) Schwingerkette mit n Drehmassen,
b) frei geschnittene k -te Drehmasse

Das Momentengleichgewicht an der k -ten Scheibe wird stellvertretend für alle Drehmassen ($k = 1, 2, \dots, n$) formuliert. Es lautet gemäß Bild 4.6b:

$$J_k \ddot{\varphi}_k - c_{Tk-1} (\varphi_{k-1} - \varphi_k) + c_{Tk} (\varphi_k - \varphi_{k+1}) = M_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.44)$$

$$\varphi_0 = \varphi_{n+1} \equiv 0.$$

Es stellt n Bewegungsgleichungen der Torsionsschwingerkette dar. Es ist $c_{T0} = c_{Tn} = 0$, wenn An- und Abtrieb frei beweglich (nicht festgehalten) sind. Man kann

alle diese Gleichungen übersichtlich in Matrixschreibweise angeben (Index „T“ bei c_{Tk} weggelassen), vgl. die Sonderfälle (4.21), (4.23) und die letzte Zeile von (4.45).

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & J_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_{n-1} \\ \dot{\varphi}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_0+c_1 & -c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2+c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-2}+c_{n-1} & -c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1} & c_{n-1}+c_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Auf diese Weise sind der Koordinatenvektor $\boldsymbol{\varphi}^T = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots, \varphi_n]$, der alle Schwingwinkel erfasst, die Massenmatrix $\mathbf{M}$ und die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{C}$ definiert. Man kann zeigen, dass alle Eigenkreisfrequenzen aus der charakteristischen Gleichung, der so genannten Frequenzgleichung

$$\det(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (4.46)$$

folgen, vgl. Kapitel 6. Die Matrixengleichung (4.45) kann gemäß der in 6.3.2 beschriebenen modalen Transformation in ein System von n Gleichungen für Einfachschwinger der Form

$$\mu_i \ddot{p}_i + \gamma_i \dot{p}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.47)$$

überführt werden, vgl. (6.112) bis (6.116). Dabei sind die p_i so genannte modale Koordinaten oder Hauptkoordinaten. Sie sind mit den ursprünglichen Drehwinkeln durch die Transformation

$$\varphi_k(t) = \sum_{i=1}^n v_{ki} p_i(t) = v_{k1} p_1(t) + v_{k2} p_2(t) + \dots + v_{kn} p_n(t) \quad (4.48)$$

verbunden, vgl. die Sonderfälle (4.22) und (4.28). Eine Größe v_{ki} ist die normierte Amplitude der k -ten Scheibe bei der i -ten Eigenschwingung. Die Gesamtheit der v_{ki} beschreibt die i -te Eigenform, wie bereits aus Bild 4.3 für Spezialfälle bekannt ist, vgl. auch Bild 4.7.

In Abschnitt 6.3.2 wird der allgemeine Zusammenhang beschrieben, der zwischen den Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{C}$ sowie den Größen v_{ki} , μ_i , γ_i und ω_i besteht. Die modalen Massen μ_i für die Torsionsschwingerkette gemäß Bild 4.6 ergeben sich aus (6.112) zu

$$\mu_i = \sum_{k=1}^n J_k v_{ki}^2 = \sum_{k=1}^n J_k \mu_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.49)$$

vgl. auch (6.190). Eine **modale Masse** μ_i charakterisiert die kinetische Energie der i -ten Eigenform, denn es ist

$$2W_{\text{kin}} = \sum_{k=1}^n J_k \dot{\varphi}_k^2 = \sum_{i=1}^n \mu_i \dot{p}_i^2, \quad (4.50)$$

weil für $i \neq l$ als Sonderfall von (6.103)

$$\sum_{k=1}^n J_k v_{ki} v_{kl} = 0 \quad (4.51)$$

gilt. In der Summe für μ_i haben diejenigen Drehmassen J_k die größten **Sensitivitäts-Koeffizienten** μ_{ik} , die mit den größten Amplituden schwingen (in der Nähe des Schwingungsbauches), während diejenigen aus der Umgebung des Schwingungsknotens nur kleine Summanden μ_{ik} ergeben.

Bei der beiderseits freien Torsionsschwingerkette ist $\omega_1 = 0$, und alle „Amplituden“ v_{k1} sind gleich groß, weil dieser ersten „Eigenform“ die Starrkörperdrehung entspricht. Wird mit $v_{k1} = 1$ normiert, dann ergibt sich

$$\mu_1 = \sum_{k=1}^n J_k v_{k1}^2 = \sum_{k=1}^n J_k \cdot 1^2 = J_1 + J_2 + \dots + J_n, \tag{4.52}$$

d. h., die erste modale Masse ist dann gleich dem gesamten Trägheitsmoment. Die modalen Federkonstanten γ_i , die in (4.47) vorkommen, betragen bei der Torsionsschwingerkette gemäß (6.112)

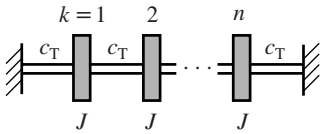
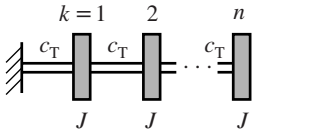
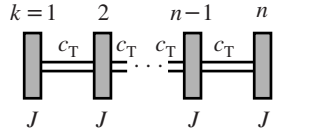
$$\gamma_i = \sum_{k=1}^{n-1} c_k (v_{ki} - v_{k+1,i})^2 = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \gamma_{ik}. \tag{4.53}$$

Die Sensitivitäts-Koeffizienten γ_{ik} sind dimensionslose Faktoren, die man ebenso wie die μ_{ik} zur Berechnung des Einflusses von Parameteränderungen auf Eigenfrequenzen benutzen kann, vgl. (6.189). Sie folgen aus (4.49) und (4.53):

$$\mu_{ik} = v_{ki}^2; \quad \gamma_{ik} = (v_{ki} - v_{k+1,i})^2. \tag{4.54}$$

Ihre absolute Größe ist von einer Normierungsbedingung abhängig und i. Allg. nicht mit Starrkörperkenngrößen zu vergleichen.

Tabelle 4.3 Eigenfrequenzen und Eigenformen für homogene Torsionsschwingerketten (Ordnung der Eigenfrequenz $i = 1, 2, \dots, n$; Nr. der Drehmasse $k = 1, 2, \dots, n$; Anzahl der Drehmassen n)

Fall	Torsionsschwinger mit n gleichen Scheiben	Eigenkreisfrequenzen $\omega_i = 2\pi f_i$	Eigenformen v_{ki}
1		$2\sqrt{\frac{c_T}{J}} \sin \frac{i\pi}{2(n+1)}$	$\sin \frac{k i \pi}{n+1} \tag{1}$
2		$2\sqrt{\frac{c_T}{J}} \sin \frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)}$	$\sin \frac{k(2i-1)\pi}{2n+1} \tag{2}$
3		$2\sqrt{\frac{c_T}{J}} \sin \frac{(i-1)\pi}{2n}$	$\cos \frac{(2k-1)(i-1)\pi}{2n} \tag{3}$

Um einen anschaulichen Eindruck von der Verteilung der kinetischen und potenziellen Energie bei der i -ten Eigenschwingung zu gewinnen, ist es zweckmäßig, die Produkte $\mu_{ik}J_k$ und $\gamma_{ik}c_{Tk}$ maßstäblich darzustellen. Daraus lässt sich noch besser als aus der Eigenform ablesen, durch welche Parameter (Masse, Steifigkeit) die betreffende Eigenfrequenz am leichtesten beeinflussbar ist, vgl. Bild 4.14.

Tabelle 4.3 zeigt für die homogene Torsionsschwingerkette, bei der alle Torsionsfederkonstanten und alle n Drehmassen gleich groß sind, geschlossene Formeln für alle Eigenfrequenzen und Eigenformen bei den drei möglichen Lagerbedingungen an den Wellenenden. Die Formeln in Tabelle 4.3 eignen sich zum Studium qualitativer und quantitativer Zusammenhänge beim n -Massen-Torsionsschwinger.

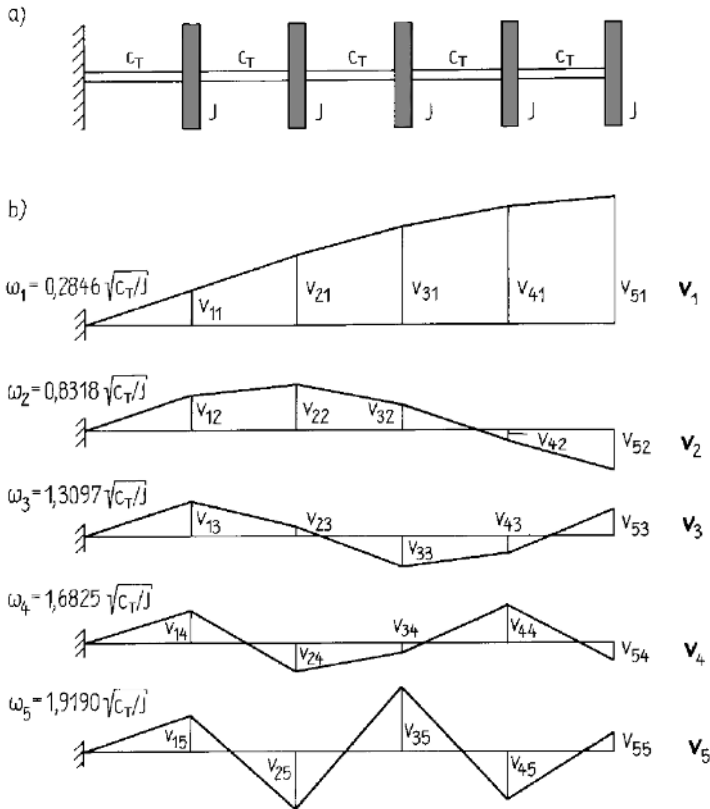


Bild 4.7 Torsionsschwingerkette mit $n = 5$ Scheiben

a) Systemskizze, b) fünf Eigenformen

Bild 4.7 zeigt als Beispiel einen Torsionsschwinger mit $n = 5$ Freiheitsgraden. Gemäß (2) in Tabelle 4.3 gilt für die Eigenkreisfrequenzen und für die Eigenformen ($i = 1, \dots, 5$):

$$\omega_i = 2\sqrt{\frac{c_T}{J}} \sin \frac{(2i-1)\pi}{22}; \quad v_{ki} = \sin \frac{k(2i-1)\pi}{11}. \quad (4.55)$$

Die Anzahl der Schwingungsknoten nimmt hierbei mit der Ordnungszahl i zu. Man sieht, dass hierbei der Knoten bei keiner Eigenform direkt an der Stelle einer Scheibe oder am freien Ende der Schwingerkette liegt.

Der Geltungsbereich des durch Bild 4.6 und (4.45) beschriebenen Berechnungsmodells für reale Objekte wird u. a. begrenzt durch die Annahmen,

- dass die Aufteilung in masselose elastische Drehfedern und starre massebehaftete Scheiben eine zulässige Vereinfachung des realen Kontinuums ist (wäre verletzt bei sehr breiten Scheiben)
- dass die stets vorhandene Dämpfung keinen wesentlichen Einfluss auf die Eigenfrequenzen und Eigenformen hat
- dass zeit- oder stellungsabhängige Änderungen der Drehmassen (z. B. Kurbeltrieb-Einfluss) oder der Drehfedern (z. B. Zahn-Überdeckungsgrad) bezüglich der Berechnung des Eigenverhaltens vernachlässigbar sind.

4.2.3

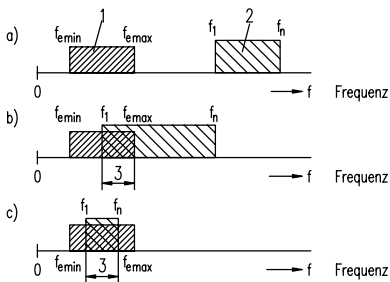
Zur Bewertung von Eigenfrequenzen und Eigenformen

Im Gegensatz zu früheren Zeiten, wo der Ingenieur die entsprechenden Berechnungsverfahren genauer kennen lernen musste, hat man heutzutage Software zur Verfügung, sodass der Ingenieur vor allem die Möglichkeiten der Modellbildung, den Geltungsbereich des Berechnungsmodells und die Anwendungsgrenzen der Software kennen und die Genauigkeit der Eingabedaten sowie die Interpretation der Ergebnisse gewährleisten muss.

Ist die Abbildung eines Realsystems auf ein Berechnungsmodell gefunden, wird in den meisten Fällen die Berechnung der freien Schwingungen am Anfang stehen. Sie liefert die Eigenfrequenzen und die zugehörigen Eigenschwingformen. Das dazu erforderliche Berechnungsmodell besteht nur aus Massen und Federn, enthält also nicht die häufig sehr schwer erfassbaren Werte für Dämpfung und Erregung. Kennt man die Eigenfrequenzen, lassen sich mehrere Aussagen über das Modell machen. Zunächst wird man die niedrigste Eigenfrequenz mit der höchsten interessierenden Erregerfrequenz vergleichen. Liegt die niedrigste Eigenfrequenz weit über dieser, so kann als starre Maschine (Starrkörpermechanismus) gerechnet werden. Liegen Eigenfrequenzen im Bereich der Erregerfrequenzen, so lassen sich Resonanzfrequenzen angeben.

Liegen höhere Eigenfrequenzen des Modells weit über dem Feld der Erregerfrequenzen, so enthält das Berechnungsmodell unnötig viele Freiheitsgrade. Andererseits hat das Modell zu wenige Freiheitsgrade, wenn die höchste berechnete Eigenfrequenz im Bereich der Erregerfrequenzen liegt. Bild 4.8 demonstriert diese verschiedenen Fälle. Häufig werden die berechneten Eigenfrequenzen auch zur Modellüberprüfung verwendet, indem man am System gemessene Eigenfrequenzen zum Vergleich benutzt. Da Modelle mit vielen Freiheitsgraden jedoch häufig direkt benachbarte Eigenfrequenzen haben, ist der Vergleich nur unter Hinzuziehung der Eigenformen sinnvoll, die jedoch oft messtechnisch nur schwer zu erfassen sind.

Sind die Eigenschwingungen durch Eigenfrequenzen und Eigenformen bekannt, lassen sich die freien Schwingungen, d. h. die Bewegungen in jeder Koordinate in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen berechnen. Dies spielt vor allem bei Stoß- und Sprungvorgängen eine Rolle.

**Bild 4.8** Zur Bewertung im Frequenzbereich

a) Starre Maschine

b) Modell mit zu vielen Freiheitsgraden, Resonanzbereich maßgeblich

c) Modell mit zu wenig Freiheitsgraden, Änderung erforderlich

1 Erregerfrequenzbereich ($f_{e\min} < f_e < f_{e\max}$);2 Eigenfrequenzbereich ($f_1 < f_i < f_n$);

3 Resonanzbereich

Die Eigenformen verwendet man sowohl für die schon erwähnte Einordnung der Eigenfrequenzen als auch für die Parameterdiskussion und die Berechnung von Resonanzausschlägen. Zunächst ist festzustellen, dass jede Steifigkeitserhöhung und jede Massenverringering die Eigenfrequenzen anheben. Die Wirksamkeit derartiger Maßnahmen hängt jedoch wesentlich von der Schwingform ab, vgl. die Sensitivitätskoeffizienten in Bild 4.14 und Abschnitt 6.4.2.

So gilt: Steifigkeitsänderungen sind am wirkungsvollsten im Wellenstück, in dem die größte Differenz der verhältnismäßigen Ausschläge auftritt. Massenänderungen sind am wirkungsvollsten im Schwingungsbauch, d. h. an der Stelle des größten relativen Ausschlages der Eigenschwingform. Massenänderungen im Schwingungsknoten beeinflussen die zur diskutierten Eigenschwingform gehörige Eigenfrequenz nicht.

Die *Grundfrequenz* (die tiefste von null verschiedene Eigenfrequenz) jedes Schwingers ist das wichtigste Kennzeichen für sein dynamisches Verhalten. Häufig besteht die Aufgabe, lediglich die Grundfrequenz zu bestimmen, und dazu ist es vorteilhaft, vor der Analyse eines umfangreichen Berechnungsmodells, für das man viele Eingabedaten braucht, die Grundfrequenz mit einem Minimalmodell abzuschätzen [4].

Näherungsmethoden, die in der „computerlosen“ Vergangenheit entwickelt wurden, haben für manche Zwecke noch eine gewisse Bedeutung, da sie erlauben, für ein kompliziertes Torsionsschwingungssystem die Eigenfrequenzen in Abhängigkeit von wenigen wesentlichen Parametern abzuschätzen. Der Grundgedanke ist, das reale Objekt auf ein *System mit bekannter Frequenzgleichung* zu reduzieren, z. B. auf Schwingerketten mit zwei oder drei Freiheitsgraden oder auf Kontinua vgl. Tabelle 4.2, (4.27), Tabelle 4.3 und Tabelle 4.4.

Für ein *Kontinuum, gekoppelt mit einem diskreten Schwinger*, der sich mit der Torsionsfederkonstante c_T und dem Trägheitsmoment J modellieren lässt, ergeben sich die in Tabelle 4.4, Fall 2 bis 4, angegebenen Frequenzgleichungen. Aus (4) in Tabelle 4.4 ergibt sich mit $c_T = 0$ und $J = 0$ für den Sonderfall des beiderseits freien Kontinuums ($\pi_1 = \pi_2 = 0$):

$$\lambda \tan \lambda = 0; \quad \lambda_i = (i - 1)\pi; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.56)$$

Der Fall 5 in Tabelle 4.4 wurde früher für die „homogene Maschine mit Zusatzmasse“ gern verwendet, da er einer Mehrzylindermaschine mit angekoppeltem Schwungrad entspricht und alle Frequenzen einfach zu berechnen gestattet. Man kann zur Vereinfachung auch die einzelnen Scheiben des diskreten Torsionsschwingers „verschmieren“ und damit zu einem Kontinuum-Modell modifizieren. Mit einem Programm

Tabelle 4.4 Frequenzgleichungen für Torsionsschwinger

Fall	Systemskizze	Frequenzgleichung
1		$\omega_1 = 0; \quad \omega^4 - \left[\frac{c_{T2}}{J_3} + \frac{c_{T1} + c_{T2}}{J_2} + \frac{c_{T1}}{J_1} \right] \omega^2 + \frac{c_{T1}}{J_1} \frac{c_{T2}}{J_2} \frac{c_{T2}}{J_3} (J_1 + J_2 + J_3) = 0 \quad (1)$
2		$\pi_1 - \pi_2 \lambda^2 - \pi_1 \pi_2 \lambda \tan \lambda = 0 \quad (2)$
3		$(\pi_1 - \pi_2 \lambda^2) \tan \lambda + \pi_1 \pi_2 \lambda = 0 \quad (3)$
4		$\pi_1 - \pi_2 \lambda^2 - \lambda \tan \lambda = 0 \quad (4)$
5		$\omega_i = 2 \sqrt{c_T / J} \sin(\varphi_i / 2) \quad (5)$ $\sin \varphi \cot(n \varphi) - \frac{J}{J_0} + \left(2 \frac{c_T}{c_{T0}} - 1 \right) (1 + \cos \varphi) = 0 \quad (6)$
$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{\lambda_i}{2\pi l} \sqrt{\frac{GI_T}{\rho I_p}}, \quad \pi_1 = \frac{c_T l}{GI_T}, \quad \pi_2 = \frac{J}{\rho I_p l} \quad (7)$		

zur Nullstellensuche findet man aus den Frequenzgleichungen für das Kontinuum unbegrenzt viele dimensionslose Eigenwerte λ und daraus die Eigenfrequenzen, von denen meist nur die unteren von Interesse sind.

Ebenso wichtig wie die Eigenfrequenzen sind die zugehörigen *Eigenformen*. Für einfache Modelle kann man auch geschlossene Formeln angeben, vgl. (4.13), Bild 4.3, (4.29), Tabelle 4.3, Bild 4.7 und Bild 4.14. Ihre Kenntnis ist wichtig zur Bewertung von Parameteränderungen auf die Eigenfrequenzen und für die Analyse der Anregbarkeit der erzwungenen Schwingungen.

Ein wichtiges Hilfsmittel sind dabei die Sensitivitätskoeffizienten μ_{ik} und γ_{ik} , die sich bei Torsionsschwingern relativ leicht berechnen lassen, vgl. (4.54). Sie werden bei modernen Programmen explizit ausgegeben und geben dem Ingenieur wertvolle Hinweise darauf, wie das Schwingungsverhalten beeinflusst werden kann, vgl. Bild 4.12.

4.2.4

Beispiele

4.2.4.1

Vierzylindermotor

Bild 4.9 zeigt das Modell eines Kolbenmotors mit vier Zylindern, Riemenscheibe und Schwungrad. Im Ausgangszustand lagen folgende Parameterwerte vor:

$J_1 = 4,611 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$	$c_{T1} = 16,19 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m};$	$v_{12} = 1,000$
$J_2 = 1,350 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$	$c_{T2} = 76,03 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m};$	$v_{22} = 0,427$
$J_3 = 1,350 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$	$c_{T3} = 61,61 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m};$	$v_{32} = 0,290$
$J_4 = 1,350 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$	$c_{T4} = 76,03 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m};$	$v_{42} = 0,109$
$J_5 = 1,350 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$	$c_{T5} = 110,85 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m};$	$v_{52} = -0,041$
$J_6 = 39,34 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$		$v_{62} = -0,143$

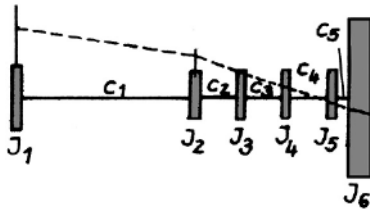


Bild 4.9 Berechnungsmodell eines Kolbenmotors mit Eigenform der Grundfrequenz ($c_i \hat{=} c_{Ti}$)

Dafür wurde mit einem Eigenwertprogramm ($f_1 = 0 \text{ Hz}$) die Grundfrequenz zu $f_2 = 226 \text{ Hz}$ und die zugehörige Eigenschwingform mit den oben angegebenen Werten v_{k2} berechnet. Diese Eigenfrequenz soll beeinflusst werden.

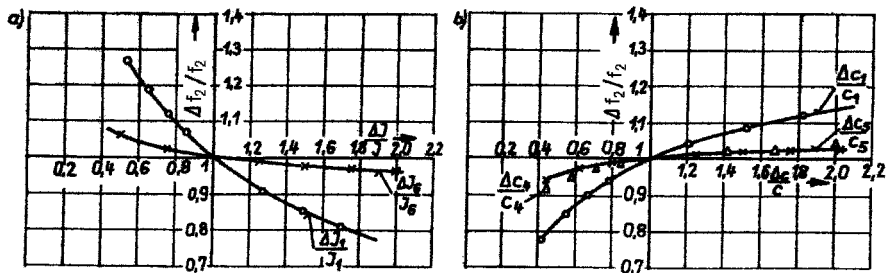


Bild 4.10 Sensitivität der Grundfrequenz zum Beispiel von Bild 4.9

a) Massenänderung, b) Federänderung

Am wirkungsvollsten erscheint die Veränderung des Trägheitsmomentes der Riemenscheibe J_1 , die im Schwingungsbauch liegt. Eine Änderung von J_6 des in Knotennähe liegenden Schwungrades ist demgegenüber ohne Bedeutung. Bild 4.10a zeigt die Einflüsse der Parameteränderungen ΔJ_1 , ΔJ_6 auf die relative Eigenfrequenzänderung. Bild 4.10b zeigt die Einflüsse von Federänderungen. Die Differenzen der

relativen Ausschläge über den einzelnen Federn betragen

$$\begin{aligned}
 c_{T1} : \quad v_{12} - v_{22} &= 0,537; & c_{T2} : \quad v_{22} - v_{32} &= 0,136 \\
 c_{T3} : \quad v_{32} - v_{42} &= 0,182; & c_{T4} : \quad v_{42} - v_{52} &= 0,150 \\
 c_{T5} : \quad v_{52} - v_{62} &= 0,102
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Die Wirkung einer Änderung von c_{T1} wird daher bedeutend größer sein als die von c_{T5} oder c_{T4} (der Feder, in der der Schwingungsknoten liegt).

Es sei noch vermerkt, dass bei der Änderung eines Schwingungssystems viele fertigungs- und maschinentechnische Belange berücksichtigt werden müssen, sodass von daher die Möglichkeiten der Realisierung oft recht beschränkt sind.

4.2.4.2

Torsionsschwingungen einer Druckmaschine

Das folgende Beispiel soll der Veranschaulichung der in Abschnitt 4.2.4 getroffenen allgemeinen Aussagen dienen.

Antriebs- und Walzensysteme von Druckwerken stellen verzweigte Torsionsschwinger dar. Da die Druckfarbenübertragung sehr empfindlich auf Abweichungen von der Sollbewegung der Zylinder reagiert, interessieren vor allem jene Eigenfrequenzen der Maschine, deren Eigenformen gegenphasige Relativdrehungen der einander zugeordneten Zylinder aufweisen.

Für das in Bild 4.11 dargestellte Berechnungsmodell des Druckwerkes einer Offsetdruckmaschine sind die Eigenfrequenzen und Eigenschwingformen zu bestimmen. Die Wellen werden als masselose Torsionsfedern modelliert, während die Zylinder als starre Körper angesehen werden, die miteinander keinen Kontakt haben.

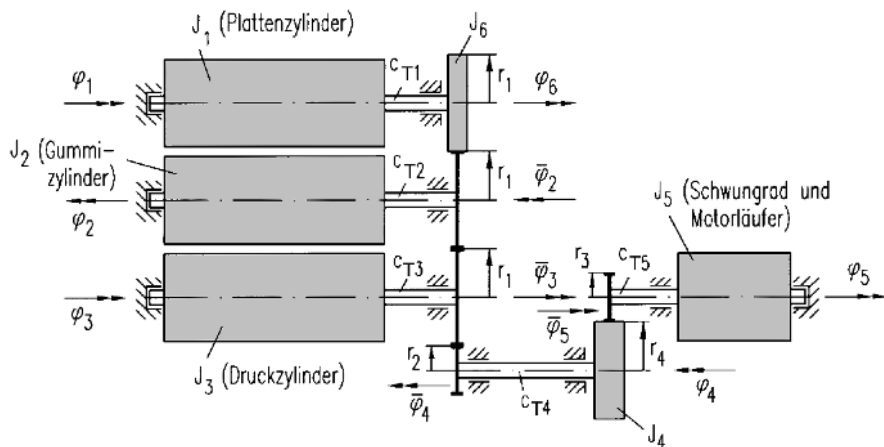


Bild 4.11 Berechnungsmodell eines Druckmaschinenantriebs

Folgende Parameterwerte sind gegeben:

$J_1 = J_2 = J_3 = 2,65 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	Drehmassen von Platten-, Gummi- und Druckzylinder
$J_4 = 0,52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	auf Winkel φ_4 reduzierte Drehmasse der ersten Getriebestufe
$J_5 = 1,98 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	Drehmasse von Schwungrad und Motorläufer
$J_6 = 1,10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	auf Winkel φ_6 reduzierte Drehmasse der miteinander kämmenden Zahnräder
$r_4/r_3 = 4,88$	Übersetzung der ersten Getriebestufe
$r_1/r_2 = 2,26$	Übersetzung der zweiten Getriebestufe
$c_{T1} = c_{T2} = c_{T3} = 8,3 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}$	Torsionsfederkonstanten der Zylinderwellen
$c_{T4} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}$	Torsionsfederkonstante der Zwischenwelle
$c_{T5} = 4,2 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}$	Torsionsfederkonstante der Antriebswelle

Mit den bereits in Bild 4.11 eingetragenen Winkelkoordinaten lassen sich kinetische und potenzielle Energie wie folgt angeben:

$$2W_{\text{kin}} = \sum_{k=1}^6 J_k \dot{\varphi}_k^2, \quad 2W_{\text{pot}} = c_{T1} \cdot (\varphi_1 - \varphi_6)^2 + \sum_{k=2}^5 c_{Tk} \cdot (\varphi_k - \bar{\varphi}_k)^2. \quad (4.58)$$

Als Zwangsbedingungen kann man bei den miteinander kämmenden Zahnradern ablesen:

$$\bar{\varphi}_2 = \varphi_6; \quad \bar{\varphi}_3 = \bar{\varphi}_2; \quad r_2 \bar{\varphi}_4 = r_1 \bar{\varphi}_3; \quad r_3 \bar{\varphi}_5 = r_4 \varphi_4. \quad (4.59)$$

Werden mit diesen Gleichungen die überstrichenen Winkelkoordinaten in (4.58) eliminiert, ergibt sich, wenn man die verallgemeinerten Koordinaten $q_k = \varphi_k$ ($k = 1, \dots, 6$) einführt:

$$2W_{\text{pot}} = c_{T1} \cdot (q_1 - q_6)^2 + c_{T2} \cdot (q_2 - q_6)^2 + c_{T3} \cdot (q_3 - q_6)^2 \\ + c_{T4} \cdot \left(q_4 - \frac{r_1}{r_2} q_6 \right)^2 + c_{T5} \cdot \left(q_5 - \frac{r_4}{r_3} q_4 \right)^2. \quad (4.60)$$

Mit Einführung der Lagrange-Funktion $L = W_{\text{kin}} - W_{\text{pot}}$ können nun die Bewegungsgleichungen nach der Vorschrift der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art aufgestellt werden. Schreibt man diese in Matrizenform gemäß (4.45), so erhält man die Massenmatrix $\mathbf{M} = \text{diag}(J_k)$. Mit den gegebenen Parameterwerten ergibt sich nach Ausklammern der Bezugsgröße J_1 :

$$\mathbf{M} = 2,65 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{diag}(1; 1; 1; 0,196\,23; 0,747\,17; 0,415\,09) = J_1 \cdot \bar{\mathbf{M}} \quad (4.61)$$

und als Steifigkeits- oder Federmatrix

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{bmatrix} c_{T1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{T1} \\ & c_{T2} & 0 & 0 & 0 & -c_{T2} \\ & & c_{T3} & 0 & 0 & -c_{T3} \\ & & & c_{T4} + \left(\frac{r_4}{r_3}\right)^2 c_{T5} & -\frac{r_4}{r_3} c_{T5} & -\frac{r_1}{r_2} c_{T4} \\ & & & & c_{T5} & 0 \\ \text{symmetrisch} & & & & & c_{T1} + c_{T2} + c_{T3} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 c_{T4} \end{bmatrix} \\
 &= 8,3 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & & 12,3398 & -2,4694 & -0,6535 \\ & & & & 0,50602 & 0 \\ \text{symmetrisch} & & & & & 4,4769 \end{bmatrix} = c_{T1} \bar{C} \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenformen wird mathematische Grund-Software zur Lösung eines linearen Eigenwertproblems genutzt.

Die Eigenfrequenzen sind:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= 0 \text{ Hz}; & f_2 &= 50,1 \text{ Hz}; & f_3 &= 89,1 \text{ Hz} \\
 f_4 &= 89,1 \text{ Hz}; & f_5 &= 300,6 \text{ Hz}; & f_6 &= 710,6 \text{ Hz}.
 \end{aligned} \quad (4.63)$$

Die Eigenvektoren v_i ($i = 1, \dots, 6$) sind so normiert, dass $v_i^T \cdot \bar{M} \cdot v_i = 1$ gilt. Sie werden in der Modalmatrix V zusammengefasst, vgl. (6.87) und (6.88):

$$\begin{aligned}
 V &= \begin{bmatrix} 0,10244 & 0,54950 & 0,81651 & 0 & -0,14451 & 0,00107 \\ 0,10244 & 0,54950 & -0,40824 & 0,70711 & -0,14451 & 0,00107 \\ 0,10244 & 0,54950 & -0,40824 & -0,70711 & -0,14451 & 0,00107 \\ 0,23151 & -0,02378 & 0 & 0 & 0,09027 & 2,24360 \\ 1,12976 & -0,21770 & 0 & 0 & -0,02786 & -0,11776 \\ 0,10244 & 0,37577 & 0 & 0 & 1,50098 & -0,06698 \end{bmatrix} \\
 &= [v_{ki}]. \quad (4.64)
 \end{aligned}$$

Der erste Eigenvektor spiegelt die starre Rotation des Druckwerkes wider. Zur Beurteilung der „Gefährlichkeit“ der Eigenformen betrachte man diese hinsichtlich der Relativdrehungen der Zylinder. An den Kontaktstellen der Zylinder ist die Relativverschiebung ein Maß dafür, wie die Übertragung der Druckfarbe gestört wird. Man beachte die Vorzeichendefinitionen der Winkel in Bild 4.11.

In Bild 4.12 sind die Verdrehungen der Zylinder bei zwei Eigenformen gezeigt (Seitenansicht). Hieraus wird deutlich, dass die doppelt auftretende Eigenfrequenz von $f_3 = f_4 = 89,1 \text{ Hz}$ für das Druckwerk problematisch werden kann. Eine Anregung mit in der Nähe liegenden Erregerfrequenzen, z. B. Zahneingriffsfrequenzen oder ganzzahligen Vielfachen der Umlauffrequenzen der Zylinder, kann zu gefährlich großen Resonanzausschlägen führen, die die Druckqualität beeinträchtigen.

Diese Aussage kann getroffen werden, ohne dass die Resonanzamplituden berechnet werden müssen. Als Gegenmaßnahmen kann man sich aufgrund dieser Ergebnisse bereits um eine Verschiebung der Erreger- und/oder Eigenfrequenzen in entgegengesetzte Richtungen bemühen.

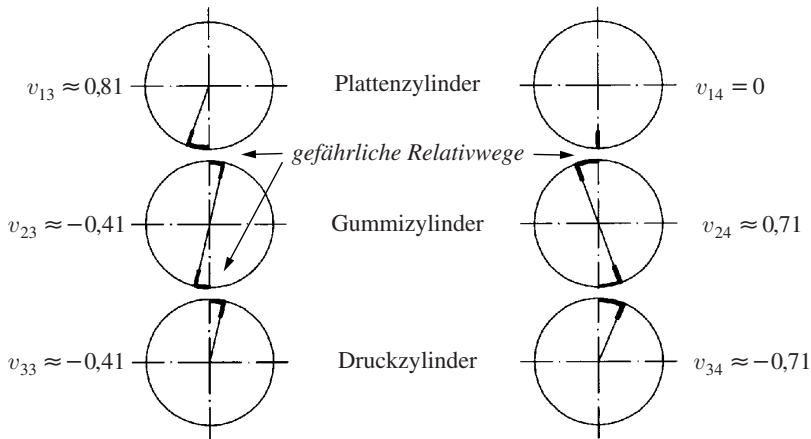


Bild 4.12 Relative Zylinderamplituden bei der dritten und vierten Eigenform

4.2.4.3

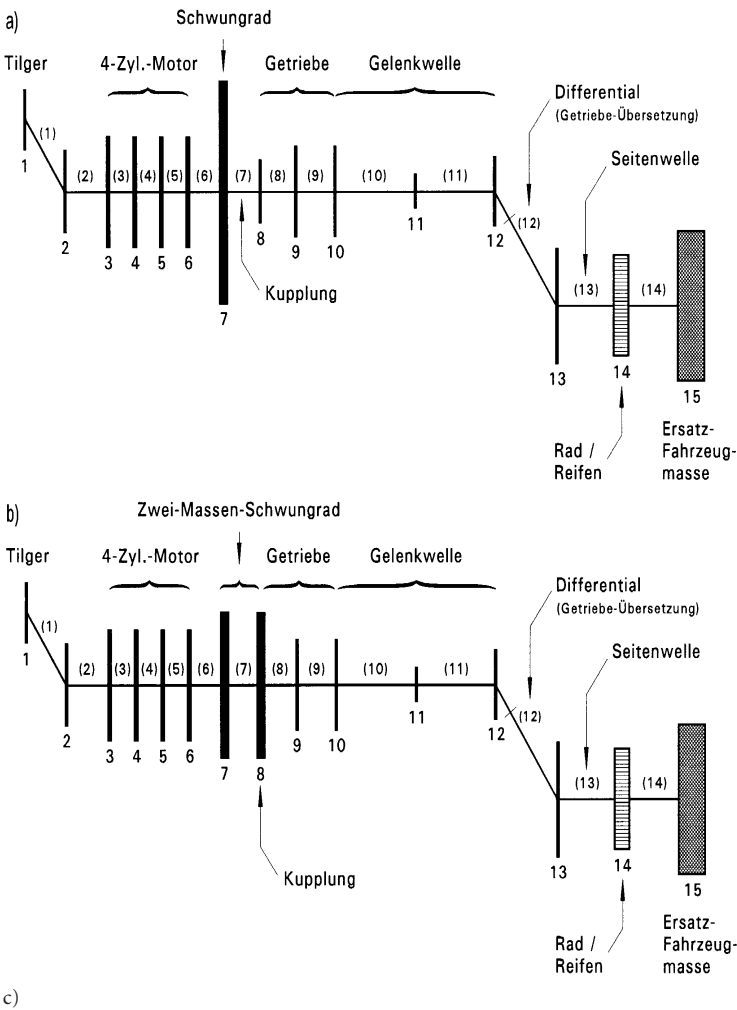
Fahrzeug-Antriebsstrang

Ein typisches Beispiel für ein komplexes Antriebssystem ist der Fahrzeug-Antriebsstrang mit Berücksichtigung des Motors als elastisches Subsystem sowie des weiteren Strangs mit Kupplung, Getriebe, Gelenkwelle, Differenzialgetriebe, Seitenwellen und Rad/Reifen. Bild 4.13a zeigt ein entsprechendes Schwingungsmodell mit allen Drehmassen und Drehsteifigkeiten als unverzweigtes-unvermaschtes System (hinterachsgetriebenes Fahrzeug mit durchgeschaltetem 4. Gang).

Zur Minimierung von Schwingungen (und damit auch zur Geräuschreduzierung) werden in Fahrzeugen mit mechanischen Schaltgetrieben so genannte „Zwei-Massen-Schwungräder“ (ZMS) eingesetzt, die einen wesentlichen positiven Einfluss auf das Gesamt-Eigenverhalten des Antriebssystems haben, vgl. Bild 4.13b.

Mit den in Bild 4.13c tabellarisch angegebenen Parameterwerten erfolgte die modale Analyse, deren Ergebnisse in Bild 4.14 dargestellt sind. Anhand der ersten Eigenfrequenzen und Schwingungsformen lassen sich die typischen maschinendynamischen Eigenschaften erkennen. Man vergleiche die Amplituden-Verteilung der Eigenformen (v_{ki}) und die mit den Parameterwerten multiplizierten Sensitivitätskoeffizienten und versuche, die physikalischen Ursachen zu deuten.

Es ist deutlich erkennbar, dass das Subsystem „Motor“ vom restlichen Schwingungssystem zwischen Schwungrad und Fahrzeug-Ersatzmasse dynamisch entkoppelt ist. Hieraus lässt sich beispielsweise auch die Reduktion der elastischen Substruktur „Motor“ auf eine einzige Masse als „starre“ Substruktur rechtfertigen, wenn das



k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Drehmasse J_k in $10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	4	1	10	10	10	10	a) 215	0,28	4,25	2,5	6,5	2,4	32,5	1700	65 000
							b) 115	115					* 2,37	* 124,1	* 4748
Drehfeder c_k in $10^4 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$	2	9	45	45	45	50	a) 0,16	0,90	6	0,9	0,9	0,75	1	4	–
							b) 0,06					* 5,48	* 0,07	* 0,29	–
Gesamt- Übersetzung i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3,7	3,7	3,7

Bild 4.13 Fahrzeug-Antriebsstrang
a) ohne Zwei-Massen-Schwungrad (ZMS)
b) mit Zwei-Massen-Schwungrad
c) Tabelle der Parameterwerte (Quelle: ARLA)
* auf Hauptwelle reduzierte Werte

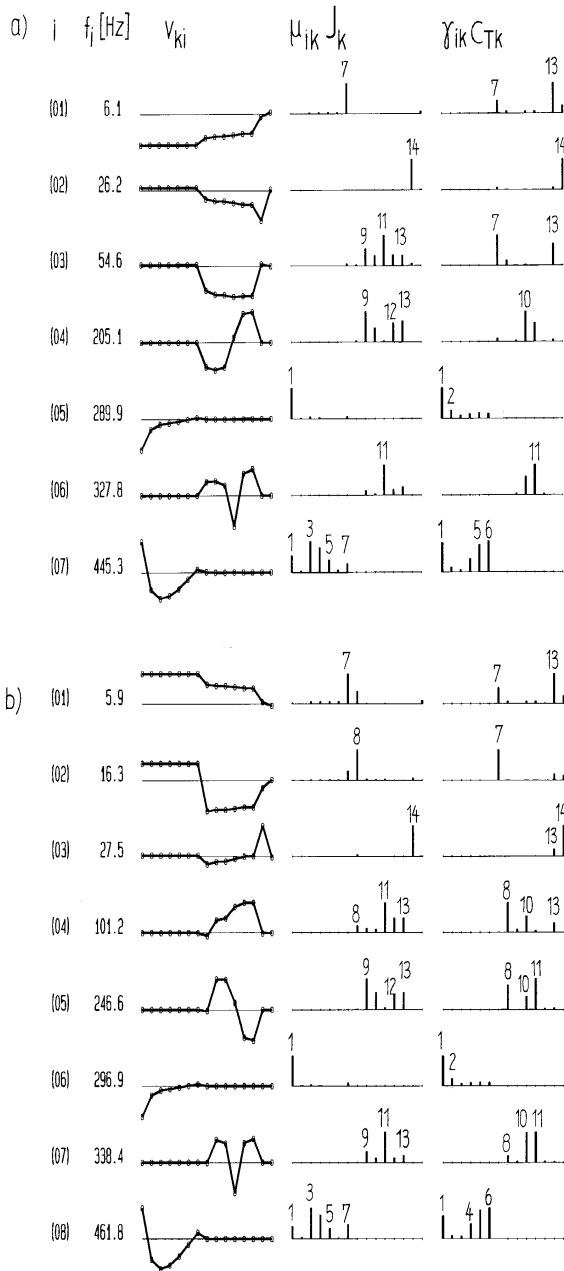


Bild 4.14 Eigenfrequenzen f_j , Eigenformen v_{ki} und Produkte von Parameterwerten mit Sensitivitäts-Koeffizienten der kinetischen (μ_{ik}) und potenziellen Energie (γ_{ik}) zu Bild 4.13, Darstellung gemäß [20] (Quelle: ARLA)

a) ohne Zwei-Massen-Schwungrad, **b)** mit Zwei-Massen-Schwungrad

Antriebssystem selbst nicht analysiert werden soll, denn der Motor verhält sich bei den niederen Formen wie ein rotierender starrer Körper.

Weiterhin ist vom Standpunkt der Modellbildung interessant und aus Bild 4.14b ersichtlich, dass

- die Fahrzeugmasse (J_{15}) infolge ihrer großen Trägheit nicht an den Schwingungen beteiligt ist und wie eine Einspannstelle wirkt.
- vor allem die zweite Eigenform durch das ZMS stark beeinflusst wird (Relativdrehung zwischen Scheibe 7 und 8)
- sich alle Eigenfrequenzen infolge des ZMS (Zusatzmasse, kleinere Drehfeder) partiell abgesenkt haben, vgl. f_i des Systems a mit f_{i+1} des Systems b
- die höheren Eigenformen durch das ZMS wenig beeinflusst werden, vgl. die Formen v_i des Systems a mit v_{i+1} des Systems b
- die erste Eigenform durch die weichsten Federn (c_7, c_{13}) und die große Schwungmasse (J_7) bedingt ist
- dass erst ab etwa 290 Hz das Eigenverhalten des Vierzylindermotors von Bedeutung ist

In Bild 4.14 wurde die (theoretisch erste Eigenform, die) Starrkörperdrehung nicht mit dargestellt. Das Bild zeigt auch, dass die grafische Darstellung von der Normierungsbedingung abhängt, denn nur weil deren Vorzeichen vertauscht wurden, sieht z. B. v_{k1} in Bild 4.14a und 4.14b anders aus.

4.2.5

Aufgaben A4.1 bis A4.3

A4.1 Anfahren eines Krans mit Spiel im Antrieb

Ein Kran (vgl. Prinzipskizze in Bild 4.15) wird mit einem konstanten Motormoment aus der Ruhe heraus beschleunigt. Unter der Annahme, dass die auf die Motorwelle reduzierte Drehmasse von Motor und Getriebe das gesamte reduzierte Spiel durchlaufen muss, bevor eine Kraftübertragung auf die Schiene erfolgt, sind die Torsionsspannungen in den Wellen der getriebenen Laufräder während des Anfahrvorganges zu bestimmen. Das Anfahren erfolge ohne Last, und Bewegungswiderstände seien vernachlässigbar.

Gegeben:

$m = 98000 \text{ kg}$	translatorisch bewegte Masse des Krans
$J_M = 0,555 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	auf Motorwelle reduzierte Drehmasse von Getriebe und Motor
$\Delta\varphi_M = 0,35 \text{ rad}$	auf Motorwelle reduziertes Getriebespiel
$i = 25$	Übersetzung des Getriebes ($\dot{\varphi}_M = i \cdot \dot{\varphi}_W$)
$M_M = 91 \text{ N} \cdot \text{m}$	konstantes Motormoment
$R = 0,4 \text{ m}$	Rollradius der Laufräder
$J_R = 16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	Trägheitsmoment eines Laufrades
$G = 8,1 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	Schubmodul der Antriebswellen
$\tau_{\text{zul}} = 1,33 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$	zulässige Torsionsspannung
$l_1 = 1,3 \text{ m}, l_2 = 0,325 \text{ m}$	Längen der Antriebswellen
$d_1 = 80 \text{ mm}, d_2 = 65 \text{ mm}$	Durchmesser der Antriebswellen

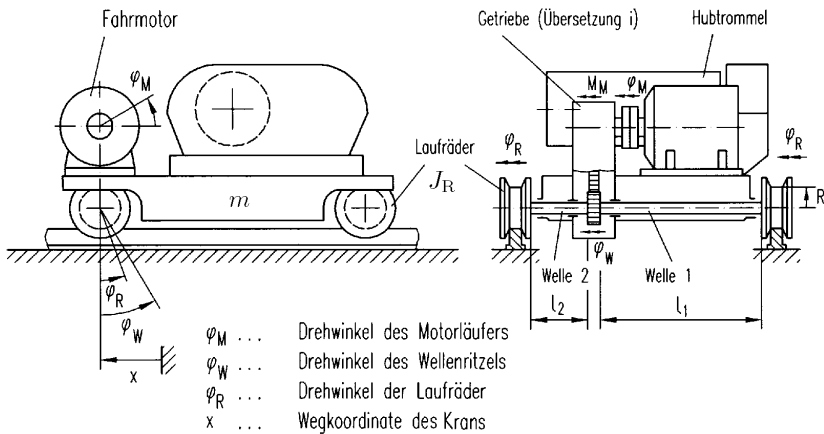


Bild 4.15 Koordinaten und Parameter des Krans

Gesucht:

1. Zwangsbedingungen zwischen φ_M , φ_W , φ_R und x
2. Bewegungsgleichungen für die in Bild 4.15 definierten Koordinaten φ_W und φ_R
3. Anfangsbedingungen nach dem Spieldurchlauf
4. Torsionsmomente in den beiden Antriebswellen nach dem ersten Spieldurchlauf
5. Maximale Torsionsspannungen in den beiden Antriebswellen

A4.2 Kupplungsstoß

An das in Ruhe befindliche Teilsystem mit den Parametern J_1 , c_{T1} , J_2 wird eine Drehmasse J_3 , die sich mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_3 dreht, schlagartig über eine elastische Bolzenkupplung mit der Torsionssteifigkeit c_{T2} gekuppelt (Bild 4.16).

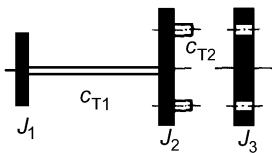


Bild 4.16 Minimalmodell zum Kupplungsvorgang

Gegeben:

Winkelgeschwindigkeit von J_3 beim Aufprall: Ω_3

Trägheitsmomente $J_1 = J_2 = J_3 = J$

Torsionsfederkonstanten $c_{T1} = 10c_T$, $c_{T2} = c_T$

Gesucht:

1. Eigenfrequenzen und Eigenformen
2. Bewegungs-Zeit-Funktion $\varphi_1(t)$
3. elastisches Moment in der Kupplung für den Fall $\Omega_3 = \sqrt{c_T/J}$

Man beurteile die Ergebnisse anhand von Plausibilitätskontrollen, die mit dem Drallsatz und dem Energiesatz möglich sind.

A4.3 Blockieren eines Zahnradgetriebes

Bei bestimmten Antriebssystemen muss der Sicherheitsnachweis gegenüber Wellenbruch bei einer Havarie geführt werden. Dafür müssen die bei einem derartigen Lastfall auftretenden dynamischen Momente in den Wellen, insbesondere ihre Maximalwerte bekannt sein.

Das zunächst schwingungsfrei rotierende Antriebssystem, vgl. Bild 4.17, wird plötzlich durch Auslösen der Motorbremse blockiert. Dadurch werden Torsionsschwingungen angeregt, die die Wellen dynamisch belasten. Die Schwingerkette entspricht Fall d in Tabelle 4.2.

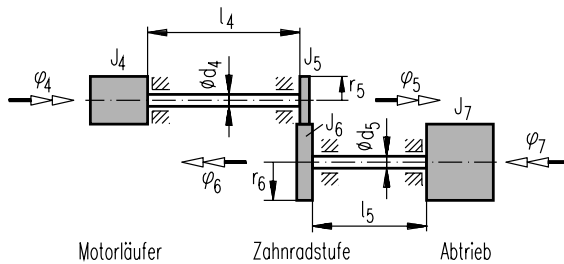


Bild 4.17
Koordinaten und
Parameter des
Antriebssystems

Unter der Annahme des Extremfalls, dass das Abbremsen des Motorläufers in unendlich kurzer Zeit erfolgt, sollen die Torsionsspannungen in beiden Wellen ermittelt werden.

Gegeben:

$$l_4 = 400 \text{ mm}, l_5 = 200 \text{ mm}$$

$$d_4 = 35 \text{ mm}, d_5 = 32 \text{ mm}$$

$$r_5 = 185 \text{ mm}, r_6 = 250 \text{ mm}$$

$$J_4 = 0,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_5 = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, J_6 = 1,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_7 = 0,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$G = 8,1 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$n_M = 75 \text{ min}^{-1}$$

Längen der beiden Wellen

Durchmesser der Wellen

Teilkreisradien der miteinander kammenden Räder

Drehmasse des Motorläufers

Drehmassen der Zahnräder

Drehmasse des Abtriebs

Schubmodul der Wellen

Motordrehzahl

Gesucht:

1. Eigenfrequenzen des freien und des blockierten (gebremsten) Systems
2. Eigenformen des gebremsten Systems
3. Anfangsbedingungen für plötzliches Blockieren des Motorläufers
4. Torsionsspannungen (insbesondere deren Maximalbeträge), die infolge des plötzlichen Blockierens in den beiden Wellen auftreten

4.2.6

Lösungen L4.1 bis L4.3

L4.1 Wenn kein Spiel vorhanden ist, existiert eine Zwangsbedingung zwischen φ_M und φ_W :

$$\varphi_M = i \cdot \varphi_W. \quad (4.65)$$

Wenn zwischen Laufrädern und Schiene Haftung besteht, gilt die Zwangsbedingung

$$\underline{\underline{x = R \cdot \varphi_R.}} \quad (4.66)$$

Aus der Bedingung der Gleichheit von kinetischer Energie des Motorläufers nach dem Spieldurchlauf und Antriebsarbeit des Motormomentes beim Durchlaufen des Spielwinkels

$$\frac{1}{2}J_M\dot{\varphi}_M^2 = M_M\Delta\varphi_M$$

folgt die Winkelgeschwindigkeit beim Aufprall zu

$$\dot{\varphi}_M = \sqrt{\frac{2M_M}{J_M}} \cdot \Delta\varphi_M. \quad (4.67)$$

Nachdem das Spiel erstmalig durchlaufen wurde, erfolgt eine Kraftübertragung zwischen Getriebe und Wellenritzel.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen für die Etappe des Kontaktes werden kinetische und potenzielle Energie sowie die virtuelle Arbeit der nicht über W_{pot} erfassten Kraftgrößen benötigt:

$$\begin{aligned} W_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \cdot [m\dot{x}^2 + J_M\dot{\varphi}_M^2 + 4J_R\dot{\varphi}_R^2] = \frac{1}{2} [(mR^2 + 4J_R)\dot{\varphi}_R^2 + i^2J_M\dot{\varphi}_W^2] \\ W_{\text{pot}} &= \frac{1}{2} \cdot [c_{T1} \cdot (\varphi_W - \varphi_R)^2 + c_{T2} \cdot (\varphi_W - \varphi_R)^2] \\ &= \frac{1}{2} \cdot (c_{T1} + c_{T2}) \cdot (\varphi_W - \varphi_R)^2 \end{aligned} \quad (4.68)$$

mit den Drehfederkonstanten

$$c_{Tk} = \frac{G \cdot \pi d_k^4}{32 \cdot l_k}; \quad k = 1, 2. \quad (4.69)$$

Die virtuelle Arbeit des Motormomentes beträgt

$$\delta W = M_M \cdot \delta\varphi_M. \quad (4.70)$$

Somit können die Bewegungsgleichungen mittels der Lagrange'schen Gleichung 2. Art aufgestellt werden. Sie lauten:

$$\begin{bmatrix} i^2J_M & 0 \\ 0 & mR^2 + 4J_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_W \\ \ddot{\varphi}_R \end{bmatrix} + (c_{T1} + c_{T2}) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_W \\ \varphi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iM_M \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Die linke Seite hat die Form von (4.23). Anfangsbedingungen nach dem Spieldurchlauf sind:

$t = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_W(0) &= \frac{1}{i}\varphi_M(0) = 0; & \dot{\varphi}_W(0) &= \frac{1}{i}\dot{\varphi}_M(0) = \frac{1}{i} \cdot \sqrt{\frac{2M_M}{J_M}} \cdot \Delta\varphi_M \\ \varphi_R(0) &= 0; & \dot{\varphi}_R(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Betrachtet man die Bewegungsgleichungen (4.71), so lässt sich das Problem durch den in Abschnitt 4.2.1.2 behandelten Schwinger gemäß Bild 4.18 mit dem Freiheitsgrad 2 und Spiel darstellen.

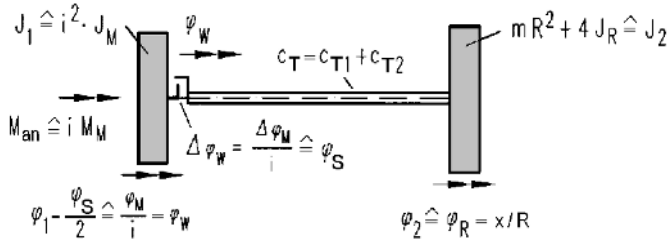


Bild 4.18 Berechnungsmodell von Kran und Antriebssystem mit Spiel

Die Gleichungen (4.71) sind analog zu (4.38) aufgebaut und die Anfangsbedingungen (4.72) sind mit (4.36) vergleichbar. Somit kann die in Abschnitt 4.2.1.2 gewonnene Lösung benutzt werden. Es ergeben sich mit dem Quadrat der Eigenkreisfrequenz analog zu (4.27)

$$\omega^2 = (c_{T1} + c_{T2}) \cdot \frac{mR^2 + 4J_R + i^2 J_M}{(mR^2 + 4J_R) \cdot i^2 J_M} = 2025 \text{ s}^{-2} \quad (4.73)$$

und mit dem aus (4.41) bekannten Moment M die Verläufe der Momente in beiden Wellen zu

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M_k}} &= c_{Tk}(\varphi_W - \varphi_R) = \frac{c_{Tk}}{c_{T1} + c_{T2}} \cdot M \\ &= \frac{c_{Tk} M_M}{i J_M \omega^2} \cdot \left[1 - \cos \omega t + \sqrt{\frac{2 J_M \omega^2}{M_M} \cdot \Delta \varphi_M} \cdot \sin \omega t \right], \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.74)$$

wenn man beachtet, dass die Beziehung

$$\frac{c_T (J_1 + J_2)}{M_{an} J_2} \hat{=} \frac{J_M \omega^2}{M_M} = \frac{(c_{T1} + c_{T2})(mR^2 + 4J_R + i^2 J_M)}{(mR^2 + 4J_R) i^2 M_M} \quad (4.75)$$

besteht.

Die Maximalwerte betragen somit

$$M_{k \max} = c_{Tk} \frac{M_M}{i J_M \omega_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 J_M \omega_0^2}{M_M} \Delta \varphi_M} \right], \quad k = 1, 2. \quad (4.76)$$

Der Ausdruck unter der Wurzel erlaubt zu bewerten, welchen Anteil das Spiel (im Vergleich zum spielfreien Antrieb) hat. Im vorliegenden Fall ist er beträchtlich, denn aus den gegebenen Parameterwerten folgt

$$\frac{2 J_M \omega^2}{M_M} \Delta \varphi_M = \frac{2 \cdot 0,555 \cdot 2025,4}{91} \cdot 0,35 = 8,647, \quad (4.77)$$

vgl. dazu Bild 4.5.

Als maximale Torsionsspannungen ergeben sich daraus:

$$\underline{\underline{\tau_{k \max}}} = \frac{16 M_{k \max}}{\pi \cdot d_k^3}; \quad k = 1, 2. \quad (4.78)$$

Aus (4.76) und (4.78) folgen mit (4.69) die Maximalwerte

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M_{1\max}}} &= 3,33 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}; & \underline{\underline{M_{2\max}}} &= 5,81 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \\ \underline{\underline{\tau_{1\max}}} &= 3,3 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2; & \underline{\underline{\tau_{2\max}}} &= 10,8 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Die steifere Welle 2 ($c_{T2} = 4,37 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m} > c_{T1} = 2,51 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}$) wird erheblich stärker beansprucht als die weichere.

Fazit: Die in Antriebssystemen beim Anfahren entstehenden dynamischen Beanspruchungen hängen wesentlich von der Größe des zu durchlaufenden Spiels, von der Eigenfrequenz des schwingungsfähigen Systems und vom Motormoment ab.

I4.2 Die Aufgabenstellung führt auf ein ungefesselteres Modell nach Tabelle 4.2 (Fall a), dessen Anfangsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} t = 0 : \quad \varphi_1 &= 0; & \varphi_2 &= 0; & \varphi_3 &= 0 \\ & \dot{\varphi}_1 &= 0; & \dot{\varphi}_2 &= 0; & \dot{\varphi}_3 &= \Omega_3. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Die Quadrate der Eigenkreisfrequenzen betragen gemäß (4.12)

$$\omega_1^2 = 0; \quad \omega_2^2 = 1,461 \frac{c_T}{J}; \quad \omega_3^2 = 20,539 \frac{c_T}{J}, \quad (4.81)$$

d. h., die Eigenfrequenzen sind

$$\underline{\underline{f_1}} = 0; \quad \underline{\underline{f_2}} = 0,192 \sqrt{\frac{c_T}{J}}; \quad \underline{\underline{f_3}} = 0,721 \sqrt{\frac{c_T}{J}}. \quad (4.82)$$

Die Eigenformen können aus (4.13) berechnet werden. Die erste entspricht einer Starrkörperdrehung.

$$v_{11} = 1; \quad v_{21} = 1; \quad v_{31} = 1. \quad (4.83)$$

Die anderen Eigenformen haben mit $v_{1i} = 1$ die Amplitudenverhältnisse

$$\begin{aligned} v_{12} &= 1; & v_{22} &= 0,854; & v_{32} &= -1,854 \\ v_{13} &= 1; & v_{23} &= -1,054; & v_{33} &= 0,054. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Bild 4.19 zeigt die zweite und dritte Eigenform. Die vollständige Lösung lautet für $k = 1, 2, 3$ analog zu (4.28):

$$\varphi_k = \varphi_0 + \Omega t + v_{k2}(a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t) + v_{k3}(a_3 \cos \omega_3 t + b_3 \sin \omega_3 t). \quad (4.85)$$

Erfüllt man die Anfangsbedingungen (4.80), ergeben sich folgende Integrationskonstanten:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0; & a_2 &= 0; & a_3 &= 0 \\ b_2 &= \frac{\Omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{v_{23} - 1}{(v_{32} - 1)(v_{23} - 1) + (1 - v_{22})(v_{33} - 1)} = -0,2996 \Omega_3 \sqrt{\frac{J}{c_T}} \\ b_3 &= \frac{\Omega_3}{\omega_3} \cdot \frac{v_{22} - 1}{(v_{32} - 1)(v_{23} - 1) + (1 - v_{22})(v_{33} - 1)} = 0,0056 \Omega_3 \sqrt{\frac{J}{c_T}} \\ \Omega &= -(v_{32} \omega_2 b_2 + v_{33} \omega_3 b_3) = \frac{\Omega_3}{3}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

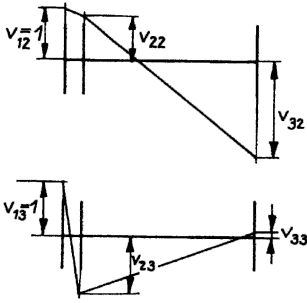


Bild 4.19 Eigenformen des Torsionsschwingers

Gemäß (4.85) führt die Scheibe 1 z. B. bei $\Omega_3 = \sqrt{c_T/J}$ folgende Bewegung aus:

$$\varphi_1 = \Omega t - 0,2969 \sin \omega_2 t + 0,0056 \sin \omega_3 t. \quad (4.87)$$

Die elastischen Momente ergeben sich in der Welle 1 zu

$$\begin{aligned} M_{12} &= c_{T1}(\varphi_1 - \varphi_2) = c_{T1} [b_2(v_{12} - v_{22} \sin \omega_2 t + b_3(v_{13} - v_{23}) \sin \omega_3 t] \\ &= c_T(-0,4337 \cdot \sin \omega_2 t + 0,1157 \cdot \sin \omega_3 t) \end{aligned} \quad (4.88)$$

und in der Kupplung zu

$$\begin{aligned} M_{23} &= c_{T2}(\varphi_3 - \varphi_2) = c_{T2} [b_2(v_{32} - v_{22} \sin \omega_2 t + b_3(v_{33} - v_{23}) \sin \omega_3 t] \\ &= c_T(-0,8040 \cdot \sin \omega_2 t + 0,0060 \cdot \sin \omega_3 t). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Wie man aus der Lösung erkennt, setzt sich der Momentenverlauf aus zwei harmonischen Schwingungen zusammen, deren Kreisfrequenzen nicht im ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen. Es ergibt dies i. Allg. keine periodische Belastung.

Dabei ist die Amplitude der ersten Komponente gegenüber der zweiten weitaus größer, was im Hinblick auf die nach den Eigenformen auch vermutet werden kann.

Die Bewegung des Schwingers setzt sich aus einer Rotation des starren Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit Ω und einer Schwingungsbewegung mit den beiden Eigenfrequenzen zusammen. Die Winkelgeschwindigkeit Ω ergibt sich aus der Bedingung, dass der Drehimpuls erhalten bleibt (also $J_3 \Omega_3 = (J_1 + J_2 + J_3) \Omega = 3J \Omega$ ist), sofort zu $\Omega = \Omega_3/3$.

Die durch die Scheibe 3 in das System eingeleitete kinetische Energie verteilt sich auf die Energien W_i der drei Eigenformen, vgl. Abschnitt 4.2.2 und (6.124):

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = W_{\text{kin } 0} = \frac{1}{2} J \Omega_3^2. \quad (4.90)$$

Die Rotationsenergie des starren Systems ist die Energie der ersten „Eigenform“:

$$W_1 = \frac{1}{2} (J_1 + J_2 + J_3) \Omega^2 = \frac{1}{2} 3J \left(\frac{\Omega_3}{3} \right)^2 = \frac{1}{6} J \Omega_3^2. \quad (4.91)$$

Diese enthält keine potenzielle Energie. Die Energie in den anderen beiden „richtigen“ Eigenformen ist die **Vibrationsenergie**, die man aus der Differenz zur Gesamtenergie berechnen kann:

$$W_2 + W_3 = W - W_1 = \frac{1}{3} J \Omega_3^2. \quad (4.92)$$

Sie ist die Summe der kinetischen und potenziellen Energie, welche die beiden angeregten Eigenschwingungen enthalten. Während der Schwingung kann im Extremfall die gesamte Vibrationsenergie in einer Torsionsfeder gespeichert werden. Daraus ergeben sich die beiden Abschätzungen

$$\frac{1}{2}c_{T1}(\varphi_1 - \varphi_2)_{\max}^2 \leq \frac{1}{3}J\Omega_3^2; \quad \frac{1}{2}c_{T2}(\varphi_2 - \varphi_3)_{\max}^2 \leq \frac{1}{3}J\Omega_3^2. \quad (4.93)$$

Man kann also mit dieser Betrachtung (ohne die Schwingungsberechnung auszuführen) angeben, wie groß die Maximalmomente in den Wellen höchstens sind. Aus (4.93) folgt:

$$M_{12 \max} = c_{T1}|\varphi_1 - \varphi_2|_{\max} \leq \Omega_3 \sqrt{\frac{2}{3}c_{T1}J} = 2,582c_T$$

$$M_{23 \max} = c_{T2}|\varphi_2 - \varphi_3|_{\max} \leq \Omega_3 \sqrt{\frac{2}{3}c_{T2}J} = 0,8165c_T. \quad (4.94)$$

Man vergleiche die daraus folgenden Ergebnisse mit denen aus (4.88) und (4.89) und überlege sich, warum die eine Abschätzung genauer ist als die andere.

- L4.3** Die Bewegungsgleichungen dieses Schwingungssystems sind aus (4.8) bis (4.10) bekannt. Mit den in Tabelle 4.2 (Fall d) angegebenen Formeln werden die Parameterwerte aus der Aufgabenstellung auf die der Bildwelle (Tabelle 4.2, Fall a) umgerechnet:

$$J_1 \hat{=} J_4 = 0,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$$

$$J_2 \hat{=} J_5 + J_6 \left(\frac{r_5}{r_6} \right)^2 = 1,4309 \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$$

$$J_3 \hat{=} J_7 \left(\frac{r_5}{r_6} \right)^2 = 0,3286 \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (4.95)$$

Die Torsionsfederkonstanten der Wellen ergeben sich zunächst aus

$$c_{Tj} = \frac{G l_{pj}}{l_j} = \frac{G \pi d_j^4}{32 l_j}; \quad j = 4, 6 \quad (4.96)$$

und umgerechnet auf die Koordinaten der Bildwelle des Systems nach Bild 4.2, Fall a:

$$c_{T1} \hat{=} c_{T4} = 29\,833 \text{ N} \cdot \text{m}; \quad c_{T2} \hat{=} c_{T6} \left(\frac{r_5}{r_6} \right)^2 = 22\,831 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad (4.97)$$

Die Eigenfrequenzen $f_i = \omega_i/(2\pi)$ des frei beweglichen Getriebes folgen mit den in (4.95) und (4.97) angegebenen Daten aus (4.12) oder aus Formel (1) in Tabelle 4.4 zu

$$\underline{\underline{f_1 = 0 \text{ Hz}}}; \quad \underline{\underline{f_2 = 35,2 \text{ Hz}}}; \quad \underline{\underline{f_3 = 48,9 \text{ Hz}}}. \quad (4.98)$$

Die Eigenfrequenzen des blockierten (gefesselten) Systems ergeben sich aus denselben Formeln, wenn man $J_1 = J_4 \rightarrow \infty$ setzt:

$$\underline{\underline{f_1 = 20,2 \text{ Hz}}}; \quad \underline{\underline{f_2 = 47,8 \text{ Hz}}}. \quad (4.99)$$

Alle Eigenfrequenzen nehmen infolge der Bremsung zu, und für die dritte Eigenfrequenz gilt $f_3 \rightarrow \infty$. Die Eigenformen des gebremsten Getriebes ergeben sich zunächst bezüglich der Koordinaten φ_1 und φ_2 aus (4.13):

$$\begin{aligned} v_{1i} &= 0; & v_{2i} &= 1; & v_{3i} &= \frac{1}{1 - \frac{J_3 \omega_i^2}{c_{T2}}}; & i &= 1, 2 \\ v_{32} &= -3,35; & v_{31} &= 1,30. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Die Umrechnung in die ursprünglichen Koordinaten mit den in Tabelle 4.2 angegebenen Transformationsformeln liefert unter Beachtung des Übersetzungsverhältnisses $r_5/r_6 = 0,74$ die in Bild 4.20 eingezeichneten Amplitudenverhältnisse.

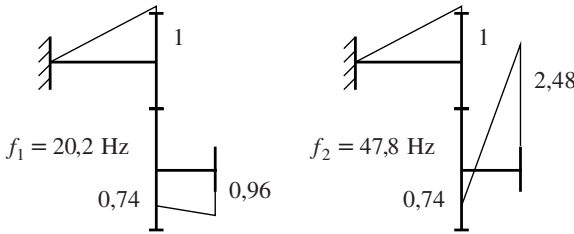


Bild 4.20
Eigenformen des
blockierten Getriebes

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen lautet nach (4.22):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k(t) &= \sum_{i=1}^2 v_{ki} \cdot (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) \\ \dot{\varphi}_k(t) &= \sum_{i=1}^2 \omega_i v_{ki} \cdot (-a_i \sin \omega_i t + b_i \cos \omega_i t) \end{aligned} \right\}, \quad k = 1, 2. \quad (4.101)$$

Da alle Zahnräder anfangs schwingungsfrei rotieren, lauten die Anfangsbedingungen:

$$t = 0: \quad \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = 0; \quad \dot{\varphi}_2(0) = \dot{\varphi}_3(0) = \Omega = 7,854 \text{ s}^{-1}. \quad (4.102)$$

Die Faktoren a_i und b_i können bestimmt werden, wenn man fordert, dass die Lösungen (L4.3/8) auch die Anfangsbedingungen (4.102) erfüllen. Diese Forderungen bedeuten:

$$\begin{aligned} \varphi_2(0) &= v_{21}a_1 + v_{22}a_2 = 0; & \dot{\varphi}_2(0) &= \omega_1 v_{21}b_1 + \omega_2 v_{22}b_2 = \Omega \\ \varphi_3(0) &= v_{31}a_1 + v_{32}a_2 = 0; & \dot{\varphi}_3(0) &= \omega_1 v_{31}b_1 + \omega_2 v_{32}b_2 = \Omega. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Diese Gleichungen haben die Lösungen

$$a_1 = a_2 = 0; \quad b_1 = 0,05798; \quad b_2 = 1,6897 \cdot 10^{-3}. \quad (4.104)$$

Damit können die Bewegungen des blockierten Systems angegeben werden:

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= 0,05798 \cdot \sin \omega_1 t - 0,00169 \cdot \sin \omega_2 t \hat{=} \varphi_5(t) \\ \varphi_3(t) &= 0,07540 \cdot \sin \omega_1 t - 0,00566 \cdot \sin \omega_2 t \hat{=} \frac{r_6}{r_5} \varphi_7(t). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Die in den Wellen an ihrem Außenrand auftretenden Torsionsspannungen τ_{Tj} sind proportional den Torsionsmomenten, die ihrerseits linear von den Schwingungsaus-
schlägen abhängen. Mit den Widerstandsmomenten $W_{Tj} = \pi d_j^3/16$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\tau_{T4}}} &= \frac{M_{T4}}{W_{T4}} = \frac{16c_{T4}}{\pi d_4^3} \cdot \varphi_5(t) = \frac{G \cdot d_4}{2 \cdot l_4} \cdot \varphi_2(t) \\ &= \underline{\underline{(205,5 \cdot \sin \omega_1 t + 6,0 \cdot \sin \omega_2 t) \text{ N/mm}^2}}\end{aligned}\quad (4.106)$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\tau_{T5}}} &= \frac{M_{T5}}{W_{T5}} = \frac{16c_{T5}}{\pi d_5^3} \cdot [\varphi_7(t) - \varphi_6(t)] \\ &= \frac{G d_5}{2 l_5} \cdot \frac{r_5}{r_6} \cdot [\varphi_3(t) - \varphi_2(t)] \\ &= \underline{\underline{(83,5 \cdot \sin \omega_1 t - 35,2 \cdot \sin \omega_2 t) \text{ N/mm}^2}}.\end{aligned}\quad (4.107)$$

4.3

Erzwungene Schwingungen diskreter Torsionsschwinger

4.3.1

Periodische Erregung

Die Bewegungsgleichungen für die erzwungenen gedämpften Schwingungen der Torsionsschwingerkette ergeben sich aus (4.44), wenn an der k -ten Scheibe die viskosen Dämpfungsmomente ergänzt werden (für $k = 1, 2, \dots, n$), zu

$$\begin{aligned}J_k \ddot{\varphi}_k - b_{Tk-1}(\dot{\varphi}_{k-1} - \dot{\varphi}_k) + b_{Tk}(\dot{\varphi}_k - \dot{\varphi}_{k+1}) \\ - c_{Tk-1}(\varphi_{k-1} - \varphi_k) + c_{Tk}(\varphi_k - \varphi_{k+1}) = M_k(t)\end{aligned}\quad (4.108)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen erfolgt in Kapitel 6. Hier sollen nur Minimalmodelle zur Einführung in die Problemstellungen behandelt werden.

Es ist zweckmäßig, erzwungene Schwingungen nur in Verbindung mit Dämpfungswerten zu berechnen, da man sonst keine brauchbaren Aussagen über die Amplitudenwerte in Resonanznähe erhält. Da oft Dämpfungskonstanten realer Maschinen fehlen, ist es üblich, modale Dämpfungen einzuführen, vgl. Abschnitt 6.6.1.

Erzwungene Schwingungen werden durch Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben, in denen die Erregung als eine explizite Zeitfunktion auftritt. Für eine große Gruppe von Antriebssystemen liegen periodische Erregerfunktionen vor. Hierzu gehören die Kolbenmotoren, die durch Gas- und Massenkraftkräfte erregt werden, die Kolbenpumpen und Pressen sowie viele Antriebssysteme mit ungleichmäßig übersetzenden Mechanismen, vgl. Abschnitt 4.3.2.3.

Neben diesen von „außen“ wirkenden Erregermomenten spielt die Erregung durch Zahnstöße in Getrieben eine Rolle. Die dadurch auftretenden (meist sehr hochfrequenten) Schwingungen beeinträchtigen teilweise die Funktionsgüte und haben zusätzliche Zahnbelastungen zur Folge, vgl. Abschnitt 4.5.3.2.

Für die Behandlung von erzwungenen Torsionsschwingungen mit periodischer Erregung ist folgender Berechnungsablauf vorteilhaft: Nach der Bestimmung der

Modellparameter, der Modalanalyse ($\omega_i, v_{ki}, \gamma_{ik}, \mu_{ik}$) und der Erfassung der Erregung in Form einer *Fourier*-Reihe werden mögliche Resonanzfrequenzen mithilfe des Resonanzschaubildes bestimmt. Danach kann man durch einen Energievergleich die Resonanzamplituden abschätzen und aufgrund der modalen Erregerkräfte die Anregbarkeit der Resonanzstellen bewerten. Es gibt Softwarepakete, die speziell für Torsionsschwinger in Antriebssystemen entwickelt wurden. Damit lassen sich die Zeitverläufe aller interessierenden Kraft- und Bewegungsgrößen berechnen und Parametereinflüsse analysieren, sodass schon vor dem Bau und der Erprobung Konstruktionen mit günstigem dynamischem Verhalten entwickelbar sind. Die VDI-Richtlinie 3840 gibt Hinweise, welche Einflussgrößen i. Allg. bei der Schwingungsuntersuchung von Wellensträngen zu berücksichtigen sind.

Bekanntlich kann jede periodische Erregung mithilfe einer Fourier-Reihe in eine Summe harmonischer Glieder zerlegt werden. Für nichtanalytisch gegebene Funktionen, zum Beispiel ein gemessenes Indikatordiagramm, liefert Software die Fourier-Koeffizienten. Damit erhält man das Erregermoment an der Scheibe k in der Form:

$$\begin{aligned} M_k &= M_{k\text{st}} + \sum_{m=1}^{\infty} (M_{kmc} \cos m\Omega t + M_{kms} \sin m\Omega t) \\ &= M_{k\text{st}} + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{M}_{km} \sin(m\Omega t + \beta_{km}) \end{aligned} \quad (4.109)$$

mit der Amplitude der m -ten Harmonischen an der Stelle k

$$\hat{M}_{km} = \sqrt{M_{kmc}^2 + M_{kms}^2} \quad (4.110)$$

und dem jeweiligen Phasenwinkel (mit der exakten Lage des Quadranten)

$$\beta_{km} = \arccos (M_{kms} / \hat{M}_{km}) \cdot \text{sign} (M_{kmc}). \quad (4.111)$$

In (4.109) stellt $M_{k\text{st}}$ das statische Moment dar, das meist als Nutz- oder Arbeitsmoment dient. Es bewirkt, dass das ganze Antriebssystem unter Vorspannung läuft. Die Kreisfrequenz Ω des periodischen Vorganges entspricht der Winkelgeschwindigkeit der Antriebswelle. Bei Viertaktmotoren ist dabei zu beachten, dass ein Arbeitsspiel über zwei Umdrehungen läuft. Bezieht man trotzdem auf die Drehzahl, so tritt der (mathematisch unglückliche) Effekt gebrochener Ordnungen auf. Es ist deshalb üblich, gebrochene Ordnungszahlen m einzuführen.

Es existieren bei periodischer Erregung Resonanzen höherer (m -ter) Ordnung. Resonanz kann gemäß (6.375) auftreten, wenn eine Erregerkreisfrequenz $m\Omega$ mit einer Eigenkreisfrequenz ω_i übereinstimmt, also wenn gilt:

$$\Omega = \frac{\omega_i}{m} \quad \text{bzw.} \quad m\Omega = \omega_i \quad \text{oder} \quad n_{im} = \frac{60 f_i}{m}. \quad (4.112)$$

Die letzte Gleichung bezieht sich auf die Drehzahlen n_{im} in U/min und die Frequenzen f_i in Hz.

Dies ist eine notwendige (keine hinreichende) Bedingung, die sich übersichtlich im Resonanzschaubild, das auch als *Campbell*-Diagramm bezeichnet wird, darstellen lässt. Hierbei werden die Eigenfrequenzen auf der Ordinate und die Drehzahlen

auf der Abszisse aufgetragen. Die Ordnungsgeraden schneiden dann die Eigenfrequenzen bei möglicherweise dort auftretenden kritischen Drehzahlen, vgl. die Bilder 4.24b, 4.27 und 6.30a.

Die Bewegungsgleichungen für das Minimalmodell in Bild 4.21a ergeben sich als Sonderfall von (4.108) für $n = 2$ oder als Erweiterung von (4.23) zu

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + b_T(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + c_T(\varphi_1 - \varphi_2) = M_1(t) \quad (4.113)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - b_T(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - c_T(\varphi_1 - \varphi_2) = M_2(t). \quad (4.114)$$

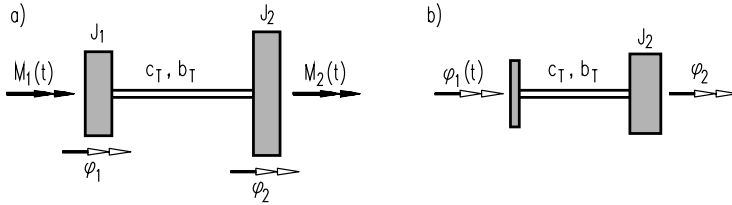


Bild 4.21 Minimalmodelle für erzwungene Schwingungen
a) Zwei Erregermomente, b) kinematische Erregung

Werden keine Antriebs- oder Bremsmomente $M_k(t)$ gegeben, sondern eine erzwungene *kinematische Erregung* $\varphi_1(t)$, dann spielt die Größe von J_1 für die Bewegung von $\varphi_2(t)$ keine Rolle, und es entsteht das Berechnungsmodell von Bild 4.21b, dessen Bewegungsgleichung sich als Sonderfall aus (4.114) ergibt:

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + b_T \dot{\varphi}_2 + c_T \varphi_2 = b_T \dot{\varphi}_1(t) + c_T \varphi_1(t). \quad (4.115)$$

Gleichung (4.113) kann dann zur Ermittlung des Momentes $M_1(t)$ dienen, welches die vorgegebene kinematische Erregung aufrechterhält. Manchmal ist es zweckmäßig, den Relativwinkel $q = \varphi_1 - \varphi_2$ als Koordinate zu benutzen. Für ihn erhält man aus (4.115):

$$\ddot{q} + \frac{b_T}{J_2} \dot{q} + \frac{c_T}{J_2} q = \ddot{\varphi}_1(t). \quad (4.116)$$

Aus (4.113) und (4.114) kann man eine einzige Bewegungsgleichung gewinnen, und zwar für das innere „elastische“ Moment $M = c_T(\varphi_1 - \varphi_2)$ in der tordierten Welle, vgl. auch (4.33). Dividiert man (4.113) durch J_1 und (4.114) durch J_2 , dann erhält man aus der Differenz der mit c_T multiplizierten Gleichungen für das innere Moment folgende Differenzialgleichung:

$$\ddot{M} + 2D\omega_0 \dot{M} + \omega_0^2 M = c_T \left(\frac{M_1(t)}{J_1} - \frac{M_2(t)}{J_2} \right) \quad (4.117)$$

mit

$$2D\omega_0 = \delta = b_T \frac{\omega_0^2}{c_T}; \quad \omega_0^2 = \frac{c_T}{J_1} + \frac{c_T}{J_2}, \quad (4.118)$$

vgl. den Sonderfall (4.33). Die Gleichungen (4.115) und (4.117) besitzen im Prinzip dieselbe Form wie (4.116). Ist die rechte Seite von (4.116) eine periodische Funktion, so lässt sich z. B. der periodisch veränderliche Antriebswinkel als Fourierreihe angeben:

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t). \quad (4.119)$$

Setzt man seine zweite Ableitung in (4.116) ein, so entsteht die Differenzialgleichung

$$\ddot{q} + 2D\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = \Omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t). \quad (4.120)$$

Ihre stationäre Lösung lautet

$$q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\Omega t + B_k \sin k\Omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\Omega t + \beta_k) \quad (4.121)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$A_k = \frac{(1 - k^2 \eta^2) a_k - 2Dk\eta b_k}{(1 - k^2 \eta^2)^2 + (2Dk\eta)^2} k^2 \eta^2; \quad B_k = \frac{2Dk\eta a_k + (1 - k^2 \eta^2) b_k}{(1 - k^2 \eta^2)^2 + (2Dk\eta)^2} k^2 \eta^2. \quad (4.122)$$

Dabei wurde das Abstimmungsverhältnis $\eta = \Omega/\omega_0$ eingeführt. Für die Amplitude der k -ten Harmonischen gilt

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = \frac{k^2 \eta^2 \sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{\sqrt{(1 - k^2 \eta^2)^2 + (2Dk\eta)^2}}. \quad (4.123)$$

Wenn die Erregerkreisfrequenz $k\Omega$ der k -ten Harmonischen mit der Eigenkreisfrequenz ω_0 zusammenfällt, ist $k\eta = 1$ und für die Resonanzamplitude gilt die Abschätzung

$$|q_k|_{\max} \geq C_{k\max} \approx C_k(\eta = 1/k) = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2D}. \quad (4.124)$$

4.3.2

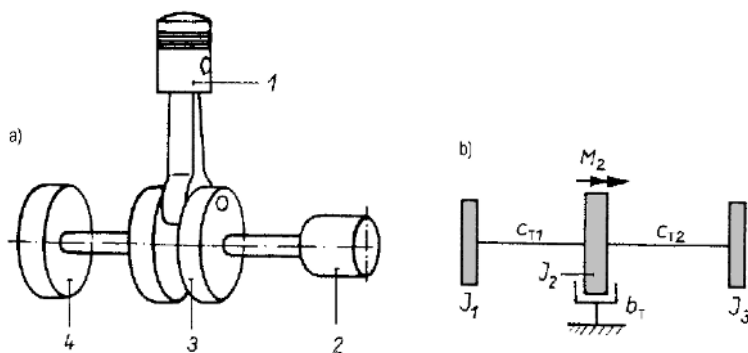
Beispiele

4.3.2.1

Motorradmotor

Bild 4.22 zeigt das Triebwerk eines Motorradmotors mit seinem Berechnungsmodell. Der Motor arbeitet im 2-Takt-Verfahren. Es liegt eine periodische Erregung mit 4 Harmonischen vor:

$$M_2 = \sum_{m=1}^4 \hat{M}_{2m} \sin(m\Omega t + \alpha_m). \quad (4.125)$$

**Bild 4.22** Motorradmotor

a) Skizze des Triebwerks, 1 Kolben, 2 Lichtmaschinenanker, 3 Kurbeltrieb, 4 Kupplung;

b) Schwingungsmodell

Aus den gegebenen Masse- und Federparametern

$$\begin{aligned}
 J_1 &= 1,027 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2; & c_{T1} &= 25,9 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \\
 J_2 &= 0,835 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2; & c_{T2} &= 20,6 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \\
 J_3 &= 0,079 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2
 \end{aligned} \tag{4.126}$$

ergeben sich aus (4.12) die Eigenfrequenzen des ungedämpften Systems:

$$f_1 = 0; \quad f_2 = 366 \text{ Hz}; \quad f_3 = 853 \text{ Hz}. \tag{4.127}$$

Mit der Dämpferkonstante $b_T = 6 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ und den Momentenamplituden

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_{21} &= 53,8 \text{ N} \cdot \text{m}; & \hat{M}_{22} &= 43,6 \text{ N} \cdot \text{m} \\
 \hat{M}_{23} &= 24,5 \text{ N} \cdot \text{m}; & \hat{M}_{24} &= 20,2 \text{ N} \cdot \text{m}
 \end{aligned} \tag{4.128}$$

werden mit bekannter Software aus (4.108) die stationären periodischen Schwingungen berechnet.

Bild 4.23a zeigt die zweite und dritte Eigenform des ungedämpften Systems. In Bild 4.23b sieht man die Resonanzkurve für das resultierende Moment in der Welle 1 mit seinen Komponenten.

Entsprechend den allgemeinen Ausführungen in Abschnitt 4.3.1 findet man in Bild 4.23b mehrere Resonanzstellen. Aus (4.112) kann man die Resonanzdrehzahlen aus den in (4.127) angegebenen Eigenfrequenzen berechnen. Im Drehzahlbereich von $n = 5000$ bis $15\,000 \text{ min}^{-1}$ (Bild 4.23b) liegen die Resonanzdrehzahlen bei

$$n_{12} = 10\,990 \text{ min}^{-1}; \quad n_{13} = 7320 \text{ min}^{-1}; \quad n_{14} = 5490 \text{ min}^{-1}. \tag{4.129}$$

Diese Spitzen sind deutlich zu sehen. Die Rechnung liefert auch noch eine kleinere Resonanzspitze bei der Drehzahl $n_{24} = 12\,800 \text{ min}^{-1}$. Sie entspricht der Resonanz der vierten Harmonischen mit der zweiten Eigenfrequenz.

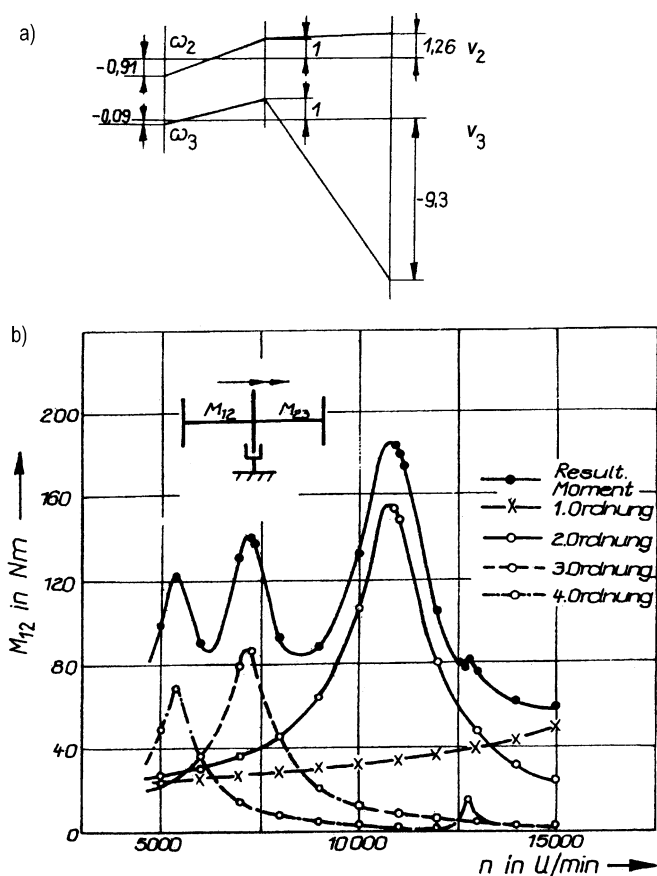


Bild 4.23 Berechnungsergebnisse zum Motorradmotor; a) Eigenformen, b) Resonanzkurve

Bild 4.24a zeigt die *gemessene* Resonanzkurve für das angegebene Beispiel. Es ist ersichtlich, dass im Betriebsbereich viele Resonanzdrehzahlen liegen. Da die Erregeramplituden der einzelnen Ordnungen mit steigender Ordnungszahl abfallen, haben die Resonanzen der höheren Ordnungen kleinere Ausschläge zur Folge. Es ist jedoch interessant, dass sie sich noch recht gut messtechnisch nachweisen lassen. Es ist eine Aufgabe des Ingenieurs, die Kurbelwelle so zu gestalten oder das Schwingungssystem so zu beeinflussen, dass in der Resonanz keine Schädigung auftritt.

Bild 4.24b zeigt das Campbell-Diagramm. Man erkennt daraus, dass mit der 1. Eigenfrequenz 8 Resonanzen (4. bis 11. Ordnung) und mit der 2. Eigenfrequenz 17 Resonanzen (9. bis 25. Ordnung) im Drehzahlbereich möglich sind. Es lässt sich nicht vermeiden, dass Resonanzen im Betriebsdrehzahlbereich auftreten.

Durch stark dämpfendes Material lassen sich die Amplituden in der Resonanz begrenzen, vgl. (4.124). Alle Resonanzspitzen in Bild 4.24a lassen sich mithilfe des Campbell-Diagramms aus Bild 4.24b plausibel machen.

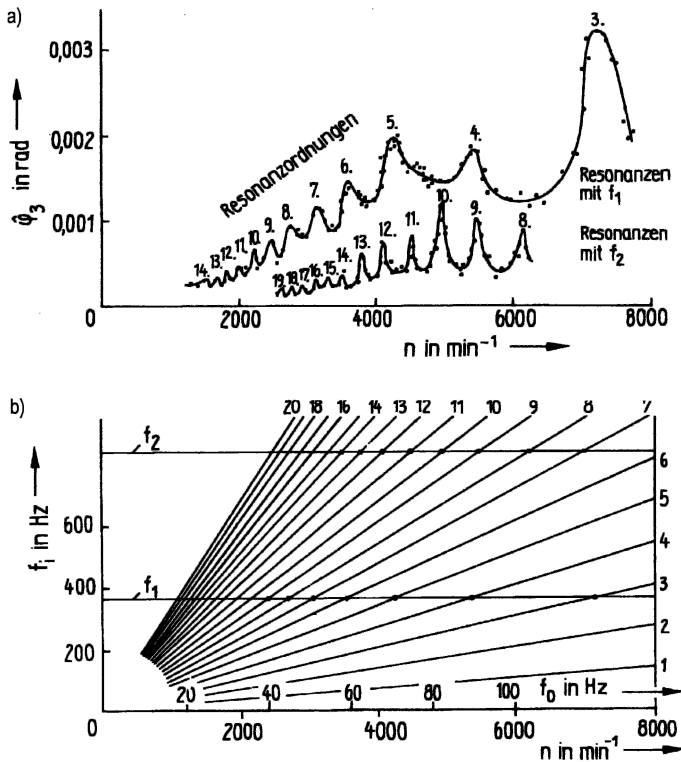


Bild 4.24 Erzwungene Schwingungen eines Motorradmotors

- a) Gemessene Resonanzkurve, aufgeteilt in die beiden modalen Komponenten;
 b) Campbell-Diagramm mit zwei Eigenfrequenzen und 20 Harmonischen

4.3.2.2

Fahrzeugantrieb mit Zweimassenschwungrad

Das Zweimassenschwungrad (ZMS) ist eine Baugruppe, die in vielen PKW-Antrieben eingesetzt wird. Dieses komplizierte „Schwungrad“ besteht aus einem primärseitigen Teil, das mit der Kurbelwelle des Verbrennungsmotors verbunden ist, und einem sekundärseitigen Teil, das die Reibfläche für die Kupplungsscheibe bildet. Die Primärseite ist mit der Sekundärseite durch einen Federsatz verbunden, der eine progressive Federsteifigkeit realisiert, also bei kleinen Ausschlägen weich und bei großen Ausschlägen hart ist, vgl. Abschnitt 7.2. Das ZMS wird überkritisch betrieben und entkoppelt die Sekundärseite von den hochfrequenten Schwingungen der Primärseite.

In Anlehnung an das im Abschnitt 4.2.4.3 vorgestellte Beispiel wird jetzt das dynamische Verhalten eines verzweigten Fahrzeugantriebs mit Berücksichtigung einer spielbehafteten Getriebestufe (im unbelasteten Antriebszweig) untersucht. Der im Bild 4.25 vorgestellte Torsionsschwinger lässt sich trotz der Komplexität (verzweigte Struktur, Spiele in den beiden Getriebestufen) mithilfe moderner Simulationspro-

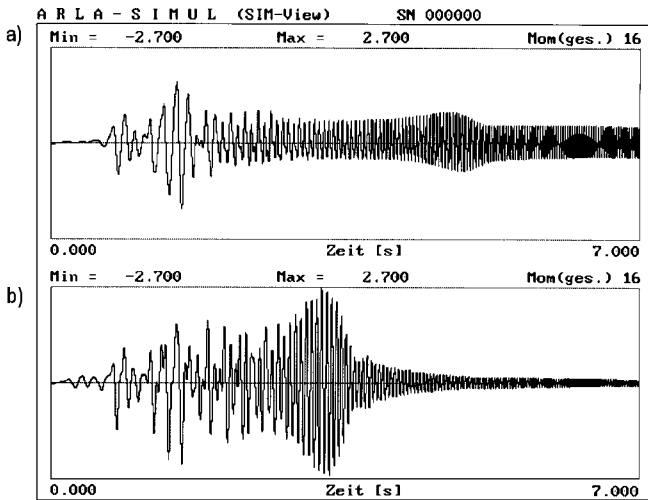


Bild 4.26 Berechnete Zeitverläufe des Moments M_{16} (Vorgelegewelle) gemäß Bild 4.25 (Quelle: ARLA); a) ohne ZMS, b) mit ZMS

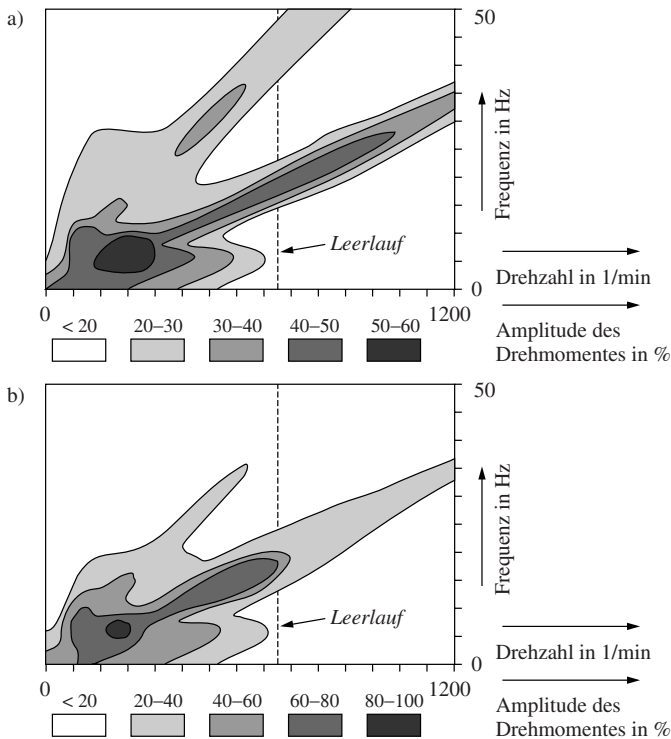


Bild 4.27 Amplitudenkarte des Campbell-Diagramms für das Moment M_{16} im Fahrzeugmodell nach Bild 4.25; Rechenergebnisse mit ARLA-SIMUL a) ohne ZMS, b) mit ZMS

Momentenverlauf aufgrund der Motorzwangsanregung bei der Grundfrequenz von etwa 6 Hz. Bei dem System mit ZMS zeigt sich auch bei der zweiten Eigenfrequenz von 16 Hz eine Resonanzspitze, vgl. Bild 4.14 und Bild 4.26b. Außerdem ist in den Plots ein anderes Phänomen erkennbar: Im tiefen Drehzahlbereich (normalerweise immer unterhalb der Leerlaufdrehzahl) ist die ZMS-Version sogar stärker resonanzgefährdet als der konventionelle Antriebsstrang; jedoch werden die Amplituden in höheren Drehzahlregionen erheblich geringer (d. h. akustisch günstig abgestimmtes System).

4.3.2.3

Schrittgetriebe mit HS-Kurvenprofil

Bei herkömmlichen Lagefunktionen von Kurvengetrieben werden im Langsamlauf der Maschine die technologischen Forderungen im Rahmen der Fertigungsgenauigkeit exakt eingehalten. Reale Systeme weisen jedoch Elastizitäten und Spiel auf, sodass bei höheren Drehzahlen die wirkliche Bewegung des Abtriebsgliedes infolge störender Schwingungen von der gewünschten Lagefunktion abweicht. Bei der Anwendung von HS-Kurvenprofilen wird ein Toleranzbereich für die Einhaltung der „idealen“ Bewegung vorgesehen.

Für das Berechnungsmodell eines Schrittgetriebes nach Bild 4.28b wird das dynamische Verhalten zum einen für eine Lagefunktion in Form der normierten Übertragungsfunktion „Bestehorn-Sinoide“ nach VDI-Richtlinie 2143 und zum anderen für ein daraus abgeleitetes HS-Profil mit vier Harmonischen untersucht. Es soll ermittelt werden, bis zu welcher Drehzahl ein Betrieb möglich ist, wenn der zulässige Toleranzbereich ausgenutzt wird.

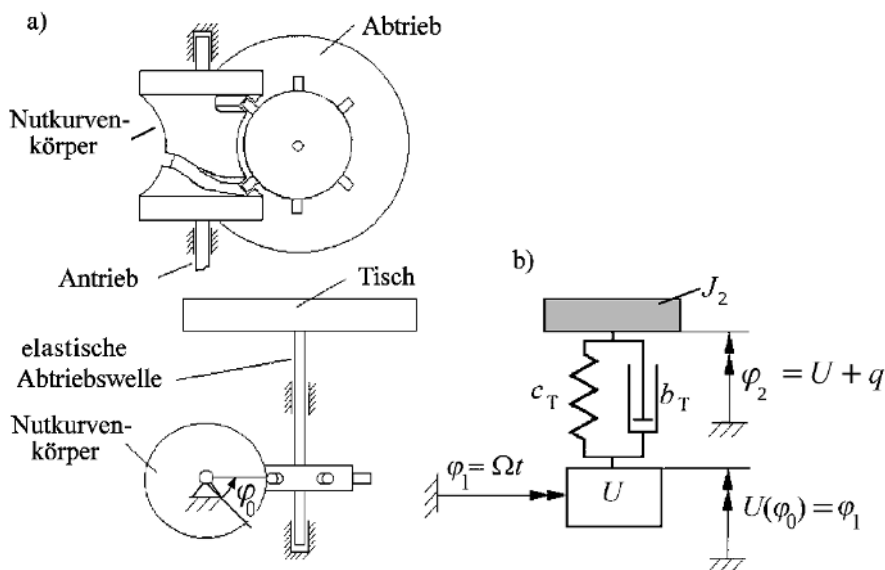


Bild 4.28 Kurvenschrittgetriebe; a) Skizze, b) Berechnungsmodell

Gegeben sind die Parameterwerte

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} U_S \\ \varphi^* \\ n \\ J_2 \\ c_T \\ D \\ \Delta U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30^\circ \\ 200^\circ \\ 300 \text{ min}^{-1} \\ 0,22 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ 5\,400 \text{ N} \cdot \text{m} \\ 0,02 \\ 0,3^\circ \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Schwenkwinkel, vgl. Bild 4.29} \\ \text{Antriebsdrehwinkel pro Schritt, vgl. Bild 4.29} \\ \text{Betriebsdrehzahl} \\ \text{Trägheitsmoment des Abtriebsgliedes} \\ \text{Drehfederkonstante der Abtriebswelle} \\ \text{Dämpfungsgrad des Torsionsschwingers} \\ \text{zulässige Rastabweichung („Toleranzbereich“)} \end{array} \quad (4.130)$$

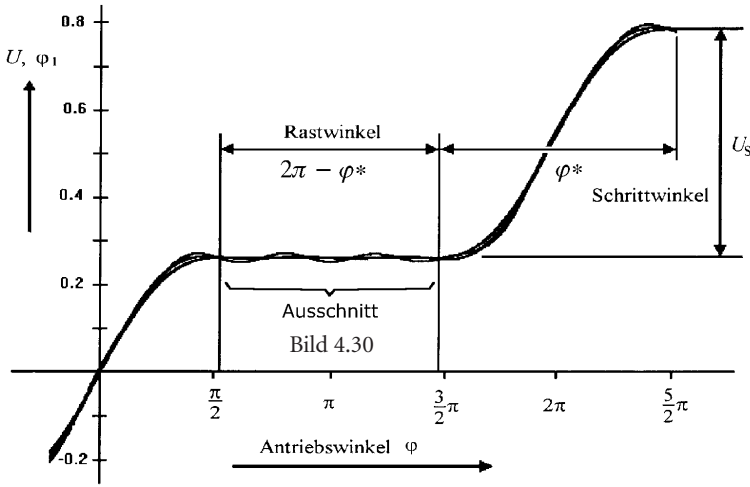


Bild 4.29 Lagefunktion eines Schrittgetriebes

Die Bewegungsgleichung des kinematisch erregten Schwingers nach Bild 4.28 ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht an der Abtriebsdrehmasse J_2 . Sie ist aus (4.115) bekannt:

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + b_T \cdot (\dot{\varphi}_2 - \dot{U}) + c_T \cdot (\varphi_2 - U) = 0. \quad (4.131)$$

Benutzt man den Relativwinkel der Abtriebswelle als verallgemeinerte Koordinate

$$q = \varphi_2 - U; \quad \ddot{q} = \ddot{\varphi}_2 - \ddot{U} = \ddot{\varphi}_2 - \Omega^2 U''; \quad ()' = \frac{d()}{d\varphi}, \quad (4.132)$$

so erhält man dafür die Bewegungsgleichung.

Die Lagefunktion nullter Ordnung bei einem Schrittgetriebe kann als Überlagerung einer gleichförmigen mit einer periodischen Bewegung interpretiert werden. Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverlauf sind dann periodische Funktionen des Antriebswinkels φ_0 , vgl. Bild 4.29. Es gilt für die Lagefunktionen:

$$U(\varphi_0) = \frac{U_S}{2\pi} \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\varphi_0. \quad (4.133)$$

Der Kosinusanteil entfällt in (4.133), da der periodische Anteil eine antimetrische Funktion ist, vgl. Bild 4.29. Die Bewegungsgleichung (4.131) erhält damit die Form, vgl. (4.118):

$$\ddot{q} + 2D\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = -\Omega^2 U'' = \Omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \sin k\Omega t. \quad (4.134)$$

Vergleicht man die Eigenfrequenz $f = 1/2\pi \sqrt{c_T(1-D^2)/J_2} = 24,9$ Hz mit der Grund-Erregerfrequenz $f_{\text{err}} = \Omega/(2\pi) = n/60 = 5$ Hz (Betriebsdrehzahl), so ergibt sich ein Abstimmungsverhältnis von $\eta \approx 0,2$. Somit besteht die Gefahr der Resonanz mit der fünften Harmonischen der Lagefunktion.

Die Fourierkoeffizienten b_k der Lagefunktion sind vom Schwenkwinkel und der Rastbreite abhängig:

$$b_k = \frac{8\pi U_S}{\varphi^{*3} \left[\left(\frac{2\pi}{\varphi^*} \right)^2 - k^2 \right] k^2} \cdot \sin \frac{k\varphi^*}{2} \quad (4.135)$$

Es ergibt sich daraus für $k = 1, \dots, 6$ mit $\varphi^* = 200^\circ \hat{=} 10\pi/9$:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0,259\,789 \cdot U_S; & b_4 &= -0,001\,860 \cdot U_S \\ b_2 &= 0,066\,481 \cdot U_S; & b_5 &= -0,000\,698 \cdot U_S \\ b_3 &= 0,009\,872 \cdot U_S; & b_6 &= 0,000\,434 \cdot U_S. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Damit entstehen Resonanzspitzen für den Relativwinkel gemäß (4.124). Bild 4.29 zeigt den Verlauf der Schrittbewegung bei zwei verschiedenen Lagefunktionen.

Es fällt auf, dass mit einem HS-Profil die Rast nicht exakt eingehalten wird. Dies ist durchaus zulässig, wenn die Abweichungen innerhalb des Toleranzbereichs bleiben ($\Delta U = \pm 0,01 \cdot U_S$).

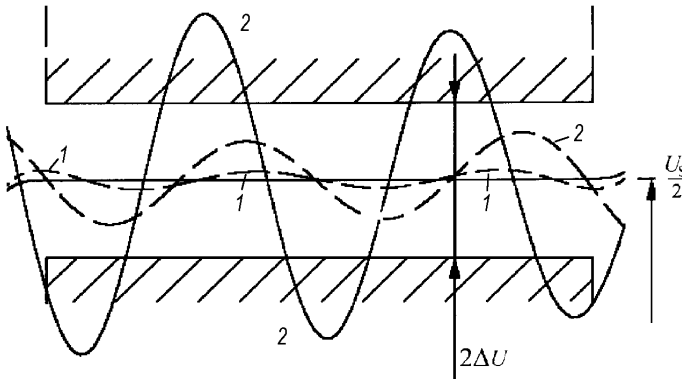


Bild 4.30 Verlauf der Schrittbewegung; Ausschnitt aus Bild 4.29

(Volllinie: Besthorn-Sinusoide, gestrichelt: HS-Profil); Kurven 1: $\eta = 0$, Kurven 2: $\eta = 0,5$

Die Fourierkoeffizienten, welche das „echte“ HS-Profil bestimmen, lauten im Gegensatz zu (4.136)

$$\begin{aligned} b_1 &= 0,249\,04 \cdot U_S; & b_2 &= 0,054\,63 \cdot U_S \\ b_3 &= 0,006\,88 \cdot U_S & b_k &= 0 \quad \text{für } k \geq 4. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Bild 4.30 zeigt die Bewegungsverläufe, die sich bei den zur Auswahl stehenden Lagefunktionen am Abtriebsglied im Rastbereich einstellen, im Vergleich zu den Lagefunktionen selbst. Dabei wird sichtbar, dass bei der Bestehorn-Sinoide der Abtriebsbewegung starke Schwingungen überlagert sind, während beim HS-Profil wesentlich geringere Abweichungen auftreten. Bild 4.31 zeigt die maximale relative Rastabweichung in Abhängigkeit vom Abstimmungsverhältnis, das der Maschinendrehzahl proportional ist. Die Resonanzstellen bei

$$\eta = \frac{1}{k}, \quad k = 4, 5, 6, 7, 8 \quad (4.138)$$

sind für die Bestehorn-Sinoide und für die ab $k = 5$ „beschnittene“ Bestehorn-Sinoide deutlich zu erkennen.

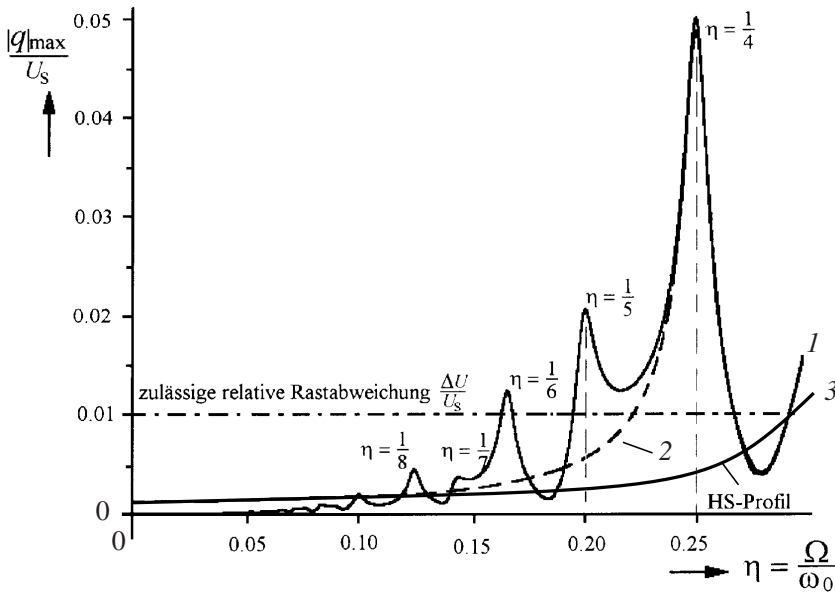


Bild 4.31 Maximale Rastabweichung als Funktion der Drehzahl

Kurve 1: Bestehorn-Sinoide, vgl. (4.136),

Kurve 2: „beschnittene“ Bestehorn-Sinoide, vgl. (4.136) mit $b_5 = b_6 = 0$,

Kurve 3: HS-Profil, vgl. (4.137)

Die Höhe dieser Resonanzspitzen folgt aus (4.124) und übersteigt schon für die 5. bis 6. Harmonische das zulässige Maß. Die Resonanz mit der vierten Harmonischen tritt bei beiden Lagefunktionen auf und ist bei der „beschnittenen“ Bestehorn-Sinoide von gleicher Größe wie bei der normalen Bestehorn-Sinoide.

Durch ein „echtes“ HS-Profil mit $K = 3$ Harmonischen kann man das maximal erreichbare Abstimmungsverhältnis erhöhen, da es bei $\eta = 1/4$ gar keine Resonanzstelle hat, vgl. Kurve 3 in Bild 4.31.

Für das HS-Profil entfallen im unteren Bereich der Betriebsdrehzahl die resonanzbedingten starken Schwingungen. Neben der positiven Wirkung hinsichtlich der Geräuschemission und des Verschleißverhaltens ist es damit möglich, die größte erreichbare Drehzahl um ca. 80 % zu erhöhen, ohne die Toleranzgrenzen für die Abtriebsbewegung zu verletzen.

Erfahrungsgemäß erlaubt die Anwendung von HS-Profilen bei Kurvengetrieben einen schwingungsfreien Betrieb bis zu etwa dem *1,3 bis 1,6-fachen Abstimmungsverhältnis* gegenüber traditionellen Kurvenprofilen zu erreichen. Dies bedeutet in der Praxis eine entsprechend höhere Betriebsdrehzahl, ohne dass störende Schwingungen am Abtriebsglied auftreten.

4.3.3

Transiente Erregung

4.3.3.1

Mehrere Momentensprünge

Transiente Erregungen sind nichtperiodische oder kurzzeitig wirkende Erregungen bei Übergangsvorgängen. Solche Erregungen treten z. B. bei Anfahr-, Brems-, Beschleunigungs- oder Verzögerungsvorgängen auf. Bei manchen Antrieben oder Bremsen werden die maximalen Momente nicht sofort aufgebracht, sondern nach und nach in einzelnen Stufen. Von der Größe und zeitlichen Reihenfolge solcher Momentensprünge sind die dynamischen Belastungen im Schwingungssystem abhängig.

Ein Momentensprung ist der härteste Belastungsfall, da „in der Zeit null“ die Belastung auf ihren Maximalwert springt. Die weiteren Darstellungen in Abschnitt 4.3.3.2 werden zeigen, unter welchen Bedingungen dieser extrem starke Belastungsfall auch für in endlicher Zeit zunehmende Belastungen eine brauchbare Näherung sein kann.

Für den in Bild 4.21a dargestellten Torsionsschwinger werden die Torsionsmomente berechnet, die nach mehreren Momentensprüngen in der Antriebswelle entstehen. Die Ergebnisse lassen sich auf die in Tabelle 4.2 skizzierten Systeme und auf beliebige lineare Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden übertragen, wenn man den Torsionsschwinger als modalen Schwinger auffasst, vgl. Kapitel 6. Aus diesem Grunde lassen sich die folgenden Betrachtungen auch auf das Lastpendeln eines Krans, auf einen Schrittmotor, auf einen durch mehrere Schaltstufen gesteuerten Asynchronmotor, auf mehrstufige Bremsen u. a. Fälle anwenden, worauf aber hier nicht weiter eingegangen werden kann, vgl. [4].

Es soll das innere Moment bei einem ungedämpften Schwinger ($b_T = 0, D = 0$) ermittelt werden, auf den im unbelasteten Zustand plötzlich ein Momentensprung $M_{an} = M_{10}$ auf die Scheibe 1 wirkt. Die Lösung von (4.113) und (4.114) lautet für die Anfangsbedingungen

$$t = t_0 = 0: \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0; \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \quad (4.139)$$

im Bereich $0 \leq t \leq t_1$ wie folgt:

$$\varphi_1(t) = \frac{M_{10}}{J_1 + J_2} \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{M_{10}J_2(1 - \cos \omega t)}{(J_1 + J_2)\omega^2 J_1} \quad (4.140)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{M_{10}}{J_1 + J_2} \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{M_{10}(1 - \cos \omega t)}{(J_1 + J_2)\omega^2}. \quad (4.141)$$

Das Torsionsmoment folgt aus der Lösung der aus (4.117) bekannten Bewegungsgleichung mit $D = 0$ und $M_2 = 0$:

$$\ddot{M} + \omega^2 M = \frac{c_T M_{\text{an}}}{J_1} \quad (4.142)$$

im Intervall $0 \leq t \leq t_1$ zu:

$$M(t) = M^{(1)}(t) = M_{10} \frac{J_2}{J_1 + J_2} (1 - \cos \omega t). \quad (4.143)$$

Dieses Ergebnis ist in (4.40) als Sonderfall enthalten. Durch das Hochzeichen (1) wird ausgedrückt, dass dies das Moment während des ersten Intervalls (nach dem ersten Sprung zur Zeit $t_0 = 0$) ist. Beginnt zur Zeit $t = t_1$ an der Scheibe 1 das Moment M_{11} zu wirken, dann wird ein zusätzliches Moment durch die Momentendifferenz $(M_{11} - M_{10})$ angeregt, und es gilt für $t > t_1$:

$$M^{(2)}(t) = \frac{J_2}{J_1 + J_2} [M_{10}(1 - \cos \omega t) + (M_{11} - M_{10})(1 - \cos \omega(t - t_1))]. \quad (4.144)$$

Es überlagert sich also dem bisherigen Momentenverlauf ein zweiter, der zur Zeit t_1 beginnt.

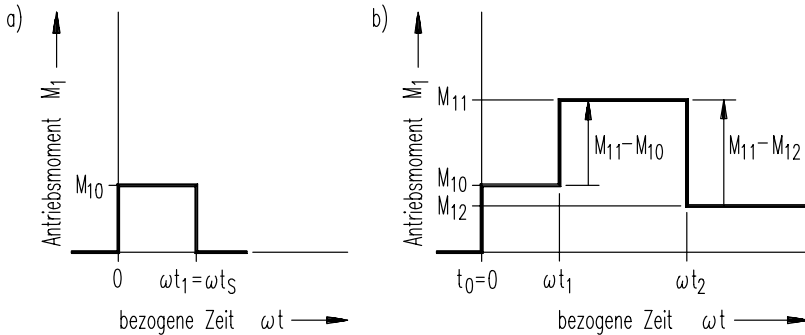


Bild 4.32 Folge von Momentensprüngen; a) Rechteckstoß, b) drei Momentensprünge

Falls zur Zeit $t_1 = t_s$ das Antriebsmoment wieder auf den Wert null zurückspringt, entsteht ein so genannter Rechteckstoß, vgl. Bild 4.32a. Er wird in Abschnitt 6.5.3 für Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden ausführlich behandelt. Hier soll nur das Ergebnis angegeben werden, welches aus (4.144) folgt, wenn man darin $M_{11} = 0$ setzt. Nach der Umformung mithilfe von Additionstheoremen folgt daraus:

$$M = \frac{2M_{10}J_2}{J_1 + J_2} \cdot \sin \frac{\omega t_s}{2} \sin \left[\omega \left(t - \frac{t_s}{2} \right) \right]; \quad t > t_s. \quad (4.145)$$

Wird das Verhältnis t_s/T (mit $T = 2\pi/\omega$) eingeführt, entsteht der Ausdruck

$$M = \frac{M_{10}J_2}{1+\mu} \cdot 2 \sin\left(\pi \frac{t_s}{T}\right) \sin\left[\pi \left(\frac{2t}{T} - \frac{t_s}{T}\right)\right]. \quad (4.146)$$

Man erkennt, dass für alle geradzahigen Verhältnisse von $t_s/T = n$ keine Momentenschwingung auftritt. Dies trifft jedoch nur für $t_s > T$ im Bereich $t > t_s$ zu.

Zur Bestimmung des Maximalwertes müssen beide Etappen betrachtet werden. Es gilt

$0 < t < t_s$:

$$\begin{aligned} M_{\max} &= 2 \frac{M_{10}J_2}{J_1 + J_2} & \text{für} & \quad t_s \geq \frac{T}{2} \\ M_{\max} &= \frac{M_{10}J_2}{J_1 + J_2} \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{t_s}{T}\right)\right] & \text{für} & \quad t_s < \frac{T}{2} \end{aligned} \quad (4.147)$$

$t > t_s$:

$$M_{\max} = 2 \frac{M_{10}J_2}{J_1 + J_2} \sin\left(\pi \frac{t_s}{T}\right) \approx \frac{2M_{10}J_2}{J_1 + J_2} \left[\frac{\pi t_s}{T} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi t_s}{T}\right)^3 + \dots\right]. \quad (4.148)$$

Für kurze Stöße ($t_s \ll T/2$) lässt sich die Funktion $\sin(\pi t_s/T)$ in die angegebene Reihe entwickeln.

Bei mehreren Momentensprüngen zu den Zeiten t_j ($j = 1, 2, \dots, J$) kommt mit jedem j ein weiterer Summand hinzu. Nach insgesamt J Momentensprüngen gilt also für das Torsionsmoment

$$M^{(J)}(t) = \frac{J_2}{J_1 + J_2} \sum_{j=1}^J (M_{1j-1} - M_{1j-2}) [1 - \cos \omega(t - t_{j-1})]; \quad t \geq t_j. \quad (4.149)$$

Dabei ist $M_{1,-1} = 0$ zu setzen. Wegen $\cos[\omega(t - t_j)] = \cos \omega t \cos \omega t_j + \sin \omega t \sin \omega t_j$ kann man (4.149) so umformen, dass man den Mittelwert M_{J-1} von denjenigen Momentenkomponenten trennen kann, die sich mit der Eigenfrequenz ändern:

$$\begin{aligned} M^{(J)}(t) &= \frac{J_2}{J_1 + J_2} \left\{ M_{J-1} - \sum_{j=1}^J [(M_{1j-1} - M_{1j-2}) \cos \omega(t - t_{j-1})] \right\} \\ &= \frac{J_2}{J_1 + J_2} [M_{J-1} - \hat{M}^{(J)} \cos \omega(t - t^*)]; \quad t \geq t_j. \end{aligned} \quad (4.150)$$

Auf die Angabe der Formel für t^* wird hier verzichtet. Die Momentenamplitude ergibt sich nach dem J -ten Sprung zu

$$\hat{M}^{(J)} = \sqrt{\left[\sum_{j=1}^J (M_{1j-1} - M_{1j-2}) \cos \omega t_{j-1}\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^J (M_{1j-1} - M_{1j-2}) \sin \omega t_{j-1}\right]^2}. \quad (4.151)$$

Das maximale Moment der so genannten *Restschwingung* nach dem J -ten Momentensprung ist also

$$M_{\max} = \frac{J_2}{J_1 + J_2} (|M_{J-1}| + \hat{M}^{(J)}). \quad (4.152)$$

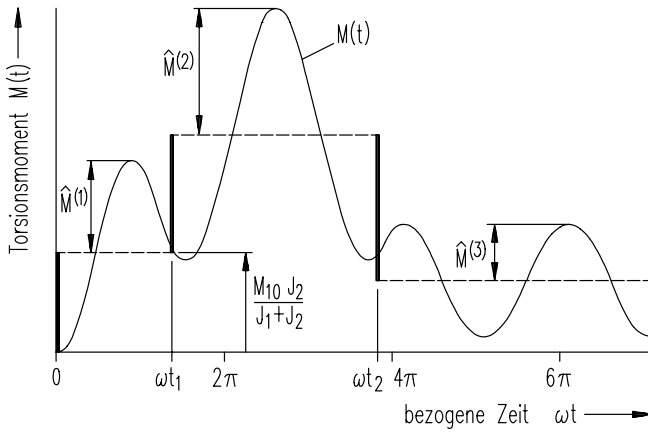


Bild 4.33 Torsionsmoment bei drei Momentensprüngen

Bild 4.33 zeigt einen typischen Verlauf des Torsionsmomentes als Folge von drei Momentensprüngen. Bei der Auslegung von Antrieben kann eine Aufgabe darin bestehen, für einen transienten Vorgang eine optimale Aufteilung der Schaltzeiten und Momentensprünge vorzunehmen. Dabei ist die Amplitude der Restschwingungen von besonderem Interesse. Es gibt zwei Bedingungen dafür, dass diese Amplitude null ist. Sie folgen aus (4.151) und lauten

$$\sum_{j=1}^J (M_{1j-1} - M_{1j-2}) \cos \omega t_{j-1} = 0; \quad \sum_{j=1}^J (M_{1j-1} - M_{1j-2}) \sin \omega t_{j-1} = 0. \quad (4.153)$$

Aus ihnen können günstige Zeitpunkte und Größen der Momentensprünge berechnet werden, vgl. [4] und Aufgabe A4.5.

4.3.3.2 Anlauffunktionen

Belastungen werden in Wirklichkeit nicht sprunghaft aufgebracht, wie in Abschnitt 4.3.3.1 angenommen, sondern in einer endlichen Zeit, die hier als *Anlaufzeit* t_a bezeichnet wird. Es soll die Frage beantwortet werden, welchen Einfluss der Zeitverlauf des Antriebsmomentes $M_1 = M_{an}(t)$ auf das Torsionsmoment in der Welle hat, wenn es während der Anlaufzeit von null auf den Maximalwert M_{10} ansteigt.

In Bild 4.34 sind vier verschiedene Momentenverläufe mit den zugehörigen Formeln dargestellt. Es wird ebenso wie in Abschnitt 4.3.3.1 der Torsionsschwinger aus Bild 4.21a betrachtet, für dessen Torsionsmoment (4.142) gilt. Es soll hier nur Fall 1 aus Bild 4.34 vorgerechnet werden. Für das linear ansteigende Antriebsmoment

$$M_1(t) = M_{10} \frac{t}{t_a}; \quad 0 \leq t \leq t_a \quad (4.154)$$

lautet die Lösung von (4.142) für die Anfangsbedingungen $t = 0: M = 0, \dot{M} = 0$:

$$M(t) = \frac{M_{10} J_2}{J_1 + J_2} \left(\frac{t}{t_a} - \frac{\sin \omega t}{\omega t_a} \right); \quad 0 \leq t \leq t_a. \quad (4.155)$$

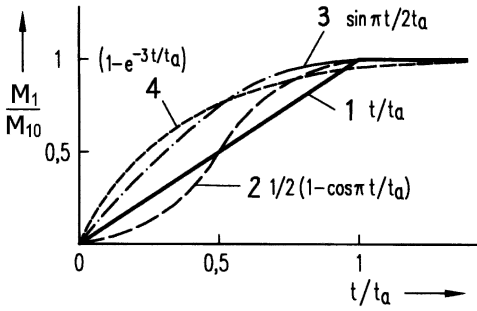


Bild 4.34 Zum Vergleich von Anlauffunktionen

Ab der Zeit $t = t_a$ wird dieselbe Funktion (um t_a zeitversetzt) mit dem negativ ansteigendem Moment $-M_{10}(t - t_a)/t_a$ nochmals angeregt, sodass aus dieser Überlagerung danach die Erregung mit dem konstanten Wert M_{10} verbleibt:

$$\Delta M(t) = \frac{-M_{10}J_2}{J_1 + J_2} \left(\frac{t - t_a}{t_a} - \frac{\sin \omega(t - t_a)}{\omega t_a} \right); \quad t \geq t_a. \quad (4.156)$$

Aus der Superposition dieser beiden Funktionen entsteht der Verlauf

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{M_{10}J_2}{J_1 + J_2} \left[1 + \frac{\sin \omega(t - t_a) - \sin \omega t}{\omega t_a} \right] \\ &= \frac{M_{10}J_2}{J_1 + J_2} \left[1 - \frac{2}{\omega t_a} \sin \frac{\omega t_a}{2} \cos \omega(t - t_a/2) \right]; \quad t \geq t_a. \end{aligned} \quad (4.157)$$

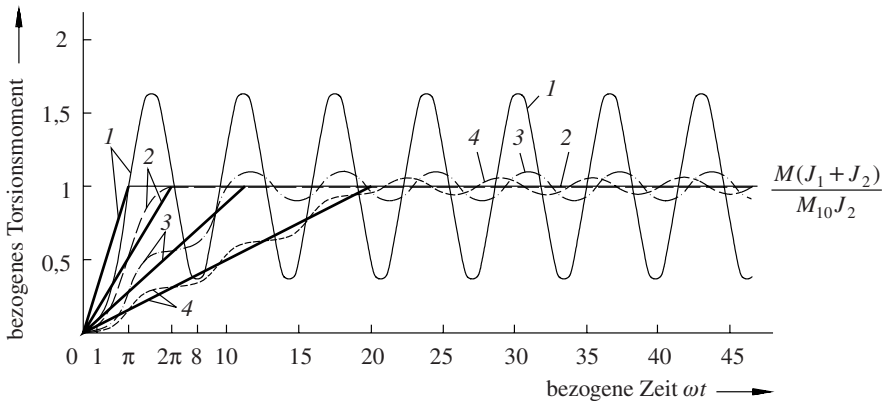


Bild 4.35 Verlauf des Torsionsmomentes als Funktion der Anlaufzeit

Kurve 1: $t_a/T = 0,5$; Kurve 2: $t_a/T = 2$; Kurve 3: $t_a/T = 1,8$; Kurve 4: $t_a/T = 3,2$

Bild 4.35 zeigt den Verlauf des Torsionsmomentes, der sich aus den Lösungen (4.155) und (4.157) zusammensetzt. Für alle geradzahigen Verhältnisse t_a/T verbleibt keine Restschwingung.

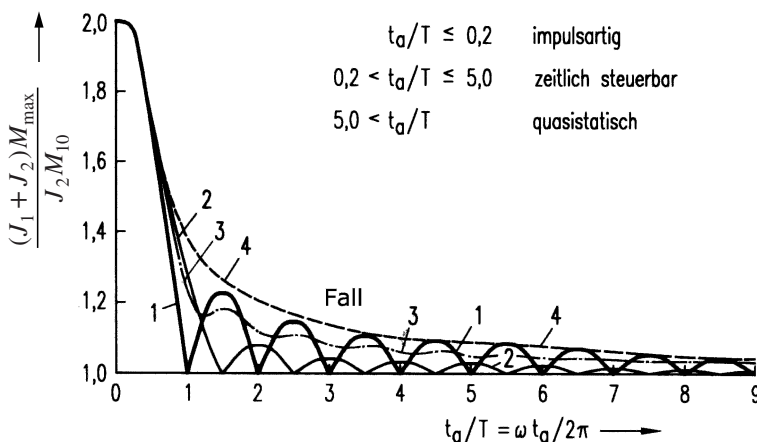


Bild 4.36 Maximales residuelles Torsionsmoment bei den Anlauffunktionen gemäß Bild 4.34

Bild 4.36 zeigt die Maximalwerte des residuellen Torsionsmomentes als Funktion der relativen Anlaufzeit, und zwar nicht nur für den hier berechneten Fall der stückweise linearen Anlauffunktion, sondern für die vier verschiedenen Fälle aus Bild 4.34. Man sieht, dass kurzzeitige Anlaufvorgänge ($t_a/T \ll 1$) sich wie ein Sprung auswirken. Es gilt

$$M_{\max} \approx \frac{M_{10}J_2}{J_1 + J_2} \left[2 - \frac{(\omega t_a)^2}{24} \right]; \quad t_a/T \leq 0,2. \quad (4.158)$$

Die Amplitude nimmt mit wachsendem Verhältnis t_a/T schnell ab. Für langsame Anlaufvorgänge ($t_a/T < 5$) treten nur geringe Schwingungen auf, und die Ergebnisse unterscheiden sich bei den verschiedenen Anlauffunktionen kaum. Dafür gilt die Asymptote

$$M_{\max} \approx \frac{M_{10}J_2}{J_1 + J_2} \left(1 + \frac{2}{\omega t_a} \right); \quad t_a/T \geq 5. \quad (4.159)$$

Praktisch von Bedeutung ist die Erkenntnis, dass sich durch die Form der Anlauffunktion nur etwa im Bereich $0,2 \leq t_a/T \leq 5$ das maximale Torsionsmoment beeinflussen lässt. In den anderen Bereichen hat der Verlauf der Anlauffunktion nur wenig Einfluss, sodass es aussichtslos ist, durch irgendwelche Steuerungen die dynamischen Belastungen zu vermindern, wenn $t_a/T < 0,2$ ist (näherungsweise kann man dabei mit der Sprungfunktion rechnen).

4.3.4

Aufgaben A4.4 bis A4.6

A4.4 Verschiebung einer Resonanzstelle

In einem bereits fertig gestellten Antriebssystem traten bei Betriebsdrehzahl intensive Geräusche auf, sodass man vermuten musste, dass eine kritische Drehzahl mit der Zahneingriffsfrequenz vorliegt und Zerstörungen im Dauerbetrieb auftreten. Es zeigte sich, dass die zehnte Eigenform in der Nähe eines Zahnradpaares einen Schwingungsbauch hatte. Es sollen am vorhandenen Objekt konstruktive Maßnahmen getroffen

werden, um die Resonanzstelle zu verschieben. Dabei kommt ein Einsatz von Zahnradern mit einem anderen Zahnradmodul in Frage, aber das Übersetzungsverhältnis der Zahnradstufe, der Achsabstand, die Drehmassen und die Torsionssteifigkeiten der Wellen können aus konstruktiven Gründen nur wenig geändert werden.

Gegeben:

Zähnezahlen der bisherigen Zahnräder	$z_1 = 19; z_2 = 43$
Drehzahl der Antriebswelle	$n_1 = 1450 \text{ min}^{-1}$
Zehnte Eigenfrequenz des Antriebssystems	$f_{10} = 450 \text{ Hz}$
Modul der Zahnradpaarung	$m = 6$
Zulässige relative Änderung der Übersetzung	$\pm 2,5 \%$
Höchstens erreichbare relative Änderung der Eigenfrequenz	$\pm 5 \%$

Gesucht:

1. Abstimmungsverhältnis der beobachteten kritischen Drehzahl
2. Varianten für Zähnezahlen der beiden Zahnräder
3. Erreichbare Änderung des kritischen Abstimmungsverhältnisses

A4.5 Belastung bei dreistufiger Bremsung

Ein Antriebssystem, dessen Modell dem freien Torsionsschwinger von Bild 4.3b entspricht, bewegt sich schwingungsfrei mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_0 . Es soll durch drei Momentensprünge innerhalb der Zeit t_2 auf die Winkelgeschwindigkeit Ω_2 abgebremst werden, vgl. Bild 4.32b. Anfangs ($t = 0$) wirkt ein konstantes Bremsmoment M_{10} auf die Scheibe 1, nach einer Zeit t_1 das Moment M_{11} . Ab dem Zeitpunkt t_2 wirkt das Moment M_{12} , mit dem das Antriebssystem nach der Verzögerung weiter angetrieben wird. Nach dem Zeitpunkt t_2 sollen keine Restschwingungen mehr in der Welle vorhanden sein.

Gegeben:

Winkelgeschwindigkeit zu Beginn	Ω_0
Winkelgeschwindigkeit am Ende	Ω_2
Trägheitsmomente	J_1, J_2
Eigenkreisfrequenz	$\omega = \sqrt{c_T(J_1 + J_2)/(J_1 J_2)}$
Bremszeit	t_2
Endmoment	M_{12}

Gesucht:

1. Bedingung, welche die Momente M_{10} , M_{11} und die Zeit t_1 erfüllen müssen
2. Winkelgeschwindigkeiten der Scheiben J_1 und J_2 im Intervall $0 \leq t \leq t_1$
3. Bedingungen für M_{10} , M_{11} und ωt_1 , damit die Restschwingungen verschwinden
4. M_{10} , M_{11} und ωt_1 für den Fall $M_{12} = 58,6 \text{ N}$; $\omega t_2 = 9\pi/4$;
 $(J_1 + J_2)(\Omega_2 - \Omega_0) = 400\pi/\omega$.

A4.6 Deutung von Messergebnissen (6-Zylinder-Viertaktmotor)

Bild 4.37 zeigt die maximalen Werte des Torsionsmoments innerhalb der Welle eines 6-Zylinder-Viertakt-Dieselmotors, bei dem Resonanzen mit der ersten und zweiten von null verschiedenen Eigenfrequenz auftraten.

Gegeben:

Eigenfrequenzen $f_2 = 213 \text{ Hz}$, $f_2 = 310 \text{ Hz}$
 Resonanzkurve gemäß Bild 4.37 im Drehzahlbereich $n = 1800$ bis 4500 min^{-1} .

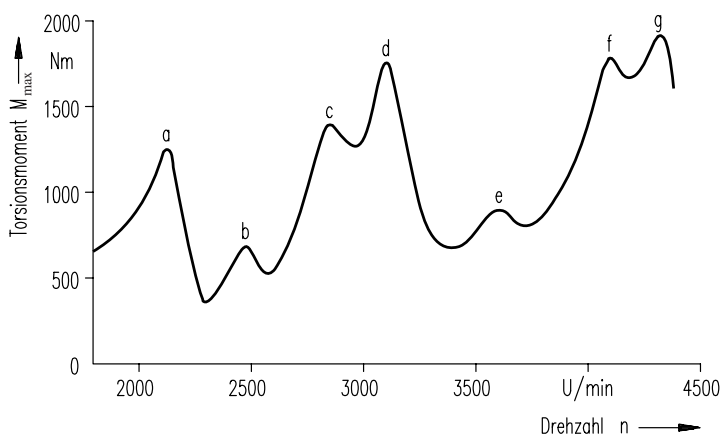


Bild 4.37 Maximalmoment als Funktion der Drehzahl

Gesucht:

1. Welche Resonanzordnungen treten auf?
2. Wo liegen weitere kritische Drehzahlen im unteren Drehzahlbereich?

4.3.5

Lösungen L4.4 bis L4.6

L4.4 Das Übersetzungsverhältnis der Zahnradstufe beträgt

$$i = \frac{z_1}{z_2} = \frac{19}{43} = 0,441\,86. \quad (4.160)$$

Die Zahneingriffsfrequenz der Zahnräder ist

$$f_e = \frac{n_1 z_1}{60} = 1450 \frac{19}{60} = 459,2 \text{ Hz}. \quad (4.161)$$

Das Abstimmungsverhältnis bei Betriebsdrehzahl beträgt also

$$\eta_{10} = \frac{f_e}{f_{10}} = \frac{459,2}{450} = 1,100. \quad (4.162)$$

Man kann die Zahneingriffsfrequenz verändern, indem man das geforderte Übersetzungsverhältnis mit anderen Zähnezahlen beider Zahnräder erreicht.

Es gilt die Nebenbedingung, dass der Achsabstand s der beiden Wellen, welche die kämmenden Zahnräder tragen, auch etwa erhalten bleibt (Korrekturverschiebung möglich):

$$s = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)m = \frac{1}{2}(19 + 43)6 \text{ mm} = 186 \text{ mm}. \quad (4.163)$$

Es müssen für den neuen Modul m^* und die veränderten Zähnezahlen z_1^* und z_2^* das bisherige Übersetzungsverhältnis und der bisherige Achsabstand etwa erhalten bleiben. Es gelten also die Bedingungen

$$\frac{z_1^*}{z_2^*} \approx 0,441\,86 = i; \quad \frac{1}{2}m^*(z_1^* + z_2^*) \approx \frac{1}{2}m(z_1 + z_2) = s. \quad (4.164)$$

Aus diesen beiden „Ungefähr“-Gleichungen folgt

$$z_1^* \approx \frac{m(z_1 + z_2)i}{m^*(1+i)}; \quad z_2^* \approx \frac{m(z_1 + z_2)}{m^*(1+i)}. \quad (4.165)$$

Für den Modul $m^* = 5$ ergeben sich die Zähnezahlen $z_1^* \approx 22,8$ und $z_2^* \approx 51,6$. Für den Modul $m^* = 7$ ergeben sie sich zu $z_1^* \approx 16,3$ und $z_2^* \approx 36,9$. Es kommen natürlich nur ganze Zahlen in Frage, also

$$\text{Modul } m^* = 5: \quad \underline{\underline{z_1^* = 23; \quad z_2^* = 51;}} \quad i^* = \frac{23}{51} = 0,45098; \quad s^* = 185 \text{ mm}$$

$$\text{Modul } m^* = 7: \quad \underline{\underline{z_1^* = 16; \quad z_2^* = 37;}} \quad i^* = \frac{16}{37} = 0,43243; \quad s^* = 185,5 \text{ mm.}$$

Der Achsabstand s kann derselbe bleiben, wenn eine Profilverschiebung der Verzahnung vorgenommen wird. Die Übersetzungsverhältnisse ändern sich weniger als 2,5 %. Würde man beim Modul $m^* = 7$ für das kleinere Zahnrad $z_1 = 17$ Zähne wählen (weil Primzahlen bei Zähnezahlen vorteilhaft sind), dann würde sich das Übersetzungsverhältnis ($17/37 = 0,45945$) unzulässig stark (4 %) ändern.

Mit dem *kleineren Modul* ($m^* = 5$) würde die Zahneingriffsfrequenz erhöht. Zusätzlich wäre es empfehlenswert (z. B. durch ein größere Drehmasse und/oder eine weichere Drehfederkonstante) die *Eigenfrequenz zu senken* (wobei laut Aufgabenstellung maximal 5 % durch konstruktive Änderungen erreichbar sind). Damit ist das Abstimmungsverhältnis bei Realisierung von Variante 1:

$$\underline{\underline{\eta_{10}^*}} = \frac{n_1 z_1^*}{0,95 \cdot 60 f_{10}} = \frac{1450 \cdot 23}{0,95 \cdot 60 \cdot 450} = \underline{\underline{1,300}}. \quad (4.166)$$

Die Resonanzstelle wäre vermieden, aber der Betrieb oberhalb der Resonanzstelle erfordert, dass die Resonanzdrehzahl zu durchfahren ist.

Mit dem *größeren Modul* ($m^* = 7$) würde die Zahneingriffsfrequenz gesenkt. Man könnte laut Aufgabenstellung (z. B. durch ein kleinere Drehmasse und/oder eine härtere Drehfederkonstante) die *Eigenfrequenz auf* $1,05 f_{10}$ *erhöhen*. Damit würde das Abstimmungsverhältnis

$$\underline{\underline{\eta_{10}^*}} = \frac{n_1 z_1^*}{1,05 \cdot 60 f_{10}} = \frac{1450 \cdot 16}{1,05 \cdot 60 \cdot 450} = \underline{\underline{0,818}} \quad (4.167)$$

betragen, wenn Variante 2 konstruktiv realisiert wird. Die kritische Drehzahl liegt oberhalb der Betriebsdrehzahl und würde gar nicht erreicht.

Die endgültige Entscheidung für die zweckmäßige Variante ist erst möglich, wenn auch die Festigkeit und Lebensdauer der Verzahnung bei dem veränderten Modul (Profilverschiebung) nachgewiesen worden ist.

- I.4.5** Eine Beziehung zur gesamten Bremszeit t_2 kann man mit dem Drallsatz finden, vgl. Abschnitt 2.3. Die Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Zeitintegral der eingepägten Momente. Also gilt:

$$(J_1 + J_2)(\Omega_2 - \Omega_0) = M_{10}t_1 + M_{11}(t_2 - t_1) = \int_0^{t_2} M(t) dt = \Delta D. \quad (4.168)$$

Beim elastischen System gemäß Bild 4.3 lauten die Anfangsbedingungen für die aus (4.113) und (4.114) bekannten Bewegungsgleichungen:

$$t = 0: \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0; \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = \Omega_0. \quad (4.169)$$

Nach der Bestimmung der Integrationskonstanten erhält man gemäß (4.140) und (4.141) folgende Lösungen für die beiden Winkel im Intervall $0 \leq t \leq t_1$:

$$\varphi_1(t) = \Omega_0 t - \frac{M_{10}}{J_1 + J_2} \left[\frac{t^2}{2} + \frac{J_2(1 - \cos \omega t)}{J_1 \omega^2} \right] \quad (4.170)$$

$$\varphi_2(t) = \Omega_0 t - \frac{M_{10}}{J_1 + J_2} \left[\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} \right]. \quad (4.171)$$

Die Winkelgeschwindigkeiten folgen daraus zu

$$\dot{\varphi}_1(t) = \Omega_0 - \frac{M_{10}}{J_1 + J_2} \left[t + \frac{J_2 \sin \omega t}{J_1 \omega} \right] \quad (4.172)$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = \Omega_0 - \frac{M_{10}}{J_1 + J_2} \left[t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right]. \quad (4.173)$$

Die ersten beiden Terme in diesen Gleichungen entsprechen der Starrkörperbewegung, während der dritte Term infolge der Eigenschwingung entsteht. Durch eine Umformung könnte man diesen Term auch so schreiben, dass man im Nenner die Torsionsfederkonstante sieht. Um die Starrkörperbewegung findet eine gegensinnige Schwingung der beiden Drehmassen statt, wie es der zweiten Eigenform entspricht, vgl. Bild 4.3b. Beide Scheiben verlieren an Geschwindigkeit.

In der Welle entsteht in der ersten Etappe ein Torsionsmoment, das aus (4.143) bekannt ist. Das maximale Moment im ersten Intervall erreicht den doppelten kinetostatischen Wert nur dann, wenn die Zeit $t_1 > T/2 = \pi/\omega$ ist, also wenn mindestens eine Halbschwingung stattgefunden hat:

$$M_{\max} = \frac{2M_{10}J_2}{J_1 + J_2}. \quad (4.174)$$

Die Momente zu den anderen Zeiten folgen aus (4.149). Die Lösung der Aufgabe ist mit den in Abschnitt 4.3.3 angegebenen Gleichungen möglich. Aus (4.153) folgt für $J = 3$ Sprünge und der Anfangszeit $t_0 = 0$:

$$M_{10} + (M_{11} - M_{10}) \cos \omega t_1 + (M_{12} - M_{11}) \cos \omega t_2 = 0 \quad (4.175)$$

$$\underline{(M_{11} - M_{10}) \sin \omega t_1 + (M_{12} - M_{11}) \sin \omega t_2 = 0.} \quad (4.176)$$

Gemeinsam mit (4.168) liegen damit drei Gleichungen für die drei Unbekannten M_{10} , M_{11} und t_1 vor. Es gibt unbegrenzt viele Lösungen dieser transzendenten Gleichungen. Die Lösungen für die „Sprungzeiten“ sind abhängig von der Größe der Momente, wenn man diese vorgibt. Man kann wegen der Identität

$$(\sin \omega t_1)^2 + (\cos \omega t_1)^2 = 1 \quad (4.177)$$

zunächst aus (4.175) und (4.176) eine einzige Gleichung für $\sin \omega t_2$ und $\cos \omega t_2$ gewinnen:

$$[(M_{12} - M_{11}) \sin \omega t_2]^2 + [(M_{12} - M_{11}) \cos \omega t_2 - M_{10}]^2 = (M_{11} - M_{10})^2. \quad (4.178)$$

Eliminiert man daraus $\cos \omega t_2$, so verbleibt eine quadratische Gleichung für $\sin \omega t_2$. Der Lösungsweg soll hier nicht weiter verfolgt werden, lediglich das Ergebnis für ein Zahlenbeispiel: Für das Endmoment ($M_{12} = 58,6 \text{ N} \cdot \text{m}$), die Bremszeit ($\omega t_2 = 9\pi/4$) und die Drehimpulsänderung $\Delta D = (J_1 + J_2)(\Omega_2 - \Omega_0) = 400\pi/\omega$ erhält man u. a. die Lösung

$$\underline{M_{10} = 100 \text{ N} \cdot \text{m};} \quad \underline{M_{11} = 200 \text{ N} \cdot \text{m};} \quad \underline{\omega t_1 = \frac{\pi}{2}.} \quad (4.179)$$

Man überzeuge sich von deren Gültigkeit durch das Einsetzen in (4.168), (4.175) und (4.176).

- L4.6** Der Grundfrequenz $f_2 = 213 \text{ Hz}$ entspricht die Drehzahl $n_2 = 12\,780 \text{ min}^{-1}$, der Eigenfrequenz $f_3 = 310 \text{ Hz}$ die Drehzahl $n_3 = 18\,600 \text{ min}^{-1}$. Die kritischen Drehzahlen höherer Ordnung im betrachteten Drehzahlbereich entsprechen den lokalen Maxima der Resonanzkurve, vgl. Bild 4.37. Sie ergeben sich aus (4.112), vgl. die Zahlenergebnisse in Tabelle 4.5.

Tabelle 4.5 Kritische Drehzahlen n_{im} höherer Ordnung in 1/min

Ordnung m	3	3,5	4	4,5	5	6	7,5	9
n_2/m	4260	3651	3195	2840	2556	2130	1704	1420
n_3/m	6200	5314	4650	4133	3720	3100	2480	2066

Die fett gedruckten Zahlen entsprechen den Punkten a bis f im Bild 4.37. Es dominieren die Erregungen mit den Resonanzordnungen $m = 3; 3,5; 4,5; 6$ und 9 . Die nicht angeführten Erregerordnungen haben nur geringe Amplituden. An der Resonanzspitze bei a überlagern sich die Resonanz der 6. Harmonischen mit der ersten Eigenfrequenz und der 9. Harmonischen mit der zweiten Eigenfrequenz. Weitere größere Resonanzüberhöhungen sind im unteren Drehzahlbereich bei 1704/min und 1420/min zu erwarten.

4.4

Tilger und Dämpfer in Antriebssystemen

4.4.1

Einleitung

Die erste Aufgabe bei der Auslegung einer dynamisch belasteten Maschine besteht darin, die Ursachen der Schwingungserregungen zu eliminieren oder zu vermindern. Dazu gehören die Maßnahmen zum Massenausgleich, zum Auswuchten, zur Verminderung des Spiels, der Sprünge, Unstetigkeiten usw. Wenn diese Maßnahmen nicht ausreichen, um die störenden Schwingungen in zulässigen Grenzen zu halten, gibt es noch Möglichkeiten, durch Anordnung von Tilgern oder Dämpfern die Schwingungen zu vermindern. Dies erfordert stets einen zusätzlichen Aufwand, und da diese Elemente erst wirken, wenn tatsächlich Schwingungen auftreten, ist es ratsam, zunächst die primären Maßnahmen zur Verminderung der Erregungen auszuschöpfen.

Tilger und Dämpfer sind Bauelemente, die an ein Schwingungssystem gebaut werden, um eine Verminderung der Schwingungsamplituden oder –belastungen zu erreichen, durch

- Verstimmung des Systems durch Änderung von Parameterwerten oder
- Hinzufügen zusätzlicher Teilschwinger („Tilger“) so, dass an ausgewählten Punkten des Systems in einer gewünschten Frequenz die Schwingungsausschläge minimal werden oder
- Umwandlung der Schwingungsenergie in Wärmeenergie mithilfe von Dämpfern.

Praktische Ausführungen enthalten die VDI-Richtlinien für Dämpfer (VDI 3833, Blatt 1) und Tilger (VDI 3833 Blatt 2).

In Antriebssträngen, vorwiegend bei Fahrzeugantrieben, werden reibend angeordnete Zusatzmassen und Kupplungen mit Dauerschlupf oft zur *Schwingungsdämpfung* eingesetzt, da sie die Geräusche des Antriebsstranges vermindern, die insbesondere durch das Getrieberasseln verursacht werden. Es ist üblich, Kupplungsscheiben mit integriertem Torsionsdämpfer einzusetzen. Pendel im Fliehkraftfeld erlauben eine Anpassung der Tilgungsfrequenz an die Maschinendrehzahl, vgl. Abschnitt 4.4.5.2.

Verschiedene Tilgerkonstruktionen werden zur Verminderung der Schwingungen von Fundamenten infolge der Anregungen von Maschinen, Brücken infolge von Verkehrslasten, Türmen und Hochspannungsleitungen infolge der Anregungen durch den Wind und bei großen Maschinen und Anlagen (insbesondere Hochhäuser) infolge Anregung durch Erdbeben eingesetzt. Es gibt auch Tilger, die auf dem Effekt der Kreiselwirkung beruhen und z. B. zur Tilgung der Schwingungen in Tagebaugroßgeräten vorgeschlagen wurden.

4.4.2

Auslegung eines ungedämpften Tilgers

Bild 4.38 zeigt das für die Diskussion verwendete Modell. Seine freien Schwingungen wurden bereits in 4.2.1.1 behandelt. Die Bewegungsgleichungen lauten, vgl. (4.21):

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{T1}(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_{T1}(\varphi_1 - \varphi_2) + c_{T2}\varphi_2 &= M_2. \end{aligned} \quad (4.180)$$

Für ein harmonisches Erregermoment $M_2 = \hat{M}_2 \cos \Omega t$ kann für die partikuläre Lösung des ungedämpften Modells der Ansatz $\varphi_k = \hat{\varphi}_k \cos \Omega t$ ($k = 1, 2$) gemacht werden.

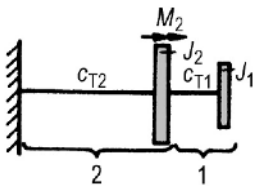


Bild 4.38
Torsionsschwinger als Tilger

Die Gleichungen (4.180) stimmen formal mit (3.50) überein, weil sich die Systeme in Bild 3.10 und 4.38 ähnlich sind.

Mit den dimensionslosen Kenngrößen

$$\mu = \frac{J_1}{J_2} = \frac{m_1}{m_2}; \quad \gamma = \frac{c_{T1}}{c_{T2}} = \frac{c_1}{c_2}; \quad \xi^2 = \frac{\gamma}{\mu}; \quad \eta^2 = \frac{\Omega^2}{c_{T2}/J_2} = \frac{\Omega^2}{c_2/m_2} \quad (4.181)$$

$$V_1 = \frac{\hat{\varphi}_1}{\varphi_{st}} = \frac{\hat{x}_1}{x_{st}}; \quad V_2 = \frac{\hat{\varphi}_2}{\varphi_{st}} = \frac{\hat{x}_2}{x_{st}}; \quad \varphi_{st} = \frac{\hat{M}_2}{c_{T2}} \quad (4.182)$$

lassen sich sowohl der Längsschwinger in Bild 3.10 als auch der Torsionsschwinger in Bild 4.38 beschreiben. Man kann die in Abschnitt 3.2.3 erhaltenen Ergebnisse mit den dimensionslosen Kenngrößen ausdrücken. So lautet das Ergebnis von (3.54):

$$V_1 = \frac{\xi^2}{(1 + \gamma - \eta^2)(\xi^2 - \eta^2) - \gamma\xi^2}; \quad V_2 = \frac{\xi^2 - \eta^2}{(1 + \gamma - \eta^2)(\xi^2 - \eta^2) - \gamma\xi^2}. \quad (4.183)$$

Nun soll untersucht werden, mit welchen Parametern es zweckmäßig ist, einen ursprünglich in Resonanz betriebenen Schwinger mit einem Freiheitsgrad (c_{T2} , J_2 , M_2) durch Anordnung eines Tilgers (c_{T1} , J_1) in der bisherigen Erregerkreisfrequenz (Ω) zu beruhigen. Für $\xi = \eta$ verschwindet die Belastung in der Feder 2, denn es ist $V_2 = 0$. Wenn die ursprüngliche Resonanzfrequenz der Tilgungsfrequenz entspricht, muss

$$\Omega^2 = \frac{c_{T2}}{J_2} = \frac{c_{T1}}{J_1} = \omega_T^2; \quad \mu = \gamma \quad (4.184)$$

gelten. Um zu klären, welchen Einfluss das Massenverhältnis μ und das Federverhältnis γ auf den Tilgungseffekt haben, ist zu beachten, dass aus konstruktiven und ökonomischen Gründen kein zu großes Trägheitsmoment des Tilgers angeordnet werden darf, d. h. es muss auf jeden Fall $J_1 < J_2$ (also $\mu < 1$) sein. Drückt man die bekannten Eigenkreisfrequenzen mit den durch (4.181) definierten Kennzahlen aus, so kann man ihre relative Größe als Funktion des Massenverhältnisses μ berechnen. Das Ergebnis zeigt Bild 4.39a.

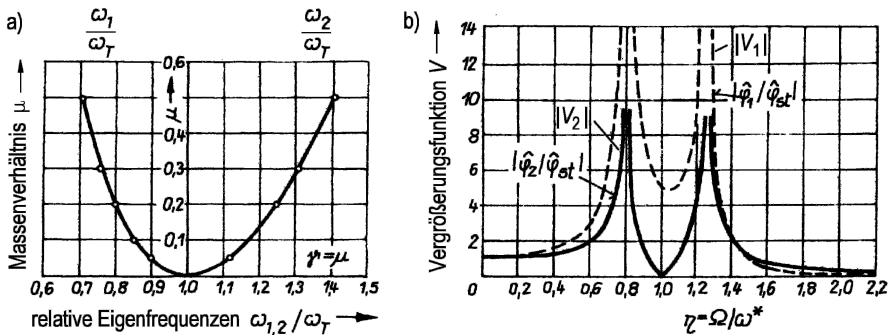


Bild 4.39 Zum Tilgungseffekt

a) Eigenfrequenzen als Funktion vom Massenverhältnis

b) Vergrößerungsfunktionen für $\gamma = \mu = 0,2$

Man sieht aus Bild 4.39a, dass mit kleiner werdendem μ (und nur $\mu \ll 1$ ist technisch interessant) die beiden Eigenfrequenzen dichter aneinanderrücken. Trägt man nun, etwa für $\mu = 0,2$ die relativen Amplituden über dem Frequenzverhältnis auf (Bild 4.39b), so lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen:

Durch die Ankopplung eines Tilgers entsteht eine Erweiterung des Modells um einen Freiheitsgrad. Die betrachtete Resonanzfrequenz spaltet sich in zwei auf, die kurz über und unter der ursprünglichen liegen. Einen großen Abstand erreicht man nur durch eine große Tilgermasse.

In der Betriebsfrequenz, auf die der Tilger abgestimmt ist, bleibt das Ausgangssystem in Ruhe, während der Tilger mit großer, aber endlicher Amplitude schwingt. Vor Erreichen der Betriebsfrequenz muss jedoch eine Resonanz durchfahren werden.

Der hier besprochene lineare Tilger ist deshalb nur einsetzbar in Antriebssystemen, die konstant in einer Betriebsdrehzahl laufen, wobei die Schwankungsbreite nur gering sein darf. Auch muss Dauerbetrieb vorliegen, da beim An- und Abfahren ständig der Resonanzbereich durchlaufen wird. Der Tilgerkonstruktion ist wegen der hohen Beanspruchung der Tilgerfeder große Aufmerksamkeit zu schenken. Auf jeden Fall ist es angebracht, den Tilger mit einer Dämpfung zu versehen, um die Resonanzausschläge zu verkleinern. Ein derartiges Bauelement ist der federgefesselte Dämpfer.

4.4.3

Auslegung eines federgefesselten Dämpfers

Der Dämpfer unterscheidet sich vom Tilger durch eine Relativdämpfung mit der Dämpfungskonstanten b_T zwischen den Drehmassen des Modells. Es entsteht das auf Bild 4.40 dargestellte Berechnungsmodell.

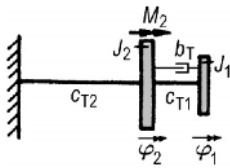


Bild 4.40

Gedämpfter Tilger
1 Dämpfer (federgefesselt)
2 Ersatzmodell

Die Bewegungsgleichungen für ein harmonisches Erregermoment lauten:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + b_T (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + c_{T1} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (4.185)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - b_T (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - c_{T1} (\varphi_1 - \varphi_2) + c_{T2} \varphi_2 = \dot{M}_2 \cos \Omega t$$

Dabei ist nur die Dämpfung des Dämpfers berücksichtigt. Aus der Lösung von (4.185) ergibt sich für den relativen Ausschlag der Drehmasse 2, vgl. (4.182)

$$V_2 = \sqrt{\frac{c_{T2}^2 [(c_{T1} - J_1 \Omega^2)^2 + b_T^2 \Omega^2]}{[(c_{T2} - J_2 \Omega^2)(c_{T1} - J_1 \Omega^2) - c_{T1} J_1 \Omega^2]^2 + b_T^2 \Omega^2 [c_{T2} - J_2 \Omega^2 - J_1 \Omega^2]^2}}. \quad (4.186)$$

Führt man noch den Dämpfungsgrad mit

$$2D = \frac{b_T}{J_1} \sqrt{\frac{J_2}{c_{T2}}} \quad (4.187)$$

ein, so wird

$$V_2 = \sqrt{\frac{(2D\eta)^2 + (\xi^2 - \eta^2)^2}{(2D\eta)^2 [\eta^2(1 + \mu) - 1]^2 + [(1 + \gamma - \eta^2)(\xi^2 - \eta^2) - \gamma\xi^2]^2}}. \quad (4.188)$$

Wie leicht erkennbar, geht (4.188) für $D = 0$ in (4.183) über.

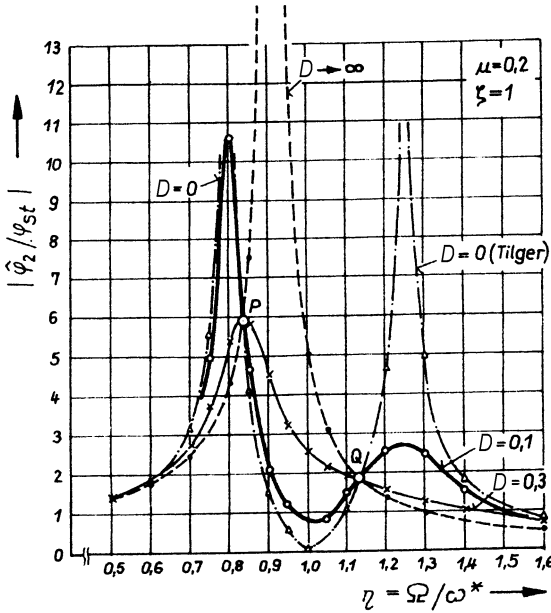


Bild 4.41 Vergrößerungsfunktionen für ein Modell mit federgefestem Dämpfer

Für den Tilger trat die größte Wirkung für $\xi^2 = 1$ auf. Bild 4.41 zeigt deshalb $V = V(\eta; D)$ für $\xi^2 = 1$. Das Massenverhältnis soll, wie für Bild 4.39, $\mu = 0,2$ betragen. Die Kurven wurden für $D = 0; 0,1; 0,3$ und $D \rightarrow \infty$ aufgetragen. Für $D = 0$ ergibt sich der schon in Bild 4.39 dargestellte Verlauf. Für $D \rightarrow \infty$ „klebt“ die Dämpfermasse J_1 fest an der Drehmasse J_2 . Es entsteht ein ungedämpftes Einmassenmodell, dessen Eigenkreisfrequenz $\omega^2 = c/(J_1 + J_2)$ beträgt. Für $D = 0,1; 0,3$ ist bemerkenswert, dass beide Kurven sich mit den Kurven für $D = 0; D \rightarrow \infty$ in den Punkten P und Q schneiden. Es handelt sich somit um Schnittpunkte, die von der Dämpfung unabhängig sind. Sie können für eine Dämpferoptimierung herangezogen werden, zumal sie sich aus den Kurven für $D = 0; D \rightarrow \infty$ leicht bestimmen lassen. Es muss mit (4.183) und (4.188) gelten:

$$\frac{\xi^2 - \eta_{P,Q}^2}{(1 + \mu \eta^2 - \eta_{P,Q}^2)(\xi^2 - \eta_{P,Q}^2) - \mu \xi^4} = \frac{1}{\eta_{P,Q}^2(1 + \mu) - 1}. \quad (4.189)$$

Daraus folgt

$$\eta_{P,Q}^2 = \frac{1}{2 + \mu} \left[\xi^2(1 + \mu) + 1 \mp \sqrt{\xi^4(1 + \mu)^2 - 2\xi^2 + 1} \right]. \quad (4.190)$$

Für das Beispiel Bild 4.41 gilt $\eta_P = 0,836$, $\eta_Q = 1,141$. Jedem η -Wert entspricht eine Vergrößerung $V_2 = \dot{\varphi}_2/\dot{\varphi}_{st}$. Die Dämpferwirkung wird dann am größten sein, wenn

beide Punkte P und Q auf gleicher Höhe liegen, d. h. wenn $V_P = V_Q$ gilt. Daraus lässt sich ein optimaler Wert für die Abstimmung ξ festlegen. Man findet

$$\xi_{\text{opt}} = \frac{1}{1 + \mu}. \quad (4.191)$$

Die Größe des Massenverhältnisses wird durch die Einbauverhältnisse am Motor bestimmt. Dadurch wird in den meisten Fällen $\mu \ll 1$, ξ_{opt} liegt dann in der Nähe von $\xi = 1$. Die optimale Dämpfung würde sich aus der Forderung ergeben, dass bei gleich hoher Lage von P und Q die Vergrößerungsfunktion dort eine horizontale Tangente hat.

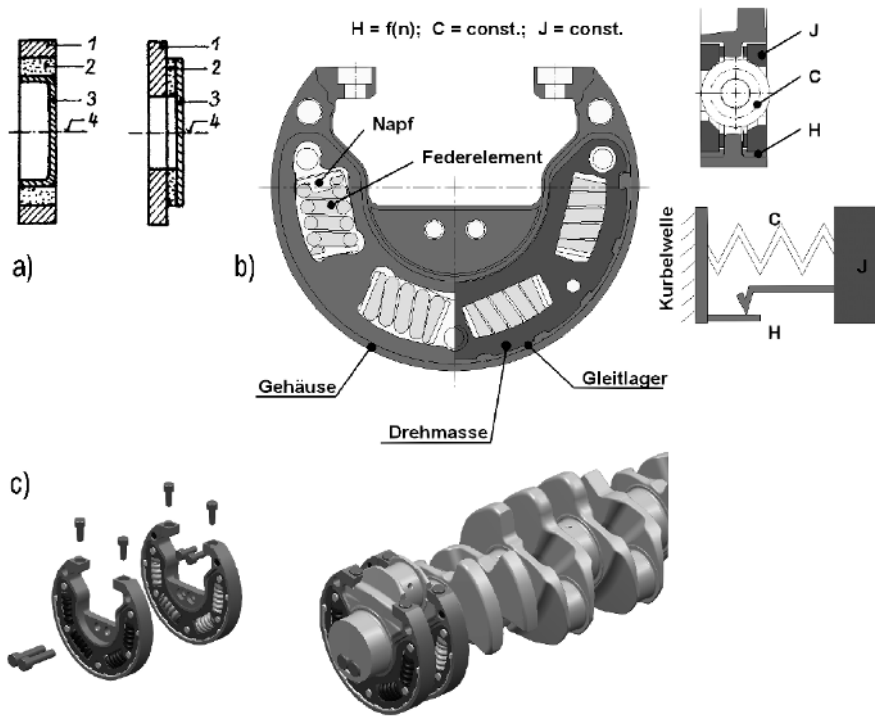


Bild 4.42 Ausführungsformen eines federgefesselten Dämpfers

a) federgefesselter Dämpfer; 1 Dämpfermasse, 2 Gummifeder, 3 Mitnehmerscheibe, 4 Drehachse

b) Interner Kurbelwellendämpfer (ICD), c) Kurbelwelle mit ICD (Quelle: LuK)

Die recht aufwendige Rechnung ergibt für eine waagrechte Tangente in den Punkten P und Q :

$$D_{\text{opt}}^2(P) = \frac{\mu \left(3 - \sqrt{\frac{\mu}{\mu + 2}} \right)}{8(1 + \mu)^3}; \quad D_{\text{opt}}^2(Q) = \frac{\mu \left(3 + \sqrt{\frac{\mu}{\mu + 2}} \right)}{8(1 + \mu)^3}. \quad (4.192)$$

Es ergibt sich für den Mittelwert:

$$D_{\text{opt}}^2 = \frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}; \quad V_{\text{opt}} = \left| \frac{\dot{\phi}_1}{\phi_{\text{st}}} \right|_{\text{opt}} = \frac{1}{\eta_{P,Q}^2(1+\mu) - 1} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}}. \quad (4.193)$$

Man erkennt aus dieser einfachen Beziehung die Bedeutung einer großen Dämpfermasse, die jedoch andererseits eine oft nur schwer zu realisierende Dämpfung D_{opt} bedingt. Von federgefedelten Dämpfern gibt es verschiedene konstruktive Ausführungen. Häufig werden Dämpfer mit Gummi-Elementen als Feder-Dämpfer-Glied eingesetzt.

Bild 4.42 zeigt verschiedene Ausführungsformen. Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Dämpferfeder einer hohen Beanspruchung unterliegt. Sie lässt sich mit den angegebenen Verfahren für das Gesamtsystem berechnen. Anrisse in der Gummifeder sind jedoch erst nach Ausbau des Dämpfers feststellbar. Auf das Schwingungsverhalten haben diese aber einen wesentlichen Einfluss, da durch Änderung der Abstimmung die Dämpferwirkung verringert wird. Das Ausgangssystem ist dann weit höher belastet, was zum Bruch führen kann.

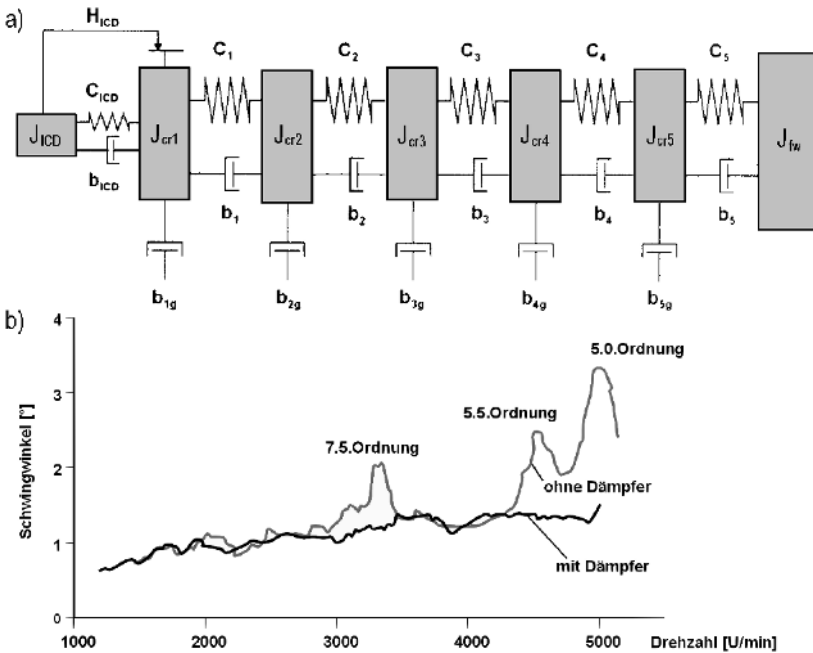


Bild 4.43 Kurbelwelle mit ICD; a) Simulationsmodell, b) gemessener Schwingwinkel zwischen den beiden Kurbelwellenenden ohne und mit ICD (Quelle: LuK)

Bild 4.43 zeigt zum Vergleich den gemessenen Verdrehwinkel einer Kurbelwellen-Schwingung ohne Dämpfer und mit ICD-Dämpfer, der an einem 6-Zylinder-Dieselmotor eingesetzt wurde. Die Messergebnisse stimmen mit denen der Simulationsrechnungen überein und bestätigen, dass die Resonanzspitzen der Hauptordnungen (hier 5-te, 5,5-te und 7,5-te Ordnung) durch den ICD nahezu beseitigt wurden.

4.4.4

Auslegung eines federlosen Dämpfers

Um den Bruch der Dämpferfeder mit seinen Auswirkungen zu vermeiden, haben federlose Dämpfer, deren Dämpferdrehmasse nur über ein Dämpferglied mit dem Ausgangssystem gekoppelt ist, besondere Bedeutung. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass sich der Begriff des federlosen Dämpfers auf das Fehlen eines speziellen Bauelementes bezieht. Neuere Untersuchungen haben gezeigt, dass besonders bei Viskositätsdrehschwingungsdämpfern mit hochviskoser Dämpfungsflüssigkeit neben dem Dämpfungseffekt auch eine Federwirkung auftritt, die nicht zu vernachlässigen ist. Die folgenden Überlegungen, bei denen $c_{T1} = 0$ gesetzt wurde, können also dafür nur als Grenzwertbetrachtung angesehen werden.

Gemäß (4.188) berechnet sich für $\xi = 0$ die Vergrößerungsfunktion damit aus:

$$V_2 = \frac{\dot{\phi}_2}{\dot{\phi}_{st}} = \sqrt{\frac{4D^2 + \eta^2}{4D^2(\eta^2(1 + \mu) - 1)^2 + \eta^2(\eta^2 - 1)^2}}. \quad (4.194)$$

Die Lage der dämpfungsunabhängigen Punkte findet man aus (4.190)

$$\eta_{P,Q}^2 = \frac{1}{2 + \mu}(1 \mp 1); \quad \eta_P = 0; \quad \eta_Q^2 = \frac{2}{2 + \mu}. \quad (4.195)$$

Für $D = 0$ und $D \rightarrow \infty$ ergeben sich jeweils Einmassenmodelle, sodass die Forderung nach einem Minimum in der Vergrößerung eindeutig erfüllt ist, wenn die Vergrößerungsfunktion im Punkt Q ihr Maximum hat. Diese Vergrößerung lässt sich sofort angeben, wenn (4.195) in die Gleichung für $D \rightarrow \infty$ eingesetzt wird, vgl. (4.193). Man findet

$$V_{opt} = 1 + \frac{2}{\mu}. \quad (4.196)$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit (4.193), so wird deutlich, dass die Wirkung eines federgefestelten Dämpfers bei gleicher Drehmasse wesentlich besser ist oder bei gleicher Dämpferwirkung der federlose Dämpfer eine größere Masse verlangt. Die optimale Dämpfung, bei der die Vergrößerungsfunktion ihr Maximum in Q hat, lässt sich nach dem oben angegebenen Weg bestimmen. Man findet:

$$D_{opt}^2 = \frac{1}{2(1 + \mu)(2 + \mu)}. \quad (4.197)$$

Nimmt man an, dass $\mu \ll 1$, gilt $D_{opt}^2 = 1/4$. Die Größe der Dämpferkonstante des Dämpferelementes beträgt dann:

$$\frac{b_T^2}{4J_1^2 \omega^{*2}} = \frac{1}{4}; \quad b_T = J_1 \omega^* \quad (4.198)$$

Die einfache Beziehung (4.198), in die nur die Drehmasse des Dämpfers und für Mehrmassensysteme die Resonanzfrequenz eingehen, wird häufig verwendet. Bild 4.43 zeigt Vergrößerungsfunktionen für das Modell mit federlosem Dämpfer für $\mu = 0,2$ und verschiedene Werte des Dämpfungsgrades D .

Die Realisierung einer bestimmten Dämpfungskonstante in einem Dämpfer ist wegen der starken Abhängigkeit von Fertigungs- und Betriebsparametern schwierig.

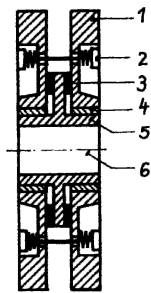


Bild 4.44 Reibungsdämpfer
1 Dämpfermasse; 2 Anpressfeder;
3 Bremsbelag; 4 Laufbuchse;
5 Mitnehmerscheibe; 6 Drehachse

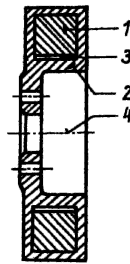


Bild 4.45 Flüssigkeitsdämpfer
(ViskositätsdrehSchwingungsdämpfer)
1 Dämpfermasse; 2 Gehäuse
3 Dämpferflüssigkeit; 4 Drehachse

Federlose Dämpfer werden entweder mit Reibungsdämpfung oder mit Flüssigkeitsdämpfung ausgeführt. Bei dem Reibungsdämpfer, Bild 4.44, besteht zwischen der Dämpfermasse und der Mitnehmerscheibe über den Bremsbelag Reibschluss, der durch die Federkraft erzeugt wird.

Der Flüssigkeitsdämpfer (ViskositätsdrehSchwingungsdämpfer), Bild 4.45, hat eine Kopplung zwischen Dämpfermasse und dem auf der Welle sitzenden Gehäuse durch die Viskosität des Dämpferöles. Sie ist bei Silikonölen in weiten Grenzen beeinflussbar. Diese Dämpfer finden hauptsächlich bei großen Dieselmotoren Verwendung. Sie arbeiten im Wesentlichen wartungsfrei, sind jedoch in der Fertigung aufwendig. Diese Dämpfer werden bis zur Größenordnung von 2 m Durchmesser hergestellt (Masse etwa 6 000 kg).

4.4.5 Beispiele

4.4.5.1 Besonderheiten des ViskositätsdrehSchwingungsdämpfers

Legt man wieder das Modell des federgefestelten Dämpfers, Bild 4.40, zugrunde, dann gilt mit den Abkürzungen (4.187) die Vergrößerungsfunktion (4.188). Die Feder- und Dämpferkonstante sind von mehreren Einflüssen abhängig, insbesondere von der Spaltzahl Sp .

Die Spaltzahl ist von der Geometrie des Dämpferringes und des Gehäuses abhängig. Vernachlässigt man die Ringabplattungen, so gilt

$$Sp = \pi \left[\frac{r_a^4 - r_i^4}{S_A} + 2B \left(\frac{r_a^3}{s_{ra}} + \frac{r_i^3}{s_{ri}} \right) \right] \quad (4.199)$$

r_a, r_i Außen- und Innenradius des Ringes
 s_{ra}, s_{ri} radialer Spalt außen und innen
 B Ringbreite
 S_A axiale Spaltbreite.

Liegen die Stoffparameter durch Experimente vor, so lässt sich die Vergrößerungsfunktion $V = |\dot{\phi}_2/\phi_{st}|$ analog zu Bild 4.41 berechnen. So ergab sich für ein Beispiel in Abhängigkeit von der Spaltzahl Sp die in Bild 4.46 dargestellte Vergrößerungsfunktion. Auffallend daran ist, dass es einen dämpfungsfreien Punkt nicht mehr gibt und dass die mit optimaler Spaltzahl erreichbaren Werte unter denen beim Optimum im dämpfungsfreien Punkt liegen. Die Versuche haben weiterhin gezeigt, dass mit Anwachsen der Eigenfrequenz des Ersatzmodells die erforderliche optimale Spaltzahl ansteigt. Große Spaltzahlen bedingen aber eine hohe Fertigungsgenauigkeit.

Es sei noch vermerkt, dass bei hochviskosen Ölen nach bestimmter Betriebsdauer ein Molekülzerfall auftreten kann, der zum Verkleben des Ringes im Gehäuse und damit Ausfall des Dämpfers führt.

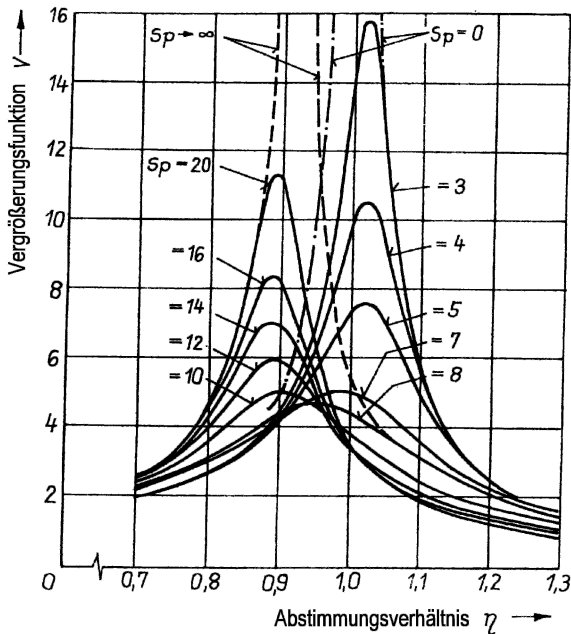


Bild 4.46 Vergrößerungsfunktion eines Viskositätsdrehwingungsdämpfers bei Berücksichtigung der Spaltzahl Sp als Parameter

4.4.5.2

Zum Tilgerpendel

Bei vielen Antrieben von Maschinen sind die Erregerfrequenzen $k\Omega$ den Drehzahlen proportional. Tilgerpendel sind ein wirksames und anpassungsfähiges Mittel zur Beseitigung gefährlicher Resonanzen bei rotierenden Wellen. Mehrere Bauformen von Tilgerpendeln sind von B. SALOMON in den dreißiger Jahren des 20. Jahrhunderts vorgeschlagen worden (Patent DRP 597 091), die entweder aus pendelnden Ringen oder aus Walzen bestehen und auf Kreisbahnen laufen. Die verschiedenen konstruktiven Ausführungen, die es seitdem gibt, haben alle dasselbe Ziel, eine große Masse

und eine kleine Pendellänge zu erreichen, weil sie für hohe Frequenzen und große Momente benötigt werden. Tilgerpendel werden möglichst an die Kurbelwange angehängt, damit das störende veränderliche Moment dort abgefangen wird, wo es eingeleitet wird.

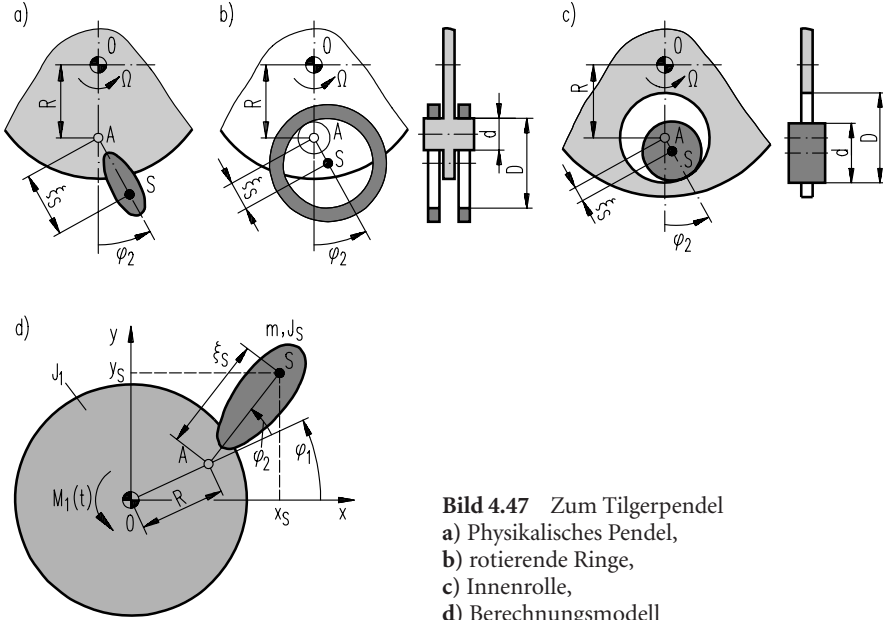


Bild 4.47 Zum Tilgerpendel

- a) Physikalisches Pendel,
- b) rotierende Ringe,
- c) Innenrolle,
- d) Berechnungsmodell

Bild 4.47 zeigt verschiedene Formen der *Tilgerpendel nach Salomon* [15]. Auf eine rotierende Scheibe (Drehmasse J_1) auf der Antriebswelle wirkt ein periodisches Moment $M_1(t) = \hat{M}_1 \sin k\Omega t$. Die Rotation würde ohne das Tilgerpendel mit veränderlicher Winkelgeschwindigkeit ($\varphi_1 = \Omega t + \hat{\varphi}_1 \sin k\Omega t$) erfolgen. Im Punkt A (Abstand R) wird ein physikalisches Pendel (Masse m , Schwerpunktabstand ξ_S , Trägheitsmoment J_S) in der Scheibe drehbar angeordnet, vgl. Bild 4.47a. Dem Schwerpunktabstand des physikalischen Pendels entspricht bei den Rollpendeln (Bild 4.47b und 4.47c) die halbe Durchmesserendifferenz: $\xi_S = (D - d)/2$, da beide sich so bewegen, als ob sie im Punkt A gelagert wären.

Das in Bild 4.47d dargestellte System hat zwei Freiheitsgrade (Drehwinkel φ_1 und relativer Pendelwinkel φ_2). Die potenzielle Energie wird nicht beachtet (horizontale Lage der Rotationsebene). Die kinetische Energie summiert sich aus der Rotationsenergie der Drehmassen und der Translationsenergie der Masse m :

$$2W_{\text{kin}} = J_1 \dot{\varphi}_1^2 + m(\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2) + J_S(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2. \quad (4.200)$$

Der Schwerpunkt des Tilgerpendels hat die Koordinaten

$$x_S = R \cos \varphi_1 + \xi_S \cos(\varphi_1 + \varphi_2); \quad y_S = R \sin \varphi_1 + \xi_S \sin(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (4.201)$$

Daraus folgen die Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned}\dot{x}_S &= -\dot{\varphi}_1 R \sin \varphi_1 - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \xi_S \sin(\varphi_1 + \varphi_2); \\ \dot{y}_S &= \dot{\varphi}_1 R \cos \varphi_1 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \xi_S \cos(\varphi_1 + \varphi_2).\end{aligned}\quad (4.202)$$

Setzt man diese in (4.200) ein, so erhält man nach einer kurzen Umformung den Ausdruck

$$2W_{\text{kin}} = m_{11} \dot{\varphi}_1^2 + 2m_{12} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_{22} \dot{\varphi}_2^2 \quad (4.203)$$

für die kinetische Energie. Hier besteht eine Verbindung zu Abschnitt 2.4.1, wo mit (2.160) dieselbe Form auftritt. Hier sind die z. T. veränderlichen verallgemeinerten Massen

$$\begin{aligned}m_{11} &= J_1 + mR^2 + J_S + m\xi_S^2 + 2mR\xi_S \cos \varphi_2 \\ m_{12} = m_{21} &= J_S + m\xi_S^2 + mR\xi_S \cos \varphi_2; \quad m_{22} = J_S + m\xi_S^2.\end{aligned}\quad (4.204)$$

Aus den Lagrange'schen Gleichungen 2. Art ergeben sich dann die Bewegungsgleichungen, die der Form des Starrkörpersystems mit zwei Antrieben, vgl. (2.168) und (2.169) in Abschnitt 2.4.1.1 entsprechen. Jede dieser Gleichungen beschreibt ein Momentengleichgewicht:

$$\begin{aligned}m_{11} \ddot{\varphi}_1 + m_{12} \ddot{\varphi}_2 - 2mR\xi_S \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - mR\xi_S \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 &= M_1 \\ m_{21} \ddot{\varphi}_1 + m_{22} \ddot{\varphi}_2 + mR\xi_S \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1^2 &= 0.\end{aligned}\quad (4.205)$$

Für kleine Winkel $|\varphi_2| \ll 1$ wird $\sin \varphi_2 = \varphi_2$ und $\cos \varphi_2 = 1$ gesetzt. Man erhält damit die beiden *linearen Bewegungsgleichungen* mit $k\varphi_1 \ll 1$ und $\dot{\varphi}_1 \approx \Omega$:

$$J_{11} = J_1 + J_S + m(R + \xi_S)^2; \quad J_{22} = J_A = J_S + m\xi_S^2 \quad (4.206)$$

in der Form

$$\begin{aligned}J_{11} \ddot{\varphi}_1 + (J_{22} + mR\xi_S) \ddot{\varphi}_2 &= \hat{M}_1 \sin k\Omega t \\ (J_{22} + mR\xi_S) \ddot{\varphi}_1 + J_{22} \ddot{\varphi}_2 + mR\xi_S \Omega^2 \varphi_2 &= 0.\end{aligned}\quad (4.207)$$

Aus der zweiten Gleichung kann man das Quadrat der Eigenkreisfrequenz ablesen, wenn man den Term mit $\ddot{\varphi}_1$ auf die rechte Seite bringt (Fliehkraftpendel, erzwungene Schwingung)

$$\omega_0^2 = \frac{mR\xi_S \Omega^2}{J_{22}} = \frac{mR\xi_S}{J_S + m\xi_S^2} \Omega^2. \quad (4.208)$$

Daraus folgt die wichtige Erkenntnis: Die *Eigenkreisfrequenz des physikalischen Pendels im Fliehkraftfeld ist der Drehzahl proportional*.

Mit dem Ansatz

$$\varphi_1 = \Omega t + \hat{\varphi}_1 \sin k\Omega t; \quad \varphi_2 = \hat{\varphi}_2 \sin k\Omega t \quad (4.209)$$

können für den stationären Fall die Amplituden berechnet werden. Aus dem linearen Gleichungssystem, das nach dem Einsetzen von (4.209) in (4.206) und (4.207) entsteht, folgt:

$$\hat{\varphi}_1 = -\frac{\hat{M}_1(mR\xi_S - J_{22}k^2)}{\Delta}; \quad \hat{\varphi}_2 = -\frac{\hat{M}_1(J_{22} + mR\xi_S)}{\Delta} \quad (4.210)$$

mit dem Nenner:

$$\Delta = \{[(J_{22} + mR\xi_S)^2 - J_{11}J_{22}]k^2 + J_{11}mR\xi_S\} (k\Omega)^2. \quad (4.211)$$

Für die Winkelamplitude gilt $\phi_1 = 0$, wenn der Zähler Null ist, also bei der Tilgungsbedingung

$$mR\xi_S = J_{22}k^2 = (J_S + m\xi_S^2)k^2. \quad (4.212)$$

Im Falle der Tilgung folgt die Amplitude des Tilgerpendels aus (4.210) zu

$$|\hat{\phi}_2| = \frac{\dot{M}_1}{(J_{22} + mR\xi_S)(k\Omega)^2}. \quad (4.213)$$

Obwohl das Moment M_1 veränderlich ist, bleibt die Scheibe in Ruhe, und zwar unabhängig von der Amplitude des Moments und bei allen Drehzahlen. Der Tilger wirkt so, als ob das Trägheitsmoment der Scheibe unendlich groß wäre, weil das Moment direkt vom Pendel abgefangen wird.

Das Tilgerpendel stellt bei großen Ausschlägen einen nichtlinearen Schwinger dar, dessen Eigenfrequenz (genau betrachtet) abhängig von der Amplitude ist. Nur bis zu Winkeln von etwa $|\varphi_2| < \pi/6$ ist die Linearisierung zulässig und brauchbar. Die Pendelbewegung enthält bei großen Winkeln höhere Harmonische, die ebenfalls Schwingungen anregen. Es gibt konstruktive Lösungen mit Rollbahnen in Form von Zykloiden, bei denen die Eigenfrequenz des Rollpendels im Fliehkraftfeld unabhängig vom Ausschlag bleibt.

4.5

Parametererregte Schwingungen durch ungleichmäßig übersetzende Getriebe

4.5.1

Problemstellung/Bewegungsgleichung

In vielen Verarbeitungsmaschinen, Umformmaschinen u. a. werden ungleichmäßig übersetzende Getriebe eingesetzt, um bestimmte Bewegungen zu erzielen. Aus Abschnitt 2 ist bekannt, dass infolge ungleichmäßig übersetzender Getriebe ein veränderliches Trägheitsmoment bezüglich der Antriebswelle auftritt, welches schon beim Modell der starren Maschine einige spezielle dynamische Wirkungen zeigt.

Bei vielen Maschinen existiert neben der Massekonzentration (Schwungrad) am Antriebsmotor eine Massekonzentration am Abtrieb des ungleichmäßig übersetzenden Getriebes, und die dazwischen befindlichen Antriebswellen oder Kupplungen stellen die wesentliche Elastizität dar, die als Torsionsfeder mit der Drehfederkonstanten c_T modelliert werden kann. Diese Nachgiebigkeit *vor* dem Mechanismus hat dynamisch eine qualitativ andere Wirkung als eine solche *nach* dem Mechanismus. Hierbei können parametererregte Schwingungen entstehen, im Gegensatz zu den erzwungenen Schwingungen, welche durch eine kinematische Erregung am Abtrieb eines Mechanismus auftreten.

Im Folgenden wird gezeigt, wie die ursprünglich nichtlineare Bewegungsgleichung, die für solche Aufgaben typisch ist, in eine lineare Differenzialgleichung überführt werden kann. Danach werden die Besonderheiten des physikalischen Verhaltens derartiger Torsionsschwinger, Methoden zur Berechnung und Möglichkeiten zur konstruktiven Beeinflussung erläutert.

Das Berechnungsmodell des hier behandelten Schwingungssystems ist in Bild 4.48 dargestellt.

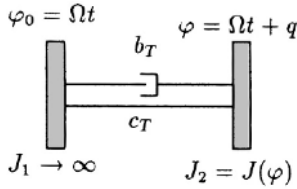


Bild 4.48

Modell des Torsionsschwingers
mit ungleichmäßig übersetzendem
Mechanismus am Antrieb

Es besteht aus dem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω umlaufenden Antriebsglied, der Antriebswelle mit der Torsionsfederkonstanten c_T und dem von der Stellung des Antriebsgliedes abhängigen Trägheitsmoment $J(\varphi)$, vgl. (2.211). Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht zwischen dem Moment aus den Massenkraften, vgl. (2.221), und dem Rückstellmoment der elastischen und viskos gedämpften Torsionsfeder der Antriebswelle. Mit den in Bild 4.48 eingetragenen Koordinaten lautet die nichtlineare Bewegungsgleichung

$$J(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dJ(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 + c_T(\varphi - \varphi_0) + b_T(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0) = 0. \quad (4.214)$$

Die Drehbewegung φ setzt sich aus einem Anteil mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω und einem relativen Verdrehwinkel q zusammen:

$$\varphi = \varphi_0 + q = \Omega t + q; \quad \dot{\varphi} = \Omega + \dot{q}; \quad \ddot{\varphi} = \ddot{q}. \quad (4.215)$$

Falls man annehmen kann, dass der Winkel q so klein bleibt, dass eine Linearisierung zulässig ist, darf man die folgende Entwicklung von $J(\varphi)$ in eine Taylor-Reihe nach dem linearen Glied abbrechen. Kürzt man die Ableitung nach dem Drehwinkel der starren Maschine mit einem Strich ab, so gilt

$$\frac{d(\cdot)}{d(\Omega t)} = (\cdot)'; \quad J(\varphi) = J(\Omega t) + J'(\Omega t)q + \dots \quad (4.216)$$

$$\frac{dJ(\varphi)}{d\varphi} = J'(\Omega t) + J''(\Omega t)q + \dots \quad (4.217)$$

Werden diese Entwicklungen in (4.217) eingesetzt, so ergibt sich bei Vernachlässigung aller Terme ab der Ordnung q^2 folgende *lineare* Differenzialgleichung mit $J = J(\Omega t)$

$$J\ddot{q} + (b_T + J'\Omega)\dot{q} + (c_T + J''\Omega^2/2)q = -\frac{1}{2}J'\Omega^2 \quad (4.218)$$

In diese Gleichung geht das reduzierte Trägheitsmoment $J(\Omega t)$ als zeitabhängige Größe ein. Damit ist aus der ursprünglichen nichtlinearen Differenzialgleichung

(4.214) eine rheolineare Differenzialgleichung geworden. Das kinetostatische Moment der starren Maschine erscheint auf der rechten Seite als Erregermoment für die Torsionsschwingungen. Außerdem wirkt sich die Veränderlichkeit von J aber auch als so genannte Parametererregung auf der linken Seite aus. An den Stellen, wo bei den bisher behandelten Bewegungsgleichungen konstante Koeffizienten vorhanden waren, treten hier zeitabhängige Koeffizienten auf.

Der Bewegungsgleichung (4.218) des Torsionsschwingers kann analog zu (4.216) formal eine „Abklingkonstante“ und eine „Eigenkreisfrequenz“ zugeordnet werden, vgl. (4.218).

$$\delta(t) = \frac{b_T + J' \Omega}{2J}; \quad \omega_0^2(t) = \frac{c_T + J'' \Omega^2 / 2}{J}. \quad (4.219)$$

Diese Größen sind aber i. Allg. von der Getriebebestellung (und hier speziell von der Zeit) abhängig.

4.5.2

Zur Lösung der Bewegungsgleichung, Stabilitätsverhalten

Der Ingenieur wird erwarten, dass sich das Verhalten eines Antriebssystems bei geringer oder langsamer Änderung des zeitabhängigen reduzierten Trägheitsmomentes nur wenig von dem bei konstantem unterscheidet. Da (4.218) linear ist, muss sich zu ihrer Lösung ein Fundamentalsystem aufbauen lassen, und es gilt allgemein für (4.218): $q = q_{\text{hom}} + q_{\text{part}}$.

Für die homogene Lösung wird häufig der allgemeine Ansatz

$$q_h = C_1 e^{\mu_1 t} q_1(t) + C_2 e^{\mu_2 t} q_2(t) \quad (4.220)$$

gemacht. Darin sind C_1 und C_2 die aus den Anfangsbedingungen bestimmbaren Integrationskonstanten, $q_1(t)$ und $q_2(t)$ periodische Funktionen der Zeit sowie μ_1 , μ_2 die charakteristischen Koeffizienten, die die Stabilität der Lösung bestimmen. Ihre Abhängigkeit von Parametern der speziellen Bewegungsgleichung führt auf so genannte Stabilitätskarten, in denen die Grenzen der Parameterwerte angegeben sind, für welche stabiles oder instabiles dynamisches Verhalten auftritt.

Grundsätzlich kann man konkrete Aufgaben, in denen zeitlich veränderliche Parameter vorkommen, auch mit Methoden der numerischen Integration lösen, falls nur ein begrenztes Zeitintervall interessiert. Allerdings ist es für den Ingenieur auch wichtig, allgemeine Vorstellungen über die dynamischen Effekte zu erhalten, die bei einer Parametererregung auftreten können. Die Parameterresonanz kommt wesentlich seltener als die erzwungene Resonanz vor. Sie darf deshalb aber nicht als unwesentliche oder unwahrscheinliche Nebenerscheinung eingeschätzt werden, da sie infolge ihrer Besonderheiten zu gefährlich großen Amplituden führen kann. Gegenüber der erzwungenen Resonanz seien vier prinzipielle Unterschiede genannt.

Zunächst muss erwähnt werden, dass die Parameterresonanz eine Erscheinung des instabilen Gleichgewichtes ist, weil das System durch unvermeidliche Anfangsstörungen angefacht werden kann. Infolge einer zufälligen Störung kann es in bestimmten Frequenzbereichen dazu kommen, dass das System im Takte seiner Eigenfrequenz (den momentanen Amplituden proportionale) Energieportionen aufnimmt und sich dabei schnell „aufschauelt“.

Eine zweite Besonderheit besteht darin, dass die Schwingungsamplituden bei fehlender Dämpfung bei erzwungener Resonanz *linear*, aber bei Parameterresonanz *exponentiell* mit der Zeit anwachsen.

Drittens hat die Dämpfung einen qualitativ anderen Einfluss. Während bei der erzwungenen Resonanz die viskose Dämpfung zur Begrenzung der Resonanzamplituden führt, können bei einer Parameterresonanz die Amplituden trotz vorhandener Dämpfung unbegrenzt anwachsen. Die Parameterresonanz entwickelt sich allerdings in bestimmten Frequenzbereichen erst dann, wenn die Dämpfung einen bestimmten Wert unterschreitet.

Eine vierte Besonderheit der Parameterresonanz besteht darin, dass sie nicht nur bei bestimmten Frequenzen (wie die erzwungene Resonanz) auftritt, sondern in einem gewissen Frequenzbereich in der Umgebung dieser bestimmten Frequenzen. Die Parameter-Hauptresonanz tritt in der Nähe derjenigen Winkelgeschwindigkeit auf, die der doppelten gemittelten Eigenfrequenz des Schwingers entspricht, d. h. bei $\Omega = 2\bar{\omega}$. Die Resonanzstellen liegen allgemein in der Umgebung der Abstimmungsverhältnisse

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{2}{k}; \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.221)$$

also bei Werten, die um ganzzahlige Vielfache kleiner als die Frequenz der Hauptresonanz sind. Die Breite dieser kritischen Gebiete hängt von der Pulsationstiefe der Parametererregung ab.

Eine weitere Besonderheit der parametererregten Schwinger besteht darin, dass weit entfernt von den durch (4.221) gekennzeichneten Drehzahlbereichen der Parameterresonanz auch noch dynamische Instabilitäten in einem endlichen Zeitabschnitt möglich sind.

Man kann sich diesen Effekt anhand der Definition der „Abklingkonstanten“ durch (4.219) klarmachen. Die Bewegung verläuft dynamisch stabil, solange

$$D\omega_0 = \delta(t) = \frac{b_T + \Omega J'(\Omega t)}{2J(\Omega t)} > 0 \quad (4.222)$$

gilt, weil dann das von den freien Schwingungen eines linearen Schwingers bekannte Abklingen gemäß $\exp(-\delta t)$ erfolgt.

Infolge der Veränderlichkeit von $J'(\Omega t)$ kann es jedoch dazu kommen, dass diese „Abklingkonstante“ in gewissen Intervallen negativ wird und damit eine exponentielle Anfachung der Amplituden bewirkt. Die dynamische Instabilität äußert sich in amplitudenmodulierten Schwingungen mit der Eigenkreisfrequenz $\omega(t)$, die an eine Schwebung erinnern. Das Intervall der Anfachung wechselt sich mit einem Intervall des Abklingens ab, weswegen in so einem Fall die Amplituden nicht unbegrenzt anwachsen, was sonst für die Parameterresonanz eigentümlich ist.

Häufig ist der Parameterwert von b_T sehr unsicher, während über den Dämpfungsgrad D Kenntnisse vorliegen. Formt man deshalb mit $D = b_T/(2\sqrt{c_T} J)$ um, so ergibt sich die Bedingung aus der Forderung $\delta(t) > 0$

$$D + \frac{\Omega J'(\Omega t)}{2\omega J(\Omega t)} > 0. \quad (4.223)$$

In Bereichen $J' < 0$ kann diese Bedingung verletzt werden. Durch die abnehmende Massenträgheit wird dann bei fehlender Dämpfung der Mechanismus „von allein“

beschleunigt, und es wird in diesen Getriebebestellungen kinetische Energie von der trägen Masse des Abtriebsgliedes an die Torsionsfeder abgegeben.

Aus den Einflussgrößen in (4.223) ersieht man auch, was der Konstrukteur für Gegenmaßnahmen treffen kann. Eine große Dämpfung ist günstig, aber nur in beschränktem Maße erreichbar. Eine Verminderung der Schwankung des Trägheitsmomentes J' ist stets anzustreben, weil sie auch die Ursache der anderen störenden Erscheinungen der Parameterresonanz ist. Die Abhängigkeit von Ω bedeutet, dass bei kleinen Drehzahlen eines Mechanismus solche Instabilitäten überhaupt nicht erscheinen, weil sie infolge der stets vorhandenen Dämpfung unterdrückt werden, aber dass sie bei höheren Drehzahlen auftauchen können. Die Eigenkreisfrequenz ω im Nenner des einen Terms von (4.223) weist darauf hin, dass diese Instabilitäten bei hochfrequenten (steifen) Systemen kaum zu erwarten sind.

Bei Kurvengetrieben gibt es z. B. durch die Beeinflussung des Kurvenprofils in Bereichen, die nicht vollständig durch technologische Forderungen festgelegt sind, die Möglichkeit, die Instabilitätsbereiche der Torsionsschwingungen zu höheren Drehzahlen hin zu verschieben. Bei Koppelgetrieben kann durch dynamische Kompensatoren (Zusatzgetriebe) der Verlauf des Trägheitsmomentes geglättet werden, ähnlich wie beim Leistungsausgleich, vgl. Abschnitt 2.4.2.

4.5.3

Beispiele

4.5.3.1

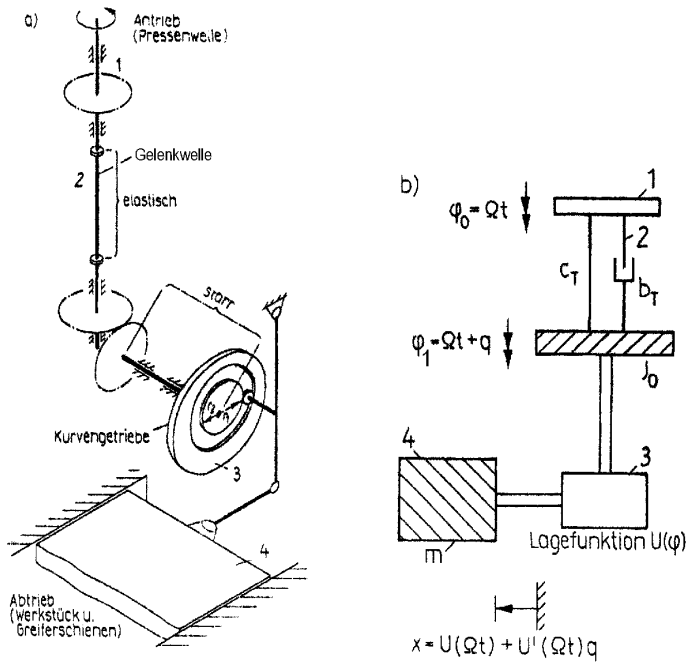
Transfer-Manipulator

An modernen Pressen erfolgt der Werkstücktransport mithilfe so genannter Transfer-Manipulatoren, welche synchron im Takte des Pressenhubes arbeiten und während des Umformvorganges das Werkstück unbeweglich halten müssen. Infolge der großen Entfernung zwischen dem Pressenantrieb und dem Abtriebsglied (den Greiferschienen), die durch eine mehrere Meter lange Gelenkwelle überbrückt wird, kann der Antrieb nicht torsionssteif gestaltet werden, und es besteht bei schnell laufenden Manipulatoren die Gefahr, dass die Schwingungen der Greifer in der Rastphase zu ungenauer Werkstückablage und zu Kollisionen führen.

Bild 4.49a zeigt das stark vereinfachte Getriebschema und Bild 4.49b das diesem entsprechende Minimalmodell.

Ein wesentliches Element des Antriebssystems ist das Kurvengetriebe, das durch seine Lagefunktion $U(\varphi)$ charakterisiert wird. Die Lagefunktion stellt den Zusammenhang zwischen der Antriebsbewegung φ und der Abtriebsbewegung, im vorliegenden Beispiel die Greiferschienenbewegung x , dar; $x = U(\varphi)$. Diese Bewegung ist durch zwei Rasten gekennzeichnet, deren Übergänge durch ein „Bewegungsgesetz der 5. Potenz“ beschrieben werden (VDI-Richtlinie 2143). Außerhalb der Rasten gilt:

$$x = U(\varphi) = U_{\max}(10z^3 - 15z^4 + 6z^5); \quad z = z(\varphi) \quad (4.224)$$

**Bild 4.49** Längshubgetriebe eines Transfer-Manipulators

a) Getriebeschema b) Berechnungsmodell

1 Antrieb von der Presse; 2 Gelenkwelle (c_T ; b_T);3 Kurvengetriebe ($r_1 - r_2 = U_{\max}$); 4 Greiferschienen und Werkstücke

Dabei steht die Variable z mit dem Antriebswinkel φ in folgendem Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
 -\frac{70\pi}{180} \leq \varphi \leq \frac{70\pi}{180}: \quad z &= \frac{9}{7\pi} \varphi + \frac{1}{2} \quad (\text{Vorlauf}); \quad z' = \frac{9}{7\pi} \\
 \frac{70\pi}{180} \leq \varphi \leq \frac{110\pi}{180}: \quad z &= 1 \quad (\text{vordere Rast}) \\
 \frac{110\pi}{180} \leq \varphi \leq \frac{250\pi}{180}: \quad z &= -\frac{9}{7\pi} \varphi + \frac{25}{14} \quad (\text{Rücklauf}); \quad z' = -\frac{9}{7\pi} \\
 \frac{250\pi}{180} \leq \varphi \leq -\frac{70\pi}{180}: \quad z &= 0 \quad (\text{hintere Rast}).
 \end{aligned} \tag{4.225}$$

Das reduzierte Trägheitsmoment wird von den Drehmassen des Antriebes (J_0), der Masse m des Abtriebes und der Lagefunktion bestimmt. Nach (2.211) gilt

$$J(\varphi) = J_0 \varphi'^2 + m x'^2 = J_0 + m U'^2. \tag{4.226}$$

Die Bewegungsgleichung des Berechnungsmodells Bild 4.49b leitet sich aus (4.218) ab. Man findet

$$\begin{aligned}
 (J_0 + m U'^2) \ddot{q} + (b_T + 2m U' U'' \Omega) \dot{q} + [c_T + m \Omega^2 (U''^2 + U' U''')] q \\
 = -m \Omega^2 U' U''.
 \end{aligned} \tag{4.227}$$

Darin gilt für die verschiedenen Ordnungen der Lagefunktion mit $U' = dU/d(\Omega t)$ und z' gemäß (4.225)

$$\begin{aligned} 0. \text{ Ordnung: } U &= U_{\max}(10z^3 - 15z^4 + 6z^5) \\ 1. \text{ Ordnung: } U' &= U_{\max}30z'(z^2 - 2z^3 + z^4) \\ 2. \text{ Ordnung: } U'' &= U_{\max}60z'^2(z - 3z^2 + 2z^3) \\ 3. \text{ Ordnung: } U''' &= U_{\max}60z'^3(1 - 6z + 6z^2). \end{aligned} \quad (4.228)$$

Bild 4.50a zeigt die Lagefunktionen verschiedener Ordnungen. Dem Beispiel liegen folgende Parameterwerte zugrunde:

$$\begin{aligned} U_{\max} &= 0,4 \text{ m}; & J_0 &= 1,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; & c_T &= 1,5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \\ \Omega &= 2\text{s}^{-1}; & m &= 136 \text{ kg}; & b_T &= 20 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \end{aligned} \quad (4.229)$$

Für die „Eigenkreisfrequenz“ gilt $\omega^2(t) = c_T(t)/J(t)$, vgl. (4.219).

Da $c_T > m\Omega^2(U'^2 + U'U''')_{\max}$, ist ω_0 wesentlich von der Getriebeleistung, aber unwesentlich von der Drehzahl abhängig, und es gilt näherungsweise

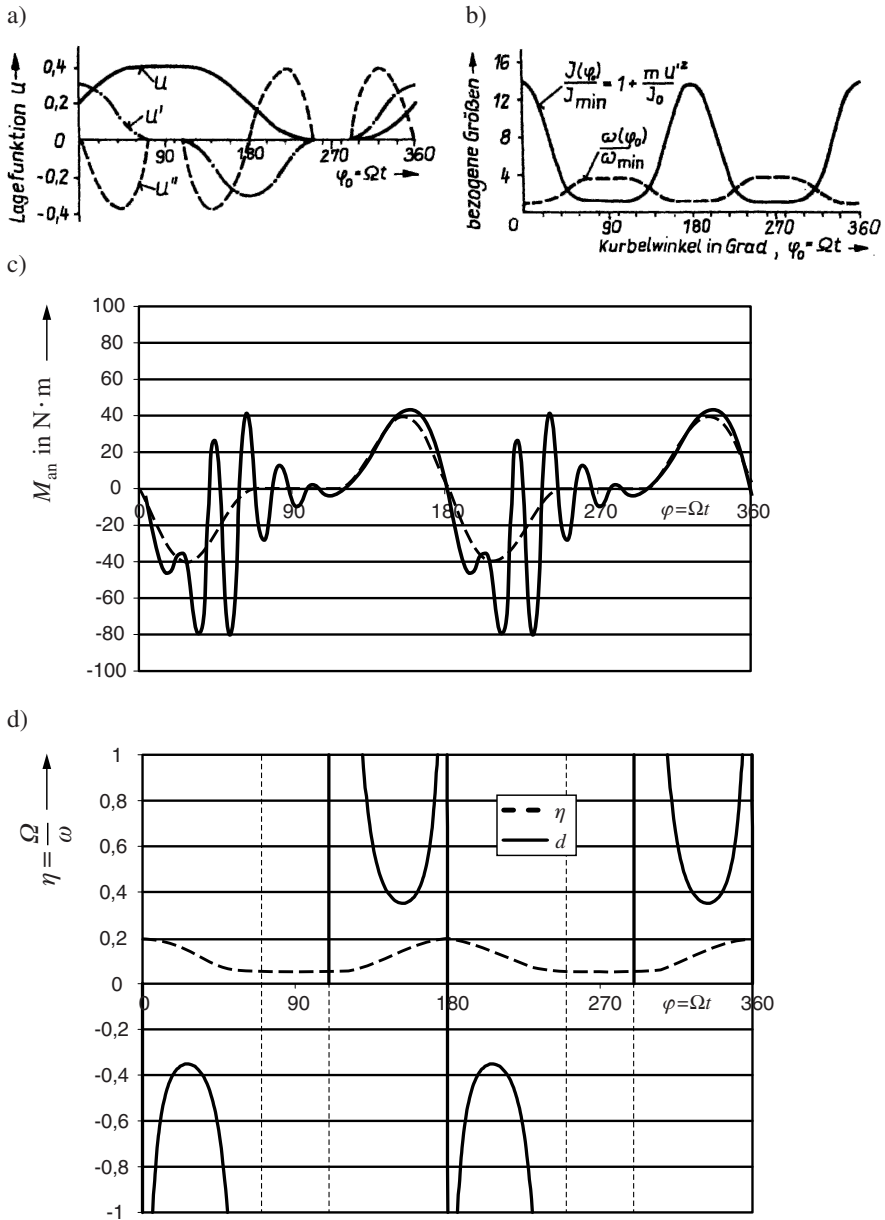
$$\omega_0^2(t) \approx \frac{c_T}{J_0 + mU'^2}. \quad (4.230)$$

Bild 4.50b zeigt den Verlauf des relativen reduzierten Trägheitsmomentes und der relativen Eigenkreisfrequenz. Die Lösung von (4.227) erfolgte bei diesem Beispiel mit einem numerischen Integrationsverfahren. Bild 4.50c zeigt als Ergebnis den Verlauf des elastischen Momentes in der Antriebswelle $M_{\text{an}} = c_T q$, das auch ein Maß für die Schwingbewegung des Abtriebsgliedes ist, da $U(\varphi) \approx U(\Omega t)$ gilt. Zum Vergleich ist im Bild 4.50c noch das kinetostatische Moment $M_{\text{st}} = m\Omega^2 U'U''$ mit dargestellt. Es würde sich bei starrem Antrieb ergeben, vgl. (4.227).

Wie die Theorie erwarten lässt, treten im Bereich des abfallenden Trägheitsmomentes ($J'(\varphi) \leq 0$) intensive Schwingungen auf, die dem kinetostatischen Moment überlagert sind. Kurzzeitig werden intensive Schwingungen angefacht, wenn $b_T < 2m\Omega U'U''$ ist, was auch aus (4.227) deutlich wird. Bild 4.50d zeigt die Verläufe von $d = b_T/2m\Omega U'U''$ und η . Betrachtet man in Bild 4.50c die Nulldurchgänge des dynamischen Moments (die Summe aus kinetostatischem Moment und Vibrationsmoment), erkennt man deutlich die im Bild 4.50d gezeigte Veränderung von $\omega(t)$.

Der Momentenverlauf wird qualitativ verständlich, wenn man sich die Bewegung der Greiferschienen klarmacht, da in ihnen der größte Teil der (veränderlichen) kinetischen Energie steckt. Sie haben in den Stellungen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ die größte Geschwindigkeit und müssen durch die Antriebswelle beim Hinlauf im Bereich $0^\circ \leq \varphi \leq 70^\circ$ und beim Rücklauf im Bereich $180^\circ \leq \varphi \leq 250^\circ$ verzögert werden. Dies ruft ein negatives kinetostatisches Moment hervor, welches bezüglich der Antriebswelle bremsend und zugleich schwingungserregend wirkt. Diese doppelte Momentenschwankung je einer Kurbelumdrehung ist typisch für alle Antriebe mit einer Umkehrbewegung. Sie hat immer eine dominierende zweite Harmonische des Antriebsmomentes zur Folge. Die Schwingungen treten nur bei hohen Drehzahlen und nur im Bereich des negativen J' (abfallendes J) auf. Wie aus Bild 4.50 deutlich wird, sind für positive Werte von $d = b_T/2m\Omega U'U''$ keine solchen angefachten Schwingungen zu erwarten.

Für den Konstrukteur bestand nun die Aufgabe, durch konstruktive Veränderungen dafür zu sorgen, dass die störenden Schwingungen in den Rastphasen

**Bild 4.50** Längshubgetriebe

- Lagefunktionen 0., 1. und 2. Ordnung
- Reduziertes Trägheitsmoment und Eigenfrequenz als bezogene Größen
- Verlauf des Antriebsmoments
- Verlauf des Dämpfungs- und Frequenzverhältnisses

verschwinden. Alle Parameter des Berechnungsmodells wurden experimentell bestimmt, und nachdem festgestellt worden war, dass die Messergebnisse mit den vorausgerechneten Werten gut übereinstimmten, wurde die Auswirkung folgender Maßnahmen am Berechnungsmodell überprüft.

1. Verminderung der Masse m des Abtriebsgliedes. Sie führt zu einer kleineren Schwankung von $J(\varphi)$ und vermindert dadurch die Parametererregung. Diese Änderung lässt sich durch Leichtbauweise realisieren (Kastenprofil).
2. Erhöhung der Torsionssteifigkeit des Antriebs. Die Gelenkwelle stellte die größte Nachgiebigkeit dar, ließ sich aber nur unwesentlich versteifen. Wird sie jedoch mit einer höheren Drehzahl als die Presse betrieben, erhöht sich ihre reduzierte Steifigkeit. Durch zusätzliche Getriebe anstelle der einfachen Kegelräder ist das erreichbar.
3. Verminderung der Schwingungsanregung durch eine Minimierung des Produktes $U'U''$ (kinetostatisches Moment $M_{st} = m\Omega^2 U'U''$) im negativen Bereich. Durch eine unsymmetrische Lagefunktion (Wendepunktverschiebung und -verlagerung) des Kurvengetriebes lässt sich das erreichen.
4. Ausgleich des kinetostatischen Moments im negativen Bereich durch einen Kompensator. Trägheitskompensatoren erhöhen das mittlere J und wirken sich nachteilig auf die Bremszeit aus. Ein Federkompensator, der unmittelbar an den Greiferschienen angreift, wirkt nur bei einer bestimmten Drehzahl optimal, vgl. VDI-Richtlinie 2149 Blatt 1.

4.5.3.2

Veränderliche Zahnsteifigkeit als Schwingungserregung

In Zahnradgetrieben findet eine Schwingungsanregung in jeder Zahnradpaarung statt, obwohl sich aufgrund der bei der Berechnung der Zahnprofile beachteten Abrollbedingungen kinematisch eine konstante Winkelgeschwindigkeit der beiden Zahnräder einstellen müsste. Die unvermeidliche Deformation der Zähne der im Eingriff befindlichen Zahnpaare entsteht infolge der Zahnkräfte, die erforderlich sind, um die Drehmomente vom Zahnradgetriebe zu übertragen. Schon infolge konstanter Momente können dynamische Zahnkräfte erregt werden, die wesentlich größer sind, als die eigentlich zu übertragenden statischen Kräfte.

Zu den inneren Erregungsursachen zählen die Schwankungen der Verzahnungssteifigkeit $c(t)$, die beim Abrollen der Zahnflanken und durch den Wechsel zwischen Einzel- und Doppeleingriff entstehen. Nicht nur Verzahnungsschäden, sondern auch beim intakten Getriebe können Abweichungen von der idealen Verzahnungsgeometrie oder Teilungs- und Rundlaufabweichungen zu Schwingungserregungen führen. Der periodische Verlauf der Verzahnungssteifigkeit lässt sich durch den Mittelwert c_m , die Fourierkoeffizienten $\hat{c}_k$ und die Zahneingriffsfrequenz f_z wie folgt beschreiben:

$$c(t) = c_m + \sum_k \hat{c}_k \cos(2\pi k f_z t + \varphi_k). \quad (4.231)$$

Bild 1.12 zeigt einen typischen Verlauf der veränderlichen Zahnsteifigkeit, vgl. Abschnitt 1.3. Bei einem Getriebe mit Schrägverzahnung sind die Schwankungen

klein gegenüber denen bei einer Geradverzahnung, d. h., es genügen dabei wenige Fourierkoeffizienten zur Beschreibung.

Die Zahneingriffsfrequenz ist das Produkt von Drehfrequenz und Zähnezahl. An der Kontaktstelle von zwei Zahnrädern (Welle 1: Winkelgeschwindigkeit Ω_1 , Zähnezahl z_1 und Welle 2: Winkelgeschwindigkeit Ω_2 , Zähnezahl z_2) entsteht die Zahneingriffsfrequenz

$$f_z = zf = \frac{z_1 \Omega_1}{2\pi} = \frac{z_2 \Omega_2}{2\pi}. \quad (4.232)$$

Zu Schwingungen von Zahnradgetrieben gibt es eine umfangreiche Literatur.

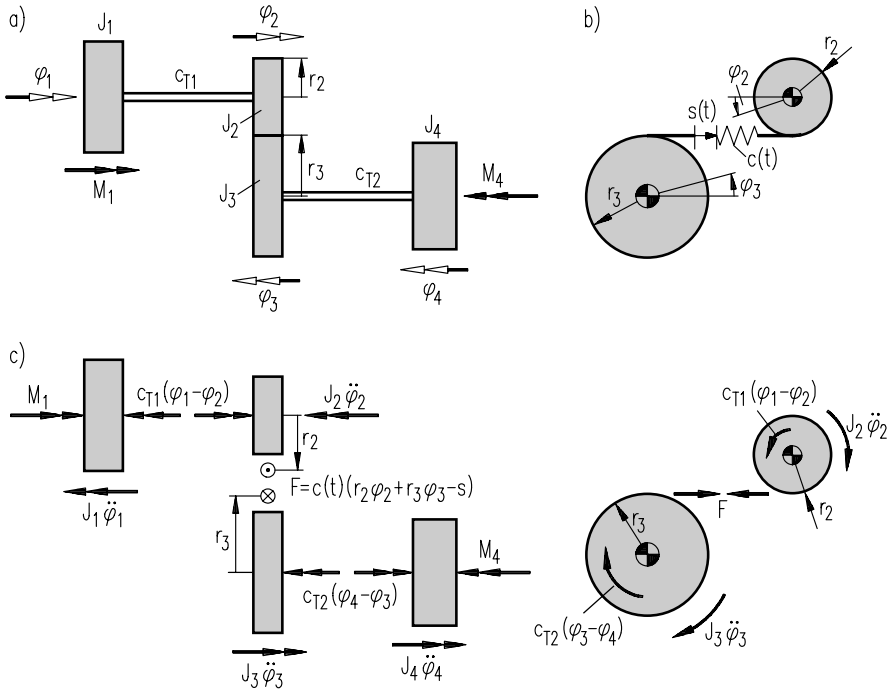


Bild 4.51 Berechnungsmodell des Stirnradgetriebes

a) Systemskizze, b) Seitenansicht, c) Freigeschnittenes System

Beim einfachsten Fall eines einstufigen Stirnradgetriebes (Bild 4.51) werden bei der Modellierung die Drehwinkel φ_1 und φ_4 von zwei Drehmassen, die Winkel φ_3 des Ritzels und φ_4 des Zahnrads sowie die Torsionssteifigkeiten c_{T1} und c_{T3} zwischen den Scheiben berücksichtigt. Die Zahnfehler, die als Wegerregung $s(t)$ modelliert werden, und die Verzahnungssteifigkeit $c(t)$ sind periodisch veränderlich.

Die Bewegungsgleichungen für das Berechnungsmodell ergeben sich aus dem Momentengleichgewicht an jedem Teil des frei geschnittenen Systems, vgl. Bild 4.51

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{T1}(\varphi_1 - \varphi_2) = M_1(t) \quad (4.233)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_{T1}(\varphi_1 - \varphi_2) + r_2 c(t)[r_2 \varphi_2 + r_3 \varphi_3 - s(t)] = 0 \quad (4.234)$$

$$J_3 \ddot{\varphi}_3 + r_3 c(t) [r_2 \varphi_2 + r_3 \varphi_3 - s(t)] + c_{T2} (\varphi_3 - \varphi_4) = 0 \quad (4.235)$$

$$J_4 \ddot{\varphi}_4 - c_{T2} (\varphi_3 - \varphi_4) = M_4(t). \quad (4.236)$$

Die Gleichungen (4.233) bis (4.236) beschreiben eine erzwungene Schwingung infolge der Parametererregung durch $c(t)$ und der kinematischen Erregung infolge $s(t)$. Die Lösungen könnten ermittelt werden, wenn die Verläufe von $M_1(t)$, $M_4(t)$, $s(t)$ und $c(t)$ gegeben sind. Die Angabe dieser Eingabedaten stellt allerdings schon oft ein Problem dar, da diese Werte zwischen den Exemplaren einer Baureihe streuen, sich mit der Betriebsdauer und auch mit der Betriebstemperatur ändern. Man kann sich vorstellen, wie die Bewegungsgleichungen für ein mehrstufiges Getriebe aussehen werden und wie unwahrscheinlich es wird, eine Übereinstimmung von Rechen- und Messergebnissen zu erreichen.

Im Weiteren soll dieses komplizierte System vereinfacht betrachtet werden, um auf einige Probleme näher hinzuweisen. Zunächst werden die Drehmassen J_2 und J_3 vernachlässigt, sodass man die Winkel φ_2 und φ_3 aus zwei statischen Bedingungen durch die anderen Winkel und die Zahnkraft F ausdrücken kann:

Mit der Koordinate $q = r_2 \varphi_2 + r_3 \varphi_3 - s(t)$ für die Deformation der Verzahnung folgt mit der Zahnkraft

$$F = c(t)q = c(t)[r_2 \varphi_2 + r_3 \varphi_3 - s(t)]. \quad (4.237)$$

aus (4.234) und (4.235) mit $J_2 = J_3 = 0$

$$\varphi_1 = \frac{Fr_2}{c_{T1}} + \varphi_2; \quad \varphi_4 = \varphi_3 + \frac{Fr_3}{c_{T2}}. \quad (4.238)$$

Damit lassen sich (4.233) und (4.236) umformen zu Differenzialgleichungen, in denen auch die Kraft F vorkommt:

$$\left(r_2 \frac{\ddot{F}}{c_{T1}} + \ddot{\varphi}_2 \right) + r_2 \frac{F}{J_1} = \frac{M_1(t)}{J_1} \quad (4.239)$$

$$\left(\ddot{\varphi}_3 + r_3 \frac{\ddot{F}}{c_{T2}} \right) + r_3 \frac{F}{J_4} = \frac{M_4(t)}{J_4}. \quad (4.240)$$

Multipliziert man (4.239) mit dem Faktor r_2 und (4.240) mit r_3 , entsteht aus der Summe dieser Gleichungen

$$\ddot{F} \left(\frac{r_2^2}{c_{T1}} + \frac{r_3^2}{c_{T2}} \right) + r_2 \ddot{\varphi}_2 + r_3 \ddot{\varphi}_3 + F \left(\frac{r_2^2}{J_1} + \frac{r_3^2}{J_4} \right) = r_2 \frac{M_1(t)}{J_1} + r_3 \frac{M_4(t)}{J_4}. \quad (4.241)$$

Vereinfacht man (4.237) für den Fall geringer Steifigkeitsänderungen, so folgt wegen $c(t) = c_m + \varepsilon(t)$ mit $|\varepsilon| \ll c_m$ die Näherung

$$r_2 \varphi_2 + r_3 \varphi_3 = s + \frac{F}{c_m + \varepsilon} \approx s + \frac{F}{c_m} \left(1 - \frac{\varepsilon}{c_m} \right) \quad (4.242)$$

und der Näherung für die zweite Ableitung, bei der $2\dot{F}\dot{\varepsilon} \ll F\ddot{\varepsilon}$ angenommen wurde:

$$r_2 \ddot{\varphi}_2 + r_3 \ddot{\varphi}_3 \approx \ddot{s} + \frac{\ddot{F}}{c_m} - \frac{F\ddot{\varepsilon}}{c_m^2}. \quad (4.243)$$

Setzt man den Ausdruck von (4.243) in (4.241) ein, so entsteht eine einzige Differenzialgleichung für die Zahnkraft F :

$$\ddot{F} + \frac{\frac{r_2^2}{J_1} + \frac{r_3^2}{J_4} - \frac{\ddot{\varepsilon}(t)}{c_m^2}}{\frac{r_2^2}{c_{T1}} + \frac{r_3^2}{c_{T2}} + \frac{1}{c_m}} F = \frac{-\ddot{s}(t) + r_2 \frac{M_1(t)}{J_1} + r_3 \frac{M_4(t)}{J_4}}{\frac{r_2^2}{c_{T1}} + \frac{r_3^2}{c_{T2}} + \frac{1}{c_m}}. \quad (4.244)$$

Diese kurze Gleichung beschreibt die Kraft in einem Schwinger, der parametererregte und erzwungene Schwingungen ausführen kann. Man kann darin die Einflüsse von elf Parametern erkennen, z. B.

- welchen Einfluss die Zahnsteifigkeit c_m im Vergleich zu den Torsionssteifigkeiten c_{T1} und c_{T2} der Wellen hat
- wie groß die Eigenfrequenz ist, (Faktor vor F ist das Quadrat der veränderlichen „Eigenkreisfrequenz“).
- die Bedeutung der relativen Steifigkeitsänderungen ε , welche eine Parametererregung verursachen, kann durch Vergleich der Terme im Zähler der Eigenkreisfrequenz beurteilt werden,
- die erzwungenen Schwingungen infolge der hier mit $\ddot{s}(t)$ Verzahnungsfehler und der beliebig zeitlich veränderlichen Momente am Antrieb und am Abtrieb.

4.5.4

Aufgaben A4.7 und A4.8

A4.7 Salomon-Tilgerpendel

Es sollen die Abmessungen eines Salomon-Tilgerpendels gemäß Bild 4.47c ermittelt werden, welches die zweite Erregerharmonische eines Antriebsmomentes tilgt.

Gegeben:

Abstand des Drehpunktes	$R = 100 \text{ mm}$
Schwerpunktabstand	$\xi_s = 1 \text{ mm}$
Masse der Walze	$m = 0,05 \text{ kg}$
Momentenamplitude der zweiten Harmonischen	$\dot{M}_1 = 15 \text{ N} \cdot \text{m}$ bei $k = 2$

Gesucht:

1. Durchmesser der Walze d
2. Durchmesser des Lochs D
3. Amplitude ϕ_2 der Walze bei der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 300/\text{s}$
4. Diskussion des Einflusses von Ordnung der Harmonischen auf die Größe der Tilgermasse

A4.8 Schubkurbel mit elastischer Antriebswelle

Bild 4.52 zeigt ein Schubkurbelgetriebe, dessen Antriebsmotor mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Zwischen Antriebsmotor und Kurbel befindet sich eine torsionselastische Antriebswelle, die infolge der Massenkraft des Abtriebsgliedes periodisch belastet und um den Relativwinkel q tordiert wird.

Gegeben:

Kurbellänge	l_2
Kurbelverhältnis	$\lambda = l_2/l_3 \ll 1$
Trägheitsmoment des Antriebsgliedes	J_2 (hinter der Torsionsfeder)
Masse des Schubgliedes	m_4
Torsionsfederkonstante	c_T
Torsionsdämpferkonstante	b_T
Winkelgeschwindigkeit der Antriebsbewegung	Ω
Größenverhältnis	$c_T \gg \Omega^2 J_2''(\Omega t)$
Dämpfungsmaß des Torsionsschwingers	$D = b_T/(2\sqrt{c_T J_2})$

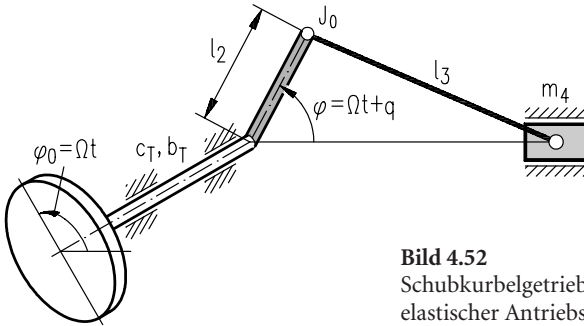


Bild 4.52
Schubkurbelgetriebe mit
elastischer Antriebswelle

Gesucht:

1. Verlauf des reduzierten Trägheitsmomentes als Funktion der Zeit
2. Abstimmungsverhältnis, oberhalb dessen instabile Torsionsschwingungen auftreten
3. Winkelbereich, in dem die instabilen Torsionsschwingungen zu erwarten sind

4.5.5

Lösungen L4.7 und L4.8

L4.7 Die Walze als homogener Kreiszylinder hat das Trägheitsmoment $J_S = md^2/8$, vgl. Tabelle 5.2. Aus der Tilgungsbedingung (4.212) ergibt sich eine Beziehung zum Walzendurchmesser:

$$mR\xi_S = (J_S + m\xi_S^2)k^2 = m\left(\frac{d^2}{8} + \xi_S^2\right)k^2, \quad (4.245)$$

woraus der Durchmesser folgt:

$$\underline{d} = \sqrt{8\xi_S\left(\frac{R}{k^2} - \xi_S\right)} = \sqrt{8\left(\frac{100}{4} - 1\right)} = \underline{\underline{13,8 \text{ mm}}}. \quad (4.246)$$

Daraus ergibt sich der Außendurchmesser zu $\underline{\underline{D = 2\xi_S + d = 15,856 \text{ mm}}}$.

Das Trägheitsmoment bezüglich des Punktes A ist

$$\begin{aligned} J_{22} &= (J_S + m\xi_S^2) = m\left(\frac{d^2}{8} + \xi_S^2\right) = 50\left(\frac{192}{8} + 1\right) \text{ g} \cdot \text{mm}^2 \\ &= 1250 \text{ g} \cdot \text{mm}^2. \end{aligned} \quad (4.247)$$

Die Pendelamplitude bei der angegebenen Winkelgeschwindigkeit folgt aus (4.213) zu

$$|\underline{\hat{\varphi}_2}| = \frac{\dot{M}_1}{(J_{22} + mR_{\xi S}^2)(k\Omega)^2} = \frac{5 \cdot 10^9}{(1250 + 5000)(600)^2} = \underline{\underline{0,222 \text{ rad}}} \quad (4.248)$$

Dieser Winkel erfüllt die Bedingung $|\hat{\varphi}_2| \ll 1$, sodass man lineares Verhalten erwarten kann. Aus dieser Formel kann man erkennen: Die Masse des Tilgerpendels ist unabhängig von der Ordnung der Harmonischen. Sie muss mit Rücksicht auf die Pendelamplitude umso größer sein, je niedriger die Ordnung k der Harmonischen ist. Mit sinkender Drehzahl steigt die Auslenkung des Tilgerpendels.

I4.8 Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung (4.218) aus Abschnitt 4.5.1. Sie lautet:

$$J(\varphi_0)\ddot{q} + [b_T + \Omega J'(\varphi_0)]\dot{q} + [c_T + \Omega^2 J''(\varphi_0)]q = -\frac{1}{2}J'(\varphi_0)\Omega^2. \quad (4.249)$$

Das reduzierte Trägheitsmoment des Schubkurbelgetriebes ist aus (2.291) bekannt:

$$J(\varphi) \approx J_2 + m_4 l_2^2 \sin^2 \varphi = \underline{\underline{J(\varphi_0) \approx J_2 + m_4 l_2^2 \sin^2(\Omega t)}}. \quad (4.250)$$

Die Ableitung nach dem Winkel $\varphi_0 = \Omega t$ ergibt

$$J'(\varphi_0) = 2m_4 l_2^2 \sin \Omega t \cos \Omega t. \quad (4.251)$$

Die Bewegung der Koordinate q ist stabil, wenn der Faktor von $\dot{q}$ positiv ist, also für

$$b_T + \Omega J'(\Omega t) > 0. \quad (4.252)$$

Dieser Faktor ändert seinen Wert mit der Winkelgeschwindigkeit Ω . Setzt man den größten negativen Wert von $J'(\Omega t)$ aus (4.251) in (4.252) ein, so erhält man die Stabilitätsbedingung

$$b_T - 2m_4 l_2^2 \Omega = 2D\sqrt{c_T J_0} - 2m_4 l_2^2 \Omega = 2D\omega_0 J_0 - 2m_4 l_2^2 \Omega > 0. \quad (4.253)$$

Führt man noch das Abstimmungsverhältnis ein, so folgt

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} < D \frac{J_0}{m_4 l_2^2}. \quad (4.254)$$

Der Antrieb arbeitet dynamisch stabil, solange diese Stabilitätsbedingung erfüllt ist. Üblicherweise liegt der Dämpfungsgrad bei Stahl-Vollmaterial bei $D < 0,01$ und bei Schubkurbelgetrieben beträgt das Verhältnis etwa $J_2/(m_4 l_2^2) \approx 5$ bis 20. Daraus folgt, dass der kritische Bereich bei etwa $\eta \approx 0,05$ bis 0,2 beginnt. Dieses Abstimmungsverhältnis wird also bei einer Drehzahlerhöhung einer Maschine bedeutend früher erreicht als der Hauptbereich der Parameterresonanz, der bei $\eta = 2$ liegt, vgl. (4.221).

Wenn die Funktion $\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 < 0$ ist, können sich diese instabilen Schwingungen bemerkbar machen, vgl. (4.251). Dies ist in den beiden Bereichen

$$\underline{\underline{\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi;}} \quad \underline{\underline{\frac{3\pi}{2} < \varphi_0 < 2\pi}} \quad (4.255)$$

der Fall, in denen das stellungsabhängige reduzierte Trägheitsmoment abnimmt, vgl. dazu (4.250) und auch Bild 4.27b.

5 Biegeschwinger

5.1

Zur Entwicklung der Problemstellungen

In Verbindung mit dem sich schnell entwickelnden Turbinenbau entstanden in den siebziger Jahren des 19. Jahrhunderts in England und Deutschland die ersten theoretischen Arbeiten, die sich mit der Bestimmung kritischer Drehzahlen von Wellen mit veränderlichen Querschnitten befassten. Kritische Drehzahlen sind solche Drehzahlen, bei denen eine Maschine mit Rücksicht auf ihre Betriebssicherheit nicht längere Zeit betrieben werden darf, weil gefährliche Resonanzzustände auftreten.

Die ersten Untersuchungen spezieller Fragen von Biegeschwingungen, die von *Rankine* (1869) und *de Laval* (1889) stammen, wurden fortgesetzt durch Arbeiten von *A. Stodola*, der viele bedeutsame Erscheinungen klärte und seine Forschungsergebnisse 1924 in einem fundamentalen Werk niederlegte. Weitere Fortschritte bei der Berechnung kritischer Drehzahlen von Wellen wurden in den dreißiger und vierziger Jahren unseres Jahrhunderts durch zahlreiche Forscher erzielt. Sie wurden in klassischer Form von *Biezeno* und *Grammel* [1] zusammengefasst.

Die weitere Entwicklung war einerseits dadurch charakterisiert, dass die als wesentlich erkannten Einflussgrößen theoretisch und experimentell genauer untersucht wurden. Andererseits wurden die Berechnungsmethoden mit dem Aufkommen der Computer vervollkommen, wobei sich seit etwa 1955 die Methode der Übertragungsmatrizen durchgesetzt hatte [15], [30]. Neben dem Verfahren der Übertragungsmatrizen hat die Methode der finiten Elemente seit Mitte der 60er-Jahre die Biegeschwingungsberechnung beeinflusst. Der gegenwärtige Stand ist dadurch charakterisiert, dass praktisch für die meisten auftretenden und theoretisch geklärten Problemstellungen Rechenprogramme vorliegen, die auf der Methode der finiten Elemente (FEM) beruhen.

Die Biegeschwingungen von (nicht rotierenden) Balken und Balkensystemen, deren Berechnung eng mit der von Wellen verbunden ist, haben vor allem in der Baudynamik, aber auch für Maschinengestelle Bedeutung. Eine sehr gute Übersicht über die Schwingungen von Stäben, Balken und Platten findet man in [9] und [6]. Eine moderne Einführung in das Gebiet der Rotordynamik stellt [7] dar.

Für gewisse Aufgabengruppen sind Vorschriften zu beachten, z. B. VDI 2059 1–5: Wellenschwingungen von Turbosätzen; VDI 3840: Schwingungen von Wellensträngen. Erforderliche Berechnungen; VDI 3841: Schwingungsüberwachung von Maschinen mit rotierenden Massen; VDI 3832: Wälzlagerüberwachung; DIN EN 60 034-14: Drehende elektrische Maschinen.

Die in der Fachliteratur behandelten Probleme dienen letztlich der Konstruktion zuverlässiger Stabtragwerke, Wellen und Rotoren und lassen sich in folgende Gruppen einteilen:

1. Wahl angemessener Berechnungsmodelle, welche mit vertretbarem Aufwand die beobachteten und experimentell untersuchten Erscheinungen erfassen
2. Berechnung von kritischen Drehzahlen (bzw. Eigenfrequenzen) für gegebene Berechnungsmodelle und Parameterwerte
3. Berechnung tatsächlicher Bewegungen und Kraftgrößen (Lagerkräfte und -ausschläge, Spindelbewegungen)
4. Auswahl günstiger Parameterwerte einer Konstruktion
5. Klärung von Schwingungsursachen realer Konstruktionen.

5.2

Grundlegende Zusammenhänge

5.2.1

Selbstzentrierung beim symmetrischen Rotor

Aus Abschnitt 2.6.2 ist bekannt, dass praktisch immer eine Restunwucht bei Rotoren verbleibt, weil eine vollständige Auswuchtung nicht erreichbar ist. Hier soll an einem einfachen Rotor mit einer Scheibe demonstriert werden, wie sich eine Unwuchterregung auswirkt. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Scheibe in der Mitte einer zweifach gelagerten Welle konstanter Biegesteifigkeit EI angeordnet ist, sodass nur die symmetrische Schwingform auftritt und somit die Einflüsse der Kreiselwirkung entfallen.

Bild 5.1 zeigt die aus der statischen Gleichgewichtslage ausgelenkte Scheibe im raumfesten Koordinatensystem. Die Scheibe dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit Ω . Die Durchbiegungen im mitrotierenden Bezugssystem werden mit r bezeichnet. Der Scheibenschwerpunkt S liegt außerhalb des Wellenmittelpunktes W (Exzentrizität e). Auf die Scheibe wird ein Drehmoment M übertragen. Die Scheibenmasse ist m , das Trägheitsmoment um die Drehachse ist J_p . Die masselose Welle ist isotrop, d. h., ihre Federkonstante c ist in x - und y -Richtung gleich groß. Da die Wellenneigung entfällt, werden keine anderen Federzahlen benötigt.

Das Kräftegleichgewicht am Schwerpunkt der in horizontaler Ebene rotierenden Scheibe ergibt, vgl. Bild 5.1:

$$m\ddot{x}_S + cx_W = 0 \quad (5.1)$$

$$m\ddot{y}_S + cy_W = 0. \quad (5.2)$$

Aus dem Momentengleichgewicht um die Schwerpunktschwerachse folgt

$$J_p \ddot{\varphi} + cx_W e \sin \varphi - cy_W e \cos \varphi = M. \quad (5.3)$$

Mit Berücksichtigung der Zwangsbedingungen, vgl. Bild 5.1,

$$x_W = x_S - e \cos \varphi, \quad y_W = y_S - e \sin \varphi \quad (5.4)$$

folgen daraus die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x}_S + cx_S = ce \cos \varphi \quad (5.5)$$

$$m\ddot{y}_S + cy_S = ce \sin \varphi \quad (5.6)$$

$$J_p \ddot{\varphi} - ce(y_S \cos \varphi - x_S \sin \varphi) = M. \quad (5.7)$$

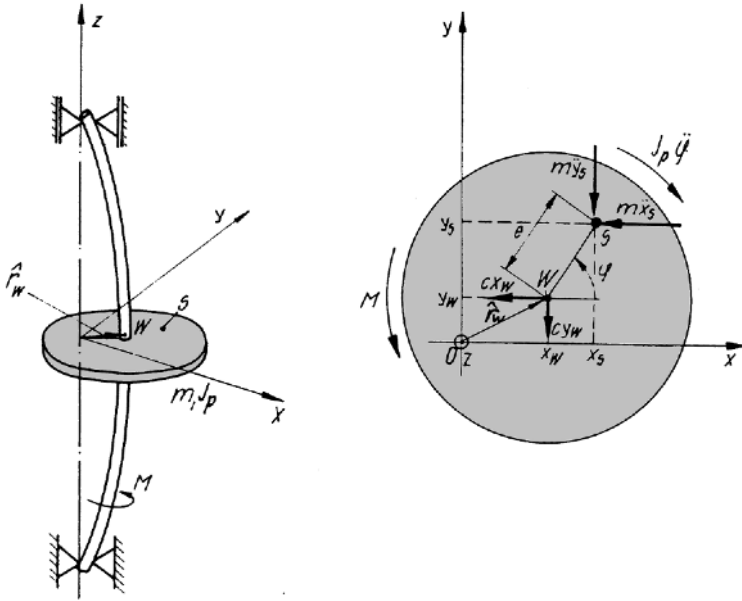


Bild 5.1 Bezeichnungen am Berechnungsmodell einer symmetrisch gelagerten Welle mit einer Scheibe

Die Eigenkreisfrequenz kann bei diesem Minimalmodell aus der statischen Durchsenkung ($f = mg/c$) an der Masse m infolge des Eigengewichts (mg) berechnet werden:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{mg}} = \sqrt{\frac{g}{f}}. \quad (5.8)$$

Bezeichnet man das Verhältnis von Dreh- zu Eigenkreisfrequenz mit $\eta = \Omega/\omega_1$, so lauten die partikulären Lösungen von (5.5) und (5.6) mit $\varphi = \Omega t$ (harmonische Erregung):

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{e\omega_1^2}{\omega_1^2 - \Omega^2} \cos \Omega t = \frac{e}{1 - \eta^2} \cos \Omega t = \hat{r}_S \cos \Omega t \\ y_S &= \frac{e\omega_1^2}{\omega_1^2 - \Omega^2} \sin \Omega t = \frac{e}{1 - \eta^2} \sin \Omega t = \hat{r}_S \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Das Antriebsmoment ergibt sich für die hier vorausgesetzte konstante Drehzahl ($\dot{\varphi} = \Omega = \text{const.}, \ddot{\varphi} = 0$) für $\Omega \neq \omega_1$ zu $M = 0$. Für $\Omega = \omega_1$ ($\eta = 1$) tritt Resonanz ein, und die erzwungenen Schwingungsausschläge wachsen (falls ungedämpft gerechnet wird) unbegrenzt, vgl. Bild 6.23.

Die Gleichung (5.9) zeigt, dass der Schwerpunkt eine Kreisbahn mit der Winkelgeschwindigkeit Ω durchläuft. Der Radius dieses Kreises beträgt

$$\hat{r}_S = \sqrt{x_S^2 + y_S^2} = \frac{e\omega_1^2}{\omega_1^2 - \Omega^2} = \frac{e}{1 - \eta^2}. \quad (5.10)$$

Die Bewegung des Scheibenmittelpunktes W ergibt sich aus (5.4) mit (5.9) zu

$$x_W = \hat{r}_W \cos \Omega t; \quad y_W = \hat{r}_W \sin \Omega t; \quad \hat{r}_W = \frac{e\eta^2}{1 - \eta^2}. \quad (5.11)$$

Der Radius $\hat{r}_W$ entspricht der Auslenkung im rotierenden System der Polarkoordinaten (r ; φ). Er kann, im Gegensatz zu $\hat{r}_S$, gemessen werden.

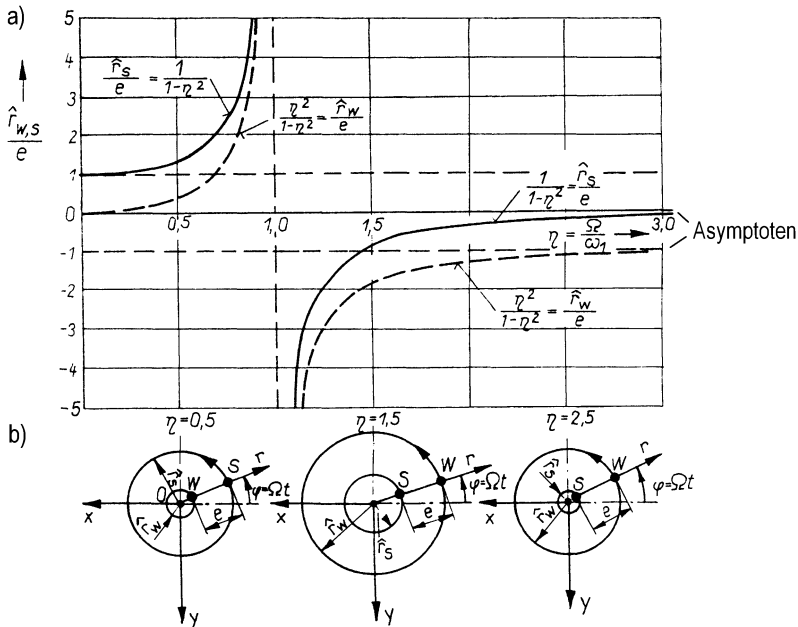


Bild 5.2 Bewegung der Welle in Abhängigkeit vom Abstimmungsverhältnis

a) Amplituden-Frequenzgang, b) Schwerpunktbahn und Wellenmittelpunktbahn bei $\eta = 0,5; 1,5; 2,5$

Die Amplituden der Bewegungen von S und W und die Bahnen dieser Punkte in Abhängigkeit vom Abstimmungsverhältnis η sind in Bild 5.2 dargestellt. Die Punkte O , S und W liegen (außerhalb der Resonanz) auf einer Geraden. Die Welle rotiert im gebogenen Zustand und wird dabei quasistatisch beansprucht. Für die Festigkeitsberechnung solcher rotierender Wellen ist von Bedeutung, dass dabei keine Biegewechsel auftreten und damit auch keine Werkstoffdämpfung der Welle wirksam wird.

Aus Bild 5.2 geht hervor, dass sich bei großen Drehzahlen die Welle zentriert. Im überkritischen Drehzahlbereich ($\Omega \gg \omega_1$) dreht sich die Scheibe um ihre Schwerachse. Man nutzt diese Tatsache bei Zentrifugen und anderen Maschinen aus, bei denen infolge des exzentrischen Verarbeitungsgutes eine Auswuchtung nicht möglich ist (Bild 5.9). Das System wird dabei meist durch weiche Halslagerfedern so abgestimmt, dass es überkritisch läuft. Die Scheibe rotiert dann um die Schwerachse,

d. h. die Halslagerfedern werden in der Umlauffrequenz um den Betrag der Exzentrizität ausgelenkt und bewirken eine entsprechende Kraft auf das Gestell. Diese ist bei sehr weichem Halslager bedeutend kleiner als die entsprechende Unwuchtkraft bei starrer Lagerung.

5.2.2

Durchfahren der Resonanzstelle

Viele Antriebe werden überkritisch betrieben, d. h. die Rotoren müssen beim Hochlauf bis zum Erreichen ihrer Betriebsdrehzahl eine oder mehrere Resonanzstellen durchlaufen – ebenso beim Auslaufen oder Bremsen. Dies trifft auf die Biegeschwingungen von Rotoren (z. B. Turbomaschinen, Textilspindeln, Wäscheschleudern, Zentrifugen) zu, aber auch auf Maschinenfundamente (vgl. z. B. Bild 3.14), Torsionschwinger (z. B. Fahrzeug-Antriebsstränge, Lüfter), und gekoppelte Schwinger (z. B. Siebe, Riemengetriebe). Während dieses Resonanzdurchlaufs werden extreme Belastungen erreicht. Es interessiert vor allem das Verhalten des Rotors in Resonanznähe, da dort die größten dynamischen Ausschläge auftreten.

Wenn angenommen werden kann, dass der Rotor mit *konstanter Winkelbeschleunigung* α anläuft, dann ergeben sich Amplituden gemäß Bild 5.3.

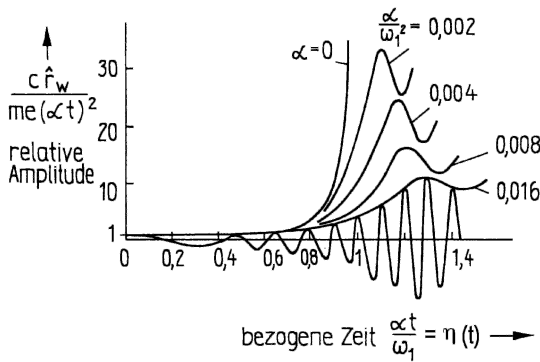


Bild 5.3

Amplitudenverlauf bei Resonanzdurchfahrt in Abhängigkeit von der Beschleunigung

Hier soll nur das Rechenergebnis gezeigt werden, vgl. Bild 5.3. Die Maximalamplitude wird nicht in dem Augenblick erreicht, wo Erreger- und Eigenfrequenz übereinstimmen, sondern etwas später. Beim Beschleunigen verschieben sich die Maxima in Richtung höherer Drehzahlen, beim Verzögern in Richtung niedriger Drehzahlen. Die Amplituden sind desto kleiner, je schneller der Resonanzdurchlauf erfolgt. Als Maß dient die dimensionslose Kenngröße α / ω_1^2 . Berechnet man den Hochlaufvorgang unter Berücksichtigung der Motorkennlinie, dann zeigt sich, dass die Drehzahl in Resonanznähe langsamer zunimmt, weil der Antrieb dort Energie zur Bewegung des mitschwingenden Fundaments aufbringen muss. Der Rotor setzt dem Durchfahren der Resonanzstelle also einen größeren Widerstand entgegen, als es nur seiner eigenen Drehträgheit entspricht.

Andererseits tritt beim Verzögern, also bei sinkender Drehzahl, in der Nähe der kritischen Drehzahl der umgekehrte Effekt auf: ein Rüttelrichtmoment wirkt

vom Fundament auf den Rotor so, dass sich dieser mehr beschleunigt als es dem Antriebsmoment entspricht. Es wird dann überschüssige Energie des schwingenden Fundaments auf den Rotor übertragen. Man kann diesen Effekt, dass das schwingende Fundament wie ein zusätzlicher Antrieb wirkt, praktisch ausnutzen, d. h. beim Abtounen länger im Resonanzbereich bleiben, um bei Vibrationsmaschinen als Schwingungserreger effektiv zu arbeiten, z. B. bei einem Vibrationsverdichter, vgl. dazu Abschnitt 5.4.5 „Resonanzdurchlauf“ in [4].

5.2.3

Rotierende Welle mit Scheibe (Kreiselwirkung)

Das Schwingungsverhalten einer rotierenden Welle unterscheidet sich prinzipiell von dem eines nichtrotierenden Balkens, weil bei großen Drehzahlen an den räumlich ausgedehnten Scheiben so genannte Kreiselmomente (auch „gyroskopische Momente“ genannt) das dynamische Verhalten beeinflussen. Kreiselmomente entstehen, wenn die Hauptträgheitsachse der Scheibe nicht mit der Rotationsachse übereinstimmt oder wenn sich die Scheiben während der Schwingung um die x - oder y -Achse neigen, vgl. Bild 5.4.

Es wird angenommen, dass die Scheibe um die Wellenachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \Omega$ ($\varphi = \Omega t$) rotiert, sich in x - und y -Richtung durchsenkt und gleichzeitig um kleine Winkel ψ_x und ψ_y kippt. Dann wirken zwischen Rotor und Welle Momente und Kräfte, die hier mit F_x , F_y , M_x , M_y und M_z bezeichnet werden und in Bild 5.4 definiert sind. Die Momente ergeben sich für den unsymmetrischen Rotor wie folgt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = & - \begin{bmatrix} J_{\xi\xi}^S \cos^2 \varphi + J_{\eta\eta}^S \sin^2 \varphi - J_{\xi\eta}^S \sin 2\varphi & \frac{1}{2} (J_{\xi\xi}^S - J_{\eta\eta}^S) \sin 2\varphi + J_{\xi\eta}^S \cos 2\varphi \\ \frac{1}{2} (J_{\xi\xi}^S - J_{\eta\eta}^S) \sin 2\varphi + J_{\xi\eta}^S \cos 2\varphi & J_{\xi\xi}^S \sin^2 \varphi + J_{\eta\eta}^S \cos^2 \varphi + J_{\xi\eta}^S \sin 2\varphi \\ J_{\xi\zeta}^S \cos \varphi - J_{\eta\zeta}^S \sin \varphi & J_{\xi\zeta}^S \sin \varphi + J_{\eta\zeta}^S \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\psi}_x \\ \ddot{\psi}_y \end{bmatrix} \\ & - \Omega \begin{bmatrix} - \left[(J_{\xi\xi}^S - J_{\eta\eta}^S) \sin 2\varphi + 2J_{\xi\eta}^S \cos 2\varphi \right] & (J_{\xi\xi}^S - J_{\eta\eta}^S) \cos 2\varphi - 2J_{\xi\eta}^S \sin 2\varphi + J_{\xi\zeta}^S \\ (J_{\xi\xi}^S - J_{\eta\eta}^S) \cos 2\varphi - 2J_{\xi\eta}^S \sin 2\varphi - J_{\xi\zeta}^S & (J_{\xi\xi}^S - J_{\eta\eta}^S) \sin 2\varphi + 2J_{\xi\eta}^S \cos 2\varphi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi}_x \\ \dot{\psi}_y \end{bmatrix} \\ & - \Omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ J_{\xi\zeta}^S \cos \varphi - J_{\eta\zeta}^S \sin \varphi & J_{\xi\zeta}^S \sin \varphi + J_{\eta\zeta}^S \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix} + \Omega^2 \begin{bmatrix} J_{\xi\zeta}^S \sin \varphi + J_{\eta\zeta}^S \cos \varphi \\ -J_{\xi\zeta}^S \cos \varphi + J_{\eta\zeta}^S \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Unter Beachtung der Drehtransformation (2.15) resultieren diese Ausdrücke aus dem Momentensatz (2.95) entsprechend

$$\mathbf{M}^S = \mathbf{A} \overline{\mathbf{M}}^S = \mathbf{A} \cdot \left(\overline{\boldsymbol{\omega}} \overline{\mathbf{J}}^S \overline{\boldsymbol{\omega}} + \overline{\mathbf{J}}^S \dot{\overline{\boldsymbol{\omega}}} \right) \equiv \frac{d}{dt} \left(\mathbf{A} \overline{\mathbf{J}}^S \overline{\boldsymbol{\omega}} \right), \quad (5.13)$$

wenn für kleine Winkel

$$|\psi_x| \ll 1, \quad |\psi_y| \ll 1 \quad (5.14)$$

eine Linearisierung vorgenommen und $\mathbf{M}^S = [-M_x, -M_y, -M_z]^T$ gesetzt wird. Dazu wird von den Gln. (2.14) und (2.30) ausgegangen, aus denen die Näherungen

$$\mathbf{A} \approx \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & \psi_y \\ \sin \varphi & \cos \varphi & -\psi_x \\ \begin{pmatrix} -\psi_y \cos \varphi \\ +\psi_x \sin \varphi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \psi_x \cos \varphi \\ +\psi_y \sin \varphi \end{pmatrix} & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi}_x \cos \varphi \\ +\dot{\psi}_y \sin \varphi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\dot{\psi}_x \sin \varphi \\ +\dot{\psi}_y \cos \varphi \end{pmatrix} \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

folgen. Einsetzen in (5.13) liefert dann bei Vernachlässigung aller nichtlinearen Terme die angegebenen Momente in (5.12). Hinsichtlich der Kräfte gelten die Gln. (5.17), die unmittelbar aus dem Kräftegleichgewicht am freigeschnittenen Rotor folgen. Für den wichtigen Sonderfall des symmetrischen Rotors, also für

$$J_{\xi\xi}^S = J_{\eta\eta}^S = J_a, \quad J_{\zeta\zeta}^S = J_p, \quad J_{\xi\eta}^S = J_{\xi\zeta}^S = J_{\eta\zeta}^S = 0, \quad (5.16)$$

vereinfachen sich die Ausdrücke in (5.12) erheblich. Es entstehen die Gleichungen (5.18), vgl. auch Bild 5.4 und Abschnitt 2.3.2.

Formeln zur Berechnung der Massen und Trägheitsmomente häufig vorkommender Rotorbaufornen sind in Tabelle 5.2 angegeben (x, y sind dort die körperfesten Schwerpunktsachsen).

$$F_x = -m\ddot{x}; \quad F_y = -m\ddot{y} \quad (5.17)$$

$$M_x = -J_a \ddot{\psi}_x - J_p \Omega \dot{\psi}_y; \quad M_y = -J_a \ddot{\psi}_y + J_p \Omega \dot{\psi}_x; \quad M_z = 0 \quad (5.18)$$

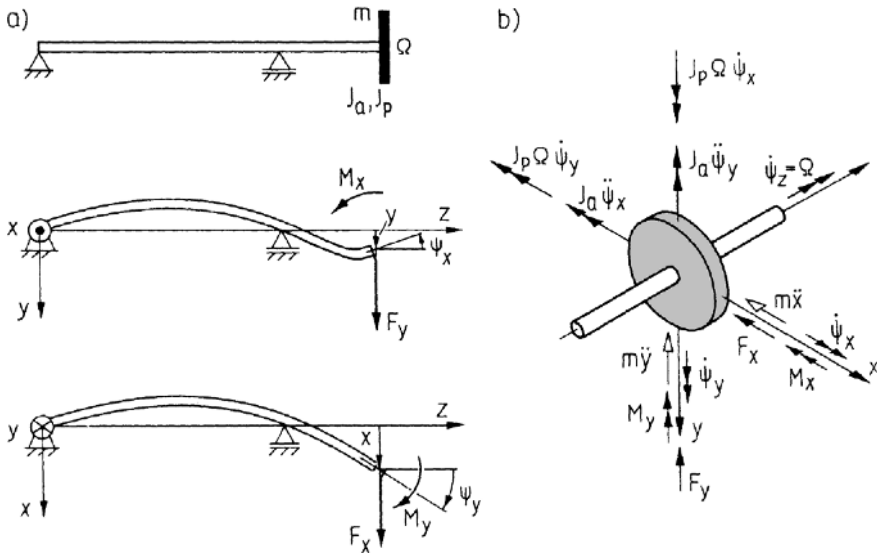


Bild 5.4 Mit einer Scheibe besetzte Welle

a) Koordinaten und Kraftgrößen, b) Kräfte und Momente am freigeschnittenen Rotor

Tabelle 5.1 Einflusszahlen von zweifach gelagerten Balken

Nr.	Skizze des Systems	d_{11}
1		$\frac{(l - l_1)^2}{c_1 l^2} + \frac{l_1^2}{c_2 l^2} + \frac{l_1^2 (l - l_1)^2}{3EI l}$
2		$\frac{l_2^2}{c_1 (l_1 + l_2)^2} + \frac{l_1^2}{c_2 (l_1 + l_2)^2} + \frac{l_1^2 l_2^2}{3EI_1 (l_1 + l_2)}$
3		$\frac{l_2^2}{c_1 (l_1 + l_2)^2} + \frac{l_1^2}{c_2 (l_1 + l_2)^2} + \frac{l_1^2 l_2^2}{3EI (l_1 + l_2)}$
4		$\frac{l_2^2}{c_1 l_1^2} + \frac{(l_1 + l_2)^2}{c_2 l_1^2} + \frac{l_1 l_2^2}{3EI_1} + \frac{l_2^3 - l_3^3}{3EI_2}$
5		$\frac{(l - l_1)^2}{c_1 l^2} + \frac{l_1^2}{c_2 l^2} + \frac{l_1^2 (l_2 + l_3)^2}{3EI l}$
6		$\frac{l_2^2}{c_1 (l_1 + l_2)^2} + \frac{l_1^2}{c_2 (l_1 + l_2)^2} + \frac{l_1^2 l_2^2}{3EI_1 (l_1 + l_2)}$

Die Beziehungen zwischen den Kraftgrößen (F_x ; F_y ; M_x ; M_y) und Deformationsgrößen (x ; y ; ψ_x ; ψ_y) werden als linear angenommen:

$$y = +\alpha_y F_y - \gamma_y M_x; \quad x = \alpha_x F_x + \gamma_x M_y \quad (5.19)$$

$$\psi_x = -\delta_y F_y + \beta_y M_x; \quad \psi_y = \delta_x F_x + \beta_x M_y. \quad (5.20)$$

Die unterschiedlichen Vorzeichen in beiden Ebenen erklären sich aus den unterschiedlichen Kraft- und Momentrichtungen, vgl. Bild 5.4a.

Die aus der Festigkeitslehre bekannten Einflusszahlen α , β und $\gamma = \delta$ sind bei anisotropen Lagern von der Koordinatenrichtung abhängig und wurden deshalb mit den Indizes x und y versehen. Bei isotroper Lagerung sind die Einflusszahlen in beiden Ebenen gleich. Formeln zur Berechnung der Einflusszahlen bei häufig vorkommenden Wellenlagerungen enthält Tabelle 5.1. Aus (5.17) bis (5.20) folgt bei

Tabelle 5.1 (Fortsetzung)

d_{12}	d_{22}
$\frac{(l_2 + l_3)l_3}{c_1 l^2} + \frac{l_1(l_1 + l_2)}{c_2 l^2} + \frac{l_1 l_3(l^2 - l_1^2 - l_3^2)}{6EI}$	$\frac{l_3^2}{c_1 l^2} + \frac{(l - l_3)^2}{c_2 l^2} + \frac{l_3^2(l_1 + l_2)^2}{3EI}$
$-\frac{l_2 l_3}{c_1(l_1 + l_2)^2} + \frac{(l_1 + l_2 + l_3)l_1}{c_2(l_1 + l_2)^2}$ $-\frac{l_1 l_2 l_3(2l_1 + l_2)}{6EI_1(l_1 + l_2)}$	$\frac{l_3^2}{c_1(l_1 + l_2)^2} + \frac{(l_1 + l_2 + l_3)^2}{c_2(l_1 + l_2)^2}$ $+\frac{(l_1 + l_2)l_3^2}{3EI_1} + \frac{l_3^3}{3EI_2}$
$-\frac{l_2}{c_1(l_1 + l_2)^2} + \frac{l_1}{c_2(l_1 + l_2)^2} + \frac{l_1 l_2(l_2 - l_1)}{3EI(l_1 + l_2)}$	$\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) \frac{1}{(l_1 + l_2)^2} + \frac{l_1^3 + l_2^3}{3EI(l_1 + l_2)^2}$
$\frac{l_2}{c_1 l_1^2} + \frac{l_1 + l_2}{c_2 l_1^2} + \frac{l_1 l_2}{3EI_1} + \frac{l_2^2 - l_3^2}{2EI_2}$	$\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) \frac{1}{l_1^2} + \frac{l_1}{3EI_1} + \frac{l_2 - l_3}{EI_2}$
$-\frac{l_2 + l_3}{c_1 l^2} + \frac{l_1}{c_2 l^2} - \frac{l_1(l^2 - l_1^2 - 3l_3^2)}{6EI}$	$\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) \frac{1}{l^2} + \frac{(l_1 + l_2)^3 + l_3^3}{3EI l^2}$
$-\frac{l_2}{c_1(l_1 + l_2)^2} + \frac{l_1}{c_2(l_1 + l_2)^2} - \frac{l_1 l_2(2l_1 + l_2)}{6EI_1(l_1 + l_2)}$	$\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) \frac{1}{(l_1 + l_2)^2} + \frac{l_1 + l_2}{3EI_1} + \frac{l_3}{EI_2}$

isotroper Lagerung

$$y = +\alpha F_y - \gamma M_x = -\alpha m\ddot{y} - \gamma(-J_a \ddot{\psi}_x - J_p \Omega \dot{\psi}_y) \quad (5.21)$$

$$\psi_x = -\delta F_y + \beta M_x = +\delta m\ddot{y} + \beta(-J_a \ddot{\psi}_x - J_p \Omega \dot{\psi}_y) \quad (5.22)$$

$$x = +\alpha F_x + \gamma M_y = -\alpha m\ddot{x} + \gamma(-J_a \ddot{\psi}_y + J_p \Omega \dot{\psi}_x) \quad (5.23)$$

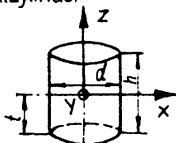
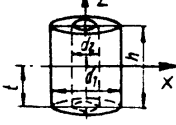
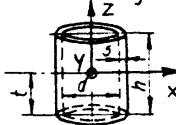
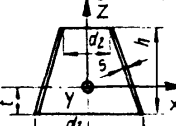
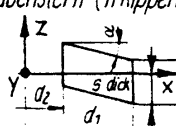
$$\psi_y = +\delta F_x + \beta M_y = -\delta m\ddot{x} + \beta(-J_a \ddot{\psi}_y + J_p \Omega \dot{\psi}_x). \quad (5.24)$$

Die Kopplung, die zwischen den 4 Gleichungen besteht, wird durch das Kreiselmoment hervorgerufen. Man sieht, dass für $\Omega = 0$ (nichtrotierende Welle) eine Entkopplung auftritt, sodass sich nur Verschiebung und Neigung innerhalb einer Ebene gegenseitig beeinflussen (y und ψ_x bzw. x und ψ_y). Die Schwingungen in den um 90° versetzten Ebenen lassen sich dann unabhängig voneinander untersuchen. Die Kreiselmomente sind bei Rotoren, bei denen $J_p \ll J_a$ ist, relativ klein gegenüber

den anderen Momenten, sodass sie ohne wesentlichen Verlust an Genauigkeit dann vernachlässigt werden können (z. B. Textilspindeln), vgl. Bild 5.5a und Bild 6.29.

Für die Berechnung ist es bei isotroper Lagerung zulässig und zweckmäßig, anstelle der beiden raumfesten Ebenen (x, z ; y, z) die umlaufende Ebene (r, z) zu benutzen, die durch die z -Achse und die elastische Linie gebildet wird. Als Koordinaten sind dann die radiale Verschiebung r des Wellenmittelpunktes und der Winkel ψ des Kegels, der durch die umlaufende Tangente gebildet wird, verwendbar.

Tabelle 5.2 Massen, Trägheitsmomente und Schwerpunktabstände von symmetrischen Rotoren

Bauelement	Schwerpunktsabstand t Masse m	Polares Trägheitsmoment $J_{ZZ} = J_P$	Axiales Trägheitsmoment $J_{YY} = J_{XX} = J_A$
Vollzylinder 	$t = \frac{h}{2}$ $m = \rho \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$	$m \frac{d^2}{8}$	$m \frac{3d^2 + 4h^2}{48}$
Hohlzylinder 	$t = \frac{h}{2}$ $m = \rho \frac{\pi}{4} (d_1^2 - d_2^2) \cdot h$	$m \frac{d_1^2 + d_2^2}{8}$	$m \frac{3d_1^2 + 3d_2^2 + 4h^2}{48}$
Dünnwand-Hohlzylind. 	$(d_1 \approx d_2 = d)$ $(\frac{d_1 - d_2}{2} = s)$ $t = \frac{h}{2}$ $m = \rho \cdot \pi \cdot d \cdot s \cdot h$	$m \frac{d^2}{4}$	$m \frac{3d^2 + 2h^2}{24}$
Dünnwand-Kegelsumpf 	$t = \frac{h}{3} \cdot \frac{d_1 + 2d_2}{d_1 + d_2}$ $m = \rho \frac{\pi}{4} (d_1 + d_2) s \cdot \sqrt{4h^2 + (d_1 - d_2)^2}$	$m \frac{d_1^2 + d_2^2}{8}$	$\frac{m}{18} \left[\frac{9}{8} (d_1^2 + d_2^2) + h^2 + 2 \frac{d_1 d_2 h^2}{(d_1 + d_2)^2} \right]$
Nabenstern (n Rippen) 	$t = \frac{h}{2} + \frac{d_1 - d_2}{4} \tan \alpha$ $m = \rho \cdot h \cdot s \cdot \frac{d_1 - d_2}{2} \cdot n$	$\frac{m}{12} \frac{d_1^3 - d_2^3}{d_1 - d_2}$	$a = (d_1 - d_2) \cdot \tan \alpha$ $b = 4 - 3 \cdot \cos \alpha$ $m \cdot \frac{b}{3 \cdot \cos \alpha} \left[\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{16} + \frac{3}{4} \frac{ah(1 - \cos \alpha)}{b} \right]$

**Bild 5.5** Rotorformen

- a) $J_a \gg J_p$ (Walzenform),
 Kreiselwirkung vernachlässigbar
 b) $J_a < J_p$ (Scheibenform),
 Kreiselwirkung wesentlich

Die in Bild 5.4 dargestellte Welle entspricht dem Fall 6 in Tabelle 5.1, wobei die Einflusszahlen $\alpha = d_{11}$, $\beta = d_{22}$, $\gamma = \delta = d_{12}$ sind. Für die Fälle 3 bis 5 gelten die folgenden Formeln ebenso.

Die Gln. (5.21) bis (5.24) lassen sich vereinfachen, wenn man mit $j = \sqrt{-1}$ die komplexen Veränderlichen $\tilde{r} = x + jy$, $\tilde{\psi} = \psi_y - j\psi_x$, $\tilde{F} = F_x + jF_y$ und $\tilde{M} = M_y - jM_x$ einführt. Fasst man (5.23) mit (5.21) und (5.22) mit (5.24) zusammen, so ergeben sich zwei Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\tilde{r} &= \alpha \tilde{F} + \gamma \tilde{M} = -\alpha m \ddot{\tilde{r}} - \gamma (J_a \ddot{\tilde{\psi}} - j J_p \Omega \dot{\tilde{\psi}}) \\ \tilde{\psi} &= \delta \tilde{F} + \beta \tilde{M} = -\delta m \ddot{\tilde{r}} - \beta (J_a \ddot{\tilde{\psi}} - j J_p \Omega \dot{\tilde{\psi}}).\end{aligned}\quad (5.25)$$

Werden für die hier interessierenden Eigenschwingungen die Lösungsansätze

$$\tilde{r} = \hat{r} e^{i\omega t}; \quad \tilde{\psi} = \hat{\psi} e^{i\omega t} \quad (5.26)$$

eingesetzt, entsteht ein homogenes lineares Gleichungssystem für die Amplituden $\hat{r}$ und $\hat{\psi}$:

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \alpha m \omega^2 \hat{r} + \gamma (J_a \omega^2 - J_p \Omega \omega) \hat{\psi} \\ \hat{\psi} &= \delta m \omega^2 \hat{r} + \beta (J_a \omega^2 - J_p \Omega \omega) \hat{\psi}.\end{aligned}\quad (5.27)$$

Die Eigenfrequenzen ergeben sich durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} \alpha m \omega^2 - 1 & \gamma (J_a - J_p \Omega / \omega) \omega^2 \\ \delta m \omega^2 & \beta (J_a - J_p \Omega / \omega) \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.28)$$

Das Amplitudenverhältnis folgt aus (5.27) und charakterisiert die Eigenform:

$$\left(\frac{\hat{r}}{\hat{\psi}} \right)_i = \frac{\gamma \omega_i^2 (J_a - J_p \Omega / \omega_i)}{1 - \alpha m \omega_i^2} = \frac{1 - \beta \omega_i^2 (J_a - J_p \Omega / \omega_i)}{\delta m \omega_i^2}. \quad (5.29)$$

Interessant ist, dass an der Stelle, wo beim nichtrotierenden ($\Omega = 0$) Balken nur das Trägheitsmoment J_a auftritt, in (5.28) und (5.29) die Größe

$$J_R = J_a - J_p \frac{\Omega}{\omega} \quad (5.30)$$

erscheint. Also kann man bei vorgegebenem Verhältnis Ω / ω mithilfe von J_R so rechnen, als ob ein nichtrotierender starrer Körper vorliegt. Wegen $\delta = \gamma$ folgt aus der Determinante (5.28) nach der Auflösung und kurzen Umformungen die Frequenzgleichung

$$\begin{aligned} & \omega^4 m J_a (\alpha \beta - \gamma^2) - \omega^3 m J_p \Omega (\alpha \beta - \gamma^2) - \omega^2 (\alpha m + \beta J_a) + \omega \beta J_p \Omega + 1 = \\ & \omega^4 m J_R (\alpha \beta - \gamma^2) - \omega^2 (\alpha m + \beta J_R) + 1 = 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Es gibt hier also insgesamt vier (vorzeichenbehaftete) Eigenkreisfrequenzen ω_i , die man durch Auflösung von (5.31) ermitteln kann. Sie hängen von der Drehgeschwindigkeit Ω der Welle ab. Den prinzipiellen Verlauf zeigt Bild 5.6. Für $\Omega = 0$ sind die Eigenkreisfrequenzen unabhängig von J_p , weil bei nichtrotierender Welle keine Kreiselwirkung auftritt. Gleichung (5.31) vereinfacht sich dann zu einer quadratischen Gleichung, aus der sich die Eigenkreisfrequenzen ergeben:

$$\omega_{10,20} = \sqrt{\frac{\alpha m + \beta J_a}{2mJ_a(\alpha\beta - \gamma^2)}} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4mJ_a(\alpha\beta - \gamma^2)}{(\alpha m + \beta J_a)^2}} \right]. \quad (5.32)$$

Der Einfluss der Kreiselwirkung wird wesentlich von dem Verhältnis J_p/J_a und von Ω bestimmt. Um die Abhängigkeit für beliebige Drehzahlen übersichtlich darstellen zu können, wird (5.31) nach Ω aufgelöst. Nach einigen Umformungen erhält man die Umkehrfunktion

$$\Omega = \frac{J_a}{J_p} \omega + \frac{-1 + \omega^2 \alpha m}{[\beta - (\alpha\beta - \gamma^2)m\omega^2] J_p \omega} \quad (-\infty < \omega < \infty). \quad (5.33)$$

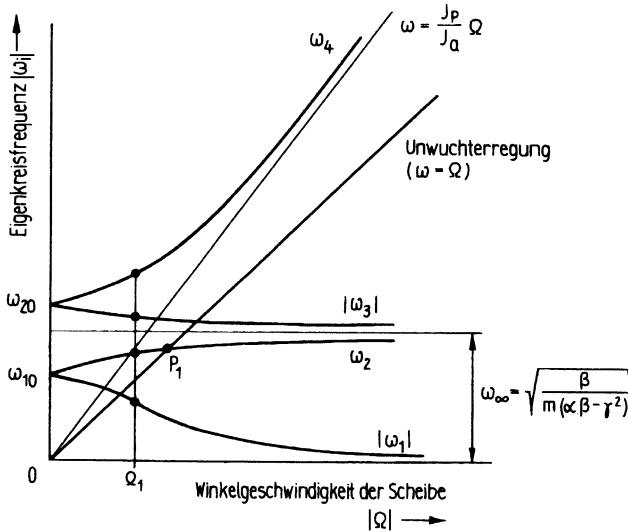


Bild 5.6 Abhängigkeit der vier Eigenkreisfrequenzen von der Winkelgeschwindigkeit Ω

Aus der Frequenzgleichung in der Form (5.31) oder (5.33) kann man durch den Grenzübergang $\Omega \rightarrow \infty$ folgende Asymptoten für die 4 Eigenkreisfrequenzen ermitteln:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{1}{\beta J_p \Omega} & \omega_3 &= -\sqrt{\frac{\beta}{m(\alpha\beta - \gamma^2)}} = -\omega_\infty \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{\beta}{m(\alpha\beta - \gamma^2)}} = \omega_\infty & \omega_4 &= \frac{J_p}{J_a} \Omega \end{aligned} \quad (5.34)$$

Üblicherweise wird nicht von negativen Eigenkreisfrequenzen gesprochen, weshalb in Bild 5.6 auch nur die Beträge $|\Omega|$ aufgetragen wurden (Eigenkreisfrequenzen sind unabhängig von der Drehrichtung des Rotors). Im vorliegenden Fall bedeutet das negative Vorzeichen, dass der Wellenmittelpunkt während der Schwingung mit ω_1 oder ω_3 entgegengesetzt zur Drehrichtung der mit Ω rotierenden Welle umläuft, vgl. (5.26). Man spricht dabei von *Gegenlauf*.

Bei den positiven Werten der Eigenkreisfrequenzen ω_2 und ω_4 ist die Drehrichtung der Wellenschwingung mit der Drehrichtung der rotierenden Welle gleich. Diesen Fall bezeichnet man als *Gleichlauf*, vgl. Bild 5.7. In Bild 5.6 sind die vier Eigenkreisfrequenzen, die die Welle bei der Winkelgeschwindigkeit Ω_1 hat, durch kleine Vollkreise gekennzeichnet. Die zugehörigen Eigenformen, die das Verhältnis von Radial- zu Winkelamplitude bei der jeweiligen Eigenfrequenz angeben, erhält man durch Einsetzen der berechneten ω_i in (5.29).

Man erkennt aus Bild 5.6, dass sowohl im Gleich- als auch im Gegenlaufgebiet zwei Eigenfrequenzen der rotierenden Welle liegen, deren Größe von der Drehgeschwindigkeit Ω abhängt. Aus diesem Bild folgt auch, dass infolge der Kreiselwirkung bei Gleichlauf eine Erhöhung der Eigenfrequenzen gegenüber der nichtrotierenden Welle auftritt. Der obere Kurvenast legt sich asymptotisch an eine Gerade an, die sich aus (5.34) ergibt. Biegekritische Drehzahlen treten auf, wenn die rotierende Welle mit einer ihrer Eigenfrequenzen erregt wird. Dabei ist zwischen Haupt- und Nebenerregung zu unterscheiden.

Die *Haupterregung* einer rotierenden Welle stellt die *Unwuchterregung* dar. Da dann eine Eigenkreisfrequenz ω_i mit der Winkelgeschwindigkeit Ω der Welle übereinstimmt, findet man die Resonanzstelle als Schnittpunkt der Geraden $\omega = \Omega$ mit den Kurven gemäß (5.33). Die *kritischen Drehzahlen des Gleichlaufs* ergeben sich somit aus (5.31) mit $J_R = J_a - J_p$ zu

$$\frac{1}{\omega_{2,4}^2} = \frac{1}{2} \left\{ \alpha m + \beta (J_a - J_p) \pm \sqrt{[\alpha m + \beta (J_a - J_p)]^2 - 4(\alpha\beta - \gamma^2)m(J_a - J_p)} \right\}. \quad (5.35)$$

Für alle Rotoren mit $J_p/J_a > 1$, vgl. Bild 5.5 und Tabelle 5.2 mit $h \ll d : J_p/J_a = 2$, wird der Wurzelausdruck größer als die davor stehenden Terme und es entsteht ein negatives ω^2 . Mit anderen Worten: Für scheibenförmige Rotoren existiert nur eine Resonanz des synchronen Gleichlaufs (Bild 5.6, Punkt P_1). Für trommelförmige Rotoren kann $J_a > J_p$ werden. Dann treten auch im synchronen Gleichlauf zwei Resonanzstellen auf, weil die Kurve von $\omega_4(\Omega)$ flacher verläuft, vgl. Bild 5.6.

Bemerkenswert ist der Sonderfall $J_a \approx J_p$, weil dabei die Unwuchterregerfrequenz sich bei großen Drehzahlen der zweiten Eigenfrequenz des Gleichlaufs asymptotisch annähert. Das bedeutet, dass bei solchen Rotoren (z. B. Milchzentrifugen und Wäscheschleudern), bei denen J_a/J_p vom Beladungszustand abhängt und dadurch in die Nähe von eins kommen kann, Resonanz bei allen höheren Drehzahlen auftritt und das Durchfahren der zweiten kritischen Drehzahl unmöglich wird. Der Konstrukteur sollte solche Erscheinungen durch günstige Wahl der Parameter des Systems vermeiden. Die *Resonanz im synchronen Gleichlauf* ist gefährlich, weil dabei keine Dämpfungen aus der Deformation der Welle entstehen. Die Welle läuft im gebogenen Zustand um und wird sozusagen nur statisch belastet. Lediglich die Lagerdämpfung wird wirksam. Die Schwingformen des Gegenlaufs sind stärker

gedämpft, weil infolge der dabei auftretenden Wechselverformung der Welle die Werkstoffdämpfung wirksam wird, vgl. Bild 5.7.

Falls die rotierende Welle nicht durch die Unwucht, sondern durch andere Kräfte oder Bewegungen von außen erregt wird, spricht man von *Neben-* oder *Fremderregung*. Nebenerregungen stellen z. B. Bewegungen des Aufstellortes dar, die als Stützbewegung auf die Welle wirken (z. B. Welle auf schwingendem Maschinengestell, Zentrifugen oder Lüfter in vibrierenden Fahrzeugen). Nebenerregungen können auch durch Antriebs- oder Abtriebskräfte eines Rotors bedingt sein, z. B. die Kräfte mit der Eingriffsfrequenz der Zähne oder der Kette des Antriebs, die Massenkräfte eines Koppelgetriebes (Kurbelwelle in Kolbenmaschinen) u. a. Bei Neben- oder Fremderregung kann der Rotor sowohl in den Eigenfrequenzen des Gleichlaufs als auch des Gegenlaufs in Resonanz erregt werden. Dabei ist im Gegensatz zur Unwucht auch mit höheren Harmonischen der Erregung zu rechnen.

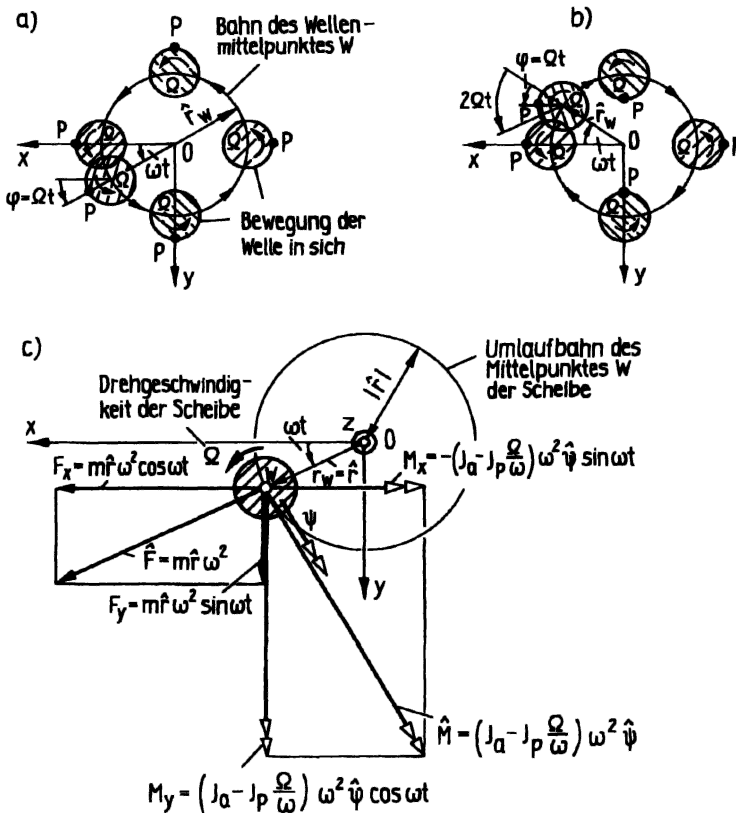


Bild 5.7 Bewegung der Scheibe

- a) synchroner Gleichlauf ($\omega = \Omega$), b) synchroner Gegenlauf ($\omega = -\Omega$)
 c) Belastung der mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \pi n/30$ rotierenden und mit der Kreisfrequenz ω schwingenden Welle

Der Ingenieur muss deshalb prüfen, nachdem er die Eigenkreisfrequenzen ω_i für die feste Winkelgeschwindigkeit Ω berechnet hat, ob sie mit einem ganzzahligen Vielfachen einer Neben-Erregerkreisfrequenz ν zusammenfällt, die unabhängig von Ω existieren kann. Es muss vermieden werden, dass

$$\omega_i(\Omega) = \pm k \cdot \nu; \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.36)$$

ist.

Der Einfluss der Kreiselwirkung auf die Lage der ersten kritischen Drehzahl hängt vom Verhältnis J_p/J_a und davon ab, ob sich der Rotor senkrecht zur Wellenachse stark (z. B. bei fliegender Anordnung) oder schwach (z. B. bei mittiger Anordnung zwischen den Lagern) neigt. Dies wird durch die Einflusszahlen bestimmt. Im Falle genauer symmetrischer Anordnung zwischen den Lagern ist $\gamma = \delta = 0$ und somit bei beliebigem J_p kein Einfluss der Kreiselwirkung auf ω_1 vorhanden.

Zur Verbesserung der Anschaulichkeit trägt es bei, wenn man sich die auf die Scheibe wirkenden Kräfte und Momente vorstellt, die sich aus (5.17) und (5.18) bei den Eigenschwingungen entsprechend (5.26) ergeben. Sie sind in Bild 5.7c eingezeichnet.

Es wirken dann die Fliehkraft in Richtung der Auslenkung

$$\tilde{F} = F_x + jF_y = m\omega^2 \hat{r} e^{j\omega t} = m\omega^2 \hat{r} (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (5.37)$$

und ein Moment senkrecht dazu, das vom Verhältnis Ω/ω abhängt, vgl. (5.30):

$$\tilde{M} = M_y - jM_x = J_R \omega^2 \hat{\psi} e^{j\omega t} = J_R \omega^2 \hat{\psi} (\cos \omega t + j \sin \omega t). \quad (5.38)$$

Beide laufen mit der gebogenen Welle um. Der Scheibenmittelpunkt dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω , die Scheibe mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um ihre Schwerachse.

5.2.4

Biegeschwinger mit endlich vielen Freiheitsgraden

Es wird von einem Berechnungsmodell ausgegangen, das aus masselosen Wellenabschnitten besteht, auf denen n Scheiben sitzen, vgl. Bild 5.8. Die Trägheitsmomente J_{Rk} sind auf die Schwerpunktschse bezogen, die senkrecht zur Biegeebene steht, vgl. (5.30). Da bei kleinen Verformungen zwischen den Kraft- und Deformationsgrößen lineare Beziehungen gelten, ergibt sich für $j = 1, 2, \dots, n$, vgl. (5.25):

$$r_j = \sum_k (\alpha_{jk} F_k + \gamma_{jk} M_k) \quad (5.39)$$

$$\psi_j = \sum_k (\delta_{jk} F_k + \beta_{jk} M_k). \quad (5.40)$$

Fasst man mit $q_j = (r_j, \psi_j)$ alle Koordinaten, mit $f_k = (F_k, M_k)$ alle Kraftgrößen und mit $m_{kk} = (m_k, J_{kk})$ alle Masseparameter zusammen, dann kann man eine einheitliche Schreibweise mit den verallgemeinerten Koordinaten einführen, die auch in Kapitel 6. benutzt wird. Die Gln. (5.39) und (5.40) können dadurch in der Form

$$q_j = \sum_{k=1}^n d_{jk} f_k; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.41)$$

geschrieben werden. Die Einflusszahlen $\alpha_{jk}, \beta_{jk}, \gamma_{jk}$ und δ_{jk} werden dann einheitlich als d_{jk} bezeichnet und in der Nachgiebigkeitsmatrix $\mathbf{D} = [d_{jk}]$ zusammengefasst.

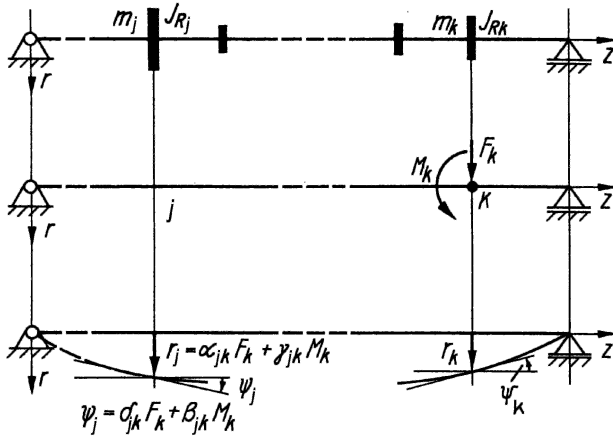


Bild 5.8 Berechnungsmodell der masselosen Welle mit Scheiben

Gleichung (5.41) lautet dann $\mathbf{q} = \mathbf{D}\mathbf{f}$ mit dem Koordinatenvektor $\mathbf{q}$ und dem Kraftvektor $\mathbf{f}$ gemäß

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T; \quad \mathbf{f} = [F_1, F_2, \dots, F_n]^T. \quad (5.42)$$

Im Falle *nicht rotierender Balken* sind die Trägheitskräfte $\mathbf{f} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}$ mit der diagonalen Massenmatrix $\mathbf{M} = \text{diag}(m_{kk})$. Die Bewegungsgleichungen (5.21) bis (5.24) vereinfachen sich dann für die freien Schwingungen eines Biegeschwingers und lauten:

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}\mathbf{f} = -\mathbf{D}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}. \quad (5.43)$$

Biegeschwinger lassen sich den Schwingern mit n Freiheitsgraden zuordnen, die in Kapitel 6 eingehend behandelt werden. Hier soll nur der allgemeine Lösungsweg angedeutet werden.

Mit dem Ansatz $\mathbf{q} = \mathbf{v} \exp(j\omega t)$ kann man (5.43) erfüllen. Es entstehen dann n linear unabhängige Gleichungen für die Komponenten des Amplitudenvektors $\mathbf{v}^T = [v_1, v_2, \dots, v_n]$. In Matrixschreibweise gilt

$$(\mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{D}\mathbf{M})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (5.44)$$

Dieses Gleichungssystem hat nichttriviale Lösungen, wenn

$$\det(\mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{D}\mathbf{M}) = 0. \quad (5.45)$$

Aus der Auflösung dieser Frequenzdeterminante folgt ein Polynom n -ten Grades für ω^2 . Es hat n reelle Wurzeln, aus denen sich die Eigenfrequenzen $f_i = \omega_i/(2\pi)$ dieses Schwingers mit n Freiheitsgraden berechnen lassen.

Wird ein Biegeschwinger aus seiner statischen Ruhelage ausgelenkt und sich danach selbst überlassen, so entstehen freie Schwingungen. Diese Auslenkung kann durch die Anfangsbedingungen

$$t = 0: \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0; \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{u}_0 \quad (5.46)$$

beschrieben werden. Die Lösung der Bewegungsgleichungen (5.43) unter Berücksichtigung von (5.46) wird in 6.3 ausführlich behandelt, vgl. auch das Beispiel in A5.6.

Hier soll nur auf Biegeschwinger mit 2 Freiheitsgraden näher eingegangen werden, die nicht rotieren. Ist ein Balken mit $n = 2$ Punktmassen besetzt, so folgt aus (5.44) mit $\hat{r}_k = v_k$ und $\alpha_{jk} = d_{jk}$:

$$\begin{aligned} j = 1: & \quad (1 - \omega^2 d_{11} m_1) v_1 - \omega^2 d_{12} m_2 v_2 = 0 \\ j = 2: & \quad -\omega^2 d_{21} m_1 v_1 + (1 - \omega^2 d_{22} m_2) v_2 = 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Nullsetzen der Koeffizientendeterminante liefert die Frequenzgleichung (mit $d_{12} = d_{21}$)

$$\begin{aligned} \det = & \begin{vmatrix} 1 - \omega^2 d_{11} m_1 & -\omega^2 d_{12} m_2 \\ -\omega^2 d_{21} m_1 & 1 - \omega^2 d_{22} m_2 \end{vmatrix} \\ & = \omega^4 m_1 m_2 (d_{11} d_{22} - d_{12}^2) - \omega^2 (d_{11} m_1 + d_{22} m_2) + 1 = 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Durch Lösung dieser quadratischen Gleichung findet man die beiden Eigenkreisfrequenzen:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{d_{11} m_1 + d_{22} m_2}{2 m_1 m_2 (d_{11} d_{22} - d_{12}^2)} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4 m_1 m_2 (d_{11} d_{22} - d_{12}^2)}{(d_{11} m_1 + d_{22} m_2)^2}} \right). \quad (5.49)$$

Die Amplitudenverhältnisse, die sich bei einer Eigenschwingung des Balkens mit 2 Punktmassen einstellen, folgen aus (5.47), wenn dort $\omega = \omega_i$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{v_2}{v_1} \right)_i = \frac{1 - \omega_i^2 d_{11} m_1}{\omega_i^2 d_{12} m_2} = \frac{\omega_i^2 d_{21} m_1}{1 - \omega_i^2 d_{22} m_2}; \quad i = 1, 2. \quad (5.50)$$

Falls der Biegeschwinger mit einer seiner Eigenfrequenzen schwingt, stellt sich die so genannte Eigenschwingform (Eigenform) ein, bei welcher die Amplituden in dem durch (5.50) gegebenen festen Zahlenverhältnis stehen.

Die Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingformen geht bei Biegeschwingern von den Einflusszahlen aus. In Tabelle 5.1 sind für zweifach gelagerte Wellen die Einflusszahlen unter Berücksichtigung der Lagerelastizität angegeben. Die starre Lagerung ergibt sich daraus als Sonderfall ($1/c_1 = 0$ bzw. $1/c_2 = 0$). Im Fall 4 in Tabelle 5.1 wurde berücksichtigt, dass die Verbindungsstelle Rotor–Welle nicht mit dem Schwerpunkt des Rotors zusammenfällt, wie es z. B. bei Zentrifugentrommeln und Spindeln der Fall ist.

5.2.5

Beispiele

5.2.5.1

Eigenfrequenzen einer Milchzentrifuge

Die in Bild 5.9 dargestellte Milchzentrifuge wird zum Scheiden von Flüssigkeiten eingesetzt. Das elastische Halslager wurde im Jahre 1889 bei Dampfturbinen, Textilspindeln und Zentrifugen eingeführt, nachdem man erkannt hatte, dass ein überkritischer Lauf möglich und günstig ist. Für die optimale Auslegung der Konstruktion

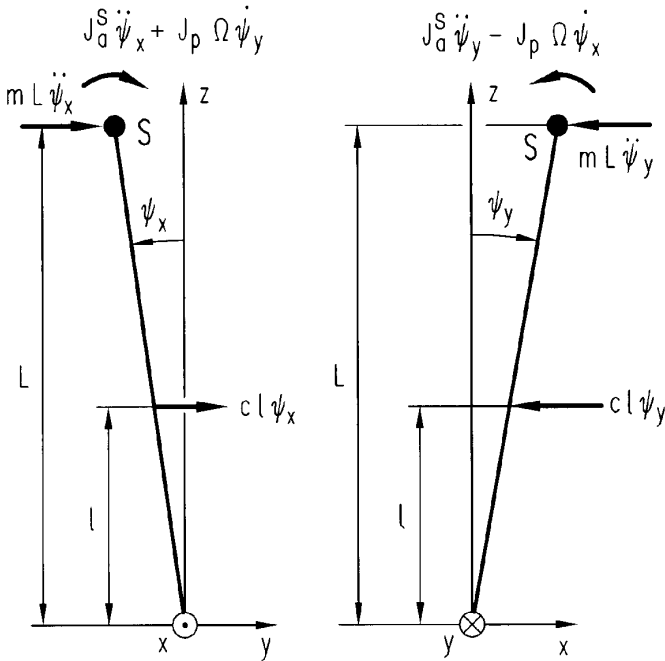


Bild 5.10 Kräfte und Momente am Rotor

Die Richtungen der Kreiselmomente kann man sich als Folge der Richtungsänderung des Drehimpulsvektors erklären, vgl. auch (5.18). Aus dem Momentengleichgewicht um den Punkt A folgt (man beachte die entsprechenden Hebelarme):

$$\begin{aligned} J_a^S \ddot{\psi}_x + J_p \Omega \dot{\psi}_y + m L^2 \ddot{\psi}_x + c l^2 \psi_x &= 0 \\ J_a^S \ddot{\psi}_y - J_p \Omega \dot{\psi}_x + m L^2 \ddot{\psi}_y + c l^2 \psi_y &= 0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Nach Umordnung der Terme entstehen daraus unter Benutzung des Trägheitsmomentes bezüglich des Lagers A ($J_A = J_a^S + m L^2$) die Bewegungsgleichungen

$$J_A \ddot{\psi}_x + J_p \Omega \dot{\psi}_y + c l^2 \psi_x = 0; \quad J_A \ddot{\psi}_y - J_p \Omega \dot{\psi}_x + c l^2 \psi_y = 0. \quad (5.52)$$

Ohne Kreiselwirkung entkoppelt sich das Gleichungssystem (5.52), und es ergibt sich (für $\Omega = 0$) aus jeder Gleichung die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c l^2}{J_A}}. \quad (5.53)$$

Infolge der Kreiselwirkung sind die Bewegungen in beiden Ebenen miteinander gekoppelt. Da Lager und Welle isotrop sind, bewegt sich der Schwerpunkt des Rotors auf einer Kreisbahn um die z-Achse. Der Ansatz

$$\psi_x = \dot{\psi} \cos \omega t; \quad \psi_y = \dot{\psi} \sin \omega t \quad (5.54)$$

beschreibt eine solche Kreisbahn mit einer zunächst unbekannten Kreisfrequenz ω . Für den Radius wird die Amplitude $r = L\psi$ angenommen. Setzt man die Drehgeschwindigkeiten ($\dot{\psi}_x, \dot{\psi}_y$) und Drehbeschleunigungen ($\ddot{\psi}_x, \ddot{\psi}_y$) in (5.52) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} (-\omega^2 J_A + J_p \Omega \omega + cl^2) \psi \cos \omega t &= 0 \\ (-\omega^2 J_A + J_p \Omega \omega + cl^2) \psi \sin \omega t &= 0. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Aus beiden Gln. folgt durch Nullsetzen des Klammerausdrucks die Frequenzgleichung:

$$\omega^2 - \frac{J_p \Omega}{J_A} \omega - \frac{cl^2}{J_A} = 0. \quad (5.56)$$

Daraus folgen die beiden Eigenkreisfrequenzen mit $\omega_k = J_p \Omega / J_A$

$$\omega_{1,2} = \frac{J_p \Omega}{2J_A} \mp \sqrt{\left(\frac{cl^2}{J_A}\right) + \left(\frac{J_p \Omega}{2J_A}\right)^2}. \quad (5.57)$$

Den Einfluss der Kreiselwirkung kann man mit der Kenngröße

$$\varepsilon = \frac{\omega_k}{2\omega_0} = \frac{J_p \Omega}{2J_A \omega_0} = \frac{J_p \Omega}{2l\sqrt{cJ_A}} \quad (5.58)$$

bewerten. Er ist praktisch vernachlässigbar, falls $\varepsilon < 0,05$ ist. Der Einfluss der Rotationsgeschwindigkeit Ω auf die Eigenfrequenzen ist für walzenförmige Rotoren kleiner als bei scheibenförmigen Rotoren, vgl. Bild 5.5.

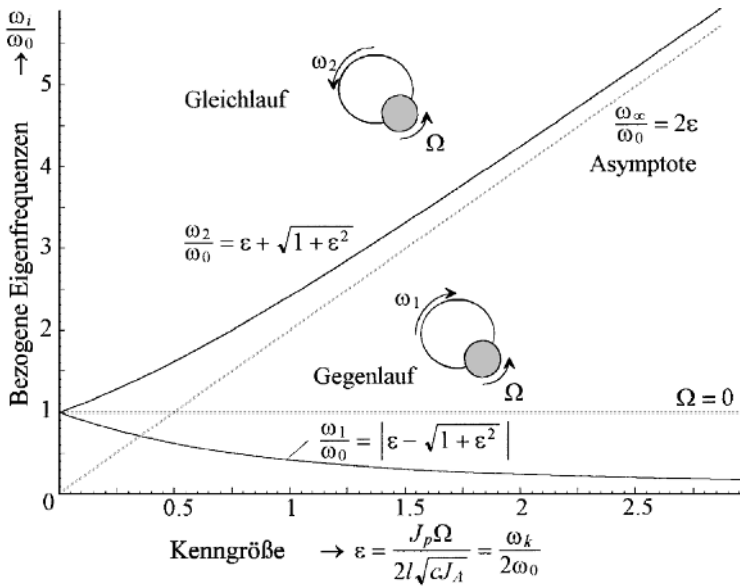


Bild 5.11 Eigenfrequenzen als Funktion der Drehgeschwindigkeit

Man beachte, dass gemäß (5.57) eine „positive“ und eine „negative Eigenkreisfrequenz“ vorhanden sind, da der Wurzel Ausdruck größer als der erste Summand ist. Setzt man die negative Wurzel in (5.54) ein, erkennt man, dass dieser ein anderer Umlaufsinn („Gegenlauf“: Drehung des Rotors gegensinnig zur Schwingungsrichtung) entspricht als der positiven Wurzel („Gleichlauf“: Drehung des Rotors gleichsinnig zur Schwingungsrichtung).

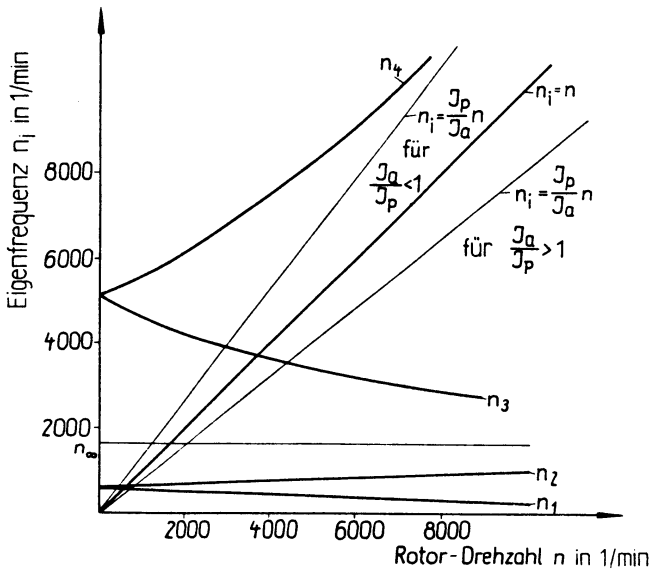


Bild 5.12 Drehzahlabhängige Eigenfrequenzen einer Milchzentrifuge

Für die in Bild 5.9a dargestellte Milchzentrifuge wurden die in Bild 5.12 dargestellten drehzahlabhängigen Eigenfrequenzen mit dem Modell von Tabelle 5.1, Fall 4, berechnet. Dieses Modell mit vier Freiheitsgraden hat vier Eigenfrequenzen. Der Schnittpunkt der Geraden n_i mit der Kurve n_2 liefert die kritische Drehzahl des synchronen Gegenlaufs, die bei Unwuchterregung entsteht. Die Kurven n_1 und n_3 entsprechen den Schwingformen des Gegenlaufs.

Allerdings sind nicht sämtliche experimentell festgestellten dynamischen Erscheinungen an solchen Zentrifugen mit diesem einfachen Modell erklärbar. Es wurden Resonanzstellen der nichtrotierenden Trommel ($\Omega = 0$) bei $f_1 = 11,5$ Hz ($\cong 690$ 1/min), $f_2 = 41$ Hz ($\cong 2460$ 1/min) und $f_3 = 62$ Hz ($\cong 3720$ 1/min) gemessen. Dabei entsprechen den Eigenfrequenzen f_1 und f_3 Eigenformen der Welle, während f_2 durch die elastische Lagerung des Gehäuses verursacht wurde. Weiterhin wurde als Schwingungsform eine Drehung des gesamten Gestells ermittelt, die bislang unbekannt war. Zur genauen Klärung aller dynamischer Einflüsse ist ein Berechnungsmodell erforderlich, das die elastische Aufstellung des Gehäuses, die Nachgiebigkeit der Trommel und andere Effekte berücksichtigt.

5.2.5.2

Aufprallen eines bewegten Balkens

Eine Klappe mit horizontaler Drehachse wird zugeschlagen. Es sollen die ersten drei Eigenfrequenzen während der freien Drehung ($c = 0$) und nach dem Aufprall ($c \neq 0$) berechnet und als Funktion der Kenngröße $\bar{\tau} = 2EI/(cl^3)$ dargestellt werden. Die Klappe wird als Biegeschwinger mit 4 Freiheitsgraden und die Stelle des Aufpralls als masselose Feder modelliert, vgl. Bild 5.13a.

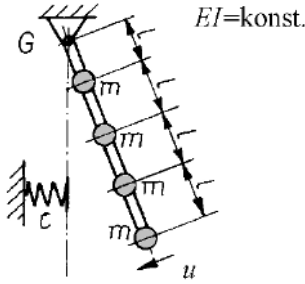


Bild 5.13 Aufprall eines Balkens;
Parameter des Modells: c, m, l, EI

Bild 5.13 zeigt den Biegeschwinger vor dem Aufprall. Die absoluten Verschiebungen lassen sich im Koordinatenvektor

$$\mathbf{q} = [q_1; q_2; q_3; q_4]^T \quad (5.59)$$

zusammenfassen. Die Bewegungsgleichung entspricht (5.43).

Die Elemente der Nachgiebigkeitsmatrix $\mathbf{D}$ ermittelt man aus Tabelle 5.1. So betragen beispielsweise nach dem dortigen Fall 1 für $l_1 = l_2 = l_3 = l$; $c_1 \rightarrow \infty$; $c_2 = c$ die Einflusszahlen:

$$d_{11} = \frac{1}{9c} + \frac{4l^3}{9EI}; \quad d_{12} = \frac{2}{9c} + \frac{7l^3}{18EI}; \quad d_{22} = \frac{4}{9c} + \frac{4l^3}{9EI}. \quad (5.60)$$

Aus dem Fall 2 findet man für $l_1 = l_3 = l$; $l_2 = 2l$; $c_1 \rightarrow \infty$ und $c_2 = c$ die Einflusszahlen:

$$d_{14} = \frac{4}{9c} - \frac{4l^3}{9EI}; \quad d_{44} = \frac{16}{9c} + \frac{4l^3}{3EI}. \quad (5.61)$$

In dieser Weise können alle Elemente der Nachgiebigkeitsmatrix berechnet werden:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{9c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} + \frac{l^3}{18EI} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 0 & -8 \\ 7 & 8 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -10 & 0 & 24 \end{bmatrix}. \quad (5.62)$$

Die Massenmatrix ist

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m, m, m, m) = m\mathbf{E}. \quad (5.63)$$

Die Eigenkreisfrequenzen ergeben sich aus der Lösung des Eigenwertproblems (5.45) entsteht. Zur numerischen Lösung wurde Software benutzt. Die Ergebnisse sind in Bild 5.14 dargestellt.

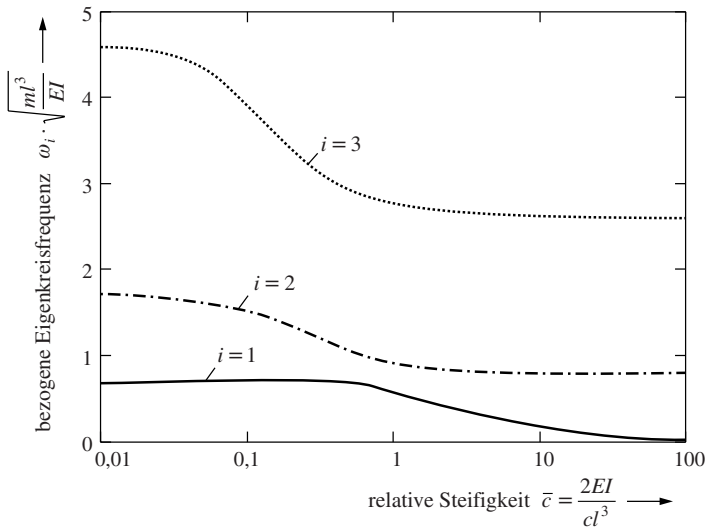


Bild 5.14 Eigenfrequenzen des abgestützten Balkens von Bild 5.13 als Funktion der Lagersteifigkeit

Kleinen Werten der Kenngröße $\bar{c}$ entspricht ein relativ biegesteifer Balken, großen $\bar{c}$ -Werten eine sehr weiche Feder (Grenzfall: keine Feder), vgl. die Asymptoten in Bild 5.14.

Die Berechnung der Belastungen erfolgt in Abschnitt 6.4.7, vgl. Lösung L6.7.

5.2.6

Aufgaben A5.1 bis A5.3

A5.1 Bewertung der dynamischen Lagerkraft

Ein starrer nicht ausgewuchteter Rotor mit einem elastischen Lager (vgl. Bilder 5.1 und 5.9) ruft bei einer Drehzahl $n = 30\,000 \cdot 1/\text{min}$ eine achtmal kleinere dynamische Lagerbelastung als bei starrer Lagerung hervor. Man erkläre diese Tatsache und berechne die Eigenfrequenz des elastisch gelagerten Rotors unter der Annahme, dass er sich wie ein Schwinger mit einem Freiheitsgrad verhält.

A5.2 Eigenschwingungen eines Biegeschwingers

Von dem in Bild 5.15a dargestellten Berechnungsmodell einer Maschinenwelle sind die kritischen Drehzahlen und Eigenformen der Biegeschwingungen zu berechnen.

Gegeben:

$$\begin{array}{lll}
 l_1 = 300 \text{ mm} & d = 25 \text{ mm} & E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \\
 l_2 = 200 \text{ mm} & m_1 = 6 \text{ kg} & \\
 l_3 = 500 \text{ mm} & m_2 = 4 \text{ kg} &
 \end{array}$$

Auf die Punktmassen ist der Anteil der Wellenmasse von 3,8 kg mit aufgeteilt.

Gesucht: Einflusszahlen, die beiden kritischen Drehzahlen, Eigenschwingformen

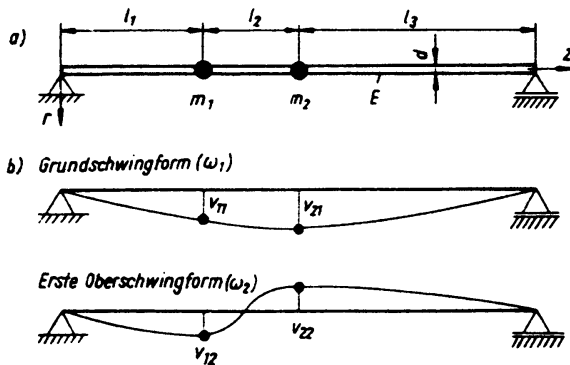


Bild 5.15 Berechnungsmodell einer Maschinenwelle mit zwei Freiheitsgraden

A5.3 Einfluss der Kreiselwirkung auf Eigenfrequenzen

Um einen Vergleich der elastischen und gyroskopischen Einflüsse zu erhalten, sollen an den in Bild 5.16 dargestellten Modellen die beiden Eigenkreisfrequenzen für den Fall der rotierenden und der nichtrotierenden Welle berechnet werden. Man verwende die Parameter m , l , EI und die in Tabelle 5.3 angegebenen Zahlenwerte. Für die rotierende Welle ist synchroner Gleichlauf anzunehmen.

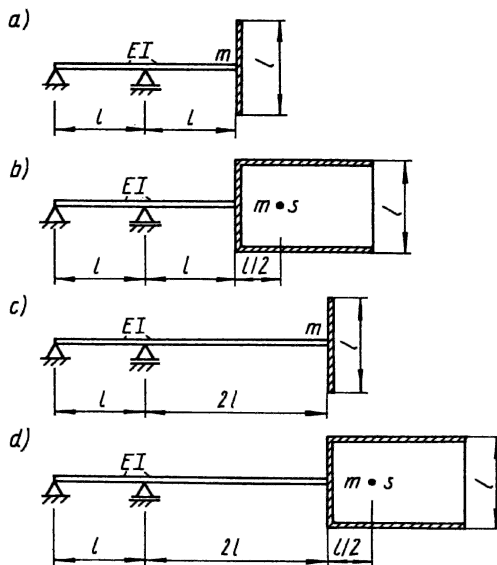


Bild 5.16 Berechnungsmodelle zur Illustration des Einflusses von Kreiselwirkung und Nachgiebigkeit

Tabelle 5.3 Zahlenwerte für die Berechnungsmodelle von Bild 5.16

Modell	$\alpha \frac{EI}{l^3}$	$\beta \frac{EI}{l}$	$\gamma \frac{EI}{l^2}$	$\frac{J_a}{ml^2}$	$\frac{J_p}{J_a}$	$\frac{\beta J_a}{\alpha m}$	$\alpha m \omega_\infty^2$
Bild 5.16a	0,6667	1,3333	0,8333	0,2500	2	0,5000	0,2188
Bild 5.16b	0,6250	0,8333	0,7083	0,3410	0,857	0,4547	0,0368
Bild 5.16c	4,0000	2,3333	2,6667	0,2500	2	0,1458	0,2381
Bild 5.16d	3,9583	1,8333	2,5417	0,3410	0,857	0,1579	0,1098

5.2.7**Lösungen L5.1 bis L5.3**

- L5.1** Beim starren Rotor in starren Lagern wachsen die dynamischen Lagerkräfte infolge der Fliehkräfte der Unwuchten mit dem Quadrat der Drehzahl, vgl. (2.350). Beim starren Rotor mit elastischer Lagerung resultieren die Lagerkräfte aus der Fliehkraft und der (im überkritischen Drehzahlbereich) entgegengesetzt wirkenden Massenkraft aus der Eigenschwingung.

Die dynamische Lagerkraft am elastisch gelagerten Rotor verhält sich zu der des starr gelagerten, vgl. (5.10) und (2.344), wie

$$\left| \frac{F_{\text{el}}}{F_{\text{st}}} \right| = \left| \frac{m \sqrt{\ddot{x}_S^2 + \ddot{y}_S^2}}{me\Omega^2} \right| = \frac{me\Omega^2 \omega_1^2}{me\Omega^2(\omega_1^2 - \Omega_1^2)} = \frac{1}{|1 - \eta^2|} = 0,125. \quad (5.64)$$

Daraus folgt $\Omega/\omega_1 = \eta = 3$, und somit ist die Eigenfrequenz

$$\underline{\underline{f_1}} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\Omega}{2\pi \cdot 3} = \frac{\pi n}{30 \cdot 2\pi \cdot 3} = \underline{\underline{166,7\text{Hz}}} \quad (5.65)$$

- L5.2** Die Einflusszahlen lassen sich aus Tabelle 5.1 entnehmen (Modell 1). Für $c_1 = c_2 \rightarrow \infty$ und $l = l_1 + l_2 + l_3$ ergibt sich mit $I = \pi d^4/64$:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{l_1^2(l - l_1)^2}{3EI} = 3,651 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{N}} \\ d_{22} &= \frac{l_3^2(l_1 + l_2)^2}{3EI} = 5,174 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{N}} \\ d_{12} &= \frac{l_1 l_3 (l^2 - l_1^2 - l_3^2)}{6EI} = 4,098 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{N}} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Die Eigenkreisfrequenzen errechnen sich zu $\omega_1 = 155,4 \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = 906,8 \text{ s}^{-1}$, vgl. (5.49), d. h., die kritischen Drehzahlen sind $\underline{\underline{n_1 = 1484/\text{min}}}$ und $\underline{\underline{n_2 = 8659/\text{min}}}$. Die Amplitudenverhältnisse folgen aus (5.50) zu

$$\left(\frac{v_2}{v_1} \right)_1 = \left(\frac{v_{21}}{v_{11}} \right) = 1,188, \quad \left(\frac{v_2}{v_1} \right)_2 = \left(\frac{v_{22}}{v_{12}} \right) = -1,262 \quad (5.67)$$

und entsprechen den in Bild 5.15b dargestellten Eigenformen.

- L5.3** Die Eigenkreisfrequenzen der nichtrotierenden Wellen ($\Omega = 0$) ergeben sich mit $J_R = J_a$, und die Kreisfrequenzen des synchronen Gleichlaufs ($\Omega = \omega$) ergeben sich aus (5.31). Die Zahlenwerte enthält Tabelle 5.4. Man sieht daraus, dass ω_1 mit größer werdendem Abstand der Masse von den Lagern sinkt und dass die Kreiselwirkung die Kreisfrequenzen des synchronen Gleichlaufs erhöht, vgl. dazu auch Bild 5.6. Die Kreiselwirkung ändert die zweite Eigenfrequenz sehr stark, weil bei der zweiten Eigenform die Neigung des Rotors größer ist. Weil für die Fälle a) und c) $J_p > J_a$ gilt, tritt keine zweite Resonanzstelle des synchronen Gleichlaufs auf.

Tabelle 5.4 Eigenfrequenzen der Berechnungsmodelle von Bild 5.16

Modell	$\omega_1/\sqrt{EI/ml^3}$		$\omega_2/\sqrt{EI/ml^3}$	
	$\Omega = 0$	$\Omega = \omega$	$\Omega = 0$	$\Omega = \omega$
Bild 5.16a	1,027	1,502	4,417	imaginär
Bild 5.16b	1,053	1,227	11,760	26,707
Bild 5.16c	0,474	0,529	2,833	imaginär
Bild 5.16d	0,470	0,498	4,081	10,196

5.3

Massebelegter Balken

5.3.1

Allgemeine Zusammenhänge

Eine Alternative zu dem Berechnungsmodell mit endlich vielen Freiheitsgraden ist das Berechnungsmodell des Kontinuums. Bei diesem Modell sind Masse und Elastizität kontinuierlich verteilt. Das Schwingungsverhalten des Balkens wird wesentlich bestimmt durch den Verlauf der Biegesteifigkeit und der Massebelegung, sowie durch die Lagerbedingungen.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass der schwingende Balken einen doppelt symmetrischen Querschnitt hat, wie z. B. Kreis, Rechteck, Doppel-T. Dabei kann man sich auf die Untersuchung der Schwingungen in einer Ebene beschränken. Balken mit unsymmetrischem Profil schwingen im allgemeinen nicht in einer Ebene. Bei ihnen können gekoppelte Biege- und Torsionsschwingungen auftreten, weil der Schubmittelpunkt mit dem Schwerpunkt nicht zusammenfällt. Auch verwundene Profile, wie sie bei Turbinenschaufeln vorkommen, werden aus den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen.

Die Differenzialgleichung der Biegelinie eines Balkens ist aus der Festigkeitslehre bekannt und lautet

$$(EI r'')'' = q. \quad (5.68)$$

Ersetzt man die Flächenlast q durch die bei den Schwingungen auf den Balken wirkenden spezifischen Massenkkräfte

$$q = -\rho A \ddot{r}. \quad (5.69)$$

so entsteht die partielle Differenzialgleichung für die freien Biegeschwingungen des Balkens:

$$(EI r'')'' + \rho A \ddot{r} = 0. \quad (5.70)$$

Dabei bedeutet:

$EI(z)$ Biegesteifigkeit des Balkens in der Schwingungsebene

$\rho A(z)$ Masse je Längeneinheit

$r(z, t)$ zeitlich veränderliche Durchbiegung in radialer Richtung

$()'$ Ableitung nach der z -Koordinate.

Der den Eigenschwingungen entsprechende Separationsansatz trennt die Zeit- und Ortsfunktionen und lautet:

$$r(z, t) = v(z) \sin(\omega t + \beta). \quad (5.71)$$

Dabei ist $v(z)$ die Amplitudenfunktion und ω die Kreisfrequenz der Schwingung. Nach dem Einsetzen dieses Ansatzes in (5.70) erhält man die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$(EI v'')'' - \rho A \omega^2 v = 0. \quad (5.72)$$

Die Eigenkreisfrequenzen ω_i und Eigenschwingformen $v_i(z)$ von Balken, für welche die Voraussetzungen der elementaren Balkentheorie zutreffen, können aus dieser Differenzialgleichung in Verbindung mit den Randbedingungen des jeweiligen konkreten Falles berechnet werden.

In der Maschinenbaupraxis sind oft weitere Größen, wie z. B. die Längskraft, die Winkelgeschwindigkeit, die Schubverformung u. a. von Einfluss. In Tabelle 5.5 sind in der zweiten Spalte die dementsprechenden Differenzialgleichungen angegeben, welche die genannten Einflussgrößen berücksichtigen. Die Herleitung erfolgt analog zu (5.68) bis (5.70).

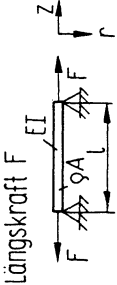
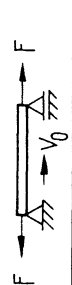
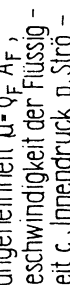
Aus Gl. (2), Tabelle 5.5, kann man schließen, dass und wie Zugkräfte eine Eigenfrequenz erhöhen. Im Grenzfall $EI \rightarrow 0$ geht der Balken in die gespannte Saite über, deren Eigenfrequenzen mit der Wurzel der Spannkraft zunehmen: $\omega_1 = \pi \sqrt{F/\rho A l^2}$. Bei Druckkräften sinken die Eigenfrequenzen, und beim Erreichen der kritischen Knickkraft $F_k = -\pi^2 EI/l^2$ ist der schwingende Balken instabil, da $\omega_1 = 0$ wird.

Aus der zweiten Zeile geht hervor, dass bei Berücksichtigung von Rotationsträgheit und Querkraftschub die Eigenfrequenzen etwas absinken. Dies ist physikalisch durch die Steifigkeitsminderung und Trägheitserhöhung bedingt. Nur bei höheren Eigenformen kurzer Balken mit relativ großer Querschnittshöhe und bei Hohlprofilen wirkt sich dieser Effekt wesentlich aus.

Der Einfluss der Kreiselwirkung führt zu einem Aufspalten der Eigenfrequenzen, wie schon aus Abschnitt 5.2.2 bekannt ist, vgl. Bild 5.6, 5.11 und 5.12. Er ist bei kleinen Durchmessern oft vernachlässigbar klein. Die kritische Drehzahl des Gleichlaufs folgt aus der Bedingung $\omega_1 = \Omega$.

Interessant ist der Geschwindigkeitseinfluss, der bei bewegten Keilriemen, Papierbögen, Textilbahnen, Förderbändern u. a. zu unerwünschten Instabilitäten füh-

Tabelle 5.5 Parametereinflüsse auf den Kontinuuum-Balken (Eigenkreisfrequenzen bei beiderseits gelenkigem Lager)

Fall	Einflussgröße	Differentialgleichung der freien Schwingungen	Eigenkreisfrequenzen ω_i ($i=1,2,\dots$)
1	Längskraft F 	$EI r'''' + qA \ddot{r} - F r'' = 0$ (Zug: $F > 0$, Druck: $F < 0$)	$\omega_i = \frac{\pi^2 i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{qA}} \sqrt{1 + \frac{Fl^2}{\pi^2 i^2 EI}}$ (2)
2	Rotationsträgheit ϱI und Querkraftschub $\kappa \varrho$  $\varepsilon = \frac{\pi^2 i^2 I}{Al^2} \ll 1$	$EI r'''' + qA \ddot{r} - \varrho I (1 + \frac{E}{\kappa \varrho}) \ddot{r}'' + \frac{q^2 I}{\kappa \varrho} \ddot{r} = 0$ (3) (Timoschenko-Balken, Rechteck: $\kappa = 5/6$)	$\omega_i = \frac{\pi^2 i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{qA}} \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{E}{\kappa \varrho} \right) \right]$ (4)
3	Winkelgeschwindigkeit Ω ,  $\varepsilon \ll 1$	$EI r'''' + qA \ddot{r} - \varrho I \ddot{r}'' - 2\varrho I \Omega \dot{r}' = 0$ (5) $EI w'''' + qA \ddot{w} - \varrho I \ddot{w}'' + 2\varrho I \Omega \dot{r}' = 0$ (Kreiselwirkung rotierender Wellen)	$\omega_i = \frac{\pi^2 i^2}{l^2} (1 - \varepsilon) \left[\frac{I \Omega}{A} \pm \sqrt{\left(\frac{I \Omega}{A} \right)^2 + \frac{EI}{qA} (1 + \varepsilon)} \right]$ (6)
4	Geschwindigkeit v_0 	$EI r'''' + qA \ddot{r} - (F - qA v_0^2) r'' + 2qA v_0 \dot{r}' = 0$ (7) (bewegte Riemen, Bänder, Fäden, ...)	$\omega_i = \frac{\pi i}{l} \left[\sqrt{\frac{F}{qA} + \frac{\pi^2 i^2 EI}{\varrho A l^2}} - v_0^2 \sqrt{\frac{qA}{F}} \right]$ (8)
5	Masse der Flüssigkeit pro Längeneinheit $\mu = \varrho_F A_F$, Geschwindigkeit der Flüssigkeit c , Innendruck p , Strömungsquerschnittsfläche A_F 	$EI r'''' + (qA + \mu) \ddot{r} + (\mu c^2 + pA_F - F) r'' + 2c\mu \dot{r}' = 0$ (9) (flüssigkeitsdurchströmtes Rohr)	$\omega_i = \frac{\pi i}{l} \left[\sqrt{\frac{F - pA_F}{qA + \mu} + \frac{\pi^2 i^2 EI}{(\varrho A + \mu) l^2}} - c \right]$ (10)

ren kann. Die Schwingung wird instabil bei $\omega_1 = 0$. Daraus kann man die Größe der ersten kritischen Geschwindigkeit berechnen:

$$v_{\text{krit}} = \sqrt[4]{\left(\frac{F}{\varrho A}\right)^2 \left(1 + \pi^2 \frac{EI}{Fl^2}\right)}. \quad (5.73)$$

Bei ihr würden solche großen Ausschläge entstehen, dass die betreffende Bewegung unzulässig gestört wird. Durch höhere Vorspannung kann man, wie auch aus Gl. (8), Tabelle 5.5, hervorgeht, diesem kritischen Zustand ausweichen. Bei flüssigkeitsgefüllten Rohren ist der destabilisierende Einfluss des Innendrucks bemerkenswert, der wie eine Druck-Längskraft wirkt. Der kritischen Bandgeschwindigkeit v ist eine kritische Strömungsgeschwindigkeit c analog, vgl. Fall 5 in Tabelle 5.5.

Die folgende Betrachtung soll auf den wichtigen Zusammenhang zwischen dem diskreten Modell und dem des Kontinuums hinweisen. Dazu wird ein nur mit Einzelmassen m_k besetzter Balken betrachtet und die Rotationsträgheit vernachlässigt, vgl. Tabelle 5.6. Verkleinert man die Einzelmassen und vergrößert gleichzeitig ihre Anzahl, so entsteht schließlich ein kontinuierlich mit Masse belegter Balken aus unbegrenzt vielen Masseelementen $dm = \varrho A dz$.

Die Belastung geht dann von Einzelkräften F_k in die sich aus Streckenlast $q(\zeta)$ ergebenden Kraffelemente $dF = q(\zeta) \cdot d\zeta$ über. Die Einflussfunktion $d(z, \zeta)$, welche die Durchbiegung an der Stelle z infolge einer Kraft an der Stelle ζ angibt, entspricht den Einflusszahlen $\alpha_{ik} = d_{ik}$. Zur Berechnung der Durchbiegung infolge einer Belastung geht die beim diskreten System auftretende Summe durch den Grenzübergang zu unendlich vielen Elementen in ein Integral (über die Balkenlänge l) über:

$$r_i(t) = \sum_{k=1}^n d_{ik} F_k(t) \hat{=} r(z, t) = \int_0^l d(z, \zeta) q(\zeta, t) d\zeta. \quad (5.74)$$

Bei Eigenschwingungen entspricht die Belastung den Massenkraften:

$$F_k(t) = -m_k \ddot{r}_k(t) \hat{=} q(\zeta, t) = -\varrho A(\zeta) \ddot{r}(\zeta, t). \quad (5.75)$$

Dabei ist $A(\zeta)$ die längs des Balkens veränderliche Querschnittsfläche. Nach dem Einsetzen ergeben sich die Bewegungsgleichungen:

$$r_i(t) = -\sum_{k=1}^n d_{ik} m_k \ddot{r}_k(t) \hat{=} r(z, t) = -\int_0^l d(z, \zeta) \varrho A(\zeta) \ddot{r}(\zeta, t) d\zeta. \quad (5.76)$$

Dem linearen System von Differenzialgleichungen (5), Tabelle 5.6, des diskreten Modells entspricht die Integrodifferenzialgleichung (6), Tabelle 5.6, des Kontinuums. Anstelle der Ausschläge $r_k(t)$ der Einzelmassen ($k = 1, \dots, n$) erscheint beim Kontinuum die von Ort und Zeit abhängige Biegelinie $r(z, t)$.

Der aus (5.26) bekannte Ansatz zur Ermittlung der Eigenschwingungen nimmt äquivalente Formen an:

$$r_i(t) = v_i \exp(j\omega t) \hat{=} r(z, t) = v(z) \exp(j\omega t). \quad (5.77)$$

Kombiniert man Gl. (7) und (8) mit (5) und (6), Tabelle 5.6, so ergibt sich nach Kürzung von $\exp(j\omega t)$

Tabelle 5.6 Beziehungen zwischen dem diskreten System und dem Kontinuum-Balken

Systemskizze		
Mechanische Größen	Diskretes System	Kontinuum
Durchbiegung	$r_j(z_j, t) = \sum_k d_{jk} F_k(t) \quad (1)$	$r(z, t) = \int_0^L d(z, \zeta) q(\zeta, t) d\zeta \quad (2)$
Trägheitskräfte	$F_k(t) = -m_k \ddot{r}_k(t) \quad (3)$	$q(z, t) = -\rho A(z) \ddot{r}(z, t) \quad (4)$
Bewegungsdiff. gl'n.	$r_j(t) + \sum_k d_{jk} m_k \ddot{r}_k(t) = 0 \quad (5)$	$r(z, t) + \int_0^L d(z, \zeta) \rho A(\zeta) \ddot{r}(\zeta, t) d\zeta = 0 \quad (6)$
Separation	$r_j(z_j, t) = v_j(z_j) \exp(j\omega t) \quad (7)$	$r(z, t) = v(z) \exp(j\omega t) \quad (8)$
Eigenschwingform Nr. i	$v_{ji} - \omega_i^2 \sum_k d_{jk} m_k v_{ki} = 0 \quad (9)$	$v_i(z) - \omega_i^2 \int_0^L d(z, \zeta) \rho A(\zeta) v_i(\zeta) d\zeta = 0 \quad (10)$
Kinetische Energie T	$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{r}_k^2(t) \quad (11)$	$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(z) \dot{r}^2(z, t) dz \quad (12)$
Potenzielle Energie U	$U = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k d_{jk} F_j F_k \quad (13)$	$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2(z)}{EI(z)} dz \quad (14)$
	$U = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k c_{jk} r_j r_k \quad (15)$	$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI r''^2(z, t) dz \quad (16)$
Verallg. Orthogonalität der Eigenschwingformen	$\sum_i m_i v_{ji} v_{ki} = \delta_{jk} \quad (17)$	$\int_0^L \rho A(z) v_j(z) v_k(z) dz = \delta_{jk} \quad (18)$
Summation (Abschätzung)	$\sum_i 1/\omega_i^2 = B_1 = \sum_i m_i d_{ii} > \frac{1}{\omega_1^2} \quad (19)$	$B_1 = \int_0^L \rho A(z) d(z, z) dz > 1/\omega_1^2 \quad (20)$
	$\sum_i 1/\omega_i^4 = B_2 = \sum_j \sum_k m_j m_k d_{jk}^2 > \frac{1}{\omega_1^4} \quad (21)$	$B_2 = \frac{2}{\int_0^L \rho^2 A^2(\zeta) d^2(\zeta, z) d\zeta} dz > 1/\omega_1^4 \quad (22)$
Rayleigh - Quotient	$\omega_R^2 = \frac{\sum_j \sum_k c_{jk} v_j v_k}{\sum_k m_k v_k^2} \geq \omega_1^2 \quad (23)$	$\omega_R^2 = \frac{\int_0^L EI(z) v''^2(z) dz}{\int_0^L \rho A(z) v^2(z) dz} \geq \omega_1^2 \quad (24)$
modale Erregerkraft	$h_i(t) = \sum_{k=1}^n v_{ki} F_k(t) \quad (25)$	$h_i(t) = \int_0^L v_i(z) q(z, t) dz \quad (26)$

Anmerkung: In (17) und (18) ist δ_{jk} das Kronecker-Symbol und in (11) bis (16) gilt $T = W_{\text{kin}}$ und $U = W_{\text{pot}}$

$$v_{ji} = \omega_i^2 \sum_{k=1}^n d_{jk} m_k v_{ki} \hat{=} v_i(z) = \omega_i^2 \int_0^l d(z, \zeta) \varrho A(\zeta) v_i(\zeta) d\zeta. \quad (5.78)$$

Die weitreichenden Analogien zwischen den Gleichungen für das diskrete und das kontinuierliche Berechnungsmodell gehen aus Tabelle 5.6 hervor, in der wesentliche Formeln zusammengestellt sind, deren Bedeutung teilweise erst in den folgenden Abschnitten erklärt wird, vgl. Abschnitt 6.2.1, 6.3.2 und 6.4.1.

Die Gleichung (10), Tabelle 5.6, wird in der Mathematik als homogene *Fredholm'sche* Integralgleichung zweiter Art bezeichnet. Sie ist das kontinuierliche Analogon zu dem homogenen linearen Gleichungssystem (9), Tabelle 5.6. Hier soll auf den engen Zusammenhang zwischen der Theorie der linearen Gleichungssysteme und der der Integralgleichungen hingewiesen werden, der für den Theoretiker und zum Verständnis weiterführender Literatur von Interesse ist.

Der physikalische Inhalt der Integralgleichung (10), Tabelle 5.6, stimmt teilweise mit der Differenzialgleichung (5.72) überein, insofern er eine Beziehung zwischen den Massenkraften und den Verschiebungen beschreibt. Der wesentliche Unterschied besteht jedoch darin, dass durch die Einflussfunktion $d(z, \zeta)$ bereits die Randbedingungen berücksichtigt werden, die die Auflagerbedingungen des jeweiligen Balkens erfassen. Die Differenzialgleichung (5.72) beinhaltet nur das Gleichgewicht an einem Balkenelement und muss in Verbindung mit den Randbedingungen gelöst werden, um Eigenformen und Eigenfrequenzen zu erhalten. Andererseits genügt die Lösung der Integralgleichung zur Berechnung dieser Größen.

Die tatsächliche Bewegung des Balkens bei freien Schwingungen ergibt sich als Überlagerung, vgl. (5.71), (6.126) und (6.129), aus den Eigenformen zu:

$$r(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{p}_i v_i(z) \sin(\omega_i t + \beta_i). \quad (5.92)$$

Ein Balken führt freie Schwingungen aus, wenn er (z. B. zur Zeit $t = 0$) aus seiner statischen Gleichgewichtslage $r(z) = 0$ in Form einer Biegelinie $r(z, 0) = r_0(z)$ ausgelenkt und sich selbst überlassen wird und/oder wenn ihm anfangs eine Geschwindigkeitsverteilung $\dot{r}(z, 0) = u_0(z)$ übertragen wurde, z. B. durch eine plötzliche über die Länge verteilte impulsartige Belastung.

Dabei ergeben sich die Konstanten $\hat{p}_i$ und β_i aus den jeweiligen Funktionen $r_0(z)$ und $u_0(z)$, vgl. die Analogie zu (3.88), (4.22), (4.48) und (6.125) bis (6.129):

$$\begin{aligned} \hat{p}_i \sin \beta_i &= \int_0^l \varrho A(z) \cdot v_i(z) \cdot r_0(z) dz \\ \hat{p}_i \cos \beta_i &= \int_0^l \frac{\varrho A(z) \cdot v_i(z) \cdot u_0(z)}{\omega_i} dz \\ \int_0^l \varrho A(z) \cdot v_i^2(z) dz &= 1 \end{aligned} \quad (5.93)$$

Diese Gleichungen folgen aus (5.92) unter Benutzung der Orthogonalitätsrelationen (18), Tabelle 5.6.

Tabelle 5.7 Eigenwerte λ_i^2 und Eigenschwingformen $v_i(z)$ zylindrischer Balken bei verschiedenen Randbedingungen ($\omega_i = \lambda_i^2 \sqrt{EI/\rho A l^4}$)

Fall	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i \geq 6$
frei - frei	 $\lambda_1^2 = 0$	 $\lambda_2^2 = 0$	 $\lambda_3^2 = 22,4$ 0,224 0,776	 $\lambda_4^2 = 61,7$ 0,132 0,500 0,868	 $\lambda_5^2 = 121$ 0,034 0,356 0,644 0,906	$\lambda_i^2 = (i - \frac{3}{2})^2 \pi^2$
Gelenk - frei	 $\lambda_1^2 = 0$	 $\lambda_2^2 = 15,4$ 0,736	 $\lambda_3^2 = 50,0$ 0,446 0,853	 $\lambda_4^2 = 104$ 0,308 0,616 0,898	 $\lambda_5^2 = 178$ 0,235 0,471 0,707 0,922	$\lambda_i^2 = (i - \frac{3}{4})^2 \pi^2$
Einspannung - frei	 $\lambda_1^2 = 3,52$	 $\lambda_2^2 = 22,0$ 0,784	 $\lambda_3^2 = 61,7$ 0,500 0,868	 $\lambda_4^2 = 121$ 0,356 0,644 0,906	 $\lambda_5^2 = 200$ 0,279 0,500 0,723 0,926	$\lambda_i^2 = (i - \frac{1}{2})^2 \pi^2$
Gelenk - Gelenk	 $\lambda_1^2 = 9,87$	 $\lambda_2^2 = 39,5$ 0,500	 $\lambda_3^2 = 88,8$ 0,333 0,667	 $\lambda_4^2 = 158$ 0,25 0,50 0,75	 $\lambda_5^2 = 247$ 0,20 0,40 0,60 0,80	$\lambda_i^2 = i^2 \pi^2$
Einspannung - Gelenk	 $\lambda_1^2 = 15,4$	 $\lambda_2^2 = 50$ 0,560	 $\lambda_3^2 = 104$ 0,384 0,682	 $\lambda_4^2 = 178$ 0,294 0,529 0,765	 $\lambda_5^2 = 272$ 0,238 0,469 0,699 0,910	$\lambda_i^2 = (i + \frac{1}{4})^2 \pi^2$
Einspannung - Einspannung	 $\lambda_1^2 = 22,4$	 $\lambda_2^2 = 61,7$ 0,500	 $\lambda_3^2 = 121$ 0,359 0,641	 $\lambda_4^2 = 200$ 0,278 0,500 0,722	 $\lambda_5^2 = 298$ 0,227 0,459 0,693 0,913	$\lambda_i^2 = (i + \frac{1}{2})^2 \pi^2$

5.3.2

Gerader Balken auf zwei Stützen

Bild 5.17a zeigt einen beiderseits durch Einzelmassen m oder Einzelfedern c begrenzten Balken. Die Federkonstanten c erfassen die praktisch stets vorhandene endliche Federsteifigkeit der Lager. Bild 5.17b zeigt für beide Fälle die Abhängigkeit der Eigenfrequenzen ($f_i = \omega_i/2\pi$) von diesen Parametern, wobei die Eigenkreisfrequenzen sich bei allen Randbedingungen aus Gleichungen der Form

$$\omega_i = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\varrho A l^4}}; \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (5.94)$$

ergeben. Man beachte den Einfluss von Biegesteifigkeit EI und Massebelegung ϱA in dieser Gleichung: Wie beim einfachen Schwinger steht im Zähler die Steifigkeit und im Nenner die Masse. Der Einfluss weiterer Größen auf die Eigenkreisfrequenzen geht aus der dritten Spalte von Tabelle 5.5 hervor. Man vergleiche die Grenzfälle $c \rightarrow 0$ und $c \rightarrow \infty$ mit den Angaben in Tabelle 5.7 (dort λ_i^2 , hier λ_i angegeben). Sehr große Massen wirken wie starre Lager, da sie ebenfalls die Bewegung der Balkenenden (infolge ihrer Trägheit) behindern. Die Grenzwerte für $m \rightarrow \infty$ entsprechen deshalb denen für $c \rightarrow \infty$, allerdings bei den um 2 Ordnungen niedrigeren Eigenwerten.

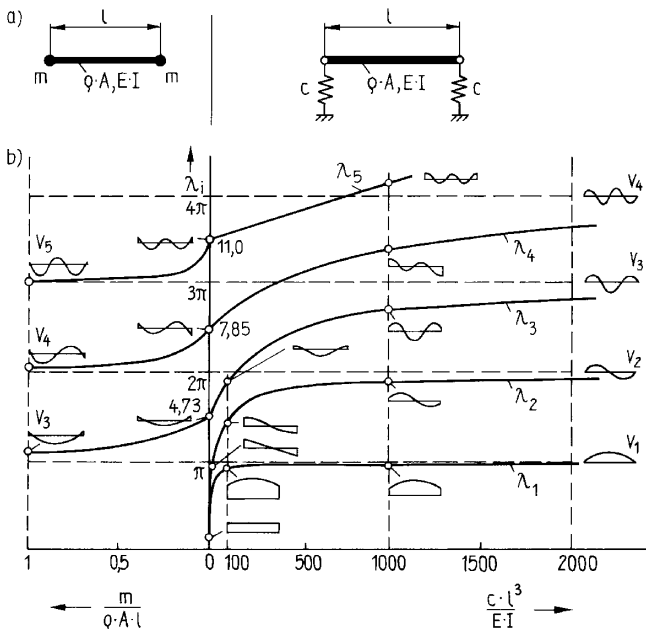


Bild 5.17 Eigenwerte und Eigenformen des Biegeschwingers in Abhängigkeit von Kenngrößen der relativen Lagersteifigkeit cl^3/EI und vom Massenverhältnis $m/\varrho Al$

Es ist wichtig, zu jeder Eigenfrequenz f_i die jeweilige Eigenschwingform $v_i(z)$ zu kennen. Aus Bild 5.17b wird deutlich, wie stark der Einfluss der Lagersteifigkeit

auf die Eigenfrequenzen ist. Man nehme sich Zeit, sich die Auswirkungen der Parameteränderungen auf Eigenfrequenzen und Eigenformen zu veranschaulichen und einzuprägen.

5.3.3

Abschätzungen von Dunkerley und Neuber

In der Praxis gibt es oft Aufgabenstellungen, bei denen die ungefähre Größe der Grundfrequenz interessiert. Man kann in diesem Fall auf die umfangreiche genaue Bestimmung aller Eigenfrequenzen verzichten und eines der Verfahren benutzen, das die Eigenfrequenzen abschätzt. Abschätzen bedeutet, obere und untere Schranken für die Eigenwerte mit relativ einfachen Verfahren zu berechnen.

Die im Folgenden beschriebenen Näherungen und Abschätzungen dienten in der Vergangenheit den Ingenieuren bei einfachen Modellen für eine Vorausberechnung. Sie haben noch eine gewisse Bedeutung behalten, da sie sich für Plausibilitätsbetrachtungen und für Überschlagsrechnungen eignen.

Besondere Bedeutung hat bei allen Baugruppen von Maschinen die Grundfrequenz. Sie ist die wichtigste und manchmal die einzige bedeutsame Eigenfrequenz. Sie liefert z. B. ein Kriterium dafür, ob ein Objekt mit dem Modell „starre Maschine“ behandelt werden darf oder nicht. Bei einer Änderung an der Konstruktion einer Maschine (z. B. mit dem Ziel einer Drehzahlsteigerung) ist zu prüfen, wie sich die Grundfrequenz verschiebt. Die Grundfrequenz ist für die tiefste Resonanzstelle verantwortlich, d. h. sie muss zuerst „durchfahren“ werden, wenn eine Maschine im überkritischen Drehzahlbereich betrieben wird.

Es gibt mehrere Möglichkeiten zur Abschätzung der Grundfrequenz, die in [5] ausführlich begründet sind. Eine *untere Schranke für die Grundfrequenz* (unter der Annahme eines regulären Systems, bei der die tiefste Eigenfrequenz nicht null ist) liefert die nach DUNKERLEY benannte Formel:

$$\frac{1}{\omega_1^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_{(k)}^2}; \quad \omega_1^2 > \omega_D^2 = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_{(k)}^2}}. \quad (5.95)$$

Dabei sind die Kreisfrequenzen $\omega_{(k)}$ diejenigen von n Teilsystemen des *Schwingungssystems mit n Freiheitsgraden*, die jeweils einen einzigen Freiheitsgrad haben. Die Aufteilung ist in gewissem Maße willkürlich, und man wählt Teilsysteme, die mindestens einen „eigenen Parameter“ haben und sich leicht berechnen lassen. Diese Teilsysteme kann man z. B. aus dem ursprünglichen System gewinnen, wenn nur jeweils ein einziger Masseparameter (z. B. Masse m_k) und alle Federparameter berücksichtigt werden (Dunkerley). Die anderen Masseparameter werden dabei alle null gesetzt. Eine andere Möglichkeit besteht darin, n Teilsysteme mit jeweils einer einzigen Feder (z. B. c_k) zu betrachten, alle Masseparameter zu berücksichtigen und alle anderen Federn als ideal starr (unendlich steif) anzusehen (Neuber).

Diese Abschätzung lässt sich auch anwenden, wenn das Gesamtsystem nicht in n Teilsysteme, sondern nur in n_1 Teilsysteme ($n_1 < n$) mit *bekannten ersten Eigenkreisfrequenzen* $\omega_{(k)}$ zerlegt wird. Das können große Systeme sein, deren Grundfrequenzen ein Computerprogramm liefert. In den einzelnen Teilsystemen müssen dann jeweils andere Masseparameter (Dunkerley) oder Federparameter (Neuber)

erfasst sein, sodass es keine „Schnittmenge“ dieser Parameter gibt. Man kann auf diese Weise auch die Ergebnisse von Computerprogrammen prüfen und den Einfluss der Teilsysteme auf das Gesamtsystem analysieren. Für solche Teilsysteme ergibt sich die Abschätzung:

$$\omega_1^2 > \frac{1}{\sum_{k=1}^{n1} \frac{1}{\omega_{(k)}^2}}. \quad (5.96)$$

Auch die tiefste Eigenfrequenz eines Kontinuums kann deshalb in so eine Abschätzung einbezogen werden, vgl. Aufgabe A5.4. Aus (5.96) ergibt sich z. B. für die Grundfrequenz eines großen Systems, das in zwei Teilsysteme zerlegt wird, welche die tiefsten Eigenfrequenzen $f_{(1)}$ und $f_{(2)}$ haben, die untere Schranke zu ($2\pi f_i = \omega_i$):

$$f_1 > \frac{f_{(1)}f_{(2)}}{\sqrt{f_{(1)}^2 + f_{(2)}^2}}. \quad (5.97)$$

Daraus kann man errechnen, dass z. B. bei der Kopplung von zwei Systemen, deren unterste Eigenfrequenzen übereinstimmen ($f_{(1)} = f_{(2)}$), die tiefste Eigenfrequenz nach der Kopplung sinkt, aber höher ist als $f_{(1)}/\sqrt{2}$.

5.4

Zur Modellbildung bei Rotoren

5.4.1

Allgemeine Bemerkungen

Die erste Aufgabe bei der theoretischen Untersuchung ist auch bei Biegeschwingungen von Wellen die Ermittlung eines angemessenen Berechnungsmodells. Das Berechnungsmodell soll „so fein wie nötig und so grob wie möglich“ sein, weil es nur die Aufgabe hat, der Vorhersage des dynamischen Verhaltens eines Realsystems zu dienen.

Das Berechnungsmodell soll gestatten, durch Variation der Parameter vorauszubestimmen, wie sich ein Realsystem physikalisch verhalten wird. Bei Biegeschwingungen kommt es z. B. darauf an zu wissen, wie die Größe der *Eigenfrequenzen* und die Eigenschwingformen von den Parametern des Realsystems abhängen. Das Berechnungsmodell muss alle die für diese Aufgabe wesentlichen Parameter enthalten. Die bisher behandelten Berechnungsmodelle gestatten es, solche Parameter bei der Berechnung der Eigenfrequenzen isotrop gelagerter Wellen mit symmetrischem Querschnitt zu berücksichtigen, wie Massen m_i , Trägheitsmomente J_{ai} , J_{pi} , Längen l_i , Lagerfederkonstanten c_i , Dichte ρ , Elastizitätsmodul E , Veränderlichkeit der Fläche $A(z)$, Veränderlichkeit des Flächenträgheitsmoments $I(z)$, Drehgeschwindigkeit Ω , Rotorabmessungen u. a., vgl. Tabellen 5.2 und 5.1.

Der Ingenieur muss von Fall zu Fall abschätzen, welche Parameter wesentlich sind und diese gegebenenfalls in ein verfeinertes Berechnungsmodell einbeziehen.

Tabelle 5.8 Übersicht über Parametereinflüsse [7]

Parameter	kritische Drehzahl n_k	Beispiele
Axialkraft	Zug vergrößert, Druck verkleinert n_k	Stab im Fachwerk, Koppelstange in Kurbelgetrieben
Drehmomentenschwankungen Ungleichförmigkeitsgrad	Kritische k -ter Ordnung $\Omega_k = \omega / (k \pm 1)$, k Ordnung der Harmonischen der Schwankung	Kolbenmaschinen, ungleichmäßig übersetzende Getriebe
Magnetischer Zug (radial)	sinkt	Elektromotoren, Generatoren
Eigengewicht mg (horizontale Welle)	$\omega_k = \omega / 2$	Turbinenläufer
Zahneingriffsfrequenz	$\Omega_k = \omega \cdot z$	Zahnradgetriebe z Zähnezahl, ω Winkelgeschwindigkeit der Welle
Anisotropie der Scheiben oder der Welle	Aufspaltung des Spektrums in Instabilitätsbereiche ω_1 bis ω_2	Welle mit Nut, Ventilator mit zwei Flügeln, zweipolige Läufer von Synchronmaschinen
Lagerdämpfung	steigt	Textilspindeln
Innere Dämpfung	Selbsterregung	Materialdämpfung, Wellen-Naben-Verbindung
Elastizität der Scheiben	sinkt	Schaufeln von Lüftern und Turbinen, Sägeblätter
Kopplung mit anderen Einheiten	steigt oder sinkt, neues Spektrum	Motor-Pumpe, Verdichter, Turbine-Generator, Walzen gegenseitig
Ölfilm in Gleitlagern	Selbsterregung	Turbinen, Pumpen, Verdichter
Drehzahl (Kreiselwirkung der Scheiben)	Aufspaltung	Zentrifugen
Schubverformung	sinkt	kurze Balken, Schiffskörper

In Tabelle 5.8 ist zusammengestellt, welche weiteren Parameter bei welchen Maschinenarten oft berücksichtigt werden müssen. Diese Zusammenstellung ist im Rahmen dieser einführenden Darstellung als Anregung gedacht. Es ist nicht möglich, eine umfassende Darstellung der technisch bedeutsamen Parametereinflüsse zu geben, weil die Forschung auf diesem Gebiet noch im Gange ist und mit der Entwicklung des Maschinenbaus immer wieder neue Gesichtspunkte entstehen.

Bei der Modellbildung besteht ein wesentlicher Schritt darin, die Freiheitsgrade des Berechnungsmodells festzulegen. Es ist üblich, eine sehr feine FEM-Diskretisierung mit $n = 10^3$ bis 10^5 Elementen anzuwenden.

Mit zunehmender Anzahl n der Freiheitsgrade nimmt die Genauigkeit aller berechneten Eigenfrequenzen zu, allerdings werden die höheren Eigenfrequenzen mit steigender Ordnung i immer ungenauer.

Bemerkenswert erscheint, dass die FEM-Diskretisierung des Balkens stets größere Eigenfrequenzen als das Kontinuum liefert, während die Eigenfrequenzen bei Diskretisierung mit Masseaufteilung hierbei untere Schranken sind, die sich mit zunehmendem Freiheitsgrad dem exakten Wert nähern, vgl. Kapitel 6.

Ein wesentlicher Bestandteil der Berechnungsmodelle von rotierenden Wellen und anderen Biegeschwingern sind die Verbindungselemente zum Aufstellort. Dabei ist nicht nur an die Wälzlager oder Gleitlager zu denken, die den rotierenden Teil mit dem Maschinengestell verbinden. Oft stellt das Gestell, in dem sich die Welle abstützt, auch wieder ein Schwingungssystem dar. Als Biegeschwinger im engeren Sinne wurden im vorliegenden Abschnitt nur solche behandelt, die sich auf einen unbeweglichen Aufstellort über elastische Lager abstützen. Der allgemeine Fall des im Schwingungssystem enthaltenen Biegeschwingers wird in Abschnitt 6 behandelt, vgl. z. B. Bild 6.3, 6.4 und 6.7. Hier soll lediglich bemerkt werden, dass es im allgemeinen unumgänglich ist, die Wälzlager als elastische Stützen zu behandeln.

Besondere Probleme werfen Gleitlager auf. Die Nachgiebigkeit des Ölpolsters in hydrodynamischen Lagern hat einen erheblichen Einfluss auf das dynamische Verhalten rotierender Wellen, wie *Stodola* bereits im Jahre 1925 erkannte. Der Grund dafür liegt vor allem in den anisotropen Federungs- und Dämpfungseigenschaften des Ölfilms. Wirkt in einem Gleitlager auf einen Wellenzapfen, der bei stationärem Betrieb eine bestimmte Gleichgewichtslage einnimmt, eine Kraft, so ruft diese eine Verschiebung hervor, die nicht mit der Krafrichtung zusammenfällt.

Physikalisch bedeutet das, dass bei gewissen Bewegungen des Zapfens im Lager aus der Energiequelle des Antriebs der Welle (Torsion) Energie in die Querbewegung der Welle transportiert werden kann. Dadurch können selbsterregte Biegeschwingungen auftreten. Diesem Phänomen der Selbsterregung ist eine umfangreiche Literatur gewidmet, wovon hier nur [7] genannt sei.

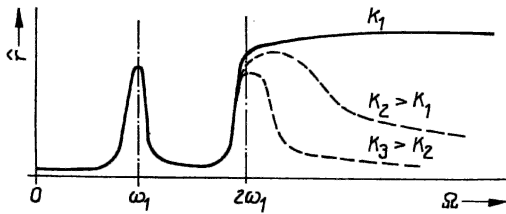


Bild 5.18 Zur Wirkung des Schmierfilms im Gleitlager

Bild 5.18 zeigt ein Amplituden-Frequenzdiagramm, das bei den selbsterregten Schwingungen auftritt. Anfangs verhält sich die Welle wie ein zu erzwungenen Schwingungen erregter Schwinger. Das System bewegt sich mit der Erregerfrequenz, und es tritt der bekannte Amplituden-Frequenzgang auf (Resonanz, falls Erregerfrequenz gleich Eigenfrequenz).

Bei einer bestimmten überkritischen Drehzahl beginnen plötzlich Schwingungen mit der Eigenfrequenz des Systems, die sehr große Amplituden haben. Dies sind selbsterregte Schwingungen, deren Amplitude lediglich durch Anschlagen der Welle im Lager (bzw. des Rotors am Gehäuse) begrenzt werden.

Man stellte fest, dass diese Schwingungen faktisch bei allen Drehzahlen oberhalb dieser Kritischen erhalten bleiben, sodass es ein nach oben unbegrenztes Resonanzgebiet gibt. Das Verhalten in diesem überkritischen Gebiet hängt von einer dimensionslosen Kenngröße $K = 2gB\eta / (\Omega F \psi^3)$ ab. Bei kleinen K -Werten (große Lagerkraft F , großes relatives Lagerspiel ψ , kleine Ölzähigkeit η und kleine Lagerbreite B) ändert sich die Amplitude der selbsterregten Schwingungen mit der Drehzahl weniger als bei großen K -Werten, vgl. Bild 5.18.

5.4.2

Beispiel: Schleifspindel

Zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens einer Schleifspindel wurden die in Bild 5.19b bis f dargestellten Berechnungsmodelle benutzt, um den Einfluss der verschiedenen Modelle auf die Größe der kritischen Drehzahlen und die Eigenschwingformen zu illustrieren.

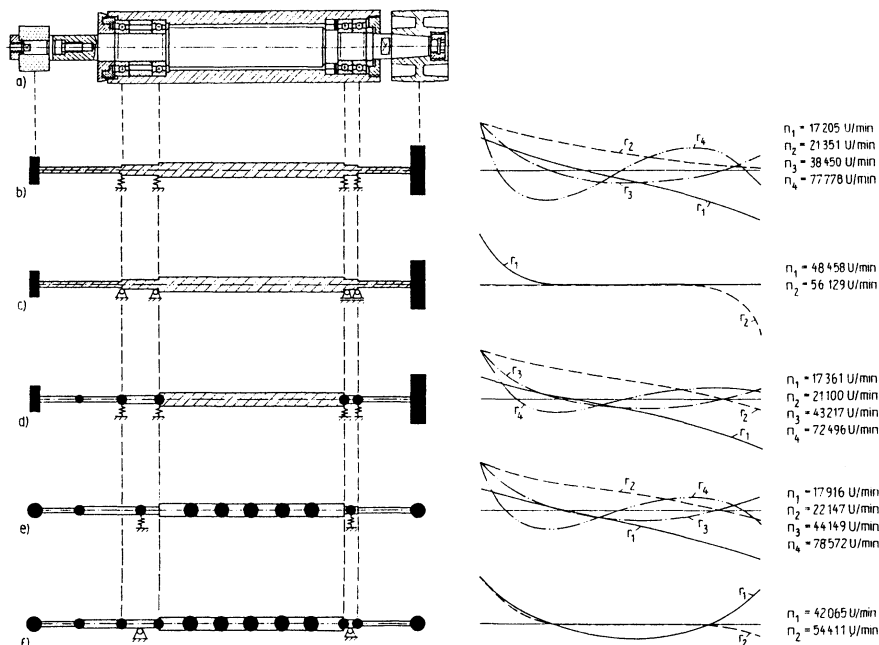


Bild 5.19 Schleifspindel

a) Technische Zeichnung; b) bis f) Berechnungsmodelle einer Schleifspindel (Die Schraffur im Modell gibt ein Kontinuum an.) Rechte Seite: Eigenschwingformen und kritische Drehzahlen der Modelle der Schleifspindel von b) bis f)

Bild 5.19 zeigt die berechneten kritischen Drehzahlen und Eigenschwingformen. Wenn man die erhaltenen Zahlenwerte vergleicht, fällt auf, dass die Federkonstante der Kugellager einen großen Einfluss hat. Die niedrigste kritische Drehzahl liegt bei etwa $17\,200 \cdot 1/\text{min}$ (Modell b). Die mit den Modellen b, d und e erhaltenen Werte liegen für die ersten beiden kritischen Drehzahlen innerhalb der technisch vertretbaren Genauigkeitsgrenze von 5 %. Die mit den Modellen c und f erhaltenen Werte entsprechen etwa der 3. Eigenfrequenz der Modelle mit elastischer Lagerung und liefern ein falsches Bild, weil die Starrkörperbewegung fehlt, vgl. auch Bild 6.12.

5.5

Aufgaben A5.4 bis A5.6

A5.4 Abschätzung des Einflusses elastischer Lager auf die tiefste Eigenfrequenz

Für eine Antriebswelle mit beliebiger Form und Masseverteilung, die in zwei Lagern gestützt ist, wurde mit einem Computerprogramm ihre tiefste Eigenfrequenz berechnet, ohne die Lagerelastizitäten einzubeziehen. Unter Benutzung der Abschätzung von Dunkerley soll eine Näherungsformel für die untere Schranke der tiefsten Eigenfrequenz unter Berücksichtigung der Lagerelastizitäten angegeben werden.

Gegeben:

Lagerabstand	l
Masse der Maschinenwelle	m
Trägheitsmoment der Welle als Starrkörper bezüglich der Lager	J_A, J_B
Federkonstanten der Lager	c_A, c_B
Tiefste Eigenfrequenz der Welle mit ideal starren Lagern	$f_{(1)}$
Biegesteifigkeit der Welle mit konstantem Querschnitt	EI

Gesucht:

1. Eigenfrequenzen der in drei Teilsysteme aufgeteilten Antriebswelle
2. Abschätzung der Grundfrequenz nach Dunkerley
3. Abschätzung der Grundfrequenz für eine homogene Welle mit konstantem Querschnitt

A5.5 Kritische Drehzahlen des Gleichlaufs

Von einer rotierenden Welle sind die in dem Modell in Bild 5.20 angegebenen Parameter gegeben (Maße in mm). Die Dichte des Werkstoffs ist $\varrho = 7,85 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$, der Elastizitätsmodul ist $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$. Unter Vernachlässigung der Wellenmasse sind das Diagramm der drehzahlabhängigen Eigenfrequenzen sowie die kritische Drehzahl des synchronen Gleichlaufs zu berechnen.

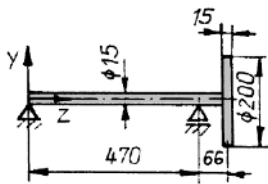


Bild 5.20
Abmessungen einer Welle

A5.6 Vergleich der Modelle „Kontinuum“ und „diskreter Biegeschwinger“

In Abschnitt 5.2.5.2 war das Modell der drehenden Klappe ein Biegeschwinger mit vier Massen, vgl. Bild 5.13. Für diese Klappe sollen mit dem Modell des Kontinuums die ersten drei Eigenfrequenzen während der freien Drehung berechnet und mit denen des diskreten Biegeschwingers verglichen werden. Auch für die starre Klappe soll der Vergleich mit dem Ergebnis in Bild 5.14 erfolgen.

5.6

Lösungen L5.4 bis L5.6

L5.4 Die Antriebswelle wird in drei Teilsysteme eingeteilt, von denen das erste die starr gelagerte Welle selbst ist (Bild 5.21b), das zweite und dritte sind der auf einem elastischen Lager gelagerte Starrkörper (Bild 5.21c und d). Dies entspricht der in Abschnitt 5.3.3 angegebenen Vorschrift, dass für alle elastischen Glieder bis auf jeweils ein Einziges der Grenzfall einer unendlich großen Steifigkeit angenommen wird, um eine Eigenkreisfrequenz $\omega_{(k)}$ zu berechnen.

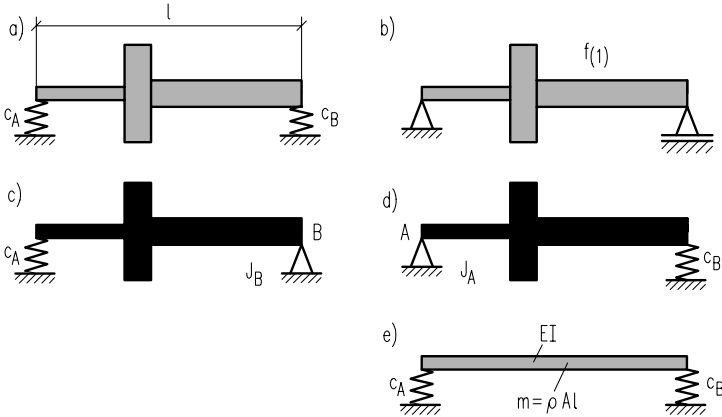


Bild 5.21 Antriebswelle auf elastischen Lagern; **a)** ursprüngliche Welle, **b)** elastischer Balken, **c)** linkes Lager elastisch, **d)** rechtes Lager elastisch, **e)** Welle mit konstantem Querschnitt

Es gilt die Abschätzung gemäß (5.95)

$$\frac{1}{\omega_1^2} < \frac{1}{\omega_{(1)}^2} + \frac{1}{\omega_{(2)}^2} + \frac{1}{\omega_{(3)}^2}. \quad (5.98)$$

Vom ersten Teilsystem, der „starr gelagerten Welle“, ist $\omega_{(1)} = 2\pi f_{(1)}$ gegeben. Die beiden anderen Teilsysteme haben die Eigenkreisfrequenz des einseitig elastisch gelagerten Starrkörpers, die sich ergibt aus:

$$\omega_{(2)}^2 = \frac{c_A l^2}{J_B}; \quad \omega_{(3)}^2 = \frac{c_B l^2}{J_A}. \quad (5.99)$$

Aus (5.98) und (5.99) folgt zunächst

$$\frac{1}{\omega_1^2} < \frac{1}{\omega_{(1)}^2} + \frac{J_B}{c_A l^2} + \frac{J_A}{c_B l^2} \quad (5.100)$$

und nach der Auflösung ergibt sich die gesuchte Abschätzung nach DUNKERLEY für die tiefste Eigenfrequenz ($f_1 = \omega_1/2\pi$) der elastisch gelagerten Maschinenwelle:

$$f_1 > \frac{f_{(1)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{J_A}{c_B} + \frac{J_B}{c_A} \right) \left(\frac{\omega_{(1)}}{l} \right)^2}}. \quad (5.101)$$

Damit lässt sich der Einfluss der beiden elastischen Lager einfach berechnen. Für den Sonderfall der homogenen Welle mit konstantem Querschnitt (Bild 5.21e) gilt für die Trägheitsmomente bezüglich der Lagerpunkte $J_A = J_B = ml^2/3$. Aus Abschnitt 5.3.2 und aus Tabelle 5.7 ist für den zweifach gelenkig gelagerten Kontinuum-Balken $\omega_{(1)}^2 = \pi^4 EI / ml^3$ bekannt. Damit ergibt sich als Sonderfall von (5.101) die Abschätzung

$$f_1 > \frac{1}{2\pi \sqrt{m \left[\frac{1}{3c_B} + \frac{1}{3c_A} + \frac{l^3}{\pi^4 EI} \right]}}. \quad (5.102)$$

L5.5 Die in Bild 5.22a dargestellte Welle entspricht dem Berechnungsmodell 4 in Tabelle 5.1.

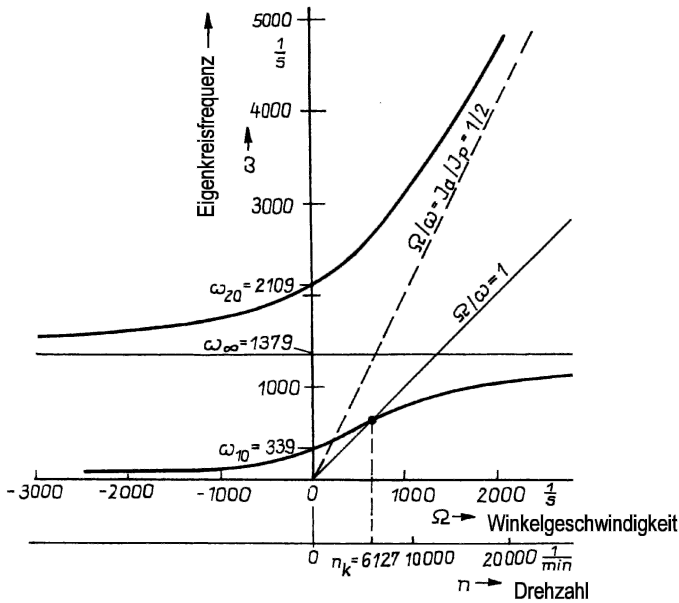


Bild 5.22 Drehzahlabhängige Eigenfrequenzen

Die Parameterwerte ergeben sich (vgl. Tabelle 5.2) zu

$$m_1 = \frac{\pi D^2 h}{4} \varrho = \frac{3,14 \cdot 200^2 \cdot 15}{4} \cdot 7,85 \cdot 10^{-6} \text{ kg} = 3,70 \text{ kg}$$

$$J_a = \frac{m_1}{16} \left(D^2 + \frac{4}{3} h^2 \right) \approx \frac{m_1}{16} D^2 = \frac{3,70}{16} 200^2 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2 = 9250 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14}{64} 15^2 \text{ mm}^4 = 2480 \text{ mm}^4, \quad J_p = \frac{m_1 D^2}{8} = 18500 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$\alpha_{11} = \frac{l_1 l_2^2 + l_2^3}{3EI} = \frac{470 \cdot 66^2 + 66^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 2480} \text{ mm/N} = 1,494 \cdot 10^{-3} \text{ mm/N}$$

$$\gamma_{11} = \frac{2l_1 l_2 + 3l_2^2}{6EI} = \frac{2 \cdot 470 \cdot 66 + 3 \cdot 66^2}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 2480} \text{ N}^{-1} = 2,404 \cdot 10^{-5} \text{ N}^{-1}$$

$$\beta_{11} = \frac{l_1 + 3l_2}{3EI} = \frac{470 + 3 \cdot 66}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 2480} \text{ mm}^{-1} \text{ N}^{-1} = 4,275 \cdot 10^{-7} \text{ mm}^{-1} \cdot \text{N}^{-1}$$

Das Einsetzen dieser Zahlenwerte in (5.33) liefert die Umkehrfunktion der Eigenfrequenzen als Funktion der Drehgeschwindigkeit. Mit mehreren Zahlenwerten für ω im Bereich von 0 bis 5000 s^{-1} werden die zugehörigen Werte für Ω berechnet und damit die Kurvenverläufe bestimmt, vgl. Bild 5.22. Die kritische Drehzahl des Gleichlaufs ($\Omega/\omega = 1$) ergibt sich zu $\underline{n_k = 6127 \cdot 1/\text{min}} \ (\hat{=} f_W = 102,1 \text{ Hz})$.

L5.6 Das Modell des Kontinuums gewinnt man dadurch, dass die vier Massen über die Länge des Balkens gleichmäßig „verschmiert“ werden. Damit hat der Balken eine konstante Massebelegung $\varrho A = m/l$. Für dieses Kontinuum-Modell, bei dem der Balken an einem Ende ein Gelenk hat und am anderen Ende frei ist, findet man aus Tabelle 5.7, Fall 2, die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2^2 = 15,4; \quad \lambda_3^2 = 50,0. \quad (5.103)$$

Beim Vergleich der Eigenkreisfrequenzen mit (5.94) muss man beachten, dass die Klappe in Bild 5.13 die Länge $L = 4l$ und die Masse $4m$ hat. Die Eigenkreisfrequenzen für dieses Modell des Kontinuum-Balkens betragen also

$$\omega_i^{(K)} = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\varrho A L^4}} = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\varrho A 4^4 l^4}} = \frac{\lambda_i^2}{16} \sqrt{\frac{EI}{m l^3}}. \quad (5.104)$$

Die Eigenfrequenzen der frei fallenden Klappe in Bild 5.14 verlaufen am rechten Rand ($c \rightarrow 0$) bereits bei $\bar{c} = 100$ asymptotisch. Dafür kann man für das Viermassensystem die Werte

$$\omega_1 \sqrt{\frac{m l^3}{EI}} \rightarrow 0; \quad \omega_2 \sqrt{\frac{m l^3}{EI}} \approx 0,89; \quad \omega_3 \sqrt{\frac{m l^3}{EI}} \approx 2,8 \quad (5.105)$$

entnehmen. Aus (5.104) erhält man mit (5.103) für das Kontinuum

$$\omega_1^* \sqrt{\frac{m l^3}{EI}} = 0; \quad \omega_2^* \sqrt{\frac{m l^3}{EI}} \approx 0,96; \quad \omega_3^* \sqrt{\frac{m l^3}{EI}} \approx 3,1. \quad (5.106)$$

Die Eigenkreisfrequenzen des Kontinuums liegen über denen des diskreten Systems, weil die Trägheit des Kontinuum-Balkens infolge des „Verschmierens“ der Massen „nach Innen“ kleiner ist. Vergleicht man die Eigenfrequenz der steifen Klappe ($EI \rightarrow \infty$) mit dem Ergebnis in Bild 5.14, so ergibt sich aus dem exakten Wert $\omega^2 = 9c/(30m)$ durch eine Multiplikation beider Seiten dieser Gleichung mit denselben Faktoren ein dimensionsloser Ausdruck, welcher den Vergleich mit Bild 5.14 erleichtert:

$$\frac{m l^3 \omega^2}{EI} = \frac{18}{30} \frac{c l^3}{2EI} = \frac{0,6}{\bar{c}}; \quad \omega \sqrt{\frac{m l^3}{EI}} = \frac{0,775}{\sqrt{\bar{c}}}. \quad (5.107)$$

Dieser Verlauf entspricht der Asymptote für $i = 1$ in Bild 5.14.

6 Lineare Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden

6.1

Einleitung

Viele Maschinen und deren Baugruppen lassen sich auf ein lineares Berechnungsmodell mit endlich vielen Freiheitsgraden reduzieren. Man kann auf zwei Wegen zu so einem Berechnungsmodell kommen – durch die Modellierung als Mehrkörpersystem und/oder als FEM-Modell. Ein Berechnungsmodell, das aus diskreten Federn (Zug-, Druck-, Torsions- oder Biegefedern) und einzelnen starren Körpern (gekennzeichnet durch Masse, Schwerpunktlage, Trägheits- und Zentrifugalmomente) besteht, wird als Mehrkörpersystem bezeichnet. Ursprünglich kontinuierliche Berechnungsmodelle mit verteilter Elastizität und Masse, wie z. B. Balken, Platten, Scheiben, räumlich ausgedehnte Körper oder Schalen, lassen sich mit der Methode der finiten Elemente (FEM) ebenfalls auf Berechnungsmodelle mit endlich vielen Freiheitsgraden zurückführen.

Zur dynamischen Berechnung vieler Maschinen sind oft Berechnungsmodelle mit wenigen Freiheitsgraden ausreichend, aber es werden manchmal auch Berechnungsmodelle mit $n > 10^6$ Freiheitsgraden benutzt. Mit der Anzahl der Freiheitsgrade steigt in jedem Fall der Rechenaufwand, aber nicht immer die Genauigkeit der Ergebnisse. Die Genauigkeit hängt von der Genauigkeit der Eingabedaten und davon ab, ob die wesentlichen Einflussgrößen richtig erfasst werden. Man kann mit einem Modell mit wenigen Freiheitsgraden das reale Verhalten oft schon hinreichend genau beschreiben, wenn man alle nebensächlichen Parameter vernachlässigt. Durch Berechnungsmodelle mit mehreren (endlich vielen) Freiheitsgraden können

- Längsschwingungen (z. B. von gekoppelten Fahrzeugen)
- Torsionsschwingungen (z. B. von Wellen und Antriebssystemen)
- Biegeschwingungen (z. B. von Maschinengestellen, Balken, Rahmen, Platten)
- Schwingungen elastisch gekoppelter Körper (z. B. von Fundamentblöcken, Fahrzeugverbänden, Werkzeugmaschinen)
- Schwingungen von Stab- und Flächentragwerken

und beliebig gekoppelte Modelle beliebiger geometrischer Struktur behandelt werden.

Lineare Schwingungserscheinungen sind im Grunde genommen alle von gleicher physikalischer Natur. Sie werden mathematisch einheitlich durch lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Beispiele für solche Berechnungsmodelle zeigt Bild 6.1. Viele der in den bisherigen Abschnitten behandelten Berechnungsmodelle (vgl. z. B. die Abschnitte 3.2.2, 3.3, 4.2.2, 4.3 und 5.2.5), lassen sich als lineare Schwinger mit n Freiheitsgraden einordnen. Das Schwingungssystem mit

n Freiheitsgraden gestattet die Untersuchung des Verhaltens beliebig strukturierter ebener und räumlicher Antriebs- und Tragsysteme von Maschinen.

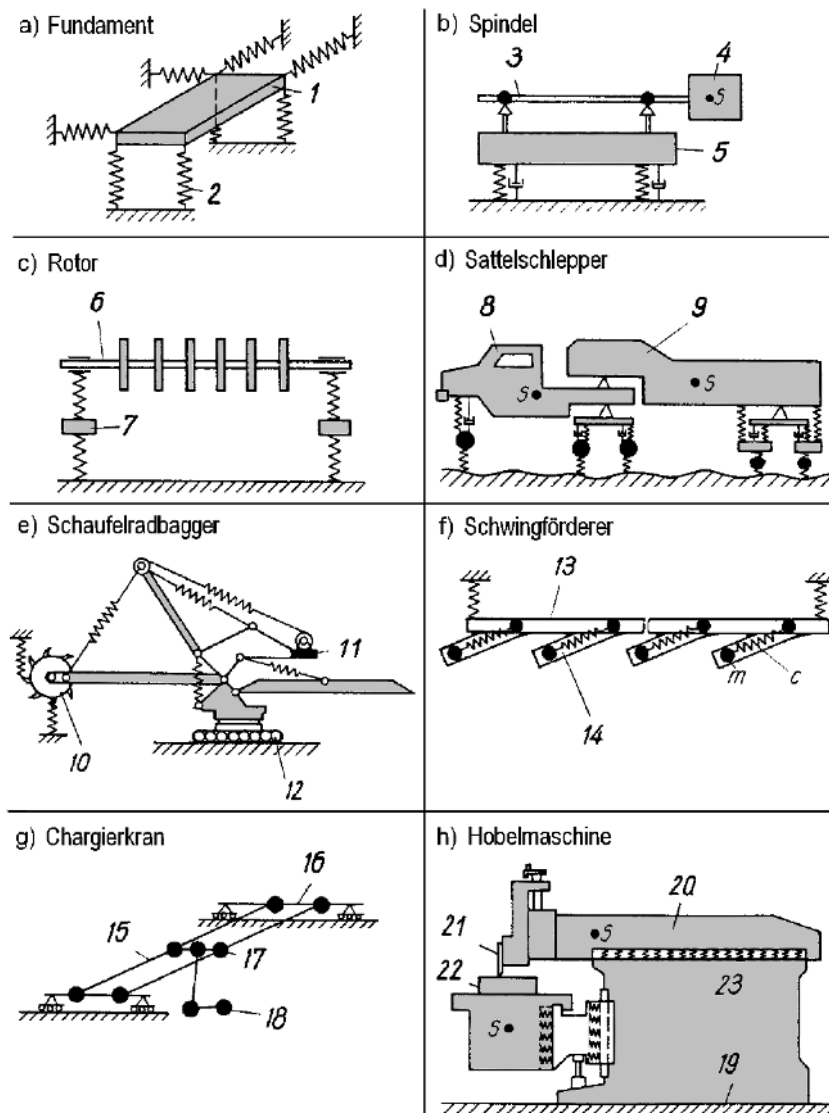


Bild 6.1 Beispiele für Berechnungsmodelle mit mehreren Freiheitsgraden

1 Fundamentblock; 2 elastische Abstützung; 3 Welle; 4 Rotationskörper; 5 Gehäuse;
 6 Turbinenwelle; 7 Lager; 8 Fahrerhaus; 9 Wagenkasten; 10 Schaufelrad; 11 Gegengewicht;
 12 Raupenfahrzeug; 13 Förderbrücke; 14 elektromagnetische Schwingungserreger;
 15 Kranbrücke; 16 Fahrwerk; 17 Laufkatze; 18 Chargierzange; 19 Gestell; 20 Schlitten;
 21 Werkzeug; 22 Werkstück; 23 elastische und dämpfende Schichten

Mit dem linearen Berechnungsmodell können allgemeine Gesetzmäßigkeiten von einem Gesichtspunkt aus behandelt werden, z. B. freie Schwingungen nach Stoßvorgängen, erzwungene Schwingungen bei periodischer Erregung oder bei beliebigem Kraft-Zeit-Verlauf. Praktisch sind damit kritische Drehzahlen, zeitliche Verläufe und Extremwerte der interessierenden Kräfte, Momente, Deformationen, Spannungen u. a. in Abhängigkeit von den Parametern der Maschine berechenbar.

Die *Matrizenschreibweise* gestattet, die Berechnungsmodelle unabhängig von ihrer Struktur und der Anzahl ihrer Freiheitsgrade einheitlich und übersichtlich zu behandeln, was vor allem die Untersuchung von Systemen mit vielen Freiheitsgraden erleichtert. Trotz des hohen Abstraktionsgrades sind die konkreten Maschinen damit gut zu beschreiben und ihre dynamische Untersuchung ist mithilfe handelsüblicher Software auf ökonomische Weise möglich.

In der Matrizenschreibweise lassen sich die Grundgedanken elegant formulieren, die für die Behandlung von Schwingern mit vielen Freiheitsgraden typisch sind. Dazu gehört, die Matrix eines Gesamtsystems aus denen von Substrukturen aufzubauen, die Reduktion der Freiheitsgrade, die Formulierung des Eigenwertproblems, die Begründung der modalen Analyse und die formale Beschreibung der computergerechten Aufstellung und Lösung aller Gleichungen.

Um das Vorgehen zu erklären, werden in diesem Abschnitt bei Beispielen nur Modelle mit wenigen Freiheitsgraden verwendet. Es soll dem Studierenden möglich sein, diese Beispiele mit erträglichem Aufwand durchzurechnen. Er muss jedoch wissen, dass diese Beispiele nur dazu dienen sollen, ihn an die allgemeine Betrachtungsweise heranzuführen.

Die Grundlagen der modernen Behandlung von Schwingern mit n Freiheitsgraden stammen aus dem 19. Jahrhundert. Die Einführung der verallgemeinerten Koordinaten erfolgte durch J. L. LAGRANGE (1736–1813). Sie liegen auch seinen im Jahre 1811 veröffentlichten Bewegungsgleichungen zweiter Art zugrunde. Auch die Theorie der Stabtragwerke, die in Arbeiten von J. C. MAXWELL (1831–1879), CASTIGLIANO (1847–1884) und O. MOHR (1835–1918) entwickelt wurde, stellt einen der Ausgangspunkte dar. Durch Verallgemeinerung des 1905 publizierten Verfahrens von W. RITZ (1878–1909) gelang die Diskretisierung der Kontinuum-Modelle, die bei allen FEM-Modellen wesentlich ist.

Die Computertechnik war in den 50er-Jahren des 20. Jahrhunderts der Anlass für die Entwicklung der Matrizenmethoden, zu denen R. ZURMÜHL (1904–1966), S. FALK, J. ARGYRIS und E. PESTEL (1914–1988) wesentliche Beiträge lieferten. Weitere Anstöße zum Ausbau computergerechter Formalismen stammen aus dem Gebiet der Mehrkörperdynamik, für welches seit den 60er-Jahren das Interesse stark zunahm, als von der Raumfahrttechnik und Robotertechnik neue Anforderungen gestellt wurden. In den 60er- und 70er-Jahren wurden Programmsysteme auf der Basis der Modelle von Mehrkörpersystemen (MKS) und von finiten Elementen (FEM) entwickelt, die von der Industrie genutzt werden. Seit den 80er-Jahren des 20. Jahrhunderts findet die Kopplung von MKS- und FEM-Programmen mit kommerziellen CAD-Programmen weit verbreitete Anwendung.

6.2

Bewegungsgleichungen

6.2.1

Massen-, Feder- und Nachgiebigkeitsmatrix

Die Bewegung eines Schwingers mit n Freiheitsgraden ist eindeutig dadurch beschreibbar, dass der zeitliche Verlauf der Verschiebungen diskreter Punkte bzw. Drehwinkel um gegebene Achsen angegeben wird. Zur Beschreibung der Deformation des Systems werden verallgemeinerte Koordinaten $q_1, q_2, \dots, q_n$ benutzt, die Wege oder Winkel darstellen können. Die Gesamtheit dieser Koordinaten wird im Lagevektor (Synonym: Koordinatenvektor) $\mathbf{q}$ zusammengefasst:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{q}^T = [q_1, q_2, \dots, q_n]. \quad (6.1)$$

Ebenso ist es zweckmäßig, verallgemeinerte Kräfte $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ einzuführen, die an den diskreten Punkten $1, 2, \dots, n$ in Richtung der verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \dots, q_n$ wirken. Verallgemeinerte Kräfte können Einzelkräfte oder Momente sein, vgl. auch Abschnitt 2.4.1.1. Sie werden im *Kraftvektor*

$$\mathbf{g}^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n] \quad (6.2)$$

zusammengefasst.

Für die hier betrachteten Modelle von Maschinen, bei denen Schwingungen um die stabile Gleichgewichtslage $\mathbf{q}^T = [0, 0, \dots, 0]$ interessieren, bestehen zwischen den verallgemeinerten Kräften und den verallgemeinerten Koordinaten folgende lineare Beziehungen für den statischen Fall:

$$Q_l = \sum_{k=1}^n c_{lk} q_k \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g} = \mathbf{C} \mathbf{q}. \quad (6.3)$$

Anders ausgedrückt:

$$q_l = \sum_{k=1}^n d_{lk} Q_k \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{q} = \mathbf{D} \mathbf{g}. \quad (6.4)$$

Die das jeweilige System charakterisierenden verallgemeinerten Federzahlen c_{lk} erfasst die Matrix $\mathbf{C}$, die verallgemeinerten Einflusszahlen d_{lk} enthält die Matrix $\mathbf{D}$. Es ist

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.5) \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Die Matrix $\mathbf{C}$ ist die **Federmatrix** oder **Steifigkeitsmatrix**, die Matrix $\mathbf{D}$ wird **Nachgiebigkeitsmatrix** oder Flexibilitätsmatrix genannt. Beide Matrizen sind symmetrisch, wie aus dem Satz von *Maxwell-Betti* für elastische mechanische Systeme folgt. Das heißt, es gilt $c_{lk} = c_{kl}$ und $d_{lk} = d_{kl}$. Die konkrete Wahl der Matrizen $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ hängt davon ab, ob sich die Feder- oder die Einflusszahlen bei praktischen Aufgaben leichter ermitteln lassen. So wird bei Torsionsschwingern i. Allg. mit Federkonstanten und bei Biegeschwingern mit Einflusszahlen gerechnet.

Die in einem elastischen System gespeicherte Formänderungsarbeit ist abhängig von den Koordinaten oder den Kräften. Bei linearem elastischen Verhalten entstehen Gleichungen der Form

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} \quad (6.7)$$

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{D} \mathbf{g} \quad (6.8)$$

Die Formänderungsarbeit W_{pot} ist für alle möglichen Bewegungen und Belastungen stets positiv. Wenn man sie formuliert hat, kann man die Elemente der Matrizen $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ aus den zweiten partiellen Ableitungen errechnen:

$$c_{lk} = c_{kl} = \frac{\partial^2 W_{\text{pot}}}{\partial q_l \partial q_k} \quad (6.9)$$

$$d_{lk} = d_{kl} = \frac{\partial^2 W_{\text{pot}}}{\partial Q_l \partial Q_k} \quad (6.10)$$

Für Maschinen, bei denen eine statische Berechnung üblich ist, wie z. B. bei Rahmen und Stahltragwerken der Fördergeräte, Landmaschinen u. a. können die Einflusszahlen d_{lk} meist mit vorhandenen Rechenprogrammen manchmal bequemer als die c_{lk} berechnet werden.

Es ist auch möglich, die d_{lk} aufgrund von (6.4) aus einer statischen Deformationsmessung zu ermitteln. Kann bei gegebener Belastung die Deformation $\mathbf{q}$ des Systems gemessen werden (z. B. fotogrammetrisch), so ergeben sich die d_{lk} aus einem linearen Gleichungssystem.

Für Systeme, die aus Stäben und Balken bestehen, stellt Tabelle 6.1 die Berechnungsformeln für W_{pot} und d_{lk} zusammen. Es gilt wegen (6.3) und (6.4)

$$\mathbf{g} = \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{g}; \quad \mathbf{C} \mathbf{D} = \mathbf{E}. \quad (6.11)$$

Mit $\mathbf{E}$ wird dabei die Einheitsmatrix bezeichnet. Die Federmatrix ist die Kehrmatrix der Nachgiebigkeitsmatrix und umgekehrt:

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}. \quad (6.12)$$

In Anlehnung an das *d'Alembertsche Prinzip* kann man einen Zusammenhang zwischen dem Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{q}}$ und den bei der Bewegung von den Massen auf das elastische System wirkenden kinetischen Kräften $\mathbf{g}$ herstellen. Wenn man Bewegungen ausschließt, bei denen noch lineare oder quadratische Geschwindigkeitsglieder auftreten (z. B. Corioliskräfte, Kreiselmomente), gilt für die **Massenkräfte**, vgl. (2.88) und (2.100):

$$\mathbf{g} = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}. \quad (6.13)$$

Dabei ist

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

die **Massenmatrix** des Systems, die seine Trägheitseigenschaften quantitativ erfasst. Die Elemente der Massenmatrix sind Massen, Trägheitsmomente, Zentrifugalmomente, statische Momente oder Summen solcher Größen, die die Trägheit von diskreten Elementen erfassen, vgl. die Beispiele in Tabelle 6.2. Die Elemente der Massenmatrix lassen sich auf zwei verschiedenen Wegen bestimmen. Der erste besteht darin, die kinetische Energie W_{kin} eines Systems allgemein zu formulieren und davon die partiellen Ableitungen zu bilden. Es gilt dann

$$m_{kl} = m_{lk} = \frac{\partial^2 W_{\text{kin}}}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_k}. \quad (6.15)$$

Der zweite Weg geht von den Bewegungsgleichungen des Systems aus, die mit irgendeiner Methode aufgestellt sind. Aus ihnen lassen sich nach entsprechendem Sortieren gemäß dem Koordinatenvektor die Massen- und Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrizen ablesen. Die kinetische Energie ergibt sich allgemein zu:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n m_{lk} \dot{q}_l \dot{q}_k \quad \text{bzw.} \quad W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}. \quad (6.16)$$

Tabelle 6.1 Formeln zur Berechnung der Formänderungsarbeit und der Einflusszahlen d_{lk} von Stäben und Balken

Beanspruchungsart	Formänderungsarbeit W_{pot}	Einflusszahlen d_{lk}
Zug- und Druckkräfte $F_{Nj}(s_j)$	$W_{\text{pot}} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{F_{Nj}^2}{2E_j A_j} ds_j$	$d_{lk} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{\partial F_{Nj}}{\partial Q_l} \frac{\partial F_{Nj}}{\partial Q_k} \frac{ds_j}{E_j A_j}$
Schubkräfte $F_{Qj}(s_j)$	$W_{\text{pot}} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{F_{Qj}^2}{2G_j \kappa_j A_j} ds_j$	$d_{lk} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{\partial F_{Qj}}{\partial Q_l} \frac{\partial F_{Qj}}{\partial Q_k} \frac{ds_j}{G_j \kappa_j A_j}$
Biegemomente $M_j(s_j)$	$W_{\text{pot}} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{M_j^2}{2E_j I_j} ds_j$	$d_{lk} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{\partial M_j}{\partial Q_l} \frac{\partial M_j}{\partial Q_k} \frac{ds_j}{E_j I_j}$
Torsionsmomente $M_{tj}(s_j)$	$W_{\text{pot}} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{M_{tj}^2}{2G_j I_{tj}} ds_j$	$d_{lk} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{\partial M_{tj}}{\partial Q_l} \frac{\partial M_{tj}}{\partial Q_k} \frac{ds_j}{G_j I_{tj}}$

Es bedeuten:

l_j	Stablänge
ds_j	Längenelement der Stabachse
A_j	Querschnittsfläche
κ_j	Schubzahl für Querschnitt
j	laufende Nummer des Stabes
Q_i, Q_k	Kräfte oder Momente in Richtung q_i und q_k
J	Anzahl der Stäbe
E_j	Elastizitätsmodul
G_j	Gleitmodul
I_j	Flächenträgheitsmoment bezüglich einer Biege-Hauptachse
I_{tj}	Torsionsträgheitsmoment

Die elastischen Rückstellkräfte halten in jedem Moment den Trägheitskräften das Gleichgewicht. Aus dieser Bedingung ergeben sich die Differenzialgleichungen, denen die Bewegungen und Kräfte eines Systems gehorchen. Aus (6.4), (6.3) und (6.13) findet man:

$$Cq = -M\ddot{q} \quad \text{bzw.} \quad q = -DM\ddot{q}. \quad (6.17)$$

Daraus folgen die Differenzialgleichungen der freien Schwingungen in drei möglichen Formen:

$$M\ddot{q} + Cq = 0 \quad (6.18)$$

$$DM\ddot{q} + q = 0 \quad (6.19)$$

$$\ddot{q} + (DM)^{-1}q = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{q} + M^{-1}Cq = 0. \quad (6.20)$$

Der Schwingungsvorgang lässt sich durch den zeitlichen Verlauf der Bewegungsgrößen (Relativ- oder Absolutweg q , -geschwindigkeit $\dot{q}$, -beschleunigung $\ddot{q}$) oder Kraftgrößen (Kraftvektor g und Ableitungen $\dot{g}, \ddot{g}$) beschreiben. Analog lassen sich, da Kräfte und Deformationen sich wechselseitig bedingende Größen sind, Differenzialgleichungen für die Kräfte $g(t)$ aufstellen. Aus (6.3) folgt durch die Kombination mit (6.20):

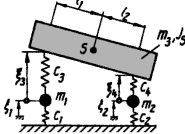
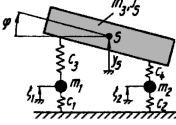
$$\ddot{g} = C\dot{q} = -C(M^{-1}Cq) = -CM^{-1}g. \quad (6.21)$$

Daraus folgen die weiteren Formen analog zu (6.18) bis (6.20):

$$\ddot{g} + CM^{-1}g = 0, \quad D\ddot{g} + M^{-1}g = 0, \quad MD\ddot{g} + g = 0. \quad (6.22)$$

Zusammenfassend soll festgehalten werden, dass die elastischen Eigenschaften eines linearen Schwingungssystems durch die Matrizen C oder D und die Trägheitseigenschaften durch die Massenmatrix M charakterisiert werden. Die erste Aufgabe bei der Analyse eines Schwingungssystems besteht darin, die Elemente der Matrizen C oder D und M aus den technischen Daten der realen Maschine zu bestimmen. Tabelle 6.2 enthält einige Beispiele.

Tabelle 6.2 Beispiele für Massen- und Steifigkeitsmatrix eines Berechnungsmodells

Fall	System mit Parametern und Koordinaten	q	Steifigkeitsmatrix C	Massenmatrix M
1	Fahrzeugmodell (Relativkoordinaten) 	l_1 l_2 l_3 l_4	$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} m_1 + m_3 s_2^2 + m & & & \\ m_3 s_1 s_2 - m & m_2 + m_3 s_1^2 + m & & \\ m_3 s_2^2 + m & m_3 s_1 s_2 - m & m_3 s_2^2 + m & \\ m_3 s_1 s_2 - m & m_3 s_1^2 + m & m_3 s_1 s_2 - m & m_3 s_1^2 + m \end{bmatrix}$ symmetrisch $m = J_3 / (l_1 + l_2)^2, \quad s_1 = l_2 / (l_1 + l_2), \quad s_2 = l_1 / (l_1 + l_2)$
2	Fahrzeugmodell (Absolutkoordinaten) 	l_1 l_2 l_3 l_4	$\begin{bmatrix} c_1 + c_3 & 0 & -c_3 & -c_3 s_1 \\ 0 & c_2 + c_4 & -c_4 & +c_4 s_2 \\ -c_3 & -c_4 & c_3 + c_4 & +c_3 s_1 - c_4 s_2 \\ -s_1 c_3 & c_4 s_2 & c_3 s_1 - c_4 s_2 & c_3^2 + c_4^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$ $m = J_3 / (l_1 + l_2)^2$

Zur Gewinnung der Matrizenelemente wird folgendes Vorgehen empfohlen:

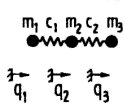
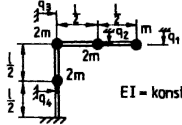
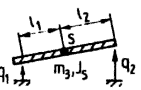
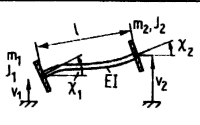
1. Skizze des Systems im deformierten Zustand
2. Eintragung der gewählten verallgemeinerten Koordinaten (einschließlich ihrer positiven Richtungen)
3. Aufstellung der Gleichungen für die kinetische Energie und die Formänderungsenergie, gegebenenfalls unter Berücksichtigung von Zwangsbedingungen
4. Ausführung der Differenziationen gemäß Gln. (6.9) oder (6.10) und (6.15) zur Gewinnung der Matrizenelemente

Die Anwendung des Prinzips von *d'Alembert* (Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen) mit anschließendem Koeffizientenvergleich in den Gleichungen der Form (6.18), (6.19) oder (6.20) ist prinzipiell auch eine geeignete Methode. Sie ist jedoch bei gekoppelten Systemen umständlicher als die genannte energetische Methode, die mit den *Lagrange'schen* Gleichungen 2. Art in enger Verbindung steht.

Substrukturen sind mechanische Teilsysteme, deren mechanisches Verhalten durch bekannte Matrizen beschrieben wird, und die sich zum Aufbau komplizierter Strukturen eignen. Der Grundgedanke entspricht dem auch sonst in der Technik angewendeten Baukastenprinzip. Das dynamische Verhalten eines Gesamtsystems, das aus Baugruppen besteht, die erst bei der Endmontage zusammengefügt werden, lässt sich aus dem Verhalten der einzelnen Baugruppen erklären.

Substrukturen können solche elementaren Teile wie Längs-, Torsions- oder Biegefedern, starre Körper oder Punktmassen sein. Aber auch beliebige Kombinationen davon, wie Feder-Masse-Systeme bestimmter geometrischer Struktur, räumliche Tragwerke, FEM-Modelle von Platten, Scheiben oder Schalen sind als Substrukturen geeignet. Die Matrizen von Substrukturen werden nach den in Abschnitt 6.2.1 beschriebenen Verfahren gewonnen. Tabelle 6.3 stellt davon einige dar.

Tabelle 6.3 Systemmatrizen von Substrukturen der behandelten Beispiele

Fall-Nr.	Systemskizze	$q^{(r)}$	Steifigkeitsmatrix C	Massenmatrix M
1		$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$	$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$
2		$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$	$C = \frac{48EI}{97l^3} \begin{bmatrix} 26 & -59 & 9 & -12 \\ -59 & 160 & -54 & 72 \\ 9 & -54 & 74 & -131 \\ -12 & 72 & -131 & 304 \end{bmatrix}$	$M = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
3		$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$	$C = 0$ starrer Körper	$M = \frac{1}{(l_1+l_2)^2} \begin{bmatrix} J_3+m_3l_2^2 & -J_3+m_3l_1l_2 \\ -J_3+m_3l_1l_2 & J_3+m_3l_1^2 \end{bmatrix}$
4		$\begin{bmatrix} v_1 \\ x_1 \\ v_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$C = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ +3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}$	$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix}$

Der Aufbau des Gesamtsystems erfolgt dadurch, dass die Beziehungen der lokalen Koordinaten der insgesamt R Substrukturen zu den globalen Koordinaten des Gesamtsystems durch Transformationsmatrizen T_r ausgedrückt werden ($r = 1, 2, \dots, R$). Die Matrizen T_r sind Rechteckmatrizen mit nr Zeilen und n Spalten. Eine solche Matrix T_r beschreibt die Koinzidenz (die geometrische Verträglichkeit), d. h. die Zwangsbedingungen zwischen den lokalen und globalen Koordinaten, oder anders ausgedrückt: sie gibt an, wo die Substrukturen miteinander verbunden sind.

Von der r -ten Substruktur mit dem Koordinatenvektor

$$\mathbf{q}^{(r)} = \left(\mathbf{q}_1^{(r)}, \mathbf{q}_2^{(r)}, \dots, \mathbf{q}_{nr}^{(r)} \right)^T \quad (6.23)$$

seien die Massenmatrix $\mathbf{M}_r$ und die Federmatrix $\mathbf{C}_r$ bekannt. Der Zusammenhang des aus Gl. (6.1) bekannten globalen Koordinatenvektors $\mathbf{q}$ des Gesamtsystems mit dem lokalen Koordinatenvektor der r -ten Substruktur kann allgemein in die Form

$$\mathbf{q}^{(r)} = \mathbf{T}_r \mathbf{q}, \quad r = 1, \dots, R \quad (6.24)$$

gebracht werden. Die Matrizen der Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems ergeben sich dann folgendermaßen:

$$\mathbf{C} = \sum_{r=1}^R \mathbf{T}_r^T \mathbf{C}_r \mathbf{T}_r, \quad \mathbf{M} = \sum_{r=1}^R \mathbf{T}_r^T \mathbf{M}_r \mathbf{T}_r. \quad (6.25)$$

Sie lassen sich also in folgenden Schritten finden:

1. Zerlegung des Gesamtsystems in R Teilsysteme, deren Matrizen $\mathbf{C}_r$ und $\mathbf{M}_r$ bekannt sind.
2. Festlegung der globalen Koordinaten $\mathbf{q}$
3. Beziehungen zwischen den lokalen Koordinaten $\mathbf{q}^{(r)}$ der Substrukturen und den globalen Koordinaten $\mathbf{q}$ durch die Transformations-Matrizen $\mathbf{T}_r$ ausdrücken.
4. Globalmatrizen des Gesamtsystems gemäß (6.25) berechnen

6.2.2

Beispiele

6.2.2.1

Gestell/Kraftgrößenmethode

Als Beispiel sind für das in Bild 6.2 skizzierte System, das aus Punktmassen und masselosen Balken besteht, die Matrizen $\mathbf{D}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{M}$ aufzustellen.

Gegeben sind die Biegesteifigkeit EI , die Länge l , die Massen m_1 und m_2 und die zu verwendeten Koordinaten q_1 und q_2 .

Die Beziehungen zwischen Kräften und Verschiebungen ergeben sich in der Form (6.4). Die Einflusszahlen können nach Tabelle 6.1 berechnet werden. Zunächst werden in Richtung der Koordinaten $\mathbf{q}^T = (q_1, q_2)$ die Kräfte $\mathbf{g}^T = (Q_1, Q_2)$ angenommen. Sind s_1 und s_2 die Ortskoordinaten zur Beschreibung der Biegemomente (vgl. Tabelle 6.1), so lauten diese:

$$M_1 = Q_1 s_1; \quad M_2 = Q_1 l + Q_2 s_2. \quad (6.26)$$

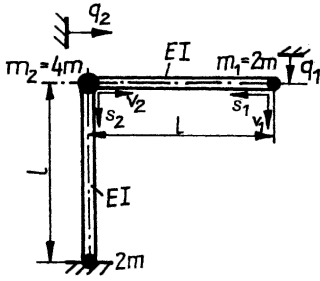


Bild 6.2 Einfachstes
Berechnungsmodell eines Gestells

Die Formänderungsenergie (potenzielle Energie) ergibt sich gemäß Tabelle 6.1 für die Biegebeanspruchung zu

$$\begin{aligned} W_{\text{pot}} &= \int_0^l \frac{M_1^2}{2EI} ds_1 + \int_0^l \frac{M_2^2}{2EI} ds_2 \\ &= \frac{1}{2EI} \left[\int_0^l Q_1^2 s_1^2 ds_1 + \int_0^l (Q_1 l + Q_2 s_2)^2 ds_2 \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Die Integration ergibt die potenzielle Energie in der Form von (6.8)

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \frac{4l^3}{3EI} Q_1^2 + \frac{l^3}{2EI} Q_1 Q_2 + \frac{1}{2} \frac{l^3}{3EI} Q_2^2. \quad (6.28)$$

Durch Bildung der ersten Ableitung entsteht entsprechend dem Satz von *Castigliano* zunächst analog (6.4):

$$\frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial Q_1} = q_1 = \frac{4l^3}{3EI} Q_1 + \frac{l^3}{2EI} Q_2 = d_{11} Q_1 + d_{12} Q_2 \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial Q_2} = q_2 = \frac{l^3}{2EI} Q_1 + \frac{l^3}{3EI} Q_2 = d_{21} Q_1 + d_{22} Q_2. \quad (6.30)$$

Aus den zweiten Ableitungen folgen dann gemäß (6.10) die Einflusszahlen zu

$$d_{11} = \frac{4l^3}{3EI}; \quad d_{12} = d_{21} = \frac{l^3}{2EI}; \quad d_{22} = \frac{l^3}{3EI}. \quad (6.31)$$

Damit ergibt sich die Matrix $\mathbf{D}$ und nach kurzer Rechnung daraus deren Kehrmatrix $\mathbf{C}$, vgl. Gl. (6.12):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{4l^3}{3EI} & \frac{l^3}{2EI} \\ \frac{l^3}{2EI} & \frac{l^3}{3EI} \end{bmatrix} = \frac{l^3}{6EI} \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{C} = \frac{6EI}{7l^3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Man überzeuge sich durch die Zahlenrechnung davon, dass $\mathbf{D} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{E}$ erfüllt ist. Die kinetische Energie beträgt

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}_2^2. \quad (6.33)$$

Man beachte, dass dabei außer der Vertikalbewegung der Masse m_1 auch deren Horizontalbewegung zu berücksichtigen ist (Bild 6.2). Durch Bildung der partiellen Ableitungen gemäß Gl. (6.15) folgt:

$$m_{11} = m_1; \quad m_{12} = m_{21} = 0; \quad m_{22} = m_1 + m_2.$$

Die Massenmatrix lautet für $m_1 = 2m$ und $m_2 = 4m$ demzufolge

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 + m_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Die Federmatrix $\mathbf{C}$ lässt sich unter Benutzung des in 6.2.2.2 behandelten Balkenelements auch direkt gewinnen, vgl. (6.224).

6.2.2.2

Balkenelement/Deformationsmethode

Den Ausgangspunkt bildet ein herausgeschnittenes Balkenelement, an dessen Schnittstellen 1 und 2 die Schnittreaktionen F_{L1} , F_{L2} , F_1 , F_2 , M_1 und M_2 wirken. Die dadurch erreichten Verformungen im lokalen Koordinatensystem sind in Bild 6.3a eingetragen.

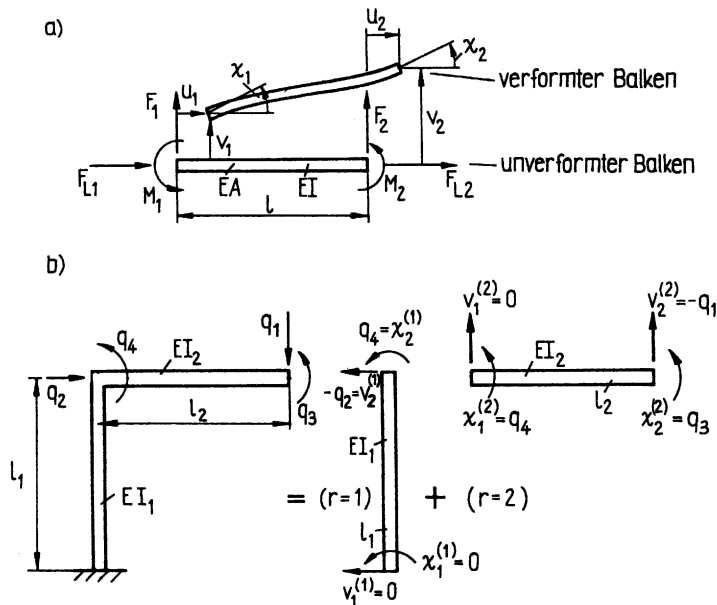


Bild 6.3 Zur Modellierung von Stabtragwerken

a) Kraft- und Deformationsgrößen am Balkenelement

b) Aufteilung eines Gestells in zwei Balkenelemente (Substrukturen $r = 1, 2$)

Das Kräfte- und Momentengleichgewicht liefert drei Gleichungen:

$$F_{L1} + F_{L2} = 0, \quad F_1 + F_2 = 0, \quad M_1 + M_2 + F_2 l = 0. \quad (6.35)$$

Infolge des linearen elastischen Verhaltens des Balkens gilt für die Beziehungen zwischen Kraft- und Verformungsgrößen, die aus der Biegelinie folgen:

$$F_{L2} = \frac{EA}{l}(u_2 - u_1) \quad (6.36)$$

$$\chi_2 = \chi_1 + \frac{F_2 l^2}{2EI} + \frac{M_2 l}{EI}, \quad v_2 = v_1 + \chi_1 l + \frac{F_2 l^3}{3EI} + \frac{M_2 l^2}{2EI}. \quad (6.37)$$

Diese sechs linearen Gleichungen können nach den Kraftgrößen aufgelöst werden. Man findet

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_{L1} \\ F_1 \\ M_1 \\ F_{L2} \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} Al^2/I & 0 & 0 & -Al^2/I & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -Al^2/I & 0 & 0 & Al^2/I & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \chi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{q}. \quad (6.38)$$

Man prüfe, ob (6.36) erfüllt wird oder löse (6.37) nach F_2 und M_2 auf. Vernachlässigt man die Längsverformung, was in den meisten Fällen vertretbar ist, so schrumpft (6.38) wegen $u_1 = u_2 = 0$ zusammen auf

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \chi_1 \\ v_2 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{q}. \quad (6.39)$$

In Tabelle 6.3, Fall 4, ist diese Federmatrix mit angegeben.

Die Steifigkeitsmatrix des Gestells, das in Bild 6.3b dargestellt ist, kann aus denjenigen von zwei Balkenelementen mit unterschiedlichen Längen l_r und Biegesteifigkeiten EI_r gewonnen werden. Das Gestell besteht aus $R = 2$ Substrukturen (Balken), vgl. Bild 6.3c.

Die Beziehungen zwischen den lokalen Koordinaten $\mathbf{q}^{(r)}$ und den globalen Koordinaten $\mathbf{q}^T = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ kann man unter Beachtung der Rand- und Übergangsbedingungen beider Balkenelemente aufstellen. Die aus Bild 6.3b und c ersichtlichen geometrischen Beziehungen lauten:

$$\begin{aligned} r = 1: & \quad v_1^{(1)} = 0; \quad \chi_1^{(1)} = 0; \quad v_2^{(1)} = -q_2; \quad \chi_2^{(1)} = q_4 \\ r = 2: & \quad v_1^{(2)} = 0; \quad \chi_1^{(2)} = q_4; \quad v_2^{(2)} = -q_1; \quad \chi_2^{(2)} = q_3. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Sie werden durch folgende Matrixgleichungen erfasst:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ \chi_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \chi_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_1 \mathbf{q} \quad (6.41)$$

$$\mathbf{q}^{(2)} = \begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ \chi_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ \chi_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2 \mathbf{q}. \quad (6.42)$$

Im Gegensatz zu dem Modell in 6.2.2.1 wurden hier die Drehwinkel q_4 an der Ecke und q_3 am freien Ende in das Modell einbezogen. Bei der Steifigkeitsmatrix der Balkenelemente, die durch (6.39) gegeben ist, muss beachtet werden, dass sich EI_r und l_r für $r = 1$ und $r = 2$ unterscheiden können. Mit den Transformationsmatrizen aus (6.41) und (6.42) kann die Federmatrix des Gesamtsystems gemäß (6.25) berechnet werden ($\beta_r = 2EI_r/l_r^3$, $r = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{T}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{C} &= \frac{2EI_1}{l_1^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3l_1 & 0 & 2l_1^2 \end{bmatrix} + \frac{2EI_2}{l_2^3} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3l_2 & 3l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3l_2 & 0 & 2l_2^2 & l_2^2 \\ 3l_2 & 0 & l_2^2 & 2l_2^2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 6\beta_2 & 0 & 3\beta_2 l_2 & 3\beta_2 l_2 \\ 0 & 6\beta_1 & 0 & 3\beta_1 l_1 \\ 3\beta_2 l_2 & 0 & 2\beta_2 l_2^2 & \beta_2 l_2^2 \\ 3\beta_2 l_2 & 3\beta_1 l_1 & \beta_2 l_2^2 & 2\beta_1 l_1^2 + 2\beta_2 l_2^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

6.2.2.3

Fahrzeug/Energiemethode

Das Beispiel in Tabelle 6.2, Fall 1 und 2 entspricht dem einfachsten Modell eines Fahrzeugs, bei dem die Radmassen berücksichtigt werden. Die Schwerpunktbeziehung wird nur in y -Richtung betrachtet. Bei der Wahl raumfester Koordinaten $\mathbf{q}_2^T = (\xi_1, \xi_2, y_S, \varphi)$ (Fall 2) ist die doppelte kinetische Energie

$$2W_{\text{kin}} = m_1 \dot{\xi}_1^2 + m_2 \dot{\xi}_2^2 + m_3 \dot{y}_S^2 + J_S \dot{\varphi}^2 = \dot{\mathbf{q}}_2^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{q}}_2. \quad (6.44)$$

Die potenzielle Energie lässt sich einfacher allein mit den Relativkoordinaten $\mathbf{q}_1^T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ ausdrücken (Fall 1):

$$2W_{\text{pot}} = c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2 + c_3 \xi_3^2 + c_4 \xi_4^2 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{q}_1. \quad (6.45)$$

Zwischen den beiden Koordinaten gelten folgende Zwangsbedingungen, die man aus einer geometrischen Betrachtung ableiten kann (Voraussetzung $\varphi \ll 1$):

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\xi_1 + \xi_3 - \xi_2 - \xi_4}{l_1 + l_2}; & y_S &= \frac{l_1(\xi_2 + \xi_4) + l_2(\xi_1 + \xi_3)}{l_1 + l_2} \\ \xi_3 &= y_S + l_1 \varphi - \xi_1; & \xi_4 &= y_S - l_2 \varphi - \xi_2. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Einsetzen von φ und y_s aus Gl. (6.46) in (6.44) liefert

$$2W_{\text{kin}} = m_1 \dot{\xi}_1^2 + m_2 \dot{\xi}_2^2 + m_3 \left[\frac{l_1(\dot{\xi}_2 + \dot{\xi}_4) + l_2(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_3)}{l_1 + l_2} \right]^2 + \frac{J_s}{(l_1 + l_2)^2} (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_3 - \dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_4)^2 = \dot{\mathbf{q}}_1^T \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}}_1. \quad (6.47)$$

Einsetzen von ξ_3 und ξ_4 aus Gl. (6.46) in Gl. (6.45) liefert die potenzielle Energie als Funktion der Absolutkoordinaten:

$$2W_{\text{pot}} = c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2 + c_3 (y_s + l_1 \varphi - \xi_1)^2 + c_4 (y_s - l_2 \varphi - \xi_2)^2 = \mathbf{q}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{q}_2. \quad (6.48)$$

Aus (6.45) und (6.47) folgen durch die partiellen Ableitungen gemäß (6.9) und (6.15) die Matrizen $\mathbf{C}_1$ und $\mathbf{M}_1$ für die Koordinaten $\mathbf{q}_1$, vgl. Tabelle 6.2, Fall 1. Aus (6.48) und (6.44) ergeben sich analog die Matrizen $\mathbf{C}_2$ und $\mathbf{M}_2$ für die Absolutkoordinaten $\mathbf{q}_2$, vgl. Tabelle 6.2, Fall 2. Drückt man die Beziehungen zwischen den beiden Koordinatensystemen durch die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ aus, so gilt

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & -1 & 1 & l_2 \end{bmatrix}, \quad (6.49)$$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{T} \mathbf{q}_2, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{T}^T \mathbf{C}_1 \mathbf{T}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{T}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{T},$$

wovon man sich überzeugen möge.

6.2.2.4

Tragwerk, bestehend aus Substrukturen

Als Beispiel für die in Abschnitt 6.2.1 beschriebene Methode, die sich zum Aufstellen der Systemmatrizen bei komplizierten Strukturen eignet, wird das Tragwerk betrachtet, das aus einem Rahmen mit konstanter Biegesteifigkeit und einem elastisch gestützten Schwingungssystem besteht, vgl. Bild 6.4. Bei der Zerlegung in Substrukturen, dem ersten Schritt bei dieser Methode, wird auf die Matrizen in Tabelle 6.3 zurückgegriffen. Dabei kommen $R = 5$ Substrukturen vor.

Der Rahmen kann aus zwei der galgenförmigen Tragwerke zusammengesetzt werden, die dem Fall 2 in Tabelle 6.3 entsprechen. Der oben befindliche Starrkörper, die dritte Substruktur ($r = 3$), entspricht genau Fall 3 in Tabelle 6.3. Die Feder-Masse-Systeme, welche den Starrkörper mit dem Rahmen verbinden, werden als Substrukturen $r = 4$ und $r = 5$ betrachtet. Sie stellen einen Sonderfall von Fall 1 in Tabelle 6.3 dar, wenn dort $m_1 = m_3 = 0$ gesetzt und die Bezeichnung der Massen und Federn passend geändert wird.

Die globalen Koordinaten sind in Bild 6.4 eingetragen. Nun müssen die Beziehungen zwischen den lokalen Koordinaten, die denen von Tabelle 6.3 entsprechen, zu diesen globalen Koordinaten ausgedrückt werden. Die Substruktur $r = 1$ stellt die linke Hälfte des Rahmens dar, und es gelten die Zwangsbedingungen (Koinzidenz):

$$q_1^{(1)} = q_4, \quad q_2^{(1)} = q_3, \quad q_3^{(1)} = q_2, \quad q_4^{(1)} = q_1. \quad (6.50)$$

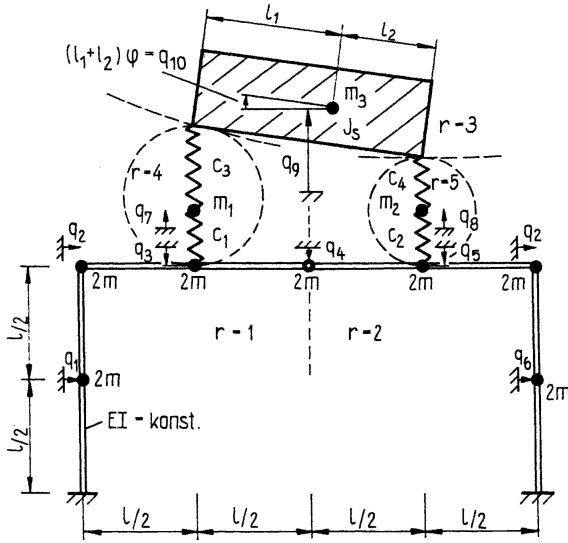


Bild 6.4 Gesamtsystem eines Tragwerks, aufgeteilt in Substrukturen $r = 1, \dots, 5$ mit globalen Koordinaten q_1 und q_{10}

In Anbetracht der $n = 10$ Elemente des Vektors der globalen Koordinaten, können diese Zwangsbedingungen auch durch folgende 4×10 -Transformationsmatrix ausgedrückt werden, vgl. Gl. (6.24):

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.51)$$

Die zweite Substruktur besteht aus demselben „Galgen“, allerdings an der Vertikalachse gespiegelt, sodass sich die rechte Hälfte des Rahmens ergibt. Die Beziehungen zwischen den Koordinaten sind dann für $r = 2$:

$$q_1^{(2)} = q_4, \quad q_2^{(2)} = q_5, \quad q_3^{(2)} = -q_2, \quad q_4^{(2)} = -q_6. \quad (6.52)$$

Damit unterscheidet sich die Transformationsmatrix T_2 von T_1 , aber die Massenmatrizen sind gleich $M_1 = M_2 = M$, und auch die Federmatrizen stimmen überein: $C_1 = C_2 = C$, vgl. Fall 2 in Tabelle 6.3. Die (6.52) entsprechende Transformationsmatrix lautet:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.53)$$

Der starre Körper (Fall 3 in Tabelle 6.3) ist an seinen beiden Enden mit den anderen Substrukturen gekoppelt, sodass noch eine Transformation nötig ist. Mit den Abkürzungen $s_1 = l_1/(l_1 + l_2)$ und $s_2 = l_2/(l_1 + l_2)$ lautet sie:

$$q_1^{(3)} = q_9 + s_1 q_{10}, \quad q_2^{(3)} = q_9 - s_2 q_{10}. \quad (6.54)$$

Die zugehörige Transformationsmatrix ist

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -s_2 \end{bmatrix}. \quad (6.55)$$

Weiterhin ist $C_3 = 0$ und $M_3 = M$, vgl. die Massenmatrix von Fall 3 in Tabelle 6.3.

Die Substruktur $r = 4$ ist das linke Feder-Masse-System zwischen dem starren Körper und dem Rahmen, vgl. Bild 6.4. Die Zwangsbedingungen lauten:

$$q_1^{(4)} = -q_3, \quad q_2^{(4)} = q_7, \quad q_3^{(4)} = q_9 + s_1 q_{10} \quad (6.56)$$

und demzufolge gilt:

$$T_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s_1 \end{bmatrix}. \quad (6.57)$$

Die System-Matrizen folgen aus Tabelle 6.3, Fall 1 und sind mit den in Bild 6.4 benutzten Bezeichnungen für die Parameter zu versehen. Damit gilt:

$$C_4 = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.58)$$

Auf der rechten Seite befindet sich dieselbe Substruktur (Tabelle 6.3, Fall 1), aber für diese ($r = 5$) gelten die Kopplungsbedingungen

$$q_1^{(5)} = -q_5, \quad q_2^{(5)} = q_8, \quad q_3^{(5)} = q_9 - s_2 q_{10} \quad (6.59)$$

und damit die Transformationsmatrix

$$T_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -s_2 \end{bmatrix}. \quad (6.60)$$

Die Matrizen dieser Substruktur stimmen mit denen für $r = 4$ überein, wenn folgende Substitutionen erfolgen: $c_1 \hat{=} c_2$, $c_3 \hat{=} c_4$, $m_1 \hat{=} m_2$. Die globale Feder- und Massenmatrix ergibt sich gemäß (6.25) mit den bereitgestellten Matrizen.

Zur Verdeutlichung der Zusammenhänge wird dem Leser die Berechnung zumindest eines der Summanden empfohlen, damit die Entstehung der Systemmatri-

zen klar wird. Die System-Matrizen des Gesamtsystems lauten:

$$\frac{\mathbf{C}}{c^*} = \begin{bmatrix} 304 & -131 & 72 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -131 & 148 & -54 & 0 & 54 & -131 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 72 & -54 & 160+\bar{c}_1 & -59 & 0 & 0 & \bar{c}_1 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & -59 & 52 & -59 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & -59 & 160+\bar{c}_2 & -72 & 0 & \bar{c}_2 & 0 & 0 \\ 0 & -131 & 0 & 12 & -72 & 304 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_1 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_1+\bar{c}_3 & 0 & -\bar{c}_3 & -\bar{c}_3 s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_2 & 0 & 0 & \bar{c}_2+\bar{c}_4 & -\bar{c}_4 & \bar{c}_4 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{c}_3 & -\bar{c}_4 & \bar{c}_3+\bar{c}_4 & c_{9 \ 10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{c}_3 s_1 & \bar{c}_4 s_2 & c_{10 \ 9} & c_{10 \ 10} \end{bmatrix}$$

mit

$$c_{9 \ 10} = \bar{c}_3 s_1 - \bar{c}_4 s_2 = c_{10 \ 9}, \quad c_{10 \ 10} = \bar{c}_3 s_1^2 + \bar{c}_4 s_2^2 \quad (6.61)$$

$$c^* = \frac{48EI}{97l^3}, \quad \bar{c}_k = c_k/c^* \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (6.62)$$

und

$$\mathbf{M} = \text{diag}(2m, 10m, 2m, 2m, 2m, 2m, m_1, m_2, m_3, J_S/(l_1 + l_2)^2). \quad (6.63)$$

Man sehe sich die Federmatrix einmal in Ruhe an und versuche, sich deren Struktur und die Herkunft der einzelnen Elemente zu erklären. Man findet darin quadratische Untermatrizen die sich teilweise überdecken. Die Kopplungsstellen sind physikalisch erklärbar, wenn man zum Vergleich die Koordinaten in Bild 6.4 betrachtet. Neben der Symmetrie der Federmatrix, die hier natürlich auch erfüllt sein muss, kann man kontrollieren, woher die Elemente mit den $\bar{c}_k$ stammen und ob deren Vorzeichen plausibel sind.

Die Matrizenelemente in der linken oberen Ecke stammen vom Rahmen, während die unten rechts von dem angekoppelten Feder-Masse-System herrühren. Auffällig ist eine Bandstruktur der Federmatrix. Die Erscheinung, dass in der linken unteren und der rechten oberen Ecke der Steifigkeitsmatrix überwiegend Nullen vorkommen, ist für solche Schwinger typisch. Sie ist die Folge der fortlaufenden Nummerierung der im Berechnungsmodell benutzten Koordinaten.

Bei großen Systemen $n > 10$ ergeben sich bedeutende Rechenvorteile, wenn man die Bandstruktur der Matrizen ausnutzt, z. B. bei der Lösung des Eigenwertproblems. Es ist deshalb empfehlenswert, die Koordinaten von Anfang an so einzuführen, dass die Bandbreite minimal wird. Es existieren Algorithmen zur automatischen Bandbreitenminimierung von Matrizen, die man bei ursprünglich beliebiger Koordinaten-Nummerierung (und dadurch bedingter großer Bandbreite) einsetzen kann.

6.2.3

Aufgaben A6.1 bis A6.3

A6.1 Matrizenelemente

Man berechne für das Beispiel in Tabelle 6.2, Fall 1 die Elemente m_{23} und m_{24} der Massenmatrix.

A6.2 Substruktur-Matrizen

Man stelle die Systemmatrizen des Fahrzeugmodells auf, das in Tabelle 6.2, Fall 1 angegeben ist, indem man die in Tabelle 6.3 angegebenen Substruktur-Matrizen anwendet.

A6.3 Massen- und Federmatrix für ein Hubwerk

Zu berechnen sind für das Berechnungsmodell eines Brückenkranes (Bild 6.5) die Elemente der Massenmatrix $\mathbf{M}$ und der Federmatrix $\mathbf{C}$ für den Koordinatenvektor $\mathbf{q}^T = (x_1, x_2, r\varphi_M/i)$. Man prüfe, ob die Federmatrix singulär ist und gebe eine physikalische Deutung.

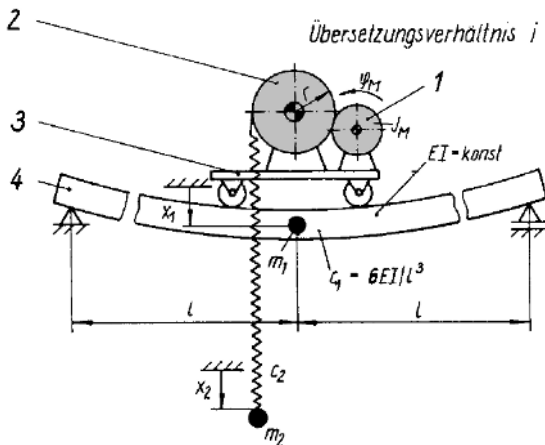


Bild 6.5 Modell eines Brückenkranes zur Berechnung dynamischer Beanspruchungen beim Heben und Senken der Last; 1 Motor, 2 Seiltrommel, 3 Laufkatze, 4 Kranträger

Gegeben:

Reduziertes Trägheitsmoment des Hubwerks J_M

Reduzierte Masse des Krans m_1 (bezogen auf die Stellung der Laufkatze)

Masse der Hublast m_2 , Übersetzungsverhältnis i , Federkonstante des Kranträgers c_1 (bezogen auf die Stellung der Laufkatze), Längsfederkonstante des Seils c_2 , Seiltrommelradius r

Anmerkung: Die Einführung der Größe $r\varphi_M/i$ als verallgemeinerte Koordinate q_3 hat den Vorteil, dass alle Komponenten des Vektors $\mathbf{q}$ (und damit die Elemente von $\mathbf{C}$ und $\mathbf{M}$) dimensionsgleich sind.

6.2.4

Lösungen L6.1 bis L6.3

L6.1 Die erste partielle Ableitung der kinetischen Energie liefert zunächst, vgl. Gl. (6.47):

$$\frac{\partial W_{\text{kin}}}{\partial \dot{\xi}_2} = m_2 \dot{\xi}_2 + m_3 \frac{l_1(\dot{\xi}_2 + \dot{\xi}_4) + l_2(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_3)}{l_1 + l_2} \frac{l_1}{l_1 + l_2} - \frac{J_S}{(l_1 + l_2)^2} (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_3 - \dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_4). \quad (6.64)$$

Nach Umordnung entsteht mit den Abkürzungen

$$s_1 = l_1/(l_1 + l_2); \quad s_2 = l_2/(l_1 + l_2); \quad m = J_S/(l_1 + l_2)^2 \quad (6.65)$$

die Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\text{kin}}}{\partial \dot{\xi}_2} &= (m_3 s_1 s_2 - m) \dot{\xi}_1 + (m_2 + m_3 s_1^2 + m) \dot{\xi}_2 \\ &\quad + (m_3 s_1 s_2 - m) \dot{\xi}_3 + (m_3 s_1^2 + m) \dot{\xi}_4 \end{aligned} \quad (6.66)$$

Gemäß Gl. (6.15) folgen daraus die Elemente der Massenmatrix

$$\begin{aligned} \underline{\underline{m_{32}}} = \underline{\underline{m_{23}}} &= \frac{\partial^2 W_{\text{kin}}}{\partial \dot{\xi}_2 \partial \dot{\xi}_3} = \underline{\underline{m_3 s_1 s_2 - m}} \\ \underline{\underline{m_{42}}} = \underline{\underline{m_{24}}} &= \frac{\partial^2 W_{\text{kin}}}{\partial \dot{\xi}_2 \partial \dot{\xi}_4} = \underline{\underline{m_3 s_1^2 + m}} \end{aligned} \quad (6.67)$$

L6.2 Das Gesamtsystem kann man auffassen als eine Kombination der Substrukturen des starren Körpers ($r = 1$, vgl. Tabelle 6.3, Fall 3) und der beiden Feder-Masse-Systeme ($r = 2$ und $r = 3$), deren Matrizen sich als Sonderfall aus Fall 1 in Tabelle 6.3 ergeben. Als globale Koordinaten werden die in Tabelle 6.2, Fall 1 eingezeichneten ξ_k benutzt, die zur Anpassung an die im Abschnitt 6.2.1 verwendete Bezeichnungsweise mit $\xi_k = q_k$ bezeichnet werden.

Die Kopplungen der Substrukturen sind durch folgende Zwangsbedingungen zwischen den lokalen Koordinaten $\mathbf{q}^{(r)}$ und den globalen Koordinaten $\mathbf{q}^T = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ bestimmt: Substruktur $r = 1$:

$$q_1^{(1)} = q_1 + q_3, \quad q_2^{(1)} = q_2 + q_4. \quad (6.68)$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich im Sinne von (6.24) auch mit der Transformationsmatrix $\mathbf{T}_1$ darstellen, wie man durch Ausmultiplizieren prüfen kann:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{bmatrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.69)$$

Für das linke unten angeordnete Feder-Masse-System, die Substruktur $r = 2$, gelten die Bindungsgleichungen $q_1^{(2)} = 0$, $q_2^{(2)} = q_1$ und $q_3^{(2)} = q_1 + q_3$. Dem entspricht

$$\mathbf{q}^{(2)} = \begin{bmatrix} q_1^{(2)} \\ q_2^{(2)} \\ q_3^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.70)$$

Für die Substruktur $r = 3$, das rechts vorhandene Feder-Masse-System, bestehen die Bindungen $q_1^{(3)} = 0$, $q_2^{(3)} = q_2$, $q_3^{(3)} = q_2 + q_4$. Dafür lautet die Matrix

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.71)$$

Für die Massenparameter der ersten Substruktur müssen die Bezeichnungen eingeführt werden, die dem Gesamtsystem entsprechen, vgl. Fall 3 in Tabelle 6.3 und Fall 1 in

Tabelle 6.2. Es sind also äquivalent $J_S/(l_1 + l_2)^2 = m$, $l_1/(l_1 + l_2) = s_1$, $l_2/(l_1 + l_2) = s_2$. Damit erhält die Massenmatrix der ersten Substruktur die Form

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} m_3 s_2^2 + m & m_3 s_1 s_2 - m \\ m_3 s_1 s_2 - m & m_3 s_1^2 + m \end{bmatrix}. \quad (6.72)$$

Da der starre Körper keine Federn enthält, gilt $\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$. Für die Substruktur $r = 2$ gelten bezüglich des Gesamtsystems für die Masse- und Federparameter die Zuordnungen, vgl. Fall 1 in Tabelle 6.3 und das Bild in Tabelle 6.2, Fall 1: $m_1 = 0$, $m_2 \hat{=} m_1$, $m_3 = 0$, $c_1 \hat{=} c_1$, $c_2 \hat{=} c_3$. Deshalb nehmen die Matrizen folgende Formen an:

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.73)$$

Analog ergeben sich für die Substruktur $r = 3$ wegen der Beziehungen $m_1 = 0$, $m_2 \hat{=} m_2$, $m_3 = 0$, $c_1 \hat{=} c_2$, $c_2 \hat{=} c_4$ die Matrizen

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_4 & -c_4 \\ 0 & -c_4 & c_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.74)$$

Führt man mit all diesen Matrizen die Multiplikation und Summation gemäß Gl. (6.25) aus, so erhält man die in Tabelle 6.2, Fall 1 angegebene Feder- und Massenmatrix.

L6.3 Die Translationsenergie von Kran und Last und die Rotationsenergie des Motors ergeben die gesamte kinetische Energie

$$2W_{\text{kin}} = m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + J_M \dot{\phi}_M^2 = m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{i^2 J_M}{r^2} \left(\frac{r \dot{\phi}_M}{i} \right)^2. \quad (6.75)$$

Die potenzielle Energie bezüglich der statischen Ruhelage von Kran und Last entspricht der Formänderungsenergie innerhalb der Kranbrücke und des Seils. Das Seil wird um die Länge $(x_2 - x_1 + r \phi_M / i)$ gedehnt. Man überlege sich die einzelnen Vorzeichen, indem man jeweils die anderen Koordinaten null setzt. Somit gilt:

$$2W_{\text{pot}} = c_1 x_1^2 + c_2 (x_2 - x_1 + r \phi_M / i)^2$$

Die ersten partiellen Ableitungen der Energien sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\text{kin}}}{\partial \dot{x}_1} &= m_1 \dot{x}_1; & \frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial x_1} &= c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1 + r \phi_M / i) \\ \frac{\partial W_{\text{kin}}}{\partial \dot{x}_2} &= m_2 \dot{x}_2; & \frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial x_2} &= c_2 (x_2 - x_1 + r \phi_M / i) \\ \frac{\partial W_{\text{kin}}}{\partial \left(\frac{r \dot{\phi}_M}{i} \right)} &= \frac{i^2 J_M}{r^2} \left(\frac{r \dot{\phi}_M}{i} \right); & \frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial \left(\frac{r \phi_M}{i} \right)} &= c_2 (x_2 - x_1 + r \phi_M / i). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Gemäß Gln. (6.9) und (6.15) ergeben sich dann die Matrizen bezüglich des angegebenen Vektors $\mathbf{q}$, dessen Elemente dimensionsgleich gewählt wurden:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 J_M / r^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 & c_2 \\ -c_2 & c_2 & c_2 \end{bmatrix}. \quad (6.77)$$

Da sich die Determinante $\det \mathbf{C} = 0$ ergibt, ist dieses Gleichungssystem singulär. Die mechanische Ursache dafür ist, dass in dem System eine ungehinderte Bewegung möglich ist, ohne dass elastische Rückstellkräfte auftreten. Im vorliegenden Fall kann sich die Hubmasse m_2 gemeinsam mit dem Motor (J_M) frei bewegen (Starrkörperbewegung). Die Folge dieser Singularität ist, wie schon beim freien Torsionsschwinger erwähnt wurde, dass die erste Eigenfrequenz null wird, vgl. Abschnitt 4.2.

6.3

Freie ungedämpfte Schwingungen

6.3.1

Eigenfrequenzen, Eigenformen, Eigenkräfte

Die bisher betrachteten Bewegungsgleichungen (6.18) bis (6.22) besitzen symmetrische Massen-, Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrizen. Man kann zeigen, dass bei der Bewegung solcher Systeme die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie konstant bleibt, d. h. dass die durch die Anfangsbedingungen eingeleitete Energie konserviert wird. Im Gegensatz zu gedämpften oder angefachten Systemen, bei denen die Energiesumme sich während der Bewegung ändert, werden diese als *konservative* Systeme bezeichnet.

Wird ein System aus seiner Gleichgewichtslage (die bei den Betrachtungen in Abschnitt 6.2 bei $\mathbf{q} = \mathbf{o}$ vorausgesetzt wurde) ausgelenkt und sich selbst überlassen, so führt es so genannte freie Schwingungen aus. Die freien Schwingungen sind eine Überlagerung der verschiedenen Eigenschwingungen des Systems, die wiederum durch die Eigenfrequenzen und Eigenformen charakterisiert werden. Bevor die freien Schwingungen behandelt werden, soll näher auf die *Eigenschwingungen* eingegangen werden.

Mathematisch betrachtet sind die Eigenschwingungen die allgemeinen Lösungen der homogenen Bewegungsgleichungen. Zunächst werden die Gln. (6.18) bis (6.20) betrachtet. Im Ansatz

$$\mathbf{q} = \mathbf{v} \exp(j\omega t), \quad \ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \mathbf{v} \exp(j\omega t) \quad (6.78)$$

enthält der Vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ die Amplituden der harmonischen Bewegungen aller Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ mit einer zunächst noch unbekannten Eigenkreisfrequenz ω . Man erhält nach kurzen Umformungen

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{v} = \mathbf{o}, \quad (6.79)$$

$$(\mathbf{D}\mathbf{M} - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{o}, \quad (6.80)$$

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{o}, \quad (6.81)$$

nachdem man diese Gleichungen durch $\exp(j\omega t)$ dividiert hat. Das sind homogene lineare Gleichungssysteme für die Unbekannten $v_1, v_2, \dots, v_n$. Alle drei Formen drücken denselben physikalischen Sachverhalt aus. Man spricht in der Mathematik vom *allgemeinen* Eigenwertproblem, wenn die Form von Gl. (6.79) auftritt, also

zwei unterschiedliche Matrizen vorkommen. *Spezielles* Eigenwertproblem heißt in der mathematischen Literatur die Form

$$(A - \lambda E)v = o. \quad (6.82)$$

Dabei ist es für die weitere numerische Behandlung zweckmäßig, mit dimensionslosen Größen zu rechnen. Bezieht man auf eine willkürlich vorgebbare Bezugskreisfrequenz ω^* , so kann man mit der dimensionslosen Größe λ und der dimensionslosen Matrix A rechnen:

$$\lambda = \frac{\omega^{*2}}{\omega^2}, \quad A = \omega^{*2}DM, \quad \omega^2 = \frac{\omega^{*2}}{\lambda} \quad (6.83)$$

Dies folgt aus (6.80), wenn mit dem Faktor ω^{*2} multipliziert wird. Analog lässt sich auch (6.81) umformen, wobei allerdings eine andere Definition, nämlich $\lambda = \omega^2/\omega^{*2}$ und $A = M^{-1}C/\omega^{*2}$ beachtet werden muss.

Die Gl. (6.82) hat nur dann eine von null verschiedene Lösung, wenn ihre Hauptdeterminante gleich null ist. Aus dieser Bedingung erhält man

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (6.84)$$

Diese so genannte *charakteristische Gleichung* ist für die n Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, die so genannten Eigenwerte, erfüllt. Da die Massenmatrix positiv definit und die Federmatrix positiv definit oder positiv semidefinit ist, sind bei diesem Eigenwertproblem alle Eigenwerte reell und positiv oder null. Ein Schwingungssystem mit n Freiheitsgraden hat n Eigenfrequenzen $f_i = \omega_i/2\pi$, die sich aus den Eigenwerten λ_i berechnen lassen, vgl. (6.83). Grundsätzlich werden auch die Eigenfrequenzen, die null sind, sowie mehrfache entsprechend ihrer Vielfachheit mitgezählt.

Bei elastischen Schwingungssystemen, die sich bewegen können, ohne dass Rückstellkräfte auftreten, ist die Steifigkeitsmatrix singulär, d. h. es gilt $\det C = 0$. Bei solchen Systemen sind eine oder mehrere der unteren Eigenfrequenzen identisch null. Die zugehörigen Eigenformen sind dann Bewegungsformen des Starrkörpersystems. Bei ungefesselten Torsionsschwingern ist die erste Form der Eigenbewegung z. B. eine ungehinderte Rotation, weil die erste Eigenfrequenz null ist, vgl. z. B. in Kapitel 4 die Gleichungen (4.12), (4.27) und (4.127). Bei freien Biegeschwingern, die sich in einer Ebene bewegen können, sind zwei Eigenfrequenzen null, wenn der Balken sich in der Ebene frei bewegen kann, vgl. Tabelle 5.7. Bei einem frei im Raum beweglichen Flugobjekt sind die ersten sechs Eigenfrequenzen null. Man muss deshalb unterscheiden zwischen der ersten Eigenfrequenz (die null sein kann) und der **Grundfrequenz** eines Schwingungssystems, welche die tiefste von null verschiedene Eigenfrequenz ist.

Hier soll zunächst vorausgesetzt werden, dass alle λ_i bekannt sind. Werden sie nacheinander in Gl. (6.82) eingesetzt, so entstehen n verschiedene lineare homogene Gleichungssysteme:

$$(A - \lambda_i E)v_i = o, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.85)$$

Die Unbekannten v_{ki} dieses Gleichungssystems (k entspricht der Nummer der Koordinate, i der Nummer des Eigenwertes) können nur bis auf einen festzulegenden

Maßstabsfaktor bestimmt werden, da die rechte Seite des Gleichungssystems null ist. Dieser wird durch eine Normierungsbedingung festgelegt, z. B.

$$\begin{aligned} \mu_i &= \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i = 1 \quad \text{oder} \quad \gamma_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i = 1 \quad \text{oder} \\ \sum_{k=1}^n v_{ki}^2 &= 1 \quad \text{oder} \quad v_{ki \max} = 1. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Dies erfolgt im Regelfall automatisch durch die Rechenprogramme.

Es verbleiben aus Gl. (6.85) also $(n - 1)$ lineare Gleichungen zur Berechnung der Amplitudenverhältnisse v_{ki} . Die Gesamtheit der Amplitudenverhältnisse, die für den Eigenwert λ_i charakteristisch sind, werden im *Eigenvektor*

$$\mathbf{v}_i = [v_{1i}, v_{2i}, \dots, v_{ni}]^T \quad (6.87)$$

zusammengefasst. Ein Eigenvektor beschreibt anschaulich eine Eigenschwingform, kurz auch *Eigenform* (engl. *mode*) genannt. Fasst man alle Eigenvektoren zusammen, so entsteht die so genannte **Modalmatrix**

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} = [v_{ki}]. \quad (6.88)$$

Analog zur Gl. (6.80), die aus Gl. (6.19) folgt, kann aus Gl. (6.22) mit dem zu Gl. (6.78) analogen Ansatz

$$\mathbf{g} = \mathbf{w} \exp(j\omega t), \quad \ddot{\mathbf{g}} = -\omega^2 \mathbf{w} \exp(j\omega t) \quad (6.89)$$

die folgende Form eines speziellen Eigenwertproblems gewonnen werden:

$$(\mathbf{M}\mathbf{D} - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{E}) \mathbf{w} = \mathbf{o}. \quad (6.90)$$

Aus ihr folgt analog zu Gl. (6.82) mit Gl. (6.83)

$$(\mathbf{A}^T - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{w} = \mathbf{o}. \quad (6.91)$$

Dies liefert (schon aus physikalischen Gründen) dieselben Eigenwerte λ_i , aber die Eigenvektoren $\mathbf{w}_i$ haben eine andere Bedeutung: sie stellen die *Eigenkräfte* dar. In der mathematischen Literatur werden die Vektoren $\mathbf{v}_i$, die physikalisch die *Eigenformen* darstellen, als Rechts-Eigenvektoren und die $\mathbf{w}_i$ als Links-Eigenvektoren im Hinblick auf Gl. (6.82) bezeichnet, wogegen die $\mathbf{w}_i$ die Rechtseigenvektoren und die $\mathbf{v}_i$ die Linkeigenvektoren des Eigenwertproblems Gl. (6.91) sind.

Aufgrund von Gl. (6.3) und (6.13) bestehen zwischen den Eigenformen und Eigenkräften die Beziehungen

$$\mathbf{w}_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{v}_i = \mathbf{C} \mathbf{v}_i \quad (6.92)$$

Man kann sich die **Eigenkräfte** anschaulich so vorstellen, als ob an den Koordinaten q_k die Kräfte w_{ki} angreifen, vgl. Bild 6.8. Man kann diese Kräfte als Amplituden der Massenkkräfte auffassen, die infolge der Schwingung mit der Eigenkreisfrequenz ω_i bei der i -ten Eigenform auftreten. Genau so berechtigt ist auch die Vorstellung, dass

diese Massenkkräfte wie eingeprägte Kräfte wirken und die Eigenform die Folge davon ist.

Da jedem reellen Eigenwert λ_i gemäß Gl. (6.83) formal zwei Eigenkreisfrequenzen entsprechen ($\omega_i = \pm \omega^* / \sqrt{\lambda_i}$), hat gemäß Gl. (6.78) die Lösung für die i -te Eigenschwingung zwei konjugiert komplexe Summanden:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i(t) &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_i [(a_i - j b_i) \exp(j \omega_i t) + (a_i + j b_i) \exp(-j \omega_i t)] \\ &= \mathbf{v}_i (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) = \mathbf{v}_i \hat{p}_i \sin(\omega_i t + \beta_i) \end{aligned} \quad (6.93)$$

Da alle $\mathbf{q}_i(t)$ reell sind, erhält man mit der Euler'schen Relation dafür auch die angegebene Darstellung mit trigonometrischen Funktionen. Die i -te Eigenschwingung verläuft demzufolge harmonisch mit der Eigenkreisfrequenz ω_i und mit einer Amplitudenverteilung, die in der Eigenform $\mathbf{v}_i$ zum Ausdruck kommt.

Dies ist ein wesentliches Ergebnis, wie die weiteren Betrachtungen noch zeigen werden. Man kann auch sagen, dass die *Eigenschwingung* einen Bewegungszustand des Schwingers darstellt, der ohne Energiezufuhr aufrechterhalten bleibt.

Die vollständige Lösung der Bewegungsgleichungen (6.18) bis (6.20) entsteht aus der Superposition der n Eigenschwingungen, wobei die $2n$ Konstanten (a_i, b_i oder $\hat{p}_i, \beta_i$) aus den Anfangsbedingungen folgen, vgl. 6.3.3:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i(t). \quad (6.94)$$

6.3.2

Orthogonalität und Hauptkoordinaten

Es soll nun ein wichtiger mathematischer Zusammenhang hergeleitet werden, der zwischen den Eigenvektoren besteht. Für die i -te Eigenschwingform folgt aus Gl. (6.85)

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i. \quad (6.95)$$

Analog folgt aus Gl. (6.91) für den Amplitudenvektor der Kraftgrößen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{w}_k = \lambda_k \mathbf{w}_k. \quad (6.96)$$

Multipliziert man von links Gl. (6.95) mit $\mathbf{w}_k^T$ und Gl. (6.96) mit $\mathbf{v}_i^T$, folgt

$$\mathbf{w}_k^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{w}_k^T \mathbf{v}_i \quad (6.97)$$

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{w}_k = \lambda_k \mathbf{v}_i^T \mathbf{w}_k = \lambda_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{v}_i. \quad (6.98)$$

In Gl. (6.97) kann man die Faktoren vertauschen, wenn statt $\mathbf{A}$ die transponierte Matrix $\mathbf{A}^T$ verwendet wird, sodass daraus die Form

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{w}_k = \lambda_i \mathbf{w}_k^T \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{w}_k \quad (6.99)$$

entsteht. Bildet man die Differenz aus Gl. (6.98) und Gl. (6.99), so folgt

$$(\lambda_k - \lambda_i) \mathbf{v}_i^T \mathbf{w}_k = (\lambda_k - \lambda_i) \mathbf{w}_k^T \mathbf{v}_i = 0. \quad (6.100)$$

Für unterschiedliche Eigenwerte ($\lambda_i \neq \lambda_k$) ergibt sich also

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{w}_k = \mathbf{w}_k^T \mathbf{v}_i = 0 \quad (6.101)$$

und unter Benutzung von Gl. (6.92) erhält man die verallgemeinerten Orthogonalitätsrelationen für die Eigenvektoren (wegen $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$):

$$i \neq k: \quad \mathbf{v}_i^T \mathbf{C} \mathbf{v}_k = 0 \quad (6.102)$$

$$i \neq k: \quad \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_k = 0 \quad (6.103)$$

$$i = k: \quad \mathbf{v}_i^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i = \gamma_i \quad (6.104)$$

$$i = k: \quad \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i = \mu_i \quad (6.105)$$

$$i \neq k: \quad \mathbf{w}_i^T \mathbf{D} \mathbf{w}_k = \omega_i^2 \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{v}_k \omega_k^2 = 0 \quad (6.106)$$

$$i = k: \quad \mathbf{w}_i^T \mathbf{D} \mathbf{w}_i = \omega_i^4 \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{v}_i = \gamma_i \neq 0. \quad (6.107)$$

Damit sind die modalen Federkonstanten γ_i und die modalen Massen μ_i definiert. Sie stellen eine Reduktion der Massenträgheit und der Elastizität des Gesamtsystems auf die i -te Eigenschwingform dar.

Gleichung (6.101) sagt aus, dass die Kräfte $\mathbf{w}_k$ der k -ten Eigenschwingform bezüglich der i -ten Eigenschwingform mit den Amplituden $\mathbf{v}_i$ keine Arbeit leisten. Mit anderen Worten heißt das, dass sich die Eigenschwingformen nicht gegenseitig beeinflussen, da kein Energieaustausch zwischen ihnen erfolgt. Die Gln. (6.102) bis (6.107) stellen verallgemeinerte Orthogonalitätsrelationen dar, die physikalisch dasselbe wie Gl. (6.101) aussagen.

Aus (6.93) lässt sich eine wichtige Folgerung ziehen. Fasst man $\hat{p}_i \sin(\omega_i t + \beta_i)$ als Koordinate $p_i(t)$ auf, so kann man sie anstelle der bisherigen verallgemeinerten Koordinaten $q_i(t)$ verwenden. Der Zusammenhang zwischen diesen so genannten **modalen Koordinaten**, *Normal-* oder *Hauptkoordinaten*, die im Vektor $\mathbf{p}^T = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ zusammengefasst sind, und den verallgemeinerten Koordinaten q_k wird mit der Modalmatrix $\mathbf{V}$ aus (6.88) ausgedrückt (Modaltransformation):

$$q_k = \sum_{i=1}^n v_{ki} p_i; \quad \mathbf{q} = \mathbf{V} \mathbf{p} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{p} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{q}. \quad (6.108)$$

Werden die Hauptkoordinaten benutzt, lautet die potenzielle Energie, vgl. Gl. (6.7):

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} = \frac{1}{2} (\mathbf{V} \mathbf{p})^T \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{p} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{p} \quad (6.109)$$

und die kinetische Energie, vgl. (6.16):

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} (\mathbf{V} \dot{\mathbf{p}})^T \mathbf{M} \mathbf{V} \dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \dot{\mathbf{p}}. \quad (6.110)$$

Bei der Ausführung der Matrizenmultiplikation $\mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}$ ist zu beachten, dass $\mathbf{V}^T$ und $\mathbf{V}$ die Eigenvektoren enthalten. Damit gilt

$$\mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} [\mathbf{C} \mathbf{v}_1, \mathbf{C} \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{C} \mathbf{v}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \mathbf{C} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^T \mathbf{C} \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_1^T \mathbf{C} \mathbf{v}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \mathbf{C} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_n^T \mathbf{C} \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n^T \mathbf{C} \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad (6.111)$$

Infolge der besonderen Eigenschaften der Modalmatrix $\mathbf{V}$ vereinfachen sich die Beziehungen unter Beachtung von (6.102) bis (6.105). Alle Außerdiagonalelemente sind gleich null. Als Diagonalelemente verbleiben die modalen Federkonstanten γ_i und die modalen Massen μ_i . Es gilt demzufolge, vgl. (6.102) bis (6.105):

$$\mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} = \text{diag}(\gamma_i); \quad \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \text{diag}(\mu_i). \quad (6.112)$$

Die modalen Steifigkeiten γ_i und die modalen Massen μ_i sind von der Normierung abhängig, vgl. (6.86).

Die potenzielle und die kinetische Energie lassen sich durch Quadrate der Hauptkoordinaten bzw. deren Geschwindigkeiten ausdrücken, vgl. (6.109) und (6.110):

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \gamma_i p_i^2; \quad W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mu_i \dot{p}_i^2. \quad (6.113)$$

Die Bewegungsgleichungen für die freien Schwingungen eines Schwingungssystems erhalten in Hauptkoordinaten (Synonym: modale Koordinaten) deshalb auch eine einfache Form. Aus (6.18) folgt zunächst mit $\mathbf{q} = \mathbf{V} \mathbf{p}$, vgl. (6.108):

$$\mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C} \mathbf{V} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (6.114)$$

und nach Multiplikation dieser Gleichung mit $\mathbf{V}^T$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (6.115)$$

oder einfach wegen (6.112) entstehen n Bewegungsgleichungen der „modalen Schwinger“ bei freien Schwingungen:

$$\mu_i \ddot{p}_i + \gamma_i p_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.116)$$

Sie sind den gekoppelten Gln. (6.18) äquivalent, auch (6.19) und (6.20). Die n Eigenkreisfrequenzen ergeben sich aus den modalen Federkonstanten γ_i und den modalen Massen μ_i aus (6.116), (6.104), (6.107) und (6.105):

$$\omega_i^2 = \frac{\gamma_i}{\mu_i} = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i} = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{v}_i} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.117)$$

Man ordnet die Eigenkreisfrequenzen üblicherweise der Größe nach ($\omega_{i+1} > \omega_i$). Diese Beziehung stellt einen interessanten Zusammenhang zwischen jeder Eigenkreisfrequenz ω_i und der zugehörigen Eigenschwingform $\mathbf{v}_i$ her, vgl. auch den Rayleigh-Quotienten in (6.181) und (6.184).

6.3.3

Anfangsbedingungen

Ein Schwingungssystem führt freie Schwingungen aus, wenn ihm zu Beginn der Bewegung Energie zugeführt wird, wenn es aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt und sich selbst überlassen wird. Dynamische Belastungen von Maschinen infolge freier Schwingungen interessieren in der Praxis vor allem nach stoßartigen Erregungen (z. B. plötzliches Abbremsen einer Bewegung, Anstoßen an ein Hindernis,

Kupplungsvorgänge) oder nach plötzlichem Belasten oder Entlasten, z. B. Abfallen einer Last am Kran, Reißen eines Spannelementes, Bruch eines Bauteils.

Bei Stoßbelastungen können die Anfangsbedingungen oft aus dem Impulssatz und/oder dem Drehimpulssatz (Drallsatz) berechnet werden. Es entstehen dann Schwingungen um die Gleichgewichtslage $\mathbf{q} = \mathbf{o}$. Beim plötzlichen Be- oder Entlasten entsteht eine neue (veränderte) Gleichgewichtslage, auf welche sich das System einschwingt. Dabei ist zu beachten, dass die Bewegungsgleichungen für das veränderte System aufgestellt werden, weil es Schwingungen um die Lage $\mathbf{q} = \mathbf{o}$ ausführt.

Der interessierende zeitliche Verlauf von Deformationen und Kraftgrößen, der bei schwingungsfähigen Maschinen berechnet werden soll, ergibt sich als Lösung einer Differenzialgleichung vom Typ der Gln. (6.18) bis (6.22) unter Beachtung der Anfangsbedingungen. Welche dieser Gleichungen verwendet wird, hängt vom jeweiligen praktischen Problem bzw. vom Bearbeiter ab. Oft werden die Gleichungen der Form (6.18) bis (6.20) benutzt, aus denen der zeitliche Verlauf der Bewegungen folgt, und wenn Kraftgrößen interessieren, werden diese dann anschließend über die Gln. (6.3) oder (6.21) errechnet.

Die Anfangsbedingungen definieren den Zustand des Schwingungssystems zur Zeit $t = 0$, d. h., sie geben die Anfangsauslenkungen und die Anfangsgeschwindigkeiten an:

$$t = 0: \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0; \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{u}_0. \quad (6.118)$$

Die Auslenkung aus der statischen Ruhelage ist mit der Übertragung potenzieller Energie verbunden und die Erteilung einer Anfangsgeschwindigkeit entspricht der plötzlichen Übertragung kinetischer Energie.

Wesentlich ist der physikalische Sachverhalt, dass mit den Anfangsbedingungen auch ausgedrückt wird, dass dem Schwingungssystem die Energie

$$W_0 = W_{\text{pot}0} + W_{\text{kin}0} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_0^T \mathbf{C} \mathbf{q}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{u}_0^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0 \quad (6.119)$$

übertragen wird. Diese Energie „tobt sich aus“ in Form der dann entstehenden freien Schwingungen. Extreme Deformationen, Geschwindigkeiten und Belastungen kann man abschätzen, wenn man beachtet, dass maximal diese Gesamtenergie W_0 in dem betreffenden Element konzentriert ist, vgl. (4.90) bis (4.94) in Abschnitt 4.2.6 sowie (6.127) und (6.128). Aus den Anfangsbedingungen (6.118) der Lagekoordinaten können die Anfangswerte der modalen Koordinaten berechnet werden. Dies braucht nicht mit den aus (6.108) folgenden Formeln

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0 = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{p}}(0) = \dot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{u}_0 \quad (6.120)$$

zu erfolgen, wobei die Kehrmatrix der Modalmatrix zu bilden wäre. Aus den Beziehungen

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{q} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \mathbf{p} = \text{diag}(\mu_i) \mathbf{p}, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{p} = \text{diag}(\gamma_i) \mathbf{p} \quad (6.121)$$

folgen Formeln, die weniger Rechenoperationen erfordern:

$$\mathbf{p}_0 = \text{diag}(1/\gamma_i) \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{q}_0 = \text{diag}(1/\mu_i) \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0, \quad (6.122)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_0 = \text{diag}(1/\gamma_i) \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{u}_0 = \text{diag}(1/\mu_i) \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0. \quad (6.123)$$

Die Energie des Anfangszustandes lässt sich mit den Anfangswerten der modalen Koordinaten ausdrücken und beträgt, vgl. (6.113):

$$W_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\gamma_i p_{i0}^2 + \mu_i \dot{p}_{i0}^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(\mathbf{v}_i^T \mathbf{C} \mathbf{q}_0)^2}{\gamma_i} + \frac{(\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0)^2}{\mu_i} \right]. \quad (6.124)$$

Die gesamte Anfangsenergie W_0 teilt sich auf die Eigenformen auf, wobei der Anteil, den jede Eigenform abbekommt, sich während der weiteren Eigenschwingung nicht ändert. Es findet zwar im Laufe der Zeit ein Energieaustausch zwischen den einzelnen Massen und Federn des Schwingers statt, aber jede Eigenform verhält sich wie ein isolierter Einzelschwinger, vgl. Gl. (6.116).

Der i -te Summand in (6.124) erfasst die Energie der i -ten Eigenschwingung. Die Anfangsbedingungen (6.118), die gemäß (6.120), (6.122) und (6.123) transformiert werden, lauten für die i -te Hauptkoordinate:

$$t = 0: \quad p_i(0) = p_{i0}, \quad \dot{p}_i(0) = \dot{p}_{i0}. \quad (6.125)$$

Die Lösung jeder der Gln. (6.116) lautet unter diesen Anfangsbedingungen:

$$p_i = p_{i0} \cos \omega_i t + \frac{\dot{p}_{i0}}{\omega_i} \sin \omega_i t = \hat{p}_i \sin(\omega_i t + \beta_i). \quad (6.126)$$

Man kann also die Bewegung des Schwingungssystems als Summe der Bewegungen von n Einzelschwingern auffassen. Wenn das System nur mit der Eigenkreisfrequenz ω_i schwingt, nimmt es die Amplitudenverhältnisse des i -ten Eigenvektors $\mathbf{v}_i$ an, und man kann sagen, dass seine Bewegung eindeutig durch die Angabe der einen Hauptkoordinate p_i gekennzeichnet ist. Für extreme Bewegungs- oder Kraftgrößen an beliebigen Stellen k im Innern eines Schwingungssystems kann man Grenzwerte berechnen, ohne die Differenzialgleichungen zu integrieren. Wenn man annimmt, dass sich die Gesamtenergie W_0 des Anfangszustands dort als kinetische Energie konzentriert, folgen daraus als Abschätzung für die maximale Geschwindigkeit einer Einzelmasse m_k bzw. Drehgeschwindigkeit einer Drehmasse J_k die Ungleichungen

$$v_{k \max} < \sqrt{2W_0/m_k}; \quad \Omega_{\max} < \sqrt{2W_0/J_k}. \quad (6.127)$$

Die maximale Belastung einer beliebigen Feder kann höchstens so groß sein, dass darin die gesamte Energie als potenzielle Energie gespeichert wird. Damit folgen für die maximale Kraft in der Längsfeder c_k bzw. das maximal mögliche Moment in der Drehfeder c_{Tk} die Ungleichungen

$$F_{k \max} < \sqrt{2W_0 c_k}; \quad M_{k \max} < \sqrt{2W_0 c_{Tk}}. \quad (6.128)$$

Mithilfe von Gl. (6.108) und (6.126) lassen sich die Lagekoordinaten $\mathbf{q}$ aus den Hauptkoordinaten $\mathbf{p}$ berechnen ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$q_k(t) = \sum_{i=1}^n v_{ki} \left(p_{i0} \cos \omega_i t + \frac{\dot{p}_{i0}}{\omega_i} \sin \omega_i t \right) \quad (6.129)$$

Dieses Ergebnis ist auch aus Gl. (6.93) und Gl. (6.94) bekannt. Die Massenkräfte der verallgemeinerten Koordinaten folgen damit aus Gl. (6.13). Sie stellen eine Superposition der sich harmonisch mit den Eigenfrequenzen verändernden Eigenkräfte dar. Die an bestimmten Stellen der Maschine interessierenden Bewegungen,

Lagerreaktionen oder Schnittkräfte (z. B. Querkraft, Längskraft, Moment in Biegestäben) können aus dem bekannten $\mathbf{q}(t)$ bzw. $\mathbf{g}(t)$ unter Beachtung geometrischer Zusammenhänge berechnet werden.

Ein prinzipiell anderer Weg zur Berechnung von $\mathbf{q}(t)$ bei freien Schwingungen besteht in der numerischen Integration der Differenzialgleichungen (6.18) mit den Anfangsbedingungen (6.118), z. B. mit dem Verfahren von *Runge-Kutta*. Dies kann rechentechnisch sogar einfacher als die hier beschriebene Methode sein. Dann entfällt die Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingformen. Der Nachteil derartiger numerischer Verfahren ist jedoch, dass wesentliche physikalische Zusammenhänge schwerer überschaubar werden und die Analyse von Parameter-Einflüssen unübersichtlicher wird.

6.3.4 Beispiele

6.3.4.1 Zur Modalanalyse von Maschinen

Es ist zu empfehlen, die dynamische Analyse einer Maschine (oder einer Baugruppe) mit einer Modalanalyse zu beginnen, wobei neben den Eigenfrequenzen vor allem die Eigenschwingformen ermittelt werden. Unabhängig von der absoluten Größe der Erregungen und Dämpfungen ist die Kenntnis der wesentlichen Eigenfrequenzen und Eigenformen sehr hilfreich, um das dynamische Verhalten bewerten zu können.

Gegenwärtig existiert Software, mit der in kurzer Zeit alle Eigenwerte und Eigenvektoren ermittelt werden können, sodass der Ingenieur sich nicht mehr um die dafür benutzten Algorithmen zu kümmern braucht. Der Rechenaufwand, den die Ermittlung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer $(n \times n)$ -Matrix beansprucht, ist bei allen Verfahren proportional zu n^3 . Meist liefern die handelsüblichen Programme aufgrund der Eingabedaten sofort die Eigenfrequenzen und -formen, ohne dass der Anwender der Software die Matrizen zu sehen bekommt.

Gewisse Schwierigkeiten können bei der Anwendung mancher Rechenprogramme entstehen, wenn dicht benachbarte oder betragsgleiche Eigenfrequenzen auftreten. Dies kommt bei Systemen mit verzweigter oder vermaschter Struktur vor, z. B. bei Block- und Tischfundamenten (wo diese Frequenznachbarschaft bei der Tiefabstimmung oft sogar zur Begrenzung des Spektrums gefordert wird), bei räumlich ausgedehnten Strukturen, Rohrleitungen und verzweigten Torsionsschwingungssystemen.

Den größten Aufwand verlangen bei praktischen Aufgaben die Vorbereitungsarbeiten, d. h. die Wahl des Berechnungsmodells und die Ermittlung der Parameterwerte. Die Brauchbarkeit der Rechenergebnisse ist vor allem davon abhängig, wie gut das Berechnungsmodell die reale Maschine abbildet und wie genau die Eingabedaten sind. Vielfach sind die geometrischen und mechanischen Parameter einer Maschine nur auf 2 bis 3 Ziffern genau bekannt. Die Daten der Massenparameter sind i. Allg. verlässlicher bestimmbar als die Federwerte.

In Wirklichkeit müssen bei jeder Modellierung schon bei der Geometrie Vereinfachungen vorgenommen werden, z. B. bei komplizierten Querschnittsformen

eines Maschinengestells bei den Verrippungen und Aussparungen. Oft sind die Steifigkeiten der Verbindungselemente und Kontaktstellen, wie Fugen, Schraub- und Klebverbindungen, Lager u. a. nicht bekannt. Ungenau sind meist alle Parameterwerte, welche die Dämpfung erfassen, weswegen die theoretische Modalanalyse oft unabhängig davon erfolgt. Bei ungenauen Parameterwerten kann man sich damit behelfen, dass man die Modalanalyse für bestimmte Parameterbereiche vornimmt und die Sensitivitäten bezüglich dieser Parameterwerte ermittelt.

Neben einer theoretischen Modalanalyse (z. B. mit einem FEM-Programm), die sich schon während der Projektphase einer Konstruktion anbietet, ist die **experimentelle Modalanalyse** am ausgeführten Objekt zu empfehlen. Bei der experimentellen Modalanalyse wird vorausgesetzt, dass sich das reale Objekt wie ein lineares Schwingungssystem verhält und die dafür existierenden theoretischen Zusammenhänge gelten, z. B. das Superpositionsprinzip, vgl. Abschnitt 6.7.2. Da Nichtlinearitäten verschiedener Art vorhanden sein können, ist es ratsam, bei der experimentellen Modalanalyse das reale Objekt in einer solchen Intensität und in solch einem Frequenzbereich zu deformieren bzw. zu belasten, der den Bereich seiner Betriebszustände umfasst. Wenn die Belastungen und die Vorspannkräfte zu klein sind, können z. B. Spieleinflüsse dominieren, die bei größeren Belastungen bedeutungslos sind. Wird bei der Messung ein anderer Frequenzbereich als beim realen Betrieb durchfahren, so können Steifigkeits- und Dämpfungskennwerte stark abweichen.

Eine in der Strukturodynamik übliche Methode zum Vergleich berechneter und gemessener Eigenformen benutzt die sog. **MAC-Matrix** (**MAC** = Modal Assurance Criterion). Dies ist eine Rechteckmatrix, die so viele Spalten (j) hat, wie Eigenformen gemessen wurden und so viele Zeilen (i), wie berechnete Eigenvektoren vorliegen. Jedes Element dieser Matrix stellt den Wert eines normierten Skalarproduktes von einem gemessenen Eigenvektor $\mathbf{v}_{je}$ und einem berechneten Eigenvektor $\mathbf{v}_{io}$ dar, womit die Korrelation zwischen diesen beiden Vektoren bewertet wird. Das Matrizelement

$$\text{MAC}(i, j) = \frac{(\mathbf{v}_{je}^T \mathbf{v}_{io})^2}{(\mathbf{v}_{je}^T \mathbf{v}_{je})(\mathbf{v}_{io}^T \mathbf{v}_{io})} \quad (6.130)$$

ist ein Maß für die Übereinstimmung zwischen den Vektoren $\mathbf{v}_{je}$ und $\mathbf{v}_{io}$.

Wenn diese beiden Vektoren (bis auf einen Maßstabsfaktor) übereinstimmen, dann ist das Matrizelement gleich eins, falls die beiden Vektoren zueinander orthogonal sind, ist es null. Praktisch haben die Matrizelemente Werte zwischen null und eins, weil die betrachteten Vektoren keine idealen Bedingungen erfüllen. Erfahrungsgemäß besteht bei einem Matrizelement $\text{MAC}(i, j) < 0,3$ zwischen den beiden Vektoren kaum eine Korrelation, aber bei $\text{MAC}(i, j) > 0,8$ stimmen der berechnete und der gemessene Eigenvektor mit hoher Wahrscheinlichkeit überein. Die MAC-Matrix ist auch geeignet, um Eigenvektoren dicht benachbarter Eigenfrequenzen zu unterscheiden.

In der Praxis muss man die Vergleichspunkte auswählen, denn meist stimmt die Anzahl der Elemente in den Vektoren $\mathbf{v}_{je}$ und $\mathbf{v}_{io}$ nicht überein. Auch die Koordinaten der Messpunkte sind kaum identisch mit den Koordinaten des Berechnungsmodells, und sie sind auch nicht einfach auf mehrere Stellen genau zu ermitteln. Es gibt außer der Bewertung mit der MAC-Matrix noch mehrere andere Kriterien zum Vergleich experimenteller und rechnerischer Werte.

Die Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse kann man verwenden, um die Eingabedaten für die Berechnung zu präzisieren. Es ist ratsam, für das erforschte Erzeugnis Erfahrungswerte der Modalanalyse zu sammeln und für Vergleichszwecke geordnet zu speichern. Für manche Maschinen und Fahrzeuge und deren Baugruppen existieren in den Konstruktions- und Entwicklungsabteilungen führender Industriezweige intern Dateien und Listen mit allen wesentlichen Eigenfrequenzen, Eigenformen und modalen Dämpfungen! Diese dienen nicht nur zum Vergleich mit konkurrierenden Erzeugnissen, sondern auch zur Unterstützung der technischen Diagnostik und der schnellen Fehlersuche bei irgendwelchen technischen Störungen.

Vor einer experimentellen Untersuchung sollte man sich auch bezüglich der zweckmäßigen Messstellen-Anordnung davon leiten lassen, dass man Informationen über die Eigenschwingformen der Maschinen erhält, da sich viele Erscheinungen als deren Überlagerung deuten lassen. Die an einer Maschine gemessenen zeitlich veränderlichen Kräfte, Spannungen, Wege, Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen kann man sich als Überlagerung von deren Eigenschwingungen vorstellen und deuten.

Bei vielen Objekten interessieren lediglich die unteren Eigenfrequenzen oder nur ein Teil des Eigenfrequenz-Spektrums, z. B. die Eigenfrequenzen in der Nähe einer gegebenen Erregerfrequenz. Die höchsten Eigenfrequenzen eines *Berechnungsmodells* charakterisieren nur das Berechnungsmodell, nicht aber die reale Maschine. Die höchsten Eigenfrequenzen jeder realen Maschine sind unbegrenzt groß.

Die Praxis zeigt meist, dass die tatsächlichen Federkonstanten kleiner als die berechneten sind und dass gemessene Eigenfrequenzen unter den berechneten liegen. Die Ursache dafür ist, dass oft nicht alle elastischen Elemente rechnerisch (vgl. Aufgabe A6.6) erfasst werden und dass sich manche Verbindungen während des Betriebs lockern, sodass infolge des auftretenden Spiels tatsächlich kleinere mittlere Steifigkeiten entstehen. Eine Übereinstimmung von praktisch gemessenen mit vorausberechneten Eigenfrequenzen in der Größenordnung unter 5 % ist selten erreichbar. Bei ersten Modellrechnungen kann man eine Übereinstimmung von 10 % schon als Erfolg ansehen. Erst durch schrittweise Modellverbesserungen erreicht man bei realen Objekten die gewünschte Genauigkeit.

Im Allgemeinen kann man bei verschiedenen Exemplaren von Maschinen derselben Konstruktion erwarten, dass sich deren Schwingungsverhalten voneinander kaum unterscheidet. Die beobachteten Abweichungen von den Rechenergebnissen sind dann oft auf die Streuung der Parameterwerte der untersuchten Maschine zurückzuführen. Es gibt Maschinen, bei denen die Steifigkeit von Verbindungselementen im Wesentlichen durch die Montagebedingungen bestimmt wird und gewissermaßen der Monteur mit dem Schraubenschlüssel die Vorspannung und damit die Eigenfrequenzen bestimmt. Bei der Konstruktion sollte man solche Unsicherheiten vermeiden und dafür sorgen, dass die in der Rechnung angenommenen Werte auch zuverlässig in der Praxis umgesetzt werden. Diese Forderung läuft darauf hinaus, „berechnungsgerecht“ zu konstruieren und dass die vom Konstrukteur vorgeschriebenen Maßnahmen und Bedingungen in der Fertigung eingehalten werden.

Zur Kontrolle der numerischen Ergebnisse sollte man folgende Betrachtungen anstellen:

- Kontrollieren, ob bei Systemen mit symmetrischer geometrischer Struktur und symmetrischer Masse- und Steifigkeitsverteilung (nicht verwechseln mit Sym-

metrie von C und M^1) aus der Rechnung ausschließlich genau symmetrische und genau antimetrische Eigenformen herauskommen.

- Gesamtsystem vereinfachen, d. h. in entkoppelte Teilsysteme mit wenigen Freiheitsgraden aufteilen und für diese die Teil-Eigenfrequenzen berechnen. Je nach dem, ob man durch die Vereinfachung das System versteift bzw. „erweicht“ oder träger bzw. trägheitsärmer gemacht hat, kann man beurteilen, ob die abgeschätzte Eigenfrequenz größer oder kleiner als die des Gesamtsystems sein muss.

Tabelle 6.4 enthält die Eigenfrequenzen einiger Maschinen und deren Baugruppen. Man beachte, dass die niederen Eigenfrequenzen großer Objekte im Bereich um 1 Hz und diejenigen kleiner kompakter Baugruppen mehrere hundert Hertz betragen.

Tabelle 6.4 Beispiele für untere Eigenfrequenzen von Maschinen

Maschine	Untere Eigenfrequenzen			Erregerfrequenz
	$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ in Hz	$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ in Hz	$f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi}$ in Hz	
Schaufelradbagger SRs 4000	0,46	1,2	1,8	0,8
Tischfundament einer 50-MW-Turbine	1,1	9,1	9,5	50
Wippdrehkran DWK 5MPx22m	0,7 ... 0,9	1,2 ... 1,6		
Gestell einer Schleifmaschine	3,9	9,2	13	
Haushaltwäschezentrifuge	4 ... 4,5	9 ... 9,5		
Textilspindeln	6 ... 12	30 ... 90	100 ... 200	160 ... 300
Schwingförderer	9,2	15	54	50
Druckmaschinenantrieb (Torsionsschw.)	10			
Kurbelwelle eines Schiffsdieselmotors (Torsionsschw.)	60	140	160	
Welle eines 200-MW-Turbogenerators (Biegeschwingungen)	19	23	27	50
Wälzfräsmaschinenantrieb	40	70	> 160	
Kreiselverdichter 4 VRZ	60 ... 70	150 ... 180		
Gasturbinenschaufel	160	350	590	
Kurbelwelle eines Motorrades	360	850		
Verwundene Blehschaufel eines Axiallüfters	375	760	1300	

Die Bilder 6.6 und 6.7 vermitteln einen Eindruck davon, wie die Ergebnisse einer Modalanalyse dargestellt werden. Die Software erlaubt üblicherweise, auf dem Bildschirm die bewegten Schwingformen wie in einem Film anzusehen. Die gezeigte Eigenform des Motorgehäuses stellt im Grunde genommen eine Torsion des ganzen Hohlkörpers dar. Bei dem Gestell der Textilmaschine war die Biegung der Gestellsei-

tenwand bemerkenswert, denn nachdem man diese Schwachstelle erkannte, konnte durch deren gezielte Versteifung eine höhere Grundfrequenz erreicht werden.

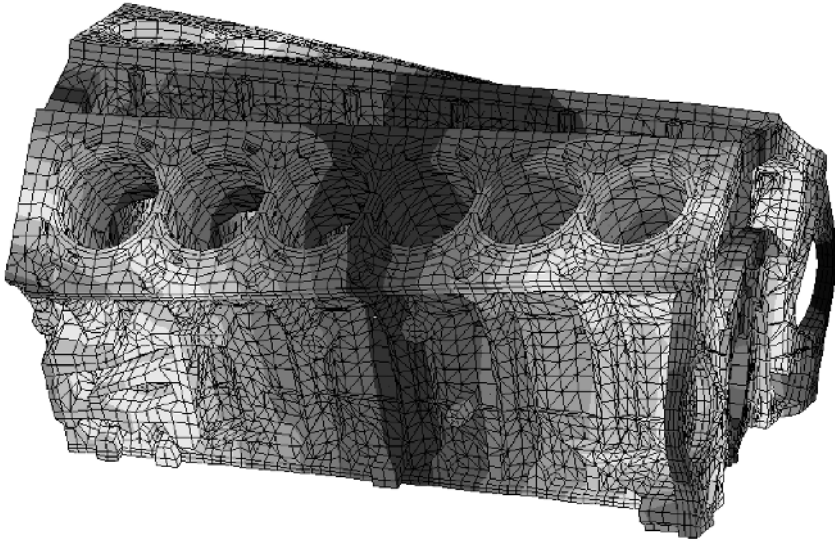


Bild 6.6 Eigenschwingform eines 6-Zylinder-Motorgehäuses

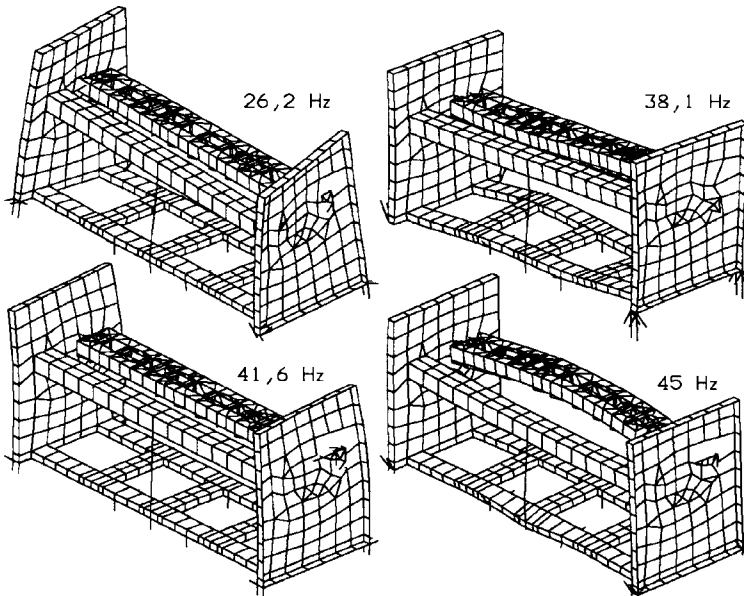


Bild 6.7 Eigenschwingformen des Gestells einer Textilmaschine (FEM-Modell)

6.3.4.2

Stoß auf ein Gestell

Als Repräsentant eines Maschinengestells wird das Berechnungsmodell von Tabelle 6.3, Fall 2 betrachtet. Die Aufteilung der Massen erfolgte nach der Zerlegung des Kontinuums in 4 Abschnitte. Welche freien Schwingungen entstehen, nachdem der Endpunkt des ruhenden Systems nach einem Stoß plötzlich die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{q}_1(0) = u_{10}$ erhält?

Gegeben sind der Koordinatenvektor $\mathbf{q}$ und die Elemente der Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{D}$ des Berechnungsmodells, vgl. Tabelle 6.3, Fall 2:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \frac{l^3}{48EI} \begin{bmatrix} 64 & 29 & 24 & 6 \\ 29 & 14 & 12 & 3 \\ 24 & 12 & 16 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}. \quad (6.131)$$

Mit oben genannter Anfangsbedingung lauten die Anfangsvektoren für $t = 0$:

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ q_3(0) \\ q_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{q}_0; \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \\ \dot{q}_3(0) \\ \dot{q}_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_0. \quad (6.132)$$

Die Matrix $\mathbf{A} = \omega^{*2} \mathbf{D} \mathbf{M}$ gemäß (6.83) ergibt sich durch eine Matrizenmultiplikation

$$\mathbf{D} \mathbf{M} = \frac{l^3}{48EI} \begin{bmatrix} 64 & 29 & 24 & 6 \\ 29 & 14 & 12 & 3 \\ 24 & 12 & 16 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{ml^3}{48EI} \begin{bmatrix} 64 & 58 & 120 & 12 \\ 29 & 28 & 60 & 6 \\ 24 & 24 & 80 & 10 \\ 6 & 6 & 25 & 4 \end{bmatrix}. \quad (6.133)$$

Folglich werden die Bezugskreisfrequenz und der dimensionslose Eigenwert mit

$$\omega^{*2} = \frac{48EI}{ml^3}, \quad \lambda = \frac{\omega^{*2}}{\omega^2} = \frac{48EI}{\omega^2 ml^3} \quad (6.134)$$

eingeführt. Damit folgt aus (6.84) hier speziell

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^4 - 176\lambda^3 + 3480\lambda^2 - 5456\lambda + 1940 = 0.$$

Die Ausrechnung der Determinante liefert diese charakteristische Gleichung 4. Grades zur Berechnung der Eigenwerte. Die Wurzeln dieser Gleichung sind (abgerundet auf 5 gültige Ziffern):

$$\lambda_1 = 153,57; \quad \lambda_2 = 20,751; \quad \lambda_3 = 1,1489; \quad \lambda_4 = 0,529\,90. \quad (6.135)$$

Daraus folgen die gesuchten Quadrate der Eigenkreisfrequenzen aus (6.83) zu:

$$\begin{aligned}
 \omega_1^2 &= 0,312\,56 \frac{EI}{ml^3} = 6,5117 \cdot 10^{-3} \omega^{*2} \\
 \omega_2^2 &= 2,3132 \frac{EI}{ml^3} = 0,04819 \omega^{*2} \\
 \omega_3^2 &= 41,779 \frac{EI}{ml^3} = 0,870\,40 \omega^{*2} \\
 \omega_4^2 &= 90,5831 \frac{EI}{ml^3} = 1,8871 \omega^{*2}.
 \end{aligned} \tag{6.136}$$

Bei den folgenden numerischen Rechnungen können wegen der unvermeidlichen Abrundungsfehler höchstens 4 gültige Ziffern angegeben werden.

Der zum Eigenwert λ_1 gehörende Eigenvektor v_1 ergibt sich aus dem Gleichungssystem (6.85),

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = 0, \tag{6.137}$$

das ausführlich lautet:

$$\begin{aligned}
 (64 - 153,57)v_{11} + & 58v_{21} + & 120v_{31} + & 12v_{41} = 0 \\
 29v_{11} + (28 - 153,57)v_{21} + & 60v_{31} + & 6v_{41} = 0 \\
 24v_{11} + & 24v_{21} + (80 - 153,57)v_{31} + & 10v_{41} = 0 \\
 6v_{11} + & 6v_{21} + & 25v_{31} + (4 - 153,57)v_{41} = 0.
 \end{aligned} \tag{6.138}$$

Da es sich um Eigenschwingungen handelt, können keine absoluten Größen der Amplituden v_{k1} errechnet werden. Mit der Normierung $v_{11} = 1$ gemäß (6.86) entstehen daraus 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten v_{21} , v_{31} und v_{41} , weil eine dieser 4 Gleichungen nicht berücksichtigt zu werden braucht. Werden z. B. die ersten 3 Gleichungen verwendet, so gilt:

$$\begin{aligned}
 58v_{21} + 120v_{31} + 12v_{41} &= 89,57 \\
 -125,57v_{21} + 60v_{31} + 6v_{41} &= -29 \\
 24v_{21} - 73,57v_{31} + 10v_{41} &= -24
 \end{aligned} \tag{6.139}$$

Daraus erhält man die Lösung

$$v_{21} = 0,4774; \quad v_{31} = 0,5014; \quad v_{41} = 0,1431. \tag{6.140}$$

Sinngemäß erhält man auf diesem Wege durch Lösung von jeweils einem linearen Gleichungssystem mit 3 Unbekannten die Vektoren v_2 , v_3 und v_4 der anderen Eigenschwingformen, vgl. Bild 6.8.

Den Eigenschwingformen entsprechen nach (6.92) Eigenkraftformen. Für die erste Eigenschwingform ergibt sich die erste Eigenkraftform $w_1 = \omega_1^2 M v_1$:

$$w_1 = \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ w_{31} \\ w_{41} \end{bmatrix} = m\omega_1^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,4774 \\ 0,5014 \\ 0,1431 \end{bmatrix} = m\omega_1^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9548 \\ 2,5070 \\ 0,2862 \end{bmatrix}. \tag{6.141}$$

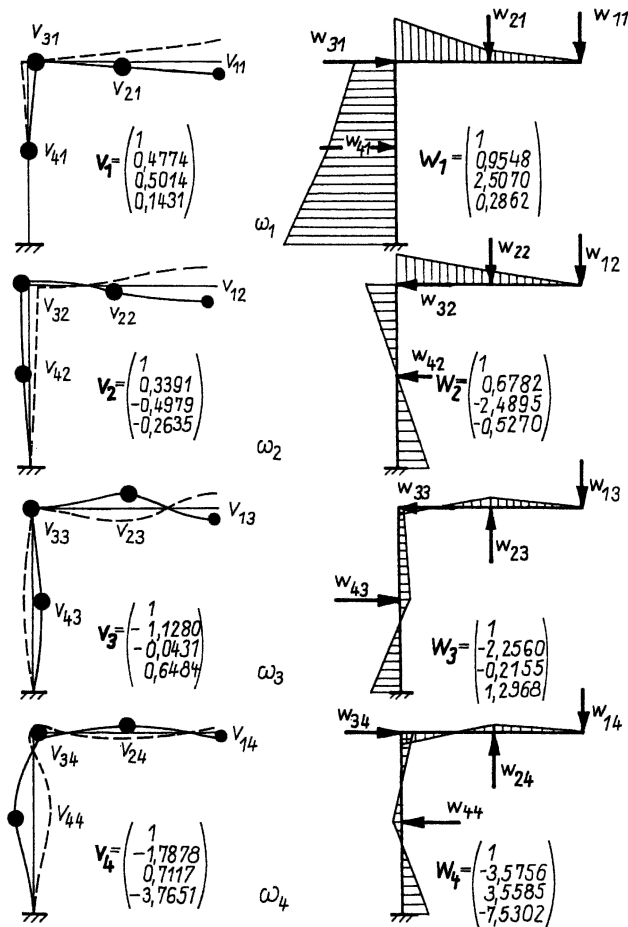


Bild 6.8 Eigenschwingformen v_i , Eigenkraftvektoren w_i und dadurch entstehende Deformations- und Momentenverläufe

Die bei den 4 Eigenfrequenzen durch die Eigenkräfte hervorgerufenen „Eigenbiegemomente“ zeigt die rechte Seite von Bild 6.8. Die Modalmatrix lautet vollständig

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,4774 & 0,3391 & -1,1280 & -1,7878 \\ 0,5014 & -0,4979 & -0,0431 & 0,7117 \\ 0,1431 & -0,2635 & 0,6484 & -3,7651 \end{bmatrix}. \quad (6.142)$$

Daraus ergeben sich gemäß (6.112) die modalen Federkonstanten γ_i und modalen Massen μ_i ($c^* = 48EI/l^3$):

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0,01793c^*, & \gamma_2 &= 0,1257c^*, & \gamma_3 &= 3,825c^*, & \gamma_4 &= 72,31c^* \\ \mu_1 &= 2,754m, & \mu_2 &= 2,609m, & \mu_3 &= 4,398m, & \mu_4 &= 38,18m. \end{aligned}$$

Gemäß (6.117) und in hinreichender Übereinstimmung mit den Zahlenwerten von (6.136) folgt, vgl. (6.134):

$$\omega_1 = 0,080\,69\omega^*, \quad \omega_2 = 0,2195\omega^*, \quad \omega_3 = 0,9326\omega^*, \quad \omega_4 = 1,374\omega^*. \quad (6.143)$$

Die Anfangsbedingungen in den Hauptkoordinaten ergeben sich aus (6.122), (6.123) und (6.132):

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{p}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{p}_{10} \\ \dot{p}_{20} \\ \dot{p}_{30} \\ \dot{p}_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3631 \\ 0,3834 \\ 0,2274 \\ 0,0261 \end{bmatrix} u_{10}. \quad (6.144)$$

Wie sich die Anfangsenergie auf die vier Eigenformen verteilt, kann man mit den Zahlenwerten aus (6.143), (6.144) und folgender Beziehung feststellen, vgl. (6.124):

$$\begin{aligned} W_0 = W_{\text{kin}0} &= \frac{1}{2} m u_{10}^2 = \frac{1}{2} (\mu_1 \dot{p}_{10}^2 + \mu_2 \dot{p}_{20}^2 + \mu_3 \dot{p}_{30}^2 + \mu_4 \dot{p}_{40}^2) \\ &= \frac{m}{2} u_{10}^2 (0,3631 + 0,3834 + 0,2274 + 0,0261) \end{aligned} \quad (6.145)$$

Die Energie wird demnach vorwiegend in die ersten drei Eigenformen übertragen.

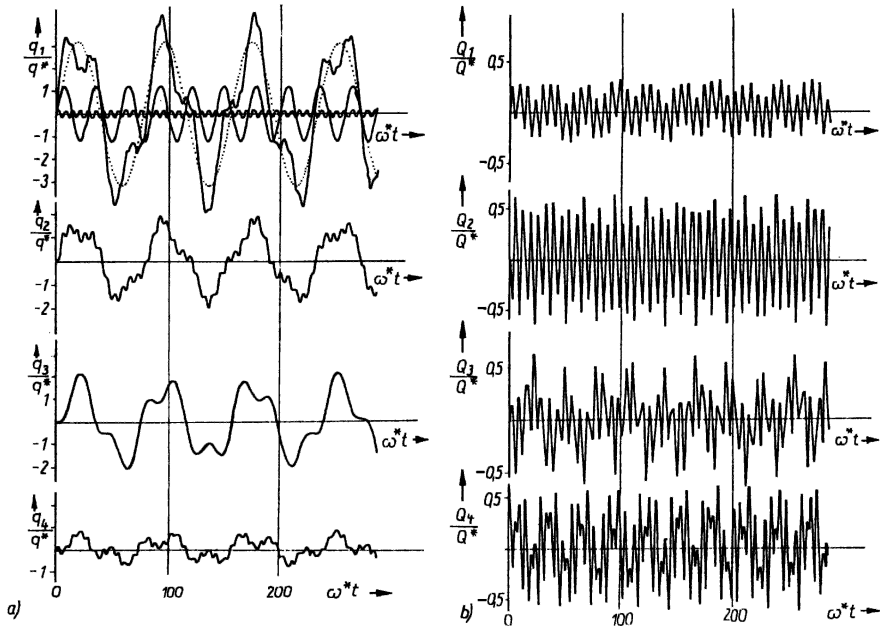


Bild 6.9 Freie Schwingungen nach dem Stoß auf das Gestell

- a) Zeitliche Verläufe der Koordinaten $q_k(\omega^* t)$ mit $q^* = u_{10}/\omega^*$
 b) Zeitliche Verläufe der Kräfte $Q_k(\omega^* t)$ mit $Q^* = m u_{10} \omega^*$

Mit den Anfangswerten gemäß (6.144) lassen sich die Hauptkoordinaten p_i gemäß (6.126), die Koordinaten q_k gemäß (6.129) und die Massenkkräfte aus (6.13) berechnen. Es gilt z. B. mit $q^* = u_{10}/\omega^*$:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 4,500q^* \sin \omega_1 t, & p_2(t) &= 1,747q^* \sin \omega_2 t, \\ p_3(t) &= 0,244q^* \sin \omega_3 t, & p_4(t) &= 0,019q^* \sin \omega_4 t. \end{aligned} \quad (6.146)$$

Die Ergebnisse für die Lagekoordinaten und die Massenkkräfte, die sich daraus ergeben, sind in Bild 6.9 dargestellt.

Im oberen Teil des Bildes 6.9a sind die einzelnen Komponenten der Bewegung $q_1(t)/q^*$ sowie die daraus resultierende tatsächliche Bewegung dargestellt. Die punktierte Sinuslinie entspricht der Komponente $\hat{p}_1 v_{11} \sin \omega_1 t$. Weiterhin sind im oberen Teil des Bildes die Komponenten der Eigenschwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_2 und ω_3 als voll ausgezogene Kurven erkennbar. Die Amplitude $0,019q^* \hat{p}_4 v_{14}$ der höchsten Eigenschwingung ist so klein, dass sie in diesem Bild nicht mehr sichtbar ist. Die resultierende Bewegung ist nicht periodisch, da die Eigenfrequenzen in keinem rationalen Verhältnis zueinander stehen.

Analog kann man den Verlauf von $q_2(t)$, $q_3(t)$ und $q_4(t)$ interpretieren. Bei diesen Kurven wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit auf die Aufzeichnung der einzelnen Komponenten verzichtet. Bei $q_3(t)$ zeigt sich z. B. im Gegensatz zu q_1 , q_2 und q_4 kein Anteil der dritten und vierten Eigenschwingung. Dies liegt daran, dass die Amplituden $\hat{p}_3 v_{3i}$ und $\hat{p}_4 v_{3i}$ wesentlich kleiner als die anderen Anteile sind.

Das Gegenstück zu Bild 6.9a ist Bild 6.9b mit dem Verlauf der im Vektor $\mathbf{g}(t)$ zusammengestellten Kräfte, die sich aus (6.13) ergeben. Die Komponenten Q_1 , Q_2 , Q_3 und Q_4 stellen die Massenkkräfte an den 4 betrachteten Punkten dar. Wie die Verschiebungen $\mathbf{q}(t)$ ergeben sich die Kräfte auch aus einer Überlagerung der 4 Eigenschwingungen. Dabei kommen die höheren Eigenschwingungen stärker zur Wirkung, denn die Kräfte sind proportional den Beschleunigungen, in welche die Kreisfrequenzen ω_i quadratisch eingehen, und es gilt $\omega_4^2 > \omega_3^2 > \omega_2^2 > \omega_1^2$.

Zur Zeit $t = 0$ sind alle Kräfte Null, da auch die Koordinaten Null sind, vgl. die Anfangsbedingungen (6.144). Der Anstieg der Kräfte hat einen endlichen Wert, der sich anhand der differenzierten Gl. (6.11) kontrollieren lässt. Es ist $\dot{\mathbf{g}}(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t)$ und demzufolge $\dot{\mathbf{g}}(0) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(0)$. Man kann mit den bekannten Kräften den zeitlichen Momentenverlauf an irgendeiner Stelle berechnen. Aus dem an dieser Stelle wirkenden Biegemoment ließe sich bei bekannten Querschnittswerten dann weiterhin die dort herrschende Biegespannung berechnen und damit ein Festigkeitsnachweis führen. Das Einspannmoment ist z. B. die Summe der Produkte aller Massenkkräfte mit ihren Hebelarmen, d. h. gemäß Tabelle 6.3, Fall 2:

$$\begin{aligned} M_B &= Q_1 l + Q_2 \frac{l}{2} + Q_3 l + Q_4 \frac{l}{2} = -m\ddot{q}_1 l - 2m\ddot{q}_2 \frac{l}{2} - 5m\ddot{q}_3 l - 2m\ddot{q}_4 \frac{l}{2} \\ M_B(t) &= -ml(1, 1, 5, 1)\ddot{\mathbf{q}}(t) = -ml(1, 1, 5, 1)\mathbf{V}\ddot{\mathbf{p}}(t) \end{aligned} \quad (6.147)$$

Im Allgemeinen ist es nicht möglich, einfache Beziehungen zwischen den maximalen dynamischen Beanspruchungen (z. B. infolge eines Stoßes) und den statischen Beanspruchungen anzugeben.

6.3.4.3

Eigenschwingungen eines Tragwerkes

Als Beispiel wird das in Bild 6.4 dargestellte Tragwerk betrachtet. Dafür sind die Systemmatrizen aus (6.62) und (6.63) bekannt. Speziell gelten folgende Zahlenwerte:

$$c^* = 6,228 \cdot 10^8 \text{ N/m}, \quad \bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 1, \quad \bar{c}_3 = \bar{c}_4 = 2, \quad s_1 = s_2 = 0,5, \quad l = 4 \text{ m}$$

$$m = 2000 \text{ kg}, \quad m_1 = m_2 = 50 \text{ kg}, \quad m_3 = 500 \text{ kg}, \quad J_S/l^2 = 20 \text{ kg}$$

Es handelt sich um ein fiktives Rahmentragwerk mit einem relativ kleinen elastisch gestützten starren Körper. Man möge die Matrizenelemente und mit einem Eigenwertprogramm die Modalmatrix und die Eigenfrequenzen zum Vergleich nachrechnen.

Es ergibt sich folgende Modalmatrix, die zur Verdeutlichung numerischer Effekte mit einer Genauigkeit von 10^{-3} angegeben wird (bei den üblichen Rechenprogrammen ist die numerische Genauigkeit meist besser als 10^{-7}):

$$V = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & v_3, & v_4, & v_5, & v_6, & v_7, & v_8, & v_9, & v_{10} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -0,059 & 0,399 & -0,004 & 0,001 & -0,318 & -0,610 & -0,009 & -0,996 & 1 & -0,003 \\ 0,0 & 1 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & -0,186 & 0,0 \\ 0,410 & 0,163 & 0,034 & -0,004 & 0,766 & 1 & 0,005 & -0,488 & 0,414 & 0,0 \\ 1 & 0,0 & 0,092 & 0,0 & 0,0 & -0,886 & -0,002 & 0,281 & 0,0 & 0,0 \\ 0,410 & -0,163 & 0,034 & 0,004 & -0,766 & 1 & 0,005 & -0,490 & -0,412 & 0,0 \\ 0,059 & 0,399 & 0,004 & 0,001 & -0,318 & 0,610 & 0,009 & 1 & 1 & -0,003 \\ -0,727 & -0,185 & 0,684 & 0,401 & 0,172 & -0,734 & 1,000 & -0,456 & -0,393 & -0,501 \\ -0,727 & 0,185 & 0,684 & 0,401 & -0,172 & -0,734 & 1 & -0,452 & 0,395 & 0,501 \\ -0,862 & 0,0 & 1 & 0,0 & 0,0 & 0,172 & -0,139 & 0,047 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & -0,380 & 0,0 & 1 & 1 & 0,0 & 0,0 & 0,004 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(6.148)

Die ersten acht Eigenformen und die zugehörigen Eigenfrequenzen sind in Bild 6.10 dargestellt.

Die beiden höchsten Eigenfrequenzen betragen $f_9 = 118,5 \text{ Hz}$ und $f_{10} = 125,2 \text{ Hz}$. Man kann sie mit (6.117) kontrollieren. Die Interpretation und physikalische Deutung der Rechenergebnisse wird jedem Benutzer von Programmen dringend empfohlen, um der Gefahr der „Computergläubigkeit“ zu entgehen, die dazu führen kann, auch unsinnige Ergebnisse zu akzeptieren.

In der Modalmatrix in (6.148) taucht an mehreren Stellen die Angabe 0,0 auf. Diese Zahlen wurden überall dort geschrieben, wo die Ergebnisse kleiner als 10^{-4} waren. Darunter sind die meisten aus physikalischen Gründen exakte Nullen, weil bei symmetrischen Eigenformen $v_{2i} = v_{10i} \equiv 0$ und bei antisymmetrischen Eigenformen $v_{4i} = v_{9i} \equiv 0$ sein muss. Wie man aus der Modalmatrix und aus Bild 6.10 erkennt, sind die Eigenformen mit den Ordnungen $i = 1, 3, 6, 7$ und 8 symmetrisch und die der Ordnungen $i = 2, 4, 5, 9$ und 10 antisymmetrisch. Aus diesem Grund müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$v_{1i} = -v_{6i}, \quad v_{3i} = +v_{5i}, \quad v_{7i} = +v_{8i} \quad \text{für } i = 1, 3, 6, 7, 8 \quad (6.149)$$

$$v_{1i} = +v_{6i}, \quad v_{3i} = -v_{5i}, \quad v_{7i} = -v_{8i} \quad \text{für } i = 2, 4, 5, 9, 10. \quad (6.150)$$

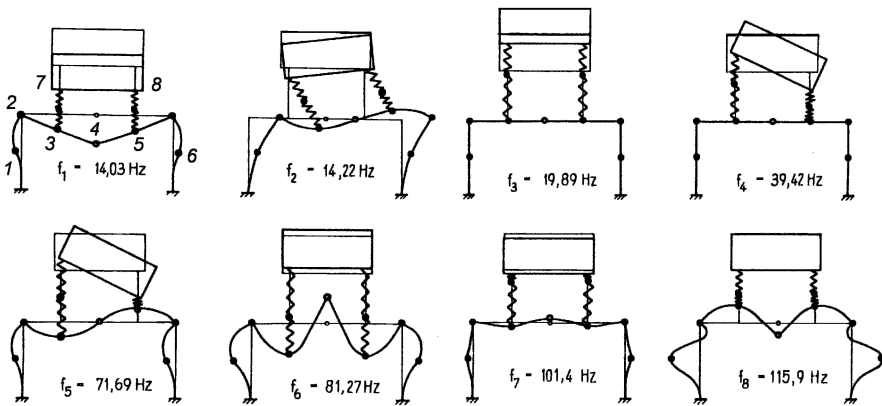


Bild 6.10 Die ersten acht Eigenfrequenzen und Eigenschwingformen des Tragwerks von Bild 6.4 (mit 10 Freiheitsgraden)

Man kann sehen, dass diese Bedingungen bei den Eigenformen v_1 bis v_7 bis auf drei Stellen nach dem Komma genau erfüllt sind, aber in den Vektoren v_8 und v_9 gibt es offensichtlich schon in der dritten Stelle nach dem Komma Abweichungen. Dies hat numerische Gründe, und es ist oft so, dass die berechneten höchsten Eigenformen am ungenauesten sind. In diesem Falle zeigte sich also, dass sich die Abrundungsfehler schon bis in die Größenordnung von 10^{-3} eingeschlichen haben, sodass schwierig zu entscheiden ist, ob bei v_{10} die mit 0,501 angegebenen Werte genau $1/2$ betragen und ob 0,003 eine exakte Null ist.

Als nächstes sollen nun noch einige Abschätzungen für die Eigenfrequenzen vorgenommen werden. Als Teilsysteme kann man hierbei einerseits den Rahmen und andererseits das darauf stehende Feder-Masse-System ansehen. Letzteres bildet ein System mit 4 Freiheitsgraden, wenn man den relativ schweren Rahmen als unbeweglich ansieht. Dies lässt sich in Anbetracht der relativ kleinen Massen m_1 und m_2 als Schwinger mit zwei Freiheitsgraden auffassen, welcher wiederum, weil er symmetrisch ist, nur eine reine Hubschwingung und eine reine Nickschwingung ausführen kann. Die Eigenfrequenzen für diese Teilsysteme sind

$$f_H = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2c}{m_3}} \quad \text{und} \quad f_N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{cl^2}{4J_S}} \quad (6.151)$$

mit der reduzierten Federkonstante der hintereinander geschalteten Federn von $c = c_1 c_3 / (c_1 + c_3)$ und $2/3c^* = 4,152 \cdot 10^6 \text{ N/m}$. Mit den eingangs gegebenen Zahlenwerten erhält man mit (6.149) die Frequenzen $f_H = 20,51 \text{ Hz}$ und $f_N = 36,26 \text{ Hz}$, eine gute Näherung von f_3 und f_4 . Die ersten beiden Eigenformen sind sehr stark durch die Rahmenverformungen bestimmt. Die Hubschwingung entspricht etwa der 3. Eigenform. Da durch die Vereinfachung das Tragwerk versteift und masseärmer wurde, ist die abgeschätzte Frequenz $f_H > f_3$.

6.3.5

Aufgaben A6.4 bis A6.6

A6.4 Instationäre Belastungen eines Brückenkrans

Man gebe die Bewegungsgleichungen und Anfangsbedingungen für folgende Lastfälle des in Bild 6.5 dargestellten Brückenkrans an:

- Last m_2 fällt mit der Anfangsgeschwindigkeit u in das Seil des ruhenden Krans (Greifer fällt in die Halteseile)
- Last fällt plötzlich ab (Bruch des Lastaufnahmemittels)
- Plötzliches Stillsetzen des Motors beim Heben ($u_h = \text{konst.}$, Kran ruht)
- Last m_2 bleibt beim Heben plötzlich an einem starren Hindernis hängen.

Wie lauten die Formeln zur Berechnung der Seilkraft und des Biegemomentes in der Mitte des Kranträgers?

Hinweis: Der Koordinatenursprung von x_1 ist die statische Ruhelage des unbelasteten Krans, von x_2 das Ende des unbelasteten Seils.

A6.5 Eigenfrequenzen und Eigenformen eines Gestells

Man berechne für das in Bild 6.2 dargestellte Modell die Eigenkreisfrequenzen und Eigenschwingformen und prüfe die Erfüllung der Orthogonalitätsrelationen. Die Systemmatrizen ermittle man als Sonderfall aus dem Beispiel in Abschnitt 6.3.4.2.

A6.6 Einfluss eines elastischen Lagers auf Eigenfrequenzen eines Torsionsschwingers

Die gemessene Grundfrequenz eines Antriebs wich deutlich von derjenigen ab, die mit dem Berechnungsmodell entsprechend Bild 4.3a (torsionselastische Welle und zwei Drehmassen) berechnet wurde. Die beobachtete Differenz war nicht allein aus Parameterunsicherheiten erklärbar. Als Ursache der Abweichungen wurde die Kopplung von Torsions- und Querschwingungen infolge einer Lagerelastizität vermutet.

Für das in Bild 6.11 dargestellte Berechnungsmodell eines torsionselastischen Antriebs mit Übersetzungsstufe und horizontaler Lagerelastizität c des Rades 2 sind die Eigenfrequenzen zu ermitteln und mit denen zu vergleichen, die sich für $c \rightarrow \infty$ (starres Lager) ergeben.

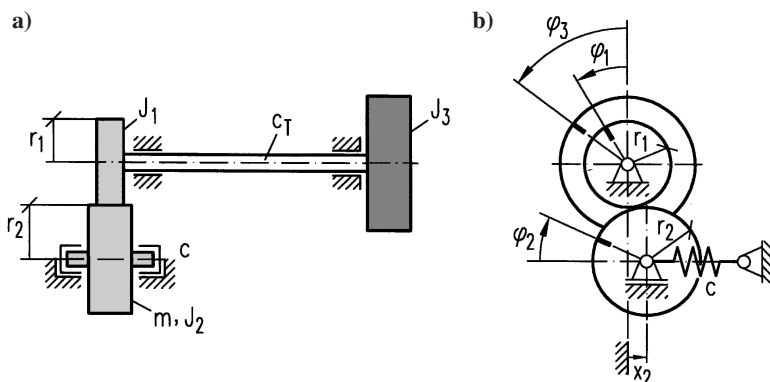


Bild 6.11 Berechnungsmodell eines Torsionsschwingers mit elastischem Lager

Gegeben:

Teilkreisradien der Zahnräder	$r_1 = 0,175 \text{ m}; r_2 = 0,25 \text{ m}$
Trägheitsmomente der Zahnräder	$J_1 = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; J_2 = 1,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$ $J_3 = 0,75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Masse von Rad 2	$m = 52 \text{ kg}$
Torsionssteifigkeit des Antriebs	$c_T = 5,6 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}$
Lagersteifigkeit	$c = 4,48 \cdot 10^6 \text{ N/m}$
(4.27) als bekannte Formel für die Grundfrequenz des Torsionsschwingers	

Gesucht:

1. Zwangsbedingung zwischen den Drehwinkeln φ_k und der Lagerverschiebung x_2
2. Massen- und Steifigkeitsmatrix für den Koordinatenvektor $\mathbf{q}^T = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$
3. Eigenfrequenzen für den Torsionsschwinger mit elastischem Lager

6.3.6

Lösung L6.4 bis L6.6

L6.4 Die Bewegungsgleichungen lauten unter Beachtung des Eigengewichts der Last, des Motormomentes M_M und der Matrizen aus Lösung L6.3:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 + c_2 \left(x_1 - x_2 - \frac{r}{i} \varphi_M \right) &= 0 \\
 m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \left(x_1 - x_2 - \frac{r}{i} \varphi_M \right) &= m_2 g \\
 \frac{i}{r} J_M \ddot{\varphi}_M - c_2 \left(x_1 - x_2 - \frac{r}{i} \varphi_M \right) &= i M_M / r
 \end{aligned} \tag{6.152}$$

Die Anfangsbedingungen lauten unter der Bedingung, dass zu Beginn des interessierenden Vorgangs die Zeitmessung beginnt:

$t = 0$:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } x_1 &= 0; & \dot{x}_1 &= 0; & x_2 &= 0; & \dot{x}_2 &= u; \\
 & \varphi_M &= 0; & \dot{\varphi}_M &= 0 \\
 \text{b) } x_1 &= m_2 g / c_1; & \dot{x}_1 &= 0; & x_2 &= m_2 g \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right); & \dot{x}_2 &= 0; \\
 & \varphi_M &= 0; & \dot{\varphi}_M &= 0 \\
 \text{c) } x_1 &= m_2 g / c_1; & \dot{x}_1 &= 0; & x_2 &= m_2 g \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right); & \dot{x}_2 &= -u_h; \\
 & \varphi_M &= 0; & \dot{\varphi}_M &= 0 \\
 \text{d) } x_1 &= m_2 g / c_1; & \dot{x}_1 &= 0; & x_2 &= m_2 g \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right); & \dot{x}_2 &= 0; \\
 & \varphi_M &= 0; & \dot{\varphi}_M &= u_h i / r
 \end{aligned} \tag{6.153}$$

Im Falle b) ist $c_2 = 0$ zu setzen, und es verbleiben 3 Systeme mit je einem Freiheitsgrad. Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgen für alle Fälle die Seilkraft

$$\underline{\underline{F_s = -c_2 \left(x_1 - x_2 - \frac{r}{i} \varphi_M \right) = m_2 (g - \ddot{x}_2)}} \tag{6.154}$$

und das Biegemoment

$$\underline{\underline{M_b = (m_1 g + c_1 x_1) \frac{l}{2} = (F_s + m_1 g - m_1 \ddot{x}_1) \frac{l}{2}}} \tag{6.155}$$

L6.5 Durch Streichung der zweiten und vierten Zeile und Spalte entsteht aus der Nachgiebigkeitsmatrix von (6.131) die hier geltende, weil die Koordinaten q_2 und q_4 entfallen, vgl. (6.32):

$$\begin{aligned} D &= \frac{l^3}{48EI} \begin{bmatrix} 64 & 24 \\ 24 & 16 \end{bmatrix} = \frac{l^3}{6EI} \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \\ C = D^{-1} &= \frac{6EI}{7l^3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.156)$$

Aus der kinetischen Energie $W_{\text{kin}} = 1/2 [2mq_1^2 + (4m + 2m)q_2^2]$ ergibt sich gemäß (6.15) die Massenmatrix, vgl. auch (6.34):

$$M = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 6m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}. \quad (6.157)$$

Damit findet man mit der Bezugskreisfrequenz von (6.134):

$$DM = \frac{ml^3}{48EI} \begin{bmatrix} 64 & 24 \\ 24 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega^{*2}} \begin{bmatrix} 128 & 144 \\ 48 & 96 \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega^{*2}} \cdot A \quad (6.158)$$

Die Eigenwerte $\lambda = \omega^{*2}/\omega^2$ folgen gemäß (6.84) aus

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 128 - \lambda & 144 \\ 48 & 96 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 224\lambda + 5376 = 0. \quad (6.159)$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\lambda_1 = 196,664}}, \quad \underline{\underline{\omega_1^2 = 0,244\,07 \frac{EI}{ml^3}}}, \\ \underline{\underline{\lambda_2 = 27,336}}, \quad \underline{\underline{\omega_2^2 = 1,755\,93 \frac{EI}{ml^3}}}. \end{aligned} \quad (6.160)$$

Man vergleiche diese Werte mit denen des Modells mit vier Freiheitsgraden in (6.136). Die größere Masseaufteilung bewirkte eine Frequenz-Senkung! Die beiden Eigenvektoren ergeben sich je aus einem linearen Gleichungssystem gemäß (6.85):

$$(128 - \lambda_i)v_{1i} + 144v_{2i} = 0, \quad 48v_{1i} + (96 - \lambda_i)v_{2i} = 0 \quad i = 1, 2. \quad (6.161)$$

Mit der Normierung $v_{1i} = 1$ ergibt sich mit den bekannten Werten von λ_1 und λ_2 : $\underline{\underline{v_{21} = 0,476\,83}}$, $\underline{\underline{v_{22} = -0,699\,06}}$. Damit sind die Elemente der Modalmatrix V alle bekannt. Man erhält für die Orthogonalitätsrelationen der Gln. (6.102) bis (6.105):

$$V^T C V = \text{diag}(\gamma_i) = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,821\,10 & 0,0 \\ 0,0 & 8,660\,4 \end{bmatrix} \frac{EI}{l^3}, \quad (6.162)$$

$$V^T M V = \text{diag}(\mu_i) = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,3642 & 0,0 \\ 0,0 & 4,9321 \end{bmatrix} m. \quad (6.163)$$

Sie sind im Rahmen der begrenzten Rechengenauigkeit erfüllt.

- L6.6** Zur Beschreibung der Bewegung der einzelnen Körper des Berechnungsmodells werden die Drehwinkel φ_1 , φ_2 und φ_3 der drei Zahnräder sowie die Horizontalverschiebung x_2 des Zahnrades 2 eingeführt, vgl. Bild 6.11b. Legt man für die Ursprünge der Lagekoordinaten fest, dass $\varphi_2(\varphi_1 = 0, x_2 = 0) = 0$ gilt, so lässt sich unter der Voraussetzung $|x_2| \ll r_2$ die Zwangsbedingung

$$\underline{r_1 \varphi_1 \approx x_2 + r_2 \varphi_2} \quad (6.164)$$

angeben. Sie ist aus Bild 6.11b „ablesbar“, wenn man sich zwischen Zahnrad 1 und Zahnrad 2 eine unendlich dünne starre Zahnstange angeordnet denkt.

Wird der Vektor der verallgemeinerten Koordinaten gemäß

$$\mathbf{q} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T = (q_1, q_2, q_3)^T \quad (6.165)$$

definiert, so lassen sich die kinetische und potenzielle Energie wie folgt angeben:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} [J_1 \dot{\varphi}_1^2 + m \dot{x}_2^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + J_3 \dot{\varphi}_3^2] \quad (6.166)$$

$$= \frac{1}{2} [J_1 \dot{q}_1^2 + m (r_1 \dot{q}_1 - r_2 \dot{q}_2)^2 + J_2 \dot{q}_2^2 + J_3 \dot{q}_3^2] \quad (6.167)$$

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} [c_T (\varphi_3 - \varphi_1)^2 + c x_2^2] = \frac{1}{2} [c_T (q_3 - q_1)^2 + c (r_1 q_1 - r_2 q_2)^2]. \quad (6.168)$$

Gemäß den Beziehungen (6.15) und (6.9) folgen hieraus Massen- und Steifigkeitsmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} J_1 + mr_1^2 & -mr_1 r_2 & 0 \\ -mr_1 r_2 & J_2 + mr_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} = J_3 \cdot \begin{bmatrix} (J_1 + mr_1^2)/J_3 & -mr_1 r_2/J_3 & 0 \\ -mr_1 r_2/J_3 & (J_2 + mr_2^2)/J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= J_3 \cdot \bar{\mathbf{M}} \end{aligned} \quad (6.169)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_T + cr_1^2 & -cr_1 r_2 & -c_T \\ -cr_1 r_2 & cr_2^2 & 0 \\ -c_T & 0 & c_T \end{bmatrix} = c_T \cdot \begin{bmatrix} (c_T + cr_1^2)/c_T & -cr_1 r_2/c_T & -1 \\ -cr_1 r_2/c_T & cr_2^2/c_T & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= c_T \cdot \bar{\mathbf{C}}. \end{aligned} \quad (6.170)$$

Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{C}$ ist singulär, d. h., es gilt $\det \mathbf{C} = 0$, weil das hier betrachtete System hinsichtlich der Rotation ungefesselt ist. Zur Ermittlung der Eigenfrequenzen muss entsprechend (6.84) die Determinante der Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{v} = (c_T \bar{\mathbf{C}} - \omega^2 J_3 \bar{\mathbf{M}})\mathbf{v} = c_T (\bar{\mathbf{C}} - \lambda \bar{\mathbf{M}})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (6.171)$$

verschwinden. Das liefert nach vorheriger Division durch c_T und mit der Abkürzung

$$\lambda = \frac{J_3 \omega^2}{c_T}; \quad \left(\omega^2 = \frac{c_T}{J_3} \right) \quad (6.172)$$

sowie mit den gegebenen Parameterwerten die zu (6.84) analoge Bedingung

$$\begin{aligned} \det(\bar{\mathbf{C}} - \lambda \bar{\mathbf{M}}) &= \begin{vmatrix} 3,45 - 2,79 \cdot \lambda & -3,5 + 3,033 \cdot \lambda & -1 \\ -3,5 + 3,033 \cdot \lambda & 5 - 6,467 \cdot \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \cdot (13,56 - 23,86756 \cdot \lambda + 8,840889 \cdot \lambda^2) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (6.173)$$

Hieraus folgt sofort für die Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 0,812\,919; \quad \lambda_3 = 1,886\,7. \quad (6.174)$$

Also ergeben sich wegen (6.172) und mit $\omega = 2\pi f$ die Eigenfrequenzen zu:

$$f_1 = 0 \text{ Hz}; \quad f_2 = \frac{\omega^*}{2\pi} \sqrt{\lambda_2} = 39,21 \text{ Hz}; \quad f_3 = \frac{\omega^*}{2\pi} \sqrt{\lambda_3} = 59,73 \text{ Hz}. \quad (6.175)$$

Werden Feder und Masse des Lagers nicht berücksichtigt, so ergibt sich ein Schwingungssystem entsprechend Bild 4.3, dessen Eigenkreisfrequenzen sich mit Berücksichtigung des reduzierten Trägheitsmoments $J_{\text{red}} = J_1 + J_2(r_1/r_2)^2$ gemäß (4.27) ergeben also

$$\omega_1^2 = 0; \quad \omega_2^2 = \frac{c_T}{J_3} + \frac{c_T}{J_1 + J_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2}. \quad (6.176)$$

Man kann dies auch zum Vergleich mit (6.172) in der Form

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 1 + \frac{J_3}{J_1 + J_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2} \quad (6.177)$$

ausdrücken, woraus sich mit den angegebenen Parameterwerten $\lambda_2 = 1,5841$ ergibt. Die Grundfrequenz, die mit f_2 in (6.175) zu vergleichen ist, beträgt bei starrer Lagerung also

$$f_{(2)} = 54,74 \text{ Hz}. \quad (6.178)$$

Sie ergibt sich für den „reinen Torsionsschwinger“ also als viel zu hoch. Die Lagerelastizität ist die Ursache dafür, dass sich die „Torsionseigenfrequenz“ um ca. 15,5 Hz erniedrigt!

Fazit: Die Schwingformen in Antriebssystemen sind nicht immer reine Torsionsschwingungen, es können auch gekoppelte Schwingungen sein! Zur Klärung bzw. Deutung der Schwingungen kann es erforderlich sein, Biege- und/oder Lagernachgiebigkeiten in die Betrachtungen einzubeziehen. Diese sollten immer dann berücksichtigt werden, wenn die Lagersteifigkeiten nicht sehr groß sind. Analoge Effekte können bei Antriebssystemen, die man zunächst als Torsionsschwinger auffasst, auch dann eintreten, wenn miteinander kämmende Stirnräder fliegend gelagert sind. Infolge der Biegenachgiebigkeit der Wellen ist dann auch eine Querbewegung der Räder in der Ebene möglich.

6.4 Struktur- und Parameteränderungen

6.4.1 Rayleigh-Quotient

Ein Verfahren zur Abschätzung der tiefsten Eigenfrequenz liefert der **Rayleigh-Quotient**. Von Lord RAYLEIGH stammt aus dem Jahr 1878 folgende Überlegung: Wenn ein System mit einer Kreisfrequenz ω und der Schwingungsform $\mathbf{v}$ harmonisch schwingt ($\mathbf{q} = \mathbf{v} \sin \omega t$), dann ändern sich die potenzielle und die kinetische Energie gemäß (6.7) und (6.16) folgendermaßen:

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v} \sin^2 \omega t, \quad W_{\text{kin}} = \frac{\omega^2}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} \cos^2 \omega t. \quad (6.179)$$

Die Steifigkeitsmatrix C darf nicht singulär sein, d. h. $\det C \neq 0$.

Die potenzielle Energie hat ihr Maximum bei $\omega t = \pi/2$. Hierfür ist $W_{\text{kin}} = 0$. Andererseits ist beim Durchlaufen der statischen Ruhelage ($\omega t = \pi$) die potenzielle Energie $W_{\text{pot}} = 0$ und die kinetische Energie hat ihren Maximalwert. In konservativen Systemen gilt

$$W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}} = W_{\text{kin max}} + 0 = \frac{\omega^2}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} = 0 + W_{\text{pot max}} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v}. \quad (6.180)$$

Man kann diese Beziehung nun zu einer Abschätzung von ω_1 verwenden, wenn man eine Näherung $\mathbf{v}$ für den Eigenvektor $\mathbf{v}_1$ kennt. Mit einer geschätzten (weil nicht genau bekannten) Amplitudenverteilung der ersten Eigenform kann man die erste Eigenkreisfrequenz annähernd berechnen. Es lässt sich zeigen, dass die damit berechnete Eigenkreisfrequenz ω_R stets höher als der exakte Wert ω_1 liegt. Die aus der Energie-Bilanz von (6.180) folgende Abschätzung bezeichnet man als Rayleigh-Quotient:

$$\omega_1^2 < \omega_R^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}} = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i p_i^2}{\sum_{i=1}^n \mu_i p_i^2}. \quad (6.181)$$

Dies ist zwar nur eine Ungleichung, aber sie erlaubt mehrere Abschätzungen. Von allen Näherungen für die Grundschwingungsform $\mathbf{v}$ ist diejenige am besten (d. h. $\mathbf{v}_1$ am nächsten), die den kleinsten Wert ω_R liefert.

Eine weitere Abschätzung für ω_1^2 liefert der nach R. GRAMMEL (1889–1964) benannte Quotient, der ähnlich wie der Rayleigh-Quotient begründbar ist, vgl. (6.117):

$$\omega_1^2 < \omega_G^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}^T (\mathbf{M} \mathbf{v})}{(\mathbf{M} \mathbf{v})^T \mathbf{D} (\mathbf{M} \mathbf{v})} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i p_i^2}{\sum_{i=1}^n \mu_i p_i^2 / \omega_i^2}. \quad (6.182)$$

Sie ist zu bevorzugen, wenn $\mathbf{D}$ anstelle von $\mathbf{C}$ vorliegt.

Der Rayleigh-Quotient und der Grammel-Quotient liefern eine **obere Schranke** für die tiefste Eigenfrequenz, d. h., die wirkliche Eigenfrequenz liegt immer darunter.

6.4.2

Sensitivität von Eigenfrequenzen und Eigenformen

In der Konstruktionspraxis tritt manchmal die Frage auf, durch welche Maßnahmen man die Eigenfrequenzen und Eigenformen einer Maschine beeinflussen kann. Es interessiert dabei, wie sich Struktur- und Parameteränderungen auswirken und welche Änderungen an welchen Feder-, Masse- oder geometrischen Parametern man vornehmen muss, um ein bestimmtes spektrales oder modales Verhalten zu erzielen.

Bei der Identifikation von Berechnungsmodellen spielt die Berechnung des Einflusses von Parameteränderungen eine große Rolle. Eng damit verbunden ist die Frage nach der Sensitivität der Resultate gegenüber möglichen Parameteränderungen.

Die variablen Parameter eines Modells, z. B. Massen m_k , Federkonstanten c_k , Längen l_k u. a. werden im folgenden einheitlich mit x_k bezeichnet. Parameteränderungen $\Delta x_k = x_k - x_{k0}$, welche die Differenz zwischen den ursprünglichen (x_{k0}) und den neuen Parameterwerten x_k darstellen, führen zu Änderungen der Systemmatrizen

$$\Delta C = C(x_k) - C(x_{k0}) = C - C_0, \quad \Delta M = M(x_k) - M(x_{k0}) = M - M_0. \quad (6.183)$$

Werden die Eigenformen des ursprünglichen Systems mit v_{i0} bezeichnet, so gilt wegen (6.117) bei veränderten Parameterwerten mit zunächst unbekannten $\Delta \omega_i$ und Δv_i

$$\omega_i^2 = \omega_{i0}^2 + \Delta \omega_i^2 = \frac{(v_{i0} + \Delta v_i)^T (C_0 + \Delta C) (v_{i0} + \Delta v_i)}{(v_{i0} + \Delta v_i)^T (M_0 + \Delta M) (v_{i0} + \Delta v_i)}. \quad (6.184)$$

Wenn man annehmen kann, dass sich die Eigenschwingform infolge der Parameteränderung nur wenig ändert, sodass $\Delta v_i \approx \mathbf{0}$ ist, und dass die Parameteränderung klein ist ($\|\Delta C\| \ll \|C_0\|$, $\|\Delta M\| \ll \|M_0\|$), so ergibt sich aus (6.184) in erster Näherung

$$\Delta \omega_i^2 = \omega_{i0}^2 \left(\frac{v_{i0}^T \Delta C v_{i0}}{v_{i0}^T C_0 v_{i0}} - \frac{v_{i0}^T \Delta M v_{i0}}{v_{i0}^T M_0 v_{i0}} \right) = \frac{v_{i0}^T \Delta C v_{i0}}{v_{i0}^T M_0 v_{i0}} - \omega_{i0}^2 \frac{v_{i0}^T \Delta M v_{i0}}{v_{i0}^T M_0 v_{i0}}. \quad (6.185)$$

Falls die Parameteränderungen nur Massen und Federn betreffen, so sind mit den variablen Masse- und Federparametern m_k^* und c_k^* die Entwicklungen mit dimensionslosen Matrizen $\bar{C}_k$ und $\bar{M}_k$

$$C = \sum_k c_k^* \bar{C}_k, \quad M = \sum_k m_k^* \bar{M}_k \quad (6.186)$$

$$\Delta C = \sum_k \Delta c_k^* \bar{C}_k, \quad \Delta M = \sum_k \Delta m_k^* \bar{M}_k \quad (6.187)$$

möglich, vgl. (6.183) und das Beispiel in Abschnitt 6.4.5.2. Damit folgt für (6.185) der einfachere Ausdruck

$$\Delta \omega_i^2 = \omega_{i0}^2 \sum_k \left(\gamma_{ik} \frac{\Delta c_k^*}{\gamma_i} - \mu_{ik} \frac{\Delta m_k^*}{\mu_i} \right) \quad (6.188)$$

mit den so genannten Sensitivitäts-Koeffizienten

$$\gamma_{ik} = v_{i0}^T \bar{C}_k v_{i0} = \frac{d\gamma_i}{dc_k^*}, \quad \mu_{ik} = v_{i0}^T \bar{M}_k v_{i0} = \frac{d\mu_i}{dm_k^*}, \quad (6.189)$$

deren Summe den modalen Federkonstanten und modalen Massen entspricht, wie aus (6.104), (6.105) und (6.183) folgt:

$$\gamma_i = \sum_k \gamma_{ik} c_k^*, \quad \mu_i = \sum_k \mu_{ik} m_k^* \quad (6.190)$$

Man vergleiche dazu die Ausführungen zum Torsionsschwinger in Abschnitt 4.2.1.2, z. B. (4.30).

Wie aus (6.185) bis (6.188) hervorgeht, ändern sich im Allgemeinen alle Eigenfrequenzen bei einer Parameteränderung Δx_k unterschiedlich. Die Sensitivitäts-Koeffizienten drücken *quantitativ* aus, was der erfahrene Praktiker aufgrund physikalischer Vorstellungen nur *qualitativ* voraussagen kann. So hat z. B. die Änderung

einer Masse in der Nähe eines Schwingungsknotens auf die betreffende Eigenfrequenz wenig Einfluss und der Sensitivitäts-Koeffizient einer Masse wird dann groß, wenn sich diese Masse im Schwingungsbauch einer Eigenform befindet.

Um zu ermitteln, wie sich Parameteränderungen auf die **Eigenformen** auswirken, wird von dem Eigenwertproblem (6.79) ausgegangen. Unter Verwendung der durch Gl. (6.71) bekannten Modalmatrix $\mathbf{V}_0 = (\mathbf{v}_{10}, \mathbf{v}_{20}, \dots, \mathbf{v}_{n0})$ und der Abkürzung $\boldsymbol{\lambda}_0 = \text{diag}(\omega_{j0}^2)$ kann für die Gesamtheit aller Eigenwertprobleme des ursprünglichen (Index 0) und des modifizierten Systems (mit Parameteränderungen $\Delta\mathbf{C}$ und $\Delta\mathbf{M}$) geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0\mathbf{V}_0 - \mathbf{M}_0\mathbf{V}_0\boldsymbol{\lambda}_0 &= \mathbf{o} \\ (\mathbf{C}_0 + \Delta\mathbf{C})(\mathbf{V}_0 + \Delta\mathbf{V}) - (\mathbf{M}_0 + \Delta\mathbf{M})(\mathbf{V}_0 + \Delta\mathbf{V})(\boldsymbol{\lambda}_0 + \Delta\boldsymbol{\lambda}) &= \mathbf{o}. \end{aligned} \quad (6.191)$$

Da für das unveränderte System die Gleichung $\mathbf{C}_0\mathbf{V}_0 - \mathbf{M}_0\mathbf{V}_0\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{o}$ erfüllt ist, vereinfacht sich (6.191), und bei Vernachlässigung aller Terme von Änderungen zweiter Ordnung verbleibt:

$$\mathbf{C}_0\Delta\mathbf{V} + \Delta\mathbf{C}\mathbf{V}_0 - \mathbf{M}_0\mathbf{V}_0\Delta\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{M}_0\Delta\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}_0 - \Delta\mathbf{M}\mathbf{V}_0\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{o}. \quad (6.192)$$

Wird diese Gleichung von links mit $\mathbf{V}_0^T$ multipliziert, und dabei die Änderung der Eigenformen mit den zunächst unbekannten Elementen der Sensitivitätsmatrix $\mathbf{K} = ((k_{ij}))$ und den bekannten Eigenformen durch

$$\Delta\mathbf{V} = \mathbf{V}_0\mathbf{K}^T \quad \text{oder} \quad \Delta\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n k_{ij}\mathbf{v}_{j0}, \quad i \neq j \quad (6.193)$$

ausgedrückt, mit Berücksichtigung von (6.112), so folgt

$$\text{diag}(\gamma_i)\mathbf{K}^T + \mathbf{V}_0^T\Delta\mathbf{C}\mathbf{V}_0 - \text{diag}(\mu_i)\Delta\boldsymbol{\lambda} - \text{diag}(\mu_i)\mathbf{K}^T\boldsymbol{\lambda}_0 - \mathbf{V}_0^T\Delta\mathbf{M}\mathbf{V}_0\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{o}. \quad (6.194)$$

Schreibt man diese Matrizengleichung ausführlich, so erkennt man deutlicher, wie die einzelnen Elemente aufgebaut sind. Verlangt man die Erfüllung des ii -ten Elements, so erhält man eine bereits durch (6.185) bekannte Beziehung, aus der sich die Eigenfrequenzänderung berechnen lässt:

$$\mathbf{v}_{i0}^T\Delta\mathbf{C}\mathbf{v}_{i0} - \mu_i\Delta\omega_i^2 - \mathbf{v}_{i0}^T\Delta\mathbf{M}\mathbf{v}_{i0}\omega_{i0}^2 = 0. \quad (6.195)$$

Aus dem ij -ten Element des Gleichungssystems (6.194) folgt

$$\gamma_i k_{ji} + \mathbf{v}_{i0}^T\Delta\mathbf{C}\mathbf{v}_{j0} - \mu_j k_{ji}\omega_{j0}^2 - \mathbf{v}_{i0}^T\Delta\mathbf{M}\mathbf{v}_{j0}\omega_{j0}^2 = 0. \quad (6.196)$$

Daraus lassen sich die Sensitivitäts-Koeffizienten k_{ji} bzw. k_{ij} der Eigenformen berechnen. Setzt man sie mit $\gamma_j = \mu_i\omega_{j0}^2$ in (6.193) ein, so erhält man die gesuchte Formel zur Berechnung der Eigenformänderungen ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\Delta\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{v}_{j0}^T(\Delta\mathbf{C} - \omega_{j0}^2\Delta\mathbf{M})\mathbf{v}_{i0}}{\gamma_i - \gamma_j} \mathbf{v}_{j0}, \quad i \neq j. \quad (6.197)$$

Die Normierung $\mu_i = \mu_j = 1$ ist Bedingung. Die veränderte Eigenform ist damit $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i0} + \Delta\mathbf{v}_i$. Die Änderung der Eigenformen hat bei kleinen Parameteränderungen meist nur geringen Einfluss auf die Eigenfrequenzen, sodass man sich, wenn nur Eigenfrequenzänderungen interessieren, mit den einfachen Formeln (6.185) begnügen kann.

Aus (6.185) und (6.197) kann man Bedingungen dafür herleiten, wann sich Eigenfrequenzen oder Eigenformen trotz Parameteränderungen nicht ändern. Wird z. B. die Federmatrix oder die Massenmatrix in allen Elementen proportional verändert ($\Delta C \sim C$ oder $\Delta M \sim M$), dann ändern sich zwar alle Eigenfrequenzen, aber nicht die Eigenformen. Beispielsweise vergrößern sich alle Eigenfrequenzen um den Faktor $\sqrt{2}$, wenn alle Federkonstanten um den Faktor 2 vergrößert werden.

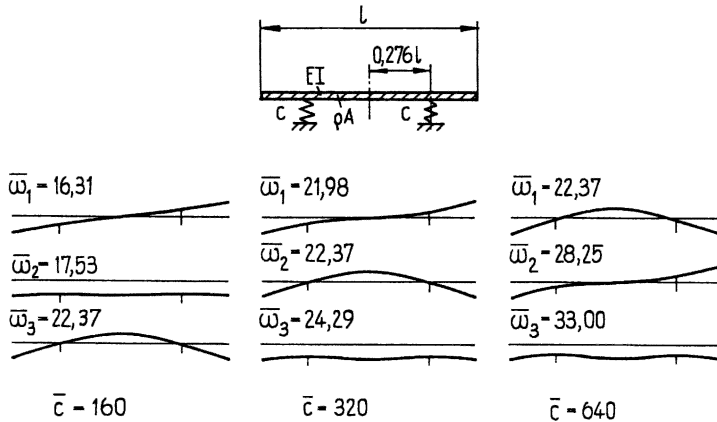


Bild 6.12 Einfluss der Stützfederkonstante c auf Eigenfrequenzen und Eigenformen eines Balkens ($\bar{c} = cl^3/EI$, $\lambda_i^2 = \bar{\omega}_i = \omega_i \sqrt{\rho Al^4/EI}$)

Ebenso gibt es Parameteränderungen, bei denen sich nur die Eigenformen, aber nicht die Eigenfrequenzen ändern, vgl. dazu Bild 6.12. Diese Tatsachen muss der Ingenieur im Auge behalten, damit er nicht aus der Übereinstimmung von gemessenen und berechneten Frequenzen oder Formen voreilig auf die Richtigkeit eines angenommenen Berechnungsmodells schließt. Bei der Identifikation eines Berechnungsmodells, d. h. bei der Ermittlung der Parameterwerte, müssen sowohl die Eigenfrequenzen als auch die Eigenformen und das statische Deformationsverhalten in Betracht gezogen werden.

Zum Einfluss von Parameteränderungen auf Eigenfrequenzen kann man aus den angegebenen Formeln folgende Regeln ableiten, die für die Konstruktionspraxis von Bedeutung sind:

1. Bei einer Vergrößerung einer Masse an irgendeiner Stelle eines Schwingers werden im allgemeinen sämtliche n Eigenfrequenzen erniedrigt – bei einer Massenverkleinerung erhöht.
2. Bei einer Vergrößerung der Steifigkeit an irgendeiner Stelle eines Schwingers werden im allgemeinen sämtliche n Eigenfrequenzen erhöht – bei einer Steifigkeitsverkleinerung erniedrigt.
3. Liegt eine Masse in einem Schwingungsknoten einer Eigenform, so hat ihre Änderung auf die zugehörige Eigenfrequenz keinen Einfluss.
4. Massenänderungen haben an Stellen großer Amplituden (Schwingungsbauch) einer Eigenform den größten Einfluss auf die zugehörige Eigenfrequenz.

5. Steifigkeitsänderungen sind am wirkungsvollsten an Federn mit großer Formänderungsarbeit, ihre Wirkung ist somit ebenfalls für die verschiedenen Schwingformen unterschiedlich.
6. Zusätzliche Bindungen (Verstrebung, Einspannung, Lager) erhöhen alle Eigenfrequenzen, verminderte Bindungen (Zusatzgelenk, verminderter Grad der statischen Unbestimmtheit) senken die Eigenfrequenzen.
7. Nach längeren Betriebszeiten von Maschinen sinken die Eigenfrequenzen meist ab, da sich verschiedene Bindungen lockern (Risse, Spiel).
8. Hohe Eigenfrequenzen erreicht man, wenn in Stabtragwerken nur Zug- und Druckkräfte übertragen werden.
9. Um Eigenfrequenzen wirksam zu verschieben, sollen Masse- und Steifigkeitsänderungen möglichst mit entgegengesetzter Tendenz vorgenommen werden.
10. Durch Verkürzung (Verlängerung) von Balken oder Stäben lassen sich Eigenfrequenzen stark vergrößern (verkleinern).

6.4.3

Reduktion von Freiheitsgraden

Früher war der Ingenieur bereits bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen „vorsichtig“ und hat im Modell so wenig wie möglich und nur so viel wie nötig Koordinaten berücksichtigt, um Rechenaufwand zu sparen. Die Wahl der Struktur eines Minimalmodells basierte oft auf langjährigen Erfahrungen. Seit der Entwicklung der Computermethoden (z. B. der FEM), bei denen man formal und schnell zu einer großen Anzahl von Freiheitsgraden kommt, benötigt man Verfahren zur systematischen Vereinfachung der Berechnungsmodelle, weil zu viele Freiheitsgrade des Modells oft überflüssig, d. h. physikalisch sinnlos sind.

Die im folgenden beschriebene Methode der statischen Kondensation von GUYAN (1965) bietet eine Möglichkeit, Freiheitsgrade und damit Rechenzeit und Speicherplatz zu reduzieren. Sie ist z. B. angebracht, wenn ein kompliziertes Modell für eine statische Berechnung vorliegt, da dynamische Untersuchungen meist mit weniger Freiheitsgraden auskommen. Beim Zusammenbau von Substrukturen kann diese Methode benutzt werden, um die Matrizen einzelner Substrukturen vor dem Zusammenbau zu der Gesamt-Steifigkeitsmatrix auf die Koordinaten der Verbindungspunkte zu kondensieren.

Der Koordinatenvektor $\mathbf{q}$ eines großen Systems wird in n_1 **externe Koordinaten** (engl. „master-degrees“) $\mathbf{q}_1$, die in der Rechnung verbleiben, und n_2 **interne Koordinaten** (engl. „slave-degrees“) $\mathbf{q}_2$, die beseitigt werden, aufgeteilt: $\mathbf{q}^T = (\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T)$. Es gilt für die Freiheitsgrade $n = n_1 + n_2$. Es empfiehlt sich, solche Koordinaten zu eliminieren, welche die Wege relativ kleiner Massen oder die Drehwinkel relativ kleiner Trägheitsmomente beschreiben.

Bei der folgenden Überlegung werden zunächst die Massenkräfte vernachlässigt, sodass von der Bewegungsgleichung $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}$ nur folgende statische Beziehung verbleibt, die in der angegebenen Weise partitioniert wird:

$$\mathbf{C}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}. \quad (6.198)$$

Dabei ist C_{11} eine $(n1 \times n1)$ -Matrix, C_{22} eine $(n2 \times n2)$ -Matrix und $C_{12}^T = C_{21}$ sind Rechteck-Matrizen. Aus der unteren Zeile folgt die Beziehung

$$q_2 = -C_{22}^{-1}C_{21}q_1 + C_{22}^{-1}f_2 = -Sq_1 + C_{22}^{-1}f_2. \quad (6.199)$$

Es ist zweckmäßig, zur Abkürzung die $(n2 \times n1)$ -Rechteckmatrix

$$S = C_{22}^{-1}C_{21} = (C_{12}C_{22}^{-1})^T \quad (6.200)$$

einzuführen. Aus der oberen Zeile von (6.198) folgt damit

$$f_1 = C_{11}q_1 + C_{12}q_2 = C_{11}q_1 - C_{12}Sq_1 + S^T f_2. \quad (6.201)$$

Definiert man für das kondensierte System mit $n1$ Freiheitsgraden den reduzierten Kraftvektor

$$f_{\text{red}} = f_1 - C_{12}C_{22}^{-1}f_2 = f_1 - S^T f_2. \quad (6.202)$$

und die reduzierte Federmatrix

$$C_{\text{red}} = C_{11} - C_{12}C_{22}^{-1}C_{21} = C_{11} - S^T C_{21}, \quad (6.203)$$

so kann anstelle von (6.201) $C_{\text{red}}q_1 = f_{\text{red}}$ geschrieben werden.

Die Massematrix wird analog zur Federmatrix partitioniert. Um den Einfluss der Massenkkräfte näherungsweise zu berücksichtigen, wird gefordert, dass ihre virtuelle Arbeit am ursprünglichen System ebenso groß sein soll wie die am kondensierten System:

$$\delta q^T M \ddot{q} = [\delta q_1^T, \delta q_2^T] \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \delta q_1^T M_{\text{red}} \ddot{q}_1. \quad (6.204)$$

Eliminiert man gemäß (6.199) für $f_2 = 0$ die internen Koordinaten, wird daraus

$$\delta q_1^T M_{\text{red}} \ddot{q}_1 = \delta q_1^T [E, -S^T] \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ -S \end{bmatrix} \ddot{q}_1. \quad (6.205)$$

Beachtet man die Identität von $M_{12}^T = M_{21}$, so folgt daraus durch Koeffizientenvergleich die Formel für die reduzierte Massenmatrix $(n1 \times n1)$:

$$M_{\text{red}} = M_{11} - M_{21}S - S^T M_{21} + S^T M_{22}S. \quad (6.206)$$

Die Eigenfrequenzen, die sich aus dem reduzierten Eigenwertproblem

$$(C_{\text{red}} - \omega^2 M_{\text{red}})v_{\text{red}} = 0 \quad (6.207)$$

ergeben, liefern eine Näherung für die $n1$ unteren Eigenfrequenzen. Die Eigenfrequenzen der Ordnungen $i > n1$ existieren dann nicht mehr, sie wurden mit den internen Koordinaten vernachlässigt. Das reduzierte System besitzt eine geringere Massenträgheit, aber dieselbe Steifigkeit, und deshalb sind alle seine $n1$ Eigenfrequenzen etwas größer als die derselben Ordnungen des ursprünglichen Systems, vgl. auch Lösung L6.9.

Die Eigenvektoren, die mit denen des ursprünglichen Systems vergleichbar sind, ergeben sich wegen (6.199) folgendermaßen aus denen des kondensierten Systems:

$$\bar{v}_i = \begin{bmatrix} v_{\text{red}}^{(i)} \\ -C_{22}^{-1}C_{21}v_{\text{red}}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ -S \end{bmatrix} v_{\text{red}}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n1. \quad (6.208)$$

6.4.4

Einfluss von Zwangsbedingungen auf Eigenfrequenzen und Eigenformen

Eine wirksame Maßnahme zur Erhöhung der Eigenfrequenzen eines Schwingungssystems stellen Versteifungen durch in Längsrichtung praktisch undeformierbare Streben dar, die sich mathematisch als Zwangsbedingungen zwischen den Koordinaten beschreiben lassen. Es interessiert eine allgemeine Methode zur Erfassung des Einflusses solcher Zwangsbedingungen auf die Eigenfrequenzen.

Der Formalismus zur Erfassung des Einflusses von starren Stützen und Streben entspricht demjenigen zur Reduktion von Freiheitsgraden.

Die hier vorliegenden Zwangsbedingungen können durch r lineare Beziehungen zwischen den Koordinaten in der Form

$$\mathbf{q} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}_1 \quad (6.209)$$

ausgedrückt werden. Die Matrix $\mathbf{T}$ ist dabei eine Rechteckmatrix mit n Zeilen und $(n - r)$ Spalten. Ihre Elemente t_{jk} folgen aus den jeweiligen Zwangsbedingungen.

Infolge der auferlegten Zwangsbedingungen entsteht aus dem ursprünglichen System ein neues, welches nur noch $(n - r)$ Freiheitsgrade hat, sodass ebensoviele Koordinaten ausreichen, um dessen Verhalten zu beschreiben. Die verbleibenden Koordinaten werden im Vektor $\mathbf{q}_1$ erfasst.

Die Beziehungen für die potenzielle und die kinetische Energie des ursprünglichen Systems werden umgeformt und mithilfe von (6.209) durch die neuen Koordinaten ausgedrückt, vgl. (6.16):

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{q}_1)^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{q}_1^T \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{q}_1, \quad (6.210)$$

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} (\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{q}}_1)^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{q}}_1 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbf{M}_1 \cdot \dot{\mathbf{q}}_1. \quad (6.211)$$

Dabei folgen aus dem Koeffizientenvergleich unter Benutzung der Relation

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{q}_1)^T = \mathbf{q}_1^T \cdot \mathbf{T}^T \quad (6.212)$$

die Matrizen für die Bewegungsgleichungen:

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{C}_1 \mathbf{q}_1 = \mathbf{o} \quad (6.213)$$

mit

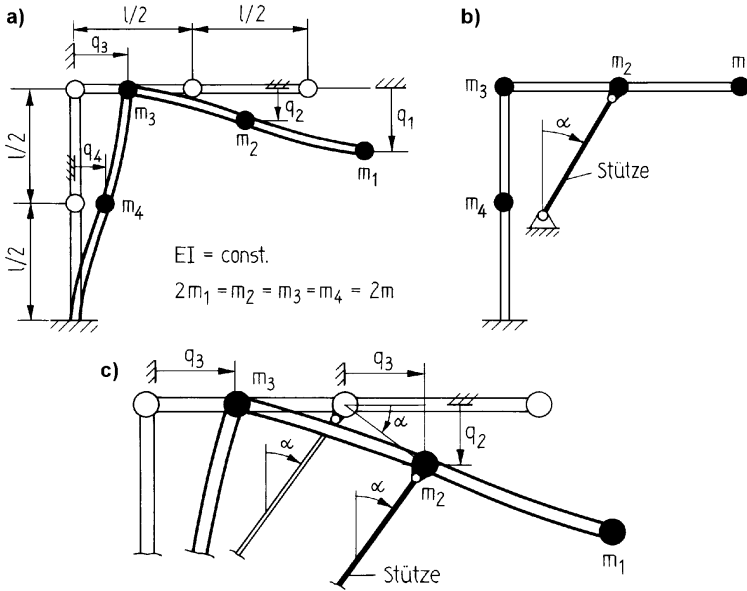
$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}; \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}. \quad (6.214)$$

Die Eigenfrequenzen und Eigenformen des durch starre Bindungen versteiften Systems ergeben sich aus der Lösung des Eigenwertproblems

$$(\mathbf{C}_1 - \omega^2 \mathbf{M}_1) \mathbf{v} = \mathbf{o}. \quad (6.215)$$

Infolge der zusätzlichen Zwangsbedingungen erhöhen sich im allgemeinen alle Eigenfrequenzen, wobei diejenigen am stärksten betroffen sind, deren Eigenformen am stärksten behindert werden. Es bleiben diejenigen unverändert, deren Eigenformen infolge der Stützung nicht beeinflusst werden.

Als Beispiel wird das Gestell betrachtet, dessen Massen- und Steifigkeitsmatrix in Tabelle 6.3 (Fall 2) angegeben sind.

**Bild 6.13** Maschinengestell

- a) Systemskizze mit Parametern und Koordinaten
 b) Kennzeichnung der starren Stütze
 c) zur Erläuterung der Zwangsbedingung (6.216)

Eine Pendelstütze gemäß Bild 6.13b behindert die Bewegung der Masse m_2 in Richtung dieser Stütze, aber sie erlaubt die Bewegung senkrecht dazu. Der horizontale Weg der Masse m_2 entspricht der Koordinate q_3 , ihr vertikaler Weg ist q_2 , vgl. Bild 6.13a und b. Infolge der angebrachten Stütze können sich q_2 und q_3 nicht mehr unabhängig voneinander verändern. Es gilt die Zwangsbedingung

$$q_2 = q_3 \cdot \tan \alpha. \quad (6.216)$$

Dabei wurde vorausgesetzt, dass die Änderung des Winkels α infolge der Verschiebungen q_2 und q_3 vernachlässigbar klein ist.

In den Vektor $\mathbf{q}_1^T = [q_1, q_3, q_4]$ werden nur noch drei ($n - r = 3$) Koordinaten aufgenommen. Damit erhält (6.216) in Matrixschreibweise gemäß (6.209) die Form

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tan \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}_1. \quad (6.217)$$

Durch Koeffizientenvergleich lässt sich aus (6.217) die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ gewinnen. Gemäß (6.214) ergeben sich mit der in der Aufgabenstellung gegebenen Federmatrix, vgl. Tabelle 6.3, Fall 2:

$$C_1 = \frac{48EI}{97l^3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tan \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 26 & -59 & 9 & -12 \\ -59 & 160 & -54 & 72 \\ 9 & -54 & 74 & -131 \\ -12 & 72 & -131 & 304 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tan \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.218)$$

$$C_1 = \frac{48EI}{97l^3} \cdot \begin{bmatrix} 26 & -59 \tan \alpha + 9 & -12 \\ -59 \tan \alpha + 9 & 160 \tan^2 \alpha - 108 \tan \alpha + 74 & 72 \tan \alpha - 131 \\ -12 & 72 \tan \alpha - 131 & 304 \end{bmatrix}.$$

Für die Massenmatrix folgt analog mit M aus Tabelle 6.3, Fall 2:

$$M_1 = m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tan \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tan \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \tan^2 \alpha + 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (6.219)$$

Die Eigenkreisfrequenzen für das unveränderte System mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Matrizen sind bekannt, vgl. (6.143) und Bild 6.14. Mit den Matrizen gemäß (6.218) und (6.219) ergeben sich die Eigenkreisfrequenzen für das System mit Stütze aus der Bedingung

$$\det(C_1 - \omega^2 M_1) = 0, \quad (6.220)$$

vgl. (6.27) und (6.215).

In Bild 6.14 sind die mit einem Eigenwertprogramm gewonnenen numerischen Ergebnisse aufgetragen, welche (6.220) erfüllen. Die drei Verläufe illustrieren, wie stark und wie unterschiedlich sich die Eigenkreisfrequenzen infolge der um den Winkel α geneigten Stütze ändern.

Da das verbleibende System im Vergleich zum ursprünglichen System einen Freiheitsgrad weniger hat, existieren nur diese drei Eigenkreisfrequenzen, und es ist $\omega_4 \rightarrow \infty$. Alle Eigenkreisfrequenzen sind infolge der Stütze höher als beim ursprünglichen System, vgl. die allgemeinen Aussagen zu Struktur- und Parameteränderungen in Abschnitt 6.4.

Das Minimum der Kurve ω_1/ω^* entspricht der ersten Eigenkreisfrequenz des ursprünglichen Systems, und zwar tritt dieser Minimalwert dann auf, wenn die Stütze die ursprüngliche erste Eigenform nicht behindert, vgl. Bild 6.8.

Aus (6.216) ergibt sich der Winkel α_i , in dessen Richtung die Masse m_2 beim ursprünglichen System bei der i -ten Ordnung schwingt. Steht die Stütze senkrecht zu dieser Schwingrichtung, beeinflusst sie diese Form nicht, d. h., die betreffende Eigenkreisfrequenz bleibt unverändert. In Tabelle 6.5 sind die Stützenwinkel α_i berechnet worden, welche die ursprünglichen Eigenformen an der Stützstelle nicht stören. Die Verläufe der Eigenkreisfrequenzen in Bild 6.22 zeigen für diese Winkel α_i Extremwerte von der Größe der Eigenkreisfrequenzen des ursprünglichen Systems. Die Tatsache, dass es sich um Extremwerte handelt, lässt sich mit der Eindeutigkeit

der Stützwinkel α_i (im relevanten Bereich von $0^\circ \dots 180^\circ$) erklären, für die die i -te Eigenform nicht behindert wird.

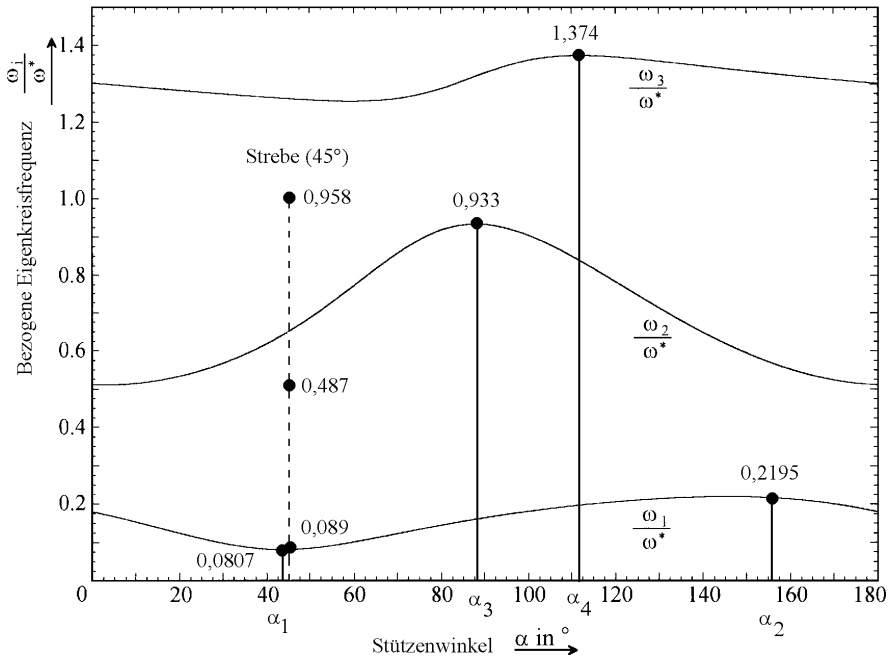


Bild 6.14 Abhängigkeit der Eigenfrequenzen vom Stützwinkel α

Tabelle 6.5 Rechenergebnisse

Ordnung	Komponenten der ursprünglichen Eigenvektoren		Stützen-Neigung	Stützwinkel
i	v_{2i}	v_{3i}	$\tan \alpha_i = v_{2i}/v_{3i}$	α_i in Grad
1	0,4774	0,5014	0,9521	43,6
2	0,3391	-0,4979	-0,6810	155,7
3	-1,1280	-0,0431	26,1717	87,8
4	-1,7878	0,7117	-2,5120	111,7

6.4.5

Beispiele zur Reduktion von Freiheitsgraden

6.4.5.1

Einfaches Gestell (von vier zu zwei)

Die Steifigkeitsmatrix, die in 6.2.2.2 für das Gestell mit vier Freiheitsgraden aufgestellt wurde, soll vereinfacht werden, indem die Drehwinkel, die durch die Koordinaten q_3 und q_4 berücksichtigt worden waren, nicht mehr als Koordinaten berücksichtigt werden, vgl. Bild 6.3.

Der Vektor der externen Koordinaten $\mathbf{q}_1$ enthält die verbleibenden generalisierten Koordinaten. Die Aufteilung des Koordinatenvektors

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (6.221)$$

bedingt eine Aufteilung der Federmatrix (6.43) in Teilmatrizen, vgl. (6.198). Es wird $l_1 = l_2 = l$ und $\beta_1 = \beta_2 = 2EI/l^3$ gesetzt. Insbesondere interessieren hierbei $\mathbf{C}_{22}$ und deren Kehrmatrix, die man durch Matrizeninversion berechnen muss. Man findet

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{11} &= \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_{12} &= \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3l & 3l \\ 0 & 3l \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{21}^T, \\ \mathbf{C}_{22} &= \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 2l^2 & l^2 \\ l^2 & 4l^2 \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_{22}^{-1} &= \frac{l}{14EI} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.222)$$

Damit kann man $\mathbf{S}$ berechnen, vgl. (6.200):

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}_{22}^{-1} \mathbf{C}_{21} = \frac{l}{14EI} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3l & 0 \\ 3l & 3l \end{bmatrix} = \frac{3}{7l} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (6.223)$$

Durch Anwendung von (6.203) gewinnt man aus (6.222) und (6.223) die reduzierte Federmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{red}} &= \mathbf{C}_{11} - \mathbf{S}^T \mathbf{C}_{21} \\ \mathbf{C}_{\text{red}} &= \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - \frac{3}{7l} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3l & 0 \\ 3l & 3l \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{\text{red}} &= \frac{6EI}{7l^3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.224)$$

Das ist die aus 6.2.2.1 bekannte und dort auf anderem Wege (Bildung der Kehrmatrix aus $\mathbf{D}$) ermittelte Federmatrix des Modells mit zwei Freiheitsgraden, vgl. (6.32).

6.4.5.2

Textilspindel (zur Sensitivität)

Bild 6.15a zeigt das Berechnungsmodell einer Textilspindel, vgl. auch Bild 6.31. Auf der abgesetzten Welle sitzt die Packung (Masseparameter: m_2, J_2). Die Welle stützt sich auf ein Gehäuse, welches einem elastisch gelagerten starren Körper entspricht, der durch die Masseparameter m_1 und J_1 gekennzeichnet ist. Es interessiert der Einfluss der Masseparameter auf die Eigenfrequenzen und Eigenformen. Insbesondere soll berechnet werden, wie sich eine Vergrößerung der Masse m_2 um 20 % auf die ersten beiden Eigenfrequenzen und auf die vier Eigenformen auswirkt.

Die Massenmatrix dieses Systems lässt sich gemäß (6.186) als Summe

$$\mathbf{M}_0 = m_1^* \bar{\mathbf{M}}_1 + m_2^* \bar{\mathbf{M}}_2 + m_3^* \bar{\mathbf{M}}_3 + m_4^* \bar{\mathbf{M}}_4$$

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} m_2^* + m_4^* & m_2^* - m_4^* & 0 & 0 \\ m_2^* - m_4^* & m_2^* + m_4^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 a^2 + m_3^* & m_1 ab - m_3^* \\ 0 & 0 & m_1 ab - m_3^* & m_1 b^2 + m_3^* \end{bmatrix} \quad (6.225)$$

darstellen, wobei die Masseparameter einheitlich die Dimension einer Masse erhalten. Es gilt

$$m_1^* = m_1 = 0,5 \text{ kg}, \quad m_2^* = \frac{m_2}{4} = 0,25 \text{ kg}$$

$$m_3^* = \frac{J_1}{l_1^2} = 0,0486 \text{ kg}, \quad m_4^* = \frac{J_2}{l_4^2} = 0,3516 \text{ kg}. \quad (6.226)$$

Die zugehörigen Matrizen $\bar{\mathbf{M}}_k$ sind dimensionslos ($a = l_5/l_1$, $b = l_6/l_1$):

$$\bar{\mathbf{M}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & ab \\ 0 & 0 & ab & b^2 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{M}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{M}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{M}}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.227)$$

Mit den Zahlenwerten des realen Systems gilt für die Massenmatrix

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} 0,6016 & -0,1016 & 0 & 0 \\ -0,1016 & 0,6016 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1354 & 0,0729 \\ 0 & 0 & 0,0729 & 0,2188 \end{bmatrix} \text{ kg} \quad (6.228)$$

und für die Nachgiebigkeitsmatrix

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} 0,54220 & 0,12090 & 0,02722 & -0,16993 \\ 0,12090 & 0,03486 & 0,01355 & -0,03394 \\ 0,02722 & 0,01355 & 0,01019 & 0 \\ -0,16993 & -0,03394 & 0 & 0,10194 \end{bmatrix} \text{ mm/N}. \quad (6.229)$$

Die Modalmatrix folgt aus der Lösung des Eigenwertproblems (6.80) zu

$$\mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} 1,2834 & 0,1967 & -0,1574 & -0,0180 \\ 0,2856 & 0,44664 & 1,1043 & -0,4586 \\ 0,0625 & 0,5778 & 0,9121 & 2,7983 \\ -0,4150 & 1,7639 & -1,05548 & -1,0827 \end{bmatrix} \quad (6.230)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{10} & , & \mathbf{v}_{20} & , & \mathbf{v}_{30} & , & \mathbf{v}_{40} \end{bmatrix}$$

Die Eigenformen v_{i0} sind in Bild 6.15 dargestellt.

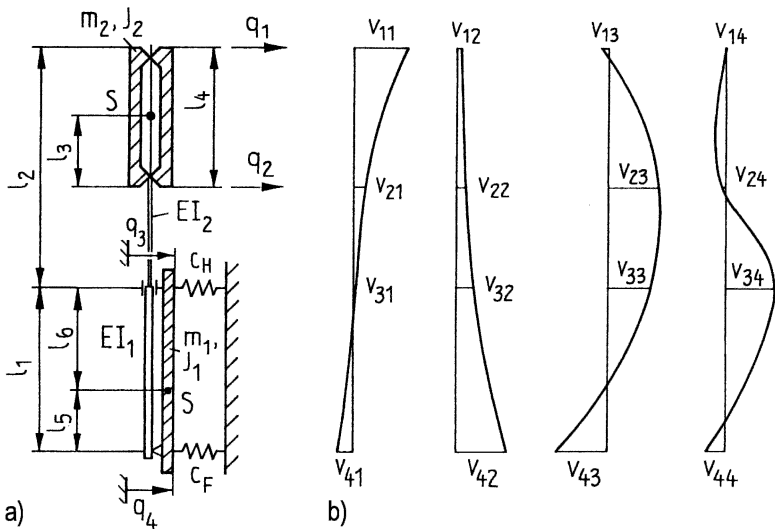


Bild 6.15 Textilspindel; a) Berechnungsmodell, b) Eigenformen v_{i0}

Um zu untersuchen, wie stark sich die Änderungen der Masseparameter auf die Eigenfrequenzen auswirken, wurden die Sensitivitäts-Koeffizienten μ_{ik} , gemäß (6.189) berechnet. Sie sind gemeinsam mit den Eigenkreisfrequenzen ω_{i0} und den modalen Massen μ_i , die aus (6.112) folgen, in Tabelle 6.6 angegeben. Man kann sich davon überzeugen, dass die Zahlenwerte (6.190) erfüllen.

Tabelle 6.6 Sensitivitäts-Koeffizienten und modale Massen des Berechnungsmodells einer Textilspindel

i	Sensitivitäts-Koeffizienten (dimensionslos)				Eigenkreis- frequenzen ω_{i0} in s^{-1}	modale Massen μ_i in kg
	μ_{i1}	μ_{i2}	μ_{i3}	μ_{i4}		
1	0,0468	2,463	0,228	0,995	55,15	1,000
2	1,612	0,414	1,407	0,0625	278,2	1,000
3	0,0560	0,897	3,871	1,592	473,9	1,000
4	0,285	0,227	15,06	0,194	2974	1,000

Exemplarisch sei hier die Berechnung eines der Sensitivitäts-Koeffizienten angegeben:

$$\mu_{23} = v_{20}^T \overline{M}_3 v_{20} \tag{6.231}$$

$$\mu_{23} = [0,1967; 0,4466; 0,5778; 1,7630] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1967 \\ 0,4466 \\ 0,5778 \\ 1,7630 \end{bmatrix}$$

$$= 1,407.$$

An den Zahlenwerten in Tabelle 6.6 lässt sich erkennen, welche wesentlichen Unterschiede vorhanden sind. Man sieht z. B. sofort, dass die zweite Eigenfrequenz ($i = 2$) stark durch die Masse m_1 ($\mu_{12} = 1,612$) und weniger durch das Trägheitsmoment J_2 ($\mu_{24} = 0,0625$) beeinflusst wird. Eine Änderung von m_1 wirkt sich relativ wenig auf die erste und dritte Eigenfrequenz aus, vgl. dazu Bild 6.15.

Falls die Masse m_2 von ursprünglich $m_2 = 1$ kg um $\Delta m_2 = 0,2$ kg vergrößert wird, so ändern sich die ersten beiden Eigenfrequenzen gemäß der Näherung von (6.184) und (6.188):

$$\omega_1 = \omega_{10} \sqrt{1 - \frac{\mu_{12} \Delta m_2^*}{\mu_1}} = 51,6 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_2 = \omega_{20} \sqrt{1 - \frac{\mu_{22} \Delta m_2^*}{\mu_2}} = 275,4 \text{ s}^{-1}.$$
(6.232)

Die exakten Werte, die durch die Lösung des Eigenwertproblems mit den veränderten Parameterwerten erhalten wurden, sind $\omega_1 = 52,04 \text{ s}^{-1}$ und $\omega_2 = 275,6 \text{ s}^{-1}$. Die Genauigkeit der Näherung ist also recht gut.

Nun soll noch berechnet werden, wie sich die Eigenformen ändern, wenn diese Masseänderung $\Delta m_2 = 0,2$ kg vorgenommen wird. Aus der allgemeinen Beziehung (6.197) folgt speziell für den hier vorliegenden Fall mit $\Delta \mathbf{C} = \mathbf{0}$ und $\Delta \mathbf{M} = \Delta m_2 \cdot \bar{\mathbf{M}}_2$, vgl. (6.187) und (6.225):

$$\Delta \mathbf{v}_i = -\omega_{i0}^2 \Delta m_2^* \sum_{j=1}^4 \frac{\mathbf{v}_{j0}^T \bar{\mathbf{M}}_2 \mathbf{v}_{i0}}{\gamma_i - \gamma_j} \mathbf{v}_{j0}, \quad i \neq j$$
(6.233)

Damit das Bildungsgesetz deutlicher wird, soll diese Gleichung für $i = 1$ und $i = 2$ ausgeschrieben werden:

$$\Delta \mathbf{v}_1 = -\omega_{10}^2 \Delta m_2^* \left[0 + \frac{\mathbf{v}_{20}^T \bar{\mathbf{M}}_2 \mathbf{v}_{10}}{\gamma_1 - \gamma_2} \mathbf{v}_{20} + \frac{\mathbf{v}_{30}^T \bar{\mathbf{M}}_2 \mathbf{v}_{10}}{\gamma_1 - \gamma_3} \mathbf{v}_{30} + \frac{\mathbf{v}_{40}^T \bar{\mathbf{M}}_2 \mathbf{v}_{10}}{\gamma_1 - \gamma_4} \mathbf{v}_{40} \right]$$

$$\Delta \mathbf{v}_2 = -\omega_{20}^2 \Delta m_2^* \left[\frac{\mathbf{v}_{10}^T \bar{\mathbf{M}}_2 \mathbf{v}_{20}}{\gamma_2 - \gamma_1} \mathbf{v}_{10} + 0 + \frac{\mathbf{v}_{30}^T \bar{\mathbf{M}}_2 \mathbf{v}_{20}}{\gamma_2 - \gamma_3} \mathbf{v}_{30} + \frac{\mathbf{v}_{40}^T \bar{\mathbf{M}}_2 \mathbf{v}_{20}}{\gamma_2 - \gamma_4} \mathbf{v}_{40} \right]$$
(6.234)

Setzt man die Zahlenwerte für dieses Beispiel ein, die für die Modalmatrix aus (6.230) für die Eigenkreisfrequenzen und modalen Massen aus Tabelle 6.6 bekannt sind, so

ergibt sich mit $\gamma_i = \mu_i \omega_{i0}^2$ für die Änderungen der Eigenvektoren zunächst

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{v}_1 &= (\quad 0 \quad + 135,8 \mathbf{v}_{20} + 67,08 \mathbf{v}_{30} - 0,8457 \mathbf{v}_{40}) \omega_{10}^2 \cdot k \\
 \Delta \mathbf{v}_2 &= (-135,8 \mathbf{v}_{10} + \quad 0 \quad + 41,41 \mathbf{v}_{30} - 0,3457 \mathbf{v}_{40}) \omega_{20}^2 \cdot k \\
 \Delta \mathbf{v}_3 &= (-67,08 \mathbf{v}_{10} - 41,41 \mathbf{v}_{20} + \quad 0 \quad - 0,5235 \mathbf{v}_{40}) \omega_{30}^2 \cdot k \\
 \Delta \mathbf{v}_4 &= (0,8457 \mathbf{v}_{10} + 0,3457 \mathbf{v}_{20} + 0,5235 \mathbf{v}_{30} + \quad 0 \quad) \omega_{40}^2 \cdot k
 \end{aligned} \tag{6.235}$$

mit $k = \Delta m_2^* \cdot 10^{-7} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^2$

Mit $\Delta m_2 = 0,2 \text{ kg}$ ist $\Delta m_2^* = 0,05 \text{ kg}$, und nach dem Einsetzen aller Zahlenwerte erhält man folgende Änderungen der Eigenvektoren:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 0,00024 \\ 0,00205 \\ 0,00209 \\ 0,00258 \end{bmatrix}, & \Delta \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} -0,0699 \\ 0,0027 \\ 0,0109 \\ 0,0050 \end{bmatrix}, \\
 \Delta \mathbf{v}_3 &= \begin{bmatrix} -0,1058 \\ -0,0420 \\ -0,0332 \\ -0,0501 \end{bmatrix}, & \Delta \mathbf{v}_4 &= \begin{bmatrix} 0,0474 \\ 0,0432 \\ 0,0324 \\ -0,0127 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.236}$$

Man sieht, dass alle Änderungen im Vergleich zu den Elementen der Modalmatrix (6.182) klein sind und die lineare Näherung berechtigt ist. Berechnet man die neuen Eigenvektoren $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i0} + \Delta \mathbf{v}_i$ des geänderten Systems, so erhält man auf drei gültige Ziffern genau dieselben Werte wie bei der exakten Lösung des neuen Eigenwertproblems, vgl. dazu auch Bild 6.15.

6.4.5.3

Tragwerk (Reduktion von zehn auf fünf)

Das in Bild 6.4 dargestellte Tragwerk mit 10 Freiheitsgraden, von dem die Systemmatrizen durch (6.62) und (6.63) und die Zahlenwerte aus Abschnitt 6.3.4.3 bekannt sind, soll auf ein System mit fünf Freiheitsgraden reduziert werden. Als interne Koordinaten werden $\mathbf{q}_2^T = (q_1, q_4, q_6, q_7, q_8)$ betrachtet, als externe Koordinaten $\mathbf{q}_1^T = (q_2, q_3, q_5, q_9, q_{10})$.

Aufgrund der in vorliegendem Lehrbeispiel aus Bild 6.10 bekannten Eigenformen ist zu beachten, dass die Masse des oben befindlichen Starrkörpers bei den niederen Eigenformen teilweise in Gegenphase zum Rahmen schwingt. Trotz seiner Kleinheit sollte dieser Körper nicht vernachlässigt werden, weil seine Bewegung sonst quasi-statisch der des Rahmens an den Feder-Koppelpunkten folgen würde.

Entsprechend der Aufteilung in externe und interne Koordinaten sind die Elemente der Masse- und Federmatrix neu zu ordnen. Da die Massenmatrix eine

Diagonalmatrix ist, ist $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21} = \mathbf{0}$. Die partitionierte Massenmatrix besteht aus den beiden Teilmatrizen

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{11} &= \text{diag}(10m, 2m, 2m, m_3, J_S/l^2) = m^* \text{diag}(2000, 400, 400, 50, 2), \\ \mathbf{M}_{22} &= \text{diag}(2m, 2m, 2m, m_1, m_2) = m^* \text{diag}(400, 400, 400, 5, 5).\end{aligned}\quad (6.237)$$

Die Einführung einer Bezugsmasse $m^* = 10 \text{ kg}$ und einer Bezugsfederkonstante $c^* = 6,228 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ ist bei den folgenden Zahlenrechnungen zweckmäßig.

Die partitionierte Federmatrix $\mathbf{C}_{11}$ ergibt sich aus den Elementen an den Schnittpunkten, d. h. aus der 2., 3., 5., 9. und 10. Zeile und Spalte der Federmatrix, vgl. Gl. (6.59). Sie lautet:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{11} &= c^* \begin{bmatrix} 148 & -54 & 54 & 0 & 0 \\ -54 & 161 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 0 & 161 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{22} = c^* \begin{bmatrix} 304 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 52 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 304 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{12} &= c^* \begin{bmatrix} -131 & 0 & -131 & 0 & 0 \\ 72 & -59 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -59 & -72 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (6.238)$$

Nach der Bildung der Kehrmatrix von $\mathbf{C}_{22}$ kann man die bei den weiteren Rechnungen mehrfach vorkommende Matrix $\mathbf{S}$ berechnen, vgl. (6.200):

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}_{22}^{-1} \mathbf{C}_{21} = \begin{bmatrix} -0,4309 & 0,1934 & -0,0434 & 0 & 0 \\ 0 & -1,1000 & -1,1000 & 0 & 0 \\ -0,4309 & 0,0434 & -0,1934 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3333 & 0 & -0,6667 & -0,3333 \\ 0 & 0 & 0,3333 & -0,6667 & 0,3333 \end{bmatrix}. \quad (6.239)$$

Die reduzierten Matrizen folgen aus Gl. (6.203) und Gl. (6.206) zu

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\text{red}} &= c^* \begin{bmatrix} 0,351 & -2,297 & -2,297 & 0 & 0 \\ -2,297 & 8,184 & -6,177 & 0,667 & 0,333 \\ 2,297 & -6,177 & 8,184 & 0,667 & -0,333 \\ 0 & 0,667 & 0,667 & 1,333 & 0 \\ 0 & 0,333 & -0,333 & 0 & 0,333 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{\text{red}} &= m^* \begin{bmatrix} 2149 & -40,82 & 40,82 & 0 & 0 \\ -40,82 & 900,3 & 477,3 & -1,111 & -0,556 \\ 40,82 & 477,3 & 900,3 & -1,111 & 0,556 \\ 0 & -1,111 & -1,111 & 54,44 & 0 \\ 0 & -0,556 & 0,556 & 0 & 3,111 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (6.240)$$

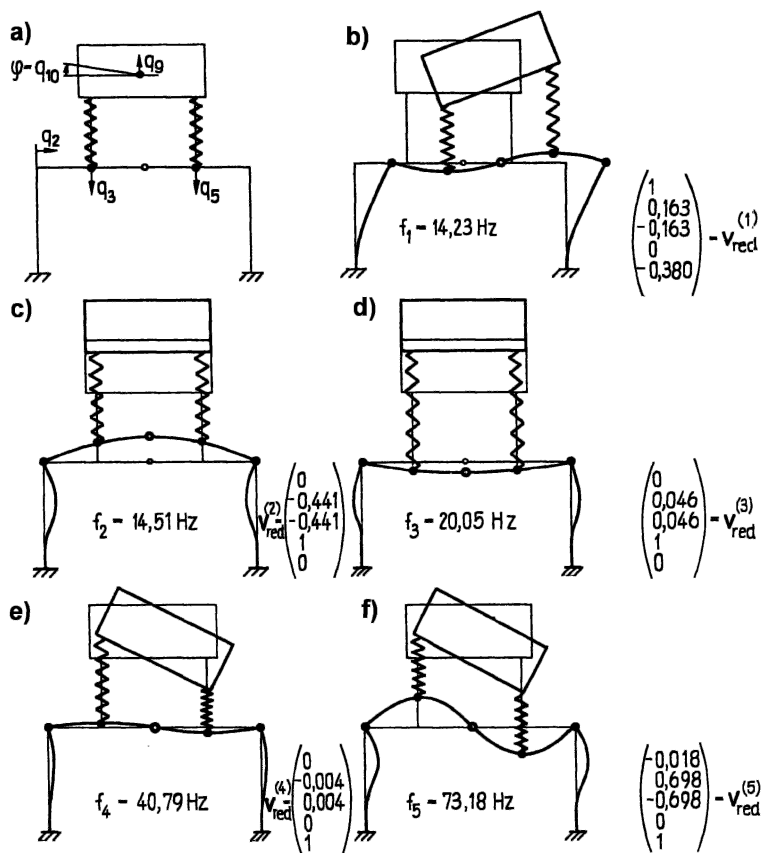


Bild 6.16 Tragwerk von Bild 6.4

- a) System mit den fünf externen Koordinaten $q^T = (q_2, q_3, q_5, q_9, q_{10})$
 b) Eigenschwingformen, Eigenvektoren $v_{\text{red}}^{(r)}$ und Eigenfrequenzen f_i des auf $n_1 = 5$ Freiheitsgrade reduzierten Systems

Hier werden lediglich drei bis vier Ziffern angegeben, obwohl bei der weiteren Rechnung mit mehr Ziffern gearbeitet wurde. Mit diesen reduzierten Matrizen wurde das Eigenwertproblem gemäß (6.207) gelöst. Für die Eigenfrequenzen und die reduzierten Vektoren $v_{\text{red}}^{(i)}$ ergaben sich die in Bild 6.16 angegebenen Werte.

Man vergleiche diese Ergebnisse mit denen des ursprünglichen Systems in Bild 6.10 und versuche, sich Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu erklären! Beim Vergleich bestätigt sich die in Abschnitt 6.4.3 begründete allgemeine Aussage, dass die Eigenfrequenzen des reduzierten Systems stets größer als die des ursprünglichen sind.

Beim reduzierten System entsprechen die auftretenden Eigenformen den niedrigsten des ursprünglichen Systems, weil die internen Koordinaten zweckmäßig gewählt wurden. Die erste Eigenform $v_{\text{red}}^{(1)}$ ist aber antimetrisch im Gegensatz zu

der symmetrischen Form v_1 . Man muss also $v_{\text{red}}^{(1)}$ mit der Eigenform v_2 und $v_{\text{red}}^{(2)}$ mit v_1 vergleichen! Solch eine Umordnung in der Reihenfolge der Eigenformen ist auch beim Vergleich der zugehörigen Eigenfrequenzen zu beachten.

Wenn man die Eigenformen durch Benutzung der Formel (6.208) direkt in allen Komponenten mit der Modalmatrix (6.148) vergleicht, stellt man fest, dass die qualitative Übereinstimmung, wie schon aus den beiden Bildern 6.10 und 6.16 ersichtlich, recht gut ist. Die quantitativen Unterschiede in den Eigenformen sind (dies ist praktisch häufig der Fall) größer als die der Eigenfrequenzen.

6.4.6

Aufgaben A6.7 bis A6.9

A6.7 Beanspruchung beim Anstoßen

Extrem hohe Belastungen entstehen beim Anstoßen eines bewegten Maschinenteils. Am Beispiel einer fallenden Klappe soll der typische Berechnungsgang als Fortsetzung des Beispiels aus Abschnitt 5.2.5.2 demonstriert werden.

Die Klappe wird als Biegeschwinger mit 4 Freiheitsgraden und die Stelle des Aufpralls als masselose Feder modelliert, vgl. Bild 6.17.

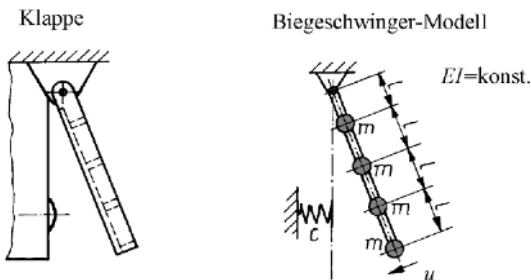


Bild 6.17
Balken vor dem Aufprall

Gegeben:

Masse jeder Punktmasse	$m = 4 \text{ kg}$
Abstand zwischen den Punktmassen	$l = 0,2 \text{ m}$
Geschwindigkeit der äußeren Punktmasse beim Anstoßen	$u = 10 \text{ m/s}$
Federkonstante der Stütze	$c = 10^6 \text{ N/m}$
Nachgiebigkeits- und Massenmatrix aus (5.62) und (5.63)	

Die Biegesteifigkeit EI des Balkenmodells ist in Form der relativen Größe $\bar{c} = 2EI/cl^3$ gegeben. Es wird angenommen, dass die Klappe nach dem Stoß mit der Stützfeder verbunden bleibt, d. h. keine Trennung erfolgt.

Gesucht:

1. in allgemeiner Form: die Anfangsbedingungen beim Aufprall
2. für die speziellen Werte $\bar{c} = 1/3$; $\bar{c} = 1$ und $\bar{c} \rightarrow \infty$: die Horizontalkräfte in Gelenk und Stütze; Biegemoment an der Stützstelle

A6.8 Erhöhung von Eigenfrequenzen durch eine starre Strebe

Ein Gestell wird durch eine Strebe versteift, vgl. Bild A6.8. Es soll ermittelt werden, wie sich die vier Eigenfrequenzen des ursprünglich nicht verstrebtten Gestells ändern.

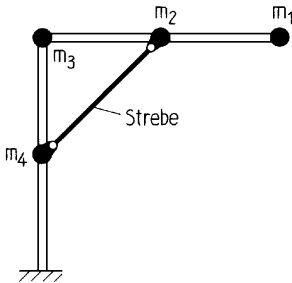


Bild 6.18
Gestell mit starrer Strebe

Gegeben:

Massenmatrix M und Steifigkeitsmatrix C des ursprünglichen Gestells, vgl. Tabelle 6.3, Fall 2.

Gesucht:

1. Zwangsbedingungen und Transformationsmatrix T für den Fall, dass eine starre Strebe zwischen den Massen m_2 und m_4 beidseitig gelenkig angebracht wird, vgl. Bild 6.18.
2. Matrizen M_1 und C_1 des Gestells mit Strebe
3. Vergleich der Eigenkreisfrequenzen des ursprünglichen Gestells mit denen des umgewandelten Gestells.

A6.9 Reduktion von vier auf zwei Freiheitsgrade

Vom Berechnungsmodell mit 4 Freiheitsgraden, das in Tabelle 6.3, Fall 2, dargestellt ist, sind Massen- und Federmatrix gegeben. Es soll auf ein Modell mit 2 Freiheitsgraden reduziert werden, indem die Koordinaten q_2 und q_4 zu internen Koordinaten werden. Man ermittle Feder- und Massenmatrix des reduzierten Systems und vergleiche die beiden Eigenfrequenzen und Eigenformen mit den ersten beiden des ursprünglichen Systems.

6.4.7**Lösungen L6.7 bis L6.9**

- L6.7** Bild 6.19 zeigt den Biegeschwinger nach dem Aufprall im deformierten Zustand. Die absoluten Verschiebungen lassen sich im Koordinatenvektor

$$\mathbf{q} = (q_1; q_2; q_3; q_4)^T \quad (6.241)$$

zusammenfassen. Die Bewegungsgleichung des Systems mit 4 Freiheitsgraden lautet nach (6.19):

$$D \cdot M \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (6.242)$$

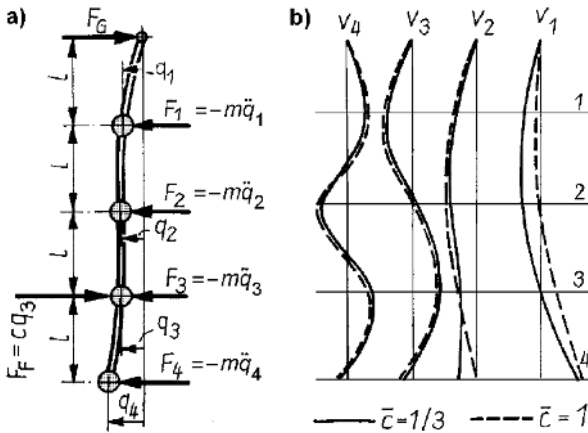


Bild 6.19 Aufprall des Balkens

a) Kräfte am frei geschnittenen System, b) Eigenformen gemäß (6.244) und (6.246)

Vor dem Aufprall dreht sich der Balken wie ein starrer Körper. Die Geschwindigkeiten verlaufen linear mit dem Abstand vom Drehpunkt, sodass zum Zeitpunkt des Aufpralls ($t = 0$) die Anfangsbedingungen für den Koordinatenvektor entsprechend (6.118) lauten:

$$\underline{\dot{q}}(0) = \underline{q}_0 = (0; 0; 0; 0)^T; \quad \underline{\dot{q}}(0) = \underline{u}_0 = (u/4) \cdot (1; 2; 3; 4)^T. \quad (6.243)$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren wurden mit einem Rechenprogramm ermittelt und sind aus Abschnitt 5.2.5.2 bekannt.

Die Eigenvektoren werden entsprechend (6.88) in der Modalmatrix $\mathbf{V}$ zusammengefasst. Bei der Normierung $\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{v}_i = 1$, vgl. (6.86), hat diese für $\bar{c} = 1/3$ die Form:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0,3164 & 0,5623 & 0,6285 & -0,4345 \\ 0,3412 & 0,6216 & -0,2808 & 0,6468 \\ -0,0792 & 0,3595 & -0,7027 & -0,6088 \\ -0,8816 & 0,4101 & 0,1800 & 0,1491 \end{bmatrix} = (\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4). \quad (6.244)$$

Folgende Eigenkreisfrequenzen wurden mit einem Rechenprogramm ermittelt, vgl. auch Bild 5.14:

$$\omega_1 = 146 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = 244 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_3 = 632 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_4 = 1109 \text{ s}^{-1}. \quad (6.245)$$

Man prüfe diese Werte durch Anwendung von (6.117) mit Benutzung von $\mathbf{D}$ aus (5.62), $\mathbf{M}$ aus (5.63) und den Zahlenwerten aus Abschnitt 5.2.5.2.

Für $\bar{c} = 1$ erhält man $\omega_1 = 225 \text{ s}^{-1}$, $\omega_2 = 315 \text{ s}^{-1}$, $\omega_3 = 977 \text{ s}^{-1}$ und $\omega_4 = 1878 \text{ s}^{-1}$.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0,0873 & 0,5746 & 0,6646 & -0,4696 \\ 0,0254 & 0,7164 & -0,1400 & 0,6830 \\ -0,3096 & 0,3918 & -0,6787 & -0,5386 \\ -0,9465 & -0,0560 & 0,2795 & 0,1512 \end{bmatrix} = (\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4). \quad (6.246)$$

Für die Berechnung der freien Schwingungen ist die Benutzung von modalen Koordinaten zweckmäßig. Gemäß (6.112) ergeben sich mit den Matrizen aus (6.244), (6.246) und (5.63) die modalen Massen aus $\text{diag}(\mu_i) = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}$ zu $\mu_i = m$. Die Anfangsausschläge sind bei allen $\bar{c}$ -Werten gleich $\mathbf{p}_0 = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{q}_0 = \mathbf{o}$, vgl. (6.243).

Die Anfangsgeschwindigkeiten der modalen Koordinaten bestimmt man mit (6.123) zu

$$\dot{\mathbf{p}}_0 = \text{diag}(1/\mu_i) \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}_0 = (\dot{p}_{10}; \dot{p}_{20}; \dot{p}_{30}; \dot{p}_{40})^T. \quad (6.247)$$

Die Werte von $\dot{\mathbf{p}}_0$ sind von der bezogenen Biegesteifigkeit $\bar{c}$ abhängig:

$$\begin{aligned} \bar{c} = 1/3: \quad \dot{\mathbf{p}}_0 &= u \cdot (-0,6913; \quad 1,1311; \quad -0,3303; \quad -0,0927)^T \\ \bar{c} = 1: \quad \dot{\mathbf{p}}_0 &= u \cdot (-1,1442; \quad 0,7397; \quad -0,1334; \quad -0,0287)^T \\ \bar{c} \rightarrow \infty: \quad \dot{\mathbf{p}}_0 &= u \cdot (\quad 1,3693; \quad 0; \quad 0; \quad 0)^T \end{aligned} \quad (6.248)$$

Daraus kann man mit (6.113) ermitteln, wie sich die kinetische Energie (die Rotationsenergie der drehenden Klappe) auf die vier Eigenformen verteilt, vgl. auch (6.145):

$$W_{\text{kin}} = \frac{m}{2} l^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \cdot \left(\frac{u}{4l} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \mu_i \dot{p}_{i0}^2 = 0,9375 m u^2. \quad (6.249)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \bar{c} = 1/3: \quad W_{\text{kin}} &= (0,2389 + 0,6397 + 0,0546 + 0,0043) m u^2 \\ \bar{c} = 1: \quad W_{\text{kin}} &= (0,6546 + 0,2736 + 0,0089 + 0,0004) m u^2 \\ \bar{c} \rightarrow \infty: \quad W_{\text{kin}} &= (0,9375 + 0 \quad + 0 \quad + 0) m u^2. \end{aligned} \quad (6.250)$$

Je steifer der Balken ist, desto mehr Energie erhält die erste Eigenform.

Jede Hauptkoordinate schwingt gemäß (6.126) harmonisch mit ihrer Eigenfrequenz:

$$p_i = \frac{\dot{p}_{i0}}{\omega_i} \sin \omega_i t; \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (6.251)$$

Die realen Koordinaten und deren Beschleunigungen gewinnt man daraus entsprechend (6.108) oder (6.129):

$$q_k = \sum_{i=1}^4 v_{ki} \frac{\dot{p}_{i0}}{\omega_i} \sin \omega_i t; \quad \ddot{q}_k = - \sum_{i=1}^4 v_{ki} \omega_i \dot{p}_{i0} \sin \omega_i t, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (6.252)$$

Die Horizontalkräfte in Stützfeder und Gelenk folgen aus den Gleichgewichtsbedingungen und betragen, vgl. Bild 6.19:

$$\begin{aligned} F_F &= \frac{1}{3} (F_1 + 2F_2 + 3F_3 + 4F_4) = -\frac{m}{3} (\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 + 3\ddot{q}_3 + 4\ddot{q}_4) = c q_3 \\ F_G &= \frac{1}{3} (2F_1 + F_2 - F_4) = -\frac{m}{3} (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 - \ddot{q}_4) \\ &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - F_F. \end{aligned} \quad (6.253)$$

Das Einsetzen der Beschleunigungen aus (6.252) liefert diese Kräfte in der Form:

$$F_F = \frac{m}{3} \sum_{i=1}^4 (v_{1i} + 2v_{2i} + 3v_{3i} + 4v_{4i}) \omega_i \dot{p}_{i0} \sin \omega_i t = \sum_{i=1}^4 F_{Fi} \sin \omega_i t \quad (6.254)$$

$$F_G = \frac{m}{3} \sum_{i=1}^4 (2v_{1i} + v_{2i} - v_{4i}) \omega_i \dot{p}_{i0} \sin \omega_i t = \sum_{i=1}^4 F_{Gi} \sin \omega_i t. \quad (6.255)$$

Analog ist das Biegemoment im Balken am Federangriffspunkt gleich dem Produkt aus der Trägheitskraft und dem Abstand, vgl. Bild 6.19 und (6.252):

$$\underline{\underline{M}} = F_4 l = -m \ddot{q}_4 l = m l \sum_{i=1}^4 v_{4i} \omega_i \dot{p}_{i0} \sin \omega_i t = \sum_{i=1}^4 M_i \sin \omega_i t. \quad (6.256)$$

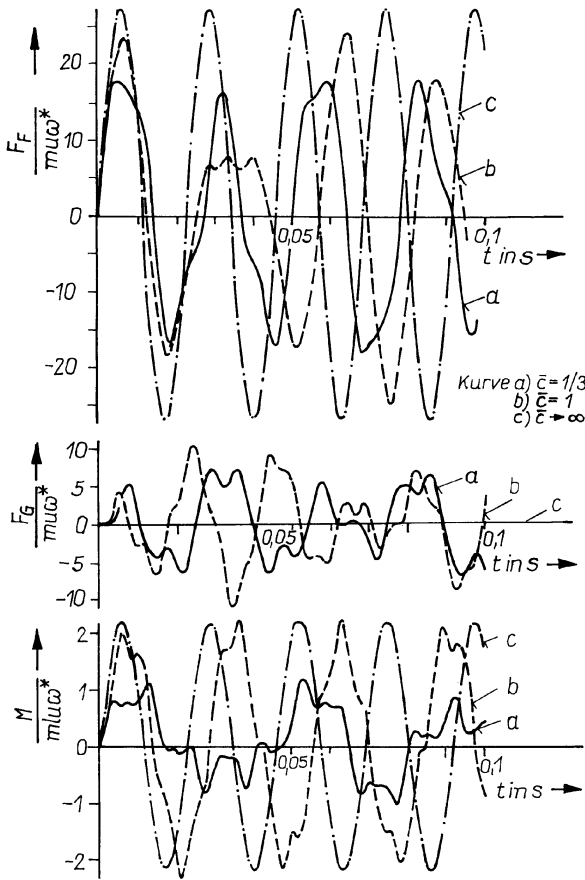


Bild 6.20
Zeitverläufe der
Horizontalkräfte und
des Biegemoments an
der Stelle der Feder
(Abhängigkeit von $\bar{c}$)

Mit den Daten der Aufgabenstellung und aus (6.244) und (6.246) können die Zahlenwerte für die durch (6.254) bis (6.256) definierten Amplituden der Kräfte (F_{Fi} ; F_{Gi}) und des Moments (M_i) jeder Eigenschwingung berechnet werden.

Aus Bild 6.20 erkennt man, dass die Kraftgrößen bei geringer Biegesteifigkeit EI (d. h. kleinerem $\bar{c}$ -Wert) vor allem von der zweiten Eigenschwingung bestimmt werden und auch der Einfluss der höheren Eigenschwingungen groß ist. Je größer die Biegesteifigkeit EI relativ zur Federkonstante c wird, desto größer wird der Einfluss der Grundschiwingung. Für den ideal starren Balken ergibt sich ein Schwinger mit nur einem Freiheitsgrad, der eine harmonische Bewegung mit seiner Eigenfrequenz vollführt.

Interessant an den Ergebnissen ist die Tatsache, dass der Maximalwert der Kraftgrößen, der im Verlaufe der Schwingung überhaupt auftreten kann, mit zunehmender Biegesteifigkeit EI ansteigt. Hätte man als Berechnungsmodell für diese Klappe nur einen starren Hebel mit der Stützfeder verwendet, so hätte sich für die Lagerkraft F_F ein etwas zu großer Maximalwert ($27,39 \text{ kN} > 25,88 \text{ kN}$) und für das Moment ein zu kleiner Maximalwert ($2,191 \text{ kN} \cdot \text{m} < 2,412 \text{ kN} \cdot \text{m}$) ergeben.

Im Falle des starren Hebels ($\bar{c} \rightarrow \infty$) tritt im Drehpunkt G überhaupt keine Gelenkkraft auf, weil die Federkraft genau im Stoßmittelpunkt dieses starren Körpers

angreift, vgl. A2.10. Erst bei Berücksichtigung der endlich großen Biegesteifigkeit der Klappe treten auch im Gelenk G nach dem Aufprall dynamische Kräfte auf, und zwar als Folge der angeregten Biegeschwingungen.

Fazit: Die dynamischen Belastungen in einem Bauteil nach einem Stoß sind proportional der Anfangsgeschwindigkeit und hängen von der Steifigkeitsverteilung innerhalb des angestoßenen Schwingungssystems ab. Mit größerer Steifigkeit eines Elements erhöhen sich die Eigenfrequenzen. Es kann keine allgemeine Aussage über den Einfluss der Steifigkeit auf die Größe der dynamischen Belastungen gemacht werden.

- L6.8** Die Strebe zwischen den Massen m_2 und m_4 (vgl. Bild 6.18) zwingt diese Massen dazu, dass ihre Wegkomponenten in Richtung der Strebe übereinstimmen. Trotzdem kann sich die Masse m_2 noch in der Ebene bewegen, und m_4 kann sich weiterhin horizontal verschieben. Die Zwangsbedingung findet man, wenn man die geometrischen Verhältnisse bei kleinen Deformationen betrachtet, vgl. Bild 6.21.

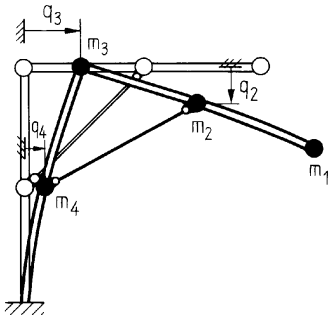


Bild 6.21 Gestell mit Strebe

Da bei vernachlässigbaren Längsverformungen das Dreieck starr bleibt, welches die drei Massen verbindet, gilt bei kleinen Winkeln ($q_k/l \ll 1$):

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1 \\ q_2 &= q_3 - q_4 \\ q_3 &= q_3 \\ q_4 &= q_4 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.257)$$

Die Koordinate q_2 lässt sich so eliminieren. Mit einer Betrachtung analog zu (6.217) ergibt sich in diesem Falle die Transformationsmatrix für den Koordinatenvektor $\mathbf{q}^T = (q_1, q_3, q_4)$.

Aus (6.214) erhält man dann mit den in Tabelle 6.3, Fall 2, gegebenen Matrizen analog zu (6.218) und (6.219) die Massenmatrix und die Federmatrix:

$$\underline{\underline{M_1}} = m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{C_1}} = \frac{48EI}{97l^3} \cdot \begin{bmatrix} 26 & -50 & 47 \\ -50 & 126 & -165 \\ 47 & -165 & 320 \end{bmatrix} \quad (6.258)$$

Die Eigenkreisfrequenzen des durch eine Strebe gemäß Bild 6.21 versteiften Systems ergeben sich aus (6.220) mit $\omega^* = \sqrt{48EI/(ml^3)}$ zu

$$\omega_1 = 0,088\,84\omega^*; \quad \omega_2 = 0,486\,89\omega^*; \quad \omega_3 = 0,958\,27\omega^*. \quad (6.259)$$

Sie sind zum Vergleich bei $\alpha = 45^\circ$ in Bild 6.14 als Punkte mit eingetragen und liegen erwartungsgemäß über denjenigen des ursprünglichen Systems. Die Stütze gegenüber dem raumfesten Bezugssystem erhöht die 2. und 3. Eigenfrequenz stärker als die Strebe, aber die erste Eigenfrequenz wird im Gegensatz dazu (wenn man beim 45° -Winkel vergleicht) durch die Strebe mehr vergrößert.

- L6.9** Das Verfahren erfordert die Ordnung der Koordinaten nach externen Koordinaten $\mathbf{q}_1$ und internen Koordinaten $\mathbf{q}_2$, sodass der Koordinatenvektor in die neue Form $\mathbf{q}^T = (q_1, q_3, q_2, q_4)$ gebracht wird. Innerhalb der Systemmatrizen sind demzufolge die Zeilen zwei und drei und die Spalten zwei und drei zu vertauschen. Die dem neu geordneten Koordinatenvektor zugeordneten Matrizen lauten damit ($c^* = 48EI/l^3$, $m^* = m$):

$$\mathbf{C} = c^* \begin{bmatrix} 26 & 9 & -59 & -12 \\ 9 & 74 & -54 & -131 \\ -59 & -54 & 160 & 72 \\ -12 & -131 & 72 & 304 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = m^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (6.260)$$

Die Teilmatrizen gemäß der Partitionierung nach (6.198) bzw. (6.205) sind

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{11} &= c^* \begin{bmatrix} 26 & 9 \\ 9 & 74 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{12} = c^* \begin{bmatrix} -59 & -12 \\ -54 & -131 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{22} = c^* \begin{bmatrix} 160 & 72 \\ 72 & 304 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_{11} &= m^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{12} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{22} = m^* \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.261)$$

Wird darauf (6.203) angewendet, so ergeben sich die reduzierten Matrizen nach folgender Zahlenrechnung:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{red}} &= c^* \left\{ \begin{bmatrix} 26 & 9 \\ 9 & 74 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -59 & -12 \\ -54 & -131 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 160 & 72 \\ 72 & 304 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -59 & -54 \\ -12 & -131 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathbf{C}_{\text{red}} &= c^* \begin{bmatrix} 3,464\,28 & -5,196\,43 \\ -5,196\,43 & 13,857\,10 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.262)$$

Aus (6.206) folgt analog

$$\mathbf{M}_{\text{red}} = m \begin{bmatrix} 1,314\,41 & 0,084\,18 \\ 0,084\,18 & 5,360\,33 \end{bmatrix}. \quad (6.263)$$

Aus dem Eigenwertproblem (6.207) des reduzierten Systems erhält man folgende Quadrate der Eigenkreisfrequenzen:

$$\omega_1^2 = 0,312\,97 \frac{EI}{ml^3}, \quad \omega_2^2 = 2,3346 \frac{EI}{ml^3}. \quad (6.264)$$

Im Vergleich zu denen des ursprünglichen Systems sind sie etwas größer, vgl. (6.136). Die zugehörigen Eigenvektoren sind (normiert mit $v_{1i} = 1$):

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_{\text{red}}^{(1)}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,501\,55 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{v}_{\text{red}}^{(2)}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,489\,29 \end{bmatrix}. \quad (6.265)$$

Die Zurückrechnung auf die ursprünglichen Lagekoordinaten entsprechend (6.208) ergibt die vollständigen Eigenvektoren, die nach der Normierung für den Koordinatenvektor $\mathbf{q}^T = (q_1, q_3, q_2, q_4)$ lauten:

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,501\,55 \\ 0,473\,46 \\ 0,143\,47 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,489\,29 \\ 0,314\,22 \\ -0,245\,79 \end{bmatrix}. \quad (6.266)$$

Man beachte die Vertauschung in der Reihenfolge von q_2 und q_3 gegenüber (6.142). Vergleicht man die für das reduzierte System erhaltenen Eigenformen mit den durch (6.142) bekannten Werten des ursprünglichen Systems, so erkennt man, dass sie mit hinreichender Genauigkeit übereinstimmen.

6.5

Erzwungene ungedämpfte Schwingungen

6.5.1

Allgemeine Lösung

Die Grundannahme bei der Behandlung erzwungener Schwingungen ist, dass die Erregerkräfte oder die kinematischen Erregungen, die auf ein mechanisches System wirken, explizit von der Zeit abhängen. Bei derartiger Modellierung wird **keine Rückwirkung** des Schwingers auf den Erreger zugelassen und ein unbegrenzt großer Energievorrat des Erregers angenommen. Beides trifft streng genommen nie zu, aber es ist eine zweckmäßige und oft gerechtfertigte Näherung. Mit der Vorgabe einer zeitabhängigen mechanischen Größe wird das behandelte Objekt gewissermaßen aus der mechanischen Umwelt herausgeschnitten, d. h., die **Modellgrenze** wird damit festgelegt.

Die Bewegungsgleichungen für erzwungene Schwingungen können z. B. mithilfe der Lagrange'schen Gleichungen oder aus den Gleichgewichtsbedingungen in Verbindung mit dem Prinzip von d'Alembert aufgestellt werden. Sie lauten in Matrixschreibweise, vgl. (6.18) und (6.19):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t) \quad \text{oder} \quad \mathbf{D}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{D}\mathbf{f}(t). \quad (6.267)$$

Auf der rechten Seite steht der Vektor der Erregerkräfte, $\mathbf{f}^T = [F_1, F_2, \dots, F_n]$, dessen einzelne Komponenten F_k verallgemeinerte Kräfte oder Momente darstellen, die in Richtung der verallgemeinerten Koordinaten q_k wirken. Der interessierende Verlauf $\mathbf{q}(t)$ könnte aus (6.267) durch numerische Integration gewonnen werden. Bei solchen Verfahren gehen aber wesentliche physikalisch-mechanische Informationen über das spektrale und modale Verhalten des Systems verloren.

Hier wird die Lösung unter Verwendung der aus 6.3.2 bekannten Hauptkoordinaten betrachtet. Wird die Transformation nach (6.108) vorgenommen, so ergibt sich analog zu (6.116) ein System von n entkoppelten Differenzialgleichungen:

$$\mu_i \ddot{p}_i + \gamma_i \dot{p}_i = h_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.268)$$

Die modalen Massen μ_i und die modalen Federn γ_i sind aus (6.104) und (6.105) bekannt, vgl. auch (6.112). Die Größen h_i sind die auf die i -te Eigenform reduzierten Erregerkräfte und werden als modale Kräfte bezeichnet. Sie ergeben sich aus den ursprünglichen Kraftgrößen folgendermaßen:

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{V}^T \mathbf{f}(t) \quad \text{oder} \quad h_i(t) = \sum_{k=1}^n v_{ki} F_k(t). \quad (6.269)$$

Jede modale Kraft h_i repräsentiert die Arbeit, die alle Kraftgrößen F_k längs der Deformation verrichten, die der Eigenform v_i entspricht. Jede der Gln. (6.268) entspricht formal der Bewegungsgleichung eines Einfeldschwingers, der als modaler Schwinger bezeichnet wird. Mit den Eigenkreisfrequenzen ω_i , vgl. (6.117), lautet die Lösung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen von (6.125):

$$p_i = p_{i0} \cos \omega_i t + \frac{\dot{p}_{i0}}{\omega_i} \sin \omega_i t + \frac{1}{\mu_i \omega_i} \int_0^t h_i(t') \sin \omega_i(t - t') dt'. \quad (6.270)$$

Der Integralausdruck in (6.270) ist das **Duhamel'sche Integral**. Für $\mathbf{h}(t) = 0$ ergibt sich der Sonderfall der freien Schwingungen. Die Geschwindigkeiten folgen daraus unter Benutzung der allgemeinen Regel zum Differenzieren eines Integrals:

$$\dot{p}_i = -\omega_i p_{i0} \sin \omega_i t + \dot{p}_{i0} \cos \omega_i t + \frac{1}{\mu_i} \int_0^t h_i(t') \cos \omega_i(t - t') dt'. \quad (6.271)$$

Die erzwungenen Schwingungen eines Systems können für beliebige zeitliche Kraftverläufe $h_i(t)$ durch Lösung des Duhamelschen Integrals berechnet werden. Falls nur die stationäre Lösung interessiert, wie z. B. bei harmonischer oder periodischer Erregung, so kann auf die Terme verzichtet werden, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind.

6.5.2

Harmonische Erregung (Resonanz, Tilgung)

Harmonische Erregungen treten im Maschinenbau sehr häufig auf, z. B. wenn Massenkkräfte durch rotierende Unwuchten entstehen. Außerdem interessieren die Lösungen der Bewegungsgleichungen für die harmonische Erregung deshalb, weil sich jede periodische Erregung als eine Superposition aus harmonischen Erregungen auffassen lässt. Es wird nun der Fall betrachtet, dass auf das Schwingungssystem n harmonisch veränderliche Kraftgrößen mit der Erregerkreisfrequenz Ω wirken, deren Phasenwinkel β_k unterschiedlich sein können.

$$F_k = \hat{F}_k \sin(\Omega t + \beta_k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.272)$$

Die Amplituden der verallgemeinerten Erregerkräfte werden in dem Vektor $\hat{\mathbf{f}}^T = [\hat{F}_1, \hat{F}_2, \dots, \hat{F}_n]$ zusammengefasst. Die modalen Kräfte sind nach (6.269)

$$h_i = \sum_{k=1}^n v_{ki} \hat{F}_k \sin(\Omega t + \beta_k) = \hat{h}_i \cdot \sin(\Omega t + \alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.273)$$

mit den Amplituden

$$\hat{h}_i = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n v_{ki} \hat{F}_k \cos \beta_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n v_{ki} \hat{F}_k \sin \beta_k \right)^2}. \quad (6.274)$$

Die Phasenwinkel folgen aus

$$\sin \alpha_i = \frac{\sum_{k=1}^n v_{ki} \hat{F}_k \sin \beta_k}{\hat{h}_i}, \quad \cos \alpha_i = \frac{\sum_{k=1}^n v_{ki} \hat{F}_k \cos \beta_k}{\hat{h}_i}. \quad (6.275)$$

Setzt man die Anfangsbedingungen $\mathbf{p}_0 = \mathbf{o}$ und $\dot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{o}$, folgt für die Deformationen der Hauptkoordinaten des Systems aus dem Integral (6.270) unter Verwendung von $\gamma_i = \mu_i \omega_i^2$ und für $\alpha_i = 0$:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\hat{h}_i}{\mu_i \omega_i} \int_0^t \sin \Omega t' \cdot \sin \omega_i(t - t') dt' \\ &= \frac{\hat{h}_i}{\gamma_i(1 - \Omega^2/\omega_i^2)} \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_i} \sin \omega_i t \right). \end{aligned} \quad (6.276)$$

Diese Bewegungen setzen sich aus Schwingungen sowohl mit der Erregerkreisfrequenz Ω als auch mit der Eigenkreisfrequenz ω_i zusammen. Der praktisch stets vorhandene Einfluss der Dämpfung führt dazu, dass der Anteil, der mit der Eigenkreisfrequenz ω_i verläuft, im Laufe der Zeit abklingt und deshalb oft vernachlässigt werden kann, vgl. Bild 6.23a und b.

Resonanz kann auftreten, wenn die Erregerfrequenz $f = \Omega/(2\pi)$ mit einer der Eigenfrequenzen ($f_i = \omega_i/(2\pi)$) übereinstimmt, d. h. bei

$$\Omega = \omega_i. \quad (6.277)$$

Wie die Bewegungen für den **Resonanzfall** im Laufe der Zeit anwachsen, kann man als Sonderfall von (6.276) durch einen Grenzübergang finden. Es gilt:

$$p_i = \lim_{\Omega \rightarrow \omega_i} \frac{\hat{h}_i \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_i} \sin \omega_i t \right)}{\gamma_i \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_i^2} \right)} = \frac{\hat{h}_i}{2\gamma_i} (\sin \Omega t - \Omega t \cos \Omega t). \quad (6.278)$$

Bild 6.22c illustriert diesen Bewegungsablauf. Im Resonanzfall wachsen die Amplituden linear mit der Zeit an.

Die stationäre Lösung ergibt sich aus

$$\mu_i \ddot{p}_i + \gamma_i \dot{p}_i = \hat{h}_i \sin(\Omega t + \alpha_i) \quad (6.279)$$

zu

$$p_i = \frac{\hat{h}_i \sin(\Omega t + \alpha_i)}{\gamma_i(1 - \Omega^2/\omega_i^2)} = \hat{p}_i \sin(\Omega t + \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.280)$$

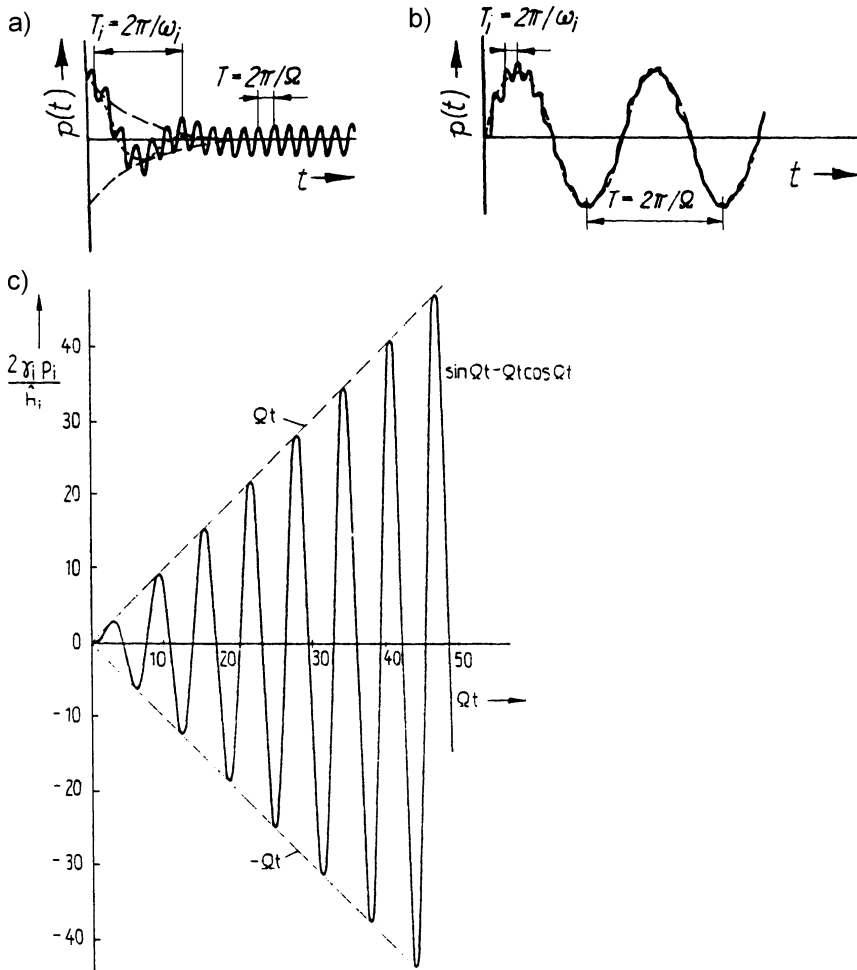


Bild 6.22 Zeitverläufe erzwungener Schwingungen bei harmonischer Erregung

- a) Abklingen der Eigenschwingung bei $\Omega > \omega_i$,
 b) Abklingen der Eigenschwingung bei $\Omega < \omega_i$,
 c) Resonanzfall des ungedämpften Schwingers ($\Omega = \omega_i$)

also für $\alpha_i = 0$ die aus (6.276) bekannte Lösung ohne den Term der Eigenschwingung. Obwohl hier $\alpha_i = \varphi_i$ gilt, wird im Hinblick auf den Dämpfungseinfluss, der in Abschnitt 6.6.3 behandelt wird, bereits zwischen den Winkeln α_i und φ_i unterschieden, vgl. (6.357).

Unter Benutzung der Transformation (6.108) erhält man daraus die Bewegung in den ursprünglichen Koordinaten. Mit

$$\hat{p}_i = \frac{\hat{h}_i}{\gamma_i(1 - \eta_i^2)}; \quad \eta_i^2 = \frac{\Omega^2 \mu_i}{\gamma_i} = \frac{\Omega^2}{\omega_{i0}^2} \quad (6.281)$$

folgt

$$q_k = \sum_{i=1}^n v_{ki} p_i = \sum_{i=1}^n v_{ki} \hat{p}_i \sin(\Omega t + \varphi_i) = \hat{q}_k \sin(\Omega t + \psi_k). \quad (6.282)$$

Die Amplituden der Koordinaten sind

$$\hat{q}_k = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n v_{ki} \hat{p}_i \cos \varphi_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n v_{ki} \hat{p}_i \sin \varphi_i\right)^2}. \quad (6.283)$$

Die Phasenwinkel ergeben sich aus

$$\cos \psi_k = \frac{\sum_{i=1}^n v_{ki} \hat{p}_i \cos \varphi_i}{\hat{q}_k}; \quad \sin \psi_k = \frac{\sum_{i=1}^n v_{ki} \hat{p}_i \sin \varphi_i}{\hat{q}_k}. \quad (6.284)$$

Die Lösung zeigt, dass bei harmonischer Erregung das System stationär mit der Erregerfrequenz schwingt. Die **erzwungene Schwingform**, die durch die Gesamtheit der q_k beschrieben wird, hängt von der Erregerfrequenz ab. Es besteht also ein wesentlicher Unterschied zwischen den erregerfrequenzabhängigen Schwingformen der erzwungenen Schwingungen und den nur von den Modellparametern abhängigen Eigenschwingformen.

Mit der Erregerfrequenz verändern sich die Schwingformen stetig. In der Nähe einer Resonanzstelle ($\Omega = \omega_i$) überwiegt in der Summe (6.282) der i -te Summand gegenüber den übrigen Termen, sodass die Amplituden der erzwungenen Schwingungen dann etwa der i -ten Eigenschwingform v_i entsprechen. Es ist deshalb manchmal ausreichend, bei erzwungenen Schwingungen die der Resonanzstelle am nächsten gelegenen Eigenschwingungen zu berücksichtigen, da die Amplituden der „entfernteren“ vernachlässigbar klein bleiben.

Die in Bild 6.23b dargestellten Schwingformen lassen sich aus den in Bild 6.23c angegebenen Amplituden-Frequenzgängen (die nicht genau maßstäblich gezeichnet wurden) erklären. Oft besteht in der Praxis auch die umgekehrte Aufgabe, sich aus gemessenen Amplituden-Frequenzgängen erzwungene Schwingformen zu rekonstruieren. Man beachte deshalb die engen Beziehungen zwischen beiden Darstellungen desselben physikalischen Zusammenhanges. Bei sehr niedriger Erregerfrequenz ($\Omega \rightarrow 0$) ist die erzwungene Schwingform nahezu identisch mit der statischen Biegelinie. „Niedrig“ bedeutet hier, dass die Erregerfrequenz wesentlich kleiner als die erste Eigenfrequenz ist. Wegen der Änderung des Vorzeichens im Nenner des ersten Summanden wechselt die Amplitude an der Resonanzstelle ihr Vorzeichen. Der dadurch bedingte **Phasensprung** ist typisch für jede Resonanzstelle, wie man auch in Bild 6.23c bei jeder Koordinate an den Stellen $\Omega = \omega_i$ sehen kann.

Man beachte, dass nach dem Phasensprung vom rechten Lager jeweils ein Schwingungsknoten bei weiterer Frequenzerhöhung nach links in den Balken „wandert“. Die so genannten Tilgungsfrequenzen (auch Antiresonanzen genannt) treten dann auf, wenn der Schwingungsknoten der erzwungenen Schwingform die Kraftangriffsstelle erreicht. Aus der Anzahl und der Lage der Schwingungsknoten einer erzwungenen Schwingung kann man (z. B. bei Messungen) darauf schließen, zwischen welchen Eigenfrequenzen eine Erregerfrequenz liegt.

Das Übereinstimmen einer Erregerfrequenz mit einer Eigenfrequenz sagt noch nichts über die Gefährlichkeit dieser Schwingungen aus. Es kann durchaus vorkommen, dass $\Omega = \omega_i$ ist und trotzdem keine sehr großen Amplituden auftreten, weil nämlich die modale Kraft $h_i = 0$ ist. Wenn der Erregerkraftvektor $\mathbf{f}$ orthogonal zur i -ten Eigenschwingform $\mathbf{v}_i$ ist, gilt:

$$h_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{f} = \mathbf{f}^T \mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^n v_{ki} F_k = 0 \quad (6.285)$$

und es treten keine Ausschläge auf (so genannte „Scheinresonanz“).

Ein Sonderfall davon liegt vor, wenn eine Erregerkraft in der Nähe des Schwingungsknotens einer Eigenschwingform wirkt. Die Amplituden einer Schwingform sind Null, wenn die Kraft genau in deren Schwingungsknoten angreift. Man sollte sich einprägen, dass man Resonanzen nur zu fürchten braucht, wenn bei der betreffenden Resonanzfrequenz die Erregerkräfte in die zugehörige Eigenschwingform Energie einleiten.

Falls auf den Schwinger nur eine einzige harmonische Kraft in Richtung der Koordinate q_s ($1 \leq s \leq n$) wirkt, dann gilt nach (6.273)

$$h_i = v_{si} \hat{F}_s \sin(\Omega t + \beta_s) = \hat{h}_i \sin(\Omega t + \beta_s), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.286)$$

und die entsprechende stationäre Lösung nach (6.282) lautet:

$$q_k(t) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{v_{ki} v_{si}}{\gamma_i (1 - \eta_i^2)} \right] \hat{F}_s \sin(\Omega t + \beta_s) = \hat{q}_k \sin(\Omega t + \beta_s). \quad (6.287)$$

Zwischen den Amplituden besteht die Beziehung

$$\hat{q}_k = D_{sk} \hat{F}_s \quad (6.288)$$

mit der **dynamischen Nachgiebigkeit**

$$D_{sk}(\Omega) = \sum_{i=1}^n \frac{v_{ki} v_{si}}{\gamma_i (1 - \eta_i^2)} \quad (6.289)$$

zwischen der Krafteinleitungsstelle (q_s) und der Koordinate q_k . Es gilt offenbar $D_{ks} = D_{sk}$. Die Deformation an der Krafteinleitungsstelle ($k = s$) beträgt:

$$q_s(t) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{v_{si}^2}{\gamma_i (1 - \eta_i^2)} \right] \hat{F}_s \sin(\Omega t + \beta_s) = D_{ss} \hat{F}_s \sin(\Omega t + \beta_s). \quad (6.290)$$

Aus (6.290) folgt:

$$D_{ss}(\Omega) = \frac{\hat{q}_s}{\hat{F}_s} = \sum_{i=1}^n \frac{v_{si}^2}{\gamma_i (1 - \eta_i^2)}. \quad (6.291)$$

Die dynamische Nachgiebigkeit D_{ss} besitzt, wie aus (6.291) ersichtlich ist, n Resonanzstellen. Daraus folgt, dass zwischen diesen Unendlichkeitsstellen $n - 1$ Nullstellen existieren, also Erregerfrequenzen, bei denen $D_{ss}(\Omega) = 0$ ist. An diesen Stellen bleibt der Kraftangriffspunkt in Ruhe, aber alle anderen Punkte des Systems schwingen weiter, vgl. auch Bild 6.23c. Diese Erscheinung bedeutet Schwingungstilgung oder „Antiresonanz“. Die entsprechenden Frequenzen $f_i = v_i/2\pi$ nennt man **Tilgungsfrequenzen**.

Ein System mit n Freiheitsgraden besitzt $n - 1$ Tilgungsfrequenzen bezüglich jedes Kraftangriffspunktes, vgl. auch die ausführliche Diskussion in Abschnitt 4.4. Bei der Tilgung ist der Kraftangriffspunkt unbeweglich, d. h., man kann sich ihn befestigt vorstellen und die dann vorhandene Schwingform als Eigenschwingformen des in der Richtung q_s festgehaltenen Systems auffassen. Die Erregerkraft erscheint dann als Lagerkraft. Infolgedessen kann man auch die Tilgungsfrequenzen als Eigenfrequenzen eines Systems mit $(n - 1)$ Freiheitsgraden mit den üblichen Eigenwertprogrammen bestimmen.

Bringt man in (6.291) alle Summanden auf einen Hauptnenner, so sind dessen Nullstellen die Eigenkreisfrequenzen. Andererseits muss der sich ergebende Zähler ein Polynom $(n - 1)$ -ten Grades sein, dessen Wurzeln die Tilgungsfrequenzen ν_k sind. Bezeichnet man mit Π die Produktbildung und mit d_{ss} den verbleibenden Zahlenwert der Polynome, so findet man aus dieser Überlegung die Darstellung:

$$D_{ss}(\Omega) = d_{ss} \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \Omega^2 / \nu_k^2)}{\prod_{i=1}^n (1 - \Omega^2 / \omega_i^2)}. \quad (6.292)$$

Die d_{ss} stellen die dynamische Nachgiebigkeit bei $\Omega = 0$ dar, d. h. die statische Nachgiebigkeit (Hauptdiagonalelemente der Matrix $\mathbf{D}$). Gleichung (6.292) erlaubt, die dynamische Nachgiebigkeit aus der statischen Nachgiebigkeit zu berechnen, wenn die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die Tilgungskreisfrequenzen ν_k eines Systems bekannt sind.

6.5.3

Instationäre Erregung (Rechteckstoß)

Neben der harmonischen Erregung ist die Erregung während einer endlichen Erregungszeit Δt ein wichtiger Belastungsfall im Maschinenbau. Damit können Belastungen und Entlastungen erfasst werden, welche bei Anfahr- und Bremsvorgängen auftreten. Auch **kurzzeitige Belastungen** bei Kupplungsvorgängen, beim Anstoßen von Fahrzeugen oder Maschinenteilen, bei der Aufnahme und Abgabe von Werkstücken (Greifen, Öffnen, Schließen) oder bei technologischen Prozessen (Umformen, Schneiden) verlangen oft eine Berechnung der entstehenden Maximalwerte von Kraft- und Bewegungsgrößen.

In Abschnitt 4.3.3 wurden bereits für den Torsionsschwinger verschiedene Erregungen behandelt. Die Ergebnisse aus Bild 4.33 und Bild 4.35 lassen sich auf modale Schwinger übertragen. Hier wird ein idealer Rechteck-Verlauf der modalen Erregerkraft angenommen. Damit können typische Zusammenhänge gezeigt werden, die auch bei anderen Kraftverläufen auftreten, z. B. bei halbsinusförmigem Kraftverlauf. Insbesondere ist für sehr kurze Belastungszeiten $\Delta t \ll T_i$ damit auch die Stoßerregung erfassbar, vgl. Bild 6.24a.

Falls eine konstante Einzelkraft F_{s0} an der Stelle s in Richtung der Koordinate q_s wirkt, ergeben sich die modalen Kräfte gemäß (6.269) zu

$$h_i = v_{si} F_{s0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.293)$$

Wirkt die Kraft F_{s0} plötzlich auf ein ruhendes System während der Zeit $0 \leq t \leq \Delta t$, findet man die Hauptkoordinaten aus (6.270):

$$p_i = \frac{h_i}{\mu_i \omega_i} \int_0^t \sin \omega_i(t - t') dt' = \frac{h_i}{\gamma_i} (1 - \cos \omega_i t). \quad (6.294)$$

Für $t > \Delta t$ ergibt sich, weil dann $F_s = 0$ und die modale Kraft $h_i = 0$ ist,

$$p_i = \frac{h_i}{\mu_i \omega_i} \int_0^{\Delta t} \sin \omega_i(t - t') dt' + \int_{\Delta t}^t 0 dt' = \frac{h_i}{\gamma_i} [\cos \omega_i(t - \Delta t) - \cos \omega_i t] \quad (6.295)$$

und nach einigen trigonometrischen Umformungen folgt daraus

$$p_i = \frac{2h_i}{\gamma_i} \cdot \sin \frac{\omega_i \Delta t}{2} \sin \omega_i \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right). \quad (6.296)$$

Setzt man $\omega_i = 2\pi/T_i$, so lässt sich p_i mit Hilfe von (6.294) für $0 \leq t/\Delta t \leq 1$ und (6.296) für $t/\Delta t > 1$ darstellen. Für verschiedene Verhältnisse $\Delta t/T_i$ zeigt dies Bild 6.24c. Man sieht, dass der Maximalwert

$$p_{i \max} = \frac{2h_i}{\gamma_i} \left| \sin \frac{\omega_i \Delta t}{2} \right| = \frac{2h_i}{\gamma_i} \left| \sin \frac{\pi \Delta t}{T_i} \right|. \quad (6.297)$$

beträgt. Also deformiert sich jede Hauptkoordinate infolge einer plötzlichen Belastung höchstens doppelt so viel, wie durch eine gleich große statische Belastung. Der Maximalwert hängt vom Verhältnis Erregerzeit Δt zur Periodendauer T_i der betreffenden Eigenschwingung ab.

Um Stoßerregungen zu vergleichen und Laborprüfungen zu simulieren, wird oft der *Spitzenwert* der im System entstehenden Kraft benutzt, die so genannte maximale *Stoßantwort*. Man unterscheidet die Initial-Stoßantwort, welche die größte Amplitude während der Wirkungsdauer ($0 < t < \Delta t$) berücksichtigt, und die Residual-Stoßantwort, welche die größte Amplitude nach der Erregungszeit ($t > \Delta t$) ausdrückt.

Bild 6.24c veranschaulicht die Stoßantwort für einen Rechteck- und einen Halbsinus-Kraftverlauf. Die volle Kurve entspricht der durch (6.294) und (6.295) erhaltenen Lösung, während für den Halbsinus-Stoß Ergebnisse aus der Literatur entnommen wurden.

Beträgt die Erregungszeit ein ganzzahliges Vielfaches einer Periodendauer ($\Delta t = nT_i$), so bleibt die betreffende Eigenschwingform nach dem Aufhören der Kraft in Ruhe, vgl. (6.296). Ist die Erregungszeit klein im Verhältnis zur Periodendauer, so ergibt sich mit einer Reihenentwicklung für $\Delta t/T_i \ll 1$ aus (6.296) wegen $\sin(\pi \Delta t/T_i) \approx \pi \Delta t/T_i$

$$p_{i \max} = \frac{2\pi h_i \Delta t}{\gamma_i T_i} = \frac{\omega_i}{\gamma_i} h_i \Delta t = \frac{h_i \Delta t}{\sqrt{\gamma_i \mu_i}}. \quad (6.298)$$

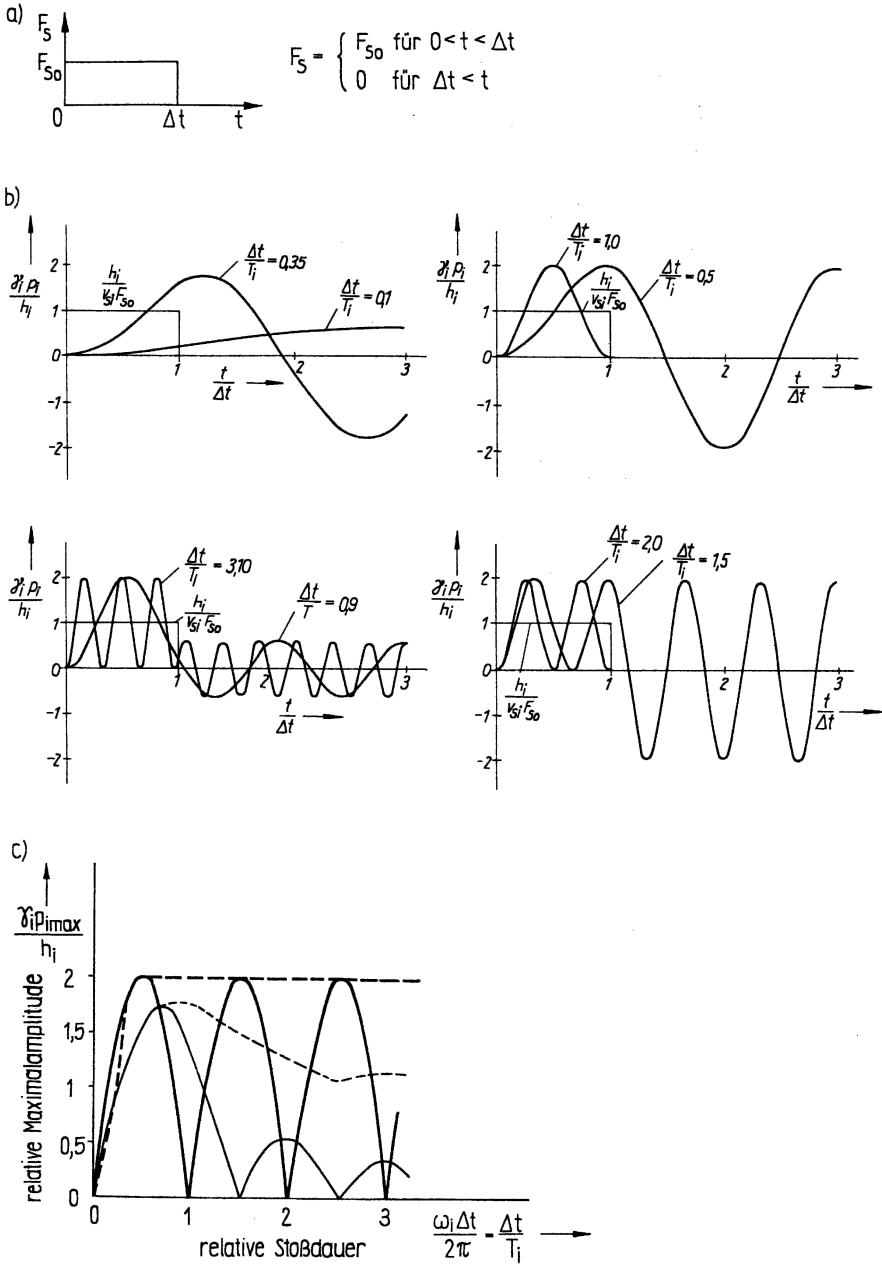


Bild 6.24 Reaktion eines modalen Schwingers auf eine Kraft endlicher Dauer Δt
a) Rechteckstoß, b) Zeitverläufe, c) Maximale Stoßantwort (dicke Linien: Rechteck-Stoß; dünne Linien: Halbsinus-Stoß; gestrichelt: Initial-Maximalwert; Volllinie: Residual-Maximalwert)

Die Koordinaten q_k ergeben sich aus (6.108), (6.293) und (6.296) für $t > \Delta t$:

$$\begin{aligned} q_k &= \sum_{i=1}^n v_{ki} \frac{2h_i}{\gamma_i} \sin \frac{\omega_i \Delta t}{2} \sin \omega_i \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) \\ &= 2F_s \sum_{i=1}^n \frac{v_{ki} v_{si}}{\gamma_i} \sin \frac{\omega_i \Delta t}{2} \sin \omega_i \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.299)$$

Sie entstehen als Superposition aller Schwingungen, und es kann nicht wie bei dem in Abschnitt 4.3.3.2 behandelten Fall gesagt werden, dass die maximalen dynamischen Deformationen q_k doppelt so groß wie die statischen sind. Bezüglich jeder Koordinate q_k besitzt das Verhältnis von statischen und dynamischen Deformationen einen anderen Wert, der wesentlich durch die Eigenschwingformen v_i bestimmt wird. Infolge der meist irrationalen Zahlenwerte der ω_i werden die Maximalwerte der Hauptkoordinaten im allgemeinen nicht gleichzeitig erreicht. Als Abschätzung für die Koordinaten kann man folgende Ungleichung für diesen Belastungsfall angeben:

$$q_{k \max} \leq 2F_s \sum_{i=1}^n \left| \frac{v_{ki} v_{si}}{\gamma_i} \sin \frac{\omega_i \Delta t}{2} \right|. \quad (6.300)$$

Um die Wirkung stoßartiger Belastungen beurteilen zu können, müssen also die Stoßkraft F_{s0} , die Erregungszeit Δt , die Eigenschwingformen v_i und die Eigenkreisfrequenzen ω_i bekannt sein. Infolge der Dämpfung werden die Maximalausschläge den großen Wert gemäß (6.300) nicht erreichen, da die höheren Eigenschwingformen schnell abklingen und sich nicht alle Spitzenwerte summieren. Bei beliebigem Kraftverlauf $h_i(t)$ gilt gemäß (6.270) wegen $\sin \omega_i(t - t') = \sin \omega_i t \cos \omega_i t' - \cos \omega_i t \sin \omega_i t'$:

$$p_i = \frac{1}{\mu_i \omega_i} \left\{ \left[\int_0^t h_i(t') \cos \omega_i t' dt' \right] \sin \omega_i t - \left[\int_0^t h_i(t') \sin \omega_i t' dt' \right] \cos \omega_i t \right\}. \quad (6.301)$$

Ein Stoß ist kinematisch als ein Geschwindigkeitssprung definiert, analog zum Ruck als Beschleunigungssprung. Aus der Sicht der Dynamik ist die **Stoßkraft** eine im Verhältnis zur Periodendauer der angeregten Schwingung kurzzeitig wirkende Erregerkraft. Bei der folgenden Betrachtung wird nicht zwischen kinematischer (Weg-, Winkel-) und Kraft-Erregung unterschieden, da sich beide Erregerarten auf eine modale Erregerkraft für die einzelnen Hauptschwingungen transformieren lassen. Dafür ($\Delta t \ll T_i$) gelten die Näherungen

$$\omega_i t' \ll 1, \quad \cos \omega_i t' = 1, \quad \sin \omega_i t' = 0 \quad (6.302)$$

und mit dem Impuls $I_i = \int_0^t h_i(t') dt'$ ergibt sich aus (6.301) näherungsweise

$$p_i = \frac{I_i}{\mu_i \omega_i} \sin \omega_i t. \quad (6.303)$$

Die Amplitude dieser Restschwingung (auch residuelle Stoßantwort genannt) ist also bei Stößen nur vom Impuls und nicht vom Zeitverlauf der Erregerkraft abhängig. Man beachte, dass die Lösung gemäß (6.303) mit derjenigen übereinstimmt, die bei freien Schwingungen mit der Anfangsbedingung $\dot{p}_{i0} = I_i/\mu_i$ auftritt, vgl. (6.129).

6.5.4

Beispiele

6.5.4.1

Gestell

Als erstes Beispiel wird das Gestell mit 4 Freiheitsgraden aus Tabelle 6.3, Fall 2, betrachtet. Gesucht sind die dynamische Nachgiebigkeit $D_{11}(\Omega)$ und die Amplituden der Koordinaten in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz. Aus 6.3.4.2 sind die Modalmatrix $\mathbf{V}$, die Diagonalmatrizen der modalen Massen $\text{diag}(\mu_i)$ und modalen Federkonstanten $\text{diag}(\gamma_i)$ bekannt. Weiterhin gilt $\mathbf{h} = \mathbf{V}^T \mathbf{f} = \mathbf{V}^T \cdot [1, 0, 0, 0]^T F_1 = F_1 \cdot [1, 1, 1, 1]^T$ aufgrund der Normierung von $\mathbf{V}$ mit $v_{li} = 1$ nach (6.142). Die statischen Durchbiegungen, die man zum Vergleich heranziehen kann, ergeben sich mit (6.131) zu

$$\mathbf{q}_{\text{st}} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{f} = [64, 29, 24, 6]^T \frac{l^3 F_1}{48EI}. \quad (6.304)$$

Die dynamische Nachgiebigkeit an der Kraftangriffsstelle ergibt sich aus (6.291) für $s = 1$ nach Einführung eines Hauptnenners

$$\begin{aligned} \frac{48EI}{64l^3} D_{11}(\Omega) &= \frac{q_1}{q_{1\text{st}}} \\ &= \frac{1 - 39,59 \left(\frac{\Omega}{\omega^*}\right)^2 + 77,14 \left(\frac{\Omega}{\omega^*}\right)^4 - 30,31 \left(\frac{\Omega}{\omega^*}\right)^6}{1 - 176 \left(\frac{\Omega}{\omega^*}\right)^2 + 3480 \left(\frac{\Omega}{\omega^*}\right)^4 - 5456 \left(\frac{\Omega}{\omega^*}\right)^6 + 1940 \left(\frac{\Omega}{\omega^*}\right)^8}. \end{aligned} \quad (6.305)$$

Die Wurzeln des Zählers liefern die **Tilgungsfrequenzen** $f_k = v_k/(2\pi)$ aus:

$$v_1^2 = 0,0266 \omega^{*2}, \quad v_2^2 = 0,6710 \omega^{*2}, \quad v_3^2 = 1,8478 \omega^{*2} \quad (6.306)$$

mit $\omega^{*2} = 48EI/ml^3$ gemäß (6.134). Die Wurzeln des Nenners sind aus (6.136) bekannt. Damit lässt sich die dynamische Nachgiebigkeit in der Form von (6.292) schreiben:

$$D_{11}(\Omega) = \frac{64l^3}{48EI} \frac{\left(1 - \frac{\Omega^2}{v_1^2}\right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{v_2^2}\right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{v_3^2}\right)}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_3^2}\right) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_4^2}\right)}. \quad (6.307)$$

Aus dieser Darstellung ist sowohl die Lage der Eigenfrequenzen als auch die Lage der Tilgungsfrequenzen erkennbar.

Die **Tilgungsfrequenzen** sind die Eigenfrequenzen des in Bild 6.25a dargestellten Rahmens, welcher aus dem ursprünglichen Gestell dadurch entsteht, dass das rechte Lager starr gestützt ist. Dieses Lager sorgt dafür, dass dieser Punkt sich nicht vertikal bewegen kann. Wenn der ursprüngliche (nicht an dieser Stelle gestützte Rahmen) mit einer harmonischen vertikalen Erregerkraft dort mit der Tilgungsfrequenz erregt würde, dann würde dieser Punkt in Ruhe bleiben und es käme zu keiner Resonanz.

Das freie Gestell hat bei der Tilgungsfrequenz an dieser Stelle einen Schwingungsknoten.

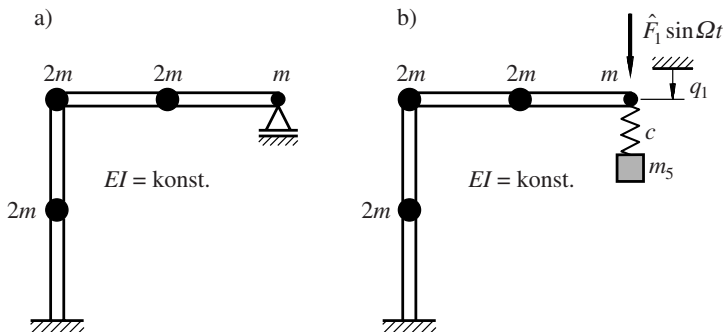


Bild 6.25 Zum Tilgungseffekt am Gestell

a) Gestell mit zusätzlichem Lager, b) Gestell mit Schwingungstilger

Um zu erreichen, dass bei einer vorgegebenen Erregerkreisfrequenz Ω der Kraftangriffspunkt in Ruhe bleibt, kann ein **Schwingungstilger** in Form eines Feder-Masse-Systems angeordnet werden, wie es Bild 6.25b zeigt. Dieser Zusatzschwinger bewirkt, dass sich alle Eigenfrequenzen des ursprünglichen Gestells verschieben. Die Eigenform derjenigen Eigenfrequenz, die der Erregerfrequenz entspricht, hat dann an der Kraftangriffsstelle einen Schwingungsknoten! Damit Schwingungstilgung auftritt, muss die Bedingung $\Omega^2 = c/m_5$ erfüllt werden.

Dies kann theoretisch mit einer großen Masse (und einer steifen Federkonstante) oder mit einer kleinen Masse (und kleinen Federkonstante) erreicht werden. Der Kraftangriffspunkt bleibt deshalb in Ruhe, weil die dynamische Kraft des Tilgers zu jedem Zeitpunkt entgegengesetzt zur Erregerkraft und von gleichem Betrage ist. Die Amplituden der Tilgermasse sind demzufolge umgekehrt proportional zur Federkonstante (und Tilgermasse). Eine Dämpfung beeinträchtigt den idealen Tilgereffekt zwar, aber sie verbreitert auch den Frequenzbereich, in dem geringere Amplituden auftreten.

6.5.4.2 Schwingförderer

Als zweites Beispiel werden die erzwungenen Schwingungen eines Schwingförderers betrachtet (Bild 6.26). Die Erregung erfolgt mit $f = 50$ Hz durch elektromagnetische Kräfte, die zwischen den eingezeichneten Erregermassen und der Schwingrinne wirken. Für den Erregerfrequenzbereich $f = 50$ bis 60 Hz sind im Bild 6.26a einige errechnete erzwungene Schwingformen dargestellt. Eine Eigenfrequenz liegt bei etwa $f = 59,5$ Hz, was man daraus erkennt, dass zwischen 59 Hz und 60 Hz ein Phasensprung auftritt.

Aus Bild 6.26 geht hervor, dass die erzwungene Schwingform im unterkritischen Bereich sich der Schwingform des federnd aufgehängten starren Balkens annähert. Die Amplituden des Balkens nehmen in Resonanznähe zu. Die Schwingrinne führt

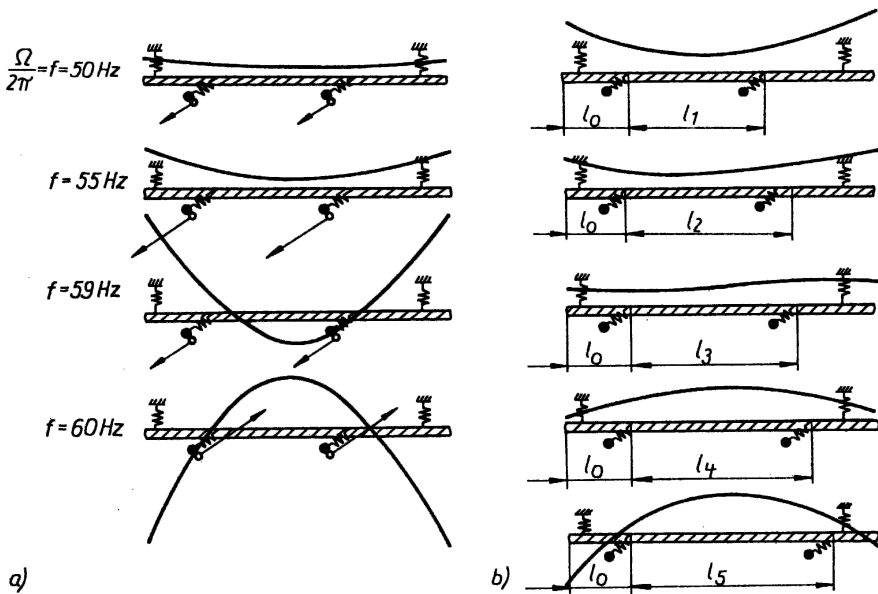


Bild 6.26 Erzwungene Schwingformen eines Schwingförderers

a) im Bereich von $f = 50 \dots 60 \text{ Hz}$ (Die Pfeile geben die Bewegungsrichtungen der Massen der Erreger an, wobei die Längen den Amplituden proportional sind.)

b) bei $f = 50 \text{ Hz}$ und verschiedenen Abständen l_i der Schwingungserreger

starke Biegeschwingungen aus, sodass der Fördervorgang gestört würde, weil sich an den Schwingungsknoten das Fördergut staut. Es wäre also ungünstig, die Rinne in Resonanznähe zu betreiben. Bemerkenswert ist der Phasensprung der Schwingform nach dem Überschreiten der Resonanzfrequenz, der typisch für alle Schwinger ist, vgl. Bild 6.23.

Da ein Schwingförderer infolge der festliegenden elektrischen Netzfrequenz bei 50 Hz betrieben werden muss, wurde geprüft, wie sich die Schwingformen bei Variation des Angriffspunktes einer der beiden Erreger verändern. Das Ergebnis dieser Analyse zeigt Bild 6.26b. Man erkennt, dass die Anbringung der Erreger im Abstand l_3 ein gleichmäßiges Fließen des Fördergutes erwarten lässt, während beim Abstand l_1 mit einer Gutstauung in Rinnenmitte und bei l_5 wegen des Schwingungsknotens sogar mit einem gegenläufigen Fließen des Gutes in Teilen der Rinne zu rechnen ist.

6.5.5

Aufgaben A6.10 bis A6.12

A6.10 Bewegungsgleichungen in Hauptkoordinaten

Wie lauten die Bewegungsgleichungen in Hauptkoordinaten für das in Bild 6.2 dargestellte System, wenn die beiden Erregerkräfte F_1 und F_2 in Richtung der Koordinaten q_1 , q_2 wirken? Bei welchen Größen von F_1 und F_2 wird die zweite Eigenform nicht erregt?

A6.11 Erregung durch Kraftsprung

Auf das in Aufgabe A6.10 behandelte System wirke am Balkenende plötzlich eine Vertikalkraft, d. h. es sei $F_1 \neq 0$ und $F_2 = 0$. Man berechne den zeitlichen Verlauf der Koordinaten q_1 und q_2 und schätze die Größe des maximalen Momentes an der Einspannstelle ab, indem man für diesen Fall eine zu (6.300) analoge Formel ableitet.

A6.12 Unwuchterregung eines Fundamentblockes

Ein Rotor, der die Unwucht $U = me$ hat, rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die vertikale Achse. Die Eigenformen des Fundamentblockes sind bekannt, vgl. Bild 3.7 und Abschnitt 3.2.2.1. Man bestimme den Erregerkraftvektor unter der Annahme, dass die Fliehkraft unabhängig von den Schwingungen des Fundamentkörpers konstant bleibt, also die Rückwirkung der Fundamentalschwingungen darauf vernachlässigbar klein ist.

Gegeben:

Fliehkraft des Rotors: $F = me\Omega^2$

Horizontale Abstände der Rotorachse von der vertikalen Schwerpunktschwerachse: ξ_A, η_A

Abstand der Unwuchtebene von der horizontalen Schwerpunktebene: ζ_A

Bezugslänge l^* (Sie wird eingeführt, damit alle generalisierten Koordinaten und alle Kraftgrößen dimensionsgleich sind.)

Koordinatenvektor, vgl. Bild 6.27:

$$\mathbf{q}^T = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6] = [x_S, y_S, z_S, l^* \varphi_x, l^* \varphi_y, l^* \varphi_z]; \quad |\varphi_x|, |\varphi_y|, |\varphi_z| \ll 1$$

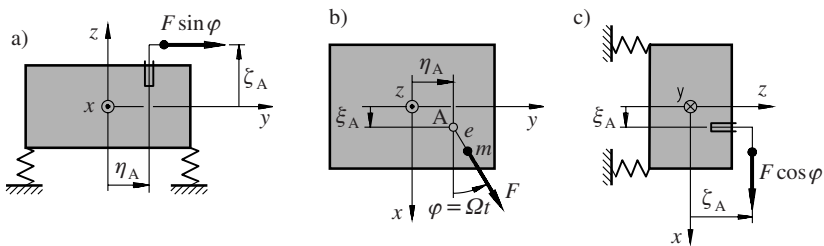


Bild 6.27 Unwuchterreger auf Fundamentblock

Erregerkraftvektor:

$$\mathbf{f}^T = [F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6] = [F_x, F_y, F_z, M_x^S/l^*, M_y^S/l^*, M_z^S/l^*]$$

Modalmatrix:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6] = \begin{bmatrix} -0,1 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & -0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.308)$$

Gesucht:

1. Erregerkräfte F_x, F_y, F_z
2. Erregermomente M_x^S, M_y^S, M_z^S
3. Vektor $\mathbf{h}$ der modalen Erregerkräfte

6.5.6

Lösungen L6.10 bis L6.12

L6.10 Die in Richtung der Koordinaten wirkenden Kräfte werden zum Vektor $\mathbf{f}^T = [F_1, F_2]$ zusammengefasst. Die Bewegungsgleichungen (6.267) lauten also mit den aus (6.32) und (6.34) bekannten Matrizen $\mathbf{C}$ und $\mathbf{M}$:

$$m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \frac{6EI}{7l^3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}. \quad (6.309)$$

Die Eigenvektoren wurden in L6.6 berechnet, sodass die Modalmatrix bereits bekannt ist, ebenso die modalen Massen und Federn. Die entkoppelten Bewegungsgleichungen in Hauptkoordinaten lauten entsprechend (6.268) und (6.269) mit den Ergebnissen aus L6.5:

$$\underline{\underline{3,364m\ddot{p}_1 + 0,821\frac{EI}{l^3}p_1 = F_1 + 0,4768F_2 = h_1}} \quad (6.310)$$

$$\underline{\underline{4,932m\ddot{p}_2 + 8,660\frac{EI}{l^3}p_2 = F_1 - 0,6991F_2 = h_2.}} \quad (6.311)$$

Falls die modale Erregerkraft $h_2 = 0$ ist, wird nur die erste Eigenschwingform erregt, d. h. wenn $\underline{\underline{F_1 = 0,6991F_2}}$.

L6.11 Die Lösung der Bewegungsgleichungen (6.268) lautet nach (6.294) in Hauptkoordinaten

$$p_1 = \frac{h_1}{\gamma_1}(1 - \cos \omega_1 t), \quad p_2 = \frac{h_2}{\gamma_2}(1 - \cos \omega_2 t). \quad (6.312)$$

Die Lagekoordinaten haben dann gemäß (6.108) die Werte

$$\begin{aligned} q_1 &= \left[\frac{v_{11}}{\gamma_1}(1 - \cos \omega_1 t) + \frac{v_{12}}{\gamma_2}(1 - \cos \omega_2 t) \right] F_1 \\ q_2 &= \left[\frac{v_{21}}{\gamma_1}(1 - \cos \omega_1 t) + \frac{v_{22}}{\gamma_2}(1 - \cos \omega_2 t) \right] F_1. \end{aligned} \quad (6.313)$$

Mit den Zahlenwerten aus L6.5 ergibt sich für die bezogenen Größen

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\frac{EIq_1}{l^3F_1} = 1,2179(1 - \cos \omega_1 t) + 0,1155(1 - \cos \omega_2 t)}} \\ \underline{\underline{\frac{EIq_2}{l^3F_1} = 0,5807(1 - \cos \omega_1 t) - 0,0807(1 - \cos \omega_2 t)}} \end{aligned} \quad (6.314)$$

Im statischen Fall wären die Deformationen gemäß $\mathbf{q}_{\text{st}} = \mathbf{D}\mathbf{f}_{\text{st}}$:

$$\mathbf{q}_{\text{st}} = \frac{l^3}{6EI} \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F_1 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} \frac{F_1 l^3}{EI} = \begin{bmatrix} 1,333 \\ 0,5 \end{bmatrix} \frac{F_1 l^3}{EI}. \quad (6.315)$$

Sie ergeben sich für den Sonderfall, dass keine Schwingungen stattfinden: $\cos \omega_1 t$ und $\cos \omega_2 t$ treten dann nicht auf und sind Null zu setzen. Die maximalen dynamischen Ausschläge liegen in den Grenzen

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1,2179 &= 2,4358 \leq \left(\frac{EIq_1}{l^3 F_1} \right)_{\max} \leq 2 \cdot (1,2179 + 0,1155) = 2,6668 \\ 2 \cdot 0,5807 &= 1,1614 \leq \left(\frac{EIq_2}{l^3 F_1} \right)_{\max} \leq 2 \cdot (0,5807 + 0,0807) = 1,3228. \end{aligned} \quad (6.316)$$

Das Einspannmoment ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht vgl. Bild 6.2:

$$M = F_1 l + 2ml\ddot{q}_1 + 6ml\ddot{q}_2. \quad (6.317)$$

Die Beschleunigungen lauten in bezogener Darstellung:

$$\begin{aligned} \frac{m\ddot{q}_1}{F_1} &= \frac{mv_{11}}{\gamma_1} \omega_1^2 \cos \omega_1 t + \frac{mv_{12}}{\gamma_2} \omega_2^2 \cos \omega_2 t \\ &= 0,2972 \cos \omega_1 t + 0,2028 \cos \omega_2 t \end{aligned} \quad (6.318)$$

$$\begin{aligned} \frac{m\ddot{q}_2}{F_1} &= \frac{mv_{21}}{\gamma_1} \omega_1^2 \cos \omega_1 t + \frac{mv_{22}}{\gamma_2} \omega_2^2 \cos \omega_2 t \\ &= 0,1417 \cos \omega_1 t - 0,1417 \cos \omega_2 t \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das dynamische Einspannmoment zu

$$\begin{aligned} M &= F_1 l \left[1 + (2v_{11} + 6v_{21}) \frac{m\omega_1^2}{\gamma_1} \cos \omega_1 t + (2v_{12} + 6v_{22}) \frac{m\omega_2^2}{\gamma_2} \cos \omega_2 t \right] \\ &= F_1 l (1 + 1,444 \cos \omega_1 t + 0,444 \cos \omega_2 t) \end{aligned} \quad (6.319)$$

Das Moment verläuft „fastperiodisch“, und seine Extremwerte können folgende Werte erreichen:

$$\underline{M_{\min}} = -0,888F_1 l, \quad \underline{M_{\max}} = 2,888F_1 l \quad (6.320)$$

Infolge der Schwingungen tritt das Moment zeitweise auch entgegengesetzt zur statischen Momentenrichtung auf, und der statische Wert wird bedeutend übertroffen ($2,888 > 1$).

Diese typischen dynamischen Effekte lassen sich nicht einfach mit einem „dynamischen Beiwert“ erfassen. Dies muss man gewissen „Statikern“ sagen, welche die absurde Meinung vertreten, man brauche nur die Ergebnisse einer statischen Rechnung mit einem Faktor zu multiplizieren, um die Belastungen für den dynamischen Fall zu erhalten.

L6.12 Die Erregerkraft ist umlaufend, also hat sie in horizontaler Richtung zwei Komponenten. Die Momente ergeben sich aus dem Produkt der Kraftkomponenten mit den entsprechenden Hebelarmen, vgl. Bild 6.27. Man beachte die positiven Koordinatenrichtungen und Abstände. Insgesamt ergibt sich der Erregervektor bezüglich der genannten Koordinaten zu

$$f(t) = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x^S/l^* \\ M_y^S/l^* \\ M_z^S/l^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \cos \Omega t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\zeta_A/l^*)F \cos \Omega t \\ -(\eta_A/l^*)F \cos \Omega t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \sin \Omega t \\ 0 \\ -(\zeta_A/l^*)F \sin \Omega t \\ 0 \\ (\xi_A/l^*)F \sin \Omega t \end{bmatrix} \quad (6.321)$$

Mit der gegebenen Modalmatrix V ergeben sich die modalen Erregerkräfte aus (6.269) zu

$$\mathbf{h} = \mathbf{V}^T \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = F \left\{ \begin{bmatrix} -0,1 \\ 0,2 + \zeta_A/l^* \\ 0 \\ -\eta_A/l^* \\ 0 \\ -0,3 + \zeta_A/l^* \end{bmatrix} \cos \Omega t + \begin{bmatrix} -\zeta_A/l^* \\ 0 \\ 0 \\ \zeta_A/l^* \\ 0,7 - \zeta_A/l^* \\ 0 \end{bmatrix} \sin \Omega t \right\}. \quad (6.322)$$

Man sieht daraus, dass eine einzige Unwucht einen Erregervektor mit fünf Komponenten zur Folge hat (fünf Eigenformen anregt) und dass keine modale Erregung der vertikalen Schwingform v_3 auftritt ($h_3 = 0$). Bei einer Übereinstimmung der Erregerfrequenz mit der dritten Eigenfrequenz sind also keine Resonanzamplituden zu befürchten („Scheinresonanz“). Im Amplituden-Frequenzgang kann man fünf Resonanzspitzen erwarten. Die modalen Kräfte haben alle die Dimension einer Kraft.

Die Endergebnisse für die realen Bewegungs- und Kraftgrößen sind unabhängig von der Bezugslänge l^* und ergeben die korrekten Dimensionen. Diese absolute Größe der Koordinaten kann nur im Zusammenhang mit der Massen- und Steifigkeitsmatrix berechnet werden, vgl. Abschnitt 6.5.

6.6 Gedämpfte Schwingungen

6.6.1

Zur Erfassung der Dämpfung

Schwingungen von Maschinen sind immer gedämpft, weil Widerstandskräfte (dissipative Kräfte) der Bewegung so entgegenwirken, dass ein Verlust an mechanischer Energie auftritt. Ein Teil der mechanischen Energie wird in Wärme umgesetzt (sog. Energieerzeugung, Dämpfung oder Dissipation), wie es der 2. Hauptsatz der Thermodynamik besagt.

Es kommt weniger auf die Berechnung des genauen zeitlichen Verlaufs der Schwingungen an als auf das Abklingverhalten der Amplituden. Der genaue Verlauf der Dämpfungskräfte innerhalb einer Schwingungsperiode ist im allgemeinen nicht von Bedeutung. Dämpfungskräfte werden zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung geschwindigkeitsproportional angesetzt, obwohl sie praktisch nie genau der Geschwindigkeit proportional sind. Diese wird auch als viskose Dämpfung bezeichnet. Die großen Vorteile eines solchen Ansatzes sind,

1. dass man lineare Differenzialgleichungen erhält, die sich leicht behandeln lassen,
2. dass dieser Ansatz einen mechanischen Energieverlust während der Schwingungen ausdrückt (Erwärmung) und
3. dass man mit wenigen Parameterwerten auskommt, vgl. Abschnitt 1.4.

Bauelemente mit definierten Dämpfungseigenschaften werden in verschiedenen Zweigen des Maschinenbaus bewusst eingesetzt, z. B. Hülsenfedern bei Textilspindeln (Bild 6.31c), hydraulische Drehschwingungsdämpfer in Schiffsdieselmotoren

(Bild 4.45), Reibungsdämpfer an Kurbelwellen (Bild 4.42) u. a. Auch Gummifedern, Gummikupplungen, Gummireifen, Drahtseile, Keilriemen, Blatt- und Tellerfedern werden oft deshalb angewendet, weil sie gute dämpfende Eigenschaften besitzen. Beton hat auch für Werkzeugmaschinenengestelle wegen seiner hohen Dämpfung in manchen Fällen schon Gusskonstruktionen verdrängt. Wird von diskreten **Dämpfungselementen** ausgegangen, so ergeben sich die auf die Koordinaten $\mathbf{q}$ reduzierten **Dämpfungskräfte** in allgemeiner Form zu

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \quad (6.323)$$

Alle Dämpfungskoeffizienten lassen sich zur Dämpfungsmatrix $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ zusammenfassen. Die Koeffizienten b_{jk} ergeben sich aus den Dämpfungskonstanten der einzelnen Dämpfer.

Sind keine Dämpferparameter bekannt, so ist es günstig, die Dämpfung durch einen globalen Näherungsansatz zu erfassen. Man wählt diesen oft so, dass damit wieder eine Transformation auf Hauptkoordinaten möglich wird, was für beliebige Dämpfungsmatrizen $\mathbf{B}$ nicht erreichbar ist.

Es ist ratsam, erzwungene Schwingungen nur in Verbindung mit Dämpfungswerten zu berechnen, da man sonst keine brauchbaren Aussagen über die Amplitudenwerte in Resonanznähe erhält. Da oft Dämpfungskonstanten realer Maschinen fehlen, ist es üblich, modale Dämpfungen einzuführen.

Es kann mathematisch gezeigt werden, dass beim gedämpften Schwingungssystem dann modale Dämpfung auftritt, wenn die Dämpfungsmatrix $\mathbf{B}$ die Bedingung

$$\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{B} = \mathbf{M} \sum_{k=1}^K a_k (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C})^{k-1} \quad (6.324)$$

erfüllt. Am häufigsten nimmt man an, dass die Dämpfungsmatrix von der Massen- und/oder Steifigkeitsmatrix nur linear abhängt ($k = 2$):

$$\mathbf{B} = a_1 \mathbf{M} + a_2 \mathbf{C}. \quad (6.325)$$

Dieser als **Rayleigh-Dämpfung** oder „Bequemlichkeits-Hypothese“ bezeichnete Sonderfall des Ansatzes nach (6.324) wird bei vielen großen Programmsystemen zur Berücksichtigung der Dämpfung benutzt. Man hat experimentell festgestellt, dass die Werkstoffdämpfung besser erfasst wird, wenn sie außerdem noch umgekehrt proportional zur Erregerkreisfrequenz angesetzt wird.

6.6.2

Freie gedämpfte Schwingungen

Die Bewegungsgleichungen der freien gedämpften Schwingungen haben in Matrixschreibweise die Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{o}. \quad (6.326)$$

Falls die Dämpfungsmatrix den Formen von (6.324) oder (6.325) entspricht, lassen sich die Bewegungsgleichungen mit den Eigenvektoren des zugehörigen ungedämpften Systems entkoppeln. Diese Entkopplung geschieht, wie beim ungedämpften System, mit der aus (6.88) bekannten Modalmatrix $\mathbf{V}$ des ungedämpften System und liefert

$$\ddot{p}_i + 2\delta_i \dot{p}_i + \omega_{i0}^2 p_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6.327)$$

Dabei ist ω_{i0} die i -te Eigenkreisfrequenz des *ungedämpften Systems*. Sie kann nach (6.117) berechnet werden. Für die **modale Abklingkonstante** δ_i findet man mit (6.325):

$$2D_i\omega_{i0} = 2\delta_i = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{B} \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i} = a_1 + \omega_{i0}^2 a_2. \quad (6.328)$$

$\mathbf{v}_i$ ist die zu ω_{i0} gehörige Eigenschwingform des ungedämpften Systems. Die Eigenkreisfrequenzen des gedämpften Systems sind

$$\omega_i = \sqrt{\omega_{i0}^2 - \delta_i^2} = \omega_{i0} \sqrt{1 - D_i^2}, \quad D_i = \frac{\delta_i}{\omega_{i0}} \quad (6.329)$$

Bei den folgenden Betrachtungen wird angenommen, dass kein „pathologisches“ Schwingungssystem vorliegt, das eine Sonderbehandlung erfordert. Es wird vorausgesetzt, dass keine freien Starrkörperbewegungen möglich sind (also alle Eigenkreisfrequenzen $\omega_{i0} > 0$ sind) und dass auch keine Kriechbewegungen infolge überkritischer Dämpfung auftreten (also alle $\delta_i < \omega_{i0}$ sind). Falls relative Koordinaten verwendet werden, kann man die erstgenannte Bedingung immer erfüllen. Wird die zweite Bedingung verletzt (z. B. wenn bei der Modellierung zu viele Freiheitsgrade berücksichtigt werden), treten nicht nur konjugiert komplexe Eigenwerte und Eigenformen auf, sondern auch reelle.

D_i ist der modale Dämpfungsgrad der i -ten Hauptschwingung. Er kann bei bekannten Matrizen $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und einem Näherungswert für den Eigenvektor $\mathbf{v}_i$ des ungedämpften Systems mit (6.328) abgeschätzt werden.

Bei Schwingungssystemen mit kleiner Dämpfung ($D_i \ll 1$) unterscheiden sich die niederen Eigenkreisfrequenzen des gedämpften Systems (ω_i) wenig von denen des ungedämpften Systems (ω_{i0}). Bei höheren Eigenfrequenzen können die Unterschiede beträchtlich sein, da dann die Dämpfungsgrade D_i oft nicht mehr klein sind. Sehr hohe Ordnungen der Eigenformen bilden sich häufig garnicht aus, weil die Dämpfungsgrade dann überkritisch ($D_i > 1$) sind.

Experimentell kann man oft aus dem Ausschwingvorgang einer Eigenform das zugehörige D_i über das logarithmische Dämpfungsdekrement bestimmen, vgl. Abschnitt 1.4. Auf diese Weise lassen sich in der Praxis die oft benötigten Daten für die Dämpfungen ermitteln und nötigenfalls über (6.325) die Elemente einer Dämpfungsmatrix $\mathbf{B}$ bestimmen.

Die vollständige Entkopplung ist dann vorhanden, wenn die mit der Modalmatrix $\mathbf{V}$ transformierte Dämpfungsmatrix $\mathbf{B}$ eine reine Diagonalmatrix ist, d. h. nur im Falle von Ansätzen gemäß (6.324) oder seltenen Sonderfällen. Im allgemeinen wird die Matrix $\mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V}$ voll besetzt sein. Wenn die Diagonalelemente der Matrix $\mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V}$ bedeutend größer als die anderen Elemente dieser Matrix sind, dann stellt die Vernachlässigung der Außerdiagonal-Elemente noch eine Näherung für das tatsächliche Dämpfungsverhalten des Systems dar.

Für gegebene Anfangsbedingungen (6.118) bzw. (6.125) lassen sich analog zu den freien ungedämpften Schwingungen die Bewegungen des modal gedämpften Systems berechnen. Die Lösung von (6.324) ergibt sich mit den Anfangsbedingungen von (6.125) zu

$$p_i = \frac{e^{-D_i \omega_i t}}{\sqrt{1 - D_i^2}} \left[\sqrt{1 - D_i^2} p_{i0} \cos \omega_i t + \left(\frac{\dot{p}_{i0}}{\omega_i} + D_i p_{i0} \right) \sin \omega_i t \right]. \quad (6.330)$$

In der Praxis interessiert das Abklingverhalten freier Schwingungen, da es für die Lastwechselzahl von Bedeutung ist, z. B. bei Berechnung auf Dauer- bzw. Betriebsfestigkeit.

Bei periodischen Stößen spielt es eine Rolle, ob die angeregte Schwingung infolge der Dämpfung abklingt, bevor der nächste Stoß auftritt. Falls keine Auslöschung bis zum nächsten Stoß erfolgt, kann es zu resonanzartigen Anfachungen bei periodischen Stößen kommen. Ergebnisse für typische Fälle periodischer Stöße sind in [18] enthalten.

Die Annahme, dass die Matrix $\mathbf{B}$ symmetrisch und reell ist, trifft für manche Modelle nicht zu. Die Berücksichtigung gyroskopischer Kräfte, wie sie infolge der Kreiselwirkung bei rotierenden Wellen auftreten, führt zu einer antimetrischen Matrix $\mathbf{B}$, vgl. Abschnitt 2.4. Allerdings bewirkt eine rein antimetrische Matrix $\mathbf{B}$ keine Dämpfung.

Geschwindigkeitsproportionale Terme treten in den Bewegungsgleichungen auch dann auf, wenn die mechanischen Strukturen durch Regler beeinflusst werden, wie z. B. bei magnetgelagerten Schwebebahnen, Rotoren und aktiven Tilgern, vgl. [2], [17], [22].

6.6.3

Harmonische Erregung

Die Bewegungsgleichung für gedämpfte erzwungene Schwingungen lautet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t). \quad (6.331)$$

Sie stellt eine Erweiterung von (6.267) um die Dämpfungskräfte bzw. von (6.326) um die Erregerkräfte $\mathbf{f}(t)$ dar. Im Falle einer kinematischen Erregung kann man die dann geltenden Bewegungsgleichungen auf dieselbe Form überführen.

Im Weiteren soll nur der stationäre Zustand bei **harmonischer Erregung** analysiert werden, für den für niedere Eigenformen meist eine gute Übereinstimmung zwischen Rechen- und Messergebnissen bestätigt wurde. Ein **stationärer Zustand** (engl. „steady state“) stellt sich ein, wenn die von den Anfangsbedingungen angeregten freien Schwingungen abgeklungen sind. Diese Abklingzeit hängt von den Abklingkonstanten δ_i ab und beträgt etwa $t^* > \pi/\delta_{\min}$. Die stationäre Lösung von (6.331) wird dann durch die partikuläre Lösung beschrieben.

Die auf das Schwingungssystem in Richtung der Koordinaten q_k wirkenden harmonischen Erregerkräfte $\hat{F}_k(t)$, die bereits in (6.272) eingeführt wurden, werden erfasst durch ihre Amplituden $\hat{F}_k$ und Phasenwinkel β_k bzw. durch ihre Kosinus- und Sinus-Terme:

$$\begin{aligned} F_k(t) &= \hat{F}_k \sin(\Omega t + \beta_k) = \hat{F}_k (\sin \beta_k \cos \Omega t + \cos \beta_k \sin \Omega t) \\ &= F_{ak} \cos \Omega t + F_{bk} \sin \Omega t; \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.332)$$

Sie haben alle dieselbe Erregerkreisfrequenz Ω . Man kann somit (6.331) mit den Kraftvektoren

$$\mathbf{f}_a = [F_{a1}, F_{a2}, \dots, F_{an}]^T; \quad \mathbf{f}_b = [F_{b1}, F_{b2}, \dots, F_{bn}]^T \quad (6.333)$$

bei einer harmonischen Erregung mit der Kreisfrequenz Ω in der Form

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = f(t) = f_a \cos \Omega t + f_b \sin \Omega t \quad (6.334)$$

schreiben.

Die mathematische Behandlung wird kürzer und eleganter, wenn komplexe Zahlen eingeführt werden. Es ändert sich nichts an den physikalischen Zusammenhängen, wenn rein formal zur reellen Gleichung (6.334) die imaginäre Gleichung

$$j(M\dot{q}^* + Bq^* + Cq^*) = jf^*(t) = j(f_a \sin \Omega t - f_b \cos \Omega t) \quad (6.335)$$

addiert wird. Die komplexen Erregerkräfte werden durch eine Tilde gekennzeichnet:

$$\tilde{f}(t) = f(t) + jf^*(t) = \hat{f} \exp(j\Omega t) = (f_a - jf_b) \exp(j\Omega t). \quad (6.336)$$

Der Realteil des komplexen Kraftvektors $\tilde{f}$ entspricht der rechten Seite von (6.334). Die Summation von (6.334) und (6.335) ergibt mit der bekannten Euler'schen Relation $\exp(j\Omega t) = \cos \Omega t + j \sin \Omega t$ die Bewegungsgleichung für die ebenfalls **komplexen Koordinaten** $\tilde{q} = q + jq^*$ infolge **komplexer Erregerkräfte**:

$$M\ddot{\tilde{q}} + B\dot{\tilde{q}} + C\tilde{q} = \hat{f} \exp(j\Omega t). \quad (6.337)$$

Die Werkstoffdämpfung wird manchmal durch eine komplexe Dämpfung modelliert. Es entsteht damit eine komplexe Bewegungsgleichung, vgl. Abschnitt 1.4:

$$M\ddot{\tilde{q}} + (C + jB^*)\dot{\tilde{q}} = \hat{f} \exp(j\Omega t). \quad (6.338)$$

Die stationären erzwungenen Schwingungen verlaufen bei linearen Schwingern mit der Erregerfrequenz, sodass die Lösung in reeller Form mit

$$q = q_a \cos \Omega t + q_b \sin \Omega t = \hat{q} \sin(\Omega t + \psi_k) \quad (6.339)$$

und demzufolge in komplexer Form analog zu (6.334) mit dem Ansatz

$$\tilde{q} = q + jq^* = \hat{q} \exp(j\Omega t) = (q_a - jq_b) \exp(j\Omega t) \quad (6.340)$$

gesucht wird. Einsetzen dieses Ansatzes in (6.337) und (6.338) liefert nach einem Koeffizientenvergleich bei $\exp(j\Omega t)$ folgendes lineare Gleichungssystem zur Berechnung des komplexen Amplitudenvektors:

$$[-\Omega^2 M + j\Omega B + C]\hat{q} = \hat{f} \quad (6.341)$$

bzw.

$$[-\Omega^2 M + C + jB^*]\hat{q} = \hat{f}. \quad (6.342)$$

Man beachte, dass sich für beide Dämpfungsansätze derselbe Typ von Gleichungen ergibt. Die Dämpfungsmatrizen der viskosen Dämpfung und der komplexen Dämpfung (bei Erregung mit der Kreisfrequenz Ω) stehen in folgender Beziehung:

$$B = \frac{B^*}{\Omega}. \quad (6.343)$$

Die Lösung von (6.341) ist die komplexe Amplitude

$$\hat{q} = [-\Omega^2 M + j\Omega B + C]^{-1} \hat{f} = H(j\Omega) \hat{f}. \quad (6.344)$$

Damit ist die **Matrix der komplexen Frequenzgänge** mit ihren Elementen $H_{kl} = H_{lk}$ definiert:

$$\mathbf{H}(\mathbf{j}\Omega) = [-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{j}\Omega \mathbf{B} + \mathbf{C}]^{-1} = [H_{kl}(\mathbf{j}\Omega)]. \quad (6.345)$$

Die Matrix der komplexen Frequenzgänge ist bei symmetrischen Matrizen $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{M}$ ebenfalls symmetrisch. Ihre Diagonalelemente H_{ll} werden als direkte Frequenzgänge und die Außerdiagonalelemente $H_{lk} (l \neq k)$ werden als Kreuzfrequenzgänge bezeichnet. Die Bedeutung des komplexen Frequenzganges liegt vor allem darin, dass er über das zu untersuchende System Aussagen bezüglich des dynamischen Verhaltens im Frequenzbereich liefert. Der komplexe Frequenzgang spielt in der Signalanalyse eine zentrale Rolle und wird oft für den Vergleich zwischen Rechen- und Messergebnissen herangezogen, insbesondere bei Aufgaben der Identifikation realer Systeme.

Jeder einzelne komplexe Frequenzgang $H_{lk}(\mathbf{j}\Omega)$ charakterisiert das lineare Schwingungssystem bezüglich der Amplitude und Phase an der Stelle k infolge der Erregung an der Stelle l bei harmonischer Erregung. Für $l = k$ entspricht $H_{ll}(\mathbf{j}\Omega)$ der dynamischen Nachgiebigkeit, die in (6.287) für ein ungedämpftes System berechnet wurde.

Durch die Aufteilung des komplexen Frequenzganges $H_{lk}(\mathbf{j}\Omega)$ in den Amplituden-Frequenzgang $D_{lk}(\Omega) = D_{kl}(\Omega)$ und den Phasen-Frequenzgang $\psi_{lk}(\Omega)$ durch die Darstellung

$$H_{lk}(\mathbf{j}\Omega) = D_{lk}(\Omega) e^{\mathbf{j}\psi_{lk}(\Omega)} = \text{Re}(H_{lk}) + \mathbf{j} \text{Im}(H_{lk}) \quad (6.346)$$

ist eine anschauliche Interpretation möglich, vgl. Bild 6.29. Es gilt dabei mit den Realteilen (Re) und Imaginärteilen (Im) dieser komplexen Funktion:

$$D_{lk} = \sqrt{\text{Re}^2(H_{lk}) + \text{Im}^2(H_{lk})} \quad (6.347)$$

$$\sin \psi_{lk} = \frac{\text{Im}(H_{lk})}{D_{lk}}; \quad \cos \psi_{lk} = \frac{\text{Re}(H_{lk})}{D_{lk}}. \quad (6.348)$$

Aus dem Sinus und Kosinus gemäß (6.348) kann der Winkel ψ_{lk} mit seinem Quadranten eindeutig bestimmt werden.

Im Grenzfall $\Omega \rightarrow 0$ entspricht die **dynamische Einflusszahl** ($D_{lk} = D_{kl}$) der statischen Einflusszahl ($d_{lk} = d_{kl}$), vgl. (6.4).

Für die k -te Koordinate gilt also in komplexer Form

$$\hat{q}_k = \sum_{l=1}^n H_{kl}(\mathbf{j}\Omega) \hat{f}_l = q_{ak} - \mathbf{j}q_{bk} = \sum_{l=1}^n D_{kl}(\Omega) \exp[\mathbf{j}\psi_{kl}(\Omega)](F_{al} - \mathbf{j}F_{bl}) \quad (6.349)$$

und in reeller Form ergeben sich daraus die Komponenten

$$\begin{aligned} q_{ak} &= \sum_{l=1}^n D_{kl}(F_{al} \cos \psi_{kl} + F_{bl} \sin \psi_{kl}) = \sum_{l=1}^n D_{kl} \hat{F}_l \sin(\beta_l + \psi_{kl}) \\ q_{bk} &= \sum_{l=1}^n D_{kl}(F_{bl} \cos \psi_{kl} - F_{al} \sin \psi_{kl}) = \sum_{l=1}^n D_{kl} \hat{F}_l \cos(\beta_l + \psi_{kl}) \end{aligned} \quad (6.350)$$

und schließlich mit (6.339)

$$q_k = \sum_{l=1}^n D_{kl} \hat{F}_l \sin(\Omega t + \beta_l + \psi_{kl}) = \hat{q}_k \sin(\Omega t + \psi_k). \quad (6.351)$$

Amplitude $\hat{q}_k$ und Phasenwinkel ψ_k lassen sich durch einen Koeffizientenvergleich aus (6.351) berechnen. Sie sind beide von der Erregerkreisfrequenz Ω abhängig. Beachtlich ist, dass die Phasenwinkel sich bei allen Koordinaten unterscheiden. Das bedeutet, dass jede Koordinate zu einem andern Zeitpunkt ihre extreme Lage erreicht und nicht die von den ungedämpften Schwingungen bekannten Schwingformen zustande kommen.

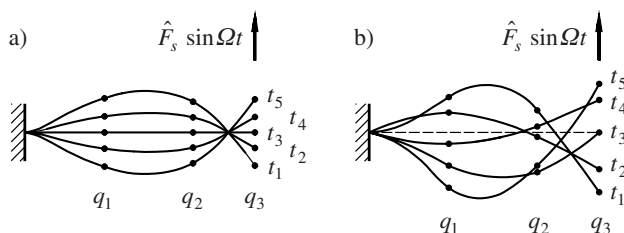


Bild 6.28 Erzwungene Schwingformen eines Balkens ($s = 3$) zu den Zeitpunkten $t_k = (k - 3)T/4$ für $k = 1$ bis 5; **a)** ungedämpft, **b)** gedämpft

Falls auf den Schwinger nur eine einzige Erregerkraft $\hat{F}_s \sin(\Omega t + \beta_s)$ an der Koordinate $l = s$ wirkt, so erhält man aus (6.351)

$$q_k = D_{ks} \hat{F}_s \sin(\Omega t + \beta_s + \psi_{ks}) = \hat{q}_k \sin(\Omega t + \beta_s + \psi_{ks}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.352)$$

Zwischen der Kraft- und Wegamplitude besteht formal dieselbe Beziehung wie in (6.288). Die Wegamplitude ist der Kraftamplitude proportional. Dies ist eine Folge der Linearität des Schwingungssystems. Man beachte aber den Unterschied zu (6.287)! Die dynamischen Nachgiebigkeiten werden beim gedämpften Schwinger bei keiner Erregerfrequenz null, d. h., die Amplituden haben auch in den **Resonanzstellen endliche Werte**. Die erzwungenen Schwingformen, die sich aus der Gesamtheit der Koordinaten q_k ergeben, besitzen beim gedämpften Schwinger im Gegensatz zum ungedämpften Schwinger **keine raumfesten Schwingungsknoten**. Dies erkennt man daran, dass die Phasenwinkel beim ungedämpften Schwinger alle gleich sind, vgl. (6.287) und Bild 6.23, aber beim gedämpften Schwinger unterschiedlich groß sind.

Bild 6.28 illustriert diesen Sachverhalt an einem einfachen Beispiel. Es zeigt die synchron sich verändernden Ausschläge bei einem ungedämpften Biegeschwinger im Vergleich zum gedämpften Biegeschwinger während einer halben Periodendauer der erzwungenen Schwingung ($0 < t < \pi/\Omega = T/2$).

Die grafische Darstellung eines komplexen Frequenzganges $H_{lk}(j\Omega)$ liefert eine ebene Kurve, die als **Ortskurve** bezeichnet wird, vgl. Bild 6.29c. Aus ihr können wichtige Informationen über das Verhalten eines Schwingers entnommen werden.

Die Anwendung der Ortskurven ist im Flugzeugbau, im Werkzeugmaschinenbau, in der Rotordynamik und anderen Gebieten verbreitet. Man erhält Ortskurven dadurch, dass man in der komplexen Ebene $D_{lk}(\Omega)$ als Radius und $\psi_{lk}(\Omega)$ als Winkel in Polarkoordinaten aufträgt. Oft begnügt man sich damit, den Amplituden-Frequenzgang $D_{lk}(\Omega)$ darzustellen. Er hat beim gedämpften Schwingungssystem im Gegensatz zum ungedämpften keine Unendlichkeitsstellen bei Resonanz. Die Zahl seiner Maxima ist höchstens gleich n und oft wesentlich kleiner als n .

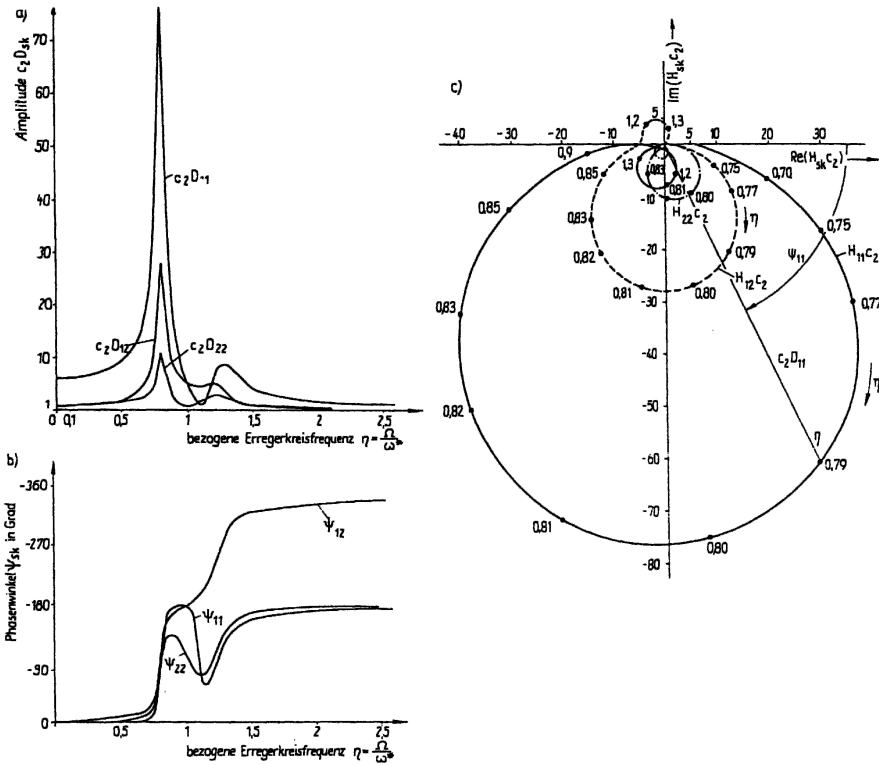


Bild 6.29 Frequenzgänge des Zweimassenschwingers von Bild 4.40 für $\mu = 0,2$, $\zeta = 1$, $D = 0,1$; a) Amplituden-Frequenzgang D_{lik} , b) Phasen-Frequenzgang ψ_{lik} , c) Ortskurven der komplexen Frequenzgänge H_{lik}

Falls **modale Dämpfung** gemäß (6.325) vorliegt und sich die Bewegungsgleichungen auf Hauptkoordinaten transformieren lassen, lauten die Differenzialgleichungen für jede Hauptkoordinate in Erweiterung zu (6.268) und (6.327)

$$\ddot{p}_i + 2D_i\omega_{i0}\dot{p}_i + \omega_{i0}^2 p_i = \frac{h_i(t)}{\mu_i}. \quad (6.353)$$

Die modalen Massen μ_i und modalen Kräfte $h_i(t)$ ergeben sich aus (6.105) und (6.269) und die modalen Dämpfungsgrade D_i sind aus (6.328) berechenbar. Für eine beliebige zeitliche modale Erregung $h_i(t)$ ergibt sich die partikuläre Lösung aus dem Duhamel-Integral, vgl. (6.270):

$$p_i(t) = \frac{1}{\mu_i\omega_i} e^{-\delta_i t} \int_0^t h_i(t') e^{\delta_i t'} \sin \omega_i(t - t') dt'. \quad (6.354)$$

Für eine rein harmonische Erregung durch eine Kraft F_s an der Stelle s , welcher gemäß (6.273) die modalen Kräfte

$$h_i = v_{si}\hat{F}_s \sin(\Omega t + \beta_s) = \hat{h}_i \sin(\Omega t + \alpha_i); \quad \hat{h}_i = v_{si}\hat{F}_s \quad (6.355)$$

entsprechen, ergibt sich die stationäre Lösung nach der Ausführung der Integration aus (6.354) zu

$$p_i(t) = \hat{p}_i \sin(\Omega t + \varphi_i); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.356)$$

vgl. den Sonderfall in (6.280). Dabei berechnen sich Amplitude $\hat{p}_i$ und Phasenwinkel φ_i aus

$$\begin{aligned} \hat{p}_i &= \frac{\hat{h}_i}{\gamma_i} V_{1i} = \frac{v_{si}}{\gamma_i} V_{1i} \hat{F}_s, \\ \sin \varphi_i &= [-2D_i \eta_i \cos \alpha_i + (1 - \eta_i^2) \sin \alpha_i] V_{1i} \\ \cos \varphi_i &= [(1 - \eta_i^2) \cos \alpha_i + 2D_i \eta_i \sin \alpha_i] V_{1i} \end{aligned} \quad (6.357)$$

mit den Vergrößerungsfunktionen ($\eta_i = \Omega / \omega_{i0}$)

$$V_{1i} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta_i^2)^2 + 4D_i^2 \eta_i^2}}. \quad (6.358)$$

Die ursprünglichen Lagekoordinaten ergeben sich entsprechend der modalen Transformation (6.108) schließlich zu

$$q_k = \sum_{i=1}^n v_{ki} p_i = \sum_{i=1}^n v_{ki} \hat{p}_i \sin(\Omega t + \varphi_i) = \hat{q}_k \sin(\Omega t + \psi_{sk}). \quad (6.359)$$

Dabei sind die Amplituden bei modaler Dämpfung im Gegensatz zum allgemeinen Fall, der aus (6.349) folgt, entsprechend (6.283) einfach

$$\hat{q}_k = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n v_{ki} \hat{p}_i \cos \varphi_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n v_{ki} \hat{p}_i \sin \varphi_i \right)^2} = D_{sk}(\Omega) \hat{F}_s \quad (6.360)$$

und die Phasenwinkel ψ_{sk} folgen aus einem Koeffizientenvergleich zu

$$\sin \psi_{sk} = - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{2v_{ki} v_{si} D_i \eta_i V_{1i}^2}{\gamma_i}}{D_{sk}}; \quad \cos \psi_{sk} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{v_{ki} v_{si} (1 - \eta_i^2) V_{1i}^2}{\gamma_i}}{D_{sk}}, \quad (6.361)$$

vgl. den allgemeinen Fall in (6.348). Im Unterschied zum ungedämpften System berechnen sich die Elemente der **dynamischen Nachgiebigkeitsmatrix** $D(\Omega)$ bei modaler Dämpfung zu

$$D_{sk}(\Omega) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \frac{2v_{ki} v_{si} D_i \eta_i V_{1i}^2}{\gamma_i} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{v_{ki} v_{si} (1 - \eta_i^2) V_{1i}^2}{\gamma_i} \right)^2}. \quad (6.362)$$

Falls die Erregerfrequenz mit der i -ten Eigenfrequenz des ungedämpften Systems übereinstimmt ($\eta_i = 1$), ergibt sich angenähert der Maximalwert des Amplitudenfrequenzganges, das so genannte **Residuum**:

$$D_{sk \max} = \frac{v_{ki} v_{si}}{2D_i \gamma_i}. \quad (6.363)$$

6.6.4

Periodische Erregung

Die periodische Erregung ist ein in der Maschinenbaupraxis sehr wichtiger Belastungsfall. Alle zyklisch arbeitenden Maschinen (Zyklusdauer $T_0 = 2\pi/\Omega$) bewirken im stationären Betrieb periodische Lager- und Gelenkkräfte, die sowohl die Baugruppen („im Innern der Maschine“) als auch das Gestell zu Schwingungen anregen. Periodische Erregungen treten vielfach auf bei Textilmaschinen und Verpackungsmaschinen, die Kurven- und Koppelgetriebe enthalten, während bei Pressen, Umformmaschinen und spanenden Werkzeugmaschinen meist die technologischen Prozesse wesentliche periodische Kräfte hervorrufen.

Die Bewegungsgleichungen für die periodische Erregung entsprechen formal (6.331). Nicht nur für beliebige Erregerkraftverläufe, sondern bereits für eine periodische Erregung (wenn auf der rechten Seite eine Fourierreihe steht) ist es umstritten, ob man die Dämpfungskräfte in der oben genannten Form physikalisch richtig erfasst. Es gibt zur nichtharmonischen Erregung kaum experimentelle Ergebnisse zum Schwingungsverhalten realer Objekte bzw. nur solche, welche den rechnerischen Werten mit dem Ansatz (6.323) widersprechen. Die Dämpfung muss für Erregungen, die nicht harmonisch verlaufen, durch nichtlineare Funktionen beschrieben werden, wenn man auf die Übereinstimmung von rechnerischen und experimentellen Ergebnissen Wert legt!

Gewisse praktische Bedeutung hat die Näherung mit der modalen Dämpfung, sodass im Weiteren von (6.353) ausgegangen wird. Es wird hier anstelle von (6.332) nicht nur mit harmonischen, sondern mit **periodischen Erregerkräften** gerechnet:

$$\begin{aligned} F_k(t) &= F_k(t + T_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{F}_{km} \sin(m\Omega t + \beta_{km}) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (F_{akm} \cos m\Omega t + F_{bkm} \sin m\Omega t), \end{aligned} \quad (6.364)$$

deren Fourierkoeffizienten $\hat{F}_{km}$ bekannt sind, vgl. z. B. die Aufgaben und Beispiele in Kapitel 2 und Kapitel 4. Da der Buchstabe k für die Nummer der Koordinate vergeben ist, wird hier *die Ordnung der Harmonischen mit m bezeichnet*. Aus den Erregerkräften ergeben sich bei modaler Dämpfung die modalen Erregerkräfte, vgl. auch (6.273):

$$\begin{aligned} h_i(t) &= \sum_{k=1}^n v_{ki} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{F}_{km} \sin(m\Omega t + \beta_{km}) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \hat{h}_{im} \sin(m\Omega t + \alpha_{im}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.365)$$

Die stationäre Lösung der Bewegungsgleichung (6.353) lautet mit $\eta_i = \Omega/\omega_{i0}$ analog zu (6.356)

$$\begin{aligned} p_i(t) &= \frac{1}{\gamma_i} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mi} \hat{h}_{im} \sin(m\Omega t + \varphi_{im}) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{p}_{im} \sin(m\Omega t + \varphi_{im}), \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.366)$$

Die Fourierkoeffizienten

$$\hat{p}_{im} = \frac{V_{mi} \hat{h}_{im}}{\gamma_i} \quad (6.367)$$

werden gegenüber denen der modalen Erregung ($\hat{h}_{im}$) durch die Vergrößerungsfunktionen

$$V_{mi} = \frac{1}{\sqrt{(1 - m^2 \eta_i^2)^2 + 4D_i^2 m^2 \eta_i^2}}; \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.368)$$

und die modalen Steifigkeiten „verzerrt“, vgl. (6.358) und (3.26). Der periodische Zeitverlauf hat deshalb meist keine geometrische Ähnlichkeit mit demjenigen der Erregung.

Die Phasenwinkel φ_{im} folgen analog zu (6.357) aus

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{im} &= [(1 - m^2 \eta_i^2) \cos \alpha_{im} + 2D_i m \eta_i \sin \alpha_{im}] V_{mi} \\ \sin \varphi_{im} &= [-2D_i m \eta_i \cos \alpha_{im} + (1 - m^2 \eta_i^2) \sin \alpha_{im}] V_{mi}. \end{aligned} \quad (6.369)$$

In der Nähe der Resonanzstellen $m\Omega = \omega_i$, dominieren die betreffenden m -ten Harmonischen gegenüber den anderen Summanden. Um das besser zu veranschaulichen, wird die Reihe aus (6.366) ausführlicher geschrieben:

$$\begin{aligned} \gamma_i p_i &= \frac{\hat{h}_{i1} \sin(\Omega t + \varphi_{i1})}{\sqrt{(1 - \eta_i^2)^2 + 4D_i^2 \eta_i^2}} + \frac{\hat{h}_{i2} \sin(2\Omega t + \varphi_{i2})}{\sqrt{(1 - 4\eta_i^2)^2 + 4 \cdot 4D_i^2 \eta_i^2}} \\ &+ \frac{\hat{h}_{i3} \sin(3\Omega t + \varphi_{i3})}{\sqrt{(1 - 9\eta_i^2)^2 + 4 \cdot 9D_i^2 \eta_i^2}} + \dots \end{aligned} \quad (6.370)$$

Tritt eine Resonanz höherer Ordnung auf, dann ist $m\eta_i = 1$, d. h.

$$m\Omega = \omega_i, \quad m = 1, 2, \dots, \infty; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.371)$$

Das Abstimmungsverhältnis $\eta_i = \Omega / \omega_i = 1/m$ und der Maximalwert wird im Wesentlichen durch die betreffende m -te Erregeramplitude und deren Nachbarwerte bei $m - 1$ und bei $m + 1$ bestimmt:

$$(\gamma_i p_i)_{\max} \approx \frac{m \hat{h}_{i,m-1}}{\sqrt{2m-1}} + \frac{\hat{h}_{im}}{2D_i} + \frac{m \hat{h}_{i,m+1}}{\sqrt{2m+1}}. \quad (6.372)$$

Diese Näherungsformel kann man aus (6.366) herleiten. Vielfach wird nur der m -te Summand der Reihe (6.370) benutzt, da er meist wesentlich größer als seine Nachbarterme ist, d. h., in der Resonanz m -ter Ordnung dominiert die m -te Harmonische, sodass angenähert eine *harmonische* Bewegung mit der Kreisfrequenz $m\Omega$ stattfindet, die mit der i -ten Eigenkreisfrequenz ω_i übereinstimmt:

$$p_i \approx \frac{\hat{h}_{im} \sin(m\Omega t + \varphi_{im})}{2D_i \gamma_i} = \hat{p}_i \sin(\omega_i t + \varphi_{im}). \quad (6.373)$$

Die einzelnen Koordinaten des Schwingungssystems ergeben sich für den allgemeinen Fall wegen (6.365) aus der Superposition aller Lösungen aus (6.282) zu

$$q_k(t) = \sum_{i=1}^n \frac{v_{ki}}{\gamma_i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\hat{h}_{im} \sin(m\Omega t + \varphi_{im})}{\sqrt{(1 - m^2 \eta_i^2)^2 + 4D_i^2 m^2 \eta_i^2}} \quad (6.374)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \hat{q}_{mk} \sin(m\Omega t + \psi_{mk}).$$

Diese Summe wird im Resonanzfall, vgl. dazu (6.277),

$$m\eta_i = 1 \quad \text{bzw.} \quad m\Omega = \omega_i, \quad (6.375)$$

(der Resonanz m -ter Ordnung) oft durch einen einzigen Summanden bestimmt. Die Bewegung erfolgt angenähert proportional der i -ten Eigenform:

$$q_k(t) \approx \frac{v_{ki} \hat{h}_{im} \sin(m\Omega t + \alpha_{im})}{2\gamma_i \vartheta_i} \sim v_{ki} \sin(\omega_i t + \psi_{mk}). \quad (6.376)$$

Von (6.376) kann man für den Fall der Resonanz höherer Ordnung auch zur Abschätzung der Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte, Momente und anderer mechanischer Größen ausgehen. Man beachte, dass sich die Phasenwinkel bei den Koordinaten q_k voneinander unterscheiden, vgl. (6.374). Die erzwungenen Schwingformen haben bei gedämpften Schwingern auch im Resonanzfall keine raumfesten Schwingungsknoten, vgl. auch Bild 6.28b.

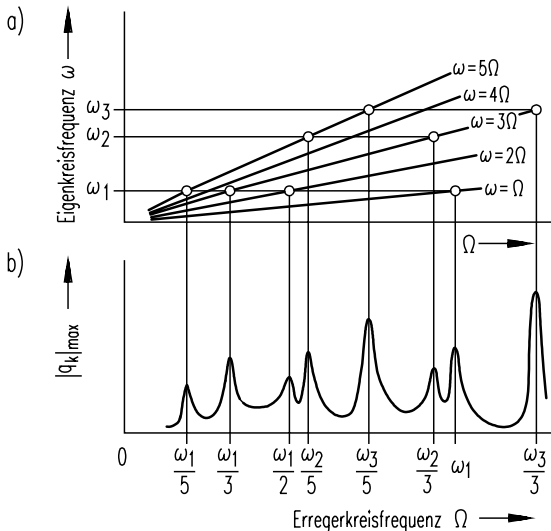


Bild 6.30 Periodisch erregter Schwinger mit drei Freiheitsgraden
a) Campbell-Diagramm, b) Resonanzkurve

Eine typische Resonanzkurve zeigt Bild 6.30b. Sie ist nicht identisch mit einem Amplituden-Frequenzgang, denn als Ergebnis ist der **Betrag des Maximalwertes**

einer Koordinate q_k dargestellt, der sich aus mehreren Harmonischen ergibt, die ja nicht alle zur gleichen Zeit ihr Maximum erreichen, vgl. (6.374). Es existieren aber Resonanzspitzen an den Stellen, welche der Bedingung (6.375) entsprechen, also bei ganzen Bruchteilen der Eigenfrequenzen ($\Omega = \omega_i/m$). Man vergleiche dazu die Bilder 3.5, 4.22, 4.23, 4.31 und 4.43.

Im Campbell-Diagramm Bild 6.30a sind drei Eigenfrequenzen und fünf Harmonische eingetragen. Die Schnittpunkte von der Schar der Erregerfrequenzen mit den Geraden der Eigenfrequenzen kennzeichnen mögliche Resonanzstellen höherer Ordnung. Der Vergleich von Bild 6.30a mit Bild 6.30b lehrt, dass nicht an allen Schnittpunkten Resonanzserhöhungen entstehen. Im vorliegenden Beispiel war die vierte Harmonische gleich null, sodass demzufolge an den Schnittpunkten der betreffenden Geraden Scheinresonanz auftritt.

Beim Hochlauf einer Maschine liegen dementsprechend viele Resonanzen weit unterhalb der ersten Eigenfrequenz. Man kann diese Ergebnisse auf die klassische Aussage „Resonanz tritt auf, wenn Erregerfrequenz gleich der Eigenfrequenz ist“ reduzieren, wenn man alle Erregerfrequenzen, die in der periodischen Erregung enthalten sind (und alle Eigenfrequenzen) berücksichtigt.

Die Resonanzkurven gedämpfter Systeme behalten immer endliche Werte. Die Resonanzkurve unterscheidet sich in den Gebieten außerhalb der Resonanz nur unwesentlich von der des ungedämpften Systems, falls der Dämpfungsgrad D_i klein ist. Bei höheren Eigenfrequenzen wird die Dämpfung oft überkritisch ($D_i > 1$), sodass sich gar keine Resonanzspitzen ausbilden, vgl. z. B. Bild 6.29. Das Residuum wird wesentlich durch die Komponenten der Eigenvektoren bestimmt und ist umgekehrt proportional zum modalen Dämpfungsgrad, vgl. (6.363).

6.6.5

Beispiele

6.6.5.1

Textilspindel

Textilspindeln arbeiten bei hohen Drehzahlen und gehören zu den Maschinenbaugruppen, die ohne eine genaue dynamische Analyse nicht konstruiert oder weiterentwickelt werden können. Bild 6.31 zeigt die Konstruktionszeichnung einer Textilspindel und das ihr entsprechende Berechnungsmodell. Man beachte, dass an beiden Lagern ein in Bild 6.31c dargestellter hydraulischer Dämpfer mit Dämpfungspirale (Hülsenfeder) verwendet wird. Den berechneten Amplituden-Frequenzgang der Fußlagerkraft zeigt Bild 6.32a, und den des Weges der Spindelspitze infolge der unwuchterregten Schwingungen Bild 6.32b. Dabei wurde die Dämpfungskonstante b_F des Fußlagers variiert, um zu erfahren, bei welchen Werten die im An- und Auslauf zu durchfahrenden Amplitudenmaxima möglichst klein bleiben.

Aus Bild 6.32 lässt sich entnehmen, wie stark die Resonanzamplituden von der Fußlagerdämpfung bestimmt werden. Man beachte, dass keine Proportionalität zwischen den Amplituden der Spindelspitze und der Lagerkraft besteht. Man kann also nicht aus Messungen der Bewegung der Spindelspitze auf die Lagerkräfte schließen. Mit steigender Dämpfung nehmen die drei Resonanzspitzen zunächst ab. Die Kurvenschar hat vier dämpfungsunabhängige Festpunkte P_1 bis P_4 . Unter den dadurch

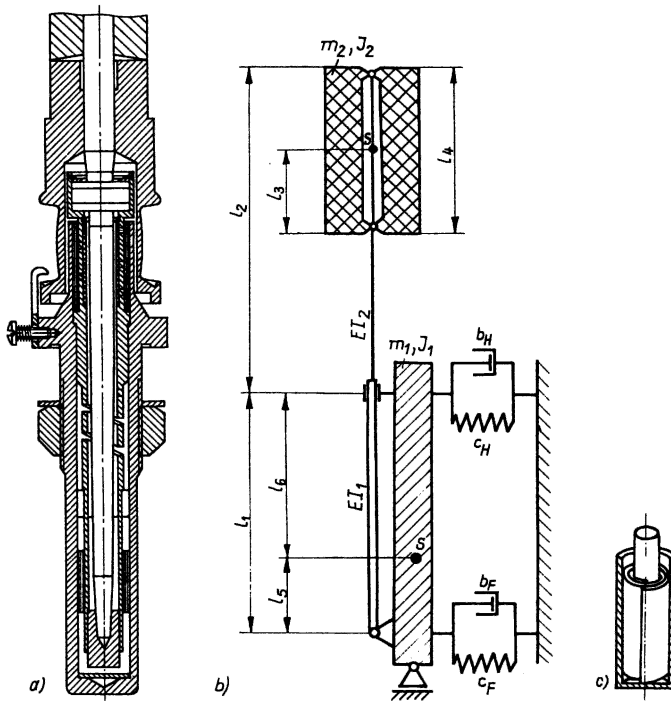


Bild 6.31 Berechnungsmodell einer Textilspindel

a) Zeichnung, b) Berechnungsmodell, c) Hülsefeder-Dämpfer-Element des Spindellagers

bestimmten Grenzwert kann der Maximalausschlag nicht sinken. Das Optimum liegt in der Nähe von $b_F = 0,3 \text{ N} \cdot \text{s/mm}$. Bei großen Dämpfungen verschieben sich die Eigenfrequenzen sehr stark, und die Amplituden steigen bemerkenswerterweise wieder. Durch die starke Dämpfung wird das Lager praktisch so unnachgiebig, dass ein Freiheitsgrad des Schwingers verloren geht und anstelle von drei Resonanzstellen nur noch zwei verbleiben. Ließe sich der Konstrukteur von statischen Überlegungen leiten, könnte er auf die Idee kommen, die Spindelbewegung durch eine entsprechend große Dämpfung zu begrenzen. Da diese Versteifung jedoch eine Veränderung der Eigenfrequenzen zur Folge hätte, könnte sich damit die Situation verschlimmern.

6.6.5.2

Riemengetriebe

Vorgespannte Riementriebe werden zur Momentenübertragung eingesetzt. Die Elastizität der Vorspanneinrichtung bewirkt in Verbindung mit den Steifigkeitsunterschieden von Zug- und Leertrum eine Kopplung von Längs- und Drehschwingungen.

Für einen vorgespannten Keilriementrieb entsprechend Bild 6.33 mit elastischer Spanneinrichtung ist unter der Voraussetzung kleiner Schwingungen zu prüfen, inwieweit die dynamischen Trumkräfte infolge der durch die Restunwucht $U = me$

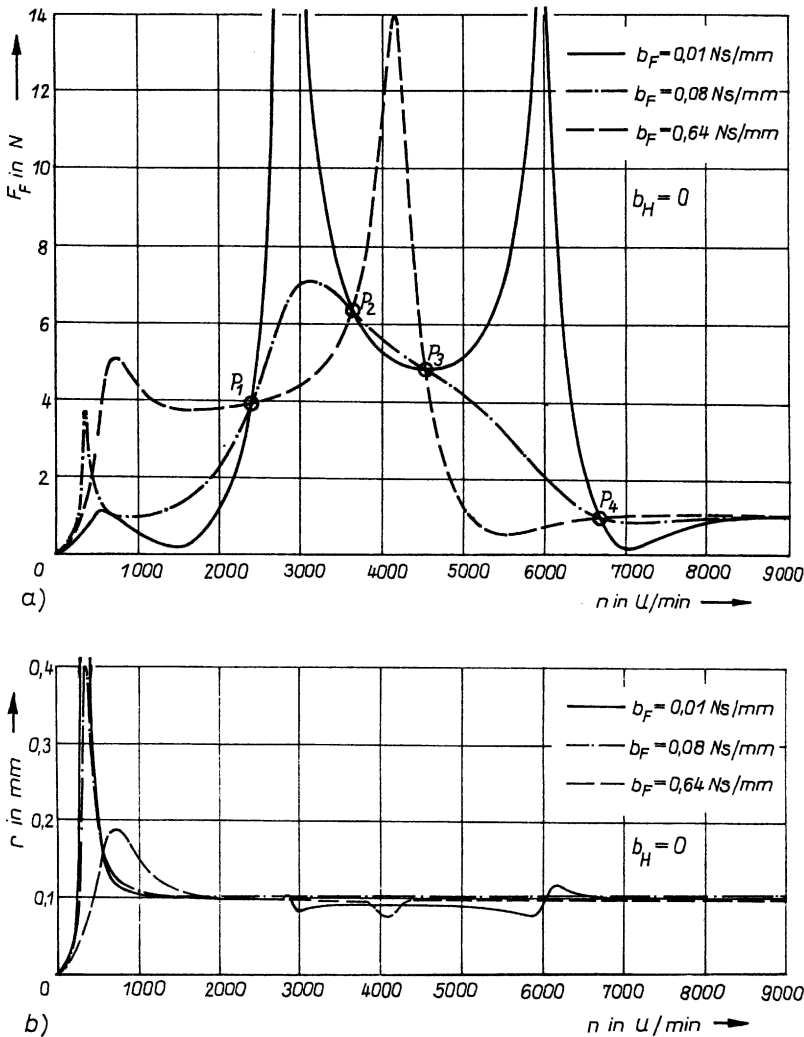


Bild 6.32 Resonanzkurven der Textilspindel von Bild 6.31 infolge von Unwulterregung
a) Lagerkraftamplitude, b) Amplitude der Spindelspitze

des Motorläufers verursachten Dreh- und Längsschwingungen die für die Momentenübertragung notwendige Vorspannung beeinflussen.

Die Riemenmasse ist vernachlässigbar klein. Die Änderung des Winkels α infolge von Längsschwingungen sei vernachlässigbar, ebenso der Schlupf. Es kann schwache Dämpfung vorausgesetzt werden, sodass für die Berechnung der Schwingungsamplituden modale Dämpfung genügt. Steifigkeitsunterschiede zwischen Zug- und Leertrum resultieren aus dem nichtlinearen Materialverhalten.

$$2W_{\text{pot}} = c_V q_1^2 + c_Z \cdot (-q_1 \cos \alpha - q_2)^2 + c_L \cdot (q_2 - q_1 \cos \alpha)^2 \quad (6.385)$$

$$\delta W = - (b_V + 2b \cos^2 \alpha) \dot{q}_1 \delta q_1 - 2b \dot{q}_2 \delta q_2. \quad (6.386)$$

Führt man den Koordinatenvektor

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T = [x, R\varphi - r\Omega t]^T \quad (6.387)$$

ein, so folgt über die Lagrange'schen Gleichungen 2. Art das System der Bewegungsgleichungen zu:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (6.388)$$

Hierbei ist

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J/R^2 \end{bmatrix} \quad (6.389)$$

die Massenmatrix,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_V + (c_L + c_Z) \cos^2 \alpha & -(c_L - c_Z) \cos \alpha \\ -(c_L - c_Z) \cos \alpha & c_L + c_Z \end{bmatrix} \quad (6.390)$$

die Steifigkeitsmatrix,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_V + 2b \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 2b \end{bmatrix} \quad (6.391)$$

die Dämpfungsmatrix und

$$\mathbf{f} = [U\Omega^2 \sin \Omega t; 0]^T. \quad (6.392)$$

der Vektor der rechten Seite ($U = me$).

Das System der Bewegungsgleichungen (6.388) hätte man auch erhalten, wenn an den beiden freigeschnittenen Rädern die Gleichgewichtsbedingungen unter Beachtung des d'Alembert'schen Prinzips aufgestellt worden wären, vgl. Bild 6.34. Es wird dem Leser empfohlen, diese Variante zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen noch zusätzlich selbst durchzurechnen.

Die Kräfte in Leer- und Zugtrum resultieren sowohl aus der Vorspannung als auch aus den durch die Schwingungen bedingten Deformationen (vgl. Gln. (6.377)) und ihren zeitlichen Änderungen:

$$F_L = \frac{F_V}{2 \cos \alpha} + c_L \underbrace{(R\varphi - r\Omega t - q_1 \cos \alpha)}_{=q_2} + b \underbrace{(R\dot{\varphi} - r\Omega - \dot{q}_1 \cos \alpha)}_{=\dot{q}_2} \quad (6.393)$$

$$F_Z = \frac{F_V}{2 \cos \alpha} + c_Z \underbrace{(r\Omega t - R\varphi - q_1 \cos \alpha)}_{=-q_2} + b \underbrace{(r\Omega - R\dot{\varphi} - \dot{q}_1 \cos \alpha)}_{=-\dot{q}_2}. \quad (6.394)$$

Aus dem Momentengleichgewicht am Motorläufer folgt das zur Erzeugung der vorgegebenen Bewegung $\varphi_M(t) = \Omega t$ erforderliche Motormoment:

$$M_M = (F_Z - F_L)r + U \cos \Omega t \cdot \ddot{q}_1. \quad (6.395)$$

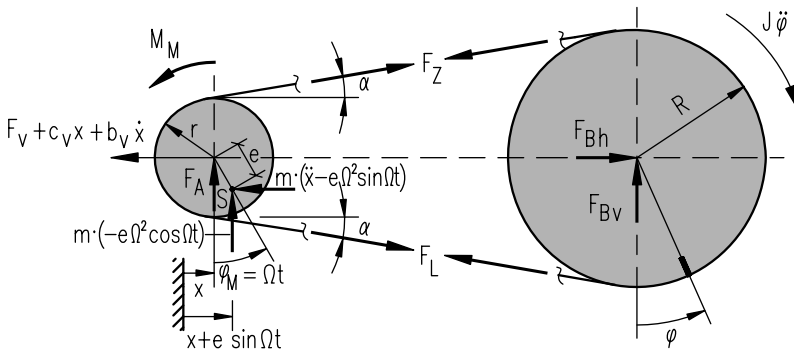


Bild 6.34 Kräftebild am frei geschnittenen System bei $\dot{\varphi}_M \equiv \Omega$

6.6.6

Aufgaben A6.13 bis A6.16

A6.13 Ausschwingvorgang

Für das in Tabelle 6.3, Fall 2, dargestellte Modell eines Maschinengestells soll der Ausschwingvorgang nach einem Geschwindigkeitssprung u_{10} an der Koordinate q_1 berechnet werden. Als Dämpfungsansatz wird die Rayleigh-Dämpfung verwendet. Es wird also gemäß (6.325) mit $\omega^{*2} = 48EI/ml^3$ angesetzt: $\mathbf{B} = 0,008\omega^* \mathbf{M} + 0,08\mathbf{C}/\omega^*$, d. h., $a_1 = 0,008\omega^*$, $a_2 = 0,08/\omega^*$.

In Abschnitt 6.3.4.2 wurde bereits das Eigenwertproblem des ungedämpften Schwingungssystems gelöst, sodass aus (6.136) die Eigenkreisfrequenzen bekannt sind. In (6.144) sind die Vektoren der Anfangswerte in Hauptkoordinaten angegeben. Man berechne die modalen Dämpfungsgrade D_i und gebe die Gleichungen zur Berechnung der Koordinaten $q_k(t)$ und der Massenkräfte $Q_k(t)$ an. Man beurteile sie im Vergleich zu den ungedämpften Schwingungen (Bild 6.9).

A6.14 Auswertung einer Ortskurve

Bild 6.35 zeigt das vereinfachte Berechnungsmodell des Gestells einer Fräsmaschine und dessen zwei niedrigste Eigenschwingformen. Die Oberflächengüte beim Fräsen ist abhängig von der Relativbewegung zwischen Werkzeug und Werkstück an der Stelle A.

Für das interessierende Frequenzintervall wurde die Ortskurve für die Koordinate q_6 bei einer Erregung F_6 ermittelt, vgl. Bild 6.35. Man bestimme aus der Ortskurve die Eigenfrequenzen und kommentiere anhand der dargestellten Schwingformen den Amplituden-Frequenzgang.

A6.15 Komplexer Frequenzgang

Das in Bild 4.40 dargestellte Berechnungsmodell ist für die dort angegebene harmonische Erregung zu untersuchen.

Gegeben:

$$\bar{\mu} = J_1/J_2 = 0,2; \bar{\gamma} = c_{T1}/c_{T2} = 0,2; D = b_T/(2J_1\omega^*) = 0,1; \omega^{*2} = c_{T2}/J_2$$

Gesucht:

1. Matrizen $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$ und Erregervektor $\mathbf{f}$
2. komplexer Frequenzgang $H_{22}(j\Omega)$

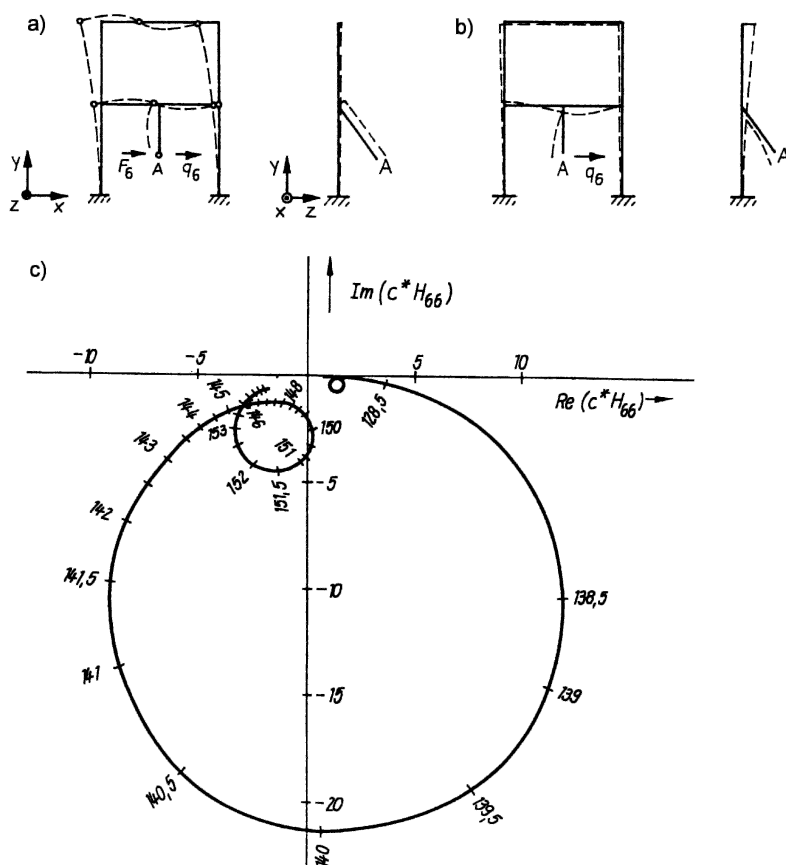


Bild 6.35 Zum Fräsmaschinengestell

a) und b) Eigenformen v_1 und v_2 , c) Ortskurve für die Koordinate q_6

A6.16 Riemengetriebe mit Spanneinrichtung und Unwucht

Für das in Bild 6.33 dargestellte Berechnungsmodell eines Riemengetriebes wurden in Abschnitt 6.6.5.2 für konstante Motordrehgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_M = \Omega$ die Matrizen der Bewegungsgleichungen dieses Systems mit zwei Freiheitsgraden ermittelt, vgl. Gln. (6.389) bis (6.392). Hier wird die Aufgabe gestellt, die erzwungenen Schwingungen des Systems unter der Annahme von modaler Dämpfung zu untersuchen.

Gegeben:

r	$= 70 \text{ mm}$	wirksamer Radius der Motor-Riemenscheibe
R	$= 280 \text{ mm}$	wirksamer Radius der Abtriebs-Riemenscheibe
m	$= 243 \text{ kg}$	Masse des Motors (Stator, Läufer, Riemenscheibe)
J	$= 2,4 \text{ kgm}^2$	Drehmasse des Abtriebs
α	$= 18^\circ$	Neigungswinkel
c_V	$= 6,23 \cdot 10^6 \text{ N/m}$	Steifigkeit der Vorspanneinrichtung
c_L	$= 1,125 \cdot 10^6 \text{ N/m}$	Steifigkeit des Leertrums

$c_Z = 1,169 \cdot 10^6 \text{ N/m}$	Steifigkeit des Zugtrums
$U = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}$	Motorunwucht
$b = 664 \text{ N} \cdot \text{s/m}$	Dämpfungs konstante der Riemen bei Längsschwingungen
$b_V = 392 \text{ N} \cdot \text{s/m}$	Dämpfungs konstante der Vorspanneinrichtung
$F_V = 4340 \text{ N}$	Vorspannkraft in der Vorspannfeder

Gesucht:

1. Eigenfrequenzen und Modalmatrix V
2. modale Koordinaten und Lösung für den stationären Zustand
3. dynamische Trumkräfte für den stationären Zustand, insbesondere in der Resonanzstelle $\eta_1 = \Omega/\omega_{10} = 1$

6.6.7

Lösungen L6.13 bis L6.16

L6.13 Setzt man den Dämpfungsansatz in (6.328) ein, so erhält man unter Benutzung von (6.104) und (6.105) die Abklingkonstanten

$$\delta_i = 0,004 \left(1 + 10 \frac{\omega_{i0}^2}{\omega_{*2}^2} \right) \omega^*. \quad (6.396)$$

Da ω_{i0} die Kreisfrequenzen des ungedämpften Systems sind, findet man mit den angegebenen Werten $\delta_1 = 0,00426\omega^*$, $\delta_2 = 0,00593\omega^*$, $\delta_3 = 0,03882\omega^*$, $\delta_4 = 0,07949\omega^*$. Daraus folgen die modalen Dämpfungsgrade aus (6.329):

$$\underline{D_1 = 0,0528}, \quad \underline{D_2 = 0,0270}, \quad \underline{D_3 = 0,0416}, \quad \underline{D_4 = 0,0579}. \quad (6.397)$$

Mit den Anfangsbedingungen in Hauptkoordinaten lassen sich nach (6.330) die Bewegungen in Hauptkoordinaten angeben:

$$p_i(t) = \frac{\dot{p}_{i0}}{\omega_i} e^{-\delta_i t} \cdot \sin \omega_i t, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (6.398)$$

Darin sind ω_i gemäß (6.329) die Eigenkreisfrequenzen des gedämpften Systems. Man findet, vgl. dazu (6.143):

$$\omega_1 = 0,0805\omega^*, \quad \omega_2 = 0,2194\omega^*, \quad \omega_3 = 0,9321\omega^*, \quad \omega_4 = 1,3714\omega^*. \quad (6.399)$$

Die Anfangswerte p_{i0} sind aus (6.144) bekannt. Aus den Amplituden, die aufgrund der schwachen Dämpfung nur wenig von denen gemäß (6.146) abweichen, erkennt man zunächst, dass die erste und zweite Eigenfrequenz im Antwortsignal dominieren. Da die Abklingkonstanten δ_3 und δ_4 wesentlich größer als δ_1 und δ_2 sind, klingen die Schwingungen mit der 3. und 4. Eigenfrequenz sehr schnell ab. Dies ist auch aus Bild 6.36 bei allen Koordinaten $q_1, \dots, q_4$ deutlich erkennbar. Die Lagekoordinaten ergeben sich aus (6.108) und die Massenkräfte mit (6.13):

$$q_k(t) = \sum_{i=1}^4 v_{ki} p_i(t), \quad Q_k(t) = -m_{kk} \ddot{q}_k(t) \quad (6.400)$$

In Bild 6.36a ist für q_1 noch die aus Bild 6.9a bekannte ungedämpfte Bewegung angegeben. Man erkennt, dass die Abklingkonstanten δ_i gegenüber den Dämpfungsgraden D_i eine größere Aussagefähigkeit für den Ausschwingvorgang haben. Interessant ist noch, dass die Extremwerte der Deformationen und Kräfte, die kurz nach der Impulserregung

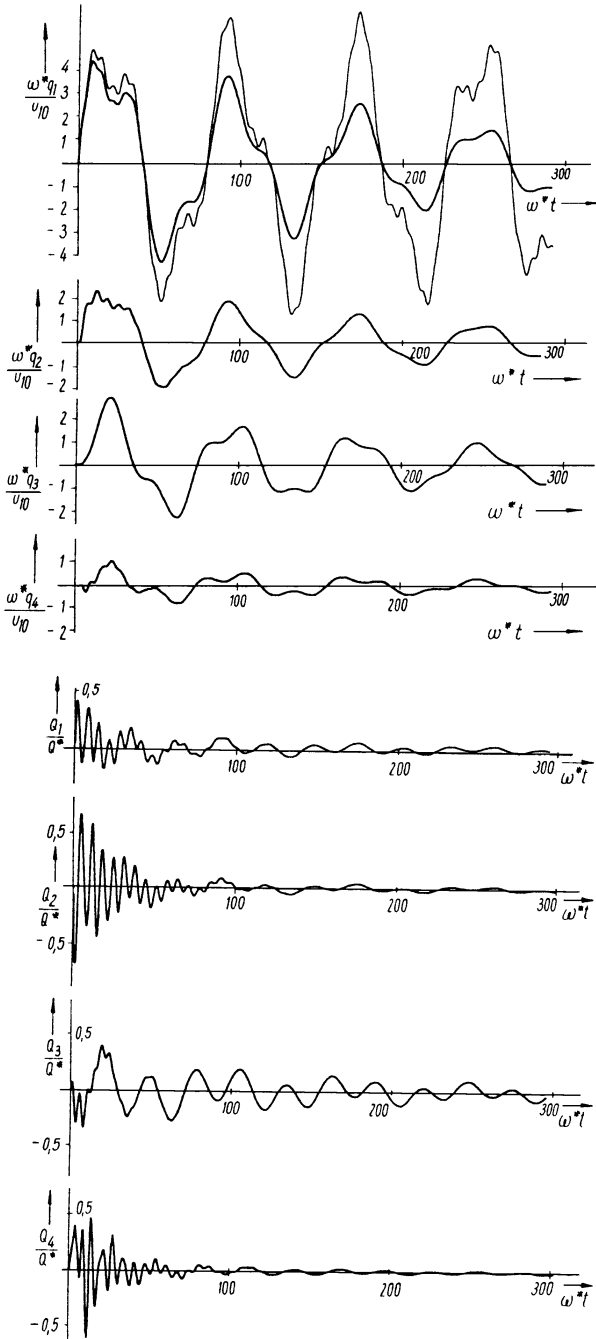


Bild 6.36 Freie gedämpfte Schwingungen eines Gestells (Modell von Tabelle 6.3, Fall 2); **a)** Koordinaten $q_k(t)$, **b)** Massenkräfte $Q_k(t)$ (Bezugswert $Q^* = mu_{10}\omega^*$)

auftreten, durch die Dämpfung nur wenig abgemindert werden. Es ist deshalb oft zulässig, diese Spitzenwerte mit einem ungedämpften Berechnungsmodell zu berechnen, vgl. Bild 6.9 mit Bild 6.36.

- L6.14** Die Eigenfrequenzen des Maschinengestells kann man aus der Ortskurve daran erkennen, dass die Amplituden dabei relative Extremwerte annehmen und die Phasen sich relativ schnell ändern. Man findet so die Eigenfrequenzen $f_2 = 140$ Hz und $f_3 = 152$ Hz. Das Residuum bei f_1 ist klein, weil der Kraftangriffspunkt bei der Grundschwingungsform in Gegenphase zum oberen Gestellteil schwingt und sich nur wenig bewegt.

Das Residuum bei $\Omega = \omega_2$ ist deshalb so groß, weil die zweite Eigenschwingung an der Stelle A große Ausschläge zeigt (Bild 6.35b). Falls die Fräseingriffsfrequenz in der Nähe der ersten Eigenfrequenz läge, wäre das also viel weniger gefährlich als eine Erregung in der Nähe der zweiten Eigenfrequenz.

- L6.15** In Abschnitt 4.4.3 wurde bereits für dieses Modell der Amplituden-Frequenzgang $D_{22}(\Omega)$ berechnet. Gleichung (4.186) und Bild 4.41 zeigen ihn als Vergrößerungsfunktion $V = \dot{\phi}_2 / \varphi_{st} = \dot{\phi}_2 c_2 / \dot{M}$. Die Matrizen $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und der Erregervektor $\mathbf{f}$ ergeben sich aus einem Koeffizientenvergleich aus den Bewegungsgleichungen (4.185):

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_T & -b_T \\ -b_T & b_T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{T1} & -c_{T1} \\ -c_{T1} & c_{T1} + c_{T2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{M} \end{bmatrix} \cos \Omega t \quad (6.401)$$

Die Hauptdeterminante lautet:

$$\Delta(j\Omega) = \begin{vmatrix} -\Omega^2 J_1 + j\Omega b_T + c_{T1} & -j\Omega b_T - c_{T2} \\ -j\Omega b_T - c_{T2} & -\Omega^2 J_2 + j\Omega b_T + c_{T1} + c_{T2} \end{vmatrix} \quad (6.402)$$

$$\Delta(j\Omega) = \Omega^4 J_1 J_2 - j\Omega^3 b_T (J_1 + J_2) - \Omega^2 [J_2 c_{T1} + J_1 (c_{T1} + c_{T2})] + j\Omega b_T c_{T2} + c_{T1} c_{T2}$$

Da das Erregermoment an der Masse 2 angreift, gilt $\hat{F}_2 = \hat{F}_2 = \dot{M}$. Der Berechnung des komplexen Frequenzgangs H_{22} dient die Determinante

$$\Delta_{22}(j\Omega) = \begin{vmatrix} -\Omega^2 J_1 + j\Omega b_T + c_{T1} & 0 \\ -j\Omega b_T - c_{T1} & 1 \end{vmatrix} = -\Omega^2 J_1 + j\Omega b_T + c_{T1} \quad (6.403)$$

Führt man die dimensionslosen Kenngrößen laut Aufgabenstellung ein, und außerdem $\xi^2 = \bar{\gamma}/\bar{\mu}$ und $\eta = \Omega/\omega^*$, so folgt

$$\Delta(j\eta) = \frac{c_{T1}^2}{\bar{\gamma}^2} \{ \eta^4 \bar{\mu} - j2\eta^3 D \bar{\mu} (1 + \bar{\mu}) - \eta^2 [\bar{\gamma} + \bar{\mu} (1 + \bar{\gamma})] + j2\eta D \bar{\mu} + \bar{\gamma} \} \quad (6.404)$$

$$\Delta_{22}(j\eta) = \frac{c_{T1}}{\xi^2} (-\eta^2 + j2\eta D + \xi^2).$$

Mit den Abkürzungen

$$a_1 = \xi^2 - \eta^2, \quad a_2 = \eta^4 \bar{\mu} - \eta^2 [\bar{\gamma} + \bar{\mu} (1 + \bar{\gamma})] + \bar{\gamma},$$

$$a_3 = 2\eta D, \quad a_4 = 2\eta D \bar{\mu} [\eta^2 (1 + \bar{\mu}) - 1] \quad (6.405)$$

findet man

$$H_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{\bar{\gamma} \bar{\mu}}{c_{T1}} \frac{a_1 + ja_3}{a_2 - ja_4} = \frac{\bar{\mu}}{c_{T2}} \left[\frac{a_1 a_2 - a_3 a_4}{a_2^2 + a_4^2} + j \frac{a_3 a_2 + a_1 a_4}{a_2^2 + a_4^2} \right]. \quad (6.406)$$

Die in Bild 6.29a und b dargestellten Verläufe des Amplituden- und Phasenfrequenzganges, sowie die Ortskurve in Bild 6.29c entsprechen der Lösung für die Zahlenwerte der Aufgabenstellung. Man erkennt die beiden Resonanz-Frequenzverhältnisse $\eta_1 = 0,8$; $\eta_2 = 1,25$ und die Tilgungsfrequenz (Antiresonanz) bei $\eta = 1,02$.

- L6.16** Zur Ermittlung von Eigenfrequenzen und Eigenformen des ungedämpften Systems wird vom homogenen System mit $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ausgegangen. Das lineare Eigenwertproblem führt auf die Frequenzgleichung, vgl. (6.79):

$$|C - \omega_0^2 \mathbf{M}| = \begin{vmatrix} c_{11} - m\omega_0^2 & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} - (J/R^2) \omega_0^2 \end{vmatrix} \quad (6.407)$$

$$= mJ/R^2 \omega_0^4 - (c_{22}m + c_{11}J/R^2) \omega_0^2 + c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0.$$

Hierbei wurden zur Abkürzung die Elemente c_{jk} der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{C}$ entsprechend (6.5) benutzt, vgl. auch (6.409). Die Lösungen der für ω_0^2 quadratischen Gleichung (6.407) sind:

$$\omega_{1,20}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{c_{22}}{J/R^2} + \frac{c_{11}}{m} \mp \sqrt{\left(\frac{c_{22}}{J/R^2} - \frac{c_{11}}{m} \right)^2 + \frac{4c_{12}^2}{mJ/R^2}} \right]. \quad (6.408)$$

Für die gegebenen Parameterwerte wird demnach:

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_V + (c_L + c_Z) \cdot \cos^2 \alpha = 8,305 \cdot 10^6 \text{ N/m} \\ c_{22} &= c_L + c_Z = 2,294 \cdot 10^6 \text{ N/m} \\ c_{12} &= -(c_L - c_Z) \cdot \cos \alpha = 4,185 \cdot 10^4 \text{ N/m} \end{aligned} \quad (6.409)$$

und damit die Eigenfrequenzen

$$\underline{\underline{f_{10} = \frac{\omega_{10}}{2\pi} = 29,42 \text{ Hz}, \quad \underline{\underline{f_{20} = \frac{\omega_{20}}{2\pi} = 43,57 \text{ Hz.}}}} \quad (6.410)$$

Die Eigenformen werden aus den Lösungen mit der Normierung $v_{1i} = 1$ ($i = 1, 2$) bestimmt:

$$\begin{aligned} (c_{11} - \omega_{i0}^2 m) \cdot v_{1i} + c_{12} \cdot v_{2i} &= 0 \\ c_{12} \cdot v_{1i} + (c_{22} - \omega_{i0}^2 J/R^2) \cdot v_{2i} &= 0. \end{aligned} \quad (6.411)$$

Die Modalmatrix $\mathbf{V}$ gemäß (6.88) enthält die beiden Eigenformen:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{c_{11} - m\omega_{10}^2}{c_{12}} & -\frac{c_{11} - m\omega_{20}^2}{c_{12}} \end{bmatrix} \quad (6.412)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0,03355 & 236,73 \end{bmatrix}.}}}$$

An den Größen der Amplitudenverhältnisse v_{2i} ist zu erkennen, dass die beiden Koordinaten in den beiden Eigenformen nur schwach gekoppelt sind. Die erste Eigenform beschreibt im wesentlichen die horizontalen Schwingungen des Motors, die zweite vor allem die Drehschwingungen des Abtriebs, vgl. die Definition des Koordinatenvektors in (6.387).

Die Bewegungsgleichungen in modalen Koordinaten entsprechen (6.353). Für die modalen Massen μ_i und Kräfte h_i gilt entsprechend (6.105) und (6.269) mit den Matrizen aus (6.389) und (6.392)

$$\mu_i = \mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_i = m + \frac{J}{R^2} \cdot v_{2i}^2; \quad i = 1, 2 \quad (6.413)$$

$$h_i = \mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{f} = \mathbf{v}_i^T \cdot \hat{\mathbf{f}} \cdot \sin \Omega t = \hat{h}_i \cdot \sin \Omega t = U \Omega^2 \cdot \sin \Omega t; \quad i = 1, 2 \quad (6.414)$$

Nach (6.328) lässt sich die modale Dämpfung bei Vernachlässigung der Außerdiagonalelemente von $\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}$ wie folgt berechnen:

$$2D_i \omega_{i0} = \frac{\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_i}{\mu_i} = \frac{b_V + 2b \cdot (\cos^2 \alpha + v_{2i}^2)}{m + \frac{J}{R^2} v_{2i}^2}; \quad i = 1, 2 \quad (6.415)$$

Da es sich gemäß (6.414) um eine harmonische Erregung handelt, ergibt sich nach (6.356) die stationäre Lösung für die modalen Koordinaten zu

$$\underline{p_i(t)} = \underline{\hat{p}_i \sin(\Omega t + \varphi_i)}; \quad i = 1, 2 \quad (6.416)$$

mit

$$\underline{\hat{p}_i} = \frac{U}{\mu_i} \eta_i^2 V_{1i}, \quad \sin \varphi_i = -2D_i \eta_i V_{1i}, \quad \cos \varphi_i = (1 - \eta_i^2) V_{1i} \quad (6.417)$$

mit der Vergrößerungsfunktion aus (6.358).

Hierbei stellt $\eta_i = \Omega / \omega_{i0}$ das der i -ten Eigenform zugeordnete Abstimmungsverhältnis dar. Die Modaltransformation $\mathbf{q} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{p}$ ergibt dann die gesuchten Bewegungen, vgl. (6.108):

$$q_1(t) = v_{11} p_1(t) + v_{12} p_2(t) = p_1(t) + p_2(t) \quad (6.418)$$

$$\underline{q_1(t)} = \underline{(\hat{p}_1 \cos \varphi_1 + \hat{p}_2 \cos \varphi_2) \sin \Omega t + (\hat{p}_1 \sin \varphi_1 + \hat{p}_2 \sin \varphi_2) \cos \Omega t}$$

$$q_2(t) = v_{21} p_1(t) + v_{22} p_2(t) \quad (6.419)$$

$$\underline{q_1(t)} = \underline{(v_{21} \hat{p}_1 \cos \varphi_1 + v_{22} \hat{p}_2 \cos \varphi_2) \sin \Omega t + (v_{21} \hat{p}_1 \sin \varphi_1 + v_{22} \hat{p}_2 \sin \varphi_2) \cos \Omega t}.$$

Für die gegebenen Parameter haben die modalen Größen folgende Werte:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 243,03 \text{ kg}; & \mu_2 &= 1,7158 \cdot 10^6 \text{ kg} \\ D_1 &= 0,0178; & D_2 &= 0,0792 \\ \eta_1 &= \Omega / (184,85 \text{ s}^{-1}); & \eta_2 &= \Omega / (273,76 \text{ s}^{-1}). \end{aligned} \quad (6.420)$$

Die Trumkräfte berechnen sich unter Beachtung der statischen Vorspannkraft F_V aus (6.393) und (6.394):

$$F_Z = \frac{F_V}{2 \cos \alpha} - c_Z \cdot (q_1 \cos \alpha + q_2) - b \cdot (\dot{q}_1 \cos \alpha + \dot{q}_2) \quad (6.421)$$

$$F_L = \frac{F_V}{2 \cos \alpha} - c_L \cdot (q_1 \cos \alpha - q_2) - b \cdot (\dot{q}_1 \cos \alpha - \dot{q}_2). \quad (6.422)$$

Einsetzen der Lösungen (6.418), (6.419) und ihrer ersten Zeitableitungen ergibt:

$$\underline{F_Z(t)} = \underline{\frac{F_V}{2 \cos \alpha} - (c_Z K_1 + b \Omega K_2) \sin \Omega t + (c_Z K_2 - b \Omega K_1) \cos \Omega t} \quad (6.423)$$

$$\underline{F_L(t)} = \underline{\frac{F_V}{2 \cos \alpha} - (c_L K_3 + b \Omega K_4) \sin \Omega t + (c_L K_4 - b \Omega K_3) \cos \Omega t} \quad (6.424)$$

mit den Abkürzungen

$$K_1 = \sum_{i=1}^2 (\cos \alpha + v_{2i}) \cdot \hat{p}_i \cos \varphi_i; \quad K_2 = - \sum_{i=1}^2 (\cos \alpha + v_{2i}) \cdot \hat{p}_i \sin \varphi_i \quad (6.425)$$

$$K_3 = \sum_{i=1}^2 (\cos \alpha - v_{2i}) \cdot \hat{p}_i \cos \varphi_i; \quad K_4 = - \sum_{i=1}^2 (\cos \alpha - v_{2i}) \cdot \hat{p}_i \sin \varphi_i. \quad (6.426)$$

Insbesondere wird für die erste Resonanzstelle ($\eta_1 = 1$, $\Omega = \omega_{10}$):

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= 0,202 \text{ mm}; \quad \sin \beta_1 = -1; \quad \cos \beta_1 = 0; \quad \eta_2 = \frac{\Omega}{\omega_{20}} = 0,6752 \\ \Rightarrow K_1 &= K_3 = 0; \quad K_2 = 0,18534 \text{ mm}; \quad K_4 = 0,19889 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (6.427)$$

Somit ergibt sich für die Trumkräfte:

$$\underline{\underline{F_Z = [2281,7 - 22,75 \cdot \sin \Omega t + 216,7 \cdot \cos \Omega t] \text{ N}}} \quad (6.428)$$

$$\underline{\underline{F_L = [2281,7 - 24,41 \cdot \sin \Omega t + 223,8 \cdot \cos \Omega t] \text{ N}}} \quad (6.429)$$

Fazit: Die Ergebnisse zeigen, dass die infolge der Motorunwucht angeregten Schwingungen die statische Vorspannkraft nicht so stark verändern, dass die Momentenübertragung gefährdet wäre. Die Kopplung von Dreh- und Längsschwingungen bei vorgepannten Riementrieben ist i. Allg. schwach, weil die Steifigkeitsunterschiede von Zug- und Leertrum gering sind. Aus diesem Grund werden auch die Drehschwingungen kaum von einer umlaufenden Unwucht angeregt, während die Längsschwingungen sehr stark von ihr beeinflusst werden können.

6.7 Beziehungen zur Systemdynamik

6.7.1 Einige Grundbegriffe

Während die Technische Mechanik und die Maschinendynamik ihre wesentliche Aufgabe darin sehen, **mechanische** Zusammenhänge zu erklären und zu berechnen, bezieht die Systemdynamik einen allumfassenden Standpunkt, sodass die Maschinendynamik – mathematisch betrachtet – auch darin eingeordnet werden kann. Die Systemdynamik befasst sich mit Objekten, die aus unterschiedlichen Disziplinen stammen können, also nicht nur aus Mechanik und Elektrotechnik, sondern aus allen Gebieten der Physik, Chemie, Biologie, Soziologie, Wirtschafts- und Gesellschaftswissenschaften.

In der Systemdynamik ist ein System etwas sehr Abstraktes, von dem man allgemein etwa folgende Kennzeichen nennen kann: Es besteht aus einer Menge von Elementen (gekennzeichnet durch ihre Parameterwerte), die miteinander gekoppelt sind und aufeinander einwirken können (Wechselwirkung). Es wird gekennzeichnet durch seine Topologie und durch zeitlich veränderliche Zustandsvariable (Bewegung). Ein System erlaubt, die Beziehungen zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen (Simulation) zu beschreiben. Es kann nach seinem dynamischen Verhalten

(Stabilität) beurteilt, in seinem zeitlichen Verhalten beeinflusst (Steuerung) und hinsichtlich bestimmter Kriterien optimiert werden.

Hier sollen lediglich die Beziehungen der Bewegungsgleichungen der Systemdynamik zu denen der Mechanik und Maschinendynamik kurz dargelegt werden. Dem Studierenden wird empfohlen, sich mit der weiterführenden Literatur zu befassen, da künftig auch wegen der Querverbindungen zur Mechatronik, die Betrachtungsweise der Systemdynamik weitere Verbreitung finden wird [2], [10], [13], [17].

Ein Grundbegriff ist der **Zustand**. Zustandsgrößen können beliebige Variable sein, in der Mechanik sind es im Allgemeinen die Koordinaten und Geschwindigkeiten. Sie werden im Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T \quad (6.430)$$

zusammengefasst, der N Komponenten hat und den **Zustandsraum** bildet. Der zeitlichen Änderung der Zustandsgrößen entspricht die Bewegung eines Punktes im N -dimensionalen Zustandsraum.

Die Differenzialgleichungen eines **autonomen Systems** lauten allgemein

$$\mathbf{G}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (6.431)$$

Gleichung (6.431), die allgemeinste Form der so genannten Zustandsgleichungen, sagt aus, dass sich die zeitliche Änderung $\dot{\mathbf{x}}$ und der momentane Zustand $\mathbf{x}$ selbst gegenseitig so beeinflussen, wie es die Vektorfunktion $\mathbf{G}$ beschreibt. In dieser abstrakten Form gelten die Gleichungen der Systemdynamik für viele physikalische, biologische, ökonomische und gesellschaftliche Systeme. Wenn Einwirkungen von außen auf ein System vorhanden sind, spricht man von einem **heteronomen System**. Viele Zustandsgleichungen haben die Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t). \quad (6.432)$$

Die zeitabhängige Einwirkung definiert, dass ein Energieaustausch des Systems mit der „Außenwelt“ erfolgt. Man kann Bewegungsgleichungen nichtlinearer parameterregter und/oder erzwungener Schwingungen in die mathematische Form von (6.432) überführen.

Ein **lineares System** gehorcht der Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t). \quad (6.433)$$

Dabei ist $\mathbf{A}$ die $(N \times N)$ -**Systemmatrix** und $\mathbf{b}(t)$ ist ein $(N \times 1)$ -Erregervektor, der die von der Zeit abhängigen Einflüsse „von außen“ erfasst. Auf diese Form lassen sich z. B. alle Bewegungsgleichungen erzwungener Schwingungen linearer Systeme bringen.

Der Zustand eines mechanischen Systems wird durch seine verallgemeinerten Koordinaten und deren Geschwindigkeiten eindeutig beschrieben. Wenn man den Lagevektor und seine erste Ableitung im Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]^T \quad (6.434)$$

zusammenfasst, so kann man (6.331), also $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t)$, in die Form (6.433)

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{f}(t) \quad (6.435)$$

überführen. Damit sind die Systemmatrix A und der Erregervektor b definiert:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & E \\ -M^{-1}C & -M^{-1}B \end{bmatrix}; \quad b(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1} \end{bmatrix} f(t), \quad (6.436)$$

also anders als durch (6.83), allerdings gelten analoge Aussagen zum Eigenwertproblem (6.82). Die Anzahl N der Zustandsgrößen in der Systemdynamik ist doppelt so groß wie die Anzahl n der Freiheitsgrade bei konservativen mechanischen Systemen ($N = 2n$). Formuliert man die Bewegungsgleichungen der Mechanik in der Form der Systemdynamik, so lassen sich mit den in der **Systemtheorie** allgemein entwickelten Methoden und Programmen viele Ergebnisse auf die Maschinendynamik übertragen.

Die Lösung der Differenzialgleichung (6.435) lautet, vgl. z. B. [2], [29]:

$$\mathbf{x}(t) = \exp(At)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp[A(t-t^*)]\mathbf{b}(t^*) dt^*, \quad (6.437)$$

wobei $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ den Zustand zur Zeit $t = 0$ (die Anfangsbedingungen) erfasst. In dieser kompakten mathematischen Form beschreibt (6.437) sowohl die freien Schwingungen als auch die erzwungenen Schwingungen von Systemen. Spezielle Lösungen von (6.437) wurden in den Abschnitten 6.3, 6.5 und 6.6 behandelt, vgl. auch das Duhamel-Integral in (6.270) und (6.354).

Mit den Methoden der Systemtheorie kann man allgemeine Eigenschaften der Lösungen mathematisch untersuchen, z. B. zur Stabilität, zur Steuerung oder zur Optimierung von Systemen. Wer sich mit der Systemtheorie näher befassen will, kann sich z. B. in [2], [10], [13] oder [23] orientieren.

6.7.2

Zum Superpositionsprinzip

Ein wesentliches Kennzeichen zur Charakterisierung des dynamischen Verhaltens dynamischer Systeme ist das **Superpositionsprinzip**. Wenn es erfüllt ist, gilt die Aussage: Die resultierende Wirkung aus der Summe von einzelnen Ursachen ist ebenso groß wie die Summe der Wirkungen der Einzelursachen.

Falls zwei „Ursachen“, z. B. die Erregerefunktionen $\mathbf{b}_1(t)$ und $\mathbf{b}_2(t)$, einzeln wirken, seien die Lösungen $\mathbf{x}_1(t)$ und $\mathbf{x}_2(t)$ für die beiden Einzelursachen bekannt, es gilt also für das lineare System gemäß (6.433):

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = A\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_1(t); \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = A\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}_2(t). \quad (6.438)$$

Die Erregung („Ursache 1“) $\mathbf{b}_1(t)$ hat führt zu einer Bewegung („Wirkung“) $\mathbf{x}_1$ und die „Ursache 2“ hat eine „Wirkung“ $\mathbf{x}_2$. Wirkt auf dasselbe System die „Summe der beiden Ursachen“, die Erregung $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_1(t) + \mathbf{b}_2(t)$, so ist die „Wirkung der Summe“ (der Erregungen) die Lösung der Differenzialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}_1(t) + \mathbf{b}_2(t). \quad (6.439)$$

Die „Summe der Wirkungen der Ursachen“ ist $\mathbf{x}$, und wegen $\mathbf{Ax} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{Ax}_1 + \mathbf{Ax}_2$ ist sie identisch mit der „Wirkung der Summe der Ursachen“. Es gilt:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_1 + \dot{\mathbf{x}}_2 &= [\mathbf{Ax}_1 + \mathbf{b}_1(t)] + [\mathbf{Ax}_2 + \mathbf{b}_2(t)] \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + [\mathbf{b}_1(t) + \mathbf{b}_2(t)] = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}(t).\end{aligned}\tag{6.440}$$

Bei nichtlinearen Funktionen gilt im Gegensatz dazu

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, t) \neq \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_2, t).\tag{6.441}$$

Deshalb ist die Summe $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ der Lösungen nicht gleich der Lösung für die Summe der Erregungen.

Fazit: Das Superpositionsprinzip ist bei linearen Systemen gültig und bei nichtlinearen Systemen ungültig.

7 Einfache nichtlineare und selbsterregte Schwinger

7.1

Einführung

Die Bewegungsgleichungen bezüglich freier Schwingungen haben für nichtlineare und selbsterregte Schwinger die aus (6.431) bekannte Form und unterscheiden sich voneinander nicht. Die Bewegungsgleichungen selbsterregter Schwinger enthalten aber aus physikalischer Sicht stets einen „anfachenden“ Ausdruck, sodass freie Schwingungen nicht immer abklingen, wie das beim „gewöhnlichen“ nichtlinearen Schwinger der Fall ist. Während die Bewegungsgln. selbsterregter Schwinger nicht explizit von der Zeit abhängen, ist dies bei den erzwungenen nichtlinearen Schwingungen der Fall. Sie können die Form (6.432). Die zeitabhängige Erregung kann z. B. durch kinematische oder Krafterregung beim Anfahren, Bremsen, bei Übergangsvorgängen oder auch bei stationären Vorgängen (periodische Erregung) auftreten.

Schon H. POINCARÉ (1854–1912) war um 1900 bekannt, dass deterministische nichtlineare Gleichungen nicht unbedingt reguläre Lösungen besitzen. Es wurde dazu in den vergangenen Jahrzehnten der Begriff des deterministischen *Chaos* geprägt, um auszudrücken, dass nichtlineare Systeme auch ein irreguläres, nicht für bestimmte Zeitpunkte genau voraussagbares dynamisches Verhalten haben können. Charakteristisch für chaotische Systeme ist, dass bei kleinen Ursachen große Wirkungen auftreten können, d. h. dass eine hohe Empfindlichkeit des dynamischen Verhaltens gegenüber Änderungen von Parametern (einschließlich Anfangsbedingungen) besteht. Wer sich näher mit dem Gebiet der nichtlinearen Schwingungen befassen will, sei auf die weitergehenden Einführungen in [2], [5] und [23] verwiesen.

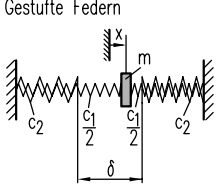
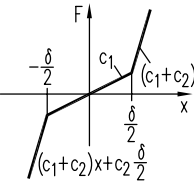
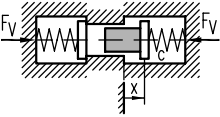
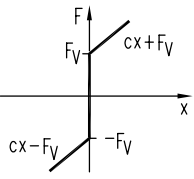
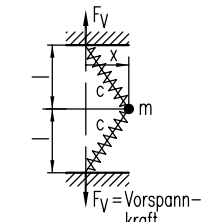
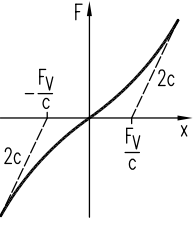
Die Bewegungsgleichung für *erzwungene Schwingungen*, welche die geradlinige Bewegung einer Masse m längs des Weges $x(t)$ beschreibt, ergibt sich aus dem Gleichgewicht zwischen der Trägheitskraft, der nichtlinearen Dämpfungskraft $F_D(x, \dot{x})$, der nichtlinearen Rückstellkraft $F(x)$ und der Erregerkraft $F^{(e)}(t)$:

$$m\ddot{x} + F_D(x, \dot{x}) + F(x) = F^{(e)}(t). \quad (7.1)$$

Tabelle 7.1 zeigt Beispiele für nichtlineare Rückstellkräfte $F(x)$, vgl. auch den Sonderfall (4.32). Steigt die Rückstellkraft stärker als bei einer linearen Feder an, so spricht man von einer *progressiven* (oder überlinearen) *Federkennlinie*. Bleibt sie unterhalb einer Geraden, so nennt man sie *degressiv* (oder unterlinear). Die Nichtlinearität ist in den In Tabelle 7.1 dargestellten drei Fällen geometrisch bedingt, während sie bei manchen Materialien, wie Gummi oder Plasten materialbedingt ist.

Die Nichtlinearität nutzt man z. B. bei Stoßdämpfern, bei Stützfedern von Fahrzeugen, sowie bei Kupplungen zur Beeinflussung der Resonanzkurven u. a. Viele Maschinenelemente besitzen nichtlineare Federkennlinien, so z. B. Wälzlager, Luft-

Tabelle 7.1 Beispiele für nichtlineare Rückstellkräfte

Fall	System	Kennlinie	Rückstell-Funktion $F(x)$
1			$F(x) = \begin{cases} c_2 \frac{\delta}{2} + (c_1 + c_2)x & \text{für } x < -\frac{\delta}{2} \\ c_1 x & \text{für } -\frac{\delta}{2} \leq x \leq \frac{\delta}{2} \\ -c_2 \frac{\delta}{2} + (c_1 + c_2)x & \text{für } \frac{\delta}{2} \leq x \end{cases} \quad (1)$
2			$F(x) = cx + F_v \operatorname{sign}(x) \quad (2)$
3			$F(x) = \frac{2F_v x}{\sqrt{1+x^2}} + 2cx \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ Für $x \ll 1$ gilt $F(x) = 2F_v \frac{x}{1} + cx \frac{x^2}{1^2} + \dots \quad (3)$

federn, Tellerfedern, Seile, Kupplungen, Dämpfer, Reifen. Auch Reibung und Spiel in Zahnradgetrieben, Gelenken, Fugen u. a. sind wesentliche nichtlineare Einflussgrößen.

Außer den hier beschriebenen Beispielen für nichtlineare Federkräfte gibt es noch nichtlineare Dämpfungskräfte und Nichtlinearitäten infolge der Massenkräfte. Nichtlineare Ausdrücke infolge von Massenkräften entstehen aus nichtlinearen geometrischen Zwangsbedingungen oder aus Corioliskräften und Kreismomenten, wo Produkte von Geschwindigkeiten und Drehgeschwindigkeiten auftreten, vgl. Kapitel 2. Beispiele dazu wurden als Torsionsschwinger mit angekoppeltem Mechanismus behandelt, vgl. (4.214) und Aufgabe A4.4.

Erzwungene Schwingungen nichtlinearer Schwinger verlaufen im stationären Zustand nicht immer nur mit der Erregerkreisfrequenz Ω , wie das bei linearen Schwingern der Fall ist. Es können auch bei einer einfachen harmonischen Erregung

- polyharmonische (periodische) Bewegungen
- Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $k\Omega/n$ mit $k = 1, 2, \dots$ und $n = 1, 2, \dots$ (k und n kleine ganze Zahlen)
- Schwingungen mit ganzzahligen Vielfachen der Erregerfrequenz, z. B. 2Ω , 3Ω , $\dots$ so genannte *Superharmonische*

- Schwingungen mit ganzzahligen Teilen der Erregerfrequenz, z. B. $\Omega/2$, $\Omega/3$, ... so genannte *Subharmonische*
- chaotische Bewegungen

auftreten. Ein wesentliches Kennzeichen nichtlinearer Schwinger ist, dass das Superpositionsprinzip nicht gilt, vgl. Abschnitt 6.7.

Unter *chaotischen Bewegungen* versteht man „andauernde irregulär oszillierende Schwankungen von Zustandsgrößen in deterministischen Systemen mit starker Empfindlichkeit gegenüber Änderungen der Anfangsbedingungen“ [23]. Während die Superharmonischen und Subharmonischen mit einem Linienspektrum gekennzeichnet werden können, weist das Spektrum der chaotischen Bewegungen ein kontinuierliches Spektrum auf (in dem auch einzelne Linien auftreten können). Chaotische Bewegungen können in ihrem Zeitverlauf nicht exakt im üblichen Sinne vorausberechnet werden. Zu ihrer Kennzeichnung braucht man Begriffe, wie „Attraktor“, „Periodenverdopplung“, „Poincare-Karte“ und solche, die für die Wahrscheinlichkeitsrechnung charakteristisch sind, vgl. [2], [23]. Es hängt von den Parameterwerten in der Bewegungsgleichung ab, welche Schwingungsart auftritt. Für einen Duffing-Schwinger ist in [23] eine solche Parameterkarte dargestellt, in der die Existenzbereiche der verschiedenen Bewegungsprozesse angegeben sind.

Nichtlineare Schwingungen können i. Allg. nur mit Näherungsmethoden berechnet werden. Wichtige und gebräuchliche Methoden, die z. T. auch im folgenden Abschnitt angewandt werden, sind

- numerische Integration
- asymptotische Methoden (Methode des kleinen Parameters, Mittelungsmethoden)
- die Methode von Ritz-Galerkin
- die Methode der äquivalenten Linearisierung
- die Methode von Krylow-Bogoljubow.

7.2

Nichtlineare Schwinger

7.2.1

Ungedämpfte freie nichtlineare Schwinger

Freie Schwingungen entstehen, wenn dem System zu Beginn (kinetische und/oder potenzielle) Energie zugeführt wird und es sich dann selbst überlassen bleibt. Es wirkt während der Schwingung also keine Erregung. Die Bewegungsgleichung des ungedämpften freien Schwingers lautet für die verallgemeinerte Koordinate q , die ein Weg oder ein Winkel sein kann:

$$m\ddot{q} + F(q) = 0. \quad (7.2)$$

Im Weiteren erfolgt die Beschränkung auf ungerade Funktionen, bei denen $F(q) = -F(-q)$ gilt. Mit den Anfangsbedingungen wird der Zustand des Systems zu Beginn der Bewegung beschrieben:

$$t = 0: \quad q = q_0; \quad \dot{q} = v_0. \quad (7.3)$$

Diesem Anfangszustand entspricht eine übertragene Energie, die sich während der Schwingung nicht ändert:

$$W_0 = W_{\text{kin } 0} + W_{\text{pot } 0} = W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}} \quad (7.4)$$

$$= \frac{1}{2} m (v_0)^2 + \int_0^{q_0} F(q^*) dq^* = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \int_0^q F(q^*) dq^*. \quad (7.5)$$

Aus dieser Energiebilanz folgt sofort die Geschwindigkeit als Funktion des Weges:

$$\dot{q}(q) = \sqrt{(v_0)^2 - \frac{2}{m} \int_{q_0}^q F(q^*) dq^*}. \quad (7.6)$$

Die Umkehrfunktion von $q(t)$ lässt sich über eine weitere Integration bestimmen:

$$t(q) = \int_{q_0}^q \frac{dq^*}{\dot{q}(q^*)}. \quad (7.7)$$

Die *Periodendauer* ergibt sich daraus aus der Periodizitätsbedingung $q(t) = q(t + T)$. Für eine ungerade Funktion $F(q)$ verlaufen die Bewegungen im Bereich $0 < q < \hat{q}$ symmetrisch zu denen im Bereich $-\hat{q} < q < 0$. Aus diesem Grunde reicht es aus, zur Berechnung der Periodendauer eine Viertelschwingung zu betrachten. Es gilt also für die Amplitude $\hat{q}$

$$T = 4 \int_0^{\hat{q}} \frac{dq^*}{\dot{q}(q^*)}. \quad (7.8)$$

Der Zeitverlauf $q(t)$ ist zwar **periodisch, aber nicht harmonisch**, wie z. B. die Lösung (7.16). Deshalb ist diese Bewegung auch nicht durch eine Eigenfrequenz, sondern durch die Periodendauer charakterisiert. Nichtlineare Schwinger mit derselben Periodendauer können ganz unterschiedliche zeitliche Verläufe haben. Die Zeitverläufe – oder die in (7.6) angegebene Abhängigkeit der momentanen Geschwindigkeit vom Ausschlag – unterscheiden die Schwingungen der nichtlinearen Systeme von denen der linearen Systeme und auch untereinander. Man nennt sie **Eigenbewegungen** des Systems.

Bei Ausschlägen im Bereich von $-\hat{q} < q < \hat{q}$ kann man bei der Linearisierung der nichtlinearen Kennlinie durch eine von der Amplitude $\hat{q}$ abhängige *mittlere Federkonstante* c_m ersetzen, die sich aus der Bedingung

$$\int_0^{\hat{q}} [(F(q) - c_m q)q]^2 dq = \text{Min.}! \quad (7.9)$$

ergibt.

Die nichtlineare Rückstellkraft wird damit durch $F_c(q) = c_m q$ angenähert. Es gibt zwei einfache Methoden, um diese mittlere Federkonstante zu bestimmen.

Im Bereich der Schwingwege ergibt sich aus der obigen Forderung die mittlere Federkonstante aus folgendem Integral (*Methode der äquivalenten Linearisierung*):

$$c_m(\hat{q}) = \frac{5}{\hat{q}^5} \int_0^{\hat{q}} q^3 F(q) dq. \quad (7.10)$$

Man kann auch im Zeitbereich mitteln und analog zu (7.9) fordern, dass mit einem Ansatz für eine harmonische Bewegung $\bar{q} = \hat{q} \cos \omega t$ mit der zunächst unbekannten Kreisfrequenz ω das Kräftegleichgewicht (7.2) im Mittel erfüllt ist:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \bar{q}(t) [F(\bar{q}) - c_m \bar{q}(t)] dt = 0. \quad (7.11)$$

Dies entspricht der *Methode der harmonischen Balance*. Es folgt daraus die mittlere Federkonstante zu

$$c_m(\hat{q}) = \frac{\omega}{\pi \hat{q}} \int_0^{2\pi/\omega} F(\bar{q}(t)) \cos \omega t dt. \quad (7.12)$$

Die Werte, die man aus (7.10) erhält, stimmen nicht immer genau mit denen aus (7.12) überein, denn beides sind Näherungswerte. Mit der mittleren Federkonstante c_m kann näherungsweise die *Periodendauer T der Eigenschwingung* eines nichtlinearen Schwingers angeben, die einfacher als (7.35) zu gewinnen ist. Es gilt:

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{m}{c_m}}. \quad (7.13)$$

Die mittlere Federkonstante und die Periodendauer hängen bei jedem nichtlinearen Schwinger von der Amplitude ab. Wenn man mit einer mittleren Federkonstante rechnet, erhält man einen harmonischen Zeitverlauf als Näherung. Diese mittelt zwar den Verlauf in einem bestimmten Ausschlagbereich, aber sie vernachlässigt die oft wesentlichen höheren Harmonischen in der Lösung.

Ein typischer Vertreter nichtlinearer Schwinger ist der bereits im Jahre 1918 von dem deutschen Ingenieur GEORG DUFFING (1861–1944) untersuchte (und nach ihm benannte) Schwinger, welcher der Differenzialgleichung (7.2) mit

$$F(q) = cq(1 + \varepsilon q^2) \quad (7.14)$$

gehört. Die Nichtlinearität der Rückstellkraft wird mit einem einzigen Parameter ε beschrieben. Mit dieser Kennlinie lassen sich sowohl progressive ($\varepsilon > 0$), lineare ($\varepsilon = 0$) als auch degressive Kennlinien ($\varepsilon < 0$) beschreiben und typische nichtlineare Effekte untersuchen. Solche Kennlinien existieren z. B. für das vorgespannte Feder-Masse-System (Fall 3 in Tabelle 7.1) und das Pendel mit großem Ausschlag. Auch die nichtlinearen Rückstellfunktionen von geometrisch oder materialbedingt nichtlinearen Federn lassen sich oft mit (7.14) erfassen, vgl. Aufgabe A1.3.

Die freie Schwingung folgt aus (7.6) in Form des Geschwindigkeit-Zeit-Verlaufs für $v_0 = 0$:

$$\dot{q}(q) = \sqrt{\frac{2}{m} \int_{q_0}^q cq^*(1 + \varepsilon q^{*2}) dq^*} = \sqrt{\frac{c}{m} \left[q^2 - q_0^2 + \frac{1}{2} \varepsilon (q^4 - q_0^4) \right]}. \quad (7.15)$$

Die Darstellung dieser Funktion ist in der q - $\dot{q}$ -Ebene möglich, der so genannten *Phasenebene* [5], [23]. Aus jeder Anfangsbedingung folgt der Verlauf einer **Phasenkurve**, deren Formen gewisse Aussagen über den Zustand eines nichtlinearen

Systems erlauben. Für den Zeitverlauf kann man eine Näherungslösung mit der Methode des kleinen Parameters ermitteln, vgl. [5]:

$$q(t) = q_0 \left[\cos \omega t + \frac{\varepsilon q_0^2}{32} (\cos 3\omega t - \cos \omega t) + \left(\frac{\varepsilon q_0^2}{32} \right)^2 (\cos 5\omega t - \cos \omega t) + \dots \right]. \quad (7.16)$$

Die Grundkreisfrequenz ω steht mit der Periodendauer T und der Eigenkreisfrequenz ω_0 des linearen Schwingers im Zusammenhang und ändert sich mit ε und der Anfangsauslenkung q_0 :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \approx \sqrt{\frac{c}{m}} \left(1 + \frac{3\varepsilon q_0^2}{8} - \frac{21\varepsilon^2 q_0^4}{256} \right); \quad \omega^2 \approx \omega_0^2 \left(1 + \frac{3\varepsilon q_0^2}{4} \right). \quad (7.17)$$

Die mittlere Federkonstante ist also in Übereinstimmung mit der Näherung aus (7.12) in folgender Weise vom Ausschlag $\hat{q}$ abhängig:

$$c_m = c \left(1 + \frac{3\varepsilon q_0^2}{4} \right). \quad (7.18)$$

Zum Vergleich: Die mittlere Federkonstante gemäß (7.10) ist $c_m = c(1 + 5\varepsilon \hat{q}^2/7)$ und unterscheidet sich davon wenig. Die Lösung als Fourierreihe (7.16), die lediglich die ungeraden Harmonischen bis zur 5. Ordnung enthält, konvergiert schnell und genügt für viele praktische Fälle aus. Die exakte Lösung ist eine Summe aus unendlich vielen Harmonischen ungerader Ordnung.

7.2.2

Erzwungene Schwingungen bei harmonischer Erregung

7.2.2.1

Erste Harmonische bei nichtlinearer Federung

Die Bewegungsgleichung eines Schwingers mit linearer Dämpfung, nichtlinearer Rückstellkraft und harmonischer Erregerkraft lautet als Sonderfall von (7.1):

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + F(q) = \hat{F} \cos \Omega t. \quad (7.19)$$

Der Weg-Zeit-Verlauf dieser Schwingung könnte unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen gemäß (3.2) durch eine numerische Integration in einem endlichen Intervall bestimmt werden. Dafür müssten alle Parameterwerte bekannt sein, und um Parametereinflüsse zu erkennen, müsste vielfach gerechnet werden. Für die stationären Schwingungen kann man für die Amplitude der ersten Harmonischen eine Näherungslösung gewinnen, aus der die Parametereinflüsse erkennbar sind. Dazu wird die Rückstellkraft in der Bewegungsgleichung linearisiert, sodass anstelle von (7.19) mit einer amplitudenabhängigen mittleren Federkonstante c_m gerechnet wird:

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + c_m(\hat{q})q = \hat{F} \cos \Omega t. \quad (7.20)$$

Die Lösung dieser nunmehr linearen Gleichung ist aus Abschnitt 3.2.1.2 bekannt:

$$q(t) = \hat{q} \cos(\Omega t - \varphi). \quad (7.21)$$

Die Amplitude $\hat{q}$ und der Phasenwinkel φ ergeben sich analog zu (3.10) aus folgenden Gleichungen:

$$\hat{q} = \frac{\hat{F}}{\sqrt{[c_m(\hat{q}) - m\Omega^2]^2 + (b\Omega)^2}} \quad (7.22)$$

$$\tan \varphi = \frac{b\Omega}{\sqrt{[c_m(\hat{q}) - m\Omega^2]^2 + (b\Omega)^2}}. \quad (7.23)$$

Sie gelten für die erste Harmonische des linearisierten nichtlinearen Schwingers. Die Amplitude kann man nicht direkt berechnen, da sie auch im Nenner von (7.22) in c_m enthalten ist. Sie folgt aus einer nichtlinearen Gleichung, die im Allgemeinen nur numerisch lösbar ist. Die Umkehrfunktion $\Omega^2(\hat{q})$ des *Amplituden-Frequenzgangs für die erste Harmonische* lässt sich einfacher aus einer quadratischen Gleichung für Ω^2 berechnen, die sich aus (7.22) nach kurzer Umstellung ergibt:

$$\Omega^4 + \Omega^2 \frac{b^2 - 2mc_m(\hat{q})}{m^2} + \frac{c_m^2(\hat{q}) - \left(\frac{\hat{F}}{\hat{q}}\right)^2}{m^2} = 0. \quad (7.24)$$

Für den Duffing-Schwinger ist die gemittelte Federkonstante aus (7.18) bekannt. Das Einsetzen der dimensionslosen Kenngrößen D (Dämpfungsgrad), ε^* (Nichtlinearität) und der Vergrößerungsfunktion V gemäß

$$2D = \frac{b}{\sqrt{cm}}; \quad \varepsilon^* = \varepsilon \left(\frac{\hat{F}}{c}\right)^2; \quad V = \frac{c\hat{q}}{\hat{F}} \quad (7.25)$$

in (7.24) liefert folgende quadratische Gleichung für $\eta^2 = (\Omega/\omega_0)^2$:

$$\eta^4 + 2\eta^2 \left[2D^2 - 1 - \frac{3}{4}\varepsilon^* V^2 \right] + \left[1 + \frac{3}{4}\varepsilon^* V^2 \right]^2 - \left(\frac{1}{V} \right)^2 = 0. \quad (7.26)$$

Sie hat die beiden Lösungen:

$$\eta_{1,2}^2 = 1 + \frac{3\varepsilon^*}{4} V^2 - 2D^2 \pm \sqrt{\frac{1}{V^2} - 4D^2 \left[1 + \frac{3}{4}\varepsilon^* V^2 - D^2 \right]}. \quad (7.27)$$

Für jeden gegebenen Wert der Vergrößerungsfunktion V erhält man daraus einen oder zwei Werte von η (nur die reellen Wurzeln haben eine physikalische Bedeutung), sodass man die gesuchte Resonanzkurve $V(\eta, D, \varepsilon^*)$ als Umkehrfunktion von $\eta(D, V, \varepsilon^*)$ erhält. Es können zu einem η -Wert umgekehrt ein, zwei oder drei verschiedene Amplituden gehören, vgl. Bild 7.1. Dieser Amplituden-Frequenzgang für die erste Harmonische unterscheidet sich wesentlich von dem eines linearen Schwingers.

Die gestrichelte Linie im Zentrum ist die so genannte *Skelettlinie*. Sie beschreibt die Abhängigkeit der Eigenfrequenz von der Amplitude. Bei progressiven Rückstellkräften ist die Skelettlinie nach rechts gebogen, denn dabei nimmt die Eigenfrequenz

mit der Amplitude zu. Bei degressiven Kennlinien ist die Skelettlinie nach links gebogen. Bei tiefen (links von D) und bei hohen Erregerfrequenzen (rechts von B) gibt es eindeutige Werte für die Amplituden. Bei kleiner Dämpfung existieren aber theoretisch drei Lösungen an den „überhängenden“ Kurvenästen im mittleren Bereich zwischen ω^* und ω^{**} . Aus der Theorie ist bekannt [5], [23], dass auf dem Kurvenast zwischen A und B keine stabilen Schwingungen möglich sind. Wird die Erregerfrequenz, z. B. bei einem Anlaufvorgang, von niederen Frequenzen aus langsam gesteigert, dann wird der obere Kurvenast durchlaufen, bis an der Stelle A die Amplitude von einem großen Wert auf den viel kleineren Wert am Punkt B springt. Wird umgekehrt, z. B. beim Bremsen die Drehzahl langsam gesenkt, so springt die Amplitude spätestens am Punkt C vom unteren Kurvenast auf den oberen.

Das Maximum der Vergrößerungsfunktion ergibt sich aus

$$V_{\max}^2 = \frac{2(1-D^2)}{3\varepsilon^*} \left[\sqrt{1 + \frac{3\varepsilon^*}{4(1-D^2)D^2}} - 1 \right] \quad (7.28)$$

bei dem Abstimmungsverhältnis

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{3}{4}\varepsilon^* V_{\max}^2 - D^2}. \quad (7.29)$$

Das Ergebnis (7.28) zeigt: **Die Amplitude der Schwingung ist nicht proportional der Amplitude der Erregerkraft.** Für die praktische Schwingungstechnik ist der *Amplituden-Frequenzgang nichtlinearer Schwinger* deshalb von besonderem Interesse, weil mit ihm ein breiterer Resonanzbereich als bei linearen Schwingern erreicht werden kann. Wenn man große Schwingungsamplituden erreichen will, z. B. bei Schwingsieben, Schwingförderern oder Vibrationsverdichtern, so muss man den Antrieb so robust auslegen, dass er immer die geforderten Mindestamplituden liefert.

Bei der Vergrößerungsfunktion eines linearen Schwingers (vgl. Bild 3.3) ist die Resonanzspitze sehr schmal und ihr Spitzenwert ist umgekehrt proportional zum Dämpfungsgrad, vgl. (3.28). Schon bei kleinen Änderungen der Dämpfung oder bei unvermeidlichen Parameterschwankungen (Masse, Steifigkeit, Frequenz) kann man vom Amplitudenmaximum „abrutschen“, denn eine kleine Änderung des optimalen Abstimmungsverhältnisses würde schon dazu führen, dass die Vorteile der Resonanzvergrößerung verloren gehen.

7.2.2.2

Superharmonische und Subharmonische beim ungedämpften Duffing-Schwinger

Die folgende Betrachtung soll zeigen, dass die erzwungene Schwingung bei harmonischer Erregung nicht einfach harmonisch verläuft. Aus (7.19) folgt mit $b = 0$ für den ungedämpften Duffing-Schwinger mit (7.14) die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q(1 + \varepsilon q^2) = \frac{\hat{F}}{m} \cos \Omega t. \quad (7.30)$$

Man kann (7.30) umstellen zu

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = (\Omega^2 - \omega_0^2)q - \omega_0^2 \varepsilon q^3 + \frac{\hat{F}}{m} \cos \Omega t \quad (7.31)$$

schreiben und einen Lösungsansatz $q(t) = q^{(1)}(t) + q^{(2)}(t)$ machen. Die Lösung $q^{(1)} = \hat{q} \cos \Omega t$ aus (7.21) wird mit $b = 0$ als erste Näherung benutzt, die für $\varepsilon = 0$ der genauen Lösung entspricht und (7.30) bereits angenähert erfüllt. Setzt man diese in (7.31) ein, so ergibt sich eine Gleichung für eine zweite Näherung $q^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \ddot{q}^{(2)} + \Omega^2 q^{(2)} &= (\Omega^2 - \omega_0^2)q^{(1)} - \omega_0^2 \varepsilon q^{(1)3} + \frac{\hat{F}}{m} \cos \Omega t \\ &= \left[(\Omega^2 - \omega_0^2)\hat{q} - \frac{3}{4}\omega_0^2 \varepsilon \hat{q}^3 + \frac{\hat{F}}{m} \right] \cos \Omega t - \frac{1}{4}\omega_0^2 \varepsilon \hat{q}^3 \cos 3\Omega t. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Bei der Umformung wurde das Additionstheorem $\cos^3 \Omega t = 1/4(3 \cos \Omega t + \cos 3\Omega t)$ benutzt. Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist null, denn er ist identisch mit (7.22) für $b = 0$, woraus die Amplitude $\hat{q} = a_1$ (Resonanzkurve der ersten Harmonischen) schon berechnet wurde. Die Lösung von (7.32) liefert deshalb eine zweite Näherung, die den Term der dritten Zeile in (7.32) erfüllt:

$$a_3 = \frac{\omega_0^2 \varepsilon \hat{q}^3}{32\Omega^2}; \quad q(t) = q^{(1)} + q^{(2)} = a_1 \cos \Omega t + a_3 \cos 3\Omega t. \quad (7.33)$$

Würde man diese Betrachtung fortsetzen, könnte man durch sukzessive Approximation weitere Näherungen gewinnen. Es würden sich weitere höhere Harmonische mit den Kreisfrequenzen $5\Omega, 7\Omega$ usw. ergeben. Da dies Frequenzen oberhalb der Erregerfrequenz sind ($k\Omega$), nennt man sie *Superharmonische*. Die harmonische Erregerkraft zwingt den nichtlinearen Schwinger nicht zu harmonischen, sondern zu periodischen Schwingungen.

Es können auch Schwingungen auftreten, bei denen neben Superharmonischen auch *Subharmonische* (Kreisfrequenzen Ω/k) auftreten. Sie werden mit folgendem Ansatz gesucht:

$$q = a_1 \cos \Omega t + a_{1/3} \cos(\Omega t/3). \quad (7.34)$$

Einsetzen in (7.30) liefert eine endliche trigonometrische Reihe. Es ergibt sich nach der Benutzung einiger Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} &\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)a_1 + \varepsilon \omega_0^2 \frac{3a_1^3 + 6a_1 a_{1/3}^2 + a_{1/3}^3}{4} - \frac{\hat{F}}{m} \right] \cos \Omega t + \\ &\left[\left(\omega_0^2 - \frac{\Omega^2}{9} \right) a_{1/3} + 3\varepsilon \omega_0^2 \frac{2a_1^2 a_{1/3} + a_1 a_{1/3}^2 + a_{1/3}^3}{4} \right] \cos(\Omega t/3) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Im Sinne der Mittelung werden die anderen auftretenden Funktionen $\cos 5\Omega t/3$ und $\cos 7\Omega t/3$ vernachlässigt. Dann ist (7.30) näherungsweise erfüllt, wenn (7.35) erfüllt ist. Wenn man die Ausdrücke in den beiden eckigen Klammern null setzt, entstehen zwei gekoppelte nichtlineare algebraische Gleichungen. Deren Lösung ist

kompliziert und soll nicht weiter verfolgt werden. Der zweite Klammerausdruck ist null für $a_{1/3} = 0$, das ergibt die schon aus (7.22) bekannte Lösung für $b = 0$:

$$a_1 = \hat{q} = \frac{\hat{F}}{c_m(\hat{q}) - m\Omega^2}. \quad (7.36)$$

Ein allgemeiner Fall, bei dem die *Amplitude der Subharmonischen* dominiert ($a_{1/3} \gg a_1$), folgt auch aus der zweiten Klammer. Es ergibt sich eine quadratische Gleichung für $a_{1/3}$:

$$(a_{1/3})^2 + a_1 a_{1/3} + 2\hat{q}^2 + \frac{4(9\omega_0^2 - \Omega^2)}{27\varepsilon\omega_0^2} = 0. \quad (7.37)$$

Ihre Lösung ist in Verbindung mit der aus (7.36) bekannten Näherung berechenbar:

$$a_{1/3} = -\frac{a_1}{2} \left[1 \pm \sqrt{\frac{16(\Omega^2 - 9\omega_0^2)}{27\varepsilon\omega_0^2\hat{q}^2} - 7} \right]. \quad (7.38)$$

Es existieren nur dann Lösungen, wenn der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist. Das ist dann der Fall, wenn bei progressiver Kennlinie ($\varepsilon > 0$) folgende Bedingung erfüllt ist, vgl. dazu auch (7.17):

$$\Omega > 3\omega_0 \sqrt{1 + \frac{21\varepsilon\hat{q}^2}{16}} > 3\omega_0 \sqrt{1 + \frac{3\varepsilon\hat{q}^2}{4}} = 3\omega. \quad (7.39)$$

Das Zeichen für die Ungleichung ist umzukehren bei $\varepsilon < 0$. Die Amplituden der Subharmonischen sind also dann groß, wenn die Erregerfrequenz oberhalb der dreifachen Grundfrequenz liegt. Die erzwungenen Schwingungen erfolgen dann mit einer Frequenz, die etwa der Eigenfrequenz entspricht, also mit einem Drittel der Erregerfrequenz.

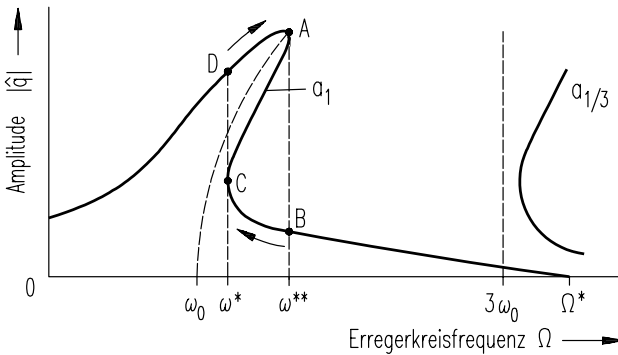


Bild 7.1 Amplituden-Frequenzgang der ersten Harmonischen und der dritten Subharmonischen des Duffing-Schwingers

In Bild 7.1 ist die Skelettlinie für die dritte Subharmonische mit eingetragen. Es zeigt sich, dass in dem Gebiet $\Omega > 3\omega_0$ die Amplituden der Subharmonischen diejenigen

der Grund-Harmonischen wesentlich überschreiten. Es gibt auch eine Kombination von Parameterwerten, bei der nur die Subharmonische auftritt ($\dot{q} = 0$). Für sie findet man zunächst aus der ersten Klammer von (7.35) die Beziehung $\varepsilon \omega_0^2 a_{1/3}^3 = 4\hat{F}/m$ (Wegamplitude ist proportional der dritten Wurzel aus der Kraftamplitude). Aus der zweiten Klammer ergibt sich die Erregerkreisfrequenz, bei der dieser Bewegungszustand auftreten kann:

$$\Omega^* = 3\omega_0 \sqrt{\frac{1 + 3\varepsilon a_{1/3}^2}{4}}. \quad (7.40)$$

Subharmonische Schwingungen 2. und 3. Ordnung sind oft bei Rotoren beobachtet worden. Es verblüfft, wenn z. B. bei einer Betriebsdrehzahl von 10 000/min am Rotor langsame Schwingungen mit der Drehzahl 5000/min oder 3300/min beobachtet werden. Die Hauptursache subharmonischer Resonanzen sind nichtlineare Kennlinien der Lager. Man kann meist durch Verminderung des Spiels und Erhöhung der Vorspannung die nichtlinearen Effekte beseitigen.

7.2.2.3

Erste Harmonische bei nichtlinearer Dämpfung

Die Dämpfung ist in den meisten Fällen nichtlinear, vgl. Abschnitt 1.4. Hier soll der Fall der Hysterese-Dämpfung betrachtet werden, bei dem eine elliptische Hysteresekurve berücksichtigt wird. Die Bewegungsgleichung lautet mit (1.87) bei harmonischer Erregerkraft:

$$m\ddot{q} + F_R \left| \sqrt{1 - (q/\hat{q})^2} \right| \text{sign}(\dot{q}) + cq = \hat{F} \cos \Omega t. \quad (7.41)$$

Die stationäre Lösung wird mit dem Ansatz

$$q = \hat{q} \cos(\Omega t - \varphi) = \hat{q}(\cos \Omega t \cos \varphi + \sin \Omega t \sin \varphi) \quad (7.42)$$

$$\dot{q} = -\Omega \hat{q} \sin(\Omega t - \varphi) = -\Omega \hat{q}[\sin \Omega t \cos \varphi - \cos \Omega t \sin \varphi] \quad (7.43)$$

gesucht. Wegen

$$\text{sign}(\dot{q}) \left| \sqrt{1 - (q/\hat{q})^2} \right| = \text{sign}(\dot{q}) \left| \sqrt{1 - \cos^2(\Omega t - \varphi)} \right| = \sin(\Omega t - \varphi) \quad (7.44)$$

wirkt stets eine der momentanen Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtete Kraft.

Einsetzen in (7.41) liefert die Bedingung

$$\begin{aligned} & [(c - m\Omega^2)\hat{q} \cos \varphi + F_R \sin \varphi - \hat{F}] \cos \Omega t \\ & + [(c - m\Omega^2)\hat{q} \sin \varphi - F_R \cos \varphi] \sin \Omega t = 0. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Sie ist nur erfüllt, wenn jeder der Ausdrücke in den eckigen Klammern für sich null ist. Daraus findet man zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten $\hat{q}$ und φ .

Es kann berücksichtigt werden, dass die Kraft F_R von der n -ten Potenz der Amplitude $\hat{q}$ abhängt:

$$F_R = \gamma_n \hat{q}^n. \quad (7.46)$$

Mit dieser Hypothese (die Amplitude soll ja erst ausgerechnet werden) findet man zunächst die Beziehungen (mit dem Abstimmungsverhältnis $\eta = \Omega \sqrt{m/c}$)

$$\hat{q} = \frac{\hat{F}/c}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (\gamma_n/c)^2 \hat{q}^{2(n-1)}}} \quad (7.47)$$

$$\tan \varphi = \frac{\gamma_n(\hat{q})^{n-1}}{c(1 - \eta^2)}. \quad (7.48)$$

Die unbekannte Amplitude ist auch im rechten Teil der Gleichungen enthalten, d. h., man kann sie nur als Lösung einer nichtlinearen Gleichung errechnen. Allerdings kann man bereits für den Resonanzfall ($\eta = 1$) die maximale Amplitude angeben. Es folgt aus (7.47):

$$\hat{q}_{\max} = \sqrt[n]{\frac{\hat{F}}{c\gamma_n}}. \quad (7.49)$$

Die Resonanzamplitude ist *nichtlinear* von der Amplitude der Erregerkraft abhängig! Sie ist der n -ten Wurzel aus der Kraft proportional. Stellt man so eine Abhängigkeit experimentell fest, kann man den Exponenten n ermitteln und damit weiter rechnen.

Für den Sonderfall des Exponenten $n = 1$ erhält man dasselbe Ergebnis wie für eine lineare Dämpfungskraft mit dem Ansatz $F_D = (b_1/\Omega)\dot{q}$, der aus (1.86) bekannt ist:

$$\hat{q} = \frac{\hat{F}/c}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (\gamma_1/c)^2}}. \quad (7.50)$$

Für $n = 2$ ergibt sich aus (7.47) zunächst

$$\hat{q} = \frac{\hat{F}/c}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (\gamma_2\hat{q}/c)^2}}. \quad (7.51)$$

Die Amplitude $\hat{q}$, die hier noch in beiden Seiten der Gleichung enthalten ist, muss noch explizit ermittelt werden. Durch Quadrieren entsteht die Gleichung

$$(\hat{q})^2 \left[(1 - \eta^2)^2 + \left(\frac{\gamma_2\hat{q}}{c} \right)^2 \right] = \left(\frac{\hat{F}}{c} \right)^2. \quad (7.52)$$

Führt man als dimensionslose Größen die Vergrößerungsfunktion V aus (7.25) und einen Dämpfungswert gemäß

$$d = \frac{\gamma_2\hat{F}}{c^2} \quad (7.53)$$

ein, so ergibt sich die biquadratische Gleichung

$$V^2 [(1 - \eta^2)^2 + (dV)^2] - 1 = 0. \quad (7.54)$$

Die Dämpfungskenngröße ist bei Resonanz mit dem Dämpfungsgrad vergleichbar ($d \approx 4D^2$). Aus (7.54) folgt die Vergrößerungsfunktion des nichtlinear gedämpften Schwingers:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1 - \eta^2}{d\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{4d^2}{(1 - \eta^2)^4}} - 1} \\
 &= \frac{1}{d\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(1 - \eta^2)^4 + 4d^2} - (1 - \eta^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{7.55}$$

Die Resonanzkurven sind in Bild 7.2 dargestellt.

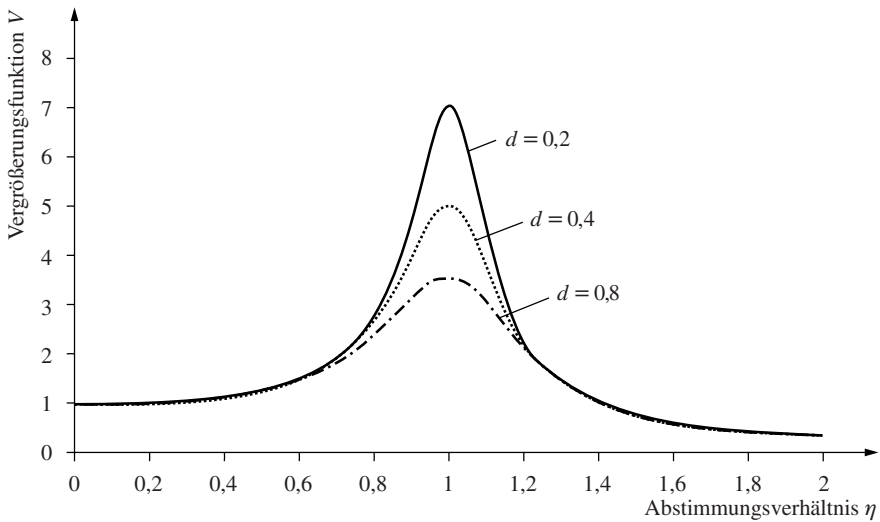


Bild 7.2 Resonanzkurve des nichtlinear gedämpften Schwingers

Die Kurven zeigen qualitativ einen ähnlichen Verlauf wie die für den linear gedämpften Schwinger, vgl. Bild 3.4a. Sie beginnt für $d = 0$ bei $V = 1$ und strebt bei großen η -Werten asymptotisch gegen null. Die Vergrößerungsfunktion hat in der Nähe von $\eta = 1$ (Resonanz) ihr Maximum. Aus (7.54) findet man sofort den Wert der Resonanzamplitude:

$$\frac{c\dot{q}_{\max}}{\hat{F}} = V_{\max} \approx \frac{1}{\sqrt{d}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma_2 \hat{F}}{c^2}}}; \quad \text{d. h.} \quad \dot{q}_{\max} = \sqrt{\frac{\hat{F}}{\gamma_2}}. \tag{7.56}$$

Während die Resonanzkurve global derjenigen eines linearen Schwingers ähnelt, unterscheidet sie sich im Resonanzgebiet davon wesentlich, vgl. die einleitenden Bemerkungen in Abschnitt 1.4. Die Wegamplitude ist infolge der nichtlinearen Dämpfung der Wurzel der Amplitude der Erregerkraft proportional. Eine doppelte Amplitude würde erst durch eine viermal größere Erregerkraft entstehen – so etwas zeigt sich bei manchen Experimenten.

7.2.3

Beispiele

7.2.3.1

Schwingförderer mit gestuften Federn

Bei Schwingförderern mit Schubkurbelantrieb kann man bei Betrieb in Resonanznähe große Amplituden erreichen. Beim Einsatz einer linearen Feder ist der Resonanzbereich sehr schmal. Das Resonanzgebiet eines linearen Schwingers ist gegenüber Schwankungen der Parameterwerte (der Beladung, der Erregerfrequenz, der Federsteifigkeiten) sehr empfindlich. Die Amplituden würden sich bei kleinen Parameteränderungen stark ändern, der Förderer würde nicht zuverlässig arbeiten. Für einen robusten Betrieb ist es deshalb vorteilhaft und üblich, nichtlineare Federungen (mit gestuften Federn) einzusetzen, um in einem breiten Bereich des Abstimmungsverhältnisses große Amplituden zu erreichen.

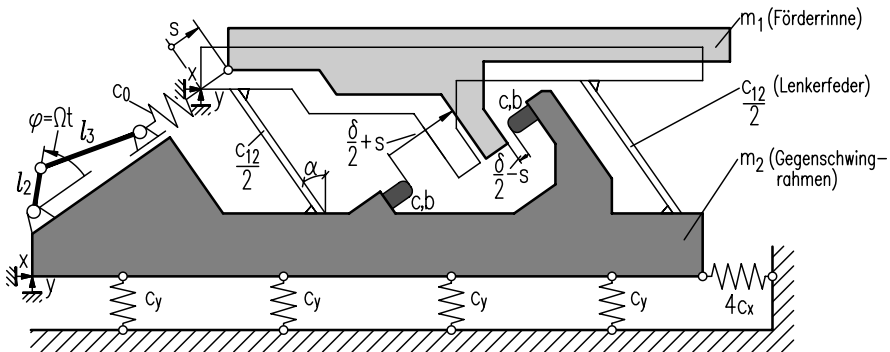


Bild 7.3 Berechnungsmodell eines Schwingförderers in ausgelenkter Lage

Bild 7.3 zeigt einen lenkergeführten Schwingförderer, der durch eine Schubkurbel ($l_3 \gg l_2$) mit elastischer Schubstange angetrieben wird. Das Berechnungsmodell, das wegen der beiden gekoppelten Starrkörper eigentlich 12 Freiheitsgrade hat, wird mit folgenden Annahmen zu einem Modell mit 3 Freiheitsgraden vereinfacht:

- Es wird Symmetrie zur Zeichenebene angenommen.
- Die Kippbewegung wird (da nicht angeregt) vernachlässigt.
- Die Schubrichtung steht senkrecht auf der Bewegungsrichtung.
- Die lineare Feder c_0 sei für $s = l_2 \cos \Omega t$ unbelastet.

Die Bewegungsgleichungen (für die Relativverschiebung s sowie für die Absolutwege x und y) erhält man, wenn man die Dämpfung in den Stahlfedern und Lenkerfedern gegenüber der Dämpfung in den Gummi-Pufferfedern vernachlässigt, mithilfe der Lagrange'schen Gln. 2. Art, wozu die 3 skalaren Funktionen W_{kin} , W_{pot} und die virtuelle Arbeit $\delta W^{(e)}$ benötigt werden. Wird die infolge des Spiels nichtlineare Kraft in den Gummipuffern (deren Verhalten selbst bezüglich Elastizität und Dämpfung als linear angenommen wird) mit $F(s, \dot{s}, \delta, b, c)$ bezeichnet, so ergibt sich:

$$W_{\text{kin}} = \frac{m_1}{2} \cdot [(\dot{x} + \dot{s} \cos \alpha)^2 + (\dot{y} + \dot{s} \sin \alpha)^2] + \frac{m_2}{2} \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} [4c_x x^2 + 4c_y y^2 + c_{12} s^2 + c_0 \cdot (s - l_2 \cos \Omega t)^2] \quad (7.57)$$

$$\delta W^{(e)} = -F(s, \dot{s}, \delta, b, c) \cdot \delta s$$

Mithilfe des Lagrange'schen Formalismus folgen daraus die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m_1(\ddot{s} + \ddot{x} \cos \alpha + \ddot{y} \sin \alpha) + (c_{12} + c_0)s &= c_0 l_2 \cos \Omega t - F(s, \dot{s}, \delta, b, c) \\ m_1(\ddot{s} \cos \alpha + \ddot{x}) + m_2 \ddot{x} + 4c_x x &= 0 \\ m_1(\ddot{s} \sin \alpha + \ddot{y}) + m_2 \ddot{y} + 4c_y y &= 0. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Die Pufferkraft lässt sich entsprechend Gl. (1) in Tabelle 7.1 bei Berücksichtigung der Dämpfung wie folgt angeben, vgl. auch Gl. (4.32):

$$F(s, \dot{s}, \delta, b, c) = \frac{1}{2} \left[b\dot{s} + c \cdot \left(s - \frac{\delta}{2} \text{sign}(s) \right) \right] \cdot (1 + \text{sign}(|s| - \delta/2)) \quad (7.59)$$

Die Bewegungen des Schwingförderers wurden für zwei Varianten untersucht.

Parameterwerte, die für beide Varianten identisch sind:

Kurbelradius	$l_2 = 30 \text{ mm}$
Neigungswinkel der Lenkerfedern	$\alpha = 25 \text{ Grad}$
Masse der Förderrinne	$m_1 = 600 \text{ kg}$
Masse des Gegenschwingrahmens	$m_2 = 2700 \text{ kg}$
Steifigkeit eines Stahlfederpakets	$c_x = 0,06 \cdot 10^6 \text{ N/m};$ $c_y = 0,16 \cdot 10^6 \text{ N/m}$
Längssteifigkeit der Schubstange	$c_0 = 0,2 \cdot 10^6 \text{ N/m}$
Gesamtdämpferkonstante der Pufferfedern in s-Richtung	$b = 8000 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

Unterschiedliche Parameterwerte bei Variante 1 und Variante 2

	Variante 1	Variante 2
Spiel zwischen Puffer und Förderrinne	$\delta = 6 \text{ mm}$	$\delta = 8 \text{ mm}$
Gesamtsteifigkeit der Lenkerfedern in s-Richtung	$c_{12} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$	$c_{12} = 0,8 \cdot 10^6 \text{ N/m}$
Gesamtsteifigkeit der Pufferfedern in s-Richtung	$c = 1,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$	$c = 3,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$

Die numerische Integration dieser drei gekoppelten Gleichungen liefert die Zeitverläufe aller drei Koordinaten, von denen Bild 7.4 typische Beispiele zeigt. Man kann erkennen, dass die Weg-Zeit-Verläufe nicht rein harmonisch verlaufen – dies ist eine Folge der gestuften Federkennlinie. Neben den Komponenten mit der Erregerfrequenz und höheren Harmonischen treten auch die theoretisch vorausgesagten Subharmonischen auf, die sich „von allein“ aus der numerischen Rechnung ergeben.

Die *Resonanzkurven* in Bild 7.5 stellen die maximalen Ausschläge als Funktion der auf $\omega^* = \sqrt{c_y/m_1} = 16,33 \text{ s}^{-1}$ bezogenen Erregerkreisfrequenz ($\eta^* = \Omega/\omega^*$) dar. Im unteren Erregerfrequenzbereich sind zwei Resonanzstellen zu erkennen,

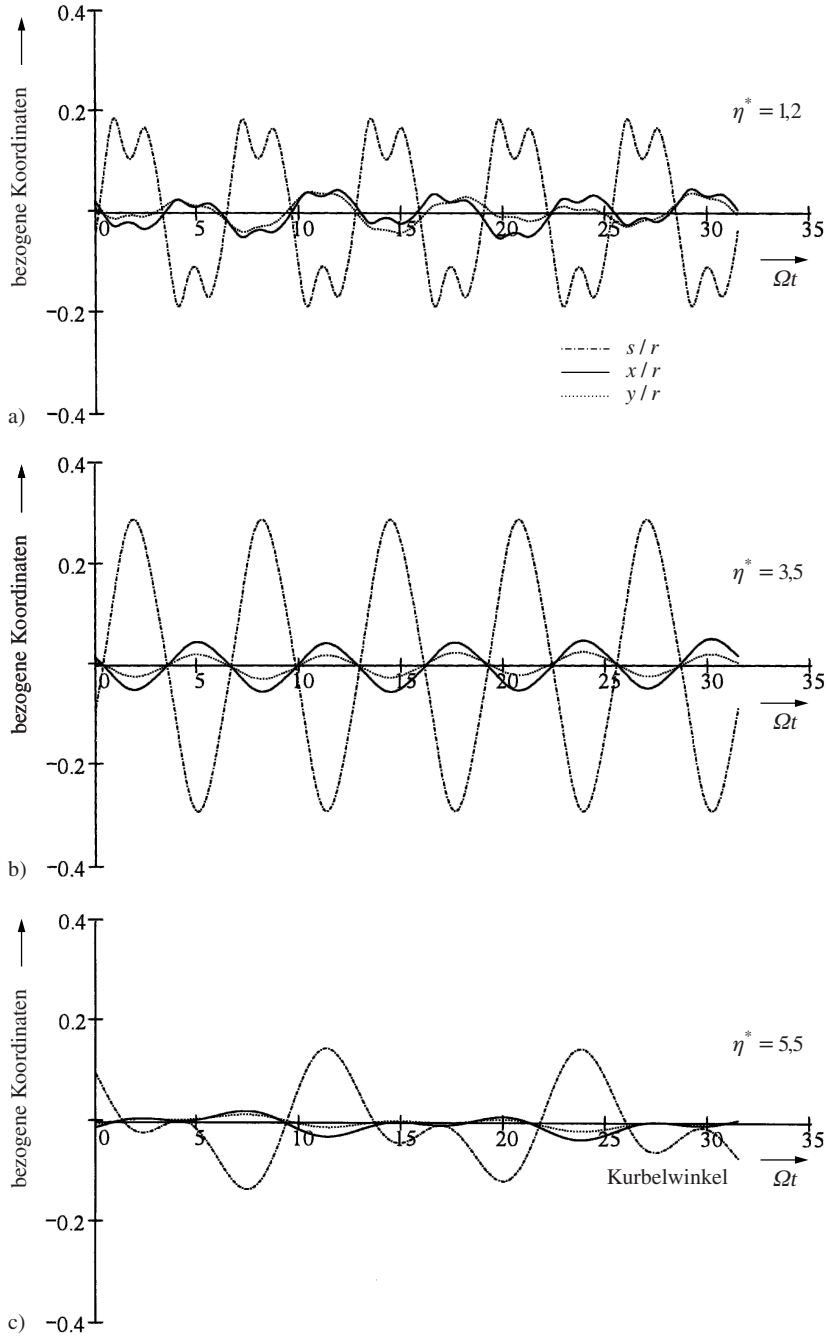


Bild 7.4 Berechnete Wege der Förderrinne (s) und des Gegenschwingrahmens (x, y) für den Schwingförderer gemäß Bild 7.3

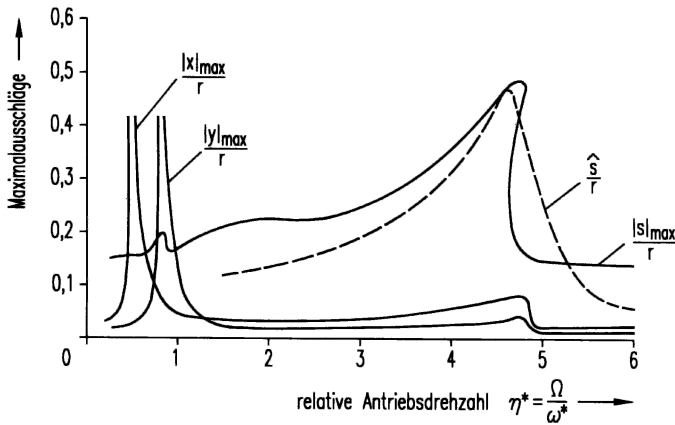


Bild 7.5 Resonanzkurven des Schwingförderers
gestrichelte Linie: Variante 1; volle Linie: Variante 2

welche große Bewegungen des Gegenschwingrahmens beschreiben. Sie entsprechen denen eines linearen Schwingers und müssen beim Hochlauf durchfahren werden. Im oberen Frequenzbereich sind die Kurven nach rechts geneigt, denn es wurde eine progressive Federung realisiert. Da sich die *Resonanzkurven für beide Varianten* lediglich für die Koordinate s deutlich unterscheiden, wurden diejenigen für x und y nur einmal in Bild 7.5 eingezeichnet.

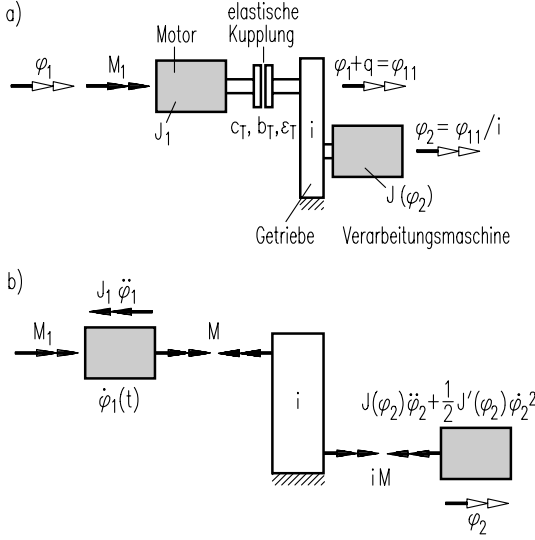
Der Schwingförderer wird im Bereich der Abstimmungsverhältnisse $3 < \eta^* < 4$ betrieben. In diesem Bereich bewegt sich der Gegenschwingrahmen gegenphasig zum Förderorgan, sodass die *dynamische Fundamentbelastung* wesentlich kleiner ist als sie ohne diesen Rahmen wäre. Nicht zu empfehlen ist auch hier, wie beim linearen Schwinger, ein Betrieb in der Nähe der Resonanzspitze bei etwa $\eta^* = 4,6$. Dort ist für die Parameter von Variante 2 deutlich der Sprung vom oberen Kurvenast der Resonanzkurve auf den unteren zu erkennen, der in Abschnitt 7.2.2 erläutert wurde.

7.2.3.2

Hochlauf und Bremsen einer Verarbeitungsmaschine mit nichtlinearer Kupplung

In Antriebssystemen werden Kupplungen mit nichtlinearen Kennlinien bewusst eingesetzt, u. a. deshalb, weil im Resonanzbereich ihre Amplituden kleiner als die von linearen Kupplungen sind. Die Lösung der dafür geltenden nichtlinearen Bewegungsgleichungen ist auf analytischem Wege nur näherungsweise und mit großem Aufwand möglich. Die numerische Simulation, also die numerische Integration der nichtlinearen Bewegungsgleichungen ist dafür aber ein effektiver Weg, um das dynamische Verhalten zu untersuchen.

In dem in Bild 7.6a skizzierten Antriebssystem ist der Motorläufer mit dem Trägheitsmoment J_1 über eine nichtlineare elastische Kupplung und ein (als trägheitslos und starr angenommenes) Getriebe mit dem Übersetzungsverhältnis $i = \varphi_{11}/\varphi_2$ mit einer Verarbeitungsmaschine verbunden. Das reduzierte Trägheitsmoment der

**Bild 7.6** Antrieb mit nichtlinearer Kupplung

a) Systemskizze, b) frei geschnittenes System mit den auftretenden Momenten

Verarbeitungsmaschine ist stellungsabhängig wie bei einem Schubkurbelgetriebe, vgl. Kapitel 2:

$$J(\varphi_2) = J_0(1 + \mu \sin^2 \varphi_2); \quad \frac{dJ}{d\varphi_2} = 2J_0\mu \sin \varphi_2 \cos \varphi_2. \quad (7.60)$$

Das Rückstellmoment der Kupplung ist von der relativen Verdrillung q , für die

$$q = \varphi_{11} - \varphi_1 = i\varphi_2 - \varphi_1 \quad \text{bzw.} \quad \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + q}{i} \quad (7.61)$$

gilt, in folgender Weise abhängig:

$$M = c_T(q + \varepsilon_T q^3) + b_T \dot{q}. \quad (7.62)$$

Es interessiert die dynamische Belastung in der Kupplung sowohl für den Hochlauf als auch für den Bremsvorgang. Die Bewegungsgleichungen können mithilfe des Momentengleichgewichts an beiden Wellen aufgestellt werden, vgl. Bild 7.6b:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 - M = M_1 \quad (7.63)$$

$$J(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} J'(\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 = -iM. \quad (7.64)$$

Dies sind zwei gekoppelte nichtlineare Differenzialgleichungen für die beiden Winkel φ_1 und φ_2 . In vorliegender Aufgabe wird nicht $M_1(t)$, sondern $\varphi_1(t)$ vorgegeben, sodass nur eine einzige nichtlineare Differenzialgleichung zu lösen ist. Diese folgt aus (7.60) und (7.62) nach dem Einsetzen in (7.64):

$$J_0(1 + \mu \sin^2 \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} J_0 \mu \sin 2\varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 = -i[c_T(q + \varepsilon_T q^3) + b_T \dot{q}]. \quad (7.65)$$

Eliminiert man in (7.65) die Koordinate φ_2 mithilfe von (7.61), so entsteht eine nichtlineare Differenzialgleichung für den relativen Drehwinkel q , die man nach der Winkelbeschleunigung auflösen kann. Sie lautet

$$\ddot{q} = -\ddot{\varphi}_1 - \frac{i^2 [c_T(q + \varepsilon_T q^3) + b_T \dot{q}] - \frac{1}{2} J_0 \mu \sin\left(2 \frac{\varphi_1 + q}{i}\right) \frac{(\varphi_1 + \dot{q})^2}{i}}{J_0 + J_0 \mu \sin^2\left(\frac{\varphi_1 + q}{i}\right)} \quad (7.66)$$

Mit dem Verlauf des Winkels $\varphi_1(t)$ kann man (7.66) für vorgegebene Anfangsbedingungen numerisch integrieren, woraus sich $q(t)$ und $\dot{q}(t)$ ergeben. Daraus folgt dann aus (7.62) das Kupplungsmoment und aus (7.61) der Winkel φ_2 . Aus (7.63) kann man nach der Berechnung von φ_2 das zur Erzeugung der gegebenen Bewegung erforderliche Antriebsmoment $M_1(t)$ berechnen.

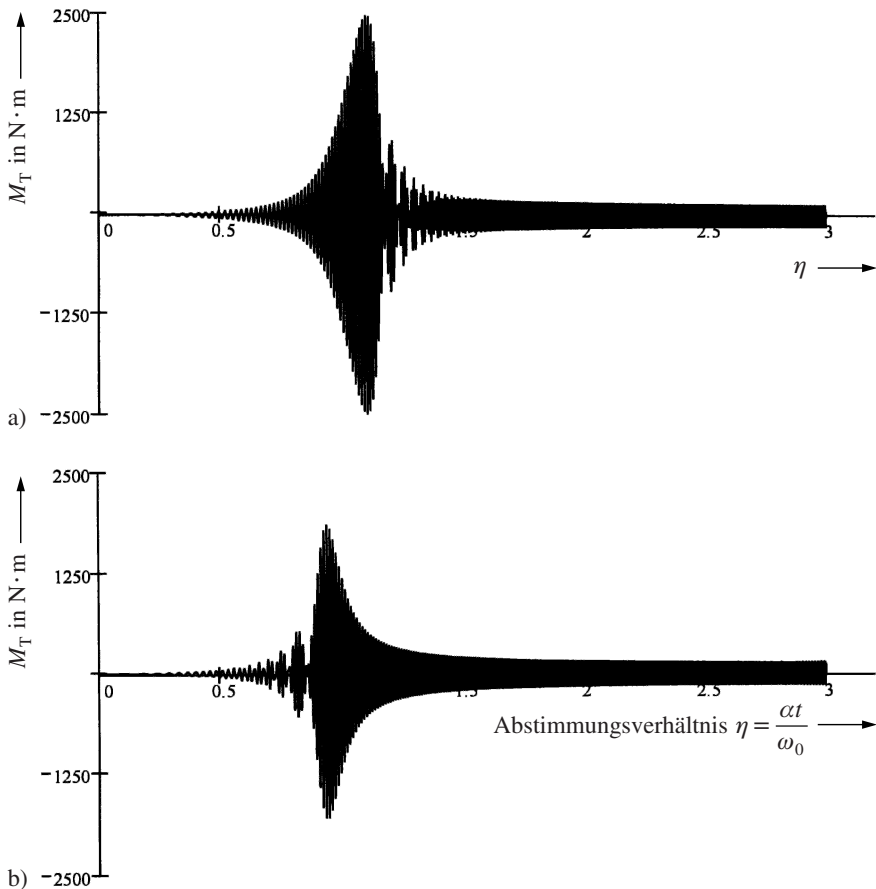


Bild 7.7 Hüllkurve der Schwingungen bei veränderlicher Drehzahl
a) Hochlauf, b) Bremsen

Für einen speziellen Antrieb mit den Parameterwerten

Übersetzungsverhältnis	$i = 2$
Trägheitsmomente	$J_0 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; J_1 = 0,75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Pulsationstiefe des Trägheitsmoments	$\mu = 0,1$
Torsionsfederkonstante	$c_T = 5000 \text{ N} \cdot \text{m}$
Torsionsdämpferkonstante	$b_T = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$
Kennwert der Nichtlinearität	$\varepsilon_T = 1,25$
Winkelbeschleunigung (plus bei Hochlauf, minus beim Bremsen)	$\ddot{\varphi}_1 = \alpha = \pm 0,002 c_T / J_0 = 5/\text{s}^2$

wurde diese Integration mithilfe des Programms MathCad durchgeführt.

Bei konstanter Winkelbeschleunigung ändert sich die Drehzahl linear, d. h., es wird angenommen, dass kein Einfluss des Schwingungssystems auf die Antriebsbewegung vorhanden ist, vgl. dagegen Abschnitt 5.2.

Bild 7.7 zeigt die durch numerische Integration gewonnenen Lösungen für eine langsam zeitlich linear zu- und abnehmende Winkelgeschwindigkeit im Bereich der Abstimmungsverhältnisse $0 < \eta = \Omega / \omega_0 < 3$. Dabei ist η das Verhältnis der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\varphi_1 = \Omega(t) = \alpha t$ zur Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = i\sqrt{c_T/J_0}$ des linearen ungedämpften Schwingers. Beim Hochlauf tritt die Resonanzspitze bei $\eta \approx 1,12$ auf, während beim Bremsen die Resonanzspitze bei $\eta \approx 0,95$ auftritt. Dieser Unterschied ist durch die Nichtlinearität der Kupplung bedingt, und er kann durch das „Springen“ der stationären Amplituden von einem Zweig der Resonanzkurve auf den anderen erklärt werden, was für den Duffing-Schwinger in Abschnitt 7.2.2 bereits bemerkt wurde.

7.2.3.3

Selbstsynchronisation von Unwuchterregern

Schon am Ende des 17. Jahrhunderts hat der holländische Physiker HUYGENS beobachtet, dass Pendeluhrn, die auf einem gemeinsamen Brett standen, nach einer gewissen Zeit synchron pendelten. Am Ende der vierziger Jahre des 20. Jahrhunderts wurde bemerkt, dass sich die Drehbewegungen unwuchtiger Rotoren, die gemeinsam auf demselben Tragsystem angeordnet sind, gegenseitig beeinflussen. Man hatte zufällig auch beobachtet, dass zwei Rotoren synchron liefen, obwohl davon nur einer (Kabelbruch) an das elektrische Netz angeschlossen war. Diese Selbstsynchronisation kam durch die Vibration der gemeinsamen Unterlage zustande.

Hier soll zunächst der elementare Vorgang betrachtet werden, bei dem der Lagerpunkt eines Rotors mit der Erregerkreisfrequenz Ω vertikal mit der Amplitude $\dot{y}$ bewegt wird:

$$y_A = \dot{y} \sin \Omega t. \quad (7.67)$$

Die Bewegungsgleichung entspricht der des physikalischen Pendels mit bewegtem Aufhängepunkt und folgt aus dem Momentengleichgewicht um Punkt A, vgl. Bild 7.8:

$$J_A \ddot{\varphi} + m(\ddot{y}_A + g)\xi_S \cos \varphi = -M_R \frac{\dot{\varphi}}{\Omega}. \quad (7.68)$$

Dabei wirkt ein der momentanen Drehgeschwindigkeit entgegengesetzt gerichtetes Reibmoment $M_R \dot{\varphi} / \Omega$.

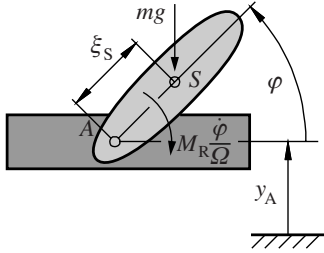


Bild 7.8
Rotor oder physikalisches
Pendel, vertikal erregt

Wird in (7.68) die Beschleunigung, die aus (7.67) folgt, eingesetzt, so ergibt sich

$$J_A \ddot{\varphi} + M_R \frac{\dot{\varphi}}{\Omega} + m(g - \dot{y}\Omega^2 \sin \Omega t) \xi_S \cos \varphi = 0. \quad (7.69)$$

Dies ist eine nichtlineare Differenzialgleichung für den Drehwinkel φ mit veränderlichen Koeffizienten, die verschiedene Lösungen hat. Hier interessiert zunächst nur, unter welchen Bedingungen die Funktion

$$\varphi = \Omega t + \varphi^*; \quad \dot{\varphi} = \Omega \quad (7.70)$$

eine Lösung von (7.69) sein kann. Dabei ist φ^* ein konstanter Phasenwinkel in Bezug auf die Erregung (7.67). Einsetzen von φ aus (7.70) in (7.69) führt zur Beziehung

$$\xi_S \cos(\Omega t + \varphi^*) m(g - \dot{y}\Omega^2 \sin \Omega t) = -M_R. \quad (7.71)$$

Da die linke Seite dieser Gleichung veränderlich und die rechte Seite konstant ist, kann sie offensichtlich nicht für alle Zeiten t erfüllt werden. Mathematisch betrachtet, beschreibt (7.70) also keine exakte Lösung von (7.69), aber man kann sie als eine Näherungslösung deuten, wenn man nur fordert, dass (7.71) im Mittel erfüllt wird. Das ist ein Grundgedanke der Mittelungsmethoden, vgl. die Bemerkungen am Ende von Abschnitt 7.1. Wenn man sich überlegt, was die einzelnen Terme in (7.71) bedeuten, so sieht man, dass auf der rechten Seite ein bremsendes Moment und auf der linken Seite ein antreibendes Moment (Hebelarm mal Kraft) steht. Die linke Seite von (7.71) ist eine periodische Funktion mit der Zyklusdauer $T_0 = 2\pi/\Omega$, deren Mittelwert man findet, wenn man über eine ganze Periode integriert:

$$\frac{m\xi_S}{T_0} \int_0^{T_0} \cos(\Omega t + \varphi^*) (g - \dot{y}\Omega^2 \sin \Omega t) dt = \frac{1}{2} m\xi_S \dot{y}\Omega^2 \sin \varphi^*. \quad (7.72)$$

Aus (7.71) und (7.72) folgt also für den Phasenwinkel der Ausdruck

$$\sin \varphi^* = -\frac{2M_R}{m\xi_S \dot{y}\Omega^2}. \quad (7.73)$$

Aus dieser Gleichung kann man auch den Schluss ziehen, dass so ein Phasenwinkel nur dann (reell wird, also) existiert, falls die Bedingung

$$\left| \frac{2M_R}{m\xi_S \dot{y}\Omega^2} \right| < 1 \quad (7.74)$$

erfüllt ist. Gleichung (7.74) ist also eine **Bedingung für die Selbstsynchronisation eines Rotors** auf einer vibrierenden Unterlage. Je größer die Unwucht $U = m\xi_S$ und die Erregerkreisfrequenz Ω sind, desto leichter kann der Rotor „mitgenommen“ werden. Das Reibmoment darf nicht zu groß sein, sonst ist diese Bedingung auch verletzt.

Bei vielen Vibrationsmaschinen werden für die Schwingungserregung mehrere Unwuchterreger benutzt, welche mit derselben Winkelgeschwindigkeit und definierten Phasendifferenzen rotieren. Eine gerichtete Erregerkraft wird oft durch zwei Unwuchtratoren erzeugt, deren synchrone Bewegung durch ein Zahnradpaar erzwungen wird, vgl. Bild 7.9a. Der Nachteil einer solchen Anordnung besteht darin, dass Verschleiß in der Verzahnung eintritt und Lärm entsteht, weil die Belastungsrichtung wechselt. So eine Anordnung kann nicht angewendet werden, wenn die Schwingungserreger große Abstände haben, was bei einigen Vibrationsmaschinen notwendig ist, speziell bei langen Schwingförderern. Mit Antrieben, die sich selbst synchronisieren, können diese Unzulänglichkeiten vermieden werden, vgl. Bild 7.9b.

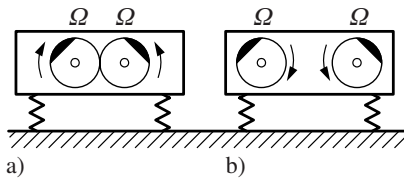


Bild 7.9 Unwuchterreger auf einem Vibratorkörper
 a) Erzwungene Synchronisation durch ein Zahnradpaar
 b) Selbstsynchronisation von zwei unabhängigen Rotoren

An Stelle der Erregung durch zwangsläufig gekoppelte Zahnräder ist eine gerichtete Schwingungserregung durch zwei und mehr Unwuchterreger möglich, die **nicht miteinander zwangsläufig** verbunden sind. Die dynamische Kopplung erfolgt indirekt über die Translationsbewegung des Vibratorkörpers, in dem sich die Drehachsen abstützen. Solche Erregersysteme wurden in den vergangenen Jahrzehnten immer mehr zur Schwingungserregung bei Siebmaschinen, Schwingförderern, Vibrationsverdichtern und anderen Maschinen angewendet, da sie konstruktiv einfach zu realisieren sind und ohne mechanische oder elektrische Wellen auskommen.

Die Bedingungen für stabile Betriebszustände bei der **Selbstsynchronisation** sollen für ein Beispiel angegeben werden. Es wird als Tragsystem ein weich aufgestellter Vibratorkörper betrachtet, der mit hohen Erregerfrequenzen ($\Omega \gg \omega_i$) überkritisch (tief abgestimmt) erregt wird, so dass die Trägheitskräfte dominieren und die Rückstellkräfte vernachlässigbar sind ($k \rightarrow 0$). Die Rotoren müssen also zur Erreichung des Betriebszustandes die tiefen kritischen Drehzahlen durchlaufen. Die Drehachsen der zwei gleichen Schwingungserreger liegen parallel zu einer zentralen Hauptträgheitsachse des Vibratorkörpers und sind im Abstand ξ gleich weit vom Schwerpunkt S des Körpers entfernt, vgl. Bild 7.10.

Es handelt sich um ein ebenes Problem, d. h., die Schwerpunkte der Unwuchtmassen bewegen sich in der gleichen Ebene. Aus der Theorie folgt, dass sich in diesem Fall die Synchronisation schneller und stabiler einstellt, je größer der Ausdrück $m\xi^2/J_S$ ist, d. h., die Entfernung der Drehpunkte der Unwuchterreger vom Schwerpunkt S hat großen Einfluss.

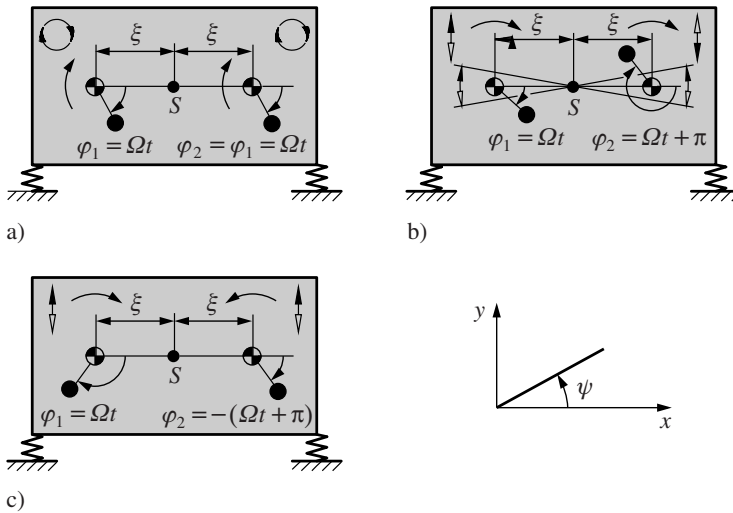


Bild 7.10 Vibratorkörper mit zwei Unwuchterregern

- a) $m\xi^2/J_S > 2$; Kreisschiebung
 b) $m\xi^2/J_S < 2$; Drehschwingung um S
 c) parallele Schubschwingung bei gegensinniger Rotation

Es folgt, dass im ersten Fall die Rotationen mit gleichphasigen Unwuchten und im zweiten Fall die Rotationen mit gegenphasigen Unwuchten stabil sind. Falls die Rotoren sich mit gleichen Drehrichtungen bewegen und wenn die Bedingung

$$m\xi^2 > 2J_S \quad (7.75)$$

erfüllt ist, entsteht eine **kreisförmige translatorische Bewegung** („Kreisschiebung“) des Vibratorkörpers, vgl. Bild 7.10a. Die Amplituden sind

$$\hat{x} = \hat{y} = \frac{2m_1 e}{m}. \quad (7.76)$$

Wird die entgegengesetzte Ungleichung ($m\xi^2 < 2J_S$) erfüllt, dann entstehen **Drehschwingungen des Vibratorkörpers** (vgl. Bild 7.10b) mit der Winkelamplitude

$$\hat{\psi} = \frac{2m_1 e \xi}{J_S}. \quad (7.77)$$

Rotieren die Rotoren in entgegengesetzter Richtung und gilt $m\xi^2 > J_S$, ist die gegensinnige Rotation mit der Phasendifferenz π stabil. Es werden geradlinige **translatorische Schubschwingungen** des Vibratorkörpers verursacht, vgl. Bild 7.10c. Die Amplituden betragen

$$\hat{x} = 0; \quad \hat{y} = \frac{2m_1 e}{m}. \quad (7.78)$$

Gegenwärtig gibt es für Maschinen und Anlagen mit Schwingungserregern, welche die Selbstsynchronisation ausnutzen, mehr als 300 Patente. Die Gesetzmäßigkeiten der Selbstsynchronisation können nicht einfach auf Grund intuitiver Vorstellungen

vorausgesagt oder nur durch experimentelles Probieren geklärt werden. Mithilfe nichtlinearer Berechnungsmodelle, welche die nichtlinearen Effekte der Massenkräfte und der Motorkennlinien berücksichtigen, ist die Vorausberechnung des dynamischen Verhaltens solcher Maschinen möglich. Wesentliche Beiträge zur Entwicklung der Theorie und der Anwendung in der Industriepraxis leistete I. I. BLEKHMAN [2], [29].

7.2.4

Aufgaben A7.1 und A7.2

A7.1 Aufprall auf nichtlineare Feder

Ein Körper mit der Masse m prallt mit der Geschwindigkeit v_0 auf eine Pufferfeder. Man stelle die Formeln zur Berechnung des maximalen Deformationswegs und für die dabei entstehende Maximalkraft auf. Die Pufferfeder hat eine nichtlineare Federkennlinie. Man vergleiche die Ergebnisse, die bei einer progressiven, einer linearen und einer degressiven Federkennlinie entstehen.

Gegeben:

Aufprallgeschwindigkeit	$v_0 = 4 \text{ m/s}$
Masse	$m = 400 \text{ kg}$
Federkonstante	$c = 100 \text{ kN/m}$
Federkennlinie	$F(q) = cq(1 + \varepsilon q^2)$
progressiv: $\varepsilon = 10 \text{ m}^{-2}$; linear: $\varepsilon = 0$; degressiv: $\varepsilon = -5 \text{ m}^{-2}$	

Gesucht: Maximale Deformationen $q_{\max}$ und maximale Kräfte $F_{\max}$.

A7.2 Mittlere Federkonstante bei geknickter Federkennlinie

Ein praktisch wichtiger Fall progressiver Federkennlinien entsteht durch den Einsatz gestufter Federn, vgl. auch Abschnitt 7.2.3.1. Bei kleinen Ausschlägen wirkt nur eine Feder, und von einem bestimmten Ausschlag an, der mit q_1 bezeichnet wird, wirkt zusätzlich eine zweite Feder.

Gegeben: Feder-Masse-System gemäß Tabelle 7.1, Fall 1 mit Rückstellkraft

$$F(q) = \begin{cases} c_1 q & \text{für } 0 < |q| < q_1 \\ (c_1 + c_2)q - c_2 q_1 & \text{für } q_1 < |q| < \hat{q}. \end{cases} \quad (7.79)$$

Gesucht: Mittlere Federkonstante c_m zur Berechnung der Periodendauer der Grundfrequenz für $\hat{q} > q_1$.

1. Allgemein für geknickte Kennlinie
2. Für Kennlinie mit Spiel
3. Für Kennlinie mit Vorspannung

7.2.5

Lösungen L7.1 und L7.2

L7.1 Nach dem Aufprall einer Masse auf die Pufferfeder beginnt eine freie Schwingung, von der die maximale Amplitude nach der ersten Halbschwingung interessiert. Die Aufgabe ist mit einer Energiebilanz lösbar. Die kinetische Energie der auflprallenden Masse beträgt

$$W_{\text{kin0}} = \frac{1}{2} m (v_0)^2 = 3200 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad (7.80)$$

Die potenzielle Energie, die in der Pufferfeder gespeichert werden kann, beträgt

$$W_{\text{pot max}} = \int_0^{q_{\text{max}}} F(q) \, dq = \int_0^{q_{\text{max}}} cq(1 + \varepsilon q^2) \, dq = \frac{1}{2}c(q_{\text{max}})^2 \left[1 + \frac{\varepsilon}{2}(q_{\text{max}})^2 \right]. \quad (7.81)$$

Aus dem Energiesatz folgt $W_{\text{pot max}} = W_{\text{kin0}}$. Für die nichtlinearen Federn ergibt sich daraus eine quadratische Gleichung für $(q_{\text{max}})^2$:

$$(q_{\text{max}})^4 + \frac{2}{\varepsilon}(q_{\text{max}})^2 - \frac{2mv_0^2}{c\varepsilon} = 0. \quad (7.82)$$

Die Lösung lautet

$$q_{\text{max}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} \left(\sqrt{1 + \frac{2m\varepsilon v_0^2}{c}} - 1 \right)}. \quad (7.83)$$

Die Maximalkraft erhält man aus (7.14):

$$F_{\text{max}} = cq_{\text{max}} [1 + \varepsilon(q_{\text{max}})^2]. \quad (7.84)$$

Bild 7.11 zeigt die Ergebnisse. Mit den angegebenen Parameterwerten ergibt sich für die progressive Feder ($\varepsilon = 10 \text{ m}^{-2}$):

$$\underline{q_{\text{max}} = 226 \text{ mm};} \quad \underline{F_{\text{max}} = 34,1 \text{ kN}} \quad (7.85)$$

und für die degressive Feder ($\varepsilon^* = -5 \text{ m}^{-2}$):

$$\underline{q_{\text{max}} = 282 \text{ mm};} \quad \underline{F_{\text{max}} = 16,9 \text{ kN}.} \quad (7.86)$$

Für die lineare Feder ($\varepsilon = 0$) folgt

$$\underline{q_{\text{max}} = 253 \text{ mm};} \quad \underline{F_{\text{max}} = 25,3 \text{ kN}.} \quad (7.87)$$

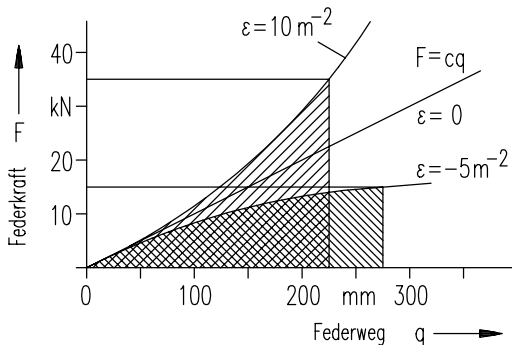


Bild 7.11 Kräfte und Wege beim Aufprallen

Fazit: Bei einer progressiven Feder entsteht ein kürzerer Federweg (aber eine größere Kraft) als bei der linearen Feder, während bei der degressiven Feder der Federweg länger, aber die Kraft kleiner wird. Es lohnt sich also, eine degressive Feder einzusetzen, wenn man die maximale Stoßkraft bei einem Aufprallvorgang vermindern will.

17.2 Es wird $\dot{q} > q_1$ vorausgesetzt, sodass sich tatsächlich eine nichtlineare Federung einstellt. Gemäß (7.10) ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{c_m} &= \frac{5}{\dot{q}^5} \int_0^{q_1} c_1 q^4 dq + \int_{q_1}^{\dot{q}} [(c_1 + c_2)q^4 - c_2 q_1 q^3] dq \\ &= \underline{\underline{\frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{4} \left[4 + \left(\frac{q_1}{\dot{q}} \right)^5 - 5 \frac{q_1}{\dot{q}} \right]}}. \end{aligned} \quad (7.88)$$

Der Sonderfall $c_1 = 0$ ergibt den technisch bedeutsamen Fall eines *Schwingers mit Spiel*, vgl. auch Abschnitt 4.2.1.2. Für den *Schwinger mit Vorspannung* (vgl. Tabelle 7.1, Fall 2) ergibt sich

$$\underline{c_m} = \frac{5}{\dot{q}^5} \int_0^{\dot{q}} (F_v + cq)q^3 dq = \underline{\underline{c + \frac{5F_v}{4\dot{q}}}}. \quad (7.89)$$

7.3 Selbsterregte Schwinger

7.3.1 Allgemeine Zusammenhänge

Bei selbsterregten Schwingungen steuert der Schwinger selbst die Energiezufuhr von einer *äußeren Energiequelle*. Beispiele für genutzte selbsterregte Schwingungen sind die Dampfmaschine, die Unruhe der Uhr und die Töne der Blas- und Streichinstrumente. Selbsterregte Schwingungen stören oft im Maschinenbau, z. B. das Rattern bei spanenden Werkzeugmaschinen, die Reibungsschwingungen („Stick-Slip“) bei langsamen Gleitgeschwindigkeiten, das Quietschen von Bremsen, das Kreischen von Sägen, das Brummen von Walzwerkgerüsten, das Pfeifen von durchströmten Ventilen, das Flattern der Windradflügel u. a.

Die **Bewegungsgleichungen** selbsterregter Schwingungen enthalten im Gegensatz zu den erzwungenen und parametererregten Schwingungen keinen Term, der explizit von der Zeit abhängt. Sie entsprechen allgemein (6.431) oder speziell (6.432), also den Bewegungsgleichungen freier nichtlinearer Schwingungen. Selbsterregte Schwingungen entstehen nicht infolge einer einmaligen Auslenkung aus der statischen Ruhelage, wie das bei freien Schwingungen der Fall ist.

Sowohl die Formulierung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen (Modellbildung) als auch ihre mathematische Lösung ist oft mit gewissen Schwierigkeiten verbunden. Im Allgemeinen lassen sich diese Gleichungen nicht analytisch lösen. Die numerische Integration verlangt Parameterwerte, die für die nichtlinearen Terme nur ungenau bekannt sind. Der genaue zeitliche Verlauf der selbsterregten Schwingungen interessiert aber selten, denn man ist meist bestrebt, diese störenden Schwingungen überhaupt zu vermeiden.

Die Energiequelle eines selbsterregten Schwingers ist im Allgemeinen nicht zeitlich veränderlich. Die Energierationen überträgt z. B. ein reibender Körper, eine Flüssigkeit oder ein strömendes Gas. Innerhalb jeder Schwingungsperiode eines selbsterregten Schwingers gibt es ein Intervall der Zufuhr und ein Intervall der Abnahme

der Energie. Wird mehr Energie zugeführt (abgeführt) als abgeführt (zugeführt), dann nehmen die Amplituden zu (ab). Im stationären Zustand ist die Energiebilanz pro Periode ausgeglichen, und es stellen sich konstante Amplituden ein. Man kann die Energiebilanz auch so deuten, als ob es innerhalb jeder Periode begrenzte Intervalle der Instabilität (Anfachung) und der Stabilität (Energieabnahme) gäbe. Oft interessiert man sich nur dafür, ob überhaupt Parameterbereiche der dynamischen, zeitlich begrenzten, Instabilität und damit eine Selbsterregung existieren. Um diese zu ermitteln, kann man sich auf die Analyse der linearisierten Bewegungsgleichungen beschränken, denn an den Eigenwerten des linearen Schwingungssystems erkennt man, ob es eine Anfachung gibt.

Die linearen Bewegungsgleichungen haben die Form (6.18). Bei konservativen Systemen sind die Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{C}$ symmetrisch, und es treten keine negativen Eigenwerte auf. Ein lineares System mit einer unsymmetrischen Matrix kann negative Eigenwerte haben. Instabile Bereiche selbsterregter Schwinger existieren in den Parameterbereichen, in denen negative Eigenwerte auftreten. Mathematisch betrachtet, können selbsterregte Schwingungen auftreten, wenn das linearisierte System der Bewegungsgleichungen eine **unsymmetrische Steifigkeitsmatrix** hat. Solche unsymmetrischen Matrizen sind typisch für Gleitlager [7], [19] für Schwinger mit Reibung und für Schwinger in Strömungen, vgl. z. B. (7.108).

7.3.2 Beispiele

7.3.2.1 Stick-Slip-Schwingungen

Reibungserregte Schwingungen sind in Maschinen meist unerwünscht, weil sie Lärm oder Verschleiß verursachen und die Genauigkeit einer Abtriebsbewegung vermindern. Zu ihnen gehört das Bremsenquietschen, das Rattern bei langsamen Führungsbewegungen, das Kupplungs-Rupfen u. a. Es tritt dabei Ruckgleiten ein, wenn sich beim Kontakt zweier Oberflächen Intervalle des Haftens („stick“) mit solchen des Gleitens („slip“) während einer Schwingungsperiode abwechseln. Man spricht vom **Stick-Slip-Effekt**.

Hier soll ein Reibschwinger untersucht werden, bei dem ein Feder- Masse – System auf einer bewegten Unterlage gleitet [5], [23] die in diesem Falle die Energiequelle ist. In Bild 7.12a ist sie als bewegtes Band skizziert, aber es hätte auch die Unterlage fest und das Feder-Masse-System als beweglich dargestellt werden können. Wesentlich ist die Relativgeschwindigkeit, die im idealen Fall $v = \text{konst.}$ ist.

Es wird angenommen, dass sich die Haftreibungszahl μ_0 von der Gleitreibungszahl μ unterscheidet ($\mu_0 > \mu$) und μ konstant ist. vgl. Bild 7.12b. Dieser Ansatz für die sprunghafte Reibkraftänderung vom Haften zum Gleiten ist der Einfachste für eine in Wirklichkeit kompliziertere Funktion der Reibkraft, die nichtlinear von der Geschwindigkeit, der Normalkraft, der Temperatur, der Zeit und den Materialparametern abhängt. Die gestrichelte Reibkraft-Kennlinie in Bild 7.12b deutet so eine Funktion an.

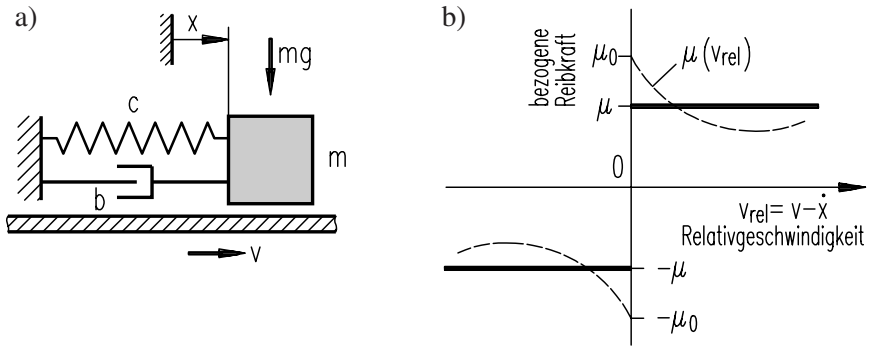


Bild 7.12 Minimalmodell des Reibungsschwingers

a) Berechnungsmodell, b) Reibkraft-Kennlinie

Es wird davon ausgegangen, dass die Masse m anfangs an der sich mit konstanter Geschwindigkeit v bewegendes Unterlage haftet und die Gleitbewegung in dem Augenblick beginnt, wenn sich die Masse von der Unterlage losreißt. Die Bewegungsgleichung dafür lautet dann (ohne Dämpfung)

$$m\ddot{x} + cx = \mu mg; \quad \dot{x} \leq v. \quad (7.90)$$

Die Anfangsbedingungen beschreiben den Sachverhalt, dass zu Beginn die Federkraft $c x_0$ so groß wie die maximale Haftkraft und die Geschwindigkeit der Masse m so groß wie die der Unterlage ist:

$$t = 0: \quad x(0) = x_0 = \frac{\mu_0 mg}{c}; \quad \dot{x}(0) = v_0 = v. \quad (7.91)$$

Als Lösung für die ersten Etappe ($0 \leq t \leq t_1$) erhält man mit $\omega_0^2 = c/m$, vgl. Bild 7.13a:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\mu mg}{c} + (\mu_0 - \mu) \frac{mg}{c} \cos \omega_0 t + \frac{v}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ &= \frac{\mu g}{\omega_0^2} + \hat{s} \cos \omega_0(t - t^*) \end{aligned} \quad (7.92)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 \hat{s} \sin \omega_0(t - t^*)$$

Dabei ist im Bereich $0 < \omega_0 t^* = \arctan \frac{v \omega_0 / g}{\mu_0 - \mu} < \pi/2$

$$\sin \omega_0 t^* = \frac{v}{\hat{s} \omega_0}; \quad \cos \omega_0 t^* = \frac{(\mu_0 - \mu)g}{\hat{s} \omega_0^2} \quad (7.93)$$

und die Amplitude beträgt

$$\hat{s} = \sqrt{\left[(\mu_0 - \mu)^2 \frac{mg}{c} \right]^2 + \left(\frac{v}{\omega_0} \right)^2} = \frac{mg}{c} \sqrt{(\mu_0 - \mu)^2 + \left(\frac{v \omega_0}{g} \right)^2}. \quad (7.94)$$

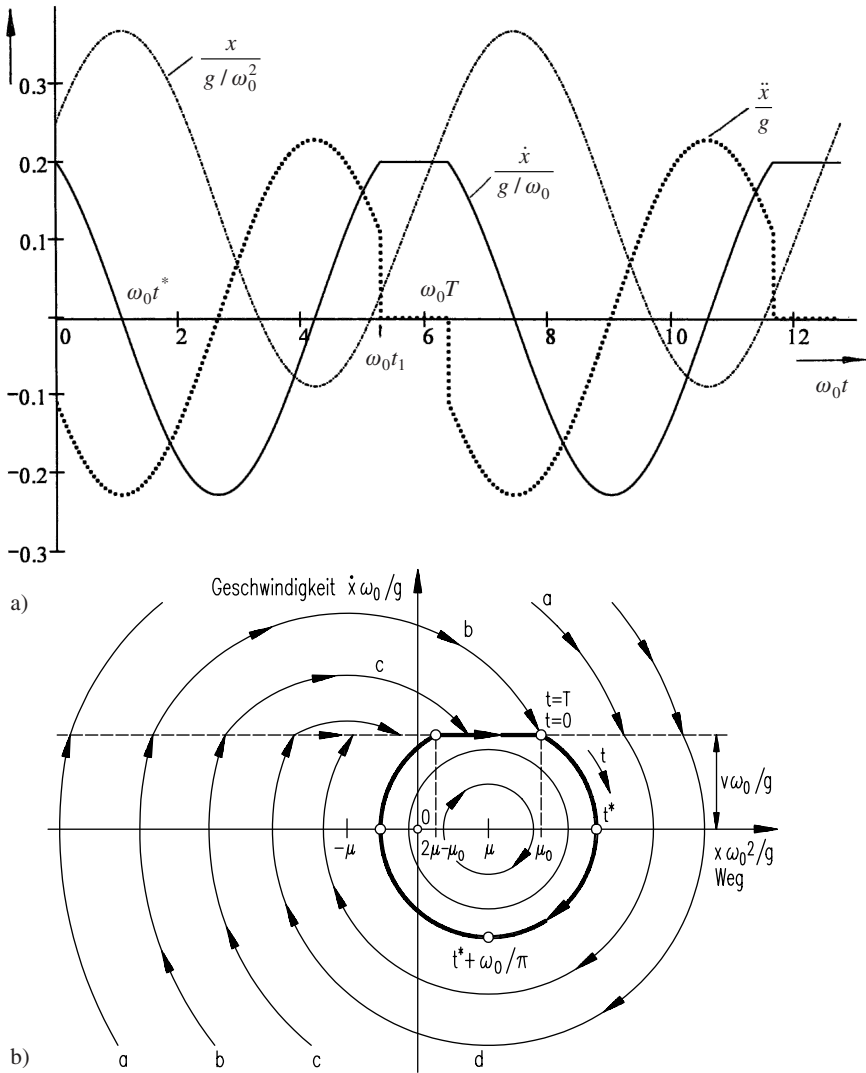


Bild 7.13 Bewegungsgrößen bei der Stick-Slip-Bewegung

($\mu_0 = 0,25$; $\mu = 0,14$; $\omega_0 v/g = 0,2$)

a) Zeitverläufe, strich-punktierte Linie: Weg $x \omega_0^2/g$, volle Linie: $\omega_0 \dot{x}/g$; punktierte Linie: $\ddot{x}/g$

b) Phasenkurven

Die Geschwindigkeit der Masse fällt infolge der bremsenden Reibkraft zunächst ab, bevor sie wieder zunimmt und den Wert der Geschwindigkeit des Bandes zum Zeitpunkt t_1 wieder erreicht, vgl. Bild 7.13a. Aus der Bedingung

$$\dot{x}(t_1) = v = -\omega_0 \xi \sin \omega_0(t_1 - t^*) \quad (7.95)$$

folgt

$$\omega_0 t_1 = \omega_0 t^* + \arcsin[v/(\omega_0 \hat{s})] + \pi. \quad (7.96)$$

Zum Zeitpunkt t_1 ist die erste Etappe beendet und der Weg

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \frac{\mu mg}{c} + \hat{s} \cos \omega_0(t_1 - t^*) = \frac{\mu mg}{c} + \hat{s} \sqrt{1 - \sin^2 \omega_0(t_1 - t^*)} \\ &= \frac{\mu mg}{c} + \sqrt{\hat{s}^2 - \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2} = \frac{\mu mg}{c} - (\mu_0 - \mu) \frac{mg}{c} = (2\mu - \mu_0) \frac{mg}{c} \end{aligned} \quad (7.97)$$

erreicht, wie aus (7.92) mit (7.94) und (7.95) folgt. In diesem Moment beginnt die zweite Etappe, in der die Masse durch die Haftkraft mitgenommen wird. Die Geschwindigkeit von Masse und Band sind konstant und gleich groß, der Weg und die Federkraft nehmen zu:

$$x(t) = x(t_1) + v(t - t_1) = (2\mu - \mu_0) \frac{mg}{c} + v(t - t_1); \quad t_1 \leq t \leq T. \quad (7.98)$$

Diese Etappe ist zu Ende, wenn die Haftkraft wieder ihren Grenzwert erreicht. Dies ist nach einem vollen Bewegungszyklus zur Zeit T der Fall, weshalb dann (Periodendauer T) wieder die Anfangswerte gelten müssen. Einsetzen der Werte aus (7.91) ergibt:

$$F_{\max} = cx(T) = (2\mu - \mu_0)mg + cv(T - t_1) = \mu_0 mg. \quad (7.99)$$

In dieser Gleichung ist nur die Periodendauer der betrachteten stationären Schwingung unbekannt. Sie folgt daraus zu

$$T = t_1 + 2(\mu_0 - \mu) \frac{mg}{cv} = t_1 + 2(\mu_0 - \mu) \frac{g}{v\omega_0^2}. \quad (7.100)$$

Die Verläufe von Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung zeigt Bild 7.13a.

In vorliegender Rechnung wurde die stabile Bewegung nachgerechnet, die sich auf dem sog. Grenzzykel, der geschlossenen Kurve in der Phasenebene (Bild 7.13b), einstellt. Für alle Anfangsbedingungen außerhalb des Grenzzykels münden die Kurven in diese periodische Bewegung. Untersuchungen mit verschiedenen anderen Reibungskennlinien zeigen, dass bei allen fallenden Kennlinien (und unter Berücksichtigung der Dämpfung) so ein Grenzzykel existiert. Interessant ist der Zusammenhang der (störenden) Amplitude mit den Parametern des Systems, vgl. (7.94). Der Leser möge sich überlegen, durch welche Maßnahmen man bei gegebener Geschwindigkeit und gegebener Masse die Amplituden vermindern kann.

Man kann die Stick-Slip-Schwingungen vermindern oder vermeiden durch

- Verringerung der Normalkraft F_N auf die reibenden Flächen
- Erhöhung der Dämpfung oder der Reibung
- Störung des zeitlichen Verlaufes der Normalkraft, z. B. zusätzliche Vibrationen
- geringere Neigung der fallenden Reibkennlinie, z. B. durch ändern Werkstoff
- Erhöhung der Eigenfrequenz (kleinere Masse, steifere Feder).

7.3.2.2

Flatterschwingungen einer angeströmten Platte

Für das stark vereinfachte Berechnungsmodell einer elastisch gelagerten Platte, die parallel zur Plattenebene angeströmt wird, ist die kritische Geschwindigkeit zu bestimmen, vgl. Bild 7.14. Bei horizontaler Lage liegt statisches Gleichgewicht vor und die hydro- oder aerodynamischen Kräfte sind gleich Null. Bei einer Winkel- auslenkung der Platte entsteht eine strömungsbedingte Auftriebskraft, die nach den Gesetzen der Aero- oder Hydrodynamik von einem Koeffizienten k , der Dichte ϱ , der Strömungsgeschwindigkeit v , der Länge l und dem Winkel φ der Plattenauslenkung abhängt:

$$F = k\varrho v^2 l \varphi. \quad (7.101)$$

Der Kraftangriffspunkt, der von der Geometrie des angeströmten Bauteils bestimmt wird, hat den Abstand e vom Schwerpunkt S . Die Kraft F wird unter Vernachlässigung von Effekten höherer Ordnung senkrecht zur Platte wirkend angenommen.

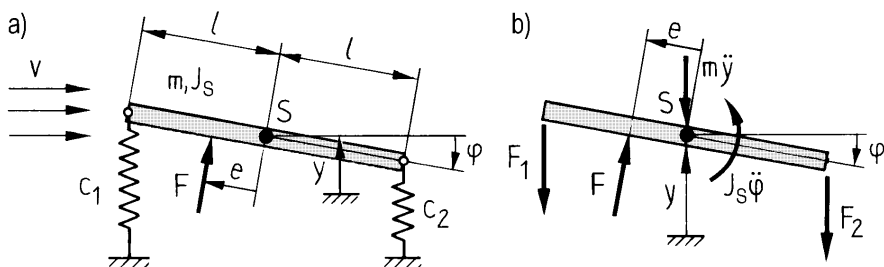


Bild 7.14 Platte im Strömungsfeld; a) Parameter, b) Koordinaten und Kräfte

Bild 7.14a zeigt das Berechnungsmodell mit zwei Freiheitsgraden der angeströmten Platte im ausgelenkten Zustand. Die Lager werden durch die Federkonstanten c_1 und c_2 erfasst und die Trägheitseigenschaften der Platte durch die Masse m und das Trägheitsmoment J bezüglich der Schwerpunktschwerachse. Die statischen Kräfte (Eigen- gewicht, Federkräfte) stehen im Gleichgewicht und werden hier weggelassen. Das zugehörige Kräftebild ist in Bild 7.14b dargestellt.

Die Rückstellkräfte der Federn ergeben sich aus dem Produkt der Federkonstanten mit den Federwegen, die von der Schwerpunktauslenkung y und vom Drehwinkel $\varphi \ll 1$ ($\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$) abhängen:

$$F_1 = c_1 \cdot (y + l\varphi), \quad F_2 = c_2 \cdot (y - l\varphi). \quad (7.102)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten damit

$$\uparrow: -F_1 - F_2 + F - m\ddot{y} = 0 \quad (7.103)$$

$$\hat{S}: -F_1 l + F_2 l + Fe - J\ddot{\varphi} = 0. \quad (7.104)$$

Setzt man die durch (7.102) erfassten Kräfte in (7.105) und (7.106) ein, so erhält man die Bewegungsgleichungen des Systems mit $q_1 = y$ und $q_2 = l\varphi$ in der Form

$$m_1 \ddot{q}_1 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 = 0 \quad (7.105)$$

$$m_2 \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 = 0 \quad (7.106)$$

mit den Masse- und Federparametern

$$\begin{aligned} m_1 &= m; & m_2 &= \frac{J_S}{l^2} = \frac{m}{12} \\ c_{11} &= c_1 + c_2; & c_{12} &= c_1 - c_2 - k_Q v^2 \\ c_{21} &= c_1 - c_2; & c_{22} &= c_1 + c_2 - k_Q v^2 \frac{e}{l}. \end{aligned} \quad (7.107)$$

Sucht man die Lösung der Bewegungsgleichungen mit dem Ansatz $q_j = v_j e^{\lambda t}$, erhält man zwei lineare Gln. für die Amplituden v_j und den Eigenwert λ :

$$\begin{aligned} (c_{11} + m_1 \lambda^2) v_1 + c_{12} v_2 &= 0 \\ c_{21} v_1 + (c_{22} + m_2 \lambda^2) v_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.108)$$

Aus dem Nullsetzen der Koeffizientendeterminante folgt die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} c_{11} + m_1 \lambda^2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} + m_2 \lambda^2 \end{vmatrix} \\ &= m_1 m_2 \lambda^4 + (c_{11} m_2 + c_{22} m_1) \lambda^2 + c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} = 0. \end{aligned} \quad (7.109)$$

Die Wurzeln dieser biquadratischen Gleichung sind die Eigenwerte:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\frac{c_{11} m_2 + c_{22} m_1}{2 m_1 m_2} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{(c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}) m_1 m_2}{(c_{11} m_2 + c_{22} m_1)^2}} \right]}. \quad (7.110)$$

Die Bewegung der Platte ist stabil, wenn die Realteile aller $\lambda_i \leq 0$ sind. Da gemäß (7.110) vor der ersten Wurzel beide Vorzeichen stehen, muss der Ausdruck unter der äußeren Wurzel reell und negativ sein. Damit gibt es nur rein imaginäre Wurzeln. Alle anderen Möglichkeiten scheiden aus, weil sie mindestens eine Wurzel mit positivem Realteil zur Folge haben, was Instabilität bedeutet. Eine Stabilitätsbedingung lautet deshalb

$$c_{11} m_2 + c_{22} m_1 > 0. \quad (7.111)$$

Es muss noch gesichert sein, dass die innere Wurzel in (7.110) reell und kleiner als eins ist, sonst treten konjugiert komplexe Wurzeln auf, bei denen einer der Realteile positiv sein kann. Es ist also folgende Relation zu erfüllen:

$$0 < \frac{4 (c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}) m_1 m_2}{(c_{11} m_2 + c_{22} m_1)^2} < 1. \quad (7.112)$$

7.3.2.3

Rattern von Werkzeugmaschinen bei der Zerspanung

Bei Werkzeugmaschinen stören oft Schwingungen an der Kontaktstelle zwischen Werkstück und Werkzeug die Bearbeitungsgenauigkeit. Selbsterregte Schwingungen können nach dem Überschreiten bestimmter Zerspanungsparameter (z. B. Grenzspantiefe, Zerspanungsgeschwindigkeit, Werkzeugparameter) auftreten. Für den Konstrukteur ist weniger der Verlauf dieser nichtlinearen Schwingungen, die als „Rattern“ bezeichnet werden, von Interesse, sondern es interessiert ihn mehr die Frage, bei welchen Parametern das Rattern beginnt, da diese Grenze möglichst weit „oben“ liegen soll. Hauptursachen für selbsterregte Schwingungen beim Zerspanen sind die so genannte *Lagekopplung* und der *Regenerativeffekt*.

Unter dem Begriff „Lagekopplung“ versteht man einen Schwingungsvorgang, bei dem zwei oder mehrere Eigenschwingformen nahe beieinander liegender Eigenfrequenzen über den Zerspanvorgang „verkoppelt“ sind und dadurch eine Schwingung angefacht wird. Diese Eigenformen beeinflussen sich an der Kontaktstelle von Werkstück und Werkzeug gegenseitig, wenn sie dort gewisse Amplituden haben, sodass es beim Zerspanen zu einer Energieübertragung in das Maschinengestell kommen kann. Wird eine der betreffenden Eigenformen angeregt, so wirkt sich diese über die Zerspankraft als Anregung für die andere „lagegekoppelte“ Eigenform aus.

Beim Fräsen und Drehen entsteht infolge einer Schwingung mit einer Eigenfrequenz der Maschine, die durch eine kleine Störung angeregt wurde, eine Welligkeit an der bearbeiteten Oberfläche des Werkstücks. Nach einer Umdrehung des Werkstücks beim Drehen oder nach Überstreichen des Winkels $2\pi/n_z$ beim Fräsen mit n_z Schneiden wird in die vom vorhergehenden Schnitt entstandene Welligkeit wieder eingeschnitten. Dadurch wird eine Schnittkraftschwankung hervorgerufen, die ihrerseits unter bestimmten Bedingungen die bisherigen Schwingungen aufrechterhalten, also „regenerieren“ oder sogar weiter anfahren kann. Wie bei den erzwungenen Schwingungen (vgl. Abschnitt 3.3.3) hängt es von der Phasenlage der nächsten Anregung und der Dämpfung ab, ob sich die Schwingung zwischen Werkstück und Werkzeug aufschauelt (Anfachung, Instabilität) oder ob sie abklingt.

Die Schnittkraft, und damit die Intensität der Erregung, hängen direkt von der Spantiefe a ab. Man hat vielfach beobachtet, dass die Überschreitung einer bestimmten Spantiefe zum Rattern führt. Im Folgenden soll zum Einblick in diese Thematik ein solch einfaches Berechnungsmodell für das Einstechdrehen vorgestellt werden.

Es sei $x = 0$ die statische Ruhelage des Schwingers, wenn mit einer Spandicke h schwingungsfrei zerspannt wird, vgl. Bild 7.15. Infolge einer kleinen Störung kommt es zu einer Verschiebung x , die eine Spandickenänderung zur Folge hat. Berücksichtigt man den vorangegangenen Schnitt, der eine Periodendauer (Umlaufzeit $T_0 = 2\pi/\Omega$) vorher erfolgt, also zum Zeitpunkt $t - T_0$, so stellt sich eine Spandickenänderung

$$\Delta h = x(t - T_0) - x(t) \quad (7.113)$$

ein. Für die radiale Zerspankraftänderung ΔF kann in erster Näherung ein bezüglich Spantiefe a und Spandickenänderung Δh linearer Ansatz der Form

$$\Delta F = ak_x(h)\Delta h = ak_x[x(t - T_0) - x(t)] \quad (7.114)$$

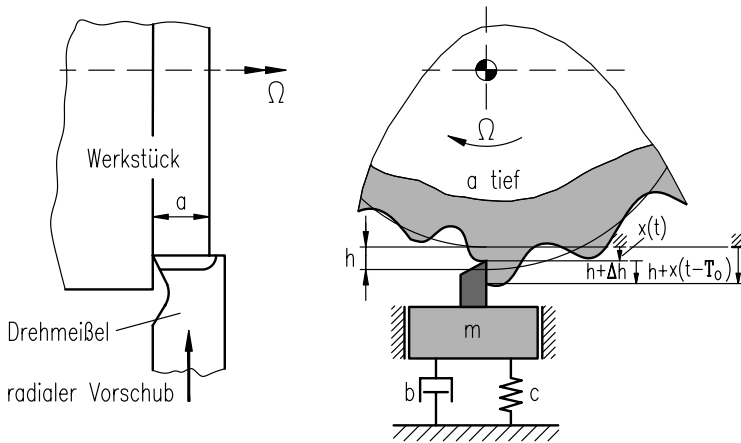


Bild 7.15 Zum Zerspanungsvorgang; a) Seitenansicht, b) axiale Sicht

gemacht werden. Hierbei ist der Spandickenkoeffizient k_x ein vom Werkstoff, der Schneidengeometrie, dem Schnittwinkel und anderen Zerspanungsparametern abhängiger Faktor. Von dem in Bild 7.15 dargestellten Berechnungsmodell interessieren nur die modalen Parameter, denn es kennzeichnet eine Eigenform der Maschine, die zu einer radialen Bewegung zwischen Werkstück und Werkzeug führt. Man erhält dafür folgende Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x - \alpha\omega_0^2[x(t - T_0) - x(t)] = 0; \quad \alpha = a \frac{k_x}{c}. \quad (7.115)$$

Die dynamischen Eigenschaften der Maschine werden durch die Eigenkreisfrequenz ω_0 (im ungedämpften Zustand) und den Dämpfungsgrad D erfasst. Der Faktor α , der die Zerspanungsparameter enthält, ist der Spantiefe proportional. Wird der Lösungsansatz $x = \hat{x} \exp(\lambda \omega_0 t)$ in (7.115) eingesetzt, so folgt als charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2D\lambda + 1 + \alpha[1 - \exp(-\lambda \omega_0 T_0)] = 0. \quad (7.116)$$

Der Regenerativeneffekt, also der Einfluss der vom vorigen Umlauf vorhandenen Oberflächenwelligkeit, wird hier durch den Term mit der Exponentialfunktion ausgedrückt.

Dies ist eine transzendente Gleichung für λ , die reelle oder konjugiert komplexe Wurzeln haben kann. Vom Vorzeichen des Realteils hängt ab, ob eine gedämpfte oder angefachte Schwingung entsteht. Die Stabilitätsgrenze liegt dort, wo der Realteil null ist, d. h., sie kann mit dem Ansatz $\lambda = 0 + j\omega/\omega_0 = 0 + j\nu$ und der Anwendung der Euler'schen Relation gesucht werden. An der Stabilitätsgrenze tritt der Grenzwert α_g auf, aus dem die praktisch interessierende Grenzspantiefe zu ermitteln ist. $\omega = \nu \omega_0$ ist die noch unbekannte Ratter-Kreisfrequenz. Damit gilt an der Stabilitätsgrenze die Bedingung

$$1 - \nu^2 + \alpha_g(1 - \cos \omega T_0) + j(2D\nu + \alpha_g \sin \omega T_0) = 0. \quad (7.117)$$

welche nach dem Einsetzen des Ansatzes in (7.116) folgt. Diese komplexe Gleichung ist erfüllt, wenn ihr Real- und Imaginärteil null sind. Ihre Auflösung ergibt nach der Elimination der trigonometrischen Funktionen den Grenzwert für den Zerspanungsparameter sowie die zugehörigen Umlaufzeiten in Abhängigkeit von $\nu = \omega/\omega_0$:

$$\alpha_g = \frac{(1 - \nu^2)^2 + (2D\nu)^2}{2(\nu^2 - 1)}; \quad T_0 = \frac{2}{\nu\omega_0} \operatorname{arccot} \left(\frac{2D\nu}{1 - \nu^2} + k\pi \right) \quad (7.118)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Das Minimum von α_g interessiert besonders. Es wird bei $\nu = \sqrt{1 + 2D}$ erreicht und beträgt

$$\alpha_{g \min} = 2D(1 + D). \quad (7.119)$$

Die erreichbare Spantiefe ist also vom Dämpfungsgrad abhängig. Dieses Minimum tritt aber nur bei bestimmten Umlaufzeiten auf. Aus (7.118) folgt für $\nu = \sqrt{1 + 2D}$ eine Beziehung für diejenigen Drehgeschwindigkeiten $\Omega = 2\pi/T_0$, unterhalb derer immer ein stabiles Zerspanen möglich ist:

$$\omega_0 T_0|_{\alpha_g = \alpha_{g \min}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 2D}} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi + \arctan \sqrt{1 + 2D} \right]; \quad (7.120)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Für den Dämpfungsgrad $D = 0,08$ ergibt sich daraus z. B. $\alpha_{g \min} = 0,1728$ und $\omega_0 T_0 = 4,444$ für $k = 0$. Durch Variation von ν kann man aus den Gleichungen (7.118) die Stabilitätskarte berechnen. Bei bekannten Zerspanungsparametern liefert diese ein Bild über die möglichen Spantiefen als Funktion der Drehzahl.

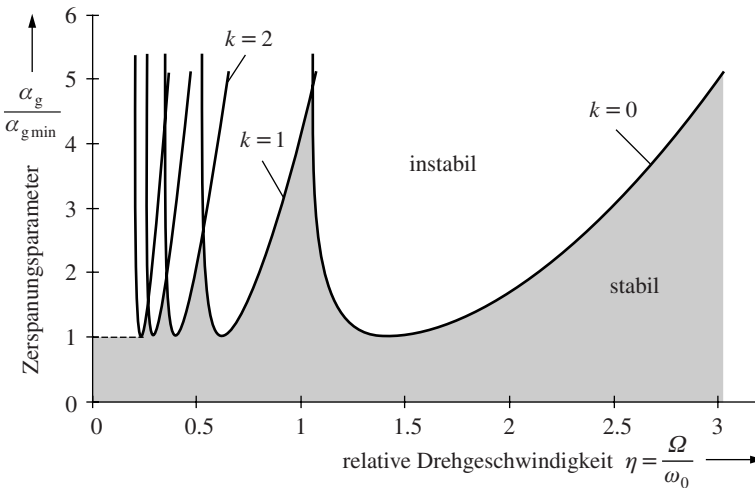


Bild 7.16 Stabilitätskarte zum Zerspanvorgang

Bild 7.16 zeigt das Ergebnis für ein praktisches Beispiel. Die Kurve hat den typischen Verlauf einer Girlandenkurve, weil sich verschiedene lokale Minima aneinanderreihen.

7.3.3

Aufgaben A7.3 und A7.4

A7.3 Selbsterregte Schwingungen einer Bremse

Auf einer mit konstanter Geschwindigkeit v bewegten ebenen rauhen Fläche gleitet eine elastisch abgestützte Masse, vgl. Bild 7.17. Es wird nur die in schräger Richtung orientierte Hauptsteifigkeit (der eigentlich zweidimensionalen Befestigung) durch die Federkonstante c berücksichtigt, vgl. Tabelle 1.4. Haften sei ausgeschlossen, d. h. für die Geschwindigkeit der Masse gilt $|\dot{x}| < v$. Der Anfangswinkel liegt im Bereich $0 < \beta_0 < \pi/2$.

Gegeben:

Länge der ungespannten Feder	l_0
Neigungswinkel der ungespannten Feder	β_0
Fallbeschleunigung	g
Masse	m
Federkonstante	c
Gleitreibungszahl	μ

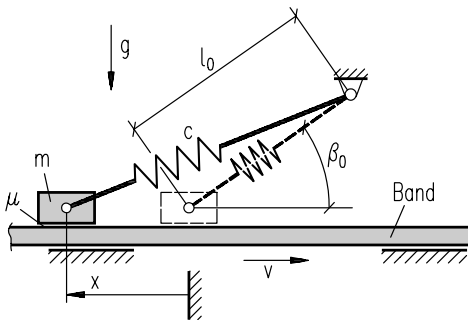


Bild 7.17 Minimalmodell für selbsterregte Schwingungen einer Bremse

Gesucht:

1. Kräftebild an der frei geschnittenen Masse mit Bewegungsgleichungen und Zwangsbedingungen
2. Federlänge $l(x)$ und nichtlineare Differenzialgleichung
3. Linearisierte Bewegungsgleichung für $x \ll l_0$
4. Bedingung dafür, dass selbsterregte Schwingungen auftreten
5. Bereich für den Winkel β_0 bei $\mu = 0,25$, in dem selbsterregte Schwingungen auftreten.

A7.4 Stabilitätskarte

Für die in Abschnitt 7.3.2.2 untersuchten Flatterschwingungen einer Platte im Strömungsfeld soll die Stabilitätskarte aufgestellt werden, aus der man die Parameterbereiche erkennen kann, bei denen diese Schwingung stabil oder instabil wird.

Gegeben: Die Stabilitätsbedingungen (7.111) und (7.112) aus Abschnitt 7.3.2.2.
Dimensionslose Kenngrößen

$$\gamma = \frac{c_1}{c_2}; \quad \varepsilon = \frac{e}{l}; \quad \varkappa = \frac{k_Q v^2}{c_2}. \quad (7.121)$$

Gesucht:

1. Stabilitätsbedingungen, ausgedrückt durch die dimensionslosen Kennzahlen
2. Eintragung der Kurven für die Grenzen der Stabilitätsbereiche in einem Diagramm $\varkappa = \varkappa(\gamma)$
3. Diskussion der Parametereinflüsse

7.3.4

Lösungen L7.3 und L7.4

L7.3 Wegen der Voraussetzung $|\dot{x}| < v$ erfolgt keine Umkehr der Richtung der Reibkraft. Aus dem Kräftegleichgewicht ergibt sich, vgl. Bild 7.18:

$$\text{Horizontal:} \quad \mu F_N + c(l - l_0) \cos \beta + m\ddot{x} = 0 \quad (7.122)$$

$$\text{Vertikal:} \quad F_N + c(l - l_0) \sin \beta - mg = 0 \quad (7.123)$$

Für die Winkel, den Weg und die Federlänge gelten die Zwangsbedingungen:

$$\text{Horizontal:} \quad x + l_0 \cos \beta_0 = l \cos \beta \quad (7.124)$$

$$\text{Vertikal:} \quad l_0 \sin \beta_0 = l \sin \beta \quad (7.125)$$

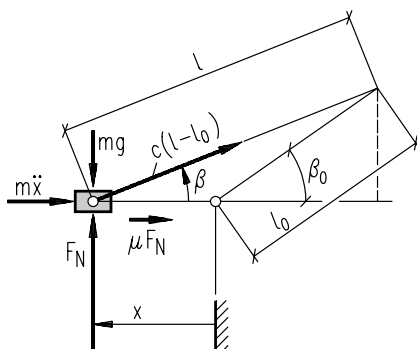


Bild 7.18 Kräftebild zum Berechnungsmodell der Bremse

Mit (7.122) bis (7.125) liegen die vier grundlegenden Gleichungen vor, aus denen die vier Unbekannten x , β , l und F_N aus den sechs gegebenen Parametern (μ , c , g , m , l_0 und β_0) zu berechnen sind.

Zunächst werden l und β als Funktion von x berechnet. Das Quadrieren und Summieren von (7.124) und (7.125) ergibt nach kurzer Rechnung

$$l^2 = (x + l_0 \cos \beta_0)^2 + (l_0 \sin \beta_0)^2 = x^2 + 2x l_0 \cos \beta_0 + l_0^2 \quad (7.126)$$

und damit die Federlänge

$$\underline{\underline{l(x) = \sqrt{x^2 + 2x l_0 \cos \beta_0 + l_0^2}}} \quad (7.127)$$

Einsetzen von F_N aus (7.123) in (7.122) liefert eine einzige Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} + \mu [mg - c(l - l_0) \sin \beta] + c(l - l_0) \cos \beta = 0 \quad (7.128)$$

oder

$$m\ddot{x} + c(l - l_0)(\cos \beta - \mu \sin \beta) + \mu mg = 0. \quad (7.129)$$

Nach der Berücksichtigung von (7.124) und (7.125) wird daraus

$$\underline{m\ddot{x} + c[1 - l_0/l(x)](x + l_0 \cos \beta_0 - \mu l_0 \sin \beta_0) + \mu mg = 0.} \quad (7.130)$$

Das Einsetzen des Ausdrucks für $l_0/l(x)$ ergibt eine nichtlineare Differenzialgleichung für die Koordinate x , aus welcher die Schwingungen berechnet werden können. Zur Beurteilung des Stabilitätsverhaltens genügt die linearisierte Form dieser Differenzialgleichung. Die Entwicklung von $l_0/l(x)$ in eine Taylor-Reihe für $x/l_0 \ll 1$ liefert

$$\begin{aligned} \frac{l_0}{l} &= \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + 2xl_0 \cos \beta_0 + l_0^2}} = \left(1 + \frac{2x}{l_0} \cos \beta_0 + \frac{x^2}{l_0^2}\right)^{-1/2} \\ &= 1 - \frac{x}{l_0} \cos \beta_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l_0}\right)^2 \cdot (1 - 3 \cos^2 \beta_0) + \dots \end{aligned} \quad (7.131)$$

Damit folgt aus (7.130) und (7.131) bei Vernachlässigung von allen Termen zweiter und höherer Ordnung

$$\underline{m\ddot{x} + cx(\cos \beta_0 - \mu \sin \beta_0) \cos \beta_0 + \mu mg = 0.} \quad (7.132)$$

Selbsterregte Schwingungen werden angefacht, wenn der Faktor des linearen Terms negativ wird. Also werden die Schwingungen instabil bei $\cos \beta_0 - \mu \sin \beta_0 < 0$, d. h. bei steilen Winkeln im Bereich der Selbsthemmung

$$\underline{\tan \beta_0 > \frac{1}{\mu}.} \quad (7.133)$$

Bei Winkeln $\beta_0 > \arctan(1/\mu)$ treten selbsterregte Schwingungen auf. Für die Gleitreibungszahl $\mu = 0,25$ ergibt sich ein Grenzwinkel von $\beta_0^* = 75,96$ Grad.

L7.4 Der Ausdruck (7.111) lautet unter Beachtung der in (7.107) definierten Parametern und den Kennzahlen aus (7.121):

$$c_{11}m_2 + c_{22}m_1 = \frac{(c_1 + c_2)m}{12} + \left(c_1 + c_2 - \frac{k_Q v^2 e}{l}\right) m \quad (7.134)$$

$$= c_1 m \frac{\left[1 + \frac{c_1}{c_2} + 12 + 12 \frac{c_1}{c_2} - 12 \frac{k_Q v^2 e}{c_2 l}\right]}{12} \quad (7.135)$$

$$= \frac{[13(1 + \gamma) - 12\kappa\epsilon] c_1 m}{12}. \quad (7.136)$$

Also lautet die erste Stabilitätsbedingung in dimensionsloser Form

$$\underline{13(1 + \gamma) - 12\kappa\epsilon > 0.} \quad (7.137)$$

Aus der linksseitigen Ungleichung (7.112) folgt die einfache Bedingung

$$\underline{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0.} \quad (7.138)$$

Unter Benutzung der Parameter gemäß (7.107) wird daraus die Stabilitätsbedingung

$$\underline{4\gamma - (1 + \gamma)\kappa\epsilon - (1 - \gamma) \cdot \kappa > 0.} \quad (7.139)$$

Aus der rechten Seite von (7.112) ergibt sich als weitere Stabilitätsbedingung

$$4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})m_1m_2 < (c_{11}m_2 + c_{22}m_1)^2. \quad (7.140)$$

Formt man diese Bedingung analog um, so ergibt sich daraus

$$4\gamma - (1 + \gamma)\kappa\varepsilon - (1 - \gamma)\kappa < 3 \left[\frac{13}{12}(1 + \gamma) - \kappa\varepsilon \right]^2. \quad (7.141)$$

Die kritischen Anströmgeschwindigkeiten können in dimensionsloser Form aus den drei Stabilitätsbedingungen (7.137), (7.139) und (7.141) gefunden werden. Wird $\varepsilon > 0$ vorausgesetzt, folgt aus (7.137), dass das System stabil ist, wenn

$$\kappa < \frac{13(1 + \gamma)}{12\varepsilon} \quad (7.142)$$

gilt. Aus (7.139) ergibt sich die Stabilitätsbedingung

$$\kappa \leq \frac{4\gamma}{\varepsilon(1 + \gamma) - \gamma + 1} \quad \text{für} \quad \gamma \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad (7.143)$$

wobei die jeweils oberen und unteren Relationszeichen einander zugeordnet sind. Aus (7.141) folgt:

$$\kappa < \frac{1}{12\varepsilon^2} \cdot \left[11\varepsilon \cdot (1 + \gamma) + 2 \cdot (\gamma - 1) - 2 \cdot \sqrt{(\gamma - 1) \cdot [11\varepsilon \cdot (\gamma + 1) - (\gamma + 1) \cdot (12\varepsilon^2 - 1)]} \right]. \quad (7.144)$$

Man kann in einem γ - κ -Diagramm die Kurven zeichnen, die sich aus (7.142) bis (7.144) für die Gleichheitszeichen ergeben. Jede dieser Kurven teilt den Bereich in ein stabiles und ein instabiles Gebiet.

Dabei wurde aus der quadratischen Gleichung, die sich für κ ergibt, die kleinere der beiden Wurzeln berücksichtigt, da diese die tieferen κ -Werte liefert.

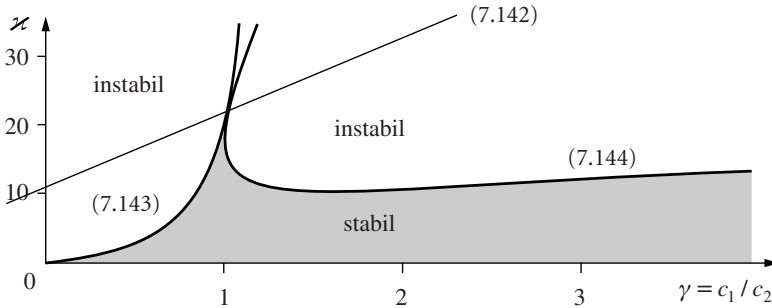


Bild 7.19 Stabilitätskarte zum Flattern der Platte

In Bild 7.19 sind für den Wert $\varepsilon = 0,1$ die Grenzen des Gebietes dargestellt, in dem diese Ungleichungen erfüllt sind. Die kritische Strömungsgeschwindigkeit, von der ab das Flattern auftreten kann, ist der kleinste dieser Werte aus den drei Bedingungen (7.142) bis (7.144). Aus diesem Bild geht der unterschiedliche Einfluss der beiden Federn hervor. Man vergleiche z. B. die Werte für $\gamma = 2,0$ mit $\gamma = 1/2$, für die ohne Strömung dieselben Eigenfrequenzen auftreten.

8 Regeln für dynamisch günstige Konstruktionen

Der Begriff „dynamisch günstige Konstruktion“ ist unscharf und vieldeutig. Es kann darauf ankommen, Material oder Energie (Antriebsleistung) zu sparen, übermäßigen Verschleiß oder Zerstörungen zu vermeiden, die Lebensdauer, Zuverlässigkeit und Produktivität (Drehzahl) zu erhöhen, die Arbeitsbedingungen für die Menschen zu verbessern oder Schwingungen und Stoßkräfte für technologische Zwecke zu nutzen.

Vom Standpunkt der Mechanik besteht beim Entwurf einer Maschine die Frage nach der Synthese von mechanischen Strukturen bezüglich dynamischer Kriterien. Die klassische Mechanik liefert mit ihren traditionellen Methoden Antworten auf die Frage, wie sich eine mechanische Struktur bei gegebener Erregung verhält. Bei der Konstruktion von Maschinen wird aber die Frage gestellt, welche mechanische Struktur man nehmen soll, und welche Maßnahmen man treffen muss, damit sich eine Maschine dynamisch günstig verhält. Bezüglich solcher Fragestellungen, bei denen für eine bestimmte technologische oder Transportoperation (Bewegungs- oder Kraftverlauf an der Wirkstelle) eine mechanische Struktur gesucht wird, existiert kein determinierter Lösungsalgorithmus.

Für manche Aufgabenklassen gibt es Kataloge, Systematiken und heuristische Methoden zur Lösungsfindung. Im Folgenden werden, geordnet nach sechs Gesichtspunkten, einige Regeln genannt, die einen Bereich praktischer Aufgaben der Maschinendynamik überstreichen. Sie können bei der Suche nach dynamisch günstigen Lösungen zur Orientierung dienen, aber längst nicht die unerschöpfliche Vielfalt der in der Praxis auftauchenden Aufgabenstellungen erfassen. Daran, dass jährlich hunderte von Patenten angemeldet werden, welche bei konkreten Maschinen neuartige Lösungen vorschlagen, erkennt man auch, wie komplex dieses Gebiet ist.

Aspekt 1: Klärung der wesentlichen physikalischen Phänomene

In den meisten Fällen wird eine Maschine nicht einfach „aus dem Nichts“ geschaffen. Meist wird eine bereits vorliegende Konstruktion vervollkommenet und weiterentwickelt, oder es werden gewisse Mängel beseitigt. Aufgrund vorliegender Erfahrungen muss der Konstrukteur im konkreten Fall das Problem einer physikalischen Ursache zuordnen können oder im ungünstigsten Falle mit einer Arbeitshypothese zu suchen beginnen.

Die störenden (oder zu nutzenden) dynamischen Phänomene sind zweckmäßigerweise nach der Erregerursache zu ordnen und mit qualitativ verschiedenen Modellen zu beurteilen. Der Ingenieur muss entscheiden, ob es sich um

- Kräfte der starren Maschine (z. B. Unwuchterregung, Mechanismen, technologische Kräfte)
- Vibrationskräfte aus freien, erzwungenen oder parametererregten Schwingungen
- Kraftgrößen aus nichtlinearen oder selbsterregten Schwingungen

handelt, vgl. die drei Modellstufen in Abschnitt 1.1.1. Die Grenzen zwischen diesen (vom mathematischen Standpunkt anscheinend klar abgrenzbaren) Erscheinungen sind vom physikalischen Standpunkt aus betrachtet durchaus fließend. Genau genommen sind alle realen Prozesse nicht rückwirkungsfrei und damit als freie (autonome) Schwingungen aufzufassen.

Häufig sind einer Maschine während ihrer historischen Entwicklung, die meist mit einer Drehzahlerhöhung verbunden ist, auch unterschiedliche Berechnungsmodelle zuzuordnen. Viele Schadensfälle sind darauf zurückzuführen, dass mit einem zu einfachen Modell (und unklaren Vorstellungen über das physikalische Geschehen) gerechnet wurde. Mit der Weiterentwicklung einer Maschine stößt man oft in Bereiche vor, bei denen die bislang benutzten (und z. T. sogar durch Vorschriften legalisierten) Berechnungsmodelle nicht mehr zutreffen.

Viele der für das gesamte Gebiet der Angewandten Mathematik und Mechanik behandelten Gesichtspunkte der Modellbildung und mathematischen Formulierung eines Problems gelten naturgemäß auch für die Maschinendynamik. Die Forderungen nach Adäquatheit, Einfachheit und Optimalität eines Modells, Fragen nach dem Einfluss unberücksichtigter Faktoren, nach phänomenologischen und halbempirischen Gesetzen, nach der Anzahl der Freiheitsgrade, der Hierarchie der Modelle und Variablen werden dort behandelt, sodass hier nur darauf verwiesen sei.

Bestimmte konstruktive Lösungen lassen sich erst mit den modernen Möglichkeiten der Mikroelektronik, der Sensortechnik, der Computer und neuer physikalischer Effekte realisieren. Durch geeignete Steuer- und Regelanordnungen können z. B. in Verbindung mit Schwingungssensoren zur Messwerterfassung die Massen-, Feder- oder Dämpfungscharakteristik eines Systems während des Betriebes selbstanpassend verändert und den störenden Kräften entgegengerichtete Kräfte aufgebracht werden. In jüngster Zeit sind viele neue Regler als eine aktive Form des Massen- und Leistungsausgleichs, der Schwingungsisolierung oder der Grenzwertüberwachung und Diagnose vorgeschlagen und als Patente angemeldet worden. Häufig geht es um die Früherkennung abnormer Schwingungszustände, bei denen auf abnorme Frequenzen, Amplituden oder kompliziertere Charakteristika reagiert wird. Zu den modernen Möglichkeiten gehört z. B., gemessene momentane Daten mit gespeicherten Daten für normale oder zulässige Schwingungszustände zu vergleichen und beim Überschreiten festgelegter Grenzwerte solche Signale abzugeben, die eine Zustandsänderung mit elektrischen, mechanischen, hydraulischen u. a. Effekten veranlassen.

Aspekt 2: Auswahl des kinematischen Systems

Schon bei der Auswahl des Wirkprinzips werden folgenreiche Entscheidungen getroffen. Der Konstrukteur hat die Aufgabe, die topologische Struktur des Antriebssystems und des Tragwerks so festzulegen, dass der Kraftfluss innerhalb des Mechanismus zwischen Motor und Wirkstelle (An- und Abtrieb) und innerhalb des Gestells zwischen der Wirkstelle und dem Aufstellort auf möglichst kurzem Wege erfolgt. Die dynamischen Kräfte sind meist weniger durch den Zeitverlauf der Kräfte des technologischen Prozesses bestimmt (z. B. Presskraft) als durch die Massenkräfte aus den angeregten Eigenschwingungen der Konstruktion, d. h., die gewählte Struktur bestimmt selbst die wesentlichen Belastungen und Deformationen. Hierzu wird die Anwendung der Methoden und Mittel der Getriebesystematik, der Konstruktions-

systematik der Antriebstechnik und die Nutzung von Wissensspeichern empfohlen, z. B. das Internet.

Schon bei der Getriebesynthese, wenn die Struktur und die Abmessungen eines Mechanismus aufgrund geometrischer Forderungen am Abtriebsglied bestimmt werden, muss man auf gewisse Schwingungsaspekte achten. Dazu gehört die Forderung, Mechanismen mit minimaler Anzahl der Glieder einzusetzen. Durch Nutzung der Computer zur Synthese und Optimierung können z. B. mit sechsgliedrigen Koppelgetrieben, Kurvenkoppelgetrieben und einfachen Räderkoppelgetrieben Forderungen erfüllt werden, die früher nur mit vielgliedrigen Mechanismen erfüllbar schienen. Je weniger Glieder und Gelenke vorhanden sind, desto geringer sind im Allgemeinen die Deformationen, der Spieleinfluss und der Lärm.

Als weitere Regeln zu diesem Aspekt wären zu nennen:

- kraftschlüssige Verbindungen gegenüber formschlüssigen bevorzugen,
- Geschwindigkeiten und Beschleunigungen möglichst konstant halten (Unstetigkeiten vermeiden),
- vom geforderten Bewegungsablauf an der Wirkstelle ausgehen und nur die technologischen Mindestforderungen beachten,
- geforderte Antriebsbewegung nur so schnell wie nötig ausführen,
- Zwischenglieder möglichst langsam bewegen,
- Absolutbewegung eines Abtriebsgliedes an der Wirkstelle durch Relativbewegung zweier Getriebeglieder ersetzen,
- möglichst wenige Körper ungleichförmig bewegen,
- statt Umkehrbewegungen möglichst geschlossene Bahnen anwenden und diese möglichst als Kreisbahn ausführen,
- möglichst kleine Bewegungen ausführen,
- einstellbare Glieder zum Ausgleich der Abweichungen von idealer geometrischer Struktur vorsehen,
- Flächenkontakt gegenüber Linienkontakt und Linienkontakt gegenüber Punktkontakt bevorzugen.

Aspekt 3: Beeinflussung kinetostatischer Kraftverläufe

Die Analyse des Modells der starren Maschine (kinetostatische Analyse) ist der Ausgangspunkt bei vielen Fragen nach der dynamischen Belastung. Die Kinematik bestimmt wesentlich die kinetostatischen Kraftverläufe, da durch die Massebelegung gewissermaßen nur Proportionalitätsfaktoren für die Beschleunigungen bestimmt werden. Die Verminderung der kinetostatischen Kräfte ist ein zentrales Problem der dynamischen Synthese.

Zu diesem Aspekt beachte man folgende Regeln:

- Kraft auf kürzester räumlicher Verbindung übertragen,
- möglichst Zug- und Druckkräfte und möglichst keine Biege- und Torsionsmomente übertragen,
- statisch bestimmte Kraftübertragung sichern,
- Grad der statischen Unbestimmtheit von Fertigungstoleranzen unabhängig machen, z. B. Fluchtungsfehler ausgleichen,
- möglichst klein und kompakt bauen,

- ständigen Kraftschluss durch Vorspannung sichern,
- Kraftrichtungswechsel vermeiden oder Nulldurchlauf der Kraft möglichst langsam ausführen,
- rotierende Körper auswuchten,
- Massenausgleich bei Mechanismen durch Veränderung der Masseparameter oder Zusatzgetriebe realisieren,
- elektromagnetische, hydraulische oder pneumatische Ausgleichskraft aufbringen,
- Ausgleichsfedern anordnen und Federparameter optimieren,
- Kraft möglichst nahe am Angriffspunkt durch Gegenkraft ausgleichen,
- Erregerkräfte gegenseitig ausgleichen, z. B. durch optimale Versatzwinkel bei Kurbelwellen,
- Kompensatoren als Speicher kinetischer oder potenzieller Energie einsetzen,
- Motor- und Bremsmoment dem erforderlichen Momentenverlauf anpassen.

Zu den kinetostatisch begründeten Maßnahmen muss bemerkt werden, dass sie häufig widersprüchlichen Charakter haben. So können zum Massenausgleich angeordnete Ausgleichsmassen zur Erniedrigung der Eigenfrequenzen und zur Erhöhung des veränderlichen Anteils des reduzierten Trägheitsmoments und damit zur stärkeren Anregung von Torsionsschwingungen führen. Damit soll gesagt sein, dass man oft über die Grenzen des kinetostatischen Modells hinaussehen muss, weil die dynamischen Probleme komplexen Charakter haben. Man soll möglichst die Folgen bezüglich des elastischen Modells abschätzen.

Aspekt 4: Vermeidung von Resonanzen

Neben den kinetostatischen Massenkräften, die gewissermaßen aus geometrischen Beziehungen errechenbar sind, treten die Vibrationskräfte aus den Eigenschwingungen auf, die häufig die kinetostatischen übersteigen. Man muss vermeiden, dass die zeitlich veränderlichen kinetostatischen Kräfte Eigenschwingungen in Resonanz erregen.

Das *qualitative* Verständnis für die sich physikalisch abspielenden Vorgänge kann man oft schon am Schwinger mit einem Freiheitsgrad gewinnen. Vieles lässt sich anschaulich deuten, wenn man einen Vorgang als Hauptschwingung (modale Schwingung) erkennt. Dies setzt die Kenntnis der aus der linearen Theorie der Schwingungen bekannten Betrachtungsweise voraus. Die spektralen und modalen Eigenschaften eines Systems werden verständlicher, wenn man das Erreger- und Eigenfrequenzspektrum und die Modalmatrix (Eigenformen) ermitteln kann.

Allgemein bekannt ist die Forderung, Resonanzen zu vermeiden, indem die Eigenfrequenzen weit weg von den Bereichen der Erregerfrequenzen gelegt werden.

Für die meisten Verarbeitungsmaschinen gilt die Regel, dass sie dann dynamisch störungsfrei arbeiten, wenn ihre erste Eigenfrequenz mindestens 10- bis 15-mal größer als die Grunderregerfrequenz des Antriebsmechanismus ist. Man wird also zunächst immer versuchen, in diesen Bereich zu kommen. Wie bekannt, kann man eine Eigenfrequenz dadurch erhöhen, dass man deren modale Steifigkeit erhöht, also z. B. Querschnitte vergrößert oder Lagerabstände bei Balken vermindert. Man kann mit demselben Ziel die modale Masse verkleinern, indem man Formleichtbau betreibt oder Leichtmetall-Legierungen anwendet. Hier ist die Frage nach den Para-

metereinflüssen und die Empfindlichkeit der Eigenfrequenzen und Eigenformen auf Parameteränderungen von Bedeutung.

Regeln sind zu diesem Aspekt:

- wesentliche Harmonische der Erregung verkleinern, z. B. Fräser mit ungleichen Zahnabständen,
- Kurvenprofile mit minimaler Anzahl von Harmonischen ausbilden (HS-Profile),
- Koppelgetriebe hinsichtlich der Erreger-Harmonischen optimieren,
- Zahneingriffsfrequenzen gegenüber Eigenfrequenzen verstimmen,
- Resonanzgebiet schnell durchfahren,
- Stoßfolge auf die Periodendauer der Eigenschwingungen abstimmen,
- Ketteneingriffs- und Kettenumlauffrequenzen gegenüber Eigenfrequenzen verstimmen,
- Zusatzschwinger anordnen und auf wesentliche Erregerfrequenz abstimmen (Schwingungstilger),
- sensorgesteuerte Zusatzbewegungen einleiten (Aktuatoren),
- Resonanzamplituden durch stark dämpfende Werkstoffe vermindern (z. B. Gummifedern statt Stahlfedern),
- bei unvermeidlicher Resonanz den Festigkeitsnachweis erbringen,
- Einsatz von Dämpferelementen (z. B. bei Torsionsschwingungen).

Aspekt 5: Verminderung von Stoßbelastungen

Neben den periodischen Vorgängen spielen die instationären Vorgänge bei Maschinen, wie Anfahren, Bremsen, Belasten, Entlasten und Anstoßen, eine wichtige Rolle. Die wichtigste Kennzahl ist dabei das Verhältnis $\nu = \Delta t / T$ der Kraftänderungszeit zur Periodendauer der Eigenschwingung bei schnell steigenden oder fallenden Kräften. Sie ist entscheidend für die Größe der angestoßenen Schwingungsamplituden.

Falls $\nu \leq 0,25$ ist, reagiert das System auf diese (kinetostatisch betrachtet – stetige) Erregung wie auf einen plötzlichen Sprung, und zwar unabhängig vom Zeitverlauf der Kraft während der Anstiegszeit. Auf sehr kurzzeitige Belastungen reagiert ein System wie auf einen Geschwindigkeitssprung. In der Praxis kommt es oft darauf an, solche Stoßbelastungen zu vermeiden oder zu vermindern. Dazu gelten folgende Regeln:

- Relativgeschwindigkeit der aufeinander stoßenden Massen vermindern,
- aufeinander stoßende Massen möglichst klein ausbilden,
- Steifigkeit an Stoßstelle möglichst klein halten,
- angestoßene Masse oder Teilsystem möglichst weich mit dem Gesamtsystem koppeln,
- mechanische Arbeit an der Stoßstelle durch Beeinflussung der Stoßrichtung vermindern,
- Stoßkraft nahe am Schwingungsknoten (weit entfernt vom Schwingungsbauch) einwirken lassen,
- Spiel in Gelenken minimieren oder durch Vorspannung beseitigen,
- Sollbruchstelle in der Nähe der Krafteinleitungsstelle anordnen,
- Stoßkraft durch Gegenkraft in der Nähe der Stoßstelle abfangen (z. B. Gegen-schlag bei Hämmern),

- Spiel durch Klassierung von Bauelementen (Spielpaaren) vermindern,
- Wirkungsdauer der Erregung auf die Periodendauer der wesentlichen Eigenschwingungen abstimmen, z. B. Anlauf-, Brems- oder Umkehrzeit.

Falls die realen Erregerkräfte oder -bewegungen nicht vermindert werden können, muss man versuchen, die Relationen zu den Eigenformen auszunutzen.

Aspekt 6: Modale Erregerkräfte verkleinern

Hierbei kommt es auf die räumliche Beeinflussung der Eigenformen an, die zwar erst nach einer Schwingungsberechnung oder -messung genau bekannt sind, aber oft abgeschätzt werden können. Man muss dazu zumindest die Lage der Schwingungsknoten oder die räumliche Verteilung der Amplituden der Schwingungen kennen.

Oft gelingt es, durch Beeinflussung des statischen Deformationsverhaltens, die Eigenschwingformen gezielt zu verändern, sodass die funktionsbedingte Massenverteilung erhalten bleiben kann. Ein einfaches Beispiel ist der Angriffspunkt der Hand am Hammer, der als Stoßmittelpunkt des starren Körpers beim Schlag unbeweglich bleibt, sodass die „Lagerkraft“ an der Hand null bleibt. Allgemein gelten zu diesem Aspekt folgende Regeln:

- Beeinflussung der Eigenformen durch solche Strukturveränderungen, wie zusätzliche Streben, Stützen, Einspannungen, Hinzufügen oder Weglassen von Lagern und/oder Gelenken,
- Eigenformen so verändern, dass sich die Arbeit verschiedener Erregerkräfte gegenseitig vermindert oder aufhebt,
- bei Starrkörpern die Erregerkraft auf den Stoßmittelpunkt wirken lassen,
- ausnutzen, dass symmetrische Erregerkräfte keine antimetrischen Eigenformen erregen und antimetrisch angreifende Erregerkräfte bei einem symmetrischen System keine symmetrischen Eigenformen anregen,
- Gesamtsystem in Teilsysteme aufteilen, sodass die Erregungen, die auf eins der Teilsysteme wirken, sich nicht auf die anderen auswirken.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass trotz des Einsatzes von Computern durch die stürmische technische Entwicklung die Lösung maschinendynamischer Probleme für den Konstrukteur nicht leichter geworden ist. Es gilt, neue Wirkprinzipien zu beachten und ihre Anwendbarkeit zu prüfen. Dies betrifft nicht nur die eingangs erwähnten „elektronischen“ Möglichkeiten, sondern auch rein mechanisch/physikalische Weiterentwicklungen, z. B. die Nutzung von Fluidfederelementen, des piezoelektrischen Effekts, der mikromechanischen Neuentwicklungen, die Nutzung elektroviskoser Flüssigkeiten (bei denen durch Anlegen einer Spannung eine Viskositätsänderung erzielt wird), Magnetdämpfer, Memory-Metalle u. a.

Auch die in den vergangenen Jahren für nahezu alle klassischen Maschinendynamik-Probleme entwickelte Software erleichtern dem Konstrukteur die Arbeit nur bedingt. Es genügt nicht, aus Eingabedaten (soweit überhaupt hinreichend genau vorhanden) mithilfe der Computer Ausgabedaten zu erzeugen, um bei Schwingungsproblemen Lösungen zu finden.

Formelzeichen

Lateinische Buchstaben

A	Matrix der Drehtransformation; Systemmatrix
b	Dämpferkonstante; Breite
B	Dämpfungsmatrix $\mathbf{B} = [b_{kl}]$
c	Federkonstante
d	Durchmesser
C	Federmatrix, Steifigkeitsmatrix $\mathbf{C} = [c_{kl}]$
D	Lehrsches Dämpfungsmaß $\equiv$ Dämpfungsgrad
D	Nachgiebigkeitsmatrix $\mathbf{D} = [d_{kl}]$
e	Exzentrizität einer Unwuchtmasse
F	Kraftvektor
$F_{\xi}, F_{\eta}, F_{\zeta}$	Komponenten der Kraft $\mathbf{F}$ im körperfesten Bezugssystem
f	Frequenz
g	Fallbeschleunigung
g	Vektor der verallgemeinerten Kraftgrößen $\mathbf{g} = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]^T$
h_i	<i>i</i> -te modale Erregerkraft
h	Höhe des Angriffspunktes der Erregerkraft über der Grundebene
i	Übersetzungsverhältnis; Nummer der Eigenfrequenz
I	Flächenträgheitsmoment; Anzahl der Glieder in einem Mechanismus
j	imaginäre Einheit $j = \sqrt{-1}$
J_{kl}^S	Element des zentralen Trägheitstensors (bezüglich des Schwerpunktes <i>S</i>)
J_{kl}^O	Element des Trägheitstensors (bezüglich des Bezugspunktes <i>O</i>)
k	Nummer (Ordnung) der Harmonischen in der Fourierreihe
l	Länge
m	Masse; Modul einer Verzahnung;
m_u	Unwuchtmasse
M	Moment
M	Massenmatrix $\mathbf{M} = [m_{kl}]$; Momentenvektor
m_{kl}	Element der Massenmatrix
n	Anzahl der Freiheitsgrade
p	Parametervektor;
	Vektor der modalen Koordinaten (Hauptkoordinaten)
$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n]^T$	

p_i	i -te modale Koordinate
P	Leistung
Q_k	k -te verallgemeinerte Kraftgröße (Kraft oder Moment)
q	verallgemeinerte Koordinate (Weg oder Winkel)
$\mathbf{q}$	Vektor der verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_n]^T$
q_k	k -te verallgemeinerte Koordinate
r, R	Radius
S	Schwerpunkt
t	Zeit
T	Periodendauer ($T = 2\pi/\omega$)
T_0	Zyklusdauer ($T_0 = 2\pi/\Omega$) des Antriebs
T_i	Periodendauer der i -ten Eigenschwingung ($i = 1, 2, \dots, n$), $T_i = 2\pi/\omega_i$
u	Übersetzungsverhältnis (als Alternative zu i)
$U(\varphi)$	Lagefunktion eines Mechanismus
U	z. B. $U_i = m_i r_i$ Unwucht der Masse m_i
V	Vergrößerungsfunktion
$\mathbf{V}$	Modalmatrix $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n] = [v_{ki}]$
W	Widerstandsmoment
x, y, z	Koordinaten im raumfesten Bezugssystem
$\mathbf{Y}_i$	Jacobimatrix der Translation
z	Zähnezahl eines Zahnrades
$\mathbf{Z}_i$	Jacobimatrix der Rotation

Griechische Buchstaben (bevorzugt für dimensionslose Größen)

α_k	Winkel zwischen der ξ -Achse und der Achse k
β_k	Winkel zwischen der η -Achse und der Achse k
γ_i	i -te modale Federkonstante
γ_k	Winkel zwischen der ζ -Achse und der Achse k
δ	Ungleichförmigkeitsgrad; Abklingkonstante ($\delta = D\omega_0$); Längsspiel
Δ	Differenz, z. B. Δt (Zeitdifferenz)
ξ, η, ζ	Koordinaten im körperfesten Bezugssystem
Γ_{klp}	Christoffel-Symbol
$\varkappa$	dimensionsloser Faktor (bei verschiedenen Aufgaben lokal andere Bedeutung)
Λ	Logarithmisches Dämpfungsdekrement
λ	Kurbelverhältnis ($\lambda = l_2/l_3$); Eigenwert ($\lambda = \omega^2/\omega^{*2}$)
μ_0	Reibungszahl der Haftreibung
μ	Reibungszahl der Gleitreibung; Kumulationsfaktor

μ_i	i -te modale Masse
ν	Tilgungs-Kreisfrequenz; Querkontraktionszahl
η	Wirkungsgrad; Abstimmungsverhältnis ($\eta = \Omega / \omega_0$); körperfeste Koordinate
π_i	Ähnlichkeitskennzahl Nr. i (dimensionslose Größe)
ϱ	Dichte
σ	Spannung; Normalspannung
τ	Schubspannung
φ	Phasenwinkel; Verlustwinkel
φ_0	Kurbelwinkel ($\varphi_0 = \Omega t$)
ψ	Phasenwinkel einer Koordinate; relative Dämpfung
ω	Betrag der Drehgeschwindigkeit; Kreisfrequenz des gedämpften Schwingers $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$
ω_0	Kreisfrequenz des ungedämpften Schwingers
ω_i	i -te Eigenkreisfrequenz ($\omega_i = 2\pi f_i$)
$\boldsymbol{\omega}$	Vektor der Drehgeschwindigkeit
Ω	Winkelgeschwindigkeit des Antriebs; Erregerkreisfrequenz ($\Omega = 2\pi f$)

Indizes (maximal zwei hintereinander)

A	Anlauf-, z. B. t_A (Anlaufzeit)
a	Axial-, z. B. J_a (axiales Trägheitsmoment)
an	Antriebs-, z. B. M_{an} (Antriebsmoment)
b	Blind-, z. B. P_b (Blindleistung)
B	Brems-, z. B. φ_B (Bremswinkel)
D	Dämpfung, z. B. F_D (Dämpfungskraft)
eff	Effektivwert, z. B. P_{eff} (Effektivleistung)
e	Erreger-, z. B. f_e (Erregerfrequenz)
eig	Eigen-, z. B. f_{eig} (Eigenfrequenz)
i	Nummer eines Körpers (Gliedes) in einem Mechanismus ($i = 1, 2, \dots, I$); Nummer einer Eigenfrequenz oder Eigenform ($i = 1, 2, \dots, n$)
j	Nummer eines Sprunges bei Sprungfolge ($j = 1, 2, \dots, J$)
k	Nummer einer Koordinate ($k = 1, 2, \dots, n$); Nummer einer Hauptachse ($k = 1, 2, 3$ oder $k = I, II, III$); Ordnung einer Harmonischen ($k = 1, 2, \dots, K$)
l	Nummer einer Koordinate als Alternative zu k ($l = 1, 2, \dots, n$)
m	Ordnung einer Harmonischen als Alternative zu k ($m = 1, 2, \dots, K$)
kin	kinetisch, z. B. W_{kin} (kinetische Energie)
M	Motor-, z. B. J_M (Trägheitsmoment des Motors)
m	Mittel-, z. B. M_m (mittleres Moment)
max	Maximal- oder Maximum

min	Minimal- oder Minimum
H	Horizontal-, z. B. Horizontalkraft F_H
N	Normal-, z. B. Normalkraft F_N
0	Anfangs-, z. B. v_0 (Anfangsgeschwindigkeit)
p	Polar-, z. B. J_p (polares Trägheitsmoment)
red	reduziert
R	Reib-, z. B. M_R (Reibmoment)
s	Nummer einer ausgewählten Koordinate ($s = 1, 2, \dots, n$)
S	Schwerpunkt-, z. B. x_S (Schwerpunktstand in x -Richtung); Spiel, z. B. φ_S (Winkel des Getriebespiels)
st	statisch; z. B. M_{st} (statisches Moment)
t	technologisch, z. B. F_t technologische Kraft
T	Torsions-, z. B. c_T (Torsionsfederkonstante)
v	Verlust-, z. B. P_v Verlustleistung
x, y, z	Komponenten im raumfesten Bezugssystem (z. B. F_y ist y -Komponente der Kraft F im raumfesten Bezugssystem)
zul	zulässig, z. B. σ_{zul} (zulässige Spannung)
ξ, η, ζ	Komponenten im körperfesten Bezugssystem (z. B. F_ξ ist ξ -Komponente der Kraft F im körperfesten Bezugssystem)
I, II, III	Römische Zahlen für Hauptachsen

Exponenten und Hochzeichen

e	eingepägt, z. B. $F^{(e)}$ (eingepägte Kraft)
O	bezüglich raumfestem Ursprung
$\overline{O}$	bezüglich körperfestem Bezugspunkt
T	Transponiert, z. B. transponierter Vektor
S	Schwerpunkt-
z	Zwangs-, z. B. $F^{(z)}$ (Zwangskraft)
*	Stern als Kennzeichen einer Besonderheit z. B. ω^* (Bezugskreisfrequenz); Imaginärteil einer komplexen Zahl
—	Querstrich oben: Bei Vektoren und Tensoren: Bezieht sich auf körperfestes System
~	Tilde oben: schiefsymmetrische Matrix des betreffenden Vektors; komplexe Zahl

Literaturverzeichnis

- [1] *Biezeno, C. B.; Grammel, R.*: Technische Dynamik. Bd. 1 und Bd. 2. – Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verlag, 1953
- [2] *Bremer, H.*: Dynamik und Regelung mechanischer Systeme. – Stuttgart: B. G. Teubner Verlag, 1988
- [3] *Bremer, H.; Pfeiffer, F.*: Elastische Mehrkörpersysteme. – Stuttgart: B. G. Teubner Verlag, 1992
- [4] *Dresig, H.*: Schwingungen mechanischer Antriebssysteme. – 2. Aufl. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005
- [5] *Fischer, U.; Stephan, W.*: Mechanische Schwingungen. – 3. Aufl. – Leipzig: Fachbuchverlag, 1993
- [6] *Gasch, R.; Knothe, K.*: Strukturdynamik. Bd. 1: Diskrete Systeme (1987), Bd. 2: Kontinua und ihre Diskretisierung. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1989
- [7] *Gasch, R.; Nordmann, R.; Pfützner, H.*: Rotordynamik. – 2. Aufl. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2002
- [8] *Hafner, K. E.; Maass, H.*: Torsionsschwingungen in der Verbrennungskraftmaschine. – Wien; New York: Springer-Verlag, 1985
- [9] *Hagedorn, P.*: Technische Schwingungslehre, Bd. 2: Lineare Schwingungen kontinuierlicher mechanischer Systeme. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1989
- [10] *Hardtke, H.-J.; Heimann, B.; Sollmann, H.*: Lehr- und Übungsbuch Technische Mechanik II. – Leipzig: Fachbuchverlag, 1997
- [11] *Harris, C. M., Crede, C. E.*: Shock and Vibration Handbook. – 2. Aufl. – New York: McGraw-Hill Book Company, 1976
- [12] *Irrer, H.; Nordmann, R.; Springer, H.*: Schwingungen in rotierenden Maschinen. Tagungsbände 1 bis 6. – Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg-Verlag, 1991–2002
- [13] *Isermann, R.*: Identifikation dynamischer Systeme. Grundlegende Methoden. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1991
- [14] *Klein, U.*: Schwingungstechnische Beurteilung von Maschinen und Anlagen. – Düsseldorf: Verlag Stahleisen, 1998
- [15] *Klotter, K.*: Technische Schwingungslehre. Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden. Bd. 2. – 2. Aufl. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1960
- [16] *Kolerus, J.*: Zustandsüberwachung von Maschinen. – 3. Aufl. – Renningen-Malmsheim: expert-Verlag, 2000
- [17] *Kortüm, H.; Lugner, P.*: Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1994
- [18] *Korenev, B. G.; Rabinovič, I. M.*: Handbuch Baudynamik. – Berlin: VEB Verlag für Bauwesen, 1980
- [19] *Krämer, E.*: Maschinendynamik. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1984

- [20] *Laschet, A.*: Simulation von Antriebssystemen. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1988
- [21] *Linke, H.*: Stirnradverzahnung. – München; Wien: Carl Hanser Verlag, 1996
- [22] *Magnus, K.*: Kreisel. Theorie und Anwendungen. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1971
- [23] *Magnus, K., Popp, K.*: Schwingungen. – 6. Aufl. – Stuttgart: B. G. Teubner Verlag, 2002
- [24] *Major, A.*: Berechnung und Planung von Maschinen- und Turbinenfundamenten. – Berlin: VEB Verlag für Bauwesen; – Budapest: Verlag der Ungar. Akad. der Wiss., 1961
- [25] *Popp, K.; Schiehlen, W.*: Fahrzeugdynamik. – Stuttgart: B. G. Teubner Verlag, 1993
- [26] *Schiehlen, W. O.*: Technische Dynamik. – 2. Aufl. – Stuttgart: B. G. Teubner Verlag, 2004
- [27] *Schneider, H.*: Auswuchttechnik. – 5. Aufl., – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2000
- [28] *Szabo, I.*: Technische Mechanik. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2002
- [29] Autorenkollektiv (Vorsitz der Redaktion: Čelomej, V. N.): *Vibrazii v tehnike* (Schwingungen in der Technik). Handbuch in 6 Bänden (russ.). – Moskau: Verlag Mašinostroenije, 1978–1981.
- [30] *Zurmühl, R.; Falk, S.*: Matrizen 1, Grundlagen. – 7. Aufl. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1997
- [31] Firmenschrift: GERB-Schwingungsisolierungen. – 11. Aufl. – Berlin, 2002

Sachverzeichnis

A

Abklingkonstante 44, 295, 454, 456
–, modale 437
Ableitung 112
–, partielle 102, 118, 366
Abrundungsfehler 125, 383, 388
Abschätzung 47, 195, 213, 255, 260, 340, 341, 346, 388, 394, 428, 446
Abstimmung, gemischte 180
–, hohe 180, 183
–, tiefe 179, 180, 183, 184, 189, 206, 484
Abstimmungsverhältnis 45, 188, 206, 277
Abtriebsglied 148, 298, 270
Aktuator 177, 507
Amplitude 154, 422, 443
–, komplexe 439
Amplituden-Frequenzgang 198, 199, 203, 343, 422, 423, 442, 443, 447, 457, 469
Amplitudenverhältnis 229, 317, 323
Analyse, kinematische 99
–, kinetostatische 505
Anfachung 295
Anfahrvorgang 120, 248, 425
Anfangsbedingung 44, 62, 121, 125, 126, 210, 213, 253, 374–376, 382, 390
Anfangsenergie 376, 385
Anlauffunktion 275
Anlaufvorgang 120, 126, 275
Anlaufzeit 8, 273, 274
Anstoßen 374, 411
Antiresonanz 422, 424, 457
Antriebsbewegung 103, 119
Antriebsleistung 21, 107, 120
Antriebsmoment 91, 96, 111, 113, 114, 117, 118, 122, 128–130, 133, 134, 144, 199, 225, 273, 312, 481
Antriebsmotor 124, 138
Antriebssystem 120, 130, 133, 144, 223, 250, 283, 294, 504

Antriebswelle 59, 243, 292, 293, 304, 345
Arbeit, mechanische 142
–, virtuelle 102, 399, 450
Arbeitsmaschine 124, 186
Arbeitszyklus 120, 123, 129, 132
Asymptote 275, 310, 318, 326, 329, 350
Asynchronmotor 58, 59, 270
Aufprall 62, 251, 328, 411, 413, 488
Aufstellungsort 179, 181, 185, 218
Aufzug 226
Ausgleich, harmonischer 162, 163, 166
–, vollständiger 161, 204
Ausgleichsbedingung 162–165, 169, 171
Ausgleichsgetriebe 160, 161, 167, 170, 171
Ausgleichsmasse 152, 155, 163, 166, 167, 170
Ausgleichsrechnung 23, 38, 40
Auslaufversuch 60, 120
Auslaufvorgang 63, 64
Ausschwingversuch 47, 48, 51
Ausschwingvorgang 45, 452
Auswuchtebene 156
Auswuchten 151, 153–155, 310
Auswuchtmaschine 153, 155, 157

B

Balken 314, 323, 353, 359, 430
–, massebelegter 332
–, zylindrischer 338
Balkenelement 359
Bandabsetzer 130
Bandgeschwindigkeit, kritische 335
Baugrund 31, 143, 176, 180, 184, 194–196, 204, 209, 218
Baugruppe 29, 356
Belastung, dynamische 270
–, extreme 311
–, minimale 205

Belastungsfall 270, 425
 Berechnungsablauf 257
 Berechnungsmodell 5–7, 65, 238, 327, 330, 341, 344, 349, 379
 –, Vereinfachung 398
 Beschleunigung 72
 Bestehorn-Sinoide 266, 268, 269
 Betriebsdauer 29, 230, 289
 Betriebsdrehzahl 187, 189, 262, 270, 275, 283, 311, 473
 Betriebsfestigkeit 438
 Betriebszustand 49, 107, 129, 378, 486
 Bettungsziffer 196, 218, 219
 Beurteilungsmaßstab 153, 177
 Bewegungsablauf 122, 126
 Bewegungsform 370
 Bewegungsgleichung 103, 226, 267, 374, 433
 – der starren Maschine 114, 118, 128
 –, nichtlineare 293, 479
 Bewegungsgröße 71, 103
 Bewertungsfaktor 165
 Bezugssystem, mitrotierendes 308
 –, raumfestes 79
 biegekritische Drehzahl 319
 Biegelinie 332, 422
 Biegemoment 357, 414
 Biegeschwinger 321–323, 329, 339, 343, 441
 Biegeschwingung 333, 416, 431
 Biegesteifigkeit 333, 339, 415
 Bildwelle 29, 227, 228, 255
 Blockieren 250
 Blockfundament 189–191, 193, 194
 Bohrmaschine 74
 Bremse 125, 481, 498, 499
 Bremsenquietschen 489
 Bremsung 256, 276
 Bremsvorgang 425
 Bremszeit 278, 279
 Bruch 286, 287, 389, 375
 Brückenkran 366, 389

C

CAD-Programm 10, 80
 Campbell-Diagramm 258, 262, 263, 446, 447
 chaotische Bewegung 465
 charakteristische Gleichung 235, 370
 Christoffel-Symbol 102, 109
 Computerprogramm 10, 14, 119, 148, 341, 345
 Corioliskraft 103

D

Dämpfer 5, 50, 280, 281, 283
 –, federgefedelter 284, 286
 –, hydraulischer 447
 –, ICD- 286
 –, VISCO- 50
 Dämpferkonstante 50, 261, 287
 Dämpfung 41, 43, 48, 295, 435, 447
 –, Hysterese- 43, 473
 –, komplexe 43, 439
 –, modale 436, 442, 458
 –, nichtlineare 473, 475
 –, optimale 287
 –, viskose 42, 43, 200, 435
 Dämpfungsansatz 41, 42, 46, 49, 439, 452, 454
 Dämpfungsarbeit 42
 Dämpfungsdekrement, logarithmisches 48, 437
 Dämpfungselement 436
 Dämpfungsgrad 44, 48 f., 52, 196, 287, 437
 –, modaler 437, 447, 452, 454
 Dämpfungskennwert 41, 47 f., 474
 Dämpfungskonstante 51, 287, 454
 Dämpfungskraft 4 f., 435 f.
 Dämpfungsmatrix 4 f.
 Dämpfungsparameter 44, 47, 49
 Decklage 137
 Deformationsmethode 359
 Deviationsmoment 21, 81, 83, 154, 190
 Dieselmotor 194, 286, 288
 Differenzialgleichung 332, 355
 –, lineare 349
 –, nichtlineare 103, 480, 483, 500
 Differenziation, implizite 118
 Dimensionierung 169
 dimensionslose Kenngröße 44, 63, 281, 456, 499
 DIN 30, 153, 171 f.
 Dissipation 435
 Doppelkurbel 115
 Drahtseil 33
 Drallsatz 85, 375
 Drehbeschleunigung 79, 89, 94
 Drehgelenk 142
 Drehgeschwindigkeit 71–73, 79, 94, 483
 Drehmasse 81, 250
 Drehschwingung 202, 485
 Drehschwingungsdämpfer 435
 Drehspiel 230
 Drehtransformationsmatrix 69, 71 f., 82

Drehung, ebene 68
–, räumliche 70
Drehwerkantrieb 234
Drehzahl 319
–, kritische 259, 280, 307, 319, 321, 348
Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie 57
Druckmaschine 176, 223, 242
Druckwerk 242, 244
Duffing-Schwinger 465, 469, 470, 472, 482
Duhamel-Integral 419, 442, 461

E

Eigenbewegung 122, 191, 370, 466
Eigenform 227, 236, 317, 339, 371, 387 f.,
396 f., 406, 407, 413
–, antimetrische 387, 410
–, symmetrische 387, 411
Eigenfrequenz 236, 244, 238, 380, 387, 412,
437
Eigenfrequenzänderung 241
Eigenfrequenz-Spektrum 379
Eigenkraft 371, 383
Eigenkreisfrequenz 44, 192, 258, 374
Eigenschwingform 383, 388, 508
Eigenschwingung 317, 369, 372, 467
Eigenvektor 244, 371, 383
Eigenwert 338 f., 371
Eigenwertproblem 191, 369–371, 400
–, lineares 244
Einfachschwinger 44, 235, 376, 419
Einflussfunktion 335, 337
Einflusszahl 314, 321, 331, 352–354, 358
Eingriffsfrequenz 320
Einschaltdauer 120
Einspannmoment 386, 434
Einspannstelle 248
elektrische Welle 484
Elektromotor 120, 138
Elektrotechnik 460
Energie, des Anfangszustandes 376
–, elektrische 139
–, kinetische 79, 84, 101, 112, 124, 146, 354,
361
–, potenzielle 112, 361
Energieaustausch 376
Energiebedarf 138
Energiebilanz 136, 466, 486, 489
Energiequelle 5–7, 488
Energieverlust, mechanischer 435
Entkopplung 193, 436
Entwicklung, historische 8, 10, 506
Entwurfsphase 121
Erfahrungswert 29, 50, 53, 211, 379
Erregerfrequenz 8, 199, 380
Erregerfunktion 217
–, periodische 257
Erregerkraft, siehe Kraft 194, 418
–, dynamische 143
–, harmonische 182, 198, 419, 468, 473
–, komplexe 439
–, modale 336, 433, 435, 444, 508
–, periodische 140, 186, 444
Erregerkraftvektor 432
Erregerkreisfrequenz, siehe Erregerfrequenz
43, 119, 258
Erregermoment 258, 294
Erregerspektrum 56, 147
Erregervektor 434
Erregung, harmonische 45, 182, 281, 309,
419, 438 f.
–, instationäre 8, 425
–, kinematische 259, 302
–, nichtperiodische 57
–, periodische 8, 54, 188, 257, 419, 444
–, transiente 270
Ersatzmasse 134
Erwärmung 33, 37, 41, 120, 138, 435
Etappe 121, 232, 272
Euler'sche Kreiselgleichungen 85, 89, 94
Euler'sche Relation 159, 372, 439

F

Fahrzeug 245, 361
Fahrzeugantrieb 224, 263
Fahrzeugbau 104
Fahrzeugmotor 194
Fallbeschleunigung 88, 498
Fast-Fourier-Transformation 57
Feder, degressive 487
–, gestufte 464, 476, 486
–, Kopplung 26
–, modale 419
–, progressive 487
Federarbeit 112
Federkennlinie 39, 466, 486
–, degressive 463
–, geknickte 486
–, gestufte 477
–, nichtlineare 464, 486
–, progressive 463, 486
–, statische 39
Federkennwert 25, 30
Federkompensator 300

Federkonstante 26, 31, 36
 –, dynamische 37, 41
 –, mittlere 466–468, 486
 –, modale 373, 374, 384, 395, 429
 Federlänge, ungespannte 32, 112, 115
 Federmatrix 190, 191, 353, 361, 365, 370
 –, partitionierte 409
 –, reduzierte 399, 404
 Federmoment 117 f.
 Federparameter 32, 261
 Federung, nichtlineare 468, 488
 Federungshauptachse 27, 190
 Federzahl 352
 Fehlerbetrachtung 23
 FEM 304, 342, 349, 351, 381
 Festigkeit 156
 Flächenpressung 219
 Fliehkraft 202, 321
 Fliehkraftpendel 291
 Flüssigkeitsdämpfer 288
 Formänderungsarbeit 353, 354
 Formfaktor 36, 37
 Fourieranalyse 54
 Fourierkoeffizient 54, 56, 140, 143, 147, 187,
 220, 258, 260, 269, 444
 Fourier-Reihe 54, 55, 163, 170, 186, 221,
 258, 260, 468
 Fräsen 495
 Fräsmaschine 452
 Freiheitsgrad 8, 13, 349
 Frequenzbereich 239
 Frequenzdeterminante 192, 322
 Frequenzgang, komplexer 440, 441
 Frequenzgleichung 230, 239, 240, 323
 Frequenzgleichung 317
 Fundament 151, 164, 176, 185, 195
 Fundamentbelastung 139
 Fundamentblock 145, 186, 195, 201, 209,
 432
 Fundamentfläche 195
 Fundamentierung 175, 179
 Fundamentmasse 194, 195
 Fundamentalschwingung 219, 432

G

gebrochene Ordnung 258
 gedämpfte Schwingung 435
 gedämpftes System 437
 gefesselt 228 f.
 Gegenbewegung 161
 Gegengewicht 10

Gegenlauf 319, 326, 327
 –, synchroner 320
 Gegenmaßnahme 245
 Gegenphase 456
 Gegenschwingrahmen 476–479
 Gehäusebelastung 204
 Gelenkgetriebe, mehrgliedriges 112
 Gelenkkraft 139–142, 146, 150, 415
 –, dynamische 140
 Gelenkwelle 296
 Genauigkeit 10, 15, 349, 418
 Geradverzahnung 301
 Geräuschreduzierung 245
 Gesamtschwerpunkt 158
 Gesamtsystem 357, 363, 380
 Geschwindigkeit, kritische 335
 Geschwindigkeitsprung 428
 Geschwindigkeitsvektor 72
 Geschwindigkeitsverteilung 79
 Gestell 357, 382, 403, 412, 429
 Gestellkraft, resultierende 145
 Gestellschwingung 166
 Getriebe 124
 –, ungleichmäßig übersetzendes 292
 Getriebeglied 110 f.
 Getriebeschema 114, 117 f., 127, 296
 Getriebeispiel 230, 248
 Getriebestufe 225
 Getriebesynthese 505
 Gewinde 32
 Gleichgewichtslage 352, 369
 Gleichlauf 319, 326 f., 333, 345, 348
 –, synchroner 320, 330, 332
 Gleichtaktansatz 198, 291
 Gleichung, charakteristische 382
 –, komplexe 497
 –, transzendente 63, 165
 Gleitlager 34 f., 343, 489
 Gleitreibungszahl 489
 Gammel-Quotient 394
 Grenzübergang 335, 420
 Grenzzykel 492
 Großpresse 118
 Grundfrequenz 181, 239, 241, 280, 370
 Gummifeder 35–37, 39, 41, 49, 195 f., 286,
 436
 Gyrobuss 125

H

Haftkraft 490, 492
 Haftmoment 79
 Haftreibungszahl 489

Haftung 250
 Halbwertsbreite 49, 61
 Halslager, elastisches 323
 Hammer 218
 Hammerfundament 211 f., 217
 Harmonische 54, 162, 167, 185
 –, höhere 162, 201, 320
 – k -ter Ordnung 165, 187
 –, zweite 298
 Hauptachse 24, 83, 193
 Hauptdeterminante 370
 Hauptkoordinate 372 f., 376, 385, 418, 433, 454
 Hauptsteifigkeit 26 f., 498
 Hauptträgheitsachse, zentrale 484
 Hauptträgheitsmoment 24, 40, 83
 Hobelmaschine 350
 Hochlauf 8, 264, 311, 481, 482
 Horizontalkraft 414
 HS-Profil 162, 266, 268–270, 507
 Hubschwingung 202, 388
 Hubwerk 114, 366
 Hüllkurve 481
 Hülsenfeder 36, 447
 Hypothese 474, 505
 Hysterese-Dämpfung 43, 473
 Hysteresekurve 43, 46, 48 f., 473

I

ICD-Dämpfer 286
 Identifikation 6, 394, 397, 440
 Impuls 428
 impulsartige Belastung 337
 Impulssatz 211, 375
 Indikatordiagramm 258
 Inertialsystem 67
 Instabilität 295, 296, 333, 494
 Integralgleichung 337
 Integration 85
 – der Differenzialgleichungen 65
 –, numerische 119, 125, 294, 418, 479
 Integrationskonstante 253
 Integrodifferenzialgleichung 335
 Internet 505

J

Jacobimatrix 101, 106

K

Kardanwinkel 69, 73, 107
 Karussell 74

Kausalität 43
 Kegelverbindung 28
 Keilriemen 333
 Keilriementrieb 448
 Keilwelle 28
 Kenngröße 6, 7, 138, 211, 311, 326, 328, 339, 343, 469
 –, dimensionslose 44, 63, 281, 456, 499
 Kennlinie, nichtlineare 473, 479
 –, progressive 472
 –, statische 38
 Kennwert 14, 29
 Kinetostatik 65
 Kippmasse 81, 98
 Kippmoment 58, 124
 Kippschlupf 58
 Knickkraft 333
 Koeffizientendeterminante 317, 323
 Koinzidenz 357, 362
 Kolbenkompressor 217
 Kolbenmaschine 223
 Kolbenmotor 53, 241, 224, 257
 Kollergang 87, 88
 Kompensator 300
 Kompressor 163
 Kondensation, statische 398
 Konstrukteur 156, 163, 296, 298, 503
 Konstruktionspraxis 99, 397
 Konstruktionssystematik 505
 Konstruktionsunterlagen 5, 6, 14, 146
 Konstruktionszeichnung 10, 447
 Kontaktpunkt 42, 58, 76, 77, 89
 Kontaktsteifigkeit 29, 32
 Kontinuum 239, 240, 332, 342, 335, 336
 Kontinuumsmechanik 36
 Koordinate, externe 398, 417
 –, globale 357, 362
 –, interne 398, 417
 –, komplexe 439
 –, lokale 357, 362
 –, modale 373
 –, verallgemeinerte 98, 108, 112, 352
 Koordinatensystem 67
 –, körperfestes 73
 –, raumfestes 66
 Koordinatentransformation 66, 68
 Koordinatenvektor 235, 352, 357
 Koppelgetriebe 146, 296
 Koppelkraft 148
 Kopplung 341
 –, dynamische 484
 –, von Federn 26

Körperschall 35, 195
Körperschallschwingung 195
Korrelation 378
Kraft, generalisierte 113
–, kinetische 154
–, kinetostatische 104, 144, 505
–, modale 419, 424, 425, 442
–, periodische 56, 140, 147, 444
–, verallgemeinerte 352
Kraftangriffspunkt 148, 424, 425, 430, 456
Kräftebild 493, 499
Krafterregung 206
Kräftesatz 84, 86
Kraftfahrzeug 15, 16
Kraftfahrzeugmotor 24, 25
Kraftfluss 504
Kraftgröße 71, 86, 103, 314, 355
–, innere 139
–, kinetostatische 103
–, verallgemeinerte 98, 102
Kraftschluss 506
Kraftvektor 352, 438
–, komplexer 439
–, reduzierter 399
Kran 10, 15, 21, 120, 226, 248, 368
Kranbrücke 368
Kreisbahn 77
Kreisel 73, 107
Kreismoment 85, 86, 313, 315, 324, 325
Kreiselverdichter 380
Kreiselwirkung 87, 91, 281, 313, 317, 318, 321, 326, 330, 332, 333, 438
Kreisschiebung 485
Kreiszylinder 93, 98
Kreuzprodukt 66, 67
Kriechbewegung 437
Kriterium 8
Kronecker-Symbol 336
Kugellager 31, 34, 74, 75, 78, 344
Kumulationsfaktor 213, 215, 216
Kuppeln 118
Kupplung 21, 31, 249, 463, 480
–, elastische 479
–, nichtlineare 479
Kupplungsstoß 233, 249
Kurbelanordnung 172
Kurbelgetriebe 153
Kurbelpresse 132
Kurbelschere 167, 168
Kurbelschwinge 115, 159

Kurbelverhältnis 131, 132
Kurbelwelle 19, 37, 57, 134, 163, 167, 262 f., 285 f., 380
Kurbelwellendämpfer 285
Kurbelwinkel 163, 167
Kurvenfahrt 74
Kurvengetriebe 266, 29 f., 300
Kurvenprofil 507
Kurvenschrittgetriebe 266

L

Lagefunktion 111 f., 114, 117, 134, 168, 266 f., 296–299
– erster Ordnung 101, 117, 134
– nullter Ordnung 116, 134
Lagekoordinaten 376
Lagekopplung 495
Lager, elastisches 329, 347, 389
Lagerelastizität 323, 345, 389
Lagerkraft 35, 86, 92, 96 f., 150, 152, 155, 170, 207, 329, 415, 447
–, dynamische 154, 331
Lagerreaktion 92, 377
Lagersteifigkeit 34
Lagevektor 352, 460
Lagrange'sche Gleichung 418
– zweiter Art 113, 243, 291
Länge, reduzierte 26
Längsfeder 116
Längshubgetriebe 299
Längsschwinger 197, 282
Längsschwingung 454, 459
Längsspiel 231
Lärm 140, 484, 489, 505
Lastpendel 225, 270
Lastwechselzahl 35, 41
Laufgrad 99, 106
Laufkatze 366
Leerlaufdrehzahl 264
Leichtbau 10, 151, 223, 300, 506
Leistung 113, 120
–, kinetische 143, 146
Leistungsausgleich 171
Linearisierung 293
Löffelbagger 100
Lösung, analytische 122
–, partikuläre 45, 220
–, stationäre 260, 420, 424, 443, 473
Lösungsansatz 317, 471
Luftfeder 464

M

- MAC-Matrix 378
- Mahlstein 87, 88
- Manipulator 296
- Masche 116
- Maschengleichung 159
- Maschenstruktur 101
- Maschinenart 141, 223
- Maschinenaufstellung 176, 181
- Maschinengestell 144, 194, 382, 456
- Maßnahme 503 ff.
- Masse, modale 235, 373, 374, 384, 395, 419, 429, 442
 - , reduzierte 65
 - , verallgemeinerte 102, 112
- Massenänderung 239, 397
- Massenausgleich 143, 151, 157, 160, 162–165
- Massenkraft 86, 94, 142, 144 f., 335, 353
 - erster Ordnung 163
 - k -ter Ordnung 165
 - zweiter Ordnung 163
- Massenkraftausgleich 158
- Massenmatrix 101, 108, 190, 235, 354 f., 399, 405
- Massenmoment 85, 94, 142
- Masseparameter 14, 101, 111
- Matrix, antimetrische 438
 - des Trägheitstensors 81
 - , reduzierte 409, 417
- Matrizenelement 356, 365
- Matrizenschreibweise 40, 66, 235, 351
- Maximalbeschleunigung 140 f.
- Maximalkraft 140, 151, 487 f.
- Maximalmoment 233, 255, 277
- Maximalwert 136, 250, 272 f., 275, 415, 425 f., 446
- Mechanismus 8, 98 f., 146, 292, 507
 - , ebener 102, 110
 - mit zwei Antrieben 103
 - , räumlicher 66
 - , ungleichmäßig übersetzender 142
- Mechatronik 459
- Mehrkörperdynamik 66, 99, 351
- Mehrkörpersystem 98
- Mehrzylindermaschine 162–165, 239
- Messergebnis 187, 230, 276
- Messstellen-Anordnung 379
- Messwert 38, 40
- Methode der äquivalenten Linearisierung 466
- Methode der finiten Elemente 349
- Methode der harmonischen Balance 467
- Methode des kleinen Parameters 468
- Mikroschlupf 29
- minimale Belastung 205
- Minimalmodell 9, 11, 179, 239, 249, 259, 309, 324, 398, 490, 498
- Mittelung 471
- Mittelwert 224, 272
- Mittelungsmethode 465, 483
- Modalanalyse 377
 - , experimentelle 378
- modale Erregerkraft 336, 508
- modale Federkonstante 374
- modale Masse 235, 374
- modaler Schwinger 374
- Modalmatrix 244, 371, 373–375, 384, 387, 396, 413, 436 f.
- Modaltransformation 373, 458
- mode 371
- Modell, freies 229
 - , gefesselter 229
- Modell der starren Maschine 8, 65, 139, 223 f.
- Modellbildung 7, 9, 29, 248, 342
 - , experimentelle 6
- Modellgrenze 418
- Modellstufe 7 f., 10, 13
- Modellüberprüfung 238
- Modul 278
- Moment, äußeres 86
 - , eingepprägtes 86
 - , elastisches 254
 - , gyroskopisches 313
 - , kinetisches 85 f., 89, 90, 145
 - , kinetostatisches 224 f., 233, 294, 298, 300
 - , maximales 233
 - , technologisches 128
- Momentanpol 150
- Momentenamplitude 272
- Momentensatz 85 f.
- Momentensprung 270, 273
- Momentenverlauf 225, 298, 384, 386
- Motor 21, 125, 163, 248, 260, 458
- Motorgehäuse 381
- Motorkennlinie 58, 99, 139, 311
 - , dynamische 58
- Motormoment 58, 390, 451
- Motorrad 31
- Motorradmotor 205, 223, 260, 262
- Motorwelle 204
- Mühle 91

N

Nachgiebigkeit, dynamische 424 f., 429
 Nachgiebigkeitsmatrix 328, 353, 391, 405
 –, dynamische 443
 Nadellager 34
 Näherung 7, 62, 394, 399, 437, 473
 Näherungsansatz 436
 Näherungsformel 49, 181, 445
 Näherungslösung 468, 483
 Näherungsmethode 239, 465
 Nähmaschine 140 f.
 Nebenerregung 320
 Nebenwirkung 151
 Netzfrequenz 431
 nichtharmonische Belastung 51
 nichtharmonische Erregung 444
 nichtlinear gedämpfter Schwinger 475
 nichtlineare Bewegungsgleichung 293
 nichtlinearer Effekt 486
 nichtlinearer Schwinger 292, 464 f., 469
 nichtlineares Verhalten 8
 Nichtlinearität 41, 463 f.
 nichtperiodische Erregung 57
 Nickschwingung 202, 388
 Norm 153, 177
 Normalkraft 91
 Normierung 230, 371
 numerische Genauigkeit 387
 numerische Integration 119, 125, 294, 418, 477, 482
 Nutzleistung 130

O

Offsetdruckmaschine 242
 Ölzähigkeit 343
 Optimierung 126, 165, 461, 505
 Ordnungsgerade 259
 Orthogonalitätsrelation 391
 –, verallgemeinerte 373
 Orthogonalität 372
 Ortskurve 441, 442, 452, 453, 456, 457
 Ortsvektor 67, 159

P

Parameter 6, 9, 10, 13, 159, 341, 342
 Parameteränderung 15, 241, 340, 394–397
 Parametereinfluss 148, 334, 342
 Parametererregung 294, 300, 302
 Parameterresonanz 294–296, 305
 Parametervektor 165
 Parameterwert 6, 42, 50, 59, 168, 241, 245, 267, 298, 347, 477, 482

Partitionierung 417
 Patent 289, 485, 504
 Pendel 17, 25, 200, 292, 305, 467
 – im Fliehkraftfeld 281
 –, physikalisches 290, 482
 Periodendauer 54, 57, 213, 466
 Periodizitätsbedingung 54, 214, 466
 Phänomen, dynamisches 503
 Phasenebene 467
 Phasen-Frequenzgang 440, 442, 457
 Phasenkurve 467, 491
 Phasensprung 422, 430 f.
 Phasenverschiebung 183
 Phasenwinkel 187, 258, 420, 443
 Planetengetriebe 104–107
 Pleuel 15, 135
 Polardiagramm 147, 158 f.
 Presse 141, 208, 257, 296, 300
 Pressenantrieb 119, 126 f., 129
 Pressengetriebe 121, 132, 137
 Presskraft 128
 Pressverbindung 231
 Prinzip von d' Alembert 356, 418
 Pufferfeder 477, 486

Q

Querkraftschub 333
 Querschnitt 332
 Quersteifigkeit 32

R

Rahmen 94
 Randbedingung 25, 337
 Rastabweichung 267, 269
 Rattern 495
 Rayleigh-Dämpfung 436, 452
 Rayleigh-Quotient 336, 374, 393 f.
 Reaktionskraft 95, 104
 Reaktionsmoment 86, 95, 104
 Realsystem 6 f., 11, 238, 341
 Rechenaufwand 377, 398
 Rechenprogramm 307, 371, 377, 413
 Rechteckmatrix 101, 357, 399 f.
 Rechteckstoß 271, 425, 427
 Reduktion 226, 398, 403, 408
 Regel 29, 397, 503, 505, 507
 Regenerativeneffekt 495 f.
 Regler 438, 504
 Reibkraft 119, 489
 Reibleistung 120
 Reibmoment 60 f., 63, 120, 126, 128, 484

- Reibschwinger 489
 Reibung, Coulomb'sche 42 f.
 Reibungsdämpfung 46, 288
 Reifen 31, 51, 464
 Reihenentwicklung 124, 133, 426
 Relativbewegung 42
 Relativkoordinate 361
 Residuum 443, 447, 456
 Resonanz 258, 312, 319, 420, 506
 –, Durchfahren 186
 – höherer Ordnung 258, 262, 445 f.
 – k -ter Ordnung 216, 221
 – m -ter Ordnung 445, 446
 –, subharmonische 473
 Resonanzamplitude 41, 62, 245, 260, 283, 447, 474 f.
 Resonanzbereich 216, 239
 Resonanzdrehzahl 261
 Resonanzdurchlauf 185, 311 f.
 Resonanzfall 312, 420 f., 446
 Resonanzfrequenz 282
 Resonanzkurve 48, 61 f., 187 f., 216, 262, 446 f., 449, 475, 477, 479
 Resonanzordnung 277, 280
 Resonanzspitze 216, 269, 286, 447, 482
 Resonanzstelle 203, 221, 261, 269, 275 f., 278, 295, 311, 422, 441, 445, 459
 – höherer Ordnung 447
 Restschwingung 272, 274, 276, 428
 Richtlinie 281, 296, 300, 177
 Richtungscosinus 24, 82 f.
 Richtungswinkel 22, 81
 Riemengetriebe 32, 448, 450, 453
 Riemenscheibe 241, 454
 Roboter 96, 186
 Rollenlager 34
 Rollpendel 19
 Rotationsenergie 80, 254, 414
 Rotor 70, 74, 92–94, 107, 151, 152, 311, 315, 325, 329, 341, 473
 Ruckgleiten 489
 Rückstellfunktion, nichtlineare 467
 Rückstellkraft, elastische 355
 –, nichtlineare 463, 466, 468
 Rückwirkung 418
- S**
- Sägegatter 204
 Saite 333
 Salomon-Tilgerpendel 303
 Satz von Castigliano 358
 Satz von Steiner 17, 82, 90, 95
 Schaden 233
 Schadensfall 8, 10, 504
 Schaltzeit 273
 Schaufelradbagger 350, 380
 Scheibe 310, 313, 321
 –, rotierende 308
 Scheinresonanz 424, 435
 Schiene 248, 250
 Schiffbau 104
 Schiffsantrieb 223 f.
 Schiffsdieselmotor 141, 194
 Schleifmaschine 380
 Schleifringläufermotor 58
 Schleifspindel 344
 Schlupf 58
 Schmiedehammer 208–211
 Schneidemaschine 121
 Schnittkraft 377, 495
 Schnittprinzip 94, 226
 Schnittreaktion 224
 Schnittstelle 359
 Schrägverzahnung 30, 300
 Schranke, obere 394
 –, untere 340–342
 Schraubenfeder 25, 32, 185, 196, 200
 Schraubung 72
 Schrittgetriebe 266, 267
 Schrittmotor 270
 Schrittweite 125
 Schubkurbelgetriebe 131, 133 f., 162 f., 167, 171, 304 f., 478
 Schubmittelpunkt 332
 Schubmodul 35 f.
 Schubschwingung 485
 Schubverformung 333
 Schwermetall 151
 Schwerpunkt 14 f., 17, 80, 82, 141, 144, 150, 195, 197
 Schwerpunktabstand 17, 162, 290
 Schwerpunktachse 22, 38, 321
 Schwerpunktbahn 159, 160, 162, 310
 Schwerpunktkoordinate 99, 111
 Schwerpunktsatz 84, 96, 185, 203
 Schwinger, freier 228
 –, gefesselter 228
 –, modaler 374
 –, nichtlinear gedämpfter 475
 –, nichtlinearer 292, 464, 465, 469
 –, parametererregter 295
 –, selbsterregter 9
 Schwingerkette 223, 226 f., 234

- Schwingförderer 350, 380, 430, 470, 476, 479, 484
Schwingform 380, 422 f., 441, 452
–, erzwungene 422, 430 f., 441, 446
Schwingsieb 470
Schwingstärkemaß 178
Schwingung, amplitudenmodulierte 295
–, elektromechanische 58
–, erzwungene 257, 418
–, freie 374, 385, 436, 455
–, gekoppelte 393
–, parametererregte 292
–, reibungerregte 489
–, selbsterregte 343, 488, 495, 498
–, stationäre 217, 468
–, Stick-Slip- 489, 492
–, störende 143
–, subharmonische 473
Schwingungsbauch 239, 241, 396 f.
Schwingungserreger 312, 431, 484
Schwingungserregung 162, 484
–, Ursachen 280
Schwingungsisolator 201
Schwingungsisolierung 175, 177, 179 f., 195
Schwingungsknoten 230, 238 f., 396 f., 422, 424, 430 f., 441, 446, 507
Schwingungstechnik 470
Schwingungstilger 200, 430
Schwingungstilgung 197, 200, 424, 430
Schwungrad 124, 126, 129, 131 f., 135, 138, 153, 239, 241, 243
Seil 368, 464
Seilkraft 389
Selbstsynchronisation 482, 484 f.
Selbstzentrierung 308, 312
Sensitivität 241, 378, 394, 404
Sensitivitäts-Koeffizient 236, 245, 247, 395 f., 406
Sensitivitätsmatrix 396
Separationsansatz 333
Serienfertigung 155 f.
Shore-Härte 35 f.
Siebmaschine 484
Simulation 57, 264, 479
singular 370, 392, 394
Skelettlinie 469, 472
Software 5, 24, 29, 30, 66, 83, 99, 155, 166, 238, 244, 258, 261, 351, 377, 508
Sohlpressung 196
Sollbewegung, der Zylinder 242
Sollbruchstelle 507
Sonnenrad 105
Spaltenmatrix 66
Spaltzahl 288 f.
Spanneinrichtung 450
Spantiefe 495, 497
Spiel 231–233, 252, 379, 477, 488, 508
Spindel 324
Spitzenwert 41, 186, 426, 428
Sprung 30, 275
Stab 353
stabförmiges Glied 149
Stabilität 294, 460, 462
Stabilitätsbedingung 305, 494, 500, 501
Stabilitätsgrenze 496
Stabilitätskarte 294, 497, 498
Stabtragwerk 398
Stahlfeder 195
starre Maschine 8, 65, 99, 139, 195
starrer Körper 67 f., 150
Starrkörperbewegung 279, 369, 437
Starrkörperdrehung 236, 253
Starrkörper-Mechanismus 98 f., 100, 103
Starrkörpersystem 8, 13, 66, 103
Statiker 434
stationäre Lösung 45, 182, 186, 260, 420, 424, 443, 473
stationäre Schwingung 217, 468, 492
stationärer Zustand 126, 438
statische Federkennlinie 39
statische Kennlinie 38
statische Unbestimmtheit 505
–, Grad der 398
Steifigkeit, dynamische 196
–, modale 506
Steifigkeitsänderung 239, 302 f., 398
Steifigkeitsmatrix 197, 235, 353, 355, 360
–, unsymmetrische 489
Steifigkeitsverlauf 30
Steuerung 460
Stewart-Plattform 100
Stick-Slip-Schwingung 489, 492
Stirnradgetriebe 12, 301
Stoß 213, 382, 385, 426–428
–, periodischer 438
Stoßantwort 426–428
Stoßbelastung 208, 231, 375, 507
Stoßdämpfer 463
Stoßerregung 179, 425 f.
Stoßfolge 218
Stoßhypothese 211
Stoßkraft 428, 487
Stoßmittelpunkt 150, 415, 508
Stoßzahl 44, 60, 211, 217

Strebe 412, 416
Strecklage 132, 137
Streuung 15, 24, 379
Strömungsgeschwindigkeit 493
–, kritische 501
Struktur 6, 110, 139
Stützenbewegung 320
Stützfederkonstante 397
Subharmonische 465, 471, 472
Substruktur 245, 356, 357, 359, 360,
362–364, 367, 398
Superharmonische 464, 471
Superposition 43, 372, 376, 419, 428, 446
Superpositionsprinzip 378, 462, 465
Symmetrie 24, 83, 193
Synchronisation 484
Synthese 162, 503, 505
System 460
–, gedämpftes 437
–, kondensiertes 399
–, konservatives 394
–, reduziertes 412, 417
Systemdynamik 459 f.
Systemmatrix 395, 417, 460
Systemtheorie 6, 461, 461

T

Tagebaugroßgerät 59, 281
Taylor-Reihe 62, 293, 500
Teilsystem 340, 346, 357, 388
Tellerfeder 464
Tensor 66
Textilmaschine 186, 381
Textilspindel 323, 404, 406, 447
Tilde 67
Tilger 197, 200, 280–284
Tilgerkonstruktion 281, 283
Tilgermasse 200, 282, 430
Tilgerpendel 289, 290, 292, 305
Tilgungsfrequenz 282, 422, 424, 425, 429,
457
Timoschenko-Balken 334
Toleranzbereich 266, 267
Toleranzgrenze 270
Torsionsdämpferkonstante 482
Torsionsfederkonstante 31, 27, 237, 243,
255, 482
Torsionsmoment 225, 272, 273, 279
–, kinetostatisches 225
–, residuelles 275
Torsionsschwinger 13, 20, 229, 237, 240,
270, 389
Torsionsschwingerkette 234–237, 257
Torsionsschwingung 223, 294
Torsionsspannung 250, 257
Torsionsstab 225, 234
Trägheitshauptachse 14, 154, 217
–, zentrale 154
Trägheitsmoment 14, 17, 19, 21, 80, 81, 130,
298, 313, 316, 317
–, reduziertes 112, 115, 117, 118, 123, 127,
131, 133–135, 299, 393, 479
Trägheitstensor 10, 21, 23, 38, 79–81
Tragwerk 362, 363, 387, 408, 410, 504
Traktorreifen 51
Transfer-Manipulator 296
Translationsenergie 80
Triebwerk 260
Turbogenerator 155
Turmkran 10, 11, 31

U

Überdeckungsgrad 30
Übereinstimmung 379, 397
Überlagerungsgetriebe 104
Überlastung 233
Überschlagsrechnung 18, 34, 193, 195, 210,
228, 340
Übersetzung 104, 243
Übersetzungsverhältnis 105, 115, 366
Übertragungsmatrix 307
Umformarbeit 136
Umformen 118
Umformkraft 132, 136
Umformvorgang 132, 296
Umkehrbewegung 298
Umkehrlage 150
Umlauffrequenz 244
Ungleichförmigkeitsgrad 123 f., 131, 138
Ungleichung 394, 428
untere Schranke 340–342
Unwucht 152, 154, 169, 173 f., 202, 435, 484
Unwuchterreger 484 f.
Unwuchterregung 183, 319, 432
Ursache, physikalische 503

V

VDI-Richtlinie 50, 140, 177 f.
Vektor 66, 71
Ventilator 153
Verarbeitungsmaschine 146, 186, 223, 479,
480, 506

Verbindungselement 26, 378 f.
 Verbrennungsmotor 263
 Verdichter 166, 204, 213
 Verfahren der Halbwertsbreite 49
 Verfahren von Runge-Kutta 377
 Vergrößerungsfunktion 45, 183–185, 187,
 199, 282, 284 f., 287, 443, 445, 456, 469,
 474 f.
 Verlustwinkel 46, 48 f.
 Verpackungsmaschine 186
 Verschleiß 152, 230, 484, 489
 versteiftes System 416
 Versuchsstand 49
 Verzahnung 30, 226, 301, 303
 Vibrationsenergie 254 f.
 Vibrationskraft 103, 503
 Vibrationsmaschine 312, 484
 Vibrationsmoment 224, 298
 Vibrationsschutz 176
 Vibrationsverdichter 312, 470, 484
 Vibratorkörper 484 f.
 Vierzylindergetriebe 116 f., 158 f., 161, 173
 Viertaktmotor 258, 276
 Vierzylindermaschine 167, 171 f.
 Vierzylindermotor 241, 248
 virtuelle Arbeit 102, 450
 VISCO-Dämpfer 50, 209
 viskose Dämpfung 200
 Viskositätsdrehschwingungsdämpfer 53,
 287–289
 Vorschrift 153, 307, 504
 Vorspannkraft 454, 459, 466
 Vorspannung 379, 464, 488, 506
 Vorspannweg 206

W

Wägung 15
 Walze 88, 90, 304
 Wälzlager 34, 343, 464
 Wälzpunkt 105
 Wäscheschleuder 74, 319
 Webmaschine 140 f.
 Wechselwirkung 42, 459
 Wegerregung 183, 228
 Welle, elektrische 484
 Werkstoffdämpfung 43, 310, 320, 436
 Werkstück 452, 496
 Werkzeug 452, 496

Werkzeugmaschine 194, 223, 495
 Winkelbeschleunigung 107, 125
 Winkelgeschwindigkeit 72, 105, 122, 153,
 279
 Wipppendelkran 380
 Wirkmaschine 141
 Wirkstelle 503 f.
 Wirkungsgrad 44, 120, 130

Z

Zähigkeit, dynamische 35
 Zahlenwertgleichung 21, 36, 53
 Zahnbreite 29, 31
 Zahneingriffsfrequenz 213, 244, 275, 277 f.,
 300 f., 507
 Zahnzahl 29, 276
 Zahnkraft 300, 302 f.
 Zahnrad 9, 29, 105, 114, 256, 484
 Zahnradgetriebe 10, 12 f., 21, 29, 115, 226 f.,
 250, 300
 Zahnradpaarung 30, 276, 300
 Zahnradstufe 250, 276, 277
 Zahnsteifigkeit 12, 30 f., 300, 303
 Zeichnung 10, 14
 Zentrifugalmoment, siehe Deviations-
 moment 81
 Zentrifuge 310, 319, 323
 Zerspanungsparameter 496 f.
 Zielfunktion 165
 Zugtrum 451
 Zusatzfeder 15
 Zusatzmasse 15, 20 f.
 Zusatzunwucht 173 f.
 Zustandsgröße 460 f.
 Zustandsraum 461
 Zustandsvektor 460 f.
 zwangsläufig 8, 65, 99
 Zwangsbedingung 89, 101, 114 f., 127, 159,
 243, 250, 361, 392, 400, 499
 Zweimassenschwungrad 245, 247, 263 f.
 Zweimassensystem 199, 210, 228
 Zweischlag 140 f.
 Zwischenschicht, elastische 185
 Zyklogramm 121
 Zyklus 214, 221
 Zyklusdauer 128, 140, 213, 218, 483
 zylindrischer Balken 338