

Ottmar Beucher

Signale und Systeme: Theorie, Simulation, Anwendung

Eine beispielorientierte Einführung
mit MATLAB

2. Auflage



Springer Vieweg

Signale und Systeme: Theorie, Simulation, Anwendung

Ottmar Beucher

Signale und Systeme: Theorie, Simulation, Anwendung

Eine beispielorientierte Einführung mit
MATLAB

2., ergänzte Auflage

Mit 115 Beispielen, 159 Übungsaufgaben und 220
MATLAB-Programmen



Springer Vieweg

Ottmar Beucher
Hochschule Karlsruhe
Karlsruhe, Deutschland

Die im Lösungsbuch verwendeten Programme der MATLAB/Simulink-Begleitsoftware können über die Buchseite auf der Homepage des Springer-Verlags heruntergeladen werden.
<http://www.springer.com/de/book/9783662459645>

ISBN 978-3-662-45964-5
DOI 10.1007/978-3-662-45965-2

ISBN 978-3-662-45965-2 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011, 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

Das vorliegende Werk ist aus einer grundlegenden Überarbeitung und Erweiterung der Skripte der Vorlesung *Signale und Systeme* entstanden, die der Autor seit dem Jahre 1996 an der Fakultät Maschinenbau und Mechatronik der *Hochschule Karlsruhe - Technik und Wirtschaft* für Studierende im Studiengang „Fahrzeugtechnologie“ hält.

Studierenden der Ingenieurwissenschaften, vorwiegend des Maschinenbaus, der Mechatronik und der Elektrotechnik, sollen damit theoretische und praktische Grundlagen im Bereich der Systemtheorie und der Signalanalyse nahe gebracht werden. Diese Grundlagen sind wesentlich für das Verständnis der Regelungstechnik, der Signalverarbeitung, der Messtechnik und ähnlicher informationsverarbeitender ingenieurwissenschaftlicher Disziplinen.

Dieser Ansatz bedingt trotz aller Beispiel- und Anwendungsorientiertheit auch eine mathematisch formulierte Darstellung der Inhalte, die sich verständlicherweise bei Ingenieurstudenten und Ingenieuren in der Praxis nicht allzu großer Beliebtheit erfreut.

Statt nun jedoch deshalb die mathematisch basierte Darstellung zu Gunsten einer (nach Ansicht des Autors fragwürdigen) kochrezeptartigen Darstellung aufzugeben, wird der Versuch unternommen, die Darstellung der oft mathematisch anspruchsvollen Sachverhalte durch geeignete Beispiele, umfangreiche sprachliche Erläuterungen und den Einsatz von Simulationen unter MATLAB/Simulink verständlicher zu gestalten. Auf Herleitungen dieser Sachverhalte wird dabei nicht gänzlich verzichtet. Jedoch wird hierauf nur dann eingegangen, wenn es dem Autor zur Klärung systemtheoretischer Aspekte sinnvoll erscheint.

Da auf diese Weise mathematisch in vertretbarem Maße (hoffentlich) „entschärft“, setzt der vermittelte Stoff letztendlich fast nur Kenntnisse in Ingenieurmathematik voraus, wie sie üblicherweise im Grundstudium an Fachhochschulen und Universitäten vermittelt werden. Damit sollten auch die mathematischen Herleitungen und Darstellungen ohne weiteres zu bewältigen sein. Ferner werden Grundkenntnisse der heute in der industriellen Praxis weit verbreiteten numerischen Simulationswerkzeuge MATLAB[®] und Simulink[®] vorausgesetzt [1].

Fast jeder Abschnitt des Buches schließt mit Übungsaufgaben ab, deren Lösungen in einem gesonderten *Lösungsband* zur Verfügung stehen. Des Weiteren können die im Buch und im Lösungsband verwendeten Programme der MATLAB/Simulink-Begleitsoftware über die Buchseite auf der Homepage des Springer-Verlags

<http://extras.springer.com/2011/978-3-642-20293-3>

heruntergeladen werden.

Das Buch ist in fünf Kapiteln organisiert.

Im ersten Kapitel werden einige praxisnahe Anwendungsbeispiele zitiert, um daran anschließend grundlegende Fragestellungen um die zentralen Begriffe des *Signals* und des *Systems* herum klar zu machen.

Das zweite Kapitel befasst sich mit der Beschreibung *analoger* Signale und Systeme. Besprochen werden dabei u.a. die wichtigen Signaltransformationen (*Laplace- und Fourier-Transformation*) sowie der Begriff des *Linearen Zeitinvarianten Systems (LTI-Systems)* und seine Beschreibungs- und Darstellungsformen.

Eine zentrale Rolle spielt das Kapitel 3, welches sich mit dem Übergang von der analogen in die digitale Welt befasst. Kernpunkt ist der Begriff der *Abtastung* und als zentrale Aussage hierzu das so genannte *Abtasttheorem*, dessen Kenntnis heute für nahezu jeden Ingenieur ein Muss ist.

Die im Zeitalter der Microcomputertechnik und der digitalen Signalverarbeitung sicherlich wichtigsten Teile des Buches sind die Kapitel 4 und 5.

Der Leser wird dabei rasch feststellen, dass Kapitel 4 in seinem Aufbau nahezu identisch mit dem von Kapitel 2 ist. So korrespondieren analoge Transformationen und Systeme mit ihren diskreten Pendanten, wie etwa die Laplace- mit der *Z-Transformation* oder die zeitkontinuierliche Fourier-Transformation mit ihren diskreten Versionen DTFT und DFT/FFT. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Diskussion der *Diskreten Fourier-Transformation (DFT)* gelegt, die durch ihren schnellen Berechnungsalgorithmus (*Fast Fourier Transform (FFT)*) zu dem zentralen Werkzeug der modernen Signalanalyse geworden ist.

Kapitel 5 befasst sich mit der Behandlung der in der Praxis vorwiegend vorkommenden *stochastischen*, d.h. *zufälligen Signale*. Neben grundsätzlichen Überlegungen zur mathematischen Beschreibung und der Charakterisierung solcher Signale wird der Frage nachgegangen, inwieweit der in Kapitel 2 bis 4 entwickelte Methodenapparat überhaupt auf solche Signale und die sie verarbeitenden Systeme angewandt werden kann. Der Focus liegt dabei auf der Anwendung der (FFT-basierten) *Spektralanalyse*, deren Bedeutung über das klassische Anwendungsfeld der Nachrichtentechnik hinaus ständig wächst. Insbesondere in der Schwingungsanalyse mechanischer Systeme und in der Akustik finden sich hierfür zahllose Beispiele.

Das Kapitel schließt daher mit der Diskussion einiger sehr einfacher, jedoch praxisrelevanter Beispiele ab, die der Leser unter Umständen selbst mit geringem Aufwand zu Hause oder im Labor nachvollziehen kann. Alternativ kann aber auch auf die im Software-Begleitmaterial mitgelieferten Original-Messdaten der Beispiele zurückgegriffen werden.

Um das Buch bis zu einem gewissen Grad in sich abgeschlossen zu halten, sind im Anhang neben benötigten Tabellen auch einige mathematische Grundlagen zusammengefasst. Natürlich ist es nicht wirklich möglich, diese Grundlagen umfassend darzustellen. Jedoch soll die Darstellung auf die im Text größtenteils ausgeblendeten mathematischen Probleme aufmerksam

machen. Dies betrifft insbesondere den Bereich der Distributionen. Viele im Text durchgeführte mathematische Manipulationen lassen sich nur im distributionellen Sinne verstehen. Im Anhang wird zumindest angedeutet, in welchem Sinne diese Berechnungen zu verstehen sind, auch wenn es nicht möglich ist, auf diese z.T. tiefliegenden Resultate genau einzugehen. Im Text sind diese kritischen Stellen durch ein entsprechendes Symbol am Rand gekennzeichnet, um dem Leser anzudeuten, dass die Betrachtungen an dieser Stelle kritisch oder mathematisch nicht ganz korrekt sind.

Alle Kapitel sind, wie bereits erwähnt, mit einer *Vielzahl von Übungsaufgaben* versehen. Ihre (zumindest teilweise) Bearbeitung ist *für das Verständnis der besprochenen Begriffe und Methoden essentiell*. Viele Aufgaben, insbesondere die zur stochastischen Signaltheorie und ihrer Anwendungen, sind unter Einsatz von MATLAB zu lösen. Die Bearbeitung der Aufgaben mit MATLAB ist sehr zu empfehlen, da nur ein korrektes Verständnis der Zusammenhänge eine Umsetzung in korrekte lauffähige Programme erlaubt. Insofern ist MATLAB auch ein gutes Werkzeug der Selbstkontrolle beim Erlernen des Stoffes.

Um dem Leser eine Kontrolle seiner bearbeiteten Aufgaben zu ermöglichen, sind die Lösungen zu den Übungsaufgaben in einem gesonderten Lösungsband niedergelegt.

Danksagungen: Mein Dank gilt all denjenigen Personen, die zum Gelingen dieses Buches beigetragen haben.

Hier ist insbesondere mein Kollege Helmut Scherf zu nennen, der ein nie versiegender Quell von Ideen und Anregungen ist.

Für Tipps und Unterstützung bedanke ich mich weiterhin auch bei meinen Kollegen Manfred Strohrmann, Norbert Skricka und Peter Neugebauer.

Mein ganz besonderer Dank gilt Frau Dipl.-Ing. Latifa Abdelmalek für das sorgfältige inhaltliche Korrekturlesen und meiner Frau Petra für die sprachliche Prüfung des Textes.

Zuletzt möchte ich Frau Eva Hestermann-Beyerle und Frau Birgit Kollmar vom Springer-Verlag danken, die dieses Buch verlagsseitig betreut und dessen Veröffentlichung unterstützt haben.

Vorwort zur 2. Auflage

Das Buch hat gegenüber der ersten Auflage keine strukturellen Änderungen erfahren. Die meisten Änderungen betreffen die abgedruckten MATLAB und Simulink-Programme. Hier hat es beispielsweise größere Änderungen bezüglich der *Symbolic Math Toolbox* gegeben, die zwar keinen Einfluss auf die Berechnungen, jedoch an vielen Stellen auf die Darstellung der Ergebnisse hatten.

Darüber hinaus wurde natürlich die Gelegenheit wahrgenommen, noch vorhandene Fehler aus dem Text zu eliminieren.

Landau in der Pfalz
im Dezember 2014

O. Beucher

Hinweise zum Gebrauch des Buches

Im Folgenden sind einige Hinweise zusammengestellt, die bestimmte Besonderheiten des Buches erläutern sollen.

Mathematische Vorkenntnisse:

In diesem Buch werden solide Grundkenntnisse der höheren Mathematik vorausgesetzt, wie sie üblicherweise in den ersten drei Semestern ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge erworben werden.

MATLAB-Vorkenntnisse:

Der Leser sollte über Kenntnisse der grundlegenden MATLAB-Befehle verfügen und in der Lage sein, die Funktionsweise von MATLAB-Programmen zu verstehen. Idealerweise sollte er kleinere Programme selbst schreiben können, um die Übungsaufgaben selbstständig bearbeiten zu können. Die geforderten MATLAB-Kenntnisse entsprechen üblichen Einführungen in MATLAB, wie sie etwa in [1] zu finden sind.

Im vorliegenden Buch wird *keine* Einführung in MATLAB gegeben.

Begleitsoftware

Alle in dem vorliegenden Buch und in dem zugehörigen Lösungsband für die Übungsaufgaben verwendeten und teilweise abgedruckten Programme sind über die elektronische Seite des Buches auf der Homepage des Springer-Verlags

<http://www.springer.com/de/book/9783662459645>

verfügbar. Die Namen dieser Programme sind im Text durch **Fettdruck** hervorgehoben und der abgedruckte MATLAB-Code ist, mit einem grauen Hintergrund unterlegt, vom Fließtext abgesetzt. Die Original-Programme sind natürlich weit ausführlicher kommentiert als in den abgedruckten Auszügen.

Um dem Leser das Auffinden der Programme im Text zu erleichtern, ist am Ende des Buches ein Begleitsoftwareindex abgedruckt.

Wichtiger Hinweis zu den Simulink-Systemen:

Die Simulink-Systeme der Begleitsoftware werden im Allgemeinen durch einen im Blockschaltbild integrierten *Initialisierungsbutton* initialisiert. Durch Drücken des Buttons wird ein zugehöriges MATLAB-Skript aufgerufen, welches die vom Simulink-System benötigten Variablen im MATLAB-Workspace definiert. Anschließend kann die Simulation gestartet werden. Es empfiehlt sich, Änderungen der Initialisierungsvariablen nur im Workspace vorzunehmen, *nicht* jedoch im Initialisierungsskript, um bei einer späteren erneuten Simulation die gleichen Voraussetzungen vorzufinden.

Lösungsband

Das vorliegende Lehrbuch enthält mehr als 150 Übungsaufgaben. Die Bearbeitung dieser Übungsaufgaben ist *für das Verständnis der besprochenen Begriffe und Methoden essentiell* und wird daher dringend empfohlen.

Um dem Leser eine Kontrolle seiner Ergebnisse zu ermöglichen, sind die Übungsaufgaben vollständig gelöst in einem eigenen Lösungsband dokumentiert. Dieser kann ergänzend zum Lehrbuch im Buchhandel erworben werden.

Mathematische Formeln und Gleichungen

Mathematische Formeln und Gleichungen sind entsprechend ihrer Seitennummeriert. So bedeutet die Referenz auf Gleichung (80.2), dass die entsprechende Gleichung auf der Seite 80 zu finden ist und dort die zweite (nummerierte) Gleichung ist.

Marginalien

Besonders kritische Textstellen und schwierige Übungsaufgaben sind am Rand wie nebenstehend mit einem besonderen Symbol gekennzeichnet.



Bei Textstellen wird durch dieses Symbol darauf hingewiesen, dass eine präzise Diskussion des Sachverhaltes weiter und tiefer gehende (mathematische) Analysen notwendig machen würde, die den Rahmen des Buches aber übersteigen würden.

Bei Übungsaufgaben weist das Symbol auf besondere Herausforderungen bei der Lösung hin.

Da die Übungsaufgaben, wie schon im Vorwort betont, für die Vertiefung des Verständnisses einen wichtigen Stellenwert haben, wird im Text wie nebenstehend auf die zum Thema gehörige und empfohlene Übungsaufgabe hingewiesen. Dies soll dem Leser die Zuordnung der Übungsaufgaben zum Stoff des jeweiligen Abschnittes erleichtern.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
Vorwort zur 2. Auflage	IX
Hinweise zum Gebrauch des Buches	XI
1 Einführungsbeispiele und grundlegende Begriffe	1
1.1 Fallbeispiele aus der Praxis	1
1.2 Der Signalbegriff	16
1.3 Der Systembegriff	23
1.3.1 Lineare Systeme	25
1.3.2 Nichtlineare Systeme	27
1.4 Übungsaufgaben	31
2 Analoge Signale und Systeme	33
2.1 Einführungsbeispiele	33
2.2 Grundlegende Systemeigenschaften	37
2.2.1 Übungsaufgaben	43
2.3 Signale und LTI-Systeme im Zeitbereich	45
2.3.1 Darstellung mit Differentialgleichungen	45
2.3.2 Zustandsraumdarstellung	49
2.3.3 Darstellung mit Signalflussdiagrammen	60
2.3.4 Darstellung mittels Impuls- und Sprungantwort	62
2.3.5 Übungsaufgaben	89
2.4 Signale und LTI-Systeme im Bildbereich	97
2.4.1 Laplace-Transformation und Bildbereich	99
2.4.2 Beschreibung von LTI-Systemen im Bildbereich	108
2.4.3 Transformation von Differentialgleichungen	124
2.4.4 BIBO-Stabilität	128
2.4.5 Zustandsraumdarstellung im Bildbereich	130
2.4.6 Signalflussdiagramme und Simulink-Simulationen ...	137
2.4.7 Übungsaufgaben	137
2.5 Signale und LTI-Systeme im Frequenzbereich	142
2.5.1 Die zeitkontinuierliche Fourier-Transformation	145
2.5.2 Zeitfensterung und Bandbegrenzung	165
2.5.3 LTI-Systeme im Frequenzbereich	171
2.5.4 Fourier-Reihenentwicklung periodischer Signale	175

2.5.5	Der Zusammenhang zwischen zeitkontinuierlicher Fourier-Transformation und Fourier-Reihenentwicklung	179
2.5.6	Übungsaufgaben	182
2.6	Übertragungseigenschaften analoger LTI-Systeme und Filterentwurf	189
2.6.1	Filterklassen	190
2.6.2	Filterkennwerte	193
2.6.3	Entwurf realisierbarer Tiefpässe	196
2.6.4	Entwurf von Butterworth-Tiefpassfiltern	199
2.6.5	Filterentwurf mit MATLAB	207
2.6.6	Übungsaufgaben	211
3	Abtastung und Digitalisierung	215
3.1	Der Abtastvorgang	215
3.1.1	Anordnung zur Digitalen Signalverarbeitung	216
3.1.2	Systemtheoretische Beschreibung des Abtastvorgangs ..	217
3.1.3	Das Spektrum eines abgetasteten Signals	218
3.1.4	Rekonstruktion im Zeitbereich	224
3.2	Das Abtasttheorem	228
3.2.1	Übungsaufgaben	234
4	Digitale Signale und Systeme	239
4.1	Einführungsbeispiele	239
4.1.1	Übungsaufgaben	246
4.2	Grundlegende Systemeigenschaften	247
4.2.1	Übungsaufgaben	252
4.3	Signale und LTI-Systeme im Zeitbereich	253
4.3.1	Darstellung mit Differenzgleichungen	253
4.3.2	Zustandsraumdarstellung	254
4.3.3	Darstellung mit Signalflussdiagrammen	257
4.3.4	Darstellung mittels Impuls- und Sprungantwort	258
4.3.5	Übungsaufgaben	269
4.4	Signale und LTI-Systeme im Bildbereich	270
4.4.1	Z-Transformation und Bildbereich	272
4.4.2	Beschreibung von digitalen LTI-Systemen im Bildbereich	280
4.4.3	Transformation von Differenzgleichungen	292
4.4.4	BIBO-Stabilität	294
4.4.5	Zustandsraumdarstellung im Bildbereich	299

4.4.6	Signalflussdiagramme und Simulink-Simulationen ...	304
4.4.7	Übungsaufgaben	304
4.5	Digitale Signale und LTI-Systeme im Frequenzbereich	310
4.5.1	Die zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT)	313
4.5.2	Der Zusammenhang zwischen DTFT und FT	319
4.5.3	Die diskrete Fourier-Transformation (DFT)	321
4.5.4	Die schnelle Fourier-Transformation (FFT).....	339
4.5.5	Fourier-Spektren und DFT-Spektren	343
4.5.6	Spezielle DFT/FFT-Techniken	360
4.5.7	Digitale LTI-Systeme im Frequenzbereich	365
4.5.8	Übungsaufgaben	370
4.6	Übertragungseigenschaften digitaler LTI-Systeme und Filterentwurf	375
4.6.1	Filterklassen und Filterkennwerte	375
4.6.2	Entwurf von digitalen Tiefpässen	376
4.6.3	Filterentwurf mit MATLAB	390
4.6.4	Übungsaufgaben	395
5	LTI-Systeme und Stochastische Signale	399
5.1	Stochastische Signale	400
5.1.1	Der Begriff des stochastischen Prozesses	400
5.1.2	Stationäre stochastische Prozesse	404
5.1.3	Ergodische stochastische Prozesse	409
5.1.4	Berechnung von Prozesskennwerten mit MATLAB....	412
5.1.5	Übungsaufgaben	423
5.2	Das Leistungsdichtespektrum	427
5.2.1	Korrelation und Leistungsdichte	427
5.2.2	Beispiele für Leistungsdichtespektren	432
5.2.3	Überlagerung stochastischer und deterministischer Signale	446
5.2.4	Übungsaufgaben	451
5.3	LTI-Systeme bei stochastischer Erregung	453
5.3.1	Das Wiener-Lee-Theorem	453
5.3.2	Systemidentifikation	456
5.3.3	Formfilter	459
5.3.4	Übungsaufgaben	465
5.4	Berechnung des Leistungsdichtespektrums	465
5.4.1	Das Wiener-Khintchine-Theorem	466
5.4.2	DFT/FFT-gestützte Schätzung des Leistungsdichtespektrums	467

5.4.3	Schätzung des Leistungsdichtespektrums mit MATLAB	471
5.4.4	Übungsaufgaben	475
5.5	Experimente, Beispiele, exemplarische praktische Anwendungen	477
5.5.1	Spektralanalyse eines Wasserstrahl-Geräuschs	477
5.5.2	Bestimmung eines Signal-Rausch-Abstandes	481
5.5.3	Quantisierungsrauschen eines ADU	489
5.5.4	Experimentelle Bestimmung der effektiven Auflösung eines ADU	492
5.5.5	Laufzeitmessung mittels Korrelation	497
5.5.6	Berührungsfreie Messung der Rotationsgeschwindigkeit einer rotierenden Scheibe mittels Korrelation optischer Sensorsignale ...	500
5.5.7	Entfernungsmessung mittels Korrelation akustischer Laufzeitsignale	507
5.5.8	Untersuchung eines Ventilators mittels Spektralanalyse des Rotorgeräusches	512
5.5.9	Systemidentifikation eines realen RC-Tiefpasses	517
5.5.10	Akustische Füllstandsmessung mit dem Helmholtz-Resonator auf Basis einer Spektralanalyse .	523
5.5.11	Fahrbahnunebenheits-Simulation mittels Formfilterung	530
5.5.12	Übungsaufgaben	536
A	Mathematische Grundlagen	541
A.1	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	541
A.2	Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	541
A.3	Jordan'sche Normalform	543
A.4	Berechnung der Transitionsmatrix	544
A.5	Distributionen	545
A.6	Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	551
A.7	Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	551
A.8	Energiedichtespektrum	557
B	Symbole und Formelzeichen	559
C	Tabellen	561
C.1	Tabelle der Laplace- und Z-Transformationen	561
C.2	Filterentwurfs(kurz)tabellen analoger und digitaler Filter	563

Literaturverzeichnis	565
Begleitsoftware des Lehrbuchs	569
Verzeichnis der MATLAB-Funktionen	571
Stichwortverzeichnis	573

1 Einführungsbeispiele und grundlegende Begriffe

In diesem Kapitel soll zunächst ein Gefühl dafür vermittelt werden, welche Themen und Fragestellungen in der Signal- und Systemanalyse angesprochen und diskutiert werden und welche Begriffe und Methoden man dazu benötigt.

Das Ziel des Buches ist die Vermittlung dieses (mathematischen) Begriffs- und Methodenapparats der so genannten System- und Signaltheorie. Mit Hilfe dieses Methodenapparats ist es möglich, (lineare) Systeme zur Verarbeitung von Signalen zu modellieren, zu beschreiben und zu analysieren. Ferner kann damit das Verhalten *technischer* Systeme prognostiziert und durch entsprechende Auslegung gezielt beeinflusst werden.

Im Folgenden sollen zunächst exemplarisch einige Fallbeispiele von Systemen aus der Praxis diskutiert werden. Anhand dieser Beispiele soll gezeigt werden, wie durch entsprechende *Modellbildung* mit den Mitteln der *Vereinfachung* und *Abstraktion* eine übergeordnete mathematische Beschreibung dieser Systeme erreicht werden kann. Durch diese übergeordnete allgemeine Darstellung wird es möglich, die Methoden in den verschiedensten informationsverarbeitenden Ingenieurdisziplinen, etwa der Regelungstechnik, der Messtechnik, der Nachrichtentechnik oder auch der Bildverarbeitung und der Akustik anzuwenden.

Die Diskussion dieser übergeordneten, allgemeinen mathematischen Methoden ist Hauptgegenstand des vorliegenden Buches.

1.1 Fallbeispiele aus der Praxis

Das erste Beispiel stammt aus der Fahrzeugtechnik. Hierbei geht es darum, einen speziellen Aspekt des *dynamischen* Verhaltens eines Fahrzeugs bei der Überfahrt über eine Straße zu analysieren.

1.1 Beispiel (Vertikaldynamik eines Fahrzeugs)

Die Abbildung 1.1 zeigt schematisch zwei mögliche dynamische Verhaltensweisen eines Fahrzeugs¹ bei der Überfahrt über eine Straße.

Durch die Unebenheiten der Fahrbahn kommt es u.a. zu *vertikalen Anregungen* des Fahrzeugaufbaus, welche Schwingungen der Karosserie in vertikaler Richtung (*Hubschwingungen*) und Schwingungen um die Fahrzeugquerachse, so genannte *Nickschwingungen*, bewirken.

Solche Bewegungen des Fahrzeugaufbaus können zum einen fahrsicherheitsrelevante Dimensionen annehmen, zum anderen aber auch auf den Fahrkomfort erheblichen Einfluss haben.

¹ Quelle Fahrzeugfoto: Peugeot Deutschland GmbH

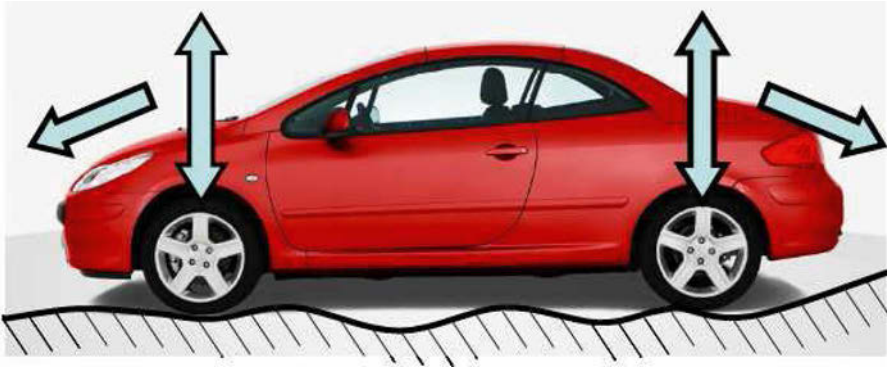


Abb. 1.1: Vertikaldynamik eines Fahrzeugs aufgrund der Fahrbahnanregung

Diese Aspekte können natürlich in Fahrversuchen untersucht werden. Allerdings ist es bei der Vielzahl von möglichen Fahrbahnanregungen und der Unzahl möglicher konstruktiver Auslegungen des Fahrzeuges unmöglich, solche Untersuchungen nur auf Erfahrungswerten basierend und im „Versuch und Irrtum“-Verfahren durchzuführen. Vielmehr benötigt man eine *geeignete Beschreibung von Fahrbahn und Fahrzeug*, die es ermöglicht, die dynamischen Vorgänge (mathematisch und/oder simulativ) zu *analysieren* und die konstruktive Auslegung zu *optimieren*.

Aufgrund der Komplexität des Vorgangs und der beteiligten Systeme kann dies jedoch nur mit Hilfe einer *mathematischen Modellierung* geschehen, die die relevanten Aspekte ausreichend beschreibt, den Vorgang aber soweit *abstrahiert*, dass unnötige Details ausgeblendet werden und das Problem *mathematisch behandelbar* wird.

Entscheidend für die zu untersuchenden Phänomene sind im vorliegenden Beispiel nicht die Details des Designs der Karosserie o.Ä., sondern lediglich die beteiligten Massen und die Feder- und Dämpfungskräfte.

Abbildung 1.2 zeigt mögliche Wege, wie die vertikale Fahrdynamik unter diesem Gesichtspunkt abstrahiert werden könnte. Fahrzeugaufbau und Radkästen werden lediglich mit ihren Massen m_A , m_v und m_h modelliert. Die Aufhängung wird mit Federn und Dämpfern repräsentiert. Die zu untersuchenden Größen sind die Fahrbahnanregung² s und die Auslenkungen der Massen z_A , z_v , z_h sowie der Nickwinkel δ .

Dabei berücksichtigt die erste, etwas detailliertere Form Hub- und Nickschwingungen, während die einfachere zweite Form lediglich den Aspekt der Hubschwingungen modelliert. Es kommt also bei der Modellierung auch immer darauf an, welche Information gewonnen werden soll. Durch das Weglassen nicht relevanter oder unnötiger Details kommt man im Idealfall zu einer Vereinfachung, die das Problem mathematisch behandelbar macht.

² eigentlich $s(t)$, $z_A(t)$, $z_v(t)$ etc., da alle Größen zeitveränderlich sind! In der Darstellung wird dieser Aspekt aus Vereinfachungsgründen zunächst einmal weggelassen.

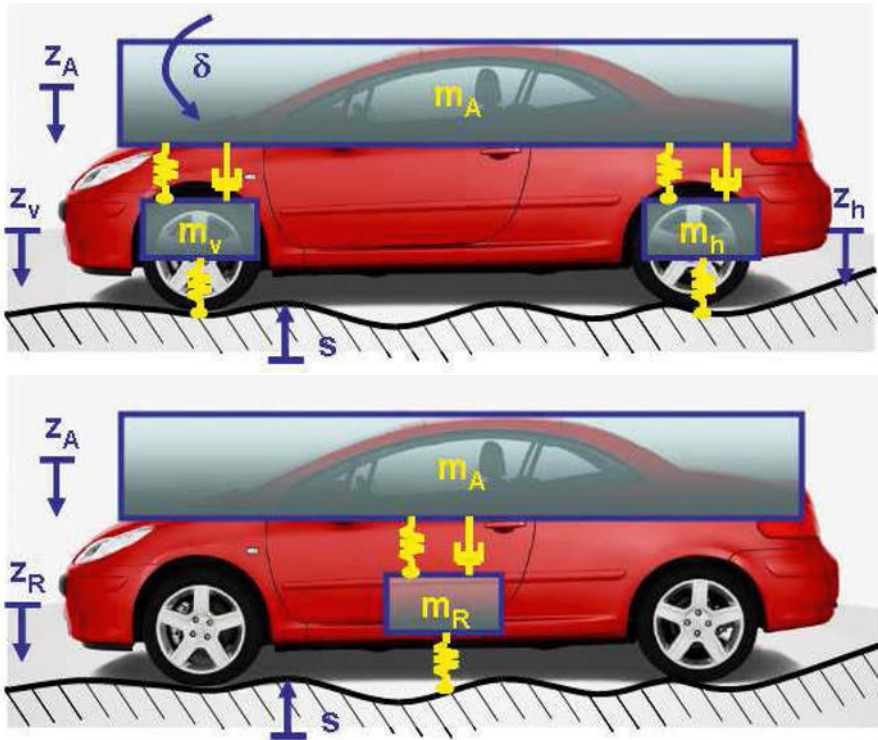


Abb. 1.2: Modelle zur Beschreibung der Vertikaldynamik eines Fahrzeugs aufgrund der Fahrbahnanregung

Im vorliegenden Fall kann die Dynamik der Feder-Masse-Dämpfer-Systeme durch *Differentialgleichungen* beschrieben werden, auf deren Darstellung an dieser Stelle allerdings verzichtet werden soll. Wir werden jedoch später sehen, dass dies nicht die einzige mögliche Beschreibungsform ist.

Mit Hilfe einer weiteren Abstraktion kann die Modellierung in einen *allgemeinen Rahmen* gestellt werden, mit dem ähnlich gelagerte Probleme aus den verschiedensten Bereichen beschrieben werden können. Dieser allgemeine Rahmen ist die Grundlage aller nachfolgenden Diskussionen.

In einem weiteren Abstraktionsschritt wird das Gesamtfahrzeug als Einheit aufgefasst (ein so genanntes *System*), welches die Fahrbahnanregung s „aufnimmt“ und die Massenbewegungen z_A , z_R „zurückliefert“.

Abbildung 1.3 visualisiert diesen Schritt.

Von Interesse ist nun, wie das „System“ Fahrzeug die so genannten „Signale“ s , z_A und z_R verarbeitet. Dazu müssen sowohl die Begriffe *System* und *Signal* geeignet definiert sowie ihre Eigenschaften charakterisiert werden. Die hierfür notwendigen Werkzeuge und Methoden sind Gegenstand der nachfolgenden Kapitel. ■

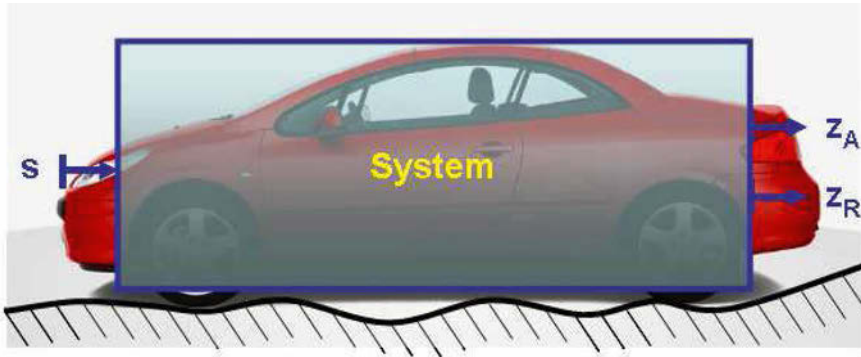


Abb. 1.3: Das Fahrzeug als signalverarbeitendes System

Auch das zweite Beispiel beschäftigt sich mit einem besonders in den letzten Jahren sehr wichtigen Thema aus dem Fahrzeugbau, der *Fahrzeugakustik*.

Das akustische Verhalten eines Fahrzeugs ist heutzutage ein immer wichtiger werdender Komfort- und Marketingaspekt. Zu laute Fahrzeuge, Fahrzeuge mit unangenehmen Geräuschen in bestimmten Betriebsbereichen, aber auch zu leise Fahrzeuge oder Fahrzeuge mit dem „falschen“, weil zu wenig sportlichen „Sound“ lassen sich nicht verkaufen.

1.2 Beispiel (Fahrzeugakustik)

Geräusche entstehen an den verschiedensten Stellen im Fahrzeug. Die wichtigsten Quellen sind die Reifen (Abrollgeräusch), der Auspuff sowie Motor und Getriebe. Geräusche werden dabei zum Ohr des Fahrers im Wesentlichen auf zwei Wegen übertragen (vgl. Abbildung 1.4):

- (a) direkt von der Schallquelle auf dem Luftwege (Luftscha),
- (b) indirekt durch Anregung der mechanischen Fahrzeugkomponenten (Körperschall).

Ausgelöst werden die motor- und getriebeseitigen Geräusche durch mit der Verbrennung zusammenhängende periodische Bewegungen mechanischer Teile, wie der Kolbenbewegung, das Öffnen und Schließen von Ventilen oder der Zahnradengriffe.

Wesentliche Aufgaben der Geräuschuntersuchungen im Fahrzeug sind die *Analyse der Geräusche* und die *Identifikation von Übertragungswegen* mit dem Ziel, die Geräuschquellen zu identifizieren und das Übertragungsverhalten (z.B. durch geeignete konstruktive Maßnahmen wie Dämmung oder Strukturverstärkung) zu optimieren.

Die mathematische Modellierung der Übertragungswege ist äußerst schwierig, da es sich bei einer Fahrzeugkarosserie oder auch bei einzelnen Motor- und Getriebeteilen um hochkomplexe Gebilde handelt.

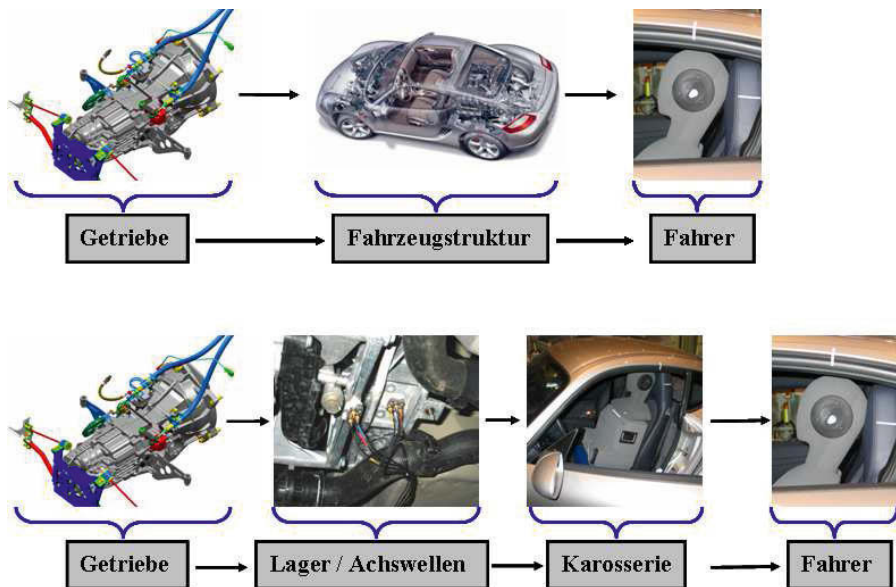


Abb. 1.4: Übertragungswege von Getriebegeräuschen: Luftschall (oben) und Körperschall (unten) [12]

Ähnlich wie in Beispiel 1.1 behilft man sich auch hier wieder mit geeigneten Vereinfachungen und Abstraktionen. So kann etwa, wie in Abbildung 1.5 dargestellt, das gesamte Fahrzeug als „System“ aufgefasst werden, welches eine das Geräusch verursachende periodische Anregung („Eingangssignal“) in ein Geräusch am Fahrerohr („Ausgangssignal“) umwandelt.



Abb. 1.5: Übertragungsweg von Getriebegeräuschen (hier Luftschall) als System

Für das System „Fahrzeug“ trifft man dann gewisse Annahmen, damit das Übertragungsverhalten mathematisch formuliert und rechnerisch simuliert werden kann. Eine dieser grundlegenden Annahmen ist etwa die Tatsache, dass die Überlagerung (Addition) zweier Anregungsquellen am Eingang zu einer entsprechenden Überlagerung (Addition) zweier Geräusche am Ausgang führt. Ein solches Systemverhalten nennt man *linear*. Die Linearitätshypothese ist zentral für die gesamte Systemanalyse. Im vorliegenden Buch

wird es daher fast ausschließlich um die Beschreibung und Analyse linearer Systeme gehen.

Natürlich muss eine solche Annahme im konkreten Anwendungsfall (mit einer so genannten *Kohärenzanalyse*) zumindest annäherungsweise verifiziert werden, damit die aus dem theoretischen und simulativen Systemverhalten gewonnenen Erkenntnisse für die Praxis brauchbar sind.

Neben den Übertragungswegen sind auch die *Charakteristika der Signale* an sich von Interesse. Beispielsweise hängt die Geräuschentwicklung eines Motors wesentlich von einer gut abgestimmten Verbrennung und von geeigneten Druckverläufen in den Zylindern ab.

Abbildung 1.6 [35] zeigt exemplarisch Ausschnitte zweier Druckverläufe in einem Zylinder eines Common-Rail-Dieselmotors.

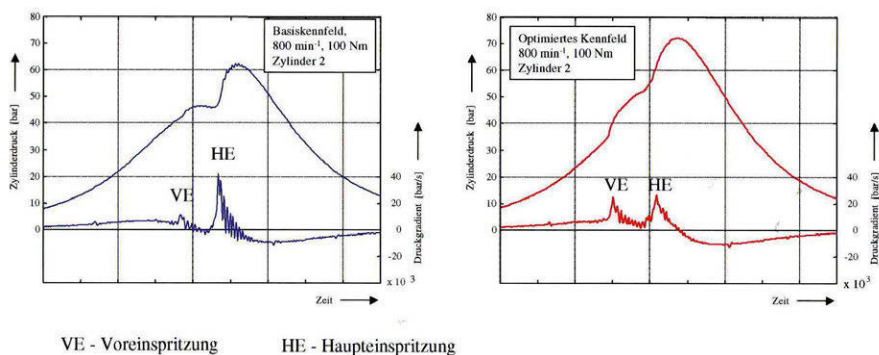


Abb. 1.6: Zylinderinnendruckverläufe in einem Common-Rail-Dieselmotor (Druck oben, Druckgradient unten) [35]

Der linke Druckverlauf ist dabei akustisch ungünstig, da die Vor- und Haupteinspritzzeitpunkte schlecht abgestimmt sind und mechanische Kräfte und Gaskräfte die umgebende Struktur zu Schwingungen anregen (Körperschall). Dies ist bei dem abgestimmten Verlauf weniger der Fall.

Betrachtet man allerdings den zeitlichen Verlauf der Signale, so erscheint unklar, welche Signalcharakteristika hierfür verantwortlich sind. In der Tat sind auch in vielen anderen Fällen Charakteristika eines Signals am zeitlichen Verlauf bisweilen nur unzureichend oder gar nicht abzulesen, zumal viele Signale, wie im vorliegenden Fall, *stochastische* (d.h. zufällige) Anteile haben.

Aufgabe der Signalanalyse ist es, Methoden bereit zu stellen, die das Signal geeignet transformieren mit dem Ziel, durch diese andere Sichtweise zusätzliche im Signal enthaltene Informationen ablesen zu können.

Eine wesentliche Methode besteht darin, harmonische Schwingungsanteile im Signal zu identifizieren. Dieser Vorgang, die so genannte *Fourier-Analyse*

oder *Spektralanalyse*, ist für die Signalverarbeitung von überragender Bedeutung.

Abbildung 1.7 [35] zeigt eine solche Spektralanalyse für die beiden Druckverläufe.

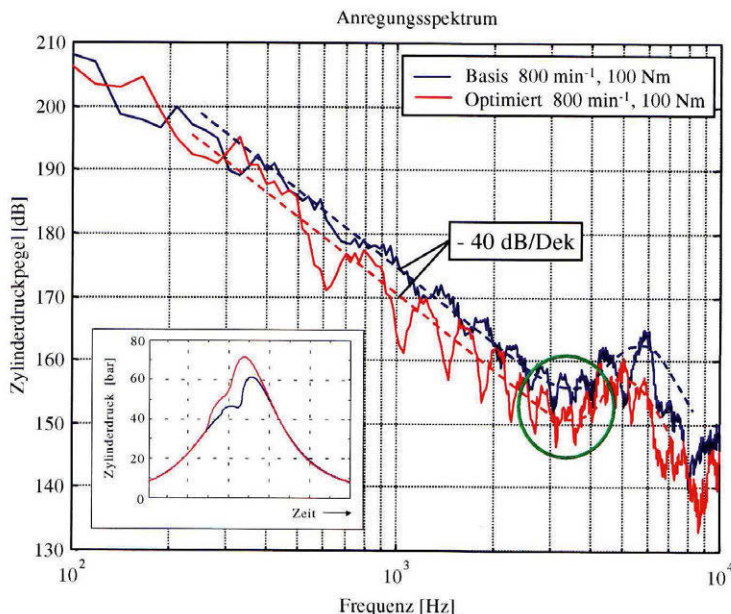


Abb. 1.7: Fourier-Analyse der Druckverläufe aus Abbildung 1.6 [35]

Der Spektraldarstellung liegt eine Beobachtung von Fourier zugrunde, welche besagt, dass *alle Signale* als Überlagerung (Addition) von harmonischen Sinusschwingungen mit geeigneter Amplitude und geeigneter Phase dargestellt werden können.

In der Darstellung wird also für jede Frequenz f_0 Hz angegeben, welchen Beitrag der Schwingungsanteil des Drucksignals mit dieser Frequenz am Zylinderinnendruck liefert. Man erkennt, dass ganz allgemein die Druckpegel des optimierten Verlaufs gegenüber dem nicht optimierten abgesenkt sind, speziell jedoch im Bereich zwischen 300 und 2500 Hz (eingekreister Bereich). Eine reduzierte Strukturanregung in diesem Bereich führt zu geringerem Körperschall und besserem akustischen Verhalten des Dieselmotors.

Im Beispiel hat eine Transformation des Signals dazu geführt, dass Merkmale des Signals ermittelt werden konnten, die am zeitlichen Verlauf nicht oder nur unzureichend zu erkennen waren. Diese Transformation, die so genannte *Fourier-Transformation*, ist, wie oben bereits erwähnt, eine zentrale Methode der Signal- und Systemtheorie und daher ein Hauptgegenstand der folgenden Kapitel. ■

Ein entscheidender Faktor für die Funktion mechatronischer Systeme ist die Sicherstellung der Energieversorgung. In autonomen Systemen, wie etwa dem Kraftfahrzeug, benötigt man dafür Batterien. Es ist daher von großer Bedeutung, die Eigenschaften von Batterien zu charakterisieren, im laufenden Betrieb zu messen und gegebenenfalls Vorhersagen über den Zustand des Energiespeichers zu machen.

1.3 Beispiel (Untersuchung von Batterien)

Eine Batterie (vgl. Abbildung 1.8) ist ebenso wie die in den Beispielen 1.1 und 1.2 besprochenen „Systeme“ ein hochkomplexes elektrotechnisches (bzw. elektrochemisches) Gebilde, dessen Eigenschaften von zahlreichen Parametern abhängen.

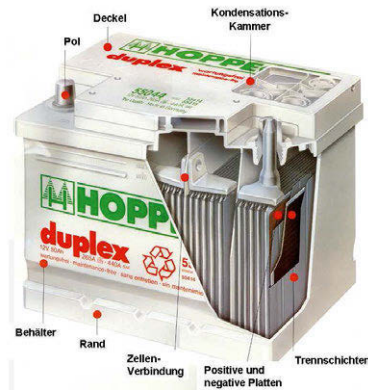


Abb. 1.8: Aufbau eines Blei-Säure-Akkumulators (Grafik: HOPPECKE)

Kenngrößen wie die *Ruhespannung*, der *Innenwiderstand*, die *Kapazität* (also die entnehmbare Strommenge (in Ah)), der *Ladezustand*, d.h. die aktuell entnehmbare Energie im Verhältnis zur Nennkapazität, die verschiedenen *Überspannungen* beim Lade- und Entladevorgang hängen in komplizierter Form untereinander und von der *Elektrolytkonzentration*, der *Temperatur*, der *Stromrichtung* und dem *Alter* der Batterie ab [29, 50].

Will man ein solches Gebilde beschreiben, vermessen oder simulieren, so muss man auch hier wieder unter Zuhilfenahme geeigneter Annahmen, Abstraktionen und Vereinfachungen ein passendes *Modell* entwerfen. Eine übliche Vorgehensweise in der Elektrotechnik ist die Konstruktion eines elektrischen Ersatzschaltbildes, wie etwa das in Abbildung 1.9 skizzierte Ersatzschaltbild nach Randles [29, 50].

In diesem Ersatzschaltbild modelliert R_i den Innenwiderstand, R_D und C_D modellieren die Durchtrittsreaktionen beim Übergang zwischen Elektroden

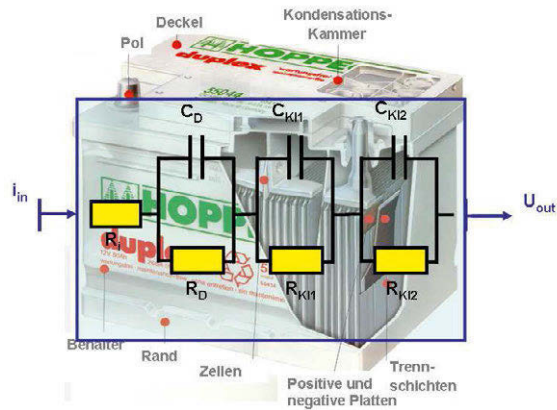


Abb. 1.9: Ersatzschaltbild nach Randles

und Elektrolyt, und R_{Kx} , C_{Kx} modellieren Transportmechanismen innerhalb des Elektrolyten.

„Eingangssignal“ ist der an den Batterieklemmen gemessene Strom und „Ausgangssignal“ die gemessene Klemmenspannung. Interessant ist das Verhältnis U_{out}/I_{in} dieser beiden Größen, die so genannte **Impedanz**. Aus ihr lassen sich, insbesondere im dynamischen Fall der Lastwechsel, Rückschlüsse auf viele der oben angesprochenen Eigenschaften der Batterie ziehen.

Eine Schwierigkeit ist jedoch, dass die Strom-Spannungs-Kennlinie nicht geradlinig („linear“) ist und die Impedanz neben dem Batteriezustand und der Zeit von der Lastwechselfrequenz abhängig ist.

Eine Vereinfachung der Analyse und der Modellierung kann dadurch erreicht werden, dass man die Strom-Spannungs-Kennlinie nur in einem kleinen Bereich um einen so genannten **Arbeitspunkt** herum betrachtet. Das in Abbildung 1.9 dargestellte System ist dann **linear**, und durch Aufprägung von kleinen Wechselströmen verschiedener Frequenz um den Arbeitspunkt herum kann die Frequenzabhängigkeit der Impedanz untersucht werden.

Dieser Vorgang entspricht der in Beispiel 1.2 bereits angesprochenen **Spektralanalyse** und wird im Zusammenhang mit der Batterieanalyse **Impedanzspektroskopie** genannt.

Durch ein solches gemessenes **Impedanzspektrum** können die Parameter des Ersatzschaltbildes bestimmt werden. Man sagt, das **System** wird **identifiziert**. Diese **Systemidentifikation** kann dazu verwendet werden, Erkenntnisse über die oben angesprochenen Batteriekenngrößen abzuleiten oder die Batterie mittels des so parametrisierten Ersatzschaltbildes innerhalb einer Simulation abzubilden.

Die **Identifikation linearer Systeme** ist eine in der Praxis häufig vorkommende wichtige Modellierungsaufgabe und wird daher ebenfalls in den nachfolgenden Kapiteln diskutiert. ■

Weitere Anwendungsfelder

Nach dieser ausführlichen Diskussion dreier aktueller Praxisbeispiele sollen im Folgenden kurz noch einige weitere Anwendungsfelder angedeutet werden, in denen „Signale und Systeme“ und somit die in diesem Buch dargestellten Grundlagen benötigt werden.

Signal- und Systemtheorie sind Grundlage folgender weiterer wichtiger Ingenieurdisziplinen:

- der Nachrichtentechnik,
- der Messtechnik,
- der Bildverarbeitung,
- der Sprachverarbeitung,
- der Regelungstechnik.

Die **Nachrichtentechnik** befasst sich mit Methoden der *Übertragung von Signalen*. Um Signale (Sprache, Musik, Daten) über weite Strecken mit elektromagnetischen Wellen zu übertragen, müssen diese im Allgemeinen mit speziellen Systemen aufbereitet werden. So müssen sie etwa geeignet komprimiert, kodiert und moduliert werden. Am Empfangsort müssen die Signale entsprechend wieder aufbereitet werden, um sie von gegebenenfalls vorhandenen Störsignalen zu trennen und in die ursprüngliche Form zurückzuverwandeln.

Herausragendes Beispiel für ein solches nachrichtentechnisches System ist etwa das bekannte globale Ortungs- und Navigationssystem **GPS (Global Positioning System)**.

Abbildung 1.10 zeigt, wie schwierig die Aufgabe der Signalaufbereitung am Empfangsort in diesem Falle ist. Die Leistung des Empfangssignals liegt wesentlich unterhalb der Leistung des thermischen Rauschens, welches unweigerlich von den elektronischen Komponenten des Empfängers produziert wird. Sehr schön sieht man dies wieder, wenn man die Signale, wie in Abbildung 1.10 geschehen, nicht bezüglich ihres zeitlichen Verlaufs, sondern bezüglich ihrer Frequenzanteile darstellt. Diese Darstellung, das so genannte **Leistungsdichtespektrum**, wird i.W. durch die in den vorangegangenen Beispielen angesprochene Fourier-Transformation bewerkstelligt. Diese Technik berücksichtigt auch, dass die Signale **zufällige Anteile** haben. Die Behandlung solcher zufälligen (*stochastischen*) Signale und die Bestimmung des Leistungsdichtespektrums sind Gegenstand des letzten Kapitels dieses Buches.

Dagegen wird auf die speziellen Methoden der Nachrichtentechnik, etwa die Modulationsverfahren, nicht eingegangen, da dies, wie auch die eingehendere Diskussion der anderen angesprochenen Anwendungsgebiete, den Rahmen dieser Abhandlung bei weitem sprengen würde.

Ein weiteres bedeutendes Anwendungsfeld der Signaltheorie ist die **Verarbeitung und Analyse von Sprache**. Dabei ist beispielsweise die Signalanalyse,

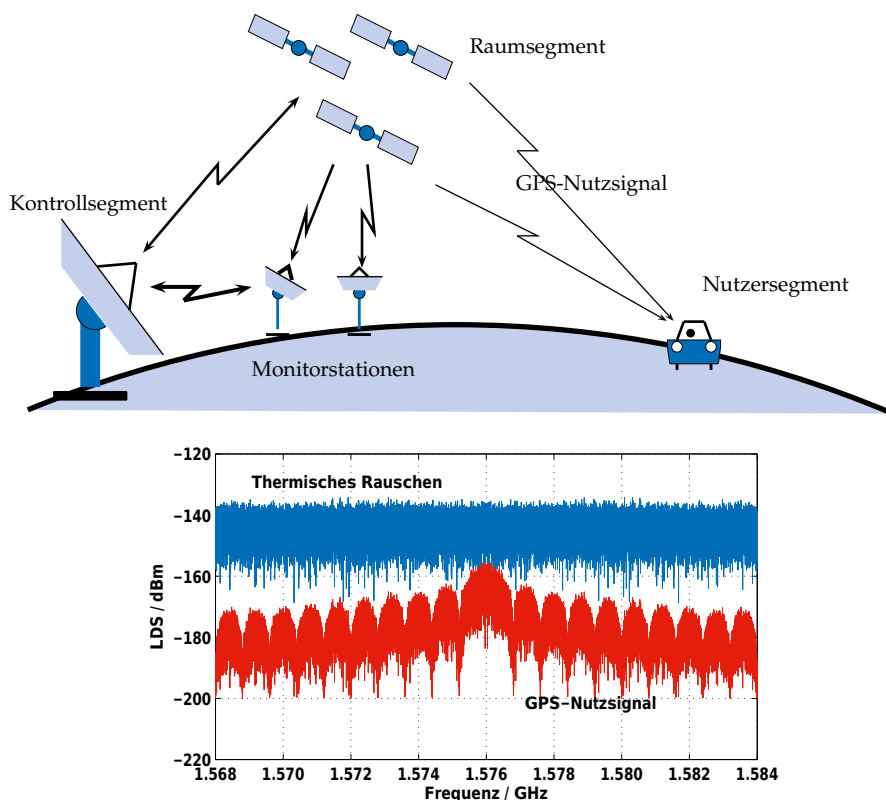


Abb. 1.10: Aufbau des Satellitennavigationssystems GPS (oben), Leistungsdichtespektrum eines GPS-Signals und eines thermischen Rauschsignals (unten)

also die Extraktion von charakteristischen Merkmalen eines Sprachsignals ein wichtiges Ziel. Eine solche Merkmalsextraktion kann zur Sprach- und Sprechererkennung herangezogen werden, etwa bei der Stimmidentifikation im kriminaltechnischen Labor.

Abbildung 1.11 zeigt den zeitlichen Verlauf eines solchen Sprachsignals (Amplitudenwerte) und ein so genanntes *Sonogramm* dieses Signals.

Dabei handelt es sich um die Darstellung eines fortlaufenden (Leistungsdichte-) Spektrums des Sprachsignals. Der Fachmann kann am Sonogramm weitere charakteristische Merkmale des Sprachsignals erkennen, die über die am Zeitsignal direkt erkennbaren Kennzeichen (Pausen, Vokale etc.) hinaus gehen.

Neben der Erkennung von Merkmalen (Klassifizierung) sind auch Techniken der Signaltrennung (der so genannten *Filterung*) von Interesse. Eine Anwendung wäre beispielsweise die Trennung unerwünschter Hintergrundgeräusche von Sprachsignalen.

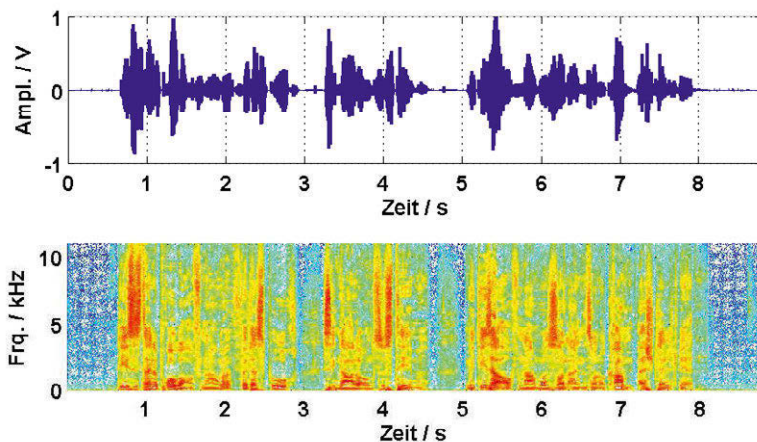


Abb. 1.11: Sprachsignal und Sonogramm

Ein riesiges Anwendungsfeld der (digitalen) Signalverarbeitung ist die so genannte *Bildverarbeitung*.

Abbildung 1.12 zeigt die Aufnahme von Verkehrsschildern auf einer Autobahn mit Hilfe einer fahrzeugstationären digitalen Kamera. Ziel ist es in diesem Fall, mit Hilfe solcher Aufnahmen und nachgeschalteter digitaler Algorithmen, Verkehrsschilder *automatisch* zu erkennen und dem Fahrer über ein Display oder akustisch Hinweise zu geben.

Die Signalanalyse dient in diesem Beispiel wiederum der Merkmalsdetektion, also etwa der Identifikation von Kanten, z.B. der Schildkontur, oder der Erkennung und Zuordnung von Farbflächen.

Ausgefeilte Methoden der Signaltrennung (*Filterung*) zur Trennung signifikanter Signalanteile von zufallsbedingten Anteilen („Rauschen“) finden hier ebenso Anwendung wie Methoden der Signalkomprimierung zur Reduzierung der in der Bildverarbeitung auftretenden Datenflut.

Darüber hinaus ist das Verständnis der Vorgänge bei der *Diskretisierung* (*Abtastung*) der Bildsignale (ebenso wie auch der Signale in den anderen angesprochenen Beispielen) unabdingbar. Auch dieser Aspekt wird in den nachfolgenden Kapiteln diskutiert werden.

Die *Regelungstechnik* macht sich zur Aufgabe, Systeme so zu beeinflussen, dass sie ein gewünschtes Verhalten aufweisen, z.B. die *Stabilisierung* eines dynamischen Vorgangs oder die Einstellung eines bestimmten Sollwertes eines zeitlich veränderlichen Parameters (Drehzahl eines Motors, Temperatur einer Heizung, Füllstand eines Kessels etc.).

Die Abbildung 1.13 [43] beispielsweise zeigt das Blockschaltbild eines Regelkreises für die Regelung der Drehzahl eines Verbrennungsmotors auf einem Prüfstand. Die Motordrehzahl soll dabei stets auf einem fest vorgegebenen

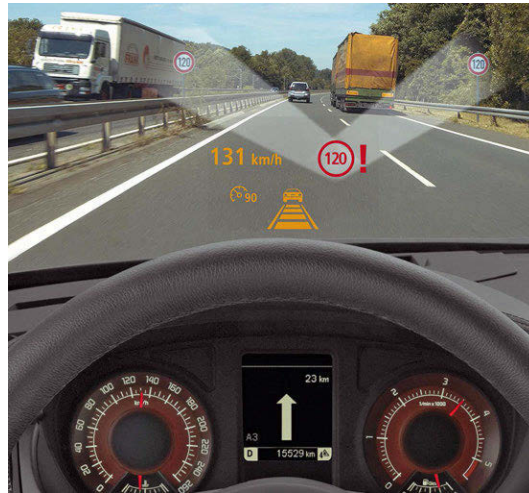


Abb. 1.12: Automatische Erkennung eines Verkehrszeichens (Continental) [18]

Wert gehalten werden, auch wenn sich die mit einer Leistungsbremse eingestellte Belastung ändert. Für diesen Zweck ist ein (i.Allg. lineares) System (Regler) zu konzipieren, welches in der Lage ist, einen vorgegebenen Drehzahlswert (n_{soll}) einzustellen.

Aus dem ständigen Vergleich mit der Ist-Drehzahl (n_{ist}) berechnet der Regler eine Drosselklappenstellung, welche zu einem Motordrehmoment M_M proportional ist. Diesem Moment wirken Reibung und Lastmoment der Leistungsbremse entgegen.

Die **Blockschaltbilddarstellung** in Abbildung 1.13, in der die in der Regelungstechnik genormten Systemblöcke verwendet werden, ist eine sehr übersichtliche Form der Darstellung von (dynamischen) Systemen. Für Berechnungen müssen allerdings andere Darstellungsformen herangezogen werden (Differentialgleichungen, Zustandsdarstellungen, Transformationen). Die Bereitstellung dieser Darstellungsmethoden ist u.a. Gegenstand der folgenden Kapitel.

Man erkennt an dem vorgestellten Beispiel, dass sich die Begriffswelten der Regelungstechnik und der Signal- und Systemtheorie größtenteils überschneiden, da einer Systemregelung im Allgemeinen eine *System- und Signalanalyse* vorausgehen muss. Oft handelt es sich dabei, wie in Abbildung 1.13, um lineare oder *linearisierte* Systeme, sodass die Methoden der (linearen) Systemtheorie Anwendung finden. Die Regelungstechnik bedient sich daher zum großen Teil der Methoden und Begriffe, die im Folgenden beschrieben werden.

Ebenso greifen gewisse *messtechnische Verfahren*, wie etwa die *Korrelationsmesstechnik* zur Bestimmung von Abständen und Geschwindigkeiten

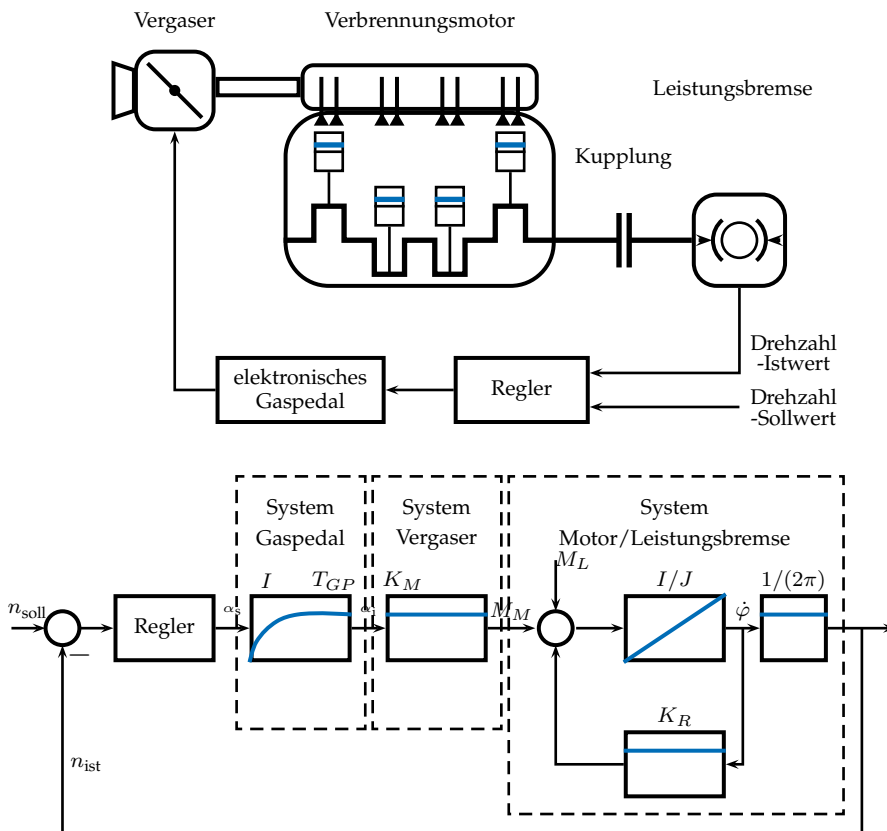


Abb. 1.13: Schaubild eines Drehzahlregelungsprüfstands (oben) und seiner regelungstechnischen Modellierung als Blockschaltbild (unten) [43]

mittels Laufzeitmessung von Signalen, auf signaltheoretische Methoden und Begriffe zurück, die im Folgenden behandelt werden.

Abbildung 1.14 zeigt einen Versuchsaufbau zur Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit einer (bedruckten) Scheibe (CD). Zwei kurz nacheinander über der Scheibe platzierte Infrarotsensoren tasten die Oberfläche der Scheibe ab. Die reflektierten Signale repräsentieren dabei *zeitversetzt* die (prinzipiell gleiche) Oberflächenstruktur der Scheibe. Aus dem Zeitversatz und dem bekannten Abstand der Sensoren kann nun die Geschwindigkeit ermittelt werden.

Die von den Sensoren gemessenen Signale sind in Abbildung 1.15 dargestellt (vgl. dazu auch Kapitel 5, Abschnitt 5.5.6).

Man erkennt, dass der zeitliche Versatz der Signale im Zeitbereich aufgrund der verrauschten Struktur der Signale nicht so ohne weiteres abzulesen ist.

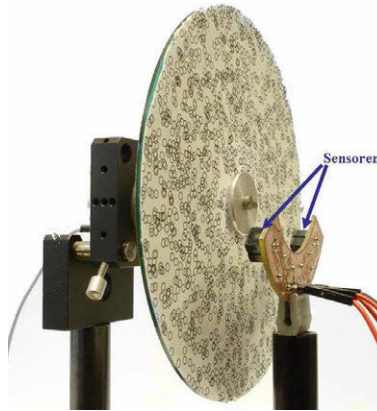


Abb. 1.14: Beispiel eines Rotationsgeschwindigkeits-Messsystems auf Basis der Korrelationsmesstechnik

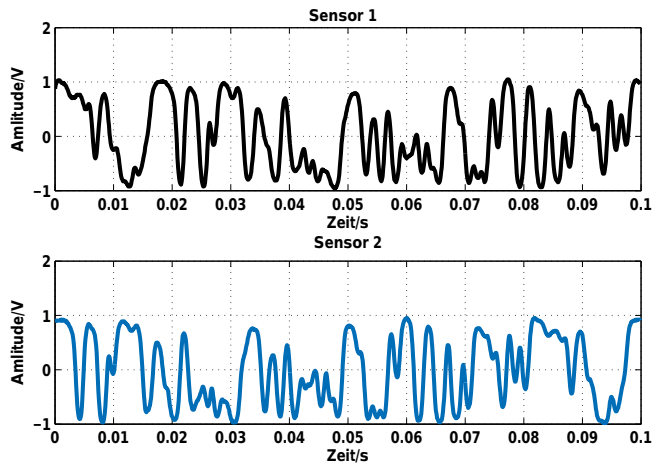


Abb. 1.15: Signale der Infrarotsensoren des Rotationsgeschwindigkeits-Messsystems aus Abbildung 1.14

Die stochastischen Eigenschaften der Signale erfordern eine weitere Verarbeitung, deren Diskussion Gegenstand des letzten Kapitels sein wird. Außerdem wird der Frage nachgegangen, welche Signale sich überhaupt für solche Messungen eignen.

Insgesamt sind die in den weiteren Kapiteln diskutierten Themen also von weitreichender Bedeutung für zahllose Anwendungsgebiete im Ingenieurbereich. Es gibt aber auch Anwendungen außerhalb dieses Bereiches, wie etwa die Kursanalyse von Finanzwerten. Hierauf können und wollen wir aber nicht näher eingehen.

1.2 Der Signalbegriff

In den in Abschnitt 1.1 diskutierten Beispielen ist immer wieder von *Signalen* die Rede. Eine Definition steht jedoch noch aus und soll daher jetzt nachgeliefert werden. Dabei gehen wir von einem physikalisch geprägten Ansatz aus, der unter einem Signal zunächst³ ein messbares physikalisches Objekt versteht.

Der physikalische Signalbegriff

Ein *Signal* ist eine von einer physikalischen Größe getragene Zeitfunktion, deren Informationsparameter den Wertverlauf einer technischen oder physikalischen Größe abbildet.

Diese Definition kennzeichnet sicher die überragende Mehrzahl der Signale. Allerdings muss ein Signal nicht unbedingt immer eine Zeitfunktion sein, wie das Beispiel der Bildverarbeitung zeigt. Hier sind die Argumente der Signalfunktionen die Pixelparameter, also Ortskoordinaten.

Des Weiteren können auch solche funktionalen Abhängigkeiten, die keinerlei physikalischen oder technischen Hintergrund haben, etwa Aktienkurse, mit Fug und Recht ein Signal genannt werden. Da wir uns jedoch ausschließlich mit technischen Fragestellungen beschäftigen werden, genügt es für unsere Zwecke, die obige Definition zu Grunde zu legen.

Die in den Beispielen vorgestellten Signale weisen einige Merkmale auf, die Anlass zu einer Klassifizierung der Signale geben, welche für die Signaltheorie von grundlegender Bedeutung ist.

Wir werden im Folgenden von *zeit-* und *wertkontinuierlichen* sowie von *zeit-* und *wertdiskreten* Signalen sprechen.

Unter einem *zeitkontinuierlichen* Signal s versteht man ein Signal, welches sich als Funktion

$$s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{W}$$

von den reellen Zahlen in einen Wertebereich $\mathfrak{W}$ darstellen lässt. Für jede Zahl $t \in \mathbb{R}$ (Zeitpunkt) ist dabei ein Signalwert definiert.

Im Grunde sind zunächst alle beobachteten physikalischen Zeitsignale zeitkontinuierlich. Für die digitale Signalverarbeitung (also die *numerische* Behandlung der Signale) werden die beobachteten Größen jedoch mit Hilfe

³ Wir werden später sehen, dass diese Sichtweise für theoretische Überlegungen nicht ausreicht. Ein mathematisch geprägter Ansatz erweitert den hier definierten Signalbegriff um Objekte (die so genannten *Distributionen*), die zwar physikalisch interpretierbar, aber in dieser Form nicht beobachtbar sind.

eines Analog-Digital-Umsetzers (A/D-Wandlers) in Zahlen umgewandelt. Diese Zahlen entsprechen den Werten der Signale zu gewissen Zeitpunkten und sind somit **zeitdiskrete** Signale.

Unter einem **zeitdiskreten** Signal s versteht man ein Signal, welches sich als Funktion

$$s : Z \longrightarrow \mathfrak{W}$$

von einer Menge von endlich vielen oder abzählbar unendlich vielen reellen Zahlen in einen Wertebereich $\mathfrak{W}$ darstellen lässt. Für jede Zahl $t_n \in Z$, $n \in \mathbb{Z}$ (Zeitpunkt) ist dabei ein Signalwert definiert.

In aller Regel geht man bei zeitdiskreten Signalen davon aus, dass die Zeitpunkte t_n in einem festen Zeitabstand T zueinander stehen (dies ist z.B. bei A/D-Wandlern aus Gründen der einfacheren technischen Realisierung immer der Fall). Daher ist es üblich, das Signal sofort als Funktion

$$s : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathfrak{W}$$

und die einzelnen Signalwerte als $s(n)$, $s[n]$ oder auch s_n zu schreiben. Das Zeitmaß T wird dabei implizit vereinbart. Die Zulassung negativer Zeitpunkte ist analytisch zweckmäßig. Man lässt daher negative Zeiten zu und **vereinbart, dass Signale grundsätzlich zu allen Zeiten, das heißt auf der ganzen reellen (Zeit-)Achse, definiert** sind.

Die Unterscheidung zwischen „kontinuierlich“ und „diskret“ gibt es jedoch nicht nur für den Zeitbereich. Auch die Signalwerte selbst können kontinuierlich und diskret sein.

Unter einem **wertkontinuierlichen** Signal s versteht man ein Signal, welches sich als Funktion

$$s : \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathfrak{W} \subseteq \mathbb{R}^n$$

von einem (kontinuierlichen oder diskreten) Zeitbereich $\mathfrak{Z}$ in einen kontinuierlichen Wertebereich $\mathfrak{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ darstellen lässt.

Alle beobachteten physikalischen Zeitsignale sind zunächst auch wertkontinuierlich. Numerische Signale können jedoch nicht mit beliebig genauen Werten repräsentiert werden. Ein A/D-Wandler kann nur Werte eines bestimmten Rasters in einem gewissen Wertebereich erzeugen. Die Signalwerte der beobachteten Größe werden also auch im Wertebereich diskretisiert.

Unter einem **wertdiskreten** Signal s versteht man ein Signal, welches sich als Funktion

$$s : \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathfrak{D} \subseteq \mathbb{R}^n$$

von einem (kontinuierlichen oder diskreten) Zeitbereich $\mathfrak{Z}$ in eine Menge $\mathfrak{D}$ von endlich vielen oder abzählbar unendlich vielen reellen Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ darstellen lässt.

In aller Regel ist s eine **reellwertige** Funktion. Es ist jedoch oft auch die Zusammenfassung von reellwertigen Signalen zu **vektorwertigen Signalen** nützlich.

Ebenso ist es in der Signaltheorie vielfach sehr zweckmäßig, **komplexwertige Signale** zu betrachten. Die obige Definition muss dann in diesem Sinne erweitert werden.

Die Beispiele aus Abschnitt 1.1 illustrieren noch ein weiteres Unterscheidungsmerkmal, welches für die Praxis von enormer Bedeutung ist. Offenbar gibt es Signale, die zu jedem Zeitpunkt durch einen funktionalen Zusammenhang eindeutig bestimmt sind, wohingegen andere dies nicht sind. Dies gibt Anlass zu folgender Definition:

Unter einem **deterministischen** Signal s versteht man ein Signal, welches sich (mit den obigen Bezeichnungen) durch einen eindeutigen mathematischen Zusammenhang als Funktion

$$s : \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathfrak{W}$$

darstellen lässt.

Die meisten in der Praxis vorkommenden Signale sind jedoch, auch das zeigen die Beispiele aus Abschnitt 1.1, zufällig oder haben gewisse zufällige Anteile. Solche Signale nennen wir **stochastisch**.

Unter einem **stochastischen** Signal s versteht man ein Signal, für das jedes

$$s(t), \quad t \in \mathfrak{Z}$$

einen *zufälligen* Wert in $\mathfrak{W}$ annimmt.

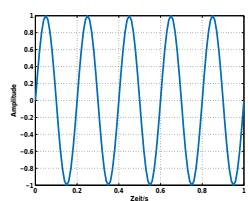
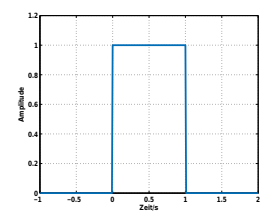
Die entstehende Funktion $s(t)$ wird dabei als *eine* beobachtete Ausprägung des das Signal erzeugenden physikalischen **Prozesses** verstanden. Diese Funktion heißt daher eine **Musterfunktion** dieses Prozesses⁴.

Deterministische Signale sind in der Praxis vor allem *harmonische Schwingungen* oder Testsignale, wie die aus der Regelungstechnik bekannte *Sprungfunktion*. Wir werden in den ersten Kapiteln ausschließlich solche Signale betrachten.

Stochastische Signale sind in aller Regel die in der realen Welt beobachteten Signale. Ihre Behandlung erfordert Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die grundlegenden Begriffe dazu werden in Kapitel 5 behandelt.

In Tabelle 1.1 sind zur besseren Illustration der Begriffe einige Beispiele für die definierten physikalischen Signalklassen aufgeführt.

Tabelle 1.1: Beispiele zur Klassifikation von Signalen

Deterministische Signale	
zeit-/wertkontinuierliches Signal	
$s(t) = \sin(2\pi \cdot 5 \cdot t)$ (Harmonische Schwingung der Frequenz 5 Hz)	
zeitkontin.-/wertdiskr. Signal	
$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{für } t < 0, t > 1 \end{cases}$ (Rechteckimpuls der Pulsbreite 1)	
Fortsetzung auf der nächsten Seite	

⁴ Für weitere Details sei an dieser Stelle auf Kapitel 5 verwiesen.

Tabelle 1.1: Beispiele zur Klassifikation von Signalen

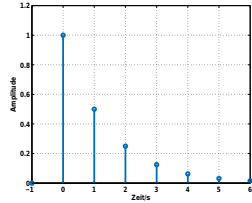
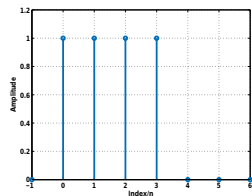
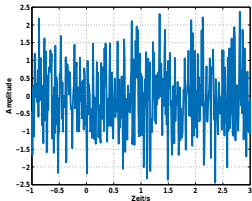
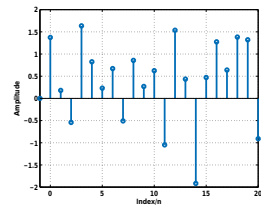
zeitdiskret-/wertkontin. Signal	
$s_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{für } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$ (Potenzfolge)	
zeitdiskret-/wertdiskretes Signal	
$s_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{für } n < 0, n > 3 \end{cases}$ (Diskreter Rechteckimpuls)	
Stochastische Signale	
zeit-/wertkontinuierliches Signal	
$s(t) = \text{Zufallswert in } [-1, 1]$ (hier: Gauß-verteiltes weißes Rauschen)	
Fortsetzung auf der nächsten Seite	

Tabelle 1.1: Beispiele zur Klassifikation von Signalen

zeitdiskret- / wertkontin. Signal	
$s_n = \text{Zufallswert in } [-2, 2]$ (hier: abgetastetes Gauß- verteiltes weißes Rauschen)	

Der mathematische Signalbegriff

Ein weiteres wichtiges Unterscheidungsmerkmal charakterisiert (physikalische) Signale durch die (zunächst einmal physikalischen) Größen Signalenergie und Signalleistung.

Ein (reelles oder komplexes) Signal $f(t)$ heißt ein **Energiesignal**, wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (21.1)$$

Die Bezeichnung **Energiesignal** rührt daher, dass das Betragsquadrat $|f(t)|^2$ der momentanen Amplitude eines Signals proportional zur momentanen Signalleistung⁵ (in W) ist. Das Integral (21.1) hat daher die physikalische Einheit der **Energie** (Ws).

Ein (reelles oder komplexes) Signal $f(t)$ heißt ein **Leistungssignal**, wenn es ein $M > 0$ gibt, sodass

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \leq M < \infty \quad \forall T > 0. \quad (21.2)$$

⁵ Ist $f(t)$ etwa eine an einem Widerstand abfallende Spannung, so entspricht dies einer momentanen Leistung von $|f(t)|^2 \text{ V}^2 / \Omega \doteq \text{W}$

Ein Leistungssignal zeichnet sich also dadurch aus, dass die Durchschnittsleistung (das Integral (21.2) hat die physikalische Einheit $\text{Ws/s} \doteq \text{W}$) über jedem beliebigen Beobachtungszeitintervall (gleichmäßig) beschränkt ist.

Natürlich sind alle Energiesignale auch Leistungssignale, wie sich aus den Definitionen unmittelbar ergibt. Wichtige Signaltypen sind aber keine Energiesignale. Hierzu gehören beispielsweise die für die Signaltheorie so wichtigen *harmonischen Funktionen* $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$ oder auch die in der Regelungstechnik so enorm wichtige **(Einheits-)Sprungfunktion**

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (22.1)$$

Obwohl mit physikalischen Begriffen gearbeitet wird, ist die Unterscheidung zwischen Energie- und Leistungssignalen eher ein mathematisches Konzept, da es in der Praxis natürlich nur Energiesignale gibt.

Da das Integral (21.1) für die angesprochenen harmonischen Funktionen oder auch die Sprungfunktion divergiert, würde man theoretisch unendlich viel Energie zur Aufrechterhaltung dieser Signale benötigen, die natürlich in der Realität nicht zur Verfügung steht.

Andererseits würde man auf enorme Schwierigkeiten stoßen, wollte man diese Realität für solche Signale mathematisch abbilden (welchen Beobachtungszeitraum wollte man denn etwa festlegen?).

Für die mathematische Modellierung ist es günstiger, von Signalen auszugehen, die „für alle Zeiten“ definiert sind. Insofern kommt man dann zu Signalen, die keine endliche Energie mehr haben, sondern „nur“ noch eine endliche Durchschnittsleistung.

Der Signalraum

Für die mathematische Modellierung ist es erforderlich, die Signale, für die die in den folgenden Kapiteln gemachten Aussagen gelten sollen, zu einer Einheit zusammenzufassen.

Diese Signale bilden einen⁶ **Vektorraum**, den wir im Folgenden als den **Signalraum** bezeichnen wollen.

Eine exakte mathematische Präzisierung dieses Signalraums übersteigt den Anspruch dieses Buches, da mathematisch sehr tiefliegende Konzepte zur Anwendung kommen müssten.

Wir müssen es daher mit einer mathematisch unbefriedigenden, eher vagen Beschreibung bewenden lassen und definieren, dass der Signalraum der (komplexwertigen) *zeitkontinuierlichen* Signale, den wir im Folgenden betrachten wollen, mindestens folgende Signale enthalten soll⁷:

⁶ Gegebenenfalls kommen auch verschiedene solcher Vektorräume in Frage, je nach Zielrichtung der Modellierung.

⁷ wobei sich die genannten Signalklassen überschneiden können

- alle Energiesignale,
- alle Leistungssignale,
- alle (stückweise) differenzierbaren reellen Funktionen, die nicht schneller wachsen als ein Polynom
- alle (stückweise) stetigen reellen Funktionen, die nicht schneller wachsen als ein Polynom,
- alle Polynome,
- alle Exponentialfunktionen,
- alle endlichen und unendlichen Linearkombinationen von Dirac-Impulsen und ihre distributionellen Ableitungen.

Bei *zeitdiskreten* Signalen ist die Situation etwas einfacher. Hier können wir es bei Energie- und Leistungssignalen bewenden lassen.

Bei der Auflistung der *zeitkontinuierlichen* Signalklassen sind insbesondere die so genannten Distributionen neu. Wir können das Konzept der Distributionen im Rahmen dieses Buches nur anreißen. Im Grunde reicht jedoch für die systemtheoretischen Betrachtungen der Dirac-Impuls, den wir in Abschnitt 2.3.4 auf einer mehr oder weniger heuristischen Basis einführen (vgl. (76.1)) und dessen Bedeutung wir dort diskutieren werden.

1.3 Der Systembegriff

Signale (Informationsträger) werden stets von für spezielle Aufgaben konzipierten Vorrichtungen verarbeitet und übertragen. Solche Vorrichtungen nennen wir im Folgenden **Systeme**. Präziser wird dieser Sachverhalt in der folgenden Definition wiedergegeben:

Unter einem **System** versteht man einen beliebigen Prozess, der zur Transformation von Signalen führt.

Es scheint klar, dass alle in den Beispielen aus Abschnitt 1.1 vorgestellten Vorrichtungen dieser Definition genügen.

Der mathematische Systembegriff

Da ein System Signale in Signale überführt, ist ein **System** im mathematischen Sinne eine **Funktion** im Signalraum oder zwischen zwei verschiedenen Signalräumen (wie bereits erwähnt, werden wir im Folgenden aber die Signalräume nicht näher spezifizieren).

Ein System kann somit in verschiedenen Formen als mathematische Funktion notiert werden, etwa mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} : x(t) &\longrightarrow y(t) \\ \text{bzw. } \mathfrak{S} : x_n &\longrightarrow y_n \end{aligned} \tag{23.1}$$

oder in Form einer Gleichung⁸ als:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathfrak{S}(x(t)) \quad (:= \mathfrak{S}(x)(t)) \\ \text{bzw. } y_n &= \mathfrak{S}(x_n) \quad (:= \mathfrak{S}(x)_n). \end{aligned} \tag{24.1}$$

Analoge und digitale Systeme

Ausgehend von der Signalklassifizierung kann zwischen Systemen differenziert werden, die vorwiegend zur Verarbeitung zeitkontinuierlicher oder zeitdiskreter Signale konzipiert sind. Wir unterscheiden zwischen *analogen* und *digitalen Systemen*.

Unter einem *analogen System* versteht man ein System zur Verarbeitung und Übertragung zeitkontinuierlicher Signale.

Hierunter fallen fast alle Vorrichtungen, die mit realen Signalen arbeiten. Demgegenüber verstehen wir unter einem digitalen System im Wesentlichen einen *Algorithmus*, der Signale in einem *Rechner* verarbeitet. Dies setzt die Diskretisierung realer Signale im Zeit- und im Wertebereich voraus (A/D-Wandlung).

Unter einem *digitalen System* versteht man ein System zur Verarbeitung zeit- und wertdiskreter Signale.

Die *digitale Signalverarbeitung* hat gegenüber der analogen Signalverarbeitung einige Vorteile. So ist auf der numerischen Ebene leicht die Implementierung von Verfahren möglich, die in Analogtechnik nur schwer oder gar nicht zu realisieren wären. Das heißt aber nicht, dass die digitale die analoge Signalverarbeitung gänzlich ablösen kann. Dies ist oft nicht (ökonomisch) sinnvoll oder schon aus physikalischen Gründen nicht möglich, wie etwa bei der Verarbeitung hochfrequenter Signale.

Zur Illustration der Vor- und Nachteile sollen in der (keine Vollständigkeit beanspruchenden) Tabelle 1.2 digitale und analoge Systeme bezüglich einiger grundlegender Systemeigenschaften gegenübergestellt werden.

Ein wichtiger Aspekt im Bezug auf die Frage, wie technische Systeme analysiert und entworfen werden können, ist die mathematische und simulative Modellierbarkeit der Systeme. Sind Systeme ausreichend gut mathematisch

⁸ Im Grunde müsste man $\mathfrak{S}(x(t))(t)$ bzw. $\mathfrak{S}(x_n)_n$ schreiben, um die Zeitabhängigkeit sowohl des Eingangssignals als auch des Ausgangssignals zu kennzeichnen. Wir werden diese sehr schwerfällige, unübersichtliche und auch missverständliche Notation jedoch nicht verwenden, sondern je nach Zusammenhang eine der Schreibweisen aus (24.1).

Tabelle 1.2: Einige Eigenschaften digitaler und analoger Systeme

Eigenschaft	analoges System	digitales System
Genauigkeit	begrenzt, kostspielig	unbegrenzt, lineare Kosten
Toleranzen	vorhanden	keine
Temperatur/Alterung	vorhanden	unproblematisch
Rauschen	Bauelemente	Rundungsfehler
Frequenzbereich	unten: begrenzt, oben: unbegrenzt	unten: unbegrenzt, oben: begrenzt
Hochintegration	bedingt	uneingeschränkt

modellierbar, so kann ihr Systemverhalten einigermaßen präzise bestimmt und vorhergesagt werden.

Eine herausragende Stellung nehmen gerade bezüglich dieses Aspektes die so genannten *linearen Systeme* ein.

1.3.1 Lineare Systeme

Wir werden uns im Folgenden fast ausschließlich mit dieser speziellen, mathematisch sehr gut behandelbaren Systemklasse auseinandersetzen. Obwohl viele reale Systeme, etwa alle die in Abschnitt 1.1 vorgestellten, bei näherer Betrachtung die Bedingungen für ein lineares Systemverhalten nicht erfüllen, spielen die *linearen Systeme* in der Praxis eine sehr bedeutende Rolle. Dies liegt daran, dass die Linearitätsbedingungen bei geeigneter Betrachtungsweise oft in guter Näherung approximativ erfüllt sind.

Lineare Systeme sind wie folgt definiert:

Unter einem *linearen System* versteht man ein System, für das - bezüglich seiner Wirkung auf Signale - das *Verstärkungsprinzip* und das *Superpositionsprinzip* gelten.

Da wir Systeme als Transformationen von Signalen auffassen und Signale (mathematisch) nichts weiter als Funktionen sind, entspricht die obige Definition exakt der aus der Mathematik bekannten Linearitätsdefinition. Ein *lineares System* wird also mathematisch repräsentiert durch eine *lineare Abbildung* im Signalraum, genauer:

Seien $x(t)$, $x_1(t)$ und $x_2(t)$ beliebige Signale, $a \in \mathbb{R}$ und $\mathfrak{S}$ ein System (Transformation von Signalen).

Dann heißt $\mathfrak{S}$ ein **lineares System**, wenn stets gilt:

$$\mathfrak{S}(a \cdot x(t)) = a \cdot \mathfrak{S}(x(t)) \quad (26.1)$$

$$\mathfrak{S}(x_1(t) + x_2(t)) = \mathfrak{S}(x_1(t)) + \mathfrak{S}(x_2(t)) \quad (26.2)$$

Die Gleichung (26.1) repräsentiert dabei das angesprochene **Verstärkungsprinzip** und Gleichung (26.2) das **Superpositionsprinzip** für analoge Systeme. Entsprechende Gleichungen gelten für digitale Systeme (s. Kapitel 4, Seite 248).

Aus der Mathematik wohl bekannte Beispiele für solche lineare Funktionstransformationen sind Integration und Differentiation. Diese Operationen können somit auch als lineares System aufgefasst werden. Exemplarisch soll dies für den Integrierer und sein elektrotechnisches Pendant, den Kondensator, durchgerechnet werden:

Übung 1

1.4 Beispiel (Linearität des Kondensators (Integrierer))

Wir betrachten zunächst die in Abbildung 1.16 dargestellte einfache Kondensatorschaltung.

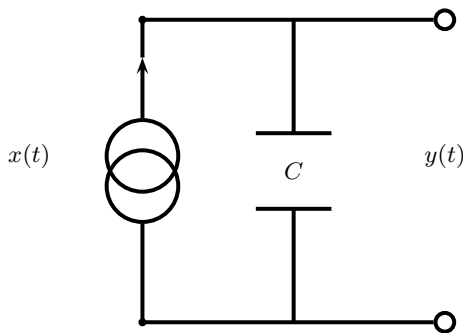


Abb. 1.16: Einfache Kondensatorschaltung

Wir fassen zunächst den Kondensator als **System** auf, welches den Quellstrom $x(t)$ (Eingangssignal des Systems) in die am Kondensator abgegriffene Spannung $y(t)$ (Ausgangssignal des Systems) überführt.

Nach den aus der Elektrotechnik bekannten Gesetzen für Strom und Spannung am Kondensator gilt:

$$y(t) = \mathfrak{S}(x(t)) = \frac{1}{C} \int_0^t x(\tau) d\tau. \quad (26.3)$$

Mathematisch kann das System also als eine Abbildung

$$\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$$

betrachtet werden und ist (bis auf die Konstante $\frac{1}{C}$) nichts anderes als die fortlaufende Integration des Signals $x(t)$ ab dem Punkt $t = 0$.

Zum Nachweis der Linearität dieses Systems muss nach Definition nun nachgerechnet werden, dass für jedes $x(t)$ und jedes $a \in \mathbb{R}$ (Verstärkungsfaktor) gilt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(a \cdot x(t)) &= \frac{1}{C} \int_0^t a \cdot x(\tau) d\tau \\ &= a \cdot \mathfrak{S}(x(t)) = a \cdot \frac{1}{C} \int_0^t x(\tau) d\tau.\end{aligned}\tag{27.1}$$

Weiterhin sollte nach Gleichung (26.2) gelten:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(x_1(t) + x_2(t)) &= \frac{1}{C} \int_0^t [x_1(\tau) + x_2(\tau)] d\tau \\ &= \mathfrak{S}(x_1(t)) + \mathfrak{S}(x_2(t)) = \frac{1}{C} \int_0^t x_1(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t x_2(\tau) d\tau.\end{aligned}\tag{27.2}$$

Dieses sind jedoch genau die aus der Mathematik bekannten Rechenregeln für die Integration! _____ ■

In ähnlicher Weise lässt sich über die Definition der Differentiation auch die Linearität des Differenzierers

$$y(t) = \mathfrak{S}(x(t)) = \frac{d}{dt}x(t)\tag{27.3}$$

nachweisen (s. Übung 1).

Übung 1

1.3.2 Nichtlineare Systeme

Alle Systeme $\mathfrak{S}$, die eine der Gleichungen (26.1) oder (26.2) *nicht* erfüllen, sind per Definition *nichtlineare Systeme*.

Betrachten wir hierzu wiederum ein einfaches physikalisches Beispiel.

1.5 Beispiel (Druck und Volumen in einem Kolben)

Nach dem *Gesetz von Boyle-Mariotte* ist bei konstanter Temperatur in einem Behälter mit beweglichem Kolben (vgl. Abbildung 1.17) das Produkt aus Volumen V mal Druck P konstant.

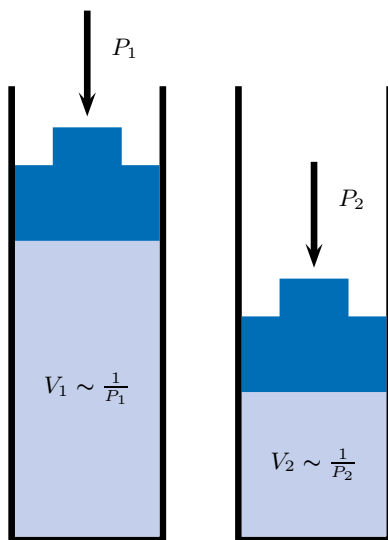


Abb. 1.17: Isotherme Druck/Volumenänderung in einem Behälter

Der Zusammenhang kann mathematisch wie folgt ausgedrückt werden:

$$V = K \cdot \frac{1}{P}. \quad (28.1)$$

Dabei ist K eine Proportionalitätskonstante.

Untersucht man nun, wie sich das Volumen in Abhängigkeit des mit dem Kolben erzeugten Drucks *zeitlich* ändert, so kann man den Versuchsaufbau als *System* auffassen, dessen *Eingangssignal* der (zeitlich veränderliche) Druck $P(t)$ und dessen *Ausgangssignal* das (zeitlich veränderliche) Volumen $V(t)$ bildet:

$$V(t) = \mathfrak{S}(P(t)) = K \cdot \frac{1}{P(t)}. \quad (28.2)$$

Es kann leicht nachgerechnet werden, dass dieses System **nicht** linear ist. Dazu genügt es, nachzuweisen, dass mindestens *eines* der Rechengesetze (26.1) oder (26.2) verletzt ist.

Betrachten wir beispielsweise das Verstärkungsprinzip (26.1). Bei Gültigkeit müsste beispielsweise für die Verstärkung $a = 2$ (doppelter Druck) für alle $t \in \mathbb{R}$ gelten:

$$K \cdot \frac{1}{2 \cdot P(t)} = \mathfrak{S}(2 \cdot P(t)) \stackrel{!}{=} 2 \cdot \mathfrak{S}(P(t)) = 2 \cdot K \cdot \frac{1}{P(t)}. \quad (28.3)$$

Das ist offensichtlich schon aus rein arithmetischen Gründen nicht der Fall und auch physikalisch widersinnig, da dies doppeltes Volumen statt halbiertem Volumen bedeuten würde. Das System ist also nichtlinear. ■

Nichtlineare Systeme sind in der Praxis leider die Regel (Transistoren sind etwa hierfür ein weiteres Beispiel). Dies ist insofern ungünstig, als sich nichtlineare Systeme mathematisch wesentlich schlechter analysieren lassen als lineare.

Man behilft sich dann meist damit, dass man Nichtlinearitäten um **Arbeitspunkte** herum *linearisiert*. Betreibt man das System in einem solchen **Arbeitspunkt**, so verhält sich das System annähernd linear. Ist dies nicht möglich oder sinnvoll, hilft meist nur eine Computersimulation.

Die Technik der *Linearisierung* ist also oft das einzige Mittel, welches es uns erlaubt, Systeme mit Nichtlinearitäten analytisch zu beschreiben.

Übung 2

Wir verdeutlichen diese Technik der *Linearisierung*, die mathematisch auf eine Taylorapproximation 1. Ordnung hinausläuft, anhand des vorangegangenen Beispiels:

Übung 3

Übung 4

1.6 Beispiel (Linearisierung des Druck/Volumen-Systems)

Wir betrachten das System $\mathfrak{S}$ aus Gleichung (28.2). Das System ordnet jedem Signal $P(t)$ ein Signal $V(t)$ durch die Vorschrift

$$\mathfrak{S} : P(t) \mapsto V(t) = K \cdot \frac{1}{P(t)}$$

zu.

Halten wir zunächst fest, dass man das System natürlich in einem Bereich ansteuern muss, für den die nichtlineare Operation „Invertieren des Drucks“ auch definiert ist.

Betrachtet man etwa einen Eingangsbereich mit Amplitudenwerten in der Nähe von $P(t) \approx 2$ (**Arbeitspunkt**) und entwickelt man die Übertragungskennlinie

$$f(x) = K \cdot \frac{1}{x} \quad (29.1)$$

in diesem Arbeitspunkt ($x = 2$) in ein Taylorpolynom vermöge

$$K \cdot \frac{1}{x} = \frac{K}{2} - \frac{K}{4}(x - 2) + O((x - 2)^2), \quad (29.2)$$

so erkennt man, dass die Kennlinie im Arbeitspunkt durch die *lineare*⁹ **Kennlinie**

$$L(x) = \frac{K}{2} - \frac{K}{4}(x - 2) = K \left(1 - \frac{1}{4}x \right) \quad (29.3)$$

⁹ Im strengen Sinne ist nur das System mit der Kennlinie $-\frac{K}{4}x$ linear! Im Sprachgebrauch werden allerdings auch Systeme als linear bezeichnet, die, wie im vorliegenden Beispiel, das Ausgangssignal mit einem additiven Term beaufschlagen (so genannte *inkrementell lineare Systeme*).

approximiert wird. Der Fehler, den man bei geringer Abweichung von Arbeitspunkt macht, lässt sich mit dem quadratischen Restglied abschätzen. Steuert man nun das System mit Signalen an (d.h. erzeugt man entsprechende Drücke), deren Amplituden in der Nähe von $P(t) \approx 2$ liegen, so verhält sich das System annähernd linear und die Verzerrungen sind gering. Wir können diese Effekte sehr schön mit Hilfe einer Simulink-Simulation nachvollziehen. Die Abbildung 1.18 zeigt das Simulink-System **s_lininv.slx** zur Simulation der Linearisierung der Nichtlinearität $\frac{K}{x}$.

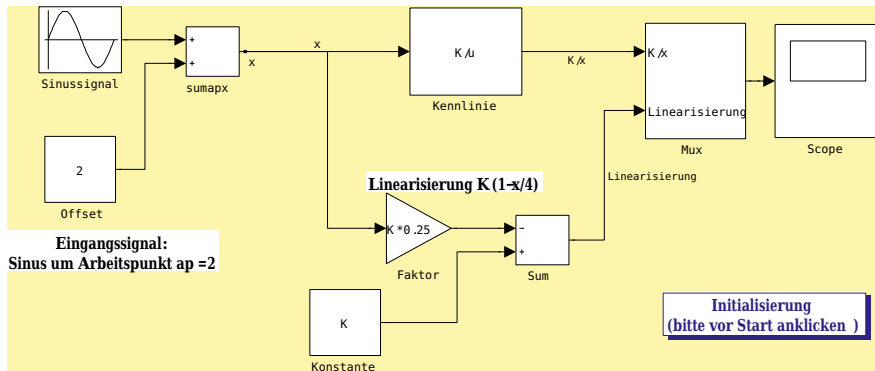


Abb. 1.18: Simulink-System zur Simulation einer Linearisierung von $\frac{K}{x}$ um einen Arbeitspunkt

In diesem Simulink-System wird eine sinusförmige Anregung der Form

$$x(t) = a_p + a \cdot \sin(2\pi f t)$$

um einen Arbeitspunkt a_p herum erzeugt. Die Amplitude a kann dabei variiert werden, um den Effekt der (Nicht-)Linearität des Systems in Abhängigkeit des Abstands der Werte von $x(t)$ vom Arbeitspunkt zu studieren.

Die Abbildung 1.19 zeigt das Ergebnis der Simulation für die Eingangssignale $x(t) = 2 + 0.1 \cdot \sin(2\pi t)$ (Betreiben im Arbeitspunkt - linke Grafik) und $x(t) = 2 + 1 \cdot \sin(2\pi t)$ (Übersteuerung des linearen Arbeitsbereiches, nichtlineares Verhalten - rechte Grafik).

Im ersten Fall reagiert das System genau wie seine Linearisierung mit einer entsprechenden Schwingung gleicher Frequenz¹⁰ am Ausgang. Die Signale sind praktisch nicht zu unterscheiden, die Approximation des nichtlinearen Systems durch seine Linearisierung ist also sehr gut.

Im zweiten Fall ist deutlich die Verzerrung des Ausgangssignals des nichtlinearen Systems gegenüber dem Ausgangssignal der Linearisierung zu sehen. Ein Ersetzen des nichtlinearen Systems durch sein linearisiertes Pendant ist in diesem Falle also nicht mehr gerechtfertigt.

¹⁰ Wir werden später zeigen, dass dies typisch für lineare Systeme ist!

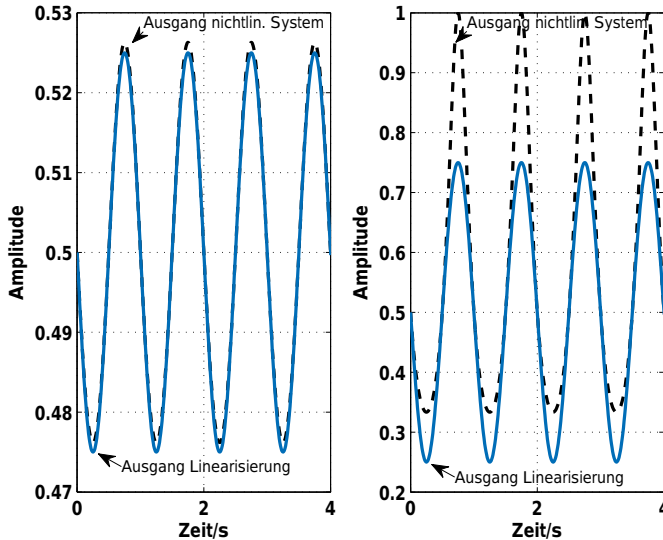


Abb. 1.19: Vergleich eines Systems mit Kennlinie $\frac{K}{x}$ und einer Linearisierung um einen Arbeitspunkt

Nichtlinearitäten sind jedoch nicht nur unerwünscht. So können mit speziellen Nichtlinearitäten gezielt Effekte erzeugt werden, die mit linearen Systemen nicht oder nur schwer zu erzeugen sind. Ein Beispiel ist hierfür etwa die Modulation von Signalen zu Übertragungszwecken. Bei der Erzeugung von Digitalsignalen werden Transistoren bewusst im nichtlinearen Bereich betrieben und bei der (analogen) Demodulation von frequenzmodulierten Signalen werden Begrenzer verwendet, nichtlineare Bauelemente, welche Signale oberhalb und unterhalb einer Schwelle abschneiden.

1.4 Übungsaufgaben

Übung 1 (Lösungsband Seite 1)

Untersuchen Sie, ob die durch die nachfolgenden Gleichungen beschriebenen Systeme

$$\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$$

linear sind:

- (a) $y(t) = \dot{x}(t),$
- (b) $y(t) = \int_{-\infty}^{t-1} x(\tau) d\tau.$

Übung 2 (Lösungsband Seite 2)

Betrachten Sie das System $\mathfrak{S}$ mit

$$\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t) = \sqrt{x(t)}. \quad (32.1)$$

- Weisen Sie nach, dass es sich um ein **nichtlineares** System handelt.
- Linearisieren Sie das System im Arbeitspunkt $x_0 = 1$ und beschreiben Sie das resultierende linearisierte System $\mathfrak{S}^*$ analytisch, das heißt durch eine Gleichung.
- Entwerfen Sie ein Simulink-System, welches $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^*$ miteinander vergleicht und führen Sie damit Experimente durch, bei denen Sie die Systeme einmal dicht um den Arbeitspunkt und zum anderen in einem großen Bereich um den Arbeitspunkt mit einem Sinussignal ansteuern. Stellen Sie die Ergebnisse grafisch dar.

Übung 3 (Lösungsband Seite 4)

Ein System $\mathfrak{S}$ habe das Ein-Ausgangs-Verhalten

$$y(t) = t \cdot x^2(t). \quad (32.2)$$

- Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}$ kein lineares System ist.
- Linearisieren Sie das System im Arbeitspunkt $x(t) \equiv 1$.

Übung 4 (Lösungsband Seite 5)

Eine Diode hat im Durchlassbereich die nichtlineare Kennlinie

$$I_D = I_S \cdot (e^{\frac{V_D}{V_T}} - 1). \quad (32.3)$$

Dabei ist I_D der Diodenstrom, V_D die angelegte Spannung, V_T die Temperaturspannung und I_S der Sperrsättigungsstrom [49].

- Plotten Sie mit Hilfe von MATLAB die Diodenkennlinie im Durchlassbereich für die Werte $I_S = 10^{-15}$ A, $V_T = 25$ mV und den Arbeitspunkt $V_D = 0.7$ V.
- Linearisieren Sie die Kennlinie im Arbeitspunkt.
- Plotten Sie mit MATLAB zur Probe Ihres Ergebnisses die Diodenkennlinie und die Linearisierung.
- Entwerfen Sie ein Simulink-System, welches die Diode mit Hilfe eines sinusförmigen Eingangssignals ansteuert. Schätzen Sie dabei anhand der Grafik für die Linearisierung ab, wie groß die Amplitude des Sinus (um den Arbeitspunkt) sein muss, damit die Übertragung noch annähernd linear ist.

2 Analoge Signale und Systeme

Gegenstand dieses Kapitels ist die Darstellung der Methoden, mit denen *analoge* Systeme zur Verarbeitung *zeitkontinuierlicher Signale* beschrieben und analysiert werden können. Dabei werden wir uns auf die Klasse der *linearen zeitinvarianten Systeme* konzentrieren, da diese wegen ihrer guten mathematischen Behandelbarkeit in der Praxis eine zentrale Rolle spielen. Zur Einführung in die Problematik und zur Erläuterung der grundlegenden Begriffe diskutieren wir zunächst einfache Beispiele aus der Elektrotechnik und der Mechanik.

2.1 Einführungsbeispiele

Es soll zunächst eine grundlegende elektrotechnische Schaltung diskutiert werden, deren Eigenschaften sich sehr einfach mathematisch analysieren lassen.

2.1 Beispiel (Der RC-Tiefpass)

Betrachten wir zunächst das in Abbildung 2.1 wiedergegebene Schaltbild eines so genannten *RC-Tiefpasses*.

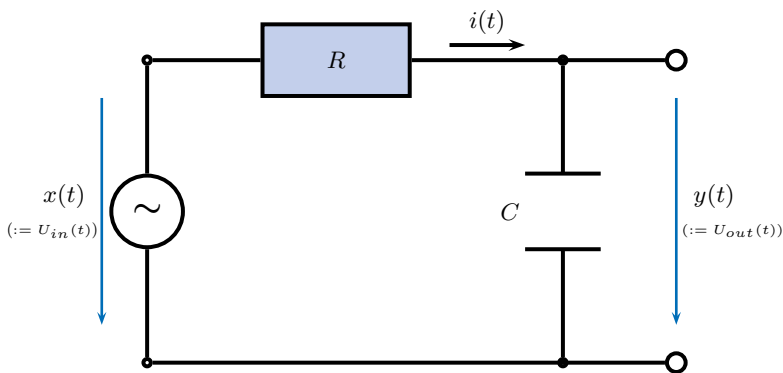


Abb. 2.1: Schaltbild eines RC-Tiefpass'

Wir fassen den RC-Tiefpass im Folgenden als *System*

$$\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$$

auf und interessieren uns für die Abhängigkeit der Ausgangsspannung $y(t)$ (Ausgangssignal oder *Systemantwort* von $\mathfrak{S}$) in Abhängigkeit von der angelegten Eingangsspannung $x(t)$ (Eingangssignal oder *Systemerregung* von $\mathfrak{S}$).

Die Ausgangsspannung $y(t)$ ist die Spannung am Kondensator, für die bekanntlich folgende Beziehung gilt [49]:

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + y(0). \quad (34.1)$$

Der Term $y(0)$ repräsentiert dabei den Anfangszustand des Systems, im vorliegenden Fall also die Vorspannung des Kondensators zur Zeit 0 (Start der Beobachtung), welcher natürlich berücksichtigt werden muss.

Die Ableitung beider Seiten von Gleichung (34.1) liefert zunächst:

$$C \cdot \dot{y}(t) = i(t). \quad (34.2)$$

Nach der Spannungsteilerregel und dem Ohmschen Gesetz erhält man mit der am Widerstand R abfallenden Spannung $U_R(t)$ die Beziehung:

$$x(t) = U_R(t) + y(t) = R \cdot i(t) + y(t). \quad (34.3)$$

Mit Hilfe von (34.2) und der Definition der so genannten **Zeitkonstanten** $T := RC$ erhält man die Differentialgleichung:

$$T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = x(t). \quad (34.4)$$

Diese **lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten** beschreibt vollständig das Verhalten des Systems **im Zeitbereich**.

Die Darstellung ist zunächst allerdings lediglich eine **implizite Beschreibung** des Ausgangssignals $y(t)$ in Abhängigkeit vom Eingangssignal $x(t)$, da die Lösung der Gleichung (eben $y(t)$) nicht in direkter Abhängigkeit vom Eingangssignal $x(t)$ angegeben ist.

Will man $y(t)$ **explizit** in Abhängigkeit von $x(t)$ ausdrücken, so muss die Differentialgleichung gelöst werden. Für die Lösung einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung der Form (34.4) gilt bekanntlich [17]:

$$y(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \left[\frac{1}{T} \int_0^t x(\tau) e^{\frac{\tau}{T}} d\tau \right] e^{-\frac{t}{T}}. \quad (34.5)$$

Die Konstante K entspricht der Anfangsbedingung $y(0)$, wie man durch Einsetzen von $t = 0$ in die Gleichung sofort sieht. Der Anteil $K \cdot e^{-\frac{t}{T}}$ ist der so genannte **homogene Lösungsanteil** $y_{\text{hom}}(t)$, das heißt die Lösung der (homogenen) Differentialgleichung

$$T\dot{y}(t) + y(t) = 0. \quad (34.6)$$

$y_{\text{hom}}(t)$ beschreibt das Ausgangssignal des Systems *ohne äußere Erregung*, also im vorliegenden Beispiel faktisch die exponentielle Entladung des Kondensators falls dieser vorgespannt ist und keine Eingangsspannung angelegt wird.

Die allgemeine Lösung (34.5) lässt sich dann unter Verwendung der Tatsache, dass das Eingangssignal $x(t)$ vor dem Zeitpunkt $t = 0$ als 0 angenommen werden kann, wie folgt schreiben:

$$y(t) = y_{\text{hom}}(t) + \frac{1}{T} \int_{-\infty}^t x(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau. \quad (35.1)$$

Definiert man nun

$$h(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{1}{T} e^{-\frac{x}{T}} & \text{für } x \geq 0, \end{cases} \quad (35.2)$$

so kann Gleichung (35.1) in der Form

$$y(t) = y_{\text{hom}}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (35.3)$$

geschrieben werden. Gleichung (35.3) ist eine *explizite Darstellung* des Systemverhaltens *im Zeitbereich*.

Die Verallgemeinerung der ursprünglichen Integralgleichung auf die Form von (35.3) mag zunächst umständlich und sinnlos erscheinen, bekommt jedoch im Folgenden zentrale Bedeutung, da dies die *allgemeine Darstellung einer großen Klasse* linearer Systeme ist, die die gleichen systemtheoretischen Eigenschaften wie der RC-Tiefpass besitzen. ■

Im Hinblick auf die Allgemeinheit der Schlussfolgerungen, die wir im Folgenden aus der Betrachtung dieses Beispiels ziehen werden, ist es instruktiv, ein weiteres, ähnlich gelagertes Beispiel aus der Mechanik zu analysieren.

2.2 Beispiel (Feder-Dämpfer-System)

In Abbildung 2.2 ist schematisch ein (masseloses) Feder-Dämpfer-System wiedergegeben. Eine Feder befindet sich dabei zwischen einer Boden- und einer Deckplatte und wird durch eine äußere, auf die Deckplatte wirkende Kraft gestaucht oder gestreckt. Der Vorgang ist gedämpft, was in der schematischen Darstellung durch das Dämpfersymbol angedeutet wird.

Wir fassen diese Konfiguration erneut als **System**

$$\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$$

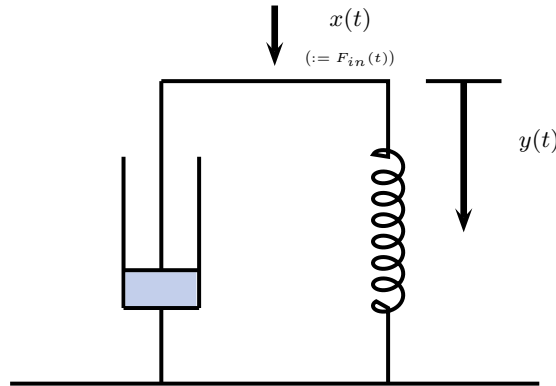


Abb. 2.2: Feder-Dämpfer-System

auf und interessieren uns für die Auslenkung $y(t)$ (Ausgangssignal von $\mathfrak{S}$) aus der Ruhelage in Abhängigkeit von der auf die Deckplatte wirkenden Kraft $x(t)$ (Eingangssignal von $\mathfrak{S}$).

Nach dem Hook'schen Gesetz wirkt die Federkraft

$$F_c(t) = c \cdot y(t) \quad (36.1)$$

der anregenden Kraft $x(t)$ entgegen. Dabei ist c N/m die so genannte **Federkonstante**. Ebenso wirkt die Dämpfung

$$F_d(t) = d \cdot \dot{y}(t), \quad (36.2)$$

die hier als **geschwindigkeitsproportional** angenommen wird, der anregenden Kraft $x(t)$ entgegen. Hier bezeichnet d Ns/m die so genannte **Dämpfungskonstante**.

Man erhält aus dem Kräftegleichgewicht

$$x(t) - F_d(t) - F_c(t) = 0 \quad (36.3)$$

mit Hilfe von (36.1) und (36.2) die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{c} \cdot \dot{y}(t) + y(t) = \frac{1}{c} x(t). \quad (36.4)$$

Diese **lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten** beschreibt wiederum vollständig das Verhalten des Systems **im Zeitbereich**. Sie ist formal äquivalent zur Differentialgleichung (34.4) des RC-Tiefpasses aus Beispiel 2.1 und stellt erneut eine **implizite Beschreibung** des Ausgangssignals $y(t)$ in Abhängigkeit vom Eingangssignal $x(t)$ dar.

Für die *explizite* Lösung $y(t)$ erhält man (vgl. Gleichung (34.5)):

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) \cdot e^{-\frac{c}{d}t} + \left[\frac{c}{d} \int_0^t \frac{1}{c} x(\tau) e^{\frac{c}{d}\tau} d\tau \right] e^{-\frac{c}{d}t} \\ &= y(0) \cdot e^{-\frac{c}{d}t} + \frac{1}{d} \int_0^t x(\tau) e^{-\frac{c}{d}(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (37.1)$$

Setzt man nun wiederum

$$h(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{1}{d} e^{-\frac{c}{d}x} & \text{für } x \geq 0, \end{cases} \quad (37.2)$$

so kann diese Gleichung erneut in der allgemeinen Form

$$y(t) = y_{\text{hom}}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (37.3)$$

geschrieben werden. ■

Anhand der beiden Beispielsysteme lassen sich wesentliche systemtheoretische Eigenschaften diskutieren. Die daraus resultierenden Begriffe sind für die nachfolgende Diskussion von elementarer Bedeutung.

2.2 Grundlegende Systemeigenschaften

Linearität

Setzt man in den beiden Beispielen 2.1 und 2.2 jeweils die Anfangsbedingung $y(0)$ auf 0, betrachtet man also **Systeme**, die zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) „in Ruhe“ sind, so ist $y_{\text{hom}}(t) = 0$ und es ergibt sich mit Hilfe der verallgemeinerten Darstellungen (35.3) und (37.3) eine Darstellung des Systemverhaltens in der (einheitlichen) Form:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (37.4)$$

Übung 11

Aus der Linearität des Integrals folgt dann aber sofort, dass in beiden Fällen für alle $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(a \cdot x)(t) &= a \cdot \mathfrak{S}(x)(t), \\ \mathfrak{S}(x_1 + x_2)(t) &= \mathfrak{S}(x_1)(t) + \mathfrak{S}(x_2)(t). \end{aligned}$$

Die Systeme sind somit **linear**!

Es ist im Übrigen oft leicht zu prüfen, ob ein System **nicht** linear ist. Die **Lineare Algebra** lehrt, dass lineare Abbildungen die 0 (im vorliegenden Fall also das Signal $0(t) = 0$) stets in die 0 (hier also das Signal $0(t)$) abbilden müssen. Auf unsere Situation übertragen liefert dies die **notwendige Linearitätsbedingung**:

$$\mathfrak{S}(0)(t) = 0(t). \quad (38.1)$$

Inkrementelle Linearität

Wir können dieses Kriterium nun unmittelbar auf die Beispielsysteme für den Fall anwenden, dass die Systeme nicht „in Ruhe“ sind. Offensichtlich ist im Fall $y(0) \neq 0$ das System **nicht** mehr linear, denn es gilt:

$$\mathfrak{S}(0)(t) = y_{\text{hom}}(t) \neq 0(t). \quad (38.2)$$

Trotzdem ist das System natürlich sehr ähnlich zu einem linearen System. Es unterscheidet sich ja nur durch ein zusätzlich aufaddiertes Signal am Ausgang.

Für Systeme mit dieser Eigenschaft definieren wir:

Sei

$$\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$$

ein System und $\mathfrak{L}$ ein *lineares* System, sowie $\tilde{y}(t)$ ein Signal mit der Eigenschaft:

$$\mathfrak{S}(x)(t) = \mathfrak{L}(x)(t) + \tilde{y}(t) \quad \text{für alle } x(t). \quad (38.3)$$

Dann heißt $\mathfrak{S}$ **inkrementell linear**.

Die Bedeutung dieser inkrementell linearen Systeme liegt darin, dass sie mit den gleichen Methoden wie die linearen Systeme untersucht werden können, da ihre wesentlichen Eigenschaften vom linearen Anteil und nicht vom additiven Term abhängen.

Zeitinvarianz

Das RC-Tiefpass-System und das Feder-Dämpfer-System haben noch eine weitere charakteristische Eigenschaft. Betrachten wir zunächst die in Abbildung 2.3 dargestellten Ein- und Ausgangssignale $x(t)$ und $y(t)$ des Feder-Dämpfer-Systems. In beiden Fällen ist die Auslenkung der Feder als Reaktion auf eine spontan einsetzende konstante äußere Kraft dargestellt.

Das zu Grunde liegende Experiment kann leicht mit Hilfe des Simulink-Systems **s_FederVZ1.slx** durchsimuliert werden.

Abbildung 2.3 zeigt das Ergebnis des Experiments für zwei verschiedene Zeitpunkte ($t = 1$ und $t = 3$), zu denen die Kraft einsetzt.

Man erkennt, dass das System im zweiten Fall mit der gleichen Antwort (Auslenkung) reagiert, allerdings entsprechend um 2 Zeiteinheiten später.

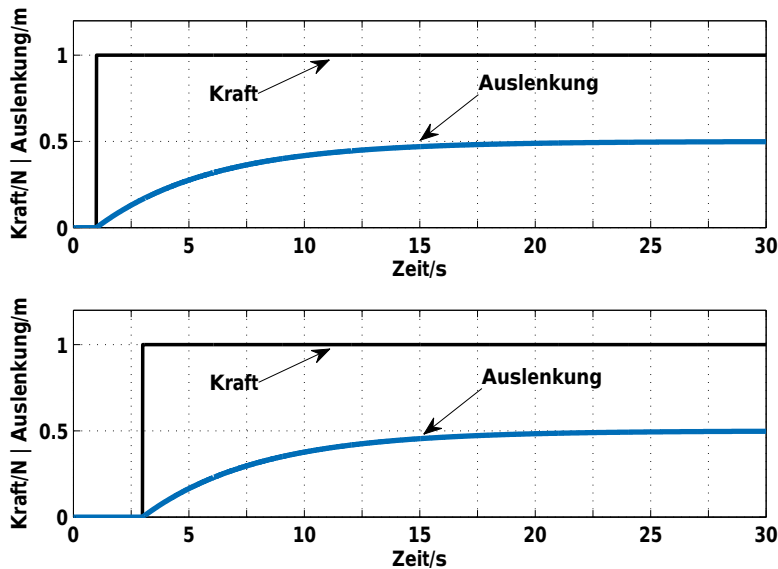


Abb. 2.3: Ein- und Ausgangssignal des Feder-Dämpfer-Systems aus Abbildung 2.2 für zwei unterschiedliche Anfangszeitpunkte der Krafteinwirkung

Dies gilt natürlich für allgemeine Verzögerungen h und jedes Eingangssignal ebenso. Verzögert man ein Eingangssignal $x(t)$ um einen Zeitraum h , das heißt, gibt man statt des Signals $x(t)$ das Signal $x_h(t)$ mit

$$x_h(t) := x(t - h) \quad (39.1)$$

Übung 7

auf den Systemeingang, so erhalten wir eine entsprechend verzögerte Wirkung.

Rechnerisch ergibt sich dies mit der allgemeinen Darstellungsform (37.3) des Ein-Ausgangs-Verhaltens (beachte $y_{\text{hom}}(t) = 0!$)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (39.2)$$

und den Substitutionen

$$\tau' = \tau - h, \quad \tau = \tau' + h, \quad d\tau' = d\tau.$$

Es folgt nämlich für das Ausgangssignal $\tilde{y}(t)$ des um h Zeiteinheiten verzögerten Eingangssignals $x_h(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \mathfrak{S}(x_h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_h(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - h) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau') h([t - h] - \tau') d\tau' \\ &= y(t - h) = \mathfrak{S}(x)(t - h). \end{aligned} \quad (40.1)$$

Somit ist also auch das Ausgangssignal um h Zeiteinheiten verzögert.

Für Systeme mit dieser Eigenschaft definieren wir:

Sei

$$\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$$

ein System mit der Eigenschaft:

$$\mathfrak{S}(x_h)(t) = y(t - h) = \mathfrak{S}(x)(t - h) \quad \forall h \geq 0. \quad (40.2)$$

Dann heißt $\mathfrak{S}$ **zeitinvariant**.

Übung 6

Zeitinvariante Systeme zeichnen sich also dadurch aus, dass sie unabhängig vom Startzeitpunkt der Beobachtung auf gleiche Eingangssignale mit gleichen Ausgangssignalen reagieren. Eine physikalisch sinnvolle und wünschenswerte Eigenschaft!

Es ist an dieser Stelle interessant zu bemerken, dass jedes inkrementell lineare System, welches durch eine Anfangsbedingung $K \neq 0$ gegeben ist, diese Eigenschaft zunächst einmal **nicht** hat.

Dies ist beispielsweise mit Hilfe des Eingangssignals $x(t) = 0(t)$ unmittelbar einzusehen. Jede Verzögerung des Eingangssignals $0(t)$ wäre wieder $0(t)$! Das inkrementell lineare System reagiert aber immer mit der Antwort $y_{hom}(t) \neq 0(t)$ und nicht mit einer verzögerten Version von $0(t)$. Für *echt* lineare Systeme spielt diese Überlegung keine Rolle, da stets $0(t)$ am Ausgang erscheint, welches mit jeder verzögerten Version von sich selbst natürlich übereinstimmt.

Physikalisch ist dieser Effekt unmittelbar einzusehen. Der inkrementelle Anteil hängt ja mit dem Anfangszustand des Systems (Vorspannung des Kondensators bzw. Anfangsauslenkung der Feder in den Beispielen) zusammen.

Der Anfangszustand aber „weiß“ überhaupt nichts vom Eingangssignal. Das System muss auf ihn immer schon ab Zeitpunkt $t = 0$ reagieren (Entladung des Kondensators, Entspannung der Feder), egal, ob das Eingangssignal verzögert ankommt oder nicht.

BIBO-Stabilität

Die Beispielsysteme haben noch eine weitere charakteristische Eigenschaft. Betrachten wir ihre Wirkungsweise für **beschränkte Signale**. Dies sind Signale $x(t)$ mit der Eigenschaft:

$$\exists M > 0 \quad \text{mit} \quad |x(t)| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (41.1)$$

Wir schließen somit Eingangssignale wie $x(t) = e^t$, welche über alle Grenzen wachsen, für unsere Betrachtung aus.

Im Beispiel des RC-Tiefpasses folgt dann etwa aus der Gleichung (35.1):

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \frac{1}{T} \int_{-\infty}^t |x(\tau)| e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau \leq \frac{M}{T} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau \\ &= \frac{M}{T} \cdot T e^{-\frac{t-\tau}{T}} \Big|_{-\infty}^t = T \frac{M}{T} = M < +\infty. \end{aligned} \quad (41.2)$$

Dies bedeutet, dass auch das Ausgangssignal (durch den Einfluss des Systems) nicht über alle Grenzen wachsen kann.

Diese Eigenschaft ist vor allem in Regelsystemen wünschenswert, wo man verhindern muss, dass sich die Ausgangswerte durch die internen Rückkopplungen (Systemeigenschaft!) aufschaukeln. Es handelt sich hierbei also um eine **Stabilitätseigenschaft**. Wir definieren deshalb:

Sei

$$\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$$

ein System mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} &|x(t)| \leq M < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \implies \quad \exists K > 0 : &|y(t)| \leq K < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (41.3)$$

Dann heißt $\mathfrak{S}$ **BIBO-stabil**.

Die Bezeichnung BIBO ist dabei die Abkürzung der englischen Bezeichnung **Bounded Input Bounded Output**.

Wir werden später Kriterien kennenlernen, anhand derer man die Stabilität eines Systems beurteilen kann, ohne die obige, in der Praxis unhandliche Definition bemühen zu müssen.

Kausalität

Eine weitere Eigenschaft des RC-Tiefpass-Systems ergibt sich aus folgender Überlegung. Man erkennt unmittelbar aus der Formel

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^t x(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau, \quad (42.1)$$

dass der Wert des Ausgangssignals $y(t)$ zur Zeit t **nur** von Werten $x(\tau)$ des Eingangssignals abhängt, für die $\tau \leq t$ ist. Dies folgt unmittelbar aus der oberen Integrationsgrenze. Ähnlich verhält es sich mit dem Feder-Dämpfer-System.

Die Systeme reagieren also nur auf „alte“ Werte des Eingangssignals. Wir definieren:

Ist

$$\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$$

ein System mit der Eigenschaft, dass $y(t)$ für alle t ausschließlich von Werten $x(\tau)$, $\tau \leq t$ des Eingangssignals abhängt (und nicht von zeitlich „späteren“ Werten), so heißt $\mathfrak{S}$ **kausal**.

Diese zunächst einmal selbstverständlich erscheinende Eigenschaft muss für **realisierbare Systeme** natürlich immer gegeben sein. Kein reales System kann auf Werte am Eingang reagieren, die erst „in der Zukunft“ anliegen.

Die Kausalitätsforderung ist aber manchmal analytisch unpraktisch. Insbesondere in der Digitalen Signalverarbeitung werden des Öfteren aus Vereinfachungsgründen nicht-kausale Systeme betrachtet. Diese Systeme macht man dann meist durch eine einfache Verschiebung des Zeitmaßes (mit Hilfe einer Zwischenspeicherung) wieder kausal und damit realisierbar.

Übung 5

LTI-Systeme

Übung 8

Übung 9

Übung 10

Im Laufe der weiteren Kapitel werden wir sehen, dass die systemtheoretischen Eigenschaften der Beispiele aus Abschnitt 2.1 charakteristisch sind für eine ganze Klasse von Systemen, den so genannten **linearen zeitinvarianten Systemen**, kurz **LTI-Systemen**:

Ein System $\mathfrak{S}$ heißt ein **lineares zeitinvariantes System**, kurz **LTI - System** (für Linear Time Invariant System), wenn gilt:

- $\mathfrak{S}$ ist linear,
- $\mathfrak{S}$ ist zeitinvariant.

Die Beschreibung und die Analyse dieser Systemklasse und ihrer Interaktion mit Signalen ist der Hauptgegenstand des Buches.

2.2.1 Übungsaufgaben

Übung 5 (Lösungsband Seite 9)

Untersuchen Sie, ob die durch die nachfolgenden Gleichungen beschriebenen linearen Systeme $\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$ *linear*, *zeitinvariant* und *kausal* sind:

- (a) $y(t) = \dot{x}(t)$,
- (b) $y(t) = \int_{-\infty}^{t-1} x(\tau) d\tau$,
- (c) $y(t) = t \cdot x(t)$,
- (d) $y(t) = x(\frac{1}{t})$.

Übung 6 (Lösungsband Seite 11)

Weisen Sie nach, dass das System $\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$, welches durch die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) + t \cdot y(t) = x(t) \quad (43.1)$$

definiert ist, *linear* aber *nicht zeitinvariant* ist.

Entwerfen Sie eine Simulink-Simulation für dieses System und prüfen Sie die zweite Behauptung anhand eines Beispiels nach.

Übung 7 (Lösungsband Seite 14)

Betrachten Sie folgende Signale¹

- (a) $x_1(t) =: \sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- (b) $x_2(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- (c) $x_3(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \in [0, 1], \\ e^{-(t-1)} & \text{für } t \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

¹ Das Signal $\sigma(t)$ ist die so genannte (Einheits-)Sprungfunktion. Sie wird in den folgenden Abschnitten noch eine große Rolle spielen.

Plotten Sie die Signale sowie jeweils das zugehörige Signal, welches durch Signalverzögerung um $h = 2$ entsteht, im Intervall $[-1, 4]$ mit MATLAB. Geben Sie bitte jeweils eine Formel für den Signalverlauf an.

Übung 8 (Lösungsband Seite 16)

Betrachten Sie das System $\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$, welches durch die Vorschrift

$$y(t) = \sigma(t) \cdot x(t) \quad (44.1)$$

definiert ist.

Prüfen Sie, ob

- (a) das System $\mathfrak{S}$ linear ist,
- (b) das System $\mathfrak{S}$ zeitinvariant ist,
- (c) das System $\mathfrak{S}$ kausal ist,
- (d) das System $\mathfrak{S}$ BIBO-stabil ist.

Übung 9 (Lösungsband Seite 17)

Betrachten Sie das System $\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$, welches durch die Vorschrift

$$y(t) = \sigma(t - 1) + x(t - 1) \quad (44.2)$$

definiert ist.

Prüfen Sie, ob

- (a) das System $\mathfrak{S}$ linear ist,
- (b) das System $\mathfrak{S}$ zeitinvariant ist,
- (c) das System $\mathfrak{S}$ kausal ist,
- (d) das System $\mathfrak{S}$ BIBO-stabil ist.

Übung 10 (Lösungsband Seite 18)

Ein System $\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$ sei für ein $K > 0$ und ein $t_0 > 0$ durch die Gleichung

$$y(t) = K \cdot x(t - t_0) \quad (44.3)$$

definiert.

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}$ ein *LTI-System* ist.

Übung 11 (Lösungsband Seite 19)

Ein System $\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$ sei durch die Gleichung

$$y(t) = \int_0^1 x(t - \tau) d\tau \quad (45.1)$$

definiert.

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}$ ein LTI-System ist und stellen Sie das Systemverhalten mit einer geeignet gewählten Funktion $h(t)$ in der allgemeinen Form

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (45.2)$$

entsprechend Gleichung (35.3) bzw. Gleichung (37.3) dar.

2.3 Signale und LTI-Systeme im Zeitbereich

Im Folgenden werden wir sehen, dass die Beispiele aus Abschnitt 2.1 charakteristisch sind für die Klasse der *linearen zeitinvarianten Systeme*. Im vorliegenden Abschnitt wird untersucht, auf welche Weise (analoge) LTI-Systeme dargestellt und mathematisch beschrieben werden können. Dabei beschränken wir uns zunächst auf eine Darstellung *im Zeitbereich*, d.h. es wird nach einer Darstellung des Systems

$$\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$$

gesucht, die (direkt oder indirekt) einen mathematischen Zusammenhang zwischen den Zeitsignalen $x(t)$ (Eingangssignal) und $y(t)$ (Ausgangssignal) wiedergibt.

Später (Abschnitte 2.4, 2.5) wird gezeigt werden, dass es noch weitere, unter Umständen vorteilhaftere Möglichkeiten gibt, das Systemverhalten darzustellen.

2.3.1 Darstellung mit Differentialgleichungen

Analoge elektrische, mechanische, hydromechanische und thermische Systeme werden i.Allg. durch *Differentialgleichungen* beschrieben. Die Modellierung der einfachen Einführungsbeispiele RC-Tiefpass (Beispiel 2.1) und Feder-Dämpfer-System (Beispiel 2.2) etwa, führte jeweils auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, im ersten Falle (Gleichung (34.6)) auf

$$T\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$$

und im zweiten Falle (Gleichung (36.4)) auf

$$\frac{d}{c} \cdot \dot{y}(t) + y(t) = \frac{1}{c} x(t).$$

Zur besseren Illustration dieses Sachverhalts betrachten wir noch ein weiteres Beispiel, welches Beispiel 2.2 erweitert und zugleich Bezug auf das vereinfachte Vertikaldynamikmodell aus Abbildung 1.2, S. 3 nimmt.

2.3 Beispiel (Feder-Masse-Dämpfer-System)

In Abbildung 2.4 ist schematisch ein Feder-Masse-Dämpfer-System wiedergegeben, welches dem Vertikaldynamikmodell aus Kapitel 1 entspricht. Das System besteht aus **zwei** federgelagerten Massen und wird von unten ausgelenkt. Die Massen sind zugleich der Schwerkraft ausgesetzt. Der Vorgang ist gedämpft, was in der schematischen Darstellung durch das Dämpfersymbol angedeutet wird.

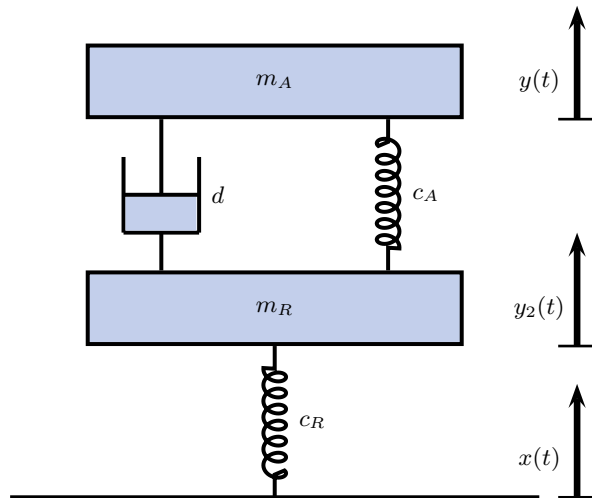


Abb. 2.4: Feder-Masse-Dämpfer-System

Wir fassen diese Konfiguration abermals als **System**

$$\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$$

auf, wobei als Eingangssignal die Auslenkung $x(t)$ von unten fungiert und als Ausgangssignal $y(t)$ die Auslenkung der Masse m_A aus der Ruhelage. Durch Freischneiden der Massen erhält man folgende Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
m_A \ddot{y}_1(t) &= -m_A g - c_A (y_1(t) - y_2(t)) - d (\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)), \\
m_R \ddot{y}_2(t) &= -m_R g + c_A (y_1(t) - y_2(t)) + d (\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) \\
&\quad + c_R (x(t) - y_2(t)).
\end{aligned} \tag{47.1}$$

Dabei ist $y_1(t) := y(t)$ das Ausgangssignal des Systems und $y_2(t)$ die Auslenkung der zweiten Masse m_R . Definiert man die Nulllage der Massen für ein System in Ruhe unter Berücksichtigung der Schwerkraft, so kann diese aus den Bewegungsgleichungen herausgelassen werden und man erhält:

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_1(t) &= -\frac{c_A}{m_A} (y_1(t) - y_2(t)) - \frac{d}{m_A} (\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)), \\
\ddot{y}_2(t) &= \frac{c_A}{m_R} (y_1(t) - y_2(t)) + \frac{d}{m_R} (\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)) \\
&\quad + \frac{c_R}{m_R} (x(t) - y_2(t)).
\end{aligned} \tag{47.2}$$

Eliminiert man die Hilfsgröße $y_2(t)$, so kann das Differentialgleichungssystem (47.2) in eine lineare Differentialgleichung 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten umgewandelt werden²:

$$\begin{aligned}
y^{(4)}(t) + (\beta_2 - \alpha_2) \ddot{y}(t) + (\beta_1 - \alpha_1 + \gamma) \ddot{y}(t) - \gamma \alpha_2 \dot{y}(t) - \gamma \alpha_1 y(t) \\
= -\gamma \alpha_2 \dot{x}(t) - \gamma \alpha_1 x(t).
\end{aligned} \tag{47.3}$$

Die Koeffizienten sind dabei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{c_A}{m_R}, \quad \beta_2 = \frac{d}{m_R}, \\
\alpha_1 &= -\frac{c_A}{m_A}, \quad \alpha_2 = -\frac{d}{m_A}, \quad \gamma = \frac{c_R}{m_R}.
\end{aligned} \tag{47.4}$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe von Simulink in eine Simulation des Feder-Masse-Dämpfer-Systems umgesetzt werden. Die Abbildung 2.5 zeigt das Simulink-System **s_viertelkfzDGL4.slx**, welches die Differentialgleichung (47.3) umsetzt.

Eine Simulation mit den Fahrzeug-Parametern [48]

```

mA = 186;           % Masse A (Aufbau in Kg)
                    % teste z.B. auch 65 Kg
mR = 41;            % Masse R (Rad in Kg)
cA = 41.1*10^3;     % Feder 1 (Aufbau in N/m)
cR = 380*10^3;      % Feder 2 (Rad in N/m)
d = 25.0*10^2;      % Dämpfung (Aufbau in Ns/m)
                    % teste auch gedämpftere Version
                    % 5.833*10^3

```

² Dies ist im Zeitbereich nur sehr schwer durchzuführen. Als sehr nützlich erweisen sich hier die in Abschnitt 2.4 vorgestellten Methoden. Die Herleitung der Gleichung ist daher Gegenstand einer späteren Übungsaufgabe (Übung 37 Seite 142)!

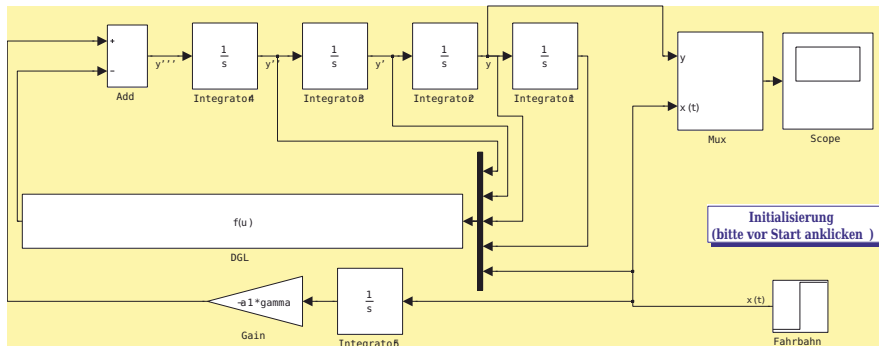


Abb. 2.5: Simulink-System zur Simulation des Feder-Masse-Dämpfer-Systems nach Gleichung (47.3)

liefert die in Abbildung 2.6 dargestellte Reaktion des Fahrzeugaufbaus (Masse m_A) auf einen Sprung von 15 cm Höhe (Bordstein). _____

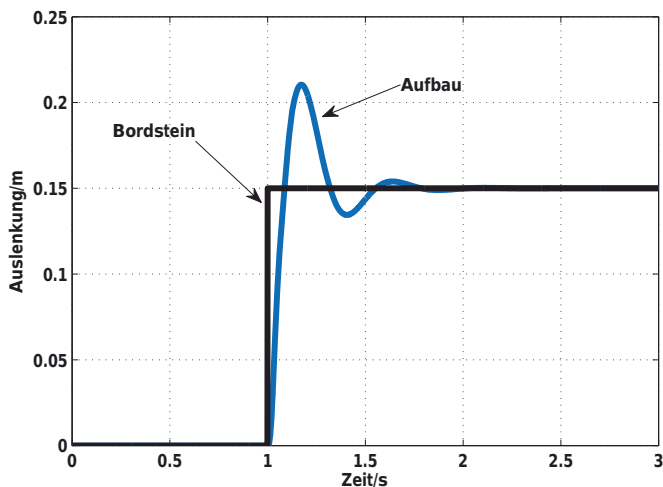


Abb. 2.6: Reaktion des Fahrzeugaufbaus auf Sprung von 15 cm Höhe (Bordstein)

Es wurde bereits in Abschnitt 2.2 nachgewiesen, dass es sich bei den durch die Gleichungen (34.6) und (36.4) beschriebenen Systemen erster Ordnung um LTI-Systeme handelt. Auch das durch Gleichung (47.3) beschriebene Feder-Masse-Dämpfer-System ist *linear* und *zeitinvariant*. Dies ist zum einen

physikalisch plausibel³ und lässt sich zum anderen ganz allgemein mathematisch begründen.

Systeme, welche durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten $a_k, b_j \in \mathbb{R}$ der allgemeinen Form

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{j=0}^M b_j \frac{d^j}{dt^j} x(t) \quad (49.1)$$

beschrieben werden, sind **linear** und **zeitinvariant**, also **LTI-Systeme**.

Dies folgt allgemein aus der Linearität des Differentialoperators und der Linearität der Differentialgleichung sowie der in Übung 5, S. 43 schon nachgewiesenen Zeitinvarianzeigenschaft des Differentialoperators.

2.3.2 Zustandsraumdarstellung

Die Darstellung realer physikalischer LTI-Systeme in Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung (49.1) ist oft nicht leicht zu erhalten und auch nicht immer vorteilhaft. Dies zeigt auch Beispiel 2.3. Offenbar ist die Darstellung (47.1), welche das Systemverhalten in Form *zweier* Differentialgleichungen zweiter Ordnung wiedergibt, einfacher zu modellieren und näher an den physikalischen Gegebenheiten als die Darstellung (47.3).

Ganz allgemein kann eine Modellierung oft besser erfolgen, wenn man die momentanen Zustände der Energiespeicher eines Systems beschreibt und daraus mit Hilfe der Eingangssignale die Systemreaktion beschreibt.

Dies ist die Sichtweise der so genannten **Zustandsraumdarstellung** eines LTI-Systems.

Wir wollen dies noch einmal am Beispiel 2.3 erläutern.

2.4 Beispiel (Feder-Masse-Dämpfer-System)

Dem Gleichungssystem (47.2) entnimmt man, dass das System offenbar vollständig durch **vier** Bewegungszustände der beteiligten schwingenden Massen beschrieben werden kann:

- der momentanen Position $z_1(t) := y(t) = y_1(t)$ der Masse m_A ,
- der momentanen Position $z_2(t) := y_2(t)$ der Masse m_R ,
- der momentanen Geschwindigkeit $z_3(t) := \dot{y}_1(t)$ der Masse m_A ,
- der momentanen Geschwindigkeit $z_4(t) := \dot{y}_2(t)$ der Masse m_R .

³ Ein Fahrzeugaufbau reagiert, lässt man einmal langfristig wirkende Alterungseffekte außer Acht, morgen genauso auf das Überfahren eines Bordsteins gleicher Höhe wie heute, d.h. das System verhält sich **zeitinvariant**

Diese Betrachtungsweise lässt die Modellierung des Systems in Form eines Differentialgleichungssystems 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu. Ohne Betrachtung der äußeren Anregung $x(t)$ erhält man:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= z_3(t), \\ \dot{z}_2(t) &= z_4(t), \\ \dot{z}_3(t) &= \alpha_1 (z_1(t) - z_2(t)) + \alpha_2 (z_3(t) - z_4(t)), \\ \dot{z}_4(t) &= \beta_1 (z_1(t) - z_2(t)) + \beta_2 (z_3(t) - z_4(t)) - \gamma z_2(t).\end{aligned}\tag{50.1}$$

Die ersten beiden Gleichungen ergeben sich dabei aus der Definition der Bewegungszustandsvariablen $z_k(t)$, die letzten beiden aus (47.2) und den Definitionen (47.4).

Schreibt man das Differentialgleichungssystem (50.1) in Matrixform und berücksichtigt dabei auch wieder das Eingangssignal $x(t)$, so erhält man:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_2 \\ \beta_1 & -\beta_1 - \gamma & \beta_2 & -\beta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot x(t).\tag{50.2}$$

Das interessierende Ausgangssignal $y(t)$ stimmt im vorliegenden Fall mit dem Bewegungszustand $z_1(t)$ überein und kann aus dem Vektor $(z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t))$ durch folgende einfache Matrixoperation gewonnen werden:

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix}.\tag{50.3}$$

Damit ist das Systemverhalten vollständig wiedergegeben. ■

Übung 12

Die Gleichungen (50.2) und (50.3) repräsentieren eine so genannte **Zustandsraumdarstellung** (im Zeitbereich) des Systems.

Es hat sich im allgemeinen Fall eingebürgert, bei einer Zustandsraumdarstellung die Zustände $x_k(t)$, $k \leq n$, die Eingangssignale $u_j(t)$, $j \leq m$ und die Ausgangssignale $y_l(t)$, $l \leq p$ zu nennen. Mit diesen Bezeichnungen definiert man:

Ist $\mathfrak{S}$ ein LTI-System, welches durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden kann und ist $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ der Vektor der **Eingangssignale** des Systems, $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ ein (für die Modellierung vollständiger) Vektor von **Zuständen** des Systems und ist $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t))$ der Vektor der **Ausgangssignale** des Systems, so heißt die mit den konstanten Matrizen A, B, C, D definierte Systembeschreibung der Form

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + B \cdot \vec{u}(t), \quad (51.1)$$

$$\vec{y}(t) = C \cdot \vec{x}(t) + D \cdot \vec{u}(t) \quad (51.2)$$

eine **Zustandsraumdarstellung** (im Zeitbereich) des Systems $\mathfrak{S}$.

Die Matrizen A, B, C, D werden **Zustandsmatrizen** genannt. Genauer definiert man:

Die $n \times n$ -Matrix A heißt die **Systemmatrix**, die $n \times m$ -Matrix B heißt die **Eingangsmatrix**, die $p \times n$ -Matrix C heißt die **Ausgangsmatrix** und die $p \times m$ -Matrix D heißt die **Durchgangsmatrix** des Systems $\mathfrak{S}$.

In den bisherigen Beispielen waren die Eingangs- und Ausgangssignale nicht vektoriell, d.h. es war $m = 1$ und $p = 1$. Ferner kam die Durchgangsmatrix D , die eine eventuell vorhandenen direkte Abhängigkeit des Ausgangssignals vom Eingangssignal unabhängig vom Zustand des Systems wiedergeben kann, nicht vor, d.h. es war $D = 0$.

Die hinter der Zustandsraumdarstellung stehende Philosophie der Betrachtungsweise eines Systems kann am besten durch das in Abbildung 2.7 wiedergegebene Signalflussdiagramm veranschaulicht werden[14].

Die inneren Zustände des Systems werden durch eine Rückkopplungsschleife verändert und bestimmen über die Ausgangsmatrix C zusammen mit den über die Durchgangsmatrix D den Ausgang direkt beeinflussenden Eingangssignalen die Systemantwort(en).

Bei der genauen Betrachtung der Definition fällt auf, dass immer von *einer* und nicht von *der* Zustandsraumdarstellung die Rede ist. In der Tat ist die Zustandsraumdarstellung **nicht eindeutig** und es gibt prinzipiell unendlich viele verschiedene Darstellungsformen. Am einfachsten macht man sich dies klar, wenn man bedenkt, dass etwa die Reihenfolge der Gleichungen (50.1) und die Nummerierung der Zustandsvariablen im Beispiel 2.4 völlig willkürlich ist. Jede Variation liefert aber ein gültiges Modell.

Zudem können durch geeignete Linearkombination der Zustände ohne weiteres neue gültige Zustandsmodelle erzeugt werden. Genauere Überlegun-

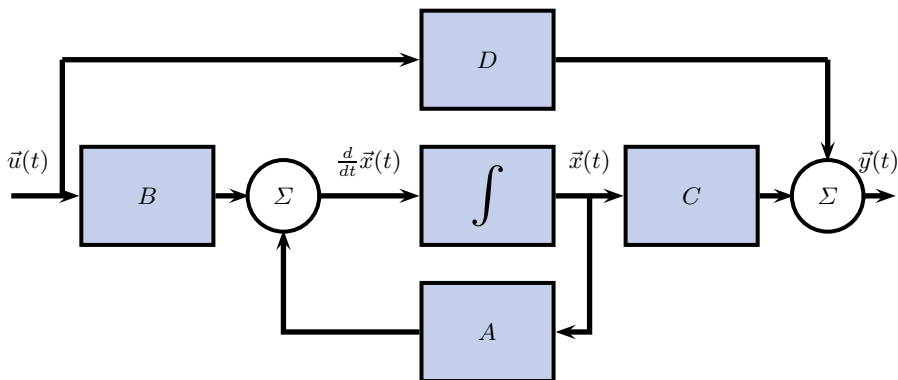


Abb. 2.7: Signalflussdarstellung der Zustandsgleichungen eines LTI-Systems

gen zur Vertiefung dieses Gedankens werden im Anschluss an Beispiel 2.5 und in Übung 13, S. 89 angestellt.

Übung 13

Wie bereits erwähnt, ist die Zustandsraumdarstellung eine mathematische Beschreibung des Systems, die oft direkt aus der Beobachtung der physikalischen Zusammenhänge gewonnen werden kann.

Ist jedoch ein so genanntes *SISO-System*⁴

$$\mathfrak{S} : u(t) \mapsto y(t)$$

bereits in Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{j=0}^M b_j \frac{d^j}{dt^j} u(t), \quad N \geq M$$

(s. Gleichung (49.1)) gegeben, so kann ein Zustandsraummodell daraus durch einen Standardtrick erzeugt werden.

Übung 14

Dabei wird zunächst die Lösung $x_1(t)$ der Gleichung

Übung 15

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} x_1(t) = u(t) \quad (52.1)$$

und jede ihrer Ableitungen $x_k(t) := \frac{d^k}{dt^k} x_1(t)$ bis zur Ordnung $k = N - 1$ zu einer „Zustandsvariablen“ erhoben. Die rechte Seite von Gleichung (49.1) weist dann den Weg, wie diese Zustände zum gesuchten Ausgangssignal kombiniert werden müssen. Statt an einer allgemeinen Darstellung erläutern wir diese Technik wieder am Beispiel des Feder-Masse-Dämpfer-Systems, wobei wir von der Gleichung (47.3) als Beschreibung des Systems ausgehen.

⁴ SISO = Single Input - Single Output, MIMO = Multiple Input - Multiple Output

2.5 Beispiel (Feder-Masse-Dämpfer-System)

Wir vereinfachen zunächst die Notation von Gleichung (47.3), indem wir sie mittels der Definitionen

$$\begin{aligned} a_4 &= 1, & a_3 &= \beta_2 - \alpha_2, & a_2 &= \beta_1 - \alpha_1 + \gamma, \\ a_1 &= -\gamma\alpha_1, & a_0 &= -\gamma\alpha_2, \\ b_1 &= -\gamma\alpha_2, & b_0 &= -\gamma\alpha_1, & u(t) &:= x(t) \end{aligned} \quad (53.1)$$

in der Form

$$a_4 y^{(4)}(t) + a_3 \ddot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \quad (53.2)$$

darstellen.

Ferner definieren wir den „Zustand“ $x_1(t)$ als Lösung der Gleichung

$$a_4 x_1^{(4)}(t) + a_3 \ddot{x}_1(t) + a_2 \ddot{x}_1(t) + a_1 \dot{x}_1(t) + a_0 x_1(t) = u(t) \quad (53.3)$$

und weitere „Zustände“ durch:

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t), \quad x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t), \quad x_4(t) = \dot{x}_3(t) = \ddot{x}_2(t). \quad (53.4)$$

Mit Hilfe dieser Definitionen erhält man aus (53.3)

$$\dot{x}_4(t) = -\frac{a_3}{a_4} x_4(t) - \frac{a_2}{a_4} x_3(t) - \frac{a_1}{a_4} x_2(t) - \frac{a_0}{a_4} x_1(t) + \frac{1}{a_4} u(t) \quad (53.5)$$

und das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_4} & -\frac{a_1}{a_4} & -\frac{a_2}{a_4} & -\frac{a_3}{a_4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a_4} \end{pmatrix} \cdot u(t). \quad (53.6)$$

Aus Gleichung (53.3) erhält man durch Differentiation auf beiden Seiten

$$a_4 x_2^{(4)}(t) + a_3 \ddot{x}_2(t) + a_2 \ddot{x}_2(t) + a_1 \dot{x}_2(t) + a_0 x_2(t) = \dot{u}(t), \quad (53.7)$$

d.h. $x_2(t)$ ist Lösung der Differentialgleichung mit der Ableitung des Eingangssignals $u(t)$ als Störfunktion.

Damit hat die Differentialgleichung (53.2) aber offenbar die Lösung:

$$y(t) = b_1 x_2(t) + b_0 x_1(t). \quad (53.8)$$

Das interessierende Ausgangssignal $y(t)$ kann also wie folgt aus den Zuständen errechnet werden:

$$y(t) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + 0 \cdot u(t). \quad (54.1)$$

Setzt man die ursprünglichen Konstanten wieder ein, so erhält man eine Zustandsraumdarstellung mit den Zustandsmatrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma\alpha_2 & \gamma\alpha_1 & -\beta_1 + \alpha_1 - \gamma & -\beta_2 + \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (54.2)$$

$$C = \begin{pmatrix} -\gamma\alpha_1 & -\gamma\alpha_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

Ein Vergleich mit (50.2) und (50.3) zeigt, dass diese Darstellung sich deutlich von der über die Bewegungsgleichungen der Massen gefundenen physikalisch motivierten Lösung unterscheidet.

Die gefundene Lösung ist allerdings zu dieser *äquivalent*, auch wenn sich den neuen Zuständen keine unmittelbare physikalische Interpretation zuordnen lässt.

Betrachtet man nämlich für einen Zustandsvektor $\vec{x}(t)$ und eine invertierbare Matrix P den mittels

$$\vec{\underline{x}}(t) = P\vec{x}(t) \iff P^{-1}\vec{\underline{x}}(t) = \vec{x}(t) \quad (54.3)$$

definierten neuen Zustandsvektor $\vec{\underline{x}}(t)$, so erhält man durch Einsetzen in (51.1) und (51.2) zunächst:

$$\begin{aligned} P^{-1}\dot{\vec{\underline{x}}}(t) &= AP^{-1}\vec{\underline{x}}(t) + B \cdot \vec{u}(t), \\ \vec{y}(t) &= CP^{-1}\vec{\underline{x}}(t) + D \cdot \vec{u}(t). \end{aligned} \quad (54.4)$$

Hieraus ermittelt man sofort die **äquivalente Zustandsraumdarstellung**

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\underline{x}}}(t) &= \tilde{A}\vec{\underline{x}}(t) + \tilde{B} \cdot \vec{u}(t), \\ \vec{y}(t) &= \tilde{C}\vec{\underline{x}}(t) + D \cdot \vec{u}(t) \end{aligned} \quad (54.5)$$

mit $\tilde{A} = PAP^{-1}$, $\tilde{B} = PB$ und $\tilde{C} = CP^{-1}$.

Zustandsraumdarstellungen sind also, wie bereits erwähnt, nicht eindeutig, können aber durch solche (invertierbaren linearen) Transformationen ineinander überführt werden.

Kanonische Zustandsraumdarstellung

Die Tatsache, dass es keine *eindeutige* Zustandsraumdarstellung gibt und schlimmer noch, dass es nach (54.3) - (54.5) sogar unendlich viele gleichwertige Darstellungen gibt, erscheint zunächst als sehr nachteilig.

Es ist jedoch möglich, alle diese Darstellungen auf eine *gemeinsame Standardform* zurückzuführen.

Es ist ein grundlegendes Ergebnis der Linearen Algebra, dass jede quadratische Matrix A durch geeignete lineare Transformationen auf eine bestimmte Form, die so genannte **Jordan'sche Normalform**, gebracht werden kann (vgl. hierzu Anhang A, Abschnitt A.3):

Sei A eine $n \times n$ -Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es eine $n \times n$ -Matrix V mit:

$$V^{-1} \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix} \quad (55.1)$$

Dabei sind J_k so genannte **Jordan-Matrizen** der Form

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \quad (55.2)$$

mit einem Eigenwert λ_k von A .

Eine Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= A \cdot \vec{x}(t) + B \cdot \vec{u}(t), \\ \vec{y}(t) &= C \cdot \vec{x}(t) + D \cdot \vec{u}(t) \end{aligned} \quad (55.3)$$

kann demnach mit Hilfe der Jordan'schen Normalform $M_J = V^{-1}AV$ und $\tilde{B} = V^{-1}B$ und $\tilde{C} = CV$ nach (54.3) - (54.5) in die äquivalente Darstellung

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= M_J \vec{x} + \tilde{B} \cdot \vec{u}(t), \\ \vec{y}(t) &= \tilde{C} \vec{x} + D \cdot \vec{u}(t)\end{aligned}\tag{56.1}$$

gebracht werden.

Die Form (56.1) heißt die **kanonische Normalform** der Zustandsraumdarstellung des Systems.

Eine weitere Überlegung zeigt, dass *jede* zu (55.3) äquivalente Zustandsraumdarstellung zu der *gleichen* kanonische Normalform (56.1) führt, da diese allein von den (komplexen) Eigenwerten der Systemmatrix bestimmt wird.

Zwei äquivalente Systemmatrizen A und $\tilde{A} = PAP^{-1}$ haben nämlich *identische Eigenwerte*, denn für das charakteristische Polynom von $\tilde{A} = PAP^{-1}$ gilt:

$$\begin{aligned}p_{\tilde{A}}(\lambda) &= \det(\tilde{A} - \lambda \cdot E_n) = \det(PAP^{-1} - \lambda \cdot E_n) \\ &= \det(PAP^{-1} - \lambda \cdot PP^{-1}) = \det(P(A - \lambda E_n)P^{-1}) \\ &= \det(P) \det(A - \lambda E_n) \det(P^{-1}) = \det(P) \cdot \frac{1}{\det(P)} \det(A - \lambda E_n) \\ &= \det(A - \lambda E_n) = p_A(\lambda).\end{aligned}\tag{56.2}$$

Damit haben A und $\tilde{A} = PAP^{-1}$ auch die gleiche Jordan-Normalform M_J . Mit Hilfe von MATLABs Funktion `jordan` ist es recht einfach, die Jordan'sche Normalform numerisch zu ermitteln. Wir betrachten dazu ein Beispiel.

2.6 Beispiel (Jordan'sche Normalform mit MATLAB)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\tag{56.3}$$

eine 3×3 -Matrix.

Mit Hilfe von MATLAB bestimmen wir wie folgt die Jordan'sche Normalform:

```
>> A = [1 -3 -2; -1 1 -1; 2 4 5]
```

```

A =

    1    -3    -2
   -1     1    -1
    2     4     5

>> % Bestimmung der Jordan'schen Normalform J und der
>> % Transformationsmatrix V
>> [V,J] = jordan(A)

V =

   -1    -1     1
    0    -1     0
    1     2     0

J =

    3     0     0
    0     2     1
    0     0     2

>> % zur Probe werden die Matrizen multipliziert
>> V*J*inv(V)

ans =

    1    -3    -2
   -1     1    -1
    2     4     5

```

Ein weiteres Beispiel soll zeigen, dass zwei äquivalente Systemmatrizen tatsächlich die gleiche kanonische Normalform haben und dass wir mit Hilfe dieser Normalform sogar in der Lage sind, Umrechnungsmatrizen zu finden.

2.7 Beispiel (Umrechnung zw. Zustandsraumdarstellungen)

Wir nehmen einmal an, dass die in (56.3) verwendete Matrix A die Systemmatrix der Zustandsraumdarstellung eines LTI-Systems $\mathfrak{S}$ sei.

Nach (54.5) kann z.B. mit der invertierbaren Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (58.1)$$

eine äquivalente Systemmatrix $\tilde{A} = PAP^{-1}$ erzeugt werden.

```
>> A = [1 -3 -2; -1 1 -1; 2 4 5];
>> P = [1 1 0; 0 1 1; 1 0 1];
>> Atilde = P*A*inv(P)
```

Atilde =

```
    0.5000    -2.5000    -0.5000
    1.0000     4.0000         0
    0.5000     0.5000     2.5000
```

Mit Hilfe von MATLAB errechnen wir nun die Jordan'sche Normalform der beiden Matrizen mit den jeweiligen Transformationsmatrizen:

```
>> [V,J] = jordan(A)
```

V =

```
    -1    -1     1
     0    -1     0
     1     2     0
```

J =

```
     3     0     0
     0     2     1
     0     0     2
```

```
>> [Vtilde,Jtilde] = jordan(Atilde)
```

Vtilde =

```
   -0.5000   -1.0000    1.5000
    0.5000    0.5000   -0.5000
         0    0.5000         0
```

Jtilde =

3	0	0
0	2	1
0	0	2

Offenbar haben beide Matrizen die gleiche Jordan-Matrix⁵ M_J und es gilt:

$$A = V \cdot M_J \cdot V^{-1}, \quad \tilde{A} = \tilde{V} \cdot M_J \cdot \tilde{V}^{-1}. \quad (59.1)$$

Damit ist:

$$\tilde{A} = \tilde{V} \cdot M_J \cdot \tilde{V}^{-1} = (\tilde{V}V^{-1}) \cdot A \cdot (V\tilde{V}^{-1}). \quad (59.2)$$

Wegen

```
>> Pstrich = Vtilde*inv(V)

Pstrich =

    1.5000    1.5000    1.0000
   -0.5000         0         0
         0   -0.5000         0

>> inv(Pstrich)

ans =

     0     -2     0
     0      0    -2
     1      3     3

>> Pstrichinv = V*inv(Vtilde)

Pstrichinv =

     0     -2     0
     0      0    -2
     1      3     3

>> Pstrich*A*Pstrichinv

ans =

    0.5000   -2.5000   -0.5000
    1.0000    4.0000         0
```

⁵ Man beachte, dass MATLAB unter Umständen die Reihenfolge der Eigenwerte vertauschen kann, sodass die Jordan-Matrizen durch Permutation von Zeilen und Spalten ineinander übergehen. Analog dazu sind dann die Spalten der Matrix V vertauscht.

```

    0.5000    0.5000    2.5000

>> P*A*inv(P)

ans =

    0.5000   -2.5000   -0.5000
    1.0000    4.0000    0
    0.5000    0.5000    2.5000

```

haben wir *eine* Umrechnungsmatrix P' (wenn auch nicht die ursprünglich verwendete P) bestimmt. ■

Ein Spezialfall ist die *Diagonalisierbarkeit* der Systemmatrix A . Es lassen sich dann Zustände, die so genannten **Moden** finden, so dass die Zustandsdifferentialgleichung in der Form

$$\begin{aligned} \vec{\dot{x}}(t) &= A \cdot \vec{x}(t) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix} \cdot \vec{x}(t) \end{aligned} \quad (60.1)$$

geschrieben werden kann. Die Zustände sind dann völlig voneinander entkoppelt und die Lösungen komplexe Schwingungen oder reelle Exponentialfunktionen. Ob es entkoppelte Zustände gibt, kann u.U. von physikalischer Relevanz sein.

Umrechnung Differentialgleichung - Zustandsraumdarstellung

Es wurde in Beispiel 2.5 gezeigt, wie sich die Zustandsraumdarstellung eines LTI-Systems, welches sich durch eine Differentialgleichung höherer Ordnung darstellen lässt, mittels einer allgemein gültigen Technik aus dieser Gleichung ableiten lässt. Der umgekehrte Weg muss vorerst zurückgestellt werden. Auf diese Problematik werden wir nach Abschnitt 2.4.5 zurückkommen.

2.3.3 Darstellung mit Signalflussdiagrammen

In den meisten praxisrelevanten Fällen besteht ein (lineares oder nichtlineares) System

$$\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$$

aus mehreren Teilsystemen, die das Eingangssignal (bzw. die Eingangssignale) parallel, hintereinander oder in noch komplexerer Form verarbeiten.

In diesen Fällen ist es sowohl für die mathematische Modellierung als auch für die Simulation nützlich, den Ablauf der Verarbeitung der Signale und das Zusammenwirken der Teilsysteme *grafisch* darzustellen.

Eine solche grafische Darstellung des Zusammenhangs zwischen den Zeitsignalen $x(t)$ (Eingangssignal) und $y(t)$ (Ausgangssignal) nennt man ein **Signalflussdiagramm** oder auch ein **Blockschaltbild** des Systems.

Signalflussdiagramme haben wir im vorliegenden Werk verschiedentlich schon verwendet, etwa in der Darstellung 2.7 der Zustandsraumbeschreibung.

Abbildung 2.8 zeigt ein weiteres Beispiel eines Blockschaltbildes, das typisch ist für die Struktur regelungstechnischer Systeme, von denen wir eines im Eingangsbeispiel des Drehzahlregelungsprüfstands (vgl. Abbildung 1.13, S. 14) kennengelernt haben.

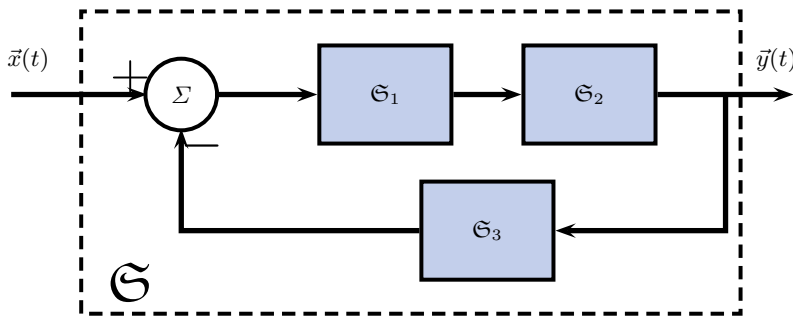


Abb. 2.8: Beispiel eines Signalflussdiagramms im Zeitbereich (Blockschaltbild)

Das Blockschaltbild in Abbildung 2.8 beschreibt ein System $\mathcal{G}$, welches aus drei Teilsystemen $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ besteht. Das Eingangssignal wird dabei mit dem Ausgangssignal, welches über $\mathcal{G}_3$ an den Eingang zurückgekoppelt wird, verglichen. Das Ergebnis dieses Vergleichs (Differenzsignal) wird von $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ im Vorwärtszweig verarbeitet und an den Ausgang geliefert⁶.

Von Interesse ist i.Allg. das Ein-/Ausgangsverhalten des dadurch entstehenden *Gesamtsystems* $\mathcal{G}$.

Wie bereits angedeutet, ist eine solche Darstellung nicht nur für die mathematische Analyse hilfreich (vgl. Abschnitt 2.4, S. 97), sondern auch für die Simulation. Eine Blockschaltbilddarstellung ist unmittelbar in eine Simulink-Simulation umsetzbar, da die Programmierung mit Simulink auf einer solchen Darstellung beruht. Auch von dieser Möglichkeit haben wir bereits

⁶ In einem einfachen regelungstechnischen System entspricht $\mathcal{G}_2$ der Regelstrecke, $\mathcal{G}_1$ repräsentiert den Regler und $\mathcal{G}_3$ eine Messeinrichtung.

mehrfach Gebrauch gemacht (vgl. Abbildungen 1.18 und 2.5 sowie Übung 4, S. 32).

2.3.4 Darstellung mittels Impuls- und Sprungantwort

In Abschnitt 2.1 wurde gezeigt, dass sowohl das Ein-/Ausgangsverhalten des RC-Tiefpass-Systems (Gleichung (35.3)) als auch das des Feder-Dämpfer-Systems (Gleichung (37.3)) mit Hilfe einer geeignet definierten Funktion $h(t)$ in der Form

$$y(t) = y_{\text{hom}}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (62.1)$$

geschrieben werden können.

Geht man von einem System aus, das zu Beginn der Beobachtung „in Ruhe“ ist (Anfangsbedingung $y(0) = 0$), so verschwindet der homogene Anteil und man erhält:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau. \quad (62.2)$$

Dies ist eine **explizite** Darstellung des Systemverhaltens dieser LTI-Systeme im Zeitbereich.

Um zu dieser Darstellung zu gelangen, genügte es, die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Allerdings gehen beide Beispiele von einer Differentialgleichung 1. Ordnung aus. Betrachten wir daher die Situation noch einmal in dem wesentlich allgemeineren Rahmen, der uns durch die Zustandsraumdarstellung (Gleichungen (51.1) und (51.2)) zu Verfügung gestellt wird.

Auch in diesem Falle kann das Systemverhalten mit Hilfe der Gleichung (51.2) **in expliziter Form** angegeben werden, wenn das Differentialgleichungssystem (51.1) nach $\vec{x}(t)$ aufgelöst und in Gleichung (51.2) eingesetzt wird.

Die Lösung des Differentialgleichungssystems (51.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{x}(t) &= A \cdot \vec{x}(t) + B \cdot \vec{u}(t) \\ \iff \frac{d}{dt}\vec{x}(t) + (-A) \cdot \vec{x}(t) &= B \cdot \vec{u}(t) \end{aligned} \quad (62.3)$$

kann mit Hilfe der Formel (543.3) aus Anhang A.2 formal wie die Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= e^{A \cdot t} \cdot \vec{c} + e^{A \cdot t} \cdot \left[\int_0^t e^{-A\tau} \cdot B \cdot \vec{u}(\tau) d\tau \right] \\
&= e^{A \cdot t} \cdot \vec{c} + \left[\int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot B \cdot \vec{u}(\tau) d\tau \right].
\end{aligned} \tag{63.1}$$

Man beachte den Vorzeichenwechsel im Exponenten, der sich aus der Umstellung der Gleichung (62.3) ergibt, um (51.1) auf die Ausgangsform (542.1) aus Anhang A.2 zu bringen!

Für ein „System in Ruhe“ fällt der homogene Anteil $e^{A \cdot t} \cdot \vec{c}$ wieder weg und die Lösung vereinfacht sich zu:

$$\vec{x}(t) = \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot B \cdot \vec{u}(\tau) d\tau. \tag{63.2}$$

Setzt man diese Lösung nun in Gleichung (51.2) der Zustandsraumdarstellung ein, so erhält man den **expliziten** Zusammenhang

$$\begin{aligned}
\vec{y}(t) &= \int_0^t C \cdot e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot B \cdot \vec{u}(\tau) d\tau + D \cdot \vec{u}(t) \\
&= \int_0^t C\Phi(t-\tau)B\vec{u}(\tau) d\tau + D\vec{u}(t)
\end{aligned} \tag{63.3}$$

mit der so genannten **Transitionsmatrix** (vgl. Anhang A, Definition (542.3))

$$\Phi(t) := e^{At}. \tag{63.4}$$

Definiert man

$$H(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ C\Phi(t)B & \text{für } t \geq 0, \end{cases} \tag{63.5}$$

so hat (63.3) die Form

$$\vec{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau)\vec{u}(\tau) d\tau + D\vec{u}(t) \tag{63.6}$$

und entspricht damit (zumindest für $D = 0$) formal⁷ der Gleichung (62.2).

Im Falle **nur eines** Eingangssignals $u(t)$ und **nur eines** Ausgangssignals $y(t)$ (SISO⁸-System) liefert $C\Phi(t)B$ eine reelle Funktion $\tilde{h}(t)$, da C in diesem Fall eine $1 \times n$ - und B eine $n \times 1$ -Matrix ist (s. Seite 51).

⁷ Man beachte, dass $H(t)$ eine Matrix ist und somit die Reihenfolge der Multiplikation $H(t-\tau)\vec{u}(\tau)$ nicht ohne weiteres vertauscht werden kann.

⁸ SISO = Single Input Single Output.

Definiert man wieder analog zu (37.2) bzw. (35.2) und (63.5) die Funktion

$$h(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ \tilde{h}(t) & \text{für } t \geq 0, \end{cases} \quad (64.1)$$

so können auch LTI-Systeme

$$\mathfrak{S} : u(t) \mapsto y(t),$$

die über eine Zustandsraumdarstellung (mit Durchgangsmatrix⁹ $D = 0$) definiert sind – und damit auch solche, die mit linearen Differentialgleichungen *höherer* Ordnung definiert sind (vgl. dazu Beispiel 2.5) – in der allgemeinen expliziten Form

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (64.2)$$

dargestellt werden!

Wir erhalten also für all diese (SISO-)Systeme die für die Beispiele RC-Tiefpass (35.3) und Feder-Dämpfer-System (37.3) hergeleitete explizite Darstellung des Übertragungsverhaltens.

Bevor wir diesen Aspekt weiter diskutieren, wollen wir aber die vorangegangene allgemeine Herleitung dieser Tatsache für Differentialgleichungen höherer Ordnung an einem Beispiel illustrieren.

2.8 Beispiel (LTI-System 3. Ordnung)

Betrachten wir ein LTI-System, welches durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_1 y(t) = u(t) \quad (64.3)$$

definiert ist.

Entsprechend Gleichung (53.6) und Gleichung (53.8) ist die Gleichung äquivalent zur Zustandsraumdarstellung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t) \quad (64.4)$$

und

⁹ Die Erweiterung der Formel (64.2) betrachten wir später!

$$y(t) = x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + 0 \cdot u(t). \quad (65.1)$$

Mit Hilfe einiger weniger MATLAB-Anweisungen kann daraus Darstellung (64.2) für konkrete Koeffizienten berechnet werden¹⁰. Im vorliegenden Fall verwenden wir:

$$a_0 = 0.5, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2. \quad (65.2)$$

```
>> syms t

% Definition der Systemmatrix A
>> A = [0 1 0; 0 0 1; -1/2 -1 -2]

A =

         0         1.0000         0
         0         0         1.0000
    -0.5000    -1.0000    -2.0000

% Berechnung der Transitionsmatrix exp(t*A)
% mit der MATLAB-Funktion Funktion expm
% (Vorsicht: Anwendung von expm nur für kleine
% Matrizen sinnvoll!)
>> Phit = expm(t*A);

Phit =

%% die Zeilen werden zu lang; keine sinnvolle
%% Bildschirmdarstellung möglich

% Berechnung der Funktion h(t)
>> C = [1 0 0];
>> B = [0;0;1];
>> h = C*Phit*B

h =

%% die Zeilen werden zu lang; keine sinnvolle
```

¹⁰ Der Ehrlichkeit halber muss dazu gesagt werden, dass die Berechnungen mit Hilfe der *Symbolic Math Toolbox* auch in einfachen Fällen solch komplizierte und unlesbare Ergebnisse liefern, dass die Berechnung praktisch unbrauchbar wird. Hier ist das Hintergrundwissen des Anwenders stark gefragt, um die Rechenkapazität von MATLAB wirklich sinnvoll nutzen zu können.


```

%% Bildschirmdarstellung möglich

% Umwandlung der Koeffizienten in
% "variable precision arithmetic"
h = vpa(h);

% Grafische Darstellung der Funktion im
% Intervall (0,50]
>> x = (0.1:0.1:50);

% Bestimmung der numerischen Version von h
% Substitution von t durch x im Ausdruck h
>> hnum = subs(h,t,x);

% Umwandlung der Zahlen in double; Elimination
% der Imaginärteile (die eigentlich alle 0 sind)
>> hnum = real(double(hnum));;

% Grafische Darstellung
>> plot(x,hnum,'r','LineWidth',3)
>> grid
>> xlabel('Zeit/s')
>> ylabel('h(t)')

```

Abbildung 2.9 zeigt den Plot der Funktion $h(t)$.

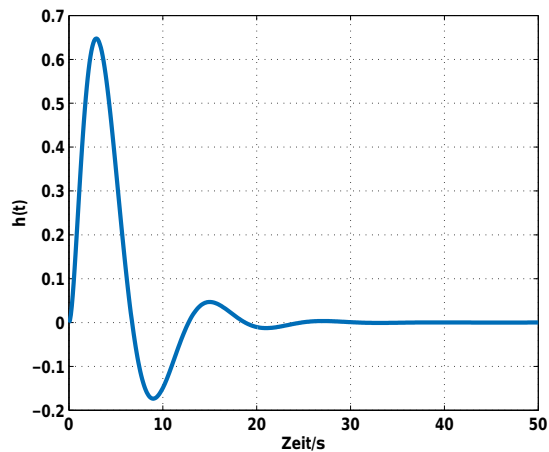


Abb. 2.9: Funktion $h(t)$ in der Darstellung (64.2) für das Beispiel des Systems 3. Ordnung gemäß (64.3).

In der Berechnung wurde die MATLAB-Funktion `expm` zur Ermittlung der Transitionsmatrix verwendet, die zumindest in der symbolischen Version mit äußerster Vorsicht zu genießen ist, da die Ergebnisse meist praktisch wenig brauchbar sind.

Wir werden jedoch später bessere Methoden zu Berechnung der Transitionsmatrix und der Funktion $h(t)$ kennenlernen. ■

Sowohl die Beispiele (35.3) und (37.3) als auch die vorangegangene allgemeine Überlegung zu LTI-Systemen, die sich mit linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben lassen, zeigen, dass man unter gewissen Voraussetzungen das Systemverhalten mit Hilfe einer geeigneten, *für das System charakteristischen* Funktion $h(t)$ in der Form von Gleichung (62.2) darstellen kann.

System„funktionen“

Ohne näher auf den Nachweis dieser Tatsache eingehen zu können, halten wir hier fest, dass diese Darstellung ganz allgemein *für fast alle* und auf jeden Fall für alle *praxisrelevanten LTI-Systeme* möglich ist, welche Signale aus dem in Abschnitt 1.2, S. 22 definierten *Signalraum* verarbeiten.



Alle „praxisrelevanten“ (zeitkontinuierlichen) LTI-Systeme $\mathfrak{S} : x(t) \mapsto y(t)$ lassen sich mit Hilfe einer für das System charakteristischen *System„funktion“* $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$ durch die Integralgleichung

$$y(t) = x(t) * h(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (67.1)$$

darstellen!

Der Leser wird sicherlich sofort die Gänsefüßchen um den Begriff *praxisrelevant* und den Wortteil *funktion* bemerkt haben.

In der Tat bewegen wir uns bei der (schwammigen) Formulierung des Darstellungssatzes (67.1) auf sehr sehr dünnem Eis!

Es ist bekannt [40, 41, 5, 6], dass es sowohl im zeitkontinuierlichen als auch im zeitdiskreten Fall durchaus LTI-Systeme gibt, die *keine Darstellung* gemäß (67.1) haben. Allerdings sind die Beispiele äußerst konstruiert und entsprechen keinem realen physikalischen System. Man kann daher davon ausgehen, dass diese Fälle in der Ingenieurpraxis nicht vorkommen. Allerdings ist dem Autor keine geschlossene, präzise formulierte Darstellung dieses Sachverhaltes bekannt. Vielmehr werden in der einschlägigen Literatur leider oft „Beweise“ kolportiert, die keiner ernsthaften mathematischen Analyse standhalten.

Forscht man nach exakten Bedingungen für die Gültigkeit von (67.1), so stellt man sehr schnell fest, dass die Diskussion dieses Themas ganze Bücher füllt [26, 38], wobei es vor allen Dingen auch auf die exakte Festlegung der verwendeten Signale ankommt.

Die Gänsefüßchen um *-funktion* sollen andeuten, dass die Signale $x(t)$, $y(t)$ und $h(t)$, für die eine solche Darstellung möglich ist, **im Allgemeinen** sogar **keine reellen (oder komplexen) Funktionen** im gewöhnlichen Sinne sein müssen!

Es wird bald klar werden, dass der Funktions- bzw. der Signalbegriff etwas erweitert werden muss, damit die Darstellung (67.1) zur vollen Blüte ihrer Gültigkeit gelangt. Wir werden sehen, dass eine brauchbare Aussage erst dann gemacht werden kann, wenn wir so genannte **verallgemeinerten Funktionen**, auch **Distributionen** genannt, zulassen. Aus diesem Grunde wurden solche Objekte auch in die Definition des in Abschnitt 1.2, S. 22 skizzierten **Signalraums** mit aufgenommen.

Jedoch werden wir, wie anlässlich dieser Definition schon angedeutet, aufgrund der mathematischen Komplexität der damit verbundenen Ideen die Diskussion der Klasse der verallgemeinerten Funktionen nicht sehr weit führen. Die Funktionen- und so genannten **Distributionsräume**, die hier gemeint sind, müssten aufwändig definiert und hergeleitet werden [39, 53]. Da diese genauen Definitionen jedoch für die Ingenieurpraxis keine große Rolle spielen, soll hierauf verzichtet werden. Wir gehen lediglich auf einige, in der Praxis allerdings wichtige, Spezialfälle ein.

An dieser Stelle können wir jedoch vorab schon eine kurze Überlegung anstellen, warum eine Erweiterung der Signalklasse nötig ist.

In der Mathematik lernt man, dass Integrale verallgemeinerte Summen sind und als solche eine Art **mittelnde** Wirkung besitzen. Integratoren haben somit die Eigenart „normale“ reellwertige Signale zu **glätten**. Andererseits haben wir in Übungsaufgabe 5, S. 43 gesehen, dass ein Differenzierer ein ebenso ehrenwertes Mitglied in der Familie der LTI-Systeme ist wie der Integrierer. Dieser hat aber genau eine zur Glättung entgegengesetzte Wirkung. Wir sehen an diesem Beispiel, dass die Systemfunktion $h(t)$ in diesem Fall keine „normale“ reelle Funktion mehr sein kann, wenn die Darstellung (67.1) ihre Gültigkeit behalten will. Auf diesen Aspekt werden wir später zurückkommen.

Faltungsintegral und Faltungsoperation

Betrachten wir zunächst wieder die allgemeine Darstellung (67.1). Das Integral aus (67.1) hat eine spezielle Form und einen speziellen Namen:

Die Operation $*$ mit

$$(x * h)(t) := x(t) * h(t) \quad (69.1)$$

$$:= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (69.2)$$

heißt **Faltung** von $x(t)$ und $h(t)$. Das Integral (69.2) ist ein **Faltungsintegral**.

Die Faltung ist eine Art „Multiplikation“ für Funktionen. In der Tat hat sie die wesentlichen Eigenschaften, die von der Multiplikation reeller Zahlen bekannt sind, wie das folgende Resultat zeigt:

Die Faltungsoperation $*$ ist **assoziativ**, **distributiv** (bez. der Addition von Funktionen) und **kommutativ**! Für drei Funktionen (Signale) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ gilt also:

$$(x * y)(t) * z(t) = x(t) * (y * z)(t), \quad (69.3)$$

$$(x(t) + y(t)) * z(t) = x(t) * z(t) + y(t) * z(t), \quad (69.4)$$

$$(x * y)(t) = (y * x)(t). \quad (69.5)$$

Wir wollen an dieser Stelle nicht im Einzelnen auf den Nachweis dieser Eigenschaften eingehen. Betrachten wir lediglich die im Folgenden noch öfter verwendete Kommutativität und beschränken wir uns dabei auf Signale, die durch gewöhnliche (integrierbare) reelle Funktionen repräsentiert werden können.

Die Kommutativität der Faltungsoperation $*$ folgt im Wesentlichen aus der Kommutativität der Multiplikation und der Substitutionsregel. Dies zeigt die folgende Rechnung:

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = - \int_{\infty}^{-\infty} x(t - \tilde{\tau}) y(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}. \quad (69.6)$$

Hier wurde die Substitution $\tilde{\tau} := t - \tau$ verwendet, welche

$$d\tilde{\tau} = -d\tau, \quad \tau = t - \tilde{\tau}$$

und die Vertauschung der Integrationsgrenzen liefert.

Auf Grund der Integrationsregel

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (70.1)$$

folgt:

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tilde{\tau}) x(t - \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} = (y * x)(t). \quad (70.2)$$

Ein Faltungsintegral und damit eine gesamte Faltungsoperation für zwei Signale ist i.Allg. äußerst schwierig zu berechnen. Dies zeigt auch das folgende Beispiel, obwohl hier sehr einfache Funktionen betrachtet werden.

2.9 Beispiel (Faltung)

Wir betrachten die Faltung der Sprungfunktion $\sigma(t)$ mit der Funktion

$$x(t) := \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{für } t < 0 \text{ oder } t \geq 1. \end{cases} \quad (70.3)$$

Für diese einfachen Signale lässt sich die Faltung noch mit vertretbarem Aufwand von Hand berechnen. Wegen $\sigma(t) = 0 \ \forall t < 0$ gilt:

$$(\sigma * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} x(t - \tau) d\tau. \quad (70.4)$$

Die Funktion $x(t - \tau)$ entspricht der *Verschiebung* der Funktion $x(-\tau)$ um $t \in \mathbb{R}$. Die Funktion $x(-\tau)$ wiederum entsteht aus der Spiegelung der Funktion $x(\tau)$ an der y -Achse. Man *faltet* die Funktion an dieser Achse. Dies erklärt den *Namen der Operation*.

Wir müssen nun folgende Situationen unterscheiden:

Ist $t < 0$, so gilt $t - \tau < 0$ und daher $x(t - \tau) = 0$. Das Integral (70.4) ist somit stets 0.

Ist $0 \leq t < 1$, d.h. die gefaltete, verschobene Funktion $x(t - \tau)$ ragt *teilweise* in das Intervall $[0, \infty)$ hinein¹¹, so folgt:

$$(\sigma * x)(t) = \int_0^{\infty} x(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(t - \tau) d\tau \quad (70.5)$$

¹¹ Der Leser möge sich zur Illustration eine Skizze machen! Dies hilft, die Situation zu überblicken.

$$= \int_0^t (t - \tau) d\tau = t \int_0^t d\tau - \int_0^t \tau d\tau = t^2 - \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}t^2.$$

Ist $t \geq 1$, so ist der wesentliche Anteil (d.h. der Anteil $\neq 0$) von $x(t - \tau)$ vollständig im Integrationsbereich. Das Integral ist somit für alle diese t konstant gleich $\frac{1}{2}$.

Als Ergebnis der Faltung erhalten wir somit:

$$(\sigma * x)(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ \frac{1}{2}t^2 & \text{für } 0 \leq t < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für } t \geq 1. \end{cases} \quad (71.1)$$

Faltungen können mit Hilfe der MATLAB-Funktion `conv` berechnet werden. Da diese Berechnung jedoch auf *endlich vielen Abtastwerten* der Signale beruht (vgl. Kapitel 3) und somit die Signale nicht in voller Länge und mit allen Amplitudenwerten in die Berechnung eingehen, kann die Faltung zweier Signale mit dieser Methode *nur näherungsweise* bestimmt werden. Der interessierte Leser sei hier auf Übung 26, S. 95 und das MATLAB-Programm zu Beispiel 2.37, S. 169 verwiesen.

Übung 26

Die Impulsantwort eines LTI-Systems

Von einem physikalischen Gesichtspunkt aus ist das Verhalten eines LTI-Systems für ganz bestimmte Eingangssignale von Interesse.

Zunächst könnte interessant sein, wie ein System auf die Aufbringung eines kurzen, aber heftigen *Energieimpulses* reagiert. Ein Beispiel wäre die Reaktion eines (schwingungsfähigen) mechanischen Systems auf einen kurzen, aber heftigen Hammerschlag.

Eine andere besondere Form der Erregung könnte die Aufbringung eines Signals mit *konstanter endlicher Leistung* ab einem gewissen Zeitpunkt sein. Beispiel wäre etwa das „Einschalten“ einer Gleichspannungsquelle bei einem elektrischen System oder das plötzliche Aufbringen einer konstanten Kraft bei einem mechanischen System.

Die Erregung mit einem Sinus- oder Cosinussignal schließlich liefert uns die Information, wie das *System auf Schwingungen* am Eingang *reagiert*.

Wir werden diese drei Erregungsformen im Folgenden einer eingehenden Untersuchung unterziehen und feststellen, dass das Systemverhalten in allen Fällen zu einer vollständigen Information über das System führt.

Bei der mathematisch exakten Formulierung dessen, was ein „kurzer heftiger Energieimpuls“ sein soll, steht man sofort vor einem Definitionsproblem: Was heißt in diesem Zusammenhang „kurz“ und was „heftig“?

Die Definition einer bestimmten endlichen Impulszeitdauer¹² und einer bestimmten endlichen Amplitude (und damit einer bestimmten Signalenergie) erscheint bei näherer Betrachtung wenig praktikabel, da alle Systemantworten automatisch von dieser willkürlichen Festlegung abhängig wären!

Das Ziel einer vernünftigen Impulsdefinition wäre eine von solchen willkürlichen Annahmen unabhängige Festlegung.

Ein in diesem Sinne „*idealer Impuls*“ wäre ein Signal, welches dem System in möglichst kurzer Zeit (ideal: 0 Zeiteinheiten) unendlich viel Energie zuführen soll!

Dies birgt mathematische Schwierigkeiten, müsste doch die beschreibende Funktion in einem solchen Fall, wie in Abbildung 2.10 skizziert „unendlich“ groß sein.

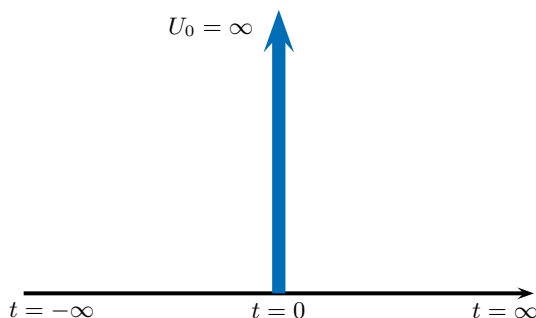


Abb. 2.10: Ideales Impulssignal

Es wurde schon im Zusammenhang mit der Diskussion des LTI-Systems „Differenzierer“ auf Seite 68 angedeutet, dass für die explizite Zeitbereichsbeschreibung von LTI-Systemen eine Erweiterung des Signal- bzw. des Funktionsbegriffs notwendig ist. Die soeben skizzierte Idee für die Konstruktion eines idealen Impulses ist ein weiterer Hinweis dafür.

Wir nähern uns dem Problem der mathematisch korrekten Definition dieses idealen Impulses durch eine Approximation.

Die (mathematisch) einfachste Approximation eines Impulses, d.h. einer Funktion endlicher (kurzer) Dauer, ist eine Rechteckfunktion. Wir konstruieren, wie in Abbildung 2.11 skizziert, eine Folge von Rechteckfunktionen $i_n(t)$, welche außerhalb des Intervalls $[0, \frac{1}{n}]$ verschwinden. Für unsere Zwecke ist es dabei angebracht, diese Testsignale alle so zu normieren, dass stets

$$\int_{-\infty}^{\infty} |i_n(t)| dt = 1 \quad (72.1)$$

¹² Dies ist das Zeitintervall, in dem die Amplitude des Impulses nicht gleich 0 ist.

gilt. Damit haben diese Testsignale folgende Form:

$$i_n(t) := \begin{cases} n & \text{für } t \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (73.1)$$

Die Signale entsprechend dieser Konstruktion erfüllen die eingangs formulierten Bedingungen. In möglichst immer geringerer Zeit $([0, \frac{1}{n}])$ wird immer mehr Energie

$$\int_{-\infty}^{\infty} |i_n(t)|^2 dt = \frac{n^2}{n} = n \quad (73.2)$$

auf ein System aufgebracht, wenn man diese Eingangssignale verwendet.

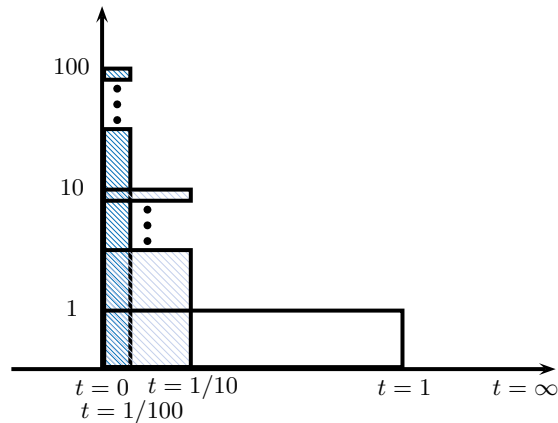


Abb. 2.11: Approximationen eines Impulses durch normierte Rechteckfunktionen

Als Antwort eines LTI-Systems $\mathfrak{S}$ mit Systemfunktion $h(t)$ erhält man gemäß Übung 16
Gleichung (67.1):

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(i_n)(t) &= i_n(t) * h(t) \\ &= n \int_0^{\frac{1}{n}} h(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (73.3)$$

Übung 17

Ist nun n groß und damit $\frac{1}{n}$ klein, so ist der Integrand $h(t - \tau)$ – zumindest an Stetigkeitsstellen t von $h(t)$ – „ungefähr gleich“ $h(t)$. Es folgt also

$$n \int_0^{\frac{1}{n}} h(t - \tau) d\tau \approx n \frac{1}{n} h(t) = h(t) \quad (73.4)$$

und damit für (fast) alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i_n(t) * h(t) = h(t). \quad (74.1)$$

Es sollte an dieser Stelle bemerkt werden, dass die vorangegangene Argumentationskette mehr eine heuristische Überlegung darstellt. Ein Konvergenz„beweis“ im strengen Sinne ist dies natürlich nicht. Auch hierfür müsste man wieder mehr über die schon mehrfach angesprochene Erweiterung des Funktionsbegriffs auf die Klasse der so genannten verallgemeinerten Funktionen sagen, was wir an dieser Stelle jedoch nicht tun können und wollen. Die zentrale Erkenntnis aus Gleichung (74.1) lässt sich jedoch auch in diesem allgemeineren Rahmen nachweisen. Wir erhalten also auf diese Art und Weise eine Näherung der für das System laut (67.1) charakteristischen Funktion $h(t)$! Wir können somit das System näherungsweise „*identifizieren*“. Dies soll zunächst mit Hilfe einer Simulink-Simulation am Beispiel des RC-Tiefpasses (2.1) illustriert werden.

2.10 Beispiel (Identifikation des RC-Tiefpasses)

Abbildung 2.12 zeigt das Simulink-System `s_RCTP.slx`, welches einen RC-Tiefpass mit Zeitkonstante T simuliert.

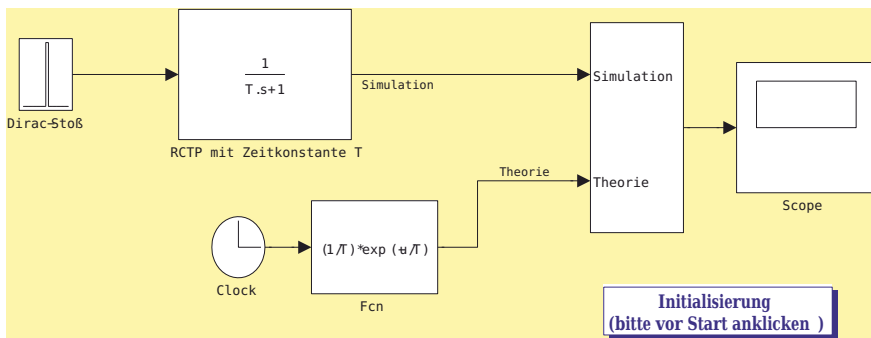


Abb. 2.12: Simulink-System zur Simulation der Systemidentifikation eines RC-Tiefpasses

Der durch einen Simulink-Block¹³ repräsentierte RC-Tiefpass wird dabei durch einen Rechteckimpuls angeregt. Der Impulsblock ist intern durch die Differenz zweier Sprungfunktionsblöcke realisiert. Die simulierte Antwort auf Rechteckimpulse einer vorgegebenen Dauer wird mit der in (35.2) ermittelten theoretischen Systemfunktion $h(t)$ verglichen.

Abbildung 2.13 zeigt das Ergebnis einer solchen Simulation für die Impulsdauern 1 s und 0.01 s und für einen Tiefpass mit Zeitkonstante $T = 1$ s. ■

¹³ Die Bedeutung der Beschriftung wird in Abschnitt 2.4.5 klar.

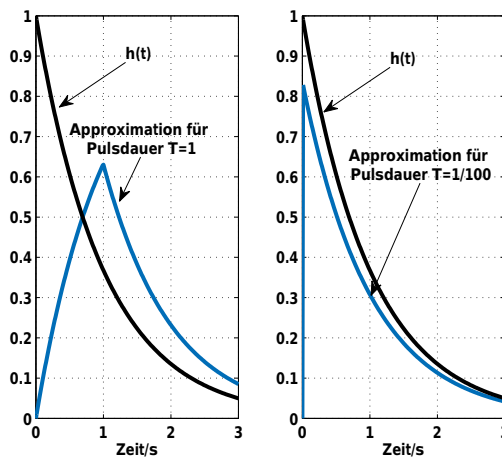


Abb. 2.13: Approximative Systemidentifikation eines RC-Tiefpasses mit Rechteckimpulsen

In einem gewissen, anscheinend auch sehr brauchbaren Sinne sind die Rechteckimpulse Näherungen des in Abbildung 2.10 dargestellten „idealen“ Impulses und „konvergieren“ offenbar für $n \rightarrow \infty$ gegen ihn. Bei der Definition eines Grenzwertes der Funktionenfolge $i_n(t)$ gibt es jedoch, wie oben bereits angedeutet, mathematische Probleme.

Die Funktionenfolge $i_n(t)$ konvergiert *nicht gegen* eine *reelle Funktion* $f(t)$, denn dann müsste gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1 \quad (75.1)$$

und

$$f(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0, \\ 0 & \text{für } t \neq 0, \end{cases} \quad (75.2)$$

da die Integrale über die $i_n(t)$ ja alle auf 1 normiert sind und diese Funktionen für alle $t \neq 0$ gegen 0 konvergieren und bei $t = 0$ über alle Grenzen wachsen.

Abgesehen davon, dass eine reelle Funktion nicht den Wert ∞ annehmen kann, scheitern diese Anforderungen an den Regeln der Riemannschen Integrationstheorie, da eine Funktion, welche bis auf einen Punkt 0 ist, nur das Integral 0 haben kann.

Wir müssen uns also nach neuen Lösungen umsehen. Diese bietet die Theorie der *verallgemeinerten Funktionen* oder *Distributionen*, die wir jedoch im Zusammenhang mit den in diesem Buch besprochenen Themen nur für die Definition des Impulses brauchen.

Beginnen wir mit der Definition dessen, was der Grenzwert der $i_n(t)$ „wirklich“ ist:

Die (lineare) Abbildung

$$\delta_0 : x(t) \longrightarrow x(0), \quad (76.1)$$

welche jedem Signal $x(t)$ seinen Wert $x(0)$ an der Stelle $t = 0$ zuordnet, heißt **Dirac-Funktional**, **Dirac-Impuls** oder **Delta-Funktion(al)**.

Dieser Dirac-Impuls, welcher, wie die Definition zeigt, keine reelle Funktion mehr ist, sondern eine *lineare Funktion von Funktionen in die reellen Zahlen*¹⁴, kann nun sinnvoll als Grenzwert der $i_n(t)$ *definiert* werden. Dieser Definition liegt die Idee zu Grunde, dass jede der Funktionen $i_n(t)$ durch die Vorschrift

$$i_n : x(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} i_n(t)x(t) dt \quad (76.2)$$

selbst eine *lineare Funktion* auf dem Vektorraum¹⁵ der Signale $x(t)$ in die reellen Zahlen ist. Führt man nun die Grenzwertbetrachtung für $n \rightarrow \infty$ aus, so stellt man fest, dass eine lineare Grenzfunktion (jetzt auf dem Vektorraum der Signale) genau die in (76.1) dargestellte Eigenschaft haben muss. Dies haben wir in der Argumentation zu Gleichung (73.4) im Übrigen schon verwendet. Setzt man dort $t = 0$ und $x(\tau)$ statt $h(-\tau)$, so erhält man für große n (an Stetigkeitsstellen von $x(t)$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_n(t)x(t) dt = n \int_0^{\frac{1}{n}} x(t) dt \approx n \frac{1}{n} x(0) = x(0) = \delta_0(x(t)). \quad (76.3)$$

Im Gegensatz zum Funktionsbegriff „reelle Funktion“ hat man nun keine Probleme mehr, da die Grenzabbildung eine voll gültige, zudem noch sehr einfache, Abbildung auf dem Vektorraum der Signale ist.

¹⁴ Ein so genanntes lineares Funktional!

¹⁵ Einmal mehr bleiben wir hier bei der Spezifikation der zulässigen Signale vage. In der Tat müssen einige Voraussetzungen erfüllt sein, damit die nachfolgenden Argumente stichhaltig sind. So betrachtet man bei der Definition der Distributionen zunächst nur unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger (endliches Intervall, auf dem sie nicht 0 sind) [39, 53]. Für das Dirac-Funktional kann die Funktionenklasse aber noch erheblich erweitert werden, was allerdings mathematisch nicht ganz einfach ist und hier auch nicht behandelt werden kann (vgl. Anhang A.5, S. 545).

Diese Sichtweise rechtfertigt auch die nachfolgende Schreibweise der Delta-Funktion:

Für die Zuordnung aus (76.1) schreibt man auch **formal**:

$$\delta_0(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t)x(t) dt. \quad (77.1)$$

Es ist dabei zu beachten, dass das Integral in (77.1) keine eigentliche integrationstechnische Bedeutung hat. Ebenso hat die Schreibweise $\delta_0(t)$ nur **formale Bedeutung**, da ja δ_0 , wie gesehen, keine reelle Funktion ist. Der Ausdruck (77.1) ist lediglich eine formale Schreibweise, die die „Herkunft“ des Dirac-Impulses δ_0 unterstreicht.

Wie bereits angedeutet, spricht man im Zusammenhang mit dem Dirac-Impuls δ_0 von einer **verallgemeinerten Funktion**.

Übung 18

Was eine verallgemeinerte Funktion ist, lässt sich nun in Analogie zu Definition (77.1) und unter Berücksichtigung aller bisherigen Fußnoten und Bemerkungen zur ungenauen Spezifikation der Signalklassen und zur unzureichenden mathematischen Exaktheit der Argumentation recht einfach definieren (s. Anhang A.5):

Unter einer **verallgemeinerten Funktion** oder **Distribution** versteht man eine (stetige) **lineare Abbildung** ϕ , welche jedem Signal $x(t)$ einen Wert in $\mathbb{R}$ zuordnet. **Formal** kann ϕ , analog zu (77.1), in Integralform geschrieben werden:

$$\phi(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)x(t) dt. \quad (77.2)$$

Das Funktional ϕ kann dabei als (lineare) „Wirkung“ auf ein Signal $x(t)$ verstanden werden. So ist die „Wirkung“ des Dirac-Impulses etwa die Auswertung (später werden wir sagen **Abtastung**) des Signals an der Stelle $t = 0$.

Ein großer Vorteil der formalen Schreibweise entsprechend Gleichung (77.2) ist, dass sich damit eine **Ableitung** verallgemeinerter Funktionen definieren lässt, die es erlaubt, bekannte Rechenregeln der Integrationstheorie, wie etwa die **Substitutionsregel** und die **Regel der partiellen Integration** auf dieses formale Integral zu übertragen[39, 53]:

Die **Ableitung** ϕ' einer verallgemeinerten Funktion ϕ ist durch die Gleichung

$$\phi'(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t)x(t) dt := -\phi(x'(t)) = -\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)x'(t) dt \quad (78.1)$$

definiert.

Beschränkt man sich auf Signale¹⁶ $x(t)$, die (oft genug) differenzierbar sind und bei $\pm\infty$ verschwinden, so entspricht (78.1) der bekannten *Regel der partiellen Integration*!

Übung 19

Dem interessierten Leser seien zur weiteren Vertiefung der Thematik Übung 19, S. 92 und Anhang A.5, S. 545 empfohlen.

Wie bereits angedeutet, werden wir i. W. *als einzige* verallgemeinerte Funktion das **Dirac-Funktional** $\delta_0(t)$ betrachten. Mit Hilfe der Integralinterpretation, der Definition (77.1) und der Erweiterung (548.3) aus Anhang A lassen sich schnell folgende grundlegende Eigenschaften herleiten:

Für den Dirac-Impuls δ_0 gilt:

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t) \cdot 1 dt = \delta_0(1) = 1, \quad (78.2)$$

(b)

$$\delta_0(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(\tau)x(t-\tau) d\tau = x(t-\tau)|_{\tau=0} = x(t). \quad (78.3)$$

Der Dirac-Impuls ist also „die Eins“ bezüglich der Faltung !

Übung 20

Aus (78.3) und der Faltungsintegral-Darstellung für LTI-Systeme mit Hilfe einer Systemfunktion (vgl. Gleichung (67.1)) ergibt sich nun unmittelbar folgende wichtige Folgerung:

Übung 21

Übung 22

¹⁶ An dieser Stelle kommen wir der exakten Definition von Distributionenräumen, welche wir eigentlich vermeiden wollten, ziemlich nah (s. Anhang A.5).

Sei $\mathfrak{S}$ ein LTI-System mit Systemfunktion $h(t)$. Dann gilt:

$$\mathfrak{S}(\delta_0) = \delta_0(t) * h(t) = h(t). \quad (79.1)$$

Aus diesem Grund werden wir ab jetzt auf den Begriff der „Systemfunktion“ verzichten und den tatsächlich hierfür verwendeten Begriff benutzen:

Sei $\mathfrak{S}$ ein LTI-System. Dann heißt das Signal $h(t)$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{S}(\delta_0) = \delta_0(t) * h(t) = h(t) \quad (79.2)$$

die **Impulsantwort** des Systems.

Die Impulsantwort ist (für alle praxisrelevanten LTI-Systeme) eine eindeutige explizite Charakterisierung des Systems im Zeitbereich, da für alle Eingangssignale $x(t)$ gilt:

$$y(t) = \mathfrak{S}(x)(t) = h(t) * x(t). \quad (79.3)$$

Mit Hilfe der Definition (77.1) und den Rechenregeln (78.1) kann man, wie im folgenden Beispiel, zumindest für das Dirac-Funktional leicht einige interessante Zusammenhänge herleiten.

Übung 23

2.11 Beispiel (Rechnen mit dem Dirac-Funktional)

Übung 26

Exemplarisch berechnen wir vier Zusammenhänge. Die zweite hergeleitete Beziehung wird in den weiteren Abschnitten noch öfter benötigt.

Übung 28

■ Zeitverschiebung

Es sei $\delta_a(t)$ das durch die Abbildung

$$\delta_a : x(t) \longrightarrow x(a) \quad (79.4)$$

definierte Funktional, welches jedem Signal $x(t)$ seinen Wert $x(a)$ an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ zuordnet.

Aufgrund der Eigenschaften von $\delta_0(t)$ ergibt sich aber auf der anderen Seite, dass für gegenüber $x(t)$ um genau $-a$ Zeiteinheiten verschobene Signale $\tilde{x}(t) = x(t + a)$ gilt:

$$\delta_0(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(0) = x(0 + a) = x(a). \quad (79.5)$$

Somit kann mit der Definition

$$\delta_0(t - a) := \delta_a(t) \quad (80.1)$$

ein zeitverschobener Dirac-Impuls definiert werden, für den die folgende formale Beziehung¹⁷ gilt:

$$\begin{aligned} \delta_0(t - a)(x(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t - a)x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t)x(t + a) dt \\ &= x(t + a)|_{t=0} = x(a) \end{aligned} \quad (80.2)$$

■ Faltung mit zeitverschobenen Dirac-Impulsen

Die Beziehung (80.1) hat eine weitreichende Konsequenz für die Darstellung zeitverschobener Signale. Berechnet man nämlich die *Faltung* von $\delta_0(t - a)$ mit einem Signal $x(t)$, so gilt:

$$\begin{aligned} \delta_0(t - a) * x(t) &= \delta_a(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(\tau)x(t - \tau) d\tau \\ &= x(t - \tau)|_{\tau=a} = x(t - a). \end{aligned} \quad (80.3)$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned} \delta_0(t) * x(t - a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(\tau)x(t - a - \tau) d\tau \\ &= x(t - a - \tau)|_{\tau=0} = x(t - a). \end{aligned} \quad (80.4)$$

Daher folgt:

$$\delta_0(t - a) * x(t) = \delta_0(t) * x(t - a) = x(t - a). \quad (80.5)$$

Zeittranslationen von Signalen lassen sich also durch entsprechende Faltungen mit zeitverschobenen Dirac-Impulsen darstellen!

■ „Stammfunktion“ des Dirac-Funktionals

Mit der folgenden Überlegung kann eine Art „Stammfunktion“ des Dirac-Impulses berechnet werden. Wir betrachten dazu das Einheitsprung-Signal $\sigma(t)$.

Über die Definition

$$\sigma(x(t)) := \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)x(t) dt \quad (80.6)$$

¹⁷ Es wird die Substitutionsregel verwendet.

kann das Sprungsignal $\sigma(t)$ ebenfalls als verallgemeinerte Funktion¹⁸ aufgefasst werden. Dabei ist $x(t)$, wie im Zusammenhang mit der Herleitung der Differentiationsregel (78.1) formuliert, ein Signal, welches (oft genug) differenzierbar ist und bei $\pm\infty$ verschwindet¹⁹ (vgl. Anhang A).

Nach der Ableitungsregel (78.1) gilt dann für die *distributionelle* Ableitung von $\sigma(t)$:

$$\left(\frac{d}{dt}\sigma\right)(x(t)) = - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)x'(t) dt. \quad (81.1)$$

Das Integral rechts in Gleichung (81.1) ist aber ein ganz gewöhnliches Riemann'sches Integral und kann mit der Stammfunktion $x(t)$ von $x'(t)$ leicht berechnet werden:

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)x'(t) dt &= - \int_0^{\infty} x'(t) dt \\ &= -x(t) \Big|_0^{\infty} = -x(\infty) - (-x(0)) \\ &= 0 + x(0) = x(0) \stackrel{!!}{=} \delta_0(x(t)). \end{aligned} \quad (81.2)$$

Im *verallgemeinerten Sinne* erhält man also tatsächlich

$$\int \delta_0(t) dt = \sigma(t), \quad (81.3)$$

bzw. in einem formalen Sinne

$$\int_{-\infty}^t \delta_0(\tau) d\tau = \sigma(t) \quad (81.4)$$

und

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = \delta_0(t). \quad (81.5)$$

■ Distributionelle Ableitung an Sprungstellen

Aus (81.5) lassen sich dann weitere Aussagen über die verallgemeinerte Ableitung unstetiger Funktionen herleiten, etwa über die Ableitung der **Rechteckfunktion**

¹⁸ $\sigma(t)$ ist also beides: „normale“ reelle Funktion und verallgemeinerte Funktion!

¹⁹ Man spricht in der Theorie der Distributionen von so genannten *Testfunktionen*.

$$\text{rect}_1(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (82.1)$$

Es gilt wegen $\text{rect}_1(t) = \sigma(t) - \sigma(t-1)$ im Sinne verallgemeinerter Funktionen:

$$\frac{d}{dt} \text{rect}_1(t) = \delta_0(t) - \delta_0(t-1). \quad (82.2)$$

Hier wird die Linearität der distributionellen Ableitung verwendet und die Tatsache, dass aufgrund der Ableitungsregel (78.1) gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \sigma(t-1) \right) (x(t)) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-1) x'(t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) x'(t+1) dt \\ &= \left(\frac{d}{dt} \sigma(t) \right) (x(t+1)) \\ &= \delta_0(x(t+1)) = x(1) \\ &= \delta_1(t)(x(t)) = \delta_0(t-1)(x(t)). \end{aligned} \quad (82.3)$$

Gleichung (82.2) lässt sich im Übrigen mit der mathematisch zwar nicht korrekten, dafür aber anschaulichen Interpretation des Dirac-Impulses entsprechend Abbildung 2.10 ganz gut illustrieren. Nach dieser Veranschaulichung erhalten wir als Ableitung eine „Funktion“, die an den Konstantenstücken der Rechteckfunktion 0 ist (und somit mit der gewöhnlichen Ableitung übereinstimmt) und an den Sprungstellen „unendlich“ ist (und somit den „unendlich“ steilen Übergang an diesen Stellen wiedergibt). Die Skizze in Abbildung 2.14 illustriert diese Interpretation.

Übung 19

In ähnlicher Weise ließen sich auch andere interessante Beziehungen herleiten. Noch einmal sei dem Leser in diesem Zusammenhang Übung 19, S. 92 empfohlen. ■

Da die **Impulsantwort** ein LTI-System²⁰ eindeutig charakterisiert, wäre es von großem Interesse, diese in der praktischen Anwendung zu **messen**.

Ein Problem ist dabei jedoch, dass der in der Definition vorausgesetzte **ideale Impuls** nicht praktisch realisiert werden kann. Das Beispiel 2.10, S. 74 zeigt aber, dass eine Impulsantwortmessung und damit eine **Systemidentifikation**

²⁰ bis auf die bereits auf Seite 67 angesprochenen Ausnahmen.

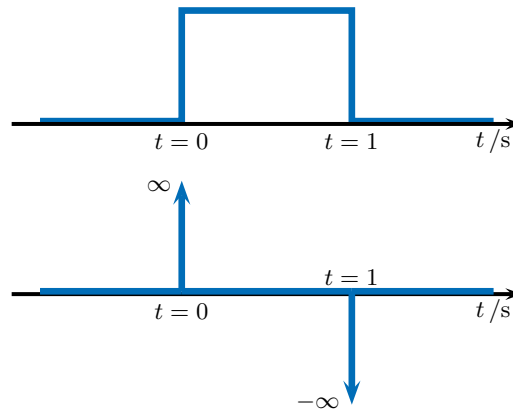


Abb. 2.14: Distributionelle Ableitung des Rechteckimpulses

in guter Näherung durch Verwendung von Rechtecksignalen durchgeführt werden könnte.

In der Praxis, insbesondere bei der Anregung mechanischer Systeme, sind aber auch diese Signale schwer realisierbar. Allerdings kann leicht nachgewiesen werden, dass beliebige Impulsformen zur Identifikation verwendet werden können, sofern sie die Bedingung erfüllen, in immer kürzerer Zeit immer mehr Energie auf das System aufzubringen.

Für die Identifikation mechanischer Systeme bedient man sich beispielsweise eines so genannten *Impulshammers*, wie er in Abbildung 2.15 dargestellt ist.



Abb. 2.15: Impulshammer zur Identifikation mechanischer Systeme [12]

Die Sprungantwort eines LTI-Systems

Weniger realisierungskritisch als der (ideale) Impuls ist das auf Seite 71 schon als wichtiges Systemerregungssignal erwähnte Sprungsignal.

Übung 20 Diese Erregung entspricht der Aufbringung eines Signals mit **konstanter endlicher Leistung** ab einem gewissen Zeitpunkt und kann leichter realisiert

Übung 21 werden, etwa, wie bereits auf Seite 71 angedeutet, durch das Aufschalten einer Gleichspannungsquelle bei einem elektrischen System oder das plötzliche Aufbringen einer konstanten Kraft bei einem mechanischen System.

Übung 22
Übung 23 Da sich die Sprunghöhen lediglich und einem konstanten Faktor unterscheiden, der bei linearen Systemen ja nur eine entsprechende Skalierung des Ausgangssignals bewirkt, genügt es, als Sprungsignal die (Einheits-)Sprungfunktion $\sigma(t)$ zu betrachten. Die Reaktion eines LTI-Systems auf dieses Signal nennen wir **Sprungantwort**.

Sei $\mathfrak{S}$ ein LTI-System. Dann heißt das Signal $y_\sigma(t)$ mit der Eigenschaft

$$y_\sigma(t) = \mathfrak{S}(\sigma)(t) \quad (84.1)$$

die **Sprungantwort** des Systems.

Die Gleichungen (81.3) und (81.5) zeigen, dass zwischen dem Dirac-Impuls $\delta_0(t)$ und der (Einheits-) Sprungfunktion $\sigma(t)$ ein sehr enger Zusammenhang besteht. Daher kann vermutet werden, dass auch die Sprungantwort eine eindeutige Charakterisierung des Systems liefern kann.

Mit Hilfe der Impulsantwort $h(t)$ des LTI-Systems lässt sich (84.1) gemäß (67.1) in folgender Form ausdrücken:

$$y_\sigma(t) = \sigma(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (84.2)$$

Nach (78.1) folgt für die **distributionelle** Ableitung der Sprungantwort $y_\sigma(t)$:

$$\begin{aligned} y'_\sigma(t)(x(t)) &= - \int_{-\infty}^{\infty} y_\sigma(t) x'(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau) h(t - \tau) x'(t) d\tau dt \quad (84.3) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \left[- \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau) x'(t + \tau) d\tau \right] dt. \end{aligned}$$

Den letzten Umformungen liegt die Substitution $t = \tilde{t} + \tau$ und die anschließende Umbenennung von $\tilde{t}$ nach t zu Grunde.

Das innere Integral entspricht nach (78.1) genau der distributionellen Ableitung von $\sigma(t)$, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} \left[- \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau) x'(t + \tau) d\tau \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma'(\tau) x(t + \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(\tau) x(t + \tau) d\tau = x(t + \tau)|_{\tau=0} = x(t). \end{aligned} \quad (85.1)$$

Damit erhält man insgesamt für alle $x(t)$:

$$y'_\sigma(t)(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t) dt = h(t)(x(t)). \quad (85.2)$$

Die distributionelle Ableitung der Sprungantwort ist also nichts anderes als die Impulsantwort, d.h. es gilt im distributionellen Sinne:

$$\frac{d}{dt}y_\sigma(t) = h(t). \quad (85.3)$$

Da die distributionelle Ableitung für differenzierbare reelle Funktionen der gewöhnliche Ableitung entspricht, gilt (85.3) auch im Sinne reeller Funktionen.

Der in (84.2) bis (85.2) hergeleitete Zusammenhang zwischen Sprung- und Impulsantwort ergibt sich im Übrigen auch aus der folgenden, in Abbildung 2.16 illustrierten Überlegung, welche auf der allgemeinen Austauschbarkeit der Reihenfolge bei der Hintereinanderschaltung von LTI-Systemen beruht.

Zwei in Reihe geschaltete LTI-Systeme können in der Reihenfolge immer vertauscht werden. Dies ergibt sich aus dem Darstellungssatz (67.1) und dem Kommutativitätsgesetz (69.5) der Faltung.

Laut Beispiel 1.4 ist der Integrierer ebenfalls ein LTI-System, sodass die Reihenfolge bei einer Hintereinanderschaltung Integrierer-System $\mathfrak{S}$, wie in Abbildung 2.16 illustriert, vertauscht werden kann.

Man erhält somit, dass die Sprungantwort $y_\sigma(t)$ des Systems $\mathfrak{S}$ mit dem Ausgangssignal des Integrierers übereinstimmen muss, wenn an dessen Eingang die Impulsantwort des Systems $\mathfrak{S}$ anliegt. Dies entspricht genau der Aussage von (85.3).

Übung 24

Übung 25

Übung 26

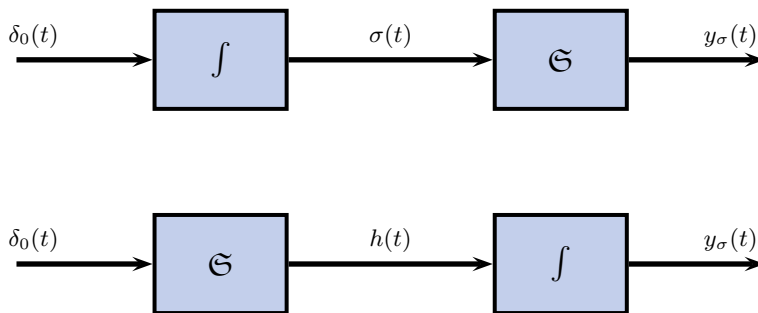


Abb. 2.16: Zusammenhang zwischen Sprung- und Impulsantwort

Da die Impulsantwort eine eindeutige explizite Charakterisierung des Systems im Zeitbereich ist, liefert über die Beziehung (85.3) auch die Sprungantwort eine solche eindeutige Charakterisierung.

Wir wollen dies an zwei Beispielen illustrieren:

2.12 Beispiel (Sprungantwort des Feder-Dämpfer-Systems)

In Beispiel 2.2 wurde gezeigt, dass das Feder-Dämpfer-System aus Abbildung 2.2, S. 36 die folgende Impulsantwort besitzt:

$$h(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ \frac{1}{d} e^{-\frac{c}{d}t} & \text{für } t \geq 0. \end{cases} \quad (86.1)$$

Gemäß (67.1) lässt sich die Sprungantwort damit wie folgt berechnen:

$$y_\sigma(t) = \sigma(t) * h(t) = h(t) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sigma(t - \tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{d} e^{-\frac{c}{d}\tau} d\tau. \quad (86.2)$$

Die letzte Umformung folgt aus der Tatsache, dass $\sigma(t - \tau) = 0$ ist, falls $\tau > t$ ist und dass zugleich $h(\tau) = 0$ ist, falls $\tau < 0$ ist.

Man berechnet weiter:

$$y_\sigma(t) = \frac{1}{d} \int_0^t e^{-\frac{c}{d}\tau} d\tau = -\frac{1}{d} \cdot \frac{d}{c} \cdot e^{-\frac{c}{d}\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{c} \cdot (1 - e^{-\frac{c}{d}t}) \quad \forall t \geq 0. \quad (86.3)$$

Für $t < 0$ ist die Sprungantwort natürlich 0.

Es ist leicht nachzurechnen, dass diese Funktion bis auf die Stelle $t = 0$ im gewöhnlichen Sinne differenzierbar ist und dass gilt:

$$\frac{d}{dt}y_{\sigma}(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{c} \cdot (1 - e^{-\frac{c}{d}t}) = \frac{1}{d}e^{-\frac{c}{d}t} = h(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (87.1)$$

Natürlich ist $\frac{d}{dt}y_{\sigma}(t) = h(t) = 0$ auch für $t < 0$.

Für die Stelle $t = 0$ ist $y_{\sigma}(t)$ nur rechts- und linksseitig differenzierbar. Die rechtsseitige Ableitung ist die stetige Fortsetzung $\lim_{t \rightarrow 0} h(t)$ und stimmt mit $h(0)$ gemäß Definition (86.1) überein. Die Impulsantwort ist also die Ableitung der Sprungantwort. ■

2.13 Beispiel (Impulsantwort Feder-Masse-Dämpfer-System)

In diesem Beispiel versuchen wir den Zusammenhang zwischen Sprung- und Impulsantwort *numerisch* zu verifizieren.

Die Sprungantwort des Feder-Masse-Dämpfer-Systems aus Abbildung 2.4 wurde in Beispiel 2.3, Seite 46 mit Hilfe einer Simulink-Simulation ermittelt (vgl. Simulink-System **s_viertelkfzDGL4.slx**).

Mit Hilfe des Simulink-Systems **s_viertelkfzIA.slx** (Abb. 2.17) kann die Impulsantwort (approximativ) ermittelt werden.

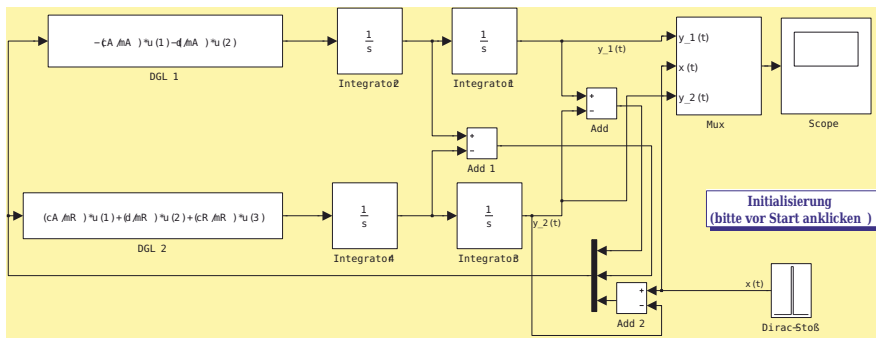


Abb. 2.17: Simulink-System zur Simulation der Impulsantwort des Viertelfahrzeug-Modells

Eine Simulation von **s_viertelkfzIA.slx** mit den in **init_viertelkfzIA.m** voreingestellten²¹ Parametern

```
stoptime = 1;      % Simulationsdauer
fixstep = 0.001;  % Schrittweite einer Fixed-Step Simul.
ImpDauer = 0.005; % Impulsdauer
```

sowie anschließend einer Simulation des Systems **s_viertelkfzDGL4.slx** mit den veränderten Parametern

²¹ Es empfiehlt sich, alle Parameter der Initialisierungsdateien vorab nochmals zu prüfen, bevor auf den Initialisierungsbutton gedrückt wird. Man beachte auch die generellen Hinweise bezüglich des Gebrauchs der Simulink-Systeme am Anfang des Buches.

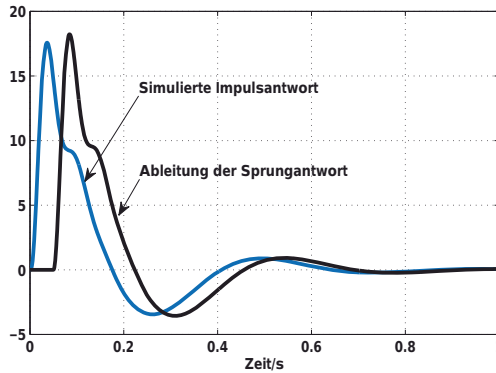


Abb. 2.18: Simulierte Impulsantwort und Ableitung der Sprungantwort für das Feder-Masse-Dämpfer-System aus Beispiel (2.3).

```
fixstep = 0.001; % Schrittweite einer Fixed-Step
                    % Simulation
steptime = 0.05; % Zeitpunkt des Sprungs
bordstein = 1;   % Sprunghöhe
```

liefert den in Abbildung 2.18 dargestellten Vergleich zwischen der simulierten Impulsantwort und der numerischen Ableitung der Sprungsantwort²². Diese Grafik kann nach der Simulation der beiden Simulink-Systeme mit Hilfe folgender MATLAB-Anweisungen erzeugt werden:

```
>> t = kfz4tImpAnt(:,1); % Zeitvektor
>> impantw = kfz4tImpAnt(:,2); % berechnete Impulsantwort
>> sprungantw = kfzDGL4(:,2); % berechnete Sprungantwort

>> % numerische Ableitung der Sprungantwort mit
>> % der MATLAB-funktion diff unter Berücksichtigung
>> % der Schrittweite fixstep
>> dsprungantw = diff([0;sprungantw])/fixstep;

>> % Plot der beiden Impulsantworten
>> plot(t,impantw,'b',t,dsprungantw,'k','LineWidth',3)
>> axis([0,1,-5,20])
>> grid
>> xlabel('Zeit/s');
```

²² Die Sprungantwort wurde durch den Parameter `steptime = 0.05`; leicht verzögert, damit die beiden berechneten Funktionen in der Grafik nicht genau übereinander liegen.

Man erkennt die recht gute Übereinstimmung der simulierten Impulsantwort und der numerischen Ableitung der (zeitlich etwas verzögerten) Sprungantwort des Systems.

2.3.5 Übungsaufgaben

Übung 12 (Lösungsband Seite 21)

Der in Abbildung 2.19 dargestellte elektrische Schaltkreis repräsentiert ein LTI-System mit der Quellspannung $x(t)$ als Eingangssignal und mit der am Lastwiderstand abgegriffenen Spannung $y(t)$ als Ausgangssignal.

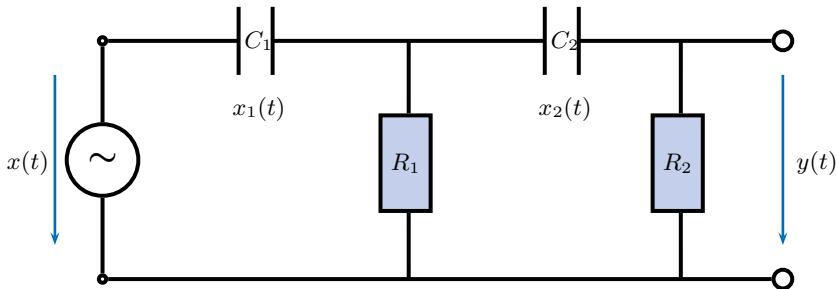


Abb. 2.19: Elektrisches Netzwerk

Zeigen Sie, dass das Ein-/Ausgangsverhalten (Systemverhalten) des Netzwerks durch die folgenden Gleichungssysteme beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\rho \\ -\frac{1}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \frac{1}{T_2} \end{pmatrix} \cdot x(t) \quad (89.1)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + 1 \cdot x(t). \quad (89.2)$$

Dabei ist $\gamma = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{R_2 \cdot C_1}$ und $\rho = \frac{1}{R_2 \cdot C_1}$.

Hinweis: Ermitteln Sie zunächst die Differentialgleichungen für die Kondensatorspannungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ und verwenden Sie die Spannungsteilerbeziehung $y(t) = x(t) + x_1(t) + x_2(t)$, um den gewünschten Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangssignal des Systems herzustellen.

Übung 13 (Lösungsband Seite 24)

Ein LTI-System $\mathfrak{S}$ sei im Zeitbereich durch die folgende Zustandsraumdarstellung beschrieben:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t), \quad (90.1)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + 0 \cdot u(t). \quad (90.2)$$

Weisen Sie nach, dass es sich bei der Darstellung

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \\ \dot{\tilde{x}}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t), \quad (90.3)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \end{pmatrix} + 0 \cdot u(t)$$

um eine zu (90.1) und (90.2) *äquivalente* Darstellung von $\mathfrak{S}$ handelt, indem Sie (ohne und mit Hilfe von MATLAB) nachrechnen, dass sich die jeweiligen Zustände des Systems auf eindeutige Weise ineinander überführen lassen. Prüfen Sie die Äquivalenz zudem durch eine geeignete Implementierung der Zustandsraumdarstellungen in Simulink und entsprechende Simulationen.

Übung 14 (Lösungsband Seite 28)

Zeigen Sie, dass sich ein LTI-System

$$\mathfrak{S} : u(t) \longrightarrow y(t),$$

welches durch die lineare Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t) + 2\dot{u}(t) \quad (90.4)$$

gegeben ist, durch die folgende Zustandsraumdarstellung beschreiben lässt:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t), \quad (91.1)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + 0 \cdot u(t).$$

Übung 15 (Lösungsband Seite 29)

Bestimmen Sie eine Zustandsraumdarstellung für ein LTI-System

$$\mathfrak{S} : u(t) \longrightarrow y(t),$$

welches durch die lineare Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \dot{u}(t) + u(t) \quad (91.2)$$

definiert wird.

Übung 16 (Lösungsband Seite 30)

Betrachten Sie ein LTI-System $\mathfrak{S}$, welches durch die Impulsantwort

$$h(t) = \text{rect}_1(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (91.3)$$

gekennzeichnet sei.

Berechnen Sie die Systemantwort auf die Erregung mit den Rechteckimpulsen

$$i_n(t) = n \cdot \text{rect}_{\frac{1}{n}}(t). \quad (91.4)$$

Übung 17 (Lösungsband Seite 32)

Realisieren Sie das LTI-System $\mathfrak{S}$ aus Übung 16 in Simulink und verifizieren Sie mit Hilfe der Simulation das dort errechnete theoretische Ergebnis für die Erregung mit den Rechteckimpulsen $i_n(t)$.

Hinweis: Beachten Sie den Zusammenhang zwischen der Sprungfunktion $\sigma(t)$ und dem Rechteckimpuls $\text{rect}_1(t)$. Beachten Sie weiterhin Beispiel 2.9 und das Ergebnis aus Übung 11, S. 45.



Übung 18 (Lösungsband Seite 34)

Mit dieser Aufgabe sollen die besonderen Eigenschaften verallgemeinerter Funktionen und insbesondere des Dirac-Impulses verdeutlicht werden.

Halten Sie sich dazu noch einmal vor Augen, dass verallgemeinerte Funktionen auf Seite 77 über die „Wirkung“ auf (gewisse) reelle Funktionen $x(t)$ definiert wurden und dass diese „Wirkung“ über das Integral (77.2) bestimmt wird, falls es sich bei der verallgemeinerten Funktion gleichzeitig um eine gewöhnliche reelle Funktion $\phi(t)$ handelt.

Es wurde schon auf Seite 77 darauf hingewiesen, dass dieses Integral für echte verallgemeinerte Funktionen nur rein formaler Natur ist. Jedoch ist es, wie dort bereits erwähnt, sinnvoll, die formale Integralschreibweise einzuführen, da die Rechentechniken für Integrale (wie Substitution, partielle Integration) auch für verallgemeinerte Funktionen gültig bleiben.

Dies soll nun in dieser Aufgabe ausgenutzt werden, um durch eine geeignete Substitution den zeitskalierten Dirac-Impuls $\delta_0(bt)$ zu berechnen.

Das Ergebnis der Aufgabe zeigt zugleich, dass die gängige Vorstellung des Dirac-Impulses als Funktion mit dem „Wert“ ∞ bei $t = 0$ zu groben Fehlschlüssen führen kann, denn natürlich ist $\delta_0(bt)$ nicht gleich $\delta_0(t)$, wie diese Vorstellung suggeriert.

Bearbeiten Sie nun folgende Teilaufgaben:

- Berechnen Sie $\delta_0(bt)$, $b \neq 0$ gemäß dem in der obigen Anleitung beschriebenen Ansatz mit Hilfe einer geeigneten Substitution innerhalb des formalen Integrals. Achten Sie dabei auf das Vorzeichen von b und gegebenenfalls auf die Veränderung der Integralgrenzen.
- Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die oben dargestellte Herleitung des Dirac-Impuls für $\delta_0(bt)$ noch einmal nachvollziehen, das heißt, indem Sie mit entsprechend zeitskalierten Rechteckimpulsen annähern.

Übung 19 (Lösungsband Seite 36)



- Rechnen Sie²³ mit Hilfe der Integraldefinition (77.2) für verallgemeinerte Funktionen nach, dass für eine differenzierbare Funktion $h(t)$ und differenzierbare Signale $x(t)$, die außerhalb eines endlichen Intervalls 0 sind, die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} x'(t)h(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h'(t) dt, \quad (92.1)$$

gilt, indem Sie die Technik der partiellen Integration anwenden (vgl. dazu auch Definition (78.1)).

²³ Die Berechnung motiviert die Definition der Ableitung einer verallgemeinerten Funktion gemäß (78.1).

- (b) Folgern Sie aus der Definition der Ableitung einer verallgemeinerten Funktion, dass der Wert $-x'(0)$ des Signals $-x'(t)$ an der Stelle der Stelle 0 als „Wirkung“ der verallgemeinerten Funktion $\delta'_0(t)$ aufgefasst werden kann!
- (c) Folgern Sie mit Teil (b) allgemeiner, dass $\delta'_0(t)$ die **Impulsantwort eines Differenzierers** ist, das heißt, dass $\delta'_0(t) * x(t) = x'(t)$ ist. Achten Sie bei der Anwendung von (b) darauf, dass bei der Ableitung von $x(t - \tau)$ nach τ die Kettenregel verwendet werden muss.
- (d) Die Aufgabenteile (a)-(c) liefern keine wirkliche Vorstellung, wie denn $\delta'_0(t)$ „aussehen“ könnte. Hier hilft wieder die Approximationstechnik. Überzeugen Sie sich durch eigene Rechnung oder mit Hilfe von Simulink, dass das in Abbildung 2.20 dargestellte Eingangssignal eines LTI-Systems eine Näherung für die Ableitung der Impulsantwort liefert (und somit $\delta'_0(t)$ approximiert).

Hinweis: Nehmen Sie als Beispielsysteme die zur Verfügung stehenden Simulink-Systeme zur Simulation des RC-Tiefpass oder einen einfachen Integrierer.

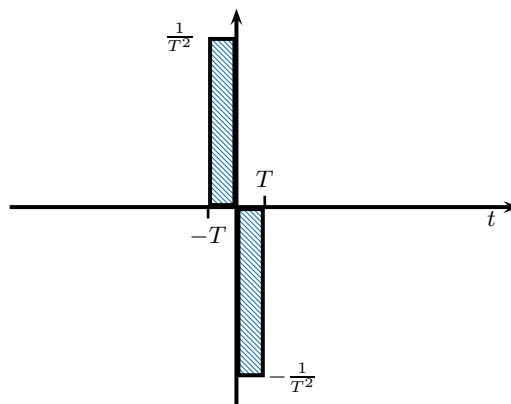


Abb. 2.20: Approximationen von $\delta'_0(t)$ mit Rechteckimpulsen

Übung 20 (Lösungsband Seite 39)

Bestimmen Sie:

- die Impulsantwort eines Verzögerers um a Zeiteinheiten,
- die Impulsantwort des Differenzierers,
- die Sprungantwort des Differenzierers.

Übung 21 (Lösungsband Seite 40)

Ein LTI-System $\mathfrak{S}$ werde durch das Blockschaltbild im Abbildung 2.21 definiert.

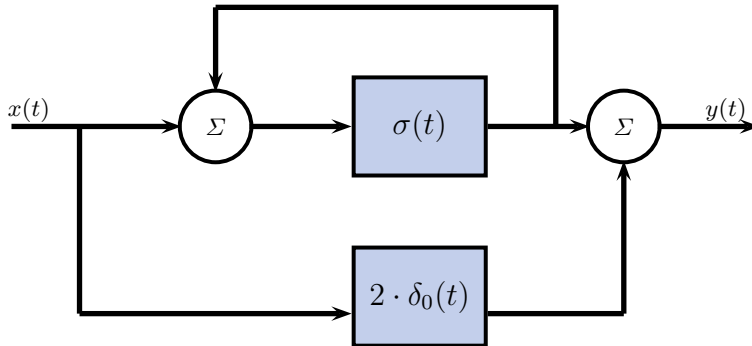


Abb. 2.21: Signalflussdarstellung eines LTI-Systems $\mathfrak{S}$

In den Teilsystemen sind dabei jeweils die *Impulsantworten* angegeben. Bestimmen Sie:

- die Impulsantwort des Gesamtsystems $\mathfrak{S}$,
- die Sprungantwort von $\mathfrak{S}$,
- eine Differentialgleichung, die $\mathfrak{S}$ beschreibt,
- eine Zustandsraumdarstellung für $\mathfrak{S}$.

Verifizieren Sie Ihr Ergebnis für die Sprungantwort durch eine Simulink-Simulation. Testen Sie Ihr Ergebnis für die Zustandsraumdarstellung mit einer weiteren Simulink-Simulation unter Verwendung des Simulink-Blockes State-Space.

Übung 22 (Lösungsband Seite 43)

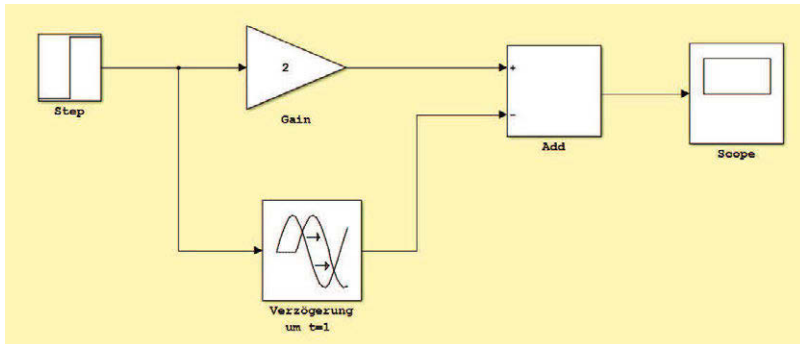
Ein LTI-System $\mathfrak{S}$ werde durch das Simulink-Blockschaltbild im Abbildung 2.22 gegeben.

Bestimmen Sie:

- die Sprungantwort des Systems $\mathfrak{S}$,
- die Impulsantwort von $\mathfrak{S}$,
- eine Differentialgleichung, die $\mathfrak{S}$ beschreibt.

Übung 23 (Lösungsband Seite 45)

Ein LTI-System $\mathfrak{S}$ habe die Impulsantwort

Abb. 2.22: Simulink-Blockschaltbild eines LTI-Systems $\mathfrak{S}$

$$h(t) = \delta_0(t) + \sigma(t). \quad (95.1)$$

- Skizzieren Sie ein Simulink-Blockschaltbild des Systems.
- Bestimmen Sie die Sprungantwort des Systems.
- Bestimmen Sie die Antwort des Systems auf $x(t) = \sigma(t) \cos(\omega_0 t)$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit einer entsprechenden Simulink-Simulation.

Übung 24 (Lösungsband Seite 48)

Skizzieren Sie die Impulsantwort

$$h(t) = \delta_0(t) + \sigma(t)e^{-t} \quad (95.2)$$



eines LTI-Systems. Berechnen Sie anschließend

- die Sprungantwort des Systems,
- die Antwort des Systems auf die Rechteckfunktion $\text{rect}_1(t)$ durch Berechnung der Faltung mit der Impulsantwort,
- Aufgabenteil (b) nochmals mit Hilfe der berechneten Sprungantwort.

Übung 25 (Lösungsband Seite 51)

Ein LTI-System $\mathfrak{S}$ habe die Sprungantwort

$$e^{-t} \text{rect}_1(t). \quad (95.3)$$

Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems, indem Sie den in (85.3) dargestellten Zusammenhang zwischen Impuls- und Sprungantwort ausnutzen.

Übung 26 (Lösungsband Seite 52)

Bestimmen Sie die Antwort eines LTI-Systems mit Impulsantwort

$$h(t) = \sigma(t)te^{-t} \quad (96.1)$$

auf die Systemerregung mit

$$x(t) = e^{-|t|}. \quad (96.2)$$

Verifizieren Sie anschließend Ihr Ergebnis numerisch mit Hilfe der MATLAB-Funktion `conv`.

Übung 27 (Lösungsband Seite 54)

Ein LTI-System $\mathfrak{S}$ habe die Impulsantwort

$$h(t) = \cos(2\pi t). \quad (96.3)$$

- (a) Bestimmen Sie die Sprungantwort des Systems.
- (b) Bestimmen Sie die Antwort des Systems auf $\text{rect}_1(t)$.
- (c) Ist $\mathfrak{S}$ realisierbar?

Übung 28 (Lösungsband Seite 56)

Die Grafik aus Abbildung 2.23 zeigt die Impulsantwort $h(t)$ eines LTI-Systems $\mathfrak{S}$.

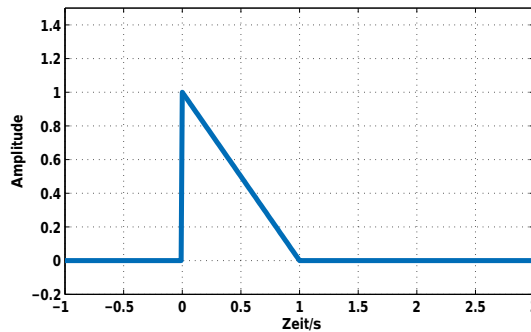


Abb. 2.23: Impulsantwort eines LTI-Systems $\mathfrak{S}$

- (a) Geben Sie in geschlossener Form²⁴ eine Funktionsvorschrift für die Impulsantwort an.
- (b) Entwerfen Sie ein Simulink-System, mit dem $\mathfrak{S}$ simuliert werden kann.

²⁴ Eine Funktionsvorschrift, die ohne Fallunterscheidung auskommt.

- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Simulink-Systems experimentell die Antwort des Systems auf ein Eingangssignal der Form

$$x(t) = \delta_0(t) + \sigma(t) \cdot \sin(t). \quad (97.1)$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zu Teil (b) vorab, welches LTI-System die Impulsantwort $\sigma(t) \cdot t$ hat!

2.4 Signale und LTI-Systeme im Bildbereich

Die explizite Beschreibung des Übertragungsverhaltens von LTI-Systemen im Zeitbereich als Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort hat den großen Nachteil, dass sich die Berechnung der Beziehung zwischen Ein- und Ausgangssignal im Allgemeinen als äußerst schwierig erweist. Selbst wenn die Berechnung analytisch durchgeführt werden kann, so ist der Berechnungsaufwand schon in einfachen Fällen enorm.

Ein weiterer Nachteil soll anhand des folgenden Beispiels illustriert werden:

2.14 Beispiel (Gesamt-Übertragungsverh. eines LTI-Systems)

Wir greifen dazu das in Abbildung 2.8 dargestellte allgemeine Signalflussdiagramm noch einmal auf und gehen davon aus, dass alle Teilsysteme LTI-Systeme sind.

In diesem Fall lässt sich jedes Teilsystem gemäß (67.1) und (79.2), wie in Abbildung 2.24 dargestellt, eindeutig durch seine Impulsantwort $h_k(t)$ charakterisieren.

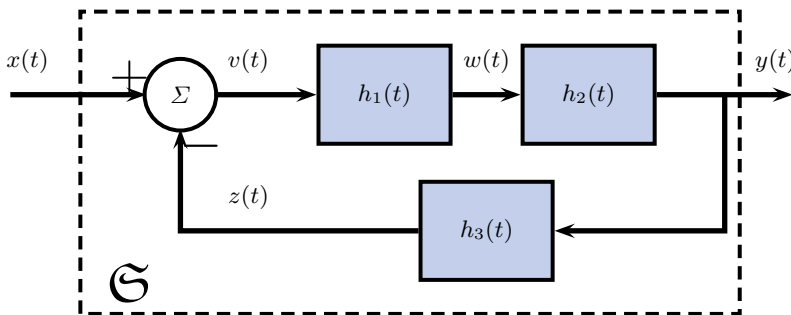


Abb. 2.24: Blockschaltbild eines (LTI-)Systems $\mathfrak{G}$, bestehend aus LTI-Teilsystemen.

Mit Hilfe der in das Blockschaltbild eingetragenen Hilfssignale $v(t)$ und $w(t)$ und der gegebenen Impulsantworten berechnen wir:

$$\begin{aligned} w(t) &= h_1(t) * v(t), & y(t) &= h_2(t) * w(t), \\ z(t) &= h_3(t) * y(t), & v(t) &= x(t) - z(t). \end{aligned} \quad (97.2)$$

Die **Hintereinanderausführung** der Teilsysteme im oberen Signalzweig (Vorwärtszweig), das heißt, der Übergang von $v(t)$ zu $y(t)$, lässt sich durch

$$\begin{aligned} y(t) &= h_2(t) * h_1(t) * v(t) = h_1(t) * h_2(t) * v(t) \\ &=: h_v(t) * v(t) \end{aligned} \quad (98.1)$$

angeben. Dabei wurde die Kommutativität (69.5) der Faltung verwendet (systemtheoretisch bedeutet dies im Übrigen, dass die Reihenfolge der LTI-Systeme im Vorwärtszweig gleichgültig ist).

Die **Hintereinanderausführung** der Teilsysteme im Vorwärtszweig lässt sich also durch **ein** System beschreiben, das durch die Faltungsgleichung

$$y(t) = h_v(t) * v(t) \quad (98.2)$$

dargestellt wird. Solche Systeme sind nach (67.1) LTI-Systeme und das Signal $h_v(t) := h_1(t) * h_2(t)$ ist die zugehörige Impulsantwort.

Wir können nun versuchen, aus (97.2) in gleicher Weise die Impulsantwort des Gesamtsystems²⁵ $\mathfrak{S}$ und damit dessen Darstellung als Faltungsgleichung abzuleiten.

Für das Hilfssignal $v(t)$ erhält man aus (97.2)

$$v(t) = x(t) - z(t) = x(t) - h_3(t) * y(t) \quad (98.3)$$

und damit insgesamt:

$$\begin{aligned} y(t) &= h_1(t) * h_2(t) * (x(t) - h_3(t) * y(t)) \\ &= -h_1(t) * h_2(t) * h_3(t) * y(t) + h_1(t) * h_2(t) * x(t) \end{aligned} \quad (98.4)$$

bzw.

$$y(t) + h_1(t) * h_2(t) * h_3(t) * y(t) = h_1(t) * h_2(t) * x(t). \quad (98.5)$$

Im nächsten Schritt sollte $y(t)$ aus der linken Seite der Gleichung ausgeklammert werden, was aber nicht ohne weiteres möglich erscheint, da wir es ja mit einer **Faltung** statt mit einer Multiplikation zu tun haben.

Hier hilft allerdings ein Blick auf Gleichung (78.3), welche den Dirac-Impuls als „Einselement“ bezüglich der Faltungsoperation identifiziert. Man erhält also aus (98.5):

$$y(t) * [\delta_0(t) + h_1(t) * h_2(t) * h_3(t)] = h_1(t) * h_2(t) * x(t). \quad (98.6)$$

Damit sind die Möglichkeiten dieser Methode jedoch leider erschöpft, da eine „Division“ für die Operation „Faltung“, die für die Auflösung der Gleichung (98.6) nach $y(t)$ notwendig wäre, nicht existiert oder zumindest nicht offensichtlich ist. ■

²⁵ Dass dieses System ein LTI-System ist, lässt sich mit Hilfe der allgemeinen Definitionen leicht nachrechnen.

Im vorangegangenen Beispiel wurden die positiven algebraischen Eigenschaften der Faltungsoperation (Multiplikationseigenschaft, Rechengesetze) so weit als möglich ausgenutzt. Allerdings führten die Überlegungen nicht ganz zum gewünschten Ziel, da es neben der i.Allg. schwierigen Berechnung offensichtlich noch algebraische Hindernisse (fehlende Division) gibt.

Die Systemtheorie bietet jedoch eine sehr elegante Methode an, diese Schwierigkeiten zu umgehen. Dazu rufen wir uns ins Gedächtnis, dass sich reale LTI-Systeme i.Allg. durch *lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* beschreiben lassen. Es ist eine wohl bekannte Tatsache, dass diese Klasse von Differentialgleichungen mit Hilfe der so genannten **Laplace-Transformation** in *algebraische Gleichungen* überführt und gelöst werden kann.

2.4.1 Laplace-Transformation und Bildbereich

Die Laplace-Transformation ist eine *Integraltransformation*, die jedem Signal (Funktion) im Zeitbereich - für die sie definiert ist, versteht sich - eindeutig eine komplexe Funktion zuordnet. Konkret ist sie wie folgt definiert:

Die Zuordnung

$$\mathcal{L} : f(t) \mapsto F(s), \quad s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C},$$

welche einem Signal (einer Funktion) $f(t)$ die komplexe Funktion

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (99.1)$$

zuordnet, heißt **zweiseitige Laplace-Transformation**.

Natürlich müssen an das Signal Bedingungen geknüpft werden, damit das Integral (99.1) existiert. Wir wollen diese nicht im Einzelnen untersuchen. Grob gesagt, darf das Signal $f(t)$ bei Übergang $t \mapsto \infty$ nicht „schneller“ wachsen, als die Exponentialfunktion $e^{-\sigma t}$ fällt, wenn $F(s)$ für $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$, $\sigma > 0$ im Sinne der gewöhnlichen Integrationstheorie existieren soll. Eine ähnliche Wachstumsbedingung muss für $t \mapsto -\infty$ und andere $s \in \mathbb{C}$ formuliert werden.

Die Definition der Laplace-Transformation kann auch auf gewisse Distributionen übertragen werden [11]. Da wir jedoch nur die Laplace-Transformierte des Dirac-Impulses benötigen, werden wir auf diese allgemeine Übertragung nicht eingehen und später nur diesen Spezialfall behandeln.

Die allgemeine Definition (99.1) der Laplace-Transformation erwähnen wir hier nur der Vollständigkeit halber, da wir fast ausschließlich so

genannte *kausale* Signale betrachten werden, das heißt Signale, für die $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$ ist. Man macht also die (meist sinnvolle) Annahme, dass die Signale vor Beginn der Beobachtung (Zeitpunkt $t = 0$) nicht existierten²⁶. Dies führt auf die folgende Definition:

Die Zuordnung

$$\mathcal{L}: f(t) \mapsto F(s), \quad s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C},$$

welche einem Signal (einer Funktion) $f(t)$ die komplexe Funktion

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (100.1)$$

zuordnet, heißt **(einseitige) Laplace-Transformation**.

Im Folgenden wird immer von der **einseitigen Laplace-Transformation** die Rede sein. Der Signalraum der Laplace-Transformierten wird mit **Bildbereich** bezeichnet. Wir sprechen daher von der **(einseitigen) Laplace-Transformation** auch als einer **Transformation in den Bildbereich**.

Für die Laplace-Transformation ist in der Literatur eine spezielle Symbolik eingeführt, die wir auch bei der später zu besprechenden *Fouriertransformation* weiterverwenden werden.

Wir kennzeichnen die (einseitige) Laplace-Transformation, je nach Situation, mit folgender Symbolik:

$$\begin{aligned} F(s) &:= \mathcal{L}(f)(s), \\ f(t) &\circ - \bullet F(s). \end{aligned}$$

Eigenschaften Laplace-Transformationen

Die Eigenschaften der Laplace-Transformation sind entscheidend für die Beschreibung von LTI-Systemen im Bildbereich, wie wir in Abschnitt 2.4.2 alsbald sehen werden. Es würde allerdings an dieser Stelle zu weit führen, wenn wir alle diese Eigenschaften im Einzelnen diskutieren und nachweisen wollten. Für eine fundierte Herleitung und Diskussion sei daher auf [11] verwiesen.

Tabelle 2.1 fasst die Rechenregeln für die Laplace-Transformation, die wir im Folgenden benötigen werden, zusammen.

²⁶ Dies gilt auch im Falle der Distributionen (vgl. [11]), wobei wir uns ohnehin nur auf die Dirac-Funktionale und ihre Ableitungen beschränken.

Tabelle 2.1: Einige wichtige Eigenschaften und Rechenregeln der Laplace-Transformation

Eigenschaft, Regel	Zeitbereich	Bildbereich
Linearität	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{d}{dt}f(t)$ $\frac{d^2}{dt^2}f(t)$ $\frac{d^n}{dt^n}f(t)$ $\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$sF(s) - f(+0)$ $s^2F(s) - sf(+0) - \dot{f}(+0)$ $s^nF(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(+0)$ $s^nF(s)$ (falls f Distribution [11])
Differentiation im Bildbereich	$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{ds^n}F(s)$
Integration im Zeitbereich	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
Integration im Bildbereich	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(p) dp$
Ähnlichkeitssatz	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
Verschiebungssatz	$f(t-a)\sigma(t-a), a > 0$	$e^{-as}F(s)$
Dämpfungssatz	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Faltungssatz	$f(t) * g(t)$	$F(s) \cdot G(s)$
Eindeutigkeitssatz	$f(t) \equiv g(t)$	$F(s) = G(s)$
Erster Grenzwertsatz	$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	
Zweiter Grenzwertsatz	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	

Einige dieser Regeln, wie etwa die Linearitätsregel, sind offensichtlich, andere, wie etwa der Ähnlichkeitssatz, sind mit einfachen Regeln der Integralrechnung leicht zu ermitteln, wieder andere, wie der distributionelle Differentiationssatz, sind sehr tief liegend und nur mit umfangreichen Vorüberlegungen erklärbar.

Besonders erwähnt werden sollte jedoch vielleicht der **Eindeutigkeitssatz**. Man erkennt an der Definition (100.1) sofort, dass die Laplace-Transformation im strengen Sinne *nicht* eindeutig sein kann, denn ändert man die zu transformierende Funktion $f(t)$ nur an einer Stelle ab, so bleibt der Wert des Integrals nach den Regeln der Integralrechnung gleich. Betrachtet man die Situation genauer ([11]), so erkennt man, dass alle Signale $f(t)$, welche

sich nur um eine so genannte **Nullfunktion** unterscheiden, dieselbe Transformierte haben müssen. Unter einer Nullfunktion versteht man dabei eine Funktion $n(t)$ mit der Eigenschaft

$$\int_0^t n(\tau) d\tau = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (102.1)$$

Wir kennzeichnen zwei Signale (Funktionen) $f(t)$ und $g(t)$, die in diesem Sinne als „gleich“ aufgefasst werden, in Tabelle 2.1 mit $f(t) \equiv g(t)$.

Für praktische Berechnungen hat diese kleine „Einschränkung“ der Eindeutigkeit keine Bedeutung, denn i.Allg. haben wir es mit (stückweise) differenzierbaren oder wenigstens stetigen Signalen zu tun. Zwei Signale $f(t)$ und $g(t)$ mit diesen Eigenschaften haben nur dann eine gemeinsame Transformierte, wenn sie tatsächlich identisch sind!

Ohne auf weitere Details einzugehen, werden wir die in Tabelle 2.1 zusammengefassten Eigenschaften im Folgenden einfach anwenden, um Laplace-Transformierte zu bestimmen und LTI-Systeme zu beschreiben.

Die Laplace-Transformationen der wichtigsten Signale sind der Tabelle C.1 aus Anhang C zu entnehmen. Aufgrund ihrer besonderen Bedeutung wollen wir an dieser Stelle jedoch die Transformationen des *Dirac-Impulses*, der *Sprungfunktion* und der *harmonischen Schwingungen* explizit bestimmen.

Laplace-Transformationen einiger wichtiger Signale

Wir beginnen zunächst mit der einfachen Rechteckfunktion.

2.15 Beispiel (Laplace-Transformierte von $\text{rect}_1(t)$)

Die Laplace-Transformation des Rechteckimpulses (vgl. (91.3))

$$\text{rect}_1(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (102.2)$$

ist eine einfache Integrationsübung, da das uneigentliche Integral (100.1) auf ein eigentliches Riemann'sches Integral führt, was leicht ausgewertet werden kann:

$$\begin{aligned} F_{\text{rect}_1}(s) &= \int_0^{\infty} \text{rect}_1(t) e^{-st} dt = \int_0^1 e^{-st} dt \\ &= \left(-\frac{1}{s} \right) e^{-st} \Big|_0^1 = -\frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-s}}{s} \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (102.3)$$

Für $s = 0$ ist offenbar $F_{\text{rect}_1}(s) = F_{\text{rect}_1}(0) = 1$. ■

Aus der Transformierten der Rechteckfunktion können in einfacher Weise mit Hilfe der Rechenregeln auch die Transformationen der normierten **Rechteckimpulse** $i_n(t)$ hergeleitet werden, die ja für die Modellierung des Dirac-Impulses von entscheidender Bedeutung waren.

2.16 Beispiel (Laplace-Transformierte der Impulse $i_n(t)$)

Es gilt zunächst:

$$i_n(t) = n \cdot \text{rect}_1(n \cdot t) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (103.1)$$

Mit Hilfe des **Ähnlichkeitssatzes** und der **Linearitätseigenschaft** folgt dann:

$$I_n(s) = \begin{cases} n \cdot \frac{1}{n} F_{\text{rect}_1}\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{1-e^{-\frac{s}{n}}}{\frac{s}{n}} & \text{für } s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{für } s = 0. \end{cases} \quad (103.2)$$

In einer mehr heuristischen als streng mathematischen Weise kann daraus auch gefolgert werden, welche Laplace-Transformierte der für die Systemtheorie so wichtige Dirac-Impuls haben muss.

2.17 Beispiel (Lapl.-Transformierte des Dirac-Impulses $\delta_0(t)$)

Da es sich beim Dirac-Impuls $\delta_0(t)$ um eine *verallgemeinerte Funktion* handelt, ist (100.1) im Sinne der gewöhnlichen Riemann'schen Integrationstheorie sinnlos.

Im distributionellen Sinne konvergieren die normierten Rechteckimpulse $i_n(t)$ gegen das Dirac-Funktional. Die Laplace-Transformation kann stetig auf diesen Grenzwert erweitert werden, wenn wir den entsprechenden Grenzwert auf der rechten Seite von (103.2) bilden.

Es gilt:

$$e^{-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!} = 1 - z + \frac{1}{2!} z^2 - \frac{1}{3!} z^3 + \dots \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (103.3)$$

Daher ist

$$\frac{1 - e^{-z}}{z} = 1 - \frac{1}{2!} z + \frac{1}{3!} z^2 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(k+1)!} \quad (103.4)$$

und

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-z}}{z} = 1. \quad (103.5)$$

Somit konvergiert $I_n(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ gegen 1.

Die Laplace-Transformierte des Dirac-Impulses ist also die **Konstantfunktion** $\Delta_0(s) = 1(s) \equiv 1$.

Damit erhalten wir formal²⁷:

$$\Delta_0(s) = \int_0^{\infty} \delta_0(t) e^{-st} dt = 1 \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (104.1)$$

Wesentlich einfacher ist die Berechnung der Transformation der Sprungfunktion.

2.18 Beispiel (Lapl.-Transformierte der Sprungfunktion $\sigma(t)$)

Für die **Sprungfunktion** $\sigma_0(t)$ erhalten wir durch Einsetzen in die Definition (100.1):

$$\Sigma(s) := \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-st} dt. \quad (104.2)$$

Dieses Integral existiert im Sinne der gewöhnlichen Riemann'schen Integrationstheorie, da $\sigma_0(t)$ eine gewöhnliche reelle Funktion ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \Sigma(s) &= \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s} (0 - e^0) = \frac{1}{s} \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \Re(s) > 0. \end{aligned} \quad (104.3)$$

Die Laplace-Transformierte der Sprungfunktion ist also $\Sigma(s) = \frac{1}{s}$, allerdings existiert diese Transformierte nur auf der rechten Hälfte der Gauß'schen Zahlenebene.

Auch die Transformierte der harmonischen Schwingungen bereitet keine Schwierigkeiten.

2.19 Beispiel (Lapl.-Transformierte harmon. Schwingungen)

Statt der **reellen harmonischen Funktionen** $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$ betrachten wir zunächst die **komplexen harmonischen Funktionen** $f_{\omega}(t) := e^{j\omega t}$.

²⁷ Oft wird bei der Herleitung von (104.1) auch mit der „Ausblendeigenschaft“ des Dirac-Impulses argumentiert, d.h. mit $\Delta_0(s) = e^{-st}|_{t=0} = e^0 = 1$. Dies ist aber nicht ohne weiteres korrekt, da e^{-st} keine Testfunktion ist. Für eine mathematisch korrekte Herleitung sei wiederum auf [11] verwiesen.

Durch Einsetzen in die Definition (100.1) erhalten wir:

$$F_{\omega}(s) := \int_0^{\infty} e^{j\omega t} e^{-st} dt. \quad (105.1)$$

Dieses Integral lässt sich ebenfalls wieder im Sinne der gewöhnlichen Riemann'schen Integrationstheorie berechnen und es gilt:

$$\begin{aligned} F_{\omega}(s) &= \int_0^{\infty} e^{(j\omega-s)t} dt = -\frac{1}{s-j\omega} e^{(j\omega-s)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{s-j\omega} (0 - e^0) = \frac{1}{s-j\omega} \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \Re(s) > 0. \end{aligned} \quad (105.2)$$

Die Laplace-Transformierten der komplexen harmonischen Schwingungen sind also $F_{\omega}(s) = \frac{1}{s-j\omega}$ und existieren ebenfalls nur auf der rechten Hälfte der Gauß'schen Zahlenebene.

Mit Hilfe der *Linearitätseigenschaft* der Laplace-Transformation lässt sich aus diesem Ergebnis unter Ausnutzung der aus der Euler-Formel folgenden bekannten Beziehungen

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad \text{und} \quad \cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (105.3)$$

sehr leicht ermitteln, welche Laplace-Transformierten die reellen harmonischen Schwingungen haben:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\sin)(s) &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{1}{2j} \frac{s+j\omega - (s-j\omega)}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \\ \mathfrak{L}(\cos)(s) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{1}{2} \frac{s+j\omega + (s-j\omega)}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (105.4)$$

Bestimmung der Laplace-Transformationen mit MATLAB

Statt mit Hilfe der in Anhang C, S. 561 dokumentierten Transformationstabelle C.1 der wichtigsten Laplace-Transformationen und der Rechenregeln aus Tabelle 2.1, S. 101, kann man Laplace-Transformationen natürlich unter Umständen bequemer mit Hilfe der *Symbolic Math Toolbox* von MATLAB bestimmen.

Zur Illustration greifen wir zunächst die vorangegangenen Beispiele auf.

2.20 Beispiel (Laplace-Transformationen mit MATLAB)

Die Berechnungen werden mit der MATLAB-Funktion `laplace` durchgeführt. Als Argumente benötigt diese Funktion *symbolische Ausdrücke*. Implizit wird dabei davon ausgegangen, dass es sich um Funktionen mit der unabhängigen Variablen t handelt. Die Transformation liefert dann Funktionsausdrücke in der Variablen s als Laplace-Transformierte zurück. Sollen die Variablennamen anders sein, so muss dies explizit vereinbart werden.

Die oben berechneten Transformierten ergeben sich wie folgt:

```
>> syms t omega          % Symbolische Variablen
>> % Laplace-Transformierte des Dirac-Impulses
>> D0 = laplace(dirac(t))

D0 =

1

>> % Laplace-Transformierte der Sprungfunktion
>> S = laplace(heaviside(t))

S =

1/s

>> % Laplace-Transformierte der Cosinusfunktion
>> Cs = laplace(cos(omega*t))

Cs =

s/(s^2+omega^2)

>> pretty(Cs)

      s
      —
      2    2
omega  + s

>> % Laplace-Transformierte der Sinusfunktion
>> Ss = laplace(sin(omega*t))

Ss =

omega/(s^2+omega^2)

>> pretty(Ss)
```

```

      omega
      -----
      2      2
omega  + s

>> % Laplace-Transformierte der komplexen Exponentialfunkt.
>> Es = laplace(exp(j*omega*t))

Es =

-1/(omega*i - s)

>> % Vereinfachungsmethode nutzen, um Ausdruck
>> % schöner darzustellen
>> Es = factor(Es)

Es =

1/(s - omega*i)

>> pretty(Es)

      1
      -----
s - omega i

```

Diese Ergebnisse hatten wir schon durch elementare Berechnungen erhalten. Natürlich liegt das Potential der Möglichkeiten der MATLAB-Funktion `laplace` bei komplexeren Fällen, die in der Transformationstabelle C.1 nicht mehr abgebildet sind und durch die Anwendung der Rechenregeln erst auf diese zurückgeführt werden müssten.

Hierzu ein weiteres Beispiel:

```

>> syms t omega T      % Symbolische Variablen
>> % Laplace-Transformierte eines Zeitsignals f(t)
>> f = sin(omega*t)*exp((t-1)/T)*heaviside(t-1)

f =

heaviside(t - 1)*exp((t - 1)/T)*sin(omega*t)

>> Fs = laplace(f)

Fs =

exp(-s)*((omega*cos(omega))/((s - 1/T)^2 + omega^2) + ...
(sin(omega)*(s - 1/T))/((s - 1/T)^2 + omega^2))

```

```
>> pretty(Fs)

      /
      |
      |      omega cos(omega)      sin(omega)      /      1 \ \
      |      omega cos(omega)      sin(omega)      \      T / |
exp(-s) |-----+-----|
      | /      1 \ 2      2      /      1 \ 2      2 |
      | | s - - | + omega      | s - - | + omega      |
      \ \      T /      \      T /      /

>> % Vereinfachungsmethode nutzen, um Ausdruck
>> % schöner darzustellen
>> Fs = simplify(Fs);
>> pretty(Fs)

T exp(-s) (T s sin(omega) - sin(omega) + T omega cos(omega))
-----
      2      2      2 2
      T omega + T s - 2 T s + 1
```

Die Laplace-Transformierte des Signals

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sin(\omega t) \cdot e^{\frac{t-1}{T}} \cdot \sigma(t-1) \\
 &= \begin{cases} \sin(\omega t) \cdot e^{\frac{t-1}{T}} & \text{für } t \geq 1, \\ 0 & \text{für } t < 1 \end{cases} \quad (108.1)
 \end{aligned}$$

ist also²⁸:

$$F(s) = \frac{T e^{-s} \cdot (\omega T \cos(\omega) + (sT - 1) \sin(\omega))}{T^2 s^2 - 2Ts + 1 + \omega^2 T^2}. \quad (108.2)$$

2.4.2 Beschreibung von LTI-Systemen im Bildbereich

Die Laplace-Transformation liefert, wie bereits mehrfach angedeutet, geeignete Methoden zur Beschreibung zeitkontinuierlicher LTI-Systeme, mit welchen die in den vorangegangenen Abschnitten angesprochenen Probleme umgangen werden.

²⁸ Leider stellt, wie im vorliegenden Fall, die Symbolic Math Toolbox das Ergebnis trotz Anwendung von Vereinfachungsfunktionen nicht immer in der übersichtlichsten Form dar. Hier ist manchmal manuelle Nacharbeit notwendig.

Wir wollen dies anhand eines (bekannten) Beispiels verdeutlichen. Hierzu verwenden wir die in Tabelle 2.1 zusammengefassten Rechenregeln für die Laplace-Transformation.

2.21 Beispiel (RC-Tiefpass)

In Beispiel 2.1, Gleichung (34.4) wurde bereits der RC-Tiefpass mit Hilfe der Differentialgleichung

$$T\dot{y}(t) + y(t) = x(t) \quad (109.1)$$

beschrieben. Es handelt sich hierbei um eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, die man mit Hilfe der Laplace-Transformation dadurch lösen kann, dass man beide Seiten der Gleichung zunächst **formal** transformiert.

Setzt man etwa $X(s) := \mathcal{L}(x)(s)$ und $Y(s) := \mathcal{L}(y)(s)$, so folgt zunächst aus der **Linearität** der Transformation:

$$T\mathcal{L}(\dot{y})(s) + Y(s) = X(s). \quad (109.2)$$

Tabelle 2.1 zeigt, wie $\mathcal{L}(\dot{y})(s)$ mit $Y(s)$ in Zusammenhang steht. Es gilt:

$$\mathcal{L}(\dot{y})(s) = sY(s) - y(+0). \quad (109.3)$$

Nach Bemerkung 2.2, S. 38 ist der RC-Tiefpass nur dann ein LTI-System, wenn die Anfangsbedingung keinen homogenen Anteil $\neq 0$ liefert. Dies ist für $y(0) = 0$ der Fall und man erhält insgesamt:

$$T \cdot sY(s) + Y(s) = X(s). \quad (109.4)$$

Selbstverständlich ist man bei dieser Berechnung stillschweigend davon ausgegangen, dass die Bedingungen für die Laplace-Transformierbarkeit der Signale, insbesondere des (kausalen) Systemerregungssignals $x(t)$, erfüllt sind. Gleichung (109.4) ist nun eine rein algebraische Gleichung, welche nach $Y(s)$ aufgelöst werden kann. Es folgt:

$$Y(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot X(s). \quad (109.5)$$

Wir erkennen, dass sich die Transformierte des Systemausgangs $Y(s)$ als **Produkt** der Funktion $H(s) := \frac{1}{Ts+1}$ und der Transformierten des Systemeingangssignals darstellen lässt.

Aus Gleichung (109.5) können wir mit Hilfe **des Faltungssatzes** aus Tabelle 2.1 unmittelbar ablesen, dass für die zugehörigen (im Sinne der Definition von S. 101 eindeutig bestimmten) Zeitsignale gelten muss:

$$y(t) = h(t) * x(t). \quad (109.6)$$

Ein Blick auf eine einschlägige Laplace-Transformierten-Tabelle (s. Anhang C) zeigt, dass die Laplace-Rücktransformierte $h(t)$ der Funktion $H(s) := \frac{1}{Ts+1}$ gerade die in (35.3) identifizierte **Impulsantwort** des RC-Tiefpasses ist, nämlich:

$$h(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} & \text{für } t \geq 0. \end{cases} \quad (110.1)$$

Die Funktion $H(s) = \frac{1}{Ts+1}$ im Bildbereich ist also die **Laplace-Transformierte der Impulsantwort** $h(t)$. ■

Es besteht offenbar eine Beziehung zwischen der Impulsantwort $h(t)$ und der ebenfalls rein systemabhängigen Funktion $H(s)$ im Bildbereich. Von besonderer Bedeutung ist dabei der **Faltungssatz der Laplace-Transformation**²⁹:

Seien $f(t)$ und $g(t)$ (kausale) Signale. Dann gilt:

$$(f * g)(t) \circ - \bullet F(s) \cdot G(s). \quad (110.2)$$

Er ist die Grundlage dafür, dass zeitkontinuierliche LTI-Systeme durch **Multiplikation** mit systemspezifischen Funktionen beschrieben werden können statt mit der kompliziert zu berechnenden Faltung:

Es sei $h(t)$ die **Impulsantwort** eines zeitkontinuierlichen LTI-Systems $\mathfrak{S} : x(t) \rightarrow y(t)$. Dann wird das LTI-System im Bildbereich durch **Multiplikation** mit der **Übertragungsfunktion (s-Übertragungsfunktion, Übertragungsfunktion im Bildbereich)**

$$H(s) := \mathfrak{L}(h)(s) \quad (110.3)$$

beschrieben. Es gilt mit $X(s) := \mathfrak{L}(x)(s)$ und $Y(s) := \mathfrak{L}(y)(s)$:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s). \quad (110.4)$$

Im Beispiel 2.21, S. 109 war dies $H(s) = \frac{1}{Ts+1}$.

Bevor wir die Vorteile dieser Darstellungsweise für LTI-Systeme behandeln, ist es angebracht, auf eine Frage einzugehen, die sich bei der Betrachtung der Laplace-Transformation vielleicht aufdrängt.

²⁹ Wir setzen stillschweigend immer voraus, dass die Laplace-Transformierten existieren!

Auf den ersten Blick wird nicht klar, welchen Gewinn man durch die Transformation hat, da es ebenso schwierig zu sein scheint, eine Laplace-Transformation zu berechnen wie eine Faltung.

Dies ist im Prinzip richtig und trifft in noch stärkerem Maße für die Rücktransformation zu, die es aufgrund der Eindeutigkeit der Transformation (s. S. 101) ja geben muss, deren Definition wir hier aber erst gar nicht angegeben haben, da sie Kenntnisse aus der *Funktionentheorie* (der Theorie komplexer Funktionen) benötigt.

Die gute Nachricht ist jedoch, dass man eine direkte Transformationsberechnung und ebenso eine direkte Formel für die Rücktransformation in der Praxis gar nicht benötigt, da man mit **tabellierten Standardtransformationen** (vgl. Anhang C, Tabelle C.1) auskommt. Komplexere Probleme (Systeme) lassen sich meist auf Probleme (Systeme) erster und zweiter Ordnung zurückführen³⁰, deren Standardformen tabelliert sind. Für die **Rücktransformationen** ist die **Tabelle** lediglich **in der Gegenrichtung** zu **verwenden**.

Darüber hinaus stehen heutzutage natürlich leistungsfähige Computer-Algebra-Werkzeuge (wie etwa die *Symbolic Math Toolbox* von MATLAB) zu Verfügung, sodass selbst dieser Aufwand nicht mehr getrieben werden muss. Wir werden im folgenden Abschnitt hierauf näher eingehen.

Zur Illustration der Vorteile der Beschreibung von LTI-Systemen im Bildbereich greifen wir Beispiel 2.14 noch einmal auf.

2.22 Beispiel (LTI-Systeme im Bildbereich)

Wir stellten in Beispiel 2.14 fest, dass sich das Gesamt-Übertragungsverhalten des Systems aus Abbildung 2.24 im Zeitbereich durch die Faltungsgleichung

$$y(t) + h_1(t) * h_2(t) * h_3(t) * y(t) = h_1(t) * h_2(t) * x(t) \quad (111.1)$$

beschreiben lässt. Eine Auflösung der Gleichung nach dem Ausgangssignal $y(t)$ war jedoch nicht möglich, da die Faltungsoperation $*$ zwar multiplikative Eigenschaften hat, es aber keine dazu passende Division zu geben scheint. Mit Hilfe der in Tabelle 2.1 zusammengefassten Rechenregeln der Laplace-Transformation können wir (111.1) jedoch in eine *äquivalente* Gleichung im Bildbereich überführen. Definieren wir $X(s) := \mathcal{L}(x)(s)$, $Y(s) := \mathcal{L}(y)(s)$ und $H_i(s) := \mathcal{L}(h_i)(s)$, so folgt aus der **Linearität** der Laplace-Transformation und dem **Faltungssatz**:

$$Y(s) + H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s) \cdot Y(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot X(s). \quad (111.2)$$

Damit erhält man

³⁰ Dies ist etwa mit der *Technik der Partialbruchzerlegung möglich*. Siehe Beispiel 2.23, S. 112.

$$Y(s) \cdot [1 + H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s)] = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot X(s) \quad (112.1)$$

und

$$Y(s) = \frac{H_1(s) \cdot H_2(s)}{1 + H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s)} \cdot X(s). \quad (112.2)$$

Die Übertragungsfunktion im Bildbereich ist also:

$$H(s) = \frac{H_1(s) \cdot H_2(s)}{1 + H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s)}. \quad (112.3)$$

Mit Hilfe der Beziehung (110.3) lässt sich damit (prinzipiell) sogar die **Impulsantwort** $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H)(t)$ bestimmen. _____■

Übertragungsfunktion im Bildbereich und Impulsantwort

Ist die Impulsantwort $h(t)$ eines LTI-Systems bekannt, so kann die **Übertragungsfunktion** $H(s)$ im Bildbereich nach (110.3) durch **Laplace-Transformation der Impulsantwort** bestimmt werden. Dies ist, wenn nicht durch elementare Berechnung, beispielsweise durch Verwendung von Transformationstabellen (vgl. Tabelle C.1) oder durch Einsatz der MATLAB-Funktion `laplace` möglich.

Von großem Interesse ist jedoch auch der umgekehrte Fall. Im vorangegangenen Beispiel wurde deutlich, dass die Gesamt-Übertragungsfunktion eines LTI-Systems, welches seinerseits aus einzelnen LTI-Teilsystemen besteht, im Bildbereich sehr viel leichter bestimmt werden kann als im Zeitbereich. Trotzdem ist natürlich die Zeitbereichsbeschreibung, sprich die Impulsantwort, nach wie vor von größtem Interesse³¹. Durch den Zusammenhang (110.3) ist klar, dass die Impulsantwort aus der Übertragungsfunktion $H(s)$ im Bildbereich durch **Laplace-Rücktransformation** gewonnen werden kann.

Wir haben auf Seite 111 darauf hingewiesen, dass die Rücktransformation prinzipiell mathematische Voraussetzungen benötigt, die wir im Rahmen dieses Buchs jedoch nicht ausführen müssen, da sie auf andere Weise gewonnen werden kann.

Wir wollen dies anhand der Übertragungsfunktion (112.3) aus dem vorangegangenen Beispiel 2.22 illustrieren.

2.23 Beispiel (Bestimmung der Impulsantwort $h(t)$ aus $H(s)$)

Zur Illustration der Methoden setzen wir konkrete Übertragungsglieder in (112.3) bzw. in das dazugehörige Blockschaltbild 2.24 ein.

Beispielsweise könnte das System ein regelungstechnisches System sein, bei dem $H_2(s)$ die **Regelstrecke** repräsentiert und $H_1(s)$ den **Regler**. Das System

³¹ Sie ist deshalb von Interesse, weil sie *gemessen* werden kann!

$H_3(s)$ könnte eine **Messvorrichtung** beschreiben, welche den Systemausgang $y(t)$ misst und diese Information zum Vergleich mit dem Sollwert an den Eingangsknoten zurückliefert.

Betrachten wir beispielsweise als Regelstrecke einen Integrator und als Messeinrichtung³² ein so genanntes **Verzögerungsglied 1. Ordnung**:

$$H_2(s) = \frac{10}{s}, \quad H_3(s) = \frac{1}{\frac{1}{10}s + 1}. \quad (113.1)$$

Als Regler verwenden wir einen so genannten **PI-Regler** mit der Übertragungsfunktion:

$$H_1(s) = 6 \cdot \left(1 + \frac{2}{s}\right). \quad (113.2)$$

Wir versuchen, die Impulsantwort des Gesamtsystems mit Hilfe der Laplace-Rücktransformation der Übertragungsfunktion $H(s)$ gemäß (112.3) zu bestimmen. Setzt man die gewählten Übertragungsglieder in (112.3) ein so erhält man

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{H_1(s) \cdot H_2(s)}{1 + H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s)} = \frac{6 \cdot \left(1 + \frac{2}{s}\right) \cdot \frac{10}{s}}{1 + 6 \cdot \left(1 + \frac{2}{s}\right) \cdot \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{\frac{1}{10}s + 1}} \\ &= \frac{\frac{60(s+2)}{s^2}}{\frac{\frac{1}{10}s + 1 + \frac{60(s+2)}{s^2}}{\frac{1}{10}s + 1}} = \frac{60(s+2) \left(\frac{1}{10}s + 1\right)}{\frac{1}{10}s^3 + s^2 + 60s + 120} \end{aligned} \quad (113.3)$$

und damit:

$$H(s) = \frac{60(s+2)(s+10)}{s^3 + 10s^2 + 600s + 1200} = 60 \frac{s^2 + 12s + 20}{s^3 + 10s^2 + 600s + 1200}. \quad (113.4)$$

Zur Ermittlung der Impulsantwort $h(t)$ kann die Transformationstabelle C.1 im Anhang nicht direkt verwendet werden, da der gefundene Ausdruck natürlich dort nicht vorkommt. Die klassische Technik besteht darin, den gefundenen (**rationalen**) Ausdruck (113.4) mittels einer **Partialbruchzerlegung** auf Tabellenausdrücke zurückzuführen.

Dazu werden zunächst die Nullstellen des Nennerpolynoms (**Polstellen**) bestimmt. Mit Hilfe des `solve`-Kommandos von MATLAB erleichtern wir uns die Suche nach diesen Nullstellen etwas:

```
>> nst = solve('s^3+10*s^2+600*s +1200','s');
>> nstd = double(nst)
```

³² Die Messvorrichtung ist für die gewählte Zeitkonstante zugegebenermaßen sehr träge, allerdings ist auch das vorliegende Regelsystem nicht optimiert, um die Systemreaktion ausgeprägter darstellen zu können.

nstd =

```
-2.0560 + 0.0000 i
-3.9720 +23.8305 i
-3.9720 -23.8305 i
```

Im vorliegenden Fall erhält man also eine reelle Polstelle s_1 und zwei komplex konjugierte Polstellen s_2 und s_2^* . Eine (reelle) Partialbruchdarstellung ergibt sich dann aus dem Ansatz:

$$H(s) = \frac{A}{s - s_1} + \frac{Bs + C}{s^2 - 2\Re(s_2)s + |s_2|^2} := \frac{A}{s - s_1} + \frac{Bs + C}{s^2 + \alpha s + \beta}. \quad (114.1)$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit dem Nennerpolynom, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$60(s^2 + 12s + 20) = A \cdot (s^2 + \alpha s + \beta) + (Bs + C) \cdot (s - s_1). \quad (114.2)$$

Es ist nun leicht, durch Koeffizientenvergleich oder (meist besser) durch Einsetzen bestimmter Werte für s drei lineare Bestimmungsgleichungen für A , B und C zu erhalten. Das Einsetzen der reellen Polstelle s_1 liefert etwa:

$$\begin{aligned} 60(s_1^2 + 12s_1 + 20) &= A \cdot (s_1^2 + \alpha s_1 + \beta) \\ \Leftrightarrow A &= \frac{60(s_1^2 + 12s_1 + 20)}{(s_1^2 + \alpha s_1 + \beta)}. \end{aligned} \quad (114.3)$$

Setzt man $s = 0$ ein, so erhält man:

$$1200 = A \cdot \beta - s_1 C \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{A \cdot \beta - 1200}{s_1}. \quad (114.4)$$

Das Einsetzen von $s = 1$ liefert:

$$\begin{aligned} 1980 &= A \cdot (1 + \alpha + \beta) + (B + C) \cdot (1 - s_1) \\ \Leftrightarrow B &= \frac{1980 - A \cdot (1 + \alpha + \beta) - C \cdot (1 - s_1)}{1 - s_1}. \end{aligned} \quad (114.5)$$

Wir erhalten somit:

```
>> s1 = nstd(1), alpha = -2*real(nstd(2))

s1 =

-2.0560
```

```

alpha =
    7.9440

>> beta = abs(nstd(2))^2

beta =
    583.6673

>> A = 60*(s1^2 + 12*s1 + 20)/(s1^2 + alpha*s1 + beta)

A =
   -0.0467

>> C = (A*beta - 1200)/s1

C =
    596.9169

>> B = (1980 - A*(1 + alpha + beta) - C*(1 - s1))/(1 - s1)

B =
    60.0467

```

Alternative Berechnung der Partialbruchzerlegung: Die Partialbruchzerlegung kann alternativ auch mit der MATLAB-Funktion `residue` bestimmt werden.

Dazu müssen lediglich die Koeffizienten der Gesamt-Übertragungsfunktion $H(s)$ aus (113.4) übergeben werden:

```

>> % Zählerkoeffizienten
>> ZK = 60*[1 12 20]

ZK =
    60    720   1200

>> % Nennerkoeffizienten
>> ZN = [1 10 600 1200]

ZN =

```

```

1          10          600          1200

>> % Bestimmung der Koeffizienten der Partialbruch-
>> % zerlegung
>> [R,S,K] = residue(ZK,ZN)

R =

30.0233 - 7.5200i
30.0233 + 7.5200i
-0.0467 + 0.0000i

S =

-3.9720 +23.8305i
-3.9720 -23.8305i
-2.0560 + 0.0000i

K =

[]

```

Die Funktion `residue` liefert die aus der vorigen Berechnung schon bekannten (komplexen) Pole S und die Koeffizienten R der komplexen Partialbruchzerlegung zurück. Der Vektor K beinhaltet die Koeffizienten eines Polynoms, welches abgespalten werden kann, wenn der Zählergrad der zu zerlegenden rationalen Funktion nicht kleiner als der Nennergrad ist. Da dies im vorliegenden Beispiel nicht der Fall ist, ist der Vektor leer.

Mit Hilfe der berechneten Parameter kann nun eine Partialbruchzerlegung (unter Verwendung der Bezeichnungen aus (114.1) für die Pole) in der Form

$$H(s) = \frac{R_3}{s - s_1} + \frac{R_1}{s - s_2} + \frac{R_2}{s - s_2^*} \quad (116.1)$$

bestimmt werden.

Will man die Partialbruchzerlegung auf eine reelle Darstellung gemäß (114.1) überführen, so müssen die letzten beiden Brüche zusammengefasst werden. Man erhält:

$$H(s) = \frac{R_3}{s - s_1} + \frac{(R_1 + R_2)s - R_1s_2^* - R_2s_2}{s^2 + \alpha s + \beta}. \quad (116.2)$$

Aus einem Vergleich mit (114.1) ergibt sich, dass $R_3 = A$ und $R_1 + R_2 = B$ sowie $-R_1s_2^* - R_2s_2 = C$ sein muss. Die Parameter A , B und C können wie folgt leicht mit MATLAB ermittelt werden:

```
>> A = R(3)

A =

    -0.0467

>> B = R(1)+R(2)

B =

    60.0467

>> C = -R(1)*S(2)-R(2)*S(1)

C =

    596.9169
```

Man erhält damit die gleichen Koeffizienten der reellen Darstellung wie mit der ersten Methode.

Ermittlung der Impulsantwort: Die Terme der reellen Partialbruchzerlegung haben jedoch noch nicht die für die Anwendung der Transformationstabelle C.1 geeignete Form. Mit Hilfe der Definitionen $\omega^2 := \beta - (\alpha/2)^2$ und $a = \alpha/2$ erhält man zunächst:

$$\begin{aligned} \frac{Bs + C}{s^2 + \alpha s + \beta} &= B \frac{s + C/B}{(s + \alpha/2)^2 + \omega^2} = B \frac{s + a + C/B - a}{(s + a)^2 + \omega^2} \\ &= B \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2} + \frac{C - aB}{\omega} \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (117.1)$$

In dieser Form kann man der Transformationstabelle nun folgende Laplace-Rücktransformationen entnehmen:

$$\begin{aligned} \frac{A}{s - s_1} &\bullet - \circ A \cdot e^{s_1 t}, \\ \frac{Bs + C}{s^2 + \alpha s + \beta} &\bullet - \circ B e^{-at} \cos(\omega t) + \frac{C - aB}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (117.2)$$

Daraus ergibt sich für die Impulsantwort des Systems:

$$H(s) \bullet - \circ h(t) = A \cdot e^{s_1 t} + B e^{-at} \cos(\omega t) + \frac{C - aB}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t). \quad (117.3)$$

Mit Hilfe von MATLAB ermitteln wir die noch fehlenden Parameter:

```
>> omega = sqrt(beta-(alpha/2)^2)

omega =

    23.8305

>> a=alpha/2

a =

    3.9720
```

Damit ergibt sich:

$$h(t) = -0.0467 \cdot e^{-2.056 \cdot t} + 60.0467 \cdot e^{-3.972 \cdot t} \cos(23.8305 \cdot t) + 15.04 \cdot e^{-3.972 \cdot t} \sin(23.8305 \cdot t). \quad (118.1)$$

Mit den Anweisungen

```
>> t = (0:0.01:2);
>> h = A*exp(s1*t) + B*exp(-a*t).*cos(omega*t) + ...
      (C-a*B)/omega*exp(-a*t).*sin(omega*t);
>> plot(t,h,'b','LineWidth',3)
>> grid
>> xlabel('Zeit/s')
```

erhält man die in Abbildung 2.25 wiedergegebene grafische Darstellung der Impulsantwort. 

Übertragungsfunktionen im Bildbereich mit MATLAB

Das vorangegangene Beispiel zeigt, dass die Bestimmung der Impulsantwort $h(t)$ aus der Übertragungsfunktion $H(s)$ im Bildbereich mit Hilfe der Tabellen schon in einfachen Fällen rechnerisch recht umfangreich werden kann. Dabei wurde der Rechengang im Beispiel noch vereinfacht, indem einige Zwischenrechnungen bereits mit MATLAB durchgeführt wurden.

Steht MATLAB zur Verfügung, so können Berechnungen im Zusammenhang mit der Übertragungsfunktion im Bildbereich, wie etwa die Bestimmung der Impulsantwort im vorangegangenen Beispiel, durch Verwendung geeigneter Funktionen im Allgemeinen schneller durchgeführt werden.

Prinzipiell könnte dies durch den Einsatz der Funktionen `laplace` und `ilaplace` der *Symbolic Math Toolbox* geschehen, mit denen *Laplace-Transformation* und *Inverse Laplace-Transformation* bestimmt werden können. Damit könnte etwa die Impulsantwort durch direkte Lösung der

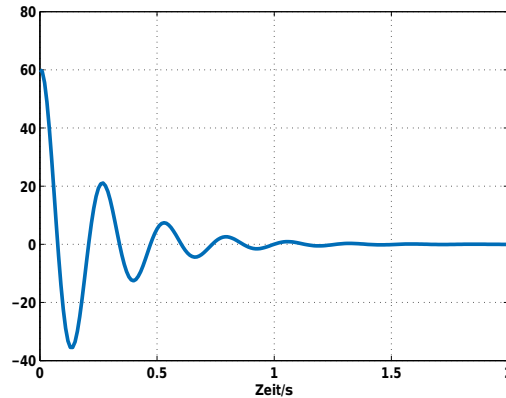


Abb. 2.25: Impulsantwort zum System nach Gleichung (113.4)

Gleichung (110.3) gewonnen werden. Übung 30 zeigt allerdings, dass auch dieser Weg unter Umständen recht schwierig sein kann, da sowohl `laplace` als auch `ilaplace` nicht immer gut handhabbare Ergebnisse liefern.

Hat man dagegen die *Control Systems Toolbox* zur Verfügung, so stehen mächtige Werkzeuge zur **numerischen** Berechnung der Übertragungsfunktionen und anderer relevanter Größen, wie etwa der Impulsantwort und der Sprungantwort, zur Verfügung. Mit Hilfe dieser Werkzeuge soll das vorangegangene Beispiel 2.23 nochmals bearbeitet werden.

Übung 30

2.24 Beispiel (Behandlung von LTI-Systemen mit MATLAB)

Zunächst müssen die LTI-Teilsysteme definiert werden. Dies kann mit der *Control Systems Toolbox*-funktion `tf` (transfer function) geschehen.

```
>>% Definition der Konstanten
>>K = 6; T1 = 0.5;
>>D = 10; T = 0.1;

>>% Definition des Systems H1(s)
>>H1 = tf([K*T1, K],[T1 0])

H1 =

    3 s + 6
    -----
    0.5 s

Continuous-time transfer function.

>>% Definition des Systems H2(s)
```

```
>> H2 = tf(D,[1 , 0])
```

```
H2 =
```

```
10
```

```
——  
s
```

Continuous-time transfer **function**.

```
>> % Definition des Systems H3(s)
```

```
>> H3 = tf(1,[T, 1])
```

```
H3 =
```

```
1  
——  
0.1 s + 1
```

Continuous-time transfer **function**.

```
>> % Informationen über die angelegten Variablen
```

```
>> whos
```

Name	Size	Bytes	Class	Attributes
D	1x1	8	double	
H1	1x1	1049	tf	
H2	1x1	1049	tf	
H3	1x1	1049	tf	
K	1x1	8	double	
T	1x1	8	double	
T1	1x1	8	double	

```
>> % Informationen über das Tf-Objekt H1
```

```
>> get(H1)
```

```
num: {[3 6]}  
den: {[0.5000 0]}  
Variable: 's'  
ioDelay: 0  
InputDelay: 0  
OutputDelay: 0  
Ts: 0  
TimeUnit: 'seconds'  
InputName: {''}  
InputUnit: {''}  
InputGroup: [1x1 struct]  
OutputName: {''}  
OutputUnit: {''}  
OutputGroup: [1x1 struct]
```

```

Name: ''
Notes: {}
UserData: []
SamplingGrid: [1 x1 struct]

```

Die Systeme werden durch Angabe der Zählerpolynom- und Nennerpolynom-Koeffizienten definiert. Die Koeffizienten werden dabei in *absteigender* Reihenfolge der Potenzen von s angegeben. Das Ergebnis sind Objekte der Klasse **tf**, welche noch weitere Informationen enthalten, auf die wir an dieser Stelle aber nicht näher eingehen wollen.

Alternativ können die **tf**-Objekte auch auf folgende Weise erzeugt werden:

```

>> % Anlegen der tf-variable (hier s, es sind aber
>> % auch andere Variablennamen möglich, z.B. p
>> s = tf('s')

```

s =

s

Continuous-time transfer function.

```

>> % Anlegen der tf-Objekte direkt als Formel in s
>> H1 = K*(1+1/(T1*s))

```

H1 =

$$\frac{3s + 6}{0.5s}$$

Continuous-time transfer function.

```

>> H2 = D/s

```

H2 =

$$\frac{10}{s}$$

Continuous-time transfer function.

```

>> H3 = 1 / (T*s+1)

```

H3 =

$$\frac{1}{0.1 s + 1}$$

Continuous-time transfer function.

Für die Erzeugung der Übertragungsfunktion von Verknüpfungen (Parallelschaltung, Hintereinanderschaltung und Rückkopplung) dieser Systeme stehen die Funktionen `parallel`, `series` und `feedback` zur Verfügung. Dabei kann angegeben werden, welche Aus- und Eingänge jeweils miteinander verknüpft werden. Da es sich im vorliegenden Beispiel jedoch um SISO (Single-Input-Single-Output) Systeme handelt, kann diese Angabe entfallen. Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises kann auf folgende Weise bestimmt werden:

```
>> % Berechnung der Übertragungsfunktion des
>> % Vorwärtzweiges
>> Hvor = series(H1,H2)
```

Hvor =

$$\frac{30 s + 60}{0.5 s^2}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> % Berechnung der Übertragungsfunktion Systems
>> % (negative Rückkopplung)
>> H = feedback(Hvor,H3)
```

H =

$$\frac{3 s^2 + 36 s + 60}{0.05 s^3 + 0.5 s^2 + 30 s + 60}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> % Bereinigung um eventuell gleiche Pol-Nullstellen-Paare
>> H = minreal(H)
```

H =

$$\frac{60 s^2 + 720 s + 1200}{s^3 + 10 s^2 + 600 s + 1200}$$

Continuous-time transfer function.

Wir erhalten offenbar das in (113.4) bestimmte Ergebnis.

Eine Alternative zur Verwendung der Verknüpfungsfunktionen wäre im vorliegenden Fall die direkte Anwendung der Gleichung (112.3):

```
>> H = H1*H2/(1+H1*H2*H3)

H =
```

$$\frac{1.5 \, s^4 + 18 \, s^3 + 30 \, s^2}{0.025 \, s^5 + 0.25 \, s^4 + 15 \, s^3 + 30 \, s^2}$$
Continuous-time transfer function.

```
>> H = minreal(H)

H =
```

$$\frac{60 \, s^2 + 720 \, s + 1200}{s^3 + 10 \, s^2 + 600 \, s + 1200}$$
Continuous-time transfer function.

Die Impulsantwort kann nun numerisch mit Hilfe der Funktion `impulse` bestimmt werden:

```
>> % Zeitintervall definieren
>> t = (0:0.01:2);

>> % Impulsantwort bestimmen
>> [imant, time] = impulse(H, t);
```

Mit der in (118.1) errechneten Formel kann die Berechnung überprüft werden:

```
>> % Impulsantwort nach der gefundenen Formel
>> h = A*exp(s1*t) + B*exp(-a*t).*cos(omega*t) + ...
(C-a*B)/omega*exp(-a*t).*sin(omega*t);

>> % Vergleich der ersten 20 numerischen Werte
>> % zur Kontrolle
```

```
>> [t(1:20)', h(1:20)', imant(1:20)]
```

```
ans =
```

0	60.0000	60.0000
0.0100	59.4438	59.4438
0.0200	55.6084	55.6084
0.0300	48.9586	48.9586
0.0400	40.0805	40.0805
0.0500	29.6401	29.6401
0.0600	18.3397	18.3397
...	...	...

Die gefundenen Impulsantworten stimmen offenbar überein.

Auch die Sprungantwort kann auf einfache Weise ermittelt werden:

```
>> % Zeitintervall definieren
```

```
>> t = (0:0.01:2);
```

```
>> % Sprungantwort bestimmen
```

```
>> [spant, time] = step(H,t);
```

```
>> % Sprungantwort plotten
```

```
>> plot(time, spant, 'b', 'LineWidth', 3)
```

```
>> grid
```

```
>> xlabel('Zeit/s')
```

Die Sprungantwort ist grafisch in Abbildung 2.26 dargestellt. 

2.4.3 Transformation von Differentialgleichungen

In Abschnitt 2.3.1 wurde bereits erwähnt, dass sich die überwiegende Zahl der realen analogen elektrischen, mechanischen, hydromechanischen und thermischen LTI-Systeme durch *lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* der allgemeinen Form

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{j=0}^M b_j \frac{d^j}{dt^j} x(t) \quad (124.1)$$

beschreiben lassen.

Einfache Beispiele waren hierfür der RC-Tiefpass (Beispiel 2.1, S. 33) und das Feder-Dämpfer-System (Beispiel 2.2, S. 35). Der RC-Tiefpass wurde in Beispiel 2.21 erneut aufgegriffen, um zu zeigen, wie die das System beschreibende Differentialgleichung mit Hilfe der Laplace-Transformation un-

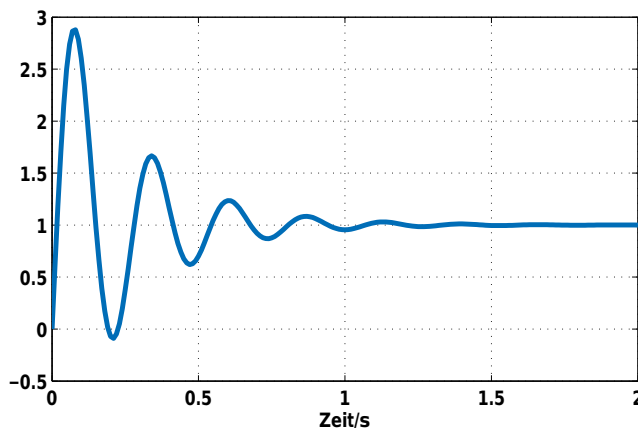


Abb. 2.26: Sprungantwort zum System nach Gleichung (113.4)

ter Verwendung der in Tabelle 2.1 niedergelegten Rechenregeln in die Übertragungsgleichung im Bildbereich entsprechend (110.4) überführt werden kann.

Dieser Zusammenhang kann generell hergestellt werden, denn die im Beispiel 2.21 verwendete Technik lässt sich leicht auf die allgemeine Form (124.1) übertragen.

Ist das LTI-System, welches durch die Differentialgleichung (124.1) beschrieben wird, „in Ruhe“, d.h. sind alle Anfangswerte gleich 0, so erhält man aus der allgemeinen Rechenregel der Laplace-Transformation für die Differentiation im Zeitbereich (vgl. Tabelle 2.1, S. 101):

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k \cdot Y(s) = \sum_{j=0}^M b_j s^j \cdot X(s). \quad (125.1)$$

Dabei bezeichnen $Y(s)$ und $X(s)$ die Laplace-Transformierten der Systemantwort $y(t)$ und des Systemeingangssignals $x(t)$.

Die Gleichung (125.1) kann nun durch einfache Umstellung in die Übertragungsgleichung im Bildbereich entsprechend (110.4) überführt werden:

$$Y(s) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j s^j}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \cdot X(s). \quad (125.2)$$

Die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j s^j}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (125.3)$$

steht also in direktem Zusammenhang mit den Koeffizienten der Differentialgleichung.

Wir wollen diese Technik noch einmal an einem konkreten Beispiel erläutern und greifen dazu das Beispiel 2.8 eines Systems nochmals auf, welches durch eine lineare Differentialgleichung 3. Ordnung gemäß (64.3) beschrieben wird.

2.25 Beispiel (LTI-System 3. Ordnung)

Betrachten wir ein LTI-System, welches durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 2 \cdot \dot{y}(t) + 1 \cdot y(t) + 0.5 \cdot y(t) = x(t) \quad (126.1)$$

modelliert ist³³.

Dabei bezeichnet $x(t)$ das Eingangssignal und $y(t)$ die Systemantwort.

In Beispiel 2.8 wurde eine wichtige Kenngröße des Systems, die Impulsantwort, durch den Umweg über die Darstellung des Systems in der Zustandsraumform gewonnen. Dies kann, wie wir gesehen haben, mit der Übertragungsfunktion im Bildbereich u.U. einfacher erfolgen.

Mit Hilfe der Laplace-Transformation lässt sich nun die Übertragungsfunktion im Bildbereich gemäß (125.2) und (125.3) ermitteln. Man erhält durch Anwendung der Laplace-Transformation auf (126.1):

$$\begin{aligned} s^3 Y(s) - s^2 y(+0) - s \dot{y}(+0) - \ddot{y}(+0) \\ + 2 \cdot (s^2 Y(s) - s y(+0) - \dot{y}(+0)) \\ + 1 \cdot (s Y(s) - y(+0)) + 0.5 \cdot Y(s) = X(s). \end{aligned} \quad (126.2)$$

Da vorausgesetzt wird, dass wir ein System „in Ruhe“ betrachten, sind alle Anfangswerte $\ddot{y}(0)$, $\dot{y}(0)$, $y(0)$ gleich 0 und wir erhalten:

$$\begin{aligned} s^3 Y(s) + 2 \cdot s^2 Y(s) + 1 \cdot s Y(s) + 0.5 \cdot Y(s) &= X(s) \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 0.5} \cdot X(s). \end{aligned} \quad (126.3)$$

Damit folgt für die Übertragungsfunktion im Bildbereich:

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 0.5}. \quad (126.4)$$

Mit Hilfe von MATLAB können wir Kenngrößen dieser Übertragungsfunktion und weitere Eigenschaften des Systems ermitteln (s. Script **bsp_TFSys3Ord.m**):

³³ Abweichend von (64.3) verwenden wir hier wieder die übliche Bezeichnung $x(t)$ für das Eingangssignal.

```

% Definition der Konstanten
a2 = 2; a1 = 1;
a0 = 0.5;

% Definition des Systems H(s)
H = tf([1],[1 a2 a1 a0])

H =

      1
-----
s^3 + 2 s^2 + s + 0.5

Continuous-time transfer function.

% Impulsantwort bestimmen
t = (0:0.01:50);           %Zeitintervall
[imant, time] = impulse(H,t);

% Sprungantwort bestimmen
[spant, time] = step(H,t);

% Impuls- und Sprungantwort plotten
subplot(211)
plot(time,imant,'k','LineWidth',3)
grid
xlabel('Zeit/s')
ylabel('Impulsantwort')
subplot(212)
plot(time,spant,'b','LineWidth',3)
grid
xlabel('Zeit/s')
ylabel('Sprungantwort')

% Pole und Nullstellen bestimmen
zers = zero(H)
pols = pole(H)

zers =

Empty matrix: 0-by-1

pols =

-1.5652 + 0.0000i
-0.2174 + 0.5217i
-0.2174 - 0.5217i

```

```
% Pole und Nullstellen plotten
figure
pzmap(H)
```

Man kann sich durch Ausführung dieser Anweisungen³⁴ leicht davon überzeugen, dass die berechnete Impulsantwort mit der aus Abbildung 2.9, S. 66 übereinstimmt. ■

2.4.4 BIBO-Stabilität

Ein weiterer interessanter und wichtiger Zusammenhang für die Klasse von LTI-Systemen, die wir im vorangegangenen Abschnitt untersucht haben, ergibt sich aus den berechneten *Polstellen*. Das Nennerpolynom

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k \quad (128.1)$$

der allgemeinen Übertragungsfunktion aus (125.3) stimmt mit dem so genannten **charakteristischen Polynom** der homogenen Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = 0 \quad (128.2)$$

überein. Diese Gleichung hat nur Lösungen, die aus Linearkombinationen von Exponentiallösungen der Form

$$e^{(\alpha+j\omega)\cdot t} = e^{\alpha\cdot t} \cdot e^{j\omega\cdot t}, \quad (128.3)$$

den so genannten Fundamentallösungen, bestehen.

Die Exponenten $\alpha + j\omega$ sind dabei die Nullstellen p_k des charakteristischen Polynoms und stimmen somit mit den Polstellen der Übertragungsfunktion $H(s)$ überein.

Andererseits kann aber der Anteil $\frac{1}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$ von $H(s)$ mittels einer Partialbruchzerlegung in die Form

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{k_m} \frac{A_{km}}{(s - p_k)^m}, \quad A_{km} \in \mathbb{C} \quad (128.4)$$

überführt³⁵ werden.

³⁴ Auf die Darstellung der Plots wird aus Platzgründen an dieser Stelle verzichtet.

³⁵ Dabei ist die Vielfachheit k_m der k -ten Polstelle p_k berücksichtigt.

Insgesamt ist dann $H(s)$ eine Linearkombination von Termen der Form:

$$T_{r,k,m}(s) = \frac{s^r}{(s - p_k)^m}. \quad (129.1)$$

Aufgrund der Linearität der Laplace-Rücktransformation besteht die **Impulsantwort** $h(t)$ aus einer Linearkombination von (wegen³⁶ Term s^r) ggf. mehrfach aufintegrierten Anteilen der Form:

$$h_{\text{Teil}}(t) = \frac{t^{m-1}}{m!} e^{p_k \cdot t}. \quad (129.2)$$

Sobald auch nur eine Polstelle p_k einen **Realteil** $\alpha_k > 0$ hat, wächst $e^{p_k \cdot t}$ und damit $h(t)$ über alle Grenzen und das System kann daher **nicht BIBO-stabil** sein! Eine ähnliche Überlegung gilt für eine rein imaginäre Polstelle (vgl. Übung 39).

Übung 39

Hat andererseits eine rationale Übertragungsfunktion eines LTI-Systems nur Polstellen p_k , deren **Realteil** $\alpha_k < 0$ ist, so sind alle Anteile der Impulsantwort $h(t)$ gemäß (129.2) **exponentiell abklingend**.

Die Faltung mit einem beschränkten Eingangssignal ergibt also ein **beschränktes Signal** und das System ist **BIBO-stabil**!

Insgesamt erhält man folgendes wichtige **Stabilitätskriterium** für diese Klasse von LTI-Systemen:

Ist $\mathcal{S}$ ein LTI-System, welches sich durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten der allgemeinen Form

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{j=0}^M b_j \frac{d^j}{dt^j} x(t) \quad (129.3)$$

oder äquivalent durch eine Übertragungsfunktion im Bildbereich der Form

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j s^j}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (129.4)$$

beschreiben lässt, so ist das System genau dann **BIBO-stabil**, wenn für **alle Polstellen** p_k von $H(s)$ gilt:

$$\alpha_k := \Re(p_k) < 0. \quad (129.5)$$

³⁶ Siehe Rechenregeln Laplace-Transformation!

Die Stabilität eines solchen LTI-Systems lässt sich also sofort an dem so genannten **Pol-Nullstellen-Diagramm** des Systems ablesen, wie es etwa von der im vorangegangenen Beispiel schon verwendeten MATLAB-Funktion `zmap` berechnet wird.

Abbildung 2.27 zeigt exemplarisch Pol-Nullstellen-Diagramme eines *stabilen* und eines *instabilen* Systems. Die Pole sind dabei (wie in diesem Zusammenhang üblich) mit Kreuzen, die Nullstellen mit Kreisen bezeichnet.

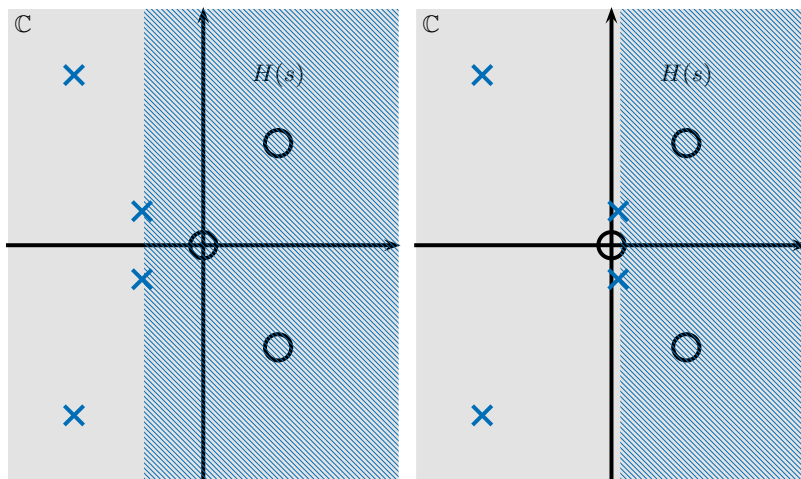


Abb. 2.27: Pol-Nullstellen-Diagramm eines stabilen Systems (links) und eines instabilen Systems (rechts)

Darüber hinaus ist der Definitionsbereich der Übertragungsfunktion $H(s)$ eingezeichnet. Dieser ist³⁷ (bei Verwendung der einseitigen Laplace-Transformation zu Berechnung von $H(s)$) immer eine *rechte Halbebene* der Gauß'schen Zahlenebene $\mathbb{C}$. Die linke Grenze der Halbebene wird dabei durch den Pol mit dem größten Realteil markiert. Auf dieser Grenzlinie *kann* die Laplace-Transformierte und damit $H(s)$ (außerhalb der Pole) existieren, rechts davon ist $H(s)$ (als Laplace-Transformierte!) in jedem Fall definiert, links davon ist $H(s)$ (als Laplace-Transformierte!) *nicht definiert*³⁸.

2.4.5 Zustandsraumdarstellung im Bildbereich

In Abschnitt 2.3.2 wurde dargelegt, dass sich reale physikalische oder technische Systeme oft leichter in Form von Systemen von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung modellieren lassen.

Eine geeignete Darstellungsform ist in diesem Falle die in (51.1) und (51.2) angegebene **Zustandsraumdarstellung** des Systems im Zeitbereich.

³⁷ Wir wollen dies an dieser Stelle nicht nachweisen. Für einen Nachweis s. [11].

³⁸ Man beachte, dass $H(s)$ als rationale Funktion dort durchaus definiert sein kann. Allerdings eben nicht als Laplace-Transformierte.

Die k -te Komponente der durch (51.1) repräsentierten vektoriellen Gleichung hat dabei die Form:

$$\frac{d}{dt}x_k(t) = \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j(t) + \sum_{r=1}^m b_{kr}u_r(t). \quad (131.1)$$

Dabei ist $\vec{u}$ der Vektor der Eingangssignale des Systems (**MIMO-System**³⁹ oder **SISO/MO-System**⁴⁰ im Falle $m = 1$) und $\vec{x}$ ein Vektor von n Systemzuständen, aus denen sich mit (51.2) der Vektor $\vec{y}$ der p Ausgangssignale ($p = 1$ für SO-System) berechnen lässt.

Mit Hilfe der Laplace-Transformation lassen sich die Differentialgleichungen (51.1) nun ebenfalls vorteilhaft in ein System von äquivalenten algebraischen Gleichungen überführen. Aus (131.1) ergibt sich (System „in Ruhe“ wie immer vorausgesetzt):

$$s \cdot X_k(s) = \sum_{j=1}^n a_{kj}X_j(s) + \sum_{r=1}^m b_{kr}U_r(s). \quad (131.2)$$

Damit kann (51.1) insgesamt in die Gleichung

$$s \cdot \vec{X}(s) = A \cdot \vec{X}(s) + B \cdot \vec{U}(s) \quad (131.3)$$

transferiert werden. Transformiert man auch die zweite Gleichung, so erhält man eine Zustandsraumdarstellung im Bildbereich:

Ist $\mathfrak{S}$ ein LTI-System, welches durch gewöhnliche Differentialgleichungen (49.1) mit $N \geq M$ beschrieben werden kann und sei $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ der Vektor der **Eingangssignale** des Systems, $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ **ein** (für die Modellierung vollständiger) Vektor von **Zuständen** des Systems und sei $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t))$ der Vektor der **Ausgangssignale** des Systems. Seien ferner $\vec{U}(s)$, $\vec{X}(s)$ und $\vec{Y}(s)$ die Laplace-Transformierten dieser vektoriellen Signale.

Dann heißt die mit den konstanten Matrizen A, B, C, D definierte Systembeschreibung der Form

$$s \cdot \vec{X}(s) = A \cdot \vec{X}(s) + B \cdot \vec{U}(s), \quad (131.4)$$

$$\vec{Y}(s) = C \cdot \vec{X}(s) + D \cdot \vec{U}(s) \quad (131.5)$$

eine **Zustandsraumdarstellung im Bildbereich** des Systems $\mathfrak{S}$.

Zur Illustration dieser Darstellungsform greifen wir das Feder-Masse-Dämpfer-Beispiel aus Abschnitt 2.3.2 noch einmal auf.

³⁹ MIMO = Multiple - Input - Multiple - Output

⁴⁰ SISO = Single - Input - Single - Output

2.26 Beispiel (Feder-Masse-Dämpfer-System)

Die Zustandsraumdarstellung (50.2) und (50.3) im Zeitbereich kann durch die folgende äquivalente Zustandsraumdarstellung im Bildbereich ersetzt werden:

$$s \cdot \begin{pmatrix} Z_1(s) \\ Z_2(s) \\ Z_3(s) \\ Z_4(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_2 \\ \beta_1 & -\beta_1 - \gamma & \beta_2 & -\beta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1(s) \\ Z_2(s) \\ Z_3(s) \\ Z_4(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot X(s). \quad (132.1)$$

und

$$Y(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1(s) \\ Z_2(s) \\ Z_3(s) \\ Z_4(s) \end{pmatrix}. \quad (132.2)$$

In ähnlicher Weise kann die äquivalente Zustandsraumdarstellung (54.2) transformiert werden. _____ ■

Ein Vorteil der Darstellungsform gemäß (131.4) und (131.5) ist die leichte Auflösbarkeit der (jetzt algebraischen) Gleichungen nach $\vec{X}(s)$ und $\vec{Y}(s)$.

Man erhält aus (131.4)

$$\vec{X}(s) = (s - A)^{-1} \cdot B \cdot \vec{U}(s) \quad (132.3)$$

und aus (131.5)

$$\vec{Y}(s) = \left(C \cdot (s - A)^{-1} \cdot B + D \right) \cdot \vec{U}(s) \quad (132.4)$$

und damit eine *direkte* Darstellung der Abhängigkeit der Ausgangssignale von den Eingangssignalen.

Eine äquivalente Form zu Gleichung (132.4) könnte man unter Zuhilfenahme des Faltungssatzes der Laplace-Transformation auch aus dem in Abschnitt 2.3.3, S. 60 entwickelten *expliziten* Zusammenhang

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= \int_0^t C \cdot e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot B \cdot \vec{u}(\tau) d\tau + D \cdot \vec{u}(t) \\ &= \int_0^t C \cdot \Phi(t - \tau) \cdot B \cdot \vec{u}(\tau) d\tau + D \cdot \vec{u}(t). \end{aligned} \quad (132.5)$$

erhalten.

Diese Transformation liefert nämlich:

$$\begin{aligned}\vec{Y}(s) &= C \cdot \Phi(s) \cdot B \cdot \vec{U}(s) + D \cdot \vec{U}(s) \\ \iff \vec{Y}(s) &= (C \cdot \Phi(s) \cdot B + D) \cdot \vec{U}(s),\end{aligned}\quad (133.1)$$

woraus mit der Identität

$$\Phi(s) = (s - A)^{-1} \quad (133.2)$$

für die Transformierte der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ die Äquivalenz zu Gleichung (132.4) folgt.

Die rechnerischen Vorteile sollen an einem weiteren Beispiel aus Abschnitt 2.3.3 illustriert werden.

2.27 Beispiel (LTI-System 3. Ordnung)

Betrachten wir erneut das LTI-System, welches durch die Differentialgleichung (64.3)

$$\ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (133.3)$$

und die äquivalente Zustandsraumdarstellung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(t) \quad (133.4)$$

und

$$y(t) = x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + 0 \cdot u(t) \quad (133.5)$$

gegeben ist.

Mit Hilfe von MATLAB wollen wir nun die Impulsantwort über die aus der Zustandsraumdarstellung *im Bildbereich* gewonnene Gleichung (133.1) bestimmen (s. **bsp_BBsys3Ord.m**):

```
>> syms t s

% Definition der Systemmatrix A
>> A = [0 1 0; 0 0 1; -1/2 -1 -2]

A =
```

```

      0      1.0000      0
      0      0      1.0000
-0.5000 -1.0000 -2.0000

% Berechnung der Transitionsmatrix Phi(s)
% im Bildbereich
>> Phis = inv(s*eye(3)-A)

Phis =

[ 2*(s^2+2*s+1)/(2*s^3+4*s^2+2*s+1),
  2*(s+2)/(2*s^3+4*s^2+2*s+1),
  2/(2*s^3+4*s^2+2*s+1)]
[ -1/(2*s^3+4*s^2+2*s+1),
  (2*s*(s + 2))/(2*s^3+4*s^2+2*s+1),
  2*s/(2*s^3+4*s^2+2*s+1)]
[ -s/(2*s^3+4*s^2+2*s+1),
  -(2*s+1)/(2*s^3+4*s^2+2*s+1),
  2*s^2/(2*s^3+4*s^2+2*s+1)]

% Berechnung der Impulsantwort h(t)
>> C = [1 0 0];
>> B = [0;0;1];

% Übertragungsfunktion H(s)
>> H = C*Phis*B

H =

2/(2*s^3+4*s^2+2*s+1)

% Bestimmung der Impulsantwort h(t) durch inverse
% Laplace-Transformation
>> h = ilaplace(H,t)

h =

2*symsum(exp(r3*t)/(6*r3^2 + 8*r3 + 2), ...
  r3 in RootOf(s3^3 + 2*s3^2 + s3 + 1/2, s3))

% Bestimmung der Wurzeln r3
>> r3s = solve('s3^3 + 2*s3^2 + s3 + 1/2')

r3s =

...      % für Darstellung zu lang

% Einsetzen in die Formel für h(t) ("von Hand")
>> h = 2*exp(r3s(1)*t)/(6*r3s(1)^2 + 8*r3s(1) + 2)...
```

```

+2*exp(r3s(2)*t)/(6*r3s(2)^2 + 8*r3s(2) + 2)...
+2*exp(r3s(3)*t)/(6*r3s(3)^2 + 8*r3s(3) + 2)

h =

...           % für Darstellung zu lang

% Grafische Darstellung der Funktion im
% Intervall [0,50]

%% Möglichkeit 1 mit subs zur Bestimmung der numerischen
%% Version von h(t)
%% Dies kann jedoch u.U. sehr lange dauern
% x = (0:0.1:50);
% hnum = subs(h,t,x);

%% Möglichkeit 2 zur Bestimmung der numerischen
%% Version von h(t) (Berechnung wesentlich schneller)
>> t = (0:0.1:50);    % damit wird das Symbol t über-
                     % schrieben
>> hv = vectorize(h) % "vektoriisiert" h. Das Ergebnis ist
                     % ein String
>> hnum = eval(hv);   % wertet den String als MATLAB-
                     % Ausdruck aus und produziert
                     % so die numerische Version von h
>> plot(x,hnum,'r','LineWidth',3)
>> grid
>> xlabel('Zeit/s')
>> ylabel('h(t)')

```

Abbildung 2.28 zeigt, dass die berechnete Impulsantwort $h(t)$ derjenigen aus Abbildung 2.9 entspricht.

Etwas einfacher ist das Ergebnis allerdings mit der MATLAB-Funktion `ss` der *Control Systems Toolbox* zu erhalten, mit der Zustandsraumdarstellungen direkt definiert werden können (s. `bsp_BBsys3OrdCST.m`):

```

>> % Definition der Zustandsmatrizen
>> A = [0 1 0; 0 0 1; -1/2 -1 -2];
>> B = [0;0;1];
>> C = [1 0 0];
>> D = 0;

>> % Berechnung der Zustandsraumdarstellung
>> ZRD = ss(A,B,C,D)

ZRD =

```

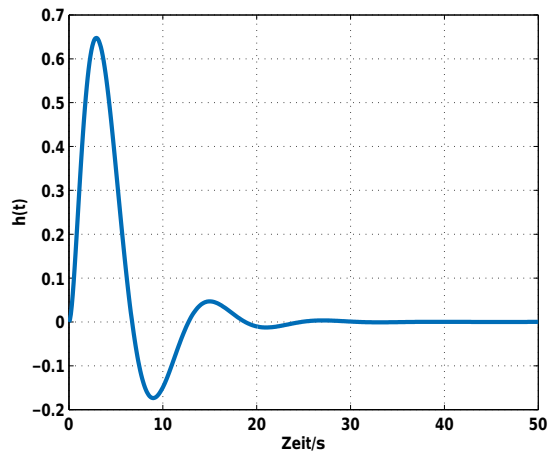


Abb. 2.28: Impulsantwort $h(t)$ mit Hilfe der Darstellung (133.1) für das Beispiel des Systems 3. Ordnung gemäß (133.3)

```
a =
      x1      x2      x3
x1      0      1      0
x2      0      0      1
x3     -0.5     -1     -2
```

```
b =
      u1
x1      0
x2      0
x3      1
```

```
c =
      x1      x2      x3
y1      1      0      0
```

```
d =
      u1
y1      0
```

Continuous-time state-space model.

```
>> % Berechnung der Übertragungsfunktion
>> H = tf(ZRD)
```

```
H =
```

```

      1
      -----
      s^3 + 2 s^2 + s + 0.5

Continuous-time transfer function.

>> % Berechnung der Impulsantwort
>> x = (0:0.1:50);
>> h = impulse(ZRD,x);
>> plot(x,h,'r','LineWidth',3)
>> grid
>> xlabel('Zeit/s')
>> ylabel('h(t)')
```

Auch wenn im ersten Fall die Lösung der Zustandsgleichungen aufgrund der Unzulänglichkeiten der *Symbolic Math Toolbox* von MATLAB etwas umständlich erscheint, so führt der Umweg über die Zustandsgleichungen im Bildbereich i.Allg. zu schnelleren und eleganteren Lösungen als im Zeitbereich. ■

2.4.6 Signalflussdiagramme und Simulink-Simulationen

Wie bereits in Abschnitt 2.3.3 angedeutet, ist die Darstellung eines LTI-Systems in Form eines Signalflussdiagramms (Blockschaltbildes) unmittelbar in eine Simulink-Simulation umsetzbar, da die Programmierung mit Simulink auf einer solchen Darstellung beruht.

Die LTI-Teilsysteme, welche in der Simulink-Bibliothek vorgegeben sind, sind dabei mit ihrer Bildbereichsdarstellung gekennzeichnet.

Abbildung 2.29 zeigt beispielhaft einige Simulink-Blöcke. Diese repräsentieren LTI-Systeme, die durch ihre Übertragungsfunktion im Bildbereich definiert werden.

LTI-Systeme können natürlich in Simulink auch durch Verwendung von Einzelkomponenten, wie Additionsknoten, Verstärkungsblöcken etc. definiert werden, wie das in den vorangegangenen Beispielen auch schon praktiziert wurde.

2.4.7 Übungsaufgaben

Übung 29 (Lösungsband Seite 58)

Berechnen Sie mit Hilfe der Rechenregeln der Laplace-Transformation die Transformierten von:

- (a) $x_1(t) = \delta_0(t - 1) + \sigma(t - 1)$,
- (b) $x_2(t) = 3t^2 - 2t + 1$,

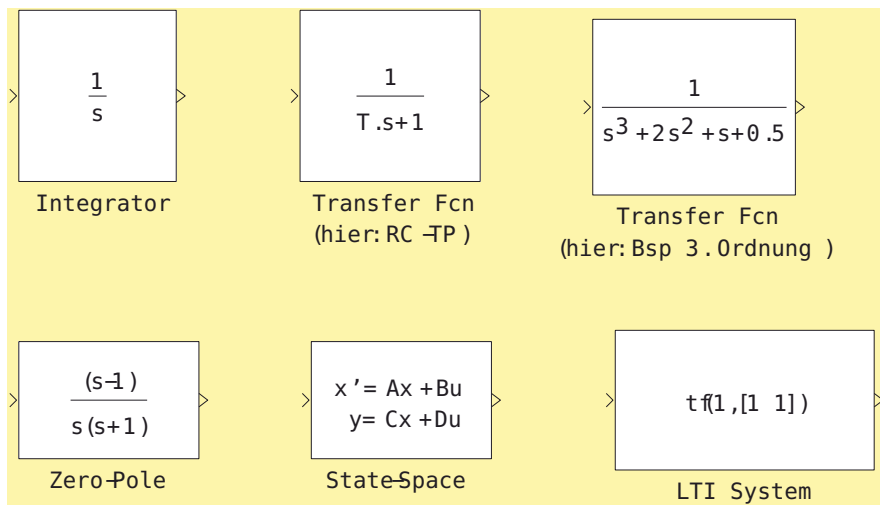


Abb. 2.29: Einige Simulink-Blöcke zur Simulation von LTI-Systemen

(c) $x_3(t) = \frac{\sin(t)}{t},$
 (d) $x_4(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}.$

Alle Signale seien dabei *kausale* Signale, d.h. es soll gelten: $x_i(t) = 0$ für $t < 0$.

Überprüfen Sie anschließend Ihre Ergebnisse mit Hilfe der *Symbolic Math Toolbox* von MATLAB.

Übung 30 (Lösungsband Seite 61)

Betrachten Sie das in Abbildung 2.30 wiedergegebene Simulink-Blockschaltbild eines Regelkreises.

Der PID-Regler habe die Übertragungsfunktion

$$H_1(s) = 1 + \frac{1}{10s} + \frac{1}{2}s. \quad (138.1)$$

- Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLABs `tf`-Funktionen die Übertragungsfunktion $H(s)$ des Gesamtsystems im Bildbereich.
- Überprüfen Sie das Ergebnis aus Teil (a) mit Hilfe der *Symbolic Math Toolbox*.
- Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLABs `tf`-Funktionen numerisch Impuls- und Sprungantwort des Systems und stellen Sie diese grafisch dar.
- Bestimmen Sie theoretisch den Endwert der Sprungantwort und vergleichen Sie diesen mit dem Ergebnis aus Teil (c).

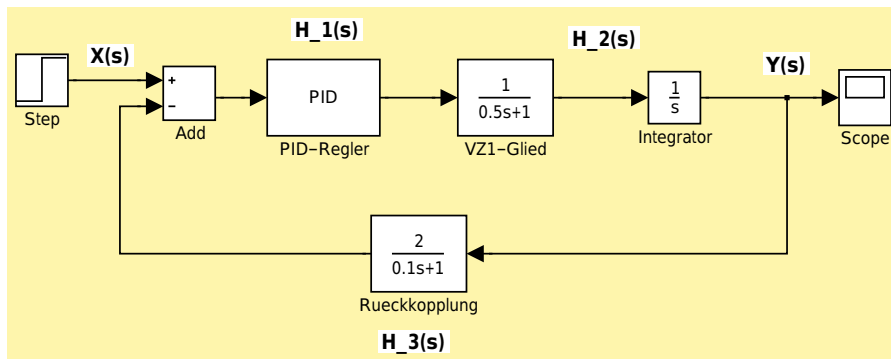
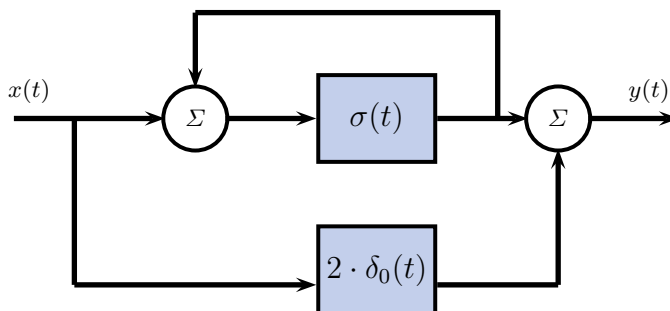


Abb. 2.30: Regelkreis

- (e) Überprüfen Sie (ggf. mit MATLAB), ob der Regelkreis stabil ist.
 (f) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Simulink.

Übung 31 (Lösungsband Seite 66)

Ein LTI-System $\mathfrak{S}$ werde durch das Blockschaltbild im Abbildung 2.31 definiert (vgl. dazu Übung 21, S. 93 und Abbildung 2.21).

Abb. 2.31: Signalflussdarstellung eines LTI-Systems $\mathfrak{S}$

In den Teilsystemen sind dabei jeweils die *Impulsantworten* angegeben. Bestimmen Sie *mit Hilfe einer Transformation in den Bildbereich*:

- die Übertragungsfunktion im Bildbereich $H(s)$ des Gesamtsystems $\mathfrak{S}$,
- die Impulsantwort des Gesamtsystems $\mathfrak{S}$,
- die Sprungantwort von $\mathfrak{S}$,
- eine Differentialgleichung, die $\mathfrak{S}$ beschreibt,
- eine Zustandsraumdarstellung für $\mathfrak{S}$.

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Übung 21, S. 93.

Übung 32 (Lösungsband Seite 69)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Antwort des LTI-Systems mit der Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 9} \quad (140.1)$$



auf eine (kausale) harmonische Schwingung $x(t) = \sigma(t) \cdot \sin(\omega t)$ der Frequenz $\omega = 2 \text{ rad/s}$.

Berechnen Sie das Ergebnis zunächst „von Hand“ und überprüfen Sie dieses Ergebnis anschließend mit MATLAB und/oder Simulink.

Interpretieren Sie das Ergebnis!

Übung 33 (Lösungsband Seite 73)

Ein schwingungsfähiges System wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t) \quad (140.2)$$

beschrieben.

- (a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(s)$ des Systems im Bildbereich.
- (b) Geben Sie die Impuls- und Sprungantwort des Systems an.
- (c) Bestimmen Sie eine Zustandsraumdarstellung des Systems im Bildbereich.
- (d) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit MATLAB.
- (e) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Simulink.

Übung 34 (Lösungsband Seite 76)

Ein LTI-System wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) - y(t) = \dot{x}(t) + x(t) \quad (140.3)$$

beschrieben.

- (a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion im Bildbereich $H(s)$ des Systems.
- (b) Geben Sie die Impuls- und Sprungantwort des Systems an.

- (c) Bestimmen Sie eine Zustandsraumdarstellung im Bildbereich des Systems.
- (d) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit MATLAB.
- (e) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Simulink.

Übung 35 (Lösungsband Seite 82)

Betrachten Sie das System $\mathfrak{S}$, welches durch das Blockschaltbild in Abbildung 2.32 dargestellt wird:

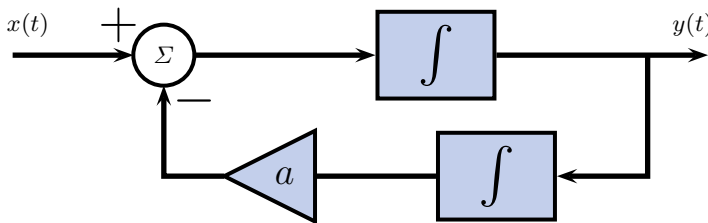


Abb. 2.32: Blockschaltbild zu Übung 35

- (a) Geben Sie das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems in Form einer Differentialgleichung an.
- (b) Begründen Sie so einfach wie möglich, warum es sich bei dem System $\mathfrak{S}$ um ein LTI-System handelt.
- (c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion im Bildbereich $H(s)$ des Systems.
- (d) Geben Sie die Sprungantwort des Systems an.
- (e) Berechnen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ das System $\mathfrak{S}$ stabil ist.

Übung 36 (Lösungsband Seite 85)

Betrachten Sie den analogen Tiefpass mit der Übertragungsfunktion:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}. \quad (141.1)$$

Lösen Sie mit Hilfe von MATLAB folgende Aufgaben:

- (a) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems.
- (b) Bestimmen Sie die Sprungantwort des Systems.
- (c) Bestimmen Sie eine Zustandsraumdarstellung des Systems.
- (d) Entscheiden Sie, ob das System stabil ist.

Übung 37 (Lösungsband Seite 87)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Zustandsraumdarstellung (50.2) und (50.3) aus Abschnitt 2.3.2 unter Verwendung von MATLAB die Übertragungsfunktion im Bildbereich $H(s)$ des Feder-Masse-Dämpfer-Systems $\mathfrak{S}$ aus Beispiel 2.3. Bestimmen Sie anschließend daraus die zugehörige Differentialgleichung höherer Ordnung, welche das System beschreibt.

Übung 38 (Lösungsband Seite 92)

Betrachten Sie ein LTI-System $\mathfrak{S}$, welches durch die folgende Zustandsraumdarstellung gegeben ist:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - x_2(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) + u(t), \\ y(t) &= -x_1(t) + x_2(t).\end{aligned}\tag{142.1}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB:

- (a) eine Zustandsraumdarstellung im Bildbereich des Systems $\mathfrak{S}$,
- (b) die Transitionsmatrix $\Phi(s)$ im Bildbereich des Systems,
- (c) die Impulsantwort des Systems.

Übung 39 (Lösungsband Seite 93)

Betrachten Sie ein LTI-System mit der Übertragungsfunktion:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4\pi^2}.\tag{142.2}$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Antwort des Systems auf eine harmonische Schwingung⁴¹ $x(t) = \sin(2\pi ft)$ der Frequenz $f = 1$ Hz.

Vergleichen Sie diese Systemantwort mit der Sprungantwort und interpretieren Sie das Ergebnis.

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer Simulink-Simulation.

2.5 Signale und LTI-Systeme im Frequenzbereich

In den vorangegangenen Abschnitten wurde gezeigt, welche besondere Bedeutung Sprungfunktion und Dirac-Impuls im Zusammenhang mit der Beschreibung von LTI-Systemen besitzen. In der Praxis jedoch spielt eine andere Signalklasse eine wahrscheinlich weit größere Rolle. Dies sind *Schwingungen* in jeder Form, im einfachsten Fall die **harmonischen Schwingungen**

⁴¹ Genauer: auf das kausale Eingangssignal $x(t) = \sigma(t) \cdot \sin(2\pi ft)$!

$$x(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \phi_0) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_0) \quad (143.1)$$

der **Frequenz** f Hz (bzw. der **Kreisfrequenz** $\omega := 2\pi f$ rad/s).

In der Tat ist die Beschreibung der Reaktion linearer zeitinvarianter Systeme auf Schwingungserregungen eines der Hauptthemen der Systemtheorie.

Zur Illustration betrachten wir zunächst wieder einmal den uns vertrauten einfachen Fall des RC-Tiefpasses.

2.28 Beispiel (RC-Tiefpass - Reaktion auf Schwingungen)

Abbildung 2.33 zeigt die Reaktion eines RC-Tiefpasses mit Zeitkonstante $T = 1$, also mit der Übertragungsfunktion im Bildbereich

$$H(s) = \frac{1}{1+s}, \quad (143.2)$$

auf die Erregung durch harmonische Schwingungen mit der Frequenz $f = 0.2$ Hz bzw. $f = 2.0$ Hz. Die Schwingungen haben jeweils die Amplitude $A = 1$. Dargestellt sind Ein- und Ausgangssignale des Tiefpasses im *eingeschwungenen Zustand*⁴².

Wie man sieht, wird die **Amplitude** des Ausgangssignals bei wachsender Eingangssignalfrequenz *kleiner*, ein Verhalten, das wir von einem Tiefpass erwarten. Bei genauem Hinschauen sieht man aber noch mehr. Das Ausgangssignal hat offensichtlich (abhängig von der Eingangssignalfrequenz) eine *andere Phasenlage* als das Eingangssignal. Das Ausgangssignal ist darüber hinaus ebenfalls eine harmonische Schwingung, deren **Frequenz gleich** der des Eingangssignals zu sein scheint. ■

Dieses Verhalten ist natürlich kein Zufall. Es kann durch die nachfolgende Überlegung als **allgemeine Eigenschaft eines LTI-Systems** identifiziert werden.

Um die Rechnung zu vereinfachen, bedienen wir uns eines Kniffs. Statt der reellen harmonischen Schwingungen verwenden wir **komplexe harmonische Schwingungen** $e^{j\omega t}$, welche bekanntlich über die **Euler'sche Identität**

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (143.3)$$

mit den reellen harmonischen Schwingungen eng verknüpft sind.

Dieser Trick erlaubt es, die lästigen trigonometrischen Formeln zu umgehen und die wesentlich angenehmeren Eigenschaften der e -Funktion auszunutzen.

⁴² In der Tat sind die Signale erst ab 10 s dargestellt, um den Einfluss des Sprungsignal-Anteils $\sigma(t)$ des (bei der zu Grunde liegenden Simulation mit **s_RCTPSin.slx** zwangsläufig) kausalen Eingangssignals $\sigma(t) \cdot \sin(\omega t)$ vernachlässigen zu können. Der Leser vergleiche hierzu die Lösungen zu Übungen den 32 und 39 und das Ergebnis der Simulation mit **s_RCTPSin.slx**.

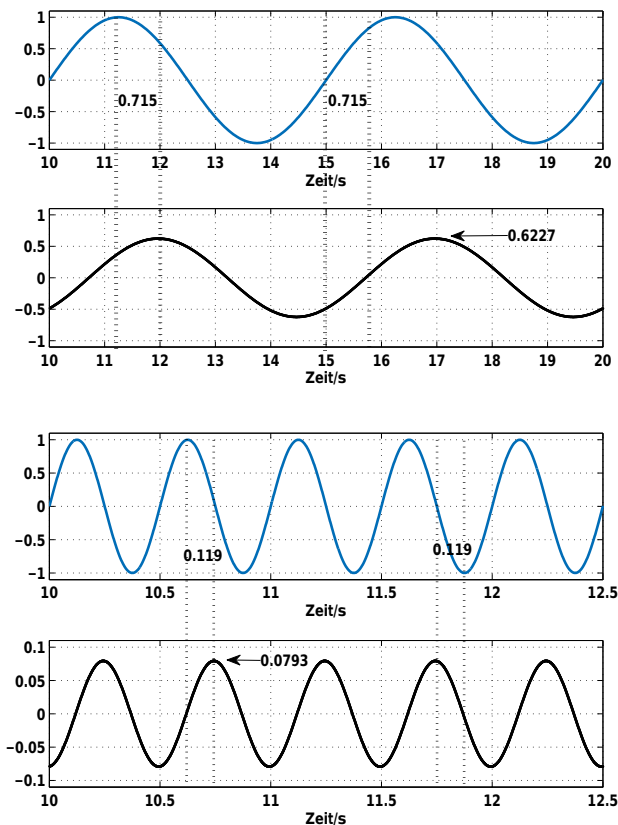


Abb. 2.33: RC-Tiefpass-Antwort auf Sinusschwingungen mit Frequenz $f = 0.2$ Hz und $f = 2.0$ Hz (von oben nach unten)

Darüber hinaus gehen wir zur Vereinfachung davon aus, dass die harmonische Schwingung schon „ewig“ am Eingang des Systems ansteht, d.h. wir betrachten (143.3) für alle $t \in \mathbb{R}$. Diese gedankliche Konstruktion erlaubt es uns, die Diskussion zu umgehen, wann der *eingeschwungene Zustand* erreicht ist (vgl. Beispiel 2.28).

Mit diesem Ansatz lässt sich die Antwort eines LTI-Systems $\mathfrak{S}$ mit Impulsantwort $h(t)$ auf eine harmonische Erregung nun leicht berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}(e^{j\omega t}) &= h(t) * e^{j\omega t} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau
 \end{aligned} \tag{144.1}$$

$$= e^{j\omega t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Existiert das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$, so ist das Ausgangssignal des LTI-Systems offenbar die komplexe Schwingung am Eingang **multipliziert** mit einem von der Frequenz ω abhängigen komplexen Wert.

In Anlehnung an die Bezeichnungsweise für die Laplace-Transformation bezeichnen wir diesen Wert mit

$$H(j\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (145.1)$$

Diese namensgleiche Bezeichnungsweise zur Laplace-Transformierten ist insofern gerechtfertigt, als für ein **kausales Signal** $h(t)$ die Definition (145.1) und die Auswertung von $H(s)$ an der Stelle $s = j \cdot \omega$ übereinstimmen, falls $H(s)$ auf der imaginären Achse existiert:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} \big|_{s=j\cdot\omega} d\tau = H(s) \big|_{s=j\cdot\omega}. \end{aligned} \quad (145.2)$$

Die Zahl $H(j\omega)$ ist nach (144.1) ein **komplexer Eigenwert** der Transformation $\mathcal{S}$ zum Eigen„vektor“ (bzw. zur Eigenfunktion) $e^{j\omega t}$.

Der komplexe Eigenwert $H(j\omega)$ **umfasst** dabei die im Beispiel 2.5 beobachtete **Amplituden- und Phasenänderung** des Ausgangssignals gegenüber dem Eingangssignal (vgl. Abschnitt 2.5.3). Die Gleichung zeigt auch, dass die Frequenz nicht geändert wird.

2.5.1 Die zeitkontinuierliche Fourier-Transformation

Neben der schon erwähnten Beziehung zur Übertragungsfunktion im Bildbereich, auf die wir in Abschnitt 2.5.3 genauer eingehen wollen, hat (144.1) aber noch einen anderen Aspekt. Der Eigenwert $H(j\omega)$ ist offensichtlich das Ergebnis einer **Integraltransformation!**

Diese Integraltransformation ist von fundamentaler Bedeutung für Systemtheorie und Signalverarbeitung. Es ist dies die so genannte **zeitkontinuierliche Fourier-Transformation**:

Die Zuordnung

$$\mathfrak{F} : f(t) \mapsto F(j\omega), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

welche einem Signal (einer Funktion) $f(t)$ die komplexwertige Funktion

$$F(j\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (146.1)$$

zuordnet, heißt die **zeitkontinuierliche Fourier-Transformation** von $f(t)$.

Neben der in (146.1) verwendeten Bezeichnungsweise sind in der Literatur für die Fourier-Transformierte (bzw. für die Fourier-Transformation) auch die symbolischen Schreibweisen $\mathfrak{F}(f)(j\omega)$, $\hat{f}(j\omega)$ und das schon für die Laplace-Transformation verwendete $f(t) \circ - \bullet F(j\omega)$ üblich.

Die Frage nach der Existenz der Fourier-Transformation kann für verschiedene Klassen von Signalen exakt beantwortet werden.

Allerdings ist auch in diesem Fall wieder, wie wir an den im Folgenden diskutierten Beispielen sehen werden, die Einbeziehung *verallgemeinerter Funktionen* notwendig.

Ohne konkret auf die Klassen verallgemeinerter Funktionen eingehen zu wollen, für die die Fourier-Transformation sinnvoll erklärt⁴³ werden kann, sei an dieser Stelle zumindest erwähnt, dass die Fourier-Transformation jedenfalls dann berechnet werden kann, wenn $f(t)$ ein **Energiesignal** ist, d.h., wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (146.2)$$

Die Fourier-Transformierte existiert aber auch, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (146.3)$$

gilt. In diesem Fall existiert die Fourier-Transformation im gewöhnlichen, integrationstheoretischen Sinne.

Die Fourier-Transformation kann, lässt man verallgemeinerte Funktionen zu, auch auf wichtige Klassen von **Leistungssignalen** (s. (21.2)), wie etwa

⁴³ Für die Diskussion dieser Fragen sei auf [11, 38, 39] verwiesen.

die harmonischen Schwingungen, ausgedehnt werden. Damit kann diese Integraltransformation für eine große Klasse wichtiger Signale (zumindest theoretisch) bestimmt werden.

Beispiele zur Fourier-Transformation

Zur Illustration der Fourier-Transformation wollen wir, ähnlich wie bei der Laplace-Transformation (vgl. S. 91ff), einige Fourier-Transformierte berechnen, die große systemtheoretische Bedeutung haben. Wir beginnen wieder mit den Rechteckfunktionen.

2.29 Beispiel (Der zeitsymmetr. normierte Rechteckimpuls)

In den vorangegangenen Abschnitten konnte man sich bereits davon überzeugen, dass der Rechteckimpuls

$$\text{rect}_1(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (147.1)$$

(vgl. (147.1)) eine besondere Bedeutung hat, etwa zur approximativen Ermittlung der Impulsantwort mit Hilfe des integralnormierten Impulses

$$i_n(t) = n \cdot \text{rect}_{\frac{1}{n}}(t). \quad (147.2)$$

Betrachten wir daher einmal die Familie von Signalen

$$\frac{1}{T} \cdot \text{rect}_T\left(t + \frac{T}{2}\right) := \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{für } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (147.3)$$

also die Rechtecksignale der Breite T und der Höhe $\frac{1}{T}$ im Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Ähnlich wie bei den Impulsfunktionen $i_n(t)$ handelt es sich also um integralnormierte Rechteckimpulse, die jedoch diesmal symmetrisch um 0 definiert werden, wobei der Aspekt der Kausalität zunächst einmal außer Acht gelassen wird.

Abbildung 2.34 illustriert drei Impulse verschiedener Breite und Höhe.

Da es sich um beschränkte Signale *endlicher Dauer* handelt, lässt sich die Fourier-Transformierte dieser Signale mit Hilfe gewöhnlicher Integrationsregeln leicht bestimmen. Man erhält:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left(\frac{1}{T} \text{rect}_T\left(t + \frac{T}{2}\right)\right)(j\omega) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_T\left(t + \frac{T}{2}\right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \frac{1}{-j\omega} \left[e^{-j\omega \frac{T}{2}} - e^{j\omega \frac{T}{2}} \right] \end{aligned} \quad (147.4)$$

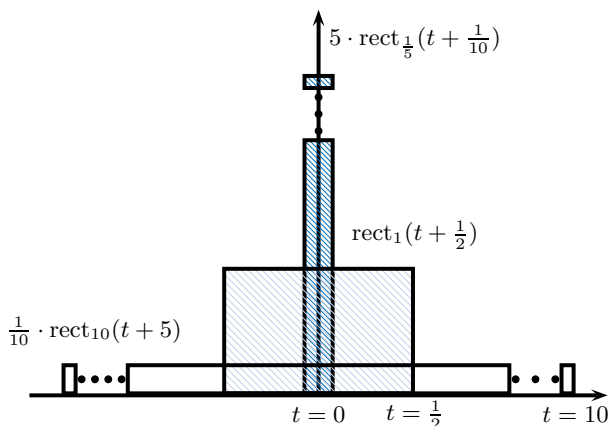


Abb. 2.34: Zeitsymmetrische Rechteckimpulse mit Integral 1

$$= \frac{2}{T} \frac{1}{\omega} \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right) = \frac{\sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega \frac{T}{2}}.$$

Die letzten Gleichungen folgen dabei aus der Euler'schen Formel (143.3).
Mit Hilfe der Definition

$$\text{sinc}(x) := \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (148.1)$$

folgt dann insgesamt:

$$\frac{1}{T} \text{rect}_T\left(t + \frac{T}{2}\right) \circ - \bullet \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right). \quad (148.2)$$

Abbildung 2.35 illustriert dieses Ergebnis für die Beispielimpulse aus Abbildung 2.34. _____■

2.30 Beispiel (Der integrallnormierte Rechteckimpuls $i_T(t)$)

Die Fourier-Transformierte des integrallnormierten Impulses

$$i_T(t) = \frac{1}{T} \cdot \text{rect}_T(t) \quad (148.3)$$

lässt sich ebenso leicht berechnen:

$$\mathfrak{F}\left(\frac{1}{T} \text{rect}_T(t)\right)(j\omega) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_T(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} dt$$

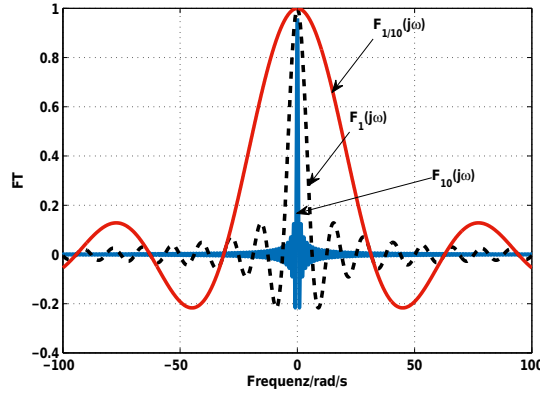


Abb. 2.35: Fourier-Transformierte der Rechteckimpulse aus Abbildung 2.34

$$= \frac{1}{T} \frac{1}{-j\omega} [e^{-j\omega T} - 1]. \quad (149.1)$$

Klammert man $e^{-j\omega \frac{T}{2}}$ aus der eckigen Klammer aus, so folgt daraus:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \left(\frac{1}{T} \text{rect}_T(t) \right) (j\omega) &= e^{-j\omega \frac{T}{2}} \cdot \frac{2}{T} \frac{1}{2j\omega} [e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}] \\ &= e^{-j\omega \frac{T}{2}} \cdot \frac{2}{T} \frac{1}{\omega} \sin \left(\omega \frac{T}{2} \right) = e^{-j\omega \frac{T}{2}} \cdot \frac{\sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega \frac{T}{2}} \end{aligned} \quad (149.2)$$

$$= e^{-j\omega \frac{T}{2}} \cdot \text{sinc} \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right). \quad (149.3)$$

2.31 Beispiel (Der Dirac-Impuls $\delta_0(t)$)

Für die Bestimmung der Fourier-Transformierten des Dirac-Impulses $\delta_0(t)$ muss das Fourier-Integral (146.1) lediglich richtig im Sinne verallgemeinerter Funktionen interpretiert werden.

Gemäß Anhang A lässt sich das Dirac-Funktional auf alle beliebig oft differenzierbaren (komplex oder reellwertigen) Funktionen fortsetzen, so auch auf die Funktionen $e^{-j\omega t}$.

Man erhält dann:

$$\mathfrak{F}(\delta_0(t))(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (149.4)$$

Die Fourier-Transformation ist also für alle Kreisfrequenzen ω identisch und gleich 1.

Dieses Ergebnis ist im Übrigen mit dem Ergebnis aus Beispiel 2.30 konsistent. Bekanntlich ist ja im distributionellen Sinne $\lim_{T \rightarrow 0} i_T(t) = \delta_0(t)$. Für eine stetige Transformation, welche die Fourier-Transformation vernünftigerweise sein sollte (und auch ist, s. [39]), muss dann der Grenzwert der Transformatierten der $i_T(t)$ gegen die Transformierte von $\delta_0(t)$ streben. Ein Blick auf Gleichung (149.2) zeigt, dass dem so ist. ■

Die Fourier-Rücktransformation

Ähnlich wie für die Laplace-Transformation kann man auch für die Fourier-Transformation und geeignete Signalräume (vgl. Anhang A) zeigen, dass die Zuordnung $f(t) \rightarrow F(j\omega)$ *eindeutig* ist. Beispielsweise kann dies für die Klasse der Energiesignale ($L^2(\mathbb{R})$) gezeigt werden.

Dies bedeutet, dass für solche Signalklassen jeder Fourier-Transformierten wieder genau ein Signal zugeordnet werden kann. Dieses Signal kann ebenfalls wieder mit einer Integraltransformation gewonnen werden.

Für die Signalklassen, für die die Fourier-Transformation sinnvoll definiert werden kann, gilt:

Ist $F(j\omega) := \mathfrak{F}(f)(j\omega)$ die Fourier-Transformierte von $f(t)$, so ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (150.1)$$

Die Integraltransformation (150.1) heißt **Fourier-Rücktransformation** (von $F(j\omega)$).

Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass die Transformations-Rücktransformations-Beziehung

$$f(t) \circ - \bullet F(j\omega) \bullet - \circ f(t) \quad (150.2)$$

oft nur im Sinne verallgemeinerter Funktionen gewährleistet werden kann, selbst wenn eine der beteiligten Funktionen eine „normale“ reelle Funktion, wie etwa das Sinussignal, ist. Wir werden weiter unten darauf zurückkommen.

Interpretiert man das Rücktransmutationsintegral als eine *verallgemeinerte Summe*, so erhält man, bis auf eine Konstante,

$$f(t) \approx \sum_{\omega} F(j\omega) e^{j\omega t}. \quad (150.3)$$

Das heißt, die komplexen Schwingungen werden gewichtet „aufsummiert“ und ergeben, mit den richtigen komplexen Koeffizienten (also $F(j\omega)$) multipliziert, das Signal $f(t)$. Diese Tatsache wirft ein neues Licht auf die Bedeutung der Fourier-Transformation.

Interpretation der Fourier-Transformation

Stellt man für jede Frequenz ω den Wert der Fourier-Transformierten $F(j\omega)$ in seiner Exponentialform dar, so folgt aus (150.3):

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \sum F(j\omega) e^{j\omega t} \\ &= \sum A(\omega) e^{j(\omega t + \phi(\omega))} \\ &= \sum A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) + j \cdot A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega)). \end{aligned} \quad (151.1)$$

Die Fourier-Transformierte gibt also an, aus welchen (**komplexen**) harmonischen Schwingungen mit welcher Frequenz ω , welcher (frequenzabhängigen) Amplitude $A(\omega)$ und welcher (frequenzabhängigen) Phasenlage $\phi(\omega)$ sich ein Signal $f(t)$ (zumindest theoretisch) **synthetisieren** lässt.

Die Fourier-Transformation „misst“ daher in einem gewissen Sinne den „**Frequenzinhalt**“ eines Signals. Diesen „Frequenzinhalt“ nennt man das **Spektrum** des Signals.

Die Fourier-Transformierte $F(j\omega)$ des Signals $f(t)$ heißt auch das (**komplexe**) **Amplitudenspektrum** oder auch **Fourier-Spektrum** des Signals. Dementsprechend heißen $|F(j\omega)|$ und $\arg(F(j\omega))$ **Amplituden-** und **Phasenspektrum**.

Die Länge des kleinsten Intervalls $\Delta := [\omega_u, \omega_o]$, für das $F(j\omega) = 0$ **außerhalb** von Δ ist – das heißt, für das das Signal außerhalb des Intervalls Δ keine Spektralanteile hat – heißt die **Bandbreite** des Signals.

Bei den ab S. 147 betrachteten Beispielen etwa handelt es sich offenbar um Signale **unendlicher Bandbreite** (vgl. (148.2), (149.4) und Abbildung 2.35). Die Beispiele sind charakteristisch für Signale mit unstetigen Übergängen. Es ist anschaulich klar, dass für die Synthese eines solchen Übergangs mit harmonischen Schwingungen im Sinne von (150.3) prinzipiell unendlich viele Schwingungen von Nöten sein müssen, da die Überlagerung endlich vieler Schwingungen ebenso glatt sein sollte (und ist) wie die Schwingungen selbst⁴⁴. Da die Natur uns keine unendliche Bandbreite zu Verfügung stellt, sind solche idealen Rechteckimpulse also ebenso wenig ideal „realisierbar“ wie etwa ein Dirac-Impuls. Trotzdem sind natürlich beide Signaltypen gute

⁴⁴ In der Tat wäre eine solche Überlagerung auch wieder beliebig oft differenzierbar.

Approximationen zu „realen“ Signalen⁴⁵ mit dem zusätzlichen Vorteil der wesentlich einfacheren rechnerischen Behandelbarkeit. Sie spielen somit für analytische Betrachtungen eine wichtige Rolle.

Abbildung 2.35 zeigt darüber hinaus noch einen anderen wesentlichen Effekt. Je schärfer das Zeitsignal variiert, desto breiter ist offenbar das Spektrum. Kurze, scharfe Spitzen erzeugen offenbar sehr breitbandige Signale. Umgekehrt haben glatte, breite Zeitfunktionen ihre wesentlichen Spektralanteile in einem sehr schmalen Band. Anschaulich ist auch dieser Effekt gut interpretierbar. An der Synthese schnell variierender Zeitsignale müssen zwangsläufig Schwingungen höherer Frequenz beteiligt sein. Daraus resultiert die höhere Bandbreite.

Konsequenterweise müsste, nach der vorangegangenen Betrachtung zu schließen, das Spektrum des Dirac-Impulses $\delta_0(t)$ extrem breit sein. Dies bestätigt die Berechnung (149.4).

Die Kenntnis des Spektrums und der Bandbreite von Signalen ist ungeheuer wichtig für die praktische Signalverarbeitung.

Ein Beispiel ist etwa die Kennzeichnung des Übertragungsverhaltens realer Systeme, die stets einer **Bandbegrenzung** unterliegen, das heißt, die nicht Signale beliebiger Frequenzzusammensetzung übertragen können. Ein Hauptziel der Nachrichtentechnik ist daher die Entwicklung von *Signalstrukturen* und Verfahren zur Übertragung von möglichst viel Information bei möglichst geringem Verbrauch an Bandbreite. Voraussetzung ist hierbei neben der Kenntnis des Frequenzinhaltes der Signale die frequenzabhängige Kennzeichnung des Übertragungsverhaltens von Systemen, ein Problem, welches wir ja schon bei der Herleitung der Fourier-Transformation (vgl. 145.2) angeschnitten haben und in Abschnitt 2.5.3 noch vertiefen werden.

Ein anderes Beispiel ist die Kenntnis der Schwingungsanteile in einem Signalgemisch, welches eine mechanische Struktur anregt. Man benötigt diese Information, um die mechanischen Komponenten risikofrei, d.h. ohne die Gefahr der Zerstörung oder anderer schädlicher Effekte durch Resonanzüberhöhungen⁴⁶, auszulegen. Zu diesem Zweck führt man mit Hilfe der Fourier-Transformation(en) eine so genannte **Spektralanalyse** durch.

Die **Spektralanalyse** oder auch **Fourier-Analyse** ist eine der Hauptaufgaben der Signalverarbeitung in der Praxis. Wir kommen hierauf insbesondere in Kapitel 5 zurück, wo die Methoden der Spektralanalyse für gemessene reale Signaldaten besprochen werden.

Die Dualität Fourier-Transformation– Fourier-Rücktransformation

Bei genauer Betrachtung der Definitionen der Fourier-Transformation (146.1) und der Fourier-Rücktransformation (150.1) fällt eine gewisse Ähnlichkeit

⁴⁵ Die Berechnungen und Abbildung 2.35 zeigen ja, dass die Spektren der Rechteckimpulse sehr rasch abfallen, sodass die Signale doch eine „praktische“ Bandbegrenzung haben.

⁴⁶ Resonanzüberhöhungen sind der breiten Öffentlichkeit beispielsweise von (schlecht konstruierten) Hängebrücken bekannt, die durch Wind angeregt, in Schwingungen versetzt und zerstört werden.

auf, die im Folgenden zur Berechnung dieser Transformationen vorteilhaft ausgenutzt werden kann.

Für die Rücktransformation kann man beispielsweise schreiben:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{-j \cdot (-t) \cdot \omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \mathfrak{F}(F(j\omega))(-t). \end{aligned} \quad (153.1)$$

Würde man also die Fourier-Transformierte der Funktion F kennen, so könnte man damit die Rücktransformation bestimmen! Lediglich die Rollen von ω und t sind vertauscht und es ist eine Zeitumkehr ($-t$) zu berücksichtigen.

Zwischenbemerkung zur Notation: an dieser Stelle ist eine Zwischenbemerkung zur Notation angebracht. Es hat sich eingebürgert, das Argument der Fourier-Transformierten mit $j\omega$ zu bezeichnen, obwohl die Funktion lediglich von ω abhängt. Wegen der in (145.2) schon angesprochenen Beziehung zur Laplace-Transformation hat diese Konvention natürlich auch ihre Berechtigung.

Im vorliegenden Falle allerdings führte es zu Verwirrungen, wenn etwa $\mathfrak{F}(F(j\omega))(-jt)$ geschrieben würde.

In der Tat ist es für die Beschreibung der Dualitätsbeziehung eher besser, in beiden Fällen den Faktor j im Argument wegzulassen. ■

Falls $F(\omega)$ also die Fourier-Transformierte zu $f(t)$ bezeichnet, ergibt sich aus (153.1):

$$2\pi f(t) = \mathfrak{F}(F(\omega))(-t). \quad (153.2)$$

Tauschte man wieder die Rollen von Zeit- und Frequenzbereich, so würde sich für ein Zeitsignal $F(t)$, welches dieselbe Form hätte, wie die Fourier-Transformierte eines Signals $f(t)$, daraus ergeben:

$$\mathfrak{F}(F(t))(\omega) = 2\pi f(-\omega). \quad (153.3)$$

Wie wir an den Beispielen weiter unten sehen, kann man mit diesem Trick oft ohne großen Aufwand Transformierte berechnen.

Eigenschaften der Fourier-Transformation

In Anlehnung an die Vorgehensweise bei der Laplace-Transformation fassen wir die wesentlichsten Eigenschaften der Fourier-Transformation zunächst in Tabellenform zusammen (Tabelle 2.2), ohne sie im Detail nachzuweisen. Stattdessen wollen wir sie lieber kurz andiskutieren und ihre Bedeutung interpretieren.

Tabelle 2.2: Eigenschaften und Rechenregeln der Fourier-Transformation

Eigenschaft, Regel	Zeitbereich	Bildbereich
Linearität	$af(t) + bg(t)$	$aF(j\omega) + bG(j\omega)$
Dualitätseigenschaft	$f(t)$ $F(t)$	$F(j\omega)$ $2\pi f(-\omega)$
Skalierungseigenschaft im Zeitbereich	$f(a \cdot t), \quad a \neq 0$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Translationseigenschaft im Zeitbereich	$f(t + a)$	$e^{j\omega a} F(j\omega)$
Skalierungseigenschaft im Frequenzbereich	$\frac{1}{ b } f\left(\frac{t}{b}\right), \quad b \neq 0$	$F(bj\omega)$
Translationseigenschaft im Frequenzbereich	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(j(\omega - \omega_0))$
Differentiationssatz	$\frac{d}{dt} f(t)$	$j\omega \cdot F(j\omega)$
Integrationssatz	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} F(j\omega) + \pi F(0) \delta_0(j\omega)$
Faltungssatz	$f(t) * g(t)$	$F(j\omega) \cdot G(j\omega)$
Multiplikationssatz	$2\pi f(t) \cdot g(t)$	$F(j\omega) * G(j\omega)$
Symmetrieeigenschaften	$f(t)$ reell $f(t)$ reell und gerade $f(t)$ reell und ungerade $f(t)$ gerade $f(t)$ ungerade	$\Re F(j\omega)$ gerade, $\Im F(j\omega)$ ungerade $F(j\omega)$ reell und gerade $F(j\omega)$ imag. und ung. $F(j\omega)$ gerade $F(j\omega)$ ungerade

Hervorzuhebende Eigenschaften der Fourier-Transformation sind sicherlich die schon angesprochene **Dualitätseigenschaft** (vgl. Gleichung (153.3)) und der **Faltungssatz**, den wir in analoger Form bereits von der Laplace-Transformation kennen. Der **Multiplikationssatz** ist eine zum Faltungssatz *duale* Eigenschaft und i.W. eine Folgerung aus dem Dualitätsprinzip (s. Übung 41).

Übung 41

Die Eigenschaft der **Linearität** ist klar, da es sich bei der Fourier-Transformation um eine **Integraltransformation** handelt. Die Fourier-Transformation „erbt“ die Linearität des Integrals.

Die **Skalierungseigenschaft im Zeitbereich** ist einfach mit Hilfe der Rechenregeln der Integralrechnung⁴⁷ nachzuweisen (s. Übung 41) und lässt sich so interpretieren: Wird das Signal verbreitert ($a \ll 1$) bedeutet dies, dass das Spektrum enger wird, wird das Signal dagegen kürzer ($a \gg 1$) so wird das Spektrum breiter. Wir haben diesen Effekt bereits im Zusammenhang mit der Fourier-Transformation von Rechteckimpulsen diskutiert (vgl. Abbildung 2.35, S. 149).

Die **Translationseigenschaft im Zeitbereich** (s. Übung 41) besagt, dass eine Verschiebung eines Signals auf der Zeitachse (etwa eine in der Praxis oft vorkommende *Signalverzögerung*) bedeutet, dass das Betragsamplitudenspektrum erhalten bleibt (anschaulich: es sind die gleichen Synthesefrequenzen beteiligt), die Phasen jedoch frequenzentsprechend und proportional zur Zeitverschiebung gedreht werden.

Dies wird sofort klar, wenn man sich eine einzelne harmonische Schwingung einmal im Vergleich mit einer verzögerten Version dieses Signals aufzeichnet. Man sieht dann, dass dies in einem (linear) frequenzabhängigen Phasenversatz resultiert und umgekehrt ein solcher Phasenversatz eine zeitliche Verschiebung produziert (s. Übung 41).

Die **Skalierungseigenschaft im Frequenzbereich** ist dual zu der entsprechenden Eigenschaft im Zeitbereich. Wird das Spektrum verbreitert ($b \ll 1$) so bedeutet dies, dass das Zeitsignal schneller variieren muss (höhere Synthesefrequenzen!). Dies wird durch eine Stauchung des Zeitsignals erreicht. Umgekehrt bedeutet eine Stauchung des Spektrums ($b \gg 1$), dass das Zeitsignal breiter wird.

Die **Translationseigenschaft im Frequenzbereich** lässt sich wie folgt interpretieren: eine Verschiebung im Frequenzbereich bedeutet im Zeitbereich eine Multiplikation mit einer reinen Schwingung entsprechend der Verschiebefrequenz und umgekehrt.

Übung 41

Diesen Effekt macht man sich in der Nachrichtentechnik bei der Aufmodulation von Signalen auf hochfrequente Träger zu Nutze. Man „mischt“ durch Multiplikation mit der Trägerschwingung das gesamte Nutzsignalpektrum in einen Frequenzbereich, in dem für die Anwendung günstige Übertragungsbedingungen herrschen. In der Praxis wird allerdings nicht mit komplexen Schwingungen multipliziert, sondern mit reellen. Die sich daraus ergebenden zusätzlichen Mischterme werden weggefiltert.

Der **Differentiationssatz** besagt, dass die Ableitung eines Signals im Zeitbereich die Gewichtung des Betragsamplitudenspektrums mit ω und eine allgemeine Phasendrehung um 90° nach sich zieht. Man vergleiche dazu das Verhalten von Spulen in elektrischen Schaltkreisen [49].

Anschaulich heißt das, dass Signale mit geringen Frequenzen (etwa nahe Frequenz 0) durch Differenzieren gedämpft werden, hohe Frequenzanteile jedoch werden frequenzproportional verstärkt. Dies erscheint klar, da die

⁴⁷ Diese Rechenregeln lassen sich auch auf verallgemeinerte Funktionen übertragen [39, 53].

Ableitung ja gerade die Änderung eines Signals misst. Bei hohen Frequenzen ist diese Änderung zwangsläufig stärker und zwar proportional zur Frequenz. Eine einfache Skizze mit zwei harmonischen Schwingungen verdeutlicht dies.

Der **Integrationssatz** besagt, dass das Integral eines Signals im Zeitbereich die Gewichtung des Betragsamplitudenspektrums mit $\frac{1}{\omega}$ und eine allgemeine Phasendrehung um -90° nach sich zieht. Man vergleiche dazu das Verhalten von Kondensatoren in elektrischen Schaltkreisen [49].

Interpretatorisch kann analog zum Differentiationssatz argumentiert werden. Integration geht stets mit einem Mittelungseffekt einher. Dieser wird umso stärker, je stärker das Signal schwankt und führt zur Unterdrückung dieser Schwankungen (und damit des Signals). Variiert das Signal wenig (nahe Frequenz 0), so summiert das Integral auf, das Ausgangssignal des Integrierers wird groß. Beides wird durch den Faktor $\frac{1}{j\omega}$ im Spektrum des integrierten Signals gekennzeichnet.

Auf die **Symmetrieeigenschaften** soll hier nicht näher eingegangen werden. Es ist für manche Rechnungen ganz nützlich, das Signal in gerade⁴⁸ und ungerade Anteile aufzuteilen und die Symmetrieeigenschaften auszunutzen. Wir machen im Folgenden davon jedoch keinen Gebrauch.

Weitere Beispiele zur Fourier-Transformation

Wir können die allgemeinen Eigenschaften der Fourier-Transformation nutzen, um ohne größeren Aufwand die Spektren von weiteren wichtigen Signalen zu berechnen.

2.32 Beispiel (Gleichsignale)

Aus (150.2) folgt im Sinne verallgemeinerter Funktionen die Beziehung:

$$\delta_0(t) \circ - \bullet 1(\omega) \bullet - \circ \delta_0(t). \quad (156.1)$$

Dabei ergibt sich die Fourier-Rücktransformation von $1(\omega)$ formal aus der Gleichung:

$$\mathfrak{F}^{-1}(1(\omega))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta_0(t). \quad (156.2)$$

Man beachte wiederum die Tatsache, dass die Integrale im eigentlichen Sinne nicht existieren, sondern nur formale Integrale sind.

Aus der obigen Berechnung lässt sich nun mit Hilfe der **Dualitätseigenschaft** direkt die Fourier-Transformierte der konstanten Zeitfunktion $1(t)$ und damit aller **Gleichsignale** der Form $f(t) = \alpha \cdot 1(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ableiten. Es muss gelten:

⁴⁸ $f(t)$ heißt *gerade*, wenn $f(t) = f(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$,
 $f(t)$ heißt *ungerade*, wenn $f(-t) = -f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(1(t))(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} 1(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(-\omega)t} dt = 2\pi\delta_0(-\omega) \stackrel{!}{=} 2\pi\delta_0(\omega).
\end{aligned} \tag{157.1}$$

Bei dieser Berechnung wurde die formale Ähnlichkeit des Fourier-Integrals und der Rücktransformation (156.2) ausgenutzt und wiederum lediglich die Rolle von ω und t getauscht.

Das Ergebnis entspricht im Übrigen vollständig der oben diskutierten Veranschaulichung. Das „breite“ Zeitsignal $1(t)$ hat das (schmalstmögliche) Spektrum. Es ist lediglich die Frequenz $\omega = 0$ (die „Frequenz“ des Konstantsignals) an seiner Synthese beteiligt. Dies ist für einen Gleichwert unmittelbar einleuchtend.

Allgemein erhalten wir aufgrund der Linearität der Fourier-Transformation für ein **Gleichsignal** der Form $f(t) = \alpha \cdot 1(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ das Spektrum:

$$\Sigma(j\omega) = 2\pi \cdot \alpha \cdot \delta_0(\omega). \tag{157.2}$$

2.33 Beispiel (Die Sprungfunktion $\sigma(t)$)

Es ist klar, dass die Fourier-Transformation der Sprungfunktion nur im distributionellen Sinne existieren kann, da das Fourier-Integral

$$\Sigma(j\omega) := \mathfrak{F}(\sigma(t))(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \tag{157.3}$$

im gewöhnlichen Sinne divergiert.

Aus (81.5) wissen wir jedoch, dass im verallgemeinerten Sinne gilt:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta_0(\tau) d\tau \tag{157.4}$$

Nach dem Integrationssatz erhalten wir unter Verwendung der Tatsache, dass die Fourier-Transformierte des Dirac-Funktional die Konstantfunktion $1(\omega)$ ist:

$$\Sigma(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \cdot 1(\omega)_{\omega=0} \cdot \delta_0(\omega) = \pi \cdot \delta_0(\omega) - \frac{j}{\omega}. \tag{157.5}$$

An dieser Stelle sollte übrigens bemerkt werden, dass es im Allgemeinen *nicht* immer *richtig* ist, die Fourier-Transformierte eines Signals mit Hilfe einer Laplace-Transformationstabelle und der Ersetzung $s = j\omega$ zu bestimmen. Im Fall des Einheitssprungs würde dies das *falsche Ergebnis*

$$\Sigma(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{s}|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega} \quad (158.1)$$

liefern. Dies ist aber, wie wir oben gesehen haben, nur die halbe Wahrheit, da die einseitige Laplace-Transformation offenbar den bei $t = 0$ stattfindenden Sprung gar nicht „wahrnimmt“, wohl aber die Fourier-Transformation, die diesen Übergang durch einen Dirac-Impuls signalisiert.

Die Bestimmung von $H(j\omega)$ durch Einsetzen von $s = j\omega$ in eine Laplace-Transformierte $H(s)$ ist nur dann problemlos möglich, wenn alle Pole von $H(s)$ *links* der imaginären Achse liegen und somit die imaginäre Achse selbst *vollständig* im Konvergenzgebiet⁴⁹ der Laplace-Transformation liegt. Das ist im obigen Beispiel des Einheitssprungs nicht der Fall und somit führt die Ersetzung $s = j\omega$ auch zu einem falschen Ergebnis! ■

2.34 Beispiel (Die Schwingungen $\sin(\omega_0 t)$, $\cos(\omega_0 t)$, $e^{j\omega_0 t}$)

Als weitere Anwendungen der Rechenregeln für die zeitkontinuierliche Fourier-Transformation sollen nun die Fourier-Transformierten der wichtigsten Leistungssignale, nämlich der reellen harmonischen Schwingungen, abgeleitet werden. Wie bereits angedeutet, existieren diese nur im distributionellen Sinne.

Man betrachte zunächst die komplexe Schwingung $e^{j\omega_0 t}$. Als Erstes ergibt sich aus der Tatsache, dass $\mathfrak{F}(1(t)) = 2\pi\delta_0(\omega)$ ist (vgl. (157.1)), und dem Verschiebungssatz im Frequenzbereich die folgende Beziehung:

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t} \cdot 1(t) \circ - \bullet 2\pi\delta_0(\omega - \omega_0). \quad (158.2)$$

Eine komplexe harmonische Schwingung der Frequenz ω_0 wird also im Spektrum durch einen Dirac-Impuls an der Stelle ω_0 gekennzeichnet – ein durchaus vernünftiges Ergebnis!

Auf Grund der Euler-Beziehung (vgl. (143.3)) gilt bekanntlich:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}). \quad (158.3)$$

Mit (158.2) und der Linearität der Fourier-Transformation folgt dann unmittelbar:

$$\cos(\omega_0 t) \circ - \bullet \pi\delta_0(\omega - \omega_0) + \pi\delta_0(\omega + \omega_0). \quad (158.4)$$

⁴⁹ I. Allg. die Halbebene rechts des äußerst rechten Pols!

Das Spektrum des Cosinus ist also durch *zwei* Dirac-Impulse bei der positiven und der negativen Frequenz gekennzeichnet! Ferner liefert (158.4) auch ein Beispiel für die in Tabelle 2.2, S. 154 aufgelisteten Symmetrieeigenschaften. Der Cosinus ist eine reelle, gerade Funktion, also muss sein Spektrum rein reell und gerade sein. Dies ist offenbar der Fall.

Ebenfalls aufgrund der Euler-Beziehung gilt:

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}). \quad (159.1)$$

Mit (158.2) und der Linearität der Fourier-Transformation folgt wieder unmittelbar:

$$\sin(\omega_0 t) \circ - \bullet - j\pi\delta_0(\omega - \omega_0) + j\pi\delta_0(\omega + \omega_0). \quad (159.2)$$

Das Spektrum des Sinus ist also ebenfalls durch *zwei* Dirac-Impulse bei der positiven und der negativen Frequenz gekennzeichnet! Ferner ist der Sinus eine reelle, ungerade Funktion, also muss sein Spektrum laut Tabelle 2.2 rein *imaginär* und ungerade sein. Auch dies ist der Fall.

Insgesamt erhalten wir das, was wir vernünftigerweise erhalten sollten, nämlich dass das Spektrum der harmonischen Schwingungen der Frequenz ω_0 durch *diskrete Werte bei eben dieser Frequenz* gekennzeichnet ist - welche anderen harmonischen Schwingungen sollten auch sonst bei der Synthese beteiligt sein? _____ ■

2.35 Beispiel (Die sinc-Funktion $\text{sinc}(\omega_0 t)$)

Zunächst einmal rekapitulieren wir, dass nach (148.2) die Fourier-Transformierte des 0-symmetrischen Rechteckimpulses der Dauer T und der Höhe $\frac{1}{T}$ durch

$$\frac{1}{T} \text{rect}_T \left(t + \frac{T}{2} \right) \circ - \bullet \text{sinc} \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right) \quad (159.3)$$

gegeben ist. Setzt man für den Moment einmal $t_0 := \frac{T}{2\pi}$, so kann diese Beziehung auch wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{1}{2\pi t_0} \text{rect}_{2\pi t_0}(t + \pi t_0) \circ - \bullet \text{sinc}(\omega t_0). \quad (159.4)$$

Für die Anwendung der Dualitätseigenschaft auf $\text{sinc}(\omega_0 t)$ sind zunächst wieder die Rollen von t und ω , sowie t_0 und ω_0 zu tauschen.

Aufgrund der Dualitätseigenschaft erhält man dann:

$$\text{sinc}(\omega_0 t) \circ - \bullet 2\pi \frac{1}{2\pi\omega_0} \text{rect}_{2\pi\omega_0}(-\omega + \pi\omega_0). \quad (159.5)$$

Mit Hilfe der Tatsache, dass die Rechteckfunktion eine gerade Funktion ist, schließt man

$$\text{sinc}(\omega_0 t) \circ - \bullet \frac{1}{\omega_0} \text{rect}_{2\pi\omega_0}(\omega + \pi\omega_0), \quad (160.1)$$

oder äquivalent dazu:

$$\text{sinc}\left(\frac{\omega_0}{\pi}t\right) \circ - \bullet \frac{\pi}{\omega_0} \text{rect}_{2\omega_0}(\omega + \omega_0). \quad (160.2)$$

Die sinc-Funktion ist also ein ideal bandbegrenztes Signal mit rechteckförmigem Spektrum! 

Tabelle 2.3 gibt zusammenfassend die Fourier-Transformierten zu den wichtigsten Signalen an. Einige davon sind in den vorangegangenen Beispielen teilweise schon hergeleitet worden.

Fourier-Transformationen mit MATLAB

Ähnlich wie die Laplace-Transformationen können auch Fourier-Transformationen mit Hilfe der MATLAB *Symbolic Math Toolbox* bestimmt werden, wobei aber auch hier wieder gilt, dass die Ergebnisse in machen Fällen aufgrund der Komplexität der erhaltenen symbolischen Ausdrücke der Nachbearbeitung bedürfen bzw. in anderen Fällen praktisch wenig brauchbar sind. Zur Bestimmung von Fourier-Transformationen und Fourier-Rücktransformationen stehen die MATLAB-Funktionen `fourier` und `ifourier` der *Symbolic Math Toolbox* zur Verfügung. Wir wollen trotz der angesprochen Mängel die Verwendung dieser Funktionen kurz an einigen Beispielen demonstrieren (vgl. Datei `bspFT.m`).

Beginnen wir zunächst mit harmonischen Schwingungen:

```
>> % Symbolische Variablen definieren
>> syms t w w0
>> % Sinus und Cosinus
>> f1 = sin(2*pi*3*t);
>> f2 = cos(2*pi*5*t);
>> % Fourier-Transformationen berechnen
>> F1 = fourier(f1,t,w)

F1 =

-pi*(dirac(w - 6*pi) - dirac(6*pi + w))*i

>> F2 = fourier(f2,t,w)

F2 =
```

Tabelle 2.3: Einige wichtige Fourier-Transformationen

Zeitbereich	Frequenzbereich
$\delta_0(t)$	1
1	$2\pi\delta_0(\omega)$
$\sigma(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta_0(\omega)$
$\frac{1}{T} \text{rect}_T(t + \frac{T}{2})$	$\text{sinc}(\frac{\omega T}{2\pi})$
$\text{rect}_T(t)$	$T e^{-j\omega \frac{T}{2}} \text{sinc}(\frac{\omega T}{2\pi})$
$\text{sinc}(\omega_0 t)$	$\frac{1}{\omega_0} \text{rect}_{2\pi\omega_0}(\omega + \pi\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\delta_0(\omega - \omega_0) + \pi\delta_0(\omega + \omega_0)$
$\sin(\omega_0 t)$	$-j\pi\delta_0(\omega - \omega_0) + j\pi\delta_0(\omega + \omega_0)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta_0(\omega - \omega_0)$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$\sigma(t)e^{-at}$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$\sigma(t)e^{-at} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(j\omega + a)^n}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT)$	$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(\omega - n\omega_0)$ mit $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$
$\frac{d^n}{dt^n} \delta_0(t)$	$(j\omega)^n$
$ t $	$-\frac{2}{\omega^2}$
t^n	$2\pi j^n \frac{d^n}{d\omega^n} \delta_0(\omega)$

```
pi*(dirac(w - 10*pi) + dirac(10*pi + w))
```

```
>> % Sinus mit symbolischer Variable als Frequenz
>> f3 = sin(w0*t);
>> F3 = fourier(f3,t,w)
```

```
F3 =
```


$$-\pi * (\text{dirac}(w - w_0) - \text{dirac}(w + w_0)) * i$$

Man erhält offenbar die entsprechenden Ergebnisse aus Tabelle 2.3.

Für den Dirac-Impuls sowie Sprung- und Konstantfunktion (Gleichwert) erhält man:

```
>> syms a
>> % Dirac- Konstant- und Sprungfunktion
>> f4 = dirac(a*t);
>> f5 = a;
>> f6 = heaviside(a*t);
>> F4 = fourier(f4,t,w)

F4 =

exp(a*w*i)

>> F5 = fourier(f5,t,w)

F5 =

2*a*pi*dirac(w)

>> F6 = fourier(f6,t,w)

F6 =

pi*dirac(w) - (sign(a)*i)/w
```

Auch die in Tabelle 2.2 dokumentierten Rechenregeln werden prinzipiell beherrscht:

```
>> f7 = heaviside(a*t-1);
>> F7 = fourier(f7,t,w)

F7 =

-exp(-(w*i)/a)*((sign(a)*i)/w - pi*dirac(w))

>> F7 = simplify(F7)

F7 =

pi*dirac(w) - (exp(-(w*i)/a)*sign(a)*i)/w

>> pretty(F7)
```

$$\frac{\exp\left(-\frac{j\omega}{a}\right) + \pi \delta_0(\omega)}{j\omega} \cdot \text{sgn}(a) \cdot j$$

Wir überprüfen dieses Ergebnis mit Hilfe der Tabellen. Laut Tabelle 2.3 gilt:

$$\sigma(t) \circ - \bullet \frac{1}{j\omega} + \pi \delta_0(\omega). \quad (163.1)$$

Da aber für $a > 0$

$$f_7(t) = \sigma(a \cdot t - 1) = \sigma\left(a \cdot \left(t - \frac{1}{a}\right)\right) = \sigma\left(t - \frac{1}{a}\right) \quad (163.2)$$

ist, folgt nach dem Translationssatz:

$$\begin{aligned} F_7(j\omega) &= e^{-\frac{j\omega}{a}} \cdot \left(\frac{1}{j\omega} + \pi \delta_0(\omega)\right) \\ &= e^{-\frac{j\omega}{a}} \cdot \pi \delta_0(\omega) + e^{-\frac{j\omega}{a}} \cdot \frac{-j}{\omega} \\ &= \pi \delta_0(\omega) - e^{-\frac{j\omega}{a}} \cdot \text{sgn}(a) \cdot \frac{j}{\omega}. \end{aligned} \quad (163.3)$$

Wenn $a < 0$ ist, gilt:

$$f_7(t) = \sigma(a \cdot t - 1) = \sigma\left(-t + \frac{1}{a}\right) = \sigma\left(-\left(t - \frac{1}{a}\right)\right). \quad (163.4)$$

Dann folgt nach dem Skalierungssatz und dem Translationssatz:

$$\begin{aligned} F_7(j\omega) &= e^{\frac{j(-\omega)}{a}} \cdot \left(\frac{1}{j(-\omega)} + \pi \delta_0(-\omega)\right) \\ &= e^{-\frac{j\omega}{a}} \cdot \left(\frac{\text{sgn}(a)}{j\omega} + \pi \delta_0(-\omega)\right). \end{aligned} \quad (163.5)$$

Da $\delta_0(-\omega) = \delta_0(\omega)$, $\frac{1}{j} = -j$ und $e^{-\frac{j\omega}{a}} \cdot \pi \delta_0(\omega) = \pi \delta_0(\omega)$ ist, führen (163.3) und (163.5) auf die einheitliche Form

$$F_7(j\omega) = \pi \delta_0(\omega) - \frac{e^{-\frac{j\omega}{a}} \cdot \text{sgn}(a) \cdot j}{\omega}, \quad (163.6)$$

welche der MATLAB-Lösung entspricht.

Zum Abschluss noch ein Beispiel für die Fourier-Rücktransformation:

```

>>% Ein Beispiel zur Rücktransformation
>>% Rechteckfenster im Frequenzbereich
>> rect = heaviside(w)-heaviside(w-w0);
>> irect = ifourier(rect , w, t)

irect =

-((cos(t*w0)*i - sin(t*w0))/t - i/t)/(2*pi)

>> irect = simplify(irect);

>> pretty(irect)

sin(t w0) - cos(t w0) i + i
-----
2 pi t

>> irect = rewrite(irect , 'exp')

irect =

-(exp(t*w0*i)*i - i)/(2*pi*t)

>> pretty(irect)

exp(t w0 i) i - i
-----
2 pi t

```

Das Ergebnis lässt sich wie folgt umformen:

$$f_{\text{irect}}(t) = \frac{j(1 - e^{j\omega_0 t})}{2\pi t} = \frac{e^{j\omega_0 t} - 1}{2j\pi t} = e^{j\frac{\omega_0}{2}t} \frac{1}{\pi t} \frac{e^{j\frac{\omega_0}{2}t} - e^{-j\frac{\omega_0}{2}t}}{2j}. \quad (164.1)$$

Aus der Euler'schen Formel ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_{\text{irect}}(t) &= e^{j\frac{\omega_0}{2}t} \frac{\sin(\frac{\omega_0}{2}t)}{\pi t} = e^{j\frac{\omega_0}{2}t} \frac{\sin(\pi \frac{\omega_0}{2\pi} t)}{\pi t} \\ &= e^{j\frac{\omega_0}{2}t} \frac{\sin(\pi \frac{\omega_0}{2\pi} t)}{\pi \frac{\omega_0}{2\pi} t \frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{2\pi} e^{j\frac{\omega_0}{2}t} \text{sinc}\left(\frac{\omega_0}{2\pi} t\right). \end{aligned} \quad (164.2)$$

Dieses Ergebnis ergibt sich auch aus Tabelle 2.3 und dem Dualitätsprinzip. Aus

$$\text{rect}_T(t) \circ - \bullet T e^{-j\omega \frac{T}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \quad (164.3)$$

ergibt sich:

$$\text{rect}_T(-\omega) \bullet - \circ \frac{1}{2\pi} T e^{-j\omega \frac{T}{2}} \text{sinc}\left(\frac{tT}{2\pi}\right). \quad (165.1)$$

Mit der Skalierungseigenschaft folgt daraus:

$$\text{rect}_T(\omega) \bullet - \circ \frac{1}{2\pi} T e^{-j(-t)\frac{T}{2}} \text{sinc}\left(\frac{(-t)T}{2\pi}\right). \quad (165.2)$$

Ersetzt man nun T durch ω_0 und berücksichtigt, dass die sinc-Funktion gerade ist, so erhält man ebenfalls:

$$\text{rect}_{\omega_0}(\omega) \bullet - \circ \frac{\omega_0}{2\pi} e^{j\frac{\omega_0}{2}t} \text{sinc}\left(\frac{\omega_0}{2\pi}t\right). \quad (165.3)$$

2.5.2 Zeitfensterung und Bandbegrenzung

Aus den bisher hergeleiteten Beziehungen für die Fourier-Transformation können zwei wesentliche Folgerungen gezogen werden, die systemtheoretisch von großer Bedeutung sind.

Die herzuleitenden Eigenschaften beziehen sich auf das *Spektrum* so genannter *gefensterter Signale* und, entsprechend der dazu dualen Situation, auf die Zeitsignale *bandbegrenzter Spektren*.

Fourier-Transformation und Zeitfensterung

Bei **gefensterten Signalen** handelt es sich um Signale, die nur über eine endliche Dauer – ein Zeit„fenster“ – beobachtet werden können (was eigentlich immer der Fall ist). Die Effekte, die dabei entstehen, werden insbesondere bei der Betrachtung *abgetasteter* Signale eine große Rolle spielen.

Man betrachte ein Signal $f(t)$ mit Fourier-Transformierter $F(j\omega)$.

Wird dieses Signal nur über einem Zeitintervall $[0, T]$, $T > 0$ beobachtet (gemessen) und will man eine Spektralinformation über $f(t)$ aufgrund dieses Signals gewinnen, so muss man berücksichtigen, dass man genau genommen lediglich das Signal

$$g(t) := f(t) \cdot \text{rect}_T(t) \quad (165.4)$$

und somit eine zeitgefensterte Version von $f(t)$ zur Verfügung hat.

Fourier-transformiert man das Signal $g(t)$, so gilt aufgrund des *Multiplikationssatzes* (vgl. Tabelle 2.2, S. 154):

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \mathfrak{F}(\text{rect}_T)(j\omega). \quad (165.5)$$

Wegen

$$\text{rect}_T(t) = T \cdot \frac{1}{T} \text{rect}_T(t) = T \cdot \frac{1}{T} \text{rect}_T\left(t + \frac{T}{2} - \frac{T}{2}\right) \quad (166.1)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \text{rect}_T\left(t + \frac{T}{2}\right) &\circ - \bullet \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right), \quad (\text{vgl. (148.2)}) \\ \frac{1}{T} \text{rect}_T\left(t + \frac{T}{2} - \frac{T}{2}\right) &\circ - \bullet e^{-j\omega \frac{T}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \quad (\text{Translationssatz}) \end{aligned} \quad (166.2)$$

folgt (vgl. Tabelle 2.2):

$$\text{rect}_T(t) \circ - \bullet T e^{-j\omega \frac{T}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right). \quad (166.3)$$

Somit gilt:

$$g(t) \circ - \bullet \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \left(T e^{-j\omega \frac{T}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \right). \quad (166.4)$$

Die Bedeutung dieses Ergebnisses wird erst durch die Betrachtung von Beispielen gefensterter Signale und ihrer Spektren deutlich.

2.36 Beispiel (Fourier-Transformation bei Zeitfensterung)

Mit Hilfe von (166.4) lässt sich etwa sehr leicht das Fourier-Spektrum einer gefensterten Cosinusschwingung analytisch angeben.

Es gilt wegen

$$\cos(\omega_0 t) \circ - \bullet \pi \delta_0(\omega - \omega_0) + \pi \delta_0(\omega + \omega_0) \quad (166.5)$$

und wegen (vgl. (80.5))

$$\delta_0(t - a) * x(t) = x(t - a), \quad (166.6)$$

dass ein im Zeitintervall $[0, T]$, $T > 0$ beobachtetes Cosinussignal

$$f_T(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot \text{rect}_T(t) \quad (166.7)$$

der Frequenz ω_0 folgendes Fourier-Spektrum hat:

$$\begin{aligned} F_T(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} (\pi \delta_0(\omega - \omega_0) + \pi \delta_0(\omega + \omega_0)) * \left(T e^{-j\omega \frac{T}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(T e^{-j(\omega - \omega_0) \frac{T}{2}} \text{sinc}\left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{2\pi}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(T e^{-j(\omega + \omega_0) \frac{T}{2}} \text{sinc}\left(\frac{(\omega + \omega_0)T}{2\pi}\right) \right). \end{aligned} \quad (166.8)$$

Mit Hilfe von MATLAB und dieser Formel lässt sich das Spektrum für verschiedene Beobachtungsdauern (Fensterlängen) T berechnen und grafisch darstellen (vgl. Datei **bspSpectFenster.m**):

```
% Frequenz des Cosinus (in rad/s) definieren

omega0 = 3*2*pi;           % 3-Hz Cosinus

% Fensterlänge T definieren

T = 1;                     % Fensterdauer 1 sec

% Frequenzbereich in Hz definieren
frq = (-10:0.01:10);

% Frequenzbereich in rad/s berechnen
omega = 2*pi*frq;

% Betrags-Amplitudenspektrum des Signals ausrechnen

F1 = abs(1/2*(T*exp(-j*(omega-omega0)*(T/2)).*...
          sinc((omega-omega0)*T/(2*pi)))+...
        1/2*(T*exp(-j*(omega+omega0)*(T/2)).*...
          sinc((omega+omega0)*T/(2*pi))));

% neue Fensterlänge T definieren

T = 3;                     % Fensterdauer 3 sec

...
```

Abbildung 2.36 zeigt den Effekt der Fensterung am Beispiel des Cosinussignals der Frequenz $f_0 = 3$ Hz.

Man erkennt im Falle des großen Zeitfensters ($T = 100$ s) die Annäherung an das theoretische Dirac-Spektrum. 

Der Effekt der Fensterung (im Falle der kleinen Zeitfenster deutlich zu erkennen) ist eine durch das Spektrum der Fensterfunktion hervorgerufene *Verschmierung des* eigentlichen *Signalspektrums*. Dieser Effekt ist offenbar um so deutlicher, je kleiner das Zeitfenster ist, d.h. je weniger Information über das eigentliche Signal vorliegt.

Die Fourier-Transformation „misst“ also im Fensterungsfall nicht nur die Spektralanteile des Signals, sondern auch den Effekt des Abschneidens des Signals. Dies ist bei Spektralanalysen, bei denen das Signal nur kurzzeitig beobachtet werden kann, besonders unangenehm.

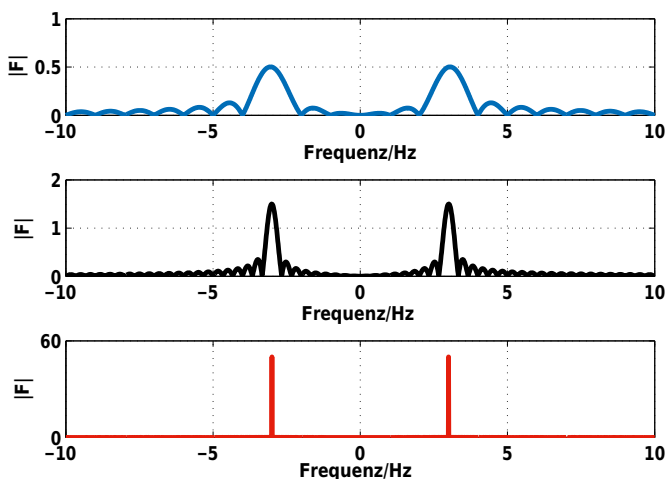


Abb. 2.36: Effekt der Zeitfensterung am Beispiel $\cos(2\pi \cdot 3 \cdot t)$

In der Digitalen Signalverarbeitung verwendet man in diesem Fall spezielle Fensterfunktionen, welche den Abschneideeffekt etwas abmildern können. Wir werden im übernächsten Kapitel hierauf ausführlich eingehen.

Ähnliche, in der Praxis unvermeidbare Effekte erhält man in der Situation, in der das *Spektrum* einer Begrenzung unterliegt.

Fourier-Transformation und Bandbegrenzung

Abschneideeffekte im Spektrum können etwa bei der Übertragung von Signalen über Kanäle auftreten, die aus physikalischen Gründen nur Signale einer bestimmten Bandbreite (oder Signale in einem bestimmten Frequenzband) übertragen können.

Hat das Signal ein Spektrum, welches über dieses Band herausragt, so werden Spektralanteile unterdrückt (abgeschnitten). Oft ist dieses Verhalten auch gewollt und wird durch spezielle LTI-Systeme (*Filter*) hervorgerufen. Im beiden Fällen macht sich der Effekt der Bandbegrenzung im Zeitbereich bemerkbar, und zwar aufgrund des Dualitätsprinzips der Fourier-Transformation in ähnlicher Weise wie bei der Fensterung im Zeitbereich.

Man betrachte wieder ein Signal $f(t)$ mit der Fourier-Transformierten $F(j\omega)$. Wird das Spektrum dieses Signals nur über einem Frequenzintervall $[-\omega_0, \omega_0]$ mit $\omega_0 > 0$ betrachtet, so betrachtet man genau genommen ein Signal mit folgendem Spektrum:

$$G(j\omega) := F(j\omega) \cdot \text{rect}_{2\omega_0}(\omega + \omega_0). \quad (168.1)$$

Fourier-rücktransformiert man $G(j\omega)$, so gilt aufgrund des *Faltungssatzes*:

$$g(t) = f(t) * \mathfrak{F}^{-1}(\text{rect}_{2\omega_0})(t). \quad (169.1)$$

Wegen

$$\text{sinc}(\omega_0 t) \circ - \bullet \frac{1}{\omega_0} \text{rect}_{2\pi\omega_0}(\omega + \pi\omega_0) \quad (169.2)$$

(vgl. Tabelle 2.3) folgt:

$$\text{rect}_{2\omega_0}(\omega + \omega_0) \bullet - \circ \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega_0}{\pi} t\right). \quad (169.3)$$

Somit gilt für das zum bandbegrenzten Signal gehörige Zeitsignal:

$$g(t) = f(t) * \left(\frac{\omega_0}{\pi} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega_0}{\pi} t\right) \right). \quad (169.4)$$

Gleichung (169.4) zeigt, dass man durch Abschneiden im Frequenzbereich im Zeitbereich ebenfalls einen durch die sinc-Funktion hervorgerufenen Verschmierungseffekt erhält.

2.37 Beispiel (Fourier-Transformation bei Bandbegrenzung)

Wir illustrieren dies am Beispiel des Rechteckimpulses der Dauer 1 ($f(t) = \text{rect}_1(t)$) und realisieren die Faltung aus (169.4) approximativ mit Hilfe von MATLAB (vgl. Datei **bspGibbs.m**):

```
% Bandbegrenzung in Hz definieren (1. Beispiel)
f0 = 3;

% Bandbegrenzung in rad/s berechnen
omeg0 = 2 * pi * f0;

% Zeitdiskretisierung festlegen
dt = 0.01;

% Zeitbereich für die Rechteckfunktion definieren
t1 = (-5:dt:5);
rect1 = double((t1>0 & t1<1)); % Einheits-Rechteckimpuls

% Zeitbereich für die Sinc-Funktion und
% Sinc-Funktion definieren
t2 = (-20.0:dt:20);
sincf = (omeg0/pi) * sinc(t2*omeg0/pi);

% Faltung der Funktionen mit der MATLAB-Funktion
% conv berechnen; Skalierung mit dt zur Approximation
% 0-ter Ordnung des Integrals (Treppenfunktion)
functg1 = dt*conv(rect1,sincf);
```



```

% Zeitbereich für die Faltung definieren
t = (-25.0:dt:25);

%%
% Bandbegrenzung in Hz definieren (2. Beispiel)
f0 = 21;

% Bandbegrenzung in rad/s berechnen
omeg0 = 2*pi*f0;

% Sinc-Funktion definieren
sincf = (omeg0/pi)*sinc(t2*omeg0/pi);

% Faltung der Funktionen mit der MATLAB-Funktion
% conv berechnen; Skalierung mit dt zur Approximation
% 0-ter Ordnung des Integrals (Treppenfunktion)
functg2 = dt*conv(rect1,sincf);

```

Abbildung 2.37 zeigt die Zeitfunktionen des bandbegrenzten Rechtecksignals für die Bandgrenzen $\omega_0 = 2\pi \cdot 3 \text{ rad/s}$ und $\omega_0 = 2\pi \cdot 21 \text{ rad/s}$.

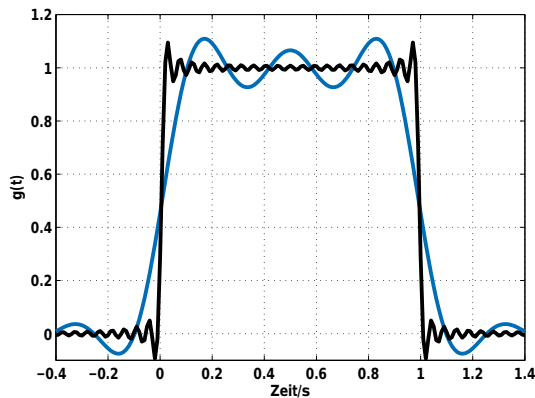


Abb. 2.37: Effekt der Bandbegrenzung am Beispiel $\text{rect}_1(t)$

Man erkennt die Annäherung an das ideale Rechtecksignal für wachsende Bandbreite und in beiden Fällen deutliche, so genannte „Überschwinger“ an den Sprungstellen der Rechteckfunktion, die von den (durch die Bandbegrenzung bedingten) fehlenden hochfrequenten Signalanteilen herrühren, die nötig wären, um den harten Übergang im Signal zu synthetisieren. ■

Überträgt man ein Signal über einen Kanal endlicher Bandbreite, so findet zwangsläufig eine Bandbegrenzung statt.

Das empfangene Signal weist im Zeitbereich dann Überschwinger an den scharfen Übergängen auf, ähnlich wie bei dem Rechteckimpuls im berechneten Beispiel. Interessanterweise werden diese Überschwinger zwar mit zunehmender Bandbreite enger, ihre **Höhe** unterschreitet einen gewissen Wert jedoch nicht! Dieser Effekt ist als das so genannte **Gibbs'sche Phänomen** bekannt.

2.5.3 LTI-Systeme im Frequenzbereich

Eingangs Abschnitt 2.5 wurde bereits gezeigt, dass sich die Antwort eines LTI-Systems $\mathfrak{S}$ mit Impulsantwort $h(t)$ auf eine komplexe harmonische Erregung mit Hilfe der Fourier-Transformierten $H(j\omega)$ der Impulsantwort bestimmen lässt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(e^{j\omega t}) &= h(t) * e^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = H(j\omega) \cdot e^{j\omega t}.\end{aligned}\tag{171.1}$$

Auf Seite 150 wurde gezeigt, dass sich die Signale der wichtigsten Signalklassen als Überlagerung komplexer harmonischer Schwingungen schreiben lassen. Anders gesagt, diese Signale haben ein **Fourier-Spektrum** und die Fourier-Rücktransformation (150.1) gibt an, wie diese Überlagerung (theoretisch) mit Hilfe der Spektralanteile erzeugt werden kann.

Diese zusätzliche Information lässt nun (171.1) in einem neuen Licht erscheinen. Da LTI-Systeme **linear** sind, sollte sich die Systemantwort auf ein Eingangssignal $x(t)$ mit einer **entsprechenden** Überlagerung der Signalanteile $H(j\omega) \cdot e^{j\omega t}$ darstellen lassen.

Wir können dies durch Berechnung des Spektrums des Ausgangssignals verifizieren.

Sei $y(t) = h(t) * x(t)$ die Antwort eines LTI-Systems $\mathfrak{S}$ mit Impulsantwort $h(t)$ auf ein Eingangssignal $x(t)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}Y(j\omega) &:= \mathfrak{F}(y(t))(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) e^{-j\omega t} d\tau dt.\end{aligned}\tag{171.2}$$

Vertauscht man die Integration, so erhält man:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau.\tag{171.3}$$

Substituiert man im inneren Integral $t' := t - \tau$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j\omega t'} dt' \right] e^{-j\omega \tau} d\tau \\ &= H(j\omega) \cdot X(j\omega). \end{aligned} \quad (172.1)$$

Wir können damit insgesamt Folgendes festhalten:

Es sei $h(t)$ die **Impulsantwort** eines zeitkontinuierlichen LTI-Systems $\mathfrak{S} : x(t) \rightarrow y(t)$. Dann wird das LTI-System im Frequenzbereich durch **Multiplikation** mit der **Übertragungsfunktion (Übertragungsfunktion im Frequenzbereich)**

$$H(j\omega) := \mathfrak{F}(h)(j\omega) \quad (172.2)$$

beschrieben. Es gilt mit $X(j\omega) := \mathfrak{F}(x)(j\omega)$ und $Y(j\omega) := \mathfrak{F}(y)(j\omega)$:

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega). \quad (172.3)$$

Die Übertragungseigenschaft im Frequenzbereich ist dabei analog zu der im Bildbereich (110.4) und kann aufgrund der Ähnlichkeit von Laplace- und Fourier-Transformation aus dieser leicht abgeleitet werden. Dies haben wir bereits eingangs des Abschnittes (vgl. Gleichung (145.2)) festgestellt. In der Tat gilt:

Ist $\mathfrak{S} : x(t) \rightarrow y(t)$ ein kausales, zeitkontinuierliches LTI-System (mit kausaler Impulsantwort $h(t)$) und existiert $H(s)$ an einer Stelle $s = j \cdot \omega$ der imaginären Achse, so stimmen Laplace- und Fourier-Transformation dort überein, d.h.

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j \cdot \omega}. \quad (172.4)$$

Insbesondere kann für **stabile Systeme**, deren Übertragungsfunktion $H(s)$ im Bildbereich ja auf der ganzen imaginären Achse existiert, die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich auf diese Weise einfach bestimmt werden.

Das Übertragungsverhalten wird nach (172.3) durch die Reaktion des Systems auf die komplexen harmonischen Schwingungen $e^{j\omega t}$ **vollständig bestimmt!**

Die Werte $H(j\omega)$ der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich umfassen dabei die im Beispiel 2.5 (im eingeschwungenen Zustand) beobachteten Amplituden- und Phasenänderung des Ausgangssignals gegenüber dem Eingangssignal. Gleichung (171.1) zeigt auch, dass die Frequenz nicht geändert wird.

Trägt man nun Betrag und Phase der komplexen Eigenwerte $H(j\omega)$ über der so genannten **Kreisfrequenz** ω auf (alternativ über der Frequenz in Hz), so erhält man einen Gesamtüberblick über das **Übertragungsverhalten** des LTI-Systems **bezüglich der Frequenz**:

Die Funktionen

$$\omega \longrightarrow |H(j\omega)|, \quad (173.1)$$

$$\text{und } \omega \longrightarrow \arg(H(j\omega)) \quad (173.2)$$

heißen **Amplitudengang** ((**Betrags**)-**Frequenzgang**) und **Phasengang** des durch die Frequenz-Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ beschriebenen LTI-Systems.

Die grafische Darstellung dieser Funktionen über der (Kreis-)Frequenz ω heißt das **Bode-Diagramm** des Systems.

Abbildung 2.38 zeigt beispielhaft das Bode-Diagramm des schon öfter betrachteten RC-Tiefpasses mit Zeitkonstante $T = 1$, wie es etwa mit dem MATLAB -Kommando `bode` berechnet werden kann. Die Funktion `bode` stützt sich dabei auf die schon verwendeten mächtigen Funktionen zur Definition von Übertragungsfunktionen (z.B. `tf`) und nicht auf die Funktionen zur Fourier-Transformation der Symbolic Math Toolbox (vgl. **bspbode-Diag.m**):

```
% Übertragungsfunktion des RC-Tiefpass
% definieren
T = 1;
s = tf('s');
H = 1/(s+1);

% Frequenzvektor in rad/s definieren
omegs = (0:0.1:20);

% Bode-Diagramm berechnen
[Ampg, phasg] = bode(H,omegs);

% Plot des Bode-Diagramms ("von Hand"
% Ohne die Rückgabewerte wird der Plot
% automatisch ausgeführt ist aber nicht so
% flexibel)
```

```

Ampg = Ampg(:);           % Vektor erzeugen
phasg = phasg(:);         % Vektor erzeugen

subplot(211)
semilogx(omegs, 20*log10(Ampg), 'b', 'Linewidth', 3);
grid
axis([0, omegs(end), min(20*log10(Ampg)) - 3, ...
      max(20*log10(Ampg)) + 3])
xlabel('Frequenz / rad/s')
ylabel('dB')

subplot(212)
semilogx(omegs, phasg, 'k', 'Linewidth', 3);
grid
axis([0, omegs(end), min(phasg), max(phasg)])
xlabel('Frequenz / rad/s')
ylabel('rad')

```

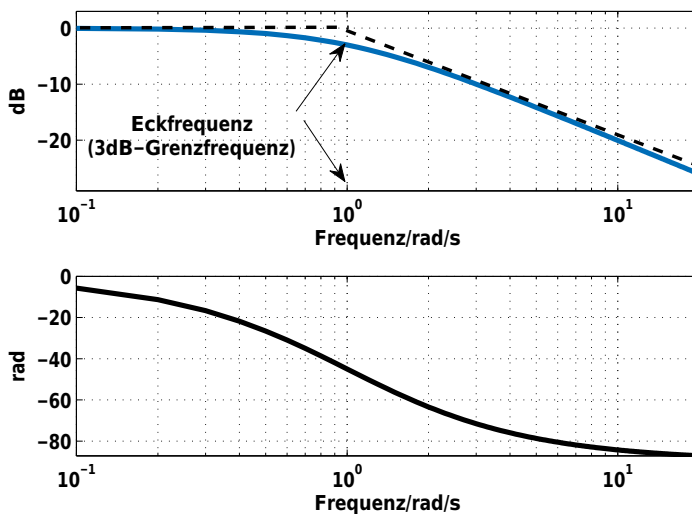


Abb. 2.38: Bode-Diagramm des RC-Tiefpasses mit Zeitkonstante $T = 1$

Solche Bode-Diagramme lassen sich oft auch ohne Verwendung eines Programms kurz mit Hilfe so genannter charakteristischer **Eckfrequenzen** von Hand skizzieren. Im logarithmischen Plot werden dann die Beträge der (meist) rationalen Übertragungsglieder $H(j\omega)$ zu Geradenabschnitten, die je nach Grad der rationalen Funktion mit 20, 40, 60 dB u.s.w. ab der Eckfre-

quenz abfallen⁵⁰. Im der Abbildung 2.38 etwa sind beispielhaft zum Vergleich die 3-dB-Grenzfrequenz $\omega = \frac{1}{T} = 1$ und die sich daraus ergebenden asymptotischen Amplitudengangabschnitte eingetragen.

2.5.4 Fourier-Reihenentwicklung periodischer Signale

Zum Standardprogramm der Ingenieurmathematik gehört, da Sie nur elementare Kenntnisse der Integralrechnung voraussetzt, meist eine andere Zeit-Frequenz-Transformation als die zeitkontinuierliche Fourier-Transformation. Diese ist die so genannte **Fourier-Reihenentwicklung** für periodische Signale.

Die wichtigsten Eigenschaften dieser Transformation sollen im vorliegenden Paragraphen in aller Kürze dargestellt werden⁵¹. Von besonderem Interesse wird dann im darauf folgenden Abschnitt sein, welcher Zusammenhang zwischen dieser Transformation und der (distributionellen) kontinuierlichen Fourier-Transformation dieser Signale besteht.

Zentrale Aussage des von **Fourier** (1768-1830) entdeckten Reihenentwicklungssatzes ist, dass eine große Klasse von Funktionen über einem Intervall und damit auch von periodischen Fortsetzungen dieser Funktion auf die reelle Achse, als *Reihe* (Überlagerung) von Sinus- und Cosinusignalen dargestellt werden kann.

Diese *Reihendarstellung* ist somit eine andere Form der Darstellung des *Frequenzinhaltes dieser Signale* und stellt gewissermaßen einen Spezialfall der allgemeineren zeitkontinuierlichen Fourier-Transformation dar.

Dieses Resultat ist im Laufe der Jahre unter immer schwächeren Voraussetzungen für eine immer größere Signalklasse (unter anderem auch im Sinne verallgemeinerter Funktionen, vgl. Anhang A) bewiesen worden, sodass man in der Praxis nahezu jedes periodische Signal (zumindest theoretisch) so darstellen kann.

Die Fourier'schen Resultate beantworten die Frage, inwieweit Funktionen auf einem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ der Breite $T > 0$ als **Überlagerung trigonometrischer Funktionen** dargestellt werden können und wie diese Überlagerung zu ermitteln ist.

Eine dazu äquivalente Version formuliert dieses Resultat für T -periodische Funktionen (periodische Signale der Periodendauer T). In der Tat besteht zwischen den Versionen kein Unterschied, da eine periodische Funktion durch ihre Werte auf *einem beliebigen* Periodizitätsintervall der Dauer T eindeutig bestimmt ist.

⁵⁰ Es ist üblich, dass die Verstärkung eines Systems im logarithmischen Maßstab angegeben wird, da die meisten Verstärkungskennlinien dann in Geraden übergehen oder sich durch Geraden annähern lassen. Ist α die (dimensionslose) Verstärkung, so ist das logarithmische Leistungsverstärkungsmaß als $10 \cdot \log_{10}(\alpha)$ und das Amplitudenverstärkungsmaß als $20 \cdot \log_{10}(\alpha)$ in dB (Dezibel) definiert.

⁵¹ Für eine detaillierte Diskussion des Stoffes sei auf die einschlägige Literatur zur Ingenieurmathematik [55] verwiesen.

Wir werden im Folgenden stets von T -periodischen Signalen sprechen und uns i.Allg. auf das Periodizitätsintervall $[0, T] \subseteq \mathbb{R}$ beziehen.

Bei der gesuchten Überlagerung unterscheiden wir, ob das Signal aus **komplexen** oder **reellen Schwingungen** synthetisiert werden soll. Genauer definiert man im reellen Fall:

Sei $f(t)$ ein T -periodisches Signal und $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ die zur Periodendauer gehörige Kreisfrequenz.

Dann heißt eine Darstellung der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \quad (176.1)$$

eine **reelle Fourier-Reihenentwicklung** von $f(t)$.

Im komplexen Fall definiert man:

Sei $f(t)$ ein T -periodisches Signal und $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ die zur Periodendauer gehörige Kreisfrequenz.

Dann heißt eine Darstellung der Form

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad c_k \in \mathbb{C} \quad (176.2)$$

eine **komplexe Fourier-Reihenentwicklung** von $f(t)$.

Die gesuchte Überlagerung ist also ausschließlich durch Schwingungen gekennzeichnet, deren Frequenz (in Hz) $1/T$ entspricht oder ein ganzzahliges Vielfaches hiervon ist. Die **Spektralinformation** ist in den **Koeffizienten** der Überlagerung codiert. Für diese Größen sind folgende Bezeichnungen eingeführt:

Die Frequenz $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ rad/s heißt **Grundfrequenz** der Fourier-Reihenentwicklung und die Frequenz $k \cdot \omega_0$ rad/s, $k \geq 2$ die **k -te Harmonische** (bzw. **$k-1$ -te Oberwelle**).

Die Koeffizienten a_k, b_k , $k \in \mathbb{N}_0$ heißen **reelle Fourier-Koeffizienten**, die Koeffizienten c_k , $k \in \mathbb{Z}$ heißen **komplexe Fourier-Koeffizienten**.

Natürlich ist klar, dass ein komplexwertiges Signal nur eine komplexe Fourier-Reihenentwicklung haben kann. Bei reellen Signalen sind im Existenzfall beide Reihenentwicklungen bestimmbar und die Koeffizienten können mit einfachen Umrechnungen ineinander überführt werden (s.u.).

Die Frage, welche T -periodischen Signale sich in dieser Weise darstellen lassen, ist nicht so leicht zu beantworten. In der Tat würde ein Beweis des folgenden Satzes⁵², der diese Frage beantwortet, den Rahmen dieses Buches bei Weitem sprengen⁵³, sodass wir dieses Resultat nur zitieren wollen:

Sei $f(t)$ ein (reelles) T -periodisches Signal, welches im Periodizitätsintervall folgende Voraussetzungen erfüllt:

- (a) $f(t)$ ist bis auf endlich viele Sprungstellen stetig und monoton,
- (b) die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Sprungstellen existieren.

Dann konvergiert die gemäß Gleichung (176.1) und (176.2) gebildete reelle bzw. komplexe **Fourier-Reihe** an allen Stetigkeitsstellen gegen $f(t)$. An allen Unstetigkeitsstellen t_0 konvergieren sie gegen den Mittelwert der links- und rechtsseitigen Grenzwerte $\frac{1}{2} [f(t_0+) + f(t_0-)]$!

Die **Darstellung** des Signals durch die Fourier-Reihe ist darüber hinaus **eindeutig**, d.h. es gibt keine andere Reihendarstellung mit Harmonischensignalen.

Die genannten Existenzbedingungen für eine Fourier-Reihenentwicklung heißen **Dirichlet-Bedingungen**. Es handelt sich dabei in der Tat um nur sehr schwache⁵⁴ Voraussetzungen, sodass die Fourier-Reihenentwicklung in der Praxis immer ermittelt werden kann.

Da das Existenzproblem praktisch keine Rolle spielt, besteht die Aufgabe bei der Fourier-Reihenentwicklung lediglich in der Berechnung der **Fourier-Koeffizienten**.

Lässt sich ein (reelles bzw. komplexes) T -periodisches Signal $f(t)$ in der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \quad (177.1)$$

resp.

⁵² Für eine Erweiterung des Satzes auf den distributionellen Fall siehe Anhang A.

⁵³ Er würde im Übrigen auch nichts zum systemtheoretischen Verständnis beitragen.

⁵⁴ Die Dirichlet-Bedingungen sind praktisch immer erfüllt. Der Leser versuche einmal eine Funktion zu zeichnen, die diese Bedingungen *nicht* erfüllt. Es wird ihm nicht gelingen.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad c_k \in \mathbb{C} \quad (178.1)$$

darstellen, so gilt für die reellen Fourier-Koeffizienten:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad (178.2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (178.3)$$

Für die komplexen Fourier-Koeffizienten erhält man:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (178.4)$$

Die komplexe Reihendarstellung (176.2) und die Formel zur Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten (178.4) sind gewissermaßen das Pendant zu den Gleichungen (150.1) und (146.1) für die Fourier-Rücktransformation und die zeitkontinuierliche Fourier-Transformation.

Die Ermittlung der Fourier-Koeffizienten (die **Spektralinformation**) entspricht der Fourier-Transformation, die Darstellung des Signals mit Hilfe der Fourier-Koeffizienten entspricht der Rücktransformation!

Zum Abschluss muss noch auf den **Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Fourier-Reihen** hingewiesen werden. Für reelle Signale gibt es, wie bereits erwähnt, beide Darstellungen (wobei im Folgenden meist die komplexe verwendet werden soll).

Die Umrechnung zwischen beiden Darstellungen ist einfach und ergibt sich im Wesentlichen aus der Euler'schen Beziehung zwischen der komplexen Exponentialfunktion und den reellen trigonometrischen Funktionen.

Es gilt ja:

$$\begin{aligned} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \\ = a_k \frac{1}{2} (e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}) + b_k \frac{1}{2j} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}) \end{aligned} \quad (178.5)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2j}b_k \right) e^{jk\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}a_k - \frac{1}{2j}b_k \right) e^{-jk\omega_0 t} \\
&= c_k e^{jk\omega_0 t} + c_{-k} e^{j(-k)\omega_0 t} \quad \forall k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt dabei aus der Eindeutigkeit der komplexen Fourier-Reihendarstellung.

Diese Überlegungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Besitzt ein reelles T -periodisches Signal eine Fourier-Reihenentwicklung, so gelten für die reellen und komplexen Fourier-Koeffizienten folgende Beziehungen:

$$c_k = \left(\frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2j}b_k \right), \quad (179.1)$$

$$c_{-k} = \left(\frac{1}{2}a_k - \frac{1}{2j}b_k \right), \quad (179.2)$$

$$c_{-k} = c_k^* \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (179.3)$$

$$a_k = 2\Re(c_k), \quad b_k = -2\Im(c_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (179.4)$$

Damit sind nun alle wesentlichen Tatsachen über die Fourier-Reihenentwicklung zusammengetragen, um im folgenden Abschnitt die Beziehung zwischen den beiden Spektralberechnungs-Konzepten für periodischen Signale, nämlich der Fourier-Reihenentwicklung einerseits und der (distributionellen) zeitkontinuierlichen Fourier-Transformation andererseits, untersuchen zu können.

2.5.5 Der Zusammenhang zwischen der zeitkontinuierlichen Fourier-Transformation und der (komplexen) Fourier-Reihenentwicklung

In der Tat haben wir in den vorangegangenen beiden Abschnitten *zwei* verschiedene Methoden für die Beantwortung einer Frage entwickelt, nämlich der, welchen spektralen Inhalt (welches Spektrum) ein periodisches Signal hat.

Wir wollen dies anhand eines einfachen Beispiels rekapitulieren.

2.38 Beispiel (Fourier-Reihen, Fourier-Transformation)

Man betrachte das einfache 2π -periodische Signal

$$f(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \cos(4\pi t). \quad (179.5)$$

Dieses Signal besitzt eine sehr einfache reelle Fourier-„Reihen“-Entwicklung, nämlich:

$$f(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \cos(4\pi t). \quad (180.1)$$

Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass (179.5) schon eine Darstellung von $f(t)$ mit Hilfe einer Schwingung $\sin(\omega t)$ und zugehörigen Oberwellen entsprechend (176.2) ist und diese Darstellung **eindeutig** ist.

Damit erhalten wir für die reellen Fourier-Koeffizienten $a_k, b_k, k \in \mathbb{N}$:

$$a_k = \begin{cases} 1/2 & \text{für } k = 2, \\ 0 & \text{für } k \neq 2, \end{cases} \quad (180.2)$$

$$b_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 1, \\ 0 & \text{für } k \neq 1. \end{cases} \quad (180.3)$$

Nach (179.1) gilt dann für die Koeffizienten der **komplexen** Reihenentwicklung $c_k, k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_k &= \left(\frac{1}{2} a_{|k|} \pm \frac{1}{2j} b_{|k|} \right) \\ &= \begin{cases} 1/4 & \text{für } k = \pm 2, \\ -j/2 & \text{für } k = 1, \\ j/2 & \text{für } k = -1, \\ 0 & \text{für } k \text{ sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (180.4)$$

Man erhält somit folgende komplexe Fourier-Reihenentwicklung (Grundfrequenz ist $\omega_0 = 2\pi$):

$$f(t) = \frac{1}{4} e^{-j2\omega_0 t} + \frac{j}{2} e^{-j\omega_0 t} - \frac{j}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{4} e^{j2\omega_0 t}. \quad (180.5)$$

Andererseits kann $f(t)$ nach (158.4) und (159.1) direkt im verallgemeinerten Sinne Fourier-transformiert werden. Mit Hilfe der dort hergeleiteten zeitkontinuierlichen Fourier-Transformationen von Sinus und Cosinus erhält man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f)(j\omega) &= -j\pi\delta_0(\omega - \omega_0) + j\pi\delta_0(\omega + \omega_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\pi\delta_0(\omega - 2\omega_0) + \frac{1}{2}\pi\delta_0(\omega + 2\omega_0) \\ &= \frac{1}{2}\pi\delta_0(\omega + 2\omega_0) + j\pi\delta_0(\omega + \omega_0) \\ &\quad - j\pi\delta_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\pi\delta_0(\omega - 2\omega_0) \end{aligned} \quad (180.6)$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \delta_0(\omega + 2\omega_0) + 2\pi \cdot \frac{j}{2} \cdot \delta_0(\omega + \omega_0) \\
&\quad 2\pi \cdot \left(-\frac{j}{2}\right) \cdot \delta_0(\omega - \omega_0) + 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \delta_0(\omega - 2\omega_0).
\end{aligned}$$

Dies ist ein Spektrum mit Dirac-Impulsen bei den Frequenzen $\pm\omega_0$ und $\pm 2\omega_0$, deren Gewichte bis auf den Faktor 2π denen der entsprechenden **komplexen Fourier-Koeffizienten** aus Gleichung (180.5) entsprechen.

Wir erhalten also identische Spektralinformationen! ■

Die Überlegungen aus Beispiel 2.38 lassen sich auf die allgemeine Situation übertragen.

Nach Gleichung (158.2) und aufgrund der Linearität⁵⁵ der Fourier-Transformation gilt unmittelbar:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathfrak{F} (e^{jk\omega_0 t}) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k 2\pi \delta_0(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2\pi c_k) \delta_0(\omega - k\omega_0).
\end{aligned} \tag{181.1}$$

Ein Signal mit komplexer Fourier-Reihenentwicklung $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$ besitzt also ein Dirac-Impuls-Spektrum der Form $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (2\pi c_k) \delta_0(\omega - k\omega_0)$.

Damit erhalten wir das folgende allgemeine Resultat:

Sei $f(t)$ ein T -periodisches Signal mit Fourier-Spektrum $F(j\omega)$ und komplexer Fourier-Reihenentwicklung mit Fourier-Koeffizienten $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Dann gilt (wie üblich mit $\omega_0 = 2\pi/T$):

$$F(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2\pi c_k) \delta_0(\omega - k\omega_0). \tag{181.2}$$

Bis auf den Faktor 2π liefern beide Transformationen für das periodische Signal $f(t)$ die **gleiche Spektralinformation!**

⁵⁵ Streng genommen muss hier noch untersucht werden, inwiefern und in welchem Sinne Transformation und Reihenkonvergenz vertauscht werden können. Ggf. muss die Reihenkonvergenz im distributionellen Sinne aufgefasst werden. Eine Diskussion dieses Aspekts würde hier zu weit führen.

2.5.6 Übungsaufgaben

Übung 40 (Lösungsband Seite 96)

Berechnen Sie mit MATLAB die Fourier-Transformation des Einheits-Rechteckimpulses $\text{rect}_1(t)$.

Hinweis: Verwenden Sie die MATLAB-Funktion für $\sigma(t)$!

Übung 41 (Lösungsband Seite 97)

Weisen Sie durch formale Anwendung der Rechenregeln der Integrationstheorie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformation nach:

- (a) den Multiplikationssatz,
- (b) die Skalierungs- und Translationseigenschaft im Zeitbereich,
- (c) die Skalierungs- und Translationseigenschaft im Frequenzbereich.

Übung 42 (Lösungsband Seite 99)

Weisen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformierten der Sprungfunktion $\sigma(t)$ und mit Hilfe des Faltungssatzes den Integrationssatz der Fourier-Transformation nach.

Übung 43 (Lösungsband Seite 101)

Betrachten Sie das Signal $x(t)$, welches durch die Grafik in Abbildung 2.39 dargestellt wird.

- (a) Bestimmen Sie für $x(t)$ eine Funktionsvorschrift in geschlossener Form⁵⁶.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für die Fourier-Transformation das Spektrum $X(j\omega)$ dieses Signals.
- (c) Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum $|X(j\omega)|$ des Signals.
- (d) Ist das Signal bandbegrenzt?

Übung 44 (Lösungsband Seite 102)

Betrachten Sie das folgende, pulsartig auftretende Schwingungssignal:

$$f(t) = \begin{cases} \cos(4\pi t) & \text{für } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (182.1)$$

- (a) Plotten Sie das Signal $f(t)$ mit Hilfe von MATLAB.

⁵⁶ D.h. es soll keine Fallunterscheidung verwendet werden. Das Signal ist durch einen Funktionsausdruck zu beschreiben, der sich aus bekannten Funktionen zusammensetzt.

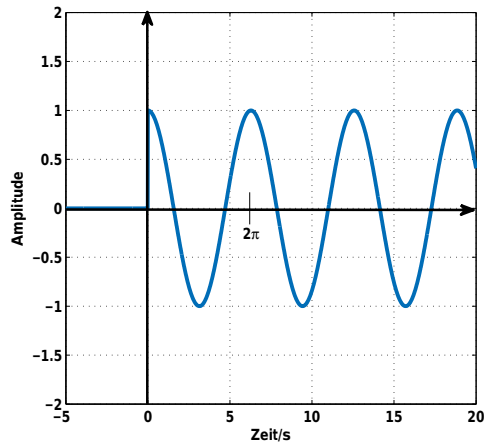


Abb. 2.39: Kausales Signal

- (b) Stellen Sie das Signal in geschlossener Form als Produkt zweier geeigneter Signale dar.
- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (b) die Fourier-Transformierte $F(j\omega)$ des Signals.

Übung 45 (Lösungsband Seite 103)

- (a) Berechnen Sie mit Hilfe der Dualitätseigenschaft der Fourier-Transformation die Fourier-Transformierte von:

$$\text{sinc}\left(\frac{tT}{2\pi}\right), \quad T \neq 0, T \in \mathbb{R}. \quad (183.1)$$

- (b) Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a) die Fourier-Transformierte von:

$$\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}. \quad (183.2)$$

- (c) Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (b) und mit dem Faltungssatz der Fourier-Transformation die Fourier-Transformierte von:

$$\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} * \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}. \quad (183.3)$$

Übung 46 (Lösungsband Seite 105)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für die Fourier-Transformation

(a) das Signal zur Fourier-Transformierten

$$X(j\omega) = 2 [\delta_0(\omega - 1) - \delta_0(\omega + 1)] + 3 [\delta_0(\omega - 2\pi) - \delta_0(\omega + 2\pi)], \quad (184.1)$$

(b) die Fourier-Transformierte zum Signal $\sin(2\pi 3(t - 2))$.

Hinweis: Machen Sie sich zu Aufgabenteil (a) eine Skizze.

Übung 47 (Lösungsband Seite 105)

Die folgenden Probleme können Sie mit Hilfe der Rechenregeln für die zeit-kontinuierliche Fourier-Transformation lösen:

(a) Bearbeiten Sie Übung 18 noch einmal, indem Sie $\delta_0(bt)$ zunächst Fourier-transformieren und dann auf geeignete Weise wieder zurück-transformieren.

(b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $\delta'_0(t)$.

Übung 48 (Lösungsband Seite 106)

Weisen Sie nach, dass das Signal

$$x(t) := \begin{cases} e^{-t} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases} \quad (184.2)$$

das Spektrum

$$X(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \quad (184.3)$$

besitzt.

Kontrollieren Sie ihr Ergebnis mit MATLAB.

Übung 49 (Lösungsband Seite 108)

Abbildung 2.33, S. 144 zeigt die Reaktion eines RC-Tiefpasses mit Zeitkonstante $T = 1$, also eines Systems mit der Übertragungsfunktion im Bildbereich

$$H(s) = \frac{1}{1 + s}, \quad (184.4)$$

auf die Erregung durch harmonische Schwingungen mit der Frequenz $f = 0.2$ Hz bzw. $f = 2.0$ Hz **im eingeschwungenen Zustand**. Die Eingangssignale haben jeweils die Amplitude $A = 1$.

Rechnen Sie nach, dass die jeweiligen Ausgangssignale die in der Abbildung 2.33, S. 144 eingetragenen Amplituden und Phasenlagen haben.

Übung 50 (Lösungsband Seite 112)

Ein RC-Tiefpass soll so ausgelegt werden, dass die Amplitude einer Sinusschwingung von 10 kHz um 15 dB gedämpft wird. Die Dämpfung bei 0 Hz soll auf 0 dB normiert sein.

- (a) Wie muss die Zeitkonstante gewählt werden, damit diese Bedingungen erfüllt sind?
- (b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Simulink, indem Sie ein entsprechendes Testsystem entwerfen.
- (c) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit MATLAB durch Anwendung der Funktion `bode`.

Übung 51 (Lösungsband Seite 114)

Betrachten Sie den Tiefpass aus Übung 50 erneut.

- (a) Welche Dämpfung erfährt eine Cosinusschwingung der Frequenz 1 kHz durch den Tiefpass?
- (b) Wie groß ist die Zeitverzögerung, die dieses Signal erfährt?
- (c) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit dem in Übung 50 erstellten Simulink-System.
- (d) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit MATLAB durch Anwendung der Funktion `bode`.
- (e) Bestimmen Sie mit der Funktion `bode` das komplette Bode-Diagramm und stellen Sie dieses grafisch dar.

Übung 52 (Lösungsband Seite 117)

Ein LTI-System $\mathfrak{S}$ reagiert auf ein Eingangssignal $x(t) = e^{j\omega t}$ mit der Antwort:

$$y(t) = \frac{e^{j\omega(t-2)}}{1 + j\omega}. \quad (185.1)$$

- (a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems im Frequenzbereich.
- (b) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems.

Übung 53 (Lösungsband Seite 118)

Betrachten Sie ein zeitkontinuierliches LTI-System mit folgendem Frequenzgang:

$$H(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega}, \quad a > 0. \quad (185.2)$$

- (a) Berechnen Sie Amplituden- und Phasengang dieses Systems. Um welchen Filtertyp handelt es sich hier? Prüfen Sie Ihr Ergebnis grafisch mit Hilfe der MATLAB-Funktion `bode`.
- (b) Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems. Prüfen Sie Ihr Ergebnis mit Simulink, indem Sie mit Hilfe eines Blocks, welcher die zugehörige Übertragungsfunktion im Bildbereich repräsentiert, und mit Hilfe des Simulink-Blocks aus der Datei `s_diracImpuls.slx` der Begleitsoftware ein entsprechendes Testsystem aufbauen.
- (c) Berechnen Sie die Antwort des Systems auf

$$x(t) = e^{-bt} \sigma(t), \quad b > 0, \quad (186.1)$$

für $b \neq a$.

Prüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe einer entsprechenden Modifikation des unter Aufgabenteil (b) entworfenen Testsystems.

Übung 54 (Lösungsband Seite 126)

Betrachten Sie ein zeitkontinuierliches LTI-System mit folgendem Frequenzgang:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(2 + j\omega)^3}. \quad (186.2)$$

- (a) Konstruieren Sie eine Realisierung des Systems als Hintereinanderschaltung dreier Systeme 1. Ordnung.
- (b) Gibt es für dieses System eine Realisierung durch Parallelschaltung dreier Systeme 1. Ordnung?

Übung 55 (Lösungsband Seite 127)



Ein akustisches Signal $x(t)$ werde in einem Raum derart reflektiert, dass an einer bestimmten Stelle im Raum (Mikrofonstandort) seine Echos zu hören sind.

Die Echolaufzeiten betragen kT für das k -te Echo (für ein vorgegebenes Zeitintervall $T > 0$). Die Echos sind gegenüber dem Signal entsprechend ihrer Laufzeit exponentiell gedämpft mit e^{-kT} . Die Wirkung des Raumes (Signal am Mikrofonstandort) kann als Reaktion eines LTI-Systems auf das Eingangssignal $x(t)$ aufgefasst werden.

- (a) Begründen Sie, warum ein LTI-System ein geeignetes Modell sein könnte.
- (b) Geben Sie die Impulsantwort dieses Systems an!
- (c) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ des Systems.

- (d) Bestimmen Sie ein Filter $E(j\omega)$, welches die Echoverzerrung wieder aufhebt.
- (e) Bestimmen Sie die Impulsantwort dieses Systems.
- (f) Entwerfen Sie ein Simulink-System, mit dem Sie Ihre Ergebnisse testen können.

Hinweis: Gehen Sie in der Modellierung von der (vereinfachenden) Annahme aus, dass das akustische Signal selbst *keine* Laufzeit zum Mikrofon benötigt (z.B. Mikrofon direkt neben der Quelle). Gehen Sie weiterhin davon aus, dass es unendlich viele Echos gibt.

Übung 56 (Lösungsband Seite 129)

Berechnen Sie mit Hilfe von MATLAB die reelle Fourier-Reihenentwicklung (der periodischen Fortsetzung) von:

$$x(t) = 1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(t-1)\right), \quad t \in [1, 3]. \quad (187.1)$$



Welche Fourier-Transformation hat dann das Signal?

Hinweis: Verwenden Sie die *Symbolic Math Toolbox* von MATLAB.

Übung 57 (Lösungsband Seite 132)

Rechnen Sie nach, dass bei einer komplexen Fourier-Reihenentwicklung einer T -periodischen Funktion $f(t)$ auch gilt:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (187.2)$$

Vergleichen Sie dazu die Aussage von (178.4)!

Hinweis: Substitution !

Übung 58 (Lösungsband Seite 134)

Ein Algorithmus zum automatischen Erkennen planer (ebener) Werkstücke, beruht auf der Klassifikation der Werkstückumrisse mittels komplexer Fourier-Reihenentwicklung.

Dabei werden die Werkstückumrisse statt in den $\mathbb{R}^2$, wie es vielleicht naheliegend wäre, in die *komplexe* Ebene eingebettet und durch geschlossene Polygonzüge, wie in Abbildung 2.40 skizziert, approximiert.

Durchläuft man nun den Polygonzug von z_0 ab unendlich oft, so ergibt sich eine *periodische komplexwertige Funktion*, deren Periodendauer (approximativ) der Länge der Werkstückkontur entspricht. Entwickelt man eine solche



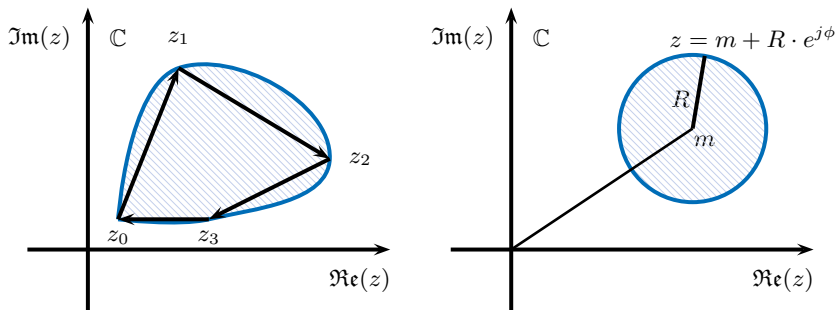


Abb. 2.40: Konturdarstellungen in der komplexen Ebene - Polygonzugapproximation (links) und Kreiskontur (rechts)

Funktion in eine komplexe Fourier-Reihe, so ergeben sich charakteristische Fourier-Koeffizienten (Vorstufe zu den so genannten **Fourier-Deskriptoren**) für diesen Umriss, die zum automatischen Erkennen der Kontur anhand von gespeicherten Vergleichsdaten herangezogen werden können.

Im Folgenden sollen Sie die Fourier-deskriptoren eines ideal kreisrunden Werkstücks bestimmen. Die Lage des Kreises im (Mess-)Koordinatensystem sei durch die zweite Skizze in Abbildung 2.40 beschrieben:

- (a) Beschreiben Sie zunächst den Kreisumfang in dieser Lage als komplexwertige Funktion des Kreiswinkels t , d.h.:

$$x(t) : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

Hinweis: Tun Sie dies zunächst im $\mathbb{R}^2$ für einen Kreis um den Nullpunkt. Verwenden Sie dann die (x, y) -Koordinaten als Real- und Imaginärteil einer entsprechenden komplexen Funktion. Berücksichtigen Sie anschließend noch den tatsächlichen Kreismittelpunkt z .

- (b) Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe der Funktion.

Hinweis: In dieser Rechnung ist es zweckmäßig, die Polardarstellung (Exponentialdarstellung) der Werte von $x(t)$ zu verwenden!

- (c) Interpretieren Sie die berechneten Fourier-Koeffizienten.

Übung 59 (Lösungsband Seite 135)

Berechnen Sie mit Hilfe direkter Berechnung die komplexe Fourier-Reihenentwicklung (der periodischen) Funktion

$$f(t) = \frac{1}{T^2}(t - kT)^2, \quad t \in [kT, (k+1)T], \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (188.1)$$

Geben Sie anschließend die reelle Darstellung des Signals an!

Überprüfen Sie Ihre Berechnung mit der *Symbolic Math Toolbox* von MATLAB und mit einer numerischen Berechnung unter MATLAB.

Übung 60 (Lösungsband Seite 139)

Berechnen Sie die Fourier-Reihenentwicklung und das Fourier-Spektrum des Ausgangssignals eines Quadrierers, wenn am Eingang das Signal $\sin(2\pi t)$ anliegt.

Überprüfen Sie Ihre Berechnung mit der *Symbolic Math Toolbox* von MATLAB und mit einer numerischen Berechnung unter MATLAB.

Übung 61 (Lösungsband Seite 142)

Betrachten Sie ein Signal $x(t)$ mit Spektrum $X(j\omega)$. Sei ferner $p(t)$ ein periodisches Signal mit Grundfrequenz ω_0 rad/s und komplexen Fourier-Koeffizienten $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.



- Wie lautet die Fourier-Transformierte von $y(t) = x(t) \cdot p(t)$?
- Berechnen Sie mit Hilfe des Resultats aus Aufgabenteil (a) das Spektrum von $y(t)$ für eine Dreiecksschwingung $p(t)$ der Periodendauer $T = \frac{1}{4}$ und der Amplitude 1 und für ein Signal $x(t)$ mit einem rein reellen Spektrum entsprechend Abbildung 2.41.

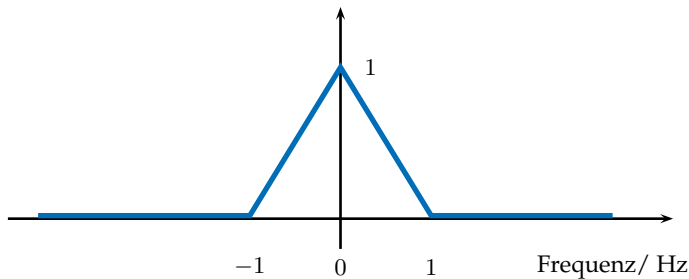


Abb. 2.41: Spektrum des Signals $x(t)$

Hinweis: Verwenden Sie ggf. eine Formelsammlung, welche Fourier-Reihenentwicklungen bekannter Standardfunktionen enthält.

2.6 Übertragungseigenschaften analoger LTI-Systeme und Filterentwurf

Zielsetzung bei der Analyse oder der Übertragung von Signalen ist es oft, bestimmte Frequenzanteile auszusondern oder hervorzuheben (zu *filtern*), sei es, dass unerwünschte Signale unterdrückt werden sollen, sei es, dass Signalleistung in einem bestimmten Frequenzbereich gemessen werden soll. In anderen Fällen wird diese Signalselektion bei der Übertragung eines Signals durch den Übertragungskanal selbst durchgeführt. Der Kanal selbst

hat dann (idealisiert) die Eigenschaften eines LTI-Systems oder kann im nichtlinearen Fall (was wohl leider die Regel sein dürfte) durch ein LTI-System angenähert werden.

Es ist jedoch nicht nur das Verhalten im Frequenzbereich von Interesse. Auch die Phasenbeziehungen eines Signalgemischs können wichtig sein, da ein ungünstiger (sprich nichtlinearer) Phasengang im Übertragungsbereich Verzerrungen im Zeitbereich hervorrufen kann. Dieser Effekt, der bei Leistungsmessungen völlig uninteressant ist, kann bei der Übertragung von Musik oder Sprache von großer Bedeutung sein.

Somit kann auch das Verhalten im Zeitbereich wichtig sein. Zum Beispiel sind eine lange Einschwingphase nach einer sprungartigen Änderung des Eingangssignals sowie große Überschwinger meist unerwünscht, etwa wenn es sich bei dem System um einen Stoßdämpfer handelt.

Beim *Entwurf solcher Übertragungssysteme (Filter)* werden diese, je nach Verwendung, nach entsprechenden Kriterien optimiert.

Im folgenden Abschnitt sollen diese Kriterien sowie wichtige *Kenngrößen von Filtern* erläutert werden. Exemplarisch soll auch das Entwurfsverfahren für eine Filterklasse vorgeführt werden, wobei allerdings auf Details der technischen Realisierung nicht eingegangen werden kann. Jedoch ist das Verständnis der Entwürfe analoger Filter insofern von Interesse, weil bei digitalen Filtern ähnliche Prinzipien gelten, die genannten technischen Implementierungsprobleme aber eine sehr untergeordnete Rolle spielen.

Die **Klassifizierung von Übertragungseigenschaften** richtet sich i.Allg. nach

(a) dem **Frequenzbereich**

(Optimierungsziele sind hier etwa ein flacher Frequenzgang oder ein linearer Phasengang)

oder

(b) dem **Zeitbereich**

(hier können eine kurze Einschwingzeit oder kleine Überschwinger Ziele der Optimierung sein).

Wir werden im Folgenden bei der exemplarischen Diskussion des *idealen Tiefpasses* sehen, dass diese Optimierungsziele prinzipiell gegenläufig sind, d. h. dass i.Allg. *nicht* alle diese *Ziele gleichzeitig* zu erreichen sind.

Zunächst wollen wir jedoch einen Überblick über die gebräuchlichen Filterklassen geben.

2.6.1 Filterklassen

Die in den Abbildungen 2.42 bis 2.45 in prinzipieller Form dargestellten Amplitudengänge (Betragsübertragungsfunktionen) definieren die Filterklassen **Allpass**, **Tiefpass**, **Bandpass** und **Hochpass**.

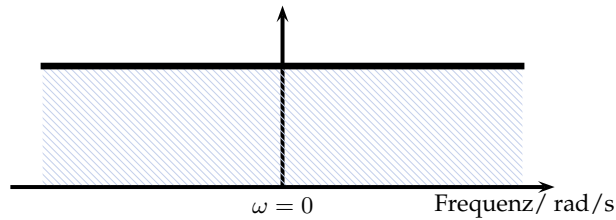


Abb. 2.42: Idealisierte Darstellung eines Allpasses

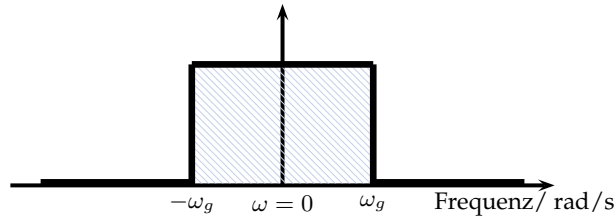


Abb. 2.43: Idealisierte Darstellung eines Tiefpasses

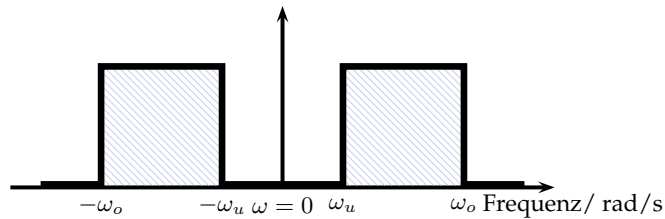


Abb. 2.44: Idealisierte Darstellung eines Bandpasses

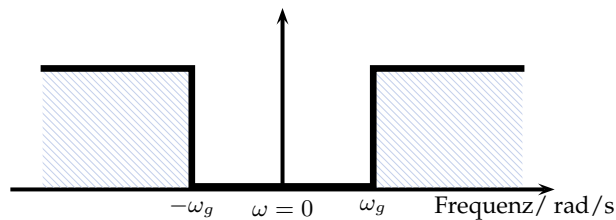


Abb. 2.45: Idealisierte Darstellung eines Hochpasses

Die Filterklassen unterscheiden sich durch den Frequenzbereich, in dem das Eingangssignal das Filter mit (prinzipiell) unveränderter Amplitude durchläuft.

Ein **Allpass** lässt die Amplituden *aller* Spektralanteile des Signals unverändert (bzw. verstärkt oder dämpft diese Anteile mit einem konstanten Faktor). Bei einem **Tiefpass** geschieht dies nur für einen Frequenzbereich $[-\omega_g, \omega_g]$ rad/s. Alle anderen Frequenzanteile verschwinden.

Ein **Bandpass** lässt nur Frequenzanteile im Bereich $[\omega_u, \omega_o]$ rad/s (und die entsprechenden Anteile bei den negativen Frequenzen) passieren. Alle anderen Frequenzanteile werden unterdrückt.

Ein **Hochpass** filtert nur hochfrequente Anteile oberhalb von ω_g rad/s heraus.

Die Filterklassen unterscheiden sich somit zunächst einmal primär durch ihr Verhalten im *Frequenzbereich*, wobei sich die Charakterisierung offenbar auf den Amplitudengang bezieht.

Der ideale Tiefpass

Es wird im Folgenden gezeigt werden, dass sich, mit Ausnahme des Allpasses, die wichtigsten Filterklassen aus dem Tiefpass konstruieren lassen. Aus diesem Grund sollen zunächst intensiv die Eigenschaften des so genannten idealen Tiefpasses (vgl. Abbildung 2.43) untersucht werden.

Das LTI-System mit der Übertragungsfunktion

$$H_{TP}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| \leq \omega_g, \\ 0 & \text{für } |\omega| > \omega_g \end{cases} \quad (192.1)$$

heißt **Idealer Tiefpass** oder auch **Küpfmüller-Tiefpass**.

Die (Kreis-)Frequenz ω_g heißt die **Grenzfrequenz** des Tiefpasses.

Ein Blick auf Abbildung 2.43 zeigt, dass die Übertragungsfunktion $H_{TP}(j\omega)$ des idealen Tiefpasses einer Rechteckfunktion im Frequenzbereich entspricht.

Genauer gilt:

$$H_{TP}(j\omega) = \text{rect}_{2\omega_g}(\omega + \omega_g). \quad (192.2)$$

Für die Fourier-Rücktransformation der Rechteckfunktion gilt gemäß (160.2)

$$\frac{\pi}{\omega_g} \text{rect}_{2\omega_g}(\omega + \omega_g) \bullet - \circ \text{sinc}\left(\frac{\omega_g}{\pi} t\right) \quad (192.3)$$

und damit:

$$\text{rect}_{2\omega_g}(\omega + \omega_g) \bullet - \circ \frac{\omega_g}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_g}{\pi} t\right). \quad (192.4)$$

Nach (172.2) ist $\frac{\omega_g}{\pi} \operatorname{sinc}(\frac{\omega_g}{\pi} t)$ gerade die **Impulsantwort** des idealen Tiefpasses.

An dieser Impulsantwort können unmittelbar zwei Dinge abgelesen werden. Zum einen ist die Impulsantwort **nicht von endlicher Dauer**, zum anderen handelt es sich offenbar **nicht** um ein kausales Signal.

Der **ideale Tiefpass** ist damit **nicht realisierbar**!

2.6.2 Filterkennwerte

Obwohl der ideale Tiefpass nicht realisierbar ist, hat er trotzdem seine Bedeutung als Referenzmodell für realisierbare Tiefpässe.

So lassen sich anhand des idealen Tiefpasses wichtige Kennwerte für Filter herleiten. Tabelle 2.4 listet die wesentlichen Kennwerte einschließlich ihrer Definitionen auf.

Leistungsverstärkung und Dämpfungsmaß sowie Grenzfrequenz sind die hauptsächlichen Entwurfskriterien für Filter im Frequenzbereich, kurze Einschwingzeit und geringes Überspringen sind im Allgemeinen Optimierungsziele im Zeitbereich.

Die **Gruppenlaufzeit** ist ein Signalverzerrungsmaß des LTI-Systems. Wir illustrieren dies zunächst am Beispiel eines Filters mit so genannter **konstanter Gruppenlaufzeit** in einem Frequenzbereich.

2.39 Beispiel (Gruppenlaufzeit)

Ist die Gruppenlaufzeit für ein Filter konstant $a > 0$ in einem Bereich $\omega \in [\omega_u, \omega_o]$, so bedeutet dies nach Definition:

$$\arg H(j\omega) = - \int a \, d\omega + \phi_0 = -a\omega + \phi_0. \quad (193.1)$$

Damit hat die Übertragungsfunktion in diesem Bereich die Form:

$$H(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{-ja\omega + j\phi_0}, \quad A(\omega) = |H(j\omega)|. \quad (193.2)$$

Schwingungsanteile $e^{j\omega t}$ mit einer Frequenz im Bereich $\omega \in [\omega_u, \omega_o]$ werden damit an den Ausgang des Systems in folgender Form übertragen:

$$A(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-ja\omega + j\phi_0} = A(\omega) \cdot e^{j\omega(t-a) + j\phi_0}. \quad (193.3)$$

Eine reelle harmonische Schwingung $\sin(\omega t)$ mit einer Frequenz im Bereich $\omega \in [\omega_u, \omega_o]$ am Eingang erzeugt somit das Ausgangssignal:

$$A(\omega) \cdot \sin(\omega(t-a) + \phi_0). \quad (193.4)$$

Alle Schwingungsanteile in diesem Bereich unterliegen daher der gleichen Signalverzögerung („Laufzeit“) a .

Tabelle 2.4: Einige Filterkennwerte und ihre Definitionen

Kennwert	Definition
Leistungsverstärkung	linear: $ H(j\omega) ^2$ in dB: $10 \cdot \log_{10}(H(j\omega) ^2) = 20 \cdot \log_{10}(H(j\omega))$
Dämpfungsmaß	$a(\omega) = -20 \cdot \log_{10}(H(j\omega))$ dB
Gruppenlaufzeit	$t_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg(H(j\omega))$
Grenzfrequenz	idealer Tiefpass: $\omega_g = 0$ – 1-Übergangsfrequenz nicht-idealer Tiefpass: $\omega_g = 3$ dB-Grenzfrequenz ($20 \cdot \log_{10}(H(j\omega_g)) = -3$)
Bandbreite	$2 \cdot \omega_g$
Dauer der Impulsantwort $h(t)$	$t_m = \frac{1}{h(t)_{max}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$ (auch wenn Impulsantwort prinzipiell ∞ lang)
Einschwingzeit	$t_e = \frac{y_\sigma(\infty)}{\max \frac{d}{dt} y_\sigma(t)}$, $y_\sigma(t)$ die Sprungantwort nicht-ideal: Zeit zwischen 10% und 90% von $y_\sigma(\infty)$
Überschwingen	$u_e = \frac{\max y_\sigma(t) - y_\sigma(\infty)}{y_\sigma(\infty)}$
Verzögerungszeit	ideal: Differenz Anstiegszeitpunkte von $\sigma(t)$ und $y_\sigma(t)$ nicht-ideal: $y_\sigma(t)$ hat 10% von $y_\sigma(\infty)$

Im Falle des idealen Tiefpasses beispielsweise gilt:

$$t_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg(H(j\omega)) = -\frac{d}{d\omega} \cdot 0 = 0. \quad (194.1)$$

Der ideale Tiefpass hat also die konstante Gruppenlaufzeit 0. Alle Eingangssignale im Durchlassbereich erscheinen sofort und völlig unverzerrt am Ausgang. ■

Die Gruppenlaufzeit gibt offenbar wieder, inwieweit die einzelnen Spektralanteile des Eingangssignals beim Durchlaufen des Filters zeitlich auseinander driften. Für Audioanwendungen beispielsweise bevorzugt man die zitierten Systeme mit *konstanter Gruppenlaufzeit*, denn dies bedeutet, dass

alle Spektralanteile der gleichen Zeitverzögerung unterliegen. Andernfalls sind die entstehenden Signalverzerrungen durch die unterschiedlichen Laufzeiten unter Umständen hörbar.

Die **Dauer der Impulsantwort** ist auch ein Maß für die Einschwingdauer des Filters. Da die Wirkung des Filters bekanntlich durch die Faltung mit der Impulsantwort beschrieben wird (vgl. (79.3)), sagt diese Kenngröße auch etwas über die Größe des „Gedächtnisses“ des Filters aus, das heißt, wie lange alte Eingangssignalwerte bei der Bestimmung des Ausgangssignals noch berücksichtigt werden.

Die Kenngröße **Dauer der Impulsantwort** ist eng mit der **Bandbreite des Filters** verknüpft. Im Falle des *idealen Tiefpasses* etwa erhält man:

$$\begin{aligned} t_m &= \frac{1}{h(t)_{\max}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \frac{1}{\omega_g/\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j \cdot 0 \cdot t} dt \quad (\text{ein kleiner Trick!}) \\ &= \frac{\pi}{\omega_g} \mathfrak{F}(h)(0) = \frac{\pi}{\omega_g} H_{TP}(0) = \frac{\pi}{\omega_g}. \end{aligned} \quad (195.1)$$

Man erhält nun die Beziehung:

$$t_m \cdot \omega_g = \pi = \text{konstant} \quad \forall \omega_g. \quad (195.2)$$

Das Produkt $t_m \cdot \omega_g$ aus Dauer der Impulsantwort und Bandbreite heißt das **Zeit-Bandbreite-Produkt** (eines Filters).

Offenbar ist dieses Zeit-Bandbreite-Produkt im Falle des Küpfmüller-Tiefpasses konstant, gleich welche Grenzfrequenz man auch wählt. Dies bedeutet, dass eine Verringerung der Grenzfrequenz eine längere Einschwingdauer zur Folge hat und dass umgekehrt die Forderung nach einer kurzen Einschwingzeit in einer erhöhten Bandbreite resultiert. Dieses Phänomen ist nicht nur beim idealen Tiefpass, sondern *immer* zu beobachten. Ohne speziellen Nachweis zitieren wir als allgemeinen Satz:

Bandbreite und Impulsdauer (resp. Einschwingzeit) können *nie zugleich* minimiert werden!

Dieses Prinzip wird als **Unschärfeprinzip der Nachrichtentechnik** bezeichnet.

Als Folge dieses allgemeinen Prinzips müssen beim Filterentwurf immer Kompromisse zwischen den gegenläufigen Anforderungen im Zeit- und Frequenzbereich gemacht werden.

2.6.3 Entwurf realisierbarer Tiefpässe

Die Tatsache, dass der ideale Tiefpass nicht realisierbar ist, kann an der Impulsantwort unmittelbar abgelesen werden. Sie hat unendlich viele nicht verschwindende Werte auf der negativen Zeitachse. Dies bedeutet, dass das Filter *nicht kausal* ist⁵⁷ und auch durch eine endliche Verschiebung des Zeitbezugs nicht kausal gemacht werden kann.

Ausgehend von dieser Beobachtung könnte der erste Ansatz für den Entwurf eines *realisierbaren* Tiefpasses *aus dem idealen Tiefpass* heraus darin bestehen, die Realisierbarkeit durch *Abschneiden* und zeitliches *Verschieben* der Impulsantwort dieses Tiefpasses zu erzwingen.

Abbildung 2.46 illustriert diesen Vorgang am Beispiel eines idealen Tiefpasses mit Grenzfrequenz $\omega_g = 2\pi$.

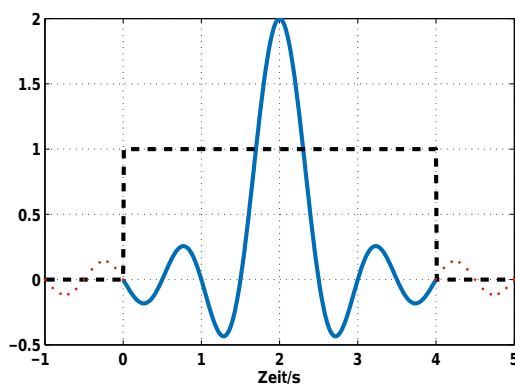


Abb. 2.46: Entwurf realisierbarer Tiefpässe - Ansatz Abschneiden und Verschieben der Impulsantwort

Das Abschneiden der Impulsantwort wird durch Multiplikation mit einer geeigneten Rechteckfunktion (Zeitfenster) bewirkt. Anschließend erfolgt die Zeitverschiebung (zu Zeiten $t \geq 0$ hin), um ein kausales Filter zu erhalten.

Mathematisch lässt sich dies im Beispiel von Abbildung 2.46 durch folgende Gleichung beschreiben (s. (80.5)):

$$h_{\text{real}}(t) := \left[\text{rect}_4(t+2) \cdot \frac{\omega_g}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_g}{\pi} t\right) \right] * \delta_0(t-2). \quad (196.1)$$

Die Fourier-Transformation dieser Gleichung ergibt für die Übertragungsfunktion $H_{\text{real}}(j\omega)$ des konstruierten Filters mit Impulsantwort $h_{\text{real}}(t)$ nach Multiplikations- und Faltungssatz:

⁵⁷ Die Darstellung (67.1) zeigt, dass zu jedem Zeitpunkt t unendlich viele *zukünftige* Werte des Eingangssignals notwendig wären, um das Ausgangssignal $y(t)$ zu bestimmen!

$$H_{\text{real}}(j\omega) = \left[\frac{2}{\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{2}{\pi} \omega \right) * \operatorname{rect}_{2\omega_g}(\omega + \omega_g) \right] \cdot e^{-j2\omega}. \quad (197.1)$$

Abbildung 2.47 zeigt den Amplitudengang des konstruierten Filters mit den für realisierbare Tiefpässe typischen Welligkeiten im Durchlass- und Sperrbereich.

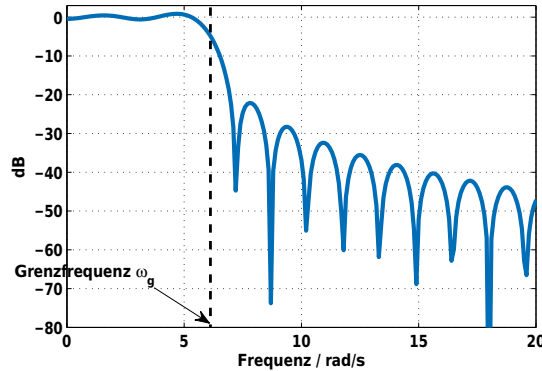


Abb. 2.47: Betrag der Übertragungsfunktion (Amplitudengang) des resultierenden Tiefpassfilters zur Impulsantwort gemäß Abbildung 2.46

Leider ist das konstruierte Filter bei näherer Betrachtung aber doch nicht so realisierbar, wie es auf den ersten Blick scheint. Das Problem ist, dass die gewonnene Übertragungsfunktion $H_{\text{real}}(j\omega)$ **nicht rational** ist. Damit wird das System im Zeitbereich nicht durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben, denn die Übertragungsfunktionen im Bild- und Frequenzbereich solcher Systeme sind stets **rationale** Funktionen (vgl. Abschnitt 2.4.3)!

Aus diesem Grund könnte der konstruierte Tiefpass auch beispielsweise nicht als passive LRC- oder aktive RC-Schaltung realisiert werden, da solche Systeme bekanntlich durch diese Art von Differentialgleichung beschrieben werden.

Ganz nutzlos war die obige Überlegung jedoch nicht. In Kapitel 4 wird gezeigt werden, dass gerade dieser Ansatz zu einer einfachen Realisierung **digitaler Tiefpässe** führt.

Das negative Ergebnis des ersten Ansatzes legt jedoch folgenden **Alternativansatz** nahe: **approximiere** $H_{TP}(j\omega)$ **durch** eine geeignete **rationale** Übertragungsfunktion!

Wir werden im Folgenden sehen, dass dieser Ansatz wesentlich erfolgreicher ist. Er führt auf die **klassischen Filterentwürfe**.

Die für diesen Ansatz gewählten **Optimierungsziele** sind Bedingungen an die zu entwerfende rationale Übertragungsfunktion im Frequenzbereich.

Abbildung 2.48 skizziert das so genannte **Toleranzschema** für ein Tiefpassfilter.

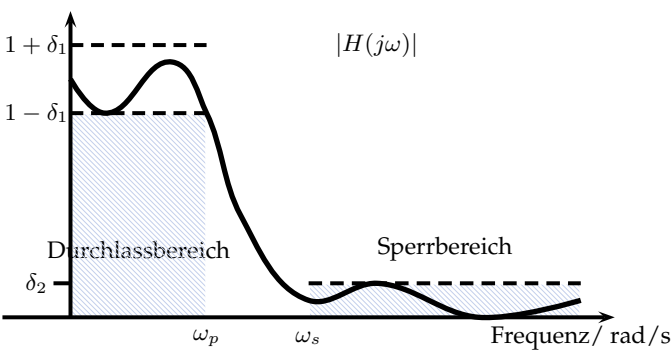


Abb. 2.48: Toleranzschema für den Tiefpassfilterentwurf

Dabei wird die zu entwerfende Filter-Übertragungsfunktion in gewissen Frequenzbereichen mit Hilfe von **Toleranzparametern** vorgegeben. Tabelle 2.5 erläutert die Parameter⁵⁸.

Tabelle 2.5: Entwurfsparameter für den Tiefpassfilterentwurf

Kennwert	Definition
δ_1	Toleranz im Durchlassbereich
δ_2	Toleranz im Sperrbereich
ω_p	Durchlassbandgrenze (passband)
ω_s	Sperrbandgrenze (stopband)

Man beachte, dass die Toleranzparameter auf die Absolutwerte des Betrages der Übertragungsfunktion $|H(j\omega)|$ bezogen sind, also nicht auf die Werte in dB.

Das Entwurfsziel ist nun, für eine geeignet gewählte rationale Übertragungscharakteristik ein vorgegebenes Toleranzschema zu erfüllen. Im Folgenden soll dies exemplarisch am Entwurf eines so genannten **Butterworth-Filters** durchgeführt werden.

⁵⁸ Wir verwenden im Folgenden die Terminologie ω_p für die Filtergrenzfrequenz. Meist wird als Grenzfrequenz die 3 dB-Grenze gewählt, sodass dann ω_p der Frequenz ω_g aus Tabelle 2.4 entspricht.

2.6.4 Entwurf von Butterworth-Tiefpassfiltern

Die Konstruktion eines Butterworth-Tiefpasses beruht auf der Idee, ein Filter zu entwerfen, welches einen Amplitudengang entsprechend

$$|H(j\omega)| \sim \frac{1}{|\omega|^N}, \quad N \in \mathbb{N} \quad (199.1)$$

hat. Ein solches Filter heißt ein **Potenzfilter**, da der Amplitudengang entsprechend einer Potenz der Kreisfrequenz ω abfällt.

Offenbar hat ein Potenzfilter der Form (199.1) Tiefpasscharakter, denn es gilt:

$$\omega \approx \infty \implies |H(j\omega)| \approx 0. \quad (199.2)$$

Allerdings sind noch nicht alle Anforderungen, die sich aus dem Toleranzschema nach Abbildung 2.5 ergeben, erfüllt, denn der Durchlassbereich hat noch nicht die gewünschte Form.

Aus diesem Grunde wird der Potenzfilteransatz in die gewünschte Richtung wie folgt leicht modifiziert:

Das nach dem Ansatz

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (199.3)$$

entworfenen Tiefpassfilter heißt **Butterworth-Tiefpassfilter der Ordnung N** .

Bei näherer Betrachtung der Übertragungscharakteristik (199.3) können wir nun Folgendes feststellen:

$$\begin{aligned} \omega \approx 0 &\implies |H(j\omega)|^2 \approx 1, \\ \omega = \omega_p &\implies |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2}, \\ \omega \approx \infty &\implies |H(j\omega)|^2 \approx 0. \end{aligned} \quad (199.4)$$

Ein so entworfenes Filter hat also eine **Tiefpass**charakteristik entsprechend den Anforderungen des Toleranzschemas.

Für die Frequenz ω_p ist gemäß Toleranzschema anzusetzen:

$$|H(j\omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2} = (1 - \delta_1)^2. \quad (199.5)$$

Ferner bewirkt die Filterordnung N , wie stark die Charakteristik für große ω abfällt. Somit folgert man:

$$\begin{aligned} \epsilon & \text{ bestimmt den Parameter } \delta_1, \\ N & \text{ bestimmt den Parameter } \delta_2. \end{aligned} \quad (200.1)$$

Zur Vereinfachung betrachten wir im Folgenden den (Standard-)Entwurf mit der 3 dB-Grenze $\omega_p = \omega_g$ als Durchlassgrenzfrequenz.

In diesem Fall erhalten wir nämlich:

$$\begin{aligned} |H(j\omega_p)|^2 &= \frac{1}{1 + \epsilon^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad \epsilon &= 1. \end{aligned} \quad (200.2)$$

Somit kann der Parameter ϵ in der nachfolgenden Berechnung eliminiert werden.

Für die Sperrgrenzfrequenz folgt:

$$\begin{aligned} |H(j\omega_s)|^2 &\stackrel{!}{=} \delta_2^2 \stackrel{\epsilon=1}{=} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^{2N}} \\ \Leftrightarrow \quad 1 + \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^{2N} &= \frac{1}{\delta_2^2} \\ \Leftrightarrow \quad 2N \cdot \log_{10} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right) &= \log_{10} \left(\frac{1}{\delta_2^2} - 1\right) \\ \Leftrightarrow \quad N &= \frac{\frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{1}{\delta_2^2} - 1\right)}{\log_{10} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)}. \end{aligned} \quad (200.3)$$

Da die Ordnung *ganzzahlig* sein muss, ist diese also zur Erfüllung der Sperrtoleranzbedingung als kleinste ganze Zahl N zu wählen, für die gilt:

$$N \geq \frac{\frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{1}{\delta_2^2} - 1\right)}{\log_{10} \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)}. \quad (200.4)$$

Das folgende Beispiel zeigt, wie mit diesen Vorüberlegungen ein Butterworth-Tiefpassfilter entworfen werden kann.

2.40 Beispiel (Entwurf eines Butterworth-Tiefpassfilters)

Vorgegeben sei folgendes Toleranzschema:

$$\begin{aligned} \omega_p &= 2\pi f_p, & f_p &= 1 \text{ kHz}, \\ \omega_s &= 2\pi f_s, & f_s &= 2 \text{ kHz}, \\ \delta_1 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{d.h. } \omega_p &= \omega_g, \quad \epsilon = 1, \end{aligned} \quad (200.5)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{10}, \quad \text{d.h. 20 dB Dämpfung.}$$

Mit diesen Parametern liefert die Bestimmungsgleichung (200.4) für die Ordnung N :

$$\begin{aligned} N &\geq \frac{\frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{1}{1/100} - 1 \right)}{\log_{10} \left(\frac{2\pi 2000}{2\pi 1000} \right)} = \frac{\frac{1}{2} \log_{10}(99)}{\log_{10}(2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 1.9956352}{0.30103} = 3.314678. \end{aligned} \quad (201.1)$$

Es ist also ein Filter der Ordnung $N = 4$ zu entwerfen!

Das Problem ist, dass dem Entwurf lediglich das Quadrat des Betrags der Übertragungsfunktion zu Grunde liegt und nicht die Übertragungsfunktion selbst.

Es gibt zwei Möglichkeiten, dieses Problem zu lösen.

Wegen

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H(j\omega)^* \quad (201.2)$$

könnte man mit dem auf der Linearfaktorzerlegung der zugehörigen Übertragungsfunktion $H(s)$ im Bildbereich beruhenden Ansatz

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + \alpha_1 \frac{j\omega}{\omega_p}\right) \left(1 + \alpha_2 \frac{j\omega}{\omega_p}\right) \dots \left(1 + \alpha_N \frac{j\omega}{\omega_p}\right)} \quad (201.3)$$

über einen Koeffizientenvergleich die Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ ermitteln.

In einem direkteren Verfahren bestimmt man gleich die Pole von:

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{-s^2}{\omega_p^2} \right)^N}. \quad (201.4)$$

Man beachte, dass Gleichung (201.4) durch Einsetzen von $s = j\omega$ zu

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{-(j\omega)^2}{\omega_p^2} \right)^N} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2N}} \quad (201.5)$$

wird und so den gewünschten Zusammenhang zum Butterworth-Filter Ansatz aus Gleichung (199.3) liefert. Es wird dabei natürlich vorausgesetzt, dass ein **stabiles Filter** zu entwerfen ist, sodass das Einsetzen von $s = j\omega$ in (201.4) gerechtfertigt ist.

Die Polstellen in Gleichung (201.4) sind die Werte $s \in \mathbb{C}$ mit⁵⁹:

$$\begin{aligned}
 1 + \epsilon^2 \left(\frac{-s^2}{\omega_p^2} \right)^N &= 0 \\
 \iff \left(\frac{-js}{\omega_p} \right)^{2N} &= (-1)\epsilon^{-2} \\
 \iff \frac{-js}{\omega_p} &= (-1)^{\frac{1}{2N}} \epsilon^{-\frac{1}{N}} \\
 \iff -js &= (-1)^{\frac{1}{2N}} \epsilon^{-\frac{1}{N}} \omega_p \\
 \iff s &= j(-1)^{\frac{1}{2N}} \epsilon^{-\frac{1}{N}} \omega_p.
 \end{aligned} \tag{202.1}$$

Für die $2N$ -ten komplexen Wurzeln von -1 gilt bekanntlich:

$$\begin{aligned}
 (-1)^{\frac{1}{2N}} &= \sqrt[2N]{-1} = e^{j\frac{\arg(-1)}{2N}} e^{j2\pi\frac{n}{2N}} \\
 &= e^{j\frac{\pi}{2N}} e^{j2\pi\frac{n}{2N}} = e^{j\frac{\pi}{2N}} e^{j\pi\frac{2n}{2N}} = e^{j\pi\frac{2n+1}{2N}} \quad \forall n = 0, \dots, 2N-1.
 \end{aligned} \tag{202.2}$$

Somit gilt für die Polstellen s_n der rationalen Funktion (201.4):

$$\begin{aligned}
 s_n &= j e^{j\pi\frac{2n+1}{2N}} \epsilon^{-\frac{1}{N}} \omega_p = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\pi\frac{2n+1}{2N}} \epsilon^{-\frac{1}{N}} \omega_p \\
 &= e^{j\pi\frac{N+2n+1}{2N}} \epsilon^{-\frac{1}{N}} \omega_p \quad \forall n = 0, \dots, 2N-1 \\
 &= e^{j\pi\frac{2n+N-1}{2N}} \epsilon^{-\frac{1}{N}} \omega_p \quad \forall n = 1, \dots, 2N.
 \end{aligned} \tag{202.3}$$

Die Pole s_n mit $n = 1, \dots, N$ liegen alle in der linken Halbebene der komplexen Ebene, da alle Winkel im Exponenten der e -Funktion in diesem Fall zwischen $\pi/2$ und $3\pi/2$ liegen.

Mit Hilfe dieser Pole lässt sich ein **stabiles Filter** entwerfen. Die entsprechende Übertragungsfunktion im Bildbereich lautet:

$$H(s) = \frac{(-1)^N s_1 \cdot s_2 \cdots s_N}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_N)}. \tag{202.4}$$

Mit den Parametern des Beispiels erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \omega_p e^{j\pi\frac{5}{8}}, s_2 = \omega_p e^{j\pi\frac{7}{8}} \\
 s_3 &= \omega_p e^{j\pi\frac{9}{8}}, s_4 = \omega_p e^{j\pi\frac{11}{8}}.
 \end{aligned} \tag{202.5}$$

Abbildung 2.49 zeigt die Lage der Pole von $|H(s)|^2$ in der komplexen Ebene. Die Polstellen $s_1, \dots, s_4$, die zu Konstruktion des Filters herangezogen werden, liegen alle, wie gewünscht, in der linken Halbebene.

⁵⁹ Der Leser wird vielleicht verwundert sein, warum die Identität $(-js)^{2N} = ((-j)^2 s^2)^N = (-s^2)^N$ statt $(js)^{2N} = (j^2 s^2)^N = (-s^2)^N$ verwendet wird. Beide Ersetzungen sind natürlich zulässig! Die hier verwendete Ersetzung führt lediglich dazu, dass die ersten N Pole s_n in Gleichung (202.3) alle in der *linken Halbebene* von $\mathbb{C}$ liegen. Damit können die ersten n Pole für den **stabilen** Filterentwurf verwendet werden. Andernfalls müssten die letzten N Pole verwendet werden und es wäre aus Gründen der besseren Lesbarkeit der Notation eine nachträgliche Umnummerierung der Pole erforderlich.

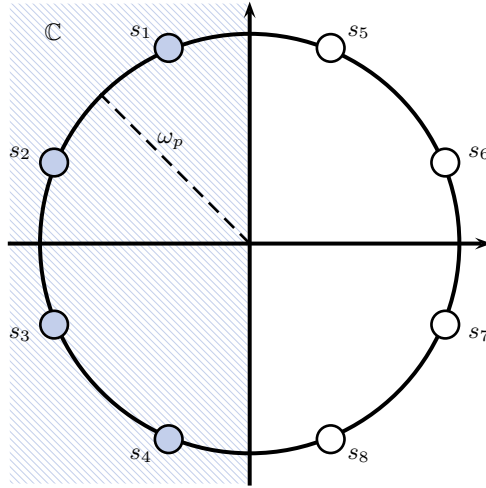


Abb. 2.49: Pole von $|H(s)|^2$ für das Beispielfilter

Mit Gleichung (202.4) folgt:

$$H(s) = \frac{\omega_p^4 e^{j4\pi}}{(s - \omega_p e^{j\pi\frac{5}{8}})(s - \omega_p e^{j\pi\frac{7}{8}})(s - \omega_p e^{j\pi\frac{9}{8}})(s - \omega_p e^{j\pi\frac{11}{8}})}. \quad (203.1)$$

Durch Ausmultiplizieren des ersten und letzten sowie der beiden mittleren Terme des Nenners erhält man unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} e^{j\pi\frac{5}{8}} + e^{j\pi\frac{11}{8}} &= e^{j\pi\frac{5}{8}} + e^{j\pi\frac{-5}{8}} = 2 \cos\left(\pi\frac{5}{8}\right), \\ e^{j\pi\frac{7}{8}} + e^{j\pi\frac{9}{8}} &= e^{j\pi\frac{7}{8}} + e^{j\pi\frac{-7}{8}} = 2 \cos\left(\pi\frac{7}{8}\right), \end{aligned} \quad (203.2)$$

die folgende Formel für die Übertragungsfunktion im Bildbereich:

$$H(s) = \frac{\omega_p^4}{(s^2 - 2s \cos(\pi\frac{5}{8})\omega_p + \omega_p^2)(s^2 - 2s \cos(\pi\frac{7}{8})\omega_p + \omega_p^2)}. \quad (203.3)$$

Teilt man Zähler und Nenner durch ω_p^4 so liefert dies die vereinfachte Form:

$$H(s) = \frac{1}{\left(\left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2 - 2 \cos(\pi\frac{5}{8})\frac{s}{\omega_p} + 1\right)\left(\left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2 - 2 \cos(\pi\frac{7}{8})\frac{s}{\omega_p} + 1\right)}. \quad (203.4)$$

Das Butterworth-Filter kann also durch zwei hintereinandergeschaltete Teilfilter 2. Ordnung realisiert werden. Abbildung 2.50 zeigt die Amplitudenübertragungscharakteristik ($|H(f)|$, f Hz) des entworfenen Filters. ■

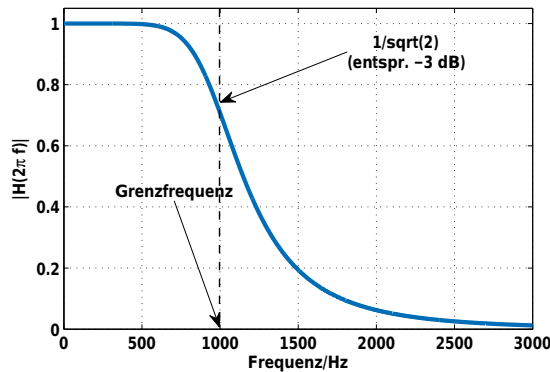


Abb. 2.50: Entworfenenes Butterworth-Beispielfilter

Da alle Entwürfe auf eine solche Form hinauslaufen, bei der Teilfilter 1. oder 2. Ordnung hintereinandergeschaltet werden, lassen sich diese Filter in der in Gleichung (203.4) dargestellten normierten Weise *tabellieren*. Dabei werden Teilfilter der Form

$$H_k(s) = \frac{1}{\left(b_k \cdot \left(\frac{s}{\omega_p} \right)^2 + a_k \cdot \frac{s}{\omega_p} + 1 \right)} \quad (204.1)$$

verwendet und die Koeffizienten

$$a_k, b_k, \quad k = 1, \dots, N$$

für ein Filter der Ordnung N tabelliert (vgl. Tabelle C.2[49] in Anhang C). Der Vorteil dieser Darstellungsweise ist die Unabhängigkeit von der Grenzfrequenz. Zu beachten ist allerdings, dass man sich bei diesen Tabellen auf die 3 dB-Grenzfrequenz im Durchlassbereich festlegt. Für andere Toleranzen können diese somit nicht verwendet werden.

Auf andere klassische Filtertypen soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Die Abbildung 2.51 (vgl. MATLAB-Programm **klassT-Filter.m** der Begleitsoftware) skizziert die Übertragungsfunktionen der anderen wichtigen klassischen Filtertypen **Tschebyscheff-Filter 1. Art**, **Tschebyscheff-Filter 2. Art**, **Cauer**- oder auch **elliptische Filter** und **Bessel-Filter**. Dabei wurden die gleichen Entwurfsparameter wie in Beispiel 2.40 verwendet.

Die Idee für die Konstruktion solcher (Tiefpass-)Filter folgt in Grundzügen der des Butterworth-Tiefpasses. Beispielsweise geht man beim Tschebyscheff-Filter 1. Art von einem Ansatz entsprechend (199.3) aus. Man entwirft ein Filter, dessen Amplitudengang der Bedingung

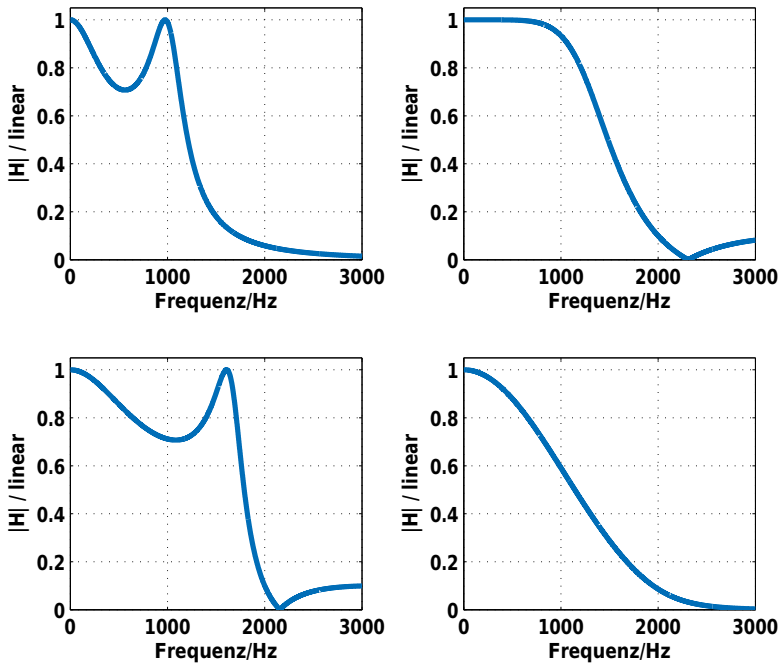


Abb. 2.51: Toleranzschemata für Tschebyscheff-Filter 1. und 2. Art (oben),
Cauer-Filter und Bessel-Filter (unten)

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cdot p_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}, \quad N \in \mathbb{N} \quad (205.1)$$

genügen soll. Dabei ist $p_N(x)$ ein so genanntes **Tschebyscheff-Polynom** n -ten Grades, welches sich aus der Rekursion

$$p_0(x) = 1, \quad p_{N+1}(x) = 2x \cdot p_N(x) - p_{N-1}(x), \quad N \in \mathbb{N} \quad (205.2)$$

ergibt. Diese Polynome haben die Eigenschaft, im Intervall $[0, 1]$ Werte zwischen 0 und 1 anzunehmen und dann sehr rasch anzusteigen. Der Ansatz (205.1) hat dann die gewünschten Eigenschaften, da der Nenner

$$1 + \epsilon^2 \cdot p_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)$$

im Durchlassbereich Werte zwischen 1 und $1 + \epsilon^2$ hat und dann für $\omega > \omega_p$ sehr rasch sehr groß wird.

Abbildung 2.52 zeigt die resultierende Filtercharakteristik für $N = 4$ und $\epsilon^2 = 0.1$.

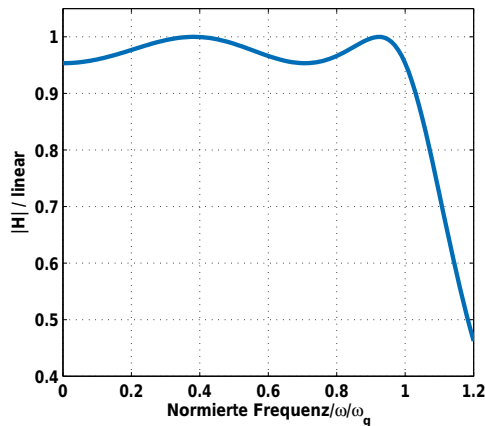


Abb. 2.52: Filtercharakteristik eines Tschebyscheff-Filters 1. Art für die Ordnung $N = 4$ und $\epsilon^2 = 0.1$.

Für elliptische Filter werden statt der Tschebyscheff-Polynome so genannte *Jacobische elliptische Funktionen* verwendet, für Bessel-Filter normalisierte *Bessel-Polynome*. Auf die Details soll aber an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Der interessierte Leser sei auf die entsprechende Spezialliteratur verwiesen.

Entwurf von Hoch- und Bandpässen

Es wurde bereits eingangs erwähnt, dass es im Prinzip genügt, *Tiefpassfilter* zu entwerfen, da die anderen Filtertypen daraus abgeleitet werden können. Man bewerkstelligt dies mit entsprechenden Transformationen der Übertragungsfunktion.

Der Ansatz beruht auf einer direkten Transformation, die *rational* Funktionen in *rational* Funktionen überführt und damit entsprechende rationale Übertragungscharakteristiken erzeugt.

Im Falle der Konstruktion eines Bandpass kann dies etwa dadurch geschehen, dass man in der *rationalen* Übertragungsfunktion $H(s)$ eines Tiefpasses die folgende Substitution durchführt:

$$s \longleftarrow \frac{s^2 + \omega_o \omega_u}{s}. \quad (206.1)$$

Dabei bezeichnet ω_o die obere und ω_u die untere Grenzfrequenz des gesuchten Bandpasses und man wählt beide Parameter so, dass für die Tiefpassgrenzfrequenz $\omega_p = \omega_o - \omega_u$ gilt.

Man überzeugt sich leicht, dass die resultierende Übertragungsfunktion wieder rational ist.

Ein Hochpass kann durch die Substitution

$$s \leftarrow \frac{1}{s} \quad (207.1)$$

aus der Übertragungsfunktion eines Tiefpasses abgeleitet werden.

Wir müssen auch hier aus Platzgründen auf eine detaillierte Diskussion der Thematik verzichten und verweisen für eine Vertiefung auf Übung 67.

Übung 67

Stattdessen soll im nächsten Abschnitt auf die für die praktische Anwendung relevantere Frage eingegangen werden, wie Filterentwürfe mit MATLAB durchgeführt werden können.

2.6.5 Filterentwurf mit MATLAB

Für den praktischen Filterentwurf wurden in früheren Zeiten Koeffiziententabellen wie die des Butterworth-Tiefpassfilters aus Anhang C verwendet, mit denen, ausgehend von normierten Entwürfen und mit Hilfe von Transformationstechniken, beliebige Filter entworfen werden konnten.

Mit der Entwicklung leistungsfähiger Programmpakete wie MATLAB ist diese Vorgehensweise mittlerweile überholt.

MATLAB bietet für den Entwurf analoger und digitaler Filter entsprechende Funktionen an. Für den Entwurf digitaler Filter steht darüber hinaus eine komfortable grafische Benutzerschnittstelle (GUI) zur Verfügung⁶⁰.

Natürlich ist die Anzahl dieser komplexen numerischen Hilfsmittel zu umfangreich, um an dieser Stelle ausführlich diskutiert werden zu können. Daher soll zur Illustration der Möglichkeiten, die diese Funktionen bieten, hier nur der exemplarische Butterworth-Filterentwurf aus Beispiel 2.40 mit Hilfe geeigneter MATLAB-Funktionen nachvollzogen werden.

Auf der Funktionsebene stellt MATLAB folgende Programme für den Entwurf analoger Filter zur Verfügung:

```
>> help tocanalogfilters
Analog filter design , transformation , and discretization

Analog lowpass filter prototypes
besselap  – Bessel filter prototype
buttap    – Butterworth filter prototype
cheb1ap   – Chebyshev Type I filter prototype
            (passband ripple)
cheb2ap   – Chebyshev Type II filter prototype
            (stopband ripple)
ellipap   – Elliptic filter prototype
```

⁶⁰ s. Kapitel 4

```

Analog filter design
  besself    – Bessel analog filter design
  butter      – Butterworth filter design
  cheby1      – Chebyshev Type I filter design
  cheby2      – Chebyshev Type II filter design
  ellip       – Elliptic filter design

Filter analysis
  abs         – Magnitude
  angle       – Phase angle
  freqs       – Laplace transform frequency response
  freqspace   – Frequency spacing for frequency response

Analog filter transformation
  lp2bp       – Lowpass to bandpass analog filter transform.
  lp2bs       – Lowpass to bandstop analog filter transform.
  lp2hp       – Lowpass to highpass analog filter transform.
  lp2lp       – Lowpass to lowpass analog filter transform.

```

Wichtig sind hierbei die Analog filter design-Funktionen für den Entwurf und die Filter analysis-Funktionen für die Darstellung der Ergebnisse.

Mit Hilfe der folgenden Anweisungen (vgl. Script-File **BWTPFilter.m**) werden zunächst die Parameter der Funktion **butter** für den Entwurf des Tiefpasses aus Beispiel 2.40 vorbereitet und die Filterordnung festgestellt:

```

>> % Filterparameter nach Entwurfsschema festlegen

>> fp = 1000;           % Passband-Frequenz in HZ
>> fs = 2000;           % Stoppband-Frequenz in Hz

>> wp = fp*2*pi;
>> ws = fs*2*pi;        % Umrechnung in rad/s

>> delta1 = 1-1/sqrt(2); % Passband-Rippel (linear)
>> delta2 = 1/10;       % Stoppband-Rippel (linear)

>> Rp = abs(20*log10(1-delta1));
>> Rs = abs(20*log10(delta2)); % Umrechnung in dB

>> % Frequenzbereich zur Darstellung in Hz und rad/s

>> frq = (0:1:3000);
>> omegs = frq*2*pi;

>> % Berechnung des Butterworth-Filters

```

```
>> % Feststellen der Filterordnung mit buttord
>> % (Parameter 's', damit analoges Design verwenden-
>> % det wird!)
>> [N, wp] = buttord(wp, ws, Rp, Rs, 's')

N =

    4

wp =

7.0755e+03
```

Danach werden die Filterkoeffizienten eines Standard-Butterworth-Tiefpassfilters mit der Grenzfrequenz $\omega_p = 1$ berechnet:

```
>> % Filterkoeffizienten von H(s) = B(s)/A(s)
>> % für einen Tiefpass mit Grenzfrequenz 1 rad/s
>> % damit man mit den tabellierten Filter-
>> % koeffizienten vergleichen kann
>> [BBn, ABn] = butter(N,1,'s')

BBn =

    0    0    0    0    1.0000

ABn =

1.0000    2.6131    3.4142    2.6131    1.0000
```

Multipliziert man den Nenner aus Gleichung (203.4) aus, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 & 1 \cdot \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^4 - \left(2 \cos\left(\pi \frac{5}{8}\right) + 2 \cos\left(\pi \frac{7}{8}\right)\right) \cdot \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^3 \\
 & + \left(2 + 4 \cos\left(\pi \frac{5}{8}\right) \cos\left(\pi \frac{7}{8}\right)\right) \cdot \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2 \\
 & - \left(2 \cos\left(\pi \frac{5}{8}\right) + 2 \cos\left(\pi \frac{7}{8}\right)\right) \cdot \left(\frac{s}{\omega_p}\right) + 1.
 \end{aligned} \tag{209.1}$$

Wegen

```
>> -(2*cos(pi*5/8) + 2*cos(pi*7/8))

ans =
```



```
2.6131
```

und

```
>> 2+4*cos(pi*5/8)*cos(pi*7/8)

ans =

    3.4142
```

sind die Werte des Vektors **ABn** offenbar die theoretisch erhaltenen und in Anhang C tabellierten Koeffizienten des normierten Filters.

Das eigentliche Filter erhält man mit einer nachgeschalteten Tiefpass-Tiefpass-Transformation:

```
>> % Transformation in die eigentlichen
>> % Filterkoeffizienten mit einer
>> % Tiefpass-Tiefpass-Transformation
>> [BB,AB] = lp2lp(BBn,ABn,wp)

BB =

    2.5062e+15

AB =

    1.0e+15 *

    0.0000    0.0000    0.0000    0.0009    2.5062
```

Die folgenden Anweisungen berechnen die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich (Funktion `freqs`) und erzeugen die grafische Darstellung aus Abbildung 2.50:

```
% Berechnung der Übertragungsfunktion H(j\omega)

>> HB = freqs(BB,AB,omegs);

% Grafische Darstellung des Amplitudengangs

>> figure
>> plot(freq, abs(HB), 'b', 'LineWidth',3)
>> axis([0,3000,0,1.05])
```

```
>> xlabel('Frequenz / Hz')
>> ylabel('|H| / linear')
>> grid
>> title('Butterworth-Filter')
```

Natürlich kann das Filter auch direkt, d.h. ohne den Umweg über die normierte Darstellung, entworfen werden:

```
>> [BBnd, ABnd] = butter(N, wp, 's')

BBnd =

    1.0e+15 *

         0         0         0         0    2.5062

ABnd =

    1.0e+15 *

    0.0000    0.0000    0.0000    0.0009    2.5062
```

Der indirekte Weg wurde in der obigen Berechnung lediglich gewählt, um den Bezug zur theoretischen Herleitung besser herstellen zu können.

Für den Entwurf *digitaler* Filter stehen, wie bereits erwähnt, noch komfortablere Möglichkeiten zur Verfügung. Hierbei kann das so genannte *Filter-Design-and-Analysis-Tools* verwendet werden. Dies ist eine GUI-Schnittstelle, mit der ein *digitales* Filter auf der Basis des Toleranzschemas aus Abbildung 2.48 entworfen werden kann. Wir werden in Kapitel 4 auf dieses Werkzeug zurückkommen. Für den Entwurf *analoger* Filter steht solch eine GUI-Schnittstelle nicht⁶¹ zur Verfügung.

2.6.6 Übungsaufgaben

Übung 62 (Lösungsband Seite 144)

- (a) Weisen Sie nach, dass sich die Gruppenlaufzeit eines stabilen LTI-Systems mit rationaler Übertragungsfunktion $H(s)$ durch die Formel

$$t_g(\omega) = \Re \left\{ - \frac{\frac{d}{ds} H(s)}{H(s)} \right\} \bigg|_{s = j\omega} \quad (211.1)$$

⁶¹ Es gibt eine, allerdings nicht von MathWorks vertriebene und somit inoffizielle, Analog Filter Design Toolbox, die ein solches GUI zur Verfügung stellt. Sie kann vom MATLAB Central File Exchange Server heruntergeladen werden

bestimmen lässt!

- (b) Zeigen Sie, dass sich die Gruppenlaufzeit mit Hilfe des Frequenzgangs $H(j\omega)$ direkt durch

$$t_g(\omega) = \frac{d}{d\omega} (-\Im\{\ln(H(j\omega))\}) \quad (212.1)$$

bestimmen lässt.



- (c) Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a) die Gruppenlaufzeit des LTI-Systems mit Übertragungsfunktion:

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}. \quad (212.2)$$

- (d) Verifizieren Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (c) durch direkte Berechnung mit Hilfe der Definition.
 (e) Überprüfen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (c) mit Hilfe von MATLAB, indem Sie mit der Funktion `bode` den Phasengang von $H(s)$ berechnen.

Hinweis zu Aufgabenteil (a): Betrachten Sie $\ln(H(s))$ einerseits und $\ln(H(j\omega))$ andererseits und erinnern Sie sich daran, was Sie über die Ableitungen von $\ln(f(x))$ gelernt haben!

Übung 63 (Lösungsband Seite 149)

Simulieren Sie das System mit der Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{9}{(s+3)^2} \quad (212.3)$$

Hilfe von Simulink und bestimmen Sie

- (a) experimentell die Dauer t_m der Impulsantwort,
- (b) rechnerisch die Dauer t_m der Impulsantwort,
- (c) rechnerisch die Bandbreite und das Zeit-Bandbreite-Produkt,
- (d) experimentell und rechnerisch die Einschwingzeit,
- (e) um welchen Filtertyp es sich bei dem System $H(s)$ handelt.

Hinweis: Ein entsprechendes Simulink m-File finden Sie unter dem Namen `s_uebFilterkenn.slx` in der Begleitsoftware.

Übung 64 (Lösungsband Seite 152)

Entwerfen Sie einen Butterworth-Tiefpass für das Toleranzschema

Toleranz im Durchlassbereich: -3 dB ,

Toleranz im Sperrbereich:	– 20 dB,
Durchlassbandgrenzfrequenz:	30 Hz,
Sperrbandgrenzfrequenz:	70 Hz

- (a) mit Hilfe der in Unterabschnitt 2.6.4, S. 199 entwickelten Herleitung,
- (b) mit Hilfe der Entwurfstabelle aus Anhang C für den Entwurf analoger Butterworth-Filter.

Überprüfen Sie Ihren Entwurf mit MATLAB.

Hinweis: Achten Sie in dieser Aufgabe bei der Umrechnung der dB-Größen sorgfältig darauf, ob Sie Ihre Berechnung auf $|H(j\omega)|$ oder $|H(j\omega)|^2$ beziehen !

Übung 65 (Lösungsband Seite 155)

Entwerfen Sie mit Hilfe der zugehörigen Entwurfstabelle aus Anhang C zum Entwurf analoger Filter für eine Durchlassbandgrenzfrequenz von 50 Hz (3 dB-Grenze!)

- (a) ein Butterworth-Tiefpassfilter 4. Ordnung,
- (b) ein Tschebyscheff-Tiefpassfilter 1. Art 4. Ordnung mit 1 dB Welligkeit.

Plotten Sie mit Hilfe des MATLAB-Befehls `bode` jeweils die Amplitudengänge zu den entworfenen Filtern und vergleichen Sie diese mit den Anforderungen.

Übung 66 (Lösungsband Seite 158)

Entwerfen Sie einen Butterworth-Tiefpass für folgendes Toleranzschema :

Toleranz im Durchlassbereich:	– 1 dB,
Toleranz im Sperrbereich:	– 25 dB,
Durchlassbandgrenzfrequenz:	30 Hz,
Sperrbandgrenzfrequenz:	100 Hz.

Testen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe von MATLAB, indem Sie den berechneten Amplitudengang plotten.

Übung 67 (Lösungsband Seite 161)

Transformieren Sie mit Hilfe von MATLAB das in Übung 65 entworfene Butterworth-Tiefpassfilter 4. Ordnung in ein **Hochpassfilter** mit Grenzfrequenz 50 Hz.

Testen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie den Amplitudengang plotten.

Hinweis: MATLAB-Funktion `tp2hp`.

3

Abtastung und Digitalisierung

Gegenstand des vorliegenden Kapitels ist die Beschreibung der Vorgänge beim Übergang von analogen zu digitalen Signalen.

Dabei liegt der Schwerpunkt dieser Beschreibung *nicht* bei der technischen Realisierung dieser Umsetzung und der damit verbundenen Probleme. Dies ist eher das Thema eines entsprechenden Elektronik-Lehrbuchs. In diesem Kapitel ist vielmehr der *Systemaspekt des Umsetzungsvorgangs* von Interesse, das heißt die Frage nach den *prinzipiellen Eigenschaften* des Umsetzungsvorgangs. Diese können frei von realisierungsbedingten Problemen sehr viel besser beschrieben werden und liefern wertvolle Hinweise auf Auslegung und Analyse von Systemen der digitalen Signalverarbeitung, die im Fokus der Betrachtungen in Kapitel 4 stehen werden.

Im Zentrum des Kapitels 3 steht das so genannte *Abtasttheorem*. Es liefert eine fundamentale Aussage über die Beziehung zwischen zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Signalen. Insbesondere gibt es klare Auskunft darüber, wann, das heißt unter welchen Bedingungen, zeitkontinuierliche Signale wieder aus den diskretisierten Werten *ohne Informationsverlust zurückgewonnen* werden können. Die damit verbundene Antwort auf die Frage, unter welchen Bedingungen bei der Diskretisierung von Signalen keine Informationen verloren gehen, ist grundlegend für den Einsatz Digitaler Signalverarbeitung in realen Systemen.

3.1 Der Abtastvorgang

Der Vorgang des so genannten *Abtastens* bewirkt den Übergang von analogen Signalen in digitale Signale. Einige Eigenschaften digitaler und analoger Systeme wurden bereits in Tabelle 1.2, S. 25 aus Kapitel 1, Abschnitt 1.3 gegenübergestellt. Es wurde gezeigt, dass digitale Systeme bezüglich einiger wesentlicher Aspekte (z.B. Kosten) Vorteile besitzen. Stichwortartig lassen sich die Gründe für Abtastung und Digitalisierung von Signalen wie folgt zusammenfassen:

- Möglichkeit für Digitale Signalverarbeitung
(numerische Verarbeitung von Signalen mit (Mikro-) Rechnern),
- Nutzung der Vorteile der Digitalen Signalverarbeitung, etwa:
 - Kostengünstige Realisierung von Systemen,
 - Verwendung hochintegrierter Bausteine,
 - Möglichkeit der Speicherung von Daten,
 - Anwendung vorteilhafter Algorithmen.

3.1.1 Anordnung zur Digitalen Signalverarbeitung

Abbildung 3.1 zeigt in Form eines Blockschaltbildes die grundlegende Anordnung zur Digitalen Signalverarbeitung.

Eine solche Anordnung besteht im Kern aus einem **Analog-Digital-Umsetzer** (A/D-Wandler), welcher analoge Signale der „realen Welt“ in Binärdaten umsetzt, einem **Rechner**, welcher die eigentliche Verarbeitung der Signale durch Abarbeitung vorprogrammierter Algorithmen durchführt und einem **Digital-Analog-Umsetzer**, welcher die Ergebnisse der Algorithmen in analoge, für den Menschen verständliche Signale zurückverwandelt.

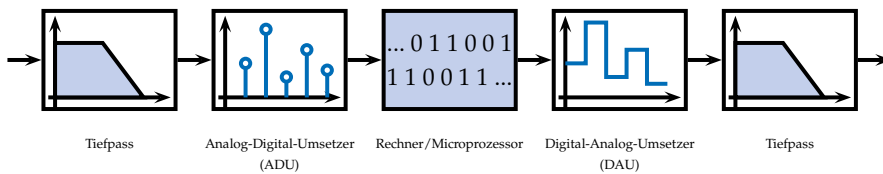


Abb. 3.1: Grundlegende Anordnung zur Digitalen Signalverarbeitung

Übung 71

Auf die Bedeutung der Tiefpässe soll später eingegangen werden (vgl. Bemerkung S. 222 und Übung 71, S. 236).

Der Analog-Digital-Umsetzer (A/D-Wandler) besteht im Wesentlichen (vgl. Abb. 3.2) aus zwei Komponenten, dem **Abtast-Halte-Glied** zum „Einfrieren“ des aktuellen Signalwertes und einer nachgeschalteten **Codier-Schaltung**, welche die Aufgabe hat, den zu einem definierten Zeitpunkt festgehaltenen Signalwert einem binären Code (einer Zahl) zuzuordnen.

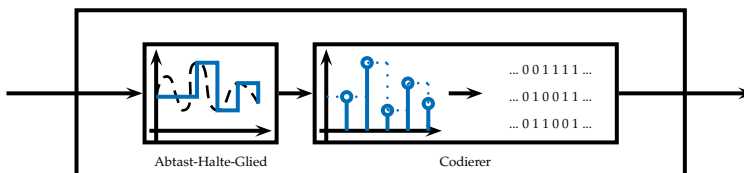


Abb. 3.2: Struktur eines Analog-Digital-Umsetzers (ADUs)

Unser **Ziel** ist im Folgenden nicht die Beschreibung der technischen, sondern die **Beschreibung der prinzipiellen** und damit auch realisierungsunabhängigen **Vorgänge** bei der Digitalisierung. Wir konzentrieren uns daher nur auf den **reinen, idealisierten Abtastvorgang** und lassen realisierungsbedingte Probleme des Abtast-Halte-Glieds oder auch die Probleme der numerischen Codierung der Information (zunächst¹) außer Acht.

¹ Die mit der Codierung zusammenhängenden prinzipiellen, d.h. systemtheoretischen Probleme werden wir in Kapitel 5 einer näheren Betrachtung unterziehen.

3.1.2 Systemtheoretische Beschreibung des Abtastvorgangs

Abbildung 3.3 skizziert das Prinzip des *idealen Abtastvorgangs* anhand einer harmonischen Schwingung.

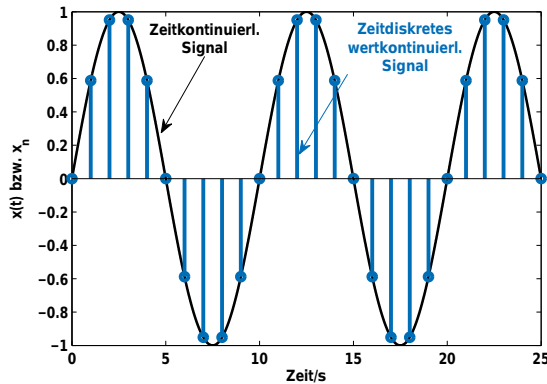


Abb. 3.3: Der idealisierte Abtastvorgang

Ein zeit- und wertkontinuierliches Signal wird zu bestimmten Zeitpunkten „gemessen“, wobei die Messdauer idealerweise als 0 angenommen wird. Zu den übrigen Zeitpunkten ist das (wie wir dann sagen *abgetastete*) Signal nicht definiert. Präzise heißt das:

Unter **Abtastung** verstehen wir im Folgenden stets den idealisierten Prozess des Übergangs von einem zeitkontinuierlichen Signal $x(t)$ zu seinen Werten $x_n := x(nT_a)$ an äquidistanten Zeitpunkten nT_a , $n \in \mathbb{Z}$. Das Zeitintervall T_a heißt **Abtastintervall**.

Die Beschränkung auf äquidistante Zeitintervalle hat ausschließlich technische Gründe. Zum einen ist die Abtastung an äquidistanten Stellen technologisch viel einfacher zu realisieren, zum anderen ist natürlich auch die mathematische Beschreibung einfacher.

Die zentrale Frage der nachfolgenden Überlegungen wird sein, inwiefern und, wenn ja, wann und wie viel Information über das Ausgangssignal bei diesem Prozess verloren geht. Abbildung 3.1 zeigt, dass diese Frage von eminenter Bedeutung ist, da man ja nicht um des Abtastens willen abtastet, sondern, um die Vorteile Digitaler Signalverarbeitung auszunutzen (vgl. Tabelle 1.2, S. 25, Abschnitt 1.3) und später möglichst informationsverlustfrei (oder gar mit mehr (spezieller) Information über das Signal) wieder in die analoge Welt zurückzukehren.

In Kapitel 2 wurde gezeigt, wie wichtig neben der Beschreibung von Signalen im Zeitbereich die Beschreibung im Frequenzbereich ist, da im Frequenz-

bereich Signal- und Systemeigenschaften oft besser charakterisiert werden können als im Zeitbereich.

Im Zusammenhang mit dem Abtastvorgang müssen daher folgende Fragen beantwortet werden:

- Kann der Frequenzinhalt (das Spektrum) eines zeitdiskreten Signals

$$x_n = x(nT_a), \quad T_a = \text{Abtastperiode},$$

welches durch Abtastung aus einem zeitkontinuierlichen Signal $x(t)$ gewonnen wird, definiert werden?

- Wenn ja, wie hängen dann die Spektren von $x(t)$ und x_n zusammen?
- Wie kann das Übertragungsverhalten eines zeitdiskreten Systems beschrieben werden?
- Wie kann ein Signal $x(t)$ wieder eindeutig aus seinen Abtastwerten x_n zurückgewonnen werden?
(Dies ist wichtig für die Übertragung des Ergebnisses digitaler Systeme in die analoge Welt!)

Entscheidend für die Beantwortung dieser Fragen sind die Definition und die mathematische Beschreibung des Spektrums eines zeitdiskreten Signals. Dies ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

3.1.3 Das Spektrum eines abgetasteten Signals

Da wir bislang nur Aussagen über Spektren zeitkontinuierlicher Signale machen können, versuchen wir, das zeitdiskrete Signal durch ein „passendes“ zeitkontinuierliches Signal darzustellen und dessen Spektrum zu berechnen. Angesichts von Abbildung 3.3 scheint dies zunächst prinzipiell nicht möglich zu sein. Blättert man allerdings auf Seite 76 und auf Seite 79 zurück, so stellt man fest, dass das Thema „Abtastung“ in der Tat bei der Diskussion zeitkontinuierlicher Signale indirekt schon einmal angesprochen wurde.

Die verallgemeinerte Funktion $\delta_0(t)$ (Dirac-Funktional) ordnet nach Definition (76.1) jedem Signal $x(t)$ seinen Wert $x(0)$ an der Stelle $t = 0$ zu! Das Dirac-Funktional $\delta_a(t) = \delta_0(t - a)$ ordnet nach (80.2) jedem Signal $x(t)$ seinen Wert $x(a)$ an der Stelle $t = a$ zu!

Im Sinne der Definition der äquidistanten Abtastung (s. S. 217) beschreibt daher wegen

$$\begin{aligned} \delta_0(t - nT_a)(x(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT_a)x(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t)x(t + nT_a) dt = x(t + nT_a)|_{t=0} = x(nT_a) \end{aligned} \quad (218.1)$$

das um nT_a Zeiteinheiten verschobene **Dirac-Funktional** $\delta_0(t - nT_a)$ **die Abtastung von $x(t)$ zum Zeitpunkt nT_a** .

Wollen wir das durch die Abtastung entstehende **diskrete Signal** $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit Hilfe der für zeitkontinuierliche Signale in Kapitel 2 entwickelten Methoden analysieren², so müssen wir es **mit einem geeigneten zeitkontinuierlichen Signal identifizieren**.

Da das diskrete Signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ per Definition auf keinen Fall ein gewöhnliches zeitkontinuierliches Signal sein kann, liegt die Idee nahe zu prüfen, ob es als **verallgemeinerte (zeitkontinuierliche) Funktion** und damit als lineares Funktional aufgefasst werden kann. Die Beziehung (218.1) liefert einen Hinweis, dass dazu im Umfeld des Dirac-Funktional gesucht werden muss. Eine verallgemeinerte Funktion ist nach Definition (vgl. (77.2)) ein **stetiges lineares Funktional** auf dem Raum der Testfunktionen³. Es ist nicht schwer nachzuweisen, dass die (formale) Zuordnung

$$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : \phi(t) \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \phi(nT_a) \quad (219.1)$$

ebenfalls eine (stetige, skalarwertige) lineare Abbildung auf dem Raum der Testfunktionen ϕ und somit eine verallgemeinerte Funktion ist!

Andererseits gilt aufgrund der Rechenregeln für das Dirac-Funktional:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - nT_a)(\phi(t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \phi(nT_a) \quad \forall \phi(t). \quad (219.2)$$

Darüber hinaus gilt (s. (218.1)):

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT_a)(\phi(t)) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT_a) \cdot \phi(t) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_a) [x(t) \cdot \phi(t)] dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(t) \cdot \phi(t))_{t=nT_a} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \phi(nT_a) \quad \forall \phi(t). \end{aligned} \quad (219.3)$$

² Dies müssen wir ja, da wir zum jetzigen Zeitpunkt keinen geeigneten Begriffsapparat, beispielsweise zur Definition eines Spektrums, entwickelt haben.

³ Dies sind unendlich oft differenzierbare Funktionen, die „schnell fallen“ oder solche mit kompaktem Träger.

Somit folgt insgesamt:

Das **zeitdiskrete** Signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ lässt sich mit der (zeitkontinuierlichen!) verallgemeinerten Funktion

$$\tilde{x}(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot \delta(t - nT_a) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_a) \quad (220.1)$$

identifizieren!

Damit eröffnet sich uns nun die Möglichkeit, das (zeitkontinuierliche) Spektrum des diskreten Signals $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ zu berechnen.

Das Spektrum von $\tilde{x}(t)$

Das Spektrum des Signals $\tilde{x}(t)$ kann mittels Fourier-Transformation bestimmt werden. Wir verwenden dazu den Multiplikationssatz aus Tabelle 2.2, S. 154.

Nach Tabelle 2.2 gilt:

$$\mathfrak{F}(\tilde{x})(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \mathfrak{F}(\text{III}(t/T_a))(j\omega). \quad (220.2)$$

Dabei bezeichnet $\text{III}(t/T_a)$ die so genannte **Dirac-Impulsreihe**, d.h.

$$\text{III}(t/T_a) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT_a). \quad (220.3)$$

Offenbar ist die **Dirac-Impulsreihe** nach Definition ein T_a -periodisches Signal (bei den Vielfachen nT_a der Periodendauer T_a wiederholt sich der Dirac-Impuls)!

Nach dem Satz über die Fourier-Reihenentwicklung periodischer Signale (s. S. 181) haben wir die Möglichkeit, das Spektrum $\mathfrak{F}(\text{III}(t/T_a))(j\omega)$ der Dirac-Impulsreihe mit Hilfe ihrer komplexen Fourier-Koeffizienten zu berechnen (s. Anhang A.5, S. 550).

Für die Fourier-Koeffizienten gilt⁴ mit $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_a} \int_{-T_a/2}^{T_a/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT_a) \right] e^{-jk\omega_a t} dt \\ &= \frac{1}{T_a} \int_{-T_a/2}^{T_a/2} \delta_0(t) e^{-jk\omega_a t} dt = \frac{1}{T_a} \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (220.4)$$

⁴ Im Gegensatz zu Kapitel 2 ist T_a hier die *Abtastintervalllänge* und nicht die Periodendauer einer Schwingung mit Frequenz ω_0 . Somit ist ω_a die *Abtastfrequenz* in rad/s.

Aufgrund des Zusammenhangs zwischen den Fourier-Reihen und den Fourier-Spektren (s. S. 181) gilt dann für die Fourier-Transformierte von $\text{III}(t/T_a)$:

$$\mathfrak{F}(\text{III}(t/T_a))(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{1}{T_a} \delta_0(\omega - k\omega_a) \quad (221.1)$$

$$= \omega_a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_0(\omega - k\omega_a) = \omega_a \text{III}(\omega/\omega_a). \quad (221.2)$$

Auf dem Weg wurde somit folgendes Resultat hergeleitet:

Die **Fourier-Transformierte einer Dirac-Impulsreihe** mit Zeitabstand T_a ist eine mit $\frac{2\pi}{T_a} = \omega_a$ gewichtete Dirac-Impulsreihe mit Frequenzabstand ω_a !

Zusammenfassend erhält man aus den bisherigen Überlegungen die Folgerungen:

- Der Abtastprozess lässt sich idealisiert als Multiplikation mit der Dirac-Impulsreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT_a)$ auffassen (System: idealer Abtaster).
- Das diskrete Signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ lässt sich mit dem zeitkontinuierlichen Signal

$$\tilde{x}(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta_0(t - nT_a) = x(t) \cdot \text{III}(t/T_a) \quad (221.3)$$

identifizieren.

- Für das Spektrum von $\tilde{x}(t)$ (und somit für das Spektrum des diskreten Signals $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$) erhält man mit (220.2) und (221.1):

$$\begin{aligned} \tilde{X}(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * (\omega_a \text{III}(\omega/\omega_a)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \omega_a \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega) * \delta_0(\omega - k\omega_a) \\ &= \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_a)). \end{aligned} \quad (221.4)$$

Die schematischen Darstellungen⁵ in den Abbildungen 3.4 und 3.5 illustrieren diesen Sachverhalt für zwei grundlegende Situationen bezüglich des Verhältnisses zwischen der Abtastbandbreite (d.h. ω_a) und der Signalbandbreite.

Übung 68

Übung 69

Übung 72

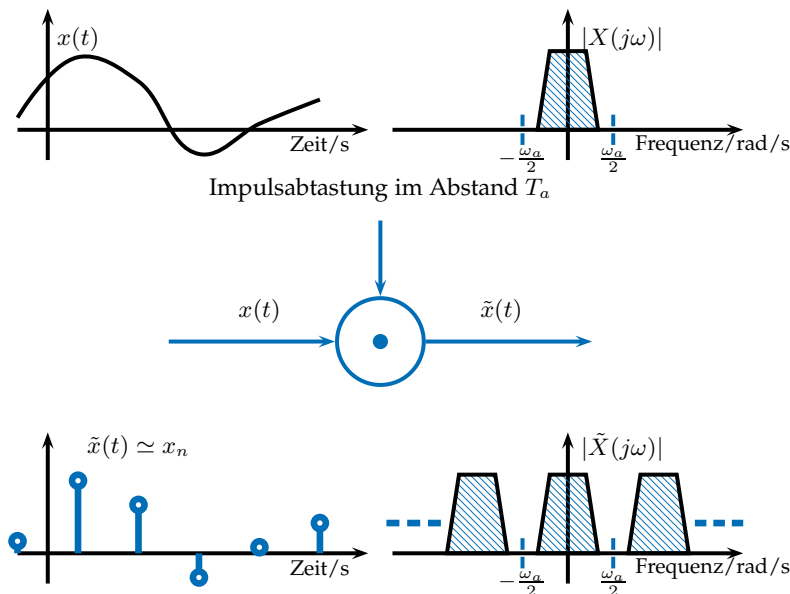


Abb. 3.4: Spektrum des Ausgangssignals eines idealen Abtasters - Idealisierte Darstellung, Signalbandbreite $< \omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$

Wir folgern aus dem Resultat (221.4):

- Das Spektrum des abgetasteten Signals ist eine **periodische Fortsetzung des ursprünglichen Signalspektrums** (bis auf Faktor $\frac{1}{T_a}$) (vgl. dazu Abbildung 3.4).
- Falls $X(j\omega) \neq 0$ für $|\omega| > \frac{\omega_a}{2}$, kommt es zu **spektralen Überlappungen („Aliasing“, „Fremd“spekten)** (vgl. dazu Abbildung 3.5 und Übung 72, S. 236).

An dieser Stelle kann nun auch die Funktion des ersten Tiefpassfilters in der Darstellung der grundlegenden Anordnung zur Digitalen Signalverarbeitung aus Abbildung 3.1, S. 216 erklärt werden. Dieses Filter begrenzt die

⁵ Man beachte: Dies sind *schematische Darstellungen*. Nicht immer werden die Spektralanteile betragsmäßig addiert, wie die Darstellung 3.5 suggerieren mag. Die Überlagerung (221.4) ist eine Überlagerung **komplexer** Werte. Somit können an jeder Frequenz alle möglichen Werte zu Stande kommen, auch Auslöschungen von Spektralanteilen sind möglich!

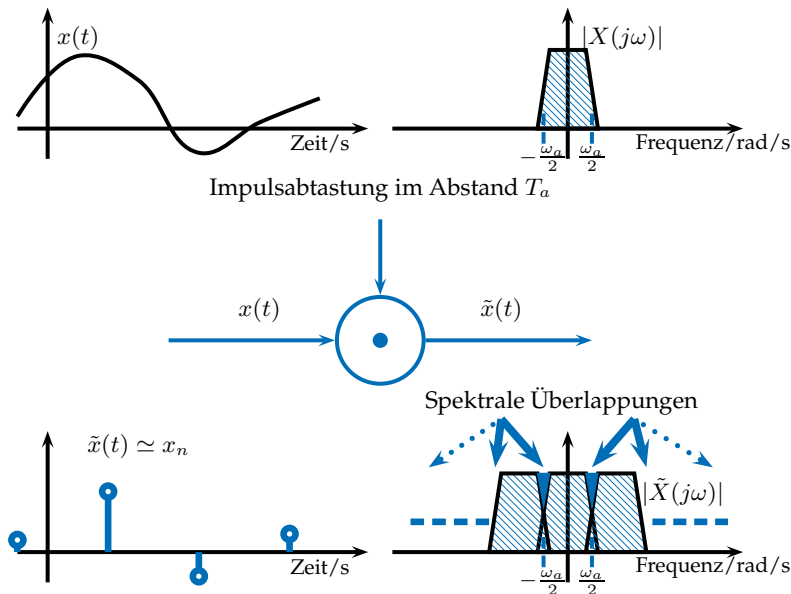


Abb. 3.5: Spektrum des Ausgangssignals eines idealen Abtasters - Idealisierte Darstellung, Signalbandbreite $\geq \omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$

Bandbreite des Analogsignals derart, dass es nach der Abtastung nicht zu den in Gleichung (221.4) prognostizierten Fremdspektren und damit Fremdsignalen im Nutzband kommt. Natürlich müssen dazu zumindest Nutzsignalbandbreite und Abtastbandbreite gemäß der obigen Folgerung angepasst sein. Die Aufgabe des Filters ist also die Unterdrückung des Einflusses anderer breitbandiger Signale, die im Eingangssignalgemisch ggf. vorhanden sein könnten. Da das Filter somit die Entstehung von Aliasspektren durch die Abtastung verhindert, heißt es folgerichtig **Anti-Aliasing-Filter**. Das Überlappungsproblem ist nun (wie man sich anhand von Abbildung 3.4 und Abbildung 3.5 klar machen kann) eng verknüpft mit der Frage, wann das analoge Signal aus dem abgetasteten Signal **rekonstruierbar** ist und wann nicht.

Rekonstruierbarkeit abgetasteter Signale

Zur Illustration betrachten wir in Abbildung 3.6, S. 224 eine weitere schematische Darstellung von Abtastspektren und möglichen zugehörigen Analogsignalspektren. Das Abtastsignalspektrum in dieser Abbildung kann offenbar aus **zwei** möglichen bandbegrenzten Analogsignalspektren durch die in (221.4) abgeleitete spektrale Überlappung

$$\tilde{X}(j\omega) = \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_a)) \quad (223.1)$$

Übung 70

Übung 72

entstehen. Die Abbildungen machen deutlich, dass die auftretende Mehrdeutigkeit durch eine Bedingung an die Bandbreite des abgetasteten Signals umgangen werden kann.

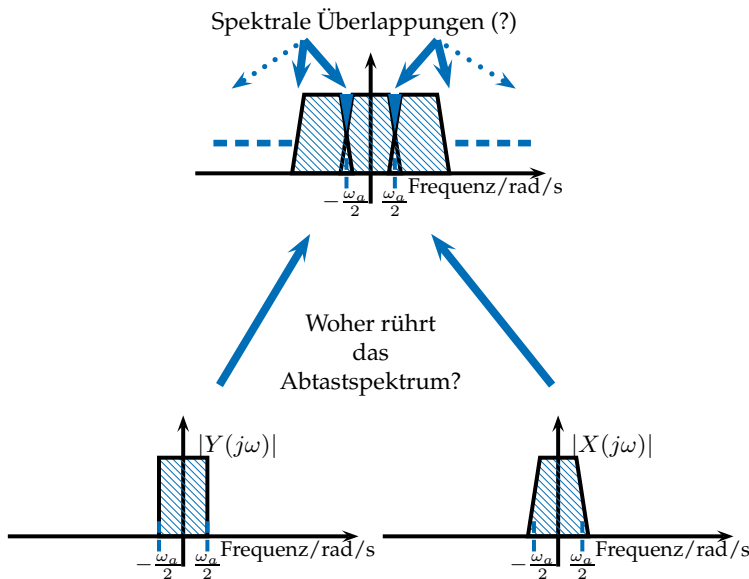


Abb. 3.6: Das Rekonstruktionsproblem - (schematisch) dargestellt im Frequenzbereich

Rekonstruierbarkeitsbedingung

Wir folgern daraus: $x(t)$ ist rekonstruierbar (etwa durch Tiefpassfilterung und Fourier-Rücktransformation, s. Abb. 3.9, S. 230), wenn gilt:

$$X(j\omega) = 0 \quad \forall \omega \geq \frac{\omega_a}{2}. \quad (224.1)$$

Dies ist nichts anderes als eine Formulierung des **Abtasttheorems**. Bevor dieses Theorem jedoch genauer formuliert werden soll, wollen wir seine Aussage nochmals *im Zeitbereich* veranschaulichen.

3.1.4 Rekonstruktion im Zeitbereich

Man betrachte hierzu Abbildung 3.7. Die Abbildung zeigt zwei mit Abtastrate $f_a = 5$ Hz abgetastete Sinus-Signale der Frequenz 1 Hz und 6 Hz. Die Abbildung zeigt, dass beide Signale für die gewählte Abtastfrequenz *identische* Abtastwerte liefern.

Außerdem ist es offenbar möglich, durch die Abtastwerte noch viel mehr verschiedene Signale zu legen, wenn man die Signale zwischen den Abtastzeitpunkten stärker variieren lässt (sprich, die Frequenz erhöht).

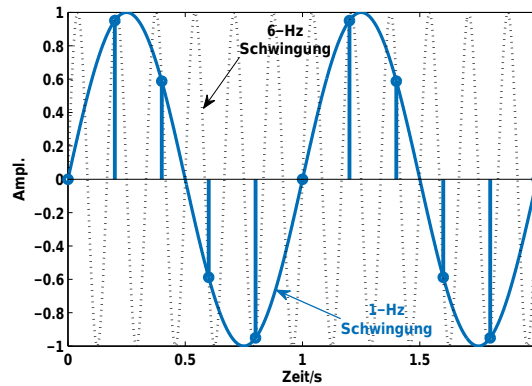


Abb. 3.7: Das Rekonstruktionsproblem - dargestellt im Zeitbereich

Im nachfolgenden Beispiel soll dieses Verhalten rechnerisch nachvollzogen werden.

3.1 Beispiel (Rekonstruierbarkeitsproblem)

Man betrachte die harmonischen Schwingungen

$$x(t) = \sin(2\pi ft + \phi), \quad y(t) = \sin(2\pi(f \pm f_a)t + \phi), \quad (225.1)$$

wobei $f_a = \frac{1}{T_a}$ die Abtastfrequenz in Hz bezeichnet.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} y(nT_a) &= \sin(2\pi fnT_a \pm 2\pi n + \phi) \\ &= \sin(2\pi fnT_a + \phi) = x(nT_a) \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (225.2)$$

Offenbar haben $y(t)$ und $x(t)$ identische Abtastwerte, d.h. die Abtastwerte können keinem dieser beiden Signale eindeutig zugeordnet werden!

Ein Grenzfall ist in gewissem Sinne dabei der Fall $f_a = 2f$, also wenn die Abtastrate gerade der **doppelten** Signalfrequenz entspricht.

In diesem Fall ist:

$$\begin{aligned} x(nT_a) &= \sin(2\pi fnT_a + \phi) \\ &= \sin\left(2\pi fn \frac{1}{2f} + \phi\right) = \sin(\pi n + \phi). \end{aligned} \quad (225.3)$$

Speziell erhält man für $\phi = 0$:

$$x(nT_a) = \sin(\pi n + \phi) = \sin(\pi n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (225.4)$$

Das Signal wird also bei der Abtastung annulliert und kann somit nicht wieder rekonstruiert werden. ■

3.2 Beispiel (Rekonstruierbarkeitsproblem)

Ein weiterer interessanter Spezialfall mit einer überraschenden praktischen Anwendung (s. Beispiel 3.5, S. 230) ist der Fall $f_a = f$.

Hier ist:

$$\begin{aligned} x(nT_a) &= \sin(2\pi f n T_a + \phi) \\ &= \sin(2\pi f n \frac{1}{f} + \phi) = \sin(2\pi n + \phi) = \sin(\phi) =: c \quad \text{konstant.} \end{aligned} \quad (226.1)$$

In diesem Fall haben $x(t)$ und die *Konstantfunktion* (das *Gleichsignal*) $z(t) = c$ identische Abtastwerte! _____ ■

3.3 Beispiel (Rekonstruierbarkeitsproblem)

Man betrachte nun die harmonischen Schwingungen

$$x(t) = \cos\left(2\pi\left(\frac{f_a}{2} - \Delta f\right)t\right) \quad (226.2)$$

und

$$y(t) = \cos\left(2\pi\left(\frac{f_a}{2} + \Delta f\right)t\right), \quad (226.3)$$

wobei $\Delta f < \frac{f_a}{2}$ sein soll.

Die Abtastung der beiden Signale mit der Abtastrate $f_a = \frac{1}{T_a}$ liefert:

$$\begin{aligned} x(nT_a) &= \cos\left(2\pi\left(\frac{f_a}{2} - \Delta f\right)nT_a\right) = \cos(n\pi - 2\pi\Delta f n T_a), \\ y(nT_a) &= \cos\left(2\pi\left(\frac{f_a}{2} + \Delta f\right)nT_a\right) = \cos(n\pi + 2\pi\Delta f n T_a). \end{aligned} \quad (226.4)$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Formel

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \quad (226.5)$$

erhält man wegen $\sin(n\pi) = 0$:

$$\begin{aligned} x(nT_a) &= \cos(n\pi) \cos(2\pi\Delta f n T_a), \\ y(nT_a) &= \cos(n\pi) \cos(2\pi\Delta f n T_a). \end{aligned} \quad (226.6)$$

Wiederum haben $x(t)$ und $y(t)$ identische Abtastwerte. _____ ■

Überschreitet also die Signalfrequenz f Hz einer harmonischen Schwingung die Grenze $\frac{f_a}{2}$ Hz um Δf Hz, so erhalten wir aus den Abtastwerten *nach Rekonstruktion* mit Hilfe eines Digital-Analog-Umsetzers eine harmonische Schwingung der Frequenz $\frac{f_a}{2} - \Delta f$ Hz.

Dieser Effekt des Abtastens kann mit Hilfe von Simulink durch eine Simulation mit akustischen Signalen *hörbar* gemacht werden!

3.4 Beispiel (Rekonstruierbarkeitsproblem - akustisch)

Die Abbildung 3.8 zeigt den Aufbau des Systems `s_abtastTheorem.slx`

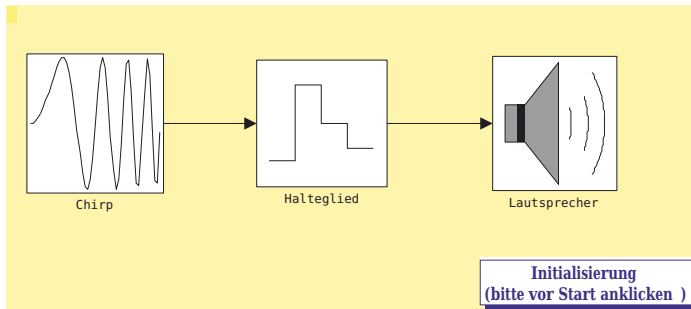


Abb. 3.8: Simulink-System zur akustischen Simulation des Abtasttheorems

Das Simulink-System kann durch Anklicken des Initialisierungsbuttons mit Hilfe der Datei `init_abtastTheorem.m` beispielsweise wie folgt initialisiert werden:

```

stoptime = 20;           % Dauer der Simulation
anfangsfrequenz = 20;    % Anfangsfrequenz d. Chirp-Signals(Hz)
targetzeit = stoptime;  % Zeit bis zum Erreichen d. Endfrequ.
                        % des Chirp-Signals
endfrequenz = 10000;     % Endfrequenz des Chirp-Signals
                        % Abtastintervall in sec
abtastintervall = 0.0005;
                        % entspricht fa = 2000 Hz

```

Nach dem Start der Simulation wird ein so genanntes **Chirp-Signal** erzeugt, abgetastet und mit Hilfe eines Haltgliedes und des Rechner-Lautsprechers in ein hörbares Signal zurückgewandelt.

Ein Chirp-Signal ist ein Signal, bei welchem eine Schwingung gleichbleibender Amplitude mit anschwellender Frequenz erzeugt wird. Im vorliegenden Beispiel etwa wird die Frequenz innerhalb von 20 s von 20 Hz auf 10 kHz hochgefahren. Da die Abtastrate auf 2 kHz festgelegt ist, übersteigt die Eingangssignalfrequenz im Laufe der Simulation sukzessive die Frequenzen $\frac{f_a}{2} = 1 \text{ kHz}$, $3\frac{f_a}{2} = 3 \text{ kHz}$, $5\frac{f_a}{2} = 5 \text{ kHz}$ und so weiter.

Entsprechend der Berechnung in Beispiel 3.3 nimmt die Frequenz des zurückgewandelten (rekonstruierten) akustischen Signals nach Überschreiten von $\frac{f_a}{2} = 1 \text{ kHz}$ wieder ab. Ähnliches gilt für die anderen genannten Frequenzen, wie sich leicht durch eine entsprechende Modifikation der Berechnung in Beispiel 3.3 verifizieren lässt.

Der akustische Effekt ist ein ständiges Auf- und Abschwellen der Frequenz des Lautsprechersignals zwischen 0 Hz und 1 kHz.

Der Leser ist gehalten mit weiteren Parametern zu experimentieren. ■

Dieses Experiment sowie die Beispiele 3.1, 3.3 und die Abbildungen 3.6 und 3.7 zeigen, dass eine Rekonstruierbarkeit des analogen Signals aus den Abtastwerten zumindest dann nicht mehr gewährleistet werden kann, wenn die Signalfrequenz die Grenze $f_a/2$ überschreitet. Wir halten fest:

Um die Rekonstruierbarkeit eines analogen Signals aus seinen Abtastwerten zu gewährleisten, muss zumindest gelten:

$$f_a > 2f_{max}. \quad (228.1)$$

Dabei ist f_{max} die maximale Spektralfrequenz des Signals!

Wir haben nun alles zusammen getragen, um das zentrale Resultat dieses Kapitels zu formulieren.

3.2 Das Abtasttheorem

Vorab benötigen wir noch die folgenden Begriffe:

Ein Signal $x(t)$ heißt ein **Tiefpasssignal** (oder **bandbegrenzt**), wenn für sein Fourier-Spektrum gilt:

Es gibt ein $\omega_b > 0$ mit:

$$X(j\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_b. \quad (228.2)$$

Ein Signal $x(t)$ heißt **Bandpasssignal**, wenn es $\omega_2 > \omega_1 > 0$ gibt mit:

$$X(j\omega) = 0 \quad \forall \omega \text{ mit } |\omega| < \omega_1 \text{ oder } |\omega| > \omega_2. \quad (228.3)$$

Mit Hilfe dieser Begriffe formulieren wir nun die 1. Version des so genannten Abtasttheorems. In der Literatur ist diese Version oft die einzige, die angegeben wird, sodass meist von *dem* Abtasttheorem gesprochen wird. Die Aussage des Satzes lässt sich allerdings noch in einer nützlichen Form verallgemeinern, was wir im Anschluss auch tun werden:

Abtasttheorem: Genau dann ist ein Tiefpasssignal $x(t)$ **eindeutig** aus seinen Abtastwerten

$$x_n = x(nT_a), \quad T_a = \frac{1}{f_a}, \quad f_a \text{ Abtastrate in Hz}, \quad (229.1)$$

rekonstruierbar, wenn gilt:

$$f_a > 2f_{\max}. \quad (229.2)$$

Dabei ist $f_{\max}$ die maximale Spektralfrequenz (in Hz) von $x(t)$.

In diesem Fall gilt mit $\omega_a = 2\pi f_a = \frac{2\pi}{T_a}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_a(t - nT_a)}{2\pi}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_a} - \pi n\right)}{\frac{\pi t}{T_a} - \pi n}. \end{aligned} \quad (229.3)$$

Gleichung (229.3) ergibt sich dabei aus folgender Überlegung:

Ist die maximale Spektralfrequenz $\omega_{\max}$ von $x(t)$ kleiner als die halbe Abtastfrequenz $\frac{\omega_a}{2}$, so ergibt sich aus der Grafik in Abbildung 3.4, S. 222, dass das Originalspektrum $X(j\omega)$ von $x(t)$ aus dem Abtastspektrum $\tilde{X}(j\omega)$ prinzipiell durch einen (mit T_a skalierten) **idealen Tiefpass** zurückgewonnen werden könnte:

$$X(j\omega) = \tilde{X}(j\omega) \cdot T_a \operatorname{rect}_{\omega_a}\left(j\left(\omega + \frac{\omega_a}{2}\right)\right). \quad (229.4)$$

Abbildung 3.9 illustriert diese Idee.

Die Fourier-Rücktransformation von (229.4) ergibt (vgl. (169.3)):

$$\begin{aligned} x(t) &= T_a \tilde{x}(t) * \frac{\omega_a}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_a t}{2\pi}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_a x_n \delta_0(t - nT_a) * \left(\frac{1}{T_a} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_a t}{2\pi}\right)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_a}{2\pi}(t - nT_a)\right). \end{aligned} \quad (229.5)$$

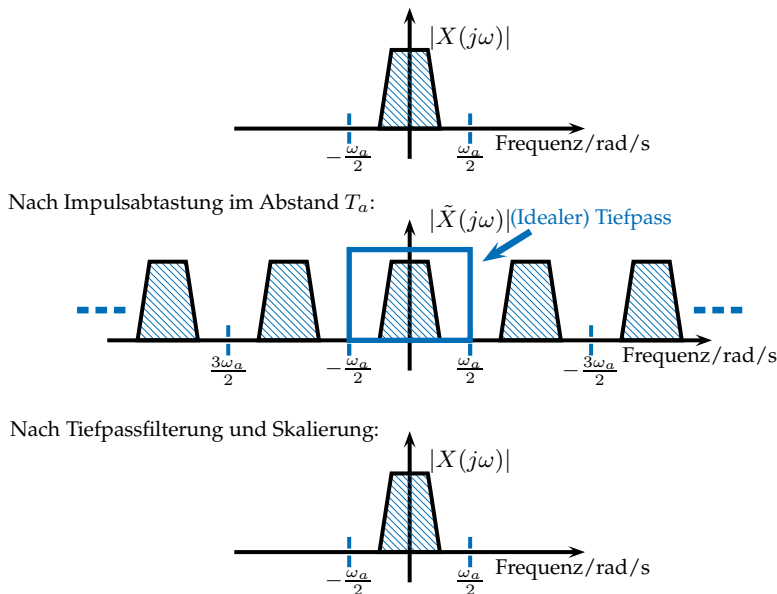


Abb. 3.9: Die Rekonstruktion mit einer Abtast-Tiefpass-Kette

Wir stellen fest:

- Das **Abtasttheorem ist (auch) ein Interpolationssatz!** Es liefert eine Darstellung von $x(t)$ als Überlagerung von sinc-Funktionen.
- Die Rekonstruierbarkeit ist durch kein anderes⁶ Interpolationsverfahren (lineare, quadratische, Splines, etc.) verbesserbar, d.h., es muss hierfür immer gelten:

$$f_a > 2f_{\max}. \quad (230.1)$$

Die Ungleichung (230.1) ist die eingangs des Kapitels gesuchte Bedingung, unter der beim Abtasten eines Signals keine Information über das Signal verloren geht und ist daher im Allgemeinen (etwa durch Voranschalten des Anti-Aliasing-Filters) sicherzustellen.

Es gibt jedoch Anwendungsfälle, in denen nutzbringend eine bewusste Verletzung von (230.1) vorgenommen wird. Die folgende Anwendung aus der Messtechnik etwa beruht auf dem in Beispiel 3.2 dargestellten Effekt.

3.5 Beispiel (Stroboskopmessung)

Eine häufige praktische Aufgabe ist die Ermittlung der Drehzahl schnell rotierender Teile. Eine Messung kann auf Basis der Beobachtung aus Beispiel

⁶ Dies geht aus den bisherigen Herleitungen zwar nicht hervor, auf einen Nachweis wird an dieser Stelle jedoch verzichtet.

3.2 nun folgendermaßen durchgeführt werden: Man markiert das rotierende Teil, wie etwa in Abbildung 3.10 den Flügel eines herkömmlichen Ventilators, und *tastet* den Probanden dann *optisch ab*, indem man mit einem geeigneten Gerät, dem so genannten **Stroboskop**, mit einer bestimmten Frequenz f_a Lichtblitze erzeugt.



Abb. 3.10: Messung der Rotationsgeschwindigkeit eines Ventilators mit einem Stroboskop

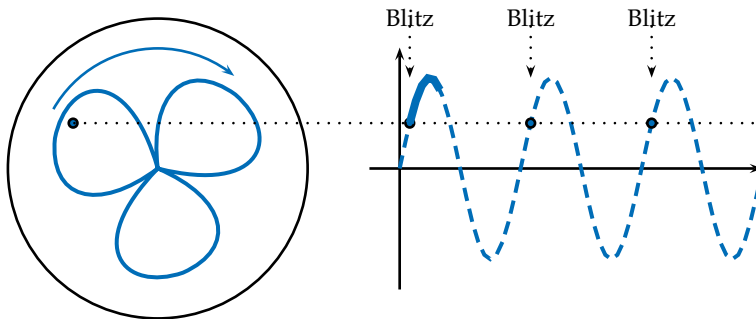


Abb. 3.11: Abtastung des Ventilators mit dem Stroboskop

Stimmt nun die Rotationsfrequenz f mit der Frequenz der Lichtblitze überein, so wird der in Abbildung 3.10 zu erkennende rote Punkt (die Markierung) immer in der gleichen Position angeblitzt („abgetastet“, s. Abbildung 3.11). Dies entspricht der Abtastung

$$x(nT_a) = \sin(2\pi n + \phi) = \sin(\phi) =: c \quad (\text{konstant}) \quad (231.1)$$

in Gleichung (226.1), wobei $\sin(2\pi ft + \phi)$ die *vertikale* Position des roten Punktes zur Zeit t markiert.

Der Beobachter erhält dadurch den Eindruck, dass der rote Punkt „steht“! Da dies gleichermaßen für alle Punkte der Szene gilt, ergibt sich insgesamt der Eindruck eines „stehenden Bildes“, wenn die Blitzfrequenz am Stroboskop entsprechend $f_a = f$ eingestellt ist. Indirekt kann somit die Rotationsfrequenz und damit die Umdrehungszahl

$$U_{\text{rot}} = 60 \cdot f \quad \text{U/min} \quad (232.1)$$

gemessen werden. ■

Abtasttheorem - Version 2

Übung 70

Die in (229.1) bis (229.3) formulierte Abtasttheorem-Version ist wohl die bekannteste und gebräuchlichste. In vielen Fällen ist eine zweite Version des Abtasttheorems sehr nützlich, welche in den gängigen Darstellungen der Effekte des Abtastens oft vergessen wird. Sie besagt, dass Rekonstruierbarkeit von der **Bandbreite** des Nutzsignals abhängt und nicht von seinem Ort im Spektrum.

Abtasttheorem – Version 2: Ist $x(t)$ ein Bandpasssignal mit den Bandgrenzen ω_1, ω_2 und der Mittenfrequenz

$$\omega_c = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (\text{rad/s}), \quad (232.2)$$

so kann $x(t)$ genau dann **eindeutig** aus den Abtastwerten $x(nT_a) = x_n$ **rekonstruiert** werden, wenn

$$\frac{2\pi}{T_a} = \omega_a > 2B, \quad B = \omega_2 - \omega_1 \quad (\text{Signalbandbreite}) \quad (232.3)$$

ist und wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt:

$$[\omega_1, \omega_2] \subseteq [k\omega_a, (k + \frac{1}{2})\omega_a], \quad \omega_a = 2\pi f_a. \quad (232.4)$$

Die schematische Darstellung in Abbildung 3.12 illustriert dieses Resultat im Frequenzbereich. Das tiefpassgefilterte Signal im dritten Teil der Abbildung enthält (fast) alle Informationen, die das Bandpasssignal auch enthielt. Zur vollständigen Rekonstruktion des Bandpasssignals benötigt man lediglich noch die ursprüngliche Mittenfrequenz. Man kann dann mit Hilfe dieser Frequenz durch „Mischung“ mit dem Tiefpasssignal und einer nachträglichen Bandpassfilterung das ursprüngliche Analogsignal zurückgewinnen.

Man erreicht also trotz massiver Unterabtastung unter gewissen Bedingungen eine Rekonstruktion **ohne Informationsverlust**. Beispiel 3.6 illustriert

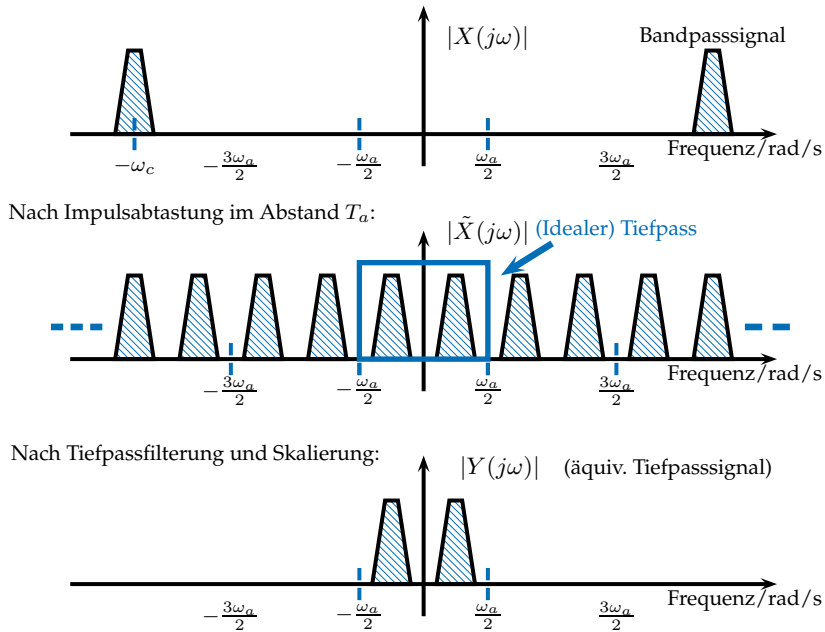


Abb. 3.12: Das Prinzip der Unterabtastung nach Version 2 des Abtasttheorems

diesen Rückgewinnungsprozess wieder mit einem einfachen harmonischen Schwingungssignal.

3.6 Beispiel (Abtasttheorem 2 im Zeitbereich)

Man betrachte das Signal

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \quad (233.1)$$

mit

$$f_0 = 4f_a + f', \quad f' < \frac{f_a}{2}. \quad (233.2)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} x(nT_a) &= \sin(2\pi f_a nT_a + 2\pi f' nT_a) \\ &= \sin(2\pi f' nT_a) =: x_u(nT_a). \end{aligned} \quad (233.3)$$

Dabei entspricht $x_u(t)$ einer „niederfrequenten Version“ von $x(t)$. Es handelt sich offenbar um eine Sinusschwingung der Frequenz f' .

Mit Version 1 des Abtasttheorems erhält man für $x_u(t)$ die Rekonstruktion:

$$x_u(t) = \sin(2\pi f' t). \quad (233.4)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot x_u(t) \cos(2\pi(4f_a)t) &= 2 \cdot \sin(2\pi f' t) \cdot \cos(2\pi(4f_a)t) \\
 &= \sin(2\pi(f' + 4f_a)t) + \sin(2\pi(f' - 4f_a)t) \quad (234.1) \\
 &= x(t) + \text{Rest.}
 \end{aligned}$$

Der „Rest“ kann mit Filtern eliminiert werden! Damit erhält man *ohne Informationsverlust* eine Rekonstruktion des Ausgangssignals $x(t)$. ■

3.2.1 Übungsaufgaben

Übung 68 (Lösungsband Seite 164)

Betrachten Sie das in Abbildung 3.13 dargestellte System.

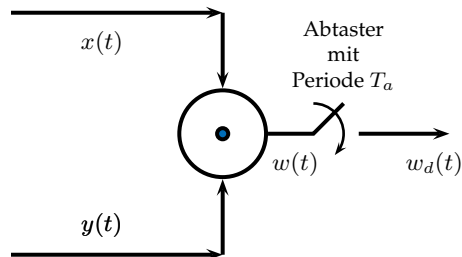


Abb. 3.13: Mischer und Abtaster

Die Signale $x(t)$ und $y(t)$ seien ideal bandbegrenzt mit den in Abbildung 3.14 dargestellten rein reellen Spektren.

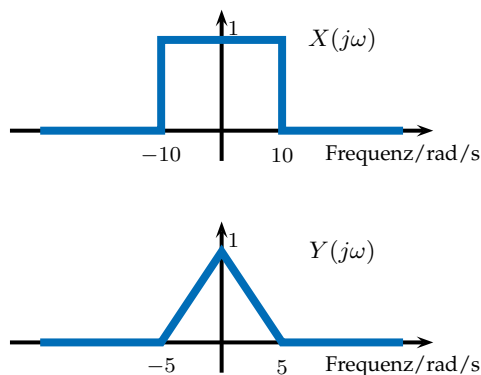


Abb. 3.14: Spektren zu den Signalen aus 3.13

- Sind die zugehörigen Signale reell?
- Bestimmen Sie die Bandbreite des Spektrums des Produktsignals $w(t)$ und plotten Sie mit Hilfe von MATLAB eine Grafik des Spektrums.
- Für welche Abtastraten $f_a := \frac{1}{T_a}$ ist $w(t)$ aus dem Abtastsignal $w_d(t)$ rekonstruierbar?
- Skizzieren Sie für eine solche Abtastrate das Spektrum von $w_d(t)$ mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabenteil (b).
- Geben Sie ein Rekonstruktionsfilter an, welches dem obigen System nachgeschaltet werden kann und $w(t)$ liefert.

Übung 69 (Lösungsband Seite 170)

Betrachten Sie das in Abbildung 3.15 dargestellte (reelle) Fourier-Spektrum $X(j\omega)$.

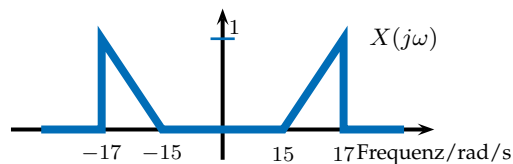


Abb. 3.15: Beispielspektrum zu Übung 69

- Das zugehörige Zeitsignal $x(t)$ werde mit einer Frequenz von 7 rad/s abgetastet. Skizzieren Sie das Spektrum des zugehörigen Abtastsignals $\tilde{x}(t)$ und begründen Sie, warum es nicht zu spektralen Überlappungen kommt.
- Untersuchen Sie, ob das ursprüngliche Signal aus den Abtastwerten $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ wieder rekonstruiert werden kann und erläutern Sie gegebenenfalls wie.

Übung 70 (Lösungsband Seite 172)

Betrachten Sie ein 1000 Hz Sinussignal der Amplitude 1.

- Berechnen Sie die Abtastwerte dieses Signals für eine Abtastrate von 300 Hz. Skizzieren Sie das Spektrum des abgetasteten Signals. Welches Sinussignal unterhalb der Abtastrate/2 (der so genannten **Nyquistfrequenz**) hat identische Abtastwerte?
- Begründen Sie, warum das Ausgangssignal aus den in Aufgabenteil (a) gewonnenen Abtastwerten eindeutig rekonstruiert werden kann und entwerfen Sie das Blockschaltbild eines Systems, mit dem dies möglich ist.

- (c) Berechnen Sie die Abtastwerte dieses Signals für eine Abtastrate von 200 Hz.
- (d) Begründen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabenteil (c), warum die Bandpassunterabtastung hier *nicht* funktioniert, obwohl die Bedingung Abtastrate $> 2 \cdot \text{Signalbandbreite}$ erfüllt ist.

Hinweis: Zu dieser Aufgabe steht Ihnen in der Begleitsoftware ein Simulink-Beispielsystem namens `s_uebAbtastTh2.slx` zur Verfügung, mit dessen Hilfe die Ergebnisse der obigen Untersuchungen anhand eines akustischen Signals nachvollzogen werden können.

Übung 71 (Lösungsband Seite 174)



Diese Aufgabe dient zur Erläuterung der Bedeutung des Ausgangs-Tiefpassfilters aus Abbildung 3.1, S. 216 und ist sehr wichtig für das Verständnis der Rekonstruktion im Zuge der D/A-Wandlung.

- (a) Skizzieren Sie für einen Sinus der Frequenz 1 Hz das zeitdiskrete Abtastsignal bei Abtastung mit Abtastfrequenz 4 Hz (Abtasttheorem⁷ eingehalten!).
- (b) Der D/A-Wandler erzeugt aus diesem Signal wieder ein Analogsignal durch „Halten“ der Werte. Skizzieren Sie dieses Signal.
- (c) Berechnen Sie ein Spektrum des D/A-Wandler-Ausgangssignals und skizzieren Sie dessen Betrag.
- (d) Erläutern Sie, wie ein nachgeschaltetes Tiefpassfilter in diesem Beispiel gestaltet sein muss, damit man den Original-Sinus wieder erhält und begründen Sie, warum dieses Tiefpassfilter **Harmonischenfilter** genannt wird.

Übung 72 (Lösungsband Seite 178)

Diese Aufgabe dient zur Erläuterung des in Abbildung 3.5, S. 223 dargestellten Überlappungseffekts. Es soll der fälschliche Eindruck vermieden werden, die Betragsspektren addierten sich immer. Dies ist in der Tat nicht so. Es können sogar Auslöschungseffekte auftreten. Allgemein handelt es sich um *irgendeine* Addition der (i.Allg. komplexen) Spektralanteile.

Betrachten Sie das Signal

$$x(t) = \sin(2\pi t) + \cos(2\pi 3t) \quad (236.1)$$

bei Abtastung mit Abtastfrequenz 4 Hz (Abtasttheorem *nicht* eingehalten!).

- (a) Berechnen Sie das (komplexe) Fourier-Spektrum des *abgetasteten* Signals und skizzieren Sie das zugehörige Abtastspektrum.

⁷ Soll heißen: die Bedingung zu Vermeidung von Aliasing ist eingehalten!

- (b) Vergleichen Sie die Amplitude des Signalanteils bei 1 Hz des abgetasteten Signals mit der von der schematischen Abbildung 3.5, S. 223 suggerierten Summe 2 (Summe der Amplituden des Sinus- und Cosinus-Anteils von $x(t)$). Was stellen Sie fest?
- (c) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem SimulinkSystem **s_uebAbtastTh3.slx** der Begleitsoftware. Erklären Sie mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe (c) von Übung 71 die bei der Simulation mit **s_uebAbtastTh3.slx** beobachtete Amplitude des rekonstruierten Tiefpasssignals (Ausgangssignal nach D/A-Wandlung).

4 Digitale Signale und Systeme

In diesem Kapitel sollen nun die Eigenschaften *digitaler* Signale und Systeme charakterisiert werden.

Der Leser wird sicher schon beim Blick auf das Inhaltsverzeichnis festgestellt haben, dass der Aufbau dieses Kapitels sehr ähnlich zu dem von Kapitel 2 ist. In der Tat ist eine Leitlinie der folgenden Überlegungen die Frage, wie die Begriffswelt und der Methodenapparat zur Beschreibung analoger Signale und Systeme auf die digitale Welt übertragen werden können. Wir werden sehen, dass es gelingt, zu jeder der in Kapitel 2 entwickelten Verfahren eine korrespondierende Methode für die Beschreibung von digitalen LTI-Systemen und zeitdiskreten Signalen zu entwerfen.

In die Problematik und die Eigenschaften digitaler Systeme soll zunächst anhand einfacher Beispiele eingeführt werden. Der erste Ansatz wird dabei die *diskrete Simulation eines analogen Systems* sein.

4.1 Einführungsbeispiele

Um die Diskussion möglichst elementar zu halten, ziehen wir zunächst das einfachste Beispiel aus Kapitel 2 heran und beginnen mit dem schon hinreichend untersuchten RC-Tiefpass (vgl. etwa die Beispiele 2.1 und 2.10).

Das Ziel der Überlegungen ist es, das Verhalten und die Eigenschaften eines RC-Tiefpasses mit Hilfe zeitdiskreter Signale (etwa der abgetasteten Ein- und Ausgangssignale des RC-Tiefpasses) und einem digitalen System (also einem Computerprogramm) nachzubilden.

4.1 Beispiel (Diskrete Simulation d. RC-Tiefpasses - Ansatz 1)

Der erste Ansatz zur Diskretisierung besteht in der synchronen Abtastung eines *kausalen* RC-Tiefpass-Eingangssignals $x(t)$ und des zugehörigen Ausgangssignals $y(t)$ mit Abtastrate $f_a = \frac{1}{T_a}$.

Die Abtastung des Ausgangssignals $y(t)$ ergibt eine Folge

$$\tilde{y}_n = y(nT_a), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (239.1)$$

für welche nach Gleichung (34.5) im eingeschwungenen Zustand des Tiefpasses gilt:

$$\tilde{y}_n = y(nT_a) = \frac{1}{T} \int_0^{nT_a} x(\tau) e^{-\frac{(nT_a - \tau)}{T}} d\tau. \quad (239.2)$$

Die soeben vorgenommene Zeitdiskretisierung des Ausgangssignals hat allerdings für unsere Zwecke den Nachteil, dass die Werte nach wie vor durch

eine Berechnung des Faltungsintegrals mit Hilfe des zeitkontinuierlichen Eingangssignals $x(\tau)$ bestimmt werden müssen.

In einem weiteren Schritt wird daher auch das Eingangssignal diskretisiert und das Integral auf der rechten Seite von (239.2) wie folgt¹ ersetzt:

$$y_n := \frac{1}{T} T_a \sum_{k=0}^n x(kT_a) e^{-\frac{(nT_a - kT_a)}{T}} \quad (240.1)$$

Übung 73 Die Bestimmung von y_n beruht somit auf einer Approximation des Integranden durch eine Treppenfunktion, welche ihrerseits auf der Abtastung von $x(\tau)$ mit der Abtastrate f_a beruht. Die Abtastwerte von Ein- und Ausgangssignal des RC-Tiefpasses werden durch (240.1) miteinander verknüpft.

Übung 74 Die Abtastwerte des Ausgangssignals $\tilde{y}_n = y(nT_a)$ werden allerdings nicht mehr exakt repräsentiert, sondern durch die Werte

$$y_n = \sum_{k=0}^n x_k h_{n-k} \quad (240.2)$$

approximiert, wobei die Folge $(h_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ durch

$$h_m := \begin{cases} 0 & m < 0 \\ \frac{T_a}{T} e^{-m \frac{T_a}{T}} & m \geq 0 \end{cases} \quad (240.3)$$

definiert ist.

Die so berechneten Werte y_n sind offenbar zumindest für kleine T_a (d.h. für große Abtastraten f_a) aufgrund der Integraldefinition über Riemannsche Zwischensummen i.Allg. eine gute Approximation für die tatsächlichen Abtastwerte $\tilde{y}_n$ des Ausgangssignals.

Man erhält in Gleichung (240.2) eine so genannte **Simulation 0-ter Ordnung**² des RC-Tiefpasses, welche offensichtlich (bis auf den Faktor T_a) auf der **Diskretisierung (240.3) der Impulsantwort**

$$h(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad (t \geq 0) \quad (240.4)$$

des analogen RC-Tiefpasses beruht! ■

¹ Alternativ dazu könnte man auch die Approximation $y_n := \frac{1}{T} T_a \sum_{k=0}^{n-1} x(kT_a) e^{-\frac{(nT_a - kT_a)}{T}}$ verwenden.

² Der Integrand in (239.2) wurde durch eine Treppenfunktion, also mit Hilfe von Stücken von Polynomen 0-ten Grades approximiert.

4.2 Beispiel (Diskrete Simulation d. RC-Tiefpasses - Ansatz 2)

Eine Beschreibung des Systemverhaltens des RC-Tiefpasses im Zeitbereich liefert neben der Impulsantwort aber bekanntlich auch die Differentialgleichung (34.4).

Diese Tatsache legt folgende Idee für einen weiteren Diskretisierungsansatz nahe. Man diskretisiere die Differentialgleichung

$$T\dot{y}(t) + y(t) = x(t) \quad (241.1)$$

des RC-Tiefpasses durch eine Diskretisierung der Ableitung $\dot{y}(t)$ über den zugehörigen Differenzenquotienten mit Schrittweite T_a gemäß:

$$\dot{y}(nT_a) \approx \frac{1}{T_a}(y(nT_a) - y((n-1)T_a)). \quad (241.2)$$

Setzen wir in diesem Fall $y_n := y(nT_a)$, so wird $T\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$ approximiert durch:

$$\begin{aligned} & \frac{T}{T_a}(y_n - y_{n-1}) + y_n = x_n \\ \Leftrightarrow & \quad y_n - \left(\frac{T}{T + T_a}\right)y_{n-1} = \frac{T_a}{T + T_a}x_n. \end{aligned} \quad (241.3)$$

In Übung 73, S. 246 wird gezeigt werden, dass die mit dem ersten Ansatz gewonnene Formel (240.2) zur rekursiven Gleichung

Übung 73

$$y_n - e^{-T_a/T}y_{n-1} = \frac{T_a}{T}x_n \quad (241.4)$$

äquivalent ist.

Für $T_a \ll T$ (Abtastrate $\ll$ Zeitkonstante) gilt dann offenbar, dass Gleichung (241.4) ungefähr Gleichung (241.3) entspricht und so beide Ansätze in eine nahezu äquivalente Simulation übergehen. ■

Es sollte an dieser Stelle bemerkt werden, dass das Systemverhalten der durch die Rekursionsgleichungen (241.3) und (241.4) definierten Systeme zu einem Zeitpunkt n (etwa $n = 0$) neben dem aktuellen Wert des Eingangssignals x_n offensichtlich noch vom Wert des Ausgangssignals y_{n-1} abhängt.

Beobachtet (und erregt) man das System also ab einem gewissen Zeitpunkt³ (den wir ohne Einschränkung als $n = 0$ festlegen können), so ist die Systemantwort vom Wert des Ausgangssignals y_{-1} vor Beginn der Erregung, also von dessen *Anfangszustand* abhängig!

³ Man beachte, dass in der Praxis auch nichts anderes möglich ist, da das System durch ein Programm (s. MATLAB-Simulation) realisiert wird, welches wir nur ab einem gewissen Startzeitpunkt anregen und beobachten können!

Dies entspricht der Situation für analoge Systeme, die durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden. Das Systemverhalten hängt vom Anfangswert ab. In Kapitel 2 wurden die Systeme daher stets im **Zustand der Ruhe** betrachtet, um wichtige Systemeigenschaften wie *Linearität* und *Zeitinvarianz* zu gewährleisten.

Übung 76 Wir werden dies (aus den gleichen Gründen, vgl. Übung 76) auch für digitale Systeme im Folgenden voraussetzen.

Mit Hilfe von MATLAB und der theoretischen Erkenntnisse aus Kapitel 2 können wir überprüfen, wie gut die berechneten Approximationen 0-ter Ordnung das Verhalten des RC-Tiefpasses simulieren. MATLAB bietet dafür zahlreiche vorgefertigte Möglichkeiten, auf die wir aber später zurückkommen wollen.

Die Rekursionsformeln (241.3) und (241.4) können ganz elementar in Form einer Programmierschleife realisiert werden. Der folgende Ausschnitt des Programms **RCSimuOrd0.m** berechnet die Approximation des RC-Tiefpass-Ausgangssignals gemäß (241.3) und (241.4) für ein sinusförmiges Eingangssignal und stellt sie dem nach (173.1), (173.2) und Abbildung 2.38 bestimmten, exakten Ausgangssignal des Tiefpasses gegenüber:

```
% Übertragungsfunktion des RC-Tiefpass
% definieren
T = 1;
s = tf('s');
H = 1/(T*s+1);

% Frequenz des sinusförmigen Eingangssignals in Hz
% definieren (es wird ein 2 Hz-Sinus simuliert)
frq = 2;

% Amplituden- und Phasenänderung berechnen
[Amp,phas] = bode(H,2*pi*frq);

% Nullphase in rad umrechnen
nphas = 2*pi*phas/360;

% Zeitintervall für die grafische Darstellung festlegen
t = (0:0.001:5);

% Theoretisches Ausgangssignal des RCTP berechnen
sigaus = Amp*sin(2*pi*frq*t+nphas);

% Abtastrate fa festlegen
fa = 10; % fa = 25; (ggf. Script hier editieren)
Ta = 1/fa;
```

```

% Sinusförmiges Eingangssignal abtasten

tn = (0:Ta:5); N = length(tn);
xn = sin(2*pi*frq*tn);

% Simulation mit Hilfe einer for-Schleife

% Vorinitialisierung (das System wird zum
% Startzeitpunkt als "in Ruhe" befindlich
% angenommen (y_{-1} = 0)
yn1 = [xn(1)*Ta/(T+Ta), zeros(1,N-1)];
yn2 = [xn(1)*Ta/T, zeros(1,N-1)];

for k=2:N
    % Berechnung nach Formel 1
    yn1(k) = yn1(k-1)*T/(T+Ta)+xn(k)*Ta/(T+Ta);
    % Berechnung nach Formel 2
    yn2(k) = yn2(k-1)*exp(-Ta/T)+xn(k)*Ta/T;
end

```

In Abbildung 4.1 ist das Ergebnis für zwei Abtastraten ($f_a = 10$ Hz und $f_a = 25$ Hz) gegenübergestellt. Der Signalausschnitt ist so gewählt, dass sich das System im eingeschwungenen Zustand befindet.

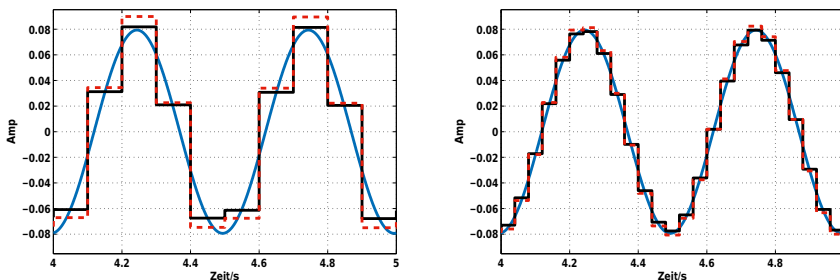


Abb. 4.1: Ausgangssignal für eine digitale Simulation 0-ter Ordnung des RC-Tiefpass für ein 2 Hz-Sinussignal am Tiefpasseingang bei einer Abtastrate von 10 Hz bzw. von 25 Hz

Zur Illustration der Struktur digitaler Systeme sollen nun noch zwei weitere einfache Beispiele betrachtet werden. Das erste System berechnet die Ausgangssignalwerte auf der Grundlage einer so genannten **gleitenden gewichteten Mittelung** endlich vieler Eingangssignalwerte. Dabei wird zu jedem Zeitpunkt eine Reihe von Eingangssignalwerten zwischengespeichert und gemittelt. Der berechnete Mittelwert repräsentiert dann den für diesen Zeitpunkt gültigen Ausgangssignalwert des Systems. Die Mittelwertbildung er-

folgt *gewichtet*, d.h. die gespeicherten Werte werden nicht wie beim arithmetischen Mittel „gleichberechtigt“ zur Mittelwertbildung herangezogen, sondern entsprechend vordefinierter Gewichtungsfaktoren.

4.3 Beispiel (Gleitende gewichtete Mittelung)

Wir definieren zunächst folgende Koeffizienten:

$$h_0 = \frac{1}{9}, \quad h_1 = \frac{2}{9}, \quad h_2 = \frac{3}{9}, \quad h_3 = \frac{2}{9}, \quad h_4 = \frac{1}{9} \quad (244.1)$$

und

$$h_k = 0 \quad \forall k < 0, \quad \forall k > 4.$$

Nun betrachten wir zum Eingangssignal $x_n := x(nT)$ die folgende, analog zu Gleichung (240.2) definierte Summe:

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{k=0}^4 h_k x_{n-k} \\ &= h_0 x_n + h_1 x_{n-1} + h_2 x_{n-2} + h_3 x_{n-3} + h_4 x_{n-4} \\ &= \dots + h_{-2} x_{n+2} + h_{-1} x_{n+1} + h_0 x_n + h_1 x_{n-1} \\ &\quad + h_2 x_{n-2} + h_3 x_{n-3} + h_4 x_{n-4} + h_5 x_{n-5} + \dots \\ &= \dots + x_{-2} h_{n+2} + x_{-1} h_{n+1} + x_0 h_n + x_1 h_{n-1} \\ &\quad + x_2 h_{n-2} + x_3 h_{n-3} + x_4 h_{n-4} + x_5 h_{n-5} + \dots \end{aligned} \quad (244.2)$$

Dabei berücksichtigt man, dass die Koeffizienten h_k , $k \notin \{0, \dots, 4\}$ verschwinden. Somit lässt sich die Beziehung (244.2) formal in folgender Form schreiben:

$$y_n \stackrel{!}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} h_k \stackrel{!}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k}. \quad (244.3)$$

Durch die Gleichungen (244.2) und (244.3) wird ein digitales System

$$\mathfrak{S} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

definiert, dessen Verhalten in Abbildung 4.2 anhand von zwei digitalisierten Sinusoiden als Eingangsfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dargestellt ist (vgl. hierzu das MATLAB-Programm **GIGewMittel.m**).

Die Ergebnisse solcher Experimente mit sinusförmigen Eingängen legen die Vermutung nahe, dass das System Tiefpasswirkung hat. ▀

Das zweite Beispielsystem berechnet die Ausgangssignalwerte auf der Grundlage einer Rekursionsformel.

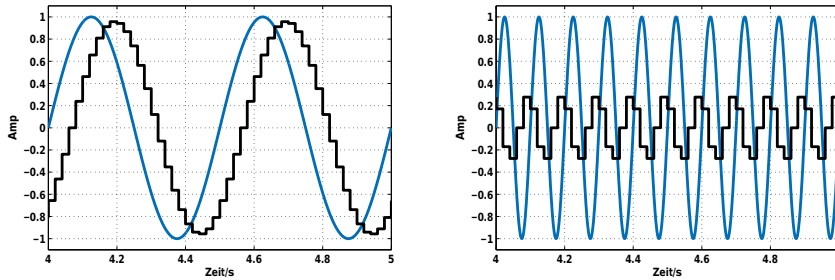


Abb. 4.2: Wirkung der gleitenden gewichteten Mittelung auf abgetastete sinusoiden Eingangssignale

4.4 Beispiel (Rekursionsformel)

Wir definieren ein digitales System $\mathfrak{S} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ durch folgende Rekursionsvorschrift:

$$y_n = y_{n-1} - \frac{25}{36}y_{n-2} + x_n - \frac{3}{4}x_{n-1}. \quad (245.1)$$

Dabei gehen wir davon aus, dass das System nur durch *kausale Signale*, d.h. durch Signale mit $x_n = 0 \forall n < 0$, angeregt wird und sich zu Beginn in Ruhe⁴ befindet ($y_n = 0 \forall n < 0$).

Übung 75

Auch diese Vorschrift ist in MATLAB leicht zu programmieren, wie der folgende Ausschnitt von `rec_formel.m` zeigt:

```
N = length(xn); % Zahl der Stützstellen
                % Vorinitialisierung mit
                % den Anfangswerten

yn = [0, 0, zeros(1,N)]; % Berücksichtigung von x_{-1}
xn = [0, xn];

% die Rekursionsformel
for k=1:N
    yn(k+2) = yn(k+1) - 25/36*yn(k) + xn(k+1) - 3/4*xn(k);
end

% Elimination der künstlich eingefügten Nullen
yn(1:2) = [];
```

⁴ Mathematisch gesehen bedeutet dies, dass $\mathfrak{S}$ eine Abbildung vom Raum der kausalen Signale in den Raum der kausalen Signale ist.

Mit Hilfe dieser Funktion kann das Verhalten des Systems für verschiedene Eingangssignale experimentell ermittelt werden. Abbildung 4.3 stellt die Reaktion des Systems auf einen diskreten Einheitssprung

$$\sigma_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0, \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases} \quad (246.1)$$

dar (vgl. MATLAB-Script **Aufruf_rec_formel.m**).

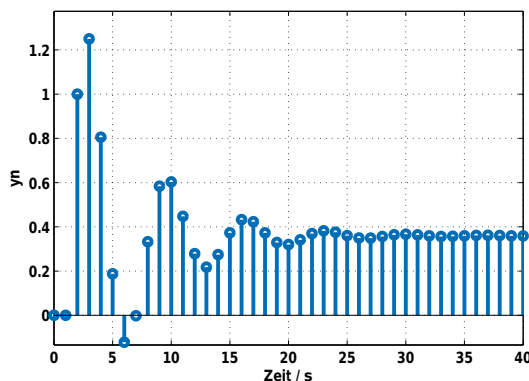


Abb. 4.3: Antwort eines durch die Rekursionsformel (245.1) definierten digitalen Systems $\mathcal{S}$ auf einen diskreten Einheitssprung

Das Systemverhalten ist in diesem Falle nicht so klar erkennbar, auch wenn man mehrere Experimente mit sinusförmigen Eingangssignalen durchführt. Das Experiment mit dem Einheitssprung legt die Vermutung nahe, dass das System beschränkte Signale in beschränkte Signale überführt. In Kapitel 2 wurde dies für analoge Systeme mit den Begriff der *Stabilität* gekennzeichnet. Einen entsprechenden Stabilitätsbegriff werden wir im Folgenden auch für digitale Systeme definieren und Kriterien dafür herleiten. ■

Numerische Experimente, wie wir sie für die vorangegangenen Beispiel durchgeführt haben, bieten zwar einen gewissen Einblick in das Systemverhalten, lassen aber natürlich i.Allg. keine gesicherten Rückschlüsse zu. Hierfür müssen, ähnlich wie in Kapitel 2 für den zeitkontinuierlichen Fall, Methoden entwickelt werden, die das Systemverhalten eindeutig mathematisch beschreiben. Diese Methoden werden in den nachfolgenden Abschnitten vorgestellt.

4.1.1 Übungsaufgaben

Übung 73 (Lösungsband Seite 183)

Zeigen Sie, dass die Gleichung (240.1) in die äquivalente rekursive Gleichung

$$y_n - e^{-T_a/T} y_{n-1} = \frac{T_a}{T} x_n \quad (247.1)$$

überführt werden kann.

Übung 74 (Lösungsband Seite 184)

Betrachten Sie nochmals die Simulation 0-ter Ordnung des RC-Tiefpasses (s. Beispiel 4.1).

Entwerfen Sie analog zur Vorgehensweise aus Beispiel 4.1 eine so genannte **Simulation 1. Ordnung**, indem Sie den Integranden des Systemintegrals des RC-Tiefpasses nicht, wie im Beispiel, durch eine Treppenfunktion, sondern (nach Art der Trapezregel für die numerische Integration) durch einen Polygonzug approximieren.

Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, mit dem Sie Ihre Lösung simulativ überprüfen können.



Übung 75 (Lösungsband Seite 186)

Zeigen Sie, dass das System $\mathfrak{S} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, welches durch die Gleichung

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^n x_k \quad (247.2)$$

definiert ist, auch durch die rekursive Gleichung

$$y_n = y_{n-1} + x_n \quad (247.3)$$

beschrieben werden kann.

4.2 Grundlegende Systemeigenschaften

Alle Beispiele des Abschnittes 4.1 stellen einen Zusammenhang zwischen einer (reellen oder komplexen) **(Zahlen)Folge** $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und einer **Folge** $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ her, der in Form eines Algorithmus oder eines Programms realisiert wird.

Es wurde bereits erwähnt, dass wir diesen Zusammenhang als **digitales System**

$$\mathfrak{S} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \quad (247.4)$$

auffassen, wobei $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ als **Eingangssignal(folge)** des Systems $\mathfrak{S}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ als dessen **Antwort** auf dieses Eingangssignal betrachtet wird.

Für die Beispielsysteme können, ähnlich wie in Abschnitt 2.2 von Kapitel 2, wesentliche Systemeigenschaften abgeleitet werden.

Linearität

In den Beispielen 4.1 bis 4.4 wurden zwei mögliche Formen für die Darstellung des Zusammenhangs (247.4) herausgearbeitet.

Zum einen wurde das Ausgangssignal $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit Hilfe eines Signals $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in der Form

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} \quad (248.1)$$

Übung 79

Übung 80

(vgl. (244.3)), zum anderen in Form einer Rekursionsgleichung (vgl. (245.1)) dargestellt.

Aus den Linearitätseigenschaften der Summe folgt im ersten Fall, dass gilt⁵:

$$\mathfrak{S}(a \cdot x_n) = a \cdot \mathfrak{S}(x_n), \quad (248.2)$$

$$\mathfrak{S}(x_n + y_n) = \mathfrak{S}(x_n) + \mathfrak{S}(y_n) \quad (248.3)$$

Die **Systeme**, die sich gemäß (248.1) darstellen lassen, sind somit **linear**!

Auch das durch die Rekursionsgleichung (241.3) in Beispiel 4.2 definierte System ist linear.

Man betrachte dazu

$$\mathfrak{S} : (x_n^{(1)})_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n^{(1)})_{n \in \mathbb{Z}}$$

und

$$\mathfrak{S} : (x_n^{(2)})_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n^{(2)})_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Durch Addition der entsprechenden Gleichungen (241.3) folgt:

$$y_n^{(1)} + y_n^{(2)} = \left(\frac{T}{T + T_a} \right) (y_{n-1}^{(1)} + y_{n-1}^{(2)}) + \frac{T_a}{T + T_a} (x_n^{(1)} + x_n^{(2)}). \quad (248.4)$$

Da die Lösung einer linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten *eindeutig* ist⁶, gilt:

⁵ Genau genommen muss man hier bei der Eigenschaft (248.3) etwas vorsichtig sein, da die Summanden einer einfach konvergenten Reihe nicht beliebig umgeordnet werden können. Ist $\mathfrak{S}$ jedoch beispielsweise für beschränkte Folgen wohldefiniert, so sind die Reihen absolut konvergent und die Summanden x_n, y_n können in der in (248.3) dargestellten Weise zusammengefasst werden. Diese mathematischen Spitzfindigkeiten dürften jedoch für die Ingenieurpraxis irrelevant sein.

⁶ Dies ist genauso wie bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Wir wollen dies aber hier nicht nachweisen.

$$\mathfrak{S} : (x_n^{(1)} + x_n^{(2)})_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n^{(1)} + y_n^{(2)})_{n \in \mathbb{Z}}. \quad (249.1)$$

Das Superpositionsprinzip für $\mathfrak{S}$ ist damit erfüllt.

Dabei gehen wir natürlich davon aus, dass $y_{n-1}^{(1)} = 0, y_{n-1}^{(2)} = 0$ und das System folglich „in Ruhe“ ist, denn ansonsten würden die Ausgangssignale nicht ausschließlich von den Eingangssignalen abhängen, sondern vom gewählten Anfangszustand, und das Überlagerungsprinzip wäre nicht mehr gültig.

Das Verstärkungsprinzip weist man völlig analog nach. Wir wollen daher auf eine ausführliche Darstellung an dieser Stelle verzichten.

Allerdings sollte erwähnt werden, dass die Linearität offenbar eine Folge der Tatsache ist, dass die Rekursionsgleichung **konstante Koeffizienten** hat und keine nichtlinearen Abhängigkeiten von $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ enthält. Somit lässt sich die Argumentation aus (248.4) auf alle Rekursionsformeln dieser Art übertragen.

Zeitinvarianz

In Abschnitt 2.2 von Kapitel 2 wurde **Zeitinvarianz** als die Eigenschaft des Systems definiert, auf ein um einen Zeitraum h verzögertes Eingangssignal mit einem entsprechend verzögerten Ausgangssignal zu reagieren. Das Verhalten eines solchen Systems ist daher *nicht zeitabhängig*.

In der diskreten Welt sind „Verzögerungen“ natürlich nur im Rahmen des Abtasttaktes möglich. Ist also $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein diskretes Signal, so ist eine dazu um $k_0 \in \mathbb{N}$ Takte **zeitverzögerte** Folge $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ definiert durch:

$$\tilde{x}_n := x_{n-k_0} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (249.2)$$

Im diskreten Fall stellt sich damit die Eigenschaft der Zeitinvarianz wie folgt dar:

Übung 76

Sei

$$\mathfrak{S} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

ein digitales System mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{S}(x_{n-k_0}) = y_{n-k_0} = \mathfrak{S}(x)_{n-k_0}. \quad (249.3)$$

Dann heißt $\mathfrak{S}$ **zeitinvariant**.

Auch digitale zeitinvariante Systeme zeichnen sich folglich dadurch aus, dass sie unabhängig vom Startzeitpunkt der Beobachtung auf gleiche Eingangssignale mit gleichen Ausgangssignalen reagieren.

Systeme $\mathfrak{S}$ gemäß (240.2) — und allgemein auch gemäß (248.1) — sind **zeitinvariant**! Dazu betrachte man eine um k_0 Takte zeitverzögerte Eingangsfolge

$$\tilde{x}_n := x_{n-k_0}.$$

Aus (240.2) und (240.3) folgt dann:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n &:= \sum_{k=0}^n \tilde{x}_k h_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_k h_{n-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_{n-k} h_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k_0-k} h_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{(n-k_0)-k} \stackrel{!!}{=} y_{n-k_0}. \end{aligned} \quad (250.1)$$

Man erhält also am Ausgang, wie für die Zeitinvarianz gefordert, eine entsprechend zeitverzögerte Version des ursprünglichen Ausgangssignals.

Übung 76

Auch für die in den Beispielen aus Abschnitt 4.1 betrachteten Rekursionsgleichungen lässt sich die Zeitinvarianz für Systeme „in Ruhe“ nachweisen. Man betrachte dazu die Übung 76.

BIBO-Stabilität

Insbesondere für die durch Rekursionsformeln definierten Systeme besteht die Gefahr, dass sich die Ausgangswerte durch die in der Rekursion definierten Rückkopplungen aufschaukeln.

Die Ausgangssignalwerte wachsen an, obwohl die Eingangssignalwerte dies nicht tun. Dies ist die schon aus dem zeitkontinuierlichen Fall bekannte Eigenschaft der Nicht-**Stabilität** eines Systems.

Übung 78

Für digitale Systeme kann die Stabilitätseigenschaft wie folgt formuliert werden:

Sei

$$\mathfrak{S} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

ein digitales System mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq M < \infty \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \exists K > 0 : \quad |y_n| &\leq K < \infty \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (250.2)$$

Dann heißt $\mathfrak{S}$ **BIBO-stabil**.

Es ist klar, dass die Stabilitätskriterien für zeitkontinuierliche Systeme im diskreten Fall nicht verwendet werden können. Wir müssen im Folgenden Kriterien erarbeiten, anhand derer man die Stabilität eines *digitalen* Systems beurteilen kann, ohne die obige, in der Praxis unhandliche Definition bemühen zu müssen.

Kausalität

Wesentliche Voraussetzung für die Realisierbarkeit eines Systems ist die Forderung, dass die Werte der Ausgangssignale zu einem gegebenen Zeitpunkt nur von Werten der Eingangssignale zu diesem oder einem *früheren* Zeitpunkt abhängen, nicht jedoch etwa von „zukünftigen“ Werten.

Dieses Verhalten wurde in Abschnitt 2.2 als die Eigenschaft der **Kausalität** eines Systems definiert, die natürlich auch im diskreten Fall wesentlich ist. Übung 77

Ist

$$\mathfrak{S} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

ein digitales System mit der Eigenschaft, dass y_n ausschließlich von Werten x_k , $k \leq n$ des Eingangssignals abhängt (und nicht von zeitlich „späteren“ Werten), so heißt $\mathfrak{S}$ **kausal**.

Wie schon in Abschnitt 2.2 erwähnt, ist die Kausalitätsforderung insbesondere in der Digitalen Signalverarbeitung manchmal analytisch unpraktisch. Daher werden im Folgenden aus Vereinfachungsgründen auch nicht-kausale Systeme betrachtet. Diese Systeme macht man dann meist durch eine einfache Verschiebung des Zeitmaßes (mit Hilfe einer Zwischenspeicherung) wieder kausal und damit realisierbar. Man vergleiche dazu etwa den Quellcode des Programms **rec_formel.m** auf Seite 245.

LTI-Systeme

Ähnlich wie in Kapitel 2 wollen wir uns bei den folgenden Untersuchungen auf die Beschreibung und Analyse der Klasse von Systemen konzentrieren, die die obigen Eigenschaften besitzen. Dies sind die genannten **linearen zeitinvarianten Systeme**, kurz **LTI-Systeme**:

Ein digitales System $\mathfrak{S}$ heißt ein **lineares zeitinvariantes System**, kurz **digitales LTI - System**, wenn gilt:

- $\mathfrak{S}$ ist linear,
- $\mathfrak{S}$ ist zeitinvariant.

Wir werden im Folgenden Methoden zur Beschreibung von digitalen LTI-Systemen im Zeit-, Bild- und Frequenzbereich entwickeln und damit den Methodenapparat aus Kapitel 2 auf digitale Systeme erweitern.

4.2.1 Übungsaufgaben

Übung 76 (Lösungsband Seite 187)



Betrachten Sie das System $\mathfrak{S} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, welches, ähnlich wie das aus (241.4), durch die **Differenzengleichung**⁷

$$y_n - a \cdot y_{n-1} = b \cdot x_n, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (252.1)$$

gegeben ist. Setzen Sie voraus, dass das System „in Ruhe“ ist und nur durch kausale Signale angeregt wird.

Weisen Sie nach, dass das so definierte System **zeitinvariant** ist.

Übung 77 (Lösungsband Seite 188)

Weisen Sie nach, dass das durch (252.1) definierte digitale System **kausal** ist.

Übung 78 (Lösungsband Seite 188)

Untersuchen Sie, für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ das durch (252.1) definierte digitale System **stabil** ist.

Übung 79 (Lösungsband Seite 191)



Finden Sie heraus, wie das durch (252.1) definierte digitale System in der Form

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot h_{n-k} \quad (252.2)$$

geschrieben werden kann.

Orientieren Sie sich dabei an der Lösung von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und gehen Sie folgendermaßen vor:

(a) Bestimmen Sie eine Lösung der *homogenen* Differenzengleichung

$$y_n - a \cdot y_{n-1} = 0 \quad (252.3)$$

mit Hilfe eines „Exponentialansatzes“. Machen Sie sich dabei klar, wie der Exponentialansatz für Differentialgleichungen auf einen äquivalenten Ansatz für Differenzengleichungen übertragen werden könnte.

⁷ Siehe Definition (253.1)!

- (b) Bestimmen Sie anschließend eine Lösung der Differenzengleichung (252.1) mit Hilfe einer „Variation der Konstanten“. Machen Sie sich dabei klar, wie die Technik der Variation der Konstanten für Differentialgleichungen auf eine äquivalente Technik für Differenzengleichungen übertragen werden könnte.
- (c) Ermitteln Sie aus der Lösung die Darstellung (252.2).

4.3 Signale und LTI-Systeme im Zeitbereich

In den Beispielen des Abschnittes 4.1 wurden die Zusammenhänge zwischen Ein- und Ausgangssignal eines digitalen Systems stets durch die explizite oder implizite Abhängigkeit der Werte y_n zum „Zeitpunkt“ $n \in \mathbb{Z}$ von den übrigen Werten der Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ angegeben. Eine solche Darstellung nennen wir eine Darstellung *im Zeitbereich*.

4.3.1 Darstellung mit Differenzengleichungen

Die in den Beispielen hergeleiteten Gleichungen (241.3), (241.4) und (245.1) haben eine ähnliche Gestalt wie Differentialgleichungen, wobei die Ableitungen durch Differenzen ersetzt werden. Im Falle der Systembeschreibung (241.3) wurde diese ja sogar explizit durch Diskretisierung einer Differentialgleichung gewonnen.

Solche diskreten Gleichungen mit konstanten Koeffizienten führen unter gewissen Voraussetzungen ebenfalls zu **LTI-Systemen**, wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt wurde (vgl. Seite 249 und Übung 76). Die besagten Gleichungen heißen **Differenzengleichungen**.

Unter einer **linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten** versteht man eine Gleichung der Form:

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{n-k} = \sum_{j=0}^M b_j x_{n-j}, \quad a_k, b_j \in \mathbb{C}. \quad (253.1)$$

Es gibt ähnliche Verfahren zur Lösung von linearen Differenzengleichungen wie für lineare Differentialgleichungen, etwa den Exponentialansatz und die daraus resultierenden Verfahren, welche auf der Bestimmung der Lösungen einer charakteristischen Gleichung beruhen (vgl. Übung 79).

Wir wollen auf diese Lösungstechniken im Einzelnen an dieser Stelle jedoch nicht eingehen und verweisen den Leser hierfür z.B. auf Anhang A.6, S. 551. Explizit soll an dieser Stelle lediglich über digitale Systeme, die durch solche **Linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten** definiert werden, Folgendes festgehalten werden:

Jedes auf dem Raum der *kausalen* Signale $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ durch eine **lineare Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten**

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{n-k} = \sum_{j=0}^M b_j x_{n-j}, \quad a_k, b_j \in \mathbb{C} \quad (254.1)$$

beschriebene System $\mathfrak{S}$, welches zu Beginn der Beobachtung „in Ruhe“, ist (d.h. für das $y_{-1} = \dots y_{-N} = 0$ vorausgesetzt ist), ist ein digitales **lineares zeitinvariantes System**, kurz digitales **LTI-System**.

4.3.2 Zustandsraumdarstellung

Das Konzept der Zustandsraumdarstellung wurde im Fall zeitkontinuierlicher LTI-Systeme aus dem Gedanken und der Beobachtung heraus entwickelt, dass ein physikalisches System auch mit Hilfe „innerer“ System-„zustände“ beschrieben werden kann. Der Vorteil dieser Beschreibungsweise lag darin, dass sich zum einen die Beschreibung auf Differentialgleichungen 1. Ordnung reduziert, zum anderen diese Zustände oft auch realen physikalischen Größen — etwa den im System vorhandenen Energiespeichern — zuordnen lassen, was die mathematische Modellierung gegenüber der Beschreibung durch Differentialgleichungen höherer Ordnung wesentlich erleichtert.

Dieses Konzept kann auch auf digitale Systeme übertragen werden, wobei allerdings gesagt werden muss, dass die Bedeutung der daraus resultierenden Darstellungsform nicht die gleiche ist, wie im analogen Fall, da ein digitales System ja, wie bereits erwähnt, ein Computerprogramm ist. Im Sinne der Suche nach einer Systemmodellierung eines gegebenen Systems hat die Zustandsraumdarstellung also keine Bedeutung.

Die diskrete Zustandsraumdarstellung wird ganz analog zum zeitkontinuierlichen Fall formuliert:

Sei $\vec{u}_n$ das **Eingangssignal (der Eingangssignalvektor)** eines digitalen LTI-Systems $\mathfrak{S}$, $\vec{y}_n$ das **Ausgangssignal (der Ausgangssignalvektor)**. Sei $\vec{x}_n$ ein Signalvektor von inneren Zuständen des Systems (**der Vektor der Zustandsvariablen**). Seien A, B, C, D (komplexe oder reelle) Matrizen. Dann heißt eine Darstellung des Ein-/Ausgangsverhaltens des LTI-Systems $\mathfrak{S}$ der Form

$$\begin{aligned} \vec{x}_{n+1} &= A \cdot \vec{x}_n + B \cdot \vec{u}_n, \\ \vec{y}_n &= C \cdot \vec{x}_n + D \cdot \vec{u}_n \end{aligned} \quad (254.2)$$

eine **(zeitdiskrete) Zustandsraumdarstellung** des LTI-Systems.

Die Matrizen A, B, C, D werden **Zustandsmatrizen** genannt, wobei im Einzelnen die Bezeichnungen von S. 51 übernommen werden.

Diese Betrachtungsweise eines digitalen Systems wird grafisch in Abbildung 4.4 wiedergegeben [14].

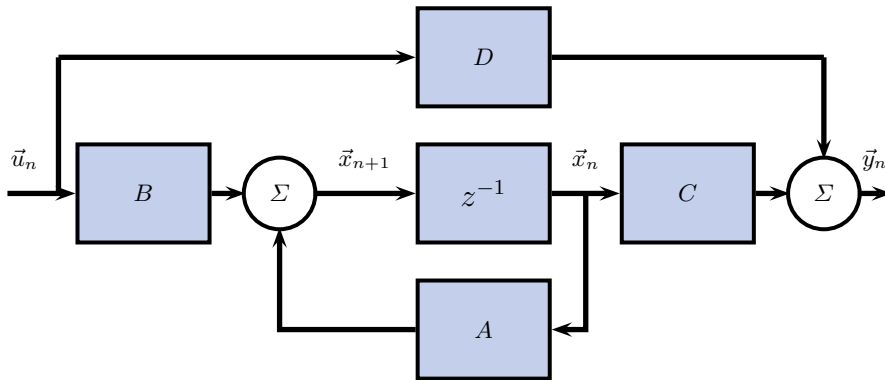


Abb. 4.4: Signalflussdarstellung der Zustandsgleichungen eines *digitalen* LTI-Systems

Für die in diesem Buch vornehmlich betrachteten digitalen Single-Input-Single-Output (SISO) LTI-Systeme⁸

$$\mathfrak{S} : u_n \mapsto y_n$$

kann ein Zustandsraummodell bei gegebener Beschreibung durch eine Differenzengleichung höherer Ordnung

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{n-k} = \sum_{j=0}^M b_j x_{n-j}, \quad a_k, b_j \in \mathbb{C} \quad (255.1)$$

stets mit Hilfe eines Standardtricks erzeugt werden.

Wir wollen dies an einem Beispiel erläutern:

4.5 Beispiel (Beispiel zur diskreten Zustandsraumdarstellung)

Sei $\mathfrak{S}$ ein LTI-System, welches durch die Differenzengleichung

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} + a_2 y_{n+2} = b_0 u_n + b_1 u_{n+1} \quad (255.2)$$

Übung 81

gegeben ist. Wir definieren nun (willkürlich!) den „Zustand“ $x_n^{(1)}$ als Lösung der Differenzengleichung

⁸ D.h. Aus- und Eingangssignal sind *keine* vektoriellen Größen!

$$a_0 x_n^{(1)} + a_1 x_{n+1}^{(1)} + a_2 x_{n+2}^{(1)} = u_n \quad (256.1)$$

und $x_n^{(2)} := x_{n+1}^{(1)}$ als zeitverschobene Version von $x_n^{(1)}$.

Mit diesen Definitionen erhält man:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(1)} &= x_n^{(2)}, \\ x_{n+1}^{(2)} &= x_{n+2}^{(1)} = \frac{1}{a_2} \left(-a_1 x_n^{(2)} - a_0 x_n^{(1)} + u_n \right). \end{aligned} \quad (256.2)$$

Dies kann in Matrixschreibweise in der Form

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{pmatrix} \cdot u_n \quad (256.3)$$

geschrieben werden.

Da $x_n^{(1)}$ nach Definition die Differenzengleichung (256.1) erfüllt, erfüllt $x_n^{(2)}$ die Differenzengleichung

$$a_0 x_n^{(2)} + a_1 x_{n+1}^{(2)} + a_2 x_{n+2}^{(2)} = u_{n+1}. \quad (256.4)$$

Damit erfüllt $b_0 x_n^{(1)} + b_0 x_n^{(2)}$ die Differenzengleichung (255.2), d.h. $y_n \stackrel{!}{=} b_0 x_n^{(1)} + b_0 x_n^{(2)}$. Dies kann in Matrixform wie folgt dargestellt werden:

$$y_n = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + 0 \cdot u_n. \quad (256.5)$$

Damit sind die Matrizen A, B, C, D einer Zustandsraumdarstellung festgelegt. ■

Die Zustandsraumdarstellung ist, wie im analogen Fall, auch im diskreten Fall natürlich nicht eindeutig.

Betrachtet man nämlich wieder für einen Zustandsvektor $\vec{x}_n$ und eine invertierbare Matrix P den mittels

$$\underline{\vec{x}}_n = P \vec{x}_n \iff P^{-1} \underline{\vec{x}}_n = \vec{x}_n \quad (256.6)$$

definierten neuen Zustandsvektor $\underline{\vec{x}}_n$, so lässt sich erneut nachrechnen, dass man aus

$$\begin{aligned} P^{-1} \underline{\vec{x}}_{n+1} &= A P^{-1} \underline{\vec{x}}_n + B \cdot \vec{u}_n, \\ \underline{\vec{y}}_n &= C P^{-1} \underline{\vec{x}}_n + D \cdot \vec{u}_n \end{aligned} \quad (256.7)$$

die **äquivalente Zustandsraumdarstellung**

$$\begin{aligned}\vec{x}_{n+1} &= \tilde{A}\vec{x}_n + \tilde{B} \cdot \vec{u}_n, \\ \vec{y}_n &= \tilde{C}\vec{x}_n + D \cdot \vec{u}_n\end{aligned}\quad (257.1)$$

mit $\tilde{A} = PAP^{-1}$, $\tilde{B} = PB$ und $\tilde{C} = CP^{-1}$ erhält.

Zustandsraumdarstellungen können somit durch solche Transformationen ineinander überführt werden.

Es wurde gezeigt, wie sich die Zustandsraumdarstellung eines LTI-Systems, welches sich durch eine Differenzengleichung höherer Ordnung darstellen lässt, mittels einer allgemein gültigen Technik aus dieser Gleichung ableiten lässt. Auf den umgekehrten Weg kommen wir wieder später (s. Abschnitt 4.4.5) zurück.

4.3.3 Darstellung mit Signalflussdiagrammen

Es ist wie auch bei analogen Systemen üblich, digitale Systeme übersichtlich in Form von Signalflussdiagrammen und Blockschaltbildern nach Art von Abbildung 2.8, S. 61 darzustellen.

Darüber hinaus lassen sich LTI-Systeme, welche in Form von Differenzengleichungen darstellbar sind, detailliert ausschließlich unter Verwendung von *Additionsknoten*, *Verstärkungsgliedern* und *Taktverzögerungsgliedern* darstellen.

Abbildung⁹ 4.5 illustriert dies anhand der in Abschnitt 4.1 besprochenen gleitenden gewichteten Mittelung.

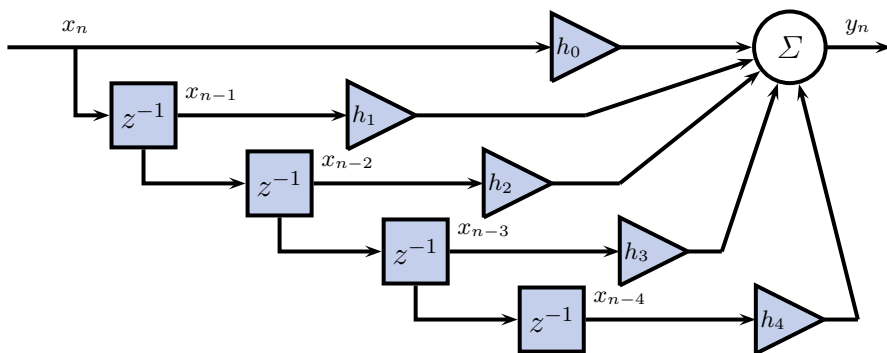


Abb. 4.5: Blockschaltbilddarstellung der gleitenden gewichteten Mittelung

Solche Blockschaltbilder lassen sich unmittelbar mit elementaren Blöcken in Simulink umsetzen. Abbildung 4.6 stellt das System „Gleitende gewichtete Mittelung“ in Form eines Simulink-Systems dar (vgl. `s_GIGewMittel.slx`).

⁹ Die Bedeutung der Bezeichnung z^{-1} für die Taktverzögerungsglieder wird in Abschnitt 4.4.1 erklärt.

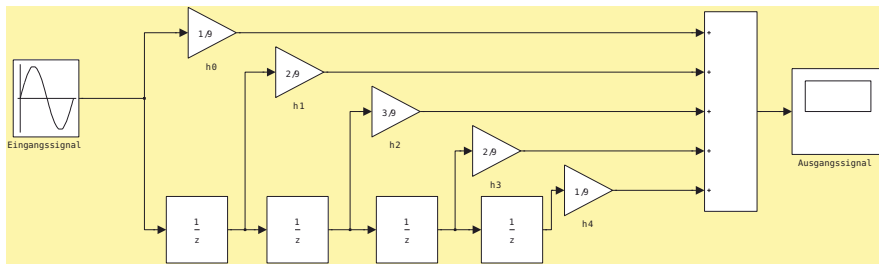


Abb. 4.6: Simulink-Blockschaltbilddarstellung der gleitenden gewichteten Mittelung

Es sollte allerdings an dieser Stelle schon erwähnt werden, dass die Umsetzung in Simulink im Allgemeinen nicht auf dieser elementarsten Ebene vorgenommen wird. Wie im analogen Fall auch, stehen allgemeinere Blöcke zur Umsetzung diskreter LTI-Systeme zur Verfügung. Wir werden hierauf in Abschnitt 4.4.6 zurückkommen.

4.3.4 Darstellung mittels Impuls- und Sprungantwort

In Abschnitt 2.3.4 des Kapitels 2 wurde gezeigt, dass sich (fast) alle LTI-Systeme im Zeitbereich mittels spezieller, für das System charakteristischer Signale darstellen lassen. Die Antworten eines LTI-Systems auf einen Einheitssprung bzw. auf einen Dirac-Impuls, die so genannte **Sprung-** bzw. **Impulsantwort** des Systems, kennzeichnen (im Allgemeinen¹⁰) ein LTI-System vollständig!

Wir wollen nun untersuchen, ob sich digitale LTI-Systeme auf ähnlich Weise im Zeitbereich kennzeichnen lassen, d.h. ob die Antworten auf spezielle Systemerregungen geeignet sind, das LTI-System vollständig zu beschreiben.

Sprung- und Impulssignal

Zur Beantwortung dieser Frage ist es sicherlich eine gute Strategie, zunächst auf die in Kapitel 2 untersuchten speziellen Systemerregungen *Einheitssprung* und *Impuls* zurückzugreifen und **zeitdiskrete Versionen** dieser Signale zu verwenden.

Diskretisiert man den Einheitssprung $\sigma(t)$ Abtastung mit Abtastrate $f_a := \frac{1}{T}$, so erhält man:

$$\sigma_n = \sigma(n \cdot T) = \begin{cases} 0 & n < 0, \\ 1 & n \geq 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (258.1)$$

Die Diskretisierung des Sprungsignals gestaltet sich also recht einfach.

¹⁰ Wir verweisen noch einmal auf die Diskussion nach dem Darstellungssatz (67.1).

Nicht ohne weiteres ist allerdings der Dirac-Impuls diskretisierbar. Da der Dirac-Impuls eine *Distribution* und kein reelles Signal ist, ist auch keine „Abtastung“ des Dirac-Impulses möglich.

Um zu einer diskreten Version von $\delta_0(t)$ zu kommen, bedienen wir uns daher eines in Abschnitt 2.3.4 hergeleiteten Zusammenhangs zwischen $\sigma(t)$ und $\delta_0(t)$. Im distributionellen Sinne galt (vgl. (81.5)):

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = \delta_0(t). \quad (259.1)$$

Das heißt, dass wir den Dirac-Impuls als zeitliche Änderung des Einheitssprungs auffassen können.

Übertragen wir diese Idee in die digitale Welt, so müssen wir die Änderungen der Werte des Einheitssprungs *von Abtastzeitpunkt zu Abtastzeitpunkt* auftragen. Bedingt durch diese Taktung erweist sich die „diskrete Ableitung“ als wesentlich einfacher als im zeitkontinuierlichen Fall, denn man erhält:

$$\delta_n := \delta_0(n) := \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 0 & n \neq 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (259.2)$$

Wir bezeichnen dieses Signal als den **diskreten Impuls**.

Die Abbildung 4.7 illustriert den diskreten Einheitssprung und den diskreten Impuls grafisch.

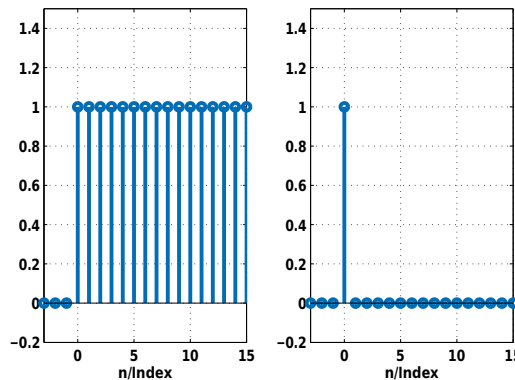


Abb. 4.7: Diskreter Sprung und diskreter Impuls

Der diskrete Impuls ist zu allen Zeitpunkten $n \in \mathbb{Z}$ gleich 0, außer im Punkt $n = 0$. Wir erhalten also ein diskretes Signal, welches zumindest anschaulich die Form eines Impulses hat und offenbar gewisse Ähnlichkeiten mit dem Dirac-Impuls aufweist, sodass die Bezeichnung **diskreter Impuls** gerechtfertigt erscheint.

Besonders angenehm ist die Tatsache, dass eine Erweiterung des Signalbegriffes auf „diskrete“ Distributionen oder Ähnliches offenbar nicht erforderlich ist. Der diskrete Impuls $\delta_0(n)$ ist eine ganz „normale“ reelle Folge!

Ob allerdings der diskrete Impuls δ_n die gleichen systemtheoretischen Eigenschaften hat wie der Dirac-Impuls $\delta_0(t)$, wird im Folgenden zu klären sein.

Die Impulsantwort eines diskreten LTI-Systems

Betrachten wir zunächst, wie sich die in Abschnitt 4.1 untersuchten Beispielsysteme verhalten, wenn am Eingang des Systems ein *diskreter Impuls* anliegt.

4.6 Beispiel (Diskreter RC-Tiefpass - Impulsantwort)

Der erste Ansatz für die diskrete Simulation des RC-Tiefpasses mit Zeitkonstante T führte auf ein digitales System $\mathfrak{S} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit dem Ein-/Ausgangsverhalten:

$$y_n = \sum_{k=0}^n x_k h_{n-k} \quad (260.1)$$

mit

$$h_m := \frac{T_a}{T} e^{-\frac{mT_a}{T}}, \quad m \geq 0. \quad (260.2)$$

Für ein Eingangssignal $x_n := \delta_n = \delta_0(n)$ ergibt sich aus (260.1):

$$y_n = \sum_{k=0}^n \delta_0(k) h_{n-k} = 1 \cdot h_n + 0 \cdot h_{n-1} + \cdots + 0 \cdot h_0 = h_n. \quad (260.3)$$

Man erhält also als Antwort die in dieser Simulation verwendete Diskretisierung der zeitkontinuierlichen Impulsantwort! _____ ■

Betrachten wir als weiteres Beispiel die gleitende Mittelwertbildung aus Beispiel 4.3.

4.7 Beispiel (Gleitende Mittelung - Impulsantwort)

Das Systemverhalten ließ sich in diesem Fall ebenfalls wieder durch eine Gleichung der folgenden Form darstellen:

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k}. \quad (260.4)$$

Für ein Eingangssignal $x_n := \delta_n = \delta_0(n)$ ergibt sich aus (260.4):

$$\begin{aligned}
 y_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_0(k) h_{n-k} \\
 &= \cdots + 0 \cdot h_{n+1} + 1 \cdot h_n + 0 \cdot h_{n-1} + \cdots = h_n.
 \end{aligned}
 \tag{261.1}$$

Wiederum erhält man die Koeffizienten der Bestimmungsgleichung (260.4) als Systemantwort. 

Wie allerdings ist das Verhalten, wenn das digitale System durch eine Rekursionsformel vermöge einer linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten bestimmt wird? Auch dazu zunächst ein Beispiel.

4.8 Beispiel (Rekursionsformel - Impulsantwort)

Wir betrachten erneut das digitale System $\mathfrak{S} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ aus Beispiel 4.4, welches durch die Rekursionsvorschrift

$$y_n = y_{n-1} - \frac{25}{36} y_{n-2} + x_n - \frac{3}{4} x_{n-1} \tag{261.2}$$

definiert ist.

Übung 85

Mit Hilfe des in Beispiel 4.4 schon verwendeten MATLAB-Programms **rec_formel.m** lässt sich die Impulsantwort zumindest numerisch leicht ermitteln (vgl. das Aufrufscript **Aufruf_rec_formel2.m**).

Übung 86

Übung 87

```
>> Aufruf_rec_formel2
```

```
ans =
```

```

1.0000
0.2500
-0.4444
-0.6181
-0.3094
0.1198
0.3347
0.2515
0.0191
...
```

Abbildung 4.8 stellt die Systemreaktion grafisch dar.

Der Frage, ob diese Antwort ggf. *analytisch* ermittelt werden kann, werden wir uns später zuwenden. 

Im letzten Beispiel ist nicht so klar wie es dies in den beiden vorausgegangenen der Fall war, ob die ermittelte Systemantwort für das System in irgendeiner Weise *charakteristisch* ist.

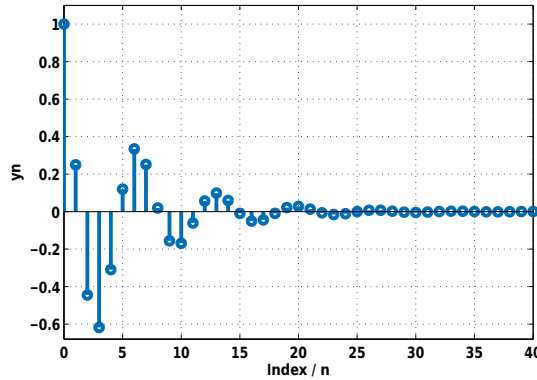


Abb. 4.8: Antwort eines durch die Rekursionsformel (245.1) definierten digitalen Systems $\mathfrak{S}$ auf einen diskreten Impuls

Wir wollen dieses Thema daher noch einmal von einer etwas allgemeineren Warte aus betrachten.

Theoretische Überlegung: Ein beliebiges diskretes Signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ kann in folgender Form (zunächst *formal*¹¹) als *Überlagerung zeitverschobener Impulse* aufgefasst werden:

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \delta_0(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \delta_{n-k}. \quad (262.1)$$

Abbildung 4.9 illustriert diese Überlegung grafisch für ein Beispiel.

Ist das Signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ Eingangssignal eines *digitalen LTI-Systems* $\mathfrak{S}$, so erhält man aufgrund der *Linearität* von $\mathfrak{S}$ zunächst:

$$y_n = \mathfrak{S}(x_n) = \mathfrak{S}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \delta_{n-k}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \mathfrak{S}(\delta_{n-k}). \quad (262.2)$$

Da $\mathfrak{S}$ nach Voraussetzung zusätzlich auch noch *zeitinvariant* ist, folgt:

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \mathfrak{S}(\delta_n)_{n-k}. \quad (262.3)$$

$\mathfrak{S}(\delta_n)$ ist jedoch nichts anderes als die *Impulsantwort* $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ von $\mathfrak{S}$!

Die Systemwirkung lässt sich somit für jedes LTI-System durch eine Gleichung der folgenden Form beschreiben:

¹¹ Wir lassen Konvergenzbetrachtungen hier zunächst einmal außer Acht!

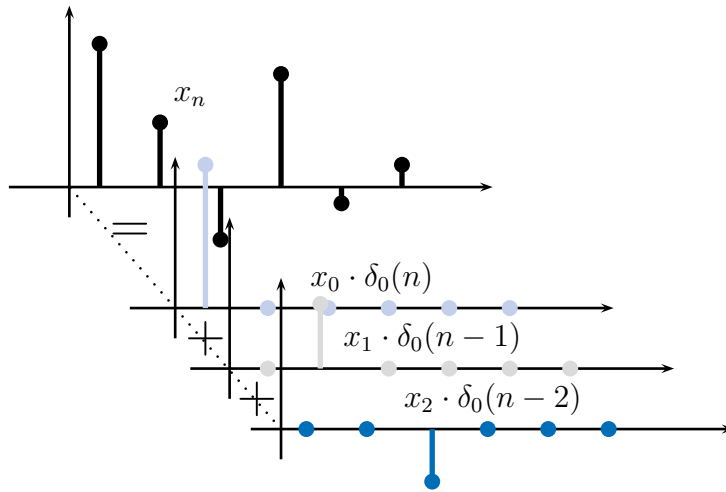


Abb. 4.9: Darstellung eines Signals als Überlagerung diskreter Impulse (Beispiel)

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot h_{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (263.1)$$

Damit haben wir auf recht einfache Weise **formal** das diskrete Analogon zu gleich zwei wesentlichen Resultaten — nämlich (67.1) und (79.3) — aus Abschnitt 2.3.4 erhalten, welche besagen, dass ein LTI-System durch eine für das System spezifische Funktion (der Impulsantwort) charakterisiert wird.

Leider lässt sich die obige formale Betrachtungsweise **nicht** für eine entsprechende Charakterisierung heranziehen, da die Operationen (262.2) bis (263.1) in Wirklichkeit nicht ohne Spezifizierung der Signalräume und der sich daraus ergebenden Konvergenzeigenschaften für die verwendeten Reihen durchführen lassen.

In der Tat wird in [6] gezeigt, dass es (stetige) LTI-Systeme $\mathfrak{S}$ auf dem Signalraum der beschränkten Folgen l^∞ gibt, welche die Folge **konstant Null** als Impulsantwort haben, aber selbst nicht die **Nullabbildung** sind (was sie aber sein müssten, wenn (263.1) immer gälte).

Allerdings müssen solche Beispiele unter Einbeziehung theoretischer Ergebnisse aus der *Funktionalanalysis* konstruiert werden. Die so konstruierten Systeme sind praktisch nicht realisierbar. In [6] wird eine vollständige Charakterisierung der (stetigen) LTI-Systeme auf l^∞ vorgenommen, welche zeigt, dass die Darstellung (263.1) im Allgemeinen durch einen zusätzlichen Term ergänzt werden muss. Für praxisrelevante zeitdiskrete LTI-Systeme (solche mit endlichen Faltungssummen oder solche, die durch Differenzengleichungen beschrieben werden) ist dieser Term allerdings stets null, sodass analog zu (67.1) die folgende Aussage formuliert werden kann:



Alle „praxisrelevanten“ digitalen LTI-Systeme $\mathfrak{S} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ lassen sich mit Hilfe einer für das System charakteristischen **Folge** $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ durch die folgende Reihensumme darstellen:

$$y_n = x_n * h_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot h_{n-k} \quad (264.1)$$

Die Reihensumme weist formale Ähnlichkeit mit dem *Faltungsintegral* (69.2) auf. In der Tat handelt es sich um das diskrete Analogon:

Sind $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ zwei (reelle oder komplexe) Folgen. Dann heißt

$$(x * h)_n := x_n * h_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} \quad (264.2)$$

die **Faltung** oder **diskrete Faltung** von $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Das zweite wichtige, zu den Ergebnissen aus Abschnitt 2.3.4 analoge Resultat ist, dass die in (264.1) angesprochene, für das System charakteristische Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ nichts anderes ist als die **Impulsantwort**:

Sei $\mathfrak{S}$ ein zeitdiskretes LTI-System. Dann heißt das diskrete Signal $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{S}(\delta_n) = \delta_n * h_n = h_n \quad (264.3)$$

die **Impulsantwort** des Systems.

Die Impulsantwort ist (in allen „praxisrelevanten“ Fällen) eine **eindeutige explizite Charakterisierung des Systems im Zeitbereich**, da für alle Eingangssignale $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gilt:

$$y_n = \mathfrak{S}(x_n) = h_n * x_n. \quad (264.4)$$

Wir werden im Folgenden nur noch digitale LTI-Systeme betrachten, die in der beschriebenen Weise durch ihre Impulsantwort bestimmt werden und die angesprochenen theoretischen Spezialfälle außer Acht lassen.

Eigenschaften von Faltungssumme und diskretem Impuls

Die Eigenschaften der diskreten Faltung und des diskreten Impulses sind weitestgehend ähnlich zu denen ihrer zeitkontinuierlichen Versionen.

Ganz genau wie die kontinuierliche Faltung etwa ist auch die diskrete Faltung eine Art „Multiplikation“, diesmal jedoch für *Folgen*.

Auch für diesen Faltungstyp kann, analog zu der entsprechenden Aussage für Faltung zeitkontinuierlicher Signale (s. S. 69), nachgewiesen werden¹², dass sie die wesentlichen Eigenschaften, die von der Multiplikation reeller Zahlen bekannt sind, bezüglich *Folgen* besitzt.

Dies ist die Aussage des folgenden Resultats:

Übung 83

Die *diskrete Faltungsoperation* $*$ ist *assoziativ*, *distributiv* (bez. der Addition von Folgen) und *kommutativ*! Für drei diskrete Signale $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gilt daher:

$$(x_n * y_n) * (z_n) = (x_n) * (y_n * z_n), \quad (265.1)$$

$$(x_n + y_n) * (z_n) = x_n * z_n + y_n * z_n, \quad (265.2)$$

$$x_n * y_n = y_n * x_n. \quad (265.3)$$

Im *Gegensatz zum analogen Fall* sollte allerdings festgehalten werden, dass die diskrete Faltung eine *wichtige Realisierungsform* diskreter Systeme ist, und zwar dann, wenn die Reihen *endliche Summen* sind. Beispiele dafür haben wir bereits in Abschnitt 4.1 kennengelernt.

Die direkte analytische Berechnung einer Faltung ist sicher auf der Basis der Formel (264.2) nur in wenigen Spezialfällen möglich. Diese Feststellung trifft im Grunde für die diskrete Faltung noch mehr zu als für die zeitkontinuierliche, wo wir auf Stammfunktionen und Integrationstechniken zurückgreifen können. Wir werden daher, ähnlich wie im zeitkontinuierlichen Fall, nach Möglichkeiten Ausschau halten, diese Rechenoperation gänzlich zu umgehen (s. dazu Abschnitt 4.4.1).

Numerisch kann die Faltung zumindest approximativ¹³ leicht mit Hilfe von MATLAB ausgewertet werden. Betrachten wir dazu ein schon bekanntes Beispiel.

4.9 Beispiel (Gleitende gewichtete Mittelung - mit Faltung)

Das digitale System $\mathfrak{G}$, welches eine gleitende gewichtete Mittelung der Eingangssignalwerte mit Hilfe der Koeffizienten

¹² Dies werden wir hier auch nicht explizit tun.

¹³ Eine genaue numerische Berechnung ist nicht möglich, solange echte Reihensummen ausgewertet werden müssen. Man muss sich daher mit Näherungen durch endliche Summen begnügen.

$$h_0 = \frac{1}{9}, \quad h_1 = \frac{2}{9}, \quad h_2 = \frac{3}{9}, \quad h_3 = \frac{2}{9}, \quad h_4 = \frac{1}{9} \quad (266.1)$$

durchführt, haben wir in Beispiel 4.3 mit Hilfe des MATLAB-Programms **GlGewMittel.m** simuliert. In diesem Programm ist die Systemwirkung mit Hilfe einer klassischen **for**-Schleife realisiert worden.

Auf der Grundlage von (264.4) können wir diese Simulation jedoch einfacher mit Hilfe der MATLAB-Funktion **conv** realisieren (vgl. Programm **GlGewMconv.m**):

```
% Impulsantwort definieren
h = (1/9)*[1 2 3 2 1];
K = length(h);

% Frequenz des sinusförmigen Eingangssignals in Hz
frq = 2;

% Abtastrate fa festlegen
fa = 50; Ta = 1/fa;

% Sinusförmiges Eingangssignal abtasten
tn = (0:Ta:5);
xn = sin(2*pi*frq*tn);

% Simulation der gleitenden gewichteten
% Mittelung mit Hilfe der FALTUNG
yn = conv(xn,h);

% Grafische Darstellung der Simulation

% Zeitpunkte berechnen, an denen die
% Faltung ungleich 0 ist (beachten!!!!)
tfalt = (0:Ta:5+(K-1)*Ta);
stairs(tfalt,yn,'b-','LineWidth',3);
```

Auf die Wiedergabe des Ausgangssignals in diesem Beispiel soll hier verzichtet werden.

Die *numerische* Faltungsberechnung ist mit der MATLAB-Funktion **conv** sehr einfach durchzuführen. Zu beachten ist lediglich, dass die Vektorlänge des Ergebnisses der Faltung der Summe der beiden Vektorlängen minus 1 entspricht! ■

In Abschnitt 2.3.4, Gleichung (78.3) wurde gezeigt, dass der Dirac-Impuls $\delta_0(t)$ das „Einselement“ bezüglich der zeitkontinuierlichen Faltung darstellt. Wir haben oben (vgl. (264.3)) bereits nachgewiesen, dass der diskrete Impuls bezüglich der diskreten Faltung die gleiche Eigenschaft hat, d.h. dass für alle diskreten Signale $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gilt:

$$\delta_n * x_n = x_n * \delta_n = x_n. \quad (267.1)$$

Auch bezüglich der Faltung mit einem zeitverschobenen diskreten Impuls ergeben sich Gemeinsamkeiten (vgl. Beispiel 2.11, S. 79). Es gilt mit der Substitution $j = k - k_0$ für alle $k_0 \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \delta_{n-k_0} * x_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{k-k_0} x_{n-k} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_j x_{n-(j+k_0)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_j x_{(n-k_0)-j} \\ &= \cdots + 0 \cdot x_{(n-k_0)+1} + 1 \cdot x_{(n-k_0)-0} + 0 \cdot x_{(n-k_0)-1} + \cdots \\ &= x_{n-k_0}. \end{aligned} \quad (267.2)$$

Damit ist das Ergebnis der Faltung eines diskreten Signals $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit einem um k_0 Takte zeitverschobenen diskreten Impuls das entsprechend zeitverschobene diskrete Signal $(x_{n-k_0})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Die beiden gerade besprochen Eigenschaften des diskreten Impulses sind ein weiteres Indiz dafür, dass die Definition (259.2) des diskreten Impulses offenbar die richtige Übertragung des Dirac-Funktional in die diskrete Welt war. Wir werden in den folgenden Abschnitten sehen, dass dies nicht die einzigen Gemeinsamkeiten sind.

Die Sprungantwort eines digitalen LTI-Systems

Unter der Sprungantwort eines LTI-Systems wird auch im diskreten Fall wieder die Antwort auf einen diskreten Einheitssprung verstanden:

Sei $\mathfrak{S}$ ein digitales LTI-System. Dann heißt das Signal $y_n^{(\sigma)}$ mit der Eigenschaft

$$y_n^{(\sigma)} = \mathfrak{S}(\sigma_n) \quad (267.3)$$

die **Sprungantwort** des Systems.

Auch die Sprungantwort liefert eine eindeutige Charakterisierung des LTI-Systems. Betrachten wir nämlich die **Differenz** der Sprungantwort $y_n^{(\sigma)}$ und der um einen Takt zeitverschobenen Sprungantwort $y_{n-1}^{(\sigma)}$ eines digitalen LTI-Systems mit Impulsantwort $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, so ergibt¹⁴ sich:

$$y_n^{(\sigma)} - y_{n-1}^{(\sigma)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \sigma_{n-k} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \sigma_{(n-1)-k} \quad (267.4)$$

¹⁴ Wir setzen hier die absolute Konvergenz der Reihen voraus!

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k (\sigma_{n-k} - \sigma_{n-(k+1)}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \delta_{n-k} \\
&= h_n * \delta_n = h_n.
\end{aligned}$$

Übung 82 Wir können damit also die Impulsantwort bestimmen. Umgekehrt ergibt sich durch Aufsummierung der Werte der Impulsantwort die Sprungantwort (s. Übung 82).

Übung 84 Wir erhalten also einen Zusammenhang analog zu der distributionellen Ableitungsbeziehung (85.3) zwischen Dirac-Impuls und zeitkontinuierlichem Sprungsignal.

4.10 Beispiel (Beziehung zw. Impuls- u. Sprungantwort)

Wir können dieses Ergebnis mit Hilfe von MATLAB und der in den Beispielen 4.4, S. 245 und 4.8, S. 261 berechneten Sprung- und Impulsantworten einmal überprüfen (vgl. das Aufrufscript **Aufruf_rec_formel3.m**).

```

T = 1; Tend = 40; % "Abtastintervall" und Endzeitpunkt
nT = (0:T:Tend); % Abtastzeitpunkte

impuls = zeros(size(nT)); % diskreter Impuls
impuls(1) = 1; sprung = nT>=0; % diskreter Einheitssprung

% Aufruf der Rekursionsformel für Impuls und Sprung
[ydelta_n] = rec_formel(impuls);
[ysigma_n] = rec_formel(sprung);

% Berechnung des Differenzsignals der Sprungantwort und der
% Summe der Impulsantwort
diffysigma = diff([0,ysigma_n]);
sumydelta = cumsum(ydelta_n);

% Gegenüberstellung der Werte
[ysigma_n', sumydelta', ydelta_n', diffysigma']

ans =

    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
    1.2500    1.2500    0.2500    0.2500
    0.8056    0.8056   -0.4444   -0.4444
    0.1875    0.1875   -0.6181   -0.6181
   -0.1219   -0.1219   -0.3094   -0.3094
   -0.0021   -0.0021    0.1198    0.1198
    0.3325    0.3325    0.3347    0.3347
    0.5840    0.5840    0.2515    0.2515
    0.6031    0.6031    0.0191    0.0191

```

0.4475	0.4475	-0.1556	-0.1556
0.2787	0.2787	-0.1688	-0.1688
0.2179	0.2179	-0.0608	-0.0608
...			

Die beiden linken Spalten enthalten die berechnete Sprungantwort und die über die Aufsummierung der Impulsantwort gewonnene Sprungantwort. Die beiden rechten Spalten enthalten die Impulsantwort und die nach (267.4) aus der Sprungantwort gewonnene Impulsantwort. Man erkennt die perfekte Übereinstimmung. _____ ■

4.3.5 Übungsaufgaben

Übung 80 (Lösungsband Seite 193)

Zeigen Sie, dass das digitale System, welches auf dem Raum der kausalen Folgen durch die Differenzengleichung

$$y_n = y_{n-1} + x_n, \quad y_{-1} = 1 \quad (269.1)$$

definiert ist, weder linear noch zeitinvariant ist.

Übung 81 (Lösungsband Seite 194)

Geben Sie *zwei* äquivalente Zustandsraumdarstellungen für das digitale System an, welches durch die Differenzengleichung

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} + u_n, \quad y_{-1} = y_{-2} = 0 \quad (269.2)$$



definiert ist.

Übung 82 (Lösungsband Seite 195)

Sei $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ die Impulsantwort eines digitalen LTI-Systems.

Rechnen Sie nach, dass sich die Sprungantwort des Systems durch Aufsummieren der Impulsantwort ergibt, d.h. dass gilt:

$$y_n^{(\sigma)} = \sum_{k=-\infty}^n h_k. \quad (269.3)$$

Übung 83 (Lösungsband Seite 196)

Rechnen Sie das **Assoziativgesetz der diskreten Faltung** (265.1) explizit nach, d.h. zeigen Sie, dass für drei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gilt:

$$(x_n * y_n) * z_n = x_n * (y_n * z_n). \quad (269.4)$$

Übung 84 (Lösungsband Seite 197)

Bestimmen Sie Impuls- und Sprungantwort des digitalen LTI-Systems $\mathfrak{S}^{(N)}$, welches durch die folgende Vorschrift definiert ist:

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{n-k}. \quad (270.1)$$

Überlegen Sie sich, was dieses System mit einem ganz allgemeinen Eingangssignal x_n macht.

Ist dieses LTI-System BIBO-stabil?

Übung 85 (Lösungsband Seite 199)

Betrachten Sie ein digitales System, das durch folgende Differenzengleichung beschrieben ist:

$$y_n = x_{n-1} - 2x_{n-2} + \frac{5}{8}y_{n-1} - \frac{1}{3}y_{n-2}, \quad y_{-1} = y_{-2} = 0. \quad (270.2)$$

- Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB die Impulsantwort $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des Systems.
- Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB die Sprungantwort $(y_n^{(\sigma)})_{n \in \mathbb{Z}}$ des Systems.

Übung 86 (Lösungsband Seite 200)

Entwerfen Sie zu dem System aus Übung 85 ein Signalfussdiagramm entsprechend Abbildung 4.5, S. 257 und entwerfen Sie anschließend ein Simulink-System dazu.

Überprüfen Sie die Ergebnisse aus Übung 85 mit Hilfe dieses Simulink-Systems.

Übung 87 (Lösungsband Seite 202)

Zeigen Sie, dass es sich bei einem digitalen System $\mathfrak{S}$, welches ein Signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in ein demgegenüber um einen Takt verzögertes Signal $y_n = x_{n-1}$ überführt um ein LTI-System handelt.

Bestimmen Sie anschließend die Impuls- und Sprungantwort dieses Systems und entscheiden Sie, ob das System BIBO-stabil und kausal ist.

4.4 Signale und LTI-Systeme im Bildbereich

Die bislang entwickelten Beschreibungsformen für digitale LTI-Systeme im Zeitbereich, also lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten und Faltung mit der Impulsantwort, teilen leider die Nachteile der entsprechenden Methoden im zeitkontinuierlichen Fall.

Die Darstellung mit Differenzengleichungen ist nur *implizit*, d.h. das Ausgangssignal lässt sich nicht direkt in Abhängigkeit des Eingangssignals angeben, sondern die Differenzengleichung muss erst gelöst werden. Die Darstellung mit Hilfe der Impulsantwort ist zwar eine *explizite* Darstellung, hat aber den Nachteil, dass sie kompliziert und im Allgemeinen nur approximativ zu berechnen ist.

Zudem sind, genau wie im zeitkontinuierlichen Fall, die Berechnung und die Analyse von komplexeren digitalen Systemen, etwa eines mit einer Struktur analog zu Abbildung 2.24, S. 97, mit Hilfe der Faltungsdarstellung nicht möglich, da auch im diskreten Fall keine *Division* zur Faltungsoperation zur Verfügung steht. Die diesbezüglichen Überlegungen zu Beginn des Abschnittes 2.4, S. 97 können eins zu eins auf den digitalen Fall übertragen werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

4.11 Beispiel (Übertragungsverh. eines digitalen LTI-Systems)

Zur Illustration der Problematik betrachten wir ein zu Abbildung 2.24, S. 97 äquivalentes *zeitdiskretes* System, welches in Abbildung 4.10 in Form eines Blockschaltbildes (Signalflussdiagramms) dargestellt ist.

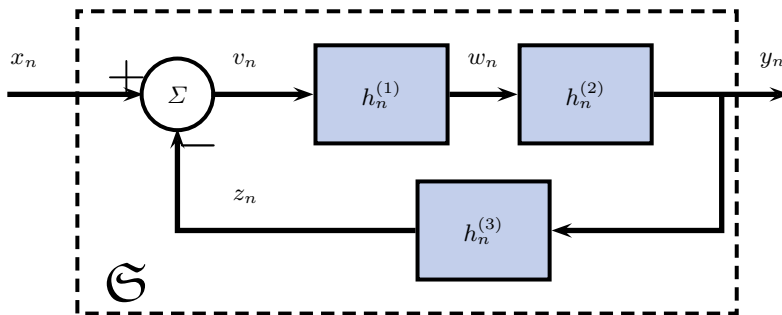


Abb. 4.10: Blockschaltbild eines digitalen (LTI-)Systems $\mathcal{S}$, bestehend aus zeitdiskreten LTI-Teilsystemen

Wir gehen dabei davon aus, dass sämtliche Teilsysteme LTI-Systeme sind, die durch ihre Impulsantwort beschrieben werden können.

Mit Hilfe der in das Blockschaltbild eingetragenen Hilfssignale v_n und w_n und der gegebenen Impulsantworten berechnen wir:

$$\begin{aligned} w_n &= h_n^{(1)} * v_n, & y_n &= h_n^{(2)} * w_n, \\ z_n &= h_n^{(3)} * y_n, & v_n &= x_n - z_n. \end{aligned} \quad (271.1)$$

Durch rückwärtiges Einsetzen und Elimination aller Hilfssignale erhält man insgesamt unter Berücksichtigung aller Rechenregeln für die diskrete Faltung:

$$\begin{aligned}
 y_n &= h_n^{(1)} * h_n^{(2)} * \left(x_n - h_n^{(3)} * y_n \right) \\
 &= -h_n^{(1)} * h_n^{(2)} * h_n^{(3)} * y_n + h_n^{(1)} * h_n^{(2)} * x_n
 \end{aligned} \tag{272.1}$$

bzw.

$$y_n + h_n^{(1)} * h_n^{(2)} * h_n^{(3)} * y_n = h_n^{(1)} * h_n^{(2)} * x_n. \tag{272.2}$$

Berücksichtigt man noch, dass der diskrete Impuls das „Einselement“ bezüglich der diskreten Faltungsoperation ist, so ergibt sich schlussendlich:

$$y_n * \left[\delta_n + h_n^{(1)} * h_n^{(2)} * h_n^{(3)} \right] = h_n^{(1)} * h_n^{(2)} * x_n. \tag{272.3}$$

Damit sind die Möglichkeiten der Analyse des Ein-/Ausgangsverhaltens des Systems im Zeitbereich leider erschöpft, da eine „Division“ für die Operation „diskrete Faltung“, die für die Auflösung der Gleichung (272.3) nach y_n notwendig wäre, genauso wie im analogen Fall nicht existiert oder zumindest nicht offensichtlich ist. ■

Wir müssen daher auch im zeitdiskreten Fall nach Methoden Ausschau halten, die uns, ähnlich wie die Laplace-Transformation und die Fourier-Transformation im zeitkontinuierlichen Fall, in die Lage versetzen, diese Schwierigkeiten zu umgehen.

4.4.1 Z-Transformation und Bildbereich

Wir beginnen zunächst damit, nach einer Transformation zu suchen, die die Laplace-Transformation im zeitdiskreten Fall ersetzen könnte. Dabei hilft uns die folgende Überlegung.

Zu $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ betrachte man die *formalen* Potenzreihen:

$$X(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \quad \text{und} \quad H(z) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m z^{-m}. \tag{272.4}$$

Wir kümmern uns dabei zunächst nicht um Konvergenzfragen¹⁵. Entscheidend sind eher die formalen Eigenschaften dieser Reihen.

So gilt etwa für die Multiplikation:

$$\begin{aligned}
 X(z) \cdot H(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_k h_m z^{-k} z^{-m} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k+m=n} x_k h_m \right) z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} \right) z^{-n}.
 \end{aligned} \tag{272.5}$$

¹⁵ Daher sprechen wir auch von *formalen* Potenzreihen.

Die letzte Gleichung folgt dabei aus der Substitution:

$$k + m = n \iff m = n - k.$$

Man erkennt an Gleichung (272.5) sofort, dass die **innere Klammer**, welche den Koeffizienten von z^{-n} der Produktreihe repräsentiert, genau mit der **diskreten Faltung** der Koeffizientenfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ übereinstimmt. Die Faltung von Folgen lässt sich also über ein Produkt von Reihen und Polynomen bestimmen. Dies ist ein Pendant zu dem aus der zeitkontinuierlichen Theorie bekannten Faltungssatz für die Laplace-Transformation!

In Analogie zur Laplace-Transformation definieren wir:

Für ein diskretes Signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (etwa $x_n := x(nT_a)$, T_a Abtastintervalllänge) heißt die Zuordnung

$$\mathfrak{Z} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \longrightarrow X(z) \quad (273.1)$$

mit

$$X(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \quad (273.2)$$

die **(zweiseitige) Z-Transformation** von $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Im kausalen Fall, also falls $x_n = 0 \ \forall n < 0$ ist, gilt

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \quad (273.3)$$

und man spricht von der **(einseitigen) Z-Transformation**.

In der Praxis wird, ähnlich wie im Fall der Laplace-Transformation, die **einseitige** Z-Transformation verwendet und tabelliert! Wir werden daher im Folgenden immer nur die **einseitige Z-Transformation** betrachten.

Der Signalraum der Z-Transformierten wird ebenfalls wieder mit **Bildbereich** bezeichnet. Wir sprechen daher von der **(einseitigen) Z-Transformation** auch als einer **Transformation in den Bildbereich**.

Wir kennzeichnen im Folgenden die (einseitige) Z-Transformation mit der Symbolik:

$$F(z) := \mathfrak{Z}(f)(z),$$

$$f_n \xleftrightarrow{Z} F(z).$$

Die *entscheidende Verbindung zwischen Faltung und Z-Transformation* (und damit zwischen LTI-Systemen und Z-Transformation) haben wir aus den rein formalen Potenzreiheigenschaften erhalten. *Interessant* wird die Z-Transformationstechnik allerdings erst dann, wenn wir *konvergente Reihen* erhalten, da dann das Ergebnis der Transformation als geschlossener *algebraischer Ausdruck in z* verwendet werden kann¹⁶. Wir werden in den Beispielen hierauf zurückkommen.

Eigenschaften der Z-Transformation

Wie bei der Laplace-Transformation wollen wir die wichtigsten Eigenschaften der Z-Transformation wieder in einer Tabelle (Tabelle 4.1) zusammenfassen.

Tabelle 4.1: Eigenschaften und Rechenregeln der Z-Transformation

Eigenschaft, Regel	Zeitbereich	Bildbereich
Linearität	$ax_n + by_n$	$aX(z) + bY(z)$
Differenzen 1. Ordnung	$x_n - x_{n-1}$	$X(z) - z^{-1}X(z)$ $= (1 - z^{-1})X(z)$
Differenzen 2. Ordnung	$(x_n - x_{n-1})$ $-(x_{n-1} - x_{n-2})$	$(z^{-2} - 2z^{-1} + 1)X(z)$
Differentiation im Bildbereich	nx_n	$-z \frac{d}{dz} X(z)$
Summe im Zeitbereich	$\sum_{k=-\infty}^n x_k$	$\frac{z}{z-1} X(z)$
Verschiebung im Zeitbereich	x_{n-n_0}	$z^{-n_0} X(z)$
Verschiebung im Bildbereich	$e^{j\Omega} x_n$ ($\Omega \in [0, 2\pi]$)	$X(e^{-j\Omega} z)$
Zeitumkehrung	x_{-n}	$X(\frac{1}{z})$
Faltungssatz	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k}$	$X(z) \cdot Y(z)$
Eindeutigkeitssatz	$x_n = y_n$	$X(z) = Y(z)$
Anfangswertsatz	$x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	

Von entscheidender Bedeutung für die Verwendung der Z-Transformation zur Beschreibung diskreter LTI-Systeme ist, wie bereits erwähnt, der **Fal-**

¹⁶ Wir bleiben bei der Laplace-Transformation ja auch nicht bei den formalen Integraleigenschaften stehen, sondern verwenden in der Praxis die geschlossenen algebraischen Ausdrücke, die durch die (konvergenten) Integrale repräsentiert werden.

tungssatz. Seine Bedeutung liegt in Zusammenhang mit dem Darstellungssatz (264.4) darin, dass die Z-Transformation Faltungsgleichungen, welche diskrete LTI-Systeme beschreiben, in einfache Gleichungen mit rationalen Funktionen in z (algebraische Gleichungen) überführt. Dies macht, wie wir alsbald sehen werden, den Umgang mit komplexeren diskreten LTI-Systemen einfach.

Wir halten also¹⁷ fest:

Sind $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ zwei (reelle oder komplexe) diskrete (kausale) Signale. Dann gilt:

$$(h_n * x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \xrightarrow{Z} H(z) \cdot X(z). \quad (275.1)$$

Eine ebenso große Bedeutung wie der Faltungssatz hat der **Verschiebungssatz im Zeitbereich**. Mit Hilfe dieses Resultats ist es möglich, lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten in algebraische Gleichungen umzuwandeln. Wir sind so in der Lage, auch digitale LTI-Systeme, welche über diese Differenzengleichungen definiert sind, mit der Z-Transformation zu behandeln.

Grundlegend für die praktische Verwendbarkeit der Z-Transformation ist natürlich die Tatsache, dass sie, wie die Laplace-Transformation, eine **eindeutige Transformation** ist. Dies ist die Aussage des **Eindeutigkeitsatzes**.

Die Formulierung der Eindeutigkeit gestaltet sich im diskreten Fall sogar etwas einfacher als im zeitkontinuierlichen Fall, da wir keine Folgen zu Klassen zusammenfassen müssen. Die eindeutige Zuordnung ergibt sich aus der Tatsache, dass zwei Potenzreihen genau dann gleich sind, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen (Koeffizientenvergleich).

Zur Berechnung der **inversen Z-Transformation**, welche wir benötigen, um vom Bild- in den Zeitbereich zurückzukehren, gibt es zwar eine Integralformel, diese setzt aber ebenfalls wie die inverse Laplace-Transformation Kenntnisse der **Funktionentheorie** voraus, sodass wir auf die Zitierung dieser Rücktransformationsformel verzichten wollen.

In der Praxis wird sie auch nicht benötigt, da man die Z-Transformations tabellen (vgl. Tabelle C.1 [47] in Anhang C) oder auch MATLAB verwenden kann. Die Tabelle ist lediglich in der Gegenrichtung zu lesen. Zu beachten ist, dass natürlich nur gewisse grundlegende Transformationen tabelliert sind. Allgemeine rationale Ausdrücke in z , welche man aus der Analyse von LTI-Systemen im Bildbereich erhält, können mit Hilfe geeigneter Techniken, die wir auch schon von der Laplace-Transformation her kennen (d.h. i.Allg. mit einer Partialbruchzerlegung) auf tabellierte Transformationen zurückgeführt werden.

¹⁷ Die Existenz der Transformationen wird hierbei vorausgesetzt.

Die Z-Transformationen der wichtigsten Signale sind der bereits erwähnten Tabelle C.1 aus Anhang C zu entnehmen. Aufgrund ihrer besonderen Bedeutung und zur Vertiefung des Themas wollen wir an dieser Stelle jedoch die Transformationen einiger wichtiger diskreter Signale explizit bestimmen.

Z-Transformationen einiger wichtiger diskreter Signale

Wir beginnen zunächst mit Z-Transformation des diskreten Impulses.

4.12 Beispiel (Z-Transformation von δ_n)

Für die Z-Transformierte dieses Signals gilt:

$$\begin{aligned}\Delta_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \cdot z^{-k} \\ &= \cdots + 0 \cdot z^{+1} + 1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + \cdots = 1.\end{aligned}\tag{276.1}$$

Die z-Transformierte des diskreten Impulses ist also die (auf ganz $\mathbb{C}$) konstante Funktion $\Delta_0(z) = 1!$ _____ ■

Wir erhalten eine weitere Übereinstimmung der Eigenschaften des diskreten Impulses und des Dirac-Funktional, wie ein Blick auf Gleichung (103.5) zeigt.

Eine einfache, aber wichtige Folgerung ergibt sich für den um k_0 Takte verzögerten Impuls.

4.13 Beispiel (Z-Transformation von δ_{n-k_0})

Die Z-Transformierte von δ_{n-k_0} kann man analog zu (276.1) direkt berechnen oder man kann den Verschiebungssatz im Zeitbereich heranziehen.

Mit diesem Satz und dem Resultat aus Beispiel 4.12 erhält man:

$$\delta_{n-k_0} \xleftrightarrow{Z} z^{-k_0} \cdot \Delta_0(z) = z^{-k_0}.\tag{276.2}$$

Speziell ist die Z-Transformierte des um einen Takt verzögerten diskreten Impulses gleich z^{-1} . _____ ■

In Übung 87 wurde gezeigt, dass die Impulsantwort eines Verzögerungsgliedes, welches das Signal um genau einen Takt verzögert, gleich δ_{n-1} ist.

Wegen (vgl. Gleichung (267.2))

$$y_n = x_{n-1} = \delta_{n-1} * x_n\tag{276.3}$$

ergibt sich aus dem Faltungssatz, dass

$$Y(z) = z^{-1} \cdot X(z)\tag{276.4}$$

ist (s. dazu auch den Verschiebungssatz). Das Verzögerungsglied um einen Takt wurde daher in den Blockschaltbild-Darstellungen 4.5, S. 257 und 4.6, S. 258 mit dem Symbol z^{-1} bzw. $\frac{1}{z}$ gekennzeichnet.

4.14 Beispiel (Z-Transformation von σ_n)

Als nächstes betrachten den diskreten Einheitssprung σ_n .

Die Z-Transformierte dieses Signals ist nun nach (273.2):

Übung 88

$$\begin{aligned}\Sigma(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad \forall z : |z| > 1.\end{aligned}\tag{277.1}$$

Die vorletzte Gleichung folgt dabei aus dem bekannten Konvergenzsatz für **geometrische Reihen**, welcher besagt, dass für Zahlen $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.\tag{277.2}$$

In diesem ersten nichttrivialen Beispiel haben wir zum ersten Mal für die Potenzreihe eine **Konvergenzbetrachtung** durchgeführt.

Es ist für die praktische Verwendbarkeit der Z-Transformation entscheidend, dass wir für Z-Transformierte der zur analysierenden Signale einen geschlossenen Ausdruck, meist eine einfache **rationale Funktion in z** , erhalten. Ansonsten könnten wir gegenüber den Zeitbereichsdarstellungen keinen Vorteil erzielen! Auch die Vorteile der Laplace-Transformation beruhen ja darauf, dass man die Integrale auswerten kann und geschlossene Funktionsausdrücke erhält.

4.15 Beispiel (Z-Transformation von a^{-n})

Als vorletztes Beispiel betrachten wir das exponentielle Signal

$$x_n = \begin{cases} 0 & n < 0, \\ a^{-n} & n \geq 0. \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}_+.\tag{277.3}$$

Die Z-Transformierte errechnet sich zu:

$$\begin{aligned}X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az)^{-k} \\ &= \frac{1}{1 - (az)^{-1}} = \frac{az}{az - 1} \quad \forall z : |z| > \frac{1}{|a|}.\end{aligned}\tag{277.4}$$

Man erhält durch die zusätzliche Konvergenzbetrachtung als Z-Transformierte ebenfalls wieder einen geschlossenen Funktionsausdruck, im vorliegenden Fall eine einfach **rationale Funktion** in z .

Von besonderem Interesse sind natürlich auch im diskreten Fall die harmonischen Schwingungen.

4.16 Beispiel (Z-Transformation von $e^{j2\pi f n T_a}$, $\sin(2\pi f n T_a)$, $\cos(2\pi f n T_a)$)

Wir betrachten eine mit $f_a = \frac{1}{T_a}$ abgetastete komplexe harmonische Schwingung der Frequenz $f < \frac{f_a}{2}$ Hz, d.h. die komplexe Folge $x_n := e^{j2\pi f n T_a}$.

Die (einseitig) Z-Transformierte dieses Signals errechnet sich zu:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{j2\pi f k T_a} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{j2\pi f T_a} z^{-1})^k \\ &= \frac{1}{1 - e^{j2\pi f T_a} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{j2\pi f T_a}} \quad \forall z : |z| > \frac{1}{|e^{j2\pi f T_a}|} = 1. \end{aligned} \quad (278.1)$$

Auch hierfür wird wieder die Summenformel (277.2) der geometrischen Reihe verwendet.

Aufgrund der **Linearität der Z-Transformation** und der Beziehungen (105.3) lässt sich wiederum leicht ermitteln, welche Z-Transformierten die Abtastfolgen der reellen harmonischen Schwingungen haben:

$$\begin{aligned} \sin(2\pi f n T_a) &\xleftrightarrow{Z} \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{j2\pi f T_a}} - \frac{z}{z - e^{-j2\pi f T_a}} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \frac{2j \Im(e^{j2\pi f T_a}) z}{z^2 - 2\Re(e^{j2\pi f T_a}) z + 1} \\ &= \frac{\sin(2\pi f T_a) z}{z^2 - 2\cos(2\pi f T_a) z + 1}, \\ \cos(2\pi f n T_a) &\xleftrightarrow{Z} \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{j2\pi f T_a}} + \frac{z}{z - e^{-j2\pi f T_a}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2z^2 - 2\Re(e^{j2\pi f T_a}) z}{z^2 - 2\Re(e^{j2\pi f T_a}) z + 1} \\ &= \frac{z^2 - \cos(2\pi f T_a) z}{z^2 - 2\cos(2\pi f T_a) z + 1}. \end{aligned} \quad (278.2)$$

Bestimmung der Z-Transformationen mit MATLAB

Statt mit Hilfe der Transformationstabelle C.1 der wichtigsten Z-Transformationen und der Rechenregeln aus Tabelle 4.1, S. 274 kann man auch Z-Transformationen mit Hilfe der **Symbolic Math Toolbox** von MATLAB bestimmen.

Für die Illustration dieser Möglichkeiten wollen wir auch diesmal wieder zum Vergleich die bereits berechneten Beispiele heranziehen.

4.17 Beispiel (Z-Transformationen mit MATLAB)

Die Berechnungen werden mit der MATLAB-Funktion `ztrans` durchgeführt. Als Argumente benötigt diese Funktion *symbolische Ausdrücke*. Implizit wird dabei davon ausgegangen, dass es sich um Folgen mit der unabhängigen Variablen n handelt. Die Transformation liefert dann Funktionsausdrücke in der Variablen z als Z-Transformierte zurück. Sollen die Variablenamen anders sein, so muss dies explizit vereinbart werden.

Einige der oben berechneten Transformatierten ergeben sich wie folgt¹⁸ (vgl. Datei `bsp_ztrans.m`):

```
>> syms n z
>> % Z-Transformation des Einheitssprungs
>> sigma = sym('1');
>> Sigma = ztrans(sigma);
>> pretty(Sigma)
      z
-----
z - 1

>> % Z-Transformierte des diskreten Impulses
>> delta0 = sym('kroneckerDelta(n, 0)');
>> Delta0 = ztrans(delta0)

Delta0 =

1

>> % Z-Transformierte eines um einen Takt
>> % verschobenen diskreten Impulses
>> delta1 = sym('kroneckerDelta(n, 1)');
>> Delta1 = ztrans(delta1);
>> pretty(Delta1)
      1
-----
      z

>> % Z-Transformierte eines um zwei Takte
>> % verschobenen diskreten Impulses
```

¹⁸ Gegenüber früheren MATLAB-Versionen hat die Symbolic Math Toolbox – leider nicht zum Besseren – umfangreiche Änderungen erfahren, sodass die Kommandos der ersten Auflage des Buches nicht mehr verwendet werden können. Insbesondere wurde die Funktion `heaviside`, die früher für die Sprungfunktion verwendet werden konnte umdefiniert. Die im Programmcode angegebenen Lösungen für die Sprungfunktion und den diskreten Impuls sind in der offiziellen MATLAB-Hilfe leider nicht dokumentiert (Stand: Release 2013).

```

>> delta2 = sym('kroneckerDelta(n, 2)')
>> Delta2 = ztrans(delta2);
>> pretty(Delta2)

  1
  --
  2
  z

>> % Z-Transformierte einer Potenzfolge
>> syms a
>> x = a^n;
>> X = ztrans(x);
>> pretty(simplify(X))

      z
  -----
  a - z

>> % Z-Transformierte eines Cosinussignals
>> syms f T
>> x = cos(2*pi*f*n*T);
>> Xcos = ztrans(x);
>> pretty(simplify(Xcos))

      z (z - cos(2 pi T f))
  -----
      2
z  - cos(pi T f 2) z 2 + 1

>> % Z-Transformierte eines Sinussignals
>> y = sin(2*pi*f*n*T)
>> Xsin = ztrans(y);
>> pretty(simplify(Xsin))

      z sin(2 pi T f)
  -----
      2
z  - cos(pi T f 2) z 2 + 1

```

4.4.2 Beschreibung von digitalen LTI-Systemen im Bildbereich

Ähnlich wie bei der Laplace-Transformation ist auch im diskreten Fall der *Faltungssatz* der Schlüssel für eine Beschreibung von LTI-Systemen¹⁹, mit

¹⁹ Wir weisen ein letztes Mal darauf hin, dass wir nur solche LTI-Systeme betrachten, die durch ihre Impulsantwort charakterisiert werden.

der die rechnerischen Probleme umgangen werden können, die mit der Faltungsdarstellung (264.1) verbunden sind.

Wir wollen dies zunächst wieder anhand von Beispielen illustrieren.

4.18 Beispiel (RC-Tiefpass-Simulation 0-ter Ordnung)

Wir betrachten einmal mehr die in Beispiel 4.1, S. 239 hergeleitete Beschreibung der Simulation 0-ter Ordnung eines RC-Tiefpasses mit Zeitkonstante T .

In Übung 73, S. 246 wurde gezeigt, dass das Übertragungsverhalten der RC-Tiefpass-Simulation gemäß dem ersten gewählten Diskretisierungsansatz durch die Rekursionsgleichung (Differenzgleichung)

$$y_n - e^{-T_a/T} y_{n-1} = \frac{T_a}{T} x_n \quad (281.1)$$

beschrieben werden kann.

Definieren wir nun zunächst $X(z)$ und $Y(z)$ als **Z-Transformierte** der diskreten (kausalen) Ein- und Ausgangssignale $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des durch diese Differenzgleichung beschriebenen LTI-Systems.

Gemäß dem Verschiebungssatz im Zeitbereich (vgl. Tabelle 4.1) ergibt sich aus (281.1) durch Transformation beider Seiten der Gleichung:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(y_n) - e^{-T_a/T} \mathfrak{Z}(y_{n-1}) &= \frac{T_a}{T} \mathfrak{Z}(x_n) \\ \iff Y(z) - e^{-\frac{T_a}{T}} Y(z) \cdot z^{-1} &= \frac{T_a}{T} X(z). \end{aligned} \quad (281.2)$$

Man beachte, dass sich die Koeffizienten dabei aufgrund der der **Linearität** der Z-Transformation vorziehen lassen.

Die so entstandene algebraische Gleichung in $X(z)$ und $Y(z)$ wird nach der Transformation $Y(z)$ der (unbekannten) Ausgangsfolge y_n aufgelöst. Dies liefert eine Gleichung der Form:

$$Y(z) = \frac{T_a}{T} \frac{1}{1 - e^{-\frac{T_a}{T}} z^{-1}} \cdot X(z) := H(z) \cdot X(z). \quad (281.3)$$

Nach dem **Faltungssatz** entspricht dies andererseits im Zeitbereich der Gleichung

$$y_n = h_n * x_n, \quad (281.4)$$

wobei $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ die **Impulsantwort** des diskreten LTI-Systems ist. Diese kann nun auch aus (281.3) durch Z-Rücktransformation von

$$H(z) = \frac{T_a}{T} \frac{1}{1 - e^{-\frac{T_a}{T}} z^{-1}}, \quad (281.5)$$

etwa durch Ablesen aus der Z-Transformationstabelle, ermittelt werden. Da die Tabellen meist in Abhängigkeit von z , statt von z^{-1} wiedergegeben sind, formen wir $H(z)$ durch Multiplikation mit $\frac{z}{z}$ um auf:

$$H(z) = \frac{T_a}{T} \frac{z}{z - e^{-\frac{T_a}{T}}}. \quad (282.1)$$

Tabelle C.1 in Anhang C entnehmen wir:

$$a^{t/T_a} \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z - a}. \quad (282.2)$$

Ersetzen wir nun das zeitkontinuierliche Signal a^{t/T_a} durch das diskrete Signal, indem t durch die Abtastzeitpunkte nT_a substituiert wird, so erhalten wir korrekter:

$$a^n \xleftrightarrow{Z} \frac{z}{z - a}. \quad (282.3)$$

Im Beispiel ist nun $a := e^{-\frac{T_a}{T}}$. Berücksichtigt man noch, dass der Faktor $\frac{T_a}{T}$ aufgrund der Linearität der Z-Transformation aus der Transformation herausgezogen werden kann, so erhält man:

$$H(z) \xleftrightarrow{Z} h_n = \begin{cases} 0 & n < 0, \\ \frac{T_a}{T} e^{-\frac{T_a}{T}n} & n \geq 0. \end{cases} \quad (282.4)$$

Die Rücktransformierte von $H(z)$ und damit die Impulsantwort $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des Systems ist also exakt die in (240.3) durch den ersten Modellierungsansatz ermittelte Folge.

Die erarbeiteten Zusammenhänge können wir in folgendem Diagramm zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccc}
 y_n - e^{-\frac{T_a}{T}} y_{n-1} = \frac{T_a}{T} x_n & \text{und} & y_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_k h_{n-k} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 Z & & Z^{-1} \\
 Y(z) - e^{-\frac{T_a}{T}} Y(z) z^{-1} = \frac{T_a}{T} X(z) & \xrightarrow[\text{Z-Bereich}]{\text{Lösung im}} & Y(z) = \underbrace{\frac{T_a}{T} \frac{1}{1 - e^{-\frac{T_a}{T}} z^{-1}}}_{:= H(z)} X(z)
 \end{array}$$

Wie das Beispiel zeigt, besteht offenbar eine direkte *eindeutige* Beziehung zwischen der **Impulsantwort** eines digitalen LTI-Systems und dem Verhältnis $H(z)$ der Z-Transformierten des Ausgangssignals $Y(z)$ und $X(z)$.

Dieser Zusammenhang ist allgemein gültig, denn er folgt direkt aus der Beziehung (264.1) und dem **Faltungssatz**:

Es sei $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ die **Impulsantwort** eines zeitdiskreten (digitalen) LTI-Systems $\mathfrak{S} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Dann wird das LTI-System im Bildbereich durch **Multiplikation** mit der **Übertragungsfunktion (Z-Übertragungsfunktion, Übertragungsfunktion im Bildbereich)**

$$H(z) := \mathfrak{Z}(h_n) \quad (283.1)$$

beschrieben. Es gilt mit $X(z) := \mathfrak{Z}(x_n)$ und $Y(z) := \mathfrak{Z}(y_n)$:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z). \quad (283.2)$$

Zur Illustration der Vorteile der Beschreibung von LTI-Systemen im Bildbereich greifen wir das System aus Beispiel 4.11 und Abbildung 4.10, S. 271 noch einmal auf.

4.19 Beispiel (LTI-System im Bildbereich)

Für das System aus Abbildung 4.10 erhielt man in Beispiel 4.11 mit Hilfe der Impulsantworten $h_n^{(i)}$ für die Beziehung zwischen Eingangssignal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und Ausgangssignal $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des Gesamtsystems $\mathfrak{S}$ den folgenden Zusammenhang (vgl. Gleichung (272.2)):

$$y_n + h_n^{(1)} * h_n^{(2)} * h_n^{(3)} * y_n = h_n^{(1)} * h_n^{(2)} * x_n. \quad (283.3)$$

Eine Auflösung der Gleichung nach dem Ausgangssignal y_n ist, wie bereits angedeutet, im Zeitbereich nicht direkt möglich, da die Faltungsoperation $*$ zwar multiplikative Eigenschaften hat, es aber keine dazu passende Division zu geben scheint.

Mit Hilfe der Rechenregeln der Z-Transformation können wir (283.3) jedoch in eine *äquivalente* Gleichung im Bildbereich überführen. Wir definieren wieder $X(z) := \mathfrak{L}(x)(s)$, $Y(z) := \mathfrak{L}(y)(s)$ und $H_i(z) := \mathfrak{L}(h_i)(s)$. Aus der **Linearität** der Laplace-Transformation und dem **Faltungssatz** folgt:

$$Y(z) + H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z) \cdot Y(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot X(z). \quad (283.4)$$

Damit erhält man:

$$Y(z) \cdot [1 + H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z)] = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot X(z) \quad (283.5)$$

Übung 91

Übung 92

Übung 93

und

$$Y(z) = \frac{H_1(z) \cdot H_2(z)}{1 + H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z)} \cdot X(z). \quad (284.1)$$

Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems $\mathfrak{S}$ im Bildbereich ist damit:

$$H(z) = \frac{H_1(z) \cdot H_2(z)}{1 + H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z)}. \quad (284.2)$$

Mit Hilfe der Beziehung (283.1) lässt sich zudem (prinzipiell) die **Impulsantwort** $h_n = \mathfrak{Z}^{-1}(H)_n$ bestimmen, wie wir im nächsten Beispiel sehen werden. ■

Übertragungsfunktion im Bildbereich und Impulsantwort

Ist die Impulsantwort h_n eines LTI-Systems bekannt, so kann die **Übertragungsfunktion** $H(z)$ im Bildbereich nach (283.1) durch **Z-Transformation der Impulsantwort** bestimmt werden. Dies ist, wenn nicht durch elementare Berechnung, beispielsweise durch Verwendung von Transformationstabellen oder durch Einsatz der MATLAB-Funktion `ztrans` möglich (s.u.).

Von Interesse ist natürlich auch wieder der umgekehrte Fall. Wir wollen dies auch im diskreten Fall anhand der Übertragungsfunktion (284.2) aus dem vorangegangenen Beispiel illustrieren.

4.20 Beispiel (Bestimmung der Impulsantwort h_n aus $H(z)$)

Wir definieren dazu in (284.2) bzw. in dem dazugehörigen Blockschaltbild 4.10 konkrete Übertragungsglieder.

Der erste Block im Vorwärtszweig des Diagramms 4.10 sei ein System, welches die Werte der Eingangssignalfolge fortlaufend aufsummiert. Für das Ausgangssignal $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ergibt sich also zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{Z}$:

$$w_n = v_n + v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-3} + v_{n-4} + \dots \quad (284.3)$$

Wir erhalten folglich:

$$w_n = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot v_{n-k} \stackrel{!!}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k \cdot v_{n-k} = \sigma_n * v_n. \quad (284.4)$$

Die Impulsantwort des Blockes, welcher für eine fortlaufende Summation der Eingangswerte sorgt, ist also der diskrete Einheitssprung. Für die Z-Übertragungsfunktion $H_1(z)$ ergibt sich laut Beispiel 4.14:

$$H_1(z) = \frac{z}{z-1}. \quad (284.5)$$

Der zweite Block im Vorwärtszweig sei ein einfacher Verstärkungsblock, welcher die Signalwerte verdoppelt, d.h. es sei:

$$y_n = 2 \cdot w_n. \quad (285.1)$$

Die Z-Transformation dieser Gleichung liefert die Übertragungsfunktion $H_2(z)$ des Verstärkungsblockes:

$$H_2(z) = 2. \quad (285.2)$$

Das System im Rückkopplungszweig sei durch die Differenzengleichung

$$z_n = y_n - y_{n-2} \quad (285.3)$$

beschrieben. Wir erhalten unmittelbar durch Z-Transformation der beiden Seiten der Gleichung unter Anwendung des Verschiebungssatzes:

$$Z(z) = Y(z) - z^{-2}Y(z) = (1 - z^{-2})Y(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2}Y(z). \quad (285.4)$$

Die Z-Übertragungsfunktion $H_3(z)$ des Blockes ergibt sich also zu:

$$H_3(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2}. \quad (285.5)$$

Aus (284.2) erhalten wir nun die Z-Übertragungsfunktion des Gesamtsystems:

$$H(z) = \frac{H_1(z)H_2(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)H_3(z)} = \frac{\frac{z}{z-1}2}{1 + \frac{z}{z-1}2\frac{z^2-1}{z^2}} = \frac{2z^2}{3z^2 - z - 2}. \quad (285.6)$$

Diese Z-Transformierte ist natürlich nicht tabelliert, sodass wir die zugehörige Impulsantwort nicht direkt ablesen können. Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung kommt man jedoch zum Ziel.

Man erhält:

$$H(z) = \frac{2}{5} \frac{z^2}{z-1} - \frac{2}{5} \frac{z^2}{z - (-2/3)} \quad (285.7)$$

oder

$$z^{-1}H(z) = \frac{2}{5} \frac{z}{z-1} - \frac{2}{5} \frac{z}{z - (-2/3)}. \quad (285.8)$$

Der Tabelle C.1 in Anhang C entnimmt man nun:

$$\frac{z}{z-1} \xleftrightarrow{Z} \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0, \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases} = (\sigma_n)_{n \in \mathbb{Z}} \quad (285.9)$$

und

$$\frac{z}{z - (-2/3)} \xleftrightarrow{Z} \begin{cases} (-\frac{2}{3})^n & \text{für } n \geq 0, \\ 0 & \text{für } n < 0. \end{cases} \quad (286.1)$$

Da z^{-1} eine Verzögerung bedeutet, gilt für die um einen Takt verzögerte Version der Impulsantwort $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des Gesamtsystems folglich:

$$h_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{für } n < 0, \\ \frac{2}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) & \text{für } n \geq 0. \end{cases} \quad (286.2)$$

Man beachte, dass dies **nicht** zu einer nichtkausalen Systemfolge führt, wie es auf den ersten Blick aussehen mag, da anscheinend der Wert $h_{-1} \neq 0$ ist. Tatsächlich gilt jedoch für $n = 0$:

$$h_{-1} = \frac{2}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^0\right) = \frac{2}{5}(1 - 1) \stackrel{!}{=} 0. \quad (286.3)$$

Somit gilt für die (kausale!) Impulsantwort selbst:

$$h_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n < 0, \\ \frac{2}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) & \text{für } n \geq 0. \end{cases} \quad (286.4)$$

Übertragungsfunktionen im Bildbereich mit MATLAB

Wie bereits erwähnt, kann die Bestimmung der Impulsantwort $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ aus der Übertragungsfunktion $H(z)$ im Bildbereich im Allgemeinen schneller und bequemer mit MATLAB durchgeführt werden.

Eine Möglichkeit besteht darin, die Funktionen `ztrans` und `iztrans` der *Symbolic Math Toolbox* zu nutzen, mit denen **Z-Transformation** und **Inverse Z-Transformation analytisch** bestimmt werden können. Allerdings gilt für diese MATLAB-Funktionen die gleiche Bemerkung, die wir in Kapitel 2 schon bezüglich der Funktionen `laplace` und `ilaplace` gemacht haben. Die Ergebnisse sind oft schwer interpretierbar oder gar praktisch unbrauchbar. Benötigt man jedoch nicht unbedingt exakte algebraische Formulierungen der Lösungen, so bietet MATLAB eine andere Möglichkeit der Analyse digitaler LTI-Systeme.

Die *Control Systems Toolbox* stellt hervorragende Werkzeuge zur **numerischen** Berechnung der Übertragungsfunktionen und anderer relevanter Größen wie der Impulsantwort und der Sprungantwort zur Verfügung. Wir wollen dies anhand der folgenden Beispiele demonstrieren.

4.21 Beispiel (Digitale LTI-Systeme mit MATLAB)

Zuerst soll das System aus Abbildung 4.10 mit den konkreten LTI-Teilsystemen aus Beispiel 4.20 noch einmal analysiert werden.

Die schon in Abschnitt 2.4.2 verwendete Funktion `tf` (transfer function) kann auch genutzt werden, um *zeitdiskrete LTI-Systeme* zu definieren.

Wir verwenden die Funktion zunächst, um die Teilsysteme festzulegen. Die Definition beruht dabei auf den Koeffizienten der in Beispiel 4.20 ermittelten Übertragungsfunktionen im Bildbereich (vgl. Datei `bspUebFunkt_tf.m`):

```
>> % Definition des Systems H1(z)
>> H1 = tf([1 0],[1 -1],1)

H1 =

      z
  -----
    z - 1

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Die Koeffizienten der Zähler- und Nennerpolynome der Z-Übertragungsfunktion $H_1(z)$ werden dabei in absteigender Ordnung der Potenzen von z angegeben. Der zusätzliche Parameter bestimmt die Abtastrate und zeigt der Funktion `tf` zugleich an, dass es sich um ein *digitales* System handelt.

Da im vorliegenden Fall keine Abtastrate vorgegeben ist, wählen²⁰ wir für diesen Parameter 1.

In ähnlicher Weise werden nun die anderen Teilsysteme bestimmt:

```
>> % Definition des Systems H2(z)
>> H2 = tf([2],[1],1)

H2 =

      2

Static gain.

>> % Definition des Systems H3(z)
>> H3 = tf([1 0 -1],[1 0 0],1)

H3 =
```

²⁰ Dies entspricht einer Normierung des Zeitmaßes, sodass das Abtastintervall die Dauer 1 hat.

$$\frac{z^2 - 1}{z^2}$$

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

Alternativ können die **tf**-Objekte auch auf folgende Weise erzeugt werden (vgl. Datei **bsp2UebFunkt_tf.m**):

```
>> % Anlegen der tf-Variable (hier z, es sind aber
>> % auch andere Variablenamen möglich, z.B. p
>> z = tf('z',1)

z =

    z

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

>> % Anlegen der tf-Objekte direkt als Formel in z
>> H1 = z/(z-1)

H1 =

    z
    ---
  z - 1

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

>> H2 = 2*z^0 % nicht: H2 = 2 da sonst kein tf-Objekt!

Transfer function:
2

>> H3 = (z^2-1)/z^2

H2 =

    2

Static gain.
```

Für die Erzeugung der Übertragungsfunktion von Verknüpfungen (Parallelschaltung, Hintereinanderschaltung und Rückkopplung) dieser Systeme stehen auch im zeitdiskreten Fall wieder die Funktionen `parallel`, `series` und `feedback` zur Verfügung. Dabei kann abermals angegeben werden, welche Aus- und Eingänge jeweils miteinander verknüpft werden. Da es sich im vorliegenden Beispiel jedoch um SISO (Single-Input-Single-Output) Systeme handelt, kann diese Angabe entfallen. Die Übertragungsfunktion des digitalen Systems aus Beispiel 4.20 kann damit auf folgende Weise bestimmt werden (vgl. Datei `bspUebFunkt_tf.m`):

```
>> % Berechnung der Übertragungsfunktion des
>> % Vorwärtszweiges
>> Hvor = series(H1,H2)

Hvor =

    2 z
  -----
   z - 1

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

>> % Berechnung der Übertragungsfunktion Systems
>> H = feedback(Hvor,H3)

H =

    2 z^3
  -----
 3 z^3 - z^2 - 2 z

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

>> % Bereinigung um eventuell gleiche Pol-Nullstellen-Paare
>> H = minreal(H)

H =

    0.6667 z^2
  -----
   z^2 - 0.3333 z - 0.6667

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Man vergleiche das Ergebnis mit (285.6). Da offenbar

$$H(z) = \frac{2z^2}{3z^2 - z - 2} = \frac{\frac{2}{3}z^2}{z^2 - \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}} \quad (290.1)$$

ist, wird die analytische Berechnung bestätigt.

Eine Alternative zur Verwendung der Verknüpfungsfunktionen wäre wieder die direkte Umsetzung der Gleichung (285.6) (vgl. Datei **bsp2Ueb-Funkt_tf.m**):

```
>> H = H1*H2/(1+H1*H2*H3)

H =

      2 z^4 - 2 z^3
      -----
      3 z^4 - 4 z^3 - z^2 + 2 z

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

>> H = minreal(H)

H =

      0.6667 z^2
      -----
      z^2 - 0.3333 z - 0.6667

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Die Impulsantwort kann nun *numerisch* mit Hilfe der Funktion **impulse** bestimmt werden:

```
>> % Zeitpunkte definieren (hier ganzzahlig)
>> n = (0:1:20);

>> % Impulsantwort bestimmen
>> [imant, time] = impulse(H,n);
```

Durch einen Vergleich mit der exakten Formel (286.4) für die Impulsantwort soll nun die Berechnung überprüft werden:

```
>> % Impulsantwort nach der exakten Formel
```

```
>>% (man beachte die FELOperation .^(n+1))!!
>> h = (2/5)*(1-(-2/3).^(n+1));

>>% Vergleich der numerischen Werte
>>> [n', h', imant]

ans =

      0      0.6667      0.6667
  1.0000      0.2222      0.2222
  2.0000      0.5185      0.5185
  3.0000      0.3210      0.3210
  4.0000      0.4527      0.4527
  5.0000      0.3649      0.3649
  6.0000      0.4234      0.4234
  7.0000      0.3844      0.3844
  8.0000      0.4104      0.4104
  9.0000      0.3931      0.3931
  ...
```

Die gefundenen Impulsantworten stimmen überein. ■

In einem weiteren Beispiel wollen wir das Systemverhalten des digitalen Systems untersuchen, welches in Beispiel 4.4, S. 245 durch die Differenzgleichung

$$y_n = y_{n-1} - \frac{25}{36}y_{n-2} + x_n - \frac{3}{4}x_{n-1} \quad (291.1)$$

definiert wurde.

4.22 Beispiel (Rekursionsformel - mit MATLAB)

Um dieses System mit MATLAB auf die oben beschriebene Weise zu analysieren, muss zunächst die Übertragungsfunktion im Bildbereich ermittelt werden.

Übung 89

Die Z-Transformation der Gleichung (291.1) auf beiden Seiten liefert mit Hilfe des **Verschiebungssatzes**

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) - \frac{25}{36}z^{-2}Y(z) + X(z) - \frac{3}{4}z^{-1}X(z) \quad (291.2)$$

und somit die Übertragungsfunktion (vgl. dazu (283.2)):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{25}{36}z^{-2}} = \frac{z^2 - \frac{3}{4}z}{z^2 - z + \frac{25}{36}}. \quad (291.3)$$

Mit Hilfe von MATLAB bestimmen wir nun **numerisch** Impulsantwort und Sprungantwort des Systems (vgl. Datei **bsp3UebFunkt_tf.m**):


```

>>% Z-Übertragungsfunktion definieren
>>H = tf([1 -3/4 0],[1 -1 25/36],1)

H =

      z^2 - 0.75 z
      -----
      z^2 - z + 0.6944

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

>>% Zeitpunkte definieren (hier ganzzahlig)
>>n = (0:1:40);

>>% Impulsantwort bestimmen
>>[imant, tn] = impulse(H,n);

>>% Sprungantwort bestimmen
>>[stepant, tn] = step(H,n);

```

Die Sprungantwort können wir direkt grafisch (oder anhand der berechneten Werte) mit der entsprechenden Berechnung aus Beispiel 4.4 vergleichen, wo die Rekursionsgleichung ganz klassisch mit Hilfe einer Schleifenprogrammierung realisiert wurde:

```

>>% Sprungantwort plotten
>>stem(tn,stepant,'b','LineWidth',3)
>>grid
>>xlabel('Zeitindex/n')
>>ylabel('y^{(\sigma)}_n')

```

Beide Ergebnisse²¹ stimmen offenbar überein. 

4.4.3 Transformation von Differenzengleichungen

Die für die programmiertechnische Umsetzung von digitalen LTI-Systemen wichtigste Darstellungsform im Zeitbereich ist sicherlich die der *linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten*. In der allgemeinen Form ist diese laut (253.1) wie folgt definiert:

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{n-k} = \sum_{j=0}^M b_j x_{n-j}, \quad a_k, b_j \in \mathbb{C} \quad (292.1)$$

²¹ Wir verzichten hier auf eine Darstellung und verweisen auf Abbildung 4.3.

Im letzten Beispiel 4.22 des vorangegangenen Abschnitts wurde gezeigt, wie ein System, welches durch eine solche Differenzengleichung definiert ist, mit Hilfe der Z-Transformation unter Verwendung der Rechenregeln aus Tabelle 4.1 in eine Übertragungsgleichung im Bildbereich transformiert werden kann.

Diese Technik, die im Wesentlichen auf der **Linearität** der Z-Transformation und auf dem **Verschiebungssatz** beruht, kann ganz generell auf jede Gleichung der Form (292.1) angewandt werden.

Man erhält:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \cdot Y(z) = \sum_{j=0}^M b_j z^{-j} \cdot X(z). \quad (293.1)$$

Durch Umstellung der Gleichung erhält man die Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{j=0}^M b_j z^{M-j}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}. \quad (293.2)$$

Die Übertragungsfunktion im Bildbereich kann also direkt aus den Koeffizienten der Differenzengleichung abgeleitet werden.

Umgekehrt kann aber auch jede **rationale** Z-Übertragungsfunktion $H(z)$ mit Hilfe der Beziehungen (292.1) bis (293.2) in eine lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten überführt werden, um z.B. eine programmier-technisch umsetzbare Zeitbereichsbeschreibung des Systems zu erhalten.

Hierzu ein Beispiel:

4.23 Beispiel (Ermittlung der Differenzengleichung aus $H(z)$)

Wir greifen Beispiel 4.20 aus Abschnitt 4.4.2 erneut auf und versuchen statt der Impulsantwort eine das System im Zeitbereich beschreibende **Differenzengleichung** zu ermitteln.

Laut (285.6) hatte das Gesamtsystem die Z-Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \frac{2z^2}{3z^2 - z - 2}. \quad (293.3)$$

Durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit dem Faktor z^{-2} erhält man:

$$H(z) = \frac{2}{3 - z^{-1} - 2z^{-2}}. \quad (293.4)$$

Damit folgt für die Z-Transformierten $Y(z)$ und $X(z)$ der Ausgangs- und Eingangssignale des Systems:

$$\begin{aligned}
Y(z) &= H(z) \cdot X(z) = \frac{2}{3 - z^{-1} - 2z^{-2}} \cdot X(z) \\
\iff 3Y(z) - z^{-1}Y(z) - 2z^{-2}Y(z) &= 2X(z) \quad (294.1) \\
\iff Y(z) - \frac{1}{3}z^{-1}Y(z) - \frac{2}{3}z^{-2}Y(z) &= \frac{2}{3}X(z),
\end{aligned}$$

Daraus lässt sich mit dem Verschiebungssatz unmittelbar folgende Differenzengleichung ermitteln:

$$y_n = \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-2} + \frac{2}{3}x_n. \quad (294.2)$$

Diese Differenzengleichung kann nun wieder in Form einer Schleife programmiert oder in ein Simulink-Blockschaltbild umgesetzt werden. 

4.4.4 BIBO-Stabilität

Ähnlich wie im zeitkontinuierlichen Fall können auch für digitale Systeme aus der Pol-/Nullstellen-Konstellation der Übertragungsfunktion im Bildbereich wichtige Rückschlüsse auf das Systemverhalten gezogen werden.

Ist $H(z)$ durch die rationale Funktion (293.2) gegeben, so kann der Faktor

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}$$

von $H(z)$ wieder mittels einer Partialbruchzerlegung in die folgende Form überführt²² werden:

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{k_m} \frac{A_{km}}{(z - p_k)^m}, \quad A_{km} \in \mathbb{C}. \quad (294.3)$$

Insgesamt ist dann $H(z)$ eine Linearkombination von Produkten von Termen der Form:

$$T_k(z) = \frac{z}{z - p_k}. \quad (294.4)$$

Aufgrund der Linearität der Z-Rücktransformation und des Faltungssatzes besteht die **Impulsantwort** $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ aus einer Linearkombination von diskreten Faltungen von Anteilen der Form:

$$h_n^{(\text{Teil})} = p_k^n. \quad (294.5)$$

Sobald auch nur eine Polstelle p_k einen **Betrag** $|p_k| > 1$ hat, wächst p_k^n und damit $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ über alle Grenzen und das System kann daher **nicht BIBO-stabil** sein! Eine ähnliche Überlegung gilt für eine Polstelle, welche genau Betrag 1 hat.

²² Dabei ist wieder die Vielfachheit k_m der k -ten Polstelle p_k berücksichtigt.

Hat dagegen eine **rationale Übertragungsfunktion** $H(z)$ eines digitalen LTI-Systems nur Polstellen p_k , deren **Betrag** $|p_k| < 1$ ist, so sind alle Anteile der Impulsantwort $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gemäß (294.5) **abklingende** Potenzfolgen.

Die Faltung mit einem beschränkten Eingangssignal ergibt also ein **beschränktes Signal** und das System ist **BIBO-stabil**!

Insgesamt erhält man das zu (129.3) im zeitdiskreten Fall korrespondierende **Stabilitätskriterium**²³ für digitale LTI-Systeme:

Übung 96

Ist $\mathfrak{S}$ ein zeitdiskretes LTI-System, welches sich durch eine lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten der allgemeinen Form

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{n-k} = \sum_{j=0}^M b_j x_{n-j}, \quad a_k, b_j \in \mathbb{C} \quad (295.1)$$

Übung 98

oder äquivalent durch eine **rationale Übertragungsfunktion** $H(z)$ im Bildbereich beschreiben lässt, so ist das System genau dann **BIBO-stabil**, wenn für alle (echten) **Polstellen** p_k von $H(z)$ gilt:

$$|p_k| < 1. \quad (295.2)$$

Die Stabilität eines solchen LTI-Systems lässt sich also sofort an dem so genannten **Pol-Nullstellen-Diagramm** des Systems ablesen.

Abbildung 4.11 zeigt exemplarisch die Pol-Nullstellen-Diagramme eines **stabilen** und eines **instabilen** digitalen LTI-Systems. Die Pole sind dabei wieder mit Kreuzen, die Nullstellen mit Kreisen bezeichnet.

Übung 94

Neben den Pol- und Nullstellen ist auch der Definitionsbereich der Übertragungsfunktion $H(z)$ eingezeichnet.

Dieser ist (bei Verwendung der einseitigen Z-Transformation zu Berechnung von $H(z)$) immer das **Komplement eines Kreises um den Nullpunkt** der Gauß'schen Zahlenebene $\mathbb{C}$.

Dies ergibt sich aufgrund folgender Überlegung.

Für (kausale) Signale $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ liefert die (einseitige) Z-Transformation die Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}. \quad (295.3)$$

Nach Substitution $z^{-1} = y$ erhält man die gewöhnliche Potenzreihe

²³ Die rationale Übertragungsfunktion $H(z)$ sollte dabei ausgekürzt sein, d.h. Zähler und Nenner dürfen keine identischen Linearfaktoren mehr enthalten ($H(z)$ hat nur „echte“ Polstellen).

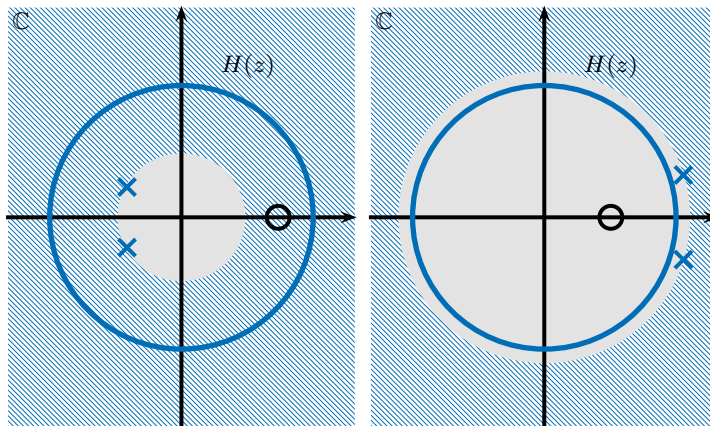


Abb. 4.11: Pol-Nullstellen-Diagramm eines stabilen (links) und eines instabilen (rechts) *digitalen* LTI-Systems mit rationaler Übertragungsfunktion $H(z)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k y^k \quad (296.1)$$

mit Konvergenz in:

$$K_r = \{y \in \mathbb{C} \mid |y| < r\} \quad (\text{Konvergenzkreis}), \quad (296.2)$$

Dabei ergibt sich r beispielsweise aus dem **Wurzelkriterium**.

Damit konvergiert die Z-Transformierte in

$$G_{1/r} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1/r\}, \quad (296.3)$$

d.h. **außerhalb eines Kreises mit Radius $1/r$** .

Ist also $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ die Impulsantwort eines kausalen LTI-Systems, so ist der Definitionsbereich von $H(z)$ das durch (296.3) definierte Gebiet (wobei ggf. noch Punkte **auf** dem Kreis dazukommen²⁴).

Die innere Grenze des Konvergenzgebietes wird dabei durch den **Pol mit dem größten Betrag** markiert. Auf dieser Grenzlinie **kann** die Z-Transformierte und damit $H(z)$ existieren, außerhalb davon ist $H(z)$ in jedem Fall definiert, im Inneren des Kreises ist $H(z)$ (als Z-Transformierte!!) **nicht definiert**.

Übung 89

Übung 90

Aufgrund dieser Zusammenhänge kann man nun das Stabilitätskriterium (295.2) auch so formulieren:

²⁴ Dort konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}$ dann nicht mehr absolut, sondern nur noch einfach.

Ist $\mathcal{S}$ ein digitales LTI-System, welches sich durch eine lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten oder äquivalent durch eine rationale Übertragungsfunktion im Bildbereich beschreiben lässt, so ist das System genau dann **BIBO-stabil**, wenn das **Konvergenzgebiet von $H(z)$** den **komplexen Einheitskreis enthält!**

Exemplarisch wollen wir die Stabilität des Systems aus Beispiel 4.23 mit MATLAB untersuchen.

4.24 Beispiel (Stabilitätsuntersuchung mit MATLAB)

Die Z-Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{2z^2}{3z^2 - z - 2} \quad (297.1)$$

definieren wir zunächst mit der *transfer-function*-Funktion `tf` der *Control Systems Toolbox* (vgl. Datei `bspStabil_tf.m`):

Übung 97

```
>> % Definition des Systems H(z)
>> H = tf([2 0 0],[3 -1 -2],1)
```

H =

$$\frac{2 z^2}{3 z^2 - z - 2}$$

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

Die Pol-/Nullstellen-Analyse kann mit den Funktionen `pole` und `zero` durchgeführt werden. Eine grafische Darstellung des Pol-Nullstellen-Diagramms ist mit `pzmap` möglich:

```
>> pole(H)
```

ans =

1.0000
-0.6667

```
>> zero(H)
```

ans =

0
0

Die Berechnung liefert einen Pol $p = 1$ *auf* dem Einheitskreis. Das Stabilitätskriterium ist also *nicht* erfüllt.

Betrachten wir in der Tat die *Sprungantwort* des Systems, so sehen wir, dass diese über alle Grenzen wächst:

```
>> % Berechnung der ersten 30 Werte der Sprungantwort
>> [spantw,n] = step(H,30);
>> spantw

spantw =

    0.6667
    0.8889
    1.4074
    ...
   11.7600
   12.1600
   12.5600

>> % Berechnung der ersten 100 Werte der Sprungantwort
>> [spantw,n] = step(H,100);
>> spantw

spantw =

    0.6667
    0.8889
    1.4074
    ...
   39.7600
   40.1600
   40.5600
```

Dies kann natürlich auch analytisch nachgerechnet werden, was wir an dieser Stelle aber nicht tun wollen. Die Berechnung zeigt jedoch, dass das digitale System aus Beispiel 4.20 *instabil* ist!

Das Beispiel ruft unter Umständen den falschen Eindruck hervor, dass die Instabilität eines LTI-Systems mit Hilfe der Sprungantwort festgestellt werden kann. Dies ist jedoch *nicht immer so*! Dem Leser sei hierzu dringend die Übung 97 empfohlen! 

4.4.5 Zustandsraumdarstellung im Bildbereich

In Abschnitt 4.3.2 wurde die Zustandsraumdarstellung im Zeitbereich für zeitdiskrete LTI-Systeme definiert und es wurde anhand des Beispiels 4.5 erläutert, wie ein digitales LTI-System, welches mit einer Differenzengleichung gegeben ist, mit Hilfe eines Standardverfahrens in ein Zustandsraummodell im Zeitbereich überführt werden kann.

Es lassen sich jedoch auch die zeitdiskreten Zustandsgleichungen (254.2) mit Hilfe der Z-Transformation ohne weiteres in den Bildbereich transformieren und man gelangt auf diese Weise zu einer weiteren Darstellung von LTI-Systemen²⁵ im Bildbereich.

Aus (254.2) ergibt sich mit Hilfe des Verschiebungssatzes²⁶ der Z-Transformation:

Sei $\vec{u}_n$ das *Eingangssignal (der Eingangssignalvektor)* eines digitalen LTI-Systems $\mathfrak{S}$, $\vec{y}_n$ das *Ausgangssignal (der Ausgangssignalvektor)*. Sei $\vec{x}_n$ ein Signalvektor von inneren Zuständen des Systems (*der Vektor der Zustandsvariablen*). Seien A, B, C, D (komplexe oder reelle) Matrizen. Dann heißt eine Darstellung des Ein-/Ausgangsverhaltens des LTI-Systems $\mathfrak{S}$ der Form

$$\begin{aligned} z \cdot \vec{X}(z) &= A \cdot \vec{X}(z) + B \cdot \vec{U}(z), \\ \vec{Y}(z) &= C \cdot \vec{X}(z) + D \cdot \vec{U}(z) \end{aligned} \quad (299.1)$$

eine **Zustandsraumdarstellung im Bildbereich** des LTI-Systems.

Die Gleichungen (299.1) lassen sich sehr leicht in eine Form bringen, die die Beziehung zwischen Eingangssignal(vektor) und Ausgangssignal(vektor) des Systems und damit das Übertragungsverhalten im Bildbereich wiedergibt.

Aus (299.1) folgt:

$$\begin{aligned} \vec{X}(z) &= (z - A)^{-1} \cdot B \cdot \vec{U}(z) \\ \vec{Y}(z) &= C \cdot (z - A)^{-1} \cdot B \cdot \vec{U}(z) + D \cdot \vec{U}(z) \\ &= (C \cdot (z - A)^{-1} \cdot B + D) \cdot \vec{U}(z) \\ &:= \mathfrak{H}(z) \cdot \vec{U}(z) \end{aligned} \quad (299.2)$$

mit der Übertragungsmatrix:

$$\mathfrak{H}(z) = (C \cdot (z - A)^{-1} \cdot B + D). \quad (299.3)$$

²⁵ Es sei nochmals festgehalten, dass wir nur LTI-Systeme „in Ruhe“ betrachten, d.h. alle Anfangszustände haben den Wert null!

²⁶ Bei vektoriellen Größen wird die Transformation *komponentenweise* durchgeführt!

Im Falle eines SISO-Systems (also *eines* Eingangssignals u_n und *eines* Ausgangssignals y_n) erhalten wir offenbar die bekannte Übertragungsfunktion $H(z)$ im Bildbereich. Die **Übertragungsmatrix** $\mathcal{H}(z)$ stellt also die **Verallgemeinerung des Konzepts der Übertragungsfunktion im Bildbereich** dar.

Betrachten wir die Folgerungen für das (SISO-)Beispiel 4.5, S. 255.

4.25 Beispiel (Zustandsraumdarstellung im Bildbereich)

Die Differenzengleichung

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} + a_2 y_{n+2} = b_0 u_n + b_1 u_{n+1} \quad (300.1)$$

wurde in Beispiel 4.5 in die Zustandsgleichungen

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{pmatrix} \cdot u_n \quad (300.2)$$

und

$$y_n = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + 0 \cdot u_n \quad (300.3)$$

umgesetzt.

Aus (299.3) folgt für die Übertragungsmatrix (hier Übertragungsfunktion):

$$\begin{aligned} H(z) &= (C \cdot (z - A)^{-1} \cdot B + D) \\ &= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z & -1 \\ \frac{a_0}{a_2} & z + \frac{a_1}{a_2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{pmatrix} + 0. \end{aligned} \quad (300.4)$$

Die inverse Matrix ist analytisch einfach zu berechnen. Es gilt bekanntlich:

$$\begin{pmatrix} z & -1 \\ \frac{a_0}{a_2} & z + \frac{a_1}{a_2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{z \cdot \left(z + \frac{a_1}{a_2}\right) + \frac{a_0}{a_2}} \cdot \begin{pmatrix} z + \frac{a_1}{a_2} & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & z \end{pmatrix}. \quad (300.5)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{z \cdot \left(z + \frac{a_1}{a_2}\right) + \frac{a_0}{a_2}} \cdot \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2} \\ \frac{z}{a_2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{z \cdot \left(z + \frac{a_1}{a_2}\right) + \frac{a_0}{a_2}} \left(\frac{b_0}{a_2} + \frac{b_1 z}{a_2} \right). \end{aligned} \quad (300.6)$$

Klammert man aus dem Nenner den Faktor $\frac{1}{a_2}$ aus, so erhält man:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z}{z \cdot (a_2 z + a_1) + a_0} = \frac{b_0 + b_1 z}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}. \quad (301.1)$$

Dies ist genau die Übertragungsfunktion, die man durch die direkte Z-Transformation der Differenzengleichung (300.1) erhält, denn man bekommt mit Hilfe des Verschiebungssatzes

$$a_0 Y(z) + a_1 z Y(z) + a_2 z^2 Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z U(z) \quad (301.2)$$

und damit

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}, \quad (301.3)$$

das heißt die Übertragungsfunktion (301.1). ■

Das Beispiel bestätigt die obige Behauptung, dass Übertragungsmatrix $\mathfrak{H}(z)$ und Übertragungsfunktion $H(z)$ für SISO-Systeme übereinstimmen.

Berechnungen mit MATLAB

Mit Hilfe von MATLAB und der Funktionalität der *Control Systems Toolbox* können wir bequem zwischen den verschiedenen Darstellungsformen umrechnen.

4.26 Beispiel (Zustandsraumdarstellung mit MATLAB)

Für die Demonstration dieser Techniken verwenden wir die Übertragungsfunktion (301.3) mit den konkreten Zahlenwerten: $a_0 = 1/2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $b_0 = 3$, $b_1 = 1$. Mit Hilfe der MATLAB-Funktion **ss** erhalten wir eine Zustandsraumdarstellung (vgl. Datei **bspZRDdiskret.m**):

```
>> a_0 = 1/2; a_1 = -1; a_2 = 1;
>> b_0 = 3; b_1 = 1;
>> z = tf('z',1);
>> H = (b_0 + b_1*z)/(a_2*z^2 + a_1*z + a_0)
```

H =

$$\frac{z + 3}{z^2 - z + 0.5}$$

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.

Übung 95

Übung 100

Übung 101

```
>> ZRD = ss(H);
>> A = ZRD.a, B = ZRD.b, C = ZRD.c, D = ZRD.d

A =

    1.0000    -0.5000
    1.0000         0

B =

     2
     0

C =

    0.5000    1.5000

D =

     0
```

Ist umgekehrt eine Zustandsraumdarstellung gegeben, so können wir mit dieser Funktion auch die Übertragungsmatrix berechnen. Wir demonstrieren dies für die in (300.2) und (300.3) definierte Zustandsraumdarstellung und die obigen numerischen Werte:

```
>> % Definition der Zustandsmatrizen
>> A = [0 1; -a_0/a_2 -a_1/a_2]

A =

     0    1.0000
 -0.5000    1.0000

>> B = [0; 1/a_2]

B =

     0
     1

>> C = [b_0 b_1]

C =
```

```

      3      1
>> D = 0

D =

      0

>> % Erzeugung eines LTI-Modells
>> LTISys = ss(A,B,C,D,-1)

a =

      x1      x2
x1      0      1
x2     -0.5     1

b =

      u1
x1      0
x2      1

c =

      x1      x2
y1      3      1

d =

      u1
y1      0

Sampling time: unspecified
Discrete-time model.

>> % Umwandlung in eine Übertragungsfunktion
>> H = tf(LTISys)

H =

      z + 3
      -----
      z^2 - z + 0.5

Sample time: unspecified
Discrete-time transfer function.

```

Wir erhalten die Z-Übertragungsfunktion $H(z)$ aus (301.3) mit den oben definierten numerischen Koeffizienten. _____

4.4.6 Signalfussdiagramme und Simulink-Simulationen

Wie im Falle zeitkontinuierlicher Systeme können auch zeitdiskrete LTI-Systeme aus einem Signalfussdiagramm (Blockschaltbild) heraus unmittelbar in eine Simulink-Simulation umgesetzt werden.

Die LTI-Teilsysteme, welche in der Simulink-Bibliothek vorgegeben sind, sind dabei ebenfalls wieder mit ihrer Bildbereichsdarstellung, d.h. mit ihrer Z-Übertragungsfunktion gekennzeichnet.

Abbildung 4.12 zeigt einige der zur Verfügung stehenden Simulink-Blöcke.

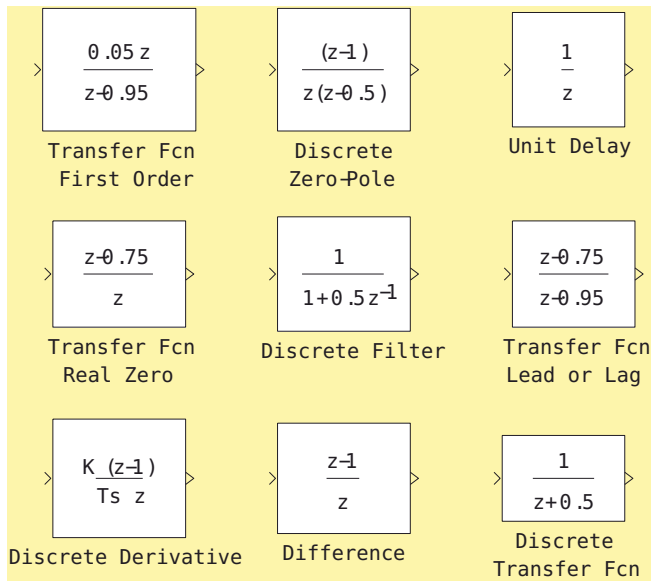


Abb. 4.12: Einige Simulink-Blöcke zur Simulation von zeitdiskreten LTI-Systemen

Natürlich können auch digitale LTI-Systeme in Simulink wieder durch Verwendung von Einzelkomponenten wie Additionsknoten, Verstärkungs- und Verzögerungsblöcken etc. definiert werden.

Zu beachten ist in jedem Fall jedoch, dass in den Simulationsparametern statt der quasi-kontinuierlichen *variable-step*-Verfahren ein diskretes *fixed-step*-Verfahren verwendet wird.

4.4.7 Übungsaufgaben

Übung 88 (Lösungsband Seite 203)

Betrachten Sie die Folge

$$h_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sigma_n - \sigma_{n-5}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (304.1)$$

- (a) Bestimmen Sie auf direktem Wege mit Hilfe der Definition der Z-Transformation die Z-Transformierte der Folge (in geschlossener Form).
- (b) Bestimmen Sie die Z-Transformierte der Folge mit Hilfe von MATLAB.
- (c) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Z-Transformierten und skizzieren Sie mit Hilfe von MATLAB ein Pol-Nullstellen-Diagramm.

Übung 89 (Lösungsband Seite 205)

Betrachten Sie ein zeitdiskretes LTI-System, welches durch folgende Differenzengleichung beschrieben ist:

$$y_n = x_n - 2x_{n-1} + \frac{5}{2}y_{n-1} - y_{n-2}. \quad (305.1)$$

- (a) Bestimmen Sie analytisch die Übertragungsfunktion im Bildbereich des Systems.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB die Übertragungsfunktion im Bildbereich des Systems.
- (c) Bestimmen Sie analytisch die Impulsantwort $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des Systems.
- (d) Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB Impulsantwort und Sprungantwort des Systems.
- (e) Untersuchen Sie, ob das System stabil ist.
- (f) Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB eine äquivalente Zustandsraumdarstellung des Systems.

Übung 90 (Lösungsband Seite 210)

Betrachten Sie das für einen Parameter $0 < T < \frac{1}{2}$ durch die Differenzengleichung

$$y_n - y_{n-1} + T y_{n-2} = x_n \quad (305.2)$$

beschriebene zeitdiskrete LTI-System.

- (a) Bestimmen Sie die Z-Übertragungsfunktion des Systems.
- (b) Bestimmen Sie die ersten 5 Werte der Impulsantwort des Systems.
- (c) Entscheiden Sie, ob das System stabil ist.

Übung 91 (Lösungsband Seite 211)

Betrachten Sie die in Abbildung 4.13 dargestellten Blockschaltbilder zweier zeitdiskreter LTI-Systeme.

- (a) Weisen Sie mit Hilfe der Z-Transformation nach, dass beide Blockschaltbilder ein und dasselbe LTI-System beschreiben.

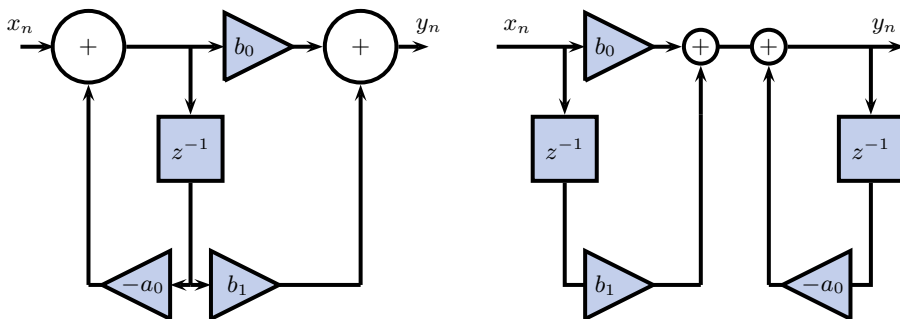


Abb. 4.13: Blockschaltbilder zweier zeitdiskreter LTI-Systeme

- (b) Geben Sie eine Beschreibung des Systemverhaltens in Form einer Differenzgleichung an.

Hinweis: Definieren Sie in beiden Blockschaltbildern jeweils ein Zwischensignal in der Mitte des obersten Signalfades!

Übung 92 (Lösungsband Seite 214)

Betrachten Sie das in Abbildung 4.14 dargestellte Blockschaltbild eines weiteren zeitdiskreten LTI-Systems.

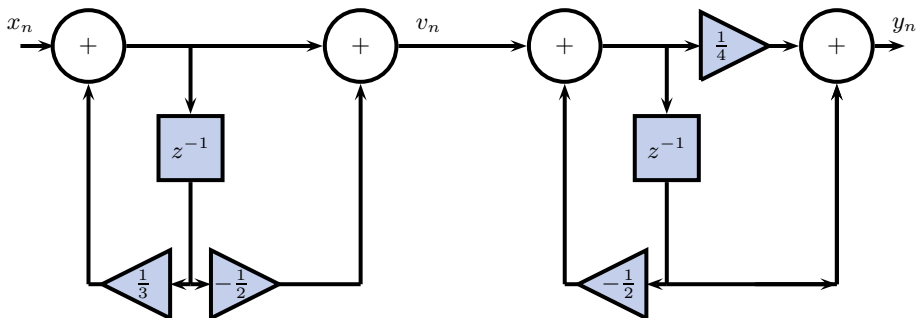


Abb. 4.14: Blockschaltbild eines zeitdiskreten LTI-Systemes

- Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Übung 91 die Z-Übertragungsfunktion des Systems.
- Bestimmen Sie die Differenzgleichung, die dieses System beschreibt.
- Entwerfen Sie ein Simulink-Modell zur Simulation des Systems.

- (d) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des Simulink-Systems.
- (e) Bestimmen Sie zum Vergleich (numerisch) die Impulsantwort des Systems mit Hilfe von MATLAB.

Übung 93 (Lösungsband Seite 219)

Betrachten Sie das in Abbildung 4.15 dargestellte Simulink-Blockschaltbild eines diskreten LTI-Systems (vgl. Datei `s_uebZTfunkt2.slx`):

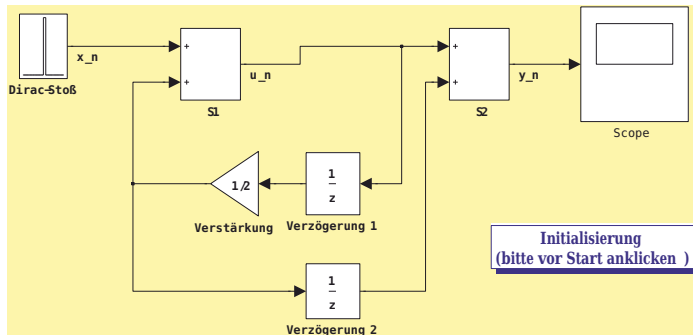


Abb. 4.15: Simulink-Model eines diskreten LTI-Systems

- (a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ des Systems.
- (b) Bestimmen Sie (am besten mit dem in Teil (a) bestimmten $H(z)$) die Differenzengleichung, die das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems im Zeitbereich beschreibt.
- (c) Bestimmen Sie die ersten vier Werte der Impulsantwort.
- (d) Entscheiden Sie, ob das System stabil ist.

Übung 94 (Lösungsband Seite 221)

Die Abbildung 4.16 zeigt das Pol-Nullstellen-Diagramm eines zeitdiskreten Filters (LTI-Systems).

- (a) Bestimmen Sie die Z-Übertragungsfunktion des Filters.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Transformationstabellen aus der Z-Übertragungsfunktion des Filters dessen Impulsantwort.
- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB numerisch die Impulsantwort des Filters.
- (d) Ist das Filter stabil?
- (e) Entwerfen Sie ein Simulink-Blockschaltbild des Filters.

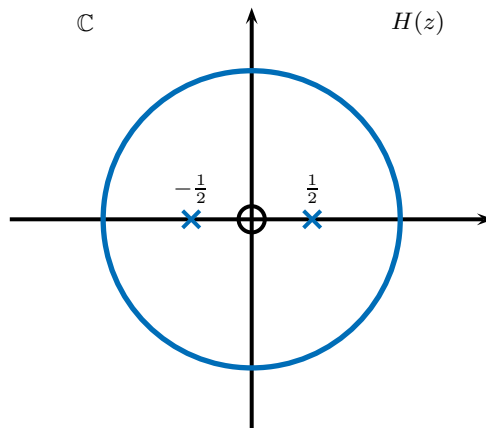


Abb. 4.16: Pol-Nullstellen-Diagramm eines digitalen Filters (LTI-Systems)

Übung 95 (Lösungsband Seite 224)

Betrachten Sie nochmals die Folge

$$h_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sigma_n - \sigma_{n-5}) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (308.1)$$

aus Übung 88, S. 304.

- Fassen Sie $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ als Impulsantwort eines zeitdiskreten LTI-Systems auf und geben Sie für ein (kausales) Eingangssignal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Beschreibung des Ausgangssignals $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ im Zeitbereich an.
- Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB eine äquivalente Zustandsraumdarstellung des Systems.

Übung 96 (Lösungsband Seite 226)

Ein zeitdiskretes System sei durch die folgende Z-Übertragungsfunktion bestimmt:

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 - z - \frac{1}{2}}{z^2}. \quad (308.2)$$

- Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems. Bestätigen Sie Ihr Ergebnis mit der MATLAB-Funktion `impz` und numerisch mit Hilfe der MATLAB-Funktion `impz`.
- Bestimmen Sie die Sprungantwort des Systems
 - ohne Verwendung der Impulsantwort,
 - mit Verwendung der Impulsantwort.

(c) Entscheiden Sie, ob das System stabil ist.

Übung 97 (Lösungsband Seite 228)

Ein zeitdiskretes System sei durch die folgende Z-Übertragungsfunktion bestimmt:

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - \sqrt{2}z + 1}. \quad (309.1)$$

- (a) Entscheiden Sie, ob das System stabil ist.
- (b) Bestimmen Sie mit MATLAB die Sprungantwort des Systems.
- (c) Zeigen Sie analytisch, dass die Sprungantwort **beschränkt** ist.
- (d) Bestimmen Sie ein (kausales) Eingangssignal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, dessen Systemantwort über alle Grenzen wächst und prüfen Sie Ihre Vermutung mit einer Simulink-Simulation.

Übung 98 (Lösungsband Seite 232)

Betrachten Sie das digitale LTI-System mit der Impulsantwort:

$$h_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{für } n \geq 0, \\ 0 & \text{für } n < 0. \end{cases} \quad (309.2)$$



- (a) Bestimmen Sie die Z-Übertragungsfunktion $H(z)$ des Systems!
- (b) Weisen Sie nach, dass das LTI-System stabil ist!
- (c) Untersuchen Sie, ob das LTI-System in Form einer Differenzengleichung geschrieben werden kann.

Übung 99 (Lösungsband Seite 233)

Zeigen Sie, dass ein digitales LTI-System, welches auf dem Signalraum *aller* beschränkten, zeitdiskreten Signale durch eine kausale Impulsantwort h_n definiert ist, genau dann stabil ist, wenn h_n **absolut summierbar** ist, d.h. wenn die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n \quad (309.3)$$



absolut konvergent ist!

Übung 100 (Lösungsband Seite 234)

Betrachten Sie ein digitales LTI-System, welches in der Zustandsraumdarstellung mit Hilfe der folgenden Zustandsmatrizen gegeben ist:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 C &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, & D &= 0.
 \end{aligned} \tag{310.1}$$

- Bestimmen Sie mit MATLAB die Übertragungsfunktion im Bildbereich des Systems.
- Bestimmen Sie mit MATLAB die Impulsantwort des Systems.
- Untersuchen Sie, ob das System stabil ist.

Übung 101 (Lösungsband Seite 238)

Greifen Sie die Übung 81 noch einmal auf und geben Sie, diesmal mit Hilfe von MATLAB, *zwei* äquivalente Zustandsraumdarstellungen für das digitale System an, welches durch die folgende Differenzengleichung definiert ist:

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} + u_n, \quad y_{-1} = y_{-2} = 0. \tag{310.2}$$

4.5 Digitale Signale und LTI-Systeme im Frequenzbereich

Neben den Zeit- und Bildbereichsdarstellungen wurde in Kapitel 2 eine weitere Möglichkeit der Charakterisierung zeitkontinuierlicher Signale und Systeme vorgestellt, welche tiefe Einblicke in die Natur der Signale und die Funktionsweise von LTI-Systemen gewährt, nämlich die Beschreibung und Darstellung im *Frequenzbereich*.

Es liegt daher nahe zu fragen, ob ein entsprechender Methodenapparat auch für digitale Signale und Systeme entwickelt werden kann und inwieweit sich Charakterisierungen im Frequenzbereich aus der analogen in die digitale Welt übertragen lassen.

Da zeitdiskrete Signale stets als *Abtastwerte* von zeitkontinuierlichen Signalen aufgefasst werden können, sollte darüber hinaus die Frage beantwortet werden, in welchem Zusammenhang die Frequenzbereichs-Charakterisierungen der zeitkontinuierlichen und der zeitdiskreten Version(en) stehen. Der vorliegende Abschnitt beschäftigt sich mit der Beantwortung dieser Fragen.

Spektrum eines zeitdiskreten Signals

Bereits in Kapitel 3 wurden im Zusammenhang mit der Diskussion des *Abtasttheorems* Überlegungen angestellt, wie das Konzept des *Spektrums* eines Signals auf Abtastfolgen übertragen werden könnte.

Dies gelang über den Umweg, das zeitdiskrete Signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit einem äquivalenten zeitkontinuierlichen Signal der folgenden Form zu identifizieren:

$$\tilde{x}(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot \delta(t - nT_a) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_a). \quad (311.1)$$

Zwar führt dieser Ansatz zu einer erfolgreichen Definition des Spektrums von $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, welches einfach mit dem Fourier-Spektrum des Signals $\tilde{x}(t)$ identifiziert wird, jedoch ist der Umweg über solche äquivalente Dirac-Impulsfolgen theoretisch unbefriedigend und unpraktisch.

Wesentlich angenehmer wäre eine Transformation, die ohne Rückgriff auf verallgemeinerte Funktionen ein **Spektrum** direkt aus den Werten der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ berechnet.

Da die Fourier-Transformation im zeitkontinuierlichen Fall aus einer Betrachtung der Reaktion von analogen LTI-Systemen auf Schwingungserregungen gewonnen wurde (vgl. Abschnitt 2.5, S. 142ff), greifen wir diese Idee auch im digitalen Fall erneut auf.

Antwort eines digitalen LTI-Systems auf Schwingungen

Als „Schwingungen“ kommen im zeitdiskreten Fall naturgemäß nur die diskretisierten Versionen der zeitkontinuierlichen harmonischen Schwingungen in Frage. Dabei beschränken wir uns aus Gründen der rechnerischen Vereinfachung wieder auf die Diskretisierung **komplexer** harmonischer Schwingungen $e^{j\omega t}$ der Frequenz ω rad/s, da damit über die Euler-Beziehung (143.3) auch die reellen harmonischen Schwingungen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ abgedeckt sind.

Die Diskretisierung von $x(t) = e^{j\omega t}$ mit Abtastrate $f_a := \frac{1}{T_a}$ an den äquidistanten Abtastzeitpunkten nT_a liefert

$$x_n = e^{j\omega n T_a} = e^{jn \cdot 2\pi \frac{f}{f_a}} = e^{jn\Omega}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (311.2)$$

wobei $\Omega \in [0, 2\pi]$ die so genannte (auf die Abtastrate f_a) **normierte Kreisfrequenz** ist, welche wie folgt definiert ist:

Sei $f_a = \frac{1}{T_a}$ Hz eine Abtastrate, f Hz eine Frequenz und ω rad/s die zugehörige Kreisfrequenz. Dann heißt die Größe

$$\Omega := \omega T_a = \frac{\omega}{f_a} = \frac{2\pi f}{f_a} \quad \text{rad} \quad (311.3)$$

die (auf die Abtastrate) **normierte Kreisfrequenz**.

Das Signal kann durch diesen Bezug auf die normierte Kreisfrequenz als unabhängig von der zur Diskretisierung verwendeten Abtastrate angesehen werden. In der Tat geht die Information über die Abtastrate nach dem Abtastvorgang ja verloren! An den Abtastwerten selbst ist die Abtastrate *nicht erkennbar*! Man vergleiche dazu insbesondere auch die Aussage des Abtasttheorems.

Eine Folgerung des Abtasttheorems ist auch, dass harmonische Signale (Signalanteile) mit Frequenzen innerhalb des **Nyquist-Bandes** $[-\frac{f_a}{2}, +\frac{f_a}{2}]$ nach Abtastung offenbar zu diskreten harmonischen Signalen (Signalanteilen) mit normierten Frequenzen innerhalb des Intervalls $[-\pi, +\pi]$ führen. Frequenzen f Hz innerhalb des **Nyquist-Bandes** können über (311.3) eindeutig *normierten Frequenzen* Ω rad in $[-\pi, +\pi]$ zugeordnet werden.

Man betrachte nun als Erregungssignale die oben definierten diskreten komplexen Schwingungen

$$x_n := e^{j\Omega n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (312.1)$$

Dann folgt für ein LTI-System mit Impulsantwort $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gemäß (264.1):

$$\mathfrak{S}(x_n) = h_n * x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{j\Omega(n-k)} = e^{j\Omega n} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j\Omega k}. \quad (312.2)$$

Existiert die Reihensumme $H(\Omega) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j\Omega k}$, so ist das Ausgangssignal des LTI-Systems offenbar die zeitdiskrete komplexe Schwingung am Eingang *multipliziert* mit einem, von der *normierten* Frequenz Ω abhängigen, komplexen Wert. Anders ausgedrückt: $e^{j\Omega n}$ ist *Eigenfolge* von $\mathfrak{S}$ mit komplexem Eigenwert $H(\Omega)$!

Man entnimmt der Gleichung (312.2) durch einen Blick auf (273.2) sofort, dass der Wert von $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j\Omega k}$ *formal* aus der (zweiseitigen) Z-Transformation²⁷ der Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ durch Substitution mit

$$z = e^{j\Omega} \quad (312.3)$$

gewonnen werden kann.

Handelt es sich also um die Impulsantwort eines *stabilen* Systems, d.h. existiert die Z-Transformation *auf dem komplexen Einheitskreis*, so ist dies sogar mehr als eine nur rein formale Ersetzung. Die Ersetzung ist dann auch in der Reihensumme erlaubt, d.h. in dem durch die Summation entstehenden rationalen Ausdruck in z .

In Anlehnung an die Bezeichnungsweise für die Z-Transformation bezeichnen wir daher den in (312.2) erhaltenen Eigenwert mit $H(\Omega)$.

²⁷ Ist die Impulsantwort $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ *kausal* (und damit das LTI-System kausal), so entspricht dies der in diesem Buch üblicherweise verwendeten einseitigen Z-Transformation.

4.5.1 Die zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT)

$H(\Omega)$ übernimmt damit eine ähnliche Rolle wie $H(j\omega)$ im analogen Fall. Es beschreibt Frequenz- und Phasengang von LTI-Systemen und spektrale Inhalte zeitdiskreter Signale. Wir definieren analog zur Definition der zeitkontinuierlichen Fourier-Transformation:

Die Zuordnung

$$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \longrightarrow X_{DTFT}(\Omega) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\Omega k}, \quad \Omega \in [-\pi, \pi] \quad (313.1)$$

heißt die **zeitdiskrete Fourier-Transformation** oder auch die **DTFT** von $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

$X_{DTFT}(\Omega)$ heißt das **DTFT-Spektrum** des zeitdiskreten Signals $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Die DTFT²⁸ wird auch mit der folgenden, schon von den zeitkontinuierlichen Transformationen bekannten Symbolik dargestellt:

$$(f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \circ - \bullet X_{DTFT}(\Omega). \quad (313.2)$$

Da es sich bei der rechten Seite von Gleichung (313.1) um eine Reihe handelt, sollte noch ein Wort über Existenzbedingungen verloren werden.

$X_{DTFT}(\Omega)$ existiert zumindest immer dann, wenn für die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gilt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty \quad (313.3)$$

oder

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty. \quad (313.4)$$

Die Bedingung (313.4) ist etwa für diskretisierte Energiesignale erfüllt.

Gelten diese Existenzbedingungen nicht, so kann den Reihensummen (313.1) ggf. nur noch im distributionellen Sinne ein Wert zugewiesen werden. Wir wollen jedoch auf solche Betrachtungen hier verzichten und verweisen für den Bedarfsfall auf entsprechende mathematische Literatur, etwa [53].

²⁸ Wir übernehmen hier die Abkürzung für die englische Bezeichnung „Discrete Time Fourier Transform“, die sich auch in der deutschsprachigen Literatur eingebürgert hat.

Beispiele zur DTFT

In der obigen Herleitung der DTFT wurde gezeigt, dass die DTFT einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ rein *formal* aus der Z-Transformation durch Substitution $z = e^{j\Omega}$ gewonnen werden kann.

Speziell sollte festgehalten werden:

Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein zeitdiskretes Signal (eine Folge) und existiert die Z-Transformierte $X(z)$ des Signals **auf dem Einheitskreis**, so gilt:

$$X_{DTFT}(\Omega) = X(z)_{z=e^{j\Omega}} \quad \forall \Omega \in [-\pi, \pi]. \quad (314.1)$$

Die Berechnung der DTFT lässt sich folglich auf die der Z-Transformation zurückführen und das DTFT-Spektrum lässt sich i.Allg. unmittelbar durch Auswertung der Z-Transformation bestimmen.

4.27 Beispiel (DTFT der Potenzfolge a^{-n})

Man betrachte die kausale Exponentialfolge

$$x_n = \begin{cases} 0 & n < 0, \\ a^{-n} & n \geq 0 \end{cases} \quad \text{mit } a \in \mathbb{C}, |a| > 1. \quad (314.2)$$

In Beispiel 4.15, S. 277 wurde dazu

$$X(z) = \frac{az}{az - 1}, \quad \forall z, |z| > \frac{1}{|a|} \quad (314.3)$$

als Z-Transformierte errechnet.

Die Z-Transformierte **konvergiert** also wegen $\frac{1}{|a|} < 1$ insbesondere auch auf dem Einheitskreis. Folglich ist die folgende Substitution sinnvoll:

$$X_{DTFT}(\Omega) = \frac{az}{az - 1} \Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{ae^{j\Omega}}{ae^{j\Omega} - 1}. \quad (314.4)$$

Man beachte, dass eine - durchaus mögliche - rein formale Ersetzung von $z = e^{j\Omega}$ in dem Ausdruck $\frac{az}{az-1}$ für $|a| < 1$ *nicht sinnvoll* wäre, da dieser für diese z dann *nicht* mehr der Reihensumme von $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$ entspräche. Somit repräsentierte in diesem Falle $\frac{ae^{j\Omega}}{ae^{j\Omega}-1}$ auch nicht die DTFT von $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. ■

4.28 Beispiel (DTFT der Sprungfolge σ_n)

Noch kritischer muss die Situation für den Einheitssprung σ_n betrachtet werden.

Die Z-Transformierte dieses Signals ist nach (277.1)

$$\Sigma(z) = \frac{z}{z-1} \quad \forall z : |z| > 1, \quad (315.1)$$

existiert also **nicht** auf dem komplexen Einheitskreis.

In der Tat *divergiert* insbesondere

$$\Sigma(0) = \Sigma(z)_{z=e^{j \cdot 0}} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot e^{-j k \cdot 0} = \sum_{k=0}^{\infty} 1. \quad (315.2)$$

Aber auch

$$\Sigma(\pi) = \Sigma(z)_{z=e^{j \cdot \pi}} \stackrel{!}{=} \Sigma(z)_{z=-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \quad (315.3)$$

konvergiert nicht. Die DTFT existiert nicht²⁹. Die formale Ersetzung

$$\Sigma(\pi) = \Sigma(z)_{z=e^{j \cdot \pi}} = \frac{z}{z-1} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{2} \quad (315.4)$$

ist also falsch! ■

Die inverse zeitdiskrete Fourier-Transformation

Auch die zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT) ist eine **eindeutige** Transformation und besitzt folglich eine Rücktransformation. Es gilt³⁰:

Ist $X_{DTFT}(\Omega)$ die DTFT einer Folge x_n , so gilt:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{DTFT}(\Omega) e^{jn\Omega} d\Omega. \quad (315.5)$$

²⁹ Sie existiert zumindest nicht im Sinne der üblichen Reihenkonvergenz!

³⁰ Wir zitieren hier ohne Nachweis.

Interpretation der zeitdiskreten Fourier-Transformation

Ähnlich wie im zeitkontinuierlichen Fall kann die Rücktransmutationsformel (315.5) ebenfalls wieder für eine Interpretation der neu definierten zeitdiskreten Fourier-Transformation DTFT herangezogen werden.

Auch ein digitales Signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ kann als **Überlagerung zeitdiskreter komplexer harmonischer Schwingungen** aufgefasst werden.

Das DTFT-Spektrum $X_{DTFT}(\Omega)$ gibt die (komplexen) Koeffizienten von $e^{jn\Omega}$ zu dieser (**frequenzkontinuierlichen**) Überlagerung an. Diese Koeffizienten können wiederum als Amplituden- und Phasenparameter interpretiert werden.

In der Praxis werden wir jedoch, ähnlich wie bei den anderen bislang behandelten Transformationen, von der Inversionsformel (315.5) keinen Gebrauch machen.

Darüber hinaus ist die DTFT ohnehin hauptsächlich eher von theoretischer als praktischer Bedeutung, da praktische Berechnungen auf der später zu besprechenden so genannten *Diskreten Fourier-Transformation (DFT)* beruhen. Die DTFT ist jedoch ein wichtiger theoretischer Schritt hin zu dieser Transformation.

Eigenschaften der zeitdiskreten Fourier-Transformation (DTFT)

Die wesentlichen Eigenschaften der DTFT lassen sich aufgrund der Ähnlichkeit zur Z-Transformation i.W. aus deren Eigenschaften ableiten. Die wichtigsten dieser Eigenschaften sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst.

Übung 102

Tabelle 4.2: Einige Eigenschaften und Rechenregeln der DTFT

Eigenschaft, Regel	Zeitbereich	Bildbereich
Linearität	$ax_n + by_n$	$aX(\Omega) + bY(\Omega)$
2π-Periodizität	–	$X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi \cdot m), m \in \mathbb{Z}$
Verschiebung im Zeitbereich	x_{n-n_0}	$e^{-jn_0\Omega} X(\Omega)$
Faltungssatz	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k}$	$X(\Omega) \cdot Y(\Omega)$
Eindeutigkeitssatz	$x_n = y_n$	$X(\Omega) \equiv Y(\Omega)$

Speziell erwähnenswert ist vielleicht die **2 π -Periodizität**, die sich nicht unmittelbar durch Übertragung der Eigenschaften der Z-Transformation ergibt, sondern direkt aus der Definition (313.1) und der folgenden Tatsache:

$$e^{-j(\Omega+2\pi \cdot m) \cdot k} = e^{-j\Omega \cdot k} \cdot e^{-j2\pi mk} = e^{-j\Omega \cdot k} \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}. \quad (316.1)$$

Die DTFT kann also prinzipiell für alle $\Omega \in \mathbb{R}$ definiert werden, ist aber *periodisch*, sodass die Definition auf einem Intervall der Länge 2π , etwa $[-\pi, \pi]$ wie in Definition (313.1) oder auch auf $[0, 2\pi]$, ausreicht.

Berechnung der DTFT mit MATLAB

Die Berechnung der DTFT kann mit MATLAB eigentlich nur auf dem Umwege über die Z-Transformierte erfolgen, sofern diese auf dem Einheitskreis definiert und die Ersetzung (314.1) sinnvoll und zulässig ist. Es ist damit auch möglich, Betrags- und Phasenspektrum des digitalen Signals grafisch darzustellen.

Übung 103

4.29 Beispiel (DTFT einer Potenzfolge mit MATLAB)

Wir wollen dies am Beispiel 4.27 für den Parameter $a = \frac{1}{2}$ kurz demonstrieren (vgl. Datei **DTFTBsp.m**):

```
syms z
a = 1/2;

% Definition der Z-Transformierten als symbolischer
% Ausdruck
H = a*z/(a*z-1);

% Definition des normierten Frequenzbereichs
Omega = (-pi:0.01:pi);

% Substitution von z = exp(j*Omega)
Hnum = double(subs(H,z,exp(j*Omega)));

% Grafische Darstellung der DTFT
subplot(211)
plot(Omega,abs(Hnum),'b','Linewidth',3);
grid
xlabel('Normierte Frequenz/rad')
ylabel('|H|')
subplot(212)
plot(Omega,angle(Hnum),'k','Linewidth',3);
grid
xlabel('Normierte Frequenz/rad')
ylabel('arg(H)')
```

In Abbildung 4.17 ist der Amplituden- und Phasengang der DTFT des Signals³¹ a^n dargestellt, der beim Aufruf von **DTFTBsp** berechnet wird. 

³¹ Genauer, des kausalen Signals $\sigma_n \cdot a^n$.

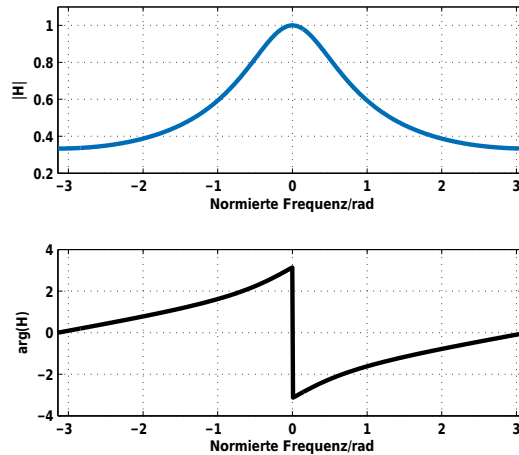


Abb. 4.17: Amplituden- und Phasengang der DTFT der Potenzfolge $a^n \cdot \sigma_n$ für den Parameter $a = \frac{1}{2}$

Ein exakte Bestimmung der DTFT auf Basis der Definition (313.1) mit Hilfe von MATLAB ist natürlich *nur* für Folgen möglich, welche bis auf endlich viele Folgenglieder 0 sind. Gegebenenfalls kann man für genügend stark gegen 0 konvergierende Folgen, etwa Impulsantworten stabiler LTI-Systeme (vgl. Übung 99), die DTFT an ausgewählten Frequenzen Ω *approximativ* bestimmen. Dies zeigt das folgende Beispiel:

4.30 Beispiel (Approximative DTFT mit MATLAB)

Für die kausale Folge

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \\ \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)}{n^2} & \text{für } n > 0, \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases} \quad (318.1)$$

kann die DTFT zumindest approximativ berechnet werden. Dazu werden die Folgenglieder ab einem gewissen Index aufgrund ihres sehr kleinen Betrages einfach vernachlässigt (vgl. Datei **DTFTBsp2.m**):

```
% Abbruch der Folge x_n für n=100

n = (1:1:100);
xn = [1, cos(pi*n/5)./(n.^2)];
n = [0, n];
```

```

% Definition des normierten Frequenzbereichs
Omega = (-pi:0.01:pi);

% Realisierung der DTFT-"Reihe" für jedes Omega
% des Frequenzrasters

DTFT = []; % Vorinitialisierung der DTFT-Werte

for k = 1:length(Omega)
    expOmegek = exp(-j*Omega(k)*n);
    % Reihensumme für Frequenz Omega(k)
    DTFT = [DTFT, xn*expOmegek'];
end

% Grafische Darstellung der DTFT
subplot(211)
plot(Omega,abs(DTFT),'b','Linewidth',3);
grid
xlabel('Normierte Frequenz/rad')
ylabel('|DTFT|')
axis([-pi, pi, 0, max(abs(DTFT))])

subplot(212)
plot(Omega,angle(DTFT),'k','Linewidth',3);
grid
xlabel('Normierte Frequenz/rad')
ylabel('arg(DTFT)')
axis([-pi, pi, min(angle(DTFT)), max(angle(DTFT))])

```

In Abbildung 4.18 ist der berechnete Amplituden- und Phasengang der DTFT des Signals dargestellt. 

Zugegebenermaßen sind wir aber mit dieser Berechnung schon sehr nahe bei der im Folgenden (s. Abschnitt 4.5.3) zu besprechenden so genannten *Diskreten Fourier-Transformation*, welche im Wesentlichen aus der DTFT durch Anwendung der im Beispiel verwendeten Techniken

- Verwendung endlich vieler Signalwerte und
- Diskretisierung des normierten Frequenzbereichs

entwickelt wird.

4.5.2 Der Zusammenhang zwischen DTFT und FT

Die DTFT und die bereits angesprochene und im nächsten Abschnitt einzuführende *diskrete Fourier-Transformation (DFT)* messen den *Frequenzinhalt* digitaler Signale. Dabei ist zu beobachten, dass die in Definition (313.1) eingeführte DTFT allein auf der diskreten Folge und nicht auf einer (zeitkontinuierlichen) Impulsabtastung beruht. Andererseits wurde aber,

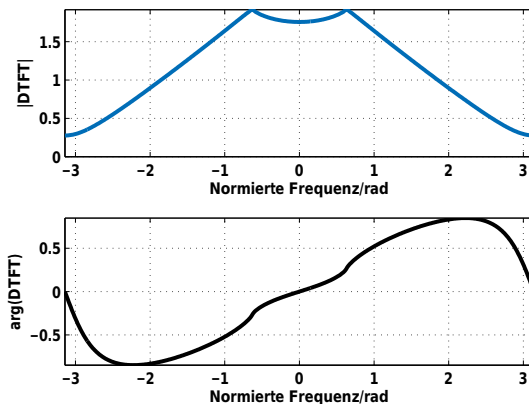


Abb. 4.18: (Approximativer) Amplituden- und Phasengang der DTFT der kausalen Folge (318.1).

wie eingangs des Abschnittes bereits erwähnt, auf diesem Wege in Kapitel 3 das Spektrum eines zeitdiskreten Signals definiert und untersucht.

Die nachfolgende Überlegung zeigt, dass die mit beiden Ansätzen gewonnene Spektralinformation identisch ist.

Wir betrachten dazu ein zeitdiskretes Signal $x_n := x(nT_a)$, welches durch Abtastung mit Abtastfrequenz $f_a := \frac{1}{T_a}$ Hz aus dem zeitkontinuierlichen Signal $x(t)$ entstanden sei.

Wir definieren, wie gewohnt, die Frequenzen $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$, $\Omega = \omega T_a$ und setzen voraus, dass das Spektrum $X(j\omega)$ des Signals $x(t)$ **bandbegrenzt**³² im Frequenzintervall $[-\frac{\omega_a}{2}, \frac{\omega_a}{2}]$ ist.

Das Signal $x(t)$ und die gewählte Abtastrate f_a genügen damit den Voraussetzungen des Abtasttheorems!

Nach Gleichung (221.4) ist

$$\tilde{X}(j\omega) := \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_a)) \quad (320.1)$$

das Spektrum der Impulsabtastung

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot \delta_0(t - nT_a) \quad (320.2)$$

des Signals $x(t)$.

³² Da vor der Abtastung immer eine Ant-Aliasing-Filterung erfolgen muss, ist diese Annahme gerechtfertigt.

Nach dem Abtasttheorem findet keine spektrale Überlappung statt und wir erhalten:

$$\tilde{X}(j\omega) = \frac{1}{T_a} X(j\omega) \quad \forall \omega \in \left[\frac{-\omega_a}{2}, \frac{\omega_a}{2} \right]. \quad (321.1)$$

Wegen

$$\delta_0(t - nT_a) \circ - \bullet e^{-j\omega n T_a} \mathfrak{F}(\delta_0(j\omega)) = e^{-j\Omega n} \quad (321.2)$$

folgt jedoch unmittelbar durch direkte Fourier-Transformation der Impulsabtastung (320.2):

$$\mathfrak{F}(\tilde{x}(t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n T_a} = X_{DTFT}(\Omega). \quad (321.3)$$

Man erhält aus den Gleichungen (320.1) und (321.3) insgesamt den nachfolgenden Zusammenhang zwischen der DTFT und der zeitkontinuierlichen Fourier-Transformation einer Impulsabtastung:

Ist $x_n := x(nT_a)$ ein zeitdiskretes Signal, welches unter Einhaltung der Voraussetzungen des Abtasttheorems durch Abtastung mit Abtastfrequenz $f_a := \frac{1}{T_a}$ Hz aus dem zeitkontinuierlichen Signal $x(t)$ entstanden sei. Dann gilt:

$$X_{DTFT}(\Omega) = \frac{1}{T_a} X(j\omega) \quad \forall \omega \in \left[\frac{-\omega_a}{2}, \frac{\omega_a}{2} \right], \Omega = \omega T_a. \quad (321.4)$$

Erfüllen also $x(t)$ und f_a das Abtasttheorem, d.h. ist $x(t)$ **ideal bandbegrenzt** im **Nyquistintervall** $\left[\frac{-\omega_a}{2}, \frac{\omega_a}{2} \right]$, so stimmen $X(j\omega)$ und $X_{DTFT}(\Omega)$ bis auf den Faktor $f_a = \frac{1}{T_a}$ überein!!

Ist das Signal nicht ideal bandbegrenzt, so lässt sich diese Aussage natürlich aufgrund der entstehenden spektralen Überlappungen u.U. nur noch approximativ aufrecht erhalten.

4.5.3 Die diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Dem Leser wird nicht entgangen sein, dass die Diskussion der DTFT im vorangegangenen Abschnitt nur auf das Nötigste beschränkt gehalten wurde. Dies ist im Wesentlichen eine Konsequenz aus der problematischen Berechenbarkeit der DTFT und der daraus resultierenden sehr eingeschränkten praktischen Verwendbarkeit. Die DTFT ist wie die zeitkontinuierliche Fourier-Transformation nur für wenige Signale konkret berechenbar, da zu ihrer

Berechnung prinzipiell **alle (Abtast-)Werte** $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ nötig sind und das Ergebnis **frequenzkontinuierlich** ist. Dies bewirkt insbesondere, dass die DTFT **nicht rechnerfähig** ist!

Die logische Konsequenz ist, dass man versucht, eine **Spektralinformation** über das diskrete Signal **mit endlich vielen Abtastwerten** zu bekommen und diese dann **im Frequenzbereich** nochmals an endlich vielen Stellen zu **diskretisieren**. Das Ergebnis, dessen Eigenschaften wir nun studieren wollen, ist die **diskrete Fourier-Transformation (DFT)**.

Wir betrachten im Folgenden eine **endliche Anzahl von Abtastwerten**

$$(x_k)_{k=0}^{N-1}, \quad N \text{ die Zahl der Abtastwerte.} \quad (322.1)$$

Einen direkten Bezug zur bisherigen Betrachtungsweise für diskrete Signale erhalten wir, wenn alle anderen Abtastwerte (also diejenigen für alle anderen denkbaren Abtastzeitpunkte) als **null** angenommen werden.

Insgesamt betrachten wir somit also das Signal:

$$\tilde{x}_k := \begin{cases} x_k & \text{für } k \in \{0, \dots, N-1\}, \\ 0 & \text{für } k \notin \{0, \dots, N-1\}. \end{cases} \quad (322.2)$$

Man spricht in diesem Zusammenhang auch wieder von einem **gefensterten Signal**, da man sozusagen nur Abtastwerte innerhalb eines durch $\{0, \dots, N-1\}$ und damit durch $[0, N \cdot T_a]$ definierten Zeitfensters betrachtet und die anderen Werte „ausblendet“ (vgl. Abbildung 4.19).

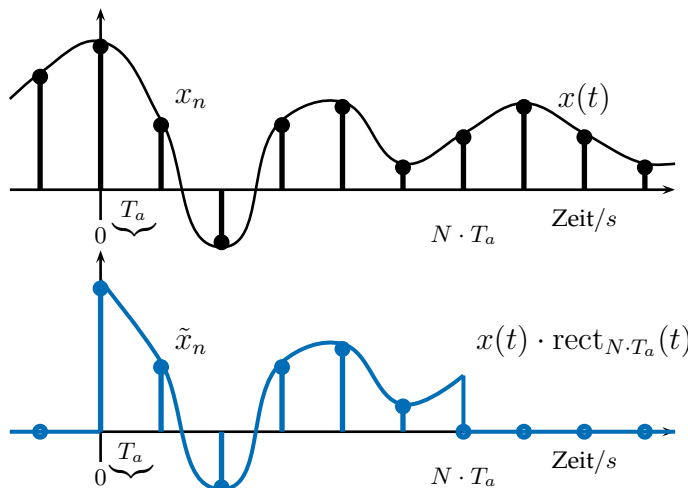


Abb. 4.19: Implizite Fensterung durch Berücksichtigung von nur endlich vielen Abtastwerten

Wir werden sehen, dass diese Sichtweise weitreichende Konsequenzen für die Spektralanalyse endlicher diskreter Signale und damit der gesamten **praktischen** Signalanalyse hat.

Betrachtet man nun zu diesem gefensterten Signal die DTFT, so ergibt sich nach Definition der DTFT:

$$X_{DTFT}^{(N)}(\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-jk\Omega}, \quad \Omega \in [0, 2\pi]. \quad (323.1)$$

Aus Gründen der vereinfachten Darstellung der folgenden Sachverhalte betrachten wir dabei das normierte Frequenzintervall $[0, 2\pi]$ statt $[-\pi, \pi]$, was natürlich aufgrund der 2π -Periodizität der DTFT prinzipiell keinen Unterschied macht.

Da $X_{DTFT}^{(N)}(\Omega)$ auf dem Periodizitätsintervall $[0, 2\pi]$ vollständig definiert ist, genügt es nun im zweiten Schritt, diese DTFT in $[0, 2\pi]$ zu diskretisieren. Falls man hier ebenfalls wieder N (**äquidistante**) Stellen verwendet³³, ergibt sich:

$$X_{DTFT}^{(N)}(\Omega_m) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-jk\Omega_m} \quad (323.2)$$

mit

$$\Omega_m := \frac{2\pi m}{N}, \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (323.3)$$

Diese Überlegung führt nun auf folgende Definition:

Die Zuordnung

$$(x_k)_{k=0}^{N-1} \longrightarrow X_{DFT}(m) := \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-jk\Omega_m} \quad (323.4)$$

mit

$$\Omega_m := \frac{2\pi m}{N}, \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (323.5)$$

heißt **diskrete Fourier-Transformation (DFT)** (der Länge N) des Signals $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

³³ Die Verwendung der gleichen Anzahl von Werten ist nicht zwingend, hat aber, wie sich bei näheren Betrachtung dann herausstellt, erhebliche rechnerische Vorteile.

Beispiele zur diskreten Fourier-Transformation (DFT)

Um ein Gefühl für die Eigenschaften dieser neuen Transformation zu erhalten und um gegebenenfalls einen Eindruck zu bekommen, welcher Art die Spektralinformation ist, die man damit gewinnen kann, betrachten wir zunächst einige einfache Berechnungsbeispiele.

4.31 Beispiel (DFT des Signals $x(t) = \cos(2\pi t)$)

Wir betrachten zu einem Cosinussignal $x(t) = \cos(2\pi t)$ der Frequenz 1 Hz und der Abtastintervalllänge $T_a = \frac{1}{8}$ s (Abtastrate 8 Hz) genau acht Abtastwerte der folgenden Form:

$$x_k := \cos(2\pi k T_a) = \cos\left(k \frac{\pi}{4}\right) \quad \forall k = 0, \dots, 7. \quad (324.1)$$

Für die Abtastwerte ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, & x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & x_2 &= 0, & x_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ x_4 &= -1, & x_5 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, & x_6 &= 0, & x_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (324.2)$$

Für die ersten beiden DFT-Werte erhält man $\left(\Delta\Omega = \frac{2\pi \cdot 1}{f_a} = \frac{\pi}{4}\right)$:

$$\begin{aligned} X_{DFT}(0) &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot 1 = 0, \\ X_{DFT}(1) &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{3}{4}\pi} - e^{-j\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{5}{4}\pi} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{7}{4}\pi} \\ &= 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi}{4}}) - \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{j\frac{3}{4}\pi} + e^{-j\frac{3}{4}\pi}) \\ &= 2 + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2 + 1 + 1 = 4. \end{aligned} \quad (324.3)$$

In analoger Weise berechnet man:

$$\begin{aligned} X_{DFT}(2) &= 0, & X_{DFT}(3) &= 0, & X_{DFT}(4) &= 0, \\ X_{DFT}(5) &= 0, & X_{DFT}(6) &= 0, & X_{DFT}(7) &= 4. \end{aligned} \quad (324.4)$$

Natürlich kann diese Berechnung leichter³⁴ mit Hilfe von MATLAB durchgeführt werden, etwa wie folgt (vgl. Datei **DFTBsp1.m**):

³⁴ Im Grunde ist eine analytische Berechnung der DFT wenig sinnvoll, da diese schon für ein einfaches Beispiel – wie etwa das vorliegende – sehr aufwändig ist. Im Folgenden werden wir DFTs daher ausschließlich mit MATLAB berechnen!

```

T = 1/8; % Abtastintervall festlegen
N = 8; % Zahl der Abtastwerte festl.
t = (0:T:(N-1)*T); % Abtastzeitpunkte festlegen
fn = cos(2*pi*t); % Abtastwerte einer Cosinus-
                  % schwingung mit
                  % Frequenz 1 Hz bestimmen
n = (0:1:N-1); % Indexvektor von 0 bis N-1

for m=0:N-1 % DFT an N Frequenzpunkten
              % berechnen
              % Werte der Exponentialfunkt.
    expWerte = exp(-j*2*pi*m*n/N); % DFT-Summe an den Stellen
                                     % 0 bis N-1
                                     % Da MATLAB ab 1 indiziert,
                                     % Index um 1 erhöhen.
    F_DFT(m+1) = sum(fn.*expWerte);
end

```

In diesem Programm wurde die Formel (323.4) der DFT in Form einer Schleife realisiert. Es sei jedoch an dieser Stelle schon angemerkt, dass dies nicht die optimale Berechnungsmethode ist. Wir werden auf diesen Aspekt später zurückkommen. ■

Abbildung 4.20 zeigt eine grafische Darstellung der berechneten DFT-Werte.

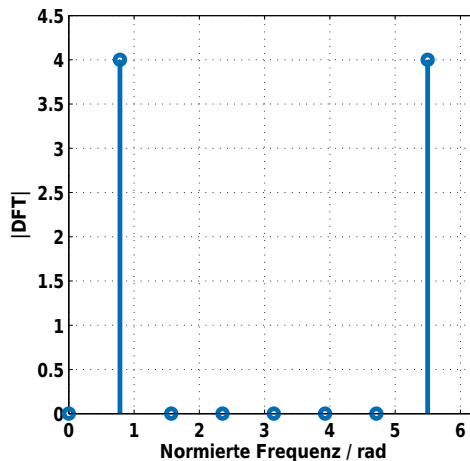


Abb. 4.20: DFT eines 1 Hz-Cosinussignals für $f_a = 8$ Hz und $N = 8$

Aufgrund der gewählten Parameter erhalten wir nach (323.5) Spektralwerte an den normierten Frequenzen:

$$\Omega_m := \frac{2\pi m}{N} = \frac{2\pi m}{8} = \frac{\pi m}{4} \text{ rad} \quad m = 0, \dots, 7. \quad (326.1)$$

Der Wert $4 = X_{DFT}(1)$ entspricht damit dem Wert des (DFT-)Spektrums bei der normierten Frequenz:

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{8} \cdot 1 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}. \quad (326.2)$$

Weitere Werte der DFT erhalten wir an äquidistanten Stützstellen mit einem Stützstellenabstand von:

$$\Delta\Omega := \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}. \quad (326.3)$$

Es ist für die Interpretation dieses Ergebnisses natürlich interessant, das erhaltene DFT-Spektrum mit dem *Fourier-Spektrum* des Signals $x(t) = \cos(2\pi t)$ zu vergleichen. Nach Tabelle 2.3, S. 161 hat $x(t)$ das Fourier-Spektrum

$$X(j\omega) = \pi\delta_0(\omega - \omega_0) + \pi\delta_0(\omega + \omega_0) \quad (326.4)$$

mit $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \text{ rad/s}$.

Das Fourier-Spektrum besteht also aus Dirac-Impulsen bei $\pm 2\pi \text{ rad/s}$ entsprechend $\pm 1 \text{ Hz}$.

Um dieses Spektrum besser mit der DFT vergleichen zu können, beziehen wir auch das DFT-Spektrum auf die Kreisfrequenz-Skala.

Aufgrund der Definition (311.3) der normierten Frequenz entspricht das normierte Frequenzintervall $[0, 2\pi]$ auf der Kreisfrequenz-Skala dem Frequenzintervall:

$$[\omega_u = 0, \omega_o = \omega_a] \text{ rad/s.} \quad (\text{entspr. } [0, f_a] \text{ Hz}). \quad (326.5)$$

Der Frequenzabstand $\Delta\Omega$ entspricht auf der Kreisfrequenz-Skala dem Frequenzintervall:

$$\Delta\omega = \Delta\Omega \cdot f_a = \frac{2\pi \cdot f_a}{N} \text{ rad/s} \quad (\text{entspr. } \Delta f = \frac{f_a}{N} \text{ Hz}). \quad (326.6)$$

Übung 111 Der Wert $4 = X_{DFT}(1)$ im Beispiel entspricht damit dem Wert des DFT-Spektrums bei der Frequenz $2\pi \text{ rad/s}$ (1 Hz) und kann dem Dirac-Impuls bei dieser Frequenz leicht zugeordnet werden.

Übung 112 Der Wert $4 = X_{DFT}(7)$ im Beispiel entspricht allerdings dem Wert des DFT-Spektrums bei der Frequenz $14\pi \text{ rad/s}$ (7 Hz) und bedarf einer Interpretation, da ein Spektralanteil bei $14\pi \text{ rad/s}$ im Fourier-Spektrum nicht

vorkommt! Allerdings ist zu bedenken, dass die Berechnung des DFT-Spektrums auf einem **abgetasteten** Signal beruht. Das DFT-Spektrum muss also eigentlich mit dem *Abtastspektrum* des Signals verglichen werden, welches nach (221.4) eine *periodische Wiederholung* des Fourier-Spektrums außerhalb des Nyquistbandes $[-\frac{\omega_a}{2}, +\frac{\omega_a}{2}]$ rad/s vorsieht.

Abbildung 4.21 skizziert das Abtastspektrum $X(j\omega)$ für das Beispielsignal $x(t) = \cos(2\pi t)$.

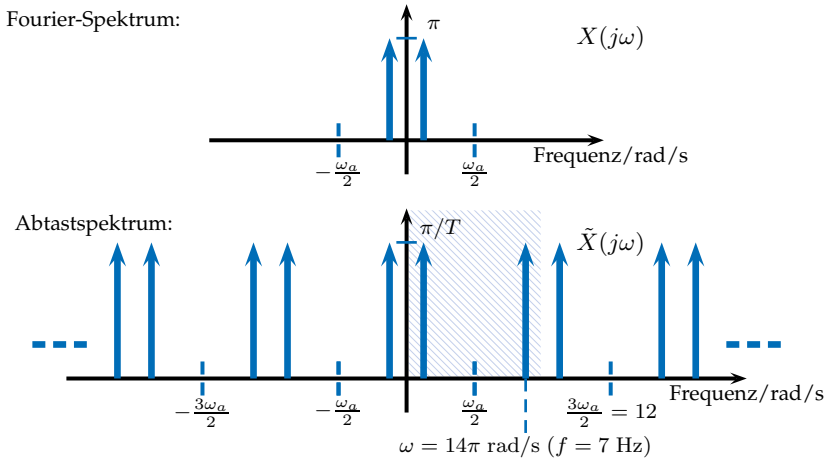


Abb. 4.21: Abtastspektrum des Beispielsignals $x(t) = \cos(2\pi t)$ für die gewählte Abtastrate $f_a = 8$ Hz

Man erkennt innerhalb des durch die DFT repräsentierten Frequenzbandes $[0, 16\pi]$ rad/s ($[0, 8]$ Hz) eine weitere Dirac-Spektrallinie, welche offensichtlich von der periodischen Wiederholung der Spektrallinie bei -2π rad/s (-1 Hz) herrührt.

Das DFT-Spektrum liefert somit im vorliegenden Fall offensichtlich eine vernünftige Spektralinformation, welche Rückschlüsse auf das Spektrum des zugehörigen zeitkontinuierlichen Signals zulässt!

Einer weiteren Untersuchung bedarf jedoch der Wert 4 als Höhe der DFT-Spektrallinie. Wir wollen diese Diskussion vorerst einmal zurückstellen und zunächst weitere Beispiele untersuchen, um ein etwas vollständigeres Bild der Eigenschaften der DFT zu bekommen.

4.32 Beispiel (DFT des Signals $x(t) = \cos(2\pi t)$)

Wir betrachten jetzt zum Cosinussignal $x(t) = \cos(2\pi t)$ der Frequenz 1 Hz eine Abtastung mit der Abtastintervalllänge $T_a = \frac{1}{9}$ s (Abtastrate 9 Hz). Wir verwenden zur Bestimmung der DFT dabei weiterhin $N = 8$ Abtastwerte und führen die Berechnung mit MATLAB durch (vgl. Datei **DFTBsp2.m**):

```

T = 1/9;           % Abtastintervall festlegen
N = 8;             % Zahl der Abtastwerte festl.
t = (0:T:(N-1)*T); % Abtastzeitpunkte festlegen
fn = cos(2*pi*t);  % Abtastwerte des Cosinus
...

```

```

>> % DFT-Werte berechnen
>> DFTBsp2;

>> % und im Command-Window anzeigen
>> F_DFT'

```

```

ans =

-0.7660
3.6222 + 1.4034i
0.3867 + 0.1527i
0.2572 + 0.0561i
0.2340 + 0.0000i
0.2572 - 0.0561i
0.3867 - 0.1527i
3.6222 - 1.4034i

```

Im Gegensatz zu Beispiel 4.31 sind die Werte der DFT nun komplex, sodass eine direkte grafische Darstellung nicht möglich ist. Wir können allerdings die Betragsspektren miteinander vergleichen. Durch Betragsbildung erhält man:

$$\begin{aligned}
 |X_{DFT}(0)| &= 0.7660, & |X_{DFT}(1)| &= 3.8846, \\
 |X_{DFT}(2)| &= 0.4157, & |X_{DFT}(3)| &= 0.2633, \\
 |X_{DFT}(4)| &= 0.2340, & |X_{DFT}(5)| &= 0.2633, \\
 |X_{DFT}(6)| &= 0.4157, & |X_{DFT}(7)| &= 3.8846.
 \end{aligned}$$

Abbildung 4.22 zeigt eine grafische Darstellung dieser Werte. 

Zur Vereinfachung des Vergleichs mit dem Fourier-Spektrum bzw. mit dem Abtastspektrum ist das berechnete DFT-Spektrum diesmal über der Hertz-Skala dargestellt.

Wie zu sehen ist, weicht das DFT-Spektrum von dem aus Abbildung 4.20 deutlich ab!

Die Werte der DFT werden, wie wir gesehen haben, an den ganzzahligen Vielfachen der folgenden Frequenzen berechnet:

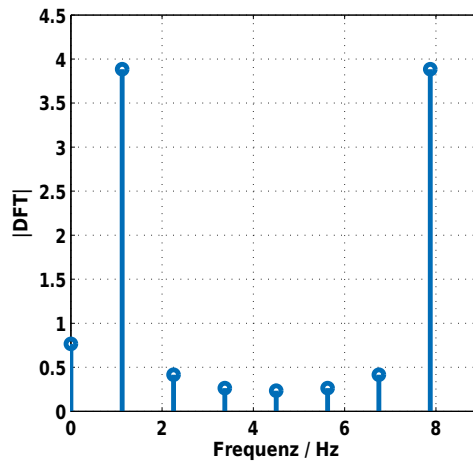


Abb. 4.22: DFT eines 1 Hz Cosinussignals für $f_a = 9$ Hz und $N = 8$

$$\Delta f = \frac{f_a}{N} = \frac{9}{8} \text{ Hz.} \quad (329.1)$$

Die Frequenz des Cosinussignals wird somit von DFT-Frequenzraster „nicht getroffen“ und wir erhalten in der Nähe der Signalfrequenz offenbar eine (etwas kleinere) Spektrallinie. Darüber hinaus erhalten wir allerdings auch bei anderen Frequenzen Spektrallinien, bei denen aufgrund der Signalstruktur keine zu erwarten sind.

Wir werden weiter unten sehen, dass dies eine Folge der impliziten *Zeitfens-terung* des Signals ist. Wir wollen die genauere Untersuchung dieses Phänomens aber vorerst noch einmal zurückstellen und zunächst weitere Beispiele diskutieren.

4.33 Beispiel (DFT des Signals $x(t) = \cos(2\pi t)$)

Wir betrachten ein weiteres Mal das Cosinussignal $x(t) = \cos(2\pi t)$ der Frequenz 2π rad/s (entsprechend 1 Hz) und die in Beispiel 4.31 und 4.32 verwendeten Abtastraten von 8 Hz bzw. 9 Hz, sodass in allen Fällen die Bedingungen des Abtasttheorems eingehalten sind.

Lediglich die Zahl N der Abtastwerte soll nun variiert werden.

Mit Hilfe von MATLAB (vgl. Datei **DFTBsp3.m**) werden die Amplitudenspektren (Betrag der DFT) für die Parameter $N = 16$ und $N = 32$ berechnet. Abbildung 4.23 zeigt eine grafische Darstellung des Ergebnisses. ■

Man erkennt, dass die Linien näher aneinanderrücken (dies ist klar, da das Frequenzintervall gleich bleibt und sich die Zahl der Stützstellen N erhöht)

Übung 106

Übung 107

Übung 110

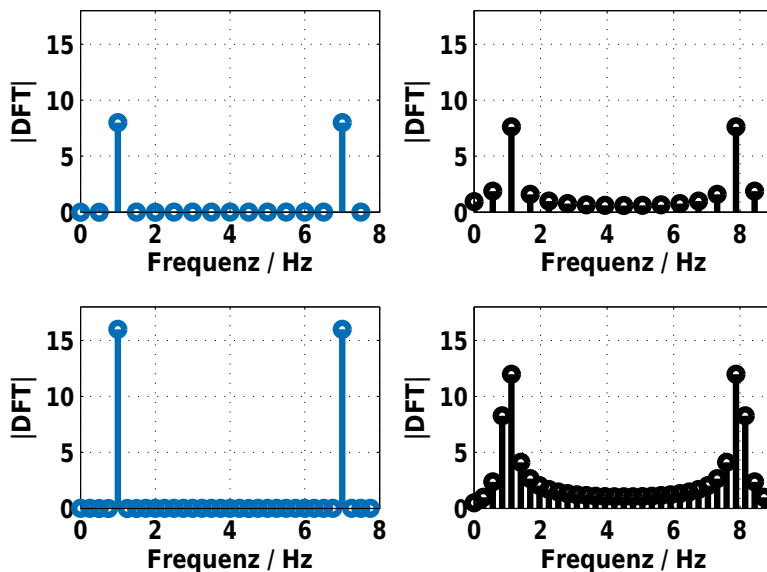


Abb. 4.23: DFT eines 1 Hz Cosinussignals für $f_a = 8$ Hz und $N = 16, 32$ (links) und für $f_a = 9$ Hz und $N = 16, 32$ (rechts)

und dass die Hauptlinien, welche in einem Fall direkt im anderen Fall zumindest approximativ den Signalfrequenzen ± 1 Hz zugeordnet werden können, offenbar zu N proportional wachsen. Auch diesen Effekt werden wir im Folgenden eingehender zu untersuchen haben.

Zum Abschluss dieser ersten experimentellen Erkundung der DFT soll in einem weiteren Beispiel noch ein *nicht-periodisches* Signal untersucht werden.

4.34 Beispiel (DFT eines nicht-periodischen Signals)

Das Signal

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} \sin(4t) & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (330.1)$$

besitzt ein Fourier-Spektrum, welches wir mit Hilfe von MATLAB wie folgt berechnen können (vgl. Datei `bspDFTnperiod.m`):

```
>> syms t omega
>> x = exp(-t)*sin(4*t)*heaviside(t)
```

```

x =
exp(-t)*sin(4*t)*heaviside(t)

>> X = fourier(x,omega)

X =
- i/(2*(omega*i + 1 - 4*i)) + i/(2*(omega*i + 1 + 4*i))

>> X = simplify(X, 'Steps', 100)

X =
4/(- omega^2 + omega*(2*i) + 17)

>> pretty(X)

```

$$\frac{4}{-\omega^2 + \omega(2i) + 17}$$

Die Fourier-Transformierte ist also

$$X(j\omega) = -\frac{4}{\omega^2 - 2j\omega - 17} \quad (331.1)$$

und das Amplitudenspektrum berechnet sich mit:

```

>> Xquad = (-4/(omega^2-2*i*omega-17))*...
           (-4/(omega^2+2*i*omega-17))

Xquad =
-16/((- omega^2 + omega*(2*i) + 17)*...
      (omega^2 + omega*(2*i) - 17))

>> AspQ = simplify(Xquad, 'Steps',100)

AspQ =
16/(omega^4 - 30*omega^2 + 289)

```

Man erhält also:

$$|X(j\omega)| = \frac{4}{\sqrt{\omega^4 - 30\omega^2 + 289}}. \quad (331.2)$$

Mit Hilfe der folgenden Anweisungen kann dieses Amplitudenspektrum grafisch dargestellt werden (s. Abbildung 4.24):

```
>> f = (-20:0.05:20); % Hertz-Frequenzen
>> om = 2*pi*f; % in rad/s

>> % Numerische Werte durch Substitution
>> AspNum = double(subs(sqrt(AspQ), omega, om));

>> % Plot des Amplitudenspektrums
>> plot(f, AspNum, 'b', 'LineWidth', 3)
>> grid
>> axis([-10, 10, 0, 0.6])
>> xlabel('Frequenz/Hz')
>> ylabel('|X|')
```

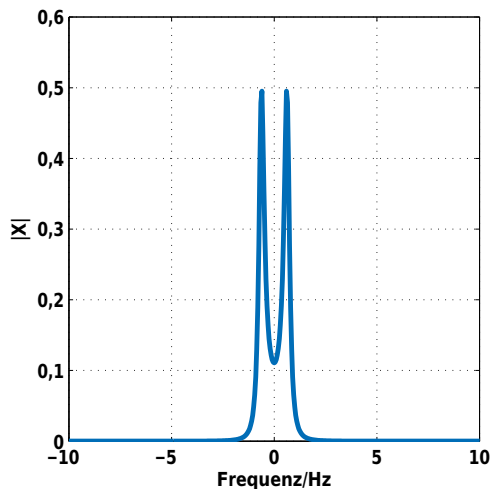


Abb. 4.24: Amplitudenspektrum des Signals (330.1)

Man erhält ein stark abfallendes Amplitudenspektrum mit zwei ausgeprägten Spitzen bei ± 0.6366 Hz, was der Frequenz des sinusoidalen Anteils von $x(t)$ entspricht³⁵.

Das Signal ist zwar *nicht* im strengen Sinne *bandbegrenzt*, wie man an (331.1) bzw. an (331.2) erkennt, da das Spektrum außerhalb eines endlichen Frequenzintervalls nie vollständig verschwindet, jedoch zeigt Abbildung 4.24, dass das Signal in guter Näherung zumindest approximativ bandbegrenzt

³⁵ Es ist $\frac{4}{2\pi} = 0.6366!$

ist, da das Spektrum außerhalb des Frequenzbandes $[-10, 10]$ Hz vernachlässigt werden kann.

Für eine Abtastrate von $f_a = 20$ Hz ist also die Anforderung (229.2) des Abtasttheorems in sehr guter Näherung eingehalten und es sind keine nennenswerten spektralen Überlappungseffekte zu erwarten.

Mit Hilfe von MATLAB (vgl. Datei **DFTBsp4.m**) werden die Amplitudenspektren für die Parameter $N = 64$ und $N = 256$ berechnet.

Abbildung 4.25 zeigt eine grafische Darstellung des Ergebnisses³⁶. ■

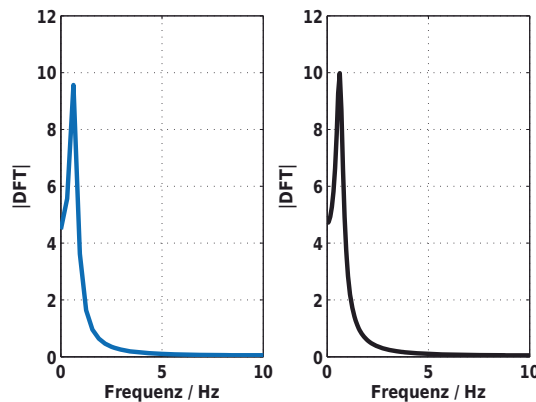


Abb. 4.25: DFT des Signals (330.1) für eine Abtastrate von $f_a = 20$ Hz und $N = 64$ bzw. $N = 256$ Abtastwerten

Ein Vergleich mit dem in Abbildung 4.24 dargestellten Amplitudenspektrum zeigt, dass das DFT-Spektrum offenbar dem Verlauf des Fourier-Spektrums folgt, allerdings sind alle Spektralwerte um einen Faktor (etwa 20) erhöht.

Die Übereinstimmung ist umso besser, je mehr Abtastwerte man bei gleicher Abtastrate zur Analyse heranzieht, also je länger das Beobachtungszeitfenster ist.

Bevor wir auf die Analyse der in den Beispielen beobachteten Effekte eingehen, wollen wir uns, wie zuvor bei den anderen Fourier-Transformationen auch, noch mit einigen grundlegenden Eigenschaften der DFT befassen.

Die inverse DFT

Ein ganz wesentlicher Aspekt bei allen bisher betrachteten Transformationen war die Eigenschaft, dass die im Signal enthaltene Information nicht (teilweise) verloren geht. Äquivalent dazu ist die Eigenschaft der *Eindeutigkeit* der

³⁶ Aus Gründen der besseren Darstellbarkeit wurde das `plot`-Kommando statt des `stem`-Kommandos verwendet. Natürlich ist das DFT-Spektrum weiterhin nur an den Vielfachen von $\Delta f = \frac{f_a}{N}$ definiert. Das `plot`-Kommando interpoliert dazwischen linear.

Transformation, welche mit der Existenz einer inversen Transformation einhergeht.

Auch die DFT ist natürlich wie die anderen bislang behandelten Zeit-Frequenz-Transformationen *eindeutig*. Sie besitzt eine Umkehrtransformation, die wir (ohne Nachweis) an dieser Stelle angeben wollen:

Sei

$$X_{DFT}(m) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-jk\Omega_m}, \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (334.1)$$

die DFT der Werte $(x_k)_{k=0}^{N-1}$. Dann gilt:

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_{DFT}(m) e^{jk\Omega_m}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (334.2)$$

Interpretation der DFT

Bei der Betrachtung der bisher besprochenen Fourier-Transformationen wurde die jeweilige Inversionsformel (Rücktransformation) dazu heran gezogen, die Fourier-Transformierte eines Signals als Darstellung der Dekomposition des Signals in harmonische Schwingungsanteile zu interpretieren.

Im vorliegenden Fall ist es jedoch von untergeordneter Bedeutung, ob ein (endliches) diskretes Signal als Überlagerung von komplexen harmonischen Schwingungen geschrieben werden kann. Es ist für die praktische Bedeutung der DFT um ein Vielfaches wichtiger, eine Beziehung der berechneten Werte zu spektralen Eigenschaften des zu Grunde liegenden *zeitkontinuierlichen* Signals herzustellen. Dieser Aspekt wurde auch bei der Diskussion der Beispiele 4.31 bis 4.34 schon angesprochen.

Wir werden uns dieser besonderen Fragestellung im Abschnitt 4.5.6, S. 360ff zuwenden.

Die Dualitätseigenschaft der DFT

Gleichung (334.2) zeigt, dass die inverse DFT eine sehr ähnliche Form hat wie die DFT selbst.

In der Tat gilt für jedes $k = 0, \dots, N-1$:

$$N \cdot x_k^* = \sum_{m=0}^{N-1} X_{DFT}^*(m) (e^{jk\Omega_m})^* = \sum_{m=0}^{N-1} X_{DFT}^*(m) e^{-jk\frac{2\pi m}{N}}. \quad (334.3)$$

Somit folgt:

$$(x_k)_{k=0}^{N-1} \xrightarrow{\text{DFT}} (X_{DFT}(m))_{m=0}^{N-1},$$
$$(X_{DFT}^*(m))_{m=0}^{N-1} \xrightarrow{\text{DFT}} N \cdot (x_k^*)_{k=0}^{N-1}.$$

(335.1)

Die Zeitsignalwerte $(x_k)_{k=0}^{N-1}$ können wieder zurückgewonnen werden, indem die konjugiert komplexen Werte der DFT wiederum selbst mit einer DFT transformiert werden. Anschließend ist das Ergebnis lediglich zu konjugieren und geeignet zu skalieren (vgl. Übung 113).

Übung 113

Dies hat in der Tat rechnerische Vorteile, da man für Hin- und Rücktransformation denselben (schnellen) Algorithmus, die so genannte *schnelle Fourier-Transformation* (FFT) (s. Abschnitt 4.5.4, S. 339ff) verwenden kann. Da solche Berechnungen in praktischen Anwendungen oft massenweise und vielfach in Echtzeit durchgeführt werden müssen, ist dies von enormer Bedeutung.

Eigenschaften der DFT

Die wesentlichen Eigenschaften der DFT sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst³⁷.

Tabelle 4.3: Einige Eigenschaften und Rechenregeln der DFT

Eigenschaft, Regel	Zeitbereich	Bildbereich
Linearität	$ax_n + by_n$	$aX_{DFT}(\Omega_m) + bY_{DFT}(\Omega_m)$
2π-Periodizität	–	$X_{DFT}(\Omega_m) = X_{DFT}(\Omega_m + k \cdot 2\pi)$
0-Betrags-Symmetrie	–	$ X_{DFT}(\Omega_m) = X_{DFT}(-\Omega_m) $
π-Betrags-Symmetrie	–	$ X_{DFT}(\pi + \Omega_m) = X_{DFT}(\pi - \Omega_m) $
Dualitätseigenschaft	$x_n \xrightarrow{\text{DFT}} X_{DFT}(m)$	$X_{DFT}^*(m) \xrightarrow{\text{DFT}} N \cdot x_n^*$
Auflösung in rad/s	–	$\Delta\omega = \frac{2\pi}{NT} = \frac{\omega_a}{N}$
Auflösung in Hz	–	$\Delta f = \frac{f_a}{N}$
Faltungssatz	$\sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{n-k}$	$X_{DFT}(\Omega_m) \cdot Y_{DFT}(\Omega_m)$
Eindeutigkeitssatz	$x_n = y_n$	$X_{DFT}(\Omega_m) = Y_{DFT}(\Omega_m)$

³⁷ Damit die Notation nicht zu schwerfällig ausfällt, ist der Wertebereich für n, m und k in der Tabelle nicht weiter spezifiziert. Dafür sei auf die Formeln im Text verwiesen.

Einige der Eigenschaften, die in den vorangegangenen Abschnitten zum Teil schon angesprochen worden sind, sind insbesondere im Zusammenhang mit der *Beurteilung von Spektralplots* wesentlich:

Periodizität: Die DFT ist *2π -periodisch*, d.h.:

$$X_{DFT}(\Omega_m) = X_{DFT}(\Omega_m + k \cdot 2\pi) \quad \forall m = 0, \dots, N-1, \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (336.1)$$

Die Periodizität kann dabei bezogen auf den Index der Werte auch so ausgedrückt werden:

$$X_{DFT}(m) = X_{DFT}(m + kN) \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (336.2)$$

Betrags-Symmetrie um 0: Die DFT *reeller Signale* ist *(betrags-)spiegelsymmetrisch um 0* in $[-\pi, \pi]$ d.h.:

$$|X_{DFT}(m)| = |X_{DFT}(-m)| \quad \forall m = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}. \quad (336.3)$$

Genauer gilt:

$$X_{DFT}(-m) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi k \frac{-m}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{j2\pi k \frac{m}{N}} = X_{DFT}^*(m). \quad (336.4)$$

Betragsspektren werden daher auch oft symmetrisch um 0 und im Intervall $[-\pi, \pi]$ dargestellt!

Betrags-Symmetrie um π : Die DFT *reeller Signale* ist *(betrags-)spiegelsymmetrisch um π* in $[0, 2\pi]$, d.h. für alle $m = 0, \dots, [\frac{N}{2}]$ gilt:

$$\left| X_{DFT}\left(\frac{N}{2} + m\right) \right| = \left| X_{DFT}\left(\frac{N}{2} - m\right) \right|. \quad (336.5)$$

In der Tat ist nach Definition der DFT:

$$X_{DFT}\left(\frac{N}{2} + m\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi k \frac{\frac{N}{2} + m}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi k \frac{m}{N}} \cdot e^{-j\pi k} \quad (336.6)$$

und

$$X_{DFT}\left(\frac{N}{2} - m\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi k \frac{\frac{N}{2} - m}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{+j2\pi k \frac{m}{N}} \cdot e^{-j\pi k}. \quad (336.7)$$

Da für alle $k \in \mathbb{Z}$ stets $e^{-j\pi k} = \pm 1$ und damit reell ist und da $e^{+j2\pi k \frac{m}{N}} = (e^{-j2\pi k \frac{m}{N}})^*$ ist, folgt:

$$X_{DFT}\left(\frac{N}{2} - m\right) = X_{DFT}\left(\frac{N}{2} + m\right)^* . \quad (337.1)$$

Daraus ergibt sich die Gleichheit der Beträge!

DFT-Amplitudenspektren reeller Signale, welche über dem normierten Frequenzintervall $[0, 2\pi]$ berechnet werden, weisen also *stets um π eine Symmetrie* bezüglich der Amplitudenachse auf. Aufgrund der Beziehungen zwischen normierter Frequenz und Frequenz in Hertz (s.u.) entspricht dies einer Achsensymmetrie bezüglich der Amplitudenachse über der Frequenz $\frac{f_a}{2}$!

Auflösung im Frequenzbereich: Die DFT ist *frequenzdiskret*, d.h. liefert im Frequenzbereich nur Spektralinformation an bestimmten Stellen:

Übung 108

Die DFT hat eine Frequenzauflösung von

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N} \quad \text{rad.} \quad (337.2)$$

Übung 111

Dies entspricht auf der Kreisfrequenzskala wegen $\Omega = \omega T = \frac{2\pi f}{f_a}$ einer Auflösung von:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{NT} = \frac{\omega_a}{N} \quad \text{rad/s.} \quad (337.3)$$

Dies wiederum entspricht auf der Hertz-Frequenzskala wegen $\omega = 2\pi f$ einer Auflösung von:

$$\Delta f = \frac{1}{NT} = \frac{f_a}{N} \quad \text{Hz.} \quad (337.4)$$

Faltungssatz: Die Faltungseigenschaft der DFT bedarf zum Verständnis der sehr verkürzten Darstellung von Tabelle 4.3 noch einiger Erläuterungen. Ausgehend von zwei endlichen Folgen

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, \quad y_0, y_1, y_2, \dots, y_{M-1} \quad (337.5)$$

der Länge N und M betrachten wir zunächst die *unendlichen* Folgen $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(\tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, welche durch Erweiterung der Folgen x_n und y_n mit Nullen entstehen.

Für das Produkt der *DTFT* dieser Folgen erhält man dann:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{DTFT}(\Omega) \cdot \tilde{X}_{DTFT}(\Omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_k e^{-j\Omega k} \cdot \sum_{s=-\infty}^{\infty} \tilde{y}_s e^{-j\Omega s} \\ &= \sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_k \cdot \tilde{y}_s e^{-j\Omega(s+k)}.\end{aligned}\tag{338.1}$$

Mit der Substitution $n = s + k$ folgt:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{DTFT}(\Omega) \cdot \tilde{X}_{DTFT}(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_k \cdot \tilde{y}_{n-k} \right) e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tilde{x}_n * \tilde{y}_n) e^{-j\Omega n}.\end{aligned}\tag{338.2}$$

Das Produkt $\tilde{X}_{DTFT}(\Omega) \cdot \tilde{X}_{DTFT}(\Omega)$ entspricht also der DTFT der Faltungssumme der mit Null erweiterten Folgen $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(\tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Wegen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_k \cdot \tilde{y}_{n-k} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot y_{n-k}\tag{338.3}$$

entspricht die Faltungssumme der erweiterten Folgen $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(\tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ an den Stellen³⁸ $n = 0, \dots, M + N - 2$ der Faltungssumme der *endlichen* Folgen aus (337.5).

Eine *DFT* der Folge $z_n = x_n * y_n$ entspricht damit der Auswertung der DTFT von (338.3) an den Stellen:

$$\Omega_m = m \cdot \frac{2\pi}{N + M}, \quad m = 0, \dots, N + M - 2.\tag{338.4}$$

Die DFT ergibt sich daher gemäß (338.1) auch als Produkt der Auswertung von $\tilde{X}_{DTFT}(\Omega)$ und $\tilde{X}_{DTFT}(\Omega)$ an diesen Frequenzen, also aus dem Produkt aus

$$\sum_{k=0}^{M+N-2} \tilde{x}_k e^{-j\Omega_m k}\tag{338.5}$$

³⁸ An allen anderen Stellen ist die Faltungssumme null!

und

$$\sum_{k=0}^{M+N-2} \tilde{y}_k e^{-j\Omega_m k}. \quad (339.1)$$

Die Ausdrücke (338.5) und (339.1) repräsentieren jedoch nichts weiter als die **Diskreten Fourier-Transformationen** der um Nullen *bis zum Index* $N + M - 2$ erweiterten endlichen Folgen aus (337.5).

Um eine Faltungssumme zu berechnen (s. Beispiel 4.36 im nachfolgenden Abschnitt), muss man also lediglich die beteiligten Folgen auf die gleiche Länge mit 0 erweitern, die DFTen berechnen und multiplizieren sowie anschließend das Ergebnis mit der inversen DFT zurücktransformieren.

Der Sinn dieser Vorgehensweise wird im folgenden Abschnitt deutlich. Die Tatsache, dass für die DFT ein sehr effektiver Algorithmus existiert, macht diesen „Umweg“, der auch als **schnelle Faltung** bezeichnet wird, ökonomisch!

Die schnelle Faltung wird insbesondere in Echtzeitanwendungen zu Berechnung der *Korrelation* zweier (abgetasteter) Signale eingesetzt. Auf dieses Anwendungsgebiet werden wir in Kapitel 5 zurückkommen.

4.5.4 Die schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Auf die Herleitung der FFT³⁹ kann und soll im Rahmen dieses Buches nicht eingegangen werden, da der Algorithmus selbst wenig zum systemtheoretischen Verständnis beiträgt. Der an den Details interessierte Leser sei hierfür auf andere Quellen verwiesen [47].

Bei der so genannten **schnellen Fourier-Transformation (FFT)** handelt es sich um einen genialen Algorithmus zur Berechnung der DFT, welcher (in seiner ursprünglichsten und auch am häufigsten verwendeten Form) für Abtastlängen $N = 2^k$ gewisse Redundanzeigenschaften der DTFT (und der beteiligten Exponentialfunktionen) zur schnelleren Berechnung der DFT ausnutzt.

Konkret gilt:

Ist $N = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, so gibt es einen Algorithmus, der die so genannte **schnelle Fourier-Transformation (FFT)**, welcher eine N -Punkt-DFT in $O(N \cdot \log_2 N)$ Schritten statt in $O(N^2)$ Schritten berechnet.

Mit dem so genannten **Landau-Symbol** $O(f(N))$ wird dabei gekennzeichnet, dass die Berechnungsdauer eines Algorithmus der Größe N kleiner oder gleich einer (algorithmus- und implementierungsabhängigen) Konstanten K mal der angegebenen Funktion $f(N)$ ist. So bedeutet $O(N^2)$, dass

³⁹ engl.: Fast Fourier Transform

für ein Problem der Größe N prinzipiell N^2 Rechenschritte benötigt werden. $O(N \cdot \log_2 N)$ bedeutet, dass für ein Problem der Größe N prinzipiell $N \cdot \log_2 N$ Rechenschritte benötigt werden.

Zur Illustration ein kleines Zahlenbeispiel:

4.35 Beispiel (Komplexität einer 1 K-FFT)

Übung 105 Unter einer Datenmenge von 1 K versteht⁴⁰ man $N = 2^{10}$ Werte. Nach dem obigen Resultat werden dafür bei einer DFT $O(10^6)$ und bei einer FFT $O(10^4)$ Rechenoperationen benötigt.

Bis auf eine (rechner- und implementierungsabhängige) Konstante sind also für eine solche DFT 1000000 Rechenoperationen notwendig. Bei Verwendung einer FFT werden jedoch lediglich ca. 10000 Rechenoperationen benötigt! ■

Der FFT-Algorithmus ist ein fundamentaler Baustein der Digitalen Signalverarbeitung. MATLAB stellt diesen Algorithmus und die zugehörige inverse Transformation über die Kommandos `fft` und `ifft` zur Verfügung.

Die Berechnung des Spektrums aus Beispiel 4.34 etwa könnte mit Hilfe des `fft`-Kommandos wie folgt durchgeführt werden:

```
>> % Parameter festlegen
>> fa = 20; T = 1 / fa;

>> % Zahl der Abtastwerte (z.B. \ 2 K Punkte)
>> N = 2^(11);

>> % Signal abtasten
>> t = (0:T:(N-1)*T);
>> fn = exp(-t) .* sin(4*t);

>> % FFT berechnen
>> Spec = fft(fn,N);

>> % Amplitudenspektrum plotten
>> nfreq = (0:fa/N:(N-1)*fa/N); % Frequenzvektor in Hz
>> plot(nfreq, abs(Spec), 'b', 'LineWidth',3)
```

Die Zahl der Abtastwerte muss nicht unbedingt eine Zweierpotenz sein, jedoch sind Vielfache von 1 K üblicherweise verwendete Werte für die Anzahl der Datenpunkte.

Auf die Effektivität der FFT wurde bereits im vorangegangenen Abschnitt im Zusammenhang mit der *schnellen Faltung* hingewiesen. Wir wollen den Algorithmus nun nutzen, um ein Beispiel für eine Faltung zu berechnen.

⁴⁰ 1 K Daten gleich ein „Kilo“ Daten, konkret 1024!

4.36 Beispiel (Schnelle Faltung)

Die nachfolgenden MATLAB-Anweisungen (vgl. Datei **schnellFalt1.m**) berechnet die Faltung zweier endlicher Folgen auf direktem Wege (über ein entsprechendes Schleifenkonstrukt) und mit Hilfe der FFT. Mit Hilfe des Schleifenkonstrukts, welches einer direkten Umsetzung der Faltungssumme entspricht, erhält man:

```
% Definition zweier endlicher Folgen
x = [ 1 2 3 2 1];
y = [ -1 1 3 1];

% Länge der Folgen
N = length(x); M = length(y);

% Vorinitialisierung der Faltung
Fxy = zeros(1,M+N-1);

% Berechnung der Faltung mit einem
% Schleifenkonstrukt (ineffektiv)
for n = 0:N+M-2
    for k = 0:N-1
        s = n-k;
        if s >= 0 & s < M
            % beachte: Indizierung in MATLAB ab 1
            Fxy(n+1) = Fxy(n+1)+x(k+1)*y(s+1);
        end
    end
end
```

Das Ergebnis

```
>> schnellFalt1
>> Fxy

Fxy =

    -1    -1     2     8    12    10     5     1
```

lässt sich für diese einfachen Folgen auch von Hand recht schnell verifizieren.

Eine schnelle Faltung erhält man mit folgenden Anweisungen:

```
% Vergleich mit einer "schnellen Faltung"
% DFTs der erweiterten Folgen berechnen
Spx = fft(x,M+N-1); % x wird automatisch auf die Länge
```

```

                                % N+M-1 mit Nullen erweitert
Spy = fft(y,M+N-1);

% Rücktransformation berechnen
Fxyfast = ifft(Spx.*Spy)

```

Das Ergebnis

```

>> schnellFalt1
>> ...
>> Fxyfast =

Columns 1 through 6

    -1.0000    -1.0000     2.0000     8.0000    12.0000

Columns 6 through 8

    10.0000     5.0000     1.0000

```

stimmt selbstverständlich mit dem obigen überein. 

MATLAB bietet natürlich die schnelle Faltung auch direkt in Form einer Funktion an, im vorliegenden Fall der Funktion `conv`:

```

>> conv(x,y)

ans =

    -1     -1     2     8    12    10     5     1

```

Der Geschwindigkeitsvorteil der schnellen Faltung (und damit des FFT-Algorithmus) macht sich verständlicherweise in dem obigen einfachen Beispiel nicht bemerkbar. Der Leser möge hierfür das Programm **schnellFalt2.m** des Begleitmaterials ausprobieren, in dem zwei Folgen der Länge 65536 und 32768 gefaltet werden. Dies kann mit dem direkten Algorithmus je nach Leistung des Rechners mehrere Minuten in Anspruch nehmen. Mit der schnellen Faltung erhält man das Ergebnis in Sekunden.

Spektralanalyse: Zum Abschluss sollte jedoch darauf hingewiesen werden, dass die FFT ihre eigentliche Bedeutung natürlich innerhalb der *Spektralanalyse* von Signalen hat. Durch die FFT sind sehr rechenintensive Spektralanalysen, oft in Echtzeit, möglich geworden.

Aus diesem Grunde ist der Rest des Kapitels diesem Thema gewidmet und es wird die schon angesprochene Frage geklärt, welche Rückschlüsse mit ei-

ner DFT/FFT-Analyse auf das Spektrum des zu Grunde liegenden zeitkontinuierlichen Signals gezogen werden können.

4.5.5 Fourier-Spektren und DFT-Spektren

Ziel der Berechnungen von DFT-Spektren ist es, wie gesagt, eigentlich immer, Informationen über die Natur des *zeitkontinuierlichen Signals* zu bekommen, aus dem die zeitdiskreten Werte durch Abtastung gewonnen wurden.

Es ist daher von fundamentaler Bedeutung, zu wissen, in welchem Zusammenhang die berechneten DFT-Spektren mit dem Fourier-Spektrum des zu Grunde liegenden zeitkontinuierlichen Signals stehen.

An Hand der Beispiele 4.31 bis 4.34 konnten wir bereits erkennen, dass DFT-Spektren natürlich Rückschlüsse auf das zeitkontinuierliche Signal zulassen, jedoch traten einige Phänomene auf, die nicht auf den ersten Blick mit bekannten Eigenschaften der Fourier-Spektren in Einklang zu bringen waren.

Der Zusammenhang zwischen Fourier-Spektren, DTFT-Spektren und DFT-Spektren soll deshalb noch etwas genauer untersucht werden.

In Abschnitt 4.5.1 haben wir bereits gezeigt, dass das DTFT-Spektrum nichts weiter als das im Kapitel 3 entwickelte *Abtastspektrum*, d.h. das Spektrum der Impulsabtastung, repräsentiert. Der Zusammenhang zwischen Fourier- und DTFT-Spektren wird daher durch die Beziehungen (221.4) bzw. (321.4) hergestellt.

Insbesondere können wir nochmals festhalten, dass bei *Einhaltung der Bedingungen des Abtasttheorems* die folgende Beziehung gilt:

$$X_{DTFT}(\Omega) = \frac{1}{T_a} X(j\omega) \quad \forall \omega \in \left[\frac{-\omega_a}{2}, \frac{\omega_a}{2} \right], \Omega = \omega T_a. \quad (343.1)$$

Die DTFT spiegelt also im *Nyquistband* bis auf den Faktor $f_a = 1/T_a$ (Abtastrate) genau das Fourier-Spektrum wieder.

In Abschnitt 4.5.3 wurde die DFT als *frequenzdiskretisierte* Version der DTFT eingeführt. Die DFT entspricht somit prinzipiell der Auswertung der DTFT an bestimmten Frequenzen im Nyquistband.

Dabei ist allerdings ein ganz wesentlicher Aspekt zu beachten. Aufgrund der Tatsache, dass *nicht alle* denkbaren Abtastwerte $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ verwendet werden (können), sondern nur *endlich viele* (N), wird durch die DFT *nicht* die DTFT des Signals $x(t)$ diskretisiert, sondern die DTFT einer *gefensterten Version* von $x(t)$ (vgl. Abbildung 4.19, S. 322)! Ein DFT-Spektrum steht damit auch nicht direkt mit dem Fourier-Spektrum von $x(t)$ im Zusammenhang, sondern mit dem eines entsprechenden *gefensterten* Signals.

Den Aspekt der Zeitfensterung bei der Fourier-Transformation haben wir bereits in Abschnitt 2.5.2, S. 165ff untersucht, sodass wir auf die Ergebnisse dieser Betrachtungen zurückgreifen können.

Wenn wir also eine DFT des Signals $x(t)$ auf der Grundlage von N Abtastwerten

$$x_0 = x(0 \cdot T_a), x_1 = x(1 \cdot T_a), \dots, x_{N-1} = x((N-1) \cdot T_a) \quad (344.1)$$

berechnen, so bestimmen wir in Wahrheit N Werte der DTFT des Signals (vgl. (322.2))

$$y(t) := x(t) \cdot \text{rect}_{NT_a}(t), \quad (344.2)$$

denn für alle $m \leq N$ ist:

$$\begin{aligned} X_{DFT}(m) &:= X_{DFT}(\Omega_m) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-jk\Omega_m} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{-jk\Omega_m} = Y_{DTFT}(\Omega_m). \end{aligned} \quad (344.3)$$

Letztendlich liefert die DFT daher nicht, wie gewünscht, Informationen über das Spektrum $X(j\omega)$ von $x(t)$, sondern über das von $y(t)$, also gemäß Gleichung⁴¹ (166.4) von

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \left(NT_a e^{-j\omega \frac{NT_a}{2}} \text{sinc} \left(\frac{\omega NT_a}{2\pi} \right) \right) \quad (344.4)$$

an den Stellen $\omega_m = m\Delta\omega = m \frac{2\pi}{NT_a} \text{ rad/s}!$

Betrachten wir unter diesem Aspekt das Beispiel 4.32, S. 327 erneut.

4.37 Beispiel (DFT des Signals $x(t) = \cos(2\pi t)$)

Übung 106

Im Beispiel 4.32 wurde die DFT des Cosinussignals $x(t) = \cos(2\pi t)$ der Frequenz $2\pi \text{ rad/s}$ (1 Hz) auf der Basis von $N = 8$ Abtastwerten bei einer Abtastrate von 9 Hz bestimmt.

Das Fourier-Spektrum des Signals ist nach Gleichung (158.4)

$$X(j\omega) = \pi\delta_0(\omega - \omega_0) + \pi\delta_0(\omega + \omega_0), \quad (344.5)$$

wobei

$$\omega_0 = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \quad (344.6)$$

die Signalfrequenz in rad/s ist.

Nach Gleichung (344.4) gilt dann für das Fourier-Spektrum des im Intervall

⁴¹ Man beachte, dass in Gleichung (166.4) T die Dauer des Zeitfensters bezeichnet. Im vorliegenden Fall ergibt sich für N Abtastwerte eine Dauer des Zeitfensters von $N \cdot T_a$, welche stattdessen in Gleichung (166.4) einzusetzen ist!


```

Spec = fft(fn,N);           % fft berechnen
Spec = fftshift(Spec);      % Spektrum über [-fa/2,fa/2]
                             % darstellen

                             % Frequenzvektor in Hz def.
nfreq = (-fa/2:fa/N:-fa/2+(N-1)*fa/N);

                             % Betrag der DFT in Form eines
                             % Stabdiagramms darstellen
stem(nfreq, abs(Spec), 'b', 'LineWidth',3)

hold                        % Plot einfrieren

% Fourier-Spektrum berechnen
cfreq = (-fa/2:0.01:fa/2); % Frequenzvektor in Hz
omega = 2*pi*cfreq;

omega0 = 2*pi;
FSpec = (1/2)*(N*T*exp(-j*(omega-omega0)*N*T/2).*...
           sinc((omega-omega0)*N*T/(2*pi)) + ...
           N*T*exp(-j*(omega+omega0)*N*T/2).*...
           sinc((omega+omega0)*N*T/(2*pi)));

                             % und plotten
plot(cfreq, fa*abs(FSpec), 'k', 'LineWidth',2)
grid
axis([-fa/2,fa/2,0,max([fa*abs(FSpec),abs(Spec)])+1])
xlabel('Frequenz / Hz')
ylabel('FT/DFT')

```

Der Funktionsaufruf

```
>> vglDFTvsFT(1/9,8)
```

berechnet und plottet das in Abbildung 4.26) dargestellte das Amplitudenspektrum nach (345.5) des gefensterten Signals und das schon in Beispiel 4.32 berechnete 8-Punkt-DFT-Spektrum⁴². 

Offenbar stimmen Fourier-Spektrum und DFT-Spektrum entgegen den obigen theoretischen Überlegungen nicht genau überein. Der Grund ist, dass die in Gleichung (343.1) vorausgesetzte *Bandbegrenztheit* für das gefensterte Signal $y(t)$ *nicht mehr gegeben* ist! Dadurch entstehen spektrale Überlappungen, die sich im vorliegenden Beispiel auswirken.

⁴² Die Werte sind dabei wegen der besseren Vergleichbarkeit mit den Signalfrequenzen auf die Hertz-Skala bezogen.

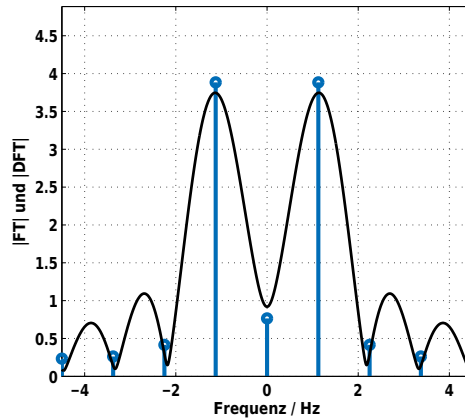


Abb. 4.26: Fourier-Spektrum des gefensternten 1 Hz Cosinussignals aus Beispiel 4.32 (die DTFT-Amplitude ist mit dem Faktor f_a angeglichen) und 8-Punkt-DFT-Spektrum über dem Nyquistintervall $[-\frac{f_a}{2}, \frac{f_a}{2}]$

Aliasing und Leakage

In den vorangegangenen Beispielen wurde gezeigt, dass bei der Berechnung von DFT-Spektren spezielle Effekte auftreten, deren genaue Kenntnis für die Beurteilung der Spektren und die daraus zu ziehenden Rückschlüsse auf die spektralen Eigenschaften des zu Grunde liegenden analogen Signals unerlässlich ist.

Es sind dies einmal das so genannte **Aliasing**⁴³, welches durch spektrale Überlappungen aufgrund von (manchmal unvermeidbaren) Verletzungen der Voraussetzungen des Abtasttheorems entsteht, und zum anderen das Auftreten von Spektrallinien, welche auf die implizite **Fensterung** des abgetasteten Signals zurückzuführen sind. Da es in diesem Fall, wie etwa in Abbildung 4.23, S. 330, den Anschein hat, als ob die Hauptlinien „auslaufen“ oder „lecken“, wird im Zusammenhang mit diesem Phänomen auch von **Leakage**⁴⁴ gesprochen.

Aliasing:

Unter **Aliasing** versteht man das Auftreten so genannter Fremdspektren im Nyquist-Frequenzintervall, welches durch die Verletzung des Abtasttheorems entsteht.

⁴³ *alius*: lat. für „fremd, andersartig, verschieden“

⁴⁴ *leak*: eng. für „Leck“

Verantwortlich dafür ist die durch die Abtastung hervorgerufene Periodisierung des Spektrums entsprechend dem in Gleichung (221.4) aus Kapitel 3 niedergelegten fundamentalen Zusammenhang.

Übung 114 Da das entstehende Spektrum durch die DTFT repräsentiert wird und die DFT i.W. lediglich dieses Spektrum diskretisiert, gilt dieses Überlappungsphänomen auch für DFT-Spektren.

Der Effekt ist, dass im Falle der Verletzung des Abtasttheorems ein (dann ja vorhandener) Spektralanteil bei

$$\omega > \frac{\omega_a}{2} \text{ rad/s} \quad \left(f > \frac{f_a}{2} \text{ Hz}, \quad \Omega > \frac{\pi}{2} \text{ rad} \right) \quad (348.1)$$

(für ein $k \in \mathbb{N}$) eine Spektrallinie bei

$$\omega - k \cdot \omega_a \text{ rad/s} \quad (\text{bzw. } f - k \cdot f_a \text{ Hz}) \quad (348.2)$$

im Nyquistband erzeugt! Man vergleiche dazu das Schaubild 3.5, S. 223.

Leakage:

Unter **Leakage** versteht man den Effekt der *Spektralverbreiterung* oder auch *Spektralverschmierung*, welcher durch eine implizite Zeitfensterung hervorgerufen wird.

Der Leser wird sich vielleicht gefragt haben, warum in Beispiel 4.33, Abbildung 4.23, S. 330 bei Verwendung von $N = 8,16$ Abtastwerten und einer Abtastrate von $f_a = 9 \text{ Hz}$ Leakage auftritt, bei Verwendung von $N = 8,16$ Abtastwerten und einer Abtastrate von $f_a = 8 \text{ Hz}$ jedoch nicht, da man nur eine Spektrallinie und somit eine scharfe Spektralschätzung erhält. Nach der bisherigen Argumentation erfährt das Signal doch auch im letzteren Fall eine implizite Zeitfensterung.

Betrachten wir daher das Beispiel unter dieser Fragestellung ein weiteres Mal.

4.38 Beispiel (Kein Leakage trotz Fensterung)

Wir greifen also erneut auf das Beispiel 4.33, S. 329 zurück und betrachten die DFT des Cosinussignals $x(t) = \cos(2\pi t)$ der Frequenz $2\pi \text{ rad/s}$ für die Abtastintervalllänge $T_a = \frac{1}{8} \text{ s}$ (Abtastrate 8 Hz) und $N = 16$ Abtastwerte.

Übung 109 Die zugehörige DFT wurde bereits in Abbildung 4.23 dargestellt.

Übung 112 Zur Untersuchung des Fenstereffekts greifen wir auf Gleichung (345.2) zurück und setzen in diese Gleichung die Parameter $NT_a = 2$ und $\omega_0 = 2\pi$ ein.

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \left(2e^{-j\omega} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \right) \\ &= e^{-j(\omega-2\pi)} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega-2\pi}{\pi}\right) + e^{-j(\omega+2\pi)} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega+2\pi}{\pi}\right). \end{aligned} \quad (349.1)$$

Wegen

$$\begin{aligned} e^{-j(\omega-2\pi)} &= e^{-j\omega} e^{j2\pi} = e^{-j\omega}, \\ e^{-j(\omega+2\pi)} &= e^{-j\omega} e^{-j2\pi} = e^{-j\omega} \end{aligned} \quad (349.2)$$

folgt:

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega} \left(\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega-2\pi}{\pi}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega+2\pi}{\pi}\right) \right). \quad (349.3)$$

Für das Betragsspektrum erhält man demnach:

$$|Y(j\omega)| = |\operatorname{sinc}(\omega/\pi - 2) + \operatorname{sinc}(\omega/\pi + 2)|. \quad (349.4)$$

Das Spektrum wird durch die DFT an den folgenden Stellen diskretisiert:

$$\omega_m = m\Delta\omega \text{ rad/s} \quad \text{mit} \quad \Delta\omega = 2\pi \frac{f_a}{N}, \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (349.5)$$

Wegen $2\pi f_a/N = 2\pi 8/16 = \pi \text{ rad/s}$ gilt nach Einsetzen von $\omega_m = m \cdot \pi$ in Gleichung (349.4):

$$|Y(j\omega_m)| = |\operatorname{sinc}(m-2) + \operatorname{sinc}(m+2)|, \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (349.6)$$

Nach Definition der sinc-Funktion ist:

$$\operatorname{sinc}(k) = \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq 0, \\ 1 & \text{für } k = 0. \end{cases} \quad (349.7)$$

Daher verschwinden alle Terme, bis auf die für $m = -2$ und $m = 2$ und man erhält:

$$\begin{aligned} |Y(j\omega_2)| &= |\operatorname{sinc}(0) + \operatorname{sinc}(4)| = 1, \\ |Y(j\omega_{-2})| &= |\operatorname{sinc}(-4) + \operatorname{sinc}(0)| = 1. \end{aligned} \quad (349.8)$$

Diese Werte **mal** $f_a = 8$ sind genau die Linienhöhen, die wir in Abbildung 4.23 an den Frequenzen 1 Hz entsprechend $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 1 \text{ Hz}$ und 7 Hz entsprechend $f_{-2} = \frac{\omega_{-2}}{2\pi} = -1 \text{ Hz}$ ablesen.

Dies bedeutet, dass in dem vorliegenden Fall die Werte des Spektrums des gefensterten Signals an den Auswertestellen der DFT, ausgenommen die Signalfrequenz, „zufällig“⁴⁵ null werden und so kein Leakage-Effekt zu Tage tritt. Abbildung 4.27 illustriert dies grafisch. 

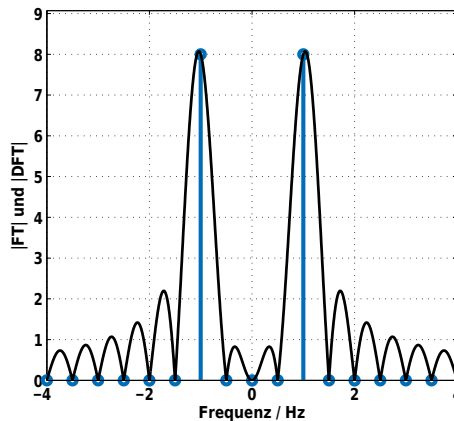


Abb. 4.27: Fourier-Spektrum und DFT-Spektrum des gefensternten 1 Hz Cosinussignals aus Beispiel 4.37 (FT and DTFT-Amplitude angeglichen)

Es sollte vielleicht noch erwähnt werden, dass die im obigen Beispiel beschriebene Situation *im Zeitbereich* dadurch hervorgerufen wird, dass die N Abtastwerte in einem ganzzahligen Vielfachen des Periodizitätsintervalls des Signals genommen werden. Im vorliegenden Fall ist das resultierende Zeitfenster $NT_a = 2$ s lang und umfasst somit genau 2 Perioden des 1 Hz Cosinussignals. Das Signal kann daher *periodisch richtig fortgesetzt* werden und es ist kein Abschneideeffekt (harter Übergang im Zeitsignal, welcher hochfrequente Anteile im Spektrum erzeugen könnte) durch die Fensterung zu bemerken!

Ist umgekehrt das Zeitfenster der Länge NT_a ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer eines harmonischen Signals (Signalanteils) der Frequenz f Hz, so gilt für ein $k \in \mathbb{N}$:

$$k \cdot \frac{1}{f} = NT_a = N \cdot \frac{1}{f_a}. \quad (350.1)$$

Damit ist

$$f = k \cdot \frac{f_a}{N} = k \cdot \Delta f \quad (\text{bzw. } \omega = k \cdot \Delta \omega) \quad (350.2)$$

und die *Frequenz des Signals trifft das Frequenzraster* der DFT! Es tritt kein Leakage auf!

DFT-basierte Schätzung von Fourier-Spektren

Wie wir bereits gesehen haben, sind Spektren gefensterter Signale aufgrund der unendlichen Ausdehnung des Rechteckfenster-Spektrums nie wirklich

⁴⁵ Natürlich ist das *kein* Zufall!

exakt bandbegrenzt, sodass die Berechnung des Fourier-Spektrums $X(j\omega)$ eines **bandbegrenzten**⁴⁶ zeitkontinuierlichen Signals $x(t)$ auf der Basis der Beziehung

$$X_{DTFT}(\Omega) = \frac{1}{T_a} X(j\omega) \quad \forall \omega \in \left[\frac{-\omega_a}{2}, \frac{\omega_a}{2} \right], \Omega = \omega T_a \quad (351.1)$$

i.Allg. mit Fehlern behaftet ist.

Da der Fehler von der impliziten Fensterung herrührt, lässt sich dieser, wie Beispiel 2.36, S. 166 zeigt, nur verringern, indem man die Fensterbreite vergrößert.

Zur Analyse des Sachverhalts gehen wir im Folgenden von N Abtastwerten eines Signals $x(t)$ aus:

$$x_0 = x(0 \cdot T_a), x_1 = x(1 \cdot T_a), \dots, x_{N-1} = x((N-1) \cdot T_a). \quad (351.2)$$

Wie oben gezeigt, betrachten wir (implizit) Abtastwerte des gefenstereten Signals:

$$y(t) := x(t) \cdot \text{rect}_{NT_a}(t). \quad (351.3)$$

Das Fourier-Spektrum ist nach dem Multiplikationssatz der zeitkontinuierlichen Fourier-Transformation und nach Tabelle 2.3, S. 161:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \left(NT_a \cdot e^{-j\omega \frac{NT_a}{2}} \cdot \text{sinc} \left(\frac{\omega NT_a}{2\pi} \right) \right). \quad (351.4)$$

Da jedoch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} NT_a \cdot e^{-j\omega \frac{NT_a}{2}} \cdot \text{sinc} \left(\frac{\omega NT_a}{2\pi} \right) = 2\pi \delta_0(\omega) \quad (351.5)$$

ist, nähert sich das Spektrum $Y(j\omega)$ des gefenstereten Signals für wachsende N und damit für eine immer größere Anzahl von Abtastpunkten dem Spektrum $X(j\omega)$ an.

Bei dieser Approximation müssen wir allerdings zwei Fälle unterscheiden. Entweder hat das Fourier-Spektrum $X(j\omega)$ an einer Stelle ω rad/s (bzw. f Hz) des Nyquistbandes einen **endlichen Wert** oder das Spektrum hat dort einen **Dirac-Impulsanteil**.

Approximation bei endlichen Werten von $X(j\omega)$:

Natürlich kann im gewöhnlichen Konvergenzsinn nur dann

⁴⁶ Die Bandbegrenztheit kann ggf. durch Filterung, z.B. die Anti-Aliasing-Filterung, erzwungen werden.

$$\begin{aligned}
 X_{DFT}(m) &= X_{DTFT}(\Omega_m) = X_{DTFT}(m\Delta f) \\
 &= X_{DTFT}(m\Delta\omega) \approx \frac{1}{T_a} X(jm\Delta\omega)
 \end{aligned} \tag{352.1}$$

sein, wenn $X(j\omega)$ an der Stelle $m\Delta\omega$ einen **endlichen Wert** hat.

In diesem Fall können wir die obigen Überlegungen wie folgt zusammenfassen:

Hat das Spektrum $X(j\omega)$ des (*bandbegrenzten*) Signals $x(t)$ an einer Stelle $m\Delta\omega$ des Frequenzrasters einer N -Punkt-DFT einen **endlichen Wert** und ist die **Abtastwertezahl N groß**, so stimmen DFT-Spektrum und Fourier-Spektrum an dieser Stelle ungefähr bis auf den Faktor $\frac{1}{T_a}$ überein, d.h. es gilt:

$$X_{DFT}(m) \stackrel{N \text{ groß}}{\approx} \frac{1}{T_a} X(jm\Delta\omega). \tag{352.2}$$

Dieses Verhalten wurde bereits in Beispiel 4.34, S. 330 demonstriert. Das Spektrum des Signals (330.1) ist überall endlich und Abbildung 4.24, S. 332 zeigt schon für eine relativ moderate Abtastwertezahl N eine gute Übereinstimmung zwischen $\frac{1}{T_a} X(j\omega)$ und dem DFT-Spektrum im Nyquist-Band.

Approximation bei Dirac-Impulsanteilen von $X(j\omega)$:

Hat $X(j\omega)$ einen Dirac-Impuls-Anteil bei einer Frequenz ω_0 — etwa weil $x(t)$ ein *periodisches* Signal ist und gemäß (181.2) **ausschließlich** ein Dirac-Impuls-Spektrum hat —, so kann eine DFT-Spektrallinie **nie** näherungsweise gleich dem Wert des Fourier-Spektrums an dieser Stelle sein.

Gemäß (351.4) erhalten wir jedoch für einen Anteil $\alpha \cdot \delta_0(\omega - \omega_0)$ des Spektrums $X(j\omega)$ bei einer Frequenz ω_0 für den entsprechenden Anteil des Spektrums $Y(j\omega)$ des durch die endliche Abtastung **gefensterten** Signals:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi} \alpha \cdot \delta_0(\omega - \omega_0) * \left(NT_a \cdot e^{-j\omega \frac{NT_a}{2}} \cdot \text{sinc} \left(\frac{\omega NT_a}{2\pi} \right) \right) \\
 &= NT_a \frac{\alpha}{2\pi} \text{sinc} \left(\frac{(\omega - \omega_0) NT_a}{2\pi} \right) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0) \frac{NT_a}{2}}.
 \end{aligned} \tag{352.3}$$

An der Stelle ω_0 selbst erhält man dann:

$$Y(j\omega_0) = NT_a \frac{\alpha}{2\pi} ! \tag{352.4}$$

Da ein Dirac-Impuls-Anteil $\alpha \cdot \delta_0(\omega - \omega_0)$ im Zeitbereich einem harmonischen Anteil $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot e^{j\omega_0 t}$ entspricht (vgl. Tabelle 2.3, S. 161) und somit der Amplitudenfaktor $\frac{\alpha}{2\pi}$ dem **komplexen Fourier-Koeffizienten** c_* dieses Signalanteils, folgt aus (352.4):

$$Y(j\omega_0) = NT_a c_* = NT_a \cdot \text{Fourier-Koeffizient.} \quad (353.1)$$

Dies hat folgende Konsequenz⁴⁷:

Hat das Spektrum $X(j\omega)$ des (*bandbegrenzten*) Signals $x(t)$ an einer Stelle ω_0 (nur) einen **Dirac-Impuls-Anteil** und stimmt ω_0 mit einer Stelle $m\Delta\omega$ des Frequenzrasters einer N -Punkt-DFT überein, so gilt:

$$X_{DFT}(m) = \frac{1}{T_a} \cdot NT_a c_* = N \cdot c_*. \quad (353.2)$$

Dabei ist c_* der komplexe Fourier-Koeffizient des harmonischen Anteils der Frequenz $\omega_0 = m\Delta\omega$ des Signals $x(t)$.

Ist $x(t)$ speziell ein (bandbegrenztes) periodisches Signal, so besteht das Spektrum nur aus Impulsanteilen, wie etwa in den Beispielen 4.31, S. 324 bis 4.33, S. 329. Treten nun **keine Leakage-Fehler** auf, so hat $X_{DFT}(m)$, wie in (353.2) angegeben, **genau** den Wert $N \cdot c_*$!

Am DFT-Amplitudenspektrum kann somit anhand der Linienhöhe **der Betrag** des entsprechenden Fourier-Koeffizienten abgelesen werden. In Beispiel 4.32, Abbildung 4.23, S. 330 etwa lesen wir eine Linienhöhe von 8 und 16 für die vom DFT-Frequenzraster getroffene Signalfrequenz 1 Hz des Cosinussignals ab. Die verwendete Abtastwertzahl war $N = 16$ und $N = 32$. Der Fourier-Koeffizient hat demnach den Betrag $|c_*| = \frac{1}{2}$. Dies ist genau der Fourier-Koeffizient des verwendeten Cosinus der Amplitude 1 bei der Grundfrequenz.

Der Zusammenhang (353.2) erklärt somit auch die in den Beispielen 4.31 bis 4.33 beobachtete Abhängigkeit der Linienhöhe von der Anzahl der Werte N . Wird die Frequenz des harmonischen Anteils durch das Frequenzraster der DFT **nicht getroffen**, treten also **Leakage-Fehler** auf, so stimmt auch in diesem Fall die Beziehung (353.2) nicht mehr.

Die Linienhöhe im Amplitudenspektrum ist dann nach (352.3) durch den folgenden Wert verfälscht:

$$\left| \text{sinc} \left(\frac{(\omega - \omega_0)NT_a}{2\pi} \right) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)\frac{NT_a}{2}} \right| = \left| \text{sinc} \left(\frac{(\omega - \omega_0)NT_a}{2\pi} \right) \right|. \quad (353.3)$$

Betrachten wir hierzu ein weiteres Beispiel:

⁴⁷ Wir betrachten nur Spektren, die bei der Frequenz $m\Delta\omega$ ausschließlich einen Impulsanteil haben. Natürlich könnten sich Impulsanteile und endliche Anteile überlagern. Wir schließen diesen Fall in der Betrachtung zunächst aus.

4.39 Beispiel (DFT-Spektallinien-Höhe bei Leakage)

Wir greifen das Beispiel 4.33, S. 329 noch einmal auf und betrachten abermals das Cosinussignal $x(t) = \cos(2\pi t)$ der Frequenz 2π rad/s (entsprechend 1 Hz) und eine Abtastrate 9 Hz.

Darüber hinaus wählen wir die Zahl $N = 2^k$ der Abtastwerte angemessen hoch, um das Fensterspektrum in (352.3) so schmalbandig werden zu lassen, dass Aliasing-Fehler aufgrund der Verletzung des Abtasttheorems durch das gefensterte Signal vernachlässigt werden können.

Wir haben also lediglich Leakage-Fehler zu vergegenwärtigen, da die Signalfrequenz 1 Hz kein Vielfaches von $\Delta f = \frac{9}{N}$ sein kann.

Mit Hilfe der folgenden MATLAB-Anweisungen (vgl. Datei **DFTBsp5.m**) berechnen wird den in Abbildung 4.28 dargestellten Ausschnitt des DFT-Amplituden-Spektrums:

```
clear all

T = 1 / 9;                % Abtastintervall festlegen
fa = 9;
N = 128;                  % Zahl der Abtastwerte festl.
t = (0:T:(N-1)*T);        % Abtastzeitpunkte festlegen
fn = cos(2*pi*t);         % Abtastwerte einer Cosinus-
                           % schwingung mit
                           % Frequenz 1 Hz bestimmen
F_DFT = fft(fn,N);        % DFT-Spektrum berechnen
F_DFT = fftshift(F_DFT);  % Spektrum um 0 Hz darstellen
                           % Frequenzvektor in Hz def.
nfreq = (-fa/2:fa/N:-fa/2+(N-1)*fa/N);
                           % Betrag der DFT in Form eines
                           % Stabdiagramms darstellen
stem(nfreq, abs(F_DFT), 'k', 'LineWidth',3)
grid
axis([-1.1,1.1,0,1.1*max(abs(F_DFT))])
xlabel('Frequenz / Hz')
ylabel('|DFT|')
```

Deutlich ist der Leakage-Effekt zu erkennen. Für die der Signalfrequenz nächstgelegene Spektrallinie errechnet man:

```
>> fr0ind = find(nfreq==0); % Finde Index für Frequenz 0
>> % Finde Index der größten Spektrallinie (oberhalb 0 Hz)
>> [mx, indx] = max(abs(F_DFT(fr0ind:end)));
>> indmx = fr0ind+indx-1;
>> % Berechne zugehörige Frequenz
>> frmax = nfreq(indmx)
```

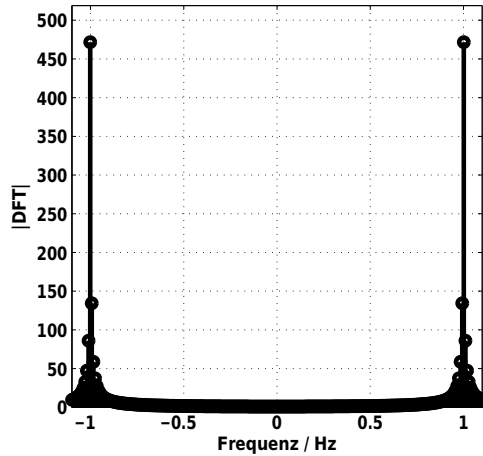


Abb. 4.28: DFT-Amplituden-Spektrum von $x(t) = \cos(2\pi t)$ für $N = 1024$ und $f_a = 9$ Hz (Ausschnitt)

```

frmax =

    1.0020

>> % Berechne Frequenz in rad
>> omega = frmax*2*pi;
>> % Signalfrequenz in rad
>> omega_0 = 2*pi;

>> % Linienhöhe gemäß theoretischer Herleitung
>> c1 = 1/2; % Fourier-Koeffizient
>> sinc((omega-omega_0)*N*T/(2*pi))*N*c1

ans =

    471.4114

>> % gemessene Linienhöhe
>> abs(F_DFT(indxmx))

ans =

    471.6615

>> % zum Vergleich
>> N*c1

```


ans =

512

Man erkennt, dass die Höhe der Hauptlinie den Wert $N \cdot |c_*|$ im Leakage-Fall nicht erreicht. Der Effekt kann auch durch Erhöhung der Zahl der Abtastwerte N und damit durch Verkleinerung des Frequenzabstands $\Delta\omega$ nicht abgemildert werden, da sich auch (353.3) entsprechend ändert.

Zum genauen Ablesen der Amplituden der beteiligten harmonischen Signale eignet sich die DFT also nur bedingt, da man i.Allg. nicht weiß, wie weit die Signalfrequenz von einem Punkt des DFT-Frequenzrasters entfernt liegt (andernfalls bräuchte man keine Spektralanalyse) und wie sich der Leakage-Effekt auswirkt.

Nach (352.3) „verteilt“ sich die Amplitude des harmonischen Anteils auch auf die Nebenlinien, sodass allenfalls qualitative Aussagen möglich sind, die für die Praxis allerdings oft ausreichen.

Meist ist man in der Spektralanalyse, speziell in der Schwingungsanalyse, mehr daran interessiert zu wissen, in welchem Frequenzband Signalenergie ist und in welchem nicht. Wir werden auf diese Aspekte im Kapitel 5 noch zurückkommen.

Berechnung von Fourier-Koeffizienten

Aufgrund der Erkenntnisse des vorangegangenen Abschnittes ist klar, dass die Berechnung von Fourier-Koeffizienten eines periodischen Signals $x(t)$ mit Hilfe einer DFT prinzipiell möglich ist, aber *nur dann*, wenn Leakage-Fehler vermieden werden können.

Dazu ist die Kenntnis der Grundschiwingung ω_0 notwendig und zumindest eine Vorstellung bis zu welcher Frequenz die harmonischen vernachlässigbar abgeklungen sind, damit Abtastfrequenz und Anzahl der Abtastwerte so eingestellt werden können, dass Aliasing- und Leakage-Fehler vermieden werden.

Eine solche Berechnung kann in der Praxis durchaus sinnvoll sein, wenn beispielsweise bekannt ist, dass ein untersuchtes Schwingungssignal im Wesentlichen von einer Frequenz abhängt, etwa der Motordrehzahl bei akustischen Untersuchungen in einem Fahrzeug.

Zur Illustration dieser Berechnungen betrachten wir ein Beispiel:

4.40 Beispiel (Fourier-Koeffizienten ein. Dreiecksschwingung)

Wir betrachten exemplarisch eine Dreiecksschwingung der Grundfrequenz $\omega_0 = 2\pi \cdot 10$ rad/s entsprechend $f_0 = 10$ Hz mit einer Amplitude von $A = 1$. Einer Formelsammlung ([9]) entnimmt man die reelle Fourier-Reihe dieses Signals:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \left(\cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3^2} \cos(2\pi 3 f_0 t) + \frac{1}{5^2} \cos(2\pi 5 f_0 t) + \dots \right). \quad (357.1)$$

Die Amplituden der Harmonischenschwingungen klingen sehr schnell ab, sodass im Folgenden Frequenzen oberhalb von $f_{max} = 10 \cdot f_0$ Hz vernachlässigt werden sollen.

Wir versuchen nun, die Fourier-Koeffizienten mit Hilfe einer DFT zu bestimmen. Dazu wählen wir eine Abtastrate $f_a > 2 \cdot f_{max} = 200$ Hz und eine Abtastwertezahl N so, dass f_0 ein Vielfaches von $\Delta f = \frac{f_a}{N}$ ist, etwa:

$$f_a = 256 \text{ Hz}, \quad N = 128. \quad (357.2)$$

Mit diesen Parametern berechnen wir mit den folgenden MATLAB-Anweisungen (vgl. Dateien **FT_DFTBsp.m** und **dreieck.m**) eine DFT:

```
T0 = 1/10; % Periodendauer des
           % Dreieckssignals
fa = 256; % gewählte Abtastrate
T = 1/fa; % und zugehöriges
           % Abtastintervall
N = 128; % gewählte Zahl der Abtastw.
t = (0:T:(N-1)*T); % Abtastzeitpunkte festlegen

% Abtastwerte der Dreiecksschwingung berechnen
% Die Dreiecksschwingung wird im Intervall [0,NT]
% mit den gewählten Parametern 5 Mal wiederholt.
fn = dreieck(T0,t)+dreieck(T0,t-T0)+...
     dreieck(T0,t-2*T0)+dreieck(T0,t-3*T0)+...
     dreieck(T0,t-4*T0);

% Grafische Darstellung des abgetasteten Signals
plot(t,fn, 'r', 'LineWidth',3);
xlabel('Zeit/t')
ylabel('Ampl. ')
grid

F_DFT = fft(fn,N); % DFT-Spektrum berechnen
           % Frequenzvektor in Hz defin.
nfreq = (0:fa/N:(N-1)*fa/N);
           % Betrag der DFT in Form eines
           % Stabdiagramms darstellen

figure
stem(nfreq, abs(F_DFT), 'k', 'LineWidth',3)
grid
axis([0, fa/2, -0.1, 1.1*max(abs(F_DFT))])
```

```

xlabel('Frequenz / Hz')
ylabel('|DFT|')

% Werte der geschätzten Fourier-Koeffizienten
% auf dem Bildschirm ausgeben

Fcoeffs = F_DFT(1:N/2)/N;
Fcoeffs = Fcoeffs(:);           % Spaltenvektor
Gleichwert = Fcoeffs(1)         % Gleichwert
FRKoeffs = Fcoeffs(6:5:end)     % DFT-Werte bei den
                                % Harmomischenfrequenzen

```

Wie man am Code erkennen kann, wurde dabei darauf geachtet, mindestens ein Dreieck (im vorliegenden Fall sind es fünf) abzutasten.

Die Harmonischenfrequenzen befinden sich wegen

$$10 = f_0 = 5 \cdot 2 = 5 \cdot \frac{256}{128} = 5 \cdot \frac{f_a}{N} = 5 \cdot \Delta f \quad (358.1)$$

an den Vielfachen von $5 \cdot \Delta f$. Daher werden für die Schätzung der Fourier-Koeffizienten die Komponenten 1 (Frequenz 0), 6, 11, ... des Vektors **Fcoeffs** ausgegeben.

Die Berechnung liefert:

```

>> FT_DFTBsp

Gleichwert =

    0.5000

FRKoeffs =

    -0.2027 + 0.0000i
    -0.0000 - 0.0000i
    -0.0226 + 0.0000i
    -0.0000 - 0.0000i
    -0.0081 + 0.0000i
    -0.0000 - 0.0000i
    -0.0042 + 0.0000i
    -0.0000 - 0.0000i
    -0.0025 + 0.0000i
    -0.0000 - 0.0000i
    -0.0017 + 0.0000i
    -0.0000 - 0.0000i

```

Dabei handelt es sich jedoch um die *komplexen* Fourier-Koeffizienten.

Aus (357.1) ergibt sich für die reellen Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2}, \\ a_{2k-1} &= \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2k-1)^2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ a_{2k} &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ b_k &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.\end{aligned}\tag{359.1}$$

Aus der Beziehung (179.1) folgt für die komplexen Fourier-Koeffizienten (mit positivem Index):

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{1}{2}, \\ c_{2k-1} &= \frac{1}{2} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{(2k-1)^2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ c_{2k} &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.\end{aligned}\tag{359.2}$$

Wir berechnen zur Kontrolle die ersten nicht-verschwindenden Koeffizienten mit MATLAB:

```
>> k = 1;
>> (2/pi^2)*1/(2*k-1)^2

ans =

    0.2026

>> k = 2;
>> (2/pi^2)*1/(2*k-1)^2

ans =

    0.0225

>> k = 3;
>> (2/pi^2)*1/(2*k-1)^2

ans =

    0.0081
```

Offensichtlich wurden die Koeffizienten durch die DFT-Berechnung richtig bestimmt. 

4.5.6 Spezielle DFT/FFT-Techniken

Tritt Leakage aufgrund unpassender Fensterlänge auf — und dies kann man, da die Signalspektren i.Allg. ja unbekannt sind, nicht vermeiden — so kann der Effekt nach Abschnitt 4.5.4 durch Wahl größerer Datenmengen⁴⁸ (d.h. durch Erzeugen von mehr Abtastwerten) unter Umständen abgemildert werden!

Ist die Erhöhung der Abtastwertezahl nicht möglich, so kann man die vorhandenen *Daten* zumindest so *gewichten*, dass sich Fenstereffekt weniger stark auswirkt.

Diese Maßnahme ist unter dem Begriff der *Fensterung der Daten* bekannt und soll im folgenden Unterabschnitt noch näher untersucht werden. Die zentrale Idee ist dabei, statt eines Rechteckfensters ein „runderes“ Fenster zu wählen, dessen Spektrum nicht so breitbandig ist. Dadurch reduziert sich der durch die Faltung mit dem Signalspektrum hervorgerufene spektrale Verschmierungseffekt.

Fensterung der Abtastwerte

Unter einem **Fenster** versteht man dabei eine *Folge von Gewichten, mit denen die Daten beaufschlagt werden*. Die Idee ist klar: scharfkantige Fenster wie das Rechteckfenster verursachen breitbandige Verschmierungen. Von glatten Fenstern kann man eine Verringerung dieses Effekts erhoffen. Man vergleiche dazu noch einmal die in Kapitel 2 diskutierten Eigenschaften der Fourier-Transformation.

Für die „normale“ Zeitfensterung der Länge N , also das Rechteckfenster, ist die Folge der „Gewichte“:

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \dots, N-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (360.1)$$

Die Folge x_n der Abtastwerte kann unter diesem Gesichtspunkt als „gewichtete“ Folge

$$x_n \cdot w_n, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (360.2)$$

aufgefasst werden. Im Falle des Rechteckfensters werden Daten dadurch natürlich nicht verändert, wohl aber im Falle der nachfolgend beschriebenen „glatteren“ Fenster.

Zu Fensterfolgen sind in der Literatur verschiedene Vorschläge gemacht worden, die entsprechend unterschiedlicher Bewertungskriterien unterschiedliche Vor- und Nachteile haben.

In Tabelle 4.4 sind die gängigsten Fensterfolgen⁴⁹ einschließlich des Rechteckfensters aufgelistet.

⁴⁸ Was aber in manchen Anwendungsfällen nicht möglich ist, etwa weil die Daten sehr schwer zu erhalten sind oder keine neue Messung gemacht werden kann.

⁴⁹ Die Formeln können von Fall zu Fall etwas anders aussehen, je nachdem, ob die Indizierung bei 0 oder bei 1 beginnt oder ob das Fenster symmetrisch zum Nullpunkt dargestellt

Tabelle 4.4: Gängige Fenstertypen für die DFT-Berechnung

Fenster	Formel für Gewicht w_n	MATLAB-Kommando
Rechteckfenster	1	<code>rectwin</code>
Dreiecks-Fenster (N ungerade)	$\frac{2(n+1)}{N+1}$ für $0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}$ $\frac{2(N-n)}{N+1}$ für $\frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1$	<code>triang</code>
Dreiecks-Fenster (N gerade)	$\frac{2n+1}{N}$ für $0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$ $\frac{2(N-n)-1}{N}$ für $\frac{N}{2} - 1 \leq n \leq N-1$	<code>triang</code>
Hanning-Fenster	$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi(n+1)}{N+1} \right) \right)$	<code>hanning</code>
Hamming-Fenster	$0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right)$	<code>hamming</code>
Blackman-Fenster	$0.42 - 0.5 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) + 0.08 \cos \left(\frac{4\pi n}{N-1} \right)$	<code>blackman</code>

Neben der Formel zur Berechnung der Fensterfolge ist dabei jeweils auch ein entsprechendes MATLAB-Kommando aufgelistet, mit der diese Folge bequem generiert werden kann. Man benötigt für diese Kommandos allerdings die *Signal-Processing Toolbox* von MATLAB.

In Abbildungen 4.29 sind exemplarisch die Fensterfolgen von Rechteck-, Hanning- und Blackman-Fenster im Zeit- und im Frequenzbereich dargestellt (vgl. Datei `fensterDFT.m`).

Der Frequenzbereich ist zur besseren Verdeutlichung der Fensterwirkung in dB dargestellt. Alle Fensterspektren (Betragsspektren) sind aus Gründen der besseren Vergleichbarkeit für die Frequenz 0 rad auf 1 entsprechend 0 dB normiert und zwischen den Stützstellen interpoliert.

Vergleicht man die Betragsspektren in der Abbildung 4.29, so ist sehr schön zu sehen, dass die Höhe der Nebenzipfel des Rechteckfensters, welche ja wesentlich zur spektralen Verschmierung der gefensterten Signale beitragen, durch die Wahl eines anderen Fensters drastisch reduziert werden können.

So sind beispielsweise die Nebenzipfel des Blackman-Fensters um etwa -40 dB entsprechend einem Faktor 100 gegenüber denen des Rechteckfensters abgesenkt.

wird (nicht-kausale Darstellung). In der Tabelle 4.4 wurde eine Darstellung beginnend mit Index 0 gewählt. MATLAB verwendet entsprechend MATLABs Indizierungskonvention für Vektoren eine Darstellung beginnend mit 1. Der Leser möge dies von Fall zu Fall beachten.

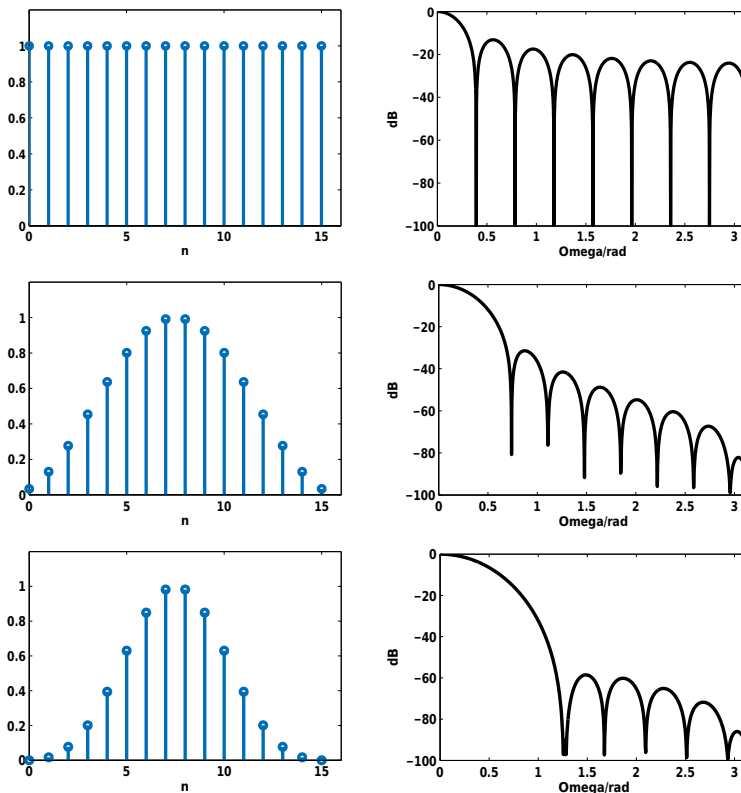


Abb. 4.29: Von oben nach unten: Rechteck-, Hanning- und Blackman-Fenster für 16 Werte im Zeit- und Frequenzbereich (Betragsspektren sind interpoliert)

Allerdings erkennt man an diesem Fall auch sehr deutlich, welcher Preis dafür zu zahlen ist. Der Hauptzipfel des Blackman-Fensters ist wesentlich breiter, was zu einer Verbreiterung der großen Anteile des Signalspektrums führt. In Beispiel 4.41 wird gezeigt, wie sich dies für ein sinusförmiges Signal auswirkt.

4.41 Beispiel (Spektren gefensterter Signale)

Wir betrachten das Signal

$$x(t) = \cos(2\pi 3.7t), \quad (362.1)$$

welches mit einer Abtastfrequenz entsprechend $f_a = 16$ Hz diskretisiert sei. Der Berechnung liegen $N = 32$ Abtastwerte zu Grunde (vgl. Datei **fensterDFTbsp.m**).

Da NT_a kein Vielfaches der Periodendauer ist, ist mit Leakage zu rechnen. Dies ist im linken Teil von Abbildung 4.30 deutlich zu sehen. Hier wurde das Rechteckfenster, d.h. *keine* spezielle Fensterung der Daten, verwendet.

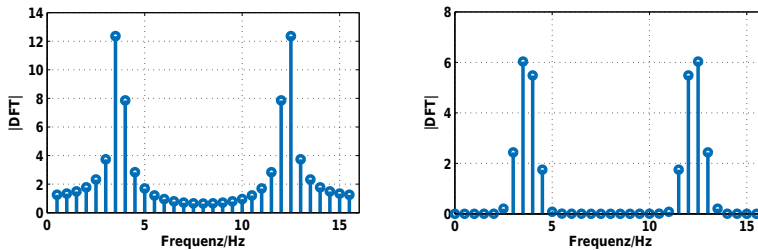


Abb. 4.30: Betragsspektrum eines Cosinussignals der Frequenz 3.7 Hz: links mit Rechteck-, rechts mit Blackman-Fensterung der Daten

Der rechte Teil zeigt das Betragsspektrum nach Fensterung der Daten mit einem Blackman-Fenster. Es ist deutlich zu erkennen, dass das Spektrum wesentlich weniger „leckt“! Allerdings erhalten wir in der Nähe der Sollfrequenz wesentlich mehr größere Spektrallinien. Insgesamt liegen aber die Spektrallinien konzentrierter um die Sollfrequenz herum. ■

Zero-Padding

Bekanntlich (vgl. (337.4)) ist die spektrale Auflösung einer DFT/FFT durch die folgende Diskretisierungsschrittweite bestimmt:

$$\Delta f = \frac{f_a}{N} = \frac{1}{NT} \quad \text{Hz} \quad (\text{bzw. } \Delta\omega = \frac{\omega_a}{N} = \frac{2\pi}{NT} \quad \text{rad/s}). \quad (363.1)$$

Die einfachste Möglichkeit diese Frequenzauflösung zu erhöhen besteht natürlich darin, entweder die Abtastrate bei gleichbleibender Wertezahl zu senken, also näher an die vom Abtasttheorem vorgegebene theoretische Grenze heranzugehen, oder die Zahl der abgetasteten Werte N zu erhöhen.

Oft ist aber gerade diese Möglichkeit ausgeschlossen, etwa weil die Daten schon früher aufgenommen wurden oder weil der gemessene Effekt nicht mehr reproduzierbar ist.

Eine Möglichkeit, diesen „Mangel“ zu beheben, wäre die *künstliche* Hinzufügung von Daten. In Ermangelung anderer Signalinformationen wählt man Nullen, die man entweder an die Daten anhängt oder zwischen die Daten einfügt. Diese Technik ist unter dem Stichwort *Zero-Padding* bekannt.

Im nächsten Beispiel soll der damit erzielte Effekt anhand zweier Grafiken veranschaulicht werden:

4.42 Beispiel (Zero-Padding-Technik)

Die Abbildung 4.31 zeigt⁵⁰ den Betrag einer 16-Punkt DFT des Signals

$$x(t) = \sin(2\pi t) + \sin(2\pi \cdot 1.02t), \quad (364.1)$$

also einer Überlagerung zweier Sinusschwingungen der Frequenz 1 Hz und 1.02 Hz (s. Datei **zeroPaddbsp.m**). Als Abtastrate wurde dabei $f_a = 16$ Hz gewählt, so dass die Frequenzauflösung (in Hz) der DFT laut Gleichung (337.4) genau 1 Hz beträgt.

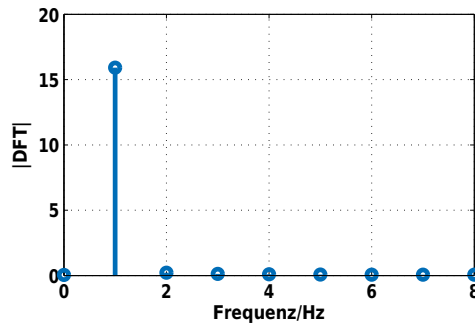


Abb. 4.31: 16-Punkt DFT eines Zweitonsignals der Frequenzen 1 Hz und 1.02 Hz, abgetastet mit $f_a = 16$ Hz

Aufgrund der Frequenzauflösung sind natürlich die zwei nur um $\frac{1}{50}$ Hz differierenden Schwingungen nicht auseinander zu halten. Das Spektrum vermittelt den Eindruck, als ob nur *eine* harmonische Schwingung vorhanden wäre!

Die einfachste Möglichkeit die Frequenzauflösung zu erhöhen ist natürlich, wie oben angedeutet, die Zahl der (Abtast-)Werte N zu erhöhen.

Da

$$\Delta f = \frac{f_a}{N} = \frac{16}{N} \leq \frac{1}{50} \quad \text{Hz} \quad (364.2)$$

sein soll, sind offenbar mindestens

$$N \geq 16 \cdot 50 = 800 \quad (364.3)$$

Werte erforderlich.

Wir wählen, da die FFT zu Berechnung verwendet werden soll, eine der nachfolgenden Zweierpotenzen – konkret $N = 4096$ entsprechend $4 K$ – und erhöhen die Zahl der Abtastwerte auf zwei Arten.

⁵⁰ Es ist nur der Bereich $[0, \frac{f_a}{2}]$ Hz dargestellt.

Auf der einen Seite betrachten wir N *echte* Abtastwerte des Signals, auf der anderen Seite hängen wir an das Signal einfach $N - 16$ Nullen an.

Bei Verwendung des MATLAB-Kommandos `fft` geschieht dies übrigens automatisch, wenn als zweiter Parameter $N = 4096$ angegeben wird (vgl. Datei `zeroPaddbsp.m`).

Die Abbildung 4.32 zeigt das Ergebnis der entsprechenden $4K$ -FFT's.

Übung 115

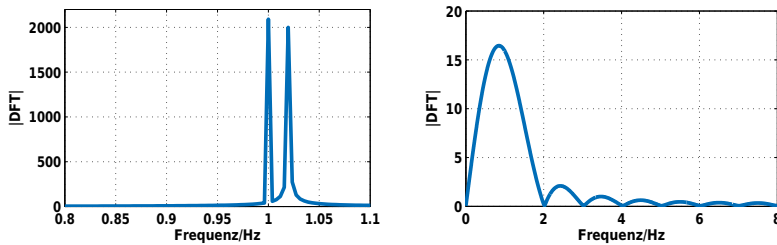


Abb. 4.32: $4K$ -DFT des Zweitonsignals der Frequenzen 1 Hz und 1.02 Hz, abgetastet mit $f_a = 16$ Hz und $N = 4096$ Abtastwerten (links) sowie von 16 Werten auf $4K$ mit Nullen aufgefüllt (rechts)

Links ist dabei das Amplitudenspektrum des Signals mit echten Daten zu sehen, wobei der interessante Bereich zwischen 0.8 Hz und 1.1 Hz herausgehoben ist, rechts das Ergebnis von Zero-Padding und anschließender Berechnung des Amplitudenspektrums.

Das Ergebnis des Beispiels 4.42 zeigt deutlich, dass durch die Erhöhung der Datenmenge mit Nullen eine *Glättung* des Spektralplots aus Abbildung 4.31 bewirkt wird.

Allerdings wird, auch im Gegensatz zu den manchmal in der Literatur zu findenden missverständlichen Behauptungen, *keine Auflösungsverbesserung* bewirkt. Die Verwendung *echter* Daten im Spektralplot erzeugt *zwei* Linien, das Zero-Padding jedoch nicht! Deutlich ist bei der mit Zero-Padding berechneten DFT noch der Einfluss der durch die Fensterung bedingten Spektralverschmierung zu erkennen.

Halten wir also fest:

Zero-Padding glättet (interpoliert) den Spektralplot! Man erreicht aber *keine höhere spektrale Auflösung* im Sinne einer spektralen Trennung von Signalen!

4.5.7 Digitale LTI-Systeme im Frequenzbereich

Im Zusammenhang mit der Herleitung der DTFT wurde eingangs des Abschnitts 4.5 gezeigt, dass sich die Antwort eines digitalen LTI-Systems $\tilde{y}$ mit

Impulsantwort $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ auf eine komplexe harmonische Erregung der Form $e^{j\Omega n}$ mit Hilfe der DTFT $H_{DTFT}(\Omega)$ der Impulsantwort bestimmen lässt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(e^{j\Omega n}) &= h_n * e^{j\Omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{j\Omega(n-k)} \\ &= e^{j\Omega n} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j\Omega k} = H_{DTFT}(\Omega) \cdot e^{j\Omega n}.\end{aligned}\quad (366.1)$$

Für jede (normierte) Frequenz Ω ist die Zahl $H(\Omega) := H_{DTFT}(\Omega)$ damit ein **komplexer Eigenwert** der linearen Transformation $\mathfrak{S}$ zum Eigenvektor $e^{j\Omega n}$. Die DTFT-Rücktransformations-Formel (315.5) zeigt, dass sich auch digitale Signale als Überlagerung komplexer harmonischer Schwingungen schreiben lassen.

Da digitale LTI-Systeme *linear* sind, ist wiederum die Systemantwort auf ein Eingangssignal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit einer *entsprechenden* Überlagerung der Signalanteile $H_{DTFT}(\Omega) \cdot e^{j\Omega n}$ darstellbar.

Wir können dies durch Berechnung des Spektrums des Ausgangssignals verifizieren.

Sei $y_n = h_n * x_n$ die Antwort eines digitalen LTI-Systems $\mathfrak{S}$ mit Impulsantwort $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ auf ein Eingangssignal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}Y_{DTFT}(\Omega) &:= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} e^{-j\Omega n}.\end{aligned}\quad (366.2)$$

Vertauscht⁵¹ man die Summationsgrenzen, so erhält man:

$$Y_{DTFT}(\Omega) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-k} e^{-j\Omega n} \right]. \quad (366.3)$$

Substituiert man in der inneren Summe $m := n - k$ bzw. $n = m + k$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}Y_{DTFT}(\Omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m e^{-j\Omega m} \right] e^{-j\Omega k} \\ &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j\Omega k} \right] \cdot \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m e^{-j\Omega m} \right] \\ &= H_{DTFT}(\Omega) \cdot X_{DTFT}(\Omega).\end{aligned}\quad (366.4)$$

⁵¹ Wir setzen überall absolute Reihenkonvergenz voraus!

Natürlich haben wir damit nichts anderes als den **Faltungssatz** der DTFT (vgl. Tabelle 4.2, S. 316) nachvollzogen.

Wir können insgesamt Folgendes festhalten:

Es sei $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ die **Impulsantwort** eines zeitdiskreten LTI-Systems $\mathfrak{S} : x_n \rightarrow y_n$. Dann wird das LTI-System im Frequenzbereich durch **Multiplikation** mit der **Übertragungsfunktion (Übertragungsfunktion im Frequenzbereich)**

$$H(\Omega) := H_{DTFT}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j\Omega k} \quad (367.1)$$

beschrieben. Es gilt mit den diskreten Fourier-Transformationen $X_{DTFT}(\Omega)$ und $Y_{DTFT}(\Omega)$:

$$Y_{DTFT}(\Omega) = H(\Omega) \cdot X_{DTFT}(\Omega). \quad (367.2)$$

Die Übertragungseigenschaft im Frequenzbereich kann aufgrund der Ähnlichkeit von DTFT und Z-Transformation aus dieser leicht abgeleitet werden. In der Tat gilt:

Ist $\mathfrak{S} : x_n \rightarrow y_n$ ein kausales zeitdiskretes LTI-System (mit kausaler Impulsantwort $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$) und existiert die Z-Transformierte $H(z)$ an einer Stelle $z = e^{j\Omega}$ des **Einheitskreises** der komplexen Ebene, so stimmen Z-Transformation und DTFT dort überein, d.h.

$$H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}. \quad (367.3)$$

Insbesondere kann für **stabile Systeme**, deren Übertragungsfunktion $H(z)$ im Bildbereich ja auf dem ganzen Einheitskreis existiert, die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich auf diese Weise einfach bestimmt werden.

Das Übertragungsverhalten wird also durch die komplexen Eigenwerte der digitalen komplexen harmonischen Schwingungen $e^{j\Omega n}$ **vollständig bestimmt!**

Die komplexen Eigenwerte umfassen dabei die Amplituden- und Phasenänderung des Ausgangssignals gegenüber dem Eingangssignal. Die Gleichung (366.1) zeigt auch, dass die Frequenz nicht geändert wird.

Trägt man nun Betrag und Phase der komplexen Eigenwerte $H(\Omega)$ über der **normierten Kreisfrequenz** oder alternativ über der Kreis- oder

Übung 117

Übung 118

Hz-Frequenz-Skala im Nyquistband auf, so erhält man einen Gesamtüberblick über das **Übertragungsverhalten** des digitalen LTI-Systems **bezüglich der Frequenz**.

Die Funktionen

$$\Omega \longrightarrow |H(\Omega)|, \quad (368.1)$$

$$\text{und } \Omega \longrightarrow \arg(H(\Omega)) \quad (368.2)$$

heißen **Amplitudengang** ((Betrags-)Frequenzgang) und **Phasengang** des durch die Frequenz-Übertragungsfunktion $H(\Omega)$ beschriebenen digitalen LTI-Systems.

Die grafische Darstellung dieser Funktionen über der normierten Kreisfrequenz Ω heißt das **Bode-Diagramm** des Systems.

Abbildung 4.33 zeigt beispielhaft das Bode-Diagramm des LTI-Systems mit der Z-Übertragungsfunktion $H(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$, wie es etwa mit dem MATLAB-Kommando `bode` auf folgende Weise berechnet werden kann (vgl. Datei `bodeSysDiskret.m`):

```
% Übertragungsfunktion definieren
a = 1/2;
z = tf('z',1); % zeigt zeitdiskretes System an
H = z/(z-a); % stabiles LTI-System, da |a|<1

% Frequenzvektor in rad im Nyquist-Intervall
% [0,2*pi] definieren, da in [-pi,pi] nicht
% möglich (bode funktioniert dann nicht)
Omega = (0:0.01:2*pi);
Om = (-pi:0.01:pi); % für den plot

% Bode-Diagramm berechnen
[Ampg, phasg] = bode(H, Omega);

% Plot des Bode-Diagramms ("von Hand"
% Ohne die Rückgabewerte wird der Plot
% automatisch ausgeführt ist aber nicht so
% flexibel)

% Vektoren erzeugen und shiften
Ampg = fftshift(Ampg(:));
phasg = fftshift(phasg(:));

subplot(2,1,1)
plot(Om, 20*log10(Ampg), 'b', 'Linewidth', 3);
```

```

grid
axis([Om(1), Om(end), min(20*log10(Ampg)) - 3, ...
                                     max(20*log10(Ampg)) + 3])
xlabel('normierte Frequenz/rad')
ylabel('dB')

subplot(212)
plot(Om, phasg, 'k', 'Linewidth', 3);
grid
axis([Om(1), Om(end), min(phasg), max(phasg)])
xlabel('normierte Frequenz/rad')
ylabel('rad')

```

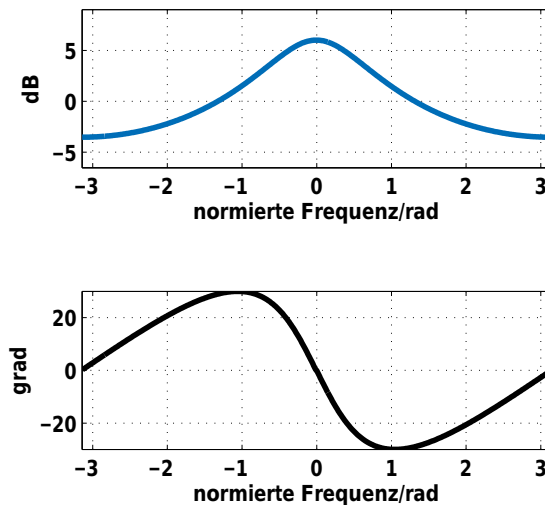


Abb. 4.33: Bode-Diagramm des digitalen Systems mit Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

im Bildbereich

Bei der Berechnung des Bode-Diagramms nach der obigen Methode ist allerdings Vorsicht geboten. Offenbar nimmt die MATLAB-Funktion `bode` nur die Ersetzung $z = e^{j\Omega}$ vor *ohne zu prüfen*, ob das **System** überhaupt *stabil* und somit eine Berechnung des Bode-Diagramms überhaupt sinnvoll ist! So wird auch für das offenbar instabile System mit der Übertragungsfunktion $H(z) = \frac{z}{z-2}$ (Pol bei $z = 2$, also instabil) ein Bode-Diagramm berechnet. Der Leser möge dies ausprobieren.

Eine Alternative zur Funktion `bode` ist die MATLAB-Funktion `freqz`. Die Funktion benötigt keine Transfer-Funktion (`tf`)-Objekte sondern arbeitet mit



den Zähler- und Nennerkoeffizienten der Übertragungsfunktion. Die Abbildung 4.33 hätte mit ihrer Hilfe auf folgende Weise erzeugt werden können (vgl. Datei **bodeSysDiskret2.m**):

```
% Übertragungsfunktion definieren
B = [1 0]; % Zählerkoeffizienten

A = [1 -1/2]; % Nennerkoeffizienten

% Frequenzvektor in rad im Nyquist-Intervall
Om = (-pi:0.01:pi); % geht in diesem Fall

% Bode-Diagramm berechnen
[HOmega,Nfrequenz] = freqz(B,A,Om);
Ampg = abs(HOmega);
phasg = angle(HOmega);

% Plot ...
```

4.5.8 Übungsaufgaben

Übung 102 (Lösungsband Seite 240)

Weisen Sie für die DTFT den so genannten *Differentiationssatz im Frequenzbereich*

$$(n \cdot f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \circ - \bullet j \frac{d}{d\Omega} F_{DTFT}(\Omega) \quad (370.1)$$

nach!

Übung 103 (Lösungsband Seite 241)

Berechnen Sie mit Hilfe von MATLAB näherungsweise die DTFT von

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} \sin(4t) & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (370.2)$$

für eine Abtastrate von 100 Hz und 1000 Abtastwerte. Plotten Sie den Betrag dieses DTFT-Spektrums im Vergleich zum Betrag der Fourier-Transformierten des Signals.

Übung 104 (Lösungsband Seite 243)

Berechnen Sie mit Hilfe von MATLAB die DTFT der endlichen Folge

$$x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 1, x_5 = -1. \quad (371.1)$$

Berechnen Sie anschließend eine FFT des mit *Zero-Padding* auf $4K$ Werte erweiterten Signals.

Vergleichen Sie die Spektren und interpretieren Sie das Ergebnis.

Übung 105 (Lösungsband Seite 244)

Überlegen Sie sich, warum für die Berechnung einer DFT mit N Abtastwerten $O(N^2)$ Rechenoperationen benötigt werden.

Testen Sie anschließend mit Hilfe der MATLAB-Funktion `fft` und der in der Begleitsoftware beigefügten Funktion `diedft` (zur Berechnung der DFT mit der Summenformel gemäß Definition (323.4)) die Leistungsfähigkeit der FFT, indem Sie beide Algorithmen für verschiedene Anzahlen $N = 2^k$ von Abtastwerten ausprobieren⁵².

Übung 106 (Lösungsband Seite 246)

Betrachten Sie das Signal:

$$x(t) = \sin(2\pi t). \quad (371.2)$$

- (a) Berechnen Sie die ersten $N = 4$ Abtastwerte zum Abtastintervall $T_a = 1/4$ s und eine zugehörige N -Punkt-DFT.
- (b) Skizzieren Sie Betrag und Phase der DFT.
- (c) Überprüfen Sie die Ergebnisse mit MATLAB.
- (d) Führen Sie die Aufgabenteile (a) und (b) mit dem Signal

$$y(t) = \sin(3\pi t) \quad (371.3)$$

und mit Hilfe von MATLAB nochmals durch.

Was stellen Sie fest ?

- (e) Berechnen Sie mit Hilfe des MATLAB-Befehls `fft` eine 1 K-FFT für die beiden obigen Signale und vergleichen Sie das Ergebnis mit den von Hand berechneten Ergebnissen aus Aufgabenteil (a) bis (d).

Übung 107 (Lösungsband Seite 250)

Ein Signal werde mit einer Abtastfrequenz von 1 kHz abgetastet und es werden dabei folgende Abtastwerte aufgenommen:

$$2, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0. \quad (371.4)$$

⁵² Vorsicht bei $k \geq 14$!

- (a) Berechnen Sie mit Hilfe von MATLAB eine DFT des Signals und skizzieren Sie das resultierende Amplitudenspektrum.
- (b) Führen Sie Aufgabenteil (a) nochmals durch, wobei das Signal diesmal jedoch aus einer 10 Hz-Abtastung stammen soll. Welche Unterschiede stellen Sie fest?

Übung 108 (Lösungsband Seite 252)

Ein Gebäudeschwingungssignal soll auf gefährliche Resonanzen im Bereich 0.8 Hz bis 1 Hz hin untersucht werden.

Wieviel Abtastwerte $N = 2^k$ müssen bei einer Abtastfrequenz von $f_a = 5.4$ Hz aufgenommen werden, damit die Auflösung in diesem Bereich mindestens 0.001 Hz beträgt?

Wie lange dauert diese Datenaufnahme ?

Übung 109 (Lösungsband Seite 252)

Betrachten Sie die Abtastwerte des Signals

$$f(t) = 2 \cos(2\pi t) + \cos(14\pi t) \quad (372.1)$$

für eine Abtastrate von $f_a = 5$ Hz.

- (a) Skizzieren Sie (ohne vorherige Berechnung) die DFT des Signals für $N = 10$ und begründen Sie Ihre Skizze. Verwenden Sie Hz als Einheit für die Frequenzachse.
- (b) Welches Signal wird aus den Abtastwerten bei D/A-Wandlung und Beibehaltung der Taktrate rekonstruiert?
- (c) Wie muss die Abtastrate bei einer 1-K-FFT gewählt werden, damit kein Leakage-Effekt entsteht und die Voraussetzungen des Abtasttheorems eingehalten werden?
- (d) Welches Signal wird aus den Abtastwerten bei D/A-Wandlung rekonstruiert, wenn die Taktrate auf $f_a = 10$ Hz erhöht wird?

Übung 110 (Lösungsband Seite 255)

Betrachten Sie das Signal:

$$x(t) = \cos(10\pi t). \quad (372.2)$$

- (a) Bestimmen Sie für eine Abtastrate von 4 Hz die ersten 4 Abtastwerte von $x(t)$.
- (b) Skizzieren Sie das Abtastspektrum von $x(t)$.
- (c) Skizzieren Sie das 4-Punkt DFT-Spektrum von $x(t)$.

- (d) Wie unterscheidet sich das 4-Punkt FFT-Spektrum vom 4-Punkt DFT-Spektrum?

Übung 111 (Lösungsband Seite 256)

Beantworten Sie folgende Fragen:

- Welcher Frequenz in Hz entspricht die normierte Frequenz $\frac{\pi}{3}$ rad?
- Was ist der Unterschied zwischen einer DFT und einer DTFT?
- Wie viele Datenpunkte braucht man bei einer FFT mindestens, um bei einer Abtastrate von 1 kHz zwei Spektrallinien mit einem Abstand von 1 Hz aufzulösen?

Übung 112 (Lösungsband Seite 257)

Betrachten Sie das in Abbildung 4.34 dargestellte (reelle!!) FFT-Spektrum eines Signals $x(t)$, welches ohne Leakage und unter Einhaltung der Rekonstruktionsbedingung des Abtasttheorems berechnet wurde.

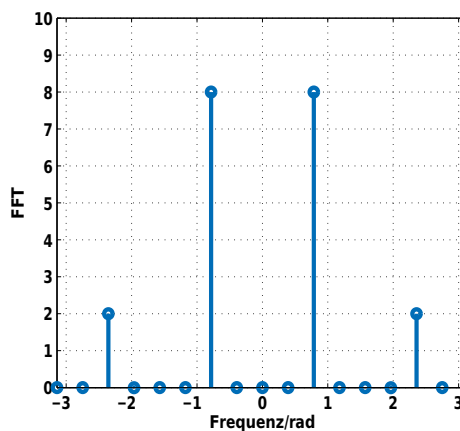


Abb. 4.34: FFT-Spektrum

- Wie viele Abtastwerte wurden verwendet?
- Welches Signal $x(t)$ wurde abgetastet?
- Wie groß war die Abtastrate?

Übung 113 (Lösungsband Seite 258)

Schreiben Sie ein MATLAB-Programm zur Bestimmung der *inversen DFT*, welches zur Berechnung nur die Funktion `fft` verwendet und somit auf der Dualitätseigenschaft der DFT basiert.

Testen Sie Ihr Programm mit einem beliebigen Signal und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem, welches Sie durch Verwendung der Funktion `ifft` erhalten.

Übung 114 (Lösungsband Seite 260)

Betrachten Sie einen Sinus der Frequenz 4 Hz mit Amplitude 1 und Nullphase 0 rad.

- Berechnen Sie die ersten vier Abtastwerte des Signals für eine Abtastfrequenz von 3 Hz.
- Gibt es Sinussignale geringerer Frequenz mit denselben Abtastwerten und wenn ja, welche?
- Berechnen Sie mit MATLAB eine 4–Punkt DFT des Signals mit Hilfe der obigen Abtastwerte.
Ist Aliasing oder Leakage zu beobachten (Begründung)?
- Für welche Sinussignale tritt bei der obigen Abtastfrequenz und 4 Abtastwerten weder Aliasing noch Leakage auf?

Übung 115 (Lösungsband Seite 262)

Untersuchen Sie, warum in Beispiel 4.42, S. 363 eine Wertezahl von $N = 4096$ verwendet wurde und nicht die nächstliegende Zweierpotenz $N = 1024$.

Berechnen Sie dazu mit Hilfe von MATLAB das DFT-Amplitudenspektrum des Doppeltens jeweils mit echten N Daten (also ohne Zero-Padding). Interpretieren Sie die Ergebnisse!

Übung 116 (Lösungsband Seite 264)

Berechnen Sie mit Hilfe von MATLAB das Spektrum des Signals aus Beispiel 4.41, S. 362 mit einer Hanning-Fensterung und vergleichen Sie das Ergebnis mit den Plots aus Abbildung 4.30, S. 363.

Was schließen Sie daraus?

Übung 117 (Lösungsband Seite 266)

Betrachten Sie das für einen Parameter $0 < T < \frac{1}{2}$ durch die Differenzengleichung

$$y_n - y_{n-1} + T y_{n-2} = x_n \quad (374.1)$$

beschriebene diskrete LTI-System (vgl. Übung 90).

- Bestimmen Sie für den Parameter $T = \frac{\pi^2}{36}$ die Antwort (im eingeschwungenen Zustand) des Systems auf die Eingangsfolge $x_n = e^{j \frac{n\pi}{6}}$.

- (b) Überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe der `tf`-Funktionen von MATLABs *Control System Toolbox*.
- (c) Überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe der MATLAB-Funktion `filter` der *Signal Processing Toolbox*.
- (d) Entwerfen Sie ein Simulink-System, mit dem das Ergebnis aus Aufgabenteil (a) verifiziert werden kann.

Übung 118 (Lösungsband Seite 270)

Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB die Übertragungsfunktionen $H(\Omega)$ für die RC-Tiefpass-Simulationen 0-ter und 1-ter Ordnung aus (240.4) und Übung 74 und stellen Sie diese grafisch dar. Welche Information entnehmen Sie den Grafiken?

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer geeigneten Simulink-Simulation.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass das Filter, welches die RC-Tiefpass-Simulation 1-ter Ordnung repräsentiert, durch die Differenzengleichung

$$y_n = e^{-\frac{T_a}{T}} y_{n-1} + \frac{T_a}{2T} e^{-\frac{T_a}{T}} x_{n-1} + \frac{T_a}{2T} x_n. \quad (375.1)$$

beschrieben wird!



4.6 Übertragungseigenschaften digitaler LTI-Systeme und Filterentwurf

In diesem Abschnitt sollen in zu Kapitel 2 Abschnitt 2.6 analoger Weise die Eigenschaften *digitaler Filter* und die Aspekte des *Entwurfs* solcher Filter beleuchtet werden.

4.6.1 Filterklassen und Filterkennwerte

Im vorangegangenen Abschnitt 4.5 wurde gezeigt, dass sich das Systemverhalten digitaler LTI-Systeme (*Filter*) im (normierten) Frequenzbereich durch die Übertragungsfunktionen $H(\Omega)$ und das Bode-Diagramm vollständig beschreiben lässt.

Damit kann auch die Begriffswelt aus Kapitel 2 Abschnitt 2.6, S. 189ff bezüglich der Filterklassifizierung und der Entwurfsparameter im Frequenzbereich auf digitale Systeme übertragen werden! Insbesondere sind damit die *Filterklassifizierung* gemäß Definition 190 und die *Kennwertdefinitionen* gemäß Tabelle 2.4, S. 194 sowie die das *Toleranzschema* für den Filterentwurf gemäß Abbildung 2.48, S. 198 auf digitale Filter übertragbar!

Für digitale Filter unterscheidet man zusätzlich, ob die Impulsantwort eine endliche Anzahl von Werten (genauer: eine endliche Anzahl von Werten $\neq 0$) hat oder prinzipiell unendliche Länge.

Unter einem **FIR-Filter (Finite-Impulse-Response-Filter)** versteht man ein digitales LTI-System mit einer Impulsantwort $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, die nur endlich viele Werten $\neq 0$ hat (mit einer **Impulsantwort endlicher Dauer** bzw. Länge).

Alle anderen Filter heißen **IIR-Filter (Infinite-Impulse-Response-Filter)**.

Beispiele hierfür haben wir zu Beginn von Kapitel 4 bereits kennengelernt. So ist das Filter der gleitenden gewichteten Mittelung mit den Koeffizienten (244.1) ganz offensichtlich ein FIR-Filter, wohingegen das durch die Rekursionsvorschrift (261.2) definierte digitale LTI-System eine zwar stetig kleiner werdende, aber nie vollständig verschwindende Impulsantwort hat.

Realisierung von FIR- und IIR-Filtern

FIR-Filter werden im Allgemeinen durch die **direkte Implementierung der Faltungssumme** realisiert. In MATLAB kann dies etwa mit einer Schleife oder mit Hilfe der Funktion `conv` geschehen. Gegebenenfalls ist dabei eine Zeitverschiebung der Impulsantwort nötig, um die Kausalität des Filters zu gewährleisten. Man beachte den Unterschied zu der Realisierung *analoger* Filter, bei denen man mit der Faltungsdarstellung bezüglich der Filterrealisierung in der Praxis nichts anfangen kann.

IIR-Filter werden als **rekursive** Filter realisiert, d.h., dass sie eine Rückkopplung des Ausgangssignals besitzen und sich mit einer rekursiven linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten beschreiben lassen.

Mit diesen Vorbemerkung haben wir die wichtigsten Aspekte rekapituliert, die wir im Auge haben sollten, wenn im folgenden Abschnitt Entwurfsprinzipien für FIR- und IIR-Filter diskutiert werden.

4.6.2 Entwurf von digitalen Tiefpässen

Beim Entwurf von digitalen Filtern können wir uns, ähnlich wie in Kapitel 2 Abschnitt 2.6, prinzipiell wieder auf **Tiefpässe** beschränken, da die anderen Filtertypen durch Kombinationen von Tiefpässen und Allpässen oder über Frequenztransformationen (s. Anhang C) daraus konstruiert werden können.

Zunächst gehen wir dabei wieder vom idealen Tiefpass aus und fragen uns, ob dieser mit Hilfe eines geeigneten FIR-Filters approximiert werden kann.

FIR-Approximation des idealen Tiefpasses

Wollen wir den idealen Tiefpass mit einem FIR-Filter approximieren⁵³, so sind prinzipiell drei Ansätze denkbar:

⁵³ Man beachte, dass natürlich auch der digitale ideale Tiefpass *nicht realisierbar* ist. Somit ist allenfalls eine Approximation realisierbar.

Ansatz 1: „Kleinste Quadrate“-Approximation im Frequenzbereich

Bei diesem Ansatz wählt man zur Übertragungsfunktion

$$H_{TP}(\Omega) = \begin{cases} 1 & \Omega \in [-\Omega_g, \Omega_g], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \Omega_g \in (0, \pi] \quad (377.1)$$

des idealen digitalen Tiefpass ein (nicht-kausales) FIR-Filter der Länge $2N+1$

$$H(\Omega) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{-j\Omega k}, \quad (377.2)$$

so dass das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H_{TP}(\Omega) - H(\Omega)|^2 d\Omega \quad (377.3)$$

minimal wird!

Dahinter steckt die Idee, die ideale Übertragungsfunktion so gut wie möglich bezüglich eines geeigneten Kriteriums, hier des quadratischen Fehlerintegrals, mit einem FIR-Filter anzupassen.

Man zeigt, dass der Ausdruck (377.3) minimal wird, wenn

Übung 119

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_{TP}(k) - a(k)|^2 \quad (377.4)$$

Übung 120

Übung 121

minimal wird, wobei $h_{TP}(k)$ die Impulsantwort des idealen Tiefpasses, also die inverse DTFT der Übertragungsfunktion $H_{TP}(\Omega)$ ist. Dies ist im Wesentlichen die Aussage des so genannten *Parseval'schen Theorems* für die Fourier-Transformation (resp. für die DTFT).

Der Ausdruck (377.4) wird minimal, genau dann wenn

$$\sum_{k=-N}^N |h_{TP}(k) - a(k)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{-N-1} |h_{TP}(k)|^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |h_{TP}(k)|^2 \quad (377.5)$$

minimal wird. Dies wiederum ist offenbar genau dann der Fall, wenn gilt:

$$h_{TP}(k) = \begin{cases} a(k) & \text{für alle } k = -N, \dots, N, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (377.6)$$

Das gesuchte Filter entsteht also aus einem Ausschnitt der Impulsantwort des idealen Tiefpasses. Das Filter muss lediglich noch durch Verschiebung um N Takte zu einem kausalen Filter gemacht werden!

Letztendlich zeigt diese Rechnung, dass der gewählte Ansatz genau dasselbe Ergebnis liefert wie der folgende Ansatz, dem die Idee zu Grunde liegt, die Impulsantworten des idealen Tiefpasses und des zu konstruierenden FIR-Filters anzupassen.

Ansatz 2: Abschneiden der Impulsantwort von $H_{TP}(\Omega)$

Zur Berechnung von $h_{TP}(k)$ verwenden wir die inverse DTFT:

$$\begin{aligned}
 h_{TP}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{TP}(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_g}^{\Omega_g} 1 \cdot e^{jk\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jk} e^{jk\Omega} \Big|_{-\Omega_g}^{\Omega_g} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jk} (e^{jk\Omega_g} - e^{-jk\Omega_g}) = \frac{1}{k\pi} \sin(\Omega_g k) \\
 &= \frac{\Omega_g}{\pi} \frac{\sin\left(\pi \Omega_g \frac{k}{\pi}\right)}{k\Omega_g} = \frac{\Omega_g}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\Omega_g \frac{k}{\pi}\right).
 \end{aligned} \tag{378.1}$$

Bei genauer Betrachtung (vgl. DTFT-FT Berechnung) entspricht dies (bis auf den Faktor T_a) dem Ergebnis gemäß dem nachfolgenden Ansatz 3.

Ansatz 3: Abtastung der zeitkontinuierlichen Impulsantwort des idealen Tiefpasses

Aus der Gleichung

$$h_{TP}(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_g}{\pi} t\right) \tag{378.2}$$

für die Impulsantwort des idealen zeitkontinuierlichen Tiefpasses folgt nach Abtastung mit einem Abtastintervall von T_a s und mit $\Omega_g = T_a \omega_g = \frac{\omega_g}{f_a}$ rad:

$$\begin{aligned}
 T_a \cdot h_{TP}(kT) &= \frac{T_a \omega_g}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_g T_a k}{\pi}\right) \\
 &= \frac{\Omega_g}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_g k}{\pi}\right).
 \end{aligned} \tag{378.3}$$

Die Berechnung diskreter Tiefpässe kann also über die Diskretisierung von Impulsantworten (multipliziert mit T_a) von zeitkontinuierlichen Tiefpassen erfolgen.

Der gerade besprochene FIR-Filterentwurf ist ein Beispiel für das unter dem Stichwort *Fenster-Methode* bekannte Entwurfskonzept, bei dem prinzipiell

die Impulsantwort des zu entwerfenden Filters geeignet abgeschnitten wird, um ein approximierendes FIR-Filter zu erhalten.

Andere Ansätze für den FIR-Tiefpassfilterentwurf sollen an dieser Stelle nicht behandelt werden. Es soll hier lediglich auf weitere Möglichkeiten hingewiesen werden. Für Details verweisen wir auf spezielle Literatur zum Digitalfilterentwurf.

Andere Entwurfsansätze für digitale FIR-Filter

Heuristische Ansätze: Ein Beispiel hierfür wäre das schon in Beispiel 4.3, S. 244 angesprochene gewichtete Mittelungsfiler, welches man aus dem Wissen heraus entwirft, dass eine arithmetische Mittelung glättende und damit Tiefpasswirkung hat.

Ein anderes Beispiel wäre die Verwendung der Differenz als digitale Approximation eines Differenzierers (vgl. Übung 104, S. 370).

Systematische Entwurfsalgorithmen mit Hilfe des Toleranzschemas (vgl. Abbildung 2.48, S. 198): Bei diesen Ansätzen geht man von Approximationen der Filterübertragungsfunktion aus, ähnlich wie wir dies für das analoge Butterworth-Filter in Kapitel 2 getan haben⁵⁴.

In diesem Zusammenhang ist der so genannte *Remez-Exchange-Algorithmus* zu nennen. Dieser Algorithmus, der beispielsweise in dem in Abschnitt 4.6.3 zu besprechenden Filterentwurfs-GUI *fdatool* bzw. in der FIR-Filterentwurfs-Funktion *firpm* von MATLAB integriert ist, beruht auf einer optimalen Anpassung des gewünschten Amplitudengangs durch Tschebyscheff-Polynome. Er folgt also im Prinzip der gleichen Idee wie der Ansatz 1 in der oben diskutierten Approximation des idealen Tiefpasses.

Wir können die Details dieses Verfahrens hier nicht behandeln, wollen aber zur Illustration im folgenden Beispiel einem Entwurf mit Hilfe der *Fenster-Methode* einen Entwurf auf Basis des *Remez-Exchange-Algorithmus* gegenüberstellen.

4.43 Beispiel (FIR-Filterentwurfsmethoden im Vergleich)

Es soll ein FIR-Filter entworfen werden, welches das in Abbildung 4.35 skizzierte Übertragungsverhalten (Amplitudengang) hat.

Für den Entwurf nach der Fenster-Methode bestimmen wir zunächst die Impulsantwort $h_k = h(k)$ des Filters, wobei wir wie beim idealen Tiefpass davon ausgehen, dass der Phasengang konstant 0 ist.

Wie in (378.1) ergibt sich:

⁵⁴ Wir werden diesen Filtertyp im Übrigen im nachfolgenden Unterabschnitt über den Entwurf digitaler IIR-Filter nochmals ausführlich im digitalen Fall behandeln.

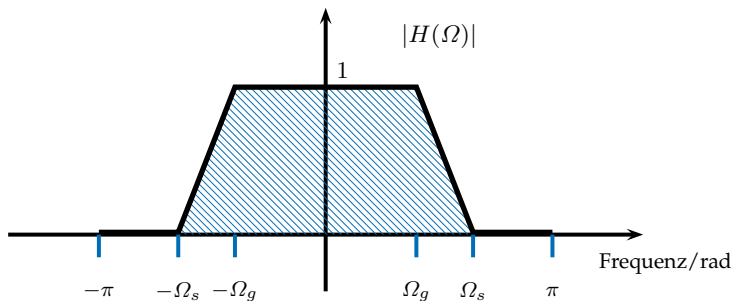


Abb. 4.35: Soll-Amplitudengang des zu konstruierenden FIR-Filters

$$\begin{aligned}
 h(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_s}^{-\Omega_g} H(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_g}^{\Omega_g} H(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_g}^{\Omega_s} H(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega.
 \end{aligned} \tag{380.1}$$

Übung 122 Dabei folgt für den Anteil des mittleren Summanden aus (378.1):

Übung 123

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_g}^{\Omega_g} H(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega = \frac{\Omega_g}{\pi} \operatorname{sinc} \left(\Omega_g \frac{k}{\pi} \right). \tag{380.2}$$

Wegen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_s}^{-\Omega_g} H(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_s}^{-\Omega_g} \frac{\Omega + \Omega_s}{\Omega_s - \Omega_g} e^{jk\Omega} d\Omega \tag{380.3}$$

und

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_g}^{\Omega_s} H(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_g}^{\Omega_s} \frac{\Omega_s - \Omega}{\Omega_s - \Omega_g} e^{jk\Omega} d\Omega \tag{380.4}$$

und der MATLAB-Berechnung

```

>> syms x k Og Os
>> H1 = (x+Os)/(Os-Og);
>> H2 = (Os-x)/(Os-Og);
>> erg1 = int(H1*exp(j*x*k), -Os,-Og);
>> erg2 = int(H2*exp(j*x*k), Og, Os);
>> erg1 = simplify(erg1, 'Steps', 100);
>> erg2 = simplify(erg2, 'Steps', 100);
>> pretty(erg1)

      exp(-Og k i) i      exp(-Og k i) - exp(-Os k i)
      -----
      k                    2
                        k  (Og - Os)

>> pretty(erg2)

      exp(Og k i) i      exp(Og k i) - exp(Os k i)
      -----
      k                    2
                        k  (Og - Os)

```

folgt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_g}^{\Omega_s} H(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_s}^{-\Omega_g} H(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega \\
 &= \frac{1}{jk} (e^{-jk\Omega_g} - e^{jk\Omega_g}) \\
 & \quad - \frac{1}{k^2 (\Omega_g - \Omega_s)} ((e^{jk\Omega_g} + e^{-jk\Omega_g}) - (e^{jk\Omega_s} + e^{-jk\Omega_s})).
 \end{aligned} \tag{381.1}$$

Damit ist:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_g}^{\Omega_s} H(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_s}^{-\Omega_g} H(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega \\
 &= -\frac{1}{k\pi} \sin(\Omega_g k) + \frac{\cos(k\Omega_g) - \cos(k\Omega_s)}{\pi k^2 (\Omega_s - \Omega_g)}.
 \end{aligned} \tag{381.2}$$

Insgesamt erhalten wir wegen

$$\frac{1}{k\pi} \sin(\Omega_g k) = \frac{\Omega_g}{\pi} \frac{\sin\left(\pi \Omega_g \frac{k}{\pi}\right)}{\pi \Omega_g \frac{k}{\pi}} = \frac{\Omega_g}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\Omega_g \frac{k}{\pi}\right) \tag{381.3}$$

falls $k \neq 0$ ist aus (380.2):

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) e^{jk\Omega} d\Omega = \frac{\cos(k\Omega_g) - \cos(k\Omega_s)}{\pi k^2 (\Omega_s - \Omega_g)}, \quad (382.1)$$

Für den Sonderfall $k = 0$ behelfen wir uns mit der folgenden MATLAB-Berechnung:

```
>> H1 = (x+Os)/(Os-Og);
>> erg1 = int(H1, -Os,-Og);
>> H2 = (Os-x)/(Os-Og);
>> erg2 = int(H2, Og, Os);
>> simplify(erg1+erg2)

ans =

Os-Og
```

Dies bedeutet:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_g}^{\Omega_s} H(\Omega) d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_s}^{-\Omega_g} H(\Omega) d\Omega = \frac{\Omega_s - \Omega_g}{2\pi}. \quad (382.2)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) d\Omega = \frac{\Omega_g}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\Omega_g \frac{0}{\pi}\right) + \frac{\Omega_s - \Omega_g}{2\pi} \\ &= \frac{2\Omega_g + \Omega_s - \Omega_g}{2\pi} = \frac{\Omega_g + \Omega_s}{2\pi}. \end{aligned} \quad (382.3)$$

Diese Impulsantwort wird nun symmetrisch beschnitten und es wird ein Vergleich mit einem gleich langen Filter durchgeführt, welcher unter Verwendung der FIR-Filterentwurfs-Funktion `firpm` nach dem *Remez-Exchange-Algorithmus* bestimmt wurde (s. Datei `FIREntwurfBsp.m`).

Ein Aufruf von

```
>> FIREntwurfBsp
```

liefert die in Abbildung 4.36 dargestellten Impulsantworten und Übertragungsfunktionen im Falle von 50 FIR-Filterkoeffizienten.

Die Amplitudengänge beider Entwürfe stimmen sehr gut mit der vorgegebenen Charakteristik überein⁵⁵.

⁵⁵ Sie tun dies so gut, dass die in der Grafik ebenfalls geplottete ideale Charakteristik in der grafischen Auflösung kaum wahrnehmbar ist.

Auch zeigen beide Entwürfe die schon aus Kapitel 2 (s. Abbildung 2.37, S. 170) bekannten Überschwinger im Durchlassbereich und in der Nähe der steilen Filterflanken (Gibbs'sches Phänomen).

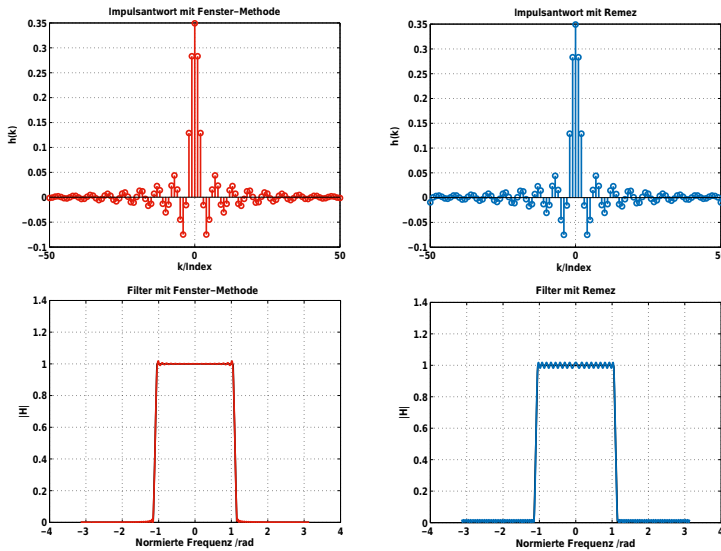


Abb. 4.36: FIR-Tiefpassfilterentwurf mit der Fenster-Methode und dem Remez-Exchange-Algorithmus

IIR-Tiefpassfilter-Entwurf

Wiederum können alle Ansätze für den IIR-Tiefpassfilterentwurf an dieser Stelle nicht behandelt werden.

Die gängigsten Typen entsprechen denen bei Analogfiltern. Wir verweisen daher auf Kapitel 2, Abschnitt 2.6, S. 189ff und Abbildung 2.51 auf Seite 205. Für unsere Zwecke genügt es, einen Eindruck von den Entwurfsprinzipien zu bekommen, denn im Allgemeinen wird man auf Standardentwürfe zurückgreifen, entweder in Form von Tabellen oder etwa, wesentlich bequemer, durch Aufruf eines MATLAB-Kommandos. Um aber richtig mit diesen Hilfsmitteln umgehen zu können, sollte man über die Struktur und Entwurfsprinzipien der Filter einigermaßen Bescheid wissen.

Daher soll im Folgenden, analog zur Vorgehensweise in Kapitel 2, wiederum *exemplarisch das digitale Butterworth-Tiefpassfilter* hergeleitet werden.

Übung 124

Entwurf von digitalen Butterworth-Tiefpässen

Es scheint zunächst naheliegend, analog zur Entwurfsstrategie für analoge Filter vorzugehen und das Butterworth-Filter als *digitales Potenzfilter* zu entwerfen.

Man könnte also nach einem Filter der Form

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)^{2N}} \quad (384.1)$$

suchen. Dabei bezeichnet Ω_p die Durchlassgrenzfrequenz und N die Ordnung des Filters.

Bei näherer Betrachtung zeigt sich jedoch ein schwerwiegendes Problem.

Der Ansatz führt *nicht* auf eine rationale Z-Übertragungsfunktion der Form

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

und damit *nicht zu einer Differenzengleichung (=Realisierung)!*

Diese Tatsache folgt aus folgender Überlegung: wenn eine Übertragungsfunktion entsprechend Gleichung (384.1) existieren würde, so müsste sich passend dazu eine Z-Übertragungsfunktion $H(z)$ finden lassen, die der folgenden Bedingung genügt:

$$|H(z)|_{z=e^{j\Omega}}^2 = |H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)^{2N}}. \quad (384.2)$$

Diese Übertragungsfunktion müsste dann (vgl. dazu Gleichung (201.4)) diese Form haben:

$$|H(z)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{-(\ln_c(z))^2}{\Omega_p^2}\right)^N}. \quad (384.3)$$

Dies ist aber keine rationale Funktion von z mehr!

Eine solche wird aber für eine Realisierung in der Form einer linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten benötigt!

Man behilft sich nun mit einem Trick. Man approximiert Ω^N durch eine Funktion, die sich als rationale Funktion in $e^{j\Omega}$ darstellen lässt!

Dies leistet $\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$, denn es gilt:

$$\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \frac{\Omega}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Omega}{2}\right)^3 + \dots \quad \forall |\Omega| < \pi \quad (384.4)$$

und

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)} = \frac{2(e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}})}{2j(e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}})} \\ &= -j \frac{e^{j\Omega} - 1}{e^{j\Omega} + 1} = -j \frac{z - 1}{z + 1} \Big|_{z=e^{j\Omega}}. \end{aligned} \quad (384.5)$$

Somit ergibt sich der folgende Ansatz: entwerfe ein stabiles Filter mit:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\Omega_p}{2}\right)} \right)^{2N}}. \quad (385.1)$$

Dies führt auf eine Z-Transformierte $H(z)$ mit:

$$|H(z)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(-\frac{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{(\Omega'_p)^2} \right)^N}, \quad (385.2)$$

$$\Omega'_p = \tan\left(\frac{\Omega_p}{2}\right).$$

An dieser Stelle kann nun eine **wesentliche Beobachtung** gemacht werden. In dieser Form **entspricht** $|H(z)|^2$ offenbar **genau dem analogen Entwurf** (entsprechend Gleichung (201.4)) $|H(s)|^2$ mit den Parametern Ω'_p und $s = \frac{z-1}{z+1}$!

In der Folge kann also der digitale Butterworthfilter-Entwurf aus dem analogen Entwurf abgeleitet werden!

Ein weiterer Vorteil ist, dass das so entworfene Tiefpassfilter bei gleicher Ordnung N noch steilere Filterflanken hat als das reine (theoretische) Potenzfilter.

Dies verdeutlicht die Abbildung 4.37 am Beispiel eines Entwurfes 4. Ordnung ($N = 4$). Die Abbildung zeigt auch eine deutliche Verbesserung der Tiefpasscharakteristik in der Gesamtheit, paradoxerweise insbesondere dort, wo die Approximation von $\frac{\Omega}{2}$ durch $\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$ schlecht ist (d.h. für große Ω).

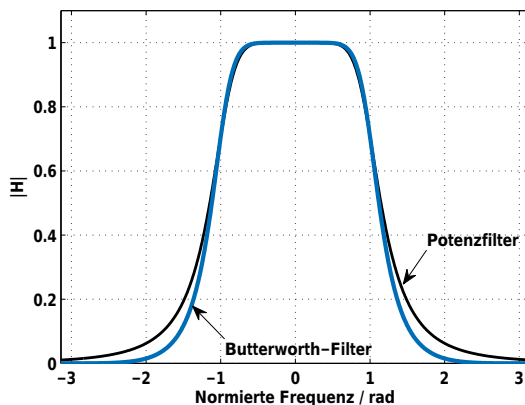


Abb. 4.37: Vergleich der Butterworth-Charakteristik und Potenzfilter-Charakteristik

Die Transformation, die durch $s = \frac{z-1}{z+1}$ definiert wird, hat über den Butterworthfilter-Entwurf hinaus Bedeutung und kann auch für andere Filterklassen zur Ableitung von digitalen Filtern aus ihren analogen Pendanten herangezogen werden:

Die durch die Gleichung

$$s = \frac{z-1}{z+1} \quad (386.1)$$

definierte Abbildung von der s -Ebene ($\mathbb{C}$) in die z -Ebene ($\mathbb{C}$) heißt **bilineare Transformation**.

Wir kommen auf die Eigenschaften der bilinearen Transformation bei der Pol-Nullstellen-Betrachtung nochmals zu sprechen. Zunächst ergibt sich aus der obigen Herleitung ein Algorithmus zur Ableitung der digitalen Butterworthfilter aus den analogen Entwürfen.

Vorgehensweise beim digitalen Butterworth-Filter-Entwurf

Beim Entwurf eines digitalen Butterworth-Filters anhand eines analogen Entwurfes ist folgendermaßen vorzugehen:

Übung 126

- (a) Transformiere die Grenzfrequenzen Ω_p und Ω_g vermöge

Übung 127

$$\begin{aligned} \omega_p &:= \Omega'_p = \tan\left(\frac{\Omega_p}{2}\right), \\ \omega_s &:= \Omega'_s = \tan\left(\frac{\Omega_s}{2}\right). \end{aligned} \quad (386.2)$$

- (b) Entwerfe ein analoges Filter für ω_p, ω_g und die vorgegebenen Toleranzen entsprechend Kapitel 2, Abschnitt 2.6, S. 189ff. Dies liefert die Übertragungsfunktion im Bildbereich $\tilde{H}(s)$ des Analogfilters.
- (c) Transformiere $\tilde{H}(s)$ vermöge der bilinearen Transformation $s = \frac{z-1}{z+1}$ nach $H(z)$. Dann ist $H(z)$ die Z-Übertragungsfunktion des gewünschten Filters.

Wir wollen dies an einem Beispiel erläutern.

4.44 Beispiel (Entwurf eines digitalen Butterworth-Tiefpasses)

Zu entwerfen sei ein Butterworth-Filter, welches folgendem Toleranzschema (vgl. Abbildung 2.48, S. 198) genügt:

Toleranz im Durchlassbereich bei Ω_p :	-3 dB	($\triangleq \epsilon^2 = 1$),
Toleranz im Sperrbereich bei Ω_s :	-20 dB	($\triangleq \delta_2^2 = \frac{1}{100}$),
Durchlassbandgrenzfrequenz Ω_p :	$\pi/2$ rad,	
Sperrbandgrenzfrequenz Ω_s :	$7\pi/8$ rad.	

Entsprechend der oben skizzierten Vorgehensweise müssen nun zunächst die Grenzfrequenzen in die zugehörigen Grenzfrequenzen des analogen Entwurfs umgerechnet werden. Es gilt:

$$\begin{aligned}\Omega'_p = \omega_p &= \tan\left(\frac{\Omega_p}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \Omega'_s = \omega_s &= \tan\left(\frac{7\pi}{16}\right) = 5.02734.\end{aligned}\tag{387.1}$$

Aus Gleichung (200.4) folgt dann für die Ordnung des zu entwerfenden *analogen* Butterworth-Tiefpasses:

$$N \geq \frac{1}{2} \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{\delta_2^2} - 1\right)}{\log_{10}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\log_{10}(99)}{\log_{10}(5.02734)} = 1.4227.\tag{387.2}$$

Somit ist als Filterordnung $N = 2$ zu wählen!

Laut Tabelle C.2 [49], Anhang C folgt nun für die Übertragungsfunktion $\tilde{H}(s)$ des analogen Butterworthfilters im Bildbereich

$$\tilde{H}(s) = \frac{1}{b_1 \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2 + a_1 \left(\frac{s}{\omega_p}\right) + 1},\tag{387.3}$$

wobei die Parameter wie folgt zu wählen sind:

$$b_1 = 1, \quad a_1 = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \omega_p = 1$$

Im vorliegenden Fall erhält man durch Einsetzen der konkreten Parameter:

$$\tilde{H}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}.\tag{387.4}$$

Mit Hilfe einer bilinearen Transformation $\left(s = \frac{z-1}{z+1}\right)$ erhält man nun die gesuchte Z-Übertragungsfunktion des *digitalen* Butterworth-Tiefpasses:

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{(z+1)^2}{(2+\sqrt{2})z^2 + 2 - \sqrt{2}}\tag{387.5}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{(2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})z^{-2}} \\
&= \frac{\frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{2}{2+\sqrt{2}}z^{-1} + \frac{1}{2+\sqrt{2}}z^{-2}}{\underbrace{1}_{b_0} + \underbrace{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}_{b_2}z^{-2}} \\
&= \frac{0.2929 + 0.5858z^{-1} + 0.2929z^{-2}}{1 + 0.17157z^{-2}}.
\end{aligned}$$

Zur Kontrolle vergleiche man dieses Ergebnis mit den Parametern der auf die Durchlassgrenzfrequenz $\Omega_p = \frac{\pi}{2}$ rad normierten Tabelle zum digitalen Butterworth-Filter-Entwurf aus C.3 [45], Anhang C!

Die Implementierung dieses Filters erfolgt nun mit Hilfe einer (*rekursiven*) Differenzengleichung, welche sich aus der Z-Rücktransformation der Übertragungsfunktion aus Gleichung (387.5) ergibt.

Aus (387.5) folgt nämlich für den Zusammenhang der Z-Transformierten $X(z)$ und $Y(z)$ der digitalen Ein- und Ausgangssignale $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned}
Y(z) &= H(z) \cdot X(z) \\
\iff (1 + 0.17157z^{-2}) \cdot Y(z) &= (0.2929 + 0.5858z^{-1} + 0.2929z^{-2}) \cdot X(z).
\end{aligned} \tag{388.1}$$

Damit ergibt die Z-Rücktransformation unter Beachtung der Zeitverschiebungseigenschaft (vgl. Tabelle 4.1, S. 274):

$$y_n = -0.1716y_{n-2} + 0.2929x_n + 0.5858x_{n-1} + 0.2929x_{n-2}. \tag{388.2}$$

In dieser Form wird das digitale Filter implementiert! Dies kann etwa mit Hilfe der MATLAB-Funktion `filter` geschehen. Die folgenden Anweisungen bestimmen beispielsweise die Impulsantwort des gerade entworfenen Filters (vgl. MATLAB-Programm `butterwBsp.m`):

```

% a-Koeffizientenvektor
A = [1/(2+sqrt(2)), 2/(2+sqrt(2)), 1/(2+sqrt(2))];

% B-Koeffizientenvektor
B = [1 0 (2-sqrt(2))/(2+sqrt(2))];

% Impulssignal der Länge N
N = 10;
dn = zeros(1,N); dn(1) = 1;

% Impulsantwort (beachte: die Namensgebung A,B
% der Hilfe zu filter ist gerade anders herum)
impant = filter(A,B,dn);

```

Die Impulsantwort sowie der Amplitudengang des Filters sind in Abbildung 4.38 wiedergegeben.

Gebrauch von Tabellen: Bei der Verwendung von Tabelle C.3 [45], Anhang C beachte man, dass die Tabellen auf $\Omega_p = \frac{\pi}{2}$ rad normiert sind !

Falls also $\Omega_p \neq \frac{\pi}{2}$ rad ist, so ist eine Umrechnung nötig. Man verwende dazu Tabelle C.5 [45] aus Anhang C.

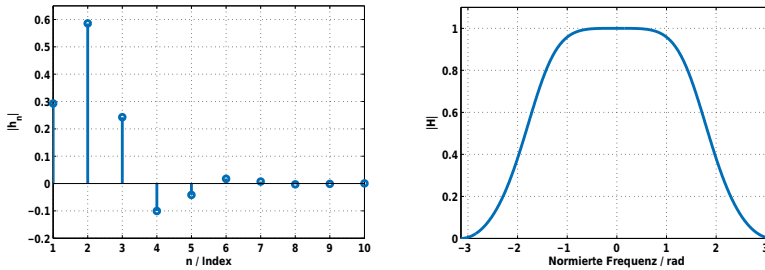


Abb. 4.38: Impulsantwort und Amplitudengang des Butterworth-Filters nach (387.5)

Bilineare Transformation: Die Anwendung der bilinearen Transformation zur Berechnung digitaler Filter aus analogen Entwürfen heraus ist sehr einfach. Es ist lediglich jeder vorkommende Parameter s der Übertragungsfunktion des Analogfilters im Bildbereich durch den Ausdruck $\frac{z-1}{z+1}$ zu ersetzen! Diese Ersetzung wiederum entspricht einer **Transformation** in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, genauer einer Transformation der s -Ebene in die z -Ebene. Diese Transformation entspricht der Zuordnung

$$s \longrightarrow z = \frac{s+1}{1-s}, \quad (389.1)$$

welche man durch einfache Auflösung der Ersetzungsregel $s = \frac{z-1}{z+1}$ nach z erhält.

Von besonderem Interesse ist nun, dass diese Abbildung die Eigenschaft hat, komplexe Zahlen s der **linken komplexen Halbebene** komplexen Zahlen z im Innern **des Einheitskreises** zuzuordnen!

Die Abbildung 4.39 verdeutlicht diese Eigenschaft grafisch.

Diese spezielle Eigenschaft der Bilinearen Transformation hat für den Filterentwurf eine wesentliche Konsequenz.

Laut Kapitel 2 liegen die Pole eines **stabilen** Analogfilters stets **in der linken Halbebene** der s -Ebene. In Kapitel 4, Abschnitt 4.4.3, S. 292ff wird gezeigt, dass **digitale Filter** hingegen genau dann **stabil** sind, wenn die Pole der Z -Übertragungsfunktion **im Innern des Einheitskreises** der z -Ebene liegen.

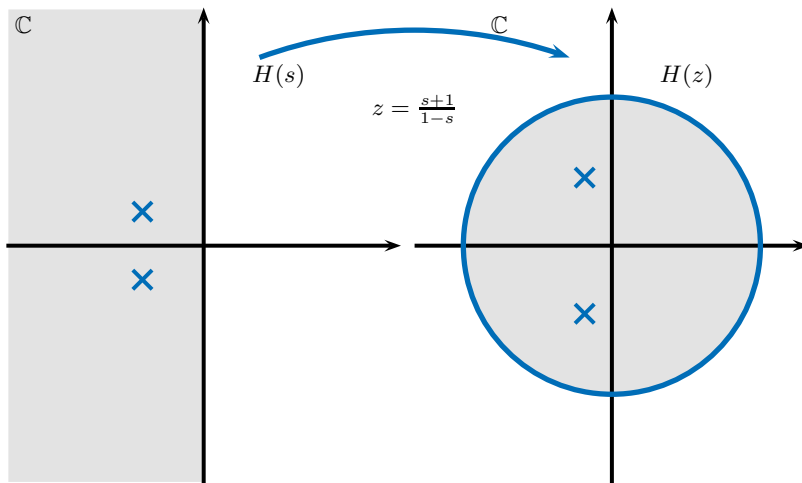


Abb. 4.39: Bilineare Transformation der s - in die z -Ebene

Als Folge dieser Tatsachen erhalten wir das Resultat, dass die Bilineare Transformation *stets stabile Entwürfe in stabile Entwürfe* überführt, was die Anwendung dieser Transformation in der Praxis natürlich besonders angenehm macht, da man dort selbstverständlich nur an stabilen Entwürfen interessiert ist. Nach Anwendung der Bilinearen Transformation sind also keine weiteren Maßnahmen zu treffen, um die Stabilität des entworfenen Filters zu gewährleisten.

Allpässe, Hochpässe und Bandpässe

Es wurde bereits eingangs des Abschnittes erwähnt, dass die anderen Filtertypen durch Kombinationen von Tiefpässen und Allpässen oder über Frequenztransformationen (s. Anhang C) aus Tiefpässen konstruiert werden können.

Übung 119 Wir werden diese Verfahren aus Platzgründen im vorliegenden Buch nicht diskutieren, verweisen den neugierigen Leser allerdings auf die in diesem Zusammenhang interessanten Übungen 119 bis 121.

Übung 121 4.6.3 Filterentwurf mit MATLAB

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir schon Funktionen der MATLAB *Signal Processing Toolbox* für den Entwurf und die Darstellung von Digitalfiltern verwendet.

So ist beispielsweise `firpm` für den Entwurf eines FIR-Filters auf der Grundlage eines Toleranzschemas und des Remez-Exchange-Algorithmus schon verwendet worden.

Daneben gibt es eine Reihe weiterer Funktionen. Neben der schon beim analogen Filterentwurf erwähnten Funktion `butter` zum Entwurf analoger und digitaler Butterworth-Filter sind dies etwa die Funktionen

- cheby1,
- cheby2,
- ellip

zum Entwurf analoger und digitaler Tschebyscheff- und Cauer-Filter. Je nach Parametrierung können diese Funktionen die Filterkoeffizienten, die Pol-Nullstellen-Konfigurationen oder die Zustandsmatrizen zurückliefern.

Alternativ dazu kann die allgemeine Filter-Entwurfs-Funktion `design` mit verschiedenen Optionen zum Entwurf dieser Filter verwendet werden.

Exemplarisch soll mit der Funktion `butter` der Entwurf aus Beispiel 4.44 nachvollzogen werden.

4.45 Beispiel (Digitaler Butterworth-Tiefpass mit MATLAB)

Gemäß Beispiel 4.44 ist für das dort geforderte Toleranzschema eine Filterordnung von $N = 2$ zu wählen. Die oben erwähnten Funktionen benötigen die Parameter⁵⁶ Ordnung und Grenzfrequenz(en) für den Entwurf, d.h. man kann nicht direkt von den Parametern des Toleranzschemas ausgehend entwerfen.

Im vorliegenden Fall erhält man mit den folgenden MATLAB-Anweisungen sofort die schon in Beispiel 4.44 ermittelten Filterkoeffizienten:

```
>> N = 2; % Ordnung
>> Omegag = pi/2; % Grenzfrequenz
>> wg = Omegag/pi; % normalisierte Grenzfrequenz
>> [A,B] = butter(N,wg)

A =

    0.2929    0.5858    0.2929

B =

    1.0000   -0.0000    0.1716
```

Zu beachten ist lediglich, dass die Grenzfrequenz bezogen auf die Nyquist-Bandgrenze, also π , an die Funktion zu übergeben ist.

Neben den Filterkoeffizienten könnten mit Hilfe der nachfolgenden Anweisungen aber auch Nullstellen, Pole und Verstärkungsfaktor bestimmt werden:

⁵⁶ Alternativ dazu kann das Filter auch mit der Funktion `design` entworfen werden. Dieser Funktion muss ein „filter design object“ und der Parameter `'butter'` übergeben werden. Es ist allerdings wesentlich einfacher, die Entwurfsversionen in der hier angegebenen Art zu verwenden.

```
>> [nullst, pole, verst] = butter(N, wg)

nullst =

    -1
    -1

pole =

    0.0000 + 0.4142 i
    0.0000 - 0.4142 i

verst =

    0.2929
```

Zur Kontrolle ermitteln wir diese Parameter analytisch aus der Übertragungsfunktion (387.5).

Für den Zähler von $H(z)$ gilt:

$$A(z) = (z + 1)^2 = (z - (-1)) \cdot (z - (-1)). \quad (392.1)$$

Also ist ganz offensichtlich $z = -1$ eine doppelte Nullstelle.

Für den Nenner von $H(z)$ gilt nach (387.5):

$$B(z) = z^2 + \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}. \quad (392.2)$$

Also sind die Polstellen:

$$z_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 2}{2 + \sqrt{2}}} = \pm j \cdot \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \pm j \cdot 0.4142. \quad (392.3)$$

Ferner folgt aus (387.5) mit $k = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = 0.2929$:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(z + 1)^2}{(2 + \sqrt{2})z^2 + 2 - \sqrt{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \frac{(z + 1)(z + 1)}{z^2 + \frac{\sqrt{2} - 2}{2 + \sqrt{2}}} \\ &= k \frac{(z - n_1)(z - n_1)}{(z - p_1)(z - p_2)}. \end{aligned} \quad (392.4)$$

Mit Hilfe dieser Anweisungen können die Zustandsmatrizen des digitalen Systems errechnet werden:

```
>> [A,B,C,D] = butter(N,wg)
```

```
A =
```

```
    -0.4142    -0.5858
     0.5858     0.4142
```

```
B =
```

```
    0.8284
    0.8284
```

```
C =
```

```
    0.2071    0.5000
```

```
D =
```

```
    0.2929
```

Damit kann dann auch die Z-Übertragungsfunktion aus (387.5) ermittelt werden:

```
>> sys = ss(A,B,C,D,1)
```

```
a =
```

```
           x1      x2
x1  -0.4142  -0.5858
x2   0.5858   0.4142
```

```
b =
```

```
           u1
x1   0.8284
x2   0.8284
```

```
c =
```

```
           x1      x2
y1   0.2071   0.5
```

```
d =
```

```
           u1
y1   0.2929
```

```
Sample time : 1 seconds
```

Discrete-time state-space model.

```
>> H = tf(sys);
>> H = minreal(H)
```

H =

$$\frac{0.2929 z^2 + 0.5858 z + 0.2929}{z^2 - 3.331e-16 z + 0.1716}$$

Sample time: 1 seconds

Discrete-time transfer function.

Natürlich kann die Übertragungsfunktion mit den berechneten Filterkoeffizienten auch ohne den Umweg über die Zustandsraumdarstellung errechnet werden:

```
>> [A,B] = butter(N,wg)
```

A =

$$\begin{matrix} 0.2929 & 0.5858 & 0.2929 \end{matrix}$$

B =

$$\begin{matrix} 1.0000 & -0.0000 & 0.1716 \end{matrix}$$

```
>> H = tf(A,B,1);
>> H = minreal(H)
```

H =

$$\frac{0.2929 z^2 + 0.5858 z + 0.2929}{z^2 - 3.331e-16 z + 0.1716}$$

Sample time: 1 seconds

Discrete-time transfer function.

Eine bequeme Möglichkeit *digitale* Filter zu entwerfen bietet das Filter Design & Analysis Tool *fdatool*.⁵⁷ Dabei handelt es sich um eine grafische

⁵⁷ Der Entwurf von *analogen* Filtern ist damit leider nicht möglich.

Schnittstelle (GUI), welche einen experimentellen Entwurf der Filter ermöglicht.

Bei Aufruf von

```
>> fdatool
```

erhält man das in Abbildung 4.40 dargestellte GUI.

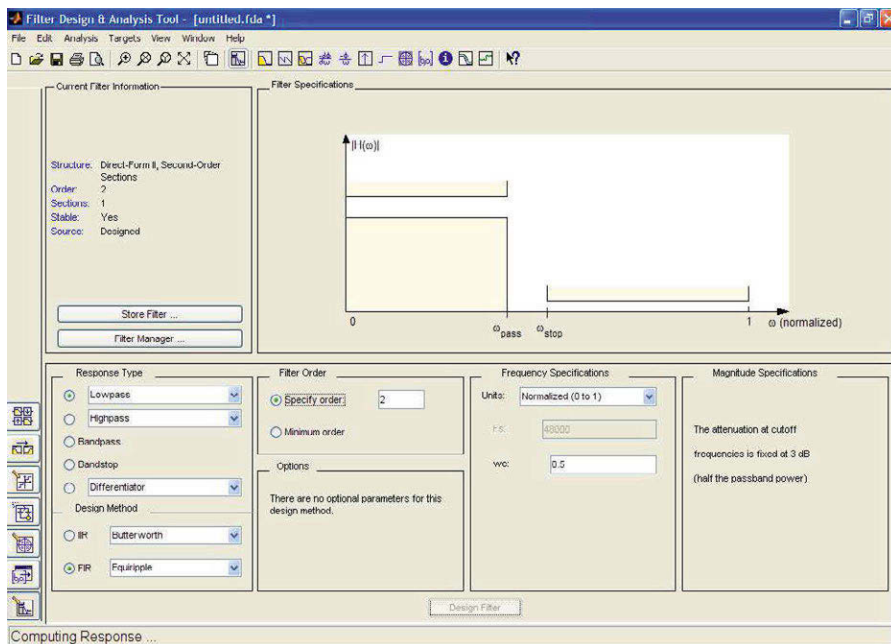


Abb. 4.40: Das MATLAB-GUI fdatool

Es zeigt die Oberfläche mit den Parametern für den Entwurf des Butterworth-Filters der Ordnung 2 aus Beispiel 4.44.

Mit einfachen Klicks können alle möglichen Informationen über das entworfene Filter, wie Übertragungscharakteristik, Filterkoeffizienten, Pol-/Nullstellen-Diagramme etc. ermittelt werden. Die Filterdaten können nach MATLAB exportiert und es können sogar Simulink-Modelle generiert werden. Wir überlassen die Erforschung der weiteren Möglichkeiten dieses universellen Werkzeugs dem interessierten Leser.

4.6.4 Übungsaufgaben

Übung 119 (Lösungsband Seite 274)

Untersuchen Sie, welche Impulsantwort ein digitaler Allpass mit der folgenden rein reellen Übertragungsfunktion hat:

$$H(\Omega) = \text{rect}_{2\pi}(\Omega + \pi). \quad (396.1)$$

Übung 120 (Lösungsband Seite 275)

Entwerfen Sie mit Hilfe zweier FIR-Tiefpässe gemäß (378.1) einen FIR-Bandpass mit den Grenzfrequenzen

$$\Omega_2 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}, \quad \Omega_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad (396.2)$$

und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit MATLAB (Funktion `freqz`).

Übung 121 (Lösungsband Seite 277)

Entwerfen Sie mit Hilfe eines FIR-Tiefpasses gemäß (378.1) und mit Hilfe eines Allpasses gemäß Übung 119 einen FIR-Hochpass mit der Grenzfrequenz

$$\Omega_g = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad (396.3)$$

und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit MATLAB (Funktion `freqz`).

Übung 122 (Lösungsband Seite 278)

Begründen Sie (mit Hilfe der Z-Transformation) warum FIR-Filter stets *stabile* Filter sind.

Geben Sie ein Beispiel für ein *instabiles* IIR-Filter an!

Übung 123 (Lösungsband Seite 279)

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(\Omega)$ des Differenzenquotienten:

$$y_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{T}. \quad (396.4)$$

Plotten Sie Die Übertragungscharakteristik mit Hilfe von MATLAB. Was stellen Sie fest?

Übung 124 (Lösungsband Seite 281)

Betrachten Sie die aus den numerischen Integrationsformeln Trapez- und Simpsonregel abgeleiteten rekursiven Filter

$$y_n = y_{n-1} + \frac{T_a}{2} (x_n + x_{n-1}) \quad (396.5)$$

und

$$y_n = y_{n-2} + \frac{T_a}{3} (x_n + 4x_{n-1} + x_{n-2}). \quad (396.6)$$

- (a) Bestimmen Sie die Z-Transformierten der Filter und skizzieren Sie jeweils ein Pol-Nullstellen-Diagramm.
Was ist über die Stabilität der Filter zu sagen ?
- (b) Berechnen Sie die Frequenz-Übertragungsfunktionen der Filter und skizzieren Sie (unter Verwendung von MATLAB) den Amplitudengang der Filter.
- (c) Berechnen Sie (unter Verwendung von MATLAB) die ersten 10 Werte der Impulsantwort.
- (d) Erläutern Sie, warum das aus der Trapezregel abgeleitete Filter für höhere Frequenzen Tiefpasseigenschaften hat, das Simpson-Filter aber nicht.
Geben Sie ein konkretes Beispiel an, das diesen Effekt erläutert.

Übung 125 (Lösungsband Seite 286)

Betrachten Sie die durch folgende Impulsantworten definierten FIR-Filter:

$$g_n = \begin{cases} -1, 2, -1 & \text{für } n = -1, 0, 1, \\ 0 & n \text{ sonst,} \end{cases} \quad (397.1)$$

$$h_n = \begin{cases} -1, 0, 2, -1 & \text{für } n = -1, 0, 1, 2, \\ 0 & n \text{ sonst.} \end{cases}$$

- (a) Formulieren Sie das zeitliche Übertragungsverhalten der kausalen Versionen dieser Filter (d.h. geben Sie den Ausgang y_n in Abhängigkeit vom Eingang und der Impulsantwort an).
- (b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen der kausalen Filter im Frequenzbereich und skizzieren Sie (unter Verwendung von MATLAB) deren Amplituden- und Phasengang.
Welches qualitative Übertragungsverhalten ergibt sich daraus (Hoch-, Tief-, Bandpass, Bandsperre)?
- (c) Bestimmen Sie (ggf. mit Hilfe von MATLAB) die Gruppenlaufzeiten der Filter.
Welches Filter hat konstante Gruppenlaufzeit?

Übung 126 (Lösungsband Seite 289)

Entwerfen Sie mit Hilfe der Tabelle C.3 [45] aus Anhang C für digitale Butterworth-Tiefpass-Prototypen einen digitalen Butterworth-Tiefpass, der folgendem Toleranzschema genügt:

Toleranz im Durchlassbereich:	-3 dB,
Toleranz im Sperrbereich:	-30 dB,
Durchlassbandgrenzfrequenz:	$\pi/6$ rad,
Sperrbandgrenzfrequenz:	$3\pi/4$ rad.

Testen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe von Simulink oder plotten Sie das Übertragungsverhalten Ihres berechneten Filters mit geeigneten MATLAB-Funktionen.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Tabellen für die Filterkoeffizienten auf eine Durchlassgrenze von $\pi/2$ rad normiert sind!

Übung 127 (Lösungsband Seite 293)

Entwerfen Sie den digitalen Butterworth-Tiefpass aus Übung 126 mit Hilfe der MATLAB-Funktion `butter`.

Testen Sie anschließend Ihr Ergebnis mit Simulink.

Übung 128 (Lösungsband Seite 294)

Entwerfen Sie den digitalen Butterworth-Tiefpass aus Übung 126 mit Hilfe des Filter Design& Analysis Tools `fdatool`.

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den Ergebnissen aus Übung 126 und 127.

5 LTI-Systeme und Stochastische Signale

In den Kapiteln 2 bis 4 wurden wesentliche theoretische und praktische Grundlagen für die Beschreibung von Signalen und (linearen zeitinvarianten) Systemen entwickelt. Von zentraler Bedeutung waren dabei die unterschiedlichen Transformationen, welche eine Analyse und Bewertung der Eigenschaften von Signalen und Systemen erst möglich machten, wie etwa die Laplace- und Z-Transformation und insbesondere die verschiedenen Fourier-Transformationen.

Gerade die Betrachtung im Frequenzbereich gestattet Einblicke in die Natur von Signalen und LTI-Systemen, die im Zeitbereich nicht gewonnen werden können. Der Begriff des *Spektrums* - und bei Systemen der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich - ist daher sowohl in der theoretischen als auch in der praktischen Behandlung von Signalen und LTI-Systemen fundamental.

Basis sämtlicher Überlegungen in Kapitel 2 bis 4 waren jedoch immer *deterministische* Signale, da sich theoretische Ergebnisse natürlich besser gewinnen lassen, wenn Signale und Systeme mit Hilfe konkreter mathematischer Festlegungen, d.h. mit geschlossenen Funktionsvorschriften, beschrieben werden können. Auf der anderen Seite zeigen die Beispiele in Kapitel 1 jedoch, dass deterministische Signale in der Praxis äußerst selten vorkommen und quasi alle *gemessenen Signale* zumindest mit stochastischen Anteilen behaftet, wenn nicht gar völlig *zufällig* sind.

So stellt sich die Frage, inwieweit die in Kapitel 2 bis 4 entwickelten Methoden im Falle *stochastischer Signale* überhaupt sinnvoll eingesetzt werden können. Speziell muss die Frage geklärt werden, ob die zentralen Begriffe des

- *Spektrums* eines Signals und der
- *Übertragungsfunktion* eines LTI-Systems

auf das Umfeld der Verarbeitung stochastischer Signale übertragen werden können.

Im vorliegenden Kapitel werden die grundlegenden Methoden zur Analyse und Verarbeitung *stochastischer Signale* dargestellt. Es werden die für die Behandlung stochastischer (zufälliger, regelloser) Signale wesentlichen Begriffe *Stochastischer Prozess*, *Korrelation* und *Leistungsdichtespektrum* definiert und diskutiert.

Das Kapitel endet mit der Behandlung einiger Beispiele, an denen gezeigt wird wie die neuen Methoden in der Praxis angewandt werden können.

5.1 Stochastische Signale

Wie bereits erwähnt, sind Signale in der Praxis alles andere als deterministisch. Praktisch alle gemessenen Signale haben aus physikalischen Gründen unvorhersagbare, d.h. zufällige Anteile. Oft sind diese zufälligen Anteile auch nicht vernachlässigbar, wie etwa im Satellitenempfang, wo das („deterministische“) Nutzsignal oft sehr viel schwächer ist als das überlagerte Rauschsignal (vgl. Abbildung 1.10, S. 11). Hier ist es dann die Aufgabe intelligenter Signalverarbeitungsalgorithmen, das Nutzsignal aus diesem Signalgemisch wieder herauszufiltern.

Für die folgenden Anwendungsbereiche, in denen naturgemäß stochastische Signale gemessen werden, wurden bereits in Kapitel 1 Beispiele vorgestellt:

- Sprachsignale,
- Signale von Beschleunigungssensoren,
- Geräuschemessungen,
- Thermisches Rauschen (das klassische Beispiel),
- Fahrzeuggeschwindigkeitsmessungen.

Das Ziel der Signalverarbeitung solcher Signale ist es, trotz der scheinbar völligen Regellosigkeit der gemessenen Informationen sinnvolle Aussagen über die Eigenschaften der Signale und der sie verarbeitenden Systeme zu machen.

So sucht man nach Methoden für:

- die Schätzung von (deterministischen!) Signal- und Systemparametern (Signal- und System*identifikation*),
- die Rückgewinnung von Nutzsignalen in gestörten Umgebungen (Filterung),
- die Vorhersage von Signaleigenschaften.

Um Aussagen über stochastische Signale machen zu können, werden wir Begriffe aus der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* einbeziehen, auf deren Darstellung wir an dieser Stelle jedoch aus Platzgründen verzichten müssen. Wir verweisen hierfür auf die einschlägige Literatur (z.B. [2, 7]) zu diesem Thema.

5.1.1 Der Begriff des stochastischen Prozesses

Da ein einzelnes stochastisches Signal $x(t)$ nach Definition (vgl. S. 18) zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ einen *zufälligen* Wert annimmt, sind zunächst prinzipiell auch die dem Signal entnehmbaren Informationsparameter zufällig. Könnte das Fourier-Spektrum $X(j\omega)$ berechnet werden, so wäre dies prinzipiell ebenso zufällig wie das Zeitsignal selbst. Zwar stellt sich dieses Problem im zeitkontinuierlichen Fall nicht, da ja keine Funktionsvorschrift von $x(t)$

vorliegt¹, die in das Fourier-Integral eingesetzt werden könnte, jedoch ist diese Tatsache für *diskretisierte* stochastische Signale durchaus relevant, da die *DFT* nur auf endlich vielen Zahlenwerten beruht und unabhängig von der Frage berechnet werden kann, ob diese von einem deterministischen oder einem zufälligen Signal stammen.

Auf der anderen Seite zeigen praktische Erfahrungen mit Zufallssignalen, dass offensichtlich graduelle Unterschiede bezüglich der „Zufälligkeit“ von Signalen bestehen.

5.1 Beispiel (Fahrbahnunebenheitssignale)

Diese Beobachtung macht beispielsweise jeder Autofahrer, der zunächst über eine Autobahn und anschließend über einen Feldweg oder über ein Kopfsteinpflaster fährt. Beide Straßenbeläge verursachen bei der Überfahrt *vertikale* Auslenkungen des Fahrzeugaufbaus (vgl. Beispiel 1.1, S. 1), die zu Schwingungen und mehr oder weniger „angenehmen“ Gefühlen beim Fahren führen. Im Allgemeinen ist das Überfahren einer Autobahn wesentlich angenehmer als das Überfahren eines Kopfsteinpflasters. Obwohl also die vertikalen Anregungen in beiden Fällen zufällig sind und sogar schon jede Fahrt auf dem *gleichen* Belag differiert, scheint es doch signifikante Merkmale der Signale zu geben, die eine subjektive Unterscheidung zwischen den Straßenbelägen erlauben. ■

5.2 Beispiel (Rauschspannungssignale)

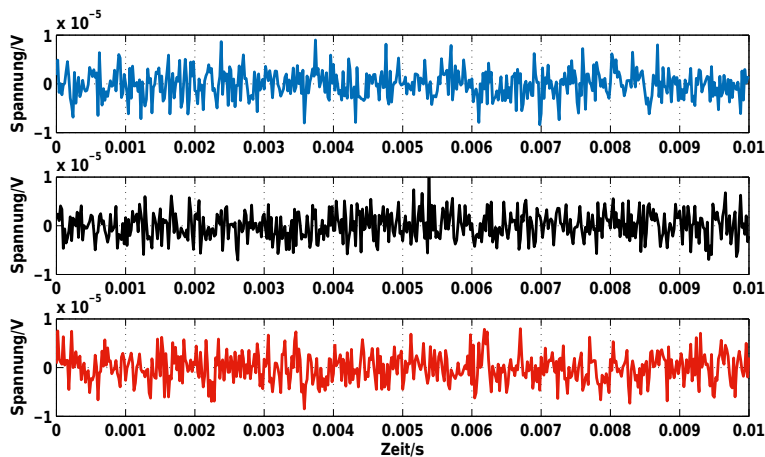
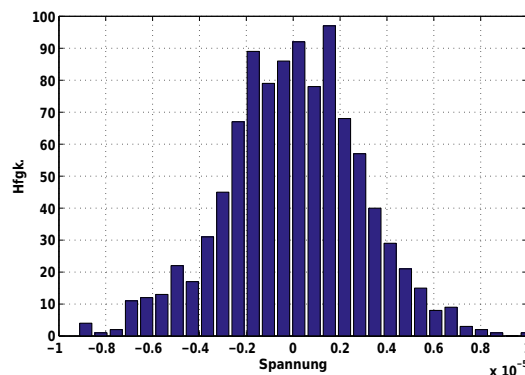
Ähnliche Beobachtungen können auch in einem Elektronik-Labor gemacht werden. So kann man messen, dass die Spannung an den Klemmen eines „offenen“ Widerstandes nie ganz 0 V beträgt, sondern zufällig kleine Werte um 0 V herum annimmt. Nähere Betrachtungen zeigen, dass die durchschnittlichen Abweichungen dieser Spannungsamplituden u.a. vom Widerstandswert und von der Umgebungstemperatur, also von *deterministischen* Parametern abhängen.

Abbildung 5.1 zeigt Ausschnitte mehrerer Messungen von 10 k Ω Widerständen.

Die einzelnen Spannungswertverläufe sind scheinbar völlig regellos. Betrachtet man jedoch die Spannungswerte mehrerer gleichartiger Widerstände zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 , so stellt man fest, dass diese Werte einer gewissen statistischen Verteilung gehorchen, deren Parameter, etwa *Erwartungswert* und *Streuung*, wiederum wohlbestimmten physikalischen Parametern zugeordnet werden können.

Abbildung 5.2 zeigt beispielhaft die Amplitudenverteilungen von 1000 Messungen von Rauschspannungen an 10 k Ω -Widerständen zur Zeit $t = 0.005$ s.

¹ In dem Fall wäre ja das Signal deterministisch!

Abb. 5.1: Rauschspannungen an $10\text{ k}\Omega$ -WiderständenAbb. 5.2: Amplitudenverteilungen von 1000 Messungen von Rauschspannungen an $10\text{ k}\Omega$ -Widerständen zur Zeit $t = 0.005\text{ s}$

Offenbar sind die Spannungen „im Mittel“ 0, was der physikalischen Erwartung entspricht, und streuen in einem gewissen Rahmen um diesen Wert herum, der der so genannten *effektiven Rauschspannung* entspricht, einer Art mittlerer Spannungsamplitude. Dieser Wert wiederum hängt, wie bereits erwähnt, u.a. vom Widerstandswert und der Außentemperatur ab, also *deterministischen* Parametern des hinter der Rauschspannung stehenden Prozesses. ■

Im Allgemeinen kann, wie wir an den beiden diskutierten Beispielen gesehen haben, keine Aussage über ein einzelnes stochastisches Signal gemacht

werden, sondern *nur über eine ganze Schar gleichartiger Signale*, die dem *gleichen Erzeugungsmechanismus* unterliegen.

Diese Erkenntnisse legen nahe, statt einzelner Signale Signalklassen mit gemeinsamen *nicht zufälligen Kennwerten* zu definieren. Der zentrale Begriff in diesem Zusammenhang ist der des **stochastischen Prozesses**!

Man geht dabei von der Idee aus, dass ein *physikalischer Prozess Signale erzeugt*, die zwar als Einzelsignale regellos sind, aber trotzdem feste statistische Kenngrößen haben. Das klassische Beispiel, das thermische Rauschen, haben wir bereits im Vorfeld diskutiert. Hier ist zwar die durch die regellose (Brown'sche) Bewegung der Elektronen verursachte Rauschspannung, die zu einem Zeitpunkt t_0 gemessen wird, nicht vorhersagbar, wohl aber kann man durch Beobachtung an mehreren gleichartigen Bauelementen² feststellen, dass diese Spannung im Mittel 0 ist und eine gewisse Streuung hat (man kann konkret für die Spannungsamplituden eine Gauß'sche Verteilung nachweisen). Man beobachtet also zu jedem Zeitpunkt eine *Zufallsvariable* mit festen statistischen Parametern.

Wir betrachten daher gemessene stochastische Signale lediglich als Ausprägung oder **Musterfunktion** einer Zeitfunktion von Zufallsvariablen, einem so genannten **stochastischen Prozess**.

Letztendlich bedeutet dies, dass man kein einzelnes Zeitsignal mehr betrachtet, sondern ein Zeitsignal von Zufallsvariablen:

Eine Funktion (ein „Signal“)

$$t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto X_t, \quad (403.1)$$

wobei für jedes t die Größe X_t eine *Zufallsvariable* ist, heißt **stochastischer Prozess**.

Für zeitkontinuierliche Musterfunktionen (Signale) wird dabei i.Allg. $I = \mathbb{R}$ gewählt, d.h. das Signal wird über die ganze Zeitachse betrachtet. In diesem Fall sprechen wir von einem *zeitkontinuierlichen Prozess*.

Beschreibt der Prozess diskrete Musterfunktionen, so definiert man $I = \mathbb{Z}$. Es liegt dann ein *zeitdiskreter Prozess* vor.

Ein stochastischer Prozess wird also als eine (zeit-)indizierte Familie

$$(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$$

bzw. im diskreten Fall als Folge

$$(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

von Zufallsvariablen betrachtet. Für Zufallsvariablen werden im Folgenden zur Unterscheidung von Musterfunktionen (also Zeitsignalen) eines Prozesses stets Großbuchstaben verwendet.

² Man vergleiche dazu die Abbildung 5.1.

5.1.2 Stationäre stochastische Prozesse

Praktikabel wird der Begriff des stochastischen Prozesses erst, wenn wir sinnvolle Annahmen über den Prozess und die Verteilungen der Zufallsvariablen treffen.

Die wohl wichtigste Klasse ist die der *stationären stochastischen Prozesse*, bei denen man in einem gewissen Sinne annimmt, dass sich die statistischen Eigenschaften der Zufallsvariablen über die Zeit nicht ändern.

Das klassische Beispiel für einen solchen Prozess ist wiederum das schon angesprochene thermische Rauschen. Aber auch viele andere Zufallsprozesse, wie etwa der Prozess der vertikalen Anregung eines Fahrzeugaufbaus beim Überfahren einer Fahrbahn, lassen sich in dieser Klasse (zumindest über kurze Beobachtungszeiträume) einordnen:

Ein stochastischer Prozess heißt **(im strengen Sinne) stationär**, wenn für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ (interpretiert als „Zeitverschiebung“) die zweidimensionalen Verteilungsfunktionen

$$F_{X_t, X_{t+\tau}}(x, y) = P(X_t \leq x, X_{t+\tau} \leq y) \quad (404.1)$$

(und alle mehrdimensionalen Verteilungsfunktionen) **von t unabhängig** sind.

Die Verbundverteilungen³ $F_{X_t, X_{t+\tau}}(x, y)$ geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Prozess zu einem Zeitpunkt t Werte $\leq x$ annimmt und *zugleich* τ Zeiteinheiten später Werte $\leq y$. Mit diesen Verbundverteilungen kann also im Sinne einer Wahrscheinlichkeitsaussage bestimmt werden, was zu einer Zeit t und τ Zeiteinheiten später passiert. Ist ein Prozess *stationär*, so bedeutet dies, dass der Zusammenhang zwischen dem Zeitpunkt t und dem Zeitpunkt $t + \tau$ **nicht vom Zeitpunkt t** abhängt, sondern für alle Zeiten lediglich vom **Zeitabstand** τ der beiden Ereignisse.

Die Abbildung 5.3 illustriert die grundlegende Idee hinter dem Begriff der Stationarität am Beispiel der schon angesprochenen Fahrbahnrauigkeit.

Für eine „glatte“ Fahrbahn, wie etwa eine Autobahn, ist der statistische Zusammenhang der von der Fahrbahn verursachten vertikalen Auslenkungen A zwischen zwei voneinander um die Entfernung τ auseinander liegenden Punkten offenbar stärker als bei einer rauen Fahrbahn (Feldweg, Kopfsteinpflaster).

Geht man davon aus, dass sich die Fahrbahneigenschaften über die Distanz nicht (wesentlich) ändern, so kann man annehmen, dass der statistische Zusammenhang für einen Abstand τ in beiden Fällen annähernd gleich bleibt,

³ Mit P wird dabei die Wahrscheinlichkeit des innerhalb der Klammer dargestellten Ereignisses bezeichnet.

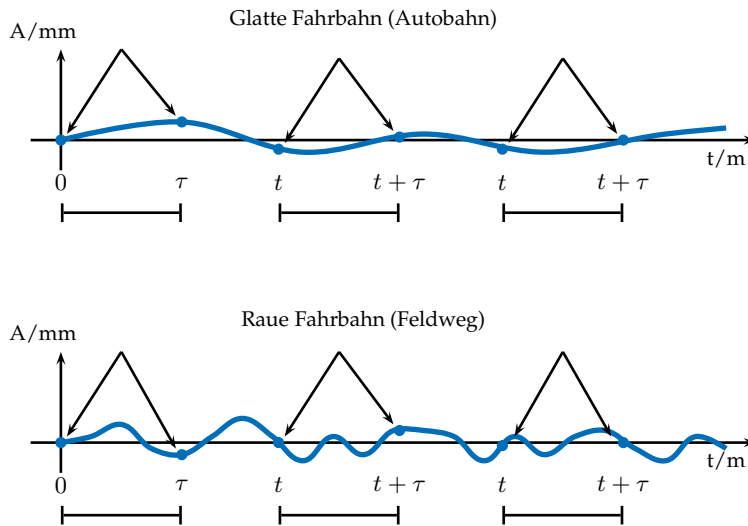


Abb. 5.3: Idee des Stationaritätsbegriffs am Beispiel der Fahrbahnrauigkeit

gleich wo die Ausschläge auf der jeweiligen Fahrbahn gemessen werden. Man kann somit die vertikalen Ausschläge in beiden Fällen als **stationären** Prozess modellieren. Die Prozesse unterscheiden sich durch ihre Verbundverteilungen $F_{X_t, X_{t+\tau}}(x, y)$.

Allerdings bleibt die Behandlung stochastischer Prozesse auch im Falle der Stationarität noch kompliziert, da eben die Kenntnis aller dieser Verbundverteilungen in Abhängigkeit von τ notwendig ist.

Man kann diese Bedingung etwas abschwächen, wenn man sich mit der Kenntnis einiger **statistischer Kennwerte** begnügt:

Ein (zeitkontinuierlicher) stochastischer Prozess heißt im **weiteren Sinne stationär**, wenn die statistischen Merkmale

$$\mathbb{E}(X_t) = \mu, \quad (405.1)$$

$$\mathbb{V}(X_t) = \sigma^2, \quad (405.2)$$

$$r_{XX}(\tau) := \mathbb{E}(X_t \cdot X_{t+\tau}), \quad \tau \in \mathbb{R} \quad (405.3)$$

von t unabhängig sind (d.h. über die Zeit konstant bleiben).

Diese Definitionen können natürlich analog für zeitdiskrete Prozesse $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ formuliert werden:

Ein zeitdiskreter stochastischer Prozess heißt im **weiteren Sinne stationär**, wenn die statistischen Merkmale

$$\mathbb{E}(X_n) = \mu, \quad (406.1)$$

$$\mathbb{V}(X_n) = \sigma^2, \quad (406.2)$$

$$r_{XX}(k) := \mathbb{E}(X_n \cdot X_{n+k}), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (406.3)$$

von n unabhängig sind (d.h. über die (diskrete) Zeit konstant bleiben).

Übung 138 Der Funktion $r_{XX}(\tau)$ (bzw. im diskreten Fall der Folge $(r_{XX}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$) kommt dabei eine besondere Bedeutung zu, denn über sie lässt sich, wie wir bald sehen werden, der „spektrale Inhalt“ eines Prozesses definieren:

Übung 139

Übung 140

Die Funktion $r_{XX}(\tau)$ heißt die **Autokorrelationsfunktion** des zeitkontinuierlichen stationären Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Die Folge $r_{XX}(k)$ heißt die **Autokorrelationsfolge** des diskreten stationären Prozesses $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Für einen stationären Prozess sind also alle statistischen Merkmale zeitunabhängig. Ein (im weiteren Sinne) stationärer Prozess und damit eine ganze Klasse gleichartiger Zufallssignale kann nach Definition durch die Parameter μ, σ und die Autokorrelationsfunktion $r_{XX}(\tau)$ vollständig charakterisiert werden. Diese sind aber **nicht zufällige**, sondern **deterministische** Größen!

Man kann also für eine Musterfunktion eines im weiteren Sinne stationären Prozesses nach wie vor keine Voraussage über die momentanen Amplituden des Signals machen, aber man kann zumindest sagen, dass diese im Mittel μ betragen und im quadratischen Mittel σ^2 von diesem Mittelwert abweichen! Es ist anschaulich klar, dass diese Annahme für die beiden eingangs diskutierten Prozesse **Fahrbahn** und **thermisches Rauschen** getroffen werden kann. Ist die Fahrbahn eben (was wir bei einer Versuchsstrecke annehmen können), so sollten die vertikalen Ausschläge an einer bestimmten Stelle (t) um einen Mittelwert herum schwanken und dieser Mittelwert sollte bei einer ebenen Strecke an allen Stellen gleich (0) sein. Die Heftigkeit der Ausschläge (gemessen mit der Varianz σ_t^2) sollte an jeder Stelle gleich sein, denn andernfalls würden wir veränderliche Fahrbahneigenschaften haben. Für das

thermische Rauschen haben wir Erwartungswert und Varianz bereits in den obigen Überlegungen interpretiert.

Autokorrelationsfunktion

Die Autokorrelationsfunktion $r_{XX}(\tau)$ bedarf einer besonderen Betrachtung, da ihr in der folgenden Diskussion eine herausragende Rolle zukommt.

Die Autokorrelationsfunktion beschreibt offenbar einen **Zusammenhang** zwischen den Werten eines Prozesses X_t zur Zeit t und τ Zeiteinheiten später (vgl. Abbildung 5.3). Da dieser Wert bei einem im weiteren Sinne stationären Prozess von t unabhängig sein soll, beschreibt $r_{XX}(\tau)$ einen Zusammenhang zwischen X_t und einer **zeitlich um τ verschobenen Version** $X_{t+\tau}$ des Prozesses.

Ein natürliches Maß für diesen Zusammenhang oder, anders gesagt, für die **Ähnlichkeit** der beiden Versionen wäre zunächst der mittlere quadratische Abstand, also:

$$\mathbb{E}((X_t - X_{t+\tau})^2). \quad (407.1)$$

Mit Hilfe der Rechenregeln für den Erwartungswert [2] lässt sich nun Folgendes zeigen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_t - X_{t+\tau})^2) &= \mathbb{E}(X_t^2 + X_{t+\tau}^2 - 2X_t \cdot X_{t+\tau}) \\ &= \mathbb{E}(X_t^2) + \mathbb{E}(X_{t+\tau}^2) - 2 \cdot \mathbb{E}(X_t \cdot X_{t+\tau}) \\ &= \mathbb{E}(X_t^2) + \mathbb{E}(X_{t+\tau}^2) - 2 \cdot r_{XX}(\tau). \end{aligned} \quad (407.2)$$

Da $\mathbb{E}(X_t^2)$ und $\mathbb{E}(X_{t+\tau}^2)$ stets positiv sein müssen, wird der mittlere quadratische Abstand **umso kleiner, je größer** $r_{XX}(\tau)$ ist.

Die Autokorrelationsfunktion $r_{XX}(\tau)$ **misst** also **im Mittel** den statistischen Zusammenhang oder die **Ähnlichkeit der Werte**, die Musterfunktionen (Realisierungen) des Prozesses zu irgend einer Zeit t und τ Zeitpunkte später haben. Sie macht damit Aussagen über den **„inneren Zusammenhang“, den Musterfunktionen** stationärer stochastischer Prozesse im Mittel **haben**. Insbesondere ist zu erwarten, dass auch verborgene periodische Anteile (also **Spektralinformationen**) damit gemessen werden können. Betrachten wir zur Illustration das Beispiel der Überfahrt über eine Fahrbahn noch einmal genauer:

5.3 Beispiel (Fahrbahnunebenheitssignale)

Messungen haben ergeben [25], dass sich die (mittelwertfreie⁴) Autokorrelationsfunktion von Profilmessungen unebener Straßen durch Funktionen ähnlich der in Abbildung 5.4 modellieren lässt.

⁴ D.h. es gilt $\mathbb{E}(X_t) = 0$.

Übung 129

Übung 130

Übung 131

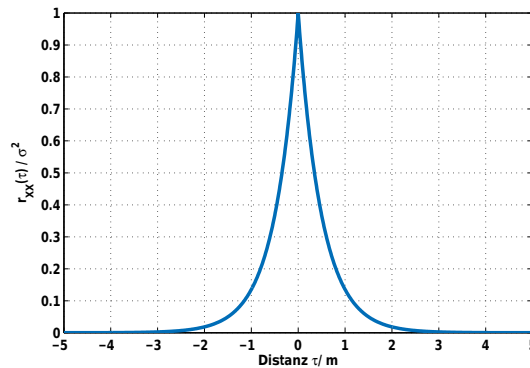


Abb. 5.4: Autokorrelationsfunktion eines Fahrbahnunebenheitsprozesses

Dabei handelt es sich also um die typische Selbstähnlichkeit derjenigen Signale, die als vertikale Auslenkung eines Fahrzeugs bei der Fahrt über eine **Straßenklasse** (!) gemessen werden können. Die vertikalen Auslenkungen zeigen – so kann die Grafik interpretiert werden – im Mittel ein sehr ähnliches Verhalten, wenn die Distanz der Messpunkte einen halben Meter und weniger beträgt. Misst man dagegen in ca. 3 Meter und größerer Entfernung, so zeigen die Auslenkungen praktisch keinerlei Zusammenhang mehr. Eventuelle periodische Schwankungen der Fahrbahnoberfläche müssen also deutlich kürzer als 3 Meter sein. ■

Auch für die schon diskutierten Rauschspannungen an einem Widerstand liefert die Korrelationsfunktion interessante Rückschlüsse.

5.4 Beispiel (Rauschspannungssignale)

In Abbildung 5.5 ist die (idealisierte) Autokorrelationsfunktion eines solchen Rauschprozesses dargestellt.

Man erkennt, dass die Werte der Korrelationsfunktion schon nach recht kurzer Zeit gegen 0 abfallen. Nur bei sehr kurz aufeinander folgenden Zeitpunkten kann also ein (statistischer) Zusammenhang zwischen den gemessenen Rauschspannungswerten hergestellt werden. Danach haben die Signalwerte praktisch nichts mehr miteinander zu tun. Ein solches Signal ist extrem regellos, da so gut wie keine inneren Zusammenhänge bestehen (vgl. dazu auch die Zeitsignale in Abbildung 5.1). Die Elektronenbewegung im Widerstand führt offenbar sehr schnell zu nicht mehr zueinander in Beziehung stehenden Potentialunterschieden. ■

Die Beispiele zeigen, dass durch die eingeführten Größen durchaus sinnvolle Informationen aus stochastischen Signalen gewonnen werden können. Dabei ist die zentrale Idee, nicht ein einzelnes Signal zu betrachten (dieses ist

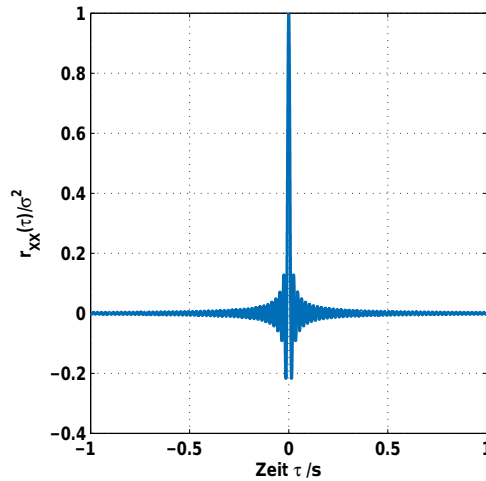


Abb. 5.5: (idealisierte) Autokorrelationsfunktion eines Widerstands-Rauschprozesses

zufällig!), sondern vielmehr in einem gewissen Sinne *alle* Signale und somit den *Erzeugungsmechanismus* des Prozesses zu untersuchen und über *diesen* Informationen zu gewinnen.

Kreuzkorrelationsfunktion

Ersetzt man in den obigen Definitionen $X_{t+\tau}$ durch einen von X_t verschiedenen Prozess Y_t , so erhält man den statistischen Zusammenhang zwischen diesen beiden Prozessen. Man spricht von der *Kreuzkorrelation* der Prozesse.

Diese Kenngröße ist insbesondere interessant für den Vergleich von Ein- und Ausgangssignalen eines LTI-Systems. Wir werden hierauf später noch einmal zurückkommen.

5.1.3 Ergodische stochastische Prozesse

Ein wesentliches Problem bei der Definition (stationärer) stochastischer Prozesse ist die Tatsache, dass zur Ermittlung der statistischen Parameter des Prozesses prinzipiell sehr viele⁵ Beobachtungen von Musterfunktionen notwendig wären (etwa zur Schätzung des Erwartungswertes des Prozesses zur Zeit t mittels Mittelwertbildung).

Oft stehen diese aber gar nicht zur Verfügung. Ebenso wenig steht die genaue Beschreibung der zweidimensionalen Verteilungsdichten zur Verfügung.

⁵ Genau betrachtet eigentlich unendlich viele!

Dies ist die schlechte Nachricht. Die gute Nachricht ist, dass man dieses Wissen in den meisten Fällen nicht benötigt.

Ist nämlich bekannt, dass der physikalische Erzeugungsmechanismus für alle Realisierungen des Prozesses der gleiche ist, was in sehr vielen Fällen angenommen werden kann, so kann man die Kennwerte des Prozesses (die so genannten **Scharkennwerte**) aus entsprechenden **Zeitkennwerten** ermitteln. Solche Prozesse heißen **ergodisch**, und in vielen Fällen wird angenommen, dass ein stochastisches Signal (zumindest näherungsweise über den Beobachtungszeitraum hinweg) stationär **und ergodisch** ist:

Übung 138

Übung 139

Übung 140

Ein im weiteren Sinne stationärer, zeitkontinuierlicher stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ heißt **ergodisch (im weiteren Sinne)**, wenn für alle Musterfunktionen $x(t)$ des Prozesses gilt:

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X) = \bar{x} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt, \quad (410.1)$$

$$\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(X) = \bar{\sigma}_x^2 := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - \bar{x})^2 dt, \quad (410.2)$$

$$r_{XX}(\tau) = \bar{r}_{xx}(\tau) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt. \quad (410.3)$$

Natürlich kann der Begriff der Ergodizität (fast) gleichlautend auch für diskrete Prozesse formuliert werden:

Ein im weiteren Sinne stationärer, zeitdiskreter stochastischer Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ heißt **ergodisch (im weiteren Sinne)**, wenn für alle Musterfunktionen x_n des Prozesses gilt:

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X) = \bar{x} := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n, \quad (410.4)$$

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(X) = \bar{\sigma}_x^2 := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N (x_n - \bar{x})^2, \quad (410.5)$$

$$r_{XX}(k) = \bar{r}_{xx}(k) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n+k}. \quad (410.6)$$

Ist ein stationärer Prozess also zusätzlich *ergodisch*, so entspricht der eigentlich zu ermittelnde Scharmittelwert ungefähr dem (immer gleichen) **Zeitmittelwert einer Musterfunktion**, wenn nur die Mittelungszeit (Beobachtungszeit T bzw. N) der Musterfunktion lang genug gehalten werden kann. Ähnliches gilt für die Scharvarianz und die Autokorrelation.

Dass die Annahme der Ergodizität oft gerechtfertigt ist, kann man sich wieder an den uns bislang begleitenden Beispielen klar machen.

5.5 Beispiel (Ergodizität des Widerstandsrauschens)

Der stationäre Prozess des *thermischen Rauschens* kann sicherlich als ergodisch betrachtet werden. Statt viele Rauschspannungen an gleichartigen Widerständen parallel zu messen, kann ersatzweise *ein* Widerstand über die gleiche Messzeit *nacheinander* vermessen werden. Ändern sich die äußeren Bedingungen (z.B. Temperatur) nicht, so sind die physikalischen Voraussetzungen für den Prozess der Elektronenbewegung, welcher die als Spannung messbaren Potentialunterschiede hervorruft, immer gleich. Viele parallele Messungen können also durch viele zeitlich hintereinander durchgeführte Messungen ersetzt werden. ■

5.6 Beispiel (Ergodizität der Fahrbahnrauigkeit)

Ähnlich ist es mit den vertikalen Auslenkungen, die die *Fahrbahn* einer Fahrbahnklasse (z.B. Autobahn) hervorruft. Statt viele Male die gleiche Strecke zu fahren, kann auch *eine* lange Strecke vermessen werden, vorausgesetzt es kann davon ausgegangen werden, dass sich die Streckencharakteristik nicht ändert (es bleibt beim gleichen Fahrbahntyp). ■

Wie an dem vorangegangenen Beispiel zu sehen ist, gründet sich die Eigenschaft der Ergodizität in der Praxis auf heuristische Betrachtungen und Annahmen. Ein formaler Beweis dieser Eigenschaft ist im Allgemeinen nicht zu führen. Die Annahme wird in den meisten Fällen durch den Vergleich der Ergebnisse der unter dieser Voraussetzung angestellten Berechnungen mit der Realität gerechtfertigt.

In der Praxis kann der zeitliche Grenzprozess in den Gleichungen (410.1) bis (410.3) bzw. (410.4) bis (410.6) natürlich nicht durchgeführt werden. Der Grenzwert wird durch den über einen endlichen Beobachtungszeitraum berechneten Wert ersetzt.

Statistisch gesprochen bedeutet dies, dass im ergodischen Fall die ohne die Grenzwertbildung bestimmten zeitlichen Kennwerte des Prozesses *Schätzer* für die eigentlichen Kenngrößen bilden!

Praktische Berechnungen werden natürlich in aller Regel im zeitdiskreten Fall durchgeführt, da in der Praxis die Signale als zeitdiskretisierte Abtastwerte vorliegen.

Für diese Berechnungen bietet die MATLAB *Signal Processing Toolbox* entsprechende Funktionen an.

5.1.4 Berechnung von Prozesskennwerten mit MATLAB

Zur Berechnung der Kreuz- und Autokorrelationsfunktion stehen die MATLAB-Funktionen `xcorr` und `xcov` zur Verfügung. Die Funktionen berechnen die Korrelationen für *endliche, diskrete Datenvektoren*. Implizit wird dabei davon ausgegangen, dass es sich um einen *abgetasteten Ausschnitt* eines ergodischen stationären Prozesses handelt.

`xcorr` berechnet mit der Option `'biased'` für zwei diskrete Signale (x_n) und (y_n) die Kreuzkorrelationsfolge

$$c_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} x_n y_{n+k}^* \quad (412.1)$$

und damit eine Schätzung von:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n y_{n+k}^*. \quad (412.2)$$

Der $*$ deutet an, dass konjugiert komplexe Werte berechnet werden müssen⁶. Wird nur (x_n) angegeben, so wird die *Autokorrelationsfolge* berechnet.

`xcov` ist die MATLAB-Funktion zur Berechnung der so genannten Kovarianzfunktion (Kovarianzfolge). Dies ist i.W. die Korrelationsfunktion der Signale, bereinigt um die Mittelwerte. Sind die Signale *mittelwertfrei*⁷, so erhält man das gleiche Resultat.

Zur Berechnung der Mittelwerte und Varianzen stehen die Standard-MATLAB-Funktionen `mean` und `var` zur Verfügung.

Das nachfolgende Beispiel soll die Verwendung dieser Funktionen illustrieren.

5.7 Beispiel (Stationäre ergodische Prozesse mit MATLAB)

Mit Hilfe des in Abbildung 5.6 dargestellten Simulink-Systems `s_Rausch.slx` können *mittelwertfreie* Musterfunktionen eines Rauschsignals und eines durch einen Bandpass gefilterten Rauschsignals erzeugt werden.

Bei dem Rauschsignal handelt es sich um ein so genanntes *bandbegrenztes weißes Rauschsignal*, dessen Struktur in Abschnitt 5.2 noch näher untersucht werden soll. Für den Augenblick kann dieses Signal als Nachbildung eines Widerstandsrauschens aufgefasst werden.

⁶ Wie bisher werden wir auch im Folgenden nahezu ausschließlich *reelle* Signale betrachten. Die Definitionen (410.1) bis (410.6) beziehen sich daher auf reelle Prozesse. Sind die Signale komplexwertig, so müssen diese Definitionen entsprechend verändert werden.

⁷ D.h. $\mathbb{E}(X) = 0!$

Der Bandpass ist in der mit dem Initialisierungsbutton anwählbaren Voreinstellung ein Butterworth-Tiefpass mit Mittenfrequenz 200 Hz und einer Bandbreite von 10 Hz (3 dB-Grenzfrequenzen bei 200 ± 5 Hz).

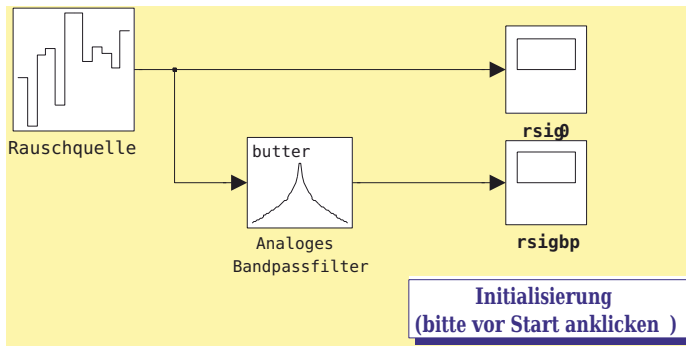


Abb. 5.6: Simulink-System `s_Rausch.slx` zur Erzeugung zweier mittelwertfreier Rauschsignale

Nach Durchführung einer Simulation mit diesem System liegen die Rauschsignale in den Matrizen `rsig0` und `rsigbp` vor und können unter MATLAB weiter verarbeitet werden. Mit den Anweisungen

```
>> rsig0 = rsig0(:,2);
>> rsigbp = rsigbp(:,2);
>> subplot(211)
>> plot(t, rsig0);
>> xlabel('Zeit/s')
>> ylabel('Ampl. ')
>> grid
>> subplot(212)
>> plot(t, rsigbp, 'k');
>> xlabel('Zeit/s')
>> ylabel('Ampl. ')
>> grid
```

können die in Abbildung 5.7 wiedergegebenen Musterfunktionen⁸ der Rauschsignale im Zeitbereich dargestellt werden.

Man erkennt zwar eine unterschiedliche Struktur der Zeitsignale, weitere Aufschlüsse liefert jedoch die Berechnung der Kennwerte (410.4) bis (410.6), die wir unter der Ergodizitätsvoraussetzung mit Hilfe von MATLAB leicht **schätzen** können:

⁸ Man beachte: Da es sich um Zufallssignale handelt, können sowohl die Grafiken als auch die später berechneten Kennwerte von Simulation zu Simulation von den hier angegebenen Resultaten abweichen.

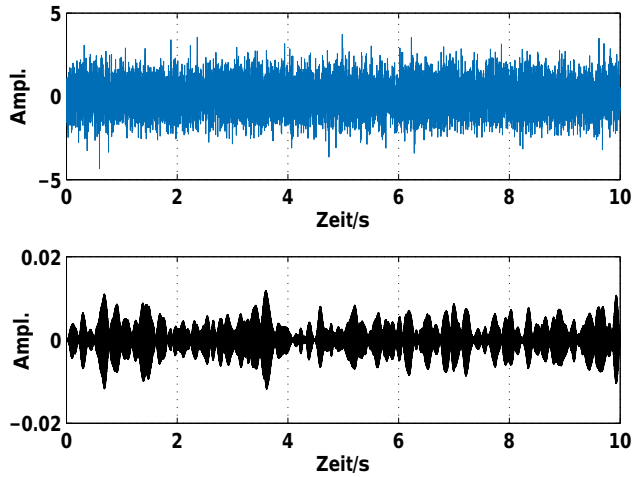


Abb. 5.7: Zwei mit dem Simulink-System `s_Rausch.mdl` erzeugte Rauschsignale

```
>> mean(rsig0)           % Schätzung Erwartungswert
ans =
    -0.0043

>> mean(rsigbp)         % Schätzung Erwartungswert
ans =
    1.6149e-007

>> var(rsig0)           % Schätzung Varianz
ans =
    0.9749

>> var(rsigbp)          % Schätzung Varianz
ans =
    1.1874e-005

>> std(rsigbp)
ans =
```

0.0034

Theoretisch müssten beide Mittelwerte 0 sein (was natürlich exakt nicht getroffen werden kann, da es sich um eine Schätzung aufgrund *einer* endlichen Musterfunktion handelt). Die Bedeutung der Varianz werden wir später klären.

Interessant ist die Berechnung der Korrelationsfunktionen (vgl. Datei **AuswertungRausch.m**):

```
Ta = fixstep ;           % Abtastintervall
T = simudauer ;         % Dauer der Signale

% Berechnung des Korrelationszeitintervalls
czeit = (-T:Ta:T);

% Berechnung der Autokorrelationen
xrsig0 = xcorr(rsig0, 'biased');
xrsigbp = xcorr(rsigbp, 'biased');

% Plot der Autokorrelationsfunktionen
subplot(211)
plot(czeit, xrsig0, 'b');
xlabel('Zeit/s')
ylabel('Verschiebung \tau / s')
grid
subplot(212)
plot(czeit, xrsigbp, 'k');
xlabel('Verschiebung \tau / s')
ylabel('r_{XX}(\tau)')
grid
```

In Abbildung 5.8 sind die berechneten Autokorrelationsfunktionen dargestellt.

Deutlich sind Korrelationsmaxima bei $\tau = 0$ zu erkennen, was nicht weiter verwunderlich ist, denn bei einem Vergleich eines Signals mit einer um $\tau = 0$ verschobenen Version ist die „Ähnlichkeit“ sicher maximal (die Signale sind identisch!). Es gilt also stets (vgl. dazu auch Übung 130):

Übung 130

Übung 131

$$\max_{\tau \in \mathbb{R}} r_{XX}(\tau) = r_{XX}(0). \quad (415.1)$$

Auffällig ist auch die Symmetrie der Autokorrelationsfunktionen. In der Tat gilt immer (vgl. dazu Übung 131):

$$r_{XX}(\tau) = r_{XX}(-\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (415.2)$$

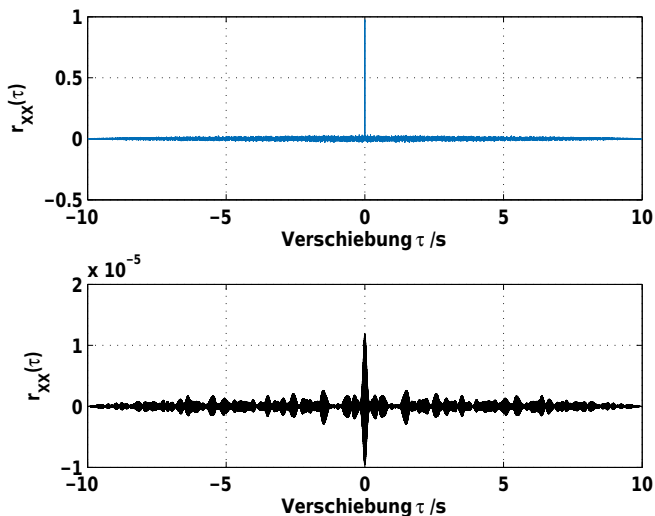


Abb. 5.8: Autokorrelationsfunktionen der Signale aus Abbildung 5.7

Die berechneten Verschiebungen reichen von $-T$ bis T , wobei T die Zeitdauer des Signalausschnittes ist. Verschiebungen darüber hinaus haben keinen Sinn, da keine gemeinsamen Zeitpunkte mehr betrachtet werden (alle Produkte in der Formel⁹

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n+k} \quad (416.1)$$

würden 0 werden). Da es sich um diskretisierte Werte handelt, berechnet `xcorr` auch nur diskrete Werte der Autokorrelationsfunktion im Raster des Abtastintervalls T_a . Der der diskreten Korrelation zugeordnete Zeitvektor der Verschiebungen gegeneinander muss daher in Schritten T_a von der maximalen Verschiebung $-T$ in die negative Zeitrichtung bis zur maximalen Verschiebung T in die positive Zeitrichtung definiert werden.

Abbildung 5.9 illustriert die obigen Überlegungen anhand einer Prinzipdarstellung. Man beachte dabei, dass die Indizierung bei dieser Darstellung von der der Formel (416.1) differiert, da der MATLAB-Berechnung ein Datenvektor $x_0, x_1, \dots, x_N$ (und nicht $x_{-N}, \dots, x_N$) zu Grunde liegt¹⁰.

An der Prinzipdarstellung 5.9 erkennt man ferner, dass die berechneten Werte der Korrelationsfunktion (Korrelationsfolge) für Zeitverschiebungen in der Nähe von T und $-T$ nur auf sehr wenigen Abtastwerten beruhen.

⁹ Wir setzen *reelle* Signale voraus!

¹⁰ In der MATLAB-Indizierung ist der Datenvektor dann $x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$.

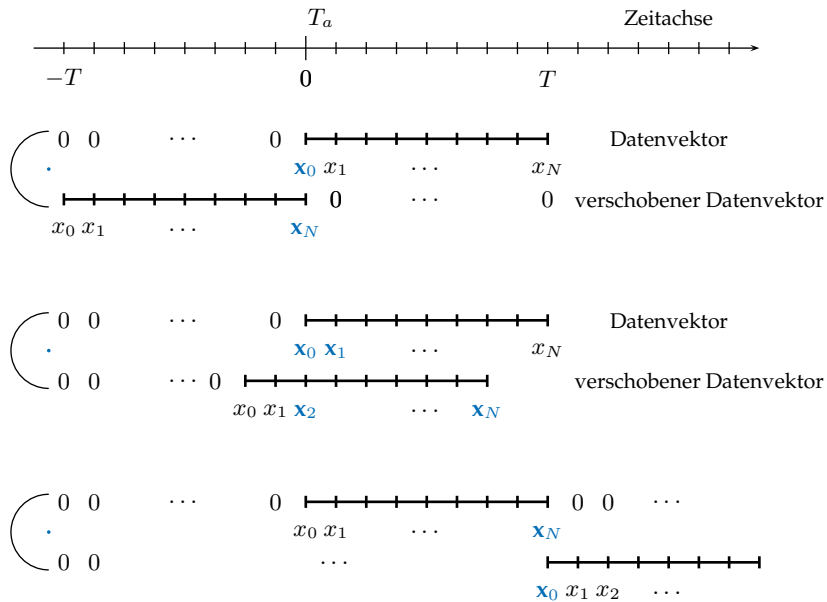


Abb. 5.9: Illustration zur Berechnung der Autokorrelation eines diskreten Signals $x_0, x_1, \dots, x_N$ mit MATLAB

Grundsätzlich liefern diese Werte also keine gute Schätzung mehr für die tatsächlichen Werte der Autokorrelation.

Dieser Effekt kann durch die Verwendung der Option 'unbiased' der MATLAB-Funktion `xcorr` etwas abgemildert werden. Der Aufruf

```
>> cx = xcorr(x, 'unbiased');
```

beispielsweise, skaliert die Werte

$$\sum_{n=-N}^N x_n x_{n+k} \quad (417.1)$$

nicht wie in Gleichung (416.1) mit $\frac{1}{2N+1}$, sondern mit $\frac{1}{2N+1-|k|}$, berechnet also:

$$\frac{1}{2N+1-|k|} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n+k}. \quad (417.2)$$

Für kleine k stimmt das Ergebnis noch ganz gut mit den mit $\frac{1}{2N+1}$ skalierten und damit der Definition der Korrelationsfunktion entsprechenden Werten

überein. Für große k ist der Skalierungsfaktor $\frac{1}{2N+1-|k|}$ größer und hebt die Werte in der Nähe von T und $-T$ an. Dadurch wird der Effekt, dass die Werte von `xcorr` an diesen Stellen aufgrund der geringen Anzahl von verwendeten Abtastwerten klein werden, teilweise wieder aufgehoben.

Trotz dieser durch die Option `'unbiased'` bereitgestellten Möglichkeit sind jedoch nur die berechneten Werte in der Nähe der Verschiebungszeit $\tau = 0$ ($k = 0$) wirklich verlässliche Schätzungen der Korrelationsfunktion. Dies sollte bei der Interpretation der numerischen und grafischen Ergebnisse stets berücksichtigt werden.

An der Korrelationsfunktion können weitere Dinge abgelesen werden. Interessant ist der Wert des Korrelationsmaximums bei $\tau = 0$ ($k = 0$):

```
>> max(xrsig0)

ans =

    0.9748

>> var(rsig0)

ans =

    0.9749

>> max(xrsigbp)

ans =

    6.0603e-007

>> var(rsigbp)

ans =

    1.1874e-005
```

Offenbar ist der maximale Wert gerade die Varianz des Signals. Dies lässt sich analytisch leicht verifizieren. Da für $\tau = 0$ der Verschiebungsindex $k = 0$ ist, folgt:

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n+0} = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n^2 \approx \bar{\sigma}_x^2. \quad (418.1)$$

Dabei wurde verwendet, dass der Prozess mittelwertfrei ist und $\bar{x} \approx 0$ gilt. Theoretisch muss für *mittelwertfreie Prozesse* die exakte Beziehung

$$r_{XX}(0) = \mathbb{V}(X) \quad (419.1)$$

gelten, wie den Definitionen der Autokorrelationsfunktion zu entnehmen ist. Im Allgemeinen gilt nämlich [2] (vgl. dazu auch Übung 129):

$$r_{XX}(0) = \mathbb{E}(X_t \cdot X_{t+0}) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2. \quad (419.2)$$

Weitere Informationen über die Prozesse bekommt man, wenn man die Korrelationsfunktionen in der Umgebung von 0 (hier beruht die Schätzung, wie bereits erwähnt, auf einer genügend großen Überlappung der Datensätze) etwas genauer anschaut. In Abbildung 5.10 ist ein solcher Ausschnitt dargestellt.

Übung 129

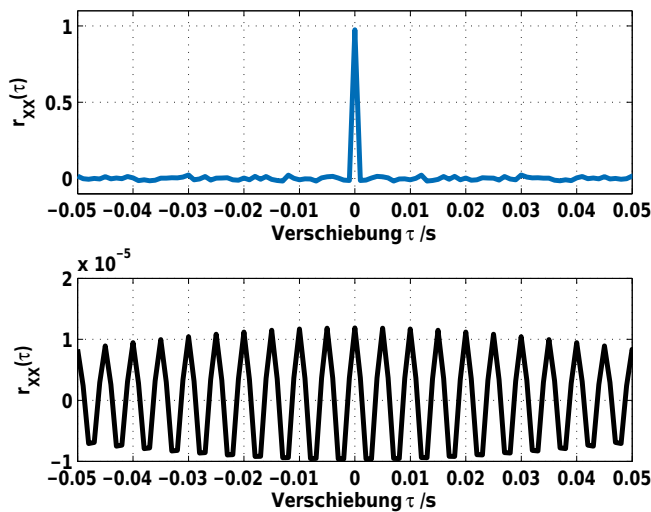


Abb. 5.10: Autokorrelationsfunktionen der Signale aus Abbildung 5.7 in einem kleinen Ausschnitt um $\tau = 0$

Die Abbildung zeigt, dass offenbar die „Selbstähnlichkeit“ des ersten Rauschsignals bereits für kleine Zeitverschiebungen nahezu verschwindet. Zwei aufeinander folgende Werte des Prozesses haben praktisch statistisch nichts miteinander zu tun.

Übung 132

Übung 133

Die zweite Korrelationsfunktion zeigt eine *periodische* Struktur. Offenbar wiederholen sich die vom Prozess erzeugten Werte in irgendeiner Weise zumindest *im Mittel* periodisch. Eine Analyse des Signals anhand von Abbildung 5.10 ergibt 2 Schwingungen pro 0.01 s. Dies entspricht einer Frequenz von 200 Hz und damit der im Bandpass des Simulink-Systems eingestellten Mittenfrequenz. Offenbar prägt der Bandpass dem Prozess und damit den

Übung 134

Übung 136

an sich zufälligen Musterfunktionen eine gewisse Regelmäßigkeit auf, die durch die Analyse des Korrelationssignals ermittelt werden kann.

Diese Erkenntnis ist fundamental für die Definition des **Spektrums** eines Prozesses und die Spektralanalyse stochastischer Signale, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird. ■

Die im vorliegenden Abschnitt eingeführten und für die Analyse stochastischer Signale fundamentalen Begriffe sollen abschließend an einem weiteren Beispiel vertieft werden.

Dazu wird mit Hilfe der von MATLAB bereitgestellten Zufallsgeneratoren ein *diskreter* stochastischer Prozess erzeugt. Seine Eigenschaften werden anschließend analysiert.

5.8 Beispiel (Diskreter stochastischer Prozess)

In den MATLAB-Funktionen **rp1.m**, **rp2.m** und **rp3.m** des Begleitmaterials werden mit Hilfe von MATLABs Zufallsgeneratoren diskrete Zufallsprozesse simuliert [8].

Übung 139 Exemplarisch soll der Prozess aus **rp2.m** zur näheren Untersuchung herausgegriffen¹¹ werden.

Übung 140 Der Erzeugungsmechanismus in **rp2.m** wird durch die folgenden Anweisungen definiert:

```
MR = rand(M,1)*ones(1,N);
rauschprozess = (rand(M,N) - 0.5).*MR + 0.75;
```

Die erzeugten Werte können als Musterfunktionen eines diskreten Rauschprozesses aufgefasst werden, der durch

$$R_n^{(2)} = X_n \cdot Y_n + b = X \cdot Y + b, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (420.1)$$

definiert ist. Dabei ist X eine im Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gleichverteilte Zufallsvariable und Y eine zu X stochastisch *unabhängige* und im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable.

Aus dieser Modellierung folgt gemäß den allgemeinen Rechenregeln (vgl. Anhang A.7, Seite 556)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\alpha \cdot Z + \beta) &= \alpha \mathbb{E}(Z) + \beta, \\ \mathbb{V}(\alpha \cdot Z + \beta) &= \alpha^2 \mathbb{V}(Z) \end{aligned} \quad (420.2)$$

für eine Zufallsvariable Z und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dass für den Erwartungswert und die Varianz von $R_n^{(2)}$ gilt:

¹¹ Für die anderen beiden Prozesse sei auf die Übungen verwiesen!

$$\mathbb{E} \left(R_n^{(2)} \right) = \mathbb{E}(X \cdot Y) + b = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) + b = 0 \cdot \frac{1}{2} + b = 0.75, \quad (421.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \left(R_n^{(2)} \right) &= \mathbb{V}(X \cdot Y) = \mathbb{E} \left((X \cdot Y - 0)^2 \right) \\ &= \mathbb{E} (X^2 \cdot Y^2) = \mathbb{E} (X^2) \cdot \mathbb{E} (Y^2). \end{aligned} \quad (421.2)$$

In dieser Berechnung wurde die stochastische Unabhängigkeit von X und Y ausgenutzt, sowie die Tatsache, dass $\mathbb{E}(X \cdot Y) = 0$ ist.

Wegen

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E} (X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E} (X^2), \\ \mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E} (Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \mathbb{E} (Y^2) - \left(\frac{1}{2} \right)^2, \end{aligned} \quad (421.3)$$

folgt aus (421.2):

$$\mathbb{V} \left(R_n^{(2)} \right) = \mathbb{V}(X) \cdot \left(\mathbb{V}(Y) + \frac{1}{4} \right). \quad (421.4)$$

Die beiden gleichverteilten Zufallsvariablen X und Y haben jedoch beide die Varianz $\frac{1}{12}$. Damit folgt:

$$\mathbb{V} \left(R_n^{(2)} \right) = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = 0.0278. \quad (421.5)$$

Für die Autokorrelationsfunktion (Autokorrelationsfolge) erhält man:

$$\begin{aligned} r_{RR}^{(2)}(k) &:= \mathbb{E} \left(R_n^{(2)} \cdot R_{n+k}^{(2)} \right) \\ &= \mathbb{E} ((X_n \cdot Y_n + b) \cdot (X_{n+k} \cdot Y_{n+k} + b)) \\ &= \mathbb{E} (X_n \cdot Y_n \cdot X_{n+k} \cdot Y_{n+k} + b \cdot X_n \cdot Y_n + b \cdot X_{n+k} \cdot Y_{n+k} + b^2). \end{aligned} \quad (421.6)$$

Sowohl die Variablen X und Y , als auch die Variablen X resp. Y zu verschiedenen Zeitpunkten ($k \neq 0$) sind stochastisch unabhängig (vgl. den Erzeugungsmechanismus in **rp2.m**), so dass wegen $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n+k}) = \mathbb{E}(X) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} r_{RR}^{(2)}(k) &:= \mathbb{E}(X_n) \cdot \mathbb{E}(Y_n) \cdot \mathbb{E}(X_{n+k}) \cdot \mathbb{E}(Y_{n+k}) \\ &\quad + b \cdot \mathbb{E}(X_n) \cdot \mathbb{E}(Y_n) + b \cdot \mathbb{E}(X_{n+k}) \cdot \mathbb{E}(Y_{n+k}) + b^2 \\ &= b^2 = (0.75)^2 = 0.5625. \end{aligned} \quad (421.7)$$

Insbesondere entnimmt man dieser Berechnung, dass das Ergebnis *nicht* von n abhängt!

Für gleiche Zeitpunkte ($k = 0$) gilt (vgl.421.6):

$$\begin{aligned}
 r_{RR}^{(2)}(0) &:= \mathbb{E} (X_n^2 \cdot Y_n^2 + 2 \cdot b \cdot X_n \cdot Y_n + b^2) \\
 &= \mathbb{E} (X_n^2 \cdot Y_n^2) + 0 + b^2 \\
 &= \mathbb{V} (R_n^{(2)}) + b^2 \\
 &= 0.0278 + 0.5625 = 0.5903.
 \end{aligned} \tag{422.1}$$

Da die Autokorrelationsfunktion nicht von n , sondern nur von k abhängt und die Kennwerte $\mathbb{E} (R_n^{(2)})$ und $\mathbb{V} (R_n^{(2)})$ ebenfalls konstant sind, ist der Prozess $R_n^{(2)}$ **im weiteren Sinne stationär!**

Ob der in **rp2.m** realisierte Prozess als *ergodisch* angenommen werden kann, kann zumindest experimentell untermauert werden.

Dazu wird zunächst ein Signal mit sehr vielen Abtastwerten (z.B. 100000) erzeugt:

```
>> rauschprozess2 = rp2(100000,1);
```

Mit Hilfe dieser Daten können die Kennwerte im zeitlichen Mittel bestimmt werden:

```
>> EXb = mean(rauschprozess2)

EXb =

    0.7503

>> VXb = var(rauschprozess2)

VXb =

    0.0277
```

Offenbar entsprechen diese Kennwerte (zumindest approximativ) den theoretisch berechneten Kennwerten.

Für die Autokorrelationsfunktion (Autokorrelationsfolge) erhalten wir:

```
>> N = 100000;
>> % Rauschprozess 2
>> xcorr2 = xcorr(rauschprozess2, 'unbiased');
>> cn = (-(N-1):N-1); % Korrelationszeit"
>> xcorr2theorie = 0.5625*ones(size(cn));
>> xcorr2theorie(N) = 0.5903;% Wert bei Zeit 0
```

```
>>% Plot der geschätzten und der theoretischen
>>% Autokorrelationsfunktion.
>> plot(cn,xcorr2,'r',cn,xcorr2theorie,'b','LineWidth',3);
>> axis([-40,40,0.562,0.595])
>> grid
>> xlabel('Index/n')
>> ylabel('r^{(2)}_{RR}')
```

Abbildung 5.11 zeigt, dass die über die Zeit gemittelte Autokorrelationsfunktion der beiden Prozesse mit den theoretischen Ergebnissen gut übereinstimmen.

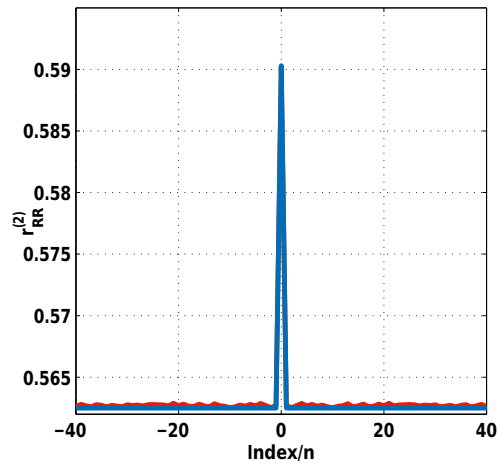


Abb. 5.11: Durch zeitliche Mittelung (rot) berechnete Autokorrelationsfolge des Prozesses *rp2.m* im Vergleich zur theoretischen Autokorrelationsfolge (blau)

Insgesamt kann also der in *rp2.m* realisierte (diskrete) Prozess als *im weiteren Sinne stationär* und *ergodisch* angesehen werden. ■

5.1.5 Übungsaufgaben

Übung 129 (Lösungsband Seite 297)

Weisen Sie mit Hilfe der allgemeinen Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz (vgl. Anhang A.7, Seite 556 des Lehrbuchs) nach, dass für einen im weiteren Sinne stationären Prozess X_t (bzw. X_n) stets gilt:

$$r_{XX}(0) = \mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{V}(X_t) + \mathbb{E}(X_t)^2. \quad (423.1)$$

Folgern Sie daraus, dass für einen *mittelwertfreien* Prozess X_t (bzw. X_n) der Wert von $r_{XX}(0)$ stets mit der Varianz übereinstimmt.

Übung 130 (Lösungsband Seite 298)

Zeigen Sie, dass für einen im weiteren Sinne stationären Prozess X_t (bzw. X_n) stets gilt:

$$\max_{t \in \mathbb{R}} r_{XX}(k) = r_{XX}(0). \quad (424.1)$$

Verwenden Sie dabei folgende Tatsache für den so genannten *Korrelationskoeffizienten* $\rho(X, Y)$ zweier Zufallsvariablen X und Y [2]:

$$-1 \leq \rho(X, Y) := \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y)))}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} \leq 1. \quad (424.2)$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst nur einen *mittelwertfreien* Prozess und versuchen Sie danach das dafür gewonnene Ergebnis zu verallgemeinern.

Übung 131 (Lösungsband Seite 299)

Zeigen Sie, dass die Autokorrelationsfunktion eines im weiteren Sinne stationären Prozesses eine *gerade Funktion* ist, d.h. dass folgende Symmetriebedingung gilt:

$$r_{XX}(\tau) = r_{XX}(-\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (424.3)$$

Übung 132 (Lösungsband Seite 299)

Betrachten Sie den folgenden Prozess:

$$X_t = a \cdot \sin(\omega t + \Phi_0). \quad (424.4)$$



Dabei seien $a \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \mathbb{R}$ und die Phase Φ_0 eine im Intervall $[0, 2\pi]$ **gleichverteilte** Zufallsvariable!

Dieser Prozess kann wie folgt interpretiert werden: Eine Musterfunktion von X_t ist ein harmonisches Signal, welches ab einem beliebigen Startzeitpunkt (der dann auf $t = 0$ normiert werden kann) beobachtet wird. Die Nullphase zu diesem Zeitpunkt kann beliebig sein und keine Nullphase kommt dabei bevorzugt vor.

Man bezeichnet diesen Prozess als **Harmonischen Prozess**.

Zeigen Sie, dass es sich bei dem Harmonischen Prozess X_t um einen im weiteren Sinne stationären Prozess handelt.

Überprüfen Sie anschließend mit Hilfe der MATLAB-Funktion **HarmonProzess** der Begleitsoftware experimentell, dass der Prozess als *ergodisch* angenommen werden kann!

Hinweis: Verwenden Sie folgende trigonometrischen Identitäten:

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b), \\ \sin(a) \cdot \sin(b) &= \frac{1}{2} \cos(a - b) - \frac{1}{2} \cos(a + b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (424.5)$$

Übung 133 (Lösungsband Seite 304)

Betrachten Sie den Fall eines „Sinus in additivem Rauschen“:

$$X_t = a \cdot \sin(\omega t + \phi) + N_t. \quad (425.1)$$



Dabei sei N_t ein stationäres ergodisches Rauschsignal. Nehmen Sie ferner an, auch der Prozess X_t sei stationär ergodisch.

Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung die Kennwerte $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ und $r_{XX}(\tau)$ des Prozesses.

Übung 134 (Lösungsband Seite 306)

Zeigen Sie, dass der in Übung 133, Gleichung (425.1) definierte Prozess „Sinus in additivem Rauschen“ streng genommen *kein* (im weiteren Sinne) stationärer Prozess ist.

Begründen Sie, warum die Ergebnisse und Aussagen aus Übung 133 im Lichte von Übung 132 gesehen trotzdem sinnvoll sind!

Übung 135 (Lösungsband Seite 307)

Erzeugen Sie mit Hilfe des Simulink-Systems **s_Rausch2.slx** mehrere Musterfunktionen der Rauschsignale. Berechnen Sie anschließend die Autokorrelationsfolgen und bilden Sie jeweils die Mittelwerte dieser Folgen, um die eigentlich notwendige Erwartungswertbildung für die Autokorrelation zumindest approximativ nachzubilden.

Berechnen Sie anschließend eine FFT der gemittelten Autokorrelationsfolgen und versuchen Sie, das Ergebnis zu interpretieren!

Übung 136 (Lösungsband Seite 310)

Überprüfen Sie mit Hilfe von MATLAB Ihr Ergebnis aus Übung 133. Erzeugen Sie dazu ein Sinussignal in Rauschen, etwa indem Sie das Rauschsignal aus Übung 135 verwenden und ein Sinussignal aufaddieren.

Übung 137 (Lösungsband Seite 313)

Betrachten Sie das Simulink-System **s_delay.slx** der Begleitsoftware. Initialisieren Sie mit dem Initialisierungsfile **init_delay.m** eine Verzögerung des Signals durch den Transport Delay-Block. Nehmen eine Signalprobe auf, wobei Sie den Zufallsgenerator mit Hilfe des Parameters **seed** im Rauschsignal-Block neu initialisieren.

Berechnen Sie nach der Simulation die Kreuzkorrelation der beiden Signale, etwa durch

```
>> cross = xcorr(dsig(:,1), dsig(:,2), 'unbiased');
```

Plotten Sie das Ergebnis und versehen Sie dabei die x -Achse mit dem richtigen Zeitmaß.

Bei welcher Zeit finden Sie das Korrelationsmaximum?

Übung 138 (Lösungsband Seite 315)

Mit dieser und der folgenden Übung [8] sollen die Begriffe *stationär* und *ergodisch* nochmals anhand eines MATLAB-Beispiels verdeutlicht werden.



- (a) Untersuchen Sie dazu zunächst den Programm Quelltext der MATLAB-Funktionen **rp1** und **rp3**.

In allen drei Funktionen werden Zufallsprozesse simuliert. Beschreiben Sie diese Zufallsprozesse mit geeignet definierten Zufallsvariablen.

- (b) Bestimmen Sie anhand der Modellierung aus Aufgabenteil (a) die Kennwerte Erwartungswert und Varianz der Prozesse.

Hinweis: Verwenden Sie dabei die Resultate zu Berechnung der Kennwerte $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{V}(X)$ von Zufallsvariablen X aus Anhang A.7!

Übung 139 (Lösungsband Seite 318)



Berechnen Sie, sofern möglich, mit Hilfe der in Übung 138 gewonnenen Modellierungen die Autokorrelationsfunktionen der in **rp1.m** und **rp3.m** definierten Prozesse.

Entscheiden Sie, welche der Prozesse im weiteren Sinne stationär sind!

Übung 140 (Lösungsband Seite 320)

Generieren Sie für die in **rp1.m**, **rp2.m** und **rp3.m** definierten Prozesse durch Aufruf der Funktionen, beispielsweise durch

```
>> rauschprozess3 = rp3(100,100);
```

jeweils eine 100×100 -Matrix bestehend aus 100 Zeilenvektoren der Länge 100, welche jeweils eine diskrete Musterfunktion des simulierten Zufallsprozesses darstellen sollen.

Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB für die in den Übungen 138 und 139 als *im weiteren Sinne stationär* identifizierten Prozesse Schätzungen der Scharkennwerte und der Autokorrelationsfunktion und überprüfen Sie so die dort gewonnenen Ergebnisse.

Prüfen Sie anschließend experimentell, ob die Prozesse auch als *ergodisch* angenommen werden können.

5.2 Das Leistungsdichtespektrum

Im vorangegangenen Abschnitt wurde dargelegt, dass auch stochastische Signale *frequenzabhängige* Charakteristika aufweisen können (vgl. Beispiel 5.7, S. 412 und die Übungen 132 bis 136). Mit Hilfe des Übergangs auf Signalklassen, welcher es erlaubt, „den Zufall auszumitteln“, kann nun der für deterministische Signale wichtige Begriff des *Spektrums*, resp. des spektralen Inhalts eines Signals auf Zufallssignale übertragen werden.

Dies führt auf den für die Analyse von stochastischen Signalen zentralen Begriff des *Leistungsdichtespektrums*.

5.2.1 Korrelation und Leistungsdichte

Wie bereits angedeutet, „misst“ die Autokorrelationsfunktion für stationäre Prozesse $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die Selbstähnlichkeit der Musterfunktionen zu verschiedenen Zeitpunkten. Für zwei verschiedene stationäre Prozesse $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ und $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$ kann man mit der Kreuzkorrelationsfunktion $r_{XY}(\tau)$ deren Ähnlichkeit gegenüber um τ zeitverschobenen Versionen messen. Dies ist insbesondere nützlich bei der Untersuchung des Übertragungsverhaltens eines LTI-Systems und für Laufzeitmessungen. Wir werden darauf in den Abschnitten 5.3.1, S. 453 und 5.5.5, S. 497 ausführlich zurückkommen.

Ist $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ein stationärer Prozess¹², so kann man die Autokorrelationsfunktion wie folgt interpretieren:

- $r_{XX}(\tau)$ misst die „Ähnlichkeit“ von $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ gegenüber einer um τ zeitverschobenen Version.
- $r_{XX}(\tau)$ enthält „periodische Anteile“, falls $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ „verborgene Periodizitäten“ hat.

Mit dem Übergang zu Autokorrelationsfunktionen stehen uns die in Kapitel 2 bis Kapitel 4 erarbeiteten Werkzeuge wieder zur Verfügung, denn $r_{XX}(\tau)$ *ist deterministisch!*

Der Zufall wurde durch die Erwartungswertbildung „ausgemittelt“. Alle mit $r_{XX}(\tau)$ ermittelten Charakteristika sind feste, *nicht zufällige* Parameter des *gesamten Prozesses* $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$!

Eine *Spektralanalyse (Fourier-Analyse) der Autokorrelationsfunktion* sollte also diese periodische Charakteristika des Prozesses sichtbar machen!

Leistungsdichtespektren zeitkontinuierlicher Prozesse

Diese Idee führt dazu, durch den folgenden Begriff auch stochastischen Signalen ein Spektrum zuzuweisen:

¹² Der Einfachheit halber werden in der Argumentation zeitkontinuierliche Prozesse verwendet. Die Aussagen gelten selbstredend auch für diskrete Prozesse.

Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ein zeitkontinuierlicher stationärer Prozess. Dann heißt:

$$\begin{aligned} S_{XX}(j\omega) &= \mathfrak{F}(r_{XX}(\tau))(j\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} r_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (428.1)$$

das **Leistungsdichtespektrum** von $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Übung 141 Der Begriff **Leistungsdichtespektrum** erklärt sich aus folgender Überlegung heraus. Der Autokorrelationsfunktion $r_{XX}(\tau)$ kann die physikalische Einheit Watt [W] (Leistung) zugeordnet werden, denn es gilt etwa für ein ergodisches $x(t)$:

$$r_{XX}(\tau) \underset{T \text{ groß}}{\overset{X \text{ erg.}}{\approx}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt. \quad (428.2)$$

Betrachtet man zum Beispiel ein Spannungssignal und die zugehörigen physikalischen Einheiten, so erhält man auf der rechten Seite der Gleichung (428.2) bei Bezug auf 1Ω die Einheit $\frac{1}{s} \cdot \frac{V^2}{\Omega} \cdot s = W$.

Insbesondere gilt im ergodischen Fall:

$$\begin{aligned} r_{XX}(0) &= \mathfrak{F}^{-1}(S_{XX}(j\omega))(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \Big|_{\tau=0} \\ &\approx \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt. \end{aligned} \quad (428.3)$$

Dies entspricht der **mittleren Signalleistung**¹³ (Durchschnittsleistung) von $x(t)$.

Approximiert man in Gleichung (428.3) das Fourier-Integral durch eine Summe, so erhält man:

$$r_{XX}(0) \approx \frac{1}{2\pi} \Delta\omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{XX}(jk\Delta\omega). \quad (428.4)$$

¹³ Wir werden im Folgenden der Einfachheit halber von der **Leistung** des Prozesses sprechen.

Das heißt, $r_{XX}(0)$ und damit die Durchschnittsleistung ergibt sich (bis auf Konstante) als „Summe“ der Spektralanteile des Leistungsdichtespektrums. Betrachtet man wiederum die physikalischen Einheiten in Gleichung (428.4), so erhält man auf der linken Seite Watt und auf der rechten Seite:

$$\frac{1}{\text{rad}} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \text{Einheit von } S_{XX}(jk\Delta\omega). \quad (429.1)$$

Die physikalische Einheit von $S_{XX}(jk\Delta\omega)$ muss also Ws oder auch $\frac{\text{W}}{\text{Hz}}$ sein und $S_{XX}(jk\Delta\omega)$ kann als **Anteil der Leistung des Signals im k -ten Frequenzband der Breite $\Delta\omega$** angesehen werden!

Die physikalische Einheit des Leistungsdichtespektrums ist also Leistung pro Hz Frequenzband ($\frac{\text{W}}{\text{Hz}}$) und spiegelt somit die **Verteilung der Signalleistung im Frequenzbereich** wieder.

Dies ist insbesondere für Spektralanalysen im mechanischen Bereich interessant, wo es beispielsweise um die Ermittlung schädlicher Frequenzanteile geht. So beispielsweise in der nicht-zerstörenden Materialprüfung, wo mit akustischen Signalen auf schädliche Resonanzen rotierender Teile geprüft wird.

Der Wert $r_{XX}(0)$ hängt noch mit einer anderen wichtigen Kenngröße zusammen bzw. ist zu dieser äquivalent.

Übung 142

Dies ist der für Wechsignale in der Elektrotechnik geläufige Begriff des **Effektivwertes**:

Die Größe

$$X_{eff} = \sqrt{r_{XX}(0)} \overset{X_{erg.}}{\approx} \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt} \quad (429.2)$$

heißt der **Effektivwert** des (stationären) Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Der Vorteil dieser Größe ist die Tatsache, dass X_{eff} die gleiche physikalische Einheit hat wie $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ selbst und somit direkt mit den Amplituden eines Mustersignals $x(t)$ vergleichbar ist.

Leistungsdichtespektren zeitdiskreter Prozesse

In den seltensten Fällen kann die Berechnung von Korrelation und Leistungsdichtespektren analytisch durchgeführt werden. In der Praxis liegen **gemessene, diskretisierte, endliche** Folgen von Abtastwerten einer Musterfunktion eines Prozesses vor.

Der Begriff des Leistungsdichtespektrums kann aber natürlich auch für zeitdiskrete Prozesse definiert werden. Das **diskrete Leistungsdichtespektrum**

berechnet sich dabei in Analogie zum zeitkontinuierlichen Fall aus der DTFT der Autokorrelationsfolge:

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein **zeitdiskreter**, stationärer reeller Prozess. Dann ist

$$\begin{aligned}\Phi_{XX}(\Omega) &= R_{XX}^{DTFT}(\Omega) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{XX}(k) e^{-jk\Omega} \quad \forall \Omega \in [-\pi, \pi]\end{aligned}\quad (430.1)$$

das **(diskrete) Leistungsdichtespektrum** des Signals.

Mit Hilfe der Inversionsformel

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{DTFT}(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (430.2)$$

für die DTFT lässt sich auch das diskrete Leistungsdichtespektrum wieder als *Verteilung der Signalleistung* im Frequenzbereich interpretieren. Die Definition und (430.2) implizieren nämlich

$$r_{XX}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{XX}(\Omega) d\Omega, \quad (430.3)$$

und da $r_{XX}(0)$ wieder die (mittlere) Signalleistung repräsentiert, spiegelt $\Phi_{XX}(\Omega)$ die Verteilung dieser Signalleistung im (Nyquist-)Band wieder.

Es sei an dieser Stelle nochmals angemerkt, dass sich die obigen Definitionen (fast) gleichlautend auf **zwei** Prozesse X_t, Y_t bzw. X_n, Y_n übertragen und so zu den Begriffen der **Kreuzkorrelation** und des **Kreuzleistungsdichtespektrums** führen.

Beispielsweise ergibt sich das zeitdiskrete Kreuzleistungsdichtespektrum als zeitdiskrete Fourier-Transformation der Kreuzkorrelationsfunktion:

$$\Phi_{XY}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{XY}(k) e^{-jk\Omega}. \quad (430.4)$$

Dieses Leistungsdichtespektrum gibt die spektrale Verteilung der Ähnlichkeiten der Prozesse X_n und Y_n wieder, die mit der Kreuzkorrelationsfunktion $r_{XY}(k) = \mathbb{E}(X_n \cdot Y_{n+k})$ gemessen wird. Dies ist, wie bereits angedeutet, insbesondere dann interessant, wenn Y_n der Ausgangsprozess eines LTI-Systems ist, welches mit X_n angeregt wird. Wir werden im Rahmen der Wiener-Lee-Beziehung (s. Abschnitt 5.3.1) hierauf zurück kommen.

Der Zusammenhang zwischen $S_{XX}(j\omega)$ und $\Phi_{XX}(\Omega)$

In der praktischen Anwendung der Spektralanalyse ist es, wie bereits mehrfach erwähnt, eigentlich nicht möglich, die zeitkontinuierliche Fourier-Transformation zu verwenden. In allen Fällen stützt man sich auf *Abtastwerte* des zu beobachtenden zeitkontinuierlichen Prozesses. Somit wird man in der praktischen Berechnung von Leistungsdichtespektren zunächst Schätzungen **diskreter Leistungsdichtespektren** $\Phi_{XX}(\Omega)$ bestimmen. Natürlich ist dabei jedoch stets das eigentliche Ziel, Spektralinformationen über den zu Grunde liegenden zeitkontinuierlichen Prozess zu erhalten. Infolgedessen ist es wichtig zu wissen, welcher Zusammenhang zwischen dem berechneten $\Phi_{XX}(\Omega)$ und dem Leistungsdichtespektrum $S_{XX}(j\omega)$ besteht.

Da die Berechnung dieser Spektren per Definition auf den Fourier-Transformationen der **deterministischen** Signale $r_{XX}(\tau)$ bzw. $r_{XX}(k)$ beruht, können wir auf die diesbezüglichen Ergebnisse aus Kapitel 4 zurückgreifen.

Wir können dabei davon ausgehen, dass bei der Abtastung der Signale die Bedingung des Abtasttheorems eingehalten wurde. Dies wird üblicherweise durch die Verwendung von Anti-Aliasing-Filtern (vgl. Kapitel 3) sichergestellt.

Der Zusammenhang zwischen dem zeitkontinuierlichen und dem zeitdiskreten Leistungsdichtespektrum folgt in diesem Fall aus der Beziehung (321.4) zwischen dem diskreten und dem zeitkontinuierlichen Fourier-Spektrum.

Für stochastische Prozesse mit bandbegrenzter Autokorrelationsfunktion (bandbegrenzte Prozesse) haben wir somit bei der Schätzung des Leistungsdichtespektrums den Faktor *Abtastrate* $f_a = \frac{1}{T_a}$ zu berücksichtigen, wenn wir zur Schätzung etwa Mittelungen von FFTs der Musterfunktionen heranziehen, denn es gilt dann innerhalb des Nyquistbandes $[-\omega_a/2, \omega_a/2]$:

$$S_{XX}(j\omega) = T_a \cdot \Phi_{XX}(\Omega), \quad \Omega = \omega \cdot T_a, \quad \Omega \in [-\pi, \pi]. \quad (431.1)$$

Oft wird bei der Simulation mit abgetasteten Signalen der Faktor T_a einfach weggelassen. Dies ist gleichbedeutend mit einer Normierung des Zeitmaßes auf das Abtastintervall.

Es sei abschließend bemerkt, dass die tatsächliche Berechnung des diskreten Leistungsdichtespektrums natürlich auf DFT/FFT-Berechnungen beruht. Es sind daher auch die Aussagen aus Kapitel 4 bezüglich der Beziehungen zwischen DTFT- und DFT-Spektren zu berücksichtigen. Dies betrifft insbesondere den durch die implizite Fensterung hervorgerufenen Leakage-Fehler!

5.2.2 Beispiele für Leistungsdichtespektren

Im Folgenden sollen einige theoretische und praktische Beispiele für Leistungsdichtespektren diskutiert werden, um ein Gefühl für die Informationen zu bekommen, die man einem Leistungsdichtespektrum entnehmen kann. Da etliche der folgenden Analysen auf MATLAB-Berechnungen beruhen, wird insbesondere der Aspekt des Zusammenhangs zwischen $S_{XX}(j\omega)$ und $\Phi_{XX}(\Omega)$ noch einmal beleuchtet.

5.9 Beispiel (Weißes Rauschen)

Ein wichtiges (theoretisches) Beispiel ist das Leistungsdichtespektrum eines so genannten „*weißen*“ *Rauschens*:

Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ein (mittelwertfreier) stationärer Prozess mit der Eigenschaft, dass für das Leistungsdichtespektrum des Prozesses gilt:

$$S_{XX}(j\omega) = \text{konstant} =: \gamma^2 > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (432.1)$$

Dann heißt dieser Prozess **weißes Rauschen** und jedes Mustersignal heißt **weißes Rauschsignal**.

Genügen zusätzlich die Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ einer gewissen (für alle $t \in \mathbb{R}$ gleichen) Verteilung, dann wird der Name dieser Verteilung mit angegeben. So sprechen wir im Falle Gauß-verteilter Zufallsvariablen von einem **Gauß'schen weißen Rauschen** oder im Falle einer Gleichverteilung von einem **gleichverteilten weißen Rauschen**.

Der Name *weißes* Rauschen ist einer Analogie zum weißen Licht geschuldet. Weißes Licht ist (idealerweise) ein Gemisch von Licht aller Farben mit gleicher Intensität. Sein Spektrum enthält gleichermaßen „alle“ den Farben entsprechenden Frequenzen. Mit anderen Worten, das Spektrum ist **konstant**. Das weiße Rauschsignal enthält per Definition ebenfalls Spektralanteile gleicher Intensität für alle Frequenzbereiche. Dies erklärt den Namen.

Für die Fourier-Rücktransformierte des Leistungsdichtespektrums, also nach Definition (428.1) für die Autokorrelationsfunktion $r_{XX}(\tau)$ eines solchen Prozesses, gilt:

$$r_{XX}(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}(S_{XX}(j\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \gamma^2 \delta_0(\tau). \quad (432.2)$$

Die Autokorrelationsfunktion ist damit ein Dirac-Funktional.

Das Ergebnis zeigt, dass es sich bei einem weißen Rauschen um einen **idealisierten Prozess** handelt. Ein ideales weißes Rauschen kann *physikalisch nicht existieren*!

Wäre der oben beschriebene Prozess nämlich realisierbar, so hätte er eine endliche Varianz $\mathbb{V}(X_t) = \sigma^2 > 0$ und es gäbe für **beliebig kleine** $\tau > 0$ wegen

$$\mathbb{E}(X_t \cdot X_{t+\tau}) = 0 \quad \text{für} \quad \tau \neq 0 \quad (433.1)$$

Musterfunktionen, welche zum Zeitpunkt t einen Wert in der Nähe von, sagen wir, 0 annehmen und zum Zeitpunkt $\tau > 0$ später mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Wert $> \sigma$ (Streuung).

Stellen wir uns bei dem Prozess etwa eine Spannung vor, so muss für diesen Sprung eine Energie E aufgewendet werden. Da diese prinzipiell über eine **beliebig kurze Zeitspanne** $\tau > 0$ aufgebracht werden müsste, müsste die momentane Leistung E/τ beliebig groß werden.

Dies bedeutet, dass ein solcher Prozess eine unendlich große Leistung haben müsste (dies wird auch mit dem Dirac-Funktional zum Ausdruck gebracht).

Die Überlegung zeigt, dass der angesprochene idealisierte weiße Rauschprozess nicht realisierbar ist. Trotzdem hat dieser ideale Prozess eine große Bedeutung, denn er spielt in der mathematischen Analyse stochastischer Signale und Systeme als Referenzprozess eine wichtige Rolle. ■

5.10 Beispiel (Bandbegrenztes weißes Rauschen)

Ist das Leistungsdichtespektrum nur in einem Tiefpassbereich konstant und kann sonst vernachlässigt werden, so spricht man von **bandbegrenztem weißen Rauschen**.

Übung 143

Ist das Rauschen bandbegrenzt mit prinzipiell beliebigem Verlauf des Leistungsdichtespektrums im Tiefpassbereich, so spricht man in Analogie zur Lichtterminologie von **farbigem Rauschen (buntem Rauschen, rosa Rauschen)**.

Beispiele für bandbegrenztes weißes Rauschen sind das bereits angesprochene thermische Rauschen und (mit Einschränkungen) das Quantisierungsrauschen eines A/D-Wandlers (vgl. Abschnitt 5.5.3, S. 489ff). Die Verteilung ist in diesem Fall allerdings keine Gauß'sche Verteilung, sondern eine Gleichverteilung.

Entsprechend der obigen Definition hat ein bandbegrenztes weißes Rauschen N_t mit Grenzfrequenz ω_g die (ideale) spektrale Leistungsdichte

$$S_{NN}(j\omega) = \text{rect}_{2\omega_g}(\omega + \omega_g). \quad (433.2)$$

Die zugehörige Autokorrelationsfunktion ist mit Hilfe der Tabelle 2.3, S. 161 bzw. mit Gleichung (169.3) leicht zu ermitteln:

$$\text{rect}_{2\omega_g}(\omega + \omega_g) \bullet - \circ \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega_g}{\pi} t\right). \quad (433.3)$$

Die ideale spektrale Leistungsdichte¹⁴ und die zugehörige Autokorrelationsfunktion sind in Abbildung 5.12 für eine Grenzfrequenz von $\omega_g = 100\pi$ rad/s entsprechend 50 Hz dargestellt.

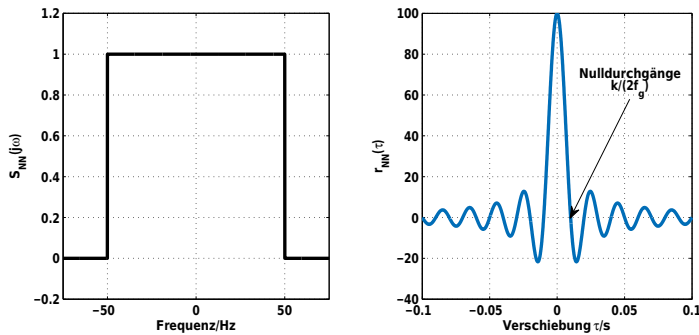


Abb. 5.12: Leistungsdichtespektrum (links) und Autokorrelationsfunktion (rechts) eines bandbegrenzten weißen Rauschprozesses

Es ist an dieser Stelle interessant, einmal dieses theoretische Ergebnis mit einer *digitalen Simulation* zu vergleichen.

Unter Simulink kann (ein zeitdiskretes) bandbegrenztes weißes Rauschen mit Hilfe des **Bandlimited White Noise**-Blocks simuliert werden (vgl. Abbildung 5.6).

Abbildung 5.13 zeigt den Block und seine Parametrisierungskarte, die sich durch Doppelklick auf den Block öffnen lässt.

Auf der Parametrisierungskarte können der Wert der (konstanten) Rauschleistungsdichte und die Abtastzeit ($T_a = 1/f_a$) eingestellt werden¹⁵. Diese bestimmt das Frequenzband, in dem die Leistungsdichte konstant ist, im vorliegenden Fall das Nyquist-Band $[-\frac{f_a}{2}, \frac{f_a}{2}]$ Hz. Um eine andere Grenzfrequenz zu simulieren, müsste das Signal mit einem entsprechenden Tiefpass gefiltert werden. Wir wollen hier jedoch der Einfachheit halber darauf verzichten.

Mit Hilfe des Simulink-Systems **s_blwnoise.slx** des Software-Begleitmaterials kann ein weißes Rauschsignal erzeugt werden.

Mit dem Initialisierungsbutton initialisieren wir das System über das Initialisierungsfile **init_blwnoise.m** etwa auf folgende Weise, um anschließend das Leistungsdichtespektrum zu bestimmen:

¹⁴ Die Darstellung des Leistungsdichtespektrums über der Hz-Skala statt über der rad/s-Skala ist zwar nicht ganz korrekt, wird jedoch hier aus Gründen der besseren Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen im Zeitbereich (z.B. Periodendauern) für die grafische Darstellung bevorzugt.

¹⁵ Der dritte Parameter ist eine frei wählbare Konstante, mit der der zu Grunde liegende Zufallsgenerator neu initialisiert werden kann.

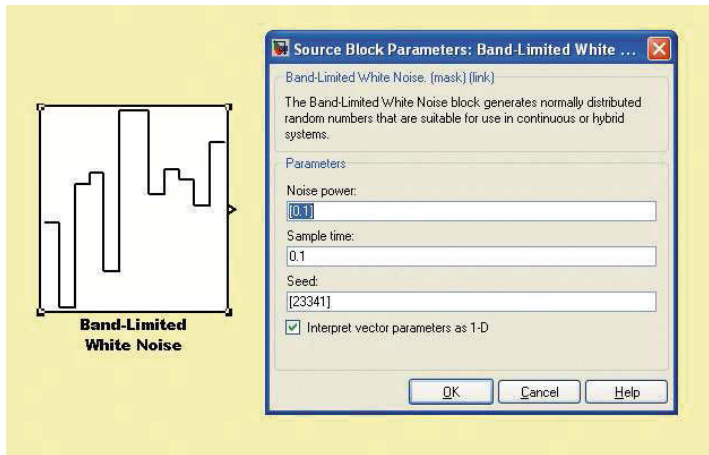


Abb. 5.13: Bandlimited White Noise-Block von Simulink und Parametrisierungskarte

```
stoptime = 10;      % Simulationsdauer
stime = 0.01;      % 1/simulierte Abtastrate
ndichte = stime;    % Leistungsdichte des Rauschens
```

Durch diese Initialisierung wird im Frequenzband $[-\pi \cdot f_a, \pi \cdot f_a]$ für den gedachten zu Grunde liegenden *zeitkontinuierlichen* Prozess eine konstante Rauschleistungsdichte von $S_{XX}(j\omega) = 0.01$ W/Hz eingestellt. Außerhalb des Bandes ist die Leistungsdichte 0.

Die Leistung des Signals ist nach (428.3):

$$r_{XX}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(j\omega) d\omega = \frac{0.01}{2\pi} \int_{-\pi f_a}^{\pi f_a} 1 d\omega = 0.01 \cdot f_a = 1. \quad (435.1)$$

Wegen¹⁶ $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{E}(X_t \cdot X_t) = r_{XX}(0)$ muss dies auch die konstante Varianz des Prozesses sein.

Mit dem Programm **SimBLWNoiseLDS** können nun mehrere Rauschsignale erzeugt werden. Anschließend werden die Autokorrelationen dieser Signale berechnet und gemittelt, um die Erwartungswertbildung in Definition (405.3) nachzubilden.

Danach wird auf der Grundlage dieser geschätzten Autokorrelation mit Hilfe einer FFT das Leistungsdichtespektrum bestimmt:

¹⁶ Der Prozess ist mittelwertfrei!


```

% Simulink-System N Mal durchsimulieren
[t,Y] = SimBLWNoise(N);

% Korrelationszeitvektor berechnen
Ta = t(2)-t(1); % Äquidistante Abtastung vorausgesetzt
ct = (-t(end):Ta:t(end));

...

% Korrelationen und Mittelung
Y = Y';
[n,m] = size(Y);
rxx = zeros(1, 2*m-1);
for k=1:n
    rxx = rxx + xcorr(Y(k,:), 'biased');
end

rxx = rxx/n;

% Leistungsdichte mit Hilfe der FFT
K = floor(N/2);
    % N Werte SYMMETRISCH herausschneiden
rxxmitte = rxx(m-K:m+K);
    % FFT berechnen
Sxx = fft(rxxmitte);
Sxx = fftshift(Sxx);

```

Mit einem Aufruf

```
>> [t, Y, ct, rxx, frq, Sxx] = SimBLWNoiseLDS(100);
```

werden 100 Mustersignale erzeugt und es wird das Leistungsdichtespektrum berechnet.

Abbildung 5.14 zeigt ein mit den folgenden Anweisungen berechnetes Ergebnis:

```

>> [t, Y, ct, rxx, frq, Sxx] = SimBLWNoiseLDS(100);
>> plot(ct, rxx, 'k', 'LineWidth', 2)
>> grid
>> xlabel('Verschiebung \tau / s')
>> ylabel('r_{xx}(\tau)')
>> figure
>> plot(frq, abs(Sxx), 'b', 'LineWidth', 2)
>> grid
>> xlabel('Frequenz / Hz')
>> ylabel('S_{xx}(f)')

```

```
>> axis([0,50,0,3])
```

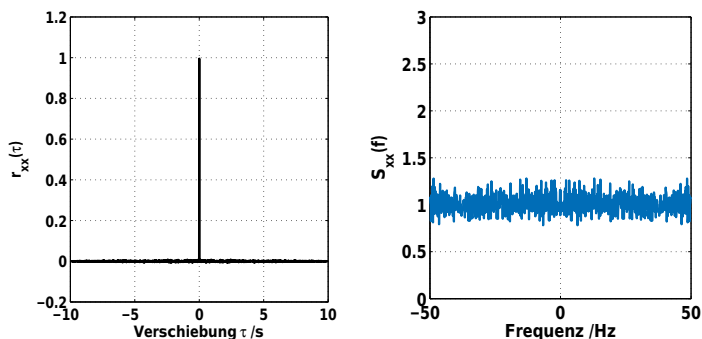


Abb. 5.14: Autokorrelation und Leistungsdichtespektrum des bandbegrenzten weißen Rauschprozesses (Schätzung)

Der Wert der Dichte ist zunächst erkennbar nicht 0.01, sondern $1 = f_a \cdot 0.01$. Dies ist eine Folge der Beziehung (431.1) zwischen dem (hier berechneten) diskreten und dem zeitkontinuierlichen Fourier-Spektrum, welches $S_{XX}(j\omega)$ zu Grunde liegt. Korrekterweise sollte daher eher $\Phi_{XX}(f)$ an der y-Achse stehen!

Die berechnete Autokorrelation scheint im Widerspruch zu dem in Abbildung 5.12 dargestellten theoretischen Ergebnis zu stehen, da diese eher impulsartig als sinc-förmig ist. Bei genauer Betrachtung jedoch sind die beiden Ergebnisse durchaus in Einklang zu bringen. Für die in der Simulation gewählte Grenzfrequenz von $\omega_g = \frac{\omega_a}{2}$ rad/s entsprechend der halben Abtastrate $\frac{f_a}{2} = 50$ Hz befinden sich die Nulldurchgänge der sinc-Funktion gerade an den Stellen:

$$t_k = \frac{k \cdot \pi}{\omega_g} = \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{\omega_a} = \frac{k}{f_a} = k \cdot T_a \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (437.1)$$

Die Autokorrelationsfunktion wird also an den *Nulldurchgängen* diskretisiert, weshalb die außerhalb von $\tau = 0$ liegenden Anteile der eigentlich sinc-förmigen Autokorrelationsfunktion nicht zu sehen sind.

Ebenfalls erklärungsbedürftig ist ggf. der Wert 1 an der Stelle 0, der nicht mit dem Wert 100 in Abbildung 5.12 übereinstimmt. Der Unterschied ergibt sich aus der unterschiedlich gewählten Rauschleistungsdichte. Die in der Simulation verwendete Rauschleistungsdichte ist 0.01 W/Hz und somit um den Faktor 100 geringer als in Abbildung 5.12. Daher ist auch die Gesamtleistung und damit der Wert $r_{NN}(0)$ in der Simulation um den Faktor 100 geringer.

Das Beispiel zeigt, dass man bei der Interpretation der zeitdiskret berechneten Kenngrößen im Hinblick auf den dahinter liegenden zeitkontinuierlichen Prozess Sorgfalt walten lassen muss. ■

Im nächsten Beispiel greifen wir Übung 133 auf und untersuchen ein harmonisches Schwingungssignal der Frequenz ω_0 rad/s, welches von additivem bandbegrenztem weißen Rauschen mit der Grenzfrequenz ω_g rad/s gestört ist.

5.11 Beispiel (Sinus in bandbegrenztem weißen Rauschen)

Die Überlegungen aus Übung 133 und die Untersuchungen des vorangegangenen Beispiels 5.10 liefern zunächst einmal das folgende theoretische Ergebnis für die Autokorrelationsfunktion eines solchen Signalgemischs (vgl. (433.3)):

$$\begin{aligned} r_{XX}(\tau) &= \frac{a^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) + r_{NN}(\tau) \\ &= \frac{a^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) + \gamma^2 \cdot \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega_g}{\pi} \tau\right). \end{aligned} \quad (438.1)$$

Übung 141 Dabei sei $\gamma^2 > 0$ die konstante Rauschleistungsdichte des störenden bandbegrenzten weißen Rauschens innerhalb seiner Grenzfrequenzen $-\omega_g$ und $+\omega_g$.

Übung 144 Die spektrale Leistungsdichte ergibt sich definitionsgemäß aus der Fourier-Transformation von (438.1). Man erhält mit den Rechenregeln und Ergebnissen aus Kapitel 2:

$$S_{XX}(j\omega) = \frac{\pi a^2}{2} \delta_0(\omega + \omega_0) + \frac{\pi a^2}{2} \delta_0(\omega - \omega_0) + \gamma^2 \text{rect}_{2\omega_g}(\omega + \omega_g). \quad (438.2)$$

In Abbildung 5.15 sind die so berechnete Autokorrelation und die zugehörige Leistungsdichte beispielhaft dargestellt. Für das bandbegrenzte Störrauschen wurde eine Grenzfrequenz von $\omega_g = 200\pi$ rad/s entsprechend 100 Hz und eine Leistungsdichte von $\gamma^2 = \frac{1}{200}$ W/Hz gewählt, um die Leistung des Rauschens auf 1 W zu normieren.

Für den Sinus wurde eine Amplitude von 1 und eine Frequenz von $\omega_0 = 100\pi$ rad/s entsprechend 50 Hz definiert.

Auch in diesem Beispiel ist es interessant und lehrreich, das theoretische Ergebnis einmal mit einer Simulation zu vergleichen.

Die Abbildung 5.16 zeigt auf der linken Seite die zeitdiskrete Simulation einer 50 Hz Sinus-schwingung mit überlagertem Gauß'schen weißen Rauschen, welches mit Hilfe des Simulink-Systems **s_onetone.slx** erzeugt wurde.

Die Simulation wurde dabei wie folgt initialisiert:

```
simudauer = 10;    % Simulationsdauer
ampl = 1;          % Amplitude des Sinus
frq = 50;          % Frequenz des Sinus in Hz
stime = 1/200;     % Schrittweite einer Fixed-Step
                  % Simulation (1/Abtaste)
```

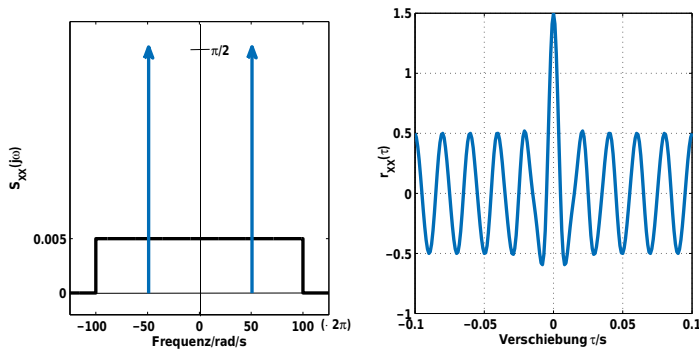


Abb. 5.15: Leistungsdichtespektrum (links) und Autokorrelationsfunktion (rechts) eines Sinus in bandbegrenztem weißen Rauschen

Das zugehörige Autokorrelationssignal ist auf der rechten Seite der Abbildung 5.16 dargestellt. Es wurde mit folgenden Anweisungen berechnet (vgl. dazu auch Abbildung 5.9):

```
>> % Berechnung des Korrelationszeitvektors
>> T = t(end); % Dauer des Signals
>> dt = stime; % Schrittweite
>> ct = (-T:dt:T); % Zeitvektor der Verschiebungen tau

>> % Autokorrelation berechnen
>> corsig = xcorr(sinrsig, 'unbiased');

>> % Autokorrelation plotten
>> plot(ct, corsig, 'b', 'LineWidth', 2)
>> grid
>> xlabel('Verschiebungszeit \tau / s')
>> ylabel('r_{xx}(\tau)')
>> axis([-0.1, 0.1, -1, 1.5])
```

Die unregelmäßige Struktur des Zeitsignals lässt das Vorhandensein des harmonischen 50-Hz-Anteils nur erahnen. Hingegen weist das Korrelationssignal deutliche periodische Merkmale auf, die es sogar erlauben, die Periodendauer und damit die Frequenz abzulesen. Die Übereinstimmung mit Abbildung 5.15 ist sehr gut, wenngleich das Korrelationssignal weniger „rund“ ist, da die Werte nur im Raster T_a des Abtastintervalls dargestellt werden können.

Der Autokorrelation können offenbar wesentliche Informationen entnommen werden, obwohl die Berechnung nur *eine Schätzung* der wahren Autokorrelationsfolge auf der Grundlage eines endlichen Ausschnitts *einer* Musterfunktion liefert.

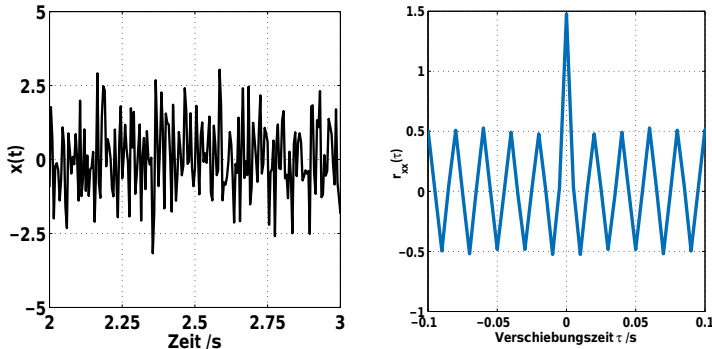


Abb. 5.16: Sinus in Gauß'schem weißen Rauschen und zugehöriges Autokorrelationssignal

Der harmonische Signalanteil tritt noch deutlicher zu Tage, wenn man die Autokorrelationsfolge resp. deren Schätzung *Fourier-transformiert*.

Man erhält eine *Schätzung*¹⁷ des *Leistungsdichtespektrums* des Prozesses.

Die Abbildung 5.17, die mit den folgenden Anweisungen erzeugt wurde, stellt diese Schätzung der *FFT der Musterfunktion* gegenüber:

```
>> % Berechnung der FFT der Musterfunktion
>> fftmuster = fft(sinrsig, 1024); % 1-K-FFT
>> fftmuster = fftshift(fftmuster);
>>
>> fa = 1/stime; % Abtastrate
>> df = fa/1024;
>> freq = (-fa/2:df:fa/2-df); % Frequenzraster FFT
>>
>> % Grafische Darstellung
>> plot(freq, abs(fftmuster), 'b', 'LineWidth', 3)
>> grid
>> xlabel('Frequenz /Hz')
>> ylabel('|DFT| von x(t)')
>>
>> % Berechnung des diskreten Leistungsdichtespektrums
>>
>> % Ausschnitt des Korrelationssignals
>> % aus der Mitte herauschneiden
>> N = length(corsig);
>> K = floor(N/2); % Mitte des Korr.Signals
>> xcsig = corsig(K-512:K+511); % 1-K herauschneiden
```

¹⁷ Man beachte: man erhält natürlich nicht *das* Leistungsdichtespektrum, da nicht das ganze Signal betrachtet wurde, sondern nur ein Ausschnitt des Signals sowie nur eine Musterfunktion!

```

>>
>> % Leistungsdichtespektrum mit FFT des Korrelations-
>> % signals schätzen
>> LDS = fft(xcsig, 1024);
>> LDSc = fftshift(LDS);           % Spektrum symmetrisch um 0

>> % Grafische Darstellung
>> figure
>> plot(freq, abs(LDSc), 'b', 'LineWidth', 3)
>> grid
>> xlabel('Frequenz /Hz')
>> ylabel('LDS von X_t')

```

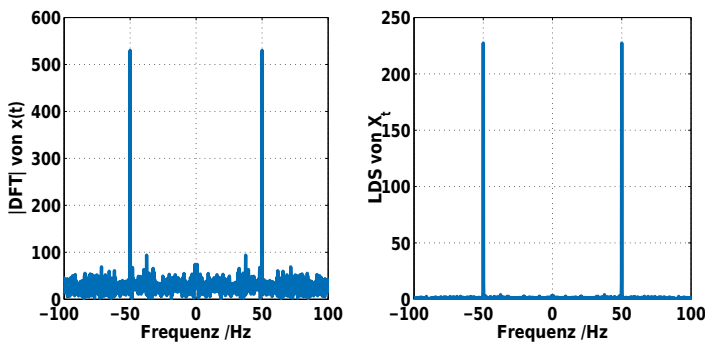


Abb. 5.17: FFT des Sinus in Gauß'schem weißen Rauschen (links) und Leistungsdichtespektrum (rechts)

Man erkennt, dass die Schätzung des Leistungsdichtespektrums deutlich weniger „verrauscht“ ist als die DFT der Musterfunktion. Hier macht sich der Mittelungseffekt der Autokorrelation bemerkbar.

Allerdings erkennt man auch, dass offenbar die DFT der Musterfunktion ebenfalls schon eine Identifikation der harmonischen Signalanteile erlauben würde, da deutliche Linien bei ± 50 Hz zu erkennen sind. Dies suggeriert, dass man zunächst die Spektren der Musterfunktion(en) berechnen könnte, um erst *hinterher* die für das Leistungsdichtespektrum notwendige Mittelung durchzuführen.

In der Tat ist dies eine weitere Methode, das Leistungsdichtespektrum zu berechnen, auf die wir in den Abschnitten 5.4.1 und 5.4.2 nochmals ausführlich zurückkommen werden.

Im Beispiel 5.8 wurde gezeigt, dass die durch die MATLAB-Funktion **rp2.m** des Begleitmaterials erzeugten *zeitdiskreten* Signale Musterfunktionen eines ergodischen stationären Prozesses

$$R_n^{(2)} = X_n \cdot Y_n + b \quad (442.1)$$

sind. Auch für diesen Prozess soll nun das (diskrete) Leistungsdichtespektrum bestimmt werden.

5.12 Beispiel (Diskreter stochastischer Prozess)

Da der Prozess als *ergodisch* angenommen werden kann, wird erneut, wie in Beispiel 5.8, ein Signal mit sehr vielen Abtastwerten erzeugt und dessen Autokorrelationsfunktion berechnet:

```
>> N = 100000;
>> rauschprozess2 = rp2(N,1);
>> xcorr2 = xcorr(rauschprozess2, 'unbiased');
```

Anschließend wird ein Ausschnitt aus der Mitte des Korrelationssignals entnommen, um damit das diskrete Leistungsdichtespektrum zu bestimmen:

```
>> % Ausschnitt des Korrelationssignals
>> % aus der Mitte herauschneiden
>> M = length(xcorr2);
>> K = floor(M/2); % Mitte des Korr.Signals
>> xcsig = xcorr2(K-1023:K+1024); % 2-K herauschneiden

>> % Leistungsdichtespektrum mit FFT des Korrelations-
>> % signals schätzen
>> LDS = fft(xcsig, 2048);
>> LDSc = fftshift(LDS); % Spektrum symmetrisch um 0

>> dOmega = 2*pi/2048;
>> nfrq = (-pi:dOmega:pi-dOmega); % Frequenzraster FFT

>> % Grafische Darstellung
>> plot(nfrq, abs(LDSc), 'b', 'LineWidth', 3)
>> grid
>> axis([-pi, pi, -0.1*max(abs(LDSc)), 1.1*max(abs(LDSc))])
>> xlabel('Normierte Frequenz / rad')
>> ylabel('\Phi_{RR}(\Omega)')
```

Abbildung 5.18 stellt Autokorrelation und Leistungsdichtespektrum des Prozesses gegenüber.

Das berechnete diskrete Leistungsdichtespektrum bedarf der Interpretation. Nach Beispiel 5.8 ist die Autokorrelationsfolge des Prozesses:

$$r_{RR}^{(2)}(k) := \begin{cases} b^2 = 0.5625 & \text{für } k \neq 0, \\ \mathbb{V}(R_n^{(2)}) + b^2 = \sigma^2 + b^2 = 0.5903 & \text{für } k = 0. \end{cases} \quad (442.2)$$

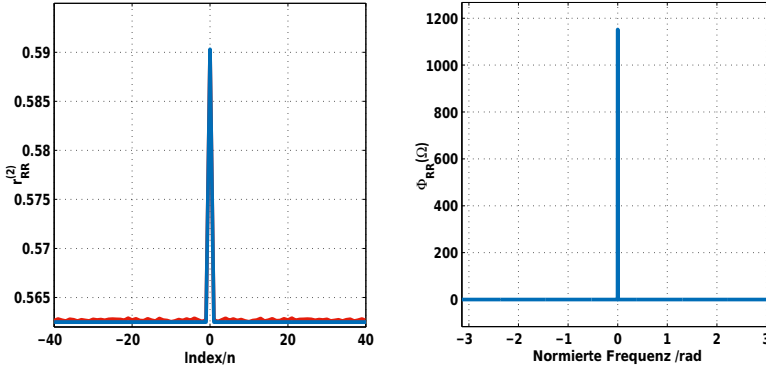


Abb. 5.18: Autokorrelationssignal und diskretes Leistungsdichtespektrum des Prozesses $R_n^{(2)}$

Damit kann $r_{RR}^{(2)}(k)$ als Überlagerung einer Konstantfolge und eines gewichteten diskreten Impulses beschrieben werden:

$$r_{RR}^{(2)}(k) := b^2 + \sigma^2 \cdot \delta_0(k). \quad (443.1)$$

Das diskrete Leistungsdichtespektrum ist nach Definition die DTFT des Signals.

Die obige Berechnung des diskreten Leistungsdichtespektrums beruht jedoch auf einem *endlichen* Signalausschnitt der Länge $N = 2048$:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{RR}^{(2)}(k) &:= \text{rect}_N(k) \cdot (b^2 + \sigma^2 \cdot \delta_0(k)) \\ &= b^2 \cdot \text{rect}_N(k) + \sigma^2 \cdot \delta_0(k) \cdot \text{rect}_N(k) \\ &= b^2 \cdot \text{rect}_N(k) + \sigma^2 \cdot \delta_0(k). \end{aligned} \quad (443.2)$$

Die DTFT von $\sigma^2 \cdot \delta_0(k)$ ist sehr leicht zu berechnen. Es gilt nach Definition (313.1):

$$\begin{aligned} (\sigma^2 \cdot \delta_0(k))_{k \in \mathbb{Z}} &\xrightarrow{DTFT} \sigma^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_0(k) e^{-j\Omega k} \\ &= \sigma^2 \cdot e^{-j\Omega 0} = \sigma^2 \quad \forall \Omega \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (443.3)$$

Etwas schwieriger ist der Teil $b^2 \cdot \text{rect}_N(k)$ zu behandeln. Es gilt:

$$\begin{aligned} (b^2 \cdot \text{rect}_N(k))_{k \in \mathbb{Z}} &\xrightarrow{DTFT} b^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}_N(k) e^{-j\Omega k} \\ &= b^2 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\Omega k} = b^2 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (e^{-j\Omega})^k \end{aligned} \quad (443.4)$$

$$= \begin{cases} b^2 \cdot \frac{1-e^{-jN\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} & \text{für } \Omega \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, \\ b^2 \cdot N & \text{für } \Omega = 0. \end{cases}$$

Damit erhält man insgesamt für das berechnete Leistungsdichtespektrum:

$$\Phi_{\tilde{R}\tilde{R}}(\Omega) = \begin{cases} \sigma^2 + b^2 \cdot \frac{1-e^{-jN\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} & \text{für } \Omega \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, \\ \sigma^2 + b^2 \cdot N & \text{für } \Omega = 0. \end{cases} \quad (444.1)$$

In der MATLAB-Simulation wird nun nicht die komplette DTFT berechnet, sondern die DFT (FFT). Nach (323.4) entspricht die DFT im vorliegenden Fall aber exakt der Auswertung der DTFT an den diskreten Stützstellen

$$\Omega_m := \frac{2\pi m}{N}, \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (444.2)$$

Wegen

$$e^{-jN\Omega_m} = e^{-jN \frac{2\pi m}{N}} = e^{-j2\pi m} = 1 \quad \forall m = 1, \dots, N-1 \quad (444.3)$$

folgt aber aus (444.1) unmittelbar:

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{R}\tilde{R}}(m) &= \begin{cases} \sigma^2 & \text{für } m = 1, \dots, N-1, \\ \sigma^2 + b^2 \cdot N & \text{für } m = 0. \end{cases} \\ &= \sigma^2 + b^2 \cdot N \cdot \delta_0(m). \end{aligned} \quad (444.4)$$

Mit den konkreten Daten $b^2 \cdot N = 0.5625 \cdot 2048 = 1152$ und $\sigma^2 = 0.0278$ erhält man:

$$\Phi_{\tilde{R}\tilde{R}}(m) = \begin{cases} 0.0278 & \text{für } m = 1, \dots, 2047, \\ 1152.0278 & \text{für } m = 0. \end{cases} \quad (444.5)$$

An der Grafik sind diese Werte nicht sehr gut zu erkennen, jedoch können zu Kontrolle die Werte des Vektors LDS inspiziert werden¹⁸:

```
>> LDS(1)           % Wert bei Omega_0 = 0
ans =
1.1521e+003
```

¹⁸ Die abgedruckten Werte können, wie generell bei allen Simulationen in diesem Kapitel, von Simulation zu Simulation leicht abweichen!

```
>> LDS(2:15)    % erste 14 Werte bei Omega_m für m>0

ans =

-0.0349 - 0.0000i
 0.0059 + 0.0000i
-0.0240 - 0.0000i
 0.0193 + 0.0000i
-0.0245 - 0.0000i
 0.0237 - 0.0000i
-0.0277 - 0.0000i
 0.0287 - 0.0000i
-0.0282 - 0.0000i
 0.0286 - 0.0000i
-0.0231 - 0.0000i
 0.0236 - 0.0000i
-0.0246 - 0.0000i
 0.0247 + 0.0000i
```

Man erkennt, dass der Wert bei $m = 0$ (ungefähr) dem theoretischen Wert entspricht. Jedoch können die Vorzeichenwechsel der Werte für $m > 0$ nicht mit den theoretischen Überlegungen in Einklang gebracht werden.

Ein Blick auf die linke Seite der Abbildung 5.18 gibt allerdings auch über diesen Effekt Aufschluss. Die Spitze der Autokorrelationsfolge $r_{RR}^{(2)}(k)$ befindet sich nicht wie in Gleichung (442.2) am Anfang (bei $k = 0$), sondern ist in die Mitte, also um $N/2 = 1024$ Takte, verschoben (verzögert). Nach den Rechenregeln für die DTFT (s. Tabelle 4.2, S. 316) muss die oben berechnete DTFT daher mit dem Faktor $e^{-j\Omega \frac{N}{2}}$ multipliziert werden. An den Auswertestellen der DFT erhält man dann den Faktor:

$$e^{-j\frac{N}{2}\Omega_m} = e^{-j\frac{N}{2}\frac{2\pi m}{N}} = e^{-j\pi m} = \begin{cases} -1 & \text{für } m = 1, \dots, N-1, m \text{ ungerade,} \\ 1 & \text{für } m = 1, \dots, N-1, m \text{ gerade.} \end{cases} \quad (445.1)$$

Dies erklärt die Vorzeichenwechsel. Die Abweichungen vom exakten Wert 0.0278 sind stochastischer Natur, da die MATLAB-Berechnung auf der Basis einer *Musterfunktion* durchgeführt wurde.

Die MATLAB-Berechnung wird somit durch die theoretischen Überlegungen bestätigt und erklärt. ■

Das soeben sehr ausführlich behandelte Beispiel 5.12 ist nicht nur im Bezug auf die Behandlung diskreter stationärer Prozesse lehrreich, sondern illustriert nebenbei noch einen sehr unangenehmen Effekt, der bei der Berechnung der Leistungsdichtespektren auftreten kann.

Die Abbildung 5.18 illustriert sehr schön, dass der durch den **Gleichanteil** $b = 0.75$ (bzw. $b^2 = 0.5625$) verursachte sehr hohe „Peak“ im Leistungsdichtespektrum die übrigen Werte komplett maskieren kann.

Es empfiehlt sich daher generell, Gleichwerte vor der Berechnung des Leistungsdichtespektrums aus dem Signal zu eliminieren. Dies kann entweder durch die Berechnung des Gleichwertes mit der MATLAB-Funktion `mean` geschehen oder man verwendet gleich die MATLAB-Funktion `detrend`, mit der auch ggf. vorhandene lineare „Trends“ (wie etwa im Beispiel der Funktion `rp1`) eliminiert werden können.

Im obigen Beispiel etwa liefert die folgende Berechnung die Abbildung 5.19:

```
>> N = 100000;
>> rauschprozess2 = rp2(N,1);
>> % Trends und Mittelwert eliminieren
>> rauschprozess2 = detrend(rauschprozess2);
>> xcorr2 = xcorr(rauschprozess2, 'unbiased');

>> % Ausschnitt des Korrelationssignals
>> % aus der Mitte herausschneiden
...
% Grafische Darstellung
plot(nfrq, abs(LDSc), 'b', 'LineWidth', 3)
grid
axis([-pi, pi, -0.1*max(abs(LDSc)), 1.1*max(abs(LDSc))])
xlabel('Normierte Frequenz / rad')
ylabel('| \Phi_{RR}(\Omega) |')
```

Man erkennt nun sehr viel besser die Struktur des Leistungsdichtespektrums außerhalb des Gleichanteils, den man ggf. ja auch getrennt bestimmen kann.

5.2.3 Überlagerung stochastischer und deterministischer Signale

Die bisherigen Betrachtungen setzten voraus, dass es sich bei den beobachteten Signalen um Musterfunktionen von **Zufallsprozessen** handelt. Unter diesen Voraussetzungen wurden Kenngrößen für die Zufallssignale definiert.

In der Praxis trifft man aber Signale an, die sich aus überlagerten stochastischen **und deterministischen** Anteilen zusammensetzen. Im Beispiel 5.11 etwa wurde ein Gemisch aus einem deterministischen Signal (Sinusschwingung) und einem Zufallssignal (weißes Rauschen) bereits unter stillschweigender Voraussetzung der Ergodizität untersucht und es wurden ohne Rücksicht auf diese Zusammensetzung Autokorrelation und Leistungsdichte berechnet. Offenbar führte diese Berechnung sinnvollen Ergebnissen, sodass zu vermuten ist, dass sich die Begriffe in irgendeiner Form auch auf deterministische Anteile übertragen lassen.

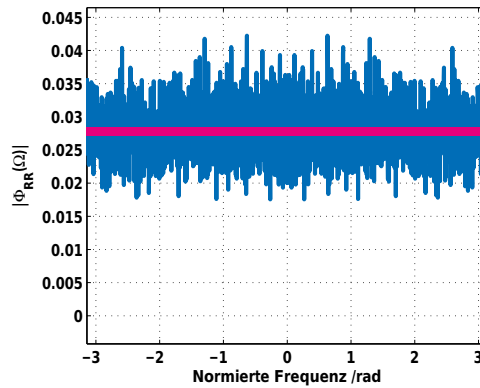


Abb. 5.19: Betrag des Leistungsdichtespektrums des Prozesses $R_n^{(2)}$ ohne Gleichanteil (Linie = theoretischer Wert)

Bei deterministischen Signalen unterscheiden wir zwischen *Energie-* und *Leistungssignalen*.

Energiesignale müssen zwangsläufig *abklingende* Signale sein (s. Definition (21.1)). Die eingeführten Begriffe sind aber, insbesondere unter der Ergodizitätsannahme, nur sinnvoll, wenn man davon ausgeht, dass die Musterfunktionen (ähnlich wie bei periodischen Signalen) nie abklingen. Ansonsten berechnen sich die Größen (410.1) bis (410.6) alle zu 0!

Diese Definitionen ergeben also im Falle *abklingender* Signale (so genannter *impulsartiger* Signale) keinen Sinn. Allerdings gibt es hierfür anders lautende Definitionen, für welche wir auf die einschlägige Literatur ([14]) verweisen.

Wesentlich interessanter ist der Fall *periodischer deterministischer* Signale, auf die wir die Begriffe im Folgenden erweitern wollen.

Autokorrelation und Leistungsdichtespektrum periodischer zeitkontinuierlicher Signale

Wir betrachten zunächst beispielhaft den Fall einer harmonischen Schwingung und versuchen die in (410.1), (410.2) und (410.3) eingeführten Kenngrößen auf diesen Fall zu übertragen.

Wie so oft gehen wir dabei aus Vereinfachungsgründen einmal mehr zunächst von einer *komplexen* Schwingung $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ aus.

Es folgt:

$$\bar{x} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{j\omega_0 t} dt \quad (447.1)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{1}{j\omega_0} \left(e^{j\omega_0 \frac{T_0}{2}} - e^{-j\omega_0 \frac{T_0}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{T_0} \cdot \frac{1}{j\omega_0} (e^{j\pi} - e^{-j\pi}) = 0.
\end{aligned}$$

Dabei ist $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ die Periodendauer des Signals. Da das Signal periodisch ist, ist es durch den Verlauf **über einem Periodizitätsintervall vollständig bestimmt**, sodass der Grenzwert des ersten Integrals in (447.1) das Integral über ein Periodizitätsintervall ist.

Mit der gleichen Argumentation fallen auch in den beiden nächsten Berechnungen die Grenzübergänge weg. Es gilt¹⁹:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x^2 &:= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t) - \bar{x}|^2 dt \quad (448.1) \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |e^{j\omega_0 t} - 0|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1 dt = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{r}_{xx}(\tau) &:= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x^*(t+\tau) dt \quad (448.2) \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega_0(t+\tau)} dt = e^{-j\omega_0 \tau} \cdot \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1 dt = e^{-j\omega_0 \tau}.
\end{aligned}$$

Die Autokorrelationsfunktion ist also insbesondere wieder eine (komplexe) harmonische Schwingung gleicher Frequenz.

Mit Hilfe der aus der Euler'schen Identität abgeleiteten Formel

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) = A \cdot \frac{1}{2j} \left(e^{j(\omega_0 t + \phi)} - e^{-j(\omega_0 t + \phi)} \right) \quad (448.3)$$

lässt sich dieses Ergebnis schnell auf reelle harmonische Schwingungen $x(t)$ übertragen. Exemplarisch, weil von besonderem Interesse, sei dies hier für die Autokorrelationsfunktion durchgeführt. Man errechnet:

$$\bar{r}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) \cdot A \cdot \sin(\omega_0(t + \tau) + \phi) dt \quad (448.4)$$

¹⁹ Man beachte: bei Verwendung **komplexer** Signale müssen r_{xx} und $\bar{\sigma}_x^2$ mit Hilfe **konjugiert komplexer** Funktionen bei der Produktbildung definiert werden!

$$\begin{aligned}
&= A^2 \left(\frac{1}{2j} \right)^2 \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(e^{j(\omega_0 t + \phi)} e^{j(\omega_0(t+\tau) + \phi)} + e^{-j(\omega_0 t + \phi)} e^{-j(\omega_0(t+\tau) + \phi)} \right. \\
&\quad \left. - e^{-j(\omega_0 t + \phi)} e^{j(\omega_0(t+\tau) + \phi)} - e^{j(\omega_0 t + \phi)} e^{-j(\omega_0(t+\tau) + \phi)} \right) dt \\
&= -\frac{A^2}{4} \frac{1}{T_0} \left(e^{j\omega_0 \tau} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j(2\omega_0 t + 2\phi)} dt + e^{-j\omega_0 \tau} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-j(2\omega_0 t + 2\phi)} dt \right) \\
&\quad + \frac{A^2}{4} (e^{j\omega_0 \tau} + e^{-j\omega_0 \tau}).
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt dies:

$$\bar{r}_{xx}(\tau) = 0 + 0 + \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau). \quad (449.1)$$

Die Korrelationsfunktion einer reellen harmonischen Schwingung ist folglich eine Cosinusschwingung mit der Summe $\frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4}$ der **Betragsquadrate** der komplexen Fourier-Koeffizienten $\pm j\frac{A}{2}$ als Amplitude!

Jedes²⁰ periodische Signal $x(t)$ kann jedoch in eine **Fourier-Reihe**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (449.2)$$

also in eine Überlagerung von komplexen Schwingungen entwickelt werden. Daher errechnet man analog folgendes allgemeine Resultat (s. Übung 145):

Übung 145

Sei $x(t)$ ein periodisches, zeitkontinuierliches reelles Signal mit Grundfrequenz ω_0 und komplexer Fourier-Reihenentwicklung

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}. \quad (449.3)$$

Dann ist

$$r_{xx}(\tau) = c_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \cos(k\omega_0 \tau) \quad (449.4)$$

die **Autokorrelationsfunktion** des Signals.

²⁰ eigentlich jedes periodische Signal, welches die *Dirichlet-Bedingungen* erfüllt, also praktisch alle in der Anwendung relevanten periodischen Signale!

Betrachtet man ein periodisches Spannungssignal, so hat die rechte Seite von Gleichung (449.4) (bezogen auf 1Ω) die Einheit V^2/Ω , also W und damit die Einheit der Leistung.

Die Übertragung des Begriffs des Leistungsdichtespektrums ist damit für periodische Signale einfach:

Sei $x(t)$ ein periodisches, zeitkontinuierliches reelles Signal mit Grundfrequenz ω_0 und komplexer Fourier-Reihenentwicklung

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}. \quad (450.1)$$

Dann heißt die Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned} S_{xx}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \delta_0(\omega - k\omega_0) \end{aligned} \quad (450.2)$$

der Autokorrelationsfunktion das **Leistungsdichtespektrum** des Signals.

Da $r_{xx}(\tau)$ die Einheit der Leistung hat, hat $S_{xx}(j\omega)$ demzufolge die Einheit W/Hz. Es handelt sich somit um ein **Leistungsdichtespektrum**. Die Leistung des Signals berechnet sich durch Integration über das Leistungsdichtespektrum (vgl. 428.3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(j\omega) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(\omega - k\omega_0) d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \end{aligned} \quad (450.3)$$

Eine Überlegung wie für (428.3) zeigt, dass dies der Größe $r_{xx}(0)$ entspricht. Korrelationsfunktionen und Leistungsdichtespektren von periodischen und stochastischen Signalen lassen sich also mit den gleichen Berechnungsvorschriften ermitteln. Da in der Praxis nur endliche (diskretisierte) Signalabschnitte gegeben sind, können diese Berechnungen für alle Signale durchgeführt werden. Dabei werden impulsartige und nicht-periodische Signale implizit *periodisiert*, d.h. für die Fourier-Transformation ergibt sich das gleiche Ergebnis wie für eine periodisch außerhalb des Datenfensters fortgesetzte Version des Signals.

5.2.4 Übungsaufgaben

Übung 141 (Lösungsband Seite 325)

Zeigen Sie, dass für einen zeitkontinuierlichen stationären Prozess aus $S_{XX}(0) = 0$ stets folgt:

$$\int_0^{\infty} r_{XX}(\tau) d\tau = 0. \quad (451.1)$$

Übung 142 (Lösungsband Seite 326)

Für einen zeitkontinuierlichen stationären Prozess X_t sei

$$S_{XX}(j\omega) = \text{rect}_{40\pi}(\omega + 20\pi) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{40}\right) \quad (451.2)$$

das zugehörige Leistungsdichtespektrum.

- Skizzieren Sie das Leistungsdichtespektrum.
- Berechnen Sie die zugehörige Autokorrelationsfunktion.
- Welche Leistung hat der Prozess?

Übung 143 (Lösungsband Seite 329)

Erzeugen Sie mit MATLAB Abtastwerte eines mit $f_a = 200$ Hz abgetasteten, im Band $[-50, 50]$ Hz bandbegrenzten weißen Gauß'schen Prozesses N_t mit Leistung 1.

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

- Erzeugen Sie Abtastwerte eines *geeigneten* im Band $[-100, 100]$ Hz bandbegrenzten weißen Gauß'schen Prozesses. Wählen Sie dazu mit der MATLAB-Hilfe eine passende MATLAB-Funktion.
- Tiefpass-filtern* Sie das Signal im Band $[-50, 50]$ Hz. Wählen Sie dazu mit dem `fdatool` ein geeignetes diskretes Tiefpassfilter.
- Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie das diskrete Leistungsdichtespektrum des Filter-Ausgangssignals berechnen.



Hinweis: Erzeugen Sie mit dem `fdatool` in Teil (b) mit File - Generate MATLAB Code - Filter Design Function zunächst ein MATLAB-Programm, welches bei Aufruf ein so genanntes *Filter-Objekt* erzeugt. Mit diesem Filter-Objekt kann die Funktion `filter` die Filterung des Signals vornehmen.

Übung 144 (Lösungsband Seite 332)

Betrachten Sie den Prozess:

$$X_t = 10 + \sin(2\pi \cdot 10 \cdot t) + N_t. \quad (452.1)$$

Dabei sei N_t ein im Frequenzband $[-50, 50]$ Hz bandbegrenztes Gaußsches weißes Rauschen.

- Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{XX}(j\omega)$ des Prozesses.
- Überprüfen Sie Ihre Berechnung aus Aufgabenteil (a) durch eine MATLAB/Simulink-Simulation. Verwenden Sie dazu eine Abtastrate von 100 Hz.
- Führen Sie eine weitere Simulation mit einem Signal durch, welches Sie mit der MATLAB-Funktion `detrend` um den Gleichwert bereinigt haben.

Was stellen Sie fest?

Übung 145 (Lösungsband Seite 336)

Weisen Sie für reelle Signale der Form (449.2) nach, dass die **Autokorrelationsfunktion**, wie in (449.4) angegeben, durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$r_{xx}(\tau) = c_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \cos(k\omega_0\tau). \quad (452.2)$$

Übung 146 (Lösungsband Seite 337)

Betrachten Sie den Prozess:

$$X_t = 8 \sin^4(2\pi \cdot 10 \cdot t) + N_t. \quad (452.3)$$

Dabei sei N_t ein im Frequenzband $[-50, 50]$ Hz bandbegrenztes Gauß'sches weißes Rauschen mit einer Leistung von 4 W.

- Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{XX}(j\omega)$ des Prozesses.
- Überprüfen Sie Ihre Berechnung aus Aufgabenteil (a) durch eine MATLAB-Simulation, wobei die verwendete Musterfunktion vorher mit der MATLAB-Funktion `detrend` um den Gleichwert bereinigt werden sollte.
- Bestimmen Sie theoretisch und experimentell die Leistung des Signals.

5.3 LTI-Systeme bei stochastischer Erregung

Im vorliegenden Abschnitt wenden wir uns der Frage zu, wie LTI-Systeme auf stochastische Signale reagieren. Die Beantwortung dieser Frage ist für die Anwendungen insofern von zentraler Bedeutung, als praktisch alle realen Signale entweder stochastischer Natur sind oder mit stochastischen Anteilen behaftet sind.

5.3.1 Das Wiener-Lee-Theorem

Die Frage, wie LTI-Systeme auf *deterministische Signale* reagieren, wurde bereits in den Kapiteln 2 und 4 vollständig beantwortet. Es ist bekannt, dass die Funktionsweise von LTI-Systemen im Zeitbereich (i.Allg.) durch die **Impulsantwort** vollständig beschrieben werden kann. Des Weiteren kann das Übertragungsverhalten mit Hilfe entsprechender Transformationen durch die jeweiligen **Übertragungsfunktionen im Bildbereich** ($H(s)$ resp. $H(z)$) oder **im Frequenzbereich** ($H(j\omega)$ resp. $H(\Omega)$) beschrieben werden.

Ein ähnliches Verhalten ergibt sich zum Glück *auch für stochastische Signale*.

Wir betrachten dazu zwei zeitkontinuierliche (stationäre) Prozesse²¹ X_t und Y_t , wobei X_t der **Eingangsprozess** und Y_t der **Ausgangsprozess**²² eines LTI-Systems sei. Das LTI-System werde durch die **Impulsantwort** $h(t)$ definiert (vgl. Abbildung 5.20).

Übung 147

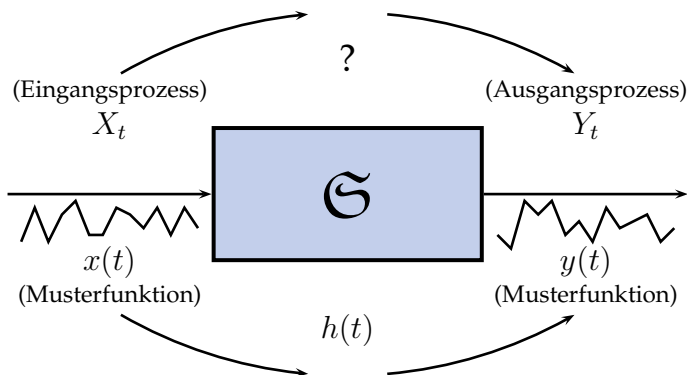


Abb. 5.20: LTI-Systeme und stochastische Eingangssignale

Zwei zusammengehörige Musterfunktionen $x(t)$ und $y(t)$ stehen somit in der Beziehung:

²¹ Für zeitdiskrete Prozesse ist die Argumentationskette die gleiche.

²² Natürlich muss gezeigt werden, dass der Ausgangsprozess eines LTI-Systems für einen (im weiteren Sinne) stationären Prozess wieder stationär ist. Der Leser sei hierfür auf die Übung 147 verwiesen!

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\rho) h(t - \rho) d\rho. \quad (454.1)$$

Den (statistischen) Zusammenhang zwischen **sämtlichen** möglichen Musterfunktionen des Eingangsprozesses und entsprechenden Musterfunktionen des Ausgangsprozesses gibt²³ die **Kreuzkorrelationsfunktion** wieder:

$$r_{XY}(\tau) = \mathbb{E}(X_t \cdot Y_{t+\tau}). \quad (454.2)$$

Wegen (454.1) erhält man mit der Substitution $\rho' = t - \rho$ (und anschließender Umbenennung $\rho' = \rho$):

$$\begin{aligned} r_{XY}(\tau) &= \mathbb{E} \left(X_t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X_{\rho} \cdot h(t + \tau - \rho) d\rho \right) \\ &= \mathbb{E} \left(X_t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X_{t-\rho} \cdot h(\tau + \rho) d\rho \right). \end{aligned} \quad (454.3)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} r_{XY}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X_t \cdot X_{t-\rho}) \cdot h(\tau + \rho) d\rho \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} r_{XX}(-\rho) \cdot h(\tau + \rho) d\rho. \end{aligned} \quad (454.4)$$

Mit einer weiteren Substitution ergibt sich:

$$r_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{XX}(\rho) \cdot h(\tau - \rho) d\rho = h(\tau) * r_{XX}(\tau). \quad (454.5)$$

Mit dem Faltungssatz der Fourier-Transformation erhält man die Beziehung

$$S_{XY}(j\omega) = H(j\omega) \cdot S_{XX}(j\omega) \quad (454.6)$$

zwischen dem Kreuzleistungsdichtespektrum von Ein- und Ausgangsprozess und dem Leistungsdichtespektrum des Eingangsprozesses.

Ganz allgemein kann man auf ähnliche Weise das so genannte **Wiener-Lee-Theorem** herleiten:

²³ In der Darstellung beschränken wir uns auf reelle Prozesse.

Sei der (zeitkontinuierliche) stationäre stochastische Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ **Eingangsprozess** eines LTI-Systems $\mathfrak{S}$. Sei ferner $H(j\omega)$ die Übertragungsfunktion des LTI-Systems im Frequenzbereich und $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$ der zu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ gehörige **Ausgangsprozess** des Systems.

Dann gilt für die Leistungsdichtespektren:

$$\begin{aligned} S_{XY}(j\omega) &= H(j\omega) \cdot S_{XX}(j\omega), \\ S_{YX}(j\omega) &= H^*(j\omega) \cdot S_{XX}(j\omega) \end{aligned} \quad (455.1)$$

und

$$S_{YY}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot S_{XX}(j\omega). \quad (455.2)$$

In ähnlicher Weise lässt sich dieses Resultat für *zeitdiskrete* Prozesse formulieren:

Sei der (zeitdiskrete) stationäre stochastische Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ **Eingangsprozess** eines LTI-Systems $\mathfrak{S}$. Sei ferner $H(\Omega)$ die Übertragungsfunktion des LTI-Systems im Frequenzbereich und $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ der zu $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gehörige **Ausgangsprozess** des Systems.

Dann gilt für die Leistungsdichtespektren:

$$\begin{aligned} \Phi_{XY}(\Omega) &= H(\Omega) \cdot \Phi_{XX}(\Omega), \\ \Phi_{YX}(\Omega) &= H^*(\Omega) \cdot \Phi_{XX}(\Omega) \end{aligned} \quad (455.3)$$

sowie

$$\Phi_{YY}(\Omega) = |H(\Omega)|^2 \cdot \Phi_{XX}(\Omega). \quad (455.4)$$

Man beachte die Ähnlichkeit zu den Übertragungsgleichungen für deterministische Signale.

Als wesentliche Folgerung und Anwendung der obigen Gleichungen erhalten wir eine Methode, die es erlaubt, das Übertragungsverhalten eines LTI-Systems mit **Hilfe von stochastischen Signalen zu ermitteln**. Dazu müssen, statt wie im deterministischen Fall die Aus- und Eingangssignalspektren, offenbar die entsprechenden Leistungsdichtespektren ins Verhältnis gesetzt werden.

Zieht man in Betracht, dass weißes Rauschen resp. bandbegrenztes weißes Rauschen eine konstante Rauschleistungsdichte hat – beispielsweise konstant 1 – so kann man offenbar mit den nachfolgenden Beziehungen das

Übertragungsverhalten eines LTI-Systems mit Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ im Frequenzbereich ermitteln:

$$\begin{aligned} S_{XY}(j\omega) &= H(j\omega) \cdot 1 = H(j\omega), \\ S_{YY}(j\omega) &= |H(j\omega)|^2 \cdot 1 = |H(j\omega)|^2 \end{aligned} \quad (456.1)$$

Übung 148 Darüber hinaus kann man, wenn man das System und damit $H(j\omega)$ richtig wählt, auf der Grundlage von (456.1) durch Filterung von weißen Rauschsignalen ein gewünschtes stochastisches Signal *mit vorgegebener Leistungsdichte* erzeugen.

Im zeitdiskreten Fall gelten für ein bandbegrenztes weißes Rauschen mit konstanter Rauschleistungsdichte 1 im Nyquistband ($\Omega \in [-\pi, \pi]$) die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Phi_{XY}(\Omega) &= H(\Omega) \cdot 1 = H(\Omega), \\ \Phi_{YY}(\Omega) &= |H(\Omega)|^2 \cdot 1 = |H(\Omega)|^2. \end{aligned} \quad (456.2)$$

Im Zusammenhang mit der Ermittlung der Übertragungsfunktion eines unbekannten Systems durch Anregung des Systems mittels eines weißen Rauschsignals spricht man von **Systemidentifikation**.

Die gezielte Erzeugung von stochastischen Signalen mit Hilfe von geeigneten Filtern heißt **Formfilterung** und die entsprechenden Filter heißen **Formfilter**.

Ein Beispiel für die Anwendungsmöglichkeit einer solchen Formfilterung aus dem Fahrzeugbereich ist die Möglichkeit, aus dem Leistungsdichtespektrum einer Fahrbahnunebenheitsmessung ein **Fahrbahnrauigkeitssignal** zu erzeugen, welches dann als fahrbahntypisches Anregungssignal auf einem Prüfstand verwendet werden kann. Wir werden hierauf in Abschnitt 5.5 noch einmal zurückkommen.

5.3.2 Systemidentifikation

Die Grundidee der Systemidentifikation mit rauschartigen Signalen auf der Grundlage des Wiener-Lee-Theorems spielt in der Praxis dort eine Rolle, wo die Möglichkeit der Anregung durch Impulse (Dirac-Impulse) nur schwer möglich ist oder wo die Anregung eines (unbekannten) LTI-Systems durch Rauschen einfacher ist (etwa im akustischen Bereich oder im Umfeld elektronischer Systeme).

Im Folgenden soll anhand eines einfachen Beispiels illustriert werden, wie eine solche Systemidentifikation durchgeführt werden kann.

5.13 Beispiel (Systemidentifikation eines Bandpasses)

Wir greifen dazu das Beispiel 5.7 noch einmal auf und erzeugen mit Hilfe des iterationsfähigen Simulink-Systems **s_Rausch2.slx** der Begleitsoftware *mittelwertfreie* Musterfunktionen eines Rauschsignals und eines durch einen Bandpass gefilterten Rauschsignals.

Wäre der Bandpass ein *unbekanntes LTI-System* und die simulierten Rauschsignale gemessene Signale, so könnte der Bandpass auf der Grundlage des Wiener-Lee-Theorems mit Hilfe des Programms **Bsp_SysIdent identifiziert** werden.

Zur Verdeutlichung des Verfahrens wollen wir die Anweisungen von **Bsp_SysIdent** im Detail durchdiskutieren.

Zunächst wird mit den folgenden Anweisungen das Simulink-File geöffnet und es werden die Parameter²⁴ des Simulink-Systems vorinitialisiert:

```
% Simulink-System öffnen
open_system('s_Rausch2')

% Initialisierung der Simulationsparameter
simudauer = 10;      % Simulationsdauer
bw = 5;              % Bandbreite in Hz
frequenz = 200;      % Mittenfrequenz in Hz
fixstep = 0.0005;    % Schrittweite / 1/Abtastrate = 1/2000
dichte = fixstep;    % Rauschleistungsdichte
                  % (Rauschleistung auf 1 normiert)
```

Im vorliegenden Versuch wurden die Parameter wie folgt gewählt:

Mit Hilfe der innerhalb von **Bsp_SysIdent** aufgerufenen Funktion **Iter-Rausch2** kann das Simulink-System eine vorgegebene Anzahl von Malen durchsimuliert werden. Diese Anzahl wurde für das vorliegende Experiment mit 50 definiert²⁵:

```
% Mehrfacher Aufruf des Systems und Mittelung der
% berechneten Korrelationen mit der Funktion
% IterRausch2 (hier 50 Mittelungen)
[ct, corrNoise, corrBP] = IterRausch2(50, simudauer, fixstep, 0);
```

²⁴ Soll mit anderen Parametern simuliert werden, so muss das Script-File **Bsp_SysIdent.m** vorab entsprechend geändert werden.

²⁵ Auch dieser Parameter muss durch Editieren des Script-Files **Bsp_SysIdent.m** bei Bedarf geändert werden.

Nach jedem Aufruf von **s_Rausch2.slx** werden innerhalb dieser Funktion die Autokorrelationsfunktionen (eigentlich Autokorrelationsfolgen) des Eingangssignals und des Ausgangssignals des in **s_Rausch2.slx** definierten Bandpasses berechnet. Am Ende werden diese Autokorrelationen gemittelt um die Scharmittelwert-Berechnung nachzubilden.

Im Anschluss daran berechnet die Funktion **Bsp_SysIdent** die Leistungsdichtespektren des Eingangssignals (im vorliegenden Fall weißes Rauschen) und des Ausgangssignals des Bandpasses:

```
% Leistungsdichte des Eingangssignals mit Hilfe der FFT
N = length(corrNoise); M = floor(N/2);

K = 4*1024; % 4*1024 Werte aus der Mitte herausschneiden
corrNoisemitte = corrNoise(M-K+1:M+K);
Phixx = fft(corrNoisemitte, 2*K);
Phixx = fftshift(Phixx);

% Leistungsdichte des Ausgangssignals mit Hilfe der FFT
corrBPmitte = corrBP(M-K+1:M+K);
Phiyy = fft(corrBPmitte, 2*K);
Phiyy = fftshift(Phiyy);
```

Dabei werden 8-K Daten aus der Mitte des Korrelationssignals²⁶ verwendet. Auf der Grundlage der Formel (455.2) kann nun das Betragsquadrat $|H(j\omega)|^2$ der Übertragungsfunktion des Bandpasses geschätzt werden. Dabei muss zunächst beachtet werden, dass lediglich die *diskreten* Leistungsdichtespektren $\Phi_{XX}(\Omega)$ und $\Phi_{YY}(\Omega)$ zur Verfügung stehen.

Es gilt jedoch nach (431.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_a} S_{XX}(j\omega) &= \Phi_{XX}(\Omega), \\ \frac{1}{T_a} S_{YY}(j\omega) &= \Phi_{YY}(\Omega), \quad \Omega = \omega \cdot T_a, \quad \Omega \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (458.1)$$

Damit folgt:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{S_{YY}(j\omega)}{S_{XX}(j\omega)} = \frac{\Phi_{YY}(\Omega)}{\Phi_{XX}(\Omega)}, \quad \Omega = \omega \cdot T_a, \quad \Omega \in [-\pi, \pi]. \quad (458.2)$$

Die Schätzung des Betragsquadrats $|H(j\omega)|^2$ der Übertragungsfunktion des Bandpasses kann somit durch die folgende Anweisung berechnet werden:

²⁶ Das Programm prüft nicht nach, ob genug Datenpunkte zur Verfügung stehen. Sinnvollerweise sollte die Simulationsdauer so lang sein, dass die Korrelationssignale wesentlich mehr als 8-K Datenpunkte haben.

```
% Schätzung der Übertragungsfunktion
Hquad = Phiyy ./ Phixx;
```

Abbildung 5.21 zeigt das Ergebnis der Berechnungen. Links ist der gesamte Amplitudengang, rechts ein Ausschnitt um die Mittenfrequenz des Bandpasses dargestellt.

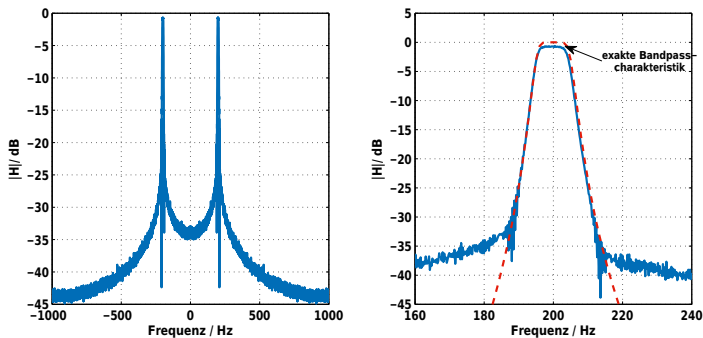


Abb. 5.21: „Systemidentifikation“ eines Bandpasses

Die geschätzte Bandpasscharakteristik ist dabei der exakten Bandpasscharakteristik gegenüber gestellt, die mit MATLAB wie folgt sehr leicht bestimmt werden kann (s. MATLAB-Hilfe zur Funktion `butter`):

```
% Berechnung der gegebenen Bandpasscharakteristik
Wn = [(frequenz-bw)/(fa/2),(frequenz+bw)/(fa/2)];
[B,A] = butter(4,Wn);
frq2 = (160:1:240);
fa = 1/fixstep;
Hth = freqz(B,A,frq2,fa);
```

Die geschätzte Bandpasscharakteristik stimmt sehr gut mit der theoretischen überein. Allerdings ist die Berechnung der Schätzung umständlich und der Aufwand für die Mittelungen der Korrelationsfunktionen hoch. ■

Wir werden im folgenden Abschnitt 5.4 sehen, wie diese Schätzung durch eine bessere Ausnutzung der Daten deutlich effektiver gestaltet und verbessert werden kann.

5.3.3 Formfilter

Auf der Grundlage des Wiener-Lee-Theorems können, wie bereits erwähnt, auch Prozesse konstruiert werden, die eine bestimmte vorgegebene spektrale Charakteristik haben.

Übung 149

Dies kann für Simulationszwecke sehr nützlich sein. Beispielsweise werden wir in Abschnitt 5.5.11 auf diese Weise stochastische Signale erzeugen, deren Leistungsdichtespektren die typischen Merkmale eines fahrbahnnebenheitssignals haben. Solche Signale können dann etwa als fahrbahntypisches Anregungssignal auf einem Prüfstand verwendet werden.

Die zentrale Idee dieser **Formfilterung** genannten Technik ist es, ein geeignet entworfenes Filter mit (weißem) Rauschen anzuregen. Entsprechend (455.1) bis (455.4) hat dann das Ausgangssignal des Filters die gleiche spektrale Charakteristik wie das Filter selbst. Prinzipiell kann man so Prozesse mit beliebiger spektraler Charakteristik erzeugen, sofern es gelingt ein Filter mit dieser Charakteristik zu entwerfen.

Solange es sich nicht um eines der in den Abschnitten 2.6, S. 189 oder 4.6, S. 375 vorgestellten Standardfilter handelt, müssen tiefer liegende Techniken für den Entwurf solcher Filter verwendet werden. In Abschnitt 5.5.11, S. 530 beispielsweise wird die MATLAB-Funktion `yulewalk` verwendet, welche die Filtercharakteristik durch die Lösung der so genannten **Yule-Walker-Gleichungen** ermittelt, ohne dass dort allerdings auf die theoretischen Hintergründe dieser Entwurfstechnik eingegangen werden kann.

Im vorliegenden Abschnitt jedoch soll zur Behandlung eines einfachen Beispiels eine andere Technik verwendet werden.

5.14 Beispiel (Formfilterung)

Zur Illustration der Formfilterungs-Technik greifen wir auf Übung 142, S. 451 zurück. In dieser Übung wurde das Leistungsdichtespektrum eines fiktiven, zeitkontinuierlichen stationären Prozesses X_t diskutiert. Das Leistungsdichtespektrum war mit

$$S_{XX}(j\omega) = \text{rect}_{40\pi}(\omega + 20\pi) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{40}\right) \quad (460.1)$$

vorgegeben, ohne dass allerdings auf die Frage eingegangen wurde, wie konkrete Musterfunktionen dieses Prozesses erzeugt werden können.

Es ist klar, dass die Kennlinie von $S_{XX}(\omega)$ nicht der eines der üblichen Standardfilter entspricht. Der in diesem Beispiel verfolgte Ansatz beruht darauf, die Signale *spektral* zu filtern. Am einfachsten kann dies anhand von Abbildung 5.22 erläutert werden.

Die (diskretisierten) Werte eines weißen Rauschsignals x_n werden zunächst Fourier-transformiert. Anschließend wird das Signalspektrum mit der Kennlinie (460.1) multipliziert. Das resultierende Spektrum wird mit einer inversen FFT in den Zeitbereich zurück transformiert. Das Ausgangssignal sollte dann ein der Übertragungsfunktion entsprechendes Leistungsdichtespektrum haben.

Bei dieser Technik ist zu beachten, dass die Länge der Eingangssignalfolge x_n groß genug ist, um Fensterungseffekte so gering wie möglich zu halten

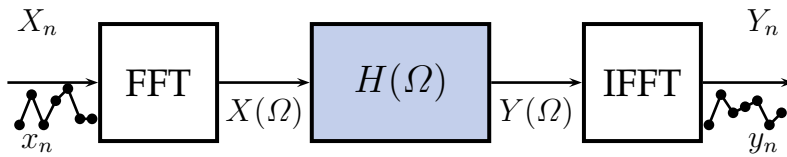


Abb. 5.22: Formfilterung via Multiplikation der Spektren mit der Formfilter-Kennlinie

und dass die Kennlinie (460.1) richtig auf die diskrete Übertragungsfunktion $H(\Omega)$ umgesetzt wird.

Es soll nun überprüft werden, ob diese Idee im vorliegenden Fall funktioniert.

Mit Hilfe des Programms **Bsp_FormFilt.m** können Musterfunktionen nach dem in Abbildung 5.22 skizzierten Verfahren erzeugt werden.

Es lohnt sich auch hier, über die Details des Programmcodes zu diskutieren. Zunächst wird ein gleichverteiltes mittelwertfreies weißes Rauschen mit Rauschleistungs*dichte* 1 erzeugt:

```
% Zufallsgenerator initialisieren
rng('shuffle', 'twister')

xn = (rand(1,N)-0.5);
xn = xn/std(xn);           % hat Varianz (=Leistung 1)
xn = sqrt(fa)*xn;          % hat Varianz (=Leistung fa)
                             % und damit die Leistungsdichte 1
                             % im Nyquistband [-fa/2,fa/2]
```

Das Programm benötigt dazu die Angabe einer (virtuellen) Abtastrate f_a , sodass die Leistungsdichte des Rauschens bestimmt und die Kennlinie des Formfilters richtig auf das Nyquist-Band bezogen werden können. Die Abtastrate sollte dabei so vorgegeben werden, dass das Abtasttheorem bezüglich der (bandbegrenzten) Kennlinie respektiert wird. Im vorliegenden Beispiel ist die Grenzfrequenz von $S_{XX}(j\omega)$ gleich 20π rad/s entsprechend 10 Hz, sodass eine Abtastrate größer als 20 Hz vorgegeben sein sollte.

Die Rauschleistungsdichte des weißen Rauschsignals wird auf 1 normiert, damit das Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignals der in Abbildung 5.22 skizzierten Filterkette ohne zusätzliche Skalierung $S_{XX}(j\omega)$ entspricht.

Mit einer solchen Leistungsdichte hat das Rauschsignal die Leistung $f_a \cdot 1$ (Bandbreite des Nyquist-Bandes mal Dichtewert). Da dieser Wert für das mittelwertfreie Rauschsignal der Varianz entspricht, musste das mit

```
xn = (rand(1,N)-0.5);
```

erzeugte Signal noch mit $\frac{\sqrt{T_a}}{\sigma(X)}$ skaliert werden.

Mit den nachfolgenden Anweisungen wird die FFT des Mustersignals berechnet und diese mit der gewünschten Kennlinie skaliert:

```
% FFT des Signals berechnen und shiften
spxn = fft(xn,N);
spxn = fftshift(spxn);

% Mit der Kennlinie des Filters multiplizieren
dOmega = 2*pi/N; domega = dOmega*fa;
omegas = (-pi*fa:domega:pi*fa-domega); % FFT-Frequenzen
% Kennlinie an diesen Stellen berechnen
Sxx = cos(omegas/40).*(omegas>=-20*pi & omegas<=20*pi);

% und mit den Werten des Spektrums von xn multiplizieren
spyn = spxn.*Sxx;
```

Anschließend wird dieses Spektrum in den Zeitbereich zurückgewandelt:

```
% mit IFFT in Zeitwerte zurückverwandeln
spyn = fftshift(spyn);
yn = ifft(spyn,N);

% und in Ausgabematrix speichern
% (damit der "Imaginärteil" 0 nicht mitgespeichert wird,
% wird nur der Realteil gespeichert)
MusFkts = [MusFkts;real(yn)];
```

Der folgende Aufruf erzeugt eine Matrix mit 20 Musterfunktionen der Länge 4-K des so konstruierten Ausgangsprozesses. Die gewählte Abtastrate ist 100 Hz.

```
>> [MusFkts] = Bsp_FormFilt(20, 4*1024, 100);
```

Mit Hilfe dieser Musterfunktionen kann geprüft werden, ob der konstruierte Ausgangsprozess tatsächlich das gewünschte Leistungsdichtespektrum $S_{XX}(j\omega)$ hat.

Dazu werden mit Hilfe der Funktion `xcorr` die Autokorrelierten der Musterfunktionen berechnet und anschließend gemittelt (vgl. dazu `Bsp_FormFiltAuswertung.m`):

```

anz = 3000;           % große Anzahl von Musterfunktionen
N = 2*1024;
fa = 100;

[MusFkts] = Bsp_FormFilt(anz, N, fa);

% Berechnung des gemittelten Korrelationssignals
corrAusg = zeros(1,2*N-1);
for k = 1:anz
    corrAusg = corrAusg + xcorr(MusFkts(k,:), 'unbiased');
end

corrAusg = corrAusg/anz;

```

Anschließend wird die Leistungsdichte berechnet, indem die gemittelte Autokorrelierte Fourier-transformiert wird:

```

% Leistungsdichte mit Hilfe der FFT berechnen
M = floor(N/2);

K = 1024;           % 1024 Werte aus der Mitte herausschneiden
corrAusgmitte = corrAusg(M-K+1:M+K);
Phiyy = fft(corrAusgmitte, 2*K);
Phiyy = fftshift(Phiyy);

```

Nun wird der passende Frequenzvektor ermittelt:

```

% Frequenzvektor definieren
df = fa/(2*K);           % Frequenzabstand
frq = (-fa/2:df:fa/2-df);

```

Nach dem Wiener-Lee-Theorem ist:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{S_{YY}(j\omega)}{S_{XX}(j\omega)} = \frac{\Phi_{YY}(\Omega)}{\Phi_{XX}(\Omega)}, \quad \Omega = \omega \cdot T_a, \quad \Omega \in [-\pi, \pi]. \quad (463.1)$$

Im vorliegenden Fall wurde das Leistungsdichtespektrum $S_{XX}(j\omega)$ der Eingangssignalfolge jedoch nicht berechnet. Allerdings wurde x_n so konstruiert, dass $S_{XX}(j\omega)$ als konstant 1 im Nyquist-Band angenommen werden kann. Daher gilt (s. (431.1)):

$$|H(j\omega)|^2 = S_{YY}(j\omega) = T_a \cdot \Phi_{YY}(\Omega), \quad \Omega = \omega \cdot T_a, \quad \Omega \in [-\pi, \pi]. \quad (463.2)$$

Damit folgt insbesondere

$$|H(j\omega)| = \sqrt{T_a \cdot \Phi_{YY}(\Omega)}, \quad (463.3)$$

und der Betrag des Leistungsdichtespektrums des Ausgangssignals kann berechnet werden:

```
% Darstellung des Leistungsdichtespektrums
% Wiener-Lee: |H(0mega)|^2 = Phiyy./Phixx
% Phixx wird als konstant 1 angenommen
T = 1/fa; % für die Skalierung des diskreten
           % Leistungsdichtespektrums nötig
plot(frq, sqrt(T*abs(Phiyy)), 'b', 'LineWidth', 2);
grid
xlabel('Frequenz / Hz')
ylabel('Phixx')
```

Es kann nun leicht grafisch überprüft werden, ob dieses Leistungsdichtespektrum den Vorgaben entspricht:

```
axis([-30,30,0,1.2])

% Zu Kontrollzwecken wird die gewünschte Kennlinie
% eingeplottet
hold
f=(-25:0.01:25);
om = 2*pi*f;
Sxx = cos(om/40).*(om>=-20*pi&om<=20*pi);
plot(f, Sxx, 'r--', 'LineWidth', 2);
```

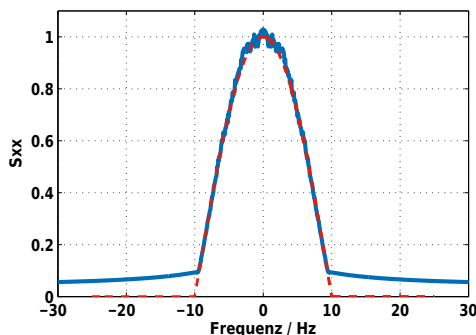


Abb. 5.23: Leistungsdichtespektrum des Formfilter-Ausgangssignals und (gewünschte) ideale Kennlinie des Spektrums

Abbildung 5.23 zeigt das Ergebnis dieser Berechnung des Leistungsdichtespektrums im Vergleich mit der idealen Kennlinie aus (460.1).

Offenbar hat der erzeugte Prozess die gewünschten spektralen Eigenschaften! ■

Die Berechnung des Leistungsdichtespektrums ist im vorangegangenen Beispiel noch recht umständlich und mühsam. Wir werden im folgenden Abschnitt sehen, wie dies deutlich verbessert werden kann.

5.3.4 Übungsaufgaben

Übung 147 (Lösungsband Seite 341)

Sei X_t ein im weiteren Sinne stationärer stochastischer Prozess und seien die Musterfunktionen $x(t)$ dieses Prozesses Eingangssignal eines zeitkontinuierlichen LTI-Systems $\mathfrak{S}$ mit Impulsantwort $h(t)$.

Zeigen Sie, dass der Prozess Y_t der zugehörigen Ausgangssignale $y(t)$ von $\mathfrak{S}$ ein im weiteren Sinne stationärer Prozess ist.



Übung 148 (Lösungsband Seite 343)

In der Begleitsoftware befinden sich die Dateien **inputsig.mat** und **outputsig.mat**.

Die Datei **inputsig.mat** enthält ein im Nyquistband bandbegrenztes weißes Rauschsignal, welches als Eingangssignal eines zeitkontinuierlichen LTI-Systems $\mathfrak{S}$ mit Übertragungsfunktion $H(s)$ verwendet wurde. Die Datei **outputsig.mat** enthält das zugehörige Ausgangssignal.

Die Signale wurden mit einer Abtastrate von $f_a = 2048 \text{ Hz}$ diskretisiert.

Bestimmen Sie auf der Grundlage des Wiener-Lee-Theorems eine Schätzung des *Amplitudengangs* des Systems.

Um welche Art von System handelt es sich?

Versuchen Sie ggf. die Übertragungsfunktion $H(s)$ im Bildbereich zu erraten.

Übung 149 (Lösungsband Seite 346)

Erzeugen Sie mit Hilfe von MATLAB einen stochastischen Prozess, dessen Autokorrelationsfunktion durch die folgende Funktionsvorschrift gegeben ist:

$$r_{XX}(\tau) = \begin{cases} e^{-\tau} & \text{für } \tau \geq 0, \\ e^{\tau} & \text{für } \tau < 0. \end{cases} \quad (465.1)$$

5.4 Berechnung des Leistungsdichtespektrums

Der Algorithmus für die Berechnung eines Leistungsdichtespektrums ist im Prinzip durch die Definitionen (405.3) und (428.1) klar vorgegeben. Erst muss

die Autokorrelationsfunktion des Prozesses bestimmt werden, bevor diese dann Fourier-transformiert wird.

Dabei wird die der Autokorrelationsfunktion immanente Mittelung meist unter Verweis auf die Ergodenhypothese weggelassen und mit nur *einer* Musterfunktion berechnet.

Das Beispiel 5.11 liefert jedoch einen Hinweis auf eine mögliche andere Vorgehensweise.

5.4.1 Das Wiener-Khintchine-Theorem

Im Beispiel 5.11 wurde ein Sinus in weißem Rauschen betrachtet und die Berechnung des Leistungsdichtespektrums der Fourier-Transformation eines Mustersignals in Abbildung 5.17, S. 441 gegenüber gestellt.

Die Schätzung des Leistungsdichtespektrums war dabei durch den Mittelungseffekt der Autokorrelation deutlich weniger „verrauscht“ als die DFT der Musterfunktion, allerdings war die Identifikation der harmonischen Signalanteile auch mit Hilfe der DFT der Musterfunktion mühelos möglich.

Dies lässt den Schluss zu, dass man zunächst die Spektren der Musterfunktion(en) berechnen könnte, um erst *hinterher* die für das Leistungsdichtespektrum notwendige Mittelung durchzuführen.

Dass genau dies möglich ist, ist die Aussage des **Wiener-Khintchine-Theorems**:

Ist $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ein stationärer, ergodischer Prozess, so kann man das Leistungsdichtespektrum durch eine Mittelung der Quadrate der Fourier-Spektren von Musterfunktionen schätzen. Genauer gilt:

$$S_{XX}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathbb{E}(|X_T(j\omega)|^2), \quad (466.1)$$

wobei $X_T(j\omega)$ das Fourier-Spektrum der Musterfunktionen im Zeitintervall $[-T, T]$ bezeichnet.

In der Literatur wird die Bezeichnung Wiener-Khintchine-Theorem nicht einheitlich behandelt. Oft wird die Definition (428.1), also die Definition des Leistungsdichtespektrums über die Fourier-Transformation der Autokorrelationsfunktion, als Wiener-Khintchine-Theorem resp. als **Wiener-Khintchine-Beziehung** bezeichnet.

Aus dem Wiener-Khintchine-Theorem ergibt sich eine wichtige praktische Folgerung.

Das Leistungsdichtespektrum stochastischer stationärer (ergodischer) Signale und Signalgemische lässt sich (nach Diskretisierung) durch die **Berechnung der gemittelten Betragsquadrate von mehreren Fourier-Spektren** einer oder mehrerer Musterfunktionen berechnen.

Da die Signale in der Praxis als endlich lange Folgen von Abtastwerten vorliegen, stützen sich die Berechnungen natürlich auf **FFT-Spektren**.

5.4.2 DFT/FFT-gestützte Schätzung des Leistungsdichtespektrums

Über die in den vorangegangenen Abschnitten dargestellten Zusammenhänge ist es nun möglich, Spektren stochastischer Signale **mittels DFT/FFT-Analyse** zu bestimmen. Genauer gesagt, handelt es sich um eine **Schätzung** des Leistungsdichtespektrums, da ja, wie die vorangegangenen Abschnitte zeigen, die genaue Bestimmung dieses Spektrums die Analyse beliebig vieler zu einer Klasse gehörenden stochastischen Signale oder beliebig langer Musterfunktionen voraussetzt, was natürlich in der Praxis nicht gegeben ist. Es ist daher stets das Ziel, mit endlich vielen (zufälligen!) Daten eine möglichst gute Näherung des idealen Leistungsdichtespektrums zu erhalten.

Grundlage für die Schätzung des Leistungsdichtespektrums eines stationären ergodischen Signals oder eines Signalgemischs aus deterministischen und stationären Anteilen ist offenbar die Definition (428.1) des Leistungsdichtespektrums als Fourier-Transformation der Autokorrelation (auch **Blackman-Tuckey-Methode** genannt) oder das **Wiener-Khintchine-Theorem** (466.1). Tabelle 5.1 soll die Zusammenhänge nochmals verdeutlichen.

Diskretisiert man das Signal (unter Berücksichtigung des Abtasttheorems) über einen endlichen Beobachtungszeitraum, so hat man mit der **Schnellen Fourier-Transformation (FFT)** einen leistungsfähigen Algorithmus zur Berechnung der Fourier-Spektren zur Verfügung. Die Popularität der in diesem Abschnitt diskutierten Algorithmen basiert im Wesentlichen auf der Tatsache, dass beide oben skizzierten Lösungswege von der FFT Gebrauch machen können.

Periodogramme

Die zentrale Größe für die Berechnung nach dem Wiener-Khintchine-Ansatz ist das so genannte Periodogramm:

Sei $x_n = x(nT_a)$ ein stochastisches, stationäres, ergodisches und mit Abtastrate $f_a = 1/T_a$ abgetastetes diskretes Signal. Dann heißt die Funktion

$$I_N(j\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\omega n T_a} \right|^2 \quad \forall \omega \in \left[\frac{-\pi}{T_a}, \frac{\pi}{T_a} \right] \quad (467.1)$$

ein **Periodogramm** (der Länge N) zu x_n .

Für das normierte Zeitmaß $T_a = 1$ (bzw. die normierter Frequenz) ergibt sich:

Tabelle 5.1: Schätzmethoden für das Leistungsdichtespektrum

Schätzmethode für $S_{XX}(j\omega)$	
Blackman-Tuckey	Wiener-Khintchine
Diskretisierung des Signals mit Abtastintervall T zu $(x_n)_{n=-N}^N$ $\downarrow$ Schätze die Autokorrelation durch: $\hat{r}_{XX}(k) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n x_{n+k}$ $\downarrow$ DTFT liefert $\Phi_{XX}(\Omega)$ $\downarrow$ $\cdot T$ $\downarrow$ Schätzung $\hat{S}_{XX}(j\omega)$ von $S_{XX}(j\omega)$ im Abtastband (Nyquistband)	Approximiere Grenzwert und Integral in $\lim_{\hat{T} \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{2\hat{T}} \left \int_{-\hat{T}}^{\hat{T}} x(t) e^{-j\omega t} dt \right ^2 \right)$ $\downarrow$ $\frac{1}{(2N+1)T} \left \sum_{n=-N}^N x(nT) e^{-j\omega nT} \cdot T \right ^2$ $= \frac{T}{2N+1} \left \sum_{n=-N}^N x(nT) e^{-j\omega nT} \right ^2$ $= \frac{T}{2N+1} DTFT(x(nT)_{n=-N}^N) ^2$ $\downarrow$ Schätzung $\hat{S}_{XX}(j\omega)$ von $S_{XX}(j\omega)$ im Abtastband (Nyquistband)

$$I_N(\Omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\Omega n} \right|^2 \quad \forall \Omega \in [-\pi, \pi]. \quad (468.1)$$

Das Periodogramm lässt sich mit der FFT berechnen, d.h.:

$$I_N(\Omega) = \frac{1}{N} |FFT(\Omega)|^2 \quad \forall \Omega \in \left\{ k \frac{2\pi}{N}, k = 0, \dots, N-1 \right\}. \quad (468.2)$$

Für kleine N ist der Erwartungswert der Schätzung nicht exakt das gesuchte Leistungsdichtespektrum [47]. Man sagt, die Schätzung ist „verschoben“ („biased“) und der *Schätzer nicht erwartungstreu*.

Für große N allerdings schätzt das Periodogramm im Mittel das tatsächliche Leistungsdichtespektrum (der *Schätzer ist asymptotisch erwartungstreu*).

Allerdings hat die Schätzung durch *ein* Periodogramm eine *große Varianz*, wie in der nachfolgenden Diskussion deutlich wird.

Vertrauensintervalle

Blackman und Tuckey [4] haben allgemein untersucht, wie gut Spektralschätzungsverfahren ein Leistungsdichtespektrum schätzen können.

Der Focus der Untersuchung lag dabei auf dem Fall der stationären Gauß'schen Prozesse, für die exakte Ergebnisse angegeben werden. Die Ergebnisse lassen sich nach Blackman und Tuckey jedoch zumindest näherungsweise auch auf stationäre nicht-Gauß'sche Prozesse übertragen.

Eine der von Blackman und Tuckey beantworteten Fragen ist zum Beispiel, wie groß der Vertrauensbereich R_x für eine Vertrauensprozentzahl x einer Spektralschätzungsmethode für alle Frequenzen des Spektrums ist. Der Bereich wird üblicherweise in dB angegeben.

Sie erhielten (bei Verwendung eines einzigen Datensatzes) die Formel[47]

$$R_x \approx K \frac{1}{\sqrt{L/M - 0.833}} \text{ dB} \quad (469.1)$$

mit den Proportionalitätsfaktoren:

x (%)	80	90	96	98
K	11.2	14.1	17.7	20.5

Dabei ist L die Zahl der Datenpunkte und M die Zahl der durch die Schätzungsmethode berücksichtigten (gleich breiten) Frequenzbänder im positiven Abtastband $[0, \pi/T]$ rad/s (entsprechend $[0, \frac{f_a}{2}]$ Hz).

Bei den bisher betrachteten DFT/FFT-basierten Methoden ist die Zahl der Frequenzbänder M durch die FFT auf $N/2$ festgelegt, wenn N die FFT-Länge ist, denn der Frequenzabstand ist ja $\frac{f_a}{N}$ Hz.

Damit folgt für die Breite in dB eines 90%-Vertrauensintervalls etwa eines Periodogramms der Länge N

$$\begin{aligned} R_x &\approx 14.1 \frac{1}{\sqrt{N/(N/2) - 0.833}} \text{ dB} \\ &= 14.1 \cdot 0.9257 = 13.05 \text{ dB}, \end{aligned} \quad (469.2)$$

was nicht gerade berauschend gut ist.

Ein zum Vertrauensintervall i.W. äquivalentes Gütemaß ist die **Varianz** der Schätzung. Man kann zeigen, dass (für große N) gilt [47, 54]:

$$\mathbb{V}(I_N(\Omega)) \approx \Phi_{XX}^2(\Omega). \quad (470.1)$$

Die Varianz ist also insbesondere wie das in (469.2) berechnete Vertrauensintervall von der Datenmenge N **unabhängig**. Sie wird in Folge dessen auch für große N nicht kleiner (man sagt, die Schätzung ist **nicht konsistent**).

Man kann also festhalten:

Nur *ein* Periodogramm ist auch für große Datenmengen *keine gute Schätzung*!

Die übliche Praxis, alles Mögliche aus **nur einer** FFT einer Musterfunktion abzulesen, ist also sehr mit Vorsicht zu genießen.

Schätzungen des Leistungsdichtespektrums können aber, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, besser gemacht werden, wenn man **mehrere Periodogramme mittelt**!

Welsh's Periodogramm

Die vorangegangenen Überlegungen legen nahe, dass es für eine Schätzung des Leistungsdichtespektrums besser ist, mit Hilfe einer vorgegebenen Datenmenge (Abtastwerte einer Musterfunktion) mehrere kleine Periodogramme zu berechnen und diese zu mitteln, statt mit Hilfe der gleichen Daten ein großes Periodogramm zu bestimmen. Diese Vorgehensweise ist in Abbildung 5.24 schematisch dargestellt.

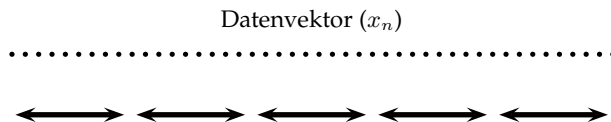


Abb. 5.24: Aufteilung der Daten in hintereinander liegende Blöcke

Um den Fenstereffekt, der sich durch die Verkürzung der Datenblöcke einstellt (breiterer „main lobe“, höhere „side lobes“, Verschmierung des Spektrums) etwas abzumildern, können die Daten der Segmente gegebenenfalls geeignet gefenstert werden (etwa mit einem Hanning-Fenster, vgl. Abschnitt 4.5.3, Seite 361).

Einer Idee von Welch [54] folgend, kann man die vorhandenen Daten jedoch noch besser ausnutzen, indem man **Periodogramme über kürzere, sich überlappende Teilsequenzen bildet** und diese mittelt.

Abbildung 5.25 skizziert diese Idee schematisch.

Bei dieser Aufteilung werden gewisse Abtastwerte gegebenenfalls mehrfach zu verschiedenen Periodogramm-Berechnungen herangezogen, um die Zahl der zu mittelnden Periodogramme (künstlich) zu erhöhen.

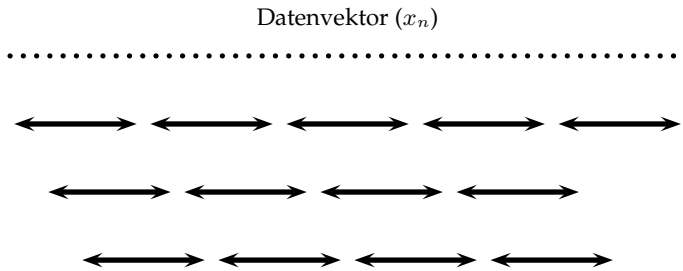


Abb. 5.25: Aufteilung der Daten nach der Welch-Methode

Entscheidend ist nun, dass sich die Varianz der Schätzung ungefähr um den Faktor K (Zahl der Segmente) gegenüber *einem* Periodogramm mit der gleichen Datenmenge verringern lässt. Lässt sich nämlich die Datenmenge in K Blöcke unterteilen, so kann man für nicht überlappende Blöcke zeigen, dass gilt:

$$\mathbb{V}(\text{LDS}_{\text{Welch}}(\Omega)) \approx \frac{\Phi_{XX}^2(\Omega)}{K}. \quad (471.1)$$

Erstaunlicherweise kann man für überlappende Blöcke trotz der damit induzierten Abhängigkeit der Daten zeigen, dass man ein ähnliches Resultat erhält[47, 54]:

$$\mathbb{V}(\text{LDS}_{\text{Welch}}(\Omega)) \approx \alpha \frac{\Phi_{XX}^2(\Omega)}{K}. \quad (471.2)$$

Der Faktor $\alpha > 1$ hängt dabei vom Überlappingsgrad ab. Dieser Faktor (der i.Allg. nur experimentell bestimmt werden kann) erhöht sich, wenn sich die Zahl der Datensegmente K und damit der Überlappingsgrad erhöht. Er *wirkt* daher dem Effekt der **Verringerung der Varianz** (Division durch K) *entgegen*.

Übung 152

Dies ist anschaulich klar, denn es werden bei einem hohen Überlappingsgrad viele nahezu identische Periodogramme ermittelt, sodass die Unabhängigkeitsvoraussetzung, von welcher man bei der Reduktion der Varianz durch Mittelung ausgeht ([2]), drastisch verletzt wird.

Jedoch kann die Varianz bei moderatem Überlappingsgrad, beispielsweise bei hälftiger Überlappung, in der Tat durch diese Methode noch einmal verbessert werden.

5.4.3 Schätzung des Leistungsdichtespektrums mit MATLAB

Für die Schätzung von Leistungsdichtespektren stellt MATLABs *Signal Processing Toolbox* mehrere Funktionen zur Verfügung, die im Wesentlichen auf der Welch-Periodogramm-Schätzung beruhen.

Ganz allgemein können Spektralschätzungen objektorientiert mit Hilfe der Methoden berechnet werden, die für so genannte **spectrum**-Objekte definiert sind. Für eine Spektralschätzung müssen dazu zunächst so genannte **spectrum estimator** definiert werden. Mit diesen Objekten können dann **spectrum**-Methoden aufgerufen werden, neben vielen anderen auch die Welch-Methode.

Für einen programmiertechnisch direkteren Zugang stehen aber nach wie vor MATLAB-**Funktionen** zur Verfügung, welche mit entsprechenden Parametern aufgerufen werden müssen.

Dies sindz.B. die Funktion **pwelch** zur Berechnung eines Leistungsdichtespektrums nach der Welch-Methode und die Funktion **cpsd** zur Berechnung eines Kreuzleistungsdichtespektrums nach der Welch-Methode. Mit **cpsd** kann natürlich auch ein (Auto-)Leistungsdichtespektrum berechnet werden. Die Aufrufstruktur für beide Funktionen ist sehr ähnlich, sodass wir uns im folgenden Beispiel auf die Verwendung einer Funktion, im vorliegenden Fall **cpsd**, beschränken.

Zur Illustration der Verwendung dieser Funktion greifen wir das Beispiel der Systemidentifikation aus Abschnitt 5.3.2 noch einmal auf.

5.15 Beispiel (Leistungsdichtespektren mit MATLAB)

Die Berechnung zu Abbildung 5.21, S. 459 zeigt, dass die Schätzungen der Leistungsdichtespektren und damit die Schätzung der Übertragungsfunktion des Bandpass auf der Grundlage einer Blackman-Tuckey-Schätzung mit einem recht hohen Aufwand verbunden ist, wenn die Varianz der Schätzung gering gehalten werden soll.

Die Berechnung auf der Grundlage von Welchs Periodogramm-Methode gestaltet sich mit den oben erwähnten speziellen MATLAB-Funktionen wesentlich einfacher, wie nun gezeigt werden soll.

Übung 150

Dazu erzeugen wir mit dem Simulink-System **s_Rausch2.slx** (vgl. Abbildung 5.6, S. 413) noch einmal *mittelwertfreie* Musterfunktionen eines Rauschsignals und eines durch einen Bandpass gefilterten Rauschsignals.

Übung 151

Mit den Periodogramm-Funktionen²⁷ kann das System nun auf folgende Weise identifiziert werden (vgl. Datei **Bsp_SysIdentWelch.m**):

```
% Initialisierung
bw = 5;           % Bandbreite in Hz
frequenz = 200;   % Mittenfrequenz in Hz
fixstep = 0.0005; % Schrittweite einer Fixed-Step Simu.
simudauer = 65.536; % Simulationsdauer (für 64-K Daten)
```

²⁷ Es soll an dieser Stelle erwähnt werden, dass für die Systemidentifikation die spezielle MATLAB-Funktion **tffestimate** zur Verfügung steht, welche intern genau so funktioniert wie in diesem Beispiel beschrieben. Auf die Diskussion dieser Funktion soll allerdings verzichtet werden.

```

dichte = 1;           % Rauschleistungsichte

% Simulink-System öffnen
open_system('s_Rausch2')

% Initialisierung des Filters
set_param('s_Rausch2/Filter', 'Wlo', ...
           num2str((frequenz-bw)*2*pi));
set_param('s_Rausch2/Filter', 'Whi', ...
           num2str((frequenz+bw)*2*pi));

% Simulink-System öffnen und Parameter setzen
set_param('s_Rausch2', 'FixedStep', num2str(fixstep));
set_param('s_Rausch2', 'StopTime', num2str(simudauer));
set_param('s_Rausch2', 'Solver', 'ode4');
set_param('s_Rausch2/Rauschquelle', 'Ts', num2str(fixstep));
set_param('s_Rausch2/Rauschquelle', 'Cov', num2str(fixstep));

% Simulink-System starten
[t,x,rsig] = sim('s_Rausch2');

% Eingangssignal definieren
sign = rsig(:,1);

% Ausgangssignal definieren
sigout = rsig(:,2);

% Parameter der Spektralschätzung
blocklaenge = 2048;           % 2-K-FFTs werden berechnet
ueberlapp = blocklaenge/2; % Überlappingsgrad 50%
abtastrate = 1/fixstep;      % Abtastrate

% Schätzung des Leistungsdichtespektrums des
% Eingangssignals mit der Welch-Methode
% (es wird mit der Option 'twosided' das ZWEISEITIGE,
% LDS berechnet! Mit der Option 'onesided' kann das
% das EINSEITIGE LSD berechnet werden, wobei die Verteilung
% der Signalleistung nur über den POSITIVEN Frequenzen
% dargestellt wird.)
[Sxx,F] = cpsd(sign,sign,rectwin(blocklaenge),...
               ueberlapp,blocklaenge,abtastrate, 'twosided');

% Schätzung des Leistungsdichtespektrums
% des Ausgangssignals
% mit der Welch-Methode
% (es wird das ZWEISEITIGE LDS berechnet)
[Syy,F] = cpsd(sigout,sigout,rectwin(blocklaenge),...
               ueberlapp,blocklaenge,abtastrate, 'twosided');

```

```
% Schätzung der Übertragungsfunktion
UebHquad = Syy./Sxx;
```

Abbildung 5.26 zeigt das Ergebnis der Berechnungen. Links ist der gesamte Amplitudengang, rechts ein Ausschnitt um die Mittenfrequenz des Bandpasses dargestellt. Die Bandpasscharakteristik ist dem Ergebnis sehr genau zu entnehmen.

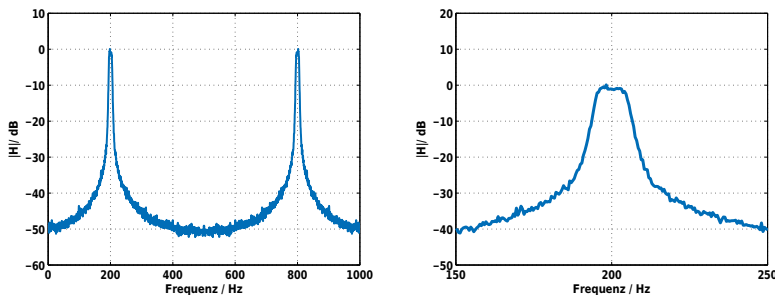


Abb. 5.26: „Systemidentifikation“ eines Bandpasses mit Hilfe von Leistungsdichtespektren nach Welch's Periodogramm-Methode für 63 gemittelte Periodogramme

Bei der Berechnung wurden 131072 Abtastwerte verwendet, die in Blöcke zu je 2048 Punkten unterteilt wurden. Die Überlappung war hälftig, sodass insgesamt $131072/2048 = 64$ plus nochmals 63 überlappende, also insgesamt 127 Blöcke zur Periodogrammschätzung herangezogen und gemittelt wurden.

Es ist interessant, das in Abbildung 5.26 dargestellte Ergebnis einmal der Schätzung auf der Grundlage *einer* Periodogrammschätzung gegenüberzustellen um zu sehen, um wie viel genauer die Schätzung durch die Mittelung der Periodogramme wird.

Dazu wird das obige Programm wie folgt modifiziert:

```
% Parameter der Spektralschätzung
blocklaenge = length(sign); % nur EINE FFT wird berechnet
ueberlapp = 0; % keine Überlappung
```

Abbildung 5.27 zeigt das Ergebnis dieser Berechnungen. Deutlich ist die wesentlich größere „Verrauschtheit“ des Ergebnisses, d.h. die wesentlich größere Varianz der Schätzung, zu erkennen, obwohl das gleiche Datenmaterial zur Verfügung steht.

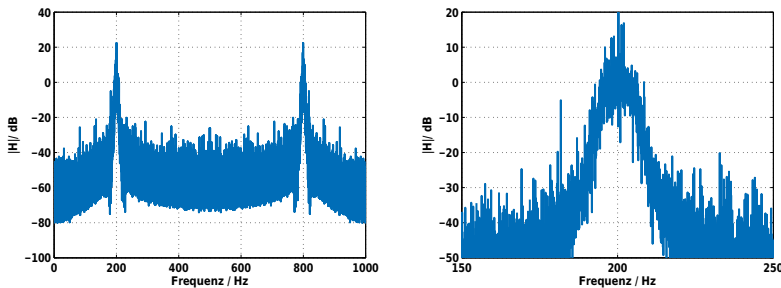


Abb. 5.27: „Systemidentifikation“ eines Bandpasses mit Hilfe von Leistungsdichtespektren nach Welch Periodogramm-Methode für *nur ein* Periodogramm.

5.4.4 Übungsaufgaben

Übung 150 (Lösungsband Seite 349)

Erzeugen Sie mit Hilfe des Simulink-Systems **s_oneton.slx** ein Sinussignal der Amplitude 1 in Gauß'schem weißen Rauschen (mit Varianz 1).

Ändern Sie dabei die im Initialisierungsfile **init_oneton.m** eingestellten Parameter

```
simudauer = 10;    % Simulationsdauer
ampl = 1;          % Amplitude des Sinus

frq = 50;          % Frequenz des Sinus in Hz
stime = 1/200;     % Schrittweite einer Fixed-Step
                  % Simulation (1/Abtastrate)
```

nach der Initialisierung im Command-Window von MATLAB auf

```
simudauer = 16.3830; % Simulationsdauer
stime = 1/1000;      % Schrittweite
```

sodass insgesamt nach der Simulation 16-K Datenpunkte zur Verfügung stehen.

Rufen Sie das System **s_oneton.slx** anschließend auf und führen Sie mit Hilfe der MATLAB-Funktion **cpsd** die nachfolgenden Welch-Periodogramm-Schätzungen²⁸ des erzeugten „Sinus in Rauschen“ durch:

- Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum basierend auf *einem* 16 K-FFT-Periodogramm. Plotten Sie das Ergebnis in dB. Vergleichen Sie

²⁸ Verwenden Sie dabei Hanning-gefensterte Daten.

dabei das Ergebnis mit dem Leistungsdichtespektrum, das theoretisch zu erwarten ist!

- (b) Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum basierend auf 16 nichtüberlappenden 1 K -FFT-Periodogrammen. Plotten Sie das Ergebnis in dB und vergleichen Sie es mit dem Ergebnis aus Teil (a).
- (c) Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum basierend auf überlappenden 1 K -FFT-Periodogrammen mit einem Überlappingsgrad von 256-Punkten. Plotten Sie das Ergebnis in dB und vergleichen Sie es mit den Ergebnissen aus Teil (a) und Teil (b).

Übung 151 (Lösungsband Seite 352)

Erzeugen Sie mit Hilfe des Simulink-Systems **s_twoton.slx** zwei Sinussignale der Amplitude 1 in Gauß'schem weißen Rauschen (mit Varianz 1).

Verwenden Sie dabei die im Initialisierungsfile **init_twoton.m** eingestellten Parameter:

```
simudauer = 10;    % Simulationsdauer
stime = 1/2000;    % Schrittweite einer Fixed-Step
                  % Simulation (1/Abtaste)
amp1 = 1;          % Amplitude des 1. Sinus
frq1 = 100;        % Frequenz des 1. Sinus in Hz
amp2 = 1;          % Amplitude des 1. Sinus
frq2 = 101;        % Frequenz des 1. Sinus in Hz
```

Nach der Simulation stehen dann insgesamt 20000 Datenpunkte zur Verfügung.

Rufen Sie das System **s_twoton.slx** anschließend auf und führen Sie mit Hilfe der MATLAB-Funktion **cpsd** die nachfolgenden Welch-Periodogramm-Schätzungen²⁹ des erzeugten „Zweitonsignals in Rauschen“ durch:

- (a) Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum basierend auf *einem* 16 K -FFT-Periodogramm. Plotten Sie das Ergebnis in dB.
- (b) Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum basierend auf 8 nichtüberlappenden 2 K -FFT-Periodogrammen. Plotten Sie das Ergebnis in dB und vergleichen Sie es mit dem Ergebnis aus Teil (a).

Untersuchen Sie dabei insbesondere die Wirkung der Berechnungsverfahren im Hinblick auf die spektrale Auflösung der Töne.

Übung 152 (Lösungsband Seite 355)

Mit Hilfe des Simulink-Modells **s_Rausch3.slx** und mit Hilfe des MATLAB-Files **VRausch3.m** kann man automatisiert Leistungsdichtespektren des in

²⁹ Verwenden Sie dabei erneut Hanning-gefensterte Daten.

Beispiel 5.15 schon diskutierten Bandpass-gefilterten Rauschsignals berechnen.

Untersuchen Sie die Güteaussagen aus (471.1) und (471.2) experimentell, indem Sie die folgenden Teilaufgaben bearbeiten:

- (a) Berechnen Sie mit Hilfe der Funktion **VRausch3** 200 Schätzungen des Leistungsdichtespektrums des Bandpass-Ausgangssignals auf der Basis von 1-K-Periodogrammen. Wählen Sie dazu eine Abtastrate von $f_a = 1024$ Hz.

Bestimmen Sie anschließend mit der MATLAB-Funktion **distempStetig** der Begleitsoftware die *empirische Verteilung* der Schätzung bei der Frequenz $f_0 = 200$ Hz und bei der Frequenz $f_1 = 400$ Hz und stellen Sie diese grafisch dar. Verwenden Sie dazu jeweils 10 Klassen. Vergleichen Sie die Ergebnisse im Hinblick auf die Formeln (471.1) und (471.2).

- (b) Berechnen Sie des Weiteren mit Hilfe von **VRausch3** 200 Schätzungen des Leistungsdichtespektrums des Bandpass-Ausgangssignals auf der Basis von 16 gemittelten 1-K-Periodogrammen. Wählen Sie dazu wieder eine Abtastrate von $f_a = 1024$ Hz.

Bestimmen Sie erneut mit der MATLAB-Funktion **distempStetig** der Begleitsoftware die *empirische Verteilung* der Schätzung bei der Frequenz $f_0 = 200$ Hz und bei der Frequenz $f_1 = 400$ Hz. Verwenden Sie ebenfalls wieder jeweils 10 Klassen. Vergleichen Sie die Ergebnisse im Hinblick auf die Formeln (471.1) und (471.2).

5.5 Experimente, Beispiele, exemplarische praktische Anwendungen

Wie bereits eingangs des Kapitels erwähnt wurde, sind praktisch alle in der Praxis vorkommenden Signale stochastischer Natur. Die in den vorangegangenen Abschnitten entwickelten Techniken, insbesondere zur Berechnung von Korrelation und Leistungsdichtespektrum, sind daher von großem praktischen Nutzen. Wir wollen dies anhand einiger exemplarisch ausgewählter Beispiele illustrieren.

5.5.1 Spektralanalyse eines Wasserstrahl-Geräuschs

In den vorangegangenen Abschnitten wurden Rauschsignale mit Hilfe einer MATLAB/Simulink-Simulation erzeugt.

Rauschsignale kommen aber in der Natur in vielfältiger Weise vor³⁰. Das thermische Rauschen wurde als Prototyp eines Gauß'schen (bandbegrenzten) weißen Rauschsignals bereits mehrfach erwähnt!

³⁰ S. beispielsweise die Internet-Seite <http://www.purewhitenoise.com/> für eine interessante Kollektion von weißen Rauschsignalen!

Im Folgenden soll als weiteres Beispiel ein Signal betrachtet werden, das mit ganz einfachen Mitteln erfasst und analysiert werden kann: das Rauschen eines in ein Waschbecken fallenden Wasserstrahls.

Abbildung 5.28 zeigt den Aufbau einer solchen „Messeinrichtung“, wie sie von jedermann einfach zu Hause aufgebaut werden kann [3].



Abb. 5.28: Aufbau des Experiments „Wasserstrahl“

Man benötigt lediglich ein Notebook mit einer üblichen Soundkarte und ein handelsübliches Mikrofon. Die Aufnahme selbst kann mit Hilfe des Programms **make_audio** der Begleitsoftware durchgeführt werden.

Das Programm öffnet bei Aufruf mit

```
>> [sound, FS] = make_audio;
```

ein MATLAB-GUI, das mit dem Button **Start** die Aufnahme eines Signals über den Mikrofon-Eingang erlaubt. Mit den Buttons **Stop** und **OK** wird das Signal in der MATLAB-Variablen **sound** gespeichert. Zugleich wird die Abtastrate **FS** zurückgeliefert. Optional kann das Signal in einem *.wav-File gespeichert werden.

Beim Auftreffen auf den Beckenboden verursacht der Wasserstrahl ein Geräusch, welches auch im landläufigen Sprachgebrauch als „Rauschen“ bezeichnet wird. Wir wollen im Folgenden plausibel machen, dass es sich tatsächlich um ein nahezu perfektes Gauß'sches weißes Rauschsignal handelt.

Zunächst kann man sich leicht überlegen, dass das Geräusch als Musterfunktion eines *stationären Prozesses* aufgefasst werden kann. Das Geräusch (der resultierende Schalldruckpegel) ist sicherlich nicht deterministisch. Des Weiteren ändern sich die Bedingungen der Erzeugung des Geräusches über die

Zeit nicht, jedenfalls solange wie wir nicht den Wasserdruck durch Aufdrehen des Hahns variieren oder die Struktur der Auftrefffläche ändern. Es gibt keinen Grund anzunehmen, warum sich der mittlere Schallpegel und die statistische Abweichung davon ändern sollten.

Ferner kann ohne weiteres angenommen werden, dass *eine* Aufnahme *typisch* ist, mit anderen Worten, wir können davon ausgehen, dass für diesen Prozess die *Ergodenhypothese* gilt.

Die Kennwerte des Prozesses können also der zeitlichen Variation einer Musterfunktion entnommen werden!

Damit kann zunächst experimentell überprüft werden, dass die Zufallsvariable X_t , welche zum Zeitpunkt t die Schalldruckpegel bestimmt, einer *Gauß-Verteilung* genügt.

Die theoretische Begründung für diese Tatsache ergibt sich aus dem so genannten *Zentralen Grenzwertsatz* [2, 3, 7], der grob ausgedrückt besagt, dass alle stochastischen Effekte, die sich als eine Überlagerung von einer Vielzahl von Effekten verstehen lassen, (näherungsweise) normalverteilt sind.

Dass dies bei dem vorliegenden Experiment so ist, verdeutlicht die Abbildung 5.29.



Abb. 5.29: „Wasserstrahl“ im Detail

Sie zeigt in einer Momentaufnahme, dass sich der das Geräusch erzeugende Wasserstrahl im Detail aus vielen Einzeltropfen zusammensetzt. Das Gesamtgeräusch kann also als Überlagerung der vielen, durch einzelne Tropfen erzeugten Geräusche aufgefasst werden.

Mit Hilfe des MATLAB-Programms **wasserrauschen** der Begleitsoftware kann diese Vermutung experimentell bestätigt werden.

Bei Aufruf des Programms mit dem Befehl

```
>> wasserrauschen
```

berechnet das Programm die *empirische Verteilung* und die *empirische Verteilungsfunktion* [2] des (durch die Aufnahme mit dem Mikrofon auf einen äquivalenten Bereich von $[-1, 1]$ normalisierten) Schalldruckpegels³¹.

Abbildung 5.30 zeigt das aufgenommene Signal **wasser2r** (in der Datei **wasser2.mat**) in der gesamten zeitlichen Ausdehnung und in einer Ausschnittsvergrößerung.

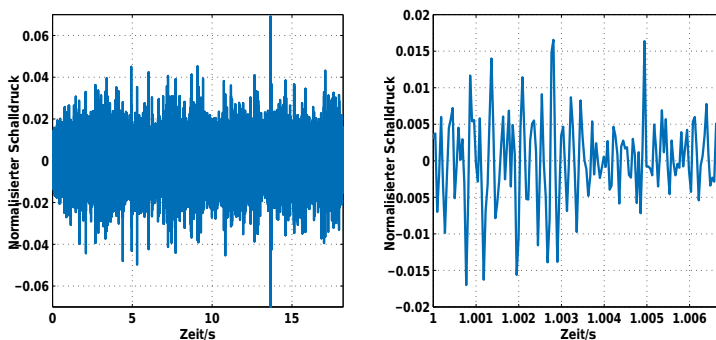


Abb. 5.30: Aufgenommenes „Wasserstrahl“-Geräusch **wasser2r**

Optisch ist deutlich eine sehr unregelmäßige „rauschartige“ Struktur zu erkennen.

Die Abbildung 5.31 gibt die angesprochene empirische Verteilung und die empirische Verteilungsfunktion der (normalisierten) Geräuschamplituden sowie eine vom Programm an die empirische Verteilung angepasste Normalverteilungsdichte wieder.

Deutlich ist zu sehen, dass die Vermutung, es handle sich um ein Gauß'sches Rauschen, experimentell eindrucksvoll bestätigt wird.

Ob es sich in der Tat um ein *weißes Rauschen* handelt, kann nun mit den erarbeiteten Berechnungsverfahren ebenfalls experimentell untersucht werden. Das Programm **wasserrauschen** enthält dafür die folgenden Anweisungen, mit denen das in Abbildung 5.32 dargestellte (einseitige) Leistungsdichtespektrum auf der Grundlage des Welch-Verfahrens mit häufig überlappenden 1-K-Periodogrammen berechnet wird:

³¹ In Wirklichkeit analysieren wir nicht direkt das Geräusch, sondern das Ausgangssignal der Messkette Schalldruck-Mikrofon-ADU der Soundkarte. Der Frequenzgang des Mikrofons hat dabei im Allgemeinen sicherlich einen Einfluss. Wir gehen hier von einem Mikrofon aus, das zumindest im Nyquist-Band (hier $[0, 11025]$ Hz) einen annähernd konstanten Frequenzgang hat.

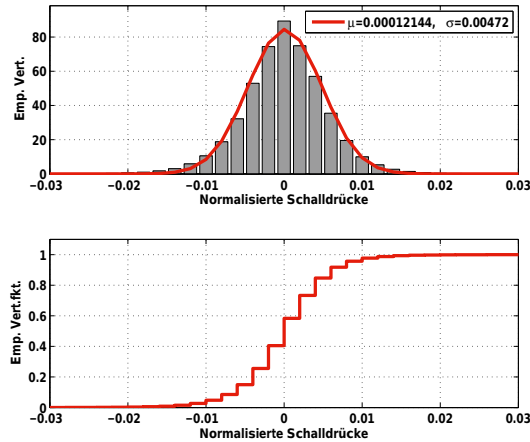


Abb. 5.31: Empirische Verteilung des „Wasserstrahl“-Geräuschs **wasser2r**

```
% Schätzung und grafische Darstellung des (einseitigen)
% Leistungsdichtespektrums. Es werden
% nach der Welch-Methode hälftig überlappende 1-K-
% Periodogramme verwendet.
```

```
[Pww,F] = cpsd(wasser2r,wasser2r,hanning(1024),...
               512,1024,FS,'onesided');
```

```
Pm = mean(Pww);
figure
```

```
...
```

Ganz offensichtlich kann die Leistungsdichte als im Wesentlichen *konstant* angesehen werden.

Das Wasserstrahl-Geräusch ist ein nahezu perfektes Beispiel eines Gauß'schen (bandbegrenzten) weißen Rauschens!

5.5.2 Bestimmung eines Signal-Rausch-Abstandes

Eine wichtige Aufgabe der Signalanalyse in der Mess- und Übertragungstechnik ist die Unterscheidung von deterministischen und stochastischen Signalen innerhalb eines Signalgemischs.

Wesentliche Kenngröße ist dabei das *Signal-Rausch-Leistungsverhältnis* (Signal-to-Noise-Ratio, SNR), mit welchem die *Güte eines Nutzsignals* in einem Gemisch von Nutz- und (rauschartigem) Störsignal quantitativ ausgedrückt werden kann.

Die *Rauschleistung* eines rauschartigen Signals (Musterfunktion eines stationären stochastischen Prozesses) ergibt sich dabei nach den Überlegungen

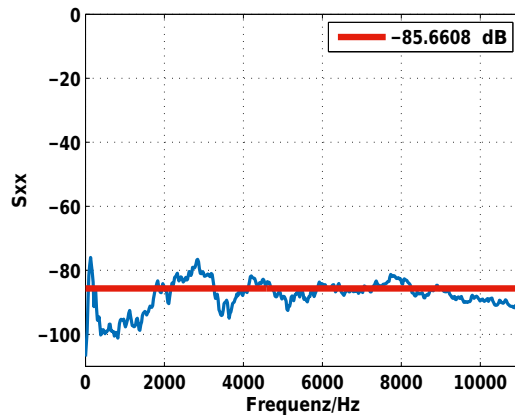


Abb. 5.32: Leistungsdichte des „Wasserstrahl“-Geräuschs **wasser2r**

der vorangegangenen Abschnitte über die Interpretation des Leistungsdichtespektrums als *Integral der Rauschleistungsdichte* und hängt somit unmittelbar mit dem Leistungsdichtespektrum zusammen. Für ein bandbegrenztes Rauschen in einem vorgegebenen (Kreis-)Frequenzband B rad/s ergibt sich die Rauschleistung (vgl. Gleichung (428.3)):

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_B S_{XX}(j\omega) d\omega. \quad (482.1)$$

Für die Bestimmung des Signal-Rausch-Abstandes wird dieser Rauschleistung die Leistung des Nutzsignals S im Band B gegenüber gestellt. Die Signalleistung S eines *periodischen* Signals im Band B beispielsweise ergibt sich nach (450.2) aus der Summe der Leistungen aller Harmonischen im Band B :

$$S = \sum_{k\omega_0 \in B} |c_k|^2. \quad (482.2)$$

Das SNR wird meist in dB angegeben und berechnet sich aus dem Verhältnis der obigen Größen:

Sei S die Signalleistung und N die Rauschleistung innerhalb eines Frequenzbandes B . Dann definiert die Größe

$$10 \cdot \log_{10} \left(\frac{S}{N} \right) \quad \text{dB} \quad (482.3)$$

das **Signal-Rausch-Leistungsverhältnis (SNR)** im Band B .

5.16 Beispiel (SNR)

Wir betrachten als einfachstes Beispiel ein Sinussignal von 50 Hz mit der Amplitude a , also

$$f(t) = a \cdot \sin(2\pi 50t) \quad (483.1)$$

in einem Frequenzband von -500 Hz bis 500 Hz. Bekanntlich hat dieses Signal eine komplexe Fourier-Reihenentwicklung mit den Koeffizienten:

$$c_{-1} = -j\frac{a}{2}, \quad c_1 = j\frac{a}{2}, \quad c_0 = 0 \text{ sonst.} \quad (483.2)$$

Da sich das Signal vollständig im betrachteten Band befindet, erhält man:

$$S = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}. \quad (483.3)$$

Dies entspricht dem Integral über die Momentanleistungen des Sinussignals über einer Signalperiode T_p , d.h. dem Quadrat des Effektivwertes:

$$\frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \left| a \cdot \sin\left(2\pi \frac{1}{T_p} t\right) \right|^2 dt = \frac{1}{T_p} a^2 \frac{T_p}{2} = \frac{a^2}{2} = f_{\text{eff}}^2. \quad (483.4)$$

Es sei nun dieses Signal durch einen mittelwertfreien bandbegrenzten weißen Gauß'schen Rauschprozess mit folgender Rauschleistungsdichte gestört:

$$\gamma^2 = 0.0025 \frac{\text{W}}{\text{Hz}}. \quad (483.5)$$

Für das Rausch-Leistungsdichtespektrum im Band kann somit angenommen werden:

$$S_{XX}(j\omega) = \gamma^2 \quad \forall \omega \in B. \quad (483.6)$$

Das Signal hat eine konstante Rauschleistungsdichte von γ^2 W/Hz.

Die Situation ist zur besseren Veranschaulichung idealisiert in Abbildung 5.33 wiedergegeben.

Für die Inband-Rauschleistung³² gilt somit nach Gleichung (482.1):

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi} \int_B S_{XX}(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \gamma^2 B = \frac{1}{2\pi} \gamma^2 2\pi 1000 \\ &= \gamma^2 1000 = 2.5 \text{ W.} \end{aligned} \quad (483.7)$$

³² Rauschleistung im betrachteten Frequenzband

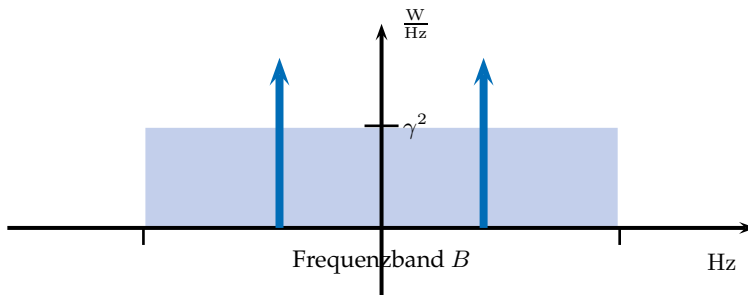


Abb. 5.33: Schematische Darstellung eines Sinus in bandbegrenztem weißen Rauschen

Man beachte, dass B in Formel (482.1) in rad/s anzugeben ist, da über die Kreisfrequenz ω integriert wird. Daher ist der Faktor 2π zu berücksichtigen. Für ein Signal der Amplitude $\sqrt{2}$ beispielsweise, ergibt sich für das resultierende SNR:

$$\begin{aligned} \text{SNR}_B &= 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{S}{N} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{2.5} \right) \\ &= -3.98 \text{ dB.} \end{aligned} \quad (484.1)$$

Ist das Leistungsdichtespektrum eines Signal/Rausch-Gemischs bekannt und kann das Nutzsignal in diesem Spektrum identifiziert werden, so kann das Signal-Rausch-Leistungsverhältnis (Signal-Rausch-Abstand, SNR) unter Umständen durch Filtermaßnahmen verbessert und das Nutzsignal aus dem Gemisch deutlich herausgehoben werden.

Das nachfolgende sehr einfache Beispiel soll dieses Verfahren illustrieren.

5.17 Beispiel (SNR-Verbesserung durch Filterung)

Mit Hilfe des Simulink-Systems **s_onetonefilt.slx** der Begleitsoftware kann ein Sinus-Signal in bandbegrenztem weißen Rauschen erzeugt und mit einem Butterworth-Tiefpass-Filter gefiltert werden. Das gefilterte und das ungefilterte Signal werden in den MATLAB-Workspace exportiert.

Übung 153

Nach der Initialisierung des Systems über das Initialisierungsfile **init_onetonefilt.m** sind im System folgende Parameter eingestellt:

```
simudauer = 50;    % Simulationsdauer
ampl = 0.1;        % Amplitude des Sinus
frq = 50;          % Frequenz des Sinus in Hz
stime = 1/1000;    % Schrittweite (1/Abtaste)
```

Wir fassen im Folgenden die 50 Hz-Sinusschwingung der Amplitude 0.1 als *Nutzsignal* und das weiße Rauschen als *Störsignal* auf.

Nach Simulation von `s_onetonefilt.slx` kann zunächst das gestörte Nutzsignal mit den Anweisungen

```
>> signoise = sigs(:,1);
>> plot(t,signoise, 'b')
>> grid
>> xlabel('Zeit/s')
>> ylabel('Ampl.')
```

als Zeitsignal grafisch dargestellt werden (Abbildung 5.34).

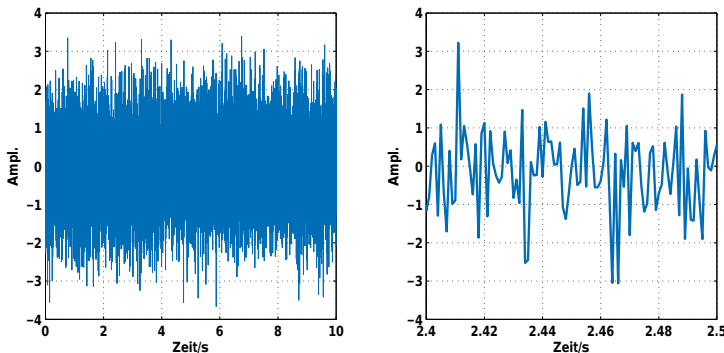


Abb. 5.34: Sinussignal in Rauschen (zwei Ausschnitte)

Wie insbesondere die zweite Ausschnittsvergrößerung zeigt, geht das Nutzsignal im Rauschen „unter“. Quantitativ kann dies durch die Berechnung des SNR untermauert werden.

Gemäß (483.3) beträgt die Nutzsignalleistung:

$$S = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{200}. \quad (485.1)$$

Die Rauschleistung im Nyquist-Band $[0, f_a] = [0, 1000]$ Hz beträgt gemäß Einstellung des Rauschsignal-Blocks genau 1 (Parameter **Noise Power** und **sample Time** stehen auf dem gleichen Wert).

Damit ergibt sich ein Signal-Rausch-Abstand von:

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{S}{N} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\frac{1}{200}}{1} \right) \\ &= -23.0103 \text{ dB}. \end{aligned} \quad (485.2)$$

Aufgrund der Einstellung des Filters auf eine Eckfrequenz von

$$1.5 \cdot 50 \cdot 2\pi = 75 \cdot 2\pi \text{ rad/s} \quad (486.1)$$

entsprechend 75 Hz passiert das Nutzsignal das Filter ungedämpft. Wesentliche Teile des Rauschsignals werden jedoch unterdrückt.

Dies kann man an der grafischen Darstellung des (einseitigen) Leistungsdichtespektrums³³ des Filter-Ausgangssignals in Abbildung 5.35 erkennen, welche mit den folgenden Anweisungen auf der Grundlage von Rechteckfensterten 2-K-Periodogrammen erzeugt werden kann:

```
>> signfilt = sigs(:,2);
>> [Sxx,F] = cpsd(signfilt, signfilt, rectwin(2*1024),...
                  2*512,2*1024,1/stime, 'onesided');
>> plot(F,10*log10(Sxx), 'b', 'LineWidth', 2);
>> grid
>> xlabel('Frequenz/Hz')
>> ylabel('Sxx')
```

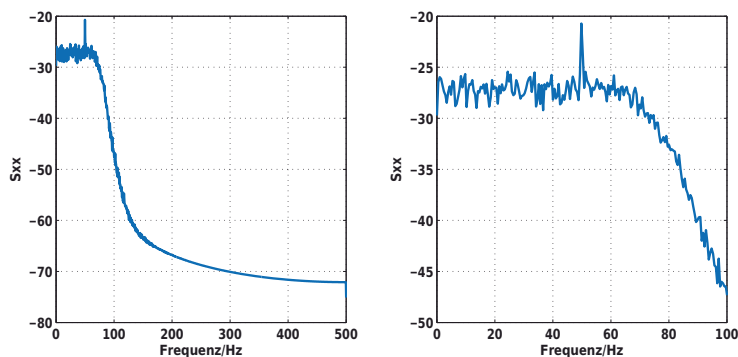


Abb. 5.35: Leistungsdichte des gefilterten Signals (rechts Ausschnitt)

Die nach Filterung verbleibende Rauschleistung könnte im Prinzip gemäß des Wiener-Lee-Theorems aus der Filterkennlinie und der Rauschleistungsdichte des weißen Rauschens berechnet werden. Wir wollen dies hier aber (approximativ) aus dem berechneten Leistungsdichtespektrum ermitteln. Dazu eliminieren wir zunächst die auf das Nutzsignal (und Leakage-Nebenlinien) zurückzuführenden Spektralanteile aus dem berechneten Leistungsdichtespektrum.

Zunächst analysieren wir den Spektralbereich um die Nutzsignalfrequenz herum:

³³ Bei der Option 'onesided' enthält $[0, f_a/2]$ Hz die gesamte Signalleistung im Nyquist-Band.

```

>> fa = 1000;           % Abtastrate
>> N = 2*1024;          % verwendete FFT-Länge
>> df = fa/N            % Frequenzabstand

df =

    0.4883

>> K = 50/df

K =

    102.4000

>> Sxx(102-3:102+3)     % Spektralanteile um 50 Hz

ans =

    0.0029
    0.0019
    0.0007
    0.0035
    0.0128
    0.0056
    0.0032

```

Offenbar können die Werte $S_{xx}(102)$, $S_{xx}(103)$, $S_{xx}(104)$ als zum Nutzsignal gehörig betrachtet werden. Wir ersetzen diese Werte pragmatisch durch den Mittelwert der Werte $S_{xx}(99)$, $S_{xx}(100)$, $S_{xx}(101)$, $S_{xx}(105)$, die wir schon als Rauschanteile im Durchlassband des Filters auffassen:

```

Sxx(102-3:102+3) = (Sxx(99)+Sxx(100)+Sxx(101)+Sxx(105))/4;
>> Sxx(102-5:102+5)

ans =

    0.0018
    0.0015
    0.0022
    0.0022
    0.0022
    0.0022
    0.0022
    0.0022
    0.0022
    0.0035

```

0.0030

Die Rauschleistung *nach Filterung* im Nyquist-Band ergibt sich nun aus dem Integral über dem (nun veränderten) S_{xx} , welches wir wie folgt approximieren können:

```
>> N = sum(Sxx)*df
N_F =
0.1528
```

Damit ergibt sich ein Signal-Rausch-Abstand *nach Filterung* von

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{S}{N_F} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{0.005}{0.1528} \right) \\ &= -14.8515 \text{ dB}, \end{aligned} \quad (488.1)$$

was einer Verbesserung des Signal-Rausch-Abstandes um ca. 8 dB entspricht.

Es ist interessant, diese Berechnung auf der Grundlage des berechneten Leistungsdichtespektrums einmal einer Grobschätzung gegenüber zu stellen, die sich ergibt, wenn man das reale Butterworth-Filter gedanklich durch ein *ideales* Tiefpassfilter mit Grenzfrequenz 75 Hz ersetzt.

In diesem Fall ist es sehr einfach, die Rauschleistung des „Restrauschens“ zu bestimmen. Mit der eingestellten Rauschleistungsdichte von $\frac{1}{f_a}$ ergibt sich im Durchlassband $B = [-75, 75]$ Hz:

$$N_F = B \cdot \gamma^2 = 2 \cdot 75 \cdot \frac{1}{1000} = 0.15. \quad (488.2)$$

Die obige Schätzung für das reale Filter kommt dem ziemlich nahe.

Für das ideale Tiefpassfilter ergäbe sich ein Signal-Rausch-Abstand von:

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{S}{N_F} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{0.005}{0.15} \right) \\ &= -14.7712 \text{ dB}. \end{aligned} \quad (488.3)$$

Diese theoretische Überlegung bestätigt die praktische approximative Berechnung.

Abschließend sei zum Vergleich in Abbildung 5.36 das gefilterte (verbesserte) Zeitsignal dargestellt.

Zwar ist das Nutzsignal (der 50 Hz-Sinus mit Amplitude 0.1) noch immer deutlich gestört, jedoch ist insbesondere im zweiten Ausschnitt mit ein wenig Mühe und gutem Willen in etwa schon die Periodendauer von 0.02 s zu erkennen. 

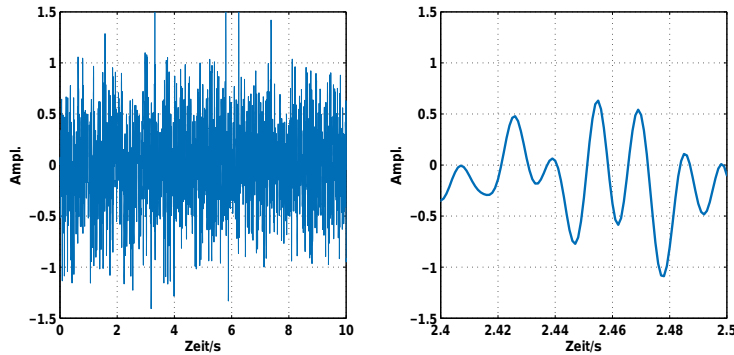


Abb. 5.36: Sinussignal in Rauschen nach Filterung (zwei Ausschnitte)

5.5.3 Quantisierungsrauschen eines ADU

Mit Hilfe des Begriffs des Signal-Rausch-Abstandes kann ein Fehler untersucht und quantifiziert werden, welcher bei der A/D-Wandlung prinzipiell auftritt und sich als rauschartige Störung äußert. Es ist dies der so genannte **Quantisierungsfehler**.

Der **Quantisierungsfehler** eines Analog-Digital-Wandlers kann als zufälliges Störsignal q_n angesehen werden, welches auf den „wahren“ Amplitudenwert x_n des abgetasteten Signals durch die Zuordnung zu einer Stufenhöhe $\hat{x}_n$ des A/D-Wandlers (**die Quantisierung**) hinzugefügt wird.

Das Blockschaltbild in Abbildung 5.37 illustriert diese gedankliche Modellierung.

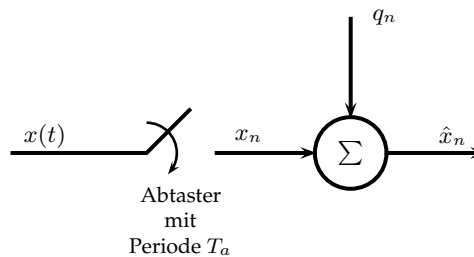


Abb. 5.37: Idealisierte Darstellung des Quantisierungsfehlers bei der ADU

Geht man davon aus, dass durch das Signal selbst keine Abhängigkeiten in die Quantisierung übertragen werden³⁴, so kann das Quantisierungssignal modellhaft als **unabhängiges additives Rauschsignal** aufgefasst werden.

³⁴ Dies ist zwar bei „realen Signalen“ (Schwingungen, Sprache, etc.) i.Allg. nicht der Fall, jedoch ist die Annahme in den meisten Fällen eine rechnerisch praktikable Näherung.

Die folgende Überlegung macht deutlich, dass dieses Rauschsignal in guter Näherung als gleichverteiltes (bandbegrenztes) weißes Rauschen aufgefasst werden kann.

Sei Δ die Quantisierungsstufenhöhe. Für einen A/D-Wandler der Nominalauflösung n ist diese das $\frac{1}{2^n}$ -fache des Aussteuerungsbereiches. Dann wird jeder Abtastwert x_n in einem Intervall $[-\Delta/2, \Delta/2]$ gemäß dem in Abbildung 5.38 dargestellten Schaubild einer Quantisierungsstufe zugeordnet.

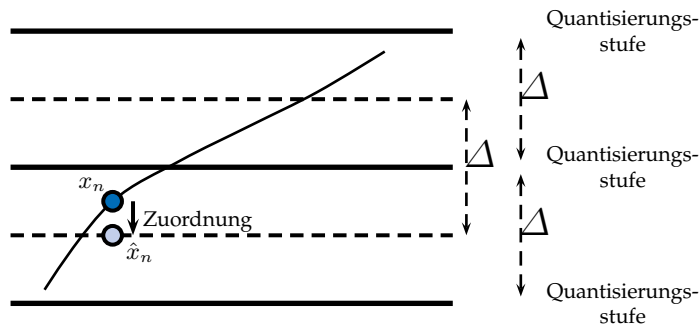


Abb. 5.38: Idealisierte Darstellung der Abtastung

Ohne zusätzliche Voraussetzungen kann dem Wert von x_n kein spezifischer Ort um die Quantisierungsstufe innerhalb dieses Intervalls zugeordnet werden. Dies macht die Voraussetzung sinnvoll, dass jeder Wert von x_n innerhalb des gestrichelten Bandes der Breite Δ „gleich wahrscheinlich“ ist. Somit ist jeder Quantisierungsfehler im Intervall $[-\Delta/2, \Delta/2]$ „gleich wahrscheinlich“!

Der Quantisierungsfehler q_n kann daher für jedes n durch eine **gleichverteilte Zufallsvariable** im Intervall $[-\Delta/2, \Delta/2]$ modelliert werden.

Da nach Voraussetzung an x_n auch die einzelnen Quantisierungsfehler voneinander **unabhängig** sein sollten, handelt es sich um einen diskreten, mittelwertfreien weißen Rauschprozess, wobei die Verteilung der Signalamplituden nicht die Gauß- sondern die Gleichverteilung ist.

Das Leistungsdichtespektrum ist deshalb flach im Abtastband mit einer Gesamtleistung entsprechend der Varianz von q .

Diese lässt sich mit ein paar Grundkenntnissen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung [2] leicht berechnen zu:

$$\mathbb{V}(q) = \sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12}. \quad (490.1)$$

Diese Tatsache hat zwei bedeutende Konsequenzen.

Zum einen entspricht **die wahre Auflösung**, auch als so genannte **effektive Auflösung** bekannt, **nicht** der nominellen Auflösung, sondern ergibt sich aus dem **Signal-/Quantisierungsrauschleistungs-Verhältnis!**

Zum anderen muss beim Design von Analog/Digital-Schaltungen stets auf diese zusätzliche Rauschquelle geachtet werden. Rauscht der Analogteil zu stark, so nützt auch der beste A/D-Wandler nichts und umgekehrt kann die Wahl eines zu niedrig auflösenden A/D-Wandlers die Performance des Systems negativ beeinflussen. Welcher A/D-Wandler gewählt werden muss, kann durch eine überschlägige Berechnung der im Analogteil gebildeten thermischen Rauschleistungsdichte im Vergleich mit der Quantisierungsrauschleistungsdichte ermittelt werden.

Wir wollen zum Abschluss das aus dem Quantisierungsrauschen resultierende SNR berechnen.

Übung 154

Wir bedienen uns dazu (verfolgt man die obige Argumentation, nicht ganz korrekterweise, aber gemäß den Gepflogenheiten für das Testen von A/D-Wandlern) eines quantisierten Sinussignals.

Übung 155

Besitzt ein A/D-Wandler einen Aussteuerungsbereich von R (Volt) und hat das Sinussignal, welches natürlich unter Einhaltung des Abtasttheorems diskretisiert wird, eine Amplitude von $A = m \cdot \frac{R}{2}$, $m \leq 1$, so ergibt sich für den Signal-/Quantisierungsrauschleistungs-Abstand SNR_q in dB:

Übung 156

$$\text{SNR}_q = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{A^2/2}{\sigma_q^2} \right). \quad (491.1)$$

Setzt man die Werte für Amplitude A und Varianz σ_q^2 in die Formel ein, so erhält man:

$$\text{SNR}_q = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{m^2 R^2 / 8}{\Delta^2 / 12} \right). \quad (491.2)$$

Mit $\Delta = \frac{R}{2^n}$ (ein 2^n -tel des Aussteuerungsbereiches) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{SNR}_q &= 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{m^2 R^2 / 8}{R^2 / (12 \cdot 2^{2n})} \right) \\ &= 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{12 \cdot 2^{2n} \cdot m^2}{8} \right) \\ &= 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{3}{2} 2^{2n} m^2 \right) \\ &= 20 \cdot \log_{10}(m) + 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{3}{2}\right) + 20n \cdot \log_{10}(2). \end{aligned} \quad (491.3)$$

Man erkennt, dass sich das Verhältnis bei kleiner Aussteuerung m des Signals verschlechtert.

Bei Vollaussteuerung (d.h. bei $m = 1$) ergibt sich die bekannte Formel (492.2) für die so genannte **effektive Auflösung (in Bit)** eines A/D-Wandlers.

Aus dem SNR^{35} , welches gemäß Gleichung (491.3) in diesem Fall

$$\text{SNR}_q = 1.76 + n \cdot 6.02 \quad \text{dB} \quad (492.1)$$

beträgt, lässt sich bei Vorliegen eines durch Spektralanalyse des A/D-Wandler-Ausgangssignals *gemessenen* SNR_q die folgende Formel ableiten:

$$n_{\text{eff}} = \frac{\text{SNR}_q - 1.76}{6.02} \quad \text{Bit.} \quad (492.2)$$

Diese Formel eröffnet also beim Test eines A/D-Wandlers die Möglichkeit, anhand der Messung des SNR die „wahre“, d.h. **effektive Auflösung** eines Wandlers zu berechnen.

5.5.4 Experimentelle Bestimmung der effektiven Auflösung eines ADU

Die im vorangegangenen Abschnitt vorgestellte Methode soll nun in einem Laborversuch am Beispiel eines konkreten ADU durchgeführt³⁶ werden.

Abbildung 5.39 zeigt die Datenerfassungskarte NI PCI-6024E von National Instruments. Mit ihrer Hilfe können (u.a.) Analogsignale digitalisiert und mit geeigneten Programmen auf einen Rechner übertragen werden. Der für die Digitalisierung intern verwendete ADU LTC1410 von Linear Technology hat laut Datenblatt eine nominelle Auflösung von 12-Bit.

Mit Hilfe eines Signalgenerators wurde der ADU der Datenerfassungskarte mit einer 100 Hz-Sinusschwingung angesteuert. Die Amplitude betrug 5 V. Der Aussteuerungsbereich R betrug 10 V und der Aussteuerungsgrad m somit 1. Die Abtastrate f_a wurde auf 20000 Hz eingestellt.

Das digitalisierte Signal ist im *.mat-File **ADUTest.mat** der Begleitsoftware verfügbar. Mit

³⁵ Genauer gesagt, wird bei einer solchen Messung das Verhältnis der Signalleistung zur Gesamtleistung *aller Störeinflüsse* bestimmt. Dazu gehören neben dem Quantisierungsrauschen und dem thermischen Rauschen u.a. auch der *Jitter*-Fehler, welcher auf die nicht ideale Realisierung des Abtastzeitpunktes zurückgeht. Man spricht deshalb in diesem Zusammenhang nicht vom Signal-Rausch-Abstand (SNR), sondern genauer vom Signal-zu-Rausch-und Stör-Abstand (Signal to Noise and Distortion, SINAD). Wir werden diesen Begriff allerdings im Folgenden nicht verwenden.

³⁶ Es sollte an dieser Stelle erwähnt werden, dass die Laborbedingungen bei dem hier beschriebenen Versuch natürlich nicht ideal waren. Die Ergebnisse sind somit nur als Näherung zu verstehen. Bei der Beschreibung dieses Versuches (und aller anderen im vorliegenden Abschnitt beschriebenen Versuche) geht es primär um die Vorgehensweise, die Probleme bei der Durchführung und die Probleme bei der Interpretation der Ergebnisse.

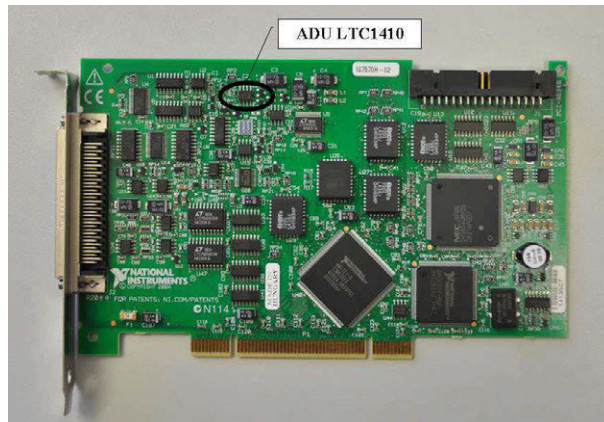


Abb. 5.39: Datenerfassungskarte NI PCI-6024E

```
>> load ADUTest
```

```
>> whos
```

Name	Size	Bytes
signal5V100Hz20KHz	99948 x1	799584

kann das Signal `signal5V100Hz20KHz` in den MATLAB-Workspace geladen werden.

Mit den folgenden Anweisungen wird das (einseitige) Leistungsdichtespektrum des Signals berechnet:

```
>> sig = signal5V100Hz20KHz; % des kürzeren Namens wegen

>> % Leistungsdichtespektrum berechnen
>> % (Bartlett-Fenster, um Leakage-Effekt zu minimieren)

>> abtastrate = 20000;
>> NFFT = 8*1024; % df = 20000/NFFT = 2.4414 Hz
>> [Sxx,F] = cpsd(sig,sig,bartlett(NFFT),...
>>               NFFT/2,NFFT,abtastrate,'onesided');
```

Danach wird die in Abbildung 5.40 wiedergegebene grafische Darstellung erzeugt:

```
>> plot(F,10*log10(Sxx))
>> xlabel('Frequenz/Hz')
>> ylabel('Sxx/dB')
>> grid
```

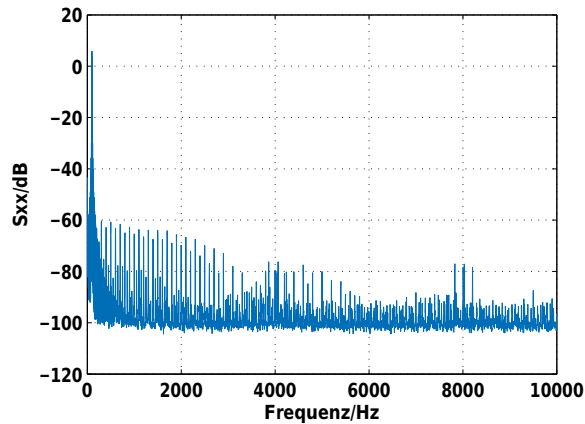


Abb. 5.40: Berechnetes Leistungsdichtespektrum

An der Darstellung ist zu erkennen, dass das Signal sehr unsauber ist. Zwar garantiert die Verwendung eines Bartlett-Fensters, dass der Leakage-Effekt für die höheren Frequenzen keine Rolle mehr spielen dürfte, jedoch sind deutliche Linien erkennbar, die auf nichtlineare Effekte in der Messkette zurückzuführen sind, welche zur Bildung von Oberwellen des (verzerrten) Sinussignals führen.

Dieses Zwischenergebnis verdeutlicht die Problematik dieses Messverfahrens. Unter normalen (Hochschul-)Laborbedingungen dürfte es schwierig sein, hochlineare Messketten und saubere Signale zu realisieren.

Der Messung kann aber mit folgenden Überlegungen trotzdem ein passables Ergebnis entlockt werden. Die Inspektion von Abbildung 5.40 zeigt, dass in einem Frequenzband ab ca. 8300 Hz keine größeren Stör-Peaks mehr vorkommen. Geht man einmal davon aus, dass wir uns ab dieser Frequenz im Bereich des additiven Rauschens (Quantisierungsrauschen plus sonstige Rauschquellen) befinden, so kann man versuchen, die Rauschleistung in diesem Band zu messen und auf das gesamte Nyquist-Band „hochzurechnen“:

```
>> % Ausschnitt aus Leistungsdichtespektrum ausschneiden,
>> % der wahrscheinlich keine Signal- sondern nur noch
>> % Rauschanteile enthält. Es wird nach Inspektion des
>> % Spektralplots der Bereich von 8301 Hz bis fa/2=10000
>> % Hz gewählt.

>> df = abtastrate/NFFT;
>> binunten = floor(8301/df);      % Index von ~8301 Hz

% Spektrum (hoffentlich) ohne Signal- und Leakage-Anteile
>> PNN = [Sxx(binunten:end)];
```

```
% Rauschleistung approximativ berechnen

>> nnbins = length(PNN); % Anteil des Bandes mit Rauschen
>> faktor = NFFT/nnbins % Verhältnis halbes Nyquistband
                        % zu betrachtetem Band

faktor =

    11.7364

>> N = sum(PNN)*faktor*df % "hochgerechnete" Rauschleist.

N =

    2.5963e-006
```

Das betrachtete Frequenzband stellt den ca. 12-ten Teil des halben Nyquist-Bandes $[0, \frac{f_a}{2}]$ Hz dar. Zu beachten ist, dass N die gesamte Rauschleistung im Nyquist-Band $[-\frac{f_a}{2}, \frac{f_a}{2}]$ Hz repräsentiert, obwohl mit

```
sum(PNN)*faktor*df
```

nur über das halbe Nyquist-Band integriert wird, denn bei Verwendung der Option 'onesided' werden die Leistungsanteile der negativen Frequenzen denen der positiven zugeschlagen.

Mit den folgenden Befehlen wird der Signal-Rausch-Abstand berechnet:

```
>> % Signalleistung berechnen. Diese wird nicht
>> % aus dem PSD ermittelt,
>> % sondern anhand der eingestellten Amplitude

>> A = 5; % 5 Volt
>> S = (A^2/2); % Signalleistung
>> SNR = 10*log10(S/N)

SNR =

    66.8256
```

Danach kann die effektive Bitzahl geschätzt werden:

```
>> m = 1;
>> neff = (SNR-20*log10(m)-1.76)/6.02
```

```
neff =  
  
10.8082
```

Man erhält effektive 10.8 Bit!

Dieses Ergebnis dürfte aufgrund der Störungen etwas zu ungünstig für den ADU sein.

Geht man erneut von Abbildung 5.40 aus und schätzt den Rauschfloor auf ca. -100 dB, so kann man der obigen Berechnung folgende Überschlagsrechnung gegenüber stellen:

```
>> % Rauschleistungsdichte bei abgelesen -100 dB/Hz  
>> dN = 10^(-100/10)  
  
dN =  
  
1.0000e-010  
  
>> % Rauschleistung  
>> N = dN*20000  
  
N =  
  
2.0000e-006  
  
>> % Signalleistung  
>> S = (5^2)/2  
  
S =  
  
12.5000  
  
>> % SNR berechnen  
>> SNR = 10*log10(S/N)  
  
SNR =  
  
67.9588  
  
>> % Effektive Bitzahl  
>> m = 1;  
>> neff = (SNR-20*log10(m)-1.76)/6.02  
  
neff =  
  
10.9965
```

Die effektive Bitzahl kann also auf ca. 11 Bit geschätzt werden.

Genaueren Aufschluss könnte nur eine sorgfältigere Messung der obigen Art unter Verwendung hochwertigerer Komponenten bieten. Folgt man dem Datenblatt [28] des ADU LTC1410, so liegt die tatsächliche effektive Bitzahl bei 11.8 Bit.

5.5.5 Laufzeitmessung mittels Korrelation

Eine mögliche Anwendung der Korrelationsidee bietet sich dort, wo *Laufzeiten* zu messen oder *Echos* zu detektieren sind.

Denkbare Anwendungen wären die (berührungslose) Geschwindigkeitsmessung von Förderbändern, Fahrzeugen oder rotierenden Elementen (Drehzahlmessung), wo etwa optisch eine vorbeilaufende Oberfläche zweimal abgetastet wird und – im Idealfall – das zweite Signal eine verzögerte Version des ersten Signals sein sollte (man vergleiche dazu Abbildung 1.15, S. 15).

Eine andere Anwendung wäre die Abstandsmessung mit Hilfe von Laufzeitmessungen. Hierbei wird ein abgesendetes und vom Ziel reflektiertes Signal mit einer gleichartigen, lokal erzeugten Version verglichen. Anschließend wird der Zeitversatz per Korrelation bestimmt und es wird mit Hilfe der bekannten Signalgeschwindigkeit der Abstand berechnet. Solche Prinzipien finden sich (in komplizierterer Version als wir hier besprechen werden) im *Radar* oder in der *Satellitenortung* (vgl. dazu Abbildung 1.10, S. 11).

Die Grundidee des Messverfahrens ist recht einfach: Man verschiebe zwei Signale solange gegeneinander und korreliere sie, bis maximale Übereinstimmung durch ein auftretendes Korrelationsmaximum angezeigt wird. Enthalten beide Signale zeitlich gegeneinander versetzte Versionen, so erscheint das Korrelationsmaximum zu einer Zeit τ , die der Zeitverschiebung entspricht.

Dies bedeutet, dass die *Kreuzkorrelationsfunktion* eines Signals $x(t)$ und eines Signals $y(t)$, welches eine (gegebenenfalls verrauschte) um τ zeitversetzte und amplitudenveränderte Version von $x(t)$ enthält, ein Maximum bei τ haben sollte. Dies geht aus der nachfolgenden einfachen Rechnung hervor:

Sei $x(t)$ ein Nutzsignal, $n(t)$ ein Rauschsignal, etwa ein durch thermisches Rauschen verursachtes Störsignal, und

$$z(t) = x(t) + n(t) \quad (497.1)$$

eine Überlagerung dieser beiden Signale.

Sei weiter $m(t)$ ein zu $n(t)$ *unkorreliertes* Rauschsignal, τ_0 eine Verzögerungszeit und

$$y(t) = \alpha \cdot x(t - \tau_0) + m(t) \quad (497.2)$$

eine verzögerte, amplitudenveränderte, verrauschte Version von $x(t)$.

Dann gilt für die **Kreuzkorrelationsfunktion** der zu Grunde liegenden – als stationär angenommenen – Prozesse $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$, $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$, $(N_t)_{t \in \mathbb{R}}$ und $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}
 r_{ZY}(\tau) &= \mathbb{E}(Z_t Y_{t+\tau}) = \mathbb{E}((X_t + N_t)(\alpha X_{t-\tau_0+\tau} + M_{t+\tau})) \\
 &= \mathbb{E}(\alpha X_t X_{t-\tau_0+\tau} + X_t M_{t+\tau} + \alpha N_t X_{t-\tau_0+\tau} + N_t M_{t+\tau}) \quad (498.1) \\
 &= \mathbb{E}(\alpha X_t X_{t-\tau_0+\tau}) + \mathbb{E}(X_t M_{t+\tau}) + \mathbb{E}(\alpha N_t X_{t-\tau_0+\tau}) + \mathbb{E}(N_t M_{t+\tau}) \\
 &= \alpha r_{XX}(\tau - \tau_0) + \mathbb{E}(X_t M_{t+\tau}) + \alpha \mathbb{E}(N_t X_{t-\tau_0+\tau}) + \mathbb{E}(N_t M_{t+\tau}).
 \end{aligned}$$

Nimmt man nun für die Rauschprozesse an, dass es sich um **unabhängige**, mittelwertfreie **Prozesse** handelt, was zumindest bei Messrauschen sinnvoll angenommen werden kann, und nimmt man weiterhin an, dass die **Störprozesse unabhängig von den Nutzsignalprozessen** sind, was vielfach ebenfalls eine sinnvolle Annahme ist, so erhält man für die gemischten Erwartungswerte den Wert 0 und insgesamt gilt:

$$r_{ZY}(\tau) = \alpha r_{XX}(\tau - \tau_0). \quad (498.2)$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion ist also die um τ_0 verschobene, um α skalierte **Autokorrelationsfunktion des Eingangsprozesses**. Da die Autokorrelierte ihr Maximum stets bei 0 hat, hat die Kreuzkorrelierte ihr Maximum bei τ_0 !

Der Zeitversatz τ_0 kann also mit einer Maximumsuche gefunden werden!

Güte der Laufzeitschätzung

Wie oben hergeleitet, wird die Laufzeit aus der Kreuzkorrelierten bestimmt. Diese ist in der Praxis Ergebnis einer **Mittelung** über eine oder ggf. mehrere (Ausschnitte von) Musterfunktionen! Die Bestimmung der Laufzeit nach diesem Verfahren kann daher **nie exakt** sein. Sie ist stets eine **Schätzung**!

Ein bestimmender Faktor für die Güte und damit die Verlässlichkeit der Schätzung ist sicherlich das **Signal/Rauschleistungs-Verhältnis** des für die Messung verwendeten Nutzsignals und der beteiligten Störsignale.

Darüber hinaus werden, wie bereits erwähnt, die Kennwerte unter Zugrundelegung der Ergodenhypothese anhand von Musterfunktionen **endlicher Länge** T berechnet. Es ist klar, dass diese endliche Beobachtungslänge Einfluss auf die Güte der Schätzung haben muss.

Genau genommen müsste man daher neben der reinen Bestimmung der Laufzeit τ_0 auch mit angeben, wie genau die Schätzung ist. Man müsste also **Varianz und Vertrauensintervall des Schätzers** mit angeben. Wir wollen hier nicht in die mathematischen Details der Herleitung eindringen, sondern lediglich die Ergebnisse wiedergeben und interpretieren.

Man kann zeigen [30], dass die auf der Kreuzkorrelation endlicher Länge zweier Musterfunktionen $z(t)$ und $y(t)$ beruhende Schätzung

$$\hat{\tau}_0 = \max_{\tau \in \mathbb{R}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) z(t + \tau) dt \quad (498.3)$$

ein so genannter **erwartungstreuer Schätzer** ist, d.h. es gilt:

$$\mathbb{E}(\hat{\tau}_0) = \tau_0. \quad (499.1)$$

Dies bedeutet nichts weiter, als dass diese Schätzung **im Mittel** den richtigen Wert für die Verzögerung τ_0 liefert.

Für (gegenüber der Signalbandbreite) breitbandiges Rauschen $m(t)$ mit Gesamtrauschleistung M_0 besitzt die Schätzung die Varianz [30]:

$$\mathbb{V}(\hat{\tau}_0) \approx \frac{M_0}{T\alpha^2 \left| \frac{d^2}{d\tau^2} r_{XX}(0) \right|}. \quad (499.2)$$

An der Formel (499.2) kann man zunächst unmittelbar erkennen, dass sich die Varianz der Schätzung **erhöht**, wenn

- die Rauschleistung M_0 größer wird (der SNR somit kleiner),
- die Schätzdauer T kleiner wird,
- die Amplitude α kleiner wird (der SNR somit ebenfalls kleiner).

Alle diese Abhängigkeiten wurden oben bereits angesprochen und sind unmittelbar einzusehen.

Der letzte Faktor im Nenner von (499.2), die zweite Ableitung der Autokorrelationsfunktion an der Stelle 0, bedarf einer genaueren Untersuchung.

Die Tatsache, dass die Autokorrelierte $r_{XX}(\tau)$ nach Definition des Leistungsdichtespektrums die Fourier-Rücktransformierte des Leistungsdichtespektrums ist, impliziert:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} r_{XX}(0) &= \frac{d^2}{d\tau^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \bigg|_{\tau=0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(j\omega) \frac{d^2}{d\tau^2} e^{j\omega\tau} d\omega \bigg|_{\tau=0} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(j\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (499.3)$$

Wie man der Formel entnehmen kann, entspricht der Ausdruck $\frac{d^2}{d\tau^2} r_{XX}(0)$ einer Gewichtung des Leistungsdichtespektrums von X_t mit starker Betonung der hohen Frequenzen. Es handelt sich also um ein **Bandbreitemaß** für das Nutzsignal $x(t)$.

Die Varianzformel (499.2) sagt demnach aus, dass die Varianz und damit die Güte der Laufzeitschätzung umso besser wird, je höher dieser Bandbreitenfaktor ist.

Man ist deshalb bemüht, für diese Art der Laufzeitmessung **möglichst breitbandige Signale** zu wählen.

Geeignet hierfür ist vor allen Dingen bandbegrenzttes weißes Rauschen!

Ein weiterer, für diese Zwecke viel verwendeter Signaltyp ist das so genannte **Chirp-Signal**. Darunter versteht man ein sich zeitabhängig linear in der Frequenz änderndes Sinussignal, d.h. ein Signal der Form:

$$x(t) = \sin(2\pi f_\rho(t) \cdot t) \quad \text{mit} \quad f_\rho(t) = \rho \cdot t, \quad \rho \in \mathbb{R}_+. \quad (500.1)$$

Das Spektrum eines solchen Chirp-Signals ähnelt dem eines bandbegrenzten weißen Rauschens (vgl. Übung 157).

Ferner werden, beispielsweise im GPS, digitale **Pseudozufallssignale** verwendet, welche ebenfalls sehr breitbandig sind und **rauschartige Eigenschaften** haben.

Alle diese Signaltypen zeichnen sich durch ein flaches, dem weißen Rauschen ähnliches Spektrum aus und haben daher einen hohen Bandbreitenfaktor im Sinne der Formel (499.3).

Die in den nachfolgenden beiden Abschnitten diskutierten Beispiele sollen ein Gefühl für die Möglichkeiten und die Schwierigkeiten des Korrelationsverfahrens geben.

5.5.6 Berührungsfreie Messung der Rotationsgeschwindigkeit einer rotierenden Scheibe mittels Korrelation optischer Sensorsignale

Wir greifen zur Illustration der Korrelationsmesstechnik das Rotationsgeschwindigkeits-Messsystem aus Kapitel 1, Abbildung 1.14, S. 15 noch einmal auf. Abbildung 5.41 zeigt den Versuchsaufbau zur Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit einer (bedruckten) Scheibe (CD). Zwei kurz nacheinander über der Scheibe platzierte Infrarotsensoren tasten dabei die Oberfläche der Scheibe ab. Die reflektierten Signale repräsentieren **zeitversetzt** die (prinzipiell gleiche) Oberflächenstruktur der Scheibe. Aus dem Zeitversatz und dem bekannten Abstand der Sensoren kann die Geschwindigkeit ermittelt werden.

Der Zeitversatz soll nun mit Hilfe der Kreuzkorrelation der beiden gemessenen Signale auf der Grundlage von (498.3) bestimmt werden.

Zwei der von den Sensoren gemessenen Signale sind beispielhaft in Abbildung 5.42 dargestellt.

Der zeitliche Versatz der Signale ist im Zeitbereich zwar zu erkennen, aber aufgrund der verrauschten Struktur der Signale nicht ohne weiteres und schon gar nicht genau abzulesen.

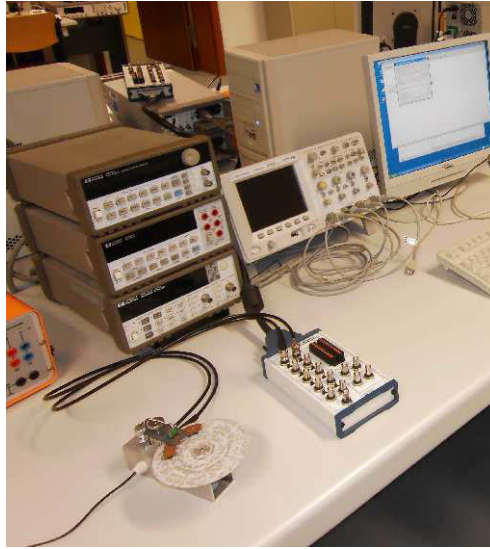


Abb. 5.41: Versuchsaufbau des Rotationsgeschwindigkeits-Messsystems

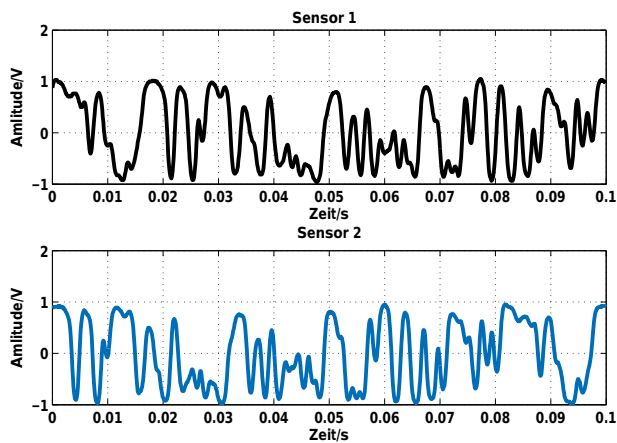


Abb. 5.42: Signale der Infrarotsensoren des Rotationsgeschwindigkeits-Messsystems aus Abbildung 1.14

Mit Hilfe des folgenden MATLAB-Programms (vgl. Dateien **KorrCDPunkte.m**, **SignaleCDdickePunkte.mat**) wird daher eine Schätzung des Zeitversatzes der beiden Sensorsignale auf Basis von (498.3) durchgeführt:

```
% Laden der Signalmatrix
load SignaleCDdickePunkte
```

```

% Entnahme der einzelnen Signale
zeit = SignaleCDdickePunkte(:,1);
kanal1 = SignaleCDdickePunkte(:,2);
kanal2 = SignaleCDdickePunkte(:,3);

% Bestimmung der Abtastrate (äquidistante
% Abtastung ist vorausgesetzt)
dt = zeit(2)-zeit(1);
T = zeit(end)-zeit(1); % Signaldauer in sec
N = length(zeit);
                                % Korrelationszeitvektor
czeit = (-T:dt:N*dt);

% Berechnung der Kreuzkorrelation von
% kanal1 und kanal2
corsig = xcorr(kanal1,kanal2,'biased');

% Grafische Darstellung
figure
plot(czeit,corsig,'r','LineWidth',3)
title('CD mit vielen dicken Punkten')
xlabel('Zeit/s')
grid

% Berechnung des Zeitversatzes
[maxm,ind] = max(corsig);
ZeitVCDdickePunkte = czeit(ind)

```

Grundlage der Berechnung ist dabei eine Messung mit einer CD, die mit dicken, über die Fläche *gleichverteilten* Punkten bedruckt ist, um der Oberfläche eine für die optische Abtastung geeignete, unregelmäßige Struktur zu verleihen.

In ähnlicher Weise wird mit Hilfe des Programms **KorrCDKreise.m** eine Messung mit einer CD durchgeführt, die mit kleinen, über die Fläche *gleichverteilten* Kreisen bedruckt wurde. Zum Vergleich wird dann noch mit Hilfe des Programms **KorrCDOoriginal.m** eine Laufzeitschätzung mit Signalen durchgeführt, die auf einer Abtastung der CD mit ihrem originalen Aufdruck (Grafik mit einem dunklen Balken) beruhen.

Alle Berechnungen können mit dem Script-File **KorrCDAlle.m** aufgerufen werden:

```

>> KorrCDAlle

ZeitVCDvieleKreise =

    0.0175

```

ZeitVCDdickePunkte =

0.0172

ZeitVCDOriginaldruck =

0.0173

In allen Fällen wird ein Zeitversatz von ca. 0.0175 s berechnet. Die Abbildung 5.43 zeigt zum Vergleich die Korrelationsfunktionen für die Messung „mit dicken Punkten“ und die Messung mit der Originalbedruckung.

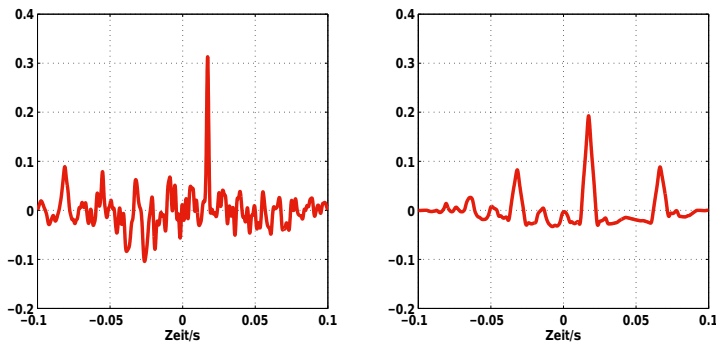


Abb. 5.43: Korrelationsfunktionen für die Messung „mit dicken Punkten“ (links) und für die Messung mit der Originalbedruckung (rechts)

In der Originalbedruckung (hier nicht dargestellt) wies die CD lediglich einen dicken schwarzen Balken in der Mitte und einige Beschriftungen außerhalb auf. Im Gegensatz zu der Bedruckung mit unregelmäßigen Punkten führt solch ein Muster dazu, dass die Sensoren i.W. ein periodisches Signal produzieren. Dessen Bandbreitfaktor (s. Gleichung (499.3)) ist geringer und das Korrelationsmaximum in Folge dessen weniger ausgeprägt.

Deutlich sind die beiden Nebenspitzen bei der Messung mit Originalbedruckung zu erkennen, die auf den bei der Rotation periodisch auftauchenden dunklen Balken der CD zurückzuführen sind. Dadurch könnte in einer stärker verrauschten Umgebung unter Umständen eine Fehlmessung resultieren. Deutlich ausgeprägter ist das Maximum bei dem unregelmäßigeren Punkte-Hintergrund. Die vom Sensor aufgenommenen Signale sind durch die unregelmäßige Bedruckung „rauschartiger“ und das Korrelationsmaximum ausgeprägter.

Die Qualität der Laufzeitschätzung hängt natürlich zunächst auch von der gewählten Abtaste rate ab. Es ist klar, dass das Ergebnis einer Einzelmessung eine Laufzeit ist, die in **Vielfachen des Abtastintervalls** angegeben wird.

Die Güteaussage in Gleichung (498.3) basiert auf der **Varianz** der Schätzung. Dies ist also eine Aussage, die auf einer **Mittelung** über viele Messungen beruht! Eine Genauigkeit im Sinne von (498.3) kann daher nur durch Mittelung mehrerer Messungen erreicht werden.

Die Messzeit T spielt nach (499.2) für die Güte der Schätzung ebenfalls eine Rolle. Diese war in den obigen Beispielen vergleichsweise kurz (0.1 s), sodass bei der verwendeten Abtaste rate von 10 kHz lediglich 1000 Abtastwerte für die Korrelation herangezogen wurden.

In einem weiteren Versuch³⁷ mit der in Abbildung 5.44 dargestellten, mit unregelmäßigen, dicken Punkten bedruckten CD wird bei gleichbleibender Abtaste rate von 10 kHz die Messdauer T auf 20 s deutlich erhöht.

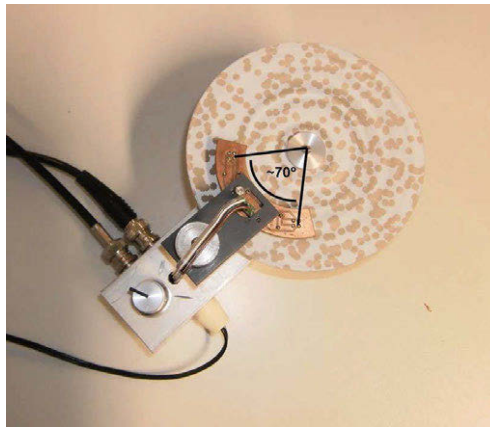


Abb. 5.44: CD mit „dicken Punkten“ und geometrische Anordnung der Sensoren

Mit den folgenden Anweisungen (vgl. Dateien **KorrV2CDPunkte.m** und **cd-aufnahme.mat**) wird das Korrelationssignal berechnet, grafisch dargestellt und das Korrelationsmaximum ermittelt:

```
load cdaufnahme.mat

% Zunächst werden Mittelwert und ggf. vorhandene
% lineare Trends aus den Sensorsignalen eliminiert
sensor1 = detrend(sensor1);
sensor2 = detrend(sensor2);
```

³⁷ Die Rotationsgeschwindigkeit wurde für diesen Versuch gegenüber dem vorangegangenen Versuch erhöht!

```

...

% Berechnung der Kreuzkorrelation von
% sensor1 und sensor2
corsig = xcorr(sensor1,sensor2,'biased');

% Grafische Darstellung
...

% Ausschnittsvergrößerung der grafischen Darstellung
figure
plot(czeit,corsig,'b','LineWidth',2)
xlabel('Zeit/s')
grid
axis([-0.15,0.15,1.1*min(corsig),1.1*max(corsig)])

% Berechnung des Zeitversatzes
[maxm,ind] = max(corsig);
ZeitV2CDdickePunkte = czeit(ind)

```

Abbildung 5.45 zeigt die Kreuzkorrelationsfunktion auf der ganzen verwendeten Zeitskala und ausschnittsvergrößert in dem interessanten Bereich um 0 herum.

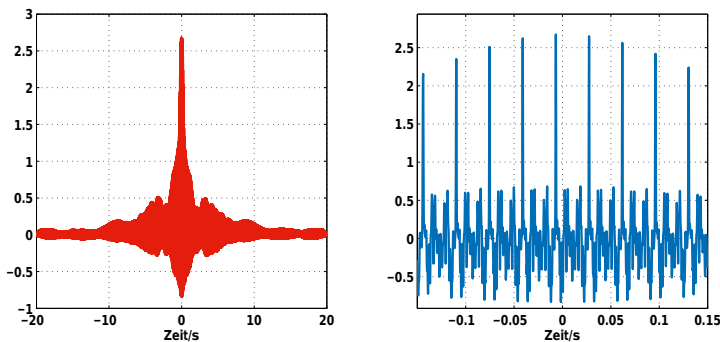


Abb. 5.45: Kreuzkorrelationsfunktion für die zweite Messung „mit dicken Punkten“ (links) und eine Ausschnittsvergrößerung (rechts)

Interessante Aufschlüsse liefert natürlich nur die Ausschnittsvergrößerung. Sie zeigt ein Korrelationsmaximum bei dem durch das Programm berechneten Wert

```

>> KorrV2CDPunkte

ZeitV2CDdickePunkte =

```

–0.0068

allerdings in regelmäßigen Abschnitten auch weitere Nebenmaxima!
Abbildung 5.46 zeigt eine weitere Ausschnittsvergrößerung, aus der der Abstand dieser Nebenmaxima zu ermitteln ist.

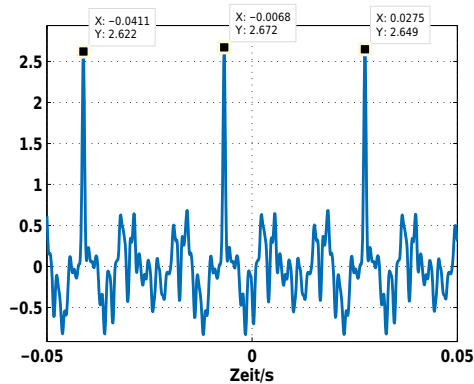


Abb. 5.46: Eine weitere Ausschnittsvergrößerung der Kreuzkorrelationsfunktion

Der Abstand der Linien beträgt:

```
>> 0.0275 - (-0.0068)

ans =

    0.0343

>> -0.0068 - (-0.0411)

ans =

    0.0343
```

Man beobachtet also offenbar eine Ähnlichkeit der Sensorsignale nach 0.0068 s und nach Vielfachen von 0.0343 s .

Diese Beobachtung kann so erklärt werden: Der erste Wert entspricht der gesuchten Laufzeit von Sensor 1 zu Sensor 2, der zweite Wert muss die Laufzeit für *eine volle Rotation* sein.

Wir können diese Vermutung anhand Abbildung 5.44 geometrisch überprüfen.

Da das Verhältnis der gemessenen Laufzeiten wegen

```
>> 0.0343/0.0068
```

```
ans =
```

```
5.0441
```

ungefähr $1/5$ beträgt, müsste dies entsprechend der obigen Interpretation auch dem Verhältnis des Winkelabstands der Sensoren zum Gesamtwinkel im Kreis entsprechen. Wir berechnen:

```
>> w = 360/5.0441
```

```
w =
```

```
71.3705
```

Dies entspricht ziemlich genau dem in Abbildung 5.44 eingezeichneten Winkel. Dies unterstützt die obige Interpretation der Nebenmaxima.

Da die Zeit für eine Umdrehung 0.0343 s ist, können wir die Rotationsgeschwindigkeit wegen

```
>> R = 60/0.0343
```

```
R =
```

```
1.7493e+003
```

mit ca. 1749 U/min angeben (schätzen).

5.5.7 Entfernungsmessung mittels Korrelation akustischer Laufzeitsignale

Im vorangegangenen Abschnitt wurde mit Hilfe der Korrelationstechnik die Rotationsgeschwindigkeit einer Scheibe ermittelt. Es konnten sogar Aussagen über die geometrische Anordnung der Sensoren gemacht werden, da der (Winkel-)Abstand aus den Daten ermittelt werden konnte.

Dieser Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit des Mediums oder äquivalent der Ausbreitungsgeschwindigkeit der zur Messung verwendeten Signale und dem Abstand der Sensoren kann umgekehrt zu *Abstands- und Entfernungsmessung* verwendet werden.

Kennt man die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Signals und kann man (beispielsweise über eine Korrelation) die Laufzeit zwischen zwei Sensoren messen, so kann umgekehrt der Abstand der Sensoren oder ganz allgemein eine Distanz vermessen werden.

Die Anwendungsbeispiele dieses Prinzips sind zahlreich. Die Abstandsmessung mit Radar beruht auf diesem Prinzip ebenso wie das in Kapitel 1 als Beispiel schon angesprochene GPS-System.

Im Folgenden soll diese Messtechnik anhand eines einfachen *akustischen* Laborexperiments illustriert werden. Dabei soll mit Hilfe eines akustischen Signals der Abstand zweier auf einer Schiene angeordneter Mikrofone vermessen werden.

Abbildung 5.47 zeigt die Versuchsanordnung.



Abb. 5.47: Versuchsaufbau des Messsystems zu Abstandsmessung

Sie besteht aus einem Lautsprecher, der über einen Signalgenerator mit dem zur Messung verwendeten Nutzsignal angesteuert wird. Die auf der Schiene in einem festen Abstand angeordneten (gleichartigen) Mikrofone nehmen das Signal auf. Die gemessenen Signale werden mit einem Speicheroszilloskop aufgezeichnet und zur späteren Weiterverarbeitung (mit MATLAB) in zwei Dateien gespeichert.

Bevor mit der Messung begonnen werden kann, sind allerdings einige Überlegungen anzustellen, die sicherstellen, dass das Experiment vernünftige Ergebnisse liefert.

Über die Struktur der zur Laufzeitmessung mit Hilfe der Korrelationsmesstechnik idealerweise zu verwendenden Signale gibt der Abschnitt 5.5.5 Auskunft. Gemäß (499.2) sind möglichst *breitbandige* Signale zu verwenden, idealerweise weißes Rauschen oder Chirp-Signale. Schlecht geeignet sind schmalbandige Signale wie etwa reine Sinussignale.

Im Folgenden soll daher der Lautsprecher über einen Signalgenerator mit einem (weißen) Rauschsignal angesteuert werden.

Da die Signale durch das Speicheroszilloskop abgetastet werden, ist die Frage nach der für die Messung *geeigneten Abtastrate* zu stellen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schall in Luft beträgt bei Zimmertemperatur bekanntlich [15]:

$$v = 343 \text{ m/s.} \quad (509.1)$$

Die Laufzeit, die sich daraus für einen cm ergibt, ist $2.9155 \cdot 10^{-5}$ s, für einen mm entsprechend $2.9155 \cdot 10^{-6}$ s.

Da in diesem Experiment mit Hilfe der Korrelation der gemessenen akustischen Signale zunächst die Laufzeit des Signals zwischen den Mikrofonen bestimmt wird und diese Laufzeit durch die Abtastung der Signale nur in Vielfachen des Abtastintervalls angegeben werden kann, ist die Genauigkeit der Messung auch durch die Abtastrate bestimmt.

Eine weitere technische Randbedingung ist die beschränkte Speicherkapazität des Speicheroszilloskops. Aus diesem Grunde muss ein Kompromiss zwischen der „geforderten“ Genauigkeit und der Menge der zu speichernden Daten geschlossen werden. Da eine Genauigkeit von einen mm bei diesem einfachen Versuchsaufbau ohnehin kaum zu erwarten ist, wurde in den Experimenten eine Abtastrate von $f_a = 100$ kHz entsprechend einem Abtastintervall von $1 \cdot 10^{-5}$ s gewählt, was einer entfernungsmäßigen Auflösung von ca. 3.4 mm entspricht. Dies erschien für den vorliegenden Versuch als durchaus ausreichend. Die Einstellung erlaubte unter maximaler Ausnutzung der Speicherkapazität des verwendeten Speicheroszilloskops eine Messung von 5 s Dauer.

Eine weitere Vorüberlegung bezieht sich auf die *geometrische Anordnung* von Lautsprecher und Mikrofonen. Die in Abbildung 5.47 dargestellte Versuchsanordnung hat sich im Versuch als nachteilig erwiesen, da der Lautsprecher zu nahe an den Mikrofonen steht. Durch die in Abbildung 5.48 skizzierten „schrägen“ Laufwege des akustischen Signals zu den Mikrofonen kann es in der Tat zu erheblichen Messfehlern kommen.

Der Lautsprecher wurde daher in ca. 1 m Entfernung vom ersten Mikrofon platziert, um den geometrischen Fehler zu minimieren.

Die unter diesen Bedingungen mit einem weißen Rauschen durchgeführte Messung ist in der Datei **LaufzeitAkustWN.mat** der Begleitsoftware gespeichert und kann mit dem `load`-Befehl in den Workspace geladen werden:

```
>> load LaufzeitAkustWN.mat
```

```
>> whos
```

Name	Size	Bytes	Class
MikroHinten	500000x1	4000000	double
MikroVorne	500000x1	4000000	double
t	500000x1	4000000	double

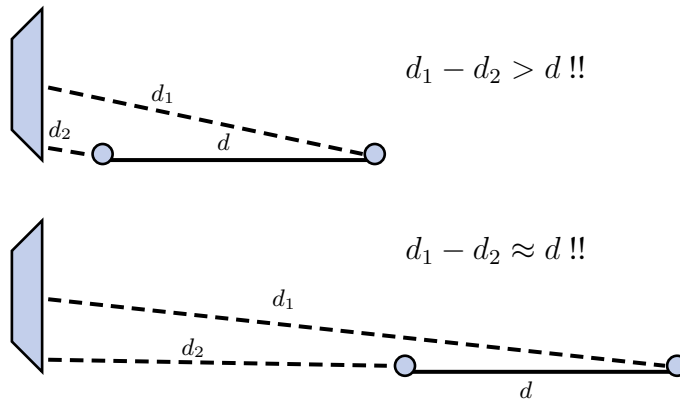


Abb. 5.48: Auswirkung der Messanordnung auf die Laufzeiten

Der bei diesem Versuch eingestellte Abstand der Mikrofone betrug 50 cm! Mit den folgenden Anweisungen (vgl. Datei **KorrAkustLaufZeit.m**) erhält man das in Abbildung 5.49 dargestellte Korrelationssignal:

```
% Zunächst werden Mittelwert und ggf. vorhandene
% lineare Trends aus den Sensorsignalen eliminiert
MikroVorne = detrend(MikroVorne);
MikroHinten = detrend(MikroHinten);

% Der Zeitoffset der Messung wird eliminiert und so
% die Anfangszeit der Messung auf 0 gesetzt
zeit = t-t(1);

% Bestimmung der Abtastrate (äquidistante
% Abtastung ist vorausgesetzt)
dt = zeit(2)-zeit(1);
T = zeit(end)-zeit(1); % Signaldauer in sec
N = length(zeit);

                                % Korrelationszeitvektor
czeit = (-T:dt:N*dt);

% Berechnung der Kreuzkorrelation von
% MikroVorne und MikroHinten
corsig = xcorr(MikroVorne, MikroHinten, 'biased');

% Grafische Darstellung
figure
plot(czeit, corsig, 'r', 'LineWidth', 2)
title('Korrelation der Mikrofonsignale')
xlabel('Zeit/s')
grid
```

```
% Ausschnittsvergrößerung der grafischen Darstellung
figure
plot(czeit, corsig, 'b', 'LineWidth', 3)
xlabel('Zeit/s')
grid
axis([-0.003, 0.0, 1.1*min(corsig), 1.1*max(corsig)])

% Berechnung des Zeitversatzes
[maxm, ind] = max(corsig);
laufzeit = czeit(ind);

% Berechnung der Entfernung der Mikrofone in cm
dMicro = laufzeit*343*100;

fprintf('\n\nGemess. Laufzeit in s : %10.5f', abs(laufzeit));
fprintf('\n\nGemess. Abstand in cm: %5.3f\n\n', abs(dMicro));
```

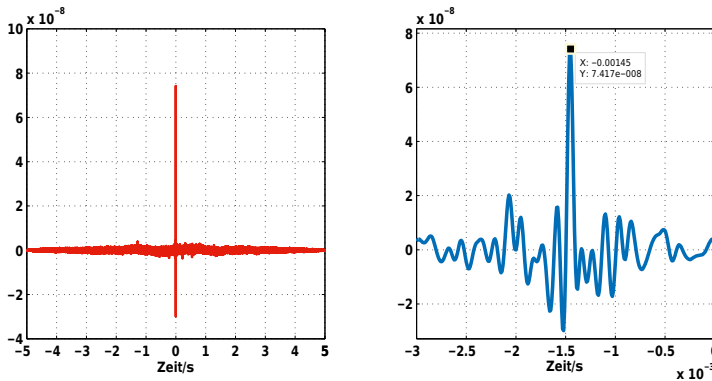


Abb. 5.49: Kreuzkorrelationsfunktion der Mikrofonssignale

Das MATLAB-Sript Datei **KorrAkustLaufZeit** gibt auch das Messergebnis aus:

Gemessene Laufzeit in s :	0.00145
Gemessener Abstand in cm:	49.735

Dieses Ergebnis ist unter Berücksichtigung der durch die Abtastrate auf ca. 3.4 mm eingeschränkten Messgenauigkeit exakt!

5.5.8 Untersuchung eines Ventilators mittels Spektralanalyse des Rotorgeräusches

Interessante Anwendungen der Spektralanalyse finden sich auf dem Gebiet der berührungsfreien Messung von mechanischen Systemen. So können oftmals aus dem emittierten Schall eines solchen Systems charakteristische Eigenschaften des Systems selbst ermittelt werden.

Im Folgenden soll dies exemplarisch an einem Beispiel illustriert werden, welches von jedermann mit einfachen Mitteln im Labor oder zu Hause nachvollzogen werden kann.

Mit Hilfe eines Mikrofons und eines Rechners wird dabei, wie in Abbildung 5.50 dargestellt, das Geräusch eines handelsüblichen Tischventilators aufgenommen und analysiert.

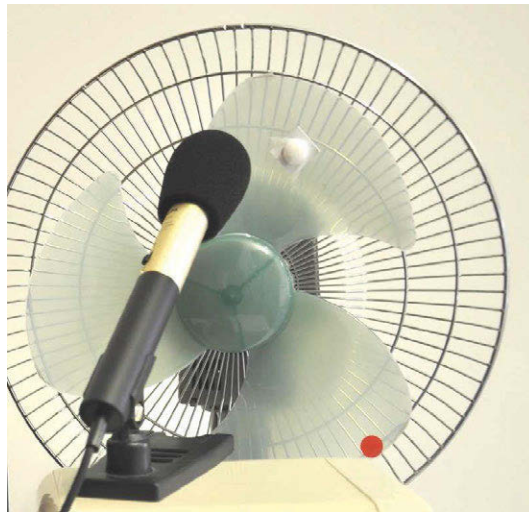


Abb. 5.50: Versuchsaufbau des Messsystems zur Geräuschanalyse eines handelsüblichen Tischventilators

Die im Folgendem analysierte Aufnahme wurde mit dem MATLAB-GUI **make_audio** des Begleitmaterials aufgenommen. Das GUI kann mit dem Befehl

```
>> [sound, FS] = make_audio;
```

gestartet werden.

Nach dem Start öffnet sich das GUI in der in Abbildung 5.51 dargestellten Form. Mit Hilfe des Buttons **Start** kann die Aufnahme gestartet und mit **Stop** beendet werden. Optional kann die Aufnahme auch mit dem Button **Save** in einem *.wav-format unter dem angegebenen Namen gespeichert werden.

Nach Drücken des Buttons **OK** steht die Audio-Aufnahme unter dem in der Ausgabeliste gewählten Variablennamen (z.B. `sound`) zur Verfügung. Zugleich wird im zweiten Parameter die Abtastrate in Hz zurückgeliefert.



Abb. 5.51: Das MATLAB-GUI `make_audio.m`

Im Folgenden werden zwei Messungen diskutiert, die in der Datei **VentilatorVersuche.mat** der Begleitsoftware gespeichert sind und mit einer `load`-Anweisung in den Workspace geladen werden können:

```
>> load VentilatorVersuche.mat
>> whos
```

Name	Size	Bytes	Class
VentiV2	321930 x1	2575440	double
VentiV2G	343980 x1	2751840	double

Das Signal `VentiV2` repräsentiert das Geräusch des Ventilators in der höchsten Geschwindigkeitsstufe. Das vordere Schutzgitter wurde für den Versuch abgenommen.

Das Signal `VentiV2G` ist das Geräusch, das bei der höchsten Geschwindigkeitsstufe entsteht, wenn ein Flügel des Ventilators, wie in Abbildung 5.50 dargestellt, mit einem kleinen Gewicht³⁸ beschwert wird.

Auswertung von Versuch 1: Nachdem das Signal `VentiV2` in den Workspace geladen ist, kann mit Hilfe der folgenden Anweisungen eine Spektralanalyse des Geräusches durchgeführt werden (vgl. Datei **VentilatorPSD.m**):

³⁸ Im vorliegenden Fall eine Aspirin-Tablette, was aber nicht heißen soll, dass man von der Auswertung dieses Versuches Kopfschmerzen bekommt;-))

```
% Signal mit detrend um Mittelwert und Tend bereinigen
VentiSig = detrend(VentiSig);

% Leistungsdichtespektrum Eingangssignal berechnen
[Pxx,F] = cpsd(VentiSig,VentiSig,bartlett(NFFT),...
               NFFT/2,NFFT,fa,'onesided');
```

Die FFT-Länge **NFFT** wird dabei so gewählt, dass die spektrale Auflösung zufriedenstellend erscheint. Mit den folgenden Einstellungen wird beispielsweise eine Auflösung von ca. 1 Hz erreicht:

```
>> NFFT = 16*1024

NFFT =

    16384

>> fa = 22050

fa =

    22050

>> df = fa/NFFT

df =

    1.3458
```

Ein entsprechender Aufruf der MATLAB-Funktion **VentilatorPSD** liefert das in Abbildung 5.52 dargestellte Leistungsdichtespektrum (wobei allerdings die Markierungen der Peaks nachträglich eingefügt wurden):

```
>> VentilatorPSD(VentiV2,fa,250,NFFT)
```

Interessant ist, bei welchen Werten sich ausgeprägte Spektrallinien befinden. So befinden sich etwa Peaks in annähernd gleichem Abstand zueinander bei den Frequenzen

```
>> peaks = [37.68, 75.73, 114.4, 152.1, 189.8, 227.4];
```

Teilt man diese Frequenzen durch die kleinste Frequenz so erkennt man, dass die höheren Frequenzen in einem ganzzahligen Verhältnis zur kleinsten Frequenz stehen, d.h. Oberwellen einer Grundschwingung bei ca. 37.68 Hz sind:

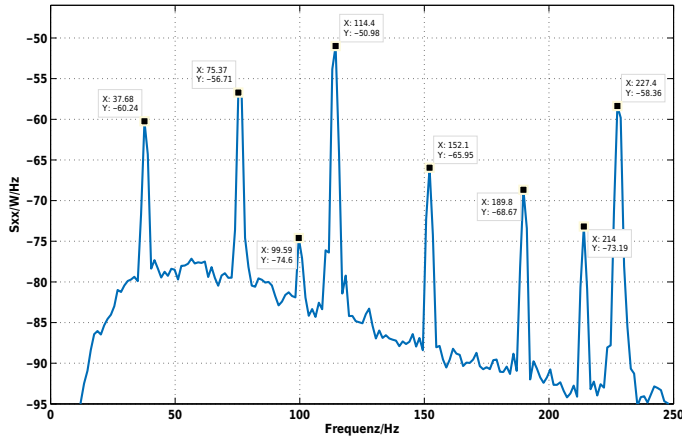


Abb. 5.52: Leistungsdichtespektrum des Ventilatorgeräuschs (Ausschnittsvergrößerung)

```
>> peaks/peaks(1)
```

```
ans =
```

```
1.0000    2.0098    3.0361    4.0366    5.0372
6.0350
```

Diese Frequenzen müssen in unmittelbarem Zusammenhang mit der Drehung der Rotorblätter des Ventilators stehen.

Geht man von der Prämisse aus, dass jedes Rotorblatt beim Vorbeilauf am Mikrofon ein nahezu gleichartiges (starkes) Geräusch verursacht, so nimmt das Mikrofon ein periodisch wiederkehrendes akustisches Signal auf, dessen Periodendauer *einem Drittel* der Umlaufdauer entspricht, da der verwendete Ventilator *drei* solcher Rotorblätter besitzt.

Das gleiche Rotorblatt streicht erst nach einem vollen Umlauf wieder am Mikrofon vorbei. Damit hat man einen periodischen Vorgang mit einer dreifach geringeren Frequenz. Dies ist zugleich die (wahrscheinlich) geringste auftretende Frequenz.

Gemäß dieser Überlegung muss 37.68 Hz der Umlauffrequenz entsprechen und die Frequenz 114.4 Hz der Frequenz, die dem (zeitlichen) Abstand von Rotorblatt zu Rotorblatt entspricht. Die Frequenz 75.73 Hz entspricht der periodischen Reproduktion des Geräusches durch das *übernächste* Rotorblatt.

Die übrigen Harmonischen entstehen durch die Unwucht des Rotors. Diese Harmonischenleistungen werden umso größer, je „unrunder“ der Rotor läuft (s. dazu auch Versuch 2).

Aufgrund dieser Überlegungen kann die Rotationsgeschwindigkeit des Ventilators aus den Daten bestimmt werden:

```
>> dt = 1 / peaks(1)           % Periodendauer in s (1 Umlauf)

dt =

    0.0265

>> n = floor(60 / dt)          % Umdrehungen pro Minute

n =

    2260
```

Die Rotationsgeschwindigkeit des Ventilators kann in der höchsten Stufe auf rund 2260 U/min geschätzt werden. Dieser Wert konnte mit einer Stroboskopmessung (vgl. Kapitel 3, S. 230) bestätigt werden.

Neben den offensichtlich auf die Rotation zurückzuführenden Peaks fallen zwei weitere Peaks bei ca. 100 Hz und ca. 214 Hz auf.

Die 100 Hz-Schwingung lässt Rückschlüsse auf das Antriebsprinzip zu. Bei den für Ventilatoren meist verwendeten *Spaltpol-Asynchronmotoren* treten große, so genannte *Pendelmomente* bei der **doppelten Netzfrequenz** (50 Hz) auf [33]. Diese Pendelmomente erzeugen Körper- und Luftschall und sind in Folge dessen im Spektrum wahrnehmbar.

Bei der 214 Hz-Frequenz könnte es sich um die Folge einer durch die Pendelmomente verursachten *Amplitudenmodulation* der Hauptschwingung bei 114.4 Hz handeln. Denn wegen

$$\begin{aligned} & a \sin(2\pi 100t) \cdot b \sin(2\pi 114t) \\ &= \frac{ab}{2} \cos(2\pi(114 - 100)t) - \frac{ab}{2} \cos(2\pi(114 + 100)t) \end{aligned} \quad (516.1)$$

entstehen dadurch Frequenzanteile bei 214 Hz und 4 Hz. Der Frequenzanteil bei 4 Hz ist sehr wahrscheinlich durch die Übertragungseigenschaften des Mikrofons eliminiert worden. Das Mikrofon kann solch niedrige Frequenzen nicht messen. Ähnliche Effekte können auch festgestellt werden, wenn man das Spektrum über die dargestellte Maximalfrequenz von 250 Hz hinaus untersucht. Dies sei dem Leser überlassen!

Auswertung von Versuch 2: Interessante Einblicke in die Anwendungsmöglichkeiten der Spektralanalyse im Bereich der Mechanik liefert auch der zweite Versuch, der nach dem Laden der Signale mit dem Aufruf

```
>> VentilatorPSD(VentiV2G, fa, 250, NFFT)
```

leicht ausgewertet werden kann.

Abbildung 5.53 zeigt das berechnete Leistungsdichtespektrum im Vergleich mit dem Spektrum aus Abbildung 5.52.

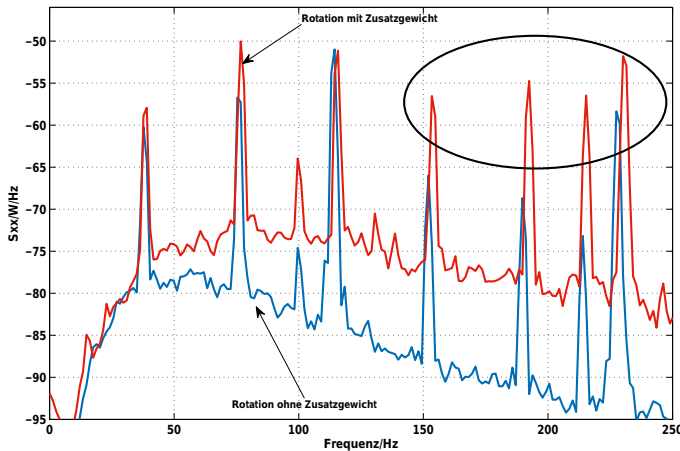


Abb. 5.53: Leistungsdichtespektrum der Ventilatorgeräusche (Ausschnittsvergrößerung) von Versuch 1 und 2 im Vergleich

Auffällig ist die dramatische Erhöhung der Harmonischenleistung! Dies ist auf das durch das Zusatzgewicht verursachte „unrundere“ Rotieren zurückzuführen.

Eine mögliche Anwendungsmöglichkeit eines solchen Effekts wäre die Dektection (oder auch Klassifikation) einer Unwucht. Dazu könnten beispielsweise empirisch gewonnene Schwellwerte bezüglich der Harmonischenleistung bestimmter (oder aller) Oberwellen herangezogen werden.

5.5.9 Systemidentifikation eines realen RC-Tiefpasses

Der RC-Tiefpass ist ein klassisches Beispiel für ein einfaches LTI-System, welches seit Kapitel 1 schon mehrfach herangezogen wurde, um verschiedene Aspekte bezüglich der Beschreibung von LTI-Systemen klar zu machen. Er sollte daher in der Liste der hier vorgestellten Experimente nicht fehlen.

Im Folgenden soll der in Abbildung 5.54 dargestellte reale RC-Tiefpass auf der Grundlage des Wiener-Lee-Theorems *identifiziert* werden!

Der Tiefpass ist mit einem $0.1 \mu F$ -Kondensator und einem $10 k\Omega$ -Widerstand aufgebaut, hat also eine 3 dB-Grenzfrequenz von

$$\omega_g = \frac{1}{T} = \frac{1}{RC} = \frac{1}{0.1 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^3} = 10^3 = 1000 \text{ rad/s} \quad (517.1)$$

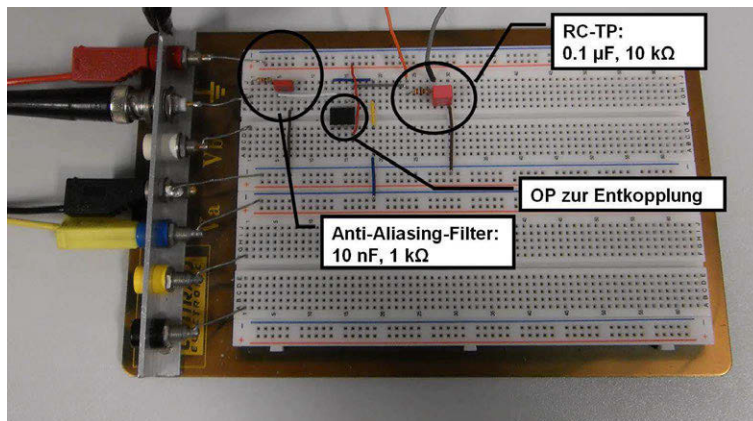


Abb. 5.54: Realer RC-Tiefpass

entsprechend $\frac{1000}{2\pi} = 159.155 \text{ Hz}$.

Da die Ausgangssignale des RC-Tiefpasses digitalisiert werden, ist der Abtastung ein ebenfalls als RC-Tiefpass ausgelegtes Anti-Aliasing-Filter vorgeschaltet. Die Grenzfrequenz dieses Tiefpasses beträgt 10000 rad/s entsprechend 1591.55 Hz , sodass die Abtastrate auf einen Wert oberhalb von ca. 3.2 kHz festgelegt werden sollte. Für den Versuch wurde mit 125 kHz eine weit größere Abtastrate gewählt.

Der RC-Tiefpass wurde im Versuch mit Hilfe eines Signalgenerators mit bandbegrenztem weißen Rauschen angeregt. Eingangssignal und Ausgangssignal des RC-Tiefpasses wurden mit Hilfe eines Speicheroszilloskops aufgenommen.

Die gemessenen Daten stehen in der Datei **VersuchRCTP.mat** zur Verfügung und können mit dem `load`-Befehl in den MATLAB Workspace eingelesen werden:

```
>> load VersuchRCTP.mat
```

```
>> whos
```

Name	Size	Bytes	Class
AusgangRC	65534x1	524272	double
EingangRC	65534x1	524272	double
abtastrate	1x1	8	double
zeit	1x65534	524272	double

Mit Hilfe der folgenden Anweisungen (vgl. Datei **SystemIdentRC1.m**) wird der Amplitudengang auf der Grundlage des Wiener-Lee-Theorems geschätzt und grafisch mit dem theoretischen Amplitudengang des aufgebauten RC-Tiefpasses verglichen. Verwendet werden dabei Schätzungen der

Leistungsdichtespektren der Signale, die mit Hilfe der Welch-Periodogramm-Methode gewonnen wurden (Kommando cpsd):

```
% Überlappungsgrad für die Welch-Periodogramm-Schätzung
NOVERLAP = NFFT/2;

% Signale mit detrend um Mittelwert und Trends bereinigen
EingangRC = detrend(EingangRC);
AusgangRC = detrend(AusgangRC);

% Leistungsdichtespektrum Eingangssignal berechnen
[Pxx,F] = cpsd(EingangRC,EingangRC,bartlett(NFFT),...
               NOVERLAP,NFFT,fa);

% Leistungsdichtespektrum Ausgangssignal berechnen
[Pyy,F] = cpsd(AusgangRC,AusgangRC,bartlett(NFFT),...
               NOVERLAP,NFFT,fa);

% Amplitudengang (Übertragungsfunktion) berechnen
H = abs(Pyy./Pxx);

% und grafisch darstellen
figure
semilogx(F,10*log10(H),'b','LineWidth',3)
grid
xlabel('Frequenz/Hz')
ylabel('|H|')

% Theoretischen Amplitudengang darüber plotten
R = 10000;           % 10 kOhm
C = 0.1*10^(-6);    % 0.1 muF
T = R*C;             % Zeitkonstante des RCTP
                    % Theoretischer Amplitudengang
Hth = abs(1./(1+T*j.*F*2*pi));
hold
semilogx(F,20*log10(Hth),'r--','LineWidth',2)
axis([10,10000,-35,0])
```

Die beiden folgenden Aufrufe der MATLAB-Funktion **SystemIdentRC1** der Begleitsoftware liefern die in Abbildung 5.55 dargestellten Übertragungsfunktionen:

```
>> [F,Pxx,Pyy,H] = SystemIdentRC1(EingangRC,AusgangRC,...
                                   zeit,125000,16*1024);
>> [F,Pxx,Pyy,H] = SystemIdentRC1(EingangRC,AusgangRC,...
                                   zeit,125000,1024);
```

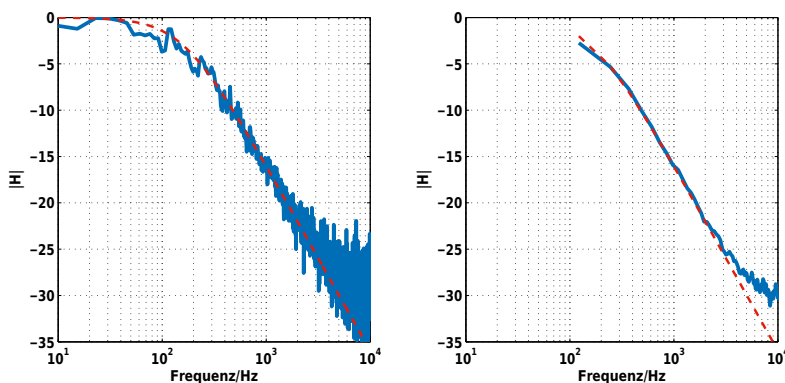


Abb. 5.55: Geschätzte Übertragungsfunktionen des RC-Tiefpasses für 16-K-Periodogramme (links) und 1-K-Periodogramme (rechts)

Dabei sind die Schätzungen auf der Grundlage von 16-K-Periodogrammen und 1-K-Periodogrammen einander gegenüber gestellt.

Man erkennt deutlich, dass die spektrale Auflösung auf der Grundlage der 16-K-Periodogramme besser ist ($\Delta f = 7.6294$ Hz gegenüber $\Delta f = 122.0703$ Hz), jedoch ist die Varianz der Schätzung natürlich größer und die Güte der Schätzung damit schlechter. Generell wird aber der Verlauf der Übertragungsfunktion korrekt wiedergegeben.

Da die Grenzfrequenz des Tiefpasses bei 159.155 Hz liegt, sind beide Auswertungen durch die mit der Granularität der spektralen Auflösung verbundene Ungenauigkeit ein wenig unbefriedigend. Insbesondere im zweiten Fall könnte die exakte Grenzfrequenz aus der Grafik schwerlich geschätzt werden.

Ideal wäre eine Möglichkeit, in den Bereich um die Grenzfrequenz „hineinzuzoomen“. Dies kann bewerkstelligt werden, indem in einem kleinen Frequenzbereich die **DFT statt der FFT** verwendet wird. Man ist dann nicht mehr an die Frequenzauflösung $\Delta f = \frac{f_s}{N}$ der FFT gebunden, sondern kann die DFT prinzipiell an jeder Frequenz auswerten. Man verliert natürlich die rechnerische Effektivität der FFT. Dieses kann jedoch unter Umständen teilweise dadurch kompensiert werden, dass man nur einen kleinen (interessierenden) Frequenzbereich auswerten muss, statt des ganzen Nyquist-Bandes.

Mit Hilfe der folgenden Anweisungen (vgl. Dateien **SystemIdentRC2.m**, **psddft.m**, **rctpAmp.m**) wird der Amplitudengang auf die beschriebene Weise mit einer Auflösung von 1 Hz in einem Bereich (0 bis 1 kHz) um die Grenzfrequenz herum geschätzt. Mit der Optimierungsfunktion **lsqcurvefit** von MATLAB kann die theoretische Übertragungsfunktion an die Schätzung angepasst werden, um so eine Schätzung der Inbandverstärkung und der Zeitkonstanten zu erhalten:

```

% Signale mit detrend um Mittelwert und Trends bereinigen
EingangRC = detrend(EingangRC);
AusgangRC = detrend(AusgangRC);

% Frequenzvektor für die Darstellung definieren
f=(1:1:1000);

% Leistungsdichtespektrum Eingangssignal
[F, Pxx] = psdfft(EingangRC,block,f,fa);

% Leistungsdichtespektrum Ausgangssignal
[F, Pyy] = psdfft(AusgangRC,block,f,fa);

% % Berechnetes Leistungsdichtespektrum darstellen
% figure
% semilogx(F,Py,'b','LineWidth',2)
% grid
% xlabel('Frequenz/Hz')
% ylabel('Py/W/Hz')
% title('Leistungsdichte des Ausgangssignals')

% Amplitudengang (Übertragungsfunktion) berechnen
H = abs(Py./Pxx);

% und grafisch darstellen
figure
semilogx(F,10*log10(H),'b','LineWidth',2)
grid
xlabel('Frequenz/Hz')
ylabel('|H|')

% Finde RCTP-Amplitudengang, der am besten dazu passt

% Zeitkonstante des RC-Tiefpass bestimmen
% Theoretische Übertragungsfunktion in rctpAmp
% Startwerte für die vom Algorithmus gesuchte
% Verstärkung und Zeitkonstante werden 1 und 0.01 gewählt
% Frequenzen und gemessene Übertragungsfunktion in F und H
% Die Parameter werden bei der Optimierung auf positive
% Werte beschränkt, da Verstärkung und Zeitkonstante
% positiv sind.
RCTPparams = lsqcurvefit(@rctpAmp,[0.01,1], F, H, ...
                        [0,0],[inf,inf]);
T = RCTPparams(1); A = RCTPparams(2);
fprintf('\n\nGefundene Zeitkonstante des RC-TP:
                        %10.6f sec\n', T);
fprintf('Gefundene Grenzfrequenz des RC-TP:
                        %10.6f Hz\n', (1/T)/2/pi);

```

```
fprintf('Gefundene Verstärkung des RC-TP bei 0:
        %10.6f  \n\n' , A);

% Von der Optimierung gefundenen Amplitudengang darstellen
hold
Hth = rctpAmp(RCTPparams, F);
semilogx(F,10*log10(Hth), 'r—', 'LineWidth', 2)
axis([10,1000, -20,0])
```

Bei der Schätzung wird die Funktion **psdfft** der Begleitsoftware verwendet, welche das Leistungsdichtespektrum *nicht* mit einer FFT berechnet, sondern mit einer DFT, damit es an *beliebigen* Frequenzstellen bestimmt werden kann. Mit Hilfe des Parameters **block** wird bestimmt, wie viele Zeitsignalwerte für die Berechnung der DFT herangezogen werden. Enthält das Eingangssignal mehr Werte, so wird das Spektrum über hintereinander liegende Blöcke gemittelt, ähnlich wie beim Welch-Periodogramm.

Die nachfolgenden Aufrufe liefern die angegebenen Schätzungen der Parameter und die in Abbildung 5.56 dargestellten Übertragungsfunktionen:

```
>> [F,Pxx,Pyy,H,T,A] = ...
    SystemIdentRC2(EingangRC,AusgangRC,zeit,125000,5000);

Gefundene Zeitkonstante des RC-TP      :      0.000960  sec
Gefundene Grenzfrequenz des RC-TP      :      165.829529  Hz
Gefundene Verstärkung des RC-TP bei 0:      0.910493

>> [F,Pxx,Pyy,H,T,A] = ...
    SystemIdentRC2(EingangRC,AusgangRC,zeit,125000,1000);

Gefundene Zeitkonstante des RC-TP      :      0.000830  sec
Gefundene Grenzfrequenz des RC-TP      :      191.802995  Hz
Gefundene Verstärkung des RC-TP bei 0:      0.861568
```

Dabei sind die Schätzungen auf der Grundlage von 5000-Punkt-DFTs und 1000-Punkt-DFTs gegenüber gestellt.

Für die 1000-Punkt-DFTs ergibt sich ein stärkerer Mittelungseffekt und eine geringere Varianz, allerdings ist der geschätzte Wert für die Grenzfrequenz schlechter. Unter Umständen kann dies auf den Einfluss der impliziten Fensterung der Daten zurückzuführen sein, der bei den 5000-Punkt-DFTs nicht so sehr ausgeprägt ist.

Insgesamt liefern alle Schätzungen des realen RC-Tiefpasses auf der Grundlage des Wiener-Lee-Theorems sehr brauchbare Ergebnisse und „identifizieren“ den Tiefpass recht genau.

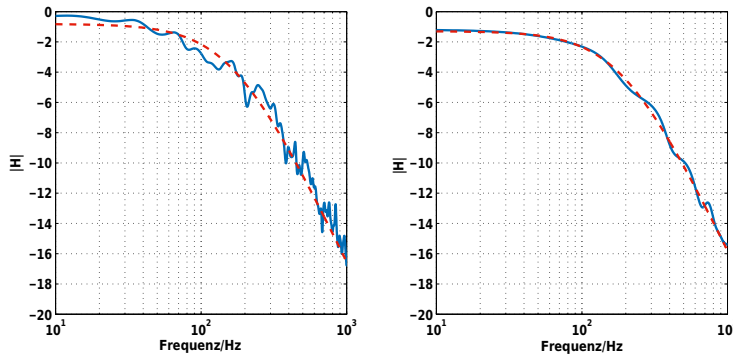


Abb. 5.56: Geschätzte Übertragungsfunktionen des RC-Tiefpasses für 5000-Punkt-DFTs (links) und 1000-Punkt-DFTs (rechts)

5.5.10 Akustische Füllstandsmessung mit dem Helmholtz-Resonator auf Basis einer Spektralanalyse

Einem so genannten **Helmholtz-Resonator** ist wahrscheinlich jeder schon einmal begegnet. Bläst man über die Öffnung einer Flasche, so wird die Luftsäule in Flasche und Flaschenhals zum Schwingen angeregt und es erklingt ein Ton.

Dieser Ton ist erfahrungsgemäß abhängig vom „Füllstand“ der Flasche. Ist die Flasche leer, so ertönt ein tiefer Ton, ist sie (teil-)gefüllt, so ist der Ton höher.

Im Grunde ist nicht der Füllstand für die Tonhöhe verantwortlich, sondern das verbleibende *Luftvolumen*, wie die folgende Überlegung zeigt [34].

Das Luftvolumen (der Luftpfropfen) im Flaschenhals kann als Masse modelliert werden, die durch die äußere Anregung in die Luftsäule der Flasche gedrückt wird. Die Luftsäule wirkt als Feder und drückt die Masse zurück. Das System Luftpfropfen-Luftsäule kann in guter Näherung als (reibungsfreies) Feder-Masse-System modelliert werden, das der Schwingungs-Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F_a(t) \quad (523.1)$$

genügt. Dabei ist $x(t)$ die Auslenkung des Luftpfropfens (Verschiebung in das Luftvolumen des Behälters) und $F_a(t)$ die für die äußere Anregung verantwortliche Kraft.

Die Übertragungsfunktion des durch (523.1) definierten linearen Systems im Bildbereich ist (vgl. Kapitel 2):

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (523.2)$$

Mit den folgenden Anweisungen kann das Übertragungsverhalten im Frequenzbereich beispielsweise für $\omega_0 = 2\pi \cdot 1000$ rad/s berechnet und grafisch dargestellt werden (Abbildung 5.57):

```
>> s = tf('s');
>> omega0 = 2*pi*1000;
>> H = 1/(s^2+omega0^2);
>> f = (0:1:3000);
>> [Amp,Ph] = bode(H,2*pi*f);
>> Amp = Amp(:);
>> plot(f,20*log10(Amp),'b','LineWidth',2)
```

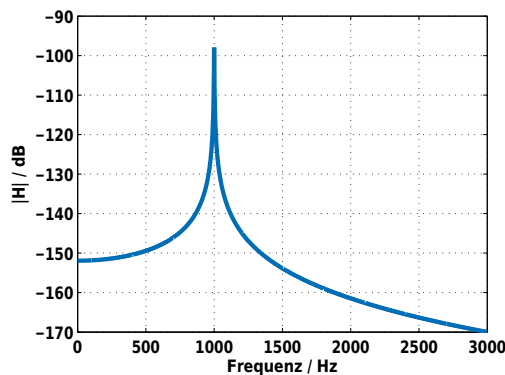


Abb. 5.57: (Theoretisches!) Übertragungsverhalten des Helmholtz-Resonators im Frequenzbereich (Beispiel)

Abbildung 5.57 zeigt beispielhaft, dass es für die Frequenz $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ zur Resonanz kommt. Der Parameter ω_0 in (523.2) ist also die Resonanzfrequenz des Systems (in rad/s). Wird diese Frequenz durch das Eingangssignal („Blasen“) angeregt, so ist der entsprechende Ton laut zu hören.

Wie bereits angedeutet, hängt die Resonanzfrequenz vom Gasvolumen des Resonatorbehälters ab. Man kann zeigen, dass für das Volumen V und die Resonanzfrequenz $f_0^{(V)}$ folgende Beziehung gilt [34]:

$$f_0^{(V)} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{V(h + \Delta h)}}. \quad (524.1)$$

Dabei ist A der Querschnitt des Luftpfropfens, c die Schallgeschwindigkeit und h die Höhe des Luftpfropfens. Die Größe Δh ist eine von der Geometrie des Resonators abhängige Größe und muss experimentell ermittelt werden.

Volumenmessung mittels Helmholtz-Resonanz

Die Beziehung (524.1) kann nun umgekehrt zur *Messung des Volumens* eines Behälterinhalts genutzt werden. Wegen

$$V = \left(\frac{c}{2\pi} \right)^2 \frac{A}{h + \Delta h} \left(\frac{1}{f_0^{(V)}} \right)^2 \quad (525.1)$$

kann das Gasvolumen V durch Messung der Resonanzfrequenz bestimmt werden. Kennt man das Gesamtvolumen des Behälters, so kann damit auch das Volumen des Behälterinhalts bestimmt werden. Eine mögliche Anwendung ist beispielsweise die Messung des Füllstandes eines Benzintanks oder eines anderen Flüssigkeitsbehälters, dem man die Flüssigkeit zur Messung nicht entnehmen kann (oder will).

Abbildung 5.58 zeigt eine Labor-Versuchsanordnung [34], mit der diese Idee experimentell überprüft werden kann.

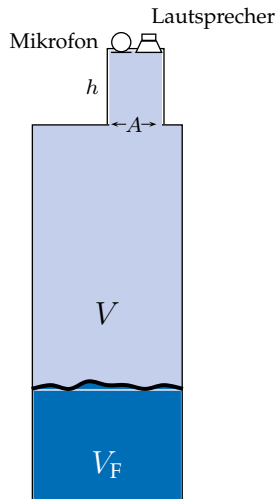


Abb. 5.58: Prinzipielle Darstellung der Versuchsanordnung zur Volumenmessung (links) und Realisierung als Laborversuch (rechts)

Der Laboraufbau besteht aus einem Rohr mit einem Aufsatz, in dem ein Lautsprecher und ein Mikrofon integriert sind.

Die Messung kann nun prinzipiell auf zwei Arten durchgeführt werden.

Die erste Möglichkeit besteht darin, den Lautsprecher mit einem Sinuston anzusteuern und die Frequenz dieses Tones so lange zu verstellen, bis die Resonanzfrequenz erreicht ist, was sich in einem deutlich lauter werdenden Ton manifestiert.

Da der Ansteuertone jederzeit hörbar ist, ist diese Methode nicht in allen Anwendungsfällen angenehm und anwendbar. Zudem müsste noch ein *objektives* Verfahren erdenn werden, mit dem entschieden werden kann, wann der Ton „am lautesten“ ist.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, den Lautsprecher *mit weißem Rauschen* anzusteuern. Grundlage dieses Verfahrens ist das *Wiener-Lee-Theorem*. Das Leistungsdichtespektrum des mit dem Mikrofon aufgenommenen Signals sollte gemäß (455.1) und (455.2) proportional zur Übertragungskennlinie in Abbildung 5.57 sein. Es sollte daher leicht ein deutlicher Peak in diesem Spektrum zu detektieren und damit die Resonanzfrequenz zu ermitteln sein.

Vor Beginn des Versuches sollten jedoch bezüglich der Auswahl der Versuchsparameter noch einige Vorüberlegungen gemacht werden.

Der in Abbildung 5.58 dargestellte Versuchsbehälter hat ein Fassungsvermögen von

$$V_F + V \approx 9 \text{ Liter}, \quad (526.1)$$

entsprechend $9 \cdot (0.1)^3 \text{ m}^3$.

Die Grundfläche und die Höhe des Aufsatzes betragen:

$$A = 0.0016 \text{ m}^2, \quad h = 0.13 \text{ m}. \quad (526.2)$$

Legt man für eine Übersichtsrechnung die Formel (524.1) ohne den geometrieabhängigen Korrekturterm Δh zu Grunde, so ergibt sich für einen leeren Behälter die Resonanzfrequenz:

$$f_0^{(V)} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{Vh}} = \frac{343}{2\pi} \sqrt{\frac{0.0016}{9 \cdot (0.1)^3 \cdot 0.13}} \approx 60 \text{ Hz}. \quad (526.3)$$

Für einen fast mit Flüssigkeit (Wasser) vollen Behälter (8.5 Liter) erhalte man:

$$f_0^{(V)} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{Vh}} = \frac{343}{2\pi} \sqrt{\frac{0.0016}{0.5 \cdot (0.1)^3 \cdot 0.13}} \approx 271 \text{ Hz}. \quad (526.4)$$

Um diese beiden Schätzwerte zu verifizieren, kann zunächst mit einfachen Mitteln ein *Vorversuch*³⁹ durchgeführt werden. Wie eingangs bereits erwähnt, kann die Luftsäule in einer Flasche durch Überblasen der Flaschenöffnung zum Schwingen angeregt werden. Dies kann man, mit etwas mehr Anstrengung, auch mit dem in Abbildung 5.58 dargestellten Rohr machen.

³⁹ Dieser Versuch kann im Übrigen ohne großen Aufwand zu Hause oder im Labor mit einer einfachen Wasserflasche nachvollzogen werden.

Der entstehende Ton wird mit Hilfe eines Mikrofons und des in Abbildung 5.51 dargestellten MATLAB-GUIs **make_audio** aufgenommen. Diese Messung (die für den leeren Behälter durchgeführt wurde) kann der Datei **HelmHoltzVorVersuch.mat** der Begleitsoftware entnommen werden. Mit den folgenden Anweisungen erhält man das in Abbildung 5.59 dargestellte Leistungsdichtespektrum:

```
>> load HelmHoltzVorVersuch.mat
>> whos
      Name                Size                Bytes   Class
      Fs                  1x1                  8   double
      sound              427770x1             3422160  double

>> [Pxx,F] = cpsd(sound,sound,rectwin(16*1024),...
                  8*1024,16*1024,Fs,'onesided');
>> plot(F,10*log10(Pxx),'b','LineWidth',2)
>> axis([0,2000,-120,-45])
>> grid
```

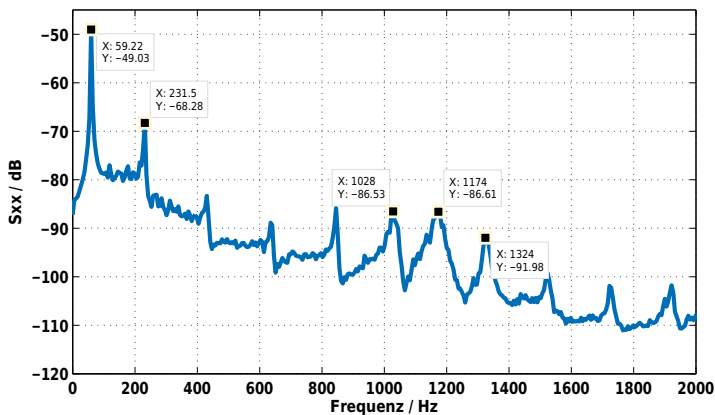


Abb. 5.59: Leistungsdichtespektrum des Resonatorgeräuschs bei Anregung durch "Blasen"

Das Spektrum bestätigt die Berechnung eindrucksvoll, denn der größte Peak befindet sich tatsächlich bei ca. 60 Hz.

Andererseits zeigt das Spektrum auch, dass das Modell (523.2) doch recht vereinfachend ist, da deutlich sehr viele Oberwellen auftreten, die auf ein nichtlineares Übertragungsverhalten hindeuten.

Im vorliegenden Fall kann dies für die eigentliche Messung mit Rauschanregung über den Lautsprecher jedoch positiv ausgenutzt werden. Aufgrund

der Geometrie des Resonators kann nur ein sehr kleiner Lautsprecher verwendet werden. Dieser kann die für die Messung bei leerem Behälter notwendige Anregungsfrequenz nicht übertragen.

Daher werden für den eigentlichen Versuch die Nebenresonanzen um 1000 Hz ausgenutzt.

Die Frequenzen für die Nebenresonanzen grenzen den zu beobachtenden Frequenzbereich ein. Die verwendete Abtastrate und die Bandbreite des bandbegrenzten weißen Rauschens sollten darauf ausgelegt sein.

Für die folgenden beiden Messungen, die in der Datei **HelmHoltzVersuche.mat** der Begleitsoftware zur Verfügung stehen, wurde eine Abtastrate von $f_a = 25$ kHz und ein im Nyquist-Band bandbegrenztes weißes Rauschen verwendet.

Diese Daten können wieder mit dem `load`-Befehl in den Workspace geladen werden:

```
>> load HelmHoltzVersuche.mat
>> whos
>> whos
```

Name	Size	Bytes	Class
HHhalb	250000 x1	2000000	double
HHleer	500000 x1	4000000	double
fa	1x1	8	double
t	500000 x1	4000000	double
t2	250000 x1	2000000	double

Der Vektor **HHleer** enthält eine Messung, die mit einem leeren Resonatorbehälter durchgeführt wurde. Bei der im Vektor **HHhalb** gespeicherten Messung war der Resonatorbehälter mit 5 Litern Wasser gefüllt.

Mit den folgenden Anweisungen wird jeweils das Leistungsdichtespektrum der Signale berechnet, wobei 16-K Periodogramme verwendet werden ($N = 16 \cdot 1024$). Die Frequenzauflösung ist somit $\Delta f = 1.5259$ Hz:

```
>> N = 16*1024;
>> sigleer = detrend(HHleer);
>> sighalb = detrend(HHhalb);
>> [Sxxleer, F] = cpsd(sigleer, sigleer, ...
    rectwin(N), N/2, N, fa, 'onesided');
>> [Sxxhalb, F] = cpsd(sighalb, sighalb, ...
    rectwin(N), N/2, N, fa, 'onesided');
```

Wie bereits erwähnt, musste aufgrund der Geometrie des Resonators ein sehr kleines Mikrofon verwendet werden. Dieses Mikrofon kann erst ab ca.

300 – 400 Hz Töne in signifikantem Maße übertragen. Daher sind für die Versuchsauswertung nur potentielle Resonanzen oberhalb dieser Schwelle interessant. Es zeigt sich, dass die stärksten Resonanzen im Bereich um 1000 Hz auftreten⁴⁰.

Die berechneten Spektren werden daher im Bereich 700 Hz bis 1200 Hz grafisch dargestellt (s. Abbildung 5.60).

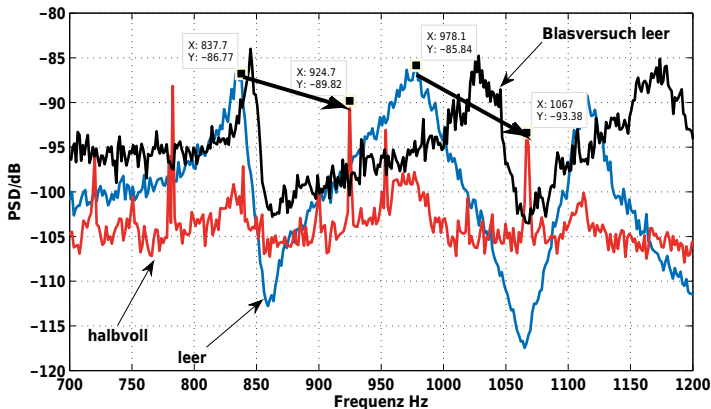


Abb. 5.60: Reales Übertragungsverhalten des Helmholtz-Resonators im Frequenzbereich 700 Hz bis 1200 Hz

Es ist interessant, diesen Messungen die Messung des Überblasversuchs aus Abbildung 5.59 gegenüberzustellen. Die Darstellung in Abbildung 5.60 zeigt, dass die Resonanzspitzen im interessierenden Bereich für den leeren Behälter nicht exakt übereinstimmen. Dies ist plausibel, denn durch den Aufsatz wird die Geometrie des Resonators verändert. Außerdem ist die Messkette eine andere. Eine vollständige Übereinstimmung ist deshalb nicht zu erwarten. Andererseits zeigt der Vergleich, dass in beiden Fällen im Bereich 700 Hz bis 1200 Hz drei deutliche Resonanzspitzen mit zumindest ähnlichen Frequenzen auftreten, sodass in dieser Hinsicht von einer Übereinstimmung der Versuchsergebnisse gesprochen werden kann.

Die Resonanzspitzen für den halbvollen Behälter sind (nach oben) verschoben. Die in Abbildung 5.60 markierten Frequenzverschiebungen betragen rund 87 Hz bzw. 89 Hz.

Der Füllstand kann also im Prinzip anhand der Frequenzverschiebungen deutlich unterschieden werden. Für eine brauchbare Füllstandsmessung

⁴⁰ Dies konnte durch einen Versuch verifiziert werden, bei dem das System durch Sinustöne angeregt wurde. Da bei einem solchen Versuch im Gegensatz zur Rauschanregung die Eingangssignalleistung auf eine Frequenz konzentriert ist, kommt es zu einer hörbaren Resonanzerhöhung des Tons. Die in Abbildung 5.60 dargestellten Resonanzspitzen konnten so experimentell klar verifiziert werden.

nach diesem Prinzip müssten nun weitere Messungen gemacht werden, um eine (Frequenzverschiebungs-Füllstands-)Kennlinie zu ermitteln.

5.5.11 Fahrbahnunebenheits-Simulation mittels Formfilterung

Bereits in Beispiel 5.3, S. 407 haben wir im Zusammenhang mit der Einführung des Begriffs des stochastischen Prozesses *Fahrbahnunebenheitssignale* betrachtet.

Es wurde gezeigt, dass Fahrbahnunebenheitssignale eine typische Selbstähnlichkeit aufweisen, die die Zuordnung zu einer *Straßenklasse* zulassen.

Übung 159

Messungen [25] haben ergeben, dass sich das *Leistungsdichtespektrum* von Fahrbahnunebenheitssignalen, die so genannte **spektrale Unebenheitsdichte**

$$S_{XX}(j\rho), \quad \rho = 2\pi/L, \quad (530.1)$$

$L = \text{Wellenlänge der Unebenheit in m}$

einer Straße, gut durch eine Funktion der Form

$$S_{XX}(j\rho) = \phi_0 \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^w, \quad w \in [1.75, 2.25] \quad (530.2)$$

approximieren lässt.

Dabei ist ρ_0 eine zu einer Bezugswellenlänge, etwa 1 m, gehörende Unebenheitsfrequenz und $\phi_0 = S_{XX}(j\rho_0)$ ein straßenabhängiges Unebenheitsmaß. Der Parameter w bestimmt die Steilheit der Flanke der Übertragungsfunktion⁴¹ und ist ein *Maß für die Welligkeit* der Straße.

Aus diesen Zusammenhängen ergibt sich nun die Möglichkeit, mit Hilfe der spektralen Unebenheitsdichten *Fahrbahnunebenheitssignale* zu erzeugen, welche dann als *fahrbahntypisches Anregungssignal* auf einem Prüfstand verwendet werden können.

Grundlage dieses Verfahrens ist einmal mehr das *Wiener-Lee-Theorem* (s. Gleichungen (455.1) und (455.2)).

Dabei wird ein Zufallssignal mit einem Leistungsdichtespektrum (spektrale Unebenheitsdichte) gemäß (530.2) erzeugt, indem ein *Filter*, dessen Übertragungscharakteristik dem Verlauf der Leistungsdichte entspricht, mit einem *weißen Rauschsignal* angeregt wird.

Solche Filter, also Filter, die Signale mit vorgegebenen spektralen Eigenschaften erzeugen, heißen **Formfilter**.

Die Konstruktion von Formfiltern ist sehr einfach, wenn die spektrale Charakteristik der zu erzeugenden Signale mit rationalen Funktionen dargestellt werden kann, wie das folgende Beispiel zeigt.

⁴¹ Diese besitzen alle Tiefpassform.

5.18 Beispiel (Formfilterkonstruktion)

Kann das (analoge) Formfilter in Form einer rationalen Funktion im Frequenz- oder Bildbereich definiert werden, so kann das Formfilter anhand des Pol/Nullstellendiagramms konstruiert werden.

Da der Amplitudengang des Formfilters grundsätzlich der Beziehung

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= H(j\omega) \cdot H^*(j\omega) \\ &= H(j\omega) \cdot H(-j\omega) \end{aligned} \quad (531.1)$$

genügen muss, kann nach Fortsetzung in den Bildbereich für die entsprechenden Laplace-Transformierten geschrieben werden:

$$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s). \quad (531.2)$$

Offensichtlich kommen Pole und Nullstellen als Paar links und rechts der $j\omega$ -Achse vor. Da das Formfilter rein reell ist, müssen diese zudem rein reell oder konjugiert komplex sein.

Ein *stabiles* Filter $H(s)$ zu $|H(s)|^2$ erhält man nun, wenn man die Pole der linken Halbebene zu Grunde legt. Die Nullstellen können links und rechts der imaginären Achse gewählt werden, von jedem Paar symmetrisch zu dieser Achse aber nur eine. Im Falle einer gewünschten Amplituden-Übertragungsfunktion von beispielsweise

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1 + \omega^2}{4 + \omega^2 + \omega^4} \quad (531.3)$$

erhält man durch Einsetzen von $s = j\omega$:

$$|H(s)|^2 = \frac{1 + \left(\frac{s}{j}\right)^2}{4 + \left(\frac{s}{j}\right)^2 + \left(\frac{s}{j}\right)^4} = \frac{1 - s^2}{4 - s^2 + s^4}. \quad (531.4)$$

Diese Übertragungscharakteristik hat die Pole

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{5}}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (531.5)$$

sowie die Nullstellen $+1$ und -1 .

Ein stabiles Formfilter wäre also:

$$H(s) = \frac{s - 1}{\left(s + \frac{\sqrt{5}}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(s + \frac{\sqrt{5}}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{s - 1}{s^2 + \sqrt{5}s + 2}. \quad (531.6)$$

Für digitale Filter kann in ähnlicher Weise vorgegangen werden. Hier sind die Pole innerhalb des Einheitskreises für die Stabilität verantwortlich. ■

Üblicherweise dürfte die Übertragungscharakteristik in *gemessener* Form vorliegen und nicht als analytischer Ausdruck. Dies ist auch für die spektralen Fahrbahnunebenheitsdichten der Fall.

In diesem Fall kann dann versucht werden, entweder einen klassischen Filtertyp durch Ermittlung entsprechender Kennwerte (Passband, Stoppband etc.) anzupassen oder ein direktes IIR-Filter-Design anhand der Übertragungscharakteristik durchzuführen.

MATLAB bietet in diesem Zusammenhang die Funktion `yulewalk`, welche die Filtercharakteristik durch die Lösung der so genannten *Yule-Walker-Gleichungen*⁴² ermittelt.

Eine andere Möglichkeit ist die *direkte Synthese* eines zum gewünschten Leistungsdichtespektrum gehörenden Prozesses durch *Überlagerung von sehr vielen einzelnen Sinusoiden*, deren Frequenz und Amplitude sich nach der Übertragungscharakteristik richtet. Erzeugt man zusätzlich die Nullphasen der Sinusoide per Zufallsgenerator, so erhält man ein stochastisches Signal, das einer Musterfunktion der vertikalen Fahrbahnanregung vom gewünschten Typ entspricht.

Wir wollen im folgenden Beispiel mit Hilfe der ersten Methode ein Fahrbahnunebenheitssignal für eine sehr raue Straße⁴³ (Exponent $\omega = 1.75$) erzeugen.

5.19 Beispiel (Erzeugung eines Unebenheitssignals)

Da die Signale eine spektrale Unebenheitsdichte der (nicht-rationalen) Form

$$S_{XX}(j\rho) = \phi_0 \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1.75} \quad (532.1)$$

haben sollen, kommt eine Konstruktion nach der Methode aus Beispiel 5.18 nicht in Frage.

Es soll daher für die Simulation ein (digitales) IIR-Filter mit Hilfe der Yule-Walker-Methode erzeugt werden. Für die Bezugsfrequenz ρ_0 wählen wir der Einfachheit halber 1 rad/m und das straßenabhängige Unebenheitsmaß $\phi_0 = S_{XX}(j\rho_0)$ normieren wir ebenfalls auf 1.

Die zu simulierende spektrale Unebenheitsdichte hat somit die Form:

$$S_{XX}(j\rho) = \left(\frac{1}{\rho} \right)^{1.75}. \quad (532.2)$$

Da die Simulation zeitdiskret mit einem *digitalen* IIR-Filter realisiert werden soll, sind vorab noch einige Überlegungen notwendig.

⁴² Auf deren Herleitung wollen wir allerdings hier nicht eingehen.

⁴³ Der Exponent $\omega = 1.75$ bewirkt, dass die Flanke der spektralen Unebenheitsdichte nicht so schnell mit $1/\text{Wellenlänge}$ abfällt. Es gibt daher signifikante Spektralanteile für kleine Wellenlängen (großes ρ) und daher hochfrequente vertikale Ausschläge. Die Fahrbahn verläuft nicht „glatt“, sondern unruhig. Sie ist rau.

Die Bandbreite der Charakteristik (532.2) bestimmt zunächst die zu wählende Abtastrate. Prinzipiell ist die Bandbreite von (532.2) nicht beschränkt. Jedoch fällt die Charakteristik mit steigender Frequenz ρ rad/m stark ab, so dass die Anteile der Fahrbahnnunebenheiten unterhalb einer bestimmten Wellenlänge vernachlässigt werden können.

Wir wollen im Folgenden Wellenlängen vernachlässigen, für die $S_{XX}(j\rho)$ auf -40 dB und mehr abgefallen ist.

Wegen

$$10 \cdot \log_{10} \left(\left(\frac{1}{\rho} \right)^{1.75} \right) = -40 \iff \left(\frac{1}{\rho} \right)^{1.75} = 10^{-4} \quad (533.1)$$

folgt:

$$\rho = 10^{4/1.75} = 193.0698. \quad (533.2)$$

Vernachlässigt man also die Frequenzanteile oberhalb von $\rho = 200$ rad/m, so kann gemäß Abtasttheorem die Abtastrate ρ_a durch

$$\rho_a \geq 2 \cdot 200 = 400 \text{ rad/m} \quad (533.3)$$

festgelegt werden. Dies entspricht einer Abtastung von $f_a \geq 63.662$ 1/m.

Somit sollten $f_a = 100$ Messungen pro Meter ausreichend sein, um die Voraussetzungen des Abtasttheorems (zumindest approximativ) einzuhalten.

Nach (431.1) gilt dann für die Charakteristik des äquivalenten *diskreten* Leistungsdichtespektrums:

$$\Phi_{XX}(\Omega) = f_a \cdot S_{XX}(j\rho), \quad \Omega = \rho/f_a, \quad \Omega \in [-\pi, \pi]. \quad (533.4)$$

Damit folgt:

$$\Phi_{XX}(\Omega) = f_a \cdot S_{XX}(j\Omega \cdot f_a) = f_a \cdot \left(\frac{1}{\Omega \cdot f_a} \right)^{1.75}, \quad \Omega \in [-\pi, \pi]. \quad (533.5)$$

Nach dem Wiener-Lee-Theorem (456.2) entspricht (533.5) dem Betragsquadrat der mit dem Filter-Entwurfsverfahren zu realisierenden Filtercharakteristik. Somit wird ein digitales IIR-Filter gesucht, welches den folgenden Amplitudengang hat:

$$H(\Omega) = \sqrt{f_a} \cdot \left(\frac{1}{\Omega \cdot f_a} \right)^{1.75/2}, \quad \Omega \in [-\pi, \pi]. \quad (533.6)$$

Mit Hilfe des folgenden MATLAB-Programms werden zunächst die Filter-Koeffizienten nach der Yule-Walker-Methode berechnet (vgl. Datei **YuleWalkFahrbahn.m**):

```

fa = 100;          % Abtaste in 1/m

F = (0:0.01:0.1); % Frequenzvektor normiert auf die halbe
                  % Abtaste (1 entspricht fa/2)
F = [F,(0.2:0.1:1)];

Omega = F*pi;      % normierte Frequenz in rad
                  % pi entspricht Abtaste/2

                  % gewünschte Filtercharakteristik
magn = sqrt(fa)*(1./(Omega*fa)).^(1.75/2);

magn(1) = magn(2); % da sonst magn(1)=Inf und die
                  % Anpassung schwierig wird

order = 8;         % gewählte Filterordnung
                  % Berechnung der Filterkoeffizienten
[b,a] = yulewalk(order,F,magn);

...

```

Abbildung 5.61 zeigt einen Vergleich der gewünschten Filtercharakteristik und der Charakteristik des IIR-Filters achter Ordnung, welches mit den obigen MATLAB-Anweisungen berechnet wurde.

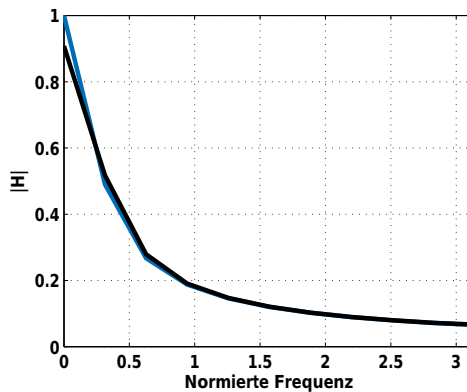


Abb. 5.61: Gewünschte Filtercharakteristik und Filtercharakteristik des konstruierten IIR-Filters

Mit Hilfe eines einfachen Simulink-Systems `s_YuleWalkFahrbahn.slx` (s. Abbildung 5.62) kann nun ein Fahrbahnunebenheitssignal erzeugt werden.

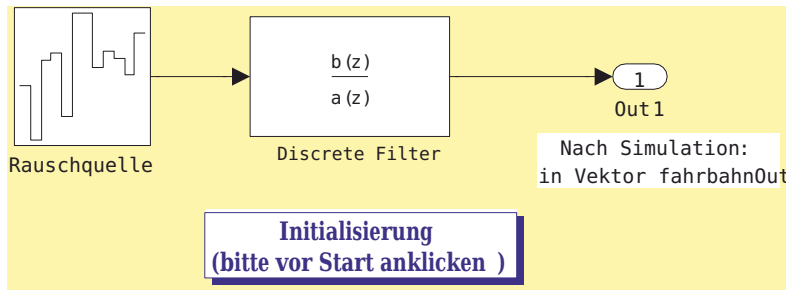


Abb. 5.62: Simulink-System zur Berechnung des Fahrbahnnunebenheitssignals

In Abbildung 5.63 ist ein solches Fahrbahnnunebenheitssignal ausschnittsweise wiedergegeben ⁴⁴.

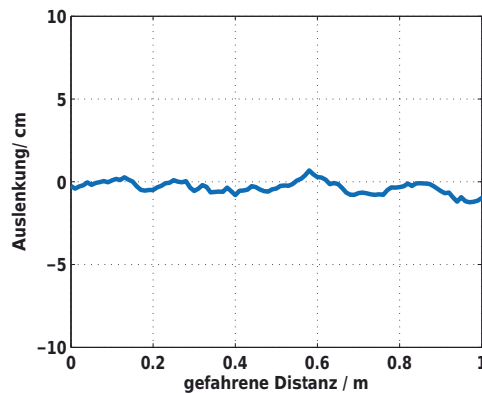


Abb. 5.63: Simuliertes Fahrbahnnunebenheitssignal

Zur Kontrolle des Ergebnisses soll nun noch abschließend das sich aus dem berechneten Fahrbahnnunebenheitssignal ergebende Leistungsdichtespektrum bestimmt und mit den Vorgaben verglichen werden. Mit dem MATLAB-Skript **Bsp_FahrbahnUnebenheitsSpektrum** kann das Simulink-System initialisiert und durchsimuliert sowie das Leistungsdichtespektrum berechnet werden:

```
% Initialisierung
init_YuleWalkFahrbahn
% Simulink-System öffnen
open_system('s_YuleWalkFahrbahn')
```

⁴⁴ Die Auslenkung ist hier (willkürlich) in cm angegeben. Die Einheit hängt natürlich von der Einheit ab, in der $S_{XX}(j\rho)$ angegeben wird.

```

% Simulink-System starten
[t,x,fahrbahnOut] = sim('s_YuleWalkFahrbahn');

% Parameter der Spektralschätzung
blocklaenge = 2048;           % 2-K-FFTs werden berechnet
ueberlapp = blocklaenge/2;    % Überlappingsgrad 50%
abtastrate = fa;              % Abtastrate fa in
                               % init_YuleWalkFahrbahn
                               % definiert

% Schätzung des Leistungsdichtespektrums des
% Fahrbahnunebenheitssignals mit der Welch-Methode
% (es wird das ZWEIFACHIGE LDS berechnet)
[Sxx,F] = cpsd(fahrbahnOut,fahrbahnOut,rectwin(blocklaenge),
    ... ueberlapp,blocklaenge,abtastrate,'twosided');

figure
% Darstellung des Amplitudengangs (nur positive Frequenzen)
Frq = F(1:length(F)/2);
Pxx = Sxx(1:length(F)/2);
plot(Frq, 10*log10(abs(Pxx)), 'b', 'LineWidth', 2)

% Vergleich mit der gewünschten Spektralcharakteristik
% normierte Frequenz in rad
% pi entspricht Abtastrate/2
Omega = Frq*2*pi/fa;

% gewünschte Filtercharakteristik
magn = (1./((Omega*fa)).^(1.75));
hold
plot(Frq, 10*log10(abs(magn)), 'k', 'LineWidth', 3)

```

Das Leistungsdichtespektrum und die Vorgabe stimmen gut überein, wie in Abbildung 5.64 zu erkennen ist.

Lediglich im Bereich der niedrigen Frequenzen ist die Übereinstimmung etwas weniger gut, da in diesem Bereich wegen der stark gegen Unendlich anwachsenden, vorgegebenen spektralen Charakteristik die Anpassung des IIR-Filters nur näherungsweise gelingt. 

5.5.12 Übungsaufgaben

Übung 153 (Lösungsband Seite 361)

Das deterministische Signal

$$x(t) = 4 \cdot \cos(2\pi 30t) \cdot \cos(2\pi 40t) \quad (536.1)$$

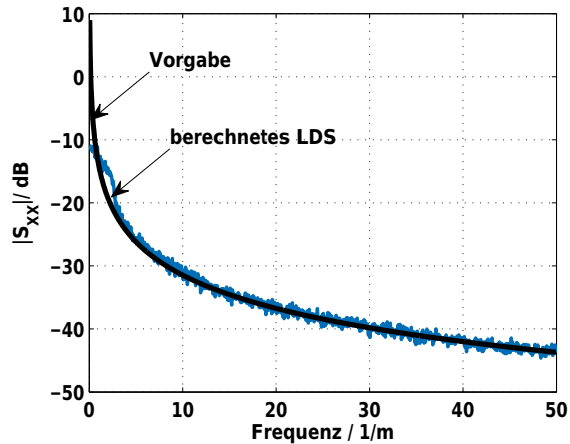


Abb. 5.64: Leistungsdichtespektrum des simulierten Fahrbahnunebenheitssignals und vorgegebene Spektralcharakteristik

sei durch ein im Band $[-100, 100]$ Hz bandbegrenztes weißes Rauschen mit Rauschleistungsdichte 0.2 W/Hz gestört.

Beantworten Sie folgende Fragen:

- Wie groß ist der Signal-Rausch-Abstand?
- Wenn das Signal mit einem Tiefpass der Grenzfrequenz 20 Hz gefiltert wird, wie groß ist dann der Signal-Rausch-Abstand?
(Gehen Sie von einem idealen Tiefpass aus.)

Übung 154 (Lösungsband Seite 362)

Das deterministische Signal

$$x(t) = \cos(2\pi 20t) \quad (537.1)$$

werde mit einem 8-Bit ADU und der Rate $f_a = 100 \text{ Hz}$ abgetastet. Der Aussteuerungsbereich des ADU beträgt $\pm 5 \text{ V}$.

Beantworten Sie folgende Fragen:

- Wie groß ist der Signal-Quantisierungsrausch-Abstand?
- Skizzieren Sie das Spektrum von Signals plus Quantisierungsrauschen im Nyquist-Band $[-\frac{f_a}{2}, \frac{f_a}{2}] = [-50, 50] \text{ Hz}$.
- Wie ändert sich der Signal-Quantisierungsrausch-Abstand **im Band** $[-50, 50] \text{ Hz}$ wenn die Abtastrate $f_a = 10000 \text{ Hz}$ beträgt („Oversampling“)?
- Schlagen Sie auf dieser Basis eine Methode zur Reduzierung des Signal/Quantisierungsrausch-Abstandes vor!

Übung 155 (Lösungsband Seite 364)

Das deterministische Signal

$$x(t) = 0.5 \cdot \cos(2\pi 50t) \quad (538.1)$$

werde mit einer Abtastrate von $f_a = 1000$ Hz durch einen ADU mit nominell 8 Bit diskretisiert.

Der Aussteuerbereich des ADU beträgt ± 5 V.

Der ADU sei zusätzlich durch diverse Störquellen gekennzeichnet, die mit Hilfe eines zusätzlichen weißen Rauschens der Rauschleistungsdichte $2 \cdot 10^{-5}$ W/Hz modelliert werden können.

Beantworten Sie folgende Fragen:

- Wie groß ist der Signal/Rausch-Abstand für das diskretisierte Signal?
- Skizzieren Sie das Autokorrelationssignal zum diskreten Signal $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ im Zeitintervall $[-0.04, +0.04]$ s.

Übung 156 (Lösungsband Seite 365)

Betrachten Sie das Simulink-System **s_adu.slx** der Begleitsoftware. Dieses System produziert ein Quantisierungsfehlerrauschen für einen Quantisierer, der von einem weißen Rauschsignal angesteuert wird.

- Begründen Sie, warum der Parameter **Noise Power** des Rauschsignal-Blocks auf **stime/9** gesetzt wurde.

Hinweis: Beachten Sie die anschließende Begrenzung durch den Hard-Limiter!

- Testen Sie das System für 3 verschiedene nominelle Auflösungen ($n = 1$, $n = 8$, $n = 10$) des Quantisierers.

Berechnen Sie dabei jeweils die theoretische Quantisierungsrauschleistung und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des MATLAB-Kommandos **var**.

- Berechnen Sie für $n = 8$ das Leistungsdichtespektrum des Quantisierungsrauschsignals mit Hilfe von MATLAB, wobei Sie große Datenmengen verwenden sollten.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Berechnungen aus Übungsteil (b).

- Führen Sie die Tests aus Übungsteil (b) mit dem Simulink-System **s_adu2.slx** erneut durch. Dieses System produziert ein Quantisierungsfehlerrauschen für einen Quantisierer, der von einem Sinussignal vollangesteuert wird.

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Übung 157 (Lösungsband Seite 370)

Betrachten Sie das Simulink-System **s_delay1.slx** der Begleitsoftware. Dieses System produziert ein sinusförmiges Testsignal der Amplitude $\sqrt{2}$ und ein zugehöriges verrauschtes Echosignal. Die Frequenz des Sinus, die Rauschleistung des Störsignals sowie die Signalverzögerung des Echosignals können über das Initialisierungsfile **init_delay1.m** eingestellt werden.

- (a) Schätzen Sie mit Hilfe einer Korrelationsanalyse die in **s_delay1.slx** eingestellte Laufzeit (Signalverzögerung).

Tabelle 5.2: Testkombinationen für Übung 157

SNR (dB)	0	-20	0	-20
Messzeit (s)	1.0	1.0	10.0	10.0



Verwenden Sie dabei die in Tabelle 5.2 angegebenen Kombinationen für die Parameter Signal-Rausch-Abstand (am Empfangsort des laufzeitverzögerten Signals) und Messzeit. Verwenden Sie als Signalfrequenz 50 Hz. Verändern Sie bei jedem Versuch den Signal-Rausch-Abstand (im Nyquist-Band) durch Erhöhung bzw. Verminderung der Rauschleistung des White-Noise-Blocks.

- (b) Testen Sie die Laufzeitmessung für schlechtes SNR (−20 dB) und kurze Messzeit, indem Sie statt des Sinussignals ein Chirp-Signal verwenden. Ersetzen Sie dazu den Sinus-Block im obigen Simulink-System durch einen **Chirp-Signal**-Block (Sources-Blöcke). Wählen Sie dabei das Chirp-Signal so, dass die Bandbreite etwa 50 Hz beträgt. Diese können Sie empirisch feststellen, indem Sie die FFT des Chirp-Signals berechnen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem entsprechenden Sinus-Signal Experiment. Was stellen Sie fest?

Übung 158 (Lösungsband Seite 375)

In der Begleitsoftware befinden sich die Files **inputsigH.mat** und **outputsigH.mat** mit zwei diskretisierten Ein- und Ausgangssignalen eines zu identifizierenden LTI-Systems $H(j\omega)$ resp. $H(s)$.

Die Signale wurden dabei mit einer Abtastrate von $f_a = 2048$ Hz diskretisiert.

Bestimmen Sie (numerisch und grafisch) den **Amplitudengang** des Systems auf der Grundlage des Wiener-Lee-Theorems. Stellen Sie anhand der grafischen Darstellung eine Vermutung darüber an, welche Übertragungsfunktion $H(s)$ im Bildbereich das System hatte.

Übung 159 (Lösungsband Seite 376)

In der Begleitsoftware befindet das File **fahrbahn.mat** mit einem Fahrbahnunebenheitssignal, welches die vertikale Auslenkung in mm einer Fahrbahn in Abhängigkeit von einer in cm gemessenen Strecke angibt. Das Signal ist dabei in einem Abstand (Abtastintervall) von $T_a = \pi$ cm diskretisiert.



Berechnen Sie das Fahrbahnunebenheitsspektrum und stellen Sie es grafisch dar. Achten Sie dabei auf die korrekte Beschriftung der Achsen (insbesondere die richtige Angabe der Einheiten).

Gehen Sie dann davon aus, dass dieses Unebenheitsspektrum die Form (530.2) hat, und schätzen Sie anhand der grafischen Darstellung des Spektrums für den Parameter ρ_0 rad/cm entsprechend einer Wellenlänge von 1 m den Parameter ϕ_0 ab.

Ermitteln Sie anschließend experimentell den passenden Parameter w . Wenn Sie den passenden Exponenten w gefunden haben, plotten Sie zum Vergleich die Charakteristik entsprechend (530.2) über das gemessene Fahrbahnunebenheitsspektrum.



Mathematische Grundlagen

A.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $x(t)$ eine reelle Funktion.

Eine Gleichung der Form

$$\frac{d}{dt}y(t) + a \cdot y(t) = x(t) \quad (541.1)$$

heißt eine **lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.
Ist zusätzlich ein Wert $y(t_0)$ – i.Allg. $y(0)$ – vorgegeben, so spricht man von einem **linearen Anfangswertproblem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.

Ein allgemeines Merkmal linearer Differentialgleichungen ist, dass die Lösung eine Überlagerung einer so genannten **homogenen Lösung**, d.h. der Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{dt}y(t) + a \cdot y(t) = 0 \quad (541.2)$$

und einer **partikulären Lösung**, d.h. irgendeiner Lösung von (541.1) ist. Jede Lösung lässt sich in diese Bestandteile aufteilen, wobei die Aufteilung nicht eindeutig ist [10, 17].

Mit Hilfe des so genannten **Exponentialansatzes**,

$$y_h(t) = C \cdot e^{\lambda \cdot t}, \quad \lambda, C \in \mathbb{R} \quad (541.3)$$

folgt für die homogene Lösung sofort:

$$y_h(t) = C \cdot e^{-a \cdot t}. \quad (541.4)$$

D.h. ein LTI-System 1. Ordnung, welches durch eine solche Differentialgleichung 1. Ordnung beschrieben wird, kann „aus der Ruhe heraus“ nur mit einer Exponentialfunktion reagieren.

Mit Hilfe des so genannten **Variationsansatzes** [10, 17]

$$y_p(t) = C(t) \cdot e^{-a \cdot t} \quad (541.5)$$

errechnet man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (541.1) zu:

$$\begin{aligned} y(t) &= C \cdot e^{-a \cdot t} + \left[\int_0^t x(\tau) e^{a \cdot \tau} d\tau \right] \cdot e^{-a \cdot t} \\ &= C \cdot e^{-a \cdot t} + \left[\int_0^t x(\tau) e^{-a \cdot (t - \tau)} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (541.6)$$

A.2 Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Sei $\vec{x}(t)$ ein Vektor von reellen Funktionen und $A = (a_{kj})_{k,j=1,\dots,n}$ eine $n \times n$ Matrix von reellen Koeffizienten.

Die Gleichung

$$\dot{\vec{x}}(t) + A \cdot \vec{x}(t) = \vec{u}(t) \quad (542.1)$$

heißt ein **System (n -ter Ordnung) linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.

Ist zusätzlich ein Wert $\vec{x}(t_0)$ – i.Allg. $\vec{x}(0)$ – vorgegeben, so spricht man von einem **linearen Anfangswertproblem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.

Es ist leicht nachzuweisen, dass jede vektorielle Lösung $\vec{x}(t)$ der Gleichung (542.1) wieder eine Überlagerung einer homogenen Lösung $\vec{x}_{hom}(t)$ und einer partikulären Lösung $\vec{x}_p(t)$ sein muss und umgekehrt. Wir können also die Diskussion wieder trennen und zunächst nur die homogenen Lösungen betrachten. Im Falle der einfachen homogenen Gleichung 1. Ordnung (541.2) führte der **Exponentialansatz** zum Ziel.

Es ist ein nahe liegender Gedanke, es im Falle des (mit $\vec{u}(t) = \vec{0}(t)$ homogenen) Gleichungssystems (542.1) mit einem Matrix-Ansatz folgender Form zu versuchen:

$$X(t) = e^{-At} \cdot C, \quad C \text{ eine } n \times n - \text{Matrix.} \quad (542.2)$$

Dazu müsste in geeigneter Form eine matrixwertige Funktion e^{At} definiert werden, die noch dazu ähnliche Eigenschaften wie die reelle oder komplexe Exponentialfunktion haben sollte.

Ein geeigneter Ansatz ergibt sich aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion. Man definiert:

$$\Phi(t) := e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \cdot A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t \cdot A)^k}{k!}. \quad (542.3)$$

Es kann gezeigt werden, dass diese Reihe für alle t komponentenweise konvergiert, sodass die Definition eine sinnvolle, reelle matrixwertige Funktion liefert. Ähnlich wie bei Vektoren, lässt sich auch für matrixwertige Funktionen eine (komponentenweise) Differentiation definieren. Die Reihe (542.3) ist *gliedweise differenzierbar* und man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^k \cdot A^k}{k!} \\ &= A + t \cdot A^2 + \frac{t^2 \cdot A^3}{2!} + \frac{t^3 \cdot A^4}{3!} + \dots \\ &= A \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \cdot A^k}{k!} \right) = A \cdot e^{At}. \end{aligned} \quad (542.4)$$

Damit ergibt sich das identische Ableitungsgesetz wie für reelle oder komplexe Funktionen.

Es ist folglich auch klar, dass jede Matrix $X(t) = e^{-At} \cdot C$ das homogene Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt} X(t) + A \cdot \vec{X}(t) = 0(t) \quad (542.5)$$

erfüllt, denn es gilt:

$$\frac{d}{dt}X(t) = \frac{d}{dt}e^{-At} \cdot C = -A \cdot e^{-At} \cdot C = -A \cdot X(t). \quad (543.1)$$

Da aber jede *Spalte* von $X(t)$ eine vektorielle Lösung des Systems ist, repräsentiert $e^{-At} \cdot C$ auf einen Schlag n vektorielle Lösungen des Systems!

Natürlich stellt sich hier sofort die Frage nach der Berechnung von e^{-At} und dem Zusammenhang zu den vektoriellen Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems (542.1).

In Abschnitt A.4 wird eine elegante Möglichkeit aufgezeigt, wie man diese so genannte **Transitionsmatrix**¹ $\Phi(t) = e^{-At}$ berechnen kann.

Ist die Transitionsmatrix bekannt, so können die vektoriellen Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems (542.1) wieder mit Hilfe eines **Variationsansatzes** bestimmt werden.

Betrachtet man für eine Spalte $\vec{c}$ von C die homogene Lösung $e^{-At} \cdot \vec{c}$, variiert man die Konstante $\vec{c}$ und setzt den Ansatz

$$\vec{x}(t) := e^{-At} \cdot \vec{c}(t) \quad (543.2)$$

in die Gleichung (542.1) ein, so erhält man, völlig analog zum eindimensionalen Fall, die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= e^{-A \cdot t} \cdot \vec{c} + e^{-A \cdot t} \cdot \left[\int_0^t e^{A\tau} \vec{u}(\tau) d\tau \right] \\ &= e^{-A \cdot t} \cdot \vec{c} + \left[\int_0^t e^{-A \cdot (t-\tau)} \vec{u}(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (543.3)$$

Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall ist hier lediglich auf die richtige Reihenfolge der Multiplikation zu achten, da die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist.

A.3 Jordan'sche Normalform

Bekanntlich werden alle lineare Abbildungen $\Phi : V \rightarrow W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen V und W durch Matrizen dargestellt:

$$\Phi(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in V \quad (543.4)$$

Die Darstellungen, d.h. die Einträge der Matrix A , beziehen sich dabei auf die jeweils zu Grunde liegenden **Basen** der Vektorräume V und W .

In praktischen Berechnungen ist es vorteilhaft Basen zu finden, die eine möglichst einfache Darstellung der Matrix und somit eine möglichst einfache Berechnung von (543.4) möglich machen.

Im Idealfall kann die darstellende Matrix A (falls $V = W$ ist) in Form einer **Diagonalmatrix** repräsentiert werden:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (543.5)$$

Die Einträge in der Diagonalen λ_i sind dann Eigenwerte von Φ und somit Invarianten der Abbildung.

¹ Man beachte, dass sich die Definition der Transitionsmatrix auf die in (542.1) gewählte Darstellung des Differentialgleichungssystems bezieht. Wird der die Gleichung in der Form $\dot{\vec{x}}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + \vec{u}(t)$ geschrieben, so muss die Transitionsmatrix als $\Phi(t) = e^{At}$ definiert werden!!

Allerdings kann eine solche Matrixdarstellung nicht immer gefunden werden. Jedoch ist (falls $V = W$ ist) eine Darstellung möglich, die auf einer Zerlegung in so genannte **Jordan-Matrizen** beruht:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (544.1)$$

Genauer gilt[13]:

Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\Phi : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Wenn das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_n)$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h. eine Darstellung

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \quad k \leq n \quad (544.2)$$

erlaubt, so existiert eine Basis $\mathfrak{B}$ von V , sodass sich Φ bezüglich dieser Basis durch die **Jordan'sche Normalform**

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J_k \end{pmatrix} \quad (544.3)$$

darstellen lässt.

J_1 bis J_k sind dabei die zu den Eigenwerten λ_1 bis λ_k gehörenden Jordan-Matrizen.

Da jedes Polynom nach dem **Fundamentalsatz der Algebra** über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, ist eine solche Darstellung immer möglich, wenn man komplexe Eigenwerte zulässt.

A.4 Berechnung der Transitionsmatrix

Auf Seite 543 wurde gezeigt, wie ein Differentialgleichungssystem im Zeitbereich gelöst werden kann. Mit Hilfe der so genannten **Transitionsmatrix** $\Phi(t) = e^{-At}$ kann (543.3) in folgender Form dargestellt werden:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t) \cdot \vec{x}(0) + \left[\int_0^t \Phi(t - \tau) \vec{u}(\tau) d\tau \right]. \quad (544.4)$$

Wendet man auf beiden Seiten der Gleichung (544.4) die Laplace-Transformation an (man beachte dabei, dass die Laplace-Transformation eines Vektors *komponentenweise* definiert ist), so erhält man die äquivalente Gleichung:

$$\vec{X}(s) = \Phi(s) \cdot \vec{x}(0) + \Phi(s) \cdot \vec{U}(s). \quad (544.5)$$

Dabei bezeichnet $\Phi(s)$ die Laplace-Transformierte von $\Phi(t)$. In (544.5) wurde ausgenutzt, dass es sich bei dem Integral um eine **Faltung** von $\Phi(t)$ und $\vec{u}(t)$ handelt und infolgedessen der Faltungssatz angewandt werden kann.

Transformiert man die Differentialgleichung (542.1), so erhält man:

$$\begin{aligned} s\vec{X}(s) - \vec{x}(0) + A \cdot \vec{X}(s) &= \vec{U}(s) \\ \iff (s + A) \cdot \vec{X}(s) &= \vec{U}(s) + \vec{x}(0). \end{aligned} \quad (545.1)$$

Also ist:

$$\vec{X}(s) = (s + A)^{-1} \cdot \vec{x}(0) + (s + A)^{-1} \cdot \vec{U}(s). \quad (545.2)$$

Vergleicht man (545.2) mit (544.5), so folgert man:

Die Laplace-Transformierte der **Transitionsmatrix** $\Phi(t) = e^{-At}$ ist

$$\Phi(s) = (sI + A)^{-1}. \quad (545.3)$$

Dabei bezeichnet I die (zu den Dimensionen von A passende) Einheitsmatrix.

Diese Matrix und damit die Transitionsmatrix ist vielfach mit Hilfe der Tabellen (oder auch mit MATLAB) wesentlich einfacher zu berechnen.

Transitionsmatrix für eine Jordan-Matrix

Ist die Systemmatrix A eine Jordan-Matrix J der Form (544.1), so folgt speziell aus (545.3):

$$\begin{aligned} \Phi(s) = (sI + J)^{-1} &= \begin{pmatrix} s + \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s + \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & s + \lambda \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s + \lambda_k} & \frac{1}{(s + \lambda_k)^2} & \frac{1}{(s + \lambda_k)^3} & \frac{1}{(s + \lambda_k)^4} & \cdots & \frac{1}{(s + \lambda_k)^n} \\ 0 & \frac{1}{s + \lambda_k} & \frac{1}{(s + \lambda_k)^2} & \frac{1}{(s + \lambda_k)^3} & \cdots & \frac{1}{(s + \lambda_k)^{n-1}} \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & \frac{1}{s + \lambda_k} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (545.4)$$

Wird allgemein die Systemmatrix A durch eine Koordinatentransformation in die Jordan'sche Normalform (544.3) überführt, so hat die Laplace-Transformierte $\Phi(s)$ der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ die Form:

$$\Phi(s) = (sI + A)^{-1} = \begin{pmatrix} (s + J_1)^{-1} & & & 0 \\ & (s + J_2)^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (s + J_k)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (545.5)$$

A.5 Distributionen

Distributionen [11, 39, 53] können als eine Erweiterung bzw. als eine Verallgemeinerung der (reellen oder komplexen) Funktionen² auf $\mathbb{R}$ aufgefasst werden.

² Wir beschränken uns in der Darstellung auf Funktionen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$)

Testfunktionenraum und Distributionen

Diese Verallgemeinerung wird dadurch realisiert, dass die Funktionen als Funktionale auf dem Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, dem so genannten **Grundraum** $\mathcal{D}$ aufgefasst werden.

Der **Grundraum** $\mathcal{D}$ ist der Vektorraum aller auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbaren (reellen oder komplexen) Funktionen $x(t)$, welche außerhalb einer beschränkten Menge 0 sind. Diese Funktionen heißen **Testfunktionen**.
Die (kompakte) Menge $T_x := \overline{\{t \mid x(t) \neq 0\}}$ heißt der **Träger** von $x(t)$.

Der Grundraum $\mathcal{D}$ wird ein vollständiger linearer Raum, wenn man den Konvergenzbegriff so definiert, dass eine Folge von Grundraumfunktionen $x_k(t)$ gegen $x(t)$ konvergiert, wenn alle $x_k(t)$ außerhalb einer beschränkten Menge verschwinden und alle Ableitungen $x_k^{(n)}(t)$ gleichmäßig gegen $x^{(n)}(t)$ konvergieren.

Unter einer **Distribution** oder einer **verallgemeinerten Funktion** ϕ versteht man dann ein **stetiges lineares Funktional** auf $\mathcal{D}$, d.h. eine **stetige lineare** Abbildung

$$\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{bzw. } \mathbb{C}). \quad (546.1)$$

Die verallgemeinerten Funktionen bilden einen Vektorraum $\mathcal{D}'$.

Reguläre und nicht reguläre Distributionen

Man zeigt leicht, dass *lokal integrierbare* Funktionen $f(t)$ über die Zuordnung

$$\phi_f : x(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot x(t) dt, \quad x(t) \in \mathcal{D}, \quad (546.2)$$

ebenfalls stetige lineare Funktionale definieren. Diese Funktionale heißen **reguläre Distributionen** und können mit den Funktionen $f(t)$ identifiziert³ werden.

Darüber hinaus gibt es aber noch weitere Distributionen, die **keine** regulären Distributionen sind, wie etwa das **Dirac-Funktional**:

Die Distribution

$$\delta_0 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \delta(x(t)) = x(0) \quad (546.3)$$

heißt **Dirac-Funktional** oder **Dirac-Impuls**.

³ Es werden dabei alle Funktionen $f(t)$ als *eine* Funktion aufgefasst, für die das Integral (546.2) den gleichen Wert liefert. Die Differenz solcher Funktionen hat stets das Integral 0.

Konvergenz für Distributionen

Man kann zeigen, dass jede Distribution im Sinne der Konvergenz im Distributionenraum $\mathcal{D}'$ durch eine Folge von regulären Funktionen angenähert werden kann. Dabei ist der Konvergenzbegriff wie folgt definiert:

Eine Folge von Distributionen ϕ_k konvergiert genau dann gegen eine Distribution ϕ , wenn

$$\phi_k(x) \longrightarrow \phi(x) \quad \forall x(t) \in \mathcal{D}. \quad (547.1)$$

Eigenschaften von Distributionen

Obwohl die Distributionen keine Funktionen mit reellem Definitionsbereich sind, lassen sich oft Eigenschaften definieren, die denen dieser Funktionen weitestgehend ähnlich sind. So ist beispielsweise der Träger einer Distribution wie folgt definiert:

Unter dem Träger T_ϕ einer Distribution ϕ versteht man das Komplement der größten offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}$, für welche gilt:

$$\phi(x) = 0 \quad \forall x(t) \in \mathcal{D} \text{ mit } T_x \subseteq G. \quad (547.2)$$

Für reguläre Distributionen stimmen beide Trägerbegriffe überein. Für nicht-reguläre Distributionen ist der Träger bisweilen veranschaulichbar, wie etwa für den Dirac-Impuls.

Ist nämlich $x(t)$ eine Testfunktion, welche einen Träger in der offenen Menge $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat, so ist nach Definition des Trägers von $x(t)$ offenbar $x(0) = 0$! Daher gilt für alle diese $x(t)$, dass $\delta_0(x) = 0$ ist!

Damit ist der Punkt $\{0\}$ der Träger des Dirac-Impulses, was der Veranschaulichung aus Abbildung 2.10, S. 72 entspricht.

Auch der Ableitungsbegriff lässt sich übertragen:

Ist ϕ eine Distribution, so wird durch

$$\phi'(x) = -\phi(x') \quad \forall x(t) \in \mathcal{D} \quad (547.3)$$

die Ableitung der Distribution ϕ definiert.

Diese Definition ergibt sich unmittelbar aus den Rechenregeln für die partielle Integration für reguläre Distributionen.

Eine Folge dieser Definition ist, dass Distributionen *unendlich oft differenzierbar sind*!

Auch lassen sich stückweise stetig differenzierbare Funktionen mit Sprungstellen plötzlich differenzieren, wenn diese als reguläre Distributionen aufgefasst werden. Es gilt:

Ist $x(t)$ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion mit Sprungstellen $t_k \in \mathbb{R}$ und sind $s_k \in \mathbb{R}$ die Sprunghöhen, so ist die distributionelle Ableitung von $x(t)$ durch

$$x'(t) = g'(t) + \sum_k s_k \cdot \delta_0(t - t_k) \quad (547.4)$$

gegeben.

Dabei ist $g(t)$ die um die Sprünge bereinigte stückweise stetig differenzierbare Funktion $x(t)$ und die $\delta_0(t - t_k)$ die Dirac-Impulse an der Stelle t_k .

Erweiterung der Distributionen auf C^∞

In einigen Berechnungen der Systemtheorie ist es von Bedeutung, Distributionen ϕ auch auf unendlich oft differenzierbare Funktionen *ohne* kompakten Träger anzuwenden, d.h. das formale Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \cdot x(t) dt \quad (548.1)$$

für eine Funktion $x(t)$ (etwa $x(t) = e^{j\omega t}$) im Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen C^∞ zu interpretieren.

Ferner ist auch die Interpretation von *endlichen Integralen*

$$\int_a^b \phi(t) dt \quad (548.2)$$

für Distributionen ϕ bisweilen interessant.

Solche Erweiterungen lassen sich für *Distributionen mit kompaktem Träger* sinnvoll definieren. Hauptsächlich wird diese Erweiterung natürlich für das Dirac-Funktional benötigt.

Hat die Distribution ϕ einen kompakten Träger, so lässt sich ϕ durch die Definition

$$\Phi(x) = \phi(a \cdot x) \quad \forall x(t) \in C^\infty \quad (548.3)$$

zu einem stetigen linearen Funktional auf C^∞ erweitern.

Dabei ist $a(t) \in \mathcal{D}$ eine Testfunktion, die auf dem Träger T_ϕ der Distribution den Wert 1 hat (man zeigt natürlich, dass es für die Definition nicht darauf ankommt, welche der vielen Funktionen mit dieser Eigenschaft man zu Grunde legt).

Auf diese Weise ist es dann auch möglich, folgende Beziehung zu rechtfertigen, die als *Fourier-Transformierte* des Dirac-Impulses interpretiert werden kann:

$$\delta_0 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = e^{j\omega 0} = 1. \quad (548.4)$$

Für die Interpretation des endlichen Integrals (548.2) wählt man eine Folge von Testfunktionen $a_n(t)$, deren Träger das Intervall $[a, b]$ umfassen und die dort gleich 1 sind, deren Flanken außerhalb von $[a, b]$ aber mit wachsendem n immer steiler gegen 0 abfallen.

Das *endliche Integral* ergibt sich dann mit:

$$\int_a^b \phi(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(a_n(t)). \quad (548.5)$$

Auf diese Weise erhält man (für $T > 0$) beispielsweise eine korrekte Interpretation der Beziehung:

$$\int_{-T}^T \delta_0(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_0(a_n(t)) = 1. \quad (549.1)$$

Faltung von Distributionen

Ähnlich wie bei „gewöhnlichen“ Funktionen ist auch im Falle der Distributionen die Faltungsoperation nicht in allen Fällen definiert.

Man kann jedoch zeigen, dass die Faltung zweier Distributionen ϕ und ψ immer dann sinnvoll ist, wenn mindestens eine der beiden Distributionen einen kompakten Träger hat.

Die Faltung ist dann folgendermaßen definiert:

$$\phi * \psi(x) = \phi(t)(\psi(\tau)(x(t + \tau))) = \phi(t)(\psi(\tau - t)(x(\tau))) \quad \forall x(t) \in \mathfrak{D}. \quad (549.2)$$

Diese Definition rechtfertigt für (lokal integrierbare) Signale $h(t)$ die Faltungsgleichung

$$(\delta_a * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = h(t - a), \quad (549.3)$$

obwohl $h(t)$ im Allgemeinen *keine Testfunktion* ist.

Fasst man nämlich $h(t)$ als **reguläre Distribution** auf, so ist (549.3) wie folgt zu interpretieren:

$$\begin{aligned} (\delta_a * h)(x(t)) &= \delta_a(t)(h(\tau - t)(x(\tau))) = \delta_a(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau - t) \cdot x(\tau) d\tau \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) h(\tau - t) \cdot x(\tau) d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) h(\tau - t) \cdot x(\tau) dt d\tau. \end{aligned} \quad (549.4)$$

Dies bedeutet aber:

$$\begin{aligned} (\delta_a * h)(x(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) h(\tau - t) dt \right) \cdot x(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau - a) \cdot x(\tau) d\tau \quad \forall x \in \mathfrak{D}. \end{aligned} \quad (549.5)$$

Damit ist die Distribution $\delta_a * h$ mit der regulären Distribution (und damit mit der lokal integrierbaren Funktion) $h(t - a)$ zu identifizieren, was die Gleichung (549.3) erklärt.

Fourier-Reihen für Distributionen

Die Theorie der Fourier-Reihen lässt sich ebenfalls auf Distributionen verallgemeinern. Da Fourier-Reihen für *periodische* Funktionen erklärt sind, muss zunächst erklärt werden, was eine periodische Distribution sein soll.

Unter einer **T -periodischen Distribution** versteht man eine Distribution ϕ mit der Eigenschaft

$$\phi(x(t)) = \phi(x(t+T)) \quad \forall x \in \mathfrak{D}. \quad (550.1)$$

In diesem Sinne ist die so genannte **Dirac-Impulsreihe**

$$\text{III} (t/T) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - nT) \quad (550.2)$$

eine T -periodische Distribution.

Man kann zeigen, dass solche T -periodischen Distributionen *immer* in eine Fourier-Reihe entwickelt werden können:

Jede T -periodische Distribution ϕ wird durch ihre Fourier-Reihe dargestellt, d.h. es gilt im Sinne der Gleichheit von Distributionen

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi \frac{1}{T} t}, \quad (550.3)$$

wobei sich die Fourier-Koeffizienten wie folgt berechnen:

$$c_k = \frac{1}{T} \left(\phi \left(\alpha(t) \cdot e^{-j2\pi \frac{1}{T} t} \right) \right). \quad (550.4)$$

Die Testfunktion $\alpha(t)$ ist dabei eine beliebige Testfunktion⁴ mit der Eigenschaft:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha(t + kT) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (550.5)$$

Für reguläre periodische Distributionen, die in eine Fourier-Reihe entwickelbar sind, stimmt die Berechnung der Fourier-Koeffizienten mit der Definition (550.4) überein.

Mit diesen Definitionen kann man beispielsweise zeigen (vgl. dazu (220.4)), dass die **Dirac-Impulsreihe** folgende Fourier-Reihenentwicklung hat.

$$\text{III} (t/T) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{j2\pi \frac{1}{T} t}. \quad (550.6)$$

Man beachte, dass die Reihe in (550.6) im distributionellen Sinne zu verstehen ist. Im gewöhnlichen Sinne hat Sie keine Bedeutung, da sie nicht konvergiert.

⁴ Man muss natürlich zeigen, dass man eine beliebige Funktion $\alpha(t)$ nehmen kann und die Definition der Koeffizienten c_k damit unabhängig von der gewählten Testfunktion ist.

A.6 Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und x_n eine reelle Folge.

Eine Gleichung der Form

$$y_n + a \cdot y_{n-1} = x_n \quad (551.1)$$

heißt eine **lineare Differenzengleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.
Ist zusätzlich der Wert y_{-1} vorgegeben, so spricht man von einem **linearen Anfangswertproblem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.

Die Lösungstheorie solcher Gleichungen lässt sich in weiten Zügen analog zu der von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung (vgl. A.1) entwickeln.

Auch die Lösung linearer Differenzengleichungen ist eine Überlagerung einer **homogenen Lösung**, d.h. der Lösung der Gleichung

$$y_n + a \cdot y_{n-1} = 0 \quad (551.2)$$

und einer **partikulären Lösung**, d.h. irgendeiner Lösung von (551.1).

Mit Hilfe des so genannten **Exponentialansatzes**

$$y_n = C \cdot b^n, \quad b, C \in \mathbb{R} \quad (551.3)$$

folgt für die homogene Lösung sofort $b = -a$ und

$$y_n = C \cdot (-1)^n \cdot a^n. \quad (551.4)$$

Auch im diskreten Fall kann zur Auffindung einer speziellen Lösung ein Variationsansatz gemacht werden:

$$y_n = C_n \cdot (-a)^n. \quad (551.5)$$

Damit errechnet man die allgemeine Lösung der Differenzengleichung (551.2) zu:

$$y_n = y_{-1} \cdot (-a)^n + \left[\sum_{k=0}^n x_k (-a)^{n-k} \right]. \quad (551.6)$$

A.7 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die mathematische Beschreibung von zufälligen, unter reproduzierbaren Voraussetzungen ablaufenden Vorgängen, so genannten **Zufallsexperimenten**.

In der überwiegenden Anzahl der Anwendungen kommt es dabei nicht so sehr auf die Beschreibung der Ergebnisse des Zufallsexperimentes selbst an, sondern auf **Werte von Funktionen** von diesen möglichen Ergebnissen. Diese Funktionswerte repräsentieren Werte von interessierenden **Merkmalen** des Zufallsexperimentes.

Das Ergebnis des Experiments wird dabei mit dem Wert dieser Funktion identifiziert und es werden Wahrscheinlichkeiten hierfür anzugeben.

Diese Sichtweise führt auf die Begriffe der **Zufallsvariablen** und der **Verteilung**.

Eine (reelle) **Zufallsvariable** X ist eine Funktion

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (551.7)$$

Dabei ist Ω eine (im Allgemeinen nicht näher spezifizierte Menge von möglichen Ergebnissen des Zufallsexperiments, $\mathcal{A}$ ein System von Teilmengen von Ω , welche mit **Ereignissen** identifiziert werden können und P eine Funktion, mit welcher jedem Ereignis $A \in \mathcal{A}$ eine **Wahrscheinlichkeit** $P(A)$ zugeordnet werden kann.

Die Zufallsvariable X ist eine Funktion, deren Werte vom Zufall abhängen. Sie hat die Eigenschaft, dass die Ereignisse

$$X^{-1}(I) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\} \quad (552.1)$$

für jedes Intervall $I = (a, b]$ zum Ereignismengensystem $\mathcal{A}$ gehören.

Diese Bedingung stellt sicher, dass den Ereignissen $X^{-1}(I)$ („ X nimmt Werte im Intervall I an“) mit dem zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaß P stets eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann.

In der Praxis verwendet man Ereignismengensysteme und Wahrscheinlichkeitsmaße, für die die Bedingung stets erfüllt ist. Sie wird daher in den nachfolgenden Überlegungen als gegeben angenommen und nicht weiter überprüft.

Man unterscheidet bezüglich des Wertebereichs von X , ob die Zufallsvariable eine **abzählbare** Menge von Werten annehmen kann oder ein **Kontinuum** von Werten. Im ersten Fall sprechen wir von einer **diskreten Zufallsvariablen**, im zweiten von einer **stetigen Zufallsvariablen**.

Diskrete Zufallsvariablen spielen etwa in der statistischen Qualitätskontrolle bei so genannten *zählenden Prüfungen* eine Rolle, wo es, wie bei der Annahmekontrolle, auf das *Auszählen von Fällen* ankommt. Stetige Zufallsvariablen kommen dagegen in natürlicher Weise bei *messenden Prüfungen* vor, etwa bei der Prüfung von Maßen, die prinzipiell alle Werte in einem bestimmten Intervall einnehmen können.

Für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit Zufallsvariablen ist von Interesse, welchen Wert eine Zufallsvariable annimmt oder in welchem Wertebereich eine Zufallsvariable Werte annimmt. Diese Ereignisse haben eine Wahrscheinlichkeit, die sich (gemäß (552.1)) aus der Wahrscheinlichkeit der zugrunde liegenden Ereignisse im Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ergibt.

Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse führt nun unmittelbar zu dem Begriff der **Verteilung einer Zufallsvariablen**:

Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable.

Dann heißt die Funktion

$$P_X : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1] \quad (552.2)$$

mit

$$P_X(A) \stackrel{\text{def.}}{=} P(X \in A) \stackrel{\text{def.}}{=} P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A} \quad (552.3)$$

(also die Wahrscheinlichkeit, dass X Werte in A annimmt) die **Verteilung** von X .

Die Definition der Verteilung einer Zufallsvariablen ist in der vorliegenden Form noch unpraktisch. Für reelle Zufallsvariablen X , insbesondere solche mit nicht diskreten Verteilungen, legt die Vorgehensweise nahe, die Verteilung mit Hilfe der Ereignisse $(X \leq x)$ wie folgt zu charakterisieren:

Sei

$$X : (\Omega, P) \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine reelle Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad (552.4)$$

die **Verteilungsfunktion** von X .

Die Verteilungsfunktion lässt sich sowohl für diskrete als auch für Zufallsvariablen mit einem Wertekontinuum definieren.

Mit Hilfe der Verteilungsfunktion lässt sich sehr leicht angeben, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass X Werte in einem bestimmten Intervall $[a, b]$ annimmt. Nach den Rechenregeln der Wahrscheinlichkeit[2] erhält man:

$$P([a, b]) = P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a). \quad (553.1)$$

Ist die Zufallsvariable **diskret**, d.h. nimmt sie nur Werte in $\mathbb{Z}$ an⁵, so erhält man:

$$f_X(k) = P(X = k) = F_X(k) - F_X(k - 1). \quad (553.2)$$

Ist die Zufallsvariable **stetig**, d.h. nimmt sie Werte in einem Kontinuum der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ an, so kann man eine zu $f_X(k)$ äquivalente Funktion definieren:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x). \quad (553.3)$$

Die durch (553.2) definierte Funktion $f_X(k)_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt die (diskrete) **Verteilung** von X . Die durch (553.3) definierte Funktion $f_X(x)_{x \in \mathbb{R}}$ heißt die (stetige) **Verteilungsdichte** von X .

Die Wahrscheinlichkeiten, dass X Werte in einem bestimmten Intervall $[a, b]$ annimmt, lassen sich dann durch

$$P([a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq k \leq b} f_X(k) \quad (553.4)$$

bzw. durch

$$P([a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (553.5)$$

berechnen.

Beispiel: Diskrete Gleichverteilung für $\{1, 2, \dots, n\}$

Die **diskrete Gleichverteilung** für $\{1, 2, \dots, n\}$ ist durch die folgende Verteilung bzw. Verteilungsfunktion definiert:

$$f_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } k \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (553.6)$$

$$F_X(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \leq 0, \\ \frac{k}{n} & \text{für } k \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ 1 & \text{für } k \leq n \end{cases} \quad (553.7)$$

Ein Anwendungsbeispiel hierfür ist die Verteilung eines fairen Würfels.

⁵ Man kann den Wertebereich einer diskreten Variablen immer mit $\mathbb{Z}$ identifizieren!

Beispiel: Gleichverteilung

Die (stetige) **Gleichverteilung** im Intervall $[a, b]$ lässt sich durch die folgende Verteilungsfunktion beschreiben:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{falls } x \in [a, b], \\ 1 & \text{falls } x > b \end{cases}, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (554.1)$$

Die Verteilungsdichte ergibt sich als Ableitung der Verteilungsfunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{falls } x \in [a, b], \\ 0 & \text{falls } x > b \end{cases}, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (554.2)$$

Ein Anwendungsbeispiel ist etwa die Zeigerstellung bei einem (fairen) Glücksrad.

Beispiel: Die Normalverteilung

Die **Normalverteilung** ist die wohl wichtigste Verteilung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

Ihre überragende Bedeutung verdankt sie zahllosen Anwendungen. So ist in fast allen Messvorgängen oder zufälligen Prozessen, bei denen ein *Sollwert* eingehalten werden muss, die Normalverteilung ein angemessenes Modell.

Das häufige Auftreten dieser Verteilung liegt darin begründet, dass sie immer dann zwingend vorkommt, wenn sich viele gleichartige zufällige Prozesse aufsummieren. Ein Anwendungsbeispiel hierfür ist die Rauschspannung eines Widerstands, die als (summierter) Effekt der unregelmäßigen Bewegung einer Unzahl von Elektronen aufgefasst werden kann.

Ein weiteres Beispiel ist die Messung der Abmaße eines produzierten Werkstücks. Bei solchen Fertigungsprozessen kann man oft davon ausgehen, dass Abweichungen vom Sollwert das Resultat einer Überlagerung von vielen kleinen unsystematischen Störungen ist. Dann ist es i. Allg. eine sinnvolle Annahme die gefertigten Maße als *normalverteilt* anzusehen.

Die Verteilungsdichte der Normalverteilung (oder auch **Gauß-Verteilung**) ist:

$$f_{NV}(x) = N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (554.3)$$

Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung kann nicht in geschlossener Form angegeben werden:

$$\Phi_{NV}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (\tau-\mu)^2} d\tau, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (554.4)$$

Statt $f_{NV}(x)$ wird meist die Bezeichnung $N(\mu, \sigma^2)$ verwendet, um die Parameter der Verteilung zu kennzeichnen.

Die Parameter haben eine spezielle Bedeutung (s.u.). So ist der Parameter μ ein Maß für den „mittleren“ Wert, den eine so verteilte Zufallsvariable X annimmt und σ ist ein Maß für die (mittlere) Abweichung davon.

Trägt man die Dichte grafisch auf, so ergibt sich die berühmte **Gauß'sche Glockenkurve** (s. Abbildung A.1).

Auf Grund allgemeiner Normierungsvorschriften lassen sich die Normalverteilungen $N(\mu, \sigma^2)$ durch entsprechende Skalierungen auf die Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ zurückführen.

Die in der Abbildung dargestellte Verteilung $N(0, 1)$ wird daher auch **Standard-Normalverteilung** genannt.

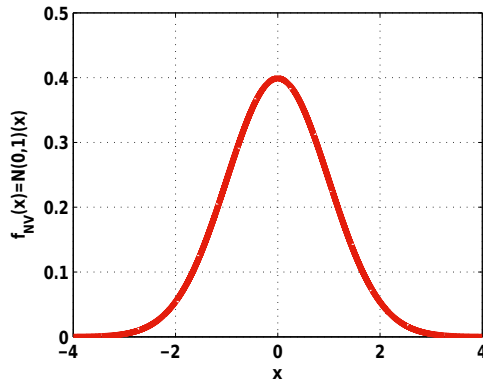


Abb. A.1: Verteilungsdichte der Normalverteilung („Gaußsche Glockenkurve“) für die Parameter $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ (Standard-Normalverteilung)

Erwartungswert

In der Praxis erhält man über Zufallsgrößen oft schon dann eine signifikante Information, wenn man aus den beobachteten Daten bestimmte charakteristische **Kenngrößen** ableitet. Ein Beispiel ist der **Mittelwert** von beobachteten Zufallsgrößen, der in vielen Fällen schon sehr viel Information beinhaltet. Eng verknüpft mit diesen statistischen Kenngrößen sind meist entsprechende **Kennwerte der Verteilungen** der Zufallsvariablen, wie im Falle der Normalverteilung (s.o.) schon erwähnt wurde.

Als **Mittelwert** einer Zufallsgröße kann die Summe aller auftretenden Werte *gewichtet mit ihrer Auftretenswahrscheinlichkeit* angesehen werden. Sind alle Werte gleich wahrscheinlich, so erhält man mit diesem Ansatz beispielsweise das bekannte *arithmetische Mittel*.

Dies führt auf die Definition des folgenden Begriffes:

Sei X eine (reelle) Zufallsvariable mit diskreter Verteilung $f_X(k)_{k \in \mathbb{Z}}$ oder mit Verteilungsdichte $f_X(x)$, die der Bedingung $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k| f_X(k) < \infty$ resp. $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$ genügen.

Dann heißt

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot f_X(k) \quad (555.1)$$

bzw.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx \quad (555.2)$$

der **Erwartungswert** von X .

Momente

Weitere Informationen über die Art der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X geben die so genannten **Momente**.

Sie geben etwa über die „Breite“ der Verteilung (Streuung der X -Werte, s.u.) oder die „Schiefe“ der Verteilung (Asymmetrie der Werteverteilung von X um den Mittelwert herum) Auskunft und sind wie folgt definiert:

Sei X eine (reelle) Zufallsvariable.

Dann heißt $\mathbb{E}(X^k)$ (falls er existiert) **das k -te Moment** von X .

In der Praxis kommen neben dem ersten aber meist nur das zweite und dritte Moment, selten das vierte Moment zur Anwendung.

Varianz und Streuung

Von spezieller Bedeutung ist das zweite Moment in folgender Form:

Sei X eine (reelle) Zufallsvariable. Dann heißt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \quad (556.1)$$

die **Varianz** von X und

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} \quad (556.2)$$

die **Streuung** oder die **Standardabweichung** von X .

Wie die Namen schon sagen und wie auch aus der obigen Definition hervorgeht, *messen* in einem gewissen Sinne die beiden Größen Varianz und Streuung **die Abweichungen der Zufallsvariablen vom Mittelwert**. Genauer gilt:

Die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert!

Die Streuung ist ein von der Varianz abgeleitetes mittleres Abweichungsmaß. Durch die Wurzelbildung wird die Größe bezogen auf die physikalische Einheit von X und dadurch vergleichbar mit den tatsächlichen Werten von X .

Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz

Die Varianz lässt sich mit Hilfe des ersten und des zweiten Moments bestimmen, denn für jede (reelle) Zufallsvariable X gilt:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2. \quad (556.3)$$

Die Varianz lässt sich also berechnen, indem man das Quadrat des Erwartungswerts vom zweiten Moment abzieht!

Wenn alle Werte einer Zufallsvariablen X mit einem festen Wert beaufschlagt werden, dann sollte sich auch der Mittelwert um genau diesen Wert ändern. Jedoch sollte diese Operation keinen Einfluss auf die Verteilung der Werte um den (neuen) Mittelwert herum haben, mit anderen

Werten, die Streuung sollte sich nicht ändern. Andererseits sollten sich Mittelwert und Streuung bei Skalierung aller Werte entsprechend mit skalieren.

Das folgende Resultat gibt diese anschaulichen Vorstellungen wieder:

Sei X eine (reelle) Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ und Varianz $\mathbb{V}(X)$. Dann gilt für die Zufallsvariable $Y = aX + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b, \quad (557.1)$$

$$\mathbb{V}(Y) = a^2\mathbb{V}(X), \quad (557.2)$$

$$\sigma(Y) = |a|\sigma(X). \quad (557.3)$$

In sehr vielen Fällen müssen neben der Skalierung und Translation von einzelnen Zufallsvariablen auch Summen und Produkte von verschiedenen Zufallsvariablen gebildet werden. Sind diese Zufallsvariablen stochastisch **unabhängig**, so ist eine einfache Berechnung der Kennwerte dieser Summen und Produkte mit Hilfe der ursprünglichen Kennwerte möglich:

Seien X, Y zwei (reelle) Zufallsvariablen. Dann gilt stets:

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y). \quad (557.4)$$

Sind X und Y zusätzlich **stochastisch unabhängig**, so gilt auch:

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y), \quad (557.5)$$

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y). \quad (557.6)$$

A.8 Energiedichtespektrum

Sei $x(t)$ ein impulsartiges, zeitkontinuierliches reelles Signal. Dann ist

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt \quad (557.7)$$

die **Autokorrelationsfunktion** des Signals.

Betrachtet man ein Spannungssignal, so hat die rechte Seite von Gleichung (557.7) (bezogen auf 1 Ω) die Einheit $V^2 \cdot s/\Omega$, also Ws und damit die Einheit der Energie.

Sei $x(t)$ ein impulsartiges, zeitkontinuierliches reelles Signal. Dann heißt die Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion

$$S_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (557.8)$$

das **Energiedichtespektrum** des Signals.

Der Name erklärt sich wieder mit einer Betrachtung der Einheiten auf der rechten Seite von Gleichung (557.8). Da $r_{xx}(\tau)$ die Einheit Ws hat und $e^{-j\omega\tau}$ dimensionslos ist, erhält man Ws · s oder Ws/Hz, also Energie pro Hz Bandbreite.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein impulsartiges, **zeitdiskretes** reelles Signal. Dann ist

$$r_{xx}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot x_{n+k} \quad (558.1)$$

die **Autokorrelationsfolge** des Signals $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Man beachte, dass sich $r_{xx}(k)$ von der (mit gleicher Rate) abgetasteten Version der zeitkontinuierlichen Autokorrelationsfunktion um die Abtastintervalllänge T unterscheidet!

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein mit Rate $f_a = 1/T$ Hz abgetastetes impulsartiges, zeitdiskretes reelles Signal. Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(j\omega) &= R_{xxDTFT}(j\omega) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}(k) e^{-jk\omega T} \\ &= |X_{DTFT}(j\omega)|^2 \quad \forall \omega \in [-\pi/T, \pi/T] \end{aligned} \quad (558.2)$$

das **Energiedichtespektrum** des Signals.

B

Symbole und Formelzeichen

Symbol	Bedeutung	Symbol	Bedeutung
f_a	Abtastfrequenz in Hz	T_a	Abtastintervall in s
ω_a	Abtastfrequenz in rad/s	ω_0	Frequenz in rad/s
ω_g	Grenzfrequenz in rad/s	f_g	Grenzfrequenz in Hz
ω_s	Sperrfrequenz in rad/s	f_s	Sperrfrequenz in Hz
ω	Frequenz in rad/s	f	Frequenz in Hz
Ω	normierte Frequenz in rad	T	Zeitkonstante oder Zeitintervall in s
Ω_g	Grenzfrequenz in rad	Ω_s	Sperrfrequenz in rad
$x(t), y(t)$	zeitkontinuierliche Signale	x_n, y_n	zeitdiskrete Signale
$\delta_0(t)$	Dirac-Impuls	$\delta_n, \delta_0(n)$	Diskreter Impuls
$\sigma(t)$	Einheitssprung-Signal	σ_n	Diskretes Einheitssprung-Signal
$h(t)$	Impulsantwort eines analogen LTI-Systems	h_n	Impulsantwort eines digitalen LTI-Systems
$y_\sigma(t)$	Sprungantwort eines analogen LTI-Systems	$y_n^{(\sigma)}$	Sprungantwort eines digitalen LTI-Systems
$X(s), Y(s)$	Laplace-Transformierte der Signale $x(t), y(t)$	$X(z), Y(z)$	Z-Transformierte der Signale x_n, y_n
$H(s)$	Übertragungsfunktion eines analogen LTI-Systems im Bildbereich	$H(z)$	Übertragungsfunktion eines digitalen LTI-Systems im Bildbereich
$X(j\omega), Y(j\omega)$	Fourier-Transformierte der Signale $x(t), y(t)$	$X(\Omega), Y(\Omega), X_{DTFT}(\Omega)$	DTFT-Transformierte der Signale x_n, y_n
$H(j\omega)$	Übertragungsfunktion eines analogen LTI-Systems im Frequenzbereich	$H(\Omega)$	Übertragungsfunktion eines digitalen LTI-Systems im Frequenzbereich
$\mathfrak{S}$	System	$\vec{x}(t)$	vektorielles zeitkontinuierliches Signal
$\frac{d}{dt}x(t), \dot{x}(t), x'(t)$	Ableitung einer Funktion $x(t)$	$F(s) := \mathcal{L}(f)(s)$	Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$
$f(t) \circ - \bullet F(s)$	Laplace- oder Fourier-Transformation einer Funktion $f(t)$	$\mathfrak{F} : f(t) \mapsto F(j\omega)$	Fourier-Transformation einer Funktion $f(t)$

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Symbol	Bedeutung	Symbol	Bedeutung
$\tilde{x}(t)$	Impulstabtastsignal eines Signals $x(t)$	$\tilde{X}(j\omega)$	Abtastspektrum eines Signals $x(t)$
$\text{III}(t)$	Impulskamm	$F(z) := \mathfrak{Z}(f)(z),$ $f_n \xleftrightarrow{\mathfrak{Z}} F(z),$ $\mathfrak{Z}(f_n)$	Z-Transformierte eines Signals $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$
$x(t) * y(t)$	Faltung zweier zeitkontinuierlicher Signale	$x_n * y_n$	Faltung zweier diskreter Signale
$\xrightarrow{\text{DFT}}$	Diskrete Fourier-Transformation	$O(N^2)$	Landau-Symbol (Komplexität eines Algorithmus)
$X_T(j\omega)$	Spektrum eines in $[-T, T]$ zeitgefensterten Signals	$\mathfrak{D}$	Raum der Testfunktionen (s. Distributionen)

C Tabellen

C.1 Tabelle der Laplace- und Z-Transformationen

Tabelle C.1: Die wichtigsten Laplace- und Z-Transformationen

Laplace Transformation $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$	Z-Transformation (einseitige) $F(z)$
$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$	$f(t)$	$\tilde{F}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m z^{-m}$
$AF(s)$	$Af(t)$	$A\tilde{F}(z)$
$F(s) + G(s)$	$f(t) + g(t)$	$\tilde{F}(z) + \tilde{G}(z)$
$sF(s) - f(0+)$	$\frac{d}{dt}f(t)$	–
$\frac{F(s)}{s}$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	–
$-\frac{d}{ds}F(s)$	$tf(t)$	$-T_a z \frac{d}{dz}[\tilde{F}(z)]$
$F(s+a)$	$e^{-at}f(t); a > 0$	$\tilde{F}(ze^{aT_a})$
$e^{-nsT_a}F(s)$	$f(t - nT_a); n > 0$	$z^{-n}\tilde{F}(z)$
$aF(as)$	$f(\frac{t}{a}); a > 0$	$\tilde{F}(z)$ mit $\frac{T_a}{a} \rightarrow T_a$
1	$\delta(t); f_m = \frac{1}{T_a}$ bei $m = 0$	$\frac{1}{T_a}$
$\frac{1}{s}$	$\sigma(t); f_m = 1$ für $m \geq 0$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}t^2$	$\frac{T_a^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{3!}t^3$	$\frac{T_a^3 z(z^2+4z+1)}{6(z-1)^4}$
$\frac{1}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{k!}t^k$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left(\frac{z}{z-e^{-aT_a}} \right)$
$\frac{1}{s - \left(\frac{1}{T_a}\right) \ln a}$	$a^{\frac{t}{T_a}}$	$\frac{z}{z-a}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT_a}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{T_a z e^{-aT_a}}{(z-e^{-aT_a})^2}$
$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{t^2}{2}e^{-at}$	$\frac{T_a^2 e^{-aT_a} z}{2(z-e^{-aT_a})^2} + \frac{T_a^2 e^{-2aT_a} z}{(z-e^{-aT_a})^3}$
$\frac{1}{(s+a)^{k+1}}$	$\frac{t^k}{k!}e^{-at}$	$\frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left(\frac{z}{z-e^{-aT_a}} \right)$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT_a})z}{(z-1)(z-e^{-aT_a})}$

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle C.1: Die wichtigsten Laplace- und Z-Transformationen

Laplace Transformation $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$	Z-Transformation (einseitige) $F(z)$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t - \frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{T_a z}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-aT_a})z}{a(z-1)(z-e^{-aT_a})}$
$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_a}} - \frac{z}{z-e^{-bT_a}}$
$\frac{(b-a)(s+c)}{(s+a)(s+b)}$	$(c-a)e^{-at} + (b-c)e^{-bt}$	$\frac{(c-a)z}{z-e^{-aT_a}} + \frac{(b-c)z}{z-e^{-bT_a}}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{z \sin(\omega T_a)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_a) + 1}$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{z(z - \cos(\omega T_a))}{z^2 - 2z \cos(\omega T_a) + 1}$
$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\sinh(\omega t)$	$\frac{z \sinh(\omega T_a)}{z^2 - 2z \cosh(\omega T_a) + 1}$
$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\cosh(\omega t)$	$\frac{z(z - \cosh(\omega T_a))}{z^2 - 2z \cosh(\omega T_a) + 1}$
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{ze^{-aT_a} \sin(\omega T_a)}{z^2 - 2ze^{-aT_a} \cos(\omega T_a) + e^{-2aT_a}}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{z^2 - ze^{-aT_a} \cos(\omega T_a)}{z^2 - 2ze^{-aT_a} \cos(\omega T_a) + e^{-2aT_a}}$
$\frac{\omega s}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}(\omega \cos(\omega t) - a \sin(\omega t))$	$\frac{\omega z^2 - ze^{-aT_a}(\omega \cos(\omega T_a) + a \sin(\omega T_a))}{z^2 - 2ze^{-aT_a} \cos(\omega T_a) + e^{-2aT_a}}$
$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1 + \frac{b}{a-b}e^{-at} - \frac{a}{a-b}e^{-bt}$	$\frac{z}{z-1} + \frac{bz}{(a-b)(z-e^{-aT_a})} - \frac{az}{(a-b)(z-e^{-bT_a})}$

Hinweis zum Gebrauch der Tabelle

Man beachte, dass die Zeitfunktionen alle *kausal* sind, das heißt, dass $f(t) = 0$ ist für alle $t < 0$! Für die Anwendung der Z-Transformations-Tabelle ist die Diskretisierung der in der mittleren Spalte angegebenen kausalen, zeitkontinuierlichen Funktion erforderlich. Das bedeutet, dass die in der dritten Spalte angegebene Z-Transformierte zur Folge $f_n := f(n \cdot T_a)$ gehört, wobei T_a der in der dritten Spalte vorkommende Parameter ist.

Beispielsweise ist die Funktion $\frac{z}{z-e^{-aT_a}}$ die Z-Transformierte der Folge

$$f_n := f(n \cdot T_a) = e^{-at}|_{t=n \cdot T_a} = e^{-a \cdot n \cdot T_a} = \left(e^{-a \cdot T_a}\right)^n =: b^n, \quad (562.1)$$

also die Z-Transformierte einer Potenzfolge b^n mit $b = e^{-a \cdot T_a}$.

C.2 Filterentwurfs(kurz)tabelle analoger und digitaler Filter

Tabelle C.2: Entwurfskoeffizienten für analoge Butterworthfilter

Filter- ordnung	Teil- filter- anzahl	a-Koeffi- zienten	b-Koeffi- zienten	Grenz- frequ.- verhältnis	Güte
n	i	a_i	b_i	f_{gi}/f_g	Q_i
1	1	1.0000	0.0000	1.000	–
2	1	1.4142	1.0000	1.000	0.71
3	1	1.0000	0.0000	1.000	–
	2	1.0000	1.0000	1.272	1.00
4	1	1.8478	1.0000	0.719	0.54
	2	0.7654	1.0000	1.390	1.31

Tabelle C.3: Entwurfskoeffizienten für digitale Butterworth-Filter

Filter- ordnung	Teil- filter- anzahl	a0-Koeffi- zienten	a1-Koeffi- zienten	a2-Koeffi- zienten	b1-Koeffi- zienten	b2-Koeffi- zienten
N	i	a_{0i}^*	a_{1i}^*	a_{2i}^*	b_{1i}^*	b_{2i}^*
1	1	0.5000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000
2	1	0.2929	0.5858	0.2929	0.0000	0.1716
3	1	0.5000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.3333	0.6667	0.3333	0.0000	0.3333
4	1	0.2599	0.5198	0.2599	0.0000	0.0396
	2	0.3616	0.7232	0.3616	0.0000	0.4464

Tabelle C.4: Entwurfskoeffizienten für digitale Tschebyscheff-Filter mit 1 dB Welligkeit im Durchlassbereich

Filter- ordnung	Teil- filter- anzahl	a0-Koeffi- zienten	a1-Koeffi- zienten	a2-Koeffi- zienten	b1-Koeffi- zienten	b2-Koeffi- zienten
N	i	a_{0i}^*	a_{1i}^*	a_{2i}^*	b_{1i}^*	b_{2i}^*
1	1	0.5000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000
2	1	0.2595	0.5190	0.2595	-0.2862	0.3242
3	1	0.3110	0.3110	0.0000	-0.3780	0.0000
	2	0.3636	0.7273	0.3636	-0.1496	0.6042
4	1	0.1295	0.2591	0.1295	-0.8109	0.3290
	2	0.4043	0.8085	0.4043	-0.1372	0.7543

Tabelle C.5: Frequenztransformationen für Digitalfilter (normiert auf die Grenzfrequenz $\pi/2$ rad) [45]

Tiefpass $\rightarrow$ Tiefpass	$z^{*-1} = \frac{z^{-1}-d}{1-dz^{-1}}$ $d = \frac{\sin\left(\pi \frac{f_g^*}{f_a^*} - \pi \frac{f_g}{f_a}\right)}{\sin\left(\pi \frac{f_g^*}{f_a^*} + \pi \frac{f_g}{f_a}\right)}$
Tiefpass $\rightarrow$ Hochpass	$z^{*-1} = \frac{z^{-1}+d}{1+dz^{-1}}$ $d = -\frac{\cos\left(\pi \frac{f_g^*}{f_a^*} + \pi \frac{f_g}{f_a}\right)}{\cos\left(\pi \frac{f_g^*}{f_a^*} - \pi \frac{f_g}{f_a}\right)}$
Tiefpass $\rightarrow$ Bandpass	$z^{*-1} = -\frac{z^{-2} - \frac{2dk}{k+1}z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2dk}{k+1}z^{-1} + 1}$ $d = \frac{\cos\left(\pi \frac{f_o}{f_a} + \pi \frac{f_u}{f_a}\right)}{\cos\left(\pi \frac{f_o}{f_a} + \pi \frac{f_u}{f_a}\right)}$ $k = \operatorname{ctan}\left(\pi \frac{f_o}{f_a} + \pi \frac{f_u}{f_a}\right) \tan\left(\pi \frac{f_g^*}{f_a^*}\right)$
Tiefpass $\rightarrow$ Bandsperre	$z^{*-1} = -\frac{z^{-2} - \frac{2d}{1+k}z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2} - \frac{2d}{1+k}z^{-1} + 1}$ $d = \frac{\cos\left(\pi \frac{f_o}{f_a} + \pi \frac{f_u}{f_a}\right)}{\cos\left(\pi \frac{f_o}{f_a} + \pi \frac{f_u}{f_a}\right)}$ $k = \operatorname{ctan}\left(\pi \frac{f_o}{f_a} + \pi \frac{f_u}{f_a}\right) \tan\left(\pi \frac{f_g^*}{f_a^*}\right)$

Literaturverzeichnis

- [1] BEUCHER, O., *MATLAB und Simulink - Eine kursorientierte Einführung*. Verlag mitp, 1. Auflage, 2013
- [2] BEUCHER, O., *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik mit MATLAB*. Springer Verlag, 2. Auflage, 2007
- [3] BEUCHER, O., *Il Teorema del Limite Centrale*. Lezione all'Università degli Studi di Parma, 2009
<http://www.home.hs-karlsruhe.de/~beot0001/Parma/EntwurfVorlesung.pdf>
- [4] BLACKMAN, R.B., TUKEY, J.W., *The Measurement of Power Spectra*. Dover Publications Inc., 1958
- [5] BOCHE, H., *Zerlegung von LTI-Systemen und eine vollständige Charakterisierung der Systeme vom Faltungstyp*. Electrical Engineering 81 (1998), S. 21-26
- [6] BOCHE, H., *Complete Characterization of the Structure of Discrete-Time Linear Systems*. Proc. 15th IMACS World congress on Scientific Modelling and Applied Mathematics
- [7] BONONI, A., FERRARI G., *Teoria della probabilità e variabili aleatorie*. Progetto Leonardo, Bologna, 2008
- [8] BURRUS, C. S. u.a. , *Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MATLAB*. Prentice-Hall, 1994
- [9] BRONSTEIN-SEMENDJAJEW, *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch
- [10] BRAUN, M., *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979
- [11] DOETSCH, G., *Einführung in die Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Birkhäuser Verlag, basel und Stuttgart, 1976
- [12] DURM, T., *Einsatz der Transferpfadanalyse und -synthese als Werkzeug zur Trennung von körper- und luftschallinduzierten Störgeräuschanteilen bei Fahrzeuggetrieben*. Diplomarbeit, HS Karlsruhe, 2007
- [13] FISCHER, G., *Lineare Algebra*. Vieweg, 1975
- [14] FLIEGE, N., *Systemtheorie*. Teubner, 1991
- [15] VOGEL, H., *Gerthsen Physik*, Springer Verlag, 18. Auflage, 1995
- [16] HESS, W., *Digitale Filter*. Teubner, 1. Auflage 1989
- [17] HEUSER, H., *Gewöhnliche Differentialgleichungen - Einführung in Lehre und Gebrauch*. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1991
- [18] HEYSE ONLINE, *Elektronische Verkehrszeichenerkennung warnt vor Tempolimits*.
<http://www.heise.de/newsticker/meldung/76415>
- [19] HOFFMANN, J., *MATLAB und SIMULINK - Beispielerorientierte Einführung in die Simulation dynamischer Systeme*. Addison Wesley, 1. Auflage 1998

- [20] HOFFMANN, J., BRUNNER, U., *Matlab & Tools - für die Simulation dynamischer Systeme*. Addison Wesley, 1. Auflage 2002
- [21] KIENCKE, U., *Skriptum zur Vorlesung Meßtechnik*. Vorlesungsskript Universität (TH) Karlsruhe, 1994
- [22] KIENCKE, U., *Skriptum zur Vorlesung Regelung und Signalverarbeitung im Kfz*. Vorlesungsskript Universität (TH) Karlsruhe, 1. Auflage
- [23] KIENCKE, U., *Übungen zur Vorlesung Methoden der digitalen Signalverarbeitung*. Aufgabensammlung Universität (TH) Karlsruhe, 1997
- [24] KIENCKE, U., *Signale und Systeme*. Oldenbourg, 1998
- [25] KORTÜM, W., LUGNER P., *Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen*. Springer Verlag, 1994
- [26] LARSEN, R., *An Introduction to the Theory of Multipliers*. Springer Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 175, 2. Auflage 1989
- [27] LEONARD, W., *Digitale Signalverarbeitung in der Meß- und Regelungstechnik*. Teubner, 1971
- [28] LINEAR TECHNOLOGY, LTC1410 Datasheet, <http://www.digchip.com/datasheets/parts/datasheet/262/LTC1410CG-pdf.php>
- [29] LUTHER, J., *Simulation eines Blei-Säure-Akkumulators unter MATLAB/Simulink*. Diplomarbeit, HS Karlsruhe, 2005
- [30] MAX, J. und LACOUME, J.-L., *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*. Masson, 5. Auflage 1995
- [31] MICROWAVES R&F, www.mwrf.com/Files
- [32] MILDENBERGER, O., *Aufgabensammlung System- und Signaltheorie*. Vieweg, 1994
- [33] MOCZALA, H. E.A., *Elektrische Kleinstmotoren und ihr Einsatz*. VDE-Verlag, 1979
- [34] NEUGEBAUER, P., *Helmholtz-Resonanz zur Volumenbestimmung*. Versuchsbeschreibung zum Laborversuch, Hs Karlsruhe, 2010
- [35] OEHMIG, O., *Detektion und Identifikation von zylinderselektiven Körperschallsignalen zur Geräuschoptimierung von Dieselmotoren mit Common-Rail-Einspritzung*. Diplomarbeit, HS Karlsruhe, 1998
- [36] OPPENHEIM, A. V. und WILLSKY, A. S., *Signale und Systeme*. VCH, 2. Auflage 1992
- [37] OPPENHEIM, A. V. und WILLSKY, A. S., *Signale und Systeme - Arbeitsbuch*. VCH, 1. Auflage 1989
- [38] RUDIN, W., *Fourier Analysis on Groups*. Interscience Publishers, Wiley & Sons, 1967
- [39] RUDIN, W., *Functional Analysis*. TATA McGraw-Hill, New-Dehli, 1973
- [40] SANDBERG, I. W., *Continuous-Time Linear Systems: Folklore and Fact*. Circuits, Systems, Signal Processing, vol. 21, pp. 337-343, 2002

- [41] SANDBERG, I. W., *Causality and the Impulse Response Scandal*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 50, pp. 810-811, 2003
- [42] SCHERF, H. E., *Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme*. Oldenbourg, 2. Auflage 2004
- [43] SCHERF, H. E., *Regelungstechnik I*. Vorlesungsskript HS Karlsruhe, 2002
- [44] SCHÜSSLER, H. W., *Digitale Signalverarbeitung*. Springer, 3. Auflage 1992
- [45] SCHRÜFER, E., *Signalverarbeitung - Numerische Verarbeitung digitaler Signale*. Hanser, 2. Auflage 1992
- [46] SPIEGEL, M. R., *Laplace Transforms*. McGraw-Hill, 1965
- [47] STEARNS, S. D., *Digitale Verarbeitung analoger Signale*. Oldenbourg, 6. Auflage 1994
- [48] STEFFANI H. F., *Simulation Mechatronischer Systeme*.
<http://www.steffani.de/hfst/simulation/folie.pdf>
- [49] TIETZE, U. und SCHENK, CH., *Halbleiterschaltungstechnik*. Springer, 9. Auflage 1989
- [50] TÖLTZSCH, U., *Modellbasierte Zustandsdiagnose von Gerätebatterien*. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, 2005
- [51] VANNUCCI, A., *Segnali Analogici e Sistemi lineari*. Pitagora Editrice Bologna, 2003
- [52] VOIGT, E., *Signal- und Systemtheorie in Beispielen*. Expert, 1993
- [53] WALTER, W., *Einführung in die Theorie der Distributionen*. BIU Wissenschaftsverlag, 1973
- [54] WELCH, P.D., *The Use of the Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging over Short Modified Periodograms*. IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol AU-15, June 1967, p. 70
- [55] WESTERMANN, T., *Mathematik für Ingenieure - Band 1-3*. Springer Verlag, 1. Auflage, 1996

Begleitsoftware des Lehrbuchs

ADUTest.mat, 492

Aufruf_rec_formel.m, 246

Aufruf_rec_formel2.m, 261

Aufruf_rec_formel3.m, 268

AuswertungRausch.m, 415

bodeSysDiskret.m, 368

bodeSysDiskret2.m, 370

bsp2UebFunkt_tf.m, 288, 290

bsp3UebFunkt_tf.m, 291

bsp_BBsys3Ord.m, 133

bsp_BBsys3OrdCST.m, 135

Bsp_FahrbahnUnebenheitsSpektrum.m,
535

Bsp_FormFilt.m, 461

Bsp_FormFiltAuswertung.m, 463

Bsp_SysIdent.m, 457

Bsp_SysIdentWelch.m, 472

bsp_TFsys3Ord.m, 126

bsp_ztrans.m, 279

bspbodeDiag.m, 173

bspDFTnperiod.m, 330

bspFT.m, 160

bspGibbs.m, 169

bspSpectFenster.m, 167

bspStabil_tf.m, 297

bspUebFunkt_tf.m, 287, 289

bspZRDdiskret.m, 301

butterwBsp.m, 388

BWTPFilter.m, 208

cdaufnahme.mat, 504

DFTBsp1.m, 324

DFTBsp2.m, 327

DFTBsp3.m, 329

DFTBsp4.m, 333

DFTBsp5.m, 354

diedft.m, 371

distempStetig.m, 477

dreieck.m, 357

DTFTBsp.m, 317

DTFTBsp2.m, 318

fensterDFT.m, 361

fensterDFTbsp.m, 362

FIREntwurfBsp.m, 382

FT_DFTBsp.m, 357

GlGewMconv.m, 266

GlGewMittel.m, 244, 266

HarmonProzess.m, 424

HelmHoltzVersuche.mat, 528

HelmHoltzVorVersuch.mat, 527

init_abtastTheorem.m, 227

init_bwlnoise.m, 434

init_delay1.m, 539

init_GlGewMittel.m, 257

init_oneton.m, 475

init_onetonefilt.m, 484

init_Rausch.m, 425

init_RCTPSin.m, 143

init_twoton.m, 476

init_uebAbtastTh2.m, 236

init_uebZTFunkt.m, 307

init_viertelkfdGL4, 87

init_viertelkfdGL4.m, 47

init_viertelkfdIA.m, 87

inputsig.mat, 465

int_FederVZ1.m, 39

IterRausch2.m, 457

klassTPFilter.m, 204

KorrAkustLaufZeit.m, 510

KorrCDAlle.m, 502

KorrCDKreise.m, 502

KorrCDOOriginal.m, 502

KorrCDPunkte.m, 502

KorrV2CDPunkte.m, 504

LaufzeitAkustWN.mat, 509

make_audio.m, 478, 512

outputsig.mat, 465

psddft.m, 520

RCSimuOrd0.m, 242

rctpAmp.m, 520
 rec_formel.m, 245, 251, 261
 rp1.m, 420, 426
 rp2, 441
 rp2.m, 420, 426
 rp3.m, 420, 426

s_abtastTheorem.slx, 227
 s_adu.slx, 538
 s_adu2.slx, 538
 s_blwnoise.slx, 434
 s_delay.slx, 425
 s_delay1.slx, 539
 s_diracImpuls.slx, 186
 s_FederVZ1.slx, 39
 s_GlGewMittel.slx, 257
 s_lininv.slx, 30
 s_oneton.slx, 475
 s_onetone.slx, 438
 s_onetonefilt.slx, 484
 s_Rausch.slx, 412
 s_Rausch2.slx, 425, 457, 472
 s_Rausch3.slx, 476
 s_RCTP.slx, 74
 s_RCTPSin.slx, 143

s_twoton.slx, 476
 s_uebAbtastTh2.slx, 236
 s_uebAbtastTh3.slx, 237
 s_uebFilterkenn.slx, 212
 s_uebZTfunkt2.slx, 307
 s_viertelkfzDGL4.slx, 47, 87
 s_viertelkfzIA.slx, 87
 s_YuleWalkFahrbahn.slx, 534
 schnellFalt1.m, 341
 schnellFalt2.m, 342
 SignaleCDdickePunkte.mat, 502
 SimBLWNoiseLDS.m, 435
 SystemIdentRC1.m, 518
 SystemIdentRC2.m, 520

VentilatorPSD.m, 514
 VentilatorVersuche.mat, 513
 VersuchRCTP.mat, 518
 vglIDFTvsFT.m, 345
 VRausch3.m, 476

wasserrauschen.m, 479

YuleWalkFahrbahn.m, 533

zeroPaddbsp.m, 364, 365

Verzeichnis der MATLAB-Funktionen

besselap, 207
besself, 207
blackman, 360
Block State-Space, 94
bode, 173, 185, 186, 212, 368
buttap, 207
butter, 207, 390, 391, 398, 459

cheb1ap, 207
cheb2ap, 207
cheby1, 207, 391
cheby2, 207, 391
conv, 71, 96, 266, 342, 376
cpsd, 472, 475

design, 391
detrend, 446, 452, 453

ellip, 207, 391
ellipap, 207
expm, 67

fdatool, 379, 394, 398
feedback, 122, 289
fft, 340, 371, 373
filter, 375, 388
firpm, 379, 382, 390
fourier, 160
freqs, 207
freqz, 369, 396

hamming, 360
hanning, 360

ifft, 340, 374
ifourier, 160
ilaplace, 118
impulse, 123, 290, 308
impz, 308
iztrans, 286

jordan, 56

laplace, 106, 112, 118
lp2bp, 207
lp2bs, 207
lp2hp, 207
lp2lp, 207
lsqcurvefit.m, 520

mean, 412, 446

parallel, 122, 289
pole, 297
pwelch, 472
pzmap, 297

rectwin, 360
residue, 115

series, 122, 289
solve, 113
spectrum, 472
ss, 135, 301

tf, 119, 173, 287, 375
tfestimate, 472
tp2hp, 213
triang, 360

var, 412, 538

xcorr, 412
xcov, 412

yulewalk, 460, 532

zero, 297
zmap, 130
ztrans, 279, 284, 286

Stichwortverzeichnis

- absolut summierbar, 309
- Abtastintervall, 217
- Abtasttheorem, 224, 228ff
 - Version 1, 229
 - Version 2, 232
- Abtastung, 12, 217
- Abtastvorgang, 215ff
- Akustik, 4
- Aliasing, 222, 347, 360ff
- Aliasspektren, 223
- Allpass, 190, 192
- Amplitudengang, 173
 - digital, 368
- Amplitudenspektrum, 151
- Anti-Aliasing-Filter, 222, 223
- Auflösung
 - effektive, 491
 - nominelle, 491
- Ausgangsmatrix, 51
- Ausgangsprozess, 455
- Autokorrelationsfolge, 406, 558
- Autokorrelationsfunktion, 406
 - bandbegrenzte, 431
 - impulsartig, zeitdiskret, 558
 - periodisch, zeitkontinuierlich, 447
- Bandbegrenzung, 152, 165ff, 168ff
- Bandbreite, 151, 195
- Bandbreite eines Signals, 151
- Bandpass, 190, 192
- Bandpasssignal, 228
- Batterien, 8
- Betragsfrequenzgang, 173
 - digital, 368
- BIBO-stabil, 41
 - digitale Systeme, 295
- BIBO-Stabilität, 41
 - diskret, 250
- Bildbereich, 100
 - Z-Transformation, 273
- Bildverarbeitung, 12
- Bilineare Transformation, 389
- bilinare Transformation, 386
- Blackman-Tuckey-Methode, 467
- Blockschaltbild, 61
- Blockschaltbilddarstellung
 - digitaler Systeme, 257
- Bode-Diagramm, 173
 - digital, 368
- Boyle-Mariotte
 - Gesetz von, 27
- Butterworth-Tiefpassfilter
 - analoges, 199ff
 - digitales, 383
- Chirp-Signal, 227, 500, 539
- DFT, 323
 - Aliasing, 360ff
 - Eigenschaften, 335ff
 - Frequenzauflösung, 337
 - Leakage, 360ff
- Diagonalisierbarkeit, 60
- Differentialgleichung
 - Exponentialansatz, 541
 - homogene Lösung, 541
 - linear mit konstanten Koeffizienten, 34, 36
 - partikuläre Lösung, 541
 - Variationsansatz, 541
- Differentialgleichungssystem
 - 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, 542
- Differenzgleichung
 - und digitale LTI-Systeme, 254
 - Exponentialansatz, 551
 - homogene Lösung, 551
 - linear mit konstanten Koeffizienten, 253
 - partikuläre Lösung, 551
- Differenzierer
 - Impulsantwort, 93
- Digitale Signalverarbeitung, 216
- digitale Signalverarbeitung, 24
- Digitales LTI-System
 - Bildbereich, 270ff
 - Frequenzbereich, 310ff
- Dirac-Funktional, 546
- Dirac-Impuls, 76, 546
 - Eigenschaften, 78
 - formale Schreibweise, 77

- Dirac-Impulsreihe, 220, 550
- Dirichlet-Bedingungen, 177
- Diskreter Impuls, 259
- Distribution, 546
 - periodische, 550
- Distributionen, 23, 76
 - reguläre, 546
- DTFT-Spektrum, 313
- Durchgangsmatrix, 51
- Dämpfungskonstante, 36
- Dämpfungsmaß, 193

- Eckfrequenz, 174
- effektive Rauschspannung, 402
- Effektive Auflösung ADU, 492ff
- Effektivwert, 429
- Eindeutigkeitssatz, 101
 - der Z-Transformation, 275
- Eingangsmatrix, 51
- Eingangsprozess, 455
- Einheits-Sprungfunktion, 43
- Energiedichtespektrum
 - impulsartig, zeitdiskret, 558
 - impulsartig, zeitkontinuierlich, 557
- Entfernungsmessung mittels Korrelation, 507ff
- Ereignis, 552
- Ergodenhypothese, 479
- Erwartungswert, 555
- Euler'sche Identität, 143
- Euler-Formel, 143

- Fahrbahnanregung, 1
- Fahrbahnsimulation, 530ff
- Fahrbahnunebenheitssignal, 401, 407
- Fahrzeugakustik, 4
- Faltung, 69, 70
 - Eigenschaften, 69, 265
- Faltungintegral, 69
- Faltungssatz
 - der DTFT, 367
 - der Laplace-Transformation, 109
 - der Z-Transformation, 275
- Faltungssumme, 264
- Feder-Dämpfer-System, 35
 - Sprungantwort, 86
- Feder-Masse-Dämpfer-System, 46, 53, 87
 - Zustandsraumdarstellung, 49
- Zustandsraumdarstellung Bildbereich, 132
- Federkonstante, 36
- Fensterung, 360, 360ff
 - Spektren, 362
- FFT, 339
 - Komplexität der, 339
- Filter, 168
 - digitale, 375ff
 - Kennwerte, 193, 375
 - Klassifizierung, 375
- Filter-Design-and-Analysis-Tool, 211
- Filterentwurf
 - analog, 189ff
 - digital, 375ff
- Filtertransformationen, 206ff
- Filterung, 11, 12
- FIR-Filter, 376
 - Fenster-Methode, 378
 - Realisierung, 376
- Formfilter, 456, 460ff, 530
- Formfilterung, 530
- Fourier-Analyse, 6, 152
- Fourier-Deskriptor, 188
- Fourier-Koeffizienten
 - Berechnung, 177
 - komplex, 176
 - reell, 176
- Fourier-Reihenentwicklung, 175, 175ff, 177
 - k -te Harmonische, 176
 - $k - 1$ -te Oberwelle, 176
 - Dirichlet-Bedingungen, 177
 - Fourier-Transformation, 181
 - Grundfrequenz, 176
 - komplex, 176
 - reell, 176
- Fourier-Rücktransformation, 150
- Fourier-Spektren
 - Zusammenhänge, 343ff
- Fourier-Transformation, 7
 - Bandbegrenzung, 165ff
 - DFT, 323
 - Differentiationssatz, 155
 - diskret, 321ff
 - diskrete, 323
 - DTFT und FT, 321
 - Dualität, 152
 - Dualitätseigenschaft, 154, 182

- Eigenschaften, 153ff
- Eigenschaften, tabellarisch, 153
- einer Dirac-Impulsreihe, 221
- Faltungssatz, 154, 182
- Integrationssatz, 156
- Interpretation, 151
- inverse, 150
- inverse DFT, 334
- inverse DTFT, 315
- Linearitätseigenschaft, 154
- Multiplikationssatz, 154, 182
- schnelle, FFT, 339
- Skalierungseigenschaft im Frequenzbereich, 155
- Skalierungseigenschaft im Zeitbereich, 154
- Symmetrieeigenschaften, 156
- Translationseigenschaft im Frequenzbereich, 155
- Translationseigenschaft im Zeitbereich, 155
- zeitdiskret, 313ff
- zeitdiskrete, DTFT, 313
- Zeitfensterung, 165ff
- zeitkontinuierlich, 145ff
- zeitkontinuierliche, 145
- Fremdspektren, 223
- Fremdspektrum, 222
- Frequenz, 143
- Frequenzgang, 173
 - digital, 368
- Frequenzinhalt, 151
- Fundamentalsatz der Algebra, 544
- Funktion
 - gerade, 156
 - ungerade, 156
- Gauß'sche Glockenkurve, 554
- Gauß-Verteilung, 554
- gefenstertes Signal, 322
- gerade Funktion, 156
- Geschwindigkeitsmessung mittels
 - Korrelation, 500ff
- Gibbs'sches Phänomen, 171
- Gleichsignal, 156
- Gleichverteilung, 554
 - diskret, 553
- GPS, 10
- Grenzfrequenz, 192
- Grundraum, 546
- Gruppenlaufzeit, 193
 - konstante, 193
- Harmonische Schwingungen, 143
- Harmonischenfilter, 236
- Harmonischer Prozess, 424
- Helmholtz-Resonator, 523ff
- Hochpass, 190, 192
- Hubschwingungen, 1
- Idealer Tiefpass, 192
 - FIR-Approximation, 376
- IIR-Filter, 376
 - Realisierung, 376
- Impedanz, 9
- Impedanzspektroskopie, 9
- Impedanzspektrum, 9
- Impuls
 - diskret, 259
- Impulsantwort
 - Dauer der, 195
 - diskret, 264
- Impulsantwort eines Differenzierers, 93
- Impulshammer, 83
- inkrementell linear, 38
- Integrierer, 26
- Jordan'sche Normalform, 55, 544
- Jordan-Matrix, 544
- Jordan-Matrizen, 55
- kausales Signal, 245
- Kausalität, 42, 251
 - diskret, 251
- Kohärenzanalyse, 6
- Korrelationsmesstechnik, 13, 497, 500, 507
- Kreisfrequenz, 143, 173, 311
 - normiert, 367
- Kreuzkorrelation, 409, 430
- Kreuzkorrelationsfunktion, 427
- Kreuzleistungsdichtespektrum, 430
- Laplace-Rücktransformation, 112
- Laplace-Transformation, 99
 - einseitige, 100
 - Faltungssatz, 110
 - MATLAB, 106, 279

- Laufzeitmessung mittels Korrelation, 497ff
- Leakage, 348, 360ff
- Leistungsdichte, 427ff
 - Beispiele, 432ff
- Leistungsdichtespektrum, 10, 427ff, 428
 - DFT, 467ff
 - diskret, 430
 - MATLAB, 471ff
 - periodisch, zeitkontinuierlich, 450
 - stationär, zeitdiskret, 430
 - zeitdiskret, 429ff
- Leistungsverstärkung, 193
- Linearisierung, 29
 - eines Systems, 29
 - im Arbeitspunkt, 29
- LinearitätDiskret, 248
- Linearität
 - inkrementelle, 38
 - notwendige Bedingung, 38
- LTI-System, 42, 251
 - Bestimmung der Impulsantwort, 112
 - Bestimmung der Impulsantwort mit MATLAB, 119, 287
 - Frequenzbereich, 142ff
 - Gesamt-Übertragungsverhalten, 97
 - Gesamt-Übertragungsverhalten im Bildbereich, 111
- LTI-System diskret
 - Bestimmung der Impulsantwort, 284
- LTI-System, digital
 - Gesamt-Übertragungsverhalten, 271
 - Gesamt-Übertragungsverhalten im Bildbereich, 283
- LTI-Systeme
 - digital, Frequenzbereich, 365ff
 - Frequenzbereich, 171ff
 - stochastische Erregung, 453ff
- MIMO-System, 52, 131
- Moden, 60
- Momente, 556
 - k-tes, 556
- Multiple Input - Multiple Output - System, 52
- Musterfunktion, 19, 403
- Nachrichtentechnik, 10
- Nickschwingungen, 1
- Normalverteilung, 554
- Normierte Kreisfrequenz, 311
- Nullfunktion, 102
- Nyquist-Band, 312
- Nyquistband, 343
- Nyquistfrequenz, 235
- Parseval'sches Theorem, 377
- Partialbruchzerlegung, 113
- Periodogramm, 467
 - Welch's, 470
- Phasengang, 173
 - digital, 368
- Phasenspektrum, 151
- PI-Regler, 113
- Pol-Nullstellen-Diagramm
 - digitale Systeme, 295
- Polynom
 - charakteristisches, 128
- Potenzfilter, 199
- Potenzreihen
 - formale, 272
- Prozess
 - diskreter ergodischer, 410
 - ergodischer, 410
 - stationär im weiteren Sinn, 405
 - stationärer stochastischer, 404
 - stochastischer, 403
- Quantisierungsfehler, 489
- Quantisierungsrauschen, 489ff
- Rauschen
 - bandbegrenzt, weiß, 433
 - bunt, farbig, rosa, 433
 - Gaußsches weißes, 432
 - gleichverteiltes weißes, 432
 - thermisches, 404
 - weißes, 432
- Rauschsignal
 - weißes, 432
- Rauschspannungssignale, 408
- RC-Tiefpass, 33, 109, 143
 - diskrete Simulation, 239, 241
 - Impulsantwort, 260
 - Systemidentifikation, 74
- Rechteckfunktion, 81
- Regelungstechnik, 12
- Rekonstruierbarkeit, 223

- Bedingung, 224
 - im Zeitbereich, 224ff
- Rekursionsformel
 - Beispiel, 245
 - MATLAB, 291
- Remez-Exchange-Algorithmus, 379
- schnelle Faltung, 339
- Signal, 16
 - deterministisch, 18
 - Fahrbahnanregung, 1
 - gefenstert, 322
 - stochastisch, 18
 - stochastische, 400ff
 - stochstisch, 10
 - wertdiskret, 18
 - wertkontinuierlich, 17
 - zeitdiskret, 17
 - zeitkontinuierlich, 16
- Signal-Rausch-Abstand, 481ff
- Signal-Rausch-Leistungsverhältnis, 481, 482
- Signalcharakteristika, 6
- Signalflussdiagramm, 61
- Signalraum, 22
- Signalverarbeitung
 - digitale, 24
- Signalübertragung, 10
- Simulation 0-ter Ordnung, 240
- Simulation 1. Ordnung, 247
- Single Input - Single Output - System, 52
- Single-Input-Single-Output-Systeme, 122, 289
- SISO-System, 52, 131
- SISO-Systeme, 122, 289
- SNR, *siehe* Signal-Rausch-Leistungsverhältnis, 482
- Sonogramm, 11
- Spektralanalyse, 6, 152, 512, 523
- Spektralverschmierung, 348
- Spektrum, 151
 - eines abgetasteten Signals, 218ff, 221
- Sprungantwort, 84
 - digital, 267
- Sprungfunktion, 43
- Sprungfunktion $\sigma(t)$, 22
- Stabilität, 41, 250
 - BIBO, 41
 - diskret, 250
- Stabilitätskriterium, 129
 - digital, 295
 - digital, kurz, 297
 - digitale Systeme, 295
- Stabilität
 - LTI-System, 129
 - digital, 295
 - digital, kurz, 297
- Standard-Normalverteilung, 554
- Standardabweichung, 556
- Stochastischer Prozess, 403
 - bandbegrenzter, 431
 - diskreter ergodischer, 410
 - ergodischer, 410
 - Scharkennwerte eines, 410
 - stationär im strengen Sinn, 404
 - stationär im weiteren Sinn, 405
 - stationär im weiteren Sinn, zeitdiskret, 406
 - stationärer, 404
 - Zeitkennwerte eines, 410
- stochastischer Prozess, 400ff
 - ergodisch, 409ff
 - mit MATLAB, 412ff
 - stationär, 404ff
- Streuung, 556
- Stroboskop, 231
- Superpositionsprinzip, 25
- System, 23ff
 - analoges, 24
 - BIBO-stabil, 41
 - BIBO-stabiles, 41
 - digital, LTI, Bildbereich, 270ff
 - digital, LTI, Frequenzbereich, 310ff
 - digitales, 24
 - in Ruhe, 37
 - inkrementell linear, 38
 - inkrementell lineares, 38
 - kausales, 42
 - lineares, 25, 25ff, 38
 - LTI, 42
 - diskret, 251
 - LTI, Bildbereich, 110
 - LTI, Faltungsdarstellung, 67
 - digital, 264
 - LTI, Frequenzbereich, 142ff, 172
 - LTI,digital, Frequenzbereich, 367
 - LTI,diskret
 - Bildbereich, 283

- Multiple - Input - Multiple - Output, 131
- nichtlineares, 27ff
- Single - Input - Single - Output, 131
- zeitinvariant, 40
- zeitinvariantes, 40
- Systemantwort, 33
- Systeme
 - in Ruhe, 62
 - realisierbar, 42
- Systemerregung, 33
- Systemidentifikation, 9, 74, 83, 456, 457ff, 517
- Systemidentifikation eines RC-Tiefpasses, 517ff
- Systemmatrix, 51
- Testfunktion, 81
- Testfunktionen, 546
- Tiefpass, 190, 192
 - Grenzfrequenz, 192
 - idealer, 192
- Tiefpasssignal, 228
- Toleranzparameter, 198
- Toleranzschema, 198, 212, 213, 375
- Transformation in den Bildbereich, 100
- Transitionsmatrix, 63, 543–545
- Tschebyscheff-Polynom, 205
- Tschebyscheff-Tiefpass, 213
- Übertragungseigenschaften
 - Klassifizierung, 190
- Übertragungsfunktion, 190, 375
 - rationale, 197
- Unebenheitsdichte
 - spektrale, 530
- ungerade Funktion, 156
- Unschärfeprinzip der Nachrichtentechnik, 195
- Varianz, 556
- Ventilatorgeräusch, 512ff
- Verallgemeinerte Funktion, 77
 - Ableitung, 78
- verallgemeinerte Funktion, 77
- verallgemeinerte Funktionen, 76
- Verschiebungssatz im Zeitbereich
 - der Z-Transformation, 275
- Verstärkungsprinzip, 25
- Verteilung, 551, 552
 - Gaußsche, 554
 - Normal-, 554
 - Standard-Normalverteilung, 554
- Verteilungsfunktion, 552
- Vertikaldynamik Fahrzeug, 1
- Verzögerungsglied 1. Ordnung, 113
- Wahrscheinlichkeit, 552
- Wasserstrahl-Gerausch, 477ff
- weißes Rauschen, 432
- Wiener-Khintchine-Beziehung, 466
- Wiener-Khintchine-Theorem, 466ff
- Wiener-Lee-Theorem, 453ff, 455
- Z-Transformation
 - einseitige, 273
 - Rechenregeln, 274
 - zweiseitige, 273
- Z-Übertragungsfunktion, 283
- Zeit-Bandbreite-Produkt, 195
- Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT), 313
- zeitdiskreter Prozess, 403
- Zeitfensterung, 165ff
- zeitinvariant, 40
- Zeitinvarianz, 38, 40
 - diskret, 249
- ZeitinvarianzDiskret, 249
- Zeitkonstante, 34
- zeitkontinuierliche Fourier-Transformation, 146
- zeitkontinuierlicher Prozess, 403
- Zentraler Grenzwertsatz, 479
- Zero-Padding, 363
 - und spektrale Auflösung, 365
- Zufallsexperiment, 551
- Zufallsvariable, 403, 551
 - diskrete, 552
 - stetige, 552
- Zusammenhang DTFT-FT, 319ff
- Zustandsmatrix, 51
- Zustandsraum
 - digital, 254
- Zustandsraumdarstellung, 50
 - diskret, 254
 - zeitdiskret, 254
 - zeitdiskret, Bildbereich, 299
 - äquivalente, 54

diskret, 256
Zustandsvariable
diskret, 254, 299

Übertragungsfunktion im Bildbereich
digital, 283